



HAL
open science

Modélisation de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires : prise en compte d'une loi de comportement anisotrope

Anne Mangeney

► **To cite this version:**

Anne Mangeney. Modélisation de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires : prise en compte d'une loi de comportement anisotrope. Glaciologie. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1996. Français. NNT: . tel-00781625

HAL Id: tel-00781625

<https://theses.hal.science/tel-00781625>

Submitted on 28 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**LABORATOIRE
DE GLACIOLOGIE
ET GEOPHYSIQUE
DE L'ENVIRONNEMENT**

Associé à l'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I



**MODELISATION DE L'ECOULEMENT DE LA GLACE
DANS LES CALOTTES POLAIRES : PRISE EN COMPTE
D'UNE LOI DE COMPORTEMENT ANISOTROPE**

Anne MANGENEY

Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI
(Arrêtés ministériels du 5 Juillet 1984 et 30 mars 1992)

Spécialité : Physique Appliquée

Soutenue le 26 juin 1996 devant la commission d'examen composée de:

G. Mégie	Président
K. Hutter	Rapporteur
Y. Ricard	Rapporteur
F. Califano	
P. Duval	
C. Ritz	

Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement
Tél (33) 76.82.42.00 - Fax (33) 76.82.42.01
54, Rue Molière - BP 96 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex France

THESE

Présentée par

Anne MANGENEY

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS 6

(Arrêtés Ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

spécialité: PHYSIQUE APPLIQUEE

**MODELISATION DE L'ECOULEMENT DE LA GLACE DANS LES CALOTTES
POLAIRES: PRISE EN COMPTE D'UNE LOI DE COMPORTEMENT
ANISOTROPE**

Soutenue le 26 juin 1996 à 10h30 devant la commission d'examen composée de:

MM.	Francesco Califano	Examineur
	Paul Duval	Examineur
	Kolumban Hutter	Rapporteur
	Gérard Mégie	Président
	Yannick Ricard	Rapporteur
	Catherine Ritz	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du:

LABORATOIRE DE GLACIOLOGIE ET GEOPHYSIQUE DE L'ENVIRONNEMENT-
CNRS

54, rue Molière - BP 96 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex France

Tel: (33).76.82.42.00 - Fax: (33).76.82.42.01

Je tiens à remercier Francesco Califano qui a contribué à ce travail en me faisant partager son expérience en modélisation ainsi que l'Observatoire de Meudon qui m'a permis de terminer ma thèse dans de bonnes conditions.

Je remercie tout particulièrement Louis Lliboutry et Kolumban Hutter pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

J'adresse mes remerciements à Yannick Ricard et Kolumban Hutter qui ont accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit. Je remercie également Gérard Mégie qui m'a fait l'honneur d'être président du jury.

Je souhaite enfin remercier le personnel administratif du LGGE ainsi que le service informatique pour leur disponibilité.

RESUME

La glace s'écoule par déformation plastique sous l'effet de la gravité, ainsi que par glissement sur le lit rocheux lorsque la température locale est proche du point de fusion. Les essais mécaniques en laboratoire et les mesures de déformation *in-situ* ont mis en évidence la *forte anisotropie viscoplastique des glaces polaires profondes*. Pour étudier l'influence de cette anisotropie sur l'écoulement, nous avons développé un modèle numérique original et robuste résolvant le système complet des équations mécaniques. Les résultats montrent que le comportement anisotrope de la glace modifie significativement l'écoulement dans les calottes polaires et la datation des carottes glaciaires. Pour des "calottes polaires" isothermes, la surface obtenue dans le cas anisotrope est plus plate que dans le cas isotrope et les vitesses de déformation en cisaillement sont plus fortes et plus concentrées à la base du glacier. L'autre résultat important est que l'écoulement de la glace anisotrope est moins sensible aux variations de la topographie du socle. La glace est accélérée sur les bosses et se trouve être plus stagnante dans les creux du relief. Dans les trous, l'âge de la glace profonde peut être sous-estimé d'un facteur 2 lorsque l'anisotropie n'est pas prise en compte. Parallèlement au modèle complet, nous avons développé un modèle basé sur *l'approximation de la couche mince* que nous avons formulé, pour la première fois, dans le cas anisotrope. En comparant les résultats de ce modèle avec ceux obtenus à partir du modèle complet, nous montrons que cette approximation représente bien l'écoulement de la glace sur un socle plat dans les cas isotrope et anisotrope, mais n'est pas capable de décrire correctement l'écoulement anisotrope sur un socle perturbé.

ABSTRACT

The ice flows by plastic deformation under gravity, and by sliding over the bedrock, when local temperature is close to the melting point. Mechanical test in laboratory and *in-situ* deformation measurements have shown the *strong viscoplastic anisotropy of deep polar ices*. To study the influence of this anisotropy on the flow, we have developed an original and robust numerical model, solving the complete set of mechanical equations. The results show that the anisotropic behaviour of the ice change significantly the flow in polar ice sheets and the datation of ice cores. For isothermal "ice sheets", the surface obtained in the anisotropic case is more flat than in the isotropic case, and shear strain rates are higher and more concentrated at the base of the glacier. The other important result is that the anisotropic ice flow is less sensitive to variations of bedrock topography. The ice is accelerated over bump and is more stagnant in the holes of the relief. In the holes the age of the ice is underestimated by a factor 2 when the anisotropy is not taken into account. Parallel to the complete model, we have developed a model based on the shallow ice approximation, that we have formulated for the first time, in the anisotropic case. Comparing the results of this model with those obtained with the complete model, we show that the approximation well represents the ice flow over a flat bedrock in the isotropic and anisotropic case, but is not able to describe accurately the anisotropic flow over an very irregular bedrock.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. L'ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL ET L'APPROXIMATION DE LA COUCHE MINCE	6
1 - 1. Introduction	6
1 - 2. Le modèle mathématique	8
1 - 2.1 Conventions de notations et rappel de définitions	8
1 - 2.2 Le système d'équations	11
1 - 2.2.a. Description générale	11
1 - 2.2.b. Coordonnées cartésiennes et écoulement plan	13
1 - 2.2.c. Les conditions aux limites	15
1 - 2.2.d. Equations sans dimension	19
1 - 3. Approximations dans les modèles existants	20
1 - 3.1. L'approximation isotrope	22
1 - 3.2. Déformation en cisaillement simple	23
1 - 3.2.a. Écoulement laminaire	23
1 - 3.2.b. Cisaillement simple et approximation hydrostatique	25
1 - 3.3. Prise en compte du déviateur des contraintes longitudinales	27
1 - 3.3.a. Effets de l'ondulation du socle sur un écoulement quasi-laminaire	27
1 - 3.3.b. Couplage des gradients de contrainte dans l'écoulement	30
1 - 3.3.c. Prise en compte de la valeur moyenne des contraintes longitudinales	33
1 - 3.4. L'approximation de la couche mince	34
1 - 3.4.a. Formulation dans le cas isotherme, stationnaire et anisotrope	35
1 - 3.4.b. Développement à l'ordre 0, 1 et 2	38
1 - 3.4.c. Solution à l'ordre 0	40
1 - 3.4.d. Solution à l'ordre 2	43
1 - 3.4.e. Calcul de l'élévation de la surface	47
1 - 3.4.f. Limites de l'approximation de la couche mince	48
1 - 4. Écoulement au voisinage d'un dôme	48
1 - 4.1. Solutions approchées	50
1 - 4.2. L'approximation hydrostatique	52
1 - 4.3. Deuxième ordre de l'approximation de la couche mince	54
1 - 4.4. Résolution du système complet d'équations mécaniques	55
1 - 4.4.a. Écoulement isotherme, stationnaire et isotrope	55
1 - 4.4.b. Écoulement thermo-mécanique, stationnaire et isotrope	58
1 - 4.4.c. Écoulement anisotrope	59
1 - 5. Conclusion	59

CHAPITRE 2. LOI DE COMPORTEMENT DE LA GLACE POLYCRISTALLINE	61
2 - 1. Introduction	61
2 - 2. Comportement mécanique du monocristal de glace	62
2 - 3. Comportement mécanique de la glace polycristalline isotrope	65
2 - 3.1. Comportement en fluage	65
2 - 3.2. La loi de Glen	66
2 - 4. Textures et anisotropie des glaces polaires	69
2 - 4.1. Limites de l'utilisation d'une loi isotrope pour les glaces polaires	69
2 - 4.2. Textures des glaces polaires et comportement mécanique	69
2 - 4.3. Lois de comportement anisotropes pour la glace polycristalline	72
2 - 5. Application de la loi de Lliboutry à un écoulement bidimensionnel	75
2 - 5.1. Formulation	76
2 - 5.2. Détermination des paramètres rhéologiques microscopiques	80
2 - 5.3. Détermination des paramètres rhéologiques macroscopiques	81
2 - 5.4. Discussion	84
2 - 6. Conclusion	88
 CHAPITRE 3. MODELE NUMERIQUE	90
3 - 1. Introduction	90
3 - 2. Méthode numérique pour le problème mécanique	95
3 - 2.1. Méthodes de résolution de l'écoulement d'un fluide incompressible	95
3 - 2.2. La méthode de projection	98
3 - 2.3. Le schéma itératif	100
3 - 2.4. Le problème des conditions aux limites	103
3 - 3. Discrétisation du problème	103
3 - 3.1. Cohérence de la discrétisation avec la méthode numérique	105
3 - 3.2. Algorithme	111
3 - 3.2.a. Grille et discrétisation utilisée	112
3 - 3.2.b. Formulation du problème discret à l'intérieur du domaine	114
3 - 3.2.c. Formulation du problème discret aux limites	117
3 - 3.3. Efficacité et précision de la méthode numérique	117
3 - 4. La surface libre	123
3 - 4.1. Coordonnées réduites	123
3 - 4.2. Les effets visqueux sur les contraintes normales	126
3 - 4.3. Méthode utilisée	128
3 - 4.3.a. Formulation compatible avec la méthode numérique	128
3 - 4.3.b. Condition normale de surface libre implicite	129
3 - 4.3.c. Condition tangentielle de surface libre implicite et incompressibilité	130
3 - 4.4. Calcul de l'élévation de la surface	131

3 - 5. Performances et limites du modèle	131
3 - 5.1. Temps de calcul et critères de convergence	132
3 - 5.2. Les conditions aux limites sur les bords	134
3 - 6. Conclusion	135
 CHAPITRE 4. COMPARAISON DES ECOULEMENTS ISOTROPE ET ANISOTROPE DANS LE CAS NEWTONIEN	137
4 - 1. Introduction	137
4 - 2. Ecoulement sur un socle plat	140
4 - 2.1. Ecoulement dans un domaine à géométrie imposée	141
4 - 2.1.a. Accélération de l'écoulement dans le cas anisotrope	143
4 - 2.1.b. Effets de l'anisotropie sur les contraintes et les vitesses de déformation	145
4 - 2.1.c. Chaleur dissipée par déformation visqueuse	151
4 - 2.1.d. Conclusion	151
4 - 2.2. Ecoulement en équilibre avec un taux d'accumulation imposé	152
4 - 2.2.a. Effet de l'anisotropie sur l'élévation et sur la pente de la surface	154
4 - 2.2.b. Effet de l'anisotropie sur les vitesses	156
4 - 2.2.c. Effets de l'anisotropie sur les contraintes et les vitesses de déformation	157
4 - 2.2.d. Chaleur dissipée par déformation visqueuse	163
4 - 2.2.e. Conclusion	165
4 - 3. Effets des irrégularités du lit rocheux	166
4 - 3.1. "Lissage" des champs en x dans le cas anisotrope	170
4 - 3.1.a. Elévation et pente de la surface	170
4 - 3.1.b. Vitesses en surface	172
4 - 3.1.c. Contrainte et vitesse de déformation en cisaillement à la base et longitudinale à la surface	172
4 - 3.2. Effet de l'anisotropie sur les champs au-dessus des bosses et des trous	175
4 - 3.2.a. Profils verticaux des vitesses	175
4 - 3.2.b. Profils verticaux et isovaleurs des contraintes et vitesses de déformation	177
4 - 3.2.c. Chaleur dissipée par déformation visqueuse	181
4 - 3.3. Conclusion	182
4 - 4. Conclusion	185
 CHAPITRE 5. L'APPROXIMATION DE LA COUCHE MINCE DANS LES CAS ISOTROPE ET ANISOTROPE	186
5 - 1. Introduction	186
5 - 2. Méthode numérique et conditions aux limites	188
5 - 3. Approximation de la couche mince pour un socle plat	190
5 - 4. Approximation de la couche mince pour un lit rocheux irrégulier	196

5 - 4.1. Ordre de grandeur des différents termes intervenant à l'ordre 2	197
5 - 4.2. Validité l'approximation de la couche mince dans les cas isotrope et anisotrope	200
5 - 5. Validité de la représentation de l'anisotropie par un facteur multiplicatif	207
5 - 6. Conclusion	209
CHAPITRE 6. ESQUISSE D'UNE APPLICATION AU GROENLAND CENTRAL	212
6 - 1. Introduction	212
6 - 2. Application du modèle d'écoulement à la ligne de courant GRIP-GISP2	215
6 - 2.1. Données	215
6 - 2.2. Conditions de calcul	216
6 - 3. Résultats	218
6 - 4. Conclusion	221
CONCLUSION	222
ANNEXES	225
A. Formules de dérivation dans le système de coordonnées (ζ, ξ, t)	225
B. Solution analytique pour une hauteur plate	227
C. Schéma aux différences finies	230
REFERENCES	232

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Depuis les 30 dernières années, l'étude de la dynamique des calottes polaires s'est développée considérablement. Ceci pour deux raisons essentielles: la première est liée au fait que la glace, au cours de son mouvement, conserve la mémoire des conditions climatiques régnant au moment de sa formation; l'autre résulte du rôle, dynamique cette fois, que jouent les grandes masses de glace dans l'évolution du climat global.

La modélisation de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires permet d'une part d'estimer l'âge de la glace et donc d'interpréter les enregistrements climatiques issus des forages glaciaires, et d'autre part de mieux comprendre les échanges entre les différents réservoirs climatiques (océan-atmosphère-calottes polaires).

Dans les calottes polaires, la glace se forme par densification de la neige de surface. Les masses de glace reposent sur un lit rocheux dont les variations de la topographie peuvent atteindre 50 % de l'épaisseur de glace. Elles sont caractérisées par un petit rapport d'aspect: les dimensions horizontales sont de plus de 2 ordres de grandeur supérieures aux dimensions verticales (le Groenland, par exemple, s'étend sur plus de 2 millions de km² avec une épaisseur au centre de 3000 m). La glace s'écoule par déformation plastique sous l'effet de la gravité, ainsi que par glissement sur le lit rocheux lorsque la température locale est proche du point de fusion. Le comportement mécanique de la glace joue ainsi un rôle primordial dans l'écoulement.

Les essais mécaniques en laboratoire et les mesures de déformation *in-situ* ont mis en évidence la *forte anisotropie viscoplastique des glaces polaires profondes*; la réponse du

matériau dépend donc fortement de la direction de la sollicitation imposée. Il est établi que cette anisotropie est reliée à une orientation préférentielle du réseau cristallin des grains constituant l'échantillon (texture), qui se développe avec la déformation plastique du matériau ou lorsque celui-ci recristallise [Lile, 1978; Lliboutry et Duval, 1985; Budd et Jacka, 1989; Alley, 1992]. La recristallisation peut avoir lieu dans les couches profondes quand la température devient supérieure à -12°C . Lorsque la température est plus faible, la texture de la glace reflète toute l'histoire des déformations qu'a subi le matériau. Il y a donc évolution du comportement mécanique de la glace au cours de son histoire thermomécanique. La texture des glaces polaires induit généralement une diminution de la viscosité en cisaillement horizontal.

Jusqu'à présent, dans tous les modèles d'écoulement, le comportement de la glace était supposé isotrope. S'il est reconnu que la texture, de part l'anisotropie qui lui est associée, modifie radicalement le comportement de la glace à petite échelle (échantillon de glace), aucun résultat n'a encore été obtenu sur son effet à l'échelle de l'écoulement global dans les calottes polaires.

Prendre en compte le comportement anisotrope de la glace dans les modèles d'écoulement n'est pas un problème simple car cela nécessite de trouver une loi de comportement anisotrope adaptée, c'est à dire qui décrive correctement le comportement de la glace en grandes déformations et qui soit facile à intégrer dans un modèle d'écoulement. Une telle loi peut être obtenue numériquement par des méthodes d'homogénéisation [Castelnaud, 1996; Van der Veen et Whillans, 1994; Azuma, 1994], mais ces méthodes ne permettront de reproduire fidèlement le développement de textures observé dans les calottes polaires que lorsque les mécanismes de recristallisation, encore très mal compris, seront pris en compte [Castelnaud, 1996]. De plus l'introduction d'une telle loi dans un modèle d'écoulement nécessite des moyens de calcul importants [Beaudoin et al., 1994].

Les lois de comportement analytiques, plus limitées au niveau de la représentation physique des mécanismes de déformation, présentent l'avantage d'une formulation généralement simple qui peut être facilement introduite dans un modèle d'écoulement à grande échelle [Lliboutry, 1993; Svendsen et Hutter, 1996]. Nous avons choisi dans ce travail d'introduire l'anisotropie de manière simplifiée en utilisant une loi de comportement anisotrope *qui ne prend*

pas en compte l'évolution de la texture au cours de l'histoire de la déformation [Lliboutry, 1993]. Cette loi donne cependant une bonne estimation de la réponse de la glace polycristalline anisotrope pour une texture donnée.

Le but de ce travail est l'étude de l'influence de l'anisotropie des glaces sur l'écoulement des calottes polaires. Nous nous limitons ici, pour l'essentiel, à des écoulements bidimensionnels "théoriques". Nous considérerons des "calottes polaires" isothermes, en état stationnaire et nous prendrons en compte un comportement Newtonien de la glace. Toutefois, nous présenterons une application à l'écoulement au voisinage du dôme du Groenland (ligne d'écoulement GRIP-GISP2). Nous comparerons la forme de la calotte, la distribution des champs et la datation obtenues à partir des écoulements isotrope et anisotrope.

Nous montrerons sur ces cas théoriques que la prise en compte de *l'anisotropie modifie significativement la datation, le profil de la surface de la calotte ainsi que l'écoulement de la glace*. Nous verrons que, dans le cas anisotrope, la glace s'écoule plus vite et que la surface de la calotte, en équilibre avec un taux d'accumulation fixé, est plus plate. Nous mettrons en évidence un autre résultat surprenant concernant l'écoulement de la glace anisotrope sur un socle perturbé: l'accélération due à l'anisotropie s'arrête au sommet des bosses, la stagnation de la glace dans les trous étant accentuée. Cet effet, dans les trous, donne une glace plus vieille de 20% dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. Nous montrerons pourquoi l'écoulement de la glace anisotrope est moins sensible aux variations de la topographie du socle conduisant à des lignes de courant, une élévation de la surface et des isochrones plus homogènes dans la direction horizontale. Nous mettrons donc en évidence des effets complexes qui peuvent changer significativement l'interprétation des mesures *in-situ*. Nous évaluerons l'effet de l'anisotropie sur l'étendue de la région du dôme afin d'établir l'influence sur l'écoulement d'une éventuelle migration du dôme, ce qui permettra de vérifier si, comme il est généralement admis, le dôme est vraiment l'endroit le mieux adapté à un forage profond.

Ces résultats ont été obtenus à l'aide d'un nouveau modèle numérique résolvant le système complet d'équations mécaniques pour un fluide visqueux, incompressible, non-Newtonien et anisotrope. Ce modèle utilise *une méthode semi-implicite simple et originale*, jamais utilisée en

glaciologie, qui converge remarquablement bien pour des faibles nombres de Reynolds. Une étude poussée de sa précision et de ses performances a été réalisée.

La majorité des modèles d'écoulement sont basés sur *l'approximation de la couche mince* [Fowler et Larson, 1980; Hutter, 1981, 1983] reposant sur l'existence du petit rapport d'aspect des calottes polaires. Les équations mécaniques à résoudre sont alors considérablement simplifiées et le temps de calcul énormément réduit. Cette approximation n'est a priori plus valable au voisinage d'un dôme (zone de partage des glaces) et près d'un lit rocheux au relief accidenté. Les erreurs introduites par cette simplification n'ont jamais été estimées. Pour étudier cette question, nous avons développé, parallèlement au modèle numérique complet, un modèle numérique basé sur *l'approximation de la couche mince que nous avons étendu au cas de la glace anisotrope*. Le résultat le plus surprenant de la comparaison entre ces deux modèles est la coïncidence des résultats de l'ordre 0 de la couche mince avec ceux du modèle complet pour un écoulement Newtonien sur un socle plat, aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. L'ordre 0 de la couche mince reproduit exactement l'écoulement y compris au dôme où cette approximation avait toujours été remise en question. Nous montrerons d'autre part que pour des perturbations significatives du relief du socle, l'approximation de la couche mince reproduit moins bien l'écoulement dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope, pour lequel l'ordre 0 reste encore très bon. Nous mettrons ainsi en évidence, pour la première fois, la possibilité d'appliquer de manière rigoureuse l'approximation de la couche mince dans le cas anisotrope, en évaluant les limites d'applications et l'ordre de grandeur des termes négligés dans le cas général d'un socle irrégulier.

Dans ce travail nous décrirons d'abord dans le chapitre 1 le problème mathématique en discutant des approximations faites pour simplifier les équations mécaniques et en particulier l'approximation de la couche mince; nous introduirons ensuite dans le chapitre 2 la loi de comportement anisotrope utilisée, et en étudierons les limites; nous présenterons dans le chapitre 3 la méthode numérique utilisée pour résoudre le système complet d'équations mécaniques en analysant sa précision et ses performances; dans le chapitre 4 nous comparerons les écoulements isotrope et anisotrope sur un socle plat et sur un socle perturbé; dans le chapitre 5 nous analyserons la validité de l'approximation de la couche mince dans le cas isotrope et anisotrope

à l'ordre 0 et à l'ordre 2; enfin, dans le chapitre 6 nous appliquerons notre modèle au site de GRIP (Groenland) et montrerons les effets de l'anisotropie sur l'écoulement et sur la datation.

1. Introduction
2. Les principes de la mécanique
3. Les lois de Newton
4. Les applications
5. Les exercices
6. Les problèmes
7. Les compléments
8. Les annexes
9. Les références
10. Les index

CHAPITRE 1

L'ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL ET L'APPROXIMATION DE LA COUCHE MINCE

1 - 1 INTRODUCTION

L'écoulement des larges masses de glace naturelles le long d'un socle sous l'action de la gravité est un phénomène relevant de la mécanique des fluides et de celle des solides. Il peut être interprété soit comme le glissement lent d'un fluide non-Newtonien, soit comme la déformation par glissement d'un solide très visqueux (ou plastique).

Les équations fondamentales qui décrivent cet écoulement expriment la conservation de la masse, du moment et de l'énergie d'un fluide visqueux homogène, non-Newtonien, conducteur de chaleur, dont la réponse au cisaillement fait intervenir un facteur dépendant fortement de la température. L'un des aspects importants est l'existence d'une surface libre dont la déformation détermine la dynamique du glacier. Le traitement numérique de cette surface libre et la non-linéarité de la loi de comportement de la glace constituent les difficultés majeures de ce problème.

Nous ne résolverons pas ici l'équation d'évolution de la température et considérerons le cas simple, où la glace est isotherme; le couplage thermo-mécanique devrait être abordé dans des travaux ultérieurs. La résolution du système complet d'équations dans une géométrie 3D quelconque est très coûteux en ressources numériques. D'autre part, dans ce travail, nous nous

sommes consacrés à l'illustration de l'effet de l'anisotropie sur quelques cas simples. Nous nous sommes donc limités au cas bidimensionnel qui nous a effectivement permis de mettre en évidence les effets de l'anisotropie sur l'écoulement de la glace. L'écoulement est supposé être à déformation plane plutôt qu'à symétrie cylindrique, ce qui permet d'étendre facilement le modèle au cas tridimensionnel.

L'objet de ce travail est de résoudre le problème mécanique dans le cas général d'une loi de comportement anisotrope de la glace. Il existe une abondante littérature sur la modélisation en deux et trois dimensions du cas *isotrope*. Ces travaux ont permis de bien comprendre l'écoulement de la glace isotrope dans les calottes polaires, même si le problème du dôme, des marges et de la loi de glissement restent encore à approfondir. Quelques tentatives ont été faites pour prendre en compte le comportement anisotrope de la glace polaire, mais jusqu'à présent, aucune n'a abouti à un résultat satisfaisant. Nous proposons dans ce travail une première approche permettant de modéliser et de comprendre le rôle de l'anisotropie.

L'écoulement de la glace dans les calottes polaires est caractérisé par le fait qu'à l'échelle globale, les topographies (la base et la surface libre) varient lentement et que l'épaisseur du glacier est petite par rapport à l'étendue du domaine dans la direction de l'écoulement. Le fait que ce rapport d'aspect soit petit permet l'élaboration d'approximations permettant de simplifier le problème mécanique. Dans ce chapitre, nous présenterons ces approximations et nous estimerons leur validité. Nous développerons plus particulièrement l'*approximation de la couche mince* pour plusieurs raisons. D'abord, il est intéressant de discuter des modèles numériques existants basés sur cette approximation car ceux-ci n'ont pas traité rigoureusement le problème. D'autre part, le développement systématique de l'approximation de la couche mince dans le cas anisotrope n'a jamais été fait. L'ordre 2 de l'approximation de la couche mince dans le cas isotrope est donné par Hutter [1983], notre exposé apporte non seulement un développement rigoureux de l'approximation de la couche mince dans le cas anisotrope jusqu'à l'ordre 2, mais permet aussi de mettre en valeur les erreurs faites jusqu'à présent sur la prise en compte de l'ordre 2 et sur l'introduction de l'anisotropie dans cette approximation. Nous proposons également une méthode simple et originale pour résoudre l'équation d'évolution de la surface libre à l'ordre 0 et à l'ordre 2, se distinguant de la méthode classique qui consiste à résoudre une équation de

diffusion pour la hauteur.

Nous présenterons dans le paragraphe 1 les équations régissant l'écoulement de la glace dans les calottes polaires, dans le paragraphe 2 une discussion des approximations utilisées pour résoudre le problème dynamique et plus particulièrement la formulation de l'approximation de la couche mince pour une loi de comportement anisotrope, et dans le paragraphe 3 les tentatives de modélisation numérique d'une diffuence de glace (dôme).

1 - 2 LE MODELE MATHEMATIQUE

1 - 2.1 Conventions de notations et rappel de définitions:

Nous allons rappeler ici les définitions et les notations essentielles utilisées dans ce travail. Les grandeurs *scalaires*, *vectérielles* et *tensorielles* sont notées respectivement par des lettres *quelconques-maigres en italique*, *minuscules-grasses* et *majuscules-grasses*, en notation *intrinsèque*. Les *composantes* scalaires des vecteurs \mathbf{v} et des tenseurs \mathbf{S} du second, voire du quatrième ordre sont désignées par la lettre qui dénote ces entités dotée d'un, deux, voire quatre indices et en style ordinaire. En notation *indicielle* on aura donc:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{S} = S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{S} = S_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l.$$

Les dérivées partielles eulériennes dans le temps seront notées par un « $\partial/\partial t$ »; les gradients (divergences) dans l'espace par un signe « ∇ » (« ∇ .») devant la lettre; le laplacien par « Δ » et les dérivées partielles directionnelles par une virgule « $,$ » suivie de l'indice i de la direction ou par un « $\partial/\partial x_i$ ». Les dérivées matérielles (lagrangiennes) dans le temps sont désignées par un point « $\dot{}$ » superposé sur la lettre ou par un « d/dt ». Elles sont données dans la description eulérienne par:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla y.$$

Enfin la trace d'un tenseur sera notée «tr».

Nous noterons \mathbf{u} le vecteur vitesse et utiliserons les définitions habituelles pour les tenseurs des contraintes et des vitesses de déformation (ou taux de déformation). Le tenseur des vitesses de déformation $\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t]$, l'exposant t désignant le transposé du tenseur, représente la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse et a la forme suivante:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy sera noté σ et la pression p . Le déviateur des contraintes \mathbf{S}' est défini par:

$$\mathbf{S}' = \sigma + p\mathbf{I}, \quad p = -\frac{1}{3} \text{tr} \sigma.$$

$S'_{xx}, S'_{yy}, S'_{zz}$ sont appelées *contraintes normales, longitudinales ou axiales* et $S'_{xy}, S'_{xz}, S'_{yz}$ *contraintes de cisaillement*. Il est important de noter que:

$$\text{tr} \mathbf{S}' = 0.$$

La contrainte déviatoire effective τ_e et le taux de déformation effectif ϵ_e sont définis par:

$$\tau_e^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{S}'^2, \quad \epsilon_e^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{D}^2$$

La figure 1.1.a montre les contraintes sur les côtés d'un élément de surface dans le plan (x-z) et la figure 1.1.b les deux modes de déformation en cisaillement. Pour une description détaillée des concepts de contrainte et vitesse de déformation, nous faisons directement référence à l'appendice I de Paterson [1994].

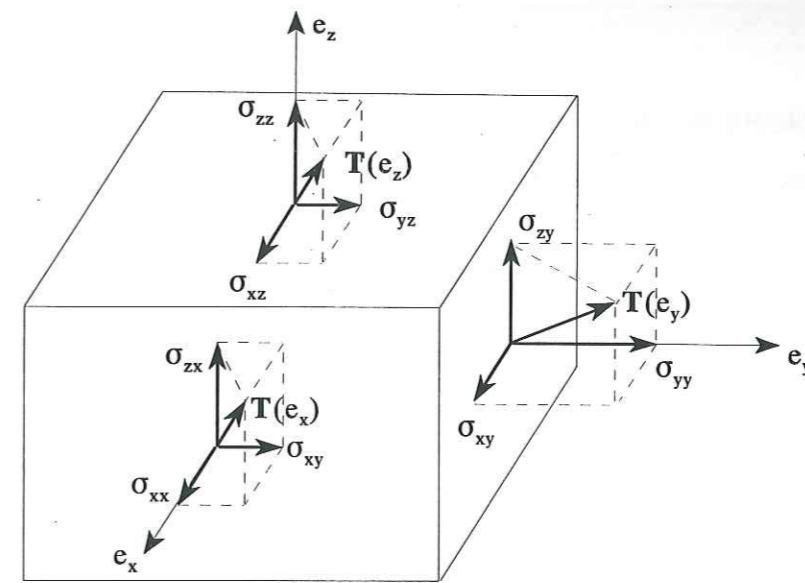


Fig. 1.1.a. Composantes des vecteurs des contraintes s'exerçant sur les faces d'un parallélépipède élémentaire d'arêtes parallèles aux axes.

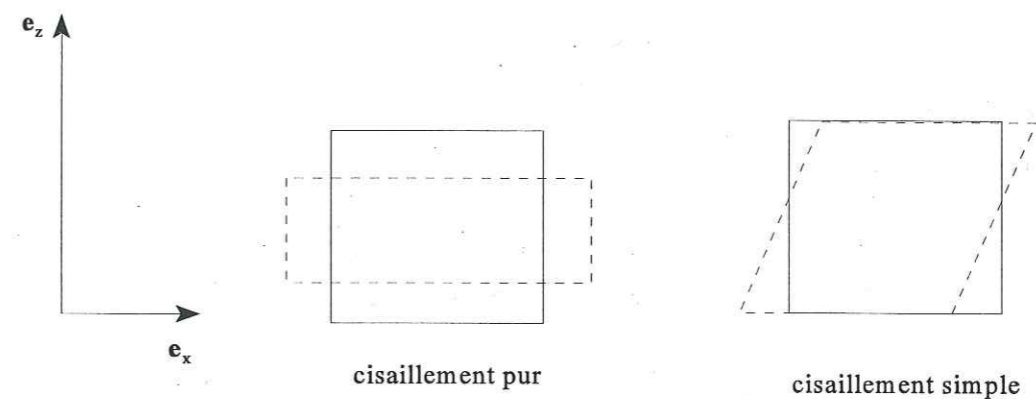


Fig. 1.1.b. Les deux modes de déformation en cisaillement.

Les paramètres physiques intervenant dans le modèle sont la densité de la glace, notée ρ , et le vecteur \mathbf{g} représentant la gravité. L'énergie interne sera notée e et le vecteur flux de chaleur \mathbf{q} . Ils sont reliés respectivement à la température T en degrés Kelvin par:

$$\begin{aligned}\rho e &= \rho c_p T, \\ \mathbf{q} &= -\kappa \nabla T,\end{aligned}$$

où c_p représente la chaleur spécifique à pression constante et κ la conductivité thermique de la glace. Etant donné le faible intervalle de variation de la température dans le cas de la glace polaire, une chaleur spécifique constante et une loi linéaire de type Fourier pour le flux de chaleur sont couramment utilisées.

1 - 2.2 Le système d'équations:

1 - 2.2.a Description générale

Nous décrirons ici les bases générales du problème thermo-mécanique couplé même si, à partir de la section 1 - 2.2.d, nous ne prenons plus en compte l'équation du bilan thermique.

Le mouvement d'un milieu continu est gouverné par les principes de la mécanique classique et de la thermodynamique: conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Le modèle mécanique habituellement adopté pour la glace froide est celui d'un fluide non-Newtonien, visqueux, conducteur de chaleur et incompressible. Le système d'équation est donc:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \dot{\mathbf{u}} &= -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{S}' + \rho \mathbf{g}, \\ \rho \dot{e} &= \text{tr}(\mathbf{S}' \mathbf{D}) - \nabla \cdot \mathbf{q},\end{aligned}\tag{1.1}$$

exprimant la conservation de la masse localement (1.1a), la conservation du moment (1.1b) et de l'énergie interne (1.1c). Le nombre de Reynolds, $\rho LU/\mu$ (L , U et μ représentent respectivement une dimension, une vitesse et une viscosité caractéristique) de l'écoulement étant inférieur à 10^{-10} , (les vitesses horizontales d'écoulement dans les calottes polaires sont de l'ordre de 100 m.a^{-1} et la viscosité de l'ordre de 10^{14} Pa.s), on néglige les termes d'inertie (le terme $\rho \dot{\mathbf{u}}$) dans la seconde loi de Newton. La géométrie et le champ de température évoluent dans le temps avec un temps caractéristique beaucoup plus court que celui des variations des champs de vitesse et de contraintes. L'équilibre mécanique peut donc être considéré comme instantané. Les équations du mouvement sont alors réduites aux équations d'équilibre quasi-statique exprimant l'équilibre entre les forces s'appliquant à la surface du corps et les forces de volume, dans ce cas la gravité.

Une relation constitutive pour le taux de déformation doit être ajoutée aux lois de conservation (1.1) pour obtenir un système fermé. La glace est un fluide non-Newtonien, c'est à dire tel que le tenseur des contraintes est une fonction non-linéaire du tenseur des taux de déformation. La loi de comportement doit s'exprimer sous la forme:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{A} \mathbf{F}(\mathbf{D}, \mathbf{T}_e),$$

où \mathbf{T}_e est un tenseur de structure du quatrième ordre et \mathbf{F} une fonction tensorielle. Cette relation doit être invariante par changement de repère. Des considérations thermodynamiques nécessitent que \mathbf{S}' tende vers $\mathbf{0}$ quand \mathbf{D} tend vers $\mathbf{0}$. Dans la loi de comportement anisotrope utilisée dans ce travail (la loi de Lliboutry [1993]), \mathbf{T}_e est pris comme constant alors qu'une formulation complète aurait nécessité d'introduire une relation d'évolution pour ce tenseur. La loi de comportement peut alors s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{D},\tag{1.2}$$

où \mathbf{M} est la matrice des viscosités qui s'exprime en fonction de la texture et A un facteur dépendant de la température selon une loi de type Arrhénius,

$$A = A_0 \exp\left(\frac{Q}{RT}\right), \quad (1.3)$$

où Q est l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits et A_0 une fonction pouvant dépendre du contenu en impuretés ou d'autres caractéristiques de la glace [Hooke, 1981; Paterson, 1991].

1 - 2.2.b Coordonnées cartésiennes et écoulement plan

Les glaciers de vallée et les calottes polaires peuvent être traités, en première approximation, comme infiniment larges, sans variations de la géométrie et des propriétés physiques dans la direction perpendiculaire à l'écoulement dominant, ce qui implique $\partial/\partial y = 0$.

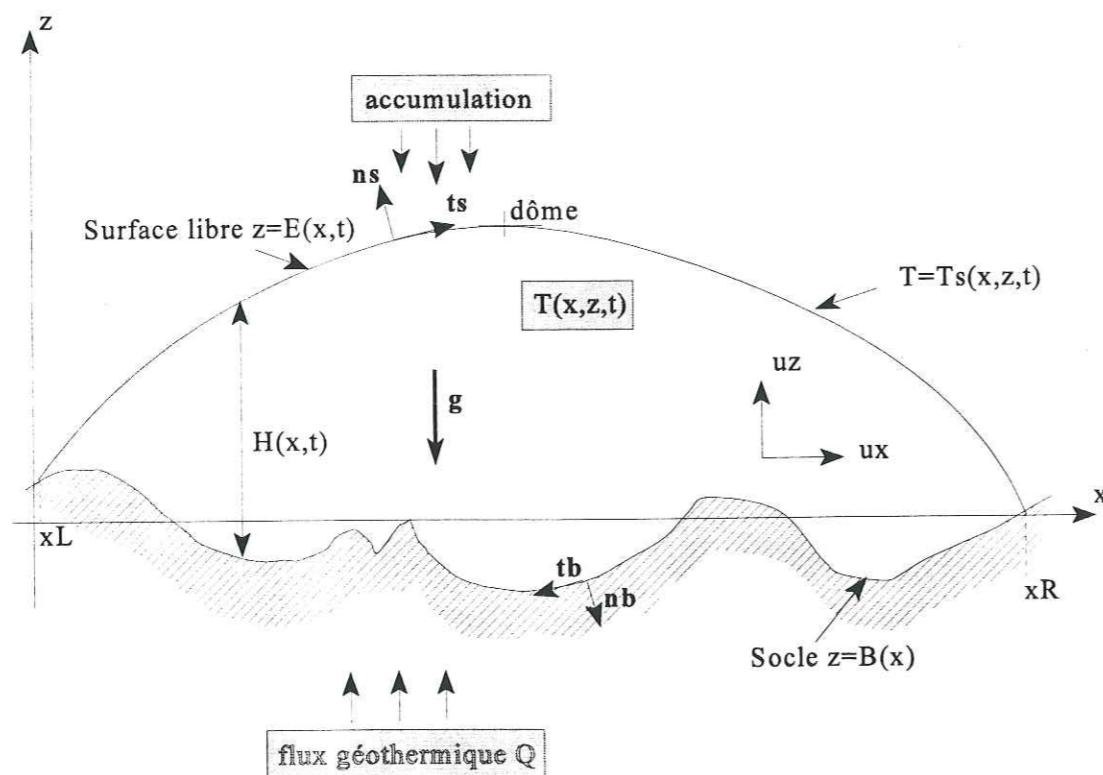


Fig. 1.2. Coupe verticale d'une calotte polaire illustrant les champs mis en jeu et le système de coordonnées utilisé. La figure n'est pas à l'échelle, la longueur du glacier étant de plus de 500 km et l'épaisseur au dôme de l'ordre de 3000 m.

Toutes les déformations ont alors lieu dans des plans parallèles. Dans les larges glaciers de montagne ainsi que dans les calottes polaires en Arctique et en Antarctique, l'écoulement est proche d'un écoulement à deux dimensions si l'on suit une ligne d'écoulement à faible divergence. Nous avons donc restreint l'étude présentée ici à des masses de glace dont le profil est le même pour toutes les sections longitudinales. Une géométrie typique de ce genre de calotte est présentée en figure 1.2. Dans le système cartésien plan, x représente la coordonnée horizontale et z la coordonnée verticale (dont l'axe est pointé vers le haut). Les équations $z=E(x,t)$ et $z=B(x)$ décrivent respectivement la surface de la calotte polaire et la topographie du socle (dans cette étude les phénomènes d'isostasie ne sont pas pris en compte).

L'écoulement étant symétrique par rapport au plan (x,z) et à déformation plane, les composantes des tenseurs des contraintes déviatoires et des taux de déformation doivent vérifier:

$$\begin{aligned} S'_{xy} = S'_{yz} &= 0, \\ D_{xy} = D_{yz} = D_{yy} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Les équations (1.1a) et (1.1b) s'écrivent alors:

Conservation de la masse:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.5)$$

Conservation de la quantité de mouvement:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S'_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial S'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} &= \rho g. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Loi de comportement (ou loi rhéologique) (1.2):

$$S'_{ij} = A_0 \exp\left(\frac{Q}{kT}\right) M_{ijkl} D_{kl} \quad (1.7)$$

Conservation de l'énergie (1.1c) en tenant compte des définitions de l'énergie interne et du flux de chaleur:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho c_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + S'_{ij} D_{ij} \quad (1.8)$$

Les deux premiers termes du second membre de l'équation de la chaleur (1.8) représentent la diffusion thermique, le troisième l'advection et le dernier terme la dissipation, souvent appelée chaleur de déformation interne ou travail plastique. Comme l'a montré Morland [1984], tous ces termes ont une contribution significative dans le problème couplé thermo-mécanique de l'écoulement de la glace dans une calotte polaire. Dans notre modèle nous n'utilisons pas l'équation (1.8) et considérons le cas simple d'une glace isotherme.

1 - 2.2.c Les conditions aux limites

Il y a deux types de conditions aux limites, celles spécifiées le long de la surface libre et celles exprimées le long du socle. Elles sont de nature cinématiques, dynamiques et thermiques. Le vecteur normal unité en un point de la surface est noté \mathbf{n}_s , et \mathbf{t}_s le vecteur unité tangent (figure 1.2). De la même manière, les vecteurs unité tangent et normal à la base sont respectivement notés \mathbf{n}_b et \mathbf{t}_b . Nous rappelons ici, à titre indicatif, les conditions aux limites thermiques même si nous ne les utilisons pas dans le modèle numérique.

L'équation d'évolution de la surface libre non matérielle $z-E(x,t)=0$ en équilibre avec un taux d'accumulation donné s'écrit [Hutter, 1983]:

Condition cinématique à la surface:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E = \|\nabla E\| a_\perp, \quad \text{sur } E(x,t)=0, \quad (1.9)$$

où a_\perp , l'accumulation, représentant le flux de masse sous forme de neige à travers la surface E , est généralement une fonction de la position et du temps. La surface libre est supposée n'être soumise à aucune contrainte, le frottement du vent à la surface étant, entre autres, négligé. Ceci se traduit par deux équations pour la contrainte tangentielle et la contrainte normale qui s'expriment sous forme vectorielle par:

Condition dynamique à la surface:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_s + p_{atm} \mathbf{n}_s = 0, \quad \text{en } z=E(x,t) \quad (1.10)$$

où p_{atm} est la pression atmosphérique, généralement prise égale à zéro. En coordonnées cartésiennes, dans le plan (x,z) et compte tenu de la surface $S_s(x,t) = z-E(x,t)=0$, l'expression de \mathbf{n}_s en fonction de $E' = \frac{\partial E}{\partial x}$ est:

$$\mathbf{n}_s = \frac{1}{\sqrt{1+E'^2}} \begin{pmatrix} -E' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

L'équation (1.9) devient alors:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u_x \frac{\partial E}{\partial x} - u_z = a, \quad \text{en } z=E(x,t) \quad (1.12)$$

avec $a = \sqrt{1+E'^2} a_\perp$. La condition (1.10) donne:

$$\begin{cases} S'_{xz} - E' S'_{xx} + E' (p - p_{atm}) = 0, \\ (p - p_{atm}) + E' S'_{xz} - S'_{zz} = 0, \end{cases} \quad \text{en } z=E(x,t). \quad (1.13)$$

La température de surface est prescrite:

$$T = T_s(x, E, t), \quad \text{en } z = E(x, t). \quad (1.14)$$

Une condition de glissement et une condition de transfert thermique sont imposées sur le socle défini par $z=B(x)$ et considéré ici comme indéformable:

Condition cinématique à la base:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_b &= 0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_b &= u_g, \end{aligned} \quad \text{en } z = B(x). \quad (1.15)$$

où u_g est la vitesse de glissement parallèle au socle (cf. figure 1.2 pour les notations). Il faut noter que (1.15a) peut contenir d'autres termes s'il y a fusion à la base du glacier et si la pénétration d'eau dans le socle est prise en compte.

Condition d'échange de chaleur à la base:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_b = Q_{\perp}^{geoth}, \quad \text{en } z = B(x). \quad (1.16)$$

où h_b et Q_{\perp}^{geoth} représentent respectivement la conductivité thermique et le flux géothermique à la base du glacier. Si la condition d'échange de chaleur est simple, la loi de glissement à la base reste encore à définir de manière réaliste. Dans le cas de glaciers froids, où la température à la base est strictement inférieure à la température de fusion, la glace à la base adhère à la surface du socle et (1.15b) devient $u_g = 0$. Au contraire, pour les glaciers tempérés, où la température des couches basales atteint le point de fusion, la chaleur générée par les déformations entraîne la fonte de la glace basale. Les observations de Kamb and LaChapelle [1964] suggèrent la présence d'une couche très fine d'eau à la base. Il y a donc glissement parfait à l'interface glace-socle en un point du socle. Mais les aspérités du socle à petite échelle n'affectent directement l'écoulement qu'au voisinage immédiat du lit rocheux (couche limite "interne"). Elles sont ressenties par l'ensemble de la masse de glace (région "externe") comme une résistance visqueuse s'opposant

à la composante correspondante de la force de gravité (cf. figure 1.3). Des considérations théoriques et des études en laboratoire ont conduit à utiliser comme condition à la limite à la base, une vitesse de glissement fonction uniquement de la contrainte de cisaillement à la base élevée à une certaine puissance, de la rugosité du socle et de la pression normale effective qui génère une force de friction résistant au glissement [Budd et al., 1979; Fowler, 1981]:

$$u_g = v \frac{S_b'^{\alpha}}{\Sigma^{\beta}},$$

où v est une constante inversement proportionnelle à la rugosité du socle et fonction de facteurs tels que l'épaisseur du film d'eau interstitiel, S_b' est la contrainte de cisaillement basale, α et β des nombres déterminés par des considérations empiriques et Σ la pression normale à la base corrigée par la pression d'eau subglaciaire [Lliboutry, 1968, 1979; Weertman, 1972, 1979; Fowler, 1981]. Binschelder [1983] montre qu'une loi du type Weertman ($\alpha=3$, $\beta=1$) est bien adaptée. Une étude plus poussée a été effectuée par Alley [1989a, b] et Alley et al. [1989].

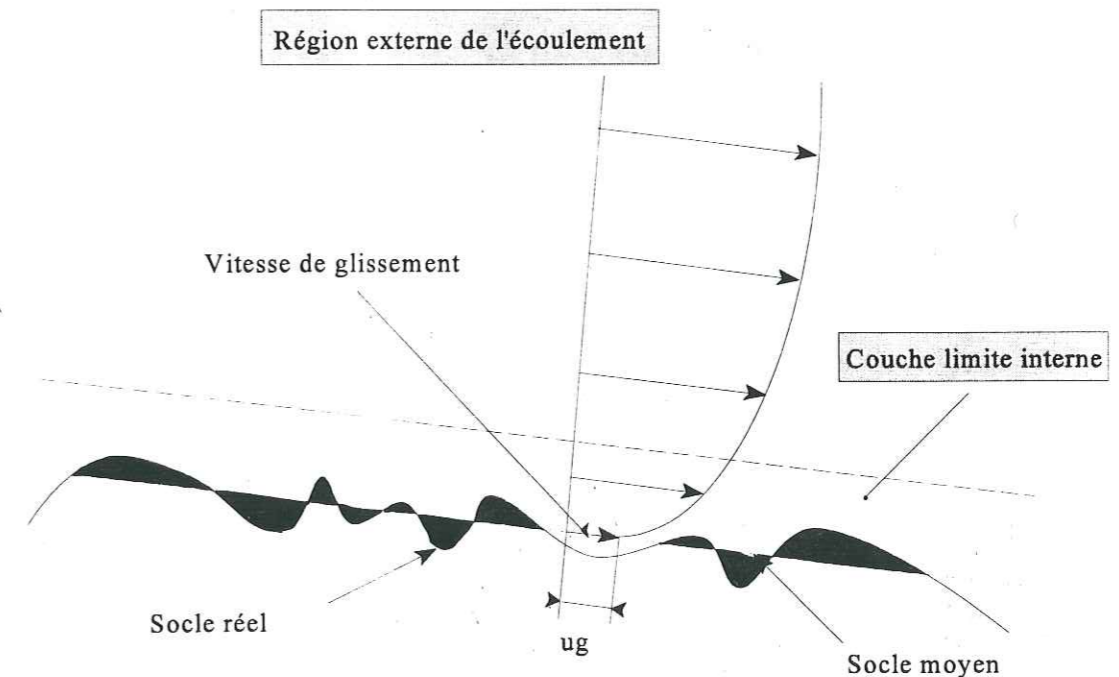


Fig. 1.3. Interface glace-socle, les ondulations réelles du socle autour d'un socle moyen sont ressenties par l'écoulement dans la région externe comme une résistance visqueuse [Hutter, 1982]. La loi de glissement lie u_g , tangent au socle moyen, à la contrainte de cisaillement S_b' agissant sur ce même socle moyen.

1 - 2.2.d Equations sans dimension

Différents choix sont possibles pour obtenir des équations sans dimension. Une des alternatives consiste à dimensionner les vitesses par une vitesse horizontale de surface caractéristique, une autre à dimensionner les vitesses par une vitesse verticale de surface caractéristique [Morland, 1984; Fowler, 1992]. Nous appliquerons ici cette dernière car une évaluation naturelle de la vitesse verticale est donnée par l'accumulation en surface. Pour les deux calottes polaires principales (Antarctique et Groenland), une valeur représentative de l'accumulation et donc de la vitesse verticale, notée $[u]$ est à peu près $[u] = a_{\perp} = 3 \times 10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$ (10 cm.a⁻¹) [Paterson, 1981]. L'ordre de grandeur de la hauteur est donné par une estimation de l'épaisseur $[d]$ de la glace au dôme. L'équilibre mécanique vertical (1.6.c) et la condition dynamique à la surface libre (1.13.b) montrent que le maximum des contraintes est déterminé par la pression normale à la base $[\tau] = \rho g [d]$ [Morland, 1984] que nous prendrons comme valeur caractéristique des composantes de S' . Les quantités sans dimension notées avec un exposant * sont obtenues par la transformation:

$$\begin{aligned} (x, z) &= [d] (x^*, z^*), \\ (u_x, u_z) &= [u] (u_x^*, u_z^*), \\ (S'_{xx}, S'_{xz}, S'_{zz}, p) &= [\tau] (S'^*_{xx}, S'^*_{xz}, S'^*_{zz}, p^*), \\ (D_{xx}, D_{xz}, D_{zz}) &= [u]/[d] (D^*_{xx}, D^*_{xz}, D^*_{zz}), \\ M_{ijkl} &= [\tau][d]/[u] M^*_{ijkl}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Par construction z^* , u_z^* , D^*_{zz} sont supposés être de l'ordre de l'unité. Pour simplifier les expressions, on omettra par la suite l'indice * dans la notation des quantités sans dimension. Les équations (1.5) et (1.6) deviennent alors:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S'_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial S'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} &= 1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

La loi constitutive (1.7) et les conditions aux limites (1.12, 1.13 et 1.15) restent inchangées dans cette formulation. Nous n'introduisons pas de dimension pour l'équation de la chaleur (1.8) et pour les conditions aux limites thermiques (1.14 et 1.16) car le modèle développé dans ce travail ne calcule pas l'évolution du champ de température.

1 - 3 APPROXIMATIONS DANS LES MODELES EXISTANTS

L'équilibre mécanique pouvant être considéré comme instantané, il est possible, à un instant donné, de calculer un écoulement stationnaire pour une géométrie et un champ de température transitoires.

Dans ce travail, nous nous intéresserons uniquement à la résolution des équations de l'équilibre mécanique. Le traitement du couplage thermo-mécanique a été effectué analytiquement par Fowler and Larson [1978, 1980]. Un traitement plus général de ce couplage dans le cas d'un écoulement plan a été effectué par Hutter [1982a, 1983], Morland [1984] et Morland and Smith [1984]. Le traitement mathématique du cas tridimensionnel a été effectué par Morland [1984], Hutter et Alts [1985] et par Hutter and Vulliet [1985] pour des glaciers à pentes fortes.

La résolution du système complet d'équations décrivant l'équilibre mécanique est complexe. Un certain nombre d'approximations ont été proposées pour simplifier ces équations. Ces approximations reposent toutes sur le fait qu'à l'échelle globale, les topographies (la base et la surface libre) varient lentement et que l'épaisseur de glace est petite par rapport à l'étendue du domaine dans la direction de l'écoulement. Le rapport d'aspect pour les calottes polaires, c'est à dire le rapport entre l'échelle verticale caractéristique et la longueur caractéristique, est donc petit. L'existence de ce petit paramètre a donné lieu à une panoplie d'approximations concernant l'écoulement de la glace dans les calottes polaires, allant de l'hypothèse la plus simple d'un écoulement laminaire quasi-unidimensionnel à l'analyse asymptotique élaborée de la couche mince. Dans le cadre de ces approximations, la résolution du problème mécanique se réduit à l'intégration d'une équation de diffusion non-linéaire pour l'évolution de la surface, le champ de vitesse étant alors uniquement fonction de la pente de la surface et de l'épaisseur de la glace.

Ce paragraphe se divise essentiellement en deux parties. Dans la première seront présentées des méthodes plus ou moins cohérentes permettant de supprimer certains termes dans les équations en se basant sur des considérations empiriques. Ces méthodes s'apparentent, avec un degré de complexité variable, à la théorie de l'écoulement laminaire. Leur degré de complexité est essentiellement lié à la plus ou moins bonne représentation des contraintes longitudinales. Dans la deuxième partie de ce paragraphe nous formulerons la généralisation au cas anisotrope d'une approche systématique appelée *approximation de la couche mince* [Hutter, 1981; Fowler et Larson, 1980; Morland, 1984]. Celle-ci est basée sur le développement en série de perturbation du rapport d'aspect. L'avantage de l'approximation de la couche mince par rapport aux autres approximations est de donner des expressions explicites des vitesses et des contraintes en fonction du profil et de la pente de la surface. Nous exposerons les solutions obtenues à l'aide de ces différentes approximations et en discuterons les limites d'application. Les résultats de ces deux approches ont des points communs, mais diffèrent essentiellement par l'estimation du degré de précision qu'elles contiennent. En effet, le développement à l'ordre supérieur dans l'approximation de la couche mince permet d'évaluer les termes négligés, ceci étant difficile dans le cas des méthodes "empiriques".

Une autre source importante de complexité réside dans la loi de comportement de la

glace. En effet, la prise en compte de l'anisotropie constatée dans le comportement des glaces polaires complique significativement la résolution du problème mécanique car elle nécessite l'introduction d'une matrice de viscosité dans la loi de comportement de la glace. C'est en particulier pour cette raison que l'approximation isotrope, qui ne fait intervenir qu'un scalaire dans la loi de comportement de la glace, a jusqu'à maintenant toujours été utilisée dans les modèles d'écoulement de la glace dans les calottes polaires. Des tentatives ont été effectuées pour prendre en compte l'anisotropie et plus généralement les propriétés mécaniques de la glace en introduisant un facteur multiplicatif ad-hoc dans la viscosité isotrope [Kostecka et Whillans 1988; Reeh et Paterson, 1988; Dahl-Jensen, 1989a; Schott et al., 1992]. Nous étudierons la validité de ces approches dans le chapitre 4 en nous appuyant sur les résultats obtenus à partir de l'approximation de la couche mince dans le cas anisotrope (paragraphe 1 - 3.4).

1 - 3.1 L'approximation isotrope

L'utilisation d'une loi de comportement isotrope simplifie les équations à résoudre, en particulier dans le cas d'un écoulement à déformation plane. En effet, dans ce cas, les composantes S'_{ij} du déviateur des contraintes sont respectivement proportionnelles à leur homologue D_{ij} , ce qui impose $S'_{yy} = D_{yy} = 0$. Toutes les composantes du taux de déformation et du déviateur des contraintes dépendant de y sont alors nulles. La trace du tenseur S' étant nulle, ceci impose:

$$S'_{zz} = -S'_{xx} \quad (1.20)$$

En introduisant (1.20) dans le système d'équation d'équilibre mécanique (1.19), celui-ci se réduit à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S'_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial S'_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La relation (1.7) est remplacée par une loi constitutive isotrope de la forme:

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= A_0 \exp\left(\frac{Q}{kT}\right) \omega(\tau_e^2) D_{xx}, \\ S'_{xz} &= A_0 \exp\left(\frac{Q}{kT}\right) \omega(\tau_e^2) D_{xz}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

où ω est une fonction non-linéaire du second invariant du tenseur des contraintes déviatoires [Morland, 1984]:

$$\tau_e^2 = 1/2 (S'^2_{xx} + S'^2_{xz}).$$

Une loi en puissance est généralement utilisée en glaciologie pour $\omega(\tau^2)$ mais de nombreuses études en laboratoire et sur le terrain [Hutter, 1983, chapitre 2] ont montré qu'une expression polynomiale représente mieux les données disponibles (cf. chapitre 2).

1 - 3.2 Déformation en cisaillement simple

1 - 3.2.a Ecoulement laminaire

Le schéma le plus simple pour décrire l'écoulement d'un glacier ou d'une calotte polaire est celui de l'écoulement laminaire. Cette notion a un sens un peu différent de celle utilisée habituellement en mécanique des fluides où elle est plutôt opposée à la notion d'écoulement turbulent [Lesieur, 1990]. En glaciologie, elle se rapproche de la notion d'écoulement quasi-unidimensionnel. Cette approximation consiste à considérer la glace comme un bloc à faces parallèles, dont la longueur est beaucoup plus grande que la hauteur, glissant sur un socle de pente uniforme γ (figure 1.4 avec $\alpha=0$). Le référentiel est choisi de telle sorte que l'axe x soit dans la direction de la pente du socle. Dans un bloc infini à faces parallèles, les contraintes sont indépendantes de la coordonnée horizontale x ; sur la figure 1.4, S est alors constant et égal à la pression hydrostatique (1.24). Les lignes de courant sont partout parallèles au socle et les conditions sont les mêmes dans toute section perpendiculaire à l'axe d'écoulement [Nye, 1952a].

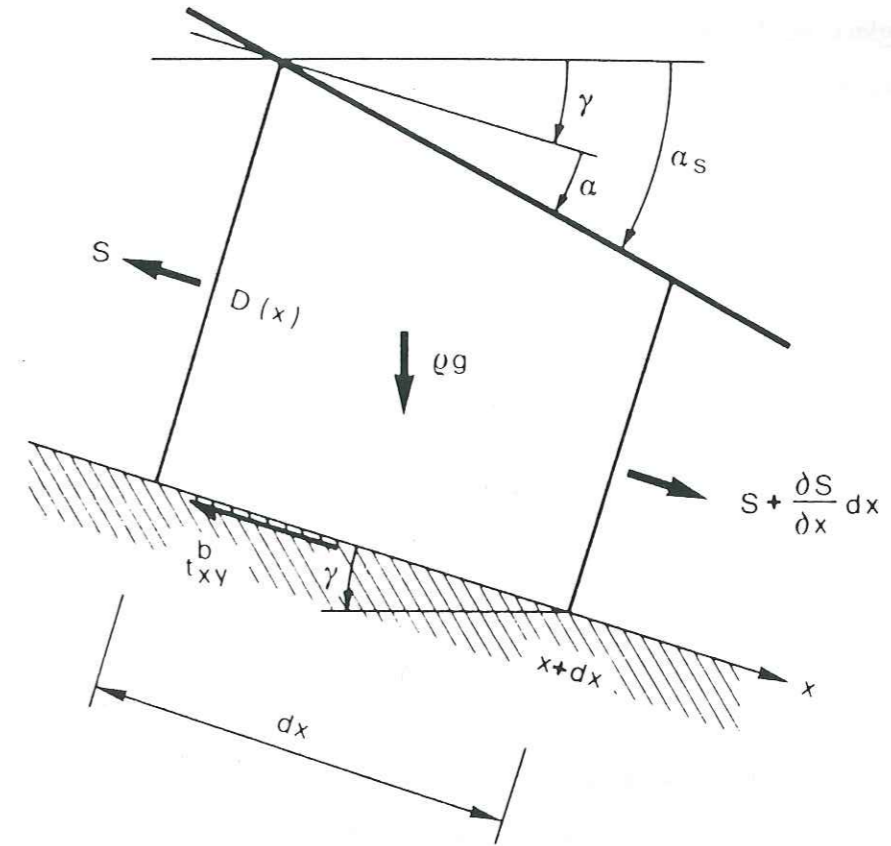


Fig. 1.4. Ecoulement d'un bloc de glace à faces quasi-parallèles (α petit) le long d'une pente inclinée d'un angle γ par rapport à l'axe horizontal. Dans le cas de l'approximation laminaire $\partial S/\partial x=0$ et S est égal à la pression hydrostatique [Hutter, 1983].

La contrainte de cisaillement à une profondeur $E-z$, dans le cadre de cette approximation, est obtenue directement en intégrant la première équation d'équilibre quasi-statique [Nye, 1952a]:

$$S'_{xz} = -(z-E) \sin \gamma. \quad (1.23)$$

La contrainte verticale, obtenue à partir de la deuxième équation de conservation de la quantité de mouvement, est la somme de la pression atmosphérique et du poids de la colonne de glace au-dessus du point considéré:

$$\sigma_{zz} = (z-E) \cos \gamma - p_{atm}. \quad (1.24)$$

L'équation (1.23) exprime le fait que le frottement à la base compense exactement l'effet de la gravité. La glace se déforme en cisaillement simple (seules les composantes S'_{xz} et D_x du déviateur des contraintes et des vitesses de déformation sont non nulles) et s'écoule ainsi selon la ligne de plus grande pente. Cette solution est encore valable dans le cas où la surface du bloc n'est pas exactement parallèle au socle (figure 1.4 avec $S=\sigma_{zz}$), pour des faibles inclinaisons du socle et de la surface [Nye, 1952b]. Une étude plus poussée, incluant le calcul de la température dans le cas du glissement d'un bloc de glace à faces parallèles a été menée par Hutter [1983].

Si, pour calculer les vitesses, on les suppose indépendantes de x , il est nécessaire d'omettre l'accumulation et l'ablation pour assurer la compatibilité avec les conditions aux limites du problème général. Cette hypothèse n'est donc pas applicable aux calottes polaires car l'accumulation joue un rôle important dans la dynamique des calottes polaires [Hutter et al., 1981]. Dans le cas où seules les contraintes sont supposées indépendantes de x , les déformations verticales et longitudinales sont constantes et égales, et la présence d'une vitesse verticale de surface permet l'inclusion d'une accumulation constante [Nye, 1957]. Mais la solution trouvée viole la loi classique de glissement liant la vitesse sur le socle à la contrainte basale pour des calottes terrestres [Hutter, 1983], ce qui rend son utilisation douteuse. Les problèmes rencontrés pour calculer le champ de vitesse rendent nécessaire l'élaboration d'une solution plus complexe pour décrire l'écoulement de la glace dans les calottes polaires.

1 - 3.2.b Cisaillement simple et approximation hydrostatique

Les glaciers et les calottes polaires ne sont que très approximativement assimilables à un bloc à faces parallèles; il est donc nécessaire de tenir compte des variations de la géométrie. Une analyse similaire à la précédente, dans le cas d'une géométrie variable, consiste à supposer que la glace polaire se déforme en cisaillement simple (1.23) sous l'effet de son propre poids (1.24). On exploite toujours le fait que le rapport d'aspect pour les calottes polaires est petit; il est donc supposé que les gradients horizontaux des contraintes déviatoires sont faibles par rapport aux gradients verticaux de ces mêmes contraintes. La contrainte verticale σ_{zz} est alors égale à la pression hydrostatique, les contraintes longitudinales déviatoires étant négligées. La contrainte

de cisaillement obtenue à partir de la première équation quasi-statique (1.19.a) est:

$$S'_{xz} = -(E-z) \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (1.25)$$

L'existence du petit rapport d'aspect et le fait qu'en cisaillement simple, les vitesses sont presque parallèles à la surface permet de négliger le gradient horizontal de la vitesse verticale par rapport à la variation verticale de la vitesse horizontale. La contrainte de cisaillement s'exprime alors:

$$S'_{xz} = M_{xxxz} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1.26)$$

où M_{xxxz} est égal à la viscosité isotrope η_0 si l'on considère une loi de comportement isotrope. En introduisant (1.26) dans (1.25) et en intégrant (1.25) par rapport à z , on obtient directement la vitesse horizontale.

Dans cette solution, les contraintes déviatoires longitudinales et la composante verticale de la vitesse sont nulles. Cette approximation a été utilisée entre autres par Budd et al. [1971] et par Mahaffy [1976] dans un modèle numérique tridimensionnel ayant pour but de calculer l'évolution de la surface libre d'une calotte polaire. Mahaffy [1976] remarque que l'omission des déformations longitudinales limite significativement le choix de la loi de glissement de la glace sur le socle. Au voisinage d'un dôme, cette approximation est évidemment inapplicable, la contrainte de cisaillement et la composante horizontale de la vitesse étant pratiquement nulles. Il en est de même près des marges où les gradients horizontaux deviennent prépondérants. De plus, même si la vitesse verticale est inférieure d'un ordre de grandeur à la vitesse horizontale loin du dôme, elle n'en est pas moins significative pour l'écoulement. Elle est en particulier indispensable pour le calcul de l'âge de la glace comme nous le verrons au chapitre 6. Les limites de cette approximation rendent nécessaire l'élaboration d'une solution prenant en compte les effets des déformations longitudinales.

1 - 3.3 Prise en compte du déviateur des contraintes longitudinales

L'intérêt porté aux variations des taux de déformations longitudinales est né du désaccord qui apparaît quand on essaie d'utiliser la formule (1.25) pour le cisaillement basal afin d'obtenir l'épaisseur de glace à partir de mesures sur les inclinaisons de la surface. Orowan [1949] a été le premier à mettre en valeur l'importance des contraintes longitudinales. Si les approximations précédentes fournissent une première estimation de l'écoulement, elle ne permettent pas de mettre en évidence la répercussion de la topographie du lit rocheux sur celle de surface libre, comme le montrent les données empiriques. Pour reproduire cette corrélation, il est nécessaire de prendre en compte les contraintes longitudinales. De plus lors de rapides extensions du glacier, comme dans le cas d'un "surge", ou dans le voisinage d'un dôme, les gradients de la contrainte longitudinale deviennent comparables ou supérieurs à ceux de la contrainte de cisaillement [Mc Meeking et Johnson, 1985].

1 - 3.3.a Effets de l'ondulation du socle sur un écoulement quasi-laminaire

Une première estimation de l'effet des déformations longitudinales peut être obtenue en représentant grossièrement la topographie du socle et de la surface libre par des ondulations autour de la direction correspondant à l'inclinaison moyenne du socle. Il est clair que dans ce cas, les contraintes ne sont pas indépendantes de x et que la théorie d'écoulement laminaire n'est plus applicable. Dans le cadre de cette approximation, le glacier est considéré comme un bloc de glace infini dans la direction de l'écoulement. A cette échelle, l'inclinaison moyenne de la surface et du socle ont la même direction et les variations du socle et de la surface libre par rapport aux surfaces moyennes sont considérées comme petites devant l'épaisseur H du bloc de glace (figure 1.5a). On peut donc écrire:

$$B(x) = \epsilon_b \Lambda(x), \quad (1.27)$$

où $\Lambda(x)$ est une fonction de l'ordre de l'unité et ϵ_b représente le rapport entre l'amplitude des ondulations basales et l'épaisseur de glace. En introduisant (1.27) dans (1.18) et (1.19) et en

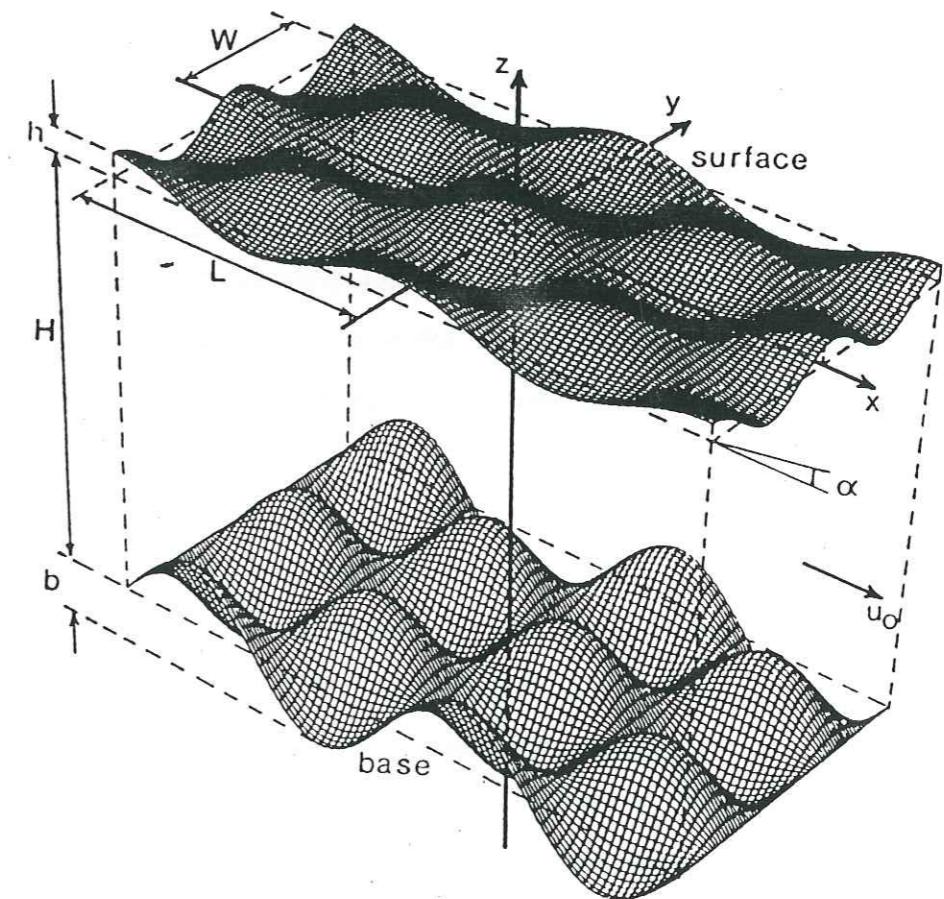
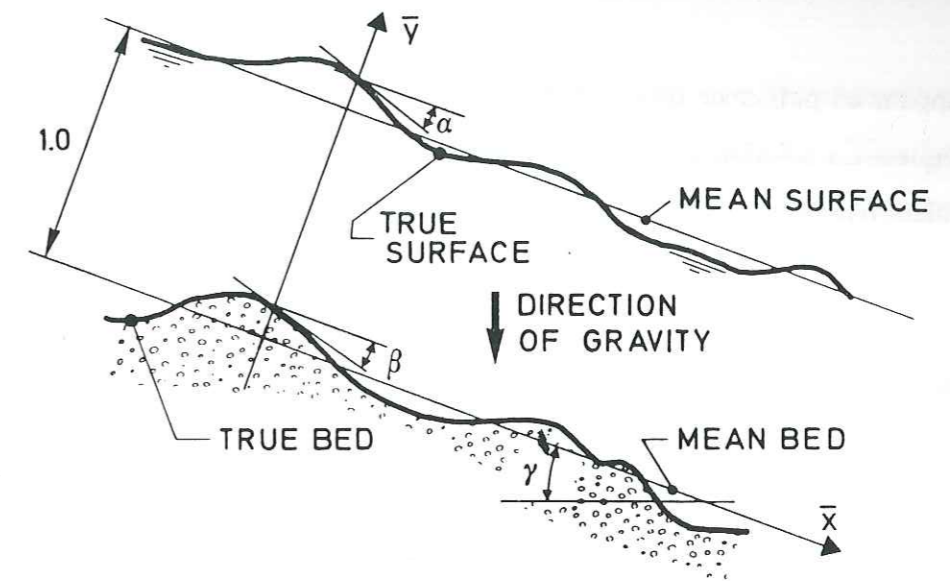


Fig. 1.5. a) Ecoulement bidimensionnel d'un bloc de glace à faces presque parallèles [Hutter, 1983], l'inclinaison moyenne du socle et de la surface est γ , l'amplitude des ondulations de la surface et du socle sont supposées petites, b) Ecoulement tridimensionnel d'un bloc de glace de direction moyenne u_0 entre des surfaces limites supérieures et inférieures ondulant faiblement [Reeh, 1987].

développant en puissance de ϵ_b , on trouve une série de solutions approchées des équations mécaniques. La solution à l'ordre 0 correspond à celle de l'écoulement laminaire pour une accumulation nulle.

Une analyse mathématique de ce problème a été élaborée par Yosida [1964] et Budd [1970b, 1971], le premier considérant le cas d'un fluide Newtonien avec une condition de non glissement à la base, le second prenant en compte le comportement non linéaire de la glace et permettant un glissement parfait. Cette analyse a été revue d'une manière critique par Hutter et al. [1981], qui appliquent de manière systématique une théorie de perturbation à un écoulement bidimensionnel stationnaire à faces presque parallèles avec une loi de glissement dépendant du frottement à la base. Whillans and Johnsen [1983], s'appuyant sur une théorie très similaire à celle développée par Hutter et al. [1981] et utilisant une loi de comportement Newtonienne, intègrent mathématiquement les effets des variations longitudinales en séparant les contraintes et les taux de déformations en composantes intégrées et variationnelles. Dans leur analyse, Hutter et al. [1981] mettent en évidence le transfert des ondulations du socle à la surface, c'est à dire le rapport des oscillations trouvées à la surface sur celles du socle. Généralement, la fonction de transfert augmente avec la longueur d'onde des ondulations. Ils montrent que dans le cas d'ondulations sinusoïdales du socle, la transmission de ces ondulations à la surface du glacier dépend fortement de l'inclinaison moyenne du bloc de glace et qu'aucune longueur d'onde ne permet un transfert maximum, même si, pour des inclinaisons et des vitesses de glissement bien précises, des longueur d'ondes λ (exprimées en épaisseur de glace) telles que $3 < \lambda < 5$ donnent un transfert maximum. Nous verrons au chapitre 4 (paragraphe 4 - 3), en utilisant un modèle sans approximation sur les équations mécaniques, que cette fonction de transfert est modifiée par la prise en compte du comportement anisotrope de la glace.

Reeh [1987] étend cette théorie de perturbation à un écoulement tridimensionnel avec une loi de comportement Newtonienne et une condition de non-glissement à la base. Son but est d'évaluer en quoi les résultats de la théorie de perturbation à deux dimensions peut être modifiée par une longueur d'onde transversale finie des ondulations basales (cf. figure 1.5b). Son étude montre que lorsque la longueur d'onde transversale des ondulations basales est 2 à 3 fois plus grande que leur longueur d'onde dans la direction de l'écoulement, la valeur de la longueur

d'onde transversale de ces ondulations n'a que très peu d'influence sur l'écoulement, qui peut alors être considéré avec une bonne approximation comme bidimensionnel. Mais lorsque le rapport entre les longueurs d'onde longitudinales et transverses augmente, les effets tridimensionnels deviennent significatifs.

Un problème inhérent à cette méthode est que la distribution des contraintes au premier ordre dépend significativement de la loi de glissement utilisée. Etant donné l'incertitude sur la forme à adopter pour la loi de glissement, l'estimation des effets des déformations longitudinales sur la contrainte de cisaillement basale est difficile [Hutter et al., 1981]. La limite de validité de ce schéma de perturbation dépend de l'inclinaison du bloc de glace. Typiquement, les longueurs d'onde des ondulations ne doivent pas être inférieures à l'épaisseur de glace, et, dans le cas de blocs de glace de faible inclinaison, ne peuvent être inférieures à trois épaisseurs de glace. Il semble donc être mal adapté aux très faibles pentes car alors, les perturbations de la contrainte de cisaillement basale atteignent des valeurs grandes comparées aux valeurs de l'ordre 0. La prise en compte de la solution du second ordre pour le cas bidimensionnel avec une viscosité linéaire réduit substantiellement ce problème. La complexité de cette analyse, ces limitations et la représentation peu réaliste d'une calotte dont le socle et la surface seraient presque parallèles, rend nécessaire une approche différente pour étudier ces problèmes d'irrégularité du socle, qui permette un calcul plus simple des variables mises en jeu. Une telle analyse est présentée au paragraphe 1 - 3.4.

1 - 3.3.b Couplage des gradients de contrainte dans l'écoulement

L'approximation laminaire ou quasi-laminaire n'est que très grossièrement correcte car l'épaisseur de glace dans les calottes polaires peut atteindre plus de 3000 m à l'intérieur et est égale à zéro sur les cotés. Plusieurs méthodes ont été élaborées pour prendre en compte les déformations longitudinales dans une calotte à géométrie variable. Lliboutry [1958] a utilisé un terme de correction dans la formule (1.25), mais ne l'a pas calculé rigoureusement. Une analyse critique de ces travaux est effectuée par McMeeking et Johnson [1985] et par Kamb [1986]. Nye [1969], Collins [1968], puis Budd [1970a] ont calculé une expression pour S'_{xz} qui tient compte

de l'effet des contraintes longitudinales en dérivant (1.19c) par rapport à x et (1.19a) par rapport à z et en faisant la différence de ces deux expressions, puis en intégrant deux fois en z cette différence, ce qui donne:

$$S'_{xz} = \frac{\partial E}{\partial x}(z-E) - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_E^z S'_{xx} dz' \right) + \int_E^z \int_E^{z'} \frac{\partial^2 S'_{xz}}{\partial x^2} dz' dz'' \quad (1.28)$$

Il faut noter que cette expression n'est valable que pour des faibles pentes du socle et de la surface, pour des faibles variations longitudinales de la pente de la surface et donc pour des faibles gradients de contraintes. La formule exacte d'équilibre longitudinale, établie par Kamb [1986] contient en plus un terme de "courbure longitudinale" et un terme de "frottement basal" dans le cas d'un glissement à la base. Kamb [1986] et Kamb et Echelmeyer [1986b] ont évalué l'ordre de grandeur de ces deux termes supplémentaires pour certaines situations de terrain. Le premier terme est négligeable dans la majorité des situations (sauf pour les chutes de glace), le second l'est lorsque les quantités sont moyennées sur une épaisseur de glace.

Différentes méthodes et approximations ont été faites pour calculer les deux derniers termes du second membre de l'équation (1.28). D'après Budd [1971], le dernier terme de l'équation (1.28) est négligeable si les quantités sont moyennées sur une distance d à peu près 4 épaisseurs de glace. Malgré une erreur dans l'analyse de Budd [1971], mise en évidence par Hutter et al [1981], Kamb et Echelmeyer [1986b] sont arrivés à une estimation comparable de la contribution de ce terme. L'effet le plus important de ce terme sur la contrainte basale a lieu pour de courtes longueurs d'onde ($\lambda \leq 2,5H$) [Kamb et Echelmeyer, 1986b]. Ce terme peut être négligé à un niveau de précision de l'ordre de 10% sur l'écoulement. Dans le cas de faibles longueurs d'onde la prise en compte de ce terme modifie significativement l'influence des valeurs locales de l'épaisseur et de la pente de la surface sur l'écoulement. On peut noter ici qu'il n'est pas possible de négliger ce terme si l'on veut pouvoir prendre en compte des variations du socle significatives sur une échelle de l'ordre de 5 km, comme c'est le cas par exemple sur la ligne de courant GRIP-GISP2. La figure 1.6 représente les topographies de la surface et du socle déterminées par écho-sondage [Jacobel et Hodge, 1995]. Entre 0 et 5 km il y a une variation

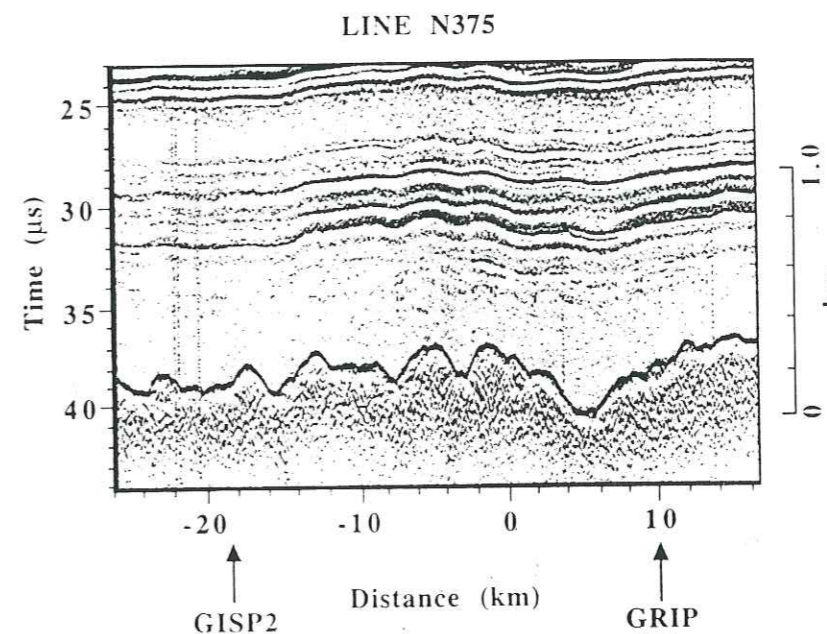
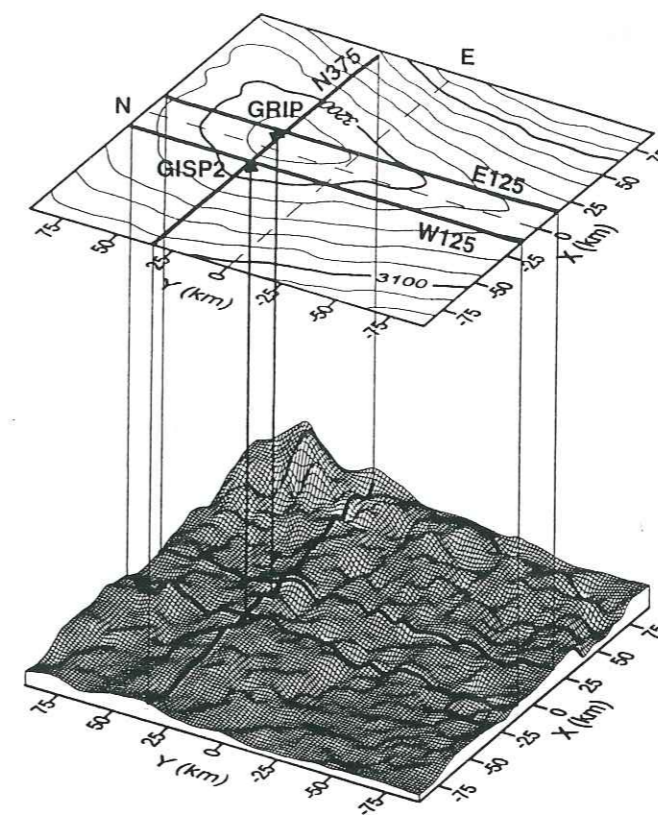


Fig. 1.6. a) Carte de la région centrale du Groenland montrant les courbes de niveau de la surface et de la topographie du socle ainsi que les lieux de forage GRIP et GISP2 [Jacobel et Hodge, 1995], b) Profil radar du temps de trajet aller et retour en fonction de la distance le long de la ligne N375; la ligne noire dans la partie inférieure de la figure représente la surface du lit rocheux.

significative de la topographie du socle d'à peu près 300 m, c'est à dire de 10% de l'épaisseur de glace.

Le deuxième terme, appelé parfois "force longitudinale", a été utilisé pour calculer la contrainte de cisaillement basale par Shumskiy [1961, 1963, 1967], Robin [1967] et Budd [1968, 1969]. Pour une loi de puissance $n=3$, les effets dus aux gradients de contraintes longitudinales sur le couplage sont notablement plus marqués que dans le cas Newtonien [Kamb et Echelmeyer, 1986a]. L'évaluation de ce terme est difficile car elle nécessite la détermination de la contrainte longitudinale S'_{xx} . Celle-ci est souvent remplacée arbitrairement par sa valeur moyenne sur l'épaisseur de glace. De plus, cette valeur moyenne est souvent calculée en supposant que le taux de déformation longitudinal est indépendant de la profondeur [Nye, 1957; MacAyeal et al., 1987], ce qui est évidemment faux. La valeur moyenne de la contrainte longitudinale a couramment été calculée en supposant que cette valeur était liée à la déformation longitudinale en surface D_{xx}^S par la loi de comportement suivante [Paterson, 1981]:

$$D_{xx}^S = A S_{xx}^{\bar{n}} \quad (1.29)$$

où A et n sont des constantes phénoménologiques. Cette méthode est utilisée entre autre par Van der Veen et Whillans [1992] pour déterminer le centre de l'écoulement d'une calotte polaire (la position du dôme) à partir de mesures de taux de déformation à la surface. Mais une telle relation est donnée *a priori* et l'existence d'une loi liant la déformation longitudinale en surface à la valeur moyenne de la contrainte déviatoire longitudinale est douteuse.

