



HAL
open science

Contributions à l'analyse de la stabilité et de la robustesse des systèmes non-linéaires interconnectés et applications

Antoine Chaillet

► **To cite this version:**

Antoine Chaillet. Contributions à l'analyse de la stabilité et de la robustesse des systèmes non-linéaires interconnectés et applications. Automatique / Robotique. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. tel-00781999

HAL Id: tel-00781999

<https://theses.hal.science/tel-00781999>

Submitted on 29 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris Sud - L2S - Supélec - EECI

**Mémoire en vue de l'obtention d'une
Habilitation à Diriger des Recherches**

**Contributions à l'analyse de la stabilité et
de la robustesse des systèmes
non-linéaires interconnectés et
applications**

Antoine CHAILLET - Antoine.Chaillet@supelec.fr

Soutenue le 27 Novembre 2012 à Gif sur Yvette devant le jury :

- Mazen ALAMIR, *directeur de recherches CNRS, GIPSA-lab* (Rapporteur)
- Jamal DAAFOUZ, *professeur, Univ. Lorraine - CRAN* (Examinateur)
- Giancarlo FERRARI-TRECATE, *professeur, Univ. de Pavie* (Rapporteur)
- Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE, *directrice de recherches CNRS, L2S* (Examinatrice)
- Wilfrid PERRUQUETTI, *professeur, Ecole centrale de Lille* (Examinateur)
- Christophe PRIEUR, *directeur de recherches CNRS - GIPSA-lab* (Examinateur)
- Witold RESPONDEK, *professeur, INSA Rouen* (Examinateur)
- Luca ZACCARIAN, *directeur de recherches CNRS - LAAS* (Rapporteur)

Table des matières

Remerciements	7
Introduction	9
Collaborations	17
Liste des abréviations	19
Notation	24
1 Outils d'analyse de la stabilité et de la robustesse	25
1.1 Notions liées à la stabilité entrée-état (ISS)	25
1.1.1 Contexte	25
1.1.1.1 Stabilité	25
1.1.1.2 Robustesse à des signaux exogènes	27
1.1.2 Notion d'iISS forte	28
1.1.2.1 Définition	28
1.1.2.2 Conditions de Lyapunov	29
1.1.2.3 Systèmes présentant une structure particulière	32
1.1.3 Robustesse vis-à-vis d'entrées à énergie moyenne bornée	32
1.1.3.1 Contexte	32
1.1.3.2 Résultats	34
1.2 Systèmes non-linéaires interconnectés par rétroaction	36
1.2.1 Théorème du petit gain pour des systèmes non nécessairement ISS	36
1.2.2 Intepréétation du théorème du petit gain Fortement iISS	37
1.3 Systèmes en cascade	38
1.3.1 iISS Forte	38
1.3.2 iISS	39
1.3.2.1 Approche basée sur les fonctions de Lyapunov	40
1.3.2.2 Approche basée sur les estimées des solutions	43
1.3.3 Stabilité pratique et stabilité semiglobale	44
1.3.3.1 Conditions suffisantes	44
1.3.3.2 UGPAS pour les systèmes en cascade	46
1.4 Applications	48
1.4.1 Commande de satellites en formation	48
1.4.1.1 Commande de la position relative	48
1.4.1.2 Robustesse de la formation de satellites	51
1.4.2 Ravitaillement de navires en pleine mer	55

1.4.3	Commande de robots manipulateurs	55
2	Synchronisation et Neurosciences	57
2.1	Kuramoto sous le retour de son champ moyen local	57
2.1.1	Des oscillateurs de phase pour modéliser le rythme de neurones sous DBS	59
2.1.2	Existence du verrouillage de phases	61
2.1.3	Robustesse du verrouillage de phase	62
2.1.4	Altération de la synchronisation par commande proportionnelle au champ moyen local	65
2.1.4.1	Désynchronisation	65
2.1.4.2	Inhibition	68
2.2	Approche opératoire pour l'analyse de la synchronisation	69
2.2.1	Prise en compte de l'hétérogénéité des opérateurs	70
2.2.2	Illustration sur une population de neurones d'Hindmarsh-Rose	73
2.2.2.1	Le modèle d'Hindmarsh-Rose et sa représentation entrée-sortie	73
2.2.2.2	Illustrations sur exemple numérique	76
3	Systèmes commandés par réseaux	79
3.1	Commande basée sur les paquets	80
3.1.1	Contexte et problématique	80
3.1.2	Stratégie de commande basée sur les paquets	81
3.1.2.1	Modélisation du réseau	81
3.1.2.2	Modélisation du protocole	82
3.1.2.3	Modélisation du système à commander	83
3.1.2.4	Mise sous forme hybride	84
3.1.3	Stabilité exponentielle sur un domaine d'attraction spécifié	86
3.1.4	Stabilité exponentielle semiglobale	88
3.1.5	Stabilité exponentielle globale	88
3.1.6	Cas des systèmes LTI	89
3.1.7	Illustration : commande d'un hélicoptère	89
3.2	Robustesse de la commande quantifiée	91
3.2.1	Contexte et présentation du problème	93
3.2.2	Commande quantifiée	95
3.2.2.1	Région de quantification	95
3.2.2.2	Dynamique du codeur	95
3.2.2.3	Dynamique du décodeur	96
3.2.2.4	Commande	96
3.2.3	Analyse de la robustesse du codage-décodage	96
3.2.4	Exemple d'illustration	98
4	Perspectives	101
4.1	Stabilité et robustesse des systèmes interconnectés	101
4.1.1	Caractérisation de l'iISS Forte	101
4.1.2	L'iISS Forte d'un point de vue commande	101
4.1.2.1	Fonction de Lyapunov contrôlée pour l'iISS Forte	101
4.1.2.2	Commande saturée	102

4.1.3	iISS Forte et systèmes commutés	102
4.1.3.1	Systèmes commutés à structures triangulaires	102
4.1.3.2	Temporisation (<i>dwell time</i>) dépendant de l'état	102
4.1.4	Aspects stochastiques de l'iISS	103
4.2	Analyse et commande de la synchronisation pour des applications aux neurosciences	103
4.2.1	Etude comparative sur la DBS en boucle fermée	103
4.2.2	Origine des oscillations cérébrales pathologiques	104
4.2.2.1	Rôle pacemaker de l'ensemble STN-GPe	104
4.2.2.2	Origine striatale	105
4.2.3	Données de l'optogénétique	105
4.3	Systèmes commandés par réseaux	106
4.3.1	Extension et application de la commande basées sur les paquets . . .	106
4.3.2	Utilisation de bloqueurs généralisés pour les NCS	106
4.3.3	L'iISS Forte pour la commande quantifiée et échantillonnée	107

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mes trois rapporteurs, Mazen Alamir, Giancarlo Ferrari-Trecate et Luca Zaccarian, pour avoir pris le temps d'évaluer le présent manuscrit.

Mes remerciements vont également aux autres membres du jury, J. Daafouz, F. Lamnabhi-Lagarrigue, W. Perruquetti, C. Prieur et W. Respondek, pour avoir accepté d'évaluer mes travaux de recherches.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont contribué, souvent de manière cruciale, aux résultats présentés ici.

Introduction

D'une manière générale, la recherche que je conduis est guidée par une question centrale : l'analyse du comportement de systèmes à dynamiques non-linéaires interconnectés. Sous ce vaste thème de recherche se cachent en réalité des questions précises, dont l'intérêt est induit par des visées applicatives et dépasse donc la simple curiosité scientifique.

Que ce soit en ingénierie, en médecine, en biologie ou en économie, la plupart des dynamiques qui régissent le monde qui nous entoure sont intrinsèquement non-linéaires. Comme nous le rappellerons dans ce document, ces non-linéarités affectent aussi bien le mouvement d'un satellite, la réponse d'un neurone à une stimulation électrique, la commande d'un robot manipulateur, ou le déplacement d'un navire. Ces dynamiques non-linéaires peuvent intervenir sous l'effet d'une rotation, d'une saturation, d'une *dead-zone*, d'une quantification, d'un comportement sigmoïdal, etc.

La richesse des phénomènes propres aux systèmes non-linéaires est sans commune mesure avec les systèmes linéaires temps-invariants (LTI). L'existence de points d'équilibre multiples, la formation de cycles limites, l'oscillation à une fréquence différente du signal d'excitation, l'existence de plusieurs solutions à partir d'une même condition initiale, l'existence de plusieurs modes de fonctionnement, ou encore le chaos sont autant de phénomènes ne pouvant être rencontrés parmi les systèmes LTI. Cette richesse va bien entendu de paire avec une complexité d'analyse accrue.

L'omniprésence des dynamiques non-linéaires contraste avec les méthodes les plus communément enseignées et employées pour les appréhender. Si la plupart des ingénieurs ont des connaissances en analyse et commande des systèmes LTI, rares sont ceux qui maîtrisent les outils propres aux systèmes non-linéaires. Dans bien des cas, la modélisation sur des zones restreintes de fonctionnement, l'usage d'hypothèses simplificatrices, ou la limitation à certaines échelles spatiales ou temporelles permettent en effet d'assimiler le système étudié à un système LTI, ouvrant ainsi la porte à la puissance des outils de l'Automatique linéaire.

L'assimilation d'un système à son modèle LTI, et le développement de lois de commande qui en découlent, doivent cependant être effectués avec soin et circonspection. Par exemple, dans le cas standard d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement, il sera crucial de s'assurer que le fonctionnement réel du système ne quitte jamais le domaine de validité du modèle LTI employé. Suivant l'importance de la dynamique non-linéaire dans le comportement global du système, cette assimilation LTI peut s'avérer inadéquate.

L'utilisation d'outils adaptés aux dynamiques non-linéaires permet une analyse plus fine et plus proche de la réalité physique du système. En n'imposant pas de négliger certaines dynamiques (pourtant potentiellement centrales dans le comportement du système) du simple fait de leur non-linéarité, ces méthodes autorisent une analyse du système dans sa globalité. S'il est indéniable que les systèmes non-linéaires induisent une complexité d'analyse plus importante que les systèmes LTI, des méthodes à la fois simples et performantes

existent pour appréhender les non-linéarités. Il est d'ailleurs intéressant de constater que les fondements de l'analyse et de la commande des systèmes non-linéaires ont précédé d'un demi-siècle ceux des systèmes LTI.

Les problèmes posés par les systèmes non-linéaires prennent une dimension particulière lorsque ceux-ci sont constitués de sous-systèmes interconnectés. Cette interconnexion peut avoir des motivations physiques : c'est le cas des systèmes spatialement distribués, ou résultant d'interactions de sous-systèmes développés indépendamment, ou intégrant des composants de natures différentes. Mais elle peut également être motivée par des visées analytiques : la vision "systémique", concept central en Automatique, consiste en effet à diviser un système complexe ou de grande taille en une interconnexion de sous-systèmes pouvant être traités individuellement. Dans les deux cas, il est fondamental de garantir certaines propriétés au système intégré et il est bien connu que le comportement optimal du système global n'est généralement pas obtenu en optimisant chacun des sous-systèmes qui le composent, mais en empruntant une démarche intégrative visant à la meilleure interaction possible entre les constituants.

Dans ce document, nous présentons les travaux de recherche que nous avons menés autour de l'analyse et de la commande de systèmes non-linéaires interconnectés. Nous avons regroupé ces travaux en trois chapitres. Le premier traite des développements théoriques pour l'analyse de la stabilité et de la robustesse de tels systèmes autour du concept-clé de la *stabilité entrée-état*, ainsi que des applications auxquelles ils ont donné lieu. Le deuxième présente les résultats obtenus dans l'analyse et la commande de la synchronisation d'oscillateurs interconnectés et leur application aux neurosciences, et en particulier au traitement de la maladie de Parkinson par stimulation cérébrale profonde. Enfin, le troisième chapitre est dédié au développement de lois de commande permettant d'atténuer les effets induits par une communication par un réseau numérique entre le système et son contrôleur. Nous donnons maintenant un aperçu du contexte et du contenu de chacun de ces chapitres.

Outils d'analyse de la stabilité et de la robustesse

Deux propriétés fondamentales des systèmes non-linéaires sont la stabilité et la convergence. La première vise à assurer que des variations des conditions initiales du système ont un impact raisonnable sur son comportement. La seconde traduit le fait que l'écart entre le comportement désiré et le comportement observé tend vers zéro avec le temps, ou tout ou moins vers une erreur résiduelle acceptable. Si ces deux concepts sont intimement liés pour les systèmes LTI, il sont décorrélés pour les systèmes non-linéaires et on appelle *stabilité globale asymptotique* (GAS) la combinaison de la stabilité et de la convergence vers zéro de toutes les solutions. En présence de non-linéarités, il est bien connu que des interconnexions aussi élémentaires que la mise en cascade ne préservent pas, en général, la GAS. Il va sans dire que des systèmes résultants d'interconnexions plus élaborées, telle que la rétroaction ou l'interconnexion de plusieurs sous-systèmes, requièrent d'autant plus d'attention.

Un outil fondamental pour l'analyse des systèmes non-linéaires interconnectés est la *stabilité entrée-état* (ISS). Cette notion, introduite par Sontag à la fin des années 80 [Sontag, 1989], permet de garantir des propriétés intéressantes au système considéré en présence d'un signal exogène pouvant représenter une perturbation, une erreur de modélisation, une incertitude paramétrique, une erreur de mesure, etc. Ces propriétés incluent en particulier la bornitude des solutions en réponse à tout signal exogène borné, et

la convergence des solutions vers zéro si le signal exogène converge lui-même vers zéro. D'une manière générale, l'ISS assure la GAS en l'absence du signal exogène et la convergence vers un voisinage de zéro dont la taille est "proportionnelle" à l'amplitude du signal d'entrée. Ces propriétés sont naturellement vérifiées par tout système LTI dont la dynamique interne est asymptotiquement stable. C'est loin d'être le cas dans le domaine non-linéaire : nombre de systèmes non-linéaires, même simples, sont par exemple déstabilisables par une entrée bornée.

Contrairement à la GAS, l'ISS est naturellement préservée par l'interconnexion en cascade [Sontag and Teel, 1995]. Des conditions de type "petit gain" ont également été développées pour l'interconnexion par rétroaction de deux systèmes [Jiang et al., 1994], et ont plus récemment été généralisées à l'interconnexion de systèmes plus nombreux [Dashkovskiy et al., 2010]. De même que le théorème du petit gain pour les systèmes LTI, ces résultats garantissent la stabilité et la robustesse de systèmes interconnectés à la condition que la composition de leur gains (non-linéaires) demeure inférieure à l'identité. La richesse des propriétés de robustesse qu'elle induit, ainsi que le nombre de développements théoriques dont elle a été l'objet, font de l'ISS une propriété centrale dans l'analyse et la commande des systèmes non-linéaires.

Malgré l'indéniable succès rencontré par l'ISS pour des applications de commande, celle-ci reste une propriété très contraignante en pratique. Le fait, en particulier, que les solutions soient bornées si le signal exogène est lui-même borné (même de grande amplitude), reste utopique pour de nombreuses applications non-linéaires. Une alternative intéressante, garantissant tout de même une certaine robustesse aux signaux exogènes, a été introduite à la fin des années 90 [Sontag, 1998] : la stabilité intégrale entrée-état (iISS). Contrairement à l'ISS qui lie l'erreur en régime permanent à l'*amplitude* du signal exogène, l'iISS mesure l'impact de l'*énergie* apportée au système par le signal d'entrée. Il est aisé de montrer que tout système ISS est iISS ; l'iISS étant en réalité nettement moins restrictive que l'ISS.

Contrairement à l'ISS, l'iISS n'est pas naturellement préservée sous l'interconnexion cascade [Arcak et al., 2002]. Une de nos contributions a été d'établir des conditions suffisantes sous lesquelles la cascade de deux systèmes iISS est elle-même iISS. Nous présentons ces travaux en Section 1.3.2. En ce qui concerne les interconnexions par rétroaction, des conditions ont été données dans la littérature pour garantir la stabilité de deux systèmes iISS interconnectés [Ito and Jiang, 2009, Angeli and Astolfi, 2007]. Ces résultats ont récemment été généralisés à des interconnexions plus complexes [Ito et al., 2011]. Nous présentons en Section 1.2 notre contribution à ce domaine, à savoir l'interprétation du théorème de petit gain pour les systèmes iISS comme l'existence d'un régime transitoire suivi d'un régime semblable à un comportement ISS.

Si l'ISS est souvent trop restrictive, l'iISS apparaît au contraire comme une propriété trop faible dans bien des cas. En effet, l'iISS ne garantit aucune robustesse vis-à-vis de signaux persistants, même d'amplitudes très faibles. Ainsi, certains systèmes iISS peuvent être déstabilisés par une perturbation constante infinitésimale. En pratique, de nombreux systèmes continuent de présenter un comportement acceptable en présence de perturbations d'amplitude "raisonnable", même s'ils peuvent être déstabilisés par des perturbations plus importantes. Nous avons donc récemment introduit une propriété intermédiaire, à mi-chemin entre iISS et ISS. Cette notion, appelée iISS Forte, garantit non seulement l'iISS, mais également l'ISS vis-à-vis de signaux exogènes dont l'amplitude est sous un seuil donné. Nous avons proposé des outils, basés sur les fonctions de Lyapunov, permettant de vérifier aisément cette propriété et nous avons comparé cette nouvelle notion avec les notions de

stabilité et de robustesse existantes. Ces résultats sont présentés en Section 1.1.2. Comme l'ISS, l'iISS Forte se trouve être naturellement préservée sous l'interconnexion cascade : nous montrons ce résultat en Section 1.3.1.

Bien que l'ISS et ses déclinaisons soient d'un intérêt crucial pour l'analyse des systèmes non-linéaires interconnectés, leur genèse prend ses sources dans une volonté de garantir une certaine *robustesse* du système considéré vis-à-vis d'imperfections, de signaux exogènes et d'erreurs en tout genre. Leur puissance pour l'analyse de systèmes interconnectés peut être vu, à cet égard, comme une conséquence de la robustesse des sous-systèmes qui les composent. Comme nous l'avons évoqué, de part leur définition même, l'ISS garantit une certaine robustesse vis-à-vis de tout signal d'entrée borné, l'iISS Forte ne garantit cette propriété que pour des signaux d'amplitude "raisonnable", tandis que l'ISS n'assure de robustesse que vis-à-vis de signaux dont l'énergie est bornée. Certains travaux [Angeli and Nešić, 2001, Grüne, 2004] ont cherché à étendre la classe des signaux vis-à-vis desquels des systèmes ISS sont robustes. Notre contribution dans ce sens a été de démontrer que l'erreur en régime permanent d'un système ISS est liée non seulement à l'amplitude du signal d'entrée, mais aussi à sa valeur moyenne sur un horizon glissant. Cette observation permet, notamment, d'obtenir une estimée plus fine du comportement en régime permanent sous l'action de signaux présentant des pics d'intensités rapides, tout en ayant une valeur moyenne relativement faible. Ces résultats sont présentés en Section 1.1.3.

Dans bien des cas, lorsque le système étudié est commandé en boucle fermée, le réglage adéquat de certains gains de la loi de commande permet de limiter l'erreur en régime permanent à loisir, ou tout au moins dans les limites des capacités de l'actionneur. On parle alors de *stabilité pratique*. De la même manière, le domaine à partir duquel les solutions convergent (le domaine d'attraction) peut parfois être agrandi à loisir en choisissant convenablement certains paramètres. C'est ce que l'on appelle la *stabilité semiglobale*. Nous avons développé des caractérisations de type Lyapunov pour chacune de ces notions, et obtenu des conditions sous lesquelles ces propriétés sont préservées sous l'interconnexion en cascade. Nous présentons ces résultats en Section 1.3.3.

Plusieurs de ces travaux ont donné lieu à des développements applicatifs. La stabilité semiglobale pratique ainsi que la robustesse des systèmes ISS vis-à-vis de signaux d'amplitude moyenne bornée ont été utilisées pour étudier le comportement de satellites en formation, de navires lors du ravitaillement en pleine mer, et de robots sous l'influence de perturbations externes. Nous présentons ces résultats en Section 1.4.

Altération de la synchronisation et application aux neurosciences

Le deuxième chapitre de ce document traite de l'analyse et de la commande de la synchronisation neuronale à des fins thérapeutiques. La synchronisation neuronale joue en effet un rôle central dans le fonctionnement du cerveau. Elle est par exemple impliquée dans les mécanismes de mémoire, de cognition et de génération de mouvement. À l'inverse, une synchronisation intempestive de certaines zones cérébrales peut conduire à des états pathologiques tels que la maladie de Parkinson, le tremblement essentiel, l'épilepsie ou le symptôme d'akinésie. La stimulation cérébrale profonde (DBS) est un traitement symptomatique de plusieurs pathologies neurologiques liées à la synchronisation neuronale. Elle consiste à stimuler électriquement des zones profondes du cerveau par l'intermédiaire d'électrodes implantées de manière permanente.

Bien que la DBS soit un traitement performant et banalisé de la maladie de Parkinson, elle souffre encore de limitations considérables. Dans la plupart des techniques DBS existantes, la stimulation est un signal carré dont les paramètres doivent être déduits par essais successifs pour chaque patient. Elle fonctionne en boucle ouverte : aucune information cérébrale ni modèle des dynamiques impliquées ne sont généralement utilisés. Ceci conduit à une stimulation disproportionnée des zones cérébrales visées, ainsi qu'à la stimulation d'autres zones par diffusion électrique dans le tissu. Cette stimulation disproportionnée a un impact important en termes d'effets secondaires et de consommation énergétique, et empêche l'optimisation du traitement. De plus, les mécanismes impliqués dans la synchronisation cérébrale, et par conséquent dans ses dysfonctionnements, ne sont encore que partiellement connus.

Les travaux que nous avons lancés sur ce thème visent à une étude analytique des phénomènes impliqués dans la synchronisation neuronale, ainsi qu'au développement de lois de commande réalistes permettant d'altérer les oscillations cérébrales pathologiques au moyen d'un signal de stimulation électrique. A cette fin, plutôt que d'utiliser un signal boucle ouverte pour la DBS, nous proposons d'élaborer un signal de stimulation, plus adapté et plus respectueux, à partir de mesures sur l'activité cérébrale instantanée du patient.

D'un point de vue théorie de la commande, cet objectif pose toutefois de nombreux défis. Les contraintes suivantes empêchent l'usage des techniques de commande traditionnelles :

- *Grande dimension et complexité*, du fait du nombre considérable de neurones impliqués, de leur hétérogénéité, de leur dynamique propre et de leur interconnexion
- *Non-linéarités*, du fait de la nature même des neurones et des modèles qui les représentent
- *Contraintes d'actionnement*, du fait du nombre réduit d'électrodes de stimulations pouvant être introduites dans les zones ciblées
- *Contraintes d'observation*, car le comportement individuel de chaque neurone ne peut être mesuré : seule la somme de leur potentiels membranaires (champ moyen local) est accessible à la mesure.

Au delà de ces défis, l'objectif même de la DBS n'est pas des plus classiques d'un point de vue Automatique. Bien que le mode d'action précis de la DBS fasse encore débat au sein de la communauté des neurosciences, des mesures expérimentales sur des malades parkinsoniens révèlent une suractivité et une synchronisation de certaines zones profondes du cerveau, notamment le noyau sous-thalamique (STN) qui est la cible privilégiée de la DBS. Cette synchronisation n'est pas présente chez les patients sains. Elle constitue donc un phénomène pathologique que la DBS semble contrer. Cette altération peut se faire de plusieurs manières : soit en *désynchronisant* les cellules neuronales concernées, soit en *inhibant* leur action, soit encore en *modifiant la fréquence de synchronisation* vers un domaine fréquentiel ne donnant pas naissance aux symptômes. Les travaux que nous avons menés reposent sur les deux premières hypothèses. En termes automatiques, si l'inhibition peut se traduire en termes de stabilisation d'un point d'équilibre, l'objectif de la désynchronisation ne correspond pas aux objectifs classiques de la théorie de la commande puisqu'il ne s'agit ni de stabiliser un point de fonctionnement donné ou une trajectoire, ni de synchroniser des comportements dynamiques, mais bien d'altérer la corrélation entre les neurones.

La démarche que nous avons adoptée consiste à nous focaliser sur le *rythme* des neurones plutôt que sur leur dynamique précise. Comme nous le verrons en Section 2.1, ce rythme peut être analysé par l'étude d'oscillateurs de phase interconnectés. Bien que non-linéaires

et hétérogènes, leur dynamiques sont nettement plus simples que celles des neurones eux-mêmes et permettent l’obtention de résultats analytiques même sous des graphes d’interconnexion complexes ou méconnus. Ils partagent de plus des similarités probantes avec des systèmes dynamiques bien connus de la communauté de Physique statistique, à savoir les oscillateurs de Kuramoto.

Les résultats que nous avons obtenus dans ce domaine sont présentés dans le Chapitre 2 de ce document. Ces travaux se sont principalement intéressés à l’étude du comportement de populations neuronales sous l’action d’un signal de stimulation proportionnel à leur champ moyen local, c’est-à-dire la moyenne pondérée de leurs potentiels de membrane. Cette commande a l’avantage de se baser sur un signal aisément mesurable et de ne requérir que peu de puissance de calcul pour son implémentation. Nous commençons donc par modéliser le comportement d’oscillateurs de phase lorsqu’un tel signal de stimulation leur est appliqué (Section 2.1.1). Nous montrons ensuite que la synchronisation exacte (plus précisément, le verrouillage de phases oscillant) est empêchée par l’application du signal DBS choisi, pour la plupart des graphes d’interconnexion entre les neurones (Section 2.1.2). Bien qu’encourageant, ce résultat n’est cependant pas satisfaisant d’un point de vue pratique puisque, comme nous le montrons en Section 2.1.3, ce verrouillage de phase est en fait robuste à des signaux de stimulation trop faibles ; même si la synchronisation exacte est empêchée, le rythme des neurones risque donc de rester très corrélé si le signal de stimulation n’est pas d’une amplitude suffisante. La Section 2.1.4 vise elle à altérer efficacement la synchronisation pathologique et à trouver des valeurs du gain proportionnel assurant soit la désynchronisation effective des neurones (Section 2.1.4.1), soit leur inhibition (Section 2.1.4.2).

Une alternative à la modélisation des rythmes neuronaux par des oscillateurs de phase consiste à exploiter le comportement entrée-sortie de chacun des neurones. Cette relation peut être représentée par un opérateur, dont la sensibilité vis-à-vis de l’entrée peut être quantifiée par un paramètre appelé *gain de co-coercivité*. Un résultat récent [Scardovi et al., 2010] permet de prévoir la synchronisation de tels opérateurs interconnectés à partir de la connaissance de leurs gains de co-coercitivité et de la connectivité algébrique de leur graphe d’interconnexion. Cette approche permet ainsi de prendre en compte le comportement dynamique de chacun des neurones, tout en ne se basant que sur un nombre limité de paramètres, accessibles expérimentalement. Notre contribution à cette méthodologie est présentée en Section 2.2. Nous proposons tout d’abord une extension du travail original [Scardovi et al., 2010] permettant de prendre en considération une certaine hétérogénéité entre les opérateurs (Section 2.2.1), puis nous l’appliquons au cas de neurones représentés par le modèle d’Hindmarsh-Rose [Hindmarsh and Rose, 1984] (Section 2.2.2).

Systèmes commandés par réseaux

Le troisième domaine de recherche présenté dans ce document concerne la commande de systèmes communicant avec leur organe de commande par l’intermédiaire d’un réseau numérique. Cette architecture de commande offre de nombreux avantages suivant le type d’application envisagée : répartition de la tâche à accomplir, coopération, contrôle à distance, diagnostic facilité, etc. Les réseaux sans fils, notamment, se généralisent dans des applications de commande industrielles, du fait des avancées technologiques (miniaturisation, portée, autonomie, coût) et des solutions qu’ils apportent en termes de flexibilité, de réduction de coûts d’implantation, d’encombrement, de simplicité et de sécurité. Parmi les domaines d’application concernés, citons la santé (chirurgie télé-opérée, observation à domicile), les

transports (drones, formations de véhicules, équipements automobiles), l'environnement (prédiction et surveillance de désastres par réseaux de capteurs), l'espace (formations de satellites, exploration) et la domotique. La mise en réseau sans fil d'une chaîne de production automatisée permet par exemple une adaptation plus rapide à des contraintes fluctuantes, la limitation du temps d'interruption de la production en cas de réorganisation de la chaîne, ou encore la diminution des risques liés à l'encombrement dû aux câbles.

En altérant et raréfiant l'information transitant entre le système et l'organe qui le commande, les réseaux posent toutefois des défis importants pour l'automaticien. En effet, l'une des conséquences de la limitation de la capacité de transfert d'information, liée au caractère numérique des réseaux, est le codage imparfait, sous formes de paquets, des données à envoyer. Celles-ci sont à la fois échantillonnées et quantifiées, ce qui les rend *imprécises*. Ces phénomènes de discrétisation, propres à tout contrôle de nature numérique, peuvent se trouver grandement amplifiés par l'utilisation d'un réseau de communication. D'autre part, les réseaux utilisés dans les chaînes de mesure pour la commande automatique n'accusent généralement pas réception de l'information transmise : pour la commande temps-réel, toute mesure passée devient très vite obsolète et il serait donc inutile de retransmettre une information qui ne serait pas parvenue à destination. Des *pertes de paquets* d'information peuvent donc survenir. De plus, lorsqu'un réseau interconnecte différents nœuds (dans le cas de la commande automatique : des capteurs, des actionneurs et des calculateurs) seul l'un d'entre eux peut généralement transmettre son information à un instant donné selon la décision d'un *protocole* propre au réseau. La connaissance "instantanée" que le contrôleur a du système, ainsi que l'action qu'il peut entreprendre par l'intermédiaire des actionneurs pour en modifier le comportement, n'est ainsi que partielle et se cantonne à l'information reçue (ou envoyée) à l'instant considéré. Enfin, les réseaux induisent des *retards* dans la transmission des données. Ceux-ci proviennent du temps de traitement de l'information mais surtout de possibles congestions au sein du réseau et sont donc, en général, de durées variables.

Tous ces phénomènes ont généralement une influence néfaste sur le comportement du système comparativement à une liaison filaire idéale (i.e. analogique). Cette influence ne saurait être négligée dans des applications mettant en jeu un grand nombre de capteurs et d'actionneurs, ou lorsque les nœuds sont physiquement éloignés les uns des autres, ou encore en cas de bande passante particulièrement limitée, ce qui semble être la tendance générale dans les applications industrielles actuelles. Notons en effet que, malgré des progrès technologiques importants, la plupart des applications en développement visent à limiter le plus possible la bande passante du réseau de communication pour des raisons de coût d'installation, de dépense énergétique (autonomie), ou afin justement d'autoriser la connexion de nœuds plus nombreux.

Aussi, lorsque la communication entre un système et l'organe qui le commande est effectuée par l'intermédiaire d'un réseau numérique, il convient de développer des lois de commande spécifiquement adaptées et de s'interroger sur les conditions garantissant un fonctionnement acceptable en termes de stabilité, de performances et de robustesse.

La démarche que nous avons entreprise dans ce sens est présentée dans le Chapitre 3. Elle consiste à exploiter la taille relativement grande des paquets transmis afin de compenser les effets induits par le réseau. A chaque envoi d'un paquet de commande, plutôt que la valeur instantanée du signal à appliquer comme dans la commande numérique classique, une prédiction du signal de commande est transmise. Ce signal de commande prédictif est élaboré à partir d'un modèle plus ou moins précis du système à commander. A la réception par l'actionneur, ce signal est stocké dans une mémoire-tampon et resynchronisé malgré les

retards temps-variants grâce à un système d'estampillage des données. Suivant la précision du modèle, cette approche permet de tolérer des retards maximaux (MAD) relativement importants ainsi qu'un temps entre deux accès consécutifs au réseau (MATI) significatifs. Un compromis analytique entre précision de la modélisation, MATI et MAD garantissant la stabilité de la boucle fermée est donné explicitement (Section 3.1).

Enfin, le problème de la quantification est traité en Section 3.2. Ce travail consiste à garantir la stabilité et la robustesse de lois de commande exploitant une quantification dynamique des données transmises. Par opposition à la quantification statique qui approxime les données par une valeur fixe arrondie suivant leur valeur réelle, la quantification dynamique autorise une approximation plus fine en faisant évoluer le maillage de l'approximation au cours du temps suivant un algorithme de zoom avant/arrière. Nous montrons que sous certaines propriétés d'ISS vis-à-vis d'erreurs de mesures, la boucle fermée après quantification est elle même robuste vis-à-vis d'une certaine classe de signaux exogènes.

Collaborations

Les travaux présentés dans ce document sont le fruit de collaborations avec les personnes suivantes. Ces résultats n'auraient pu voir le jour sans leur contributions, leur dynamisme et leur patience. Je les remercie chaleureusement de m'avoir donné le privilège de travailler à leur côté.

- **David Angeli**, professeur à l'Imperial College de Londres (Grande Bretagne) et à l'Université de Florence (Italie), avec qui nous avons développé les résultats concernant la propriété d'iISS Forte (Section 1.1.2) et étudié les propriétés de stabilité de systèmes iISS en cascade (Section 1.3.2)
 - **Souad Bezzaoucha**, dont j'ai co-encadré le stage de master 2 avec Alessio Franci et maintenant doctorante au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), avec qui nous avons développé des conditions suffisantes pour l'inhibition d'oscillations par une commande proportionnelle au champ moyen des oscillateurs considérés (Section 2.1.4.2)
 - **Antonio Bicchi**, professeur à l'Université de Pise (Italie), qui a encadré mon post-doctorat en 2006-2007 et avec qui nous avons développé une commande prédictive apte à compenser certains effets induits par les réseaux de communication numérique pour le transfert de données entre le système et l'organe de commande (Section 3.1)
 - **Stefano Falasca**, doctorant à l'Université de Pise (Italie), avec qui nous avons entrepris d'étendre la méthode de commande sur réseaux (Section 3.1) à des contrôleurs dynamiques
 - **Alessio Franci**, doctorant au L2S d'octobre 2008 à avril 2012 que j'ai co-encadré avec Françoise Lamnabhi-Lagarrigue et William Pasillas-Lépine et maintenant post-doctorant à l'Université de Liège, avec qui nous avons développé tous les résultats liés à l'analyse et la commande de la synchronisation neuronale à des fins thérapeutiques, que ce soit au travers d'oscillateurs de phases (Section 2.1) ou par l'intermédiaire d'une approche opératoire (Section 2.2)
 - **Randy Freeman**, professeur à la Northwestern University (USA), avec qui nous avons proposé une démonstration alternative au théorème du petit gain pour les systèmes iISS (Section 1.2.1)
 - **Massimiliano Gamba**, étudiant de master à l'Université de Pise (Italie), avec qui nous développons un dispositif expérimental permettant de tester les techniques de commande prédictive sur réseaux développés en Section 3.1
 - **Luca Greco**, post-doctorant au L2S de 2009 à 2012 que j'ai co-encadré avec Françoise Lamnabhi-Lagarrigue et maintenant maître de conférences à l'Université Paris Sud 11 - L2S, avec qui nous avons développé des lois de commande prédictives pour la stabilisation de systèmes commandés par réseaux (Section 3.1), ainsi que l'étude de propriétés d'ISS stochastiques pour les systèmes à commutations
 - **Esten Grøtli**, post-doctorant à NTNU (Norvège), avec qui nous avons développé
-

- des outils pour l'analyse des systèmes ISS vis-à-vis de signaux dont l'énergie moyenne est bornée (Section 1.1.3) et leur application aux formations de satellites (Section 1.4.1.2)
- **Hiroshi Ito**, professeur au Kyushu Institute of Technology (Japon), avec qui nous avons développé le concept d'iISS Forte (Section 1.5) ainsi que l'analyse petit-gain de systèmes iISS interconnectés en boucle fermée (Section 1.2)
 - **Rafael Kelly Martínez**, professeur à CICESE (Mexique), avec qui nous avons appliqué les techniques d'analyse de la stabilité semiglobale pratique à un robot manipulateur commandé par PID (Section 1.4.3)
 - **Raymond Kristiansen**, professeur associé au Narvik University College (Norvège), avec qui nous avons appliqué les outils d'analyse basés sur la stabilité semiglobale pratique pour la commande robuste de satellites en formation (Section 1.4.1.1)
 - **Françoise Lamnabhi-Lagarrigue**, directrice de recherches CNRS au L2S, avec qui nous avons développé des lois de commande proportionnelles au champ moyen local aptes à désynchroniser ou à inhiber une population d'oscillateurs interconnectés (Sections 2.1.4.1 et 2.1.4.2) pour des applications aux neurosciences
 - **Erik Kyrkjebø**, chercheur au Høgskulen i Sogn og Fjordane et SINTEF (Norvège), avec qui nous avons appliqué les techniques d'analyse de stabilité semiglobale pratique à l'étude du comportement de navires durant les phase des ravitaillement en pleine mer (Section 1.4.2)
 - **Antonio Loría**, directeur de recherches CNRS au L2S, qui a encadré ma thèse de doctorat et avec qui j'ai développé les résultats théoriques sur l'interconnexion de systèmes en cascade présentés en Section 1.3.3, ainsi que les les applications aux satellites et aux robots manipulateurs (Sections 1.4.1.1 et 1.4.3)
 - **Elena Panteley**, chargée de recherches CNRS au L2S, avec qui nous avons développé les résultats liés à la désynchronisation d'oscillateurs de phases pour des applications aux neurosciences (Section 2.1.4.1), ainsi que l'étude de la robustesse de systèmes ISS vis-à-vis de signaux dont l'énergie moyenne est bornée (Section 1.1.3) et son application aux formations de satellites (Section 1.4.1.2)
 - **William Pasillas-Lépine**, chargé de recherches CNRS au L2S, avec qui nous avons développé certains résultats liés à l'analyse et la commande de la synchronisation neuronale à des fins thérapeutiques au travers d'oscillateurs de phases (Section 2.1)
 - **Luca Scardovi**, professeur assistant à l'Université de Toronto (Canada), avec qui nous avons étendu l'approche entrée-sortie pour l'analyse de systèmes dynamiques en réseaux qu'il a lui-même récemment développée et que nous avons ensuite appliquée à l'étude de neurones interconnectés représentés par le modèle de Hindmarsh-Rose (Section 2.2).

D'autres travaux, que nous ne traitons pas dans ce document, ont été menés en collaboration avec :

- **Gildas Besançon**, professeur à l'INP Grenoble - GIPSA-lab, avec qui nous avons étudié la stabilisation du double intégrateur lorsque l'actionnement n'est pas permanent [Loría et al., 2005], ainsi que la stabilisation par retour de sortie grâce à des observateurs adaptatifs [de León Morales et al., 2005]
 - **Yacine Chitour**, professeur à l'Université Paris Sud 11, avec qui nous avons étudié la stabilisation de systèmes intégrateurs multiples ou neutralement stables lorsque l'accès à l'actionneur n'est pas permanent mais d'excitation persistante [Chaillet et al., 2007b, Chaillet et al., 2007a, Loría et al., 2005]
-

- **Jesús de León Morales**, chercheur à l'Université de Nuevo León (Mexique), avec qui nous avons étudié la stabilisation par retour de sortie grâce à des observateurs adaptatifs sous des hypothèses de persistance d'excitation [de León Morales et al., 2005]
 - **Mario Sigalotti**, chargé de recherches INRIA (CMAP), avec qui nous avons étudié la stabilisation de systèmes intégrateurs multiples ou neutralement stables lorsque l'accès à l'actionneur n'est pas permanent mais d'excitation persistante [Chaillet et al., 2007b, Chaillet et al., 2007a]
 - **Johannes Tjønnås**, doctorant à NTNU (Norvège), avec qui nous avons étudié la préservation de la stabilité d'ensemble pour des systèmes connectés en cascade [Tjønnås et al., 2006].
-

Liste des abréviations

0-GAS	Globalement asymptotiquement stable à entrée nulle
0-LES	Localement exponentiellement stable à entrée nulle
DBS	Stimulation cérébrale profonde (<i>Deep Brain Stimulation</i>)
GAS	Globalement asymptotiquement stable
GES	Globalement exponentiellement stable
HR	Hindmarsh-Rose
iISS	Stabilité intégrale entrée-état (<i>Integral Input-to-State Stability</i>)
ISS	Stabilité entrée-état (<i>Input-to-State Stability</i>)
LISS	Stabilité entrée-état locale (<i>Local Input-to-State Stability</i>)
LTI	Linéaire temps-invariant
MAD	Retard maximal tolérable (<i>Maximum Allowable Delay</i>)
MATI	Temps maximal autorisé entre deux transmissions consécutives (<i>Maximum Allowable Transfer Interval</i>)
MP	Maladie de Parkinson
mTI	Temps minimum entre deux transmissions (<i>Minimum Transfer Interval</i>)
NCS	Systèmes commandés par réseaux (<i>Network Controlled Systems</i>)
UGPAS	Uniformément globalement pratiquement asymptotiquement stable
USAS	Uniformément semiglobalement asymptotiquement stable

Notation

\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres entiers
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	Ensemble des nombres complexes
I	Matrice identité de dimension appropriée
I_N	Etant donné $N \in \mathbb{N}$, matrice identité de taille N
0_N	Etant donné $N \in \mathbb{N}$, matrice carrée nulle de taille N
$\mathbf{1}_N$	Etant donné $N \in \mathbb{N}$, vecteur colonne de dimension N dont les éléments sont tous égaux à 1
diag	Etant donné $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ désigne la matrice carrée diagonale de taille N dont les éléments diagonaux sont x_1, x_2, \dots, x_N
spect	Etant donnée une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{spect}(A)$ désigne l'ensemble de ses valeurs propres
id	Fonction identité
i	Nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$
$A_{\geq a}$	Pour un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et un scalaire $a \in \mathbb{R}$, $A_{\geq a} := \{x \in A : x \geq a\}$; les ensembles $A_{>a}$, $A_{\leq a}$ et $A_{<a}$ sont définis de la même manière
\mathcal{K}	Une fonction continue $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est dite de classe \mathcal{K} ($\alpha \in \mathcal{K}$), si elle est strictement croissante et satisfait $\alpha(0) = 0$
\mathcal{K}_∞	$\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ si $\alpha \in \mathcal{K}$ et $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(s) = \infty$
\mathcal{L}	Une fonction continue $\sigma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est dite de classe \mathcal{L} ($\sigma \in \mathcal{L}$) si elle est décroissante et vérifie $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$
\mathcal{KL}	Une fonction $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est dite de classe \mathcal{KL} ($\beta \in \mathcal{KL}$) si $\beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ pour tout $t \geq 0$ et $\beta(s, \cdot) \in \mathcal{L}$ pour tout $s \geq 0$
$[\cdot]$	Etant donné $x \geq 0$, $[x]$ désigne sa partie entière : $[x] := \max \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$
$ \cdot $	Norme Euclidienne
$ \cdot _\infty$	Norme infinie
$ \cdot _{\mathcal{A}}$	Pour un ensemble fermé $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $ x _{\mathcal{A}} := \inf_{z \in \mathcal{A}} x - z $
$\ \cdot\ $	Pour un signal $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\ u\ := \text{ess sup}_{t \geq 0} u(t) $
$\mathcal{B}(x, \delta)$	Etant donné $\delta \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(x, \delta) := \{z \in \mathbb{R}^n : x - z \leq \delta\}$
\mathcal{B}_δ	$\mathcal{B}_\delta := \mathcal{B}(0, \delta)$
\mathcal{U}^m	Ensemble des signaux $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mesurables et localement essentiellement bornés, où $m \in \mathbb{N}$
$\mathcal{U}_{\leq R}^m$	Pour une constante $R \geq 0$, $\mathcal{U}_{\leq R}^m := \{u \in \mathcal{U}^m : \ u\ \leq R\}$
$\forall a.a. x$	Pour tout x , sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle
\mathbb{N}_N^\neq	Etant donné $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_N^\neq := \{(i, j) \in \mathbb{N}_{\leq N} \times \mathbb{N}_{\leq N} : i \neq j\}$
$q = \mathcal{O}(p)$	Pour $a \in \{0, +\infty\}$ et $p, q \in \mathcal{K}$, $q(s) = \mathcal{O}(p(s))$ lorsque $s \rightarrow a$ signifie qu'il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\limsup_{s \rightarrow a} q(s)/p(s) \leq k$.

Chapitre 1

Outils d'analyse de la stabilité et de la robustesse

Les travaux présentés dans ce chapitre sont le fruit de collaborations avec : D. Angeli, E. Grøtli, H. Ito, R. Kelly Martinez, R. Kristiansen, E. Kyrkjebø, A. Loría et E. Panteley. Ils ont fait l'objet des publications suivantes : [Chaillet et al., 2012, Ito et al., 2013, Grøtli et al., 2011b, Chaillet and Ito, 2011, Grøtli et al., 2010, Ito et al., 2010, Kristiansen et al., 2009, Chaillet and Loría, 2009, Grøtli et al., 2008, Kristiansen et al., 2008, Chaillet and Angeli, 2006, Chaillet et al., 2007c, Chaillet et al., 2006, Kristiansen et al., 2006a, Kristiansen et al., 2006b, Kyrkjebø et al., 2006, Chaillet and Loría, 2006c, Chaillet and Loría, 2006a, Chaillet and Loría, 2006d, Chaillet and Panteley, 2006, Chaillet and Angeli, 2008, Chaillet and Loría, 2008, Chaillet and Loría, 2006b, Chaillet and Loría, 2005]

Nous présentons ici nos contributions aux outils théoriques permettant l'analyse de la stabilité et de la robustesse de systèmes non linéaires. La plupart de ces contributions sont liées à la notion d'ISS. Après un bref rappel des notions de base nécessaires, nous étudions successivement des systèmes dynamiques isolés en présence de perturbations exogènes, puis leur comportement sous interconnexion cascade et par rétroaction. Nous présentons également des applications auxquelles ces développements ont donné lieu, en particulier pour la commande de satellites en formation, pour le ravitaillement de navires en pleine mer, ainsi que pour la commande de robots manipulateurs.

