



**HAL**  
open science

# Flambage de coques cylindriques minces sous chargements combinés : pression interne, compression, flexion et cisaillement

André da Silva

► **To cite this version:**

André da Silva. Flambage de coques cylindriques minces sous chargements combinés : pression interne, compression, flexion et cisaillement. Autre. INSA de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ISAL0078 . tel-00782117

**HAL Id: tel-00782117**

**<https://theses.hal.science/tel-00782117v1>**

Submitted on 29 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

# **Flambage de coques cylindriques minces sous chargements combinés : pression interne, compression, flexion et cisaillement**

Présentée devant  
L'institut national des sciences appliquées de Lyon

Pour obtenir  
Le grade de docteur

Formation doctorale  
École doctorale : MEGA (Mécanique, Energétique, Génie Civil et Acoustique)  
Spécialité : Génie Civil

Par  
**André DA SILVA**  
(Ingénieur Ecole Centrale de Lille)

Soutenue le 14 Septembre 2011 devant la Commission d'examen

Jury MM.

A. Combescure	Professeur (INSA de Lyon)	Examineur
J. F. Jullien	Professeur Emérite (INSA de Lyon)	Examineur
A. Limam	Professeur (INSA de Lyon)	Directeur de thèse
F. Lorioux	Ingénieur (EADS Astrium ST)	Examineur
F. Marteau	Ingénieur (CNES/DLA/SDT/STM)	Examineur
J. M. Rotter	Professeur (University of Edinburgh)	Rapporteur
H. Zahrouni	Professeur (Université de Metz)	Rapporteur

---

## **Flambage de coques cylindriques minces sous chargements combinés : pression interne, compression, flexion et cisaillement**

---

### Résumé

Malgré le cumul de connaissances sur le sujet du flambage des coques minces, des questions essentielles demeurent. En effet, malgré les avancées et une meilleure compréhension de l'effet des défauts, le dimensionnement continue de recourir aux anciennes règles qui découlent d'une démarche empirique et qui s'avèrent souvent trop conservatives comme c'est le cas par exemple pour la NASA SP8007 (1968).

Cette règle est utilisée notamment pour le dimensionnement du lanceur Ariane 5. L'Etage Principal Cryogénique est en effet constitué de coques cylindriques minces, qui sont soumises à une combinaison de chargements et donc sujettes au déclenchement d'instabilités pouvant être catastrophiques. Il est ainsi nécessaire d'avoir une meilleure compréhension du phénomène pour pouvoir améliorer ces méthodes de dimensionnement dans le cas de coques moyennement longues ( $1 < L/R < 3$ ) et minces ( $250 < R/t < 1500$ ).

Nous employons pour cela une approche à la fois numérique et expérimentale. L'outil numérique est utilisé, via une modélisation pertinente, afin de construire une nouvelle règle de dimensionnement et d'étudier l'influence des différents paramètres (géométriques, matériau). L'aspect expérimental a pris une place prépondérante, une large campagne nous permettant de valider les résultats simulations pour différentes configurations, mais également d'avoir une bonne compréhension du phénomène. Ces deux aspects de notre recherche nous ont également permis de mieux déterminer l'interaction entre les différents chargements (pression interne, compression, flexion, cisaillement), plus ou moins comprise selon les cas.

**Mots-Clés:** instabilité - flambage - coques - dimensionnement - imperfections - pressurisation - interaction - compression - flexion - cisaillement - lanceur

---

## **Buckling of thin cylindrical shells under combined loadings: internal pressure, compression, bending and transverse shear**

---

### Abstract

The stability of thin cylindrical shells has been studied for decades, but despite the accumulated knowledge on the subject, important questions remain, in particular regarding the design of such structures. The effect of geometrical imperfections is now well understood, but old design recommendations resulting from purely empirical approaches, are still used. The NASA SP8007 recommendation (1968) is one them, and leads to conservative designs.

This rule is used in particular for the design of the Ariane 5 launcher. Indeed, the Principal Cryogenic Stage is made of thin cylindrical shells, subjected throughout the structure's life cycle to a combination of loadings, and hence prone to possibly disastrous structural instabilities. It is then necessary to better understand those phenomena in order to improve the design methods for relatively long ( $1 < L/R < 3$ ) and thin ( $250 < R/t < 1500$ ) shells.

Our work is based on both numerical and experimental approaches. Numerical tools are used, through a relevant choice of the critical imperfections, to build a new design recommendation and study the influence of different parameters (geometrical or material). Experiments took an important place in our research, and the large experimental campaign allowed us to validate the numerical results for different configurations, and to better understand the physics of the problem as well. These two aspects of our study also enabled us to clarify the interaction between different loadings (internal pressure, compression, bending and transverse shear), which is today more or less understood, according to the case.

**Mots-Clés:** instability - buckling - shells - design - imperfections - pressurization - interaction - compression - bending - shear - launcher

**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quinquennal  
2011-2015**

<b>SIGLE</b>	<b>ECOLE DOCTORALE</b>	<b>NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE</b>
<b>CHIMIE</b>	<b>CHIMIE DE LYON</b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 - Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</b> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel - Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax :04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</b> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43.19.05 Fax 04 72 43 13 10 <a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b>MATERIAUX DE LYON</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:Ed.materiaux@insa-lyon.fr">Ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> INSA de Lyon - MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 <a href="mailto:Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">Jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</b>  Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon - Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél :04.72.43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:Philippe.boisse@insa-lyon.fr">Philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b>ScSo*</b>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

**André Da Silva**

Instabilité de coques minces sous chargements combinés / 2011  
LGCIE INSA Lyon

# Remerciements

Ce travail de thèse, effectué au Laboratoire de Génie Civil et d'Ingénierie Environnementale de l'INSA Lyon, n'aurait pu voir le jour sans l'aide, le savoir, ou les encouragements de nombreuses personnes que je tiens à remercier ici.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus grande gratitude au professeur Ali LIMAM, désormais directeur du LGCIE, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire et fait confiance dans ce projet ambitieux. Les nombreuses discussions que nous avons eues, autour du flambage ou autres, m'ont sans aucun doute permis d'avancer et de mener à bien ce travail.

Je souhaite remercier le professeur John Michael ROTTER de l'Université d'Edimbourg, et le professeur Hamid ZAHROUNI de l'Université de Metz, pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse en tant que rapporteurs.

Je tiens également à exprimer mes plus sincères remerciements envers EADS et le CNES, pour avoir financé cette étude et participé au suivi de ma thèse. En particulier, je remercie Fabien LORIOUX, ingénieur à EADS Astrium ST, et Vincent TAPONIER, chef de l'unité « Structures, Thermique et Matériaux » à la Direction des Lanceurs du CNES, et qui font tous les deux partie du jury. D'autres ont suivi ce travail au gré des réunions, notamment Serge RADULOVIC de chez EADS, et je les remercie également.

Je ne pouvais pas oublier de remercier certaines personnes du laboratoire qui m'ont supporté pendant 3 ans. L'équipe de la dalle notamment, pour l'aide constante sur les bancs d'essais, mais également pour tous les apéritifs ou barbecues : Emeric BRUYERE, Bruno HUGUENY, Mario MASAPOLLO et Romain TRUNFIO. Pour les problèmes informatiques, Bernadette ESCALIER a toujours eu le dernier mot. En ce qui concerne les questions administratives, j'ai toujours pu compter sur les secrétaires, Izabel KARABEDIAN et Valérie ORHON, sur leurs sourires et leurs bonbons. Je n'oublie pas également tous mes collègues doctorants du laboratoire et de l'INSA.

Enfin, mes pensées vont :

à ma chère Faïza, pour m'avoir (trop) souvent écouté et encouragé pendant cette période ;

à mes parents et à ma sœur, pour m'avoir toujours soutenu ;

à Seb et Ugo, pour leur amitié constante malgré la distance ;

aux membres de la Jam Session, pour leur soutien quotidien ;

à tous mes amis et toute ma famille.

**André Da Silva**

Instabilité de coques minces sous chargements combinés / 2011  
LGCIE INSA Lyon

# Sommaire

---

## Première Partie : Problématique et état de l'art ..... 19

## 1 Introduction..... 20

### 1.1 Introduction générale ..... 20

1.1.1 A propos des coques minces ..... 20

1.1.2 Problématique industrielle ..... 21

1.1.3 Démarche ..... 22

### 1.2 Concepts théoriques fondamentaux ..... 23

1.2.1 Types d'instabilité ..... 23

1.2.2 Equilibre d'un système mécanique ..... 24

1.2.2.1 Somme des forces et des moments ..... 25

1.2.2.2 Méthode de l'énergie potentielle ..... 25

1.2.3 Stabilité d'un équilibre..... 26

1.2.4 Notion de bifurcation..... 27

1.2.4.1 Méthode énergétique..... 27

1.2.4.2 Méthode de l'équilibre adjacent..... 29

1.2.5 Comportement post-critique ..... 29

1.2.6 Influence des défauts géométriques ..... 31

### 1.3 Théorie des coques minces ..... 33

1.3.1 Equations non-linéaires d'équilibre de Donnell..... 33

1.3.1.1 Equilibre d'un élément de coque ..... 34

1.3.1.2 Relations déformations-déplacements..... 36

1.3.1.3 Relations contraintes-déformations ..... 37

1.3.1.4 Equations d'équilibre de Donnell ..... 37

1.3.2 Equations linéaires de stabilité de Donnell ..... 38

1.3.3 Stabilité d'une coque cylindrique mince sous compression axiale..... 39

1.3.3.1 Flambage axisymétrique ..... 39

1.3.3.2 Flambage non-axisymétrique ..... 40

1.3.4 Théorie post-critique ..... 41

1.3.5 Flambage plastique ..... 44

1.3.5.1 Principes..... 44

1.3.5.2 Comportement post-bifurcationnel initial en plasticité..... 46

1.3.53	<i>Charge critique d'une coque cylindrique dans le domaine plastique</i>	47
--------	--	----

## 2 Etude bibliographique ..... 49

### 2.1 Introduction ..... 49

### 2.2 Coques cylindriques sous compression axiale ..... 50

#### 2.2.1 Modes de flambage ..... 50

#### 2.2.2 Ecart entre théorie et expérimentation ..... 50

##### 2.2.21 *Influence des conditions aux limites* ..... 51

##### 2.2.22 *Influence des conditions expérimentales* ..... 53

##### 2.2.23 *Influence des imperfections géométriques* ..... 54

##### 2.2.231 Méthodes analytiques ..... 54

##### 2.2.232 Prise en compte d'imperfections réelles ..... 57

### 2.3 Coques sous flexion pure ..... 62

#### 2.3.1 Phénoménologie ..... 62

#### 2.3.2 Mécanismes de ruine ..... 63

#### 2.3.3 Estimation de la charge de ruine ..... 64

### 2.4 Coques cylindriques sollicitées en cisaillement ..... 66

#### 2.4.1 Modes de déformation ..... 66

#### 2.4.2 Estimation de la charge de ruine : théorie et expérimentation ..... 67

#### 2.4.3 Effet de la plasticité ..... 69

#### 2.4.4 Effet des défauts et comportement post-critique ..... 70

##### 2.4.41 *Imperfections géométriques* ..... 70

##### 2.4.42 *Comportement post-critique* ..... 73

### 2.5 Couplage avec la pression interne ..... 74

#### 2.5.1 Etat de contrainte ..... 74

#### 2.5.2 Compression axiale et pression interne ..... 75

##### 2.5.21 *Coques parfaites et comportement post-critique* ..... 75

##### 2.5.22 *Résultats expérimentaux* ..... 77

##### 2.5.221 Flambage élastique ..... 77

##### 2.5.222 Flambage élasto-plastique ..... 81

##### 2.5.23 *Influence des défauts* ..... 84

#### 2.5.3 Flexion et pression interne ..... 86

##### 2.5.31 *Résultats expérimentaux* ..... 86

##### 2.5.32 *Approche analytique pour l'évaluation du moment de collapse* ..... 90

#### 2.5.4 Effet de la pression sur le flambage par cisaillement ..... 93

#### 2.5.5 Réduction des imperfections par la pressurisation ..... 94

### 2.6 Problèmes d'interactions entre chargements ..... 96

2.6.1	Interaction flexion/cisaillement (M, T) .....	96
	2.6.11 <i>Etat de contraintes</i> .....	96
	2.6.12 <i>Caractérisation de l'interaction (M, T)</i> .....	97
	2.6.13 <i>Couplage avec la pression (P, M, T)</i> .....	102
2.6.2	Interaction entre compression et flexion (N, M) .....	102
	2.6.21 <i>Problématique</i> .....	102
	2.6.22 <i>Etude de l'interaction</i> .....	103
	2.6.23 <i>Influence de la pression (P, N, M)</i> .....	105
2.6.3	Interaction entre compression et cisaillement (N, T).....	106

## 3 Règles de dimensionnement ..... 108

<b>3.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>108</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulations .....</b>	<b>109</b>
3.2.1	NASA SP8007 [4] .....	109
	3.2.11 <i>Compression axiale</i> .....	109
	3.2.12 <i>Flexion</i> .....	110
	3.2.13 <i>Cisaillement</i> .....	111
	3.2.14 <i>Coques pressurisées sous compression</i> .....	112
	3.2.15 <i>Coques pressurisées sous flexion</i> .....	113
	3.2.151 <i>Philosophie</i> .....	113
	3.2.152 <i>Analyse de la formulation</i> .....	113
	3.2.153 <i>Prise en compte de la plasticité</i> .....	114
	3.2.16 <i>Interaction entre flexion et compression</i> .....	115
3.2.2	Eurocode 3 [5].....	115
	3.2.21 <i>Compression axiale ou flexion</i> .....	115
	3.2.22 <i>Cisaillement</i> .....	116
	3.2.23 <i>Influence de la pression interne</i> .....	117
	3.2.24 <i>Problèmes d'interaction</i> .....	117
	3.2.25 <i>Plasticité</i> .....	118
	3.2.251 <i>En zone courante</i> .....	118
	3.2.252 <i>Plastification due à la pression interne</i> .....	119
<b>3.3</b>	<b>Comparaison des deux normes.....</b>	<b>120</b>
3.3.1	En compression ou flexion seule .....	120
3.3.2	En cisaillement.....	121
3.3.3	Compression axiale et pression interne .....	121
3.3.4	Flexion et pression interne .....	122
<b>3.4</b>	<b>Etablir de nouvelles recommandations .....</b>	<b>124</b>
3.4.1	Courbes basses empiriques .....	124
3.4.2	Identification du défaut le plus pénalisant .....	124
3.4.3	Prise en compte de défauts réels .....	125

3.4.4	Conclusions .....	125
-------	-------------------	-----

## Deuxième Partie : Investigations numérique et expérimentale du flambage de coques minces pressurisées sous différents chargements..... 126

### 4 Moyens expérimentaux et numériques 127

<b>4.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>127</b>
<b>4.2</b>	<b>Méthodologie expérimentale.....</b>	<b>127</b>
4.2.1	Fabrication des spécimens.....	127
	4.2.1.1 <i>Electrodéposition de cuivre.....</i>	127
	4.2.1.2 <i>Coques roulées-collées .....</i>	128
4.2.2	Caractéristiques des spécimens .....	130
	4.2.21 <i>Caractérisation du matériau .....</i>	130
	4.2.22 <i>Mesure de l'épaisseur .....</i>	134
	4.2.23 <i>Valeurs de R/t étudiées .....</i>	135
4.2.3	Mesure de la géométrie .....	135
4.2.4	Bancs d'essais .....	136
	4.2.41 <i>Banc Ariane : compression .....</i>	136
	4.2.42 <i>Petit banc : flexion et cisaillement .....</i>	138
	4.2.43 <i>Stéréo-corrélation .....</i>	140
<b>4.3</b>	<b>Méthodes numériques .....</b>	<b>141</b>
4.3.1	Eléments finis .....	141
	4.3.11 <i>STANLAX .....</i>	141
	4.3.12 <i>ABAQUS .....</i>	142
4.3.2	Méthodologies de calcul .....	143
	4.3.21 <i>Critère de stabilité.....</i>	143
	4.3.22 <i>Recherche de bifurcations par la méthode des éléments finis</i>	145
	4.3.221 Bifurcation linéaire .....	147
	4.3.222 Bifurcation non-linéaire .....	147
	4.3.223 Plasticité.....	147
	4.3.23 <i>Pilotage en longueur d'arc – méthode de Riks .....</i>	148

<b>5</b>	<b>Résultats expérimentaux.....</b>	<b>150</b>
<b>5.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>150</b>
<b>5.2</b>	<b>Caractérisation des défauts initiaux .....</b>	<b>151</b>
5.2.1	Démarche .....	151
5.2.2	Géométries .....	151
5.2.3	Qualité des différents feuillards : résumé .....	154
<b>5.3</b>	<b>Essais de flambage sous compression et pression interne.....</b>	<b>156</b>
5.3.1	Démarche .....	156
5.3.2	Conditions expérimentales .....	156
5.3.3	Courbes de chargement .....	159
	5.3.31 Matériau cuivre, $R/t = 450$ .....	159
	5.3.32 Matériau aluminium, $R/t = 675$ .....	160
	5.3.33 Matériau cuivre, $R/t = 675$ .....	162
	5.3.34 Matériau acier, $R/t = 1350$ .....	163
	5.3.35 Matériau cuivre, $R/t = 1350$ .....	165
5.3.4	Etude de la déformation.....	166
	5.3.41 Sans pression interne.....	166
	5.3.42 Haute pression.....	168
5.3.5	Contraintes critiques .....	170
	5.3.51 Matériau cuivre, $R/t = 450$ .....	170
	5.3.52 Matériau aluminium, $R/t = 675$ .....	170
	5.3.53 Matériau cuivre, $R/t = 675$ .....	171
	5.3.54 Matériau acier, $R/t = 1350$ .....	173
	5.3.55 Matériau cuivre, $R/t = 1350$ .....	174
	5.3.56 Bilan des essais .....	175
5.3.6	Comportement de coques endommagées.....	176
5.3.7	Conclusions des essais PN .....	177
<b>5.4</b>	<b>Essais de flambage sous flexion et pression interne .....</b>	<b>179</b>
5.4.1	Démarche .....	179
5.4.2	Conditions expérimentales .....	179
5.4.3	Courbes de chargement : premiers essais .....	180
	5.4.31 Matériau cuivre, $R/t = 450$ .....	180
	5.4.32 Matériau aluminium, $R/t = 675$ .....	181
	5.4.33 Matériau cuivre, $R/t = 675$ .....	183
	5.4.34 Matériau acier, $R/t = 1350$ .....	184
	5.4.35 Matériau cuivre, $R/t = 1350$ .....	185
5.4.4	Contraintes critiques .....	186
	5.4.41 Matériau cuivre, $R/t = 450$ .....	187
	5.4.42 Matériau aluminium, $R/t = 675$ .....	187
	5.4.43 Matériau cuivre, $R/t = 675$ .....	188
	5.4.44 Matériau acier, $R/t = 1350$ .....	189

	5.4.45	Matériau cuivre, $R/t = 1350$ .....	191
	5.4.36	Bilan des essais .....	192
5.4.5		Comportement de coques endommagées.....	193
5.4.6		Conclusions des essais PM .....	196
<b>5.5</b>		<b>Comparaison flexion/compression .....</b>	<b>197</b>
5.5.1		Courbes de chargement .....	197
5.5.2		Contraintes critiques .....	200
<b>5.6</b>		<b>Essais de flambage sous cisaillement et pression interne .....</b>	<b>201</b>
5.6.1		Démarche .....	201
5.6.2		Conditions expérimentales .....	201
5.6.3		Courbes de chargement .....	202
	5.6.31	Matériau cuivre, $Z = 429$ .....	203
	5.6.32	Matériau aluminium, $Z = 644$ .....	204
	5.6.33	Matériau cuivre, $Z = 859$ .....	205
	5.6.34	Matériau cuivre, $Z = 1288$ .....	206
	5.6.35	Matériau acier, $Z = 1288$ .....	208
	5.6.36	Matériau cuivre, $Z = 1717$ .....	209
	5.6.37	Matériau aluminium, $Z = 2576$ .....	210
	5.6.38	Matériau cuivre, $Z = 3434$ .....	212
	5.6.39	Matériau cuivre, $Z = 5151$ .....	213
	5.6.310	Matériau acier, $Z = 5151$ .....	214
5.6.4		Etude de la déformation.....	215
	5.6.41	Mode de cisaillement.....	215
	5.6.42	Mode de flexion.....	217
5.6.5		Contraintes critiques .....	220
	5.6.51	Méthodes de dimensionnement en pression interne et cisaillement.....	220
	5.6.511	Shell Analysis Manual [10] .....	220
	5.6.512	Analysis and Design of Flight Vehicle Structures [21] .....	222
	5.6.52	Résultats expérimentaux.....	223
	5.6.521	Matériau cuivre, $Z = 429$ .....	224
	5.6.522	Matériau aluminium, $Z = 644$ .....	224
	5.6.523	Matériau cuivre, $Z = 859$ .....	225
	5.6.524	Matériau cuivre, $Z = 1288$ .....	226
	5.6.525	Matériau acier, $Z = 1288$ .....	227
	5.6.526	Matériau cuivre, $Z = 1717$ .....	227
	5.6.527	Matériau aluminium, $Z = 2576$ .....	228
	5.6.528	Matériau cuivre, $Z = 3434$ .....	229
	5.6.529	Matériau cuivre, $Z = 5151$ .....	230
	5.6.5210	Matériau acier, $Z = 5151$ .....	230
	5.6.5211	Nuages de points.....	231
5.6.6		Conclusions des essais PT .....	232

<b>5.7</b>	<b>Etude de l'interaction flexion/cisaillement .....</b>	<b>233</b>
5.7.1	Influence du bras de levier (sans pression interne) .....	234
	5.7.11 Courbes de chargement .....	234
	5.7.12 Contraintes critiques .....	235
5.7.2	Influence de la pression interne .....	236
<b>6</b>	<b>Simulations numériques .....</b>	<b>239</b>
<b>6.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>239</b>
<b>6.2</b>	<b>Estimation de la charge critique pour le dimensionnement : cas PN/PM .....</b>	<b>240</b>
6.2.1	Validation de la modélisation .....	240
	6.2.11 Forme du défaut .....	240
	6.2.12 Définition du modèle .....	240
	6.2.121 Conditions aux limites réelles.....	240
	6.2.122 Effet de surépaisseurs aux extrémités de la coque .....	241
	6.2.123 Géométrie.....	241
	6.2.13 Validation du défaut.....	242
	6.2.14 Influence des paramètres géométriques sur la contrainte critique initiale .....	243
	6.2.15 Comportement sous pression interne.....	245
	6.2.151 Cas PN .....	245
	6.2.152 Cas PM .....	246
6.2.2	Application au dimensionnement .....	247
	6.2.21 Taille du défaut.....	247
	6.2.22 Résultats .....	248
<b>6.3</b>	<b>Caractérisation de l'interaction (P, N, M) pour le dimensionnement .....</b>	<b>251</b>
6.3.1	Nature de l'interaction .....	251
6.3.2	Influence du rapport N/M .....	252
6.3.3	Dimensionnement (P, N, M).....	252
<b>6.4</b>	<b>Caractérisation de l'interaction flexion/cisaillement .....</b>	<b>255</b>
6.4.1	Problématique .....	255
6.4.2	Résultats .....	255
6.4.3	Application au dimensionnement .....	257
<b>6.5</b>	<b>Etude de l'influence de la plasticité .....</b>	<b>258</b>
6.5.1	Description du mécanisme de déformation.....	258
6.5.2	Influence de la loi matériau .....	260
6.5.3	Influence de la géométrie .....	263
6.5.4	Influence des conditions aux limites .....	265

6.5.5	Flambage en couche limite sous flexion .....	265
<b>6.6</b>	<b>Impact des conditions expérimentales .....</b>	<b>266</b>
6.6.1	Essais PN .....	266
	6.6.1.1 <i>Modèle</i> .....	266
	6.6.1.2 <i>Mise en évidence de la dissymétrie</i> .....	267
	6.6.1.21 Effet de la pression .....	269
	6.6.1.22 Effet de l'excentricité du chargement .....	273
	6.6.1.3 <i>Contraintes critiques</i> .....	274
	6.6.1.4 <i>Conclusions</i> .....	278
6.6.2	Essais PM .....	278
	6.6.2.1 <i>Modèle</i> .....	279
	6.6.2.2 <i>Analyse du comportement en pression interne et flexion</i> .....	279
	6.6.2.3 <i>Effort non aligné</i> .....	284
	6.6.2.4 <i>Conclusions</i> .....	285
6.6.3	Essais PT .....	285
	6.6.3.1 <i>Modèle</i> .....	285
	6.6.3.2 <i>Analyse du comportement en pression interne et cisaillement</i> .....	286
	6.6.3.21 Evolution avec la pression .....	286
	6.6.3.22 Contraintes critiques .....	296
	6.6.3.23 Influence d'un effort mal orienté .....	298
	6.6.3.3 <i>Conclusions</i> .....	301
<b>6.7</b>	<b>Comparaison flexion/compression .....</b>	<b>302</b>
6.7.1	Comportement .....	302
6.7.2	Contraintes critiques .....	303

## Troisième partie : Recommandations pour le dimensionnement au flambage de coques minces et conclusions .... 305

<b>7</b>	<b>Interprétation des résultats – établissement d'une nouvelle règle de dimensionnement .....</b>	<b>306</b>
<b>7.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>306</b>
<b>7.2</b>	<b>Estimation des erreurs sur les résultats expérimentaux .....</b>	<b>307</b>
7.2.1	Paramètres géométriques .....	307

7.2.2	Paramètres matériau.....	307
	7.2.21 Propriétés mesurées .....	307
	7.2.22 Prise en compte de l'anisotropie .....	308
7.2.3	Mesures.....	309
7.2.4	Conditions expérimentales .....	309
<b>7.3</b>	<b>Validation d'une nouvelle recommandation en pression interne et compression (P, N) .....</b>	<b>309</b>
7.3.1	R/t = 450, cuivre .....	310
7.3.2	R/t = 675, aluminium.....	310
7.3.3	R/t = 675, cuivre .....	311
7.3.4	R/t = 1350, acier .....	312
7.3.5	R/t = 1350, cuivre.....	313
7.3.6	Application au matériau Aluminium 2219.....	314
7.3.7	Conclusions .....	314
<b>7.4</b>	<b>Validation d'une nouvelle recommandation en pression interne et flexion (P, M) .....</b>	<b>315</b>
7.4.1	R/t = 450, cuivre .....	316
7.4.2	R/t = 675, aluminium.....	316
7.4.3	R/t = 675, cuivre .....	317
7.4.4	R/t = 1350, acier .....	318
7.4.5	R/t = 1350, cuivre.....	319
7.4.6	Application au matériau Aluminium 2219.....	319
7.4.7	Conclusions .....	320
<b>7.5</b>	<b>Validation d'une nouvelle recommandation en pression interne et cisaillement par effort tranchant (P, T) .....</b>	<b>321</b>
7.5.1	Démarche .....	321
7.5.2	Résultats .....	322
	7.5.21 Matériau cuivre, Z = 429.....	322
	7.5.22 Matériau aluminium, Z = 644 .....	323
	7.5.23 Matériau cuivre, Z = 859.....	323
	7.5.24 Matériau cuivre, Z = 1288 .....	324
	7.5.25 Matériau acier, Z = 1288.....	325
	7.5.26 Matériau cuivre, Z = 1717 .....	325
	7.5.27 Matériau aluminium, Z = 2576 .....	326
	7.5.28 Matériau cuivre, Z = 3434 .....	327
	7.5.29 Matériau cuivre, Z = 5151 .....	328
	7.5.210 Matériau acier, Z = 5151.....	328
7.5.3	Conclusions .....	329

<b>8</b>	<b>Conclusions et perspectives .....</b>	<b>330</b>
<b>8.1</b>	<b>Sur le flambage en pression interne et compression .....</b>	<b>330</b>
<b>8.2</b>	<b>Sur le flambage en pression interne et flexion .....</b>	<b>331</b>
<b>8.3</b>	<b>Sur les différences entre flexion et compression .....</b>	<b>331</b>
<b>8.4</b>	<b>Sur le flambage en pression interne et cisaillement par effort tranchant .....</b>	<b>331</b>
<b>8.5</b>	<b>Perspectives .....</b>	<b>332</b>
	<b>Bibliographie .....</b>	<b>333</b>

# Table des figures

<b>Figure 1.1</b> Ecorché du lanceur Ariane 5 (www.cnes.fr) .....	21
<b>Figure 1.2</b> Définition des chargements appliqués .....	22
<b>Figure 1.3</b> Types d'instabilité : bifurcation et point limite .....	24
<b>Figure 1.4</b> Solide en équilibre .....	25
<b>Figure 1.5</b> Perturbation du solide par un champ de déplacement .....	26
<b>Figure 1.6</b> Différents types d'équilibre .....	26
<b>Figure 1.7</b> Barre articulée soumise à un effort de compression .....	27
<b>Figure 1.8</b> Branches d'équilibre du système .....	28
<b>Figure 1.9</b> Solutions d'équilibres stables .....	30
<b>Figure 1.10</b> Solutions du problème linéarisé .....	31
<b>Figure 1.11</b> Structure imparfaite .....	32
<b>Figure 1.12</b> Solutions du problème imparfait .....	32
<b>Figure 1.13</b> Coque cylindrique mince .....	33
<b>Figure 1.14</b> Élément de coque cylindrique .....	34
<b>Figure 1.15</b> Élément de coque cylindrique déformée .....	35
<b>Figure 1.16</b> Mode de flambage axisymétrique d'une coque mince sous compression .....	39
<b>Figure 1.17</b> Mode de flambage à damiers d'une coque mince sous compression .....	41
<b>Figure 1.18</b> Branches d'équilibre de structures parfaites .....	42
<b>Figure 1.19</b> Influence des imperfections géométriques sur le comportement des structures .....	43
<b>Figure 1.20</b> Différents modèles de distribution de la contrainte au cours d'un flambage plastique .....	44
<b>Figure 1.21</b> Modèle de colonne élasto-plastique de Shanley .....	45
<b>Figure 1.22</b> Influence des imperfections sur le flambage d'une coque sphérique .....	47
<b>Figure 2.1</b> Résultats expérimentaux, coques cylindriques sous compression axiale .....	51
<b>Figure 2.2</b> Coque cylindrique sous compression axiale .....	52
<b>Figure 2.3</b> Coque de longueur non-uniforme sous compression axiale (Blachut, 2010) .....	53
<b>Figure 2.4</b> Influence d'une imperfection axisymétrique sur la charge critique (Koiter, 1945) .....	55
<b>Figure 2.5</b> Influence d'une imperfection axisymétrique localisée sur la charge critique, comparaison de résultats expérimentaux et analytiques (Hutchinson et al., 1971) .....	56
<b>Figure 2.6</b> Influence de différentes formes de défauts sur la charge critique expérimentale (Waeckel, 1984) .....	56
<b>Figure 2.7</b> Représentations de Fourier des défauts initiaux – valeurs moyennes et maximales (Mathon, 2004) .....	57
<b>Figure 2.8</b> Représentations de Fourier des défauts initiaux – valeurs moyennes et maximales (Limam, 1991) .....	58
<b>Figure 2.9</b> Forme initiale de la coque inter-étages II/III de la fusée Ariane (Sebek, 1981) .....	59
<b>Figure 2.10</b> Représentation de Fourier des défauts initiaux, coque inter-étages II/III de la fusée Ariane (Sebek, 1981) .....	59
<b>Figure 2.11</b> Méthode de fabrication des coques de l'EPC .....	60
<b>Figure 2.12</b> Influence de différents types d'imperfection axisymétrique sur la charge critique (Pircher et al., 2001) .....	61
<b>Figure 2.13</b> Influence de différents types d'imperfection axisymétrique sur la charge critique (Rotter et Teng, 1989) .....	61
<b>Figure 2.14</b> Modèle de type poutre .....	62
<b>Figure 2.15</b> Types de comportement d'une coque en flexion .....	63
<b>Figure 2.16</b> Charge critique d'une coque en flexion pure, pour différentes valeurs de R/t (Seide et Weingarten, 1961) .....	65
<b>Figure 2.17</b> Modes de flambage et répartition de contraintes associées : a) en cisaillement et b) en torsion .....	67
<b>Figure 2.18</b> Contraintes critiques de coques cylindriques soumises à un effort tranchant (Donnell, 1933) .....	68
<b>Figure 2.19</b> Contraintes critiques de cisaillement : a) comparaison entre le cisaillement par torsion et par effort tranchant, b) influence du R/t pour le cisaillement par effort tranchant (Yamaki, 1984) .....	69
<b>Figure 2.20</b> Photographie du banc d'essais exposant une coque flambée, évolution de la charge transverse en fonction du déplacement (Galletly et Blachut, 1985) .....	69

<b>Figure 2.21</b> Facteur de réduction en cisaillement en fonction du mode d'imperfection initiale (Matsuura et al., 1989) .....	71
<b>Figure 2.22</b> Géométries initiales de coques présentant des défauts modaux (Murakami et al., 1993) .....	72
<b>Figure 2.23</b> Courbes charge-déplacement pour différentes amplitudes d'imperfections (Murakami et al., 1993).....	72
<b>Figure 2.24</b> Facteur de correction pour la charge critique en fonction de l'amplitude du défaut (Murakami et al., 1993).....	73
<b>Figure 2.25</b> Courbes charge-déplacement pour des coques de longueur différente : a) courte $Z=100$ , b) moyenne $Z=500$ , c) longue $Z=2000$ (Yamaki, 1984) .....	73
<b>Figure 2.26</b> Etat de contrainte due à la mise en pression hydrostatique .....	74
<b>Figure 2.27</b> Comportement post-critique de coques parfaites sous pression (Schnell, 1959).....	75
<b>Figure 2.28</b> Evolution avec la pression des charges de bifurcation relatives aux 20 premiers modes critiques sous compression axiale (Limam, 1991) .....	76
<b>Figure 2.29</b> Augmentation de la charge critique avec la pression, $R/t=580$ (Lo, 1951) .....	77
<b>Figure 2.30</b> Augmentation de la charge critique avec la pression, $R/t=1750$ (Fung, 1957) .....	78
<b>Figure 2.31</b> Augmentation de la charge critique avec la pression, $R/t=700$ (Dow, 1960) .....	78
<b>Figure 2.32</b> Augmentation de la charge critique avec la pression pour différents $R/t$ (Seide, 1969) ...	79
<b>Figure 2.33</b> Modification du comportement post-critique d'une coque sous compression axiale et pression interne (Weingarten, 1965) .....	80
<b>Figure 2.34</b> Effet de la pression sur les charges de flambage en compression axiale (Limam, 1991) .....	81
<b>Figure 2.35</b> Génératrice après essai n°1 à 2150 mbar, coque A5 (Limam, 1991) .....	81
<b>Figure 2.36</b> Déformations locales près des conditions aux limites (Rotter, 2006) .....	82
<b>Figure 2.37</b> Effet de la pression sur les charges de flambage en compression axiale (Harris et al., 1957).....	82
<b>Figure 2.38</b> Génératrice après essai n°8 à 1750 mbar, coque A1 (Limam, 1991).....	83
<b>Figure 2.39</b> Patte d'éléphant sur un réservoir de stockage à la suite d'un tremblement de terre (Rotter, 2006).....	83
<b>Figure 2.40</b> Effet d'imperfections multimodales sur la contrainte critique d'une coque sous compression et pression interne (Hutchinson, 1965).....	84
<b>Figure 2.41</b> Effet de différents défauts sur la contrainte de bifurcation d'une coque pressurisée sous compression axiale (Teng et Rotter, 1992) .....	85
<b>Figure 2.42</b> Contraintes critiques expérimentales sous flexion et pression interne (Suer et al., 1958) .....	86
<b>Figure 2.43</b> Contraintes critiques expérimentales sous flexion et pression interne (Dow et Peterson, 1960).....	87
<b>Figure 2.44</b> Contraintes critiques expérimentales sous flexion et pression interne (Seide, 1961) .....	88
<b>Figure 2.45</b> Courbes expérimentales charge/écrasement sous pression interne et flexion (Seide et Weingarten, 1961) .....	88
<b>Figure 2.46</b> Nuage de points, essais de flambage sous pression interne et flexion réalisés à l'INSA Lyon (Mathon, 2004) .....	89
<b>Figure 2.47</b> Modèle simplifié : distribution des contraintes axiales .....	90
<b>Figure 2.48</b> Evolution de la fonction amplificatrice du moment de flexion en fonction de l'angle flambé .....	91
<b>Figure 2.49</b> Comparaison des résultats expérimentaux sous flexion et pression interne aux différentes prédictions proposées .....	92
<b>Figure 2.50</b> Effet de la pression sur le comportement post-critique de coques en cisaillement : a) $Z=100$ , b) $Z=500$ , c) $Z=2000$ (Yamaki, 1984).....	93
<b>Figure 2.51</b> Augmentation de la charge critique en cisaillement avec la pression interne : a) $Z=20$ , b) $Z=100$ , c) $Z=500$ , d) $Z=2000$ (Yamaki, 1984).....	94
<b>Figure 2.52</b> Effacement des défauts suite à une pressurisation (Mathon, 2004).....	95
<b>Figure 2.53</b> Effacement des défauts modaux en fonction de la pression (Mathon, 2004) .....	95
<b>Figure 2.54</b> Coque soumise à un effort tranchant : a) notations, b) état de contrainte axial, c) état de contrainte circonférentiel .....	97
<b>Figure 2.55</b> Contraintes critiques, interaction flexion/cisaillement (Rhode et Lundquist, 1931).....	98
<b>Figure 2.56</b> Résultats expérimentaux, interaction flexion/cisaillement (Lundquist, 1935) .....	99
<b>Figure 2.57</b> Résultats expérimentaux, interaction flexion/cisaillement (Peterson et Updegraff, 1958) .....	100
<b>Figure 2.58</b> Propositions pour l'interaction flexion/cisaillement.....	101
<b>Figure 2.59</b> Interaction flexion/cisaillement, évolution des modes critiques en fonction du bras de levier (Antoine, 2000) .....	101

<b>Figure 2.60</b> Interaction flexion/cisaillement, évolution des modes critiques en fonction du bras de levier, $P = 25$ mbar (Antoine, 2000).....	102
<b>Figure 2.61</b> Coque soumise à une interaction compression axiale/flexion .....	103
<b>Figure 2.62</b> Résultats expérimentaux, interaction compression axiale/flexion (Bruhn, 1945) .....	103
<b>Figure 2.63</b> Résultats expérimentaux, interaction compression axiale/flexion (Stuart et al., 1960)...	104
<b>Figure 2.64</b> Résultats expérimentaux, interaction P, N, M (Seide et al., 1960) .....	106
<b>Figure 2.65</b> Résultats expérimentaux, interaction compression/cisaillement (Bruhn, 1945) .....	107
<b>Figure 3.1</b> Résultats expérimentaux sous compression axiale utilisés pour la NASA SP8007 (Seide et al., 1960).....	109
<b>Figure 3.2</b> Résultats expérimentaux sous flexion utilisés pour la NASA SP8007 (Seide et al., 1960) .....	110
<b>Figure 3.3</b> Comparaison entre les résultats expérimentaux sous torsion et le facteur recommandé par la SP8007 .....	111
<b>Figure 3.4</b> Augmentation de la charge critique sous compression axiale avec la pression interne, résultats expérimentaux et NASA SP8007.....	112
<b>Figure 3.5</b> Influence de l'effet membrane et comparaison aux résultats de Seide et al. ....	114
<b>Figure 3.6</b> Caractérisation du comportement de coques au flambage (Rotter, 2006) .....	118
<b>Figure 3.7</b> Comparaison des facteurs de réduction liés à la pression interne .....	120
<b>Figure 3.8</b> Comparaison des facteurs de réduction de la NASA SP8007 et de l'Eurocode 3 en flexion ou compression .....	121
<b>Figure 3.9</b> Comparaison des facteurs de réduction de la NASA SP8007 et de l'Eurocode 3 en compression et pression interne, a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 1500$ .....	122
<b>Figure 3.10</b> Comparaison des facteurs de réduction de la NASA SP8007 et de l'Eurocode 3 en flexion et pression interne, a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 1500$ .....	123
<b>Figure 4.1</b> Fabrication des coques « roulées-collées » .....	129
<b>Figure 4.2</b> Coque cylindrique mince .....	130
<b>Figure 4.3</b> Eprouvettes de traction .....	131
<b>Figure 4.5</b> Distributions d'épaisseur : a) Acier INOX 0.1 mm, b) Aluminium 0.2 mm, c) Cuivre 0.3 mm .....	134
<b>Figure 4.6</b> Banc de mesure de la géométrie .....	136
<b>Figure 4.7</b> Banc Ariane : compression .....	137
<b>Figure 4.8</b> Banc Ariane, application de l'effort.....	138
<b>Figure 4.9</b> Petit banc : flexion, cisaillement .....	139
<b>Figure 4.10</b> Géométrie des éléments axisymétriques dans STANLAX.....	142
<b>Figure 4.11</b> Configurations d'équilibre .....	143
<b>Figure 4.12</b> Méthodes de pilotage par longueur d'arc.....	149
<b>Figure 5.1</b> Géométrie d'une coque en cuivre, d'épaisseur 0.1 mm (CL57).....	152
<b>Figure 5.2</b> Géométrie de coques en acier, d'épaisseur 0.1 mm, a) : coque régulière (CL60), b) : coque avec un défaut de collage (CL65) .....	152
<b>Figure 5.3</b> Géométrie d'une coque en cuivre, d'épaisseur 0.2 mm (CL82).....	153
<b>Figure 5.4</b> Géométrie d'une coque en aluminium, d'épaisseur 0.2 mm (CL76).....	153
<b>Figure 5.5</b> Géométrie d'une coque en cuivre, d'épaisseur 0.3 mm (CL86).....	154
<b>Figure 5.6</b> Mesure de la géométrie sur une parallèle .....	154
<b>Figure 5.7</b> Ondes axisymétriques sur une génératrice, a) : Mesure, b) : aspect visuel .....	155
<b>Figure 5.8</b> Position des LVDT .....	156
<b>Figure 5.9</b> Courbes de chargement PN, coque CL97 .....	157
<b>Figure 5.10</b> Mode critique, coque CL97 .....	157
<b>Figure 5.11</b> Comportements post-critiques en compression, banc Ariane .....	158
<b>Figure 5.12</b> Courbes de chargement PN, $R/t = 450$ , cuivre .....	159
<b>Figure 5.13</b> Modes critiques, PN, $R/t = 450$ , cuivre.....	160
<b>Figure 5.14</b> Courbes de chargement PN, $R/t = 675$ , aluminium .....	161
<b>Figure 5.15</b> Modes critiques, PN, $R/t = 675$ , aluminium .....	162
<b>Figure 5.16</b> Courbes de chargement PN, $R/t = 675$ , cuivre .....	162
<b>Figure 5.17</b> Modes critiques, PN, $R/t = 675$ , cuivre.....	163
<b>Figure 5.18</b> Courbes de chargement PN, $R/t = 1350$ , acier .....	164
<b>Figure 5.19</b> Modes critiques, PN, $R/t = 1350$ , acier.....	164
<b>Figure 5.20</b> Courbes de chargement PN, $R/t = 1350$ , cuivre .....	165
<b>Figure 5.21</b> Modes critiques, PN, $R/t = 1350$ , cuivre.....	166
<b>Figure 5.22</b> Evolution des déformations au cours du chargement, CL208 .....	167

<b>Figure 5.23</b> Série de photos montrant l'évolution de la déformation du spécimen CL208 soumis à de la compression axiale .....	167
<b>Figure 5.24</b> Courbe de chargement PN, CL209 .....	168
<b>Figure 5.25</b> Série de photos montrant l'évolution de la déformation du spécimen CL209 soumis à de la compression axiale .....	169
<b>Figure 5.26</b> Evolution des déformations au cours du chargement, CL209 .....	169
<b>Figure 5.27</b> Contraintes critiques PN, R/t = 450, cuivre .....	170
<b>Figure 5.28</b> Contraintes critiques PN, R/t = 675, aluminium .....	171
<b>Figure 5.29</b> Contraintes critiques PN, R/t = 675, cuivre .....	172
<b>Figure 5.30</b> Influence de la dissymétrie sur les essais PN .....	173
<b>Figure 5.31</b> Contraintes critiques PN, R/t = 1350, acier .....	173
<b>Figure 5.32</b> Contraintes critiques PN, R/t = 1350, cuivre .....	174
<b>Figure 5.33</b> Contraintes critiques PN de tous les essais réalisés .....	175
<b>Figure 5.34</b> Courbes de chargement PN, seconds essais à 1000 mbar.....	176
<b>Figure 5.35</b> Contraintes critiques PN, seconds essais à 1000 mbar .....	177
<b>Figure 5.36</b> Comportements post-critiques en compression, petit banc .....	179
<b>Figure 5.37</b> Courbes de chargement PM, coque CL19.....	180
<b>Figure 5.38</b> Courbes de chargement PM, R/t = 450, cuivre .....	181
<b>Figure 5.39</b> Modes critiques, PM, R/t = 450, cuivre .....	181
<b>Figure 5.40</b> Courbes de chargement PM, R/t = 675, aluminium .....	182
<b>Figure 5.41</b> Modes critiques, PM, R/t = 675, aluminium.....	183
<b>Figure 5.42</b> Courbes de chargement PM, R/t = 675, cuivre .....	183
<b>Figure 5.43</b> Modes critiques, PM, R/t = 675, cuivre .....	184
<b>Figure 5.44</b> Courbes de chargement PM, R/t = 1350, acier.....	184
<b>Figure 5.45</b> Modes critiques, PM, R/t = 1350, acier .....	185
<b>Figure 5.46</b> Courbes de chargement PM, R/t = 1350, cuivre .....	186
<b>Figure 5.47</b> Modes critiques, PM, R/t = 1350, cuivre .....	186
<b>Figure 5.48</b> Contraintes critiques PM, R/t = 450, cuivre.....	187
<b>Figure 5.49</b> Contraintes critiques PM, R/t = 675, aluminium .....	188
<b>Figure 5.50</b> Contraintes critiques PM, R/t = 675, cuivre.....	189
<b>Figure 5.51</b> Contraintes critiques PM, R/t = 1350, acier.....	189
<b>Figure 5.52</b> Cloquage au niveau des conditions aux limites .....	190
<b>Figure 5.53</b> Contraintes critiques PM de collapse, R/t = 1350, acier .....	191
<b>Figure 5.54</b> Contraintes critiques PM, R/t = 1350, cuivre.....	191
<b>Figure 5.55</b> Contraintes critiques PM de collapse, R/t = 1350, cuivre .....	192
<b>Figure 5.56</b> Contraintes critiques PM de tous les essais réalisés .....	193
<b>Figure 5.57</b> Courbes de chargement PM, multiples essais sur une même coque, CL05 .....	194
<b>Figure 5.58</b> Modes critiques PM, multiples essais sur une même coque, CL05.....	195
<b>Figure 5.59</b> Contraintes de collapse PM, tous les essais.....	195
<b>Figure 5.60</b> Comparaison courbes de chargement PM/PN, R/t = 675, aluminium .....	198
<b>Figure 5.61</b> Comparaison courbes de chargement PM/PN, R/t = 1350, acier .....	198
<b>Figure 5.62</b> Comparaison courbes de chargement PM/PN, R/t = 1350, cuivre .....	199
<b>Figure 5.63</b> Comparaison contraintes de cloquage PM/PN .....	200
<b>Figure 5.64</b> Courbes de chargement PT, coque CL155.....	202
<b>Figure 5.65</b> Courbes de chargement PT, R/t = 450, L/R = 1, cuivre .....	203
<b>Figure 5.66</b> Déformations en cisaillement observées lors de la branche post-critique stable, CL183 .....	203
<b>Figure 5.67</b> Modes critiques PT de côté et de face, R/t = 450, L/R = 1, cuivre.....	204
<b>Figure 5.68</b> Courbes de chargement PT, R/t = 675, L/R = 1, aluminium .....	204
<b>Figure 5.69</b> Modes critiques PT de côté et de face, R/t = 675, L/R = 1, aluminium.....	205
<b>Figure 5.70</b> Courbes de chargement PT, R/t = 900, L/R = 1, cuivre .....	206
<b>Figure 5.71</b> Modes critiques PT de côté et de face, R/t = 900, L/R = 1, cuivre.....	206
<b>Figure 5.72</b> Courbes de chargement PT, R/t = 1350, L/R = 1, cuivre .....	207
<b>Figure 5.73</b> Cloques de type flexion après une bifurcation, CL170 .....	207
<b>Figure 5.74</b> Modes critiques PT de côté et de face, R/t = 1350, L/R = 1, cuivre.....	208
<b>Figure 5.75</b> Courbes de chargement PT, R/t = 1350, L/R = 1, acier.....	208
<b>Figure 5.76</b> Modes critiques PT de côté et de face, R/t = 1350, L/R = 1, acier .....	209
<b>Figure 5.77</b> Courbes de chargement PT, R/t = 450, L/R = 2, cuivre .....	209
<b>Figure 5.78</b> Modes critiques PT de côté et de face, R/t = 450, L/R = 2, cuivre.....	210

<b>Figure 5.79</b> Courbes de chargement PT, $R/t = 675$ , $L/R = 2$ , aluminium .....	211
<b>Figure 5.80</b> Modes critiques PT de côté et de face, $R/t = 675$ , $L/R = 2$ , aluminium.....	211
<b>Figure 5.81</b> Courbes de chargement PT, $R/t = 900$ , $L/R = 2$ , cuivre .....	212
<b>Figure 5.82</b> Modes critiques PT de côté et de face, $R/t = 900$ , $L/R = 2$ , cuivre.....	212
<b>Figure 5.83</b> Courbes de chargement PT, $R/t = 1350$ , $L/R = 2$ , cuivre .....	213
<b>Figure 5.84</b> Modes critiques PT de côté et de face, $R/t = 1350$ , $L/R = 2$ , cuivre.....	213
<b>Figure 5.85</b> Courbes de chargement PT, $R/t = 1350$ , $L/R = 2$ , acier.....	214
<b>Figure 5.86</b> Modes critiques PT de côté et de face, $R/t = 1350$ , $L/R = 2$ , acier .....	215
<b>Figure 5.87</b> Courbe de chargement, CL 162 .....	215
<b>Figure 5.88</b> Série de photos montrant l'évolution de la déformation du spécimen CL 162 soumis à un effort tranchant .....	216
<b>Figure 5.89</b> Evolution des déformations au cours du chargement, CL 162 .....	217
<b>Figure 5.90</b> Courbe de chargement, CL 161 .....	218
<b>Figure 5.91</b> Série de photos montrant l'évolution de la déformation du spécimen CL 161 soumis à un effort tranchant .....	219
<b>Figure 5.92</b> Evolution des déformations au cours du chargement, CL 161 .....	220
<b>Figure 5.93</b> Facteur de réduction sous cisaillement (Baker, 1968) .....	221
<b>Figure 5.94</b> Augmentation de contrainte critique avec la pression interne (Baker, 1968) .....	221
<b>Figure 5.95</b> Facteur de réduction sous cisaillement (Bruhn, 1973).....	222
<b>Figure 5.96</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 450$ , $L/R = 1$ , cuivre .....	224
<b>Figure 5.97</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 675$ , $L/R = 1$ , aluminium .....	225
<b>Figure 5.98</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 900$ , $L/R = 1$ , cuivre .....	226
<b>Figure 5.99</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 1350$ , $L/R = 1$ , cuivre.....	226
<b>Figure 5.100</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 1350$ , $L/R = 1$ , acier.....	227
<b>Figure 5.101</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 450$ , $L/R = 2$ , cuivre .....	228
<b>Figure 5.102</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 675$ , $L/R = 2$ , aluminium .....	229
<b>Figure 5.103</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 900$ , $L/R = 2$ , cuivre .....	229
<b>Figure 5.104</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 1350$ , $L/R = 2$ , cuivre.....	230
<b>Figure 5.105</b> Contraintes critiques PT, $R/t = 1350$ , $L/R = 2$ , acier.....	231
<b>Figure 5.106</b> Contraintes critiques de cloquage PT de tous les essais réalisés .....	231
<b>Figure 5.107</b> Contraintes critiques de collapse PT de tous les essais réalisés .....	232
<b>Figure 5.108</b> Courbes de chargement MT, $R/t = 675$ , $L/R = 2$ , aluminium .....	234
<b>Figure 5.109</b> Modes critiques TM de côté et de face en fonction du bras de levier, $R/t = 675$ , $L/R = 2$ , aluminium .....	235
<b>Figure 5.110</b> Contraintes critiques de collapse, interaction flexion/cisaillement, $R/t = 675$ , $L/R = 2$ , aluminium .....	236
<b>Figure 5.111</b> Contraintes critiques de collapse, PT et PM .....	236
<b>Figure 5.112</b> Courbes d'interaction PT/PM .....	237
<b>Figure 6.1</b> Modélisation utilisée pour les calculs PN/PM.....	242
<b>Figure 6.2</b> Influence de différents types de défauts : a) en compression, b) en flexion (Mathon, 2004) .....	242
<b>Figure 6.3</b> Influence de la longueur d'onde sur la contrainte de bifurcation, défaut triangle (Mathon, 2004).....	243
<b>Figure 6.4</b> Influence du rapport $R/t$ sur la contrainte de bifurcation, défaut triangle (Mathon, 2004) .	244
<b>Figure 6.5</b> Influence du rapport $L/R$ sur la contrainte de bifurcation, défaut triangle (Mathon, 2004)	244
<b>Figure 6.6</b> Effet d'un défaut triangulaire en compression et pression interne en fonction de $P$ , a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 1500$ .....	245
<b>Figure 6.7</b> Effet d'un défaut triangulaire en compression et pression interne en fonction de la pression adimensionnelle.....	246
<b>Figure 6.8</b> Effet d'un défaut triangulaire en flexion et pression interne en fonction de $P$ , a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 1500$ .....	246
<b>Figure 6.9</b> Proposition de courbes de dimensionnement en compression et pression interne, a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 500$ , c) : $R/t = 750$ , d) : $R/t = 1000$ , e) : $R/t = 1250$ , f) : $R/t = 1500$ .....	249
<b>Figure 6.10</b> Proposition de courbes de dimensionnement en flexion et pression interne, a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 500$ , c) : $R/t = 750$ , d) : $R/t = 1000$ , e) : $R/t = 1250$ , f) : $R/t = 1500$ .....	250
<b>Figure 6.11</b> Interaction flexion, compression et pression interne, a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 1500$ .....	251
<b>Figure 6.12</b> Influence du rapport $N/M$ sur la contrainte critique, a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 1500$ .....	252
<b>Figure 6.13</b> Comparaison de deux approches pour l'interaction PNM, $R/t = 250$ , a) : $N/M = 0.1$ , b) : $N/M = 0.5$ , c) : $N/M = 1$ , d) : $N/M = 10$ .....	253

<b>Figure 6.14</b> Comparaison de deux approches pour l'interaction PNM, $R/t = 1500$ , a) : $N/M = 0.1$ , b) : $N/M = 0.5$ , c) : $N/M = 1$ , d) : $N/M = 10$ .....	254
<b>Figure 6.15</b> Evolution de l'interaction flexion/cisaillement avec la pression, a) : $L/R = 1$ , $R/t = 250$ , b) : $L/R = 1$ , $R/t = 1500$ , c) : $L/R = 2$ , $R/t = 250$ , d) : $L/R = 2$ , $R/t = 1500$ , e) : $L/R = 3$ , $R/t = 250$ , f) : $L/R = 3$ , $R/t = 1500$ .....	256
<b>Figure 6.16</b> Changement de mode théorique avec l'augmentation du bras de levier ( $R/t = 1500$ , $L/R = 2$ ).....	257
<b>Figure 6.17</b> Courbe de chargement typique pour un mode en patte d'éléphant.....	259
<b>Figure 6.18</b> Flambage en couche limite .....	259
<b>Figure 6.19</b> Lois matériau utilisées lors des simulations .....	261
<b>Figure 6.20</b> Flambage par point limite pour différentes lois matériau .....	261
<b>Figure 6.21</b> Flambage par point limite pour différentes lois matériau .....	262
<b>Figure 6.22</b> Loi matériau, aluminium 2219 .....	263
<b>Figure 6.23</b> Chute de charge critique en compression due à la formation d'une patte d'éléphant, a) : $R/t = 250$ , b) : $R/t = 500$ , c) : $R/t = 750$ , d) : $R/t = 1000$ , e) : $R/t = 1250$ , f) : $R/t = 1500$ .....	264
<b>Figure 6.24</b> Influence des conditions aux limites sur la pression seuil.....	265
<b>Figure 6.25</b> Schéma de la configuration utilisée pour les calculs, PN .....	267
<b>Figure 6.26</b> Positions des fibres suivies lors des simulations .....	267
<b>Figure 6.27</b> Courbes de chargement numériques PN.....	268
<b>Figure 6.28</b> Réaction au niveau de la condition limite inférieure.....	269
<b>Figure 6.29</b> Courbes de chargement PN, simulations numériques, $R/t = 1350$ , acier .....	270
<b>Figure 6.30</b> Modes critiques PN observés numériquement, $R/t = 1350$ , acier, a) : pointes de diamant, b) : axisymétrique généralisé.....	270
<b>Figure 6.31</b> Courbes de chargement mettant en évidence la dissymétrie, $R/t = 1350$ , acier .....	271
<b>Figure 6.32</b> Réaction au niveau de la condition limite inférieure, $R/t = 1350$ , acier, a) : $P = 0$ mbar, b) : $P = 2000$ mbar .....	271
<b>Figure 6.33</b> Courbes de chargement PN, simulations numériques, $R/t = 675$ , aluminium .....	272
<b>Figure 6.34</b> Modes critiques PN observés numériquement, $R/t = 675$ , aluminium, a) : pointes de diamant ( $P = 0$ mbar), b) : pointes de diamant ( $P = 200$ mbar), c) : patte d'éléphant.....	272
<b>Figure 6.35</b> Courbes de chargement mettant en évidence la dissymétrie, $R/t = 675$ , aluminium.....	273
<b>Figure 6.36</b> Réaction au niveau de la condition limite inférieure, $R/t = 675$ , aluminium, a) : $P = 0$ mbar, b) : $P = 1000$ mbar.....	273
<b>Figure 6.37</b> Réaction au niveau de la condition limite inférieure, $R/t = 1350$ , cuivre .....	274
<b>Figure 6.38</b> Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression, $R/t = 450$ , cuivre .....	275
<b>Figure 6.39</b> Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression, $R/t = 675$ , aluminium .....	276
<b>Figure 6.40</b> Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression, $R/t = 675$ , cuivre .....	277
<b>Figure 6.41</b> Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression, $R/t = 1350$ , cuivre .....	277
<b>Figure 6.42</b> Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression, $R/t = 1350$ , acier.....	278
<b>Figure 6.43</b> Modèle utilisé lors des simulations PM .....	279
<b>Figure 6.44</b> Exemple de courbes de chargement PM .....	280
<b>Figure 6.45</b> Courbes de chargement PM, $R/t = 1350$ , cuivre.....	281
<b>Figure 6.46</b> Force de réaction à 0 mbar, $R/t = 1350$ , cuivre.....	281
<b>Figure 6.46</b> Force de réaction à 800 mbar, $R/t = 1350$ , cuivre, a) : avec la traction apportée par l'effet de fonds, b) : sans l'effet de fonds .....	282
<b>Figure 6.47</b> Courbes de chargement PM, $R/t = 675$ , cuivre.....	283
<b>Figure 6.48</b> Modes critiques PM observés numériquement, $R/t = 675$ , aluminium, a) : pointes de diamant ( $P = 0$ mbar), b) : mode mixte pointes de diamant/soufflet ( $P = 400$ mbar), c) : patte d'éléphant ( $P = 600$ mbar).....	283
<b>Figure 6.49</b> Influence d'un effort mal aligné sur le comportement en flexion, $R/t = 1350$ , cuivre .....	285
<b>Figure 6.50</b> Modèle utilisé lors des simulations PT .....	286
<b>Figure 6.51</b> Courbes de chargement PT, $R/t = 450$ , $L/R = 1$ , cuivre.....	287
<b>Figure 6.52</b> Modes critiques PT, $R/t = 450$ , $L/R = 1$ , cuivre .....	287
<b>Figure 6.53</b> Courbes de chargement PT, $R/t = 675$ , $L/R = 1$ , aluminium .....	288
<b>Figure 6.54</b> Modes critiques PT, $R/t = 675$ , $L/R = 1$ , aluminium.....	288

<b>Figure 6.55</b> Courbes de chargement PT, R/t = 900, L/R = 1, cuivre .....	289
<b>Figure 6.56</b> Modes critiques PT, R/t = 900, L/R = 1, cuivre .....	289
<b>Figure 6.57</b> Courbes de chargement PT, R/t = 1350, L/R = 1, cuivre .....	290
<b>Figure 6.58</b> Modes critiques PT, R/t = 1350, L/R = 1, cuivre .....	290
<b>Figure 6.59</b> Courbes de chargement PT, R/t = 1350, L/R = 1, acier.....	291
<b>Figure 6.60</b> Modes critiques PT, R/t = 1350, L/R = 1, acier .....	291
<b>Figure 6.61</b> Courbes de chargement PT, R/t = 450, L/R = 2, cuivre .....	292
<b>Figure 6.62</b> Modes critiques PT, R/t = 450, L/R = 2, cuivre .....	292
<b>Figure 6.63</b> Courbes de chargement PT, R/t = 675, L/R = 2, aluminium .....	293
<b>Figure 6.64</b> Modes critiques PT, R/t = 675, L/R = 2, aluminium.....	293
<b>Figure 6.65</b> Courbes de chargement PT, R/t = 900, L/R = 2, cuivre .....	294
<b>Figure 6.66</b> Modes critiques PT, R/t = 900, L/R = 2, cuivre .....	294
<b>Figure 6.67</b> Courbes de chargement PT, R/t = 1350, L/R = 2, cuivre .....	295
<b>Figure 6.68</b> Modes critiques PT, R/t = 1350, L/R = 2, cuivre .....	295
<b>Figure 6.69</b> Courbes de chargement PT, R/t = 1350, L/R = 2, acier.....	296
<b>Figure 6.70</b> Modes critiques PT, R/t = 1350, L/R = 2, acier .....	296
<b>Figure 6.71</b> Contraintes critiques de cloquage PT obtenues par calcul .....	297
<b>Figure 6.72</b> Contraintes critiques de cloquage/collapse PT obtenues par calcul.....	298
<b>Figure 6.73</b> Décomposition du chargement vu par la coque .....	298
<b>Figure 6.74</b> Influence d'un effort mal aligné, R/t = 450, L/R = 1, cuivre .....	299
<b>Figure 6.75</b> Influence d'un effort mal aligné sur les déformations post-critiques, R/t = 450, L/R = 1, cuivre .....	299
<b>Figure 6.76</b> Influence d'un effort mal aligné, R/t = 1350, L/R = 2, 0 mbar .....	300
<b>Figure 6.77</b> Influence d'un effort mal aligné sur les déformations post-critiques, R/t = 1350, L/R = 2, 0 mbar.....	300
<b>Figure 6.78</b> Influence d'un effort mal aligné, R/t = 1350, L/R = 2, 200 mbar .....	301
<b>Figure 6.79</b> Influence d'un effort mal aligné sur les déformations post-critiques (partie comprimée), R/t = 1350, L/R = 2, 200 mbar.....	301
<b>Figure 6.80</b> Comparaison des comportements de coques en cuivre (R/t = 1350) pressurisées en compression (PN) ou en flexion (PM) .....	302
<b>Figure 6.81</b> Comparaison des comportements de coques en aluminium (R/t = 675) pressurisées en compression (PN) ou en flexion (PM) .....	303
<b>Figure 6.82</b> Influence d'un défaut triangulaire en compression ou en flexion, R/t = 250 .....	304
<b>Figure 6.83</b> Influence d'un défaut triangulaire en compression ou en flexion, R/t = 1500 .....	304
<b>Figure 7.1</b> Validation du dimensionnement PN, R/t = 450, cuivre.....	310
<b>Figure 7.2</b> Validation du dimensionnement PN, R/t = 675, aluminium.....	311
<b>Figure 7.3</b> Validation du dimensionnement PN, R/t = 675, cuivre.....	312
<b>Figure 7.4</b> Validation du dimensionnement PN, R/t = 1350, acier .....	313
<b>Figure 7.5</b> Validation du dimensionnement PN, R/t = 1350, cuivre.....	313
<b>Figure 7.6</b> Dimensionnement PN dans le cas du matériau Aluminium 2219, a) : R/t = 250, b) : R/t = 500, c) : R/t = 750, d) : R/t = 1000, e) : R/t = 1250, f) : R/t = 1500.....	315
<b>Figure 7.7</b> Validation du dimensionnement PM, R/t = 450, cuivre .....	316
<b>Figure 7.8</b> Validation du dimensionnement PM, R/t = 675, aluminium .....	317
<b>Figure 7.9</b> Validation du dimensionnement PM, R/t = 675, cuivre .....	318
<b>Figure 7.10</b> Validation du dimensionnement PM, R/t = 1350, acier .....	318
<b>Figure 7.11</b> Validation du dimensionnement PM, R/t = 1350, cuivre .....	319
<b>Figure 7.12</b> Dimensionnement PM dans le cas du matériau Aluminium 2219, a) : R/t = 250, b) : R/t = 500, c) : R/t = 750, d) : R/t = 1000, e) : R/t = 1250, f) : R/t = 1500.....	320
<b>Figure 7.13</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 450, L/R = 1, cuivre .....	322
<b>Figure 7.14</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 675, L/R = 1, aluminium .....	323
<b>Figure 7.15</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 900, L/R = 1, cuivre .....	324
<b>Figure 7.16</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 1350, L/R = 1, cuivre .....	324
<b>Figure 7.17</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 1350, L/R = 1, acier .....	325
<b>Figure 7.18</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 450, L/R = 2, cuivre .....	326
<b>Figure 7.19</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 675, L/R = 2, aluminium .....	327
<b>Figure 7.20</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 900, L/R = 2, cuivre .....	327
<b>Figure 7.21</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 1350, L/R = 2, cuivre .....	328
<b>Figure 7.22</b> Validation du dimensionnement PT, R/t = 1350, L/R = 2, acier .....	329

# Table des tableaux

---

<b>Tableau 2.1</b>	Influence des conditions aux limites .....	52
<b>Tableau 2.2</b>	Paramètres de l'interaction compression/cisaillement (Bruhn, 1945) .....	107
<b>Tableau 3.1</b>	Classes de qualité Eurocode, cas de la compression .....	116
<b>Tableau 3.2</b>	Classes de qualité Eurocode, cas du cisaillement .....	116
<b>Tableau 4.1</b>	Feuillards utilisés pour la fabrication des coques .....	130
<b>Tableau 4.2</b>	Lois de comportement des différents matériaux.....	133
<b>Tableau 4.3</b>	Modules moyens mesurés.....	134
<b>Tableau 4.4</b>	Feuillards utilisés pour la fabrication des coques .....	135
<b>Tableau 4.5</b>	Caractéristiques des capteurs du banc Ariane.....	138
<b>Tableau 4.6</b>	Caractéristiques des capteurs du petit banc .....	140
<b>Tableau 4.7</b>	Composante de compression sur le petit banc .....	140
<b>Tableau 5.1</b>	Défauts relevés sur différents feuillards .....	155
<b>Tableau 5.2</b>	Valeurs de Z étudiées en pression interne et cisaillement .....	201
<b>Tableau 5.3</b>	Pression seuil de changement de mode cisaillement/flexion .....	238
<b>Tableau 6.1</b>	Influence de surépaisseurs au niveau des conditions aux limites en compression (Mathon, 2004) .....	241
<b>Tableau 6.2</b>	Taille de défaut triangulaire donnant les résultats de la NASA SP8007 à pression nulle .....	248
<b>Tableau 6.3</b>	Pression seuil de passage à un mode de flexion pure .....	258
<b>Tableau 7.1</b>	Incertitudes absolues sur les paramètres géométriques .....	307
<b>Tableau 7.2</b>	Paramètres d'anisotropie des différents feuillards utilisés .....	308

# Première Partie : Problématique et état de l'art

# 1 Introduction

## 1.1 Introduction générale

- 1.1.1 A propos des coques minces
- 1.1.2 Problématique industrielle
- 1.1.3 Démarche

## 1.2 Concepts théoriques fondamentaux

- 1.2.1 Types d'instabilité
- 1.2.2 Equilibre d'un système mécanique
- 1.2.3 Stabilité d'un équilibre
- 1.2.4 Notion de bifurcation
- 1.2.5 Comportement post-critique
- 1.2.6 Influence des défauts géométriques

## 1.3 Théorie des coques minces

- 1.3.1 Equations non-linéaires d'équilibre de Donnell
- 1.3.2 Equations linéaires de stabilité de Donnell
- 1.3.3 Stabilité d'une coque cylindrique mince sous compression axiale
- 1.3.4 Théorie post-critique
- 1.3.5 Flambage plastique

---

## 1.1 Introduction générale

---

### 1.1.1 A propos des coques minces

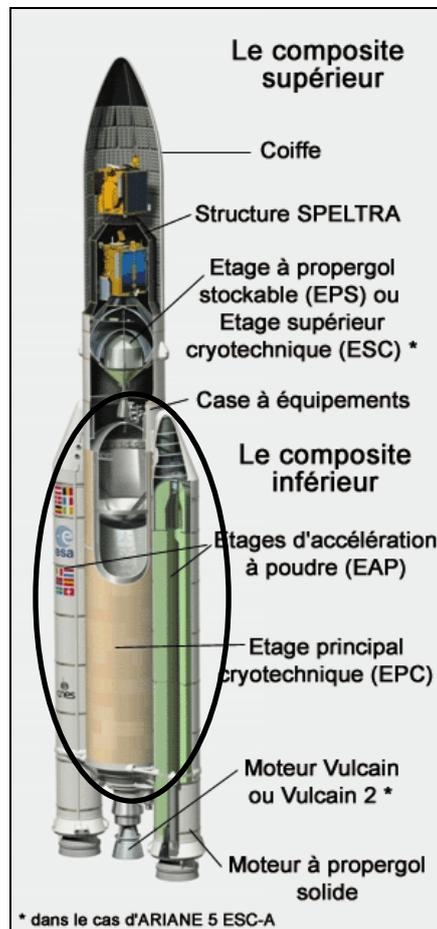
La mécanique des structures a pour but de rechercher les meilleures formes et dimensions à donner aux éléments d'une construction, pour lui permettre de résister aux actions qui la sollicitent d'une manière aussi économique que possible. Les structures minces sont pour cela utilisées largement, au vu de leur excellente capacité à supporter et transmettre les sollicitations, couplée à une masse réduite.

La coque cylindrique est un type de structure mince très employé, et dans de nombreux secteurs. On la retrouve ainsi sous forme de conserve dans l'agro-alimentaire, de fuselage d'avion dans l'aéronautique, de silo de stockage dans le génie civil, de réservoir à carburant dans le spatial... Cependant, la faible épaisseur de ces structures les rend sensibles à des phénomènes d'instabilité structurelle, ou flambage. Une bonne compréhension de ces phénomènes est primordiale afin d'éviter un mauvais dimensionnement, c'est pourquoi le flambage de coques minces a été largement étudié depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle. Néanmoins, les méthodes de dimensionnement des coques minces peuvent encore être grandement améliorées, grâce à l'évolution des outils numériques et des méthodes expérimentales permettant de mieux comprendre la phénoménologie du flambage et d'élargir le champ d'exploration.

### 1.1.2 Problématique industrielle

Cette étude s'inscrit dans le cadre de la longue collaboration du LGCIE avec EADS Astrium et le CNES portant sur le flambage de coques minces. Ce type de structure constitue en effet les réservoirs à oxygène et hydrogène liquides de l'Etage Principal Cryogénique (EPC) du lanceur Ariane 5 (voir Figure 1.1).

Le dimensionnement des réservoirs se base principalement sur la règle NASA SP8007, établie à la fin des années 60, et reconnue par de nombreux experts comme étant trop conservatrice. La grande compétitivité du secteur spatial et la recherche de performances optimales demandent une amélioration de cette règle et une meilleure compréhension du déclenchement des instabilités dans le cas de chargements complexes.

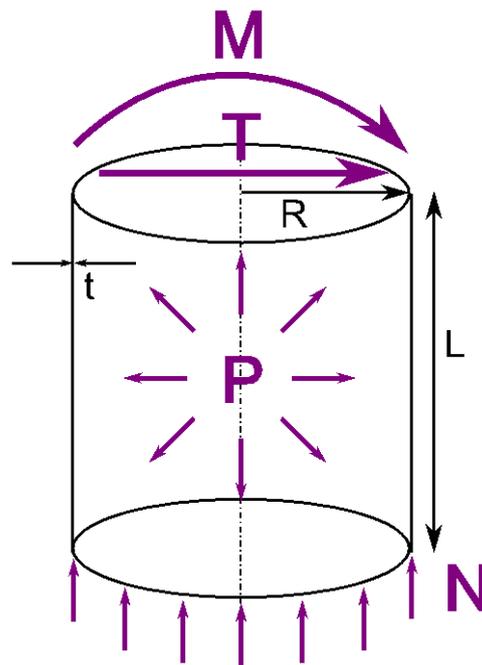


**Figure 1.1** Ecorché du lanceur Ariane 5 (www.cnes.fr)

Les réservoirs sont composés de viroles minces en aluminium assemblées les unes aux autres par soudage. Chacune de ces viroles est elle-même composée de trois panneaux courbes soudés. De précédentes études menées au laboratoire ont montré que les singularités créées par les soudures verticales n'ont pas d'influence notable sur le comportement au flambage des viroles. Notre analyse portera donc sur une coque cylindrique lisse.

Les dimensions de la structure, et notamment les rapports rayon sur épaisseur ( $R/t$ ) et longueur sur rayon ( $L/R$ ) conditionnent fortement la stabilité de la coque, comme nous le verrons plus loin. Dans le but de construire une règle couvrant le plus de cas possibles tout en étant pertinente, nous avons fait varier ces rapports de sorte que  $250 < R/t < 1500$  et  $1 < L/R < 3$ .

Le comportement d'une structure dépend bien évidemment du type de chargement appliqué. Les données de chargement dont nous disposons découlent d'une estimation d'efforts généraux que subit chaque section de l'EPC lorsque la structure est sollicitée. Elles se traduisent en termes de flux d'efforts normaux, de flexion et de cisaillement. Schématiquement (Figure 1.2), la coque cylindrique est pressurisée (P) et subit un effort couplé de flexion (M), compression (N) et cisaillement (T).



**Figure 1.2** Définition des chargements appliqués

Outre le type de chargement et la géométrie de la structure, les caractéristiques du matériau sont un autre paramètre à prendre en compte, puisqu'elles conditionneront le passage d'un flambage élastique à un flambage plastique, changeant ainsi le comportement de la structure.

### 1.1.3 Démarche

L'étude de chargements simples a fait l'objet de nombreux travaux, la compression axiale étant certainement le cas le plus étudié ; cependant peu de publications concernent les cas complexes mélangeant différents types de chargements.

Notre but étant de proposer de nouvelles recommandations pour le dimensionnement des réservoirs de l'EPC (qui subissent une combinaison

d'efforts), différentes combinaisons de chargements vont être étudiées, aussi bien numériquement qu'expérimentalement. Nous tenterons de répondre aux différentes questions concernant la prise en compte des défauts aux basses pressions, l'influence des caractéristiques du matériau ou encore les problèmes d'interaction entre les différents chargements. Ce rapport s'articulera en trois parties :

- Dans la suite de cette première partie nous poserons les bases de notre réflexion: le concept de stabilité et la théorie des coques minces, qui sont bien entendu primordiaux, ainsi qu'une étude bibliographique et l'analyse de deux codes de dimensionnement largement utilisés afin de prendre suffisamment de recul sur le sujet.
- Nous présenterons dans une deuxième partie les méthodes utilisées et les résultats obtenus (aussi bien numériques qu'expérimentaux) pour les différents chargements étudiés.
- Enfin, nous proposerons dans une troisième partie une interprétation des résultats et la proposition d'une nouvelle méthode de dimensionnement, avant de conclure sur le travail effectué et les perspectives offertes.

---

## 1.2 Concepts théoriques fondamentaux

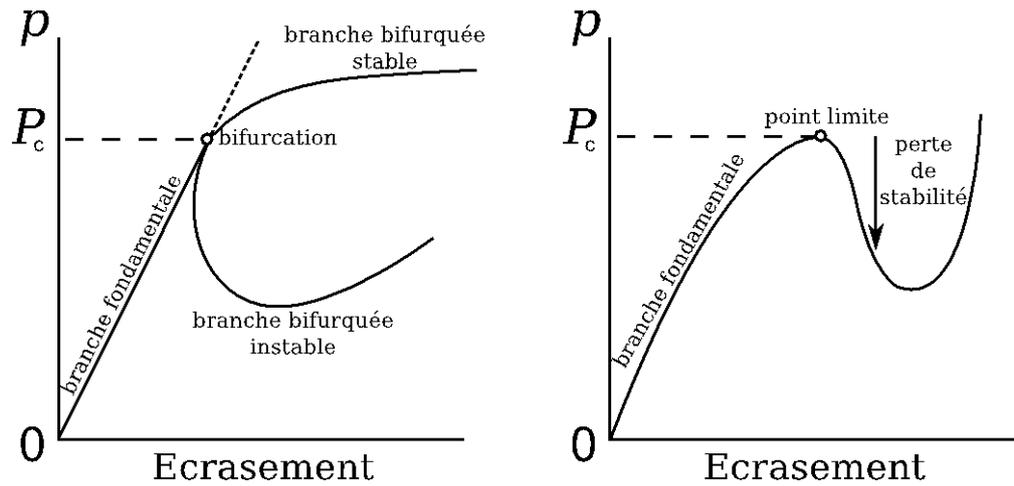
Nous commençons donc notre étude en abordant quelques notions primordiales pour la bonne compréhension de ce mémoire.

---

### 1.2.1 Types d'instabilité

Le flambage est un phénomène mécanique traduisant l'instabilité d'une structure. Il apparaît principalement sur des structures élancées et se caractérise par une augmentation importante des déformations de la structure lorsque celle-ci subit un accroissement infinitésimal de son chargement. Le flambage peut se traduire par une perte de rigidité ou par une perte de la capacité portante de la structure, pouvant dans certains cas être couplé à des phénomènes de plasticité. La valeur du chargement nécessaire à l'apparition du phénomène de flambage est appelée charge ou force « critique ».

Deux types différents d'instabilité peuvent se produire, nous distinguons le flambage par bifurcation du flambage par point limite (Figure 1.3). Lorsque la structure est sollicitée, elle suit en premier lieu un chemin d'équilibre dit « chemin d'équilibre initial » ou « branche fondamentale ». Au passage d'un point de bifurcation, la branche d'équilibre initiale devient instable (branche en pointillés), la structure ne peut plus suivre ce chemin d'équilibre et emprunte alors une branche post-critique (ou bifurquée) qui sera le plus souvent instable (caractéristique d'une coque sous compression axiale), mais qui peut être stable dans certains cas (une plaque rectangulaire sous compression longitudinale par exemple).



**Figure 1.3** Types d'instabilité : bifurcation et point limite

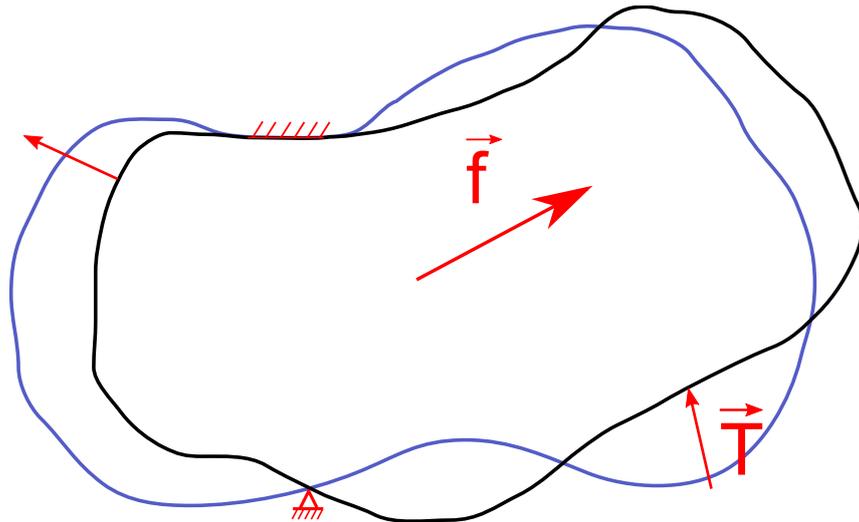
Le flambage par point limite se caractérise quant à lui par une décroissance de la rigidité globale de la structure jusqu'à l'annulation de cette dernière au point limite. Lorsque ce point limite est suivi par une branche post-critique instable puis stable, le comportement est appelé « snap through » ou « phénomène de claquage », il correspond par exemple au retournement d'une calotte sphérique. Le déclenchement d'une instabilité par point limite peut aussi être observé lorsque l'on a un flambage dans le domaine plastique du matériau.

Le caractère stable ou instable du comportement post-critique est très important pour le dimensionnement des structures. Un comportement instable après bifurcation est bien sûr dangereux et à éviter à tout prix, alors qu'un post-critique stable peut dans certains cas être acceptable. Nous verrons comment les interactions de chargements (pression interne, flexion, compression et/ou cisaillement) peuvent conditionner la valeur critique du chargement global ainsi que le comportement post-critique.

Equilibre, bifurcation, stabilité, comportement post-critique : ces termes sont au cœur de notre sujet, et il convient de les expliciter plus en détail, d'abord dans le cas d'un système mécanique simple, puis pour le type de structure qui nous intéresse : les coques cylindriques minces.

### 1.2.2 Equilibre d'un système mécanique

Considérons un solide en équilibre sous l'action de forces volumiques  $\vec{f}$  et surfaciques  $\vec{T}$ , avec diverses conditions aux limites (Figure 1.4). Des champs de déplacements  $\vec{u}$  et de contraintes  $\vec{\sigma}$  sont alors créés au sein du solide.



**Figure 1.4** Solide en équilibre

### 1.2.21 Somme des forces et des moments

La méthode la plus répandue pour l'étude d'un solide en équilibre est bien entendu le principe fondamental de la statique, déclarant qu'un système est en l'équilibre si et seulement si l'effet de toutes les forces et moments qui s'exercent sur lui est nul :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_i \vec{M}_i = \vec{0} \end{cases}$$

### 1.2.22 Méthode de l'énergie potentielle

Les méthodes énergétiques sont moins familières que les méthodes vectorielles, mais sont cependant très utiles pour l'étude de l'équilibre et de la stabilité d'un système. Nous en présentons ici succinctement le principe.

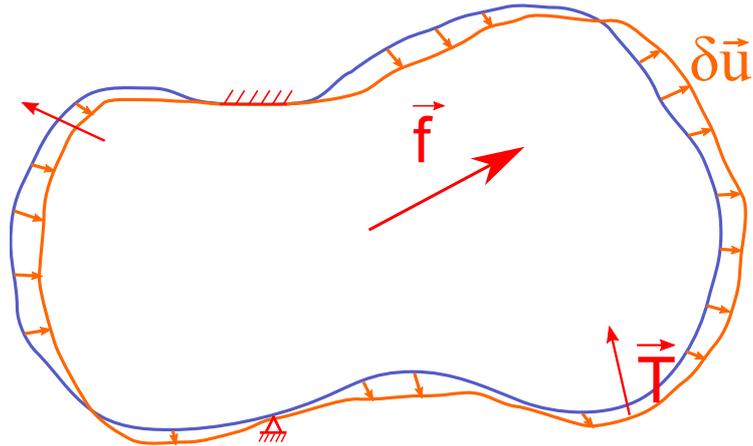
Considérons le solide de la Figure 1.4 : perturbons maintenant ce solide par un champ de déplacement cinématiquement admissible  $\delta\vec{u}$  (Figure 1.5). Lors de ce processus, les forces volumiques et surfaciques effectuent un travail  $\delta W$ . Le principe des travaux virtuels affirme que ce travail  $\delta W$  doit contrebalancer le changement en énergie interne  $\delta U$  :

$$\delta W = \delta U$$

Soit :

$$\delta U - \delta W = \delta(U - W) = \delta V = 0$$

où  $V$  est l'énergie potentielle du système.

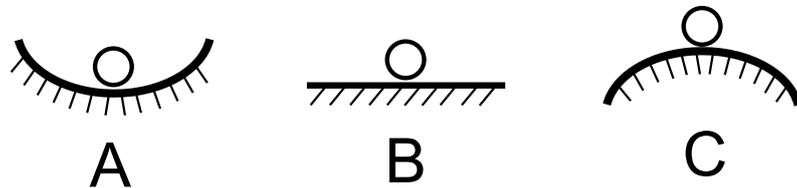


**Figure 1.5** Perturbation du solide par un champ de déplacement

L'énergie potentielle d'un solide en équilibre est donc stationnaire, et les états d'équilibre du système sont définis par l'ensemble des solutions de l'équation  $\delta V = 0$ .

### 1.2.3 Stabilité d'un équilibre

La notion de stabilité a été prépondérante lors de cette étude. Les équilibres instables sont en effet à éviter dans les structures puisqu'ils mènent à des situations catastrophiques. Nous illustrons ici ce concept par un exemple simple, nous permettant de présenter l'un des critères de stabilité les plus répandus.



**Figure 1.6** Différents types d'équilibre

Considérons les systèmes A, B et C de la Figure 1.6 qui sont trois cas d'équilibre différents. Soit  $x$  un paramètre représentant le mouvement du solide,  $x_0$  étant la position d'équilibre initiale. Si nous introduisons maintenant une perturbation dans le système telle que :

$$x = x_0 + \delta x$$

La nouvelle énergie potentielle du système est alors :

$$V(x) = V(x_0 + \delta x) = V(x_0) + \frac{\partial V(x_0)}{\partial x} \delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(x_0)}{\partial x^2} \delta x^2 + \dots$$

Soit :

$$V(x) = V(x_0 + \delta x) = V(x_0) + \Delta V(x_0) \delta x + \frac{1}{2} \Delta^2 V(x_0) \delta x^2 + \dots$$

La position initiale  $x_0$  étant une position d'équilibre, l'énergie potentielle du système est stationnaire (ce qui se traduit par  $\Delta V(x_0) = 0$ ), comme nous l'avons vu au paragraphe précédent. Dès lors :

$$V(x) - V(x_0) = \frac{1}{2} \Delta^2 V(x_0) \delta x^2 + \dots$$

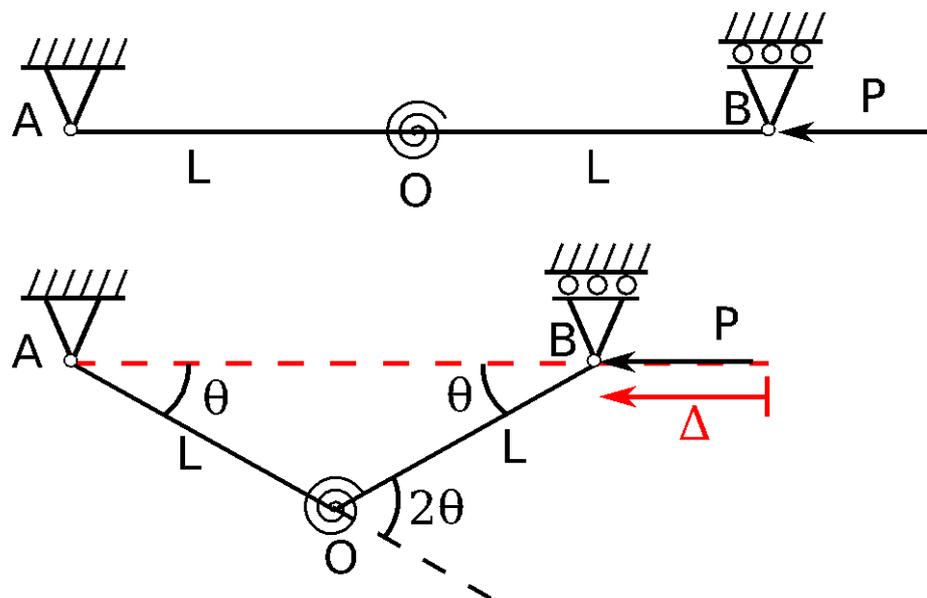
Si la variation seconde de l'énergie potentielle est positive, cela revient donc à dire que le solide consomme de l'énergie lorsqu'il quitte son état d'équilibre, et ne peut ainsi le quitter sans intervention extérieure : le système est **stable** (cas A). Dans le cas où  $\Delta^2 V(x_0)$  est négatif, cela signifie que de l'énergie est libérée lorsque le solide quitte son état d'équilibre : le système est alors **instable** (cas C). Le cas B correspond quant à lui à un équilibre neutre.

#### 1.2.4 Notion de bifurcation

Lorsque plusieurs équilibres sont possibles et que le système change de chemin pour emprunter une configuration différente, on parle de **bifurcation** d'équilibre.

##### 1.2.41 Méthode énergétique

Pour aborder le concept de bifurcation, nous allons tout d'abord étudier un cas simple à l'aide des méthodes énergétiques présentées précédemment. Soit un système mécanique (Figure 1.7) constitué de deux barres AO et OB, toutes les deux de longueur  $L$ , reliées en O par une rotule permettant une rotation parfaite sans frottement. Sur cette rotule est fixé un ressort de torsion de raideur  $k$ , qui maintient au repos les barres en position horizontale. Les barres sont supportées simplement aux points A et B, et on applique au point B une force d'intensité  $P$  et dirigée dans le sens horizontal.



**Figure 1.7** Barre articulée soumise à un effort de compression

Les barres sont infiniment rigides, sous l'action de P le point B peut se déplacer vers la gauche et les barres tourner autour de la rotule O, créant un angle noté  $2\theta$  au niveau du ressort de torsion.

Pour connaître les positions d'équilibre du système, nous utilisons les méthodes énergétiques. L'énergie interne du système correspond à l'énergie stockée dans le ressort de torsion :

$$U = \frac{1}{2}k(2\theta)^2$$

Le travail effectué par la force P est quant à lui :

$$W = P\Delta = 2PL(1 - \cos \theta)$$

L'énergie potentielle du système s'écrit donc :

$$V = U - W = \frac{1}{2}k(2\theta)^2 - 2PL(1 - \cos \theta)$$

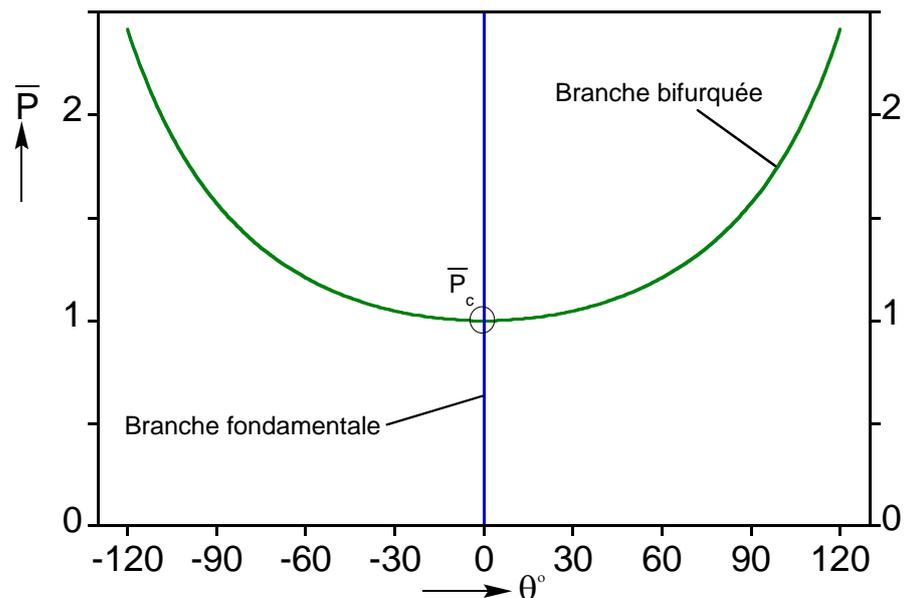
Le système est en équilibre si la dérivée première de l'énergie potentielle est nulle, soit:

$$\Delta V = 4k\theta - 2PL \sin \theta = 0$$

Deux solutions sont alors possibles :

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \frac{PL}{2k} = \frac{\theta}{\sin \theta} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions peut donc être représenté comme suit, en notant  $\bar{P} = \frac{PL}{2k}$  :



**Figure 1.8** Branches d'équilibre du système

Les deux courbes se croisent au point  $\bar{P}_c$  lorsque  $\theta = 0$  et  $\bar{P} = 1$ . Ce point est appelé **point de bifurcation** ; lorsque le système est sollicité par un chargement  $P$  monotone croissant, il va dans un premier temps suivre la branche fondamentale, jusqu'à arriver au point  $\bar{P}_c$ . En ce point il peut soit continuer sur la branche bleue, soit suivre la branche verte (qualifiée de branche bifurquée ou adjacente). Dans ce dernier cas, l'augmentation du chargement  $P$  va engendrer une rotation autour du point  $O$ , le comportement devenant asymétrique (voir Figure 1.7). Un point de bifurcation correspond ainsi à une perte d'unicité de la solution d'équilibre initialement déterminée.

#### 1.2.42 Méthode de l'équilibre adjacent

Un point de bifurcation peut également être discerné en introduisant une petite perturbation dans le système et en résolvant les équations linéaires résultantes afin de déterminer si une configuration adjacente d'équilibre existe pour un même chargement. Nous appliquerons cette méthode au paragraphe §1.3 pour la recherche de bifurcations dans le cas des coques cylindriques minces.

---

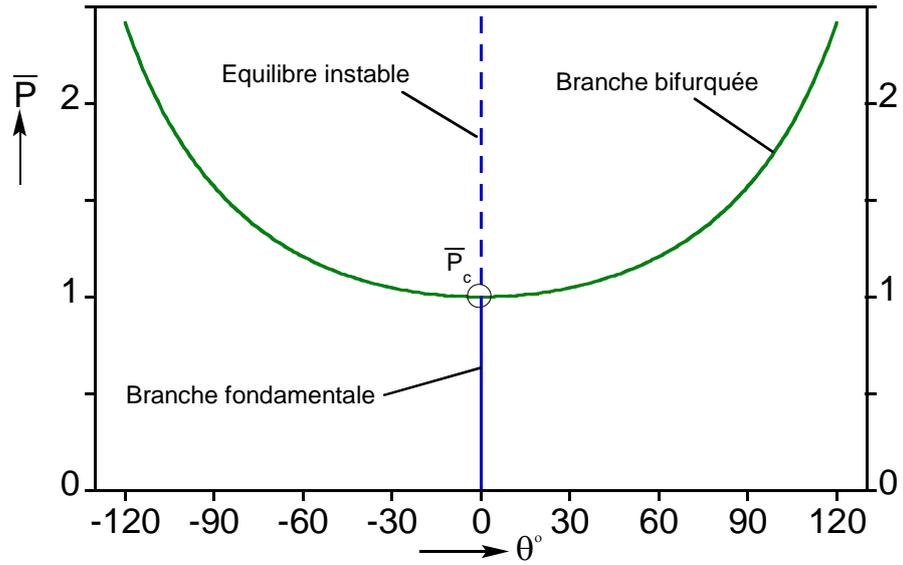
#### 1.2.5 Comportement post-critique

Une fois le point de bifurcation atteint, il convient de savoir quelle branche d'équilibre le système va emprunter. Pour cela, étudions la stabilité du système précédent. La variation seconde de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\Delta^2 V = 4k - 2PL \cos \theta$$

- Lorsque le système suit la branche fondamentale :  $\theta = 0$  et la condition de stabilité  $\Delta^2 V > 0$  devient  $\frac{PL}{2k} < 1$ . Cette branche d'équilibre devient donc instable pour  $\bar{P} = \frac{PL}{2k} > 1$ .
- Lorsque le système suit la branche bifurquée,  $\frac{PL}{2k} = \frac{\theta}{\sin \theta}$  et la condition de stabilité se traduit par  $\Delta^2 V = 4k(1 - \frac{\theta \cos \theta}{\sin \theta}) > 0$ , ce qui est toujours vrai.

Le système va donc adopter la configuration dans laquelle l'énergie potentielle totale sera minimale, ce qui explique qu'il suivra préférentiellement la branche bifurquée verte (Figure 1.9), pour  $\bar{P} = \frac{PL}{2k} > 1$ .



**Figure 1.9** Solutions d'équilibres stables

Ces résultats ont été trouvés pour une représentation exacte du problème, incluant les déformations non-linéaires dues à la géométrie. Toutefois, ces non-linéarités peuvent devenir très complexes dans la plupart des problèmes réels, comme nous le verrons dans le cas des coques. Si dans le système étudié précédemment nous nous plaçons dans le cas de petites déformations ( $\theta \ll 1$ ), l'énergie potentielle ainsi que ses dérivées première et seconde deviennent alors :

$$\begin{cases} V = U - W = \frac{1}{2}k(2\theta)^2 - 2PL\left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right) = 2k\theta^2 - PL\theta^2 \\ \Delta V = 4k\theta - 2PL\theta = (4k - 2PL)\theta \\ \Delta^2 V = 4k - 2PL \end{cases}$$

La condition d'équilibre ( $\Delta V = 0$ ) donne :

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \frac{PL}{2k} = 1 \end{cases}, \text{ qui sont les 2 nouvelles branches d'équilibre}$$

La condition de stabilité donne enfin :

- Pour la branche principale :  $\Delta^2 V > 0$  implique  $\frac{PL}{2k} < 1$
- Pour la branche bifurquée :  $\Delta^2 V = 0$  car  $\frac{PL}{2k} = 1$  en tout point

La Figure 1.10 traduit ces résultats. De manière générale, une linéarisation du problème de stabilité mène donc à une recherche de valeurs propres, les charges critiques étant les valeurs propres du système. Lorsqu'une charge

critique est atteinte, l'angle de déformation est arbitraire, et correspond au mode propre associé. Enfin, il apparaît évident que les non-linéarités doivent être incluses dans l'énergie potentielle si l'on veut connaître le comportement post-critique.

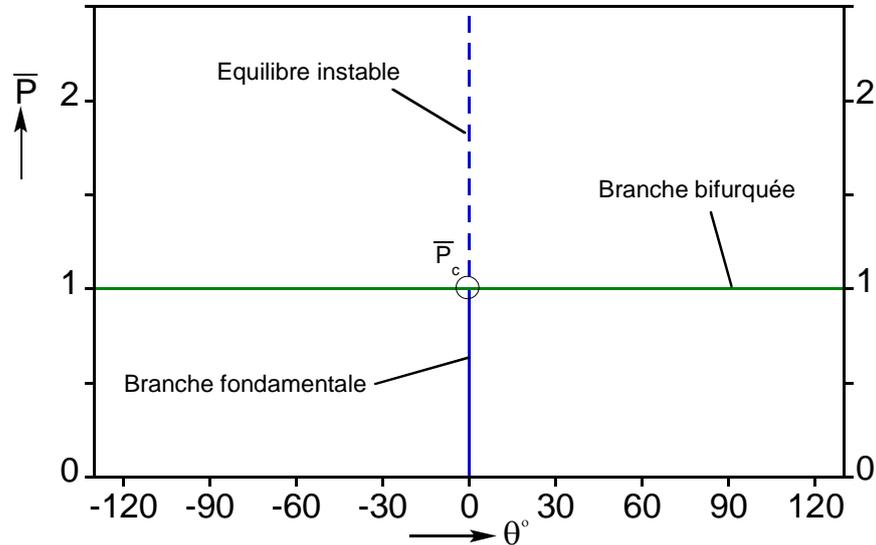


Figure 1.10 Solutions du problème linéarisé

### 1.2.6 Influence des défauts géométriques

La structure étudiée jusqu'à présent était considérée parfaite, ce n'est bien évidemment pas le cas des structures réelles. Différents types d'imperfections (géométrie imparfaite, chargement excentré, matériau non homogène...) peuvent venir perturber l'équation d'équilibre et changer le chemin emprunté par le système.

Dans notre cas, si la structure n'est pas parfaitement plane et qu'il existe déjà un petit angle  $\theta_0$  entre les barres et l'horizontale (Figure 1.11), la déformation va se faire progressivement, et la bifurcation s'en retrouver inhibée. Si l'énergie interne du système déformé n'a pas changé, le travail effectué par la force  $P$  n'est plus le même :

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}k(2\theta)^2 \\ W = P\Delta = 2PL(\cos\theta_0 - \cos(\theta + \theta_0)) \end{cases}$$

La condition d'équilibre devient alors :

$$\frac{PL}{2k} = \frac{\theta}{\sin(\theta + \theta_0)}$$

Il existe donc ici un seul chemin d'équilibre, et un chargement croissant va conduire progressivement de la branche fondamentale à la branche bifurquée, comme on peut le voir sur la Figure 1.12.

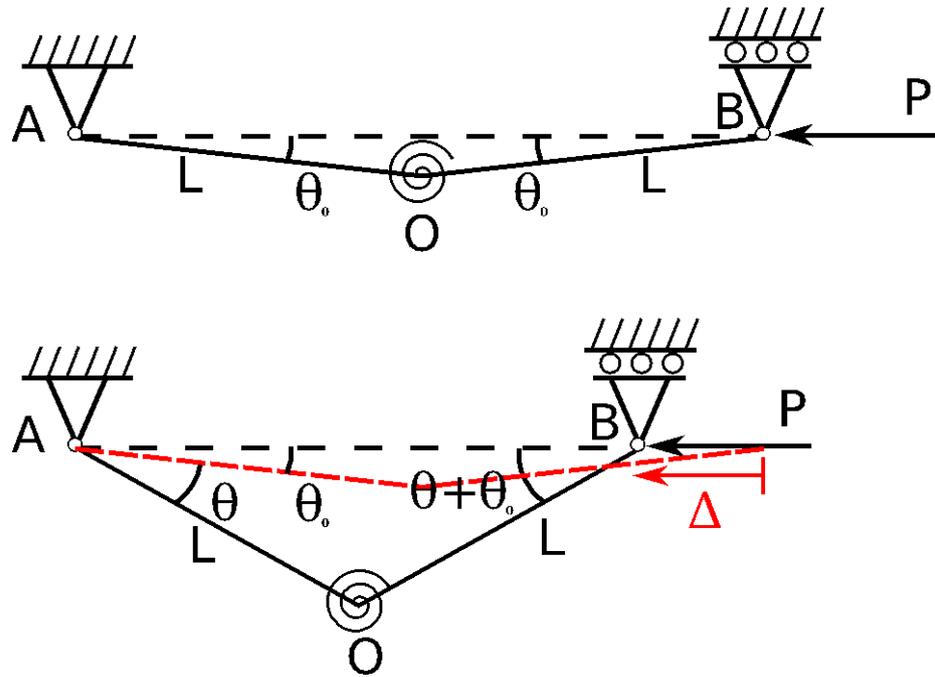


Figure 1.11 Structure imparfaite

Il apparaît que même de petits défauts (ici compris entre  $0.5^\circ$  et  $2^\circ$ ) peuvent avoir une influence non négligeable sur le comportement du système. L'imperfection des structures est un problème récurrent dans le monde du flambage, et c'est pour cela que de nombreuses études sont consacrées à l'influence des défauts (géométriques ou autres) sur le déclenchement d'instabilités.

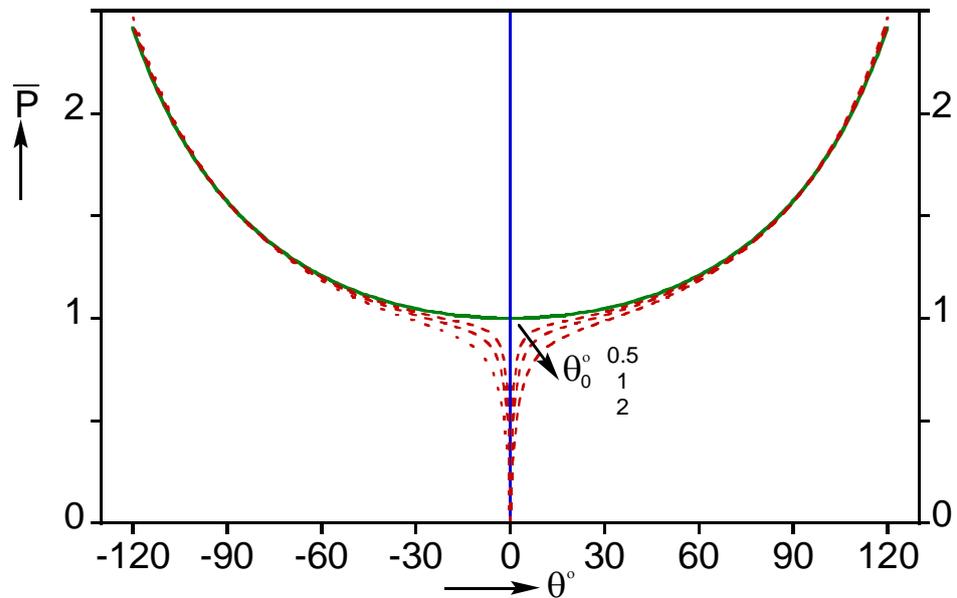


Figure 1.12 Solutions du problème imparfait

### 1.3 Théorie des coques minces

Une coque mince peut être définie comme une structure occupant un domaine d'épaisseur  $t$  autour d'une surface moyenne  $S$  dont les dimensions caractéristiques sont grandes devant l'épaisseur.

La théorie des coques utilise cette propriété pour ramener le problème tridimensionnel de déformation d'un solide à un problème bidimensionnel. Ainsi, la détermination du champ de déplacement de la surface moyenne suffit à décrire correctement le comportement de la structure. De nombreuses théories sont apparues dès la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, Love [63] étant le premier à présenter une théorie pertinente. Depuis, Koiter [56], Flügge [36, 37] ou encore Sanders [92] ont présenté des théories similaires, dont les écarts reposent entre autres sur les termes du champ de déplacement considérés pour le calcul des déformations, ainsi que sur les termes du tenseur des contraintes pris en compte. Nous présentons ici la théorie de Donnell [31] relative aux coques cylindriques minces et présentant donc un intérêt direct pour notre travail.

#### 1.3.1 Equations non-linéaires d'équilibre de Donnell

Considérons une coque cylindrique mince de longueur  $L$ , épaisseur  $t$  et rayon  $R$ , avec  $t \ll R$ . Le champ de déplacement est noté  $\{u, v, w\}$ , respectivement au système de coordonnées  $\{x, \theta, z\}$  défini sur la Figure 1.13.

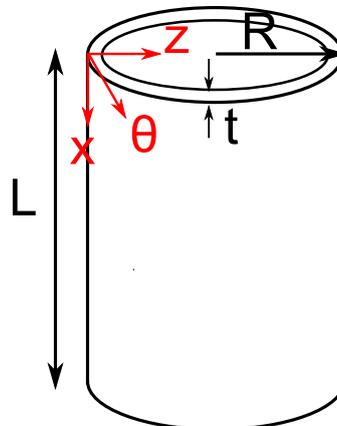


Figure 1.13 Coque cylindrique mince

Les efforts et moments unitaires agissant sur un élément de coque (Figure 1.14) sont donnés par les équations :

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$N_{x\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$N_\theta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\theta dz$$

$$N_{\theta x} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\theta x} dz$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$Q_\theta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\theta z} dz$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz$$

$$M_{x\theta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz$$

$$M_\theta = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\theta z dz$$

$$M_{\theta x} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\theta x} z dz$$

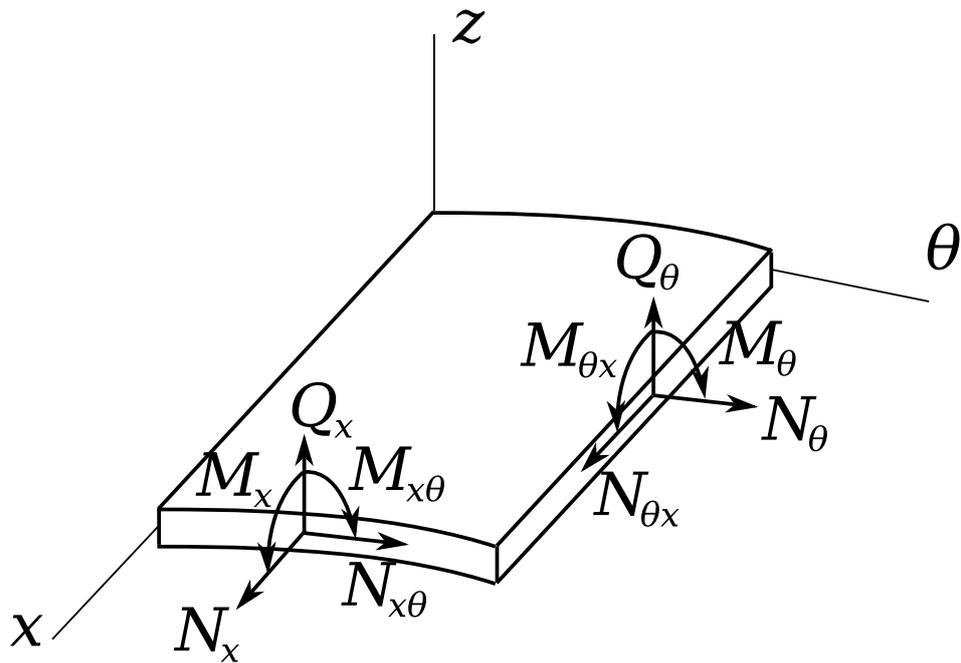


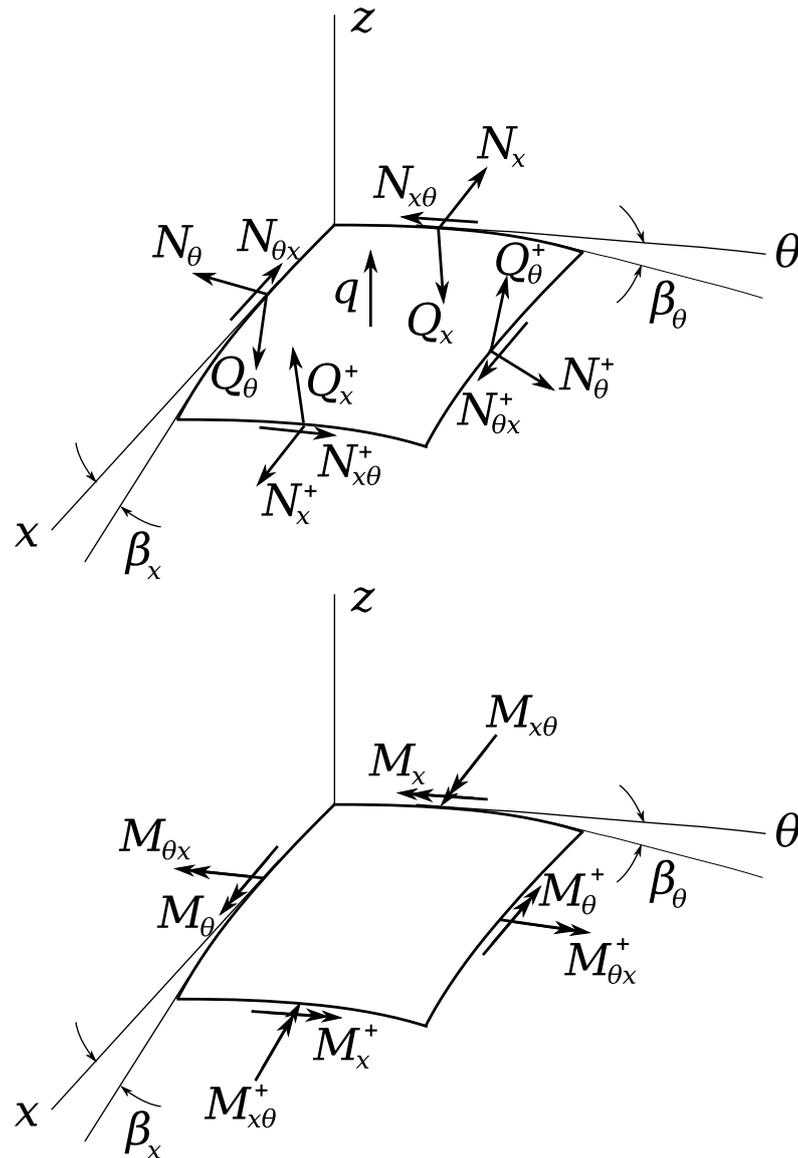
Figure 1.14 Élément de coque cylindrique

### 1.3.11 Equilibre d'un élément de coque

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues par la somme des forces et des moments agissant sur un élément de coque cylindrique déformé (Figure 1.15). Pour un niveau de déformations intermédiaire (non-linéaire du premier ordre), les angles de rotation  $\beta_x$  et  $\beta_\theta$  sont considérés comme petits, et :

$$\beta_x = -w_{,x}$$

$$\beta_\theta = -\frac{w_{,\theta}}{R}$$



**Figure 1.15** Élément de coque cylindrique déformée

De plus, les termes quadratiques représentant l'interaction non-linéaire entre les efforts tranchants ( $Q_x$  et  $Q_\theta$ ) et les rotations sont supposés négligeables. La somme des forces dans les directions  $x$ ,  $\theta$ ,  $z$  donne alors :

$$\begin{cases} N_{x,x} + \frac{1}{R} N_{\theta x, \theta} = 0 \\ N_{x\theta, x} + \frac{1}{R} N_{\theta, \theta} + \frac{Q_\theta}{R} = 0 \\ \frac{1}{R} Q_{\theta, \theta} + Q_{x, x} - \frac{N_\theta}{R} - N_x \beta_{x, x} - N_{x\theta} \beta_{\theta, x} - \frac{N_{\theta x}}{R} \beta_{\theta, \theta} + q(x, \theta) = 0 \end{cases}$$

Pour des cylindres suffisamment peu profonds le terme  $Q_\theta$  dans les équations précédentes ne représente qu'une contribution négligeable à l'équilibre des forces dans la direction circonférentielle. Ce terme est donc

omis dans les équations de Donnell. La somme des moments dans les directions  $x$  et  $\theta$  donne ensuite :

$$\begin{cases} M_{x,x} + \frac{1}{R}M_{\theta,x} - Q_x = 0 \\ M_{x\theta,x} + \frac{1}{R}M_{\theta,\theta} - Q_\theta = 0 \end{cases}$$

Pour des coques suffisamment minces,  $\frac{z}{R}$  peut être négligé, donnant alors :  $N_{\theta x} = N_{x\theta}$  et  $M_{\theta x} = M_{x\theta}$ . Les équations de moments peuvent être utilisées pour éliminer  $Q_{x,x}$  et  $Q_{\theta,\theta}$ , donnant :

$$\begin{cases} N_{x,x} + \frac{1}{R}N_{x\theta,\theta} = 0 \\ N_{x\theta,x} + \frac{1}{R}N_{\theta,\theta} = 0 \\ M_{x,xx} + \frac{2}{R}M_{x\theta,x\theta} + \frac{1}{R^2}M_{\theta,\theta\theta} - \frac{N_\theta}{R} - N_x\beta_{x,x} - \\ N_{x\theta}\left(\beta_{\theta,x} + \frac{1}{R}\beta_{x,\theta}\right) - \frac{N_\theta}{R}\beta_{\theta,\theta} + q(x,\theta) = 0 \end{cases}$$

### 1.3.12 Relations déformations-déplacements

Selon l'hypothèse d'une coque peu profonde (shallow shell), les déplacements  $u$  et  $v$  sont négligeables devant  $R$ . Les relations entre le champ de déplacement et les déformations en tout point de la coque sont alors les suivantes :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + z.\kappa_x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_{x0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta_x^2 \\ \kappa_x = \beta_{x,x} \end{cases}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta0} + z.\kappa_\theta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_{\theta0} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2}\beta_\theta^2 \\ \kappa_\theta = \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \end{cases}$$

$$\gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta0} + z.\kappa_{x\theta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma_{x\theta0} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_x\beta_\theta \\ \kappa_{x\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x}\right) \end{cases}$$

où  $\varepsilon_{x0}$ ,  $\varepsilon_{\theta0}$  et  $\gamma_{x\theta0}$  sont les déformations de la surface moyenne (translations membranaires) et  $\kappa_x$ ,  $\kappa_\theta$  et  $\kappa_{x\theta}$  désignent les changements de courbure de la surface moyenne (flexions par rotation).

### 1.3.13 Relations contraintes-déformations

Pour un matériau élastique isotrope, la loi de Hooke nous donne :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

Ce qui se traduit au niveau des forces et moments unitaires par :

$$\begin{cases} N_x = C.(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{\theta0}) \\ N_\theta = C.(\varepsilon_{\theta0} + \nu\varepsilon_{x0}) \\ N_{x\theta} = N_{\theta x} = C.\frac{1-\nu}{2}.\gamma_{x\theta0} \end{cases}, \text{ avec : } C = \frac{Et}{1-\nu^2}$$

$$\begin{cases} M_x = D.(\kappa_x + \nu\kappa_\theta) \\ M_\theta = D.(\kappa_\theta + \nu\kappa_x) \\ M_{x\theta} = M_{\theta x} = D.\frac{1-\nu}{2}.\kappa_{x\theta} \end{cases}, \text{ avec : } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

### 1.3.14 Equations d'équilibre de Donnell

L'introduction des relations entre les contraintes, les déplacements et les déformations dans les équations d'équilibre conduisent à un système couplé de 3 équations à 3 inconnues  $u$ ,  $v$  et  $w$ .

Un système d'équations plus compact est obtenu en n'introduisant qu'une partie de ces relations, pour donner :

$$\begin{cases} N_{x,x} + \frac{1}{R}N_{x\theta,\theta} = 0 \\ N_{x\theta,x} + \frac{1}{R}N_{\theta,\theta} = 0 \\ D\nabla^4 w + \frac{N_\theta}{R} - (N_x w_{,xx} + \frac{2}{R}N_{x\theta} w_{,x\theta} + \frac{1}{R^2}N_\theta w_{,\theta\theta}) = q(x, \theta) \end{cases}$$

avec :  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$

Ces équations sont généralement connues comme les équations de coques Donnell-Mushtari-Vlasov (DMV), et sont utilisées très largement dans la littérature pour l'analyse de coques cylindriques. L'application de la méthode de l'énergie potentielle, présentée au paragraphe §1.2, aurait bien évidemment conduit au même résultat.

### 1.3.2 Equations linéaires de stabilité de Donnell

La stabilité d'une coque cylindrique mince sera ici étudiée à l'aide du critère de l'équilibre adjacent. Afin d'examiner l'existence possible de configurations d'équilibre adjacentes, de petits incréments sont ajoutés au champ de déplacement. Les deux configurations adjacentes représentées par les déplacements antérieurs et ultérieurs à l'incrément peuvent alors être examinées. Supposons :

$$\begin{cases} u \rightarrow u_0 + u_1 \\ v \rightarrow v_0 + v_1 \\ w \rightarrow w_0 + w_1 \end{cases}$$

où  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(u, v, w)$  sont des configurations d'équilibre adjacentes correspondant à une valeur unique de chargement (aucun incrément n'est introduit dans  $q$ ) ; et  $(u_1, v_1, w_1)$  est un incrément arbitrairement petit.

Par conséquent, les efforts vont changer :

$$\begin{cases} N_x \rightarrow N_{x0} + N_{x1} + O(w_1^2) \\ N_\theta \rightarrow N_{\theta0} + N_{\theta1} + O(w_1^2) \\ N_{x\theta} \rightarrow N_{x\theta0} + N_{x\theta1} + O(w_1^2) \end{cases}$$

où les termes d'indice 0 correspondent aux déplacements  $(u_0, v_0, w_0)$  et les termes d'indice 1 représentent les portions des incréments d'efforts linéaires en  $(u_1, v_1, w_1)$ .

Les incréments comportent également des termes du deuxième ordre qui ne seront pas gardés lors de la linéarisation. En introduisant ces nouvelles configurations dans les équations d'équilibre, en éliminant les termes correspondant à la configuration d'équilibre pré-critique (termes en  $u_0, v_0, w_0$ ), puis en ne gardant que les termes du premier ordre, nous obtenons :

$$\begin{cases} N_{x1,x} + \frac{1}{R} N_{x\theta1,\theta} = 0 \\ N_{x\theta1,x} + \frac{1}{R} N_{\theta1,\theta} = 0 \\ D\nabla^4 w_1 + \frac{N_{\theta1}}{R} - (N_{x0} w_{1,xx} + \frac{2}{R} N_{x\theta0} w_{1,x\theta} + \frac{1}{R^2} N_{\theta0} w_{1,\theta\theta}) = 0 \end{cases}$$

La stabilité d'une coque cylindrique mince peut ensuite être étudiée à l'aide de ces équations linéaires de Donnell (DMV).

### 1.3.3 Stabilité d'une coque cylindrique mince sous compression axiale

Considérons un cylindre supporté simplement à ses extrémités et soumis à un chargement uniforme de compression axiale  $P$ . Les efforts pré-critiques dans la coque sont donc donnés par :

$$N_{x0} = -\frac{P}{2\pi R}, \quad N_{\theta 0} = N_{x\theta 0} = 0$$

Sous l'action du chargement, le cylindre rétrécit et, excepté à ses extrémités, son diamètre augmente. Deux géométries post-bifurcationnelles possibles sont à étudier : axisymétrique et non-axisymétrique.

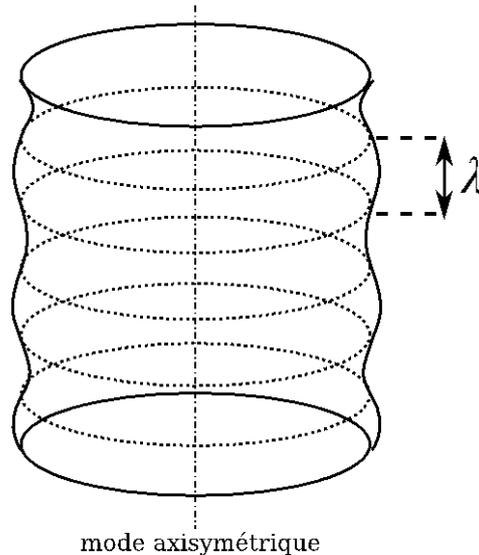
#### 1.3.31 Flambage axisymétrique

On considère que les déformations pré-critiques peuvent être déterminées avec suffisamment de précision par les équations linéaires de membrane (on néglige les phénomènes de flexion apparaissant près des conditions aux limites). Un mode de flambage axisymétrique (voir Figure 1.16) se traduit par :

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \theta} = 0 \text{ et } v = 0$$

En utilisant les équations DMV exprimées en fonction du champ de déplacement ( $u, v, w$ ) on trouve :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dw}{dx} = 0 \\ D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{C}{R^2} \left( w + \nu R \frac{du}{dx} \right) + \frac{P}{2\pi R} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \end{cases}$$



**Figure 1.16** Mode de flambage axisymétrique d'une coque mince sous compression

Les solutions recherchées doivent satisfaire les conditions aux limites (par exemple :  $w = w_{,xx} = 0$  pour  $x = 0, L$ ), ce qui nous amène à considérer des fonctions de la forme :

$$\begin{cases} w = A \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ u = B \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

L'introduction de ces déplacements dans les équations DMV nous amène à :

$$\sigma = \frac{P}{2\pi R t} = \left( \frac{D}{t} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{E}{R^2} \left( \frac{L}{m\pi} \right)^2 \right)$$

On obtient une valeur propre différente pour chaque valeur de  $m$ . La contrainte critique correspond à la valeur propre minimale pouvant être obtenue. Pour des cylindres suffisamment longs, on peut minimiser  $\sigma$  par rapport à  $m$ , donnant :

$$\sigma_{CL} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{E t}{R}$$

On retrouve ainsi l'expression de la contrainte classique, obtenue au début du siècle par Lorenz [62], Timoshenko [109] et Southwell [103]. La longueur d'onde associée (voir Figure 1.16) est égale à :

$$\lambda = \frac{L}{m} = \frac{2\pi}{(12(1-\nu^2))^{1/4}} \cdot \sqrt{R t}$$

### 1.3.32 Flambage non-axisymétrique

Dans le cas d'un flambage non-axisymétrique (également appelé mode à daimiers, voir Figure 1.17), les solutions considérées sont de la forme :

$$w = A \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \sin(n\theta)$$

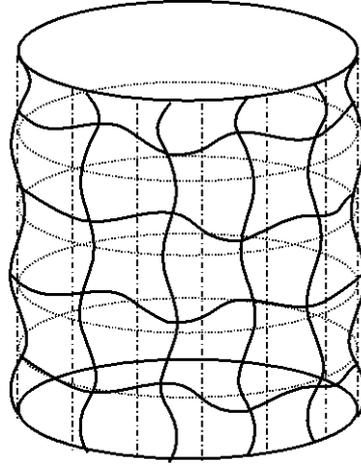
En remplaçant dans l'équation de stabilité suivante :

$$D \nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{R^2} C w_{,xxxx} + \nabla^4 \left( \frac{P}{2\pi R} w_{,xx} \right) = 0,$$

on obtient :

$$\sigma = \frac{P}{2\pi R t} = \frac{D}{R^2 t} X + E \frac{1}{X}$$

$$\text{avec } X = \frac{\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 + n^2}{\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2}$$



mode à damiers

**Figure 1.17** Mode de flambage à damiers d'une coque mince sous compression

En minimisant  $\sigma$  par rapport à  $X$ , nous obtenons:

$$\frac{\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2 + n^2}{\left(\frac{m\pi R}{L}\right)^2} = 2\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{R}{t},$$

soit :

$$\sigma_{CL} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Et}{R}.$$

On retrouve donc la contrainte classique dans le cas d'un flambage non-axisymétrique. Il est intéressant de noter que cette valeur correspond à de nombreux modes (valeurs de  $n$  et  $m$  différentes), et est indépendante de  $L$ . Le grand nombre de modes proches explique en partie le fait que le flambage d'une coque soit extrêmement sensible aux défauts géométriques.

#### 1.3.4 Théorie post-critique

Afin de mieux comprendre le déclenchement des instabilités, les chercheurs se sont vite tournés vers l'étude du comportement post-critique des structures. Koiter a été le premier [56, 72] à développer de façon très détaillée la relation entre le comportement post-critique et l'influence des imperfections géométriques.

La théorie de Koiter est basée sur l'étude de l'énergie potentielle de la structure au voisinage du point de bifurcation. Après avoir introduit un incrément de déplacement colinéaire au mode de flambage, Koiter effectue un développement en série du déplacement et de l'énergie potentielle totale au voisinage du point de bifurcation, aboutissant à une linéarisation des équations différentielles d'équilibre. Lorsqu'un unique mode de flambage est associé au point de bifurcation étudié, l'annulation de la dérivée de  $V$  donne une équation de la branche d'équilibre secondaire de la forme :

$$\frac{\lambda}{\lambda_c} = 1 + a\delta + b\delta^2 + \dots$$

où :  $\lambda$  est l'amplitude du facteur de charge

$\lambda_c$  est la charge classique de bifurcation

$\delta$  est l'amplitude du mode de bifurcation

$a, b$  sont des constantes déterminant le comportement post-critique

La théorie classique de Donnell étant basée sur une linéarisation des déplacements, elle ne donne aucune information sur la nature du comportement post-critique ou sur la façon dont une structure imparfaite va se comporter. La théorie post-critique développée par Koiter permet, en ajoutant des termes d'ordre supérieur à 1, de connaître le comportement post-critique initial d'une structure parfaite. Trois cas sont alors distinguables (Figure 1.18) :

- Cas I :  $a \neq 0$

Si  $\delta$  est suffisamment petit (on considère le comportement post-critique initial, donc pour de faibles valeurs de  $\delta$ ) alors

$$a\delta \gg b\delta^2 \text{ et } \frac{\lambda}{\lambda_c} = 1 + a\delta \text{ (équation d'une droite).}$$

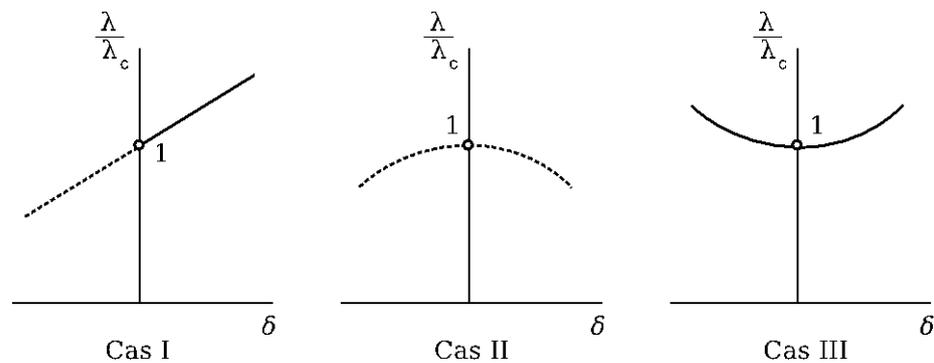
- Cas II :  $a = 0, b < 0$

La branche secondaire a alors une forme parabolique convexe.

- Cas III :  $a = 0, b > 0$

La branche secondaire est dans ce cas concave.

L'étude de la dérivée seconde de l'énergie potentielle permet ensuite de montrer que les branches secondaires sont stables lorsque  $\lambda > \lambda_c$  et instables lorsque  $\lambda < \lambda_c$  (courbes en pointillés sur la Figure 1.18).



**Figure 1.18** Branches d'équilibre de structures parfaites

Suite à l'étude du comportement post-critique des structures parfaites, Koiter présente également dans sa théorie des expressions approchées pour les chemins d'équilibre de structures comportant de légères imperfections. Pour cela, il ajoute une forme approchée de l'incrément d'énergie lié à la présence de petites imperfections.

L'apport primordial de cette étude est la démonstration que l'influence des imperfections sur le comportement de la structure dépend de la forme initiale du chemin d'équilibre secondaire (Figure 1.19). Si ce chemin a une pente négative, l'équilibre est instable, le flambage soudain, et la charge critique de la structure imparfaite est réduite. Si la pente du chemin est positive, la structure peut avoir une résistance post-critique importante. Les imperfections les plus pénalisantes sont celles qui sont colinéaires au mode de bifurcation, donnant une loi de sensibilité de la forme [57] :

$$\left(1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_c}\right)^m = A \cdot |\mu| \cdot \frac{\lambda^*}{\lambda_c}$$

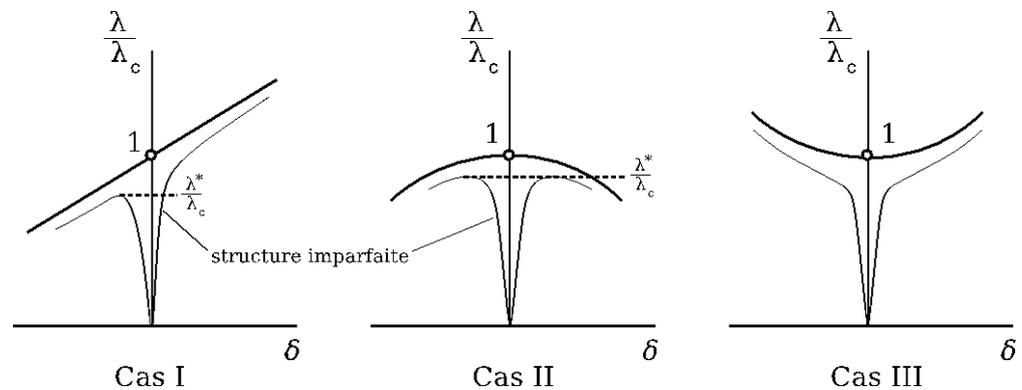
où :  $\lambda^*$  est la charge limite

$\lambda_c$  est la charge classique de bifurcation

$\mu$  est l'amplitude de l'imperfection

$A$  est une constante positive

$m$  est un exposant égal à 2 (cas I) ou 3/2 (cas II)



**Figure 1.19** Influence des imperfections géométriques sur le comportement des structures

La théorie de Koiter montre ainsi la forte sensibilité de la charge critique aux imperfections pour les structures présentant un comportement post-critique instable, comme c'est le cas par exemple pour une coque cylindrique sous compression axiale.

Bien que le cas de la compression axiale soit le plus représentatif des différences importantes de comportement entre les structures parfaites et imparfaites, on retrouve ces différences pour d'autres formes de chargement. Ceci est la raison principale pour laquelle le dimensionnement des coques cylindriques est basé sur la contrainte critique théorique (i.e. la *contrainte classique*) modifiée par un facteur empirique de réduction, ou knock-down factor,

pour chaque type de chargement. La valeur de ce facteur de réduction dépend en général de la différence entre les valeurs théorique et expérimentales de la charge critique, mais aussi de l'importance de la dispersion dans les résultats expérimentaux. Nous verrons au chapitre 3 comment le knockdown factor est calculé dans deux codes de dimensionnement différents : NASA SP8007 et Eurocode 3.

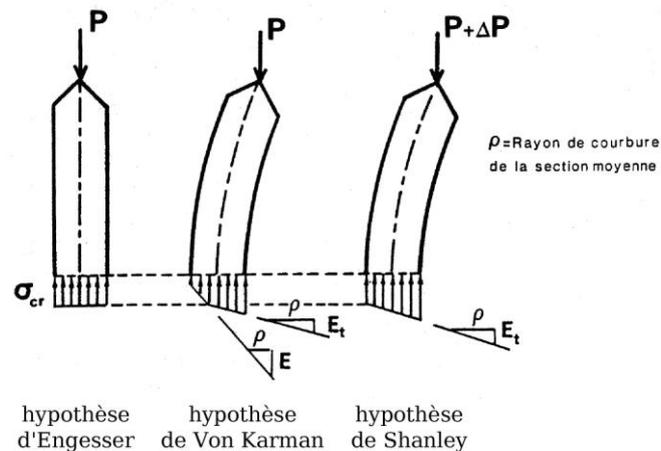
### 1.3.5 Flambage plastique

Suivant les caractéristiques géométriques et matériau, la bifurcation peut se produire au-delà de la limite élastique. Comparé au flambage dans le domaine élastique, sujet qui a fait l'objet d'importants développements théoriques et expérimentaux, le flambage plastique est un problème plus complexe et moins maîtrisé car la présence des deux non-linéarités, celle associée aux grands déplacements et celle relevant du matériau, conduit à des difficultés de résolution.

#### 1.3.51 Principes

Les premiers travaux concernant le flambage plastique ont été entrepris par Engesser en 1889, qui a étudié le problème d'une poutre sous compression axiale. Il conclut que la formule d'Euler peut être utilisée en remplaçant le module d'Young par le module tangent, qui dépend de la valeur de la contrainte au moment du flambement. Selon cette théorie donc, la transition de la poutre, de la forme initiale à la forme flambée s'effectue sous charge croissante, et sans baisse de contrainte dans la partie convexe (voir Figure 1.20).

Cette théorie ne paraît pas physiquement viable pour Von Karman qui en 1910 propose une nouvelle évaluation de la contrainte critique plastique. Sa théorie repose sur l'idée que le flambage s'effectue sous charge constante et que la contrainte augmente en fonction du module tangent  $E_t$  dans la partie concave et diminue en fonction de  $E$  dans la partie convexe (Figure 1.20).



**Figure 1.20** Différents modèles de distribution de la contrainte au cours d'un flambage plastique

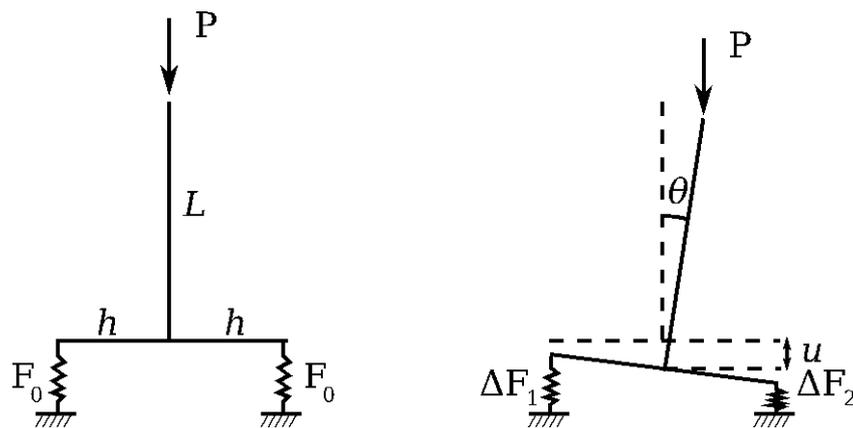
Il en résulte l'expression suivante :

$$P_C = \frac{\pi^2 E_r I}{L^2}$$

où le module réduit  $E_r$  est une fonction de  $E$  et  $E_t$ , dépendant de la section de la colonne.

Malgré une approche paraissant plus logique, les résultats expérimentaux sont cependant en meilleur accord avec la théorie du module tangent !