1 - 3.3.c Prise en compte de la valeur moyenne des contraintes longitudinales

D'autres hypothèses sans fondement réel sont utilisées pour incorporer les effets d'étirement longitudinaux. Il est possible, par exemple, de ne retenir que la valeur moyenne des contraintes longitudinales dans la loi de comportement tout en négligeant le gradient longitudinal de cette contrainte dans les équations d'équilibre quasi-statique. Alley and Whillans [1984] négligent les deux derniers termes de l'équation (1.28) dans l'expression de la contrainte de

cisaillement, mais prennent en compte S'_{xx} en le remplaçant par sa valeur moyenne dans la loi de comportement isotrope (1.22); la fonction A est remplacée par sa valeur moyenne, \bar{A} sur l'épaisseur de glace:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \bar{A} (\bar{S}_{xx}'^2 + S_{xz}'^2) \bar{S}_{xx}', \\ D_{xz} &= \bar{A} (\bar{S}_{xx}'^2 + S_{xz}'^2) S_{xz}'. \end{aligned} \quad (1.30)$$

En intégrant verticalement le système d'équation (1.30) et l'équation de continuité, ils obtiennent une équation pour \bar{S}'_{xx} et pour l'évolution de l'élévation de la surface E . Van der Veen [1985] et Huybrechts [1990a] introduisent les valeurs moyennes des contraintes longitudinales dans la loi de comportement par une procédure itérative dans la zone de transition entre l'ice-shelf et la calotte respectivement dans un modèle bidimensionnel et tridimensionnel. Mais, dans ce cas, la validité des hypothèses utilisées et leurs conséquences sont extrêmement difficiles à évaluer, ce qui rend l'interprétation des résultats peu crédible.

1 - 3.4 L'approximation de la couche mince

La difficulté d'évaluation des termes à négliger dans l'équation (1.28) nécessite un traitement cohérent de l'écoulement de la glace au moyen d'une analyse d'échelle appropriée des équations du fluide et des conditions aux limites permettant l'estimation de l'importance des paramètres mis en jeu, et conduisant ainsi à des simplifications systématiques. Un développement en série de perturbation du rapport d'aspect ϵ permet de prendre en compte les effets non-intégrés des contraintes longitudinales et d'évaluer explicitement l'ordre de grandeur des termes négligés [Hutter, 1981, 1983]. Cette méthode a été largement utilisée dans les autres branches de la mécanique des fluides, entre autre dans le but de résoudre les équations *shallow water* dans la théorie des ondes de gravité de surface [Friedrichs, 1948; Keller, 1948] et dans la théorie des films fins liquides [Benney, 1966]. Elle a été introduite dans l'étude de l'écoulement des calottes polaires par Hutter [1981] et d'une manière légèrement différente par Fowler et Larson [1980]. Depuis, elle est utilisée dans la plupart des travaux de modélisation de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires. Cette approximation n'a jusque là été formulée que dans le cas d'une

loi de comportement isotrope. Nous établirons dans ce paragraphe les premiers ordres de l'approximation de la couche mince dans le cas plus général d'une loi de comportement anisotrope.

1 - 3.4.a Formulation dans le cas isotherme, stationnaire et anisotrope

La variation lente de la géométrie de la calotte glaciaire et de la topographie moyenne du socle suggère le recours à une dilatation de coordonnées de manière à ce que la variation de la surface dans la direction horizontale ($\partial E/\partial x$) dans les nouvelles coordonnées soient $\mathcal{O}(1)$:

$$X = \varepsilon x, \quad Z = z, \quad (1.31)$$

où ε est le rapport d'aspect [Hutter, 1981]:

$$\varepsilon = [d]/[L], \quad (1.32)$$

$[d]$ étant la hauteur moyenne définie dans la nondimensionnalisation précédente et $[L]$ une longueur représentative de l'étendue de la calotte. Des valeurs caractéristiques de ε sont, pour l'Antarctique 10^{-3} et pour le Groenland 5.10^{-3} [Paterson, 1994]. Les champs sont alors supposés varier lentement avec la coordonnée horizontale x ($\psi = \psi(\varepsilon x, z)$). Une analyse d'échelle conduit à l'introduction d'un changement de variables pour les deux composantes du champ de vitesse [Hutter, 1983; Morland, 1984]:

$$U = \varepsilon u_x, \quad W = u_z. \quad (1.33)$$

Les champs U, W sont ainsi $\mathcal{O}(1)$ car nous avons nondimensionnalisé les vitesses avec une valeur caractéristique de l'accumulation. La transformation $U = u_x, W = u_z/\varepsilon$ peut aussi être utilisée [Hutter, 1981] dans le cas où les vitesses sont dimensionnées par une vitesse horizontale caractéristique. On peut remarquer que p est $\mathcal{O}(1)$ de par la dimensionnalisation des contraintes (1.17).

Ce changement de variable est alors introduit dans les équations (1.18) - (1.19) et (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Z} &= 0, \\ \varepsilon \left(-\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial S'_{xx}}{\partial X} \right) + \frac{\partial S'_{xz}}{\partial Z} &= 0, \\ \varepsilon \frac{\partial S'_{xz}}{\partial X} - \frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{\partial S'_{zz}}{\partial Z} - 1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} S'_{xz}(1 - \varepsilon^2 \Gamma^2) &= \varepsilon \Gamma (S'_{xx} - S'_{zz}), \\ (1 - \varepsilon^2 \Gamma^2) p &= S'_{zz} - \varepsilon^2 \Gamma^2 S'_{xx}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

où $\frac{\partial E}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial X} = \varepsilon \Gamma$ et où on a fait le changement de variable $p' = p - p_{atm}$ en omettant le ' de p' pour plus de simplicité dans l'écriture. Dans l'équation (1.34.b), le gradient horizontal de la pression doit être équilibré par le gradient vertical de la contrainte de cisaillement, ce qui donne l'ordre de grandeur de S'_{xz} . En effet, la pression étant de l'ordre de l'unité (1.34c), S'_{xz} doit être de l'ordre de ε . L'ordre de grandeur requis est alors obtenu en utilisant la loi de comportement (1.7) avec le changement de variable:

$$\bar{M}_{ijkl} = \frac{M_{ijkl}}{\varepsilon^2}. \quad (1.36)$$

Cette transformation est valable pour des lois constitutives à viscosité finie, et en particulier pour la loi (2.8) que nous utilisons, où, dans le domaine de contrainte considéré, les contributions des viscosités relatives à un exposant $n=1$ et $n=3$ sont du même ordre (cf. chapitre 2). Dans le cas d'une loi en puissance avec un exposant n on doit faire la transformation $\bar{M}_{ijkl} = M_{ijkl}/\varepsilon^{n+1}$ [Hutter, 1983]. Il a été montré, dans le cas isotrope, que la solution par perturbation obtenue à partir de l'approximation de la couche mince n'est pas définie dans le cas d'une loi de comportement en puissance alors qu'elle l'est pour une loi de viscosité finie [Hutter, 1983]. En

effet, pour une loi de puissance $n > 1$, l'approximation donne une pente infinie de la surface au dôme [Morland et Johnson, 1980; Hutter et al., 1986; Fowler, 1992; Hindmarsh et al., 1989].

Comme nous le verrons en détail dans le chapitre 2, seules les composantes M_{xxxx} , M_{zzzz} , M_{zzxz} , M_{zzzx} et M_{xxzz} de la matrice des viscosités sont non nulles. Pour plus de clarté dans l'écriture, nous introduisons le facteur dépendant de la température A (1.3) dans la viscosité en faisant le changement de variable $M_{ijkl} = A M_{ijkl}$. En utilisant (1.36), la loi de comportement (1.7) devient:

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= \varepsilon^2 \bar{M}_{xxxx} \frac{\partial U}{\partial X} + \varepsilon^2 \bar{M}_{xxzz} \frac{\partial W}{\partial Z}, \\ S'_{zz} &= \varepsilon^2 \bar{M}_{zzzz} \frac{\partial U}{\partial X} + \varepsilon^2 \bar{M}_{zzxz} \frac{\partial W}{\partial Z}, \\ S'_{xz} &= \varepsilon \bar{M}_{zzxz} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} + \varepsilon^2 \frac{\partial W}{\partial X} \right). \end{aligned} \quad (1.37)$$

A priori, on ne peut pas introduire de facteur d'échelle lié à l'anisotropie, car les viscosités sont toutes égales en surface (glace isotrope) et sont du même ordre de grandeur dans la moitié supérieure de la calotte. Si l'on introduit un facteur d'échelle de l'ordre de ε entre la viscosité "en cisaillement" M_{xxz} et les viscosités "longitudinales" pour prendre en compte le fait que la glace anisotrope est plus facile à déformer en cisaillement qu'en compression ou traction (cf. chapitre 2), on obtient la relation suivante:

$$\begin{aligned} M_{zzxz} &= \varepsilon^3 \bar{M}_{zzxz}, \\ M_{zzzx} &= \varepsilon^2 \bar{M}_{zzzx}, \\ M_{zzxz} &= \varepsilon^2 \bar{M}_{zzxz}, \end{aligned} \quad \text{avec } i=x,z \text{ et } j=x,z.$$

Ce changement de variable donne le même développement de la couche mince à l'ordre 0 que celui que nous utilisons (1.36). Une autre analyse d'échelle, distinguant le facteur d'échelle lié à l'anisotropie et celui lié à la géométrie de la calotte donne aussi les mêmes résultats à l'ordre 0 [Salamatin, communication personnelle].

On développe les champs en série de perturbations en puissances de ε [Hutter, 1983].

$$(P, U, W, E) = \sum \varepsilon^j (P^{(j)}, U^{(j)}, W^{(j)}, E^{(j)}). \quad (1.38)$$

En injectant (1.38) dans (1.37) et en ne retenant que les termes d'ordre inférieur ou égal à trois en ε on obtient le développement:

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= \varepsilon^2 \bar{M}_{xxxx} \left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial X} + \varepsilon \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X} \right) + \varepsilon^2 \bar{M}_{xxzz} \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial Z} + \varepsilon \frac{\partial W^{(1)}}{\partial Z} \right), \\ S'_{zz} &= \varepsilon^2 \bar{M}_{zzzz} \left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial X} + \varepsilon \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X} \right) + \varepsilon^2 \bar{M}_{zzxz} \left(\frac{\partial W^{(0)}}{\partial Z} + \varepsilon \frac{\partial W^{(1)}}{\partial Z} \right), \\ S'_{xz} &= \varepsilon \bar{M}_{zzxz} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial Z} + \varepsilon \frac{\partial U^{(1)}}{\partial Z} + \varepsilon^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial Z} + \varepsilon^2 \frac{\partial W^{(0)}}{\partial X} \right). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Les contraintes déviatoires étant d'ordre inférieur ou égal à ε , nous les développerons de la manière suivante:

$$\begin{aligned} S'_{xz} &= \varepsilon \left(S'^{(0)}_{xz} + \varepsilon S'^{(1)}_{xz} + \varepsilon^2 S'^{(2)}_{xz} \right), \\ S'_{xx} &= \varepsilon \left(S'^{(0)}_{xx} + \varepsilon S'^{(1)}_{xx} + \varepsilon^2 S'^{(2)}_{xx} \right), \\ S'_{zz} &= \varepsilon \left(S'^{(0)}_{zz} + \varepsilon S'^{(1)}_{zz} + \varepsilon^2 S'^{(2)}_{zz} \right). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Il faut noter que la condition aux limites (1.35) doit être exprimée sur la surface libre, c'est à dire en $z=E=E^{(0)}+\varepsilon E^{(1)}+\varepsilon^2 E^{(2)}$. Les champs $f(\varepsilon x, E^{(0)}+\varepsilon E^{(1)}+\varepsilon^2 E^{(2)})$ intervenant dans cette condition aux limites doivent donc être développés en:

$$f(\varepsilon x, E) = f(\varepsilon x, E^{(0)}) + \varepsilon E^{(1)} \frac{\partial f}{\partial z}(\varepsilon x, E^{(0)}) + \varepsilon^2 E^{(2)} \frac{\partial f}{\partial z}(\varepsilon x, E^{(0)}) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 E^{(1)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\varepsilon x, E^{(0)}).$$

1 - 3.4.b Développement à l'ordre 0, 1 et 2

En introduisant (1.38) et (1.40) dans (1.34) et (1.35), nous obtenons les systèmes d'équations à l'ordre 0, 1 et 2:

A l'ordre 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial X} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial Z} &= 0, & S'_{xx}{}^{(0)} &= 0, \\ -\frac{\partial P^{(0)}}{\partial X} + \frac{\partial S'_{xz}{}^{(0)}}{\partial Z} &= 0, & S'_{zz}{}^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial P^{(0)}}{\partial Z} &= -1, & S'_{xz}{}^{(0)} &= \bar{M}_{xzzz} \frac{1}{2} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

avec comme conditions à la surface:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{xzzz} \frac{1}{2} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial Z} &= 0, \\ P^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

A l'ordre 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial Z} &= 0, & S'_{xx}{}^{(1)} &= \bar{M}_{xxxx} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial X} + \bar{M}_{xzzz} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial Z} \\ -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial X} + \frac{\partial S'_{xz}{}^{(1)}}{\partial Z} &= 0, & S'_{zz}{}^{(1)} &= \bar{M}_{zzxx} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial X} + \bar{M}_{zzzz} \frac{\partial W^{(0)}}{\partial Z} \\ \frac{\partial P^{(1)}}{\partial Z} &= 0, & S'_{xz}{}^{(1)} &= \bar{M}_{xzzz} \frac{1}{2} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial Z} \end{aligned} \quad (1.43)$$

avec comme conditions à la surface:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{xzzz} \frac{1}{2} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial Z} &= 0 \\ P^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

En intégrant (1.43c), avec la condition aux limites (1.44b), on obtient $P^{(1)}=0$, ce qui conduit, en intégrant (1.43b)₁, (1.43c)₂ et (1.43a) à $S'_{xz}{}^{(1)} = U^{(1)} = W^{(1)} = 0$. La solution à l'ordre 1 est donc identiquement nulle sauf pour les contraintes longitudinales.

A l'ordre 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X} + \frac{\partial W^{(2)}}{\partial Z} &= 0, & S'_{xx}{}^{(2)} &= \bar{M}_{xxxx} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X} + \bar{M}_{xzzz} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial Z}, \\ -\frac{\partial P^{(2)}}{\partial X} + \frac{\partial S'_{xx}{}^{(1)}}{\partial X} + \frac{\partial S'_{xz}{}^{(2)}}{\partial Z} &= 0, & S'_{zz}{}^{(2)} &= \bar{M}_{zzxx} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X} + \bar{M}_{zzzz} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial Z}, \\ \frac{\partial S'_{xz}{}^{(0)}}{\partial X} - \frac{\partial P^{(2)}}{\partial Z} + \frac{\partial S'_{zz}{}^{(1)}}{\partial Z} &= 0, & S'_{xz}{}^{(2)} &= \bar{M}_{xzzz} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial Z} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial X} \right), \end{aligned} \quad (1.45)$$

avec comme conditions à la surface, en utilisant le fait que la solution d'ordre 1 est identiquement nulle, en $z=E^{(0)}+\varepsilon^2 E^{(2)}$ et en tenant compte de (1.42):

$$\begin{aligned} S'_{xz}{}^{(2)} - \Gamma^{(0)} (S'_{xx}{}^{(1)} - S'_{zz}{}^{(1)}) + \frac{\partial S'_{xz}{}^{(0)}}{\partial Z} E^{(2)} &= 0, \\ P^{(2)} + \frac{\partial P^{(0)}}{\partial Z} E^{(2)} &= S'_{zz}{}^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\text{où } \Gamma^{(0)} = \frac{\partial E^{(0)}}{\partial X}.$$

1 - 3.4.c Solution à l'ordre 0

En intégrant (1.41.c)₁ avec la condition aux limites (1.42.b) on obtient:

$$P^{(0)} = E^{(0)} - Z. \quad (1.47)$$

L'intégration de (1.41.b)₁ avec la condition aux limites (1.42.a) donne directement la contrainte de cisaillement qui correspond à la formule classique (1.25) trouvée avec les autres méthodes:

$$S'_{xz}{}^{(0)} = -\Gamma^{(0)} (E^{(0)} - Z). \quad (1.48)$$

On peut remarquer qu'à l'ordre 0 les contraintes de cisaillement sont les mêmes dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope. Il faut aussi noter que d'après (1.41), $S'_{xx}{}^{(0)} = S'_{zz}{}^{(0)} = 0$, résultat

similaire à ceux des approximations présentées précédemment. En intégrant (1.41.c)₂ selon z à partir du socle où la vitesse de glissement est spécifiée, on obtient:

$$U^{(0)}(X, Z) = U^{(0)}(X, B) - \int_B^Z \frac{2\Gamma^{(0)}}{M_{xxx}} (E^{(0)} - z) dz. \quad (1.49)$$

L'équation de continuité (1.41a)₁ permet de calculer W en intégrant de nouveau par rapport à z à partir du socle:

$$W^{(0)}(X, Z) = W^{(0)}(X, B) - \int_B^Z \frac{\partial U^{(0)}}{\partial X} dz. \quad (1.50)$$

Comme nous l'avons remarqué la solution (1.48) déduite de l'ordre 0 de l'approximation de la couche mince pour une pente uniforme correspond à celle trouvée en utilisant l'hypothèse d'écoulement laminaire (1.23) avec le changement de référentiel $\sin \gamma = I$ et à celle trouvée dans l'approximation de cisaillement simple avec l'hypothèse hydrostatique (1.25). La vitesse horizontale obtenue est donc la même. Mais, à la différence de la solution exacte de l'écoulement laminaire, l'approximation de la couche mince donne une vitesse verticale non nulle. On peut noter que dans le cadre de cette solution utilisée dans une géométrie 3D, les lignes d'écoulement doivent être orthogonales aux courbes de niveau de la surface libre et cela en chaque point de la ligne verticale. La couche mince n'est plus adaptée dans les cas où les observations indiquent une direction différente.

La solution d'ordre 0 pour un écoulement plan, stationnaire, isotherme et isotrope de la glace dans les calottes terrestres a été présentée par Morland and Johnson [1980, 1982], pour des inclinaisons moyennes du socle abruptes ou faibles. Aussi bien dans le cas isotherme [Morland and Johnson, 1980, 1982] que pour une température prescrite [Morland and Smith, 1984], le problème se réduit à une équation différentielle du second ordre pour le profil de la surface sur un lit de faible inclinaison. Pour une hauteur donnée, les relations à l'ordre le plus bas se réduisent donc à un système d'équations différentielles aux dérivées partielles pour les deux composantes des vitesses dont les coefficients et les conditions aux limites sont fonction de la

pente de la surface.

L'état stationnaire de cette approximation a été traité numériquement par Yakowitz et al. [1986], Hutter et al. [1986, 1987] et l'état non-stationnaire a été calculé par de nombreux glaciologues pour quantifier l'interaction entre les calottes polaires et les variations climatiques [Hindmarsh et al., 1987, 1989; Herterich, 1988; Hindmarsh et Hutter, 1988; Calov, 1990; Huybrechts, 1990a,b; Huybrechts et Oerlemans, 1990; Letréguilly et al., 1991a,b; Fabre et al., 1995]. Dans le modèle de Hutter et al. [1986], une importante quantité de glissement basal était nécessaire pour que les prédictions soient correctes. Cette restriction du modèle résulte du fait que les déformations longitudinales, significatives au voisinage d'un dôme, ont été négligées [Szidarovszky et al., 1989].

A notre connaissance, cette solution à l'ordre 0 dans le cas anisotrope n'a jamais été ni formulée, ni utilisée. Plusieurs tentatives ont été effectuées pour prendre en compte l'anisotropie dans la solution d'ordre 0 isotrope en supposant que le paramètre A dans la loi de Glen dépend de la structure de la glace. Les effets de l'orientation des cristaux ont été introduits dans A par l'intermédiaire d'un facteur multiplicatif [Shoji et Langway, 1984; Dahl-Jensen, 1985; Dahl-Jensen et Gundestrup, 1987; Kostecka et Whillans, 1988; Reeh et Paterson, 1988; Dahl-Jensen, 1989a; Schott et al., 1992; Schott Hvidberg et al., 1996]. Ce facteur multiplicatif dépendant de la profondeur $\mathcal{L}(z)$ est défini en séparant la dépendance du facteur A de la fabrique de celle de la température: $A = A(T)\mathcal{L}(z)$. La solution d'ordre 0 dans le cas anisotrope nous permet de juger de la validité d'une telle méthode. L'expression de la vitesse horizontale d'ordre 0 (1.49) montre que cette vitesse est inversement proportionnelle à la composante M_{xxx} du tenseur des viscosités. Les autres contraintes déviatoires étant égale à zéro, l'approximation de la couche mince dans le cas anisotrope pour $n=1$ ou $n=3$ est équivalente à l'introduction d'un facteur multiplicatif $\mathcal{L}(z)$ égal à M_{xxx}/η_0 , où η_0 est la viscosité isotrope. Une comparaison de la solution d'ordre 0 anisotrope et de la solution d'ordre 0 isotrope utilisant un facteur multiplicatif est faite au chapitre 5 ainsi que la comparaison avec la solution obtenue à partir du modèle numérique complet.

A ce stade, les effets des déformations longitudinales ne sont pas pris en compte. La solution du système d'ordre 1 (1.43) et (1.44) étant identiquement nulle, il faut aller jusqu'à

l'ordre 2 pour prendre en compte ces effets.

1 - 3.4.d Solution à l'ordre 2

Si on dérive (1.45.b)₁ par rapport à z et qu'on lui soustrait (1.45.c)₁ dérivé par rapport à x , et que l'on l'intègre deux fois par rapport à z en tenant compte des conditions aux limites (1.46) et de la règle de Leibnitz, on obtient l'expression de la contrainte de cisaillement:

$$S'_{xz}{}^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial X} \int_E^Z (S'_{xx}{}^{(1)} - S'_{zz}{}^{(1)}) dz' + \int_E^Z \int_E^Z \frac{\partial^2 S'_{xz}{}^{(0)}}{\partial X^2} dz' dz'' + (\Gamma^{(0)^3} + \Gamma^{(2)}) (z - E^{(0)}) - \Gamma^{(0)} E^{(2)}, \quad (1.51)$$

où $\Gamma^{(2)} = \frac{\partial E^{(2)}}{\partial X}$. On retrouve une formule similaire à (1.28) pour la contrainte de cisaillement en additionnant l'ordre 0 et l'ordre 2 avec deux termes supplémentaires. En comparant les résultats d'ordre 2 de la couche mince avec le calcul de l'écoulement sans approximations, il apparaît clairement que ces deux termes ne sont pas négligeables [Mangeney et Califano, 1996]. En effet, s'ils sont négligés, la solution d'ordre 2 pour la contrainte de cisaillement n'améliore pas la solution d'ordre 0, c'est à dire que la série ne converge pas vers la solution exacte. Les vitesses verticales à l'ordre 2 sont alors de l'ordre des vitesses verticales à l'ordre 0 et mènent à une solution irréaliste. En tenant compte de (1.43a)₂ et (1.43b)₂, on peut alors calculer $U^{(2)}$ en fonction uniquement de la solution à l'ordre 0 en intégrant (1.45c)₂:

$$U^{(2)}(X, Z) = U^{(2)}(X, B) - \int_B^Z \frac{\partial W^{(0)}}{\partial X} dz' + \int_B^Z \frac{2 S'_{xz}{}^{(2)}}{M_{xxxz}} dz'. \quad (1.52)$$

Il est important d'insister sur le fait que le terme $S'_{xz}{}^{(2)}$ prend en compte les effets des déformations longitudinales. Suivant ce développement, tous les termes intervenant dans la correction à l'ordre 2 de la contrainte de cisaillement (1.51) sont du même ordre. D'après Hutter

[1981], l'importance de ce terme de correction dépend significativement de l'exposant de la loi de comportement choisie (cf. figure 1.7). Nous nous attendons donc à ce qu'il dépende aussi fortement de la plus ou moins importante anisotropie choisie pour représenter le comportement de la glace dans les calottes polaires. Il est intéressant de comparer l'importance de ce terme dans le cas d'une loi de comportement isotrope et anisotrope. Cet objectif pourra être atteint en comparant les résultats de la couche mince avec ceux obtenus à l'aide d'un modèle sans approximation. Ceci nous permettra de définir les limites de validité du développement de la couche mince dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope (cf. chapitre 5).

Quelques tentatives récentes ont été faites pour calculer numériquement la solution d'ordre 2 de la couche mince [Dahl-Jensen, 1989a, b; Herterich, 1988; Blatter, 1995]. Mais, comme Hutter [1993] l'a remarqué, ces calculs ne sont pas rigoureux car ils s'appuient sur un mélange arbitraire entre l'ordre 0 et l'ordre 2. En effet, pour calculer la contrainte verticale, ces auteurs utilisent l'ordre 0 de la couche mince:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = -p = E - Z. \quad (1.53)$$

A cet ordre, il n'y a pas de contraintes normales dépendant du matériau [Hutter, 1993; Van der Veen et Whillans, 1989a]. Pourtant, ces auteurs utilisent (1.53) et le développement à l'ordre 2 de la première équation quasi-statique pour en déduire une expression de la contrainte de cisaillement:

$$S'_{xz} = \frac{\partial E}{\partial x} (z - E) - 2 \int_E^z \frac{\partial S'_{xx}}{\partial x} dz' \quad (1.54)$$

On voit que cette formule n'est pas rigoureusement celle obtenue à partir du développement d'ordre 2 de la couche mince, les trois derniers termes de l'équation (1.51) étant négligé. Cette méthode est donc douteuse même si, dans de nombreuses applications, le deuxième terme de l'équation (1.51) est estimé petit comme nous l'avons vu au paragraphe 1 - 3.3b. De plus les implications physiques de son omission sont loin d'être évidentes à concevoir [Van der Veen, 1989].

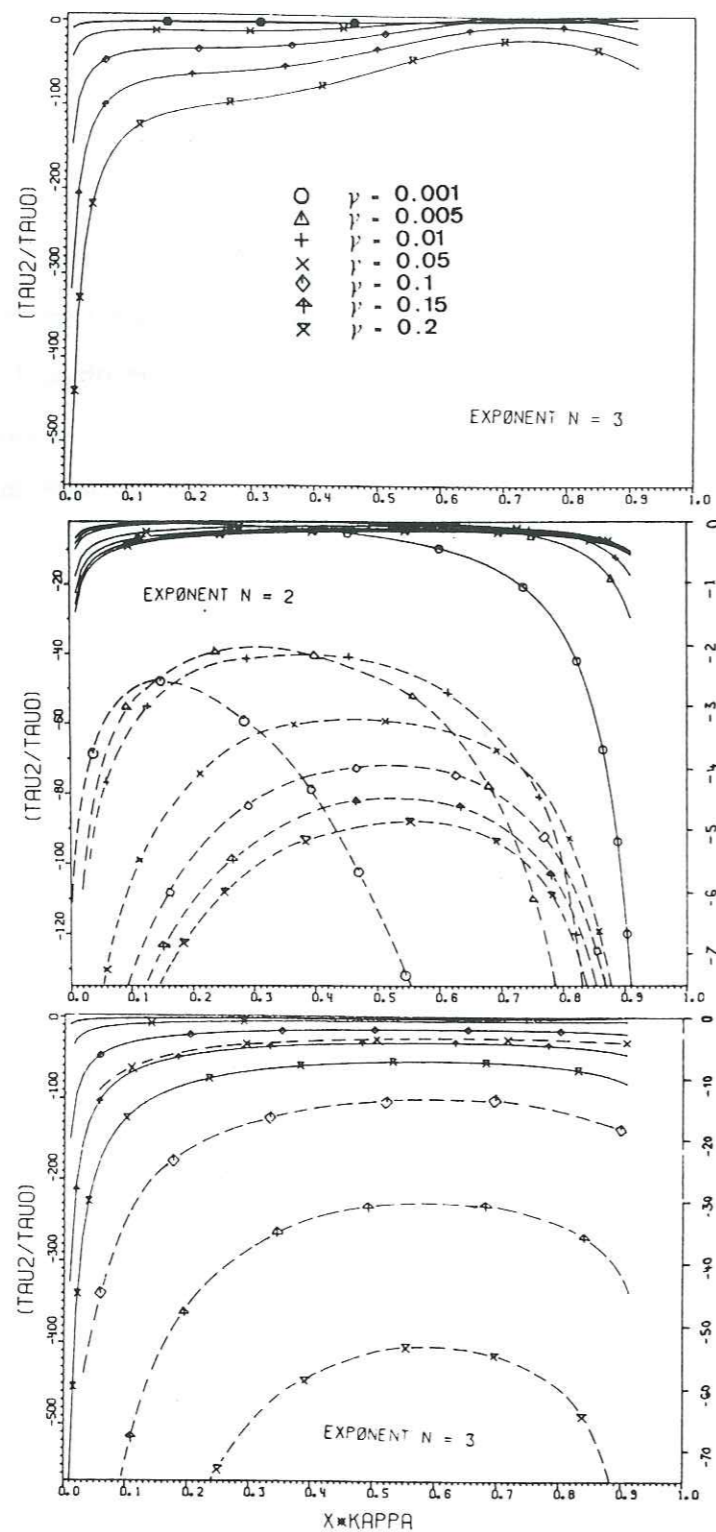


Fig. 1.7. Contrainte de cisaillement du second ordre $S'_{xz}{}^{(2)}/S'_{xz}{}^{(0)}$ pour le profil d'équilibre du glacier en fonction de la distance horizontale, a) pour différentes inclinaisons du socle γ et pour une ondulation du socle de longueur d'onde la longueur du glacier et d'amplitude 0.01, les différents symboles représentent les différentes valeurs de l'inclinaison du socle par rapport à la direction horizontale. Contrainte de cisaillement du second ordre $S'_{xz}{}^{(2)}/S'_{xz}{}^{(0)}$ pour les paramètres de la loi de comportement b) $n=2$ et $a=10^{-2}$ et c) $n=3$ et $a=10^{-3}$, a étant une constante de la loi de comportement [Hutter, 1981].

Nous avons vu dans la section précédente que l'introduction d'un facteur multiplicatif dans la solution d'ordre 0 isotrope pour représenter l'anisotropie est cohérente avec le développement systématique de l'approximation de la couche mince dans le cas anisotrope. Mais, si l'on calcule la solution d'ordre 2, c'est à dire si l'on prend en compte les effets des contraintes longitudinales, le facteur multiplicatif n'est plus capable de rendre compte correctement de l'anisotropie. Les contraintes de cisaillement étant les mêmes dans le cas anisotrope et dans le cas isotrope (1.48) et ne dépendant pas de la viscosité, l'introduction d'un facteur multiplicatif ne change pas les résultats concernant le second terme de la correction d'ordre 2 (1.51). Par contre ce facteur introduit une erreur significative sur le premier terme de l'équation (1.51). En effet, la glace dont les axes- c sont orientés selon la verticale in-situ est plus facile à déformer en cisaillement horizontal et plus dure en contraintes axiales que la glace isotrope (cf. chapitre 2). Le facteur multiplicatif, introduit dans la viscosité isotrope, conduira à la même distribution pour les viscosités "axiales" M_{xxxx} , M_{yyyy} , M_{zzzz} , M_{zzzz} que pour la viscosité "de cisaillement" M_{xyxy} . Comme le montre la figure (4.1), où les différentes composantes du tenseur des viscosités sont représentées dans le cas Newtonien, il est clair que les viscosités axiales ont une forme différente de celle de la viscosité de cisaillement et varient même en sens opposé: contrairement à la viscosité de cisaillement, les viscosités axiales augmentent avec la profondeur. Le facteur multiplicatif rend donc la glace moins visqueuse en réponse aux contraintes axiales par rapport au cas isotrope, ce qui est contraire à son comportement réel. Cette contradiction va sûrement biaiser les résultats du calcul de l'écoulement même si elle a lieu dans les couches profondes de la calotte où les contraintes longitudinales sont petites. Comme l'ont souligné Van der Veen et Whillans [1990], l'anisotropie ne peut être prise en compte qu'en introduisant au moins des facteurs multiplicatifs différents pour les différents taux de déformation. De plus, si l'on considère le cas $n=3$, chaque composante de la viscosité contient un terme en τ^2 qui dépend des contraintes axiales qui sont mal calculées comme nous venons de le montrer. Dans le chapitre 5, nous montrerons la différence entre les résultats du calcul numérique correct du second ordre de la couche mince dans le cas anisotrope et du calcul se basant sur l'introduction d'un facteur multiplicatif.

La méthode classique pour résoudre l'équation d'évolution de la surface libre dans un modèle basé sur l'approximation de la couche mince est de transformer l'équation (1.12) en une équation de diffusion pour la hauteur. Cette équation est obtenue en remplaçant les vitesses dans l'équation (1.12) par leur expression à l'ordre 0 de l'approximation de la couche mince. Nous présentons ici une méthode différente et très simple qui ne pose aucun problème numérique. Elle permet entre autre de prendre en compte l'ordre 2 de l'approximation de la couche mince d'une manière cohérente. Cette méthode consiste à résoudre les équations d'ordre 0 et d'ordre 2 obtenues directement à partir de l'équation cinématique de surface libre (1.12).

L'ordre 1 étant identiquement nul, $E = E^{(0)} + \varepsilon^2 E^{(2)}$ et l'équation (1.12) donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial t} + U^{(0)} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial x} - W^{(0)} &= a, \\ \frac{\partial E^{(2)}}{\partial t} + U^{(0)} \frac{\partial E^{(2)}}{\partial x} + U^{(2)} \frac{\partial E^{(0)}}{\partial x} - W^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Nous verrons dans le chapitre 5 que les termes d'ordre 2 contenant $E^{(2)}$ ne sont pas négligeables dans le cas d'un écoulement sur un socle perturbé. Nous avons développé un modèle capable de calculer l'ordre 0 et l'ordre 2 de la couche mince [Mangeney et Califano, 1996]. La méthode utilisée consiste à résoudre, dans un premier temps, les équations couplées (1.41, 1.42) et (1.55a), ce qui donne l'ordre 0 de la couche mince pour le champ de vitesse et pour l'élévation de la surface. Dans un second temps nous résolvons simultanément les équations (1.45, 1.46) et (1.55b) donnant le champ de vitesse et l'élévation de la surface à l'ordre 2 en fonction des résultats obtenu précédemment pour l'ordre 0. L'algorithme est représenté sur la figure (5.1). La comparaison entre les résultats de ce calcul et ceux du modèle résolvant les équations sans approximation est développée en détail dans le chapitre 5.

L'approximation de la couche mince, qui permet de fournir des formules explicites pour les champs de vitesse et de contrainte d'un glacier, n'est pas fondée, a priori, dans le cas d'un écoulement où le rapport d'aspect ne peut être considéré comme petit. C'est le cas en particulier:

1. près d'un dôme (environ 4 épaisseurs des deux cotés du sommet) où la vitesse horizontale et la pente de la surface sont très faibles, la déformation étant essentiellement due aux déformations longitudinales [Raymond, 1983];
2. dans la région des marges où la pente est très forte;
3. dans les régions où la topographie du socle varie significativement par rapport à la pente de la surface.

Pourtant, en partant de la solution de la couche mince et en itérant pour incorporer les contraintes longitudinales à partir de (1.54), Dahl-Jensen [1989a] trouve des résultats similaires à ceux issus d'un calcul exact de l'écoulement au voisinage d'un dôme [Schott Hvidberg, 1996]. Mais, les résultats du modèle thermo-mécanique couplé de Dahl-Jensen [1989a] donnent un profil de la contrainte de cisaillement non nulle au dôme, ce qui est démenti par le calcul rigoureux de Schott Hvidberg [1996]. Non seulement l'approximation de la couche mince n'est a priori pas valable au dôme, mais en plus le calcul de Dahl-Jensen n'est pas rigoureux (cf. Paragraphe 1 - 3.4.d). Il est donc intéressant d'évaluer l'ordre de grandeur des termes négligés, et de déterminer dans quels cas ceux-ci peuvent être effectivement négligés et ce que leur prise en compte change dans l'écoulement. Nous verrons dans le chapitre 5 que, contrairement à l'intuition, le développement de la couche mince dans le cas d'un comportement Newtonien est aussi valable au voisinage d'un dôme.

1 - 4 ECOULEMENT AU VOISINAGE D'UN DÔME

Jusqu'à récemment, la région localisée au voisinage d'un dôme était considérée comme

un site privilégié pour les forages de carottes glaciaires. L'interprétation des enregistrements paléoclimatiques était supposée être facilitée par une moindre perturbation des séquences stratigraphiques [Dansgaard et al., 1973]. Pourtant, une thèse récente a montré que l'écoulement au voisinage du dôme ne serait pas si régulier qu'on pouvait le penser à cause du comportement anisotrope de la glace polaire [Castelnau, 1996]. Il est donc intéressant de modéliser l'écoulement près d'un dôme en utilisant une loi de comportement anisotrope pour vérifier cette hypothèse.

De plus, l'écoulement est de nature différente au voisinage du dôme, où la déformation est essentiellement due aux déformations longitudinales, de celui loin du dôme où l'écoulement est quasi-laminaire [Raymond, 1983]. Il est donc nécessaire de localiser la zone de transition entre ces deux types d'écoulement. La détermination de cette zone peut avoir des implications importantes pour l'interprétation de la stratigraphie des carottes de glace forées au dôme, si, dans le passé, le dôme s'est déplacé d'une distance supérieure à la largeur de cette zone de transition.

La détermination de la variation de la vitesse verticale en fonction de la profondeur est d'un intérêt particulier car cette vitesse permet de déterminer l'âge en fonction de la profondeur, l'amincissement des couches annuelles soumises à un taux de déformation verticale et l'advection verticale de chaleur [Dansgaard et Johnsen, 1969]. Si, loin du dôme, la variation avec la profondeur de la vitesse horizontale fournit aussi de précieux renseignements sur l'écoulement [Hammer et al., 1978], au voisinage du dôme elle est faible et donc moins significative. Nous prendrons donc, comme base de comparaison entre les différentes méthodes utilisées pour modéliser l'écoulement au voisinage d'un dôme, les profils verticaux de la vitesse verticale et du taux de déformation longitudinal.

Nous présenterons ici les différentes tentatives réalisées jusqu'à maintenant pour résoudre l'écoulement au voisinage du dôme dans le cas isotrope et évoquerons notre approche du cas anisotrope.

1 - 4.1 Solutions approchées

Nous présenterons en détail l'analyse de Bolzan [1985] moins pour les résultats qu'elle apporte que parce qu'elle introduit deux classes de polynômes caractérisant bien les limites de variations des profils de déformation longitudinale. Ceux-ci pourront servir de base de comparaison avec les autres méthodes.

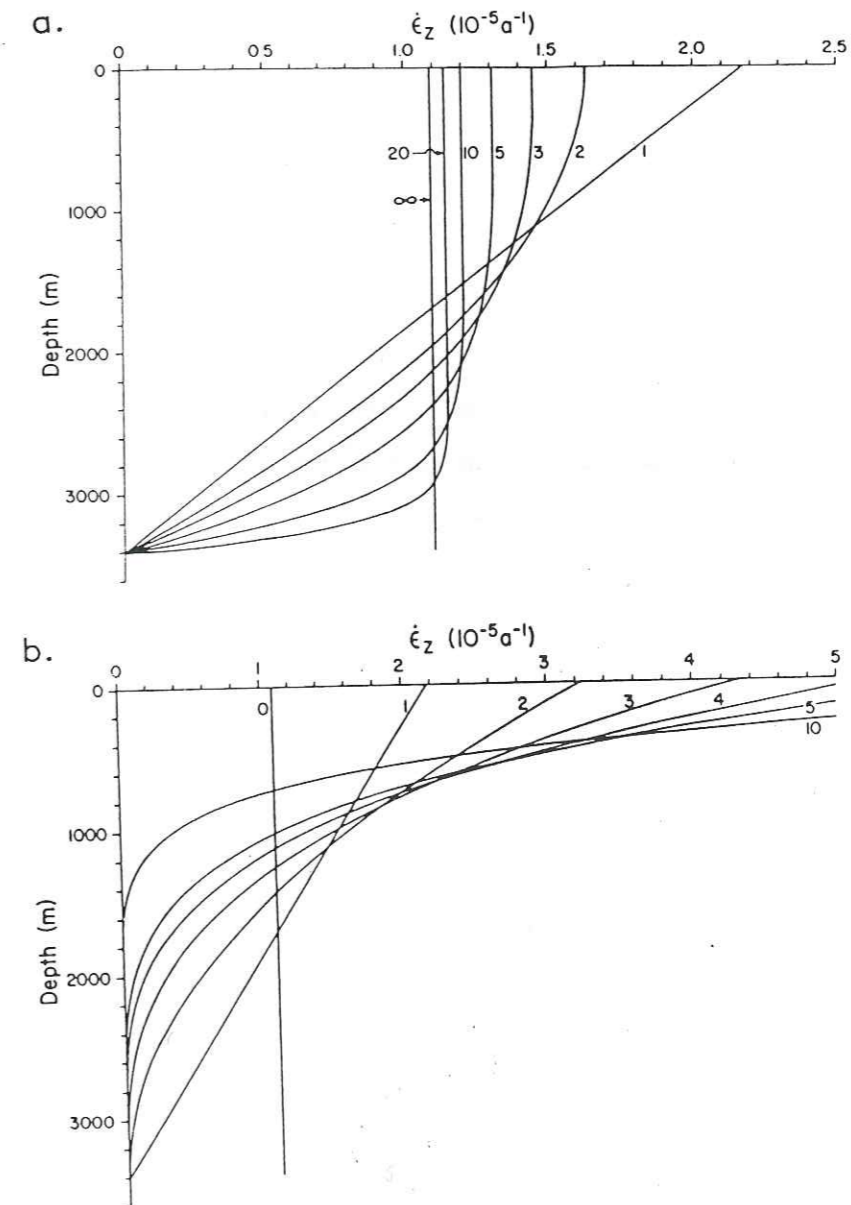


Fig. 1.8. Le profil de vitesse de déformation longitudinale en fonction de la profondeur pour les polynômes de a) la classe A et b) la classe B pour différentes valeurs de p [Bolzan, 1985].

L'analyse de Bolzan [1985] montre que l'approximation d'un taux de déformation vertical constant dans la région d'un dôme n'est pas justifiée. Ces résultats s'opposent à ceux obtenus par Ritz [1980] et Ritz et al. [1982] avec une méthode aux différences finies couplant le champ de température et de vitesse. Ces auteurs trouvent que le taux de déformation vertical à Dôme C est pratiquement constant avec la profondeur, sauf dans une fine couche basale de quelques centaines de mètres où le taux de déformation tendrait vers zéro. En fait, les deux méthodes sont discutables car elles sont basées sur des modèles négligeant les variations d'épaisseurs, mais les résultats de Bolzan [1985] fournissent une première approximation de la forme de la déformation longitudinale obtenue par des modèles plus élaborés.

A partir d'un modèle numérique permettant de calculer le champ de température pour une distribution de vitesse donnée, Bolzan [1985] cherche à déterminer un profil analytique simple pour le taux de déformation longitudinal à Dôme C conduisant à un profil de température similaire à celui mesuré dans les 800 premiers mètres par Gillet et Rado [1979]. L'écoulement est supposé bidimensionnel et sans glissement à la base. Bolzan [1985] sélectionne deux classes de polynômes simples A et B, pour lesquelles le gradient du taux de déformation vertical est nul respectivement à la surface et au fond:

$$\begin{aligned} D_{zz}(z) &= -\left(\frac{p+1}{p}\right) \frac{a}{H} (1 - \xi^p) && \text{classe A} \\ D_{zz}(z) &= -(p+1) \frac{a}{H} (1 - \xi)^p && \text{classe B} \end{aligned} \quad (1.56)$$

où a est le taux d'accumulation, H l'épaisseur et $\xi=(E-z)/H$ la profondeur réduite. La classe A correspond à la correction du premier ordre de l'écoulement laminaire et la classe B à des écoulements où la glace est presque stagnante à la base (cf. figure 1.8a, 1.8b). Pour un écoulement strictement laminaire p est égal à $n+1$ pour les profils de classe A, où n est l'exposant de la loi de Glen. Le meilleur ajustement avec le profil de température mesuré est trouvé pour des taux de déformation verticale correspondant à la classe B avec $p \approx 2 - 2,5$. Les résultats de Bolzan suggèrent qu'au voisinage du dôme d'une calotte polaire, la déformation longitudinale est significativement différente de celle trouvée dans une région où l'écoulement est dominé par le cisaillement horizontal. La vitesse de déformation verticale au dôme est approximativement

linéaire dans la partie supérieure de la calotte polaire et varie plus rapidement avec la profondeur à la base de la calotte.

1 - 4.2 L'approximation hydrostatique

Dans un modèle bidimensionnel, Reeh [1988] utilise la formule classique (1.25) pour la contrainte de cisaillement et l'approximation hydrostatique (1.53) pour la contrainte normale verticale. Il en déduit de manière non justifiée les contraintes longitudinales déviatoires horizontales et transverses pour les introduire dans la contrainte effective τ , définie à la section 1 - 2.1.a. Dans ce modèle, Reeh [1988] ne prend en compte la divergence des lignes de courant qu'à travers la contribution de la contrainte longitudinale transverse dans la contrainte effective. Il néglige la contrainte de cisaillement horizontale transverse dans les équations quasi-statiques. Cette approximation présente les mêmes défauts que l'approximation hydrostatique conjuguée à un calcul des contraintes longitudinales (cf. discussion de la section 1 - 3.4d). Un profil de température le long de la ligne de courant est imposé. Reeh [1988] utilise alors une hypothèse de "quasi-similarité" pour le profil vertical de la vitesse horizontale, lui imposant la forme:

$$u = u_m(x, y) \phi(\bar{z}), \quad (1.57)$$

où u_m est la vitesse moyennée sur l'épaisseur de glace, $\bar{z}=(z - B(x, y))/H(x, y)$ est la coordonnée verticale réduite et $\phi(\bar{z})$ est la fonction de forme du profil vertical de la vitesse horizontale.

Dans le cas d'un dôme symétrique, l'analyse de Reeh [1988] fournit une formulation explicite de la fonction de forme $\phi(\bar{z})$; dans le cas isotherme et non-Newtonien ($n=3$), il obtient une expression polynomiale de cette fonction:

$$\phi(\bar{z}) = \frac{35}{2} \bar{z}^3 \left(1 - \frac{3}{2} \bar{z} + \frac{3}{4} \bar{z}^2 - \frac{1}{8} \bar{z}^3 \right). \quad (1.58)$$

La distribution verticale du taux de déformation longitudinale (cf. figure 1.9a) fait apparaître un point d'inflexion et donne, dans la partie supérieure de la calotte, un profil de classe A et, dans le fond de la calotte, un profil de classe B. Bien que la méthode ne soit pas rigoureuse, les profils

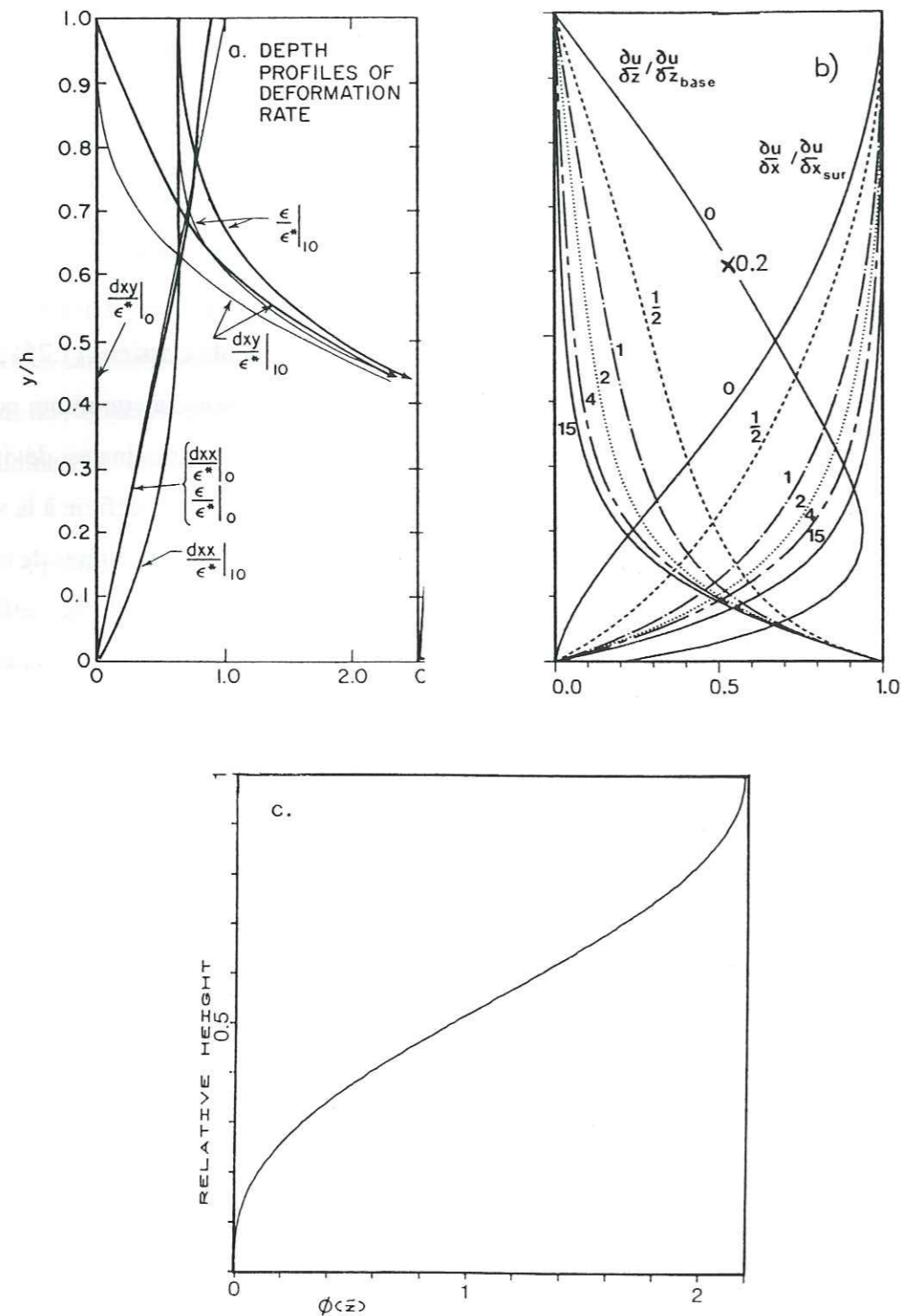


Fig. 1.9. Vitesse de déformation longitudinale en fonction de la profondeur a) résultats du modèle aux éléments finis de Raymond [1983], b) résultats du modèle aux différences finies de Dahl-Jensen [1989a], la vitesse de déformation $\partial U/\partial x$ au point 0 présente un point d'inflexion, c) résultat au dôme du modèle aux différences finies de Reeh [1988], $\partial U/\partial x$ présente aussi un point d'inflexion.

verticaux des vitesses prédites par le modèle de Reeh [1988] sont en accord raisonnable avec les profils observés dans la région du dôme de la calotte polaire de Devon Island (Canada) [Reeh et Paterson, 1988]. Le modèle de Dahl-Jensen [1989a], bien que basé sur une méthode critiquable, donne aussi une forme similaire à celle trouvée par Reeh [1988] pour la distribution verticale de la déformation longitudinale au dôme (cf. figure 1.9b). Le profil de vitesse horizontale près du dôme est concave vers la base du glacier et a donc un point d'inflexion, en accord avec les calculs de Dahl-Jensen [1989a].

1 - 4.3 Deuxième ordre de l'approximation de la couche mince

Szidarovszky et al. [1989] ont traité numériquement le cas stationnaire de l'écoulement thermo-mécanique couplé en prenant en compte les effets de la déformation longitudinale. Leur solution est construite à l'aide d'une procédure numérique partant du dôme, choisissant *a priori* une élévation de surface au dôme E_d , effectuant une analyse du dôme et avançant colonne par colonne jusqu'aux marges. Son analyse près du dôme, pour une hauteur au dôme donnée, est basée sur la prescription d'une forme *ad hoc* pour la vitesse verticale au dôme, en accord avec la conservation de la masse:

$$w = -a \frac{z - B_d}{E_d B_d}, \quad (1.59)$$

où a est l'accumulation au dôme, E_d et B_d l'élévation de la surface et du socle au dôme. Comme on peut le remarquer sur la figure (1.10), le profil de vitesse verticale au dôme trouvé à partir des modèles d'écoulement n'est pas linéaire en fonction de la profondeur. En utilisant cette vitesse prescrite, Szidarovsky et al [1989] résolvent le système d'équations du second ordre de l'approximation de la couche mince. Leur solution, incluant les effets de déformation longitudinale, permet d'introduire un frottement basal, qui aurait été trop faible dans le modèle de Hutter et al [1986] mais leurs résultats n'ont pas de portée générale à cause de l'utilisation d'une vitesse verticale prescrite au dôme.

Il est étonnant que ces différentes méthodes, basées sur des hypothèses plus ou moins cohérentes donnent globalement les mêmes tendances. Il est donc intéressant de comparer ces résultats à ceux de méthodes rigoureuses prenant en compte toutes les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations.

1 - 4.4 Résolution du système complet d'équations mécaniques

Les modèles utilisant une méthode aux éléments finis ont été développés depuis une quinzaine d'années pour calculer la solution du problème mécanique complet décrivant l'écoulement de la glace dans les calottes polaires [Hooke et al, 1979; Raymond, 1983; Paterson et Waddington, 1984; Budd et Rowden-Rich, 1985; Watts et Drewry, 1987]. Cette technique a été appliquée à l'étude de l'écoulement au voisinage d'un dôme par Raymond [1983], Paterson et Waddington [1986], Firestone et al. [1990], Schott Hvidberg [1993, 1996], Schott Hvidberg et al. [1996]. Un premier modèle aux différences finies, décrit en détail au chapitre 3, a été élaboré par Mangeney et al. [1996]. Ces méthodes permettent un traitement rigoureux de l'écoulement au voisinage d'un dôme mais ont le désavantage de nécessiter des conditions aux limites détaillées pour les vitesses sur les côtés qui ne sont pas nécessairement compatibles avec l'écoulement à l'intérieur du domaine de calcul Waddington et al [1986] (cf. figure 1.11). Le calcul simultané de l'évolution de la surface et de la position des marges permettra d'améliorer considérablement l'efficacité et l'intérêt de ce type de modélisation.

1 - 4.4.a Ecoulement isotherme, stationnaire et isotrope au voisinage d'un dôme

A l'aide d'un modèle numérique aux éléments finis prenant en compte le système complet d'équations mécaniques, Raymond [1983] montre que la variation de la vitesse horizontale avec la profondeur au voisinage d'une diffluence de glace symétrique, isotherme, sans glissement sur un lit plat et obéissant à une loi de comportement non-linéaire isotrope de type loi de Glen (1.22) est à peu près cohérente avec les prévisions de la théorie de l'écoulement laminaire sauf dans une région éloignée du dôme de moins de quatre fois l'épaisseur de la glace. A l'intérieur de cette

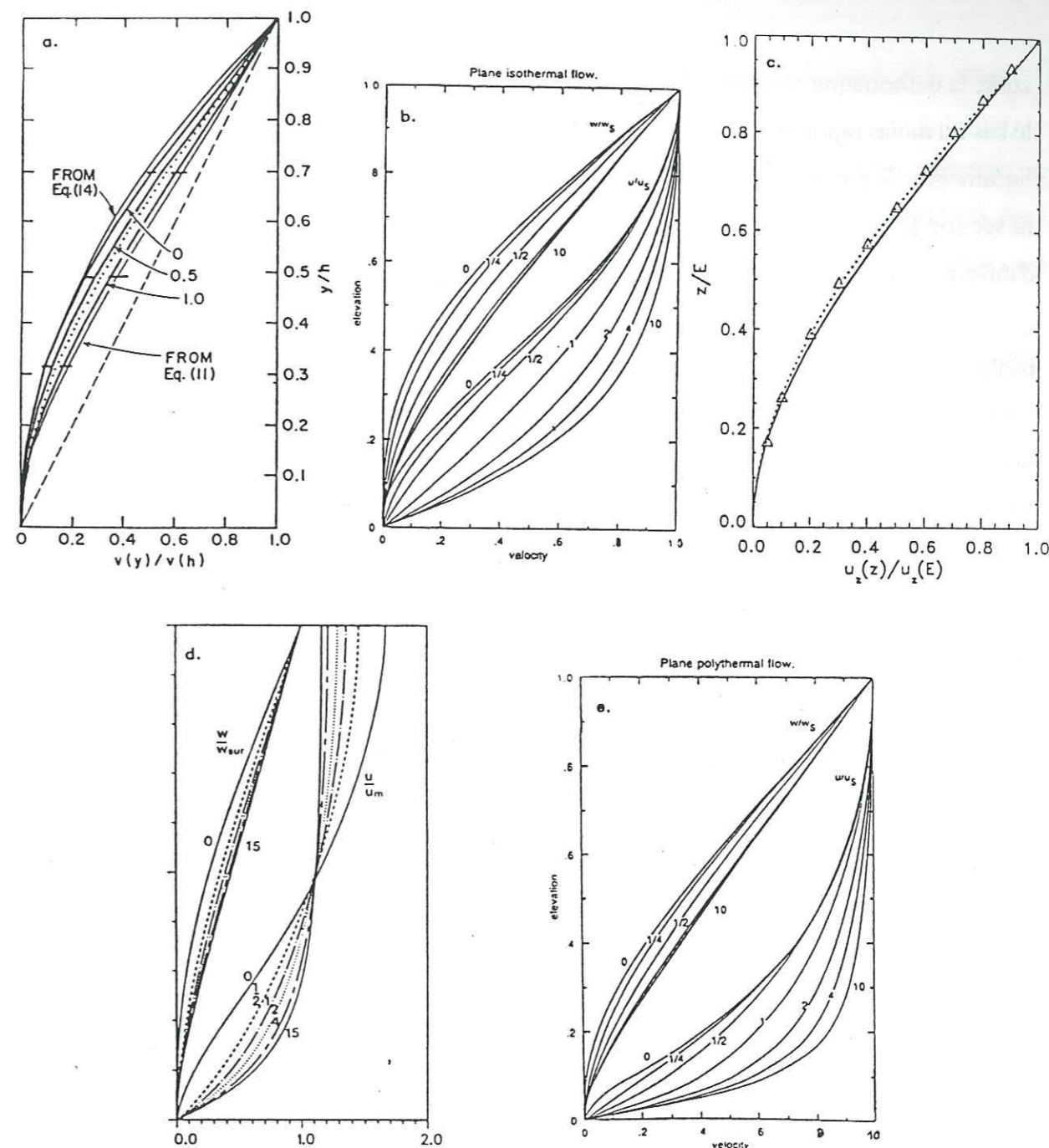


Fig. 1.10. Profils de vitesse verticale ($u_z(z)/u_z(E)$) près d'un dôme ($x=0$) dans le cas isotherme: a) résultats du modèle aux éléments finis de Raymond [1983] (les lignes continues représentent les résultats pour $n=3$, les lignes en pointillé pour $n=1$), b) résultats du modèle aux éléments finis de Schott Hvidberg [1996] pour $n=3$, c) résultats du modèle aux différences finies de Mangeney et al. [1996a] pour $n=1$ (les lignes continues représentent le cas anisotrope, les lignes en pointillé le cas isotrope); dans le cas d'un écoulement thermo-mécanique couplé: d) résultats du modèle aux différences finies de Dahl-Jensen [1989a] (les lignes continues représentent les résultats pour $n=3$, les lignes en pointillé pour $n=1$), e)

zone, la déformation visqueuse horizontale est moins concentrée vers le fond et la vitesse vers le bas est moins rapide que dans le reste de la calotte. Le taux de déformation vertical est presque linéaire avec la profondeur et correspond au membre commun des classes A et B présentées dans la section précédente: $p=1$ (cf. figure 1.9c). Ce profil quasi-linéaire, avec un très léger point d'inflexion dans les couches profondes, est significativement différent de celui trouvé par Bolzan [1985] (cf. paragraphe 1 - 4.1). Cela peut être dû au fait que l'écoulement de Raymond est isotherme [Bolzan, 1985]. Les résultats numériques sont retrouvés par un développement analytique près de la diffuence de glace qui donne une variation linéaire des déformations longitudinales et de la vitesse horizontale en fonction de la profondeur ainsi qu'un profil parabolique pour la vitesse verticale [Raymond, 1983].

Schott et al [1992] ont appliqué le programme de Raymond [1983] au calcul de l'âge dans la région centrale du Groenland (forages GRIP-GISP2). Ce calcul se base sur un profil analytique de température prescrit [Schott, 1990], un écoulement strictement plan et des conditions de non-glissement à la base [Firestone et al, 1990]. Comme nous l'avons remarqué précédemment, les conditions aux limites sur les vitesses sur les côtés ne reflètent pas exactement la réalité physique de l'état de la calotte polaire. La vitesse verticale en surface donnée par le modèle n'est alors pas en équilibre avec le taux d'accumulation mesuré. Pour écarter ce problème, intolérable pour un calcul de l'âge cohérent, Schott et al [1992] laissent évoluer l'élévation de la surface dans le temps jusqu'à un état stationnaire où la vitesse verticale, pour un choix approprié des paramètres rhéologiques, est en équilibre avec l'accumulation dans un domaine d'au moins cinq épaisseurs autour du dôme. L'élévation de la surface est alors, à cinq mètres près, celle estimée par Hodge et al [1990]. Paterson et Waddington [1984], prenant en compte la divergence des lignes d'écoulement dans un modèle bi-dimensionnel, incorporent les effets de déformation longitudinales transverses à l'écoulement. Un modèle bidimensionnel puis tridimensionnel traitant le système d'équations mécaniques complet a été élaboré par Hanson [1990; 1995] par une méthode aux éléments finis.

Le modèle aux éléments finis développé par Schott Hvidberg [1996], résolvant le problème thermo-mécanique complet, donne des résultats similaires aux calculs présentés dans les paragraphes 1 - 4.2 et 1 - 4.3, basés sur des méthodes moins rigoureuses. Les résultats sont compatibles avec ceux de l'écoulement isotherme [Raymond, 1983] ou basé sur une température prescrite [Reeh, 1988] et avec ceux de l'écoulement thermo-mécanique [Dahl-Jenen, 1989a; Szidarovsky et al., 1989]. Il permet, par contre, de calculer une contrainte de cisaillement nulle au dôme contrairement à Dahl-Jensen [1989a]. La confrontation des résultats du modèle de Schott avec les données de GRIP et GISP2 (Groenland) semble montrer la nécessité d'utiliser une loi de comportement anisotrope pour modéliser l'écoulement dans cette région [Schott Hvidberg et al., 1996].

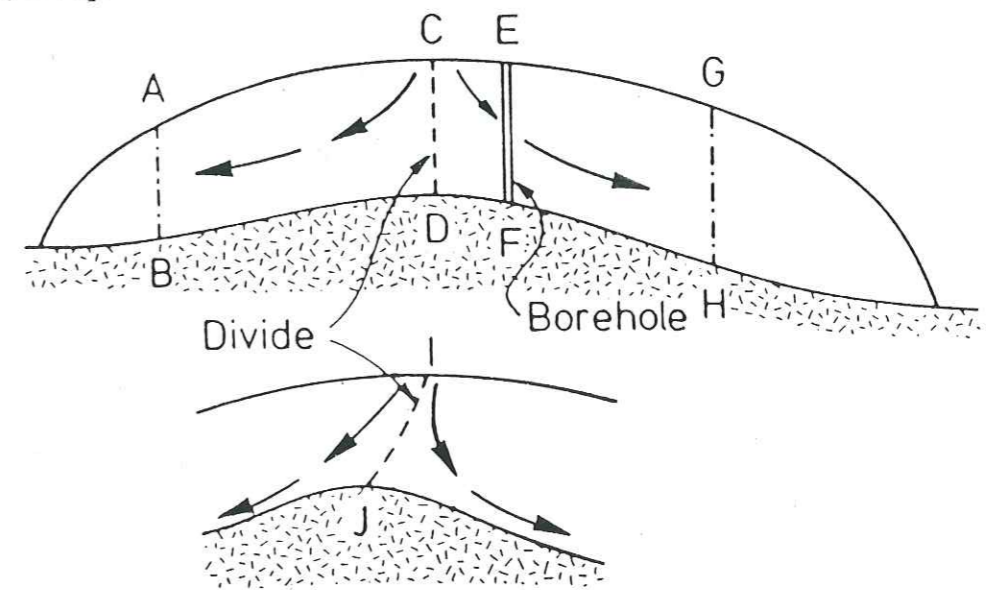


Fig. 1.11. Deux configurations différentes d'une diffuence de glace [Waddington et al., 1986]. Les limites AB et GH ne sont pas les limites physiques du glacier, mais servent seulement à limiter le domaine de calcul. Les conditions cinématiques imposées sur les côtés peuvent être de trois types, (1) quand les crêtes de la surface et du socle coïncident (CD) on peut imposer une condition de symétrie, c'est à dire l'annulation de la vitesse horizontale et de la contrainte de cisaillement, (2) quand la vitesse est mesurée au lieu de forage (EF), cette vitesse peut constituer une condition aux limites, (3) quand les limites sont assez éloignées pour que le profil de vitesse à cet endroit n'affecte pas l'écoulement dans le domaine étudié, (AB) et (GH), on applique alors des conditions aux limites déduites de simples approximations (par exemple de l'écoulement laminaire).

Mangeney et al [1996] montrent l'influence de l'anisotropie sur l'écoulement au voisinage d'un dôme pour un comportement Newtonien d'une glace isotherme dans un régime d'écoulement stationnaire à l'aide d'un modèle aux différences finies. Le mouvement de la glace est globalement accéléré dans le cas anisotrope avec une vitesse de déformation en cisaillement plus concentrée dans les couches profondes de la calotte polaire [Mangeney et al., 1996]. Le taux de déformation longitudinale, identique à celui trouvé par Raymond [1983] dans le cas isotrope, se rapproche du profil quasi-laminaire (classe A des polynômes donnés par Bolzan [1985] dans l'équation 1.56)). Le profil de vitesse verticale dans le cas isotrope est le même que celui de Raymond [1983] pour une loi de comportement Newtonienne, celui trouvé dans le cas anisotrope a une courbure légèrement moins grande (cf. figure 1.10). Ces résultats seront présentés d'une manière détaillée au chapitre 4.

1 - 5 CONCLUSION

Nous avons donné un aperçu des différentes approximations, relatives au problème mécanique, utilisées pour modéliser l'écoulement de la glace dans les calottes polaires. Nous avons développé l'approximation de la couche mince dans le cas général d'une loi de comportement anisotrope. Si des modèles basés sur l'utilisation plus ou moins rigoureuse des résultats de la couche mince en isotrope donnent des résultats généralement compatibles avec les modèles résolvant le système complet d'équations mécaniques, une comparaison détaillée entre la solution exacte et les approximations utilisées est aujourd'hui nécessaire pour pouvoir interpréter correctement les résultats de ces modèles.

Dans les vingt dernières années, on est arrivé, grâce à la comparaison entre les résultats des modèles et les observations, à établir l'ordre de grandeur des paramètres physiques utilisés pour simuler l'écoulement de la glace dans les calottes polaires. La comparaison entre ces modèles a fourni une vision globale de la nature de l'écoulement au voisinage d'un dôme et plus

généralement dans la calotte. Les tentatives visant à déterminer de manière plus précise la valeur de ces paramètres (paramètres rhéologiques, flux géothermique, loi de glissement, etc.) à l'aide de modèles basés sur des approximations grossières mènent à des résultats dont la validité n'est pas claire. En effet, non seulement les répercussions de ces approximations ne sont ni qualitativement, ni quantitativement évaluées, mais en plus l'extrême simplification de certains mécanismes, comme le comportement de la glace, biaise les résultats.

Il semble aujourd'hui nécessaire de comprendre individuellement les mécanismes intervenant dans la mécanique et la thermodynamique de l'écoulement. Le comportement anisotrope de la glace polaire constitue un de ces phénomènes négligés dans les modèles et pouvant considérablement influencer l'écoulement. L'étude de son influence sur l'écoulement nécessite l'utilisation d'un modèle résolvant le système complet d'équations mécaniques pour ne pas confondre les effets des erreurs liées aux approximations avec les tendances émanant du processus physique étudié. Etant donné le temps de calcul nécessaire à la résolution complète des équations quasi-statiques, il semble que le modèle à deux dimensions soit un bon outil pour cette étude. La comparaison des approximations avec les résultats du modèle complet permettront alors éventuellement de réduire le temps de calcul des modèles tout en maîtrisant l'estimation des erreurs effectuées.

CHAPITRE 2

LOI DE COMPORTEMENT DE LA GLACE POLYCRISTALLINE

2 -1 INTRODUCTION

Le comportement mécanique des glaces polaires (polycristallines) dans les conditions prévalant dans les calottes polaires est encore mal compris. Ceci résulte essentiellement du fait que pour reproduire en laboratoire les conditions de déformation *in situ*, caractérisées par des vitesses de déformations très faibles ($<10^{-9}\text{s}^{-1}$) et une température relativement basse, il faudrait réaliser des essais mécaniques qui dureraient plusieurs années. Il est cependant reconnu que l'orientation préférentielle des plans cristallins (texture) des cristaux de glace que l'on observe dans les glaces polaires profondes, induit une forte anisotropie viscoplastique à l'échelle du polycristal. La texture des glaces polaires résulte de leur histoire thermomécanique, depuis leur formation à la surface de la calotte jusqu'à leur position actuelle en profondeur. L'utilisation d'une loi de comportement anisotrope est donc nécessaire pour représenter le comportement des glaces polaires. Cette loi doit permettre le calcul de la réponse d'un polycristal de glace de texture donnée en fonction de la contrainte ou de la vitesse de déformation imposée, mais doit aussi pouvoir calculer l'évolution de la texture avec l'histoire thermomécanique du matériau.

Peu de travaux ont été réalisés jusqu'à présent sur l'effet de l'anisotropie sur l'écoulement de la glace dans les calottes polaires. Cela est dû en particulier à la difficulté de trouver une loi de comportement anisotrope adaptée, qui puisse décrire correctement le comportement des glaces polaires en grandes déformations, et que l'on puisse facilement introduire dans un modèle d'écoulement à grande échelle. Il est donc intéressant de situer l'état des recherches sur les lois

de comportement existantes.

Ce chapitre est axé sur la description et la discussion de la loi de Lliboutry [1993] qui est basée sur une méthode d'homogénéisation. Pour être utilisable dans un modèle d'écoulement utilisant des variables primitives (vitesse, pression), cette loi doit être reformulée de façon à exprimer le tenseur des contraintes déviatoires en fonction du tenseur des vitesses de déformation. De plus cette loi fait l'hypothèse d'une distribution particulière des orientations cristallines dans la glace polaire, qui n'a jamais été vérifiée. L'hypothèse de base de la méthode d'homogénéisation (contrainte uniforme dans le polycristal) nécessite un test de validité. Il est donc important de discuter des limites de la loi de Lliboutry et de sa capacité à reproduire le comportement anisotrope des glaces polaires.

Nous rappellerons dans le paragraphe 2 les propriétés mécaniques du monocristal de glace, et dans le paragraphe 3 celles de la glace polycristalline isotrope. Dans le paragraphe 4, nous présenterons plus en détails les textures observées dans les glaces polaires, et montrerons comment ces textures influencent le comportement mécanique. Nous formulerons dans le paragraphe 5 la loi de comportement anisotrope de Lliboutry [1993] pour des glaces orthotropes à isotropie transverse déformées en déformation plane, et discuterons de l'influence des hypothèses principales de cette loi sur la rhéologie du polycristal. La formulation que nous proposons, qui exprime la contrainte en fonction de la vitesse de déformation, est particulièrement bien adaptée à la résolution des équations mécaniques décrivant l'écoulement des calottes polaires.

2 -2 COMPORTEMENT MECANIQUE DU MONOCRISTAL DE GLACE

Dans la glace Ih, la molécule d'H₂O est conservée. Les atomes d'oxygène sont arrangés selon un réseau cristallin bien défini, de type hexagonal, contrairement aux atomes d'hydrogène qui présentent une structure désordonnée [Petrenko, 1993]. On appelle généralement *c* l'axe orthogonal aux plans de base de l'hexagone (figure 2.1).

Les observations par topographie X [Shearwood et Withworth, 1989] révèlent que l'immense majorité des dislocations présentes dans le monocristal de glace sont des dislocations basales. Quelques segments de dislocations du type prismatique ou pyramidal sont aussi observés; ces segments non-basaux restent cependant très courts, et ne peuvent donc pas contribuer de manière significative à la déformation plastique totale. Cette distribution de dislocations induit une très forte anisotropie viscoplastique du monocristal. La figure 2.2 regroupe un ensemble de résultats d'essais mécaniques réalisés sur des monocristaux de glaces [Duval et al., 1983], en déformation favorisant le glissement basal (cisaillement dans les plans de base: courbe supérieure) ou défavorisant le glissement basal (déformations axiales orthogonales ou parallèles à l'axe-*c*: courbe inférieure). Pour une même valeur de la contrainte appliquée, la vitesse de déformation par glissement basal est d'au moins 4 ordres de grandeur supérieure à celle résultant d'un glissement non-basal.

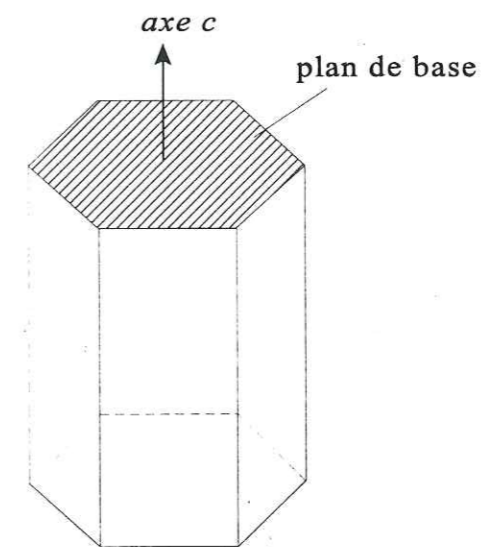


Fig. 2.1. La glace Ih présente une structure cristalline hexagonale. L'axe-*c* est orthogonal au plan de base.

Le monocristal de glace ne se déforme donc facilement que par glissement basal. Ce mode de déformation est bien représenté par une loi puissance, avec un exposant des contraintes $n=2$, et une énergie d'activation $Q=63\text{kJmol}^{-1}$ [Lliboutry et Duval, 1985].

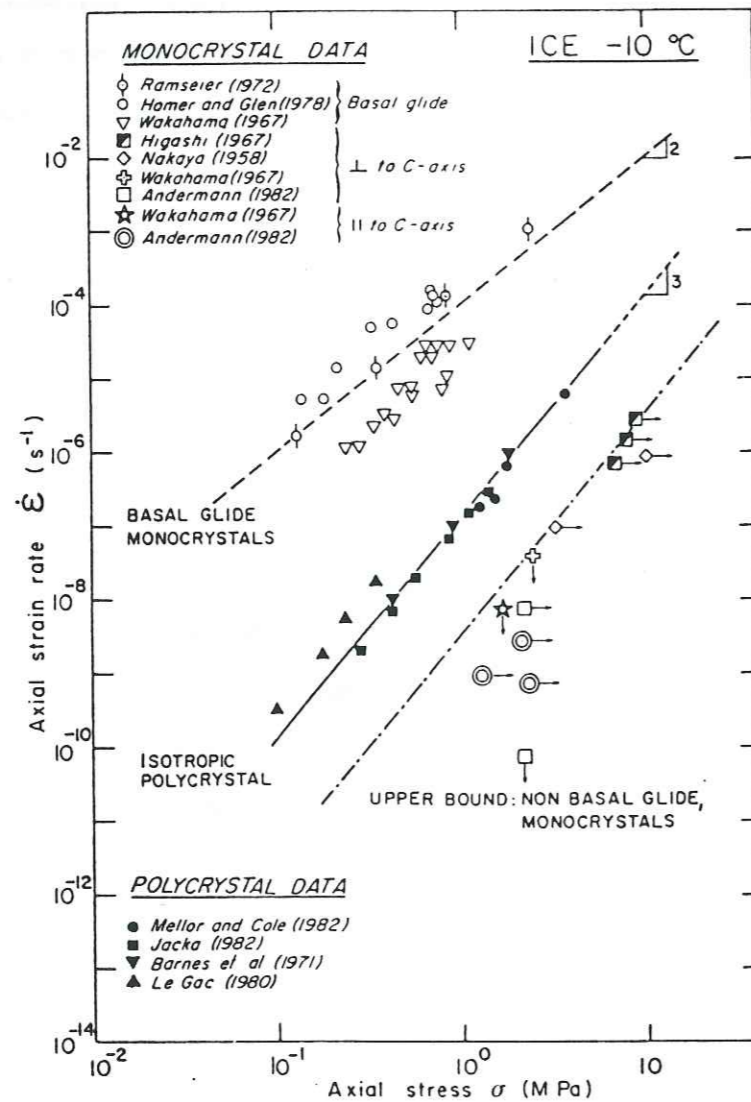


Fig. 2.2. Comportement en régime stationnaire du monocristal de glace, déformé par glissement basal et glissement non basal, et comportement en fluage secondaire du polycristal de glace isotrope [Duval et al., 1983].

2 - 3 COMPORTEMENT MECANIQUE DE LA GLACE POLYCRISTALLINE ISOTROPE

Un polycristal de glace a un comportement isotrope lorsqu'il n'apparaît pas d'orientation préférentielle pour les cristaux le constituant. C'est par exemple le cas des glaces polaires de surface dont les cristaux sont orientés aléatoirement, contrairement aux glaces polaires profondes qui présentent des textures fortement prononcées.

2 - 3.1 Comportement en fluage

Le comportement mécanique de la glace polycristalline isotrope a été revu en détail par Mellor [1980] et Budd et Jacka [1989]. Sa réponse est du type élastoviscoplastique. Les déformations élastiques (instantanées) en réponse à une contrainte appliquée sont négligeables devant les déformations plastiques qui sont responsables de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires. Les courbes de fluage (déformation à contrainte constante) obtenues sur des échantillons polycristallins (figure 2.3) se décomposent en trois domaines distincts :

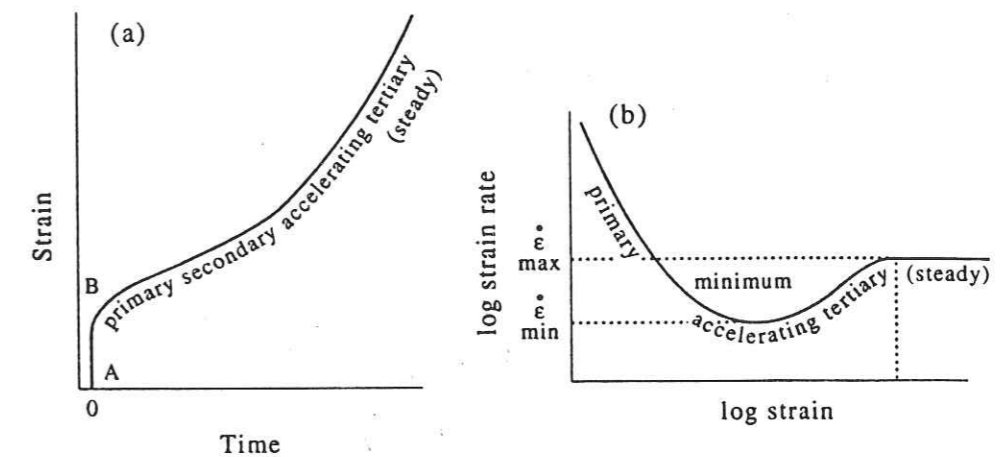


Fig. 2.3. (a) Courbe de fluage typique d'un polycristal isotrope montrant les différents stades du fluage; (b) Courbe logarithmique correspondante représentant la vitesse de déformation en fonction de la déformation [Paterson, 1994].

1. le fluage primaire, où la vitesse de déformation diminue de plusieurs ordres de grandeur au cours de la déformation;

2. le fluage secondaire, correspondant à la vitesse de déformation minimale, et qui apparaît pour une déformation d'environ 0.8%; le fluage secondaire est généralement considéré comme un état stationnaire en petites déformations;

3. le fluage tertiaire, où la vitesse de déformation augmente jusqu'à un état stationnaire, atteint après une déformation de 20% environ.

Jacka [1984] a montré que cette forme générale de la courbe de fluage reste valable dans un large intervalle de contrainte, de température et de taux de déformation. Dans les modèles d'écoulement, le comportement de la glace est souvent assimilé au fluage secondaire et au fluage tertiaire. Cependant, le fluage tertiaire n'intervient que lorsque la glace recristallise rapidement (régime de recristallisation par migration), c'est à dire pour des températures supérieures à -12°C [Duval et Castelnau, 1995]. Paterson [1981] suggère que le fluage tertiaire obéit à une relation similaire à celle décrivant le fluage secondaire mais avec une viscosité isotrope plus faible. Ainsi, de nombreux auteurs ne font pas la distinction entre ces deux sortes de fluage [ex. Van der Veen et Whillans, 1990].

2 - 3.2 La loi de Glen

Le comportement en fluage secondaire de la glace polycristalline isotrope est représenté sur la figure 2.2, qui regroupe un ensemble de résultats d'essais mécaniques. Ce comportement est bien décrit par la loi puissance de Norton, aussi couramment appelée "loi de Glen" en Glaciologie [Nye, 1957; Duval, 1976]:

$$D_{ij} = A \tau_e^{n-1} S'_{ij}, \quad (2.1)$$

où A est un facteur dépendant essentiellement de la température, et où τ_e est la cission efficace

définie dans le paragraphe 1 - 1.1. Cette loi est basée sur l'approximation d'incompressibilité qui se justifie bien pour la modélisation de l'écoulement des calottes polaires, puisque la compressibilité de la glace est inférieure à $4 \times 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$ pour des pressions allant jusqu'à 300 bar [Budd, 1969].

La valeur de l'exposant des contraintes n n'est pas encore très bien définie. Il est admis que $n=3$ pour des valeurs de τ_e supérieures à 0.2 MPa. L'estimation de l'état de contrainte dans les calottes polaires conduit cependant généralement à des valeurs de τ_e inférieures à 0.2 MPa. Dans ces conditions, les essais mécaniques en laboratoire ainsi que les mesures d'inclinométrie dans les trous de forage semblent conduire à une valeur de n inférieure à 2 [Doake et Wolff, 1985; Lliboutry et Duval, 1985; Dahl-Jensen et Gundestrup, 1987; Pimienta et Duval, 1987; Lipenkov et al., 1995]. Il est à l'heure actuelle difficile de confirmer cette tendance au comportement Newtonien [Hooke, 1981; Paterson, 1985; Alley, 1992]. En effet, d'une part la détermination des paramètres rhéologiques à partir de mesures *in situ* nécessite l'utilisation de modèles d'écoulement inverses qui ne peuvent donner des résultats réalistes que lorsque l'anisotropie des glaces est correctement prise en compte (cf. chapitre 4). D'autre part l'incertitude sur les résultats d'essais mécaniques en laboratoire ne permet pas de tirer de conclusion définitive sur la valeur de n à faibles contraintes [Castelnau, 1996].

Le coefficient A de la loi de comportement s'exprime comme une fonction de la température et de la pression suivant la loi d'Arrhénius:

$$A = A'_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \exp\left(-\frac{PV}{RT}\right). \quad (2.2)$$

où Q désigne l'énergie d'activation et V le volume d'activation pour le fluage de la glace, R est la constante des gaz parfaits, et T la température absolue [Glen, 1955; Paterson, 1994]. Pour des températures inférieures à -10°C , Q est égal à 78 kJ.mol^{-1} [Legac, 1980]. Pour des températures supérieures, une énergie d'activation plus importante (95 kJ.mol^{-1}) est généralement utilisée [ex. Budd et Jacka, 1989; Ritz, 1992]. En fait, d'après Lliboutry [communication personnelle], pour $T > -10^{\circ}\text{C}$, on passe du fluage secondaire au fluage tertiaire, la valeur de l'énergie d'activation restant la même. Ce changement de valeur serait alors un artefact. La valeur de V est encore mal

connue, mais semble être voisine de $-1.7 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ [Weertman, 1973]. La différence de pression entre la glace de surface (1bar) et la glace à une profondeur de $\sim 3000\text{m}$ (300 bar) n'induit une diminution de la viscosité que de 30 à 40%. Cet effet est très faible comparé à celui de la température, et ne sera donc pas pris en compte dans la suite de ce travail.