1.1 Notions liées à la stabilité entrée-état (ISS)

1.1.1 Contexte

1.1.1.1 Stabilité

De nombreuses applications de commande peuvent être formulées comme un problème de stabilisation de l'origine d'un système dynamique. Typiquement, on désire que l'erreur entre le comportement désiré et le comportement réel reste bornée et de faible amplitude, tout au moins à partir d'erreurs initiales suffisamment petites : en d'autres termes, on désire la *stabilité* de l'origine pour la dynamique régissant cette erreur. Par ailleurs, dans la mesure du possible, il est souhaitable que cette erreur converge vers zéro, ce qui nous amène à la notion d'*attractivité* de l'origine.

Lorsque l'origine est à la fois stable et attractive, on la dit *asymptotiquement stable*. Suivant que le domaine des conditions initiales à partir desquelles les solutions convergent vers l'origine soit l'espace d'état tout entier ou non, cette stabilité asymptotique sera appelée *globale* ou *locale*.

Afin de formaliser ces notions, nous considérons un système dynamique de dimension finie dont la représentation d'état s'écrit

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, est l'état du système, et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne une fonction localement lipschitzienne satisfaisant $f(0) = 0$.

Nous rappelons alors les définitions suivantes, dans lesquelles $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ désigne, partout où elle est définie, un voisinage de l'origine et $x(\cdot; x_0)$ désigne la solution de (1.1) partant de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ à l'instant $t = 0$. Plus de détails peuvent être trouvés dans *e.g.* [Khalil, 2002].

Définition 1.1 (Stabilité, attractivité, stabilité asymptotique) *L'origine du système (1.1) est dite :*

- stable sur \mathcal{X} s'il existe une fonction α de classe \mathcal{K} telle que, pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$,

$$|x(t; x_0)| \leq \alpha(|x_0|), \quad \forall t \geq 0;$$

- attractive sur \mathcal{X} si, pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = 0;$$

- asymptotiquement stable sur \mathcal{X} s'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} telle que, pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$,

$$|x(t; x_0)| \leq \beta(|x_0|, t), \quad \forall t \geq 0.$$

- exponentiellement stable sur \mathcal{X} s'il existe des constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que, pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$,

$$|x(t; x_0)| \leq k_1 |x_0| e^{-k_2 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si, de plus, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ alors ces propriétés sont dites globales.

Il est à noter que la définition de stabilité proposée ci-dessus est plus forte que sa version “ ε - δ ” généralement utilisée pour définir la stabilité au sens de Lyapunov. Elle impose en effet que toute solution partant de l'ensemble \mathcal{X} reste bornée au cours du temps.

Cette définition, comme la plupart du contenu de ce document, fait usage de fonctions de comparaison (classes \mathcal{K} et classe \mathcal{KL}) qui sont rappelées dans la Section *Notations*. Cette formulation, popularisée par Hahn [Hahn, 1963], s'avère en effet très commode à l'usage et permet de quantifier gains et taux de convergence liés au comportement des solutions.

Les fonctions de Lyapunov constituent un outil central pour l'analyse de la stabilité et de l'attractivité. Elles tiennent leur nom de la méthode d'analyse développée par A.M. Lyapunov [Lyapunov, 1892], qui se base sur l'étude du comportement d'une fonction définie positive le long des trajectoires du système considéré. Toute la puissance de cette méthode réside dans sa capacité à réduire l'étude d'un système dynamique de dimension n à celle d'une fonction scalaire dont le comportement est “suffisamment représentatif” de celui du système considéré. Nous utiliserons par la suite la terminologie suivante.

Définition 1.2 (Fonction de Lyapunov candidate) Une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est appelée fonction de Lyapunov candidate si elle est continument différentiable, définie positive (i.e. $V(0) = 0$ et $V(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$) et radialement non bornée (i.e. $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$).

Notons que cette notion peut également être décrite par des fonctions de comparaison. En effet, V est une fonction de Lyapunov candidate si et seulement si elle est continument différentiable et il existe deux fonctions $\underline{\alpha}$ et $\bar{\alpha}$ de classe \mathcal{K}_∞ telles que

$$\underline{\alpha}(|x|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

L'utilisation de cet outil fondamental est décrite dans de nombreux ouvrages : voir par exemple [Khalil, 2002, Yoshizawa, 1966, Vidyasagar, 1993, Rouche et al., 1977, Hahn, 1963]. A titre illustratif, nous rappelons que la stabilité globale asymptotique de l'origine du système 1.1 est équivalente à l'existence d'une fonction de Lyapunov candidate $V : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ et d'une fonction α de classe \mathcal{K} telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) \leq -\alpha(|x|).$$

1.1.1.2 Robustesse à des signaux exogènes

Les résultats d'analyse par la seconde méthode de Lyapunov se cantonnent toutefois à des systèmes sans entrée. Or, nombre de systèmes physiques sont affectés de perturbations exogènes, de dynamiques difficilement modélisables ou encore d'incertitudes paramétriques. Une formalisme particulièrement intéressant pour l'analyse de la robustesse des systèmes non-linéaires est celui proposé par la stabilité entrée-état (ISS). Cette propriété concerne les systèmes non-linéaires de la forme

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et $u \in \mathbb{R}^m$ représente une entrée exogène.

En termes informels, la propriété d'ISS introduite par Sontag dans [Sontag, 1989] (voir [Sontag, 1995, Sontag, 2006] pour des tutoriels) impose que la norme de l'état à chaque instant soit bornée par la somme d'une fonction de l'amplitude du signal exogène appliqué et d'un terme proportionnel à la norme de l'état initial tendant vers zéro avec le temps.

Définition 1.3 (ISS) Le système (1.2) est dit stable entrée-état (ISS) s'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} et une fonction γ de classe \mathcal{K}_∞ (appelée gain ISS) telles que, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et toute entrée admissible u , sa solution satisfait

$$|x(t; x_0, u)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|u\|), \quad \forall t \geq 0. \tag{1.3}$$

Ce paradigme permet de prendre en considération trois propriétés. D'une part, si l'entrée est identiquement nulle, alors l'origine est globalement asymptotiquement stable (0-GAS). D'autre part, l'erreur en régime permanent est arbitrairement petite pourvu que l'entrée appliquée soit d'amplitude suffisamment faible. Enfin, pour toute entrée bornée, l'état est lui-même borné.

D'une manière générale, les travaux sur l'ISS ont constitué des avancées majeures pour l'analyse de la stabilité des systèmes non-linéaires, et ont donné lieu à des retombées théoriques et applicatives dans des domaines aussi variés que la commande sous contraintes

de communication [Nešić and Angeli, 2002, Nešić and Teel, 2004, Liberzon and Nešić, 2007, Sharon and Liberzon, 2011] (voir également le Chapitre 3 du présent document), la stabilisation par retour de sortie [Prally and Jiang, 1993], la commande optimale [Krstic and Li, 1998], l'étude des systèmes hybrides ou à commutations [Vu et al., 2007, Cai and Teel, 2005], la commande prédictive [Lazar et al., 2008], la robotique [Angeli, 1999, Malisoff et al., 2011], la production manufacturière [Dashkovskiy et al., 2009], les transports [Grötli et al., 2010, Tanner and Pappas, 2002], les réseaux de neurones [Sanchez and Perez, 1999], les systèmes chaotiques [Ahn, 2010], les réseaux bio-chimiques [Chaves, 2005], ou encore les neurosciences [Franci et al., 2011b] (voir également le Chapitre 2).

Malgré cet indéniable succès, le fait que l'état soit borné pour tout signal d'entrée borné constitue une contrainte très forte en pratique. Une alternative à l'ISS est la stabilité entrée-état intégrale (iISS), introduite dans [Sontag, 1998], qui évalue l'impact de l'énergie du signal appliqué (plutôt que son amplitude) sur le système considéré.

Définition 1.4 (iISS) *Le système (1.2) est dit intégralement stable entrée-état s'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} , et deux fonctions μ_1, μ_2 de classe \mathcal{K}_∞ telles que, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et toute entrée admissible u , sa solution satisfait*

$$|x(t; x_0, u)| \leq \beta(|x_0|, t) + \mu_1 \left(\int_0^t \mu_2(|u(s)|) ds \right), \quad \forall t \geq 0.$$

μ_2 est alors appelée gain iISS de (1.2).

Tout système ISS est iISS. L'iISS constitue en réalité une propriété bien plus générale que l'ISS. Elle implique elle aussi la 0-GAS et garantit de la robustesse vis-à-vis de certains signaux perturbateurs dont l'énergie est bornée [Angeli et al., 2000b]. Plus précisément, elle garantit l'implication suivante, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_0^{+\infty} \mu_2(|u(s)|) ds < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0, u) = 0.$$

Cependant, l'iISS ne garantit en rien la robustesse vis-à-vis d'entrée bornées, même de faible amplitude. De nombreux systèmes iISS peuvent en effet être déstabilisés par une entrée d'amplitude arbitrairement petite ou par des signaux tendant vers zéro [Arcak et al., 2002].

1.1.2 Notion d'iISS forte

1.1.2.1 Définition

Entre la contraignante ISS et la parfois trop faible iISS, nombre de systèmes non-linéaires sont robustes vis-à-vis d'entrées suffisamment petites même s'ils deviennent instables sous l'action de signaux trop amples. Ceci nous a amené à introduire une notion intermédiaire, appelée iISS Forte [Chaillet et al., 2012].

Définition 1.5 (iISS forte) *Le système (1.2) est dit Fortement iISS s'il est à la fois iISS, et ISS vis-à-vis des petites entrées; en d'autres termes, s'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} , trois fonctions $\mu_1, \mu_2, \gamma \in \mathcal{K}_\infty$ et une constante $R > 0$ telles que, pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et toute entrée admissible u , sa solution satisfait les propriétés suivantes à tout instant $t \geq 0$:*

$$|x(t; x_0, u)| \leq \beta(|x_0|, t) + \mu_1 \left(\int_0^t \mu_2(|u(s)|) ds \right)$$

$$\|u\| \leq R \quad \Rightarrow \quad |x(t; x_0, u)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma(\|u\|).$$

L'ISS est ainsi un cas particulier de l'iISS forte, qui elle-même implique l'iISS. Notons que l'iISS est à son tour plus restrictive que l'ISS locale (LISS) telle que définie dans [Sontag and Wang, 1996, Dashkovskiy et al., 2009], qui ne garantit que des propriétés locales à la fois dans l'état et dans l'entrée¹ (et, en particulier, n'implique pas la 0-GAS). Ces inclusions sont résumées graphiquement par la Figure 1.1.

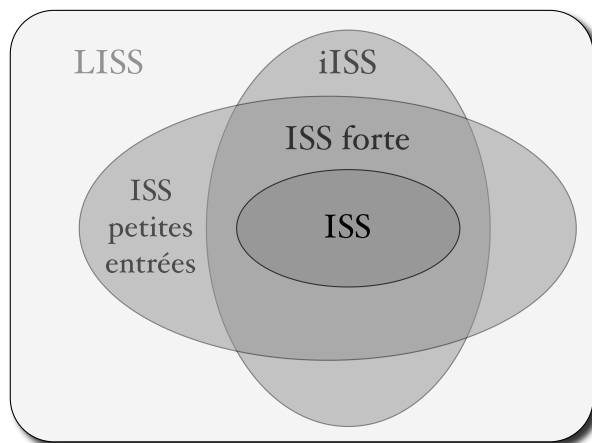


FIGURE 1.1 – Hiérarchie schématique entre différentes variantes de l'ISS.

1.1.2.2 Conditions de Lyapunov

L'une des grandes forces de l'ISS et de l'iISS réside dans leurs caractérisations en termes de fonctions de dissipation, inspirées par les fonctions de Lyapunov. Ces caractérisations ont été respectivement établies dans [Sontag and Wang, 1995] et [Angeli et al., 2000a]. Elles reposent toutes deux sur une fonction de Lyapunov candidate V dont la dérivée le long des trajectoires du système (1.2) considéré satisfait, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq -\alpha(|x|) + \gamma(|u|), \quad (1.4)$$

où γ désigne une fonction de classe \mathcal{K}_∞ . L'existence d'une telle fonction est équivalente à l'ISS si le taux de dissipation α est de classe \mathcal{K} , et à l'iISS si α est de classe \mathcal{PD} . Dans le cas de l'ISS, puisque α est non-bornée, on constate que, pour toute valeur de u donnée, la fonction de dissipation V devient décroissante si x devient trop grand : nous retrouvons bien la propriété garantie par l'ISS qu'à chaque entrée bornée correspond une solution bornée. À l'inverse, comme α n'est que de classe \mathcal{PD} dans le cas de l'iISS, elle peut tendre vers zéro pour des grandes valeurs de $|x|$. Dans ce cas, toute valeur de u non-nulle rend V croissante si la norme de l'état est suffisamment grande, ce qui illustre bien le fait qu'aucune propriété de bornitude des solutions n'est généralement garantie par l'iISS en présence d'une perturbation non-nulle.

Au vu de ces caractérisations, une conjecture naturelle serait que l'iISS Forte soit équivalente à l'existence d'une fonction de dissipation V vérifiant (1.4) avec un taux de

1. La LISS est en réalité équivalente à la stabilité asymptotique locale du système sans entrée.

dissipation α de classe \mathcal{K} , comme le suggère schématiquement la Figure 1.2. L'iISS serait en effet garantie par le fait que toute fonction de classe \mathcal{K} est aussi de classe \mathcal{PD} et que, puisque α ne tend pas vers zéro pour des grandes valeurs de $|x|$, la fonction V serait décroissante tant que $|u|$ demeure sous un certain seuil et pour une norme de l'état suffisamment grande.

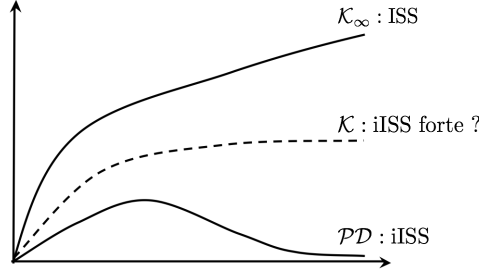


FIGURE 1.2 – Différents types de taux de dissipation α .

Bien qu'intuitive, cette conjecture s'avère fautive. L'exemple suivant, détaillé dans [Chaillet et al., 2012], montre que l'iISS forte ne garantit pas nécessairement l'existence d'une fonction de dissipation vérifiant (1.4) avec α de classe \mathcal{K} .

Exemple 1.6 (iISS Forte $\not\Rightarrow$ taux de dissipation \mathcal{K}) *Le système scalaire*

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+x^2} + r(|u| - 1), \quad (1.5)$$

où r désigne la rampe unitaire², est Fortement iISS mais, pour toutes fonctions $\alpha \in \mathcal{K}$ et $\gamma \in \mathcal{PD}$, aucune fonction différentiable $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ne satisfait (1.4).

À l'heure actuelle, aucune condition nécessaire et suffisante basée sur les fonctions de dissipation n'a pu être obtenue pour la propriété d'iISS Forte. Le reste de cette section consiste donc à proposer des conditions suffisantes.

Tout d'abord, bien que le caractère nécessaire de la conjecture énoncée ci-dessus soit fautive comme le montre l'Exemple 1.6, son caractère suffisant reste valable.

Théorème 1.7 (Taux de dissipation $\mathcal{K} \Rightarrow$ iISS Forte) *S'il existe une fonction de Lyapunov candidate $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaisant (1.4) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$, où α désignent respectivement des fonctions de classes \mathcal{K} et \mathcal{K}_∞ , alors le système (1.2) est Fortement iISS.*

Nous avons développé d'autres conditions suffisantes pour l'iISS Forte. Elles sont présentées dans [Chaillet et al., 2012]. Nous en rappelons certaines ci-dessous. La première propose une équation de dissipation légèrement plus générale que (1.4).

Théorème 1.8 *S'il existe une fonction de Lyapunov candidate $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ et des fonctions $\rho \in \mathcal{PD}$, $\eta \in \mathcal{K}_\infty$ et $\kappa \in \mathcal{K}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$,*

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq -\rho(|x|) + \eta(\max\{0; |u| - \kappa(|x|)\}), \quad (1.6)$$

alors le système (1.2) est Fortement iISS.

2. $r(s) = 0$ pour tout $s \leq 0$, et $r(s) = s$ pour tout $s > 0$.

La condition (1.6) peut être écrite, de manière équivalente, sous la forme décomposée suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq -\rho(|x|) + \eta(|u|) \quad (1.7)$$

$$|u| \leq \kappa(|x|) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq -\rho(|x|). \quad (1.8)$$

Il est à noter que, contrairement au Théorème 1.7, il n'est pas requis que ρ soit de classe \mathcal{K} . La première de ces deux inégalités correspond à la caractérisation de l'iISS proposée dans [Angeli et al., 2000a], tandis que la seconde garantit l'ISS vis-à-vis de petites entrées. Ces deux propriétés peuvent aisément être vérifiées sur l'Exemple 1.6 avec la fonction $V(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. En outre, les hypothèses du Théorème 1.7 impliquent celles du Théorème 1.8. Ceci montre que le Théorème 1.8 est strictement plus général que le Théorème 1.7.

A ce jour, nous n'avons pas trouvé de contre-exemple pour le caractère nécessaire du Théorème 1.8. La conjecture suivante reste donc ouverte.

Conjecture 1.9 *La contraposée du Théorème 1.8 est vraie.*

Une différence majeure entre l'iISS Forte et l'ISS vis-à-vis de petites entrées réside dans le fait que la première garantit l'existence des solutions à chaque instant futur, quelque soit l'amplitude du signal exogène appliqué. Cette propriété est appelée *complétude avant* et a été caractérisée en termes de fonctions de Lyapunov dans [Angeli and Sontag, 1999]. L'application d'un signal d'entrée trop fort peut au contraire générer des explosions en temps fini pour des systèmes ISS vis-à-vis de petites entrées. Le résultat suivant établit que si à la fois l'ISS vis-à-vis de petites entrées et la complétude avant peuvent être établies au travers de la même fonction de Lyapunov, alors le système est Fortement iISS.

Théorème 1.10 *S'il existe une fonction de Lyapunov candidate $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, des fonctions α, γ de classe \mathcal{K} , deux constantes $R_x, R_u \geq 0$ et deux fonctions continues et croissantes $\nu_1, \nu_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$,*

$$|u| \leq R_u \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq -\alpha(|x|) + \gamma(|u|) \quad (1.9)$$

$$|x| \geq R_x \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq \nu_1(|u|)V(x) + \nu_2(|u|), \quad (1.10)$$

alors le système (1.2) est Fortement iISS.

Une extension du contre-exemple proposé dans [Angeli et al., 2000a, Section V] montre que, en général, l'ISS vis-à-vis de petites entrées combinée à la complétude avant n'est pas suffisante pour garantir l'iISS. L'utilisation d'une unique fonction de Lyapunov pour montrer ces deux propriétés est donc cruciale pour ce résultat.

Ici aussi, les hypothèses garantissent celles du Théorème 1.10. De plus, l'iISS Forte de l'Exemple 1.6 peut aisément être montrée en invoquant le Théorème 1.10 grâce à la fonction $V(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Ceci montre que le Théorème 1.10 est strictement plus général que le Théorème 1.7.

Ce résultat permet en outre de retrouver et d'étendre un résultat originellement établi dans [Sontag, 1998].

Corollaire 1.11 *Si il existe une fonction de Lyapunov candidate $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, des fonctions λ et γ de classe \mathcal{K}_∞ et une constante $q > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$,*

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq -(q - \lambda(|u|))V(x) + \gamma(|u|),$$

alors le système (1.2) est Fortement iISS.

Cette équation de dissipation a été utilisée dans [Sontag, 1998, Theorem 2] pour établir l'iISS. Le Corollaire 1.11 démontre que l'iISS Forte peut en fait être établie sous la même condition.

1.1.2.3 Systèmes présentant une structure particulière

Si les résultats précédents sont applicables à tout système non-linéaire de la forme 1.2, nous nous concentrons maintenant sur des classes de systèmes particulières.

Le résultat suivant établit que tout système linéaire Hurwitz perturbé par un terme sous-linéaire dans l'état est Fortement iISS. Sa preuve est donnée dans [Chaillet et al., 2012].

Proposition 1.12 (iISS Forte pour systèmes LTI perturbés) *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction localement lipschitzienne vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$,*

$$|\varphi(x, u)| \leq (c_1 + c_2 |x|)g(|u|) \quad (1.11)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives et g est une fonction de classe \mathcal{PD} . Alors le système

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x, u), \quad (1.12)$$

est Fortement iISS si et seulement si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice Hurwitz.

Notons que si la constante c_2 peut être prise égale à zéro dans (1.11), alors le système (1.12) est en fait ISS.

La classe des systèmes de la forme (1.12) satisfaisant (1.11) inclut, en particulier, les systèmes bilinéaires :

$$\dot{x} = \left(A + \sum_{i=1}^m u_i A_i \right) x + Bu,$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $u = (u_1, \dots, u_m)^T$. Le fait que l'iISS d'un tel système soit équivalente à ce que la matrice A soit Hurwitz avait déjà été établi dans [Sontag, 1998, Theorem 5]. La proposition précédente montre que l'iISS Forte est en fait garantie sous cette même hypothèse.

La propriété d'iISS Forte a également été étudiée dans un contexte d'interconnexion de systèmes dynamiques. Nous présentons ces résultats en Section 1.2 pour l'interconnexion par rétroaction et en Section 1.3.1 pour l'interconnexion cascade.

1.1.3 Robustesse vis-à-vis d'entrées à énergie moyenne bornée

1.1.3.1 Contexte

Comme nous l'avons vu, la propriété d'ISS (voir Définition 1.3) garantit la stabilité globale asymptotique de l'origine, modulo un terme "proportionnel" à l'amplitude du signal perturbateur appliqué. Si elle assure ainsi la bornitude des solutions en réponse à toute

entrée bornée, l'estimée de l'erreur en régime permanent qu'elle donne ne dépend que de l'amplitude maximale du signal appliqué. Suivant le type de signal exogène considéré, cette estimée peut s'avérer peu adéquate pour caractériser la perturbation réellement appliquée. En particulier, pour un signal présentant des pics amples, mais de courtes durées, il apparaît clairement que l'amplitude seule n'est pas représentative de la perturbation engendrée, comme l'illustre la Figure 1.3.

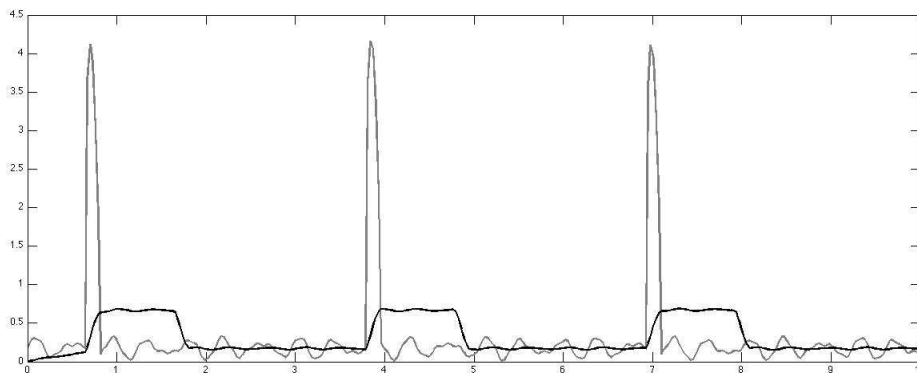


FIGURE 1.3 – Exemple d'un signal (en gris) et de sa moyenne mouvante (en noir).

Ces limitations ont déjà été soulignées et partiellement contournées dans la littérature. Dans [Angeli and Nešić, 2001], la notion d'ISS de puissance (*Power ISS*) a été introduite afin d'estimer plus précisément l'influence de la puissance ou de la moyenne mouvante du signal exogène sur une mesure de la *puissance* de la norme des solutions. Combinée à la stabilité du système sans entrée, il est montré que cette propriété est équivalente à l'ISS. Cependant, ce travail ne permet pas d'estimer directement l'erreur engendrée par l'application du signal exogène, mais juste sa puissance. D'autres travaux, tels que [Praly and Wang, 1996], [Grüne, 2002] et [Grüne, 2004], se sont intéressés à des aspects quantitatifs de l'ISS. Ils abordent la question en introduisant un terme à "effet mémoire" dans le signal considéré pour l'ISS, terme qui s'atténue à mesure que le temps passe.

L'approche que nous avons suivie vise à l'obtention, pour les systèmes ISS, d'une borne ferme sur la norme de l'erreur résultant de l'application d'un signal présentant une amplitude et une énergie potentiellement non-bornées. Nous agrandissons ainsi la classe des signaux auxquels les systèmes ISS sont robustes en considérant des signaux dont la moyenne mouvante, sur un horizon temporel donnée, est bornée. Pour formaliser une telle propriété, nous introduisons la notation suivante.

Définition 1.13 *Etant données deux constantes $E, T > 0$ et une fonction γ de classe \mathcal{K} , l'ensemble $\mathcal{W}_\gamma(E, T)$ est défini comme l'ensemble des signaux $u \in \mathcal{U}^m$ tels que*

$$\int_t^{t+T} \gamma(|u(s)|) ds \leq E, \quad \forall t \geq 0.$$

A titre d'exemple, sur la Figure 1.3 sont représentés le signal original (en gris) et sa moyenne mouvante sur un horizon temporel de longueur $T = 1$ à travers la fonction $\gamma = \text{id}$ (en gris). Pour cet exemple, si l'amplitude du signal lui-même dépasse souvent la valeur 4, sa moyenne mouvante reste en permanence inférieure à 1.

De la même manière, les exemples suivants illustrent le fait qu'un signal dont la moyenne mouvante est bornée n'est pas nécessairement borné ni en amplitude, ni en énergie.

Exemple 1.14 (Moyennes mouvantes)

1. Etant données une constante $T > 0$ et une fonction γ de classe \mathcal{K} , tout signal u borné par une constante $\bar{u} > 0$ appartient à la classe $\mathcal{W}_\gamma(T\gamma(\bar{u}), T)$. En particulier, si $u(t) = \bar{u}$ pour tout $t \geq 0$, alors son énergie est infinie alors même que sa moyenne mouvante est bornée.
2. Le signal suivant appartient à la classe $\mathcal{W}_{id}(1, 1)$ et satisfait $\limsup_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = +\infty$:

$$u(t) := \begin{cases} 2k & \text{si } t \in [2kT; 2kT + \frac{1}{2k}], k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Son allure est représentée par la Figure 1.4.

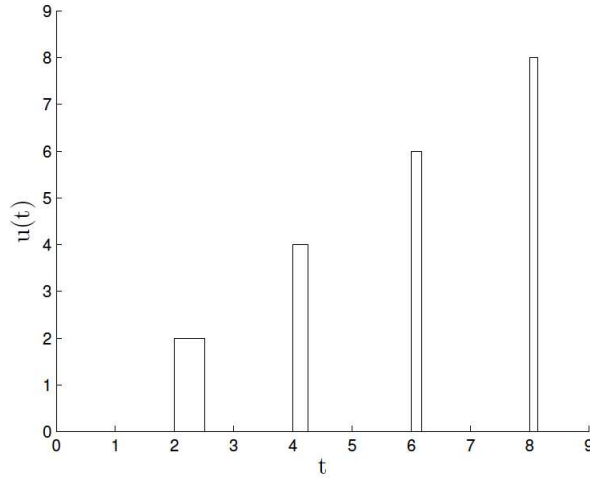


FIGURE 1.4 – Un exemple de signal non-borné présentant une moyenne mouvante bornée.

1.1.3.2 Résultats

Le résultat suivant établit que l'impact d'un signal exogène sur le comportement qualitatif d'un système ISS est d'autant plus faible que la moyenne mouvante du signal en question est limitée.

Théorème 1.15 (ISS et signaux de moyenne mouvante bornée) *Pour tout système ISS de la forme (1.2), il existe une fonction γ de classe \mathcal{K}_∞ et une fonction β de classe \mathcal{KL} telles que, pour toute tolérance $\delta > 0$ et tout horizon temporel $T > 0$ donnés, il existe une constante $E(T, \delta) > 0$ telle que ses solutions satisfont, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathcal{W}_\gamma(E, T)$,*

$$|x(t; x_0, u)| \leq \beta(|x_0|, t) + \delta, \quad \forall t \geq 0.$$

Notons que, dans le cas où $\delta = 0$, cette estimée équivaut à la stabilité globale asymptotique de l'origine (cf. Définition 1.1). A l'inverse, lorsque $\delta \neq 0$, les solutions ne sont plus garanties de converger vers zéro, mais vers une boule de rayon δ centrée sur l'origine. Ce résultat garantit ainsi que, si une tolérance sur l'erreur en régime permanent peut être

tolérée, alors tout système ISS est robuste aux perturbations présentant une moyenne mouvante suffisamment faible.

Si une fonction de Lyapunov ISS est connue pour le système considéré, alors le résultat suivant propose une estimation explicite de la moyenne mouvante maximale pouvant être tolérée pour la garantir d'une précision δ spécifiée.

Corollaire 1.16 (Estimée de la moyenne mouvante tolérable) *Supposons qu'existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continûment différentiable, des fonctions γ , $\underline{\alpha}$ et $\bar{\alpha}$ de classe \mathcal{K}_{∞} et une constante $\kappa > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$,*

$$\underline{\alpha}(|x|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(|x|) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, u) \leq -\kappa V(x) + \gamma(|u|). \quad (1.14)$$

Pour toute tolérance $\delta > 0$ et tout horizon temporel $T > 0$, soit $E > 0$ la constante définie par

$$E(T, \delta) := \frac{\underline{\alpha}(\delta)}{2} \frac{e^{\kappa T} - 1}{2e^{\kappa T} - 1}. \quad (1.15)$$

Alors les solutions du système (1.2) satisfont, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathcal{W}_{\gamma}(E, T)$,

$$|x(t; x_0, u)| \leq \beta(|x_0|, t) + \delta, \quad \forall t \geq 0,$$

où β désigne une fonction de classe \mathcal{KL} .

Au vu de [Praly and Wang, 1996, Lemma 11], l'existence d'une fonction V vérifiant (1.13) et (1.14) est une condition nécessaire et suffisante à l'ISS du système considéré. Sa connaissance explicite permet ainsi d'évaluer la classe de signaux exogènes dont l'application génère une erreur en régime permanent inférieure à la précision δ fixée.

De la même manière, si une propriété plus forte que l'ISS (à savoir l'ISS exponentielle) peut être établie au travers d'une fonction de Lyapunov connue explicitement, alors une convergence exponentielle peut être garantie vers le voisinage de l'origine considéré, et l'expression de la moyenne mouvante tolérable se simplifie.

Corollaire 1.17 (Estimée de la moyenne mouvante pour l'ISS exponentielle)

Supposons que les conditions du Corollaire 1.16 soient satisfaites avec

$$\underline{\alpha}(s) = \underline{c}s^p \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}(s) = \bar{c}s^p,$$

où $\underline{c}, \bar{c}, p$ sont des constantes positives et, pour tout $T, \delta > 0$, posons

$$E(T, \delta) := \frac{\underline{c}\delta^p}{2} \frac{e^{\kappa T} - 1}{2e^{\kappa T} - 1}.$$

Alors il existe des constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que, pour toutes conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tous signaux $u \in \mathcal{W}_{\gamma}(E, T)$, les solutions du système $\dot{x} = f(x, u)$ satisfont

$$|x(t; x_0, u)| \leq k_1 |x_0| e^{-k_2 t} + \delta, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme nous le verrons dans la Section 1.4.1, ces résultats ont fait l'objet d'une application dans le cadre de la commande robuste de satellites en formation.

1.2 Systèmes non-linéaires interconnectés par rétroaction

Cette section présente les résultats que nous avons obtenus sur l'analyse de la stabilité et de la robustesse de système interconnectés de manière bidirectionnelle, à savoir par rétroaction. Une telle interconnexion est schématisée par la figure suivante. y_1 et y_2 représentent les sorties respectives des sous-systèmes Σ_1 et Σ_2 tandis que d_1 et d_2 représentent des signaux exogènes.

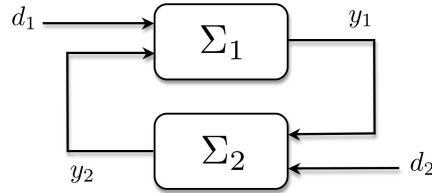


FIGURE 1.5 – Interconnexion par rétroaction.

Nous commençons, en Section 1.2.1, par rappeler un résultat obtenu par H. Ito sur la généralisation de la condition de petit gain non-linéaire à des systèmes n'étant pas nécessairement ISS. Nous montrons que ce résultat ne s'applique en réalité qu'à des systèmes Fortement iISS, comme introduite en Section 1.1.2, et donnons une interprétation de ce résultat comme l'existence d'un régime transitoire suivi d'une phase asymptotique durant laquelle le théorème du petit gain classique (ISS) s'applique.

1.2.1 Théorème du petit gain pour des systèmes non nécessairement ISS

Le théorème du petit gain ISS est devenu un outil classique pour l'analyse et la commande de systèmes non-linéaires [Jiang et al., 1994, Teel, 1996, Jiang et al., 1996]. Ce résultat traite de la préservation de l'iISS sous interconnexion par rétroaction telle que décrite par la Figure 1.5. Il a plus récemment été étendu aux systèmes iISS [Ito, 2006, Angeli and Astolfi, 2007, Ito and Jiang, 2009].

Notre contribution à cet aspect de l'analyse des systèmes non-linéaires a consisté à proposer une démonstration alternative du théorème du petit gain iISS mettant en évidence son mécanisme sous-jacent, à savoir sa décomposition en un régime transitoire suivi par un comportement de type ISS. Nous avons eu recours, pour cela, à l'analyse des fonctions de Lyapunov iISS associées à chacun des sous-systèmes :

$$\Sigma_1 : \quad \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, d_1) \quad (1.16a)$$

$$\Sigma_2 : \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, d_2), \quad (1.16b)$$

où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $d_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ pour chaque $i \in \{1, 2\}$ et $x = (x_1^T, x_2^T)^T \in \mathbb{R}^n$ et $d = (d_1^T, d_2^T)^T \in \mathbb{R}^m$. Plus précisément, nous formulons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.18 (iISS Forte des sous-systèmes) *Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, il existe une fonction de Lyapunov candidate $V_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ et des fonctions $\alpha_i, \gamma_i, \sigma_i$ de classe \mathcal{K} telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $d \in \mathbb{R}^m$,*

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1) \leq -\alpha_1(V_1(x_1)) + \gamma_1(V_2(x_2)) + \sigma_1(|d_1|) \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x_2) \leq -\alpha_2(V_2(x_2)) + \gamma_2(V_1(x_1)) + \sigma_2(|d_2|). \quad (1.18)$$

Au vu du Théorème 1.7, cette hypothèse garantit l'iISS Forte de chacun des deux sous-systèmes considéré séparément.

Il convient de rappeler qu'aucun théorème du petit gain se basant uniquement sur les équations de dissipation (1.17)-(1.18) n'est envisageable pour des systèmes ne présentant pas une propriété d'iISS Forte : ceci a formellement été démontré dans [Ito, 2010]. En d'autres termes, l'hypothèse que les taux de dissipation α_1 et α_2 sont de classe \mathcal{K} (plutôt que de classe \mathcal{PD} pour le cas iISS général) peut être faite sans perte de généralité.

Nous rappelons ici le théorème du petit gain pour des systèmes Fortement iISS, tel qu'originellement établi dans [Ito and Jiang, 2009].

Théorème 1.19 (Petit gain pour l'iISS Forte) *Sous l'Hypothèse 1.18, supposons qu'il existe des fonction ω_1 et ω_2 de classe \mathcal{K}_∞ telles que*

$$\alpha_1^{-1} \circ (id + \omega_1) \circ \gamma_1 \circ \alpha_2^{-1} \circ (id + \omega_2) \circ \gamma_2(s) \leq s, \quad \forall s \geq 0. \quad (1.19)$$

Alors les deux propositions suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour $d \equiv 0$, l'origine du système (1.16) est globalement asymptotiquement stable ;
- (ii) Si, pour chaque $i \in \{1, 2\}$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_i(s) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_{3-i}(s) < \infty, \quad (1.20)$$

alors le système (1.16) est iISS.

1.2.2 Intepretation du théorème du petit gain Fortement iISS

Dans le reste de cette section, pour des raisons de clarté et de brièveté, nous nous cantonnerons à l'étude du système (1.16) sans entrées exogènes (i.e. $d \equiv 0$). Notons cependant qu'un raisonnement similaire en présence de signaux exogènes a été conduite dans [Ito et al., 2013, Ito et al., 2010].

Notre contribution a été de montrer que la dynamique du système (1.16) sous l'hypothèse du petit gain peut être décomposée en deux phases : une première, transitoire, durant laquelle les solutions restent bornées et convergent vers un certain ensemble Ω , et une seconde phase durant laquelle les trajectoires restent confinées à cet ensemble Ω et se comportent comme sous l'hypothèse de petit gain ISS classique. L'ensemble Ω en question est défini comme suit :

$$\Omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : V_2(x_2) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_2^{-1} \circ \gamma_2(s) \right\}.$$

Proposition 1.20 (Interprétation du théorème du petit gain pour l'iISS Forte) *Supposons que l'Hypothèse 1.18 soit vérifiée et qu'il existe des fonctions ω_1 et ω_2 de classe \mathcal{K}_∞ vérifiant la condition de petit gain (1.19). Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une constante $T \geq 0$ telle que les solutions de (1.16) sous entrée $d \equiv 0$ satisfont*

$$\sup_{t \in [0; T]} |x(t; x_0)| < \infty \quad \text{et} \quad x(t; x_0) \in \Omega \quad \forall t \geq T.$$

De plus, pour tout $x \in \Omega$, les équations de dissipation suivantes sont satisfaites³ :

$$V_1 \geq \alpha_1^{-1} \circ (id + \omega_1) \circ \gamma_1(V_2) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_1 \leq -(id - (id - \omega_1)^{-1}) \circ \alpha_1(V_1) \quad (1.21)$$

$$V_2 \geq \alpha_2^{-1} \circ (id + \omega_2) \circ \gamma_2(V_1) \quad \Rightarrow \quad \dot{V}_2 \leq -(id - (id - \omega_1)^{-1}) \circ \alpha_2(V_2). \quad (1.22)$$

3. Les arguments de certaines fonctions ont été omis.

Comme nous l'évoquons, l'intérêt de cette proposition réside dans son interprétation plus que dans sa contribution propre. Pour cela remarquons que, sous la condition de petit gain (1.19), les fonctions $\alpha_i^{-1} \circ (\text{id} + \omega_i) \circ \gamma_i$ et $(\text{id} - (\text{id} - \omega_i)^{-1}) \circ \alpha_i$, $i \in \{1, 2\}$, sont de classe \mathcal{K} . Ainsi, les conditions (1.21)-(1.22) correspondent à un comportement de type ISS (voir par exemple [Sontag, 2006]). En d'autres termes, après un régime transitoire de durée T , les solutions de (1.16) au sein de l'ensemble Ω se comportent comme celles d'une interconnexion par rétroaction de systèmes ISS. Cette interprétation permet ainsi de lier le théorème du petit gain iISS [Ito and Jiang, 2009] à celui du petit gain ISS [Jiang et al., 1996] et d'expliquer intuitivement les mécanismes qui le sous-tendent.

La preuve de ce résultat ainsi que des commentaires plus détaillés sur ses implications sont proposées dans [Ito et al., 2013, Ito et al., 2010].

1.3 Systèmes en cascade

Les sous-systèmes interconnectés par cascade le sont de manière unilatérale, *i.e.* la sortie d'un sous-système amont constitue l'entrée d'un sous-système aval. De nombreux résultats ont été développés pour étudier le comportements des systèmes en cascade. Outre le fait que cette structure se rencontre couramment au sein des systèmes physiques, la modularité qu'elle induit permet bien souvent de réduire considérablement la complexité de l'analyse. Elle est de plus à la base d'outils de commande, dont le *backstepping* est probablement le représentant le plus célèbre.

Dans cette section, nous présentons notre contribution à l'analyse de la stabilité et de la robustesse des systèmes en cascade, au travers de l'iISS Forte (Section 1.3.1), de l'iISS (Section 1.3.2) et de la stabilité semiglobale pratique (Section 1.3.3).

1.3.1 iISS Forte

Comme nous l'avons vu en Section 1.5, la propriété d'iISS Forte constitue un compromis intéressant entre l'ISS, contraignante mais offrant des propriétés de robustesse puissantes, et l'iISS, très générale mais ne garantissant que peu de robustesse. Il est bien connu que la propriété d'ISS est naturellement préservée par interconnexion cascade ; en d'autres termes, la cascade de deux systèmes ISS est elle-même ISS [Sontag and Teel, 1995]. A l'inverse, comme nous le rappellerons en Section 1.3.2, la structure de cascade ne préserve pas nécessairement la propriété d'iISS : voir par exemple [Arcak et al., 2002, Ito, 2010].

Le résultat suivant concerne les cascades schématisées par la Figure 1.6.

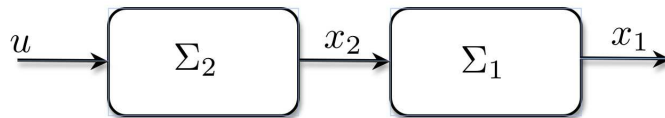


FIGURE 1.6 – Structure de cascade.

Ce résultat, que nous avons démontré dans [Chaillet et al., 2012], établit qu'à l'instar de l'ISS, l'iISS Forte est naturellement préservée par l'interconnexion cascade.

Théorème 1.21 (iISS Forte + iISS Forte \Rightarrow iISS Forte) Soient $f_1 : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ et $f_2 : \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ deux fonctions localement lipschitziennes. Si les systèmes $\dot{x}_1 =$

$f_1(x_1, u_1)$ et $\dot{x}_2 = f_2(x_2, u_2)$ sont Fortement iISS (par rapport à u_1 et u_2 respectivement), alors la cascade

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (1.23a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2, u_2). \quad (1.23b)$$

est Fortement iISS (par rapport à u_2).

Un résultat similaire a été proposé dans [Ito, 2010] en se basant sur les fonctions de Lyapunov de type iISS dont le taux de dissipation est de classe \mathcal{K} . Au vu de l'Exemple 1.6, le Théorème 1.21 est donc strictement plus général que ce résultat.

Deux corollaires peuvent être tirés du Théorème 1.21. Le premier concerne le cas où le système (1.23b) est iISS plutôt que Fortement iISS.

Corollaire 1.22 (iISS + iISS Forte \Rightarrow iISS) *Si le système $\dot{x}_1 = f_1(x_1, u_1)$ est Fortement iISS (par rapport à u_1) et le système $\dot{x}_2 = f_2(x_2, u_2)$ iISS (par rapport à u_2), alors la cascade (1.23) est iISS (par rapport à u_2).*

Le second exploite le fait que l'iISS Forte implique par définition la stabilité global asymptotique du système sans entrée (0-GAS). Son énoncé découle donc directement du Théorème 1.21.

Corollaire 1.23 (GAS + iISS Forte \Rightarrow GAS) *Si le système $\dot{x}_1 = f_1(x_1, u_1)$ est Fortement iISS et l'origine du système $\dot{x}_2 = f_2(x_2)$ globalement asymptotiquement stable, alors l'origine de la cascade*

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \quad (1.24a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2) \quad (1.24b)$$

est globalement asymptotiquement stable.

1.3.2 iISS

Les résultats de la section précédente montrent qu'à l'instar de l'iISS, la propriété d'iISS Forte est préservée par l'interconnexion cascade. L'iISS étant, comme nous l'avons vu, une propriété plus faible, une question naturelle est de savoir si l'iISS est elle aussi préservée par l'interconnexion cascade. Cette question a déjà été abordée dans la littérature [Arcak et al., 2002] et admet, en général, une réponse négative comme l'illustre l'exemple suivant, originellement présenté dans [Panteley and Loria, 2001, Arcak et al., 2002].

Exemple 1.24 (GAS + iISS $\not\Rightarrow$ GAS) *Le système*

$$\dot{x}_1 = -\text{sat}(x_1) + x_1 x_2 \quad (1.25a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3, \quad (1.25b)$$

où $\text{sat}(s) := \text{sign}(s) \min\{1; |s|\}$ vérifie les propriétés suivantes :

- le sous-système aval (1.25a) est iISS par rapport à x_2
- l'origine du sous-système amont (1.25b) est globalement asymptotiquement stable
- la cascade (1.25) génère des solutions non-bornées à partir de toute condition initiale dans $\mathbb{R}_{\geq 3} \times \{1\}$.