L'avancée majeure dans la compréhension de ce phénomène arrive en 1947 par Shanley [101]. Après avoir observé expérimentalement que les plus grandes déformations se produisaient au centre de la colonne, il effectue une discrétisation du problème à l'aide de deux ressorts, comme indiqué sur la Figure 1.21. Avec ce système à deux degrés de liberté (le déplacement  $u$  et la déflexion  $\theta$ ), Shanley a montré qu'après une phase où les deux ressorts sont chargés uniformément, la première bifurcation peut se produire dès que la charge critique du module tangent a été atteinte. Cependant, la structure reste stable jusqu'à l'atteinte de la valeur critique du module tangent.



**Figure 1.21** Modèle de colonne élasto-plastique de Shanley

Hill montre ensuite [43] pour un solide tridimensionnel qu'en flambage élasto-plastique, une condition suffisante de stabilité n'est pas équivalente à une condition d'unicité de la solution. Les notions de bifurcation et de stabilité ne sont donc pas liées comme c'est le cas en flambage purement élastique, où une bifurcation traduit un échange de stabilité. Il existe ainsi, un continuum de points de bifurcation sur un intervalle dépendant de la valeur des différents modules. Ce phénomène de spectre continu témoigne de la faculté d'une structure de pouvoir bifurquer à une multitude de valeurs critiques, modifiant en conséquence la zone de décharge mise en jeu au point critique et la rigidité correspondante [23]. D'abord attribué aux discontinuités dans le comportement du matériau, Cimetière *et al.* montrent qu'un comportement continu n'altère en rien l'intervalle de points de bifurcation, qui serait plutôt lié au caractère irréversible de la loi de comportement [24].

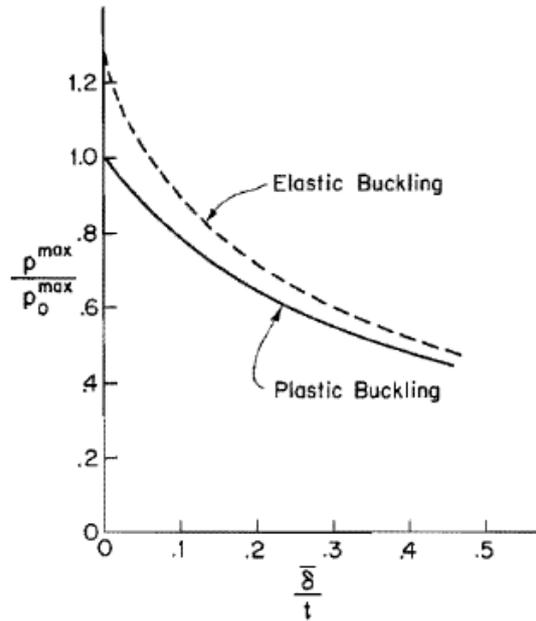
La théorie de la bifurcation plastique est donc raisonnablement bien comprise, comme en atteste le traité de Hutchinson [49] sur le sujet. Une seule difficulté majeure laisse les chercheurs dans l'impasse aujourd'hui : c'est le choix d'une théorie de plasticité adéquate. Comme nous l'avons évoqué, les charges critiques prédites par la théorie incrémentale de la plasticité (« J2 flow theory ») surestiment les valeurs expérimentales, alors que la théorie finie (« J2 deformation theory ») est en meilleur accord avec l'expérience. Ces résultats sont paradoxaux, puisque la théorie finie, qui ne prend pas en compte l'histoire du chargement et ne gère pas les décharges inhérentes à la plasticité, est moins exacte que la théorie incrémentale.

### 1.3.52 Comportement post-bifurcationnel initial en plasticité

L'étude du comportement post-critique initial est beaucoup plus complexe que dans le cas des systèmes conservatifs à cause de l'interaction des non-linéarités géométrique et matérielle. Bien que des similarités existent entre les aspects analytiques de la bifurcation plastique et du comportement post-critique initial des structures élastiques, le flambage plastique possède des caractéristiques très distinctes rendant très ardu le traitement analytique de la sensibilité aux défauts. Le fait que la charge maximum pouvant être supportée par la structure n'est pas atteinte à la bifurcation est la cause principale pour laquelle il n'existe pas d'expression asymptotique simple, comme celle de Koiter, traduisant l'effet des imperfections.

En s'appuyant sur un exemple particulier (coque sphérique sous pression externe), Hutchinson [48] montre que dans le cas plastique les imperfections géométriques peuvent être tout aussi dangereuses que dans le cas élastique. La Figure 1.22 présente la pression externe maximale pouvant être atteinte en fonction de l'amplitude de l'imperfection géométrique ( $p_0^{\max}$  étant la pression maximale supportée par la coque parfaite, en utilisant la théorie incrémentale de plasticité – J2 flow theory). Une fois que la pression critique a été réduite de 30%, l'écart entre les prédictions élastiques et celles prenant en compte les déformations plastiques est limité. C'est-à-dire que l'imperfection réduit la pression de flambage au point où la déformation plastique joue un rôle moins important dans le déclenchement de l'instabilité.

Bien que cette sensibilité aux défauts dans le régime plastique puisse poser problème en théorie, il est en pratique peu probable de voir des réductions conséquentes de la charge critique comme cela peut être le cas pour les instabilités élastiques. En effet, pour les structures coques par exemple, le flambage plastique apparaît pour de faibles valeurs de  $R/t$  (autrement dit, des coques plutôt épaisses). Dans ces conditions, fabriquer des coques « presque parfaites » est bien moins difficile que dans le cas de structures très minces.



**Figure 1.22** Influence des imperfections sur le flambage d'une coque sphérique

### 1.3.53 Charge critique d'une coque cylindrique dans le domaine plastique

L'évaluation de la charge critique dans le cas du flambage plastique d'une coque cylindrique sous compression axiale utilise les approches citées précédemment (module tangent / module réduit). Dans ces approches les notions de bifurcation et de stabilité sont occultées ce qui conduit souvent à des amalgames concernant l'analyse du flambage. Comme nous l'avons vu, en flambage plastique une charge critique de bifurcation ne correspond pas forcément à l'atteinte de la capacité portante. Or bien souvent les résultats expérimentaux se réfèrent à la charge maximale atteinte, c'est pourquoi une comparaison entre une contrainte critique expérimentale et une estimation de la contrainte de bifurcation donnée par la théorie nous semble peu pertinente.

L'une des premières formules pour la contrainte critique prenant en compte la plasticité est donnée par Timoshenko dans son ouvrage classique [110]. Après avoir remarqué que la contrainte classique pouvait être supérieure à la limite de linéarité du matériau lorsque  $R/t$  était suffisamment petit, il introduisit intuitivement le module tangent  $E_t$  à la place de  $E$  dans les équations d'équilibre, pour obtenir l'expression suivante :

$$\sigma_{cr} = \frac{E_t}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R}$$

Nous citons également l'analyse de Bijlaard [15] qui donne des résultats similaires. Gerard [39] adopte la théorie de déformation dans son étude pour décrire les relations contraintes-déformations dans le domaine plastique, en introduisant le module sécant  $E_s$ . Il note que la charge axiale augmente lors du flambage, mais montre que ces termes sont négligeables dans les équations d'équilibre de Donnell, aboutissant à :

$$\sigma_{cr} = \frac{\sqrt{E_s E_t}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R}$$

La longueur d'onde associée est quant à elle égale à :

$$\lambda_{pl} = \frac{L}{m} = 2\pi \cdot \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{Rt} \cdot \sqrt[4]{\frac{E_s}{E_t}} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3E_t}{4E_s}\right)$$

La formule proposée par Gerard donne une bonne approximation de la charge critique du flambage plastique comme l'a montré Waeil [112] dans sa thèse consacrée à l'étude expérimentale du flambage de coques cylindriques épaisses sous compression axiale.

## 2 Etude bibliographique

### 2.1 Introduction

### 2.2 Coques cylindriques sous compression axiale

- 2.2.1 Modes de flambage
- 2.2.2 Ecart entre théorie et expérimentation

### 2.3 Coques sous flexion pure

- 2.3.1 Phénoménologie
- 2.3.2 Mécanismes de ruine
- 2.3.3 Estimation de la charge de ruine

### 2.4 Coques cylindriques sollicitées en cisaillement

- 2.4.1 Modes de déformation
- 2.4.2 Estimation de la charge de ruine : théorie et expérimentation
- 2.4.3 Effet de la plasticité
- 2.4.4 Effet des défauts et comportement post-critique

### 2.5 Couplage avec la pression interne

- 2.5.1 Etat de contrainte
- 2.5.2 Compression axiale et pression interne
- 2.5.3 Flexion et pression interne
- 2.5.4 Effet de la pression sur le flambage par cisaillement
- 2.5.5 Réduction des imperfections par la pressurisation

### 2.6 Problèmes d'interactions entre chargements

- 2.6.1 Interaction flexion/cisaillement (M, T)
- 2.6.2 Interaction entre compression et flexion (N, M)
- 2.6.3 Interaction entre compression et cisaillement (N, T)

---

### 2.1 Introduction

Malgré les récentes évolutions des techniques et des moyens associés à la simulation numérique et à l'expérimentation, l'étude du flambage des coques cylindriques minces reste un sujet délicat. Nous passons en revue dans ce chapitre les études réalisées par le passé, qui serviront de base à notre travail. Cette revue ne se veut pas exhaustive, étant donné la variété des problèmes traités ; le lecteur pourra cependant trouver d'abondantes informations sur le flambage de coques et autres structures dans l'ouvrage complet de Singer, Arbocz et Weller [102].

Compte tenu de ses nombreuses applications, de sa haute sensibilité aux défauts géométriques, et de sa simplicité d'expérimentation, le cas de la compression axiale a été le plus étudié, tant du point de vue expérimental que numérique. Ainsi les effets sur la charge critique des paramètres géométriques caractérisant la coque (longueur, épaisseur), des conditions aux limites (appuis simples, encastrement...), des éventuels grands déplacements pré-critiques, de défauts géométriques particuliers (axisymétrique, modal, localisé ou généralisé...) ont été examinés.

En revanche les études sur le cas de la flexion pure sont plus rares. En effet les premières recherches sur ce sujet, conduites entre 1930 et 1965, sem-

blaient indiquer que ce cas pouvait se ramener à celui de la compression, de par la similarité de comportement. Le cas de la flexion de coques épaisses ( $R/t < 100$ ) et infiniment longues a fait l'objet d'études plus poussées, ayant pour application les structures du type pipeline pour l'industrie pétrolière.

Le cas du cisaillement par effort tranchant a fait l'objet de peu de travaux, puisqu'il a très vite été assimilé au cas de la torsion, beaucoup plus répandu. Récemment, un certain nombre d'études y a été consacré, dans le cadre du programme nucléaire japonais.

Enfin, les interactions entre les différents chargements ont été bien souvent délaissées depuis les premiers efforts de recherche datant des années 50.

---

## 2.2 Coques cylindriques sous compression axiale

---

### 2.2.1 Modes de flambage

Un état de compression axiale dans un cylindre peut être le résultat d'actions très différentes selon l'application : elle proviendra par exemple de la poussée du moteur pour un lanceur, ou du poids du toit pour un silo de stockage.

L'étude de l'instabilité d'une coque cylindrique soumise à de la compression axiale a pendant longtemps été un problème académique. Les premières solutions ont été trouvées par Lorenz [62], Timoshenko [109] et Southwell [103], avec pour résultat la contrainte critique « classique » que nous avons présentée au premier chapitre :

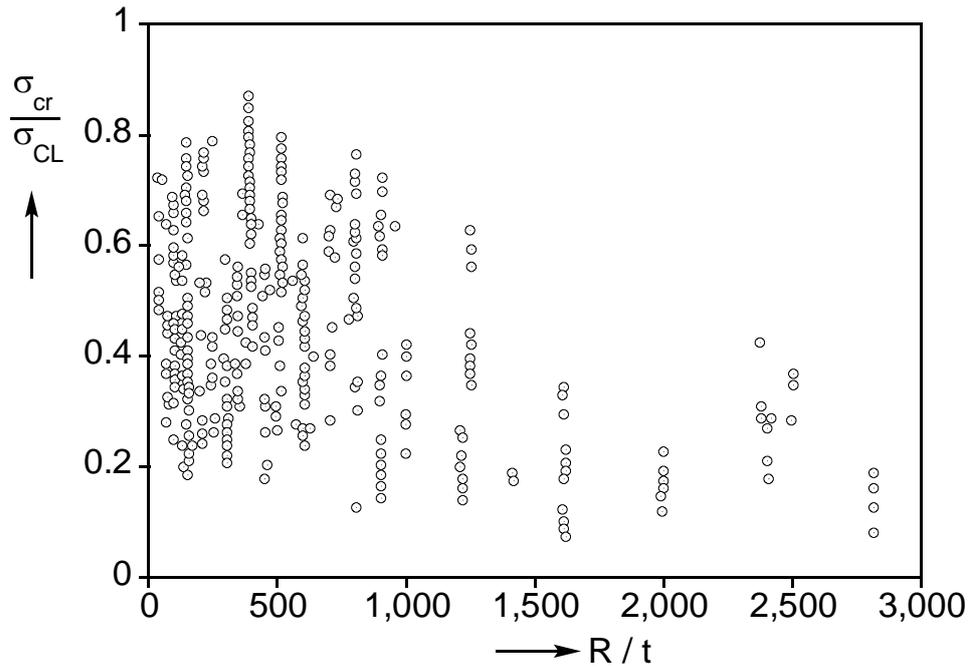
$$\sigma_{CL} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Et}{R}$$

De nombreux modes de flambage sont associés à cette valeur propre, et peuvent être de deux types en général (voir Figures 1.16 et 1.17). Dans le mode axisymétrique, la coque présente des ondes symétriques par rapport à l'axe du cylindre. Le mode à damiers comporte lui des ondes à la fois dans les directions axiale et circonférentielle. Ces modes sont bien entendu des idéalizations de la géométrie critique, le mode réel étant bien souvent localisé à une fraction de la surface.

---

### 2.2.2 Ecart entre théorie et expérimentation

Les premières expériences menées (Flügge [36], Lundquist [66], Wilson et Newmark [114]) ont montré que le flambage d'un cylindre réel se produit pour une charge bien plus basse que la charge classique, des valeurs expérimentales inférieures à 30% de celle-ci étant communes (voir Figure 2.1, d'après Waackel [111]). De plus, les contraintes critiques obtenues lors des essais étaient très dispersées, même lorsque les expériences étaient préparées avec une extrême précaution.



**Figure 2.1** Résultats expérimentaux, coques cylindriques sous compression axiale

Des efforts de recherche considérables ont été menés dans les décennies qui suivirent dans le but de trouver une explication à ces divergences. Elles ont communément été attribuées à plusieurs facteurs :

- les déformations pré-critiques ne sont en réalité pas uniformes, et créent une redistribution des contraintes, ce qui va entraîner une modification de l'état d'équilibre pré-critique.
- les conditions aux limites expérimentales ne sont pas représentatives de la théorie et peuvent également diminuer la contrainte critique lors des essais.
- en fonction de la complexité et de la configuration du banc d'essais, le chargement mesuré n'est pas nécessairement celui vu par la coque. Des conditions aux limites n'assurant pas une transmission régulière des efforts ou qui entraînent un pré-chargeement non quantifié de la coque (dû à un mauvais alignement ou une non planéité du système de chargement) peuvent ainsi contraindre le spécimen à l'insu de l'expérimentateur.
- la théorie suppose une coque sans défauts géométriques, ce qui est bien entendu une idéalisation des structures réelles.

De nombreuses études ont été menées afin de mieux comprendre l'influence de chacune de ces « imperfections » et ainsi parvenir à une meilleure concordance entre la théorie et l'expérimentation.

### 2.2.21 Influence des conditions aux limites

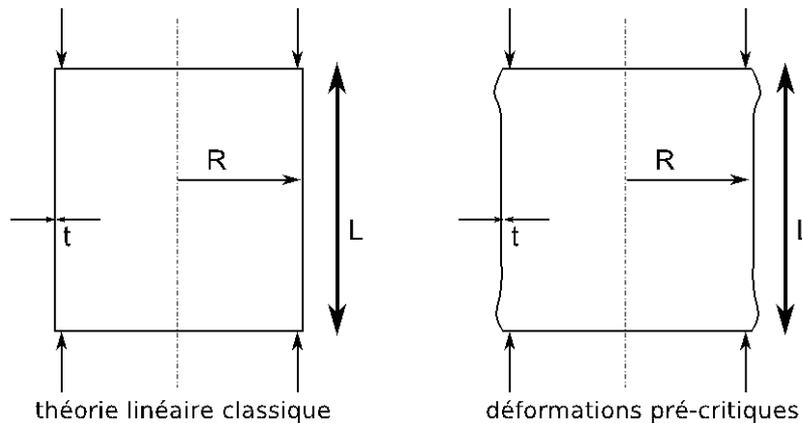
Hoff [44] est le premier à avoir mené des investigations exhaustives concernant l'influence des conditions aux limites. Huit différents cas possibles de condi-

tions aux limites sont étudiés (tableau 2.1), pour lesquels Hoff détermine la charge de bifurcation en appliquant la théorie linéaire de la stabilité pour une coque de longueur semi-infinie. Dans la majorité des cas, l'influence des conditions aux limites est limitée, sauf pour les cas SS1 et SS2 où le déplacement tangentiel est libre.

Définition des conditions aux limites			$\sigma_{cr}/\sigma_{CL}$		
			HOFF	ALMROTH	YAMAKI
Appui Simple	SS1	$w = w_{,xx} = \sigma_x = \tau_{xy} = 0$	0.5	0.502	0.503
	SS2	$w = w_{,xx} = u = \tau_{xy} = 0$	0.5	0.503	0.503
	SS3	$w = w_{,xx} = \sigma_x = v = 0$	1.0	0.844	0.843
	SS4	$w = w_{,xx} = u = v = 0$	1.0	0.867	0.866
Encastrement	C1	$w = w_{,x} = \sigma_x = \tau_{xy} = 0$	1.0	0.908	0.906
	C2	$w = w_{,x} = u = \tau_{xy} = 0$	1.0	0.926	0.925
	C3	$w = w_{,x} = \sigma_x = v = 0$	1.0	0.910	0.907
	C4	$w = w_{,x} = u = v = 0$	1.0	0.926	0.925

**Tableau 2.1** Influence des conditions aux limites

Almroth en 1966 [8], et Yamaki [116] réalisent une étude similaire, en introduisant toutefois l'influence des déformations pré-critiques qui surviennent inévitablement à proximité des conditions aux limites. En effet, sous l'action combinée de la charge axiale et de l'effet de tonneau, la coque va avoir tendance à se déformer radialement, comme indiqué sur la Figure 2.2.



**Figure 2.2** Coque cylindrique sous compression axiale

Les contraintes de flexion qui apparaissent près des conditions aux limites, où les déplacements radiaux sont empêchés, vont perturber l'état d'équilibre qui précède le flambage. Après introduction de ces phénomènes

non linéaires dans les équations d'équilibre, les charges de bifurcation sont recalculées pour les huit types de conditions aux limites. Les deux auteurs confirment les résultats de Hoff pour les cas SS1 et SS2, et constatent par ailleurs que les déformations pré-critiques réduisent la contrainte critique de 8 à 15% environ pour les autres conditions d'appui. Ces résultats sont résumés dans le tableau 2.1.

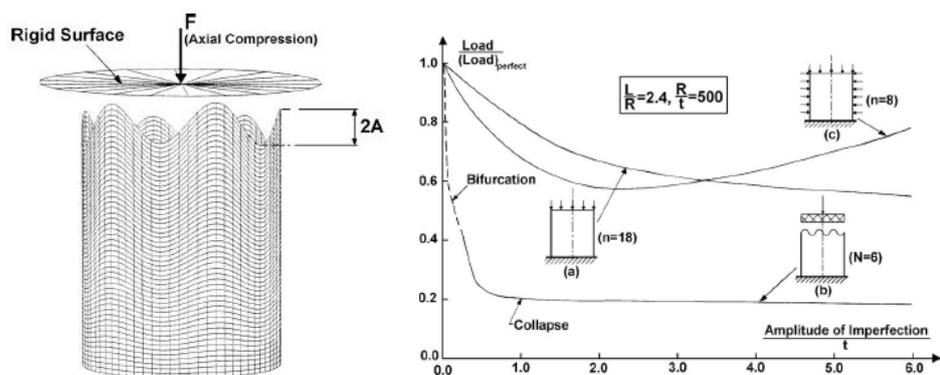
La plupart des essais sont menés avec des conditions aux limites de type SS3 ou C3, l'influence de cette imperfection ne permet donc pas à elle seule d'expliquer de manière convaincante les écarts importants entre théorie et expérience.

### 2.2.22 Influence des conditions expérimentales

La bonne exécution d'un essai de flambage dépend fortement de son environnement expérimental. En fonction des expérimentateurs et des bancs, on retrouve en effet des « signatures » de résultats, ou moyennes, qui traduisent la sensibilité des charges de flambage à tous les moyens mis en œuvre pour la réalisation de l'essai.

Les imperfections sont introduites dès la fabrication des coques, qui peut créer, outre des défauts de forme, des contraintes résiduelles localisées. L'expérimentateur introduit ainsi un défaut type, qui variera suivant la méthode : électrodéposition, soudage, collage... Peu de chercheurs se sont penchés sur l'effet des contraintes résiduelles, citons Holst *et al.* [45] qui montrent que celles-ci tendent à renforcer la coque par rapport au cas où seules les imperfections géométriques associées sont présentes.

L'architecture du banc d'essais, que ce soit au niveau des conditions aux limites et de l'interface avec la coque ou au niveau de l'application de l'effort, introduit d'autres décalages avec la théorie. Un système de chargement en compression qui n'est pas parfaitement plat par exemple, va sur-contraindre une partie de la coque et donc précipiter le flambage, alors que l'expérimentateur ne mesurera que l'effort appliqué moyen. Blachut, dans une étude numérique récente [16], traite du cas du flambage de cylindres de longueur non-uniforme en compression axiale (voir Figure 2.3). Le chargement est effectué à l'aide d'un plateau rigide et la coque possède une imperfection de type sinusoïdal le long du bord où le chargement est appliqué.



**Figure 2.3** Coque de longueur non-uniforme sous compression axiale (Blachut, 2010)

Blachut étudie l'influence du mode et de l'amplitude de la sinusoïde pour des  $R/t$  compris entre 165 et 1000, et conclut que ce type d'imperfection est davantage pénalisante que les défauts géométriques. Cependant, cette méthode de chargement n'est que peu représentative des méthodes expérimentales couramment utilisées, elle concerne par exemple les coques comportant des liaisons boulonnées. Nous pouvons toutefois retenir que les conditions d'application des efforts jouent un rôle non négligeable dans la dispersion des résultats expérimentaux.

Enfin, les moyens de mesure eux-mêmes peuvent être discutables, notamment pour les campagnes d'essais effectuées vers le milieu du siècle dernier disposant de moyens technologiques limités.

Le dispositif expérimental est donc d'une importance capitale dans la bonne réussite d'essais de flambage, et la plus grande précaution est à mettre en œuvre depuis la confection des cylindres jusqu'à la préparation des tests.

### 2.2.23 Influence des imperfections géométriques

Le facteur contribuant le plus à l'écart entre expérimentation et théorie est maintenant largement reconnu comme étant les imperfections géométriques initiales de la coque. Ce sujet a fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières décennies, utilisant différentes méthodes dans l'optique de pouvoir prédire précisément le comportement d'une structure en fonction des défauts présents.

---

#### 2.2.231 Méthodes analytiques

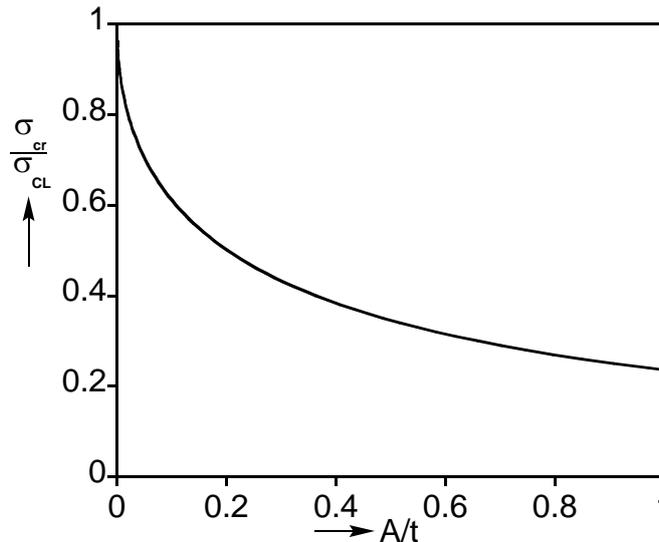
Les premiers travaux dans ce domaine ont été analytiques et menés par Koiter [56] sur le flambage d'une coque cylindrique comportant des imperfections axisymétriques de la forme :

$$w^* = A \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

L'introduction de cette déformation pré-critique dans les équations d'équilibre complique de façon significative l'analyse présentée au premier chapitre et nécessite l'utilisation de formulations asymptotiques, aboutissant à l'expression suivante pour le calcul de la contrainte critique :

$$\left[1 - \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{CL}}\right]^2 = \frac{3}{2} \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \frac{A}{t} \cdot \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{CL}}$$

Ces résultats sont tracés sur la Figure 2.4. La tangente verticale à l'origine nous indique que même des défauts extrêmement petits vont diminuer la charge critique. Ainsi, pour une imperfection dont l'amplitude n'est que la moitié de l'épaisseur de la coque, la charge critique est réduite à 35% de la charge classique.



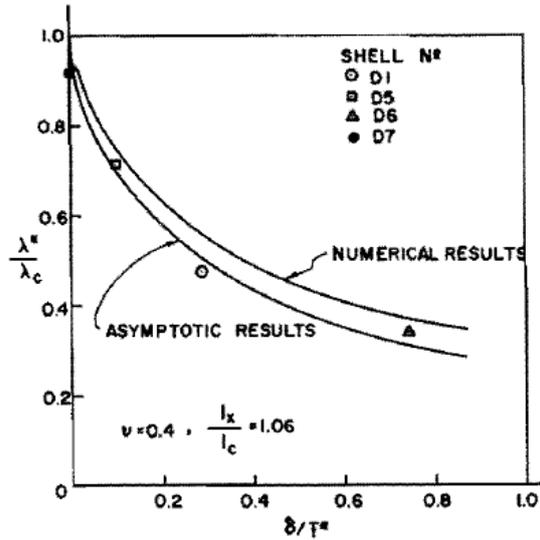
**Figure 2.4** Influence d'une imperfection axisymétrique sur la charge critique (Koiter, 1945)

De nombreux autres travaux analytiques traitent de l'influence des imperfections géométriques. Arbocz et Babcock [7] étendent en 1969 ces analyses à des déformations asymétriques. Amazigo et Budiansky [2] ont eux développés l'analyse de Koiter en considérant des imperfections de formes diverses : modales, locales et aléatoires. Yamaki [116] étudia également l'influence des imperfections géométriques en considérant plusieurs types de défauts ainsi que plusieurs types de chargements. Son étude particulièrement complète aboutit à une relation relativement complexe qui recoupe les principaux résultats obtenus par d'autres chercheurs.

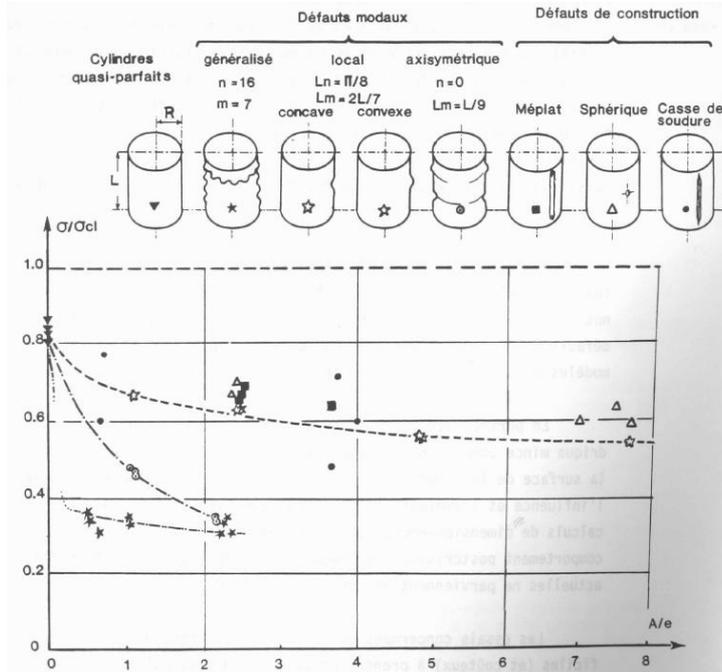
Plus récemment, les méthodes asymptotiques ont été utilisées pour résoudre une multitude de problèmes et notamment le flambage de coques imparfaites sous compression. Ainsi, Jamal *et al.* étudient tout d'abord l'influence d'imperfections localisées [51], et retirent une équation pour la réduction de la contrainte critique qui dépend de la forme et de l'amplitude du défaut. Cette loi est proportionnelle à  $(A/t)^{2/3}$ . Ils trouvent de plus qu'une combinaison de modes augmente la perte de charge. Les auteurs s'attaquent ensuite à l'interaction entre des imperfections modales et localisées [52], et les résultats de leur méthode analytique semblent pertinents en comparaison avec les résultats obtenus par calcul numérique (Abaqus, STANLAX).

Ces travaux permettent de mettre en exergue le fait que la chute de charge ne dépend pas uniquement de l'amplitude du défaut, mais également de la forme de celui-ci. Le principal problème est qu'elles utilisent des formes relativement simples de défauts, semblables aux défauts modaux. Les imperfections réelles sont bien plus complexes et donc impossibles à modéliser analytiquement, montrant les limites de ces méthodes finalement peu applicables pour le dimensionnement mais qui sont néanmoins utiles pour comprendre le problème des imperfections géométriques de manière un peu plus qualitative.

Ces différentes analyses, utilisant des développements asymptotiques, ne sont en toute rigueur valables que pour de faibles amplitudes de défauts. Toutefois, des expériences menées sur des cylindres fabriqués avec soin, comportant des imperfections sinusoïdales axisymétriques (Tennyson et Muggenridge [108]) ou des défauts axisymétriques localisés (Hutchinson *et al.* [47]), montrent que les analyses asymptotiques peuvent donner une approximation plutôt bonne de la charge de flambage (voir Figure 2.5).



**Figure 2.5** Influence d'une imperfection axisymétrique localisée sur la charge critique, comparaison de résultats expérimentaux et analytiques (Hutchinson *et al.*, 1971)



**Figure 2.6** Influence de différentes formes de défauts sur la charge critique expérimentale (Waeckel, 1984)

Waeckel [111] également, compare expérimentalement l'influence de différentes formes d'imperfections sur la charge critique de coques électro-déposées avec un R/t compris entre 400 et 450 (Figure 2.6). Différentes tendances se dégagent : les défauts modaux (généralisé, local, axisymétrique) sont généralement plus pénalisants que les défauts typiques idéalisés de construction (méplat, sphérique, casse de soudure).

### 2.2.232 Prise en compte d'imperfections réelles

Ces dernières remarques ont conduit les chercheurs à se questionner sur le type de défauts réellement présents sur les structures afin de pouvoir étudier de façon pertinente leur influence sur le déclenchement d'instabilités et ainsi les inclure dans le processus de dimensionnement.

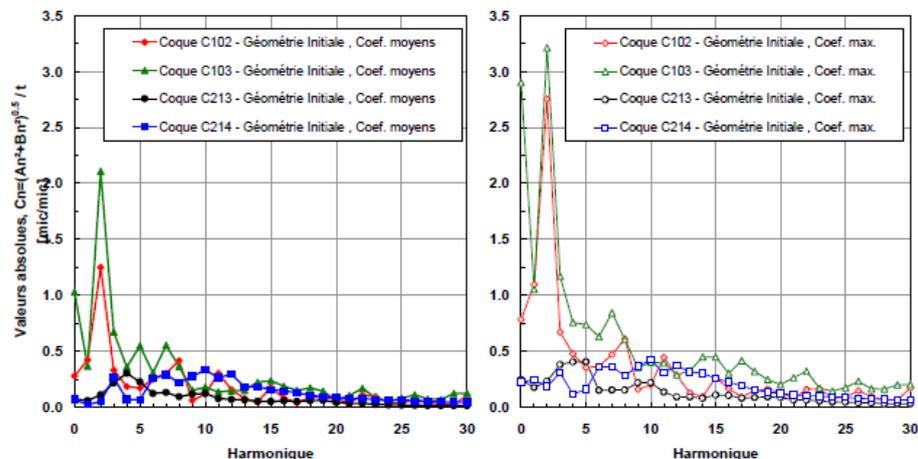
#### *Structures à l'échelle de laboratoire – méthodes déterministes*

Les laboratoires (Caltech, Technion) ont alors commencé à se doter, dès les années 60, de moyens expérimentaux permettant de mesurer précisément la géométrie des spécimens testés. Les données résultant de ces mesures peuvent ensuite être traitées en utilisant par exemple une décomposition en séries de Fourier, qui permet de comparer facilement différentes géométries selon leur mode prédominant. Pour chaque hauteur de mesure  $z$  sur la coque, l'imperfection peut être représentée par :

$$w(\theta, z) = \sum_{n=0}^N (A_{nz} \cdot \cos(n\theta) + B_{nz} \cdot \sin(n\theta))$$

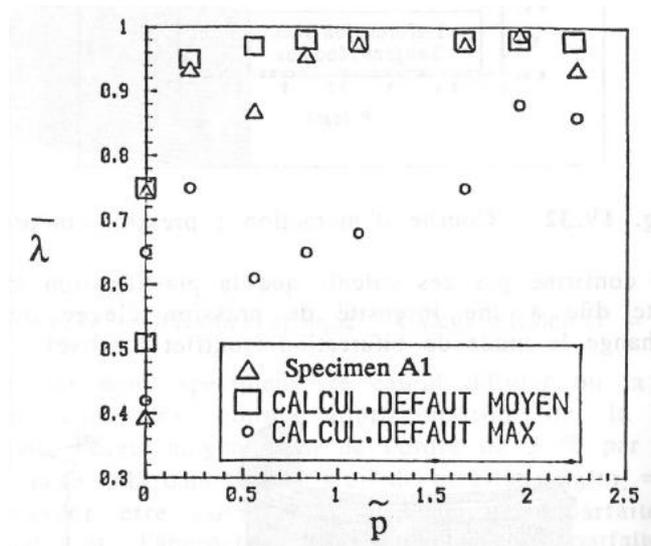
$$\text{et } \bar{C}_{nz} = \frac{1}{t} \cdot \sqrt{A_{nz}^2 + B_{nz}^2}$$

La représentation graphique passe par la détermination pour l'ensemble des parallèles des valeurs  $\bar{C}_n$  moyenne et maximale, donnant par exemple [69] les résultats de la Figure 2.7.



**Figure 2.7** Représentations de Fourier des défauts initiaux – valeurs moyennes et maximales (Mathon, 2004)

Pour un prototype, il est alors possible d'intégrer cette géométrie dans une analyse numérique et de prédire la charge de flambage de la structure de façon précise, comme l'a montré Limam [60]. La Figure 2.8 présente les résultats d'essais effectués sur une même coque, pour différentes pressions, comparés aux résultats des simulations par éléments finis incluant soit les défauts moyens, soit les valeurs maximales des modes. Cette approche, bien que fiable comme le montrent les résultats ci-dessus, n'est cependant pas adaptée à des coques produites en série, pour lesquelles la charge de flambage doit être connue d'avance.

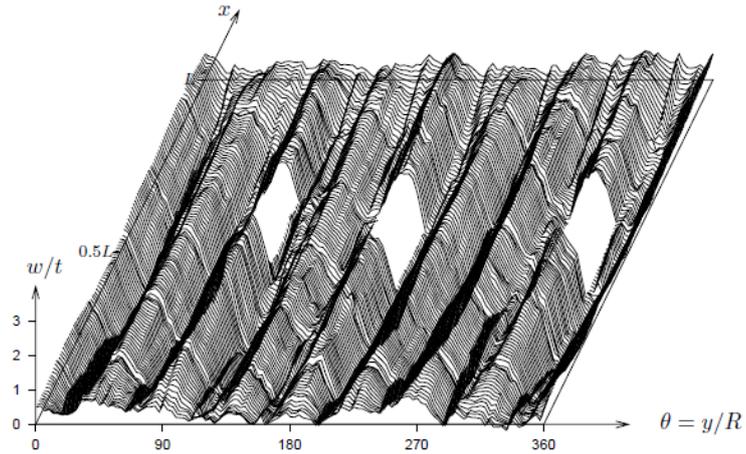


**Figure 2.8** Représentations de Fourier des défauts initiaux – valeurs moyennes et maximales (Limam, 1991)

### Structures réelles – méthodes statistiques

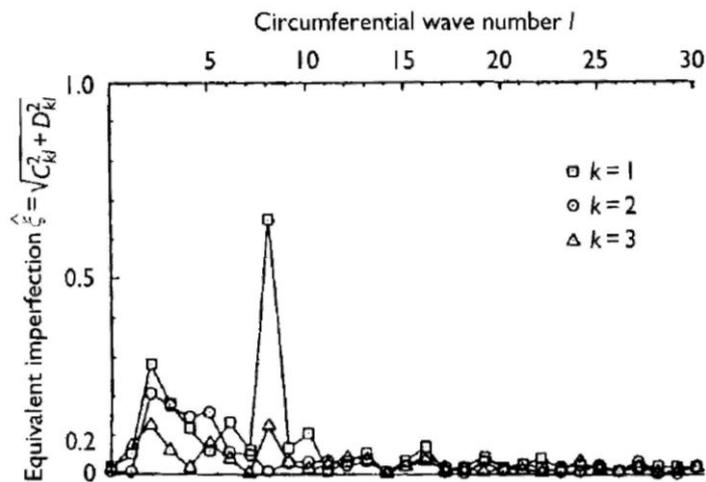
Pour des coques à grande échelle destinées à un usage industriel, Arbocz a notamment montré qu'il est possible d'associer des imperfections initiales caractéristiques à un mode de fabrication particulier [8]. Cette démarche nécessite un grand nombre de mesures pour différents modes de fabrication, c'est pourquoi l'International Imperfection Data Bank a été créée, regroupant les mesures d'imperfections effectuées dans différents laboratoires (principalement Caltech, Technion et TU-Delft) et présentées sous un format identique [30].

Ainsi pour des coques aérospatiales construites par l'assemblage d'un nombre fixé  $n$  de panneaux courbes, la distribution des imperfections sera dominée par deux composantes principales. La Figure 2.9 montre le résultat de mesures effectuées sur la coque inter-étages II/III de la fusée Ariane [98], et la variation des coefficients de Fourier correspondants est tracée sur la Figure 2.10.



**Figure 2.9** Forme initiale de la coque inter-étages II/III de la fusée Ariane (Sebek, 1981)

Deux modes prédominant :  $\ell = 2$  (correspondant à l'ovalisation) et  $\ell = 8$  (correspondant au nombre de panneaux assemblés). La distribution des harmoniques en Figure 2.10 peut donc être considérée comme l'imperfection initiale caractéristique pour ce mode de fabrication.



**Figure 2.10** Représentation de Fourier des défauts initiaux, coque inter-étages II/III de la fusée Ariane (Sebek, 1981)

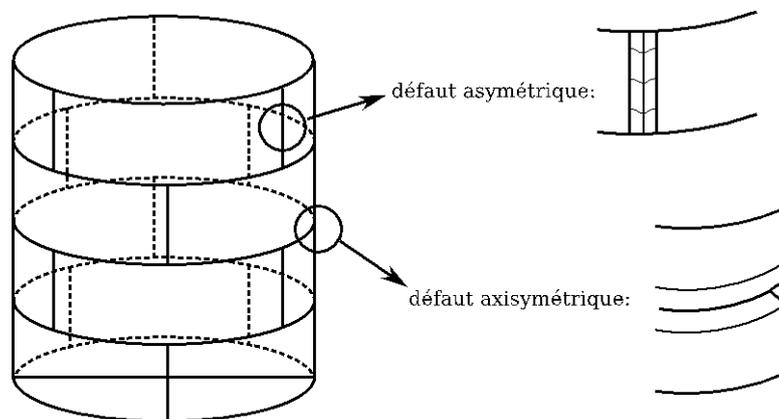
Ces imperfections initiales caractéristiques, couplées à des calculs numériques, permettent de déduire la charge de flambage (à partir des valeurs moyennes des harmoniques), ainsi qu'une courbe de fiabilité (en utilisant des méthodes statistiques : Monte Carlo, FORM, FOSM). Le lecteur pourra trouver plus de détails sur ces méthodes dans Arbocz et Stam [9], ou Bourinet *et al.* [18].

Ces techniques semblent prometteuses et pourraient être utilisées pour calculer des facteurs de réduction moins conservatifs, avec la même fiabilité que ceux obtenus par les méthodes actuelles de courbes basses empiriques

(comme la NASA SP8007). Elles requièrent cependant de mettre en œuvre des campagnes de mesures systématiques sur les coques produites, ce qui peut s'avérer extrêmement lourd en temps et en moyens. Une vérification expérimentale plus poussée est nécessaire avant de pouvoir les utiliser à bon escient.

#### *Défauts axisymétriques – méthodes numériques*

Dans le but d'étudier l'effet d'imperfections réalistes, beaucoup se sont concentrés sur les imperfections axisymétriques. La méthode de fabrication de coques la plus commune, notamment utilisée pour les silos [89] et dans le cas des réservoirs de l'EPC, est détaillée en Figure 2.11. Des panneaux courbes sont soudés un à un pour former une coque puis chaque coque est soudée une à une pour construire la structure entière. Cette méthode produit des imperfections quasi-axisymétriques au niveau des soudures entre les différents étages, ainsi que des défauts asymétriques au niveau des lignes de soudage verticales entre les différents panneaux d'un même étage (voir Figure 2.9).

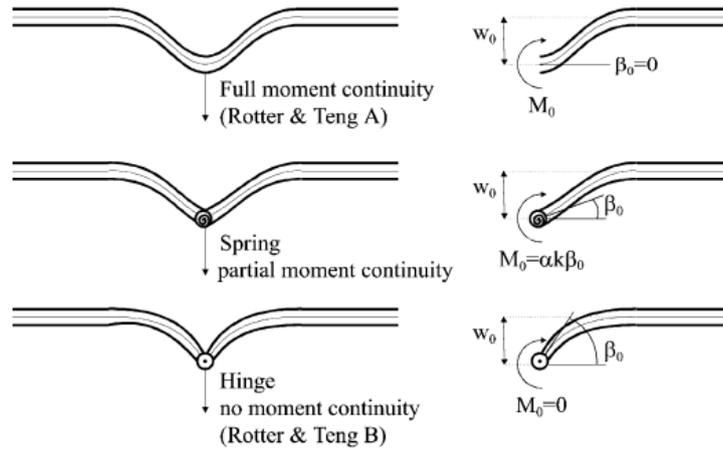


**Figure 2.11** Méthode de fabrication des coques de l'EPC

Les défauts axisymétriques ont été étudiés de manière analytique dans les années 70, ayant pour forme le défaut modal localisé. Depuis, plusieurs études ont été menées afin de définir la forme du défaut axisymétrique créé par le soudage puis d'en étudier l'effet sur le déclenchement d'instabilités : Bornscheuer *et al.* [17], Berry *et al.* [14], ou encore Pircher et Bridge [79]. Nous présentons ici le défaut de Rotter et Teng [86], qui supposent que la forme du défaut dépend de la capacité de la soudure à transmettre ou non les moments de flexion (Figure 2.12). L'amplitude de l'imperfection est alors donnée par :

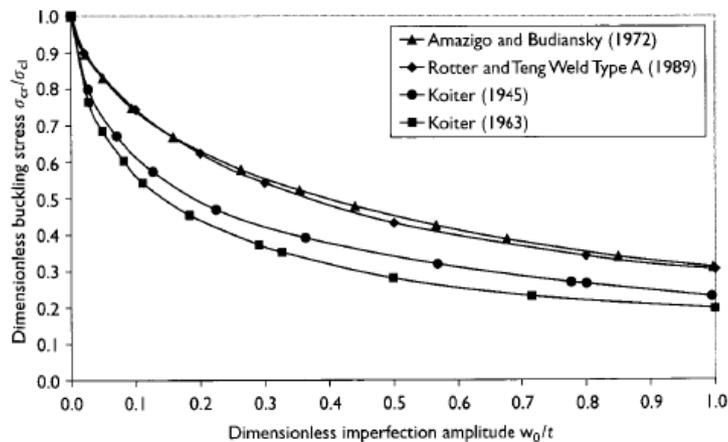
$$w = w_0 e^{-(\pi x/\lambda)} \left( \cos \frac{\pi x}{\lambda} + k \sin \frac{\pi x}{\lambda} \right)$$

où  $k$  varie entre 0 (défaut type A : continuité totale du moment au niveau de la soudure) et 1 (défaut type B : soudure sans raideur, équivalente à une rotule).



**Figure 2.12** Influence de différents types d'imperfection axisymétrique sur la charge critique (Pircher et al., 2001)

Les résultats donnés par ce type de défaut sont tracés sur la Figure 2.13, et comparés aux défauts de Koiter [56] ainsi que celui d'Amazigo et Budiansky [2]. On remarque que le défaut de Rotter et Teng Type A donne des résultats pertinents, proches de ceux d'Amazigo et Budiansky. Ces deux défauts axisymétriques localisés restent moins pénalisants que le défaut modal généralisé de Koiter.



**Figure 2.13** Influence de différents types d'imperfection axisymétrique sur la charge critique (Rotter et Teng, 1989)

Suite à cette étude, et remarquant le mode critique élevé créé par ce type de défauts, Berry et Rotter [12] analysent l'effet d'un même défaut dit « axisymétrique » mais ne s'étendant que sur une partie de la circonférence. Ils en concluent qu'une imperfection relativement locale (de longueur à peine supérieure à la longueur d'onde critique) peut être aussi nuisible qu'une imperfection s'étendant sur toute la circonférence.

Des campagnes de mesures sur des silos ont été réalisées (Berry [13], Pircher *et al.* [80]) qui confirment que les défauts présents au niveau des sou-

dures ont une forme semblable au défaut de type A. Toutefois, la méthode de soudage, les conditions environnementales et la géométrie même du cylindre peuvent avoir une influence sur la forme de l'imperfection. D'importants écarts ont été mis en évidence au niveau de l'amplitude, de la longueur d'onde, et de l'arrondi du défaut ; encore une fois plus de mesures sont nécessaires afin de mieux pouvoir caractériser l'imperfection de soudage.

Mathon [69] propose un défaut axisymétrique simplifié, de forme triangulaire. Nous reviendrons en détail sur l'influence d'une telle imperfection au chapitre 6.

## 2.3 Coques sous flexion pure

### 2.3.1 Phénoménologie

La géométrie d'un cylindre est définie par trois dimensions : le rayon  $R$ , la longueur  $L$  et l'épaisseur  $t$  de la structure, et est généralement caractérisée de manière adimensionnelle par deux paramètres :  $L/R$  et  $R/t$ . Le premier paramètre  $L/R$  permet de distinguer les coques selon leur hauteur alors que le deuxième paramètre  $R/t$  permet de différencier les coques minces des coques épaisses.

Quels que soient ces paramètres géométriques  $R/t$  et  $L/R$ , deux zones se distinguent lorsqu'un moment de flexion est appliqué sur un cylindre : une zone en traction et une zone en compression (Figure 2.14). Ce modèle de type poutre repose sur l'hypothèse que le moment de flexion engendre une répartition sinusoïdale de la contrainte de membrane axiale suivant la circonférence.

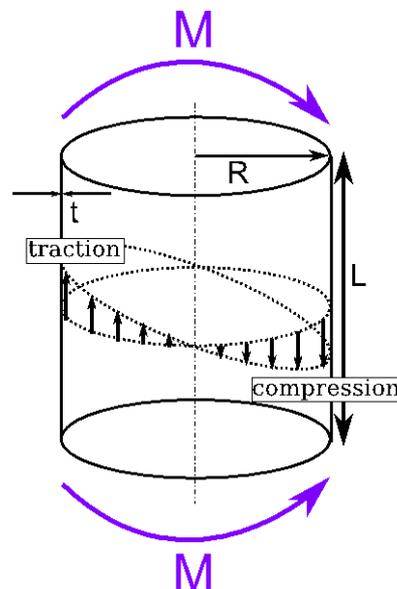


Figure 2.14 Modèle de type poutre

Les contraintes maximales de traction et compression sont positionnées sur deux fibres opposées. La valeur absolue maximale  $\sigma_F$ , que nous appelons « contrainte globale de flexion », est alors donnée par la relation :

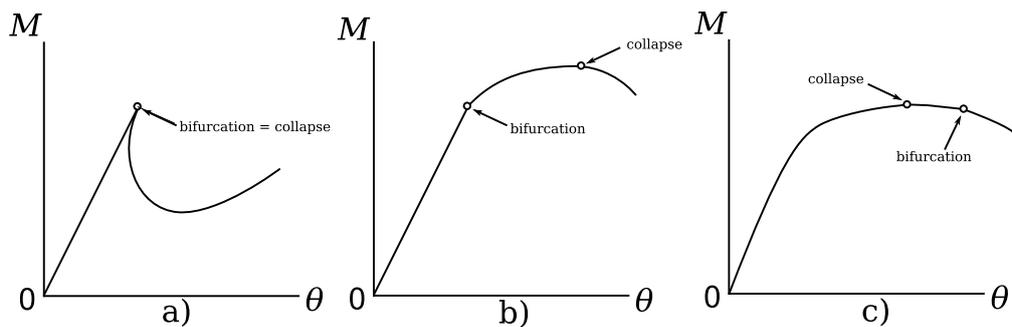
$$\sigma_F = \frac{M_F}{\pi R^2 t}$$

Pour les coques minces, ce type de répartition est proche de la réalité tant que l'on reste dans le domaine des petits déplacements, ce qui se traduit par la nécessité que la configuration déformée soit proche de la configuration initiale. Cette hypothèse n'est donc plus valable lors de l'initiation du flambage ou dans le cas de conditions aux limites qui permettent le développement de non-linéarités pré-critiques aux extrémités de la coque. D'autre part, la prise en compte des phénomènes de plasticité perturbera également cette répartition, à cause des redistributions de contraintes allant de pair avec l'affaiblissement du matériau. L'application d'un moment de flexion et l'atteinte de l'équilibre se traduiront de toutes façons par une contrainte égale à  $\sigma_F$  sur la fibre la plus sollicitée.

### 2.3.2 Mécanismes de ruine

Plusieurs mécanismes de ruine sont observables sur des coques cylindriques soumises à un chargement de flexion ; ils seront conditionnés non seulement par les paramètres géométriques de la coque mais également par les caractéristiques du matériau.

Dans le cas d'un chargement de flexion combiné ou non avec de la pression interne, la structure peut adopter trois comportements possibles, comme on peut le voir sur les courbes angle-moment de la Figure 2.15.



**Figure 2.15** Types de comportement d'une coque en flexion

Dans le premier cas, caractéristique des coques minces, le comportement est linéaire jusqu'à l'atteinte du point de bifurcation. Des cloques apparaissent alors dans la zone comprimée de la coque, traduisant le passage d'un mode de déformation couplant le mode 0 et le mode 1 à un mode différent, couplant de nombreuses harmoniques (mode localisé, en « pointes de diamant »). La bifurcation est ici synonyme de ruine ou collapse. Ce cas est ob-

servé en général pour  $0.5 < L/R < 3$  (coques moyennement longues) et  $R/t > 250$  (coques minces).

Le cas b) présente également une partie précritique quasi linéaire, la bifurcation d'équilibre traduisant le cloquage, comme pour le cas a), mais n'induisant pas le collapse de la structure. Suite au changement de cinématique se produisant en ce point, une redistribution des contraintes permet à la structure d'avoir un comportement post-critique stable. La réserve de charge entre le point de bifurcation et le point de collapse correspond à l'extension de la zone cloquée à toute la zone comprimée, ainsi qu'à l'accroissement de l'amplitude du mode. L'étendue de cette réserve de charge dépend du matériau utilisé ainsi que du mode développé. Ce type de comportement est également observé pour  $0.5 < L/R < 3$  (coques courtes) et  $R/t > 250$  (coques minces), dans deux cas distincts. La présence de défauts géométriques localisés peut favoriser l'apparition d'une bifurcation prématurée, suivie d'une branche post-critique stable. Cette phénoménologie est également caractéristique des coques pressurisées sous flexion, la pression inhibant le caractère instable de la bifurcation.

Le dernier type enfin se caractérise par un flambage progressif, ce qui se traduit par une courbe angle-moment non-linéaire, traduisant le couplage d'une non-linéarité géométrique (initiation de grands déplacements) à une non-linéarité matériau (époussage plastique). Au niveau de la cinématique, la baisse de la rigidité correspond à l'initiation de l'ovalisation de la section, qui s'amplifie jusqu'à l'aplatissement de celle-ci, entraînant le collapse de la structure. L'instabilité est donc ici déclenchée par l'atteinte d'un point limite, qui peut suivant l'épaisseur et le matériau utilisé, être suivi ou non d'une bifurcation. Ce cas est essentiellement observé sur des tubes longs et épais :  $L/R > 20$  et  $R/t < 100$ . Le lecteur pourra trouver plus de détails sur ce type d'instabilités dans [53] et [54].

### 2.3.3 Estimation de la charge de ruine

Nous venons de voir que plusieurs mécanismes de ruine peuvent caractériser l'effondrement des coques cylindriques soumises à un chargement de type flexion pure et qu'ils sont conditionnés essentiellement par les paramètres géométriques. En fonction de la longueur de la coque, on distingue ainsi l'ovalisation et le cloquage, qui se différencient d'une part grâce à leurs déformées critiques respectives mais également grâce aux charges de ruine leur correspondant.

La première étude concernant le problème de cylindres sous flexion est menée en 1927 par Brazier [19], où il met en évidence l'ovalisation de la section d'un tube infiniment long soumis à de la flexion pure, amenant le déclenchement d'une instabilité par point limite. Son approche analytique le mène à une expression de la contrainte critique :

$$\sigma_{Br} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{E}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{t}{R}, \text{ soit } \sigma_{Br} = 0.544 \cdot \sigma_{CL}$$

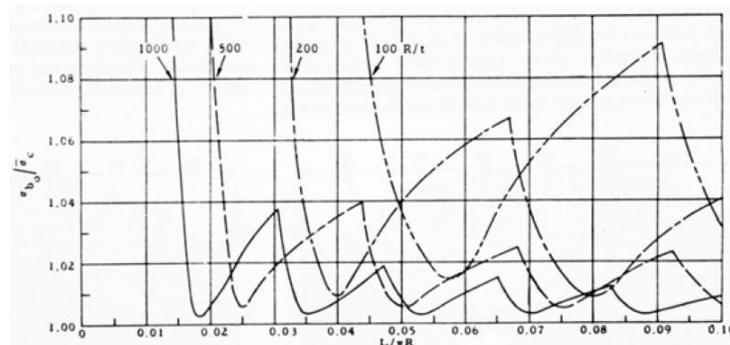
Les structures qui nous intéressent en particulier se situent dans une plage géométrique (coques courtes) engendrant un processus de ruine par cloquage, l'effet d'ovalisation étant négligeable. Flügge [36] fut l'un des premiers à s'intéresser au comportement des cylindres courts soumis à un chargement de flexion. Son étude se limite cependant à une valeur particulière de  $R/t$ , et à un mode critique spécifique, lui permettant d'arriver à une contrainte critique en flexion égale à :

$$\sigma_F = 1.3 \cdot \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R}, \text{ soit } \sigma_F = 1.3 \cdot \sigma_{CL}$$

Les essais réalisés dans les années 30 (Mossman et Robinson [74], Lundquist [67], Donnell [31]) confirment que le mode de flambage obtenu dans le cas de la flexion pure est similaire à celui observé dans le cas de la compression uniforme. Il s'agit en l'occurrence d'un cloquage de type « pointes de diamants », les longueurs d'onde axiale et circonférentielle sont très voisines de celles observées dans le cas de la compression. La seule différence réside dans la localisation du cloquage qui reste confiné en partie comprimée dans le cas de la flexion, alors qu'il couvre toute la circonférence dans le cas de la compression.

Timoshenko [110] confirma l'analyse de Flügge en la comparant à ces premiers résultats expérimentaux. Toutefois, il ne précise pas les hypothèses restrictives de Flügge et cette contrainte critique de  $1.3 \sigma_{CL}$  fut alors adoptée de manière générale par de nombreux auteurs.

Près de trente ans plus tard, Seide et Weingarten [99] revisitent le problème. En utilisant des équations de Donnell modifiées, ainsi qu'une méthode de résolution de Galerkin, ils arrivent à la conclusion que la charge classique  $\sigma_{CL}$ , est une très bonne estimation de la contrainte critique globale de flexion. Les charges de flambage obtenues sont conditionnées par le nombre d'harmoniques utilisées dans l'interpolation des déplacements mais sont également fonction du paramètre  $R/t$  (Figure 2.16).



**Figure 2.16** Charge critique d'une coque en flexion pure, pour différentes valeurs de  $R/t$  (Seide et Weingarten, 1961)

L'écart maximal entre  $\sigma_F$  et  $\sigma_{CL}$  est de 1.5%, dans le cas de la coque la plus épaisse ( $R/t = 100$ ). Des résultats identiques sont également donnés par Öry [76]. Les auteurs précisent également que les résultats peuvent être modifiés par la longueur du cylindre. En effet, pour des cylindres très courts ( $H/R < 0.314$ ), la longueur d'onde axiale peut être bloquée, engendrant alors une augmentation du moment critique.

La contrainte classique  $\sigma_{CL}$  a dès lors été considérée comme étant la charge de référence d'une coque cylindrique sous flexion. Le fait que les charges critiques expérimentales de flexion soient supérieures aux charges expérimentales de compression fut ensuite expliqué par l'effet des imperfections géométriques. En effet, la contrainte maximale de compression est très localisée dans le cas des coques sous flexion, et l'imperfection géométrique la plus néfaste a donc une probabilité moindre de se trouver dans la zone la plus sollicitée.

## 2.4 Coques cylindriques sollicitées en cisaillement

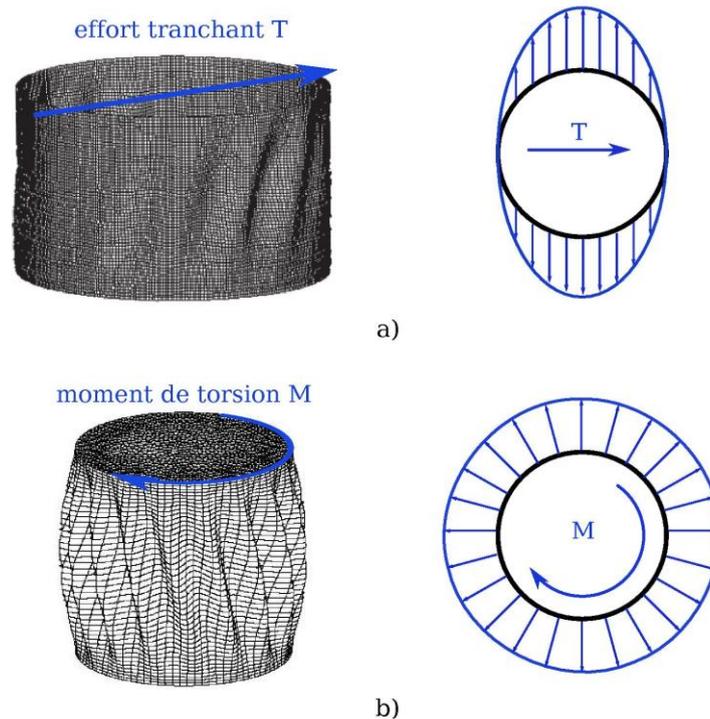
Dans le cas de notre structure (réservoir cryogénique d'Ariane 5), des chargements de type cisaillement peuvent intervenir au sol, sur le pas de tir, sous l'action du vent. Pour les structures du génie civil, le danger de ce type de chargement intervient surtout lors de séismes, où la sollicitation est dynamique. Nous nous concentrons ici sur le cas statique, dont une bonne revue est également faite par Schmidt et Winterstetter [94].

D'autre part, si en compression axiale et en flexion la contrainte critique dépend principalement du rapport  $R/t$  (pour des coques courtes et minces), en cisaillement la longueur de la coque influence directement la contrainte critique, et un nouveau paramètre est couramment utilisé : le paramètre de Batdorf  $Z$ , donné par :

$$Z = \frac{L^2}{Rt} \cdot (1 - \nu^2)$$

### 2.4.1 Modes de déformation

Les contraintes de cisaillement existant dans les structures réelles sont ainsi bien souvent appliquées par effort tranchant. Contrairement à des cas plus simples de flambage de coques (compression, pression externe ou torsion), le flambage par cisaillement ne peut être résolu facilement, les déformées pré-critiques n'étant pas axisymétriques. L'estimation de la contrainte critique en cisaillement est donc bien souvent liée aux formules concernant le flambage sous torsion. Ceci est possible et pertinent car les cloques n'occupent qu'une petite partie de la circonférence permettant ainsi que plusieurs cloques se forment dans la zone où la contrainte de cisaillement est à peu près constante, comme on peut le voir sur la Figure 2.17.



**Figure 2.17** Modes de flambage et répartition de contraintes associées : a) en cisaillement et b) en torsion

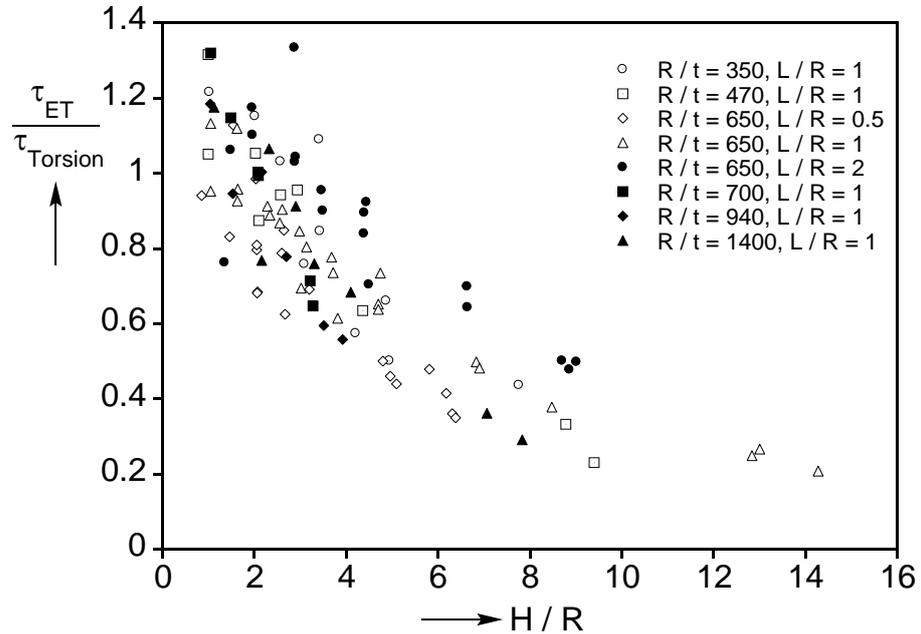
On retrouve donc des modes présentant des cloques diagonales dans les deux cas, localisées dans la zone de contrainte maximum pour le cisaillement et réparties sur toute la circonférence pour la torsion. L'application d'un cisaillement par effort tranchant induit également un moment de flexion sur la coque, nous étudierons cette interaction plus loin.

#### 2.4.2 Estimation de la charge de ruine : théorie et expérimentation

Peu d'études expérimentales concernent le flambage en cisaillement par effort tranchant, comme nous l'avons vu le cas de la torsion est plus « classique ». Les premiers essais de la sorte sont réalisés par Rhode et Lundquist en 1931 [84], sur des cylindres en papier ! Leur étude est plutôt qualitative, et en étudiant l'interaction entre flexion et cisaillement, ils mettent en évidence l'influence du bras de levier (hauteur du point d'application de l'effort tranchant) sur les résultats.

Dans le cadre d'un programme de recherche lancé par le NACA dans le but d'améliorer le dimensionnement des avions, Lundquist réalise plusieurs études sur le comportement de coques sous différents chargements. Après avoir étudié la torsion [65] et la compression [66], il se focalise sur le flambage par effort tranchant [68], lors d'une étude sur une centaine de coques en dural. Huit différents groupes de coques sont testés, dont le  $R/t$  moyen varie entre 350 et 1400. Il conclut que lorsque le bras de levier tend vers 0 et que l'on se rapproche d'un cisaillement « pur » (voir Figure 2.18), les contraintes critiques

sont environ 1.25 fois supérieures à celles obtenues lors des précédents essais de flambage réalisés en torsion (Lundquist [65], Donnell [30]).



**Figure 2.18** Contraintes critiques de coques cylindriques soumises à un effort tranchant (Donnell, 1933)

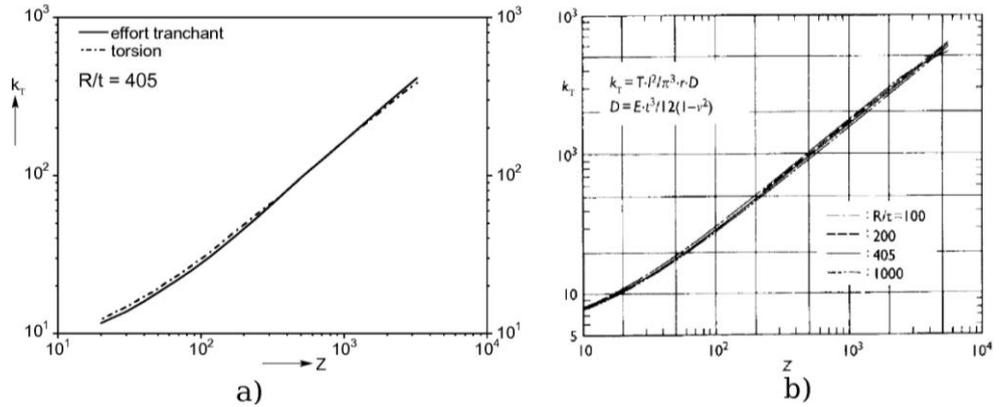
Les premières analyses théoriques sur ce problème particulier sont produites beaucoup plus tard, alors que le flambage sous torsion a déjà été étudié de manière approfondie. Lu [64], puis Schröder [97] donnent une formulation approchée de la contrainte critique de cisaillement à partir des équations de Donnell. Yamaki est le premier à proposer une étude complète sur le sujet dans son ouvrage de référence *Elastic Stability of Cylindrical Shells* [116]. A partir d'une étude analytique utilisant le paramètre de Batdorf  $Z$ , une expression de la contrainte critique est proposée :

$$\tau_{Yam} = k_T(Z) \cdot \frac{\pi^2 E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{t}{L}\right)^2$$

où  $k_T(Z)$  est un coefficient dépendant de  $Z$

Yamaki compare les coefficients de flambage pour le cas de la torsion et de l'effort tranchant (Figure 2.19) concluant que les deux sont sensiblement équivalents, la contrainte critique théorique en cisaillement par effort tranchant peut donc s'exprimer (pour des cylindres moyennement longs) de manière simple par :

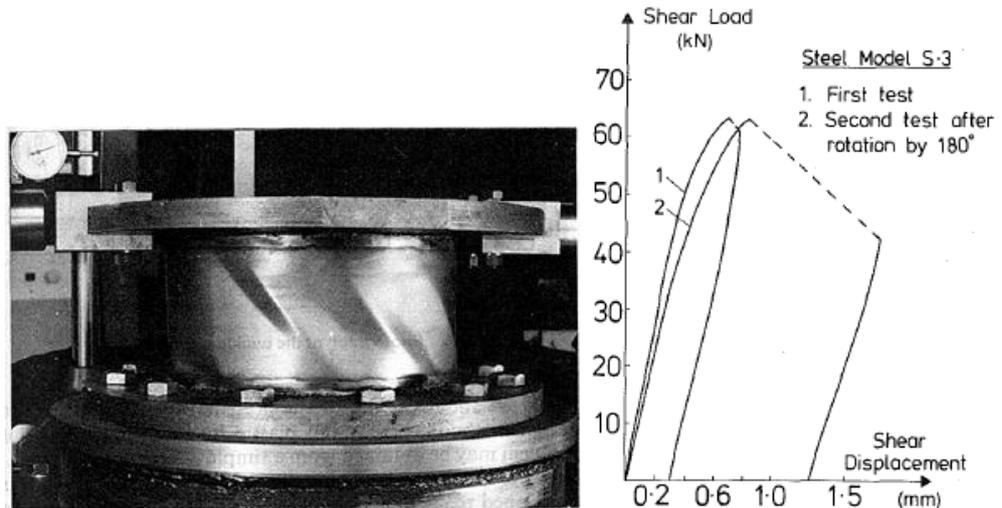
$$\tau_{Yam} = 0.75 \cdot E \cdot \sqrt{R/L} \left(\frac{t}{R}\right)^{5/4}$$



**Figure 2.19** Contraintes critiques de cisaillement : a) comparaison entre le cisaillement par torsion et par effort tranchant, b) influence du R/t pour le cisaillement par effort tranchant (Yamaki, 1984)

### 2.4.3 Effet de la plasticité

Les cuves des réacteurs nucléaires sont des coques cylindriques plutôt épaisses ( $R/t$  compris entre 100 et 400 en général) et donc sujettes à des instabilités de type élasto-plastique lors de chargements sismiques. L'étude de l'effet de la plasticité sur le flambage par cisaillement a donc plutôt été dictée par le secteur nucléaire, et débute en 1985 avec les travaux de Galletly et Blachut [40]. Leur étude expérimentale porte sur 14 coques ( $0.73 < L/R < 1.2$  ;  $125 < R/t < 188$ ), fabriquées à partir de tôles d'acier roulées puis soudées, encastées à leur base et soumises à un effort tranchant à leur sommet par l'intermédiaire d'un vérin hydraulique (Figure 2.20).



**Figure 2.20** Photographie du banc d'essais exposant une coque flambée, évolution de la charge transverse en fonction du déplacement (Galletly et Blachut, 1985)

Les courbes exposées en Figure 2.20 présentent un comportement fortement non-linéaire dû à la plasticité et sont typiques de ce genre d'essais. Après le premier essai, chaque coque est tournée de  $180^\circ$  avant d'être testée

une seconde fois, permettant ainsi d'étudier l'influence de défauts importants sur la charge critique. Pour la plupart des spécimens, cette seconde charge critique était égale à au moins 90% de la première, indiquant que les imperfections géométriques ont peu d'influence sur le flambage plastique par cisaillement. Des conclusions similaires sont faites dans l'étude numérique de Limam et Combescure [59], qui ont obtenu une bonne corrélation des résultats à l'aide du logiciel INCA (prédécesseur de STANLAX).

Galletly et Blachut proposent ensuite une formule de dimensionnement permettant de prendre en compte l'effet de la plasticité, en utilisant la théorie de Yamaki et une interaction quadratique de type Merchant-Rankine :

$$\tau_p = \frac{\tau_y}{\sqrt{1 + (\tau_y / \tau_{Yam})^2}}$$

où  $\tau_y$  est la limite d'élasticité en cisaillement ( $\tau_y = \sigma_y / \sqrt{3}$ )

Cette formule donne une bonne estimation de leurs résultats expérimentaux tout en restant conservative. Kawamoto *et al.* [55] présentent des résultats similaires lors d'essais sur des coques de R/t égal à 133 ou 200, qu'ils vérifient par calcul.

---

#### 2.4.4 Effet des défauts et comportement post-critique

##### 2.4.4.1 Imperfections géométriques

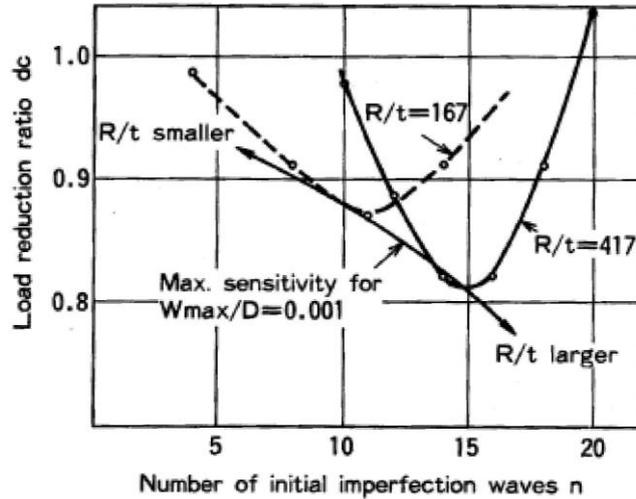
Nous avons vu précédemment que les imperfections géométriques jouaient un rôle critique dans le cas du flambage sous compression axiale ou flexion. Il semble donc logique de se poser la question de l'effet des défauts de forme sur le flambage en cisaillement. Ces 20 dernières années, les efforts de recherche dans ce domaine ont été essentiellement réalisés au Japon afin de dimensionner au mieux les structures du nucléaire (comme les cuves de réacteurs par exemple). De manière générale, il en ressort que le flambage en cisaillement est moins sensible aux défauts que les cas de compression axiale et flexion, comme l'ont pressenti Galletly et Blachut (voir paragraphe précédent).

Matsuura *et al.* [71], en couplant leur étude expérimentale effectuée sur une dizaine de coques (R/t compris entre 100 et 417, L/R = 1, à température ambiante ou à 500°C) à une approche numérique, donnent une première quantification de l'effet des imperfections. Ils introduisent dans leurs simulations un défaut modal du type :

$$w = w_0 \cdot \cos \frac{x}{2L} \cdot \sin k\theta$$

En gardant une amplitude constante (égale à 0.002 R), ils observent que la perte de charge critique dépend du mode circonférentiel prépondérant (Figure 2.21). La perte maximale est obtenue lorsque le mode est colinéaire au

mode de flambage ( $n = 10$  pour  $R/t = 167$ ,  $n = 15$  pour  $R/t = 417$ ). Toutefois, leur choix pour l'amplitude du défaut n'est pas pertinent, puisqu'elle dépend de  $R$  et non de  $t$ , donc plus la coque est mince, plus le défaut sera relativement grand par rapport à l'épaisseur. Il est donc difficile de comparer les résultats pour  $R/t = 167$  et  $R/t = 417$ .



**Figure 2.21** Facteur de réduction en cisaillement en fonction du mode d'imperfection initiale (Matsuura et al., 1989)

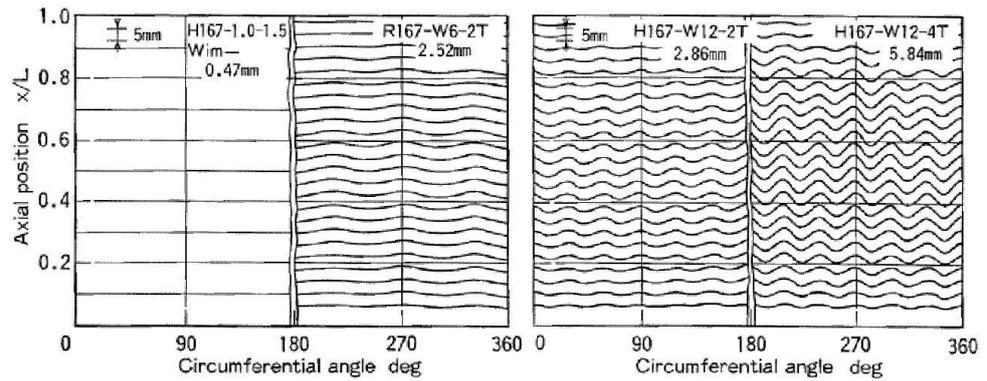
Comme nous l'avons déjà vu, il est possible de prendre en compte les imperfections géométriques et les non-linéarités du matériau dans un calcul EF afin de pouvoir approcher au mieux la contrainte critique. Cette méthode donne de bons résultats pour le cas du cisaillement dans l'ensemble.

Afin de pouvoir construire des recommandations fiables pour le dimensionnement des cuves de réacteurs, il était cependant intéressant de pouvoir tester des coques comportant certains types de défauts, comme cela a été fait en compression par Waeckel [111]. Murakami *et al.* [75] réalisent une étude de la sorte, en fabriquant des coques ( $R/t = 125, 167$  ou  $250, L/R = 1$ ) par emboutissage sur un moule. Les imperfections introduites (voir Figure 2.22) sont du type :

$$w = \frac{w_0}{2} \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

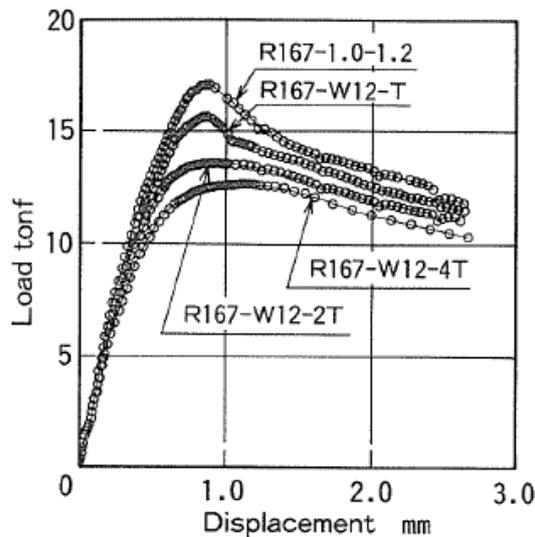
où  $n$  est le mode circonférentiel, et  $w_0$  l'amplitude du défaut

Au total 9 coques imparfaites sont testées, avec une imperfection de mode 6, 10, 12 ou bien axisymétrique ( $n = 0$ ), et une amplitude variant entre  $t$  et  $4t$ . Les résultats des essais vérifient tout d'abord que la charge critique est fortement dictée par le mode circonférentiel (ce qui confirme les résultats de Matsuura). Le mode axisymétrique quant à lui ne semble pas affecter le comportement du cylindre, comparé à des coques de bonne qualité.



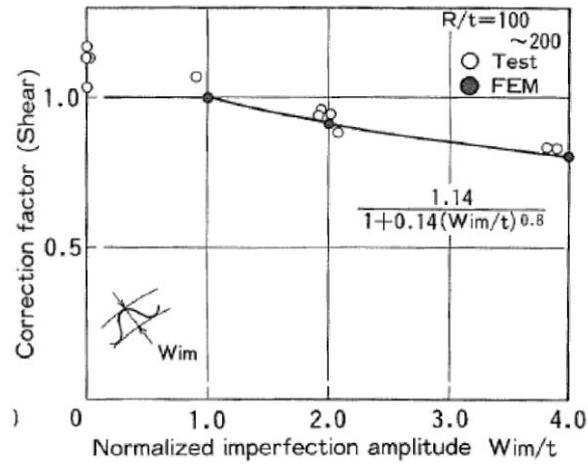
**Figure 2.22** Géométries initiales de coques présentant des défauts modaux (Murakami et al., 1993)

La Figure 2.23 présente les résultats de 4 essais sur des coques présentant différentes amplitudes de défaut : presque parfaite, puis de une à quatre fois l'épaisseur. Ces courbes montrent bien l'effet des imperfections, qui diminuent la charge critique de 9, 20 et 28% respectivement par rapport au cas presque parfait. Du point de vue du comportement, les auteurs observent une fois de plus un flambage progressif, et donc très différent du cas de la compression axiale.



**Figure 2.23** Courbes charge-déplacement pour différentes amplitudes d'imperfections (Murakami et al., 1993)

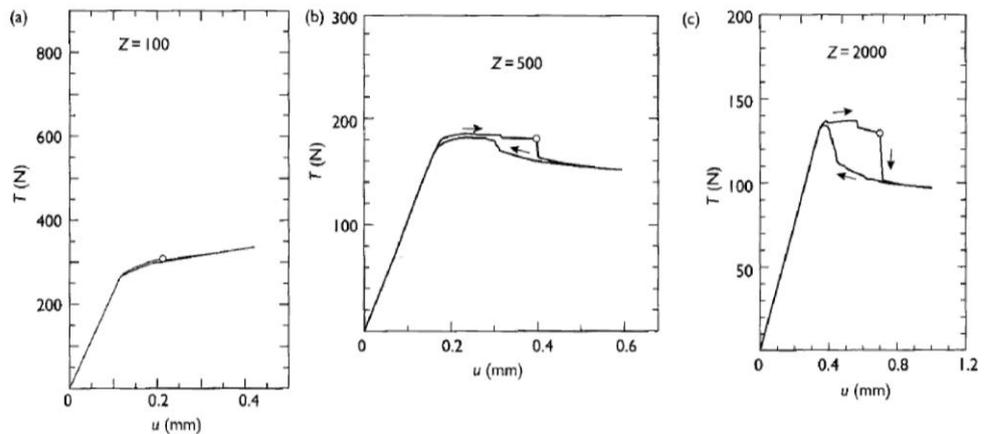
A partir des résultats expérimentaux, couplés à des simulations correspondantes, les auteurs proposent un facteur de correction dépendant de l'amplitude du défaut (voir Figure 2.24), valable pour des coques ayant un  $R/t$  compris entre 100 et 200.



**Figure 2.24** Facteur de correction pour la charge critique en fonction de l'amplitude du défaut (Muakami et al., 1993)

2.4.42 Comportement post-critique

D'après la théorie de Koiter, le comportement post-critique est lié à la sensibilité aux défauts géométriques. Si la coque est peu sensible aux imperfections géométriques (selon ses dimensions, l'amplitude du défaut ou encore le type de chargement appliqué), alors le comportement post-critique est stable, avec une faible perte de capacité portante. Comme nous avons pu le voir précédemment, ce type de comportement a été observé lors de plusieurs études expérimentales. Cependant, celles-ci étant liées au dimensionnement de cuves de réacteurs nucléaires, les coques testées étaient courtes ( $L/R = 1$  généralement) et plutôt épaisses ( $R/t$  compris entre 100 et 400), entraînant un flambage élastoplastique.



**Figure 2.25** Courbes charge-déplacement pour des coques de longueur différente : a) courte  $Z=100$ , b) moyenne  $Z=500$ , c) longue  $Z=2000$  (Yamaki, 1984)

Depuis la première étude de Lundquist [68], seul Yamaki a réalisé une étude conséquente sur le flambage élastique par cisaillement et le comportement post-critique associé. La Figure 2.25 montre des résultats d'expériences menées sur des coques en Mylar, d'épaisseur constante ( $R/t = 405$ ) et de hau-

teur variable. On note que les coques plutôt courtes ( $Z=100$ ) exhibent un comportement post-critique stable, avec une réserve de charge importante après la bifurcation. Elles développent un mode post-critique caractéristique, présentant des cloques diagonales de cisaillement sur les côtés. Les coques plus longues et minces ( $Z=2000$ ) quant à elles, montrent un changement brusque de rigidité à la bifurcation, suivi d'une perte soudaine de capacité portante. En plus de cloques de cisaillement, des cloques en « pointe de diamants », caractéristiques d'un chargement de flexion, se forment à la base du cylindre.

## 2.5 Couplage avec la pression interne

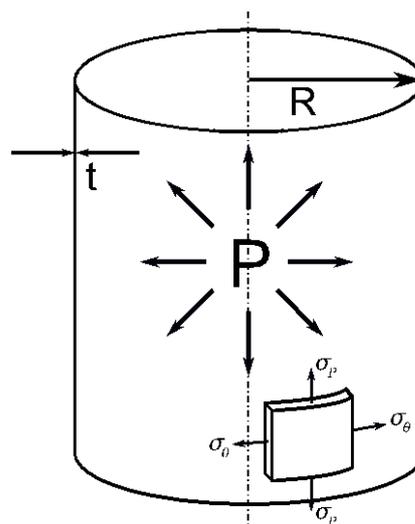
### 2.5.1 Etat de contrainte

Les premières études concernant l'effet de la pressurisation sur le comportement au flambage d'une coque répondaient à un besoin gouvernemental, pour la construction de missiles. Il devint vite apparent que la pressurisation d'une coque cylindrique permet en général l'accroissement de la capacité portante.

La pression hydrostatique induit en effet un état de contrainte biaxial purement membranaire, si l'on néglige les effets de couche limite ou les composantes de flexion engendrées par les conditions aux limites (Figure 2.26). Les contraintes résultantes de la mise en pression sont données par :

$$\sigma_{\theta} = \frac{PR}{t}, \text{ la contrainte circonférentielle de membrane}$$

$$\sigma_p = \frac{PR}{2t}, \text{ la contrainte axiale ou « effet de fond »}$$



**Figure 2.26** Etat de contrainte due à la mise en pression hydrostatique

Ces contraintes de traction vont donc s'opposer au flambage qui nécessite un état de contrainte compressif. Ainsi, un chargement axial devra

d'abord compenser l'effet de fond, ou contrainte axiale de traction  $\sigma_p$ , avant d'induire de la compression. La contrainte circonférentielle de traction  $\sigma_\theta$  va quant à elle avoir un double effet améliorant le comportement au flambage. Le « gonflement » de la coque va d'une part, favoriser l'estompement des défauts et donc améliorer la capacité portante ; et d'autre part, inhiber le déclenchement des instabilités.

Nous allons maintenant présenter les différentes études réalisées à ce sujet. Encore une fois, la majorité des travaux concernent le cas de la compression axiale, très peu d'études tournant autour des interactions pression interne/flexion ou pression interne/cisaillement.

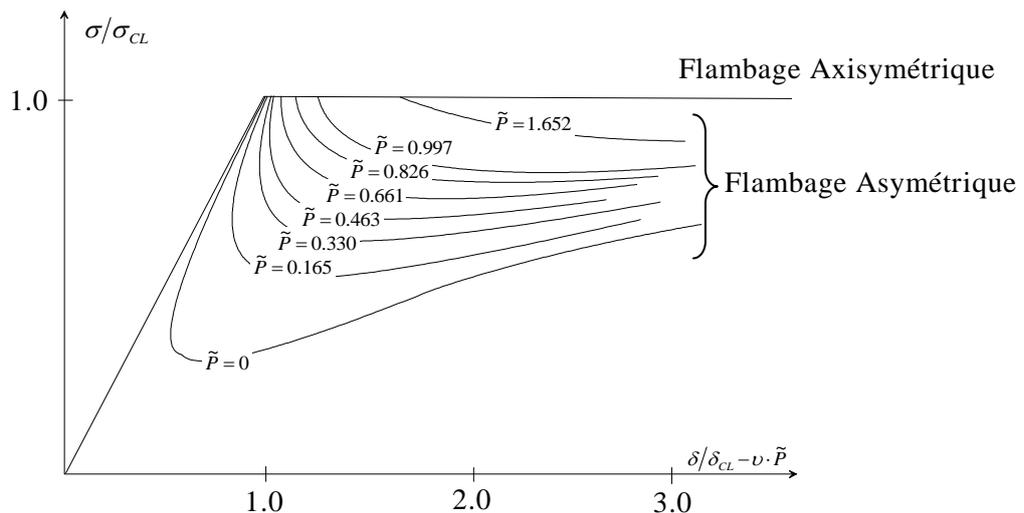
## 2.5.2 Compression axiale et pression interne

### 2.5.2.1 Coques parfaites et comportement post-critique

Les études analytiques menées par Flügge ou Yamaki par exemple, montrent que la contrainte classique de compression  $\sigma_{CL}$  reste valable dans le cas d'une coque cylindrique parfaite sous compression axiale et pression interne. Autrement dit, en prenant en compte l'effet de fond, la contrainte critique totale devient :

$$\sigma_{cr}^P = \sigma_{CL} + \sigma_p = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{Et}{R} + \frac{PR}{2t}$$

Si la mise en pression n'a pas d'influence sur la contrainte classique, le comportement post-critique est progressivement modifié par la pression interne, comme le montre Schnell [96] (Figure 2.27).



**Figure 2.27** Comportement post-critique de coques parfaites sous pression (Schnell, 1959)

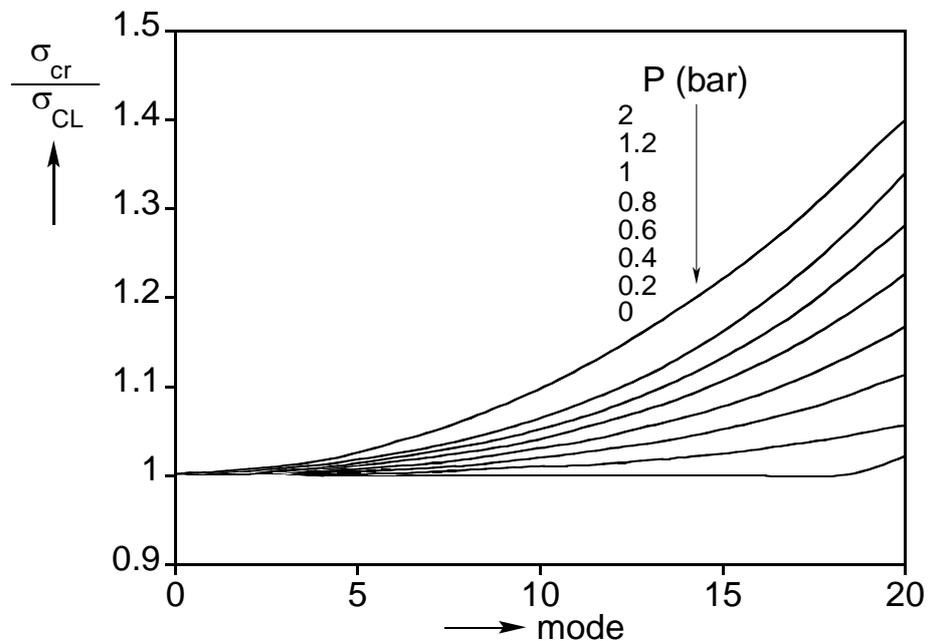
La branche post-critique fortement instable du cylindre parfait non pressurisé est significativement stabilisée par la mise en pression, et le mode de flambage passe progressivement d'un mode asymétrique à un mode axisymétrique. Notons que l'auteur utilise la variable adimensionnelle  $\tilde{P}$ , permettant de comparer deux structures ayant un matériau et/ou une géométrie différents :

$$\tilde{P} = \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_{CL}}$$

La forme des chemins d'équilibre post-critiques suggère que la sensibilité aux défauts géométriques est inhibée par la pressurisation, devenant presque inexistante lorsque le flambage devient axisymétrique.

Limam [60] justifie ce résultat numériquement : l'examen des courbes de stabilité neutre (représentant les charges de bifurcation en fonction du mode, Figure 2.28) lui permet de montrer que la pressurisation inhibe les modes non axisymétriques mais n'a aucun effet sur le mode axisymétrique ( $n=0$ ).

A pression nulle, les 18 premiers modes ont une charge de bifurcation égale, à 1% près, traduisant la sensibilité de la coque à un large spectre d'imperfections. Dès que la pression croît, les charges de bifurcation correspondant aux modes asymétriques augmentent, seule la valeur de bifurcation du mode 0 reste inchangée et égale à  $\sigma_{CL}$ . La charge critique étant systématiquement la plus petite charge induisant une bifurcation d'équilibre, lorsque la pression atteint un niveau « seuil », le flambage privilégiera le mode 0 avec une capacité portante égale à la charge classique.



**Figure 2.28** Evolution avec la pression des charges de bifurcation relatives aux 20 premiers modes critiques sous compression axiale (Limam, 1991)

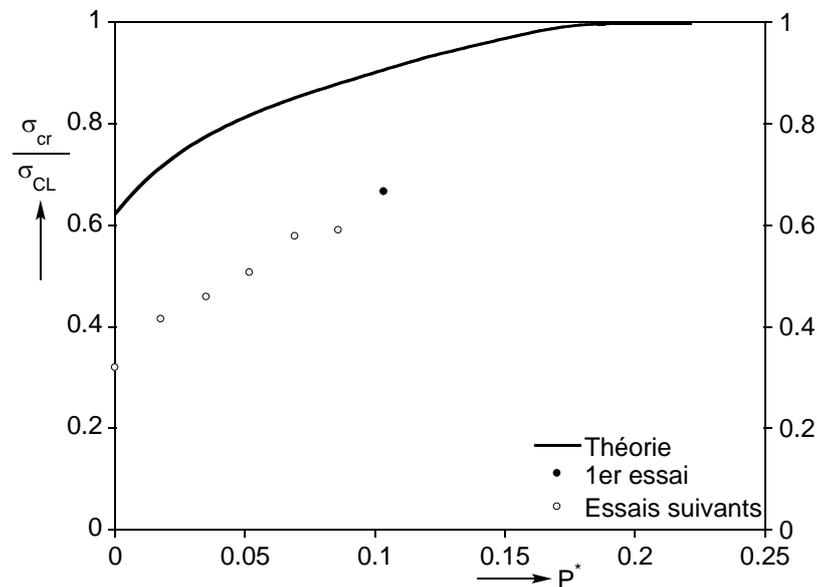
Cette modification du comportement post-critique avec la mise en pression fut relevée par de nombreux expérimentateurs, comme nous allons le voir.

## 2.5.22 Résultats expérimentaux

### 2.5.221 Flambage élastique

Jusqu'au début des années 40, la théorie de Flügge, basée sur des coques parfaites, concluait que l'effet de la pression sur la charge critique était négligeable. Cependant, des essais réalisés quelques années plus tard au centre de Langley du NACA (Rafel [82]) sur des panneaux courbes semblent contredire Flügge et montrer que la pression a un effet renforçant. La première étude expérimentale notable fut menée par Lo, Crate et Schwartz [61] à la fin des années 40 dans le but de confirmer ces premières observations. Ils effectuèrent une série d'essais à basses pressions sur une coque en aluminium, avec un  $R/t$  proche de 600, qui mit en évidence l'effet stabilisateur de la pression interne (Figure 2.29). Les résultats des essais sont comparés à une analyse théorique basée sur des grandes déformations. Le paramètre de pression adimensionnelle

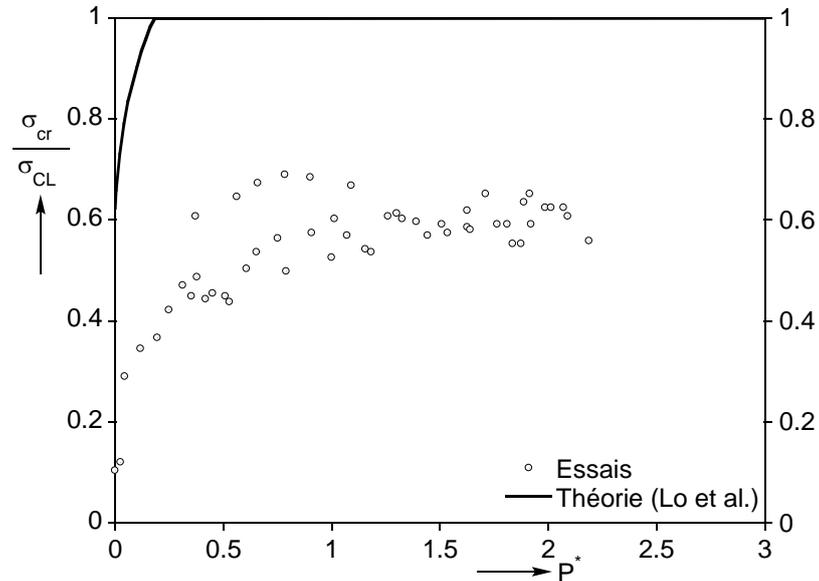
$P^*$  utilisé est ici égal à  $\frac{P}{E} \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^2$ .



**Figure 2.29** Augmentation de la charge critique avec la pression,  $R/t=580$  (Lo, 1951)

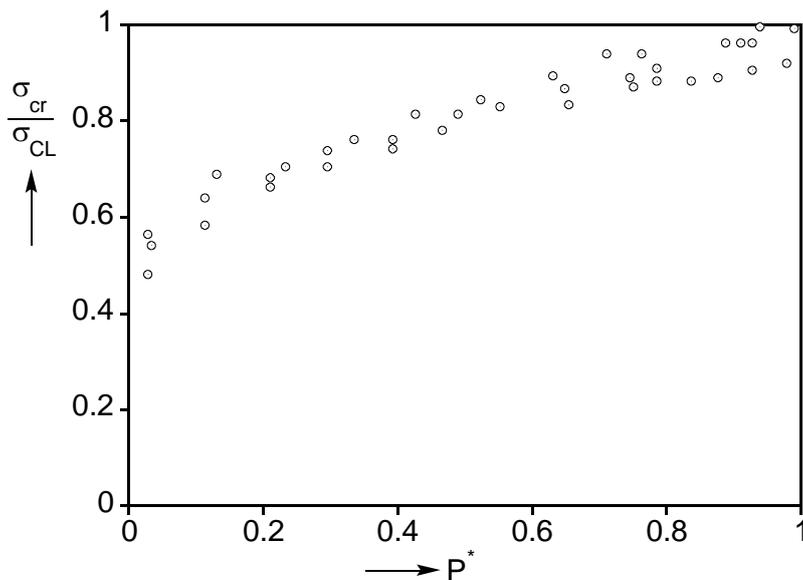
Fung et Sechler [38] approfondissent le sujet en testant 5 coques ( $R/t$  compris entre 580 et 1750) jusqu'à une pression interne de 450 mbar. Leurs différents essais confirment que la charge critique augmente dès les basses pressions, jusqu'à atteindre un plateau vers  $0.6 \sigma_{CL}$  (Figure 2.30). Ils mettent par ailleurs en évidence le changement de mode de flambage et la diminution

de la longueur d'onde axiale des modes avec la pression, et proposent une méthode de dimensionnement à partir des résultats de leur campagne.



**Figure 2.30** Augmentation de la charge critique avec la pression,  $R/t=1750$  (Fung, 1957)

Les études précédentes semblent montrer que la contrainte critique atteint avec la pression une limite qui n'est pas égale à la contrainte théorique. Ce n'est en réalité qu'une conséquence de conditions expérimentales mal interprétées. Dow et Peterson [32] montrent que la contrainte classique peut effectivement être obtenue avec une pression interne suffisante et des essais de qualité (ici réalisés sur des coques avec  $R/t = 700$ ).

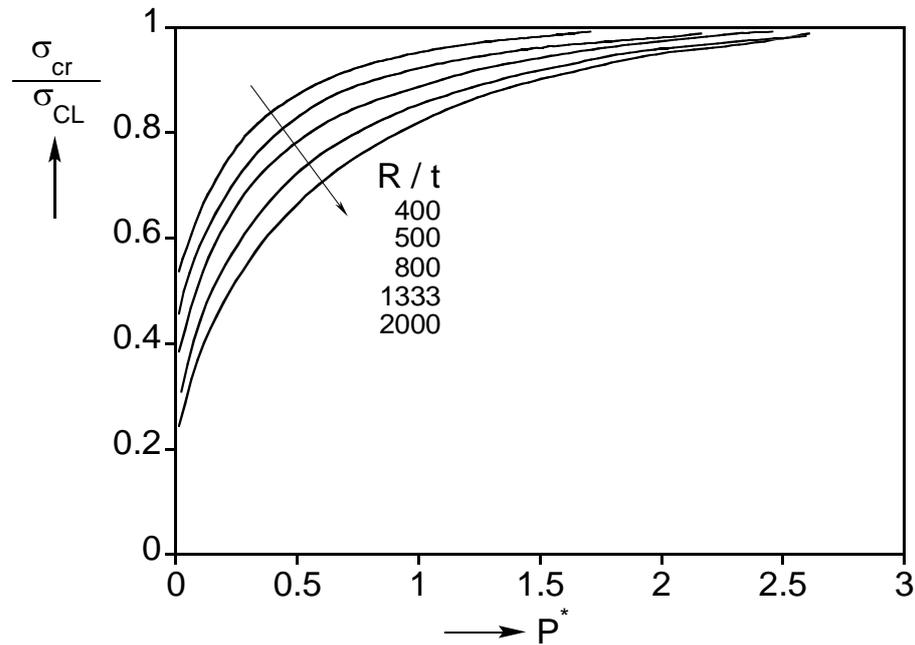


**Figure 2.31** Augmentation de la charge critique avec la pression,  $R/t=700$  (Dow, 1960)

L'étude de référence dans le domaine a été menée en 1965 par Seide, Weingarten et Morgan, qui effectuent une vaste campagne (près de 800 essais !) sur des coques en Mylar possédant différents  $R/t$  [100]. Le Mylar possède une limite de linéarité très haute, leur permettant d'enchaîner les essais à différentes pressions sur une même coque sans l'endommager.

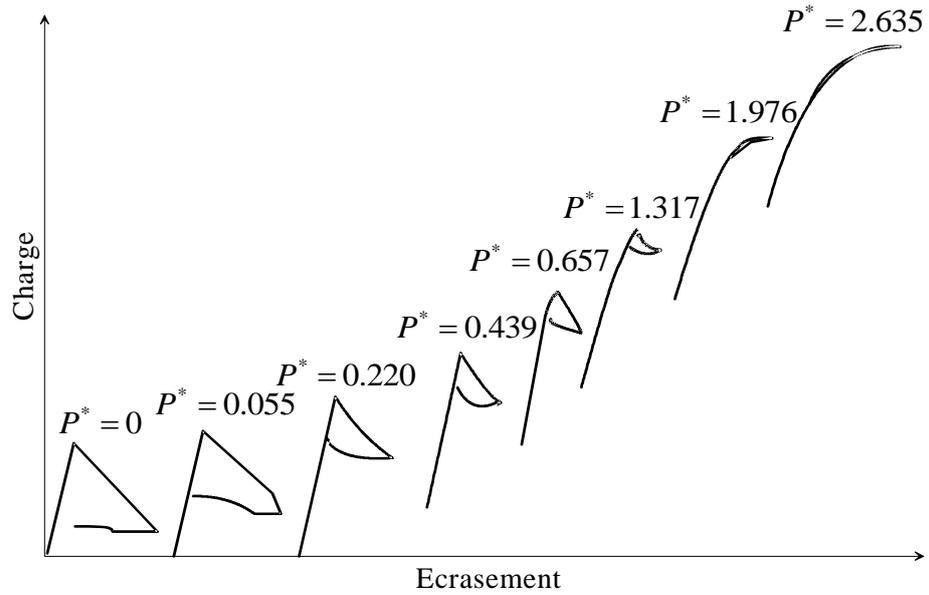
Les résultats confirment que la contrainte critique tend vers la contrainte classique lorsqu'on augmente la pression (Figure 2.32). Les auteurs concluent que la pression inhibe l'effet déstabilisant des imperfections initiales, qui sont la cause principale de diminution de la charge critique.

D'autre part, ils constatent une diminution de la perte de capacité portante associée au comportement post-critique instable, avec l'augmentation de la pression interne (Figure 2.33). Aux très faibles pressions ( $P^*$  compris entre 0 et 0.439), le flambage par bifurcation d'équilibre est caractérisé par un comportement pré-critique parfaitement linéaire et un post-critique fortement instable. Pour des pressions intermédiaires ( $P^*=0.657$ ,  $P^*=1.317$ ), le comportement pré-critique devient non-linéaire, menant toujours à une bifurcation d'équilibre. Dans ce cas, bien que le post-critique initial reste instable, la capacité résiduelle (post-critique lointain) est nettement améliorée. Pour des pressions plus élevées ( $P^*=1.976$ ,  $P^*=2.635$ ), le comportement post-critique instable est inhibé et le flambage a lieu au point limite.



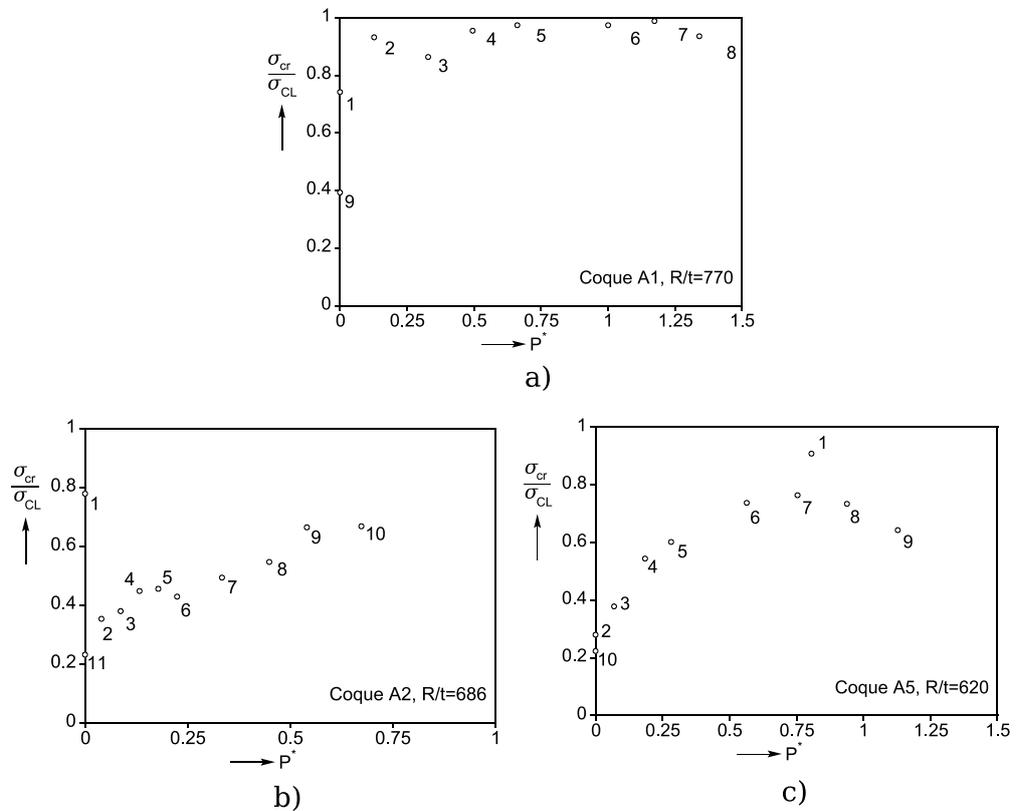
**Figure 2.32** Augmentation de la charge critique avec la pression pour différents  $R/t$  (Seide, 1969)

D'autres études ont été menées sur des coques métalliques pressurisées, notons Brown et Rea [20] ou encore Saal *et al.* [91], mettant en avant le gain substantiel de charge apporté par la pression interne, jusqu'au rapprochement de la charge classique.



**Figure 2.33** Modification du comportement post-critique d'une coque sous compression axiale et pression interne (Weingarten, 1965)

Dans sa thèse, Limam [60] teste cinq coques en cuivre électro-déposé (et comportant donc peu de défauts), avec un R/t compris entre 620 et 870. Chaque coque a été soumise à une séquence d'essais différente, afin de pouvoir étudier l'influence de défauts distincts (Figure 2.34).

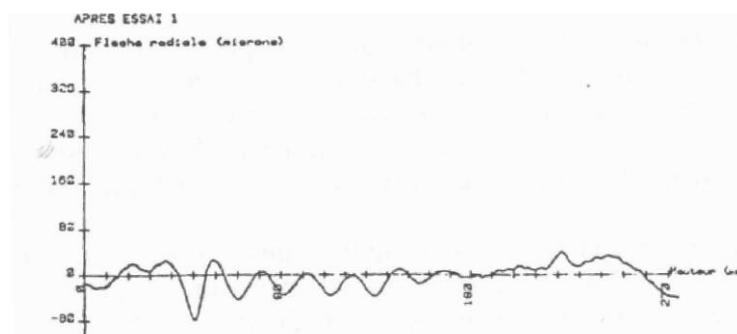


**Figure 2.34** Effet de la pression sur les charges de flambage en compression axiale  
(Limam, 1991)

La première coque A1 (a) est d'abord testée à pression nulle, puis sept essais sont enchaînés avec une pression interne croissant progressivement jusqu'à 1750 mbar. Suite à cet essai, la coque comporte de forts défauts axisymétriques liés à un flambage plastique à  $P = 1750$  mbar (voir paragraphe suivant). Pour le dernier essai (n°9) à pression nulle, la capacité portante de la coque chute alors drastiquement.

La coque A2 (b) fait l'objet d'un premier essai à pression nulle, dans lequel le chargement a été légèrement poursuivi au-delà de la bifurcation élastique, afin de l'endommager légèrement en « imprimant » un défaut multimodal. Les essais suivants montrent bien à la fois l'influence de ce défaut, qui engendre une forte chute de la charge critique, et l'effet bénéfique de la pression sur une coque pourtant fortement détériorée.

En dernier exemple, sur la coque A5 (c), un premier essai avec une pression interne élevée (2150 mbar) a permis de générer un mode axisymétrique généralisé. Contrairement au cas A1, la distribution évolutive de l'épaisseur près des bords du spécimen neutralise les plastifications locales et permet d'éviter le flambage plastique localisé. Les résultats obtenus rejoignent parfaitement la théorie classique, avec un flambage élastique par point limite et un mode axisymétrique (mode 0) généralisé (Figure 2.35). L'effet de ce mode se révèle tout aussi pénalisant que le défaut multimodal précédent, on constate que la pression entraîne une augmentation de charge critique comparable au cas A2.

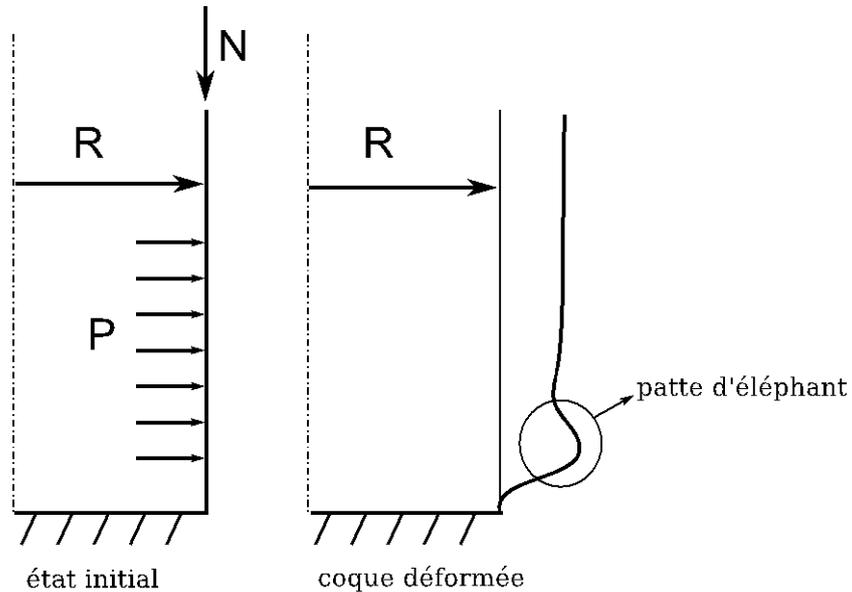


**Figure 2.35** Génératrice après essai n°1 à 2150 mbar, coque A5 (Limam, 1991)

### 2.5.222 Flambage élasto-plastique

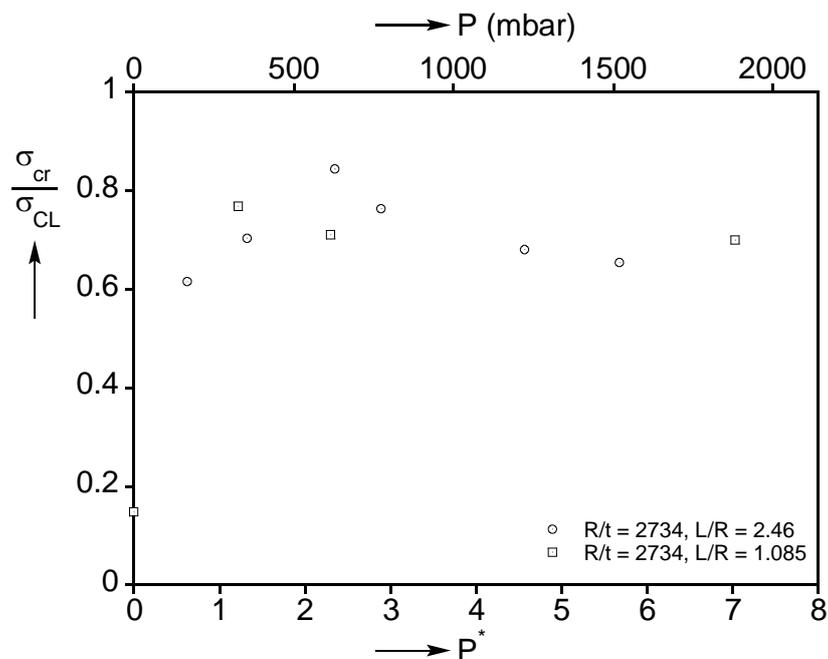
Nous avons vu différentes campagnes d'essais montrant l'influence bénéfique de la pression interne sur le comportement au flambage des coques cylindriques minces. La pressurisation peut cependant accélérer le flambage dans certains cas. En effet, à un niveau de pression interne dépendant des paramètres géométriques et matériau, les régions proches des conditions aux limites deviennent sujettes à de fortes contraintes de flexion (Figure 2.36), pouvant créer une rotule plastique et ainsi accélérer l'effondrement de la structure.

L'instabilité est alors de type point limite, créant un soufflet ou « patte d'éléphant » [90].



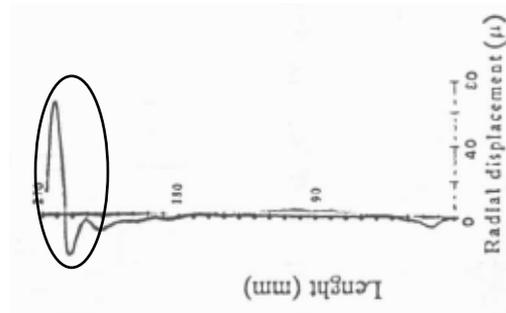
**Figure 2.36** Déformations locales près des conditions aux limites (Rotter, 2006)

A notre connaissance, peu d'essais couvrent une plage de pression suffisante pour pouvoir observer ce phénomène. Citons d'abord la campagne menée par Harris *et al.* [42] (Figure 2.37) sur des coques en acier, montrant la chute de charge portante lorsque la pression atteint des intensités élevées. Les auteurs ne notent cependant pas l'effet de la plasticité, ce qui les conduit à une mauvaise interprétation des résultats.



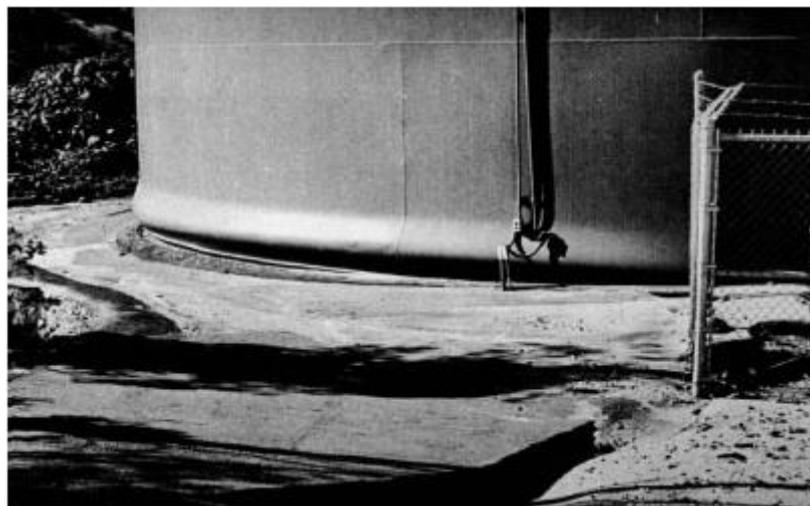
**Figure 2.37** Effet de la pression sur les charges de flambage en compression axiale (Harris et al., 1957)

Les seuls résultats mettant en évidence l'apparition d'un soufflet sous compression axiale sont dus à Limam [60]. Avec un R/t proche de 800, il observe l'apparition d'un soufflet pour une pression de 1.75 bar, et une baisse de la contrainte critique associée, après une série d'essais effectués sur la même coque (Figure 2.34a). On note sur le relevé de la génératrice (Figure 2.38) le caractère très localisé de la « patte d'éléphant », traduisant l'épuisement du matériau dans une zone très limitée de la coque, accélérant ainsi l'effondrement.



**Figure 2.38** Génératrice après essai n°8 à 1750 mbar, coque A1 (Limam, 1991)

Ce mode de déformation est courant pour les structures du génie civil telles que les silos ou bûches de stockage d'eau soumises à des chargements sismiques [90] (Figure 2.39).



**Figure 2.39** Patte d'éléphant sur un réservoir de stockage à la suite d'un tremblement de terre (Rotter, 2006)

Une étude plus récente, menée au LGCIE par Draïdi [33] sur le thème du renforcement de coques métalliques par matériau composite, constate également l'apparition de ce soufflet lors d'essais de flambage sous flexion, conduits sur une virole cylindrique d'épaisseur nominale 1.5mm et de rayon 1200mm ( $R/t=800$ ), avec une pression hydrostatique de 2 bar.

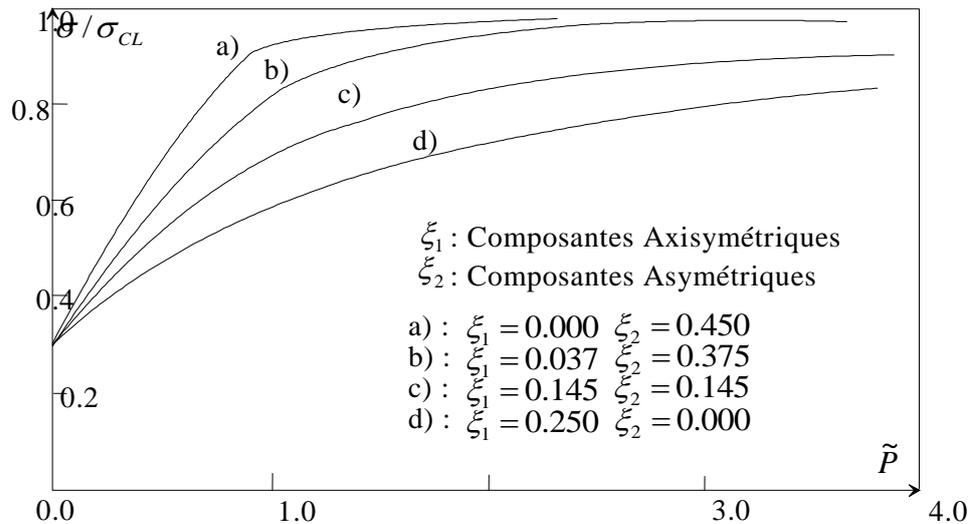
### 2.5.23 Influence des défauts

L'effet des imperfections géométriques sur le flambage de coques pressurisées sous compression a été étudié analytiquement par Hutchinson [46], en introduisant dans les équations de Donnell, des défauts combinant des modes axisymétriques et asymétriques :

$$w^* = -\xi_1 \cdot t \cdot \cos\left(\frac{2mx}{R}\right) + \xi_2 \cdot t \cdot \cos\left(\frac{mx}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{my}{R}\right)$$

où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  représentent respectivement les amplitudes relatives des modes axisymétrique et asymétrique.

Des résultats de cette étude sont donnés en Figure 2.40, où sont comparées plusieurs coques ayant des formes d'imperfections différentes, mais provoquant la même chute de capacité portante lorsque le cylindre n'est pas pressurisé. Le gain de charge critique avec la pression est bien moins rapide dans le cas purement axisymétrique (cas d). De plus, pour une imperfection comportant des modes axisymétriques et asymétriques d'amplitudes égales (c), les résultats sont proches du cas axisymétrique pur. Il apparaît de manière évidente que les imperfections axisymétriques sont bien plus pénalisantes que les imperfections asymétriques.



**Figure 2.40** Effet d'imperfections multimodales sur la contrainte critique d'une coque sous compression et pression interne (Hutchinson, 1965)

Suite à ces résultats, et à la constatation que la plupart des structures coques du génie civil comportent des imperfections axisymétriques localisées (voir paragraphe), Teng et Rotter [107] étudient numériquement le comportement de coques pressurisées imparfaites. Trois types de défauts sont étudiés: l'imperfection sinusoïdale généralisée de Koiter, et le défaut proposé par Rotter et Teng (représentant les soudures présentes sur les structures réelles, voir Figure 2.12); orienté soit vers l'intérieur, soit vers l'extérieur de la coque. Leur

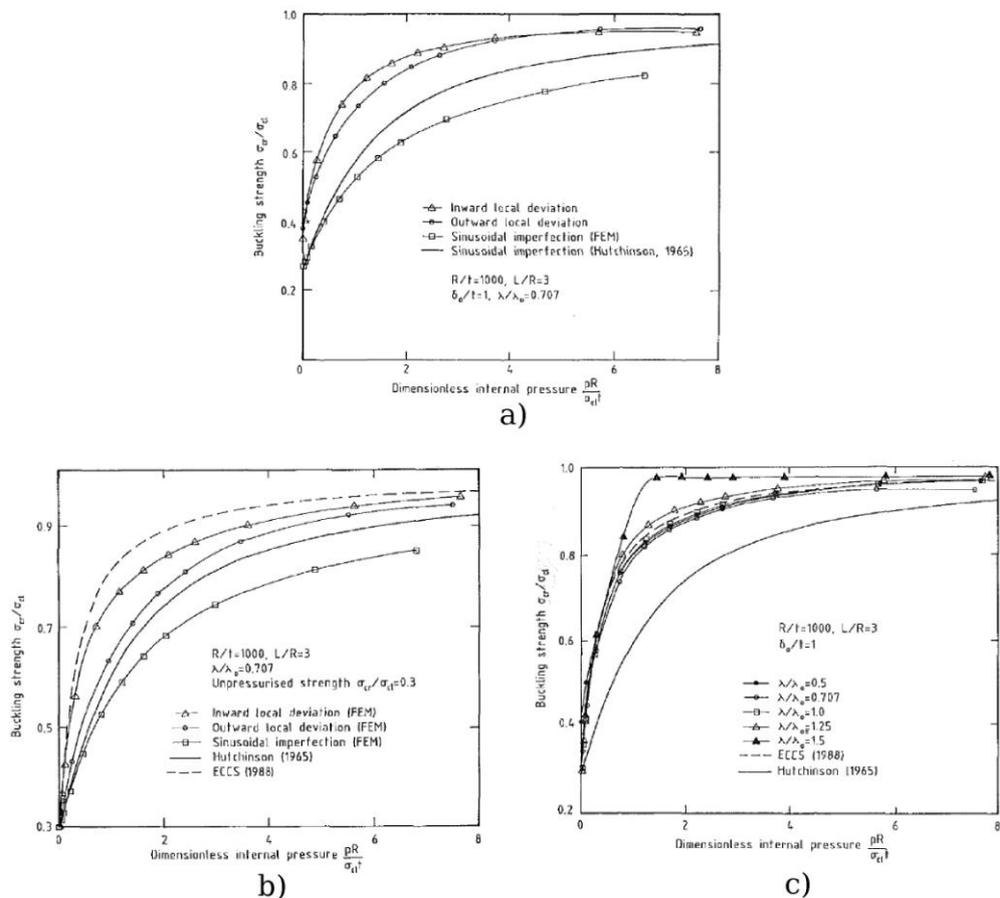
étude permet de conclure sur l'influence de l'amplitude et de la longueur d'onde du défaut (Figure 2.41) lorsqu'une pression interne est présente.

Ainsi, la Figure a) précise l'influence de différents défauts d'amplitude égale ( $A/t = 1$ ), mais de forme différente. Le défaut sinusoïdal de Koiter ressort nettement comme étant plus pénalisant que le défaut type A entrant ou sortant. Il ressort également de cette Figure que les estimations de Hutchinson (utilisant des méthodes asymptotiques) concernant le défaut axisymétrique sont trop optimistes.

Afin de mieux appréhender l'influence de la pression, Teng et Rotter recherchent l'amplitude de défaut provoquant une chute de charge équivalente à pression nulle pour les trois types de défauts évoqués ci-dessus. Ils constatent alors (Figure b) que le défaut sinusoïdal généralisé de Koiter conduit aux gains de charge critique avec la pression les plus faibles.

Enfin, la Figure (c) montre pour un défaut type A entrant l'influence de la longueur d'onde axiale. On constate clairement qu'en fonction de la pression interne, la longueur d'onde la plus pénalisante varie.

Ces résultats montrent bien la difficulté qu'il y a à définir un défaut critique axisymétrique qui soit le plus pénalisant possible, lorsque le paramètre pression interne est ajouté.



**Figure 2.41** Effet de différents défauts sur la contrainte de bifurcation d'une coque pressurisée sous compression axiale (Teng et Rotter, 1992)

### 2.5.3 Flexion et pression interne

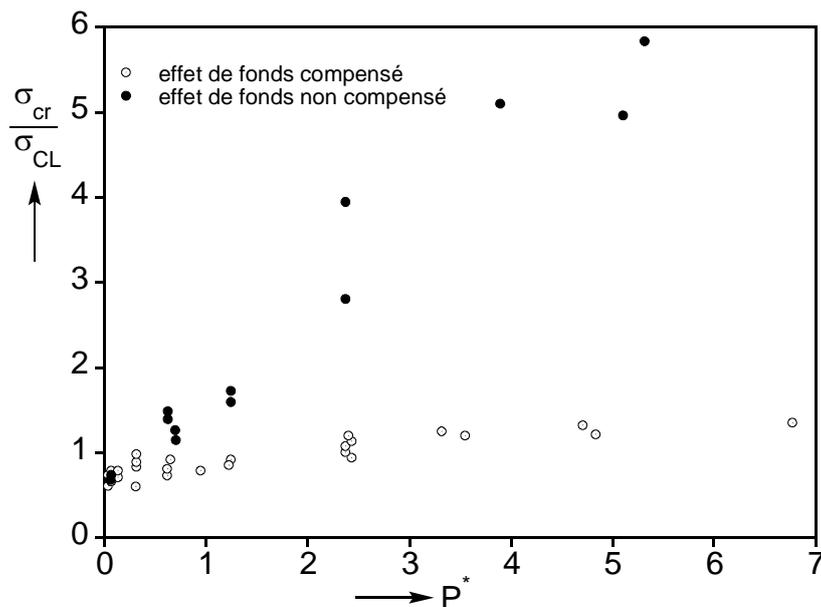
#### 2.5.3.1 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux publiés sur le thème du flambage des coques pressurisées sous flexion sont extrêmement rares, puisque seules 3 campagnes significatives ont été menées. Beaucoup de chercheurs ont en effet supposé que le comportement d'une coque pressurisée sous flexion diffère peu du comportement sous compression, se traduisant donc par une contrainte critique inchangée par la mise sous pression de la coque :

$$\sigma_F^P = \frac{M_F}{\pi R^2 t} = \sigma_{CL} + \frac{PR}{2t}$$

*Suer et al. (1958)*

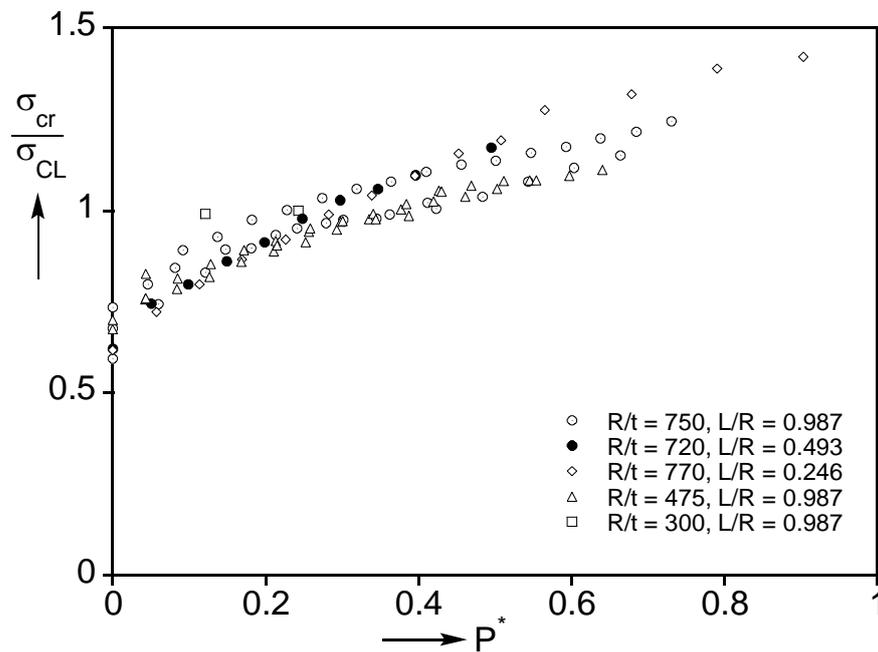
La première étude sur le sujet est publiée en 1958 par Suer *et al.* [106], et va contredire cette supposition à travers deux types d'essais. Une première série est réalisée sur des coques pressurisées pour lesquelles l'effet de fonds a été compensé par un chargement de compression. Les auteurs observent alors que la contrainte critique de flambage augmente progressivement avec la pression et fini par légèrement dépasser  $\sigma_{CL}$  (voir Figure 2.42), de façon similaire au cas de la compression axiale. Lors de la seconde série d'essais, lorsque l'effet de fonds n'est pas annulé, la contrainte critique augmente de manière semblable, mais peut dépasser  $\sigma_{CL}$  de manière non négligeable. Ces premiers travaux semblent donc montrer que l'effet de fonds peut jouer un rôle important et modifier le comportement de la structure au flambage.



**Figure 2.42** Contraintes critiques expérimentales sous flexion et pression interne (Suer et al., 1958)

*Dow et Peterson (1960)*

Dow et Peterson [32] effectuent ensuite une campagne sur des coques en aluminium (7075-T6) pour trois valeurs nominales de  $R/t$  (300, 475 et 750) et de  $L/R$  (0.25, 0.5 et 1). Pour chaque essai, le chargement est stoppé à l'apparition de la première cloque (flambage local) afin de pouvoir enchaîner les essais sur une même coque sans l'endommager. Les pressions atteintes sont moins importantes que dans l'étude présentée ci-dessus, toutefois les auteurs notent que la charge critique augmente plus rapidement avec la pression que dans le cas de la compression axiale (Figure 2.43). Aucune différence de comportement par rapport à la compression n'est cependant relevée, du fait que les essais ne sont pas continués au-delà du cloquage.

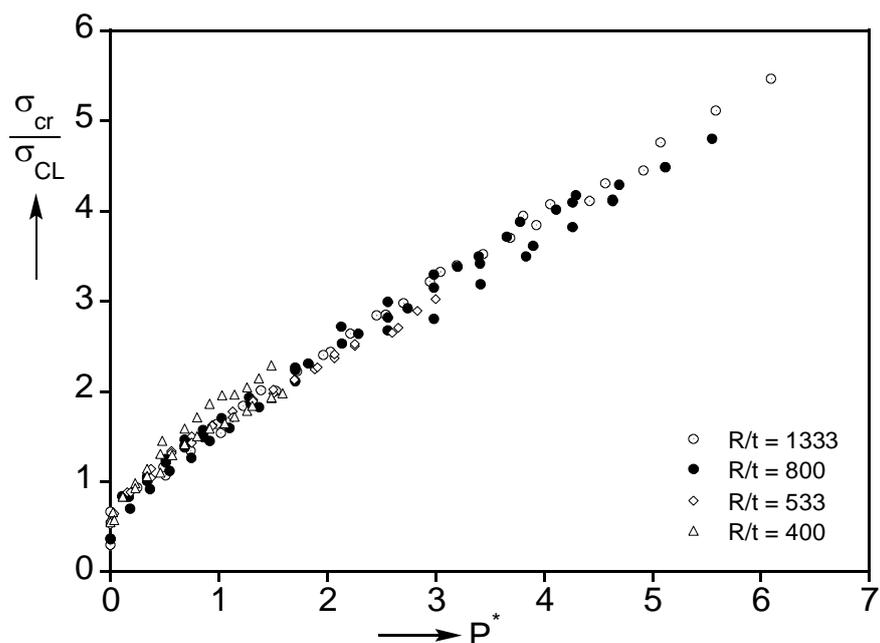


**Figure 2.43** Contraintes critiques expérimentales sous flexion et pression interne (Dow et Peterson, 1960)

*Seide et Weingarten (1961)*

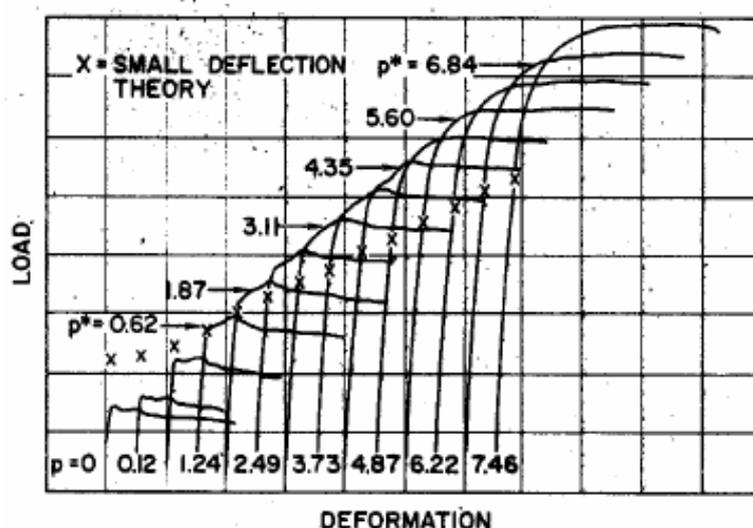
Suite à ces résultats, les travaux de Seide et Weingarten [99] vont apporter une meilleure compréhension du phénomène. Les nombreux essais réalisés sur des coques en Mylar confirment que la contrainte de collapse d'une coque pressurisée sous flexion peut dépasser de manière significative les résultats théoriques (Figure 2.44).

De plus, les auteurs identifient trois types de comportements différents de la structure au fur et à mesure que la pression augmente (Figure 2.45). Comme dans le cas de la compression, pour des faibles valeurs de pression interne ( $P^*$  compris entre 0 et 0.62 sur la figure) le comportement est linéaire jusqu'à l'effondrement de la coque.



**Figure 2.44** Contraintes critiques expérimentales sous flexion et pression interne (Seide, 1961)

Pour des pressions plus élevées, la courbe est plutôt bi-linéaire (pour  $P^*$  compris entre 1.24 et 2.49), avec un changement brusque de pente correspondant à une bifurcation d'équilibre. Suite à cette bifurcation cependant, et contrairement à ce que nous avons vu jusqu'à présent, le comportement de la coque reste stable, il n'y a pas de perte de capacité portante. De larges déformations apparaissent sur la coque sous forme de cloques et sont accentuées jusqu'au collapse de la structure. Enfin, pour de très hautes pressions ( $P^*$  allant de 3.11 à 7.46), le brusque changement de pente s'arrondi, et les auteurs notent que « l'effondrement se produit avec un mode de déformation différent ».

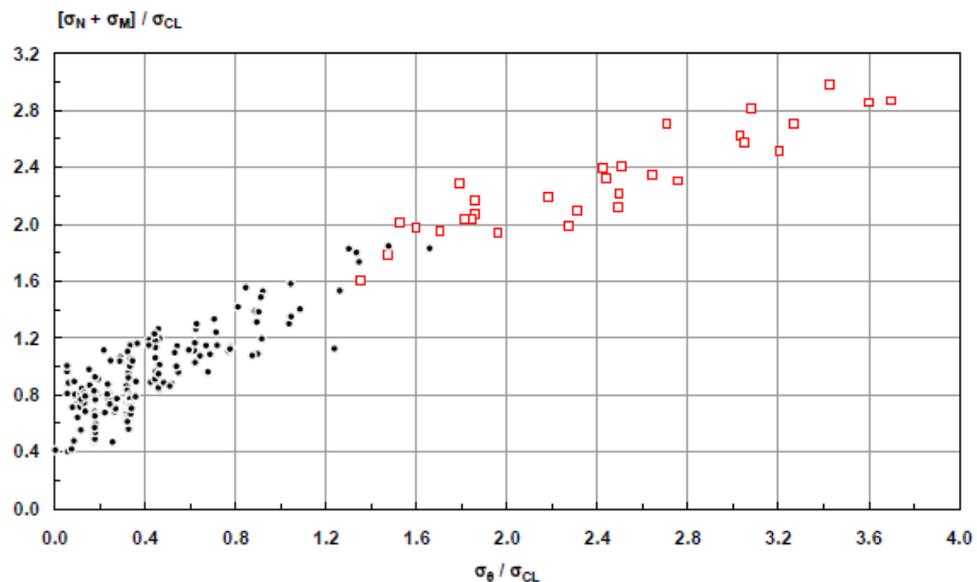


**Figure 2.45** Courbes expérimentales charge/écrasement sous pression interne et flexion (Seide et Weingarten, 1961)

Seide et Weingarten sont les premiers à mettre en exergue le problème posé par la détermination du moment « critique ». La contrainte théorique de bifurcation (« small deflection theory », indiquée par une croix sur les courbes de la Figure 2.45) semble correspondre à l'apparition de grandes déformations. Cependant, le moment maximum atteint à l'effondrement de la structure peut être bien supérieur à cette valeur théorique, au prix de très grandes déformations. La valeur critique de la contrainte est donc fortement dictée par le critère de flambage utilisé par l'expérimentateur.