La valeur de A_0 est très peu sensible aux variations de densité de la glace dans les calottes polaires pour des profondeurs supérieures à 100 m environ, c'est à dire en-dessous du close off [Budd, 1969]. D'après Legac [1980], la taille de grains de la glace n'influence pas non plus la valeur de A_0 . Une dépendance avec la teneur en impuretés semble par contre être observée [Gundestrup et Hansen, 1984; Shoji et Langway, 1985; Dahl-Jensen et Gundestrup, 1987]. Les glaces de la dernière période glaciaire (dernier stade du Wisconsin), plus riches en impuretés, pourraient présenter une viscosité environ 2 à 3 fois plus faible que les glaces de l'Holocène. Cette diminution de la viscosité pourrait cependant être plutôt attribuée à un effet de texture [Pimienta, 1987; Paterson, 1991].

Dans la suite de ce travail, nous admettrons l'existence d'un régime Newtonien aux faibles contraintes. Nous supposons donc que la loi de comportement isotrope est la somme d'un terme non-linéaire ($n=3$) et d'un terme linéaire ($n=1$) [Lliboutry, 1969; Colbeck et Evans, 1973]:

$$D_{ij} = A^{(3)} \tau_e^2 S'_{ij} + A^{(1)} S'_{ij}$$

Nous avons choisi les valeurs des coefficients à -10°C , respectivement $A^{(3)} = 3.5 \times 10^{-25} \text{ Pa}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$ [Budd et Jacka, 1989], et $A^{(1)} = 1.85 \times 10^{-15} \text{ Pa}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ [Duval et Castelnau, 1995]. Notons que ces valeurs peuvent varier d'un facteur 2 selon les auteurs. Pour la glace isotrope, le tenseur des viscosités \mathbf{M} , défini dans le chapitre précédent, s'exprime donc à partir de la loi de Glen par la relation:

$$M_{ijkl} = (A^{(3)} \tau_e^2 + A^{(1)}) I_{ijkl} \quad (2.3)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité pour les tenseurs symétriques.

2 - 4 TEXTURES ET ANISOTROPIE DES GLACES POLAIRES

2 - 4.1 Limites de l'utilisation d'une loi isotrope pour les glaces polaires

L'analyse de la microstructure des glaces polaires profondes révèle la présence de textures fortement marquées qui induisent un comportement viscoplastique fortement anisotrope du polycristal. En effet, la glace se déformant essentiellement par glissement de dislocations, le comportement mécanique du polycristal peut se déduire du comportement mécanique des cristaux le constituant [Kocks, 1970]. Cette propriété a été largement mise en évidence par des essais mécaniques en laboratoire [ex. Russel-Head et Budd, 1979; Duval et Legac, 1982; Gundestrup et Hansen, 1984; Shoji et Langway, 1985; Budd et Jacka, 1989]. Sous fortes contraintes, la viscosité directionnelle de l'échantillon polycristallin peut varier de plus de 2 ordres de grandeur selon la direction de la contrainte appliquée (figure 2.4).

Ces résultats montrent qu'une loi isotrope est inadaptée pour représenter le comportement des glaces polaires. D'après Lile [1978], l'utilisation d'une loi de comportement isotrope dans les modèles de calottes polaires conduit à sous estimer d'un ordre de grandeur les vitesses de déformation en cisaillement. Si l'influence de la pression hydrostatique ou de la teneur en impureté sur la viscosité peut être représentée en multipliant la viscosité isotrope par un facteur scalaire, l'influence de la texture des glaces polaires, qui introduit un effet directionnel dans la réponse du matériau, nécessite par contre l'introduction d'un tenseur de viscosité non diagonal dans la loi de comportement.

2 - 4.2 Textures des glaces polaires et comportement mécanique

A la surface de la calotte polaire, l'orientation des axes- c est aléatoire. Jusqu'à une profondeur de 1800m à Byrd (Antarctique) et de 2750m à GRIP (Groenland), la texture des glaces ne cesse de se concentrer. On observe par exemple à Byrd, Dye 3 et GRIP, une concentration des axes- c autour de la direction verticale *in situ* $z'z'$ [Gow et Williamson, 1976; Herron et al., 1985; Thorsteinsson et al., 1995]. Une texture plus particulière, présentant une

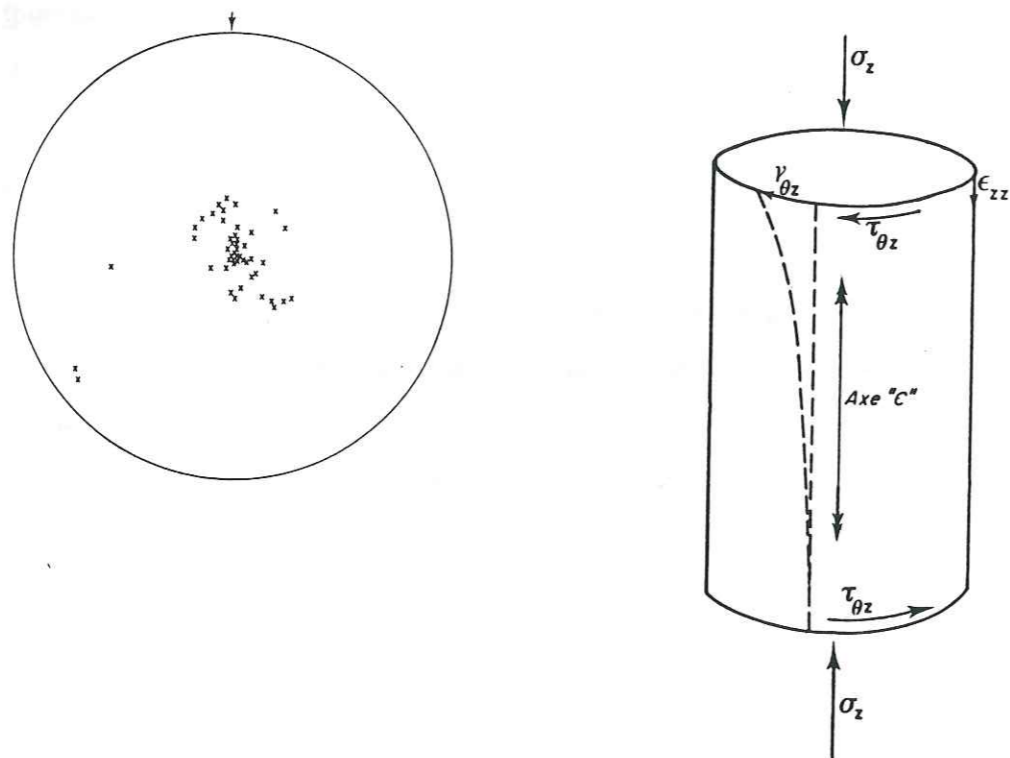
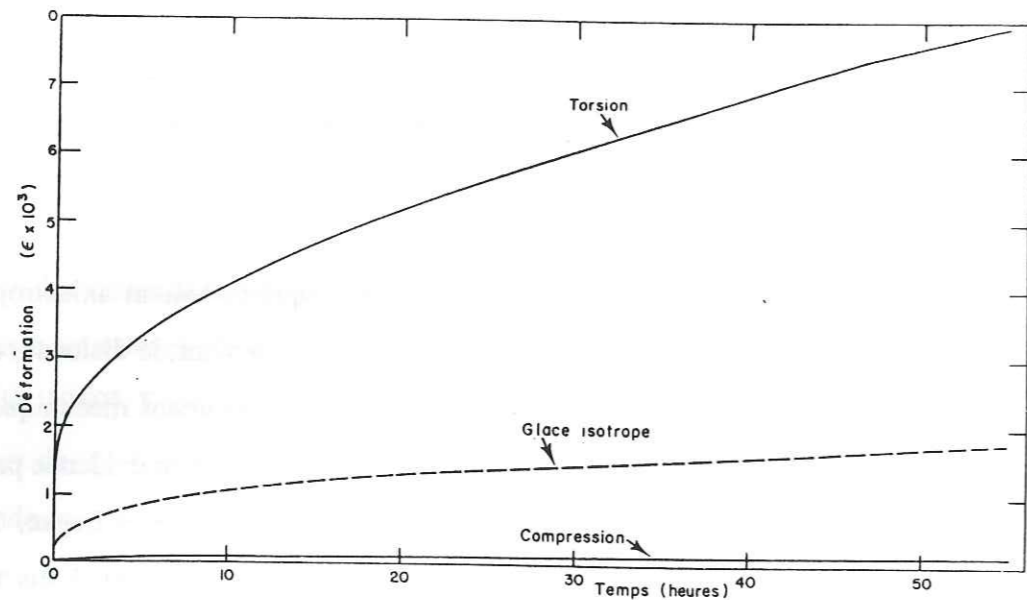


Fig. 2.4. Courbes de fluage d'un polycristal anisotrope, avec des axes-c concentrés autour de la direction verticale in situ, déformé en torsion et en compression pour une même cission efficace (1.35 bar, à -7°C). En fin d'essais (fluage secondaire), la vitesse de déformation en torsion est de 2 ordres de grandeur supérieure à la vitesse de déformation en compression [Legac, 1980]. Le comportement est comparé à celui d'un polycristal isotrope.

concentration des axes-c dans un plan vertical probablement orthogonal à la direction de l'écoulement, a aussi été observée dans les carottes de Vostok et Mizuho [Lipenkov et al., 1989; Fujita et al., 1987]. Les développements de texture mesurés à GRIP et Vostok sont représentés sur la figure 2.5. L'orientation particulière des plans de base de la glace de GRIP favorise une déformation en cisaillement horizontal (plan de cisaillement xy), mais rend difficile toute déformation axiale selon les axes $x'x$, $y'y$, et $z'z$. A 2400 m de profondeur, la viscosité en cisaillement horizontal est inférieure d'un facteur 10 à la viscosité isotrope de surface [Shoji, communication personnelle], alors que la viscosité en compression lui est supérieure d'un facteur 10 [Milsch, 1994].

Dans les couches basales des calottes polaires, si la température est supérieure à environ -12°C (soit sur 200m d'épaisseur à Byrd et moins de 300m d'épaisseur à GRIP), la glace recristallise rapidement, et des textures à plusieurs maxima apparaissent généralement. D'après Lliboutry et Duval [1985], ce type de glace présente une anisotropie viscoplastique faible, mais leur viscosité est environ 3 fois plus petite que celle obtenue en fluage secondaire sur un échantillon polycristallin non texturé.

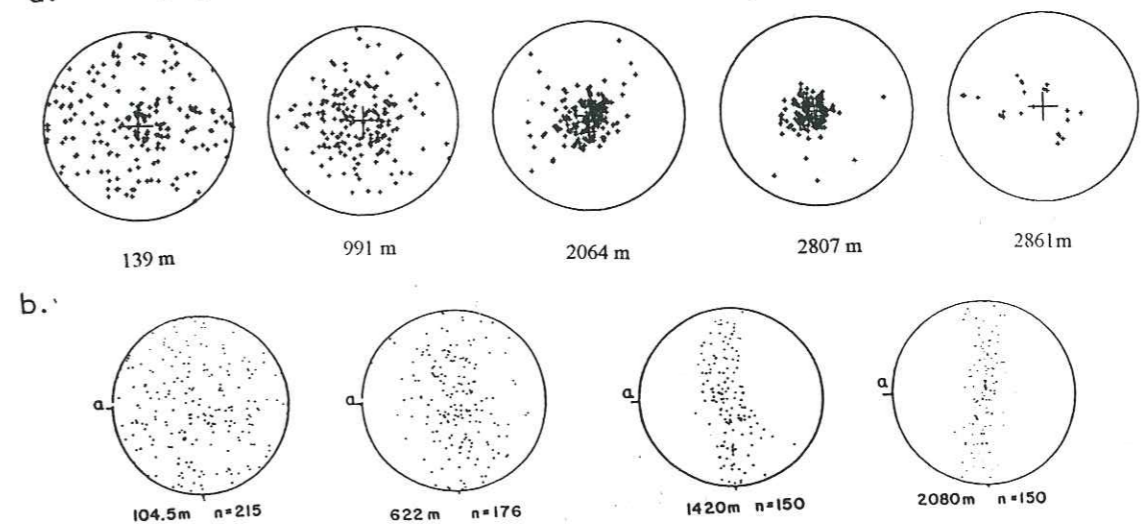


Fig. 2.5. Développement de textures dans les carottes (a) de GRIP [Thorsteinsson et al., 1995] à 139m, 991m, 2064m, 2807m et 2861m de profondeur et (b) de Vostok [Lipenkov et al., 1989] à 104.5m, 622m, 1420m et 2080m. Le centre des figures de pôle indique la direction verticale in situ. La glace de GRIP à 2861m de profondeur, qui présente une texture moins concentrée que les textures précédentes, a recristallisé.

Les textures des glaces polaires se forment sous l'effet de deux mécanismes complètement différents: la déformation plastique par glissement de dislocations et la recristallisation dynamique. Le premier mécanisme fait intervenir une relation géométrique simple, reliant directement la vitesse de rotation des plans cristallins à la vitesse de glissement des dislocations sur ces différents plans [ex. Alley, 1988; Van der Veen et Whillans, 1994; Castelnau et al., 1995]. Le second mécanisme, lié à la migration des joints de grains, fait intervenir la germination et/ou la croissance de nouveaux grains. Lors de la recristallisation, il y a une réorganisation partielle ou complète de la structure cristalline du matériau. L'orientation des nouveaux grains dépend du régime de contrainte, de la température, et de l'orientation des grains avant recristallisation.

Lorsque la température est inférieure à -12°C , la déformation plastique par glissement de dislocations est le mécanisme dominant pour le développement de textures. Les textures se développent moins rapidement, et reflètent l'histoire de déformation complète du matériau. L'influence de la lente recristallisation dynamique sur le développement de textures n'est pas à écarter complètement. D'après Castelnau [1996], la déformation plastique seule ne suffit pas à expliquer les textures à un seul maximum vertical observées dans les glaces profondes de Byrd, déformées essentiellement en cisaillement horizontal. Pour des températures supérieures à -12°C , la vitesse de migration des joints de grains est grande, et le mécanisme de recristallisation devient le mécanisme dominant pour le développement de textures. Les textures se forment rapidement, après une déformation de 10% environ, et reflètent l'état de contrainte instantanée appliqué à l'échantillon [Duval, 1981].

2 - 4.3 Lois de comportement anisotropes pour la glace polycristalline

Pour reproduire correctement le comportement mécanique de la glace en grandes déformations, il faut utiliser une loi capable de décrire la rhéologie d'un polycristal donné à partir de sa texture, et de calculer le développement de textures en fonction de l'histoire thermomécanique complète du matériau. Jusqu'à ce jour, aucune loi complète n'a été proposée.

Deux démarches sont possibles pour aborder le problème.

(i) L'une consiste à supposer l'existence d'un potentiel de dissipation d'une forme particulière pour le polycristal, à partir duquel il est possible de déduire le comportement mécanique macroscopique.

(ii) L'autre conduit à choisir la forme du potentiel microscopique décrivant le comportement du monocristal et à en déduire une loi de comportement pour le polycristal à partir de méthodes d'homogénéisation.

La première méthode s'appuie sur l'existence de potentiels duaux [Ziegler, 1977; Hill, 1987; Lemaitre et Chaboche, 1990; Van Houtte, 1994]. La forme du potentiel macroscopique est déterminée, par exemple, par des considérations de symétrie. La difficulté de cette méthode est en particulier de déterminer les paramètres rhéologiques intervenant dans la loi. Ceux-ci peuvent être directement calés sur des résultats d'essais mécaniques. Mais, pour la glace, le faible nombre d'essais mécaniques sur des échantillons anisotropes limite la détermination des paramètres rhéologiques [Lliboutry, 1993]. L'inconvénient de cette technique est que les paramètres physiques de la déformation microscopique ne sont pas pris en compte. Par contre, elle conduit à des lois de comportement simples, plus facilement utilisables pour la modélisation des calottes polaires.

Cette technique a été appliquée à la glace par Anderman [1982], Van der Veen et Whillans [1990] et Svendsen et Hutter [1996]. Ces auteurs ne traitent que le cas de polycristaux dont la texture présente une symétrie de révolution autour d'un axe, ce qui conduit à un comportement orthotrope à isotropie transverse. Cette symétrie est en effet généralement observée, en première approximation, dans les glaces polaires froides, comme nous l'avons vu au paragraphe 2 - 4.2. Van der Veen et Whillans aboutissent ainsi à une loi simple, dans laquelle 3 paramètres rhéologiques restent à déterminer. Andermann obtient par contre 6 paramètres rhéologiques. Par rapport aux lois de Andermann et de Van der Veen et Whillans, la loi de Svendsen et Hutter permet de calculer le développement de texture au cours de la déformation. Cependant, aucune relation entre la texture (représentée par un tenseur de structure) et la valeur des paramètres rhéologiques n'a pour l'instant été proposée par les auteurs.

La deuxième démarche, basée sur des méthodes d'homogénéisation, permet d'estimer le comportement macroscopique du polycristal à partir du comportement de chacun des grains le constituant. Ces méthodes présentent l'avantage de pouvoir prendre en compte une physique complexe. Elles sont cependant limitées par la nécessité de choisir une loi de comportement microscopique (pour les grains) généralement mal connue, et de trouver une relation entre les états de contrainte et de vitesse de déformation microscopiques et les quantités macroscopiques correspondantes. Ainsi, deux simplifications majeures sont généralement introduites en glaciologie [Lliboutry et Duval, 1985; Van der Veen et Whillans, 1994; Lliboutry, 1993]:

1. la glace ne se déforme que par glissement de dislocations dans les plans de base,
2. l'état de contrainte est uniforme dans le polycristal.

Azuma et Higashi [1985], Alley [1988], Lipenkov et al. [1989] ont proposé des modèles simples, purement géométriques, calculant le développement de textures, mais ne calculant pas la rhéologie. Par contre, [Anderman, 1982], [Lliboutry et Duval, 1985] et [Lliboutry, 1993] ne calculent pas l'évolution de la texture, mais s'intéressent à la réponse du polycristal pour une texture donnée. Lliboutry [1993] utilise une méthode d'homogénéisation, conduisant à une solution analytique simple si une répartition particulière des orientations cristallines est choisie. Lliboutry obtient ainsi une relation analytique directe entre le comportement mécanique du matériau et sa texture.

Les modèles numériques de Van der Veen et Whillans [1994] et d'Azuma [1994, 1995] permettent de calculer le développement de texture et la rhéologie associée. Van der Veen et Whillans sont les seuls à avoir introduit d'une manière simple un mécanisme de recristallisation dynamique, ce qui conduit à un développement de textures plus réaliste en cisaillement simple. D'un autre côté Azuma propose une méthode permettant d'introduire une loi de localisation: la déformation d'un grain dépend aussi de la déformation des grains voisins. Un travail de modélisation plus poussé a été réalisé récemment par Castelnau [1996] à l'aide d'un modèle autocohérent viscoplastique. Ce modèle, développé par Molinari et al. [1987] et Lebensohn et Tomé [1993], consiste à résoudre les équations d'équilibre et d'incompressibilité dans un polycristal. La comparaison des résultats du modèle autocohérent avec un ensemble de résultats

d'essais mécaniques a montré que le modèle autocohérent reproduit très bien la relation entre le comportement mécanique et la texture de la glace. A l'heure actuelle, ce type de modèle peut être difficilement couplé avec un modèle d'écoulement de calotte polaire, dans la mesure où il est nécessaire de stocker en chaque point de la grille de discrétisation les paramètres d'orientation d'au moins 100 grains (3 angles d'Euler par grain). Un tel couplage a cependant déjà été réalisé pour d'autres applications, sur des ordinateurs puissants [Mathur et Dawson, 1989; Chastel et al., 1993; Beaudoin et al., 1994]. En glaciologie, le problème de la recristallisation dynamique subsiste cependant. Les mécanismes de recristallisation, qui doivent absolument être pris en compte pour calculer de manière réaliste le développement de textures [Castelnau, 1996], ne sont encore compris que de manière très grossière.

Dans ce travail, nous avons utilisé la loi de Lliboutry [1993], que nous allons maintenant rappeler et discuter plus en détail.

2 - 5 APPLICATION DE LA LOI DE LLIBOUTRY A UN ECOULEMENT BIDIMENSIONNEL

La loi de Lliboutry est écrite pour une texture donnée et ne peut être employée que dans un modèle stationnaire. Elle est écrite dans les axes de symétrie matérielle. Elle ne contient pas de termes permettant de repérer l'axe de révolution de la texture. Si cet axe fait un angle avec la verticale *in-situ*, il faudra appliquer une matrice de rotation pour obtenir la matrice de viscosité dans les axes principaux de l'écoulement. Lliboutry [1993] suppose l'existence d'un potentiel de dissipation $\phi(S')$ pour le polycristal. La connaissance de ce potentiel détermine entièrement le comportement du polycristal:

$$D_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial S'_{ij}} \quad (2.4)$$

Dans le cas de viscosités en loi puissance, le potentiel macroscopique est une fonction homogène

de degré $n+1$ en S'_{ij} , et s'écrit:

$$\phi = \frac{1}{n+1} \dot{W},$$

où $\dot{W} = S'_{ij} D_{ij}$ représente la puissance dissipée par unité de volume lors de la déformation plastique. Pour déterminer la forme de la fonction $\phi(S')$, Lliboutry utilise une méthode d'homogénéisation, basée sur l'hypothèse de contrainte uniforme dans le polycristal. La loi de Lliboutry correspond donc à la borne inférieure de type Reuss, bien connue en mécanique des solides. Cette hypothèse sera discutée en détail dans le paragraphe 2 - 5.4. Dans le cas d'une distribution particulière des axes- c , présentant en particulier une symétrie de révolution autour d'une direction du repère de référence, ce traitement conduit à une expression analytique simple de ϕ ainsi que des 10 paramètres rhéologiques intervenant dans cette loi.

Nous allons maintenant formuler la loi de Lliboutry dans le cas d'un écoulement 2D, et nous ajusterons la texture à celle observée dans la carotte de GRIP. Nous discuterons ensuite de l'influence des principales hypothèses de cette loi sur le comportement du polycristal.

2 - 5.1 Formulation

Lliboutry suppose que le polycristal ne se déforme que par glissement intracrystallin dans les plans de base. Comme nous l'avons vu précédemment, l'exposant des contraintes dans la loi de comportement macroscopique est égal à 3 sous de fortes contraintes ($\tau_c > 0.2$ MPa), et une tendance au comportement Newtonien semble être observé pour de plus faibles contraintes. Lliboutry suppose donc que le potentiel de dissipation macroscopique s'écrit sous la forme d'une somme d'un polynôme P_2 et d'un polynôme P_4 , fonctions homogènes de degré 2 et 4 en S' respectivement:

$$\Phi = P_2(S'_{ij}) + P_4(S'_{ij}).$$

Le potentiel macroscopique est donné par l'intégrale volumique des potentiels microscopiques

ϕ_c , pris sous la forme:

$$\phi_c = \frac{1}{2} \psi_b \tau_b^2 + \frac{1}{4} B_b \tau_b^4, \quad (2.5)$$

où τ_b est la cission résolue dans le plan de base, et ψ_b et B_b sont les deux paramètres rhéologiques microscopiques que nous déterminerons plus tard. D'après Lliboutry, ces paramètres devraient dépendre de la texture du matériau.

Lliboutry suppose ensuite que la contrainte est uniforme dans tout le polycristal. Cette hypothèse permet d'exprimer très simplement τ_b en fonction de S' par une relation géométrique ne faisant intervenir que les paramètres d'orientation du grain. D'après Lliboutry et Duval [1985], cette hypothèse serait applicable à la glace, car la migration des joints de grain qui accompagne toujours la déformation plastique des glaces polaires est un mécanisme d'accommodation efficace des déformations intracrystallines.

Nous allons maintenant expliciter la forme du potentiel macroscopique ϕ . Pour dériver la relation (2.4), il est plus commode de se placer dans un espace dans lequel toutes les composantes de S' sont indépendantes. Les tenseurs symétriques du second ordre à trace nulle n'ont que 5 composantes indépendantes, et peuvent donc s'exprimer dans un espace à 5 dimensions. C'est le cas du tenseur des contraintes déviatoires S' , et du tenseur des vitesses de déformation D puisque la glace est supposée incompressible. D'après Canova et al. [1985], cette contraction peut se faire avec n'importe quelle convention tant que le produit contracté est conservé:

$$\dot{W} = S'_{ij} D_{ij} = S'_k D_k, \quad (i,j=1,3; k=1,5).$$

où S'_k et D_k sont respectivement les composantes du tenseur des contraintes déviatoires et des vitesses de déformation dans l'espace à 5 dimensions. Les relations de symétrie de la loi de comportement macroscopique dépendent directement des symétries de la texture du matériau, qui dépend directement de celles de son histoire de déformation [Canova et al., 1985]. Dans les calottes polaires, l'histoire de déformation d'une particule de glace est complexe, et ne présente

donc *a priori* pas de symétries particulières. Cependant, les textures naturelles qui présentent une concentration des axes-*c* autour de la direction verticale *in situ*, comme celles de GRIP et de GISP2, sont d'une forme pratiquement circulaire [Thorsteinsson et al., 1995; Anandkrishnan et al., 1994]. Nous considérerons donc dans ce travail que l'axe vertical *in situ* *z'z* est un axe de révolution pour la texture. Cette hypothèse ne doit être considérée que comme une première approximation. En effet, Castelnaud [1996] a montré qu'un léger écart dans les symétries de la texture pouvait conduire des modifications importantes dans les symétries du comportement macroscopique. En conséquence de cette symétrie de révolution, nous obtenons un comportement orthotrope à isotropie transverse pour le polycristal, où *xy* est le plan isotrope. Cette hypothèse entraîne que toute fonction scalaire de *S'* doit être invariante par une rotation autour de l'axe *z'z* et quand les axes *x'x* et *y'y* sont intervertis. Ces symétries ne laissent qu'un seul degré de liberté dans l'espace 5-D des contraintes. Quatre invariants peuvent donc être définis. Lliboutry [1993] les exprime dans le cas général d'un écoulement 3-D. Dans le cas d'un écoulement plan (relation 1.4), ces invariants deviennent:

$$\begin{aligned} S'_{ax} &= \sqrt{3}/2 S'_{zz}, \\ \tau_{\perp}^2 &= (2S'_{xx} + S'_{zz})^2/4 \\ \tau_{\parallel}^2 &= S'^2_{xz}, \\ K_3 &= (2S'_{xx} + S'_{zz})S'^2_{xz}/2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

L'intégrale des potentiels microscopiques permet d'obtenir l'expression du potentiel macroscopique ϕ :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} [\Psi_{ax} S'^2_{ax} + \Psi_{\perp} \tau_{\perp}^2 + \Psi_{\parallel} \tau_{\parallel}^2] \\ &+ \frac{1}{4} [B_{ax} S'^4_{ax} + B_{\perp} \tau_{\perp}^4 + B_{\parallel} \tau_{\parallel}^4 + 2A_{\perp\parallel} \tau_{\perp}^2 \tau_{\parallel}^2 \\ &+ 2A_{\parallel ax} \tau_{\parallel}^2 S'^2_{ax} + 2A_{ax\perp} S'^2_{ax} \tau_{\perp}^2 - 4\sqrt{3}CS'_{ax}K_3], \end{aligned} \quad (2.7)$$

où (Ψ_b, B_p, A_{kb}, C) sont les dix paramètres rhéologiques qui seront déterminés à partir de la texture du matériau. Les trois paramètres Ψ , sont directement proportionnels à Ψ_b , et les sept paramètres B_p, A_{kb} , et C à B_b . Dans le cas Newtonien $B_j = A_{kj} = C = 0$. On remarquera que, par cette méthode, ϕ

dépend aussi du troisième invariant K_3 , des contraintes, contrairement aux lois proposées par Van der Veen et Whillans [1990] et Svendsen et Hutter [1996].

En inversant la relation (2.4) et en utilisant (1.4), on obtient une loi de comportement pour la glace orthotrope à isotropie transverse, donnant les composantes de la matrice des viscosités M_{ijkl} :

$$\begin{bmatrix} S'_{xx} \\ S'_{yy} \\ S'_{zz} \\ S'_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(\varphi_{ax} - 3CS'^2_{xz}) & -\gamma(\varphi_{ax} + CS'^2_{xz}) & \gamma(-\varphi_{\perp} + CS'^2_{xz}) & 0 \\ -\gamma(\varphi_{ax} + CS'^2_{xz}) & \gamma(\varphi_{ax} + CS'^2_{xz}) & -\gamma(\varphi_{\perp} + 3CS'^2_{xz}) & 0 \\ \gamma(-\varphi_{\perp} + CS'^2_{xz}) & -\gamma(\varphi_{\perp} + 3CS'^2_{xz}) & \gamma(\varphi_{\perp} - CS'^2_{xz}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{zz} \\ D_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

avec $\gamma = 1/(\varphi_{ax}\varphi_{\perp} - 3C^2S'^2_{xz})$ et $\lambda = 1/(2\varphi_{\perp} - 3C(2S'_{xx} + S'_{zz})S'_{xz})$. Les trois fluidités scalaires sont définies par:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{ax} \\ \varphi_{\perp} \\ \varphi_{\parallel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{ax} \\ \Psi_{\perp} \\ \Psi_{\parallel} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{ax} & A_{ax\perp} & A_{\parallel ax} \\ A_{ax\perp} & B_{\perp} & A_{\perp\parallel} \\ A_{\parallel ax} & A_{\perp\parallel} & B_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'^2_{ax} \\ \tau_{\perp}^2 \\ \tau_{\parallel}^2 \end{bmatrix}$$

La forme de cette loi, qui donne *S'* en fonction de *D*, nous permet d'exprimer les équations d'équilibre (1.19) en fonction du champ de vitesse et du champ de pression pour obtenir les équations de Navier-Stokes que nous résolvons dans le modèle numérique (cf. chapitre 3).

Cette loi de comportement est une conséquence directe du travail de Lliboutry, mais, à notre connaissance, n'a jamais été formulée ni utilisée sous cette forme. Il est important de remarquer que dans le cas anisotrope, la condition de déformations planes (i. e. $D_{yy}=0$) ne conduit généralement pas à une contrainte déviatoire S'_{yy} nulle. Il faut aussi noter qu'en conséquence des symétries particulières du matériau que l'on considère ici, toute déformation longitudinale ne va produire que des contraintes longitudinales, et qu'une déformation en cisaillement n'entraînera que des contraintes de cisaillement. Cette propriété disparaît en particulier lorsque l'axe de

révolution de la texture fait un angle, même faible, avec l'axe $z'z$ [Canova et al., 1985; Castelnau, 1996], ce qui est généralement le cas dans les glaces polaires.

2 - 5.2 Détermination des paramètres rhéologiques microscopiques

Nous allons déterminer la valeur des paramètres rhéologiques microscopiques de manière à ce que la loi (2.8) reproduise la viscosité des glaces naturelles isotropes à fortes ($n=3$) et faibles ($n=1$) contraintes. Lorsque la répartition des axes- c est aléatoire, les paramètres macroscopiques deviennent:

$$\psi_i = \frac{2}{5}\psi_b, \quad B_i = A_{ij} = \frac{8}{35}B_b, \quad C=0 \quad (i,j=ax, \parallel \perp). \quad (2.9)$$

La loi (2.8) devient isotrope, et s'écrit:

$$S'_{ij} = \frac{2}{\varphi} D_{ij}, \quad (2.10)$$

avec $\varphi = \frac{2}{5}\psi_b + \frac{8}{35}B_b\tau_e^2$. On obtient alors les relations suivantes entre les coefficients rhéologiques microscopiques et les coefficients de la loi de Glen:

$$\psi_b = 5A^{(1)} \quad \text{et} \quad B_b = \frac{35}{4}A^{(3)}.$$

Les valeurs de $A^{(1)}$ et $A^{(3)}$ données dans le paragraphe 2 - 3.2 conduisent aux valeurs suivantes pour ψ_b et B_b à -20°C , qui sont respectivement dimensionnés par $[u]/([\tau][d])$ et $[u]/([\tau][d]^3)$:

$$\psi_b = 1.4 \times 10^4; \quad B_b = 2.3 \times 10^9$$

avec $[u] = 0.27 \text{ m.an}^{-1}$, $[d] = 2500 \text{ m}$, et $[\tau] = \rho g[d] = 2.2 \times 10^7 \text{ Pa}$. Ces valeurs seront utilisées dans la suite des simulations. La figure 2.6 représente le comportement isotrope correspondant à la loi (2.10) complète, ainsi qu'aux termes Newtoniens et non-Newtoniens.

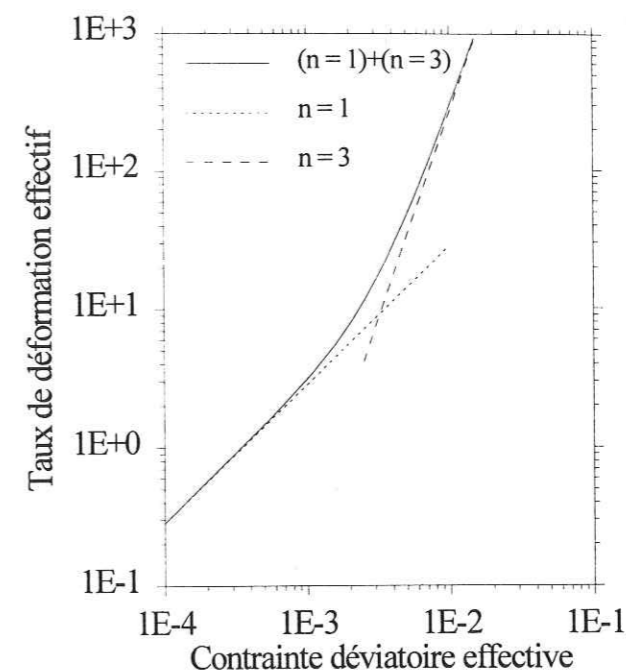


Fig. 2.6. Comportement isotrope donné par la relation (2.10). Les composantes Newtoniennes ($n=1$) et non Newtoniennes ($n=3$) sont également indiquées séparément. Les variables sans dimension sont données pour $\psi_b = 1.4 \times 10^4$ et $B_b = 2.3 \times 10^9$.

2 - 5.3 Détermination des paramètres rhéologiques macroscopiques

Les 10 paramètres rhéologiques macroscopiques (ψ_b, B_b, A_{kl}, C) ne dépendent que de la texture du polycristal. Ils sont déterminés par l'intégrale des potentiels microscopiques, lorsque la distribution des orientations cristallines du polycristal est connue. Pour déterminer ces paramètres, nous faisons trois hypothèses:

1. Les coefficients ψ_b et B_b sont indépendants de la texture du matériau. La raison de cette simplification est qu'aucune relation n'a été proposée dans la littérature. Lliboutry [communication personnelle] spécule que, pour des textures fortement concentrées, B_b devrait prendre une valeur supérieure au cas isotrope à cause d'une densité de dislocations mobiles plus importante.

2. La texture est décrite par une fonction $V(\theta)$ de distribution des orientation des axes- c . $V(\theta)$ représente la fraction volumique des grains pour lesquels l'angle entre l'axe- c et l'axe de révolution $z'z$ est supérieur à θ . Llibouty prend la distribution suivante:

$$V(\theta) = \cos^\nu \theta \quad (2.11)$$

où l'exposant ν exprime la concentration des axes- c autour de $z'z$. Cette distribution sera comparée à la distribution des orientations des glaces de GRIP dans la suite de ce chapitre.

3. Les textures, et donc aussi les paramètres rhéologiques, sont supposées être fixées à chaque noeud du maillage. Ces paramètres ne seront donc pas réactualisés en fonction du champ de vitesse calculé. Ce travail se limite donc à la comparaison des écoulements isotrope et anisotrope, mais où l'anisotropie est fixée et ne dépend pas de l'histoire de la déformation.

Les dix coefficients rhéologiques peuvent être exprimés en fonction d'un paramètre, $\theta_{1/2}$, qui est tel que $V(\theta_{1/2}) = 1/2$. Ce paramètre est directement relié à ν par la relation (2.11):

$$\nu = -\frac{\ln 2}{\ln(\cos \theta_{1/2})}$$

Pour une glace isotrope, $\theta_{1/2} = 60^\circ$, et une valeur nulle de θ correspond au cas où tous les axes- c sont parallèles à la direction $z'z$. Nous supposons que $\theta_{1/2}$ est une fonction de la profondeur réduite, et peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$\theta_{1/2} = \alpha \left(\frac{z-E}{H} \right)^2 + \beta \left(\frac{z-E}{H} \right) + \theta_0 \quad (2.12)$$

Les coefficients α , β , et θ_0 ont été déterminés de manière à reproduire le développement de texture de la carotte de GRIP (figure 2.7), dans laquelle l'angle $\theta_{1/2}$ a été mesuré par rapport à l'axe de la carotte (qui n'est pas rigoureusement un axe de révolution):

$$\alpha = 49.5, \quad \beta = 99, \quad \theta_0 = 60^\circ.$$

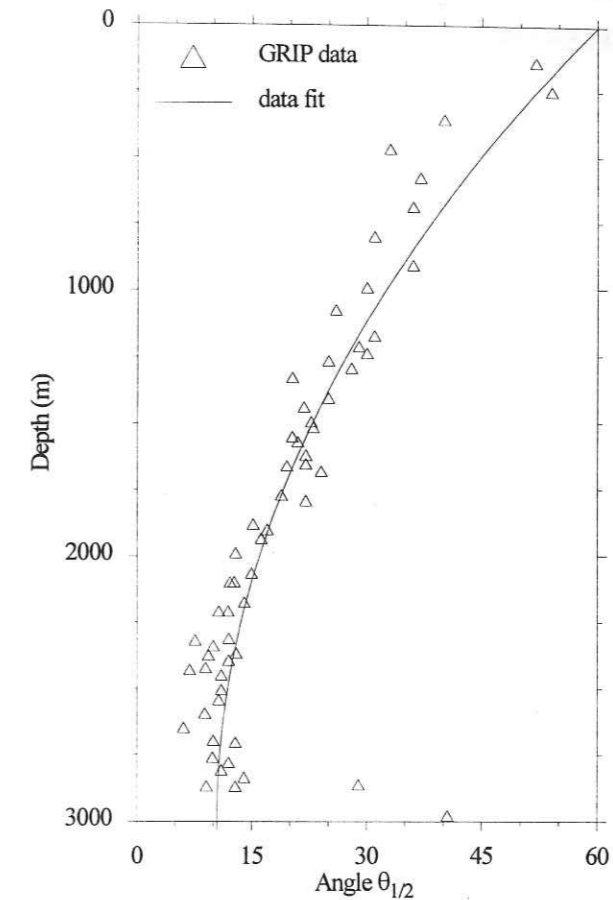


Fig. 2.7. Evolution de $\theta_{1/2}$ en fonction de la profondeur réelle [Thorsteinsson et al., 1995], ainsi que la loi d'évolution polynomiale (2.12) prise en compte dans notre modèle. Les valeurs importantes de $\theta_{1/2}$ vers 2950m de profondeur correspondent à des glaces recristallisées. Le centre des figures de pôle indique la direction verticale *in situ*. Les textures de GRIP sont représentées sur la figure (2.5).

Nous avons choisi la texture de GRIP non pas dans le but de reproduire exactement l'écoulement près du dôme du Groenland, mais simplement car la texture de GRIP est typique de la texture des glaces polaires, et que les données cristallographiques de cette carotte sont disponibles [Thorsteinsson et al., 1995].

$\theta_{1/2}$ décroît continuellement depuis la surface où la glace est isotrope ($\theta_{1/2} = 60^\circ$) jusqu'au lit rocheux, où une valeur d'environ 10° est atteinte (axes- c concentrés autour de la direction verticale *in situ*). La valeur des 10 paramètres rhéologiques est représentée en fonction de $\bar{z} = (z-B)/H$ sur la figure 2.8. A la surface de la calotte polaire, les paramètres sont donnés par les relations (2.9). Juste au-dessus du lit rocheux, B_{ax} , B_{\perp} , $A_{ax,\perp}$, et ψ_{\perp} sont inférieurs d'au moins

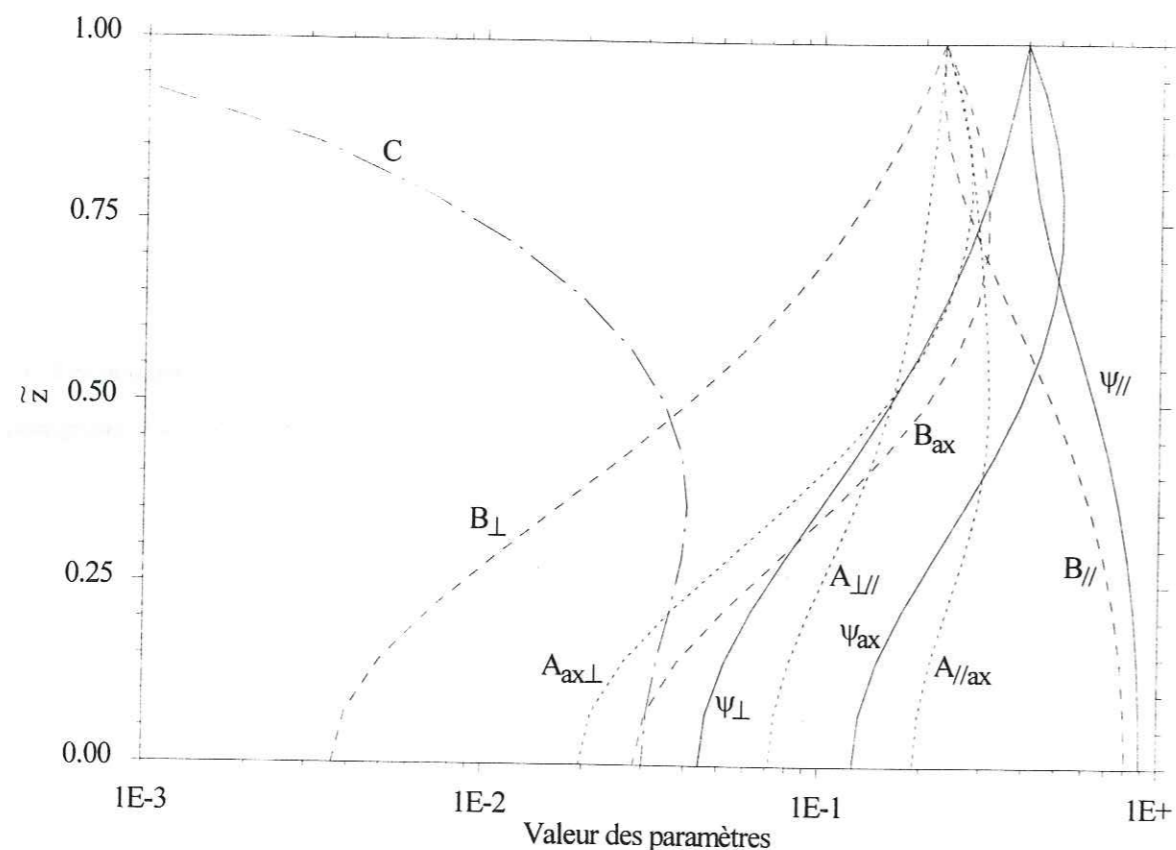


Fig. 2.8. Evolution des 10 paramètres rhéologiques macroscopiques avec la hauteur réduite \bar{z} . Les valeurs de ψ_i ont été divisées par ψ_0 , et les valeurs de A_{ij} , B_i et C par B_0 .

un ordre de grandeur à leur valeur à la surface, et $A_{\perp ax}$, $A_{\perp \parallel}$ et ψ_{ax} d'un facteur 3.4, 1.3 et 3.4 respectivement. D'un autre côté, B_{\perp} et ψ_{\perp} augmentent d'un facteur 3.6 et 2.2 depuis la surface jusqu'au lit rocheux. Ces derniers paramètres déterminent les fluidités directionnelles de la glace par rapport à la contrainte de cisaillement S'_{xz} . Il faut noter que pour un écoulement Newtonien ($n=1$), seuls les coefficients ψ_i interviennent.

2 - 5.4 Discussion

La loi de Llibouty est basée sur deux hypothèses majeures, que nous allons discuter maintenant plus en détail: (i) la loi (2.11) de distribution des orientations, qui n'a jamais été vérifiée; (ii) l'hypothèse de contrainte uniforme dans le polycristal.

Une bonne représentation de la loi $V(\theta)$ avec la profondeur est primordiale dans la mesure où cette loi est censée décrire entièrement le développement de textures. L'évolution de $\theta_{1/2}$ avec la profondeur a été déterminée à partir des données de la carotte de GRIP. Cependant, les textures des glaces polaires ne peuvent être convenablement représentées par une fonction scalaire $\theta_{1/2}$ que si la loi de distribution des orientations est correctement choisie. Pour vérifier la validité de notre loi (2.11), nous avons comparé la distribution des orientations cristallines calculée par cette loi et celle mesurée effectivement sur les glaces de GRIP. Les résultats sont représentés sur la figure 2.9 pour les profondeurs de 139 m, 994 m, 2064 m, et 2697 m. On note ainsi un accord remarquable, montrant que la relation (2.11) associée à la loi (2.12) que nous avons choisie et dont nous venons de déterminer les coefficients permet une description tout à fait réaliste du développement de textures le long de la carotte de GRIP.

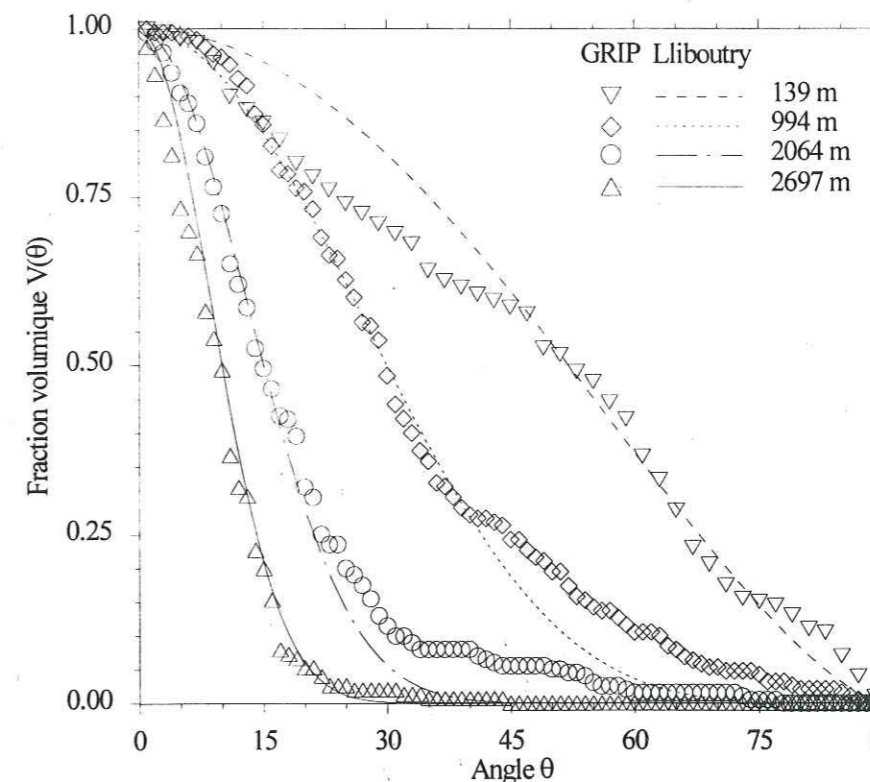


Fig. 2.9. Comparaison de la loi (2.11) de distribution des orientations proposée par Llibouty [1993] avec les mesures effectuées sur les glaces de GRIP [Thorsteinsson, communication personnelle], pour quatre profondeurs in situ différentes.

Une limitation subsiste cependant: dans les glaces de GRIP, la valeur de $\theta_{1/2}$ a été calculée par rapport à l'axe de la carotte. Cet axe ne correspond ni à l'axe vertical *in situ* (la déviation du trou de forage par rapport à la verticale est de l'ordre de quelques degrés), ni à un axe de révolution des textures naturelles puisque celles-ci ne présentent pas exactement une telle symétrie. On estime ainsi à environ 5° l'incertitude sur la valeur de $\theta_{1/2}$. Entre 2000 et 3000m de profondeur, $\theta_{1/2}$ ne varie pas de plus de 5° à GRIP (figure 2.7). Cependant, d'après la figure 2.8, les variations des paramètres rhéologiques sont importantes pour \bar{z} compris entre 0 et 0.33. La description complète de la texture des glaces par un scalaire unique $\theta_{1/2}$ fonction de la profondeur est donc une limitation à la prise en compte de l'anisotropie des glaces polaires dans les modèles d'écoulement. La description de la texture par un tenseur de structure [Svendsen et Hutter, 1996] devrait être plus appropriée.

Lliboutry se sert de l'hypothèse de contrainte uniforme dans le polycristal pour exprimer la cission réduite dans le plan de base des cristaux de glace. Cette hypothèse devrait être applicable à la glace si la migration des joints de grains est un processus d'accommodation suffisamment efficace pour limiter significativement les contraintes internes [Lliboutry et Duval, 1985]. L'influence de cette hypothèse a été étudiée en détail par Castelnau [1996]. Connaissant la texture du polycristal, il est possible, à l'aide d'un modèle numérique de comportement mécanique, de tracer une surface dans l'espace 5-D des contraintes qui relie l'ensemble des points correspondant à une même valeur de la puissance dissipée. Ces surfaces ont été tracées à partir de la texture réelle de la glace de GRIP à 2064m de profondeur, avec un modèle autocohérent qui reproduit particulièrement bien la rhéologie du polycristal de texture donnée pour $n = 3$ [Castelnau, 1996], et avec un modèle basé sur l'hypothèse de contraintes uniformes (modèle statique) pour $n = 1$ et $n = 3$ (figure 2.10). Le modèle statique numérique est rigoureusement équivalent au modèle de Lliboutry, mais ne nécessite pas l'introduction d'une loi de distribution des orientations, ce qui permet un calcul avec une texture naturelle présentant une répartition d'orientation quelconque.

Les surfaces à vitesse de dissipation constante permettent de représenter d'une manière simple la dureté d'un polycristal lorsque celui-ci est déformé dans une direction donnée. Par exemple, on peut tirer aisément de la figure 2.10 les valeurs des coefficients multiplicatifs

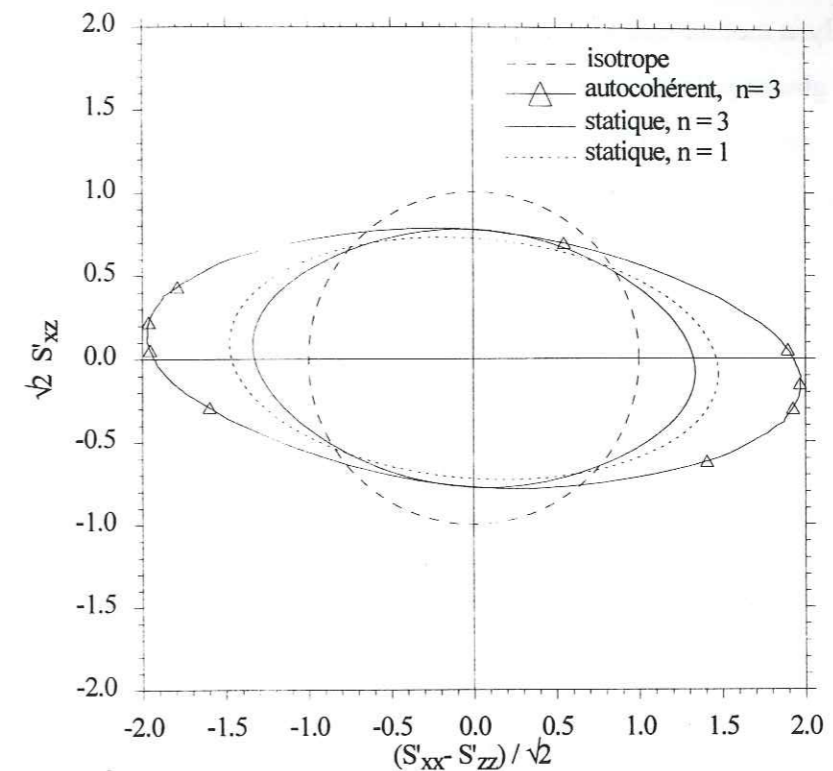


Fig. 2.10. Surfaces à vitesse de dissipation constante pour la glace de GRIP à 2064 m de profondeur, calculées avec le modèle autocohérent viscoplastique pour $n=3$, et avec le modèle statique (contrainte uniforme) pour $n=1$ et $n=3$. Ces surfaces sont calculées dans les conditions $D_{xy}=D_{yz}=D_{yy}=0$. Les valeurs de la contrainte S'_{yy} , non nulles, ne sont pas représentées. Le cercle unitaire indique, pour comparaison, le comportement d'un polycristal isotrope. [Castelnau, communication personnelle].

introduits généralement en glaciologie dans la loi isotrope pour représenter l'anisotropie des glaces polaires (cf. paragraphe 1 - 3.4). Lorsque la contrainte de cisaillement S'_{xy} est nulle, le facteur multiplicatif en déformation axiale est donné par $|S'_{xx} - S'_{zz}|^{-n-1}$. On trouve ainsi une valeur de 0.07 avec le modèle autocohérent, mais de seulement 0.33 et 0.46 avec le modèle statique respectivement pour $n = 3$ et $n = 1$. De même, lorsque $S'_{xx} - S'_{zz} = 0$, le facteur multiplicatif en cisaillement horizontal est donné par $|S'_{xy}|^{-n-1}$. On trouve 2.7 avec le modèle autocohérent et le modèle statique pour $n = 3$, et seulement 2.0 avec le modèle statique pour $n = 1$. On notera que cette dernière valeur ne peut être supérieure à $35/8 = 4.375$ ($n=3$) et $5/2 = 2.5$ ($n=1$) avec le modèle statique, alors qu'elle peut prendre des valeurs supérieures à 10 dans les glaces polaires fortement texturées.

Cette analyse montre que l'hypothèse de contraintes uniformes conduit à sous estimer l'anisotropie des glaces polaires. On obtient aussi avec la loi de Lliboutry un comportement moins anisotrope pour $n = 1$ que pour $n = 3$. Cette différence ne semble cependant pas être observée expérimentalement pour des glaces polaires fortement texturées [Castelnau, 1996]. On retiendra donc que les effets de l'anisotropie sur l'écoulement des calottes polaires que nous allons décrire dans les chapitres suivants seront amplifiés lorsqu'une loi de comportement reproduisant mieux le comportement expérimental des glaces anisotropes sera utilisée.

2 - 6 CONCLUSION

Nous avons montré que la loi de comportement isotrope de Glen, généralement utilisée en glaciologie, ne permet pas une représentation réaliste du comportement mécanique des glaces polaires. Les textures que l'on observe dans les glaces profondes induisent un comportement viscoplastique fortement anisotrope. Les viscosités directionnelles d'un même polycristal peuvent varier de plus de 2 ordres de grandeur selon la direction de la déformation. L'introduction rigoureuse de l'anisotropie dans un modèle de calotte polaire nécessite de connaître une loi de comportement qui permette de calculer le comportement du polycristal à partir de sa texture, mais aussi l'évolution de sa texture au cours de la déformation. Pour l'instant, aucune loi de comportement analytique complète n'a été formulée pour la glace. Une prise en compte pertinente de l'anisotropie nécessiterait un couplage entre un modèle numérique de comportement, par exemple du type autocohérent, avec le modèle d'écoulement à grande échelle, ce qui nécessite d'une part des moyens de calcul puissants, et d'autre part une meilleure connaissance des mécanismes de recristallisation dynamique.

Dans ce travail, nous utiliserons la loi de Lliboutry, analytique, mais basée sur une méthode d'homogénéisation. Cette loi ne permet pas le calcul du développement de texture avec la déformation. Les paramètres de la loi ont été déterminés à partir de la viscosité de la glace polycristalline isotrope, ainsi qu'à partir du développement de textures mesuré dans la carotte de GRIP. Nous avons montré que la loi de Lliboutry sous estime l'anisotropie réelle des glaces

polaires, et en particulier dans le cas d'un comportement Newtonien. Les résultats de cette toute première étude seront donc amplifiés lorsqu'une loi reproduisant mieux le comportement anisotrope des glaces polaires sera utilisée.

CHAPITRE 3

MODELE NUMERIQUE

3 - 1 INTRODUCTION

Les problèmes essentiels liés à la résolution numérique de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires sont dus au caractère incompressible de la glace ainsi qu'à la présence d'une surface libre sur laquelle les conditions aux limites à imposer dépendent du temps. Nous présentons ici une méthode numérique aux différences finies, capable de résoudre les équations régissant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible, non-Newtonien et anisotrope. Cette méthode n'est pas classique, en particulier en ce qui concerne la discrétisation temporelle semi-implicite. C'est une méthode simple (par exemple plus simple que celle proposée par Patankar [1980]) et qui converge remarquablement bien comme on le verra par la suite. Le programme que nous avons développé est conçu de manière à pouvoir facilement être étendu au cas d'un écoulement thermo-mécanique couplé non-stationnaire. De plus, ce type de modèle n'a jamais été utilisé en glaciologie. Il est donc intéressant d'analyser la validité et les performances de notre modèle.

Notre approche, pour modéliser l'écoulement de la glace, relève plus de la mécanique des fluides pour les écoulements à faibles nombres de Reynolds, que de la mécanique des solides. Jusqu'ici les méthodes numériques développées en glaciologie permettant de calculer toutes les composantes du tenseur des contraintes et des déformations étaient basées sur des codes aux éléments finis, empruntant des méthodes essentiellement développées en mécanique des solides. La géométrie simple d'une calotte polaire (absence de déferlement, de retournement) permet

d'introduire un changement de coordonnées qui ne rend plus nécessaire l'utilisation des éléments finis bien adaptés au traitement de géométries torturées.

Dans ce travail, nous nous limitons au calcul de l'écoulement stationnaire. Notre objectif étant de mettre en évidence les effets de l'anisotropie sur l'écoulement de la glace, nous avons simplifié le problème en ne calculant pas le champ de température à l'intérieur de la calotte et en ne traitant pas le problème spécifique des marges. Nous résolvons donc les équations de Navier-Stokes dans un domaine borné Ω de frontière Γ . L'étendue horizontale de notre domaine est fixée et des vitesses horizontales sont prescrites sur les bords droits et gauches du domaine. Le problème est alors tronqué car ces conditions aux limites n'ont pas de réalité physique. Les calculs de Raymond [1983] montrent qu'il existe une région autour du dôme dans laquelle l'écoulement est indépendant des conditions sur les bords, ce qui permet de traiter les marges indépendamment.

Pour résoudre l'écoulement stationnaire, nous empruntons une méthode élaborée pour traiter le problème des écoulements incompressibles transitoires. Nous rajoutons un terme fictif $\partial u/\partial t$ dans les équations de conservation du moment et nous laissons évoluer la surface libre jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint pour l'élévation de la surface et le champ de vitesse. Nous ne résolvons l'équation d'évolution de la surface libre que pour ajuster celle-ci à un taux d'accumulation prescrit. Notre problème s'apparente ainsi à un problème d'évolution physique. Nous introduisons un système de coordonnées réduites permettant de simplifier considérablement le traitement des conditions aux limites à la surface libre. Dans les années 1970-1980, de gros efforts ont été faits en hydrodynamique pour développer des codes performants permettant de résoudre les équations régissant l'écoulement des fluides incompressibles. Pour construire notre code, nous avons puisé dans les idées élaborées à cette époque.

Dans la méthode utilisée (méthode de projection), la condition d'incompressibilité est remplacée par une équation de Poisson pour la pression. Les conditions aux limites de Dirichlet sur les bords pour les vitesses sont remplacées par des conditions de Neumann pour la pression. Le traitement numérique fait apparaître deux difficultés. La première concerne la discrétisation temporelle du schéma numérique qui, pour des écoulements à faibles nombres de Reynolds, doit

être implicite. La formulation implicite la moins coûteuse doit être choisie car, l'écoulement étant stationnaire, seul importe le résultat à la convergence. L'autre difficulté réside dans la discrétisation spatiale qui doit permettre d'une part de vérifier l'incompressibilité discrète à une bonne précision, et d'autre part la condition de compatibilité discrète du problème de Poisson-Neumann pour la pression.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction du paragraphe 1 - 3, la géométrie du domaine évolue avec un temps caractéristique beaucoup plus court que celui des variations des champs de vitesse et de déformation, ce qui permet un découplage du calcul de l'équilibre mécanique et de l'évolution de la surface. La structure globale de notre algorithme s'appuie sur une méthode numérique couramment employée par les glaciologues. Cette technique itérative utilise le schéma suivant [Hutter, 1993]:

- (1) Pour un temps fixé t , la géométrie du domaine $E(t)$ et la distribution de température à l'intérieur de celui-ci est donnée.
- (2) Le champ de vitesse \mathbf{u} , pour une température donnée, est calculé en résolvant le problème elliptique et non-linéaire (1.18), (1.19) avec des conditions aux limites mixtes (1.13), (1.15)
- (3) On détermine le nouveau domaine $E(t+\Delta t)$ en intégrant dans le temps l'équation cinématique (1.12) avec le champ de vitesse $\mathbf{u}(t)$.
- (4) On réactualise le champ de température en résolvant le problème parabolique dans le temps et elliptique dans l'espace donné par l'équation (1.8) et les conditions aux limites (1.14) et (1.16)

Dans ce travail, nous ne traitons pas la partie 4) du problème. La description de la méthode numérique permettant de résoudre les équations d'équilibre mécanique et celle permettant de calculer l'évolution de la surface libre seront présentées séparément. D'autre part, dans le cas d'un comportement non-Newtonien de la glace, le système d'équations à résoudre est

non linéaire. Une itération doit alors être introduite dans le calcul des vitesses et de la viscosité. La structure générale du modèle est représentée sur la figure (3.1). Les équations que nous résolvons dans ce modèle sont les équations (sans dimension) de la conservation de la masse et du moment avec les conditions aux limites présentées au chapitre 1. Pour rendre la formulation des équations quasi-statiques plus compacte, nous effectuons un changement de variable pour la pression faisant disparaître des équations le terme représentant la force de gravité:

$$p' = p + \rho gz \quad (3.1)$$

qui donne après dédimensionalisation $p' = p + z$. Pour ne pas alourdir les expressions, nous noterons dans la suite p pour p' .

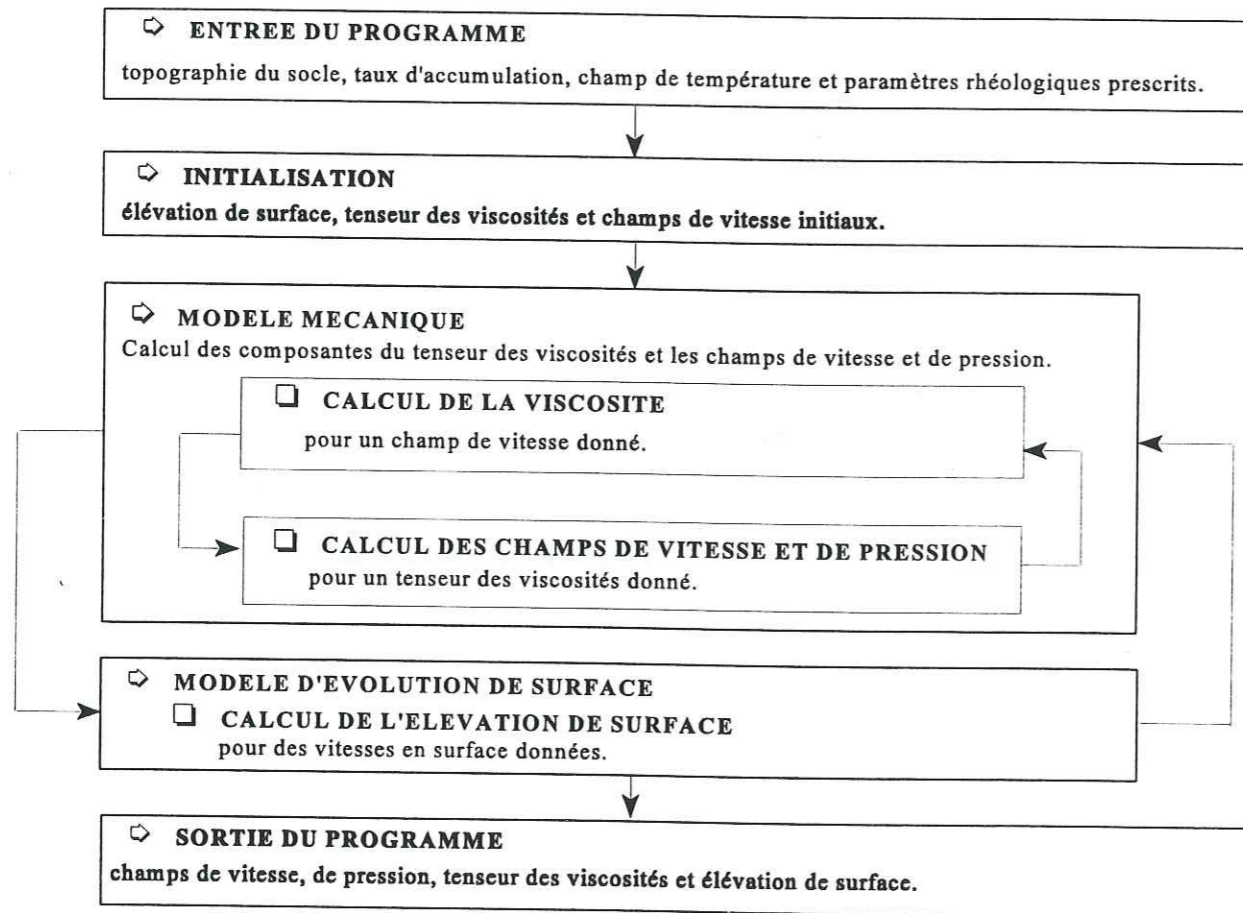


Fig. 3.1. Le schéma itératif.

Le système d'équations que nous allons résoudre s'écrit alors:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S'_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial S'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S'_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

avec les conditions aux limites à la surface en $z=E(x)$, (1.12) dans le cas stationnaire:

$$u_x \frac{\partial h}{\partial x} - u_z = a \quad (3.4)$$

et la condition dynamique de surface libre obtenue en multipliant (1.13.a) par $(-E')$ puis en lui soustrayant (1.13.b) et en additionnant à (1.13.a), (1.13.b) multiplié par $(-E')$:

$$\begin{cases} p = \frac{S'_{zz} - E'^2 S'_{xx}}{1 - E'^2} + E \\ S'_{xz} = \frac{E'}{1 - E'^2} (S'_{xx} - S'_{zz}) \end{cases} \quad \text{sur } z=E(x,t) \quad (3.5)$$

où $E' = \frac{\partial E}{\partial x}$, représente la pente de la surface. Les conditions cinématique sur le socle, utilisée dans le modèle, sont des conditions de non glissement en $z=B(x)$; (1.15) devient alors:

$$u_x = u_z = 0, \quad \text{sur } z=B(x) \quad (3.6)$$

Dans le paragraphe 2, nous rappellerons les techniques utilisées pour résoudre les équations régissant l'écoulement d'un fluide incompressible et présenterons la méthode de projection sur laquelle est basée notre méthode numérique; dans le paragraphe 3, nous décrirons la façon dont nous avons discrétisé le problème et discuterons de la compatibilité de cette discrétisation avec la méthode numérique utilisée; dans le paragraphe 4, nous décrirons notre traitement de la surface libre et dans le paragraphe 5 nous étudierons les performances du modèle et sa sensibilité aux conditions aux limites utilisées.

3 - 2 METHODE NUMERIQUE POUR LE PROBLEME MECANIQUE

3 - 2.1 Méthodes de résolution de l'écoulement d'un fluide incompressible

Dans ce paragraphe, nous décrirons les différentes méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles et stationnaires et spécifierons celle que nous utilisons. Nous avons formulé le problème en variables primitives (champ de vitesse et de pression) contrairement à certaines méthodes proposées pour la résolution numérique des équations régissant les écoulements bidimensionnels d'un fluide visqueux incompressible, qui utilisent comme inconnues la fonction de courant et la vorticité [Dix, 1963; Fromm et Harlow, 1963; Pearson, 1965; Barakat et Clark, 1966; Runchal et Wolfshtein, 1969]. Par rapport à ces méthodes, notre formulation a comme principal avantage de pouvoir être facilement étendue au cas tridimensionnel. Dans la suite de ce paragraphe, nous présenterons les méthodes de résolution numérique des équations mécaniques formulées en variables primitives.

Le problème principal est d'assurer l'incompressibilité. Une approche usuelle est la méthode de compressibilité artificielle [Chorin, 1967; Choi et Merkle, 1985; Rizzi et Eriksson, 1985; Kwak et al., 1986] où un nouveau terme, la dérivée de la pression par rapport au temps, est introduit dans l'équation de continuité. Des ondes de pression de vitesse finie sont introduites dans les champs de l'écoulement incompressible comme moyen pour distribuer la pression. Cette

pression artificielle est seulement un artéfact numérique et l'équation qui en résulte n'a de signification physique qu'une fois le régime stationnaire atteint.

Une autre méthode permettant d'obtenir l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, consiste à partir des équations incompressibles en régime non-stationnaire et à laisser le système se relaxer jusqu'à ce qu'un état stationnaire soit atteint. C'est cette méthode que nous avons utilisée. Par souci de simplicité dans la présentation des méthodes numériques, nous présenterons les équations en utilisant une loi de comportement (1.2.c) Newtonienne et isotrope. En variables primitives, les équations de Navier-Stokes en régime non-stationnaire s'écrivent alors:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f}_e \quad (3.7)$$

où η est la viscosité dynamique Newtonienne et \mathbf{f}_e représente les forces extérieures. Dans le cas de l'écoulement d'un glacier, la seule force extérieure intervenant est la gravité $\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{g}$ (chapitre 1).

Nous avons omis les termes de convection qui sont effectivement négligeables dans les équations traitant de l'écoulement de la glace dans une calotte polaire (cf. chapitre 1).

Avec le changement de variable (3.1), on a vu que (3.7) devient:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{u} - \nabla p \quad (3.8)$$

L'évolution temporelle étant fictive, nous pouvons donc utiliser comme pas de temps $\Delta t' = \Delta t / \rho$, que nous appellerons Δt pour ne pas alourdir les notations. Les équation à résoudre sont alors:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{u} - \nabla p \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Dans ce cas, l'équation de continuité est remplacée en général par une équation de Poisson elliptique pour la pression, pouvant être obtenue facilement en prenant la divergence des

équations de conservation de la quantité de mouvement (3.9a). La solution de l'équation pour la pression n'a pas alors seulement pour but de fournir le champ de pression, mais sert aussi indirectement à satisfaire l'équation de continuité. La plupart des méthodes résolvant ces équations transitoires utilisent directement l'équation de Poisson pour le calcul de la pression et les équations du moment pour le calcul des vitesses. La MAC (marker-and-cell) method [Harlow et Welsh, 1965] est le prototype de ces méthodes; elle permet de traiter l'écoulement dépendant du temps d'un fluide incompressible, dont les limites sont partiellement confinées et partiellement libres. Les équations complètes de Navier-Stokes (3.9a) sont d'abord discrétisées par des formules aux différences finies, et l'équation de Poisson pour la pression est obtenue en prenant la divergence discrète des équations du moment discrétisées. Ces équations sont résolues par une itération temporelle. Une méthode analogue a été conçue par Williams [1969] pour des problèmes à trois dimensions où l'équation de Poisson aux différences finies est résolue en utilisant des techniques d'expansion trigonométriques.

Nous utilisons ici une méthode, couramment appelée "méthode de projection" [Chorin, 1968; Temam, 1969; Peyret et Taylor, 1983], qui s'apparente, dans une certaine mesure, à la méthode MAC, à celle de Kuznetsov [1968] ainsi qu'à celle de Patankar [1980]. En premier lieu, un champ de vitesse intermédiaire est calculé à partir des équations de conservation du moment (3.9a); la pression est ensuite calculée de manière à ce que le champ de vitesse au nouveau temps soit à divergence nulle; la vitesse est alors corrigée avec les gradients de la pression obtenue de cette manière. Cette méthode permet d'éviter l'accumulation de la partie compressible de l'erreur de discrétisation. La difficulté inhérente à l'application aux fluides incompressibles de ces méthodes de résolution est le traitement des conditions aux limites. En effet, les conditions aux limites sur p pour un fluide incompressible sont généralement inconnues. Le seul changement par rapport à la méthode de MAC réside dans la façon dont l'équation de Poisson est écrite. Ce changement introduit une différence dans l'interprétation des seconds membres de l'équation de Poisson quand on considère les points près de la frontière du domaine de calcul. L'utilisation de la grille alternée MAC dans la méthode de projection la rend identique à la méthode MAC tant que les conditions aux limites ne sont pas considérées. Dans la suite de ce chapitre nous ferons souvent appel à la méthode MAC comme base de comparaison avec notre méthode numérique.

3 - 2.2 La méthode de projection

La méthode de projection a été développée pour résoudre les écoulements non-stationnaires et permet donc de répondre au problème d'itération temporelle. Nous décrivons ici plus en détail la méthode de projection et nous montrerons comment nous l'avons adaptée au problème considéré. Cette méthode explicite est une méthode à pas fractionnaire du premier ordre dans le temps. Elle a été proposée indépendamment par Chorin [1968] et Temam [1969]; une version explicite de cette méthode a été présentée par Fortin et al. [1971]. Cette méthode considère les équations de Navier-Stokes (3.9a) dans un domaine borné Ω de frontière Γ et introduit un opérateur de projection sur le sous-espace des champs à divergence nulle et de composante normale à Γ donnée [Fortin et al., 1971].

Dans un premier temps, une vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* est introduite, calculée en utilisant l'équation du moment sans le terme de gradient de pression:

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \eta \Delta \mathbf{u}^n \quad (3.10)$$

Les équations (3.9) donnant \mathbf{u}^{n+1} deviennent alors:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

En prenant la divergence de l'équation (3.11a) et en utilisant (3.11b) qui impose l'incompressibilité au pas $(n+1)$, on obtient une équation de Poisson (3.12a) pour la pression $p^{(n+1)}$. Les conditions aux limites pour p sont obtenues en projetant l'équation vectorielle (3.11a) sur le vecteur unitaire normal \mathbf{n} à la frontière Γ . Nous obtenons ainsi un problème de Poisson-Neumann équivalent à (3.11):

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_{\Gamma}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_{\Gamma}^{n+1} - \mathbf{u}_{\Gamma}^*) \cdot \mathbf{n}$$

où \mathbf{u}_{Γ}^* est la valeur (encore non définie) de \mathbf{u}^* sur Γ mais qui doit satisfaire la condition de compatibilité du problème de Poisson-Neumann, reliant le terme source de l'équation de Poisson aux conditions aux limites de Neumann (théorème de Green) [Fortin et al., 1971]:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = -\frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.13)$$

En fait, cette condition est identiquement satisfaite car la vitesse \mathbf{u}^{n+1} a un flux total nul sur Γ . Le choix de la discrétisation spatiale devra être effectué, en particulier, de façon à vérifier l'analogie discret de (3.13). On peut montrer [Fortin, 1970] que

$$\mathbf{u}^{n+1} = P(\mathbf{u}^*)$$

où P est un opérateur de projection orthogonal de l'espace $(L^2(\Omega))^2$ sur son sous-espace de champs à divergence nulle et de composante normale à Γ donnée.

Pour résumer, l'équation (3.10) donne \mathbf{u}^* , ensuite la résolution du problème de Poisson-Neumann (3.12) donne p^{n+1} , et finalement, la vitesse \mathbf{u}^{n+1} est calculée à partir de (3.11a). La caractéristique essentielle de la méthode de projection explicite est que la solution numérique est indépendante de la valeur de \mathbf{u}_{Γ}^* . Cette assertion est basée sur les deux points suivants [Peyret et Taylor, 1983]:

- (i) les valeurs de \mathbf{u}^* sur les points intérieurs sont indépendantes de \mathbf{u}_{Γ}^* car elles sont calculées par un schéma explicite.
- (ii) la valeur de $\mathbf{u}_{\Gamma}^* \cdot \mathbf{n}$ dans le problème de Poisson-Neumann (3.12) apparaît

simultanément dans le second membre de l'équation de Poisson (3.12a) et dans les conditions de Neumann (3.12b), et disparaît donc identiquement.

La méthode de projection permet bien de vérifier à la fois les équations et les conditions aux limites pour \mathbf{u} sans avoir besoin d'imposer les bonnes conditions aux limites pour p , conditions qu'en général on ne connaît pas, du moins pour les fluides incompressibles. Notons enfin que l'utilisation de cette méthode permet, en employant un pas de temps suffisamment petit, de calculer correctement la solution transitoire des équations de Navier-Stokes non-stationnaires. Nous verrons par la suite que la discrétisation du problème et en particulier des conditions aux limites, ainsi que le schéma temporel choisi jouent un rôle déterminant pour assurer la cohérence de la méthode.

3 - 2.3 Le schéma itératif

L'itération temporelle (3.10), (3.11) pose des problèmes de convergence pour les écoulements à faibles nombres de Reynolds. Il est donc nécessaire de faire attention au schéma temporel utilisé. Des techniques numériques ont été développées avec un schéma temporel explicite pour résoudre les équations de l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible [Hirt et al., 1970; Harlow, 1969; Abdallah, 1987b]. A cause des limitations liées aux restrictions de stabilité numérique, ces méthodes ne sont pas applicables à des problèmes d'écoulement à nombre de Reynolds inférieur à 1, comme c'est le cas pour l'écoulement de la glace dans les calottes polaires ($Re \sim 10^{-10}$). Pracht [1971] développe une méthode implicite (MACRL) similaire à la méthode MAC, valable pour les faibles nombres de Reynolds, dans laquelle la force visqueuse est implicite, les termes de convection restant explicites. Ainsi, la méthode MAC devient applicable à des écoulements lents tels que la dérive des continents, l'écoulement d'un glacier ou l'écoulement d'un lubrifiant. Après avoir étudié la stabilité de différents schémas numériques aux différences finies pour la méthode MAC [Deville, 1974, 1975] utilise une méthode ADI (alternating direction implicit) qui augmente significativement la rapidité du calcul. Une autre méthode, totalement implicite, consiste à résoudre l'équation de Poisson elliptique pour la pression en y introduisant une dérivée temporelle artificielle de la pression. Cela transforme

l'équation de Poisson en une équation parabolique dans le temps dont la solution n'a de sens physique qu'à la convergence [Sotiropoulos et Abdallah, 1990]. Cette méthode permet de diminuer considérablement le temps de calcul et peut donc être appliquée à des problèmes à trois dimensions.

Dans la méthode de projection, le caractère implicite du schéma se trouve soit dans le calcul du champ de vitesse auxiliaire \mathbf{u}^* [Chorin, 1968; Fortin et al., 1971], soit dans le schéma temporel. On peut noter que, lorsque \mathbf{u}^* est calculé par un schéma implicite, la question des conditions aux limites pour la pression est plus compliquée que dans le cas explicite [Temam, 1969, 1977; Peyret et Taylor, 1983]. C'est pourquoi nous introduirons une partie semi-implicite directement dans le schéma temporel.

Nous présenterons ici une formulation très simplifiée de l'équation (3.9a) en la réduisant à une simple équation de diffusion à une dimension pour mettre en évidence le schéma semi-implicite que nous avons utilisé:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

Plusieurs schémas itératifs possibles sont présentés:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{\eta}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) && \text{schéma explicite} \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{\eta}{\Delta x^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) && \text{schéma implicite} \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{\eta}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^n) + u_{j-1}^n) && \text{schéma semi-implicite} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Une analyse de stabilité simple montre que la condition de stabilité pour l'équation explicite (3.15a) est $\eta \Delta t / \Delta x^2 < 1/2$, alors que (3.15b) est stable quelles que soient les valeurs de η , Δt et

Δx . Pour montrer les conséquences de cette limitation, la restriction de stabilité de la méthode explicite peut s'écrire:

$$(2N) \left(\frac{\rho U \Delta t}{\Delta x} \right) < Re$$

où L et U représentent respectivement une longueur et une vitesse caractéristiques de l'écoulement et N le nombre de points dans la direction horizontale ($N=L/\Delta x$). On peut noter que, dans le cas d'une évolution temporelle réelle, étant donné notre changement de variable pour t , on a la relation:

$$(2N) \left(\frac{U \Delta t}{\Delta x} \right) < Re$$

Cette inégalité montre la nécessité d'introduire une formulation implicite pour le traitement d'écoulements à très faible nombre de Reynolds. En effet, dans le cas de l'écoulement de la glace, comme $Re \sim 10^{-10}$, il faut des Δt extrêmement petits pour permettre la convergence. De plus la nécessité de vérifier cette inégalité limite la possibilité de diminuer le pas d'espace. Pour pallier à ce problème, Pracht [1971] propose une formulation purement implicite (3.15b), inconditionnellement stable, mais réclamant l'inversion d'un gros système d'équations algébriques qui la rend très coûteuse en temps de calcul.

Nous utiliserons ici la formulation semi-implicite (3.15c), où seule la partie diagonale de l'opérateur Δ est implicite. La procédure se trouve être stable pour de très faibles nombres de Reynolds. Elle évite de consommer trop de temps de calcul et permet d'utiliser de plus grands Δt que dans le cas explicite. Des tests de convergence vers une solution analytique pour une élévation de surface plate ont été effectués pour différents Δt et pour différents nombres de points (cf. paragraphe 3 - 3.4). On peut noter que le schéma temporel est du premier ordre, mais que plus de précision est inutile puisque seul l'état stationnaire est effectivement considéré.

3 - 2.4 Le problème des conditions aux limites

Le choix de notre schéma implicite n'introduit pas de complications pour imposer les conditions aux limites sur les bords du domaine ainsi que nous l'avons vu plus haut, mais nécessite une formulation implicite des conditions aux limites [Pracht, 1971]. En effet, les équations du moment et l'équation de Poisson pour la pression doivent être résolues simultanément à cause de leur caractère implicite même si le terme source de l'équation de Poisson ne dépend que des vitesses au temps n . La raison en est que les conditions aux limites sur la pression sont exprimées en fonction des vitesses, qui, pour un traitement implicite cohérent, doivent être exprimées par les vitesses de fin de cycle. Si les vitesses au temps n sont utilisées, alors les équations pour les vitesses et pour la pression ne seront plus couplées, et des expériences numériques ont montré qu'un tel traitement explicite des conditions aux limites introduit des instabilités numériques intolérables sur les bords du domaine [Pracht, 1971].

Les conditions aux limites que nous imposons sur les côtés, où le profil de vitesse horizontale est prescrit, satisfont bien à cette nécessité. Il en est de même à la base de la calotte où la vitesse de glissement est imposée, en l'occurrence est égale à zéro. Les conditions aux limites à la surface, que nous traiterons plus en détail dans le paragraphe 3 - 4, posent plus de problèmes.

3 - 3 DISCRETISATION DU PROBLEME

Après avoir précisé quel schéma temporel nous utilisons, nous allons décrire dans ce paragraphe quel schéma de discrétisation spatiale nous avons adopté. Le point critique est d'assurer l'incompressibilité et donc de résoudre l'équation de Poisson. Cela soulève le problème des méthodes de discrétisation et du choix de la grille permettant de rendre la méthode numérique cohérente. La discrétisation spatiale pose deux problèmes. Premièrement, il est nécessaire d'obtenir un champ de pression sans oscillation numérique et de vérifier l'équation de continuité discrétisée à une précision satisfaisante. Deuxièmement, le schéma de discrétisation doit

Fig. 3.2a. Grille alternée

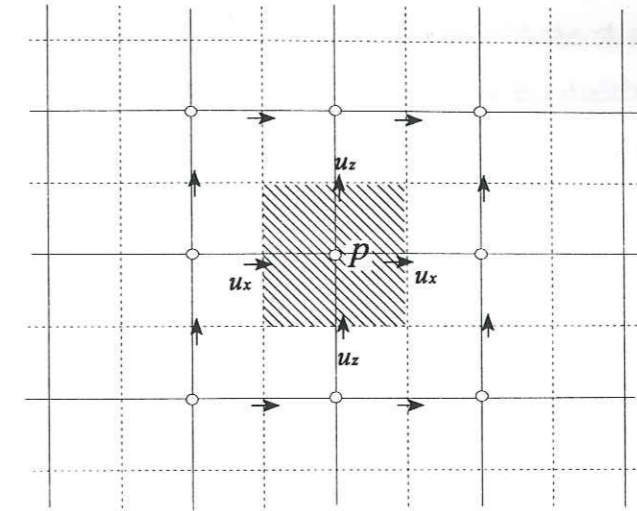


Fig 3.2b. Grille semi-alternée, s et n désignant respectivement le sud et le nord.