En particulier, puisque l'iISS implique la stabilité globale asymptotique du système sans entrée, la cascade de deux sous-systèmes iISS n'est pas nécessairement iISS.

Cet exemple démontre la nécessité d'imposer des conditions supplémentaires sur les sous-systèmes interconnectés pour garantir la stabilité de la cascade (1.23). Les premiers résultats abordant cette question sont apparus dans [Arcak et al., 2002], où furent proposés des conditions pour l'analyse de la stabilité de la cascade (1.23) en l'absence d'entrées exogènes. Cependant, aucun résultat ne permettait d'aborder l'étude systématique de cascades de systèmes iISS en présence de signaux exogènes. D'autre part, aucun résultat exploitant les fonctions de Lyapunov associée à chaque sous-système n'avait été proposé. Nous présentons maintenant nos résultats⁴ dans ces deux directions.

1.3.2.1 Approche basée sur les fonctions de Lyapunov

Des travaux existants, tels que [Panteley and Loria, 2001], visaient à proposer des conditions pour la préservation de propriétés de stabilité de systèmes en cascade impliquant les propriétés structurelles de chaque sous-système ainsi que le comportement des fonctions de Lyapunov qui leur sont associées. Cependant, aucun travail ne permettait d'étudier l'iISS d'une cascade de sous-systèmes iISS. Notre contribution dans ce sens concerne, en fait, une classe de systèmes légèrement plus générale que (1.23), à savoir les systèmes de la forme

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \quad (1.26a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2, u) \quad (1.26b)$$

où $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u \in \mathbb{R}^m$ et où f_1 et f_2 désignent des fonctions localement lipschitziennes vérifiant $f_1(0, 0, 0) = 0$ et $f_2(0, 0) = 0$. La seule différence par rapport à (1.23) (et à la Figure 1.6) réside dans la possibilité de considérer des signaux exogènes à la fois dans le sous-système amont et le sous-système aval. La Figure 1.7 schématise cette interconnexion.

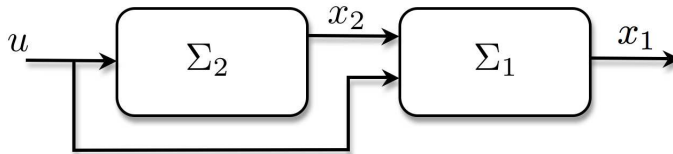


FIGURE 1.7 – Structure de cascade avec signal exogène influant sur chaque sous-système.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour la préservation de la propriété iISS sous cascade.

Théorème 1.25 (Cascades iISS+iISS par approche Lyapunov) Soit $V_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction de Lyapunov candidate et $V_2 : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue, définie positive, radialement non-bornée et différentiable sur $\mathbb{R}^{n_2} \setminus \{0\}$. Supposons qu'il existe trois fonctions ν_1 , γ_1 et γ_2 de classe \mathcal{K} , et deux fonctions α_1 et α_2 de classe \mathcal{PD} telles que, pour

4. Ces résultats figurent également dans ma thèse de doctorat [Chaillet, 2006].

tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$,

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1) f_1(x_1, x_2, u) \leq -\alpha_1(|x_1|) + \gamma_1(|x_2|) + \nu_1(|u|) \quad (1.27)$$

$$x_2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x_2) f_2(x_2, u) \leq -\alpha_2(|x_2|) + \gamma_2(|u|). \quad (1.28)$$

Alors, si $\gamma_1(s) = \mathcal{O}(\alpha_2(s))$ lorsque s tend vers zéro, alors la cascade (1.26) est *iISS*.

Au vu de la courte discussion de la Section 1.1.2.2, qui rappelle notamment la caractérisation [Angeli et al., 2000a] de l'*iISS* en termes de fonctions de Lyapunov, l'inégalité de dissipation (1.27) est équivalente à l'*iISS* du sous-système aval (1.26a). L'inégalité (1.28), quant à elle, correspond à l'*iISS* du sous-système aval (1.26b) mais autorise la fonction V_2 associée à n'être pas nécessairement différentiable à l'origine, ce qui peut s'avérer commode dans certaines situations pratiques. Le Théorème 1.25 peut donc être interprété comme suit : si chaque sous-système est *iISS* et le taux de dissipation α_2 du sous-système aval domine le taux d'alimentation γ_1 du sous-système amont, alors la cascade est elle-même *iISS*.

Notons qu'une conséquence immédiate du Théorème 1.25 concerne les systèmes représentés par la Figure 1.6, à savoir les systèmes pour lesquels le signal exogène u n'influence pas directement le sous-système aval 1.26b. Il suffit, pour cela, de considérer ν_1 comme la fonction identiquement nulle dans l'énoncé du Théorème 1.25.

De la même manière, ce résultat peut s'étendre au cas d'une cascade sans entrée : à savoir un système dont l'origine est globalement asymptotiquement stable en amont d'un système *iISS*. Nous obtenons alors le résultat suivant.

Théorème 1.26 (Cascade GAS+iISS) *Supposons que l'origine du sous-système*

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2) \quad (1.29)$$

*est globalement attractive*⁵. *Supposons qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$, une fonction de Lyapunov candidate $V_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ et une fonction $V_2 : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continue, positive définie, radialement non bornée et différentiable sur $\mathcal{B}_\varepsilon \setminus \{0\}$ telles que, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$,*

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1) f(x_1, x_2) \leq -\alpha_1(|x_1|) + \gamma_1(|x_2|) \quad (1.30)$$

$$x_2 \in \mathcal{B}_\varepsilon \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x_2) f_2(x_2) \leq -\alpha_2(|x_2|), \quad (1.31)$$

où α_1 et α_2 désignent des fonctions de classe \mathcal{PD} et $\gamma_1 \in \mathcal{K}$. Alors, à la condition que

$$\gamma_1(s) = \mathcal{O}(\alpha_2(s)) \quad \text{lorsque } s \rightarrow 0, \quad (1.32)$$

l'origine de la cascade

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2) \end{aligned}$$

est globalement asymptotiquement stable.

5. c'est-à-dire que les solutions de (1.29) tendent toutes vers l'origine lorsque $t \rightarrow \infty$.

Notons que la combinaison de la condition (1.31) et de l'attractivité globale de l'origine de (1.29) est en réalité équivalente à la stabilité globale asymptotique du sous-système amont (1.29). Cet énoncé permet cependant une application plus aisée dans certains cas. Ainsi, le Théorème 1.26 stipule que la cascade d'un système iISS en aval d'un système GAS est elle-même GAS si le taux de dissipation du sous-système aval domine le taux d'alimentation du sous-système amont dans un voisinage de zéro.

Remarque 1.27 *Si une borne sur V_2 de la forme $V_2(x_2) \leq \bar{\alpha}_2(|x_2|)$, où $\bar{\alpha}_2 \in \mathcal{K}_\infty$, est connue explicitement alors la condition de dominance (1.32) du Théorème 1.26 peut être remplacée par la condition suivante, bien moins restrictive :*

$$\gamma(s) = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_2(s)}{\bar{\alpha}_2(s)^p}\right), \quad \alpha_2(s) = o(\bar{\alpha}_2(s)^p), \quad \text{lorsque } s \rightarrow 0, \quad (1.33)$$

où $p \in [0, 1)$ désigne une constante. Il suffit, pour cela, de considérer la fonction $\mathcal{V}_2(\cdot) := V_2(\cdot)^{(1-p)}$ dans l'énoncé du Théorème 1.26.

Le Théorème 1.26 s'étend au cas de cascades multiples, c'est-à-dire celles impliquant plus de deux systèmes non-linéaires :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_{2 \rightarrow N}) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, x_{3 \rightarrow N}) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{N-1} &= f_{N-1}(x_{N-1}, x_N) \\ \dot{x}_N &= f_N(x_N), \end{aligned} \quad (1.34)$$

où la notation $x_{i \rightarrow j}$ est utilisée pour représenter le vecteur $(x_i^T, \dots, x_j^T)^T \in \mathbb{R}^{n_i + \dots + n_j}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, j\}$. Ici aussi, les fonctions $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i + \dots + N} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ sont supposées localement Lipschitziennes et nulles à l'origine. Cette interconnexion est schématisée par la Figure 1.8.

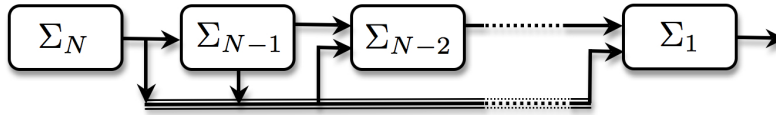


FIGURE 1.8 – Structure de cascades multiples sans signal exogène.

Le résultat suivant permet d'établir la stabilité globale asymptotique (GAS) de l'origine de (1.34) en supposant que l'origine de⁶ Σ_N est elle-même GAS et que chaque sous-système Σ_i , $i \in \{1, \dots, N-1\}$, est iISS. La preuve que nous avons présentée dans [Chaillet and Angeli, 2008] requiert la propriété suivante sur les fonctions utilisées : étant donné une constante $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que les fonctions d'alimentation satisfont

$$\lambda \alpha(a + b) \leq \alpha(a) + \alpha(b), \quad \forall a, b \in (0, \varepsilon).$$

6. Nous employons la notation Σ_i pour désigner le système $\dot{x}_i = f_i(x_i, x_{i+1 \rightarrow N})$.

L'ensemble de ces fonctions α est noté \mathcal{I}_ε . Notons que cette hypothèse n'est que peu restrictive puisqu'elle n'est requise que localement ; par exemple, elle est satisfaite par toute fonction continue présentant un comportement polynomial autour de zéro.

Théorème 1.28 (Cascades multiples) *Supposons que l'origine de (1.34.N) soit globalement attractive et qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ et, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, une fonction de Lyapunov candidate $V_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, telles que*

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} f_i(x_i, x_{i+1 \rightarrow N}) \leq -\alpha_i(|x_i|) + \gamma_i(|x_{i+1 \rightarrow N}|), \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \forall i = 1, \dots, N-1,$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial x_N} f_N(x_N) \leq -\alpha_N(|x_N|), \quad \forall x_N \in \mathcal{B}_\varepsilon \setminus \{0\},$$

où, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, $\alpha_i \in \mathcal{PD} \cap \mathcal{I}_\varepsilon$ et, pour chaque $i \in \{1, \dots, N-1\}$, $\gamma_i \in \mathcal{K} \cap \mathcal{I}_\varepsilon$. Alors, sous la condition que

$$\gamma_i(s) = \mathcal{O}(\alpha_{i+1}(s)), \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \quad (1.35a)$$

$$\gamma_i(s) = \mathcal{O}(\gamma_{i+1}(s)), \quad \forall i = 1, \dots, N-2, \quad (1.35b)$$

lorsque s tend vers zéro, l'origine de la cascade (1.34) est globalement asymptotiquement stable.

1.3.2.2 Approche basée sur les estimées des solutions

Comme nous l'avons évoqué, les résultats présentés dans [Arcak et al., 2002] proposent des conditions suffisantes pour garantir la stabilité de cascades de systèmes non-linéaires. Ces conditions impliquent des estimées des solutions de chaque sous-système, mais ne permettent pas d'étudier systématiquement le comportement de deux sous-systèmes iISS mis en cascade.

Le résultat suivant permet une telle étude, sans la nécessité de connaître explicitement une fonction de Lyapunov associée à chacun des sous-systèmes. Le prix à payer pour cette simplification est une hypothèse plus restrictive sur la stabilité des sous-systèmes : à savoir que l'origine du sous-système amont soit exponentiellement stable en l'absence de signaux exogènes et que le gain iISS du sous-système aval soit localement lipschitzien.

Théorème 1.29 (Cascade iISS+iISS par approche basée sur les solutions)

Supposons que (1.26a) est iISS par rapport à ses entrées $(x_2^T, u^T)^T$ avec un gain iISS (cf. Définition 1.4) localement lipschitzien et que le sous-système (1.26b) est iISS et 0-LES⁷. Alors, si la fonction $f_2(\cdot, 0)$ est continûment différentiable, la cascade (1.26) est iISS.

Sous des conditions de régularité supplémentaires, ce résultat s'étend à des cascades multiples :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \zeta_{2 \rightarrow N}) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, \zeta_{3 \rightarrow N}) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{N-1} &= f_{N-1}(x_{N-1}, \zeta_{N \rightarrow N}) \\ \dot{x}_N &= f_N(x_N, u), \end{aligned} \quad (1.36)$$

7. (1.26b) est dit 0-LES si l'origine du système sans entrée $\dot{x}_2 = f_2(x_2, 0)$ est localement exponentiellement stable.

où $\zeta_{i \rightarrow N} := (x_i^T, \dots, x_N^T, u^T)^T \in \mathbb{R}^{n_i} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_N} \times \mathbb{R}^m$, pour tout $i \in \{2, \dots, N\}$. Par convention, $\zeta_{N+1 \rightarrow N} := u$. Pour une telle classe de systèmes, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.30 (Cascades iISS multiples) *Supposons que, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, le sous-système $\dot{x}_i = f_1(x_i, \zeta_{i+1 \rightarrow N})$ est 0-LES et iISS par rapport à son entrée $\zeta_{i+1 \rightarrow N}$. Supposons également que, pour chaque $i \in \{1, \dots, N-1\}$, la fonction f_i est localement lipschitzienne, la fonction $f_i(\cdot, 0)$ est continument différentiable, $\partial f_i(\cdot, 0)/\partial x_i$ est bornée dans un voisinage de l'origine, et le gain iISS du sous-système $\dot{x}_i = f_1(x_i, \zeta_{i+1 \rightarrow N})$ est localement lipschitzien. Alors la cascade (1.36) est iISS.*

1.3.3 Stabilité pratique et stabilité semiglobale

1.3.3.1 Conditions suffisantes

Comme nous l'avons vu dans la Section 1.1, des perturbations de différentes natures peuvent empêcher la convergence des solutions vers l'origine, générant une erreur résiduelle en régime permanent. De la même manière, des non-linéarités négligées peuvent empêcher la stabilité *globale* asymptotique, donnant alors lieu à un domaine d'attraction restreint. Suivant l'application considérée, ces deux aspects peuvent considérablement compromettre le comportement du système.

Cependant, dans l'analyse des systèmes commandés en boucle fermée, le réglage de certains paramètres libres (typiquement des gains de commande) autorise bien souvent d'agrandir arbitrairement le domaine d'attraction ou de diminuer à discrétion l'amplitude des erreurs statiques (dans la limite, bien sûr, des technologies employées). Ces propriétés sont respectivement appelées stabilités *semiglobale* et *pratique*.

De manière plus formelle, les propriétés de stabilité semiglobale et pratique concernent des systèmes non-linéaires paramétrés de la forme

$$\dot{x} = f(t, x, \theta), \quad (1.37)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ représente le temps et $\theta \in \mathbb{R}^p$ est un paramètre de réglage constant qui peut être un gain de commande (comme dans *e.g.* [Ortega et al., 1995, Chaillet and Loría, 2008]) ou tout autre paramètre réglable (voir *e.g.* [Teel et al., 1999, Teel et al., 2004], [Tan et al., 2006, Laila et al., 2006]). Le champs de vecteur $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposé localement Lipschitzien en x et satisfaire les conditions de Carathéodory⁸ pour tout paramètre θ considéré. Notons que, contrairement aux sections précédentes, le système (1.37) ne considère pas explicitement l'action d'un signal exogène, mais autorise une dépendance dans le temps de la dynamique. Cette notation permet non seulement de considérer les systèmes avec entrée comme un cas particulier, mais également de considérer des systèmes pour lesquels la dépendance dans le temps n'est pas nécessairement le résultat de l'application d'une perturbation, comme par exemple les applications de suivi de trajectoire ou les systèmes à paramètres variants.

En considérant un ensemble de paramètres $\Theta \subset \mathbb{R}^p$, nous rappelons les définitions suivantes.

Définition 1.31 (USAS) *Le système (1.37) est dit uniformément semiglobalement asymptotiquement stable sur Θ si, pour tout $\Delta > 0$, il existe un paramètre $\theta^*(\Delta) \in \Theta$ et une*

8. C'est-à-dire : $f(\cdot, x)$ est mesurable pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, $f(t, \cdot)$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ fixé et, pour tout compact U de $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$, il existe une fonction intégrable $m_U : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que $|f(t, x)| \leq m_U(t)$ pour tout $(t, x) \in U$.

fonction β_Δ de classe \mathcal{KL} tels que, pour tout $x_0 \in \mathcal{B}_\Delta$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ses solutions satisfont

$$|x(t; x_0, t_0, \theta^*)| \leq \beta_\Delta(|x_0|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Définition 1.32 (UGPAS) *Le système (1.37) est dit uniformément globalement pratiquement asymptotiquement stable sur Θ si, pour tout $\delta > 0$, il existe un paramètre $\theta^*(\delta) \in \Theta$ et une fonction β_δ de classe \mathcal{KL} tels que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ses solutions satisfont*

$$|x(t; x_0, t_0, \theta^*)| \leq \delta + \beta_\delta(|x_0|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Dans ces définitions, le terme ‘‘uniformément’’ se rapporte à l’indépendance de la fonction β dans l’instant initial t_0 : en d’autres termes, le comportement qualitatif des solutions du système considéré est indépendant de l’instant initial considéré. A l’inverse, notons que cette fonction β peut dépendre de rayon d’attraction Δ ou de la précision δ imposée. En effet, à titre d’exemple, dans nombre d’applications d’Automatique le choix d’un gain de retour important pour l’augmentation de la précision statique génère typiquement un dépassement plus important.

Ces deux propriétés de stabilité ont fait l’objet d’une étude détaillée dans mes travaux de thèse de doctorat [Chaillet, 2006]. Nous nous cantonnerons ici au rappel de certains résultats sur l’UGPAS qui ont fait l’objet d’applications que nous présenterons en Section 1.4. Pour des raisons de concision, nous omettons ainsi d’inclure l’analyse de la stabilité semiglobale.

Le résultat suivant, établi dans [Chaillet and Loría, 2006c], propose une condition de Lyapunov suffisante pour l’UGPAS de (1.37).

Proposition 1.33 (Condition de Lyapunov pour l’UGPAS) *Supposons que, pour tout $\delta > 0$ donnée, il existe un paramètre $\theta(\delta) \in \Theta$, une fonction $V_\delta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continûment différentiable, et des fonctions $\underline{\alpha}_\delta$, $\bar{\alpha}_\delta$ et α_δ de classe \mathcal{K}_∞ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}_\delta$ et tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,*

$$\underline{\alpha}_\delta(|x|) \leq V_\delta(t, x) \leq \bar{\alpha}_\delta(|x|) \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial V_\delta}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V_\delta}{\partial x}(t, x)f(t, x, \theta) \leq -\alpha_\delta(|x|). \tag{1.39}$$

Supposons de plus que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{\alpha}_\delta^{-1} \circ \bar{\alpha}_\delta(\delta) = 0. \tag{1.40}$$

Alors le système (1.37) est UGPAS sur l’ensemble Θ .

Comparées aux résultats classiques pour la stabilité au sens de Lyapunov, les conditions (1.38) et (1.39), qui ne sont requises qu’en dehors de la boule \mathcal{B}_δ considérée, sont naturelles [Khalil, 2002] : elles requièrent que la fonction de Lyapunov considérée soit de dérivée négative dès que la norme de l’état dépasse la valeur δ . Intuitivement, l’on pourrait s’attendre à ce que, si ces conditions sont vérifiées pour toute tolérance δ arbitrairement petite, l’UGPAS suive directement. Toutefois, une condition supplémentaire (1.40) sur les fonctions bornant la fonction de Lyapunov est requise. Cette condition supplémentaire résulte du fait que la fonction de Lyapunov considérée peut dépendre du paramètre θ , et par voie de conséquence de la tolérance δ désirée. Comme il l’a été démontré dans

[Sepulchre, 2000, Kokotović and Marino, 1986], cette paramétrisation de la fonction de Lyapunov peut engendrer des comportements inattendus lorsque la condition (1.40) n'est pas respectée.

Dans nombre d'applications, comme par exemple la commande de satellites en formation ou les manœuvres automatique de navires pour le remplissage en pleine mer que nous présenterons en Sections 1.4.1 et 1.4.2 respectivement, la vérification de la condition (1.40) résulte de la combinaison de trois propriétés des fonctions de classe \mathcal{K}_∞ qui bornent la fonction de Lyapunov considérée : elles sont affines dans le paramètre de réglage θ , elles sont polynomiales et de même degré et le paramètre choisi est inversement proportionnel à la précision δ voulue. Le résultat suivant est une conséquence de la Proposition 1.33 s'adaptant particulièrement à cette situation. Bien que moins général, il est souvent plus aisé à appliquer.

Corollaire 1.34 (Condition simplifiée pour l'UGPAS) *Soit Θ un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Supposons qu'il existe une constante $p > 0$, des constantes $\underline{a}_i, \bar{a}_i, \underline{b}_i, \bar{b}_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ et, pour chaque $\theta \in \Theta$, une fonction continument différentiable $V_\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telles que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,*

$$\sum_{i=1}^n (\underline{a}_i + \underline{b}_i \theta_i) |x_i|^p \leq V_\theta(t, x) \leq \sum_{i=1}^n (\bar{a}_i + \bar{b}_i \theta_i) |x_i|^p \quad (1.41)$$

où, pour chaque $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$ et chaque $\theta \in \Theta$, $\underline{a}_i + \underline{b}_i \theta_i > 0$ et $\bar{a}_i + \bar{b}_i \theta_i > 0$. Supposons en outre que, pour tout $\delta > 0$, il existe un paramètre $\theta^*(\delta) \in \Theta$ et une fonction α_δ de classe \mathcal{K}_∞ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$|x| \geq \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_{\theta^*}}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V_{\theta^*}}{\partial x}(t, x) f(t, x, \theta^*) \leq -\alpha_\delta(|x|). \quad (1.42)$$

Alors, si pour chaque $i \in \mathbb{N} - \leq n$, les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{a}_i + \underline{b}_i \theta_i^*(\delta) > 0, \quad (1.43)$$

$$\bar{b}_i \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \theta_i^*(\delta) \delta^p = 0, \quad (1.44)$$

le système (1.37) est UGPAS sur Θ .

Il est à noter que, dans bien des cas, θ représente des gains de commande qui sont choisis d'autant plus grands que la précision statique requise est fine. Dans ce cas, la condition (1.43) est trivialement satisfaite.

Remarquons également que l'inégalité (1.41) est validée dans le cas particulier d'une fonction de Lyapunov quadratique $V_\theta(x) = x^T P(\theta)x$ lorsque la matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ peut s'écrire $P(\theta) = P_1 + P_2 \theta$, où $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont indépendantes de θ .

1.3.3.2 UGPAS pour les systèmes en cascade

A partir de ces rappels sur la stabilité pratique, nous présentons maintenant un résultat permettant de garantir l'UGPAS de systèmes en cascade. Nous nous intéressons à des cascades de la forme

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \theta_1) + g(t, x, \theta) \quad (1.45a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_2, \theta_2) \quad (1.45b)$$

où $x := (x_1^T, x_2^T)^T \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $\theta := (\theta_1^T, \theta_2^T)^T \in \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2}$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, et f_1 , f_2 et g sont localement lipschitziennes dans l'état et satisfont les conditions de Carathéodory pour tous les θ considérés. Notons que cette structure est légèrement plus contraignante que celle des systèmes étudiés en Section 1.3.2 car elle impose que le terme d'interconnexion $g(t, x, \theta)$ apparaisse de manière additive dans la dynamique du sous-système aval.

Nous supposons que ce terme d'interconnexion est uniformément borné à la fois dans le temps et dans le paramètre θ_2 , et qu'il s'annule avec x_2 :

Hypothèse 1.35 (Borne sur le terme d'interconnexion) *Pour tout $\theta_1 \in \Theta_1$, il existe une fonction croissante $G_{\theta_1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ et une fonction Ψ_{θ_1} de classe \mathcal{K} telles que, pour tout $\theta_2 \in \Theta_2$, tout $x \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ et tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,*

$$|g(t, x, \theta)| \leq G_{\theta_1}(|x|)\Psi_{\theta_1}(|x_2|).$$

Nous supposons également que chacun des deux sous-systèmes pris séparément est UGPAS, et qu'une fonction de Lyapunov associée est explicitement connue pour le sous-système aval.

Hypothèse 1.36 (UGPAS amont) *Le sous-système amont (1.45b) est UGPAS sur Θ_2 .*

Hypothèse 1.37 (Lyapunov UGPAS aval) *Pour chaque $\delta_1 > 0$, il existe un paramètre $\theta_1^*(\delta_1) \in \Theta_1$, une fonction $V_{\delta_1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ continûment différentiable, des fonctions $\underline{\alpha}_{\delta_1}$, $\bar{\alpha}_{\delta_1}$ et α_{δ_1} de classe \mathcal{K}_{∞} , et une fonction c_{δ_1} de classe \mathcal{PD} telles que, pour tout $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus \mathcal{B}_{\delta_1}$ et tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,*

$$\underline{\alpha}_{\delta_1}(|x_1|) \leq V_{\delta_1}(t, x_1) \leq \bar{\alpha}_{\delta_1}(|x_1|) \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial V_{\delta_1}}{\partial t}(t, x_1) + \frac{\partial V_{\delta_1}}{\partial x_1}(t, x_1)f_1(t, x_1, \theta_1^*) \leq -\alpha_{\delta_1}(|x_1|) \quad (1.47)$$

$$\left| \frac{\partial V_{\delta_1}}{\partial x_1}(t, x_1) \right| \leq c_{\delta_1}(|x_1|) \quad (1.48)$$

$$\lim_{\delta_1 \rightarrow 0} \underline{\alpha}_{\delta_1}^{-1} \circ \bar{\alpha}_{\delta_1}(\delta_1) = 0. \quad (1.49)$$

Nous retrouvons bien les conditions de la Proposition 1.33 pour l'UGPAS du sous-système aval déconnecté, auxquelles s'ajoute la condition (1.48) sur la bornitude vis-à-vis du temps du gradient de la fonction de Lyapunov considérée.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant qui, à la manière d'autres résultats sur la stabilité asymptotique tels que *e.g.* [Panteley and Loría, 2001, Mazenc et al., 1999], propose une condition de croissance sur le terme d'interconnexion pour garantir l'UGPAS de la cascade. Ce résultat est démontré dans [Chaillet and Loría, 2006c].

Théorème 1.38 (Cascade de systèmes UGPAS) *Sous les Hypothèses 1.35, 1.36 et 1.37, supposons que, pour chaque $\delta_1 > 0$, les conditions de croissances suivantes soient remplies :*

$$c_{\delta_1}(s)G_{\theta_1^*(\delta_1)}(s) = \mathcal{O}(\alpha_{\delta_1} \circ \bar{\alpha}_{\delta_1}^{-1} \circ \underline{\alpha}_{\delta_1}(s)) \quad (1.50a)$$

$$\alpha_{\delta_1}(s) = \mathcal{O}(\bar{\alpha}_{\delta_1}(s)) \quad (1.50b)$$

lorsque s tend vers l'infini. Alors la cascade (1.45) est UGPAS sur l'ensemble $\Theta_1 \times \Theta_2$.

Notons que, comme le Théorème 1.38 ne donne aucune information sur la fonction de Lyapunov associée à la cascade (1.45), il n'a pour l'instant pas été possible de l'étendre à des cascades multiples, comme nous l'avons fait pour l'iISS avec le Théorème 1.28.

Comme nous le verrons en Sections 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3, ce résultat a été appliqué dans le cadre de la commande de satellites en formation, de la procédure automatisée de remplissage de navires en pleine mer, ainsi qu'à la commande de robots manipulateurs. Il a également donné lieu à une étude de robustesse du rejet de perturbations suite au lissage de lois de commande discontinues (voir [Chaillet and Loría, 2006c]).

1.4 Applications

Nous passons maintenant en revue certaines applications pratiques auxquelles ont donné lieu les développements théoriques présentés dans ce chapitre. Ces applications concernent la commande de satellites en formation (Section 1.4.1), le ravitaillement de navires en pleine mer (Section 1.4.2) et la commande de robots manipulateurs (Section 1.4.3). Nous ne détaillons que les applications ayant trait à la formation de satellites.

1.4.1 Commande de satellites en formation

1.4.1.1 Commande de la position relative

Nous tenons tout d'abord à souligner le fait que les résultats de cette section font partie de la thèse de doctorat de R. Kristiansen [Kristiansen, 2008], dans laquelle ils sont abordés en détail. Nous nous contentons ici d'illustrer les résultats de robustesse développés en Section 1.3.3.

Le but de cette section est la commande automatique de satellites dans une configuration maître-esclave. Les formations de satellites présentent en effet des avantages intéressants par rapport à des satellites uniques en termes de coût de lancement, précision de mesure, et robustesse. Mais elles induisent également des défis technologiques et une complexité de commande accrue.

L'une des limitations pour la commande fine de satellites en formation découle de la mesure ou l'estimation des distances et vitesses relatives entre les satellites. Une connaissance complète de ces informations sur le satellite maître est souvent irréaliste en pratique. Les capteurs permettant de déterminer les positions et vitesses relatives sont généralement coûteux et requièrent des ressources de calcul et de communication importantes. Il s'agit donc de maintenir la formation précisément, tout en n'exploitant qu'un minimum de capteurs et en échangeant le moins d'information possible entre les satellites.

Une autre difficulté provient de l'évolution des paramètres des satellites au cours du temps. Ces variations peuvent, par exemple, provenir de la consommation de carburant (qui diminue la masse du satellite au cours de la mission) ou de la déformation du satellite. Des changements de paramètres orbitaux, au cours de la mission, peuvent également intervenir. Il est en général difficile de communiquer instantanément ces changements aux satellites suivants.

Cette problématique a fait l'objet de nombreux travaux, tels que *e.g.* [Yan et al., 2000, de Queiroz et al., 2000, Pan and Kapila, 2001, Yan et al., 2000, Wong et al., 2005]. Une étude bibliographique détaillée est disponible dans [Kristiansen, 2008].

Nous présentons ci-dessous une solution au problème du suivi de trajectoire de la position relative des satellites en n'exploitant que des mesures de position. Nous proposons deux

stratégies, suivant le niveau d'information disponible sur le satellite maître. La première suppose une connaissance exacte de sa position et de ses paramètres orbitaux, et suppose connues les perturbations orbitales affectant le satellite suiveur. En exploitant un filtre similaire à [Kelly, 1993] pour l'évaluation de la vitesse du satellite maître, cette première stratégie établit la stabilité globale asymptotique du système bouclé. La seconde loi de commande présentée ne suppose pas les paramètres orbitaux connus, ni les perturbations affectant le comportement du suiveur, mais juste des bornes sur leurs possibles variations. La stabilité globale pratique (UGPAS), telle que rappelée dans la Section 1.3.3, est alors établie.

Nous introduisons rapidement le problème de commande en formation que nous considérons ici. La trajectoire de deux masses ponctuelles autonomes m_1 et m_2 est régie par l'équation

$$\ddot{r} + \frac{\mu}{|r|^3}r = 0, \quad (1.51)$$

où $r \in \mathbb{R}^3$ désigne la position relative des deux masses et $\mu := G(m_1 + m_2)$, G étant la constante de gravitation universelle. En présence de forces extérieures, cette équation peut s'étendre à la dynamique de deux satellites commandés et éventuellement soumis à des perturbations exogènes :

$$\begin{aligned} \ddot{r}_l &= -\frac{\mu}{|r_l|^3}r_l + \frac{f_{dl}}{m_l} + \frac{u_l}{m_l} \\ \ddot{r}_f &= -\frac{\mu}{|r_f|^3}r_f + \frac{f_{df}}{m_f} + \frac{u_f}{m_f} \end{aligned}$$

où les indices f et l désignent respectivement les satellites esclave (*follower*) et maître (*leader*), $f_{dl}, f_{df} \in \mathbb{R}^3$ désignent les forces générées par les diverses perturbations (vent solaire, micro-collisions, influence gravitationnelles d'autres corps, etc.) et $u_l, u_f \in \mathbb{R}^3$ sont les forces générés par les actionneurs embarqués (pousseurs). Pour des raisons de simplicité nous ne considérons ici qu'une formation composée de deux satellites seulement. La masse des satellites étant très inférieures à celle de la Terre M_e , nous considérerons que $\mu = GM_e$. En considérant l'anomalie vraie⁹ ν du satellite maître, la dynamique de la position relative $q := r_f - r_l$ s'écrit (cf. [Kristiansen et al., 2005])

$$m_f \ddot{q} + C(\dot{\nu})\dot{q} + D(\dot{\nu}, \ddot{\nu}, |r_f|) + \sigma(|r_l|, |r_f|) = U + F_d, \quad (1.52)$$

où

$$C(\dot{\nu}) := 2m_f \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\nu} & 0 \\ \dot{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D(\dot{\nu}, \ddot{\nu}, |r_f|) := m_f \begin{pmatrix} \frac{\mu}{|r_f|^3} - \dot{\nu}^2 & -\ddot{\nu} & 0 \\ \ddot{\nu} & \frac{\mu}{|r_f|^3} - \dot{\nu}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{|r_f|^3} \end{pmatrix},$$

9. L'anomalie vraie est l'angle entre la position courante du satellite et la direction du périapse (point de l'orbite où la distance entre le satellite et la Terre est minimale), mesuré au centre de la Terre.

$$\sigma(|r_l|, |r_f|) := m_f \mu \left(\frac{|r_l|}{|r_f|^3} - \frac{1}{|r_l|^2}, 0, 0 \right)^\top.$$

La force résultant des perturbation est notée

$$F_d := f_{df} - \frac{m_f}{m_l} f_{dl}$$

et la commande relative est donnée par

$$U := u_f - \frac{m_f}{m_l} u_l.$$

Afin de simplifier l'écriture, nous utilisons la représentation suivante :

$$C(\dot{\nu}) = 2m_f \dot{\nu} \bar{C} \tag{1.53}$$

$$D(\dot{\nu}, \ddot{\nu}, |r_f|) = m_f \frac{\mu}{|r_f|^3} I + m_f \dot{\nu}^2 \bar{D} + m_f \ddot{\nu} \bar{C} \tag{1.54}$$

où

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'évolution de l'anomalie vraie du satellite maître est donnée par

$$\dot{\nu}(t) = \frac{n_l (1 + e_l \cos \nu(t))^2}{(1 - e_l^2)^{3/2}} \tag{1.55}$$

$$\ddot{\nu}(t) = \frac{-2n_l^2 e_l (1 + e_l \cos \nu(t))^3 \sin \nu(t)}{(1 - e_l^2)^3},$$

où $n_l := \sqrt{\mu/a_l^3}$ est le mouvement moyen du satellite maître, a_l étant l'axe semi-majeur de son orbite et e_l son excentricité. Lorsque le satellite maître évolue sur une orbite elliptique, $\dot{\nu}(t)$ et $\ddot{\nu}(t)$ sont ainsi bornées. Nous exploiterons donc l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.39 (Anomalie vraie bornée) *Il existe des constantes $\bar{\omega}_{\dot{\nu}}, \bar{\omega}_{\ddot{\nu}} > 0$ telles que*

$$|\dot{\nu}(t)| \leq \bar{\omega}_{\dot{\nu}} \quad \text{et} \quad |\ddot{\nu}(t)| \leq \bar{\omega}_{\ddot{\nu}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Cette hypothèse est exploitée dans les deux résultats suivants. Le premier suppose en outre que l'anomalie vraie ν du satellite maître ainsi que ses dérivées $\dot{\nu}$ et $\ddot{\nu}$ sont connues. De la même manière, il requiert la connaissance des perturbations orbitales f_{df} affectant le satellite suiveur ainsi que la position relative q .

Proposition 1.40 (Mesures disponibles : UGAS) *Supposons que la position relative désirée q_* , la vitesse relative désirée \dot{q}_* et l'accélération relative désirée \ddot{q}_* soient toutes bornées et que l'Hypothèse 1.39 soit vérifiée. Alors l'origine du système (1.52) en boucle fermée avec la loi de commande*

$$u_f = -k_p \tilde{q} - k_d \vartheta + \sigma - f_{df} + D(\dot{\nu}, \ddot{\nu}, |r_f|) + C(\dot{\nu}) \dot{q}_* + m_f \ddot{q}_* \tag{1.56}$$

$$\dot{q}_c = -a \vartheta \tag{1.57}$$

$$\vartheta = q_c + b \tilde{q} \tag{1.58}$$

où $\tilde{q} := q - q_*$, est uniformément globalement asymptotiquement stable (UGAS) pour un choix adéquat des gains de commande k_p , k_d , a et b .

En d'autres termes, ce résultat montre que, sous des hypothèses de mesures suffisantes et pourvu que le satellite maître soit commandée de façon satisfaisante, il est possible d'effectuer le suivi UGAS de toute trajectoire bornée et suffisamment lisse du satellite suiveur.

A l'inverse, si ces mesures ne sont pas disponibles, une erreur est observée en régime permanent. Le résultat suivant démontre que cette erreur statique peut être arbitrairement diminuée (dans les limites de la puissance des actionneurs) par un choix de gains suffisamment grands. Plus précisément, il ne suppose plus la connaissance de $\dot{\nu}$ et $\ddot{\nu}$, mais juste de leurs bornes $\bar{\omega}_{\dot{\nu}}$ et $\bar{\omega}_{\ddot{\nu}}$ (voir l'Hypothèse 1.39). De la même manière, des perturbations orbitales sur le suiveur f_{df} nous supposons maintenant ne connaître que la borne $\bar{\omega}_f$, à savoir $|f_{df}(t)| \leq \bar{\omega}_f$ pour tout $t \geq 0$, et de même pour les perturbations orbitales et les défauts d'actionnement affectant le satellite maître : $|f_{dl}(t) + u_l(t)| \leq \bar{\omega}_l$.

Proposition 1.41 (Bornes connues : UGPAS) *Sous les hypothèses ci-dessus, supposons en outre que l'Hypothèse 1.39 soit vérifiée et que q_* , \dot{q}_* , \ddot{q}_* soient toutes bornées. Alors le système (1.52), bouclé par la loi de commande (1.57), (1.58) et*

$$u_f = -k_p \tilde{q} - k_d \dot{\tilde{q}} + \sigma + m_f \left(\frac{\mu}{|r_f|^3} I + \bar{\omega}_{\dot{\nu}}^2 \bar{D} + \bar{\omega}_{\ddot{\nu}} \bar{C} \right) q + 2m_f \bar{\omega}_{\dot{\nu}} \bar{C} \dot{q}_* + m_f \ddot{q}_* \quad (1.59)$$

où $\tilde{q} = q - q_*$ et a est une constante positive, est uniformément globalement pratiquement asymptotiquement stable sur l'ensemble paramétrique $\mathbb{R}_{>0}^3$ avec k_p , k_d et b comme gains de réglage.

Les Propositions 1.40 et 1.41 illustrent l'imprécision qui peut résulter d'un manque de mesures ou de la présence de perturbations exogènes inconnues. Cette imprécision peut toutefois être réduite par le réglage adéquat des gains. Bien entendu, en pratique, la précision statique sera limitée par la puissance des actionneurs (qui limitera la valeur maximale des gains pouvant être implémentés). Les simulations proposées dans [Kristiansen et al., 2006b] montrent cependant que, dans des conditions réalistes d'utilisation, l'erreur statique est réduite de manière satisfaisante.

Nous soulignons enfin le fait qu'une technique de commande similaire a été proposée dans [Kristiansen et al., 2009] pour le suivi de trajectoire de l'orientation relative des satellites en formation (et non plus seulement leur position relative). Là encore, le manque de mesure et les perturbations exogènes conduisent à la stabilité pratique de la boucle fermée. Pour des raisons de concision, ces résultats ne sont pas présentés dans ce document.

1.4.1.2 Robustesse de la formation de satellites

Une difficulté cruciale des satellites en formation est de maintenir une configuration précise même en présence de perturbations exogènes. La plupart de celles affectant les satellites sont difficilement modélisables. Seules des informations statistiques (comme l'amplitude, l'énergie ou la puissance) sont en général disponibles. Ces perturbations peuvent avoir des origines diverses :

- *Interférences entre véhicules.* En cas de formation rapprochée ou pour des manœuvres de rendez-vous orbital, la force et les échappements des pousseurs d'un satellite peuvent affecter le déplacement d'autres satellites.

- *Vent solaire et radiations.* Les particules et radiations bombardées par le soleil influence le mouvement des satellites. Cette influence est directement liée à l'activité solaire [Wertz, 1978], qui est difficilement prévisible [Hanslmeier et al., 1999].
- *Petits débris.* Alors que les impacts avec des débris de taille importante compromet en général la mission, certains débris plus petits (tels que des particules de peinture, de la poussière, des liquides de refroidissement voire des aiguilles métalliques¹⁰) sont moins dommageables sur le matériel mais influencent tout de même le mouvement.
- *Micro-météorites.* Les dégâts générés par les micro-météorites sont en général sans conséquences matérielles, mais les impacts à grande vitesse dégradent les performances satellites [Belk et al., 1997].
- *Perturbations gravitationnelles.* Même les modèles gravitationnels avancés ne permettent qu'une précision limitée due à l'inhomogénéité et la forme de la Terre. En outre, d'autres corps célestes tels que le soleil et la lune influent sur le comportement des satellites.
- *Imperfection de l'actionnement.* Il existe souvent une différence entre l'actionnement généré par l'algorithme de commande et l'actionnement réellement mis en œuvre par les propulseurs. Cette différence est d'autant plus importante en cas d'algorithmes continus qui ne prennent pas en compte la nature impulsive des propulseurs.

Les résultats présentés en Section 1.1.3 sur la robustesse des systèmes ISS vis-à-vis de perturbations dont l'énergie moyenne mouvante est bornée peut être d'utilité pour étudier l'influence de ces perturbations sur le comportement global de la formation.

En suivant les mêmes étapes de modélisation que celles de la Section précédente, nous nous intéressons maintenant à la robustesse de la formation de satellites en configuration maître-esclave. Comme précédemment, nous supposons que seule la position relative des deux satellites est disponible à la mesure.

Contrairement à la section précédente, nous traitons explicitement de la stabilisation du satellite maître. L'objectif est que la formation suive une trajectoire exprimée dans le repère de référence donné par

$$\ddot{r}_o = -\frac{\mu}{|r_o|^3}r_o,$$

Comme précédent, nous supposons les deux premières dérivées de l'anomalie vraie de ce repère de référence sont bornées.

Hypothèse 1.42 *Il existe des constantes $\beta_{\dot{v}_o}, \beta_{\ddot{v}_o} > 0$ telles que*

$$|\dot{v}_o(t)| \leq \beta_{\dot{v}_o} \quad \text{et} \quad |\ddot{v}_o(t)| \leq \beta_{\ddot{v}_o}, \quad \forall t \geq 0.$$

Nous notons p la position du satellite leader dans ce repère. Nous définissons également¹¹ :

$$C(\dot{v}_o) := 2\dot{v}_o\bar{C}, \quad D(\dot{v}_o, \ddot{v}_o) := \dot{v}_o^2\bar{D} + \ddot{v}_o\bar{C},$$

où \bar{C} et \bar{D} sont définies dans (1.55), et

$$n(r_o, p) := \mu \left(\frac{r_o + p}{|r_o + p|^3} - \frac{r_o}{|r_o|^3} \right).$$

10. Le projet West Ford a consisté à placer 480 million d'aiguilles métalliques en orbite afin de tester la possibilité de créer une ionosphère artificielle permettant une communication radio au niveau global [Overhage and Radford, 1964].

11. Dans une volonté d'homogénéité avec les articles originaux [Grötli et al., 2011b, Grötli et al., 2010], la notation n'est pas tout-à-fait cohérente avec celle de la section précédente.

La dynamique du satellite maître dans le repère de référence est alors donnée par

$$\ddot{p} + C(\dot{\nu}_o)\dot{p} + D(\dot{\nu}_o, \ddot{\nu}_o)p + n(r_o, p) = F_l \quad (1.60)$$

où $F_l := (u_l + d_l)/m_l$. La position relative ρ du satellite esclave vis-à-vis du satellite maître est quant à elle régie e par

$$\ddot{\rho} + C(\dot{\nu}_o)\dot{\rho} + D(\dot{\nu}_o, \ddot{\nu}_o)\rho + n(r_o + p, \rho) = F_f - F_l, \quad (1.61)$$

où $F_f := (u_f + d_f)/m_f$. Comme précédemment, les indices l et f sont utilisés pour indiquer les satellites maître et esclave respectivement. d_l et d_f représentent des perturbations exogènes agissant sur chacun des satellites (*e.g.*, interférence inter-satellites, petits impacts de débris, vent solaire, etc.).