### Campagnes INSA

Enfin, nous présentons ici l'ensemble des résultats obtenus au LGCIE depuis plus de 15 ans sur le problème des coques minces sous pression interne et flexion. Les thèses de Schauder [93], Gros [41], Antoine [6] et Mathon [69] regroupent plus de 200 essais réalisés sur une trentaine de coques lisses, obtenues par électrodéposition et comportant des surépaisseurs aux extrémités. Ces essais recouvrent des conditions expérimentales très diverses.



**Figure 2.46** Nuage de points, essais de flambage sous pression interne et flexion réalisés à l'INSA Lyon (Mathon, 2004)

Nous notons tout d'abord des différences au niveau du chargement appliqué, et la présence de flux de traction ou de compression supplémentaires lors de certains essais.

Ensuite, certaines coques se distinguent par leur géométrie. La présence de surépaisseurs permet en effet de modéliser les singularités de la structure réelle : les trottoirs de soudage longitudinaux (une virole étant composée de trois panneaux) ou circonférentiels, et les bossages locaux implantés en divers endroits (traversées de virole,...). D'autre part, les spécimens n'étaient pas tous de bonne qualité, et certains possédaient des imperfections géométriques importantes.

Enfin, chaque coque a fait l'objet de plusieurs essais, sur différentes fibres comprimées et à différentes pressions, et cet enchaînement peut avoir des conséquences sur les résultats.

Nous présentons ici le nuage de points résultant (Figure 2.46) afin que le lecteur puisse appréhender la totalité des essais réalisés.

### 2.5.32 Approche analytique pour l'évaluation du moment de collapse

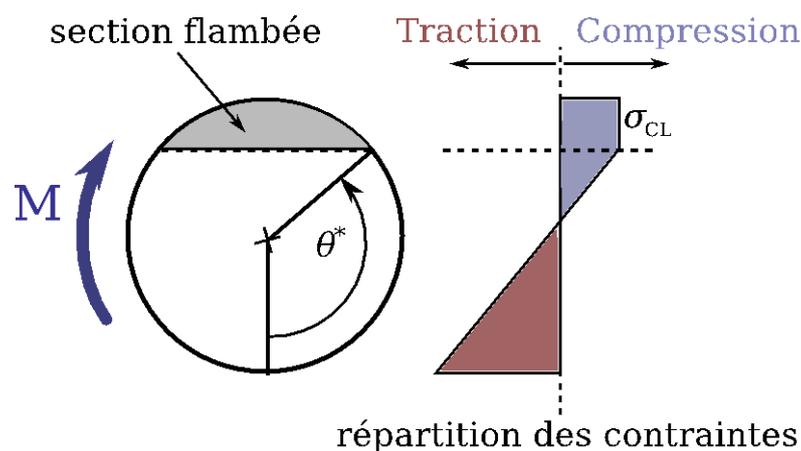
Suite à la première grande campagne expérimentale de Seide *et al.* au début des années 60, il a été démontré que la contrainte critique d'une coque sous pression interne et flexion pouvait dépasser la contrainte théorique. En se basant sur un modèle analytique de membrane, Stein [104] ou encore Mc Comb *et al.* [73] ont alors tenté de corrélérer cette constatation.

Nous reprenons ici l'approche de Mc Comb *et al.* : ils déterminent dans un premier temps la contrainte déclenchant une instabilité locale et arrivent à la même formulation que dans le cas de la compression axiale, vu précédemment.

Ensuite, ils tentent d'évaluer les charges de ruine observées au-delà de la contrainte critique « locale » ci-dessus, à l'aide de l'effet membrane. Le principe est qu'une membrane n'a pas de rigidité de flexion et ne peut encaisser des efforts que dans le plan. Un cylindre membranaire pressurisé sous flexion peut donc être sollicité au-delà du flambage local en partie comprimée puisque c'est ensuite la fibre tendue qui va reprendre les efforts.

Le modèle traduit simplement l'équilibre de la structure, et aucune approche énergétique n'est employée. Le calcul de la contrainte de ruine découle des hypothèses de répartition des contraintes suivantes :

- la contrainte maximale de compression en zone flambée est égale à la contrainte classique
- la partie non flambée de la coque se comporte comme un corps rigide



**Figure 2.47** Modèle simplifié : distribution des contraintes axiales

En écrivant les deux équations d'équilibre (forces et moments) et en assurant la continuité de la contrainte de membrane axiale à l'angle flambé,

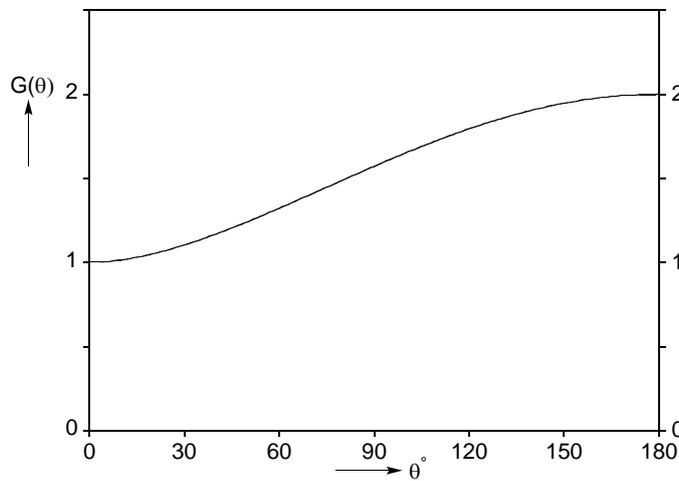
nous obtenons alors une fonction d'estimation du moment admissible par la structure lorsque celle-ci est flambée d'un angle  $\theta$ . Cette fonction est formulée à l'aide de l'angle  $\theta^*$  qui correspond à la zone travaillant en corps rigide :

$\theta$  : Angle Flambé

$\theta^* = \pi - \theta$  : Angle Corps Rigide

$$\sigma_F^P = \frac{M_F}{\pi R^2 t} = \left( \sigma_{CL} + \frac{PR}{2t} \right) \cdot G(\theta)$$

où  $G(\theta) = \frac{\theta^* - \cos\theta^* \cdot \sin\theta^*}{\sin\theta^* - \theta^* \cdot \cos\theta^*}$  représente le gain sur le moment de flexion dû à l'effet membrane (voir Figure 2.48).



**Figure 2.48** Evolution de la fonction amplificatrice du moment de flexion en fonction de l'angle flambé

Le moment de flexion maximal admissible est alors obtenu lorsque la section de la coque est entièrement flambée (soit  $\theta^* \rightarrow 0^\circ$  ou  $\theta \rightarrow 180^\circ$ ). Les auteurs considèrent que ce moment maximal est le moment de collapse de la structure. Nous obtenons alors comme moment de ruine :

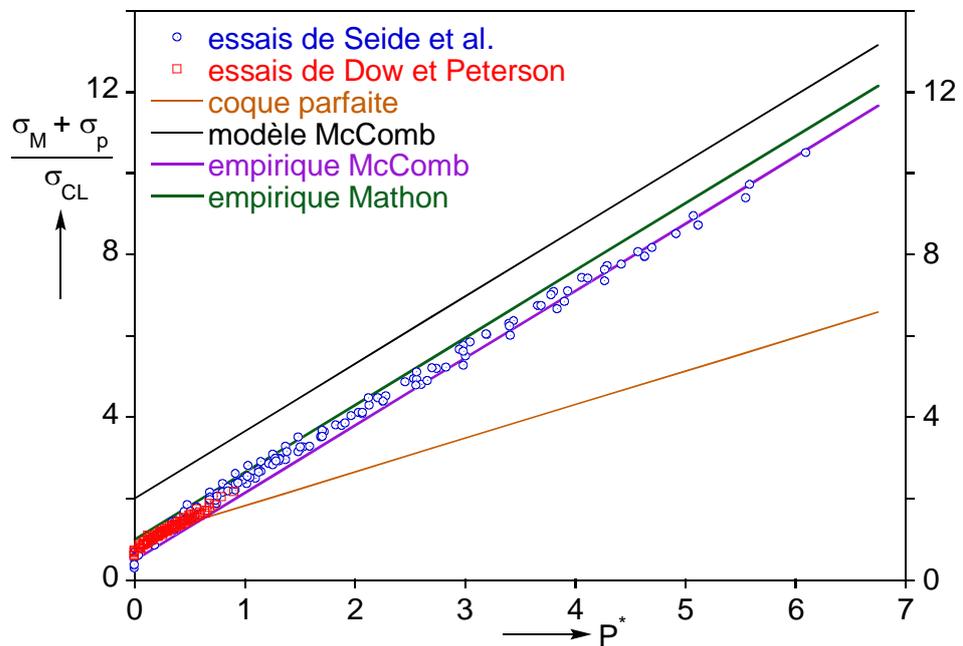
$$\sigma_F^{Max} = \frac{M_F^{Max}}{\pi R^2 t} \xrightarrow{\theta^* \rightarrow 0} 2 \cdot \left( \sigma_{CL} + \frac{PR}{2t} \right) = 2 \cdot \sigma_{CL} + \frac{PR}{t}$$

Les auteurs ont comparé ce modèle aux résultats expérimentaux de la littérature, présentés au paragraphe précédent (Figure 2.49). Leur expression étant nettement supérieure aux résultats, McComb *et al.* proposent finalement une formulation empirique donnant une limite inférieure aux charges expérimentales :

$$\sigma_F^{min} = \frac{M_F^{min}}{\pi R^2 t} = \frac{1}{2} \sigma_{CL} + \frac{PR}{t}$$

La proposition empirique donne effectivement une limite inférieure des charges expérimentales. Mais, d'après l'équation, le moment admissible par la structure est directement proportionnel au terme  $\sigma_{CL} + PR/2t$ . Les auteurs proposent donc ici une réduction de la contribution de la structure à la résistance aux efforts (en ne prenant que la moitié de la contrainte classique  $\sigma_{CL}$ ) tout en conservant la totalité de l'effet membrane ( $PR/t$ ) ; cette démarche ne nous semble pas justifiable. De la même manière, Mathon [67] fait une proposition permettant d'estimer une limite supérieure des charges expérimentales de Seide *et al.* [95].

$$\sigma_F^{Max} = \frac{M_F^{Max}}{\pi R^2 t} = \sigma_{CL} + \frac{PR}{t}$$



**Figure 2.49** Comparaison des résultats expérimentaux sous flexion et pression interne aux différentes prédictions proposées

Cette formulation est également comparée aux mêmes essais dans le graphe précédent ; nous notons qu'elle donne des résultats bien meilleurs que ceux proposés initialement et qu'elle est tout autant justifiable que la formulation modifiée empiriquement par les auteurs du modèle.

Ce modèle comporte bien entendu des limites, nous avons précisé les hypothèses de répartition de contraintes nécessaires au début de ce paragraphe. A celles-ci, il est indispensable de rajouter des hypothèses permettant de limiter l'utilisation de ce modèle. Schauder [93] précise deux autres hypothèses non mentionnées dans l'article de McComb, mais qui découlent de l'approche présentée.

Tout d'abord, le matériau doit être parfaitement élastique. En effet, si la contrainte de membrane axiale en fibre comprimée ne peut dépasser la con-

trainte classique, la contrainte de membrane axiale en fibre tendue est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_{tendue} = \left( \sigma_c + \frac{PR}{2t} \right) \frac{\pi(1 - \cos \theta^*)}{\sin \theta^* - \theta^* \cos \theta^*} \sigma_c$$

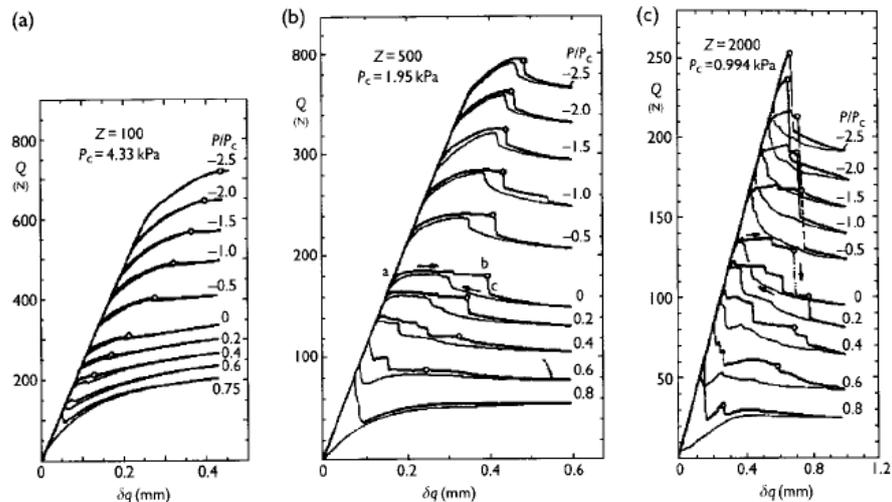
On peut déduire de cette expression que la limite supérieure du moment de flexion admissible ( $\theta^* \rightarrow 0^\circ$ ) ne peut être atteinte que si la contrainte de traction en fibre tendue tend vers l'infini. Cette condition ne peut être satisfaite dans la réalité et nécessite donc un matériau parfaitement élastique.

D'autre part, le modèle met en jeu une cinématique permettant d'expliquer en partie les charges de ruine supérieures à la contrainte classique. Il est donc indispensable que la structure ait un comportement post-critique stable, ce qui n'est pas le cas pour de faibles pressions.

A partir de l'expression du moment admissible, on remarque que l'effet membrane peut avoir une influence sur le moment de flexion même lorsqu'il n'y a aucune pression interne. Même si le modèle n'est en toute rigueur pas valable aux basses pressions puisque le comportement post-critique n'est pas stable, l'effet membrane permettrait donc d'expliquer de manière qualitative les charges critiques plus élevées observées dans le cas de la flexion par rapport à la compression.

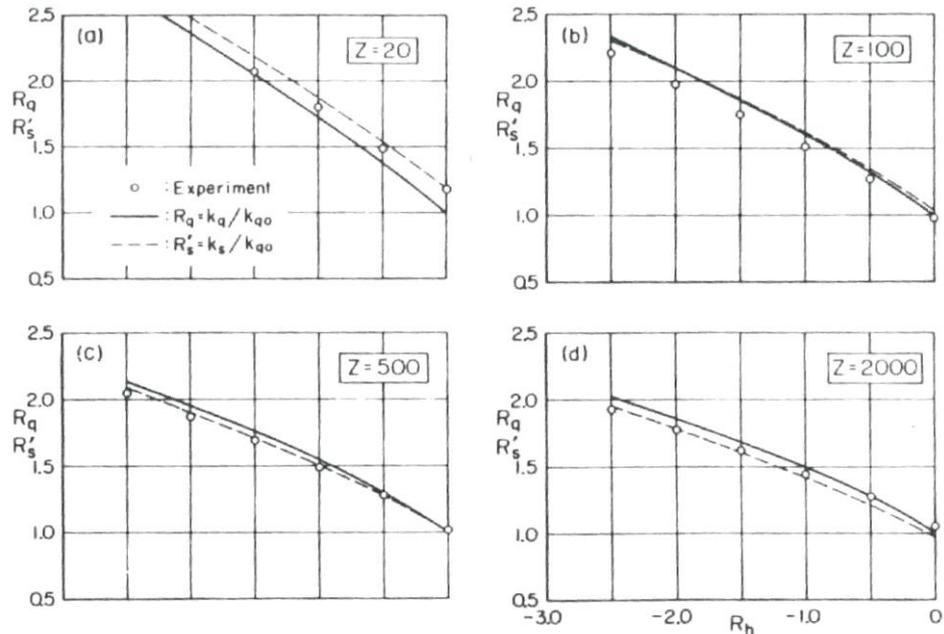
#### 2.5.4 Effet de la pression sur le flambage par cisaillement

Yamaki est le seul à avoir étudié le couplage entre cisaillement par effort tranchant et pression interne [116]. Ses travaux analytiques et expérimentaux mettent en évidence l'augmentation de la charge critique et de la rigidité post-critique avec la pression interne, comme en témoignent les courbes présentées en Figure 2.50 pour différentes valeurs de  $Z$ .



**Figure 2.50** Effet de la pression sur le comportement post-critique de coques en cisaillement : a)  $Z=100$ , b)  $Z=500$ , c)  $Z=2000$  (Yamaki, 1984)

On peut noter d'après la Figure 2.50c que la pression a pour effet de raccourcir la branche post-critique stable, traduisant le fait que la flexion devienne le mode de flambage principal lorsque la pression augmente. Les charges de bifurcation sont ensuite comparées à la théorie développée par Yamaki (Figure 2.51), à la fois en torsion (pointillés) et en effort tranchant (trait plein), et la concordance est plutôt bonne.



**Figure 2.51** Augmentation de la charge critique en cisaillement avec la pression interne : a)  $Z=20$ , b)  $Z=100$ , c)  $Z=500$ , d)  $Z=2000$  (Yamaki, 1984)

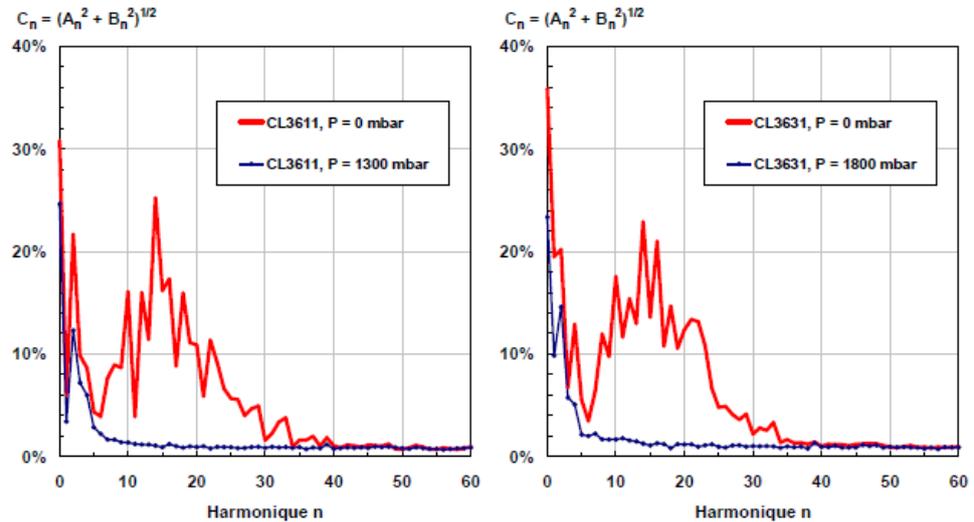
### 2.5.5 Réduction des imperfections par la pressurisation

Si physiquement, l'effacement des défauts grâce à la pression interne est intuitif, peu de chercheurs ont essayé de quantifier cet effet, expérimentalement ou numériquement. Nous citons encore ici deux études menées au sein du LGCIE.

Limam [60] note pour l'ensemble des coques testées (électro-déposées,  $R/t$  compris entre 620 et 867) un estompement systématique en zone courante des défauts correspondant à des harmoniques supérieures à 4. En effet, dès de faibles intensités de pression interne ( $\sigma_\theta/\sigma_L = 8\%$ ) cet estompement est en moyenne supérieur à 30% de l'amplitude initiale et atteint 50% pour  $\sigma_\theta/\sigma_L = 12\%$ . Pour des valeurs de pressions plus élevées ( $\sigma_\theta/\sigma_L = 30\%$ ) les coques électro-déposées peuvent être considérées comme parfaites en zone courante, avec une amplitude de défaut inférieure à 5% de l'épaisseur pour toutes les harmoniques supérieures à 4.

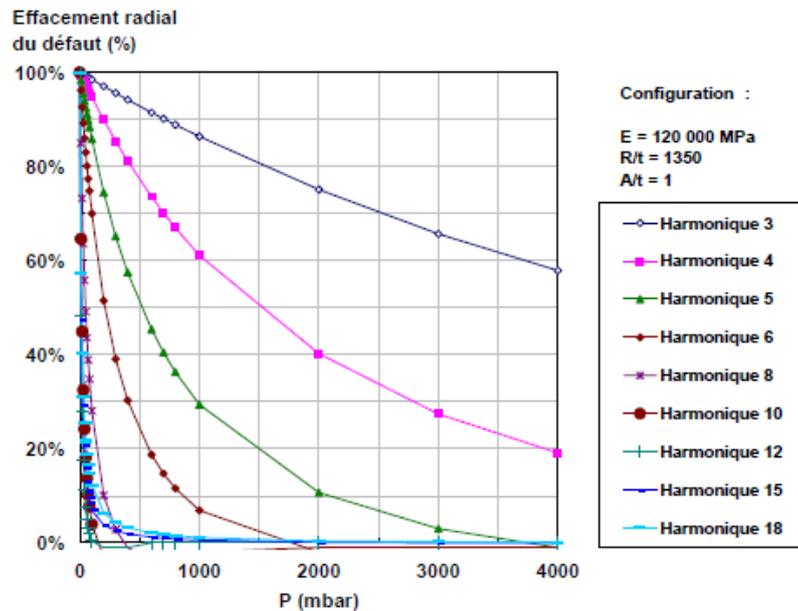
L'étude des défauts correspondant aux harmoniques basses est plus complexe. D'une part, ces harmoniques nécessitent une énergie plus importante pour que la diminution de l'amplitude soit visible : pour  $\sigma_\theta/\sigma_L = 60\%$ ,

Limam observe un estompement de 2 à 4 % seulement en moyenne. D'autre part, la présence d'une condition aux limites rigide, amenant des contraintes de flexion élevées, s'oppose à l'estompement, voire même favorise dans certains cas la diffusion de ces défauts sur la hauteur de la coque.



**Figure 2.52** Effacement des défauts suite à une pressurisation (Mathon, 2004)

Mathon [69] corrobore ces observations expérimentales: sur ses coques électro-déposées avec un R/t de 1350, l'effacement des imperfections géométriques est effectif dès les très basses pressions (50 mbar). Au-delà de 600 mbar, tous les modes élevés (harmoniques supérieures à 5) sont effacés (voir Figure 2.52).



**Figure 2.53** Effacement des défauts modaux en fonction de la pression (Mathon, 2004)

Ces résultats sont retrouvés numériquement sur une coque avec  $R/t = 1350$  et  $E = 120\,000$  MPa : plus le mode est élevé, plus il s'efface rapidement. Comme le montre la Figure 2.53, 90% de l'amplitude initiale du défaut est effacée dès 200 mbar pour les harmoniques 8, 10, 12, 15, 18. En revanche, les harmoniques inférieures sont effacées beaucoup moins rapidement : pour le mode 6, il faut atteindre 2 bar pour observer un effacement de 90%. Pour les modes inférieurs, les amplitudes sont encore significatives, même à une pression de 4 bar.

Concernant les défauts axisymétriques, Mathon étudie l'effacement de trois imperfections axisymétriques localisées différentes : le défaut triangle ( $A/t = 1$ ), le défaut Rotter/Teng type B ( $A/t = 1$ ), le défaut moyen de Pircher ( $A/t = 0.458$ ). La coque présente un rapport  $R/t$  de 1000, le module est  $E = 70$  GPa. Quelle que soit la forme du défaut, il constate une absence quasi-complète d'effacement (1 à 2% d'effacement seulement à 3.5 bar). Un défaut axisymétrique peut donc être considéré comme étant inchangé même après une forte pressurisation.

## 2.6 Problèmes d'interactions entre chargements

Comme nous l'avons vu, les chargements de structures réelles sont rarement « simples », mais découlent plutôt d'une interaction de chargements. Il est donc naturel, après avoir étudié ces cas simples, de se poser la question de leur interaction, afin de pouvoir prédire au mieux le comportement de la structure ainsi que la charge critique qu'elle peut supporter.

### 2.6.1 Interaction flexion/cisaillement (M, T)

#### 2.6.1.1 Etat de contraintes

L'interaction flexion/cisaillement apparaît souvent sur les problèmes réels. En effet, peu de structures sont sollicitées en flexion pure ou en cisaillement pur (torsion), mais bien souvent soumises à un effort tranchant (vent, séisme), créant ainsi une combinaison de flexion et de cisaillement qu'il convient de quantifier.

La Figure 2.54 présente l'état de contraintes de la coque lorsqu'elle est soumise à un tel chargement. La répartition des contraintes de flexion et de cisaillement est sinusoïdale, et égale à :

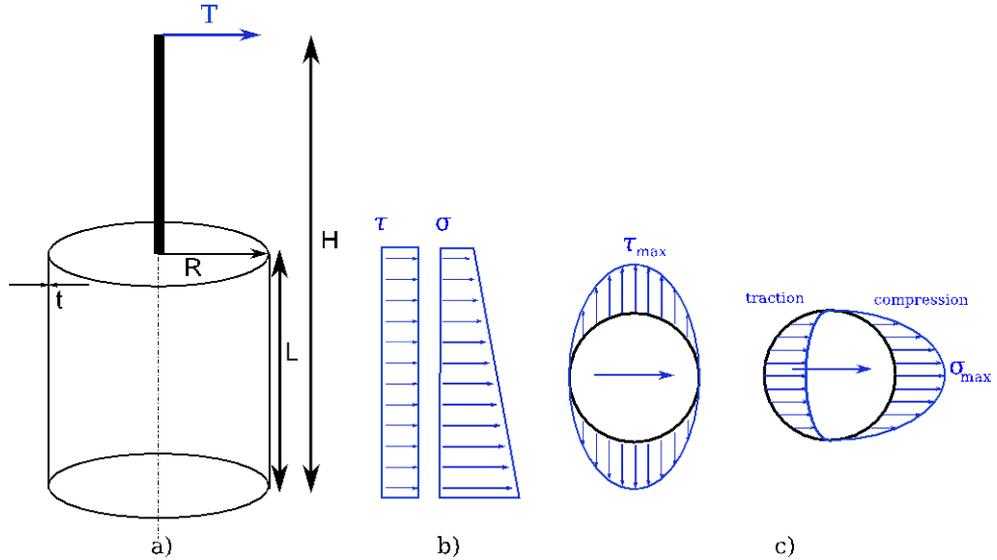
$$\begin{cases} \tau = \frac{T}{\pi \cdot R \cdot t} \cdot |\sin \theta| \\ \sigma_M = \frac{T \cdot H}{\pi \cdot R^2 \cdot t} \cdot \cos \theta \end{cases}, \text{ soit : } \begin{cases} \tau_{\max} = \frac{T}{\pi \cdot R \cdot t} \\ \sigma_{M \max} = \frac{T \cdot H}{\pi \cdot R^2 \cdot t} \end{cases}$$

On remarque un déphasage de  $90^\circ$  entre les deux contraintes : la contrainte de flexion est maximale sur la partie de la coque où l'effort tranchant

est appliqué, alors que la contrainte de cisaillement est maximale sur le côté. Le rapport des contraintes maximales est égal à :

$$\frac{\sigma_{M \max}}{\tau_{\max}} = \frac{H}{R}$$

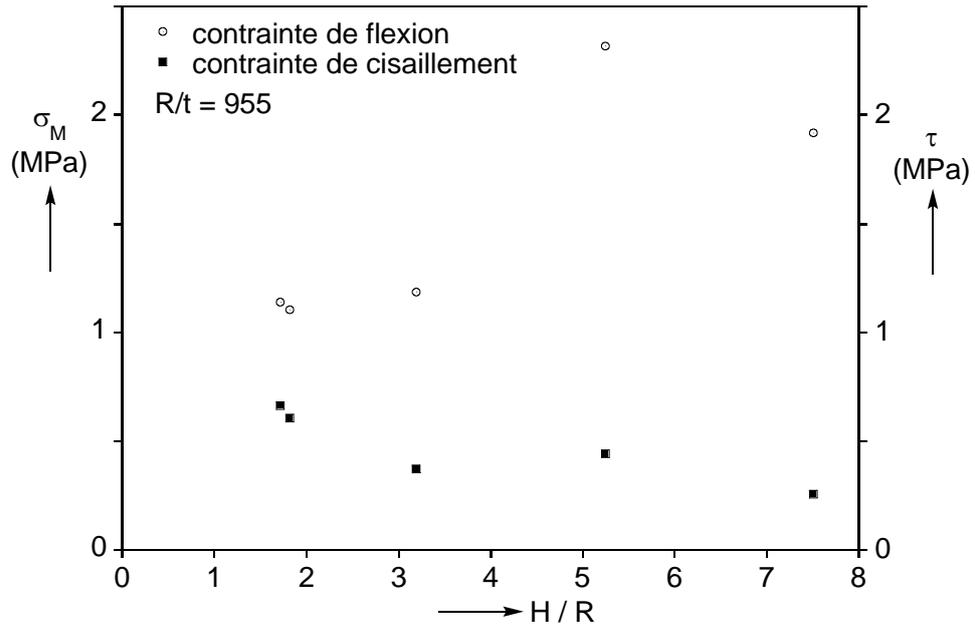
Ce résultat est physiquement intuitif : plus la hauteur d'application de l'effort tranchant sera grande, plus la flexion primera sur le cisaillement.



**Figure 2.54** Coque soumise à un effort tranchant : a) notations, b) état de contrainte axial, c) état de contrainte circonférentiel

### 2.6.12 Caractérisation de l'interaction ( $M$ , $T$ )

Cette interaction entre cisaillement et flexion est mise en évidence pour la première fois par Rhode et Lundquist [83], comme nous l'avons déjà évoqué. Nous présentons ici leurs résultats d'essais effectués sur des cylindres en papier. Six coques d'épaisseur égale ont été testées ( $R/t = 955$ ), le bras de levier variant entre 1.72 et 7.5 fois le rayon. Les résultats, présentés en Figure 2.55, montrent une dispersion importante, peu étonnante étant donné le matériau utilisé. Une tendance se détache cependant : la contrainte de cisaillement diminue avec l'introduction d'une flexion, et vice-versa.



**Figure 2.55** Contraintes critiques, interaction flexion/cisaillement (Rhode et Lundquist, 1931)

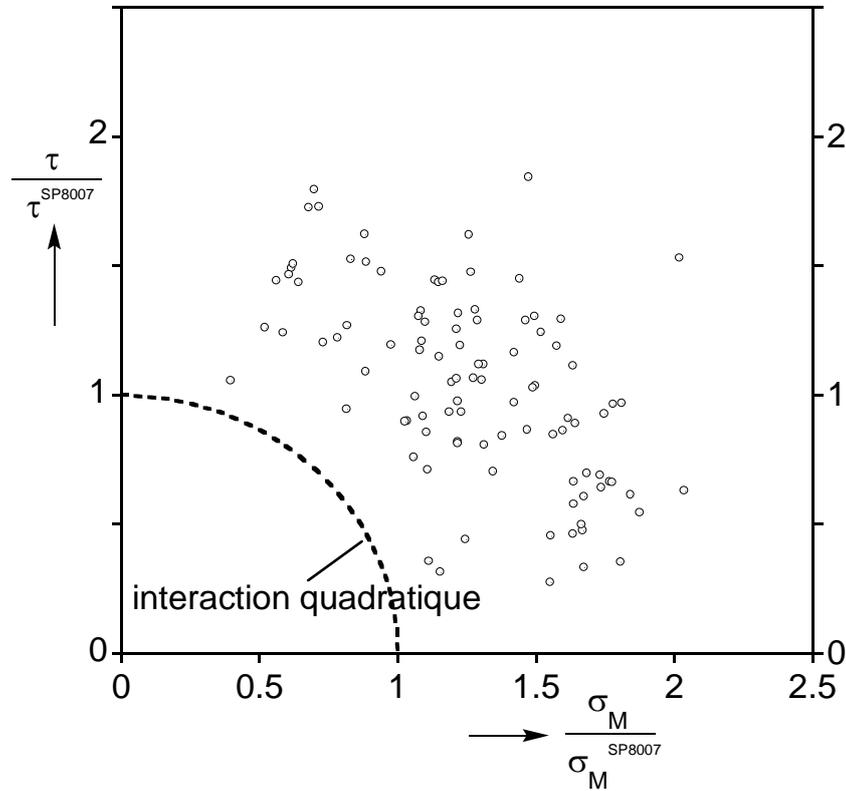
Il faut attendre quelques années pour voir la première étude complète faite par Lundquist [68], que nous avons également déjà évoquée. Une centaine de coques sont testées, ayant un  $R/t$  compris entre 323 et 1455, et  $L/R$  compris entre 0.5 et 2. En faisant varier le bras de levier entre 1 et 14 fois la valeur du rayon, Lundquist observe 3 régimes distincts :

- Lorsque  $H/R$  est petit, la ruine est obtenue par cisaillement. Des cloques diagonales de cisaillement se forment sur le côté du cylindre. La contrainte critique de cisaillement est alors sensiblement équivalente à la contrainte critique sous torsion (cisaillement pur).
- Pour des valeurs intermédiaires de  $H/R$ , l'auteur note une baisse de la contrainte critique, associée à une transition d'un mode de cisaillement vers un mode de flexion. Il émet l'hypothèse d'une interaction entre les deux types de chargement en chaque point de la coque. En prenant en compte le déphasage des contraintes, il aboutit à une interaction quadratique :

$$\left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_0}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{Mcr}}{\sigma_{M_0}}\right)^2 = 1$$

- Pour d'importantes valeurs de  $H/R$ , la ruine est soudaine, liée à l'effondrement de la fibre comprimée. La contrainte critique est alors proche de la contrainte critique en flexion pure.

La Figure 2.56 montre pour chaque essai la contrainte de flexion en fonction de la contrainte de cisaillement, ramenées toutes les deux aux contraintes de dimensionnement données par la NASA SP8007. Malgré la dispersion assez importante, on note une interaction non linéaire entre les deux chargements : la formule quadratique proposée par Lundquist semble pertinente.

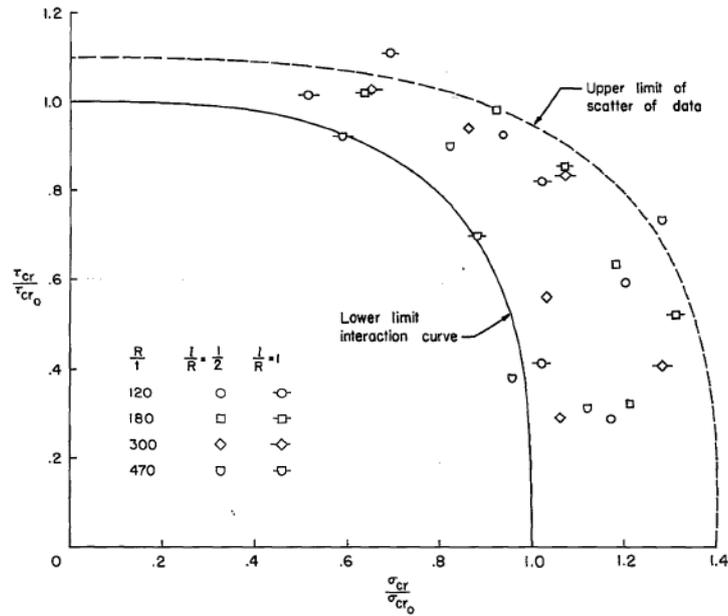


**Figure 2.56** Résultats expérimentaux, interaction flexion/cisaillement (Lundquist, 1935)

En 1958, Peterson et Updegraff [78] mènent une étude similaire, ayant pour application directe le dimensionnement d'avions et portant donc sur des coques raidies circonférentiellement. Les coques testées sont composées de 3 ou 6 tronçons, chacun de longueur R ou 0.5 R.

Etant donné la grande rigidité des raidisseurs circonférentiels, nous pouvons considérer que chaque virole se comporte indépendamment, et nous retenons de ce fait comme longueur caractéristique de coque L l'espace entre raidisseurs. Le rapport R/t varie quant à lui entre 120 et 470. Des résultats présentés en Figure 2.57, les auteurs tirent une courbe d'interaction cubique représentant la limite basse de leurs essais :

$$\left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_0}\right)^3 + \left(\frac{\sigma_{Mcr}}{\sigma_{M_0}}\right)^3 = 1$$



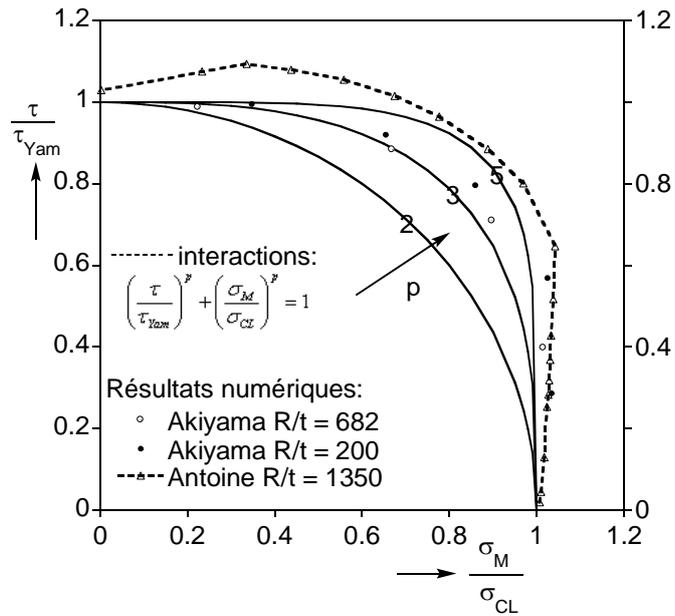
**Figure 2.57** Résultats expérimentaux, interaction flexion/cisaillement (Peterson et Updegraff, 1958)

Akiyama [1] reporte des résultats de calculs numériques effectués sur des coques parfaites pour deux valeurs de  $R/t$  : 200 et 682. Aucune formule n'est proposée, mais les résultats montrent que le cisaillement peut apporter un gain de charge en flexion, au-delà de la charge de référence.

Plus récemment, Matsuura *et al.* [72] aboutissent à une formule d'interaction, à partir de tous les essais menés pour le programme de recherche japonais sur les cuves de réacteurs nucléaires. La relation entre les deux sollicitations est cette fois du 5<sup>ème</sup> ordre :

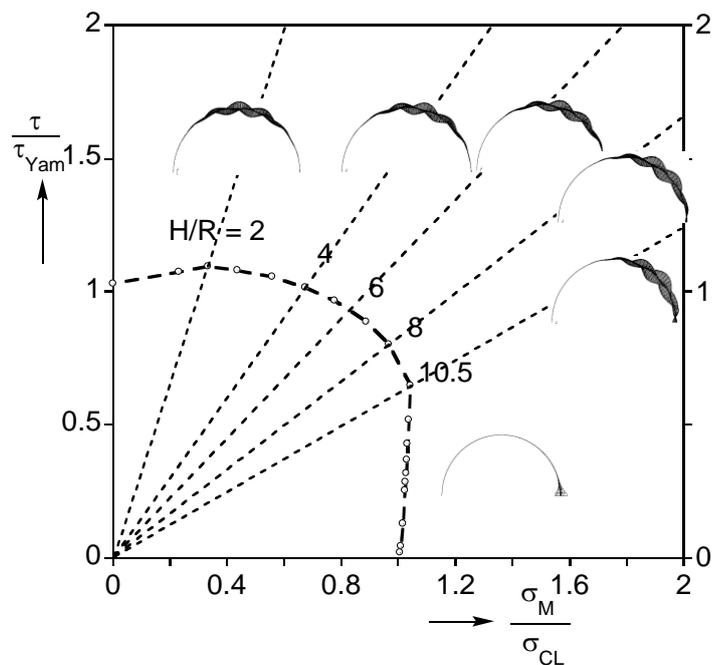
$$\left(\frac{\tau_{cr}}{\tau_0}\right)^5 + \left(\frac{\sigma_{Mcr}}{\sigma_{M_0}}\right)^5 = 1$$

Enfin, Antoine [6] utilise le logiciel ABAQUS pour effectuer une analyse des bifurcations sous chargement combiné flexion/cisaillement, en faisant varier le bras de levier. Une seule configuration est étudiée :  $R/t=1350$ ,  $L/R=2$ . Les résultats sont proches de l'interaction du 5<sup>ème</sup> ordre préconisée par Matsuura *et al.*, et pour certains couplages, un gain de charge en flexion peut être apporté par le cisaillement. Le graphique de la Figure 2.58 compare les différentes interactions proposées.



**Figure 2.58** Propositions pour l'interaction flexion/cisaillement

Antoine note également une évolution du mode critique (voir Figure 2.59) : pour  $H/R = 2$ , les déformations critiques se trouvent sur la fibre la plus sollicitée en cisaillement. Plus le bras de levier (et donc la composante de flexion) augmente, plus le mode se décale vers la fibre la plus sollicitée en flexion. Lorsque le rapport  $H/R$  devient supérieur à 10.5, le mode est alors purement un mode de flexion. Ce type de comportement caractérise le couplage flexion/effort transverse, comme ont pu le noter les différents expérimentateurs (Lunquist [66], Murakami *et al.* [75]).

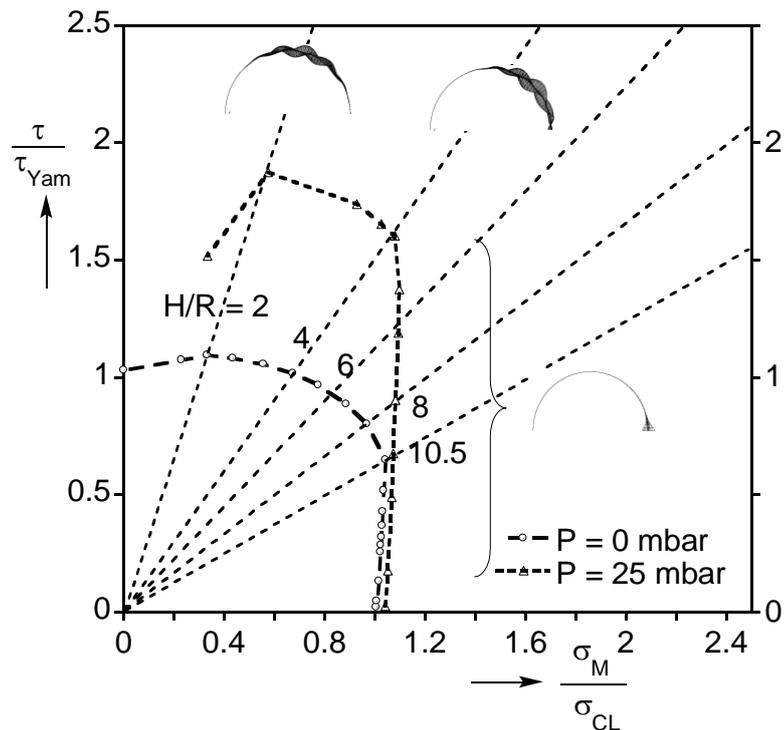


**Figure 2.59** Interaction flexion/cisaillement, évolution des modes critiques en fonction du bras de levier (Antoine, 2000)

### 2.6.13 Couplage avec la pression ( $P, M, T$ )

Antoine [6] étudie l'évolution de l'interaction flexion/cisaillement avec l'ajout d'une pression interne. Nous avons vu qu'en fonction de la géométrie de la coque ( $R/t$ ), il existait une hauteur du point d'application de l'effort tranchant ( $H/R$ ) pour laquelle le mode critique devient un mode de flexion uniquement.

Cependant, du fait de l'augmentation très importante de la contrainte critique de cisaillement avec la mise en pression, la flexion devient le chargement critique, et les modes de bifurcation associés deviennent très rapidement (avec la mise en pression) des modes du type flexion. Comme on peut le voir sur la Figure 2.60, dès 25 mbar la flexion prédomine pour  $H/R = 4$ .



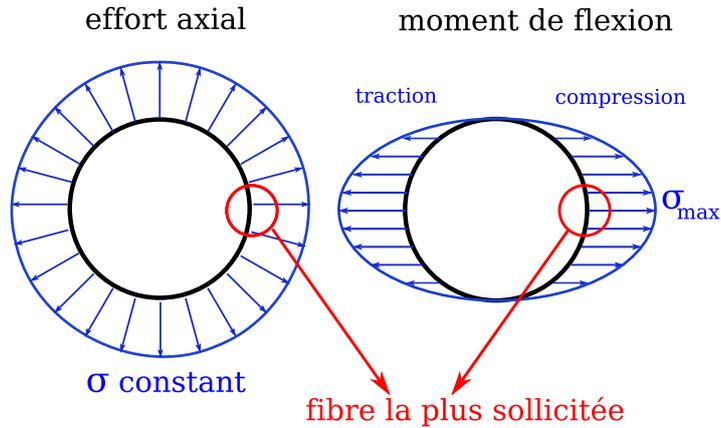
**Figure 2.60** Interaction flexion/cisaillement, évolution des modes critiques en fonction du bras de levier,  $P = 25$  mbar (Antoine, 2000)

## 2.6.2 Interaction entre compression et flexion ( $N, M$ )

### 2.6.2.1 Problématique

La question de l'interaction entre flexion et compression s'est vite posée dans l'industrie aéronautique, puisque les avions sont soumis à une combinaison de chargements. Dans le cas d'Ariane 5, cette interaction apparaît en vol, lorsque la poussée du moteur sollicite le réservoir de l'EPC en compression, et le moment aérodynamique lui applique une flexion. L'état de contrainte alors créé est schématisé sur la Figure 2.61. Sur une partie de la coque, la contrainte de compression créée par le moment de flexion va venir s'ajouter à la contrainte

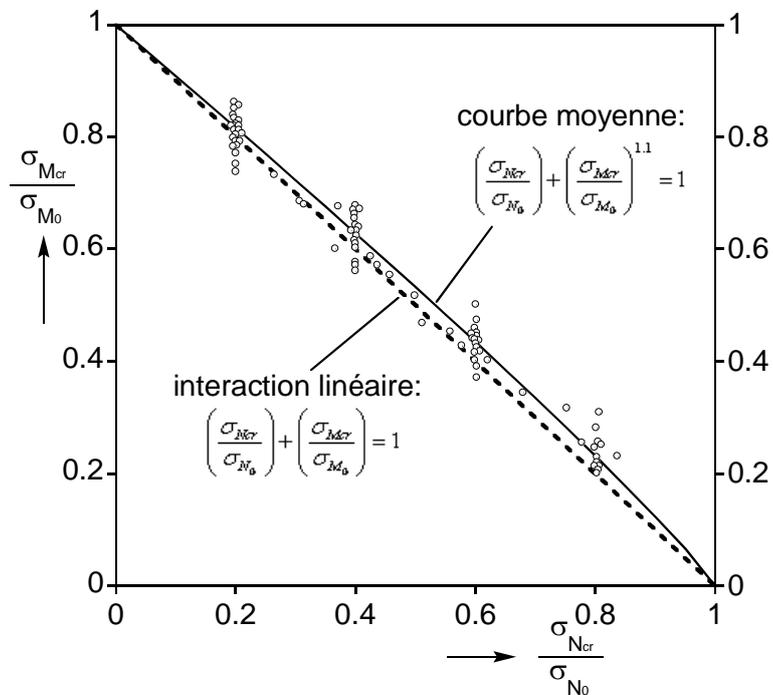
induite par l'effort axial. C'est sur cette fibre la plus comprimée que va donc se produire le flambage.



**Figure 2.61** Coque soumise à une interaction compression axiale/flexion

2.6.22 Etude de l'interaction

Bruhn [21] est le premier à étudier expérimentalement cette interaction, à l'aide d'essais sur des coques en Celluloïd dont le rapport R/t varie entre 234 et 800, et le rapport L/R entre 1 et 4. Le but de l'étude est principalement de proposer des formules d'interaction entre les divers chargements (flexion, compression, torsion) à partir des résultats expérimentaux, et peu de précisions sont données quant au comportement de la coque et aux modes critiques observés. Les résultats des essais de flexion/compression sont présentés en Figure 2.62, sans distinction entre les différents R/t et L/R.



**Figure 2.62** Résultats expérimentaux, interaction compression axiale/flexion (Bruhn, 1945)

On constate que malgré la légère dispersion des points, une interaction de type linéaire semble prédominer :

$$\left( \frac{\sigma_{Ncr}}{\sigma_{N_0}} \right) + \left( \frac{\sigma_{Mcr}}{\sigma_{M_0}} \right) = 1$$

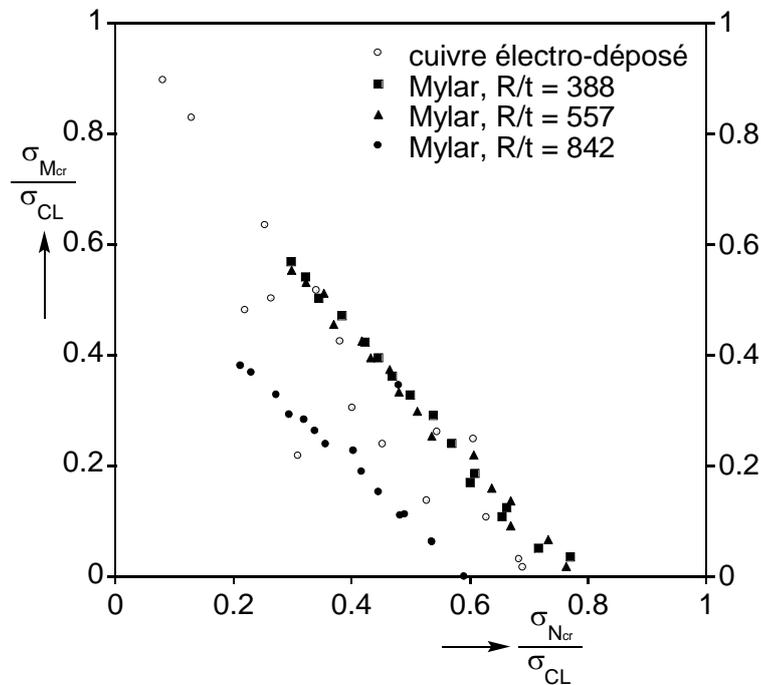
Une courbe moyenne est donnée par :

$$\left( \frac{\sigma_{Ncr}}{\sigma_{N_0}} \right) + \left( \frac{\sigma_{Mcr}}{\sigma_{M_0}} \right)^{1.1} = 1$$

où  $\sigma_{N_0}$  et  $\sigma_{M_0}$  sont les contraintes moyennes relevées par l'expérimentateur pour des essais sous compression pure et flexion pure, respectivement.

L'étude expérimentale menée par Seide, Weingarten et Morgan [100] comprend des essais portant sur la combinaison flexion/compression, effectués sur une coque en Mylar (R/t=533). Ces quelques essais confirment la tendance linéaire.

Afin de disposer d'une base de données suffisante pour l'établissement de règles de dimensionnement, Stuart, Goto et Sechler [105] effectuent une campagne extensive sur deux types de spécimens. Tout d'abord, ils utilisent l'électrodéposition de cuivre (selon les recommandations de Babcock) leur permettant d'obtenir des coques métalliques quasi-parfaites. Le rapport R/t pour ces coques varie entre 730 et 1000.



**Figure 2.63** Résultats expérimentaux, interaction compression axiale/flexion (Stuart et al., 1960)

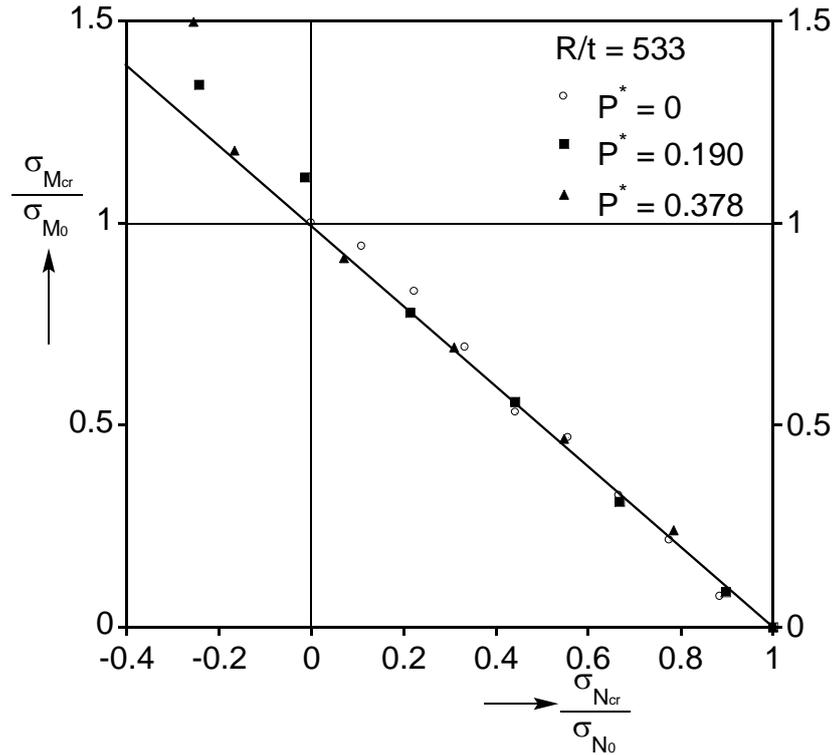
Les résultats, présentés en Figure 2.63, sont très proches de la théorie classique, contrairement aux essais effectués auparavant. L'interaction linéaire est retrouvée. En outre, plus on se rapproche d'une flexion pure, plus la contrainte critique totale augmente. Les auteurs expliquent ce résultat par le caractère localisé de la flexion (la contrainte maximale agit sur une partie restreinte de la coque et a une probabilité moindre de rencontrer une imperfection de forme) ainsi que par l'influence des conditions aux limites qui peut varier suivant le type de chargement. Le mode post-critique usuel des cloques en pointes de diamant est observé, restreint à la fibre comprimée de la coque lorsque d'importants moments de flexion sont appliqués.

La deuxième partie de cette étude est effectuée sur des coques roulées-collées en Mylar, avec des  $R/t$  de 388, 557, 842. L'épaisseur du recouvrement est prise en compte dans le calcul de la contrainte critique, et des essais sont effectués avec la contrainte maximale appliquée sur le joint de recouvrement, et sur la fibre opposée. Les résultats concordent une fois de plus avec ceux reportés précédemment : l'interaction est linéaire, et la contrainte critique totale augmente avec la flexion.

Toutes les études réalisées semblent donc confirmer le caractère linéaire de l'interaction compression/flexion, ce qui peut sembler logique : les modes critiques associés à ces deux chargements étant similaires, tout se passe comme si la structure finalement ne voyait pas la différence entre les deux chargements.

### 2.6.23 Influence de la pression ( $P$ , $N$ , $M$ )

Les études expérimentales sur l'interaction ( $P$ ,  $N$ ,  $M$ ) sont une fois de plus rares. L'effet de la pression interne sur le comportement au flambage n'est pas toujours trivial, comme nous avons pu le voir. C'est pourquoi Seide *et al.* [100] testent une coque en Mylar ( $R/t=533$ ) sous pression interne, compression et flexion. Pour les deux valeurs de pression testées, l'interaction ( $N$ ,  $M$ ) reste linéaire (Figure 2.64). Cette tendance linéaire ne semble cependant pas se prolonger lorsqu'un effort de traction est appliqué à la place de la compression, c'est-à-dire que l'ajout d'une traction est bénéfique à la capacité portante de la coque sous flexion (grâce à l'effet membrane).



**Figure 2.64** Résultats expérimentaux, interaction P, N, M (Seide et al., 1960)

Une autre campagne expérimentale menée par Leaumont [58] porte sur l'étude du comportement membranaire sous pression interne. Les cylindres testés sont faits d'un fin film plastique (d'épaisseur comprise entre 6 et 25 microns), résultant en des ratios  $R/t$  très élevés : de 3000 à 12 000. Ainsi, des pressions faibles suffisent à obtenir une pression adimensionnelle  $P^*$  importante (comprise entre 16 et 132 !). En flexion pure, le comportement observé est purement membranaire, et confirme les résultats analytiques de Stein [104] : la coque est capable de supporter une contrainte égale à  $PR/t$ . En compression pure, on retrouve les résultats de la théorie classique. L'interaction entre les deux est parfaitement linéaire.

Au vu de ces résultats, il semblerait que l'interaction entre la flexion et la compression ne soit pas changée par la mise en pression, et reste linéaire :

$$\left( \frac{\sigma_{P,Ncr}}{\sigma_{P,N0}} \right) + \left( \frac{\sigma_{P,Mcr}}{\sigma_{P,M0}} \right) = 1$$

### 2.6.3 Interaction entre compression et cisaillement (N, T)

Cette combinaison de chargements a très peu été évoquée, l'étude de l'interaction torsion/compression étant plus répandue (voir par exemple [95], [115]). Nous retenons ici les quelques résultats de Bruhn [21] dans son travail sur les chargements combinés. Etant donné la faible quantité de résultats expé-

rimentaux, il est difficile de conclure quant à la nature de cette interaction. Une interpolation du type :

$$\left( \frac{\sigma_{Ncr}}{\sigma_{N_0}} \right)^a + \left( \frac{\tau_{cr}}{\tau_0} \right)^b = 1$$

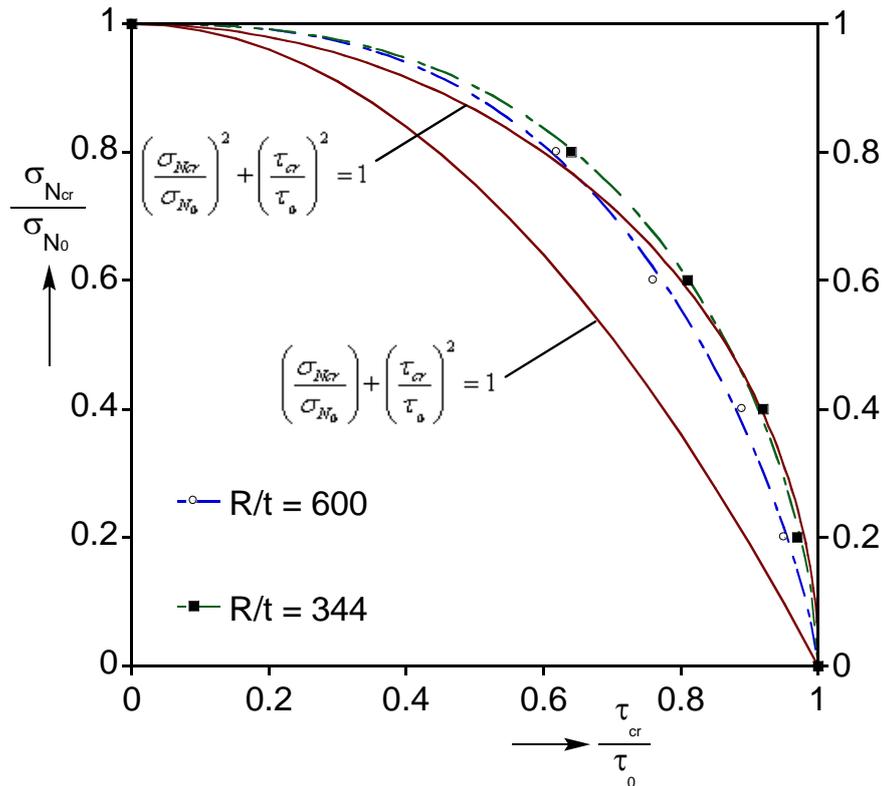
est effectuée, les résultats sont répertoriés dans le tableau 2.2.

	<i>a</i>	<i>b</i>
R/t = 344	1.6686	2.6657
R/t = 600	1.3088	2.788

**Tableau 2.2** Paramètres de l'interaction compression/cisaillement (Bruhn, 1945)

Les courbes correspondantes sont tracées sur la Figure 2.65. Pour comparaison, une interaction quadratique est également représentée, ainsi que l'équation proposée par Bruhn pour l'interaction torsion/compression :

$$\left( \frac{\sigma_{Ncr}}{\sigma_{N_0}} \right) + \left( \frac{\tau_{cr}}{\tau_0} \right)^2 = 1$$



**Figure 2.65** Résultats expérimentaux, interaction compression/cisaillement (Bruhn, 1945)

# 3 Règles de dimensionnement

## 3.1 Introduction

## 3.2 Formulations

3.2.1 NASA SP8007

3.2.2 Eurocode 3

## 3.3 Comparaison des deux normes

3.3.1 En compression ou flexion seule

3.3.2 En cisaillement

3.3.3 Compression axiale et pression interne

3.3.4 Flexion et pression interne

## 3.4 Etablir de nouvelles recommandations

3.4.1 Courbes basses empiriques

3.4.2 Identification du défaut le plus pénalisant

3.4.3 Prise en compte de défauts réels

3.4.4 Conclusions

---

## 3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu, il existe un grand écart entre la théorie du flambage de coques et les résultats expérimentaux, c'est pourquoi les ingénieurs ont vite eut besoin de normes afin de dimensionner aux mieux leurs structures. Nous présentons ici deux règles utilisées couramment pour le dimensionnement de coques minces au flambage :

- la NASA SP8007, créée dans les années 60 au sein d'une série de publications spéciales destinées à établir des normes pour le dimensionnement des lanceurs (Space Vehicle Design Criteria). [4]
- l'Eurocode 3, une norme européenne de dimensionnement des structures en acier du génie civil, développée par le CEN (Comité Européen de Normalisation). La dernière version date de 2006. [5]

Nous verrons dans ce chapitre comment ces deux règles ont été construites puis nous comparerons leurs résultats. Ceci nous permettra d'analyser leurs points faibles pouvant être améliorés.

Bien évidemment, d'autres recommandations existent, citons notamment celles de l'ECCS [33], couvrant une large variété de problèmes (géométries, types de chargements) et visant divers types d'applications. Si les premières éditions étaient principalement basées sur des résultats empiriques, la dernière en date (5<sup>ème</sup> édition datant de 2008) s'appuie, tout comme l'Eurocode 3, sur des simulations numériques et propose également des méthodologies de calcul. Cependant pour les cas qui nous concernent directement, les résultats sont identiques à l'Eurocode 3 et nous n'étudierons pas ce code en détail.

## 3.2 Formulations

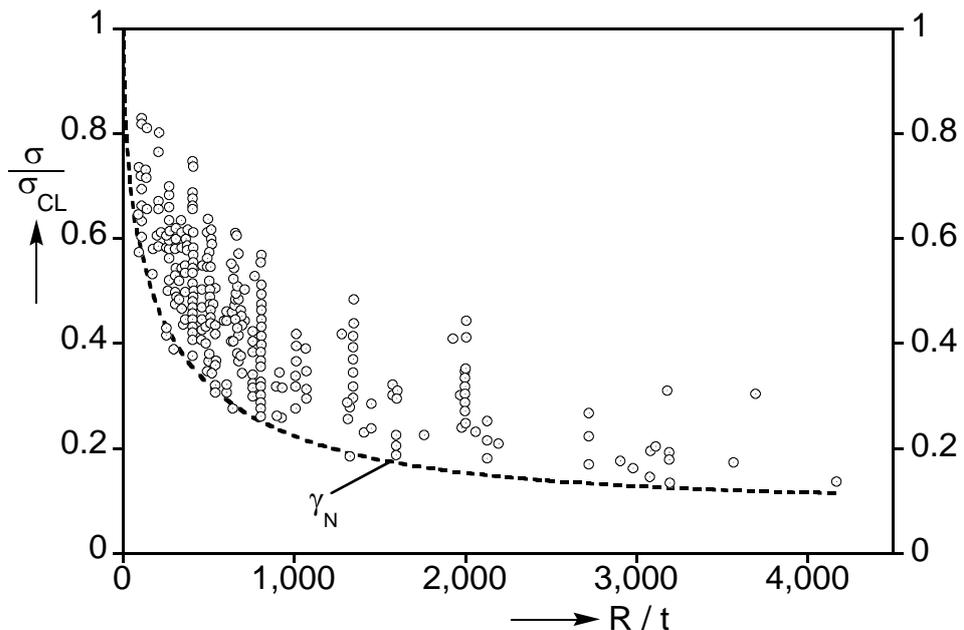
### 3.2.1 NASA SP8007 [4]

Dans le but de garantir un dimensionnement le plus juste possible des lanceurs, la NASA produisit un effort considérable dans les années 60 afin de mieux comprendre le flambage de coques. La norme SP8007 se base essentiellement sur la collecte d'un grand nombre de résultats expérimentaux, permettant de choisir un facteur de réduction (*knockdown factor*) approprié pour chaque type de chargement. La plus grande partie de cette vaste étude fut réalisée par Seide, Weingarten et Morgan [100].

#### 3.2.11 Compression axiale

En compression, la contrainte de dimensionnement est ainsi donnée par :

$$\sigma_N^{SP8007} = \gamma_N \cdot \sigma_{CL}$$



**Figure 3.1** Résultats expérimentaux sous compression axiale utilisés pour la NASA SP8007 (Seide et al., 1960)

Le knockdown factor  $\gamma_N$  qui relie la théorie aux résultats expérimentaux est déterminé à partir d'une limite basse du nuage de points regroupant les essais de la littérature (voir Figure 3.1). Le flambage de coques cylindriques minces étant encore mal compris à l'époque où ces recommandations ont été proposées, la seule solution viable fut alors de se positionner par rapport aux résultats expérimentaux disponibles. Après avoir collecté les données de la littérature et mis de côté les résultats trop bas (suggérant des essais de très mau-

vaise qualité et donc peu pertinents), Seide *et al.* proposent donc le facteur de réduction  $\gamma_N$  suivant :

$$\gamma_N = 1 - 0.901 \cdot \left( 1 - e^{-\left(\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{t}}\right)} \right)$$

Si la géométrie et les caractéristiques du matériau sont telles que la contrainte critique calculée se trouve dans le domaine plastique, alors le facteur de plasticité  $\eta$  doit être incorporé dans le calcul de la contrainte critique :

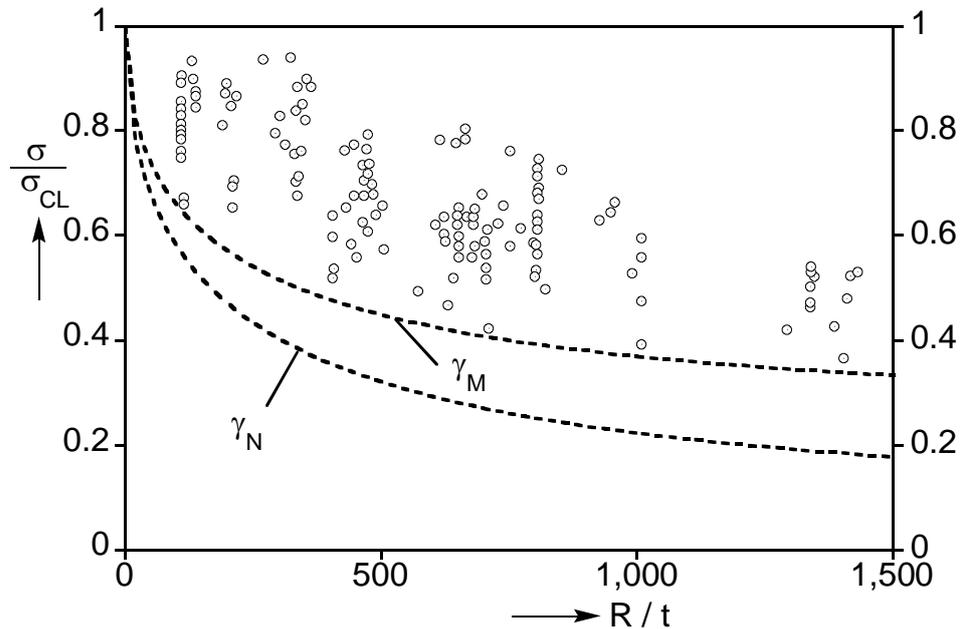
$$\eta = \frac{\sqrt{E_{Sec} E_{Tan}}}{E}$$

### 3.2.12 Flexion

La formulation pour le cas de la flexion est similaire à la compression axiale :

$$\sigma_M^{SP8007} = \gamma_M \cdot \sigma_{CL}$$

Avec  $\gamma_M = 1 - 0.731 \cdot \left( 1 - e^{-\left(\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{t}}\right)} \right)$  pour  $R/t < 1500$



**Figure 3.2** Résultats expérimentaux sous flexion utilisés pour la NASA SP8007 (Seide *et al.*, 1960)

La détermination du knockdown factor est également basée sur les résultats expérimentaux alors disponibles (Figure 3.2) : Seide *et al.* [99], Dow et Peterson [33], Lundquist [67], Suer *et al.* [106], Mossman et Robinson [74], Peterson [77]. Les résultats médiocres de Donnell [31] et de Bruhn [21] furent

omis, étant considérés peu représentatifs (spécimens de mauvaise qualité, plasticité...).

Bien que la contrainte théorique soit la même en compression ou en flexion, on remarque que le facteur de correction est différent, et traduit les contraintes expérimentales plus élevées en flexion.

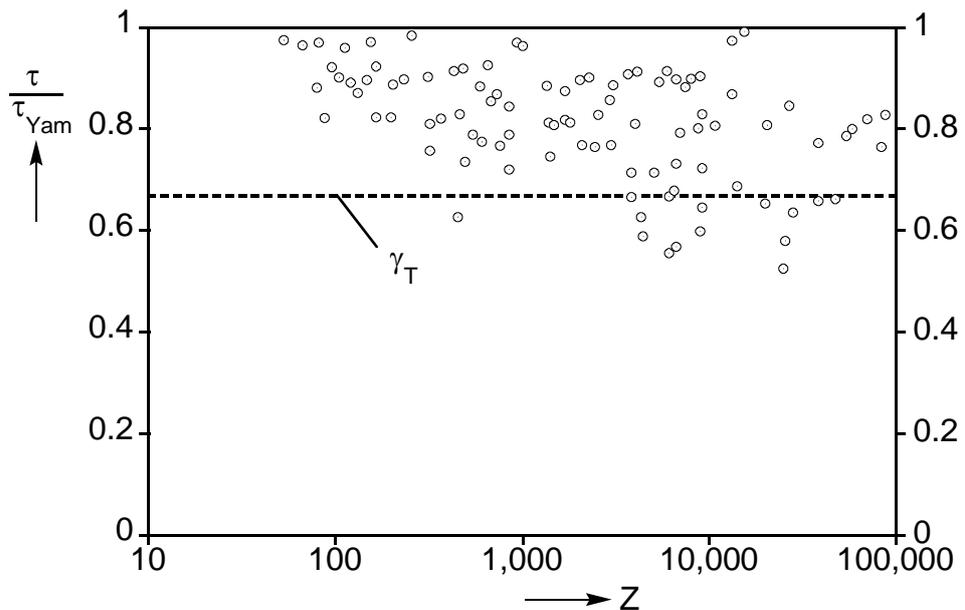
### 3.2.13 Cisaillement

Seul le cas du flambage sous torsion (cisaillement pur) est traité dans la SP8007, nous avons vu cependant que pour des valeurs suffisamment faibles de  $H/R$ , les contraintes critiques en cisaillement par effort tranchant et en torsion sont équivalentes. Une fois de plus, un coefficient est ajouté afin de corriger les résultats expérimentaux :

$$\tau_T^{SP8007} = \gamma_T \cdot \tau_{Yam}$$

Avec  $\gamma_T = 0.67$

On remarque que contrairement aux cas précédents, le facteur de correction est le même quelle que soit la géométrie étudiée (Figure 3.3), ce qui n'est pas justifié d'après les essais de la littérature.



**Figure 3.3** Comparaison entre les résultats expérimentaux sous torsion et le facteur recommandé par la SP8007

Le facteur de plasticité est ici donné par :

$$\eta = \frac{E_{Sec}}{E}$$

### 3.2.14 Coques pressurisées sous compression

Lorsqu'une coque est pressurisée, la charge critique augmente, grâce à deux effets :

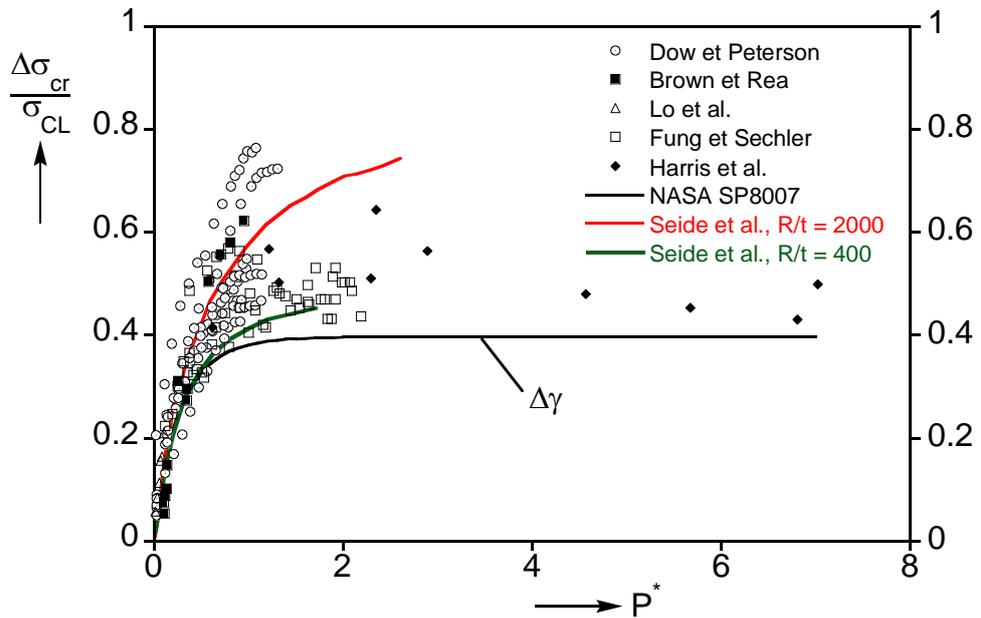
- l'effort de compression doit contrebalancer l'effet des fonds apporté par la pression
- l'effet déstabilisant des défauts est réduit

La contrainte critique d'une coque pressurisée sous compression est donc donnée par :

$$\sigma_N^{SP8007} = (\gamma_N + \Delta\gamma) \cdot \sigma_{CL} + \frac{PR}{2t}$$

Le terme  $PR/2t$  représente l'effet de fonds apporté par la pression. Le terme  $\Delta\gamma$  représente quant à lui l'augmentation de la charge critique avec la pression due à l'effacement des défauts ; il est donné sous forme d'abaque dans la notice, l'expression suivante peut être utilisée :

$$\Delta\gamma = 0.24 \cdot \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \left( 1 - e^{-3 \frac{P}{E} \left( \frac{R}{t} \right)^2} \right)^{0.75}$$



**Figure 3.4** Augmentation de la charge critique sous compression axiale avec la pression interne, résultats expérimentaux et NASA SP8007

En estimant l'augmentation de charge critique avec la pression interne  $\Delta\sigma_{cr}$  à partir des différents résultats expérimentaux disponibles, nous pouvons les comparer au coefficient  $\Delta\gamma$  donné ci-dessus (Figure 3.4). Cette comparaison amène plusieurs remarques. Tout d'abord, le coefficient préconisé par la NASA ne dépend pas de la valeur initiale de  $\gamma_N$  à pression nulle, alors que les

essais de Seide *et al.*, conduits pour différentes valeurs de  $R/t$ , semblent indiquer le contraire. En effet, plus une coque est épaisse (courbe verte,  $R/t = 400$ ), plus le  $\gamma_N$  sera élevé, et moins l'augmentation de charge critique présentera de « marge ». Ainsi, pour des coques plus minces ( $R/t = 2000$ , courbe rouge) présentant une contrainte critique faible à pression nulle, le renforcement n'en pourra qu'être plus important.

De plus, la notice précise que les résultats plus conservatifs de Harris *et al.* [42] ont été retenus pour la règle, ce qui n'est pas justifié. La faible augmentation de la charge critique avec la pression est en effet due à la plasticité et sa prise en compte n'est donc pas pertinente.

### 3.2.15 Coques pressurisées sous flexion

#### 3.2.151 Philosophie

Lorsqu'une coque pressurisée est sollicitée en flexion, la règle précise que les charges de collapse sont souvent bien supérieures aux charges de flambage, comme Seide *et al.* ont pu l'observer lors de leur étude expérimentale. La charge classique peut donc être dépassée grâce à l'effet membrane. La formulation de la contrainte critique est similaire au cas précédent :

$$\sigma_M^{SP8007} = (\gamma_M + \Delta\gamma) \cdot \sigma_{CL} + 0.8 \cdot \frac{PR}{t}$$

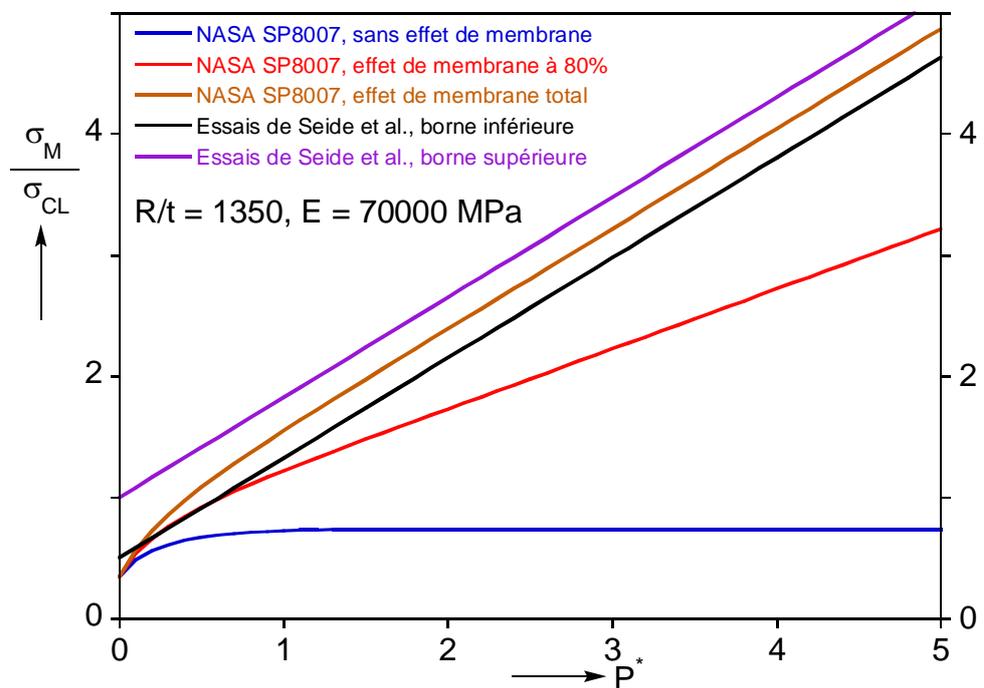
On retrouve donc les termes  $\gamma_M$  et  $\Delta\gamma$ , traduisant respectivement la sensibilité aux défauts géométriques pour une coque non pressurisée sous flexion, et la baisse de cette sensibilité lorsque la pression augmente. On remarque que le premier est propre à la flexion alors que le second est identique en flexion ou compression (puisque'il représente l'effacement des défauts avec la pression). Enfin, le terme  $0.8 \cdot \frac{PR}{t}$  représente le moment de collapse d'un cylindre membranaire, pondéré à 80%.

#### 3.2.152 Analyse de la formulation

De manière à bien appréhender l'apport de l'effet membrane, nous avons tracé ci-dessous l'évolution de la contrainte de dimensionnement en fonction de la pression interne appliquée :

- sans considérer l'effet membrane, soit  $0.5 \cdot \frac{PR}{t}$  ;
- avec la prise en compte partielle de cet effet, conformément à la règle SP8007, i.e.  $0.8 \cdot \frac{PR}{t}$  ;
- avec la prise en compte complète de cet effet ( $PR/t$ ), c'est-à-dire sans limitation des grandes déformations.

Afin de mieux pouvoir appréhender l'importance de l'effet membrane pour le dimensionnement, ces 3 courbes sont tracées en Figure 3.5 pour  $R/t = 1350$  et  $E = 70000$  MPa, avec le fuseau des résultats expérimentaux de Seide *et al.* D'importants écarts existent selon que l'effet membrane est absent, partiellement ou complètement pris en compte, et c'est donc cet effet qui sera déterminant pour la contrainte de dimensionnement. La limite basse des essais a probablement constitué la référence sur laquelle a été formulée la SP8007 pour les pressions internes élevées. Le fait de n'avoir retenu pour la règle qu'une fraction (80%) de l'effet membrane est purement arbitraire ; ce coefficient permet de conserver une marge significative par rapport au risque de collapse et de limiter également les grandes déformations qui peuvent se développer juste avant le collapse.



**Figure 3.5** Influence de l'effet membrane et comparaison aux résultats de Seide et al.

### 3.2.153 Prise en compte de la plasticité

Dans le cas de plastification du matériau, que ce soit en flexion ou compression, la règle propose une correction uniquement sur le terme  $(\gamma + \Delta\gamma) \cdot \sigma_{CL}$  dans lequel le module d'Young  $E$  est remplacé par  $\sqrt{E_S E_T}$  (racine du produit du module sécant et du module tangent). Cependant, en étudiant la contribution des différents facteurs à la contrainte de dimensionnement (effet des défauts, effet de la pression, effet membrane), on remarque que l'effet membrane devient vite le facteur prédominant lorsque la pression augmente.

Les termes sur lesquels la correction plastique est appliquée ne représentent donc qu'une petite partie de la contrainte de dimensionnement, et la

règle risque donc d'être mise en défaut dans le cas de plastification du matériau. Cette correction a en effet été formulée de façon à répondre au cas du flambage plastique dans le cas d'un chargement « pur » (compression axiale ou flexion). Dans le cas où la plastification est induite par la pressurisation, le critère utilisé n'est pas approprié : la contrainte équivalente de Von Mises est estimée en zone courante, alors que le collapse intervient pourtant systématiquement au voisinage des conditions aux limites ou des singularités (trottoirs de soudage, changement d'épaisseur...).

### 3.2.16 Interaction entre flexion et compression

La SP8007 propose une interaction linéaire entre les deux chargements, ce qui paraît justifié au vu des études effectuées.

## 3.2.2 Eurocode 3 [5]

En 1990, la CEE a décidé de confier au Comité Européen de Normalisation (CEN) la rédaction des Eurocodes, normes européennes de conception, de dimensionnement et de justification des structures de bâtiment et de génie civil. L'Eurocode 3 concerne le calcul des structures en acier, et contient donc une partie sur la stabilité des structures coque. Outre des normes de dimensionnement proposées à partir de simulations numériques (contrairement à la NASA SP8007 et d'autres règles dont le fondement est purement empirique), des recommandations sont données quant à la réalisation de simulations numériques de flambage (nous ne détaillerons pas ces méthodes ici).

Le flambage, ou « état limite de voilement » dans la notice, est défini comme celui où des déplacements importants surviennent soudainement dans tout ou partie de la structure perpendiculairement à la surface de la coque, en raison d'une perte de stabilité sous l'effet de contraintes de compression de membrane ou de cisaillement de membrane exercées dans la paroi de coque, entraînant une incapacité de supporter toute augmentation des sollicitations, risquant de provoquer une ruine catastrophique.

### 3.2.21 Compression axiale ou flexion

D'après la définition du flambage ci-dessus, aucune distinction n'est faite entre des chargements de flexion et de compression axiale, résultant tous les deux en un état de contrainte de compression. Pour les coques de longueur moyenne que nous étudions, la contrainte de dimensionnement est donnée par :

$$\sigma_{N/M}^{EC3} = \frac{\alpha_x}{\gamma_M} \cdot \sigma_{CL}$$

Avec  $\alpha_x$  : facteur d'imperfection élastique méridienne  
 $\gamma_M$  : coefficient partiel pour la résistance (facteur de sécurité)

On remarque une fois de plus le facteur de correction  $\alpha_x$  venant pondérer la contrainte classique théorique afin de mieux coller aux résultats expé-

rimentaux. Contrairement à la SP8007 cependant, ce coefficient dépend de la qualité de la structure. Trois classes de qualité sont définies, correspondant à des amplitudes maximales de défaut  $\Delta w_0$  tolérées sur la structure :

Classe de qualité	Description	Q	$\Delta w_0 / t$ en tout point	$\Delta w_0 / t$ sur une jonction soudée
Classe A	Excellente	40	$\leq 0.024 \cdot \sqrt{R/t}$	$\leq 0.15$
Classe B	Elevée	25	$\leq 0.040 \cdot \sqrt{R/t}$	$\leq 0.25$
Classe C	Normale	16	$\leq 0.064 \cdot \sqrt{R/t}$	$\leq 0.40$

**Tableau 3.1** Classes de qualité Eurocode, cas de la compression

- Le facteur d'imperfection élastique  $\alpha_x$  est ensuite donné par :

$$\alpha_x = \frac{0.62}{1 + 1.91 \cdot \left( \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{R}{t}} \right)^{1.44}}$$

- De plus, l'Eurocode recommande de prendre un facteur de sécurité  $\gamma_M$  égal à 1.1.

### 3.2.22 Cisaillement

Encore une fois, la méthode d'application de la contrainte de cisaillement n'est pas primordiale, la torsion et le cisaillement par effort tranchant ne sont pas différenciés:

$$\tau_T^{EC3} = \frac{\alpha_T}{\gamma_M} \cdot \tau_{Yam}$$

Le coefficient  $\alpha_T$  dépend de la qualité de la coque, les différentes valeurs sont reportées dans le tableau ci-dessous:

Classe de qualité	Description	$\alpha_T$	$\Delta w_0 / t$ en tout point	$\Delta w_0 / t$ sur une jonction soudée
Classe A	Excellente	0.75	$\leq 0.0138 \cdot \left( \frac{L^2}{Rt} \right)^{1/4} \cdot \sqrt{R/t}$	$\leq 0.15$
Classe B	Elevée	0.65	$\leq 0.0230 \cdot \left( \frac{L^2}{Rt} \right)^{1/4} \cdot \sqrt{R/t}$	$\leq 0.25$
Classe C	Normale	0.5	$\leq 0.0368 \cdot \left( \frac{L^2}{Rt} \right)^{1/4} \cdot \sqrt{R/t}$	$\leq 0.40$

**Tableau 3.2** Classes de qualité Eurocode, cas du cisaillement

On remarque que l'amplitude maximale des défauts pour chaque classe est également fonction de la longueur de la coque, ce qui est somme toute logique puisque les modes de flambage en cisaillement dépendent de cette dimension.

Le facteur de sécurité  $\gamma_M$  est lui le même que dans le cas précédent, égal à 1.1.

### 3.2.23 Influence de la pression interne

Avec la pression interne, la sensibilité aux défauts diminue, et la contrainte critique évolue, de sa valeur initiale sans pression vers la contrainte classique :

$$\sigma_{N/M}^{EC3} = \frac{\alpha_{xpe}}{\gamma_M} \cdot \sigma_{CL} + \frac{PR}{2t}$$

$$\text{avec : } \alpha_{xpe} = \alpha_x + (1 - \alpha_x) \cdot \left( \frac{\bar{p}}{\bar{p} + \frac{0.3}{\sqrt{\alpha_x}}} \right)$$

$$\bar{p} = \frac{PR}{t \cdot \sigma_{CL}}$$

Le coefficient  $\alpha_{xpe}$  a été calculé à partir de simulations numériques sur des coques présentant un défaut axisymétrique, de différentes amplitudes et longueurs d'onde ([86], [88], [107]). Contrairement à la SP8007, le gain de charge apporté par la pression interne est fonction des défauts initiaux, ce qui paraît plus approprié au vu des études réalisées sur le sujet.

De plus, le dimensionnement s'effectuant au flambage et non au col-lapse, l'effet membrane n'est pas pris en compte en flexion.

### 3.2.24 Problèmes d'interaction

Comme nous avons pu le voir, l'Eurocode présente le problème du flambage du point de vue des contraintes, et non des chargements. Ainsi, il n'y a pas de différence entre un chargement de compression ou de flexion, qui créent chacun une contrainte de compression au sein de la structure.

Lorsque la coque est soumise à ces deux sollicitations simultanément, il suffit alors que la somme des contraintes produites soit inférieure à la contrainte de dimensionnement :

$$\frac{\sigma_{Ncr} + \sigma_{Mcr}}{\sigma_{N/M}^{EC3}} = 1$$

Lorsque les chargements appliqués combinent les contraintes de compression et de cisaillement, l'interaction prend la forme suivante :

$$\left( \frac{\sigma_{Ncr} + \sigma_{Mcr}}{\sigma_{N/M}^{EC3}} \right)^{1.25} + \left( \frac{\tau_{Tcr}}{\tau_T^{EC3}} \right)^2 = 1$$

### 3.2.25 Plasticité

L'Eurocode 3 prend en compte la plasticité « régulière », en zone courante, qui est liée aux propriétés du matériau ainsi qu'à l'épaisseur de la coque ; mais également les plastifications pouvant avoir lieu à proximité des conditions aux limites lorsque la pression interne est importante.

#### 3.2.251 En zone courante

La norme propose de calculer la contrainte critique en fonction du domaine dans lequel le flambage va se produire (élastique, élasto-plastique ou purement plastique, Figure 3.6):

$$\sigma_{N/M}^{EC3} = \frac{\chi_x \cdot \sigma_Y}{\gamma_M} \quad \text{et} \quad \tau_T^{EC3} = \frac{\chi_\tau \cdot \sigma_Y}{\sqrt{3} \cdot \gamma_M}$$

La valeur de  $\chi$  dépend du type de flambage, ainsi :

$$\begin{aligned} \chi &= 1 && \text{lorsque } \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_0 \text{ (plastique)} \\ \chi &= 1 - \beta \left( \frac{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_0} \right)^\eta && \text{lorsque } \bar{\lambda}_0 < \bar{\lambda} < \bar{\lambda}_p \text{ (élasto-plastique)} \\ \chi &= \frac{\alpha}{\bar{\lambda}^2} && \text{lorsque } \bar{\lambda}_p \leq \bar{\lambda} \text{ (élastique)} \end{aligned}$$

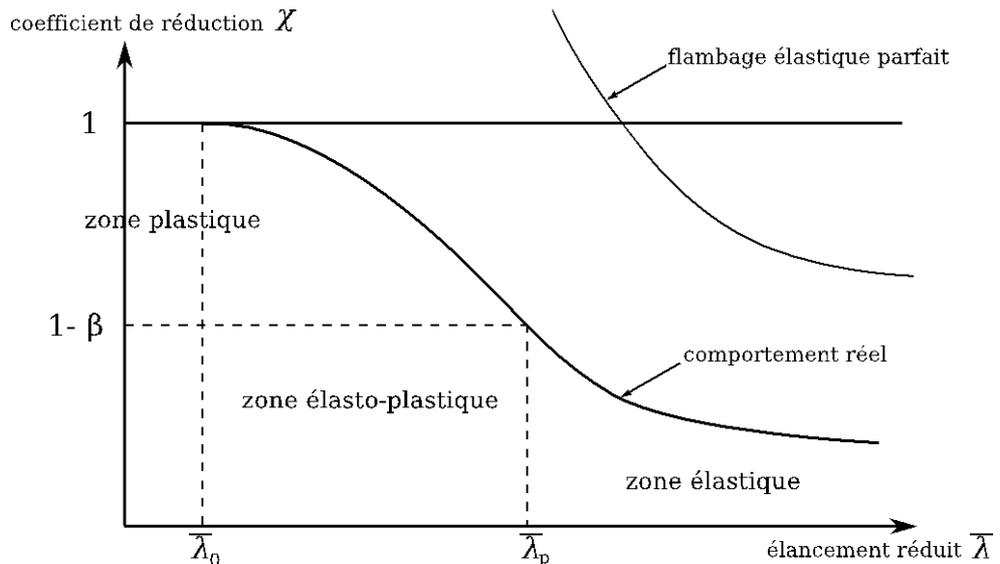


Figure 3.6 Caractérisation du comportement de coques au flambage (Rotter, 2006)

Les différents paramètres sont ensuite donnés par :

- $\bar{\lambda}_p = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta}}$  : l'élancement relatif à la limite plastique
- $\bar{\lambda}$  : le paramètre d'élancement réduit (en compression :  $\bar{\lambda}_x = \sqrt{\frac{\sigma_Y}{\sigma_{CL}}}$ ,  
en cisaillement :  $\bar{\lambda}_\tau = \sqrt{\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3} \cdot \tau_{Yam}}}$  ; avec  $\sigma_Y$  : la contrainte de plasti-  
fication ( $\sigma_L$  ou  $\sigma_{0.2}$ ))
- $\bar{\lambda}_0$  : l'élancement limite d'affaissement méridien (en compression :  $\bar{\lambda}_{0x} = 0.2$ , en cisaillement :  $\bar{\lambda}_{0\tau} = 0.4$ )
- $\beta$  : le facteur de domaine plastique ( $\beta = 0.6$  dans les deux cas)
- $\eta$  : l'exposant d'interaction ( $\eta = 1$  dans les deux cas)

Notons que dans le domaine élastique, on retrouve bien les relations proposées précédemment :

$$\sigma_{N/M}^{EC3} = \frac{\alpha_x}{\gamma_M} \cdot \sigma_{CL} \quad \text{et} \quad \tau_T^{EC3} = \frac{\alpha_T}{\gamma_M} \cdot \tau_{Yam}$$

### 3.2.252 Plastification due à la pression interne

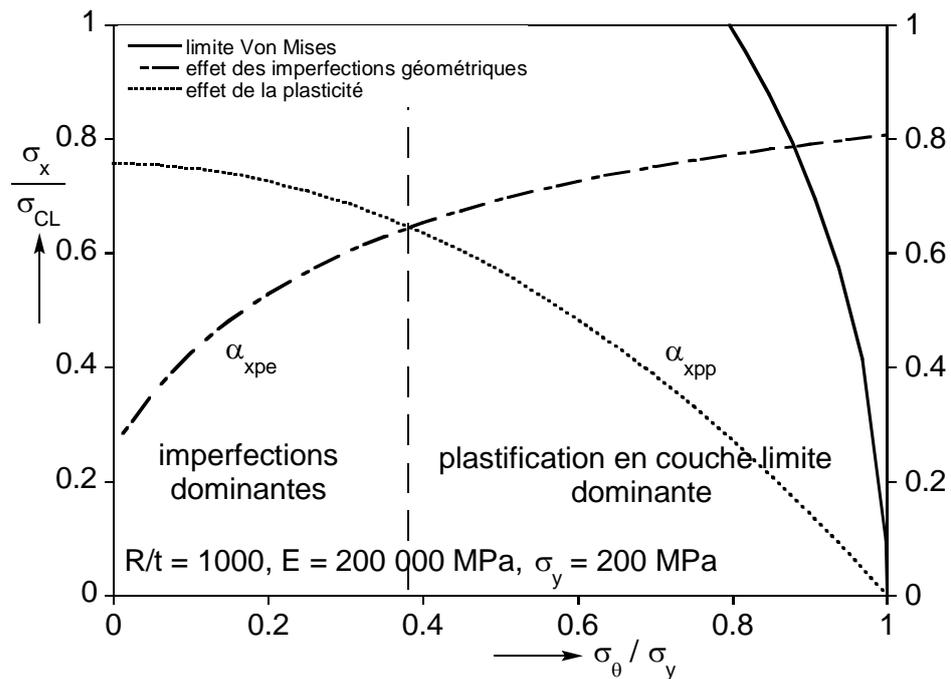
Comme nous avons pu le voir, une pressurisation importante peut être pénalisante pour le flambage, et provoquer l'effondrement prématuré de la structure en adoptant un mode en patte d'éléphant. Les niveaux de contraintes en zone courante associés à ce type d'instabilité sont souvent bien plus bas que l'enveloppe de plasticité de Von Mises, à cause de la localisation des déformations près des conditions aux limites ou singularités. C'est pourquoi la méthode précédente (ainsi que celle préconisée dans la NASA SP8007) n'est pas pertinente pour prévenir ce genre de problème.

La formule du coefficient de déstabilisation plastique a été proposée par Rotter [87] d'après des résultats de simulations numériques :

$$\alpha_{xpp} = \left(1 - \frac{\bar{p}^2}{\bar{\lambda}_x^4}\right) \left(1 - \frac{1}{1.12 + s^{3/2}}\right) \left(\frac{s^2 + 1.21\bar{\lambda}_x^2}{s(s+1)}\right)$$

$$\text{avec } s = \frac{R}{400 \cdot t}$$

Ce coefficient doit être pris en compte s'il est inférieur au coefficient de stabilisation élastique  $\alpha_{xpe}$  présenté précédemment. La Figure 3.7 permet de comparer les deux coefficients ainsi que la limite de plasticité selon Von Mises. Les valeurs des différents paramètres retenues pour cet exemple sont indiquées sur la figure.



**Figure 3.7** Comparaison des facteurs de réduction liés à la pression interne

### 3.3 Comparaison des deux normes

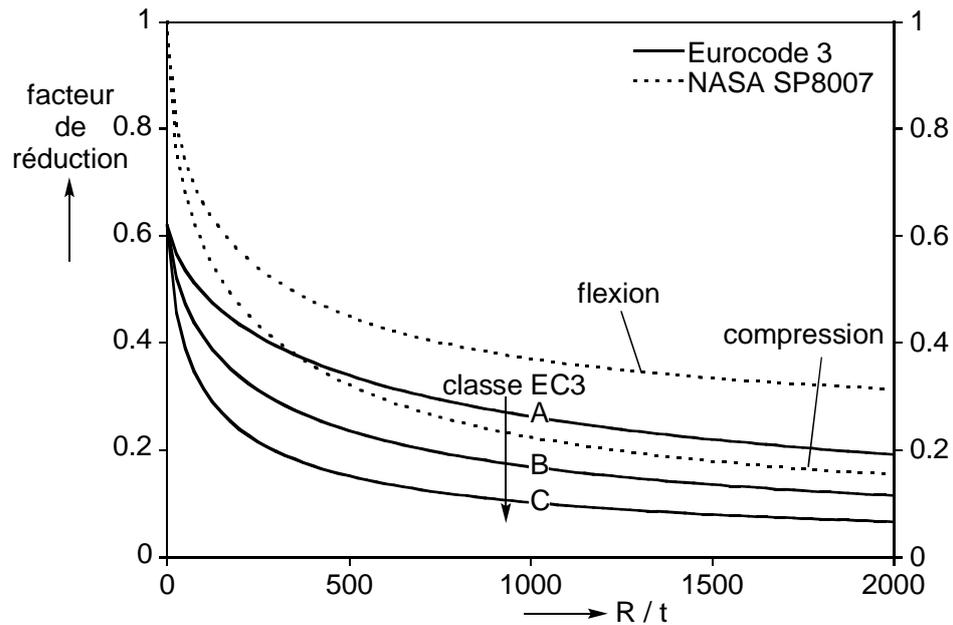
Nous avons vu que la NASA SP8007 et l'Eurocode 3 n'avaient pas été construites de la même manière, c'est pourquoi il est intéressant de comparer leurs résultats pour les différents types de chargement.

#### 3.3.1 En compression ou flexion seule

Les facteurs de corrélation des deux règles pour les cas de la compression axiale et de la flexion sont présentés en Figure 3.8. Nous rappelons que l'Eurocode ne différencie pas ces deux chargements.

En compression, on constate que les valeurs données par la NASA SP8007 sont légèrement en dessous de la classe A de l'Eurocode (coque d'excellente qualité) pour la plage de  $R/t$  qui nous concerne ( $250 < R/t < 1500$ ). Ceci confirme que les résultats trop bas ont été écartés pour l'élaboration de la SP8007, ne considérant ainsi que les essais de qualité suffisamment bonne.

En flexion par contre, le facteur donné par la NASA est bien au-dessus de l'Eurocode, quelle que soit la classe de qualité considérée. En effet, la SP8007 tient compte des charges expérimentales plus élevées en flexion, alors que l'Eurocode considère que les deux chargements sont équivalents.



**Figure 3.8** Comparaison des facteurs de réduction de la NASA SP8007 et de l'Eurocode 3 en flexion ou compression

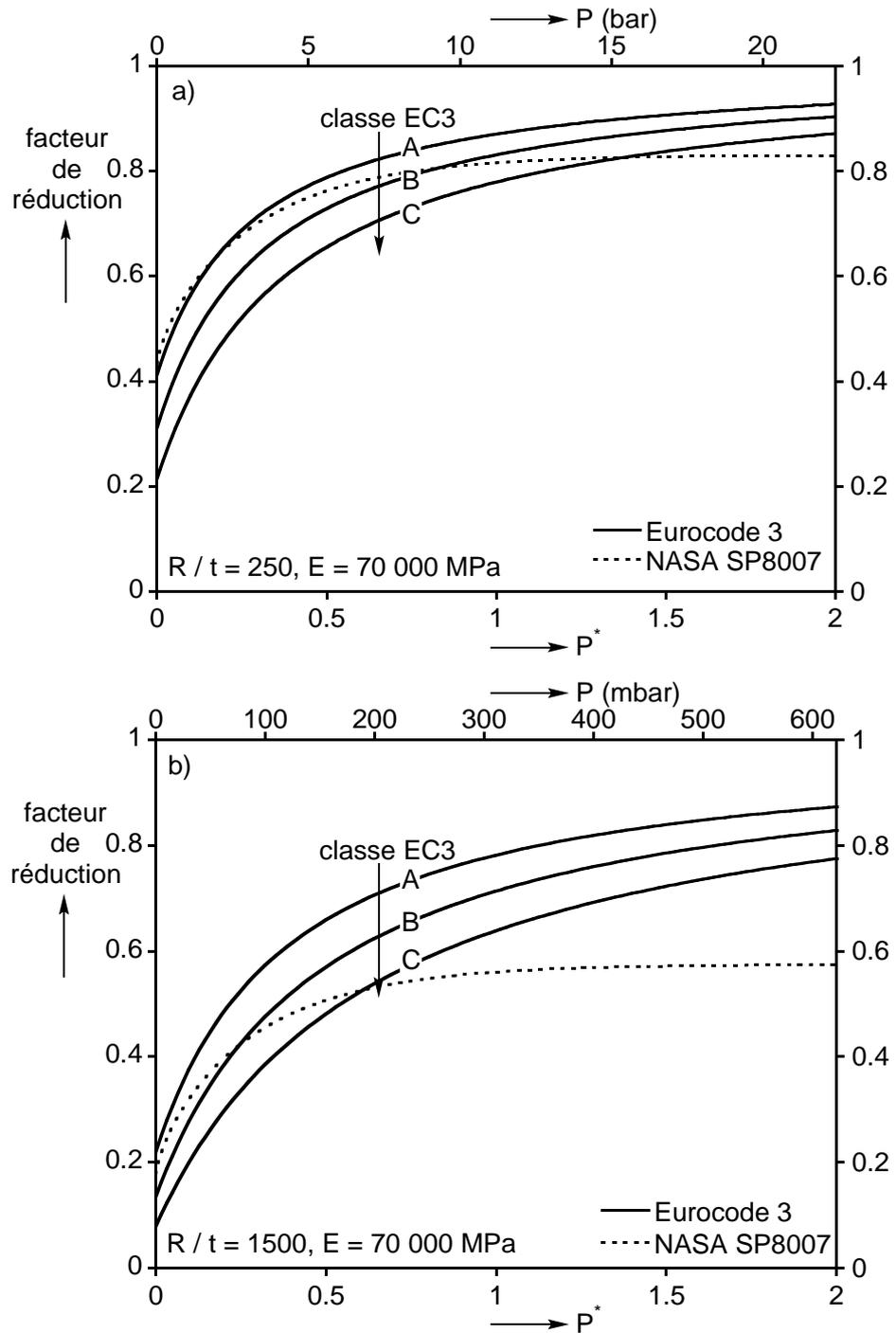
### 3.3.2 En cisaillement

La comparaison des deux normes en cisaillement est simple, puisque les deux normes introduisent un facteur de réduction qui ne dépend pas de la géométrie étudiée. Ainsi, le coefficient de 0.67 appliqué dans la SP8007 correspond à peu près à la classe de qualité B dans l'Eurocode ( $\alpha_T = 0.65$ ). Si l'on considère les coques aérospatiales de qualité excellente (classe A), alors le coefficient est de 0.75 pour l'Eurocode.

### 3.3.3 Compression axiale et pression interne

Les deux règles donnent des prédictions très distinctes dans le cas où la compression est combinée à une pressurisation. La Figure 3.9 présente les facteurs de réduction pour deux valeurs de  $R/t$  : 250 et 1500. Le gain de charge critique lorsque la pression augmente est plus rapide dans le cas de l'Eurocode, qui propose, pour des pressions élevées, des charges proches de la charge classique.

Le problème est que le gain donné par la SP8007 ne dépend pas du knock-down factor initial. Ainsi, pour  $R/t = 250$ , le coefficient initial est proche de 0.44, pour atteindre une valeur maximale de 0.83, ce qui est somme toute assez proche de la contrainte classique et de l'Eurocode 3. Lorsque  $R/t$  est égal à 1500 par contre, le coefficient initial est très bas (0.18) pour atteindre un maximum de 0.58, créant ainsi une différence considérable avec l'Eurocode 3 qui donne des facteurs augmentant jusqu'à 0.8 environ.

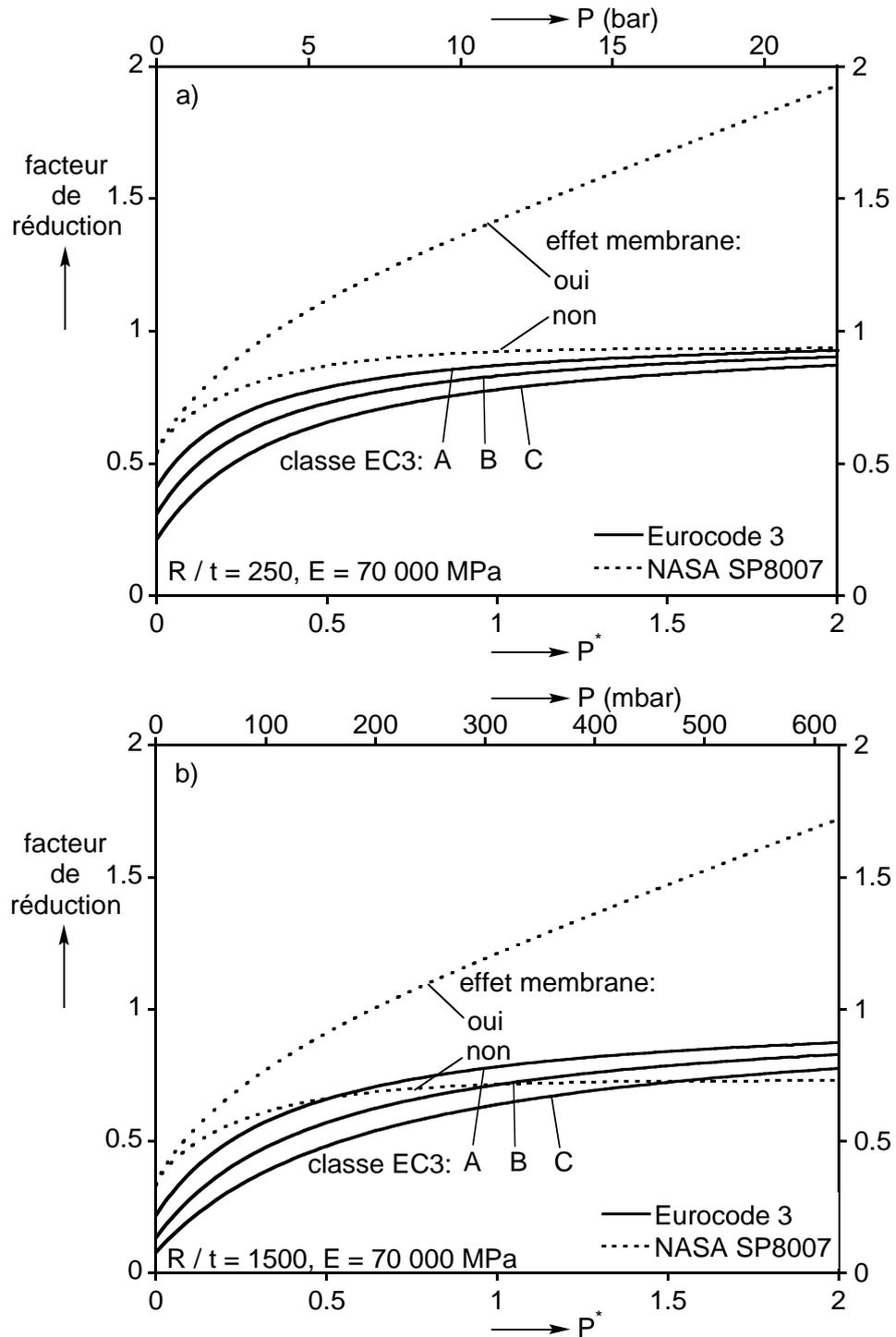


**Figure 3.9** Comparaison des facteurs de réduction de la NASA SP8007 et de l'Eurocode 3 en compression et pression interne, a) :  $R/t = 250$ , b) :  $R/t = 1500$

### 3.3.4 Flexion et pression interne

Les tendances sont différentes dans ce cas (Figure 3.10). En effet, le facteur de knock-down défini dans la règle de la NASA spécifiquement pour le cas de la flexion entraîne une contrainte critique à pression nulle plus élevée que celle donnée par l'Eurocode. Le gain avec la pression pour la SP8007 reste en re-

vanche limité, et pour des pressions suffisamment élevées les estimations de l'Eurocode redeviennent supérieures, surtout pour des valeurs importantes de  $R/t$ . La prise en compte de l'effet de membrane dans la NASA SP8007 change considérablement les prédictions, mais nous avons vu que ce gain de charge s'effectuait au prix de déformations très importantes.



**Figure 3.10** Comparaison des facteurs de réduction de la NASA SP8007 et de l'Eurocode 3 en flexion et pression interne, a) :  $R/t = 250$ , b) :  $R/t = 1500$

### 3.4 Etablir de nouvelles recommandations

Après avoir passé en revue les principales études concernant le flambage de coques minces, il est clair que le dimensionnement de telles structures n'est pas aisé. Les normes que nous venons de décrire présentent chacune des éléments pouvant être perfectionnés afin de garantir un dimensionnement le plus juste possible. Le but de ce projet étant précisément d'améliorer le dimensionnement des réservoirs de l'EPC d'Ariane 5, nous nous baserons essentiellement sur la règle de la NASA, destinée aux structures spatiales.

Différentes approches sont possibles dans l'optique de construire des recommandations pour le dimensionnement de coques minces [89] :

- L'établissement de courbes basses empiriques
- La détermination du défaut le plus pénalisant
- L'utilisation d'imperfections réalistes

#### 3.4.1 Courbes basses empiriques

La manière la plus simple et la plus ancienne de prendre en compte la dispersion expérimentale est de considérer simplement la limite basse des résultats. C'est ainsi que la plupart des règles de dimensionnement (comme la NASA SP8007) ont été établies.

Le principal avantage d'une telle méthode est la sécurité du dimensionnement : puisqu'il est basé sur une limite basse d'un grand nombre d'essais, les chances de ruine sont minimales.

D'un autre côté, ceci implique un degré de conservatisme bien souvent important. Les conditions expérimentales ont une influence primordiale sur les résultats, il est donc difficile de comparer des essais sans pouvoir vraiment jauger l'influence des moyens mis en œuvre pour leur réalisation (qualité des spécimens, caractéristiques matériau, conditions aux limites...).

C'est pourquoi l'Eurocode 3 est novateur de ce point de vue : plutôt que de considérer une courbe unique pour tous les essais retenus, l'introduction de la notion de « classe de qualité » dans le dimensionnement permet d'ajuster la contrainte critique en fonction de tolérances dans l'amplitude maximale des imperfections géométriques mesurées. Même cette approche présente des limites, puisqu'elle oblige le fabriquant à effectuer des mesures de géométrie de la structure bien souvent coûteuses.

#### 3.4.2 Identification du défaut le plus pénalisant

Cette approche cherche à identifier le défaut réduisant le plus la charge critique, afin de fournir une contrainte de dimensionnement qui soit sûre. Nous avons vu que les défauts modaux étaient considérés en général comme étant les plus critiques, mais il reste à déterminer quel mode (ou combinaison de modes) fait le plus chuter la charge critique, puis l'amplitude à lui donner. Le problème est donc ici purement numérique.

En théorie, cette méthode présente un avantage certain, puisqu'il serait possible de déterminer la contrainte critique minimale pour toutes sortes de problèmes, à partir d'un modèle éléments finis. Son application pose tout de même quelques difficultés. L'amplitude du défaut doit être définie pour la simulation, mais les défauts présents sur les structures réelles étant souvent bien différents des modes de flambage, l'amplitude à choisir n'apparaît pas de manière logique. Un problème se pose donc du point de vue physique : comment relier les défauts mesurés sur la structure réelle aux défauts introduits dans l'analyse ?

De plus, les défauts critiques variant selon le cas de charge, déterminer une amplitude adéquate pour chaque cas serait prohibitif.

---

### 3.4.3 Prise en compte de défauts réels

Comme nous avons pu le voir, prendre en compte les défauts réellement présents sur la structure permet d'évaluer assez précisément la contrainte critique. Beaucoup d'études ont été menées dans ce sens : comprendre les différents types d'imperfections liées aux processus de fabrication afin de pouvoir les inclure dans les méthodes de dimensionnement.

Les études numériques de Rotter citées précédemment en sont un bon exemple, et essaient de quantifier l'influence de défauts de soudage en s'appuyant sur des campagnes de mesures de silos.

Les méthodes statistiques quant à elles semblent prometteuses, mais nécessitent un effort considérable de campagnes de mesures sur les structures réelles, et pour différentes méthodes de fabrication, avant d'être applicables au dimensionnement de manière sûre.

---

### 3.4.4 Conclusions

Proposer des recommandations pour le dimensionnement de coques minces au flambage est donc pour le moins difficile, puisque chaque méthode présente ses avantages et inconvénients. En ayant pris du recul sur le sujet et examiné attentivement les résultats de la littérature, nous choisissons ici d'utiliser une méthode « hybride » entre les trois citées ci-dessus.

Nous sommes tout d'abord convaincus qu'une large campagne expérimentale reste aujourd'hui nécessaire afin de valider le dimensionnement. Une interprétation rigoureuse des résultats permet non seulement de bien appréhender certains problèmes, mais également de mieux comprendre le déclenchement des instabilités.

Plutôt que de tracer simplement des courbes de contraintes minimales, cette campagne expérimentale servira de validation à des calculs non-linéaires effectués en choisissant un défaut pertinent (suffisamment pénalisant pour être conservatif tout en proposant des améliorations), et dont les résultats constitueront notre nouvelle proposition de dimensionnement.

# Deuxième Partie : Investigations numérique et expérimentale du flambage de coques minces pressurisées sous différents chargements

## 4 Moyens expérimentaux et numériques

### 4.1 Introduction

#### 4.2 Méthodologie expérimentale

- 4.2.1 Fabrication des spécimens
- 4.2.2 Caractéristiques des spécimens
- 4.2.3 Mesure de la géométrie
- 4.2.4 Bancs d'essais

#### 4.3 Méthodes numériques

- 4.3.1 Éléments finis
- 4.3.2 Méthodologies de calcul

---

### 4.1 Introduction

Face aux difficultés éprouvées par les scientifiques sur le sujet du flambage de coques depuis plusieurs décennies, nous avons donc choisi pour l'établissement de nouvelles recommandations pour le dimensionnement de coques minces au flambage, d'allier expérimentation et simulation numérique. Avec l'avènement de l'informatique, certains s'interrogent encore sur la nécessité d'effectuer des essais, souvent bien coûteux en temps et en argent. Notre étude bibliographique montre cependant que les simulations ne peuvent être pertinentes et percutantes que lorsqu'elles vont de pair avec des résultats expérimentaux et appuient une connaissance de la phénoménologie déjà bien approfondie, mais elles restent bien entendu essentielles afin de pouvoir étudier l'effet des différents paramètres entrant en jeu. Nous présentons dans ce chapitre les moyens aussi bien expérimentaux que numériques dont nous avons disposé pour mener à bien cette étude.

---

### 4.2 Méthodologie expérimentale

Le flambage de coques minces est étudié depuis de nombreuses années au LGCIE, qui possède donc les outils et l'expérience nécessaires afin de réaliser des campagnes expérimentales représentatives. Nous détaillons ici les différentes étapes nécessaires à la réalisation d'un essai.

---

#### 4.2.1 Fabrication des spécimens

##### 4.2.1.1 *Electrodéposition de cuivre*

Afin de pouvoir tester des coques axisymétriques (sans soudure ou joint quelconques) et quasi-parfaites, un procédé de fabrication par électrodéposition a été introduit notamment par Babcock à Caltech [10]. Au LGCIE, cette méthode a été étendue à la fabrication de coques raidies par Limam [60].

Le principe consiste à déposer du cuivre sur une empreinte en aluminium dans un bain électrolytique. L'empreinte est obtenue par usinage d'un tube aluminium et comporte aux extrémités deux frettes en acier inoxydable. Après passage dans le bain électrolytique durant le temps nécessaire à l'obten-

tion de l'épaisseur de peau souhaitée, le spécimen est placé dans un bain de soude, qui dissout la partie en aluminium.

Une quarantaine de coques ont été fabriquées de cette manière lors de différentes thèses, permettant de mettre en évidence les charges critiques élevées pouvant être atteintes lorsque la structure est de bonne qualité. L'obtention de spécimens par électrodeposition de cuivre s'est cependant révélée au cours des années relativement lourde à mettre en place et coûteuse. De plus elle ne permet pas de faire varier les caractéristiques du matériau de façon aisée. Ces inconvénients devenant fortement pénalisants dans l'optique d'une campagne expérimentale extensive, nous avons préféré opter pour une méthode plus robuste et facile à mettre en place : la fabrication de coques roulées-collées à partir de feuillards métalliques.

#### 4.2.1.2 Coques roulées-collées

Cette méthode a déjà été utilisée par plusieurs expérimentateurs, notamment sur les coques en Mylar. Son grand avantage est qu'elle est rapide à mettre en place, et permet de changer facilement le matériau et l'épaisseur de la structure avec une bonne homogénéité des caractéristiques. La contrainte principale reste la qualité médiocre des spécimens, ce qui n'est pas vraiment préjudiciable étant donné notre objectif, comme nous le verrons par la suite. La présence d'un joint de recouvrement rend la coque non axisymétrique, ce qui pourra venir perturber l'essai dans certains cas.

La méthodologie de fabrication comporte plusieurs étapes, détaillées ci-dessous (Figure 4.1) :

- Les feuillards nous sont livrés par rouleaux de 10 mètres de longueur. Sur une surface plane nettoyée au préalable, le feuillard métallique est déroulé puis découpé à l'aide d'un cutter, aux cotes suivantes :
  - Hauteur : 270 mm + 2 × 20 mm de recouvrement
  - Longueur : 840 mm + 20 mm de recouvrement
- Les recouvrements horizontaux et le recouvrement vertical du feuillard ainsi que la partie des frettes où la coque va être collée sont ébavurés puis nettoyés avec de l'acétone afin de faciliter l'adhérence du métal.
- Chaque spécimen est muni de deux frettes cylindriques en acier qui serviront à assurer les conditions aux limites ainsi que la diffusion des efforts appliqués. Les frettes, destinées à être positionnées aux extrémités de la coque, sont mises en place sur un gabarit en aluminium. Quatre barres métalliques usinées placées à l'intérieur du gabarit assurent le parallélisme et la bonne distance entre les frettes. L'ensemble est ensuite positionné sur un assemblage permettant sa libre rotation autour de l'axe central.
- Une colle bi-composant est préparée puis placée sur les frettes. Le feuillard est alors progressivement enroulé, le collage étant réalisé au fur et à mesure. Il est impératif de bien appuyer continuellement sur les

parties collées pour éviter toute formation de trous qui créeraient une discontinuité des conditions aux limites et aurait une influence néfaste sur les résultats expérimentaux.

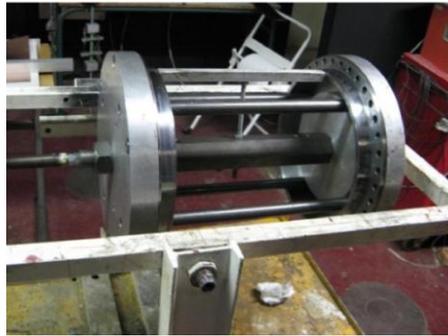
- Une fois le collage au niveau des frettes terminé, on assemble (toujours par collage) le joint vertical. Les restes de colle sont enlevés à l'aide d'acétone.
- Une fois la colle polymérisée (100% de l'adhérence atteints en 24h), la coque est retirée du gabarit. Pour assurer l'étanchéité de la coque lors de la mise sous pression interne, un joint de silicone est réalisé sur la partie intérieure du joint vertical et au niveau des conditions aux limites (jonction coque-frettes). La coque est alors prête à être testée.



a)



b)



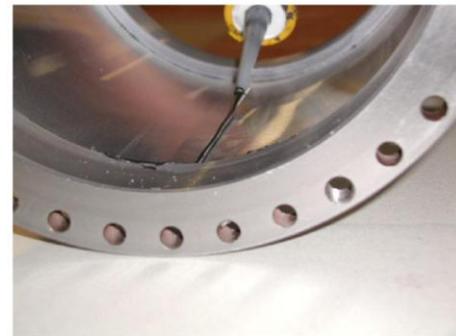
c)



d)



e)



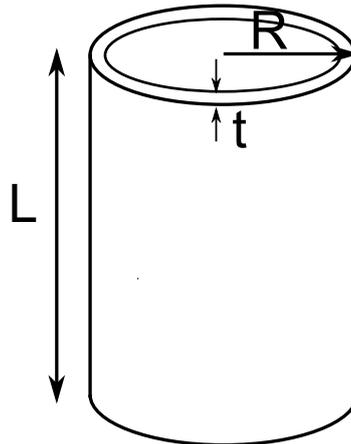
f)

**Figure 4.1** Fabrication des coques « roulées-collées »

#### 4.2.2 Caractéristiques des spécimens

Nous avons été amenés au cours de notre campagne expérimentale à tester des spécimens ayant des dimensions nominales variables (Figure 4.2) :

- $R = 135 \text{ mm}$
- $L = 135 \text{ ou } 270 \text{ mm}$
- $t = 0.1, 0.15, 0.2 \text{ ou } 0.3 \text{ mm}$



**Figure 4.2** Coque cylindrique mince

Afin d'étudier l'effet des caractéristiques géométriques (épaisseur) et matériau (module d'Young, limite élastique...), différents types de feuillards métalliques ont été utilisés, ils sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

matériau	épaisseur nominale (mm)			
	0.1	0.15	0.2	0.3
acier	x			
aluminium			x	
cuivre	x	x	x	x

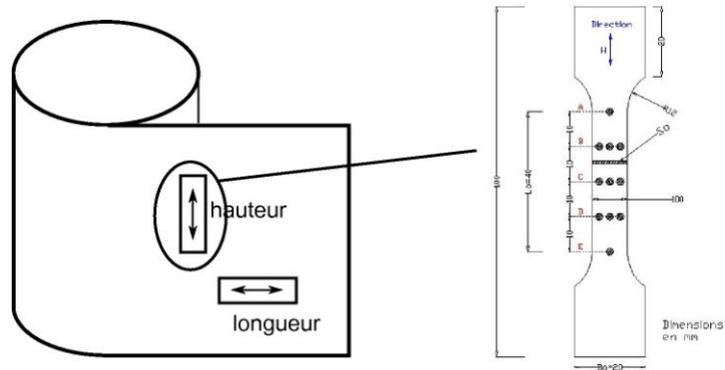
**Tableau 4.1** Feuillards utilisés pour la fabrication des coques

Afin de bien interpréter les résultats expérimentaux, une connaissance précise des différentes grandeurs intervenant dans le calcul de la contrainte critique est nécessaire.

##### 4.2.2.1 Caractérisation du matériau

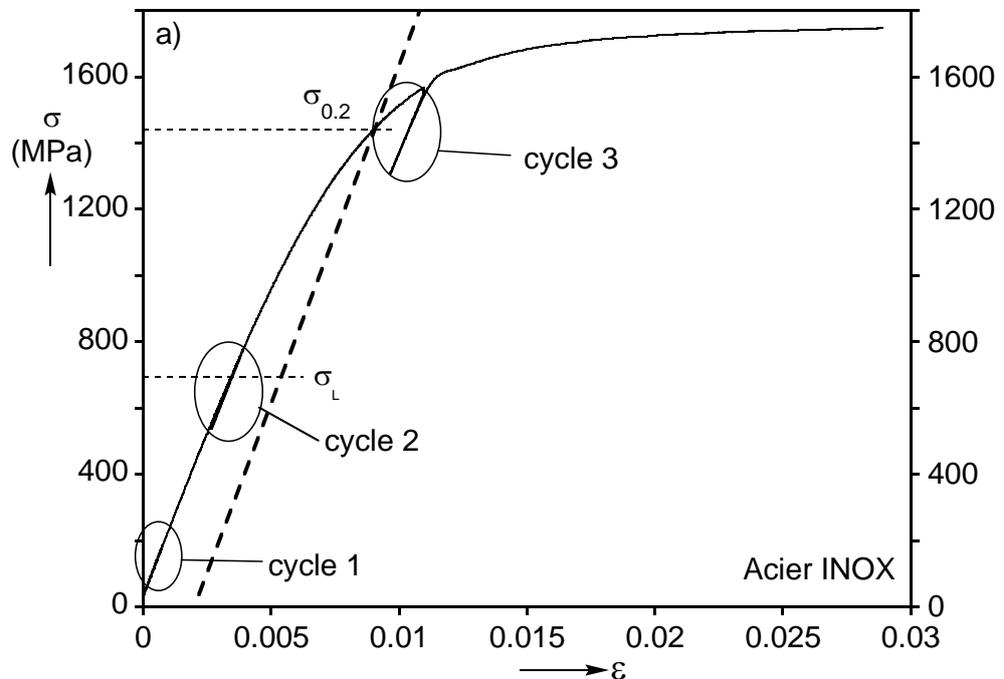
Des éprouvettes de traction ont été systématiquement prélevées dans chaque feuillard, dans les deux directions (Figure 4.3). Après avoir mesuré la section en plusieurs points, une jauge de déformation est collée au centre de l'éprouvette. Les essais de traction sont réalisés sur une presse électro-

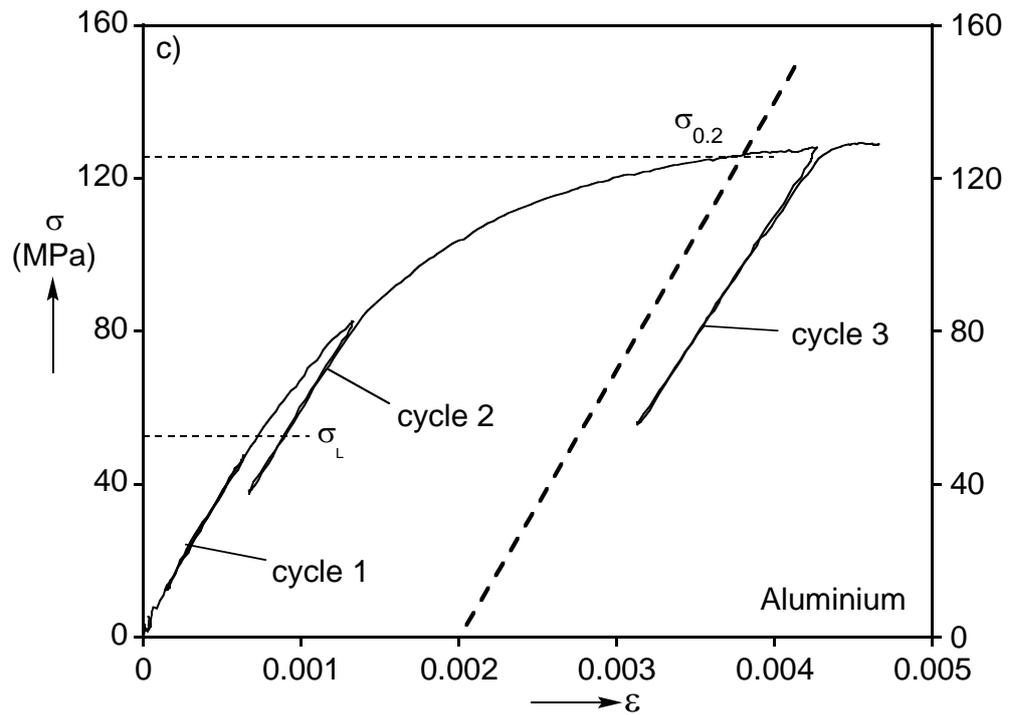
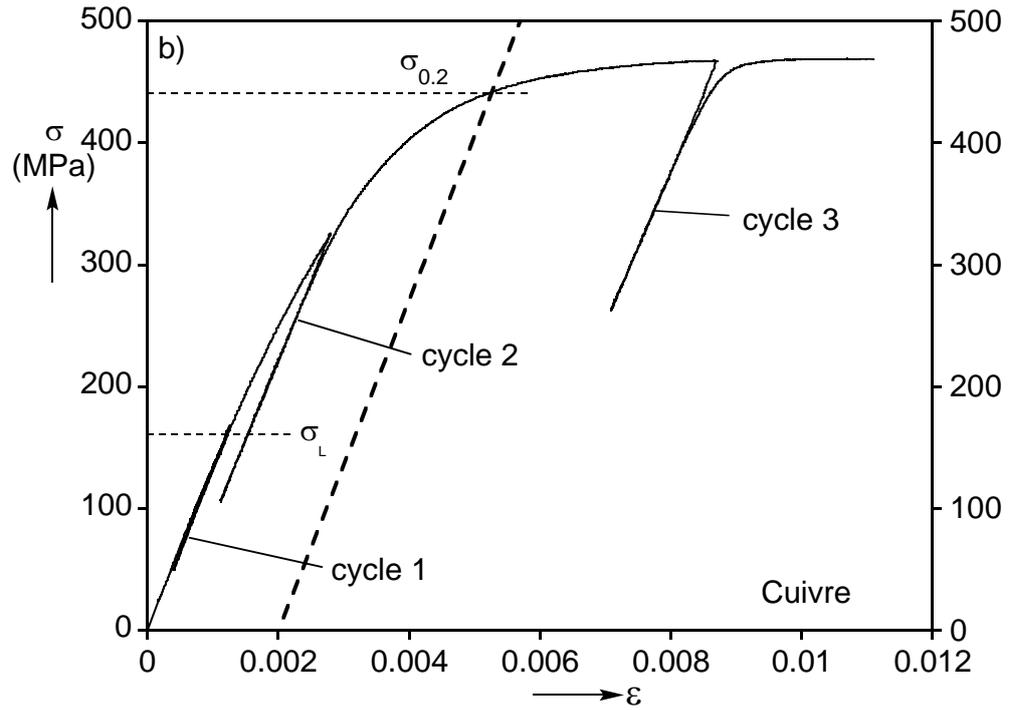
mécanique, avec une vitesse de déformation  $\dot{\epsilon} = 10^{-4} / s$ . Des cycles de chargement sont effectués afin de pouvoir mesurer le module d'Young avec la meilleure précision possible.



**Figure 4.3** Eprouvettes de traction

Des courbes obtenues pour l'acier, le cuivre et l'aluminium sont présentées en Figure 4.4, et mettent en évidence les comportements sensiblement différents des trois matériaux : l'acier présente une limite de linéarité (proche de 800 MPa) très haute comparée au cuivre (160 MPa) ou encore l'aluminium, qui atteint très vite le régime plastique (60 MPa). Une vingtaine de points tirés de ces courbes sont reportés dans le tableau 4.2





**Figure 4.4** Lois de comportement : a) Acier INOX, b) Cuivre, c) Aluminium

Acier		Cuivre		Aluminium	
$\sigma$ (MPa)	$\varepsilon$ (%)	$\sigma$ (MPa)	$\varepsilon$ (%)	$\sigma$ (MPa)	$\varepsilon$ (%)
476.5	0.2317	160.95	0.12334	60.211	0.085
833.27	0.43443	174.12	0.13456	63.633	0.08880
925.79	0.49235	187.21	0.14577	65.5	0.09230
1013.3	0.55028	200.01	0.15698	70.909	0.10278
1134.7	0.63716	237.04	0.19062	74.396	0.10977
1242.8	0.72405	271.4	0.22426	79.239	0.12025
1391.2	0.86886	302.76	0.2579	83.732	0.13073
1501	1.0137	330.58	0.29154	86.54	0.13772
1577.9	1.1585	363.72	0.3364	91.855	0.1517
1629.1	1.3033	390.72	0.38125	95.557	0.16218
1662.4	1.4481	411.65	0.4261	102.83	0.18663
1683.9	1.5929	427.16	0.47095	108.13	0.2076
1698.5	1.7377	440.78	0.52702	112.83	0.22856
1711.1	1.9115	452.87	0.60551	115.48	0.24253
1720.4	2.0853	460.01	0.684	120.99	0.28446
1727.8	2.259	464.3	0.7625	122.01	0.29494
1734.3	2.4328	466.97	0.8522	123.03	0.30892
1740.4	2.6355	468.17	0.97555	124.03	0.32639
1745	2.8672	469.14	1.1101	125.17	0.34385

**Tableau 4.2** Lois de comportement des différents matériaux

Une très bonne reproductibilité des courbes est obtenue sur chaque feuillard. Une anisotropie plus ou moins importante est observée selon les feuillards, généralement plus raides et résistants dans le sens de la hauteur ; nous examinerons son influence au chapitre 7. Enfin, le module d'Young varie de moins de 5% d'un rouleau à l'autre, sauf exceptions. Le tableau 4.3 précise la plage de variation observée sur les différents types de feuillards.

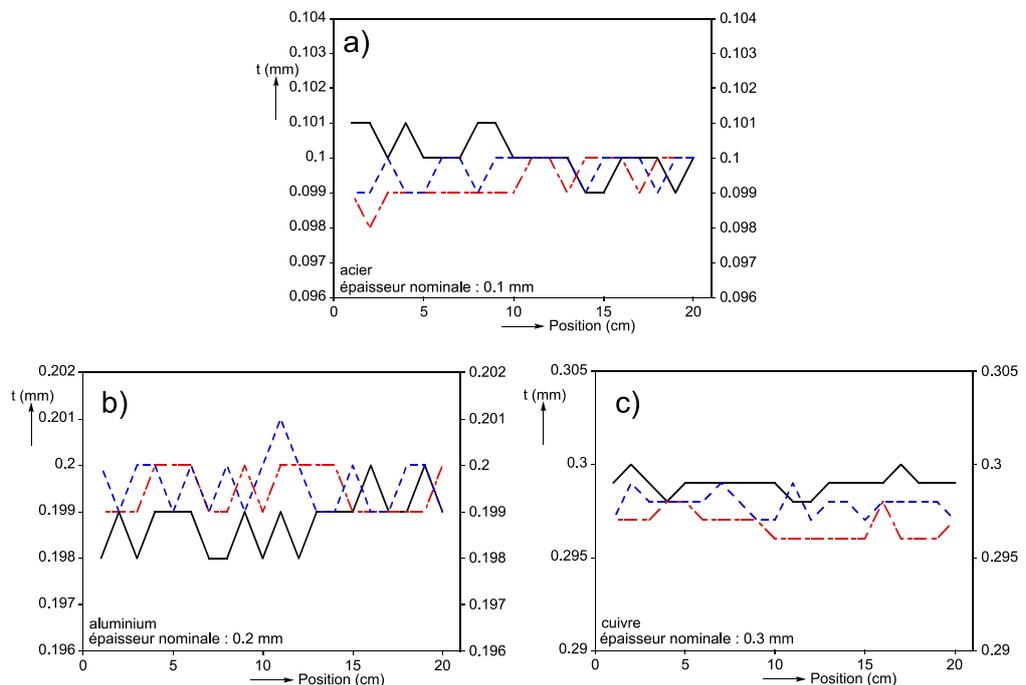
Feuillard	Module H (GPa)			Module L (GPa)		
	Mini	Maxi	Retenu	Mini	Maxi	Retenu
Aluminium, A et C	69.2	73.3	70	65.3	68.6	68
Aluminium, B	58.2	62.4	60	55.7	59.4	58
Cuivre	133.4	139.4	135	126.8	133.5	130
Acier, A	204.6	206.7	205	196.3	201.2	200
Acier, B et C	197.8	206.2	205	166.2	172.9	170

**Tableau 4.3** Variation des modules d'Young

#### 4.2.22 Mesure de l'épaisseur

L'épaisseur réelle de chaque feuillard peut varier par rapport à l'épaisseur nominale. Des mesures d'épaisseurs à l'aide d'un comparateur sont effectuées sur des bandes rectangulaires découpées en plusieurs endroits dans la hauteur du feuillard. La Figure 4.5 présente trois relevés effectués sur différents types de feuillard : acier d'épaisseur 0.1 mm, aluminium d'épaisseur 0.2 mm et le cuivre d'épaisseur 0.3 mm.