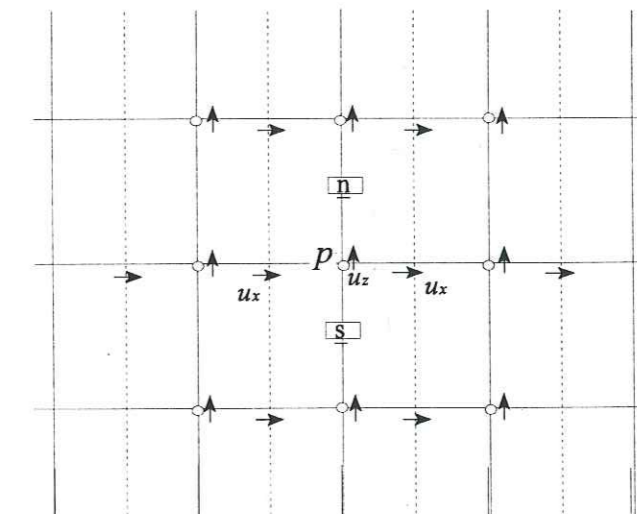
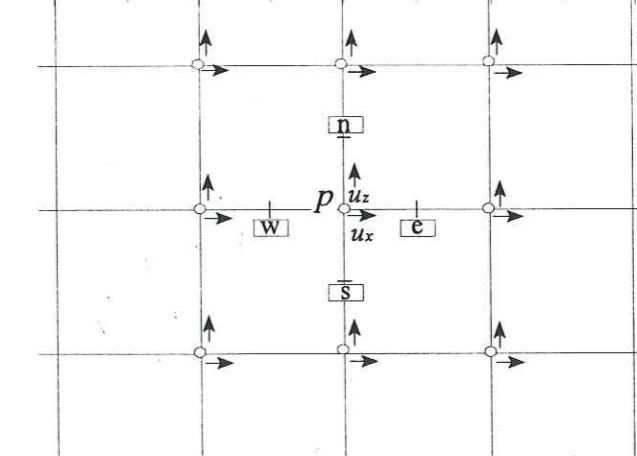


Fig 3.2c. Grille colocalisée, e , w , n , s désignant respectivement l'est, l'ouest, le nord et le sud.



permettre d'imposer facilement les conditions aux limites sur la frontière Γ du domaine. La satisfaction de ces deux conditions dépend de la nature de la grille utilisée, du point de grille où sont discrétisés les champs et leur dérivées, ainsi que des mailles où sont imposées les conditions aux limites. Nous avons discrétisé le problème sur une grille alternée dans la direction horizontale et colocalisée dans la direction verticale (cf. figure 3.2b). Nous avons imposé les conditions aux limites sur les points de grille situés exactement sur la frontière Γ . Dans ce paragraphe, nous discuterons de l'efficacité de notre choix de discrétisation et de l'influence des différentes discrétisations possibles sur la méthode numérique utilisée et sur la précision de la solution obtenue.

3 - 3.1 Cohérence de la discrétisation avec la méthode numérique

Le premier critère de choix réside dans la façon de discrétiser l'équation de Poisson pour la pression. Celle-ci est obtenue, soit directement à partir des équations de continuité [Abdallah, 1987b] et discrétisée, soit plus communément, directement à partir des équations de continuité discrétisées [Chorin, 1968; Patankar, 1980]. Quelque soit la façon de discrétiser l'équation de Poisson, la cohérence de la méthode numérique dépend de la nature de la grille utilisée. Il a été démontré que l'utilisation d'une grille alternée dans les directions verticales et horizontales, où les points où sont évaluées les vitesses et la pression sont décalés de $\Delta/2$ dans l'espace, permet de satisfaire l'équation de continuité discrète à la précision de la machine tout en obtenant un champ de pression sans oscillations numériques [Harlow et Welch, 1965; Patankar, 1980; Soh et Berger, 1987]. Cette grille a été utilisée pour la première fois par Harlow et Welch [1965] dans leur méthode MAC (Marker-And-Cell) (cf. figure 3.2a). Elle constitue la base de la procédure SIVA de Caretto et al. [1972] et de la procédure SIMPLE de Patankar et Spalding [1972a]. Cette grille alternée, utilisée en conjonction avec une formulation en volumes finis, permet d'obtenir un algorithme efficace pour résoudre l'ensemble des équations [Patankar, 1980]. Le prix à payer en est une complexité considérable dans la formulation du problème et le volume de mémoire nécessaire pour stocker les variables. Les grilles colocalisées (cf. figure 3.2c), où toutes les variables sont calculées au même endroit dans l'espace, fournissent une simplicité géométrique appréciable quand on a affaire à des algorithmes complexes. Mais, malheureusement, les grilles

colocalisées posent des difficultés pour satisfaire exactement l'équation de continuité et/ou introduisent des oscillations non physiques à l'échelle de la grille sur le champ de pression calculé [Strikwerda, 1984; Bube et Strikwerda, 1983]. Ce problème apparaît de manière différente selon les deux différentes façons d'obtenir l'équation de Poisson pour la pression [Sotiropoulos et Abdallah, 1991]:

1. en discrétisant l'équation continue de Poisson pour la pression à l'aide de formules de différences finies centrées du second ordre [Abdallah, 1987.a, 1987.b].
2. en prenant directement la divergence discrète des équations discrétisées du moment [Harlow et Welch, 1965].

Si ces deux approches conduisent à la même équation discrétisée pour la pression sur une grille alternée, elles ne donnent pas la même équation sur une grille colocalisée. Dans le deuxième cas, la continuité discrétisée est exactement vérifiée, mais le découplage des grilles paires et impaires conduit à des oscillations numériques sur la pression [Sotiropoulos et Abdallah, 1991]. Par contre, la première approche donne un champ de pression "lisse" pour une discrétisation des dérivées de la pression adaptée [Abdallah, 1987.a, 1987.b], mais se heurte à deux problèmes majeurs:

- (i) La condition de compatibilité (3.13) pour le problème de Poisson-Neumann n'est pas automatiquement vérifiée [Abdallah, 1987a].
- (ii) L'équation de continuité discrète n'est pas vérifiée à la précision de la machine.

En général, on doit sacrifier partiellement la satisfaction de la continuité discrète, puisqu'un champ de pression lisse et ayant une réalité physique est exigé. Ce point a été discuté en détail par Strikwerda et Nagel [1988]. Nous avons donc choisi d'utiliser la première approche. La non-satisfaction de la condition (i) conduit à des solutions itératives non-convergentes [Roache, 1976; Harris, 1975; Briley, 1974]. Cette condition peut être satisfaite en employant une correction uniforme pour le terme source de l'équation de Poisson [Briley, 1974; Ghia et al., 1979] ou en incorporant directement les conditions aux limites dans le schéma aux différences finies sur des points intérieurs adjacents aux conditions aux limites [Miyakoda, 1962].

L'utilisation d'une méthode de différence finie cohérente [Abdallah, 1987b] permet de satisfaire exactement la condition de compatibilité (i) sur une grille colocalisée et d'obtenir un champ de pression correct. Cette méthode consiste à exprimer les dérivées premières de la pression aux points e, w, n, s de la grille colocalisée (cf. figure 3.2c) ainsi qu'à donner une approximation des variables, normalement exprimées sur les points de grilles, en e, w, n, w en les moyennant [Abdallah, 1987a, 1987b]. En ce qui concerne les points intérieurs au domaine, dans le cas où les pas d'espace sont tels que $\Delta x = \Delta z = h$, l'équation (3.12a) s'écrit:

$$(p_x)_e - (p_x)_w + (p_z)_n - (p_z)_s = [(u_x)_n - (u_x)_s + (u_z)_n - (u_z)_s] / \Delta t \quad (3.16)$$

on obtient donc sur les points de grille:

$$p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - 4p_{i,j} = [(u_x)_{i+1,j} - (u_x)_{i-1,j} + (u_z)_{i,j+1} - (u_z)_{i,j-1}] h / 2 \Delta t \quad (3.17)$$

Cette formulation nécessite des conditions aux limites cohérentes et donc exprimées sur les demi-maillages adjacents à la frontière Γ . L'équation (3.12b) devient, si elle est projetée par exemple sur la demi-maille à gauche du domaine:

$$p_{2,j} - p_{1,j} = -\frac{1}{4\Delta t} [(u_x)_{1,j} + (u_x)_{2,j} - (u_x^*)_{1,j} - (u_x^*)_{2,j}] \quad (3.18)$$

Cette formulation cohérente du problème de Poisson-Neumann a été élaborée pour une viscosité constante. Les équations sont considérablement compliquées par la nécessité de prendre en compte les différentes viscosités. Nous verrons dans le paragraphe suivant que la présence de viscosités non constantes introduit des gradients de pression dans l'équation pour la pression. La présence de ces gradients complique la façon de discrétiser correctement les conditions aux limites (3.12b).

Pour comprendre les raisons pour lesquelles nous avons utilisé une grille semi-alternée, nous allons discuter du problème de la vérification de l'équation de continuité discrète (ii). Pour une grille colocalisée, l'erreur sur la satisfaction de l'équation de continuité discrétisée a été estimée par Sotiropoulos et Abdallah [1991]. Cette erreur génère une source artificielle de masse

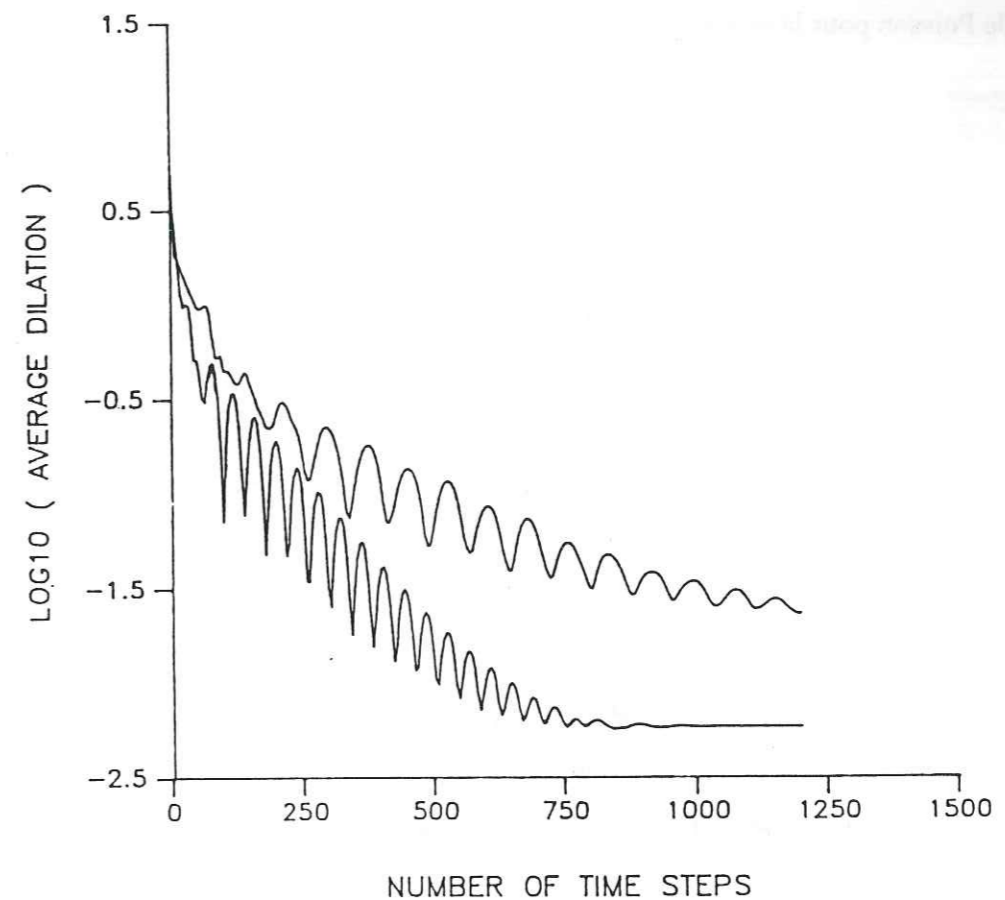


Fig. 3.3. Logarithme de la divergence en fonction du nombre d'itérations, avec $\epsilon_d = 0.1$ et une grille colocalisée de (31×31) points. La courbe du haut représente le logarithme de la divergence calculée avec la méthode de résolution classique et la courbe inférieure celui de la divergence calculée en rajoutant un terme de correction dans l'équation de continuité et dans l'équation de Poisson pour la pression [Sotiropoulos et Abdallah, 1991].

dans l'équation de continuité, proportionnelle aux dérivées quatrièmes de la pression et des composantes des champs de vitesse, à l'incrément temporel, et au carré du pas d'espace. L'expérience a montré que, dans ce cas, la divergence peut être significativement importante dans les régions de l'écoulement où apparaissent de forts gradients de pression [Abdallah, 1987b; Sotiropoulos et Abdallah, 1990]. Il est donc conseillé d'utiliser une grille alternée dans la direction où apparaissent de forts gradients de pression. Sotiropoulos et Abdallah [1991] proposent une forme discrétisée optimisée pour l'équation (3.12a), qui minimise l'erreur sur l'équation de continuité à une fraction du terme de dissipation dans la formulation classique de

l'équation de Poisson pour la pression. Ils rajoutent le terme δD_{ij} dans l'équation de continuité:

$$\delta D_{ij} = -\epsilon_d \frac{\Delta t}{4} \left[\Delta x^2 \frac{\partial^4 p_{ij}^{(n)}}{\partial x^4} + \Delta z^2 \frac{\partial^4 p_{ij}^{(n)}}{\partial z^4} \right]$$

où ϵ_d est une constante positive ($0 \leq \epsilon_d \leq 1$). Il faut alors additionner $\delta D_{ij} / \Delta t$ au laplacien de la pression dans l'équation de Poisson. L'amélioration obtenue sur la valeur moyenne de la divergence avec leur méthode est montrée sur la figure 3.3 où le logarithme de la divergence (ou dilatation) est représenté en fonction des itérations temporelles. La courbe supérieure est obtenue avec la méthode classique et la courbe du bas en rajoutant le terme de correction dans l'équation de continuité et dans l'équation de Poisson avec $\epsilon_d = 0.1$. Comme on peut le remarquer sur cette figure, la dilatation initiale est réduite à la valeur stationnaire de 0.005, alors qu'avec la méthode classique la valeur correspondante est 0.02. Nous avons calculé la valeur moyenne de la divergence des vitesses avec notre code numérique pour 11×11 points et pour 21×21 points (figure 3.4). Il faut noter que contrairement aux résultats de Sotiropoulos et Abdallah [1991], la valeur de la divergence donnée par notre modèle reste constante au cours de l'itération. Cela est directement lié à notre méthode numérique, similaire à la méthode de projection, qui impose l'incompressibilité à chaque pas de temps. La comparaison entre les figures (3.4a) et (3.4b) confirme que la valeur de la divergence dépend du pas d'espace utilisé. La divergence moyenne calculée avec 21×21 points est plus de 6 fois plus petite que celle calculée avec 11×11 points. Si l'on augmente le nombre de points seulement dans la direction horizontale en prenant 11×21 points on n'observe pratiquement aucune amélioration sur la valeur de la divergence moyenne (symbolisée par des ronds sur la figure 3.4a). Par contre si on augmente le nombre de points dans la direction verticale, où les mailles sont colocalisées, en prenant 21×11 points la valeur de la divergence moyenne (symbolisée par des triangles sur la figure 3.4a) est du même ordre que celle obtenue pour 21×21 points. L'erreur sur la divergence est donc essentiellement dépendante du nombre de points dans la direction où la grille est colocalisée comme l'ont montré Sotiropoulos et Abdallah [1991].

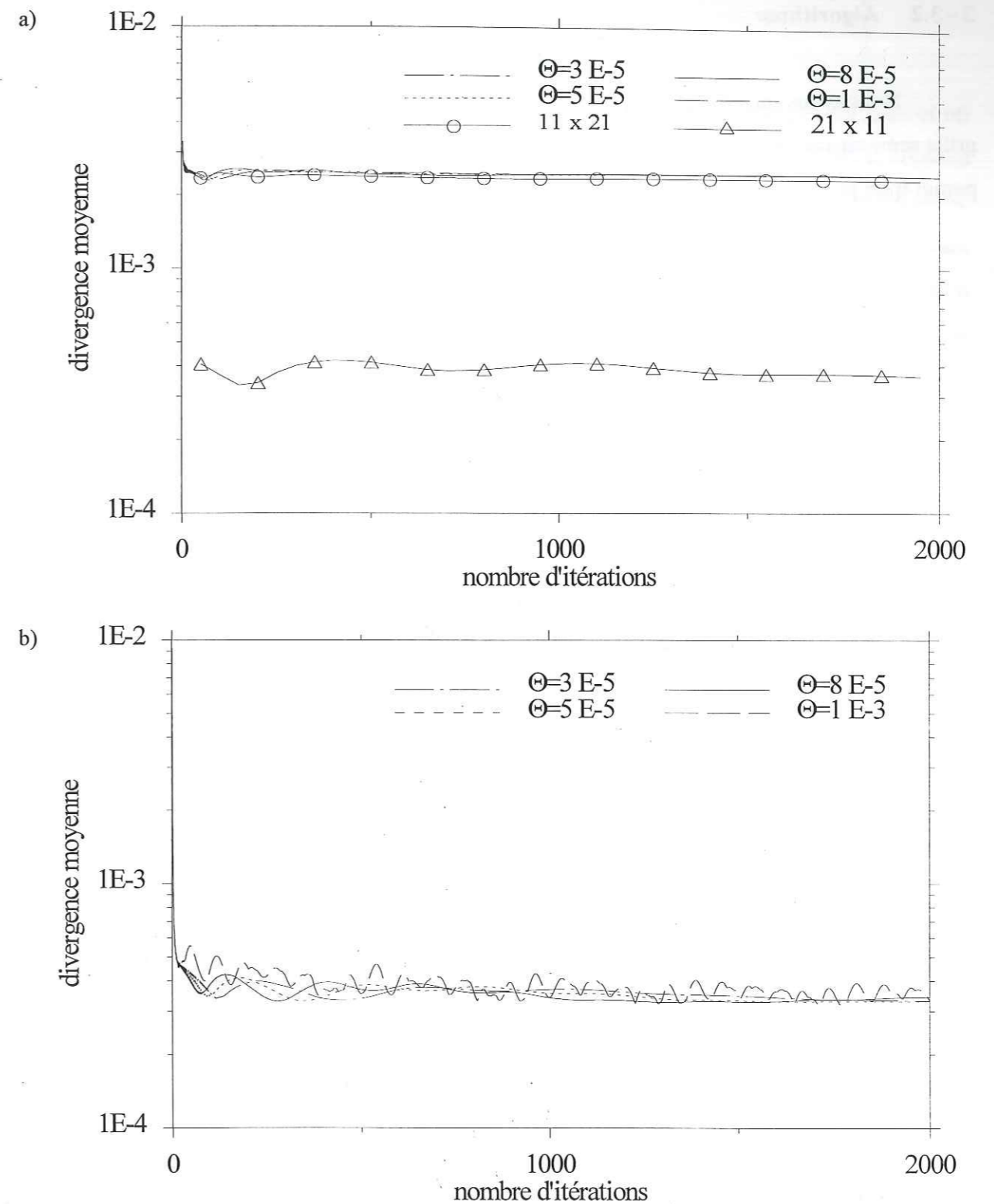


Fig. 3.4. Divergence moyenne des vitesses pour différents pas de temps Θ en fonction du nombre d'itérations (a) pour (11×11) points, (b) pour (21×21) points. Sur la figure a) sont aussi représentées la divergence moyenne pour (11×21) points (symbolisée par des ronds) et la divergence moyenne pour (21×11) points (symbolisée par des triangles) pour $\Theta = 2.5 \text{ E-}5$.

3 - 3.2 Algorithme

Nous avons construit le code numérique en utilisant une méthode de discrétisation sur une grille semi-alternée permettant de vérifier de façon satisfaisante les conditions discutées dans le paragraphe précédent. Nous allons ici spécifier notre choix et expliquer en quoi il répond aux exigences liées à la cohérence de la méthode numérique.

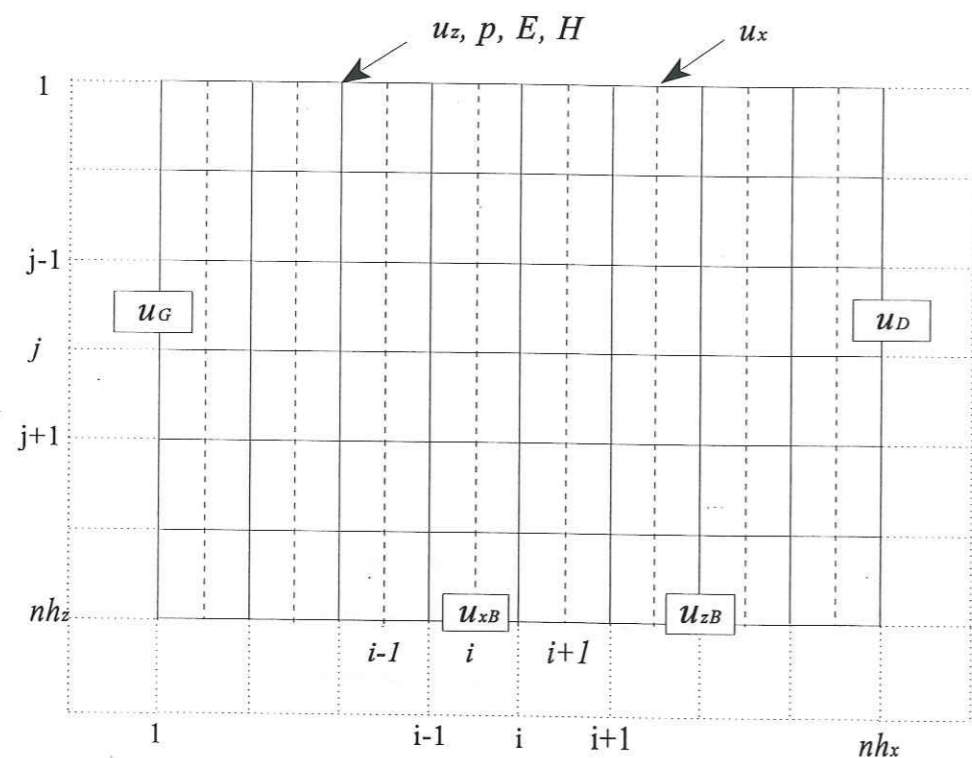


Fig. 3.5. Grille de calcul, les mailles majeures horizontales sont numérotées avec l'indice i en lettres droites, les mailles mineures avec l'indice i en italique, la maille verticale est numérotée avec l'indice j ; les conditions aux limites sont représentées dans des rectangles centrés sur le point de grille où sont imposées les vitesses; les flèches indiquent les mailles où sont calculées les variables. Les mailles en pointillés représentent des mailles fictives introduites pour imposer les conditions aux limites sur les côtés.

3 - 3.2.a Grille et discrétisation utilisée

Le traitement du problème tronqué où l'évolution des marges n'est pas calculée et où l'écoulement à l'intérieur est découplé de ce qui se passe sur les bords introduit des conditions aux limites sur les bords gauche et droit pouvant être à l'origine de couches limites sur les côtés. Dans ce cas, de forts gradients de pression horizontaux vont apparaître près des bords, pouvant générer une source importante d'erreur numérique dans l'équation de continuité (cf. discussion du paragraphe précédent). Pour cette raison, nous utilisons une grille alternée dans la direction horizontale et une grille colocalisée dans la direction verticale. Notre modèle fait donc un compromis entre l'utilisation d'une maille alternée, plus coûteuse en calcul et en mémoire, et une grille colocalisée, plus simple mais moins cohérente. La grille utilisée est représentée sur la figure 3.2b et le domaine de discrétisation sur la figure 3.5. Les vitesses horizontales sont calculées sur la demi-maille, appelée maille mineure (en pointillé sur la figure 3.5) allant de $i=2$ à $i=nh_x$, les vitesses verticales et la pression sur les mailles majeures (en traits plein) allant de $i=1$ à $i=nh_x$. La figure (3.5) montre la localisation des divers champs. L'équation de Poisson pour la pression est résolue sur toute les mailles majeures du domaine à l'exception de la limite supérieure ($j=1$) où les conditions de surface libre sont imposées. Il est donc nécessaire de rajouter deux mailles horizontales fictives et une maille verticale fictive respectivement sur les bords gauche et droit du domaine et au fond (en pointillé sur la figure 3.5), pour pouvoir imposer les conditions aux limites sur les gradients de pression. Ces gradients sont imposés par des conditions aux limites sur les vitesses: la vitesse horizontale sur les bords gauche et droit du domaine est imposée respectivement sur la première ($i=1$) et la dernière maille majeure ($i=nh_x$); au fond, les vitesses horizontales et verticales sont imposées sur la dernière maille verticale ($j=nh_z$).

Nous avons discrétisé l'équation de Poisson pour la pression à l'intérieur du domaine en utilisant la formulation d'Abdallah [1987b], modifiée par le fait que notre réseau contient des mailles alternées dans la direction horizontale, l'équation (3.17) s'écrit alors:

$$p_{i+1,j} + p_{i-1,j} + p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - 4p_{i,j} = [(u_x)_{i+1,j} - (u_x)_{i,j}]h/\Delta t + [(u_z)_{i,j+1} - (u_z)_{i,j-1}]h/2\Delta t \quad (3.19)$$

Les gradients verticaux de pression dans l'équation de Poisson, dus à la présence d'une viscosité non constante, ont été exprimés sur les mailles nord et sud dans la direction verticale, pour que leur discrétisation soit compatible avec celle du laplacien. Pour obtenir ces gradients sur le point de discrétisation, nous avons fait la moyenne arithmétique entre les mailles nord et sud. Nous avons alors imposé le gradient de p normal à la surface Γ sur la frontière et non sur la demi-maille adjacente à Γ à l'intérieur du domaine pour être cohérent avec la discrétisation de l'équation de Poisson. La condition de compatibilité est alors visiblement satisfaite car notre code converge dans tous les cas que nous avons traités. Un autre moyen d'imposer les conditions aux limites serait d'imposer la valeur de la pression sur les mailles majeures frontières (condition de Dirichlet pour le problème de Poisson), celle-ci étant égale au premier ordre à la pression hydrostatique (cf chapitre 1). Dans ce cas, la condition de compatibilité sera satisfaite. Mais il a été montré que les solutions itératives des équations du moment et de la pression avec des conditions aux limites de Neumann, pour l'équation de la pression, convergent plus vite que dans le cas où des conditions de Dirichlet sont imposées [Sotiropoulos et Abdallah, 1990; Abdallah et Dreyer, 1991].

Nous pouvons estimer, d'autre part, l'erreur D sur l'équation de continuité discrétisée, celle-ci étant essentiellement proportionnelle aux dérivées quatrièmes de la pression selon la direction verticale [Sotiropoulos et Abdallah, 1991]:

$$D = -\frac{\Delta t}{4} \left[\Delta z^2 \frac{\partial^4 p}{\partial z^4} + \Delta z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(u_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \text{dérivées croisées} \right]$$

Nous avons vu que les forts gradients obtenus dans nos simulations sont essentiellement localisés sur les côtés, où l'écoulement s'adapte aux conditions aux limites sur les bords gauche et droit du domaine, et sont donc des gradients selon la direction horizontale, où nous avons bien utilisé des mailles alternées. La divergence étant explicitement dépendante du carré du pas d'espace, et de l'incrément temporel, le modèle est ainsi capable de contrôler les erreurs sur la continuité discrète en utilisant une grille plus fine dans les régions à fort gradient de pression horizontaux.

Après avoir analysé la méthode de discrétisation adoptée, nous allons maintenant décrire

en détail l'algorithme précis que nous avons utilisé.

3 - 3.2.b Formulation du problème discret à l'intérieur du domaine

Comme nous l'avons dit précédemment, nous utilisons une méthode similaire à la méthode de projection présentée au paragraphe 3 - 2.3 avec un schéma temporel semi-implicite du premier ordre (3.15c) pour résoudre les équations (3.9). Nous résolvons le problème temporel fictif suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= L\mathbf{u} - \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

jusqu'à l'état stationnaire, où L est un opérateur différentiel du second ordre. Cela revient à considérer qu'il y a deux échelles de temps: l'une longue sur laquelle la hauteur, la longueur et la température du glacier se modifient du fait du bilan de masse (de l'accumulation et de l'ablation), l'autre très rapide sur laquelle le glacier se met en équilibre dynamique (cf. paragraphe 3 - 1.3). Plus précisément, on suppose que tous les champs (vitesse, pression, etc.) sont connus au temps n , et on partage L en sa partie diagonale L_d et non diagonale δL :

$$L = L_d + \delta L \quad (3.21)$$

Dans un premier temps on calcule une vitesse intermédiaire en utilisant une discrétisation spatiale semi-implicite:

$$\mathbf{u}^* = \frac{\alpha^+}{\alpha^-} \mathbf{u}^{(n)} + \frac{\Delta t}{\alpha^-} \delta L \mathbf{u}^{(n)}, \quad (3.22)$$

où $\alpha_{\pm} = 1 \pm \Delta t L_d / 2$. Le champ de vitesse actuel au temps $(n+1)$ est calculé par:

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\alpha^-} \nabla p^{(n+1)}, \quad (3.23)$$

où $p^{(n+1)}$ est obtenu en résolvant l'équation aux dérivées partielles du second ordre elliptique de type Poisson

$$\nabla \cdot \lambda \nabla p^{(n+1)} = \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad (3.24)$$

où $\lambda = \frac{\Delta t}{\alpha^-}$. L'équation (3.24) est obtenue en imposant $\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)} = 0$ dans l'équation (3.23). Si on projette (3.22) et (3.23) sur les axes (x, z) , et si on exprime u_x^* sur la maille mineure au même titre que u_x , et u_z^* sur la maille majeure comme u_z , on obtient à partir de (3.22):

$$u_x^* = \frac{\alpha_x^+}{\alpha_x^-} u_x^{(n)} + \frac{\Delta t}{\alpha_x^-} \delta L_x \mathbf{u}^{(n)} \quad (3.25)$$

$$u_z^* = \frac{\alpha_z^+}{\alpha_z^-} u_z^{(n)} + \frac{\Delta t}{\alpha_z^-} \delta L_z \mathbf{u}^{(n)},$$

et de (3.23):

$$u_x^{(n+1)} = u_x^* - \frac{\Delta t}{\alpha_x^-} \frac{p_{ij}^{(n+1)} - p_{i-1j}^{(n+1)}}{\Delta x} \quad (3.26)$$

$$u_z^{(n+1)} = u_z^* - \frac{\Delta t}{\alpha_z^-} \frac{p_{ij+1}^{(n+1)} - p_{ij-1}^{(n+1)}}{2\Delta z},$$

où L_x et L_z représentent les projections de L respectivement sur la direction horizontale et sur la direction verticale. $\delta L_x, L_{dx}$, exprimés sur la maille mineure et $\delta L_z, L_{dz}$, sur la maille majeure sont définis en projetant (3.21) sur les directions horizontale et verticale avec $\alpha_{x\pm} = 1 \pm \Delta t L_{dx}/2$, $\alpha_{z\pm} = 1 \pm \Delta t L_{dz}/2$.

En ce qui concerne l'équation de Poisson pour la pression (3.24), la méthode de discrétisation utilisée correspond au cas 1. de la section 3 - 3.1. Cette équation peut aussi s'écrire:

$$(\nabla \lambda) \nabla p^{(n+1)} + \lambda \Delta p^{(n+1)} = \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (3.27)$$

Pour discrétiser le gradient et le laplacien que nous exprimons sur la maille majeure (i, j) , nous utilisons les dérivées centrées du second ordre respectivement δ_x et δ_z^2 , explicitées dans l'annexe C. Pour la divergence de \mathbf{u}^* , nous utilisons le fait que u_x^* est calculé sur la maille mineure et u_z^* sur la maille majeure. On obtient donc en exprimant (3.27) sur la maille majeure:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda_{x \ i+1j} - \lambda_{x \ ij}}{\Delta x} \right) \left(\frac{p_{i+1j}^{(n+1)} - p_{i-1j}^{(n+1)}}{2\Delta x} \right) + \left(\frac{\lambda_{z \ ij+1} - \lambda_{z \ ij-1}}{2\Delta z} \right) \left(\frac{p_{ij+1}^{(n+1)} - p_{ij-1}^{(n+1)}}{2\Delta z} \right) \\ & + \bar{\lambda}_{x \ ij} \left(\frac{p_{i+1j}^{(n+1)} - 2p_{ij}^{(n+1)} + p_{i-1j}^{(n+1)}}{(\Delta x)^2} \right) + \lambda_{z \ ij} \left(\frac{p_{ij+1}^{(n+1)} - 2p_{ij}^{(n+1)} + p_{ij-1}^{(n+1)}}{(\Delta z)^2} \right) \\ & = \frac{u_{x \ i+1j}^* - u_{x \ ij}^*}{\Delta x} + \frac{u_{z \ ij+1}^* - u_{z \ ij-1}^*}{2\Delta z}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

où $\bar{\lambda}_{x \ ij}$ représente la valeur de λ_x sur la maille majeure, obtenue en faisant la moyenne arithmétique entre les valeurs de λ_x sur les deux mailles mineures adjacentes. Du fait de la grille alternée dans la direction horizontale et colocalisée dans la direction verticale, la vitesse horizontale et la pression sont calculées en des points séparés de $dx/2$ dans la direction horizontale, alors que dans la direction verticale tous les champs sont calculés sur la même grille. Cette méthode fait apparaître des ondes numériques dans la direction verticale qui sont éliminées en imposant sur la dernière maille verticale ($j=nh_z$) une dérivée de la pression décentrée. Cette discrétisation est cohérente avec celle proposée par Abdallah [1987b] dans le cas où seul le laplacien intervient dans l'équation pour la pression. Nous attribuons donc cette propagation d'onde à l'intervention des dérivées premières de la pression dans l'équation (3.28). L'utilisation des formules aux différences finies proposées par Tafti [1995] pour le laplacien, le gradient et l'interpolation des champs permettra certainement d'améliorer l'efficacité du programme et la précision des calculs. En effet, celui-ci propose des formules de différences finies, sur une grille colocalisée, permettant d'éliminer les oscillations de pression et de satisfaire exactement à l'équation de continuité. L'équation (3.28) est résolue en utilisant les techniques numériques standard d'inversions de matrices à bandes.

3 - 3.2.c Formulation du problème discret aux limites

L'équation (3.28) est résolue sur toutes les mailles, contrairement à de nombreuses méthodes où elle n'est pas calculée sur la frontière. On a donc rajouté des mailles virtuelles à l'extérieur du domaine, sur les cotés et au fond (cf. figure 3.5). Les conditions aux limites sont imposées de manière implicite pour être cohérentes avec le schéma temporel (cf. discussion du paragraphe 3 - 2.5). La forme discrétisée (3.28) s'applique de la même manière sur la frontière sauf pour le second membre, où, cette fois, les deux composantes de \mathbf{u} et \mathbf{u}^* sont données sur la maille majeure. La formule de discrétisation de la divergence est alors plus compliquée. On applique sur les côtés les conditions aux limites de Neumann (3.13a) sous la forme:

$$\frac{p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i-1,j}^{(n+1)}}{2\Delta x} = \frac{\overline{\alpha_x^-}}{\Delta t} (u_{x\Gamma}^* - u_{x\Gamma}^{(n+1)}) \quad (3.29)$$

et au fond:

$$\frac{p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j-1}^{(n+1)}}{2\Delta z} = \frac{\overline{\alpha_z^-}}{\Delta t} (u_{z\Gamma}^* - u_{z\Gamma}^{(n+1)}) \quad (3.30)$$

où $\overline{\alpha_{x,y}^-}$ est la valeur de $\alpha_{x,y}^-$ sur la maille majeure.

Il est important de remarquer que cette méthode est également valable pour résoudre les équations régissant l'écoulement non-stationnaire d'un fluide incompressible.

3 - 3.3 Efficacité et précision de la méthode numérique

Après avoir présenté notre algorithme, nous allons discuter sa sensibilité au pas de temps utilisé et sa précision sans le coupler au calcul de l'évolution de la surface libre. Le code a été testé, dans une géométrie simplifiée, et comparé à une solution analytique (cf. annexe B) pour

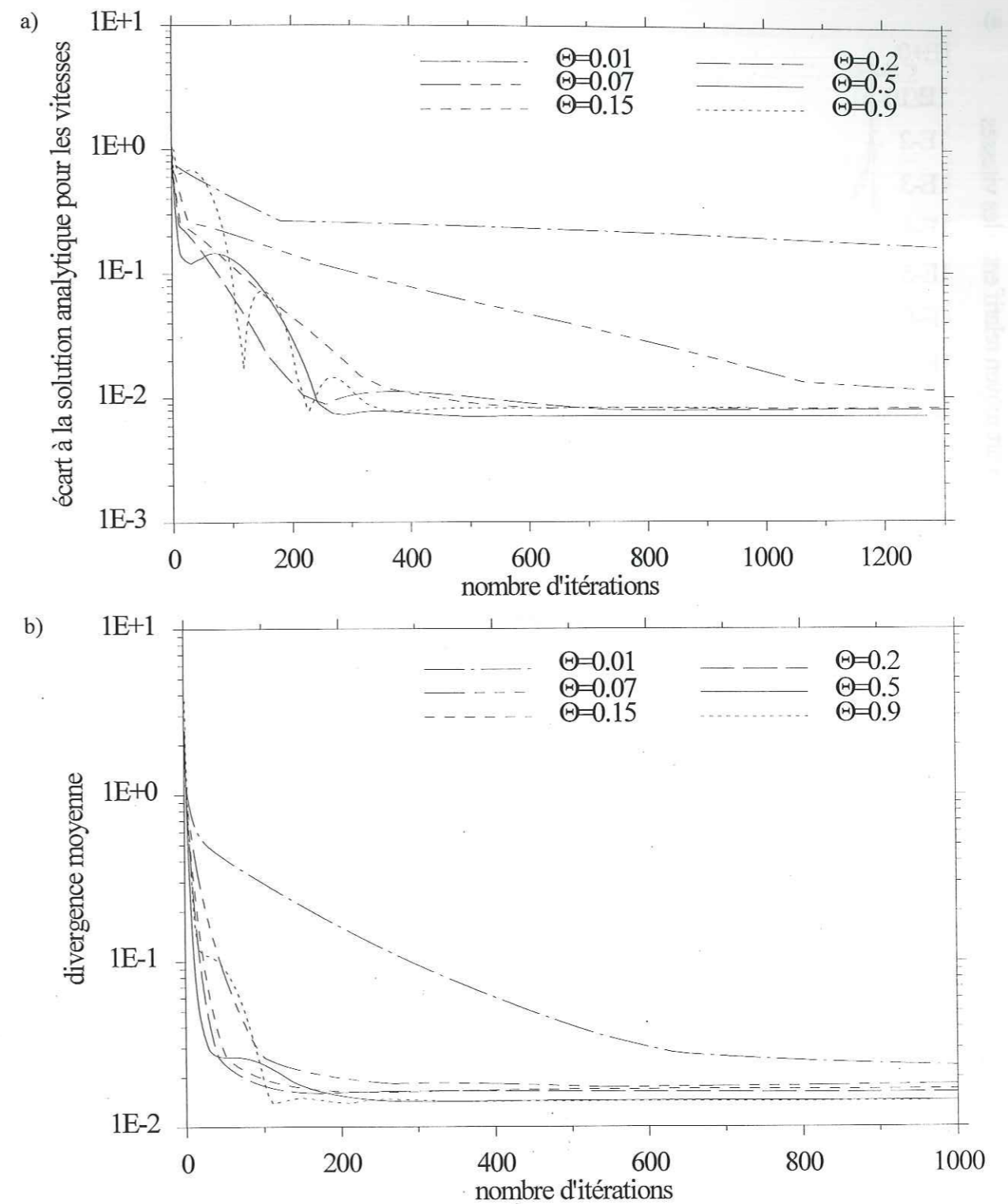


Fig. 3.6. Étude de la convergence vers la solution analytique de la solution donnée par le modèle pour différents pas de temps Θ pour (11×11) points, (a) écart maximum entre la solution du modèle et la solution analytique divisé par la vitesse moyenne, (b) divergence moyenne des vitesses sur l'ensemble de la grille divisée par le gradient moyen des vitesses. L'erreur de discrétisation est de l'ordre de $1E-2$.

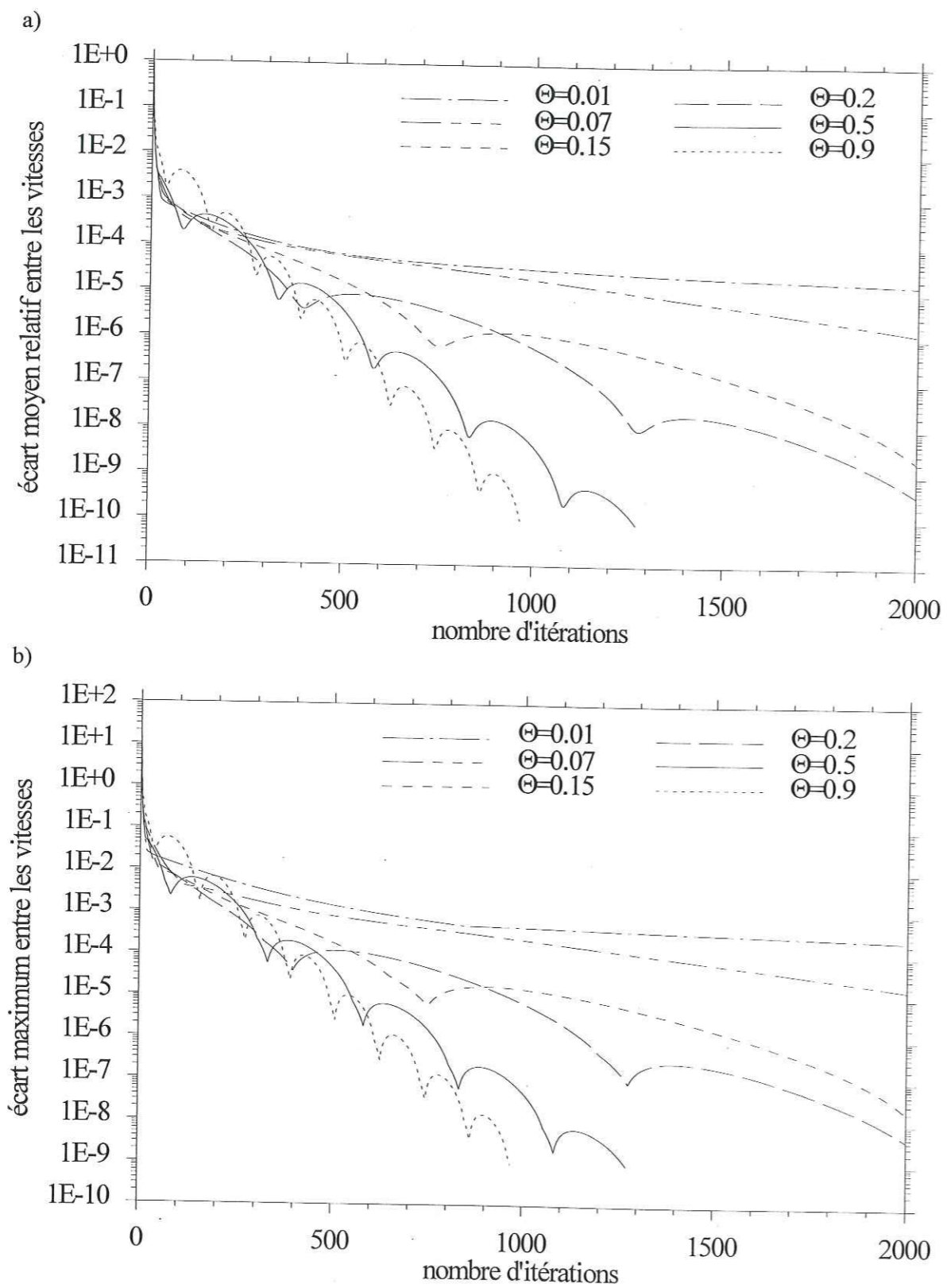


Fig. 3.7. Convergence des vitesses vers la solution analytique en fonction du nombre d'itérations pour différents pas de temps Θ pour (11×11) points, (a) écart moyen relatif et (b) écart maximum entre les composantes des vitesses obtenues à deux itérations successives.

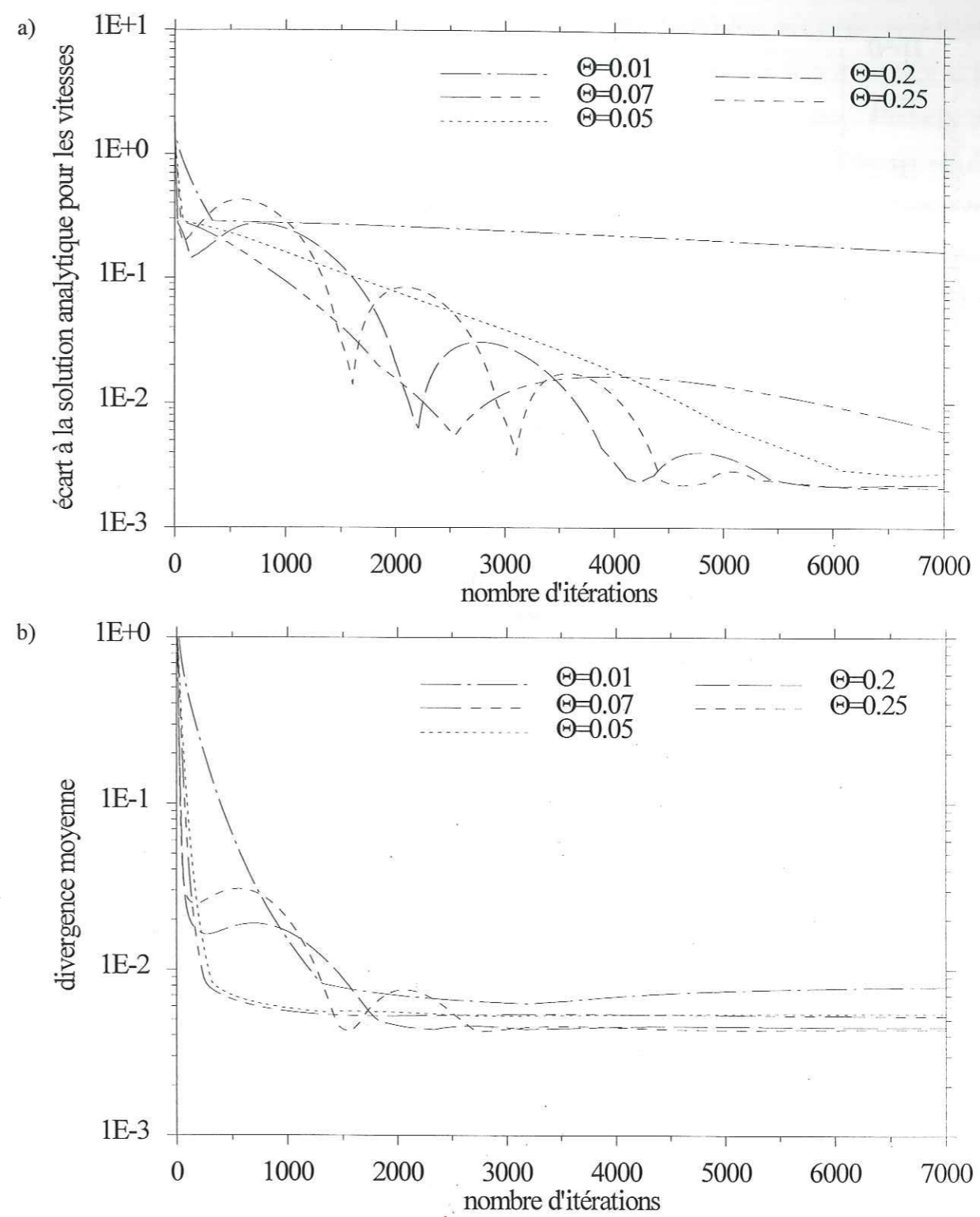


Fig. 3.8. Etude de la convergence vers la solution analytique de la solution donnée par le modèle pour différents pas de temps Θ pour (21×21) points, (a) écart maximum entre la solution du modèle et la solution analytique divisé par la vitesse moyenne, (b) divergence moyenne des vitesses sur l'ensemble de la grille divisée par le gradient moyen des vitesses. L'erreur de discrétisation est de l'ordre de $2.3E-2$.

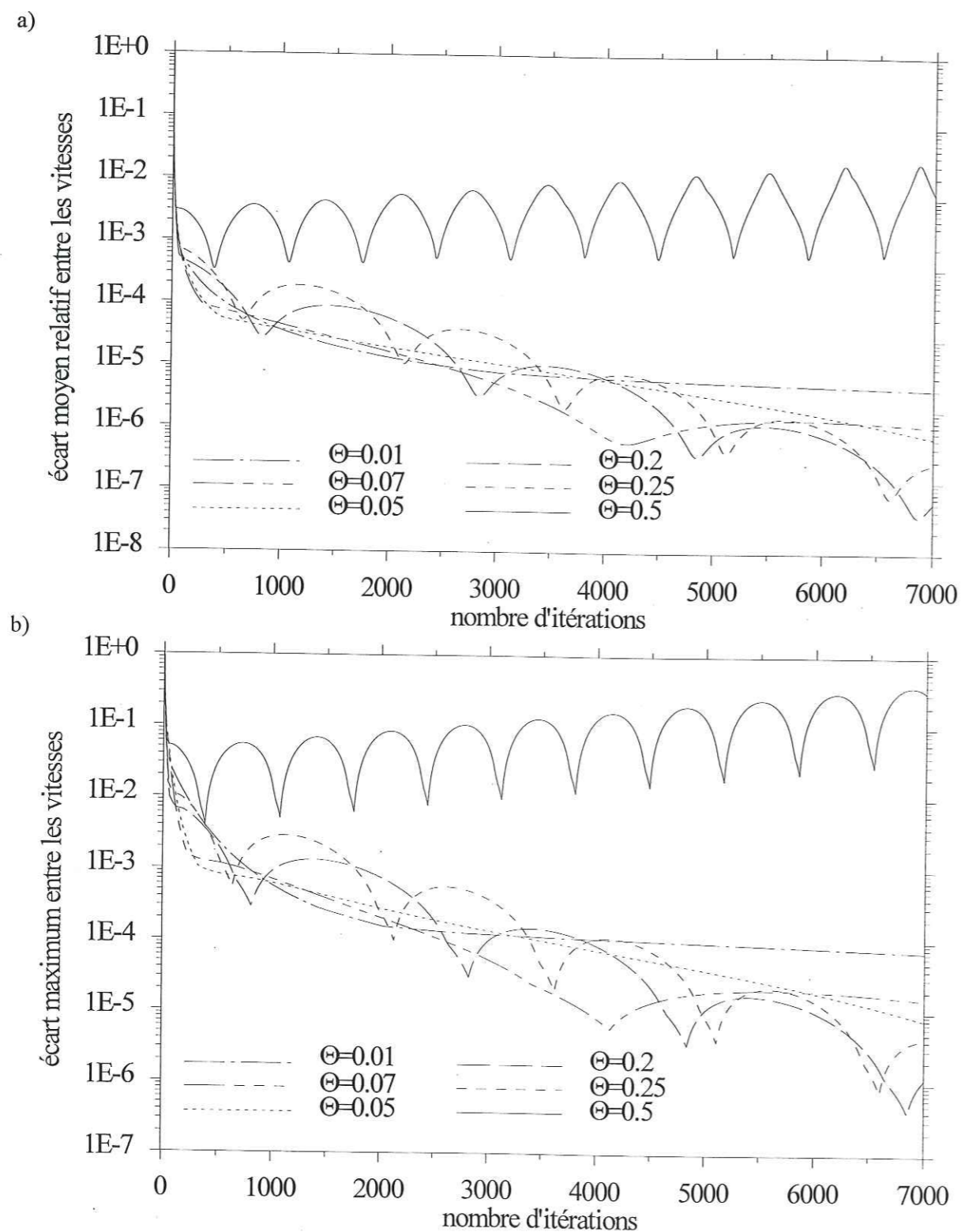


Fig. 3.9. Convergence des vitesses vers la solution analytique en fonction du nombre d'itérations pour différents pas de temps Θ pour (21×21) points, (a) écart moyen relatif et (b) écart maximum entre les composantes des vitesses obtenues à deux itérations successives.

différentes valeurs de Δt et des résolutions spatiales Δx , Δz . Le schéma aux différences finies est du second ordre dans l'espace. L'influence du pas de temps Δt sur la convergence et la précision de la solution obtenue a été étudiée afin, d'une part, de mettre en valeur l'efficacité de notre méthode par rapport à une méthode purement explicite, et d'autre part, de définir le pas de temps le mieux adapté pour les tests futurs. Les tests ont été faits en faisant varier le paramètre $\Theta = \max(L_d)\Delta t/2$ de 0 à 0.99, le cas explicite correspondant à Θ tendant vers 0. L'augmentation du pas de temps permet d'améliorer significativement la précision de la solution par rapport à la solution analytique (figures 3.6a et 3.8a) et de diminuer considérablement le temps nécessaire à la convergence (figures 3.7 et 3.9). Ces résultats montrent que notre méthode, qui demande peu de modifications par rapport au cas explicite, donne de bien meilleurs résultats que le cas explicite. On remarque deux choses sur les figures (3.6) à (3.9): l'écart à la solution analytique et l'erreur sur la divergence sont bien à peu près divisés par 4 quand on double le nombre de points. Le code est donc bien précis à l'ordre 2. L'écart à la solution analytique ainsi que l'erreur sur la divergence sont bien de l'ordre de l'erreur de discrétisation. En effet, pour 11×11 points, l'erreur de discrétisation, proportionnelle au pas d'espace au carré, est de l'ordre de $1E-2$, alors que pour 21×21 points, cette erreur est de l'ordre de $2.5E-3$. Plus Θ augmente, plus la convergence est rapide. La précision du calcul s'améliore plus on augmente Θ , jusqu'à un seuil qui dépend du nombre de points utilisés. Pour 11×11 points, ce seuil correspond à $\Theta = 0.9$, par contre pour 21×21 points, la solution diverge pour $\Theta \geq 0.45$ et la meilleure approximation de la solution analytique est obtenue pour $\Theta = 0.25$. Pour 21×21 points (figure 3.8), le temps nécessaire à la convergence est considérablement augmenté par rapport au calcul avec 11×11 points (figure 3.6) (6000 itérations par rapport à 400). Il est intéressant de remarquer que, dans ce cas où nous connaissons la solution finale, un écart relatif moyen de 10^{-6} , 10^{-7} ou un écart maximum de 10^{-5} , 10^{-6} entre les composantes des vitesses d'une itération à l'autre, permet d'obtenir la solution finale, ceci aussi bien pour 11×11 points que pour 21×21 points.

Il est intéressant de noter que la divergence n'est pas constante au cours de l'itération comme c'est le cas dans les simulations représentées sur la figure (3.4). Cela vient du fait qu'ici nous ne calculons pas l'évolution de la surface libre et que nous imposons directement l'incompressibilité à la surface d'une manière indépendante de la méthode numérique (en fait la vitesse verticale à la surface est imposée). Par contre, dans le cas des simulations représentées

sur la figure (3.4), l'équation (3.27) est imposée à la surface comme nous le verrons dans le paragraphe 3 - 4.3b, ce qui impose l'incompressibilité au pas $(n+1)$ dans tout le domaine.

3 - 4 LA SURFACE LIBRE

Il nous reste maintenant à décrire les conditions aux limites imposées à la surface et le calcul de l'évolution de cette surface libre que nous couplons au calcul des champs de vitesse et de pression à l'intérieur du domaine. Le traitement numérique de l'écoulement non-stationnaire de fluides incompressibles est considérablement compliqué par la présence d'une surface libre. Cela est dû essentiellement à deux raisons. Premièrement, quand on utilise un maillage standard avec une grille fixe, on est confronté au problème de la surface libre qui se déplace. Dans notre modèle stationnaire, cette difficulté ne se pose qu'à cause du choix du schéma d'itération. Lors de l'évolution dans le temps de la surface libre, il faut, à chaque pas de temps, redéfinir la position de la surface par rapport aux points de grille fixes. Cette surface ne se repositionne pas, en général, sur de nouveaux points de grille. Les points de grille seront donc alternativement à l'intérieur ou à l'extérieur du domaine de calcul au cours de l'évolution temporelle, et le nombre de points à l'intérieur du domaine de calcul augmentera ou diminuera quand le volume du corps s'étendra ou se contractera. La deuxième difficulté réside dans le traitement numérique des conditions de surface libre [Hirt et Shannon, 1968]. La condition cinématique (3.4), la condition dynamique (3.5) de surface libre et l'incompressibilité à la surface doivent être imposées simultanément et de manière cohérente avec la méthode numérique. Etant donné notre schéma temporel, elle doivent être imposées de manière implicite.

3 - 4.1 Coordonnées réduites

Dans ce paragraphe nous présentons la méthode nous permettant, sans trop de difficultés, de suivre l'évolution de la surface libre. Différentes méthodes numériques ont été développées pour résoudre numériquement le problème de la surface libre. Une méthode lagrangienne, proposée par Hirt et al. [1970], permet un traitement simple des surfaces et interfaces libres. Mais

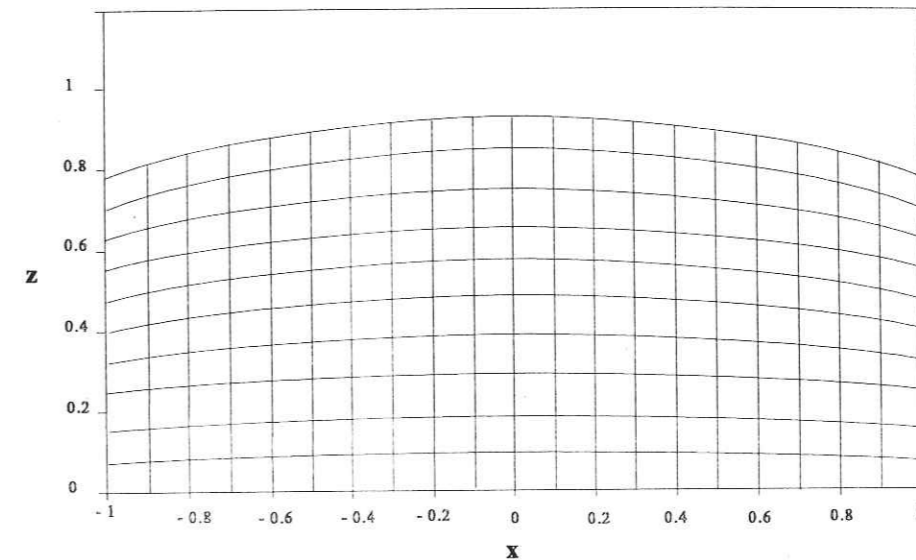


Fig. 3.10.a. La grille de l'espace (x, ξ) montrée dans l'espace (x, z) .

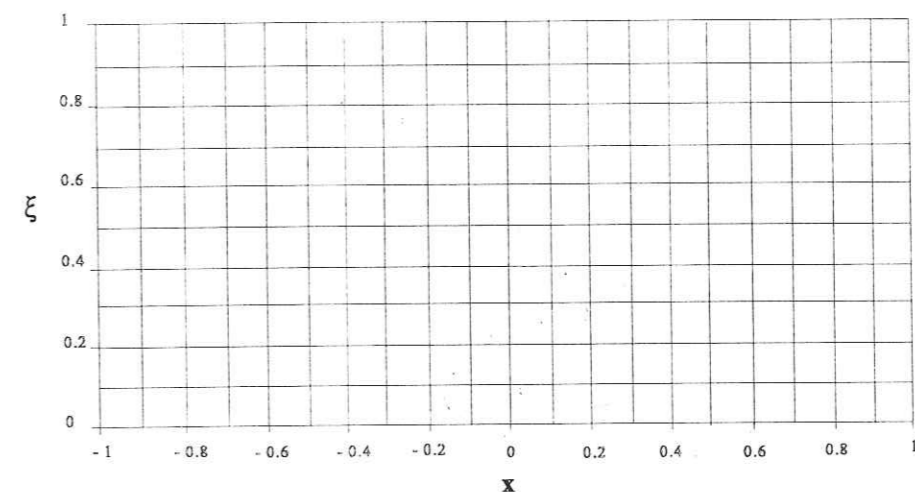


Fig. 3.10.b. La grille de l'espace (x, ξ) montrée dans l'espace (x, ξ) .

les méthodes lagrangiennes nécessitent de fréquentes réinitialisations du réseau conduisant à une perte de précision et augmentant le temps de calcul [Morton, 1971]. La méthode MAC, où les équations de Navier-Stokes sont résolues sur une grille eulérienne fixe et où un deuxième système de coordonnées enregistre les trajectoires des marqueurs qui donnent la position de la surface libre pendant l'écoulement transitoire, est fréquemment utilisée en mécanique des fluides pour traiter des phénomènes à surface libre [Harlow et Welch, 1965; Pracht, 1971; Deville, 1975].

Nous utiliserons ici un changement de coordonnées permettant d'adapter la grille, à chaque pas de temps, à la géométrie de la calotte. Le domaine dans l'espace (x, z) sera transformé en un domaine rectangulaire fixe dans l'espace (ζ, ξ) dont la limite supérieure coïncide à chaque pas de temps avec l'élévation de la surface (cf. figure 3.10):

$$\zeta = x, \quad \xi = \xi(x, z) = \frac{E(x) - z}{H(x)}, \quad (3.31)$$

ce qui donne $\xi=0$ à la surface et $\xi=1$ à la base. Comme nous l'avons dit dans la section précédente, dans notre modèle, l'étendue horizontale du domaine ne change pas au cours du temps. L'utilisation de coordonnées réduites n'est donc nécessaire que dans la direction verticale. Une transformation similaire dans le cas d'un domaine variant dans la direction horizontale est utilisée par Hindmarsh et Hutter [1988]. Cette transformation, développée en météorologie par Phillips [1957] et introduite en glaciologie par Jenssen [1977] est maintenant régulièrement utilisée en glaciologie [Hindmarsh et Hutter, 1988; Hindmarsh et al., 1989; Ritz, 1989; Huybrechts, 1990a, 1990b; Abe-Ouchi, 1993]. Les équations sont discrétisées dans ce nouveau domaine rectangulaire. La complexité des dérivées et la faible augmentation du temps de calcul résultant de cette transformation sont largement compensées par la simplification du traitement des conditions aux limites à la surface. Les formules de dérivation liées à ce changement de variable sont données par exemple par Haltiner et Whilliams [1980], les dérivées premières sont rappelées en annexe A.

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons les équations et leur discrétisation dans le repère cartésien (x, z) pour simplifier les notations, mais dans la simulation numérique nous utilisons les coordonnées (ζ, ξ) . Il faut noter que ce changement de coordonnées est rendu possible par la géométrie relativement simple de la calotte. En effet, cette transformation nécessite que les fonctions représentant la position de la surface libre ($z=E(x)$) et la topographie du socle ($z=B(x)$) soient bijectives. Dans ces conditions, en utilisant une grille régulière après le changement de variable (3.31), la méthode aux différences finies est autant apte à traiter le problème que la méthode aux éléments finis.

3 - 4.2 Les effets visqueux sur les contraintes normales

Les conditions aux limites de surface libre imposent que les contraintes tangentielles et normales à la surface s'annulent (3.5). Dans les premières versions de la méthode MAC [Harlow and Welch, 1965; Harlow et al., 1965; Harlow et Shannon, 1967], les conditions aux limites en surface (3.5) étaient remplacées par $p=0$ et par la condition d'incompressibilité en surface, la contribution visqueuse étant supprimée. Mais les effets visqueux sur les contraintes normales à la surface sont significatifs dans le cas d'écoulements à faible nombre de Reynolds ($Re < 10$) [Hirt et Shannon, 1968]. Il est alors nécessaire de prendre en compte le terme représentant la contribution visqueuse dans les conditions aux limites. Pour des faibles pentes et dans le cas isotrope, on peut approximer ces conditions par:

$$\begin{aligned} p - 2\eta \left(\frac{\partial u_n}{\partial n} \right) &= 0 \\ \eta \left(\frac{\partial u_m}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial m} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

où n fait référence à la direction de la normale sortante de la surface libre et m à la direction tangentielle. Une illustration de l'influence des conditions aux limites de surface libre est donnée par l'effet "teapot". Hirt et Shannon [1968] calculent cet effet sur l'écoulement d'un fluide visqueux le long de la paroi d'un mur sous l'effet de la gravité. Si le mur se termine par un coin

pointu, le fluide va tourner en dessous du coin comme une goutte observée à l'orifice d'un pot à thé. Ce calcul a été fait pour un écoulement à nombre de Reynolds égal à 2. La figure (3.11) présente leurs résultats dans le cas où les conditions aux limites sont (a) $p=0$ et la condition d'incompressibilité en surface, et (b) dans le cas où les conditions (3.32) sont imposées. L'analyse de Nichols et Hirt [1971] montre la nécessité de prendre en compte la pente de la surface et d'appliquer les conditions de surface libre exactement à la surface et non au milieu de la cellule adjacente à la surface libre. Nous avons comparé les résultats obtenus en remplaçant l'équation (3.5a) par la condition $p=0$. La pente de la surface obtenue alors est très légèrement inférieure à celle calculée en prenant en compte les conditions de surface libre exactes, mais cette différence est négligeable dans notre cas.

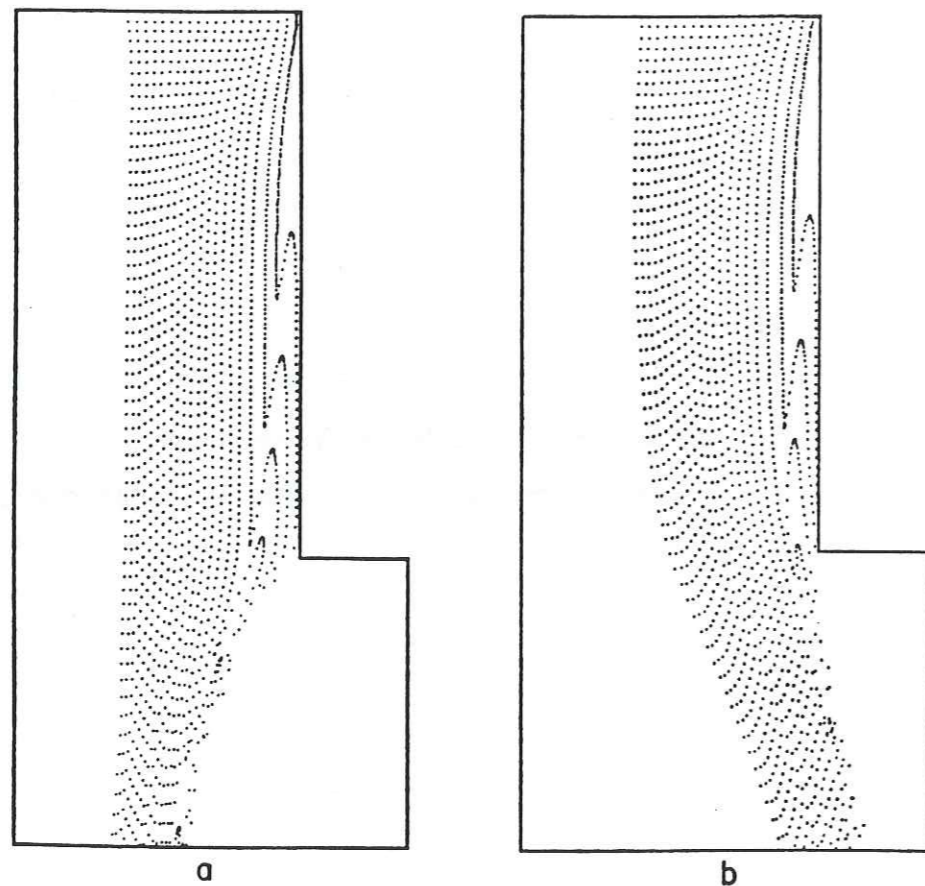


Fig. 3.11. Calcul de l'effet "teapot" avec un modèle numérique simulant l'écoulement d'un fluide à faible nombre de Reynolds ($Re=2$); (a) sans l'effet visqueux à la surface: $p=0$, l'effet "teapot" n'est pas visible, (b) avec la condition à la limite $p = 2\eta (\partial u_x / \partial n)$, le fluide contourne bien le coin du mur [Hirt et Shannon, 1968].

3 - 4.3 Méthode utilisée

Dans ce paragraphe, nous décrivons en détail la méthode numérique que nous avons utilisée pour traiter le problème de la surface libre, aussi bien au niveau du schéma temporel qu'au niveau de la discrétisation spatiale. Notre méthode consiste à imposer la condition normale (3.5a) dans le calcul de p^{n+1} (3.28), et d'imposer ensuite la condition tangentielle (3.5b) et l'équation de continuité (3.2) à la surface sur les champs de vitesse au pas $(n+1)$.

3 - 4.3.a Formulation compatible avec la méthode numérique

Notre schéma temporel étant implicite, la condition aux limites sur la pression à la surface, au même titre que les conditions sur les bords gauche et droit du domaine, doit être exprimée en fonction des vitesses de fin de cycle (au temps $n+1$) [Pracht, 1971]. Mais, à la surface libre, aucune vitesse n'est imposée. Pour une formulation implicite, il est possible de calculer les vitesses u_n au temps $(n+1)$ grâce aux équations du moment et de la continuité discrétisées et de les introduire dans la condition à la limite (3.32a) [Pracht, 1971]. La vitesse u_m est alors déduite de la condition aux limites tangentielle à la surface (3.7b). Mais, pour les cellules dont deux côtés sont ouverts au vide, Pracht [1971] impose que $\partial u_x / \partial x$ et $\partial u_z / \partial z$ soient indépendamment nuls, ce qui n'a a priori aucune raison d'être. Deville [1975], qui utilise un schéma implicite de directions alternées (ADI), résout le problème de surface libre en introduisant une étape de prédiction et une étape de correction. Pendant la première étape, les équations de Navier-Stokes sont intégrées en utilisant les conditions de surface libre exprimées au pas $(n+1)$ à la surface des cellules, là où cela est possible, sinon les conditions au pas (n) sont imposées. Un calcul intermédiaire consécutif permet d'obtenir les conditions aux limites de surface libre au temps $(n+1)$ en utilisant les nouvelles valeurs des vitesses qui viennent d'être calculées à l'intérieur du fluide.

Dans l'élaboration de notre modèle, nous avons été confrontés à des problèmes similaires. Sans un traitement rigoureux de ces conditions aux limites la convergence du schéma et la précision du calcul sont considérablement altérées. L'équation de continuité, introduite dans

les équations du moment, mais non imposée séparément, n'assure pas l'incompressibilité à la surface. Il est donc nécessaire d'imposer simultanément la condition de surface libre normale à la surface pour p ainsi que l'incompressibilité et la condition de surface libre tangentielle pour le champ de vitesse d'une manière implicite. Si les vitesses sont données au temps n dans la condition à la surface (3.5a), le calcul diverge.

3 - 4.3.b Condition normale de surface libre implicite

Si nous développons la condition (3.5a) en utilisant la loi de comportement (2.8), nous obtenons la relation entre la pression et le champ de vitesse:

$$p = \frac{1}{1-E'^2} \left[M_{zzxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + M_{zzzz} \frac{\partial u_z}{\partial z} - E'^2 \left(M_{xxxx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + M_{xxzz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + E \quad (3.33)$$

En utilisant l'équation de continuité (3.2), on peut exprimer p^{n+1} en fonction uniquement de $\partial u_x^{n+1} / \partial x$:

$$p^{n+1} = \kappa \frac{\partial u_x^{n+1}}{\partial x} + E \quad (3.34)$$

où $\kappa = \frac{1}{1-E'^2} [M_{zzxx} - M_{zzzz} - E'^2 (M_{xxxx} - M_{xxzz})]$. En projetant (3.23) sur la direction horizontale et en l'introduisant dans (3.34), on obtient l'équation pour p^{n+1} à la surface:

$$p^{n+1} + \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + E \quad (3.35)$$

où $\lambda_x = \frac{\Delta t}{\alpha}$. Nous utilisons la même méthode de discrétisation que pour l'équation (3.28) et obtenons donc l'équation discrétisée permettant de calculer p^{n+1} à la surface:

$$p_{ij}^{(n+1)} + \kappa \left(\frac{\lambda_{x \ i+1j} - \lambda_{x \ ij}}{\Delta x} \right) \left(\frac{p_{i+1j}^{(n+1)} - p_{i-1j}^{(n+1)}}{2\Delta x} \right) + \kappa \lambda_x \left(\frac{p_{i+1j}^{(n+1)} - 2p_{ij}^{(n+1)} + p_{i-1j}^{(n+1)}}{(\Delta x)^2} \right) = \kappa \left(\frac{u_{x \ i+1j}^* - u_{x \ ij}^*}{\Delta x} \right) + E_i \quad (3.36)$$

Cette équation est résolue en même temps que l'équation (3.28), la solution étant obtenue en inversant cette matrice par une technique classique d'inversion de matrices à bandes (bibliothèque Nag).

3 - 4.3.c Condition tangentielle de surface libre implicite et incompressibilité

La bonne discrétisation de la condition tangentielle de surface libre et de l'incompressibilité est critique pour la convergence du calcul. Ces conditions doivent être imposées une fois que les vitesses au temps $(n+1)$ à l'intérieur du domaine ont été calculées par (3.26). Les vitesses horizontales en surface étant imposées des deux côtés, il reste à déterminer les vitesses horizontales en surface à l'intérieur et les vitesses verticales en surface sur tous les points de grille. Les inconnues sont donc les valeurs de u_x sur les mailles mineures de 2 à nh_x et les valeurs de u_z sur les mailles mineures de 1 à nh_z . On exprime la condition tangentielle de surface libre et l'incompressibilité au temps $(n+1)$, respectivement sur la maille mineure de $i = 3$ à $nh_x - 1$ et sur la maille majeure de $i = 1$ à nh_x . On exprime enfin la condition tangentielle sur les mailles majeures 1 et nh_x . Ce qui nous mène à un système de $2nh_z - 1$ équations à $2nh_x - 1$ inconnues que nous inversons à l'aide de méthodes classiques d'inversion de matrices tridiagonales. Les vitesses en surfaces au temps $(n+1)$ sont donc calculées en fonction des vitesses au temps $(n+1)$ à l'intérieur du domaine. Ces détails sont d'une grande importance car si, par exemple, on impose la condition tangentielle de surface libre sur la maille mineure 2 au lieu de la maille majeure 1, elle ne sera pas satisfaite au cours de l'itération sur la maille majeure 1 et cela conduira à une instabilité numérique faisant diverger le calcul.

3 - 4.4 Calcul de l'élévation de la surface

Les conditions de surface libre ont été discutées ci-dessus pour une élévation de la surface donnée. Pour obtenir un écoulement en équilibre avec un taux d'accumulation donné, il faut coupler le calcul de l'équilibre mécanique pour une surface donnée avec celui de l'évolution de cette surface pour un champ de vitesse donné. Nous employons un schéma temporel du second ordre pour calculer le profil de la surface à l'état stationnaire. Ce schéma a l'avantage d'être directement utilisable dans un schéma évolutif où les paramètres climatiques varient au cours du temps. La condition cinétique à la surface libre est exprimée sur les mailles majeures à l'intérieur du domaine, la hauteur étant elle aussi calculée sur les mailles majeures. Nous employons une méthode semi-implicite, où le terme d'advection est représenté par la demi-somme d'un terme exprimé au temps (n) et au temps $(n+1)$. La discrétisation de (1.12) donne :

$$H_i^{(n+1)} + \frac{u_{i,1} \Delta t'}{4\Delta x} [H_{i+1}^{(n+1)} - H_{i-1}^{(n+1)}] = H_i^{(n)} - \frac{u_{i,1} \Delta t'}{4\Delta x} [H_{i+1}^{(n)} - H_{i-1}^{(n)}] + \left(a_i - w_{i,1} - u_{i,1} \frac{\partial B}{\partial x} \right)^{(n)} \Delta t' = G \quad (3.37)$$

Il faut noter que $\Delta t'$ peut être choisi indépendamment de Δt (le pas de temps fictif rajouté dans les équations de conservation du moment). Un schéma temporel d'Adams-Bashford à l'ordre 2 est introduit pour accélérer la convergence en remplaçant le second membre de (3.37) $G^{(n)}$ par :

$$H_i^{(n+1)} + \frac{u_{i,1} \Delta t'}{4\Delta x} [H_{i+1}^{(n+1)} - H_{i-1}^{(n+1)}] = \frac{3}{2} G^{(n)} - \frac{1}{2} G^{(n-1)} \quad (3.38)$$

Les conditions aux limites pour la hauteur ne sont pas données directement, c'est à dire que la valeur de la hauteur sur les côtés n'est pas imposée. En fait, elle est imposée indirectement par la condition aux limites sur la vitesse horizontale sur les deux bords. En effet, celle-ci est calculée à chaque pas de temps de manière à vérifier le bilan de masse (cf. paragraphe 3 - 5.2).

3 - 5 PERFORMANCES ET LIMITES DU MODELE

Nous avons décrit ci-dessus notre méthode numérique. Nous allons maintenant montrer

ses performances dans certaines situations particulières.

3 - 5.1 Temps de calcul et critères de convergence

Plusieurs tests d'arrêt interviennent dans la procédure itérative. Pour le calcul de la surface la convergence est atteinte quand le changement maximum d'élévation de la surface entre deux itérations: $K = (\partial E / \partial t)_{\max}$ est inférieur à une valeur donnée. Pour le modèle mécanique, deux normes différentes ont été utilisées : I_1 , l'écart maximum entre les vitesses d'une itération à l'autre et I_2 , l'écart relatif moyen sur l'ensemble des vitesses entre deux itérations. La divergence moyenne D , divisée par le gradient moyen est calculée à chaque itération.

Pour le calcul de l'état stationnaire, il n'est pas nécessaire d'utiliser un schéma itératif réaliste, c'est à dire qui calcule un champ de vitesse et de pression précis après chaque évolution dans le temps de la surface. N'importe quel schéma aboutissant à la convergence du processus est acceptable. Une étude sur le nombre d'itérations respectif de chaque sous-programme, i. e. du calcul des champs de vitesse et de pression et de l'évolution de la surface, menant à la convergence la plus rapide montre qu'on ne gagne rien à faire plusieurs fois le calcul du champ de vitesse pour une élévation de la surface donnée, le champ de vitesse et l'élévation de la surface étant étroitement couplés. Schott Hvidberg [1996] arrive à la même conclusion avec un modèle aux éléments finis. Par contre, l'efficacité du programme couplé dépend de la valeur choisie pour le pas de temps de l'équation d'évolution de la surface. En effet un choix approprié permet d'améliorer la convergence et la précision de la méthode (cf. figure 3.12). Les résultats sont plus faciles à interpréter sur la figure (3.12.a), pour 11×11 points, car l'écart maximum entre les vitesses horizontales I_1 converge vers une valeur constante au bout de 2000 itérations. Pour 21×21 points (figure 3.12.b), il faudrait au moins 10.000 itérations pour que I_1 converge vers une valeur fixe. Pour obtenir une convergence des vitesses satisfaisante, il est nécessaire de prendre $8.E-6 < \Delta t' < 8.E-5$. La meilleure convergence des vitesses est obtenue en prenant $\Delta t' = 3.E-5$. Il faut noter que la valeur de $\Delta t'$ qui permet une meilleure convergence change selon le problème considéré, même si, dans les cas que nous avons traités, elle est de l'ordre de $2E-5$, $3.E-5$.

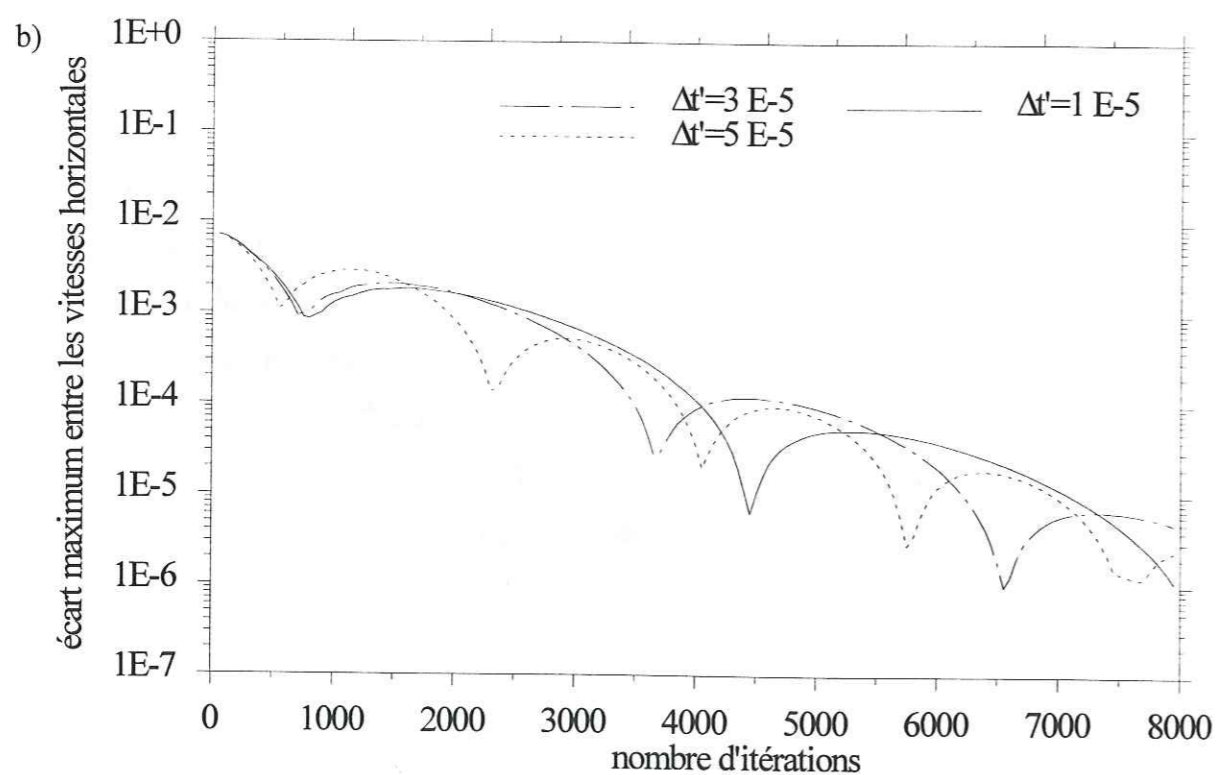
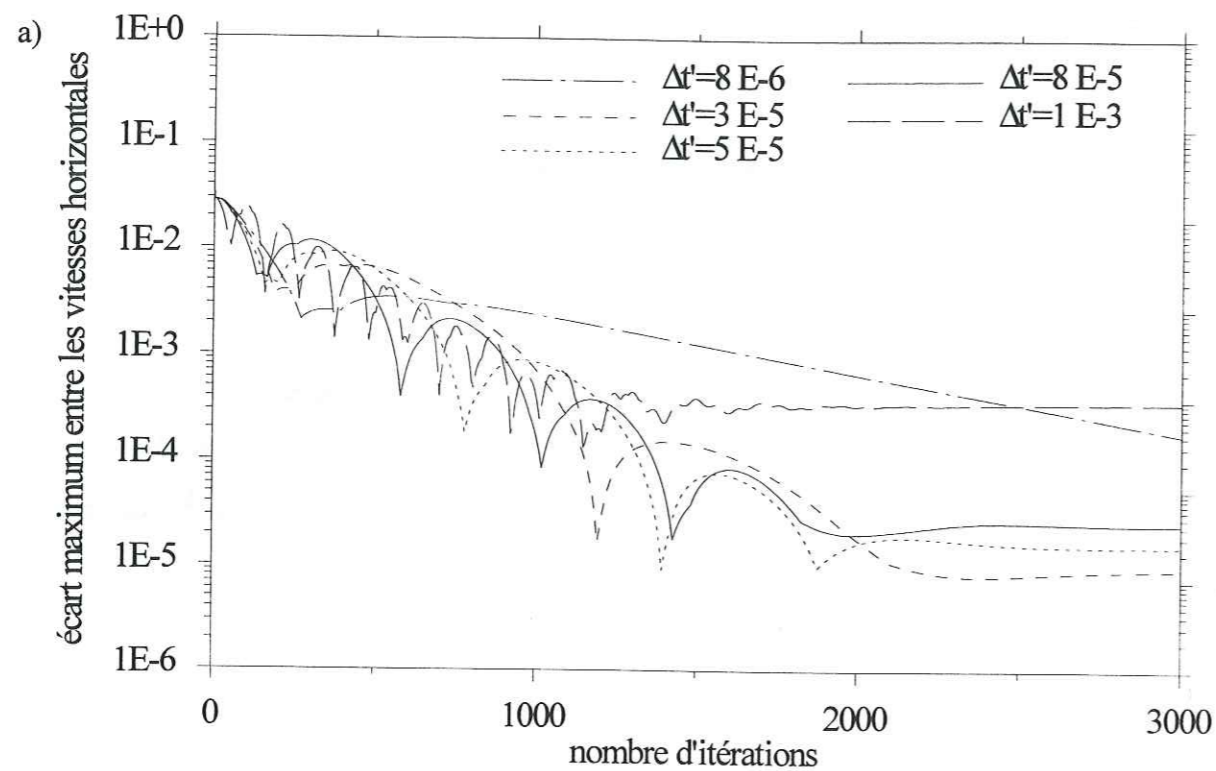


Fig. 3.12. Convergence des vitesses en fonction du nombre d'itérations pour différents pas de temps $\Delta t'$, écart maximum entre les composantes des vitesses d'une itération à la suivante pour (a) (11×11) points, (b) (21×21) points.