Soit $p_d : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trajectoire à suivre par le satellite maître dans le repère de référence, et soit $e_l := p - p_d$. Nous supposons ne mesurer que la position p du satellite, et non sa vitesse. Nous exploiterons pour cela une estimée \hat{p} que nous dériverons. $\tilde{p} := p - \hat{p}$ représente ainsi l'erreur d'estimation. Dans l'esprit de [Berghuis, 1993], la loi de commande que nous utilisons est donnée par

$$u_l = m_l \left[\ddot{p}_d + C(\dot{\nu}_o)\dot{p}_d + D(\dot{\nu}_o, \ddot{\nu}_o)p + n(r_o, p) - k_l(\dot{p}_0 - \dot{p}_r) \right] \quad (1.62)$$

$$\dot{p}_r = \dot{p}_d - \ell_l e_l \quad (1.63)$$

$$\dot{p}_0 = \dot{\hat{p}} - \ell_l \tilde{p}, \quad (1.64)$$

où k_l et ℓ_l sont des gains de réglage. L'estimée de la vitesse du satellite maître est alors obtenue par

$$\dot{\hat{p}} = a_l + (l_l + \ell_l)\tilde{p} \quad (1.65)$$

$$\dot{a}_l = \ddot{p}_d + l_l \ell_l \tilde{p}, \quad (1.66)$$

où l_l est également un gain de réglage. En posant $X_l := (e_l^\top, \dot{e}_l^\top, \tilde{p}^\top, \dot{\tilde{p}}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{12}$ et $d := (d_l^\top, d_f^\top)^\top \in \mathbb{R}^6$, la dynamique du satellite maître s'écrit :

$$\dot{X}_l = A_l(\dot{\nu}_o(t))X_l + B_l d, \quad (1.67)$$

où les matrices $A_l \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ et $B_l \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$ sont données par

$$A_l(\dot{\nu}_o) := \begin{pmatrix} 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ a_{21} & a_{22}(\dot{\nu}_o) & a_{23} & a_{24} \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 \\ a_{41} & a_{42}(\dot{\nu}_o) & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B_l := \frac{1}{m_l} \begin{pmatrix} 0_3 & 0_3 \\ I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \\ I_3 & 0_3 \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{21} &:= a_{41} := -k_l \ell_l I_3 \\ a_{22} &:= a_{42} := -C(\dot{\nu}_o) - k_l I_3 \\ a_{23} &:= -k_l \ell_l I_3 \\ a_{24} &:= k_l I_3 \\ a_{43} &:= (k_l - l_l) \ell_l I_3 \\ a_{44} &:= (k_l - l_l - \ell_l) I_3. \end{aligned}$$

En ce qui concerne le satellite esclave, notre objectif est de lui faire suivre une trajectoire $\rho_d : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ relative au satellite maître. Là encore, nous définissons $\dot{\hat{\rho}} \in \mathbb{R}^3$ comme l'estimée de la position du satellite esclave, ainsi que $e_f := \rho - \rho_d$ et $\tilde{\rho} := \rho - \hat{\rho}$. La loi de commande employée est la suivante :

$$u_f = m_f \left[\ddot{p}_d + \ddot{\rho}_d + C(\dot{\nu}_o)(\dot{p}_d + \dot{\rho}_d) + D(\dot{\nu}_o, \ddot{\nu}_o)(p + \rho) + n(r_o + p, \rho) + n(r_o, p) \right. \quad (1.69)$$

$$\left. - k_l(\dot{p}_0 - \dot{p}_r) - k_f(\dot{\rho}_0 - \dot{\rho}_r) \right] \quad (1.70)$$

$$\dot{\rho}_r = \dot{\rho}_d - \ell_f e_f \quad (1.71)$$

$$\dot{\rho}_0 = \dot{\hat{\rho}} - \ell_f \tilde{\rho}, \quad (1.72)$$

où l'observateur de la position est donné par

$$\dot{\hat{\rho}} = a_f + (l_f + \ell_f) \tilde{\rho} \quad (1.73)$$

$$\dot{a}_f = \ddot{\rho}_d + l_f \ell_f \tilde{\rho}. \quad (1.74)$$

k_f , l_f et ℓ_f désignent des gains de réglages. Nous soulignons le fait que, pour implémenter (1.69), les équations (1.63)-(1.66) doivent elles aussi être implémentées dans l'algorithme de commande du satellite esclave.

En définissant $X_f := (e_f^\top, \dot{e}_f^\top, \tilde{\rho}^\top, \dot{\tilde{\rho}}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{12}$, et en combinant (1.61) et (1.69)-(1.74) et en insérant la and inserting the leader spacecraft controller, la dynamique du satellite esclave peut être résumée par

$$\dot{X}_f = A_f(\dot{\nu}_o(t))X_f + B_f d, \quad (1.75)$$

où $A_f(\dot{\nu}_o)$ est obtenue par $A_l(\dot{\nu}_o)$ (cf. (1.68)) en substituant les indices l par f dans les sous-matrices a_{ij} , et

$$B_f := \frac{1}{m_l m_f} \begin{pmatrix} 0_3 & 0_3 \\ -m_f I_3 & m_l I_3 \\ 0_3 & 0_3 \\ -m_f I_3 & m_l I_3 \end{pmatrix}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant, qui garantit la stabilité de la formation ainsi commandée vis-à-vis de perturbations dont énergie est à moyenne mouvante limitée. Une estimée explicite de la précision statique est donnée en fonction de cette moyenne mouvante.

Proposition 1.43 (Robustesse de la formation) *Sous l'Hypothèse 1.42, considérons les lois de commande des satellites maître et esclave données par (1.62)-(1.66) et (1.69)-(1.74) respectivement avec, pour chaque $i \in \{l, f\}$, $l_i \geq 2k_i$, $k_i > 2k_i^*$ et $\ell_i \geq 1$, où*

$$k_i^* := \ell_i + \beta_{\dot{\nu}_o} \sqrt{2\ell_i^2 + 1} + \left(1 + \frac{m_f^2}{m_l^2}\right) \frac{2(\ell_i^2 + 1)}{m_i^2}. \quad (1.76)$$

Pour toute précision $\delta > 0$ donnée et tout horizon temporel $T > 0$, considérons la moyenne mouvante

$$E = \frac{1}{4} \min_{i \in \{l, f\}} \left\{ \ell_i^2 - \frac{1}{2} \sqrt{4\ell_i^4 + 1} + \frac{1}{2} \right\} \delta^2 \frac{e^{\kappa T} - 1}{2e^{\kappa T} - 1}, \quad (1.77)$$

où

$$\kappa := \frac{\min_{i \in \{l, f\}} k_i^* / \max_{i \in \{l, f\}} \left\{ \frac{k_i}{\ell_i} \right\}}{\max_{i \in \{l, f\}} \left\{ \ell_i^2 + \frac{1}{2} \sqrt{4\ell_i^4 + 1} + \frac{1}{2} \right\}}. \quad (1.78)$$

Alors, pour tout $d \in \mathcal{W}_\gamma(E, T)$ où $\gamma(s) := s^2$, la boule \mathcal{B}_δ est globalement exponentiellement stable pour la formation résumée par (1.67) et (1.75).

Ce résultat se base sur le Corollaire 1.17 sur la robustesse des systèmes ISS vis-à-vis de perturbations à moyenne mouvante bornée. Sa preuve est donnée dans [Grøtli et al., 2011b, Grøtli et al., 2010]. Des simulations validant ces prévisions théoriques sont également proposées dans ces références. Notons enfin qu'un réglage optimal des gains de commande utilisés dans cette proposition a été proposé dans [Grøtli et al., 2011a].

1.4.2 Ravitaillement de navires en pleine mer

Le ravitaillement en pleine mer est une manœuvre pour laquelle le navire ravitailleur doit suivre le navire à ravitailler à une distance constante. Il requiert une coordination fine entre les deux navires. Jusqu'à récemment, cette opération se faisait de manière manuelle en recourant à des échanges d'instructions visuelles basées sur des drapeaux. Le GPS et l'AIS (système d'identification automatique) permettent aujourd'hui une gestion automatique de cette manœuvre.

L'auto-pilote est toutefois confronté à des défis de taille. Le navire ravitailleur n'a généralement que des connaissances très succinctes sur le navire à ravitailler, et ne dispose en général que de la mesure de sa position. En outre, des perturbations exogènes telles que la houle, le vent et les courants peuvent fortement affecter le comportement des deux navires.

Dans [Kyrkjebø et al., 2006]¹², nous avons proposé une approche basée sur un navire virtuel pour générer une vitesse de référence pour le navire de ravitaillement. Nous avons exploité les résultats de la Section 1.3.3 pour montrer que le système en boucle fermée est UGPAS en présence des perturbations listées ci-dessus. Pour des raisons de concision, nous ne détaillons pas cette étude ici.

1.4.3 Commande de robots manipulateurs

Dans la littérature des systèmes mécaniques, une attention particulière a été donnée à l'analyse de la robustesse sous l'influence des frottements. Ceux-ci sont difficiles à modéliser précisément. Certains travaux, tels que [Alamir, 2002], visent à une compensation des frottements sans modèle. D'autres se basent sur des modèles approximatifs. D'une manière générale, les modèles de frottement peuvent être divisés en deux catégories : les modèles statiques, dans lesquels les forces et couples de frottement dépendent de la vitesse relative instantanée entre les deux corps métalliques (comme par exemple les frottements visqueux), et les modèles dynamiques, qui font intervenir les valeurs passées de la vitesse relative [Canudas de Wit et al., 1995, Swevers et al., 2000]. Qu'ils soient statiques ou dynamiques, les frottements peuvent généralement être modélisés comme une force qui dépend du temps et de l'état du système mécanique.

¹². Ces résultats figuraient également dans ma thèse de doctorat [Chaillet, 2006] ainsi que dans celle d'E. Kyrkjebø [Kyrkjebø, 2007].

Les performances des robots manipulateurs peuvent aussi être dégradées du fait de dynamiques non-modélisées. C'est le cas de la commande PID (Proportionnelle Intégrale Dérivée), couramment utilisée dans des applications industrielles [Kelly, 1995, Rocco, 1996, Perrier and Canudas de Wit, 1996, Choi and Chung, 2004].

Dans [Chaillet et al., 2007c, Chaillet et al., 2006]¹³, nous avons exploité les résultats présentés en Section 1.3.3 pour montrer qu'un réglage adéquat des gains PID permet d'élargir le domaine d'attraction à loisir et de d'augmenter arbitrairement la précision statique : en d'autres termes, la boucle fermée est uniformément semiglobalement pratiquement asymptotiquement stable. Cette analyse suggère de plus une méthode de réglage des gains. Des simulations, ainsi qu'une implémentation expérimentale sur un bras manipulateur "Pelican" développé au CICESE (Mexique), ont permis de validé ces prévisions théoriques. Là encore, nous ne détaillons pas ces résultats pour des motifs de concision.

13. Ces résultats ont également été présentés dans [Chaillet, 2006].

Chapitre 2

Analyse et commande de la synchronisation pour des applications aux neurosciences

La plupart des résultats obtenus dans cette section sont le fruit du travail de thèse [Franci, 2012] d'A. Franci, que j'ai eu le plaisir de co-encadrer avec F. Lamnabhi-Lagarrigue et W. Pasillas-Lépine. Certains résultats ont été obtenus en collaboration avec S. Bezzaoucha, E. Panteley et L. Scardovi. Ils ont fait l'objet des publications suivantes : [Franci et al., 2012a, Franci et al., 2012b, Franci et al., 2012c, Franci et al., 2011a, Franci et al., 2011b, Franci et al., 2011c, Franci et al., 2011d, Franci et al., 2011e, Franci et al., 2010, Franci and Chaillet, 2010a].

2.1 Kuramoto sous le retour de son champ moyen local

Les oscillations neuronales jouent un rôle central dans le fonctionnement du cerveau. Elles sont à la base de fonctions fondamentales telles que la mémoire, la cognition, ou la génération de mouvement [Traub and Whittington, 2010]. Elles peuvent néanmoins être à l'origine d'états pathologiques tels que la maladie de Parkinson (MP), le tremblement essentiel, la schizophrénie ou l'épilepsie.

Les patients Parkinsoniens, en particulier, sont affectés par une intense activité oscillatoire synchronisée dans certaines zones profondes du cerveau. Cette oscillation intervient dans la gamme beta, à savoir entre 8 et 30Hz, et son intensité est fortement corrélée à celle des symptômes physiques [Hammond et al., 2007]. Bien que les mécanismes de la MP soient encore méconnus, ils dérivent de la disparition de neurones dopaminergiques au sein de la *substantia nigra*. Le traitement le plus courant consiste donc à compenser cette perte de dopamine par l'ingestion de L-Dopa. Si ce traitement chimique donne de bons résultats dans les premières années du traitement, son efficacité tend à diminuer considérablement avec le temps.

Pour les patients ayant déclaré la maladie suffisamment tôt, un traitement symptomatique efficace est la stimulation cérébrale profonde (*Deep Brain Stimulation*, DBS). Cette technique, inventée dans les années 1990 par Prof. Benabid [Benabid et al., 1991], consiste à stimuler en permanence une zone profonde ciblée (en général, le noyau sous-thalamique) au moyen d'électrodes implantées reliées à un pacemaker, comme illustré par la Figure 2.1.

Bien que la MP en reste la première application thérapeutique, la DBS est utilisée

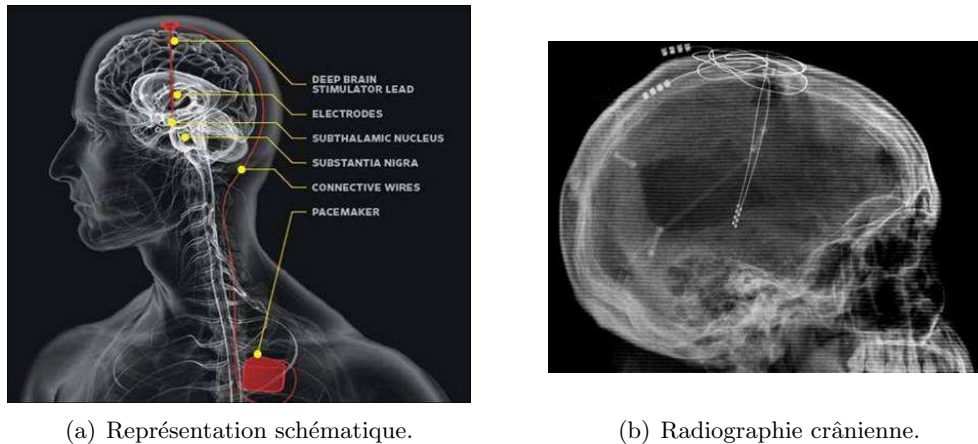


FIGURE 2.1 – Implémentation de la DBS.

dans le cadre d'autres pathologies telles le tremblement essentiel, l'épilepsie, les troubles obsessionnels compulsifs ou la dépression. Malgré des résultats thérapeutiques impressionnants, la DBS souffre encore de limitations importantes. La plupart des techniques de DBS actuelles n'exploitent aucune information sur l'activité cérébrale du patient : elles se cantonnent à injecter en permanence un signal carré (impulsions de 60 à 200ms d'amplitude 1 à 5V, à une fréquence de 120 à 180Hz) dont les paramètres sont ajustés pour chaque patient après l'opération. Il s'agit donc d'une stimulation purement boucle-ouverte, ce qui a des conséquences importantes en termes d'effets secondaires (*e.g.* troubles de la mémoire, troubles psychiatriques, problèmes liés à la parole [Rodriguez-Oroz et al., 2005]) et de consommation énergétique (qui mène à des opérations chirurgicales supplémentaires pour le remplacement des batteries).

Les tentatives de développement d'une DBS boucle-fermée, c'est-à-dire exploitant des informations temps-réel sur l'activité cérébrale du patient, se heurtent à plusieurs obstacles inhérents. Tout d'abord, du fait de ses incertitudes, hétérogénéités, non-linéarités inhérentes et de sa grande dimension, la dynamique régissant une population neuronale est fortement complexe. De plus, en raison de la taille des électrodes par rapport à l'échelle neuronale, l'unique mesure réalistement exploitable est le champ moyen local, à savoir une grandeur scalaire résultant de la somme pondérée des potentiels membranes des neurones de la zone considérée. Pour cette même raison, un seul signal de commande (la tension délivrée par l'électrode) est disponible. Enfin, la synchronisation intempestive des neurones étant liée aux symptômes, le but de la commande est d'altérer la synchronisation des cellules neuronales visées, ce qui n'est pas un objectif classique de la théorie de la commande. En langage automatique, il s'agit donc d'altérer la synchronisation d'un système non-linéaire complexe de grande dimension mono-entrée mono-sortie.

Une autre limitation de la DBS actuelle est le manque de connaissance sur son principe de fonctionnement au sein même de la communauté médicale [Kringelbach et al., 2007]. Plus précisément, il n'est pas encore clair si la DBS agit en désynchronisant les cellules neuronales, en inhibant leur activité, ou en modifiant leur fréquence vers un domaine fréquentiel non-symptomatique. Dans ce qui suit, nous étudions l'effet d'une loi de commande scalaire proportionnelle au champ moyen local (*Local Field Potential*, LFP) sur les deux premières hypothèses. Nous montrons, à partir d'un modèle simplifié du rythme neuronal (des oscillateurs de phase) qu'un tel signal de DBS peut engendrer soit la désynchronisation des

neurones visés soit leur inhibition, suivant leur propre hétérogénéité et le gain de retour employé.

Au delà de sa simplicité mathématique, qui permet à la fois une analyse mathématique et une implémentation pratique simple, l’approche par retour proportionnel du LFP est particulièrement attrayante d’un point vue énergétique. Puisque le LFP diminue considérablement en cas d’inhibition neuronale ou de désynchronisation, le signal DBS est de plus faible amplitude à mesure que son objectif de commande est atteint.

Le modèle que nous utilisons est obtenu à partir des oscillateurs complexes de Landau-Stuart. Après des simplifications classiques, nous montrons que la dynamique de leur phases est régie par une version modifiée du modèle de Kuramoto [Kuramoto, 1984] : voir Section 2.1.1. Nous établissons ensuite, en Section 2.1.2, que le verrouillage de phase exact est génériquement incompatible avec un retour proportionnel au LFP, quelque soit la topologie d’interconnexion entre les neurones. Toutefois, en démontrant une propriété de robustesse du verrouillage de phase, nous montrons en Section 2.1.3 que la désynchronisation effective des neurones requiert une stimulation d’amplitude suffisamment grande. En nous concentrant sur une topologie d’interconnexion complète (*all-to-all*), nous proposons enfin des valeur du gain de retour permettant soit la désynchronisation (Section 2.1.4.1) soit l’inhibition (Section 2.1.4.2) des neurones concernés.

2.1.1 Des oscillateurs de phase pour modéliser le rythme de neurones sous DBS

Nous nous intéressons ici à des neurones périodiques, c’est à dire des neurones qui, pris indépendamment, génèrent des potentiels d’action à intervalles réguliers. Bien qu’une riche variété de comportements neuronaux existe, les neurones périodiques sont communément utilisés pour l’analyse de la synchronisation neuronale, cf. *e.g.* [Ermentrout and Terman, 2010, Chapitre 8], [Izhikevich, 2007, Chapitre 10], [Pyragas et al., 2007]. La dynamique des neurones est en effet extrêmement complexe et régie par plusieurs équations différentielles non-linéaires couplées [Hodgkin and Huxley, 1952]. Afin de pouvoir établir des résultats analytiques sur la synchronisation neuronale sous l’effet d’un signal DBS, il est donc nécessaire de travailler avec un modèle simplifié, apte à représenter la rythmicité des neurones.

Ainsi, nous considérons l’oscillateur complexe suivant, connu sous le nom d’oscillateur de Landau-Stuart, qui représente une forme normale d’une bifurcation d’Andronov-Hopf supercritique¹ :

$$\dot{z} = (i\omega_o + \rho^2 - |z|^2)z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

où $\omega_o, \rho \in \mathbb{R}$. Ce modèle capture deux propriétés fondamentales des neurones périodiques. Premièrement, comme le montre [Guckenheimer and Holmes, 2002, Théorème 3.4.2], il exhibe une oscillation stable d’amplitude $|\rho|$ à la fréquence ω_o , ce qui correspond au rythme périodique des potentiels d’action. De plus, il est possible d’associer à sa partie réelle le potentiel membranaire, qui constitue la sortie mesurable du neurone, et sa partie imaginaire à une variable de récupération qui rend compte d’autres effets physiologiques. Une telle simplification a été largement exploitée dans la littérature sur la synchronisation : cf. *e.g.* [Kuramoto, 1984, Ermentrout, 1990, Ren and Ermentrout, 2000, Hauptmann et al., 2005b, Rosenblum et al., 2006, Popovych et al., 2006, Pyragas et al., 2007,

1. Une telle bifurcation correspond au passage d’un équilibre à un cycle limite stable par la génération de deux valeurs propres imaginaires pures.

Omel'chenko et al., 2008]. Dans le plan de phase, elle consiste à assimiler un cycle limite par un cercle, comme l'illustre la Figure 2.2.

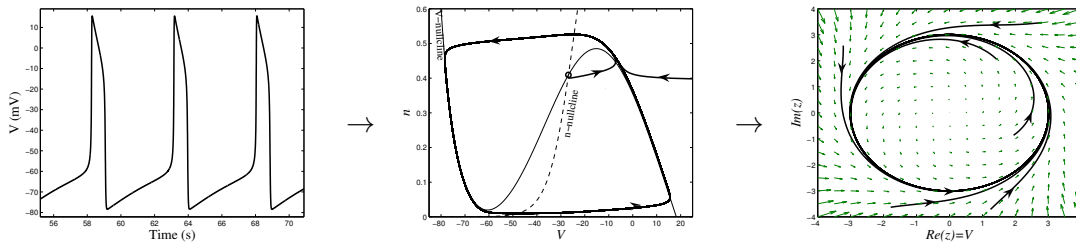


FIGURE 2.2 – Potentiel d'action neuronal typique, représentation exacte dans le plan de phases et approximation par le modèle de Landau-Stuart.

Bien que le couplage entre neurones puisse s'effectuer de diverses manières, nous nous focalisons ici sur un couplage diffusif, à la manière de [Maistrenko et al., 2005, Pyragas et al., 2007, Tukhlina et al., 2007, Tass, 2003]. Un réseau de $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ neurones couplés peut alors être modélisé par

$$\dot{z}_i = (i\omega_i + \rho_i^2 - |z_i|^2)z_i + \sum_{j=1}^N \kappa_{ij}(z_j - z_i), \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

où $\kappa_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, N$, représente le gain de couplage de l'oscillateur j vers l'oscillateur i . Le vecteur $\omega := [\omega_i]_{i \in \{1, \dots, N\}} \in \mathbb{R}^N$ contient les fréquences naturelles des oscillateurs.

Comme, en pratique, la topologie d'interconnexion neuronale est peu connue, nous autorisons pour le moment une matrice $\kappa := [\kappa_{ij}]_{i,j=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ arbitraire. Comme nous l'avons déjà évoqué, la seule mesure réaliste en pratique est le LFP, c'est-à-dire la somme pondérée des potentiels membranaires. La distance inconnue de chaque neurone à l'électrode de mesure, ainsi que la conductance méconnue du tissu font de la contribution de chaque neurone au LFP une grandeur inconnue. En conséquence, la sortie du système considérée est la suivante :

$$y := \sum_{j=1}^N \alpha_j \operatorname{Re}(z_j), \quad (2.2)$$

où $\alpha := [\alpha_j]_{j=1, \dots, N} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^N$ décrit l'influence de chaque neurone sur la mesure de l'électrode. Cette sortie est appelée champ moyen local (LFP). De la même manière, nous définissons $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$ comme le gain représentant l'influence du signal DBS sur le neurone j . Nous le supposons inconnu lui aussi. La paire de vecteurs (α, β) définit donc l'ensemble mesure-stimulation. La dynamique des N oscillateurs couplés sous l'influence de cette DBS par retour de sortie s'écrit alors, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\dot{z}_i = (i\omega_i + \rho_i^2 - |z_i|^2)z_i + \sum_{j=1}^N \kappa_{ij}(z_j - z_i) + \beta_i \sum_{j=1}^N \alpha_j \operatorname{Re}(z_j). \quad (2.3)$$

Nous supposons par la suite que la norme de chaque z_i reste égale à une constante $r_i > 0$ à chaque instant. Cette hypothèse est amplement discutée dans [Franci et al., 2012c] ainsi que [Franci, 2012, Chapitre A]. En particulier, elle est vérifiée au premier ordre si les gains

κ_{ij} et β_i sont suffisamment faibles, indépendamment de la valeur des fréquences naturelles ω_i (voir [Franci, 2012, Proposition A.1, Remarque A.2] pour plus de détails). Notons que cette hypothèse est communément admise dans la littérature, cf. *e.g.* [Kuramoto, 1984, Ermentrout and Kopell, 1990, van Hemmen and Wreszinski, 1993, Brown et al., 2003], ou encore [Aeyels and Rogge, 2004, Jadbabaie et al., 2004, Acebrón et al., 2005]. A partir de cette hypothèse, en posant $z_i = r_i e^{i\theta_i}$ pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, il est aisé de montrer que la dynamique régissant la phase θ_i de chaque oscillateur est donnée par

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N (k_{ij} + \gamma_{ij}) \sin(\theta_j - \theta_i) - \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \sin(\theta_j + \theta_i), \quad (2.4)$$

où la matrice de couplage est définie par

$$k := [k_{ij}]_{i,j=1,\dots,N} := \begin{bmatrix} \kappa_{ij} & r_j \\ r_i & \kappa_{ij} \end{bmatrix}_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (2.5)$$

et la matrice gains de retour est

$$\gamma := [\gamma_{ij}]_{i,j=1,\dots,N} := \begin{bmatrix} \beta_i & \alpha_j r_j \\ 2 & r_i \end{bmatrix}_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (2.6)$$

Nous définissons également la matrice de couplage modifiée comme

$$\Gamma := [\Gamma_{ij}]_{i,j=1,\dots,N} := [k_{ij} + \gamma_{ij}]_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \quad (2.7)$$

Notons que le système ainsi obtenu, possède de grandes similarités avec celui de Kuramoto [Kuramoto, 1984, Winfree, 1980] : plus précisément, en négligeant les termes en $\sin(\theta_i + \theta_j)$, qui proviennent du signal DBS que nous avons choisi, nous retrouvons un réseau d'oscillateurs de Kuramoto avec fréquences propres et gains d'interconnexion hétérogènes.

Notre étude visant à l'analyse de la synchronisation d'un tel réseau d'oscillateurs, nous définissons enfin la dynamique incrémentale pour chaque $i, j \in \{1, \dots, N\}$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i - \dot{\theta}_j &= \omega_i - \omega_j - \sum_{\ell=1}^N (\gamma_{i\ell} \sin(\theta_j + \theta_i) + \gamma_{j\ell} \sin(\theta_\ell + \theta_i)) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^N (\Gamma_{i\ell} \sin(\theta_\ell - \theta_i) - \Gamma_{j\ell} \sin(\theta_\ell - \theta_j)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1.2 Existence du verrouillage de phases

A partir du modèle (2.4) ou de sa version incrémentale (2.8), nous étudions maintenant les phénomènes de synchronisation de cet ensemble de neurones sous l'effet d'un signal de DBS proportionnel au LFP. Plus précisément, nous cherchons à déterminer l'existence ou non d'un verrouillage de phase, c'est à dire d'une configuration pour laquelle toutes les phases évoluent à la même fréquence, avec des déphasages constants. Une telle configuration correspond à un point fixe de la dynamique incrémentale (2.8). Nous distinguons deux types de verrouillage de phase : ceux pour lesquels les phases oscillent, qui correspondent à une situation d'activité neuronale synchrone (donc pathologique) et ceux pour lesquels les phases sont constantes, qui correspondent à une situation d'inhibition neuronale (non-pathologique).

Définition 2.1 (Verrouillages de phases) *Le réseau d'oscillateurs (2.4) est dit à phases verrouillées si sa solution satisfait*

$$\dot{\theta}_j(t) - \dot{\theta}_i(t) = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.9)$$

Une solution à phases verrouillées est dite oscillante si, de plus, $\dot{\theta}_i(t) \neq 0$, pour presque tout $t \geq 0$ et tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Si, à l'inverse, $\dot{\theta}_i(t) = 0$ pour presque tout $t \geq 0$, alors les oscillations sont dit inhibées.

Cette définition du verrouillage de phase correspond à la “synchronisation en fréquence” ou “synchronisation de Huygens” telles que définies dans [Fradkov, 2007]. Elle est l'une des propriétés les plus étudiées dans le cadre des oscillateurs de phases [Pikovsky et al., 2001, Kopell and Ermentrout, 2002, Aeyels and Rogge, 2004, Chopra and Spong, 2009] ou encore [Acebrón et al., 2005, Jadbabaie et al., 2004], [van Hemmen and Wreszinski, 1993, Assisi et al., 2005], [Sepulchre et al., 2007], [Sarlette, 2009], [Fradkov, 2007], [Ko and Ermentrout, 2009], [Dörfler and Bullo, 2011]. L'inhibition, quant à elle, a fait l'objet de l'étude [Ermentrout, 1990].

Le résultat suivant, dont la preuve est disponible dans [Franci et al., 2011b], établit que, pour une topologie d'interconnexion générique entre les neurones, l'utilisation d'un retour proportionnel au LFP empêche le verrouillage de phase oscillant.

Théorème 2.2 *Pour presque toutes fréquences naturelles $\omega \in \mathbb{R}^N$, presque toutes matrices d'interconnexion $k \in \mathbb{R}^{N \times N}$, et presque tous gains de retour $\gamma \in \mathbb{R}^{N \times N}$, le système (2.4) n'admet pas de solutions oscillantes à phases verrouillées.*

Ainsi, génériquement, sous l'action d'un signal de DBS proportionnel au LFP, seules deux situations sont possibles : soit les phases ne sont pas verrouillées, soit elles sont inhibées. Ces deux situations correspondant à des cas non-pathologiques, ce résultat est donc encouragement d'un point de vue thérapeutique, d'autant plus qu'il est valable sous des hypothèses très générales en termes de topologie d'interconnexion et des gains α et β définissant l'ensemble mesure-stimulation.

Cependant, il est important de noter que l'absence de verrouillage de phase n'empêche pas nécessairement une situation pathologique. En effet, si le Théorème 2.2 exclut génériquement la possibilité d'une synchronisation oscillante exacte, elle n'interdit pas la possibilité d'un “quasi-verrouillage de phases”, à savoir des solutions effectuant de faibles oscillations autour d'un verrouillage de phase exact, comme illustré par la Figure 2.3.

Mathématiquement, ces phases ne sont pas verrouillées. Cependant, d'un point de vue médical, une telle situation conduirait quoi qu'il en soit à des symptômes pathologiques. Nous caractérisons formellement ce phénomène dans la section suivante.

2.1.3 Robustesse du verrouillage de phase

Afin d'étudier le phénomène de “quasi-verrouillage de phase” et de quantifier l'intensité minimale requise pour une désynchronisation effective des cellules neuronales, nous effectuons ci-dessous une analyse de la robustesse du verrouillage de phase vis-à-vis d'entrées exogènes additives quelconques, qui incluent le signal de DBS comme un cas particulier.

L'analyse de la robustesse de la synchronisation au sein d'un réseau fini d'oscillateurs de Kuramoto a fait l'objet d'autres travaux dans la littérature. En particulier, [Cumin and Unsworth, 2007] propose une analyse numérique complète de la robustesse vis-à-vis de fréquences naturelles et de gains d'interconnexions variant dans le temps,

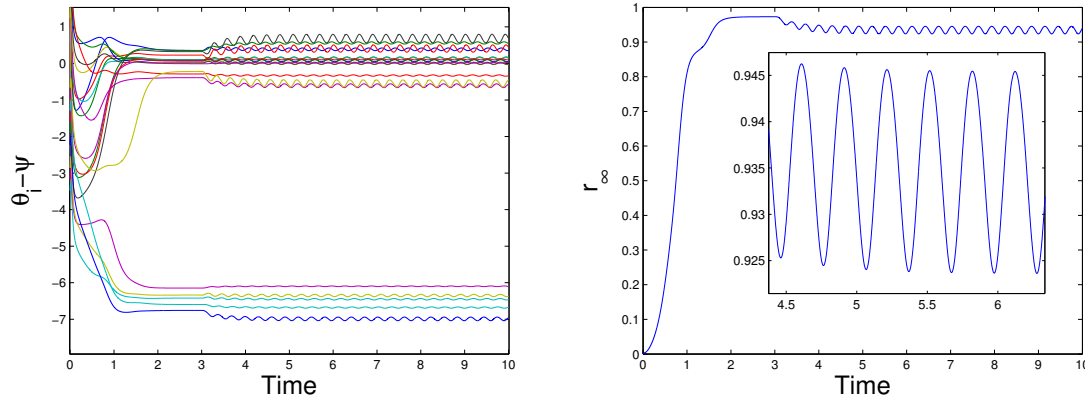


FIGURE 2.3 – Illustration du quasi-verrouillage de phase. Le retour DBS est activé à $t = 3$. Le taux de synchronisation r_∞ et la phase moyenne ψ sont définies par $r_\infty e^{i\psi} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i}$. En cas de verrouillage de phase, les quantités r_∞ et $\theta_i - \psi$ sont constantes. Ici elles effectuent de faibles oscillations autour d'une valeur constante.

ainsi que de termes de couplage non-sinusoidaux. Ce travail suggère une certaine robustesse vis-à-vis de toutes ces perturbations. A notre connaissance, l'étude analytique de la robustesse du verrouillage de phases dans un réseau de Kuramoto de dimension finie n'a été abordée que pour des fréquences naturelles constantes [Jadbabaie et al., 2004, Chopra and Spong, 2009, Dörfler and Bullo, 2011]. L'approche de type Lyapunov conduite dans [van Hemmen and Wreszinski, 1993] suggère que cette analyse peut être approfondie.

A cette fin, nous considérons la généralisation suivante du système (2.4) :

$$\dot{\theta}_i(t) = \varpi_i(t) + \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)), \quad \forall t \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.10)$$

où $\varpi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ représente une entrée exogène additive continue par morceaux quelconque et $\tilde{k} = [\tilde{k}_{ij}]_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{N \times N}$ est la matrice de couplage. Nous soulignons le fait que, dans cette section, seuls des gains d'interconnexion positifs sont considérés ; les éventuels gains strictement négatifs sont supposés minoritaires et pourront être traités comme des perturbations (à ajouter à ϖ_i).

Au delà de l'effet d'un retour de LFP, le signal exogène ϖ permet de prendre en compte à la fois l'hétérogénéité entre les oscillateurs, la présence de perturbations non-modélisées, l'influence d'incertitudes paramétriques, et les effets liés à la topologie d'interconnexion (*e.g.* couplage variant dans le temps et gains d'interconnexion négatifs). Considérons pour cela la fréquence naturelle ω_i de l'oscillateur $i \in \{1, \dots, N\}$, $\varepsilon_{ij}(t)$ l'incertitude sur chaque gain de couplage \tilde{k}_{ij} , et $p_i(t)$ l'influence de perturbations externes et de dynamiques non-modélisées. En supposant que $p_i, \varepsilon_{ij} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions bornées et continues par morceaux, les effets de toutes ces influences ainsi que celui du retour proportionnel au LFP peuvent être analysées de manière unifiée par le système (2.10) en posant, pour tout $t \geq 0$ et tout

$i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \varpi_i(t) &= \omega_i + p_i(t) + \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}(t) \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^N [\gamma_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) - \gamma_{ij} \sin(\theta_j(t) + \theta_i(t))], \end{aligned} \quad (2.11)$$

qui est bien défini du fait de la complétude avant du système (2.10)².

Nous définissons ensuite l'entrée de référence $\bar{\omega}$ de (2.10) comme

$$\bar{\omega}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varpi_j(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.12)$$

et l'écart autour de cette entrée de référence comme $\tilde{\omega} := [\tilde{\omega}_i]_{i \in \{1, \dots, N\}}$ où

$$\tilde{\omega}_i(t) := \varpi_i(t) - \bar{\omega}(t), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.13)$$

En remarquant que $\varpi_i - \varpi_j = \tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_j$, la dynamique incrémentale correspondant à (2.10) peut alors s'écrire

$$\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_j(t) = \tilde{\omega}_i(t) - \tilde{\omega}_j(t) + \sum_{\ell=1}^N \tilde{k}_{i\ell} \sin(\theta_\ell(t) - \theta_i(t)) - \sum_{\ell=1}^N \tilde{k}_{j\ell} \sin(\theta_\ell(t) - \theta_j(t)), \quad (2.14)$$

pour chaque $i, j \in \{1, \dots, N\}$ et tout $t \geq 0$. Par la suite, nous utiliserons la notation $\tilde{\theta}$ pour désigner les variables incrémentales :

$$\tilde{\theta} := [\theta_i - \theta_j]_{i,j=1, \dots, N, i \neq j} \in \mathbb{T}^{(N-1)^2}. \quad (2.15)$$

Nous avons proposé dans [Franci et al., 2010, Franci et al., 2011b] une analyse générale de la robustesse du verrouillage de phase vis-à-vis de perturbations exogènes additives ϖ . Elle montre que le verrouillage de phase est localement ISS par rapport à des entrées ϖ d'amplitude suffisamment faibles. L'ISS locale vis-à-vis de petites entrées étant formellement équivalente à la stabilité asymptotique, et le verrouillage de phase pouvant être traduit comme une propriété de stabilité asymptotique pour la dynamique incrémentale, ce résultat n'est pas surprenant. Sa contribution réside donc principalement dans l'utilisation d'une fonction de Lyapunov explicite, qui permet de quantifier le domaine d'attraction et l'amplitude des entrées tolérables pour certaines topologies d'interconnexion.

En particulier, dans le cas d'un couplage complet (*all-to-all*), nous avons obtenu dans [Franci et al., 2010] le résultat suivant.

Proposition 2.3 (Condition nécessaire pour la désynchronisation) *Considérons le système (2.10) en topologie d'interconnexion complète, c'est-à-dire $\tilde{k}_{ij} = k_0 > 0$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Alors, pour tout $\epsilon \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et toutes perturbations ϖ satisfaisant*

$$\|\tilde{\omega}\| \leq \delta_\omega^\epsilon := \frac{k_0 \sqrt{N}}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right), \quad (2.16)$$

où $\tilde{\omega}$ est défini par (2.12)-(2.13), nous avons que :

2. La complétude avant de (2.10) se déduit directement du fait que le champ de vecteur régissant sa dynamique est borné et globalement lipschitzien.

1. l'ensemble $\mathcal{D}_\epsilon := \left\{ \tilde{\theta} \in T^{(N-1)^2} : |\tilde{\theta}|_\infty \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon \right\}$ est positivement invariant pour le système (2.14) ;
2. pour tout $\tilde{\theta}_0 \in \mathcal{D}_0$, l'ensemble \mathcal{D}_ϵ est attractif et la solution de (2.14) satisfait

$$\left| \tilde{\theta}(t) \right| \leq \frac{\pi}{2} \left| \tilde{\theta}_0 \right| e^{-\frac{k_0}{\pi^2} t} + \frac{\pi^2}{k_0} \|\tilde{\omega}\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.17)$$

La Proposition 2.3, considérée pour $\epsilon = 0$, établit en particulier l'ISS exponentielle locale de la synchronisation, dans le cas d'une interconnexion complète, vis-à-vis de d'entrées d'amplitude inférieure à $\frac{k_0 \sqrt{N}}{2\pi}$. Son domaine d'attraction contient l'ensemble \mathcal{D}_0 , et autorise donc l'étude de toutes conditions initiales dont les différences de phases sont contenues dans le demi-cercle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle étend ainsi partiellement les résultats de [Chopra and Spong, 2009, Dörfler and Bullo, 2011] au cas d'entrées non-constantes. D'un côté, elle autorise de considérer un domaine d'attraction plus ample que celui de [Chopra and Spong, 2009] et permet d'estimer le taux de convergence indépendamment du domaine d'attraction choisi. De l'autre, le gain de couplage requis pour l'obtention d'une précision statique donnée est comparable à celui de [Chopra and Spong, 2009], mais plus contraignant que celui proposé dans [Dörfler and Bullo, 2011]. En outre, il est à noter que, pour un petit domaine d'attraction considéré, le taux de convergence obtenu dans la Proposition 2.3 n'est pas aussi bon que ceux de [Chopra and Spong, 2009, Dörfler and Bullo, 2011].

Dans le cadre de la DBS en boucle-fermée, puisque le signal de stimulation proportionnel au LFP est un cas particulier de la perturbation ϖ (cf. Equation (2.11)), la Proposition 2.3 établit une condition nécessaire, en terme de l'amplitude minimale du signal DBS appliqué, pour la désynchronisation effective de la population neuronale. La prochaine section s'attache à trouver des conditions suffisantes pour la suppression des oscillations pathologiques.

2.1.4 Altération de la synchronisation par commande proportionnelle au champ moyen local

Comme nous l'avons vu en Section 2.1.2, l'utilisation d'un signal DBS proportionnel au LFP mesuré semble une bonne candidate pour l'atténuation des oscillations pathologiques puisqu'elle empêche le verrouillage de phase oscillant exact. Cependant, comme le montre l'étude de robustesse de la Section 2.1.3, la désynchronisation effective ne saurait être obtenue par l'application d'un signal DBS d'amplitude trop faible. Dans le reste de cette section, nous proposons des conditions sur le gain de retour pour l'obtention d'une synchronisation effective (Section 2.1.4.1) ou pour l'inhibition neuronale (Section 2.1.4.2).

2.1.4.1 Désynchronisation

Bien que la notion de désynchronisation ait une signification relativement intuitive, sa définition formelle n'est pas immédiate. Une manière de garantir un désordre suffisant au sein d'un réseau d'oscillateurs est d'induire du chaos dans la dynamique de leurs différences de sorties. C'est l'approche suivie par les techniques de chaotification, cf. *e.g.* [Zhang et al., 2009, Chen and Yang, 2003]. Cependant, le chaos peut se révéler une spécification trop forte dans certaines applications : la plupart de ces techniques requièrent en effet trop d'information sur le comportement des oscillateurs pour être implémentées en DBS.

D'un autre côté, le fait de simplement garantir que le comportement des oscillateurs n'est pas synchronisé n'est généralement pas suffisant pour garantir la désynchronisation. Comme nous l'avons déjà évoqué, dans le cas d'oscillateurs de phase, un phénomène de "quasi-verrouillage de phases", caractérisé par de faibles oscillations autour d'une différence de phases constante, peut être observé entre le verrouillage de phase et la désynchronisation effective : voir Figure 2.3. Dans ce cas, les définitions usuelles de synchronisation sont violées puisque, leurs différences de phases n'étant pas constantes, les oscillateurs ne sont ni synchronisés en phase [Strogatz, 2000], ni à phases verrouillées [Franci et al., 2011b], ni synchronisés en fréquence [Blekhman et al., 1997]. Néanmoins, d'un point de vue pratique, une telle configuration ne saurait correspondre à de la désynchronisation puisque les différences de phase sont "presque constantes" à chaque instant, à savoir qu'elles exhibent de faibles oscillations autour d'une valeur constante. Cette situation correspond en fait à ce qui est appelé "synchronisation approximative" dans [Blekhman et al., 1997]. Ainsi, la désynchronisation ne saurait être définie comme la simple négation de la synchronisation.

Nous avons donc proposé deux notions de désynchronisation, valables pour des réseaux d'oscillateurs de phases quelconque. La première, introduite dans [Franci et al., 2012a] et appelée *désynchronisation forte*, impose que la différence des fréquences instantanées $|\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_j(t)|$ soit en permanence supérieure à un seuil strictement positif pour chaque pair d'oscillateurs (i, j) , ce qui signifie que les oscillateurs dérivent les uns des autres à chaque instant. Toutefois, ceci peut s'avérer assez contraignant en pratique, puisque les fréquences ne peuvent être égales à aucun moment, même sur de très courts intervalles de temps. Intuitivement, une telle similarité entre les fréquences instantanées ne remet pas en cause la désynchronisation si elle n'intervient que rarement. Ainsi, nous avons proposé une variante à cette définition, en imposant que la dérive entre les oscillateurs ait lieu *en moyenne* plutôt qu'à chaque instant.

Définition 2.4 (Désynchronisation pratique) Une paire $(i, j) \in \mathbb{N}_N^\neq$ d'oscillateurs est dite pratiquement désynchronisée pour la dynamique (2.10) s'il existe des constantes $\Omega_{ij}, T_{ij} > 0$ telles que, pour tout $\theta_0 \in T^N$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{T_{ij}} \left| \int_{t_0}^{t_0+T_{ij}} \left(\dot{\theta}_i(\tau; t_0, \theta_0) - \dot{\theta}_j(\tau; t_0, \theta_0) \right) d\tau \right| \geq \Omega_{ij}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Etant donné $m \in \left\{1, \dots, \frac{N(N-1)}{2}\right\}$, le réseau (2.10) est dit *m*-pratiquement désynchronisé s'il comprend *m* paires d'oscillateurs distinctes pratiquement désynchronisées. Si $m = \frac{N(N-1)}{2}$ alors le réseau (2.10) est dit complètement pratiquement désynchronisé.

Si le Théorème 2.2 établit que, pour presque toute topologie d'interconnexion et presque toute valeur du gain de retour, le verrouillage de phase est impossible sous l'action d'un retour proportionnel au LFP, le résultat suivant démontre que la désynchronisation pratique peut en fait être obtenue.