On obtient pour chaque feuillard une très bonne homogénéité de l'épaisseur. La variation maximale constatée est comprise entre 1 et 3% selon les cas, et la déviation maximale par rapport à l'épaisseur nominale reste inférieure à 5%. Une épaisseur moyenne arrondie au micron près est retenue pour l'exploitation des résultats.



**Figure 4.5** Distributions d'épaisseur : a) Acier INOX 0.1 mm, b) Aluminium 0.2 mm, c) Cuivre 0.3 mm

#### 4.2.23 Valeurs de $R/t$ étudiées

Bien évidemment, les dimensions précises des coques ont changé au cours de la campagne, résultant en des valeurs de  $R/t$  quasi uniques pour chaque spécimen. Nous ferons donc systématiquement référence aux caractéristiques nominales des feuillards pour plus d'homogénéité, bien que les dimensions exactes aient été utilisées pour le calcul de la contrainte critique. Nous récapitulons dans le tableau 4.4 les plages de variation observées tout au long de la campagne pour chaque type de coque.

Feuillard	$R/t$ nominal	$R/t$ mini	$R/t$ maxi
Cuivre 0.3	450	440	452
Aluminium 0.2	675	649	692
Cuivre 0.2	675	659	690
Cuivre 0.15	900	866	905
Acier 0.1	1350	1301	1353
Cuivre 0.1	1350	1338	1395

**Tableau 4.4** Feuillards utilisés pour la fabrication des coques

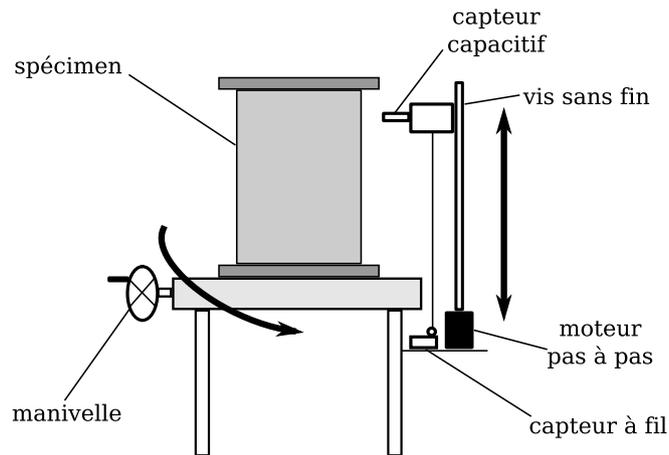
#### 4.2.3 Mesure de la géométrie

Afin de connaître précisément l'influence des défauts et l'évolution de la géométrie en fonction du chargement appliqué, le laboratoire s'est doté d'outils de mesure automatisés utilisés extensivement lors de précédentes thèses [6] [41] [60] [69] [93]. Les résultats de ces mesures (dont certains ont été présentés au chapitre 2) nous ont aidés dans notre démarche, cependant la prise de géométrie n'a pas eu de place prépondérante dans notre étude et un système simplifié a été utilisé.

Notre banc de mesure est représenté en Figure 4.6. Le spécimen à scanner est placé sur une table rotative. La géométrie est relevée à l'aide d'un capteur sans contact (capacitif ou laser). Un moteur permet de monter ou descendre le capteur à l'aide d'un système de vis/écrou. La rotation de la table s'effectue à l'aide d'une manivelle.

Environ 23 parallèles et 12 génératrices sont relevées par spécimen, permettant d'évaluer la qualité générale de celui-ci. Des erreurs de mesures résultent de la non-coïncidence de l'axe de symétrie de la coque et des axes de déplacement (translation, rotation) du capteur :

- décalage entre les origines de l'axe du système de mesure et du spécimen
- non parallélisme entre les deux axes
- inclinaison de l'axe de translation du système de mesure



**Figure 4.6** Banc de mesure de la géométrie

Ces erreurs sont corrigées à l'aide de la méthode des moindres carrés :

$$w_i = \Delta z_i + \Delta \bar{z} - a \cdot \sin \theta_i - b \cdot \cos \theta_i$$

où :  $w_i$  est la valeur corrigée de l'imperfection au point  $i$

$\Delta z_i$  est la valeur mesurée par le capteur

$\Delta \bar{z} = -\sum \frac{\Delta z_i}{n}$  est la moyenne des mesures (correction de la translation)

$a = \frac{2}{n} \sum \Delta z_i \cdot \sin \theta_i$  et  $b = \frac{2}{n} \sum \Delta z_i \cdot \cos \theta_i$  représentent la correction

des rotations

$n$  est le nombre de mesures

Nous analyserons les résultats des mesures de géométrie au chapitre suivant.

#### 4.2.4 Bancs d'essais

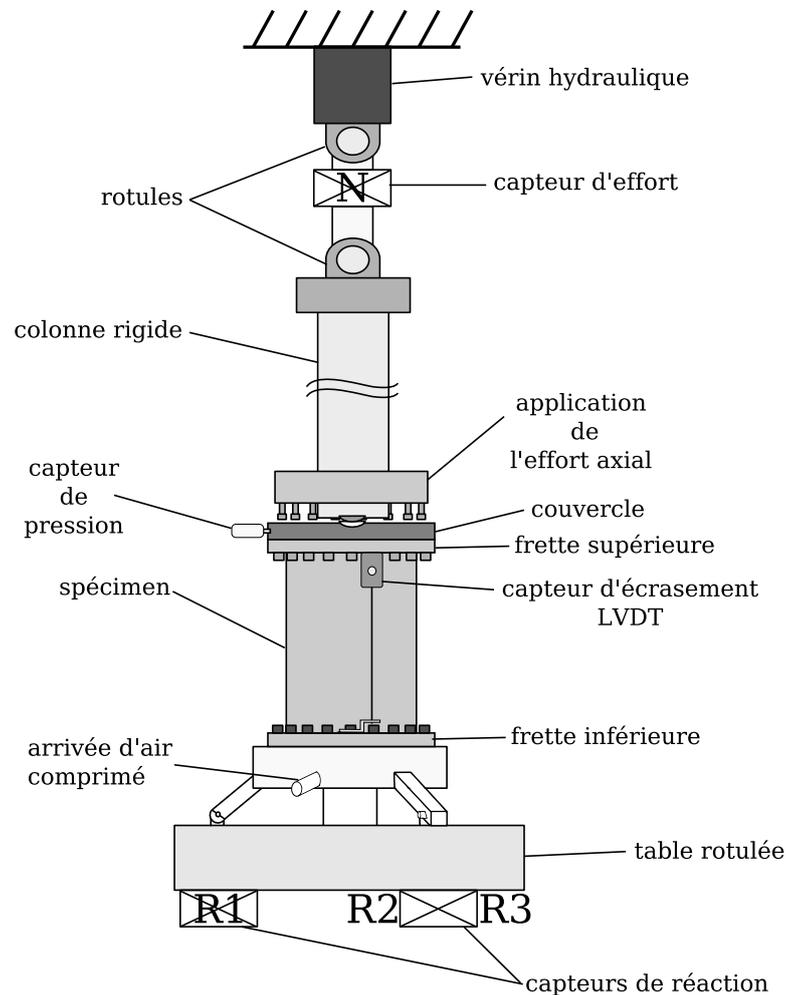
Le laboratoire dispose de deux bancs d'essais pour l'étude expérimentale de flambage de coques sous divers chargements. Nous présentons ici leur mode de fonctionnement.

##### 4.2.4.1 Banc Ariane : compression

Le banc d'essais « Ariane » a été développé au fil des années afin de répondre aux différents besoins du programme de recherche sur le flambage de coques (Figure 4.7). Originellement conçu pour combiner les efforts axial et tranchant, nous en avons simplifié le fonctionnement afin de ne garder que la composante axiale.

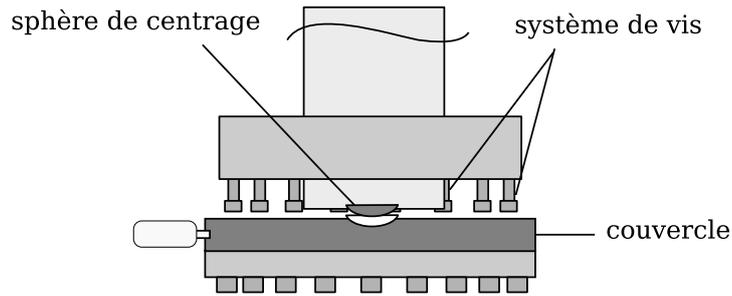
Le banc est donc constitué d'un bâti avec une table rotulée, reposant sur trois capteurs de force à  $120^\circ$  mesurant les réactions aux appuis, et permettant d'ajuster l'axisymétrie du chargement. La frette inférieure de la coque à

tester est fixée à cette table par 36 boulons. Un couvercle est ensuite fixé sur la frette supérieure du spécimen par 36 autres vis, et assure l'étanchéité de la coque.



**Figure 4.7** Banc Ariane : compression

L'effort axial est appliqué par un vérin hydraulique, équipé de capteurs de force et de déplacement permettant de contrôler le chargement appliqué. Pour s'assurer de la bonne transmission de l'effort, la compression est appliquée par l'intermédiaire d'un ensemble de vis en contact avec le couvercle, une sphère au bas de la colonne rigide assurant la concentricité du chargement (Figure 4.8). Les rotules présentes entre le vérin et la colonne rigide sont des vestiges de l'ancien banc, et leur rotation n'a pu être complètement bloquée. Nous verrons plus loin l'incidence de ces rotations parasites.



**Figure 4.8** Banc Ariane, application de l'effort

Le spécimen testé peut être mis en pression interne par un dispositif d'alimentation en air comprimé. Cette pression est contrôlée par un capteur situé au niveau du couvercle. Les frettes inférieure et supérieure du spécimen sont équipées de quatre capteurs LVDT répartis sur la circonférence, qui permettent de déterminer les déplacements relatifs de la frette supérieure (translation et rotation) par rapport à la frette inférieure, fixe. Les trois capteurs de réaction permettent quant à eux de vérifier l'effort axial mesuré au niveau du vérin. Le tableau 4.5 suivant présente les caractéristiques de ces différents capteurs.

Capteur	Plage	Précision
Déplacement du vérin	$\pm 2.5$ mm	$\pm 6.25$ $\mu$ m
Force (N)	$\pm 4444$ daN	$\pm 11.2$ daN
Pression	5 bar	$\pm 12.5$ mbar
Force (R1, R2)	$\pm 1111$ daN	$\pm 2.8$ daN
Force (R3)	$\pm 2222$ daN	$\pm 5.6$ daN
Ecrasement de la coque (2xLVDT)	$\pm 1.25$ mm	$\pm 3.125$ $\mu$ m
Ecrasement de la coque (2xLVDT)	$\pm 2.5$ mm	$\pm 6.25$ $\mu$ m

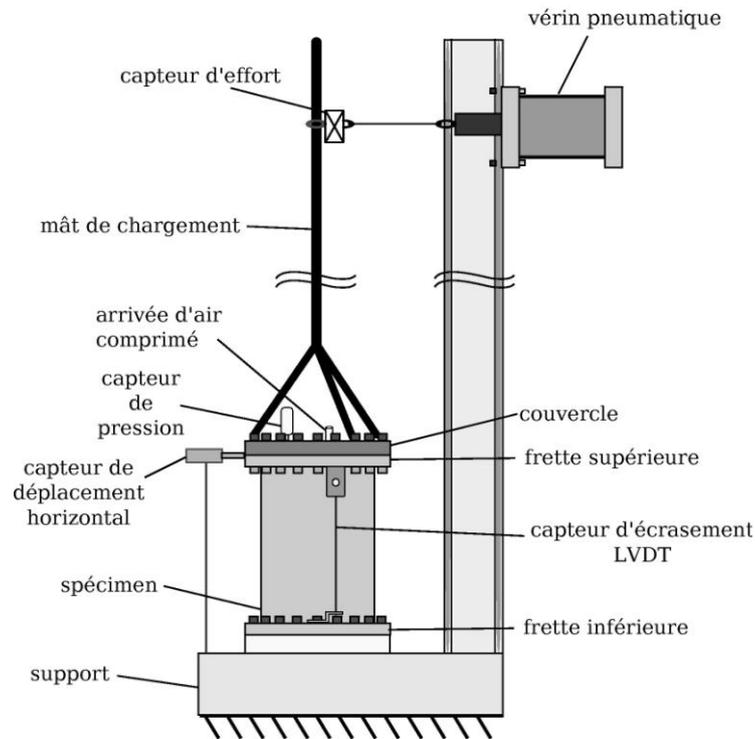
**Tableau 4.5** Caractéristiques des capteurs du banc Ariane

#### 4.2.42 Petit banc : flexion et cisaillement

Un second banc a été développé plus récemment, pour tester des coques très minces à faible pression, et nécessitant donc un effort plutôt faible. Son fonctionnement est simplifié mais ses capacités plus limitées.

La partie basse du banc est composée d'un support posé au sol, sur lequel est fixée la frette inférieure de la coque à l'aide de 36 boulons (Figure 4.9). La frette supérieure du spécimen est également vissée par 36 autres vis au couvercle. Ce mors est surmonté d'un mât métallique de 2 m de hauteur, où est accroché un câble permettant d'appliquer l'effort transverse par l'intermédiaire

d'un vérin pneumatique de capacité 700 daN. Comme nous avons pu le voir, la hauteur d'application conditionne la nature du flambage. Pour un bras de levier de longueur 1800 mm, l'effort appliqué sur le spécimen peut être assimilé à de la flexion pure (voir [2]). Nous pouvons faire varier le point d'application sur la hauteur du mât et finalement appliquer le chargement sur la frette supérieure de la coque, créant ainsi une sollicitation de type cisaillement pur.



**Figure 4.9** Petit banc : flexion, cisaillement

Le câble est équipé d'un capteur d'effort permettant de contrôler le chargement appliqué. Deux capteurs de capacités différentes ont été utilisés au cours de la campagne, afin de s'adapter au mieux aux charges critiques atteintes. Le spécimen testé peut ici encore être mis en pression interne par un dispositif d'alimentation en air comprimé. Cette pression est contrôlée par un capteur situé au niveau du couvercle. Les deux frettes inférieure et supérieure du spécimen testé sont équipées de quatre capteurs LVDT répartis sur la circonférence, permettant d'enregistrer le comportement de la coque et de vérifier la symétrie du chargement. Ces capteurs sont essentiellement les mêmes que ceux du banc Ariane. De plus, un capteur de déplacement par contact peut être fixé sur le couvercle afin de mesurer le déplacement horizontal dans le cas d'un essai de cisaillement. Le tableau 4.6 résume les caractéristiques des différents capteurs de ce banc.

Capteur	Plage	Précision
Déplacement horizontal	± 10 mm	±25 µm
Force 1 (N)	± 222 daN	± 0.6 daN
Force 2 (N)	± 1,111 daN	± 2.8 daN
Pression	5 bar	± 12.5 mbar
Ecrasement de la coque (2xLVDT)	± 1.25 mm	± 3.125 µm
Ecrasement de la coque (2xLVDT)	± 2.5 mm	± 6.25 µm

**Tableau 4.6** Caractéristiques des capteurs du petit banc

Les coques montées sur ce banc, du fait des éléments assurant les conditions aux limites supérieures et la transmission de l'effort, sont systématiquement soumises à un chargement de compression. La masse des éléments situés au-dessus de la coque a varié selon les évolutions du banc, entre 25 et 28 kg. Comme nous pouvons le voir dans le tableau 4.7, cette contrainte de compression reste inférieure à 6% de la contrainte classique pour les différentes configurations de coques testées sur ce banc.

	$\sigma_N / \sigma_{CL}$ (%)			
	t = 0.1 mm	t = 0.15 mm	t = 0.2 mm	t = 0.3 mm
Acier	3.59	x	x	x
Aluminium	x	x	2.64	x
Cuivre	5.45	2.42	1.37	0.60

**Tableau 4.7** Composante de compression sur le petit banc

#### 4.2.43 Stéréo-corrélation

La technique de stéréo-corrélation utilise le principe de la vision binoculaire d'une même scène, à savoir la mesure d'un objet suivant deux angles différents. Sur ce principe, la technique permet de mesurer l'évolution de la géométrie 3D d'un objet, ou le champ de déplacements des points de la surface en enregistrant une paire d'images stéréoscopiques relatives à chaque état de déformation.

Un mouchetis noir sur fond blanc est d'abord appliqué sur la coque à l'aide de bombes de peinture. Deux caméras sont donc utilisées, et la scène de mesure est calibrée en enregistrant deux images 2D du spécimen sous deux angles différents. Après déformation de la coque, Vic-3D analyse les niveaux de gris de chaque élément (dont la taille est définie par l'utilisateur) afin de

calculer les champs de déplacement et de déformation. La géométrie 3D est ensuite reconstruite par triangulation.

Nous utiliserons cette méthode lors de quelques essais pour quantifier les déformations pré-critiques suivant le mode de flambage principal. Le lecteur pourra trouver plus de détails sur la mesure de déplacements par corrélation dans [25].

### 4.3 Méthodes numériques

Cette partie est consacrée à la présentation de la méthode des éléments finis, utilisée de manière extensive pour la réalisation de nos simulations numériques. De nombreux outils numériques ont été développés lors des quarante dernières années, toujours plus robustes et précis. Nos analyses ont été effectuées à l'aide de deux codes en particulier :

- le code STANLAX (anciennement INCA) créé au Commissariat à l'Énergie Atomique, s'appuie sur une modélisation axisymétrique de la structure et une décomposition des différents champs (déplacements, forces) en séries de Fourier.
- ABAQUS est quant à lui un code industriel largement utilisé aujourd'hui, permettant de réaliser des modélisations tridimensionnelles extrêmement complexes.

Nous effectuons ici une courte description des éléments utilisés dans les deux cas avant de présenter les différentes méthodologies de calcul.

#### 4.3.1 Éléments finis

##### 4.3.1.1 STANLAX

Les éléments axisymétriques COQUE et COMU sont utilisés pour simuler le comportement de structures présentant une symétrie de révolution. Ces éléments sont composés de 2 nœuds possédant 4 degrés de liberté chacun (Figure 4.10) :

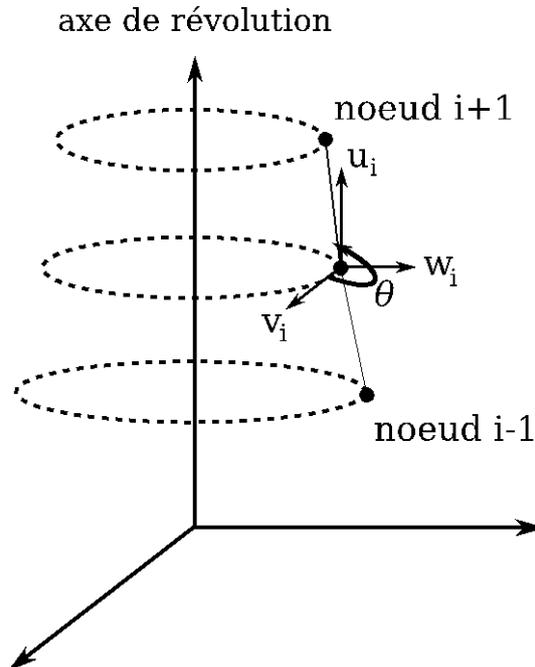
- 3 déplacements ( $u_i$  axial,  $v_i$  tangentiel,  $w_i$  radial)
- 1 rotation ( $\Phi$  rotation autour de l'axe tangentiel)

Les déplacements sont représentés par des séries de Fourier, décomposés en fonction de l'angle  $\theta$  sur la circonférence. Les harmoniques de Fourier prises en compte (nombre, termes en cosinus ou sinus) sont un choix de l'utilisateur. Un champ quelconque prend alors la forme :

$$\{q\} = \sum_{n=0}^N \{q_n\} cs(n\theta)$$

où:  $N$  est le nombre d'harmoniques supérieures à zéro

$cs$  représente la fonction trigonométrique choisie  
 $\{q_n\}$  est le champ de déplacements sur l'harmonique  $n$



**Figure 4.10** Géométrie des éléments axisymétriques dans STANLAX

Si le développement de Fourier ne comprend que le mode 0, les éléments finis sont purement axisymétriques (élément COQUE). Pour des développements de Fourier d'un ordre  $n$  supérieur ou égal à 1, les éléments finis considérés sont dits quasi-axisymétriques (élément COMU ou COQUE MULTI-modale). L'intérêt de cet élément est multiple : outre la capacité d'appliquer des chargements non-axisymétriques (comme la flexion ou le cisaillement), il est possible de prendre en compte les défauts géométriques initiaux.

#### 4.3.12 ABAQUS

Les modélisations faites sous ABAQUS ont pour la plupart utilisé l'élément S4R, possédant 4 nœuds, avec 6 degrés de liberté par nœud (3 déplacements, 3 rotations). Les fonctions de forme utilisées sont linéaires et donc moins performantes que dans le cas quadratique (éléments S8R5 par exemple), mais permettent cependant de créer facilement des modèles paramétriques, très utiles lorsqu'un grand nombre de calculs est nécessaire.

Ces éléments sont à usage général, et conviennent aussi bien à des coques minces qu'épaisses. Les déformations de cisaillement transverses sont ainsi initialement incluses, cependant elles deviennent minimales à mesure que l'épaisseur diminue, vérifiant ainsi les hypothèses de Kirchhoff utilisées dans l'établissement de la contrainte classique.

## 4.3.2 Méthodologies de calcul

## 4.3.2.1 Critère de stabilité

Le problème de la stabilité d'un système est en général étudié à l'aide du critère de Trefftz, qui équivaut à écrire qu'un système est stable si la dérivée seconde de son énergie potentielle est positive (voir chapitre 1).

Considérons un solide occupant une surface  $\Gamma_0$  autour d'un volume  $V_0$  dans la configuration  $C_0$  (Figure 4.11) ; il est soumis à des chargements volumique  $\vec{f}$  et surfacique  $\vec{T}$  qui créent un champ de déplacements cinématiquement admissible  $\vec{u}$  associé à un champ de contraintes  $\vec{\sigma}$ . Ce solide occupe alors un volume  $V$  dans une configuration  $C$ . Une perturbation  $\alpha \cdot \vec{u}_1$  conduit ensuite le solide de la configuration  $C$  à la configuration  $C_1$ .

Dans la configuration  $C$ , la déformation liée au champ de déplacements  $\vec{u}$  est égale à :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

Soit :

$$\varepsilon(u) = L_1(u) + L_2(u) = \varepsilon_0$$

où  $L_1(u) = \frac{1}{2} [\nabla^T(u) + \nabla(u)]$  est un opérateur linéaire,

$L_2(u) = \frac{1}{2} [\nabla^T(u) \cdot \nabla(u)]$  est un opérateur non linéaire.

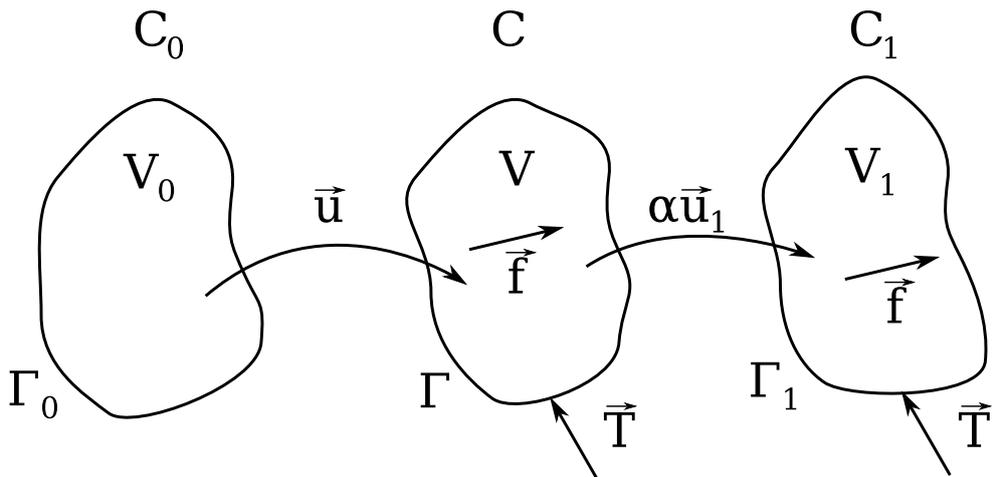


Figure 4.11 Configurations d'équilibre

L'énergie potentielle associée à cette configuration est quant à elle calculée à partir de l'énergie interne de déformation et du travail des forces extérieures. En supposant que la loi de Hooke est applicable :

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2} \int_{V_0} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{V_0} H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{0ij} \cdot \varepsilon_{0kl} dV \\ W = \int_{V_0} f_i \cdot u_i dV + \int_{\Gamma_0} T_i \cdot u_i d\Gamma \end{cases}$$

Où les  $H_{ij}^{kl}$  sont les coefficients élastiques.

L'énergie potentielle de la configuration d'équilibre initiale est ensuite donnée par :

$$\pi = U - W$$

Etudions maintenant la configuration perturbée  $C_1$ . La déformation liée au champ de déplacements  $\vec{u} + \alpha \cdot \vec{u}_1$  est égale à :

$$\begin{aligned} \varepsilon(u + \alpha \cdot u_1) &= L_1(u + \alpha \cdot u_1) + L_2(u + \alpha \cdot u_1) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \nabla^T(u + \alpha u_1) + \nabla(u + \alpha u_1) \right] \\ &\quad + \nabla^T(u + \alpha u_1) \cdot \nabla(u + \alpha u_1) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \nabla^T(u) + \nabla(u) + \nabla^T(u) \cdot \nabla(u) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \left[ \nabla^T(u_1) + \nabla(u_1) + 2 \cdot \nabla^T(u) \cdot \nabla(u_1) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2} \left[ \nabla^T(u_1) \cdot \nabla(u_1) \right] \end{aligned}$$

En posant :

$$L_{11}(u, u_1) = \nabla^T(u) \cdot \nabla(u_1) = \nabla^T(u_1) \cdot \nabla(u)$$

Nous obtenons :

$$\varepsilon(u + \alpha u_1) = L_1(u) + L_2(u) + \alpha \cdot [L_1(u_1) + L_{11}(u, u_1)] + \frac{\alpha^2}{2} \cdot L_2(u_1)$$

Soit :

$$\varepsilon(u + \alpha \cdot u_1) = \varepsilon_0 + \alpha \cdot \varepsilon_1 + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \varepsilon_2$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= L_1(u) + L_2(u) \\ \varepsilon_1 &= L_1(u_1) + L_{11}(u, u_1) \\ \varepsilon_2 &= L_2(u_1) \end{aligned}$$

Les différentes énergies prennent alors de nouvelles expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = \int_{V_0} \left[ \frac{1}{2} H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{0ij} \cdot \varepsilon_{0kl} + \alpha \cdot H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{0ij} \cdot \varepsilon_{1kl} \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2}{2} (H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{1ij} \cdot \varepsilon_{1kl} + H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{0ij} \cdot \varepsilon_{2kl}) + O(\alpha^3) \right] dV \\ W_1 = \int_{V_0} f_i \cdot (u_i + \alpha \cdot u_{1i}) dV + \int_{\Gamma_0} T_i \cdot (u_i + \alpha \cdot u_{1i}) d\Gamma \\ \pi_1 = U_1 - W_1 \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la stabilité de l'équilibre est liée à la variation d'énergie entre l'état initial et l'état perturbé. La perturbation  $\alpha$  étant infinitésimale, la différence entre les deux états revient à effectuer un développement en série de Taylor, et cet incrément d'énergie doit être positif pour que le système soit stable :

$$\pi_1(u + \alpha \cdot u_1) - \pi(u) = \alpha \cdot \Delta\pi + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \Delta^2\pi + O(\alpha^3) > 0$$

Par identification avec les expressions dérivées précédemment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\pi = \int_{V_0} [H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{0ij} \cdot \varepsilon_{1kl} - f_i \cdot u_{1i}] dV - \int_{\Gamma_0} T_i \cdot u_{1i} d\Gamma \\ \Delta^2\pi = \int_{V_0} [H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{1ij} \cdot \varepsilon_{1kl} + H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{0ij} \cdot \varepsilon_{2kl}] dV \end{array} \right.$$

Le système étant en équilibre, on a :  $\Delta\pi = 0$ . Le critère de stabilité de Trefftz revient donc à écrire :

$$\Delta^2\pi = \int_{V_0} [H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{1ij} \cdot \varepsilon_{1kl} + H_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{0ij} \cdot \varepsilon_{2kl}] dV > 0$$

#### 4.3.22 Recherche de bifurcations par la méthode des éléments finis

Lors d'une modélisation par éléments finis, les champs de déplacement sont discrétisés en chaque nœud, de sorte que :

$$\{u\} = [N] \cdot \{q\}$$

Où  $[N]$  est la matrice de passage,  
 $\{q\}$  est le vecteur des déplacements nodaux.

Les différents tenseurs de déformation en découlent :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_0\} &= L_1 \{u\} + L_2 \{u\} \\ &= L_1 [N] \cdot \{q\} + L_2 [N] \cdot \{q\} \\ &= [B_L] \cdot \{q\} + \{q\}^T \cdot [B_{NL}] \cdot \{q\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_1\} &= L_1\{u_1\} + L_{11}\{u, u_1\} \\
&= L_1[N] \cdot \{q_1\} + L_{11}[N] \cdot \{q, q_1\} \\
&= [B_L] \cdot \{q_1\} + [B_{LL}] \cdot \{q, q_1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon_2\} &= L_2\{u_1\} \\
&= L_2[N] \cdot \{q_1\} \\
&= \{q_1\}^T \cdot [B_{NL}] \cdot \{q_1\}
\end{aligned}$$

Où  $[B_L]$  est une matrice d'opérateurs linéaires,

$[B_{NL}]$  est une matrice d'opérateurs non-linéaires,

$[B_{LL}]$  est une matrice d'opérateurs bi-linéaires.

Le solide n'étant plus considéré comme continu, l'intégration des densités d'énergies doit s'effectuer pour chaque élément, de sorte que :

$$\pi = \sum_n \int_{V_n} \delta\pi_n dV = \langle \delta\pi \rangle$$

La recherche de bifurcations se traduit donc par :

$$\begin{aligned}
\Delta^2\pi &= \langle \{\varepsilon_1\}^T \cdot H \cdot \{\varepsilon_1\} + \{\varepsilon_0\}^T \cdot H \cdot \{\varepsilon_2\} \rangle = 0 \\
&= \left\langle \left[ \begin{aligned} & \{ [B_L] \cdot \{q_1\} + [B_{LL}] \cdot \{q, q_1\} \}^T \cdot H \cdot \{ [B_L] \cdot \{q_1\} + [B_{LL}] \cdot \{q, q_1\} \} \\ & + \{q_1\}^T \cdot \{\sigma_0\}^T \cdot [B_{NL}] \cdot \{q_1\} \end{aligned} \right] \right\rangle \\
&= \{q_1\}^T \cdot \left\langle \left[ \begin{aligned} & [B_L]^T \cdot H \cdot [B_L] + 2 \cdot [B_L]^T \cdot H \cdot [B_{LL}] \\ & + [B_{LL}]^T \cdot H \cdot [B_{LL}] + \{\sigma_0\}^T \cdot [B_{NL}] \end{aligned} \right] \right\rangle \cdot \{q_1\}
\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\Delta^2\pi = \{q_1\}^T \cdot [K_T] \cdot \{q_1\} = 0$$

Où  $[K_T]$  est la matrice de raideur tangente, composée de :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_0] = \langle [B_L]^T \cdot H \cdot [B_L] \rangle : \\ [K_L] = \langle 2 \cdot [B_L]^T \cdot H \cdot [B_{LL}] \rangle \\ [K_Q] = \langle [B_{LL}]^T \cdot H \cdot [B_{LL}] \rangle \\ [K_\sigma] = \langle \{\sigma_0\}^T \cdot [B_{NL}] \rangle : \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{la matrice de rigidité linéaire (correspondant} \\ \text{aux petits déplacements),} \\ \text{deux matrices de rigidité liées aux non-} \\ \text{linéarités géométriques (influence des grands} \\ \text{déplacements sur la répartition des con-} \\ \text{traintes)} \\ \text{la matrice de raideur des contraintes initiales.} \end{array} \right.$$

Comme nous avons pu le voir, le problème du flambage consiste donc à la recherche de la valeur du chargement qui conduit à la première bifurcation de l'équilibre.

---

#### 4.3.221 Bifurcation linéaire

Dans le cas où les déplacements avant le flambage sont faibles, les équations d'équilibre sont linéarisables, et les matrices  $[K_L]$  et  $[K_Q]$  négligeables.

L'équation à résoudre se retrouve ainsi réduite à :

$$\Delta^2 \pi = \{q_1\}^T \cdot ([K_0] + [K_\sigma]) \cdot \{q_1\} = 0$$

L'étude de la stabilité se fait sur la configuration d'équilibre résultant d'un chargement proportionnel au chargement initial, tel que :

$$\sigma = \lambda \cdot \sigma_0$$

Ceci réduit le problème à une recherche de valeurs propres :

$$\det([K_0] + \lambda \cdot [K_\sigma]) = 0$$

La valeur propre la plus faible correspond alors au facteur de charge critique  $\lambda_{cr}$  qu'il suffit de multiplier au chargement initial pour obtenir la charge de bifurcation. De plus, le vecteur propre associé à  $\lambda_{cr}$  nous donne le mode critique.

---

#### 4.3.222 Bifurcation non-linéaire

Lorsque la structure est sujette à d'importants déplacements ou rotations, les déformations et les contraintes deviennent des fonctions complexes du paramètre de charge, les termes non-linéaires ne sont plus négligeables :

$$\det[K_0 + K_L + K_Q + \lambda K(\sigma_0)] = 0$$

La matrice de raideur tangente doit alors être mise à jour de manière incrémentale en fonction du chargement, une simple multiplication de l'état initial n'est plus possible. La détermination de l'état critique passe donc par la recherche itérative du chargement associé à  $\lambda = 1$ , soit le chargement exact provoquant l'annulation de la matrice de raideur tangente.

---

#### 4.3.223 Plasticité

Lorsque des non-linéarités matériau s'ajoutent aux non-linéarités géométriques, la matrice des coefficients élastiques  $H$  doit être changée en accord avec la théorie de plasticité utilisée. Le code STANLAX permet l'incorporation des deux grandes théories de la plasticité : *deformation* ou *flow*. ABAQUS quant à lui ne dispose pas d'outil permettant la détection de bifurcations dans le domaine plastique.

#### 4.3.23 Pilotage en longueur d'arc – méthode de Riks

Les méthodes présentées ci-dessus permettent de détecter une bifurcation d'équilibre, mais ne donnent aucun renseignement sur le comportement de la structure au-delà du point de bifurcation. Les méthodes de pilotage en longueur d'arc sont des techniques incrémentales qui permettent de suivre une branche d'équilibre même après l'apparition d'une instabilité de type bifurcationnel ou point-limite. Riks [85] fut le premier à proposer une telle méthode, qui porte aujourd'hui communément son nom. De nombreuses variantes ont depuis été développées (citons Crisfield [28], Powell et Simmons [81] ou Ramm [83]), le but est ici de ne présenter que les fondements du pilotage en longueur d'arc.

Le principe de cette technique est d'ajouter aux équations d'équilibre, une équation imposant la longueur du vecteur incrémental dans le plan charge/déplacement (voir Figure 4.12). Le chargement appliqué devient ainsi une variable additionnelle du problème.

L'équation d'équilibre d'une structure peut s'exprimer à partir du principe des travaux virtuels :

$$f(\vec{u}, \lambda) = [\mathbf{K}] \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{F}_0 = 0$$

Où  $[\mathbf{K}]$  est la matrice de raideur du système,  
 $\vec{u}$  représente les déplacements,  
 $\vec{F}_0$  représente les forces externes appliquées,  
 $\lambda$  est le paramètre de charge.

Ce système comporte donc  $n$  équations et  $n$  inconnues pour une valeur donnée de  $\lambda$ . Dans notre cas, le paramètre de charge est également traité comme une inconnue et une équation supplémentaire est nécessaire, imposant la longueur d'arc  $\Delta\ell$  à parcourir sur le chemin.

Soit un point  $A_0 (\vec{u}_0, \lambda_0)$  d'équilibre de la structure, et donc présent sur le chemin d'équilibre  $s$ . L'estimation initiale du point suivant  $A_1 (\vec{u}_1, \lambda_1)$  est calculée à partir de la tangente  $\vec{t}_0$  en  $A_0$ , dont nous devons connaître les composantes  $(\frac{d\vec{u}_0}{ds}, \frac{d\lambda_0}{ds})$ . La dérivation de l'équation d'équilibre nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{df(\vec{u}, \lambda)}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} = 0 \\ &= [\mathbf{K}] \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} - \vec{F}_0 \cdot \frac{d\lambda}{ds} = 0 \end{aligned}$$

La longueur incrémentale du chemin d'équilibre est quant à elle définie par :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 1$$

Ces deux équations permettent de calculer les deux composantes de la tangente, nous donnant :

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_0 + \Delta\ell \cdot \frac{d\vec{u}_0}{ds} \\ \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\ell \cdot \frac{d\lambda_0}{ds} \end{cases}$$

Un algorithme de Newton-Raphson est ensuite utilisé pour converger vers la branche d'équilibre. La tangente au chemin d'équilibre est recalculée pour déterminer les  $A_i(\vec{u}_i, \lambda_i)$  successifs et converger vers la solution finale de l'incrément en fonction de la longueur d'arc  $\Delta\ell$  et du type de contrainte choisis. Nous présentons ici deux types de contrainte les plus répandus :

- Les  $A_i$  sont situés sur un plan perpendiculaire à  $\vec{t}_0$  (Riks) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_0 A_1} \cdot \overrightarrow{A_1 A_i} = 0 \\ \|\overrightarrow{A_0 A_1}\| = \Delta\ell \end{cases}$$

- Les  $A_i$  sont situés sur un cercle de centre  $A_0$  (Crisfield) :

$$(u_i - u_0)^2 + (\lambda_i - \lambda_0)^2 = \Delta\ell^2$$

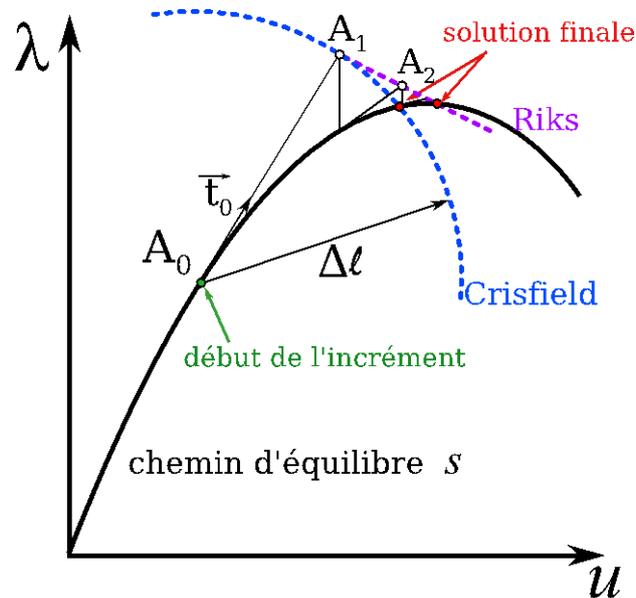


Figure 4.12 Méthodes de pilotage par longueur d'arc

# 5 Résultats expérimentaux

## 5.1 Introduction

### 5.2 Caractérisation des défauts initiaux

- 5.2.1 Démarche
- 5.2.2 Géométries
- 5.2.3 Qualité des différents feuillards : résumé

### 5.3 Essais de flambage sous compression et pression interne

- 5.3.1 Démarche
- 5.3.2 Conditions expérimentales
- 5.3.3 Courbes de chargement
- 5.3.4 Etude de la déformation
- 5.3.5 Contraintes critiques
- 5.3.6 Comportement de coques endommagées
- 5.3.7 Conclusions des essais PN

### 5.4 Essais de flambage sous flexion et pression interne

- 5.4.1 Démarche
- 5.4.2 Conditions expérimentales
- 5.4.3 Courbes de chargement
- 5.4.4 Contraintes critiques
- 5.4.5 Comportement de coques endommagées
- 5.4.6 Conclusions des essais PM

### 5.5 Comparaison flexion/compression

- 5.5.1 Courbes de chargement
- 5.5.2 Contraintes critiques

### 5.6 Essais de flambage sous cisaillement et pression interne

- 5.6.1 Démarche
- 5.6.2 Conditions expérimentales
- 5.6.3 Courbes de chargement
- 5.6.4 Etude de la déformation
- 5.6.5 Contraintes critiques
- 5.6.6 Conclusions des essais PT

### 5.7 Etude de l'interaction flexion/cisaillement

- 5.7.1 Influence du bras de levier (sans pression interne)
- 5.7.2 Influence de la pression interne

---

## 5.1 Introduction

L'étude expérimentale présentée dans ce chapitre a pris une place prépondérante tout au long de ce travail de recherche. Les essais réalisés permettent de répondre aux questions concernant l'influence de la pression interne sur les modes et les charges de flambage observés. Outre une meilleure compréhension de la phénoménologie, ces résultats permettront de valider la modélisation numérique.

Après avoir parlé des imperfections initiales des coques testées, nous examinerons séparément chaque type de chargement étudié expérimentale-

ment : les instabilités présentent en effet des caractéristiques différentes sous compression, flexion ou cisaillement.

---

## 5.2 Caractérisation des défauts initiaux

---

### 5.2.1 Démarche

Chaque spécimen possède des imperfections géométriques nuisibles pour le comportement au flambage, et réduisant considérablement la charge critique. Ces défauts sont causés par le procédé de fabrication, qui comme nous l'avons vu est « artisanal ».

L'étude de l'influence de la pression sur les imperfections ainsi que l'évolution de la fibre comprimée durant le chargement ont déjà été réalisées au laboratoire lors de précédentes thèses. Notre philosophie est ici différente et ce genre de mesure n'a pas été de nouveau conduit ; la focalisation principale concernant les défauts initiaux des spécimens.

Le procédé de fabrication ayant changé, la mesure des défauts initiaux a pour but de comparer la qualité des coques roulées-collées aux coques électro-déposées (quasi-parfaites) et d'évaluer l'influence d'une qualité « médiocre » de la structure sur la charge critique.

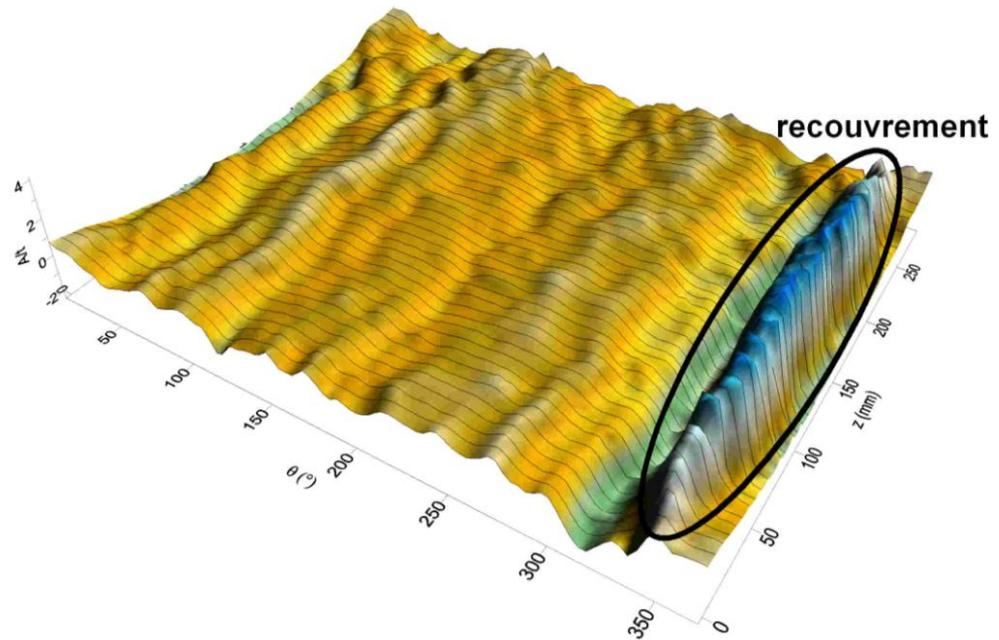
---

### 5.2.2 Géométries

La qualité de la coque dépend en premier lieu de la qualité intrinsèque du feuillard métallique dont elle est faite, mais également du soin avec lequel ce feuillard a été manipulé.

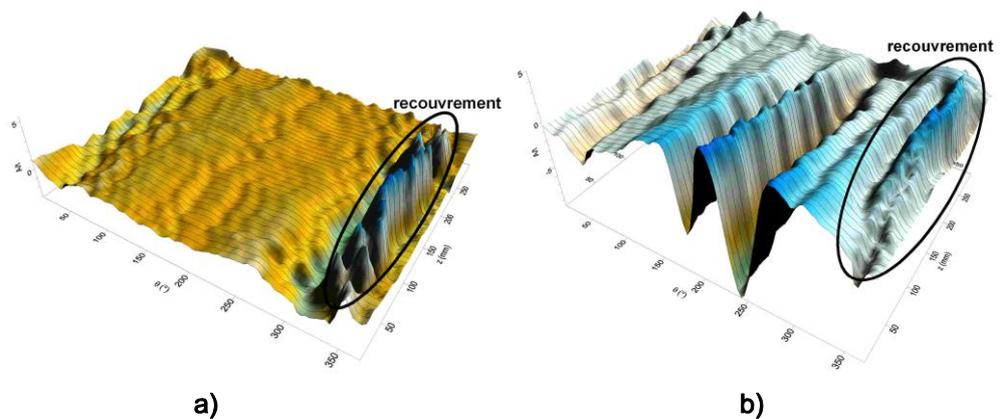
Un clinquant de 100 microns d'épaisseur devient ainsi extrêmement difficile à manier sans y laisser de marques irréversibles, comme en témoigne la géométrie présentée en Figure 5.1 pour un feuillard de cuivre. De nombreuses ondulations apparaissent, à la fois dans la hauteur et sur la circonférence de la coque. Des imperfections d'amplitude pouvant atteindre 1.5 fois l'épaisseur en zone courante sont communes. Le recouvrement crée bien évidemment une forte perturbation dans la géométrie, en combinant une double épaisseur de clinquant, colle, scotch et déformations de fabrication.

Pour une coque de même épaisseur (0.1 mm) mais cette fois-ci en acier, les mesures sont tracées en Figure 5.2a. On note tout d'abord que les imperfections « locales » semblent atténuées en comparaison avec la géométrie précédente (l'échelle est identique pour les deux Figures). Le feuillard d'acier comporte peu, voire pas de marques visibles, de par sa haute limite de linéarité ( $A/t$  « local » maximum égal à 0.5). Cependant, sa rigidité importante rend le collage plus difficile, et résulte en de longues ondulations sur la circonférence.



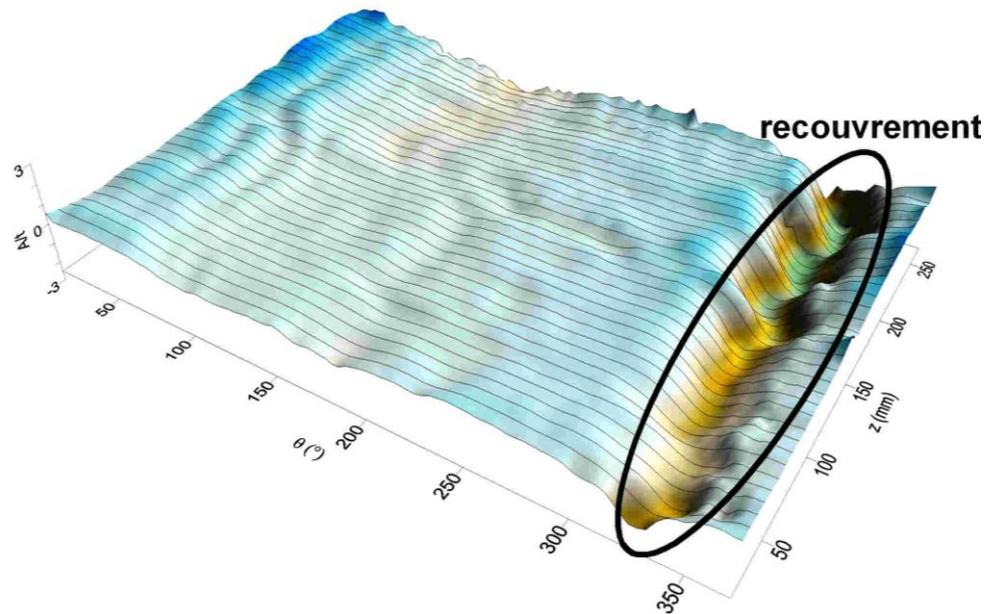
**Figure 5.1** Géométrie d'une coque en cuivre, d'épaisseur 0.1 mm (CL57)

Les difficultés rencontrées lors de la fabrication ont quelques fois résulté en de larges défauts comme ceux observés sur la Figure 5.2b, dont l'amplitude peut atteindre plus de 10 fois l'épaisseur de la coque. Suivant leur position sur la coque, leur influence peut s'avérer plus ou moins néfaste. Ce genre de problèmes est également apparu sur d'autres feuillards rigides.



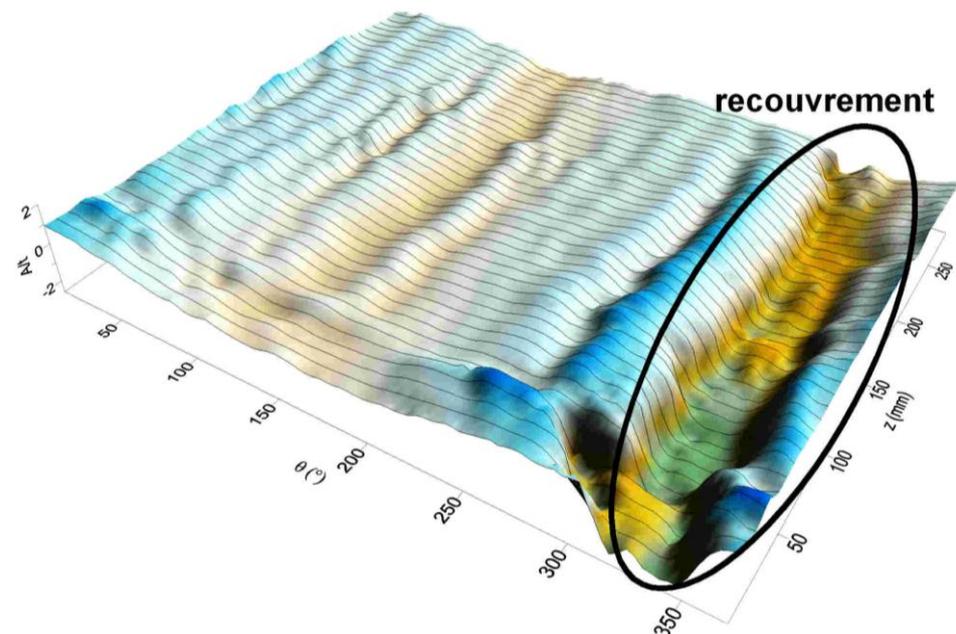
**Figure 5.2** Géométrie de coques en acier, d'épaisseur 0.1 mm, a) : coque régulière (CL60), b) : coque avec un défaut de collage (CL65)

Il est généralement reconnu que plus une structure est mince, plus il sera ardu d'obtenir une qualité convenable. Nous avons évidemment pu vérifier ce fait lors de notre campagne, comme nous pouvons le voir dans l'exemple suivant, pour une coque en cuivre et d'épaisseur 0.2 mm. Les défauts locaux sont quasi inexistant ( $A/t < 0.5$ ), mais la rigidité plus importante du feuillard produit une ondulation sur la circonférence.



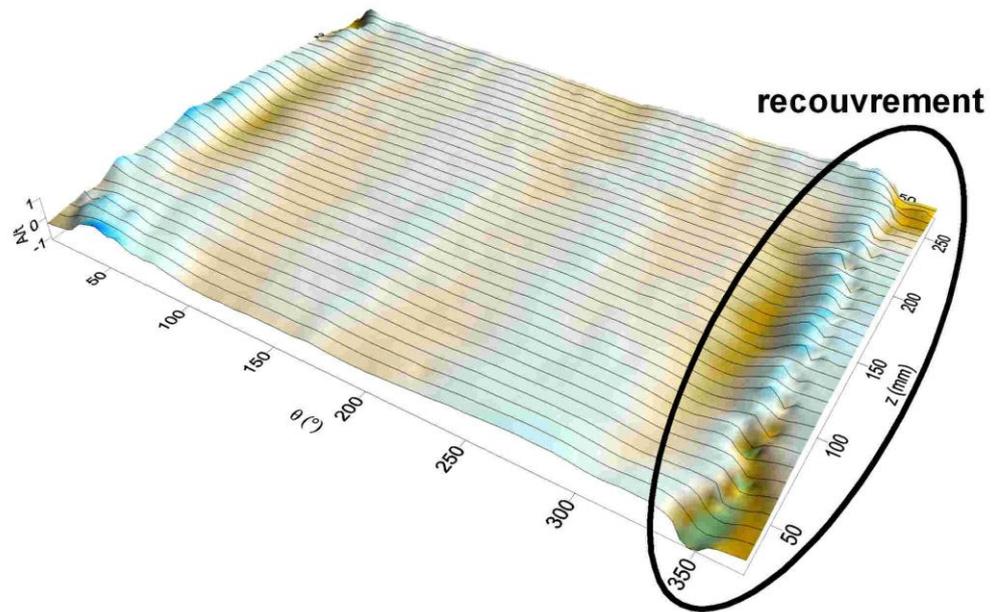
**Figure 5.3** Géométrie d'une coque en cuivre, d'épaisseur 0.2 mm (CL82)

On retrouve pour les coques en aluminium (épaisseur 0.2 mm) le même genre d'imperfections typiques, avec peu de marques localisées, mais présentant une imperfection plus « globale » d'ondulation du feuillard (Figure 5.4).



**Figure 5.4** Géométrie d'une coque en aluminium, d'épaisseur 0.2 mm (CL76)

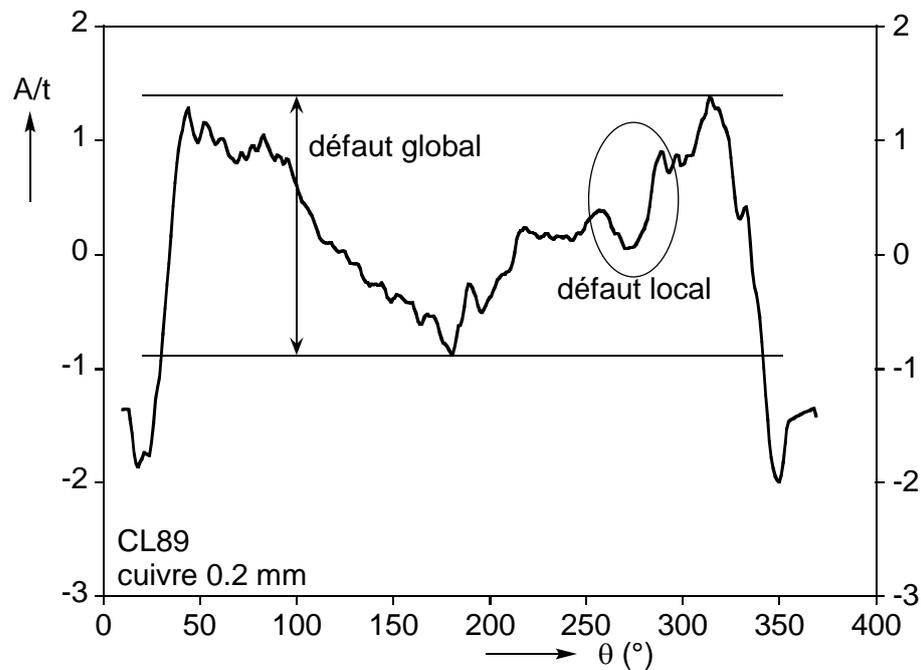
Enfin, la qualité s'améliore d'avantage sur les coques les plus épaisses que nous avons testées (Figure 5.5). Avec une épaisseur de 0.3 mm, ces coques sont de très bonne qualité, l'amplitude des imperfections ne dépassant pas localement 0.2 fois l'épaisseur.



**Figure 5.5** Géométrie d'une coque en cuivre, d'épaisseur 0.3 mm (CL86)

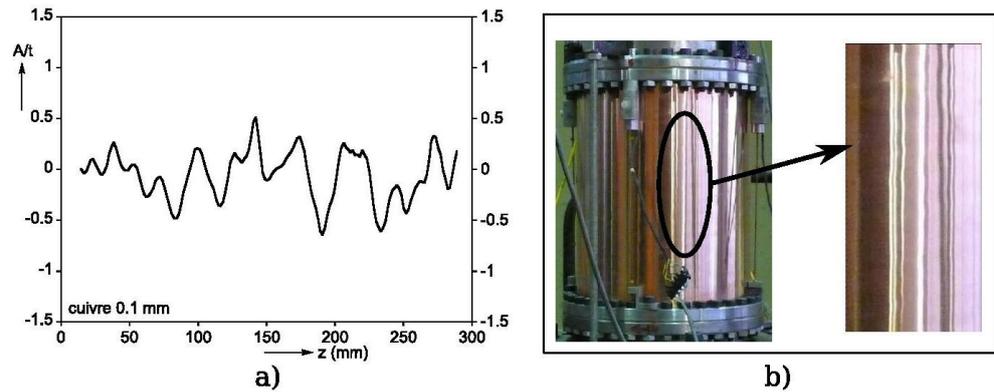
### 5.2.3 Qualité des différents feuillards : résumé

Nous avons donc pu constater des qualités de coque diverses selon le feuillard utilisé. Deux types de défauts ont été identifiés : les défauts dits « locaux », (du type marques, poinçons...), ainsi que des défauts « globaux » (du type ondulations) dont la longueur d'onde s'étend sur quasiment toute la circonférence de la coque. La Figure 5.6 illustre ces deux genres de défauts apparaissant sur la mesure d'une parallèle.



**Figure 5.6** Mesure de la géométrie sur une parallèle

Les mesures de génératrices montrent peu de défauts globaux (occupant une partie importante de la hauteur de la structure). Un type d'imperfection particulier a cependant été observé sur le feuillard cuivre 0.1mm : des ondulations axisymétriques (voir Figure 5.7) semblables au mode de flambage théorique, créées lors du laminage (voir les mécanismes de formation de ces ondes [35], [50]). Ce genre de défaut est, malgré sa faible amplitude (moins de 50% de l'épaisseur), à priori fortement préjudiciable et nous en verrons l'impact sur les contraintes critiques expérimentales.



**Figure 5.7** Ondes axisymétriques sur une génératrice, a) : Mesure, b) : aspect visuel

Nous retenons donc de ces mesures les imperfections moyennes récapitulées dans le tableau 5.1, nous donnant un ordre d'idée quant à la qualité des différents feuillards.

Feuillard	A/t local	A/t global
Cuivre 0.1 mm	1.5	2
Acier 0.1 mm	0.5	2
Cuivre 0.15 mm	1	1.5
Cuivre 0.2 mm	0.5	1
Aluminium 0.2 mm	0.5	1.5
Cuivre 0.3 mm	0.2	1

**Tableau 5.1** Défauts relevés sur différents feuillards

### 5.3 Essais de flambage sous compression et pression interne

#### 5.3.1 Démarche

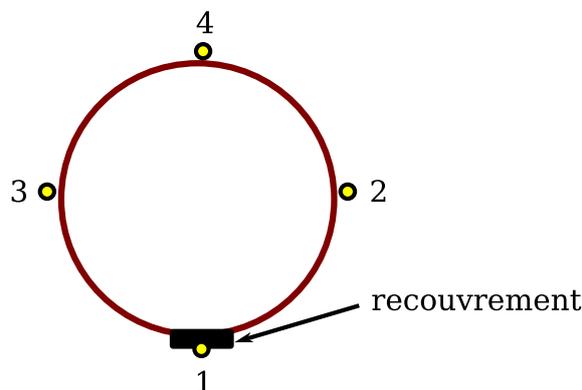
Si un nombre relativement important d'études expérimentales ont déjà traité du cas de la compression axiale combinée à la pression interne, peu sont celles à avoir abordé de manière pertinente différentes épaisseurs ainsi que des matériaux métalliques présentant différentes caractéristiques. 5 différents types de coques ont ici été testés, que nous examinerons successivement :

- $R/t = 450$ , cuivre
- $R/t = 675$ , aluminium
- $R/t = 675$ , cuivre
- $R/t = 1350$ , acier
- $R/t = 1350$ , cuivre

#### 5.3.2 Conditions expérimentales

Ces coques ont été testées sur le banc Ariane, présenté au chapitre précédent. Les essais se font à déplacement imposé, à l'aide d'une armoire de pilotage qui nous permet de contrôler le déplacement du vérin à deux microns près. Une fois la pression interne mise au niveau désiré, un déplacement du vérin de 0.1mm/min est imposé. Les quatre capteurs LVDT sont placés de la manière suivante (Figure 5.8) : capteur 1 sur la fibre collée, capteur 4 à l'opposé de la fibre collée, capteurs 2 et 3 sur les fibres « neutres ».

Les conditions expérimentales (méthode de fabrication, banc d'essais...) influencent de manière non négligeable le comportement de la coque. Ainsi, le renforcement local du spécimen au niveau du joint de recouvrement couplé à la présence de rotules entre le vérin et la coque introduisent une dissymétrie au niveau du chargement.



**Figure 5.8** Position des LVDT

La Figure 5.9 présente un exemple de résultat pour un essai effectué à 200 mbar sur une coque en cuivre d'épaisseur 0.2 mm ( $R/t = 675$ ). Il apparaît

que le capteur 1 (fibre collée) présente un déplacement inférieur de 14.5% par rapport à la moyenne.

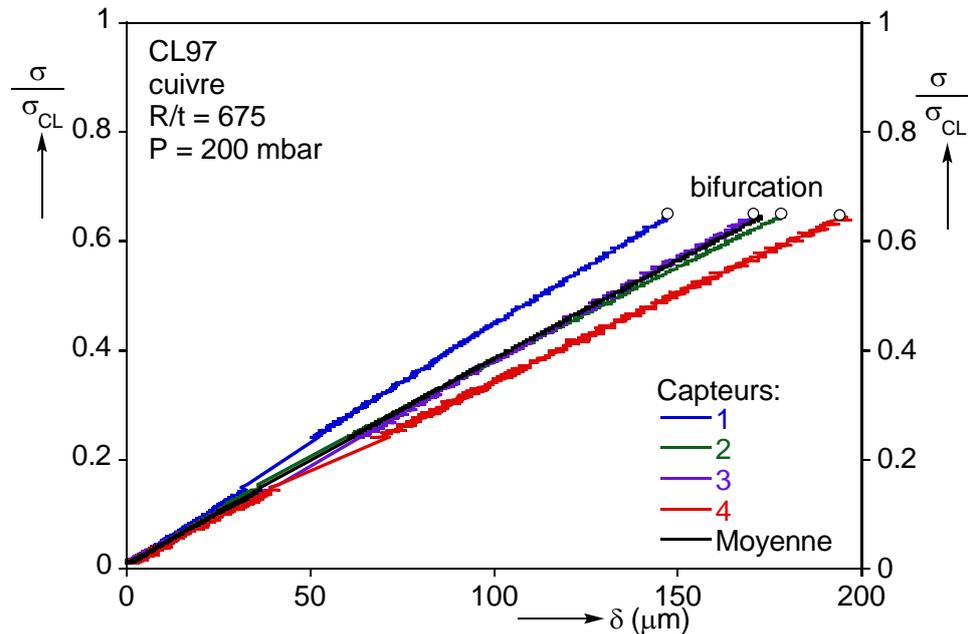


Figure 5.9 Courbes de chargement PN, coque CL97

En effet, les rotules présentes dans la transmission de l'effort vont tendre à légèrement incliner la colonne lors du chargement, et ainsi ajouter un faible moment de flexion à l'effort de compression appliqué. La fibre 4 « voit » donc une contrainte de compression plus importante que la fibre 1, ce qui se traduit par un mode de flambage dissymétrique, avec des cloques en pointe de diamant qui se propagent à partir de la fibre 4, sans affecter la fibre collée (comme nous pouvons le voir sur les photos en Figure 5.10). Cette dissymétrie provient du fait que la coque elle-même n'est pas symétrique vu la présence du joint collé : en introduisant un recouvrement vertical indispensable pour le collage de la coque, cette partie est artificiellement rigidifiée.

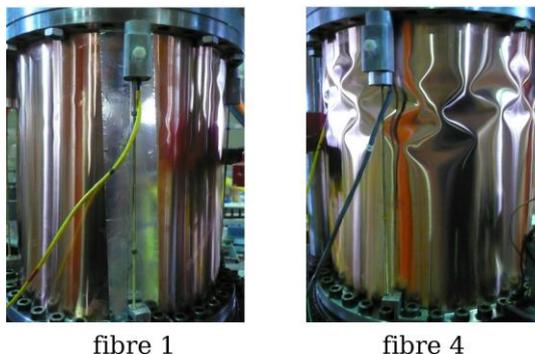


Figure 5.10 Mode critique, coque CL97

Il est donc raisonnable de penser que la contrainte critique obtenue lors des essais suivants est conservative, puisqu'elle ne comprend que la con-

trainte moyenne de compression et non la contrainte supplémentaire de flexion sur la partie flambée. La dissymétrie est plus ou moins importante selon les essais, allant de 5% jusqu'à 40% même pour certains essais ; son effet sur la charge critique sera étudié numériquement dans le chapitre suivant.

Outre cette dissymétrie venant perturber le chargement, le banc d'essais influence également le comportement post-critique mesuré. Dans le cas d'un flambage bifurcationnel (Figure 5.11), un pilotage en déplacement pur entraîne un saut sur le chemin d'équilibre vers une valeur d'écrasement infiniment plus grande. Pour le banc Ariane, même si le pilotage se fait à déplacement imposé, le dispositif expérimental ne peut empêcher la coque de s'effondrer, provoquant un saut vers une valeur d'écrasement plus importante.

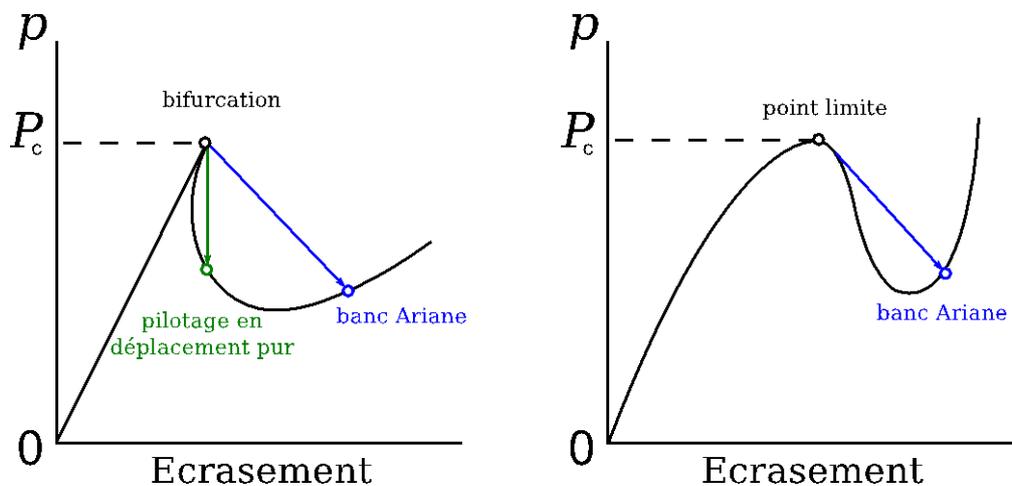


Figure 5.11 Comportements post-critiques en compression, banc Ariane

Pour un flambage par point limite, le chemin d'équilibre ne fait pas de retour en arrière, il serait donc théoriquement possible de le suivre expérimentalement. Cependant lorsque la rigidité tangente devient trop négative, le phénomène de claquage se produit et le système d'application d'effort ne peut retenir la coque, entraînant une fois de plus un saut sur le chemin d'équilibre.

En conséquence, l'écrasement est souvent tel que la coque testée est fortement endommagée (avec des cloques dont l'amplitude peut aller jusqu'à 20 fois l'épaisseur), et ne peut être réutilisée. Ceci explique le grand nombre de coques testées.

### 5.3.3 Courbes de chargement

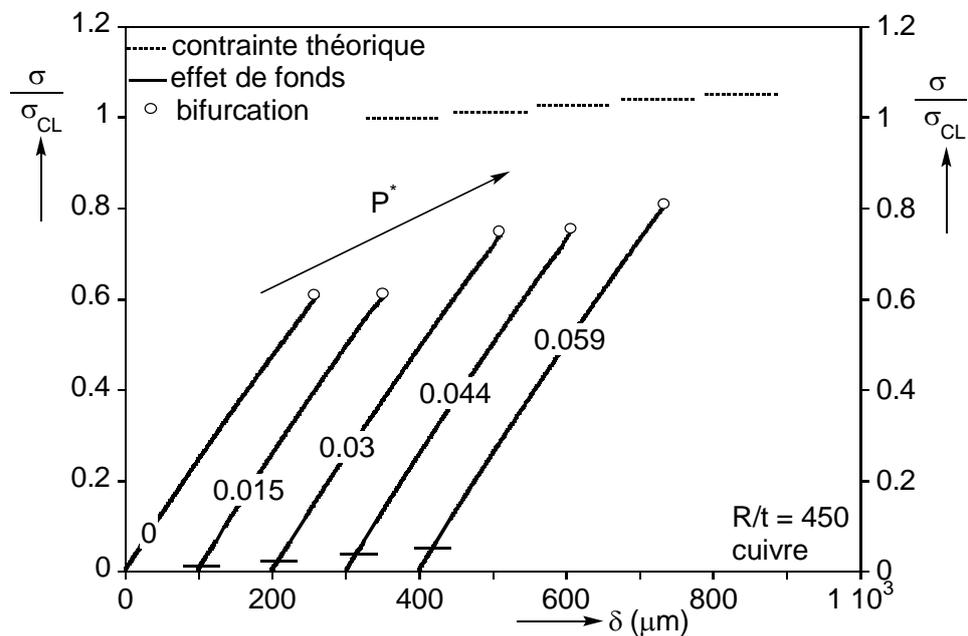
Nous présentons dans cette partie des séries de courbes de chargement à différentes pressions, pour chaque feuillard testé. Ces essais ont été réalisés sur des coques présentant des imperfections géométriques plus ou moins importantes comme nous avons pu le voir, mais non endommagées, afin de déterminer la charge maximale pouvant être supportée. Les notations utilisées sont les suivantes :

- $\delta$  est l'écrasement de la coque,
- $\sigma/\sigma_{CL}$  représente la contrainte totale normée à la contrainte classique,
- $P^* = \frac{P}{E} \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^2$  est la pression adimensionnelle

Sauf mention, seules les courbes moyennes des capteurs sont ici tracées.

#### 5.3.31 Matériau cuivre, $R/t = 450$

Les courbes de cinq essais réalisés sur des coques en cuivre et d'épaisseur 0.3mm sont présentées en Figure 5.12. Les traits pleins représentent la contrainte de tension créée par la mise en pression (l'effet de fonds) ; les traits pointillés représentent la contrainte théorique de flambage pour une coque parfaite (contrainte classique + effet de fonds).

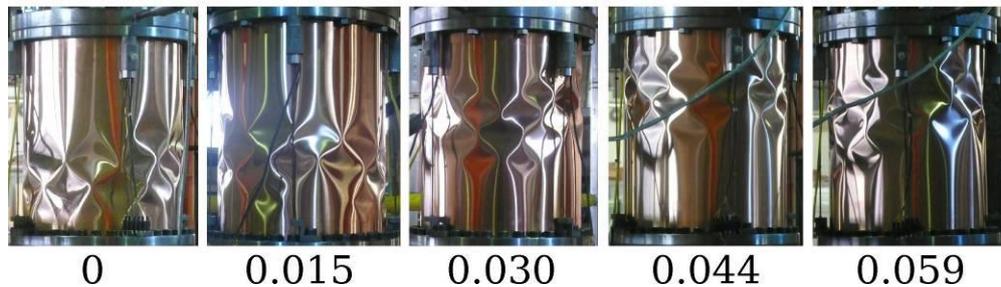


**Figure 5.12** Courbes de chargement PN,  $R/t = 450$ , cuivre

Les pressions testées sont respectivement de 0, 100, 200, 300 et 400 mbar, donnant des valeurs de  $P^*$  (indiquées sur chaque courbe) plutôt basses. Ces faibles valeurs de la pression adimensionnelle traduisent le fait que plus une coque sera épaisse, moins la pression aura d'effet sur celle-ci.

Ces cinq courbes présentent un aspect similaire, avec un comportement pré-critique essentiellement linéaire qui s'achève par une bifurcation d'équilibre (indiquées par un cercle sur la figure). La contrainte critique pour une coque non pressurisée est ici d'environ  $0.6 \cdot \sigma_{CL}$ , et cette valeur augmente avec la pression pour se rapprocher de la valeur théorique. On remarque que si l'augmentation de pression entre chaque essai est linéaire, la charge critique présente une progression quelque peu imprévisible : les essais à 0 et 100 mbar présentent des résultats très proches, de même pour les essais à 200 et 300 mbar.

Après chaque essai, des photos ont été prises (Figure 5.13) afin de pouvoir comparer les modes critiques. Tous les modes présentent ici des cloques en forme de pointes de diamant occupant une bonne partie de la hauteur et généralement propagées sur toute la circonférence de la coque. On note une légère diminution de la taille des cloques au fur et à mesure que la pression augmente.

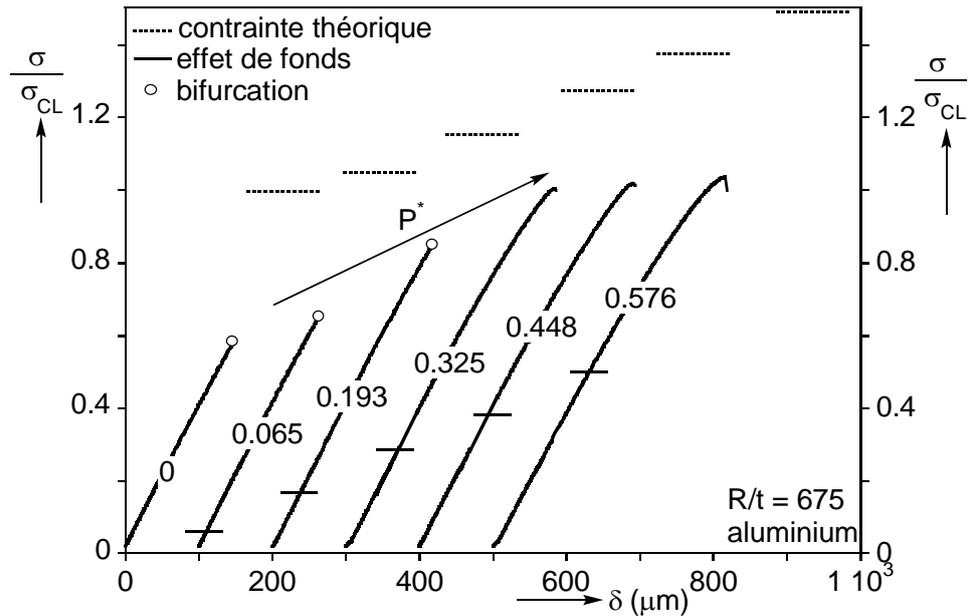


**Figure 5.13** Modes critiques, PN, R/t = 450, cuivre

La méthode de fabrication limite la contrainte maximale appliquée au niveau des conditions aux limites et du joint collé vertical, rendant impossible les essais à de plus hautes pressions sur ce type de coques. Cependant, cette série de coques plutôt épaisses nous permet d'apprécier l'effet de la pression, même pour des valeurs assez basses de  $P^*$ .

### 5.3.32 Matériau aluminium, R/t = 675

Le deuxième type de feuillard testé en compression et pression interne est l'aluminium d'épaisseur 0.2 mm. Six niveaux de pression sont ici présentés (Figure 5.14) : 0, 100, 300, 500, 700 et 900 mbar.



**Figure 5.14** Courbes de chargement PN,  $R/t = 675$ , aluminium

On observe lors de cette série deux types de courbes. Le comportement pré-critique linéaire est retrouvé aux basses pressions ( $P^* = 0, 0.065, 0.193$ ) et donne lieu à un flambage par bifurcation. La contrainte critique se rapproche peu à peu de la contrainte théorique par l'effet de la pression interne.

Les trois dernières courbes ( $P^* = 0.325, 0.448, 0.576$ ) présentent des caractéristiques différentes. Le comportement pré-critique devient non-linéaire, la rigidité tangente diminue jusqu'à devenir nulle : le flambage se produit par point-limite. De plus, la contrainte critique expérimentale s'éloigne de la contrainte théorique, ce qui semble être en opposition avec les résultats obtenus précédemment. Ce changement de comportement peut s'expliquer en étudiant les modes de flambage obtenus lors de ces essais (Figure 5.15).

Les trois premiers modes présentent des cloques en pointe de diamant, s'étendant cette fois sur une partie plus restreinte de la hauteur de la coque, et dont la longueur d'onde axiale diminue avec la pression. Le mode change ensuite, pour passer à un mode en « patte d'éléphant », un soufflet se développant près des conditions aux limites. Le déclenchement de l'instabilité ne traduit plus dans ce cas un changement de configuration d'équilibre, mais une accélération soudaine de la déformation, et se traduit donc par la présence d'un point-limite sur la courbe de chargement.

L'apparition de ce mode traduit une déstabilisation de la coque par la pressurisation. Le matériau utilisé lors de ces essais possédant une limite de linéarité très basse, la mise en pression de la coque va facilement fragiliser les zones proches des conditions aux limites, qui va donner lieu à une localisation de la déformation lorsque le chargement de compression est appliqué.

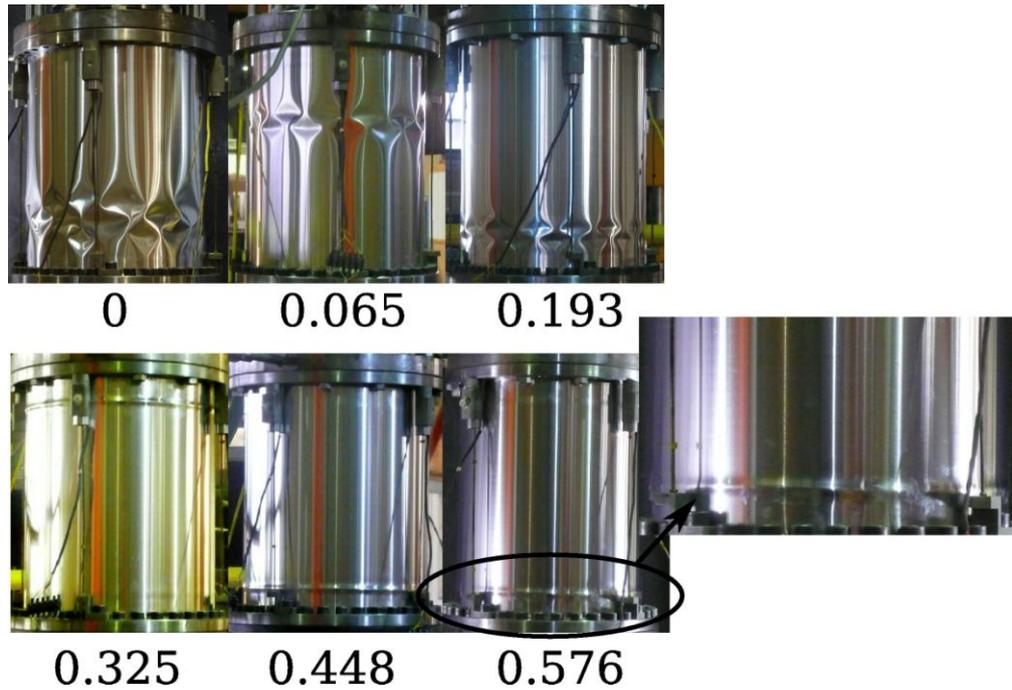


Figure 5.15 Modes critiques, PN, R/t = 675, aluminium

### 5.3.33 Matériau cuivre, R/t = 675

L'étude d'un autre feuillard d'épaisseur 0.2mm, cette fois-ci en cuivre, nous permet de jauger l'effet du matériau sur le comportement au flambage. Les courbes provenant de huit essais sont tracées en Figure 5.16, correspondant à des pressions de 0, 200, 400, 800, 1200, 1600, 2000 et 2400 mbar.

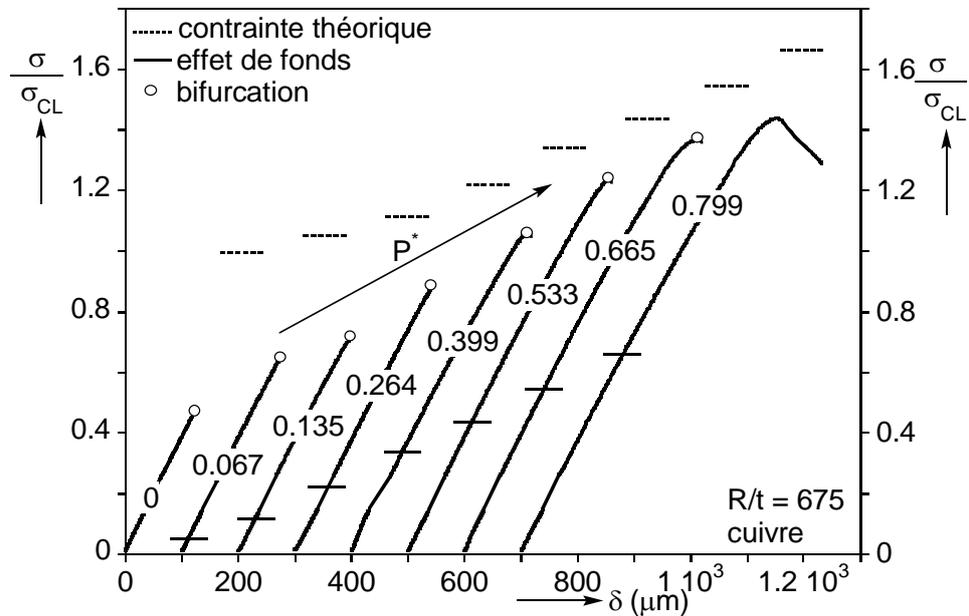
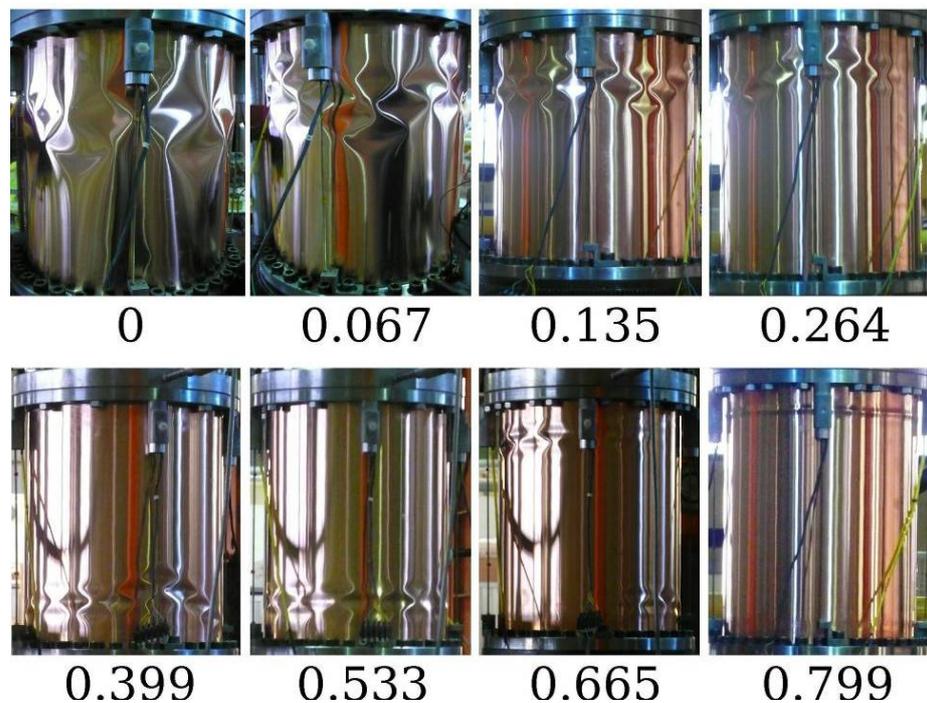


Figure 5.16 Courbes de chargement PN, R/t = 675, cuivre

L'effet stabilisateur de la pression est une fois de plus mis en évidence par le gain de contrainte critique. Le comportement pré-critique des

quatre premiers essais reste linéaire, avec une bifurcation d'équilibre entraînant l'effondrement de la coque. Une augmentation de la pression amène par la suite un comportement pré-critique non-linéaire, débouchant sur une bifurcation ( $P^* = 0.399, 0.533, 0.665$ ) puis sur une instabilité de type point-limite ( $P^* = 0.799$ ). Ce dernier essai semble correspondre une fois encore avec un éloignement de la contrainte théorique et une déstabilisation de la pression.

Les photos des différents modes critiques sont reportées en Figure 5.17, et corrélient les remarques faites sur les courbes de chargement. Le rétrécissement des cloques va de pair avec le gain de stabilité induit par la pression, le changement de mode (de cloques à soufflet) traduit quant à lui le passage d'une instabilité de type bifurcationnel à un flambage par point limite. Le cuivre possédant une limite de linéarité supérieure à l'aluminium, la pression adimensionnelle nécessaire à l'apparition du mode « patte d'éléphant » est plus élevée.



**Figure 5.17** Modes critiques, PN, R/t = 675, cuivre

#### 5.3.34 Matériau acier, R/t = 1350

L'acier possède une limite élastique bien plus haute que les autres matériaux et permet ainsi de s'affranchir des effets de plasticité vus ci-dessus. La Figure 5.18 présente huit courbes correspondant aux essais à 0, 200, 400, 600, 800, 1000, 1200 et 1400 mbar respectivement.

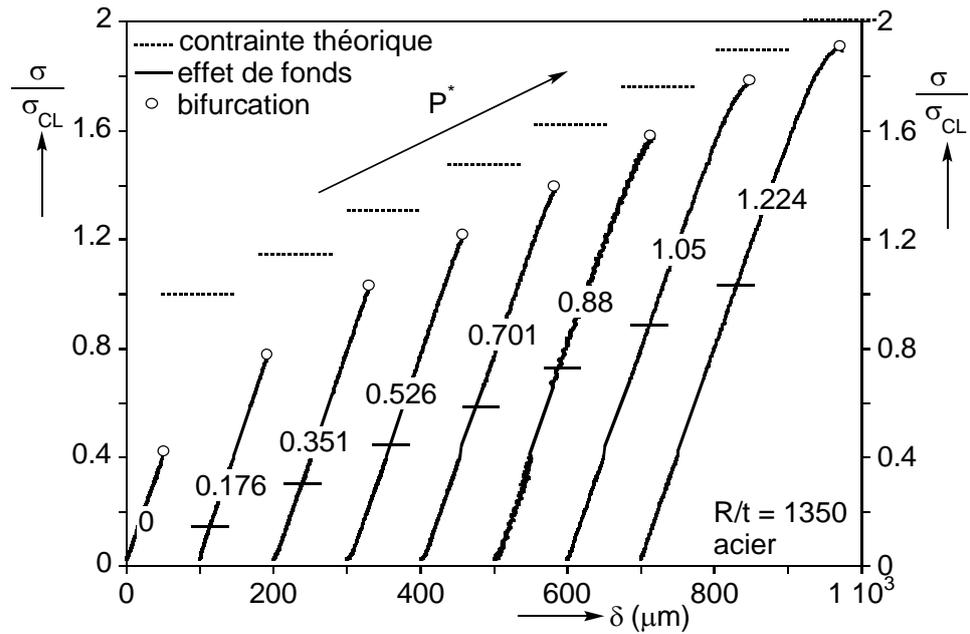


Figure 5.18 Courbes de chargement PN, R/t = 1350, acier

La contrainte critique initiale est dans ce cas de  $0.4 \cdot \sigma_{CL}$  environ, ce qui traduit la moins bonne qualité constatée en général sur les coques d'épaisseur 0.1mm par rapport aux coques faites à partir de feuillards plus épais. Cependant, les coques étant très minces, de faibles valeurs de pression suffisent à augmenter considérablement la contrainte critique expérimentale, atteignant finalement une valeur de plus de  $0.9 \cdot \sigma_{CL}$ . Le comportement de la coque est peu à peu changé, devenant de plus en plus non-linéaire, mais aboutissant toujours à une bifurcation d'équilibre.

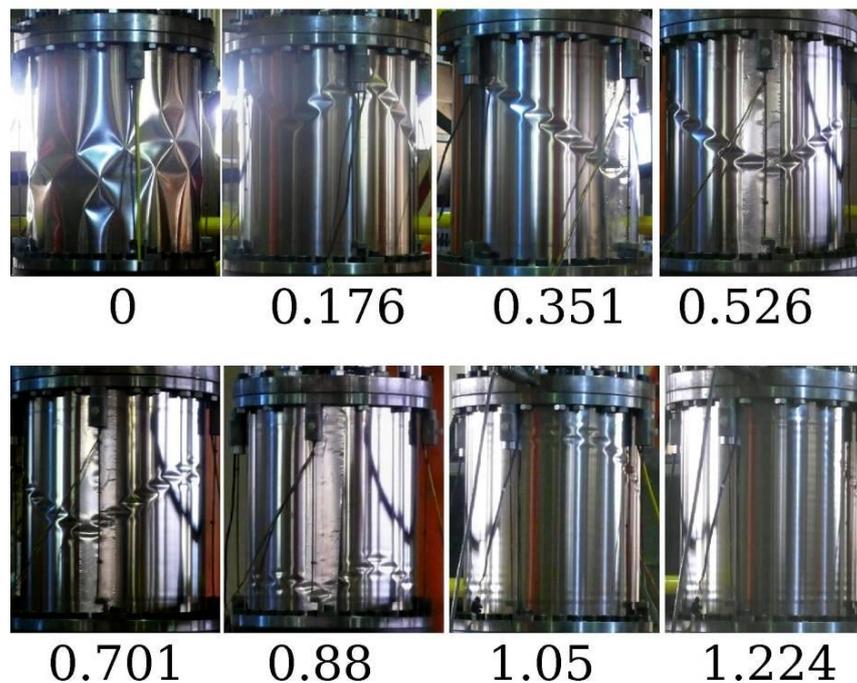
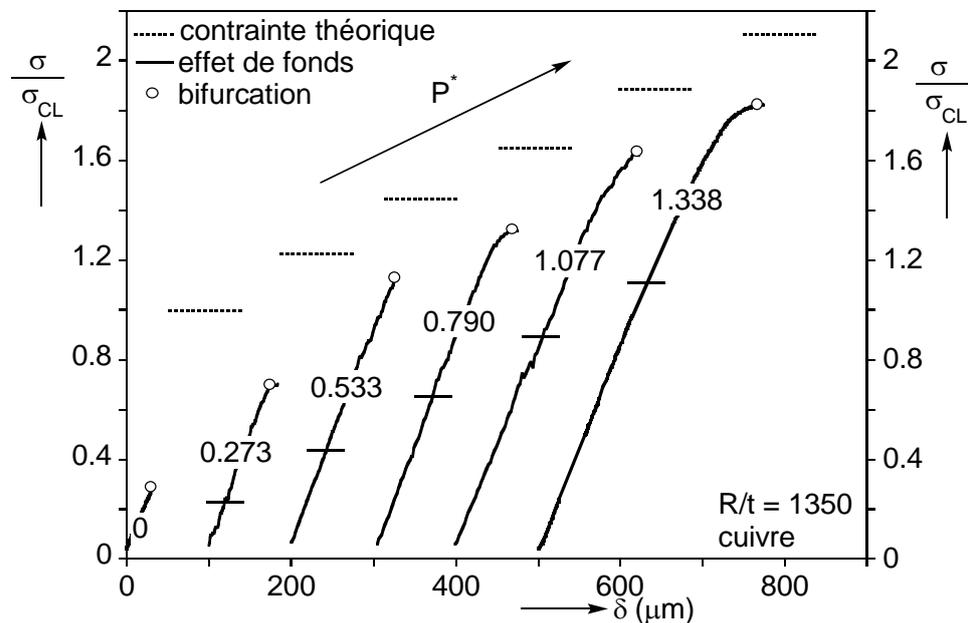


Figure 5.19 Modes critiques, PN, R/t = 1350, acier

Les modes sont présentés en Figure 5.19 ci-dessus. La plastification du matériau n'étant plus un problème ici, la pression continue de stabiliser le cylindre, et les modes obtenus pour de fortes pressurisations ( $P^* = 1.05, 1.224$ ) se rapprochent du mode axisymétrique d'une coque parfaite, avec tout de même l'apparition de petites cloques sur une zone limitée du spécimen lors de la bifurcation.

### 5.3.35 Matériau cuivre, $R/t = 1350$

Des coques d'épaisseur 0.1 mm sont de nouveau testées, fabriquées cette fois-ci à partir d'un feuillard de cuivre. Nous avons pu jauger en début de ce chapitre la différence de qualité entre les deux clinquants, et il est donc intéressant de comparer les résultats obtenus.

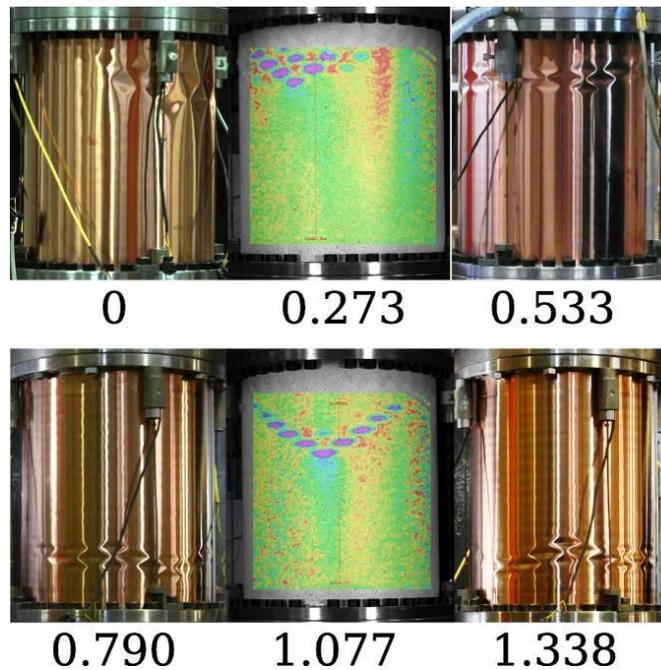


**Figure 5.20** Courbes de chargement PN,  $R/t = 1350$ , cuivre

Les courbes tirées de 6 essais effectués à 0, 200, 400, 600, 800 et 1000 mbar sont tracées en Figure 5.20. On retrouve lors du premier essai un comportement linéaire, qui s'achève bien rapidement par une bifurcation à moins de 30% de la charge classique. Etant donné la qualité médiocre de ces cylindres et en comparaison avec les séries précédentes, cette piètre performance est sans surprises.

Nous notons malgré tout une augmentation conséquente de la contrainte critique avec la pression interne ( $P^* = 0.273, 0.533$ ). Pour des pressions plus importantes, l'apparition d'ondulations axisymétriques lors du chargement coïncide avec les non-linéarités dans le comportement, débouchant tout de même sur une bifurcation d'équilibre avec un cloquage. Les imperfections géométriques empêchent la contrainte de flambage de se rapprocher de près de sa valeur théorique.

Les modes critiques (Figure 5.21) rejoignent nos observations précédentes, avec une diminution de la taille des cloques au fur et à mesure que la pression augmente. Le reflet de la lumière sur la coque permet de voir nettement les ondulations axisymétriques, notamment pour le dernier mode ( $P^* = 1.338$ ). A noter que deux de ces photos ont été prises à l'aide du système Vic-3D présenté au chapitre précédent.



**Figure 5.21** Modes critiques, PN, R/t = 1350, cuivre

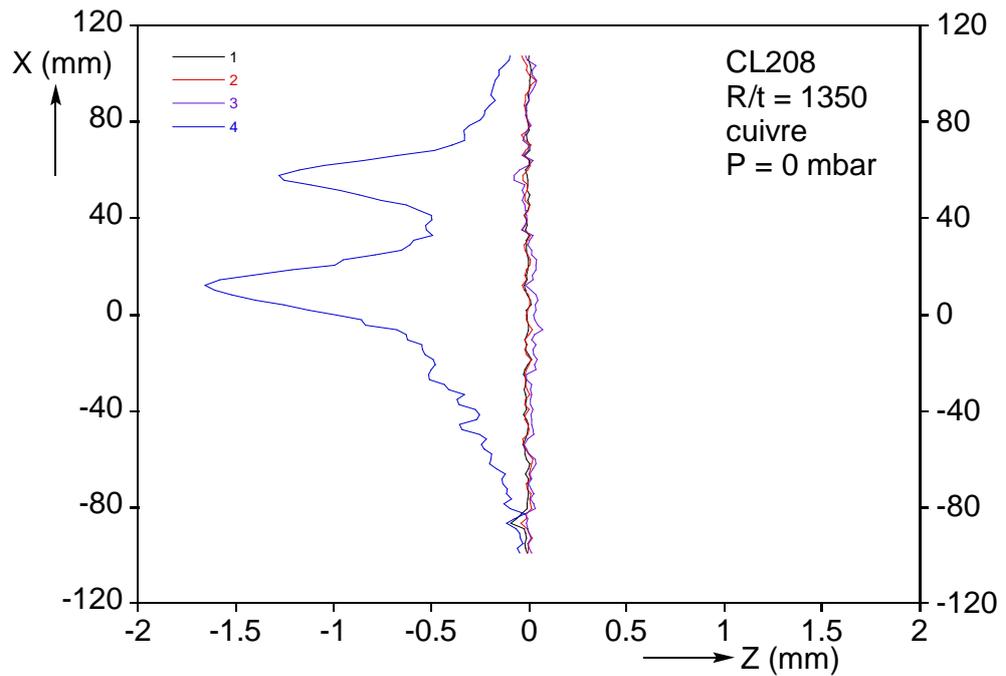
#### 5.3.4 Etude de la déformation

Le système Vic-3D nous permet de suivre l'évolution du champ de déformations sur la coque lors d'un essai. Nous présentons ici deux essais effectués à deux niveaux de pression différents : 0 et 900 mbar.

##### 5.3.4.1 Sans pression interne

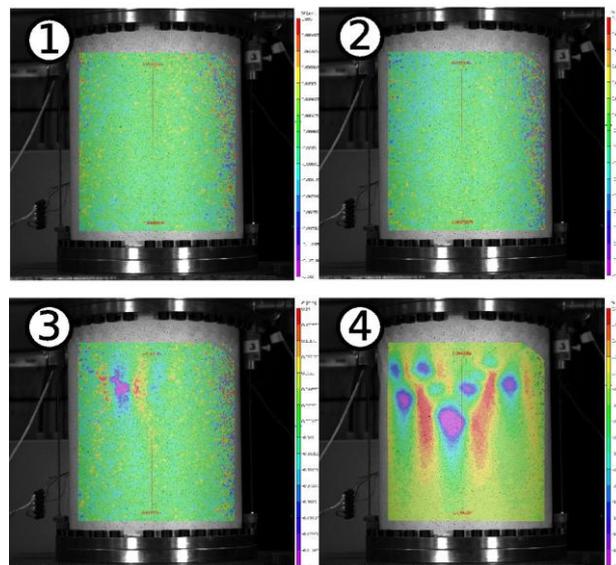
Le premier essai concerne donc une coque non pressurisée. Le déroulement est similaire au premier essai de la Figure 5.20, le flambage est atteint rapidement après une courte branche fondamentale linéaire. Quatre configurations ont été retenues :

- 1 en début de chargement ;
- 2 vers le milieu de l'essai ;
- 3 au moment du flambage ;
- 4 après effondrement du spécimen.



**Figure 5.22** Evolution des déformations au cours du chargement, CL208

La Figure 5.22 montre les déformations mesurées sur une génératrice du cylindre pour chacune des configurations citées ci-dessus, et les champs de déformation correspondants sont présentés en Figure 5.23. On constate ici que les perturbations pré-critiques sont minimales, en revanche après effondrement la structure est perturbée sur toute sa hauteur. L'amplitude des déformations atteint alors 15 fois l'épaisseur de la coque.



**Figure 5.23** Série de photos montrant l'évolution de la déformation du spécimen CL208 soumis à de la compression axiale

### 5.3.42 Haute pression

Nous détaillons maintenant un second essai, réalisé cette fois avec une pression plutôt importante de 900 mbar ( $P^* = 1.189$ ), avec pour résultat la courbe de chargement tracée en Figure 5.24. Nous avons extrait cette fois-ci neuf configurations, dont les photos sont présentées en Figure 5.25 et les déformations suivant une génératrice en Figure 5.26 (1 correspondant à l'état initial, 9 à l'état après collapse). Les numéros de ces configurations ont été reportés sur la courbe de chargement.

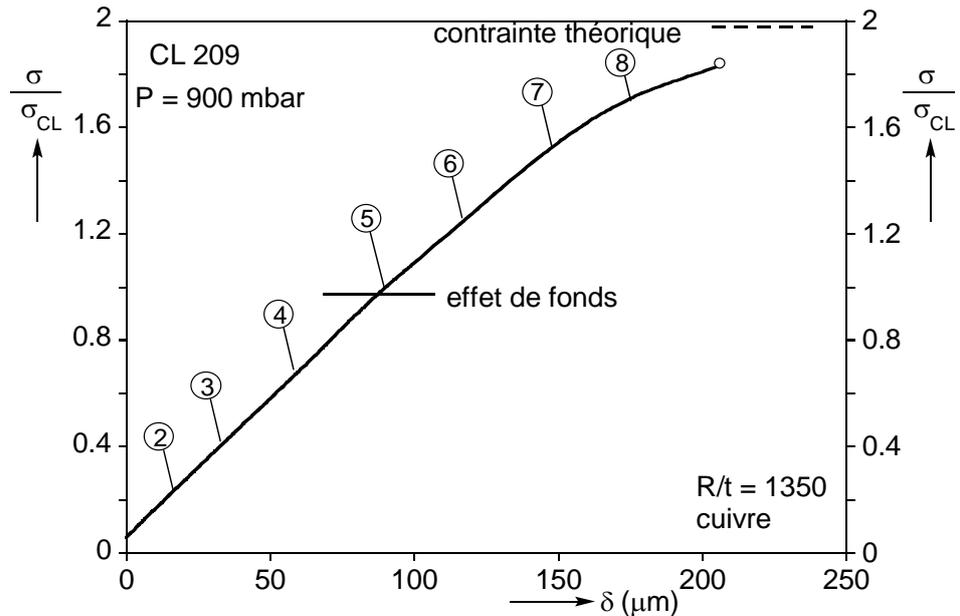
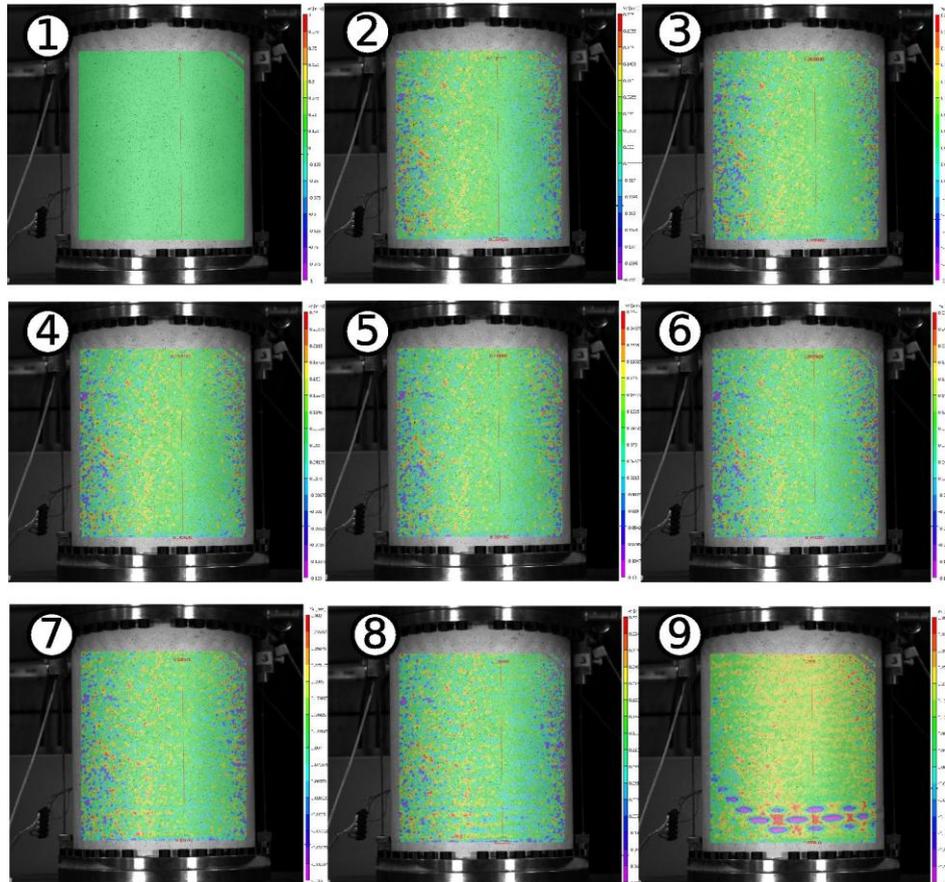


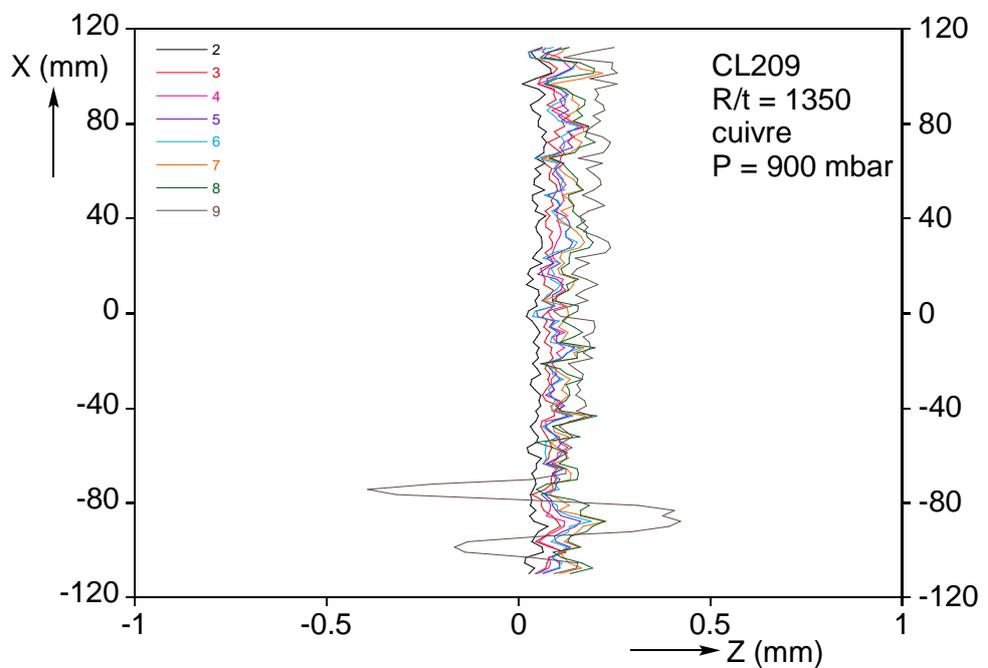
Figure 5.24 Courbe de chargement PN, CL209

Le comportement est essentiellement linéaire jusqu'à la configuration 7 (hormis quelques perturbations pouvant raisonnablement être imputées aux conditions expérimentales). Sous compression axiale les déformations de la coque sont membranaires, et donc très faibles en comparaison avec la précision du système de stéréo-corrélation ; l'évolution apparaît donc légère entre les numéros 2 et 6. A partir de la configuration 7, la branche d'équilibre fondamentale devient alors non-linéaire, et on remarque alors l'apparition d'ondulations axisymétriques débouchant sur la bifurcation et le cloquage en bas de spécimen.

Bien que sa précision soit limitée en comparaison avec la grandeur des déplacements appréhendés ici, cette technique nous permet tout de même de confirmer la cinématique aboutissant au flambage, dans le cas purement linéaire ou en présence de non-linéarités géométriques.



**Figure 5.25** Série de photos montrant l'évolution de la déformation du spécimen CL209 soumis à de la compression axiale



**Figure 5.26** Evolution des déformations au cours du chargement, CL209

### 5.3.5 Contraintes critiques

Après avoir étudié les différents comportements observés, nous reportons dans cette partie les contraintes critiques nettes obtenues pour chaque feuillard (i.e. sans prise en compte de l'effet de fonds).

#### 5.3.51 Matériau cuivre, $R/t = 450$

Les résultats de huit essais effectués sur ce feuillard sont tracés en Figure 5.27 avec les prédictions de la NASA SP8007 et de l'Eurocode 3. Les fortes sollicitations exercées sur les spécimens pouvant entraîner un décollement du joint collé vertical, la pression maximale testée ici est de 400 mbar.

La contrainte critique initiale est de près de 60% de la contrainte classique, et augmente par la suite avec la pression, pour atteindre 75% à 400 mbar. Une certaine dispersion existe, que nous pouvons attribuer aux facteurs expérimentaux (qualité des coques, dissymétrie du banc...). La tendance est cependant claire : les résultats expérimentaux sont supérieurs aux recommandations des différents codes de dimensionnement.

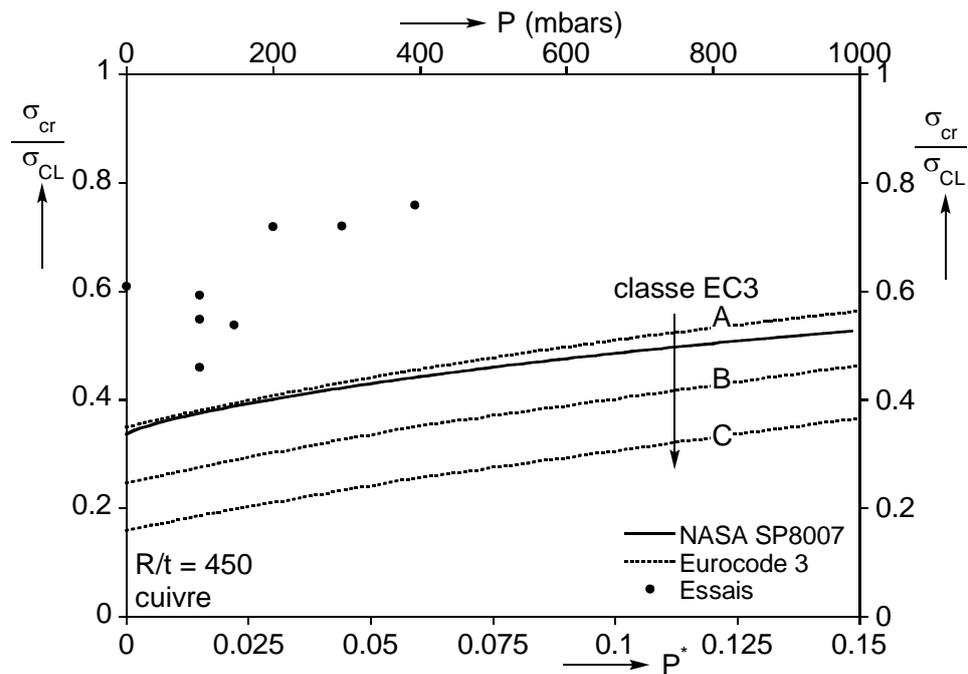


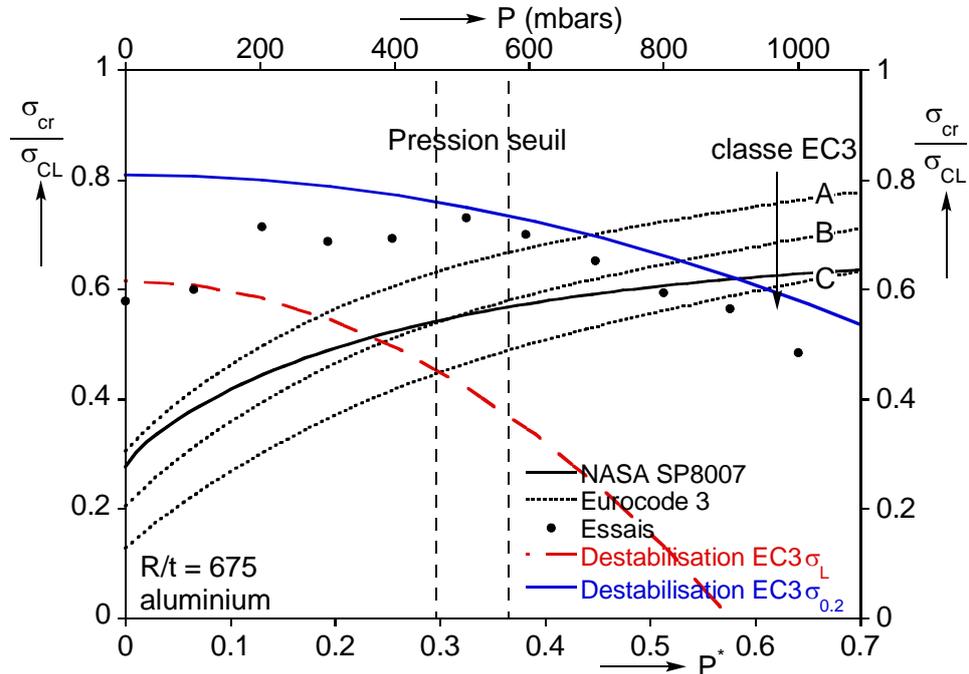
Figure 5.27 Contraintes critiques PN,  $R/t = 450$ , cuivre

#### 5.3.52 Matériau aluminium, $R/t = 675$

Onze coques de ce feuillard ont fait l'objet d'essais entre 0 et 1000 mbar, dont les contraintes critiques ont été tracées en Figure 5.28.

La contrainte initiale de près de  $0.6 \cdot \sigma_{CL}$  augmente régulièrement jusqu'à atteindre  $0.73 \cdot \sigma_{CL}$  à 500 mbar, pression seuil à laquelle le mode de flambage en « patte d'éléphant » apparaît (soit  $\sigma_{\theta} / \sigma_{0.2} = 0.3$ ). L'effet déstabilisa-

teur de la pression devient alors de plus en plus important et ne cesse de réduire la contrainte critique, pour obtenir  $0.48 \cdot \sigma_{CL}$  à 1000 mbar.



**Figure 5.28** Contraintes critiques PN, R/t = 675, aluminium

La comparaison avec les règles de dimensionnement peut se faire en deux temps. Aux faibles pressions, l'effet des défauts est prédominant, les résultats sont supérieurs à la classe A de l'Eurocode et à la SP8007, avec une marge assez importante. A l'atteinte de la pression seuil, l'effet fragilisateur de la pression prend le dessus, et la comparaison n'est alors plus valable. La NASA ne prend pas en compte ce phénomène, ce qui peut s'avérer dangereux pour le dimensionnement comme le montrent les courbes.

L'Eurocode propose un coefficient de déstabilisation, mais un problème se pose alors dans le choix de la contrainte limite. En effet, l'aluminium utilisé étant fortement non-linéaire (voir chapitre 4), une différence importante existe entre la limite de linéarité et la contrainte conventionnelle à 0.2% de déformation. Ainsi, pour  $\sigma_L$  (60 MPa), le coefficient est bien trop conservateur, et annonce une contrainte critique nulle dès 900 mbar. Les recommandations données pour  $\sigma_{0.2}$  (125 MPa) surestiment quant à elles légèrement les résultats expérimentaux.

### 5.3.53 Matériau cuivre, R/t = 675

La campagne d'essais a donné lieu à 21 essais pour ce feuillard, effectués entre 0 et 2600 mbar, et dont les résultats sont tracés en Figure 5.29. Les effets stabilisateur et déstabilisateur de la pression sont une fois encore démontrés. Les contraintes critiques évoluent de manière semblable à la classe A de

l'Eurocode 3, malgré une certaine dispersion, attribuable une fois de plus aux conditions expérimentales.

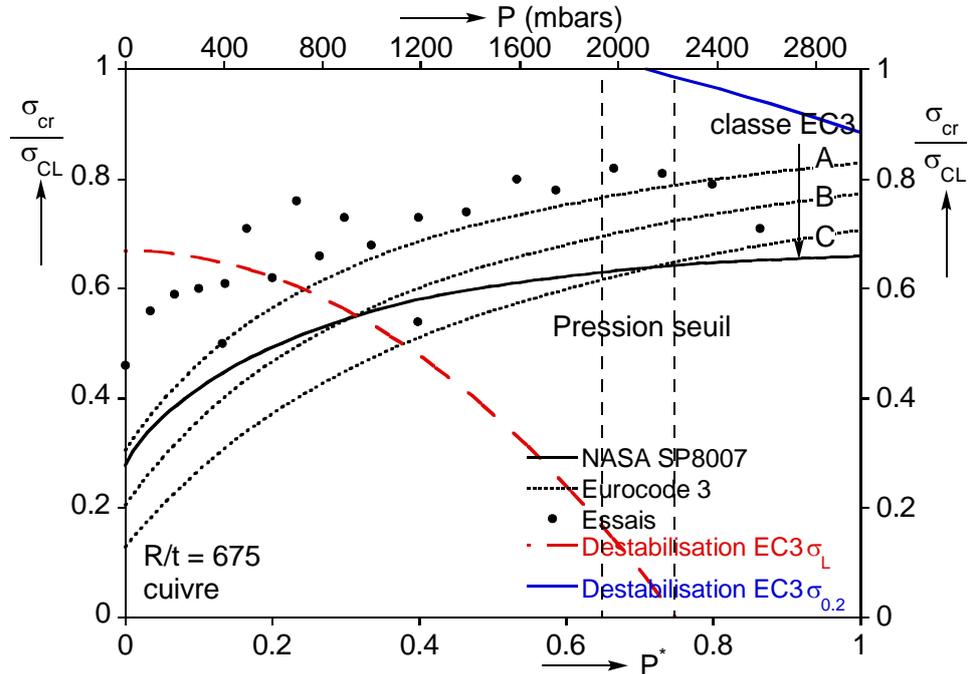


Figure 5.29 Contraintes critiques PN,  $R/t = 675$ , cuivre

La fragilisation de la coque avec la pression interne apparaît ici vers 2000 mbar, soit une pression adimensionnelle  $P^*$  d'environ 0.7. Contrairement à l'aluminium, la contrainte critique peut ici augmenter sur une plage de pression importante avant d'être affectée par l'effet « patte d'éléphant », mettant en exergue l'importance du choix du matériau. Au regard des recommandations de l'Eurocode concernant cette déstabilisation, l'écart entre  $\sigma_L$  et  $\sigma_{0.2}$  est encore plus important que dans le cas précédent. On voit que le choix de  $\sigma_{0.2}$  comme contrainte de référence est bien trop optimiste.

Nous proposons maintenant d'illustrer l'influence des conditions expérimentales en comparant deux essais réalisés à la même pression (1200 mbar) mais présentant des niveaux de dissymétrie largement différents (Figure 5.30). Lors de l'essai CL102, un mauvais réglage du banc a conduit à une dissymétrie de plus de 44% par rapport à l'écrasement moyen, contre moins de 10% pour l'essai CL108. La différence en termes de contrainte critique est conséquente, puisque l'on passe de  $0.54 \cdot \sigma_{CL}$  pour le premier à  $0.73 \cdot \sigma_{CL}$  pour le second. L'influence de la dissymétrie en fonction de la pression sera étudiée numériquement au chapitre suivant. Cet exemple est la preuve s'il en est qu'une légère différence dans les réglages du banc d'essais peut conduire à des résultats totalement différents. C'est pourquoi nous sommes confiants que les contraintes critiques obtenues lors de la campagne d'essais sont conservatives.

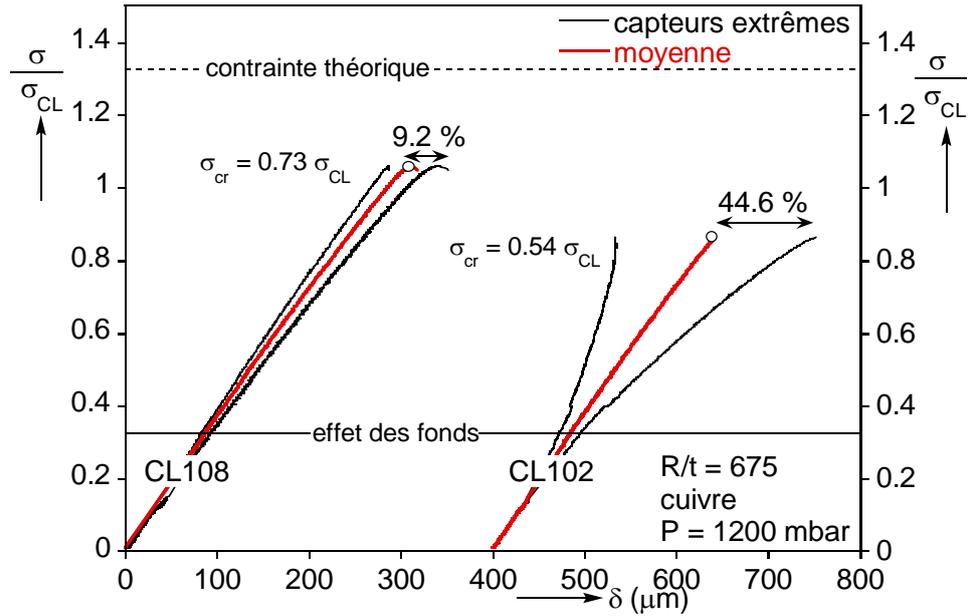


Figure 5.30 Influence de la dissymétrie sur les essais PN

5.3.54 Matériau acier,  $R/t = 1350$

L'usage d'un acier à haute limite élastique présente l'avantage de pouvoir réutiliser les coques : en effet, le pilotage se faisant à déplacement imposé, l'écrasement de la coque lors de son effondrement reste suffisamment limité pour ne pas endommager irréversiblement le spécimen.

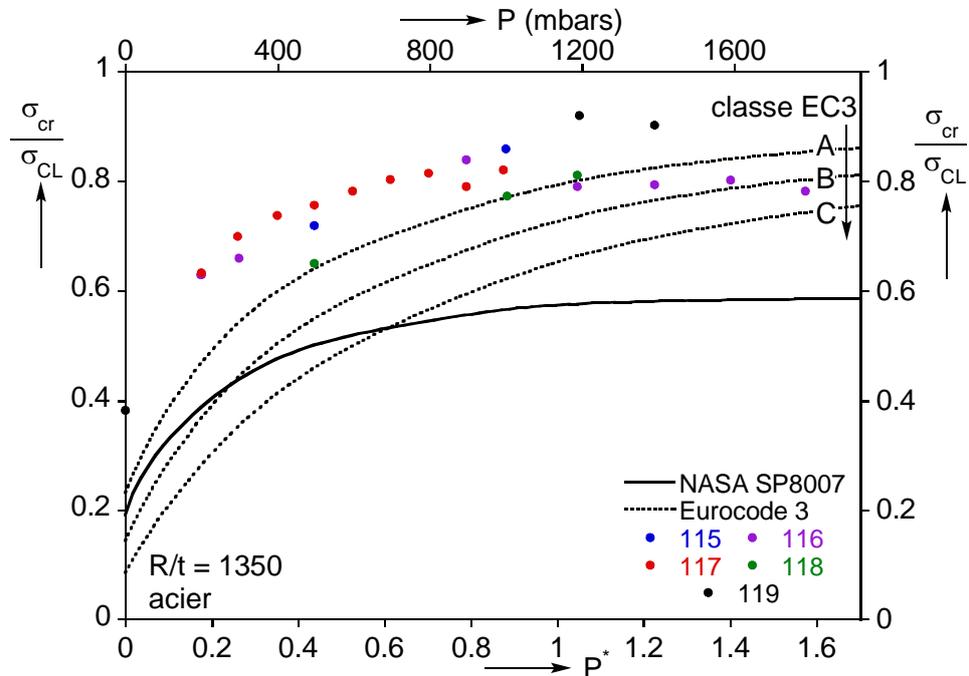


Figure 5.31 Contraintes critiques PN,  $R/t = 1350$ , acier

Ainsi, cinq coques ont suffi à réaliser la campagne d'essais (23 au total), avec des pressions variant entre 0 et 1800 mbar (voir Figure 5.31). La con-

trainte critique démarre à environ 40% de la valeur théorique, soit tout de même près de 100% de marge en comparaison avec la NASA SP8007. Avec l'augmentation de pression, les points suivent la tendance de la classe A de l'Eurocode 3, et seuls quelques essais à haute pression y sont inférieurs. Ces derniers résultats ne sont pas ici le produit d'un affaiblissement dû à la pression comme nous avons pu le voir pour d'autres feuillards, mais bien une conséquence de l'environnement expérimental (mauvais contrôle de la dissymétrie).

5.3.55 Matériau cuivre,  $R/t = 1350$

Les contraintes de flambage de 17 essais réalisés sur des coques en cuivre d'épaisseur 0.1 mm sont tracées en Figure 5.32, pour des pressions allant de 0 à 1 bar. Avec l'utilisation d'un feuillard comportant des imperfections visibles à l'œil nu, des contraintes critiques sensiblement inférieures à celles obtenues précédemment sont à prévoir.

En effet, bien que la totalité des essais ne dépasse les recommandations de la NASA SP8007, seuls 8 sont au niveau de la classe A de l'Eurocode. Ceci peut évidemment sembler alarmant, nous rappelons toutefois que la classe A est destinée aux structures de qualité excellente, soit dans notre cas ( $R/t = 1350$ ) présentant des imperfections d'amplitude inférieure à  $0.88 \cdot t$ . Nos essais sont ici perturbés à la fois par les conditions du banc d'essais et la qualité médiocre des clinquants utilisés, pouvant sembler préhistorique en comparaison avec des coques de qualité aérospatiale. La présence notamment d'ondulations axisymétriques (comme nous l'avons vu au début du chapitre), de faible amplitude mais semblables au mode de flambage théorique, pénalise fortement les résultats.

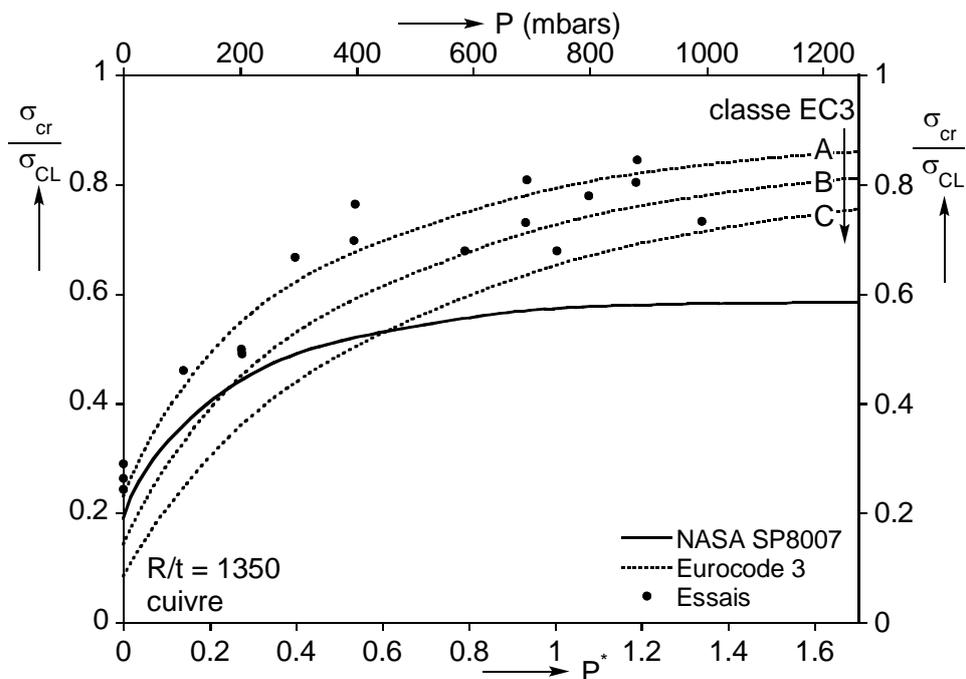


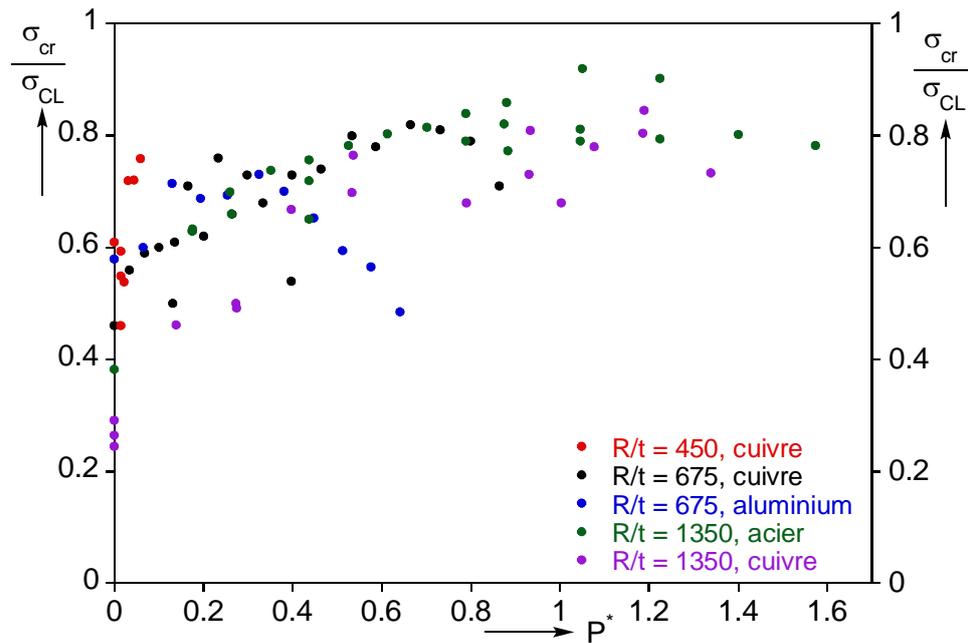
Figure 5.32 Contraintes critiques PN,  $R/t = 1350$ , cuivre

### 5.3.56 Bilan des essais

Après avoir exposé individuellement les résultats de chaque campagne afin de pouvoir identifier les spécificités des différents feuillards et l'influence des différents paramètres (géométrie, matériau), nous présentons en Figure 5.33 les résultats de tous les essais effectués en pression interne et compression, pouvant être comparés à l'aide de la pression adimensionnelle  $P^*$ .

Malgré le peu d'essais effectués sur le feuillard cuivre 0.3mm (rouge,  $R/t = 450$ ), on constate que la contrainte critique augmente très rapidement avec  $P^*$  en comparaison avec les autres types de coques.

Ensuite, trois feuillards montrent initialement une évolution de contrainte critique similaire avec l'augmentation de la pression : l'aluminium et le cuivre, tous d'épaisseur 0.2 mm (respectivement bleu et noir,  $R/t = 675$ ) ; et l'acier, d'épaisseur 0.1 mm (vert,  $R/t = 1350$ ). Lorsque la pression augmente encore, les différences entre les matériaux apparaissent: l'aluminium, très vite perturbé par la plasticité ; le cuivre, où la contrainte critique peut encore augmenter avant d'être affectée par la pression ; et l'acier, peu propice à la plastification et dont la dispersion des résultats est causée par les conditions expérimentales.



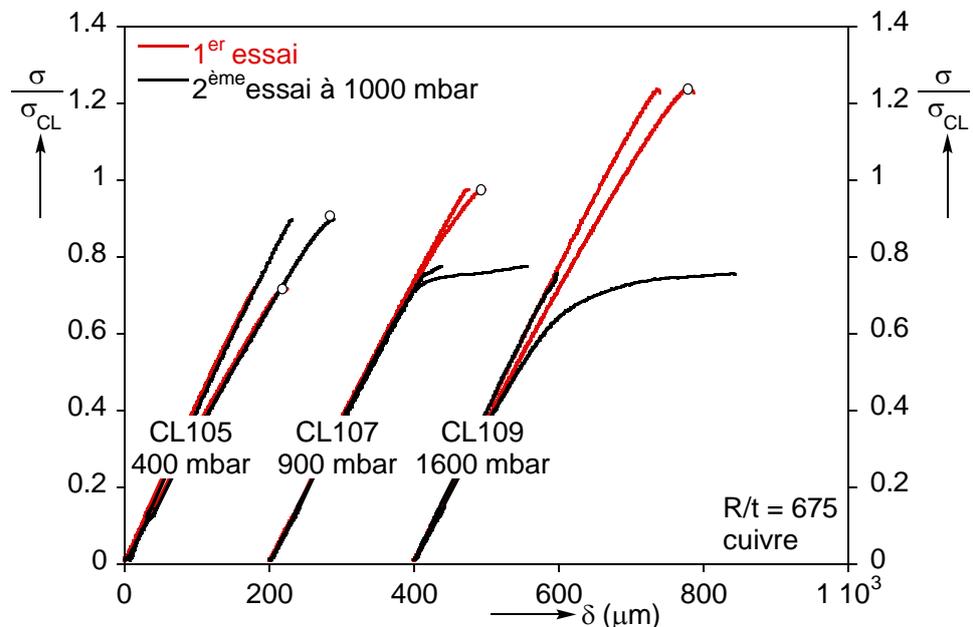
**Figure 5.33** Contraintes critiques PN de tous les essais réalisés

On remarque enfin que les coques en cuivre d'épaisseur 0.1 mm (mauve,  $R/t = 1350$ ) montrent une tendance inférieure aux autres séries, de par leur qualité moindre.

### 5.3.6 Comportement de coques endommagées

Comme nous l'avons précisé, les essais présentés précédemment ont été uniquement réalisés sur des coques « neuves », ne présentant aucun dommage, dans le but de proposer de nouvelles recommandations pour le dimensionnement. Il peut cependant être intéressant de voir comment se comportent des coques après avoir été endommagées, c'est pourquoi quelques spécimens ont fait l'objet d'un second essai après avoir été testés une première fois.

La Figure 5.34 présente les courbes de chargement obtenues pour 3 coques en cuivre et d'épaisseur 0.2 mm, testées une première fois à 400, 900 et 1600 mbar respectivement (courbes rouges), puis une deuxième fois à 1000 mbar (courbes noires). Pour chaque essai, les valeurs des capteurs extrêmes sont tracées. Lors des premiers essais, les comportements observés sont conformes à ceux vus précédemment, avec un flambage par bifurcation et une augmentation de la contrainte critique avec la pression.

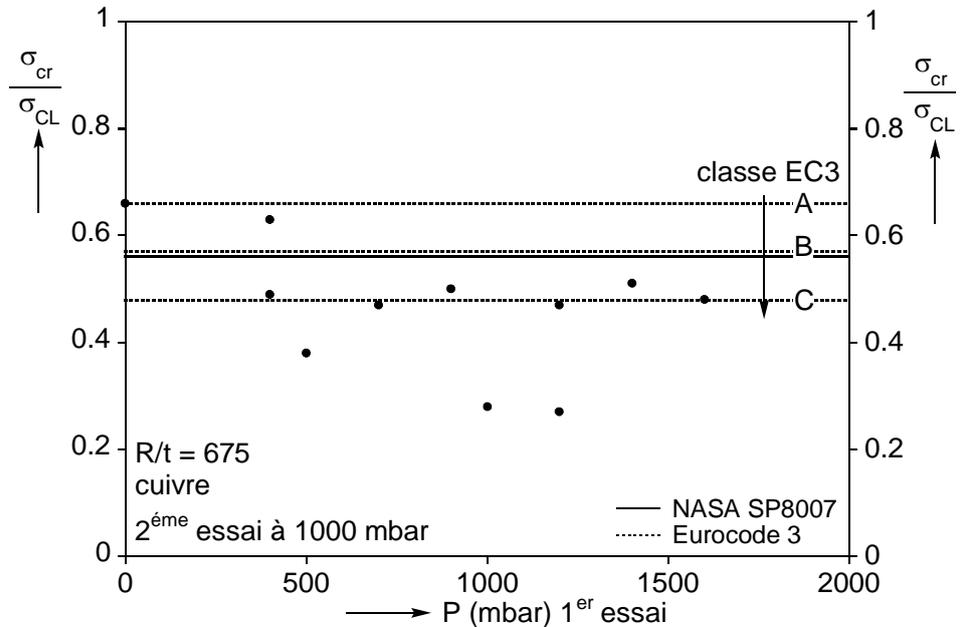


**Figure 5.34** Courbes de chargement PN, seconds essais à 1000 mbar

Les deuxièmes essais, tous effectués à la même pression de 1000 mbar, présentent cependant des comportements différents. Pour la première coque, testée une première fois à 400 mbar, la contrainte critique passe de  $0.61 \cdot \sigma_{CL}$  à  $0.63 \cdot \sigma_{CL}$ , et le flambage est toujours obtenu par bifurcation. La coque CL107 a d'abord été testée à 900 mbar, et on observe un changement de comportement après avoir été endommagée. Un changement de pente continu mais rapide apparaît, couplé à une localisation de l'écrasement du côté le plus endommagé de la coque (comme en témoignent les courbes des capteurs). De plus, la contrainte critique baisse, passant de  $0.73 \cdot \sigma_{CL}$  à  $0.50 \cdot \sigma_{CL}$ . Pour la troisième coque présentée, CL109 testée à 1600 mbar, la contrainte critique

baisse encore ( $0.48 \cdot \sigma_{CL}$ ), et la courbe devient fortement non-linéaire, avec une accélération de la déformation d'un côté de la coque.