3 - 5.2 Les conditions aux limites sur les bords

Une analyse détaillée des conditions aux limites du problème tronqué où l'évolution des marges n'est pas prise en compte a été effectuée par Waddington et al. [1986] (cf. figure 1.11), distinguant les différents régimes d'écoulement possibles au voisinage d'un dôme. Le choix de ces conditions aux limites n'est pas très important car, quel qu'il soit, il donnera naissance à une couche limite sur les côtés. En effet, même si les conditions aux limites données sont très proches de la solution exacte, la solution calculée à partir du modèle numérique ne correspondra pas exactement à ces conditions aux limites à cause de l'erreur numérique liée au schéma utilisé. Ces conditions aux limites ne servent donc que d'instrument numérique. Il faut juste faire attention à ce que cette couche limite n'envahisse pas tout le domaine. Nous avons choisi d'imposer la condition la plus simple, celle correspondant à l'approximation de l'écoulement laminaire. Sur les bords droit et gauche du domaine, les conditions aux limites pour la vitesse horizontale doivent vérifier la conservation de la masse:

$$F = \int_C a(x) dx = \int_B^E u_x(x_R, z) dz - \int_B^E u_x(x_L, z) dz \quad (3.39)$$

où F représente le flux horizontal à l'extérieur du domaine, L, R , respectivement les bords droit et gauche du domaine et C , la partie supérieure du domaine. Le profil de vitesse que nous imposons est donné par Nye [1952a] et correspond à celui d'un écoulement laminaire d'une calotte isotherme supposant une loi de comportement de Glen avec un exposant n pour une glace isotrope:

$$u_x(x_M, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \frac{F}{H} \left[1 - \left(\frac{E-z}{H} \right)^{n+1} \right]_{x=x_M} \quad (3.40)$$

où $M = L, R$. On peut noter que notre méthode numérique ne nécessite d'imposer que le profil de vitesse horizontale, contrairement à Raymond [1983] et Schott et al. [1992], qui imposent en plus un profil de vitesse verticale, ou à Schott Hvidberg et al. [1996], qui imposent en plus le profil

de la contrainte de cisaillement. Ces profils des vitesses sont réactualisés après chaque nouveau calcul de l'élévation de la surface pour que la conservation de la masse (3.39) soit vérifiée à chaque pas de temps. Dans un domaine d'étendue horizontale $L=40$, l'écoulement est indépendant des conditions aux limites à partir d'une distance de 10 des deux bords.

La solution trouvée à l'intérieur du domaine de résolution étant indépendante des conditions simplifiées imposées sur les côtés pour les profils de vitesse, ces conditions cinématiques semblent non seulement inutiles, mais conduisent, comme nous l'avons souligné plus haut, à l'apparition d'une couche limite sur les côtés qui augmente le temps nécessaire à la convergence. Une possibilité pour pallier à ce problème serait d'imposer un profil de pression sur les bords plutôt qu'un profil de vitesse. Mais cette pression, n'étant pas exactement, elle non plus, la pression réelle, ce changement ne sera certainement pas significatif. Par contre, le calcul de l'évolution du domaine complet, c'est à dire du mouvement des marges associé à l'évolution de la surface [Hindmarsh et Hutter, 1988], couplé à un développement limité de l'écoulement près des marges [Benney et Timson, 1980], permettra d'améliorer considérablement l'efficacité du modèle. Cette remarque s'applique d'ailleurs aux codes similaires utilisant une technique aux éléments finis permettant aussi la résolution exacte des équations du mouvement [Schott et al., 1992; Schott Hvidberg, 1996; Schott et al., 1996].

Nous avons vérifié que, pour différentes conditions initiales pour le champ de vitesse et pour le calcul de l'élévation de la surface, le calcul converge vers la même solution.

3 - 6 CONCLUSION

L'utilisation du code numérique que nous avons présenté n'est pas restreinte à la modélisation de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires. Il peut s'appliquer à n'importe quel autre matériau, pourvu que ses propriétés rhéologiques soient connues. Il a été conçu de manière à pouvoir introduire une loi de comportement anisotrope quelconque, avec des champs de viscosité variables. Il permet aussi de prendre en compte des lois de comportement non-

Newtoniennes. Par exemple, il peut être appliqué à l'étude des pliages (folding) d'un milieu visqueux tel que les plaques lithosphériques. D'autres applications concernent par exemple la diffusion des contraintes près d'un défaut [Johnson, 1977; Turcotte et Schubert, 1982; Whillans et Jezek, 1987] ou l'écoulement d'un lubrifiant. Ce code est robuste et converge dans tous les cas de figure pour des écoulements à très faible nombre de Reynolds. Le schéma semi-implicite utilisé ne nécessite que très peu de modifications par rapport à un traitement explicite qui diverge pour des faibles nombres de Reynolds, aussi bien au niveau de la formulation qu'au niveau du temps de calcul. Cet algorithme peut être facilement applicable à des écoulements non-stationnaires où les paramètres climatiques varient au cours du temps. Nous l'avons construit de manière à pouvoir intégrer facilement le calcul de l'évolution des marges et celui de la température. Nous avons vu dans ce chapitre que son efficacité peut certainement être améliorée par une modification de la discrétisation de l'équation pour la pression. Le calcul peut aussi être accéléré par l'introduction d'un processus de relaxation sur le calcul du champ de pression p du type de celui utilisé par Patankar [1980] dans son algorithme SIMPLER.

CHAPITRE 4

COMPARAISON DES ECOULEMENTS ISOTROPE ET ANISOTROPE DANS LE CAS NEWTONIEN

4 - 1 INTRODUCTION

En utilisant le modèle décrit dans les chapitres précédents, nous allons, pour la première fois, pouvoir évaluer l'influence de l'anisotropie de la glace sur l'écoulement dans les calottes polaires dans des cas théoriques simples. L'anisotropie modifie l'écoulement de la glace de manière complexe et nous avons cherché, en simplifiant le problème, à bien discerner l'effet de l'anisotropie des autres mécanismes intervenant dans l'écoulement de la glace.

Nous avons traité exclusivement le cas d'un écoulement Newtonien ($n=1$) et d'une texture donnée, n'évoluant pas avec l'histoire de la déformation comme c'est pourtant le cas pour les glaces polaires (cf. chapitre 2). Nous avons distingué deux types de textures, l'une isotrope et l'autre anisotrope sans couche de recristallisation dans les couches profondes. Les textures anisotropes imposées dans le modèle sont calculées avec les mêmes paramètres rhéologiques que ceux mesurés à GRIP, où la glace est isotrope en surface et devient de plus en plus anisotrope au fur et à mesure que la profondeur augmente, avec des axes- c fortement concentrés autour de la verticale *in-situ* au fond de la calotte (cf. figure 4.1.a). Nous avons donc utilisé la répartition des axes- c (2.12) décrite au chapitre 2. En tenant compte de l'incompressibilité (1.5), la loi de comportement à deux dimensions (2.8) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= \eta_{xx} D_{xx}, \\ S'_{zz} &= \eta_{zz} D_{zz}, \\ S'_{xz} &= \eta_{xz} D_{xz}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $\eta_{xx} = M_{xxxx} - M_{zzzz}$, $\eta_{zz} = M_{zzzz} - M_{xxxx}$ et $\eta_{xz} = M_{xzzx}$. Pour une loi de comportement linéaire ($n=1$), les trois viscosités de surface (η_{ij}) sont égales à la viscosité isotrope $\eta_0 = 5/\psi_0$ (cf. chapitre 2). Les profils verticaux des viscosités induites par la texture (2.12) et normalisées par η_0 sont représentés sur la figure (4.1) dans le cas d'un comportement Newtonien. Les (η_{ij}) sont tracées en lignes continues et les (M_{ijkl}) en lignes pointillées ou avec des symboles. On peut voir que, dans la partie inférieure de la calotte polaire, la résistance η_{xx} à la contrainte déviatoire horizontale S'_{xx} est supérieure d'un ordre de grandeur à la résistance à la contrainte de cisaillement S'_{xz} (la résistance η_{zz} à la contrainte déviatoire verticale S'_{zz} est 5 fois plus forte que la viscosité η_{xz}).

Dans ce chapitre, nous considérerons donc une glace isotherme et un écoulement sans glissement à la base de la calotte. Nous comparerons d'abord les écoulements isotrope et anisotrope dans le cas le plus simple d'un écoulement à géométrie imposée sur un socle plat. Nous permettrons ensuite l'évolution de la surface libre en considérant un écoulement en équilibre avec un taux d'accumulation imposé sur un socle plat. Nous étudierons enfin les réponses respectives d'un écoulement isotrope et d'un écoulement anisotrope aux variations du relief en imposant un socle de forme sinusoïdale avec différentes longueurs d'onde.

Nous montrerons que, d'une manière générale, la glace s'écoule plus facilement dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. Cela a des conséquences différentes selon les cas étudiés. Si la géométrie de la calotte est imposée, le seul effet visible de l'anisotropie est l'accélération de l'écoulement. Ce problème est certes académique, mais son étude est intéressante car elle va nous servir à évaluer les effets de l'anisotropie dans des situations plus complexes. Dans le cas plus réaliste où le taux d'accumulation est imposé, les effets de l'anisotropie se traduisent par une surface plus plate et une accélération de l'écoulement significative, moins forte pourtant que celle constatée dans le cas précédent. Ce résultat est nouveau et n'était pas prévisible a priori. L'autre résultat important concerne la réponse de l'écoulement aux irrégularités du socle. Les

lignes de courant et l'élévation de la surface sont moins sensibles aux irrégularités du socle dans le cas anisotrope. L'accélération de l'écoulement s'arrête à la surface des bosses et la stagnation de la glace dans les trous est accentuée dans le cas anisotrope.

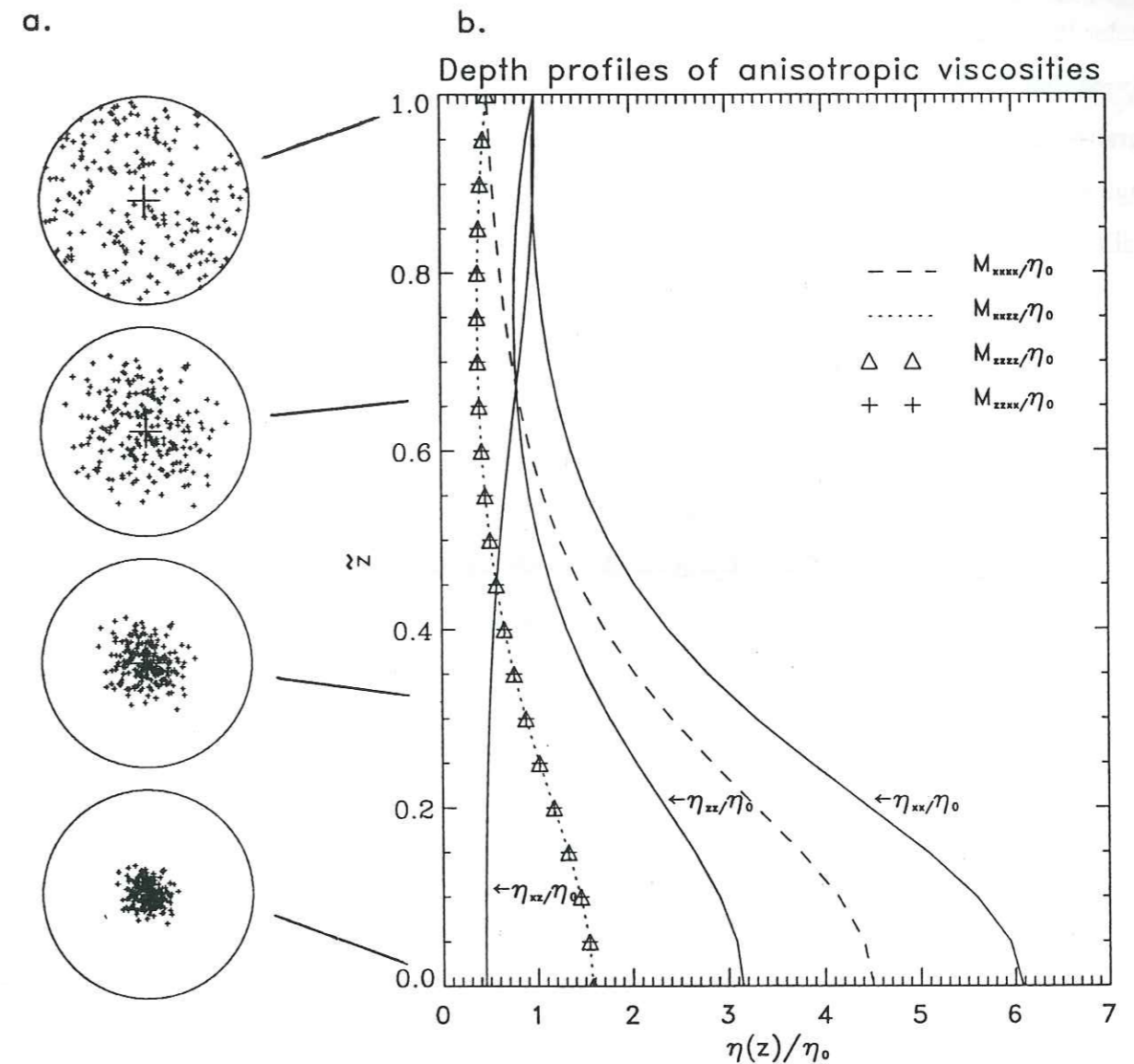


Fig. 4.1. Caractéristiques de la texture utilisée dans le modèle et des viscosités directionnelles associées. En (a) sont représentées les orientations des cristaux décrits par l'équation (2.12) en 0, 1/4, 1/2, 3/4 et une fois l'épaisseur. En (b) sont dessinées les viscosités directionnelles associées à cette texture. Les profils des composantes du tenseur des viscosités sont tracés en utilisant différents symboles et les viscosités (η_{ij}) définies par l'équation (4.1) sont tracées avec des lignes continues.

Dans ce chapitre, nous décrivons en détail ces effets et montrerons qu'ils peuvent avoir une influence très importante sur la datation des carottes glaciaires. Nous comparerons aussi les répartitions respectives des vitesses de déformation longitudinales et en cisaillement dans la calotte, dans les cas isotrope et anisotrope. Nous montrerons que l'étendue de ce que l'on peut appeler la région du dôme, c'est à dire la région pour laquelle l'écoulement est dominé par les déformations longitudinales, est généralement plus petite dans le cas anisotrope. Une éventuelle migration du dôme au cours du temps perturbera encore plus l'écoulement que ce qu'on imaginait dans le cas isotrope, rendant l'interprétation des forages au dôme plus difficile qu'ailleurs.

Les simulations ont été faites dans un domaine d'étendue horizontale fixée $L=40$. Les résultats sont donc totalement indépendants des conditions aux limites imposées sur les bords pour $-10 < x < 10$ (cf. paragraphe 3 - 5.2). En fait, les résultats sont très peu influencés par les conditions aux limites pour $-15 < x < 15$ car, comme nous le verrons dans le chapitre 5, les conditions aux limites sur les côtés correspondant à l'ordre 0 de la couche mince fournissent une très bonne approximation de l'écoulement. Etant donné la symétrie de l'écoulement, les résultats sur les profils des champs ne sont montrés que dans le domaine correspondant aux valeurs positives de x ($0 < x < 10$ ou $0 < x < 15$). Les profils verticaux seront généralement représentés en fonction de $\tilde{z} = (z - B)/H$.

Dans le paragraphe 4 - 2, nous discuterons en détail les résultats obtenus pour une glace s'écoulant sur un socle plat dans le cas d'une géométrie imposée (4 - 2.1) et dans le cas d'un taux d'accumulation imposé (4 - 2.2). Dans le paragraphe 4 - 3, nous décrivons les effets des variations de la topographie du socle sur les différents champs en comparant les résultats obtenus dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope.

4 - 2 ECOULEMENT SUR UN SOCLE PLAT

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas le plus simple d'un socle plat ($z=B(x)=0$).

4 - 2.1 Ecoulement dans un domaine à géométrie imposée

Dans ce paragraphe, nous allons voir que la glace anisotrope s'écoule plus facilement que la glace isotrope. Pour mettre ce phénomène en évidence, nous allons regarder un cas artificiel (comme l'a fait Raymond [1983]), où la géométrie de la calotte est imposée, car à ce moment là les effets de l'anisotropie sont vraiment évidents. L'équation de l'élévation de la surface imposée E est:

$$E(x) = h_0 - \beta_0 x^2, \quad (4.2)$$

où $h_0=1.11$ est la hauteur du dôme ($x=0$) et $\beta_0=0.275 \times 10^{-3}$. Le paramètre β_0 définit la courbure du profil de la surface. Sa valeur a été choisie de manière à obtenir des vitesses verticales en surface relativement uniformes.

Pour une géométrie imposée, le cas anisotrope réclame des vitesses de déformation en cisaillement plus importantes que dans le cas isotrope pour équilibrer le gradient longitudinal de pression. Ceci est visible sur l'équilibre des forces, exprimé en variables sans dimension, à l'ordre 0 de l'approximation de la couche mince (1.41):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{M_{xzz}}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \quad (4.3)$$

La viscosité de cisaillement M_{xzz} diminuant avec la profondeur (cf. figure 4.1), la vitesse de déformation en cisaillement doit augmenter avec la profondeur pour une pente de la surface imposée. La plus grande fluidité en réponse à la contrainte de cisaillement se répercute directement sur la vitesse de déformation en cisaillement. Celle-ci augmente et accélère globalement l'écoulement, le mouvement de la glace vers le bas est plus rapide malgré une plus grande résistance à la déformation verticale [Mangeney et al., 1996]. Cet effet est visible sur les vitesses horizontales et verticales, sur les profils des contraintes et des vitesses de déformation, ainsi que sur la chaleur produite lors de la déformation, comme nous le discutons dans la suite de ce paragraphe.

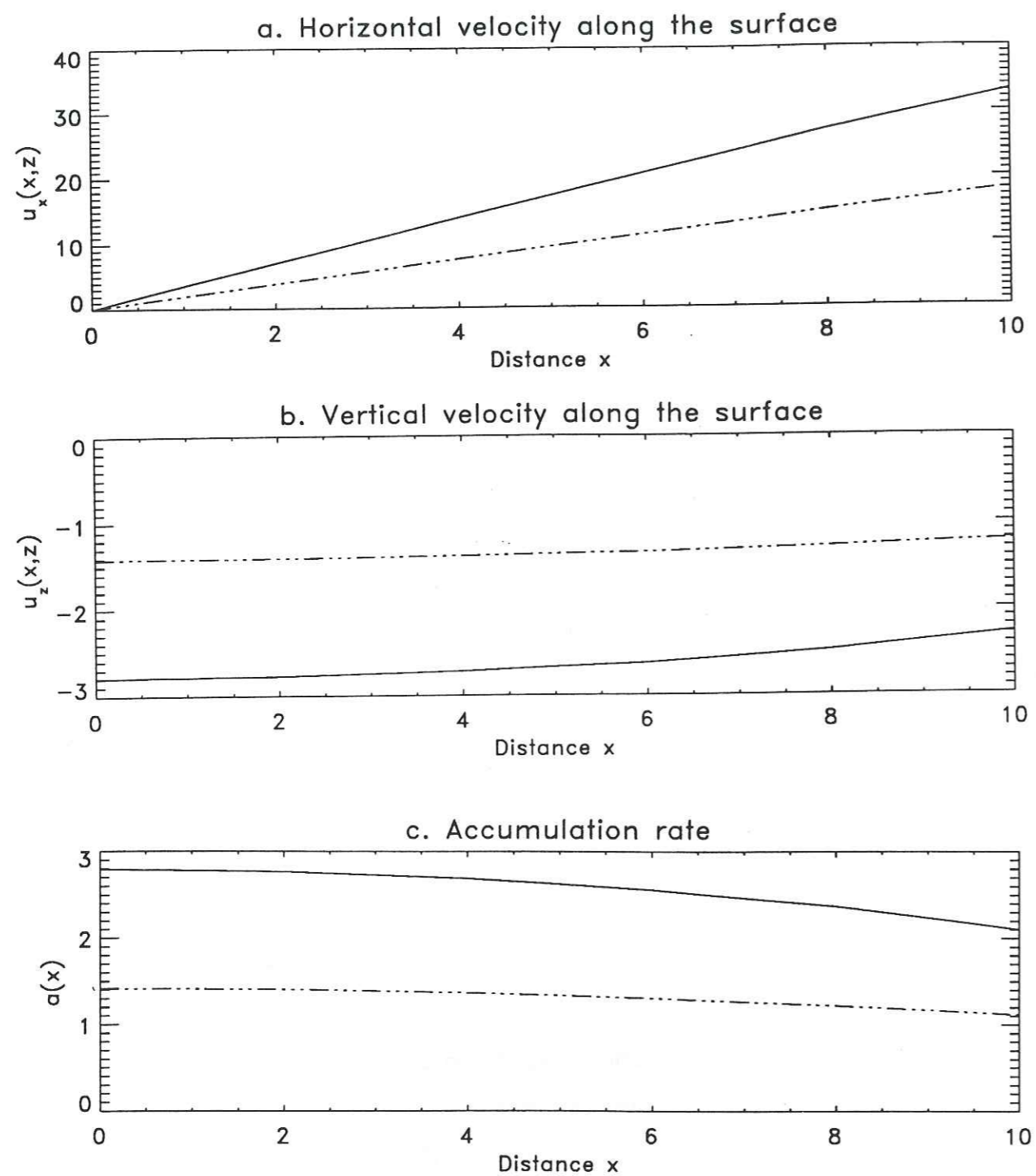


Fig. 4.2. Profils de la vitesse (a) horizontale et (b) verticale à la surface. En (a) et (b) les lignes en tirets-pointillés représentent les vitesses en surface dans le cas isotrope et les lignes continues ces vitesses dans le cas anisotrope. En (c) sont tracés les taux d'accumulation dans le cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et dans le cas anisotrope (lignes continues).

4 - 2.1.a Accélération de l'écoulement dans le cas anisotrope

Pour apprécier l'accélération de l'écoulement dans le cas anisotrope, il faut se rappeler que les écoulements isotrope et anisotrope ne sont pas en équilibre avec le même taux d'accumulation. En effet, si l'écoulement est accéléré, il faut un taux d'accumulation plus important pour que l'élévation de la surface atteigne le profil imposé. Les taux d'accumulation dans les cas isotrope et anisotrope sont représentés sur la figure (4.2.c). Cette figure montre que l'élévation de la surface imposée nécessite, dans le cas anisotrope, une valeur de l'accumulation plus de 1.5 fois supérieure à celle obtenue dans le cas isotrope.

Les vitesses en surface le long de la ligne d'écoulement sont montrées sur la figure 4.2. En (a) et (b), les vitesses anisotropes sont tracées en lignes continues, alors que les vitesses isotropes sont représentées en tirets-pointillés. La vitesse horizontale et la vitesse verticale sont plus grandes dans le cas anisotrope. Avec la texture décrite par l'équation (2.12), les vitesses horizontales et verticales à la surface augmentent à peu près d'un facteur 2 par rapport à leur valeur dans le cas isotrope. En effet, l'écoulement, essentiellement induit par la vitesse de déformation en cisaillement, est accéléré par la facilité de la réponse aux contraintes de cisaillement, facilité due à la texture existante. La résistance à la compression verticale étant plus forte dans le cas anisotrope, on aurait tendance à penser que la vitesse verticale, dirigée vers le bas, devrait diminuer. En fait l'accélération globale de l'écoulement l'emporte sur l'effet de cette résistance et la vitesse verticale augmente.

Les profils verticaux des vitesses sont aussi modifiés dans le cas anisotrope. La figure 4.3 montre les profils verticaux des vitesses horizontales (a) et verticales (b) dans le cas isotrope (lignes pointillées) et anisotrope (lignes continues). Ces profils sont normalisés par la valeur de la vitesse correspondante en surface de manière à comparer les profils à différentes positions le long de l'axe horizontal. Les profils à différentes distances du dôme ont été représentés sur la figure (4.2) mais ils ne se distinguent pas car ils se superposent exactement. Les triangles représentent les résultats obtenus par Raymond [1983] pour l'écoulement d'un fluide Newtonien isotrope. Les résultats de notre modèle sont en très bon accord avec ceux de Raymond, aussi bien pour u_x que pour u_z . Comme Raymond [1983], nous trouvons que, dans le cas isotrope pour $n=1$,

les profils des vitesses sont indépendants de la distance au dôme. Le même résultat est obtenu dans le cas anisotrope. Cette conclusion est évidemment limitée au cas où la texture est invariante dans la direction horizontale.

Le profil de vitesse verticale tend vers un profil linéaire dans le cas anisotrope. Les vitesses de déformation longitudinales sont donc réparties avec la profondeur de manière légèrement plus uniforme dans le cas anisotrope. Alors que la forme des profils de vitesse verticale n'est guère affectée par la nature anisotrope de la glace, les profils de vitesse horizontale ont une courbure significativement plus grande dans le cas anisotrope. La vitesse de déformation en cisaillement est alors plus concentrée dans la partie inférieure de la calotte polaire.

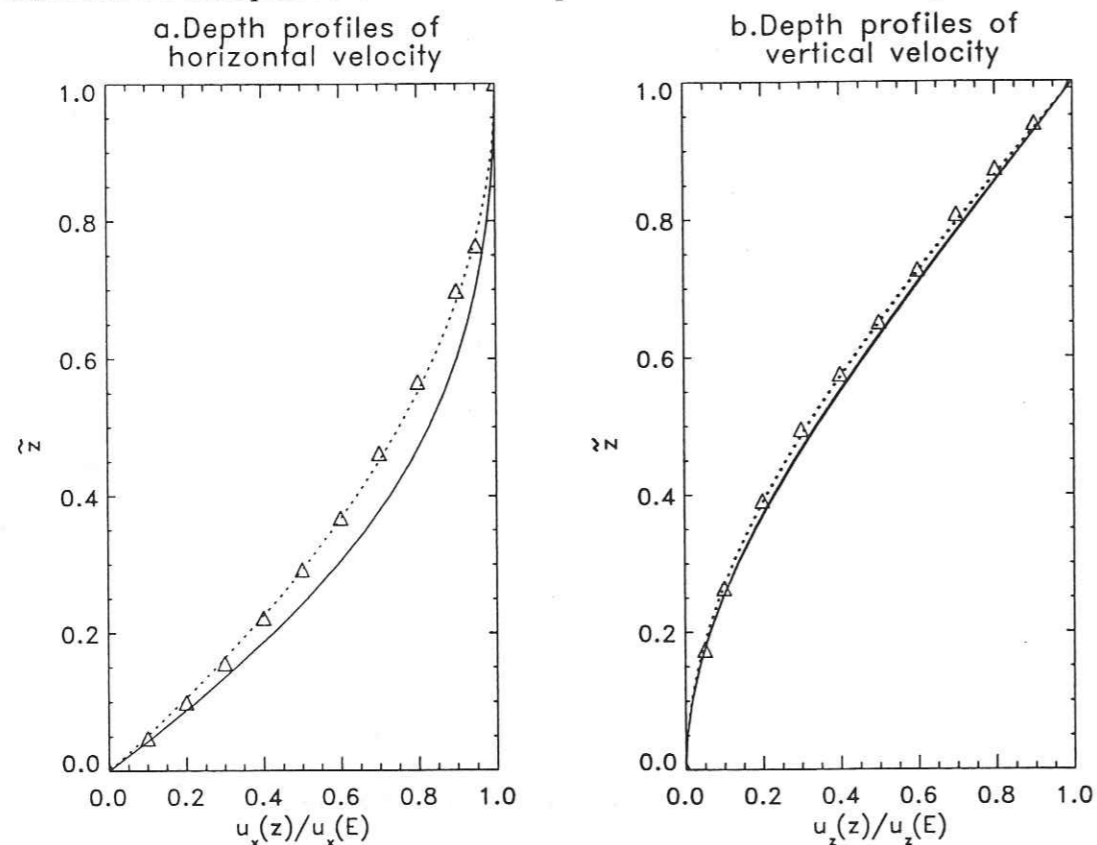


Fig. 4.3. Profils verticaux de la vitesse horizontale (a) et verticale (b), normalisés par leur valeur correspondante à la surface, en fonction de la profondeur normalisée en différents points. En (a) et (b) les lignes continues montrent les résultats de la simulation dans le cas anisotrope, et les lignes en pointillés ceux dans le cas isotrope. Les résultats de Raymond [1983] pour l'écoulement d'un fluide Newtonien ($n=1$) sont représentés par des triangles. La forme des profils n'est pas sensible à la distance au dôme.

4 - 2.1.b Effets de l'anisotropie sur les contraintes et les vitesses de déformation

Nous allons voir maintenant comment cette accélération de l'écoulement s'explique en analysant la distribution des vitesses de déformation et des contraintes. L'effet dominant est celui de l'augmentation de la valeur et de la concentration de la vitesse de déformation en cisaillement dans les couches profondes de la calotte dans le cas anisotrope. La texture de la glace vers le fond, facilitant la déformation en cisaillement, le gradient vertical de u_x , et donc u_x lui-même, augmente dans le cas anisotrope.

Nous présenterons les résultats pour les vitesses de déformation en unités de:

$$\epsilon^* = 2 |u_z(0, E)| / E(0) \quad (4.4)$$

et ceux pour les contraintes déviatoires correspondantes en unité de:

$$\tau^* = \eta_0 \epsilon^* \quad (4.5)$$

ϵ^* et τ^* étant sans dimension, comme l'a fait Raymond [1983]. Il faut noter que, contrairement à la figure 4.3 où les vitesses sont normalisées par leur valeur correspondante en surface, nous utilisons ici le même facteur de normalisation dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope. Dans le cas anisotrope, les vitesses de déformation (d_{kl}) et les contraintes déviatoires (s_{kl}) représentées sur la figure 4.4 et 4.5, sont données par:

$$\begin{aligned} (d_{xx}, d_{zz}, d_{xz}) &= (D_{xx}, D_{zz}, D_{xz}) / \epsilon^*, \\ (s_{xx}, s_{zz}, s_{xz}) &= (S'_{xx}, S'_{zz}, S'_{xz}) / \tau^*. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les valeurs correspondantes dans le cas isotrope seront spécifiées avec un exposant i (d_{kl}^i et s_{kl}^i). Les profils des vitesses de déformation et des contraintes déviatoires au dôme et en $x=10$ sont montrés respectivement sur les figures 4.4a et 4.4b.

Les contraintes de cisaillement dans les cas anisotrope (lignes continues) et dans le cas

isotrope (lignes en tirets-pointillés) sont sensiblement les mêmes (cf. figure 4.4 pour $x=10$). Par contre, l'effet de l'anisotropie est beaucoup plus visible sur les vitesses de déformation en cisaillement. En effet, la valeur de la vitesse de déformation en cisaillement à la base du glacier en $x=10$ est plus importante d'un facteur 2.2 dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. En $\bar{z}=1/2$, ce facteur est à peu près égal à 1.5. Ce facteur est indépendant de la distance au dôme. Ceci corrobore ce qui a été mentionné précédemment, à savoir que les vitesses de déformation en cisaillement sont plus concentrées dans les couches inférieures de la calotte dans le cas anisotrope.

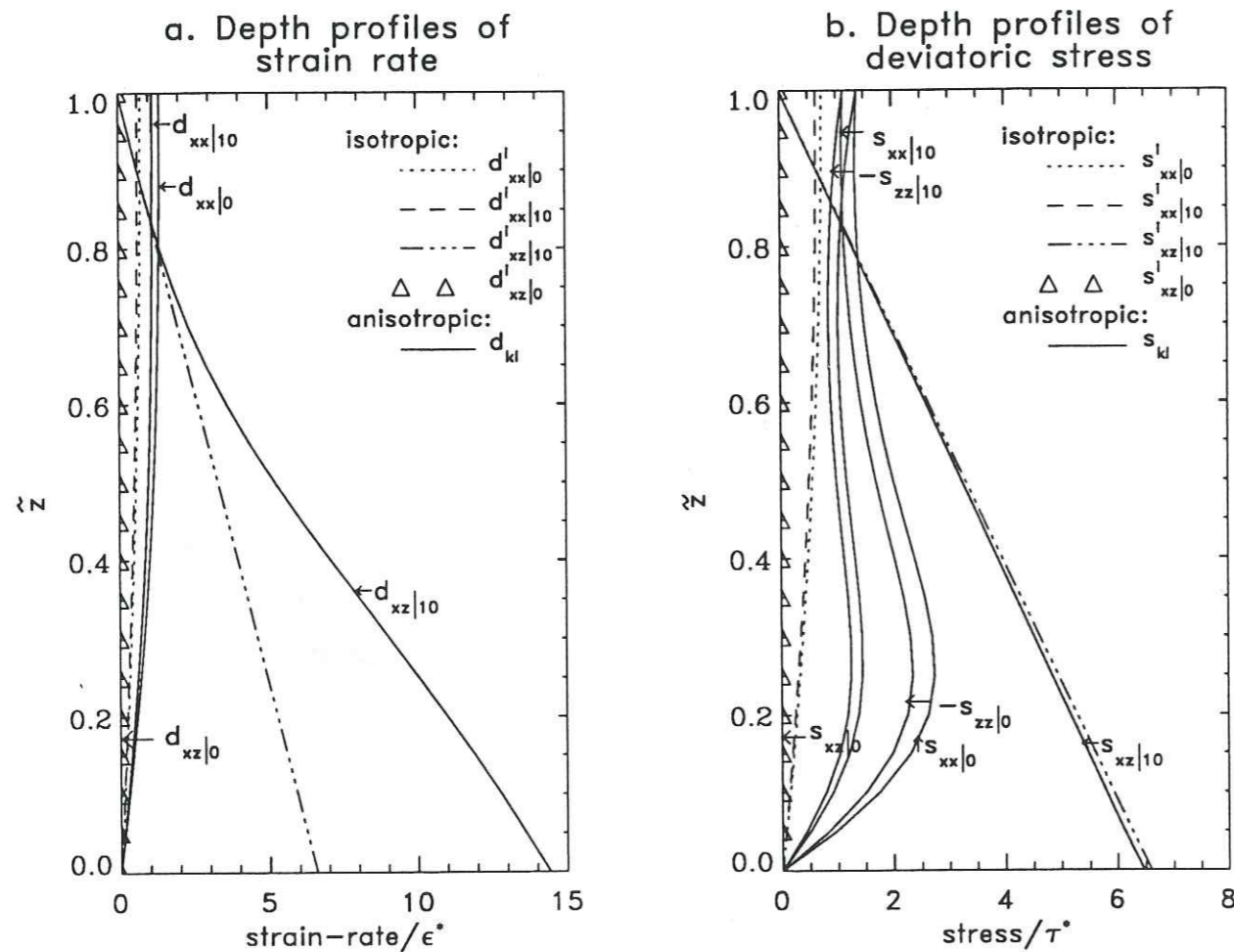


Fig. 4.4. (a) Vitesses de déformation et (b) contraintes déviatoires, normalisées respectivement par ϵ^* et τ^* , en fonction de la profondeur normalisée. En (a) et (b) respectivement, les lignes continues représentent les vitesses de déformation et les contraintes dans le cas anisotrope, et les symboles représentent ces quantités dans le cas isotrope. Les nombres (0, 10) indiquent la distance au dôme.

Au dôme, nous avons $s_{xz}=0$ et $\dot{d}_{xz}=0$ aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. Il faut noter que cela ne reste vrai dans le cas anisotrope que parce que nous avons choisi une texture dont l'axe de symétrie de révolution est parallèle à l'axe vertical zz' . Un léger décalage de l'axe de symétrie de la texture par rapport à l'axe z donnerait lieu à des déformations en cisaillement au dôme.

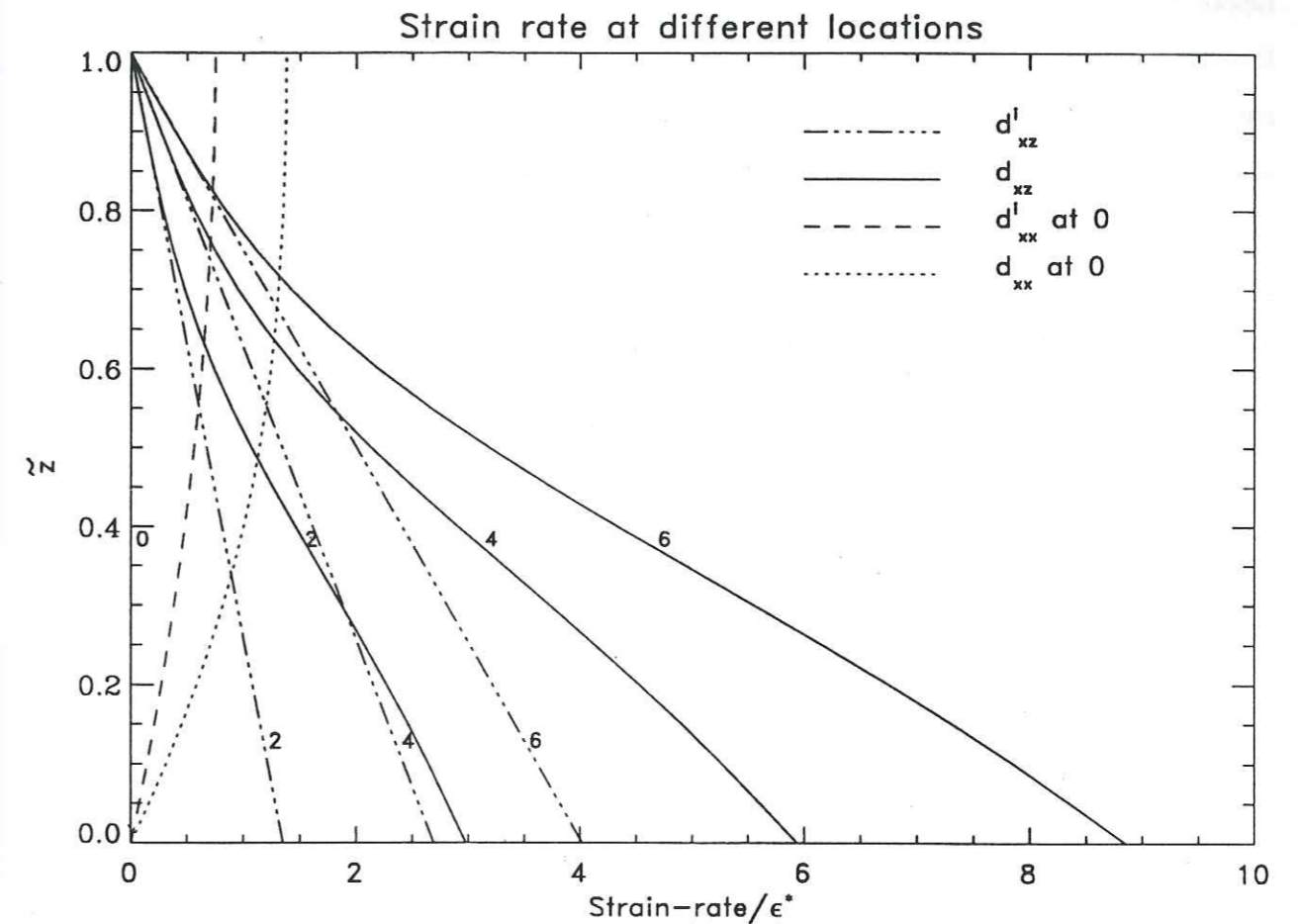


Fig. 4.5. Vitesses de déformation normalisées par ϵ^* , en $x=0, 2, 4$, et $x=6$. Les lignes continues représentent les vitesses de déformation en cisaillement dans le cas anisotrope (d_{xz}) et les lignes en tirets-pointillés ces vitesses de déformation dans le cas isotrope (\dot{d}_{xz}). La ligne en pointillés représente la vitesse de déformation longitudinale au dôme (où la vitesse de déformation longitudinale est maximale) dans le cas anisotrope (d_{xx}) et la ligne en tirets représente la vitesse de déformation longitudinale au dôme dans le cas isotrope (\dot{d}_{xx}).

Globalement les vitesses de déformation et les contraintes axiales sont plus grandes dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope (cf. figure 4.4). Cela résulte du fait que l'écoulement est globalement accéléré pour une géométrie donnée de la surface. Il est important de noter que, contrairement au cas isotrope, où l'on a nécessairement $s_{xx} = -s_{zz}$, la valeur absolue de la contrainte déviatoire horizontale s_{xx} est plus grande que celle de la contrainte déviatoire verticale s_{zz} dans le cas anisotrope, ceci à cause de l'augmentation de la résistance aux contraintes horizontales par rapport à celle répondant aux contraintes verticales à la base de la calotte polaire (voir figure 4.1). D'un autre côté, l'incompressibilité impose $d_{xx} = -d_{zz}$ aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. La forme des profils des contraintes axiales s_{xx} et s_{zz} est complètement modifiée dans le cas anisotrope: dans les premiers 1/10 ème de la calotte polaire, où la glace est pratiquement isotrope, s_{xx} et s_{zz} décroissent avec la profondeur aussi bien pour une glace isotrope que pour une glace anisotrope. Mais dans la partie inférieure, les composantes des contraintes axiales augmentent avec la profondeur dans le cas anisotrope pour atteindre leur maximum vers $\tilde{z} \sim 1/4$, où la fabrique est fortement concentrée. Ensuite elles décroissent brutalement de manière à vérifier la condition de non-glissement à la base de la calotte polaire. Dans le cas anisotrope, la vitesse de déformation longitudinale d_{xx} est plus grande que celle obtenue dans le cas isotrope aussi bien au dôme qu'en $x=10$; au dôme, en $\tilde{z} \sim 1/2$, la vitesse de déformation longitudinale est deux fois plus grande dans le cas anisotrope.

Comme nous l'avons discuté au paragraphe 1 - 4, il est intéressant de définir l'étendue de la région du dôme, c'est à dire de la zone où les vitesses de déformation longitudinales dominent. Pour évaluer l'effet de l'anisotropie sur l'étendue de la région du dôme, nous avons tracé sur la figure 4.5 les profils verticaux des vitesses de déformation à des distances de 0, 2, 4 et 6 du dôme ainsi que la valeur maximale de la vitesse de déformation longitudinale (i. e. sa valeur au dôme) dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope. On voit, dans le cas anisotrope, que même à une distance de 4 à partir du dôme, la valeur de la vitesse de déformation en cisaillement à la base est 4.3 fois supérieure à la valeur maximum de la vitesse de déformation longitudinale (i. e. à la surface, au dôme). Dans le cas isotrope, ce rapport est seulement de 3.5. Cela montre que le comportement anisotrope de la glace réduit le domaine où le mouvement de la glace reste essentiellement dû aux vitesses de déformation longitudinales. Dans le cas isotrope, la vitesse de déformation basale en cisaillement est d'un ordre de grandeur plus grande que la vitesse de

déformation longitudinale à la surface en $x \sim 10$; dans le cas anisotrope cette situation a déjà lieu en $x \sim 8$. La dominance de la vitesse de déformation en cisaillement dans l'écoulement des glaces polaires est donc plus forte dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope, pour une même viscosité isotrope en surface et pour une même géométrie imposée.

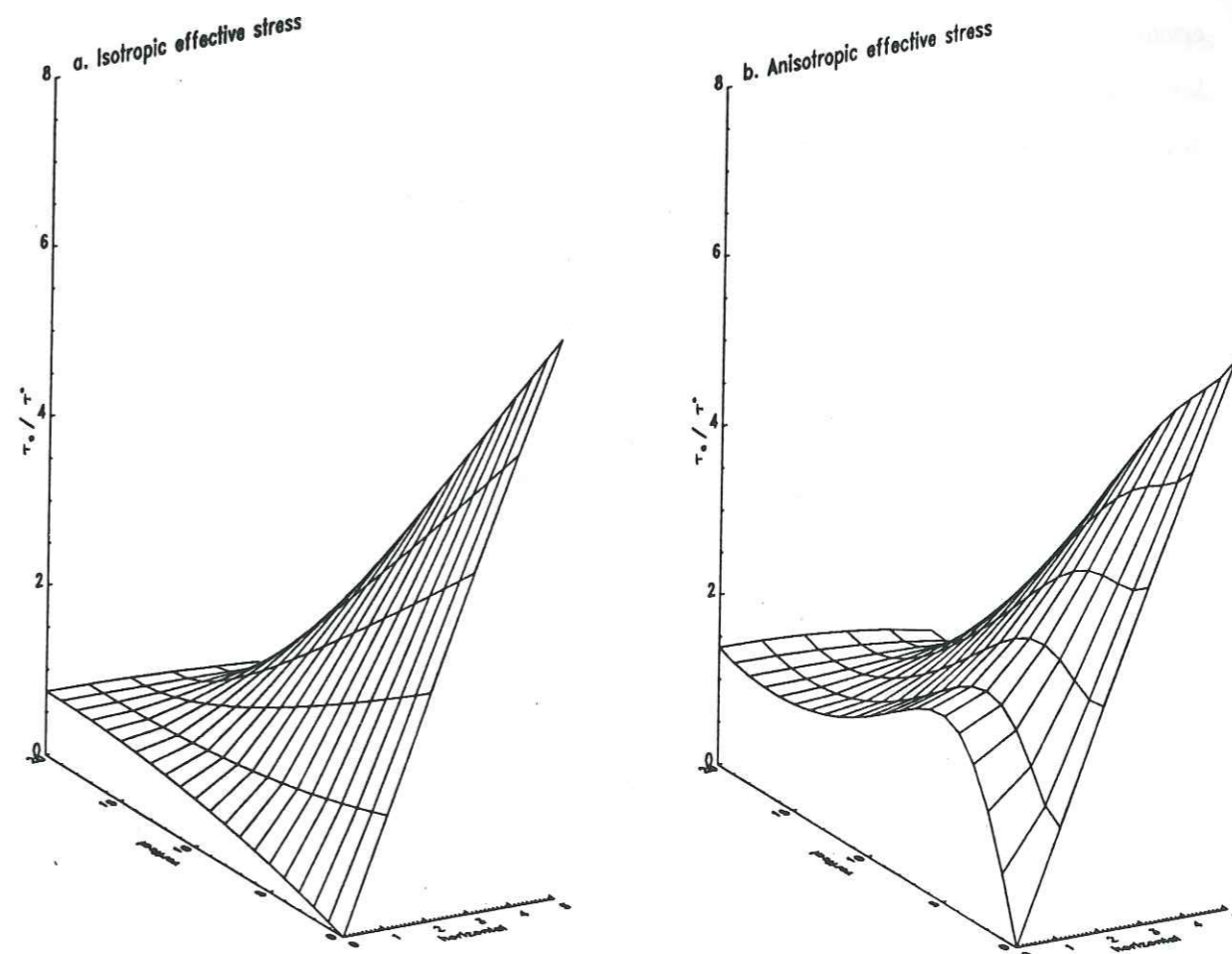


Fig. 4.6. Valeurs de la contrainte effective τ_e divisée par τ^* dans le domaine $0 < z < H$, $0 < x < 10$. L'axe des x représente la distance du dôme (point 0) à $x=10$ (point 5), l'axe des y la profondeur à partir de la surface (point 20) jusqu'au socle (point 0) et l'axe z les valeurs de τ_e divisée par τ^* . En (a) sont dessinées ces valeurs dans le cas isotrope et en (b) celles dans le cas anisotrope.

Dans ce travail, nous n'avons traité numériquement que le cas d'un écoulement Newtonien. Dans le cas non-Newtonien ($n=3$), la forme de la contrainte effective joue un rôle significatif sur l'écoulement. Nous avons représenté sur la figure 4.6 la contrainte effective sans dimension τ_e (dimensionnée par s^*) divisée par τ^* dans les cas isotrope (a) et anisotrope (b) à partir du dôme jusqu'à $x=10$ et depuis la surface jusqu'au fond. Il faut noter que la contrainte effective τ_e est plus grande à la surface dans le cas anisotrope, à cause de l'augmentation des contraintes longitudinales. Le gradient de τ_e dans le cas anisotrope est beaucoup plus fort dans les couches inférieures de la calotte polaire que dans le cas isotrope. Cette différence de forme de τ_e diminue avec la distance au dôme. La forme caractéristique de τ_e près du dôme dans le cas anisotrope tend à augmenter la spécificité de cette région.

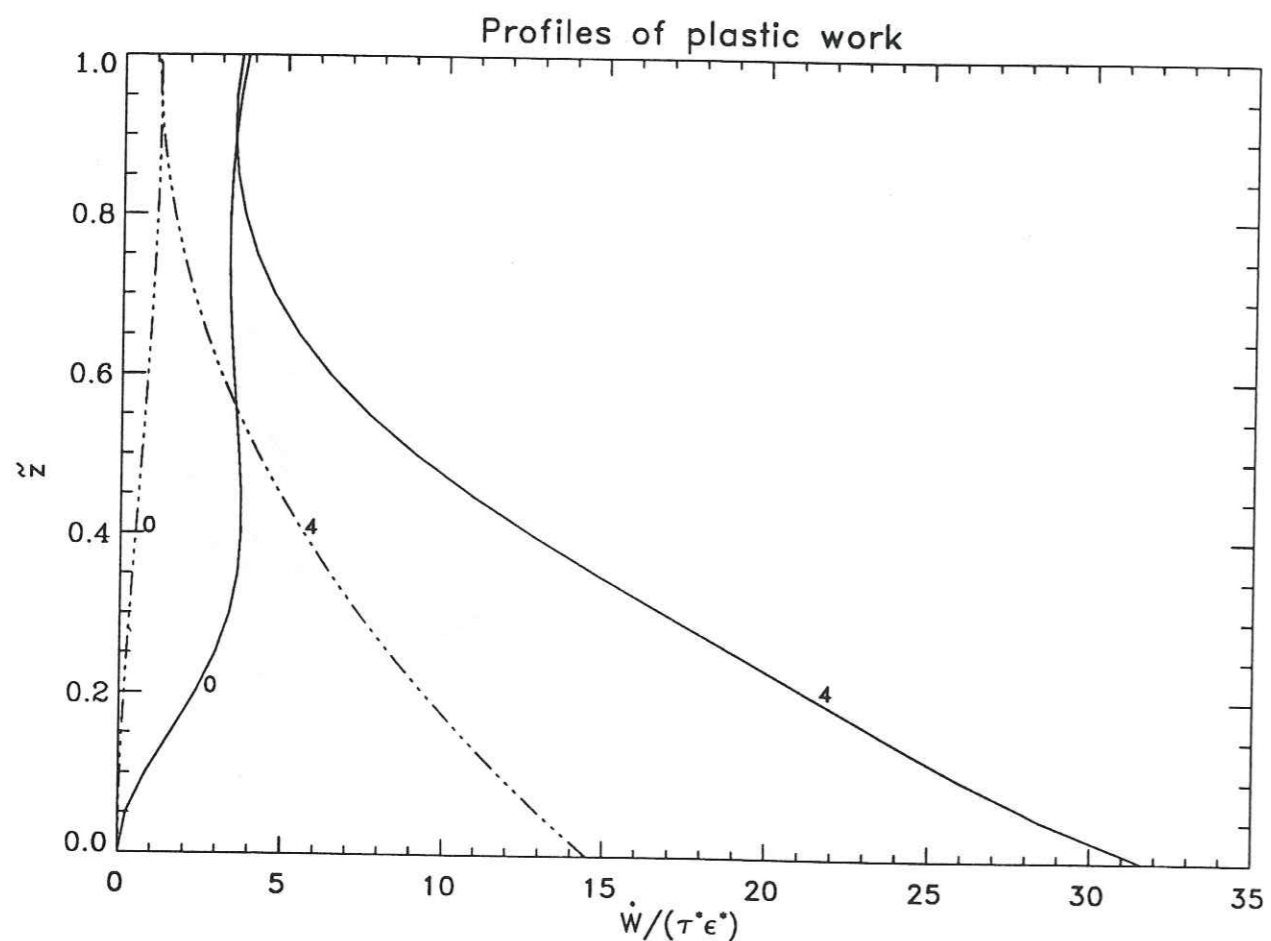


Fig. 4.7. Profils verticaux de la dissipation visqueuse, normalisée par $\epsilon^* \tau^*$, en fonction de la profondeur normalisée au dôme (0) et en $x=4$ (4). Les lignes continues montrent les profils dans le cas anisotrope et les lignes en tirets-pointillés dans le cas isotrope.

4 - 2.1.c Chaleur dissipée par déformation visqueuse

Dans nos simulations, nous ne résolvons pas l'équation de bilan thermique. Nous pouvons néanmoins évaluer l'effet de l'anisotropie sur la chaleur dissipée par déformation visqueuse qui représente un des termes source de l'équation de la chaleur (équation 1.8). Au dôme, où aucune déformation n'a lieu à la base, le travail plastique par unité de volume est égal à zéro au fond (figure 4.7). A la surface, la chaleur produite par la déformation interne est plus que trois fois supérieure dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. Mais la valeur de la chaleur produite par la déformation interne à la surface est 8 fois inférieure à celle obtenue à la base de la calotte polaire en $x=4$ dans le cas anisotrope. Déjà en $x=4$, le travail plastique est plus important à la base qu'à la surface. Cette chaleur conduira certainement à diminuer la viscosité à la base de la calotte polaire, là où les déformations en cisaillement dominant et, par là, contribuera vraisemblablement à accélérer l'écoulement de la glace polaire. La résolution de l'équation de la chaleur donnant le champ de température risquerait donc d'amplifier la concentration de la déformation à la base de la calotte polaire, et donc l'effet de l'anisotropie. D'un autre côté, l'accélération globale de l'écoulement, augmentant l'advection de glace froide de la surface vers le fond, provoquerait une augmentation de la viscosité, conduisant à réduire l'accélération de l'écoulement. Ces spéculations doivent être vérifiées avec le calcul du champ de température car, si la chaleur dissipée modifie l'équilibre thermodynamique local, il est difficile de prévoir la réaction sur la viscosité finale, la valeur de la température n'étant pas prévisible a priori.

4 - 2.1.d Conclusion

Les résultats de la comparaison entre un écoulement isotrope et un écoulement anisotrope pour une viscosité isotrope donnée en surface, pour un développement de fabrique donné en fonction de la profondeur, et pour une élévation de la surface donnée montrent que la dynamique des glaciers est significativement modifiée par la prise en compte de l'anisotropie des glaces [Mangeney et al., 1996]:

1. Le mouvement de la glace est globalement accéléré dans le cas anisotrope par rapport au cas isotrope, les vitesses en surface sont accélérées d'un facteur ~ 2 pour la texture utilisée dans ces simulations (le taux d'accumulation requis pour obtenir l'état stationnaire dans le cas anisotrope étant plus de 1.5 fois supérieur à celui obtenu dans le cas isotrope).

2. La déformation en cisaillement est plus importante et davantage concentrée dans les couches profondes de la calotte polaire dans le cas d'une glace anisotrope.

3. La région du dôme (i. e. la zone où les vitesses de déformation longitudinale dominant) est moins étendue dans le cas anisotrope. Le domaine dans lequel la vitesse de déformation en cisaillement à la base est inférieure d'un ordre de grandeur à la vitesse de déformation longitudinale à la surface est réduit à $|x| < 8$ dans le cas anisotrope alors qu'il est défini par $|x| < 10$ dans le cas isotrope.

Des profils différents d'élévation de la surface conduisent à des distributions plus ou moins complexes des vitesses en surface mais n'affectent pas significativement les profils verticaux des vitesses, des taux de déformation et des contraintes.

4 - 2.2 Ecoulement en équilibre avec un taux d'accumulation imposé

Nous allons traiter maintenant le cas plus physique d'un écoulement à surface libre en équilibre avec un taux d'accumulation imposé. Les effets de l'anisotropie sont alors plus complexes et nous nous appuyerons sur les résultats obtenus dans le paragraphe précédent pour mieux les comprendre. Alors que pour une géométrie fixée, l'effet de l'anisotropie se répercute directement sur les vitesses de déformation en cisaillement, dans le cas d'un taux d'accumulation fixée, ces effets se partagent entre la forme de la surface libre et les vitesses de déformation en cisaillement. En effet, si on laisse libre la surface, le système réagit de manière à ce que le gradient longitudinal de pression, qui est relié directement à la pente de la surface (cf. approximation de la couche mince, paragraphe 1 - 3.4), diminue pour ne pas avoir des vitesses de déformation en cisaillement trop élevées. L'effet de la variation verticale de la viscosité est

absorbé en partie par la réduction de la pente de la surface et en partie par l'augmentation de la vitesse de déformation en cisaillement. Il n'y a pas, à notre connaissance, d'argument simple pour prévoir dans quelle proportion ces effets vont se partager, cela dépendant certainement de la forme de la viscosité. La surface obtenue dans le cas anisotrope est donc plus plate. Les lignes de courant descendent plus profondément dans la calotte et deviennent plus horizontales quand on s'éloigne du dôme (cf. figure 4.8).

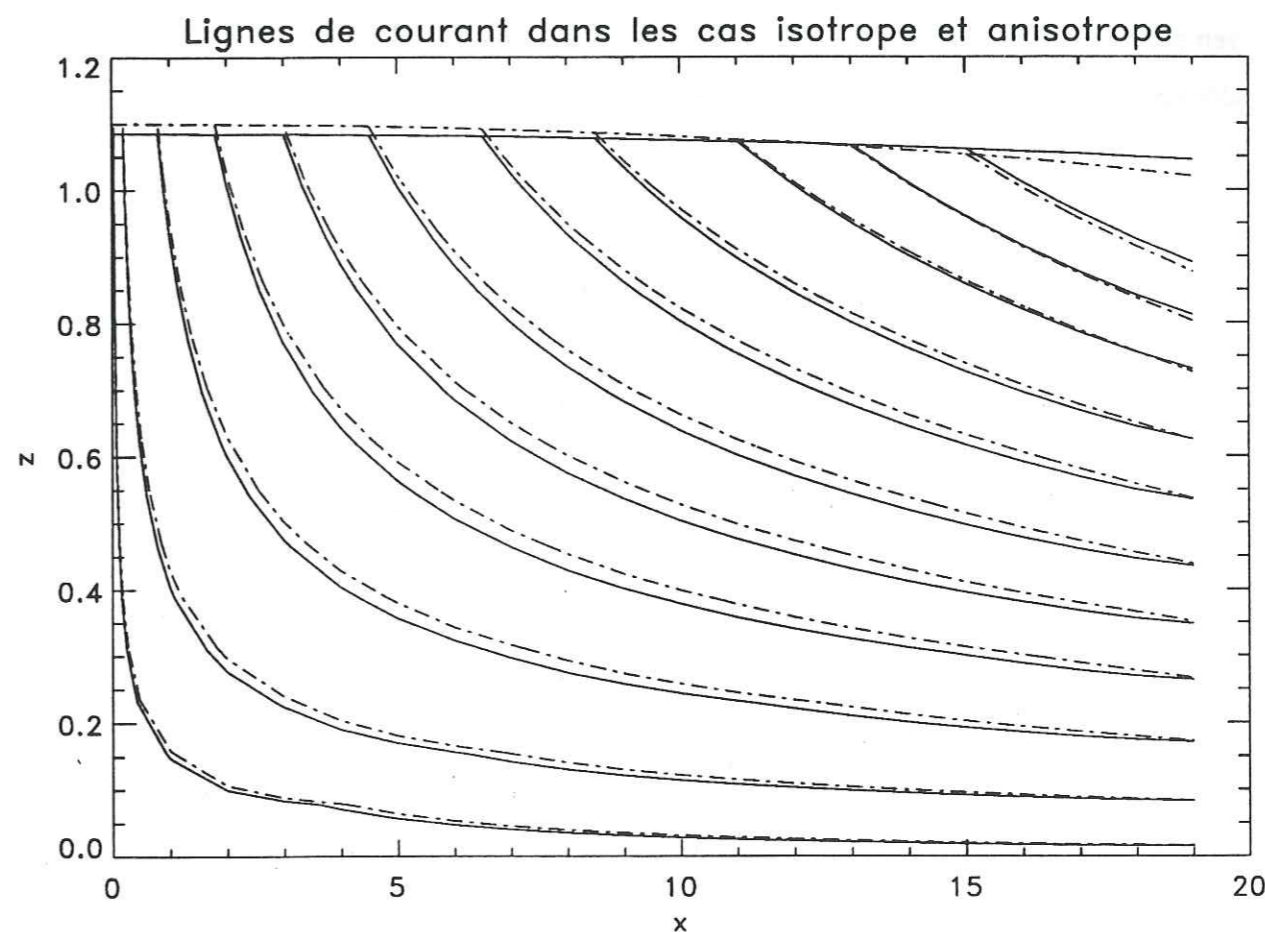


Fig. 4.8. Lignes de courant et élévation de la surface libre dans le cas anisotrope (lignes continues) et isotrope (lignes en tirets-pointillés).

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la plus grande fluidité de la glace anisotrope en réponse à une contrainte de cisaillement accélère globalement l'écoulement. Si, dans le cas d'une géométrie imposée, cela requiert un taux d'accumulation plus grand pour une glace anisotrope, dans le cas d'un taux d'accumulation imposé, cela conduit à une pente de la surface plus faible (cf. figure 4.9a et 4.9b). Si l'on considère l'ordre 0 du développement de la couche mince (1.41) et l'équation d'évolution de la surface à l'ordre 0 (1.55a), on obtient en remplaçant la vitesse horizontale à la surface par son expression en fonction de E et de ses dérivées:

$$\frac{\partial E^{(0)}}{\partial t} + 2 \left(\frac{\partial E^{(0)}}{\partial x} \right)^2 \int_B^E \frac{(E^{(0)} - z')}{M_{zzz}} dz' - W^{(0)} = a. \quad (4.7)$$

Sur cette équation, on voit que, dans le cas anisotrope où M_{zzz} diminue avec la profondeur, l'intégrale augmente et donc, pour obtenir le taux d'accumulation prescrit a , il est nécessaire que la pente de la surface ou que la valeur absolue de la vitesse verticale $W^{(0)}$ diminuent. $W^{(0)}$ étant une fonction complexe de l'élévation de surface E et de ses dérivées première et seconde, il n'est pas facile de prévoir ses variations en fonction de celles de E . En réalité, la pente de la surface et la vitesse verticale en surface diminuent simultanément dans le cas anisotrope, les effets de l'anisotropie se partageant ainsi de manière complexe entre la forme de la surface et la valeur des vitesses. Les champs dans toute la calotte étant étroitement liés à la pente de la surface (cf. paragraphe 1 -3.4), cette pente plus plate de la surface conduira à une homogénéisation des variations des champs avec la coordonnée horizontale x dans le cas anisotrope.

Si l'on regarde plus en détail l'élévation de la surface dans les cas isotrope et anisotrope, on voit qu'au dôme, l'élévation de la surface est plus basse de 1.5 % c'est à dire de $1.5E-2$ (37.5 m) dans le cas anisotrope. Cela est dû au profil de la vitesse verticale au dôme. En effet, si les vitesses verticales en surface dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope sont les mêmes ($u_z = a$ au dôme), les profils de vitesse verticale montrent que, dans le cas anisotrope, la vitesse verticale

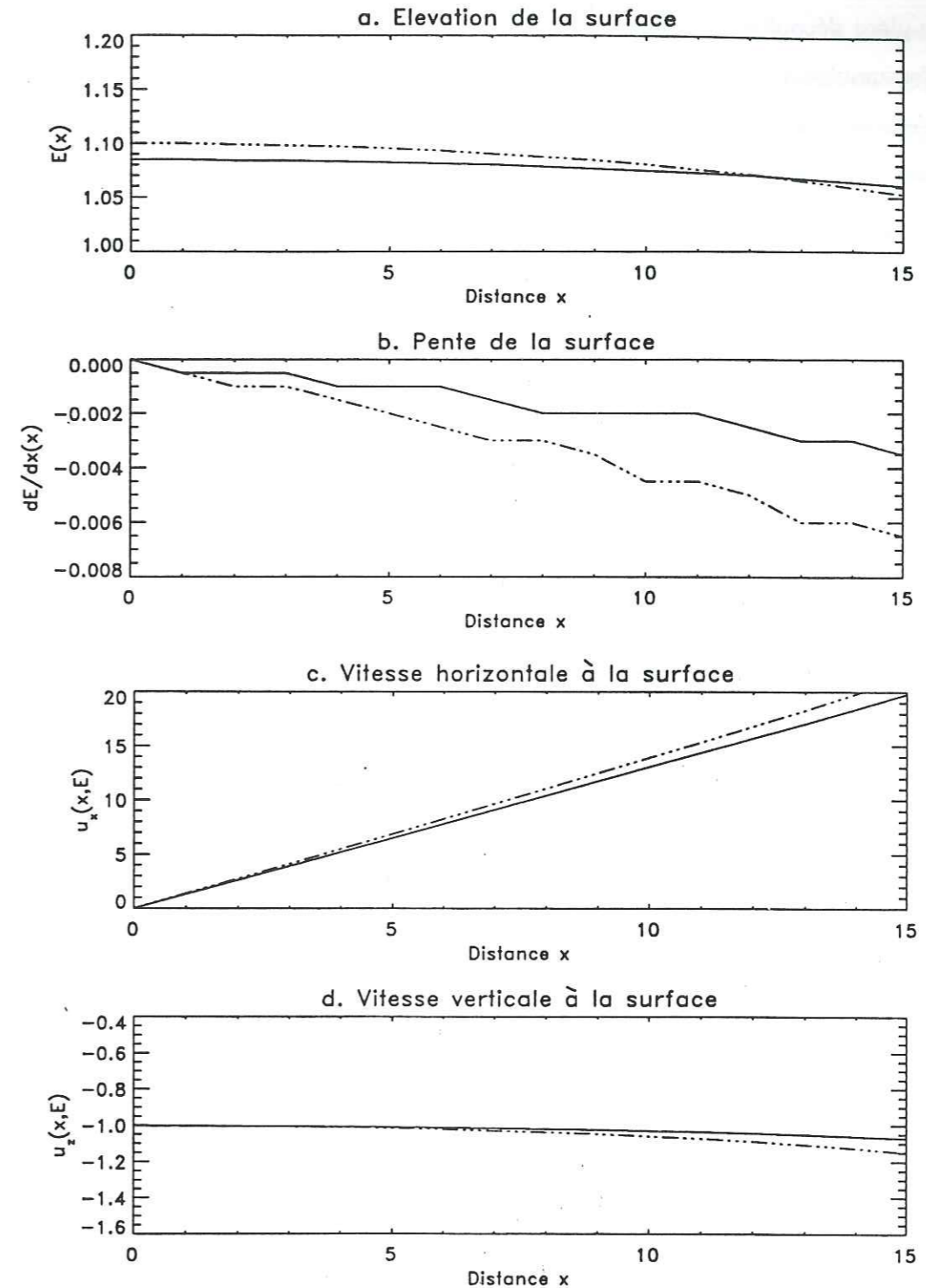


Fig. 4.9. (a) Elévation de la surface, (b) pente de la surface, (c) vitesse horizontale à la surface et (d) vitesse verticale à la surface en fonction de la distance au dôme dans le cas anisotrope (lignes continues) et isotrope (ligne en tirets-pointillés).

au dôme est toujours supérieure à celle obtenue dans le cas isotrope sur toute la profondeur de la calotte. La glace s'écoulant plus vite, la hauteur de la calotte au dôme en équilibre avec un même taux d'accumulation est moins élevée dans le cas anisotrope. La pente restant plus faible tout au long de la ligne de courant dans le cas anisotrope, les courbes représentant l'élévation de la surface dans le cas anisotrope et dans le cas isotrope se coupent en $x=12$. Pour $|x|>12$, l'épaisseur de la calotte est plus grande dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. Les vitesses dépendant essentiellement de l'élévation de la surface et de ses dérivées (cf. paragraphe 1 - 3.4), ces différences entre le cas isotrope et la cas anisotrope ont une très grande influence sur l'écoulement de la glace et en particulier sur la datation comme nous le verrons dans le paragraphe 4 - 2.2.e.

4 - 2.2.b Effets de l'anisotropie sur les vitesses

Contrairement au cas d'un écoulement à géométrie imposée, les vitesses en surface sont plus faibles dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope pour un taux d'accumulation donné. Mais cet effet n'a lieu qu'à la surface, l'écoulement étant, en moyenne sur l'épaisseur de glace, accéléré dans le cas anisotrope. La vitesse horizontale étant très étroitement liée à la pente de la surface (cf. paragraphe 1 - 3.4 sur la couche mince), celle-ci est plus faible dans le cas anisotrope car la pente de la surface est plus faible (figure 4.9.c). En $x=10$, la vitesse horizontale obtenue dans le cas anisotrope est inférieure de 1 c'est à dire de presque 10 % à celle obtenue dans le cas isotrope. La pente et la vitesse horizontale en surface étant plus faibles dans le cas anisotrope, l'équation d'évolution de la surface (1.12) impose que la valeur absolue de la vitesse verticale diminue. Ceci est visible sur la figure 4.9.d. Mais la valeur de la pente étant de l'ordre de $1.E-3$ et celle de la vitesse horizontale étant de 10, le deuxième terme de l'équation (1.12) est très faible. Dans l'état stationnaire, la vitesse verticale est donc de l'ordre de l'accumulation. En $x=10$, la vitesse verticale anisotrope n'est inférieure que de 3% à la vitesse isotrope. Cette différence est négligeable et ne peut être mesurée dans les calottes polaires. Il est intéressant de voir à partir de quelle profondeur la vitesse horizontale dans le cas anisotrope est supérieure à cette même vitesse dans le cas isotrope. Cela arrive à partir de $\tilde{z}=1/2$, c'est à dire dans la moitié inférieure de la calotte. Cette profondeur est à peu près indépendante de la distance au dôme. La

vitesse verticale dans le cas anisotrope devient encore plus rapidement supérieure à la vitesse verticale dans le cas isotrope: pour $|x|<5$, la vitesse verticale dans le cas anisotrope domine à partir de $\tilde{z}=0.9$, et pour $\tilde{z}=0.7$, elle est partout supérieure à la vitesse verticale dans le cas isotrope. On peut donc en conclure, en accord avec les résultats du paragraphe précédent, que l'accélération globale de l'écoulement (moyennée sur l'épaisseur de glace) domine et que la vitesse verticale dans le cas anisotrope est encore supérieure à sa valeur dans le cas isotrope, malgré une plus grande résistance à la compression dans le cas anisotrope.

Nous venons de voir que l'effet de l'anisotropie se répercute essentiellement sur les vitesses horizontales, ce qui se remarque aussi sur les profils de vitesse en fonction de la profondeur qui sont exactement les mêmes que ceux obtenus dans le cas d'un écoulement à géométrie imposée. Les conclusions du paragraphe précédent sont donc aussi valables ici. Cette similitude s'explique si l'on regarde l'expression de la vitesse horizontale à l'ordre 0 de la couche mince (1.49) qui peut aussi s'écrire:

$$U^{(0)}(X, Z) = -2\Gamma^{(0)} H^2 \int_1^\xi \frac{\xi}{M_{xzz}} d\xi \quad (4.8)$$

Il est important de remarquer que si les vitesses de surface isotropes et anisotropes différaient de plus de 50% dans le cas d'un écoulement à géométrie imposée, elles diffèrent de moins de 10% dans le cas d'un écoulement à taux d'accumulation imposé. Ceci confirme le fait qu'une partie des effets de l'anisotropie est absorbée par la forme de la surface libre. Ainsi, que l'on impose une géométrie ou un taux d'accumulation, les effets de l'anisotropie sur les vitesses sont qualitativement les mêmes, mais diffèrent d'un point de vue quantitatif car une partie d'entre eux se répercutent sur la surface libre.

4 - 2.2.c Effet de l'anisotropie sur les contraintes et les vitesses de déformation

De la même manière que pour les vitesses, les effets de l'anisotropie sur la répartition globale des vitesses de déformation et des contraintes sont qualitativement les mêmes que dans

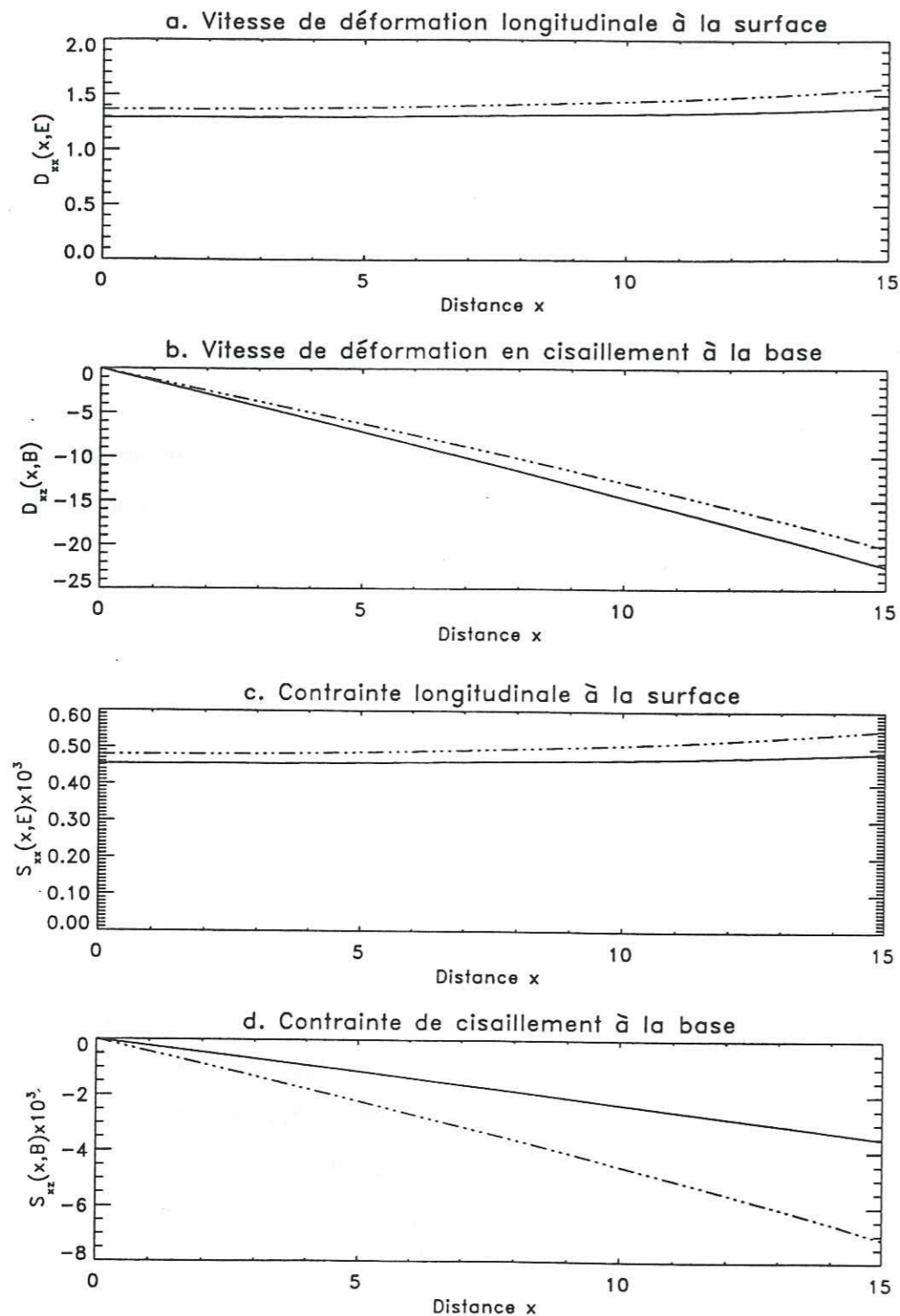


Fig. 4.10. (a) Vitesse de déformation longitudinale à la surface, (b) vitesse de déformation en cisaillement à la base, (c) contrainte longitudinale à la surface multipliée par 10^3 et (d) contrainte de cisaillement à la base multipliée par 10^3 , en fonction de la distance au dôme. Les lignes continues montrent les résultats de la simulation dans le cas anisotrope et celles en tirets-pointillés les résultats dans le cas isotrope.

le cas d'une géométrie imposée mais sont quantitativement plus faibles. Par contre, les profils des vitesses de déformation et des contraintes longitudinales à la surface sont différents. Ils sont plus réalistes dans le cas d'un taux d'accumulation imposé car, dans le cas précédent, ils étaient liés au choix arbitraire de la géométrie de la calotte. Deux différences apparaissent entre les contraintes longitudinales en surface obtenues avec un taux d'accumulation imposé (figure 4.10) et celles résultant des simulations avec une géométrie imposée. Premièrement, la contrainte longitudinale à la surface dans le cas anisotrope est moins forte que dans le cas isotrope, contrairement aux résultats du paragraphe précédent. Deuxièmement, cette contrainte à la surface augmente avec la distance au dôme aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope (figure 4.10.c). La contrainte longitudinale dans le cas anisotrope est inférieure d'à peu près 5% à celle obtenue dans le cas isotrope au dôme, cette valeur étant de 10% en $x=10$.

La diminution de la pente en surface dans le cas anisotrope a une influence directe sur la valeur de la contrainte de cisaillement à la base qui est alors plus faible dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope (cf. équation de la contrainte de cisaillement à l'ordre 0 (1.48)), contrairement à ce qu'affirment Schott Hvidberg et al. [1996]. Alors qu'au dôme la contrainte de cisaillement est nulle dans les cas anisotrope et isotrope, en $x=10$, la contrainte de cisaillement dans le cas anisotrope est à peu près 50% plus faible que celle correspondant à un comportement isotrope (figure 4.10.d). Cette valeur est à peu près constante, augmentant légèrement avec la distance au dôme, le long de la ligne de courant. On peut remarquer que, dans le cas anisotrope, la contrainte de cisaillement à la base est inférieure à la contrainte longitudinale à la surface dans le domaine $|x| < 2$, ce qui est vrai pour $|x| < 1.3$ dans le cas isotrope. Il est délicat de tirer des conclusions sur la possibilité de négliger une des composantes du tenseur des contraintes directement à partir des résultats sur les contraintes comme le fait Dahl-Jensen [1989b], car ce sont les gradients de ces contraintes qui interviennent dans les équations d'équilibre mécanique. Il sera par contre intéressant de voir dans quelle région autour du dôme la déformation est dominée par la déformation longitudinale.

La vitesse de déformation longitudinale à la surface, comme la contrainte longitudinale, est plus grande dans le cas isotrope (figure 4.10.a). Les viscosités en surface étant isotropes et donc égales dans le cas d'un comportement Newtonien, il est naturel que les contraintes et les

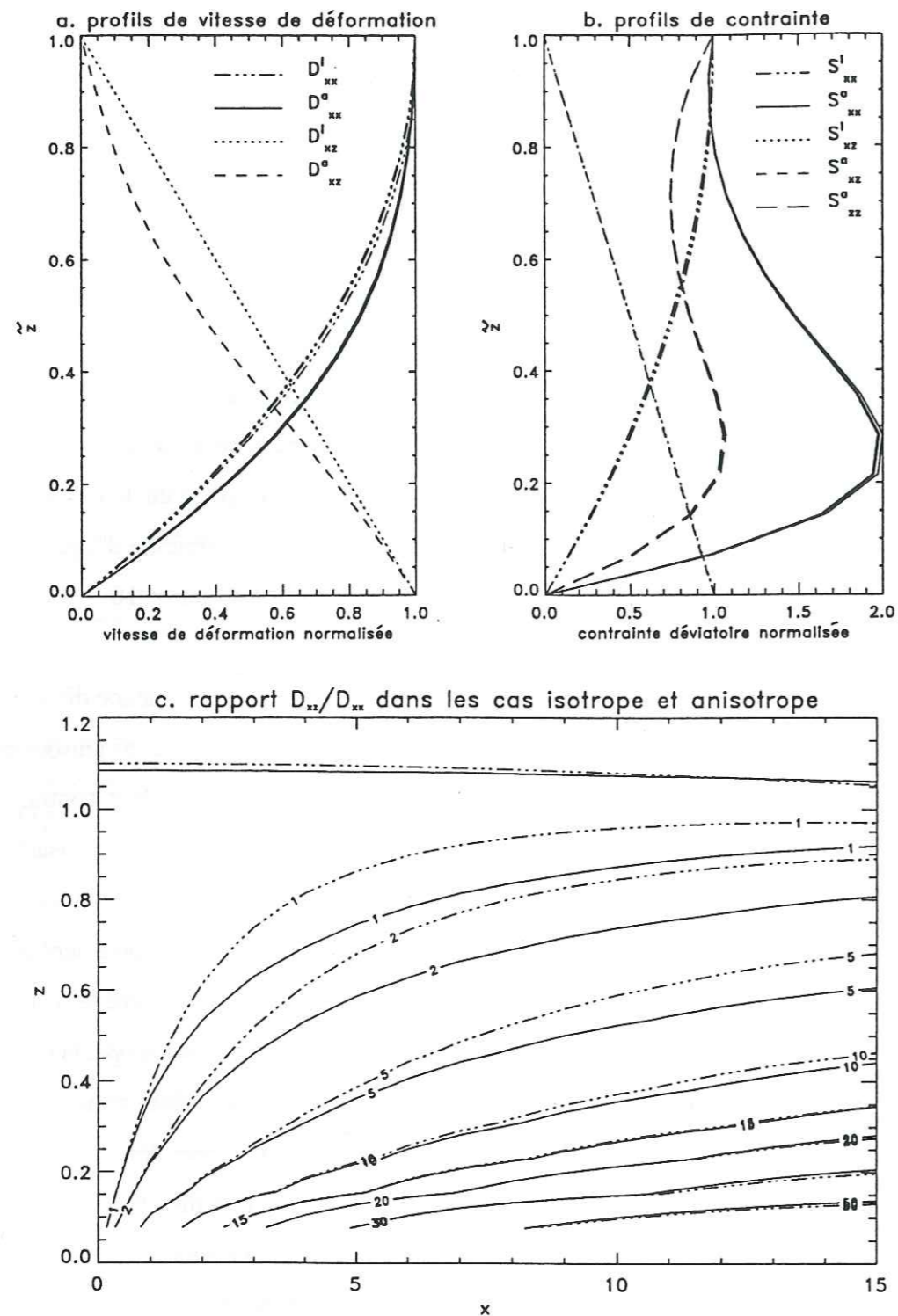


Fig. 4.11. Profils verticaux en $x=0$, $x=5$ et $x=10$ des (a) vitesses de déformation longitudinales et en cisaillement normalisées respectivement par leur valeur à la surface et à la base, (b) contraintes longitudinales et de cisaillement normalisées respectivement par leur valeur à la surface et à la base, en fonction de la profondeur normalisée. L'indice "i" représente le cas isotrope et l'indice "a" le cas anisotrope. En (c) sont représentées les isovaleurs du rapport de la vitesse de déformation en cisaillement sur la vitesse de déformation longitudinale.

déformations varient dans le même sens. Par contre, pour la vitesse de déformation en cisaillement à la base (figure 4.10.b), la viscosité anisotrope à la base est plus de 50% inférieure à la viscosité isotrope, les rapports entre les vitesses de déformation en cisaillement dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope sont donc inversés par rapport aux rapports des contraintes de cisaillement correspondantes. La vitesse de déformation en cisaillement dans le cas anisotrope est supérieure de $\sim 20\%$ à celle obtenue dans le cas isotrope en $x=4$, ce facteur décroissant jusqu'à $\sim 15\%$ en $x=10$. Ceci nous conduit à une conclusion similaire à celle obtenue dans le cas d'un écoulement à géométrie imposée : la région du dôme (que nous définissons comme celle où la vitesse de déformation est supérieure d'un ordre de grandeur à la vitesse de déformation longitudinale) est plus étendue dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. Dans le cas anisotrope elle est définie pour $|x| < 9$ et dans le cas isotrope pour $|x| < 10.5$.