Théorème 2.5 (Désynchronisation pratique par retour du LFP) Supposons qu'il existe une paire d'entiers $(i, j) \in \mathbb{N}_N^\neq$ vérifiant

$$|\omega_i - \omega_j| > \sum_{\ell=1}^N |\gamma_{i\ell} + \gamma_{j\ell}| \left(\frac{\pi\nu}{2\omega_*} + \frac{\nu^2}{6\omega_*^2} \right) + |\varepsilon_{i\ell} + \varepsilon_{j\ell}|,$$

où

$$\begin{aligned}\nu &:= 2 \max_{\ell=1,\dots,N} \left(|\tilde{\omega}_\ell| + \sum_{\ell'=1}^N |\gamma_{\ell\ell'} + \varepsilon_{\ell\ell'}| \right) \\ \omega_* &:= \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \omega_\ell \\ \tilde{\omega}_\ell &:= \omega_\ell - \omega_*, \quad \forall \ell \in \{1, \dots, N\} \\ \varepsilon_{\ell\ell'} &:= k_{\ell\ell'} + \gamma_{\ell\ell'}, \quad \forall \ell, \ell' \in \{1, \dots, N\}.\end{aligned}$$

Alors la paire (i, j) d'oscillateurs est pratiquement désynchronisée pour (2.4).

Ce résultat, que nous avons établi dans [Franci et al., 2012a, Franci et al., 2011c], montre que si l'hétérogénéité parmi les fréquences naturelles est suffisamment importante, alors la désynchronisation pratique apparaît. Le Théorème 2.5 donne en outre des indications sur le choix du gain de retour à choisir pour garantir la désynchronisation effective. Notons cependant que les gains γ_{ij} ne sont pas réglables arbitrairement du fait du caractère scalaire du signal appliqué (cf. Equation (2.6)). La condition (2.19) dépend ainsi des propriétés structurelles de la population d'oscillateurs considérée.

Un cas particulier est la topologie complète (*all-to-all*) dans le cas où tous les oscillateurs contribuent de la même manière à la mesure du LFP et reçoivent le même signal de DBS. Dans ce cas, les gains d'interconnexion et de retour deviennent $k_{ij} = k_0$ et $\gamma_{ij} = \gamma_0$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$. La dynamique (2.4) se réduit alors à

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + (k_0 + \gamma_0) \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) - \gamma_0 \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j + \theta_i). \quad (2.19)$$

Dans ce cas, le terme de couplage diffusif peut être éliminé en choisissant le gain de retour comme $\gamma_0 = -k_0$. Nous obtenons alors la dynamique suivante :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + k_0 \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j + \theta_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.20)$$

Le corollaire suivant propose alors une condition structurelle suffisante pour la désynchronisation pratique.

Corollaire 2.6 (Désynchronisation effective pour topologie complète) *Supposons qu'il existe $(i, j) \in \mathbb{N}_N^{\neq}$, tels que*

$$|\omega_i - \omega_j| > 2Nk_0 \left(\frac{\pi\nu}{2\omega_*} + \frac{\nu^2}{6\omega_*^2} \right), \quad (2.21)$$

où ω_* et $\tilde{\omega}_\ell$, $\ell = 1, \dots, N$, sont définis dans l'énoncé du Théorème 2.5 et

$$\nu := 2 \max_{\ell=1,\dots,N} (|\tilde{\omega}_\ell| + Nk_0).$$

Alors la paire (i, j) d'oscillateurs est pratiquement désynchronisée pour (2.20).

Notons que la condition (2.21) se retrouve satisfaite si les fréquences naturelles ω_i et ω_j diffèrent et si la fréquence moyenne $\bar{\omega}$ est suffisamment grande ou le gain de couplage k_0 est suffisamment faible. Quoi qu'il en soit, cette technique de commande exploite une certaine hétérogénéité de la population concernée pour une désynchronisation effective.

2.1.4.2 Inhibition

Tandis que la section précédente visait à utiliser un signal DBS proportionnel au LFP pour désynchroniser une population de neurones, nous étudions maintenant la possibilité d'inhiber leurs oscillations. En d'autres termes, notre objectif est maintenant d'utiliser le signal de stimulation pour empêcher l'activité neuronale pathologique. Un tel objectif de commande revient à une lésion fonctionnelle de la zone cérébrale concernée, mais présente l'avantage d'être réversible. Notons que cet objectif est justifié par le fait qu'avant l'invention de la DBS, le traitement chirurgical de la MP consistait en une ablation du noyau sous-thalamique, ce qui peut être vu comme une inhibition radicale des neurones concernés.

L'inhibition des oscillations correspond à l'existence d'un équilibre attractif pour la dynamique de phases (2.4). Nous nous focalisons ici sur la topologie d'interconnexion complète et choisissons pour gain de retour $\gamma_0 = -k_0$ comme dans la fin de la section précédente. La dynamique du réseau (2.4) se résume alors à (2.20).

Nous commençons par en identifier les points d'équilibre, puis nous étudions leurs propriétés de stabilité dans le cas fictif de fréquences naturelles nulles. L'extension au cas de fréquences naturelles non-nulles se fera ensuite par l'intermédiaire d'arguments de robustesse.

Cas de fréquences naturelles nulles. Lorsque les fréquences naturelles ω_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, sont nulles le système (2.20) se réduit à

$$\dot{\theta}_i = k_0 \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i + \theta_j), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (2.22)$$

qui possède la particularité d'être un système gradient. Il peut en effet s'écrire

$$\dot{\theta}_i = -\frac{\partial W}{\partial \theta_i}(\theta), \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

où la fonction $W : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est donnée par

$$W(\theta) := -k_0 \sum_{i,j=1}^N \sin^2\left(\frac{\theta_i + \theta_j}{2}\right). \quad (2.23)$$

Les minima globaux de cette fonction W sont les éléments de l'ensemble

$$\mathcal{W}_m := \left\{ \theta \in \mathbb{R}^N : \theta = \left(\frac{\pi}{2} \bmod \pi\right) \mathbf{1}_N \right\}. \quad (2.24)$$

Dans [Franci et al., 2012a], nous avons exploité la nature gradient de la dynamique (2.22) pour établir le résultat suivant.

Proposition 2.7 (Inhibition pour fréquences naturelles nulles) *Pour tout gain de couplage $k_0 > 0$, l'ensemble \mathcal{W}_m défini dans (2.24) est presque globalement asymptotiquement stable pour (2.22).*

Cette proposition montre que, lorsque les fréquences naturelles sont négligées, le choix de gain de retour $\gamma_0 = -k_0$ conduit à l'inhibition des oscillations à partir de toutes conditions initiales (sauf sur un ensemble de mesure nulle correspondant aux autres points d'équilibre de (2.22)). L'ensemble \mathcal{W}_m étant constitué de points isolés, le fait qu'une solution converge

vers \mathcal{W}_m signifie en effet qu'elle tend asymptotiquement vers une valeur constante, d'où la fin des oscillations.

En présence de fréquences naturelles lentes. Pour des raisons techniques, liées à la structure géométrique de l'ensemble des points d'équilibres instables de (2.22), il nous faut distinguer deux cas suivant la parité du nombre N d'oscillateurs considérés.

Le résultat suivant, établi dans [Franci et al., 2012a], énonce que si le nombre d'oscillateurs est impair, alors la stabilité asymptotique presque globale de (2.22) est préservée en présence de fréquences naturelles suffisamment lentes.

Théorème 2.8 (Inhibition en présence de fréquences naturelles lentes) *Soit $N \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ un nombre impair. Alors il existe une constante $\delta > 0$ et une fonction ρ de classe \mathcal{K}_∞ telles que, si le vecteur des fréquences naturelles $\omega \in \mathbb{R}^N$ vérifie $|\omega| \leq \delta$, alors il existe un ensemble $\mathcal{W}_m^\omega \subset \mathbb{R}^N$ de points isolés satisfaisant*

$$|\theta|_{\mathcal{W}_m} \leq \rho(|\omega|), \quad \forall \theta \in \mathcal{W}_m^\omega,$$

où \mathcal{W}_m est défini dans (2.24), qui est presque globalement attractif pour le système (2.20). En d'autres termes, pour presque tous $\theta_0 \in \mathbb{R}^N$, la solution de (2.22) vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta(t; \theta_0)|_{\mathcal{W}_m^\omega} = 0.$$

Ce théorème établit ainsi formellement la possibilité d'inhiber les oscillations par un retour proportionnel au LFP en présence de fréquences naturelles non-nulles dans le cas où le nombre d'oscillateurs est impair. Notons qu'il garantit, en outre, que pour presque toute condition initiale $\theta_0 \in \mathbb{R}^N$ la solution de (2.20) satisfait

$$|\omega| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t, \theta_0)|_{\mathcal{W}_m} \leq \rho(|\omega|),$$

ce qui signifie que les points fixes vers lesquels les phases convergent sont arbitrairement proches de \mathcal{W}_m pourvu que les fréquences naturelles soient suffisamment lentes.

Une inhibition similaire est proposée dans [Ermentrout and Kopell, 1990]. Dans cette référence, les auteurs considèrent une chaîne d'oscillateurs avec un couplage général dont le couplage sinusoïdal additif exploité ici est un cas particulier. Ils montrent qu'une unique solution inhibée stable existe dans cette chaîne d'oscillateurs pour des fréquences naturelles suffisamment faibles. Le Théorème 2.8 complète ainsi cette analyse, en se focalisant sur un couplage particulier et sur une topologie d'interconnexion différente.

La démonstration du Théorème 2.8 exploite la structure des points d'équilibre instables du système sans fréquences naturelles (2.22) : ceux-ci constituent une variété invariante normalement hyperbolique, ce qui facilite grandement l'étude de la robustesse (voir [Franci et al., 2012a] pour plus de détails). À l'inverse, lorsque le nombre d'oscillateurs est pair, cette structure des points d'équilibre instable est perdue. À ce stade, nous nous contentons donc d'énoncer la conjecture suivante.

Conjecture 2.9 *L'énoncé du Théorème 2.8 reste valable dans le cas où le nombre N d'oscillateurs est pair.*

2.2 Approche opératoire pour l'analyse de la synchronisation

Si la section précédente permet d'obtenir des conditions explicites pour la désynchronisation ou l'inhibition d'oscillateurs sous l'action d'un retour proportionnel de leur LFP, sa

principale limitation d'un point de vue médical réside sans doute dans la simplification drastique de la dynamique neuronale qu'elle requiert. Le modèle utilisé se concentre en effet sur le *rythme* des neurones, mais néglige les dynamiques non-linéaires propres aux réponses neuronales.

Le but de cette section est de proposer des outils permettant de surpasser cette limitation en offrant des conditions explicites pour la synchronisation de cellules neuronales représentées par des modèles plus réalistes physiologiquement. Elle exploite pour cela une représentation opératorielle des neurones, et prend en compte la topologie d'interconnexion entre eux au travers de la connectivité du graphe associé.

2.2.1 Prise en compte de l'hétérogénéité des opérateurs

Outre la difficulté induite par la complexité propre des neurones, proposer des conditions suffisantes pour la synchronisation est un problème particulièrement compliqué en cas d'hétérogénéité parmi les neurones. Une telle hétérogénéité est pourtant commune, notamment pour les neurones des ganglions de la bases, impliqués dans la maladie de Parkinson.

Une méthode particulièrement prometteuse a été proposée dans [Scardovi et al., 2010] pour étudier analytiquement la synchronisation entre des systèmes dynamiques interconnectés. Elle propose des conditions explicites pour une telle synchronisation, en fonction des propriétés propres des agents et de la connectivité du graphe associé à leur topologie d'interconnexion. Elle se base sur une représentation entrée/sortie opératorielle des agents impliqués et ne nécessite donc qu'une connaissance limitée sur les dynamiques individuelles. Cette caractéristique est d'un intérêt tout particulier pour l'étude de la synchronisation neuronale, pour laquelle l'identification paramétrique précise est souvent délicate.

Cependant, ces travaux imposent que les agents impliqués dans le réseau possèdent tous le même comportement dynamique, ce qui constitue une limitation importante, notamment pour des applications aux neurosciences. Nous présentons ici les résultats développés dans [Franci et al., 2011e], qui visent à étendre la méthode proposée dans [Scardovi et al., 2010] au cas d'agents hétérogènes, et à l'appliquer ensuite (cf. Section 2.2.2) à un réseau de cellules neuronales représentées par le modèle de Hindmarsh-Rose [Hindmarsh and Rose, 1984].

Conformément au cadre proposé par [Scardovi et al., 2010], le modèle que nous utilisons prend en compte explicitement les dynamiques internes et le couplage entre les agents. Chaque agent est modélisé par un *compartiment*, résultant lui-même de l'interconnexion entre différents sous-systèmes (appelés *espèces*). Nous notons n le nombre de compartiments, et N le nombre d'espèces. Un exemple est proposé dans la Figure 2.4.

Les compartiments sont supposés structurellement homogènes, dans le sens qu'ils contiennent tous le même nombre d'espèces et leurs interconnexions internes sont identiques. L'hétérogénéité que nous considérons ici provient donc des espèces, qui peuvent varier d'un compartiment à l'autre. Chaque espèce $k \in \{1, \dots, N\}$ du compartiment $j \in \{1, \dots, n\}$ est représentée par un opérateur non-linéaire³ $H_{k,j} : L_{2e}^m \rightarrow L_{2e}^m$. Sa réponse à une entrée $v_{k,j} \in L_{2e}^m$ est donnée par

$$y_{k,j} = H_{k,j}v_{k,j}. \quad (2.25)$$

L'entrée de chaque opérateur inclut à la fois l'influence des autres espèces au sein d'un même compartiment modélisés par les gains $\sigma_{k,i}$, des termes de couplage diffusif entre les

3. L'espace L_{2e}^m est l'espace L_2 étendu [van der Schaft, 1999] des signaux $w : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ tels que la restriction $w_T := w|_{[0,T]}$ est $L_2^m([0,T])$, pour tout $T \geq 0$.

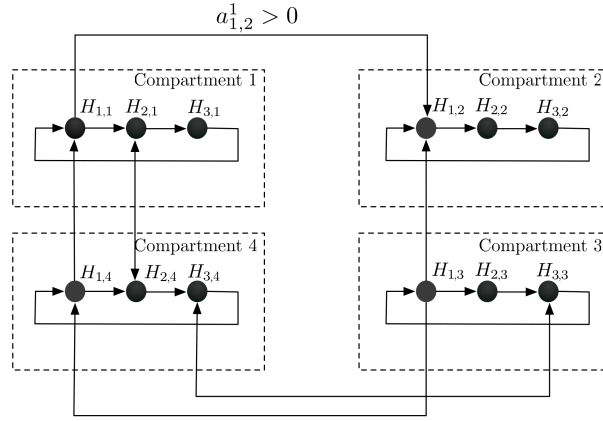


FIGURE 2.4 – Illustration de la modélisation par compartiments et espèces.

mêmes espèces de différents compartiments modélisés par les gains $a_{j,z}^k$, et des perturbations exogènes $w_{k,j}$. Ces entrées s'écrivent ainsi

$$v_{k,j} = w_{k,j} + \sum_{i=1}^N \sigma_{k,i} y_{i,j} + \sum_{z=1}^n a_{j,z}^k (y_{k,z} - y_{k,j}). \quad (2.26)$$

Les coefficients $a_{i,j}^k$, $k \in \{1, \dots, N\}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sont positifs. Nous supposons que $a_{j,j}^k = 0$, pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$ et chaque $j \in \{1, \dots, n\}$. Les coefficients $a_{i,j}^k$ peuvent varier d'une espèce à l'autre, autorisant ainsi une topologie d'interconnexion différente pour chaque espèce.

Comme dans [Scardovi et al., 2010, Arcak and Sontag, 2006, Arcak and Sontag, 2008], les propriétés dynamiques de chaque sous-système ainsi que la connectivité de l'interconnexion sont représentées par la matrice de dissipation définie, pour chaque $\eta \in \mathbb{R}^N$, par

$$E_\eta := \Sigma - \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_N). \quad (2.27)$$

où

$$\Sigma := [\sigma_{k,i}]_{k,i=1,\dots,N}. \quad (2.28)$$

Nous représentons respectivement par $Y_k := (y_{k,1}, \dots, y_{k,n})^T$, $V_k := (v_{k,1}, \dots, v_{k,n})^T$ et $W_k := (w_{k,1}, \dots, w_{k,n})^T$, les vecteurs de sortie, d'entrée et de perturbations exogènes d'une même espèce k . Etant donnée une famille de vecteurs Z_k , $k \in \{1, \dots, N\}$, nous employons de plus la notation $Z := (Z_1, \dots, Z_N)^T$. Le réseau (2.26) peut alors être représentée de manière compacte par

$$V_k = W_k + \sum_{i=1}^N \sigma_{k,i} Y_i - L_k Y_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.29)$$

où $L_k := [l_{i,j}^k]_{i,j \in \{1,\dots,n\}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice laplacienne associée à la k -ième interconnexion diffuse :

$$l_{i,j}^k := \begin{cases} \sum_{z=1}^n a_{i,z}^k, & \text{si } i = j \\ -a_{i,j}^k, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.30)$$

Les propriétés de connectivité de l'interconnexion diffusive sont ainsi liées aux propriétés algébriques de la matrice L_k . Nous introduisons donc la connectivité algébrique λ_k :

$$\lambda_k := \min \left\{ z^T L_k z : |z| = 1, \sum_{i=1}^n z_i = 0 \right\}. \quad (2.31)$$

Pour quantifier le degré de synchronie du système interconnecté (2.25)-(2.26), nous définissons la sortie moyenne $\bar{Y}_k \in L_{2e}^m$ d'une espèce k comme⁴

$$\bar{Y}_k := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{k,j}, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.32)$$

ce qui nous permet d'introduire l'erreur de synchronisation :

$$Y_k^\Delta := (y_{k,1} - \bar{Y}_k, \dots, y_{k,n} - \bar{Y}_k)^T. \quad (2.33)$$

Notons que $Y_k^\Delta = 0$ correspond à des sorties parfaitement synchronisées, à savoir : $y_{k,1} = y_{k,2} = \dots = y_{k,n}$. Une quantité naturelle pour mesurer la synchronie au sein de l'espèce k sur un horizon temporel $[0, T]$, $T \geq 0$, est ainsi obtenue par $\|Y_k^\Delta\|_T$.

La définition suivante est une extension naturelle de [Scardovi et al., 2010, Definition 1] au cas de populations hétérogènes.

Définition 2.10 (Co-coercitivité) *Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$. Une famille \mathcal{H} d'opérateurs $H_i : L_{2e}^m \rightarrow L_{2e}^m$, $i \in \mathcal{I}$, est dite γ -co-coercitive si, pour tout $i, j \in \mathcal{I}$, il existe un biais $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $u_i, u_j \in L_{2e}^m$ et tout $T \geq 0$,*

$$\gamma \|H_i u_i - H_j u_j\|_T^2 \leq \langle (H_i u_i - H_j u_j), (u_i - u_j) \rangle_T + \beta_{i,j}. \quad (2.34)$$

La co-coercitivité permet ainsi de quantifier l'écart entre les sorties d'un système en fonction de l'écart entre les entrées qui les génèrent. Plus le gain de co-coercitivité γ est important, moins le système est sensible à des disparités de l'entrée.

Pour des systèmes représentés sous forme d'état, un lien étroit existe entre la notion de co-coercitivité et celle de passivité incrémentale, notion centrale dans l'analyse de la synchronisation, cf. e.g [Pogromsky, 1998, Pogromsky and Nijmeijer, 2001, Steur et al., 2009]. Cette relation est détaillée dans [Franci et al., 2011e] et permet, en particulier, l'utilisation de fonctions de type Lyapunov pour l'analyse de la co-coercitivité. D'autres conditions garantissant la co-coercitivité sont proposées dans [Scardovi et al., 2010].

A partir de ces notions de co-coercitivité et de connectivité algébrique, nous sommes en mesure d'énoncer le résultat suivant, qui étend [Scardovi et al., 2010, Theorem 1] au cas de dynamiques présentant une certaine hétérogénéité.

Théorème 2.11 (Synchronisation d'opérateurs hétérogènes) *Considérons le système (2.25)-(2.26) et supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*

- pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$, la famille d'opérateurs $\mathcal{H}_k := \{H_{k,j}\}_{j=1, \dots, n}$ est γ_k -co-coercitive pour un certain $\gamma_k \in \mathbb{R}$;
- pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$, la quantité $\tilde{\gamma}_k := \gamma_k + \lambda_k$ est strictement positive, où λ_k désigne la connectivité algébrique (2.31) du graphe associé à l'espèce k ;

4. Cette notation sera également utilisée pour les signaux V_k et W_k .

– la matrice de dissipation $E_{\bar{\gamma}}$, définie en (2.27), est diagonalement stable⁵.
Alors il existe des constantes $\rho, \beta > 0$ telles que

$$\|Y^\Delta\|_T \leq \rho \|W^\Delta\|_T + \beta, \quad \forall T \geq 0. \quad (2.35)$$

De plus, si $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$ désigne la matrice diagonale positive définie vérifiant $DE_{\bar{\gamma}} + E_{\bar{\gamma}}^T D < 0$, le gain L_2 ρ est donné par

$$\rho := \frac{\max_{i=1, \dots, N} \{d_i\}}{\min \left\{ \text{spect}(-DE_{\bar{\gamma}} - E_{\bar{\gamma}}^T D) \right\}}. \quad (2.36)$$

Le Théorème 2.11 garantit la synchronisation de (2.25)-(2.26) dans le sens que l'erreur de synchronisation Y^Δ est d'autant plus faible (en termes L_2) que la dispersion des entrées W^Δ est faible. Outre le fait que les hypothèses sont moins restrictives que dans [Scardovi et al., 2010], le Théorème 2.11 propose une estimée explicite du gain L_2 qui en résulte. La possibilité d'inclure une certaine hétérogénéité parmi les opérateurs est également un caractère intéressant que nous exploitons dans la section suivante.

2.2.2 Illustration sur une population de neurones d'Hindmarsh-Rose

2.2.2.1 Le modèle d'Hindmarsh-Rose et sa représentation entrée-sortie

Le modèle d'Hindmarsh-Rose (HR), introduit dans [Hindmarsh and Rose, 1984], est un modèle qualitatif de neurones présentant une activité de *bursting*, c'est-à-dire des successions rapides de décharges suivies de périodes silencieuses comme l'illustre la Figure 2.5.

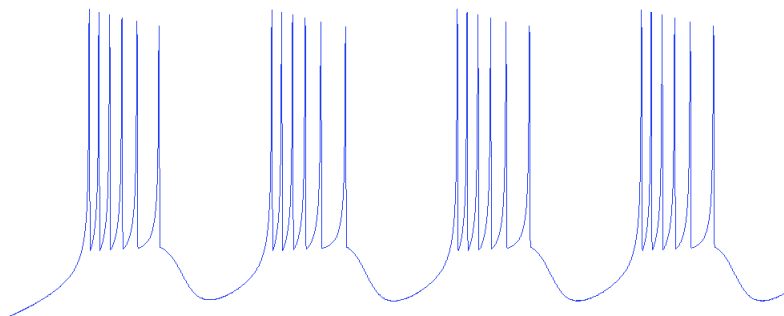


FIGURE 2.5 – Evolution du potentiel membranaire d'un neurone présentant une activité de bursting.

Un tel comportement joue en particulier un rôle clé dans l'apparition des symptômes moteurs pour la maladie de Parkinson lorsqu'il affecte les neurones du noyau sous-thalamique [Ammari et al., 2011].

Ce modèle est régi par les trois équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax^3 + bx^2 + I - z + y + w_x \\ y &= c - dx^2 - y \\ \dot{z} &= r(s(\bar{z} + x + w_z) - z). \end{aligned} \quad (2.37)$$

5. Une matrice $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite diagonalement stable s'il existe une matrice $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonale définie positive telle que $-E^T D - DE$ est une matrice définie positive, cf. [Kaszakurewicz and Bhaya, 1999].

La variable x représente le potentiel membranaire du neurone tandis que y modélise les dynamiques (rapides) des courants ioniques Na^+ et K^+ à travers la membrane. La troisième variable z simule l'évolution (plus lente) du courant lié au transport des ions Ca^{2+} . C'est cette dernière qui régule l'alternance de phases silencieuses et de décharges rapides. I est un paramètre représentant les courants exogènes appliqués au neurone. w_x modélise les autres contributions externes (hétérogénéités, interconnexion avec d'autres cellules neuronales, etc.). w_z représente quant à elle la diffusion des ions Ca^{2+} au sein de la cellule.

Les paramètres $a, b, c, d, r, s, \bar{z}$ affectent le comportement qualitatif du modèle en induisant des bifurcations dans sa dynamique. En particulier, r est un paramètre de faible valeur ($r = 0.03$ dans la Figure 2.5) qui sépare les échelles temporelles entre les variables (x, y) (rapides) et z (lente).

Il est ainsi naturel d'englober les dynamiques de x et y dans une unique espèce bidimensionnelle $X := (x, y)^T$, qui interagit avec une autre espèce constituée de la variable z . En définissant $y_X := x$ comme la sortie de l'espèce X et $y_z := z$ comme la sortie de l'espèce z , le modèle (2.37) peut être réécrit dans le formalisme de la section précédente comme l'interconnexion entrée-sortie de deux opérateurs H_X et H_z définis par $H_X : v_X \mapsto y_X$ et $H_z : v_z \mapsto y_z$. Plus précisément, considérant une population de $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ neurones à partir de conditions initiales arbitraires $(x_{i0}, y_{i0}, z_{i0})^T \in \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, \dots, n\}$, ces relations entrée-sortie s'expriment par :

$$\begin{cases} \dot{X}_i &= \begin{pmatrix} -ax_i^3 + bx_i^2 + y_i \\ c - dx_i^2 - y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_{Xi} \\ y_{Xi} &= x_i \\ X_i(0) &= X_{i0} := (x_{i0}, y_{i0})^T \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_i &= r(s(\bar{z} + v_{zi}) - z_i) \\ y_{zi} &= z_i \\ z_i(0) &= z_{i0} \end{cases} \quad (2.39)$$

où

$$\begin{aligned} v_{Xi} &:= I + w_{xi} - z_i \\ v_{zi} &:= w_{zi} + x_i \end{aligned}$$

désignent les entrées des espèces X_i et z_i respectivement, $i \in \{1, \dots, n\}$. Notons que les paramètres $a, b, c, d, I, \bar{z}, r$ et s sont supposés identiques d'un neurone à l'autre. L'hétérogénéité au sein de cette population intervient par l'intermédiaire des conditions initiales $(X_{0i}, z_{0i})^T$ ainsi que des signaux w_{Xi} et w_{zi} . Notons cependant que, de part leur nature additive dans la dynamique (2.38)-(2.39), ces derniers permettent de considérer des courants internes I_i et des paramètres \bar{z}_i différents d'un neurone à l'autre : il suffit pour cela de considérer des hétérogénéités $w_{xi} = I_i - I$ et $w_{zi} = \bar{z}_i - \bar{z}$.

Au sein de chaque neurone, nous obtenons ainsi une matrice d'interconnexion telle que (2.28) définie par

$$\Sigma_{HR} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

La dynamique de l'espèce z_i étant définie par un système linéaire scalaire (2.39), son opérateur associé est bien défini [van der Schaft, 1999]. Par ailleurs, comme montré dans [Franci et al., 2011e, Example 1] une famille de tels opérateurs est co-coercitive et son gain de co-coercivité est donné par

$$\gamma_z := 1/s. \quad (2.41)$$

La proposition suivante établit en outre que l'opérateur associé à l'espèce X est également bien défini et forme une famille d'opérateurs co-coercitive. Sa démonstration est donnée dans [Franci et al., 2011e].

Proposition 2.12 (Co-coercivité de (2.38)) *Etant donnés des paramètres $a, b, c, d, r, s, I, \bar{z} \in \mathbb{R}$ constants et des conditions initiales $X_{i0} \in \mathbb{R}^2$ arbitraires, l'opérateur $H_{X_i} : v_{X_i} \mapsto y_{X_i}$ défini par (2.38) est bien défini. De plus, la famille $\{H_{X_i}\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est co-coercitive de gain*

$$\gamma_X := -\frac{d^2}{2} - b^2. \quad (2.42)$$

Les connectivités algébriques λ_X et λ_z (cf. (2.31)) associées respectivement aux espèces X et z sont identiques d'un neurone à l'autre. La matrice de dissipation $E_{\tilde{\gamma}}$ définie dans (2.27) est alors donnée par

$$E_{\tilde{\gamma}} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_X & -1 \\ 1 & \tilde{\gamma}_z \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

où

$$\tilde{\gamma}_X := \gamma_X + \lambda_X \quad (2.44)$$

$$\tilde{\gamma}_z := \gamma_z + \lambda_z. \quad (2.45)$$

Il est aisé de montrer que la matrice $E_{\tilde{\gamma}}$ est diagonalement stable si $\lambda_X > -\gamma_X$.

Au vu des résultats présentés dans la section précédente, nous obtenons ainsi le résultat suivant qui permet de quantifier le degré de synchronie entre des neurones HR hétérogènes interconnectés.

Proposition 2.13 (Synchronisation des neurones HR) *Considérons un réseau de $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ neurones HR tels que définis par (2.38)-(2.39) pour des paramètres $a, b, c, d, r, s, I, \bar{z} \in \mathbb{R}$ et des conditions initiales $X_{i0} \in \mathbb{R}^2$ et $Z_{i0} \in \mathbb{R}$ arbitraires. Soient W_X^Δ et W_z^Δ les entrées incrémentales des espèces X et z respectivement, et W^Δ l'entrée incrémentale qui en résulte. Soient Y_X^Δ et Y_z^Δ les erreurs de synchronisation, telles que définies par (2.33), associée aux espèces X et z respectivement et Y^Δ l'erreur de synchronisation qui en résulte. Supposons que la connectivité algébrique λ_X de l'espèce X satisfasse*

$$\lambda_X > \frac{d^2}{2} + b^2. \quad (2.46)$$

Alors il existe une constante $\beta \geq 0$ telle que, pour tout $T \geq 0$,

$$\|Y^\Delta\|_T \leq \rho_{HR} \|W^\Delta\|_T + \beta, \quad (2.47)$$

où

$$\rho_{HR} := \frac{1}{\min(\tilde{\gamma}_X, \tilde{\gamma}_z)}. \quad (2.48)$$

Cette proposition établit que, si la connectivité algébrique λ_X est assez forte pour satisfaire (2.46), alors l'erreur de synchronisation est au plus proportionnelle à l'hétérogénéité des entrées exogènes W , modulo un biais β représentant en particulier l'effet de conditions initiales différentes entre les neurones. Notons que le gain de proportionnalité ρ_{HR} s'obtient aisément à partir des paramètres du modèle neuronal et des informations sur la topologie d'interconnexion (cf. (2.41), (2.42), (2.44) et (2.45)).

2.2.2.2 Illustrations sur exemple numérique

Afin d'illustrer l'utilisation de ce résultat, nous considérons une famille de $N = 2M$ neurones modélisés par (2.38)-(2.39) avec les paramètres suivants : $a = 0.01$, $b = 0.3$, $c = 0.1$, $d = 0.5$, $r = 0.001$, $s = 4$, $\bar{z} = 7$ et $I = 2$. Ces neurones sont hétérogènes et peuvent être soit actifs (c'est-à-dire présentant une activité de bursting endogène), soit inactifs (silencieux). Les neurones actifs sont caractérisés par une entrée constante $w_z = 2$, tandis que les neurones inactifs ont une entrée $w_z = 4$. Leur réponse individuelle (à savoir, lorsqu'ils ne sont pas interconnectés) est représentée par la Figure 2.6.

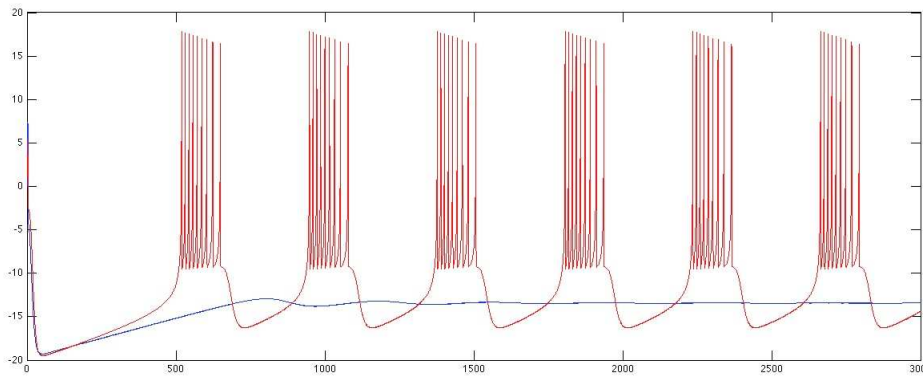


FIGURE 2.6 – Evolution temporelle du potentiel membranaire d'un neurone actif (rouge) et d'un neurone inactif (bleu).

Chaque neurone subit en outre l'influence d'une entrée hétérogène w_x . Nous supposons qu'au sein d'une même population (active ou passive), les neurones ne sont pas interconnectés électriquement. A l'inverse, chaque neurone actif est connecté à tous les neurones de la population inactive au travers d'un même gain de couplage $k_X \geq 0$. En outre, tous les neurones d'une même population sont supposés interconnectés au travers d'un couplage au par la diffusion de calcium de gain $k_z \geq 0$. La Figure 2.7 résume cette topologie d'interconnexion.

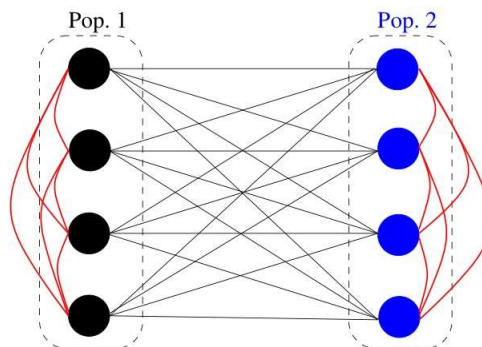


FIGURE 2.7 – Interconnexion entre les neurones des populations actives et inactives : couplage électrique (noir) et couplage diffusif (rouge).

Les matrices laplaciennes associées aux couplages au sein des espèces X et z sont alors

données par

$$L_X = -k_X \begin{pmatrix} 0_{M \times M} & 1_{M \times M} \\ 1_{M \times M} & 0_{M \times M} \end{pmatrix} + k_X M I_N, \quad (2.49)$$

et

$$L_z = -k_z \begin{pmatrix} 1_{M \times M} & 0_{M \times M} \\ 0_{M \times M} & 1_{M \times M} \end{pmatrix} + k_z M I_N. \quad (2.50)$$

La connectivité algébrique associée à l'espèce X est alors $\lambda_X = M k_X$ (voir par exemple [Bondy and Murty, 1976, page 5]), tandis que celle de l'espèce z est nulle : $\lambda_z = 0$. Au vu de la Proposition 2.13, si les gains de couplage vérifient

$$\begin{aligned} k_X &> \frac{1}{M} \left(\frac{d^2}{2} + b^2 \right) \\ k_z &\geq 0 \end{aligned}$$

alors l'erreur de synchronie entre les neurones est majorée comme dans (2.47).

En simulant deux populations de $M = 10$ neurones, et en choisissant

$$k_X = \frac{1}{M} \left(\frac{d^2}{2} + b^2 + 0.5 \right) \quad \text{et} \quad K_z = \frac{1}{4M},$$

nous obtenons pour gain L_2 $\rho_{HR} = 4$. La Figure 2.8 montre que cette estimée rend compte assez fidèlement de l'erreur de synchronisation constatée en simulations.

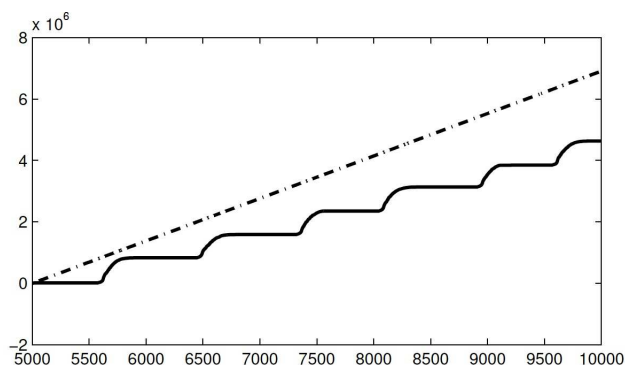


FIGURE 2.8 – Comparaison entre l'erreur de synchronisation $\|Y^\Delta\|_T$ (trait plein) et son estimée $\rho_{HR} \|W^\Delta\|_T$ (pointillés) après activation du couplage entre les populations active et silencieuse. Le biais β a été volontairement omis.

Il est intéressant de remarquer le phénomène suivant. Avant l'activation du couplage entre les deux populations, les neurones de la population active ne sont pas synchronisés (voir Figure 2.9, à gauche). A l'inverse, bien qu'ils ne soient pas couplés électriquement, le couplage avec la population inactive les synchronise. Les neurones de la populations inactives, se mettent à leur tour à générer des bursts à la même fréquence (Figure 2.9, à droite).

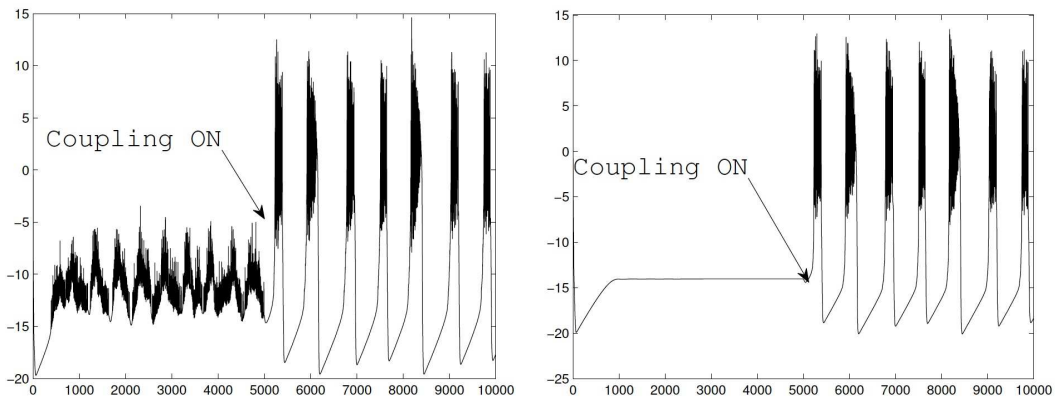


FIGURE 2.9 – Potentiels membranaires moyens des populations active (à gauche) et inactive (à droite) avant et après couplage.

Chapitre 3

Systemes commandés par réseaux

Les travaux présentés dans ce chapitre sont le fruit d'une collaboration avec A. Bicchi, S. Falasca, A. Franci, M. Gamba et L. Greco. Ils ont fait l'objet des publications suivantes : [Greco et al., 2012a, Greco et al., 2012b, Falasca et al., 2012, Greco et al., 2011, Franci and Chaillet, 2010b, Franci and Chaillet, 2010c, Chaillet and Bicchi, 2008].

Dans l'industrie manufacturière, une utilisation toujours grandissante des réseaux de communication est constatée pour la planification de production automatisée, le diagnostic et la commande [Moyné and Tilbury, 2007]. Les réseaux numériques offrent en effet des opportunités inédites pour ce type d'industrie, que ce soit en termes de flexibilité, de scalabilité ou de robustesse. L'adoption d'une architecture réseau distribuée peut mener à une forte réduction des coûts et des délais liés à l'installation et à la maintenance. Au delà des applications manufacturières, la commande par réseau (notamment sans fil) permet le pilotage en milieu hostile ou difficile d'accès, la coopération automatique entre divers systèmes, l'action à distance (téléopération), etc. Tous ces avantages expliquent l'engouement de la commande sur réseaux dans notre communauté (voir par exemple [Bushnell, 2001], [Antsaklis and Baillieul, 2004], [Antsaklis and Baillieul, 2007], [Wang and Liu, 2008], [Hespanha et al., 2007]).

D'une manière générale, les systèmes commandés par réseaux (NCS) sont des systèmes dont les capteurs, les actionneurs et les organes de commande sont physiquement distribués et échangent des informations au travers d'un canal numérique partagé de capacité limitée. La nature distribuée d'une telle architecture, ainsi que l'utilisation d'un canal de transmission numérique peuvent rendre certaines techniques de commande classiques obsolètes ou peu applicables. Suivant les applications et les technologies employées, les problématiques liées à la quantification des données, à la perte de paquets, aux transmissions asynchrones, aux retards variables et au protocole d'accès au réseau peuvent devenir centrales pour la performance du NCS.

Ce chapitre synthétise nos contributions à ce champ de recherche. Nous présentons tout d'abord une stratégie de commande visant à exploiter la taille relativement grande des paquets de données transmis par réseaux pour garantir la stabilité du système bouclé en présence de retards variables lorsque l'accès des nœuds au réseau régit par un protocole donné (Section 3.1). Nous montrons qu'un compromis entre retards maximaux, durée maximale entre deux accès consécutifs au réseau et précision du modèle employé permet de garantir la stabilité. La seconde section est, quant à elle, focalisée sur l'influence de la quantification des données sur les performances du système bouclé. Nous montrons que

l'extension naturelle d'une technique de quantification dynamique présente une certaine robustesse aux perturbations exogènes, erreurs de mesures et incertitudes de modélisation (Section 3.2).

3.1 Commande basée sur les paquets

3.1.1 Contexte et problématique

La littérature des NCS contient de nombreux travaux traitant d'une ou plusieurs problématiques évoquées précédemment, notamment les retards variables, les accès asynchrones au réseau, les pertes de paquets et l'utilisation d'un protocole de communication. Un état de l'art détaillé est proposé dans [Heemels et al., 2010]. Un aspect essentiel des NCS n'a cependant été que peu exploité : il s'agit du mode d'envoi des données sur le réseau, par paquets. De nombreux réseaux, tels qu'Ethernet, organise en effet l'envoi d'information sous forme de paquets encodés, qui autorisent un envoi d'information plus important mais à un taux moins prévisibles que pour des canaux de communication dédiés.

Ce codage impose généralement une taille minimale des paquets transmis, ce qui peut remettre en cause le lien étroit existant entre bande passante et performance valable pour les lois de commande digitales classiques. Des résultats importants sur la stabilisation en cas de bande passante limitée tels que [Hespanha et al., 2002, Nair and Evans, 2004] expriment en effet la relation fondamentale entre le degré d'instabilité du système en boucle ouverte et le taux d'échantillonnage minimal pour le stabiliser, mais ne prennent pas en considération la taille minimale des paquets de données transmis (e.g., 84 octets dans le cas d'Ethernet). Un autre aspect inhérent à ce format de transmission est la nécessité d'un en-tête au sein de chaque paquet. Par exemple, chaque paquet codé pour Ethernet comporte 38 octets d'en-tête et de séparations inter-frames. Ainsi, l'envoi par paquet de quelques bits d'information utile peut s'avérer aussi couteux, en termes de bande passante, que l'envoi de plusieurs octets.

Bien que ces aspects aient été décrits dès les premières publications sur les NCS (voir par exemple les surveys [Walsh and Ye, 2001, Lian et al., 2001]), la plupart des résultats visant à les considérer explicitement dans la mise au point des lois de commande sont bien plus récents. L'idée d'envoyer des séquences de commande *feedforward* obtenue par une approche prédictive pour compenser des retards de communication remonte à [Bemporad, 1998] (voir aussi [Witrant et al., 2007] pour une perspective historique dans un contexte LTI). Dans [Montestruque and Antsaklis, 2004], le contrôleur est directement connecté au système et la fréquence d'envois des paquets de mesure est réduite grâce à l'utilisation d'une estimée de l'état à partir d'un modèle du système. Une approche similaire est adoptée dans [Quevedo et al., 2008, Quevedo and Nešić, 2011] pour compenser les pertes de paquets sur le canal contrôleur-système. La compensation de retards et des pertes de paquets est également l'objectif des lois de commande développées dans [de la Pena and Christofides, 2008, Findeisen and Varutti, 2009, Polushin et al., 2008].

Notre contribution à ce champs de recherche a été de proposer une loi de commande prédictive visant à compenser de manière unifiée à la fois les retards variables et les accès non-périodiques au réseau en exploitant la structure d'envoi sous forme de paquets et en prenant en compte la dynamique du protocole régissant l'ordonnancement des nœuds. A cette fin, nous avons adopté une approche anticipative, basée sur un modèle du système à commander, pour transmettre dans chaque paquet non seulement la valeur de la commande à l'instant considéré, mais également une prédiction du signal de commande à appliquer

sur un certain horizon temporel qui sera ensuite codée sous forme de paquet. Cette stratégie vise ainsi à mieux exploiter la bande passante disponible sur le réseau et offre des possibilités en termes de compensation des retards induits. Dans la lignée d'autres approches prédictives basées sur les modèles, tels que [Montestruque and Antsaklis, 2004, Quevedo et al., 2008, Polushin et al., 2008], les séquences de commande sont générées par simulation d'un modèle (imprécis) du système à commander. L'état interne de ce modèle est mis à jour de manière asynchrone à chaque réception d'un paquet de mesures envoyé par les capteurs embarqués. Du fait de la nature distribuée de ces derniers, seule une portion de l'état interne peut être mise à jour à chacune de ces transmissions. L'accès au réseau est régi par un protocole qui décide quel capteur est autorisé à transmettre sa mesure à chaque instant. Le paquet contenant les séquences de commande prédictives est ensuite transmis par l'organe de commande au système, puis emmagasiné par un buffer embarqué. Une re-synchronisation locale est alors opérée, à partir du marquage temporel des données générées par les capteurs, afin de compenser les retards accumulés tout au long de la chaîne de commande.