Au total, 11 coques ont fait l'objet d'un deuxième essai à 1000 mbar. La Figure 5.35 présente les contraintes critiques de ce deuxième essai en fonction de la pression interne appliquée à la coque lors du premier flambage.



**Figure 5.35** Contraintes critiques PN, seconds essais à 1000 mbar

Malgré la dispersion inévitable pour ce type de problème, il apparaît que plus la pression est importante lors du premier essai, plus la contrainte critique diminue lorsque la coque flambe de nouveau à 1000 mbar. Si le peu d'essais réalisés ici ne nous permet pas de conclure de manière précise sur la question, il est cependant intéressant de noter que deux coques ont dépassé la contrainte critique recommandée par la SP8007, et que huit au total sont au moins au niveau de la classe C de l'Eurocode. Ainsi, même une coque fortement endommagée peut atteindre les niveaux de contraintes critiques donnés dans les codes de dimensionnement, traduisant leur fort conservatisme.

### 5.3.7 Conclusions des essais PN

Le nombre d'essais réalisés en pression interne et compression, sur différents types de coques, nous a permis de tirer un certain nombre de conclusions quant au déclenchement des instabilités. Nous retrouvons ici certaines observations faites par d'autres expérimentateurs (voir chapitre 2).

- *Comportement des coques*

Le chemin d'équilibre de tous les types de coques est originellement linéaire, débouche sur une bifurcation qui conduit à une branche secondaire instable. La pression interne change peu à peu la branche secondaire et augmente la résistance post-critique de la coque, la « stabilisant ». Lorsqu'un niveau de pression suffisant est atteint, la branche fondamentale devient non-linéaire, les déformations plus importantes et le flambage se fait par point-limite.

- *Modes critiques*

Les modes observés sont du type « pointes de diamant », et occupent une plus ou moins grande partie de la coque selon la géométrie et le matériau testés. La longueur d'onde axiale de ces cloques diminue au fur et à mesure que la pression augmente, jusqu'à ce que la pression soit telle que la formation de cloques est totalement inhibée. Le flambage apparaît alors sous la forme d'ondulations axisymétriques, qui sont le mode théorique de flambage pour une coque cylindrique mince (chapitre 1).

- *Contraintes critiques*

Le flambage de coques est fortement influencé par la présence d'imperfections géométriques. Ainsi, la contrainte critique initiale observée sur nos spécimens fabriqués manuellement en laboratoire varie entre 25 et 60% de la valeur théorique environ. Cependant, la mise en pression augmente la contrainte nette de flambage, qui peut même atteindre la valeur théorique. Les valeurs obtenues sont en général bien au-dessus des charges critiques préconisées par la NASA SP8007 qui nous sert de référence principale. Les valeurs de l'Eurocode sont plus proches des charges empiriques réelles. D'autre part, des coques endommagées et présentant des défauts très importants peuvent parfois encore supporter des charges conséquentes lors d'un nouvel essai. Les contraintes obtenues alors sont cependant trop dispersées et aléatoires pour pouvoir conclure.

- *Influence du matériau*

Outre la rigidité, qui intervient dans le calcul de la contrainte critique, la courbe matériau peut avoir une influence sur le déclenchement d'instabilités. En effet, si la mise en pression stabilise la coque, une pressurisation trop importante peut fragiliser le cylindre près des conditions aux limites et provoquer le collapse par localisation de la plasticité, formant alors un mode en « patte d'éléphant ».

- *Influence de la géométrie*

Le rapport  $R/t$  a bien évidemment de l'importance. La pression adimensionnelle  $P^*$  permet de comparer les résultats obtenus pour diffé-

rentes épaisseurs. Il apparaît que bien que la contrainte théorique soit la même quel que soit le  $R/t$ , expérimentalement des différences existent. En effet, plus les coques sont épaisses, plus les contraintes critiques initiales sont élevées et plus elles augmentent avec la pression. Ceci est simplement une conséquence de la qualité des coques : plus une coque est mince, et plus il est difficile de minimiser les imperfections géométriques.

## 5.4 Essais de flambage sous flexion et pression interne

### 5.4.1 Démarche

Hormis les campagnes de l'INSA, peu d'essais sont recensés en flexion et pression interne depuis les années 60. Nous présentons dans cette partie des essais que nous avons conduits sur 5 différents types de coques :

- $R/t = 450$ , cuivre
- $R/t = 675$ , aluminium
- $R/t = 675$ , cuivre
- $R/t = 1350$ , acier
- $R/t = 1350$ , cuivre

### 5.4.2 Conditions expérimentales

Les essais ( $P$ ,  $M$ ) sont réalisés sur le petit banc, et donc plus ou moins à force imposée. Ce type de pilotage va dicter le comportement post-critique mesuré, comme le montre la Figure 5.36.

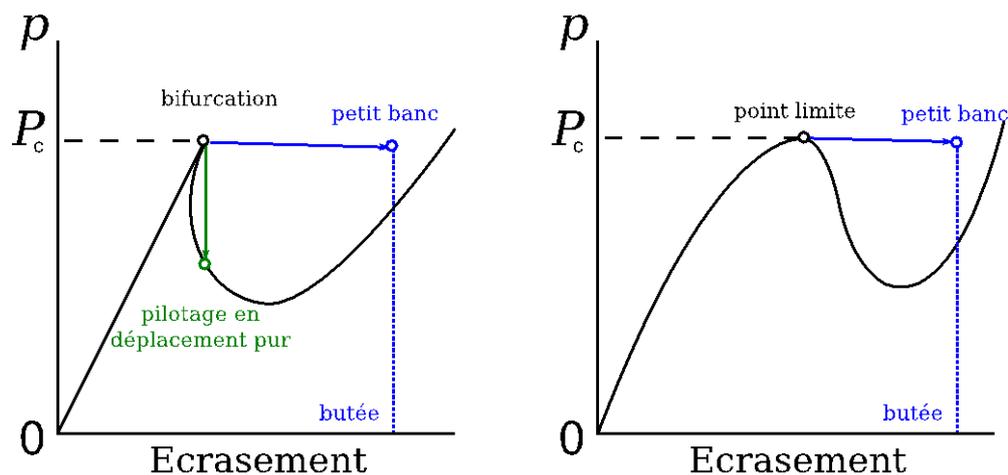


Figure 5.36 Comportements post-critiques en compression, petit banc

L'atteinte d'un maximum sur le chemin d'équilibre se traduit ainsi automatiquement par un effondrement arrêté par la butée et un écrasement beaucoup plus important que sur le banc Ariane, avec une amplitude de cloques de l'ordre de 50 fois l'épaisseur de la coque.

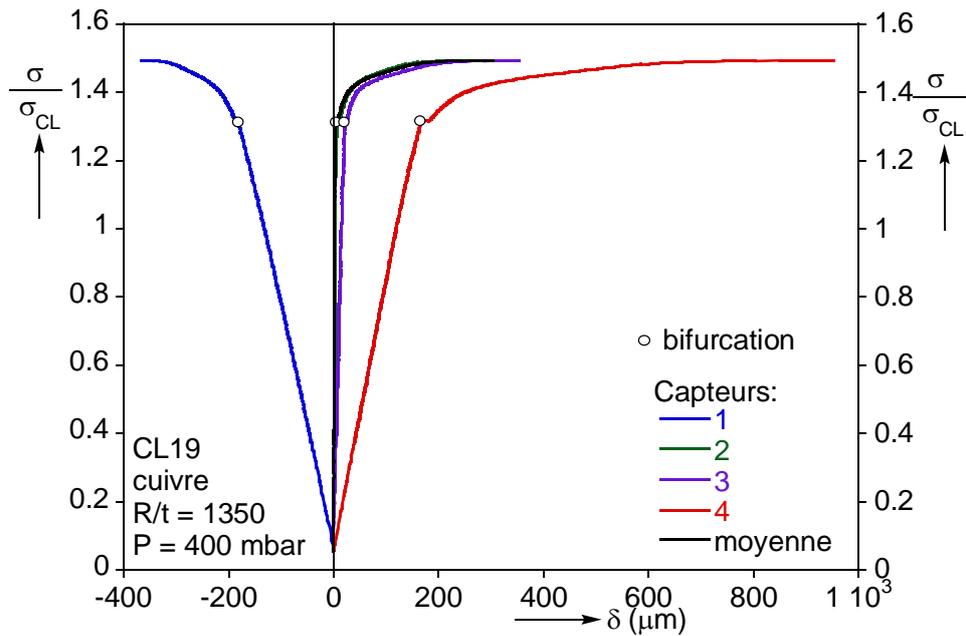


Figure 5.37 Courbes de chargement PM, coque CL19

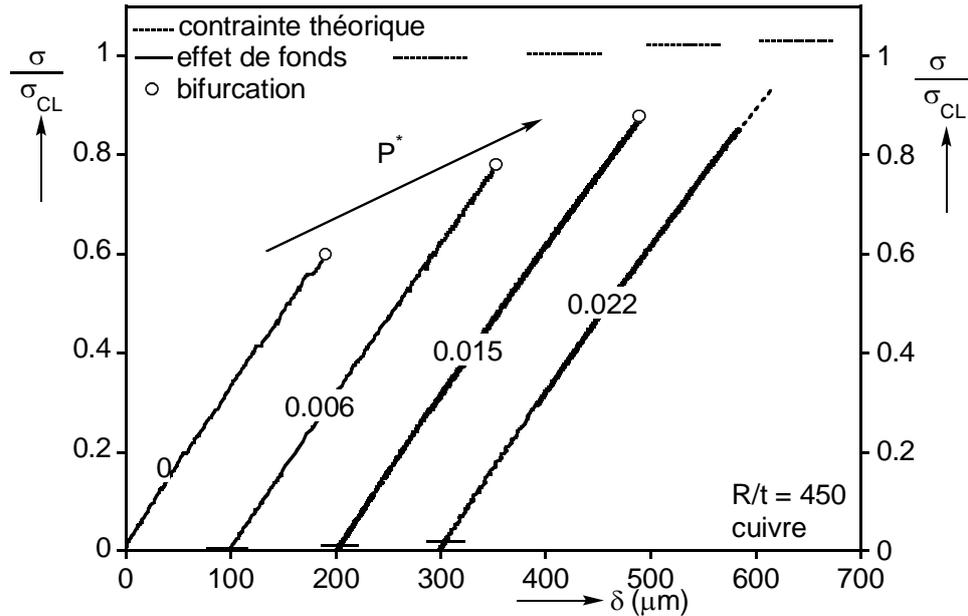
Afin de limiter l'impact du recouvrement vertical sur le comportement de la coque, la fibre collée est placée du côté opposé à la contrainte de compression maximale. Les quatre LVDT sont placés de la même manière que précédemment, et permettent de vérifier la symétrie du chargement, comme on peut le voir sur la Figure 5.37. L'essai effectué sur la coque CL19 à 400 mbar présente un comportement stable après la bifurcation d'équilibre (nous examinerons le comportement des différents feuillards au paragraphe suivant). Jusqu'à la bifurcation, la moyenne des capteurs est égale à 0, traduisant la parfaite symétrie du système. Après la bifurcation, des non-linéarités apparaissent, et la déformation est localisée du côté comprimé : la répartition des contraintes n'est plus homogène. Dans la suite de ce mémoire, seul l'écrasement de la fibre comprimée est tracé (capteur 4).

### 5.4.3 Courbes de chargement : premiers essais

Pour chaque feuillard, plusieurs essais à différentes pressions sont ici présentés, les notations restant les mêmes que précédemment. Les coques utilisées ne sont pas initialement endommagées.

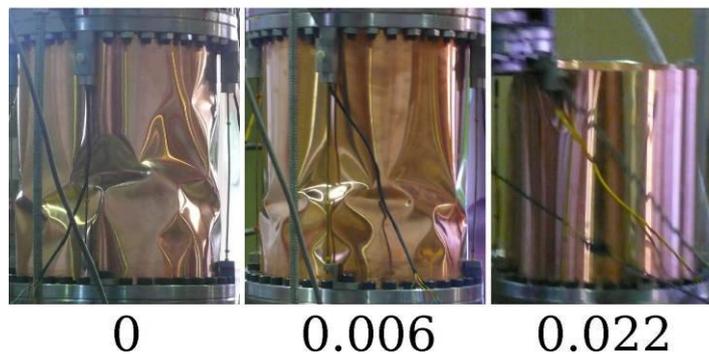
#### 5.4.3.1 Matériau cuivre, R/t = 450

Des essais effectués sur des coques en cuivre d'épaisseur 0.3mm sont représentés en Figure 5.38. Quatre pressions ont ici été testées : 0, 40, 100 et 150 mbar (nous sommes une fois de plus limités par la résistance de la colle), résultant en des valeurs de  $P^*$  très faibles.



**Figure 5.38** Courbes de chargement PM, R/t = 450, cuivre

Les trois premières courbes présentent des caractéristiques identiques : comportement linéaire suivi d'une bifurcation d'équilibre entraînant l'effondrement du cylindre. Malgré les faibles niveaux de pression, la contrainte critique augmente très vite. Le dernier essai se solde par un arrachement de la frette supérieure (Figure 5.39) en partie tendue causé par la combinaison de l'effet de fonds et de l'important moment appliqué, conduisant ainsi à une contrainte de traction en fibre tendue qui est importante (de l'ordre de 250 MPa). Il est alors difficile de conclure sur la contrainte de bifurcation « réelle » de cette coque. Les photos prises mettent en évidence l'amplitude importante des cloques créées lors des essais sur ce banc.

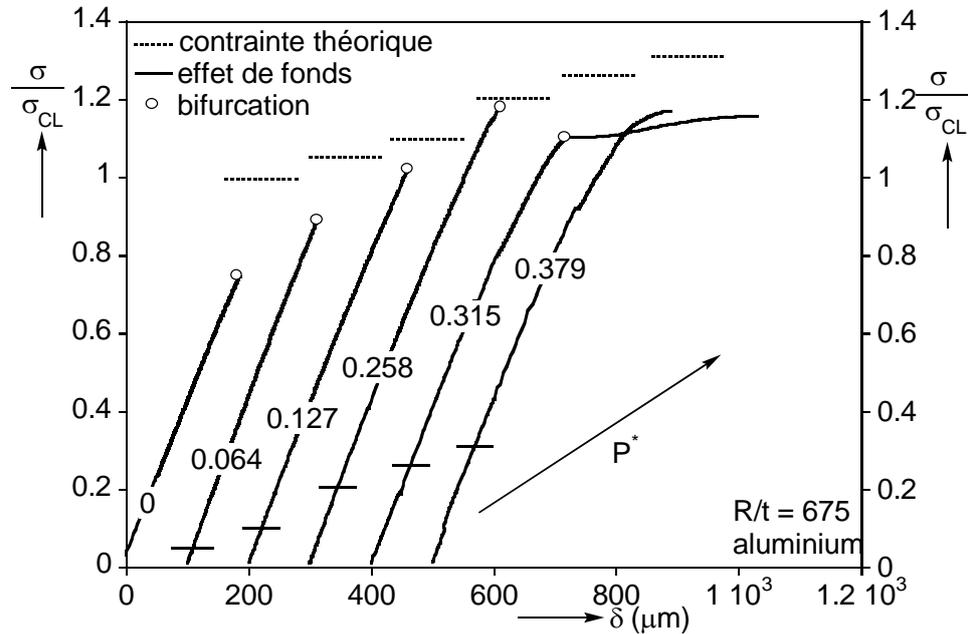


**Figure 5.39** Modes critiques, PM, R/t = 450, cuivre

#### 5.4.32 Matériau aluminium, R/t = 675

La Figure 5.40 présente les résultats de six essais conduits aux pressions : 0, 100, 200, 400, 500, 600 sur des coques en aluminium et d'épaisseur 0.2mm. Différents types de comportements sont observés ici. Aux faibles pressions

( $P^* = 0, 0.064, 0.127$ ), on retrouve une branche fondamentale linéaire, suivie d'une bifurcation d'équilibre entraînant une branche bifurquée instable.



**Figure 5.40** Courbes de chargement PM,  $R/t = 675$ , aluminium

Lorsque  $P^* = 0.258$ , le comportement de la coque devient légèrement non-linéaire avant d'atteindre la bifurcation, indiquant que la plasticité commence à faire effet sur la coque. Sur la courbe suivante, cette non-linéarité s'accroît. Cependant, un défaut localisé entraîne une bifurcation avant que le soufflet ne se développe en condition limite. Suite à ce cloquage, une redistribution des contraintes, associée à l'effet membrane, permet à la coque de rester stable et de supporter une augmentation de la charge. Lors de ce régime post-critique, un soufflet apparaît et se développe en parallèle, conduisant à une instabilité par point-limite et à un mode de flambage mixte (voir Figure 5.41). Le dernier essai présenté voit un régime pré-critique non-linéaire se développer, associé à un mode de type « patte d'éléphant ».

Outre le changement de mode, on peut observer que les cloques n'apparaissent pas toujours au bas de la coque, bien que ce soit le lieu où la contrainte de compression est maximum. La présence de défauts très localisés peut cependant déclencher le cloquage à un autre endroit de la coque.

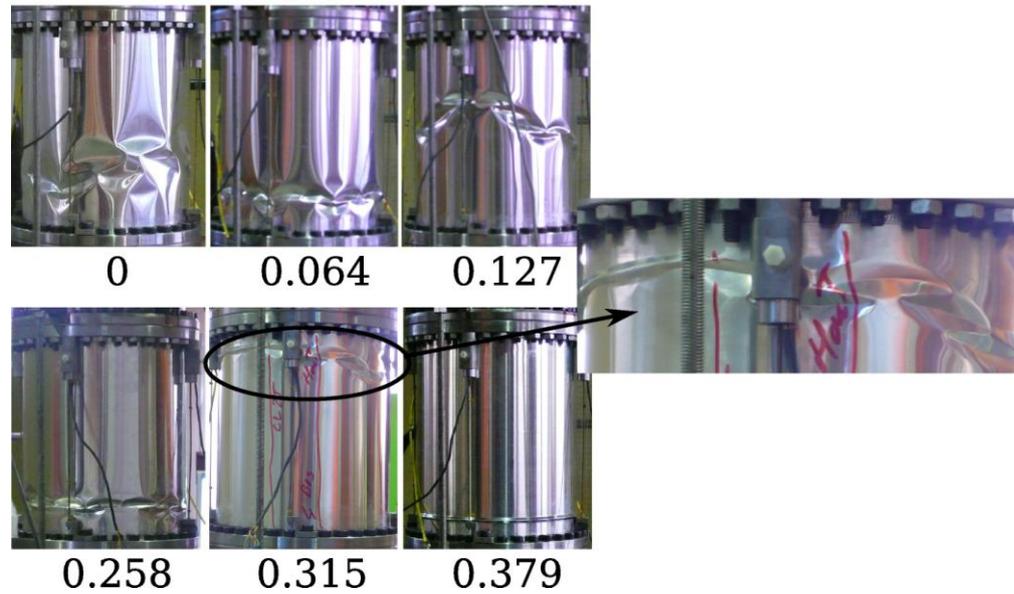


Figure 5.41 Modes critiques, PM, R/t = 675, aluminium

#### 5.4.33 Matériau cuivre, R/t = 675

Sept courbes ont été tracées pour ce feuillard en Figure 5.42, pour des pressions de 0, 100, 200, 300, 500, 650 et 800 mbar. Les conditions expérimentales ne nous permettent pas ici d'atteindre des pressions suffisamment hautes pour observer l'apparition de phénomènes plastiques sur ce type de coques. Le comportement des coques testées est ainsi essentiellement linéaire, et les modes obtenus sont en pointes de diamants (Figure 5.43). Le dernier essai se solde par un arrachement de la frette supérieure dû aux fortes contraintes de traction appliquées en partie tendue (environ 250 MPa). Une fois de plus, nous ne pouvons donc conclure sur la véritable contrainte critique dans ce cas.

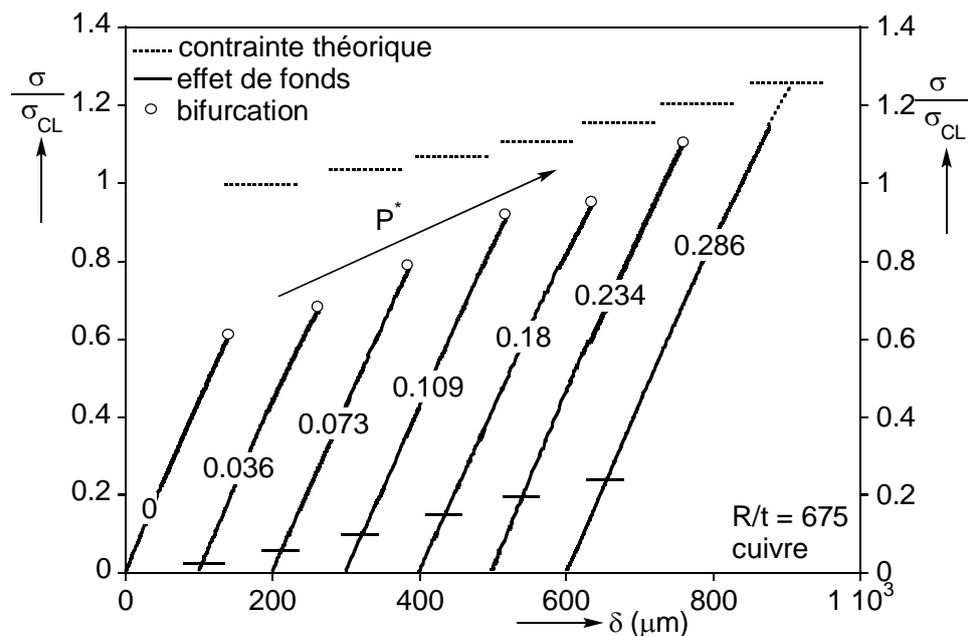


Figure 5.42 Courbes de chargement PM, R/t = 675, cuivre

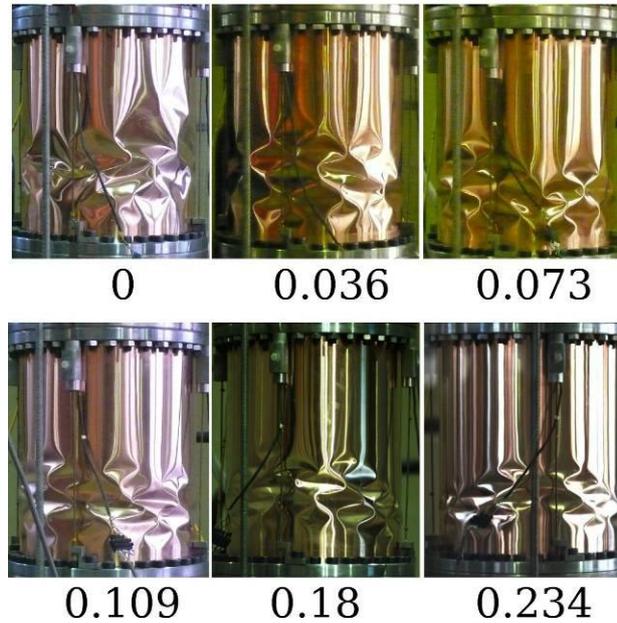


Figure 5.43 Modes critiques, PM, R/t = 675, cuivre

#### 5.4.34 Matériau acier, R/t = 1350

Pour ce feuillard, sept essais sont représentés en Figure 5.44. Malgré la haute limite d'élasticité de ce matériau, les coques sont fortement endommagées après l'essai, contrairement au cas (P, N), et ne peuvent donc pas être réutilisées en tant que coques neuves. Les courbes tracées ci-dessous correspondent à des pressions de 0, 100, 200, 300, 400, 500 et 650 mbar.

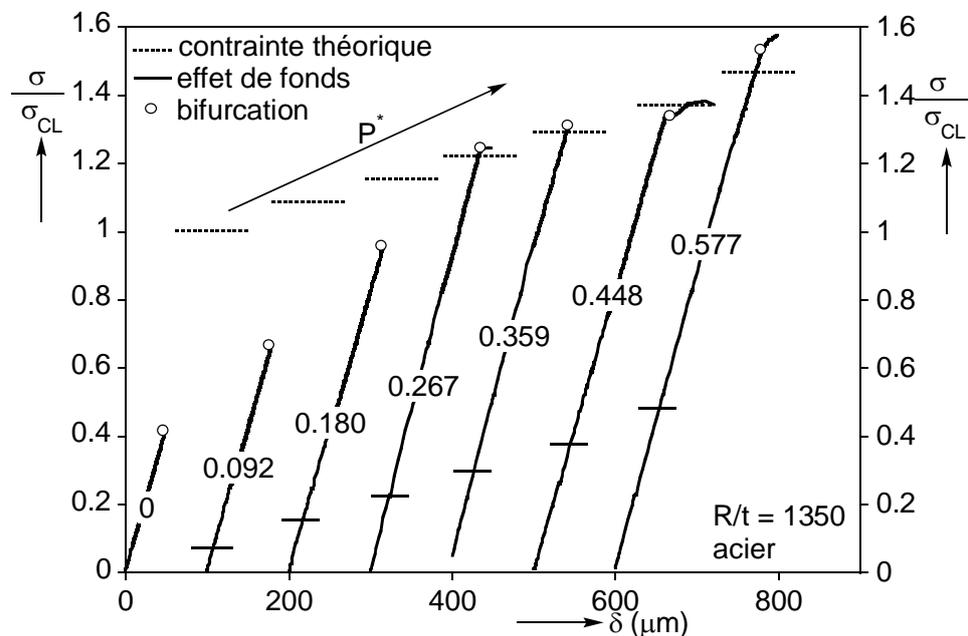
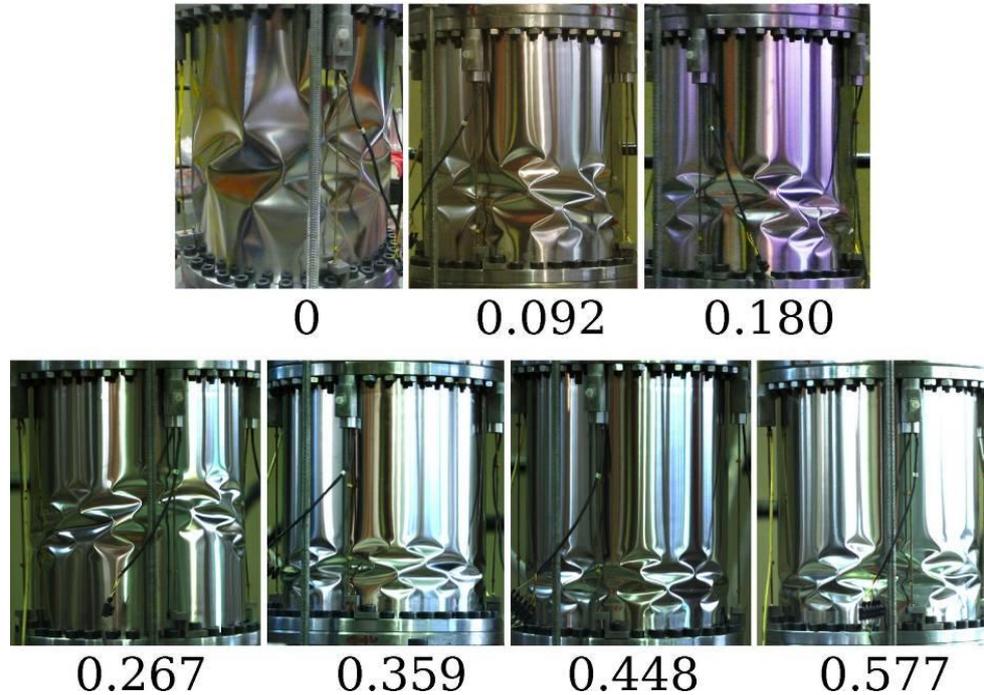


Figure 5.44 Courbes de chargement PM, R/t = 1350, acier

Les comportements aux basses pressions restent linéaires, et la contrainte théorique est atteinte dès  $P^* = 0.267$ . Une bifurcation peut dès lors don-

ner lieu à comportement post-critique stable, comme le montrent les essais suivants à  $P^* = 0.448, 0.577$  ; la réserve de charge est cependant relativement faible, et l'écrasement limité. On note une nette diminution de la taille des cloques en Figure 5.45.



**Figure 5.45** Modes critiques, PM,  $R/t = 1350$ , acier

#### 5.4.35 Matériau cuivre, $R/t = 1350$

Le dernier feuillard testé en pression interne et flexion est le cuivre, d'épaisseur 0.1mm. Les sept essais présentés en Figure 5.46 (0, 40, 200, 350, 500, 700, 800 mbar) nous permettent d'appréhender les différents comportements observés lors de cette campagne.

Dès les très faibles pressions ( $P^* = 0.063$ ), on remarque que les courbes présentent une bifurcation d'équilibre avec un post-critique stable. Ceci est la conséquence d'une mauvaise qualité de fabrication du spécimen, associée à l'effet membrane en flexion. Les défauts prononcés de ce feuillard vont en effet tendre à provoquer un cloquage localisé. Suite à cette bifurcation, l'effet membrane causé par la mise en pression interne et flexion empêche la coque de s'effondrer immédiatement, assurant un comportement stable jusqu'à l'atteinte d'un point-limite entraînant le collapse de la structure.

Ce régime post-critique se développe avec l'augmentation de la pression, la réserve de charge mais également l'amplitude des déformations sont de plus en plus importants. Sur la dernière courbe, on note un comportement non-linéaire pendant lequel des ondulations axisymétriques se développent, débouchant sur une première bifurcation, puis sur une seconde, avant que la déformation ne s'accélère et que la coque s'effondre.

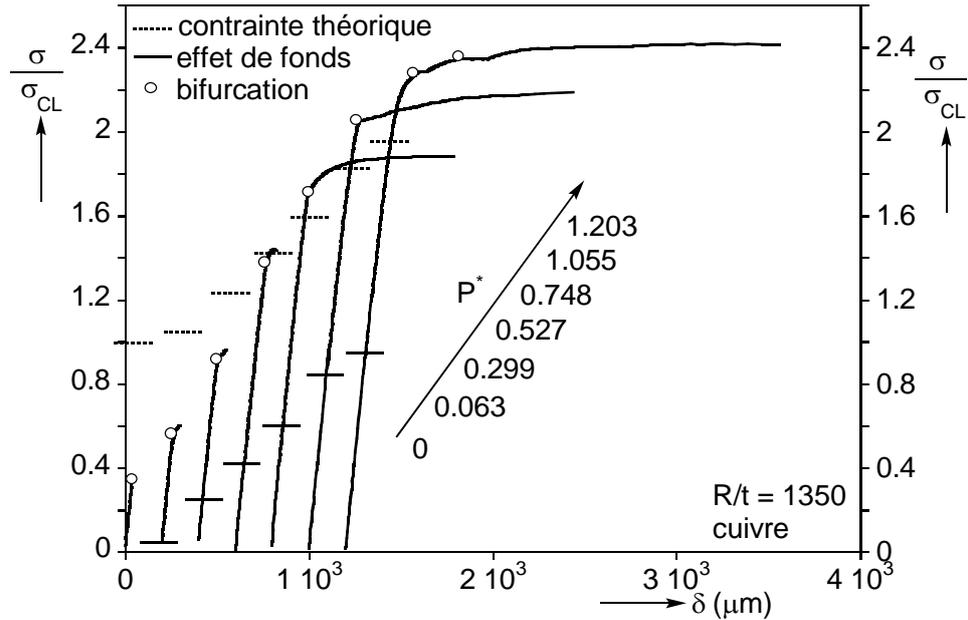


Figure 5.46 Courbes de chargement PM, R/t = 1350, cuivre

Les modes présentés en Figure 5.47 reflètent les propos tenus plus haut : la taille des cloques diminue, des ondulations axisymétriques apparaissent, et il arrive que des modes critiques se développent en partie haute de la coque, traduisant une qualité médiocre de spécimen.

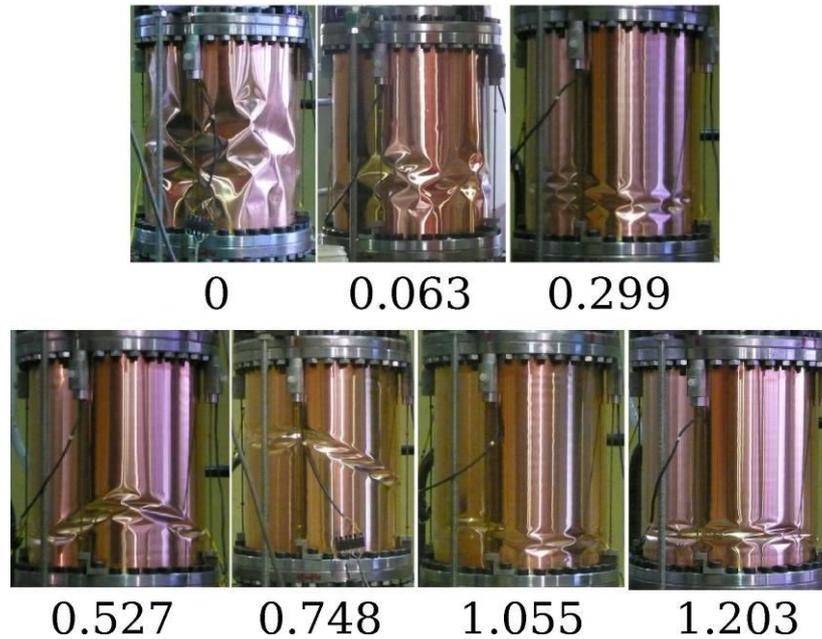


Figure 5.47 Modes critiques, PM, R/t = 1350, cuivre

#### 5.4.4 Contraintes critiques

Les résultats des essais conduits en pression interne et flexion sont reportés dans cette partie. Sauf précision, c’est la contrainte de cloquage nette (l’effet

de fonds est donc déduit de la contrainte totale) qui est retenue. Les charges critiques issues de la NASA SP8007 sont donc celles relatives au flambage « local », sans prise en compte de l'effet membrane (coefficient 0.5, voir chapitre 3).

5.4.41 Matériau cuivre,  $R/t = 450$

Le feuillard en cuivre d'épaisseur 0.3mm a fait l'objet de 5 essais, de 0 à 150 mbar, dont les résultats sont présentés en Figure 5.48. Un mauvais collage entraînant des conditions aux limites dégradées a fait considérablement chuter la contrainte critique d'un essai réalisé sans pression interne. La contrainte critique initialement obtenue pour une coque de qualité raisonnable est de  $0.59 \cdot \sigma_{CL}$ , bien au-dessus des différentes recommandations. Les quelques essais réalisés à faible pression suffisent ensuite à montrer que la contrainte critique augmente très rapidement. Le dernier point, affecté par l'arrachement de la frette supérieure, ne reflète pas la contrainte réelle de flambage.

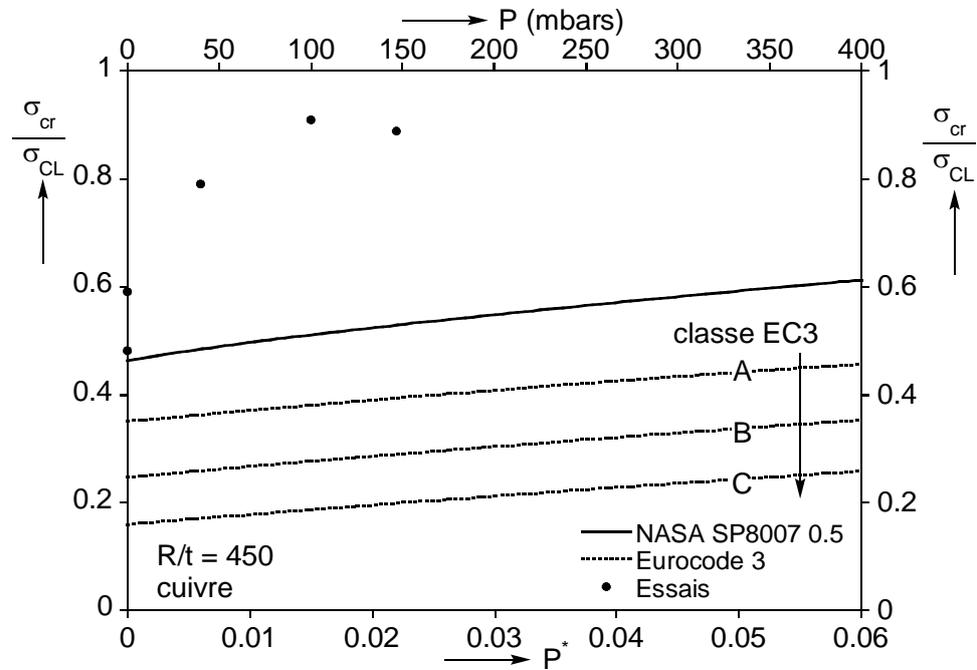


Figure 5.48 Contraintes critiques PM,  $R/t = 450$ , cuivre

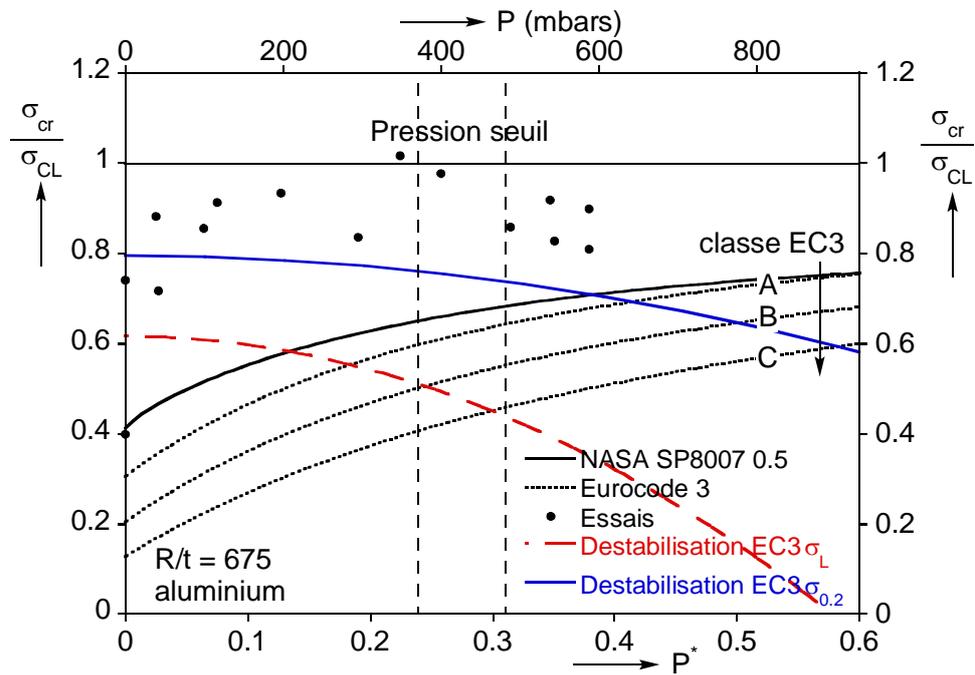
En comparaison avec les recommandations, la contrainte initiale d'une coque sans défaut majeur est plus élevée, et la contrainte critique augmente bien plus rapidement avec la pression.

5.4.42 Matériau aluminium,  $R/t = 675$

La Figure 5.49 présente les résultats de 15 coques en aluminium et d'épaisseur 0.2mm testées entre 0 et 600 mbar. Hormis un essai à 0 mbar comportant un défaut de collage entraînant un cloquage prématuré suivi d'un comportement stable, les essais à basse pression donnent une contrainte critique initialement

autour de  $0.80 \cdot \sigma_{CL}$  et augmentant rapidement, atteignant la contrainte théorique dès  $P^* = 0.225$ .

Passé ce seuil, la contrainte de flambage chute, avec l'arrivée de la plasticité et la formation d'un mode en « patte d'éléphant ». Même si les résultats des essais sont encore une fois supérieurs aux règles de dimensionnement, la SP8007 ne prend pas en compte l'effet déstabilisateur et la structure pourrait être sous-dimensionnée si la pression augmente encore. Le coefficient de déstabilisation plastique de l'Eurocode reste conservatif, que l'on choisisse  $\sigma_L$  ou  $\sigma_{0.2}$  comme contrainte limite. Cette dernière semble cependant mieux adaptée aux résultats expérimentaux.



**Figure 5.49** Contraintes critiques PM, R/t = 675, aluminium

#### 5.4.43 Matériau cuivre, R/t = 675

Quinze essais ont été réalisés en pression interne et flexion sur ce feillard, entre 0 et 800mbar. Les résultats présentés en Figure 5.50 sont une fois de plus très convaincants en comparaison avec les codes : la contrainte initiale est plus haute et la tendance croissante plus rapide. La contrainte théorique est ici atteinte pour  $P^* = 0.234$ .

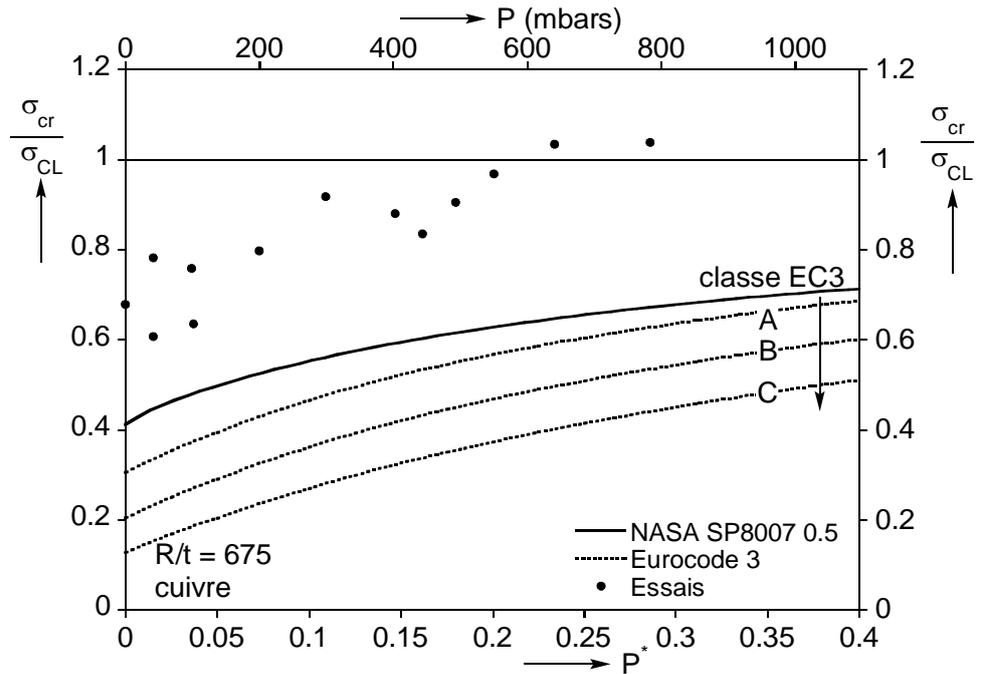


Figure 5.50 Contraintes critiques PM, R/t = 675, cuivre

5.4.44 Matériau acier, R/t = 1350

Les contraintes critiques de 22 essais réalisés sur des coques en acier et d'épaisseur 0.1mm sont tracées en Figure 5.51. Les pressions testées vont ici de 0 à 700 mbar.

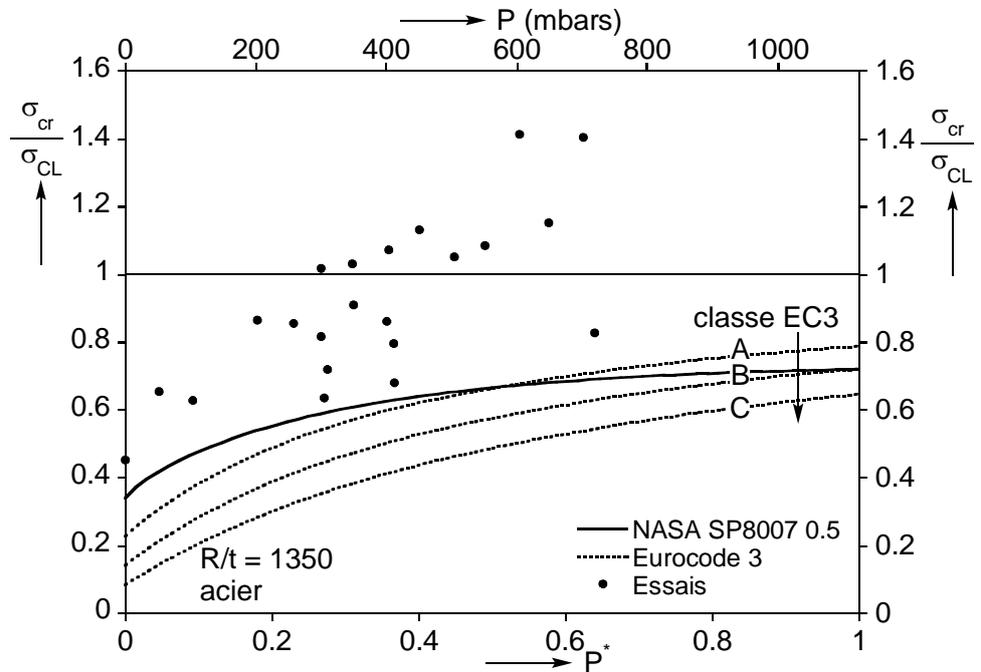
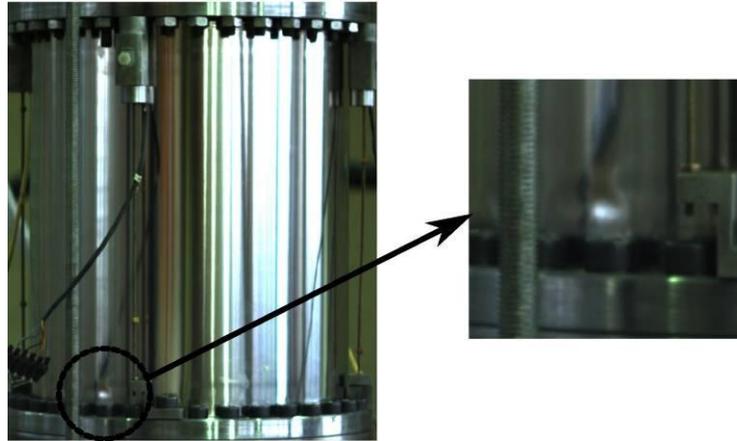


Figure 5.51 Contraintes critiques PM, R/t = 1350, acier

Si les résultats sont globalement bons, certains essais suivent une tendance bien plus basse que les autres. L'examen des photos prises pendant ces

essais (Figure 5.52) révèle un cloquage rapide au niveau des conditions aux limites, c'est-à-dire la partie du feuillard collée sur la frette. La rigidité importante du matériau fragilise les conditions aux limites, ayant pour conséquence une mauvaise adhérence qui augmente avec la pression.

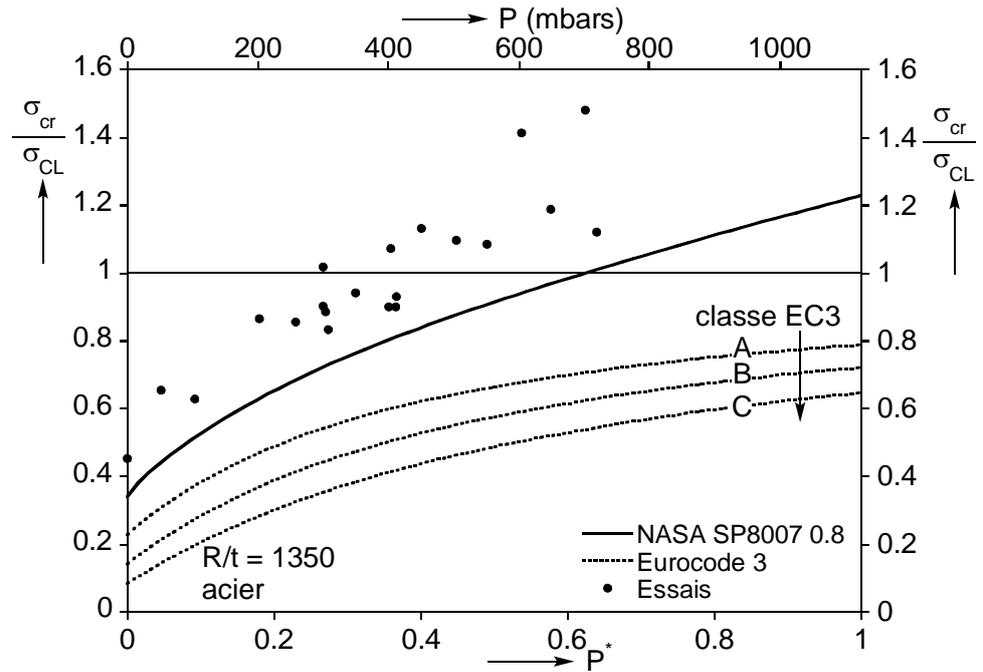


**Figure 5.52** Cloquage au niveau des conditions aux limites

Ce problème a par la suite pu être minimisé en ré-usinant les frettes. La contrainte de cloquage augmente alors de manière rapide, dépassant largement la contrainte théorique, et donnant des résultats jusqu'à 2 fois la contrainte prédite par la règle de la NASA.

Pour cette valeur de  $R/t$ , les pressions testées permettent de distinguer cloquage et collapse, en stabilisant le comportement post-critique de la coque. Cette particularité du chargement PM est prise en compte dans la SP8007, par l'intermédiaire d'un coefficient 0.8 attribué à l'effet membrane (flambage « global »). Les contraintes de collapse des essais présentés ci-dessus sont tracées en Figure 5.53. Aux basses pressions, le cloquage et la bifurcation d'équilibre sont le plus souvent synonymes d'effondrement pour la structure, sauf dans le cas où des défauts localisés viennent perturber l'essai, comme nous avons pu le voir. La dispersion est moins importante, et les coques ayant présenté des problèmes de conditions aux limites et rencontré un cloquage prématuré finissent par s'effondrer à un niveau comparable aux coques de meilleure qualité.

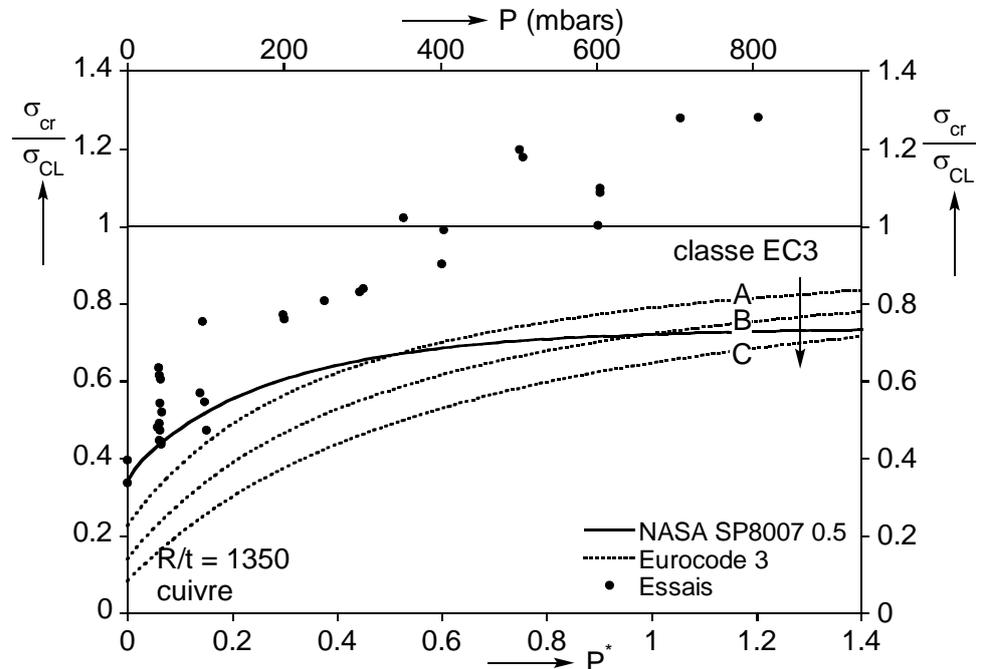
La distinction entre cloquage et collapse faite par la SP8007 aux basses pressions n'a donc pas de sens physique. La prise en compte de l'effet membrane est justifiée à partir d'un seuil de pression pour lequel le comportement post-critique des coques est stable. Pour les basses pressions cependant, considérer une contrainte d'effondrement (ou « flambage global ») différente de la contrainte de bifurcation (« flambage local ») est une aberration.



**Figure 5.53** Contraintes critiques PM de collapse, R/t = 1350, acier

5.4.45 Matériau cuivre, R/t = 1350

Le dernier feuillard testé pour ce chargement est le cuivre d'épaisseur 0.1mm, avec des pressions allant de 0 à 800 mbar. Les résultats des 32 essais effectués sont représentés en Figure 5.54.

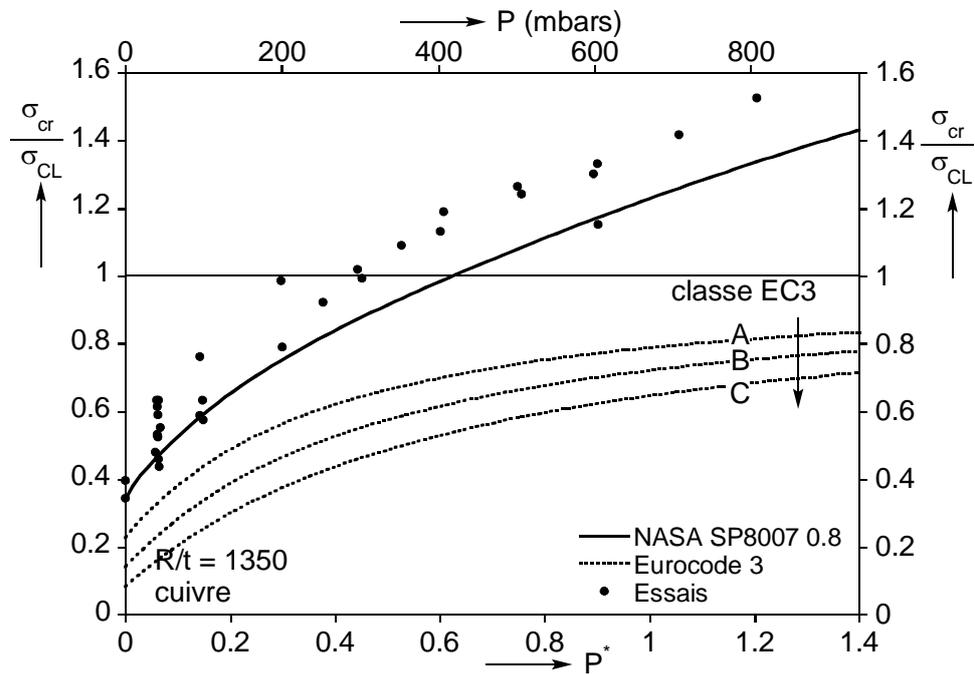


**Figure 5.54** Contraintes critiques PM, R/t = 1350, cuivre

Les essais à basse pression (entre 0 et 100 mbar) sont plutôt médiocres et dispersés, en conséquence de la qualité des coques faites à partir de

ce feuillard. Lorsque la pression augmente cependant, les résultats deviennent supérieurs aux règles de dimensionnement, et la contrainte théorique est atteinte pour  $P^* = 0.527$ . Il est intéressant de noter ici que même pour des coques donnant des résultats plutôt bas aux basses pressions, la contrainte critique augmente bien plus rapidement que prévu.

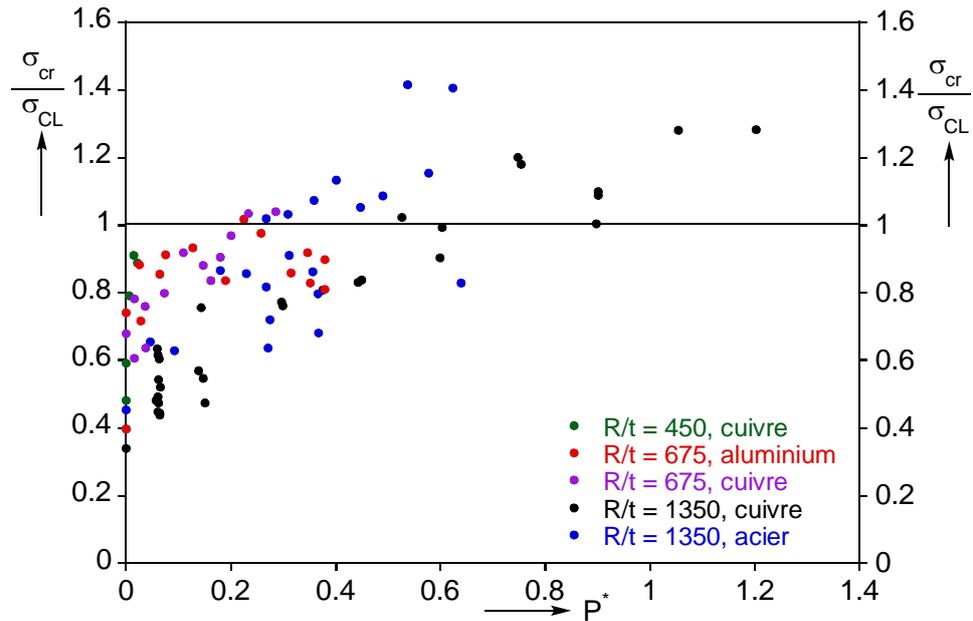
Comme pour le cas précédent, nous pouvons ici dissocier cloquage et collapse lorsque la pression augmente. Les contraintes de collapse expérimentales sont présentées en Figure 5.55. La dispersion est une fois de plus réduite par l'effet membrane, et la SP8007 semble correspondre parfaitement à la tendance basse de nos essais.



**Figure 5.55** Contraintes critiques PM de collapse,  $R/t = 1350$ , cuivre

#### 5.4.36 Bilan des essais

Le nuage regroupant les résultats de tous les essais effectués en pression interne et flexion est tracé en Figure 5.56. Les différentes tendances obtenues pour chaque feuillard sont la conséquence des différentes qualités de coques observées.



**Figure 5.56** Contraintes critiques PM de tous les essais réalisés

Ainsi, les feuillards d'épaisseur 0.1mm (cuivre et acier) montrent les résultats les plus bas à basse pression. L'augmentation de la contrainte critique avec la pression est cependant beaucoup plus lente pour le cuivre que pour l'acier. Les feuillards d'épaisseur 0.2mm, de meilleure qualité, donnent de meilleurs résultats aux basses pressions, où l'effet des défauts est prépondérant. Les contraintes critiques atteintes sont similaires sur le cuivre et sur l'aluminium, avant que l'effet déstabilisant de la pression ne se fasse sentir pour l'aluminium. Les pressions testées ne nous ont pas permis d'observer une telle chute de la contrainte critique dans le cas du cuivre.

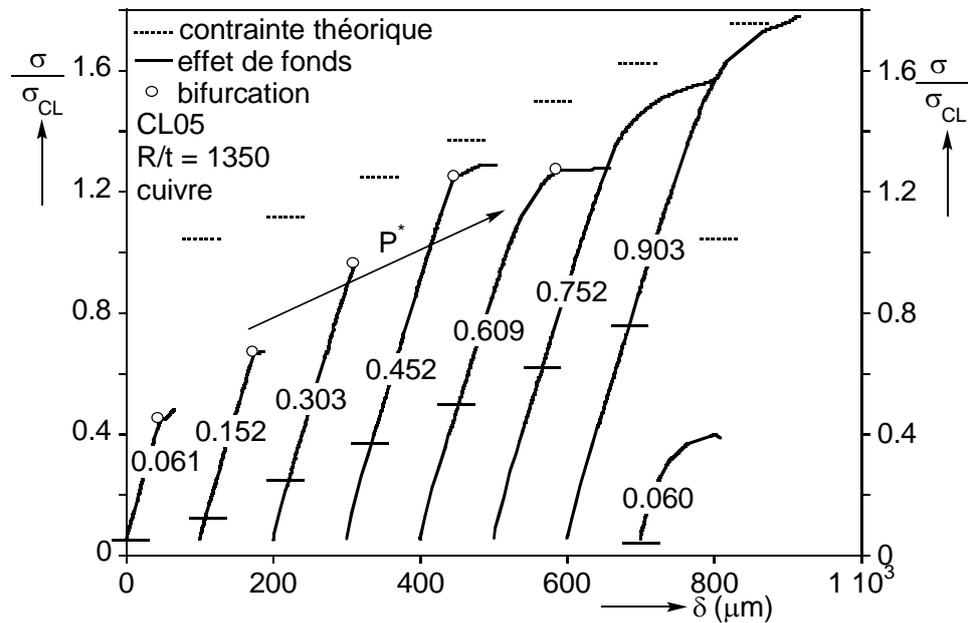
#### 5.4.5 Comportement de coques endommagées

Comme il a été fait pour le cas de la compression, nous présentons ici des résultats d'essais en pression interne et flexion effectués sur des coques endommagées par un premier flambage.

La Figure 5.57 présente les courbes de chargement de plusieurs essais conduits à la suite sur une même coque en cuivre avec  $R/t = 1350$ . Les pressions successivement étudiées sont 40, 100, 200, 300, 400, 500, 600 et de nouveau 40 mbar.

Le premier essai conduit à 40 mbar donne lieu à une bifurcation suivie d'une branche post-critique stable. Ce type de comportement est provoqué par la présence d'un défaut localisé entraînant un cloquage en partie haute de la coque (voir Figure 5.58). Les deux essais suivants s'achèvent par une bifurcation, et présentent un mode critique similaire : les cloques sont « imprégnées » en tant que défauts initiaux et déclenchent l'effondrement de la structure. Lors de ces premiers essais, la butée est réglée avec précaution afin de limiter

l'écrasement lors de l'effondrement de la coque, et éviter qu'elle ne soit complètement détruite.

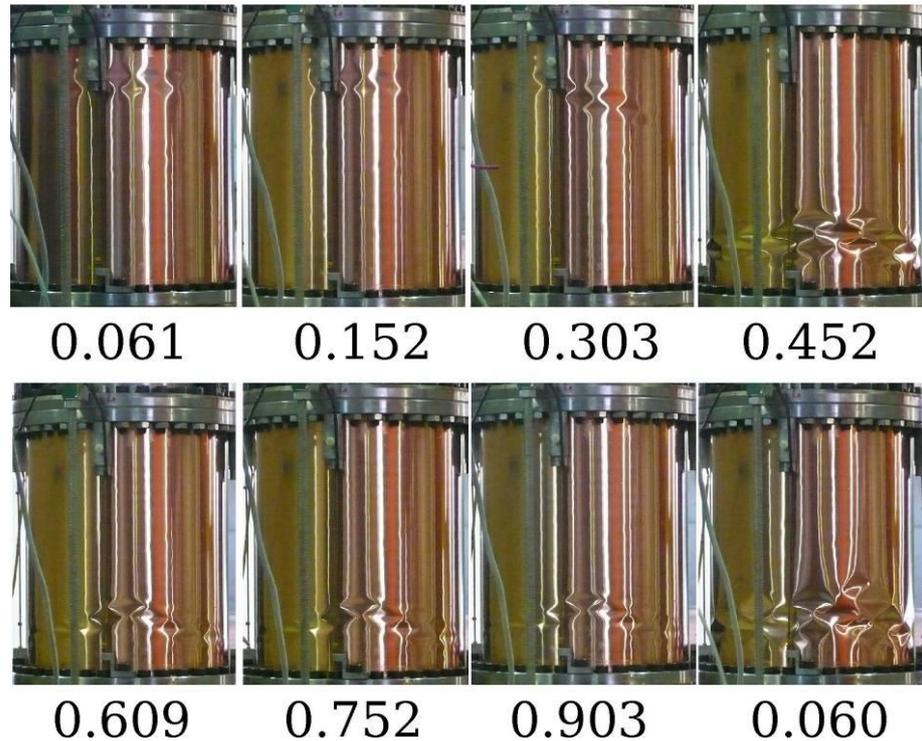


**Figure 5.57** Courbes de chargement PM, multiples essais sur une même coque, CL05

Lors du quatrième essai ( $P^* = 0.452$ ), une bifurcation est de nouveau provoquée par les défauts créés lors des essais précédents. Des cloques apparaissent en partie haute de la coque et se développent lors du régime post-critique. Cependant, lors du collapse du cylindre, l'écrasement devient trop important et le mode critique change, localisé au bas de la coque. Lors de cet essai, et après que le spécimen ait déjà subi 3 cloquages, la contrainte théorique est tout de même presque atteinte.

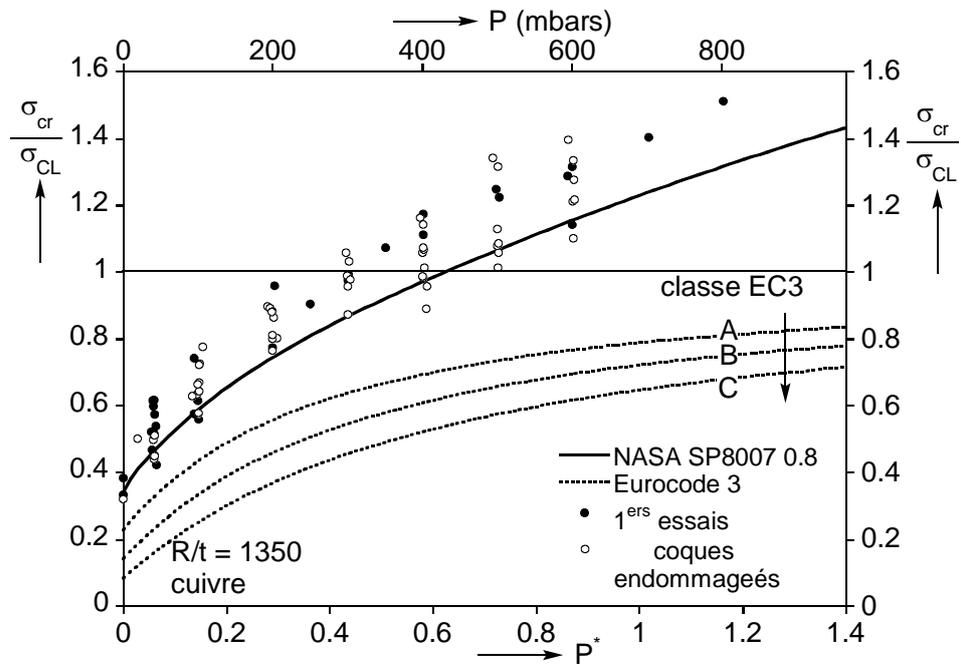
Lors de l'essai suivant ( $P^* = 0.609$ ), le fort endommagement de la coque entraîne un comportement non-linéaire pendant lequel les cloques s'amplifient, avant de déboucher sur une bifurcation. La contrainte critique est affectée par l'endommagement et diminue malgré une augmentation de pression.

En augmentant encore la pression ( $P^* = 0.752, 0.903$ ), il n'y a plus de bifurcation ; le comportement est non-linéaire et traduit l'amplification de l'amplitude des défauts (les modes critiques observés dans les deux cas sont identiques): une seule branche d'équilibre existe. Les essais sont arrêtés avant l'effondrement de la coque, la contrainte maximale n'est donc pas atteinte, bien que la valeur théorique soit dépassée! Un dernier essai conduit à  $P^* = 0.060$  donne une courbe de chargement fortement non-linéaire dès le départ, la coque est désormais trop endommagée et les défauts initiaux s'accroissent jusqu'à ce que la structure s'effondre.



**Figure 5.58** Modes critiques PM, multiples essais sur une même coque, CL05

Compte-tenu du comportement fortement non-linéaire des coques endommagées, il ne serait pas pertinent de comparer les contraintes de cloquage. Nous nous concentrons donc sur les contraintes de collapse de tous les essais conduits en pression interne et flexion sur des coques en cuivre ( $R/t = 1350$ ), reportés en Figure 5.59.



**Figure 5.59** Contraintes de collapse PM, tous les essais

Les résultats sont surprenants : les contraintes d'effondrement des coques endommagées sont en moyenne égales à celles des coques neuves et dépassent même les données des règles de dimensionnement ! Ceci est la preuve irréfutable de l'apport de l'effet membrane sur le flambage en flexion.

#### 5.4.6 Conclusions des essais PM

Nous présentons ici quelques conclusions obtenues à partir du grand nombre d'essais effectués en pression interne et flexion pour différentes configurations.

- *Comportement des coques*

Le comportement initial observé pour tous les types de coques est linéaire, avec l'atteinte d'une bifurcation déclenchant une instabilité. L'augmentation de pression stabilise le comportement, et pour un certain niveau de pressurisation, l'atteinte de la bifurcation débouche sur une branche post-critique stable. L'effet membrane permet dans ce cas à la coque de supporter une charge additionnelle après la bifurcation. Cette réserve de charge peut être importante, au prix de larges déformations. Une pression plus importante encore conduit à un comportement non-linéaire.

- *Modes critiques*

Les « pointes de diamant » sont ici retrouvées du côté comprimé de la coque. Le plus souvent limitées au bas du cylindre, où le moment de flexion est maximum, elles peuvent cependant apparaître plus haut si des imperfections localisées sont présentes. La taille de ces cloques diminue avec la pression, faisant place finalement à des ondulations axisymétriques.

- *Contraintes critiques*

En flexion, l'atteinte d'une bifurcation ne mène pas toujours à l'effondrement de la structure. Le terme « contrainte critique » peut donc renvoyer à deux phénomènes : le cloquage ou le collapse. Les contraintes de cloquage des coques non pressurisées sont encore dictées par la présence de défauts, et varient ici entre  $0.34 \cdot \sigma_{CL}$  et  $0.74 \cdot \sigma_{CL}$ . L'augmentation de la contrainte de bifurcation est cependant rapide dès qu'une pression interne est ajoutée, le cloquage pouvant même se produire pour une contrainte supérieure à la contrainte théorique (jusqu'à 30% lors de nos essais), et donc bien supérieure aux réglementations. Le cloquage est fortement dépendant de la qualité des coques, et une certaine dispersion est constatée pour les niveaux de pression étudiés. La dispersion observée pour le collapse (dès que celui-ci se distingue du cloquage) est cependant minime. Ceci laisse à penser que l'effet membrane dicte l'effondrement de la structure, laissant moins de place au « hasard » contrairement aux dé-

fauts géométriques. En effet, des coques testées plusieurs fois après avoir été endommagées montrent que le moment de collapse est peu dépendant des imperfections, même relativement importantes.

- *Influence du matériau*  
L'apparition d'un mode en « patte d'éléphant » est ici encore liée aux caractéristiques du matériau. Plus la limite élastique est haute, et plus la pression nécessaire à la déstabilisation de la coque sera importante.
- *Influence de la géométrie*  
Une fois de plus, le facteur « qualité » se fait sentir au travers des essais conduits pour différentes valeurs de R/t. Les coques plus épaisses présentent moins de défauts et donnent donc de meilleurs résultats. De plus, pour un même R/t, il apparaît clairement que les coques présentant des défauts plus importants (liés au collage ou à la manipulation) donnent des résultats moins satisfaisants.

---

## 5.5 Comparaison flexion/compression

Comme nous avons pu le voir au chapitre 2, le cas de la flexion a été très peu étudié depuis les années 60, après avoir vite été assimilé à la compression. Beaucoup de chercheurs pensent aujourd'hui encore que la différence entre les deux se résume à un effet statistique sur la présence de défauts dans la zone de contrainte maximale, et que les deux modes de chargement sont autrement similaires. L'ajout de la pression peut cependant avoir une influence différente dans les deux cas. Nous en présentons ici certaines preuves, selon nous frappantes, découlant des différentes campagnes expérimentales effectuées.

---

### 5.5.1 Courbes de chargement

Plusieurs résultats d'essais PN et PM effectués aux mêmes pressions sont présentés dans cette partie, nous permettant de comparer les comportements des coques selon la manière dont elles sont chargées. Les valeurs de pression adimensionnelle peuvent légèrement différer entre les deux essais PN et PM, une valeur moyenne est indiquée.

La Figure 5.60 concerne le feuillard en aluminium, d'épaisseur 0.2mm, testé à des pressions de 0, 200, 400 et 600 mbar, soit en flexion, soit en compression. Les courbes PN et PM sont similaires pour les quatre niveaux de pression. Les deux premiers essais montrent un comportement linéaire et s'achèvent par une bifurcation d'équilibre, puis l'effet du matériau entre en jeu, résultant en une courbe non-linéaire se terminant par une instabilité de type point-limite. Les raideurs sont comparables dans les deux cas, cependant les contraintes critiques sont constamment plus hautes pour le cas PM.

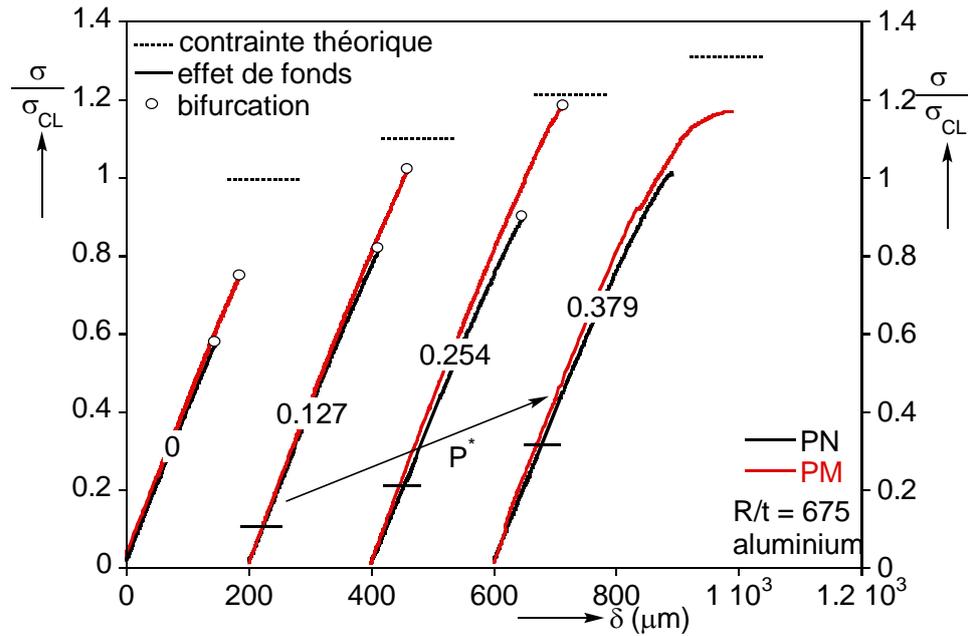


Figure 5.60 Comparaison courbes de chargement PM/PN, R/t = 675, aluminium

L'exercice de comparaison est répété en Figure 5.61, cette fois pour des coques en acier, avec R/t = 1350. Les courbes des essais à vide sont quasiment identiques : même pente, même contrainte de bifurcation. Lorsque la pression augmente, les contraintes maximales évoluent toutefois beaucoup plus rapidement dans le cas PM. Pour  $P^* = 0.537$ , une branche post-critique stable suit la bifurcation pour l'essai sous flexion, alors qu'en compression le cylindre s'effondre directement.

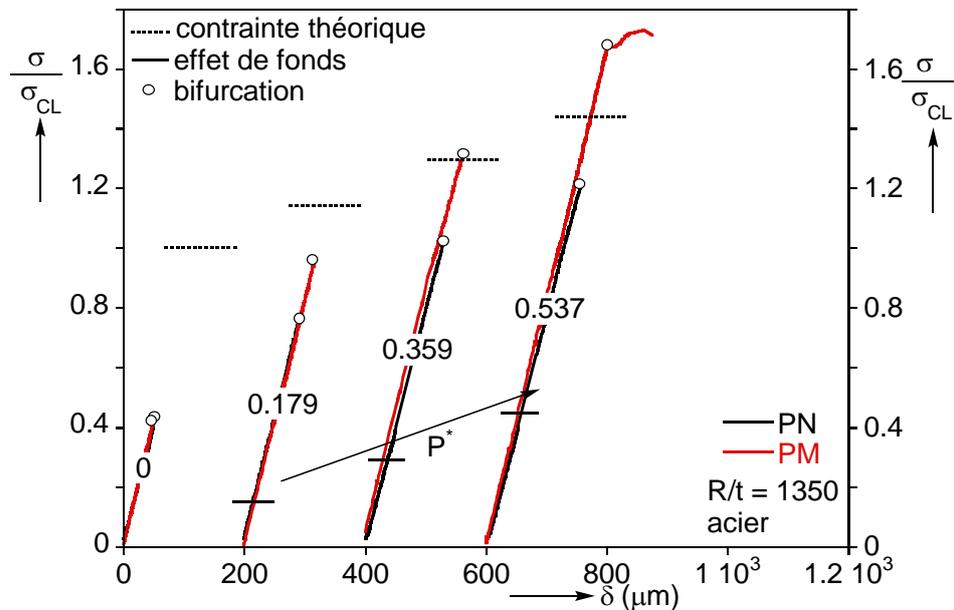
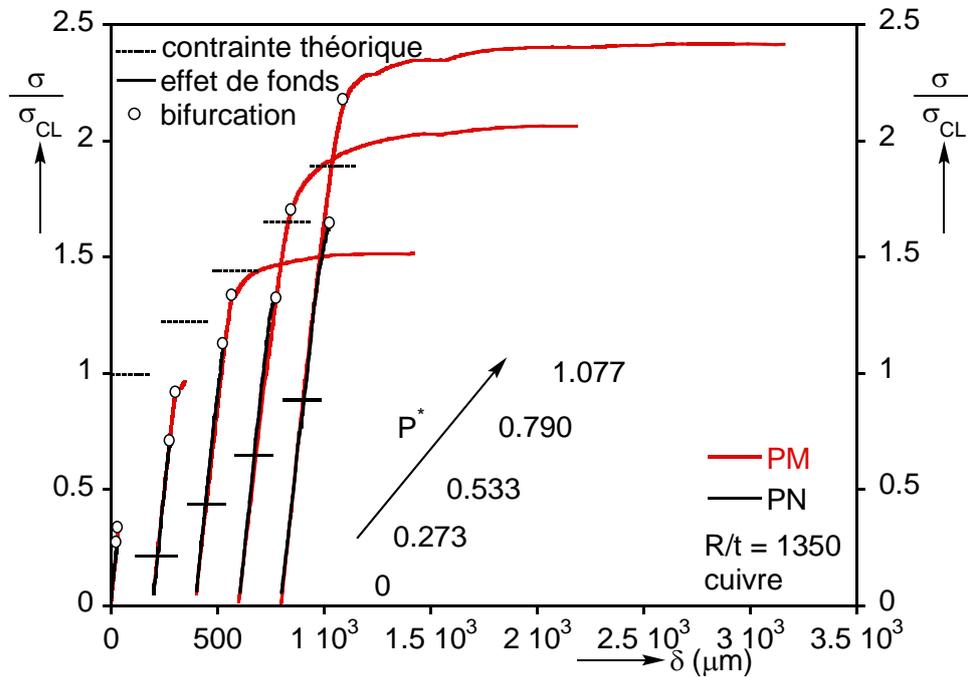


Figure 5.61 Comparaison courbes de chargement PM/PN, R/t = 1350, acier

Nous présentons enfin une dernière série d'essais en Figure 5.62, peut-être la plus convaincante, réalisée sur des coques en cuivre d'épaisseur 0.1mm, pour des pressions de 0, 200, 400, 600 et 800 mbar.



**Figure 5.62** Comparaison courbes de chargement PM/PN, R/t = 1350, cuivre

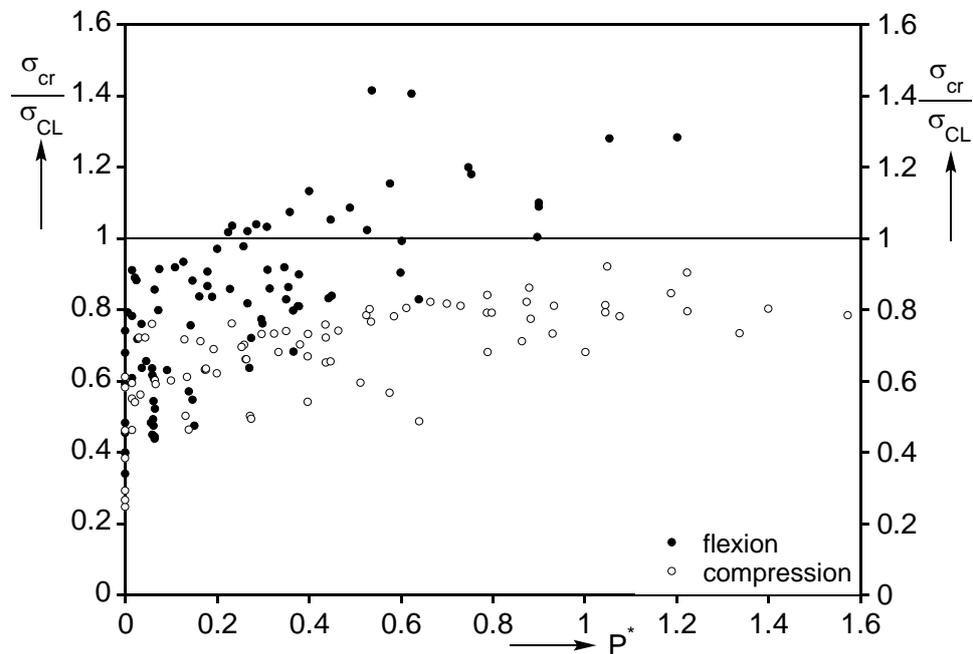
On retrouve des courbes similaires pour les coques testées sans pression interne, la contrainte critique étant légèrement plus importante dans le cas de la flexion. Dès 200 mbar ( $P^* = 0.273$ ) on remarque une augmentation conséquente de la contrainte de cloquage dans le cas PM, avec une courte branche post-critique stable après bifurcation. Ceci n'est pas observé pour la compression. Avec l'augmentation de pression interne, la branche post-critique en flexion s'allonge de plus en plus, la contrainte de bifurcation atteint et dépasse la contrainte classique. En compression, la contrainte évolue lentement vers le seuil théorique, mais les imperfections géométriques ne permettent pas de l'atteindre. On note alors une faible baisse de rigidité précédant la bifurcation, due au développement de non-linéarités géométriques.

En comparant directement les courbes d'essais réalisés sous pressions similaires en flexion ou en compression, nous mettons en évidence les différences de comportement existant entre les deux chargements, quel que soit le feuillard considéré. Il apparaît donc logique que ceci se ressente dans le dimensionnement des coques, comme cela est d'ailleurs le cas pour la NASA SP8007. En revanche, l'Eurocode 3 ne différencie pas ces deux cas de charge.

### 5.5.2 Contraintes critiques

Après avoir étudié les différences de comportement entre flexion et compression, nous analysons ici l'évolution de la contrainte critique (de cloquage uniquement) avec la pression pour les deux types de chargement.

Les nuages de points PN et PM obtenus sont représentés en Figure 5.63, sans distinction entre les différents R/t. Les résultats sont assez éloquentes : malgré la forte dispersion, deux tendances bien distinctes sont mises en évidence. En flexion, la contrainte critique augmente bien plus rapidement aux basses pressions que dans le cas de la compression, et finit même par dépasser la contrainte classique qui représente la limite théorique atteignable en compression.



**Figure 5.63** Comparaison contraintes de cloquage PM/PN

Ces résultats particulièrement frappants montrent sans conteste que la pression interne agit différemment en flexion ou en compression, alors que le contraire a bien souvent été assimilé. Les règles de dimensionnement présentées précédemment en témoignent. Si la SP8007 prend en compte l'apport de l'effet de fonds, ce n'est que dans l'estimation de l'effondrement de la coque (flambage « global »). Dans le cas du cloquage (flambage « local »), le  $\Delta\gamma$  traduisant l'augmentation de contrainte avec la pression est le même en flexion ou en compression. La distinction entre les deux chargements n'est également pas effectuée dans l'Eurocode, et c'est l'un des points faibles pouvant être améliorés dans le futur.

## 5.6 Essais de flambage sous cisaillement et pression interne

### 5.6.1 Démarche

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, Yamaki [116] a été le seul à effectuer des essais combinant pression interne et cisaillement, cas souvent ramené à la torsion. L'interaction est cependant plus complexe, et une étude expérimentale semble nécessaire afin de mieux comprendre les mécanismes de déclenchements d'instabilités.

Les essais sont réalisés ici sur des coques fabriquées à partir de 5 feuillards différents :

- $R/t = 450$ , cuivre
- $R/t = 675$ , aluminium
- $R/t = 900$ , cuivre
- $R/t = 1350$ , acier
- $R/t = 1350$ , cuivre

De plus, comme nous avons pu le voir précédemment, le flambage par cisaillement est directement influencé par la longueur de la coque. Nous avons donc testé deux longueurs de coque pour chaque feuillard :

- $L/R = 1$
- $L/R = 2$

Notre étude expérimentale balaye ainsi une large plage de paramètre de Batdorf  $Z$  :

$L/R \backslash R/t$	1	2
450	429	1717
675	644	2576
900	859	3434
1350	1288	5151

**Tableau 5.2** Valeurs de  $Z$  étudiées en pression interne et cisaillement

### 5.6.2 Conditions expérimentales

Les essais PT sont réalisés sur le petit banc, de la même manière que pour les essais de flexion. La seule différence réside en la hauteur du point d'application de l'effort tranchant : une hauteur « infinie » résultera en un chargement prépondérant de type flexion, et plus l'effort est appliqué près de la coque, plus le cisaillement sera dominant (voir chapitre 2). Pour ces essais, le chargement est donc appliqué au niveau de la frette supérieure du spécimen.

Les conditions expérimentales sont donc similaires au cas PM : fibre collée placée du côté opposé à l'application de l'effort, quatre LVDT placés

sur la coque. Cependant, l'écrasement vertical de la coque est ici limité ; le déplacement horizontal de la frette supérieure est prépondérant. Ainsi, un capteur supplémentaire est placé au niveau de la frette et nous permet de comparer l'amplitude relative des déplacements.

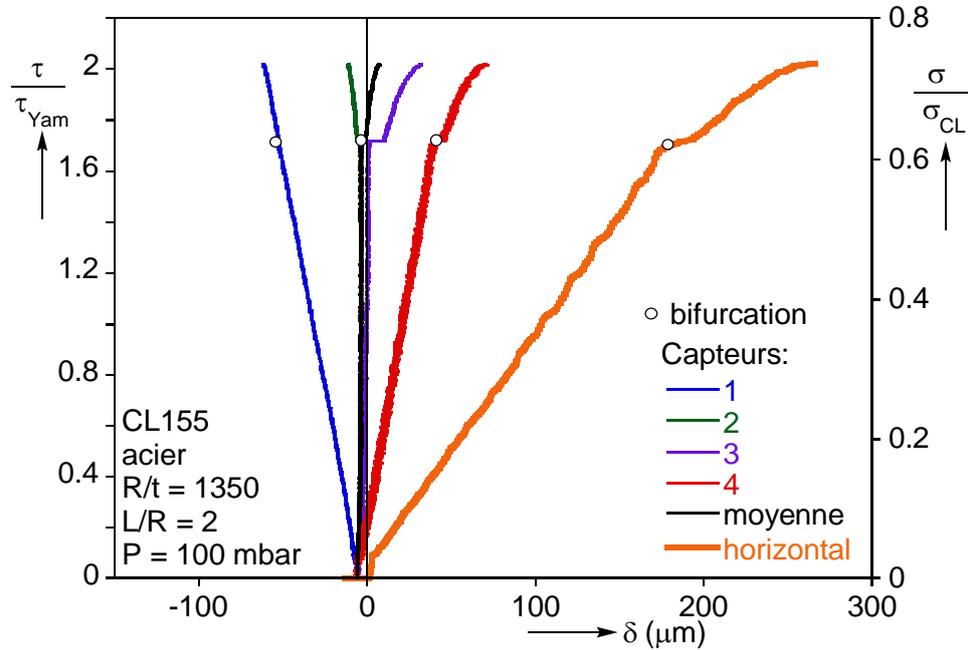


Figure 5.64 Courbes de chargement PT, coque CL155

La Figure 5.64 présente un essai de cisaillement effectué sur la coque CL155 à 100 mbar. Une fois de plus, la moyenne des capteurs d'écrasement est proche de 0 jusqu'à la bifurcation, traduisant la parfaite symétrie du système. Le déplacement horizontal est dans ce cas environ 4 fois plus important que l'écrasement vertical de la coque, démontrant que le cisaillement est bien prédominant par rapport à la flexion. Nous utiliserons par la suite ce déplacement horizontal comme grandeur caractéristique d'écrasement.

Le deuxième axe en ordonnée présente l'évolution de la contrainte de flexion lors de l'essai. L'interaction entre cisaillement et flexion est une question omniprésente lors de nos essais, puisque l'effort tranchant appliqué introduit un moment de flexion, qui même si le bras de levier est très faible, pourra devenir important avec la pression. Avec l'étude des modes critiques, l'analyse de la contrainte de flexion nous permettra donc de distinguer les types de flambage obtenus.

### 5.6.3 Courbes de chargement

Cette partie détaille les résultats obtenus pour chaque feuillard et chaque longueur de coque testée, présentés non plus par feuillard mais par valeur croissante de  $Z$ . Les pressions étudiées dans chaque cas sont : 0, 20, 40, 100 et 200 mbar (sauf mention contraire).

5.6.31 Matériau cuivre,  $Z = 429$

Le premier type de coques testé est fabriqué à partir de feuillard en cuivre d'épaisseur 0.3mm, et présente une longueur de 135mm. Seuls 2 niveaux de pression ont pu faire l'objet d'essais : 0 et 40 mbar. Les courbes résultantes sont tracées en Figure 5.65.

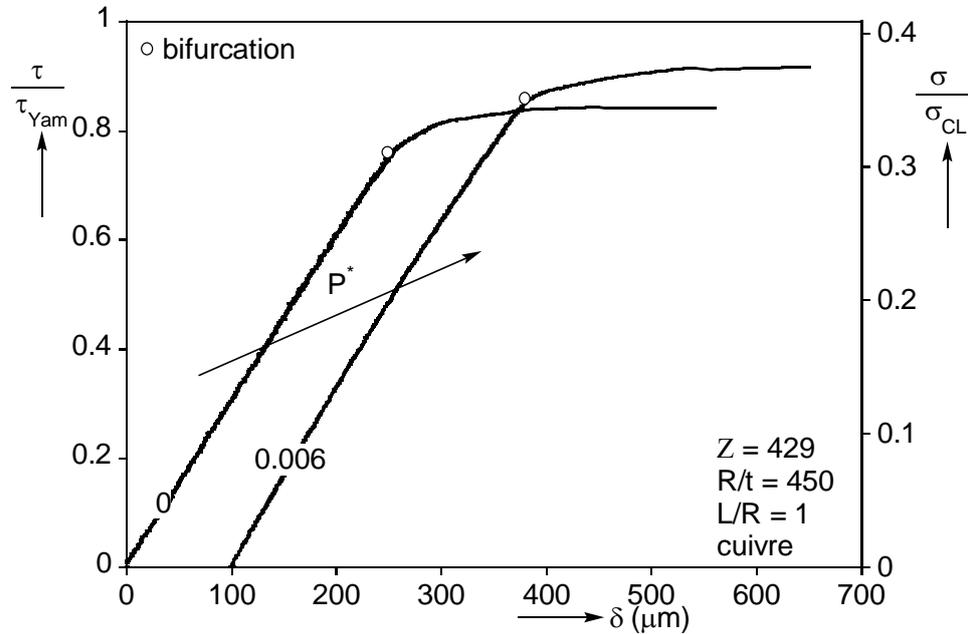


Figure 5.65 Courbes de chargement PT,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

Le comportement observé dans les deux cas est initialement linéaire, au cours duquel des déformations pré-critiques peu visibles à l'œil nu se développent. Pour une contrainte de cisaillement relativement proche du niveau théorique (supérieure à 80%), une bifurcation se produit, suivie d'une branche post-critique stable traduisant l'accélération des déformations et créant des cloques désormais bien visibles (Figure 5.66).

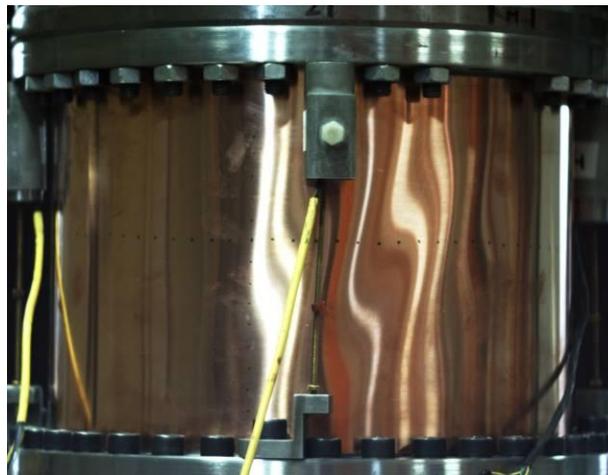


Figure 5.66 Déformations en cisaillement observées lors de la branche post-critique stable, CL183

Ce régime de déformation se traduit par un long plateau quasi horizontal se terminant lors du collapse de la structure, et créant les modes critiques présentés en Figure 5.67. Les larges cloques inclinées sont retrouvées, cependant lors du deuxième essai un décollement du feuillard a été provoqué lors de l'effondrement de la coque, nous empêchant de visualiser les modes post-collapse. Le peu d'essais réalisés ici ne nous permet de pas de visualiser l'évolution des modes, mais nous renseigne tout de même sur les tendances du point de vue du comportement.

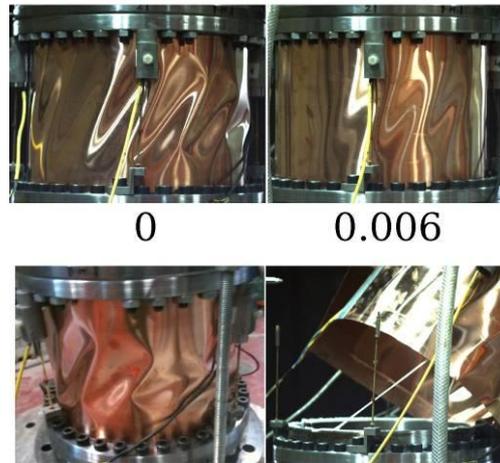


Figure 5.67 Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

### 5.6.32 Matériau aluminium, $Z = 644$

Les courbes de 5 essais réalisés sur des coques en aluminium, avec  $Z = 644$  ( $R/t = 650$ ,  $L/R = 1$ ) sont tracées en Figure 5.68 ; elles présentent toutes les mêmes caractéristiques.

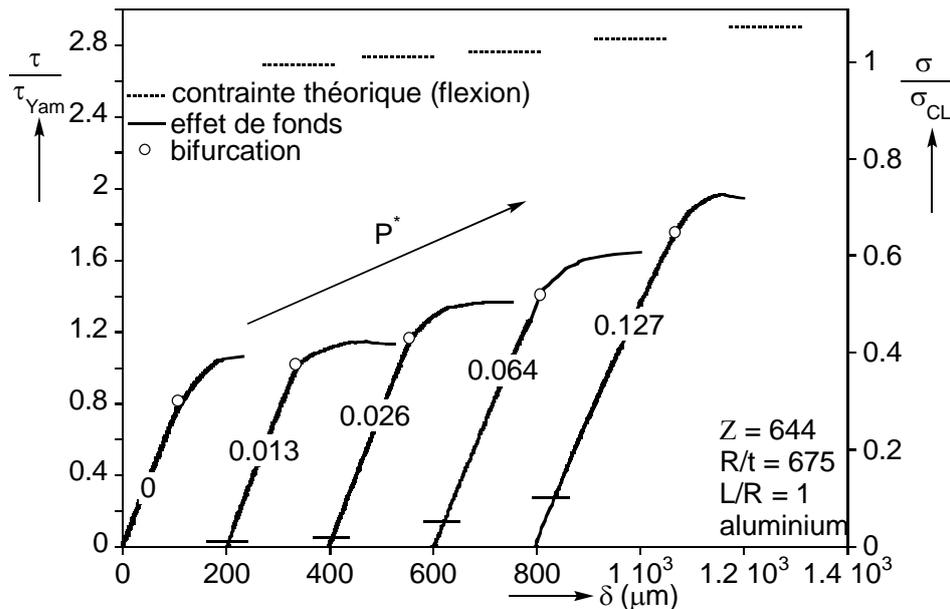
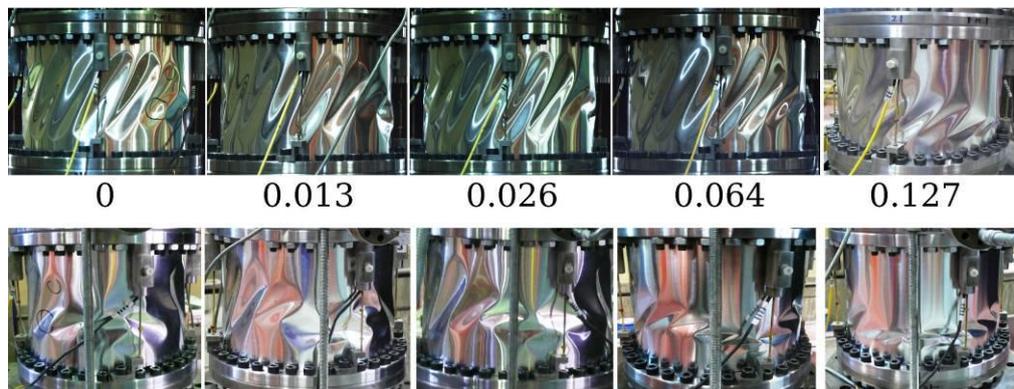


Figure 5.68 Courbes de chargement PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 1$ , aluminium

Le régime initial est linéaire, puis la raideur diminue progressivement, après une bifurcation et l'apparition de cloques du même type que celles observées sur la Figure 5.66. La déformation s'accélère ensuite pour aboutir à l'effondrement de la structure, après un plateau plus ou moins long. Du point de vue de la contrainte critique, on s'aperçoit que la contrainte de cisaillement atteint sa valeur théorique à l'effondrement dès les faibles pressions, traduisant une plus faible sensibilité aux défauts géométriques que celle observée pour les autres types de chargement. Malgré l'augmentation de pression, la contrainte théorique de flexion est loin d'être atteinte.

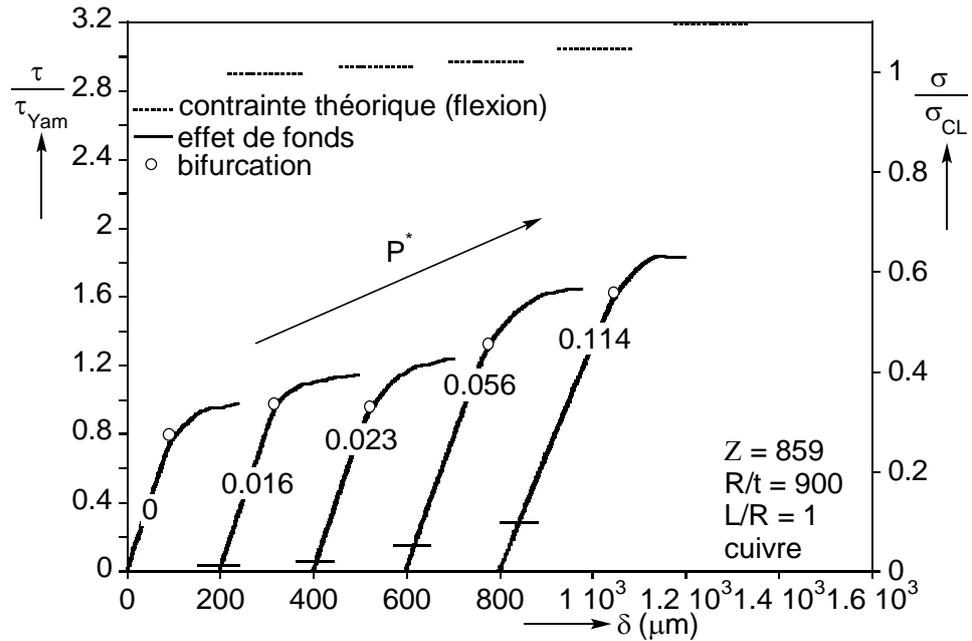
Les modes critiques (Figure 5.69) présentent tous de larges cloques diagonales sur les flancs, lieu où la contrainte de cisaillement est maximum, et qui s'étendent sur toute la hauteur du cylindre. Lors de l'effondrement de la coque cependant, des cloques de type « pointe de diamant » se forment du côté de l'application de l'effort et nous indiquent l'effet du moment de flexion. L'introduction d'une pression interne tend à empêcher les cloques de se former, comme pour les cas PN et PM vus précédemment. Les cloques de cisaillement rétrécissent donc légèrement, même si elles occupent toujours toute la hauteur de la coque. La longueur d'onde axiale des cloques de flexion diminue également, celles-ci étant de plus en plus confinées au bas de la coque.



**Figure 5.69** Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 1$ , aluminium

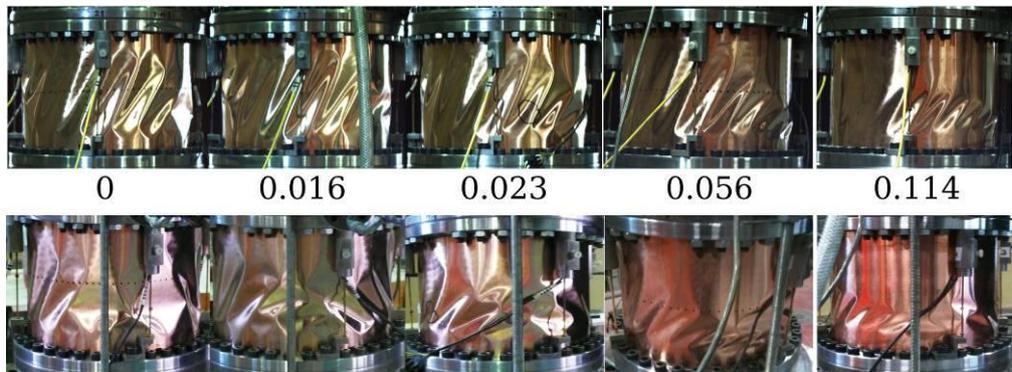
### 5.6.33 Matériau cuivre, $Z = 859$

Les 5 résultats d'essais pour  $Z = 859$  sont tracés en Figure 5.70, et sont très semblables à ceux vus précédemment : le comportement initial est linéaire, et devient non-linéaire avec le développement de cloques sur les flancs de la coque, jusqu'à l'effondrement de celle-ci. On reste ici relativement loin de la contrainte théorique en flexion.



**Figure 5.70** Courbes de chargement PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

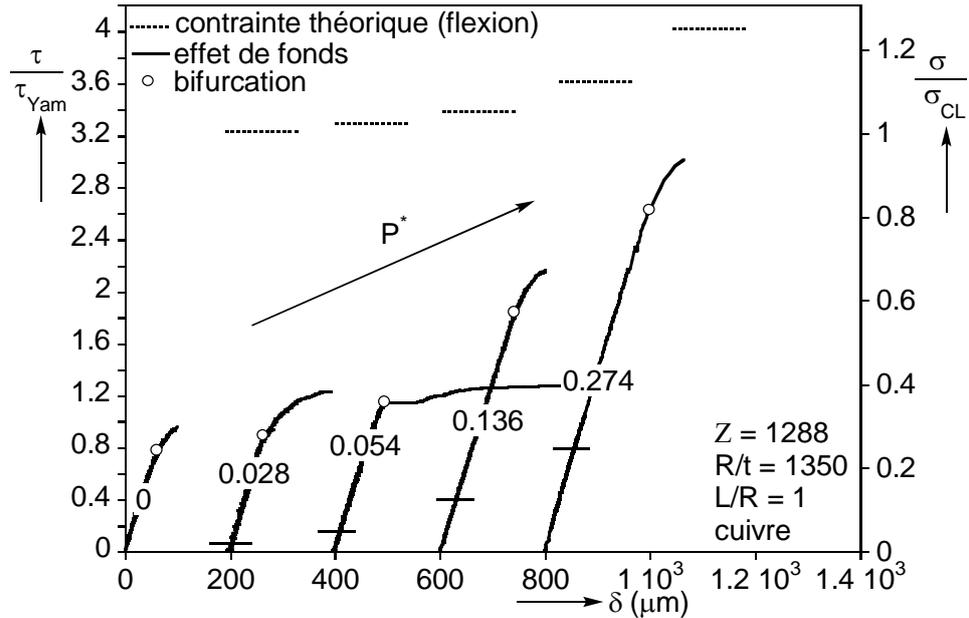
Les modes critiques, présentés en Figure 5.71, évoluent de manière visible. Avec la pression, les cloques de cisaillement non seulement diminuent en largeur, mais également en hauteur, pour n’occuper finalement que la moitié du cylindre. Du côté sollicité en flexion, les observations sont les mêmes que précédemment : les cloques se réduisent et occupent une faible partie de la coque, là où la contrainte de flexion est maximum.



**Figure 5.71** Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

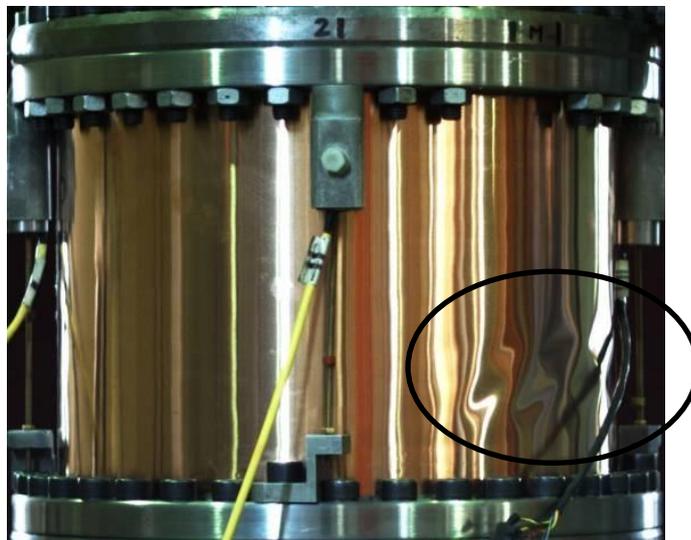
#### 5.6.34 Matériau cuivre, $Z = 1288$

La Figure 5.72 présente les 5 essais réalisés sur des coques en cuivre, avec  $Z = 1288$ . Le comportement semble ici évoluer en comparaison avec les valeurs de  $Z$  étudiées précédemment. Si la réserve de charge entre le début du régime non-linéaire et l’effondrement de la coque reste conséquente, la déformation lors de cette partie est limitée.



**Figure 5.72** Courbes de chargement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

On remarque que l'essai réalisé à 40 mbar ( $P^*=0.054$ ) présente cependant un comportement différent, avec un changement brusque de raideur après la bifurcation d'équilibre. Des sur-contraintes dues à une fabrication médiocre entraînent un cloquage soudain, semblable à celui observé lors des essais de flexion (Figure 5.73).



**Figure 5.73** Cloques de type flexion après une bifurcation, CL170

La branche post-critique correspond alors au développement de ces cloques en pointe de diamant, qui en se propageant sur les côtés laissent apparaître des cloques inclinées de type cisaillement, menant finalement au colapse. La déformation critique est alors très importante. Cet essai nous montre comment la présence d'imperfections importantes peut radicalement changer le comportement des coques en cisaillement.

Les modes critiques sont présentés sur la Figure 5.74 ci-dessous. L'effet de la pression est ici plus marqué encore : progressivement, les cloques occupent une partie de la coque de plus en plus réduite, et leur inclinaison diminue.

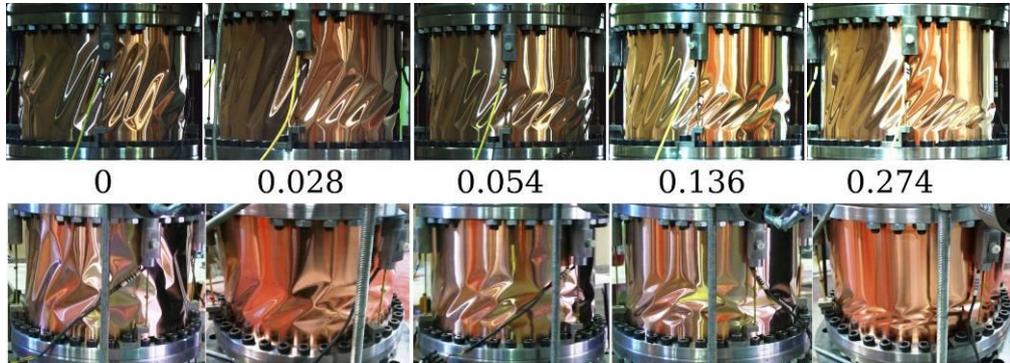


Figure 5.74 Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

### 5.6.35 Matériau acier, $Z = 1288$

Cette valeur de  $Z$  est de nouveau étudiée pour un matériau différent, et les résultats sont tracés en Figure 5.75. La pression semble une fois de plus réduire l'étendue du domaine non-linéaire, résultant en une rigidification apparente. L'essai à  $P^* = 0.086$  voit l'apparition d'une bifurcation d'équilibre provoquant un léger cloquage du même type que celui vu en Figure 5.72, mais qui ne perturbe cependant pas l'essai de manière importante, puisque le changement de raideur est discontinu mais minime.

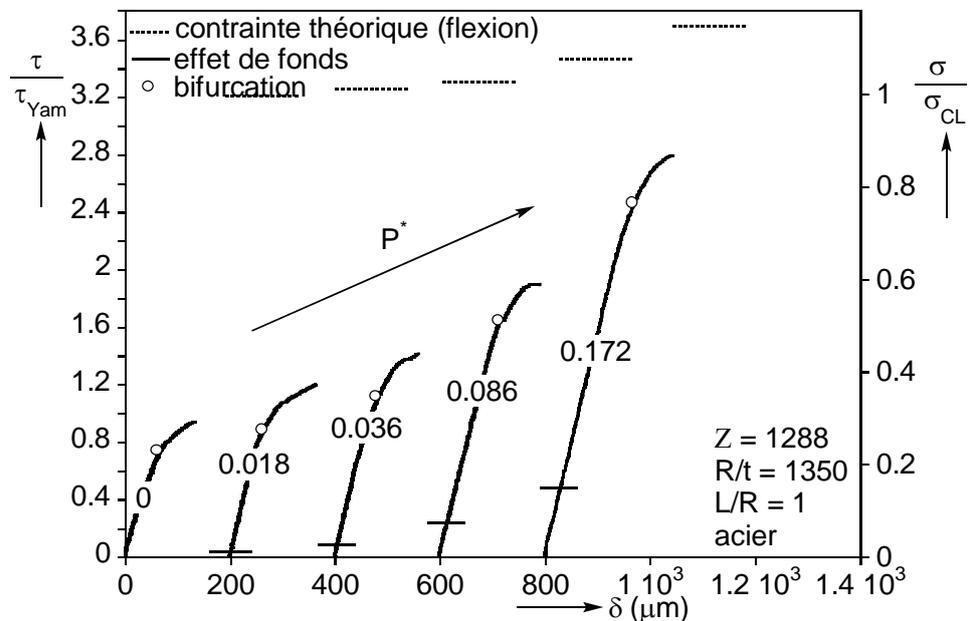
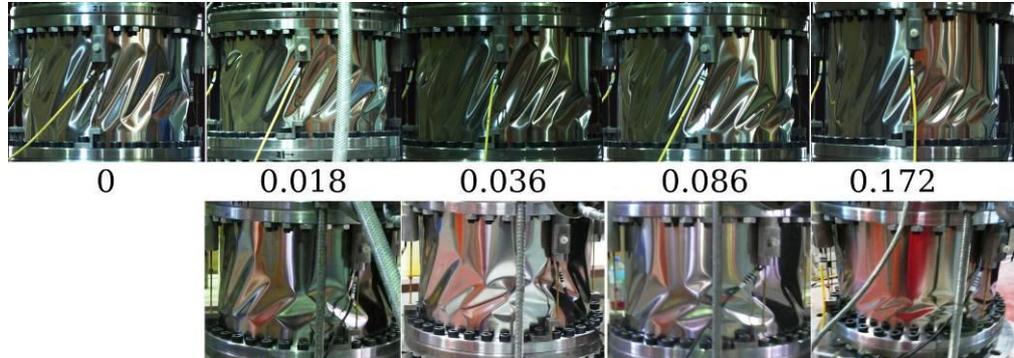


Figure 5.75 Courbes de chargement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , acier

Les modes critiques, présentés en Figure 5.76, restent similaires à ceux observés pour le cuivre. Nous ne notons pas de différence majeure de

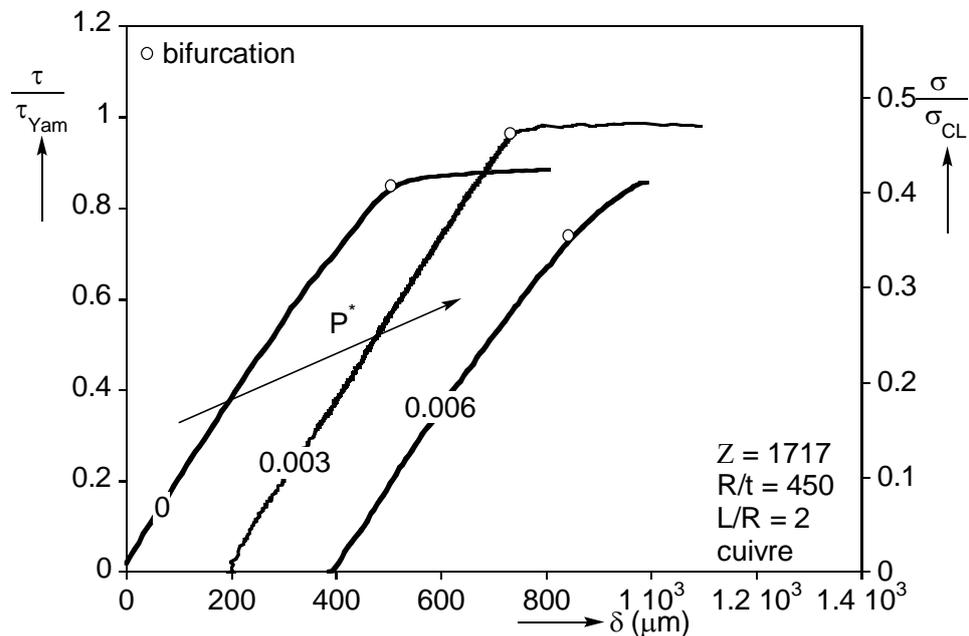
comportement entre ces deux matériaux, comme cela a pu être le cas pour d'autres types de chargement. Les deux feuillets présentant des qualités distinctes, ceci peut constituer une preuve supplémentaire de la faible sensibilité aux défauts du flambage par cisaillement.



**Figure 5.76** Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , acier

### 5.6.36 Matériau cuivre, $Z = 1717$

Les coques testées à présent sont similaires à celles utilisées pour les essais PN et PM, avec  $L/R = 2$ , résultant en un paramètre de Batdorf 4 fois plus élevé que précédemment. Une fois encore, dû à la méthode de fabrication, seules 3 pressions ont pu faire l'objet d'essais (0, 20 et 40 mbar, voir Figure 5.77).

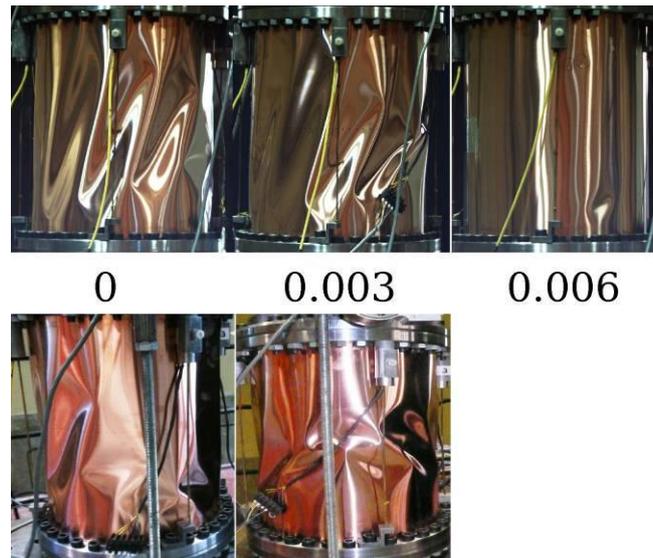


**Figure 5.77** Courbes de chargement PT,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

Pour les deux premières expériences, le comportement pré-critique linéaire donne suite à un changement plutôt rapide de la raideur après la bifurcation, provoquant ainsi un régime à contrainte quasi-constante débouchant sur l'effondrement du cylindre. Lors du dernier essai, les contraintes élevées appliquées à la résine époxy entraînent un glissement progressif se traduisant par

une perte de raideur apparente, qui s'accélère avec le développement du mode de cisaillement. Un décollement survient finalement et empêche le déroulement de l'essai jusqu'à l'effondrement de la coque par flambage. Les contraintes de flexion atteintes ici sont faibles, indiquant que c'est le cisaillement qui déclenche l'instabilité.

Ceci est confirmé par l'examen des modes critiques (Figure 5.78) : bien que l'on observe une légère diminution de l'inclinaison des cloques lors de l'essai à 20 mbar ( $P^* = 0.003$ ), le mode de cisaillement reste prédominant.

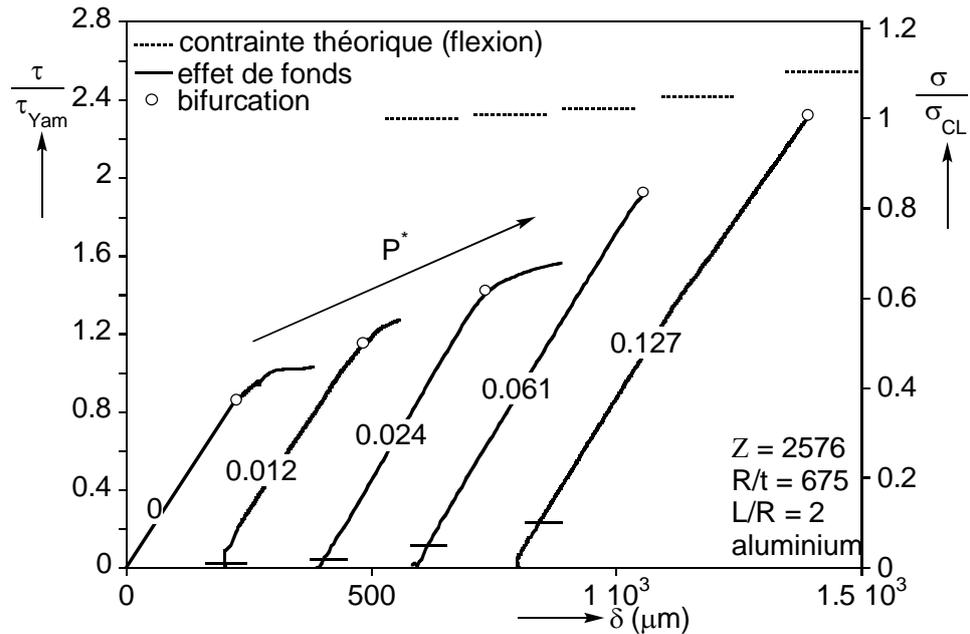


**Figure 5.78** Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

#### 5.6.37 Matériau aluminium, $Z = 2576$

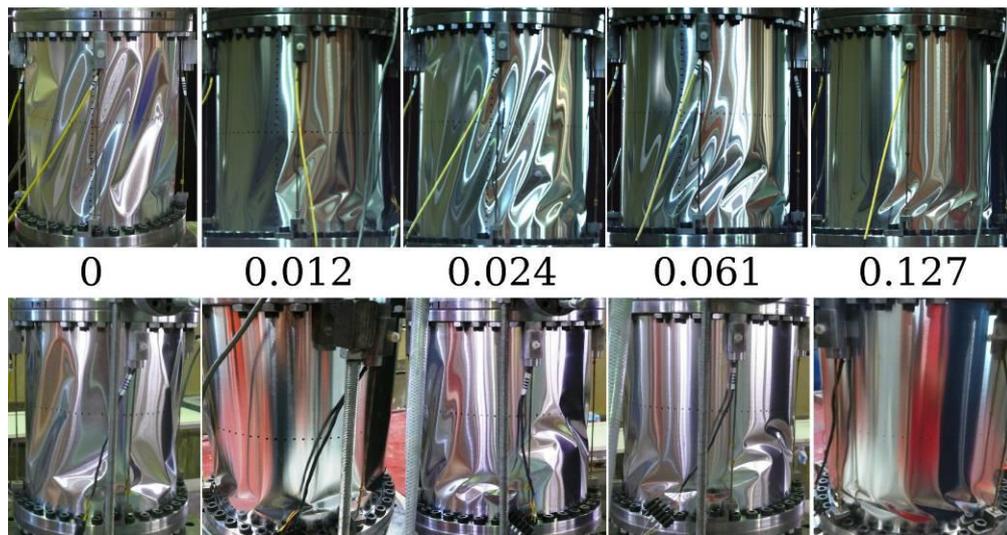
La Figure 5.79 présente les 5 essais réalisés en pression interne et cisaillement pour  $Z = 2576$ . Le comportement des coques évolue encore, et deux types de réponses sont ici distinguables. Pour les trois premières pressions étudiées, le comportement est stable et progressivement non-linéaire après la bifurcation, de manière comparable à ce que nous avons pu observer jusqu'à présent.

Lorsque la pression continue d'augmenter cependant, le comportement linéaire s'achève par une bifurcation d'équilibre entraînant l'effondrement de la coque. Le bras de levier, plus grand dans ce cas puisque  $L/R = 2$ , résulte en un moment de flexion appliqué à la coque plus important. Ainsi, nous pouvons nous rendre compte pour  $P^* = 0.127$ , pression adimensionnelle plutôt faible, que la contrainte théorique de flexion est quasiment atteinte. Ce type de comportement, associé à une contrainte de flexion élevée, semble donc indiquer que la structure flambe alors en flexion.



**Figure 5.79** Courbes de chargement PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium

L'examen des modes critiques (Figure 5.80) révèle le même type de tendance observé jusqu'à maintenant. La coque étant plus haute, l'effet de la pression est d'autant plus visible. Sans pression interne en effet, trois larges cloques apparaissent sur toute la hauteur de la coque ; l'augmentation de pression entraîne ensuite rapidement le rétrécissement de ces cloques de cisaillement, et va de pair avec la diminution de leur inclinaison et une forme semblable aux pointes de diamant. Lors du dernier essai, le mode de cisaillement n'occupe qu'une petite partie de la coque (moins d'un tiers) ; les cloques de flexion sont par contre bien développées et occupent tout le bas de la partie comprimée de la coque.



**Figure 5.80** Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium

5.6.38 Matériau cuivre,  $Z = 3434$

Les résultats d'essais réalisés sur des coques en cuivre avec un paramètre de Batdorf  $Z$  égal à 3434, sont tracés en Figure 5.81. Le premier essai, sans pression interne, présente un comportement « classique » des essais de cisaillement, avec la formation progressive de larges cloques diagonales. Cependant, dès l'essai suivant à  $P^* = 0.012$ , un cloquage se produit en partie comprimée, suivi peu après par l'effondrement du cylindre.

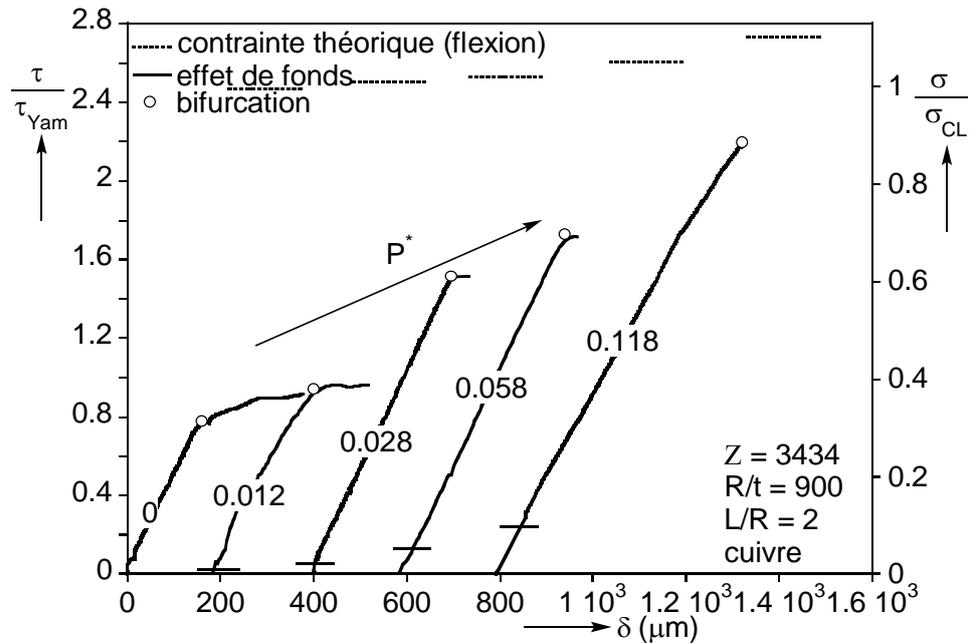


Figure 5.81 Courbes de chargement PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

Les trois autres essais se concluent tous par une bifurcation d'équilibre provoquant presque instantanément le collapse de la structure : le chargement de flexion semble donc devenir prédominant, dès les basses pressions. Les modes critiques ci-dessous (Figure 5.82) laissent paraître cette transition du mode critique de cisaillement vers un mode de type flexion.

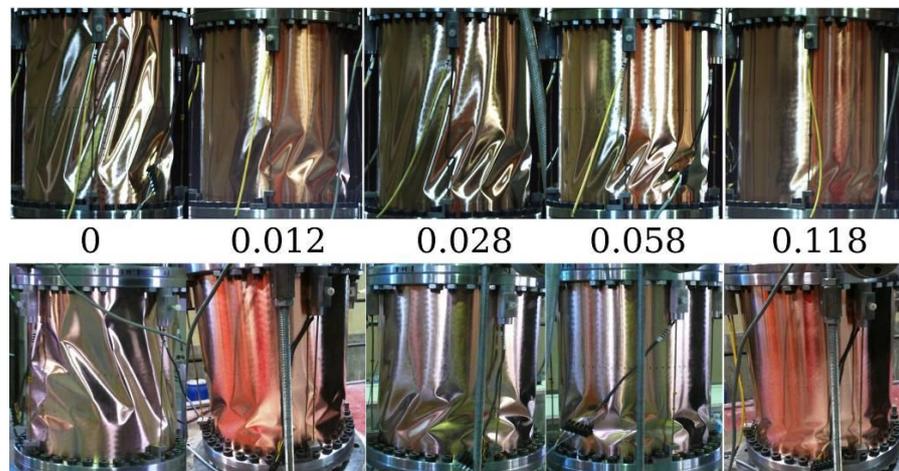


Figure 5.82 Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

5.6.39 Matériau cuivre,  $Z = 5151$

Les coques sont ici très minces et longues, résultant en une valeur de  $Z$  plutôt élevée. Les résultats pour cette série (tracés en Figure 5.83) ainsi que les modes critiques de la Figure 5.84 confirment le fait que la flexion devient de plus en plus prédominante.

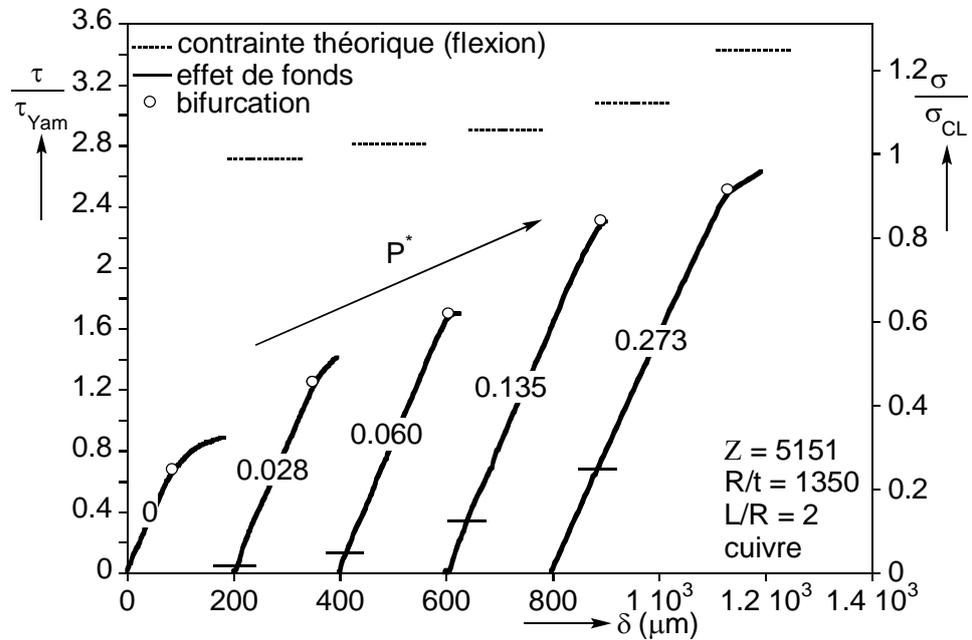


Figure 5.83 Courbes de chargement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

On observe en effet que les modes de cisaillement sont très vite restreints au bas de la coque, et que les cloques en pointe de diamant se forment d'une manière similaire à celle obtenue lors des essais PM. Une faible interaction existe encore entre les deux chargements, la flexion reste cependant le mode de flambage dominant.

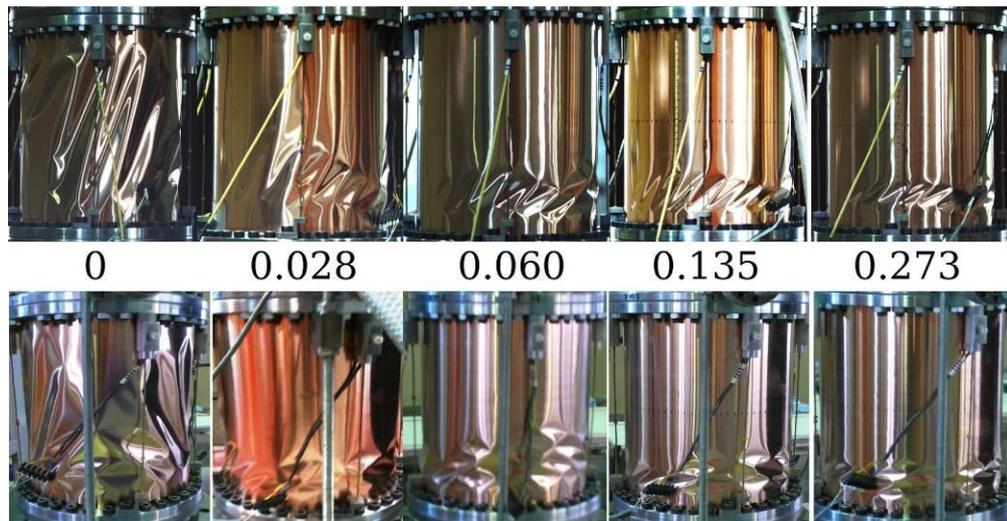


Figure 5.84 Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

Les courbes d'essais deviennent ainsi rapidement linéaires, et la bifurcation se caractérise par un comportement post-critique instable, montrant le changement de nature du flambage. Lors du dernier essai à  $P^* = 0.273$ , la bifurcation est de nouveau suivie d'une branche post-critique stable, avec cette fois-ci le développement de cloques en pointes de diamant, et donc un flambage par flexion.

Cette transition d'un type de flambage vers un autre s'accompagne d'une sensibilité accrue aux défauts et peut donc avoir un impact sur la contrainte critique.

5.6.310 Matériau acier,  $Z = 5151$

Une autre série de coques avec un paramètre de Batdorf égal à 5151 a été testée, cette fois-ci en acier. Les résultats sont sensiblement les mêmes que pour les coques en cuivre : la flexion devient le mode dominant dès  $P^* = 0.036$ , comme le confirment les courbes de la Figure 5.85 ou les modes critiques observés en Figure 5.86.

Des cloquages en partie comprimée se produisent pour  $P^* = 0.036$  et 0.086, preuves de la plus grande sensibilité de la structure aux défauts. En précipitant le flambage par flexion, la pression interne vient, en un sens, déstabiliser la coque.

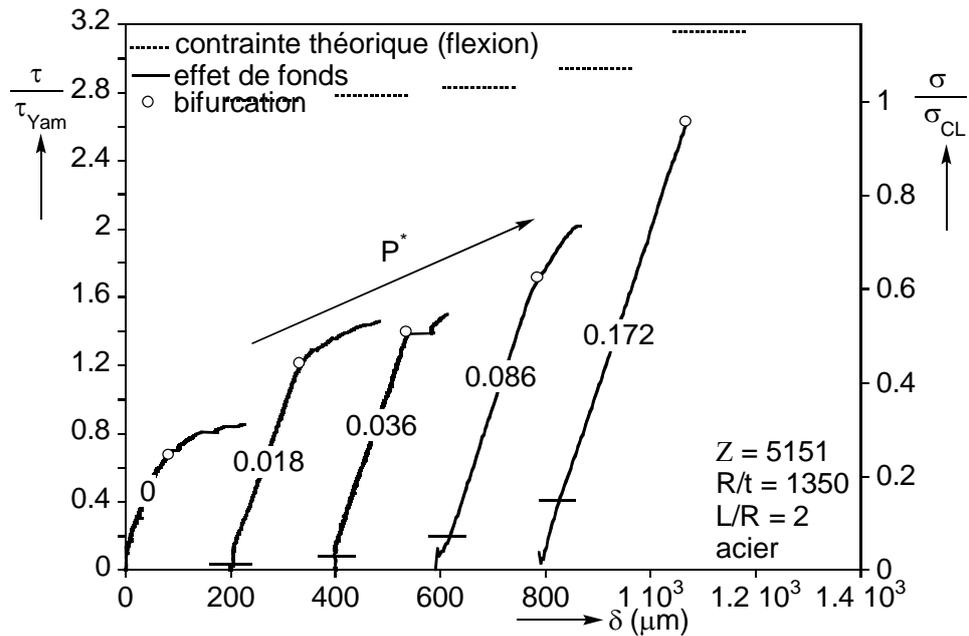
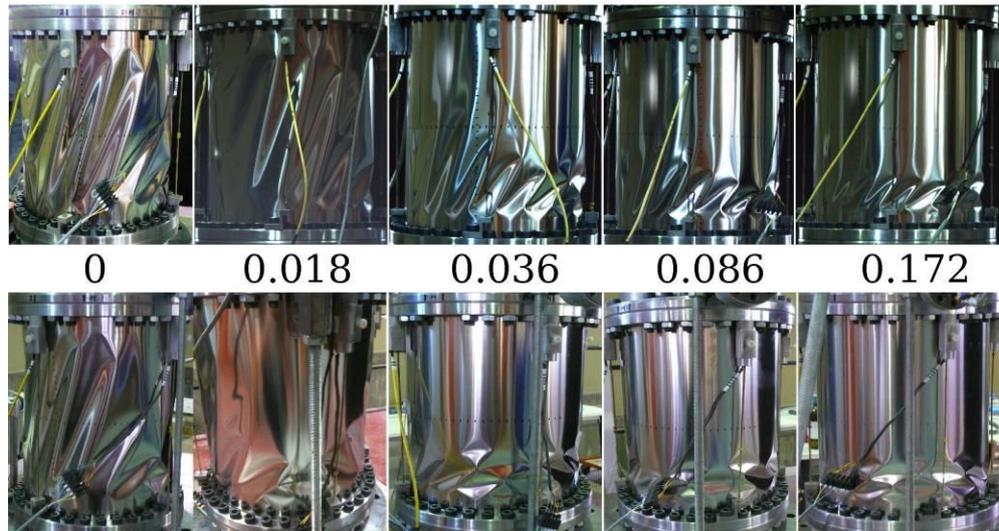


Figure 5.85 Courbes de chargement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , acier



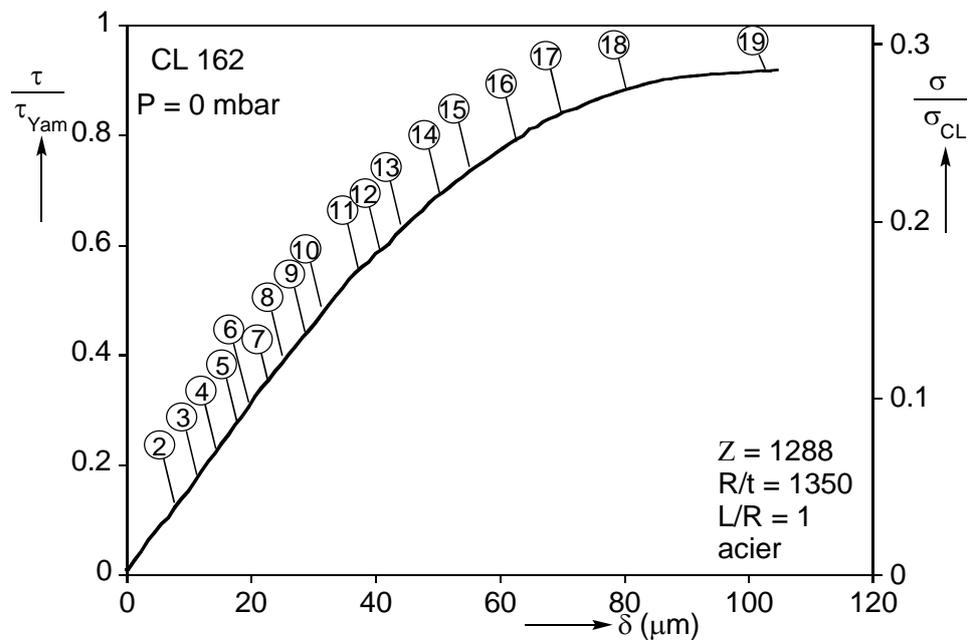
**Figure 5.86** Modes critiques PT de côté et de face,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , acier

#### 5.6.4 Etude de la déformation

Afin de mettre en évidence les différents mécanismes de déformation menant au flambage qui ont pu être observés lors des essais, nous avons utilisé ici encore le système de stéréo-corrélation Vic-3D.