La migration du dôme au cours du temps affectera donc plus un écoulement anisotrope qu'un écoulement isotrope au voisinage du dôme, et rendra ainsi plus difficile l'interprétation des données mesurées à cet endroit.

On peut remarquer que, dans le cas anisotrope, les profils verticaux des contraintes changent peu avec la distance au dôme contrairement aux simulations avec une géométrie imposée (cf. figure 4.11). Les profils verticaux de la contrainte de cisaillement (figure 4.11.b) sont indépendants de la distance au dôme (comme ceux de la vitesse de déformation correspondante) et se superposent exactement à la droite de pente -1. Ceci s'explique lorsque l'on compare ces résultats avec ceux de la couche mince (cf. chapitre 5) : nous verrons que, pour un socle plat, la contrainte de cisaillement calculée avec un modèle sans approximation sur les équations mécaniques est très proche de celle obtenue avec la formule d'ordre 0 de la couche mince. La contrainte de cisaillement à l'ordre 0 ne dépendant pas des composantes du tenseur des viscosités (cf. équation 1.48), les contraintes de cisaillement sont les mêmes dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope.

Les profils de vitesse de déformation longitudinale sont eux aussi peu dépendants de la distance au dôme (4.11.a). La vitesse de déformation longitudinale est plus uniformément répartie avec la profondeur dans le cas isotrope et est plus concentrée à la surface dans le cas

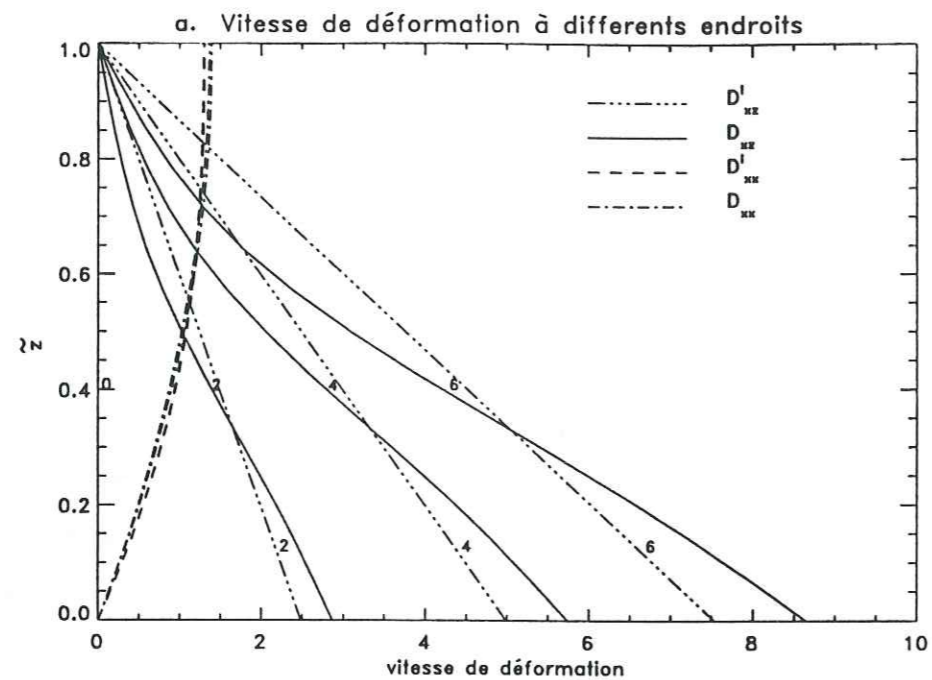


Fig. 4.12.a. Vitesses de déformation, en $x=0, 2, 4$, et $x=6$ en fonction de la profondeur normalisée. Les vitesses de déformation en cisaillement sont représentées dans le cas anisotrope (D_{xz}) (lignes continues) et dans le cas isotrope (D_{xz}^i) (lignes en tirets-pointillés). Les lignes en pointillés représentent les vitesses de déformation longitudinales au dôme et en $x=6$ dans le cas anisotrope (D_{xx}) et les lignes en tirets représentent les vitesses de déformation longitudinales au dôme et en $x=6$ dans le cas isotrope (D_{xx}^i).

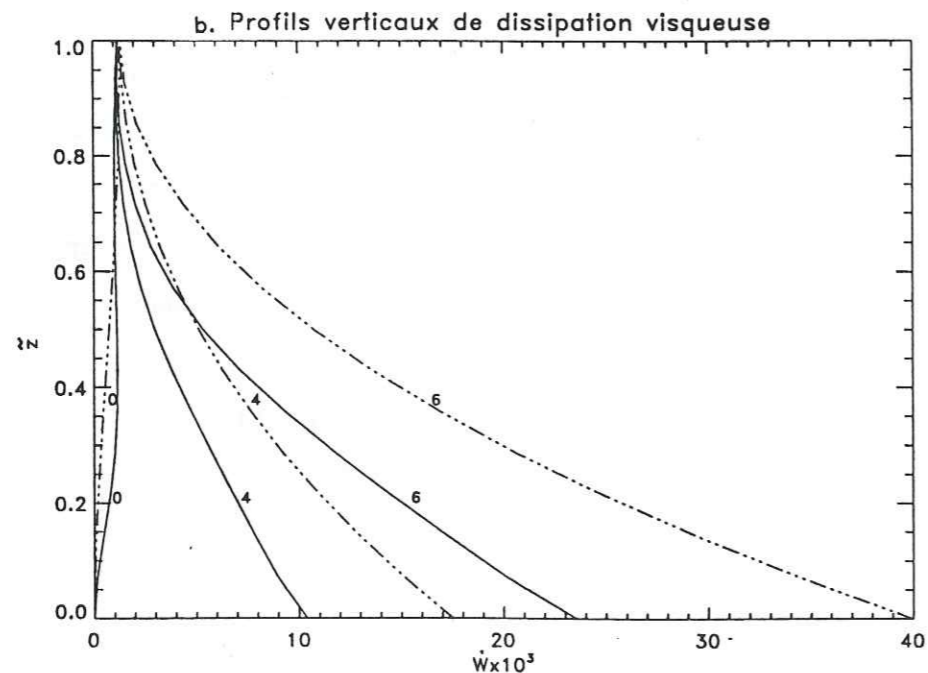


Fig. 4.12.b. Profils verticaux de la dissipation visqueuse, multipliée par 10^3 , en fonction de la profondeur normalisée au dôme (0), en $x=4$ (4) et en $x=6$ (6). Les lignes continues montrent les profils dans le cas anisotrope et les lignes en tirets-pointillés dans le cas isotrope.

anisotrope (4.11.a). Par contre, la vitesse de déformation en cisaillement est plus concentrée vers le fond dans le cas anisotrope. Le profil de cette vitesse de déformation présente même un point d'inflexion vers $z=0.2-0.3$. La répartition verticale des vitesses de déformation longitudinales et des vitesses de déformation en cisaillement étant différentes dans les cas isotrope et anisotrope, il est intéressant de comparer le rapport D_{xz}/D_{xx} dans ces deux cas. La figure 4.11.c montre que, sauf vers le fond de la calotte, la dominance locale de la vitesse de déformation en cisaillement est plus grande dans le cas isotrope. Cet effet est très accentué dans la partie supérieure de la calotte. Cela se voit sur la figure 4.12.a, où les courbes représentant les vitesses de déformation anisotropes en un x donné sont en dessous de celles correspondant au cas isotrope dans la partie supérieure de la calotte, alors que les vitesses de déformation longitudinales sont les mêmes. Cet effet n'avait pas lieu pour une géométrie imposée (cf. figure 4.5). Ceci semble, à première vue, contradictoire avec les résultats précédents concernant l'étendue de la région du dôme. En fait il faut se rappeler que l'essentiel de la déformation se fait vers le fond de la calotte (cf. figure 4.12.a), et c'est l'ordre de grandeur de la vitesse de déformation longitudinale et de celui de la vitesse de déformation en cisaillement en un x donné que nous comparons pour définir la région du dôme.

4 - 2.2.d Chaleur dissipée par déformation visqueuse

Contrairement au cas d'une géométrie imposée, la chaleur dissipée par déformation visqueuse dans le cas anisotrope est inférieure à celle dissipée dans le cas isotrope, excepté au dôme dans la partie inférieure de la calotte (figure 4.12.b). Les spéculations concernant l'effet de la température résultant des observations sur l'écoulement vont alors dans le même sens. En effet, l'accélération globale de l'écoulement augmente l'advection de glace froide vers le fond de la calotte et la diminution de la chaleur dissipée par déformation visqueuse rend la glace basale encore plus froide. Ces effets tendraient à diminuer la concentration de la vitesse de déformation en cisaillement au fond de la calotte. La résolution de l'équation de la chaleur diminuerait ainsi l'effet de l'anisotropie. Ces suggestions restent à vérifier en résolvant l'équation pour la température (1.8). Dans le cas où elles seraient vérifiées, elles iraient dans le même sens que les conclusions sur l'introduction de l'évolution de la surface libre: les effets de l'anisotropie seraient

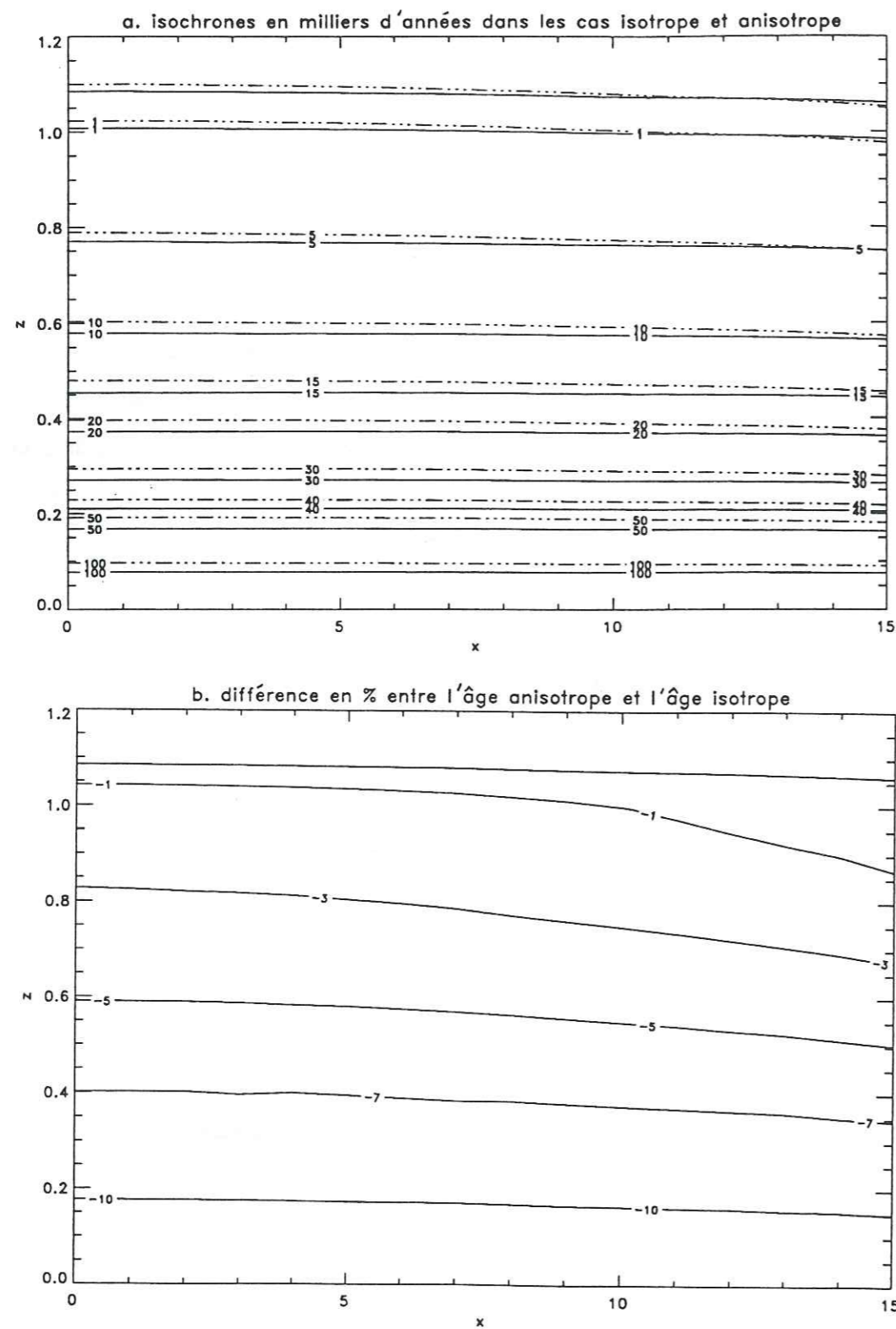


Fig. 4.13. (a) Isochrones en milliers d'années dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues), (b) différence en pourcentage entre l'âge calculé pour un écoulement anisotrope et celui calculé pour un écoulement isotrope. L'âge dans les couches profondes est plus jeune de 10% dans le cas anisotrope par rapport à l'âge correspondant au cas isotrope.

alors partagés entre la forme de la surface libre, le champ de température et les vitesses de déformation en cisaillement.

A la surface, au dôme, les chaleurs dissipées dans le cas isotrope et anisotrope sont du même ordre alors qu'au fond, en $x=4$, la chaleur dissipée dans le cas anisotrope est inférieure de 40% à celle obtenue dans le cas isotrope. Ainsi, la différence entre les valeurs des chaleurs dissipées respectivement dans les cas isotrope et anisotrope est moins importante que celle obtenue avec les simulations à géométrie imposée.

4 - 2.2.e Conclusion

Les résultats de ce paragraphe montrent que l'élévation de la surface d'une calotte polaire dépend significativement de la répartition des textures. Dans le cas anisotrope, la glace s'écoule plus facilement, ce qui a plusieurs conséquences:

1. Les effets de l'anisotropie sont en partie absorbés par la déformation de la surface libre qui est plus plate et par les vitesses de déformation en cisaillement plus grandes et plus concentrées près du lit rocheux que dans le cas isotrope.
2. L'écoulement est globalement accéléré, mais moins que dans le cas d'une géométrie imposée où les effets de l'anisotropie se répercutent uniquement sur le champ des vitesses de déformation.
3. La région du dôme où les contraintes longitudinales dominant est moins étendue dans le cas anisotrope: elle est réduite à $|x| < 9$ dans le cas anisotrope alors qu'elle est définie par $|x| < 10.5$ dans le cas isotrope. Cette différence entre le cas isotrope et anisotrope est plus petite que pour un écoulement à géométrie imposée.
4. La dissipation visqueuse est moins importante dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. L'accélération de l'écoulement augmentant l'advection de glace froide vers le fond,

associée à une diminution de la chaleur de déformation visqueuse donnerait une température plus froide à la base ce qui diminuerait l'effet de l'anisotropie.

L'accélération des vitesses et la distribution des vitesses de déformation modifient de manière conséquente la datation des carottes glaciaires qui constitue l'objectif principal de la modélisation de l'écoulement de la glace dans les calottes polaires. La figure (4.13.a) montre que les isochrones sont plus plates dans le cas anisotrope et que la glace à une hauteur donnée est plus jeune dans le cas anisotrope. Près du lit rocheux, l'âge de la glace dans le cas anisotrope est inférieur de plus de 10% à l'âge calculé dans le cas isotrope.

4 - 3 EFFET DES IRREGULARITES DU LIT ROCHEUX

Nous allons passer maintenant à un problème important qui est celui de l'écoulement de la glace sur un socle perturbé. Ce problème est particulièrement d'actualité car, à 30 km du futur forage EPICA à Dôme C (Antarctique), la topographie du socle passe de -600 m à +800 m par rapport au niveau de la mer, ce qui fait une variation du relief de près de 50% de l'épaisseur de glace sur 10 km (c'est à dire moins de 4 fois l'épaisseur de glace). Entre Dumont d'Urville et Dôme C, on peut aussi observer une variation de la topographie du socle égale à plus de 50% de l'épaisseur de glace sur moins de 10 km.

Les deux questions qui se posent alors sont d'une part de savoir si le comportement anisotrope de la glace amortit ou amplifie les effets des variations de la topographie du socle sur l'écoulement et sur la surface libre, et d'autre part si les résultats précédents qui concluaient à une accélération de l'écoulement dans le cas anisotrope sont encore valables. Pour étudier ces effets nous avons imposé un socle $B(x)$ ayant un profil sinusoïdal:

$$B = B_0 \cos \left[2\pi f \frac{x}{L} \right], \quad (4.8)$$

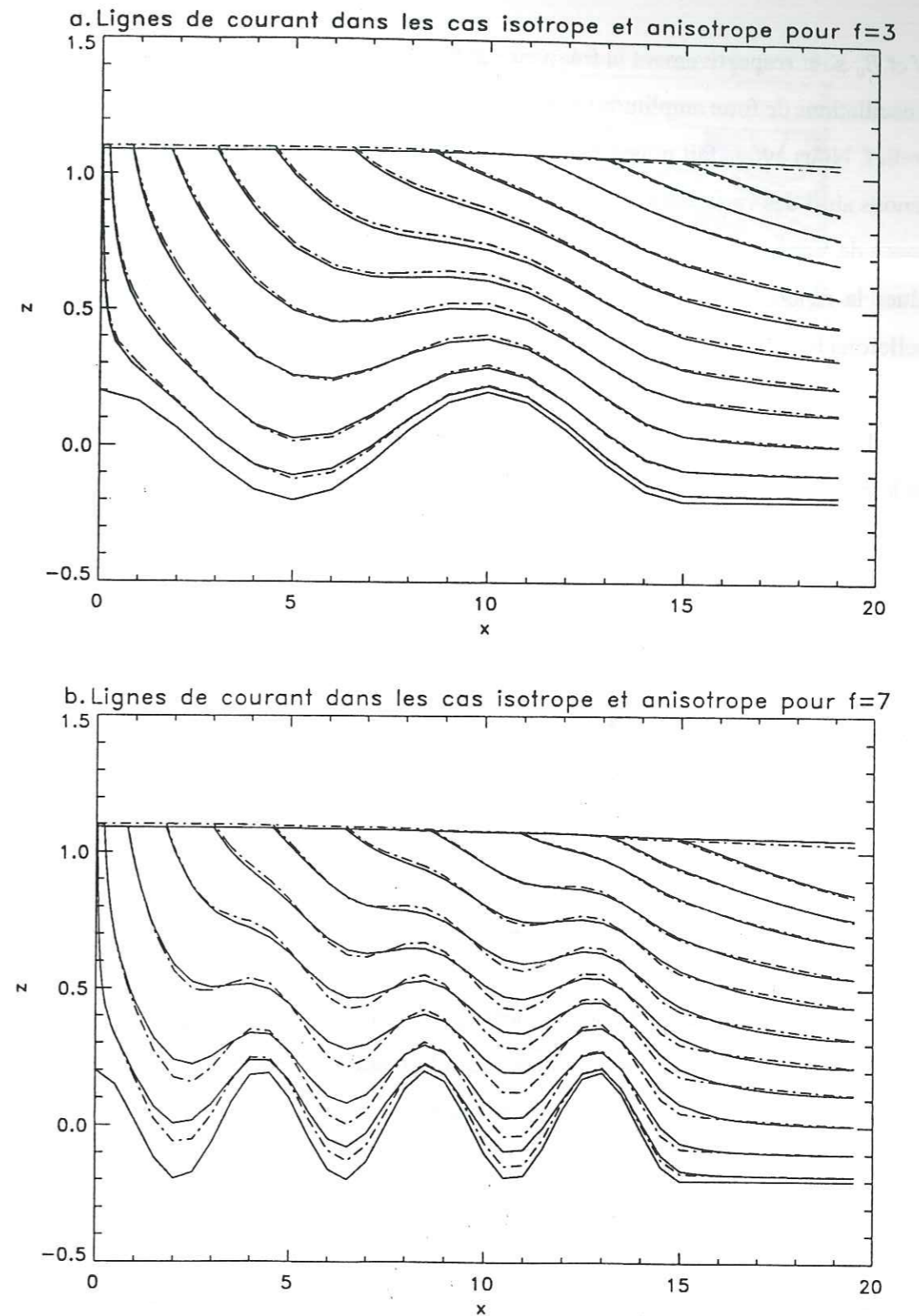


Fig. 4.14. Lignes de courant et élévation de la surface libre dans le cas anisotrope (lignes continues) et isotrope (lignes en tirets-pointillés) (a) pour $f=3$ et (b) pour $f=7$. La ligne du fond représente le socle; les ondulations du socle ont une amplitude de 0.2, une longueur d'onde de 10 pour $f=3$ et une longueur d'onde d'un peu plus de 4 pour $f=7$.

où f et B_0 sont respectivement la fréquence et l'amplitude des oscillations. Nous avons imposé des oscillations de forte amplitude ($B_0=0.2$) pour bien mettre en évidence les effets des variations du relief. Nous avons fait plusieurs tests avec des nombres d'ondes différents. Pour $f=3$, nous obtenons ainsi des variations de la topographie du socle de 40% de l'épaisseur de glace sur une distance de 5 épaisseurs et pour $f=7$, les mêmes variations sur un peu plus de 2 épaisseurs. Pour évaluer la réponse de l'écoulement aux irrégularités du socle nous utiliserons ce que nous appellerons la fonction de transfert T définie $T=E(x)/B(x)$.

Les figures 4.14.a et 4.14.b représentent la géométrie de la calotte et les lignes de courant dans le cas isotrope (tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues), respectivement pour $f=3$ et pour $f=7$. Ces figures montrent que l'écoulement est moins sensible aux effets du socle dans le cas anisotrope. La fonction de transfert T des oscillations du socle vers la surface a une amplitude plus petite dans le cas anisotrope; dans ce cas les champs sont "lissés" dans la direction horizontale par rapport au cas isotrope, comme nous l'avions remarqué dans le cas d'un socle plat. On observe un déphasage de la réponse aux oscillations du socle quand on passe aux lignes de courant plus superficielles (figure 4.14). Cet effet est plus marqué pour $f=3$ que pour $f=7$. Tout se passe comme si la particule passant près du fond transmettait l'information concernant la forme du socle avec un temps fini à ses voisines; en conséquence, la réponse aux ondulations du socle se fait avec un certain retard sur une ligne de courant située un peu au-dessus du socle.

Les isovaleurs des vitesses de déformation en cisaillement (figures 4.15.c et 4.15.d) montrent que dans le cas isotrope la vitesse de déformation en cisaillement est partout maximum au fond de la calotte alors que dans le cas anisotrope, elle est maximum en $\tilde{z} \sim 0.2$ au-dessus des trous. Cet effet est amplifié dans les simulations avec $f=7$ à cause des pentes plus fortes du socle. On voit par exemple que, dans le trou situé en $x \sim 6.5$, la vitesse de déformation en cisaillement au fond est égale à 1 alors qu'en $\tilde{z} \sim 0.2$ elle est 5 fois plus grande. Dans le cas anisotrope, la couche de glace qui se trouve en contact avec la paroi a tendance à stagner, et se déforme moins rapidement qu'une couche de glace qui va se trouver au-dessus d'elle. Ceci est dû au fait que les lignes de courant s'enfoncent moins dans les trous dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope (cf. figure 4.14). Ainsi, dans le cas anisotrope, il y a une sorte de couche limite au fond qui transmet la condition de la vitesse nulle un peu plus haut. Tout se passe donc comme si le socle

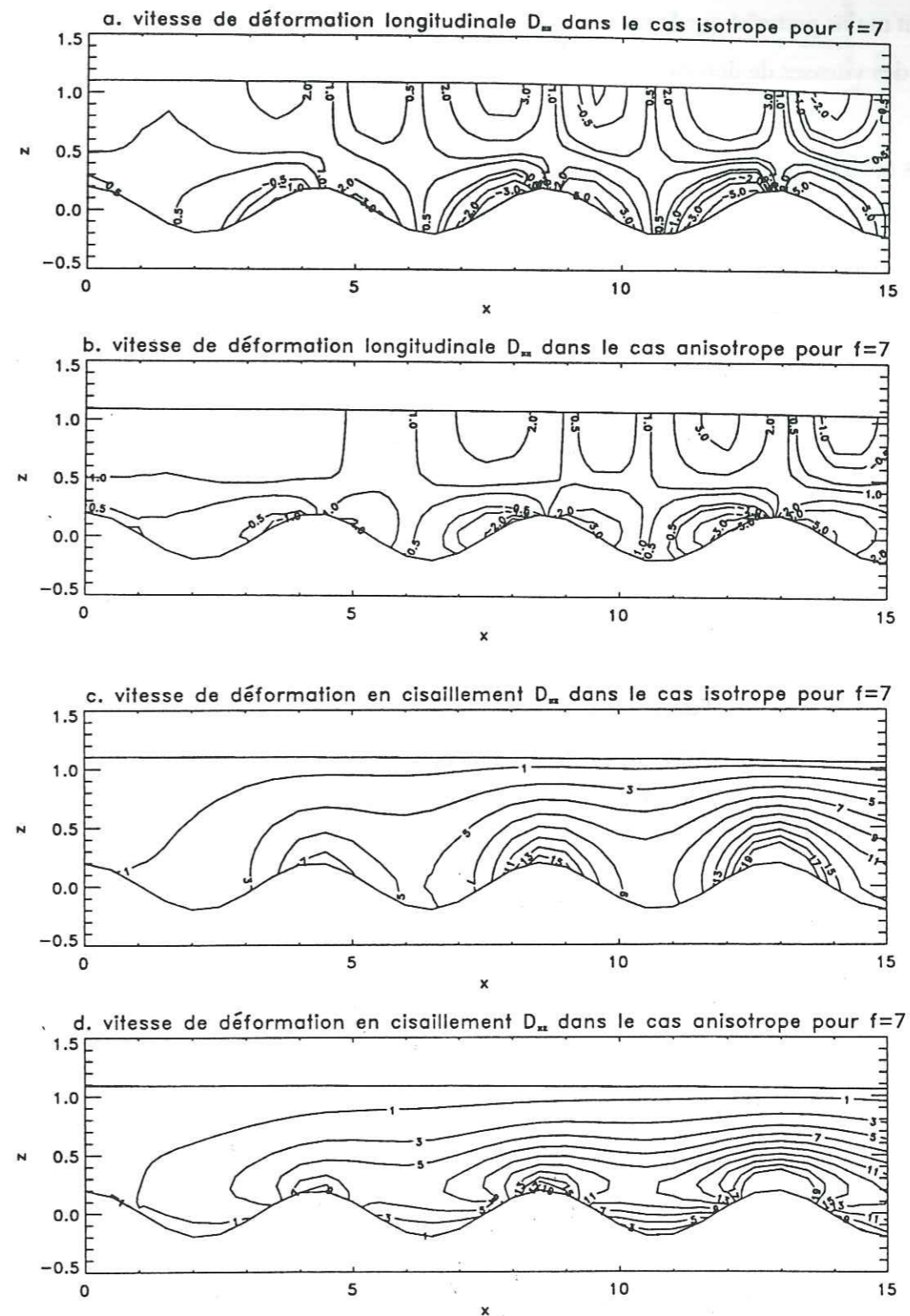


Fig. 4.15. Isovaleurs de la vitesse de déformation longitudinale D_{xx} (a) dans le cas isotrope et (b) dans le cas anisotrope; isovaleurs de la vitesse de déformation en cisaillement D_{xz} (c) dans le cas isotrope et (d) dans le cas anisotrope. Les résultats sont montrés pour un socle sinusoïdal de nombre d'onde $f=7$.

effectif était moins perturbé que le socle réel. Cet effet se voit aussi, d'une façon atténuée, sur les isovaleurs des vitesses de déformation longitudinales (figures 4.15.a et b).

Ces caractéristiques se retrouvent sur l'élévation de la surface ainsi que sur la pente, la distribution des vitesses, des contraintes, et des vitesses de déformation. Nous développerons plus en détail dans la suite de ce paragraphe la comparaison entre les différents champs calculés à partir du modèle isotrope et du modèle anisotrope.

4 - 3.1 "Lissage" des champs en x dans le cas anisotrope

4 - 3.1.a Elévation et pente de la surface

Comme dans le cas d'un socle plat, la pente de la surface est plus faible dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope (figure 4.16.a, b et e, f). Les oscillations du socle se reflètent sur l'élévation de la surface mais elles sont énormément amorties dans les deux cas. Le glacier filtre les aspérités du socle. Le filtre est d'autant plus fort qu'on utilise une loi de comportement anisotrope. L'élévation de la surface au dôme est légèrement supérieure à celle obtenue dans le cas d'un socle plat. L'épaisseur de glace est donc de 20 % plus faible, aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. De même au-dessus des trous l'épaisseur de glace est ~20% plus grande que dans le cas plat. L'ordre de grandeur de l'élévation de la surface semble donc dépendre grossièrement du socle moyen.

Dans les simulations avec $f=3$, on remarque un léger déphasage des ondulations de la pente de la surface par rapport à celles du socle. En effet si l'altitude maximale est atteinte pour $x=10$ pour le profil du socle, la courbe représentant la pente de la surface présente un minimum plutôt pour $x=10.7$. Ce déphasage est le même dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope. La fonction de transfert des oscillations du socle vers la surface atteindra son maximum pour la même longueur d'onde dans les cas isotrope et anisotrope. Avec $f=7$ la pente de la surface semble être en phase avec les oscillations du socle. Par contre l'ondulation de la pente dans le cas

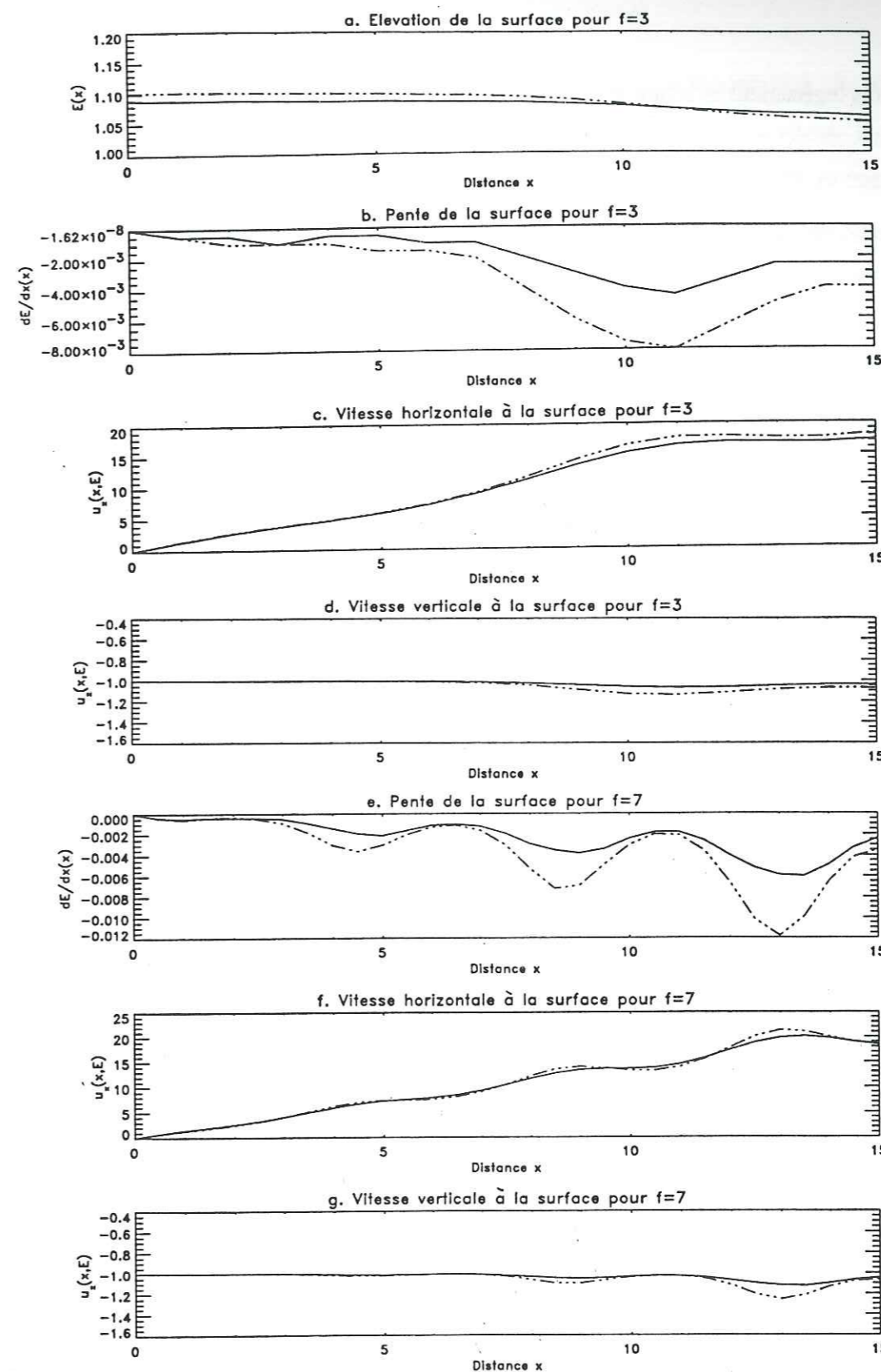


Fig. 4.16. (a) Elévation de la surface pour $f=3$, pente de la surface (b) pour $f=3$ et (e) pour $f=7$, vitesse horizontale à la surface (c) pour $f=3$ et (f) pour $f=7$, vitesse verticale à la surface (d) pour $f=3$ et (g) pour $f=7$ en fonction de la distance au dôme. Les lignes continues représentent les résultats dans le cas anisotrope et celles en tirets-pointillés dans le cas isotrope.

anisotrope est très légèrement en retard sur l'ondulation de la pente obtenue dans le cas isotrope.

4 - 3.1.b Vitesses en surface

Les vitesses horizontales et verticales à la surface reflètent aussi la plus grande sensibilité au relief du socle dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope (figure 4.16.c, d et g, e). Ainsi, la vitesse horizontale dans le cas isotrope diminue plus vite sur une pente descendante et augmente plus vite au dessus d'une pente ascendante que la vitesse horizontale dans le cas anisotrope. Il en est de même pour la vitesse verticale qui augmente plus dans le cas isotrope au-dessus d'une pente ascendante que dans le cas anisotrope. Quand l'épaisseur du glacier diminue, la vitesse horizontale doit augmenter pour conserver le flux de masse. Si le débit horizontal est plus grand, il faut que l'apport vertical le soit aussi pour assurer l'état stationnaire: la vitesse verticale augmente alors elle aussi. Dans les simulations avec $f=3$, on peut remarquer que les vitesses horizontales isotrope et anisotrope sont les mêmes jusqu'à $x \approx 7$ et s'éloignent pour $7 \leq |x| \leq 11$, pour se rapprocher ensuite de nouveau. La figure 4.9 montre que dans le cas d'un socle plat, le rapport entre les vitesses horizontales isotrope et anisotrope est à peu près constant avec la distance au dôme, la vitesse isotrope étant plus grande. Comme la vitesse horizontale dans le cas isotrope à la surface diminue plus vite au-dessus d'un trou que la vitesse anisotrope, la vitesse isotrope va tendre à se rapprocher de cette dernière et inversement au dessus des bosses où l'écart entre les deux vitesses va augmenter. Les résultats sont équivalents en ce qui concerne la vitesse verticale à la surface. Dans ce cas, on peut conclure qu'au-dessus d'un trou les vitesses de surface isotropes et anisotropes sont plus proches qu'au dessus d'une bosse. Cette conclusion n'est pas valable sur toute la profondeur comme nous le verrons sur les profils verticaux des vitesses (figure 4.18).

4 - 3.1.c Contrainte et vitesse de déformation en cisaillement à la base et longitudinale à la surface

Les contraintes et vitesses de déformation longitudinales en surface ainsi que la contrainte

de cisaillement à la base sont aussi moins sensibles à la topographie du socle dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope (figures 4.17.a, c et d). Seule la vitesse de déformation en cisaillement varie plus dans le cas anisotrope (figure 4.17.b). Cela est dû au fait que la viscosité de cisaillement anisotrope au fond est beaucoup plus petite que dans le cas isotrope et amplifie donc considérablement les variations observées sur la contrainte de cisaillement anisotrope. En $x=10$, la vitesse de déformation en cisaillement anisotrope est supérieure de 25% à celle observée dans le cas isotrope. Ce facteur est beaucoup plus grand que celui obtenu en $x=10$ pour un socle plat (~15%). De plus, les vitesses de déformation en cisaillement obtenues sont de l'ordre de 20 alors qu'elles étaient de l'ordre de 15 dans le cas d'un socle plat. On observe donc des vitesses de déformation en cisaillement plus grandes sur la bosse ($x=10$) et moins grandes dans les trous ($x=5$) dans le cas anisotrope.

La figure 4.17.c montre que les contraintes longitudinales dans le cas isotrope et anisotrope sont à peu près les mêmes pour $x \leq 6$. Cela est dû à la forme des vitesses horizontales à la surface. Pour $6 \leq x \leq 8.5$, les deux contraintes longitudinales augmentent pour rediminuer jusqu'à une valeur inférieure ou égale à zéro en $x=12$. En $x=8$, la contrainte longitudinale et la vitesse de déformation correspondante dans le cas anisotrope sont respectivement inférieures de 15% à celles obtenues dans le cas isotrope.

La pente étant très faible et presque constante dans le cas anisotrope jusqu'à $x=6$, la contrainte de cisaillement correspondante au fond est elle aussi très faible (figure 4.17.d), de l'ordre de $5.E-4$, c'est à dire la moitié de celle obtenue dans le cas d'un socle plat en $x=5$ (figure 4.10.d). La contrainte de cisaillement au fond dans le cas isotrope varie aussi plus lentement que dans le cas d'un socle plat jusqu'à $x=6$. Les courbes représentant les contraintes de cisaillement au fond (figure 4.17.d) sont similaires à celles représentant les pentes en surface dans les cas isotrope et anisotrope (figure 4.16.b). On peut remarquer que le rapport entre la contrainte de cisaillement dans le cas isotrope et dans le cas anisotrope dépend du relief, contrairement au cas d'un socle plat où ce rapport reste à peu près constant le long de la ligne de courant.

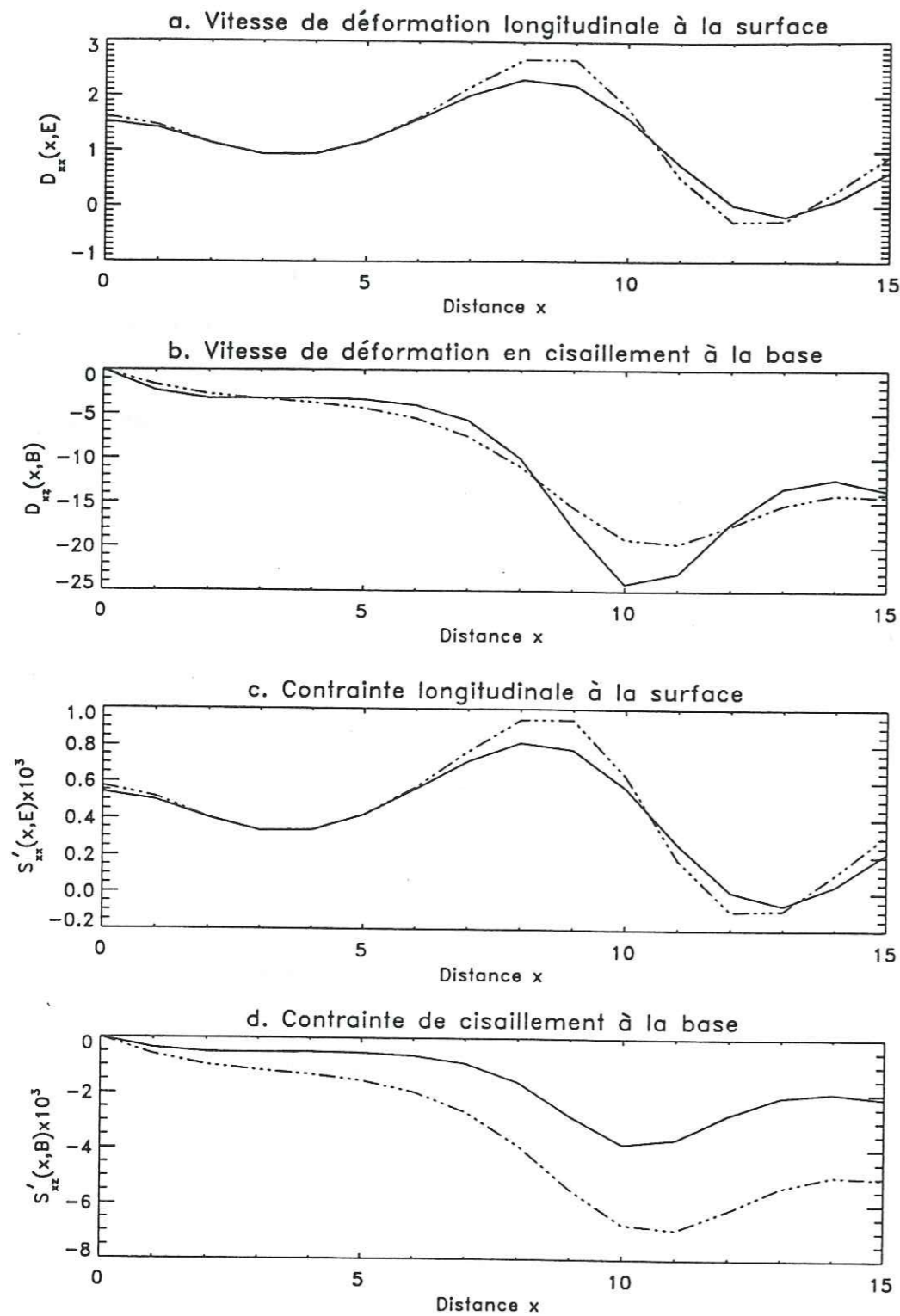


Fig. 4.17. (a) Vitesse de déformation longitudinale à la surface, (b) vitesse de déformation en cisaillement à la base, (c) contrainte longitudinale à la surface multipliée par 10^3 et (d) contrainte de cisaillement à la base multipliée par 10^3 , en fonction de la distance au dôme.

4 - 3.2 Effet de l'anisotropie sur les champs au-dessus des bosses et des trous

On trouve que l'accélération observée dans le cas d'un socle plat s'arrête au sommet des bosses et que la glace dans les trous est plus stagnante dans le cas anisotrope. Dans les trous les vitesses de déformation en cisaillement sont moins concentrées au fond que juste au-dessus. Cet effet est observable sur les profils verticaux des vitesses.

4 - 3.2.a Profils verticaux des vitesses

Les profils des vitesses en fonction de la profondeur varient évidemment en fonction de la distance au dôme contrairement au cas d'un socle plat. Il est alors intéressant de comparer les profils verticaux des vitesses non-normalisées à leur valeur à la surface. Nous avons représenté, pour $f=3$, ces profils au dôme ($x=0$) ou à côté ($x=1$), dans le trou ($x=5$) et sur la bosse ($x=10$) respectivement pour la vitesse horizontale (figures 4.18.a', b' et c') et pour la vitesse verticale (figure 4.18.d', e' et f').

Le rapport entre les profils isotrope et anisotrope varient avec le relief. Nous avons représenté en ces points (1, 5 et 10) les profils de la vitesse horizontale normalisée à la vitesse en surface (figure 4.18.a, b et c) dans le cas du socle sinusoïdal et dans le cas du socle plat. Cette figure met en évidence le fait que les profils ressemblant le plus à ceux obtenus avec un socle plat sont ceux qui se trouvent au voisinage des bosses (en $x=1$ et $x=10$). Sur les profils de vitesse horizontale normalisés (figures 4.18.a, b et c) on peut remarquer que les effets du relief sont plus marqués dans le cas anisotrope, contrairement à ce qui avait été observé sur les vitesses en surface et sur la pente de la surface. En effet, la courbe représentant la vitesse horizontale dans le cas isotrope se superpose à peu près à celle obtenue dans le cas plat aussi bien pour $x=1, 5$ ou 10 . Le profil anisotrope a une forme complètement différente de celle obtenue dans le cas plat dans le trou et présente un point d'inflexion vers $\bar{z} \sim 0.2$ lié à la couche de glace stagnante dans le trou. La vitesse horizontale reste donc plus longtemps proche de zéro dans les trous.

Comme pour la vitesse horizontale, les profils des vitesses verticales se rapprochent de ceux observés dans le cas du socle plat au dessus des bosses du socle même si, au dôme et en $x=10$, ces profils ne sont pas exactement semblables. Mais d'une manière générale l'anisotropie a moins d'effet sur les vitesses verticales que sur les vitesses horizontales. Cela est encore plus visible dans le trou ($x=5$) où les vitesses verticales dans les cas isotrope et anisotrope sont quasiment identiques (figure 4.18.e). Il faut noter que pour $6 \leq x \leq 9$, la vitesse verticale change de signe au fond aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope.

4 - 3.2.b Profils verticaux et isovalues des contraintes et vitesses de déformation

La contrainte de cisaillement est plus faible dans de cas anisotrope que dans le cas isotrope sur toute la profondeur (figure 4.20.c et d). Le profil vertical de la contrainte de cisaillement dans le cas isotrope est pratiquement linéaire donc très proche de l'ordre 0 de l'approximation de la couche mince. Sa courbure varie peu avec le relief, ce qui n'est pas le cas dans la situation anisotrope (figures 4.20. a,b et c). Nous verrons, dans le chapitre 5, que les résultats fournis par l'ordre 0 de la couche mince sont moins proches des résultats que nous décrivons ici dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope, pour des importantes variations du relief du socle.

Dans le cas anisotrope, la vitesse de déformation en cisaillement dans la partie supérieure de la calotte est toujours plus faible que dans le cas isotrope (figures 4.19.a, b et c). Au-dessus des bosses, elle devient plus grande dans le cas anisotrope dans le dernier quart de la profondeur ($\tilde{z} < 0.2$) tandis qu'au dessus du trou, la vitesse de déformation anisotrope devient supérieure à la vitesse de déformation isotrope pour $0.1 < \tilde{z} < 0.5$ puis devient inférieure en-dessous. La déformation en cisaillement semble être limitée au fond par la proximité du socle et peut donc mieux se développer au-dessus (vers $\tilde{z} \sim 0.2$). Cet effet serait plus visible dans le cas anisotrope où les vitesses de déformation sont significativement plus grandes.

Au voisinage des bosses et des trous, où la pente du socle est presque nulle, on observe, comme dans l'écoulement sur un socle plat, un maximum vers $\tilde{z} \sim 0.2$ pour les profils de la

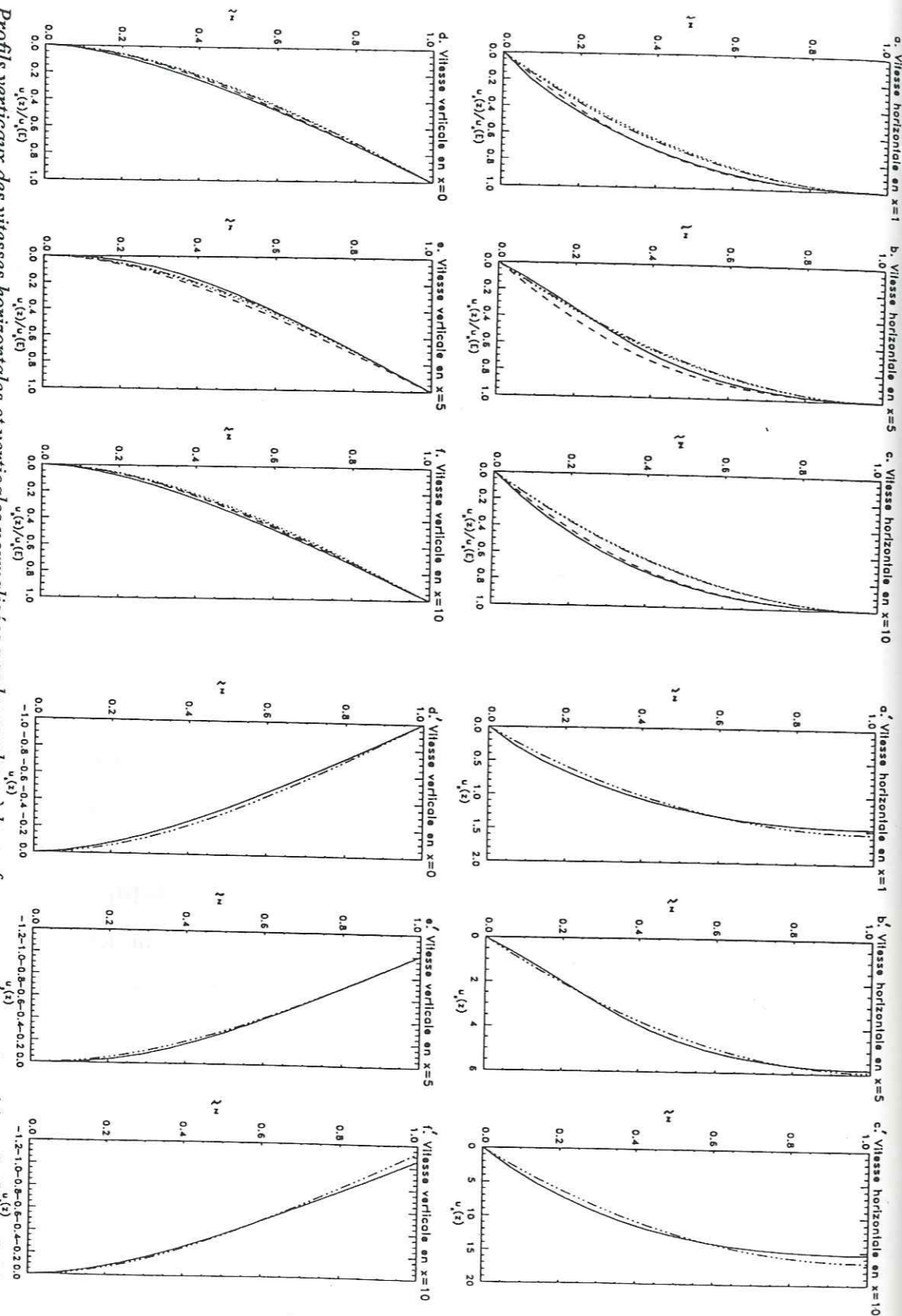


Fig. 4.18. Profils verticaux des vitesses horizontales et verticales normalisées par leur valeur à la surface respectivement en (a) $x=1$, (b) $x=5$ et (c) $x=10$, profils verticaux des vitesses verticales en (d) $x=0$, (e) $x=5$ et (f) $x=10$, les profils des vitesses dans le cas du socle plat sont aussi représentés sur chaque figure dans les cas isotrope (lignes en tirets) et anisotrope (lignes en pointillés); profils verticaux des vitesses horizontales en (a) $x=1$, (b) $x=5$ et (c) $x=10$, profils verticaux des vitesses verticales en (d) $x=0$, (e) $x=5$ et (f) $x=10$. Les résultats sont représentés pour $f=3$, les lignes continues correspondent au cas anisotrope et les lignes en tirets-pointillés au cas isotrope.

contrainte longitudinale dans le cas anisotrope, dû à la nécessité de satisfaire la condition de non glissement à la base (figures 4.19.a, b et c). Les profils de contrainte longitudinale dans le cas isotrope ont une forme similaire tout au long de la ligne d'écoulement. Par contre, les gradients longitudinaux de la contrainte longitudinale anisotrope dans le fond de la calotte sont beaucoup plus grands dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope (figures 4.22.a et b) et atteignent des valeurs supérieures à la pente de la surface. Par exemple en $x=5$, le gradient horizontal de la contrainte longitudinale à la base est égal à $8E-4$ et la pente de la surface à $5E-4$ dans le cas anisotrope alors que dans le cas isotrope ce gradient vaut $1.4E-4$ et la pente de la surface $1.5E-3$. Dans le cas anisotrope, le gradient horizontal de la contrainte longitudinale n'est alors plus négligeable comparé au gradient horizontal de pression dans la première équation d'équilibre mécanique (1.6.a). L'ordre 0 de la couche mince (1.41.b)₁ ne fournit donc plus une bonne approximation de l'écoulement à cet endroit. C'est ce que nous vérifierons dans le chapitre 5.

La vitesse de déformation longitudinale au fond prend des valeurs négatives, comme la contrainte correspondante, le long des pentes positives du socle (cf. figure 4.15.a et b). L'écoulement est bloqué par le socle, provoquant une compression longitudinale à son voisinage aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. Ce changement de signe des déformations longitudinales a lieu vers une profondeur $\bar{z} \sim 0.2$. Les figures 4.15.a et 4.15.b montrent que généralement, la déformation longitudinale à la surface est de signe opposé de la déformation longitudinale au fond pour la même valeur de x . Il faut noter que la déformation longitudinale au fond n'est pas exactement nulle sur les bosses et dans les trous car c'est la dérivée de u_x le long du socle et non selon x qui est nulle.

Sur la figure (4.15), on voit que les vitesses de déformation en cisaillement au fond sont plus faibles dans les trous ($x=5$) dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope et elles ne sont plus que 2 à 3 fois supérieures aux vitesses de déformation longitudinales correspondantes. Par contre, sur la bosse ($x=10$), la vitesse de déformation en cisaillement dans le cas anisotrope est plus grande au fond que dans le cas isotrope et la vitesse de déformation longitudinale à la surface est plus petite.

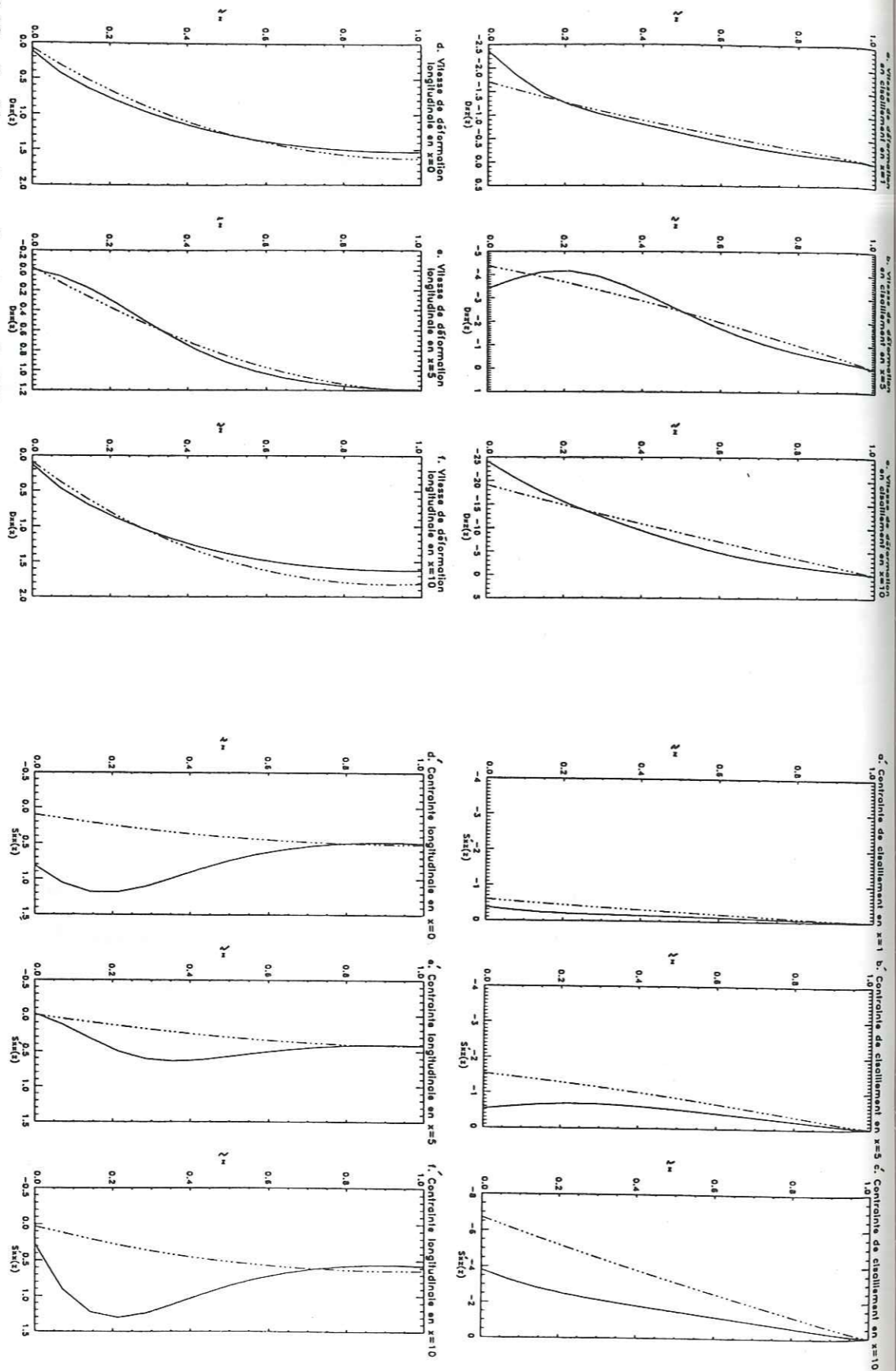


Fig. 4.19. Profils verticaux des vitesses de déformation en cisaillement et longitudinales respectivement en (a) $x=1$, (b) $x=5$, (c) $x=10$ et en (d) $x=0$, (e) $x=5$ et (f) $x=10$. Les résultats sont représentés pour $f=3$, les lignes continues correspondent au cas anisotrope et les lignes en tirets-pointillés au cas isotrope.

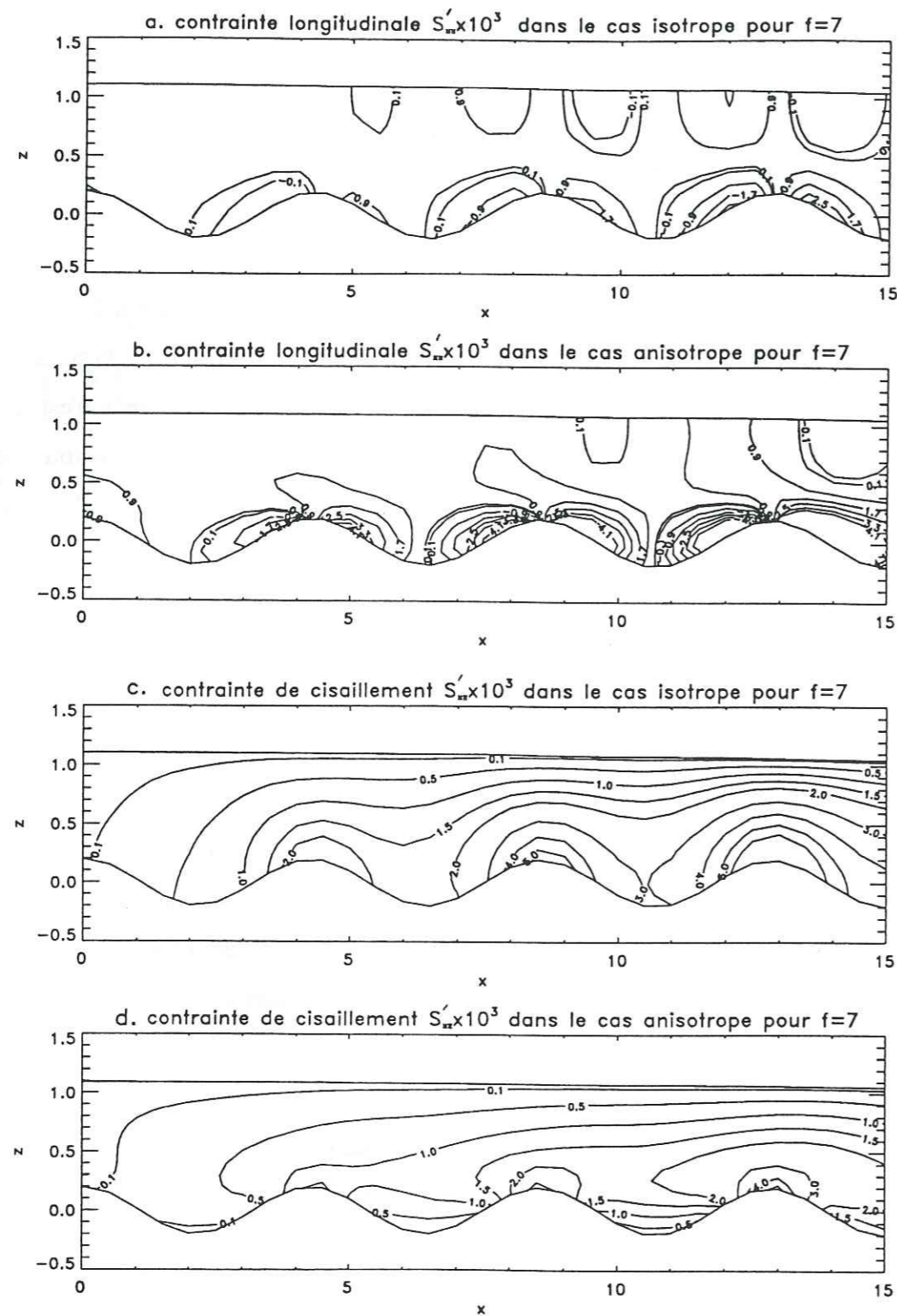


Fig. 4.20. Isovaleurs de la contrainte longitudinale S'_{xx} multipliée par 10^3 (a) dans le cas isotrope et (b) dans le cas anisotrope; isovaleurs de la contrainte de cisaillement S'_{xz} multipliée par 10^3 (c) dans le cas isotrope et (d) dans le cas anisotrope. Les résultats sont montrés pour un socle sinusoïdal de nombre d'onde $f=7$.

4 - 3.2.c Chaleur dissipée par déformation visqueuse

On retrouve que, dans le cas d'un taux d'accumulation imposé, la chaleur dissipée par déformation visqueuse est plus petite dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope (figure 4.21). Cet écart est encore plus marqué dans les trous: par exemple, pour $x=6$, la chaleur dissipée est inférieure de 72% dans le cas anisotrope à celle calculée dans le cas isotrope. La source de chaleur pour la température sera donc beaucoup plus petite dans le cas anisotrope dans les trous. Les mêmes conclusions que dans le cas plat s'appliquent à l'écoulement au-dessus des bosses. Par contre, dans les trous, l'écoulement est décéléré. Il y aura donc moins d'advection de glace froide dans les trous. On peut alors conclure que, pour $\bar{z} > 0.2$, le calcul de la température risque de diminuer l'effet de l'anisotropie, et qu'en-dessous de cette valeur de \bar{z} une sorte de couche limite pour la température apparaîtra.

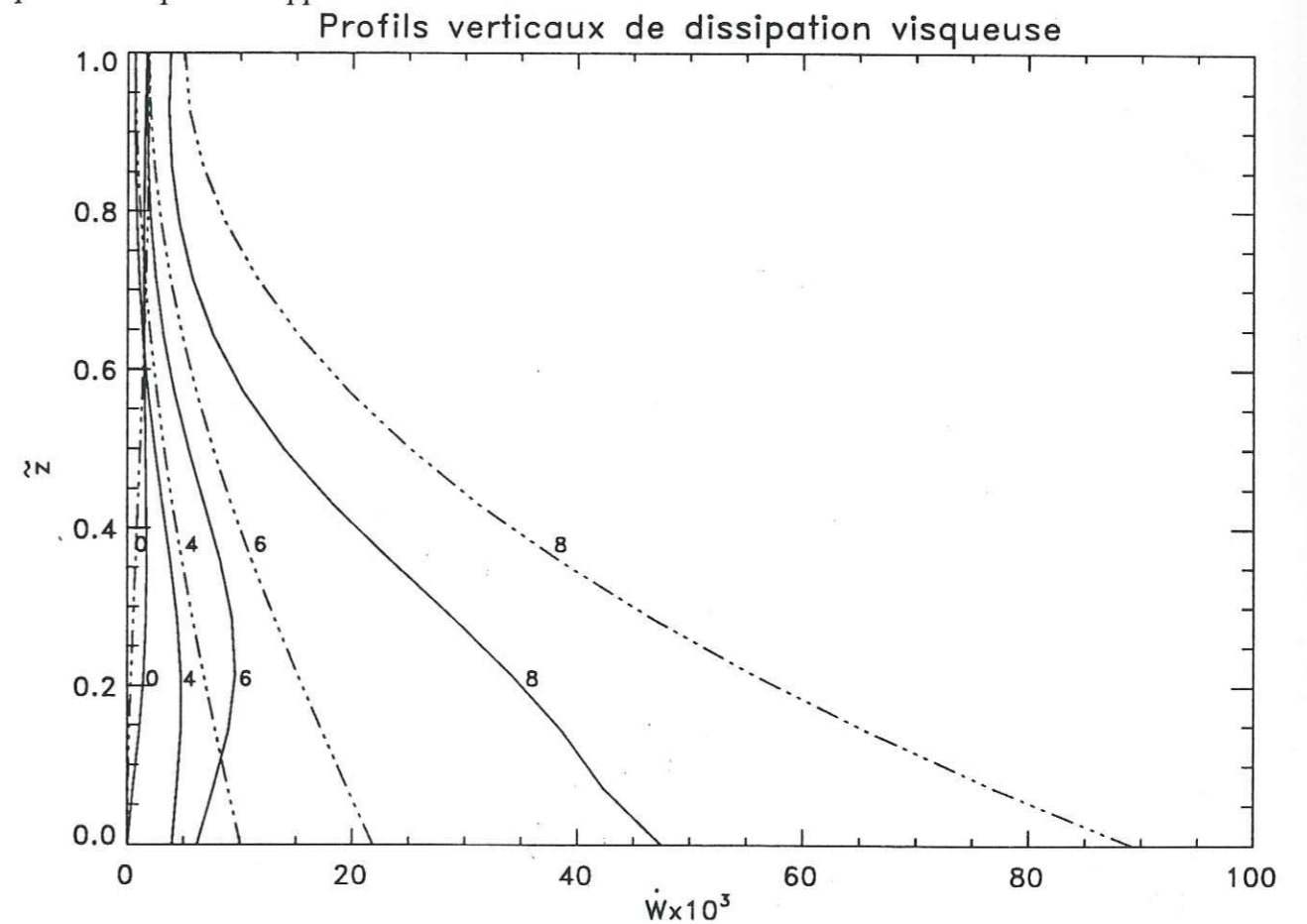


Fig. 4.21. Profils verticaux de la chaleur dissipée par déformation visqueuse, multipliée par 10^3 , en fonction de la profondeur normalisée au dôme (0), en $x=4$ (4), en $x=6$ (6) et en $x=8$ (8). Les lignes continues montrent les profils dans le cas anisotrope et les lignes en tirets-pointillés dans le cas isotrope.

4 - 3.3 Conclusion

La prise en compte de l'anisotropie de la glace change la nature de l'écoulement de la glace au-dessus d'un lit rocheux perturbé. En effet, on observe dans le cas anisotrope:

1. une accélération de l'écoulement au sommet des bosses et un phénomène de stagnation de la glace dans les trous,
2. un écoulement moins sensible au relief du socle que dans le cas isotrope, tout se passant comme si la glace s'écoulait sur un socle effectif moins perturbé,
3. des champs plus homogènes dans la direction horizontale que dans le cas isotrope.

Ces effets sont plus marqués pour des ondulations du relief du socle de plus grand nombre d'onde.

Afin d'appréhender les effets d'une couche de glace isotrope près du lit rocheux, nous avons fait des simulations en introduisant une couche de recristallisation dans le fond de la calotte de manière schématique. Nous n'interpréterons ces résultats que de manière qualitative car la température, qui joue un rôle décisif sur les mécanismes de recristallisation [Lliboutry et Duval, 1985; Alley, 1992] n'est pas calculée dans notre modèle. De plus la viscosité de la glace isotherme dans la couche de recristallisation est mal connue et dépend aussi fortement de la teneur en eau liquide [Lliboutry et Duval, 1985]. Les textures à plusieurs maxima observées dans ces couches de recristallisation sont plus favorables au cisaillement que la glace isotrope de surface et moins favorables au cisaillement que la glace anisotrope à un seul maximum trouvée juste au-dessus. Dans le cas non-Newtonien ($n=3$), Lliboutry et Duval trouvent une viscosité 3 fois plus faible que la glace de surface, la glace anisotrope profonde ayant une résistance au cisaillement à peu près 8 fois inférieure à la glace de surface. Dans le cas Newtonien, avec la loi de comportement que nous utilisons (cf. figure 4.1), la viscosité anisotrope η_{xz} au fond n'est que deux fois plus faible que la viscosité isotrope à la surface η_0 . Nous avons fait des tests avec différentes valeurs de la viscosité isotrope dans la couche de recristallisation. L'écoulement

s'avère être très sensible à la valeur de cette viscosité. Pour une viscosité trois fois plus petite que la viscosité isotrope en surface, le phénomène de stagnation dans les trous disparaît, la glace s'enfonçant même plus dans les trous que dans le cas isotrope. Par contre, pour une viscosité égale à celle de la surface, le phénomène de stagnation est encore plus marqué que pour une glace anisotrope sans couche de recristallisation. Ces résultats ne permettent donc pas de tirer de conclusion sur l'effet d'une couche de glace isotrope au fond de la calotte, mais mettent en évidence la nécessité de bien comprendre les phénomènes de recristallisation ayant lieu dans les couches profondes, ceux-ci étant susceptibles de changer fortement la nature de l'écoulement.

Enfin, on peut se demander si le phénomène de stagnation de la glace dans les trous se maintiendra lorsque la texture évoluera avec la déformation.

Les modifications de l'écoulement sur un socle perturbé dans le cas anisotrope ont des conséquences importantes sur la datation (figure 4.22):

1. Les isochrones sont plus plates dans le cas anisotrope donc moins sensibles au relief du socle que dans le cas isotrope. L'âge calculé avec un écoulement anisotrope est plus de 2 fois supérieur à celui obtenu dans le cas isotrope pour $f=7$. Pour $f=3$, cet effet diminue mais l'âge reste supérieur de 20% dans les trous dans le cas anisotrope.
2. Dans les trous, la glace est plus vieille dans le cas anisotrope.
3. Sur les bosses, la glace est plus jeune dans le cas anisotrope.

A l'aide d'un modèle aux éléments finis prenant en compte une loi de comportement *isotrope*, Schott Hvidberg et al. [1996] trouvent des isochrones plus perturbées que celles observées par echo-radar sur la ligne de courant GRIP-GIPS2. Contrairement à nous, Schott et al. prennent en compte un comportement non-Newtonien ($n=3$). Cependant, d'après nos résultats, un meilleur accord avec les isochrones observées serait obtenu si une loi de comportement anisotrope avait été utilisée.

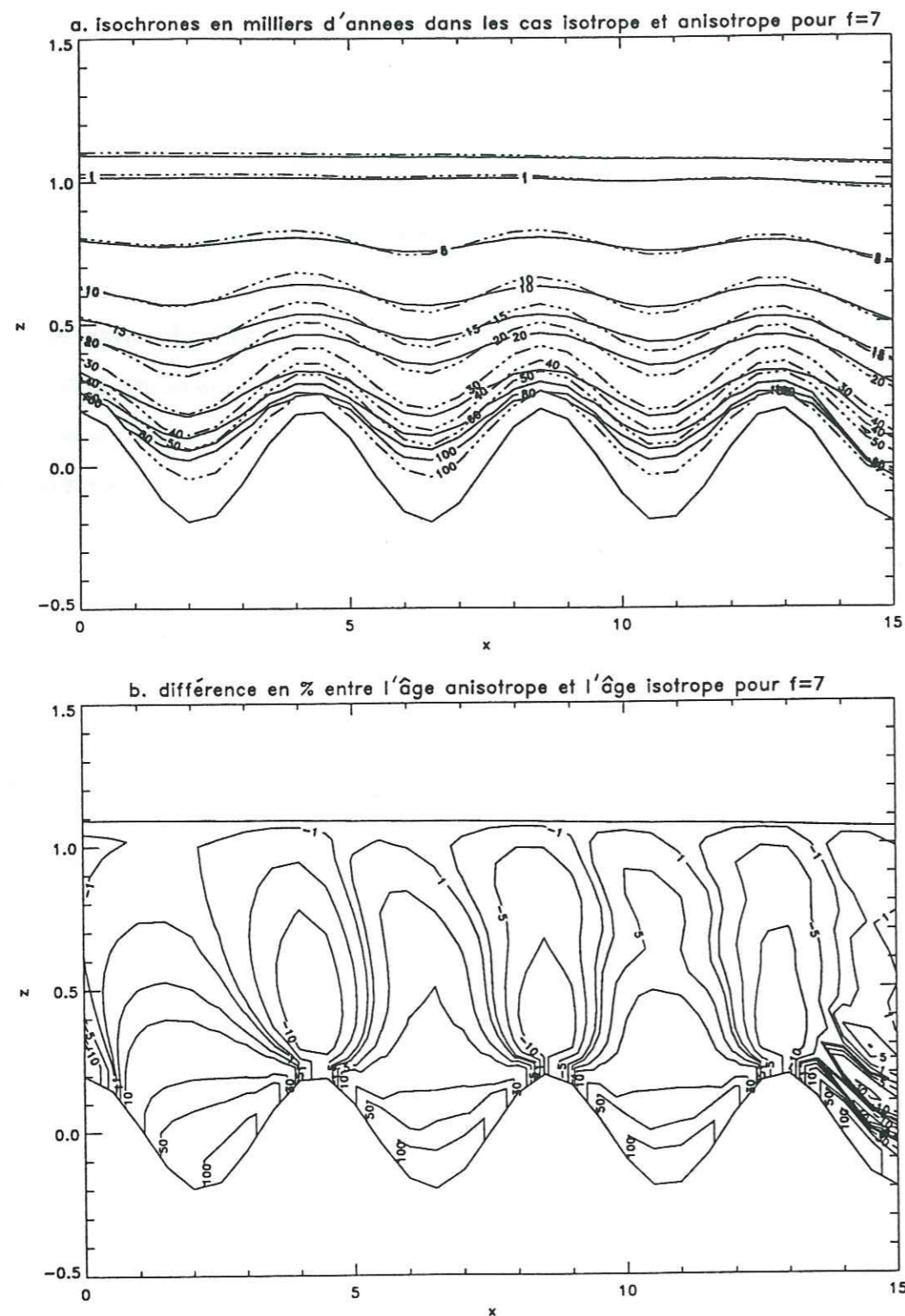


Fig. 4.22. (a) Isochrones en milliers d'années dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues), (b) différence en pourcentage entre l'âge calculé pour un écoulement anisotrope et celui calculé pour un écoulement isotrope. L'âge au-dessus des bosses est plus jeune de 10% et l'âge dans les trous est plus vieux de 100% dans le cas anisotrope par rapport à l'âge calculé dans le cas isotrope.

4 - 4 CONCLUSION

Nous avons montré que la prise en compte de l'anisotropie de la glace modifie significativement l'écoulement dans les calottes polaires. L'élévation de la surface, la forme de l'écoulement et la datation dépendent de manière conséquente de la répartition des textures dans la calotte polaire. Nos résultats montrent que les modèles qui considèrent une glace isotrope surestiment la pente de la surface, l'élévation de la surface au dôme et la réponse de l'écoulement aux variations de la topographie du socle. L'estimation du relief du socle à partir de mesures à la surface de la calotte conduira à un socle plus irrégulier que celui obtenu en prenant en compte l'anisotropie des glaces polaires profondes. Les lignes de courant et les isochrones obtenues dans le cas anisotrope sont plus plates que celles obtenues dans le cas isotrope, ce qui changera la valeur des paramètres rhéologiques et climatiques déterminés à partir de modèles inverses calés sur les mesures de l'élévation de la surface [Remy et al., 1996], ou sur la position d'isochrones dont l'âge est connu (horizons repères) [Dahl-Jensen et al., 1993]. La grande précision que l'on obtient actuellement sur les mesures *in-situ* ne permettra donc pas d'améliorer la détermination des paramètres mis en jeu dans l'écoulement des calottes polaires tant que le comportement anisotrope de la glace ne sera pas bien pris en compte dans les modèles d'écoulement.

Il faut noter que la loi de Lliboutry donne une anisotropie moins forte dans le cas Newtonien ($n=1$) que dans le cas non-Newtonien ($n=3$) et qu'en plus elle surestime la viscosité en cisaillement des glaces fortement texturées d'un facteur 2 au moins (cf. chapitre 2). L'effet de l'anisotropie, qui a donc été sous-estimée dans notre étude, sera amplifié par l'introduction d'un comportement non-Newtonien et par la prise en compte d'une loi de comportement plus réaliste. De plus les effets sur l'écoulement seront plus complexes dans le cas $n=3$, puisque les viscosités dépendent alors aussi du deuxième et du troisième invariant du tenseur des contraintes (cf. chapitre 2).

L'effet de l'anisotropie est absorbé en partie par la pente de la surface, qui diminue, et par les vitesses de déformation au fond, qui augmentent. Si l'équation de la chaleur est résolue, il n'est pas exclu qu'une partie des effets de l'anisotropie se répercute sur le champ de température et que l'effet sur l'élévation de la surface et sur les vitesses de déformation soit ainsi moins fort.

Faint, illegible text on the left page, possibly bleed-through from the reverse side.

CHAPITRE 5

L'APPROXIMATION DE LA COUCHE MINCE DANS LES CAS ISOTROPE ET ANISOTROPE

5 - 1 INTRODUCTION

La résolution du système complet des équations mécaniques régissant l'écoulement de la glace dans les calottes polaires nécessite l'utilisation de méthodes numériques complexes (cf. chapitre 3) et requiert des moyens de calcul importants. Par exemple, pour obtenir une valeur maximum de l'écart relatif des champs de 10^{-6} entre deux itérations dans le cas d'un écoulement sur un socle perturbé (cf. paragraphe 4 - 3) avec une résolution de $(nh_z, nh_x)=(15,41)$ points, il faut environ 24 heures de calcul sur une station de travail. Le temps de calcul des champs à l'ordre 0 et à l'ordre 2 de l'approximation de la couche mince (cf. paragraphe 1 - 3.4) dans le même cas est plus de 100 fois plus court. Certes, le programme utilisé pourrait être optimisé, mais le gain de temps à attendre restera limité.

Etant donné l'extrême simplification qu'entraîne l'approximation de la couche mince, il est important de connaître les limites de son champ d'application et de pouvoir évaluer quantitativement l'erreur qu'elle entraîne par rapport à la solution exacte. Dans ce but, nous calculerons l'approximation de la couche mince sur les exemples traités dans le chapitre précédent et comparerons les résultats avec ceux du modèle complet dans les cas isotrope et anisotrope. Cela nous permettra de décrire les situations pour lesquelles l'ordre 0 de la couche mince représente bien l'écoulement, ainsi que celles où il devient nécessaire de calculer l'ordre 2 pour représenter correctement toute la physique. En particulier, nous comparerons l'ordre de grandeur des vitesses et des contraintes à l'ordre 0 et à l'ordre 2 dans le cas d'un socle plat et d'un

socle perturbé. Comme dans le chapitre précédent, nous supposons que la glace a un comportement Newtonien.

Peu d'auteurs ont, jusqu'à présent, essayé de prendre en compte l'ordre 2 de l'approximation de la couche mince. Et ceux qui l'ont fait [Dahl-Jensen, 1989b; Blatter, 1995] n'ont pas suivi une démarche rigoureuse, comme nous l'avons discuté au paragraphe 1 - 3.4. En effet, non seulement des termes d'ordre 2 ont été arbitrairement négligés dans le calcul, mais l'élévation de la surface reste calculée à l'ordre 0 et les conditions aux limites sur cette surface libre n'ont pas été imposées à l'ordre 2 (cf. chapitre 1 - 3.4). Nous allons évaluer dans ce chapitre l'ordre de grandeur des termes négligés par ces auteurs.

Comme nous l'avons signalé au chapitre 1, l'approximation de la couche mince à l'ordre 0 ou à l'ordre 2 n'avait, jusque là, jamais été ni formulée, ni calculée dans le cas anisotrope. Certains auteurs ont représenté arbitrairement l'anisotropie en introduisant un facteur multiplicatif *ad-hoc* $\mathcal{L}(z)$ dans la viscosité isotrope (cf. paragraphe 1 - 3.4). Nous avons vu, en développant l'approximation de la couche mince dans le cas anisotrope, que ceci est correct à l'ordre 0 lorsque l'on prend comme facteur multiplicatif le rapport des viscosités en cisaillement anisotrope et isotrope: $\mathcal{L}(z) = M_{xz} / \eta_0$, mais à l'ordre 2, une méthode de ce type devient incohérente.

Dans le paragraphe 5 - 2, nous décrirons rapidement la méthode numérique utilisée et les conditions aux limites imposées pour le calcul de l'écoulement à l'aide de l'approximation de la couche mince. Dans le paragraphe 5 - 3, nous présenterons les résultats de la couche mince dans les cas isotrope et anisotrope pour un socle plat et montrerons, en comparant les résultats avec ceux du modèle numérique complet, que l'ordre 0 représente très correctement l'écoulement dans les deux cas. Dans le paragraphe 5 - 4, nous comparerons les résultats de la couche mince et ceux du modèle complet pour un écoulement sur un lit rocheux perturbé dans les cas isotrope et anisotrope et montrerons l'ordre de grandeur des différents termes intervenant dans le calcul à l'ordre 2. Nous soulignerons l'importance des termes d'ordre 2 couramment négligés dans les modèles. Enfin, dans le paragraphe 5 - 5, nous évaluerons les erreurs faites en remplaçant le calcul rigoureux de la couche mince dans le cas anisotrope par l'introduction d'un facteur multiplicatif *ad-hoc* censé représenter l'anisotropie de la glace.

5 - 2 METHODE NUMERIQUE ET CONDITIONS AUX LIMITES

Nous avons développé un modèle numérique résolvant les équations obtenues à l'ordre 0 (équations (1.41), (1.42)) et à l'ordre 2 (équations (1.45), (1.46)) de l'approximation de la couche mince [Mangeny et Califano, 1996]. Les champs à l'ordre 0 ne dépendent que de $E^{(0)}$ et de ses dérivées, il est possible de découpler les calculs à l'ordre 0 et à l'ordre 2.

Notre algorithme consiste à effectuer le calcul des champs à l'ordre 0 couplé avec le calcul de l'élévation de la surface à l'ordre 0 (équation 1.55.a). A partir des résultats à l'ordre 0, nous effectuons le calcul des champs à l'ordre 2 couplé avec le calcul de l'élévation de la surface à l'ordre 2 (équation 1.55.b). Il est absolument nécessaire que les équations (1.55.a) et (1.55.b) soient simultanément vérifiées pour que le calcul reste cohérent avec le développement à l'ordre 2 de la couche mince. Pour résoudre l'ordre 0, nous calculons donc, pour une élévation de la surface donnée $E^{(0)}$, la contrainte de cisaillement donnée par (1.48), puis la vitesse horizontale donnée par (1.49) et enfin la vitesse verticale donnée par (1.50). Pour résoudre l'ordre 2, nous procédons de manière similaire en calculant la contrainte de cisaillement à l'ordre 2 (1.51), puis intégrons pour obtenir la vitesse horizontale à l'ordre 2 (1.52) et enfin intégrons l'équation de continuité (1.45.a), pour obtenir la vitesse verticale. Les équations pour l'évolution de la surface à l'ordre 0 et à l'ordre 2 sont résolues avec le schéma semi-implicite d'Adams-Bashford déjà utilisé dans le modèle complet (3.38). Le schéma itératif est représenté sur la figure 5.1. La résolution de ces deux ordres de l'approximation de la couche mince ne posent aucun problème numérique.

L'étendue horizontale du domaine étant fixée, il faut choisir un critère pour comparer les résultats de la couche mince avec ceux du modèle complet. Nous avons décidé de comparer les écoulements pour une même élévation de la surface au dôme. Les conditions aux limites à imposer dans le calcul de la couche mince ne sont pas les mêmes que celles pour le modèle complet. En effet, dans ce dernier nous avons imposé un profil de vitesse horizontale sur les bords gauche et droit du domaine et aucune condition aux limites sur la hauteur. Par contre, pour la couche mince, nous ne prescrivons pas de condition sur les bords pour les vitesses mais imposons l'élévation de la surface à l'ordre 0, à gauche et à droite du domaine. Nous ajustons

cette élévation de la surface de manière à retrouver l'élévation de la surface au dôme donnée par le modèle complet. Les vitesses sur les bords sont donc automatiquement déterminées car elles dépendent explicitement de l'élévation de la surface sur les bords et de ses dérivées. Dans le calcul de l'élévation de la surface à l'ordre 2, nous imposons une élévation de la surface $E^{(2)}$ nulle sur les côtés.