Contrairement à d'autres travaux (tels que [Heemels et al., 2010]), cette approche n'impose pas d'hypothèse de "petits retards" : des retards plus grands que l'intervalle de transmission sont ainsi tolérés. Après avoir présenté en détails la stratégie de commande développée (Section 3.1.2), nous montrons qu'elle permet d'obtenir des estimées explicites du retard maximum toléré (*Maximum Allowable Delay* (MAD), [Heemels et al., 2010]) et de la durée maximale entre deux accès réseau consécutifs (MATI, [Walsh et al., 1999]), garantissant la stabilité exponentielle du NCS sur un domaine d'attraction spécifié en fonction du degré de précision du modèle employé (Section 3.1.3). Nous établissons également que, sous certaines conditions supplémentaires, la stabilité exponentielle semiglobale peut être obtenue (Section 3.1.4). Le cas des systèmes LTI est ensuite étudié spécifiquement (Section 3.1.6). L'application de la méthode sur un cas pratique illustre les gains en termes de MATI et de MAD pouvant être obtenus grâce à une approche prédictive (Section 3.1.7).

3.1.2 Stratégie de commande basée sur les paquets

3.1.2.1 Modélisation du réseau

Nous considérons un NCS constitué d'un système physique qui transmet des mesures et reçoit des signaux de commande d'un contrôleur au travers d'un réseau de communication numérique, comme schématisé par la Figure 3.1.

Comme nous l'avons évoqué, les séquences de commande sont transmises au système sous forme de paquets. Un organe embarqué reçoit ces paquets, les décode, les stocke dans un buffer, les re-synchronise et applique au système. Les mesures proviennent de $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ capteurs distribués, qui transmettent leurs données tour à tour. L'état $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ du système est ainsi décomposé comme $x = (x_1^T, \dots, x_\ell^T)^T$ où $x_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ avec $\sum_{i=1}^{\ell} p_i = n$. Ces mesures sont transmises au contrôleur sous forme de paquets dont la précision est supposée assez forte pour négliger les effets de quantification¹. Les capteurs sont supposés synchronisés avec l'horloge du système.

Les instants auxquels sont prises les mesures sont notés $\{\tau_i^m\}_{i \in \mathbb{N}}$. Ces mesures parviennent au contrôleur aux instants $\{\tau_i^m + T_i^m\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{T_i^m\}_{i \in \mathbb{N}}$ désignant les retards de calcul et de transmission des mesures (potentiellement non-constants). De la même manière, les séquences de commande sont calculées, encodées et envoyées sur le réseau aux instants

1. Voir la Section 3.2 pour une discussion dédiée aux problèmes de quantification des données.

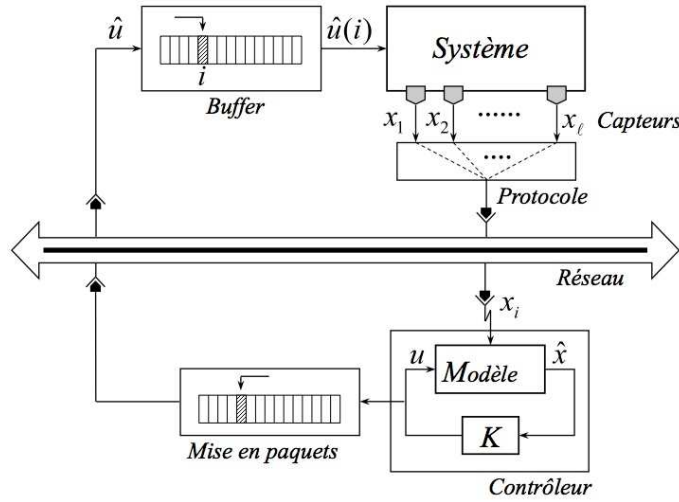


FIGURE 3.1 – Architecture du NCS.

$\{\tau_j^c\}_{j \in \mathbb{N}}$. Elles parviennent au système aux instants $\{\tau_j^c + T_j^c\}_{j \in \mathbb{N}}$, où $\{T_j^c\}_{j \in \mathbb{N}}$ représentent les retards liés au calcul et à la transmission des paquets du contrôleur vers le système. Nous supposons par la suite que toutes ces grandeurs sont bornées, comme le résume l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.1 (Réseau) *Le réseau de communication satisfait les propriétés suivantes :*

i) (**MATI**) *Il existe deux constantes $\tau_m, \tau_c \geq 0$ telles que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}^m - \tau_i^m &\leq \tau_m \\ \tau_{j+1}^c - \tau_j^c &\leq \tau_c. \end{aligned}$$

ii) (**MAD**) *Il existe deux constantes $T_m, T_c \geq 0$ telles que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} T_i^m &\leq T_m \\ T_j^c &\leq T_c. \end{aligned}$$

iii) (**mTI**) *Il existe deux constantes $\varepsilon_m, \varepsilon_c > 0$ telles que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &\leq \tau_{i+1}^m - \tau_i^m \\ \varepsilon_c &\leq \tau_{j+1}^c - \tau_j^c. \end{aligned}$$

L'item i) impose que le temps maximum entre deux accès consécutifs au réseau (MATI) soit borné, du côté mesure comme du côté commande. L'item ii) impose que les retards cumulés (MAD), pour les mesure et la commande, soient bornés également. L'item iii) impose enfin que l'intervalle de temps minimum entre deux accès au réseau soit non-nul; cette hypothèse empêche en particulier le phénomène Zeno.

3.1.2.2 Modélisation du protocole

L'accès au réseau est régi par un protocole qui décide, à chaque instant τ_i^m , quel nœud communique ses données. Dans l'esprit de [Nešić and Teel, 2004], nous modélisons ce protocole comme un système à temps discret impliquant l'erreur que ce type de communication

gènère $e := \hat{x} - x \in \mathbb{R}^n$, où x est l'état du système et \hat{x} désigne son estimée par le modèle interne (voir détails plus bas) :

$$e(i+1) = h(i, e(i)), \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

avec $h : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si le réseau était capable de transmettre les mesures de tout l'état à chaque instant τ_i^m , alors la fonction h serait identiquement nulle. Cette hypothèse est fréquente dans la littérature des NCS (voir par exemple [Branicky et al., 2000, Zhivoglyadov and Middleton, 2003, Montestruque and Antsaklis, 2004, Seuret et al., 2006, Yue et al., 2005] ou encore [Naghshabrizi and Hespanha, 2006], [Quevedo et al., 2008], [Polushin et al., 2008, Cloosterman et al., 2010] où les effets induits par le réseau sont principalement modélisés par un échantillonnage et des retards), mais est à considérer avec précaution lorsque les capteurs sont physiquement distribués.

Certains protocoles sont de nature purement statique : ils se basent sur une dynamique (3.1) qui ne dépend pas de e , mais uniquement du temps discret i . L'exemple le plus classique est le protocole *Round Robin* (RR), qui consiste à inspecter chaque nœud de manière cyclique. À l'inverse, d'autres protocoles n'exploitent que la valeur de l'erreur, auquel cas la dynamique (3.1) est indépendante de i . Un exemple de ce type de protocole est le *Maximum Error First - Try Once Discard* (MEF-TOD) [Walsh et al., 1999].

L'objectif de la plupart des protocoles de communication est de diminuer une certaine fonction de l'erreur de transmission e à chaque envoi d'un paquet. Nous nous intéresserons ici aux protocoles induisant une décroissance exponentielle de cette erreur. Nous nous basons pour cela sur la définition originellement introduite dans [Nešić and Teel, 2004]².

Hypothèse 3.2 (Protocole UGES) *Le protocole (3.1) est uniformément globalement exponentiellement stable (UGES) et admet une fonction de Lyapunov associée dont le gradient est borné. En d'autres termes, il existe une fonction lipschitzienne $W_0 : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ et des constantes $\underline{a}, \bar{a}, c > 0$ et $\rho_0 \in [0, 1)$ telles que, pour tout $e \in \mathbb{R}^n$ et tout $i \in \mathbb{N}$,*

$$\underline{a}|e| \leq W_0(i, e) \leq \bar{a}|e| \quad (3.2)$$

$$W_0(i+1, h(i, e)) \leq \rho_0 W_0(i, e), \quad (3.3)$$

et, pour presque tout $e \in \mathbb{R}^n$ et tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{\partial W_0}{\partial e}(i, e) \right| \leq c. \quad (3.4)$$

3.1.2.3 Modélisation du système à commander

Notre stratégie vise à émuler une loi de commande ayant été développée sans tenir compte des limitations imposées par le réseau de communication. Nous supposons à cette fin connaître une commande statique κ garantissant la stabilité globale exponentielle du système nominal.

2. La classe que nous considérons ici ajoute en réalité la condition (3.4) à la définition originale dans [Nešić and Teel, 2004]. Cette condition impose la lipschitzianité globale en e de la fonction W_0 , uniformément en i . Cette condition supplémentaire est satisfaite par bon nombre de protocoles, en particulier RR et MEF-TOD.

Hypothèse 3.3 (GES du système nominal) *Il existe une fonction $\kappa : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continûment différentiable telle que l'origine du système bouclé*

$$\dot{x} = f(x, \kappa(x))$$

est globalement exponentiellement stable (GES). Plus précisément, il existe une fonction différentiable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ et des constantes $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \alpha, d > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} |x|^2 &\leq V(x) \leq \bar{\alpha} |x|^2 \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, \kappa(x)) &\leq -\alpha |x|^2 \\ \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right| &\leq d |x|. \end{aligned}$$

Afin de calculer les séquences de commande à encoder, le contrôleur dispose quant à lui d'un modèle \hat{f} du champ de vecteurs f . Ce modèle est généralement imprécis. La stratégie que nous présentons ici exploite le fait que chacune de ces fonctions sont lipschitziennes.

Hypothèse 3.4 (Régularité des dynamiques) *Les fonctions f et \hat{f} satisfont $f(0, \kappa(0)) = \hat{f}(0, \kappa(0)) = 0$, où κ est définie dans l'Hypothèse 3.3. De plus, pour toutes constantes $R_x, R_u > 0$, il existe des constantes³ $\lambda_f, \lambda_\kappa > 0$ telles que, pour tout $x_1, x_2 \in \mathcal{B}_{R_x}$ et tout $u_1, u_2 \in \mathcal{B}_{R_u}$,*

$$|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| \leq \lambda_f (|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2|) \quad (3.5)$$

$$|\kappa(x_1) - \kappa(x_2)| \leq \lambda_\kappa |x_1 - x_2|. \quad (3.6)$$

Nous supposons enfin que l'imprécision entre le système f et son modèle \hat{f} est bornée sectoriellement.

Hypothèse 3.5 (Imprécision du modèle) *Pour toutes constantes $R_x, R_u > 0$, il existe une constante $\lambda_{f\hat{f}} \geq 0$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{B}_{R_x}$ et tout $u \in \mathcal{B}_{R_u}$,*

$$\left| \hat{f}(x, u) - f(x, u) \right| \leq \lambda_{f\hat{f}} (|x| + |u|). \quad (3.7)$$

Cette hypothèse permet de prendre en compte à la fois des incertitudes paramétriques et certaines dynamiques non-modélisées. La constante $\lambda_{f\hat{f}}$ mesure ainsi le degré d'imprécision de la modélisation du système à commander. Dans l'hypothèse d'une modélisation parfaite, cette constante serait nulle.

3.1.2.4 Mise sous forme hybride

A partir des hypothèses énoncées dans les sections précédentes, nous détaillons maintenant la stratégie de commande développée et montrons que le système ainsi bouclé peut être mise sous la forme d'un système à dynamique hybride déjà exploité dans la littérature.

Comme nous l'avons déjà évoqué, à chaque réception d'une mesure, le contrôleur met à jour une estimée de l'état du système puis calcule une prédiction du signal de commande sur un horizon temporel fixé d'une durée

$$T_0^p \geq T_c + T_m + \tau_m + \tau_c \quad (3.8)$$

3. Notons que λ_κ peut en réalité être choisie indépendante de R_u .

en simulant numériquement le modèle \hat{f} . Ce signal est ensuite codé et estampillé de l'instant auquel a été effectuée la mesure sur laquelle il se base, puis envoyé sous la forme d'un paquet au prochain accès réseau (voir le bloc "Mise en paquets" de la Figure 3.1). Une fois réceptionné par le système, ce paquet est décodé et resynchronisé par un organe embarqué qui compare l'estampillage du paquet reçu avec l'horloge locale et choisit la portion du signal à appliquer en conséquence (voir le bloc "Buffer" de la Figure 3.1). De cette manière, les effets de retards bornés peuvent être compensés, modulo l'imprécision du modèle employé. Notons que cette resynchronisation requiert que le système, le buffer embarqué et les capteurs partagent une horloge commune. A l'inverse, aucune synchronisation d'horloge n'est ici requise entre le contrôleur et le système.

Soit N le nombre maximum de paquets pouvant être reçus sur la durée T_0^p . En rappelant que le temps entre deux envois consécutifs d'une mesure est compris entre τ_m et ε_m (voir l'Hypothèse 3.1), une valeur possible de N est alors donnée par

$$N = \left\lfloor \frac{T_0^p - \tau_m}{\varepsilon_m} \right\rfloor + 1. \quad (3.9)$$

Le NCS obtenu possède alors N variables d'état x_{c_r} , $r \in \{1, \dots, N\}$. En effet, en définissant les variables

$$\begin{aligned} \bar{x} &:= (x^T, \dots, x^T)^T \\ x_c &:= (x_{c_1}^T, \dots, x_{c_N}^T)^T \\ e &:= x_c - \bar{x} = (e_1^T, \dots, e_N^T)^T, \end{aligned}$$

le NCS en boucle fermée peut être écrit sous forme compacte (voir [Greco et al., 2012a] pour plus de détails) comme un système hybride de forme similaire à celle exploitée dans [Nešić and Teel, 2004, Nešić and Teel, 2004] :

$$\dot{x} = \mathcal{F}(t, \bar{x}, e) \quad (3.10a)$$

$$\dot{e} = \mathcal{G}(t, \bar{x}, e) \quad (3.10b)$$

$$e(\tau_i^{m+}) = \mathcal{H}(i, e(\tau_i^m)), \quad (3.10c)$$

où les fonctions F , G et H sont définies comme

$$\mathcal{F}(t, \bar{x}, e) := f(x, u(t, e + \bar{x})) \quad (3.11a)$$

$$\mathcal{G}(t, \bar{x}, e) := \begin{pmatrix} \hat{f}(e_1 + x, \kappa(e_1 + x)) - f(x, u(t, e + \bar{x})) \\ \vdots \\ \hat{f}(e_N + x, \kappa(e_N + x)) - f(x, u(t, e + \bar{x})) \end{pmatrix} \quad (3.11b)$$

$$\mathcal{H}(i, e) := \begin{pmatrix} e_1 + (h(i, e_N) - e_1) \eta(i, 1) \\ e_2 + (h(i, e_1) - e_2) \eta(i, 2) \\ \vdots \\ e_N + (h(i, e_{N-1}) - e_N) \eta(i, N) \end{pmatrix}. \quad (3.11c)$$

La fonction $\eta : \mathbb{N} \times \{1, \dots, N\} \rightarrow \{0, 1\}$ identifie l'indice de l'estimée de l'état considérée :

$$\eta(i, r) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mu(i) = r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.12)$$

où $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ effectue une attribution cyclique :

$$\mu(i) := ((i - 1) \bmod N) + 1. \quad (3.13)$$

Le signal de commande u dans (3.11a) et (3.11b) est donné par⁴

$$u(t, x_c) := \sum_{k=1}^N \kappa(x_{c_k}) \nu(t, k), \quad (3.14)$$

où $\nu : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{1, \dots, N\} \rightarrow \{0, 1\}$ est définie comme

$$\nu(t, k) := \begin{cases} 1 & \text{si } \exists j \in \mathbb{N} : t \in (\tau_j^c + T_j^c, \tau_{j+1}^c + T_{j+1}^c] \text{ et } \mu(\gamma(j)) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et où $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\gamma(j) := \max \{i \in \mathbb{N} : \tau_i^m + T_i^m < \tau_j^c\}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (3.15)$$

indique la dernière mesure reçue avant l'instant τ_j^c .

L'extension d'état opérée dans (3.10) permet de conserver tous les signaux de commande susceptibles d'être appliqués durant la plage temporelle T_0^p . Le protocole ainsi obtenu (cf. (3.10c) et (3.11c)) hérite de la propriété UGES du protocole originel (3.1) comme l'énonce la proposition suivante, établie dans [Greco et al., 2012a].

Proposition 3.6 (UGES du protocole étendu) *Sous l'Hypothèse 3.2, le protocole défini par le système à temps discret (3.10c) et (3.11c) est UGES et admet une fonction de Lyapunov associée $W : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par*

$$W(k, e) := \sum_{r=1}^N W_0(k, e_r) \eta(k, r),$$

où η est définie dans (3.12). De plus, cette fonction vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $e \in \mathbb{R}^{Nn}$,

$$a_L |e| \leq W(k, e) \leq a_H |e| \quad (3.16)$$

$$W(k+1, H(k, e)) \leq \rho_0 W(k, e) \quad (3.17)$$

$$\left| \frac{\partial W}{\partial e}(k, e) \right| \leq c, \quad (3.18)$$

avec $a_L := \underline{a}$ si $N = 1$ et $a_L := \frac{\underline{a}}{N} \min \left\{ 1, \left(\frac{\underline{a}}{\bar{a}} \right)^2 \frac{1}{\rho_0} \right\}$ pour $N > 1$, et $a_H := \bar{a}$.

3.1.3 Stabilité exponentielle sur un domaine d'attraction spécifié

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant, présenté et démontré dans [Greco et al., 2011, Greco et al., 2012a]. Ce résultat garantit la stabilité exponentielle du NCS (3.10) en donnant une borne explicite au MATI de mesure τ_m en fonction des caractéristiques du réseau, du protocole et du système, ainsi que du degré d'imprécision du modèle.

4. Dorénavant, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{Nn} \rightarrow \mathbb{R}^m$ désignera le signal défini comme (3.14).

Théorème 3.7 (LES du NCS) *Supposons les Hypothèses 3.1-3.3 satisfaites. Etant donné une constante $R > 0$, posons $R_x = R$ et $R_u = \lambda_\kappa R$, et supposons que les Hypothèses 3.4-3.5 soient satisfaites avec ces constantes. Soient \underline{a} , \bar{a} , ρ_0 , c , $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$, α , d , $\lambda_{f\hat{f}}$, λ_f , λ_κ , a_L , et a_H les constantes générées par ces hypothèses et par la Proposition 3.6. Supposons enfin que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$\tau_m \in [\varepsilon_m, \tau_m^*), \quad \tau_m^* := \frac{1}{L} \ln \left(\frac{H\gamma_2 + a_L L}{H\gamma_2 + a_L \rho_0 L} \right) \quad (3.19)$$

$$N = \left\lfloor \frac{T_c + T_m + \tau_c}{\varepsilon_m} \right\rfloor + 1 \quad (3.20)$$

où

$$L := \frac{c}{a_L} \left(\sqrt{N} \lambda_{f\hat{f}} (1 + \lambda_\kappa) + \sqrt{N} \lambda_f + \left(\sqrt{N-1} + N - 1 \right) \lambda_f \lambda_\kappa \right) \quad (3.21)$$

$$H := cN \lambda_{f\hat{f}} (1 + \lambda_\kappa) \quad (3.22)$$

$$\gamma_2 := \frac{d}{\alpha} \sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\alpha}}} \lambda_f \lambda_\kappa. \quad (3.23)$$

Alors l'origine du NCS (3.10)-(3.15) est exponentiellement stable, avec pour rayon d'attraction

$$\tilde{R} := \frac{R}{K}, \quad (3.24)$$

où

$$\begin{aligned} K &:= \frac{\sqrt{2}}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \max \{k_2 (1 + \gamma_1), k_1 (1 + \gamma_2)\} \\ \gamma_1 &:= \frac{e^{L\tau_m} - 1}{a_L L (1 - \rho_0 e^{L\tau_m})} H \\ k_1 &:= \frac{a_H}{\rho_0 a_L} \\ k_2 &:= \sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\alpha}}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ce théorème peut être démontré en exploitant le formalisme de [Nešić and Teel, 2004]. Il découle de l'application d'un théorème du petit gain pour les systèmes à dynamiques hybrides. Au delà des détails techniques de son énoncé, le Théorème 3.7 permet de garantir la stabilité exponentielle du système bouclé sur un domaine d'attraction donné, pourvu que le MATI de mesure soit en dessous d'un seuil pouvant être calculé explicitement.

Ce résultat souligne le compromis devant être fait entre retards de communication, fréquence de communication et précision du modèle employé. En effet, la borne (3.19) sur le MATI de mesure est liée à la dimension N de la mémoire, défini dans (3.20) à partir de (3.8) et (3.9). Cette quantité implique à la fois le MAD et le MATI de commande. La stratégie basée sur les paquets vise à faire croître le MATI de commande τ_c , mais un τ_c plus large pourrait conduire à une mémoire N plus importante et donc générer un MATI de mesure τ_m plus faible. En outre, les conditions (3.19)-(3.20) impliquent les MATI, MAD et mTI. Elles requièrent en particulier que le MATI de mesure soit plus grand que le mTI ε_m . La proposition suivante, établie dans [Greco et al., 2012a], montre que les contraintes sur le MATI et la mémoire sont toujours réalisables.

Proposition 3.8 *Pour toute constante $R > 0$, les paramètres τ_m , τ_c , T_m , T_c et ε_m peuvent toujours être choisis suffisamment petit pour satisfaire les conditions (3.19)-(3.20).*

3.1.4 Stabilité exponentielle semiglobale

Bien que le Théorème 3.7 permette de garantir la stabilité exponentielle du NCS sur un domaine d'attraction de rayon \tilde{R} (cf. Equation (3.24)), rien n'indique dans cet énoncé que ce rayon d'attraction puisse être élargi à loisir. En effet, la possible dépendance des grandeurs L et H (et par conséquent K) dans le paramètre R spécifiant le domaine de validité des Hypothèses 3.4 et 3.5, ne permet pas de garantir que \tilde{R} soit une fonction non-bornée de R . Ainsi, le fait que ces hypothèses soient satisfaites sur un rayon R très grand ne conduit pas nécessairement à l'obtention d'un rayon d'attraction \tilde{R} très grand pour le NCS.

Pour voir ceci plus clairement, considérons par exemple le cas où K (cf. Equation (3.25)) est proportionnel à R . La relation (3.24) indique alors que le rayon d'attraction \tilde{R} ne saurait dépasser une valeur maximale, indépendamment du choix initial de R . Il serait même possible d'imaginer que, dans certaines situations, \tilde{R} diminue lorsque R augmente; un phénomène similaire est détaillé dans [Sepulchre, 2000].

Ainsi, afin de garantir un domaine d'attraction arbitraire, il est nécessaire d'ajouter des contraintes sur le taux de croissance de K en R ou, de manière équivalente, sur les constantes de Lipschitz associées. Avant de présenter ce résultat, nous rappelons formellement la définition de stabilité exponentielle semi-globale pour le NCS. Cette définition n'est autre que l'extension exponentielle de la Définition 1.31 adaptée à la dynamique spécifique (3.10).

Définition 3.9 (SES) *Le NCS (3.10) est dit semiglobalement exponentiellement stable si, pour tout $\tilde{R} > 0$, il existe des constantes $\tau_m(\tilde{R}), \tau_c(\tilde{R}), T_m(\tilde{R}), T_c(\tilde{R}), \varepsilon_m(\tilde{R}) > 0$ telles qu'introduites dans l'Hypothèse 3.1, telles que son origine soit exponentiellement stable avec pour domaine d'attraction \tilde{R} .*

Théorème 3.10 (SES du NCS) *Supposons que les Hypothèses 3.1-3.4 soient satisfaites pour tout $R_x, R_u > 0$ et qu'il existe une constante $\sigma \in [0, 1)$ telle que*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\lambda_f(s)\lambda_\kappa(s)}{s^\sigma} < \infty. \quad (3.26)$$

Alors le NCS (3.10)-(3.15) est semiglobalement exponentiellement stable.

Ce résultat garantit que, pour des dynamiques suffisamment régulières (*i.e.*, les constantes de Lipschitz associées sont sous-linéaires dans la taille du domaine sur lequel elles sont calculées), le domaine d'attraction du NCS peut être rendu arbitrairement grand pourvu que les MADs et MATIs soient suffisamment faibles.

3.1.5 Stabilité exponentielle globale

Lorsque les dynamiques régissant le NCS sont globalement lipschitziennes, il est possible de garantir la stabilité exponentielle globale du système bouclé. Ces développements ont été l'objet du travail initial [Chaillet and Bicchi, 2008], que nous résumons dans l'énoncé suivant.

Théorème 3.11 (GES du NCS) *Supposons que les Hypothèses 3.1-3.3 soient satisfaites avec des constantes de Lipschitz $\lambda_f, \lambda_\kappa, \lambda_{f\hat{f}}$ indépendantes de R_x et R_u . Soient $\underline{a}, \bar{a}, \rho_0, c, \underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \alpha, d, \lambda_{f\hat{f}}, \lambda_f, \lambda_\kappa, a_L$, et a_H les constantes générées par ces hypothèses et par la*

Proposition 3.6. Alors, pour tous MATIs et MADs satisfaisant

$$\tau_m \in [\varepsilon_m, \tau_m^*), \quad \tau_m^* := \frac{1}{L} \ln \left(\frac{H\gamma_2 + a_L L}{H\gamma_2 + a_L \rho_0 L} \right)$$

où les constantes L, H et γ_2 sont définies dans (3.21)-(3.23), l'origine du NCS (3.10)-(3.15) est globalement exponentiellement stable.

3.1.6 Cas des systèmes LTI

Un cas particulier des dynamiques globalement lipschitziennes considérées dans la section précédente est la classe des systèmes LTI. Dans ce cas, nous avons que $f(x, u) = Ax + Bu$, $\hat{f}(x, u) = \hat{A}x + \hat{B}u$ et $\kappa(x) = K_c x$, où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $K_c \in \mathbb{R}^{m \times n}$. L'Hypothèse 3.3 peut alors être traduite de la manière suivante.

Hypothèse 3.12 (GES nominale pour systèmes LTI) *Il existe des matrices symétriques définies positives $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que*

$$(A + BK_c)^T P + P(A + BK_c) = -Q.$$

Le corollaire suivant propose alors des bornes spécifiques à cette classe de systèmes. Sa preuve est donnée dans [Greco et al., 2012b].

Corollaire 3.13 *Considérons les paramètres ρ_0, c, a_L, P et Q qui découlent des Hypothèses 3.1, 3.2 et 3.12, ainsi que de la Proposition 3.6. Supposons que les conditions (3.19) et (3.20) soient satisfaites avec⁵*

$$L := \begin{cases} \frac{c}{a_L} |\hat{A} + (\hat{B} - B)K_c| & \text{si } N = 1 \\ \frac{c}{a_L} (|\hat{A} + (\hat{B} - B)K_c| + \sqrt{N}|BK_c|) & \text{si } N > 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$H := c\sqrt{N}|(A - \hat{A}) + (B - \hat{B})K_c| \quad (3.28)$$

$$\gamma_2 := \frac{|PBK_c|}{\lambda_{\min}(Q)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}. \quad (3.29)$$

Alors l'origine du NCS (3.10)-(3.15), avec $f(x, u) = Ax + Bu$, $\hat{f}(x, u) = \hat{A}x + \hat{B}u$ et $\kappa(x) = K_c x$, est globalement exponentiellement stable.

3.1.7 Illustration : commande d'un hélicoptère

Nous illustrons maintenant les avantages que peut apporter la commande basée sur les paquets sur un cas pratique déjà étudié dans [Tabbara et al., 2007]. Il s'agit d'un hélicoptère Tandem-Rotor Ch-47, dont le comportement linéarisé est donné par $\dot{x} = Ax + Bu$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -0.02 & 0.005 & 2.4 & -32 \\ -0.14 & 0.44 & -1.3 & -30 \\ 0 & 0.018 & -1.6 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.14 & -0.12 \\ 0.36 & -8.6 \\ 0.35 & 0.009 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La technique présentée dans ce chapitre suppose que l'état complet $x \in \mathbb{R}^4$ du système soit transmise sur le réseau, tandis que les auteurs de [Tabbara et al., 2007] utilisent une

5. $\lambda_{\min}(P)$ et $\lambda_{\max}(P)$ désignent les valeurs propres minimale et maximale de la matrice P .

commande statique exponentiellement stabilisante mais ne se basant que sur la sortie $y = Cx \in \mathbb{R}^2$ où

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.3 \end{pmatrix}.$$

Pour nous conformer au formalisme suivi dans ce document, nous écrirons donc la commande comme $u = K_c x = \tilde{K} C x$, où

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} -12.7177 & -45.0824 \\ 63.5123 & 25.9144 \end{pmatrix}$$

est la matrice de gain proposée dans [Tabbara et al., 2007]. Nous supposons que l'état x est partitionné en $\ell = 2$ nœuds $x = (x_1^T, x_2^T)^T$ avec $x_i \in \mathbb{R}^2$, pour chaque $i \in \{1, 2\}$, et que les mesures sont transmises suivant le protocole Round Robin. Nous supposons également, sans perte de généralité, que la mesure de x_1 est transmise par le nœud 1 et que x_2 est transmis par le nœud 2.

L'estimée du MATI obtenue dans [Tabbara et al., 2007] pour ce NCS est

$$\tau_{2007}^* = 2.81 \cdot 10^{-4} \text{ s.}$$

Par ailleurs, dans le cas particulier d'accès *périodiques* au réseau, il est possible de calculer précisément le MATI de ce système (cf. [Greco et al., 2012b]); nous trouvons ici

$$\tau_{\text{single}}^* \simeq 1.13 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

Afin de quantifier l'amélioration apportée par une technique exploitant la charge des paquets transmis, calculons la borne résultant de l'application du Corolaire 3.13. Les retards n'étant pas considérés dans [Tabbara et al., 2007], nous les négligerons également ici ($T_m = T_c = 0$). Nous choisissons de plus $\varepsilon_m \simeq \tau_m^*$ et τ_c légèrement inférieur à ε_m pour avoir $N = 1$ dans (3.20). Les paramètres de l'Hypothèse 3.2 sont $\underline{a} = 1$, $\bar{a} = \sqrt{\ell}$, $\rho_0 = \sqrt{(\ell - 1)/\ell}$, $c = \sqrt{\ell}$ (voir [Nešić and Teel, 2004]). En ce qui concerne l'Hypothèse 3.12, nous pouvons prendre $Q = I$ (auquel cas $\lambda_{\max}(Q) = 1$), $\lambda_{\min}(P) = 5.44 \cdot 10^{-3}$, $\lambda_{\max}(P) \simeq 1595$, et $|PB\tilde{K}| \simeq 3372$. Nous supposons également une connaissance parfaite du système : $\hat{A} = A$ et $\hat{B} = B$. Les constantes de (3.27) et (3.28) deviennent alors $L = \frac{c}{a_L} |\hat{A}| = \frac{c}{a} |A|$ et $H = 0$. La borne sur le MATI (3.19) est ainsi donnée par

$$\tau_m^* = \frac{a}{c|A|} \ln \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \simeq 5.58 \cdot 10^{-3} \text{ s,}$$

soit environ 20 fois plus que τ_{2007}^* . En d'autres termes, la méthode proposée ici permet de stabiliser exponentiellement le système en transmettant 20 fois moins de paquets.

En réalité, l'exploitation de la charge des paquets apporte parfois une amélioration nettement plus substantielle que ce que décrivent ces bornes. En effet, si nous considérons le cas d'une transmission *périodique* des mesures, le fait d'utiliser une approche prédictive permet d'obtenir un MATI

$$\tau_{\text{multi}}^* \simeq 1.3105 \text{ s,}$$

soit une amélioration théorique de l'ordre de 1160 fois par rapport à un envoi de commande non-prédictive (c'est-à-dire constante entre deux transmissions).

Soulignons toutefois le fait qu'en cas d'imprécision de modèle, l'écart entre le MATI réel et celui estimé par les bornes du Corolaire 3.13 devient vite conséquent. Considérons

par exemple un modèle $\hat{f}(x, u) = \hat{A}x + \hat{B}u$, où $\hat{A} = A + \Delta_A$, $\hat{B} = B + \Delta_B$. Notons $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,4}$, $B = [b_{ij}]_{i=1,\dots,4,j=1,2}$, $\Delta_A = [\delta_{ij}^A]_{i,j=1,\dots,4}$, $\Delta_B = [\delta_{ij}^B]_{i=1,\dots,4,j=1,2}$. Nous supposons que les incertitudes sont bornées de la manière suivante : $|\delta_{ij}^A| \leq p|a_{ij}|$ et $|\delta_{ij}^B| \leq p|b_{ij}|$, où $p \in [0, 1]$ désigne le degré d'imprécision.

La Figure 3.2 représente l'estimée du MATI de mesure τ_m^* (en échelle logarithmique) donnée par le Corolaire 3.13 en fonction de degré d'imprécision p et pour différentes valeurs de la mémoire⁶ N . Pour chaque valeur de p , un millier de matrices Δ^A et Δ^B ont été générées, et l'estimée du MATI correspondante a été calculée ; seule l'estimée la plus faible a été reportée sur ce graphique.

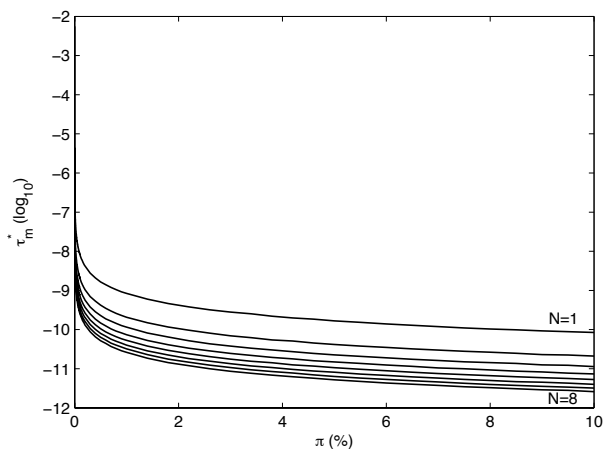


FIGURE 3.2 – Estimée du MATI obtenue par le Corolaire 3.13 en fonction du niveau d'incertitude de modélisation p pour différentes valeurs de la mémoire N .

Cette courbe indique clairement que le MATI estimé par le Corolaire 3.13 peut s'avérer très faible en cas d'incertitude de modélisation. Il est toutefois à souligner que le MATI réellement atteignable avec une stratégie prédictive telle que celle présentée ici est généralement bien meilleur que ses trop approximatives estimées théoriques, même en cas d'incertitude de modélisation. Ceci peut se voir sur la Figure 3.3 où le MATI τ_{multi}^* (c'est-à-dire celui correspondant à un accès périodique aux nœuds du réseau en exploitant la stratégie prédictive) est représenté pour $N = 1$ en fonction du degré d'imprécision p .

Cette figure illustre l'amélioration apportée par l'utilisation d'une commande prédictive transmise par paquets sur une commande échantillonnée classique. En effet, pour un facteur d'imprécision $p = 10\%$ sur les matrices A et B , nous avons que $\tau_{\text{multi}}^* \simeq 2.049 \cdot 10^{-2}$ s contre $\tau_{\text{single}}^* \simeq 1.13 \cdot 10^{-3}$ s, ce qui correspond à une amélioration d'un facteur 18.

3.2 Robustesse de la commande quantifiée

Si la section précédente s'intéressait à l'effet du protocole de communication et de l'incertitude de modélisation sur une commande prédictive exploitant la codification sous forme de paquets de communication, nous nous intéressons maintenant à un autre effet

6. Rappelons qu'une valeur de $N > 1$ permet de considérer des retards non-nuls ($T_m \neq 0$, $T_c \neq 0$)

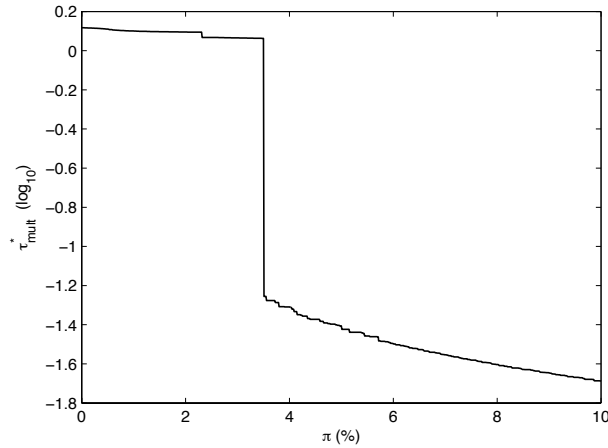


FIGURE 3.3 – MATI τ_{multi}^* (en échelle logarithmique) pour une mémoire $N = 1$ et en supposant des accès périodiques au réseau, en fonction du degré d'imprécision p .

intimement lié aux communications digitales : la quantification des données. La mise sous forme de paquets de données de mesure ou de commande, ou plus généralement leur transmission par canal numérique, impose en effet une approximation de leur valeur. Cette approximation peut avoir des effets néfastes sur la performance du système bouclé, voire sur sa stabilité. Ceci explique le nombre d'études sur les effets de la quantification dans un contexte de commande (voir par exemple [Nair et al., 2007, Hespanha et al., 2007, Liberzon, 2008]).

Si une importante littérature existe autour de la commande quantifiée des systèmes LTI (*e.g.*, [Montestruque and Antsaklis, 2004, Liberzon, 2003a, Nair and Evans, 2004]), des travaux plus récents ont visé à étendre ces résultats aux systèmes à dynamiques non-linéaires (voir par exemple [Liberzon and Nešić, 2007, Liberzon and Hespanha, 2005, de Persis and Isidori, 2004]). En particulier, [Liberzon and Hespanha, 2005] a montré que tout système ISS vis-à-vis d'erreurs de mesure peut être semiglobalement asymptotiquement stabilisé par un canal d'information limitée sous certaines conditions sur le taux de transmission des données. Ce résultat est obtenu grâce une procédure dynamique de quantification des données. Au moyen d'un codage-décodage similaire, ce résultat peut être étendu au cas de systèmes globalement asymptotiquement stable moyennant des conditions plus restrictives sur le taux de transmission.

La performance de l'approche développée dans ces références peut toutefois être drastiquement remise en cause en cas de modélisation imparfaite du système à commander ou en présence de perturbations exogènes. La stabilité même de la boucle fermée peut être compromise. Les travaux présentés dans [Liberzon and Nešić, 2007] montrent que, même dans le cas LTI, le fait de transmettre les données de mesures de manière quantifiée peut compromettre l'ISS du système bouclé. Notons qu'une telle étude de robustesse pourrait être menée en utilisant le formalisme des NCS présentés dans [Nešić and Teel, 2004] et exploité dans la section précédente, à condition que la procédure de codage-décodage des données ne sature pas ce qui est généralement difficile à garantir en présence de perturbations.

L'objet de la présente section est de garantir la robustesse des systèmes dynamiquement quantifiés vis-à-vis d'erreurs de mesures, d'incertitudes paramétriques et de signaux

exogènes. Nous exploitons à cette fin une extension naturelle de la stratégie de commande proposée dans [Liberzon and Hespanha, 2005, de Persis and Isidori, 2004]. Nous montrons que les propriétés d’ISS vis-à-vis de signaux exogènes, d’erreurs de mesure et d’incertitudes paramétriques sont préservées de manière semiglobale en cas de commande par données quantifiées. En d’autres termes, si un taux de transmission suffisant est disponible sur le canal de transmission, le domaine d’attraction peut être agrandi à loisir et l’erreur en régime permanent reste “proportionnelle” à l’amplitude des perturbations appliquées. Le taux de transmission requis pour garantir cette propriété de robustesse s’avère être le même que dans les approches non-perturbées présentées dans [Liberzon and Hespanha, 2005, de Persis and Isidori, 2004]. Nous illustrons ces résultats au travers de la commande quantifiée d’un moteur à courant continu (Section 3.2.4).

3.2.1 Contexte et présentation du problème

Les systèmes auxquels nous nous intéressons ici sont régis par une dynamique de la forme

$$\dot{x} = f(x, \mu, u, d), \quad (3.30)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l’état, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction localement lipschitzienne, $\mu : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{P}$, avec $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$, désigne un vecteur de paramètres (éventuellement temps-variants), $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un signal de commande et $d : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^h$ représente des perturbations exogènes supposées mesurables et localement essentiellement bornées. Nous supposons en outre que l’origine est un point d’équilibre du système non-perturbé, indépendamment de la valeur des paramètres considérée, à savoir :

$$f(0, \mu, 0, 0) = 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}.$$

Pour commander ce système, les seules mesures disponibles proviennent d’un canal à information limitée. Ainsi, les seules grandeurs disponibles pour la rétroaction sont constituées de mesures quantifiées de l’état, provenant d’un codage préliminaire. Le symbole ainsi codé est ensuite transmis au travers d’un réseau de communication dont nous négligerons ici les effets décrits dans la Section 3.1 (à savoir les retards, l’ordonnancement des accès par protocole et la distribution physique des nœuds) pour nous focaliser principalement sur la quantification qu’il induit. Le réseau de communication se résume donc ici à un échantillonnage à pas constant $\tau > 0$ et à une quantification sur N^n symboles où $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. L’architecture générale est résumée par la Figure 3.4, dont certains symboles seront définis dans la suite.

A chaque réception d’un symbole q_k , $k \in \mathbb{N}$, c’est-à-dire à chaque instant $k\tau$, le décodeur calcule une estimée de l’état \hat{x} qui sera utilisée dans l’élaboration de la loi de commande. Cette procédure de codage-décodage est nécessairement imprécise du fait de la bande passante limitée du canal de transmission. A cette imprécision s’ajoute l’incertitude sur le paramètre μ du système, la présence de perturbations exogènes d et la possibilité d’erreurs de mesure d_e . Soit ν la valeur supposée du paramètre μ . Nous définissons alors l’incertitude paramétrique

$$d_p := \mu - \nu \in \mathbb{R}^p.$$

Nous supposons en outre que l’amplitude de l’erreur de mesure est bornée par une constante $E \geq 0$ connue :

$$\|d_e\| \leq E. \quad (3.31)$$

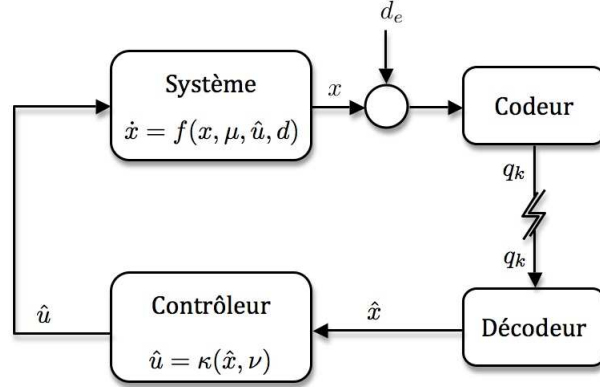


FIGURE 3.4 – Commande par information limitée en présence d’incertitudes et d’erreurs de mesure.

Notre première hypothèse est que, en l’absence de contraintes de communication, le système (3.30) est stabilisable par un retour d’état statique qui le rend ISS vis-à-vis des perturbations exogènes, de l’incertitude paramétrique et des erreurs de mesure.

Hypothèse 3.14 (ISS du système nominal) *Il existe une loi de commande continue $\kappa : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction continûment différentiable $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et des fonctions $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \alpha, \chi, \Gamma$ et γ de classe \mathcal{K}_∞ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $d \in \mathcal{D}$, tout $d_p \in \mathcal{P}$ et tout $d_e \in \mathbb{R}^n$,*

$$\underline{\alpha}(|x|) \leq V(x) \leq \bar{\alpha}(|x|),$$

$$|x| \geq \chi(|d|) + \Gamma(|d_p|) + \gamma(|d_e|) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} f(x, \mu, \kappa(x + d_e, \mu + d_p), d) \leq -\alpha(|x|). \quad (3.32)$$

Au vu de la caractérisation Lyapunov de l’ISS établie dans [Sontag and Wang, 1995] et rappelée en Section 1.1.2.2, cette hypothèse impose l’ISS du système (3.30) bouclé par le retour d’état κ . Notons que ce dernier ne se base que sur la valeur supposée du paramètre $\nu = \mu + d_p$ et non sa valeur réelle μ .

Si cette hypothèse d’ISS s’avère très forte en pratique, les remarques suivantes donnent des pistes pouvant lui permettre d’être satisfaite dans certains cas.

Remarque 3.15 (Systèmes en forme feedback stricte) *Les conditions de l’Hypothèse 3.14 peuvent être satisfaites par tout système sous forme de feedback stricte. Une procédure de backstepping peut en effet être appliquée à de tels systèmes, et ainsi imposer itérativement l’ISS de chaque variable d’état vis-à-vis de (d, d_p, d_e) , en utilisant les variables avals comme des signaux de commande “virtuels” [Freeman and Kokotović, 1996].*

Remarque 3.16 (ISS et commande globalement lipschitzienne) *Les conditions de l’Hypothèse 3.14 peuvent être satisfaites par tout système stabilisable par un retour d’état statique globalement lipschitzien garantissant l’ISS vis-à-vis des erreurs d’actionnement. En effet, si \mathcal{L}_κ désigne la constante de Lipschitz de cette loi de commande κ , alors les effets induits par l’incertitude paramétrique d_p et les erreurs de mesure d_e peuvent être assimilés à une perturbation \tilde{d} satisfaisant*

$$|\tilde{d}| \leq \mathcal{L}_\kappa |d_p| + \mathcal{L}_\kappa |d_e|.$$

Notons que tout système pouvant être rendu ISS par une commande bornée et différentiable (cf. e.g. [Isidori, 1995]) satisfait trivialement cette condition de lipschitzianité globale.