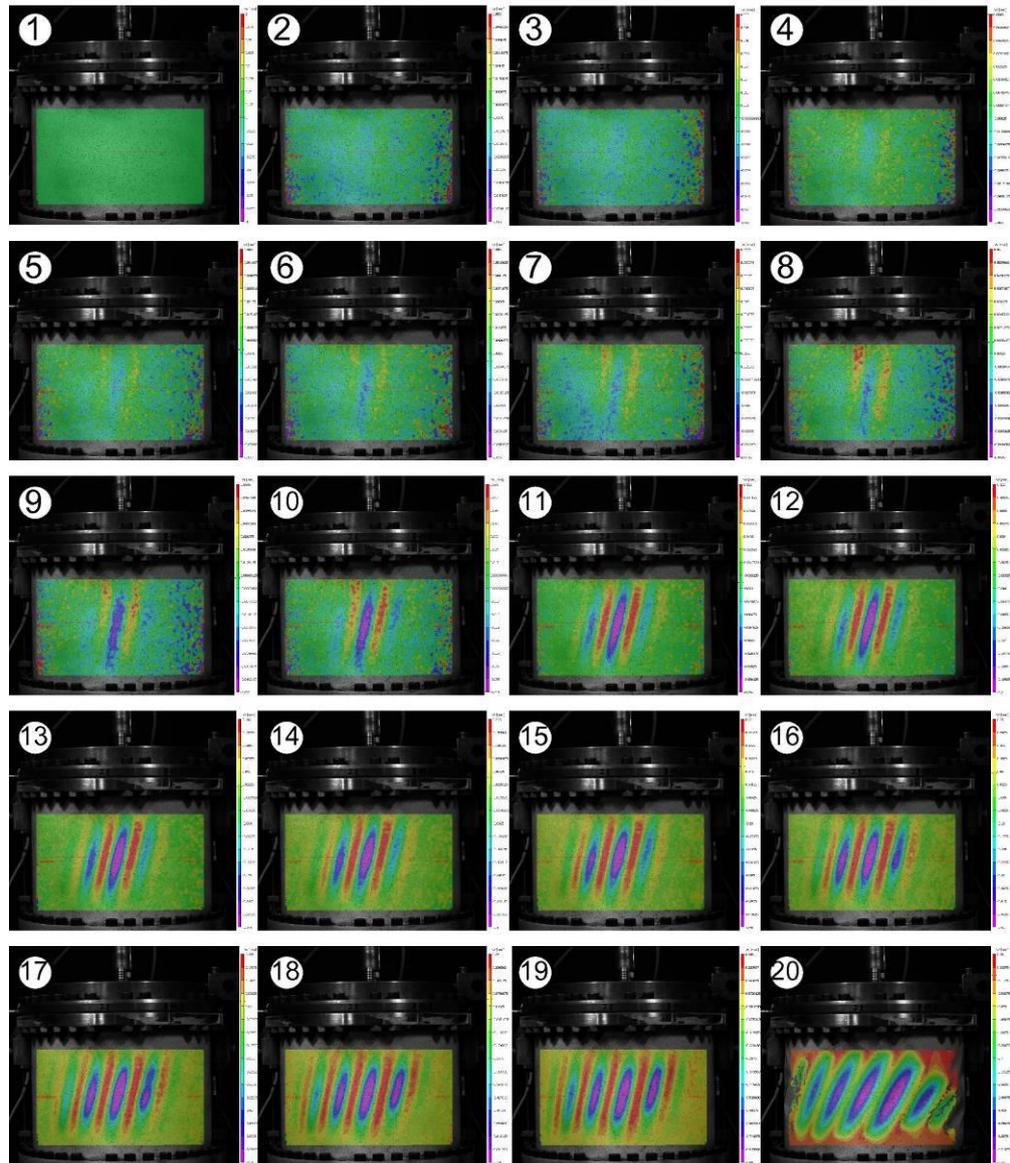
##### 5.6.4.1 Mode de cisaillement

Un premier essai est conduit sur la coque CL162 en acier, avec  $L/R = 1$  et  $R/t = 1350$ . L'essai est effectué sans pression interne, et pour cette géométrie nous pouvons donc anticiper un mode de flambage par cisaillement.



**Figure 5.87** Courbe de chargement, CL 162

La courbe de chargement est présentée en Figure 5.87. Nous avons retenu 20 configurations montrant le spécimen à différents niveaux de déformation (Figure 5.88). Le numéro de ces configurations correspond aux bulles présentes sur la courbe (1 étant l'état initial et 20 l'état après effondrement). Sur chacune des photos, le déplacement perpendiculaire au plan de la photo a été enregistré sur une droite à peu près à mi-hauteur du cylindre. Nous avons ainsi pu tracer en Figure 5.89 les déformations (amplifiées 5x) apparaissant sur cette ligne.

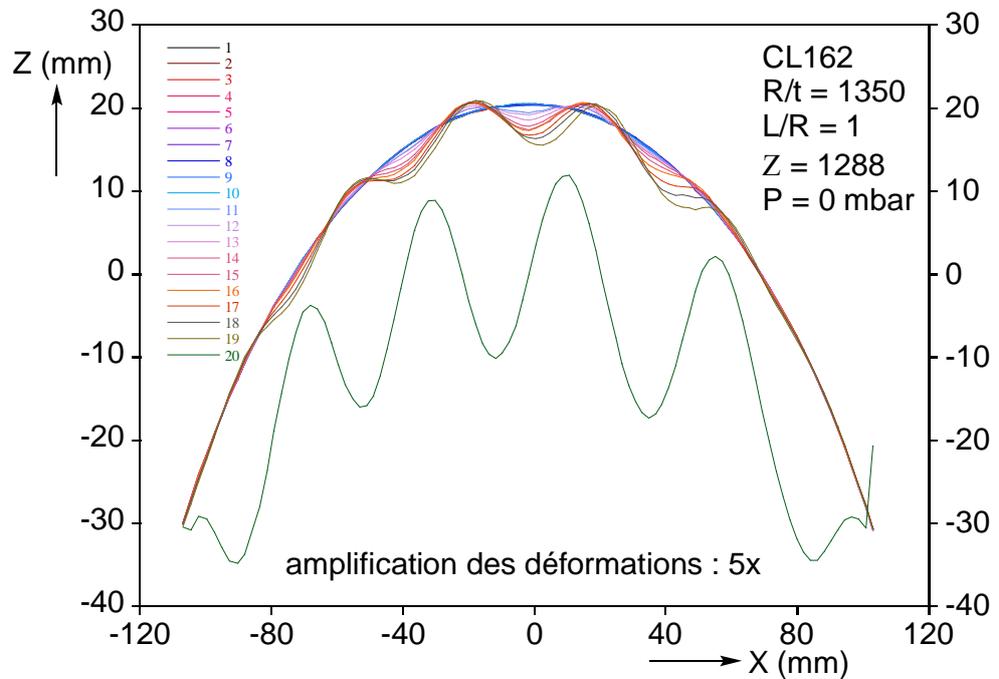


**Figure 5.88** Série de photos montrant l'évolution de la déformation du spécimen CL 162 soumis à un effort tranchant

De façon similaire à ce que nous avons pu voir au paragraphe précédent, on retrouve un comportement initial linéaire, correspondant aux photos 1 à 10. Durant cette phase, les déformations restent minimales et à peine visibles à

l'œil nu (inférieures à 70 microns, soit 70% de l'épaisseur), concentrées surtout au centre du spécimen, où la contrainte de cisaillement est la plus importante.

Dès la configuration 11, on note une accélération des déformations (Figure 5.88) qui se propagent progressivement sur tout le côté de la coque. Ceci se traduit sur la courbe de chargement par une partie non-linéaire, comme nous l'avons souvent observé lors de la campagne d'essais.

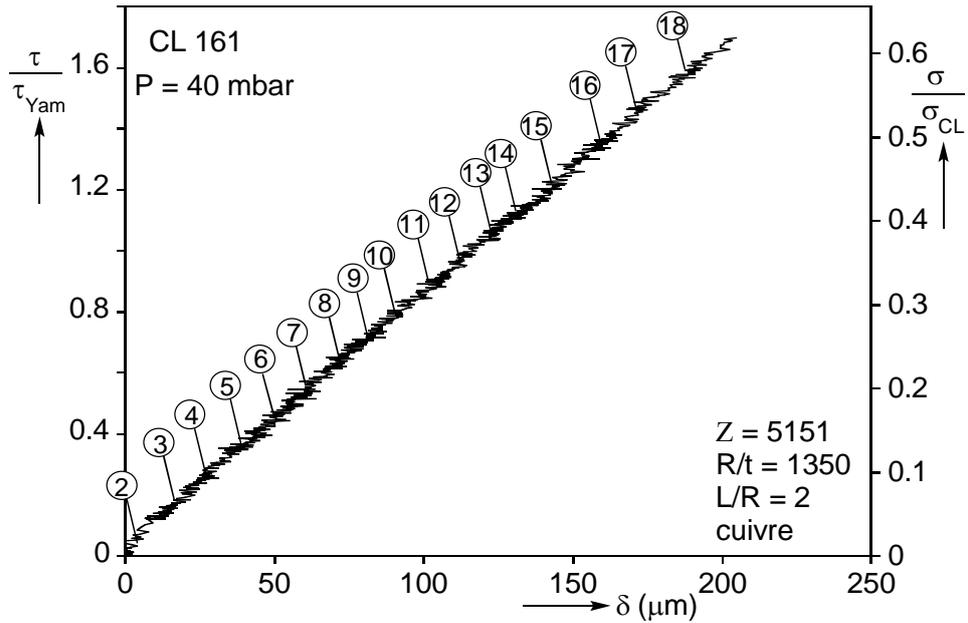


**Figure 5.89** Evolution des déformations au cours du chargement, CL 162

L'accroissement des cloques débouche sur l'effondrement du cylindre, stoppé par la tige d'arrêt verticale. Les déformations atteignent alors près de 6 millimètres, soit 60 fois l'épaisseur de la structure.

#### 5.6.42 Mode de flexion

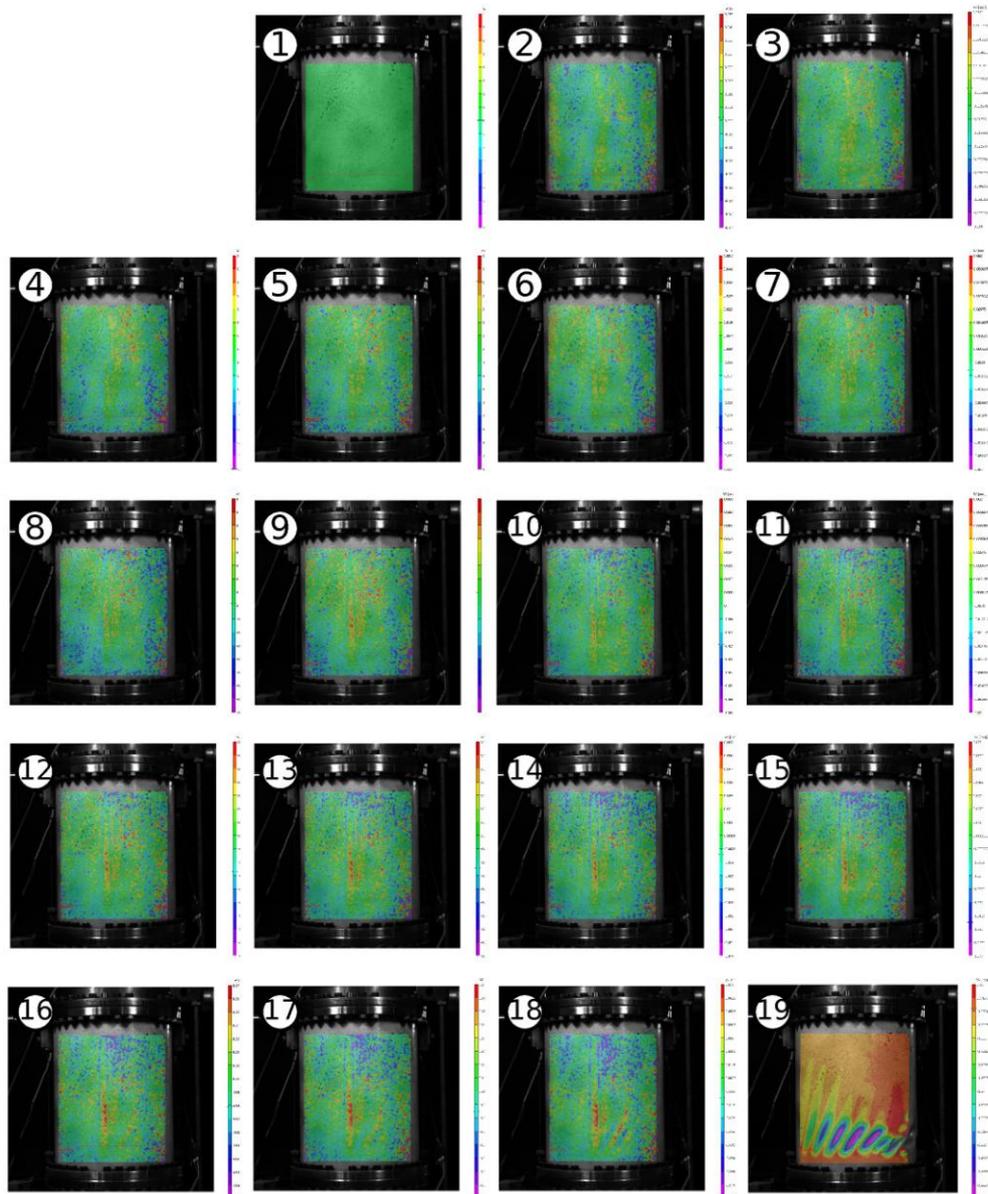
Nous examinons maintenant un essai réalisé sur une coque en cuivre (CL 161), avec  $L/R = 2$  et  $R/t = 1350$ , à 40 mbar. La courbe de chargement, présentée en Figure 5.90, est ici parfaitement linéaire et traduit un flambage par flexion.



**Figure 5.90** Courbe de chargement, CL 161

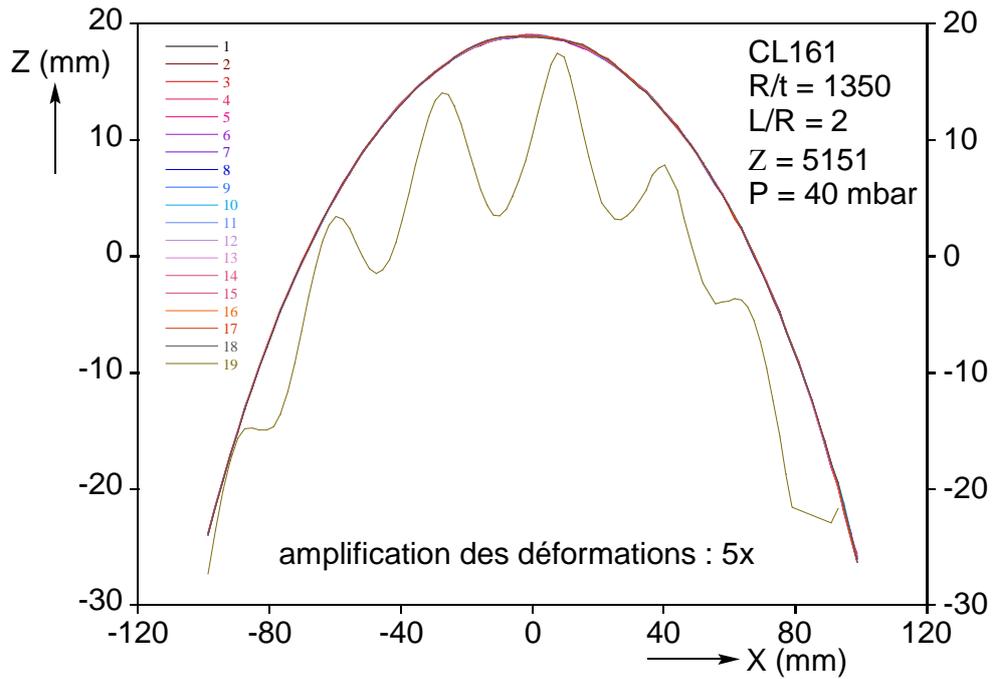
La même méthode est utilisée : 19 configurations ont été conservées (photos en Figure 5.91) et reportées sur la courbe de chargement. Les déplacements sont enregistrés au bas de la coque, là où les déformations seront les plus importantes, et tracés en Figure 5.92.

Nous observons dans ce cas des déplacements extrêmement faibles et invisibles à l'œil nu. Des cloques positionnées au bas du spécimen commencent à se former à partir de la configuration 14, mais leur amplitude reste limitée (40 microns, soit 40% de l'épaisseur, en configuration 18 juste avant le flambage). Ces faits sont mis en évidence sur la Figure 5.91, où il est aisé de se rendre compte du caractère soudain de l'instabilité, en comparaison avec le cas étudié plus haut.



**Figure 5.91** Série de photos montrant l'évolution de la déformation du spécimen CL 161 soumis à un effort tranchant

Ceci nous permet de conclure sur les différents modes de flambage observés à l'œil nu lors des essais : en cisaillement, la formation des cloques se fait progressivement jusqu'à l'atteinte d'un point limite; en flexion par contre, les cloques apparaissent lors de l'effondrement de la coque.



**Figure 5.92** Evolution des déformations au cours du chargement, CL 161

### 5.6.5 Contraintes critiques

Les contraintes critiques résultant des essais présentés ci-dessus sont ici exploitées, afin de pouvoir appréhender l'influence de la pression interne sur la contrainte critique de cisaillement. Cette combinaison de chargements n'est pas traitée dans les 2 règles de dimensionnement majeures que nous avons présentées au chapitre 2. Certaines publications moins usitées proposent cependant des méthodes de dimensionnement, que nous allons d'abord présenter afin de les utiliser comme référence dans le cadre de nos essais.

#### 5.6.51 Méthodes de dimensionnement en pression interne et cisaillement

##### 5.6.511 Shell Analysis Manual [11]

Ce document, préparé par Baker et d'autres au sein de la division Structures de *North American Aviation* pour la NASA, regroupe différentes théories et méthodes pour l'analyse de structures coques, et inclut bien entendu des recommandations quant à leur dimensionnement. Concernant le cas du cisaillement, le chargement par effort tranchant n'est pas différencié de la torsion. La contrainte critique est donnée par :

$$\tau_{cr} = (C_s + \Delta C_s) \cdot \tau_{yam}$$

Où :  $C_s$  est le coefficient de réduction initial

$\Delta C_s$  représente l'augmentation de contrainte apportée par la pression

$\tau_{yam}$  est la contrainte théorique donnée par Yamaki (voir chapitre 2)

Les coefficients sont donnés dans le manuel sous forme graphique, nous les avons retracés en Figures 5.93 et 5.94, ainsi qu'une régression de type polynomiale dont les coefficients sont inclus sur les graphiques.

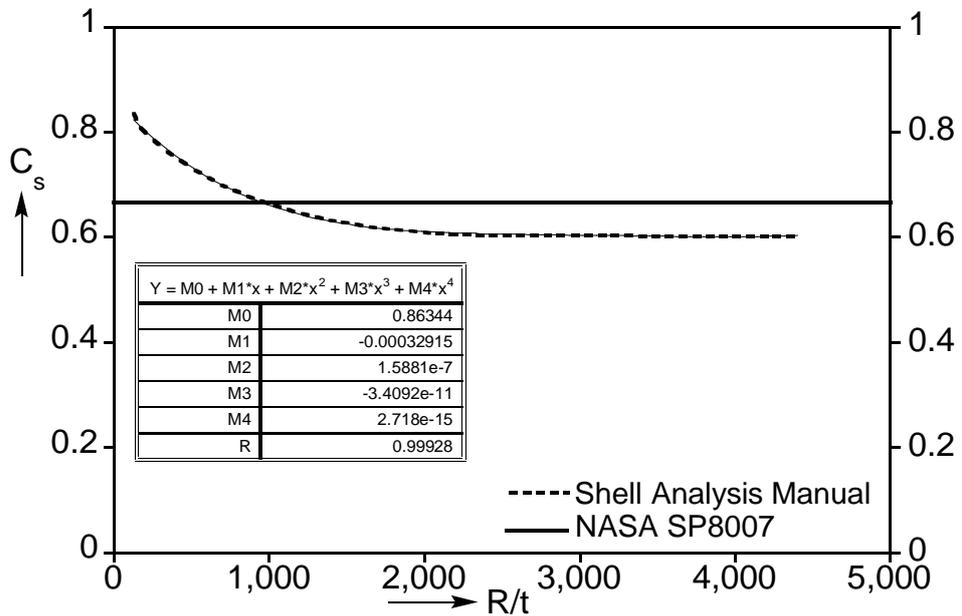


Figure 5.93 Facteur de réduction sous cisaillement (Baker, 1968)

On remarque que le facteur  $C_s$  est donné en fonction de  $R/t$  et non  $Z$ , pourtant utilisé couramment dans les problèmes de cisaillement. Il devient inférieur au  $\gamma_T$  de la SP8007 dès  $R/t > 1000$  environ. Le coefficient  $\Delta C_s$  est quant à lui exprimé en fonction de  $P^*$ . Aucune précision n'est donnée quant à la provenance de ces résultats.

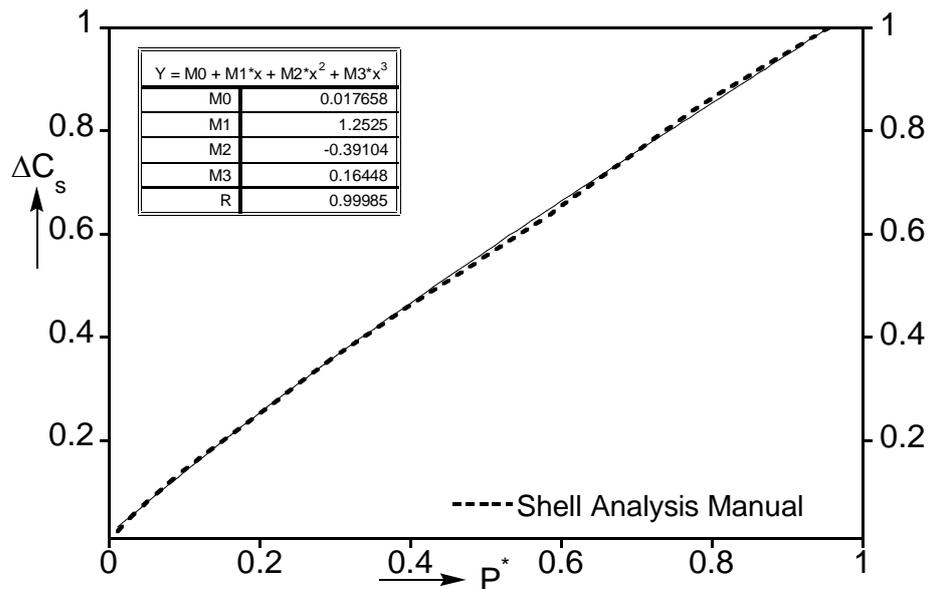


Figure 5.94 Augmentation de contrainte critique avec la pression interne (Baker, 1968)

5.6.512 Analysis and Design of Flight Vehicle Structures [23]

Le deuxième manuel mentionné ici est l'ouvrage extensif de Bruhn sur l'analyse de structures aéronautiques (comprenant entre autres l'étude de poutres, plaques et coques). La philosophie de dimensionnement de coques en cisaillement qui y est détaillée est différente de celle vue ci-dessus.

La contrainte critique initiale est en effet choisie à partir d'une limite basse des essais en torsion recensés (Figure 5.95), et dépend de  $Z$  :

$$\tau_{cr} = \frac{K_T(Z) \cdot \pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{t}{L}\right)^2$$

Où  $K_T(Z)$  est un coefficient donné sous forme graphique et pouvant être approximé par :

$$K_T(Z) = 0.8871 \cdot Z^{0.6819} \quad \text{pour } Z > 100$$

Le nombre d'essais réalisés en cisaillement par effort tranchant étant limité, Bruhn s'est basé sur l'étude de Lundquist [68] et propose dans ce cas de multiplier la contrainte critique de torsion par 1.25. Si nous pouvons considérer la relation entre torsion et effort tranchant analogue à celle existant entre le chargement par flexion et par compression, l'effet statistique peut justifier ce coefficient. Le nombre de résultats est cependant trop faible pour pouvoir conclure et quantifier cet écart statistique comme cela a pu être le cas pour la flexion.

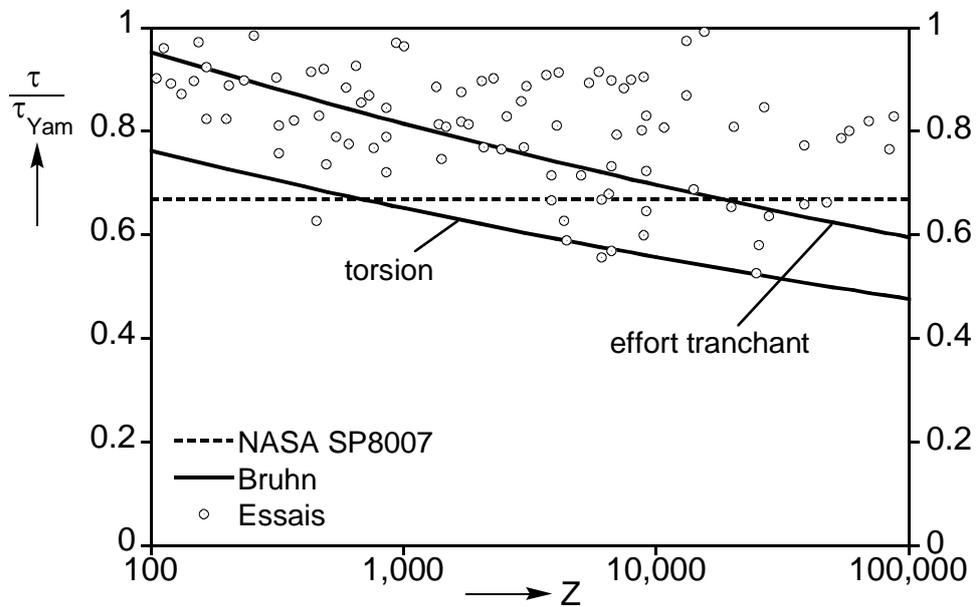


Figure 5.95 Facteur de réduction sous cisaillement (Bruhn, 1973)

La quantification de l'interaction de la torsion avec la pression interne est faite à partir des résultats expérimentaux de Crate *et al.* [27], et est exprimée en fonction de la pression externe critique :

$$\left(\frac{\tau_p}{\tau_0}\right)^2 + \frac{P_{int}}{P_{ecr}} = 1$$

Où :  $\tau_0$  est la contrainte critique de torsion initiale calculée plus haut  
 $\tau_p$  est la contrainte critique lorsqu'une pression interne est présente  
 $P_{int}$  est la pression interne  
 $P_{ecr}$  est la pression externe critique (négative)

La connaissance de la contrainte critique de torsion passe alors par le calcul de la pression externe critique, donnée dans la NASA SP8007 par :

$$P_{ecr} = \frac{K_p(Z) \cdot \pi^2 \cdot E}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \cdot \frac{t^3}{L^2 \cdot R}$$

Où  $K_p(Z)$  est un coefficient donné par :

$$K_p(Z) = 1.04 \cdot \sqrt{\gamma \cdot Z} \quad \text{pour } 100 < Z < 4700$$

$$K_p(Z) = \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{\gamma \cdot Z}{\frac{R}{t} \cdot \sqrt{1 - \nu^2}} \quad \text{pour } Z > 4700$$

Pour le cisaillement par effort tranchant, Bruhn préconise, sans citer de source, une interaction linéaire :

$$\frac{\tau_p}{\tau_0} + \frac{P_{int}}{P_{ecr}} = 1$$

Les résultats de Yamaki [116] montrent cependant que la tendance en présence d'une pression interne est similaire au cas de la torsion. Nous retiendrons donc ici l'interaction proposée plus haut.

### 5.6.52 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux sont ici comparés aux 2 règles que nous venons de présenter pour l'interaction pression interne/cisaillement. Afin de pouvoir étudier l'effet de la flexion sur la contrainte critique, nous avons jugé intéressant d'intégrer également les prédictions de la SP8007 en flexion ainsi qu'une interaction cubique flexion/cisaillement.

Il convient ici de discuter de la définition du mot « critique ». Beaucoup de comportements différents ont pu être observés, avec des parties non-linéaires, des changements brusques de raideur, des effondrements soudains... Afin de rester le plus homogène possible au vu de ces résultats, nous différencions la contrainte critique de cloquage, de la contrainte critique d'effondrement (ou collapse).

La première est la contrainte atteinte lors d'une bifurcation ; la seconde représente la contrainte maximale, et peut coïncider avec le cloquage dans certains cas. Seules les contraintes de collapse sont habituellement reportées, et utilisées pour l'établissement de tendances. Nous verrons comment cela se traduit au niveau du dimensionnement.

Les graphiques présentant les résultats possèdent deux axes en ordonnées : à gauche, la contrainte critique totale de cisaillement, ramenée à la contrainte de Yamaki ; à droite, la contrainte critique *totale* de flexion (avec l'effet de fonds apporté par la pression), ramenée à la contrainte classique.

5.6.521 Matériau cuivre,  $Z = 429$

Pour cette valeur de  $Z$ , nous rappelons que seuls deux essais ont pu être effectués, et leur résultats sont présentés en Figure 5.96. Nous pouvons conclure que, tout du moins aux faibles pressions concernées, les niveaux de contrainte atteints sont conformes aux propositions de Bruhn. Les contraintes de collapse coïncident avec la courbe du cisaillement par effort tranchant, et l'interaction flexion/cisaillement semble quant à elle bien prédire les contraintes de cloquage.

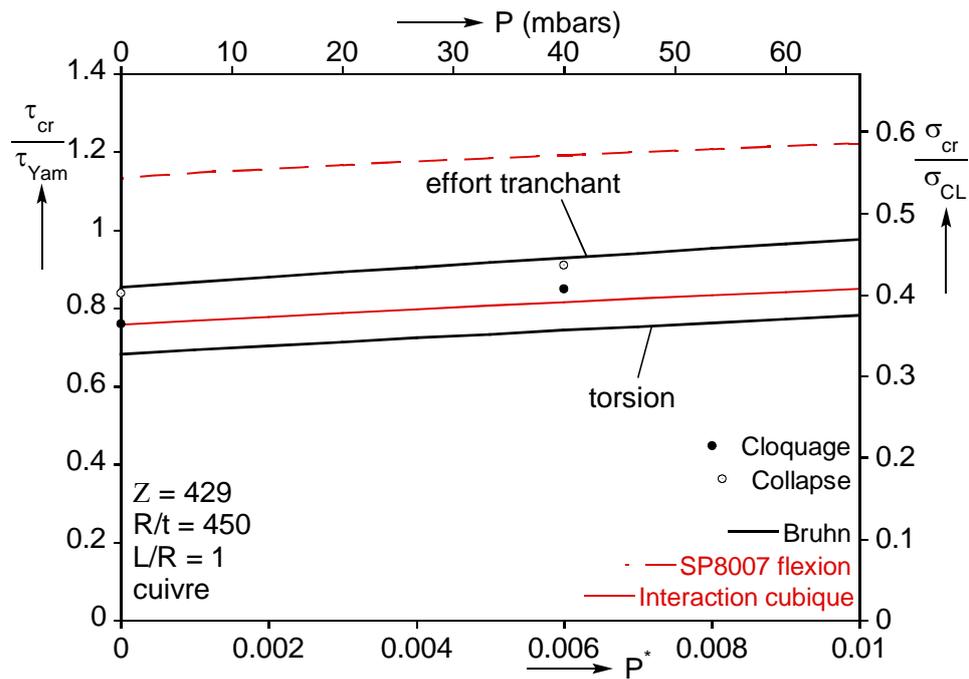


Figure 5.96 Contraintes critiques PT,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

5.6.522 Matériau aluminium,  $Z = 644$

Les résultats des essais réalisés pour cette série sont tracés en Figure 5.97. Initialement, la contrainte critique de cloquage approche 75% de la contrainte théorique, et augmente rapidement avec la pression pour atteindre  $1.79 \cdot \tau_{Yam}$  dès  $P^* = 0.123$ .

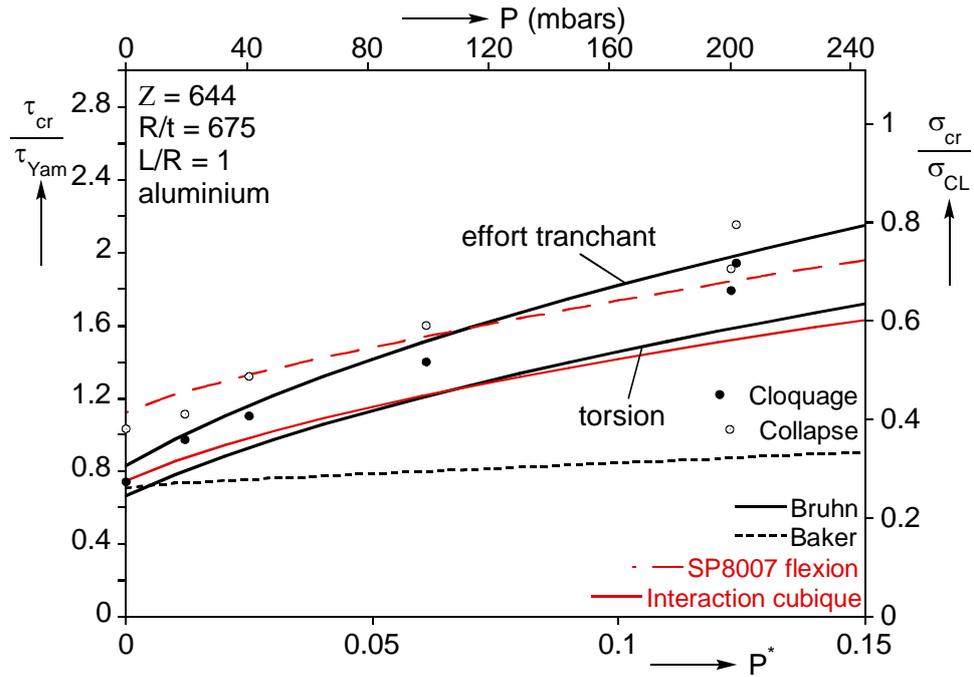


Figure 5.97 Contraintes critiques PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 1$ , aluminium

La méthode de Baker semble peu adaptée au problème : si la contrainte critique initiale est estimée de manière correcte, l'augmentation de la contrainte avec la pression est bien trop faible.

Les contraintes de cloquage obtenues expérimentalement se situent entre celles préconisées par Bruhn pour la torsion et pour un effort tranchant (soit avec coefficient 1.25). La tendance des recommandations est bien reproduite dans ce cas, même si les résultats expérimentaux semblent s'en éloigner avec l'augmentation de la pression. La prise en compte des contraintes de collapse apporte une réserve de charge allant jusqu'à près de 30% de la contrainte de Yamaki. De plus, les essais à 200 mbar dépassent déjà la contrainte critique annoncée par la SP8007 en flexion.

#### 5.6.523 Matériau cuivre, $Z = 859$

La Figure 5.98 présente les résultats de 5 essais réalisés pour cette valeur de  $Z$ . Les contraintes expérimentales de cloquage sont ici au niveau de la règle de Bruhn en torsion, et suivent fidèlement son augmentation avec la pression interne.

Si l'on considère l'effondrement de la structure, le gain de charge est substantiel, et permet d'atteindre pour les quatre premiers essais la courbe relative au cisaillement par effort tranchant.

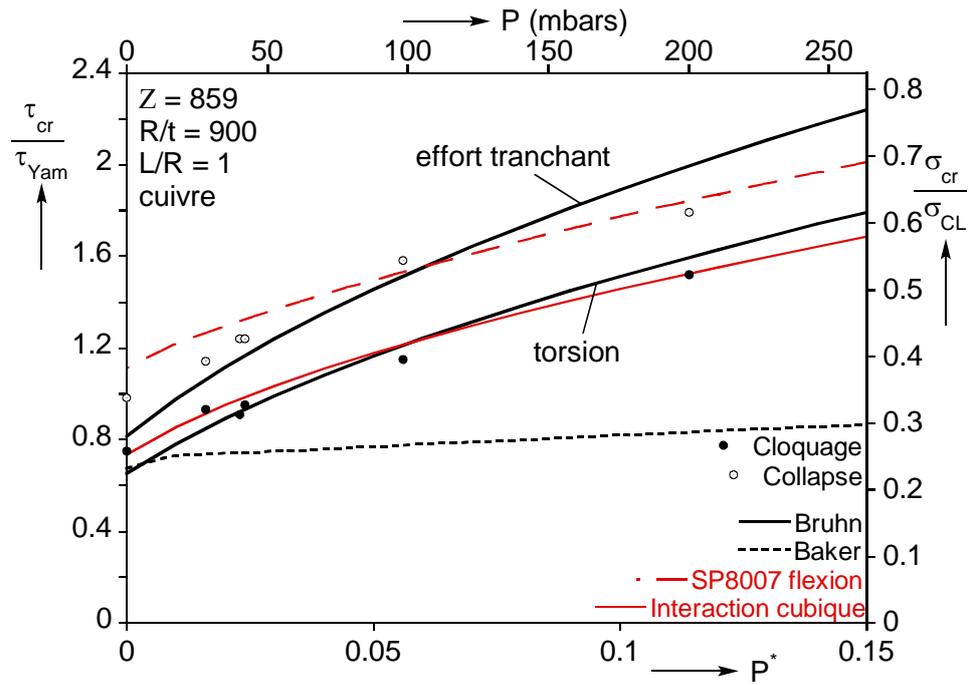


Figure 5.98 Contraintes critiques PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

5.6.524 Matériau cuivre,  $Z = 1288$

Au total, six coques ont été testées dans cette configuration ; les résultats de cette campagne sont affichés en Figure 5.99.

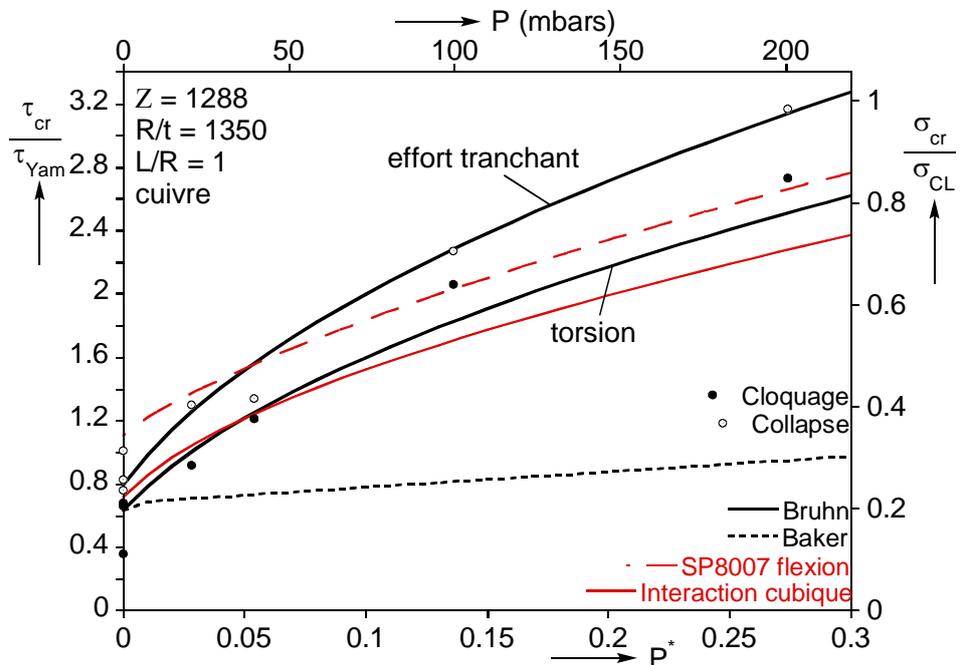


Figure 5.99 Contraintes critiques PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

Mis à part un essai à 0 mbar donnant une contrainte critique très basse due à un mauvais collage, les contraintes de cloquage sont en moyenne légè-

rement supérieures aux recommandations faites pour la torsion, et les contraintes de collapse plus proches du niveau annoncé pour un effort tranchant. Ce feuillard étant de qualité moindre, une certaine dispersion apparait dans la tendance.

A partir de 100 mbar, les contraintes de cloquage semblent prédites de façon plus précise si l'on considère la flexion.

5.6.525 Matériau acier,  $Z = 1288$

Cette géométrie est testée de nouveau pour un feuillard en acier, nous permettant d'évaluer l'influence de la qualité de la coque sur la contrainte de flambage. Le graphe de la Figure 5.100 présente les résultats obtenus, effectivement légèrement supérieurs au cuivre. La règle de Bruhn pour l'effort tranchant est atteinte en considérant l'effondrement de la coque, les contraintes de cloquage sont en moyenne à mi-chemin entre la contrainte préconisée en torsion et en effort tranchant.

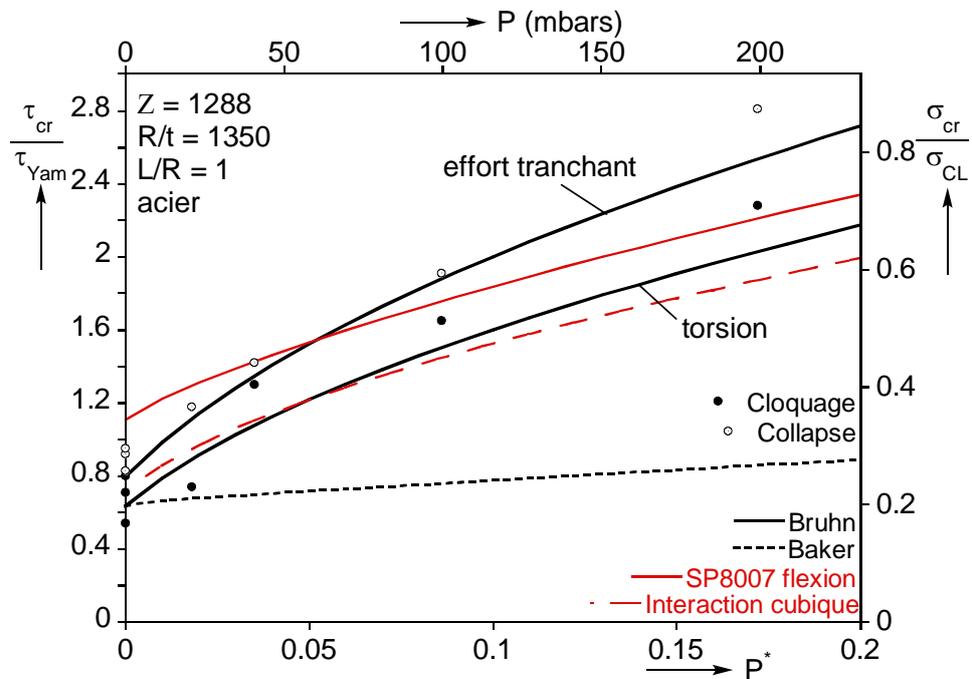
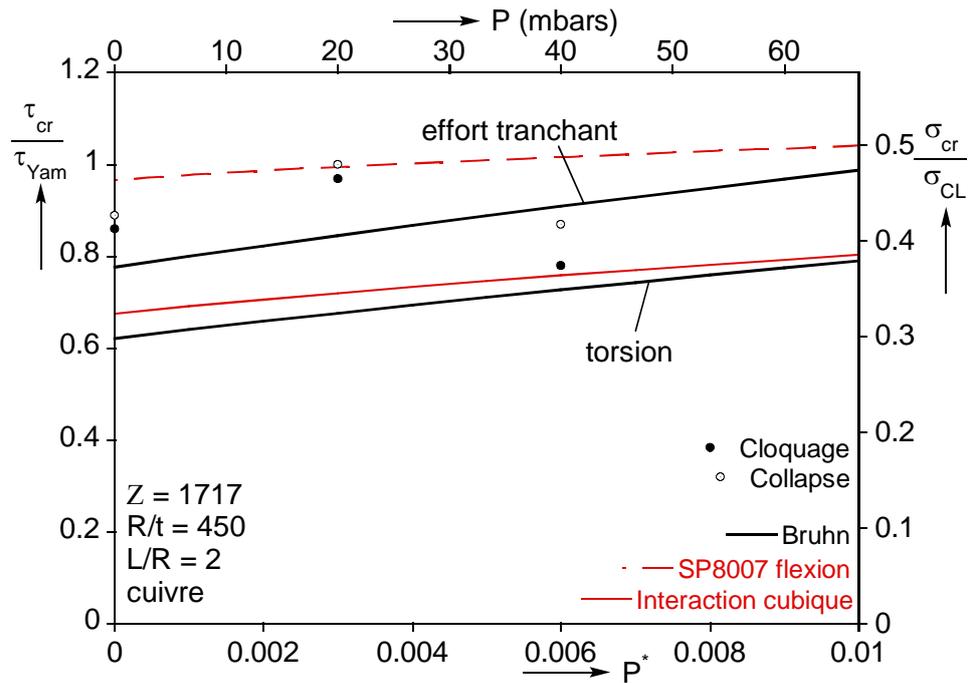


Figure 5.100 Contraintes critiques PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , acier

5.6.526 Matériau cuivre,  $Z = 1717$

Tous les résultats concernent désormais des coques de longueur égale à  $2R$ , rendant le bras de levier et donc la composante de flexion plus importante que précédemment.



**Figure 5.101** Contraintes critiques PT,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

Pour le feuillard directement concerné ici (cuivre, 0.3mm), ce phénomène n'est pas observé aux pressions atteintes. Les deux premiers essais en Figure 5.101 donnent des contraintes de cloquage et collapse au-dessus des estimations de Bruhn, dans le deuxième cas égalant même la contrainte de flambage donnée en flexion par la SP8007. Le troisième essai ayant résulté en un décollement de la coque, il est peu surprenant de voir que cette tendance est brisée, même si la contrainte de cloquage arrive au niveau de l'interaction flexion/cisaillement.

#### 5.6.527 Matériau aluminium, $Z = 2576$

La valeur de  $Z$  est de 2576 pour cette série, dont les contraintes critiques sont tracées en Figure 5.102. Comme nous l'avons remarqué précédemment, deux types de comportement distincts sont ici visibles : pour les pressions de 100 et 200 mbar en effet, le cloquage n'est pas suivi d'un comportement stable et aboutit donc directement à l'effondrement de la coque.

Les contraintes de cloquage suivent remarquablement bien la courbe donnée par Bruhn pour le cisaillement par effort tranchant. Un essai à 200 mbar a été doublé, le flambage a été précipité dans ce cas par un défaut en partie comprimée. On remarque que les contraintes de flexion deviennent relativement élevées, atteignant pratiquement la valeur théorique. Ceci, associé au changement de comportement, constitue une preuve que la flexion, initialement négligeable, devient prédominante lorsque la pression augmente.

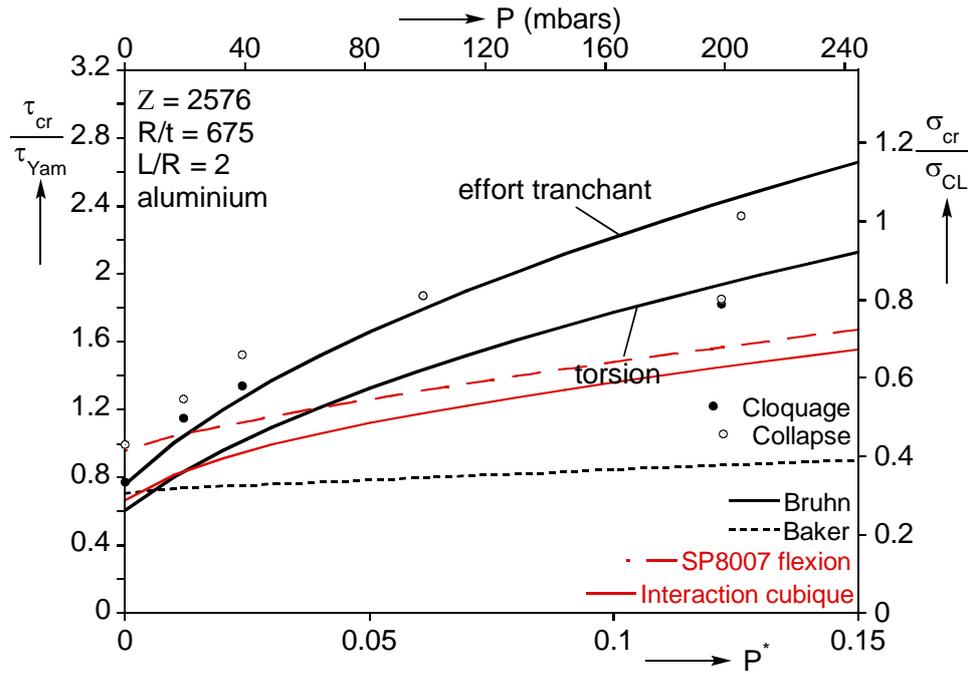


Figure 5.102 Contraintes critiques PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium

5.6.528 Matériau cuivre,  $Z = 3434$

Les résultats correspondant à cette valeur de  $Z$  sont représentés en Figure 5.103. On note une fois de plus que le cloquage et le collapse coïncident pratiquement dès le 2<sup>ème</sup> essai.

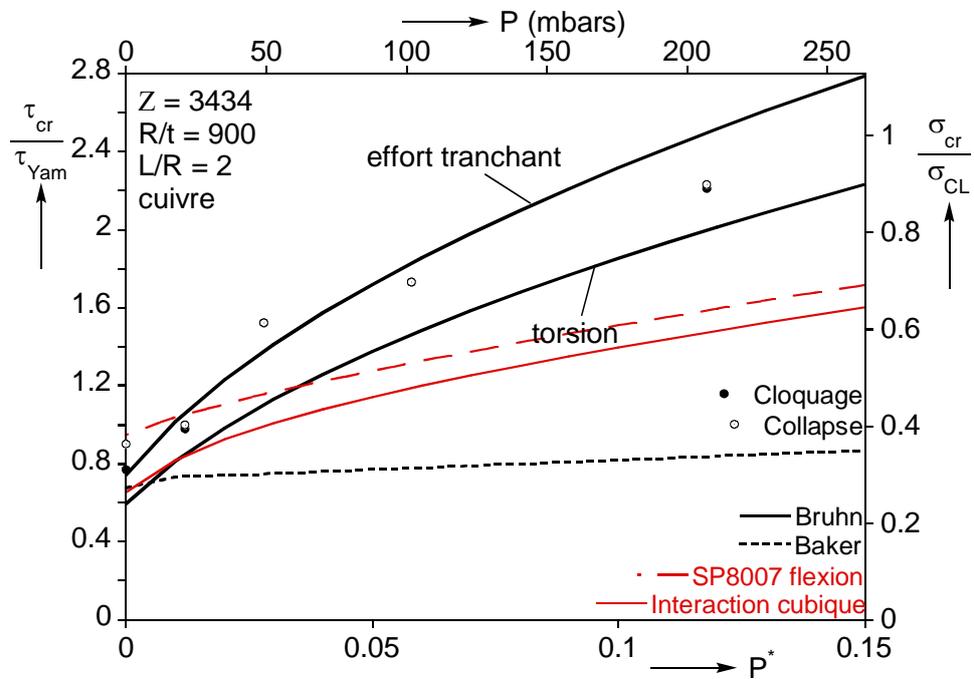


Figure 5.103 Contraintes critiques PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

Les niveaux de contrainte atteints suivent initialement la tendance affichée par Bruhn, cependant avec l'augmentation de la pression, la coque devient plus sensible aux défauts géométriques et la contrainte critique ne croît plus de la même manière, s'éloignant progressivement des contraintes conseillées pour un effort tranchant, en se rapprochant de la tendance donnée en flexion.

5.6.529 Matériau cuivre,  $Z = 5151$

Cette configuration correspond à la valeur maximale de  $Z$  étudiée lors de notre campagne. Huit coques ont été testées, nous donnant les résultats de la Figure 5.104.

Un essai à 40 mbar n'a pas donné satisfaction, la présence d'un défaut localisé du côté comprimé ayant provoqué un cloquage rapide. Les contraintes critiques sont autrement très vite affectées par la pression, et ne suivent plus la même tendance que les prédictions de Bruhn: le chargement de flexion dicte désormais le déclenchement de l'instabilité, comme le prouve la comparaison à la règle donnée par la NASA pour ce chargement.

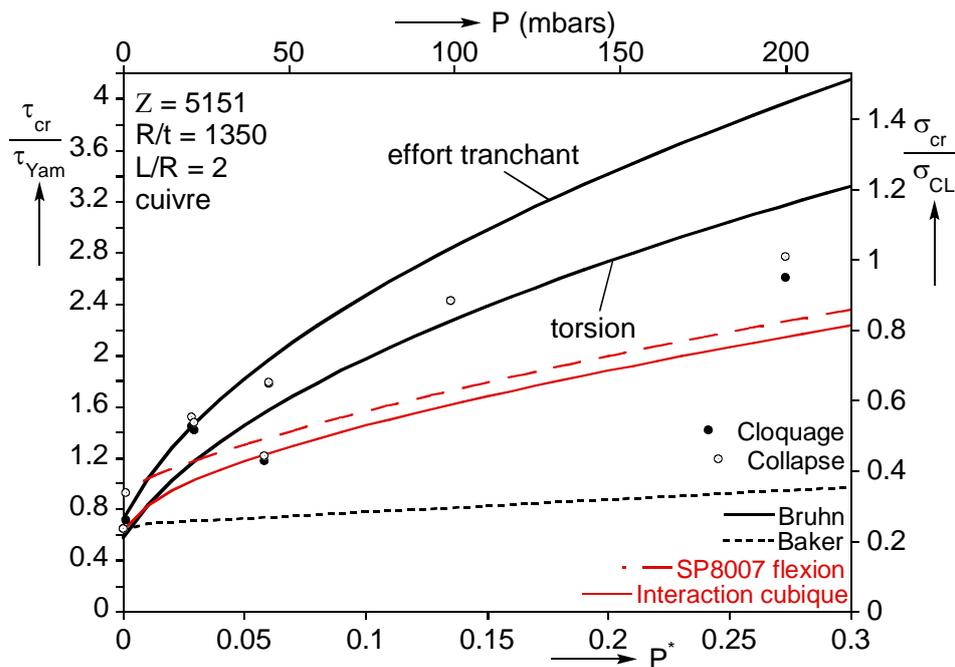


Figure 5.104 Contraintes critiques PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

5.6.5210 Matériau acier,  $Z = 5151$

L'acier est une nouvelle fois utilisé dans cette épaisseur (0.1 mm) comme point de comparaison avec le cuivre. Le niveau de pression atteint permet de se rendre compte du changement de tendance (voir Figure 5.105) : la contrainte critique augmente fortement avec les faibles pressions, puis décroche légèrement des courbes tirées du manuel de Bruhn.

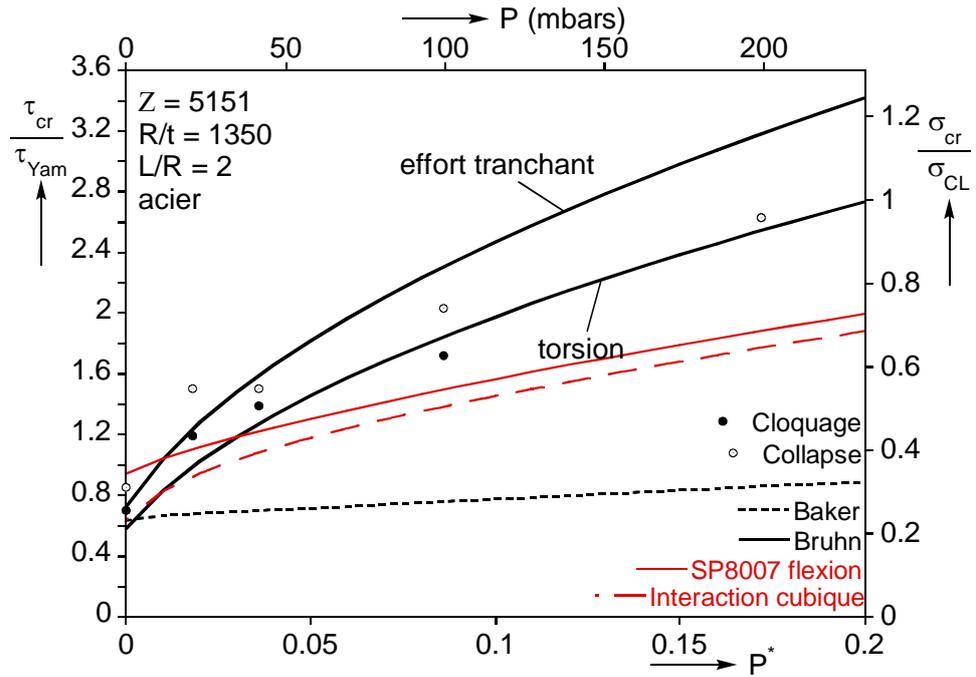


Figure 5.105 Contraintes critiques PT, R/t = 1350, L/R = 2, acier

5.6.5211 Nuages de points

Des graphiques regroupant les résultats de 55 essais réalisés en pression interne et cisaillement pour différentes géométries (variation de la longueur et de l'épaisseur du cylindre) sont présentés en Figures 5.106 (cloquage) et 5.107 (collapse).

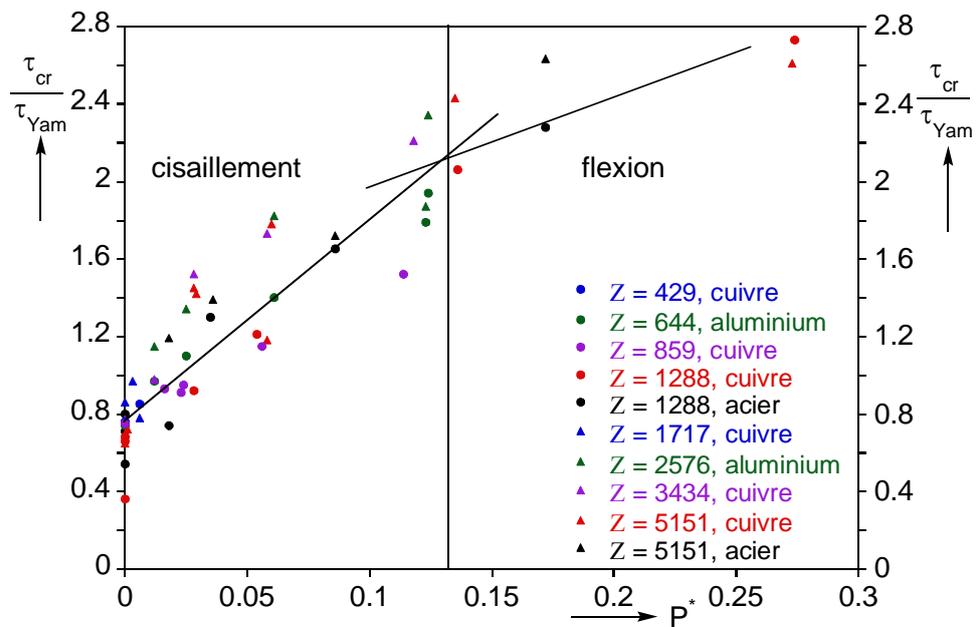
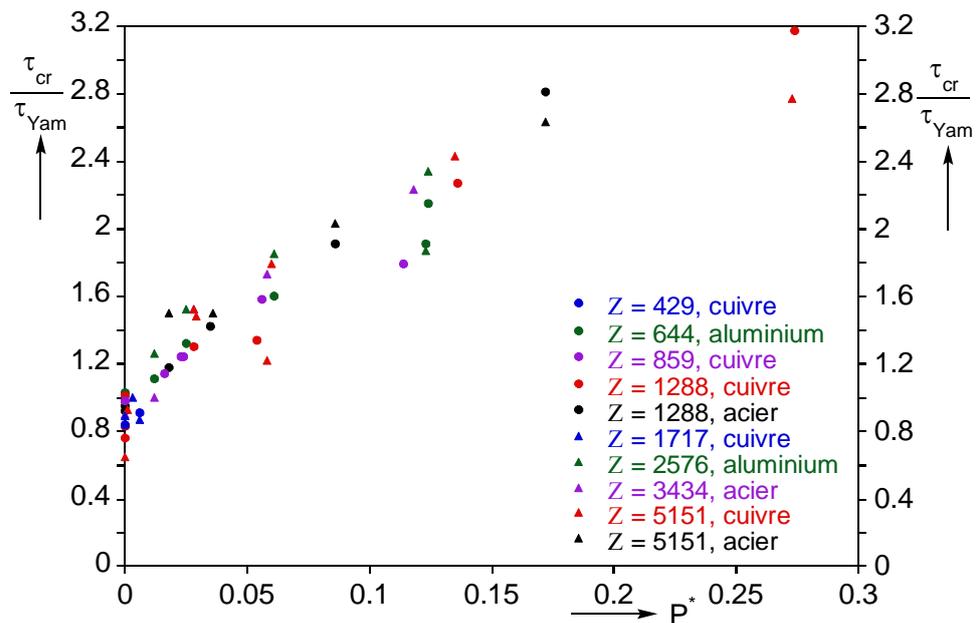


Figure 5.106 Contraintes critiques de cloquage PT de tous les essais réalisés

La dispersion ne nous permet pas de dégager de tendances claires dans les contraintes de cloquage entre les différentes séries, mais nous pouvons toutefois noter un certain ralentissement dans l'augmentation de la contrainte pour des pressions adimensionnelles supérieures à 0.15.

Si l'on considère les contraintes de collapse ci-dessous, la dispersion est moindre, et la tendance générale de l'influence de la pression sur la contrainte critique apparaît clairement aux basses pressions, quelle que soit la valeur de  $Z$ . Lorsque la pression augmente cependant, la flexion devient le chargement critique et le bras de levier devient un paramètre important : les coques avec  $L/R = 2$  sont donc touchées plus rapidement par ce phénomène.



**Figure 5.107** Contraintes critiques de collapse PT de tous les essais réalisés

### 5.6.6 Conclusions des essais PT

- *Comportement des coques*

Le comportement observé initialement pour des coques de longueur modérée est initialement linéaire. Après l'atteinte d'un point de bifurcation, la branche post-critique est stable et non-linéaire avec la formation progressive de cloques, débouchant sur une instabilité par point limite. Avec la pressurisation, la déformation associée au cloquage progressif est moins importante, ainsi que la perte de raideur. Pour un certain niveau de pression, dépendant de la géométrie de la coque, le régime pré-critique devient parfaitement linéaire et débouche sur une bifurcation. La flexion est alors le chargement dominant et pilote le flambage.

- *Modes critiques*

Le mode de cisaillement « pur » est constitué de larges cloques inclinées sur tout le flanc de la coque. Avec la pression, les cloques occupent de moins en moins la hauteur du cylindre, leur largeur diminue et leur inclinaison se rapproche de l'horizontale. Des cloques en pointe de diamant apparaissent alors du côté comprimé, traduisant l'interaction du cisaillement avec la flexion.

- *Contraintes critiques*

Nous différencions ici également la contrainte de cloquage, correspondant au début du régime non-linéaire, de la contrainte de collapse ou d'effondrement. Le flambage en cisaillement est moins affecté par les imperfections géométriques que les cas étudiés précédemment. Il en découle des contraintes de cloquage initiales comprises en moyenne entre  $0.65 \cdot \tau_{Yam}$  et  $0.85 \cdot \tau_{Yam}$ . Cette contrainte évolue rapidement dès les faibles pressions, puis après avoir atteint un niveau « seuil » dépendant de la géométrie, la flexion devient le chargement dominant et dicte la contrainte critique. La coque est alors de nouveau sensible aux imperfections. La dispersion des contraintes est moindre si l'on considère l'effondrement de la coque. La comparaison aux vieilles méthodes de dimensionnement montre encore quelques points aberrants. Le coefficient de 1.25 existant entre les contraintes de torsion et de cisaillement par exemple, est gardé dans le cas d'une interaction avec la pression interne ce qui n'est pas justifié.

- *Influence de la géométrie*

La géométrie est ici plus importante que pour les cas précédents : le comportement au flambage est en effet dicté à la fois par l'épaisseur et la longueur de la coque, à travers le paramètre de Batdorf  $Z$ . Ce paramètre semble adéquat pour décrire de manière générale l'évolution du comportement. Cependant, des coques possédant le même  $Z$  mais un rapport  $R/t$  différent ne se comportent pas forcément de la même manière, il est donc difficile de généraliser pour l'instant. Le meilleur moyen reste de considérer séparément la longueur ( $L/R$ ) et l'épaisseur ( $R/t$ ) de la coque afin de bien interpréter le problème.

---

## 5.7 Etude de l'interaction flexion/cisaillement

Comme nous avons pu l'apprécier lors des essais PT, le bras de levier n'est pas l'unique paramètre régissant l'interaction entre les chargements de flexion et de cisaillement ; et la pression peut également conditionner le passage d'un type d'instabilité à un autre.

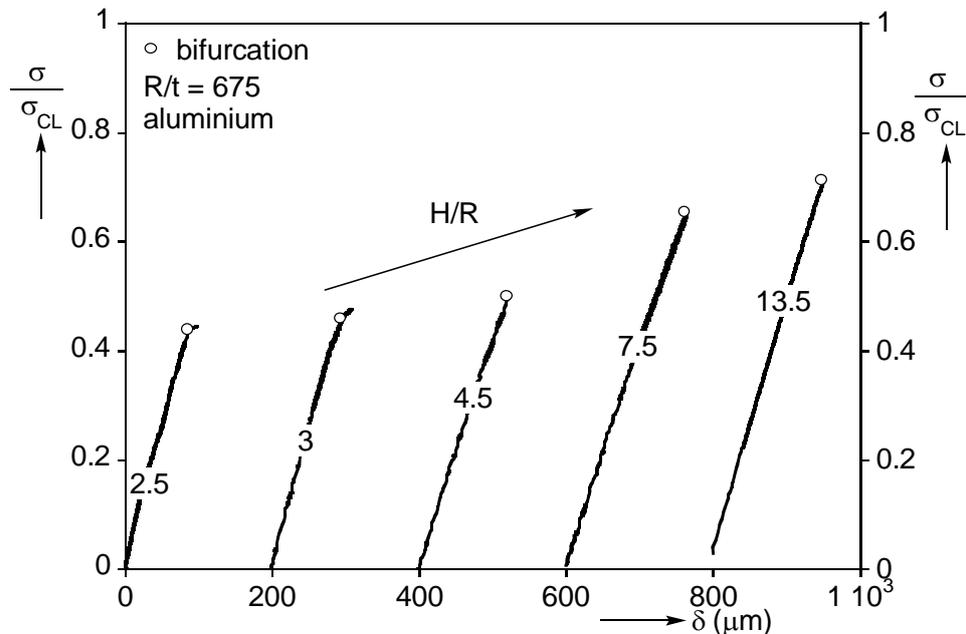
Caractériser expérimentalement cette interaction PTM demanderait des efforts colossaux, à la vue de tous les paramètres à varier ( $R/t$ ,  $L/R$ ,  $H/R$ ,  $P$ ). Cependant, nous pouvons nous faire une première idée sur le sujet à partir du grand nombre d'essais réalisés en PT et PM.

### 5.7.1 Influence du bras de levier (sans pression interne)

L'influence du bras de levier sur l'interaction entre le cisaillement et la flexion a été initialement étudiée par Lundquist [68], dont les résultats sont éloquentes. Afin de pouvoir appréhender ce phénomène, nous avons toutefois réalisé quelques essais sur le petit banc en faisant varier la hauteur d'application de l'effort.

#### 5.7.11 Courbes de chargement

Les courbes résultant de ces essais sont tracées en Figure 5.108. Cinq valeurs différentes de H ont été testées : 340, 410, 600, 1000 et 1800 mm. Les coques sont toutes en aluminium, avec  $R/t = 675$  et  $L/R = 2$ . Nous présentons ici les résultats du point de vue de la flexion : écrasement vertical de la fibre comprimée en abscisse, et contrainte de flexion ramenée à la contrainte classique en ordonnée.

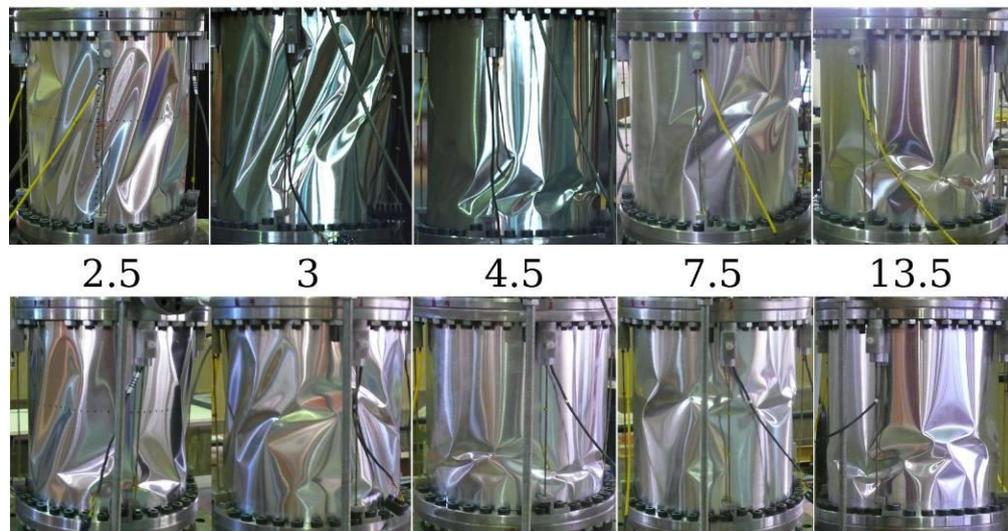


**Figure 5.108** Courbes de chargement MT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium

Ce sont des coques nominalement identiques qui sont testées ici, toutes sans pression interne. La seule différence réside dans le bras de levier, avec des rapports  $H/R$  étudiés variant entre 2.5 (cisaillement pur) et 13.5 (flexion pure). Pour les essais où le bras de levier est faible, le comportement est linéaire puis la déformation s'accélère progressivement avec la formation de larges coques sur les flancs de la coque, de façon identique à ce que nous avons vu au paragraphe précédent. La non-linéarité des courbes n'est pas évidente ici puisque seul l'écrasement vertical est représenté, 4 à 5 fois plus petit que le déplacement horizontal de la frette supérieure. A partir de  $H/R = 4$ , la branche pré-critique est parfaitement linéaire, et s'achève par une bifurcation

entraînant le collapse du cylindre : la flexion est alors le chargement dominant, la coque est plus sensible aux défauts géométriques.

L'analyse des modes critiques (Figure 5.109) mène à la même conclusion : pour les deux premiers essais, les cloques diagonales typiques du cisaillement l'emportent. Pour  $H/R = 4.5$ , ces cloques sont largement réduites, et les modes en pointes de diamants bien formés. Les modes de cisaillement disparaissent ensuite complètement, illustrant le passage du cisaillement pur à la flexion pure. On retrouve ici une progression similaire à la combinaison pression interne/cisaillement, la différence majeure réside dans la taille des cloques qui ne diminue pas ici.

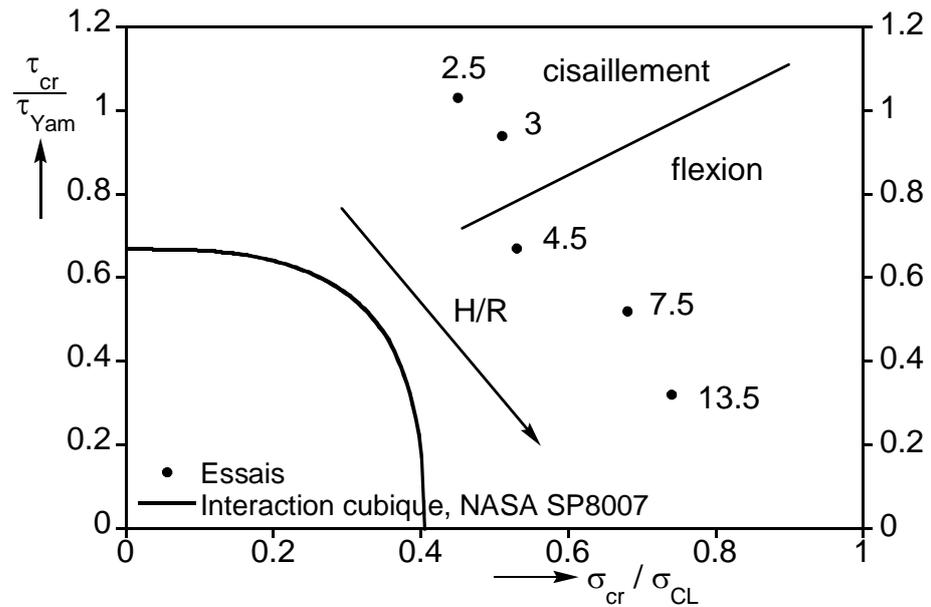


**Figure 5.109** Modes critiques TM de côté et de face en fonction du bras de levier,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium

### 5.7.12 Contraintes critiques

Examinons maintenant l'évolution des contraintes critiques (d'effondrement) obtenues lors de ces essais, tracées en Figure 5.110. La contrainte de cisaillement est en ordonnée, celle de flexion en abscisse. A mesure que le rapport  $H/R$  augmente, la contrainte de cisaillement diminue et celle de flexion augmente donc.

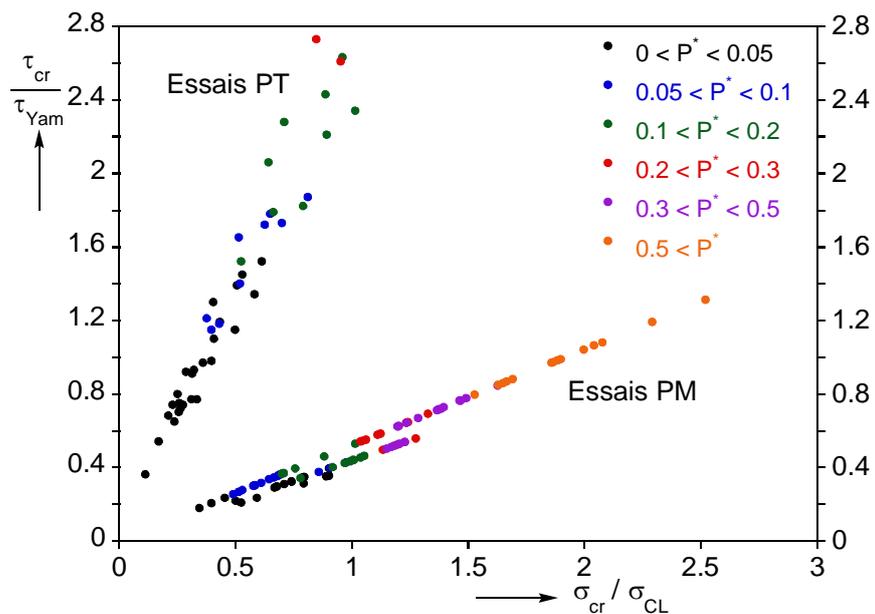
Une interaction de type cubique est incluse, à partir des recommandations de la SP8007, et met en évidence un conservatisme important en comparaison avec les résultats expérimentaux. L'interaction entre les deux chargements est relativement faible, malgré la légère dispersion due aux défauts géométriques. Le passage d'un mode de flambage à l'autre se fait ici entre  $H/R = 3$  et  $H/R = 4.5$ .



**Figure 5.110** Contraintes critiques de collapse, interaction flexion/cisaillement,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium

### 5.7.2 Influence de la pression interne

Nous analysons ici l'influence de la pression sur l'interaction flexion/cisaillement à partir de l'ensemble des essais effectués PM / PT. Les contraintes de collapse de ces essais sont tracées en Figure 5.111, la contrainte de cisaillement en fonction de la contrainte totale (avec effet de fonds) de flexion. Les résultats sont dissociés en séries en fonction de la pression, les pressions adimensionnelles supérieures à 0.3 ont uniquement été testées dans le cas PM.



**Figure 5.111** Contraintes critiques de collapse, PT et PM

On remarque tout d'abord deux grandes tendances dans les résultats, différenciant bien évidemment les essais PT, à faible bras de levier, des essais PM. Il apparaît que l'augmentation de la contrainte de cisaillement avec la pression pour les essais PT est bien plus importante que pour la contrainte de flexion lors des essais PM. Le passage d'un mode de cisaillement à un mode de flexion dépend de la pression mais également de la géométrie de la coque ; nous ne pouvons examiner plus précisément l'interaction sans différencier les résultats par feuillard, mais le faible nombre de bras de leviers étudiés ne permettrait pas une analyse détaillée.

Afin de pouvoir qualifier l'évolution de l'interaction, à défaut de la quantifier, nous avons tracé les enveloppes de chaque groupe de pression sur la Figure 5.112. La progression rapide de la contrainte de cisaillement par rapport à la contrainte de flexion a pour conséquence de changer la forme de l'interaction, et explique le changement de mode observé durant les essais.

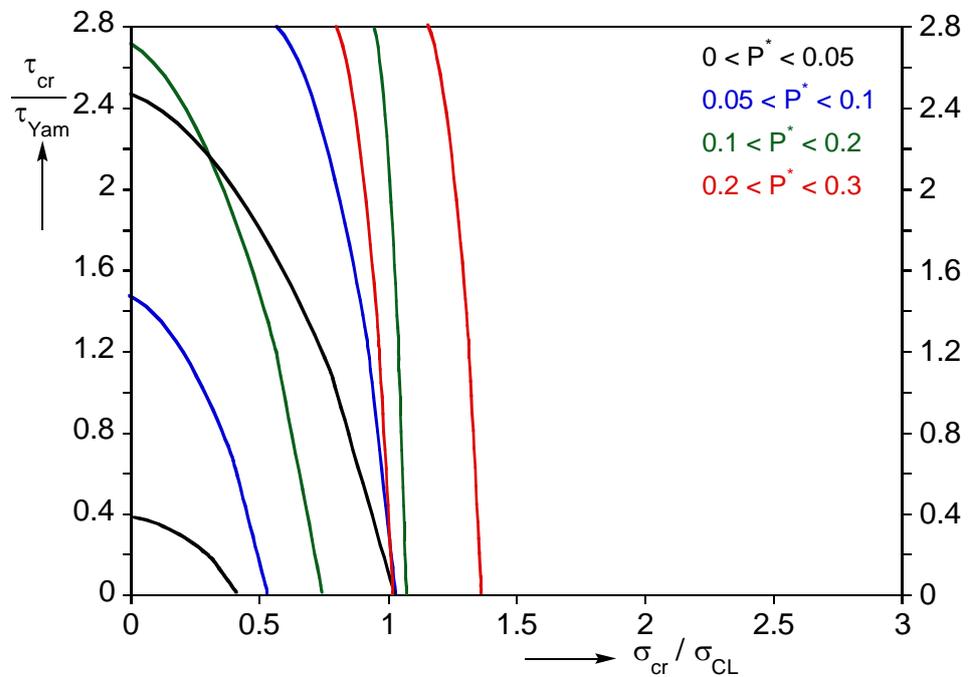


Figure 5.112 Courbes d'interaction PT/PM

Ce changement de mode observé expérimentalement est résumé dans le tableau 5.3 ci-dessous.

Z	R/t	L/R	Matériau	$P_{\text{seuil}}$ (mbar)	$P^*_{\text{seuil}}$
429	450	1	Cuivre	-	
644	675	1	Aluminium	-	
859	900	1	Cuivre	-	
1288	1350	1	Cuivre	Proche à 200	0.27
1288	1350	1	Acier	-	
1717	450	2	Cuivre	-	
2576	675	2	Aluminium	100	0.065
3434	900	2	Cuivre	40	0.024
5151	1350	2	Cuivre	40	0.054
5151	1350	2	Acier	40	0.036

**Tableau 5.3** Pression seuil de changement de mode cisaillement/flexion

L'évolution du mode de flambage avait simplement été notée par Yamaki, mais non prise en compte dans les règles de dimensionnement. Il apparaît ici que ce point peut être amélioré, et nous y consacrerons donc une étude numérique paramétrique dans le chapitre suivant.

# 6 Simulations numériques

## 6.1 Introduction

### 6.2 Estimation de la charge critique pour le dimensionnement : cas PN/PM

- 6.2.1 Validation de la modélisation
- 6.2.2 Application au dimensionnement

### 6.3 Caractérisation de l'interaction (P, N, M) pour le dimensionnement

- 6.3.1 Nature de l'interaction
- 6.3.2 Influence du rapport N/M
- 6.3.3 Dimensionnement (P, N, M)

### 6.4 Caractérisation de l'interaction flexion/cisaillement

- 6.4.1 Problématique
- 6.4.2 Résultats
- 6.4.3 Application au dimensionnement

### 6.5 Etude de l'influence de la plasticité

- 6.5.1 Description du mécanisme de déformation
- 6.5.2 Influence de la loi matériau
- 6.5.3 Influence de la géométrie
- 6.5.4 Influence des conditions aux limites
- 6.5.5 Flambage en couche limite sous flexion

### 6.6 Impact des conditions expérimentales

- 6.6.1 Essais PN
- 6.6.2 Essais PM
- 6.6.3 Essais PT

### 6.7 Comparaison flexion/compression

- 6.7.1 Comportement
- 6.7.2 Contraintes critiques

---

## 6.1 Introduction

Les simulations numériques peuvent être un instrument très utile pour l'étude du flambage de coques minces, mais doivent être utilisées avec précaution. L'étude bibliographique menée au chapitre 2 nous montre assez explicitement qu'une multitude de résultats différents est possible selon la modélisation choisie, et que le choix n'est pas simple. L'interprétation des résultats numériques est donc épineuse, mais les nombreux essais réalisés servent ici de référence et permettront de juger de la pertinence de la modélisation.

Dans un premier temps, nous présenterons donc les différentes modélisations choisies dans le but, nous le rappelons, d'établir de nouvelles recommandations pour le dimensionnement ; puis nous utiliserons l'outil numérique afin de jauger l'influence des conditions expérimentales présentées au chapitre précédent.

## 6.2 Estimation de la charge critique pour le dimensionnement : cas PN/PM

Les résultats expérimentaux exposés au chapitre précédent nous apprennent que la compression et la flexion présentent un certain nombre de ressemblances. La contrainte théorique est en effet identique dans les deux cas, et les modes critiques similaires (en pointes de diamants). Dès lors, nous pouvons penser qu'une modélisation commune donnera des résultats pertinents dans les deux cas.

### 6.2.1 Validation de la modélisation

#### 6.2.1.1 Forme du défaut

La première question se posant quant à la modélisation de la coque est bien entendu la forme à donner au défaut introduit. Les observations effectuées au chapitre 2 nous ont amené aux conclusions suivantes :

- les défauts en mode 0 (axisymétriques) sont les plus pénalisants, et s'effacent plus difficilement avec la pression
- les défauts généralisés sont plus réducteurs que les défauts localisés
- des défauts axisymétriques de forme différente donnent des résultats semblables

Dans ce contexte, Mathon [69] choisit pour sa modélisation un défaut axisymétrique rentrant de forme triangulaire. La structure réelle étudiée ici (réservoir de l'EPC) présente comme beaucoup d'autres (silos notamment) des défauts localisés au niveau des soudures (la qualité de fabrication d'une structure spatiale exclut la présence d'un défaut généralisé), à la fois axisymétriques et asymétriques. De plus, le choix d'une forme triangulaire, bien que peu réaliste, simplifie grandement l'étude des paramètres les plus influents (amplitude et longueur d'onde).

Enfin, nous rappelons que le but est de proposer un défaut pertinent à la fois en flexion et en compression, et ceci ne peut être vrai que pour une imperfection de type axisymétrique. Un défaut localisé, bien que sensible en compression, aurait une influence aléatoire en flexion selon la direction du moment.

#### 6.2.1.2 Définition du modèle

Nous présentons tout d'abord les résultats de Mathon [69] ayant servi à valider le choix de ce défaut.

##### 6.2.1.2.1 Conditions aux limites réelles

La géométrie n'est pas l'unique composante du modèle pouvant influencer les résultats, les conditions aux limites peuvent également jouer un rôle dans la contrainte critique. Cependant, la prise en compte des conditions aux limites

existant sur l'EPC n'est pas évidente : chaque virole étant reliée à d'autres structures adjacentes (viroles, cadres rigides, trottoirs de soudage...), il faudrait donc en toute rigueur simuler également le comportement de ces structures.

N'ayant pas d'informations précises concernant la rigidité des assemblages soudés, le comportement des conditions aux limites réelles peut donc aller de l'appui simple à l'encastrement. Il nous faut donc trouver un moyen de limiter cet effet afin de ne considérer que l'influence des imperfections géométriques.

### 6.2.122 Effet de surépaisseurs aux extrémités de la coque

La théorie classique stipule que le blocage du déplacement radial au niveau des conditions aux limites entraîne des déformations en couche limite (voir Figure 2.2) sur une longueur égale à  $2.44 \cdot \sqrt{R \cdot t}$ . L'une des solutions afin de limiter ces déformations serait donc de renforcer cette zone, par exemple en augmentant l'épaisseur à ce niveau.

Les résultats de ces calculs effectués par Mathon sont présentés dans le Tableau 6.1, et il apparaît que les surépaisseurs atténuent en effet fortement l'effet des conditions aux limites.

Conditions aux limites		CL1		CL2		CL3	
		Bas	Haut	Bas	Haut	Bas	Haut
degré de liberté	u	x	o	x	o	x	o
	v	x	x	x	x	x	x
	w	o	o	x	x	x	x
	$\Phi$	o	o	o	o	x	x
Surépaisseur		OUI	NON	OUI	NON	OUI	NON
$\sigma_{cr}/\sigma_{CL}$		0.964	1.001	0.974	0.867	0.969	0.924

**Tableau 6.1** Influence de surépaisseurs au niveau des conditions aux limites en compression (Mathon, 2004)

### 6.2.123 Géométrie

La géométrie retenue pour l'établissement des calculs de dimensionnement est donc représentée ci-dessous en Figure 6.1. Les particularités de ce modèle sont donc l'introduction d'un défaut de forme triangulaire, d'amplitude A et de longueur  $\lambda$ , et de surépaisseurs au niveau des conditions aux limites de longueur  $\lambda_0 = 2.44 \cdot \sqrt{R \cdot t}$ . Tous les calculs sont réalisés ici avec le logiciel STANLAX

(présenté au chapitre 4) : les éléments COQUE sont utilisés en compression et les éléments COMU pour les calculs en flexion.

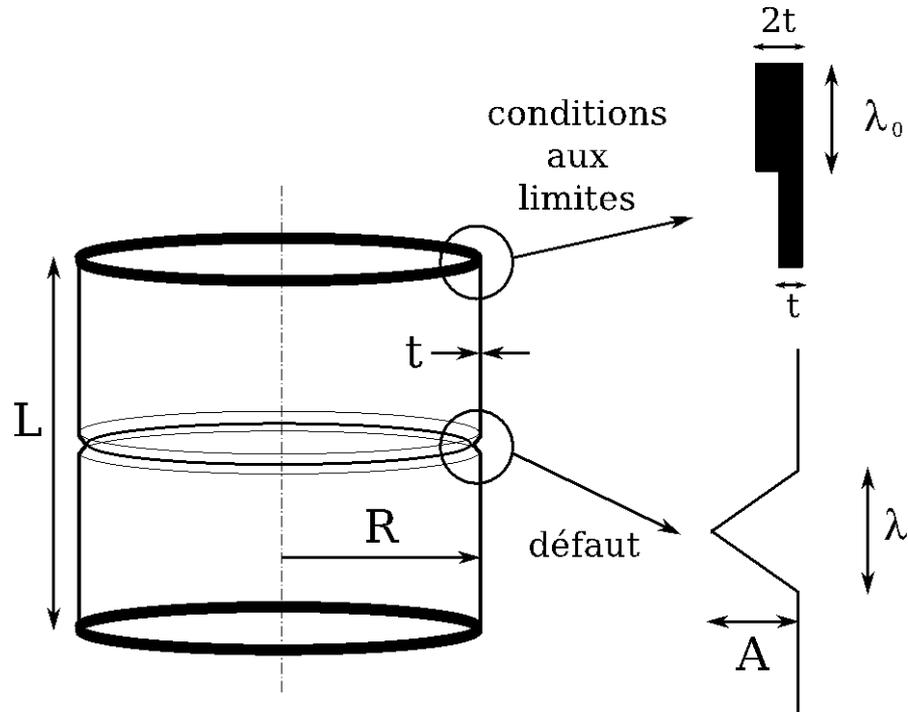


Figure 6.1 Modélisation utilisée pour les calculs PN/PM

### 6.2.13 Validation du défaut

Il est maintenant nécessaire d'évaluer la pertinence de ce défaut. La Figure 6.2 ci-dessous présente les résultats obtenus en compression et en flexion pure pour différents types de défauts : le défaut axisymétrique généralisé de Koiter, le défaut moyen de Pircher résultant de campagnes de mesures effectuées sur des silos, le défaut de Rotter et Teng de type B, et enfin le défaut triangulaire proposé par Limam et Mathon, pour  $R/t = 1350$ .

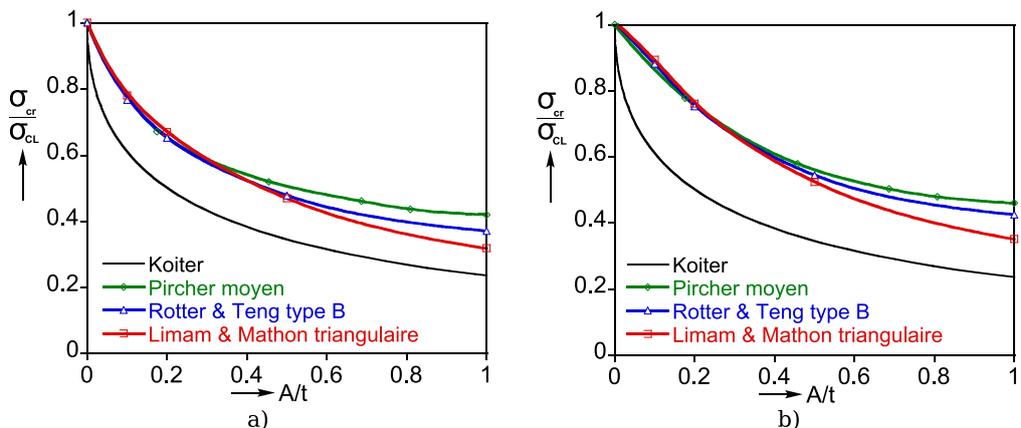


Figure 6.2 Influence de différents types de défauts : a) en compression, b) en flexion (Mathon, 2004)

Les résultats confirment les remarques faites ci-dessus : les défauts axisymétriques localisés, quelle que soit leur forme, donnent des résultats comparables. On note que le défaut triangulaire est le plus pénalisant dans les deux cas pour  $A/t > 0.5$  environ. De plus, la coque semble être moins sensible aux défauts localisés en flexion.

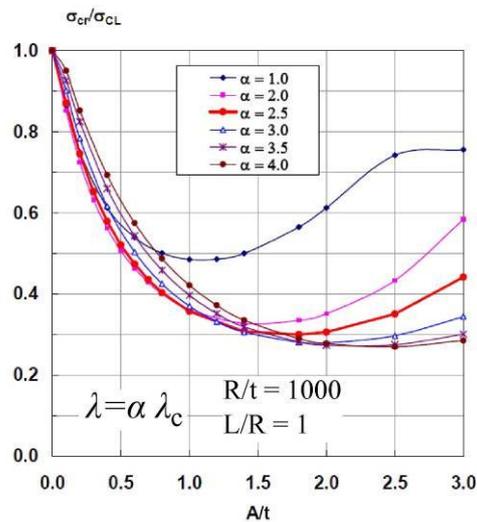
Le choix de ce défaut semble donc bien justifié, il reste à évaluer l'influence des différents paramètres dans un cas simple, puis à analyser les résultats des calculs pour les cas de charge qui nous intéressent (PN / PM).

#### 6.2.14 Influence des paramètres géométriques sur la contrainte critique initiale

Les paramètres pouvant influencer sur la contrainte de bifurcation sont :

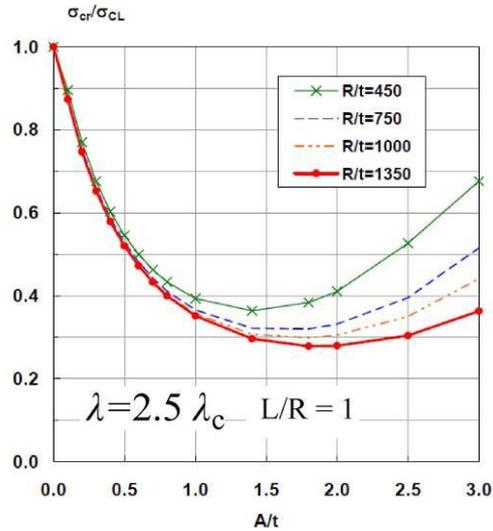
- la longueur d'onde du défaut  $\lambda$  (choisie comme un multiple de la demi-longueur d'onde critique  $\lambda_c$ )
- l'amplitude du défaut  $A$ , ramenée à l'épaisseur  $t$  de la coque
- le rapport  $R/t$  de la coque
- le rapport  $L/R$  de la coque

Nous reprenons ici encore les résultats de Mathon [69]. Les conditions aux limites sont définies de telle sorte que pour  $A/t = 0$ , la charge de bifurcation soit la charge classique. Seul l'effet du défaut provoque ainsi la chute de contrainte critique. Un chargement de flexion est ici appliqué.



**Figure 6.3** Influence de la longueur d'onde sur la contrainte de bifurcation, défaut triangle (Mathon, 2004)

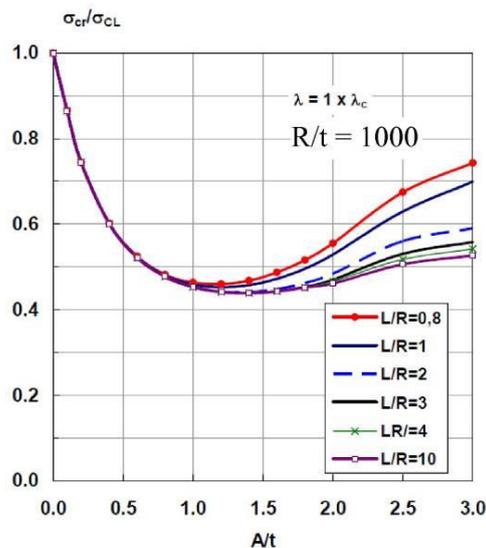
La Figure 6.3 ci-dessus compare l'influence de différentes longueurs d'onde  $\lambda$  pour des rapports  $R/t$  et  $L/R$  donnés : en fonction de l'amplitude  $A/t$  du défaut, la longueur d'onde axiale la plus néfaste peut être différente, ce qui montre bien la complexité du problème.



**Figure 6.4** Influence du rapport  $R/t$  sur la contrainte de bifurcation, défaut triangle (Mathon, 2004)

L'influence du rapport  $R/t$  est étudiée en Figure 6.4. Plus la coque est mince, et plus le défaut, pourtant défini par rapport à l'épaisseur, est pénalisant. On peut noter une fois de plus que la contrainte passe par un minimum avant d'augmenter de nouveau.

Il apparait enfin sur la Figure 6.5 que pour des amplitudes de défaut importantes, la longueur de la coque devient également un paramètre à prendre en compte et a une influence non négligeable sur la contrainte critique. Il a été montré par ailleurs que  $L/R = 1$  conduit à une augmentation de la capacité portante de la coque. Nous retenons donc le cas où les contraintes critiques sont minimales : dans toute la suite de ce document et sauf mention contraire, une longueur de la coque telle que  $L/R = 2$  est retenue ( $L/R = 3$  donne des résultats similaires).



**Figure 6.5** Influence du rapport  $L/R$  sur la contrainte de bifurcation, défaut triangle (Mathon, 2004)

Ces quelques exemples éloquentes montrent bien la difficulté de choisir un défaut pour le dimensionnement, étant donnée l'interdépendance des différents paramètres.

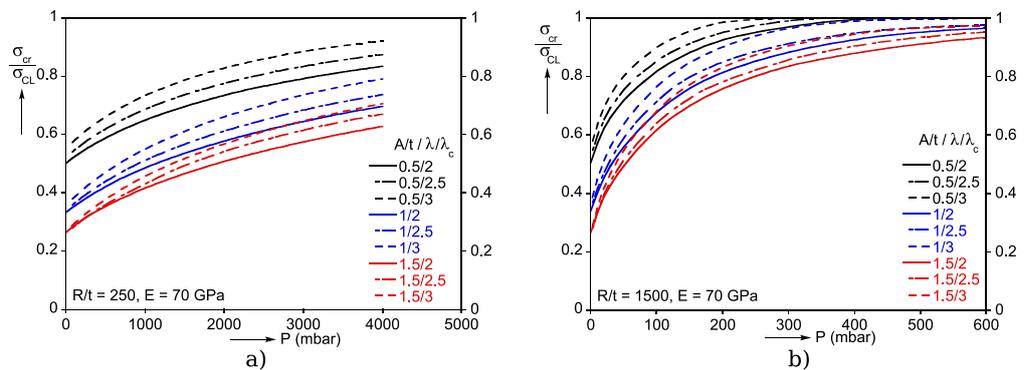
### 6.2.15 Comportement sous pression interne

Notre étude traite des coques pressurisées et il est maintenant nécessaire d'évaluer l'influence du défaut sur le comportement sous pression interne.

#### 6.2.151 Cas PN

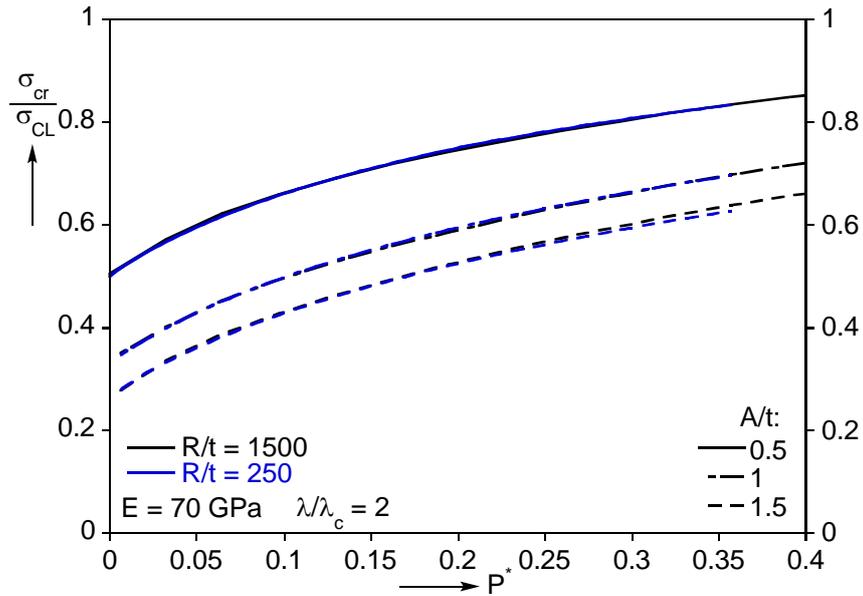
La Figure 6.6 présente les contraintes critiques obtenues sous compression axiale en fonction de la pression, pour les deux valeurs extrêmes de  $R/t$  concernées par ce projet : 250 et 1500. Pour chaque cas, 3 valeurs de  $A/t$  (0.5, 1 et 1.5) et 3 valeurs de  $\lambda$  (2, 2.5 et 3 fois  $\lambda_c$ ) sont étudiées, résultant ainsi en 9 tailles de défaut différentes.

On observe que si la contrainte critique initiale dépend fortement de  $A/t$ , la pression interne peut cependant changer l'ordre des configurations et rendre le choix du défaut encore plus ardu. Pour  $R/t = 250$ , la contrainte classique n'est toujours pas atteinte à  $P = 4$  bar, alors que cette valeur théorique est obtenue pour  $R/t = 1500$  dès 200 mbar dans le cas le moins pénalisant ( $A/t = 0.5$ ,  $\lambda/\lambda_c = 3$ ).



**Figure 6.6** Effet d'un défaut triangulaire en compression et pression interne en fonction de  $P$ , a) :  $R/t = 250$ , b) :  $R/t = 1500$

Si l'on trace maintenant les résultats de trois configurations ( $\lambda/\lambda_c = 2$ ,  $A/t = 0.5, 1, 1.5$ ) pour les deux valeurs de  $R/t$  étudiées sur un même graphe en fonction de  $P^*$  (Figure 6.7), il apparaît que des défauts de même taille ont une influence identique sur la contrainte critique. Ceci confirme que les différents paramètres adimensionnels utilisés ( $\sigma_{cr}/\sigma_{CL}$ ,  $\lambda/\lambda_c = 2$ ,  $P^*$ ,  $A/t$ ) sont tout à fait pertinents pour l'étude de coques pressurisées sous compression.

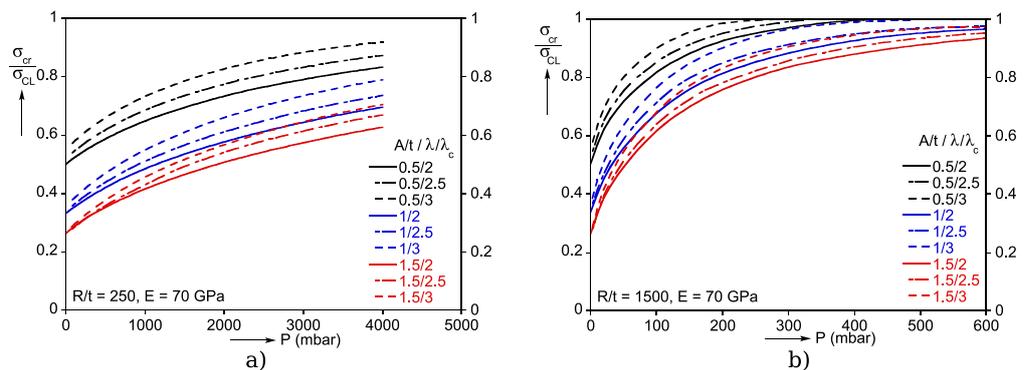


**Figure 6.7** Effet d'un défaut triangulaire en compression et pression interne en fonction de la pression adimensionnelle

### 6.2.152 Cas PM

Les mêmes calculs sont cette fois-ci effectués dans le cas de la flexion combinée à la pression interne, et les résultats présentés en fonction de la pression en Figure 6.8. Les graphes montrent encore une fois que la configuration la plus critique est également fonction de la pression.

Concernant l'évolution de la contrainte critique, elle est plus rapide que dans le cas PN : pour  $R/t = 250$ , la valeur classique est atteinte à 3 bar, et même dès 100 mbar pour une coque très mince ( $R/t = 1500$ ). La contrainte de bifurcation peut dans ce cas dépasser la contrainte théorique, gain pouvant aller jusqu'à 30 % à très haute pression (4 bar).



**Figure 6.8** Effet d'un défaut triangulaire en flexion et pression interne en fonction de  $P$ , a) :  $R/t = 250$ , b) :  $R/t = 1500$

---

## 6.2.2 Application au dimensionnement

Nous devons garder en mémoire que le but de cette étude est de proposer une règle robuste pour le dimensionnement de coques aérospatiales. Possédant peu d'informations sur les caractéristiques géométriques des coques produites sur l'EPC, il est exclu de proposer plusieurs classes de qualité en fonction d'une tolérance sur la taille de défaut maximale, comme c'est le cas pour l'Eurocode 3. Toute la difficulté réside donc en le choix d'une taille de défaut donnant des résultats pertinents tout en possédant une marge de sécurité et une confiance suffisantes pour être appliquée au dimensionnement.

### 6.2.2.1 Taille du défaut

Face à ces interrogations, nous avons décidé de caler la taille de défaut (amplitude et longueur d'onde) par rapport aux coefficients initiaux (à  $P = 0$ )  $\gamma_N$  et  $\gamma_M$  de la NASA SP8007, validée par des années d'utilisation dans l'industrie. Cette proposition reste donc très conservatrice à pression nulle, mais l'amélioration par rapport à la SP8007 se fait sentir dès qu'une pression est introduite.

Ainsi, pour 6 valeurs de  $R/t$  balayant le domaine étudié (250, 500, 750, 1000, 1250 et 1500), nous avons cherché à retrouver les coefficients  $\gamma$  en faisant varier l'amplitude du défaut et sa longueur d'onde. Cette démarche permet de fixer pour chaque valeur de  $R/t$  une amplitude de défaut à considérer pour le dimensionnement. Nous précisons encore une fois que ce choix de défaut n'établit pas de « tolérance » précise sur la taille des imperfections de la structure réelle, puisque le fait de caler la contrainte critique initiale sur la SP8007 suppose que toutes les coques de qualité aérospatiale sont capables de supporter une telle charge. Notre règle suit ainsi la même stratégie que celle de la NASA : proposer des recommandations applicables à toutes les coques de qualité raisonnable, lorsque peu ou pas d'informations précises sont disponibles sur leur géométrie.

Les tailles de défaut résultant de ces calculs de calage sont répertoriées dans le Tableau 6.2. Le facteur de réduction n'étant pas le même en flexion et en compression (en conséquence des différences de contraintes critiques observées expérimentalement), la taille de défaut à implémenter dans le modèle ne sera pas la même dans les deux cas. Dans la suite, nous appellerons simplement ces défauts « type compression » ou « type flexion » selon que leur taille est choisie pour le dimensionnement en compression ou en flexion, respectivement.

R/t	Compression			Flexion		
	$\gamma_N$	A/t	$\lambda/\lambda_c$	$\gamma_M$	A/t	$\lambda/\lambda_c$
250	0.434	0.639	2	0.541	0.457	2
500	0.322	1.203	2	0.450	0.636	2
750	0.262	1.420	2.5	0.401	0.782	2
1000	0.224	1.842	2.5	0.370	0.896	2
1250	0.198	2.266	3	0.349	0.978	3
1500	0.179	2.79	3.5	0.334	1.056	3

**Tableau 6.2** Taille de défaut triangulaire donnant les résultats de la NASA SP8007 à pression nulle

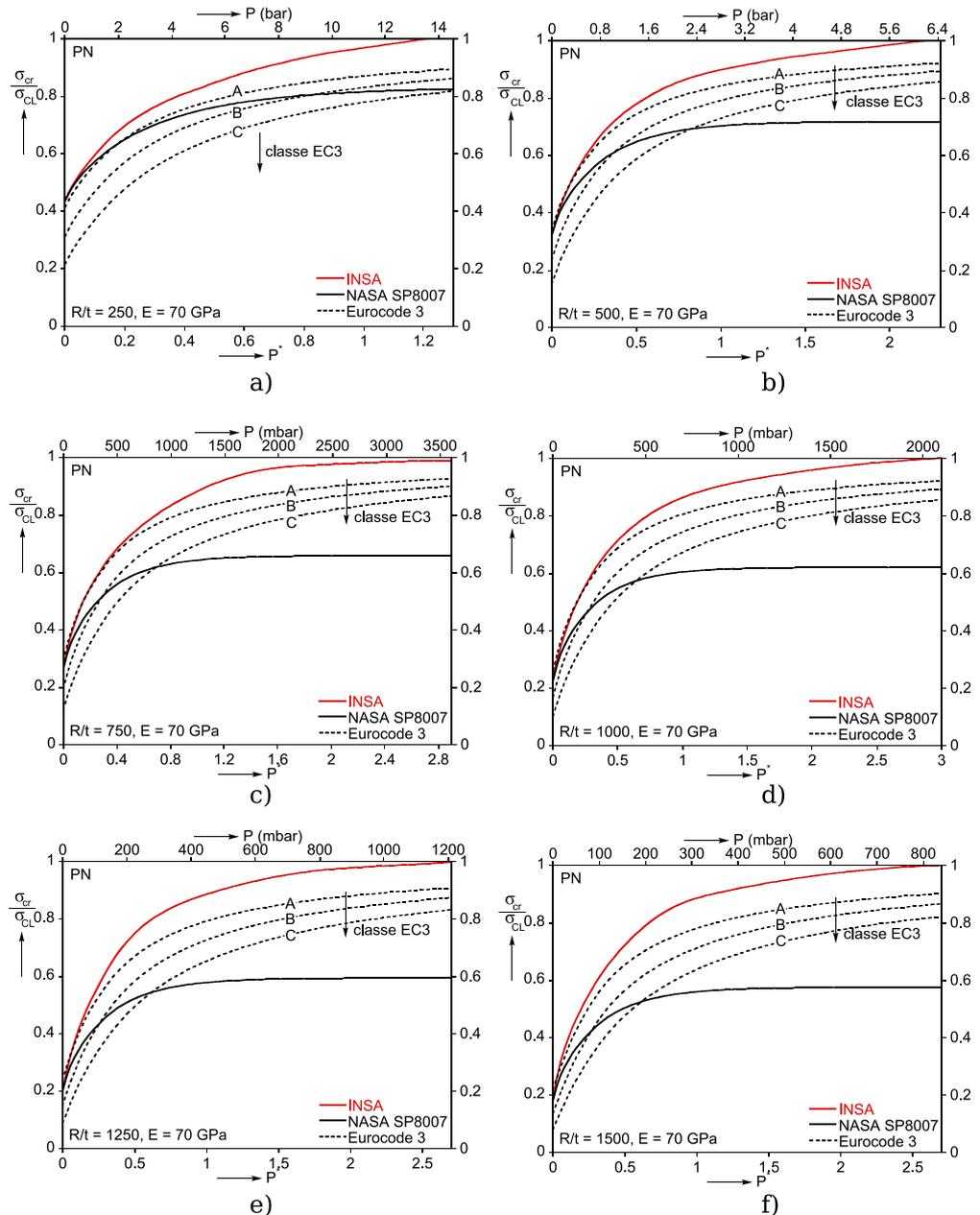
On remarque que l'amplitude de défaut nécessaire pour obtenir les facteurs de réduction de la SP8007 peut être très importante (jusqu'à près de 3 fois l'épaisseur pour  $R/t = 1500$ ), traduisant une fois de plus son conservatisme.

### 6.2.22 Résultats

A partir des défauts définis ci-dessus, nous obtenons les courbes tracées en Figures 6.9 (pour le cas P, N) et 6.10 (P, M), en comparaison avec la SP8007 et l'Eurocode3.

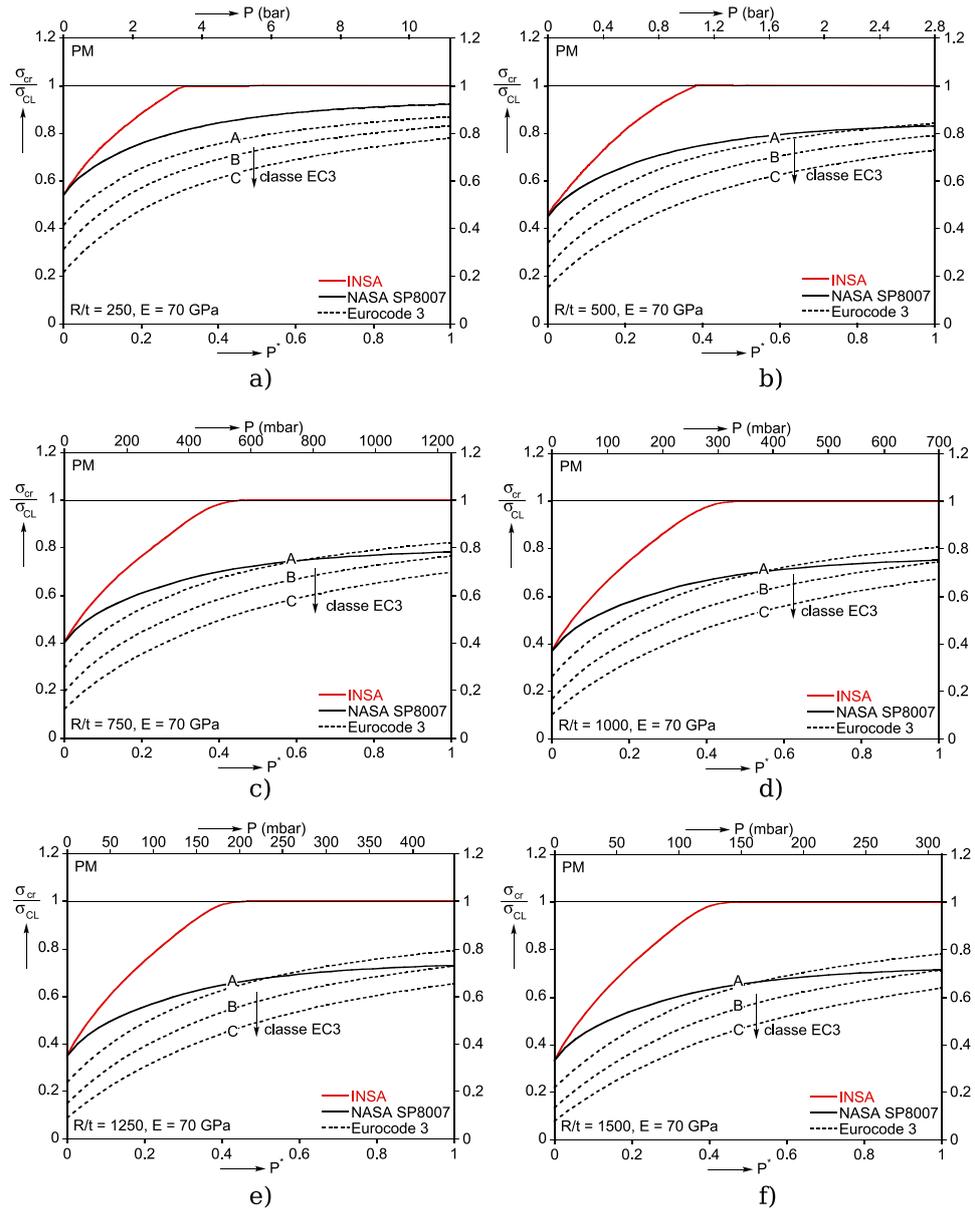
Pour un chargement de compression, quelle que soit la valeur de  $R/t$  étudiée, le facteur de réduction tend vers 1 (c'est-à-dire que la coque devient « parfaite ») pour une valeur de pression adimensionnelle comprise entre 1.2 et 2.5 selon les cas. Plus la coque est mince, plus la contrainte critique initiale sera basse, et donc une pression plus importante sera nécessaire afin de rejoindre la contrainte classique.

Le gain par rapport à la NASA SP8007 est progressif avec la pression. Cette dernière présente en effet rapidement un plateau, limitant donc très vite la contrainte critique même si la pression interne continue d'augmenter. De plus, le  $\Delta\gamma$  étant indépendant de  $R/t$ , le bénéfice de notre recommandation sera moindre pour les coques plus épaisses, ayant une contrainte critique initiale relativement haute. En revanche, le facteur de réduction d'une coque avec  $R/t = 1500$  sans pression interne étant très bas et le  $\Delta\gamma$  limité, une marge importante se dégage lorsque la pressurisation augmente. Nos calculs mettent en évidence l'un des points faibles de la SP8007 concernant l'augmentation de contrainte critique avec la pression, qui est la même quelle que soit la valeur de  $R/t$ . Les résultats des simulations semblent cependant montrer que même une coque possédant un défaut important peut, moyennant une pressurisation suffisante, atteindre la contrainte classique.



**Figure 6.9** Proposition de courbes de dimensionnement en compression et pression interne, a) :  $R/t = 250$ , b) :  $R/t = 500$ , c) :  $R/t = 750$ , d) :  $R/t = 1000$ , e) :  $R/t = 1250$ , f) :  $R/t = 1500$

Comparativement à l’Eurocode 3 en revanche, seules de légères différences apparaissent. L’augmentation de contrainte critique vers la valeur théorique avec la pression reste supérieure selon nos résultats, donnant un facteur de réduction environ 10% plus grand que pour la classe A (qualité excellente) de l’Eurocode 3.



**Figure 6.10** Proposition de courbes de dimensionnement en flexion et pression interne, a) :  $R/t = 250$ , b) :  $R/t = 500$ , c) :  $R/t = 750$ , d) :  $R/t = 1000$ , e) :  $R/t = 1250$ , f) :  $R/t = 1500$

Dans le cas de la flexion, les résultats tracés en Figure 6.10 montrent le gain rapide de contrainte critique avec la pression, pour toutes les valeurs de  $R/t$ . La contrainte théorique peut en effet être atteinte dès  $P^* = 0.3$ . Nous avons choisi de ne pas autoriser le dépassement de la contrainte théorique, dans une approche conservatrice. Ces graphes font ressortir une fois de plus le problème du  $\Delta\gamma$  de la SP8007 qui est le même pour toute valeur de  $R/t$ .

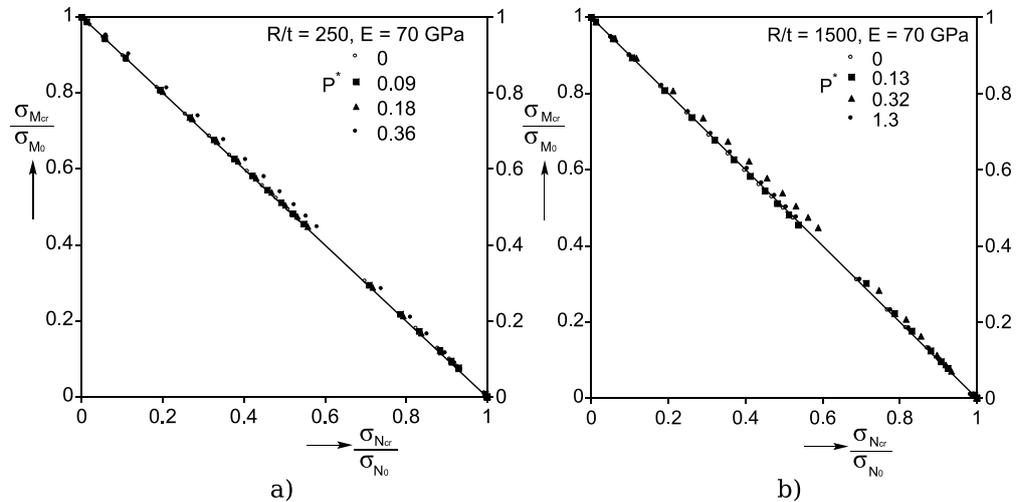
### 6.3 Caractérisation de l'interaction (P, N, M) pour le dimensionnement

Les cas des coques pressurisées en compression ou en flexion ayant été étudiés séparément, il est désormais nécessaire de caractériser l'interaction entre les deux chargements. Nous confirmerons dans un premier temps qu'il existe bien une relation linéaire entre la flexion et la compression, puis nous examinerons l'effet de différentes tailles de défaut sur cette combinaison.

#### 6.3.1 Nature de l'interaction

Le peu d'études de la littérature sur ce sujet pointent vers une interaction linéaire entre la compression et la flexion (voir §2.6.2), de par leurs modes de flambage similaires. Ayant peu de doutes quant à cette affirmation et les essais combinés étant peu évidents à réaliser, nous nous reposons sur une étude purement numérique de l'interaction.

Les calculs sont réalisés avec l'élément COMU de STANLAX. Un défaut de « type flexion » (dont la taille est définie dans le Tableau 6.2) est par exemple introduit, et les chargements de compression et de flexion sont incrémentés simultanément, dans une proportion  $\sigma_N / \sigma_M$  (ou plus simplement N/M) gardée fixe. Le processus est répété pour différentes valeurs de N/M et de pression interne. Les résultats sont présentés en Figure 6.11 pour les deux valeurs extrêmes de R/t concernées.



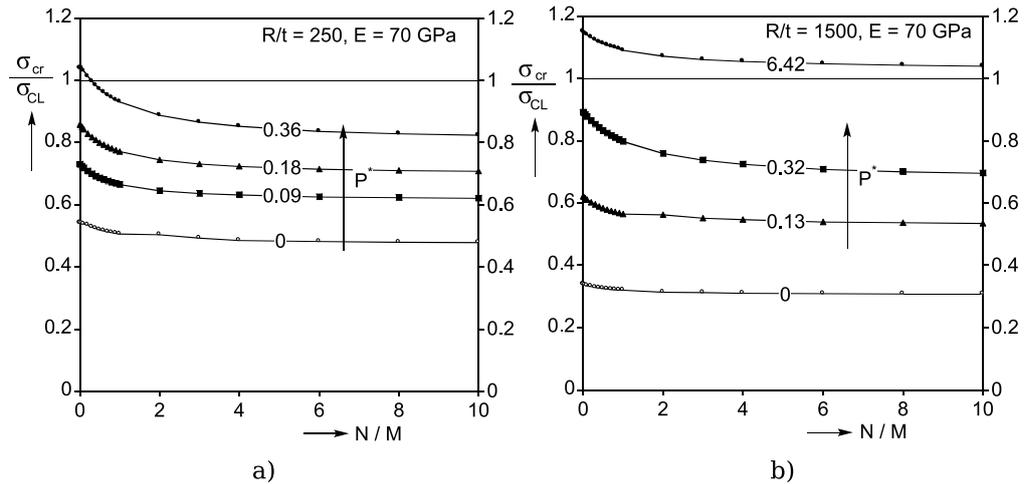
**Figure 6.11** Interaction flexion, compression et pression interne, a) : R/t = 250, b) : R/t = 1500

En ordonnée est tracée la contrainte critique de flexion  $\sigma_{Mcr}$  ramenée à la contrainte critique de flexion seule  $\sigma_{M_0}$ ; de même pour l'axe des abscisses avec la compression. Les calculs confirment la linéarité de l'interaction flexion/compression. Avec l'augmentation de pression, une légère courbure apparaît mais ne change pas fondamentalement la nature de l'interaction. Le fait d'avoir choisi un défaut dont la taille correspond au cas de la flexion n'a

pas d'importance sur la forme de l'interaction, uniquement sur les contraintes critiques de référence  $\sigma_{M_0}$  et  $\sigma_{N_0}$ .

### 6.3.2 Influence du rapport N/M

Les cas réels de charges subies par le réservoir du lanceur sont très diverses en fonction des conditions de vol. Il est donc intéressant de jauger la sensibilité du flambage au rapport N/M.



**Figure 6.12** Influence du rapport N/M sur la contrainte critique, a) :  $R/t = 250$ , b) :  $R/t = 1500$

Les calculs sont du même type que ceux effectués ci-dessus, cependant nous présentons ici la contrainte critique nette en fonction du rapport N/M pour différentes valeurs de pression interne (Figure 6.12). Les résultats montrent la baisse de contrainte critique avec l'augmentation de la composante de compression. L'écart entre le niveau maximum (à  $N/M = 0$ ) et le niveau minimum (pour  $N/M = 10$ ) augmente avec la pression interne. Nous rappelons que la taille du défaut est gardée constante, et cette chute de charge de bifurcation n'est due qu'à la plus grande sensibilité aux défauts en compression.

Encore une fois, choisir un défaut de « type compression » ne ferait que changer les niveaux de contrainte atteints, et non la forme des courbes.

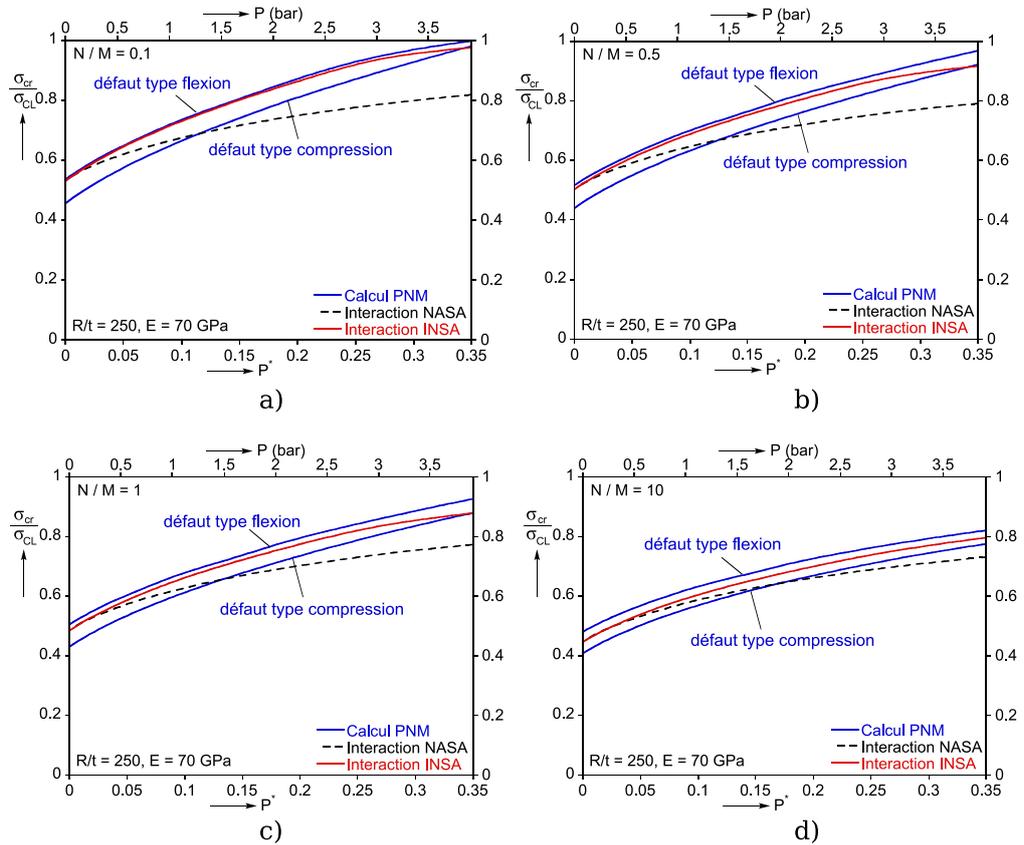
### 6.3.3 Dimensionnement (P, N, M)

Dans le cas du dimensionnement sous pression interne, compression et flexion, différents choix s'offrent à nous :

- Numériquement, en proposant directement des courbes d'interactions obtenues par simulation (de façon à similaire aux calculs présentés en § 6.3.1 et § 6.3.2). La difficulté réside alors dans le choix du défaut dimensionnant, en fonction du rapport N/M par exemple : suivant le chargement dominant, on pourrait choisir plutôt un défaut de type flexion ou de type compression.

- Analytiquement, en calculant simplement une interaction linéaire à partir des règles (P, N) et (P, M) discutées précédemment.

Nous comparons ici ces deux approches pour deux valeurs de R/t : 250 (Figure 6.13) et 1500 (Figure 6.14), ainsi que pour plusieurs valeurs de N/M : 0.1, 0.5, 1 et 10. La contrainte critique visualisée est ici la somme des contraintes dues à la flexion et à la compression, sans l'effet de fonds.

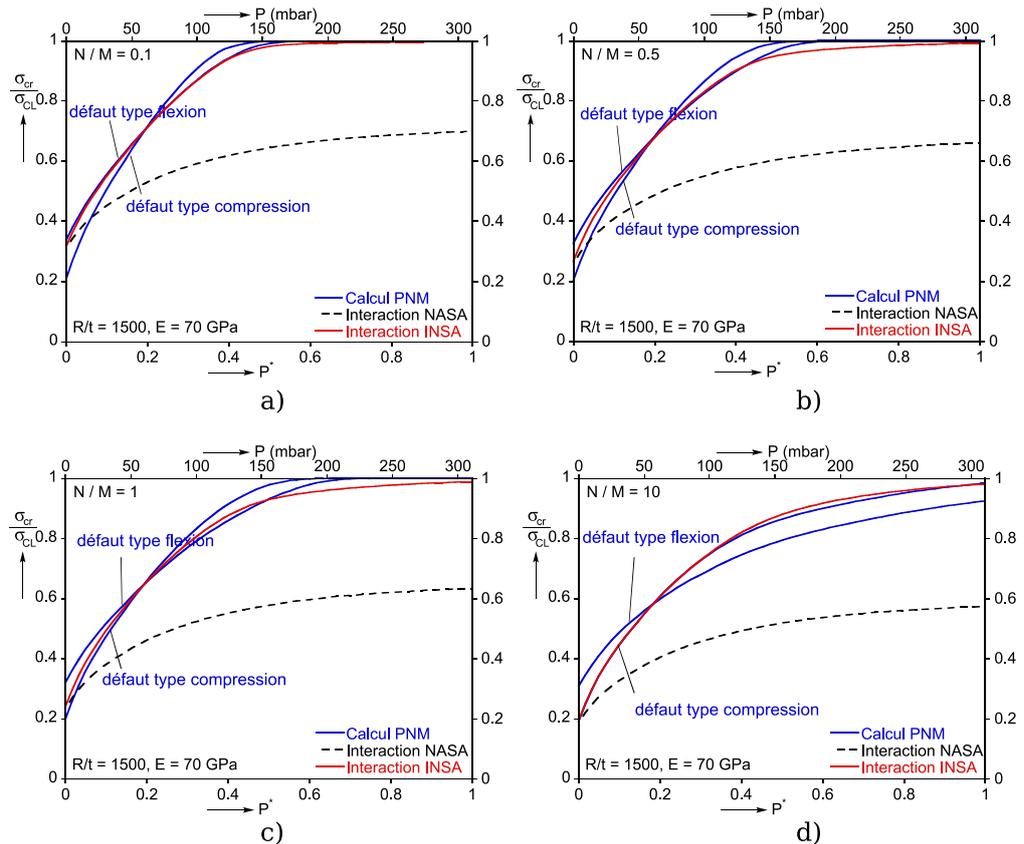


**Figure 6.13** Comparaison de deux approches pour l'interaction PNM, R/t = 250, a) : N/M = 0.1, b) : N/M = 0.5, c) : N/M = 1, d) : N/M = 10

Ces deux figures appellent plusieurs remarques générales. Tout d'abord, les résultats analytiques obtenus à partir de l'interaction linéaire des calculs PN et PM recourent bien l'interaction de la NASA à P = 0.

Par ailleurs, l'interaction INSA est forcément située initialement entre les calculs effectués avec les deux types de défaut : lorsque la flexion est le chargement dominant, elle se rapproche des calculs effectués avec un défaut de type flexion. Plus la part de compression augmente et plus la partie initiale de l'interaction se rapproche des calculs PNM avec le défaut de type compression.

On constate également que plus la composante de compression est importante et plus la contrainte tend lentement vers la contrainte classique. Ceci est causé par la partie « PN » de l'interaction, qui comme nous avons pu le voir en §6.2 nécessite une pressurisation plus conséquente pour se rapprocher de la contrainte critique théorique que la partie « PM ».



**Figure 6.14** Comparaison de deux approches pour l'interaction PNM,  $R/t = 1500$ , a) :  $N/M = 0.1$ , b) :  $N/M = 0.5$ , c) :  $N/M = 1$ , d) :  $N/M = 10$

Pour les coques plus épaisses, les résultats analytiques tardent à se rapprocher des calculs PNM avec le défaut de type compression, même lorsque le rapport  $N/M$  devient important.

On peut remarquer toutefois que pour les coques plus minces, les résultats analytiques de l'interaction sont très proches du calcul PNM (défaut compression) dès  $N/M = 1$ . De plus, les résultats des calculs PNM avec un défaut flexion et un défaut compression s'inversent dès  $P^* = 0.2$ . Les tailles des deux types d'imperfection étant dans ce cas très différentes (voir Tableau 6.2), l'évolution de la contrainte critique avec la pression peut donner des résultats bien distincts.

Ces différents résultats montrent que le choix d'une taille de défaut pour le cas de l'interaction ( $P, N, M$ ) s'avère tout autant, sinon plus complexe que dans les cas simples ( $P, N$ ) ou ( $P, M$ ). Le choix d'effectuer une interaction linéaire d'après les résultats des deux configurations de chargement semble donc le plus simple et le plus conservatif.

## 6.4 Caractérisation de l'interaction flexion/cisaillement

### 6.4.1 Problématique

Lorsqu'une contrainte de cisaillement est appliquée par l'intermédiaire d'un effort tranchant, elle n'est jamais pure. Comme nous avons pu le voir, une contrainte compressive existe de manière inhérente, due au moment de flexion créé par l'effort tranchant. Cette interaction a été étudiée uniquement dans certains cas précis, et il est donc important d'avoir une meilleure compréhension de son évolution avec la pression.