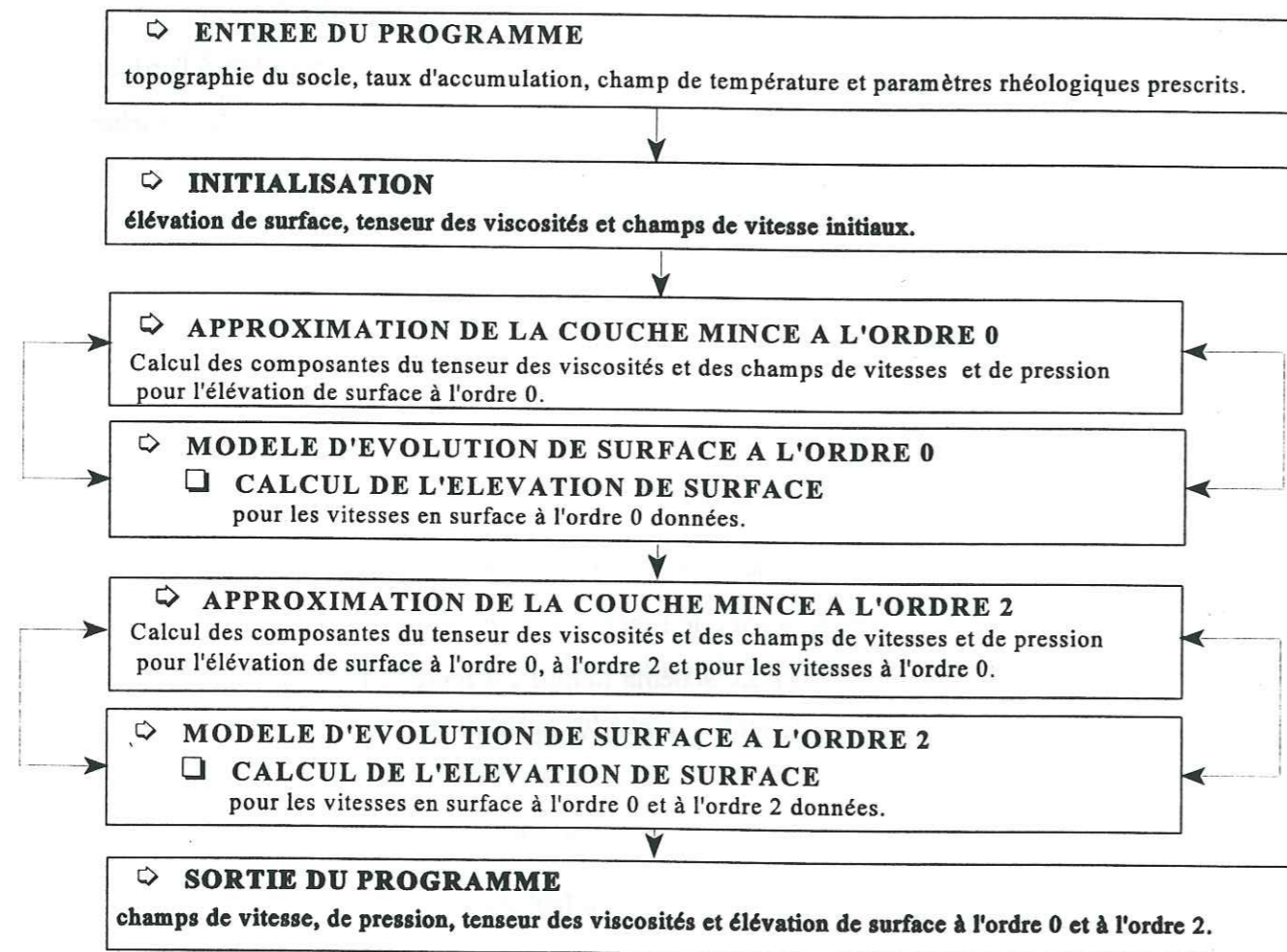


Fig. 5.1. Le schéma itératif.

5 - 3 APPROXIMATION DE LA COUCHE MINCE POUR UN SOCLE PLAT

Nous allons, dans un premier temps, comparer les résultats de la couche mince avec ceux du modèle complet dans le cas le plus simple d'un écoulement sur un socle plat ($B(x)=0$) et pour des comportements isotrope et anisotrope de la glace. Signalons que les quantités d'ordre 2 seront ici les champs d'ordre 2 obtenus au paragraphe 1 - 3.4 multipliés par ϵ^2 .

Il est immédiatement apparent que l'écoulement de la glace sur un socle plat est très bien représenté par l'ordre 0 de la couche mince aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope (cf. figure 5.2), la correction d'ordre 2 étant négligeable sauf en ce qui concerne les contraintes longitudinales. Nous avons représenté l'élévation et la pente de la surface à l'ordre 0 dans les cas isotrope (triangles) et anisotrope (croix) et les valeurs correspondantes calculées avec le modèle complet respectivement par des lignes en tirets-pointillés et par des lignes continues (cf. figure 5.2). Les symboles, représentant les résultats de la couche mince, se superposent exactement aux valeurs calculées par le modèle complet. Il faut noter que la légère oscillation observée sur la pente de la surface ne représente rien de physique et disparaît dès que l'on augmente le nombre de points. Les vitesses en surface à l'ordre 0 et à l'ordre 2 ainsi que celles calculées par le modèle complet sont représentées sur la figure 5.3. Cette figure confirme l'excellent accord entre l'ordre 0 et le modèle complet. La série issue du développement de la couche mince converge donc très rapidement pour un écoulement sur un socle plat aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope: les solutions à l'ordre 2 pour l'élévation de la surface, la pente et les vitesses en surface sont inférieures de plusieurs ordres de grandeur à celles correspondant à l'ordre 0.

On obtient de même un excellent accord entre les vitesses, les vitesses de déformation, les contraintes calculées à partir de l'ordre 0 de la couche mince et celles calculées à partir du modèle complet: les vitesses, les contraintes et l'élévation de la surface à l'ordre 2 sont de plusieurs ordres de grandeur inférieures à celles obtenues à l'ordre 0. Nous avons représenté sur la figure 5.4.a la contrainte de cisaillement à la base à l'ordre 0 et celle calculée avec le modèle

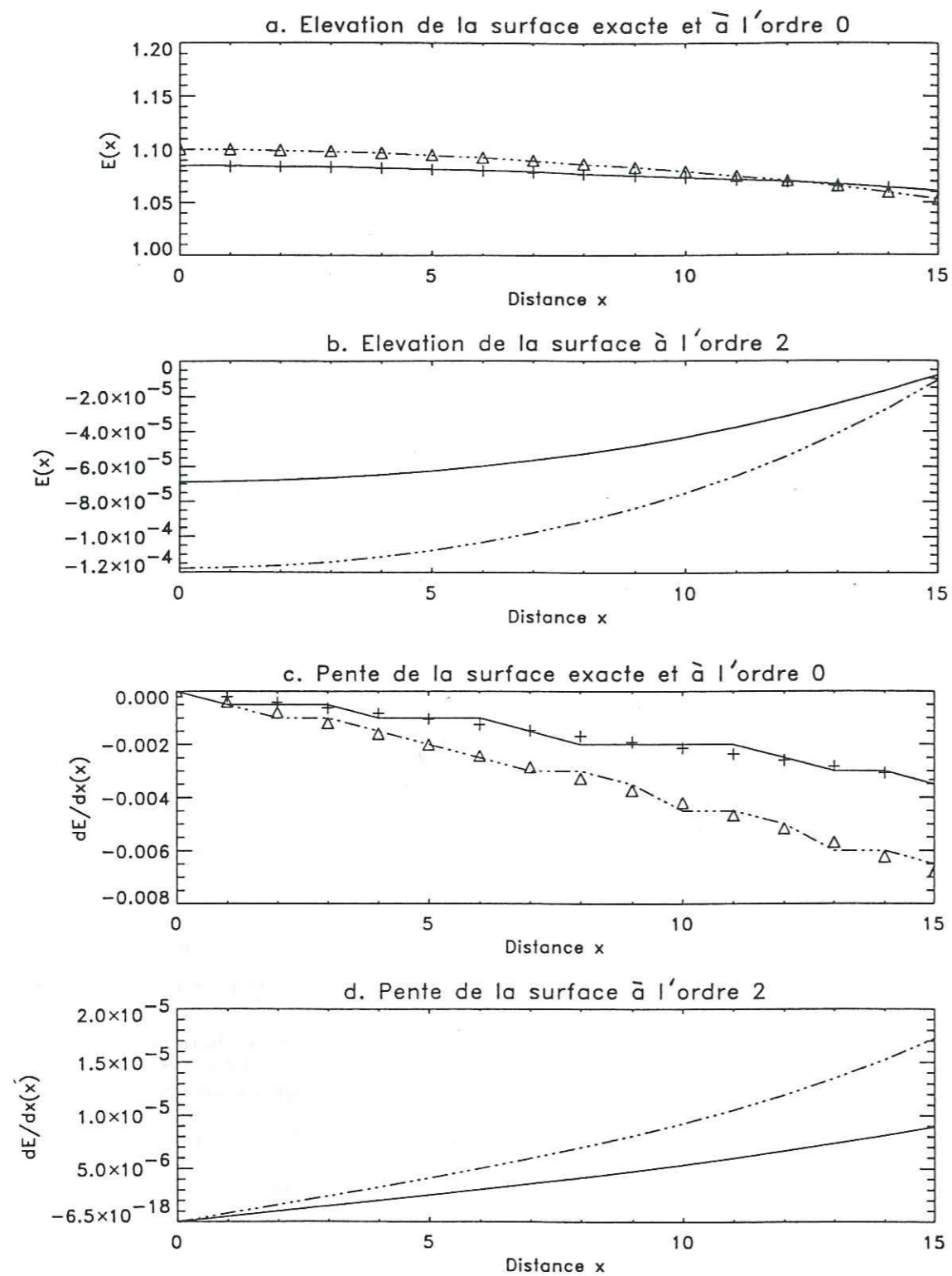


Fig. 5.2. (a) Elévation de la surface et (c) pente de la surface, calculées d'une part avec le modèle complet dans le cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et dans le cas anisotrope (lignes continues), ainsi qu'à l'ordre 0 de la couche mince dans le cas isotrope (triangles) et anisotrope (croix); terme d'ordre 2 de la couche mince (b) pour l'élévation de la surface et (d) pour la pente de la surface dans le cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et dans le cas anisotrope (lignes continues).

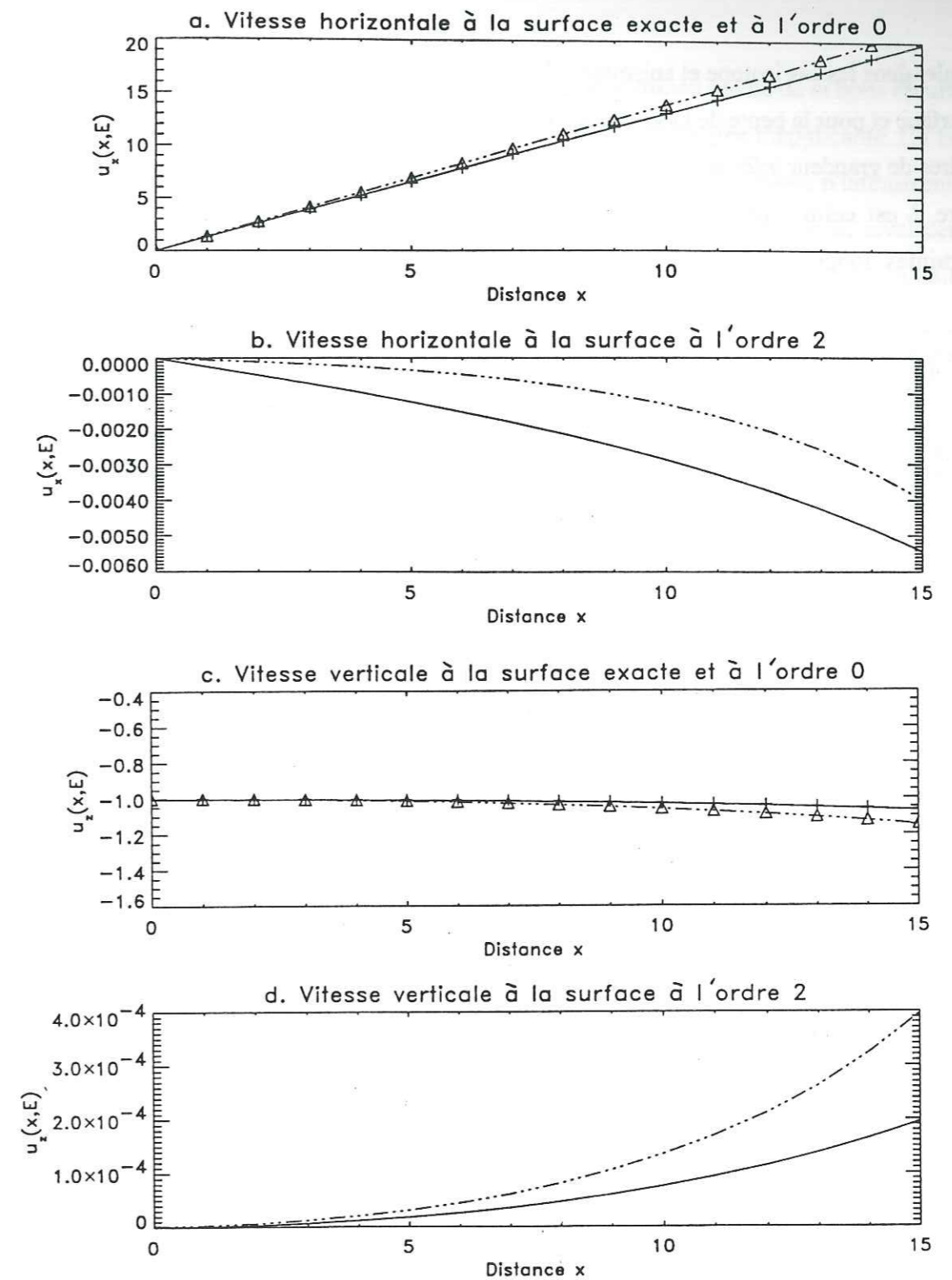


Fig. 5.3. (a) Vitesse horizontale à la surface et (c) vitesse verticale à la surface, calculées d'une part avec le modèle complet dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues), et d'autre part à l'ordre 0 de la couche mince dans les cas isotrope (triangles) et anisotrope (croix); terme d'ordre 2 de la couche mince pour (b) la vitesse horizontale et (d) la vitesse verticale à la surface dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues).

complet dans les cas isotope et anisotrope. Les conclusions sont les mêmes que pour les vitesses en surface et pour la pente de la surface. La contrainte de cisaillement à la base à l'ordre 2 est de 3 ordres de grandeur inférieure à sa valeur à l'ordre 0. Le seul terme significatif dans le calcul à l'ordre 2 est celui représentant les contraintes longitudinales. Les profils horizontaux des contraintes longitudinales à la surface obtenues avec le modèle complet se superposent parfaitement à ceux des contraintes calculées avec l'ordre 2 de la couche mince aussi bien dans le cas isotope que dans le cas anisotrope (cf. figure 5.4.c).

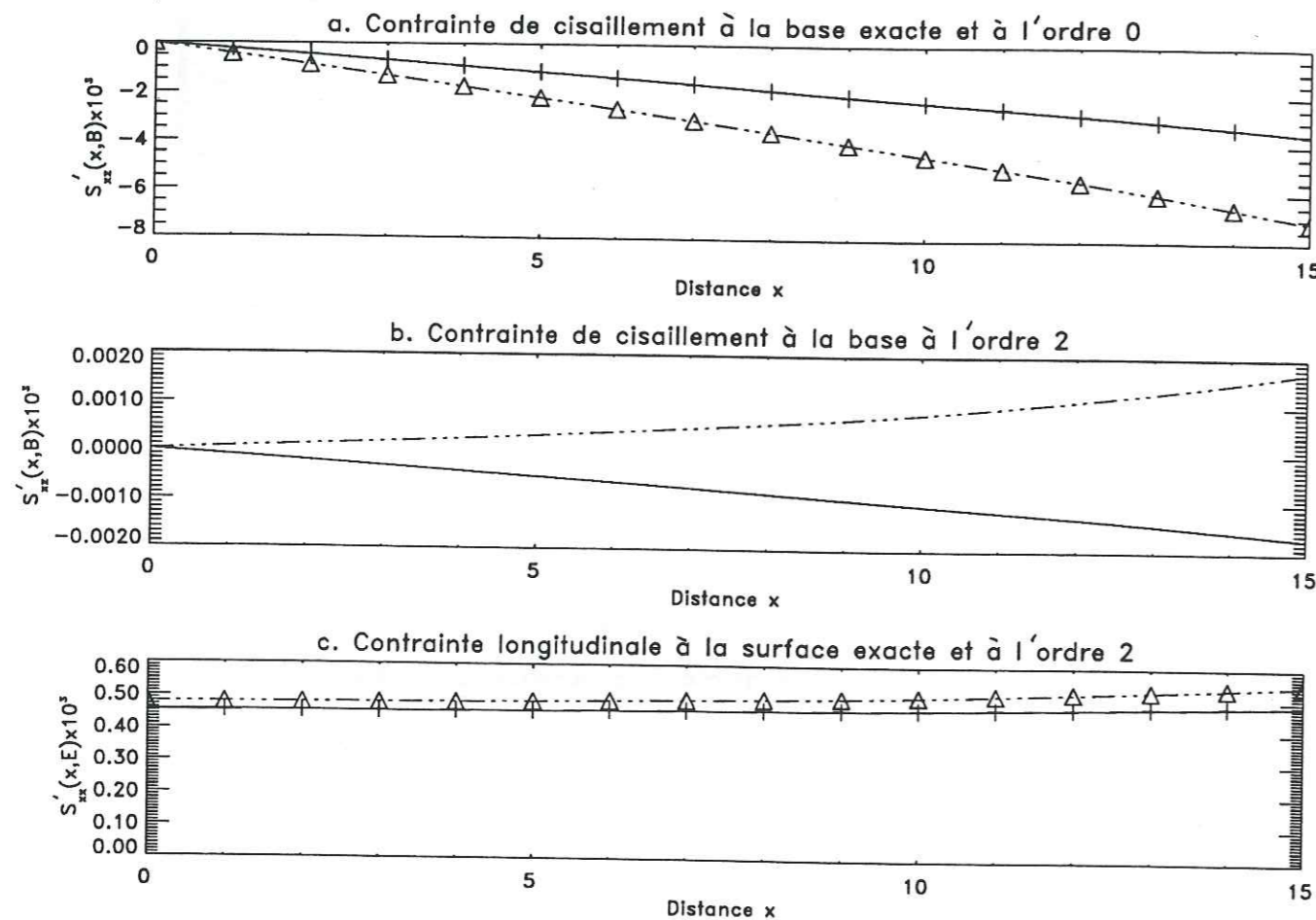


Fig. 5.4. (a) Contrainte de cisaillement à la base et (c) contrainte longitudinale à la surface, calculées d'une part avec le modèle complet dans les cas isotope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues), et d'autre part à l'ordre 0 de la couche mince dans les cas isotope (triangles) et anisotrope (croix); terme d'ordre 2 de la couche mince pour (b) la contrainte de cisaillement à la base dans les cas isotope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues). Les contraintes sont multipliées par un facteur 10^3 .

Il est remarquable que l'approximation de la couche mince donne de si bons résultats au voisinage d'un dôme où cette approximation était jusqu'à présent jugée inapplicable. En fait, les lois d'échelle utilisées pour développer l'approximation de la couche mince n'interdisent pas à U de prendre une valeur nulle en un point (cf. équation 1.33). Ce qui pourrait invalider cette approximation, serait que la valeur absolue de $\partial U/\partial x$ soit trop faible au point où U s'annule. Or, ce n'est pas le cas dans les calottes polaires. Cela se comprend aisément sur un exemple simple: supposons que u ait un profil linéaire entre $-L$ et $+L$: $u=xu'_0$. Si l'on veut, par exemple, que $u(x=\pm L)=u'_0 L$ soit effectivement d'ordre $1/\varepsilon$ sur l'intervalle $[-L, L]$ sauf à l'origine, il faut évidemment que $u'_0=U(\pm L)/[d]$, donc que u'_0 soit d'ordre 1. La figure (4.10.a) confirme que, dans notre cas, cette condition est bien vérifiée.

C'est cet accord presque parfait avec l'ordre 0, et donc le fait que l'ordre 2 soit négligeable, qui explique les résultats à peu près cohérents obtenus entre autres par Dahl-Jensen [1989a, b] et Blatter [1995]. Ces auteurs ont négligés arbitrairement des termes d'ordre 2 dans leurs modèles en utilisant l'expression (1.54) pour calculer la contrainte de cisaillement à l'ordre 2 (cf. paragraphe 1 - 3.4.d). Dans le cas d'un socle plat, ces termes sont très petits, comme d'ailleurs les autres termes de l'ordre 2. L'introduction des contraintes longitudinales à l'ordre 2 dans le calcul à l'ordre 0 est théoriquement incohérent, mais, dans le cas d'un socle plat, revient à introduire complètement le calcul à l'ordre 2. En effet, ces contraintes longitudinales sont les seuls termes significatifs de l'ordre 2. Le calcul de Dahl-Jensen [1989a, b] et Blatter [1995] donne donc des résultats corrects dans le cas isotope. Par contre, ce calcul est faux dans le cas où un facteur multiplicatif est utilisé pour représenter l'anisotropie. En effet, cela revient à remplacer M_{xxxx} et M_{zzzz} dans les expressions des contraintes longitudinales (1.45.a) et (1.45.b) par $\mathcal{E}(z)\eta_0=M_{xxxx}$. Pour illustrer l'erreur introduite par cette méthode, nous avons représenté sur la figure 5.5 les contraintes longitudinales S'_{xx} et axiales S'_{zz} calculées avec un facteur multiplicatif $\mathcal{E}(z)=M_{xxxx}/\eta_0$ (triangles), ainsi que ces mêmes contraintes calculées correctement à l'ordre 2 avec les bonnes composantes de la matrice des viscosités (croix), et celles obtenues à partir du modèle complet (lignes continues). Les contraintes calculées avec le facteur multiplicatif $\mathcal{E}(z)$ ont une forme complètement différente de celles que l'on obtient si l'on prend correctement en compte la résistance aux déformations longitudinales (M_{xxxx}) et axiales (M_{zzzz}) (cf. figure 4.1 pour le profil des viscosités en fonction de la profondeur): les premières sont très relaxées au fond par la

diminution de la viscosité M_{xxx} avec la profondeur, alors que les secondes présentent un maximum vers $\bar{z}=0.2$.

Dans le cas d'un socle plat, les contraintes longitudinales à l'ordre 2 calculées avec le développement rigoureux de la couche mince se superposent parfaitement à celles obtenues à partir du modèle complet aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope (figure 5.5). L'écoulement sera ainsi certainement très bien représenté par l'ordre 0 et l'ordre 2 de la couche mince pour un écoulement non-Newtonien de la glace isotrope ou anisotrope sur un socle plat.

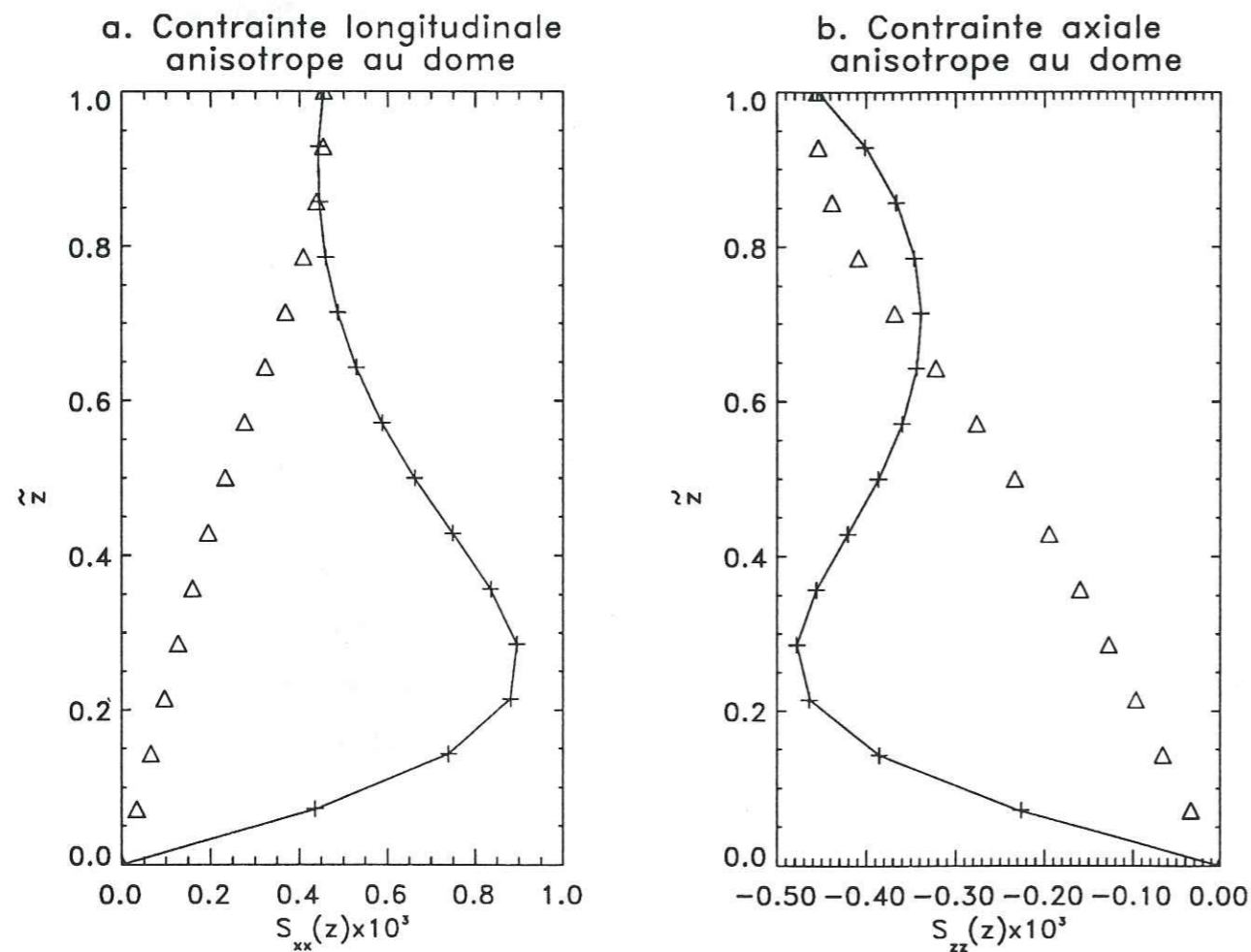


Fig. 5.5. Profils verticaux de la (a) contrainte longitudinale et (b) de la contrainte axiale dans le cas anisotrope, au dôme, obtenue à partir du modèle complet (lignes continues), à l'ordre 2 de la couche mince (croix) et dans le cas où on utilise un facteur multiplicatif (triangles). Les contraintes sont multipliées par 10^3 .

5 - 4 APPROXIMATION DE LA COUCHE MINCE POUR UN LIT ROCHEUX IRREGULIER

Il est intéressant de savoir si l'approximation d'ordre 0 est encore aussi bonne pour un écoulement sur un socle perturbé, qui est une représentation plus réaliste d'un lit rocheux naturel.

Nous avons donc imposé un socle similaire à celui utilisé dans le paragraphe 4 - 3 avec $f=3$. Dans ce cas, le gradient horizontal maximum de la topographie du socle est $\partial B/\partial x=0.4/5=8.10^{-2}$. Ce gradient est d'ordre de ϵ , en particulier dans la région du dôme où $\epsilon \sim 10^{-1}$, et reste donc compatible avec le développement de la couche mince à cet endroit.

Il est important de vérifier que le gradient horizontal de la viscosité anisotrope est aussi d'un ordre de grandeur inférieur à son gradient vertical. Nous imposons un profil des viscosités qui dépend de la coordonnée réduite ξ (cf. équation 3.31). Les dérivées en x sont reliées aux dérivées en ξ par la formule (A.3), ce qui donne, dans notre cas: $\partial M_{ijkl}/\partial x \sim 8.10^{-2} \partial M_{ijkl}/\partial \xi$ (cf. annexe A). Le gradient horizontal de la viscosité reste bien négligeable devant son gradient vertical et l'approximation de la couche mince devrait donc être applicable.

Nous montrerons que, pour un socle ayant un profil sinusoïdal avec $f=3$ (cf. équation 4.8), l'écoulement isotrope est assez bien représenté par l'ordre 0 de la couche mince, le calcul de l'ordre 2 permettant globalement de se rapprocher de la solution réelle. Par contre, dans le cas anisotrope, l'ordre 0 ne contient pas toute la physique de l'écoulement et l'ordre 2 est nécessaire pour pouvoir reproduire de façon acceptable les caractéristiques de l'écoulement. Dans ces deux cas et spécialement dans le cas isotrope, aucun terme d'ordre 2 ne peut être négligé, ni dans l'expression de la contrainte de cisaillement (1.51), ni dans le calcul de l'évolution de la surface qu'il faut aussi mener jusqu'à l'ordre 2. Dans un premier temps, nous discuterons des ordres de grandeur des différents termes intervenant dans la formule de la contrainte de cisaillement à l'ordre 2 et mettrons en évidence les termes négligés par Dahl-Jensen [1989a, b] et Blatter [1995]. Nous étudierons ensuite séparément la validité du développement de la couche mince dans les cas isotrope et anisotrope sur un socle irrégulier.

5 - 4.1 Ordre de grandeur des différents termes intervenant à l'ordre 2

La résolution de l'ordre 2 de la couche mince est basée sur le calcul de la contrainte de cisaillement à l'ordre 2 (cf. paragraphe 5 - 2). Nous allons donc présenter ici les différents termes qui interviennent dans la formule de la contrainte de cisaillement à l'ordre 2 (1.51) dans les cas isotrope et anisotrope. Nous appellerons A , B , C et D les 4 termes de la formule (1.51) qui s'écrit alors:

$$S'_{xz}{}^{(2)} = A + B + C + D, \quad (5.1)$$

avec

$$A = -\frac{\partial}{\partial X} \int_E^Z (S'_{xx}{}^{(1)} - S'_{zz}{}^{(1)}) dz', \quad B = \int_E^Z \int_E^Z \frac{\partial^2 S'_{xz}{}^{(0)}}{\partial X^2} dz' dz'', \quad C = \Gamma^{(0)3} (z - E^{(0)}), \quad D = \Gamma^{(2)} (z - E^{(0)}) - \Gamma^{(0)} E^{(2)}.$$

Généralement, seul le terme A est pris en compte dans les modèles numériques développés en glaciologie [Dahl-Jensen, 1989a, b; Blatter, 1995]. Sur la figure (5.6), nous avons représenté la contrainte de cisaillement à la base à l'ordre 2 dans les cas isotrope et anisotrope ainsi que les différents termes dont elle se compose: A , B , C et D . Si, dans le cas isotrope (figure 5.6.a), les termes A , B et D sont tous du même ordre, dans le cas anisotrope (figure 5.6.b) le terme A qui représente le gradient des contraintes longitudinales domine largement. Dahl-Jensen [1989a, b] et Blatter [1995] n'ont pris en compte que le terme A dans le calcul de $S'_{xz}{}^{(2)}$. Leur modèle donnera donc des résultats faux s'il est appliqué à un écoulement sur un socle perturbé. Dans le cas des irrégularités que nous avons imposé, la contrainte de cisaillement qu'ils obtiennent à l'ordre 2 par exemple diffère en $x=10$ de plus de 100% de la contrainte de cisaillement "exacte" et a même un signe opposé (cf. figure 5.6.a). Par contre dans le cas anisotrope, l'erreur faite en négligeant B , C et D est plus faible même si elle atteint 60% de la valeur exacte en $x=13$ (cf. figure 5.6.b). Ceci s'explique par le fait que la glace anisotrope résiste davantage aux déformations longitudinales et axiales, ce qui conduit donc à de plus grandes valeurs des contraintes longitudinales et axiales comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. De plus, l'anisotropie facilite les déformations en cisaillement, ce qui relaxe les

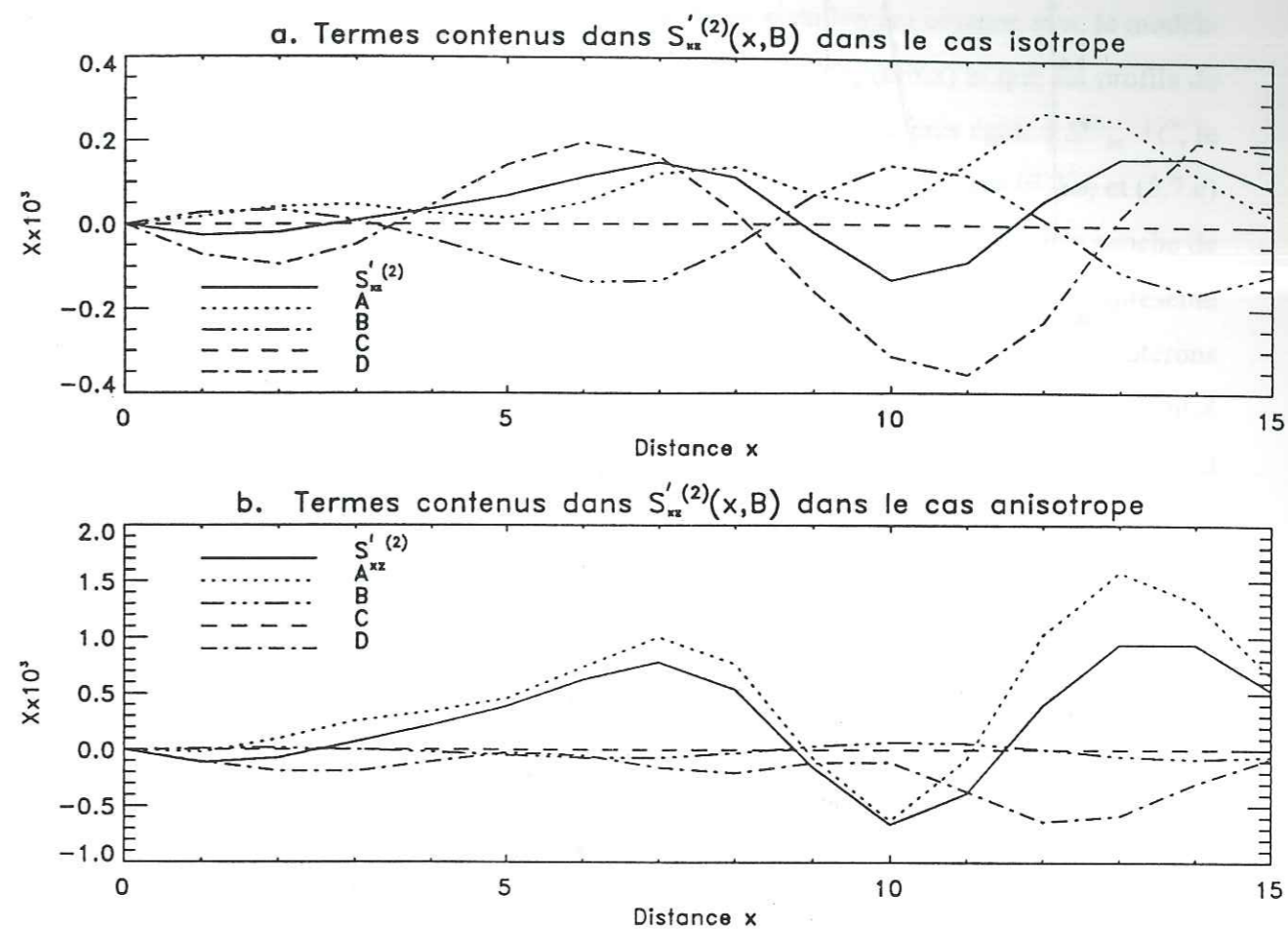


Fig. 5.6. Terme à l'ordre 2 de la couche mince pour la contrainte de cisaillement à la base en fonction de la distance au dôme (a) dans le cas isotrope et (b) dans le cas anisotrope. Les différents termes $X=(A, B, C, D)$ constituant la contrainte de cisaillement à la base à l'ordre 2 sont aussi représentés. Les contraintes sont multipliées par 10^3 .

contraintes de cisaillement qui sont beaucoup plus faibles (cf. chapitre 4). Le terme B est alors plus faible dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. Enfin, la pente de la surface est plus petite dans le cas anisotrope ce qui peut expliquer que le terme D soit plus faible que dans le cas isotrope. Le deuxième terme significatif dans le cas anisotrope est le terme D qui contient la valeur de la surface et de la pente à l'ordre 2. Ces résultats confirment qu'il est absolument nécessaire de résoudre correctement l'équation d'évolution de la surface à l'ordre 2 (1.55.b) et de bien développer la condition de surface libre à l'ordre 2 (1.46). Il faut noter que, dans les deux cas, le terme C est négligeable.

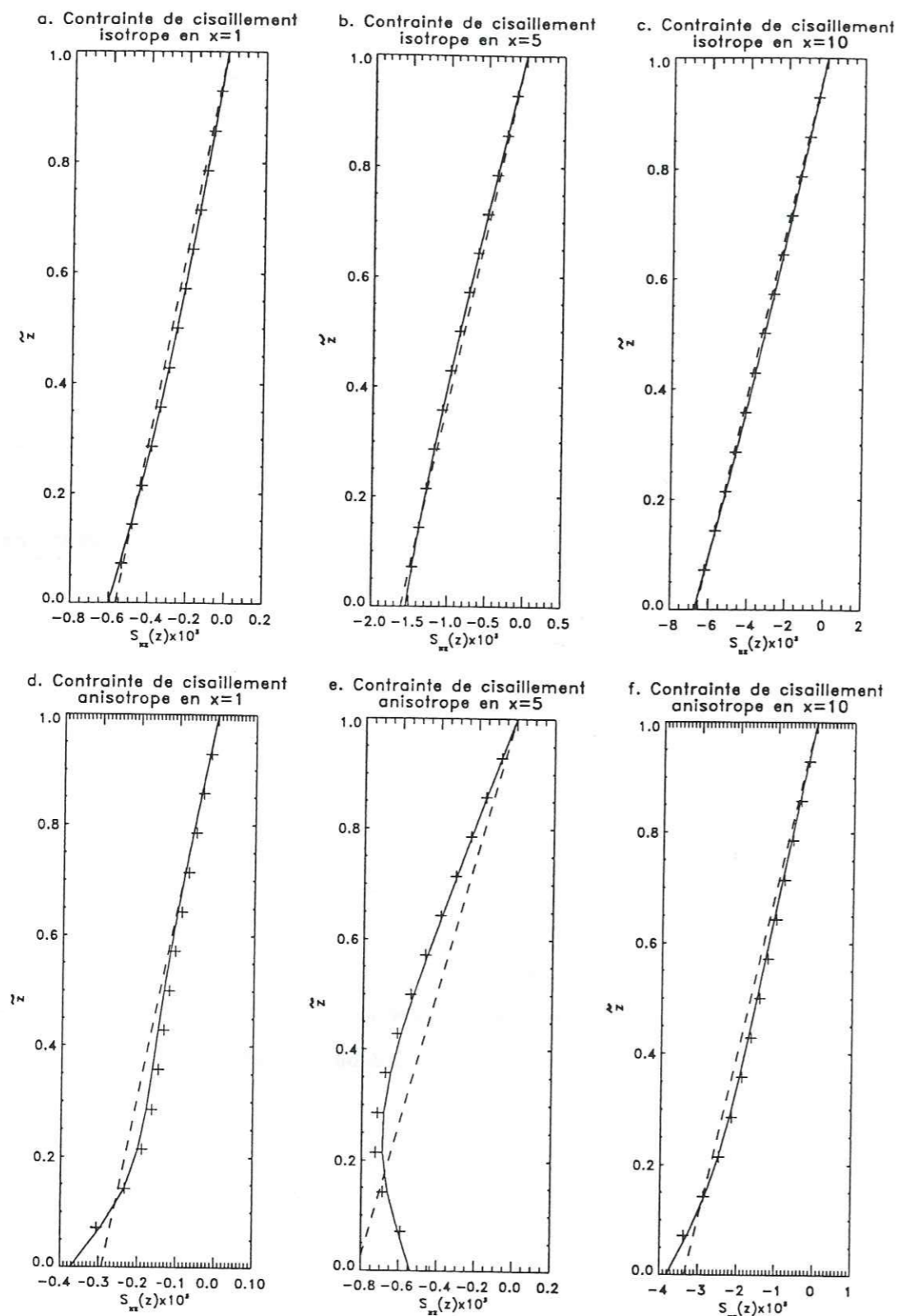


Fig. 5.7. Profils verticaux de la contrainte de cisaillement dans le cas d'un socle perturbé, dans le cas isotrope (a) en $x=1$, (b) en $x=5$, (c) en $x=10$ et dans le cas anisotrope (d) en $x=1$, (e) en $x=5$ et (f) en $x=10$; les résultats obtenus à partir du modèle complet sont représentés par des lignes continues, ceux correspondant à l'ordre 0 par des lignes en tirets et ceux obtenus avec l'approximation de la couche mince poussée jusqu'à l'ordre 2 par des croix. Les contraintes sont multipliées par 10^3 .

La figure 5.7 montre les profils de la contrainte de cisaillement obtenue avec le modèle complet (lignes continues) en $x=2$ et $x=5$, ainsi que $S'_{xz}^{(0)} + S'_{xz}^{(2)}$ (croix) et que les profils de $S'_{xz}^{(0)} + X$ où $X=A, B, C$ ou D . La contrainte de cisaillement est à peu près égale à $S^{(0)}_{xz} + C$, le terme C étant pratiquement nul dans les cas isotrope et anisotrope. Les figures (5.7.a) et (5.7.c) montrent que la contrainte de cisaillement à l'ordre 0 dans le cas isotrope est déjà très proche de celle obtenue avec le modèle complet. Par contre, dans le cas anisotrope, l'ordre 0 représente beaucoup moins bien la physique de l'écoulement (cf. figures 5.7.b et 5.7.d). Nous discuterons cela plus en détail dans le paragraphe 5 - 4.2. Dans le cas isotrope, les termes dominants sont A et D sur toute la profondeur et, près du lit rocheux, le terme B . Dans le trou (en $x=5$), le seul terme vraiment important dans le cas anisotrope est le terme A jusqu'à une profondeur de $z \sim 0.2$, ainsi que les termes B et D plus en profondeur (cf. figure 5.7.d). En effet, les gradients des contraintes longitudinales sont très forts dans les trous. Par contre, en $x=2$, où ces gradients sont moins forts (cf. figure 4.20.b), le terme D est aussi important que le terme A sur toute la profondeur (cf. figure 5.7.b). Ainsi, si l'on ne prend en compte que le terme A à cet endroit dans le cas anisotrope, l'accord avec la contrainte de cisaillement calculée avec le modèle complet est bon qualitativement mais pas quantitativement.

Notons que si l'on néglige un des termes A, B ou D dans l'expression de la contrainte de cisaillement à l'ordre 2 (5.1), les champs de vitesses à l'ordre 2 obtenus sont alors aberrants et sont de l'ordre de grandeur des champs de vitesse à l'ordre 0.

5 - 4.2 Validité de l'approximation de la couche mince dans les cas isotrope et anisotrope

Il est intéressant de voir si, dans le cas d'un socle perturbé, la convergence du développement en série de perturbations est aussi rapide que dans le cas d'un socle plat; en d'autres termes, dans quelle situation le calcul à l'ordre 2 améliore significativement les résultats de l'ordre 0. Les résultats que nous obtenons montrent qu'avec un socle sinusoïdal assez fortement perturbé (amplitude des oscillations de 0.2 et longueur d'onde de 10), l'ordre 0 représente encore bien l'écoulement de la glace isotrope. Malgré la légère différence entre les contraintes calculées à l'ordre 0 et la solution exacte (cf. figures 5.8.a, b et c), les vitesses à l'ordre

0 sont très proches des vitesses calculées avec le modèle complet. Les vitesses à l'ordre 2 restent très faibles et permettent globalement de se rapprocher légèrement de la solution exacte, la solution d'ordre 0 étant déjà très proche de la solution exacte. Par contre, dans le cas anisotrope, l'ordre 0 ne représente que très approximativement les contraintes de cisaillement calculées avec le modèle complet, et l'ordre 2 est nécessaire pour retrouver un bon accord avec ces résultats (cf. figures 5.9.d, e et f). Les vitesses à l'ordre 2 obtenues dans le cas anisotrope sont pourtant faibles, même si elles contribuent dans l'ensemble à rapprocher la solution en perturbation de la solution réelle.

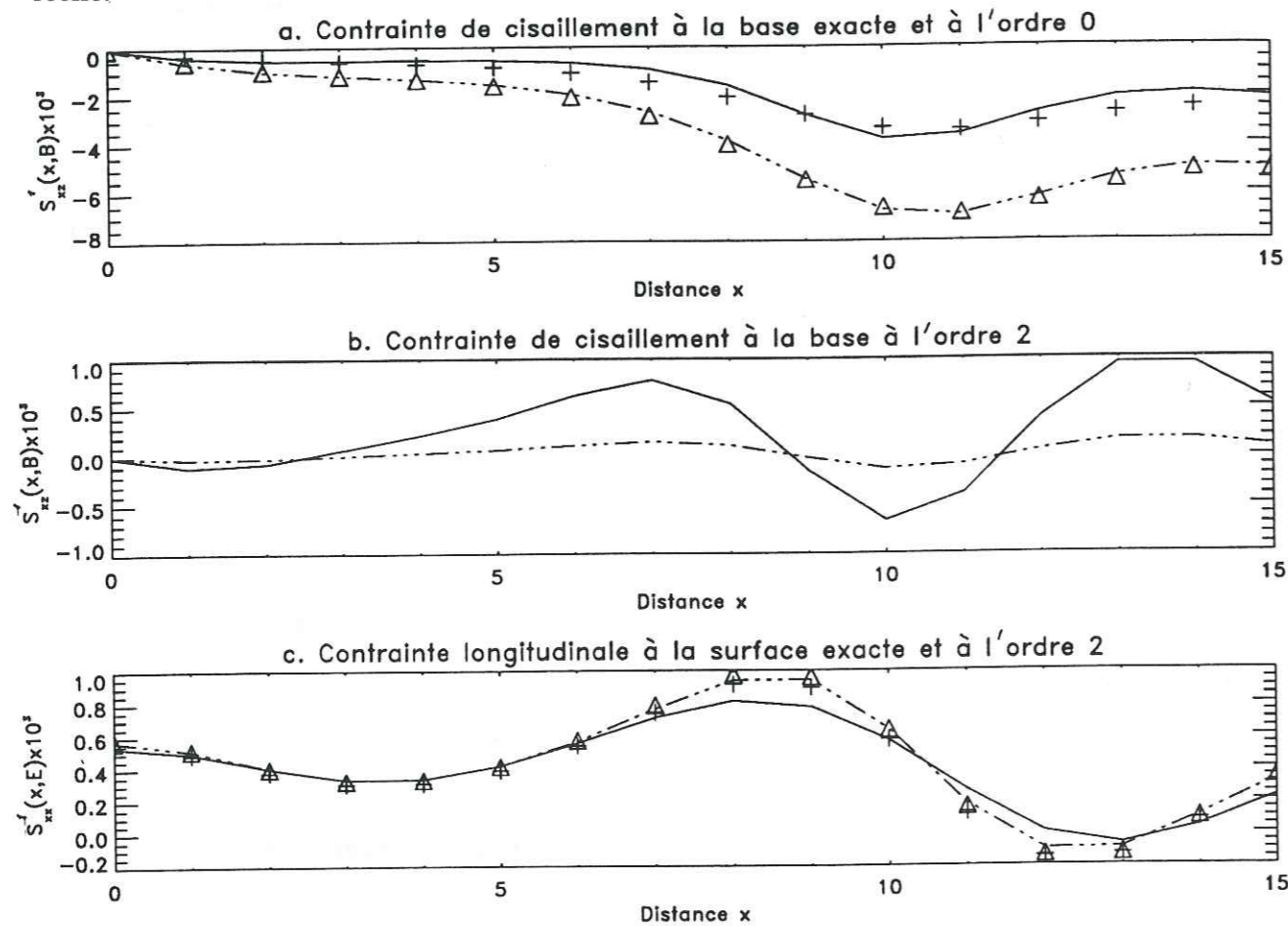


Fig. 5.8. (a) Contrainte de cisaillement à la base "exacte", c'est à dire calculée avec le modèle complet dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues) et à l'ordre 0 de la couche mince dans les cas isotrope (triangles) et anisotrope (croix); (b) Terme d'ordre 2 pour la contrainte de cisaillement à la base, dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues); (c) Contrainte longitudinale à la surface "exacte" dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues) et à l'ordre 2 de la couche mince dans les cas isotrope (triangles) et anisotrope (croix). Les contraintes sont multipliées par 10^3 .

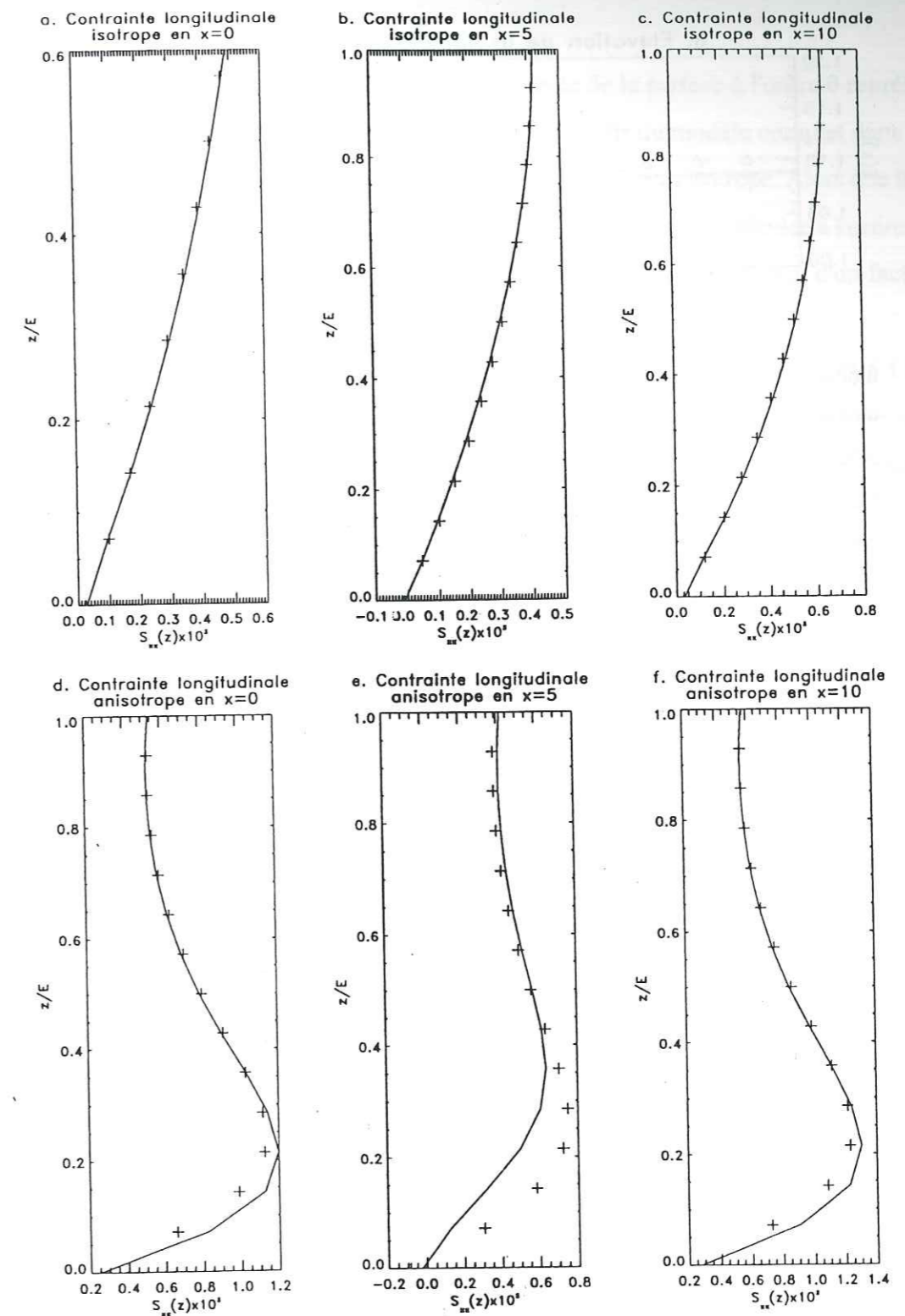


Fig. 5.9. Profils verticaux de la contrainte longitudinale dans le cas d'un socle perturbé, dans le cas isotrope (a) en $x=0$, (b) en $x=5$, (c) en $x=10$ et dans le cas anisotrope (d) en $x=0$, (e) en $x=5$ et (f) en $x=10$; les résultats obtenus à partir du modèle complet sont représentés par des lignes continues et ceux obtenus avec l'approximation de la couche mince poussée jusqu'à l'ordre 2 par des croix. Les contraintes sont multipliées par 10^3 .

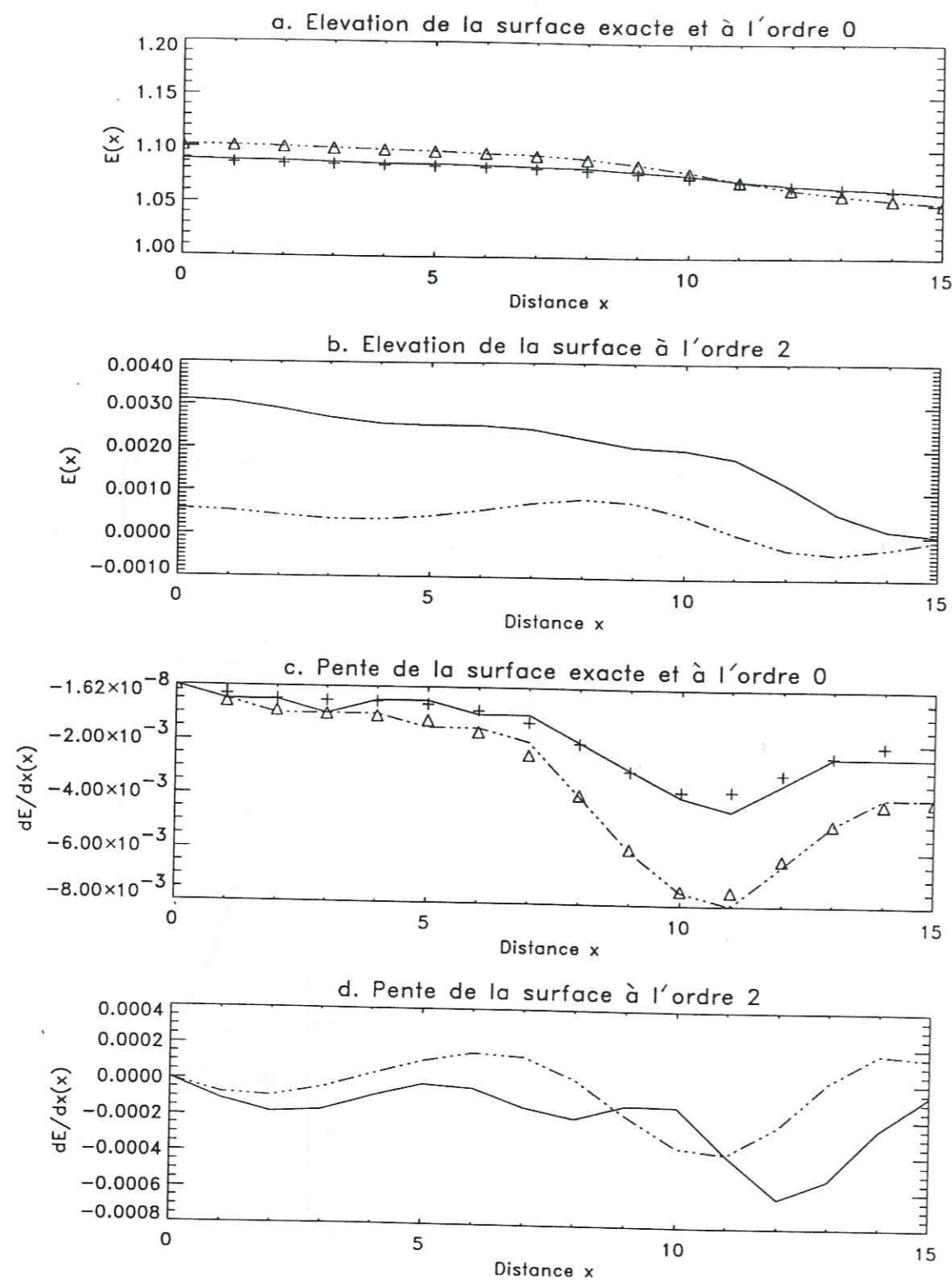


Fig. 5.10. (a) Elévation de la surface et (c) pente de la surface "exacte" dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues) et à l'ordre 0 de la couche mince dans les cas isotrope (triangles) et anisotrope (croix); terme d'ordre 2 (b) de l'élévation de la surface et (d) de la pente de la surface dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues).

La figure (5.10) montre que l'élévation et la pente de la surface à l'ordre 0 représentent assez bien l'élévation et la pente de la surface obtenues à partir du modèle complet dans les cas isotrope et anisotrope. Les résultats sont encore meilleurs dans le cas isotrope. Alors que le terme d'ordre 2 de la pente de la surface est inférieur d'un facteur 20 à la pente calculée à l'ordre 0 dans le cas isotrope, la pente à l'ordre 2 dans le cas anisotrope n'est inférieure que d'un facteur 8 à celle correspondant à l'ordre 0 en $x=11$. De la même manière, même si les vitesses à l'ordre 0 représentent bien les vitesses calculées avec le modèle complet (cf. figures 5.11.a et 5.11.c), les vitesses à l'ordre 2 sont, relativement à l'ordre 0, plus importantes dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope. La série de perturbations obtenue avec l'approximation de la couche mince converge donc moins vite dans le cas anisotrope que dans le cas isotrope: l'ordre 2 améliore significativement l'ordre 0 dans le cas anisotrope. Ceci est aussi visible sur la contrainte de cisaillement à la base (figures 5.12.a et 5.12.b).

De plus, dans le cas isotrope, le calcul à l'ordre 2 permet de représenter de manière excellente les résultats du modèle complet aussi bien pour les contraintes de cisaillement (cf. figures 5.7.a, b et c) que pour les contraintes longitudinales (figures 5.9.a, b et c). Par contre, dans le cas anisotrope, l'ordre 2 permet de se rapprocher significativement de la solution réelle, mais donne un moins bon accord avec le modèle complet que dans le cas isotrope (cf. figures 5.7 et 5.9). Les contraintes longitudinales, par exemple, ne sont pas parfaitement bien calculées avec l'ordre 2 de la couche mince. La figure (5.8.c) montre qu'à la surface, où la glace est isotrope, l'approximation de la couche mince donne à peu près la même valeur de la contrainte longitudinale dans les cas isotrope et anisotrope. Ces résultats suggèreraient que le calcul de la couche mince prend moins bien en compte l'influence de l'écoulement dans les couches profondes sur l'écoulement dans les couches superficielles. D'autre part, les profils des contraintes longitudinales en différents points (figures 5.9.d-f) montrent que les résultats de la couche mince sont moins bons au-dessus des trous (en $x=5$). Cet effet est aussi visible sur les profils des contraintes de cisaillement (cf. figure 5.7.d-f).

Dans le cas anisotrope, le moins bon accord des résultats de la couche mince avec ceux du modèle complet pour un écoulement sur un socle perturbé vient du fait que les gradients horizontaux des contraintes longitudinales $\partial S'_{xx} / \partial x$ sont très importants et leurs valeurs sans

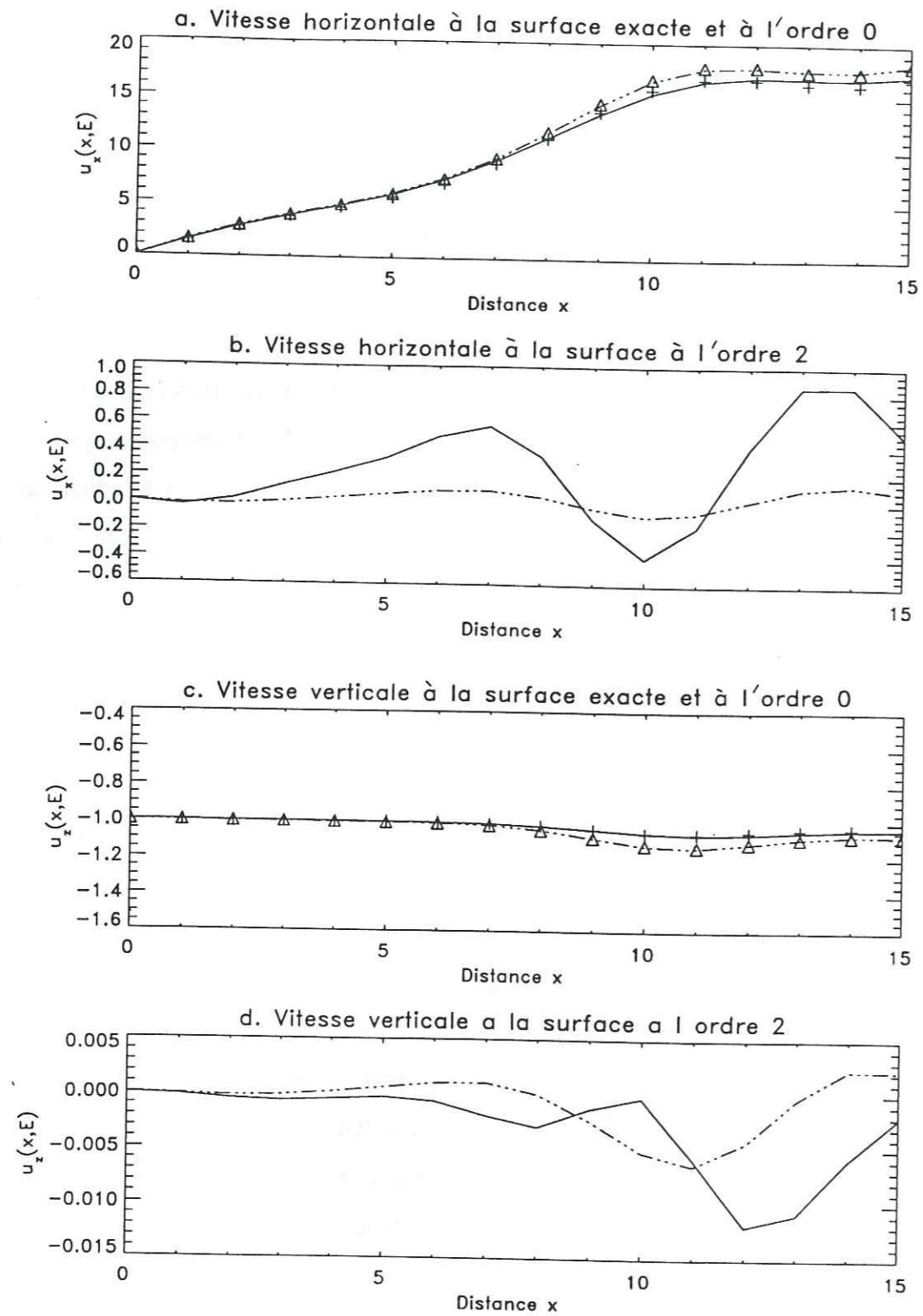


Fig. 5.11. (a) Vitesse à la surface horizontale et (c) verticale à la surface "exacte" dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues) et à l'ordre 0 de la couche mince dans les cas isotrope (triangles) et anisotrope (croix); terme d'ordre 2 (b) de la vitesse horizontale à la surface et (d) de la vitesse verticale à la surface dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues).

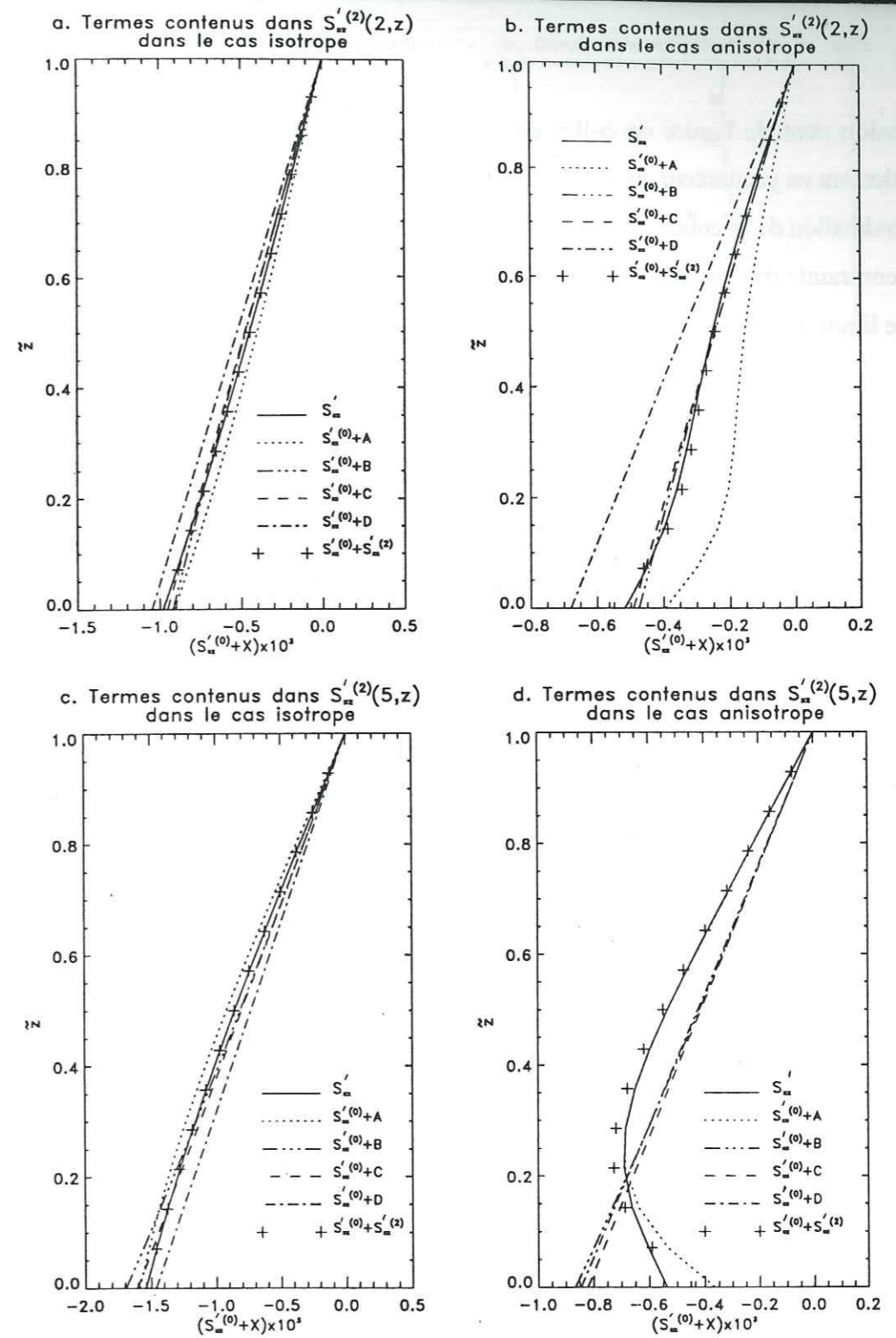


Fig. 5.12. Profils verticaux de la contrainte de cisaillement "exacte" (lignes continues) en $x=2$ (a) dans les cas isotrope et (b) anisotrope et en $x=5$ (c) dans les cas isotrope et (d) anisotrope. Les profils verticaux des différents termes $X=(A, B, C, D)$ constituant la contrainte de cisaillement à l'ordre 2, additionnés à la contrainte de cisaillement à l'ordre 0, sont aussi représentés ainsi que la contrainte de cisaillement obtenue avec l'approximation de la couche mince poussée jusqu'à l'ordre 2. Les contraintes sont multipliées par 10^3 .

dimension sont de l'ordre de celles de la pente de la surface, voire supérieures à celle-ci, spécialement en profondeur au-dessus des trous (cf. paragraphe 4 - 3.2.b). L'équation (1.41.b) de l'approximation de la couche mince à l'ordre 0 qui exprime l'équilibre entre le gradient vertical de la contrainte de cisaillement et la pente de la surface n'est alors plus valable. Une sorte de couche limite apparaît alors au-dessus des trous, qui ne vérifie plus les hypothèses de la couche mince.

5 - 5 VALIDITE DE LA REPRESENTATION DE L'ANISOTROPIE PAR UN FACTEUR MULTIPLICATIF

Dans ce chapitre, nous avons vu que l'approximation de la couche mince poussée jusqu'à l'ordre 2 dans le cas anisotrope représente assez bien l'écoulement même sur un socle irrégulier. Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 1 - 3.4.d, les seules autres tentatives menées pour prendre en compte l'anisotropie utilisaient un facteur multiplicatif *ad-hoc* $\mathcal{E}(z)$ dans la viscosité isotrope. Nous avons montré, dans le paragraphe 5 - 3, que cette méthode donne des résultats cohérents à l'ordre 0, si l'on ne rajoute pas arbitrairement le calcul des contraintes longitudinales à l'ordre 2. Nous allons comparer ici les résultats obtenus par cette méthode avec ceux obtenus en développant rigoureusement l'approximation de la couche mince dans le cas anisotrope, pour un socle irrégulier où les termes d'ordre 2 ne sont pas négligeables. Pour les applications numériques nous prendrons $\mathcal{E}(z) = M_{zz}/\eta_0$.

En fait la correction d'ordre 2 obtenue en utilisant le facteur multiplicatif est très faible par rapport à celle obtenue à partir d'un traitement rigoureux de l'anisotropie. Pour illustrer cela, nous avons représenté sur la figure 5.13 les profils verticaux de la contrainte de cisaillement, de la contrainte longitudinale et des vitesses horizontale et verticale. Les résultats à l'ordre 0 (lignes en tirets) dans le cas d'un traitement correct de l'anisotropie et dans le cas où l'on utilise un facteur multiplicatif sont les mêmes, comme nous l'avons expliqué précédemment. Les résultats de la couche mince développée jusqu'à l'ordre 2 dans le cas anisotrope (croix) se rapprochent significativement de ceux obtenus avec le modèle complet. Par contre, dans le cas où l'on

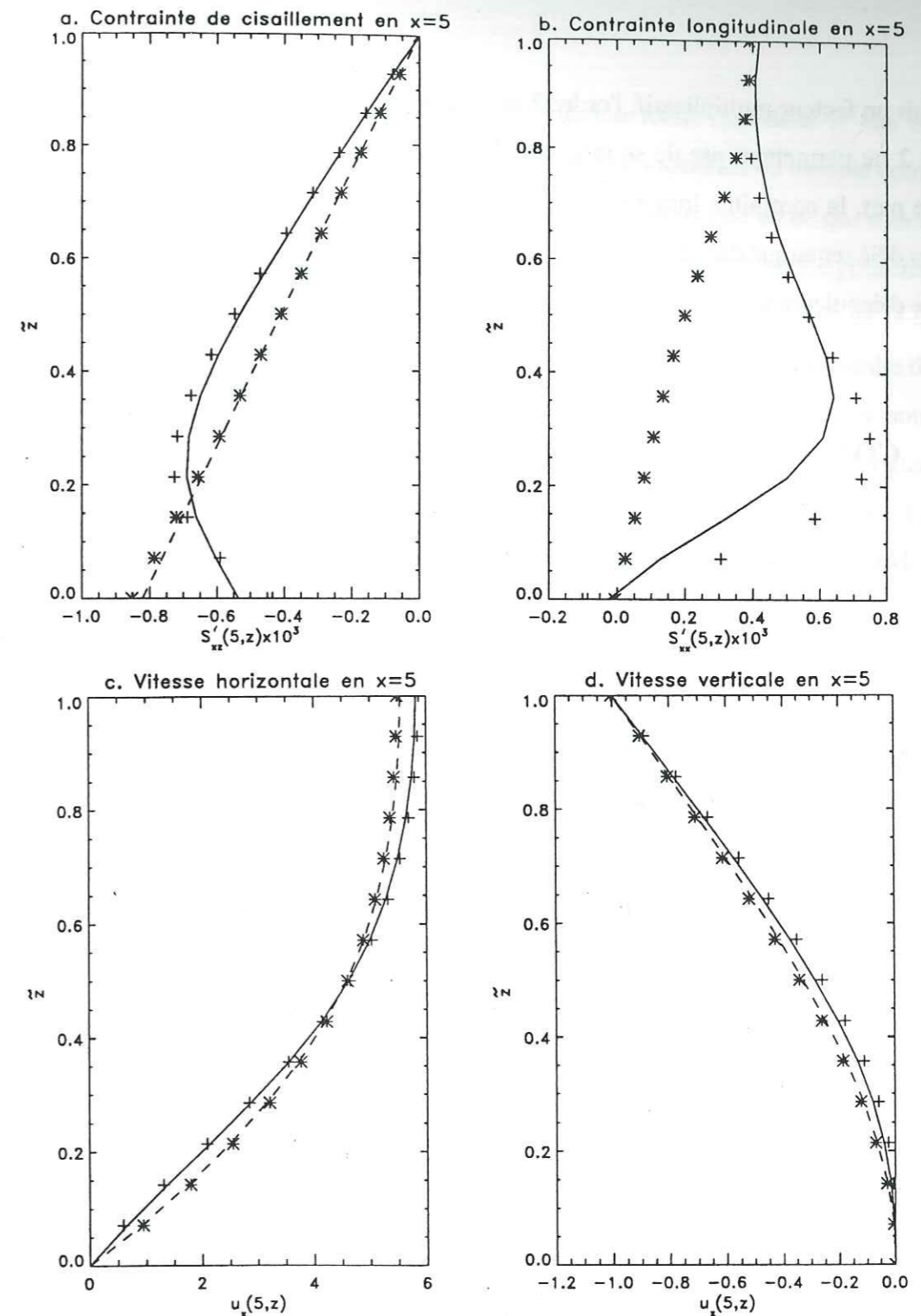


Fig. 5.13. Profils verticaux, en $x=5$, (a) de la contrainte de cisaillement, (b) de la contrainte longitudinale, (c) de la vitesse horizontale et (d) de la vitesse verticale dans le cas anisotrope; les résultats obtenus à partir du modèle complet sont représentés par des lignes continues, ceux correspondant à l'ordre 0 par des lignes en tirets, ceux obtenus avec l'approximation de la couche mince poussée jusqu'à l'ordre 2 par des croix et ceux calculés en utilisant un facteur multiplicatif par des étoiles. Les contraintes sont multipliées par 10^3 .

introduit un facteur multiplicatif, l'ordre 2 est très petit et les résultats du calcul poussé jusqu'à l'ordre 2 ne permettent pas de se rapprocher de la solution obtenue avec le modèle complet. D'autre part, la contrainte longitudinale est complètement fautive (figure 5.13.b) comme nous l'avons déjà remarqué dans le cas d'un socle plat. Ces conclusions sont valables en tout point de la ligne d'écoulement.

5 - 6 CONCLUSION

Nous avons vérifié ici, que l'approximation de la couche mince, qui simplifie énormément les équations de l'équilibre mécanique, représente bien l'écoulement Newtonien de la glace dans les cas isotrope et anisotrope. Dans le cas d'un socle plat, on obtient une très bonne estimation de l'écoulement par le calcul de l'ordre 0 de la couche mince, aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope, y compris au voisinage d'un dôme où cette approximation était reconnue pour n'être pas valable. Nous avons montré qu'en fait, le développement de la couche mince est aussi valable dans la région du dôme si le gradient longitudinal de la vitesse horizontale n'est pas trop petit dans cette région. Cet excellent accord entre l'ordre 0 de la couche mince et le modèle complet montre qu'il est inutile de développer des modèles numériques résolvant les équations d'équilibre complètes lorsque le socle est très peu perturbé. Ce résultat s'applique aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope.

Pour des perturbations importantes du relief du socle (par exemple pour des variations verticales de 50% de l'épaisseur sur une longueur de 5 épaisseurs de glace), l'approximation de la couche mince représente encore très bien l'écoulement de la glace dans le cas isotrope. Si l'ordre 0 est déjà très proche des résultats du modèle complet, l'approximation de la couche mince poussée à l'ordre 2 permet de représenter de manière excellente l'écoulement aussi bien au niveau des champs de vitesse que des champs de contraintes.

Par contre, l'ordre 0 de la couche mince ne permet pas de reproduire toute la physique de l'écoulement dans le cas anisotrope sur un lit rocheux irrégulier. La résolution de l'ordre 2 permet de se rapprocher significativement de la solution issue du modèle complet. Cependant, la solution

obtenue à l'ordre 2 n'est pas aussi proche de la solution réelle que dans le cas isotrope, spécialement au-dessus des trous du relief. Si l'accord avec les résultats du modèle complet est assez bon au niveau des champs de vitesse, il est beaucoup moins bon en ce qui concerne les contraintes. Ceci est dû à l'apparition de gradients horizontaux de contraintes longitudinales très forts dans les trous, qui modifie l'équilibre mécanique horizontal à l'ordre 0 entre le gradient vertical de la contrainte de cisaillement et la pente de la surface. S'il n'est pas nécessaire d'utiliser un modèle complet pour le calcul de l'écoulement sur un socle perturbé dans le cas isotrope, le problème se pose dans le cas anisotrope: si l'on veut estimer correctement l'âge de la glace dans les trous, il est alors nécessaire de résoudre les équations complètes de la mécanique. La glace dans les trous étant plus vieille qu'ailleurs, ces régions constitueraient un site privilégié de forage. Ceci peut être remis en question par le fait qu'il y a plus de fusion dans les trous ce qui rend les forages à ces endroits plus difficiles à interpréter.

Il serait intéressant de faire, dans les cas isotrope et anisotrope, une étude systématique pour définir les limites de validité de l'approximation de la couche mince et pour quantifier les erreurs introduites en fonction de l'amplitude et de la longueur d'onde des variations de la topographie du socle. Cela permettrait de savoir sur quel site il est possible d'appliquer l'approximation de la couche mince et d'évaluer quantitativement les erreurs faites sur les champs de vitesse et de contrainte.

Dans le cas d'un socle plat comme dans le cas d'un socle perturbé, les contraintes longitudinales à l'ordre 2 sont en excellent accord avec les contraintes longitudinales obtenues à partir du modèle complet dans le cas isotrope. Il est alors possible que l'approximation de la couche mince à l'ordre 2 soit donc aussi très bonne dans le cas d'un écoulement non-Newtonien. Cette conclusion reste valable, pour les mêmes raisons, pour un écoulement anisotrope sur un socle plat. Par contre, sur un lit rocheux irrégulier dans le cas anisotrope, les contraintes obtenues avec l'approximation de la couche mince à l'ordre 2 ne sont pas aussi bonnes que dans le cas isotrope, et le cas non-Newtonien sera sûrement encore moins bien représenté que le cas Newtonien.

Nous avons enfin montré que les tentatives pour introduire l'anisotropie avec un facteur

multiplicatif dans la viscosité isotrope mènent à des résultats aberrants dès que les contraintes longitudinales, c'est à dire les termes d'ordre 2 de la couche mince, sont pris en compte.

Rappelons que l'objectif, limité, de ce chapitre concerne la comparaison des solutions à l'ordre 0 et à l'ordre 2 de l'approximation de la couche mince avec un modèle complet. Pour dépasser cet objectif, il faudra évidemment rajouter, entres autres, le calcul de l'évolution des marges. Le comportement des marges traité avec l'approximation de la couche mince ou avec un modèle complet risque de changer les résultats respectifs des deux modèles. Les résultats pourraient alors ne pas être aussi proches. D'autre part, le développement de la couche mince a été fait pour une texture dont les axes- c sont dirigés selon la verticale *in-situ*. Si cette direction est différente, aucune composante de la matrice de viscosité ne sera nulle et d'autres termes interviendront dans le développement de la couche mince à l'ordre 2, l'ordre 0 restant le même.

CHAPITRE 6

ESQUISSE D'UNE APPLICATION AU GROENLAND CENTRAL

6 - 1 INTRODUCTION

Dans ce travail, nous avons posé les bases théoriques et numériques concernant l'introduction de l'anisotropie de la glace dans un modèle d'écoulement. Nous avons montré sur des exemples simplifiés l'effet de l'anisotropie sur l'écoulement de la glace sur un socle plat et sur un socle perturbé. La suite de ce travail sera bien sûr d'appliquer ce modèle à des sites réels. Dans ce chapitre nous ferons une première application du modèle d'écoulement au Groenland Central. Les résultats présentés ici sont évidemment préliminaires. Une analyse plus poussée dépasse le cadre de ce travail, de même qu'une comparaison des résultats avec les données disponibles.