3.2.2 Commande quantifiée

Nous présentons maintenant une extension naturelle de la procédure de codage-décodage présentée dans [Liberzon and Hespanha, 2005, de Persis and Isidori, 2004] permettant de prendre en compte perturbations exogènes, incertitudes paramétriques et erreurs de mesure.

3.2.2.1 Région de quantification

Etant donnée une estimée \hat{x} de l'état x , la région de quantification \mathcal{Q} est une boule de centre \hat{x} et de rayon⁷ $L > 0$:

$$\mathcal{Q} := \mathcal{B}(\hat{x}, L).$$

La mesure (bruitée) disponible pour le codeur, i.e. $x + d_e$, appartient à la cette région \mathcal{Q} si et seulement si l'erreur d'estimation

$$e := x + d_e - \hat{x},$$

combinant les effets de la quantification et des bruits de mesure, est suffisamment faible :

$$|e| \leq |x - \hat{x}| + |E| \leq L.$$

Disposant de N^n symboles pouvant être transmis par le canal de communication à chaque pas d'échantillonnage, nous partitionnons la région de quantification en N^n sous-régions de tailles identiques. La région \mathcal{Q} considérée est ensuite mise à jour selon la procédure décrite ci-dessous.

3.2.2.2 Dynamique du codeur

L'évolution de l'estimée de l'état est régie par la dynamique hybride suivante :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \nu, \kappa(\hat{x}, \nu), 0), \quad \forall t \in [k\tau, (k+1)\tau), k \in \mathbb{N} \quad (3.33a)$$

$$\hat{x}(k\tau) = \hat{c}(k\tau), \quad \text{si } k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \quad (3.33b)$$

$$\hat{x}(0) = 0, \quad (3.33c)$$

où $\hat{c}(k\tau)$ désigne le centre de la sous-région à laquelle la mesure $x(k\tau) + d_e$ appartient. Cette sous-région est identifiée par le symbole q_k , qui constitue la sortie du codeur. L'évolution du rayon de la zone de quantification est alors donnée, à chaque pas d'échantillonnage $k\tau$, $k \in \mathbb{N}$, par la dynamique

$$L((k+1)\tau) = \Lambda \left(\frac{L(k\tau)}{N} + E \right) + E \quad (3.34a)$$

$$L(0) = \Delta + E, \quad (3.34b)$$

où $\Lambda > 1$ désigne une constante à définir, Δ est le rayon du domaine de conditions initiales considérées et E est défini pas (3.31). Cette loi d'évolution est une extension de celle proposée dans [Liberzon and Hespanha, 2005, de Persis and Isidori, 2004] permettant de

7. Dans cette section, la norme infinie est utilisée : $|x| := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$. De la même manière, pour un signal $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\|u\| := \text{ess sup}_{t \geq 0} |u(t)|$.

prendre en compte d'éventuelles erreurs de mesure. Cette dynamique à temps discret génère une suite $\{L(k\tau)\}_{k \in \mathbb{N}}$ décroissante jusqu'à une constante dépendant de E , qui elle-même assure la décroissance de l'erreur d'estimation modulo les erreurs de mesure tant que la dynamique (3.34) s'applique (voir [Franci and Chaillet, 2010b] pour plus de détails).

Notons que, tant que $x(k\tau) + d_e$ reste à l'intérieur de la région $\mathcal{Q}(k\tau)$, l'erreur d'estimation satisfait $|e(k\tau)| \leq \bar{e}(k\tau)$ où

$$\bar{e}(k\tau) := \frac{L(k\tau)}{N} + E, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.35)$$

constitue l'*erreur maximale de quantification*.

Toutefois, du fait des incertitudes et perturbations, il se peut que la mesure $x(k\tau) + d_e$ tombe en dehors de la région de quantification. Cette situation correspond à un *débordement*. Elle est représentée par le symbole $q_k = 0$. Si un débordement a lieu à l'instant k_0 , $k_0 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, le codeur met à jour le centre et le rayon de la région de quantification de la manière suivante :

$$\hat{x}(k_0\tau) = \hat{x}(k_0\tau^-), \quad (3.36a)$$

$$L((k_0 + 1)\tau) = \Lambda(\bar{E} + E) + E, \quad (3.36b)$$

où $\bar{E} > 0$ est une constante qui sera définie par la suite. Ainsi, en cas de débordement, le rayon de l'hypercube contenant $x(k\tau)$ identifié par la procédure de quantification n'est plus $\frac{L(k\tau)}{N} + E$, mais $\bar{E} + E$, tandis que le reste de la procédure reste identique à (3.33)-(3.34).

3.2.2.3 Dynamique du décodeur

En implémentant les dynamiques (3.33), (3.34) et (3.36), le décodeur est en mesure de reconstruire l'évolution de l'estimée \hat{x} à partir des symboles $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ transmis sur le canal de communication.

3.2.2.4 Commande

N'ayant connaissance que d'une valeur approximative ν des paramètres réels μ du système à commander, le signal de commande appliqué est donné par

$$\hat{u}(t) = \kappa(\hat{x}(t), \nu), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.37)$$

où $\hat{x}(\cdot)$ est donnée par (3.33) avec (3.34)-(3.36). Notons que, afin de focaliser l'analyse sur les effets induits par la quantification des mesures, la communication du contrôleur vers le système est ici supposée analogique et sans perte.

3.2.3 Analyse de la robustesse du codage-décodage

Maintenant que la procédure de quantification a été décrite, nous pouvons présenter des résultats de robustesse du système ainsi bouclé. Notre premier résultat, démontré dans [Franci and Chaillet, 2010b, Franci and Chaillet, 2010c], s'intéresse au cas où le nombre bits transmis est fixe et la période d'échantillonnage peut être ajustée.

Théorème 3.17 (N fixe, τ ajustable) *Supposons que l'Hypothèse 3.14 soit satisfaite par le système (3.30). Alors il existe des fonctions $\bar{\chi}, \bar{\Gamma}, \bar{\gamma}$ de classe \mathcal{K}_∞ et, pour tout ensemble compacts $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ et $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, toute constante $\Delta > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}_{>1}$, il existe*

des constantes $\tau, \Lambda, \bar{E}, E > 0$ et une fonction β de classe \mathcal{KL} telles que les trajectoires du système bouclé

$$\dot{x} = f(x, \mu, \hat{u}, d), \quad (3.38)$$

où \hat{u} est la sortie du contrôleur à information limitée défini par (3.33)-(3.37), satisfont, pour toute condition initiale $|x(0)| \leq \Delta$, tout paramètre estimé $\nu \in \mathcal{P}$, tout paramètre réel $\mu : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{P}$, toute perturbation $d : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{D}$ et toute erreur de mesure $d_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{B}_E$,

$$|x(t)| \leq \bar{\beta}(\Delta, t) + \bar{\chi}(\|d\|) + \bar{\Gamma}(\|\mu - \nu\|) + \bar{\gamma} \left(\Lambda(\bar{E} + E) + \left(2 + \frac{\Lambda + 1}{1 - \frac{\Lambda}{N}} \right) E \right). \quad (3.39)$$

En d'autres termes, le système bouclé (3.38) est semiglobalement stable entrée-état (ISpS) dans le sens de [Jiang et al., 1994], avec le pas d'échantillonnage τ comme paramètre de réglage.

Comme nous l'avons déjà évoqué, la constante Λ mesure l'expansion du système entre deux instants d'échantillonnage consécutifs. Il apparaît dans la preuve de ce résultat (cf. [Franci and Chaillet, 2010b, Franci and Chaillet, 2010c]) que

$$\Lambda = e^{\mathcal{L}\tau},$$

où \mathcal{L} désigne la constante de Lipschitz du champ de vecteur f sur le domaine auquel les solutions sont garanties d'appartenir par construction. La constante \bar{E} , quant à elle, est proportionnelle à la borne supérieure sur l'amplitude des perturbations et des incertitudes paramétriques. L'estimée des solutions (3.39) garantit ainsi que l'erreur statique est d'autant plus petite que l'incertitude paramétrique et les perturbations exogènes sont faibles. En outre, en l'absence de ces imperfections, nous retrouvons le résultat de [Liberzon and Hespanha, 2005].

Nous soulignons le fait qu'en cas de débordement, la taille de la région de quantification est fixée à la valeur $\Lambda(\bar{E} + E) + E$ (cf. (3.36)). Il se peut, notamment en cas de fréquences d'échantillonnage particulièrement lente, que la constante Λ soit grande. Dans ce cas, l'erreur de quantification peut être très importante, conduisant ainsi à une chute des performances. Cet effet peut être amoindri en utilisant une constante E non-nulle dans la procédure de codage-décodage, même lorsque les erreurs de mesures sont négligeables. Ceci empêche en effet la taille de la région de quantification de devenir arbitrairement petite, ce qui peut éviter des dépassements.

Nous présentons maintenant un résultat similaire dans le cas où le pas d'échantillonnage est fixe et que seul le nombre de bits transmissibles peut être ajusté. Il apparaît que, du fait des perturbations exogènes, la robustesse ne peut être garantie pour des valeurs de τ trop importantes contrairement au cas idéal considéré dans [Liberzon and Hespanha, 2005]. Cette limitation, assez intuitive, est détaillée dans la preuve (cf. [Franci and Chaillet, 2010b, Franci and Chaillet, 2010c]).

Théorème 3.18 (τ fixe, N ajustable) *Supposons que l'Hypothèse 3.14 soit satisfaite par (3.30). Alors il existe des fonctions $\bar{\chi}, \bar{\Gamma}, \bar{\gamma}$ de classe \mathcal{K}_∞ et, pour tous ensembles compacts $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ et toute constante $\Delta > 0$, il existe un seuil $\tau_{max} > 0$ tel que, pour tout pas d'échantillonnage $\tau \in (0, \tau_{max})$, il existe des paramètres $N, \Lambda, \bar{E}, E > 0$ et une fonction β de classe \mathcal{KL} telles que les solutions du système bouclé (3.38), où \hat{u} est la sortie du contrôleur (3.33)-(3.37), satisfont*

$$|x(t)| \leq \bar{\beta}(\Delta, t) + \bar{\chi}(\|d\|) + \bar{\Gamma}(\|\mu - \nu\|) + \bar{\gamma} \left(\Lambda(\bar{E} + E) + \left(2 + \frac{\Lambda + 1}{1 - \frac{\Lambda}{N}} \right) E \right), \quad (3.40)$$

pour toute condition initiale $|x(0)| \leq \Delta$, tout paramètre nominal $\nu \in \mathcal{P}$, tout paramètre $\mu : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{P}$, toute perturbation $d : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{D}$ et toute erreur de mesure $d_e : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{B}_E$.

Notons que les fonctions de comparaison impliquées dans l'estimée (3.40) des solutions du système bouclé sont identiques à celles du Théorème 3.17.

Remarque 3.19 (Echantillonnage à pas variable) *Les Théorèmes 3.17 et 3.18 peuvent aisément être généralisés au cas de périodes d'échantillonnage non constantes, à la condition que la durée maximale entre deux échantillons consécutifs ne dépasse la valeur de τ définie dans chacun de ces deux énoncés.*

3.2.4 Exemple d'illustration

Nous testons enfin l'application de cette stratégie de commande par quantification sur l'exemple académique suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \mu x_1^3 + d_1 \\ \dot{x}_2 &= u + d_2.\end{aligned}$$

L'incertitude sur ce modèle provient de l'identification du paramètre μ , qui varie dans le temps. Nous supposons ne connaître que sa valeur nominale $\nu = 1$. Le système est en outre affecté par des perturbations exogènes d_1 et d_2 . Pour les besoins de la simulation nous avons considéré $\mu(t) = 1 + P \sin(t)$, $d_1(t) = D \sin(t)$ et $d_2(t) = D \cos(t)$. Les mesures sont en outre entachées d'une erreur $d_e(t) = E(\sin(t), \cos(t))^T$. Nous supposons ici que les amplitudes de ces perturbations sont respectivement $P = 0.5$, $D = 1.0$ et $E = 0.1$. Ceci correspond en particulier à une incertitude de 50% sur le paramètre μ .

Le système étant sous forme de feedback stricte, [Freeman and Kokotovic, 1993] nous permet de construire une loi de commande continue rendant le système bouclé ISS par rapport à d , d_p et d_e , satisfaisant ainsi l'Hypothèse 3.14. Cette loi de commande repose sur le concept de fonction de Lyapunov "aplatie" .

Nous supposons que seuls 2 octets peuvent être transmis à chaque pas d'échantillonnage. Nous visons à garantir la stabilité du système pour toute condition initiale $|x(0)| \leq \Delta = 10$. L'approche de commande par quantification présentée ci-dessus permet d'atteindre cet objectif pour un pas d'échantillonnage $\tau = 0.1s$ avec les paramètres $\Lambda = 64$ et $\bar{E} = 64$, comme l'illustre la Figure 3.5.

Avec cette valeur de $E = 0.1$, la taille de la région de quantification demeure suffisamment importante pour empêcher tout dépassement, comme nous l'avions évoqué en Section 3.2.3.

Ainsi, en ne transmettant que 2 octets, avec une période d'échantillonnage de l'ordre de la constante de temps du système, et malgré l'influence de perturbations relativement importantes, la stabilité reste garantie malgré l'apparition d'une erreur statique.

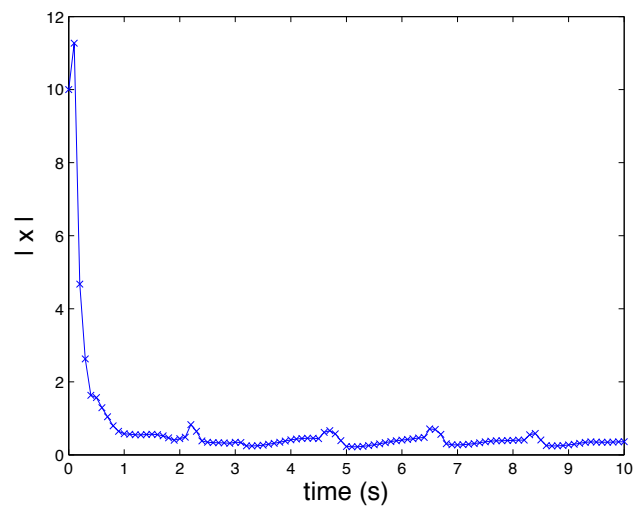


FIGURE 3.5 – Evolution de la norme de l'état à partir de la condition initiale $x(0) = (-10, -10)^T$, avec $N = 2$ octets transmis à une fréquence d'échantillonnage $1/\tau = 10$ Hz.

Chapitre 4

Perspectives

Nous listons ici les perspectives de recherche sur chacune des thématiques abordées dans ce document. Certaines seront traitées à court terme, d'autres sont des directions de recherche à plus longue échéance.

4.1 Stabilité et robustesse des systèmes interconnectés

Nous proposons tout d'abord des travaux dans la continuité des résultats présentés dans le Chapitre 1.

4.1.1 Caractérisation de l'iISS Forte

Comme nous l'avons vu en Section 1.1.2.2, aucune condition nécessaire et suffisante impliquant des fonctions de Lyapunov n'a pu être donnée pour l'iISS Forte. Nous comptons travailler dans cette direction, notamment en approfondissant nos recherches sur la Conjecture 1.9.

4.1.2 L'iISS Forte d'un point de vue commande

Les résultats sur l'iISS Forte présentés en Sections 1.1.2 et 1.3.1 sont de nature analytique : ils proposent des outils permettant d'établir cette propriété sur des cas pratiques, et étudient sa préservation sous l'effet d'interconnexion (cascade ou rétroaction). De nombreuses questions restent toutefois ouvertes sur cette propriété, notamment dans un contexte de commande.

4.1.2.1 Fonction de Lyapunov contrôlée pour l'iISS Forte

Des résultats génériques de stabilisabilité ISS sont disponibles dans la littérature [Sontag, 1989, Sontag, 1990]. Des stratégies de commande rendant la boucle fermée ISS ou iISS ont également été développées : voir par exemple [Teel and Praly, 2000, Liberzon, 2002, Liberzon et al., 2002, Malisoff and Sontag, 2004] pour des résultats exploitant la notion de fonction de Lyapunov contrôlée, ou [Freeman and Kokotovic, 1993] pour des systèmes à structures particulières (forme feedback stricte).

Comme nous l'avons brièvement rappelé en Section 1.1.2, ces stratégies de commande ont donné lieu à de nombreuses retombées pratiques. L'iISS Forte présentant un compromis intéressant entre ISS et iISS, il semblerait opportun de développer de tels outils pour cette

propriété. L'utilisation de fonctions de Lyapunov contrôlées pour l'iISS Forte, semble en particulier une direction de recherche prometteuse.

4.1.2.2 Commande saturée

Dans certaines situations, nous pouvons nous attendre à ce qu'en cas de saturation de l'actionneur employé, la loi de commande ne permette plus de garantir la bornitude des solutions en réponse à toute perturbation bornée. La robustesse ne serait alors garantie que pour des perturbations d'amplitude suffisamment faible, ce qui suggère la possibilité d'une iISS Forte telle que décrite en Section 1.1.2.

Un tel résultat ne saurait toutefois être général : bien souvent, la saturation d'une commande ISS-stabilisante ne permet même pas de garantir la stabilité globale asymptotique en l'absence de perturbations (0-GAS). Il s'agira donc d'imposer des conditions structurelles supplémentaires sur le système nominal. La littérature sur la commande saturée, en particulier [Lin and Sontag, 1991, Sussmann et al., 1993, Teel, 1996, Liu et al., 1996, Mazenc and Praly, 1996, Liberzon, 2002, Angeli et al., 2005, Tarbouriech et al., 2006], ou encore [Dai et al., 2009], pourra être de grande inspiration à cette fin.

4.1.3 iISS Forte et systèmes commutés

Il est bien connu que la commutation entre plusieurs dynamiques asymptotiquement stables peut engendrer l'instabilité, même dans le cas LTI [Liberzon, 2003b]. De nombreux travaux ont cherché à établir des conditions sous lesquelles la stabilité de systèmes commutés est garantie : voir par exemple [Branicky, 1998, Hespanha and Morse, 1999, Liberzon and Morse, 1999, Hespanha, 2004, Shorten. et al., 2007, Balde et al., 2009]. Deux de ces conditions peuvent sans doute tirer profit de la notion d'iISS Forte présentée en Section 1.1.2.

4.1.3.1 Systèmes commutés à structures triangulaires

La première concerne les commutations entre des systèmes non-linéaires présentant une structure triangulaire (cascade). Pour cette classe de systèmes commutés, une condition suffisante a été proposée dans [Angeli and Liberzon, 2000] pour garantir la stabilité asymptotique quelque soit le signal de commutations. Ce travail, aisément démontrable dans le cas LTI, exploite la propriété d'ISS de chacun des éléments constitutifs de la structure triangulaire et plus particulièrement la préservation de l'ISS sous l'interconnexion en cascade [Sontag and Teel, 1995]. Au vu du Théorème 1.21, il semble que l'iISS Forte puisse avantageusement remplacer l'hypothèse d'ISS, et ainsi étendre considérablement la classe de systèmes commutés couverte par l'approche développée dans [Angeli and Liberzon, 2000]. Les résultats rappelés en Section 1.3.2 sur le comportement des systèmes iISS cascade pourraient également être exploités, au prix d'hypothèses supplémentaires sur les taux de dissipation associés.

4.1.3.2 Temporisation (*dwell time*) dépendant de l'état

La notion d'iISS Forte peut également être d'intérêt pour simplifier l'analyse conduite dans [Persis et al., 2003]. Ce travail s'intéresse au comportement de certains systèmes non-linéaires commutés en présence de signaux de perturbation exogènes. Il suppose pour cela que chaque dynamique impliquée est iISS, et propose des conditions sur la durée

minimale entre deux commutations pour garantir une certaine robustesse du système commuté. Cette durée, appelée temporisation ou *dwell time* dans la littérature des systèmes commutés, peut dépendre de l'état. L'iISS Forte garantissant généralement des propriétés de robustesse plus importantes que l'iISS, il serait intéressant de mener une analyse similaire à [Persis et al., 2003] dans le cas où chaque sous-système est Fortement iISS. Une telle analyse conduirait en outre à une extension de certains des résultats présentés dans [Vu et al., 2007] où le comportement de dynamiques ISS commutées est analysé sous des hypothèses de *dwell time* également.

4.1.4 Aspects stochastiques de l'iISS

Nous sommes actuellement en cours de préparation d'un article traitant de la robustesse de systèmes LTI à commutations, lorsque ces dernières sont gérées par un processus stochastique. Ce travail résulte d'une collaboration avec L. Greco et E. Panteley du L2S. La classe de systèmes étudiés inclut les chaînes de Markov ainsi que les processus de commutations identiquement distribués. Ces travaux sont motivés par des applications liées au partage de ressources (telles que le temps de calcul ou la bande passante) pour certains systèmes de commande. Un exemple typique de ces applications est la commande "anytime" qui vise à élaborer un signal de commande plus ou moins performant selon le temps de calcul disponible [Greco et al., 2010]. Le signal de commande ainsi généré est donc constitué d'une séquence commutée de différentes lois de commande, ce qui soulève des questions de performance voire de stabilité du système bouclé [Liberzon, 2003b], d'autant plus en présence de perturbations exogènes.

L'objet de ces travaux est de faire un lien, pour cette classe de systèmes, entre des notions de stabilité et de robustesse existantes telles que la stabilité δ -moment et l'iISS presque sûre [Fang et al., 1994], ainsi que de proposer des conditions suffisantes pour tester ces propriétés en pratique. Cette ligne de recherche constitue ainsi un lien naturel entre les Chapitres 1 et 3.

4.2 Analyse et commande de la synchronisation pour des applications aux neurosciences

Cette section présente quelques directions de recherche envisagées sur le thème de l'interaction entre Automatique et Neurosciences. Ils s'inscrivent dans la continuité des résultats présentés dans le Chapitre 2.

4.2.1 Etude comparative sur la DBS en boucle fermée

Depuis son invention au début des années 90 [Benabid et al., 1991], la stimulation cérébrale profonde a fait l'objet de nombreuses études et tentatives d'optimisation. Ces avancées peuvent être regroupées en deux catégories, suivant que le signal de stimulation exploite ou non des mesures sur l'état du patient. W. Pasillas-Lépine (CNRS - L2S) et moi-même sommes actuellement en préparation d'un article récapitulant ces diverses approches, en collaboration avec C. Hammond (INMED - INSERM) et R. Carron (CHU de la Timone, Marseille). Notre contribution concerne principalement l'étude comparative des approches en boucle fermée. Celles-ci peuvent elles-mêmes être classées en trois catégories, suivant le type de signal de stimulation élaboré :

- *Stimulation adaptative ou à la demande.* Cette approche consiste à adapter automatiquement les paramètres de la DBS classique (fréquence, amplitude, rapport cyclique), ou de détecter automatiquement une situation pathologique et activer le signal DBS en conséquence. La forme des signaux ainsi générés ne diffère donc pas de celle de la DBS boucle ouverte employée actuellement. Cette approche a été développée dans [Marceglia et al., 2007, Behrend et al., 2009, Graupe et al., 2010, Rosin et al., 2011, Santaniello et al., 2011].
- *Retards et stimulation multi-site.* Cette classe de DBS boucle fermée exploite une temporisation du signal de stimulation. Elle est généralement couplée à une stimulation multi-site, c'est-à-dire basée sur plusieurs électrodes. Les références suivantes développent une telle approche : [Batista et al., 2010, Rosenblum et al., 2006, Hauptmann et al., 2005b, Hauptmann et al., 2005a, Omel'chenko et al., 2008] ainsi que [Wagenaar et al., 2005, Lysyansky et al., 2011].
- *Commande proportionnelle ou dynamique.* Cette dernière catégorie se base sur des mesures sur champ moyen local pour élaborer le signal de stimulation. Le signal ainsi généré peut être soit proportionnel au champ mesuré (comme l'approche développée en Section 2.1), soit impliquer des aspects dynamiques. De telles approches ont été développées dans [Liu et al., 2010, Liu et al., 2011, Pyragas et al., 2007] ainsi que [Tukhlina et al., 2007, Luo et al., 2009, Franci et al., 2011b, Franci et al., 2012a].

Cette étude bibliographique permettra non seulement de répertorier les diverses approches envisagées, mais également d'identifier leur fondations théoriques ainsi que leurs éventuelles validations expérimentales.

4.2.2 Origine des oscillations cérébrales pathologiques

Comme nous l'avons évoqué dans la Section 2.1, la maladie de Parkinson est caractérisée par des oscillations intempestives de certains ganglions de la base aux fréquences β (15-30Hz). Les causes de ces oscillations sont encore méconnues. Deux théories dominent toutefois. La première explique ces oscillations pathologiques par le rôle pacemaker joué par l'ensemble STN-GPe [Plenz and Kital, 1999, Terman et al., 2002]. L'autre donne une origine corticale à ces oscillations [Yamawaki et al., 2008]. Plus récemment, deux autres explications ont été proposées : dans [Ammari et al., 2011], les auteurs évoquent une génération de bursts endogène au sein du noyau STN, tandis que [McCarthy et al., 2011] propose une origine striatale à ces oscillations.

Nous sommes convaincus que les outils de l'Automatique peuvent contribuer à comprendre les mécanismes impliqués. Pour deux des hypothèses citées ci-dessus, nous détaillons l'approche envisagée.

4.2.2.1 Rôle pacemaker de l'ensemble STN-GPe

La génération d'oscillations pathologiques aux fréquences β par l'interaction entre le STN et le GPe a été étudiée de manière analytique dans [Holgado et al., 2010]. Ce travail utilise un modèle scalaire régissant le taux de décharges neuronales dans chacun de ces noyaux [Wilson and Cowan, 1972]. Ces modèles sont caractérisés par une sigmoïde caractérisant le taux d'activation statique, ainsi que par des retards entre les deux populations et au sein de chaque population. Par le biais d'une linéarisation, les auteurs proposent des conditions suffisantes sur ces paramètres pour l'apparition d'oscillations pathologiques. Ce résultat analytique est en accord avec les données expérimentales. Ce travail a ensuite été

étendu dans [Pasillas-Lépine, 2012] en considérant plus finement le rôle des retards et des non-linéarités impliqués.

Nous avons récemment entrepris avec W. Pasillas-Lépine, E. Panteley et le post-doctorant que nous co-encadrons I. Haidar, d'étendre cette analyse en considérant le rôle possible d'un autre noyau qui est en étroite interaction avec l'ensemble STN-GPe, à savoir le PPN (noyau pedunculopontin). Cette analyse requiert une analyse multivariable impliquant plusieurs retards. Nos premiers résultats identifient le rôle de chacun de ces noyaux dans l'apparition d'oscillations pathologiques et montrent la possibilité d'en extraire des critères analytiques.

4.2.2.2 Origine striatale

La possibilité que les oscillations pathologiques β naissent de manière endogène au sein du striatum pour ensuite se propager à d'autres noyaux a été proposée dans [McCarthy et al., 2011]. Nous pensons que l'utilisation d'un modèle du taux de décharges neuronales de certains ganglions de la base permettrait également de tester cette hypothèse. Une telle étude se baserait toutefois sur des outils mathématiques très différents de ceux évoqués ci-dessus. Une possible stratégie est en effet d'exploiter la notion de convergence [Pavlov et al., 2006]. Cette propriété présentée par certains systèmes non-linéaires garantit en effet qu'à toute entrée périodique, correspond un état asymptotique périodique et de même période. Ainsi, en identifiant les paramètres sous lesquels l'ensemble STN-GPe est convergent, nous obtiendrons de conditions suffisantes pour que des oscillations striatales aux fréquences β se traduisent par des oscillations similaires dans le STN-GPe.

4.2.3 Données de l'optogénétique

L'optogénétique consiste à rendre sensible une population de neurones ciblés à la stimulation lumineuse en transférant des gènes rendant certains canaux ioniques photosensibles. Cette technique récente [Boyden et al., 2005] permet des résultats expérimentaux d'une précision inédite. Sa spécificité spatiotemporelle sans précédent en fait un outil révolutionnaire pour les neurosciences [Pastrana, 2010], et a déjà contribué à la compréhension du cerveau de rongeurs [Cardin et al., 2009, Sohal et al., 2009, Desai et al., 2011], notamment pour la maladie de Parkinson [Gradinaru et al., 2009]. Son utilisation sur des primates a également été initiée [Diester et al., 2011, Han et al., 2011] mais se cantonne pour le moment à des investigations corticales.

L'équipe de S. Palfi (neurochirurgien et neurophysiologiste au CEA - Hospital H. Mondor de Créteil), avec qui nous collaborons, a récemment obtenu les premiers résultats connus sur la photostimulation des ganglions de la base de primates (article en cours de préparation). Nous comptons intensifier notre collaboration avec cette équipe, notamment par l'intermédiaire de la soumission d'un projet ANR. Cette collaboration visera à exploiter ces données de l'optogénétique pour affiner les modèles dynamiques des ganglions de la base et ainsi analyser plus finement les mécanismes impliqués au moyen d'outils des systèmes dynamiques. Cette compréhension permettra, à terme, de développer des signaux DBS plus adaptés.

Une partie de ces recherches sera menée par D. Da Silva, qui débutera sa thèse sous ma direction en octobre 2012 et qui sera co-encadrée par W. Pasillas-Lépine. Parmi les travaux à mener, nous pouvons citer la modélisation des neurones photosensibles sous l'action d'une impulsion lumineuse [Grossman et al., 2011], le développement d'un modèle de population

pour un ensemble de tels neurones, le développement d'une interface expérimentale permettant simultanément la photostimulation et la mesure des champs moyens et des réponses neuronales individuelles, l'identification expérimentale des paramètres impliqués dans les modèles développés, l'analyse par simulation des ganglions de la base ainsi modélisés, leur analyse mathématique et le test de signaux de stimulation innovants sur ces modèles, puis *in vivo*.

4.3 Systèmes commandés par réseaux

Nous listons maintenant les travaux que nous comptons mener dans le cadre des systèmes commandés par réseau, que nous avons traités dans le Chapitre 3. Ces perspectives concernent à la fois la quantification des données mesurées, leur échantillonnage et la distribution physique des capteurs.

4.3.1 Extension et application de la commande basées sur les paquets

Les résultats que nous avons présenté en Section 3.1 exploitent la taille relativement grande des paquets transmis sur le réseau numérique pour transmettre des signaux prédictifs de la commande à appliquer. Ceci permet d'augmenter le temps maximal autorisé entre deux transmissions (MATI), ainsi que les retards de transmissions tolérables (MAD).

Ces travaux supposent pour le moment une mesure complète de l'état du système à commander. Ils se cantonnent en outre à des lois de commande nominales statiques, c'est-à-dire ne faisant intervenir que la valeur instantanée de l'état. En collaboration avec L. Greco (maitre de conférences au L2S), A. Bicchi (professeur à l'université de Pise), S. Falasca (doctorant à l'université de Pise) et M. Gamba (étudiant de M2 à l'université de Pise), nous avons récemment entrepris de tenter de dépasser ces deux limitations. La difficulté principale réside dans la mise à jour de l'estimée de l'état élaborée par le contrôleur de manière à préserver une représentation fidèle de l'état réel du système, alors même que les délais de transmission ne sont pas connus. Des résultats préliminaires ont été présentés dans [Falasca et al., 2012] mais ne permettent pas, pour le moment, de s'affranchir totalement des mesures sur l'état complet.

En parallèle, nous avons débuté l'implémentation pratique des lois de commande prédictives développées en Section 3.1 sur un pendule de Furuta [Furuta et al., 1991] disponible à l'université de Pise. Cette implémentation est principalement conduite par S. Falasca et M. Gamba.

4.3.2 Utilisation de bloqueurs généralisés pour les NCS

Toujours dans le cadre des travaux présentés en Section 3.1, le signal prédictif est pour le moment supposé être codé par un échantillonnage à fréquence relativement élevée, ce qui n'est pas optimal d'un point de vue économie de bande passante.

Une alternative à ce codage est d'exploiter des bloqueurs généralisés. Ces fonctions élémentaires, qui dépendent de la dynamique du système à commander, sont présentées dans un contexte LTI dans [Kabamba, 1987]. Le signal prédictif pourrait alors être exprimé comme une pondération de ces fonctions élémentaires. Il suffirait donc de ne transmettre que la valeur de ces gains de pondération pour pouvoir reconstituer le signal de commande prédictif.

Ces travaux seront menés avec L. Greco, qui est l'initiateur de cette stratégie.

4.3.3 L'iISS Forte pour la commande quantifiée et échantillonnée

Nous avons déjà évoqué la possibilité d'utiliser des notions d'ISS stochastiques pour l'étude de la robustesse de stratégies de commande "anytime" (voir Section 4.1.4). Un autre lien naturel entre les résultats présentés dans les Chapitres 1 et 3 est l'exploitation de la notion d'iISS Forte pour la commande exploitant des mesures quantifiées et échantillonnées. En effet, comme nous l'avons vu en Section 3.2, les stratégies de commande à quantification dynamique reposent sur des hypothèses de robustesse relativement fortes vis-à-vis des erreurs de mesure. La procédure employée dans [Liberzon and Hespanha, 2005], détaillée en Section 3.2, requiert en particulier l'ISS vis-à-vis des erreurs de mesure, et donc la bornitude des solutions quelque soit l'erreur de mesure (bornée) commise. Une tentative de réduire les hypothèses de robustesse sur le système nominal a été proposée dans [de Persis, 2006], où seule l'iISS est supposée. Ce résultat ne conduit toutefois qu'à une stabilisation semiglobale, et les paramètres impliqués dépendent de la taille de l'ensemble compact de conditions initiales considérées.

Puisque l'iISS Forte, présentée dans 1.1.2, assure la bornitude vis-à-vis de signaux d'amplitude suffisamment faible, toute procédure de codage-décodage garantissant une erreur de quantification (asymptotique) inférieure à ce seuil semble pouvoir garantir la stabilité globale asymptotique du système bouclé si le système nominal est Fortement iISS vis-à-vis d'erreurs de mesure. Cette hypothèse, nettement moins conservatrice que l'ISS, permettrait ainsi des conclusions similaires à l'approche développée dans [Liberzon and Hespanha, 2005].

Cette observation pourrait également s'étendre aux systèmes échantillonnés, notamment lorsque l'échantillonnage est déclenché par événements (*event-triggered sampling*) plutôt que selon une période spécifiée : voir par exemple [Donkers, 2011, Seuret and Prieur, 2011, Postoyan et al., 2011, Yu and Antsaklis, 2011, Anta and Tabuada, 2010]. Cette technique permet en particulier de choisir les instants d'échantillonnage suivant un critère donné ; il est ainsi envisageable d'imposer que l'erreur induite par l'échantillonnage ne dépasse jamais le seuil d'erreur de mesure maximale pouvant être tolérée par le système Fortement iISS.

Bibliographie

- [Acebrón et al., 2005] Acebrón, J., Bonilla, L., Vicente, C., Ritort, F., and Spigler, R. (2005). The Kuramoto model : A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of modern physics*, 77 :137–185.
- [Aeyels and Rogge, 2004] Aeyels, D. and Rogge, J. (2004). Existence of partial entrainment and stability of phase locking behavior of coupled oscillators. *Progress of Theoretical Physics*, 112(6) :921–942.
- [Ahn, 2010] Ahn, C. K. (2010). Chaos Synchronization of Nonlinear Bloch Equations Based on Input-to-State Stable Control. *Commun. Theor. Phys.*, 53 :308–312.
- [Alamir, 2002] Alamir, M. (2002). On friction compensation without friction model. *IFAC World Congress*.
- [Ammari et al., 2011] Ammari, R., Bioulac, B., Garcia, L., and Hammond, C. (2011). The subthalamic nucleus becomes a generator of bursts in the dopamine-depleted state. Its high frequency stimulation dramatically weakens transmission to the globus pallidus. *Frontiers in Systems Neuroscience*, 5.
- [Angeli, 1999] Angeli, D. (1999). Input-to-State Stability of PD-controlled robotic systems. *Automatica*, 35 :1285–1290.
- [Angeli and Astolfi, 2007] Angeli, D. and Astolfi, A. (2007). A tight small-gain theorem for not necessarily ISS systems. *Systems & Control Letters*, 56(1) :87–91.
- [Angeli et al., 2005] Angeli, D., Chitour, Y., and Marconi, L. (2005). Robust stabilization via saturated feedback. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 50(12) :1997–2014.
- [Angeli and Liberzon, 2000] Angeli, D. and Liberzon, D. (2000). A note on uniform global asymptotic stability of nonlinear switched systems in triangular form. In *In Proc. 14th Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*.
- [Angeli and Nešić, 2001] Angeli, D. and Nešić, D. (2001). Power characterizations of ISS and integral ISS. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 46 :1298–1303.
- [Angeli and Sontag, 1999] Angeli, D. and Sontag, E. (1999). Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterizations. *Syst. & Contr. Letters*, 38 :209–217.
- [Angeli et al., 2000a] Angeli, D., Sontag, E., and Wang, Y. (2000a). A characterization of integral input to state stability. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 45 :1082–1097.
- [Angeli et al., 2000b] Angeli, D., Sontag, E., and Wang, Y. (2000b). Further equivalences and semiglobal versions of integral Input-to-State Stability. *Dynamics and Control Journal*, 10 :127–149.
- [Anta and Tabuada, 2010] Anta, A. and Tabuada, P. (2010). To sample or not to sample : self-triggered control for nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 55(9) :2030–2042.
-

- [Antsaklis and Baillieul, 2004] Antsaklis, P. and Baillieul, J. (2004). Special issue on networked control systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 49(9) :2030–2042.
- [Antsaklis and Baillieul, 2007] Antsaklis, P. and Baillieul, J. (2007). Special issue on technology of networked control systems. *Proc. of IEEE*, 95(1).
- [Arcak et al., 2002] Arcak, M., Angeli, D., and Sontag, E. (2002). A unifying integral ISS framework for stability of nonlinear cascades. *SIAM J. on Contr. and Opt.*, 40 :888–1904.
- [Arcak and Sontag, 2006] Arcak, M. and Sontag, E. (2006). Diagonal stability of a class of cyclic systems and its connection with the secant criterion. *Automatica*, 42(9) :1531–1537.
- [Arcak and Sontag, 2008] Arcak, M. and Sontag, E. (2008). A passivity-based stability criterion for a class of biochemical reaction networks. *Mathematical biosciences and engineering*, 5(1) :1.
- [Assisi et al., 2005] Assisi, C., Jirsa, V., and Kelso, J. S. (2005). Synchrony and clustering in heterogeneous networks with global coupling and parameter dispersion. *Physical Review Letters*, 94(1).
- [Balde et al., 2009] Balde, M., Boscaïn, U., and Mason, P. (2009). A note on stability conditions for planar switched systems. *Int. J. of Contr.*, 82(10) :1882–1888.
- [Batista et al., 2010] Batista, C., Lopes, S., Viana, R., and Batista, A. (2010). Delayed feedback control of bursting synchronization in a scale-free neuronal network. *Neural Networks*, 23(1) :114–124.
- [Behrend et al., 2009] Behrend, C., Cassim, S., Pallone, M., Daubenspeck, J., Hartov, A., Roberts, D., and Leiter, J. (2009). Toward feedback controlled deep brain stimulation : dynamics of glutamate release in the subthalamic nucleus in rats. *Journal of neuroscience methods*, 180(2) :278–289.
- [Belk et al., 1997] Belk, C., Robinson, J., Alexander, M., Cooke, W., and Pavelitz, S. (1997). *Meteoroids and orbital debris : effects on spacecraft*, volume 1408. National Aeronautics and Space Administration, Marshall Space Flight Center.
- [Bemporad, 1998] Bemporad, A. (1998). Predictive control of teleoperated constrained systems with unbounded communication delays. In *Proc. 37th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 2133–2138, Tampa, USA.
- [Benabid et al., 1991] Benabid, A., Pollak, P., Gervason, C., Hoffmann, D., Gao, D., Hommel, M., Perret, J., and de Rougemont, J. (1991). Long-term suppression of tremor by chronic stimulation of the ventral intermediate thalamic nucleus. *The Lancet*, 337 :403–406.
- [Berghuis, 1993] Berghuis, H. (1993). *Model based robot control : from theory to practice*. PhD thesis, University of Twente, The Netherlands.
- [Blekhman et al., 1997] Blekhman, I., Fradkov, A., Nijmeijer, H., and Pogromsky, A. (1997). On self synchronization and controlled synchronization. *Syst. & Contr. Letters*, 31 :299–305.
- [Bondy and Murty, 1976] Bondy, J. and Murty, U. (1976). *Graph theory with applications*, volume 290. Macmillan London.
- [Boyden et al., 2005] Boyden, E., Zhang, F., Bamberg, E., Nagel, G., and Deisseroth, K. (2005). Millisecond-timescale, genetically targeted optical control of neural activity. *Nature Neuroscience*, 8(9) :1263–1268.
-

-
- [Branicky, 1998] Branicky, M. (1998). Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 43(4) :475–482.
- [Branicky et al., 2000] Branicky, M., Phillips, S., and Zhang, W. (2000). Stability of Networked Control Systems : Explicit Analysis of Delay. In *Proc. American Control Conference*, pages 2352–2357, Chicago, USA.
- [Brown et al., 2003] Brown, E., Holmes, P., and Moehlis, J. (2003). Globally coupled oscillator networks. In *Perspectives and problems in nonlinear science : A celebratory volume in honor of Larry Sirovich*, pages 183–215.
- [Bushnell, 2001] Bushnell, L. (2001). Special issue on networks and control. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 21(1).
- [Cai and Teel, 2005] Cai, C. and Teel, A. (2005). Results on Input-to-State Stability for hybrid systems. In *Proc. 44th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 5403 – 5408, Seville, Spain.
- [Canudas de Wit et al., 1995] Canudas de Wit, C., Olsson, H., Åström, K., and Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 40(3) :419–426.
- [Cardin et al., 2009] Cardin, J., Carlén, M., Meletis, K., Knoblich, U., Zhang, F., Deisseroth, K., Tsai, L.-H., and Moore, C. (2009). Driving fast-spiking cells induces gamma rhythm and controls sensory responses. *Nature*, pages 1–6.
- [Chaillet, 2006] Chaillet, A. (2006). *On stability and robustness of nonlinear systems – Applications to cascaded systems*. PhD thesis, Université Paris Sud - LSS - Supélec, Orsay, France.
- [Chaillet and Angeli, 2006] Chaillet, A. and Angeli, D. (2006). Integral Input to State Stability for cascaded systems. In *Int. Symp. on Math. Theory on Networks and Systems (MTNS)*, Kyoto, Japan.
- [Chaillet and Angeli, 2008] Chaillet, A. and Angeli, D. (2008). Integral Input-to-State Stable systems in cascade. *Syst. & Contr. Letters*, 57(7) :519–527.
- [Chaillet et al., 2012] Chaillet, A., Angeli, D., and Ito, H. (2012). Strong iISS : combination of iISS and ISS with respect to small inputs. In *To appear in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Hawaii, USA.
- [Chaillet and Bicchi, 2008] Chaillet, A. and Bicchi, A. (2008). Delay compensation in packet-switching networked controlled systems. In *Proc. 47th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 3620–3625, Cancun, Mexico.
- [Chaillet et al., 2007a] Chaillet, A., Chitour, Y., Loría, A., and Sigalotti, M. (2007a). Towards uniform linear time-invariant stabilization of systems with persistency of excitation. In *Proc. 46th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 6394–6399, New Orleans, USA.
- [Chaillet et al., 2007b] Chaillet, A., Chitour, Y., Loría, A., and Sigalotti, M. (2007b). Uniform stabilization for linear systems with persistency of excitation. the neutrally stable and the double integrator cases. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 20(2) :135–156.
- [Chaillet and Ito, 2011] Chaillet, A. and Ito, H. (2011). A sensitivity trade-off arising in small-gain design for nonlinear systems : an iISS framework. In *Proc. 50th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 6066–6071, Orlando, USA.
-