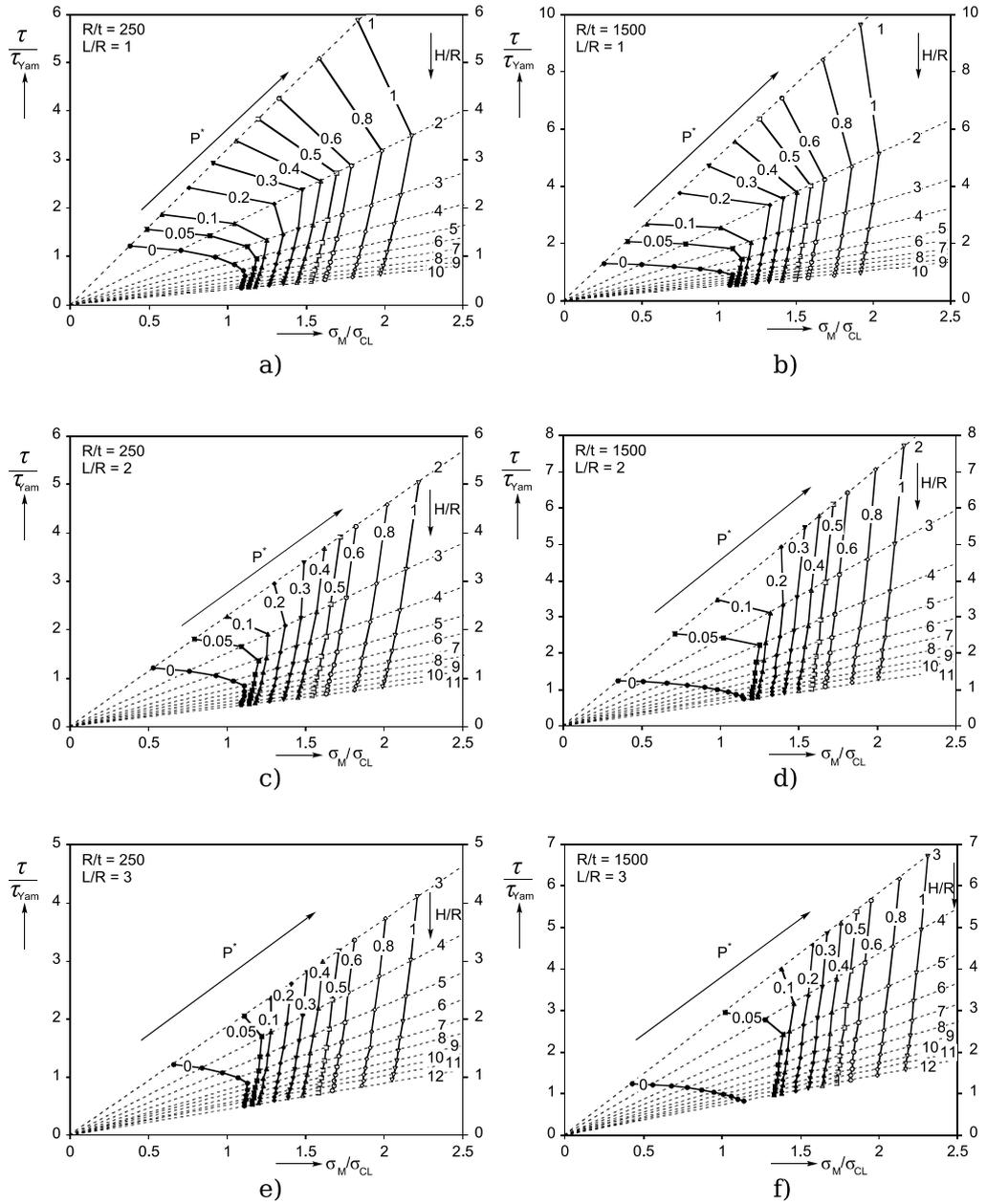
Des calculs ont ainsi été effectués sous ABAQUS, les coques à géométrie parfaite maillées à l'aide de 180 éléments S4 sur la circonférence et 100 sur la longueur du cylindre. Avant de proposer une imperfection pertinente pour la quantification de l'interaction flexion/cisaillement (ce qui aurait pu se révéler complexe), il nous semblait primordial de simuler le comportement de structures parfaites, dans l'optique de caractériser le passage théorique d'un mode de flambage à l'autre. Une étude paramétrique a ainsi été effectuée sur la recherche de valeurs propres (cas linéaire, voir §4.3), les différents paramètres variant de la manière suivante :

- $L/R = 1, 2, 3$
- $R/t = 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500$
- $H/R = L/R$  à  $L/R + 9$
- $P^* = 0, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1$
- $E$  est gardé fixe à 70 GPa

### 6.4.2 Résultats

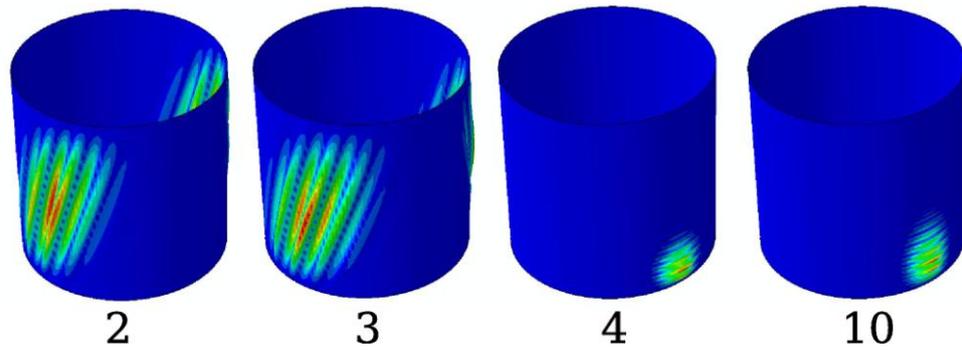
Nous présentons en Figure 6.15 les résultats obtenus pour les trois valeurs de  $L/R$  (1, 2 et 3), et deux valeurs de  $R/t$  (250 et 1500). La contrainte de cisaillement ramenée à la contrainte de Yamaki est ici tracée en fonction de la contrainte de flexion divisée par la contrainte classique, pour différentes valeurs de  $H/R$  et  $P^*$ .

L'ensemble des simulations réalisées confirment la nature particulière de l'interaction entre les deux chargements : contrairement au cas PN/PM qui est clairement linéaire, l'interaction semble ici très faible : nous sommes soit en cisaillement pur, soit en flexion pure, avec une courte transition entre les deux.



**Figure 6.15** Evolution de l'interaction flexion/cisaillement avec la pression, a) :  $L/R = 1$ ,  $R/t = 250$ , b) :  $L/R = 1$ ,  $R/t = 1500$ , c) :  $L/R = 2$ ,  $R/t = 250$ , d) :  $L/R = 2$ ,  $R/t = 1500$ , e) :  $L/R = 3$ ,  $R/t = 250$ , f) :  $L/R = 3$ ,  $R/t = 1500$

L'augmentation de  $H/R$  entraîne le passage à un mode de flexion : ceci paraît logique puisque la valeur de  $H/R$  représente le rapport entre la contrainte de flexion et la contrainte de cisaillement. Ceci est illustré en Figure 6.16, où plusieurs modes correspondant à différentes valeurs de  $H/R$  sont présentés. Les modes sont théoriques : les non-linéarités ne sont pas prises en compte et les coques considérées sont parfaites.



**Figure 6.16** Changement de mode théorique avec l'augmentation du bras de levier  
( $R/t = 1500$ ,  $L/R = 2$ )

Ces simulations nous permettent par ailleurs d'appréhender l'effet de la pression interne : comme pour les résultats expérimentaux, on constate que la pression n'a quantitativement pas le même effet sur la contrainte de cisaillement ou sur la contrainte de flexion. La contrainte critique de cisaillement « pur » progressant plus rapidement que la contrainte critique de flexion « pure », le front limitant et entraînant le déclenchement de l'instabilité devient le mode de flexion pour une pression adimensionnelle « seuil » dépendant des différents paramètres géométriques.

#### 6.4.3 Application au dimensionnement

Les calculs ci-dessus ne nous permettent pas de quantifier précisément l'interaction flexion/cisaillement et de proposer une alternative à la forme cubique utilisée par Cryospace. Nos résultats expérimentaux et numériques exposés précédemment montrent cependant que pour un même bras de levier, le cisaillement est de plus en plus influencé par la flexion lorsque la pression augmente : l'interaction change donc avec la pression. Il existe donc pour chaque géométrie une pression « seuil » pour laquelle il n'y a plus d'interaction, et le flambage est alors dicté uniquement par la flexion.

Considérer le cisaillement à ce niveau est donc fortement conservatif, puisqu'il n'a plus aucune influence sur le flambage. Nous avons ainsi déterminé pour chaque cas étudié ( $L/R$ ,  $R/t$ ,  $H/R$ ) la pression seuil à partir de laquelle le cisaillement est négligeable, répertoriées dans le Tableau 6.3.

$P^*$	R/t	H/R												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
L/R	1	250	3.2	0.5	0.2	0.1	0.05	0	0	0	0	0	x	x
		500	3.2	0.3	0.1	0.05	0.05	0	0	0	0	0	x	x
		750	3.2	0.3	0.1	0.05	0.05	0	0	0	0	0	x	x
		1000	3.2	0.2	0.1	0.05	0.05	0	0	0	0	0	x	x
		1250	3.2	0.2	0.1	0.05	0.05	0	0	0	0	0	x	x
		1500	3.2	0.2	0.1	0.05	0.05	0	0	0	0	0	x	x
	2	250	x	0.4	0.2	0.1	0.05	0.05	0	0	0	0	0	x
		500	x	0.3	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0	0	0	0	x
		750	x	0.3	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0	0	0	x
		1000	x	0.3	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0	0	0	x
		1250	x	0.3	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0	0	x
		1500	x	0.3	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	x
	3	250	x	x	0.2	0.1	0.05	0.05	0.05	0	0	0	0	0
		500	x	x	0.2	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0	0	0	0
		750	x	x	0.2	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
		1000	x	x	0.2	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
		1250	x	x	0.2	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
		1500	x	x	0.2	0.1	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05

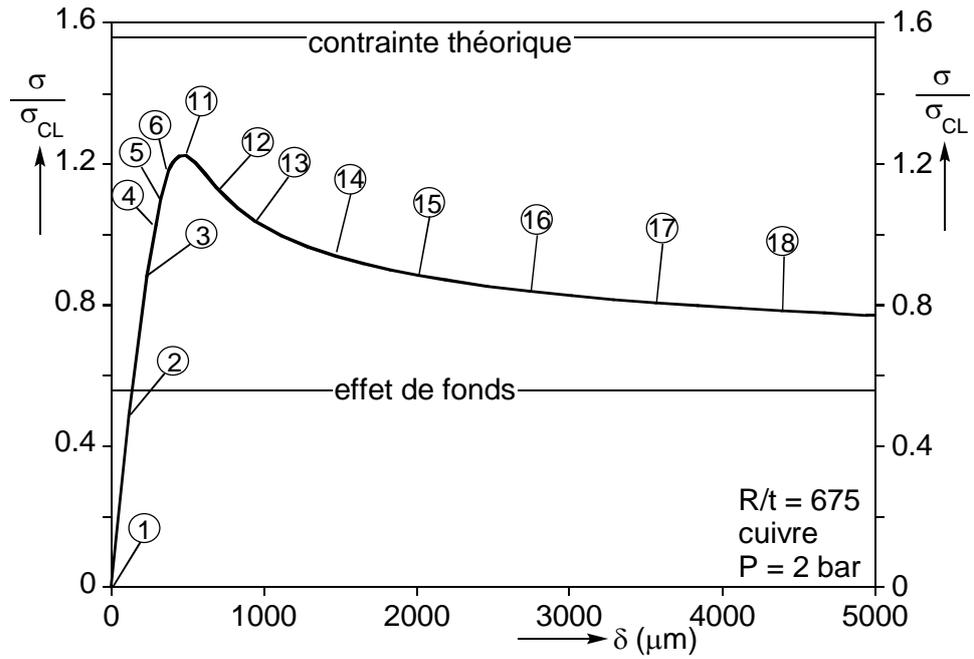
**Tableau 6.3** Pression seuil de passage à un mode de flexion pure

## 6.5 Etude de l'influence de la plasticité

Lors de la campagne expérimentale, nous avons pu constater qu'un changement de mode pouvait s'opérer, sous certaines conditions, avec l'augmentation de pression, tout en diminuant la contrainte critique. La pression interne peut ainsi fragiliser la coque après l'avoir initialement renforcée, et il est donc nécessaire de bien comprendre les raisons de ce phénomène afin de pouvoir l'éviter. Seul un chargement de compression est considéré dans un premier temps.

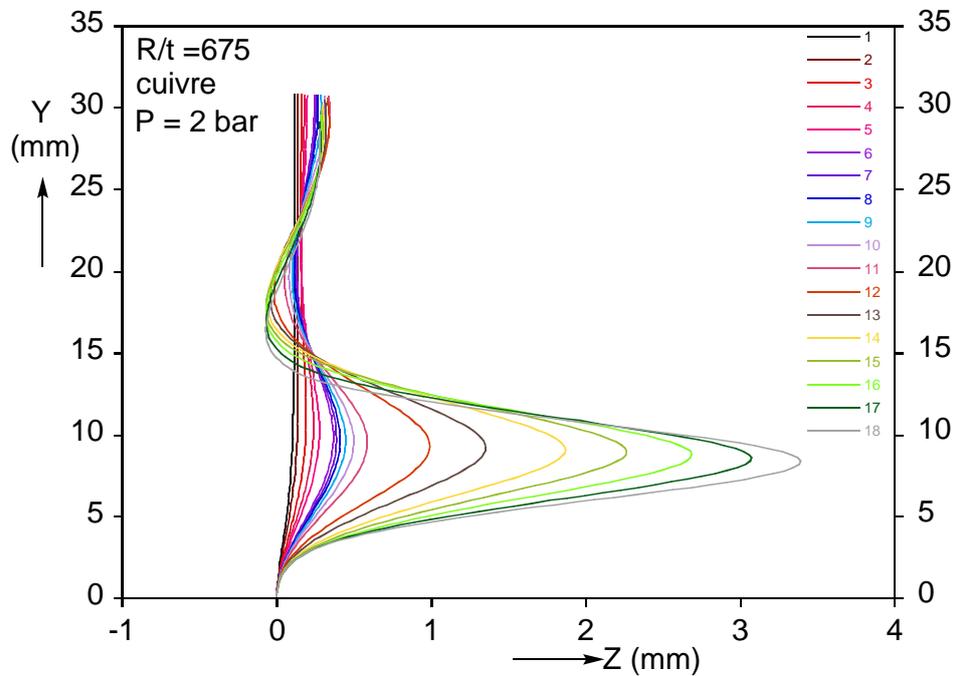
### 6.5.1 Description du mécanisme de déformation

Nous avons donc construit un modèle axisymétrique sous ABAQUS, dans le but de pouvoir étudier précisément le mécanisme de déformation associé à un tel mode critique. Le calcul présenté ici a été réalisé sur une coque en cuivre (avec les caractéristiques mesurées sur nos feuillards), d'épaisseur 0.2 mm ( $R/t = 675$ ). Après avoir introduit une pression de 2 bar, un chargement de compression est appliqué de manière incrémentale (par la méthode de Riks). Le cylindre possède 10 éléments solides CAX4R dans l'épaisseur, et est encastré au niveau de la condition limite basse.



**Figure 6.17** Courbe de chargement typique pour un mode en patte d'éléphant

La courbe de chargement obtenue est présentée en Figure 6.17 et montre une instabilité par point limite, avec une contrainte maximale nette égale à environ 2/3 de la contrainte théorique. La coque étant géométriquement parfaite, cette perte de capacité portante est due à un autre type d' « imperfection », comme nous allons le voir.



**Figure 6.18** Flambage en couche limite

Les bulles indiquent les 18 différentes configurations pour lesquelles nous avons retenu les déformées de la fibre moyenne. Un zoom de ces déformations est effectué au bas la coque et montre la formation progressive du soufflet (Figure 6.18). Initialement (configuration 1), la pression importante appliquée sur les parois « gonfle » la coque ; avec la faible épaisseur, des contraintes déjà non-négligeables sont créées dans la structure, avant même qu'elle ne soit chargée.

Le déplacement radial bloqué au niveau de la condition limite va ensuite entraîner, avec l'application du chargement, une localisation progressive des déformations dans cette région (2 à 5). La géométrie du problème va ajouter des contraintes locales de flexion qui vont accélérer l'écrasement de la coque (6 à 10). A l'atteinte du point limite (11), le matériau a épuisé sa réserve de charge, et cette zone se transforme en rotule plastique, entraînant l'effondrement de la structure et le développement rapide de cette « patte d'éléphant » (12 à 18). Pour cette structure parfaite, ce phénomène se produit à l'identique en haut de la coque. En pratique, et comme nous avons pu l'observer expérimentalement, les différentes imperfections des coques réelles vont tendre à favoriser le développement du soufflet sur un seul côté.

---

### 6.5.2 Influence de la loi matériau

La campagne expérimentale nous a montré qu'il existait une valeur de pression seuil pour laquelle le flambage par bifurcation et cloquage va donner lieu à un flambage de type point limite avec la formation d'un soufflet. Il est crucial, pour le dimensionnement de telles structures pressurisées, de connaître cette pression seuil, qui dépend de la géométrie et des propriétés du matériau utilisé. Utiliser un paramètre adimensionnel adéquat tel que  $\sigma_\theta/\sigma_Y$  nous permettrait de faciliter l'expression de la pression seuil, mais se pose alors le choix de  $\sigma_Y$ , qui n'est pas toujours évident.

Dans l'exemple précédent, le matériau utilisé est fortement non-linéaire et possède une réserve de charge importante entre la limite de linéarité et la contrainte conventionnelle à 0.2% de déformation, nous menant donc à des valeurs très différentes de  $\sigma_\theta/\sigma_Y$ . Afin d'étudier l'influence de la courbe matériau, le calcul est répété en prenant cette fois-ci une loi élasto-plastique parfaite dont la contrainte maximum est égale soit à la limite de linéarité réelle  $\sigma_L$  du matériau, soit à la limite de linéarité conventionnelle  $\sigma_{0.2}$  (voir Figure 6.19).

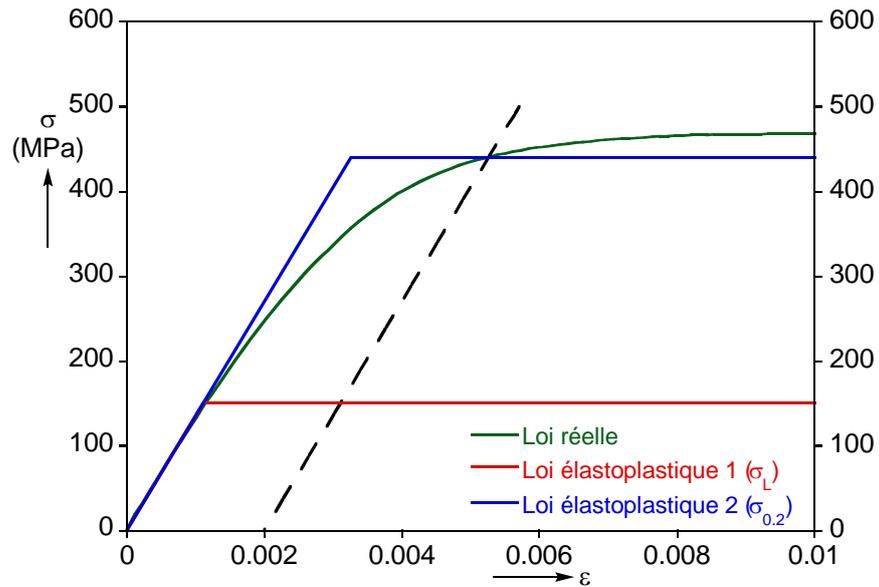


Figure 6.19 Lois matériau utilisées lors des simulations

Les résultats de ces calculs sont tracés en Figure 6.20, conjointement avec la courbe de chargement pour le matériau réel, mettant en évidence des différences de comportement importantes. Les différences dans les mécanismes de flambage sont illustrées en Figure 6.21, où l'évolution de la plasticité dans l'épaisseur de la coque est donnée pour chaque loi, à quatre niveaux de charge.

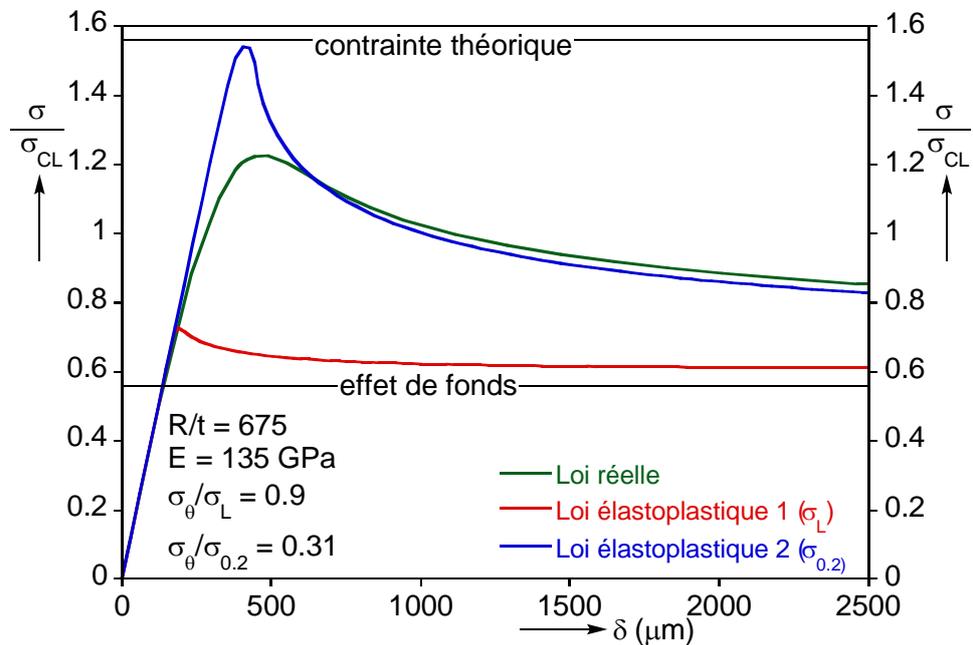
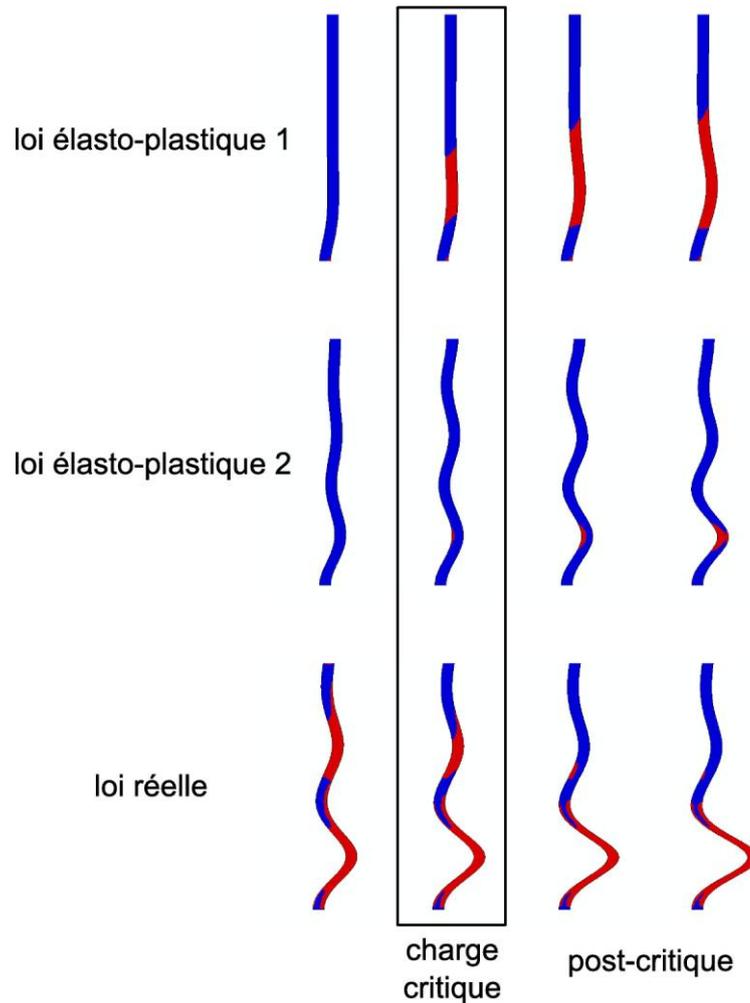


Figure 6.20 Flambage par point limite pour différentes lois matériau

Pour la loi élasto-plastique 1, le rapport  $\sigma_\theta/\sigma_Y$  est égal à 0.9, c'est-à-dire que la mise en pression seule suffit quasiment à plastifier le matériau. Il est donc peu étonnant de voir la structure flamber pour une contrainte nette de compression égale à 15% seulement de la contrainte classique. Le comporte-

ment est différent de celui vu précédemment : en effet, une rotule plastique apparaît dès l'atteinte de la contrainte limite, précipitant le flambage. La branche d'équilibre est donc quasi-linéaire avant l'effondrement, ensuite la charge légèrement pour atteindre un plateau de contrainte à  $6\% \cdot \sigma_{CL}$  (la charge ne pouvait pas descendre sous le niveau de l'effet de fonds).



**Figure 6.21** Flambage par point limite pour différentes lois matériau

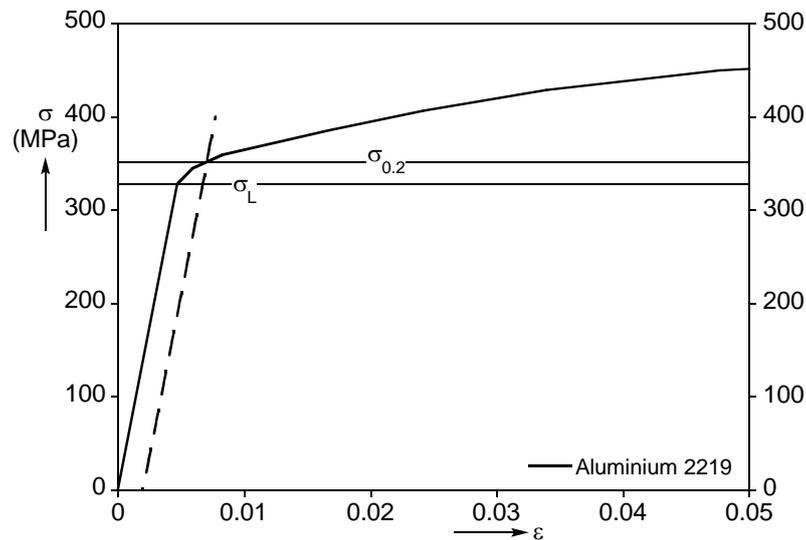
Un comportement similaire est observé pour la loi élasto-plastique 2. Le rapport  $\sigma_{\theta}/\sigma_Y$  étant maintenant de 0.3, la structure possède bien évidemment une réserve de charge plus importante après la pressurisation, la contrainte classique étant approchée de près (97%). De ce fait, de légères non-linéarités, géométriques ici et traduisant l'apparition du mode théorique, se développent avant l'atteinte du point limite. Le mécanisme reste cependant similaire : l'atteinte de la contrainte limite déclenche immédiatement l'instabilité. La perte de charge suivant le flambage est dans ce cas beaucoup plus importante.

On constate que la courbe de chargement pour la loi matériau réelle se retrouve entre les deux courbes des lois « parfaites ». Les non-linéarités précé-

Le flambage traduit l'épuisement progressif du matériau dans la zone critique près des conditions limites. Quant à la charge critique, s'il est difficile de la relier précisément aux cas élasto-plastiques, nous pouvons toutefois conclure de cet exemple qu'elle dépend fortement de la forme de la loi matériau utilisée, et est bornée par les résultats obtenus pour  $\sigma_L$  et  $\sigma_{0.2}$ .

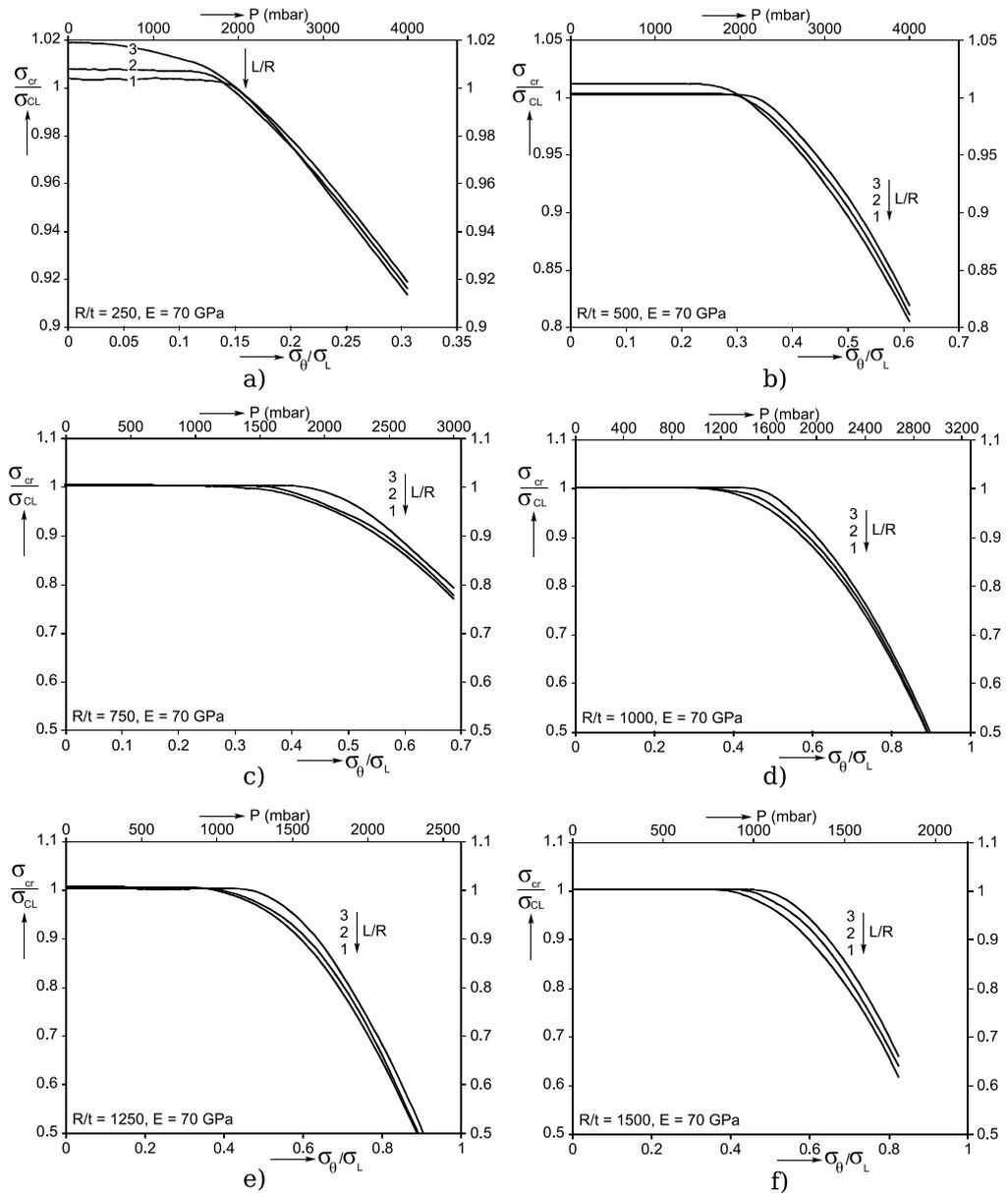
### 6.5.3 Influence de la géométrie

Après avoir examiné le mécanisme de formation du soufflet pour un cas particulier (observé expérimentalement), nous analysons ici l'influence de la géométrie de la structure ( $R/t$  et  $H/R$ ) sur la chute de contrainte critique. Le matériau considéré ici est l'alliage d'aluminium 2219, utilisé sur l'EPC et dont la loi est représentée sur la Figure 6.22. Contrairement aux matériaux utilisés lors de la campagne expérimentale, il présente une faible différence entre la limite de linéarité ( $\sigma_L = 327.5$  MPa) et la contrainte conventionnelle à 0.2% ( $\sigma_{0.2} = 350$  MPa).



**Figure 6.22** Loi matériau, aluminium 2219

Les calculs sont effectués sur des coques parfaites encastées des deux côtés, c'est-à-dire que seule l'influence néfaste des hautes pressions est considérée. Pour chaque valeur de  $R/t$  étudiée, le rapport  $L/R$  prend les valeurs de 1, 2 et 3. On retrouve dans tous les cas un comportement similaire (Figure 6.23) : aux basses pressions, la contrainte classique est atteinte (des écarts inférieurs à 2% peuvent être observés). Ensuite, à partir d'une pression seuil dépendant des paramètres géométriques, la contrainte critique entame une baisse continue avec l'apparition du mode en patte d'éléphant.

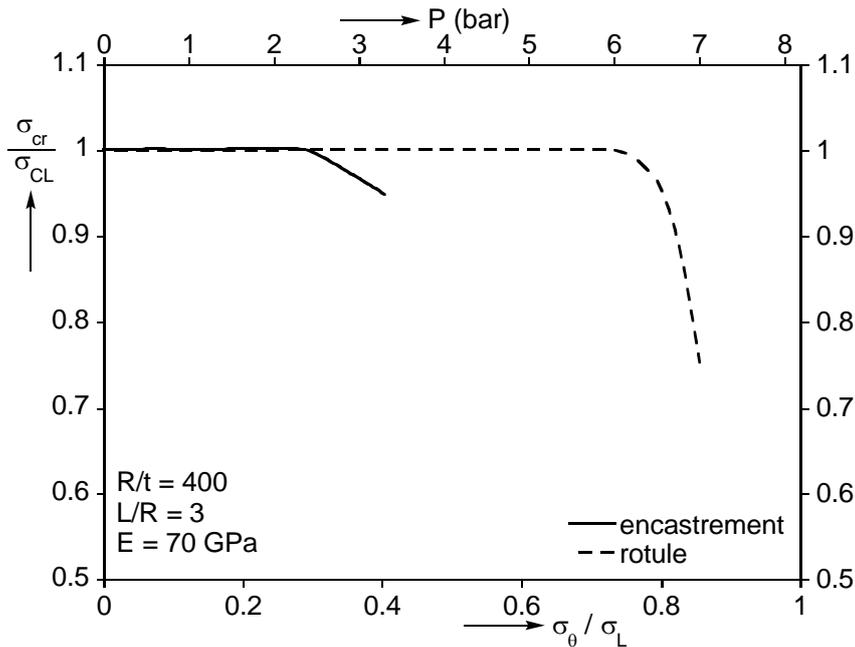


**Figure 6.23** Chute de charge critique en compression due à la formation d'une patte d'éléphant, a) :  $R/t = 250$ , b) :  $R/t = 500$ , c) :  $R/t = 750$ , d) :  $R/t = 1000$ , e) :  $R/t = 1250$ , f) :  $R/t = 1500$

Afin de pouvoir comparer la pression seuil pour les différentes valeurs de  $R/t$ , nous utilisons le paramètre adimensionnel  $\sigma_{\theta}/\sigma_L$ . La chute de capacité portante débute, selon les configurations, entre  $\sigma_{\theta}/\sigma_L = 0.15$  et  $\sigma_{\theta}/\sigma_L = 0.5$ . Il apparaît que plus une coque est longue et mince ( $R/t$  et  $L/R$  importants), plus l'apparition du soufflet sera tardive. Ceci peut s'expliquer de la manière suivante : les conditions aux limites entraînent des déformations sur une « couche limite » de longueur  $2.44 \cdot \sqrt{R \cdot t}$ . Plus une coque sera longue et mince, plus l'étendue de cette zone sensible sera diminuée.

#### 6.5.4 Influence des conditions aux limites

Les calculs effectués jusqu'à présent concernaient le cas où la coque était encastree. D'après les mécanismes de localisation des contraintes observés, la nature des conditions aux limites a sans aucun doute un effet non négligeable sur cette fragilisation. Nous illustrons cette remarque par un exemple particulier (Figure 6.24). Pour une coque avec  $R/t = 400$  et  $L/R = 3$ , le calcul est effectué avec des conditions aux limites rigides (encastrement) puis une nouvelle fois en libérant les rotations (rotule).



**Figure 6.24** Influence des conditions aux limites sur la pression seuil

Les résultats observés confirment notre intuition : on observe en effet qu'avec des conditions aux limites moins rigides, la pression seuil est plus que doublée. Nous gardons l'encastrement pour une approche conservative.

#### 6.5.5 Flambage en couche limite sous flexion

Seul un chargement de compression axiale a été analysé ici. Mathon et Limam [70] traitent les problèmes de flambage en couche limite sous flexion lors d'une étude numérique à l'aide du logiciel ABAQUS. Nous en rappelons ici les principales conclusions.

En flexion, le comportement est plus complexe, puisqu'il faut également prendre en compte l'effet membrane qui peut stabiliser la coque. Ainsi, passé une certaine valeur de la pression adimensionnelle  $P^*$ , il existe une réserve de charge entre la bifurcation et l'effondrement de la structure. Dans le cas où le paramètre  $\sigma_\theta / \sigma_L$  est également suffisamment important pour voir apparaître un flambage en couche limite, la formation du soufflet est alors pro-

gressive sur la circonférence du cylindre et n'entraîne pas directement l'effondrement de celui-ci.

Pour le dimensionnement, les auteurs partent d'une approche membranaire afin de déterminer la pression seuil. En conjonction avec les résultats numériques, ils proposent la formule analytique suivante :

$$\sigma_{\theta} > -\frac{1}{2} \cdot \left[ \sigma_{CL} - \sqrt{4 \cdot (0.985\sigma_L)^2 - 3 \cdot \sigma_{CL}^2} \right]$$

## 6.6 Impact des conditions expérimentales

Les résultats expérimentaux présentés au chapitre 5 sont importants dans l'établissement d'une nouvelle règle, permettant de valider les calculs numériques. Afin de pouvoir interpréter au mieux ces résultats, il est important d'évaluer l'impact des conditions expérimentales (notamment une mauvaise application de l'effort) sur la contrainte critique. Nous traiterons successivement les cas PN, PM et PT.

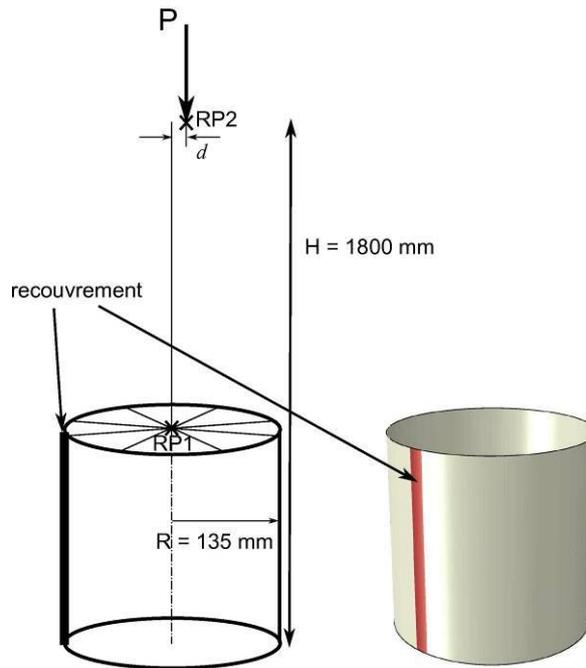
### 6.6.1 Essais PN

Les essais en pression interne et compression montraient une certaine dissymétrie dans le chargement, due à un renforcement de la coque au niveau du joint de recouvrement vertical, et à la présence de rotules dans l'axe de chargement du banc Ariane. Les résultats expérimentaux semblent indiquer que cette dissymétrie est néfaste au regard de la contrainte de flambage ; nous essayons ici de quantifier cet effet numériquement pour chaque feuillard testé.

#### 6.6.1.1 Modèle

Nous présentons dans ce paragraphe les détails du modèle utilisé dans ABAQUS et schématisé en Figure 6.25. Une coque cylindrique est maillée avec 360 éléments S4 sur la circonférence et 200 sur la hauteur. La géométrie considérée est parfaite, afin de ne pas prendre en compte l'effet des défauts. Le rayon de la coque est de 135 mm, et sa hauteur égale à 270 mm.

Le joint de recouvrement est simulé en doublant l'épaisseur sur une partie de la circonférence (20 mm). Un point de référence RP1 est placé au niveau de la condition aux limites supérieure, au centre du cylindre ; ses 6 degrés de liberté sont liés aux 6 d.d.l. des nœuds du bord supérieur. Un second point de référence RP2 est placé à une hauteur de 180 mm du bas du cylindre, ses 6 d.d.l. également liés à RP1. Nous simulons ici le chargement de la coque sur le banc Ariane (voir Figure 4.7), avec la présence des rotules autorisant l'introduction d'un léger moment de flexion dû à la dissymétrie du spécimen. Le point d'application de l'effort RP2 peut être légèrement décalé du côté opposé à la fibre renforcée, d'une distance  $d$ . Le bord inférieur de la coque est encastré.

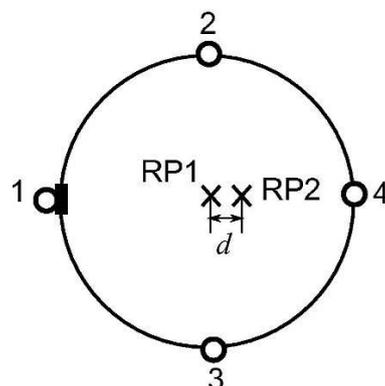


**Figure 6.25** Schéma de la configuration utilisée pour les calculs, PN

Enfin, la méthode de Riks est employée, afin de pouvoir capturer les non-linéarités géométrique et matériau. Les courbes des essais de traction (voir chapitre 4) sont directement utilisées pour voir l'influence de la plasticité lors des expériences.

#### 6.6.1.2 Mise en évidence de la dissymétrie

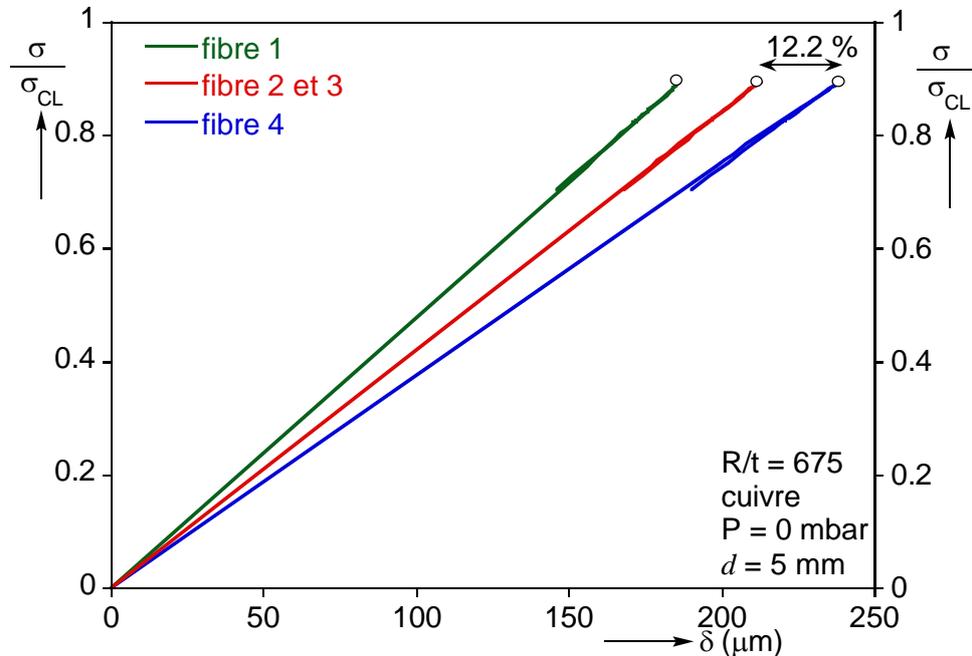
Nous présentons ici dans un premier temps un exemple de dissymétrie pour une configuration particulière, puis nous analyserons l'influence de la pression et de l'excentricité du chargement sur le comportement des coques, et notamment sur la dissymétrie constatée lors des essais. Les déplacements sont mesurés en 4 points de la coque, de façon similaire à la position des capteurs LVDT lors des essais (voir Figure 6.26).



**Figure 6.26** Positions des fibres suivies lors des simulations

La Figure 6.27 présente un exemple de dissymétrie obtenue avec les calculs, pour une coque en cuivre, avec  $R/t = 675$ . La pression est ici nulle, et

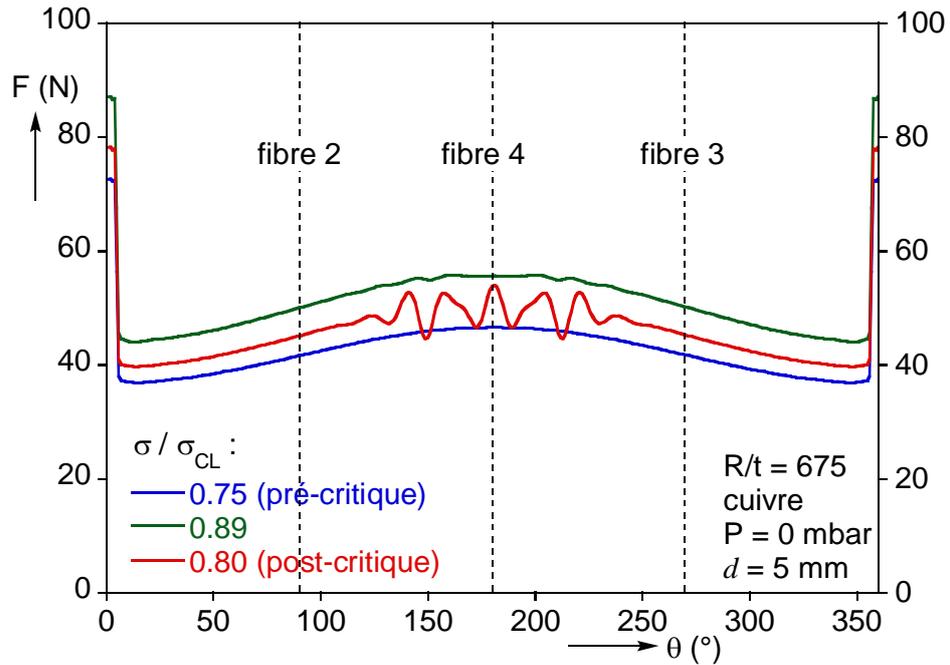
l'excentrement de 5 mm. La fibre 4, à l'opposé de la fibre renforcée, voit une contrainte et un déplacement plus importants que les fibres 2 et 3 (au milieu) et la fibre 1 (recouvrement). La dissymétrie est dans ce cas de 12.2%, baissant la contrainte critique d'un peu plus de 10%. L'écart entre les différentes fibres n'est dû qu'aux conditions expérimentales.



**Figure 6.27** Courbes de chargement numériques PN

A partir de ce calcul, nous avons récupéré la force de réaction agissant au niveau de la condition limite inférieure, tracée en Figure 6.28 en fonction de la position considérée, à 3 moments du chargement : avant, pendant, et après la bifurcation d'équilibre. On retrouve une force qui n'est pas répartie équitablement sur toute la circonférence de la coque : la fibre 4 reçoit en effet une force transmise par le vérin plus importante que le reste (le recouvrement mis à part). L'écart avec les fibres 2 et 3 est d'environ 12%, ce qui est semblable à la dissymétrie observée dans les écrasements.

Le comportement pré-critique étant linéaire, il est normal que l'on retrouve les mêmes écarts en termes d'écrasement et de force de réaction. Après la bifurcation d'équilibre, la formation des cloques en pointe de diamant change la répartition des contraintes, et cette équivalence n'est plus valable.



**Figure 6.28** Réaction au niveau de la condition limite inférieure

Nous avons traité un exemple particulier et montré l'influence de la dissymétrie, pouvant réduire de façon non-négligeable la contrainte critique. Il reste à voir comment cette perte de contrainte critique évolue avec la pression et l'excentricité du chargement.

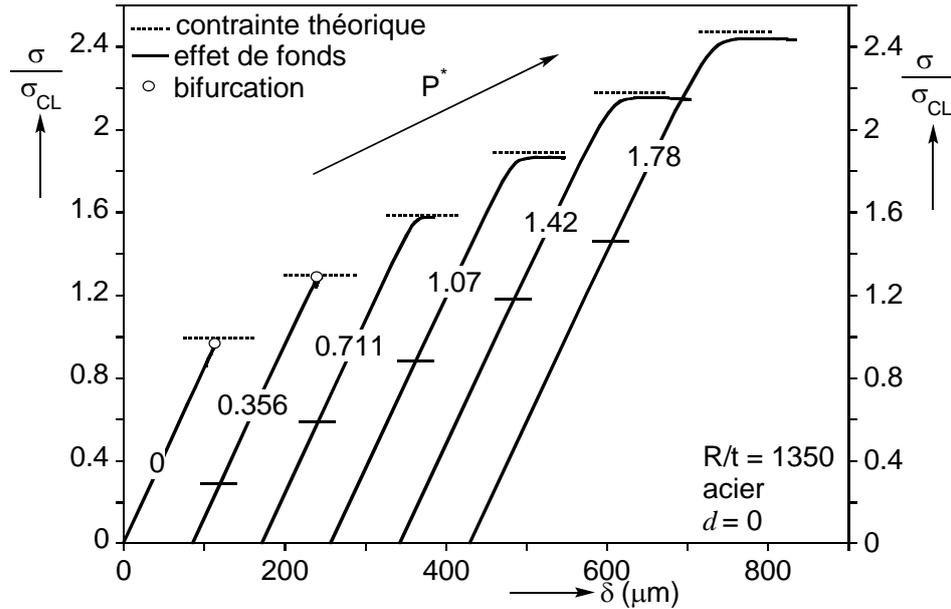
#### 6.6.121 Effet de la pression

Les calculs effectués permettent, outre la quantification de la dissymétrie, l'analyse du comportement théorique de coques pressurisées sous compression axiale. Dans cette partie, le chargement est considéré comme étant parfaitement appliqué, et tous les calculs sont donc effectués avec  $d = 0$ . Deux exemples sont détaillés ici :

- les coques très minces ( $R/t = 1350$ ) en acier, n'étant pas affectées par la plasticité même à haute pression
- les coques en aluminium ( $R/t = 675$ ) donnant un flambage élasto-plastique

Acier,  $R/t = 1350$

La Figure 6.29 montre un exemple de courbes de contrainte-déplacement à différents niveaux de pression interne (0, 400, 800, 1200, 1600 et 2000 mbar) pour une coque en acier avec  $R/t = 1350$ . Seules les courbes moyennes sont tracées.



**Figure 6.29** Courbes de chargement PN, simulations numériques,  $R/t = 1350$ , acier

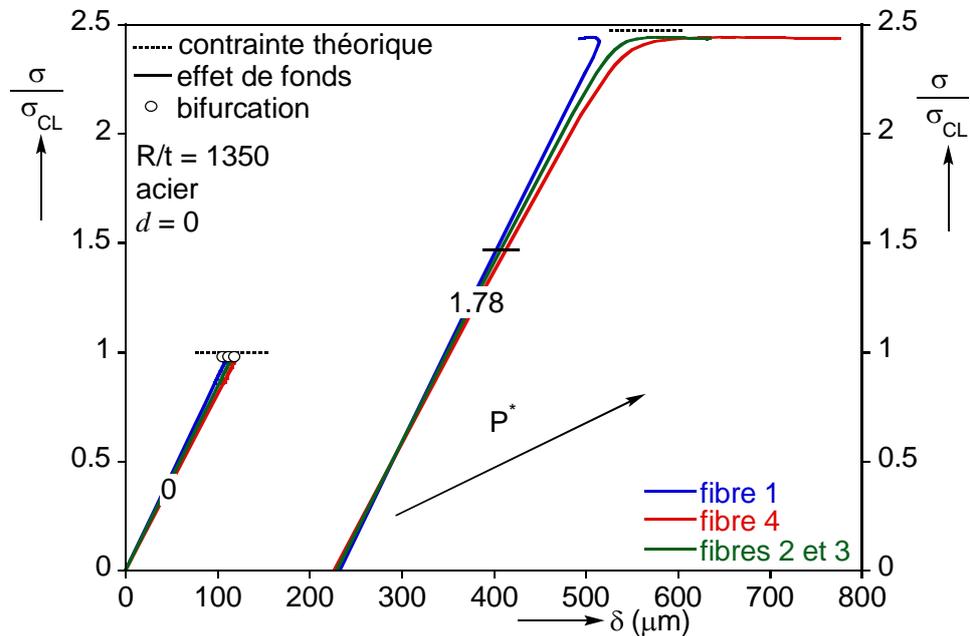
Deux sortes de comportement sont observés : aux basses pressions ( $P^* = 0, 0.356$ ) la courbe est purement linéaire, et le flambage se produit par bifurcation, donnant un mode en pointes de diamant (voir Figure 6.30a). Dès  $P^* = 0.711$ , la coque étant parfaite, des non-linéarités traduisant la formation d’ondes axisymétriques apparaissent, menant à un flambage élastique par point-limite et le mode critique présenté en Figure 6.30b. La coque s’effondre bien évidemment du côté non renforcé à chaque fois.



**Figure 6.30** Modes critiques PN observés numériquement,  $R/t = 1350$ , acier, a) : pointes de diamant, b) : axisymétrique généralisé

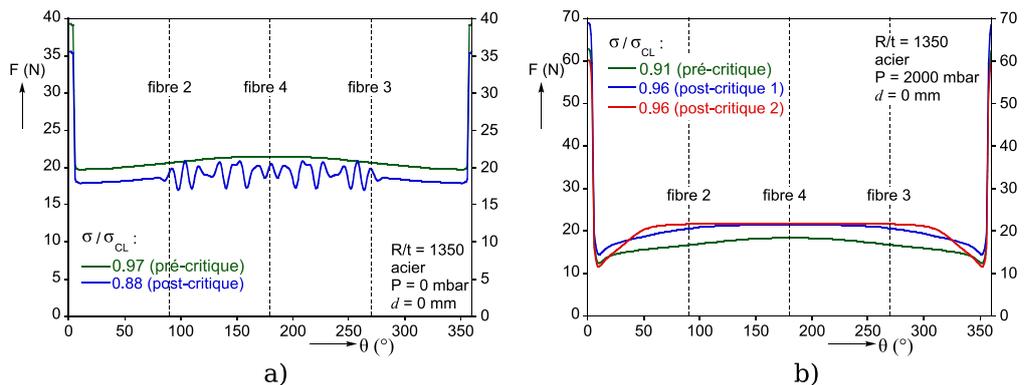
La dissymétrie pour deux valeurs de pression interne (0 et 2000 mbar) est présentée en Figure 6.31. Dans le premier cas, l’écrasement maximum à bifurcation diffère de moins de 5% de la moyenne et la contrainte critique est très proche de la valeur théorique. Le deuxième jeu de courbes montre que la non-linéarité créée par l’apparition et le développement du mode axisymétrique généralisé accentue fortement la dissymétrie (passant de 5% en partie linéaire à 27% au niveau du point limite), et montre la localisation de l’effondrement en

partie « comprimée ». La fibre 1 voit alors une diminution de son écrasement. Cependant, cette accentuation ne se répercute pas sur la contrainte de flambage, restant très proche de la contrainte classique.



**Figure 6.31** Courbes de chargement mettant en évidence la dissymétrie,  $R/t = 1350$ , acier

L'analyse de la distribution des efforts nous permet de mieux comprendre ce phénomène (Figure 6.32). Pour le calcul sans pression interne, on retrouve en partie linéaire pré-critique, une faible dissymétrie provoquant un cloquage localisé et une nouvelle répartition des contraintes. La force appliquée au niveau du recouvrement est deux fois plus importante que pour le reste, de par sa double épaisseur.



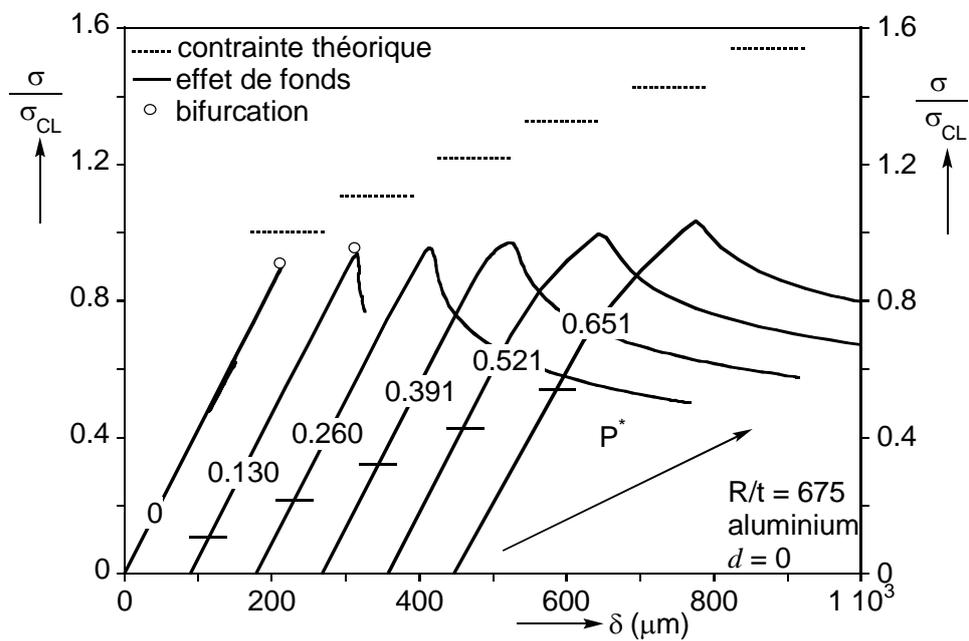
**Figure 6.32** Réaction au niveau de la condition limite inférieure,  $R/t = 1350$ , acier, a) :  $P = 0$  mbar, b) :  $P = 2000$  mbar

Avec la mise sous pression, les effets non-linéaires créés par le comportement de la coque parfaite sont « absorbés » par d'autres effets. D'une part, le recouvrement reçoit en contrepartie des efforts plus importants, et

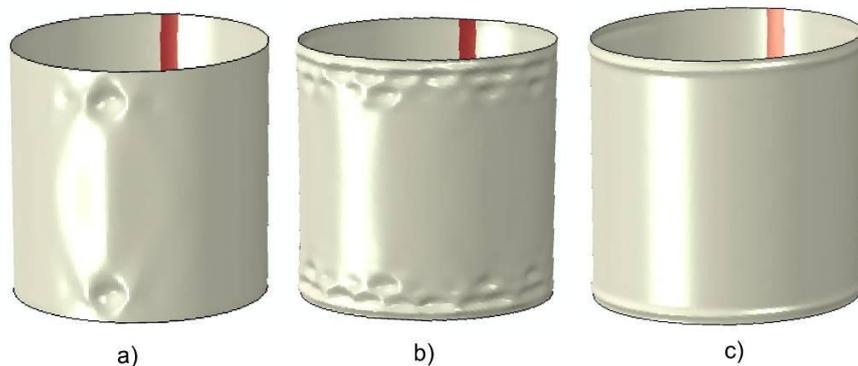
d'autre part, les ondes axisymétriques se propagent sur la coque à effort localement constant (voir Figure 6.32b), permettant ainsi à l'effort moyen d'augmenter. L'effet de la dissymétrie reste donc limité en termes de contrainte maximale sur des coques parfaites.

Aluminium,  $R/t = 675$

Nous présentons désormais les résultats obtenus pour une coque en aluminium ( $R/t = 675$ ) en Figure 6.33. Des pressions de 0, 200, 400, 600, 800 et 1000 mbar sont étudiées. On retrouve les comportements vus en essais : le flambage par bifurcation laisse place à l'atteinte d'un point limite et la formation d'un mode en patte d'éléphant (voir Figure 6.34). Ce changement de mode va de pair avec un éloignement de la contrainte théorique : la coque est fragilisée.

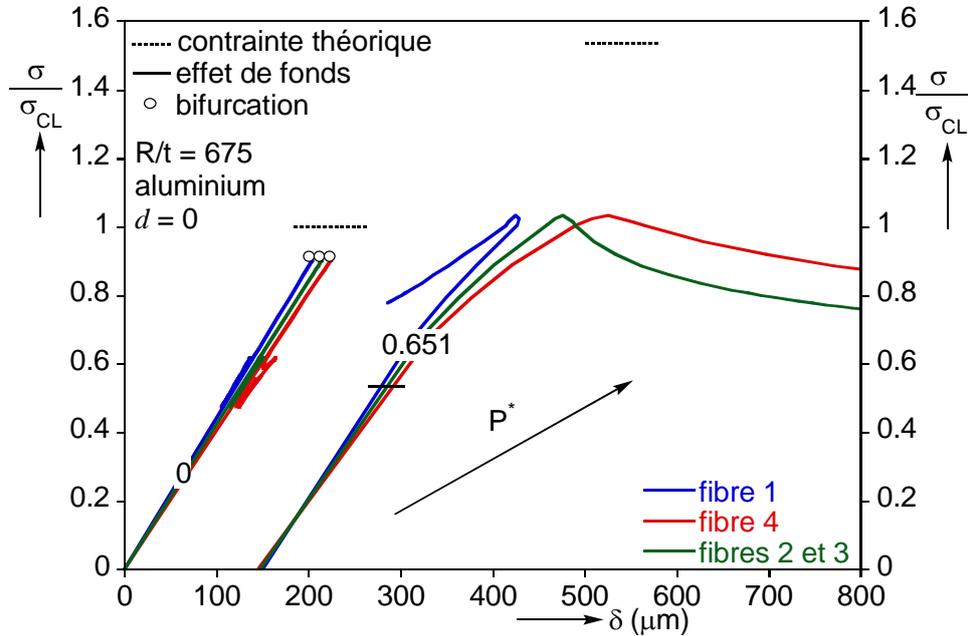


**Figure 6.33** Courbes de chargement PN, simulations numériques,  $R/t = 675$ , aluminium



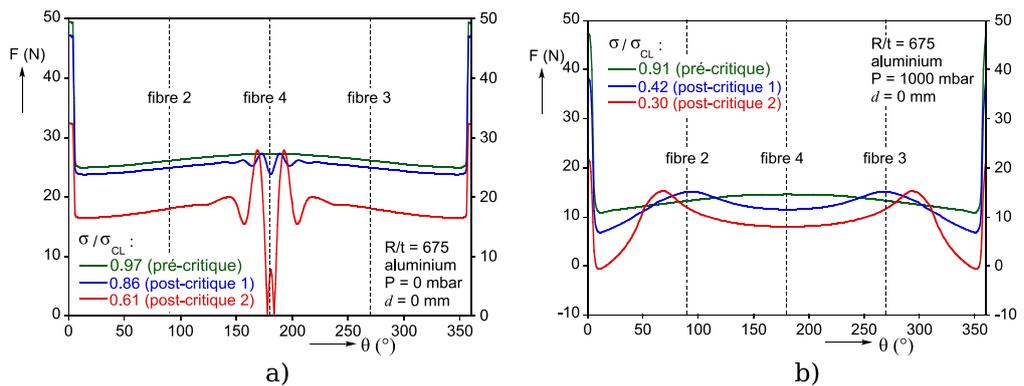
**Figure 6.34** Modes critiques PN observés numériquement,  $R/t = 675$ , aluminium, a) : pointes de diamant ( $P = 0$  mbar), b) : pointes de diamant ( $P = 200$  mbar), c) : patte d'éléphant

En traçant les résultats donnés pour les différentes fibres (Figure 6.35), on retrouve le fait que les non-linéarités accentuent la dissymétrie. Ici la non-linéarité due au matériau provoque un flambage par point-limite, accéléré par l'excès de contrainte appliqué à la fibre 4.



**Figure 6.35** Courbes de chargement mettant en évidence la dissymétrie, R/t = 675, aluminium

La répartition des efforts de réaction (Figure 6.36) nous montre que pour ce cas encore, la mise sous pression et l'apparition du mode en patte d'éléphant change la distribution.



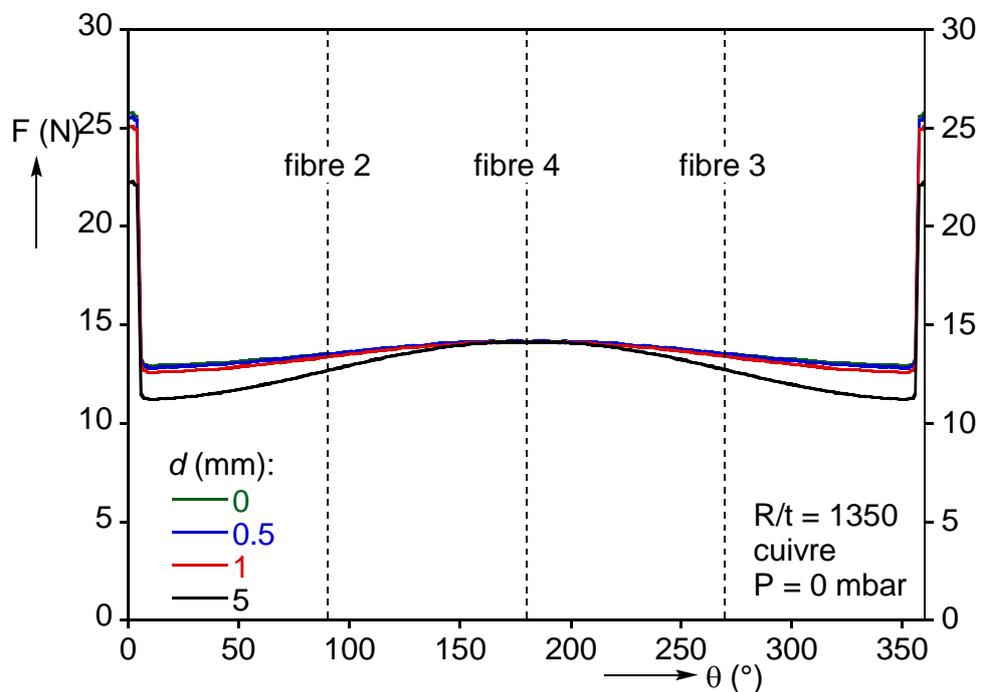
**Figure 6.36** Réaction au niveau de la condition limite inférieure, R/t = 675, aluminium, a) : P = 0 mbar, b) : P = 1000 mbar

### 6.6.122 Effet de l'excentricité du chargement

Nous venons d'étudier l'effet de la pression interne sur la dissymétrie créée par la méthode de fabrication des spécimens uniquement, dans le cas d'une appli-

cation de l'effort parfaitement centrée ( $d = 0$ ). Cependant lors des essais, il est certain que l'axe de chargement du vérin n'est pas parfaitement aligné avec le centre de la coque. Nous étudions ici l'effet de la combinaison d'une imperfection dans l'application de l'effort avec la présence d'une partie renforcée sur le spécimen.

Le comportement observé avec une excentricité ne change pas fondamentalement (quelle que soit la pression interne), et nous préférons ici examiner l'influence de  $d$  (prenant les valeurs suivantes : 0, 0.5, 1 et 5 mm) sur la répartition des forces de réaction au moment du flambage (Figure 6.37). Il apparaît que la force maximale encaissée en fibre 4 ne varie pas (i.e. la contrainte de flambage « locale » est la même), mais la dissymétrie augmente, diminuant ainsi la charge moyenne appliquée à la coque.



**Figure 6.37** Réaction au niveau de la condition limite inférieure,  $R/t = 1350$ , cuivre

### 6.6.1.3 Contraintes critiques

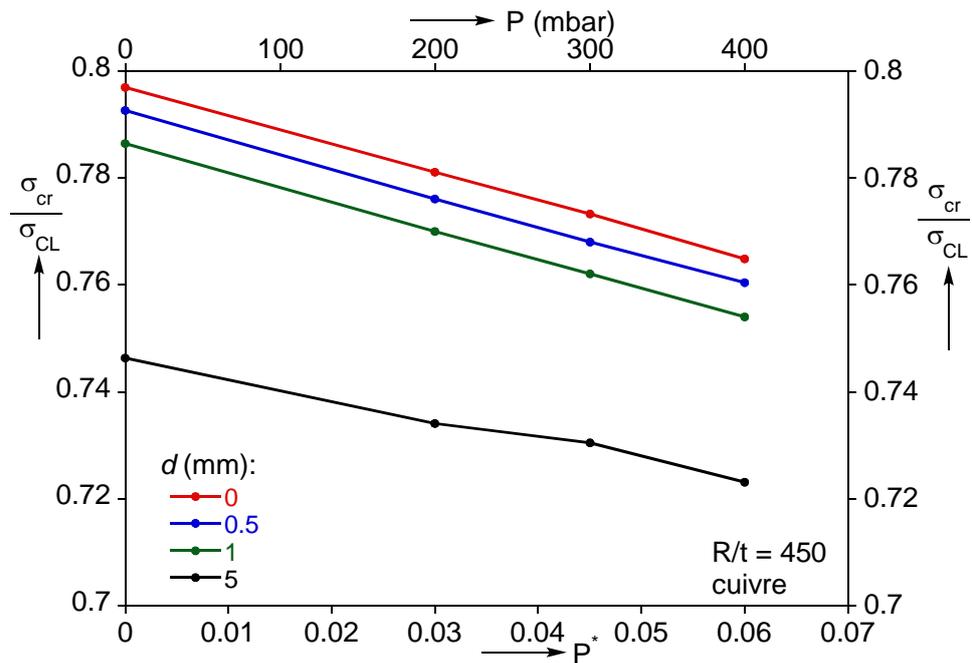
Après avoir vu l'influence des conditions expérimentales sur le comportement des coques lors des essais en compression et pression interne, nous résumons dans cette partie les contraintes critiques données par les calculs. Pour chaque feuillard, la pression varie sur le domaine étudié en essais, et l'excentrement prend les valeurs de 0, 0.5, 1 et 5 mm.

#### Matériau cuivre, $R/t = 450$

Ce type de coques a été testé à des pressions allant de 0 à 400 mbar, nous avons donc effectué les calculs pour ces pressions (Figure 5.38). L'influence du recouvrement allié à la plasticité, est importante, même lorsque le chargement est parfaitement aligné dans l'axe de la coque. Ainsi, à  $P = 0$  mbar, la contrainte critique est abaissée de plus de 20%. Lorsque la pression augmente

(les niveaux de pression adimensionnelle restant très faibles dans ce cas) la dissymétrie s'accroît, diminuant la contrainte critique de quelques pourcents encore.

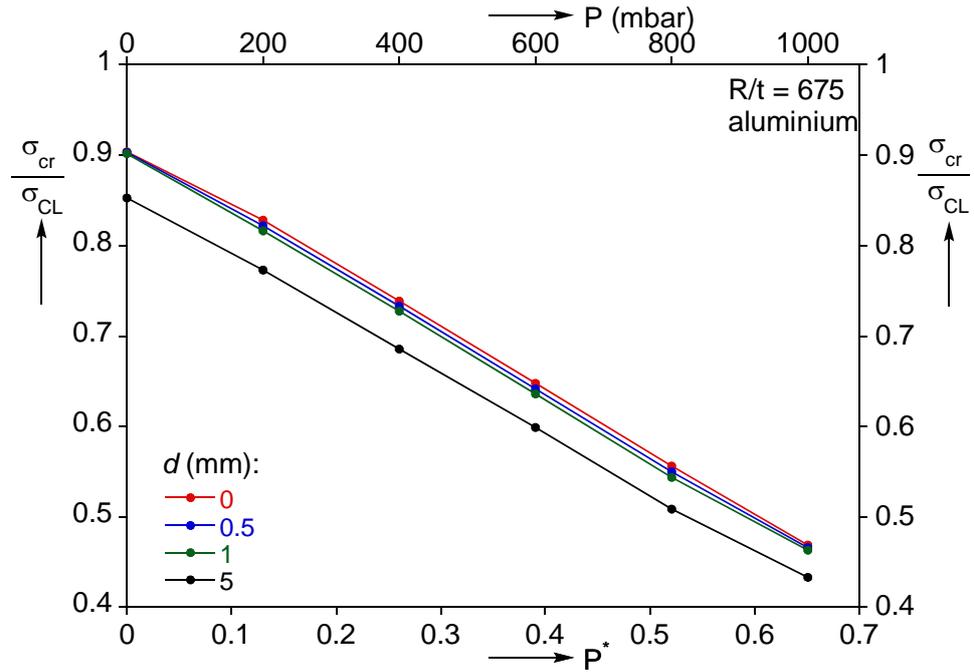
On remarque de plus l'influence quasiment linéaire de l'excentrement sur la baisse de contrainte critique. Ce résultat semble logique : en n'appliquant pas l'effort sur l'axe de la coque, nous créons un moment de flexion venant s'ajouter à la compression axiale et qui n'est pas mesuré par la cellule de force. L'interaction entre les deux chargements étant linéaire, la baisse causée par l'excentrement (et donc l'addition d'un moment) l'est également.



**Figure 6.38** Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression,  $R/t = 450$ , cuivre

*Matériau aluminium,  $R/t = 675$*

Pour ces coques, les essais conduits couvrent une plage de pression allant de 0 à 1000 mbar (Figure 6.39). Initialement, la contrainte critique chute à 90% de sa valeur théorique. L'influence du recouvrement est donc moins importante que dans le cas précédent.

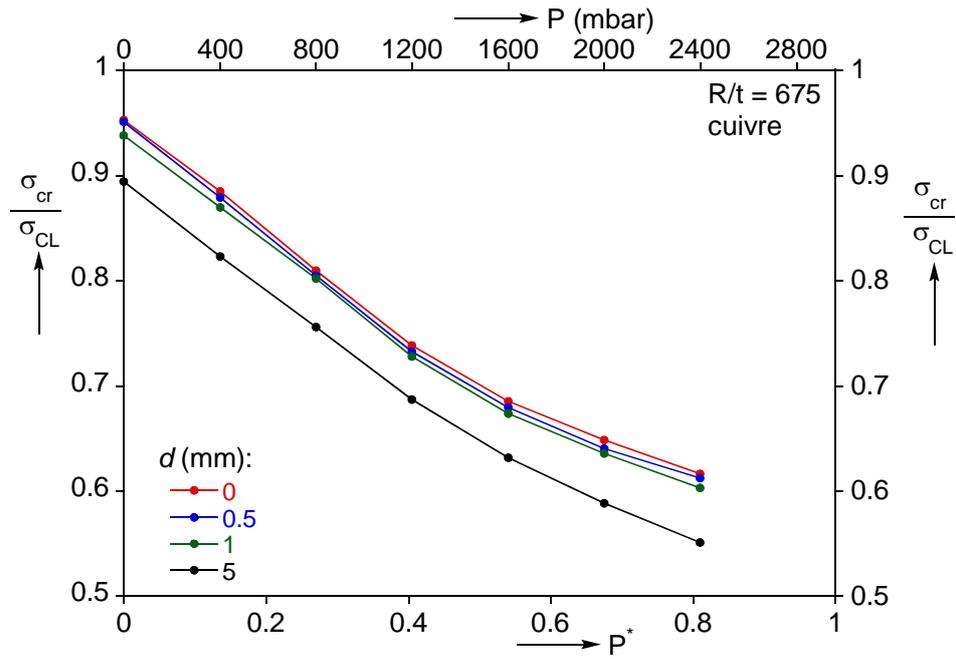


**Figure 6.39** Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression,  $R/t = 675$ , aluminium

Comme nous l'avons constaté expérimentalement et numériquement, ce type de feuillard est très vite affecté par la plastification (avec l'apparition d'un mode en patte d'éléphant dès 400 mbar), faisant chuter rapidement la charge lorsque la pression augmente.

*Matériau cuivre,  $R/t = 675$*

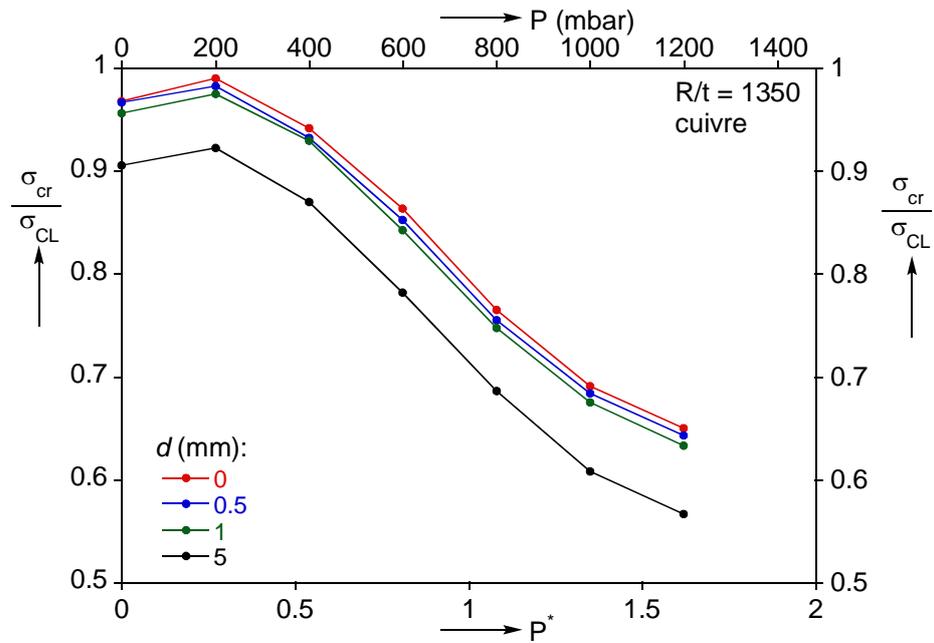
Les pressions étudiées vont ici jusqu'à 2400 mbar. La limite d'élasticité du cuivre étant plus haute que pour l'aluminium, le phénomène de déstabilisation dû à la pression n'apparaît que vers 1600 mbar (Figure 6.40). On note alors un changement de pente dans les courbes, indiquant un changement de sensibilité à la dissymétrie. Avec l'apparition du mode en patte d'éléphant, la dissymétrie atteint une limite maximale et la chute de contrainte critique est alors à mettre sur le compte de la plastification.



**Figure 6.40** Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression,  $R/t = 675$ , cuivre

*Matériau cuivre,  $R/t = 1350$*

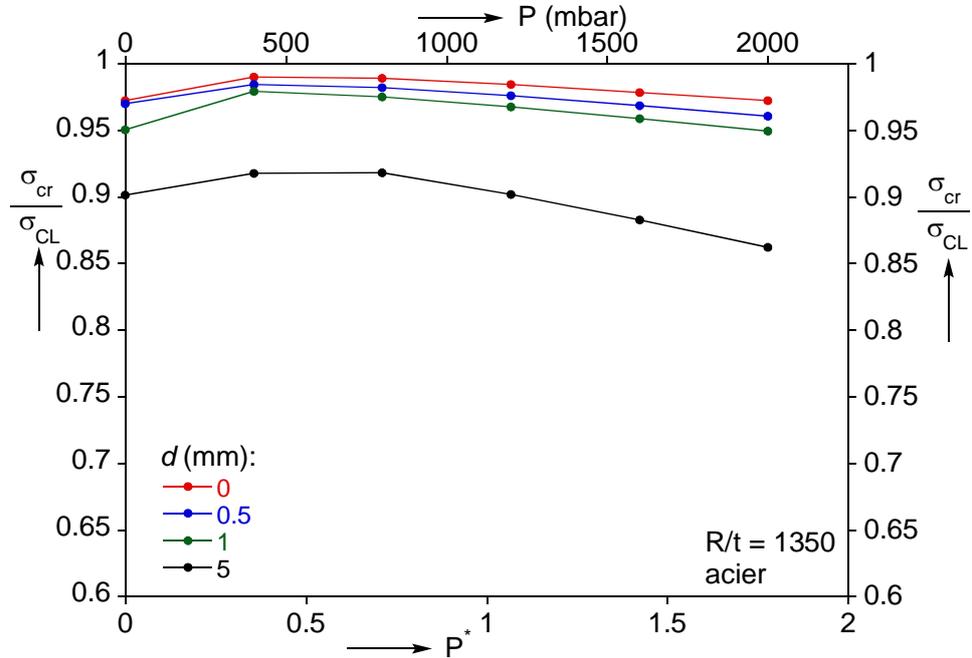
Pour les coques en cuivre et d'épaisseur 0.1 mm ( $R/t = 1350$ ), nous avons effectué les calculs jusqu'à une pression de 1200 mbar (Figure 6.41). On note une légère augmentation de la contrainte entre  $P = 0$  et  $P = 200$  mbar, ceci est un effet numérique. Autrement, la contrainte baisse de manière régulière avec la pression.



**Figure 6.41** Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression,  $R/t = 1350$ , cuivre

*Matériau acier, R/t = 1350*

Nous présentons ici les résultats obtenus sur des coques en acier d'épaisseur 0.1mm (R/t = 1350). Nous rappelons que le flambage reste dans ce cas purement élastique sur toute la gamme de pression considérée (0 à 2000 mbar).



**Figure 6.42** Influence de l'excentricité sur la contrainte critique en fonction de la pression, R/t = 1350, acier

Les résultats présentés en Figure 6.42 montrent que la dissymétrie a peu d'influence ici. Bien que des fortes non-linéarités apparaissent, la répartition des efforts ne fait pas baisser la contrainte critique de manière significative.

6.6.1.4 Conclusions

Les calculs effectués dans cette partie nous ont permis d'analyser l'influence des conditions expérimentales (méthode de fabrication, architecture du banc d'essais, mauvaise application de l'effort) sur le comportement et la contrainte critique des spécimens testés. Il en ressort que le recouvrement provoque une dissymétrie dans le chargement, et ce même pour un effort parfaitement centré. La mise en pression interne, en augmentant les non-linéarités et la localisation de la contrainte, aggrave cette dissymétrie. Ceci est donc à prendre en compte (de manière qualitative) lors de l'interprétation des contraintes critiques expérimentales.

6.6.2 Essais PM

Nous venons de voir que le recouvrement pouvait avoir une influence non négligeable lorsque la coque était soumise à de la compression. Dans le cas de la

flexion, nous plaçons ce recouvrement à l'opposé de la fibre où la contrainte de compression est maximale, et il paraît raisonnable de penser que celui-ci n'aura pas d'effet sur le comportement du spécimen. Dans le but d'évaluer l'influence des conditions expérimentales, nous jugeons également l'effet d'un effort mal appliqué.

#### 6.6.2.1 Modèle

Pour simuler les essais en flexion effectués sur le petit banc, nous reprenons le modèle utilisé en compression (méthode de calcul, conditions aux limites, maillage...) à la différence que c'est un effort tranchant qui est cette fois-ci appliqué au niveau du point de référence RP2 (voir Figure 6.43). Un angle vertical  $\theta$  est de plus introduit, afin de reproduire un mauvais alignement.

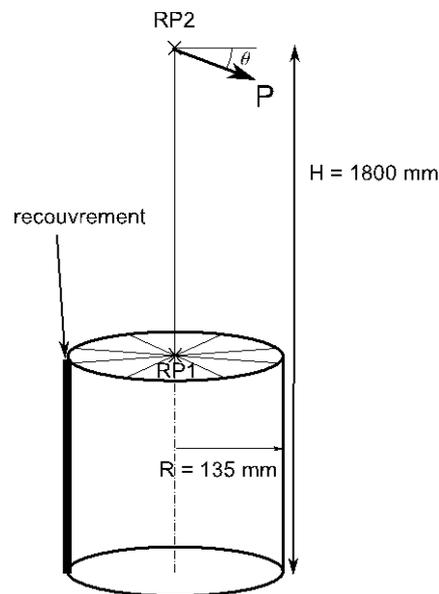
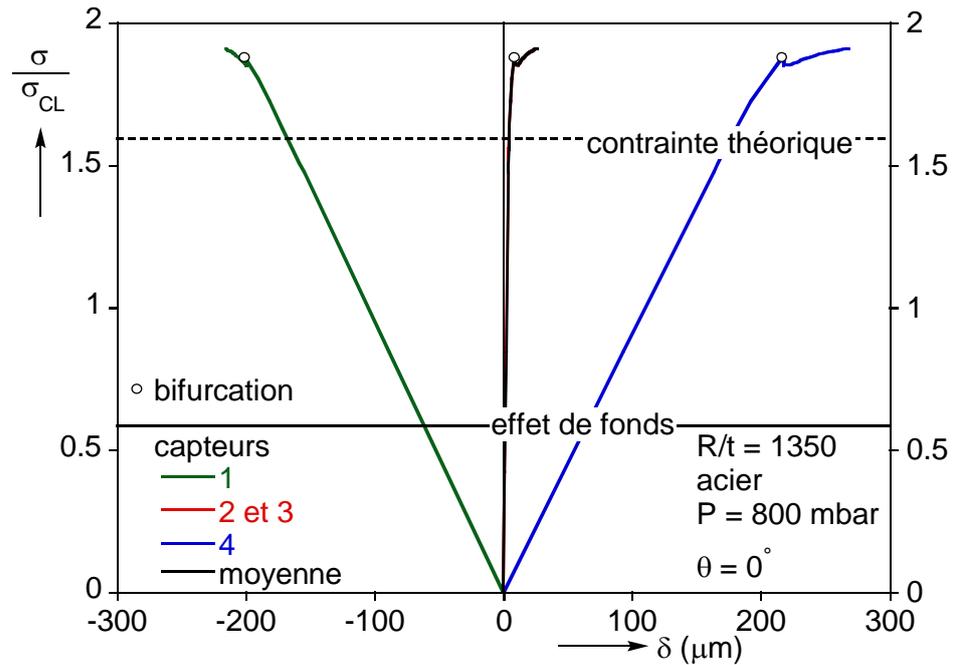


Figure 6.43 Modèle utilisé lors des simulations PM

#### 6.6.2.2 Analyse du comportement en pression interne et flexion

Nous commençons par étudier le comportement de coques avec une application parfaite de l'effort ( $\theta = 0^\circ$ ). Les coques sont donc sans imperfection à l'exception du recouvrement en partie tendue. La Figure 6.44 présente un exemple de résultat, obtenu sur une coque en acier, d'épaisseur 0.1 mm à une pression de 800 mbar.

Les déplacements mesurés sur chaque « capteur » sont tracés en fonction de la contrainte de compression induite par l'effort tranchant. La répartition des capteurs étant « parfaite » sur le modèle numérique, les résultats des capteurs 2 et 3 sont identiques, et égaux à la moyenne des quatre mesures. La moyenne est essentiellement nulle, une légère dissymétrie existe, due à la fibre tendue plus rigide puisque renforcée par la double épaisseur. On remarque de plus que la bifurcation arrive pour une contrainte environ 30% supérieure à la contrainte théorique.



**Figure 6.44** Exemple de courbes de chargement PM

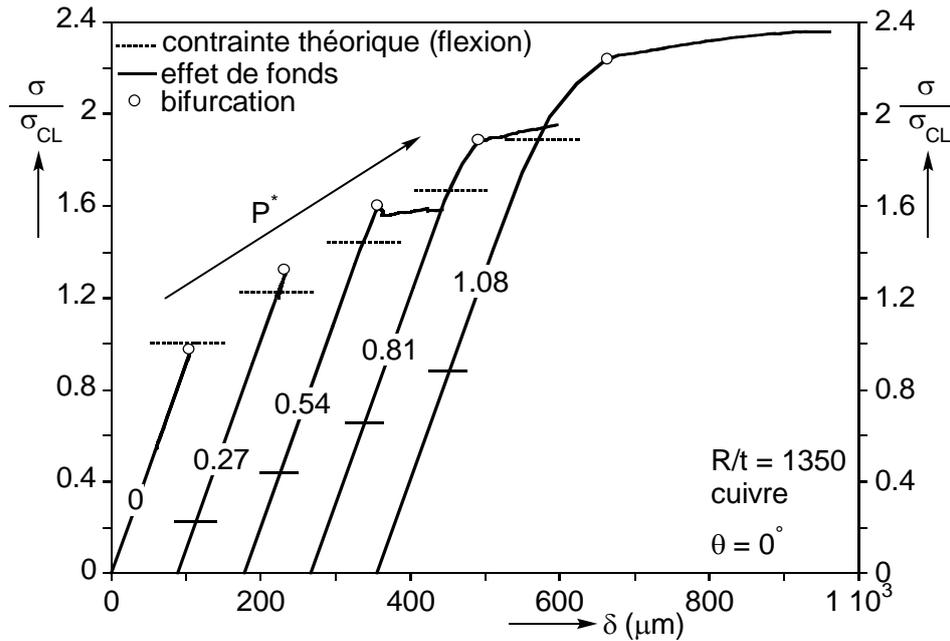
Après avoir présenté un exemple, seuls les résultats des capteurs n°4 sont tracés dans la suite de ce travail, sauf mention. Nous détaillons à présent l'évolution du comportement avec la pression de deux séries de coques, toujours avec une application parfaite de l'effort tranchant ( $\theta = 0^\circ$ ) :

- les coques très minces ( $R/t = 1350$ ) en cuivre
- les coques en aluminium ( $R/t = 675$ ) donnant un flambage élasto-plastique

Cuivre,  $R/t = 1350$

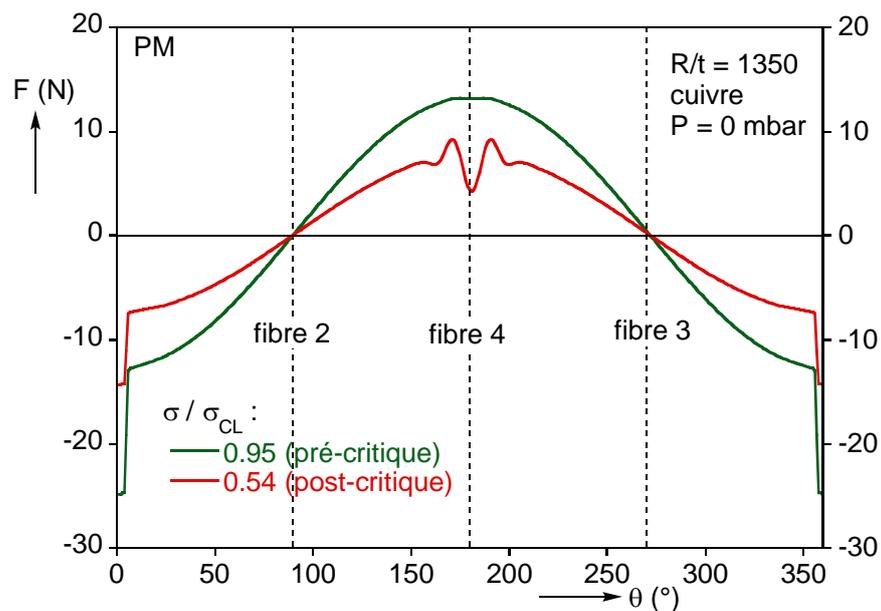
Les calculs sont effectués pour des pressions de 0, 200, 400, 600 et 800 mbar, couvrant donc le domaine étudié expérimentalement. Les comportements correspondants sont tracés en Figure 6.45.

Sans pression interne, la coque s'effondre pour une contrainte quasiment égale à la contrainte classique, après un régime initial linéaire. Dès qu'une faible pression est introduite, la contrainte critique dépasse la valeur théorique, grâce à l'effet membrane que nous mettrons en évidence ci-après. A 400 mbar ( $P^* = 0.54$ ), si la branche d'équilibre fondamentale est linéaire jusqu'à la bifurcation, le comportement post-critique est quasi stable. Les deux derniers essais montrent un comportement non-linéaire avant la bifurcation, avec la création d'ondes quasi-axisymétriques (mode théorique). Le changement de raideur est discontinu en ce point, et la structure peut encore supporter une charge et un écrasement non-négligeables.



**Figure 6.45** Courbes de chargement PM, R/t = 1350, cuivre

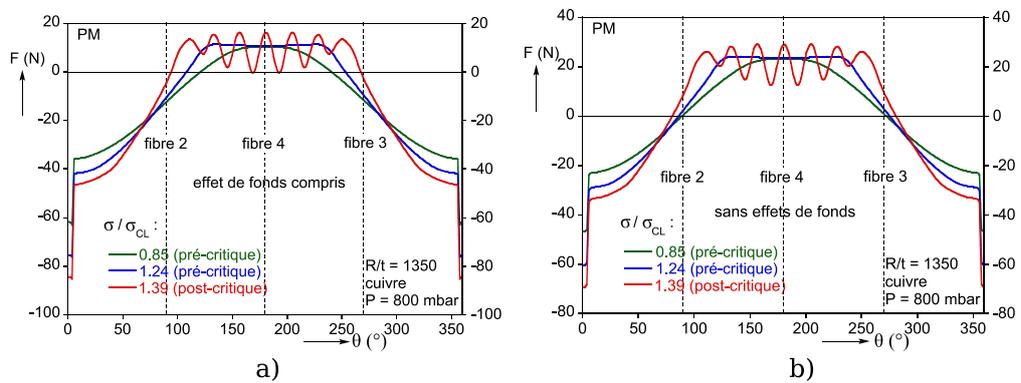
Nous proposons de mettre en évidence sur nos calculs l'effet membrane décrit par McComb [73] en étudiant plus particulièrement deux de ces cas. Le premier exemple concerne la coque sans pression interne. La force de réaction mesurée au niveau de la condition limite inférieure du cylindre est tracée à 2 instants : juste avant la bifurcation et dans le régime post-critique instable (Figure 6.46). On retrouve dans les deux cas une répartition quasi-sinusoidale des efforts : une moitié de la coque est en tension (valeurs négatives) et l'autre en compression (valeurs positives). La zone de recouvrement, d'épaisseur double, voit quant à elle un effort deux fois plus important afin d'assurer la continuité des contraintes.



**Figure 6.46** Force de réaction à 0 mbar, R/t = 1350, cuivre

L'effort de compression est maximal dans une partie limitée, c'est à cet endroit que se produit le cloquage. Après la bifurcation, l'effort chute, et la répartition reste principalement symétrique.

Lorsqu'une pression est présente, la répartition des efforts est bien évidemment changée, puisque toute la coque est initialement en traction. La Figure 6.46 montre les répartitions correspondant à 3 niveaux de chargement, avec (a) ou sans (b) la traction apportée par l'effet de fonds. Le premier cas nous permet de constater qu'une grande partie de la coque est en fait sous traction ( $66\%$  à  $0.85 \cdot \sigma_{CL}$  net), en accord avec le modèle de McComb. Il faut attendre la branche post-critique, et la propagation des cloques en pointes de diamant, pour retrouver  $50\%$  de la coque sous compression (courbe rouge).

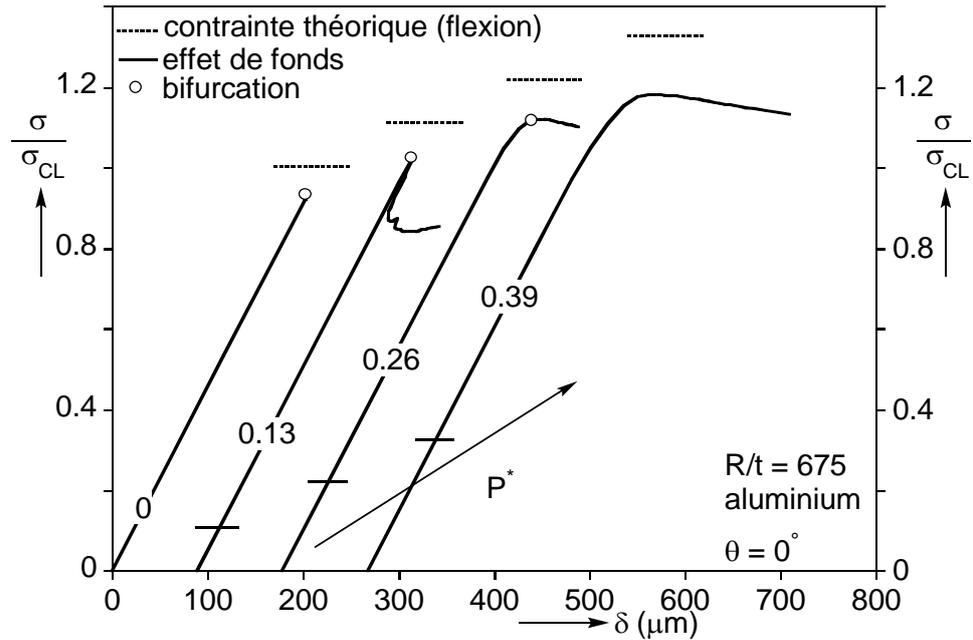


**Figure 6.46** Force de réaction à 800 mbar,  $R/t = 1350$ , cuivre, a) : avec la traction apportée par l'effet de fonds, b) : sans l'effet de fonds

En éliminant l'effet de fonds, seul le moment de flexion agit et la répartition devient quasi-symétrique avant l'atteinte de la contrainte classique (vert). Cette valeur classique est cependant dépassée, avec le développement d'ondes quasi-axisymétriques rappelant le mode de flambage théorique. L'effort de compression maximal, originellement sur une partie restreinte de la coque, se propage avec l'amplification de ces ondes, à l'opposé l'effort de traction augmente. Suite à la bifurcation, la redistribution des efforts apportée par l'effet membrane empêche la coque de s'effondrer.

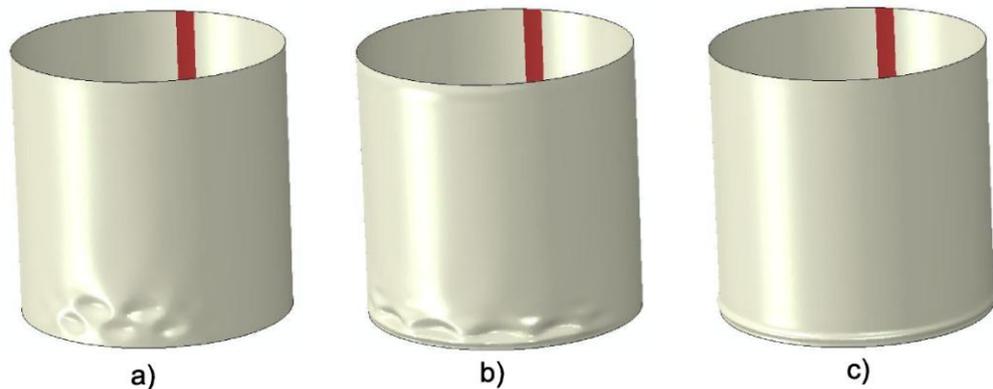
#### Aluminium, $R/t = 675$

Nous considérons cette fois des coques en aluminium et d'épaisseur 0.2 mm, et les résultats de calculs menés pour 4 différentes valeurs de pressions internes (0, 200, 400 et 600 mbar) sont tracés en Figure 6.47. Nous retrouvons des branches d'équilibre fondamentales linéaires aux faibles pressions, suivies par des branches instables après bifurcation.



**Figure 6.47** Courbes de chargement PM,  $R/t = 675$ , cuivre

Concernant le 3<sup>ème</sup> cas, à  $P^* = 0.26$ , la branche fondamentale voit l'apparition de non-linéarités provoquées par le phénomène de localisation des contraintes menant à un mode en « patte d'éléphant » vu précédemment. Ici cependant, une bifurcation apparaît avant l'atteinte du point limite, changeant le mode de déformation et entraînant la formation de cloques en pointes de diamant au bas de la partie comprimée. Par la suite, la charge diminue lentement avec le développement des cloques. Ce mode « mixte » plus ou moins similaire à celui observé expérimentalement est mis en évidence sur la Figure 6.48.



**Figure 6.48** Modes critiques PM observés numériquement,  $R/t = 675$ , aluminium,  
 a) : pointes de diamant ( $P = 0$  mbar), b) : mode mixte pointes de diamant/soufflet ( $P = 400$  mbar), c) : patte d'éléphant ( $P = 600$  mbar)

Enfin, lorsque la pression augmente encore, la structure est alors fortement fragilisée près des conditions aux limites et le soufflet peut se développer complètement, l'instabilité est donc de type point limite. On remarque éga-

lement que dans ce cas, l'influence de la plasticité empêche la contrainte critique de dépasser la valeur classique.

### 6.6.2.3 Effort non aligné

Après avoir étudié l'influence de la pression interne sur le comportement de nos coques « roulées-collées » et comportant un renforcement en partie tendue, nous évaluons maintenant l'effet d'un effort non aligné.

En effet, l'effort tranchant appliqué sur le mât de chargement n'est pas parfaitement « tranchant », et peut comporter une composante axiale (voir Figure 6.43). Nous considérons ici des imperfections réalistes, l'angle  $\theta$  prenant les valeurs relativement faibles de 0.5, 1 et 5°.

Nous pouvons évaluer cet effet analytiquement dans un premier temps. Pour une contrainte de compression créée uniquement par un moment, nous avons :

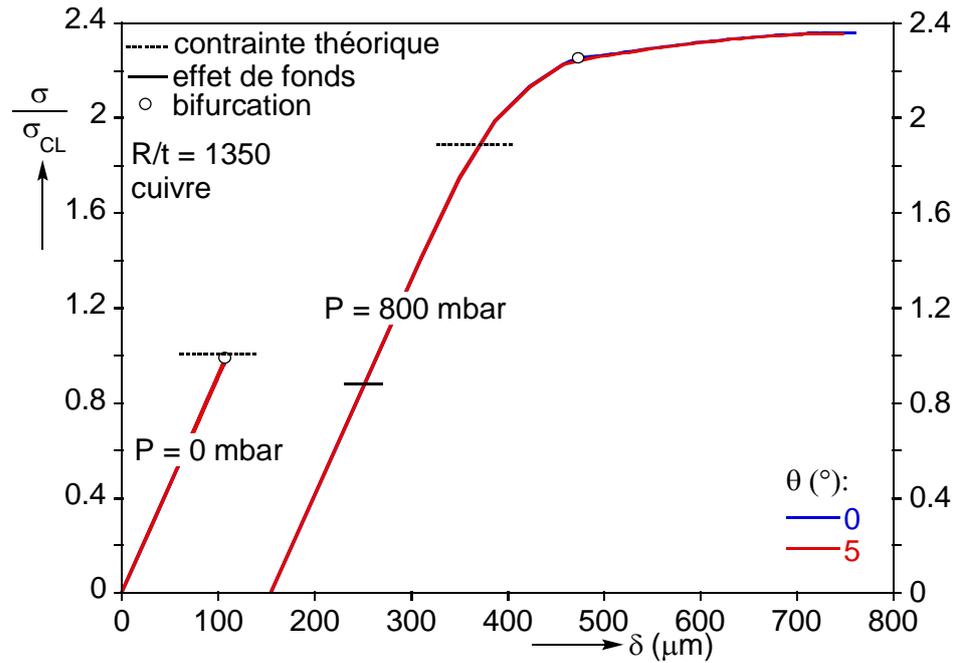
$$\sigma_M = \frac{P \cdot H}{\pi \cdot R \cdot t^2}$$

Si l'effort  $P$  n'est pas parfaitement aligné, il en résulte :

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\cos \theta \cdot P \cdot H}{\pi \cdot R \cdot t^2} + \frac{\sin \theta \cdot P}{2\pi \cdot R \cdot t} \\ &= \sigma_M \left( \cos \theta + \frac{\sin \theta}{2} \cdot \frac{R}{H} \right) \\ &= \sigma_M \cdot F(\theta) \end{aligned}$$

En étudiant la variation de la fonction  $F(\theta)$  entre 0 et 5° pour  $H/R = 13.3$ , il apparaît que l'influence de l'effort axial sur la contrainte totale est minime (moins de 0.1%) et donc à priori négligeable.

Nous vérifions ces constatations par calcul numérique (Figure 6.49) : les courbes de chargement sont quasiment identiques avec ou sans imperfection quelle que soit la pression, et la différence de charge critique atteint 1% de la contrainte classique au maximum sur certains cas. Nous retiendrons donc que cet effet peut être négligé dans l'interprétation des résultats.



**Figure 6.49** Influence d'un effort mal aligné sur le comportement en flexion,  $R/t = 1350$ , cuivre

#### 6.6.2.4 Conclusions

En simulant les conditions des essais de flexion et pression interne, nous avons pu vérifier que le recouvrement placé en partie tendue n'avait que peu (ou pas) d'influence sur le comportement des coques. De plus, nous avons pu mettre en évidence l'effet membrane, venant fortement stabiliser les cylindres et qui n'existe pas en compression. Un effort tranchant non horizontal ne semble quant à lui pas changer les contraintes critiques dans ce cas.

#### 6.6.3 Essais PT

Lorsque les coques sont testées en pression interne et cisaillement, le recouvrement est à  $90^\circ$  de la contrainte de cisaillement maximale et  $180^\circ$  de la contrainte de compression maximale. Comme pour la flexion, nous pensons donc à priori que le joint vertical n'aura que peu (ou pas) d'influence sur la contrainte de flambage.

Cependant, nous avons remarqué lors des essais que le cloquage progressif en cisaillement se produisait rarement de façon symétrique, indiquant une imperfection dans l'alignement du chargement. Le but est donc de reproduire cet effet lors des simulations numériques, afin d'évaluer son impact sur le comportement et la contrainte de flambage des différents types de coques testées.

##### 6.6.3.1 Modèle

La géométrie utilisée pour le calcul incrémental présente dans ce cas une légère imperfection modale ( $A/t = 0.05$ ) afin de provoquer la bifurcation et le chan-

gement de raideur observés en essai. Le point d'introduction de l'effort tranchant RP2 est cette fois-ci positionné au bord de la coque (voir Figure 6.50) afin de simuler les conditions expérimentales où le chargement s'effectuait au niveau de la frette supérieure. Une mauvaise application de l'effort est ici simulée par l'intermédiaire de l'angle horizontal  $\theta$ . Le modèle et la méthode utilisés sont par ailleurs similaires aux cas précédents.

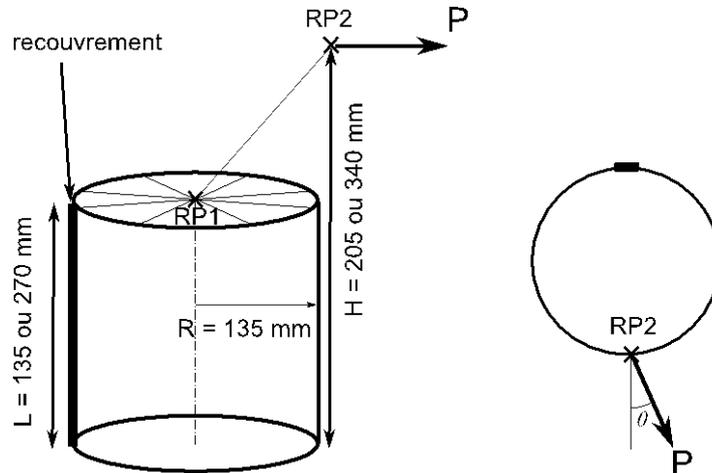


Figure 6.50 Modèle utilisé lors des simulations PT

### 6.6.3.2 Analyse du comportement en pression interne et cisaillement

Dans un premier temps, nous considérons l'évolution du comportement des coques avec la pression, puis nous analyserons l'effet que peut avoir un effort mal orienté.

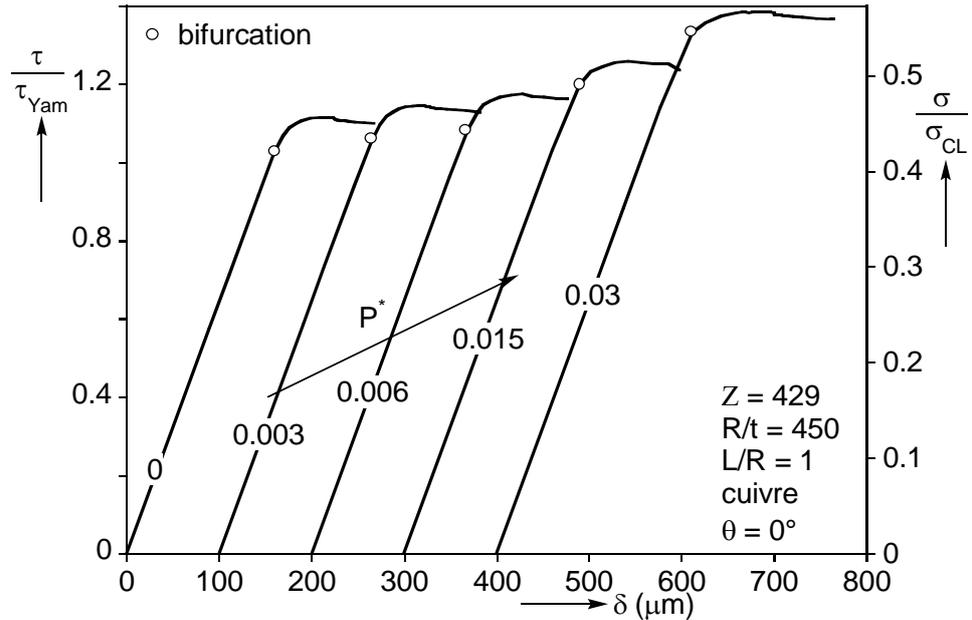
#### 6.6.3.2.1 Evolution avec la pression

Pour chaque type de coque testée, les calculs ont été effectués à 0, 20, 40, 100 et 200 mbar (de la même façon que les essais). L'effort tranchant est ici parfaitement appliqué (i.e.  $\theta = 0^\circ$ ) et le problème est donc parfaitement symétrique.

Matériau cuivre,  $Z = 429$

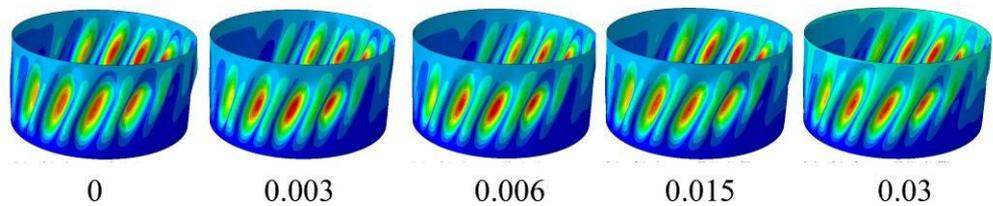
Les résultats des calculs effectués sur des coques en cuivre et d'épaisseur 0.3 mm sont tracés en Figure 6.51. Les courbes présentent toutes une allure similaire : la première partie est linéaire jusqu'à l'atteinte d'un point de bifurcation.

Pour une coque non pressurisée, la bifurcation est obtenue pour une contrainte de cisaillement pratiquement égale à la contrainte de Yamaki (valeur théorique). S'ensuit une branche stable avec une diminution progressive de la pente, traduisant le développement progressif de cloques inclinées. La raideur s'annule alors très rapidement : un maximum est obtenu, entraînant une instabilité par point-limite. La contrainte retombe légèrement, créant un plateau à contrainte quasi-constante, avant que la structure ne s'effondre. Avec la pression, le comportement change peu, la seule différence résidant en la contrainte de bifurcation qui augmente légèrement. On constate d'autre part que la contrainte de flexion associée à l'effort tranchant reste limitée.



**Figure 6.51** Courbes de chargement PT,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

La Figure 6.52 montre les configurations correspondant à la contrainte maximale. On retrouve bien entendu les modes typiques vus en essais. Si la forme des modes est en apparence identique (nous rappelons que la pression adimensionnelle  $P^*$  reste très faible), on peut toutefois noter un léger changement dans l'inclinaison des coques, se rapprochant au fur et à mesure de l'horizontale.

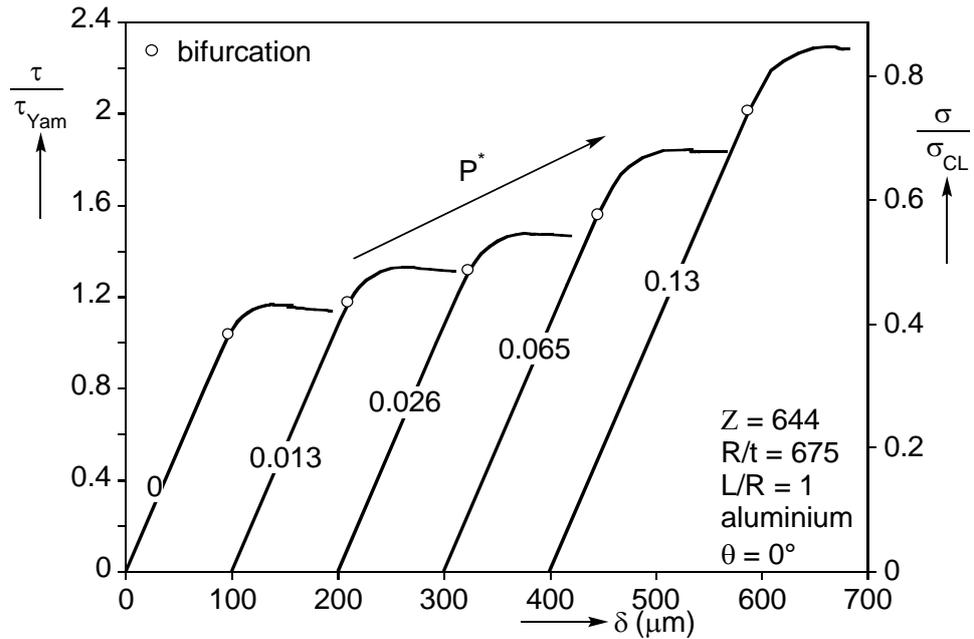


**Figure 6.52** Modes critiques PT,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

Matériau aluminium,  $Z = 644$

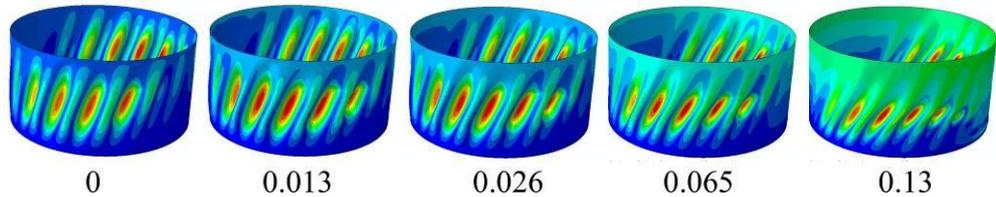
Nous étudions maintenant des coques un peu plus minces ( $R/t = 675$ ) et en aluminium (Figure 6.53). Le comportement initial est sensiblement identique au cas précédent : branche fondamentale linéaire, bifurcation au niveau de la contrainte de Yamaki et branche secondaire stable débouchant sur une instabilité par point-limite. L'influence de la pression est cependant plus prononcée ici, à la fois sur le comportement de la structure et sur les modes de flambage.

La réserve de charge entre le point de bifurcation et le point-limite augmente, mais en contrepartie la longueur du plateau de contrainte observé précédemment diminue. Pour  $P^* = 0.130$  (une pression relativement faible), la contrainte de bifurcation atteint 2 fois la valeur théorique de Yamaki.



**Figure 6.53** Courbes de chargement PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 1$ , aluminium

La tendance du côté des modes critiques (Figure 6.54) rejoint les observations expérimentales : nous avons une diminution de la taille des cloques, de pair avec le changement de leur inclinaison. Ceci est à rapprocher du fait que la contrainte de flexion devient de plus en plus importante.



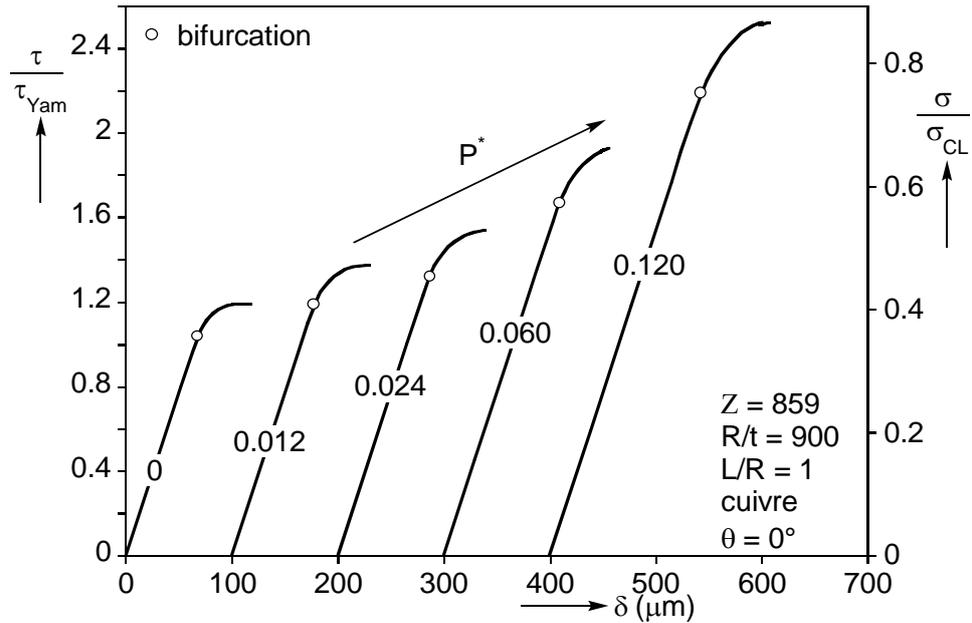
**Figure 6.54** Modes critiques PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 1$ , aluminium

Matériau cuivre,  $Z = 859$

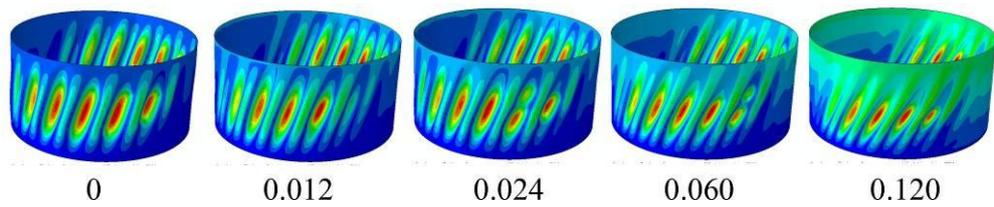
La Figure 6.55 présente les 5 résultats de calculs effectués sur des coques en cuivre, avec  $R/t = 900$ . Les courbes sont visiblement différentes de celles obtenues pour les cas précédents, l'effet de raidissement de la branche secondaire est en effet de plus en plus important.

Une réserve de charge importante est désormais disponible après l'apparition des premières cloques, et représente 15% de la charge de bifurcation lorsque  $P^* = 0.120$ . Les déformations post-critiques sont quant à elles de plus limitées.

Les modes critiques (Figure 6.56) diffèrent peu du cas précédent, et les mêmes conclusions s'appliquent ici.



**Figure 6.55** Courbes de chargement PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 1$ , cuivre



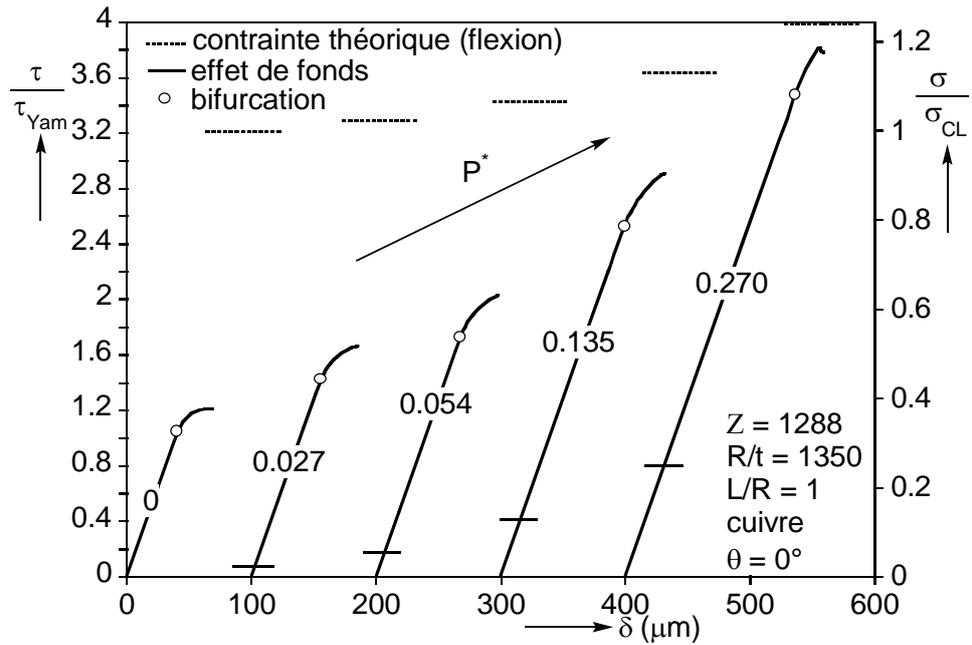
**Figure 6.56** Modes critiques PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

Matériau cuivre,  $Z = 1288$

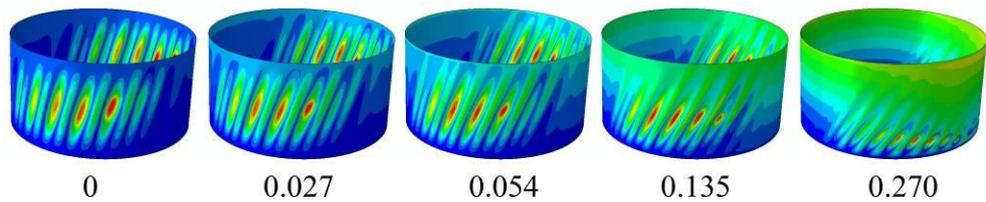
Une nouvelle série de résultats est cette fois-ci présentée pour des coques en cuivre ( $R/t = 1350$ ). Avec l'augmentation du paramètre de Batdorf, nous nous rapprochons de plus en plus facilement d'un comportement typique de flexion lorsque la pression interne augmente, comme en témoignent les courbes de chargement (Figure 6.57) et les modes critiques (Figure 6.58). Nous avons donc inclus sur le graphe des marques indiquant la part de l'effet de fonds dans la contrainte totale de flexion, ainsi que la contrainte théorique (classique).

La branche secondaire ne présente plus qu'un court plateau à  $P^* = 0$ , qui n'existe plus dès qu'une faible pression interne est présente. La partie non-linéaire se raccourcit, octroyant un gain de charge post-critique. Elle s'efface quasi-totalement lors du dernier calcul, pour lequel la contrainte de flexion atteint déjà près de 95% de la valeur théorique.

La coque flambe toujours en cisaillement, mais le passage à un mode de flexion est alors imminent, comme le confirme le mode critique correspondant en Figure 6.58 : les cloques de cisaillement ont quasiment disparues, et on distingue des cloques en pointe de diamant commençant à se former en partie comprimée.



**Figure 6.57** Courbes de chargement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , cuivre



**Figure 6.58** Modes critiques PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

Matériau acier,  $Z = 1288$

Le paramètre de Batdorf est identique à la série de calculs précédente, seul le matériau est changé. Nous retrouvons donc ici des comportements similaires (Figure 6.59), la pression adimensionnelle étant toutefois plus basse pour un même niveau de pression. Le mode de flexion tarde donc un peu plus à apparaître (la contrainte théorique n'est jamais atteinte), le cisaillement restant le mode de flambage principal même à 200 mbar (voir Figure 6.60).

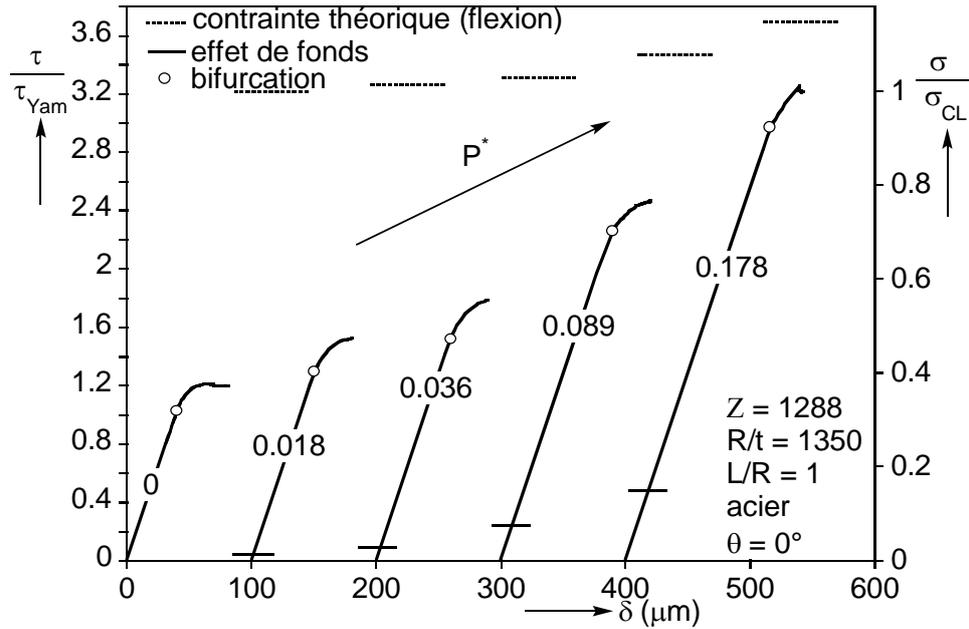


Figure 6.59 Courbes de chargement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , acier

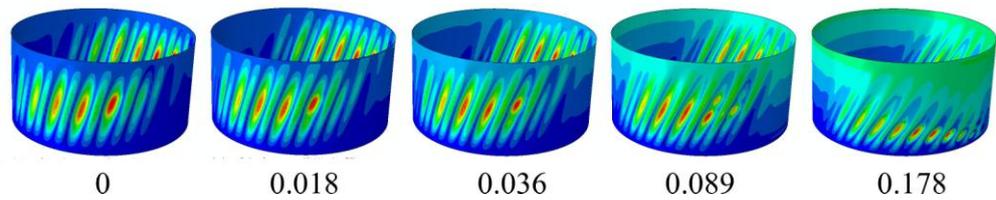


Figure 6.60 Modes critiques PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , acier

Matériau cuivre,  $Z = 1717$

Nous continuons notre progression dans les valeurs de  $Z$  étudiées, avec cette fois-ci des coques de longueur plus importante,  $L/R = 2$ . La contrainte de flexion appliquée augmente donc plus rapidement avec l'effort tranchant, et le mode de flambage de flexion tend à apparaître plus tôt.

La configuration suivante en est le premier exemple. Les courbes de la Figure 6.61 correspondent à des coques avec  $R/t = 450$  et montrent une évolution certaine en comparaison avec les résultats de la Figure 5.77. Les longs plateaux traduisant la formation progressive des modes de flambage en cisaillement laissent place à de courts régimes post-critiques avec peu de déformations. La contrainte de flexion atteint presque la contrainte classique, et le comportement se rapproche graduellement d'un comportement de type flexion.

Les modes critiques présentés en Figure 6.62 montrent une évolution également assez nette. La coque étant plutôt épaisse, les cloques de cisaillement n'occupent pas tout le flanc du cylindre. Avec la mise en pression, leur taille et leur inclinaison diminuent, restant malgré tout bien distinctives d'un mode de flambage de cisaillement.

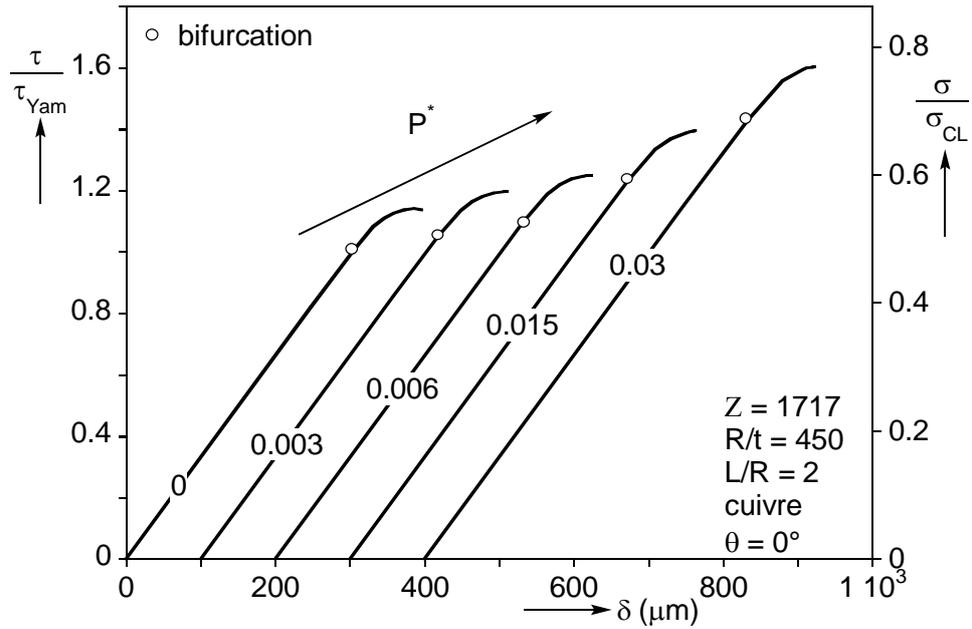


Figure 6.61 Courbes de chargement PT, R/t = 450, L/R = 2, cuivre

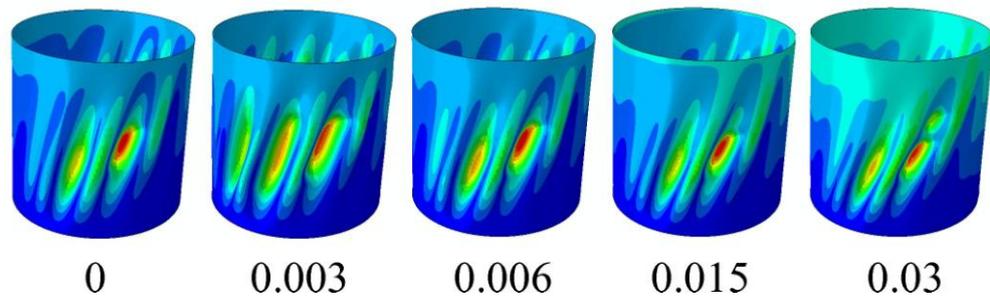
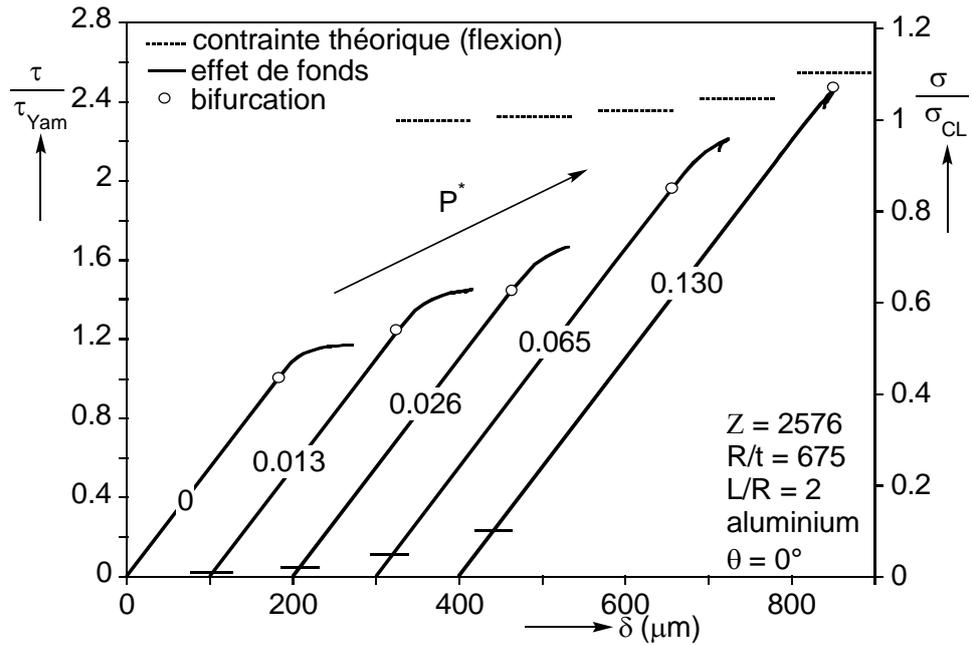


Figure 6.62 Modes critiques PT, R/t = 450, L/R = 2, cuivre

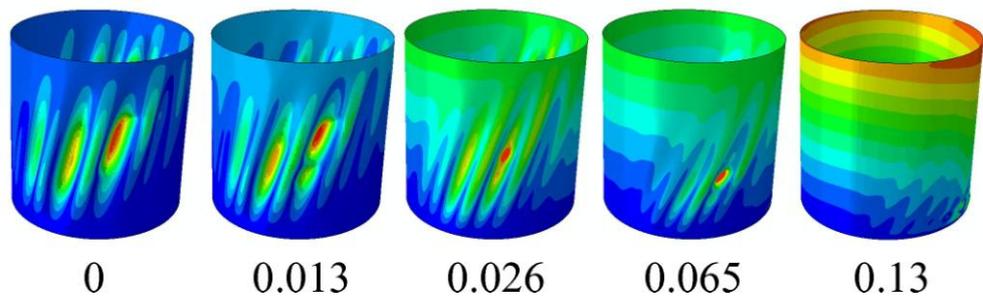
Matériau aluminium,  $Z = 2576$

Le changement de mode de flambage devient évident dans le cas présent. Avec une épaisseur de 0.2 mm, le paramètre de Batdorf est maintenant égal à 2576 (les coques testées par Yamaki avaient un  $Z$  maximum de 2000). L'évolution notée précédemment dans le comportement s'accroît, comme le prouvent les courbes de chargement (Figure 6.63) et les modes critiques (Figure 6.64).

En effet, dès  $P^* = 0.065$ , le régime post-critique a quasiment disparu. Le mode critique présente toujours des cloques caractéristiques de cisaillement qui sont cependant de taille fortement réduite, et localisées au bas du cylindre, près de la fibre comprimée. Lorsque  $P^* = 0.130$  enfin, la « transformation » du mode critique est quasi-complète : le comportement est purement linéaire jusqu'au point de bifurcation, suivi d'une branche post-critique instable. La contrainte théorique de flexion est alors pratiquement atteinte, et les cloques sont de type « pointe de diamants », concentrées au niveau de la fibre comprimée. Des déformations de cisaillement peuvent toutefois encore être observées.



**Figure 6.63** Courbes de chargement PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium



**Figure 6.64** Modes critiques PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium

Matériau cuivre,  $Z = 3434$

La longueur des coques est toujours la même, et leur épaisseur continue de diminuer, résultant en une augmentation de  $Z$ , maintenant égal à 3434. Les pressions adimensionnelles sont similaires au cas précédent, et on retrouve une évolution du comportement et du mode de flambage (Figures 6.65 et 6.66), du cisaillement vers la flexion. La pression adimensionnelle seuil est située entre 0.06 et 0.12.

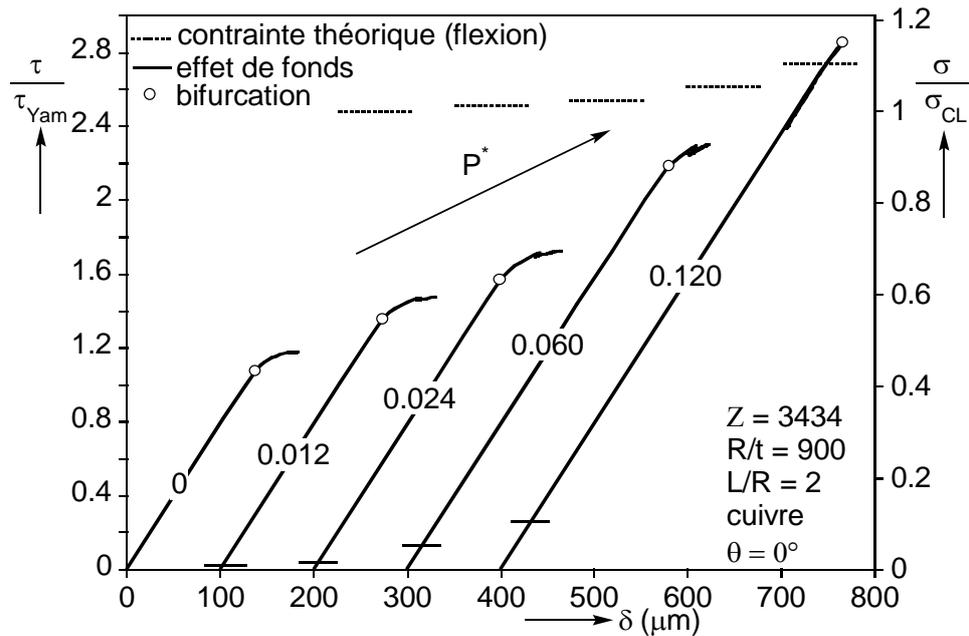


Figure 6.65 Courbes de chargement PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

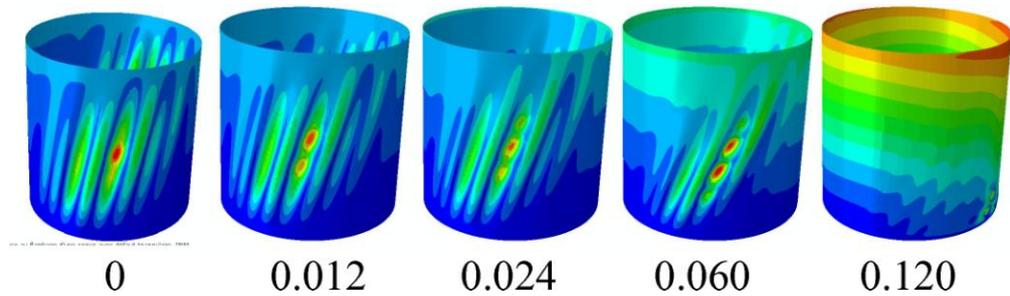


Figure 6.66 Modes critiques PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

Matériau cuivre,  $Z = 5151$

Les deux dernières configurations simulées, avec  $R/t = 1350$ , nous donnent un paramètre de Batdorf plutôt élevé, et des pressions adimensionnelles plus importantes que précédemment.

La progression vers un mode de flambage en flexion est donc très rapide et on observe dès 100 mbar ( $P^* = 0.135$ ) une branche fondamentale linéaire donnant lieu à une branche secondaire instable après bifurcation (voir Figure 6.67). La contrainte critique théorique est alors atteinte et même dépassée en flexion, le mode (Figure 6.68) voit l'apparition de cloques en pointe de diamant sur la partie comprimée de la structure, alors que des déformations de cisaillement sont encore visibles au bas du flanc du cylindre. Pour 200 mbar en revanche ( $P^* = 0.270$ ) le cisaillement a complètement disparu, et les modes en pointes de diamant sont parfaitement développés.