Commençons par préciser la situation à laquelle nous allons nous intéresser. Deux carottages profonds ont récemment été réalisés jusqu'au lit rocheux, près du dôme de la calotte polaire groenlandaise; le premier, GRIP (GREENland Ice core Project), est situé au sommet de la calotte polaire du Groenland ($72^{\circ}37'N$, $37^{\circ}28'W$, 3238 m d'altitude), tandis que le second, GISP2 (Greenland Ice Sheet Programme 2), est situé à 28 km à l'ouest de Summit ($72^{\circ}35'N$, $38^{\circ}28'W$, 3215 m d'altitude) (cf. figure 1.6). Ces carottes de glace contiennent des enregistrements à haute résolution des conditions climatiques et atmosphériques passées [GRIP member, 1993; Dansgaard et al., 1993; Taylor et al., 1993; Alley et al., 1993]. Cependant, l'exploitation des enregistrements climatiques des glaces les plus anciennes (l'Eemien interglaciaire et la glaciation qui l'a précédé) est jusqu'à présent impossible, car la stratigraphie des 300 derniers mètres de glace est perturbée [Grootes et al., 1993; Taylor et al., 1993]. Un

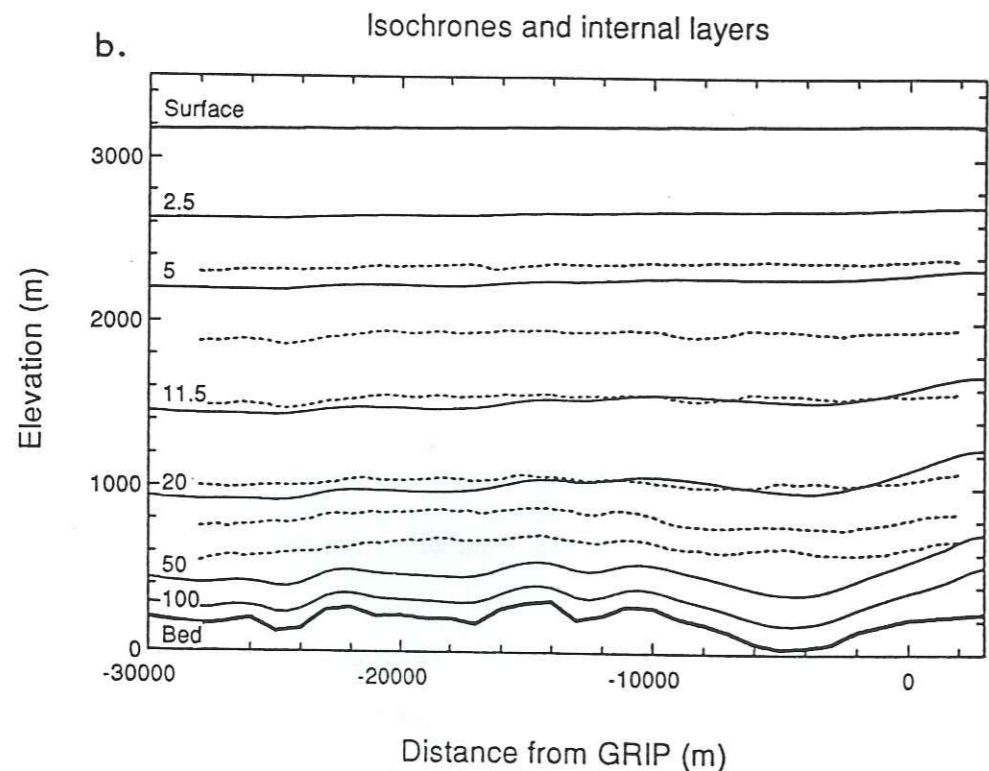
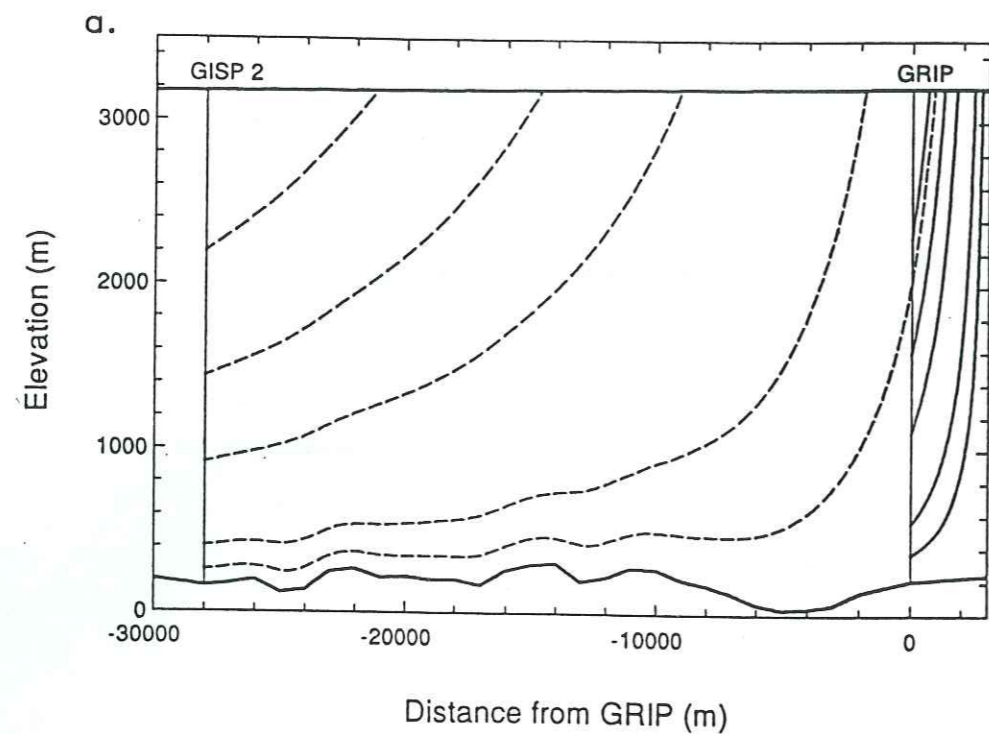


Fig. 6.1. (a) Trajectoires des particules de glace calculées par Schott Hvidberg et al. [1996], de la surface à GRIP (lignes continues) et à GISP2 (lignes en tirets). Les trajectoires correspondent à des glaces d'âge 5, 11.5, 20, 50 et 100 kyr BP quand elles sont prélevées aux sites de forage; (b) isochrones calculées pour un écoulement à l'état stationnaire par Schott Hvidberg et al. [1996], avec les âges exprimés en kyr BP (lignes continues), et les couches de réflexion internes observées par radar [Hempel et Thyssen, 1992] (lignes en pointillés).

mélange mécanique dans les couches basales, qui devrait à priori être favorisé par le comportement anisotrope des glaces profondes, serait une explication possible de cette perturbation. Il faut donc utiliser un modèle d'écoulement pour interpréter les mesures *in-situ* et calculer les champs de contrainte, de température et de vitesse qui ne peuvent être mesurés directement. De nombreuses données sont disponibles pour contraindre et tester ce modèle d'écoulement. Des mesures de topographie, de vitesse en surface, d'inclinométrie et de température ont été faites dans cette zone. [ex. Homann et Möller, 1993; Koch, 1993; Gundestrup et al., 1993, Keller, 1995].

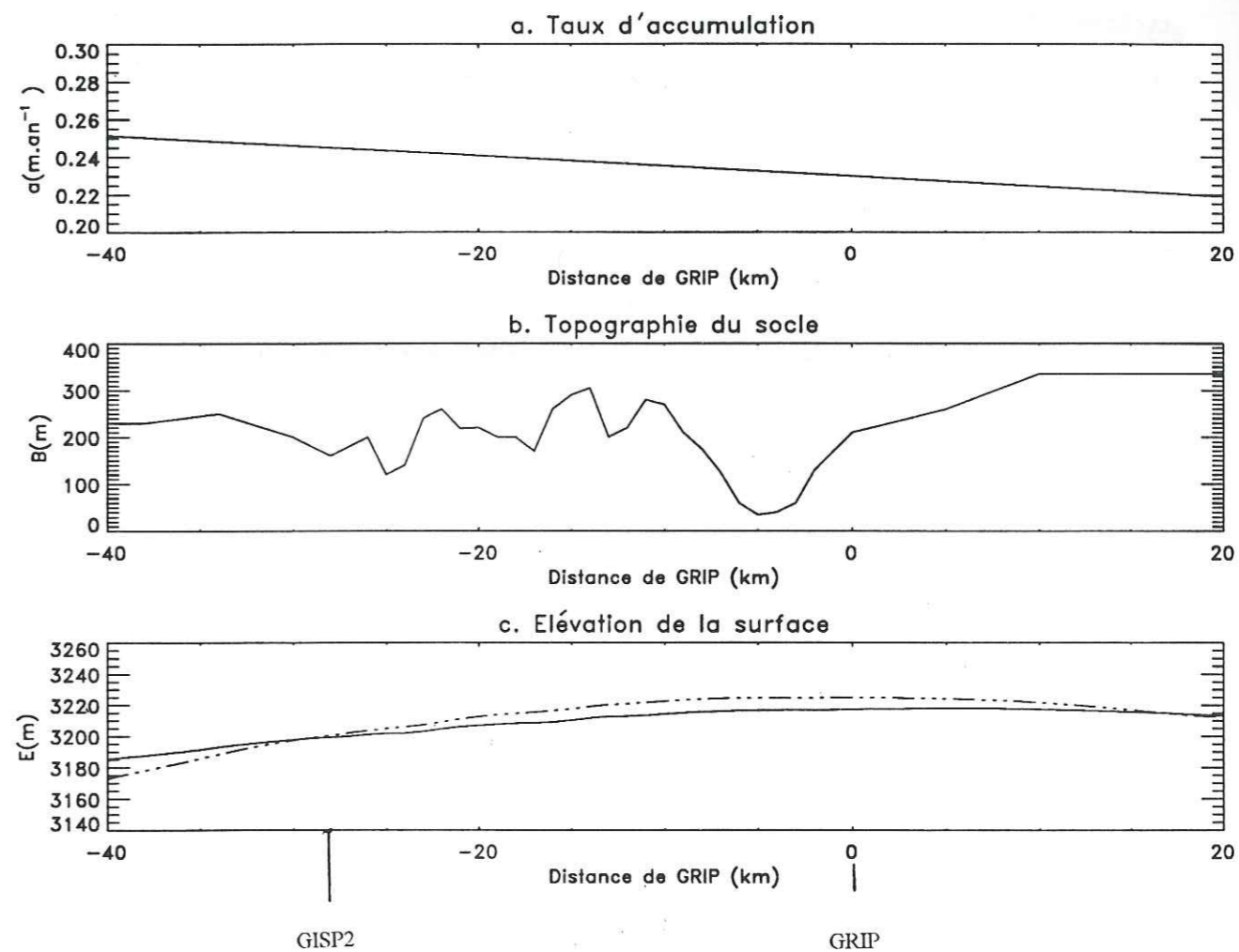


Fig. 6.2. (a) Taux d'accumulation imposé le long de la ligne d'écoulement (en $m.an^{-1}$), (b) topographie du socle imposée (en m), (c) élévation de la surface calculée avec le modèle (en m) dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues). Les distances le long de la ligne d'écoulement sont mesurées en km à partir de GRIP, les distances positives sont situées à l'Est de GRIP, les distances négatives à l'Ouest.

Plusieurs modèles ont déjà été appliqués à cette région: à Crète, qui est situé à peu près 150 km au sud de Summit [Dahl-Jensen, 1989a; Paterson et Waddington, 1986] et à Summit [Firestone et al., 1990; Schott et al., 1992]. Récemment un modèle aux éléments finis résolvant les équations complètes de la mécanique, l'équation de la chaleur et incluant les effets transverses en terme de divergence de l'écoulement a été appliqué à la ligne d'écoulement entre GRIP et GISP2 [Schott Hvidberg, 1993; Schott Hvidberg et al., 1996] (cf. figure 6.1). Dans ce modèle, la glace est supposée avoir un comportement non-Newtonien ($n=3$) et l'anisotropie est représentée par l'introduction d'un facteur multiplicatif dans la viscosité isotrope (cf. chapitre 1 et chapitre 5). Nous ferons une application de notre modèle complet sur la même ligne de courant (GRIP-GISP2), et donnerons une toute première estimation des effets de l'anisotropie sur l'écoulement de la glace dans cette région du Groenland Central.

6 - 2 APPLICATION DU MODELE D'ECOULEMENT A LA LIGNE DE COURANT GRIP-GISP2

6 - 2.1 Données

Nous utiliserons ici les mêmes données que Schott Hvidberg [1993] et Schott Hvidberg et al. [1996] et nous supposons que:

1. L'écoulement a atteint l'état stationnaire.
2. Le taux d'accumulation varie linéairement le long de la ligne d'écoulement (cf. figure 6.2.a).
3. Ce taux d'accumulation est déterminé par les taux d'accumulation actuels à GRIP et GISP2, respectivement 0.23m.an^{-1} à GRIP [Dahl-Jensen et al., 1993] et 0.245m.an^{-1} à GISP2 [Meese et al., 1994].

4. La topographie du socle utilisée dans notre modèle, déduite de ces deux ensembles de données, est représentée sur la figure 6.2.b; elle combine les données de Hodge et al. [1990], et celles, à plus haute résolution, de Hempel et Thyssen [1992].

5. Les textures utilisées dans la loi de comportement anisotrope de Lliboutry [1993] sont celles mesurées à GRIP [Thorsteinsson et al., 1995] (cf. paragraphe 2 - 4.3). Nous avons pris une texture indépendante de la direction horizontale; cela se justifie car les textures mesurées à GISP2 [Anandakrishnan et al., 1994] présentent des caractéristiques similaires à celles mesurées à GRIP.

6. Nous avons utilisé le profil de température calculé par Schott Hvidberg et al. [1996] à GRIP. Ce profil, représenté sur la figure (6.3), est supposé constant le long de la ligne de courant.

7. La glace a un comportement Newtonien.

6 - 2.2 Conditions de calcul

Nous calculerons l'écoulement stationnaire sur la ligne de courant GRIP-GISP2, pour un profil de température prescrit dans les cas isotrope et anisotrope. Ce site est spécialement bien adapté pour appliquer notre modèle. En effet les textures mesurées à GRIP et GISP2 présentent à peu près une symétrie de révolution, ce qui permet d'appliquer la loi de Lliboutry [1993] que nous avons présentée dans le chapitre 2. D'autre part, les mesures dans les trous de forage donnent une température près du lit rocheux de l'ordre de -10°C à GRIP [Gundestrup et al. 1993], ce qui permet d'imposer des conditions de vitesse nulle au fond de la calotte. De plus, une loi de comportement Newtonienne pour la glace doit être mieux adaptée près du dôme qu'une loi non-Newtonienne car, d'une part, la cisssion efficace est faible près du dôme et, d'autre part, l'utilisation d'une loi puissance ($n=3$) conduit à une remontée des isochrones dans la région du dôme (cf. figure 6.1.b), qui n'est pas observée *in-situ* [Hempel et Thyssen, 1992; Jacobel et

Hodge, 1995].

Pour dimensionner les équations mécaniques (cf. équation 1.17), nous avons utilisé une vitesse caractéristique $[u]=0.24\text{m.an}^{-1}$, qui correspond au taux d'accumulation moyen entre GRIP et GISP2, et une hauteur caractéristique $[d]=2000\text{m}$.

Nous avons étendu la ligne d'écoulement sur 10 épaisseurs de glace des deux côtés des trous de forage de manière à obtenir un écoulement au voisinage de ces trous qui soit indépendant des conditions aux limites imposées sur les bords gauche et droit du domaine de calcul (cf. discussion du paragraphe 3 - 5.2). Les conditions aux limites sur les côtés sont données en calculant les flux à partir des taux d'accumulation (cf. paragraphe 3 - 5.2), en supposant que la position du dôme soit située au niveau du forage de GRIP. Contrairement à Schott Hvidberg et al. [1996], nous avons imposé un socle plat à partir de 10 km à l'est de GRIP et 10 km à l'ouest de GISP2.

La grille numérique utilisée contient 67 points dans la direction horizontale et 21 points dans la direction verticale. La résolution spatiale horizontale est donc de $\sim 1.2\text{ km}$.

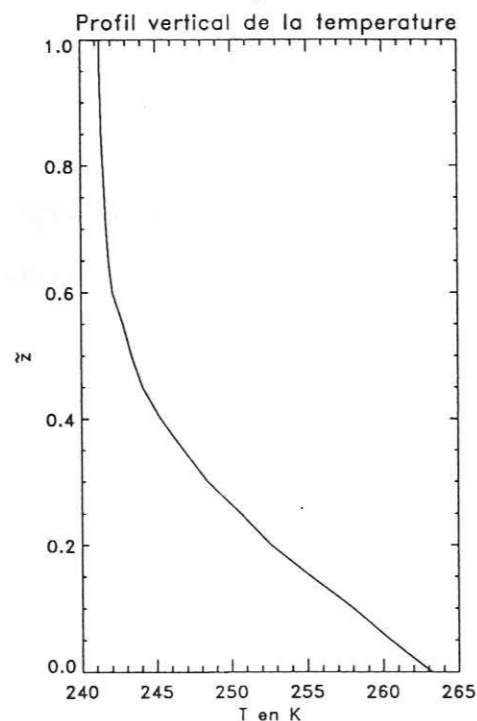


Fig. 6.3. Profil vertical de la température calculé par Schott Hvidberg [1996] à GRIP et imposé le long de la ligne d'écoulement; la température est exprimée en Kelvin en fonction de la hauteur réduite.

6 - 3 RESULTATS

La figure 6.4 montre les lignes de courant dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues). Il est immédiatement visible que l'anisotropie modifie significativement l'écoulement. Le résultat le plus remarquable est que la prise en compte de l'anisotropie change la position présumée du dôme. Dans le cas anisotrope, celui-ci est décalé vers l'est ($\sim 1\text{ km}$). Cette position se rapproche de la position supposée du dôme; en effet, le dôme serait situé à 3 km à l'est de GRIP selon les mesures de l'élévation de la surface et de la vitesse en surface qui est de 0.2 m.an^{-1} dans la direction NW [Keller et al., 1995]. De plus, si la ligne de dôme (ligne de partage des glaces) est pratiquement verticale dans le cas isotrope, elle est plus sinueuse dans le cas anisotrope. Les lignes de courant sont légèrement moins sensibles au relief dans le cas anisotrope.

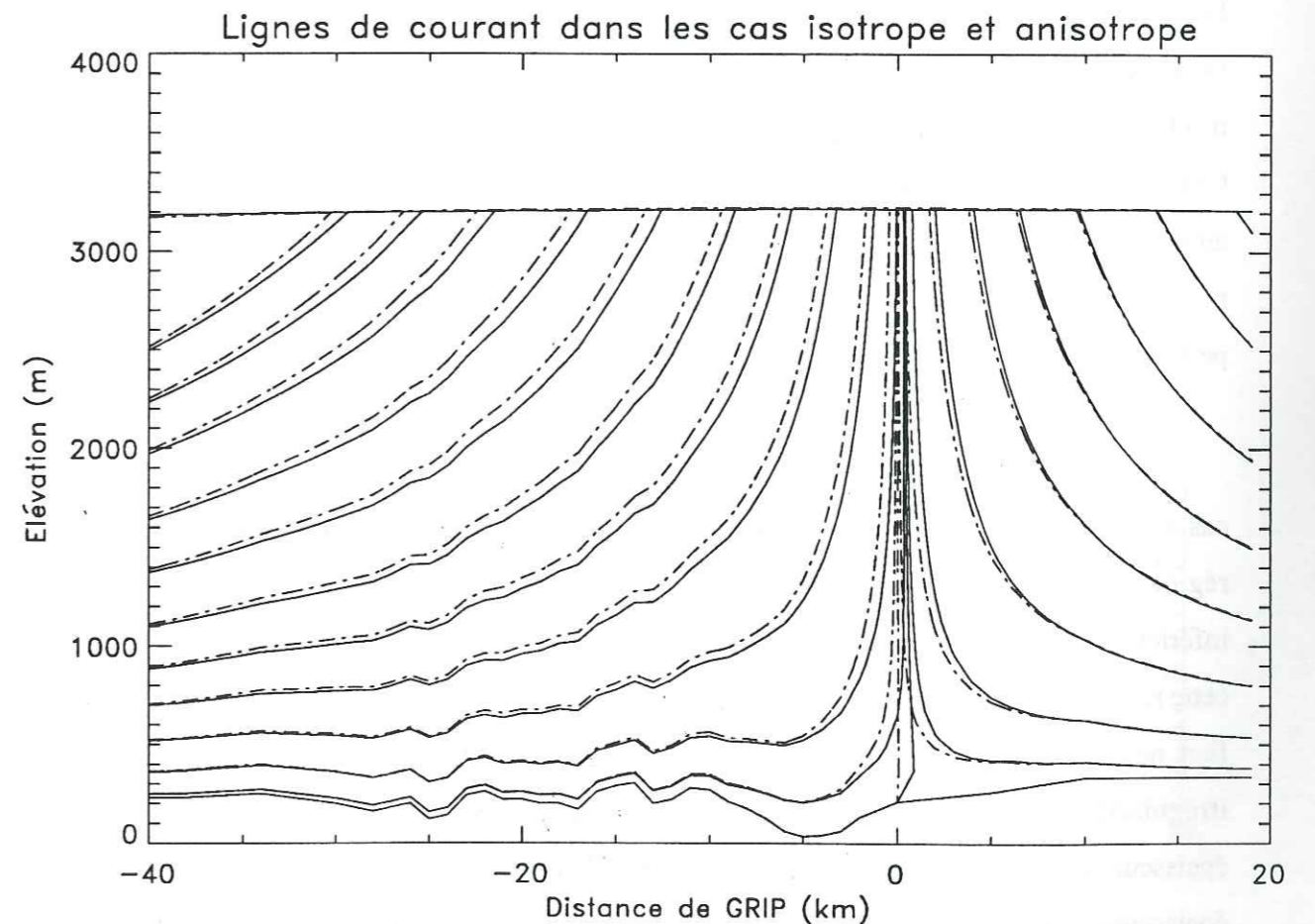


Fig. 6.4. Lignes de courant et élévation de la surface calculées par le modèle dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues).

L'élévation de la surface dans le cas anisotrope est plus plate que dans le cas isotrope (cf. figure 6.2.c), comme nous l'avons observé sur d'autres exemples dans le chapitre 4. Il est surprenant que l'on retrouve, avec ce modèle simplifié (écoulement stationnaire, température prescrite, ...), des valeurs de l'élévation de la surface proches des valeurs réelles. L'écart avec les mesures d'élévation de la surface est de moins de 5m dans le cas isotrope et de 10m dans le cas anisotrope.

La figure (6.5.a) montre que la distribution des vitesses de déformation en cisaillement est différente dans les cas isotrope et anisotrope. En particulier, alors que la vitesses de déformation en cisaillement est quasiment nulle à GRIP dans le cas isotrope, elle atteint presque 10^{-4} an^{-1} dans les couches basales dans le cas anisotrope. Ce résultat est cohérent avec les toutes premières mesures d'inclinométrie réalisées à GRIP. A GIPS2, (28km à l'ouest de GRIP), l'écoulement, déjà dominé par un régime de cisaillement, est de même nature dans les cas isotrope et anisotrope. Les vitesses de déformation en cisaillement sont plus faibles dans la moitié supérieure de la calotte et plus grandes dans la moitié inférieure dans le cas anisotrope. Ces résultats suggèrent que l'écoulement est beaucoup plus perturbé par les effets de l'anisotropie au voisinage d'un dôme que dans une région dominée par les déformations en cisaillement. On peut aussi remarquer que les isovaleurs des vitesses de déformation en cisaillement sont moins perturbées par la topographie du socle dans le cas anisotrope.

Nous avons représenté sur la figure (6.5.b) les isovaleurs de la cission efficace τ_e dans les cas isotrope et anisotrope pour avoir une idée de l'ordre de grandeur des contraintes dans la région située entre GRIP et GIPS2. Les valeurs de la contrainte efficace sont faibles, partout inférieures à 0.7 bars, ce qui valide l'utilisation d'une loi de comportement Newtonienne dans cette région (cf. paragraphe 2 - 3.2) aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope. Il faut noter que la topographie du socle est assez peu perturbée. En effet les plus grandes irrégularités sont des variations verticale de 5% de l'épaisseur de glace sur une distance de 1 épaisseur vers 24 km à l'ouest de GRIP ou de 8% de l'épaisseur sur une distance de moins de 2 épaisseurs vers 8 km à l'ouest de GRIP. Dans ce cas l'approximation de la couche mince poussée à l'ordre 2 doit suffire pour représenter correctement l'écoulement aussi bien dans le cas isotrope que dans le cas anisotrope (cf. chapitre 5). Cette conclusion reste à vérifier dans le cas anisotrope.

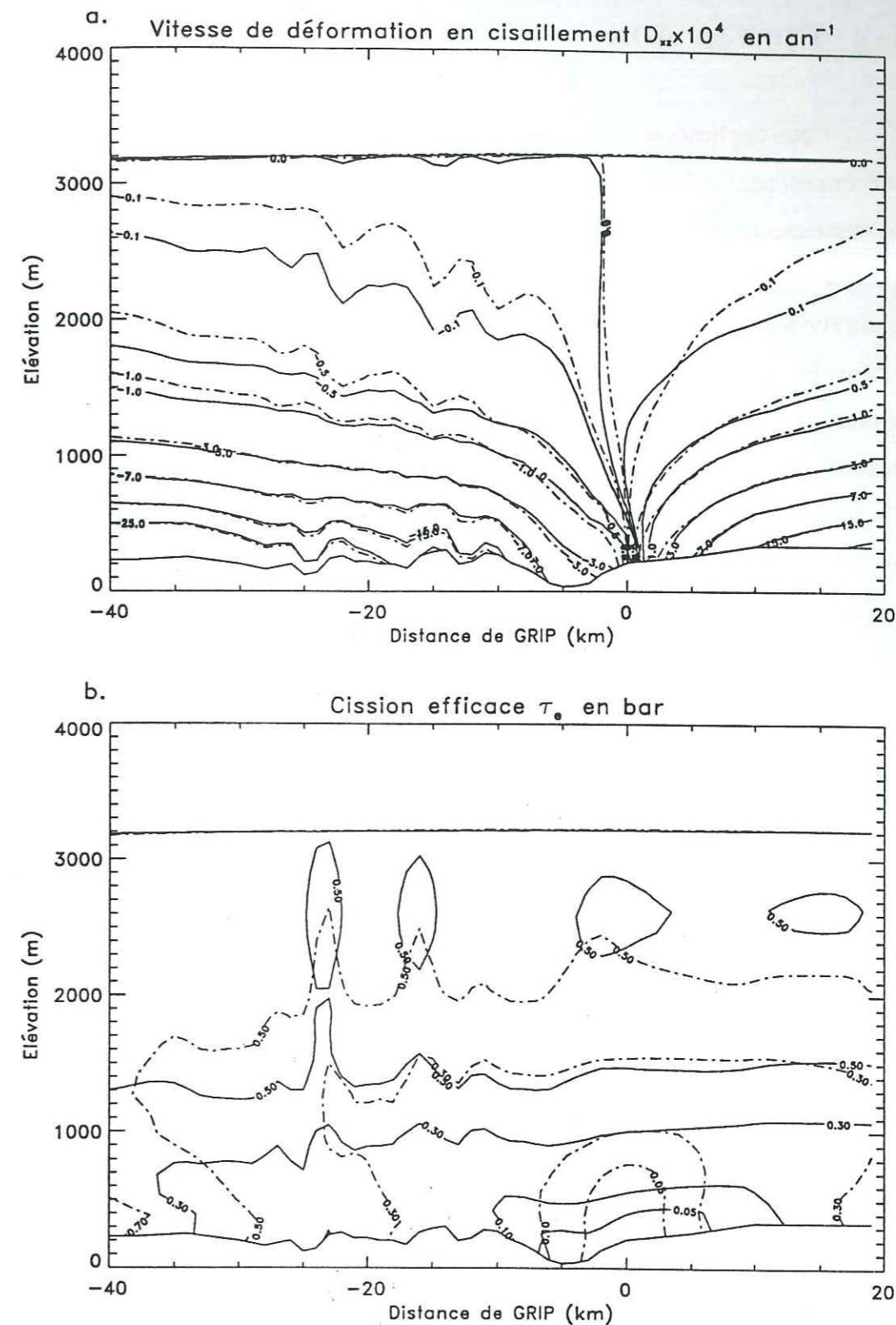


Fig. 6.5. Isovaleurs (a) de la vitesse de déformation en cisaillement, multipliée par 10^4 et exprimée en an^{-1} et (b) de la cission efficace exprimée en bar, dans les cas isotrope (lignes en tirets-pointillés) et anisotrope (lignes continues).

6 - 4 CONCLUSION

Cette application n'est qu'un tout premier pas, les conditions prévalant à GRIP n'étant évidemment pas fidèlement représentées. En réalité l'écoulement de la glace n'est certainement pas exactement à déformation plane près du site de GRIP, où les pentes de la surface de la calotte divergent radialement [Schott et al., 1992]. Les effets transverses ont d'ailleurs été étudiés par Schott Hvidberg [1996]. Le profil de température n'est pas constant selon la direction horizontale, et l'équation de la chaleur doit être résolue pour pouvoir représenter correctement l'écoulement. De plus, une légère variation de la texture selon la direction horizontale, ainsi que la présence de couches de recristallisation dans les glaces basales (comme cela a été observé à GRIP [Thorsteinsson et al., 1995]) sont susceptibles de modifier l'écoulement. A cause de ces simplifications nos résultats ne sont pas directement utilisables pour des interprétations climatiques.

Cependant, ils nous ont permis de mettre en évidence deux résultats importants concernant l'effet de l'anisotropie sur l'écoulement sur un lit rocheux asymétrique. La position du dôme change si l'on prend en compte l'anisotropie de la glace et la ligne de partage des glaces est plus sinueuse. Ces tendances seront certainement plus marquées si l'on considère une texture plus réaliste, qui ne présente pas exactement une symétrie de révolution autour de $z'z$. L'interprétation des données climatiques enregistrées au voisinage d'un dôme sera donc certainement plus difficile à cause de la perturbation de l'écoulement à cet endroit, perturbation amplifiée par une éventuelle migration du dôme.

CONCLUSION

CONCLUSION

Il n'existe aujourd'hui que très peu de travaux concernant l'effet de l'anisotropie de la glace sur l'écoulement dans les calottes polaires. Le travail qui a été présenté ici ne peut donc être que partiel et ne prétend pas apporter de conclusions définitives; en particulier il ne prétend pas aboutir à un modèle d'écoulement immédiatement utilisable pour la datation des carottes glaciaires. Notre démarche a consisté à développer progressivement un modèle qui ne prend pas encore en compte tous les mécanismes intervenant dans l'écoulement de la glace dans les calottes polaires, mais qui nous a permis d'isoler certains effets, et en particulier ceux de l'anisotropie.

Nous avons procédé de deux manières différentes. Nous avons développé d'une part un modèle 2D original et robuste résolvant les équations mécaniques complètes, et d'autre part l'approximation de la couche mince adaptée au cas anisotrope. L'utilisation du modèle complet nous a permis d'interpréter les effets de l'anisotropie sans les confondre avec des erreurs dues à d'éventuelles approximations. Nous avons estimé les limites de l'approximation de la couche mince, qui simplifie énormément les équations à résoudre, en comparant les résultats obtenus avec ceux du modèle complet. A notre connaissance, aucune tentative n'avait été faite jusque là pour évaluer la manière dont l'ordre 0 de la couche mince représente l'écoulement, même dans le cas isotrope. Nous avons ainsi montré que l'écoulement de la glace sur un socle plat dans les cas isotrope et anisotrope est représenté de manière excellente par l'ordre 0 de la couche mince, y compris dans la région du dôme. Nous avons aussi mis en évidence la nécessité d'utiliser l'ordre 2 pour obtenir une bonne approximation d'un écoulement isotrope sur un lit rocheux perturbé. Par contre, pour un écoulement anisotrope sur un socle perturbé, il s'avère nécessaire d'utiliser un modèle complet si l'on veut décrire correctement l'écoulement.

Les hypothèses simplificatrices que nous avons faites dans l'ensemble de ce travail se situent d'une part au niveau de la représentation de l'écoulement et d'autre part au niveau de la

loi de comportement anisotrope. En ce qui concerne l'écoulement, la plus grosse simplification est liée au découplage du champ de température, que nous avons pris constant, et des champs de vitesses. Evidemment, cela introduit un certain irréalisme car, comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, la résolution de l'équation de la chaleur peut modifier certains effets introduits par l'anisotropie. De plus, nous nous sommes limités au cas d'un écoulement bidimensionnel. La loi de comportement anisotrope utilisée [Lliboutry, 1993], qui permet de relier la rhéologie d'un polycristal à sa texture, est limitée par le fait qu'elle ne permet pas le calcul du développement de texture avec la déformation. Nous n'avons traité numériquement que le cas Newtonien ($n=1$).

Pourtant, ce travail a révélé deux résultats importants qui permettent de se faire une première idée des effets de l'anisotropie sur l'écoulement. Nous avons mis en évidence que l'effet de l'anisotropie se partage entre la déformation de la surface libre et modification des vitesses de déformation. Si l'on prend en compte l'anisotropie de la glace, la surface obtenue est plus plate que dans le cas isotrope et les vitesses de déformation en cisaillement sont plus fortes et plus concentrées à la base du glacier. L'autre résultat important est que l'écoulement de la glace anisotrope est moins sensible aux variations de la topographie du socle. Tout se passe comme si la glace s'écoulait sur un socle effectif moins perturbé que le socle réel. Une sorte de couche limite apparaît dans les creux du relief où la glace est plus stagnante que dans le cas isotrope. Ceci a de grandes conséquences sur la datation: si l'anisotropie des glaces n'est pas prise en compte, l'erreur sur l'estimation de l'âge de la glace peut atteindre un facteur 2.

Nous avons donc franchi un premier pas dans la compréhension des effets de l'anisotropie de la glace sur l'écoulement. Nos résultats invalident les précédentes tentatives menées jusque là qui utilisaient un facteur multiplicatif dans la viscosité isotrope pour introduire l'anisotropie de la glace. Si cette méthode conduit à des résultats cohérents quand on ne considère que l'ordre 0 de la couche mince, c'est à dire si l'on néglige les contraintes longitudinales, elle mène à des conclusions erronées dans tous les autres cas.

Comme nous l'avons dit précédemment, une des suites immédiates de ce travail est de représenter de manière plus réaliste l'écoulement de la glace en résolvant l'équation de bilan thermique et en traitant le cas d'un écoulement non-Newtonien ($n=3$). Nous avons montré que

la loi de comportement utilisée dans ce travail [Lliboutry, 1993] sous-estime l'anisotropie des glaces polaires dans le cas d'un comportement Newtonien. Le profil radicalement différent de la contrainte effective dans le cas anisotrope suggère une plus forte influence de l'anisotropie pour des écoulement non-Newtonien, puisque les viscosités dépendent alors du deuxième invariant des contraintes. Ces effets seront certainement plus complexes car des termes d'interaction entre les contraintes apparaissent alors dans la loi de comportement. Ces applications ne présentent pas de difficulté de fond. Notre programme a été conçu de manière à pouvoir intégrer facilement le calcul de la température et un comportement non-Newtonien, pour traiter le cas d'un écoulement non-stationnaire, ainsi que pour être facilement étendu au cas tridimensionnel.

L'autre perspective consiste à prendre en compte une loi de comportement calculant la réponse anisotrope de la glace en fonction de l'histoire de la déformation. Cette loi de comportement complexe pourra être décrite par un modèle numérique, du type auto-cohérent ou statique. Notre modèle d'écoulement peut être couplé sans problème à une telle loi de comportement. L'histoire de la déformation sera déterminée en chaque point du maillage et servira d'entrée à un modèle micro-macro calculant la réponse anisotrope de la glace ainsi que l'évolution de texture en ce point. Il reste à faire une étude de sensibilité sur l'effet de la symétrie, de l'orientation et de la concentration des textures sur l'écoulement. En particulier, l'effet de textures dont les axes- c sont dirigés dans un plan vertical (Vostok, Antarctique) doit être étudié. L'influence de la forme de la texture sur l'écoulement sera certainement grande car les paramètres rhéologiques sont spécialement sensibles à l'orientation et à la concentration des axes- c en profondeur, où l'anisotropie est plus forte. Enfin, l'écoulement s'est avéré être très sensible à la présence d'une couche de recristallisation près du lit rocheux.

L'étude des effets de l'anisotropie a des conséquences pratiques importantes car ces effets modifient significativement la datation. En particulier, la prise en compte de l'anisotropie peut influencer le choix d'un site de forage. Nous ne pouvons pas encore utiliser directement les résultats de ce travail pour tirer des conclusions définitives, mais cette étude nous a montré la nécessité de poursuivre les investigations dans les directions que nous avons suggéré pour obtenir une datation dont la précision soit compatible avec celle des mesures *in-situ* réalisées actuellement.

ANNEXES

ANNEXE A

FORMULES DE DERIVATION DANS LE SYSTEME DE COORDONNEES (ζ, ξ, t)

Une variable C exprimée dans le repère (x, z, t) par $A(x, z, t)$ s'exprime dans le repère (ζ, ξ, t) par $A(\zeta, \xi, t)$. Dans notre changement de variable $\zeta=x$ donc $A=A(x, \xi, t)$. La formulation des dérivées dans le repère (x, ξ, t) est donnée en détail par Haltiner et Williams [1980]. Nous rappellerons ici les expressions des dérivées premières de C dans ce repère. Selon la définition de ξ (3.31), la dérivée de A par rapport à ξ s'écrit:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} = -H \frac{\partial A}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

Soit r une variable représentant x ou t , la dérivée de C par rapport à r dans le repère (x, ξ, t) est donnée en fonction de sa dérivée exprimée dans le repère (x, z, t) par:

$$\left[\frac{\partial A}{\partial r} \right]_{\xi} = \left[\frac{\partial A}{\partial r} \right]_z + \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} \left[\frac{\partial z}{\partial r} \right]_{\xi} \quad (\text{A.2})$$

Ce qui donne, en utilisant la définition de ξ :

$$\left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]_{\xi} = \left[\frac{\partial A}{\partial x} \right]_z + \frac{1}{H} \frac{\partial A}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial x} \right) \quad (\text{A.3})$$

et

$$\left[\frac{\partial A}{\partial t} \right]_{\xi} = \left[\frac{\partial A}{\partial t} \right]_z + \frac{1}{H} \frac{\partial A}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (\text{A.4})$$

La seule dérivée par rapport à t intervenant dans notre modèle est la dérivée temporelle de l'épaisseur H dans l'équation d'évolution (3.37). L'épaisseur H ne dépendant pas de z , ses dérivées temporelles dans le repère (x, ξ, t) et dans le repère (x, z, t) sont identiques.

ANNEXE B

SOLUTION ANALYTIQUE POUR UNE HAUTEUR PLATE

B - 1 Solution analytique

La partie dynamique du code a été testée avec une solution analytique réduisant les équations mécaniques à un cas simple: celui de l'écoulement stationnaire d'un matériau isotrope, de viscosité constante η dans une géométrie rectangulaire (élévation du socle et de la surface horizontaux). On cherche le profil de la vitesse horizontale qu'il faut imposer aux extrémités gauche et droite du domaine, ainsi que l'accumulation compatible avec la géométrie imposée ($B(x)=0, E(x)=H(x)=1$). La solution analytique est obtenue en introduisant un potentiel des vitesses ψ , dont les isovalues représentent les lignes de courant:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial z} \\ u_z &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement (3.3a) et (3.3c) deviennent alors:

$$\begin{aligned} -\eta \partial_z (\Delta \psi) &= \partial_x p \\ \eta \partial_x (\Delta \psi) &= \partial_z p \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En dérivant (B.2a) par rapport à z et (B.2b) par rapport à x et en faisant la différence, on obtient l'équation de Poisson pour ψ :

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad (\text{B.3})$$

On cherche des solutions polynômiales de degré 4 pour ψ . Un profil polynômial de degré 4 en

x pour la vitesse de glissement u_G est donc imposé. Les conditions aux limites s'écrivent alors:

A la base, en $z=0$:

$$\begin{aligned} u_z(x,z) &= \partial_x \psi = 0 \\ u_x(x,z) &= -\partial_z \psi = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + g_4 x^4 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

A la surface, en $z=H$, la condition de surface libre (1.13) impose, pour une pente nulle:

$$\begin{aligned} p &= p_{atm} - 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \tau_{xz} &= \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ce qui donne les conditions sur ψ en $z=H$:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \psi - \partial_z^2 \psi &= 0 \\ -2\eta \partial_{xz}^2 \psi &= p_{atm} - p \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Les polynômes de degré maximum 4, ψ et p , solutions de ces équations sont:

$$\begin{aligned} \psi(x,z) &= C - g_0 z - g_1 x z + g_2 (-4Hz^2 - x^2 z + z^3) + g_3 (-12Hxz^2 - x^3 z + 3xz^3) \\ p(x,z) &= p_{atm} - 2\eta(g_1 + 2g_2 x + 3g_3 x^2) + 6\eta g_3 (z^2 - 4Hz) - 12\eta H^2 g_3 + E \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où C est une constante arbitraire. On obtient donc les vitesses u_x et u_z :

$$\begin{aligned} u_x(x,z) &= -\partial_z \psi = g_0 + g_1 x + g_2 (8Hz + x^2 - 3z^2) + g_3 (24Hxz + x^3 - 9xz^2) \\ u_z(x,z) &= \partial_x \psi = -g_1 z - 2g_2 x z - 12Hg_3 z^2 - 3g_3 x^2 z + 3g_3 z^3 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Dans le cas d'un écoulement symétrique par rapport au point $x=0$, avec une vitesse horizontale nulle en ce point (par exemple dans le cas du dôme d'une calotte polaire), les coefficients g_i doivent vérifier:

$$g_0 = g_1 = g_2 = 0 \quad (\text{B.9})$$

En exprimant les champs de vitesse et de pression dans le repère (x, ξ) (cf. changement de coordonnées 3.31), on trouve finalement:

$$\begin{aligned} u_x(x,\xi) &= g_3 x^3 + 3g_3 H^2 x (5 - 2\xi - 3\xi^2) \\ u_z(x,\xi) &= 3g_3 x^2 H (1 - \xi) - 3g_3 H^3 (-3 + 5\xi - \xi^2 - \xi^3) \\ p(x,\xi) &= p_{atm} - 6\eta g_3 [x^2 - H^2 (2\xi + \xi^2) + 5H^2] + E \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

B - 2 Test de convergence du code numérique

On impose à gauche et à droite respectivement $u_x(-L/2, \xi)$ et $u_x(L/2, \xi)$, où L est la longueur du domaine. On doit aussi imposer le taux d'accumulation a à la surface. Dans le cas d'un écoulement stationnaire et d'une surface plate, la condition cinématique à la surface (1.12) s'écrit:

$$u_z = a, \quad \text{en } \xi=0 \quad (\text{B.11})$$

On imposera donc à la surface la solution analytique $u_z(x,0)$:

$$a = u_z(x,0) = 3g_3 x^2 H + 9g_3 H^3 \quad (\text{B.12})$$

En partant d'une vitesse initiale nulle ou d'une vitesse sinusoïdale très perturbée (de longueur d'onde $\delta = 5dx$), le code converge vers la solution analytique.

ANNEXE C

HEMA AUX DIFFERENCES FINIES

Les équations sont d'abord écrites en coordonnées (x, ξ) en utilisant les formules de dérivation explicitée en annexe A, puis discrétisées. En ce qui concerne la discrétisation spatiale, l'algorithme utilisé dans le programme est partout précis au second ordre. Nous utilisons les formules classiques de différences finies issues du développement en série de Taylor. Le nombre de divisions verticales est N_ξ et l'intervalle de discrétisation dans la direction verticale est représenté par $\Delta\xi$. La dérivée première par rapport à ξ , δ_ξ , est l'opérateur classique de différence centrée pour les points situés à l'intérieur du domaine; au niveau du socle ($i=N_\xi$) et à la surface ($i=1$), la dérivée première en ξ est évaluée en utilisant respectivement une formule "positive streamed" et "negative streamed":

$$\delta_\xi C_{ij} = \begin{cases} \frac{C_{ij+1} - C_{ij-1}}{2\Delta\xi} & - \frac{1}{6}(\Delta\xi)^2 C'''_{ij} - \dots, & j=1, \dots, N_\xi-1 \\ \frac{-3C_{ij} + 4C_{ij+1} - C_{ij+2}}{2\Delta\xi} & + \frac{1}{3}(\Delta\xi)^2 C'''_{ij} - \dots, & j=1 \\ \frac{3C_{ij} - 4C_{ij-1} + C_{ij-2}}{2\Delta\xi} & - \frac{1}{3}(\Delta\xi)^2 C'''_{ij} - \dots, & j=N_\xi \end{cases} \quad (C.1)$$

où la matrice C_{ij} représente un champ interne et C'''_{ij} représente la dérivée troisième en ξ de C_{ij} . Les dérivées δ_ξ centrées et décentrées sont précises au second ordre. La dérivée seconde par rapport à ξ , δ_ξ^2 , est l'opérateur classique de différence centrée du deuxième ordre, sauf au niveau du socle ($i=N_\xi$) et à la surface ($i=1$) où la dérivée seconde en ξ est évaluée en utilisant respectivement une formule "positive streamed" et "negative streamed".

$$\delta_\xi^2 C_{ij} = \begin{cases} \frac{C_{ij+1} - 2C_{ij} + C_{ij-1}}{(\Delta\xi)^2} & - \frac{1}{12}(\Delta\xi)^2 C^{IV}_{ij} + \dots, & j=1, \dots, N_\xi-1 \\ \frac{2C_{ij} - 5C_{ij+1} + 4C_{ij+2} - C_{ij+3}}{(\Delta\xi)^2} & + \frac{11}{12}(\Delta\xi)^2 C^{IV}_{ij} + \dots, & j=1 \\ \frac{2C_{ij} - 5C_{ij-1} + 4C_{ij-2} - C_{ij-3}}{(\Delta\xi)^2} & + \frac{11}{12}(\Delta\xi)^2 C^{IV}_{ij} + \dots, & j=N_\xi \end{cases} \quad (C.2)$$

où C^{IV}_{ij} est la dérivée quatrième de C_{ij} . Les dérivées secondes sont elles aussi précises au second ordre. La discrétisation des dérivées horizontales est similaire en tenant compte de la grille alternée.

REFERENCES

REFERENCES

- Abdallah, S. 1987a. Numerical Solutions for the Pressure Poisson Equation with Neumann Boundary Conditions Using a Non-staggered Grid, I, *J. Comput. Phys.*, **70**, 182-192.
- Abdallah, S. 1987b. Numerical Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Primitive Variables Using a Non-staggered Grid, II, *J. Comput. Phys.*, **70**, 193-202.
- Abdallah, S. and Dreyer, J. 1991, *Int. J. Num. Methods Fluids*.
- Abe-Ouchi A. 1993. Ice Sheet Response to Climatic Changes. Thèse de l'Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Alley, R. B. and Whillans, I. M. 1984. Response of East Antarctica Ice Sheet to sea-level rise, *J. Geophys. Res.*, **89**, 6487-6493.
- Alley, R. B. 1988. Fabrics in polar ice sheets: development and prediction, *Science*, **240**, 493-495.
- Alley, R. B. 1989a. Water-pressure coupling of sliding and bed deformation: I. water system, *J. Glaciol.*, **35**(119), 108-118.
- Alley, R. B. 1989b. Water-pressure coupling of sliding and bed deformation: II. velocity-depth profiles, *J. Glaciol.*, **35**(119), 119-129.
- Alley, R. B., Blankenship, D. D., Rooney, S. T. and Bentley, C. R. 1989. Water-pressure coupling of sliding and bed deformation: III. Application to ice stream B Antarctica, *J. Glaciol.*, **35**(119), 130-139.
- Alley, R. B. 1992. Flow-law hypotheses for ice sheet modeling, *J. Glaciol.*, **38**(129), 245-256.
- Alley, R. B., Meese, D. A., Shuman, C. A., Gow, A. J., Taylor, K. C., Grootes, P. M., White, J. W. C., Ram, M., Waddington, E. D., Mayewski, P. A. and Zielinski, G. A. 1993. Abrupt accumulation increase at the Younger Dryas termination in the GISP2 ice core, *Nature*, **362**(6420), 527-529.
- Alley, R. B., Gow, A. J. and Meese, D. A. 1995. Mapping c-axis fabrics to study physical processes in ice, *J. Glaciol.*, **41**(137), 197-203.
- Anandkrishnan, S., Fitzpatrick, J. J., Alley, R. B., Gow, A. J. and Meese, D. A., 1994. Shear-wave detection of asymmetric c-axis fabrics in the GISP2 ice core, *J. Glaciol.*, **40**(136), 491-496.
- Andermann, I. 1982 Lois de comportement mécanique d'une glace roche anisotrope en régime

- stationnaire. Thèse, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.
- Azuma, N. and Higashi, A. 1985. Formation processes of ice fabric patterns in ice sheets, *Ann. Glaciol.*, **6**, 130-134.
- Azuma, N. 1994. A flow law for anisotropic ice and its application to ice sheets, *Earth and Planetary Science Letters*, **128**, 601-614.
- Azuma, N. 1995. A flow law for anisotropic polycrystalline ice under uniaxial compressive deformation, *Cold Reg. Sci. Technol.*, **23**, 137-147.
- Barakat, H. Z. and Clark, J. A. 1966. Analytical and Experimental Study of Transient Laminar Natural Convection Flows in Partially Filled Containers. *Proc. 3d Int. Heat Transfer Conf.*, Chicago, **II**, paper 57, 152.
- Beaudoin, A. J., Dawson, P. R., Mathur, K. K., Kocks, U. F. and Korzekwa, D. A. 1994. Application of polycrystal plasticity to sheet forming. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **117**, 49-70.
- Benney, 1966. Long waves in liquid films, *J. Math. Phys.*, **45**, 150-155.
- Benney, D. J. and Timson, W. J. 1980. The Rolling Motion of A Viscous Fluid On and Off a Rigid Surface, *Studies. in Appl. Math.*, **63**, 93-98.
- Binschadler, R. 1983. The importance of pressurized subglacial water in separation and sliding at the glacier bed, *J. Glaciol.*, **29**(101), 3-19.
- Blatter, H. 1995. Velocity and stress fields in grounded glaciers: a simple algorithm for including deviatoric stress gradients, *J. Glaciol.*, **41**(138), 333-343.
- Bolzan, J. F. 1985. Ice flow at the Dome C ice divide based on a deep temperature profile. *J. Geophys. Res.*, **90**(D5), 8111-8124.
- Briley, W. R. 1974. Numerical Method for Predicting Three-dimensional Steady Viscous Flow in Ducts, *J. Comput. Phys.*, **14**, 8-28.
- Bube, K. and Strikwerda, J. C. 1983. Interior regularity estimates for elliptic systems of difference equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**(4), 653-670.
- Budd, W. F. 1968. The longitudinal velocity profile of large ice masses, International Union of Geodesy and Geophysics. International Association of Scientific Hydrology; General Assembly of Bern, 1967 (Commission of Snow and Ice), Reports and Discussions, *IASH*, **79**,

- Budd, W. F. 1969. The dynamics of ice masses. *ANARE Scientific Reports, Ser. A(IV), Glaciology, Publ.*, **108**.
- Budd, W. F. 1970a. The longitudinal stresses and strain-rate gradients in ice masses, *J. Glaciol.*, **9**(55), 19-27.
- Budd, W. F. 1970b. Ice flow over bedrock perturbations, *J. Glaciol.* **9**(55), 29-48.
- Budd, W. F., Jenssen, D. and Radok, U. 1971. Derived characteristics of the Antarctic ice sheet. Publication n°18, University of Melbourne, Meteorology department.
- Budd, W. F. 1971. Stress variations with ice flow over undulations, *J. Glaciol.*, **10**, 177-195.
- Budd, W. F., Keage, P. L. and Blundy, N. A. 1979. Empirical studies of ice sliding, *J. Glaciol.*, **23**(89), 157-170.
- Budd, W. F. and Rowden-Rich, R. J. M. 1985. Finite element analysis of two-dimensional longitudinal section flow on Law Dome. *ANARE Research Notes*, **28**, 153-161.
- Budd, W. F. and Jacka, T. H. 1989. A review of ice rheology for ice sheet modelling, *Cold Reg. Sci. Technol.*, **16**, 107-144.
- Calov, R. 1990. *Modellierung des grönländischen Inlandeises mit einem dreidimensionalen Inlandeismodell*. Bonn, Deutsche Forschungsgemeinschaft.
- Canova, G. R., Kocks, U. F., Tome, C. N. and Jonas, J. J. 1985. The yield surface of textured polycrystals. *J. Mech.*
- Caretto, L. S., Curr, R. M., and Spalding, D. B. 1972. Two Numerical Methods for Three-Dimensional Boundary Layers, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **1**, 39.
- Castelnaud, O. and Duval, P. 1994. Simulations of anisotropy and fabric development in polar ices, *Ann. Glaciol.*, **20**, 277-282.
- Castelnaud, O., Duval, P., Lebensohn, R. A. and Canova, G. R. 1995. Viscoplastic modeling of texture development in polycrystalline ice with a self-consistent approach; comparison with bound estimates, *J. Geophys. Res.* B (sous presse).
- Castelnaud, O. 1996. Modélisation du comportement mécanique de la glace polycrystalline par une approche auto-cohérente; application au développement de textures dans les glaces des calottes polaires, Thèse de l'Université de Grenoble 1, France.

- Chastel, Y. B., Dawson, P. R., Wenk, H. R., Bennett, K., 1993. Anisotropic convection with implications for the upper mantle, *J. Geophys. Res.*, **98**, B10.
- Choi, D. and Merkle, C. L. 1985. *AIAA J.*, **23**, 1518.
- Chorin, A. J. 1967. Numerical Method for solving Incompressible Viscous Flow Problems, *J. Comput. Phys.*, **2**, 12-26.
- Chorin, A. J. 1968. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, *Math. Comput.*, **22**, 745-762.
- Colbeck, S. C. and Evans, R. J. 1973. A flow law for temperate glaciers, *J. Glaciol.*, **12**, 71-86.
- Collins, I. F. 1968. On the use of the equilibrium equations and flow law in relating surface and bed topography of glaciers and ice sheets. *J. Glaciol.*, **7**, 199-204.
- Dahl-Jensen, D. 1985. Determination of the flow properties at Dye 3, south Greenland, by borehole-tilting measurements and perturbation modelling, *J. Glaciol.*, **31**(108), 92-98.
- Dahl-Jensen, D. and Gundestrup, N. 1987. Constitutive properties of ice at Dye 3, Greenland. *International Association of Hydrological Sciences Publication 170* (Symposium at Vancouver 1987 - *The physical Basis of Ice Sheet Modelling*), 31-43.
- Dahl-Jensen, D. 1989a. Two dimensional thermo-mechanical modelling of flow and depth-age profiles near the ice divide in central Greenland, *Ann. Glaciol.*, **12**, 31-36.
- Dahl-Jensen, D. 1989b. Steady thermomechanical flow along two-dimensional flow lines in large grounded ice sheets, *J. Geophys. Res.*, **94**(B8), 10,355-10,361.
- Dahl-Jensen, D., Johnson, S. J., Hammer, C. U., Clausen, H. B. and Jouzel, J. 1993. Past accumulation rates derived from observed annual layers in the GRIP ice core from Summit, Central Greenland. Ice in the climate system, NATO ASI Series, Vol. I 12, W. R. Peltier, ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 517-532.
- Dansgaard, W. and Johnsen, S. J. 1969. A flow model and a time scale for ice core from Camp Century, Greenland. *J. Glaciol.*, **8**(53), 215-223.
- Dansgaard, W., S. J. Johnson, H. B. Clausen, and N. Gundestrup, 1973. Stable isotope glaciology, *Meddelelser om Gronland*, Bd. **197**, Nr. 2.
- Dansgaard, W. W., Johnson, S. J., Clausen, H. B., Dahl-Jensen, D., Gundestrup, N. S., Hammer, C. U., Hvidberg, C. S., Steffensen, J. P., Sveinbjörnsdottir, A. E., Jouzel, J. and Bond, G. 1993.

- Evidence for general instability of past climate from a 250-kyr ice-core record, *Nature*, **364**, 218-220.
- Deville, M. O. 1974. Numerical Experiments on the MAC Code for a Slow Flow, *J. Comput. Physics*, **15**, 362-374.
- Deville, M. O. 1975. An alternating direction implicit algorithm for viscous free surface flows, *J. Mech.*, **14**(1), 161-187.
- Dix, D. M. 1963. The Magnetohydrodynamic Flow past a Non-Conducting Flat Plate in the Presence of a Transverse Magnetic Field, *J. Fluid Mech.*, **15**, 449.
- Doake, C. S. M. and Wolff, E. W. 1985. Flow law for ice in polar ice sheets, *Nature*, **314**(6008), 255-257.
- Duval, P. 1976. Fluage et recristallisation des glaces polycristallines, Thèse de Docteur d'Etat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.
- Duval, P. 1981. Creep and fabrics of polycrystalline ice under shear and compression, *J. Glaciol.*, **27**(95), 129-140.
- Duval, P. and Le Gac, H. 1982. Mechanical behavior of antarctic ice, *Ann. Glaciol.*, **3**, 92-95.
- Duval, P., Ashby, M. F. and Andermann, I. 1983. Rate-controlling processes in the creep of polycrystalline ice, *J. Phys. Chem.*, **87**, 21, 4066-4074.
- Duval, P. and Castelnau, O. 1995. Dynamic Recrystallization of Ice in Polar Ice Sheets, *J. Physique IV*, Colloque C3, supplément au J. Physique III, 5, 197-205.
- Fabre, A., Letreguilly, A., Ritz, C. and Mangeney, A. 1995. Greenland under changing climates: sensitivity experiments with a new three-dimensional ice-sheet model, *Ann. Glaciol.*, **21**, 1-7.
- Firestone, J., Waddington, E. D. and Cunningham, J. 1990. The potential for basal melting under Summit, Greenland. *J. Glaciol.*, **36**(123), 163-168.
- Fortin, M. 1970. Approximation d'un opérateur de projection et application à un schéma de résolution numérique des équations de Navier-Stokes (Thèse de 3^e cycle, Faculté des Sciences d'Orsay).
- Fortin, M., Reyret, R. et Temam, R. 1971. Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, *J. Méca*, **10**(3), 357-390.
- Fowler, A. C. and Larson, D. A. 1978. On the flow of polythermal glaciers, I. Model and

- preliminary analysis, *Proc. R. Soc. London A* **363**, 217-242.
- Fowler, A. C. and Larson, D. A. 1980. The uniqueness of steady state flows of glaciers and ice sheets, *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **63**, 333-345.
- Fowler, A. C. 1981. A theoretical treatment of the sliding of glaciers in the absence of cavitation, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, **298**, 637-685.
- Fowler, A. C. 1992. Modelling ice sheet dynamics, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, Vol 63, pp. 29-65.
- Friedrichs, K. O. 1948. Water waves on shallow sloping beach, *Comm. Appl. Math.*, **1**, 109-134.
- Fromm, J. E. and Harlow, F. H. 1963. Numerical Solution of the Problem of Vortex Street Development, *Phys. Fluids*, **6**, 975.
- Fujita, S., Nakawo, M. and Mae, S. 1987. Orientation of the 700 m Mizuho core and its strain history, *Proc. NIPR Symp. Polar Meteorology and Glaciology*, **1**, 122-131.
- Ghia, K. N., Hankey, W. L., Hodge, J. R. and J. K. 1979. *AIAA J.* **17**(3), 298.
- Gillet, F. and Rado, C. 1979. A 180 meter core drilling and measurements in the 905 meter drill hole, *Antarct. J. US*, **14**(5), 101-102.
- Glen, J. W. 1955. The creep of polycrystalline ice, *Proc. Roy. Soc., Series A*, **228**(1175), 519-538.
- Gow, A. J. and Williamson, T. 1976. Rheological implications of the internal structure and crystals fabrics of the West Antarctic ice sheet as revealed by deep core drilling at Byrd Station, *CRREL Rep. 76-35*, 25.
- GRIP Project Members, 1993. Climate instability during the last interglacial period recorded in the GRIP core, *Nature*, **364**, 203-207.
- Grootes, P. M., Stuiver, M., White, J. W. C., Johnson, S. and Jouzel, J. 1993. Comparison of oxygen isotope records from GISP2 and GRIP Greenland ice cores, *Nature*, **366**, 552-554.
- Gundestrup, N. S. and Hansen, B. L. 1984. Bore-hole survey at Dye 3, South Greenland, *J. Glaciol.*, **30**(106), 282-288.
- Gundestrup, N. S., Dahl-Jensen, D., Johnson, S. J. and Rossi, A. 1993. Bore-hole survey at Dome GRIP 1991, *Cold Reg. Sci. Technol.*, **21**, 399-402.
- Haltiner, G. J. and Williams, R. T. 1980. Numerical prediction and dynamic meteorology, *John Wiley & Sons*, New-York.

- Hammer, C. U., Clausen, H. B., Dansgaard, W. S. J., Gundestrup, N. S., Johnson, S. J. and Reeh, N. 1978. Dating of Greenland ice cores by flow models, isotopes, volcanic debris, and continental dust, *J. Glaciol.*, **20**(82), 3-26.
- Hanson, B. 1990. Thermal response of a small ice cap to climatic forcing, *J. Glaciol.*, **36**(122), 49-56.
- Hanson, B. 1995. A fully three-dimensional finite-element model applied to velocities on Storgraciären, Sweden, *J. Glaciol.*, **41**(137).
- Harlow, F. H. and Welch, J. E. 1965. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, *Phys. Fluids*, **8**, 2182-2189.
- Harlow, F. H., Welch, J. E., Shannon, J. P. and Daly, B. J. 1965. Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-3425.
- Harlow, F. H. and Shannon, J. P. 1967. The Splash of a Liquid Drop, *J. Appl. Phys.*, **38**(10), 3855.
- Harlow, F. H. 1969. Numerical Methods for Fluid Dynamics, an Annotated Bibliography, Los Alamos Scientific Laboratory Report, LA-4281.
- Harris, J. E. 1975. Numerical Studies of Incompressible Viscous Flow in a Driven Cavity, NASA SP-378.
- Hempel, L. and Thyssen, R. 1992. Deep radio echo soundings in the vicinity of GRIP and GISP2 drill sites, Greenland, *Polarforschung*, **62**(1), 11-16.
- Herron, S. L., Langway, C. C. and Jr. and K. Brugger, 1985. Ultrasonic velocities and crystalline anisotropy in the ice core from Dye 3, Greenland, in Langway, C. C., Oeschger, Jr. and Dansgaard, W., eds. Greenland ice core, geophysics, geochemistry and the environment. Washington, DC, *American Geophysical Union*, 23-31. (Geophysical Monograph 33).
- Herterich, K. 1988. A three-dimensional model of the Antarctic ice sheet. *Ann. Glaciol.*, **11**, 32-35.
- Hill, R. 1987. Constitutive Dual Potentials in Classical Plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, **33**(4), 371-397.
- Hindmarsh, R. C. A., Morland, L. W., Boulton, G. S. and Hutter, K. 1987. The unsteady plane flow of ice-sheets, a parabolic problem with two moving boundaries. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **39**(3), 183-225.
- Hindmarsh, R. C. A. and Hutter, K. 1988. Numerical fixed domain mapping solution of free surface

- flows coupled with an evolving interior field, *Int. j. numer. anal. methods Geomech.*, vol. 12, 437-459.
- Hindmarsh, R. C. A, L. W., Boulton, G. S. and Hutter, K. 1989. Modes of operation of thermo-mechanically coupled ice-sheets, *Ann. Glaciol.*, 12, 57-69.
- Hirt, C. W. and Shannon, J. P. 1968. Free-Surface Stress Conditions for Incompressible-Flow Calculations, *J. Comput. Phys.*, 2, 403-411.
- Hirt, C. W., Cook, J. L. and Butler, T. D. 1970. A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface, *J. Comp. Phys.*, 5, 103-124.
- Hodge, S. M., Wright, D. L., Bradley, J. A., Jacobel, R. W., Skou, N. and Vaughn, B. 1990. Determination of the surface and bed topography in central Greenland, *J. Glaciol.*, 36(122), 17-30.
- Homann, C. and D. Möller. 1993. Strain determination on the Greenland ice sheet. In *Mass balance and related topics of the Greenland ice sheet*, eds. N. Reeh and H. Oerter, Open File Ser. Gronland Geol. Unders., 93/5, 71-73.
- Hooke, R. L., Raymond, C. F., Hotchkiss, R. L. and Gustafson, R. J. 1979. Calculations of velocity and temperature in a polar glacier using the finite-element method. *J. Glaciol.*, 24(90), 131-146.
- Hooke, R. L. 1981. Flow law for polycrystalline ice in glaciers: Comparison of theoretical predictions, laboratory data, and field measurements, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 19, 664-672.
- Hutter, K., Legerer F. and Spring U. 1981. First-order stresses and deformations in glaciers and ice sheets, *J. Glaciol.*, 27(96), 227-270.
- Hutter, K. 1981. The effect of longitudinal strain on the shear stress of an ice sheet. In defense of using stretched coordinates, *J. Glaciol.*, 27(95), 39-56.
- Hutter, K. 1982. Dynamics of glaciers and large ice masses, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 14, 87-130.
- Hutter, K. 1983. "Theoretical Glaciology", Reidel, Dordrecht
- Hutter, K. and Alts, T. 1985. Ice and snow mechanics; a challenge to theoretical and applied mechanics. (In Niordson, F. I., and Olhoff, N., eds. *Theoretical and applied mechanics*. Amsterdam, Elsevier, 163-217)
- Hutter, K. and Vulliet, L. 1985. Gravity-driven slow creeping flow of a thermoviscous body at

- elevated temperatures, *J. Thermal Stresses*, 8:99-138.
- Hutter, K., Yakowitz, S. and Szidarovszky, F. 1986. A numerical study of plane ice-sheet flow, *J. Glaciol.*, 92(11), 139-160.
- Hutter, K., Yakowitz, S. and Szidarovszky, F. 1987. Coupled thermomechanical response of an axisymmetric cold ice sheet, *Water Resour. Res.*, 23(7), 1327-1339.
- Hutter, K. 1993. Thermo-mechanically coupled ice-sheet response - cold, polythermal, temperate. *J. Glaciol.*, 39(131), 65-86.
- Huybrechts, P. 1990a. A 3-D model for the Antarctic ice-sheet: a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast, *Climate Dynamics*, 5(2), 79-92.
- Huybrechts, P. 1990b. The Antarctic ice sheet during the last glacial-interglacial cycle: a three-dimensional experiment, *Ann. Glaciol.*, 14, 115-119.
- Huybrechts, P. and Oerlemans, J. 1990. Response of the Antarctic ice sheet to future greenhouse warming, *Climate Dynamics*, 5(2), 93-102.
- Jacka, T. H. 1984. The time and strain required for the development of minimum strain rates in ice, *Cold Reg. Sci. Tech.*, 8(3), 235-240.
- Jacobel, R. W. and Hodge, S. M. 1995. Radar internal layers from the Greenland summit, *Geophys. Res. Letters*, 22(5), 587-590.
- Jenssen, D. 1977. A three dimensional polar ice sheet model, *J. Glaciol.*, 18(80), 373-389.
- Johnson, S. J. 1977. Stable isotope homogenization of polar firn and ice, *IAHS AISH Publ.*, 118, 210-219.
- Kamb, B. and LaChapelle, E., 1964. Direct observation of the mechanism of glacier sliding over bedrock, *J. Glaciology*, 5, 159-172.
- Kamb, B. 1986. Stress-gradient coupling in glacier flow: III. Exact longitudinal equilibrium equation. *J. Glaciol.*, 32(112), 335-341.
- Kamb, B., Echelmeyer K. A. 1986a. Stress-gradient coupling in glacier flow: I. Longitudinal averaging of the influence of ice thickness and surface slope, *J. Glaciol.*, 32(111), 267-283.
- Kamb, B., Echelmeyer K. A. 1986b. Stress-gradient coupling in glacier flow: IV. Effect of the "T" term, equation, *J. Glaciol.*, 32(112), 342-349.
- Keller, J. B. 1948. The solitary wave and periodic waves in shallow water, *Comm. Appl. Math.*, 1,

- Keller, K. 1995. Undersogelse af topografien omkring GRIP-lejren ved brug af GPS og gravimetri. Master Thesis, University of Copenhagen, Denmark.
- Keller, K., Gundestrup N. S., Dahl-Jensen D., and Tscherning C. C. 1995. The ice deformation and mass balance at the Summit of Greenland as determined by GPS and gravity measurements. In *Mass balance and related topics of the Greenland ice sheet*, eds. F. Obleitner and O. B. Olesen, Open File Ser. Gronland Geol. Unders., 95/5, 15-18.
- Koch, H. 1993. Height determinations along the EGIG line and the GRIP area. In *Mass balance and related topics of the Greenland ice sheet*, eds. N. Reeh and H. Oerter, Open File Ser. Gronland Geol. Unders., 93/5, 68-70.
- Kocks, U. F. 1970. The relation between polycrystal deformation and single crystal deformation, *Met. Trans.*, **1**, 1121-1143.
- Kostecka, J. M. and Whillans, I. M. 1988. Mass balance along two transects of wide side of the Greenland ice-sheet, *J. Glaciol.*, **34**, 31-39.
- Kuznetsov 1968. Numerical method for solving some problems of viscous liquid, *Fluid Dynam. Trans.*, **4**, 85-89.
- Kwak, D., Chang, J. L. C., Shanks, S. P. and Chakravarthy, S. 1986. *AIAA J.* **24**, 390.
- Lebensohn, R. A. and Tomé, C. N. 1993. A self-consistent anisotropic approach for the simulation of plastic deformation and texture development of polycrystals: application to zirconium alloys, *Acta metall.*, **41**, 2611-2624.
- Legac, H. 1980. Contribution à la détermination des lois de comportement de la glace polycristalline (anélasticité et plasticité). Thèse de 3^e cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.
- Lemaitre, J. and Chaboche, J. L. 1990. *Mechanics of solid Materials*, Cambridge University Press.
- Lesieur, M. 1990. *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Letréguilly, A., Huybrechts, P. and Reeh, N. 1991a. Steady-state characteristics of the Greenland ice sheet under different climates. *J. Glaciol.*, **37**(125), 149-157.
- Letréguilly, A., Reeh, N. and Huybrechts, P. 1991b. The Greenland ice-sheet through the last glacial-interglacial cycle. *Paleogeogr., Paleoclimatol. Paleoecol.*, **90**(4), 385-394.

- Lile, R. C., 1978. The effect of anisotropy on the creep of polycrystalline ice. *J. Glaciol.*, **21**(85), 475-483.
- Lipenkov, V. Ya., Barkov, N. I., Duval, P. and Pimienta, P., 1989. Crystalline texture of the 2083 m ice core at Vostok Station, Antarctica, *J. Glaciol.*, **35**, 392-398.
- Lipenkov, V. Ya., Salamatin and A. N., Duval, P. 1995. Bubbly ice densification in ice sheets: II. applications, *J. Geophys. Res. B*, submitted.
- Lliboutry, L. 1958a. La dynamique de la Mer de Glace et la vague de 1891-95 d'après les mesures de Joseph Vallot. Union Géodésique et Géophysique Internationale, Association Internationale d'Hydrologie Scientifique, Stmposium de Chamonix(1958), Physique du mouvement de la glace, *LASH*, **47**, 125-138.
- Lliboutry, L. 1968. General theory of subglacial cavitation and sliding of temperate glaciers, *J. Glaciol.*, **7**(49), 21-58.
- Lliboutry, L. 1969. The dynamics of temperate glaciers from the detailed viewpoint, *J. Glaciol.*, **8**, 185-205.
- Lliboutry, L. 1979. Local Friction Laws for Glaciers: A Critical Review and New Openings, *J. Glaciol.*, **23**, 67-95.
- Lliboutry, L. and Duval, P. 1985. Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies, *Ann. Geophys.*, **3**(2), 207-224.
- Lliboutry, L. 1993. Anisotropic, transversely isotropic nonlinear viscosity of rock ice and rheological parameters inferred from homogenization, *Int. J. Plasticity*, **9**, 619-632.
- MacAyeal, D. R., Binschadler, R. A., Shabtaie, S., Stephenson, S. and Bentley, C. R. 1987. Force, mass, and energy budgets of the Crary Ice Rise complex, Antarctica, *J. Glaciol.*, **33**(114), 218-230.
- Mahaffy, M. W. 1976. A three dimensional numerical model of ice sheets: Tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories. *J. Geophys. Res.*, **81**(6), 1059-1066.
- Mangeney, A. et Ritz, C. 1994. Changement de la viscosité de la glace - Influence sur la datation. Rapports de l'atelier de modélisation de l'atmosphère, Météo-France, Toulouse.
- Mangeney, A., Califano, F. and Castelnau, C. 1996. Isothermal flow of an anisotropic ice sheet in the vicinity of an ice divide. *J. Geophys. Res. B*, (accepted).

- Mangeny, A. and Califano, F. 1996. The shallow-ice approximation for anisotropic ice - formulation and limits, *J. Geophys. Res. B*, (submitted).
- Mathur, K. K. and Dawson, P. R. 1989. On modelling the development of crystallographic texture in bulk forming processes, *Int. J. Plast.*, **5**, 67-94.
- Meese, D. A., Gow, A. J., Grootes, P., Mayewski, P. A., Ram, M., Stuiver, M., Taylor, K. C., Waddington, E. D. and Zielinski, G. A. 1994. The accumulation record from the GISP2 core as an indicator of climate change throughout the Holocene, *Science*, **266**, 1680-1682.
- Mellor, M. 1980. Mechanical properties of polycrystalline ice, in *Physics and Mechanics of Ice, IUTAM Symp., Copenhagen 1979, Proc.*, P. Tryde (Ed.) Springer Verlag, Berlin, 217-245.
- McMeeking, R. M. and Johnson, R. E. 1985. On the analysis of longitudinal stress in glaciers. *J. Glaciol.*, **31**, 293-302.
- Milsch, H. 1994. Mechanisches Verhalten von Eis längs des Bohrkerns aus dem "Greenland Ice core Project" (GRIP) in Relation zur präferentiellen Gitterorientierung der Eiskristalle. Diplomarbeit, Georg-August-Universität, Göttingen, Allemagne.
- Miyakoda, K. 1962. *Japan. J. Geophys.*, **3**, 75.
- Molinari, A., Canova, G. R. and Ahzy, S. 1987. A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity, *Acta metall.*, **35**(12), 2983-2994.
- Morland, L. W. and Johnson, I. R. 1980. Steady motion of ice sheets, *J. Glaciology*, **25**, 229-246.
- Morland, L. W. and Johnson, I. R. 1982. Effect on bed inclination and topography on steady isothermal ice sheets, *J. Glaciology*, **28**, 71,90.
- Morland, L. W. 1984. Thermomechanical balance of ice sheet flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **29**, 237-266.
- Morland L. W. and Smith, G. D. 1984. Influence of non-uniform temperature distribution on the steady motion of ice sheets, *J. Fluid Mech.*, **140**, 113-33.
- Morton, K. W. 1971. Stability and convergence in fluid flow problems, *Proc. Roy. Soc. London, A* **323**, 237-253.
- Nichols, B. D. and Hirt, C. W. 1971. Improved Free Surface Boundary Conditions for Numerical Incompressible-Flow Calculations, *J. Comput. Phys.*, **8**, 434-448.
- Nye, J. F. 1952a. The mechanics of glacier flow, *J. Glaciol.*, **2**(12), 82-93.

- Nye, J. F. 1952b. A comparison between the theoretical and measured long profile of the Unteraar Glacier, *J. Glaciol.*, **2**, 103-107.
- Nye, J. F. 1957. The distribution of stress and velocity in glaciers and ice sheets, *Proc. Royal Soc. London, A239*, 113-133.
- Nye, J. F. 1969. The effect of longitudinal stress on the shear stress at the base of an ice sheet, *J. Glaciol.*, **8**, 207-213.
- Orowan, E. 1949. Remarks at joint meeting of the British Glaciological Society, the British Rheologists Club and the Institute of Metals. *J. Glaciol.*, **1**, 231-236.
- Patankar, S. V. and Spalding, D. B. 1972. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 1787.
- Patankar, S. V. 1980. *Numerical Heat Transfert and Fluid Flow*, Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences, Taylor and Francis.
- Paterson, W. S. B. 1981. *The physics of glaciers*, Pergamon, Oxford.
- Paterson, W. S. B. and Budd, W. F. 1982. Flow parameters for ice sheet modeling, *Cold Reg. Sci. Technol.*, **6**(2), 175-177.
- Paterson, W. S. B. and Waddington, E. D. 1984. Past precipitation rates derived from ice core measurements: methods and data analysis. *Rew. Geophys. and Space Physics*, **22**, 123-130.
- Paterson, W. S. B. 1985. Flow law for ice in polar ice sheets, *Nature*, **318**, 82-83.
- Paterson, W. S. B. and Waddington, E. D. 1986. Estimated basal ice temperatures at Crête, Greenland, throughout a glacial cycle, *Cold Reg. Sci. Technol.*, **12**(1), 99-102.
- Paterson, W. S. B. 1991. Why ice-age ice is sometimes "soft". *Cold Regions Sci. Tech.*, **20**, 75-98.
- Paterson, W. S. B. 1994. *The physics of glaciers*, Pergamon, Oxford.
- Peason, C. E. 1965. A computational Method for Viscous Flow Problems, *J. Fluid Mech.*, **21**, 611.
- Petrenko, V. F. 1993. Structure of ordinary ice Ih. Part I: ideal structure of ice, *CRREL rep.* 93-25.
- Peyret, R. and Taylor, T. D. 1983. *Computational Methods in Fluid Flows*, Springer-Verlag, New York.
- Phillips, N. A. 1957. A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteor.*, **14**(2), 184-185.
- Pimienta, P. 1987. Etude du comportement mécanique des glaces polycristallines aux faibles

- contraintes; applications aux glaces des calottes polaires. Thèse de 3^e cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.
- Pimienta, P and Duval, P. 1987. Rate controlling processes in the creep of polar ice. *J. Physique*, C1, suppl. No 3, 48, 243-248.
- Pracht, W. E. 1971. A Numerical Method for Calculating Transient Creep Flows, *J. Comput. Phys.*, 7, 46-60.
- Raymond, C. F., 1983. Deformation in the vicinity of ice divides. *J. Glaciol.*, 29(103), 357-373.
- Reeh, N. 1987. Steady-state three-dimensional ice flow over an undulating base: first-order theory with linear ice rheology. *J. Glaciol.*, 33(114), 177-185.
- Reeh, N. 1988. A flow-line model for calculating the surface profile and the velocity, strain-rate, and stress fields in an ice-sheet. *J. Glaciol.*, 34(116), 46-54.
- Reeh, N. and Paterson, W. S. B. 1988. Application of a flow model to the ice-divide of Devon Island ice cap, Canada, *J. Glaciol.*, 34(116), 55-63.
- Rémy, F., Ritz, C. and Brisset, L. 1996. Ice sheet flow features and rheological parameters derived from precise altimetric topography, *Ann. Glaciol.*, 23 (sous presse).
- Ritz, C. 1980. Exploitation du profil de température mesuré dans la calotte glaciaire au Dôme C (Antarctide Orientale). Thèse du troisième cycle de l'Université Scientifique et médicale de Grenoble.
- Ritz, C., Lliboutry, L. and Rado, C. 1982. Analysis of a 870 m deep temperature profile at Dome C, *Ann. Glaciol.*, 3, 284-289.
- Ritz, C. 1989. Interpretation of the temperature profile measures at Vostok, East Antarctica, *Ann. Glaciol.*, 12, 138-144.
- Ritz, C. 1992. Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire antarctique Vostok-Glacier Byrd: sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus, Thèse d'état de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Rizzi, A. and Eriksson, L. 1985. *J. Fluid Mech.*, 163, 275.
- Roache, P. J. 1976. *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa, Albuquerque, NM, p. 180.
- Robin, G. de Q. 1967. Surface topography of ice sheets, *Nature*, 215, 1029, 1032.
- Runchal, A. K. and Wolfshtein, M. 1969. Numerical Integration Procedure for the Steady State Navier-Stokes Equations, *J. Mech. Ing. Sci.*, 11, 445.
- Russel-Head, D. S. and Budd, W. F. 1979. Ice-sheet flow properties derived from bore-hole shear measurements combined with ice core studies, *J. Glaciol.*, 24(90), 117-130.
- Shearwood, C. and Withworth, R. W. 1989. X-ray topographic observations of edge dislocation glide on non-basal planes in ice, *J. Glaciol.*, 35(120), 281-283.
- Schott, C. 1990. Finite element modeller og beregning af isens flyding i Centralgrønland. M. S. thesis, University of Copenhagen.
- Schott, C., Waddington, E. D. and Raymond, C. F. 1992. Predicted time-scales for GISP2 and GRIP boreholes at Summit, Greenland, *J. Glaciol.*, 38, 162-168.
- Schott Hvidberg, C. 1993. A thermo-mechanical ice flow model for the centre of large ice sheets, Ph.D. Dissertation, University of Copenhagen.
- Schott Hvidberg, C. 1996. Steady state thermo-mechanical modelling of ice flow near the center of large ice sheets with the finite element technique, *Ann. Glaciol.*, 23, in press.
- Schott Hvidberg, C., Dahl-Jensen, D. and Waddington, E. D. 1996. Ice flow between the GRIP and GISP2 bore holes in Central Greenland, *J. Geophys. Res.*, Soumis.
- Shoji, H. and Langway, C. C. 1984. Flow behavior of basal ice as related to modelling considerations, *Ann. Glaciol.*, 5, 141-148.
- Shoji, H. and Langway, C. C. 1985. Mechanical properties of fresh ice core from Dye 3, Greenland, *Geophysical Monograph, American Geophysical Union*, 33:39-48.
- Shumskiy, P. A. 1961. On the theory of glacier motion, International Union of Geodesy and Geophysics. International Association of Scientific Hydrology, General Assembly of Helsinki. *IASH*, 55, 142-149.
- Shumskiy, P. A. 1963. On the theory of glacier variations. *Bull., IASH*, 8, 45-56.
- Shumskiy, P. A. 1967. The distribution of stress, velocity and temperature in glaciers, in *Physics of Snow and Ice*, ed. H. Oura, International Conference on Low Temperature Science, 1966, *Proceedings*, 1, 371-384.
- Soh, W. Y. and Berger, S. A. 1987. *Int. J. Numer. Methods*, 7, 733.
- Sotiropoulos, F. and Abdallah, S. 1990. Coupled Fully Implicit Solution Procedure for Steady Incompressible Navier-Stokes Equations, *J. Comput. Phys.*, 87, 328-348.

- Sotiropoulos, F. and Abdallah, S. 1991. The Discrete Continuity Equation in Primitive Variable Solutions of Incompressible Flow, *J. Comput. Phys.*, **95**, 212-227.
- Strikwerda, J. C., 1984. Finite difference methods for the Stokes and Navier-Stokes equations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **5**(1), 56.
- Strikwerda, J. C. and Nagel, Y. M. 1988. A Numerical Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Three-Dimensional Cylindrical Geometry, *J. Comput. Phys.*, **78**, 64-78.
- Svendsen, B. and Hutter, K. 1996. A continuum approach to model induced anisotropy in glaciers and ice sheets, *Ann. Glaciol.*, **23** (sous presse).
- Szidarovszky, F., Hutter, K. and Yakowitz, S. 1989. Computational ice-divide analysis of a cold plane ice sheet under steady conditions, *Ann. Glaciol.*, **12**, 170-177.
- Tafti, D. 1995. Alternate Formulation for the Pressure Equation Laplacian on a Collocated Grid for Solving the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.*, **116**, 143-153.
- Taylor, K. C., Hammer, C. U., Alley, R. B., Clausen, H. B., Dahl-Jensen, D., Gow, A. J., Gundestrup, N. S., Kipfstuhl, J., Moore, J. C. and Waddington, E. D. 1993. Electrical conductivity measurements from the GISP2 and GRIP Greenland ice cores, *Nature*, **366**, 549-552.
- Temam, R. 1969. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires II., *R. Archiv. Ration. Mech. Anal.*, **32**, 377-385.
- Temam, R. 1977. Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam.
- Thompson, L. G. 1977. Variations in microparticle concentration, size distribution and elemental composition found in Camp Century, Greenland, and Byrd station, Antarctica, deep ice cores. IAHS-AIHS Publ. 118, (proc. IUGG, Grenoble 1975), 351-364.
- Thorsteinsson, Th., Kipfstuhl, J. and Miller, H., 1995. Textures and fabrics in the GRIP ice core. *Proceedings of the GRIP/GISP2 symposium held in Wolfboro, NH, September 1995*. (in review).
- Turcotte, D. L. and Schubert, G. 1982. Geodynamics: Applications of Continuum Physics to Geological Problems, John Wiley & Sons, New York.
- Van der Veen, C. J. 1985. Response of a Marine Ice Sheet to Changes at the Grounding Line, *Quat.*

- Res.*, **24**, 257-267.
- Van der Veen, C. J. 1989. A numerical scheme for calculating stresses and strain rates in glaciers, *Math. Geol.*, **21**, 363-377.
- Van der Veen, C. J. and Whillans, I. M. 1989a. Force budget: I. Theory and numerical methods, *J. Glaciol.*, **35**(119), 53-60.
- Van der Veen, C. J. and Whillans, I. M. 1990. Flow laws for glacier ice: comparison of numerical predictions and field measurements, *J. Glaciol.*, **36**(124), 324-339.
- Van der Veen, C. J. and Whillans, I. M. 1992. Determination of a center on an ice cap, *J. Glaciol.*, **38**(130), 412-416.
- Van der Veen, C. J. and Whillans, I. M. 1994. Development of fabric in ice, *Cold Reg. Sci. Tech.*, **22**, 171-195.
- Van Houtte, P. 1994. Application of plastic potentials to strain rate sensitive and insensitive anisotropic materials, *Int. J. Plasticity*, **10**(7), 719-748.
- Waddington, E. D., Fisher, D. A., Koerner, R. M. and Paterson, W. S. B. 1986. Flow near an ice divide: analysis problems and data requirements, *Ann. Glaciol.*, **8**, 171-174.
- Watts, L. G. and Drewry, D. J. 1987. Ice core-derived past surface temperatures used as boundary conditions to finite element modelling of the Antarctic ice sheet. *In The physical basis of ice sheet modelling*, *IAHS*, **170**, 227.
- Weertman, J. 1973. Creep of ice. *In Whalley, E. S. J. Jones and L. W. Gold (eds.), Physics and Chemistry of Ice*, Royal Society of Canada, Ottawa, 320-337.
- Weertman, J. 1979. The Unsolved General Glacier Sliding Problem, *J. Glaciol.*, **23**, 97-115.
- Whillans, I. M. and Johnson, S. J. 1983. Longitudinal variations in glacial flow: theory and test using data from the Byrd Station strain network, Antarctica. *J. Glaciol.* **29**(101), 78-97.
- Whillans, I. M. and Jezek, K. C. 1987. Folding in Greenland ice sheet, *J. Geophys. Res.*, **92**(B1), 485-493.
- Williams, G. L. 1969. *J. Fluid Mech.*, **37**, 727-750.
- Yakowitz, S., Hutter, K. and Szidarovsky, F. 1986. Elements of a computational theory for glaciers, *J. Comput. Phys.*, **66**(1), 132-150.
- Yosida, Z. 1964. Internal stress and viscous flow of snow covers on sloping ground surfaces (*In*

Japanese). *Low Temperature Science, Ser. A.22*, 83-127.

Ziegler, H. 1977. *An introduction to Thermomechanics*, North Holland Publishing Company, Amsterdam.