- [Chaillet and Loría, 2005] Chaillet, A. and Loría, A. (2005). Uniform semiglobal practical asymptotic stability for nonlinear time-varying systems in cascade. In *Proc. 16th. IFAC World Congress*, Praha, Tcheck Republic.
- [Chaillet and Loría, 2006a] Chaillet, A. and Loría, A. (2006a). A converse Lyapunov theorem for semiglobal practical asymptotic stability and application to cascades-based control. In *Proc. 45th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 4259–4264, San Diego, USA.
- [Chaillet and Loría, 2006b] Chaillet, A. and Loría, A. (2006b). Necessary and sufficient conditions for uniform semiglobal practical asymptotic stability : Application to cascaded systems. *Automatica*, 42(11) :1899–1906.
- [Chaillet and Loría, 2006c] Chaillet, A. and Loría, A. (2006c). Uniform global practical asymptotic stability for non-autonomous cascaded systems. *European Journal of Control*, 12(6) :595–605.
- [Chaillet and Loría, 2006d] Chaillet, A. and Loría, A. (2006d). Uniform global practical stability for non-autonomous cascaded systems. In *Int. Symp. on Math. Theory on Networks and Systems (MTNS)*, Kyoto, Japan.
- [Chaillet and Loría, 2008] Chaillet, A. and Loría, A. (2008). Uniform semiglobal practical asymptotic stability for non-autonomous cascaded systems and applications. *Automatica*, 44(2) :337–347.
- [Chaillet and Loría, 2009] Chaillet, A. and Loría, A. (2009). On the robustness analysis of triangular nonlinear systems : iISS and practical stability. In *IEEE Int. Multi-Conf. on Systems, Signals and Devices, Conf. on Systems, Analysis and Automatic Control*, pages 1–10, Djerba, Tunisia.
- [Chaillet et al., 2006] Chaillet, A., Loría, A., and Kelly, R. (2006). Robustness of PID controlled manipulators with respect to external disturbances. In *Proc. 45th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 2949–2954, San Diego, USA.
- [Chaillet et al., 2007c] Chaillet, A., Loría, A., and Kelly, R. (2007c). Robustness of PID-controlled manipulators vis a vis actuator dynamics and external disturbances. *European Journal of Control*, 13 :563–582.
- [Chaillet and Panteley, 2006] Chaillet, A. and Panteley, E. (2006). Stability of sets for nonlinear systems in cascade. In *Int. Symp. on Math. Theory on Networks and Systems (MTNS)*, Kyoto, Japan.
- [Chaves, 2005] Chaves, M. (2005). Input-to-State Stability of Rate-Controlled Biochemical Networks. *SIAM J. on Contr. and Opt.*, 44(2) :704.
- [Chen and Yang, 2003] Chen, G. and Yang, L. (2003). Chaotifying a continuous-time system near a stable limit cycle. *Chaos, Solitons and Fractals*, 15(2) :245–253.
- [Choi and Chung, 2004] Choi, Y. and Chung, W. (2004). *PID trajectory tracking control for mechanical systems*. Springer.
- [Chopra and Spong, 2009] Chopra, N. and Spong, M. (2009). On exponential synchronization of Kuramoto oscillators. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 54(2) :353–357.
- [Cloosterman et al., 2010] Cloosterman, M., Hetel, L., van de Wouw, N., Heemels, W., Daafouz, J., and Nijmeijer, H. (2010). Controller synthesis for networked control systems. *Automatica*, 46(10) :1584–1594.
- [Cumin and Unsworth, 2007] Cumin, D. and Unsworth, C. (2007). Generalising the Kuramoto model for the study of neuronal synchronisation in the brain. *Physica D*, 226(2) :181–196.
-

-
- [Dai et al., 2009] Dai, D., Hu, T., Teel, A., and Zaccarian, L. (2009). Output feedback design for saturated linear plants using deadzone loops. *Automatica*, 45(12) :2917–2924.
- [Dashkovskiy et al., 2009] Dashkovskiy, S., Görges, M., and Naujok, L. (2009). Local Input-to-State Stability of production networks. In *Proc. of the Second International Conference LDIC*, pages 1–10.
- [Dashkovskiy et al., 2010] Dashkovskiy, S., Rueffer, B., and Wirth, F. (2010). Small gain theorems for large scale systems and construction of ISS Lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(6) :4089–4118.
- [de la Pena and Christofides, 2008] de la Pena, D. M. and Christofides, P. (2008). Lyapunov-based model predictive control of nonlinear systems subject to data losses. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 53(9) :2076–2089.
- [de León Morales et al., 2005] de León Morales, J., Chaillet, A., Loría, A., and Besancon, G. (2005). Output feedback control via adaptive observers with persistency of excitation. In *Proc. 16th. IFAC World Congress*, Praha, Tcheck Republic.
- [de Persis, 2006] de Persis, C. (2006). Nonlinear stabilizability via encoded feedback : The case of integral ISS systems. *Automatica*, 42(10) :1813–1816.
- [de Persis and Isidori, 2004] de Persis, C. and Isidori, A. (2004). Stabilizability by state feedback implies stabilizability by encoded state feedback. *Syst. & Contr. Letters*, 53 :249–258.
- [de Queiroz et al., 2000] de Queiroz, M., Kapila, V., and Yan, Q. (2000). Adaptive nonlinear control of multiple spacecraft formation flying. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23(3) :385–390.
- [Desai et al., 2011] Desai, M., Kahn, I., Knoblich, U., Bernstein, J., Atallah, H., Yang, A., Kopell, N., Buckner, R., Graybiel, A., Moore, C., and Boyden, E. (2011). Mapping brain networks in awake mice using combined optical neural control and fMRI. *Journal of Neurophysiology*, 105(3) :1393–1405.
- [Diester et al., 2011] Diester, I., Kaufman, M., Mogri, M., and Pashaie, R. (2011). An optogenetic toolbox designed for primates. *Nature Neuroscience*.
- [Donkers, 2011] Donkers, M. (2011). *Networked and event-triggered control systems*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
- [Dörfler and Bullo, 2011] Dörfler, F. and Bullo, F. (2011). Synchronization and transient stability in power networks and non-uniform Kuramoto oscillators. *IEEE Trans. on Automat. Contr.* (submitted).
- [Ermentrout, 1990] Ermentrout, G. (1990). Oscillator death in populations of “all to all” coupled nonlinear oscillators. *Phys. D*, 41(2) :219–231.
- [Ermentrout and Kopell, 1990] Ermentrout, G. and Kopell, N. (1990). Oscillator death in systems of coupled neural oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 50(1) :125–146.
- [Ermentrout and Terman, 2010] Ermentrout, G. and Terman, D. (2010). *Mathematical Foundations of Neuroscience*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.
- [Falasca et al., 2012] Falasca, S., Gamba, M., Fabbri, T., Fenucci, D., Greco, L., Chaillet, A., and Bicchi, A. (2012). An output-feedback dynamic approach for the control over packet-switching networks. In *HYCON2 Workshop*, Lille.
- [Fang et al., 1994] Fang, Y., Loparo, K., and Feng, X. (1994). Almost sure and δ -moment stability of jump linear systems. *Int. J. of Contr.*, 59(5) :1281–1307.
-

- [Findeisen and Varutti, 2009] Findeisen, R. and Varutti, P. (2009). Stabilizing nonlinear predictive control over nondeterministic communication networks. In *Nonlinear Model Predictive Control, Springer LNCIS*, pages 167–179.
- [Fradkov, 2007] Fradkov, A. (2007). *Cybernetical physics. From control of chaos to quantum control*. Springer : Complexity. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [Franci, 2012] Franci, A. (2012). *Pathological synchronization in neuronal populations : a control theoretic perspective*. PhD thesis, Univ. Paris Sud 11, Orsay, France.
- [Franci and Chaillet, 2010a] Franci, A. and Chaillet, A. (2010a). Le modèle de Kuramoto sous retour du champ moyen réel n’admet pas de solutions à phases verrouillées. In *Proc. Conf. Int. Francophone de l’Automatique*, Nancy.
- [Franci and Chaillet, 2010b] Franci, A. and Chaillet, A. (2010b). Quantized Control of Nonlinear Systems : a Robust Approach. *Int. Journal of Control*, 83(2) :2453–2462.
- [Franci and Chaillet, 2010c] Franci, A. and Chaillet, A. (2010c). A robust limited-information feedback for a class of uncertain nonlinear systems. In *ICINCO*, Madeira, Portugal.
- [Franci et al., 2011a] Franci, A., Chaillet, A., and Bezzaoucha, S. (2011a). Toward oscillations inhibition by mean-field feedback in Kuramoto oscillators. In *Proc. IFAC World Congress*, pages 2511–2516, Milan, Italy.
- [Franci et al., 2012a] Franci, A., Chaillet, A., Panteley, E., and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2012a). Desynchronization and inhibition of all-to-all interconnected Kuramoto oscillators by scalar mean-field feedback. *MCSS - Special Issue on large-scale nonlinear systems*, 24(1-2) :169–217.
- [Franci et al., 2010] Franci, A., Chaillet, A., and Pasillas-Lépine, W. (2010). Robustness of phase-locking between Kuramoto oscillators to time-varying inputs. In *Proc. 49th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 1587–1592, Atlanta, USA.
- [Franci et al., 2011b] Franci, A., Chaillet, A., and Pasillas-Lépine, W. (2011b). Existence and robustness of phase-locking in coupled Kuramoto oscillators under mean-field feedback. *Automatica - Special Issue on Biology Systems*, 6 :1193–1202.
- [Franci et al., 2012b] Franci, A., Chaillet, A., Pasillas-Lépine, W., Panteley, E., and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2012b). A proportional mean-field feedback for the desynchronization and inhibition of Kuramoto oscillators. In *Proc. of Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems (ACODS)*, Bangalore, India.
- [Franci et al., 2011c] Franci, A., Panteley, E., Chaillet, A., and Lamnabhi-Lagarrigue, F. (2011c). Desynchronization of coupled phase oscillators, with application to the Kuramoto system under mean-field feedback. In *Proc. 50th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 6748–6753, Orlando, USA.
- [Franci et al., 2011d] Franci, A., Pasillas-Lépine, W., and Chaillet, A. (2011d). Existence of phase-locking in coupled Kuramoto oscillators under real mean-field feedback with applications to Deep Brain Stimulation. In *Proc. IFAC World Congress*, Milan, Italy.
- [Franci et al., 2012c] Franci, A., Pasillas-Lépine, W., and Chaillet, A. (2012c). Validity of the phase approximation for coupled nonlinear oscillators : a case study. In *To appear in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Hawaii, USA.
- [Franci et al., 2011e] Franci, A., Scardovi, L., and Chaillet, A. (2011e). An Input-Output approach to the robust synchronization of dynamical systems with an application to
-

-
- the Hindmarsh-Rose neuronal model. *Proc. 50th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 6504–6509.
- [Freeman and Kokotovic, 1993] Freeman, R. and Kokotovic, P. (1993). Global robustness of nonlinear systems to state measurement disturbances. In *Proc. 32nd. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 1507–1512.
- [Freeman and Kokotović, 1996] Freeman, R. and Kokotović, P. (1996). *Robust Nonlinear control design : State-space and Lyapunov control techniques*. Birkhäuser, Boston.
- [Furuta et al., 1991] Furuta, K., Yamakita, M., Kobayashi, S., and Nishimura, M. (1991). A new inverted pendulum apparatus for education. In *2nd IFAC Symposium on Advances in Education*, pages 191–196.
- [Gradinaru et al., 2009] Gradinaru, V., Mogri, M., Thompson, K., Henderson, J., and Deisseroth, K. (2009). Optical deconstruction of parkinsonian neural circuitry. *Science*, 324(5925) :354.
- [Graupe et al., 2010] Graupe, D., Basu, I., Tuninetti, D., Vannemreddy, P., and Slavin, K. (2010). Adaptively controlling deep brain stimulation in essential tremor patient via surface electromyography. *Neurological research*, 32(9) :899–904.
- [Greco et al., 2011] Greco, L., Chaillet, A., and Bicchi, A. (2011). Exploiting packet size in uncertain nonlinear networked control systems. In *Proc. IFAC World Congress*, Milan, Italy.
- [Greco et al., 2012a] Greco, L., Chaillet, A., and Bicchi, A. (2012a). Exploiting packet size in uncertain nonlinear networked control systems. *To appear in Automatica*.
- [Greco et al., 2012b] Greco, L., Chaillet, A., and Bicchi, A. (2012b). A model-based prediction approach for the stabilization of network controlled systems with strong communication limitations. In *Proc. of Advances in Control and Optimization of Dynamical Systems (ACODS)*, Bangalore, India.
- [Greco et al., 2010] Greco, L., Fontanelli, D., and Bicchi, A. (2010). Design and stability analysis for anytime control via stochastic scheduling. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 56(3) :571–585.
- [Grossman et al., 2011] Grossman, N., Nikolic, K., Toumazou, C., and Degenaar, P. (2011). Modeling Study of the Light Stimulation of a Neuron Cell With Channelrhodopsin-2 Mutants. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 58(6) :1742–1751.
- [Grøtli et al., 2008] Grøtli, E., Chaillet, A., and Gravdahl, J. (2008). Output control of spacecraft in leader follower formation. In *Proc. 47th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 1030–1035, Cancun, Mexico.
- [Grøtli et al., 2010] Grøtli, E., Chaillet, A., Panteley, E., and Gravdahl, J. (2010). Robustness of ISS systems to inputs with limited moving average, with application to spacecraft formations. In *ICINCO*, pages 35–44, Madeira, Portugal.
- [Grøtli et al., 2011a] Grøtli, E., Chaillet, A., Panteley, E., and Gravdahl, J. (2011a). *Optimal controller gain tuning for robust stability of spacecraft formation*, volume 89 of *Lecture Notes in Electrical Engineering*, chapter Informatics in Control, Automation and Robotics, pages 335–347. Paris, France.
- [Grøtli et al., 2011b] Grøtli, E., Panteley, E., and Chaillet, A. (2011b). Robustness of ISS systems to inputs with limited moving average, with application to spacecraft formations. *Accepted at Int. J. on Robust and Nonlinear Control*.
-

- [Grüne, 2002] Grüne, L. (2002). Input-to-state dynamical stability and its Lyapunov function characterization. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 47 :1499–1504.
- [Grüne, 2004] Grüne, L. (2004). Quantitative Aspects of the Input-to-State-Stability Property. *Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis*, pages 215–230.
- [Guckenheimer and Holmes, 2002] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (2002). *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New-York, 7th edition.
- [Hahn, 1963] Hahn, W. (1963). *Theory and application of Liapunov's direct method*. Prentice-Hall, New York.
- [Hammond et al., 2007] Hammond, C., Bergman, H., and Brown, P. (2007). Pathological synchronization in Parkinson's disease : networks, models and treatments. *Trends in Neurosciences*, 30(7) :357 – 364. INMED/TINS special issue—Physiogenic and pathogenic oscillations : the beauty and the beast.
- [Han et al., 2011] Han, X., Chow, B., Zhou, H.-H., Klapoetke, N., Chuong, A., Rajimehr, R., Yang, A., Baratta, M., Winkle, J., Desimone, R., and Boyden, E. (2011). A High-Light Sensitivity Optical Neural Silencer : Development and Application to Optogenetic Control of Non-Human Primate Cortex. *Frontiers in Systems Neuroscience*, 5.
- [Hanslmeier et al., 1999] Hanslmeier, A., Denkmayr, K., and Weiss, P. (1999). Longterm prediction of solar activity using the combined method. *Solar Physics*, 184(1) :213–218.
- [Hauptmann et al., 2005a] Hauptmann, C., Popovych, ., and Tass, P. (2005a). Effectively desynchronizing deep brain stimulation based on a coordinated delayed feedback stimulation via several sites : a computational study. *Biological cybernetics*, 93(6) :463–470.
- [Hauptmann et al., 2005b] Hauptmann, C., Popovych, O., and Tass, P. (2005b). Delayed feedback control of synchronization in locally coupled neuronal networks. *Neurocomputing*, 65 :759–767.
- [Heemels et al., 2010] Heemels, W., Teel, A., van de Wouw, N., and Nešić, D. (2010). Networked control systems with communication constraints : Tradeoffs between transmission intervals, delays and performance. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 55(8) :1781–1796.
- [Hespanha, 2004] Hespanha, J. (2004). Uniform stability of switched linear systems : extensions of LaSalle's invariance principle. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 49(4) :470–482.
- [Hespanha and Morse, 1999] Hespanha, J. and Morse, A. (1999). Stability of switched systems with average dwell-time. *Proc. 38th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 2655–2660.
- [Hespanha et al., 2007] Hespanha, J., Naghshtabrizi, P., and Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems. *Proc. of IEEE*, 95(1) :138–162.
- [Hespanha et al., 2002] Hespanha, J., Ortega, A., and Vasudevan, L. (2002). Towards the control of linear systems with minimum bit-rate. In *Proc. of the Int. Symp. on the Mathematical Theory of Networks and Systems*.
- [Hindmarsh and Rose, 1984] Hindmarsh, J. and Rose, R. (1984). A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 221(1222) :87–102.
- [Hodgkin and Huxley, 1952] Hodgkin, A. and Huxley, A. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol*, 117 :500–544.
-

-
- [Holgado et al., 2010] Holgado, A. N., Terry, J., and Bogacz, R. (2010). Conditions for the Generation of Beta Oscillations in the Subthalamic Nucleus-Globus Pallidus Network. *Journal of Neuroscience*, 30(37) :12340.
- [Isidori, 1995] Isidori, A. (1995). *Nonlinear control systems*. Springer Verlag, 3rd. edition.
- [Ito, 2006] Ito, H. (2006). State-dependent scaling problems and stability of interconnected iISS and ISS systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 51(10) :1626–1643.
- [Ito, 2010] Ito, H. (2010). A Lyapunov approach to cascade interconnection of Integral Input-to-State Stable systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 55(3) :702–708.
- [Ito et al., 2010] Ito, H., Freeman, R., and Chaillet, A. (2010). Interpreting the iISS Small-Gain Theorem as Transient Plus ISS Small-Gain Regulation. In *Proc. 49th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 2432–2437, Atlanta, USA.
- [Ito et al., 2013] Ito, H., Freeman, R., and Chaillet, A. (2013). Revisiting the iISS small-gain theorem through transient plus ISS small-gain regulation. *Asian Journal of Control*, 15(3) :1–9.
- [Ito and Jiang, 2009] Ito, H. and Jiang, Z. (2009). Necessary and sufficient small gain conditions for integral Input-to-State Stable systems : A Lyapunov perspective. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 54 :2389–2404.
- [Ito et al., 2011] Ito, H., Jiang, Z., Dashkovskiy, S., and Rueffer, B. (2011). A small-gain theorem and construction of sum-type Lyapunov functions for networks of iISS systems. In *American Control Conference (ACC)*, pages 1971–1977.
- [Izhikevich, 2007] Izhikevich, E. (2007). *Dynamical Systems in Neuroscience : The Geometry of Excitability and Bursting*. MIT Press.
- [Jadbabaie et al., 2004] Jadbabaie, A., Motee, N., and Barahona, M. (2004). On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators. *Proc. American Control Conf.*, pages 4296–4301.
- [Jiang et al., 1996] Jiang, Z., Mareels, I., and Wang, Y. (1996). A Lyapunov formulation of nonlinear small gain theorem for interconnected systems. *Automatica*, 32 :1211–1215.
- [Jiang et al., 1994] Jiang, Z., Teel, A., and Praly, L. (1994). Small gain theorems for ISS systems and applications. *Math. of Cont. Sign. and Syst.*, 7 :95–120.
- [Kabamba, 1987] Kabamba, P. (1987). Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 32(9) :772–783.
- [Kaszakurewicz and Bhaya, 1999] Kaszkurewicz, E. and Bhaya, A. (1999). *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*. Birkhauser Boston Inc, Boston.
- [Kelly, 1993] Kelly, R. (1993). A simple set–point robot controller by using only position measurements. In *Proc. 12th. IFAC World Congress*, volume 6, pages 173–176, Sydney, Australia.
- [Kelly, 1995] Kelly, R. (1995). A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators. *Robotica*, 13 :141–148.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 3rd ed., New York.
- [Ko and Ermentrout, 2009] Ko, T. and Ermentrout, G. (2009). Phase-response curves of coupled oscillators. *Phys. Rev. E (3)*, 79(1).
- [Kokotović and Marino, 1986] Kokotović, P. and Marino, R. (1986). On vanishing stability regions in nonlinear systems with high-gain feedback. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 31(10) :967–970.
-

- [Kopell and Ermentrout, 2002] Kopell, N. and Ermentrout, G. (2002). Mechanisms of phase-locking and frequency control in pairs of coupled neural oscillators. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 2*, pages 3–54. North-Holland, Amsterdam.
- [Kringelbach et al., 2007] Kringelbach, M., Jenkinson, N., Owen, S., and Aziz, T. (2007). Translational principles of deep brain stimulation. *Nat. Rev. Neurosci.*, 8(8) :623–635.
- [Kristiansen, 2008] Kristiansen, R. (2008). *Dynamic Synchronization of Spacecraft : Modeling and Coordinated Control of Leader-Follower Spacecraft Formations*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Trondheim, Norway.
- [Kristiansen et al., 2005] Kristiansen, R., Grøtli, E., Nicklasson, P., and Gravdahl, J. (2005). A 6dof model of a leader-follower spacecraft formation. In *Proceedings of the Conference on Simulation and Modeling*, Trondheim, Norway.
- [Kristiansen et al., 2006a] Kristiansen, R., Loría, A., Chaillet, A., and Nicklasson, P. (2006a). Adaptive output feedback control of spacecraft relative translation. In *Proc. 45th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 6010–6015, San Diego, USA.
- [Kristiansen et al., 2006b] Kristiansen, R., Loría, A., Chaillet, A., and Nicklasson, P. (2006b). Output feedback control of relative translation in a leader-follower spacecraft formation, chapter in *Proc. Workshop on Group Coordination and Cooperative Control*, pages 131–151. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, Tromsø, Norway.
- [Kristiansen et al., 2008] Kristiansen, R., Loría, A., Chaillet, A., and Nicklasson, P. (2008). Uniform practical output-feedback stabilization of spacecraft relative rotation. pages 4862–4867, Seattle, USA.
- [Kristiansen et al., 2009] Kristiansen, R., Loría, A., Chaillet, A., and Nicklasson, P. (2009). Spacecraft relative rotation tracking without angular velocity measurements. *Automatica*, 45(3) :750–756.
- [Krstic and Li, 1998] Krstic, M. and Li, Z.-H. (1998). Inverse optimal design of Input-to-State Stabilizing nonlinear controllers. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 43(3) :336–350.
- [Kuramoto, 1984] Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, Berlin.
- [Kyrkjebø, 2007] Kyrkjebø, E. (2007). *Motion Coordination of Mechanical Systems : Leader-Follower Synchronization of Euler-Lagrange Systems using Output Feedback Control*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology (NTNU), Trondheim, Norway.
- [Kyrkjebø et al., 2006] Kyrkjebø, E., Panteley, E., Chaillet, A., and Pettersen, K. (2006). A virtual vehicle approach to underway replenishment, chapter in *Proc. Workshop on Group Coordination and Cooperative Control*, pages 171–189. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, Tromsø, Norway.
- [Laila et al., 2006] Laila, D. S., Nešić, D., and Astolfi, A. (2006). *Sampled-data control of nonlinear systems*, chapter in *Advanced topics in control systems theory – Lecture notes from FAP 2005*. Control and Information sciences. Springer Verlag, London. A. Loría, F. Lamnabhi-Lagarrigue and E. Panteley, eds.
- [Lazar et al., 2008] Lazar, M., Muñoz de la Peña, D., Heemels, W., and Alamo, T. (2008). On Input-to-State Stability of min–max nonlinear model predictive control. *Systems & Control Letters*, 57(1) :39–48.
-

-
- [Lian et al., 2001] Lian, F.-L., Moyne, J., and Tilbury, D. (2001). Performance evaluation of control networks : Ethernet, controlnet, and devicenet. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 21(1) :66–83.
- [Liberzon, 2002] Liberzon, D. (2002). ISS and integral-ISS disturbance attenuation with bounded controls. *Proc. 41st. IEEE Conf. Decision Contr.*, 3 :2501–2506.
- [Liberzon, 2003a] Liberzon, D. (2003a). On Stabilization of Linear Systems with Limited Information. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 48 :304–307.
- [Liberzon, 2003b] Liberzon, D. (2003b). *Switching in Systems and Control*. Systems and Control : Foundations and Applications. Birkhäuser, Boston, MA. ISBN 0-8176-4297-8.
- [Liberzon, 2008] Liberzon, D. (2008). Nonlinear Control with Limited Information. *Communications in Information and Systems - Roger Brockett Legacy special issue*, 9 :41–58.
- [Liberzon and Hespanha, 2005] Liberzon, D. and Hespanha, J. (2005). Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 50(6) :910–915.
- [Liberzon and Morse, 1999] Liberzon, D. and Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 59–70.
- [Liberzon and Nešić, 2007] Liberzon, D. and Nešić, D. (2007). Input-to-State Stabilization of linear systems with quantized state measurements. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 52(5) :767–781.
- [Liberzon et al., 2002] Liberzon, D., Sontag, E., and Wang, Y. (2002). Universal construction of feedback laws achieving ISS and integral-ISS disturbance attenuation. *Syst. & Contr. Letters*, 46 :111–127.
- [Lin and Sontag, 1991] Lin, Y. and Sontag, E. (1991). A universal formula for stabilization with bounded controls. *Syst. & Contr. Letters*, 16(6) :393–397.
- [Liu et al., 2011] Liu, J., Khalil, H., and Oweiss, K. (2011). Model-based spatiotemporal analysis and control of a network of spiking basal ganglia neurons. In *5th Int. IEEE/EMBS Conf. on Neural Engineering (NER)*, pages 273–277.
- [Liu et al., 2010] Liu, J., Oweiss, K., and Khalil, H. (2010). Feedback control of the spatiotemporal firing patterns of neural microcircuits. In *Proc. 49th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 4679–4684.
- [Liu et al., 1996] Liu, W., Chitour, Y., and Sontag, E. (1996). On finite-gain stabilizability of linear systems subject to input saturation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(4) :1190–1219.
- [Loría et al., 2005] Loría, A., Chaillet, A., Besancon, G., and Chitour, Y. (2005). On the PE stabilization of time-varying systems : open questions and preliminary answers. In *Proc. 44th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 6847–6852, Sevilla, Spain.
- [Luo et al., 2009] Luo, M., Wu, Y., and Peng, J. (2009). Washout filter aided mean field feedback desynchronization in an ensemble of globally coupled neural oscillators. *Biological cybernetics*, 101(3) :241–246.
- [Lyapunov, 1892] Lyapunov, A. M. (1892). The general problem of the stability of motion. *Math. Soc. of Kharkov*. (English translation : International Journal of Control, 55, 1992, 531–773).
- [Lysyansky et al., 2011] Lysyansky, B., Popovych, O., and Tass, P. (2011). Desynchronizing anti-resonance effect of m :n ON-OFF coordinated reset stimulation. *Journal of Neural Engineering*, 8 :036019.
-

- [Maistrenko et al., 2005] Maistrenko, Y., Popovych, O., and Tass, P. (2005). Desynchronization and chaos in the Kuramoto model. *Lect. Notes Phys.*, 671 :285–306.
- [Malisoff et al., 2011] Malisoff, M., Mazenc, F., and Zhang, F. (2011). Input-to-State Stability for curve tracking control : A constructive approach. In *Proc. American Control Conference*, pages 1984–1989.
- [Malisoff and Sontag, 2004] Malisoff, M. and Sontag, E. (2004). Asymptotic controllability and input-to-state stabilization : The effect of actuator errors. *Optimal control, stabilization and nonsmooth analysis*, pages 155–171.
- [Marceglia et al., 2007] Marceglia, S., Rossi, L., Foffani, G., Bianchi, A., Cerutti, S., and Priori, A. (2007). Basal ganglia local field potentials : applications in the development of new deep brain stimulation devices for movement disorders. *Expert review of medical devices*, 4(5) :605–614.
- [Mazenc and Praly, 1996] Mazenc, F. and Praly, L. (1996). Adding integrators, saturated controls and global asymptotic stabilization of feedforward systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 41(11) :1559–1579.
- [Mazenc et al., 1999] Mazenc, F., Sepulchre, R., and Jankovic, M. (1999). Lyapunov functions for stable cascades and applications to stabilization. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 44(9) :1795–1800.
- [McCarthy et al., 2011] McCarthy, N., Moore-Kochlacs, C., Gu, X., Boyden, E., Han, X., and Kopell, N. (2011). Striatal origin of the pathologic beta oscillations in Parkinson’s disease. *Proc. of the National Academy of Sciences*, 108(28) :11620–11625.
- [Montestruque and Antsaklis, 2004] Montestruque, L. and Antsaklis, P. (2004). Stability of model-based networked control systems with time-varying transmission times. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 49(9) :1562–1572.
- [Moyne and Tilbury, 2007] Moyne, J. and Tilbury, D. (2007). The emergence of industrial control networks for manufacturing control, diagnostics, and safety data. *Proc. of IEEE*, 95(1) :29–47.
- [Naghshtabrizi and Hespanha, 2006] Naghshtabrizi, P. and Hespanha, J. (2006). Stability of networked control systems with variable sampling and delay. In *Proc. 44th Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing*.
- [Nair and Evans, 2004] Nair, G. and Evans, R. (2004). Stabilizability of stochastic linear systems with finite feedback data rates. *SIAM J. Contr. Optim.*, 43(2) :413–436.
- [Nair et al., 2007] Nair, G., Fagnani, F., Zampieri, S., and Evans, R. (2007). Feedback Control under Data Rate Constraints : an Overview. *Proc. of the IEEE*, 95 :108–137.
- [Nešić and Angeli, 2002] Nešić D. and Angeli, D. (2002). Integral versions of ISS for sampled-data nonlinear systems via their approximate discrete-time models. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 46(8) :1298 –1303.
- [Nešić and Teel, 2004] Nešić, D. and Teel, A. (2004). Input-output stability properties of networked control systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 49(10) :1650 – 1667.
- [Nešić and Teel, 2004] Nešić D. and Teel, A. (2004). Input-to-state stability of networked control systems. *Automatica*, 40(12) :2121–2128.
- [Omel’chenko et al., 2008] Omel’chenko, O., Hauptmann, C., Maistrenko, Y., and Tass, P. (2008). Collective dynamics of globally coupled phase oscillators under multisite delayed feedback stimulation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 237(3) :365–384.
-

-
- [Ortega et al., 1995] Ortega, R., Loria A., and Kelly, R. (1995). A semiglobally stable output feedback PI²D regulator for robot manipulators. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 40(8) :1432–1436.
- [Overhage and Radford, 1964] Overhage, C. and Radford, W. (1964). The lincoln laboratory west ford program — an historical perspective. *Proceedings of the IEEE*, 52(5) :452–454.
- [Pan and Kapila, 2001] Pan, H. and Kapila, V. (2001). Adaptive nonlinear control for spacecraft formation flying with coupled translational and attitude dynamics. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, Orlando, FL.
- [Panteley and Loria, 2001] Panteley, E. and Loria, A. (2001). Growth rate conditions for stability of cascaded time-varying systems. *Automatica*, 37(3) :453–460.
- [Pasillas-Lépine, 2012] Pasillas-Lépine, W. (2012). Equilibrium and stability of Wilson and Cowan’s time coarse graining model. In *Proc. of MTNS*.
- [Pastrana, 2010] Pastrana, E. (2010). Optogenetics : controlling cell function with light. *Nature Methods*, 8(1) :24–25.
- [Pavlov et al., 2006] Pavlov, A., van de Wouw, N., and Nijmeijer, H. (2006). *Uniform Output Regulation of Nonlinear Systems : A Convergent Dynamics Approach*. Systems & Control : Foundations & Applications.
- [Perrier and Canudas de Wit, 1996] Perrier, M. and Canudas de Wit, C. (1996). Experimental comparison of PID vs PID plus nonlinear controller. *International Journal of Autonomous Robots*, 3 :195–212. Special issue on Subsea Robots.
- [Persis et al., 2003] Persis, C. D., Santis, R., and Morse, A. (2003). Switched nonlinear systems with state-dependent dwell-time. *Syst. & Contr. Letters*, 50(4) :291–302.
- [Pikovsky et al., 2001] Pikovsky, A., Rosenblum, M., and Kurths, J. (2001). *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series, Cambridge, United Kingdom.
- [Plenz and Kital, 1999] Plenz, D. and Kital, S. (1999). A basal ganglia pacemaker formed by the subthalamic nucleus and external globus pallidus. *Nature*, 400(6745) :677–682.
- [Pogromsky, 1998] Pogromsky, A. (1998). Passivity based design of synchronizing systems. *International journal of Bifurcation and Chaos*, 8 :295–320.
- [Pogromsky and Nijmeijer, 2001] Pogromsky, A. and Nijmeijer, H. (2001). Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 48(2) :152–162.
- [Polushin et al., 2008] Polushin, I., Liu, P., and Lung, C.-H. (2008). On the model-based approach to nonlinear networked control systems. *Automatica*, 44(9).
- [Popovych et al., 2006] Popovych, O., Hauptmann, C., and Tass, P. (2006). Desynchronization and decoupling of interacting oscillators by nonlinear delayed feedback. *Internat. J. Bifur. Chaos*, 16(7) :1977–1987.
- [Postoyan et al., 2011] Postoyan, R., Tabuada, P., Nešić, D., and Anta, A. (2011). Event-triggered and self-triggered stabilization of distributed networked control systems. In *Proc. 50th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 2565–2570.
- [Praly and Jiang, 1993] Praly, L. and Jiang, Z. (1993). Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics. *Syst. & Contr. Letters*, 21 :19–33.
-

- [Praly and Wang, 1996] Praly, L. and Wang, Y. (1996). Stabilization in spite of matched unmodelled dynamics and an equivalent definition of Input-to-State Stability. *Math. of Cont. Sign. and Syst.*, 9 :1–33.
- [Pyragas et al., 2007] Pyragas, K., Popovych, O., and Tass, P. (2007). Controlling synchrony in oscillatory networks with a separate stimulation-registration setup. *Euro. Phys. Letters*, 80(4).
- [Quevedo and Nešić, 2011] Quevedo, D. and Nešić, D. (2011). Input-to-State Stability of packetized predictive control over unreliable networks affected by packet-dropouts. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 56(2) :370–375.
- [Quevedo et al., 2008] Quevedo, D., Silva, E., and Goodwin, G. (2008). Control over unreliable networks affected by packet erasures and variable transmission delays. *IEEE J. Selected Areas in Comm.*, 24(4) :672–685.
- [Ren and Ermentrout, 2000] Ren, L. and Ermentrout, G. (2000). Phase locking in chains of multiple-coupled oscillators. *Physica D*, 143(1-4) :56–73.
- [Rocco, 1996] Rocco, P. (1996). Stability of PID control of industrial robot arms. *IEEE Trans. on Robotics Automat.*, 12(4) :606–614.
- [Rodriguez-Oroz et al., 2005] Rodriguez-Oroz, M., Obeso, J., Lang, A., Houeto, J., Pollak, P., Rehncrona, S., Kulisevsky, J., Albanese, A., Volkman, J., and Hariz, M. (2005). Bilateral deep brain stimulation in Parkinson’s disease : a multicentre study with 4 years follow-up. *Brain*, 128(10) :2240.
- [Rosenblum et al., 2006] Rosenblum, M., Tukhlina, N., Pikovsky, A., and Cimponeriu, L. (2006). Delayed feedback suppression of collective rhythmic activity in a neuronal ensemble. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 16(7) :1989–1999.
- [Rosin et al., 2011] Rosin, B., Slovik, M., Mitelman, R., Rivlin-Etzion, M., Haber, S., Israel, Z., Vaadia, E., and Bergman, H. (2011). Closed-loop deep brain stimulation is superior in ameliorating Parkinsonism. *Neuron*, 72(2) :370–384.
- [Rouche et al., 1977] Rouche, N., Habets, P., and Laloy, M. (1977). *Stability theory by Liapunov’s direct method*, volume 22 of *Appl. Math. Sc.* Springer-Verlag, New York.
- [Sanchez and Perez, 1999] Sanchez, E. and Perez, J. (1999). Input-to-state stability (ISS) analysis for dynamic neural networks. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 46(11) :1395–1398.
- [Santaniello et al., 2011] Santaniello, S., Fiengo, G., Glielmo, L., and Grill, W. (2011). Closed-loop control of deep brain stimulation : A simulation study. *IEEE Trans. on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, (99).
- [Sarlette, 2009] Sarlette, A. (2009). *Geometry and Symmetries in Coordination Control*. PhD thesis, University of Liège, Belgium.
- [Scardovi et al., 2010] Scardovi, L., Arcak, M., and Sontag, E. (2010). Synchronization of interconnected systems with applications to biochemical networks : an input-output approach. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 55(6) :1367–1379.
- [Sepulchre, 2000] Sepulchre, R. (2000). Are basins of attraction easy to enlarge by feedback ? In *Plenary lecture at Congress on theoretical and applied mechanics*, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- [Sepulchre et al., 2007] Sepulchre, R., Paley, D., and Leonard, N. (2007). Stabilization of planar collective motion : all-to-all communication. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 52(5) :811–824.
-

-
- [Seuret et al., 2006] Seuret, A., Michaut, F., Richard, J.-P., and Divoux, T. (2006). Networked control using GPS synchronization. In *Proc. IEEE American Control Conference*, pages 1–6.
- [Seuret and Prieur, 2011] Seuret, A. and Prieur, C. (2011). Event-triggered sampling algorithms based on a Lyapunov function. *Proc. 50th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 6128–6133.
- [Sharon and Liberzon, 2011] Sharon, Y. and Liberzon, D. (2011). Input-to-State Stabilizing controller for systems with coarse quantization. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*
- [Shorten. et al., 2007] Shorten., R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K., and King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems. *SIAM Review - The Flagship Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 49(4) :545–592.
- [Sohal et al., 2009] Sohal, V., Zhang, F., Yizhar, O., and Deisseroth, K. (2009). Parvalbumin neurons and gamma rhythms enhance cortical circuit performance. *Nature*, pages 1–5.
- [Sontag, 1989] Sontag, E. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 34(4) :435–443.
- [Sontag, 1990] Sontag, E. (1990). Further facts about Input-to-State stabilization. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 35 :473–476.
- [Sontag, 1995] Sontag, E. (1995). On the Input-to-State Stability property. *European J. Control*, 1 :24–36.
- [Sontag, 1998] Sontag, E. (1998). Comments on integral variants of ISS. *Syst. & Contr. Letters*, 34 :93–100.
- [Sontag, 2006] Sontag, E. (2006). *Input to state stability : Basic concepts and results*, chapter in Nonlinear and Optimal Control Theory, pages 163–220. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. P. Nistri and G. Stefani eds.
- [Sontag and Teel, 1995] Sontag, E. and Teel, A. (1995). Changing supply functions in Input-to-State Stable systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 40(8) :1476–1478.
- [Sontag and Wang, 1995] Sontag, E. and Wang, Y. (1995). On characterizations of the Input-to-State Stability property. *Syst. & Contr. Letters*, 24 :351–359.
- [Sontag and Wang, 1996] Sontag, E. and Wang, Y. (1996). New characterizations of Input-to-State Stability. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 41 :1283–1294.
- [Steuer et al., 2009] Steuer, E., Tyukin, I., and Nijmeijer, H. (2009). Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators. *Physica D*, 238(21) :2119–2128.
- [Strogatz, 2000] Strogatz, S. (2000). From Kuramoto to Crawford : exploring the onset of synchronization in population of coupled oscillators. *Physica D*, 143 :1–20.
- [Sussmann et al., 1993] Sussmann, H., Sontag, E., and Yang, Y. (1993). A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls. *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*, pages 1802–1807.
- [Swevers et al., 2000] Swevers, J., Al-Bender, F., Ganseman, C. G., and Projogo, T. (2000). An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 45(4) :675–686.
- [Tabbara et al., 2007] Tabbara, M., Nešić, D., and Teel, A. (2007). Stability of wireless and wireline networked control systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 52(9) :1615–1630.
-

- [Tan et al., 2006] Tan, Y., Nešić, D., and Mareels, I. (2006). On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, 42 :889–903.
- [Tanner and Pappas, 2002] Tanner, H. and Pappas, G. (2002). Formation Input-to-State Stability. *IFAC World Congress*, pages 1–6.
- [Tarbouriech et al., 2006] Tarbouriech, S., Prieur, C., and Gomes Da Silva, J. (2006). Stability Analysis and Stabilization of Systems Presenting Nested Saturations. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 51(8) :1364–1371.
- [Tass, 2003] Tass, P. (2003). A model of desynchronizing deep brain stimulation with a demand-controlled coordinated reset of neural subpopulations. *Biol. Cybern.*, 89 :81–88.
- [Teel, 1996] Teel, A. (1996). A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 40 :1256–1270.
- [Teel et al., 2004] Teel, A., Moreau, L., and Nešić, D. (2004). Input-to-state set stability of pulse width modulated controllers with disturbances. *Syst. & Contr. Letters*, 51 :23–32.
- [Teel et al., 1999] Teel, A., Peuteman, J., and Aeyels, D. (1999). Semi-global practical stability and averaging. *Syst. & Contr. Letters*, 37 :329–334.
- [Teel and Praly, 2000] Teel, A. and Praly, L. (2000). On assigning the derivative of a disturbance attenuation Control Lyapunov Function. *Math. of Cont., Sign. and Syst.*, 13 :95–124.
- [Terman et al., 2002] Terman, D., Rubin, J., Yew, A., and Wilson, C. (2002). Activity patterns in a model for the subthalamopallidal network of the basal ganglia. *The Journal of neuroscience*, 22(7) :2963–2976.
- [Tjønnås et al., 2006] Tjønnås, J., Chaillet, A., Panteley, E., and Johansen, T. A. (2006). Cascade lemma for set-stable systems. In *Proc. 45th. IEEE Conf. Decision Contr.*, pages 338–342, San Diego, USA.
- [Traub and Whittington, 2010] Traub, R. and Whittington, M. (2010). *Cortical Oscillations in Health and Disease*. Oxford University Press.
- [Tukhlina et al., 2007] Tukhlina, N., Rosenblum, M., Pikovsky, A., and Kurths, J. (2007). Feedback suppression of neural synchrony by vanishing stimulation. *Physical Review E*, 75(1) :011918.
- [van der Schaft, 1999] van der Schaft, A. (1999). *\mathcal{L}_2 -Gain and passivity techniques in nonlinear control*. Communication and Control Engineering. Springer Verlag, Heidelberg, 2nd edition.
- [van Hemmen and Wreszinski, 1993] van Hemmen, J. and Wreszinski, W. (1993). Lyapunov function for the Kuramoto model on nonlinearly coupled oscillators. *Jour. of Statistical Physics*, 72 :145–166.
- [Vidyasagar, 1993] Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems analysis*. Prentice Hall, New Jersey.
- [Vu et al., 2007] Vu, L., Chatterjee, D., and Liberzon, D. (2007). Input-to-State Stability of switched systems and switching adaptive control. *Automatica*, 43(4) :639–646.
- [Wagenaar et al., 2005] Wagenaar, D., Madhavan, R., Pine, J., and Potter, S. (2005). Controlling bursting in cortical cultures with closed-loop multi-electrode stimulation. *The Journal of neuroscience*, 25(3) :680–688.
- [Walsh and Ye, 2001] Walsh, G. and Ye, H. (2001). Scheduling of networked control systems. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 21(1) :57–65.
-

-
- [Walsh et al., 1999] Walsh, G., Ye, H., and Bushnell, L. (1999). Stability analysis of networked control systems. In *Proc. of American Control Conference*.
- [Wang and Liu, 2008] Wang, F. and Liu, D. (2008). *Networked Control Systems : Theory and Applications*. Springer.
- [Wertz, 1978] Wertz, J. (1978). *Spacecraft attitude determination and control*, volume 73. Kluwer Academic Pub.
- [Wilson and Cowan, 1972] Wilson, H. and Cowan, J. (1972). Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons. *Biophysical Journal*, 12(1) :1–24.
- [Winfree, 1980] Winfree, A. (1980). *The geometry of biological times*. Springer, New-York.
- [Witrant et al., 2007] Witrant, E., Georges, D., de Wit, C. C., and Alamir, M. (2007). On the use of state predictors in networked control systems. *Applications of Time Delay Systems*, pages 17–35.
- [Wong et al., 2005] Wong, H., Pan, H., and Kapila, V. (2005). Output feedback control for spacecraft formation flying with coupled translation and attitude dynamics. In *Proceedings of the American Control Conference*, Portland, OR.
- [Yamawaki et al., 2008] Yamawaki, N., Stanford, I., Hall, S., and Woodhall, G. (2008). Pharmacologically induced and stimulus evoked rhythmic neuronal oscillatory activity in the primary motor cortex in vitro. *Neuroscience*, 151(2) :386–395.
- [Yan et al., 2000] Yan, Q., Yang, G., Kapila, V., and de Queiroz, M. (2000). Nonlinear dynamics and output feedback control of multiple spacecraft in elliptical orbits. In *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois.
- [Yoshizawa, 1966] Yoshizawa, T. (1966). *Stability theory by Lyapunov's second method*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo.
- [Yu and Antsaklis, 2011] Yu, H. and Antsaklis, P. (2011). Event-triggered real-time scheduling for stabilization of passive and output feedback passive systems. In *Proc. American Control Conference*, pages 1674–1679.
- [Yue et al., 2005] Yue, D., Han, Q., and Lam, J. (2005). Networked-based robust H_∞ control of systems with uncertainty. *Automatica*, 41 :999–1007.
- [Zhang et al., 2009] Zhang, H., Liu, D., and Wang, Z. (2009). *Controlling Chaos : Suppression, Synchronization and Chaotification*. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag.
- [Zhivoglyadov and Middleton, 2003] Zhivoglyadov, P. and Middleton, R. (2003). Networked control design for linear systems. *Automatica*, 39 :743–750.
-