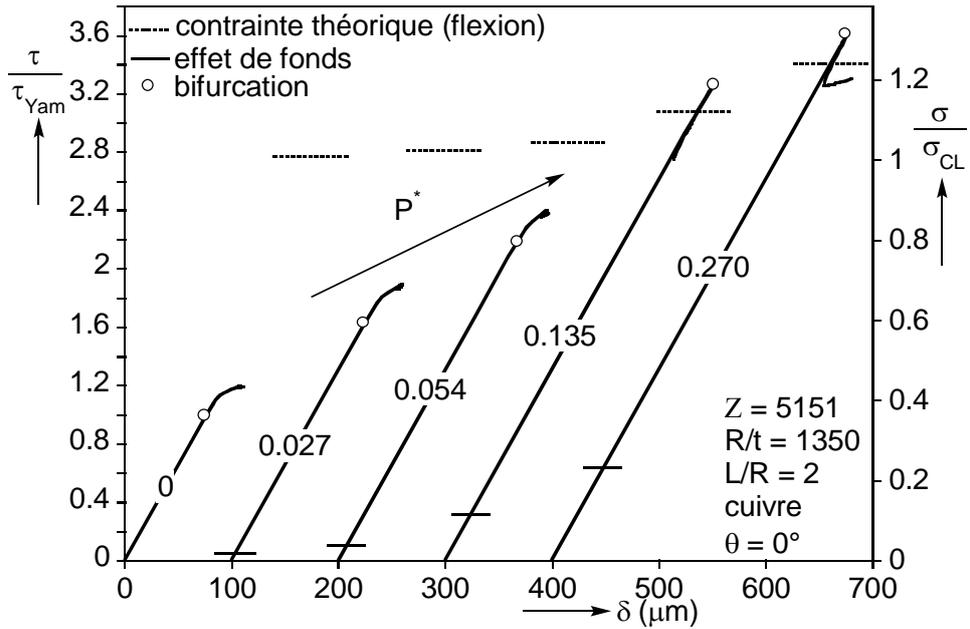


Figure 6.67 Courbes de chargement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

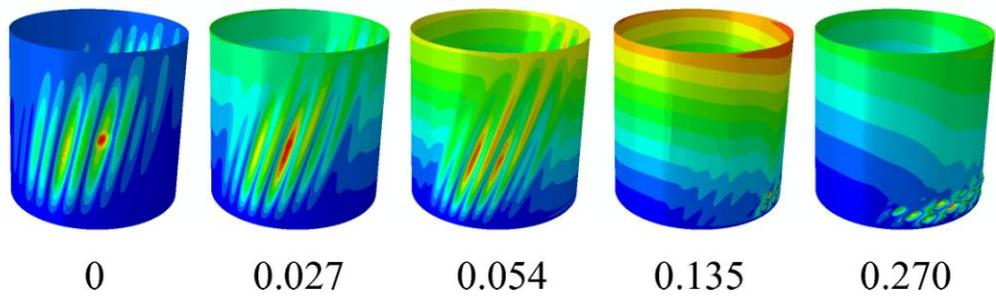


Figure 6.68 Modes critiques PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

Matériau acier,  $Z = 5151$

La géométrie est identique au cas ci-dessus, seul le matériau change, donnant des valeurs de  $P^*$  plus faibles. La raideur et la limite élastique plus importantes ne semblent pas influencer les résultats (Figures 6.69 et 6.70).

Le régime post-critique observé en cisaillement est initialement déjà très court, de par la contrainte de flexion importante et le paramètre de Batdorf relativement élevé. Dès  $P^* = 0.089$ , la contrainte classique est atteinte, cependant de légères non-linéarités sont toujours présentes, et le mode de flambage dominant reste le cisaillement. La pression seuil est donc quasiment atteinte, et il est donc implicite de voir apparaître le mode de flexion pour le calcul suivant effectué à  $P^* = 0.178$ .

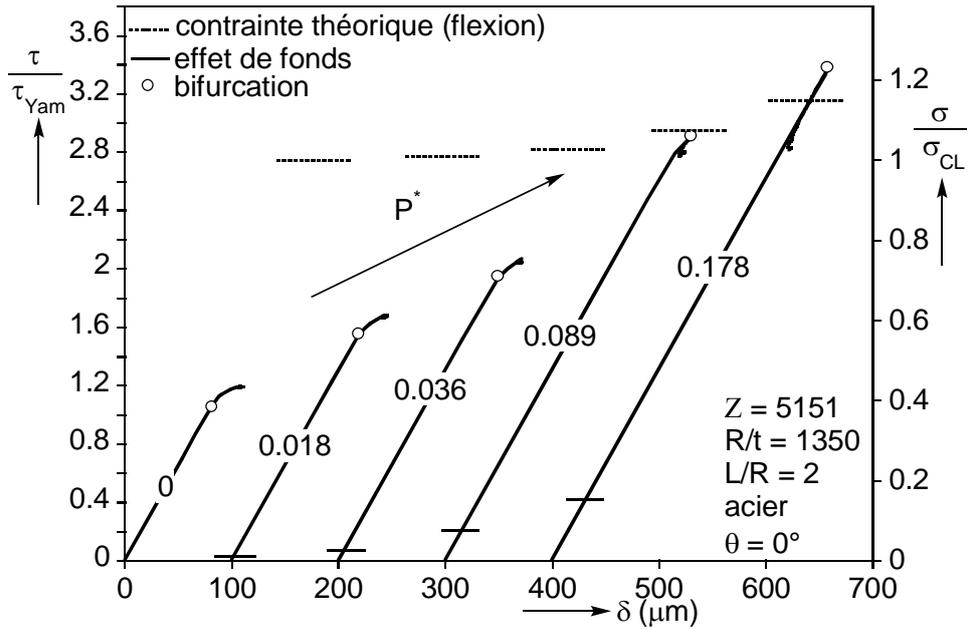


Figure 6.69 Courbes de chargement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , acier

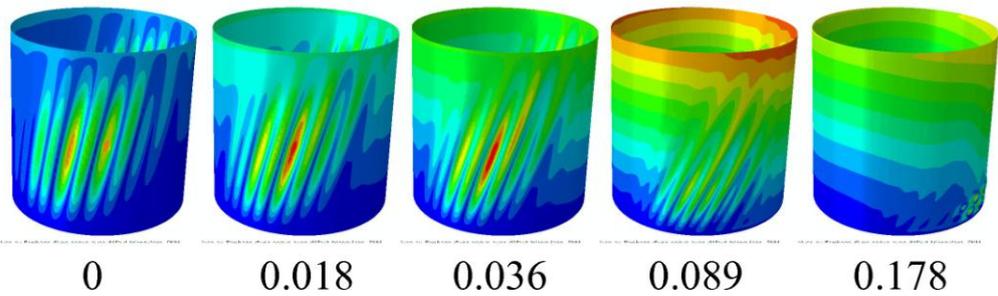


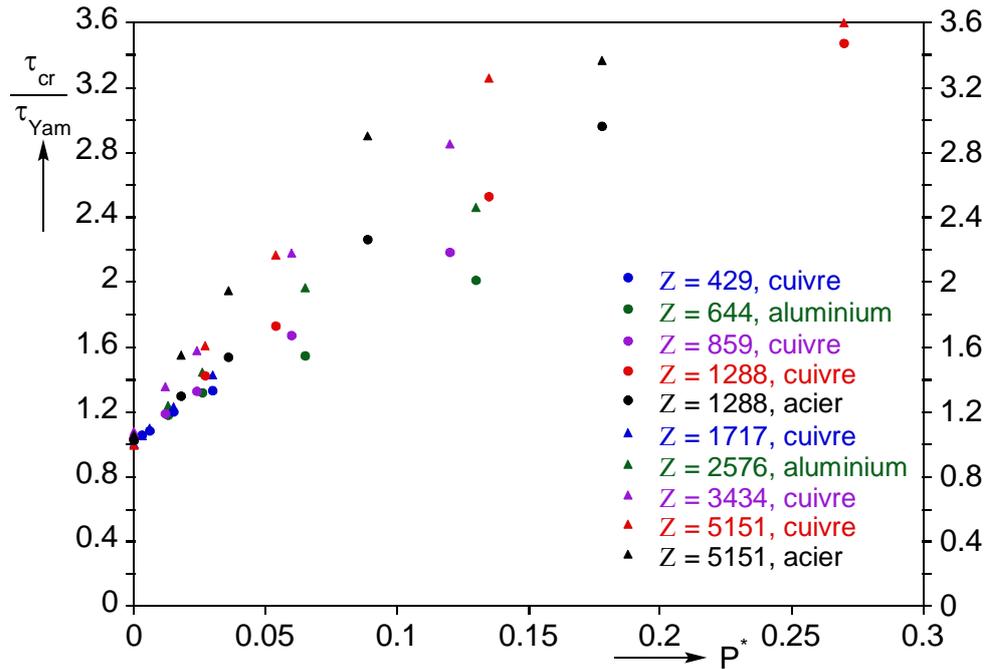
Figure 6.70 Modes critiques PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , acier

### 6.6.322 Contraintes critiques

Les résultats numériques montrent, quelle que soit la valeur de  $Z$ , une contrainte de cloquage initiale proche de la contrainte de Yamaki (Figure 6.71), ce qui confirme que  $\tau_{Yam}$  est une valeur de référence pertinente pour la bifurcation sous cisaillement.

L'évolution de la charge de cloquage en fonction de  $P^*$  est ensuite propre à chaque type de coque, et dépend des paramètres géométriques. La progression est initialement plus rapide pour les coques avec  $L/R = 2$  (représentées par des triangles). Ces coques sont cependant plus sensibles à la flexion, et passé  $P^* = 0.15$ , cette tendance semble s'inverser : pour les coques avec  $L/R = 1$  (ronds sur le graphe), le cisaillement reste le mode de flambage principal, et leur évolution n'est pas freinée sur la plage de pression étudiée.

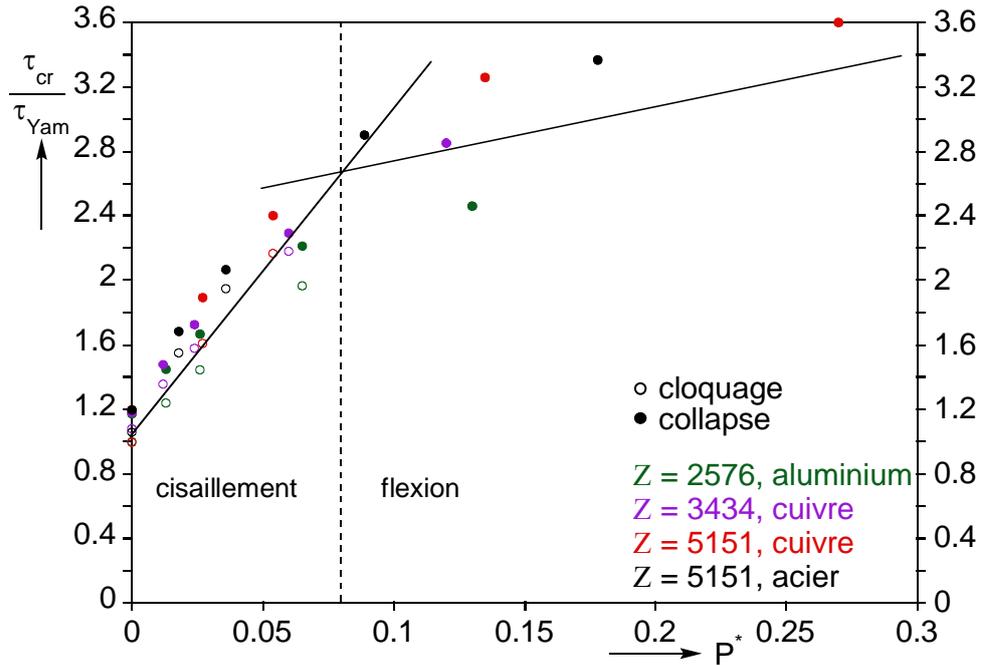
Enfin, la comparaison de ces contraintes de cloquage avec les résultats expérimentaux (Figure 5.105) montre une bonne concordance dans les tendances observées.



**Figure 6.71** Contraintes critiques de cloquage PT obtenues par calcul

Nous nous intéressons maintenant à la différence cloquage/collapse et à la transition vers un mode de flexion. La Figure 6.72 présente les contraintes critiques de cloquage (cercles vides) et de collapse (cercles pleins) pour les 4 plus importantes valeurs de  $Z$  étudiées. La réserve de charge après la bifurcation varie avec  $Z$  et  $P^*$  ; elle est, d'après ce graphe et les courbes de comportement présentées précédemment, d'environ  $0.2 \cdot \tau_{Yam}$  en moyenne. Cependant, comme nous l'avons observé numériquement et expérimentalement, la bifurcation est suivie d'un régime instable à partir d'une certaine pression seuil. Ce seuil est mis en évidence sur le graphe de la Figure 6.72 : à gauche, le cisaillement est prédominant, les contraintes critiques augmentent rapidement, cloquage et collapse sont différenciés. Lorsque la flexion prend le dessus, la tendance des contraintes critiques est changée, cloquage et collapse coïncident.

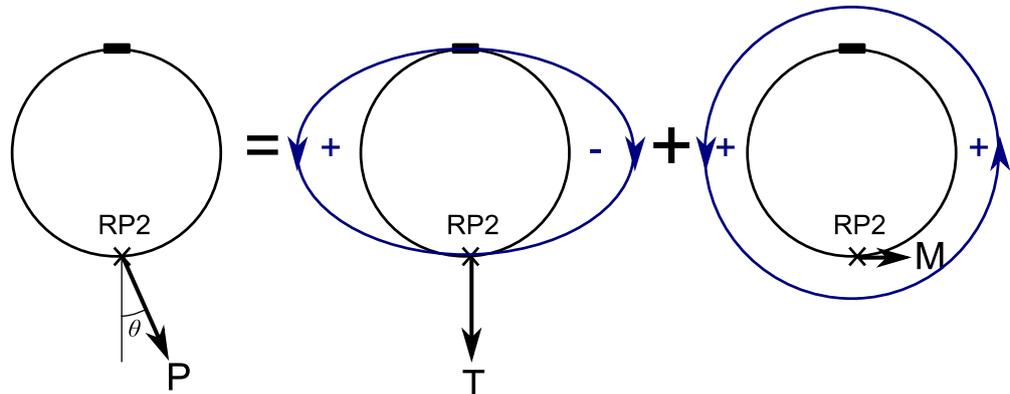
Nous trouvons ici une pression adimensionnelle seuil d'à peu près 0.08 pour tous les feuillards. Pour ces configurations ( $L/R = 2$ ,  $R/t = 675 / 900 / 1350$ ), on retrouve une valeur plus faible que celle pouvant être déduite des résultats du §6.3, confirmant ainsi le conservatisme de ces derniers. Nous rappelons que l'étude paramétrique avait été réalisée dans le cas linéaire ; en incluant les non-linéarités géométriques et matériau dans la procédure de Riks, le passage d'un mode de cisaillement à un mode de flexion s'effectue plus rapidement. Il serait possible d'affiner la valeur de la pression seuil plus encore en incluant les imperfections géométriques.



**Figure 6.72** Contraintes critiques de cloquage/collapse PT obtenues par calcul

6.6.323 Influence d'un effort mal orienté

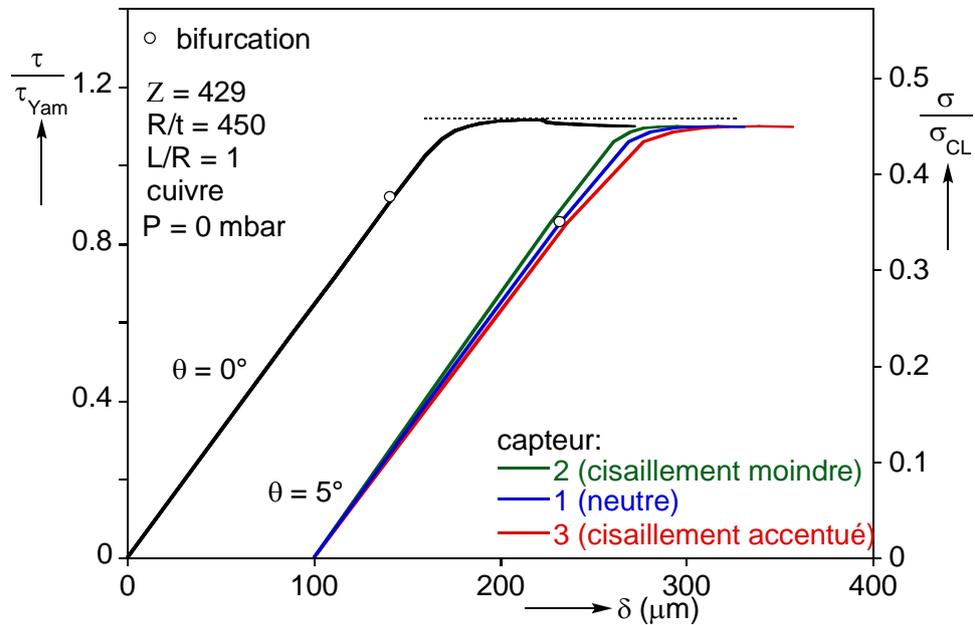
L'effort n'est en réalité pas parfaitement aligné avec l'axe du spécimen. En introduisant une composante tangentielle dans le chargement, nous transformons la charge vue par la coque : au cisaillement produit par l'effort tranchant (partie radiale de l'effort) s'ajoute un moment de torsion (voir Figure 6.73).



**Figure 6.73** Décomposition du chargement vu par la coque

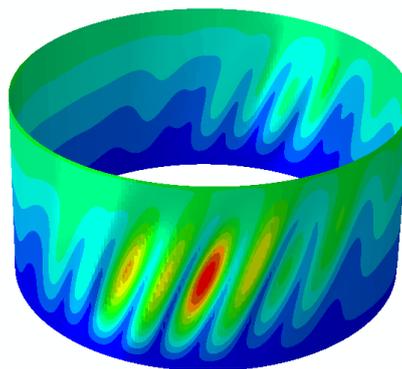
Une dissymétrie est donc créée, puisque le moment de torsion augmente la contrainte de cisaillement sur l'un des flancs de la coque et la diminue de l'autre. Des calculs paramétriques ont été effectués avec différentes valeurs de  $\theta$  (0, 0.5, 1 et 5°) pour chaque type de coque. Nous en présentons ici les conclusions principales, au travers de trois exemples.

Le premier point concerne des coques avec  $Z = 429$ , sans pression interne, présentant donc un comportement de type cisaillement pur. La Figure 6.74 montre les résultats de deux calculs, l'un sans imperfection de chargement ( $\theta = 0^\circ$ ) et l'autre avec un angle de  $5^\circ$ . Les déplacements horizontaux sont récupérés en différentes positions de la coque (voir Figure 6.26).



**Figure 6.74** Influence d'un effort mal aligné,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

Dans le cas « parfait » ( $\theta = 0^\circ$ ), aucune distinction ne peut être faite entre les différents capteurs : la bride supérieure bouge en translation, les déplacements sont donc identiques en tout point. Ceci montre par ailleurs que le recouvrement seul n'a aucune influence sur le chargement par effort tranchant.

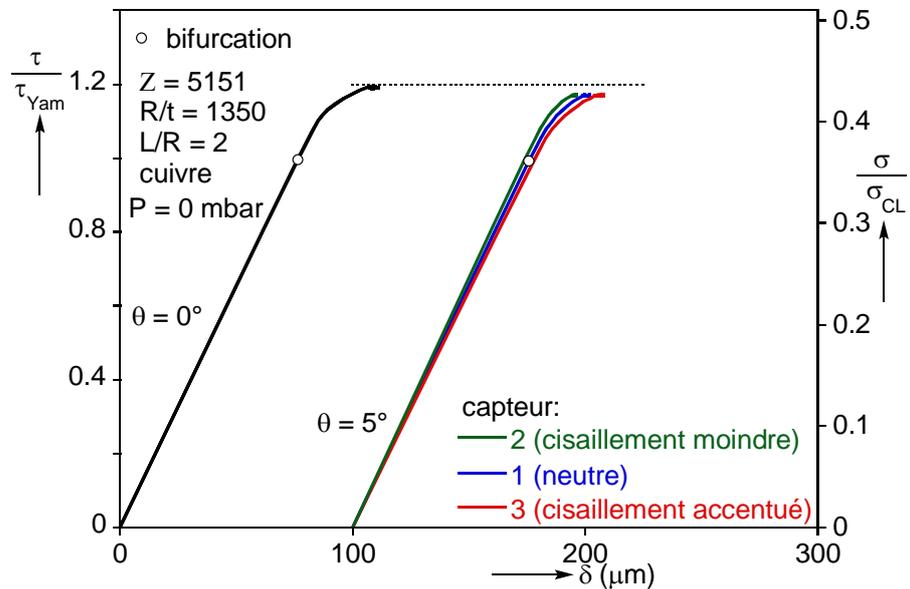


**Figure 6.75** Influence d'un effort mal aligné sur les déformations post-critiques,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

Lorsqu'en revanche, un angle est introduit, la bride supérieure bouge principalement en translation, mais une légère rotation créée par le moment de torsion produit un déphasage entre les mesures. Le déplacement est alors accéléré ou ralenti suivant la position considérée. Un flanc de la structure voit donc

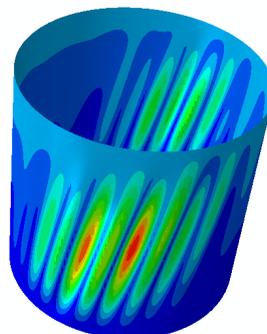
un déplacement et une contrainte de cisaillement plus importants, provoquant une bifurcation prématurée, et la formation de cloques de cisaillement qui se développent lors d'un régime post-critique non-linéaire (voir Figure 6.75). De l'autre côté en revanche, les cloques apparaissent à peine. Il en résulte que la charge de bifurcation est réduite d'à peu près 7%, alors que la différence en termes de charge maximale n'est que de 2% au plus (car les contraintes maximales en torsion et en effort tranchant sont très proches).

Pour le cas suivant, la configuration ( $Z = 5151$ ,  $P = 0$  mbar) nous donne un flambage par cisaillement avec cependant une évolution vers la flexion : le régime non-linéaire suivant la bifurcation est plus court (Figure 6.76). Le cisaillement n'étant plus « pur », l'écart entre les différents capteurs est moindre.



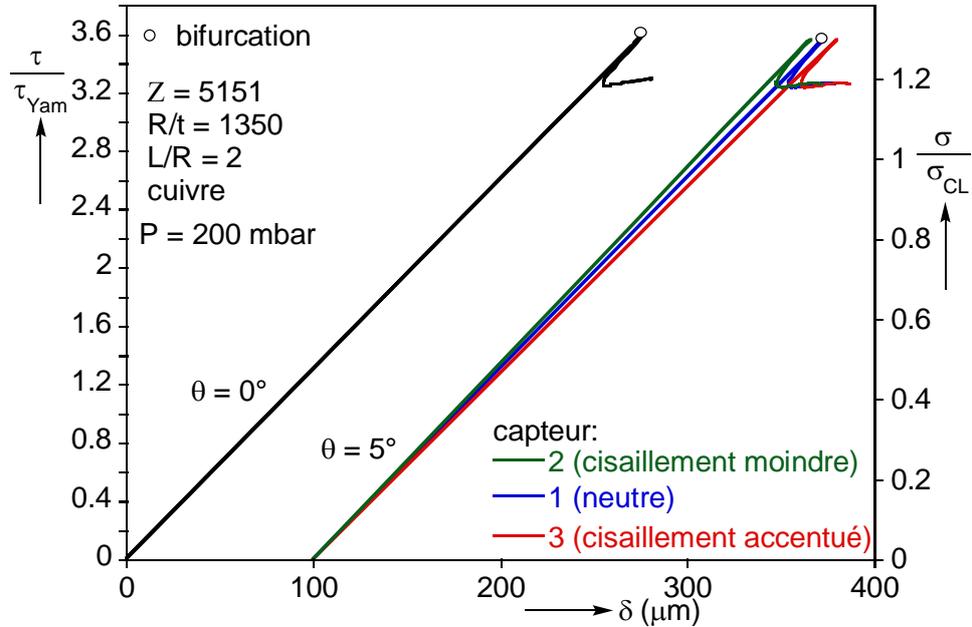
**Figure 6.76** Influence d'un effort mal aligné,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , 0 mbar

Le mode observé (Figure 6.77) traduit bien ce fait, puisque des cloques se forment tout de même clairement des deux côtés. Les contraintes de bifurcation et de collapse ne sont alors réduites que de 1% environ.



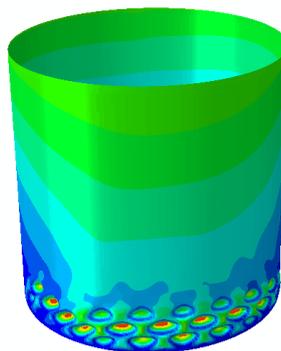
**Figure 6.77** Influence d'un effort mal aligné sur les déformations post-critiques,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , 0 mbar

Enfin, nous nous penchons maintenant sur un exemple ( $Z = 5151$ ,  $P = 200$  mbar) présentant comme nous l'avons vu, un comportement typique de flexion : atteinte de la contrainte classique pour une bifurcation donnant lieu à un régime instable (Figure 6.78). Dans ce cas, la formation des cloques de cisaillement est inhibée par la pression, et le fait que la contrainte de cisaillement soit dissymétrique n'influence donc pas le comportement de la coque.



**Figure 6.78** Influence d'un effort mal aligné,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , 200 mbar

Le chargement revient donc à une combinaison de flexion et de torsion (très faible), introduisant tout de même une légère dissymétrie dans les cloques en pointe de diamant en partie comprimée (voir Figure 6.79). La contrainte de bifurcation est réduite de moins de 1%.



**Figure 6.79** Influence d'un effort mal aligné sur les déformations post-critiques (partie comprimée),  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , 200 mbar

### 6.6.3.3 Conclusions

Les simulations effectuées sur des coques parfaites en cisaillement et pression interne nous ont permis de retrouver les comportements observés en essais,

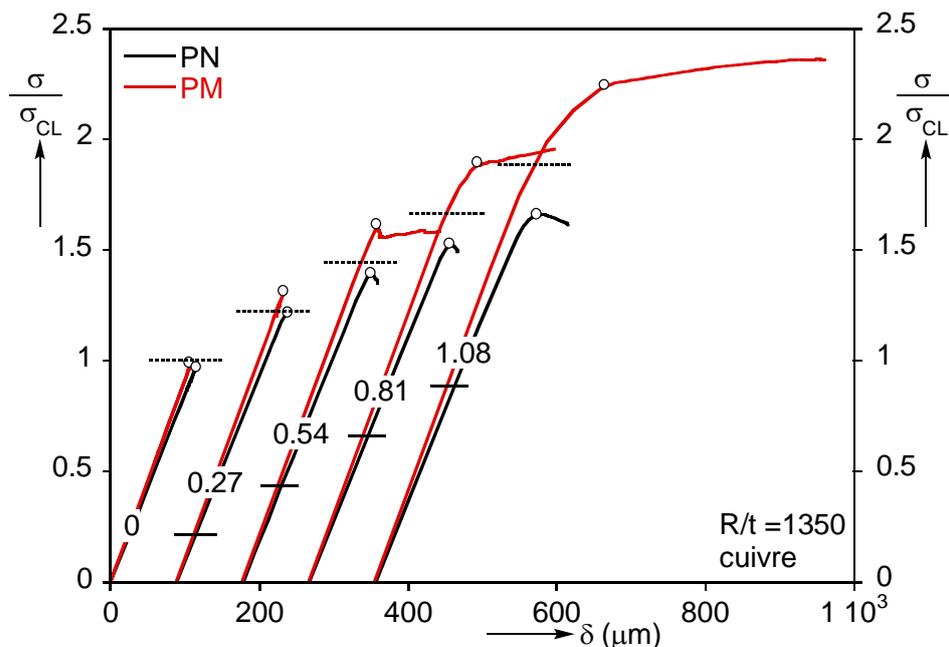
avec une transition d'un mode de cisaillement vers un mode de flexion, selon la géométrie et le niveau de pression interne. Nous retenons d'autre part que les conditions expérimentales (renforcement en partie « tendue », création d'une légère torsion dans l'application de l'effort) ont de manière générale une faible influence sur les résultats. Le comportement s'en retrouve cependant plus ou moins changé selon le cas étudié : pour un flambage en cisaillement, les déformations se localisent d'un côté de la structure, réduisant légèrement la contrainte de bifurcation (de 7% au maximum).

## 6.7 Comparaison flexion/compression

Nous avons pu remarquer dans les résultats numériques les mêmes différences fondamentales entre les chargements de flexion et de compression des coques pressurisées qui sont ressorties de la campagne expérimentale. Nous mettons à nouveau ces distinctions en évidence.

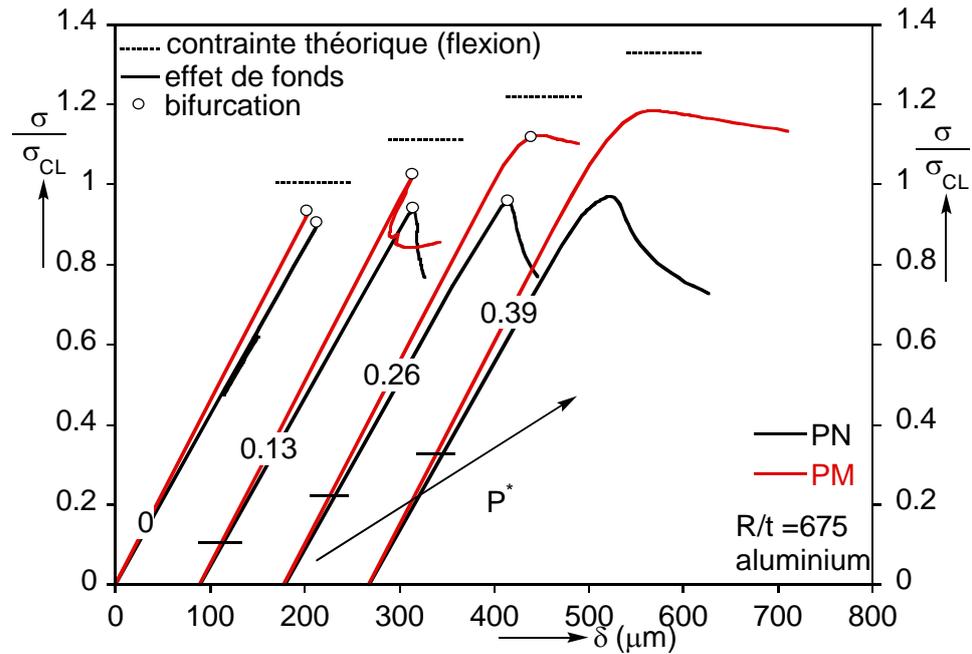
### 6.7.1 Comportement

Les simulations effectuées nous permettent de confirmer les tendances observées lors des essais ; nous en présentons ici deux exemples. La Figure 6.80 montre les résultats obtenus sur des coques en cuivre d'épaisseur 0.1 mm ( $R/t = 1350$ ) au paragraphe §6.6. Sans pression interne, les branches d'équilibre sont quasi identiques : une légère dissymétrie affecte cependant le chargement de compression, diminuant la raideur et la contrainte critique. Avec l'ajout d'une pression, deux tendances distinctes sont mises en évidence : la pression stabilise fortement la structure sous flexion, permettant une branche post-critique stable après le cloquage.



**Figure 6.80** Comparaison des comportements de coques en cuivre ( $R/t = 1350$ ) pressurisées en compression (PN) ou en flexion (PM)

Nous répétons l'exercice de comparaison pour une série de coques fragilisée rapidement par la pression en développant un mode en patte d'éléphant (Figure 6.81). Une fois encore, le chemin d'équilibre pour un chargement de flexion est clairement plus stable qu'en compression. Bien que le changement de mode de flambage s'opère dans les deux cas pour une pression comparable, la contrainte maximale ainsi que le comportement post-critique présentent des différences non-négligeables malgré l'influence de la dissymétrie en compression.

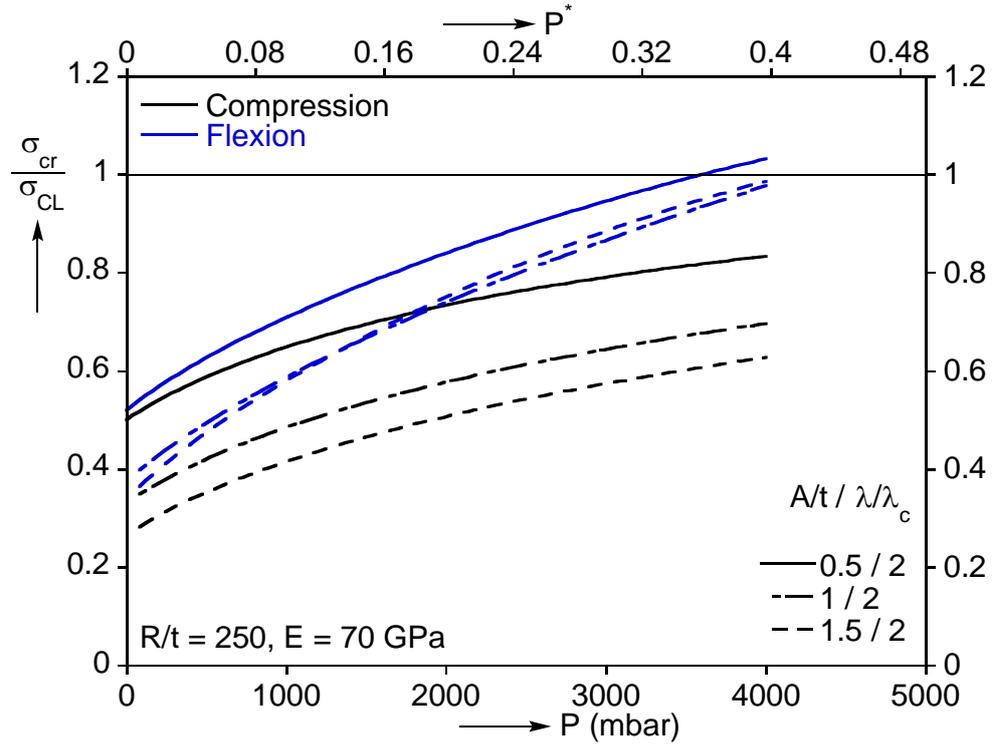


**Figure 6.81** Comparaison des comportements de coques en aluminium ( $R/t = 675$ ) pressurisées en compression (PN) ou en flexion (PM)

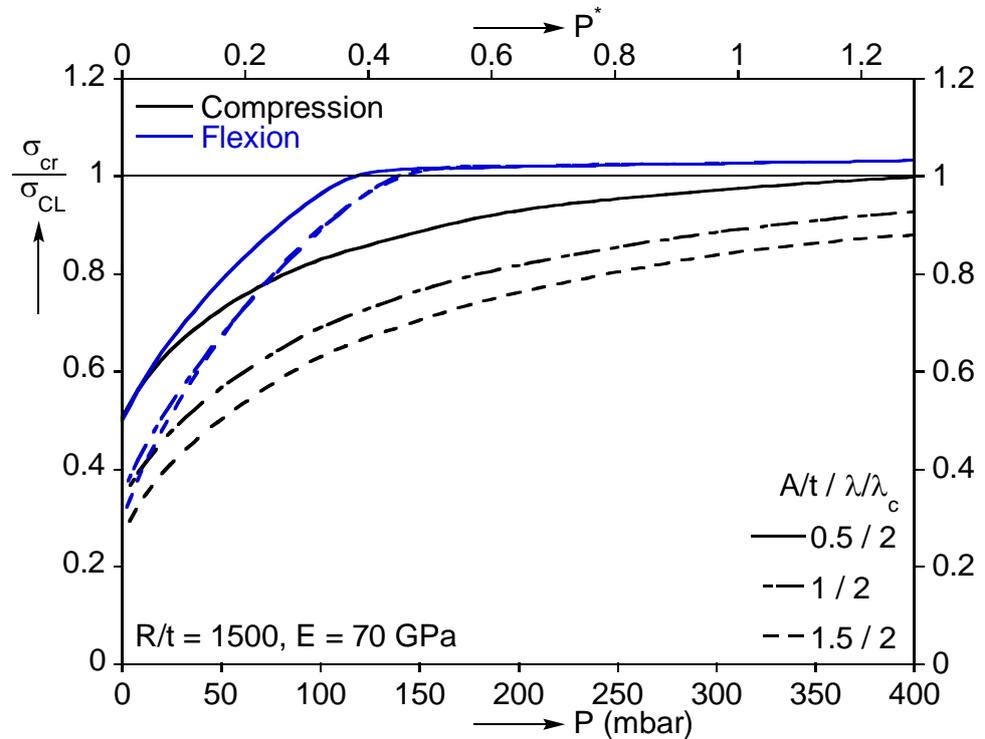
### 6.7.2 Contraintes critiques

Afin de pouvoir jauger équitablement les différences entre les deux types de chargement, nous choisissons de comparer les résultats obtenus pour un même défaut (forme triangulaire, de taille identique). Les résultats, tracés en Figure 6.82 pour  $R/t = 250$  et en Figure 6.83 pour  $R/t = 1500$ , confirment les résultats expérimentaux.

La contrainte critique d'une coque avec des imperfections (donc toutes les structures réelles) augmente plus rapidement avec la pression interne lorsqu'elle soumise à un chargement de flexion que lorsqu'elle est sous compression, pour toute la gamme de  $R/t$  étudiée. L'effet membrane « empêche » de plus en plus la coque de s'effondrer, et permet même ainsi de dépasser la contrainte classique.



**Figure 6.82** Influence d'un défaut triangulaire en compression ou en flexion,  $R/t = 250$



**Figure 6.83** Influence d'un défaut triangulaire en compression ou en flexion,  $R/t = 1500$

# Troisième partie : Recommandations pour le dimensionnement au flambage de coques minces et conclusions

# 7 Interprétation des résultats – établissement d'une nouvelle règle de dimensionnement

## 7.1 Introduction

### 7.2 Estimation des erreurs sur les résultats expérimentaux

- 7.2.1 Paramètres géométriques
- 7.2.2 Paramètres matériau
- 7.2.3 Mesures
- 7.2.4 Conditions expérimentales

### 7.3 Validation d'une nouvelle recommandation en pression interne et compression (P, N)

- 7.3.1 R/t = 450, cuivre
- 7.3.2 R/t = 675, aluminium
- 7.3.3 R/t = 675, cuivre
- 7.3.4 R/t = 1350, acier
- 7.3.5 R/t = 1350, cuivre
- 7.3.6 Application au matériau Aluminium 2219
- 7.3.7 Conclusions

### 7.4 Validation d'une nouvelle recommandation en pression interne et flexion (P, M)

- 7.4.1 R/t = 450, cuivre
- 7.4.2 R/t = 675, aluminium
- 7.4.3 R/t = 675, cuivre
- 7.4.4 R/t = 1350, acier
- 7.4.5 R/t = 1350, cuivre
- 7.4.6 Application au matériau Aluminium 2219
- 7.4.7 Conclusions

### 7.5 Validation d'une nouvelle recommandation en pression interne et cisaillement par effort tranchant (P, T)

- 7.5.1 Démarche
- 7.5.2 Résultats
- 7.5.3 Conclusions

---

## 7.1 Introduction

La quantité de données expérimentales et numériques dont nous disposons nous a permis de mieux comprendre le comportement de coques pressurisées sous différents chargements et combinaisons de chargements. L'un des objectifs de ce travail était également de proposer une amélioration aux règles utilisées pour le dimensionnement de coques aérospatiales.

Pour cela, une validation de la modélisation numérique par les résultats expérimentaux est indispensable. Nous présentons tout d'abord les incertitudes liées aux contraintes critiques mesurées en essais afin de pouvoir les interpréter correctement, puis nous les comparerons dans un deuxième temps aux propositions faites au chapitre 6 pour le dimensionnement de coques minces au flambage sous chargements combinés.

## 7.2 Estimation des erreurs sur les résultats expérimentaux

Les incertitudes sont inhérentes à toute campagne expérimentale, et il est important de les évaluer pour convenablement appliquer les résultats au dimensionnement. Dans notre cas, elles apparaissent à plusieurs niveaux :

- dans la mesure des paramètres géométriques de la coque (rayon, longueur et épaisseur) entrant dans les calculs de contrainte
- dans la connaissance des propriétés du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson) et de l'influence de l'anisotropie
- dans les mesures expérimentales (force et pression) intervenant dans les calculs de contrainte
- dans l'influence des conditions expérimentales (méthodes d'application de l'effort)

### 7.2.1 Paramètres géométriques

Le rayon et la longueur de la coque sont déterminés par la taille des frettes et leur positionnement relatif, grandeurs mesurées à l'aide d'un pied à coulisse précis au dixième de millimètre.

Concernant l'épaisseur, outre l'erreur induite par la mesure (par micromètre, estimée à  $\pm 1 \mu\text{m}$ ), il convient de discuter de la valeur d'épaisseur à considérer pour l'exploitation des résultats. La figure 4.5 met en évidence la répartition non-uniforme de l'épaisseur du feuillard. Une épaisseur moyenne est retenue comme épaisseur de référence pour la coque, cependant il n'est pas trivial de connaître avec précision quelle épaisseur sera déterminante pour le flambage. Nous récapitulons les erreurs absolues sur les dimensions de la coque dans le petit tableau suivant.

L (mm)	R (mm)	t ( $\mu\text{m}$ )
+/- 0.1	+/- 0.1	+/- 2

**Tableau 7.1** Incertitudes absolues sur les paramètres géométriques

### 7.2.2 Paramètres matériau

#### 7.2.2.1 Propriétés mesurées

Le module d'Young a systématiquement été mesuré pour chaque feuillard, et nous avons retenu une valeur moyenne. L'erreur est ici estimée à +/- 5%. Le coefficient de Poisson n'a par contre pas été déterminé, et une valeur de 0.33 a été choisie arbitrairement pour tous les matériaux.

### 7.2.22 Prise en compte de l’anisotropie

La contrainte classique a été établie pour un matériau isotrope, cependant la méthode de fabrication des feuillards par laminage crée parfois une anisotropie plus ou moins faible, comme nous avons pu le voir au chapitre 4. Le matériau est alors généralement plus raide et fort dans le sens de la hauteur (dont les caractéristiques servent de référence) que dans la longueur du clinquant. Il est donc important d’évaluer l’effet d’une anisotropie sur la contrainte classique.

Nous refaisons ici le calcul théorique de la contrainte de bifurcation, en introduisant cette fois une loi de Hooke anisotrope, de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_{x\theta} \cdot \nu_{\theta x}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{\theta x} \cdot E_\theta & 0 \\ \nu_{x\theta} \cdot E_x & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & G_{x\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

En faisant l’hypothèse que  $\nu_{x\theta} = \nu_{\theta x} = \nu$  et que  $E_\theta = \alpha \cdot E_x = \alpha \cdot E$ , nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \cdot \alpha & 0 \\ \nu & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

Les équations DMV pour le cas de la compression axiale s’en retrouvent changées :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha \cdot \frac{\nu}{R} \frac{dw}{dx} = 0 \\ D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{C}{R^2} \left( \alpha \cdot w + \nu R \frac{du}{dx} \right) + \frac{P}{2\pi R} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

En adoptant la même démarche qu’au chapitre 1, nous obtenons finalement :

$$\sigma_{aniso} = \sqrt{\frac{\alpha}{3(1-\nu^2)}} \frac{Et}{R} = \sqrt{\alpha} \cdot \sigma_{CL}$$

Dans notre cas,  $\alpha < 1$  et l’anisotropie diminue donc la contrainte théorique de flambage sous compression. Ce coefficient reste faible dans la plupart des cas (voir tableau 7.2), un seul feuillard a montré une anisotropie significative.

Feuillard	Module H (GPa)	Module L (GPa)	$\alpha$
Aluminium	70	68	0.97
Aluminium, B	60	58	0.96
Cuivre	135	130	0.96
Acier, A	205	200	0.98
Acier, B et C	205	170	0.83

**Tableau 7.2** Paramètres d’anisotropie des différents feuillards utilisés

---

### 7.2.3 Mesures

L'incertitude maximale sur les mesures des capteurs de pression et de force est de +/- 0.25%, comme nous avons pu le voir au chapitre 4.

---

### 7.2.4 Conditions expérimentales

Les calculs effectués au chapitre 6 prenaient en compte la dissymétrie induite par le recouvrement du feuillard sur une partie de la coque. Les coques étaient autrement parfaites, et la loi matériau réelle prise en compte.

En pression interne et compression, les résultats de ces calculs confirment alors que la dissymétrie joue un rôle dans la diminution de contrainte et nous les incluons dans les courbes de partie suivante à titre d'information. Ils pourront corroborer nos observations dans certains cas, et ce uniquement de manière qualitative.

En pression interne et flexion, nous avons confirmé l'influence quasi-nulle du recouvrement sur le flambage. Par ailleurs, un effort mal orienté a également une influence minimale sur la charge critique et nous ne considérerons pas cet effet dans notre interprétation des résultats.

Le recouvrement n'agit pas non plus sur le flambage en cisaillement, mais nous avons vu qu'un effort mal orienté pouvait, pour un comportement du type cisaillement, baisser la contrainte de cloquage d'au moins 5%.

---

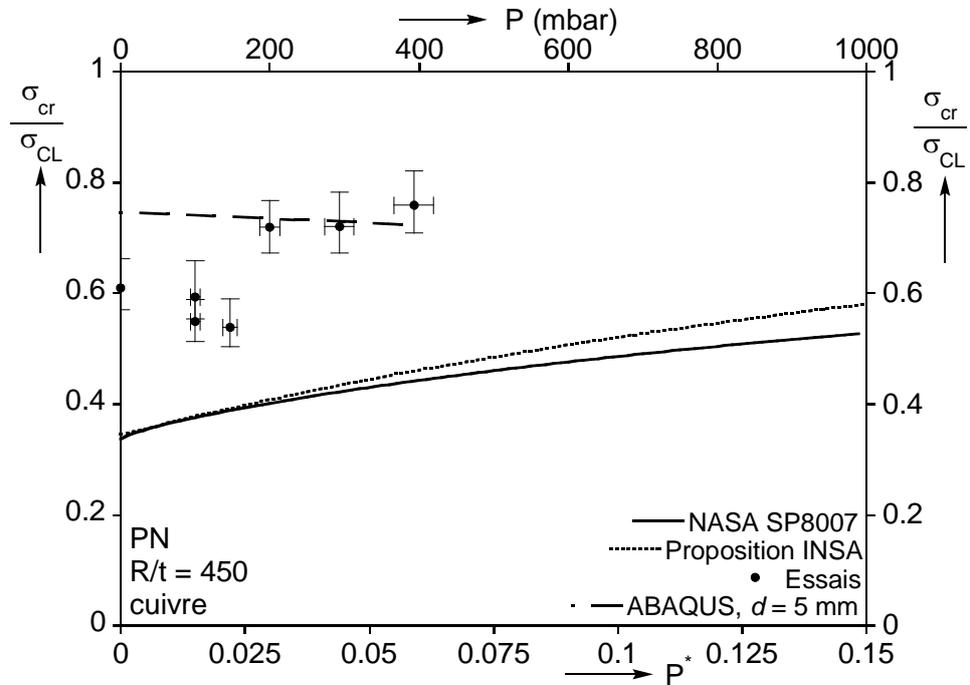
## 7.3 Validation d'une nouvelle recommandation en pression interne et compression (P, N)

Nous évaluons pour chaque série d'essais la pertinence des calculs de dimensionnement effectués dans le cas PN avec le défaut triangulaire (§6.2). Nous comparons donc ici (en contrainte critique nette, sans prise en compte de l'effet de fonds):

- les résultats des essais « propres », pour lesquels les coques ne présentaient pas de défauts majeurs (mauvais collage, problème de conditions limites...)
- la règle SP8007 que nous cherchons à améliorer
- les résultats des calculs effectués sur ABAQUS avec des coques géométriquement parfaites mais présentant un recouvrement, afin d'évaluer de manière qualitative l'impact de la dissymétrie
- les barres d'erreur liées aux mesures expérimentales, résultant de la somme des incertitudes sur les différents paramètres
- la proposition de dimensionnement INSA obtenue à partir des calculs non-linéaires avec défaut triangulaire; une interpolation linéaire est effectuée entre les différents cas étudiés ( $R/t = 250, 500, 750, 1000, 1250$  et  $1500$ )

### 7.3.1 R/t = 450, cuivre

La Figure 7.1 présente la première comparaison effectuée sur le feuillard en cuivre d’épaisseur 0.3 mm. Une des coques testées présentait un défaut de collage au niveau des conditions aux limites et le point a été donc écarté.

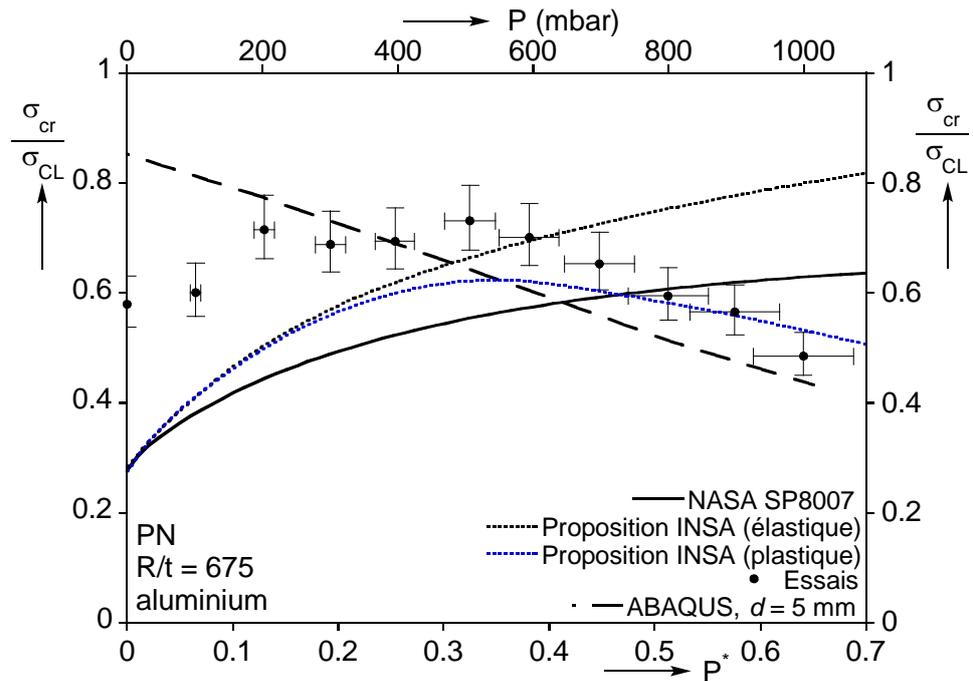


**Figure 7.1** Validation du dimensionnement PN, R/t = 450, cuivre

Pour ces coques plutôt épaisses, les valeurs des pressions adimensionnelles testées sont faibles et le gain affiché par la règle INSA est minime. La forte augmentation de la contrainte critique expérimentale dès ces faibles pressions (malgré une dispersion importante autour de 100 mbar) valide cependant notre proposition sans problème particulier. Nous pouvons même aller plus loin en notant que pour cette famille de coques le dimensionnement peut encore être grandement amélioré. Concernant la pression seuil à partir de laquelle un flambage élasto-plastique se produit, elle est estimée à 1700 mbar, ce que nous n’avons pu vérifier expérimentalement.

### 7.3.2 R/t = 675, aluminium

La deuxième série de résultats concerne les coques en aluminium avec R/t = 675, tracée en Figure 7.2. Pour ce feuillard, nous avons remarqué une chute de la contrainte expérimentale avec la formation d’un mode en patte d’éléphant à partir de 500 mbar. Prévoir numériquement de manière précise ce seuil et la chute de charge critique qui s’en suit est complexe, puisque ces deux caractéristiques dépendent intrinsèquement du type de loi matériau utilisée (§6.5).



**Figure 7.2** Validation du dimensionnement PN,  $R/t = 675$ , aluminium

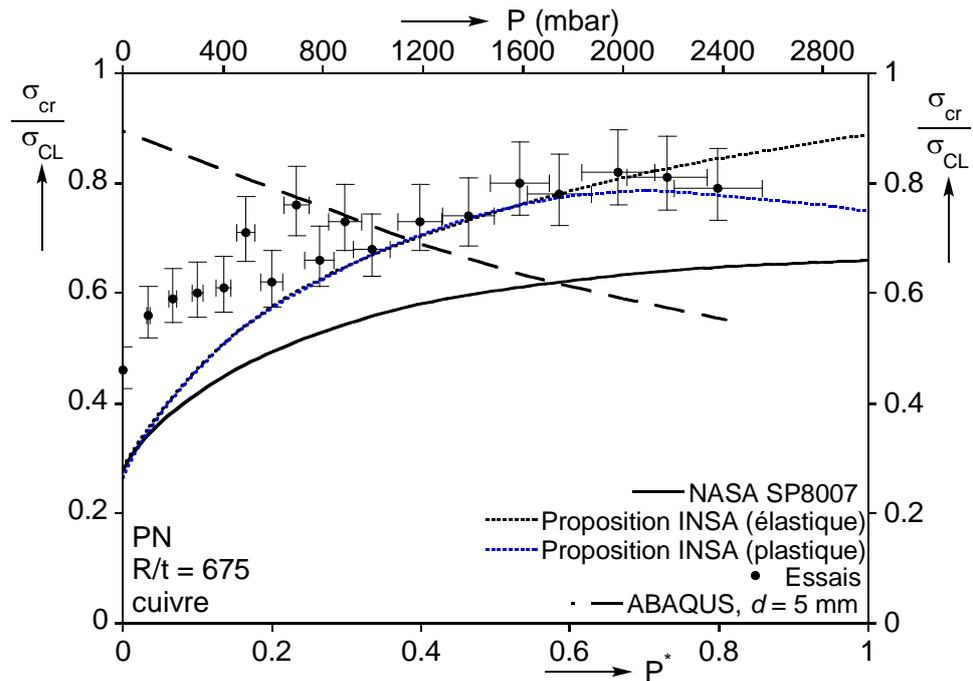
Le calcul a donc été répété (avec la même taille de défaut) à l’aide de STANLAX en introduisant cette fois-ci la loi matériau réelle de notre feuillard. Les résultats montrent la pertinence du logiciel et de la modélisation utilisés pour la détection de bifurcation dans le domaine plastique. Initialement, les branches élastique (noire) et plastique (bleue) donnent des contraintes critiques identiques. L’effet de la plasticité se fait sentir dès 300 mbar, avec une augmentation de contrainte diminuant progressivement. Le maximum est atteint comme dans le cas expérimental pour environ 500 mbar. La chute de charge critique qui suit n’est par contre pas retrouvée exactement, peut être à cause de l’effet de la dissymétrie.

Les simulations 3D effectuées sur des coques parfaites avec ABAQUS montrent une baisse quasi constante de la contrainte de flambage due à la plasticité, et la tendance ici semble plus proche de la tendance expérimentale.

Nous retenons que la proposition INSA est validée initialement dans le cas élastique. Les prévisions dans le cas plastique reproduisent de manière fidèle les résultats expérimentaux, mais il est impossible de généraliser la chute de contrainte liée à la déstabilisation à tous les matériaux, et nous recommandons alors une étude au cas par cas.

### 7.3.3 $R/t = 675$ , cuivre

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus sur des coques en cuivre, avec  $R/t = 675$  (Figure 7.3). Trois essais ont été écartés du nuage présenté en Figure 5.28 : pour deux d’entre eux, la dissymétrie était bien trop importante (entre 30 et 45%) ; enfin un dernier essai à 2600 mbar s’est terminé par l’explosion de la coque et la contrainte maximale n’a donc pas pu être atteinte.



**Figure 7.3** Validation du dimensionnement PN, R/t = 675, cuivre

L'unique différence avec le cas précédent réside dans le type de matériau utilisé, les résultats des calculs élastiques sont donc identiques, et validés de manière fidèle par les essais. La contrainte expérimentale maximum est atteinte pour une pression de 2000 mbar, et une fois encore ceci est retrouvé par calcul avec STANLAX. Les simulations avec ABAQUS sont quant à elles bien trop pessimistes.

#### 7.3.4 R/t = 1350, acier

Avec l'amincissement des coques, le gain de charge critique avec la pression est de plus en plus rapide, comme en témoigne le graphe de la Figure 7.4 pour des coques en acier avec un R/t égal à 1350. Une dissymétrie trop importante a été constatée sur sept essais, qui ont été écartés.

Même si l'allure de la courbe est reproduite correctement, certains essais restent légèrement sous les prédictions de notre règle. Outre l'effet des conditions expérimentales modélisé avec ABAQUS, nous pouvons également considérer l'impact important de l'anisotropie sur la contrainte de référence (proche de 10%), matérialisé ici par des barres d'erreur plus importantes. Ceci nous porte à conclure que la règle n'est pas mise en défaut.

D'autre part, le seuil de plasticité est ici estimé à près de 3000 mbar et nous n'avons donc pas pu observer le phénomène de formation de patte d'éléphant.

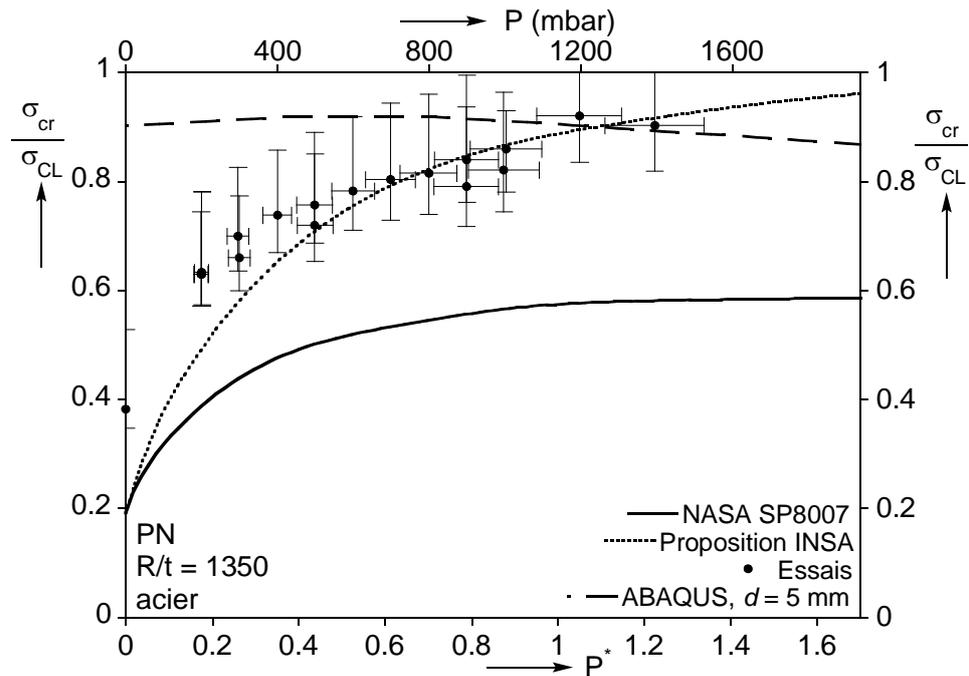


Figure 7.4 Validation du dimensionnement PN, R/t = 1350, acier

### 7.3.5 R/t = 1350, cuivre

Le dernier feuillard présenté ici concerne donc des coques minces (R/t = 1350, soit 0.1 mm d'épaisseur) en cuivre, et les résultats correspondants sont donnés en Figure 7.5. Le mode en patte d'éléphant n'a pas été observé expérimentalement, mais les calculs montrent que les fortes contraintes de pression liées à la très faible épaisseur peuvent tout de même déstabiliser la structure.

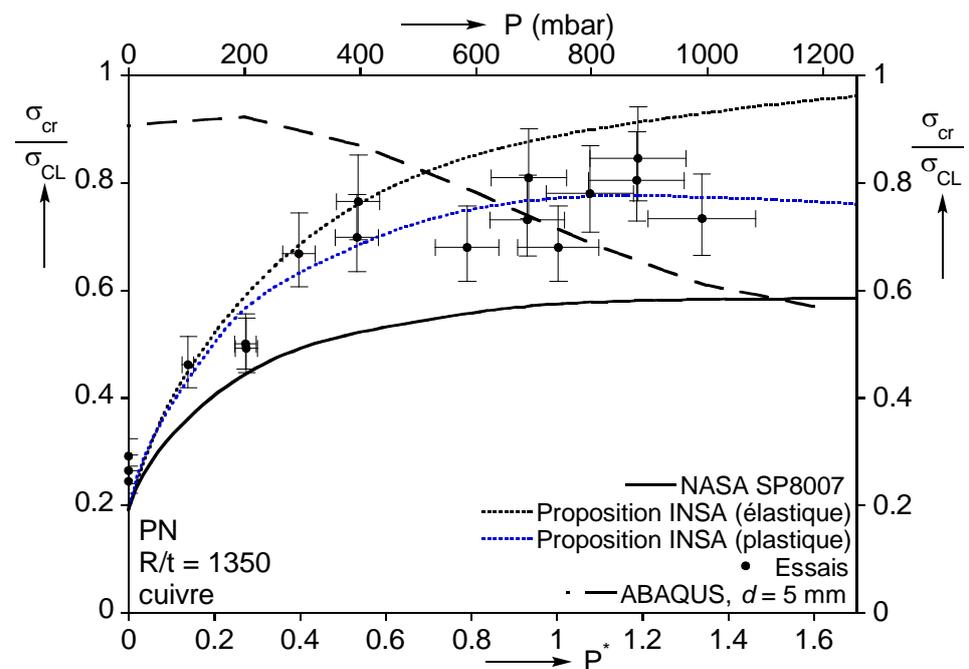


Figure 7.5 Validation du dimensionnement PN, R/t = 1350, cuivre

Ainsi, la méthodologie de dimensionnement avec le défaut triangulaire, appliquée à notre matériau, nous indique un maximum de contrainte critique vers 800 mbar. Les contraintes expérimentales sont fortement perturbées par les imperfections géométriques importantes sur ce type de feuillard, entraînant une dispersion considérable, mais suivent tout de même la tendance des simulations.

---

### 7.3.6 Application au matériau Aluminium 2219

Les paragraphes précédents nous ont permis de valider les calculs de dimensionnement par les résultats expérimentaux, pour différentes valeurs de  $R/t$ . Afin de pouvoir appréhender les gains de charge possibles, ainsi que l’effet de la plasticité sur le réservoir de l’EPC, nous traçons en Figure 7.6 les résultats des calculs réalisés en prenant pour matériau l’aluminium 2219 utilisé sur la structure.

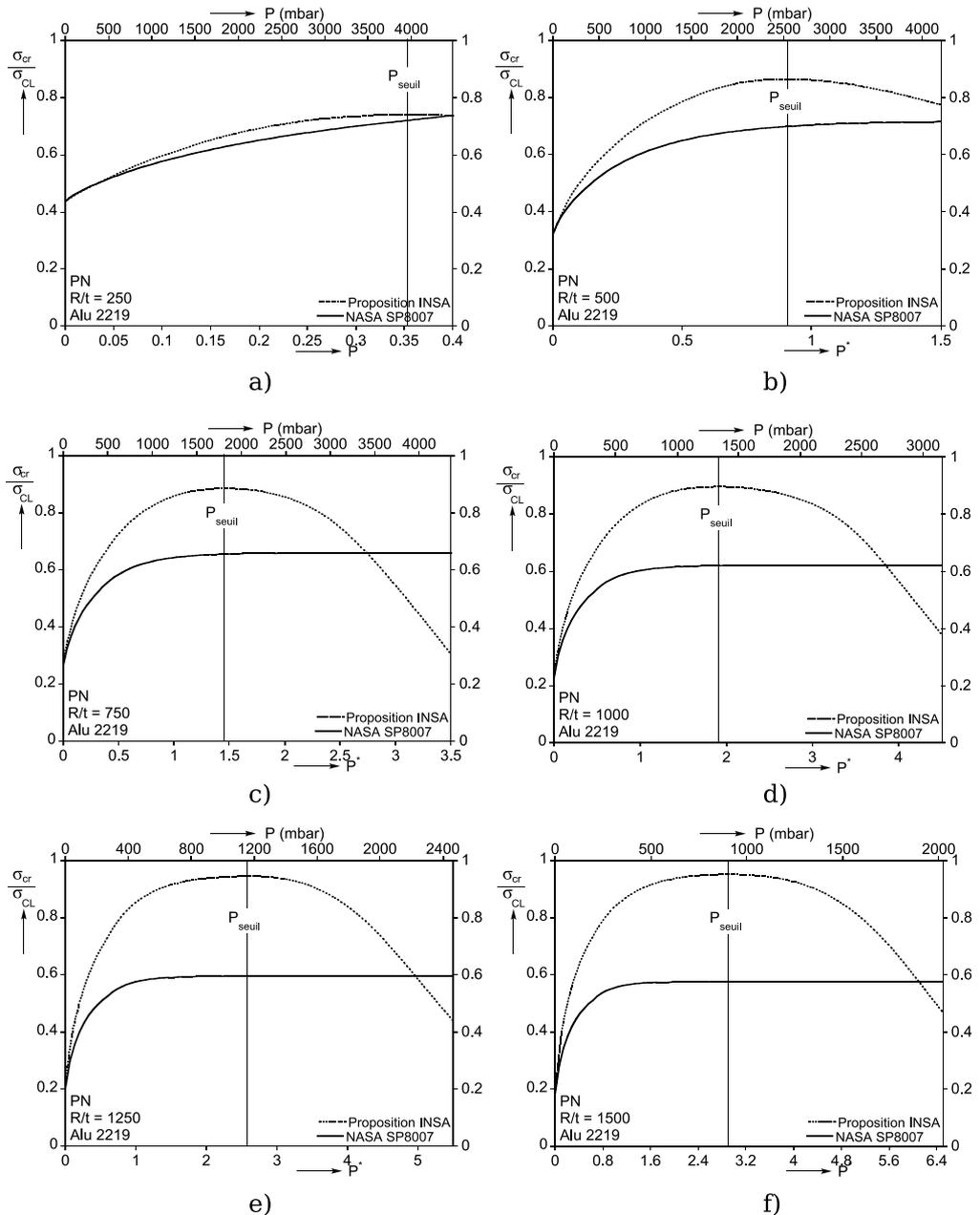
Les gains en contrainte critique nette dépendent comme nous l’avons vu précédemment de la valeur de  $R/t$ , et sont plus importants pour les coques plus minces. La pression seuil est indiquée pour chaque cas, et varie entre 900 et 4000 mbar pour ce matériau. Nous notons d’autre part que la déstabilisation apportée par le flambage élasto-plastique peut donner des contraintes critiques inférieures à la NASA SP8007 sur la plage de pression nous concernant ( $< 4$  bar), et qu’il est donc impératif de prendre en compte ce phénomène.

---

### 7.3.7 Conclusions

Nous avons pu évaluer pour chaque série la pertinence des calculs effectués avec le défaut triangulaire. La qualité des coques étant très variable (voir chapitre 5), il n’est pas étonnant de retrouver plus de difficultés au niveau des coques très minces, dont la qualité était parfois plus que médiocre. Les coques plus épaisses montrent une marge certaine en comparaison avec nos propositions, et des améliorations sont encore possibles à ce niveau.

En ce qui concerne l’effet déstabilisateur de la pression, la prise en compte de la loi matériau réelle dans les calculs permet à l’aide de STANLAX de détecter précisément l’apparition du phénomène. L’utilisation de la pression adimensionnelle permet de généraliser la règle à tous les matériaux dans le cas élastique, mais dans le cas plastique la forme de la loi de comportement est trop influente pour pouvoir généraliser.



**Figure 7.6** Dimensionnement PN dans le cas du matériau Aluminium 2219, a) : R/t = 250, b) : R/t = 500, c) : R/t = 750, d) : R/t = 1000, e) : R/t = 1250, f) : R/t = 1500

## 7.4 Validation d’une nouvelle recommandation en pression interne et flexion (P, M)

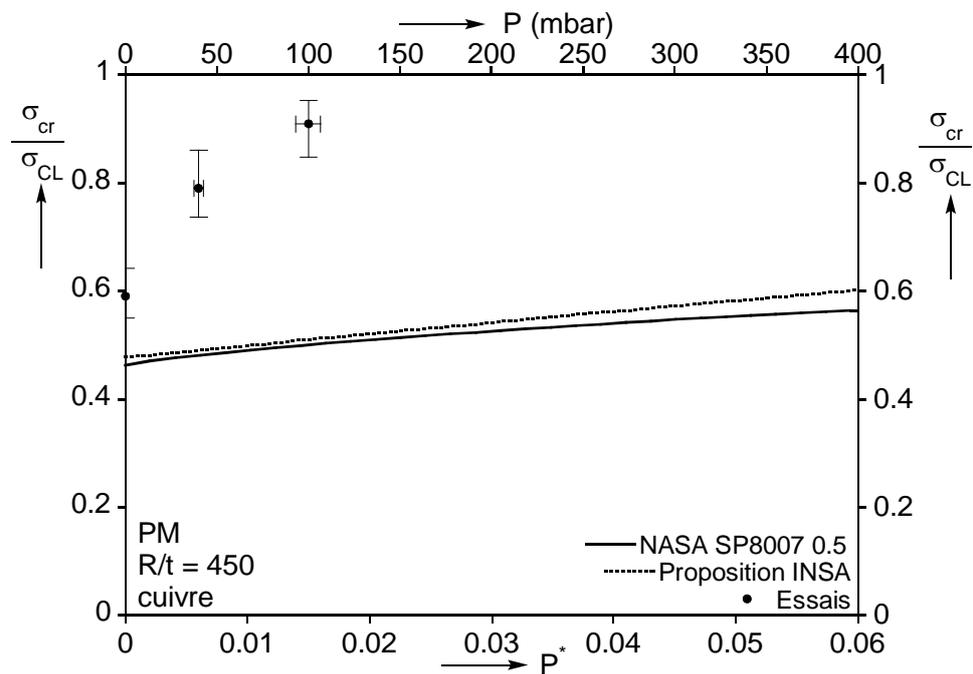
De façon similaire au cas PN, nous cherchons à valider les calculs effectués en pression interne et flexion, en comparant (en contrainte critique nette) :

- les résultats des essais ne présentant pas de problèmes particuliers
- la règle SP8007 pour le flambage « local », avec un coefficient de 0.5
- les barres d’erreur liées aux mesures expérimentales, résultant de la somme des incertitudes sur les différents paramètres

- la proposition de dimensionnement INSA obtenue à partir des calculs non-linéaires avec défaut triangulaire; basée sur une interpolation linéaire des différents cas traités ( $R/t = 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500$ )

#### 7.4.1 $R/t = 450$ , cuivre

Pour le feuillard de cuivre avec 0.3 mm d’épaisseur, 2 essais ont été écartés : l’un à cause d’un mauvais collage, l’autre pour un arrachement de la frette en partie tendue dû aux contraintes importantes. Seuls trois essais donc sont présentés en Figure 7.7.

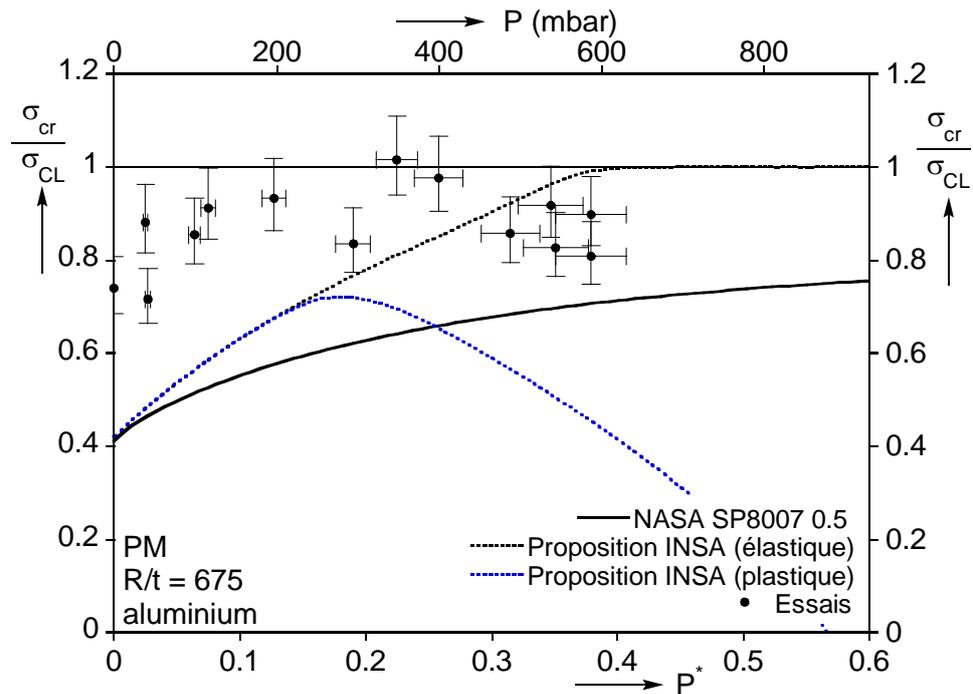


**Figure 7.7** Validation du dimensionnement PM,  $R/t = 450$ , cuivre

Au vu des résultats, ce faible nombre d’essais ne semble pas poser de problèmes pour la validation. Le gain de notre proposition par rapport à la NASA SP8007 est minime pour ces pressions, mais comme dans le cas de la compression, les coques sont de bonne qualité et l’augmentation de la contrainte critique expérimentale est très rapide, atteignant 90% de la valeur théorique dès 100 mbar (soit  $P^* = 0.015$ ).

#### 7.4.2 $R/t = 675$ , aluminium

La Figure 7.8 présente cette fois ci les contraintes critiques nettes obtenues pour un  $R/t$  de 675, le matériau utilisé étant de l’aluminium. Une fois de plus, un essai n’a pas été retenu pour cause de mauvais collage.

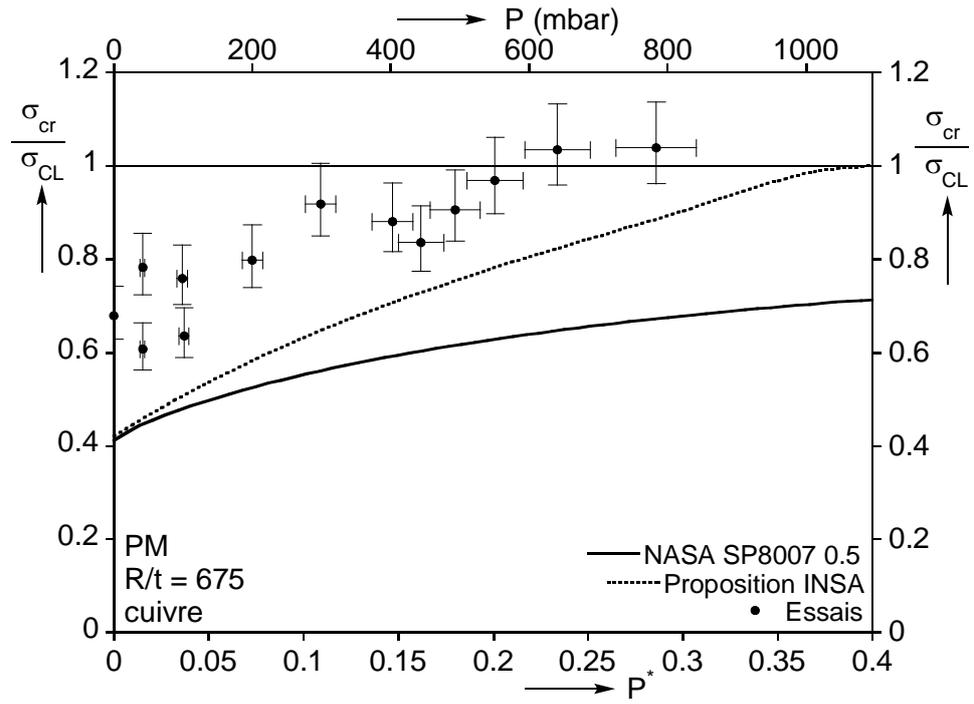


**Figure 7.8** Validation du dimensionnement PM,  $R/t = 675$ , aluminium

La nouvelle règle est validée sans problèmes aux faibles pressions (où l'influence des défauts est prépondérante). Cependant, pour la plage de pressions examinées, nous avons à nouveau observé une déstabilisation plastique qui réduit la contrainte critique, et cet effet doit être pris en compte. Nous avons pour cela utilisé les résultats de Mathon et Limam [70] présentés en §6.5, où la chute de charge critique est estimée analytiquement. Cette méthode semble légèrement trop conservatrice, sous-estimant la pression seuil de changement de mode de flambage, mais permet l'extension à différents matériaux.

#### 7.4.3 $R/t = 675$ , cuivre

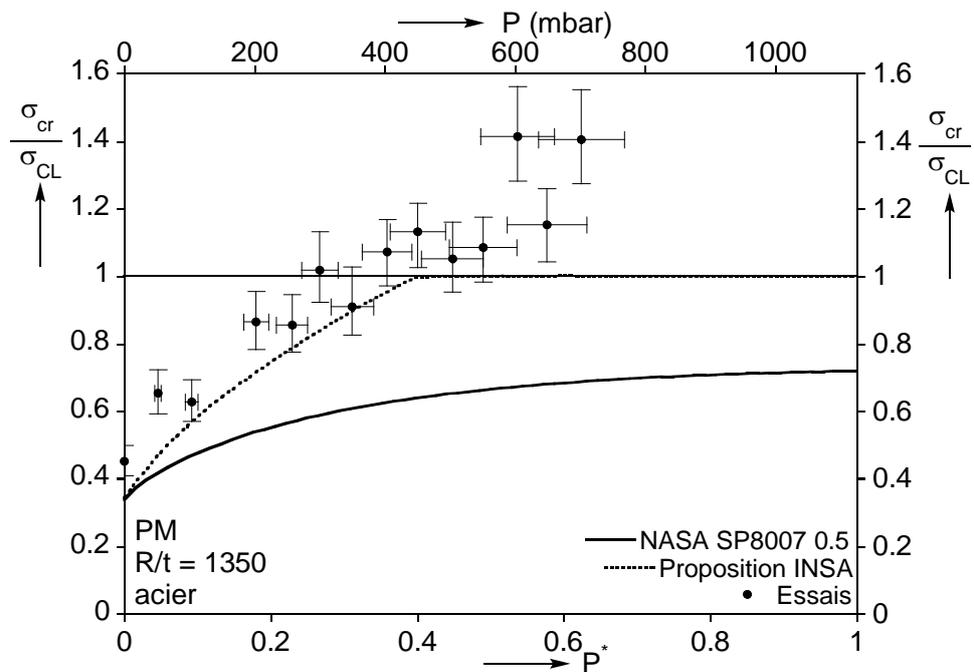
Le graphe de la Figure 7.9 présente le bilan du feuillard de cuivre, épaisseur 0.2 mm. Notre proposition est ici validée sans aucun problème particulier : malgré la dispersion, tous les résultats expérimentaux sont au-dessus, et la tendance de l'augmentation est parfaitement reproduite.



**Figure 7.9** Validation du dimensionnement PM, R/t = 675, cuivre

#### 7.4.4 R/t = 1350, acier

Nous étudions maintenant les résultats obtenus sur du feuillard en acier, avec R/t = 1350 (Figure 7.10). Un problème particulier a été observé sur ce type de coques : le cloquage très localisé au niveau des conditions limites (voir chapitre 5), diminuant considérablement la contrainte critique.

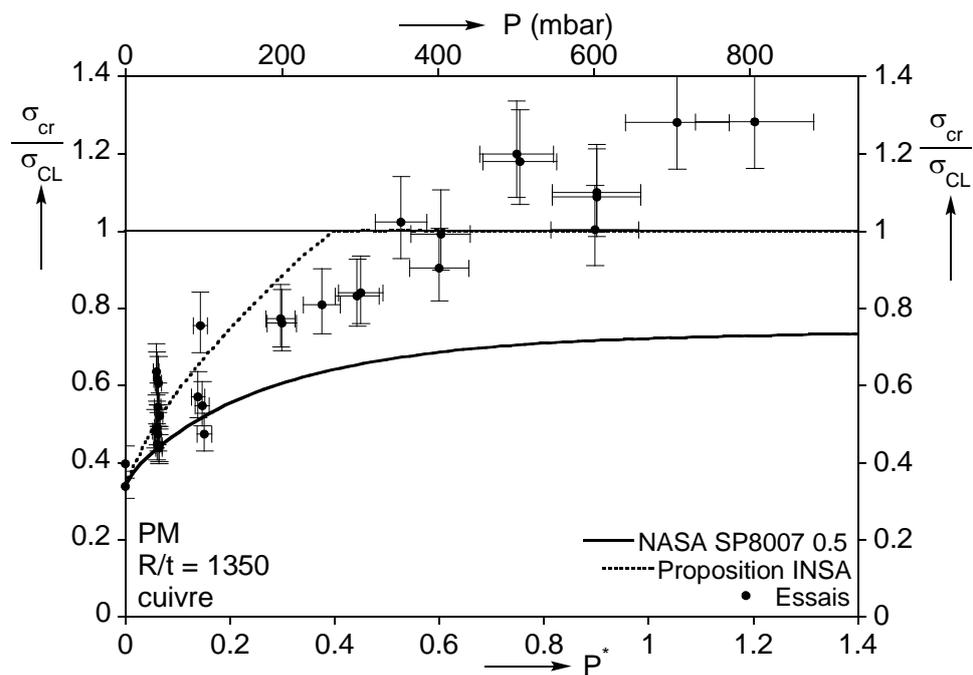


**Figure 7.10** Validation du dimensionnement PM, R/t = 1350, acier

Les essais ayant présenté ce type de flambage ont systématiquement été écartés (soit sept au total) ; les essais restants suivent, avec une certaine dispersion, notre proposition pour le dimensionnement jusqu'à l'atteinte de la contrainte classique. De façon à limiter les déformations, nous avons limité dans notre règle la contrainte critique au niveau théorique, nous remarquons cependant que le cloquage peut se produire pour une valeur bien supérieure.

#### 7.4.5 R/t = 1350, cuivre

Nous examinons enfin les coques en cuivre, également très minces (épaisseur 0.1 mm, Figure 7.11). Comme pour la compression, les résultats présentés peuvent paraître inquiétants en comparaison avec notre proposition de règle. L'augmentation de contrainte critique expérimentale est en effet plus lente : la valeur classique est dépassée pour  $P^* = 0.7$ , contre  $P^* = 0.4$  pour le calcul. En comparaison avec le feuillard précédent (acier) de bien meilleure qualité, nous pouvons imputer ces performances aux importantes imperfections géométriques, très pénalisantes quant au déclenchement des instabilités. Il est tout de même notable que même pour ces cylindres de moins bonne qualité, la contrainte critique continue d'augmenter une fois la valeur théorique dépassée.

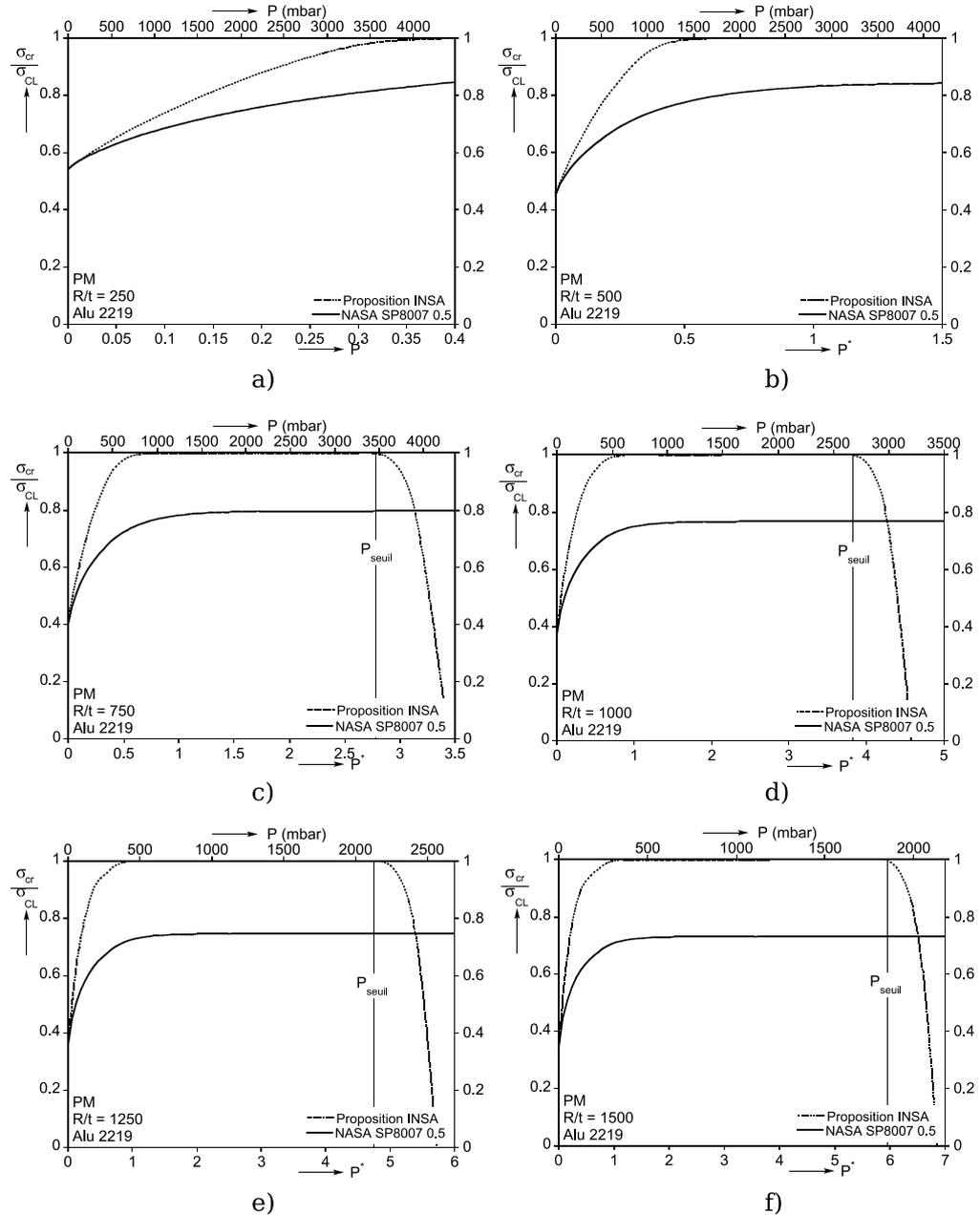


**Figure 7.11** Validation du dimensionnement PM, R/t = 1350, cuivre

#### 7.4.6 Application au matériau Aluminium 2219

Nous reprenons le cas du matériau utilisé sur l'EPC et présentons les résultats pour le dimensionnement en Figure 7.12 (toujours en contrainte nette). On observe en premier lieu une progression rapide vers la contrainte théorique. La structure se comporte alors comme une coque « parfaite » jusqu'à l'atteinte de

la pression seuil, à partir de laquelle le flambage en couche limite fait son apparition, et la contrainte baisse alors rapidement. Pour les valeurs de R/t les plus petites (250 et 500), ce phénomène n’est pas observé sur la plage de pression nous concernant (< 4 bar) ; il apparaît ensuite entre 1.8 et 3.5 bar.



**Figure 7.12** Dimensionnement PM dans le cas du matériau Aluminium 2219, a) : R/t = 250, b) : R/t = 500, c) : R/t = 750, d) : R/t = 1000, e) : R/t = 1250, f) : R/t = 1500

#### 7.4.7 Conclusions

De même que pour la compression, nous confirmons pour chaque série la pertinence des calculs effectués avec le défaut triangulaire en flexion et pression

interne en comparaison avec les résultats expérimentaux. Les conclusions sur l’effet de la qualité des feuillards sont alors similaires : les feuillards plus minces donnent des marges quasi-nulles par rapport au calcul, alors que les cylindres plus épais dégagent encore des marges confortables, ce qui veut dire que le dimensionnement peut encore être amélioré.

Le déclenchement d’un flambage élasto-plastique en couche limite est donné analytiquement à partir d’une approche membranaire (voir [70]) et permet donc la généralisation à tous types de matériaux. Un certain conservatisme est cependant observé, indiquant que le type de loi matériau pourrait également avoir une influence.

---

## 7.5 Validation d’une nouvelle recommandation en pression interne et cisaillement par effort tranchant (P, T)

La méthode de dimensionnement utilisée en cisaillement est, nous l’avons vu, quelque peu approximative, surtout quand une pression interne entre en jeu. En effet, seul Yamaki a étudié le sujet, sans donner de recommandations quant au dimensionnement.

---

### 7.5.1 Démarche

Dans le cas Ariane 5 en effet, il est préconisé pour le cisaillement par effort tranchant (sans pression interne dans un premier temps) d’utiliser les contraintes données pour la torsion, avec un coefficient 1.25. Ceci a été déterminé à partir d’une seule étude sur le sujet, et en considérant l’effondrement des coques. Nos résultats expérimentaux montrent cependant que ceci est la plupart du temps bien optimiste quant au cloquage de la structure.

Avec l’ajout d’une pression interne, c’est une fois de plus l’interaction torsion/pression qui est réutilisée, sans justification particulière. Yamaki a noté que l’ajout de la pression pouvait changer la nature du flambage, en favorisant le déclenchement d’une instabilité par flexion. L’interaction avec la flexion créée par l’effort tranchant est donc inévitable pour ce genre de problème, et Cryospace considère une équation de type cubique dans ce cas.

La méthode manque donc certainement de constance dans le raisonnement, mais les résultats expérimentaux montrent un certain accord avec l’interaction (flexion SP8007/cisaillement Bruhn/interaction cubique).

Proposer de nouvelles courbes pour l’interaction nécessiterait la prise en compte des imperfections. Or, si le choix était relativement simple pour le cas compression/flexion puisque le défaut retenu avait une influence similaire sur les deux types de chargement, dans le cas présent ce choix n’est pas trivial et nécessiterait une étude poussée. Nous pouvons cependant d’ores et déjà proposer deux améliorations au dimensionnement :

- en incorporant notre proposition concernant la flexion

- en donnant une pression seuil, fonction de la géométrie et du chargement (voir tableau 6.3), à partir de laquelle le cisaillement n’a plus d’influence sur le flambage et seule la flexion doit être considérée

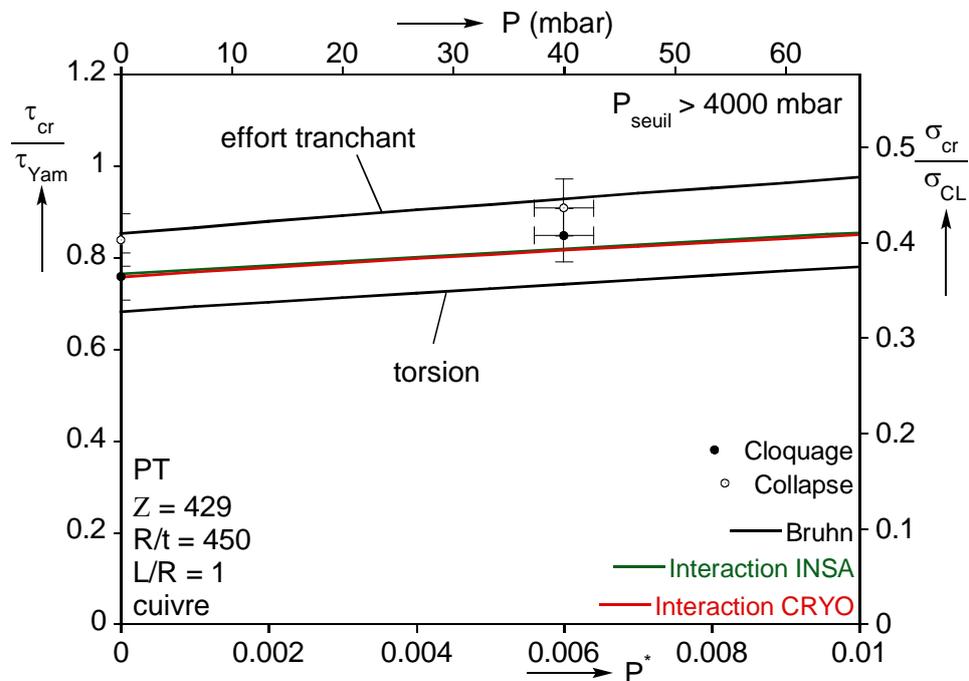
### 7.5.2 Résultats

Nous effectuons donc l’examen des résultats pour toutes les géométries étudiées. Les cinq premières séries correspondent aux coques « courtes » ( $L/R = 1$ ), le rapport flexion/cisaillement est d’environ 1.5. Pour les cinq séries suivantes, les coques sont plus longues, et le rapport flexion/cisaillement est alors proche de 2.5. Nous traçons dans chaque cas :

- la règle de Bruhn pour le cisaillement (en effort tranchant et en torsion)
- l’interaction utilisée par Cryospace
- l’interaction cubique avec notre règle en flexion
- les contraintes expérimentales de cloquage et de collapse

#### 7.5.2.1 Matériau cuivre, $Z = 429$

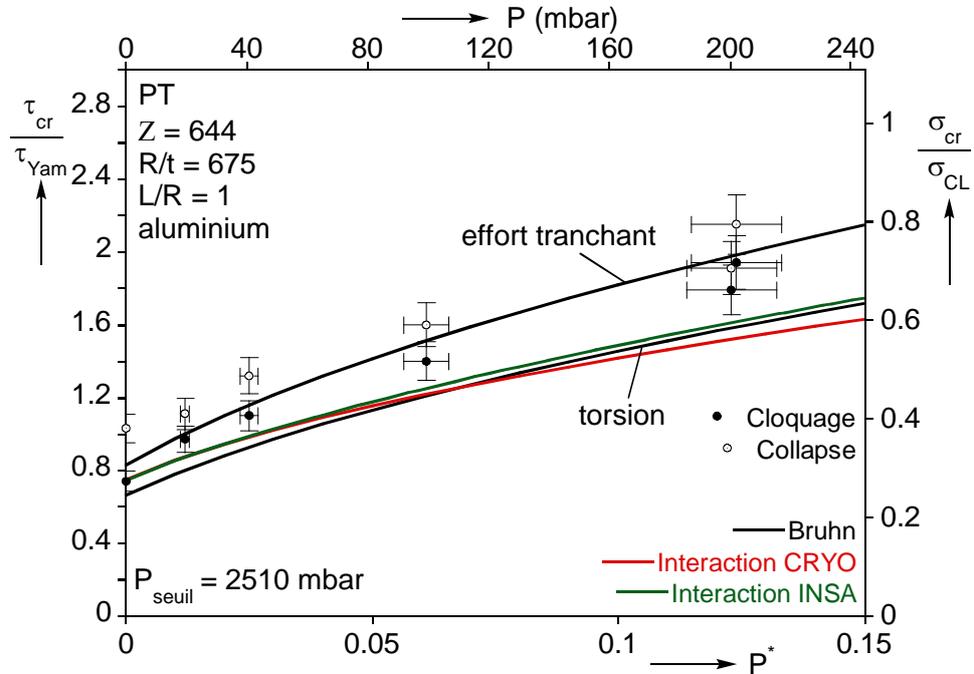
Pour ce type de coques épaisses, les pressions sont encore une fois très limitées (voir Figure 7.13), et aucune différence notable n’existe entre l’interaction prenant en compte la règle INSA en flexion (courbe verte), et l’interaction Cryospace avec la SP8007 en flexion (courbe rouge). Les deux points valident le dimensionnement aux basses pressions. La pression seuil indiquée par la règle est ici largement supérieure à 4 bar, et ne nous concerne donc pas.



**Figure 7.13** Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

### 7.5.22 Matériau aluminium, $Z = 644$

Les résultats pour ce paramètre de Batdorf sont tracés en Figure 7.14, montrant cette fois-ci un gain léger de notre proposition dès les basses pressions, validé par les essais réalisés. La pression seuil est ici annoncée à 2510 mbar, ce que nous n'avons pu observer expérimentalement.



**Figure 7.14** Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 1$ , aluminium

### 7.5.23 Matériau cuivre, $Z = 859$

La Figure 7.15 nous montre les performances des différentes propositions au dimensionnement pour la géométrie:  $L/R = 1$ ,  $R/t = 900$ . Certains essais sont relativement tangents pour cette série si l'on considère le cloquage, cependant la tendance avec l'augmentation de pression est respectée. La pression seuil dépasse encore largement la plage expérimentale.

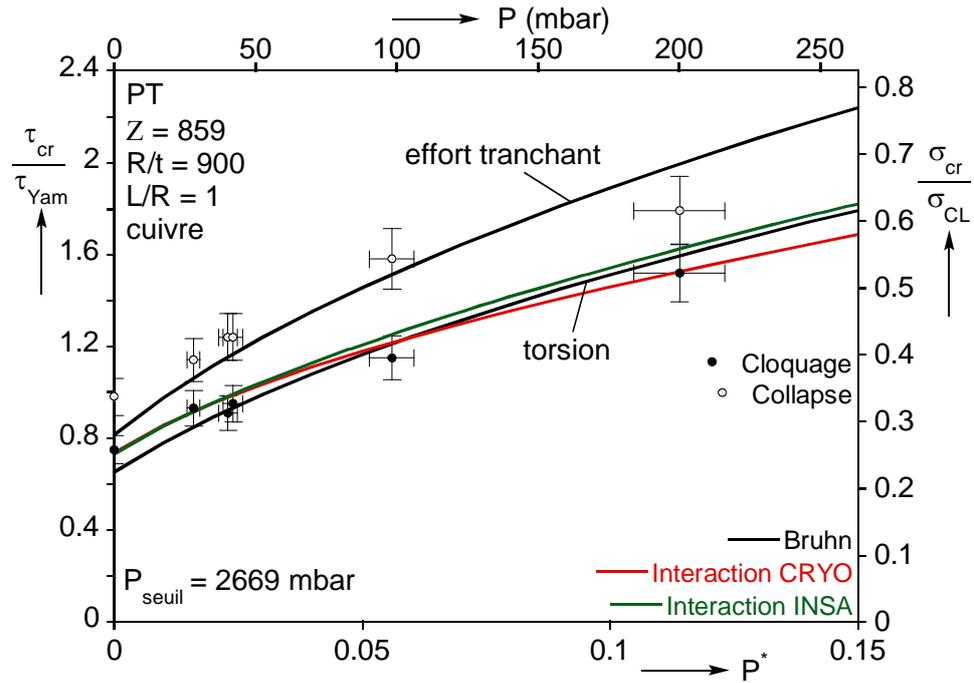


Figure 7.15 Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

#### 7.5.24 Matériau cuivre, $Z = 1288$

Pour cette nouvelle série, les coques sont très minces ( $R/t = 1350$ , soit 0.1 mm d'épaisseur) et en cuivre (Figure 7.16). L'ajout de la règle de l'INSA en flexion dans l'interaction cubique permet un gain non négligeable sur la plage testée. Les essais sont voisins des courbes aux très faibles pressions, mais le gain est confirmé dès 100 mbar malgré la qualité moyenne des spécimens.

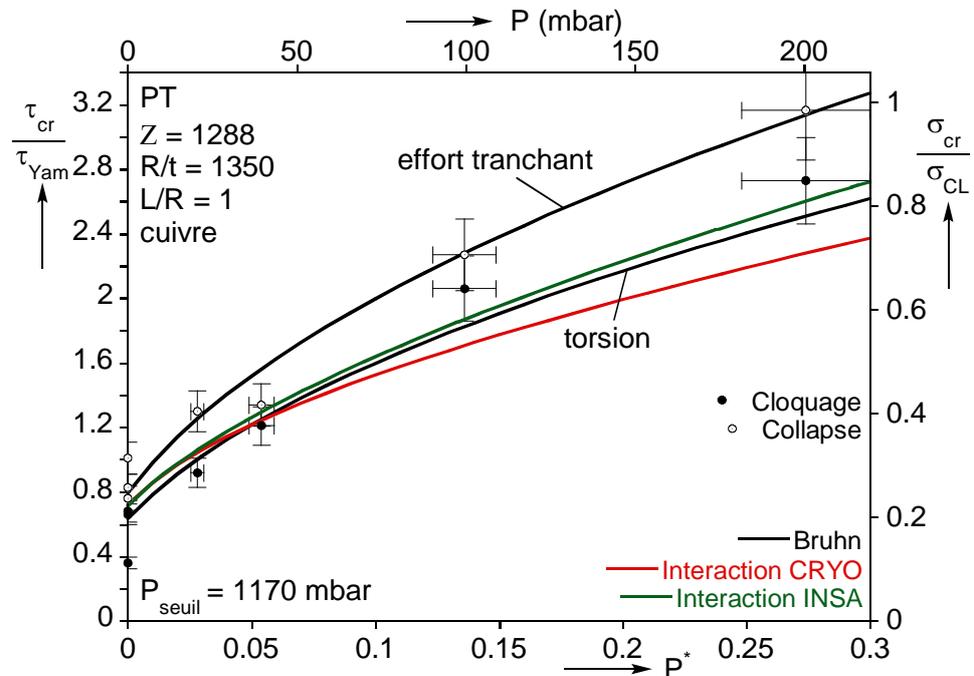
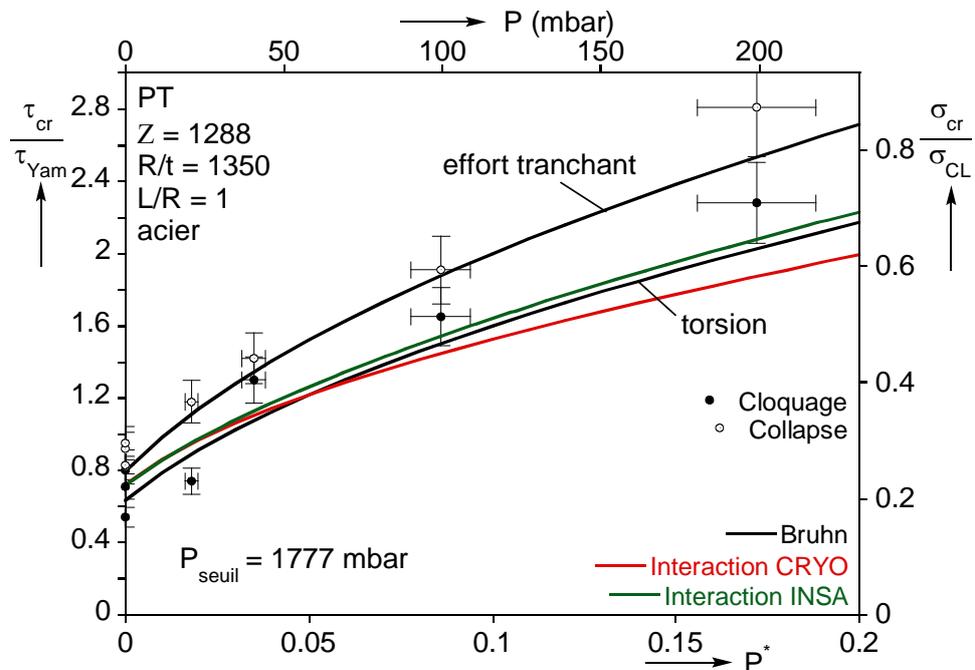


Figure 7.16 Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , cuivre

### 7.5.25 Matériau acier, $Z = 1288$

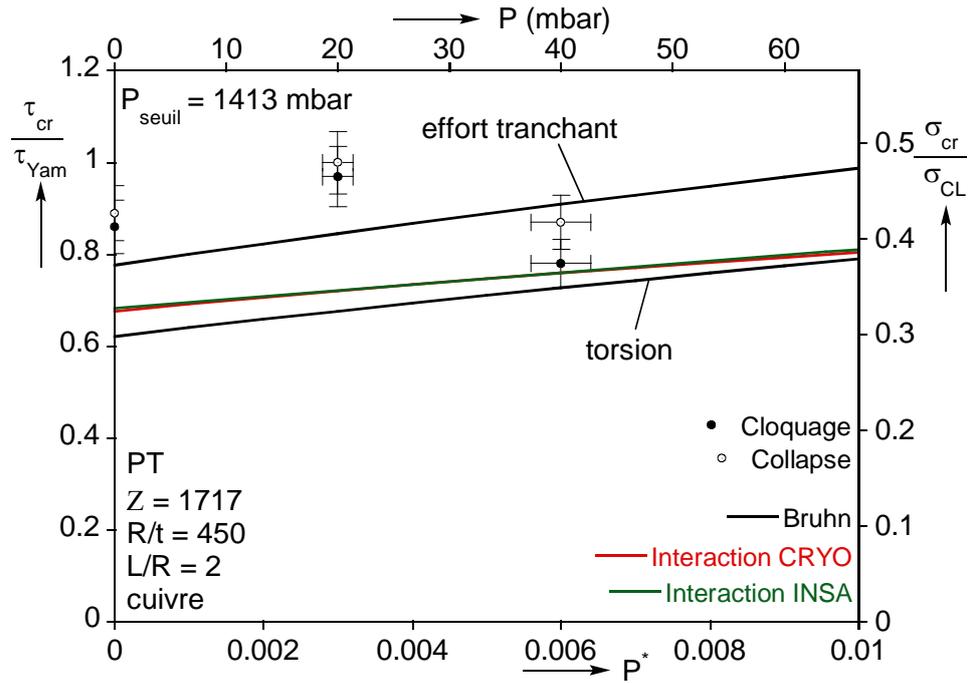
Pour cette série, la géométrie est semblable au cas précédent (paramètre de Batdorf égal à 1288), le matériau utilisé est cette fois de l'acier (Figure 7.17). On retrouve une certaine dispersion concernant le cloquage, qui peut s'expliquer dans une certaine mesure par un effort mal appliqué, pouvant jouer à basse pression (voir chapitre 6) sur la contrainte de bifurcation. Les conclusions sont similaires : la tendance est respectée, le gain est vérifié.



**Figure 7.17** Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 1$ , acier

### 7.5.26 Matériau cuivre, $Z = 1717$

Nous passons dans cette deuxième partie à des coques plus longues ( $L/R = 2$ ), résultant en un bras de levier plus important et favorisant donc d'autant plus le flambage par flexion. On retrouve ainsi logiquement des pressions seuil largement plus faibles : dans cet exemple, avec  $R/t = 450$  (Figure 7.18), elle n'est « plus » que de 1413 mbar. Autrement, les contraintes de dimensionnement sont validées avec une certaine marge pour les pressions vues expérimentalement.



**Figure 7.18** Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 450$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

#### 7.5.27 Matériau aluminium, $Z = 2576$

Nous continuons notre progression croissante dans les valeurs de  $Z$ , et observons ici ( $R/t = 675$ ) expérimentalement le passage à un mode de flambage en flexion. Ceci est visible sur la Figure 7.19 : à partir de 100 mbar, le cloquage et le collapse sont confondus (pour un essai à 200 mbar, la présence d’un défaut a entraîné un cloquage prématuré), et la marge augmente en conséquence. La pression seuil est estimée de manière théorique à 295 mbar, ce qui reste conservatif.

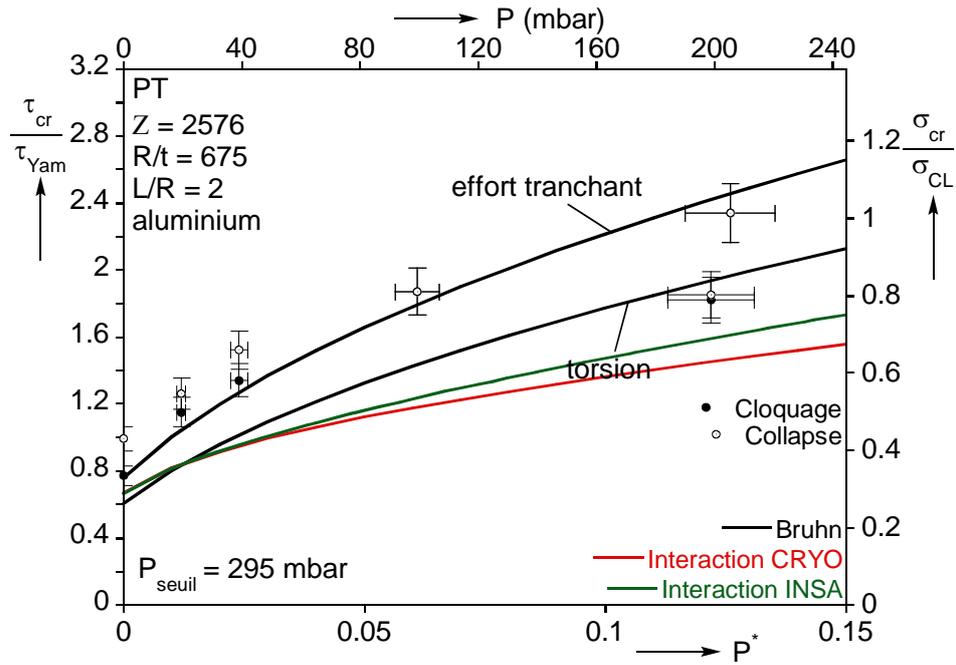


Figure 7.19 Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 675$ ,  $L/R = 2$ , aluminium

#### 7.5.28 Matériau cuivre, $Z = 3434$

Les résultats concernant désormais des coques en cuivre et d'épaisseur 0.15 mm ( $R/t = 900$ ) sont présentés en Figure 7.20. Le comportement typique de flexion apparaît dès 40 mbar, résultant en un gain direct de contrainte critique (la pression seuil donnée par la règle est de 320 mbar). La règle INSA reste donc largement conservatrice avec l'augmentation de pression.

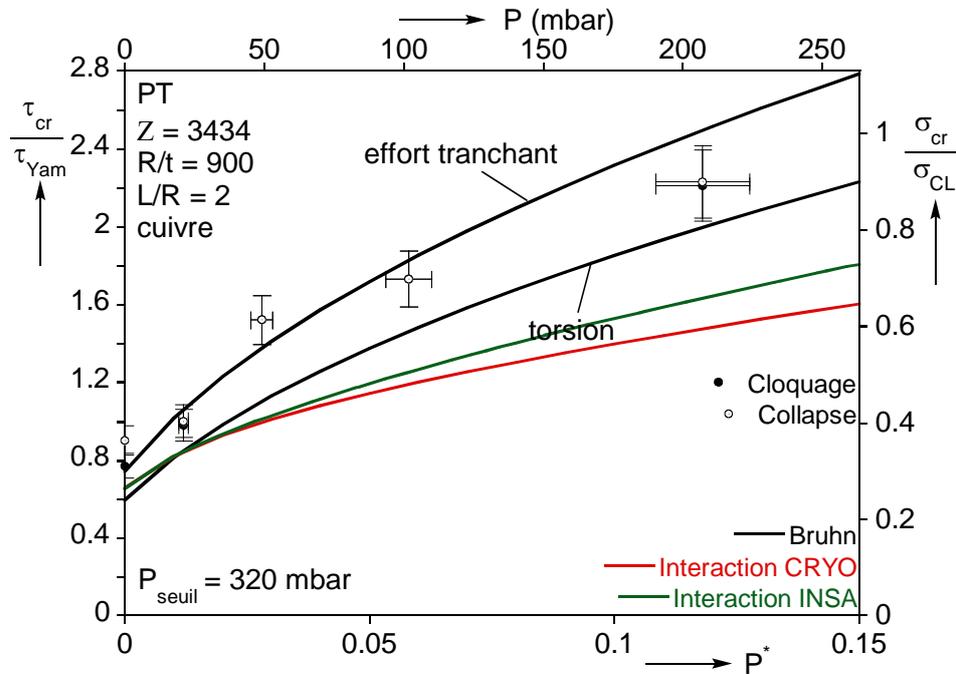
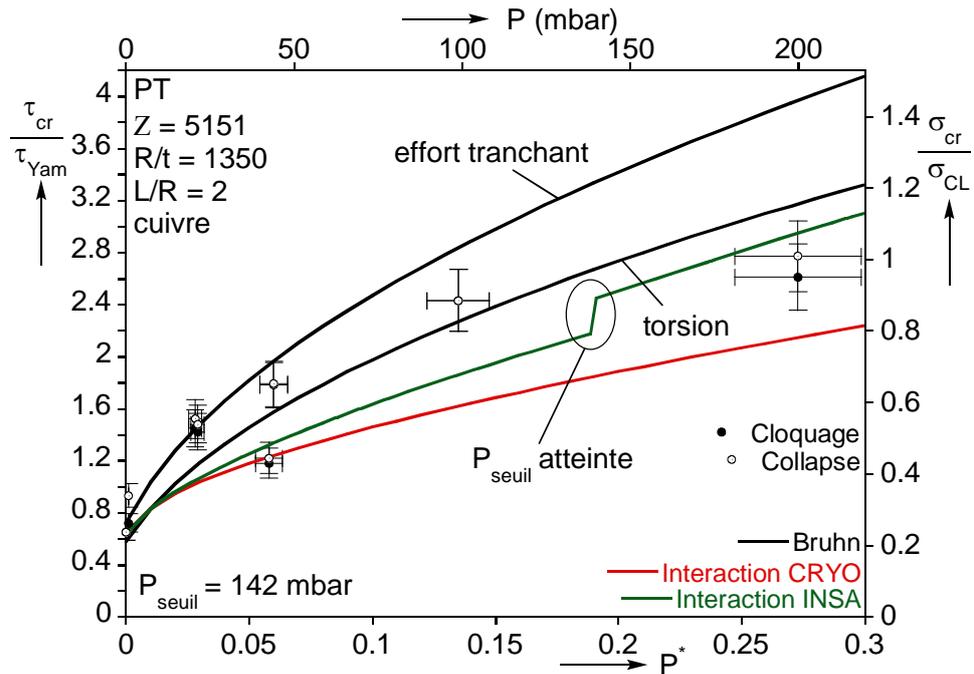


Figure 7.20 Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 900$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

### 7.5.29 Matériau cuivre, $Z = 5151$

Nous intéressons enfin à la valeur de  $Z$  la plus importante, avec du feuillard en cuivre et d’épaisseur 0.1 mm ( $R/t = 1350$ ). Le passage à un mode de flexion est donné par la règle à 142 mbar, et est observé expérimentalement dès 40 mbar (voir Figure 7.21). Ce changement de mode se traduit par un saut dans les recommandations, signifiant que le cisaillement n’est plus pris en compte. L’essai à 200 mbar se retrouve par conséquent légèrement surestimé, mais nous rappelons que la qualité médiocre de ces coques expliquait déjà des contraintes plus basses lors des essais PM.



**Figure 7.21** Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , cuivre

### 7.5.210 Matériau acier, $Z = 5151$

Comme pour les autres cas de charge, cette dernière géométrie est étudiée avec un feuillard différent afin de voir l’impact des imperfections géométriques sur les contraintes critiques. Pour le feuillard en acier et de meilleure qualité, les contraintes critiques expérimentales sont plus élevées que pour le cas précédent (voir Figure 7.22). La pression seuil est une fois de plus surestimée à 216 mbar contre 40 mbar expérimentalement, où des défauts en partie comprimé ont précipité le flambage, toujours suivi d’une branche post-critique stable et donc d’une réserve de charge après le cloquage. La règle permet alors de gagner en marge tout en restant conservative.

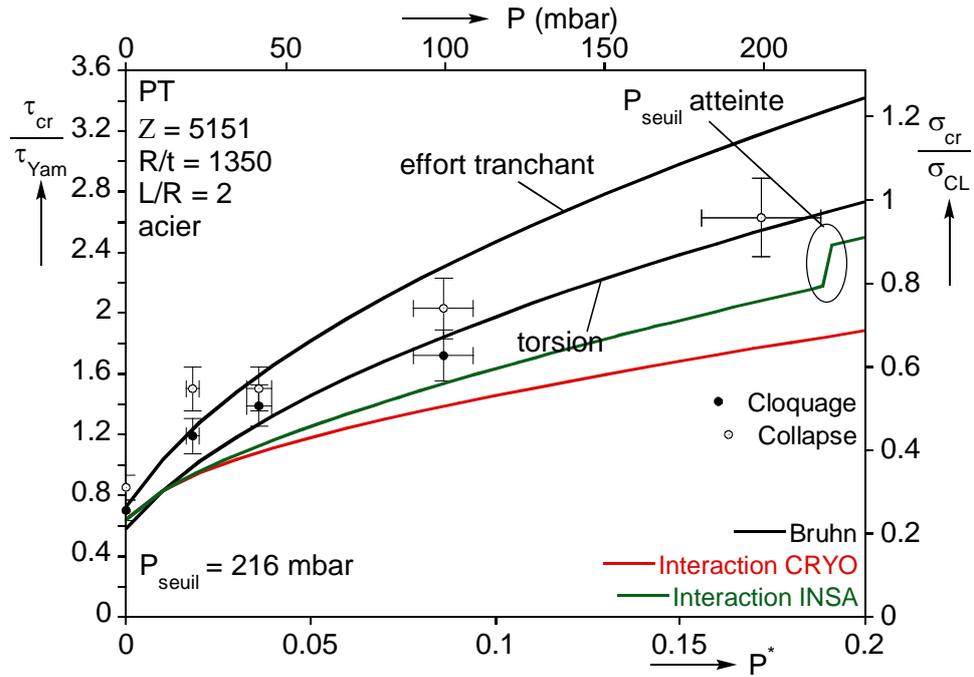


Figure 7.22 Validation du dimensionnement PT,  $R/t = 1350$ ,  $L/R = 2$ , acier

### 7.5.3 Conclusions

Le cas des coques sous cisaillement par effort tranchant et pression interne est à différencier des deux cas de charge étudiés précédemment. Tout d’abord, une seule étude expérimentale significative a été réalisée jusqu’à présent, montrant que le sujet est encore peu fouillé. Ceci se traduit à notre sens par une méthode de dimensionnement illogique, mais qui aboutit tout de même à des résultats satisfaisants.

Notre étude expérimentale permet de valider pour des géométries variées (8 valeurs de  $Z$  étudiées) la prise en compte de la règle de flexion INSA ainsi que l’observation d’une pression « seuil » déterminant le changement de mode de ruine, l’estimation de cette pression restant grossière. Des améliorations significatives sont possibles, mais requièrent cependant des efforts plus importants. Afin de construire une règle plus judicieuse et propre à cette interaction entre l’effort tranchant et la flexion, des calculs dimensionnants nécessitent le choix judicieux d’un défaut. De plus, des essais à des pressions plus importantes permettraient de valider la pression seuil pour plus de géométries.

# 8

## Conclusions et perspectives

- 8.1 Sur le flambage en pression interne et compression**
- 8.2 Sur le flambage en pression interne et flexion**
- 8.3 Sur les différences entre flexion et compression**
- 8.4 Sur le flambage en pression interne et cisaillement par effort tranchant**
- 8.5 Perspectives**

Notre étude sur le flambage de coques cylindriques minces a allié approches expérimentale et numérique pour différentes combinaisons de chargements, mettant en jeu principalement l'effet de la pression interne sur les instabilités en compression, en flexion ou en cisaillement par effort tranchant. Expérimentalement, nous avons pu confirmer les observations de la littérature dans certains cas, et mettre en avant de nouveaux phénomènes pour d'autres. En conjonction avec les résultats numériques, nous proposons une amélioration au dimensionnement de ces structures minces. Nous résumons dans ce chapitre de conclusion les principaux résultats de ce travail, en terminant sur les perspectives que nous avons amenées.

---

### **8.1 Sur le flambage en pression interne et compression**

Ce cas est certainement celui ayant suscité le plus d'intérêt par le passé. Notre approche expérimentale balaye différentes valeurs de  $R/t$ . Ceci se traduit avant tout par des spécimens de qualités diverses, nous permettant de montrer encore une fois que l'effet des imperfections géométriques sur la charge critique est crucial aux faibles niveaux de pression interne. L'augmentation de pression stabilise la structure, changeant peu à peu le mode critique et le comportement. Les cloques dites en « pointes de diamant », formées soudainement après l'atteinte d'une bifurcation d'équilibre, diminuent en taille et finissent par se transformer en des ondes axisymétriques rappelant le mode de flambage théorique d'une coque parfaite, et l'instabilité est alors du type point-limite. Les charges critiques se rapprochent alors de la valeur classique, plus ou moins lentement selon qualité des cylindres. Ces points avaient été largement observés auparavant. Nous avons en outre pu mettre en évidence l'effet déstabilisateur de la pression qui n'est pas toujours pris en compte pour le dimensionnement. Celui-ci est dû à une fragilisation de la structure près des conditions limites, et se traduit par un mode axisymétrique localisé, communément appelé « patte d'éléphant ». Ce phénomène intervient à un niveau de pression interne qui dépend de la géométrie et des caractéristiques du matériau.

Une amélioration du dimensionnement pour des valeurs de  $R/t$  très variées passe par une importante campagne numérique. Les résultats sont très sensibles à la modélisation utilisée, et nous choisissons une imperfection axi-

symétrique triangulaire localisée, à partir d'études réalisées précédemment au laboratoire. Les gains alors obtenus numériquement par rapport à la règle NA-SA SP8007 sont confirmés par les résultats expérimentaux. En utilisant la vraie loi matériau, il est de plus possible de prédire la pression seuil de déstabilisation.

---

## 8.2 Sur le flambage en pression interne et flexion

Le cas du flambage des coques pressurisées sous flexion a en général plutôt été délaissé en comparaison avec le cas précédent, mais plusieurs thèses conduites ces 15 dernières années au LGCIE ont permis, à l'aide de moyens expérimentaux adaptés, d'en comprendre les mécanismes sous-jacents. Nous nous sommes concentrés ici sur les faibles pressions, où une fois de plus l'influence des défauts est prépondérante : ainsi, des feuillards de qualités différentes vont donner lieu à des charges critiques bien distinctes.

L'augmentation de pression change considérablement le comportement initial des cylindres. Une bifurcation n'est alors plus suivie d'un effondrement, mais d'une branche post-critique stable, et une réserve de charge conséquente peut être atteinte au prix de déformations importantes. La coque bénéficie de l'effet membrane lorsqu'elle est chargée en flexion, lui permettant de retarder le flambage. Les contraintes de bifurcation augmentent donc très rapidement avec la pression, dépassant même la contrainte classique. On retrouve l'effet déstabilisateur de la pression et la formation d'un mode en patte d'éléphant près des conditions limites.

Les simulations sont effectuées avec un modèle similaire au cas de la compression. La taille de l'imperfection « dimensionnante » est cependant moins importante, afin de traduire les plus grandes charges critiques observées expérimentalement. La comparaison aux résultats de notre campagne d'essais nous permet une fois de plus de valider les gains prédits relativement à la NA-SA SP8007.

---

## 8.3 Sur les différences entre flexion et compression

Bien que certaines différences aient été notées auparavant entre le comportement des coques sous compression ou sous flexion, certaines aberrations persistent dans les recommandations de dimensionnement. Nous avons mis en évidence, aussi bien expérimentalement que numériquement, ces différences. L'effet membrane existant en flexion et pression interne permet à la contrainte critique des structures imparfaites (soit toutes les structures réelles) d'augmenter bien plus rapidement avec la pression, et dépasser la contrainte classique qui est la limite théorique en compression. En outre, passé un certain niveau de pression, le comportement suivant la bifurcation devient stable et le cloquage n'est donc plus synonyme d'effondrement.

---

## 8.4 Sur le flambage en pression interne et cisaillement par effort tranchant

Le flambage des coques pressurisées en cisaillement par effort tranchant est plutôt méconnu. Nos résultats montrent qu'il existe une interaction complexe

avec un flambage de type flexion, selon la géométrie du problème et la pressurisation.

Le comportement typique de cisaillement est initialement linéaire. Suite à une bifurcation d'équilibre, de larges cloques diagonales apparaissent sur le flanc de la coque, et la raideur diminue progressivement, traduisant l'amplification des ces cloques jusqu'à l'effondrement par point limite. Le déclenchement des instabilités est alors peu sensible aux imperfections géométriques. Ceci est observé en général pour les coques courtes, épaisses, aux faibles pressions.

Avec l'augmentation de pression, le régime post-critique est de plus en plus raide ; les cloques sont plus petites, et localisées au bas de la structure. Passé un certain seuil de pression dépendant des paramètres géométriques, la branche post-critique est inexistante, la bifurcation donne lieu à l'effondrement de la coque. Les cloques de cisaillement ont quasiment disparu, et on retrouve des cloques en pointes de diamants du côté comprimé de la structure.

La flexion fait donc intrinsèquement partie du problème, et ces constatations expérimentales nous ont mené à définir par calcul une pression seuil à partir de laquelle il n'est plus nécessaire de considérer le cisaillement dans le calcul de contrainte critique. Ceci constitue une amélioration du dimensionnement en soit.

## 8.5 Perspectives

Si notre travail a permis d'améliorer le dimensionnement de coques pressurisées au flambage, il ne constitue pas une fin en soit, et certains points peuvent encore être perfectionnés.

Dans le cas de la compression et de la flexion, il serait intéressant de considérer l'effet de conditions limites particulières. Un gain de charge critique peut encore être obtenu avec une meilleure connaissance des défauts présents sur le réservoir de l'EPC : l'introduction d'une géométrie réelle permettrait de « benchmarker » notre proposition de règle.

En flexion et pression interne, nous avons limité de manière conservative la contrainte critique de bifurcation à la contrainte classique. Nos calculs et essais montrent que cette limite est effectivement dépassée, et le choix d'un critère limite (du type perte de raideur maximale), utilisé de manière rigoureuse, nous donnerait un gain supplémentaire de marge.

Enfin en ce qui concerne le flambage par effort tranchant, nous n'avons que pointé du doigt les faiblesses des méthodes actuelles et pris parti de nos observations afin de proposer une méthode plus pertinente. Afin de proposer directement de nouvelles courbes de dimensionnement, il serait nécessaire d'effectuer de nombreux calculs, tout en choisissant une imperfection adaptée au problème ; ainsi qu'une exploration expérimentale des pressions plus importantes.

# Bibliographie

---

- [1] Akiyama, H. et al., *Demonstration Test and Research Program of Buckling of FBR*. **In** : Transaction of the 13<sup>th</sup> International Conference on SMiRT, Porto Alegre, Brazil, 1995, Vol.E, pp.215-222.
- [2] Almroth, B.O., *Influence of Edge Conditions on the Stability of Axially Compressed Cylindrical Shells*. AIAA Journal, 1966, Vol.4, pp.134-140.
- [3] Amazigo, J.C., Budiansky, B., *Asymptotic Formulas for Buckling Stresses of Axially Compressed Cylinders with Localized or Random Axisymmetric Imperfections*. Journal of Applied Mechanics, 1972, Vol. 39, pp.179-184.
- [4] Anonymous, *Buckling of Thin-Walled Circular Cylinders*. NASA SP8007, 1968, 47p.
- [5] Anonymous, *Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-6: Strength and Stability of Shell Structures*. Brussels : CEN European Committee for Standardisation, 2006.
- [6] Antoine, P.O., *Comportement des coques cylindriques minces sous chargements combinés*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 2000, 171p.
- [7] Arbocz, J., Babcock, C.D., *The Effect of General Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells*. Journal of Applied Mechanics, 1969, Vol.36, pp.28-38.
- [8] Arbocz, J., Hol, J.M.A.M., *Collapse of Axially Compressed Shells with Random Imperfections*. Thin-Walled Structures, 1995, Vol.23, pp.131-158.
- [9] Arbocz, J., Stam, A.R., *A Probability Approach to Design Shell Structures*. **In** : *Buckling of Thin Metal Shells*, Teng, J.G., Rotter, J.M., London : Spoon Press, 2004, pp.455-489.
- [10] Babcock, C.D., *The buckling of cylindrical shells with an initial imperfection under axial compression loading*. PhD Thesis, California Institute of technology, Pasadena, Californie, USA, 1981, 112p.
- [11] Baker, E. H., Cappelli, A. P., Kovalevsky, L., Rish, F. L., Verette, R. M., *Shell Analysis Manual*. NASA CR 912, Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1968, 804p.
- [12] Berry, P.A., Rotter, J.M., *Partial Axisymmetric Imperfections and their Effect on the Buckling Strength of Axially Compressed Cylinders*. Proceedings of the

International Workshop on Imperfections in Metal Silos: Measurement, Characterization and Strength Analysis. CA-Silo, Lyon, France, 1996, pp.35-48.

- [13] Berry, P.A., *Buckling under Axial Compression of Cylindrical Shells with Circumferential Weld Shrinkage Depressions*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Sydney : University of Sydney, 1997, 185p.
- [14] Berry, P.A., Rotter, J.M., Bridge, R.Q., *Compression tests on cylinders with circumferential weld depressions*. Journal of Engineering Mechanics, 2000, Vol.126, pp.405-413.
- [15] Bijlaard, P.P., *Theory and Tests on the Plastic Stability of Plates and Shells*. Journal of the Aeronautical Sciences, 1949, Vol.16, pp.529-541.
- [16] Blachut, J., *Buckling of Axially Compressed Cylinders With Imperfect Length*. Computers and Structures, 2010, Vol.88, pp.365-374.
- [17] Bornscheuer, F.W., Häfner L., Ramm E., *Zur Stabilität eines Kreiszyllinders mit einer Rundschweissnaht unter Axialbelastung*. Der Stahlbau, 1983, Vol.52, pp.313-318.
- [18] Bourinet, J.M., Gayton, N., Lemaire, M., Combescure, A., *Reliability analysis of stability of shells based on combined finite element and response surface methods*. **In**: Computational Methods for Shell and Spatial Structures, IASSIACM 2000, Athènes, Grèce , 2000.
- [19] Brazier, L. G., *On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other "Thin" Sections*. Proceedings of the Royal Society, London, 1927, Series A, Vol.116, pp.104-114.
- [20] Brown, J.K., Rea, R.H., *The elastic stability of thin-walled pressurised conical shells under compression and compression-bending interaction*. M.S. Thesis, Wright-Patterson Air Force Base : Institute of Technology, 1960.
- [21] Bruhn, E.F., *Test on thin-walled celluloid cylinders to determine the interactive curves under combined bending, torsion, and compression or tension loads*. NACA TN 951, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1945, 68p.
- [22] Bruhn, E.F., *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*. Jacobs Publishing Inc., 1973.
- [23] Cimetière, A., *Flambage naissant des plaques élastoplastiques minces*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II 298, 1984, pp.157–160.

- [24] Cimetière, A., Léger, A., Potier-Ferry M., *Sur le flambage plastique de l'éprouvette cruciforme*. C. R. Mécanique, n°332, 2004, pp. 67-72.
- [25] Clerc, P., *Mesure de champs de déplacements et de déformations par stéréovision et corrélation d'images numériques*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 2001, 300p.
- [26] Crate, H., Batdorf, S.B., Baab, G.W., *Effect of Normal Pressure on the Critical Compressive Stress of Curved Sheet*. NACA WR L258, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1942, 9p.
- [27] Crate, H., Batdorf, S.B., Baab, G.W., *The Effect of Internal Pressure on the Buckling Stress of Thin-Walled Circular Cylinders under Torsion*. NACA WR L67, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1946, 25p.
- [28] Crisfield, M.A., *A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-through"*. Computers and Structures, 1981, Vol.13, pp.55-62.
- [29] De Vries, J., *The Imperfection Data Bank and its Applications*. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1981., 2009, 190p.
- [30] Donnell, L.H., *Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion*. NACA Report N°479, Washington: National Advisory Committee for Aeronautics, 1933, 24p.
- [31] Donnell, L.H., *A New Theory for the Buckling of Thin Cylinders under Axial Compression and Bending*. Transactions of the ASME, 1934, Vol.56, pp.795-806.
- [32] Dow, M.B., Peterson, J.P., *Bending and compression tests of pressurized ring-stiffened cylinders*. NASA TN D-360, Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1960, 27p.
- [33] Draïdi, Z., *Renforcement et Réparation des Coques Métalliques par Matériaux Composites (TFC) : Etude du Comportement au Flambage – Approche expérimentale et numérique*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 2005, 162p.
- [34] ECCS EDR5, *European Recommendations for Steel Construction: Buckling of Shells*. 5th edition, Edited by J.M. Rotter and H. Schmidt, European Convention for Constructional Steelwork, Brussels, 2008, 384p.
- [35] Fischer, F.D., Rammerstorfer, F.G., Friedl, N., *Residual Stress-Induced Center Wave Buckling of Rolled Strip Metal*. Transactions of the ASME, 2003, Vol.70, pp84-90.

- [36] Flugge, W., *Die Stabilität der Kreiszyinderschalen*. Ingenieur-Archiv, 1932, Vol.3, pp.463-506.
- [37] Flüge, W., *Stresses in Shells*. Berlin : Springer Verlag, 1973, 525p.
- [38] Fung, Y.C., Sechler, E.E., *Buckling of thin-walled circular cylinders under axial compression and internal pressure*. Journal of Aeronautical Sciences, 1957, Vol.24, pp.351-356.
- [39] Galletly, G.D., Blachut, J., *Plastic Buckling of Short Vertical Cylindrical Shells Subjected to Horizontal Edge Shear Loads*. Journal of Pressure Vessel Technology, 1985, Vol.107, pp.101-106.
- [40] Gerard, G., *Compressive and Torsional Buckling of Thin-Wall Cylinders in Yield Region*. NACA TN 3726, Washington: National Advisory Committee for Aeronautics, 1956, 40p.
- [41] Gros, D., *Flambage des Coques Cylindriques sous Pression Interne et Flexion*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1999, 170 p.
- [42] Harris, L.A., Suer, H.S., Skene, W.T., Benjamin, R.J., *The Stability of Thin-Walled Unstiffened Circular Cylinders Under Axial Compression Including the Effects of Internal Pressure*. Journal of the Aeronautical Sciences, 1957, Vol.4, pp.587-596.
- [43] Hill, R., *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1958, Vol.6, pp.236-249.
- [44] Hoff, N.J., *Low Buckling Stresses of Axially Compressed Circular Shells of Finite Length*, ASME Journal, 1965, Vol.32, pp.533-541.
- [45] Holst, J.M.F.G., Rotter, J.M., Calladine, C.R., *Imperfections and buckling in cylindrical shells with consistent residual stresses*. Journal of Constructional Steel Research, 2000, Vol.54, pp.265-282.
- [46] Hutchinson, J.W., *Axial Buckling of Pressurized Imperfect Cylindrical Shells*. AIAA journal, 1965, Vol.3, pp.1461-1466.
- [47] Hutchinson, J.W., Tennyson, R.C, Muggeridge, D.B., *Effect of a Local Axisymmetric Imperfection on the Buckling Behavior of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression*. AIAA Journal, 1971, Vol.9, pp.48-53.
- [48] Hutchinson, J.W., *On the Postbuckling Behaviour of Imperfection-Sensitive Structures in the Plastic Range*. Journal of Applied Mechanics, 1972, pp.155-162.

- [49] Hutchinson, J.W., *Plastic buckling*. Advances in applied mechanics, 1974, Vol.14, pp.67-144.
- [50] Jacques, N., Elias, A., Potier-Ferry, M., Zahrouni, H., *Buckling and wrinkling during strip conveying in processing lines*. Journal of Materials Processing Technology, 2007, vol.190, pp.33-40.
- [51] Jamal, M., Midani, M., Damil, N., Potier-Ferry, M., *Influence of localized imperfections on the buckling of long cylindrical shells under axial compression*. International Journal of Solids and Structures, 1999, Vol.36, pp.441-464.
- [52] Jamal, M., Lahlou, L., Midani, M., Zahrouni, H., Limam, A., Damil, N., Potier-Ferry, M., *A semi-analytical buckling analysis of imperfect cylindrical shells under axial compression*. International Journal of Solids and Structures, 2003, Vol.40, pp.1311-1327.
- [53] Ju, G.T., Kyriakides, S., *Bifurcation and localization instabilities in cylindrical shells under bending – I. Experiments*. International Journal of Solids and Structures, 1992, Vol. 29, pp.1117-1142.
- [54] Ju, G.T., Kyriakides, S., *Bifurcation and localization instabilities in cylindrical shells under bending – II. Predictions*. International Journal of Solids and Structures, 1992, Vol. 29, pp.1143-1171.
- [55] Kawamoto, Y., Yuhara, T., Tashimo, M., Sakurai, A., Nakamura, H., *Plastic Buckling of Short Cylinders under Transverse Shearing Loads*. **In** : *Transaction of the 9<sup>th</sup> International Conference on SMiRT*, Amsterdam, Netherlands, 1987, Vol.E, pp.225-230.
- [56] Koiter, W.T., *On the Stability of Elastic Equilibrium*. Ph.D. Thesis, 1945, TH-Delft, Netherlands, H.J. Paris, Amsterdam (In Dutch). (English translation : NASA TT F-10, 1967, 322p).
- [57] Koiter, W.T., Hutchinson, J.W., *Postbuckling Theory*, Applied Mechanics Reviews, 1970, Vol.23, pp.1353-1366.
- [58] Leaumont, W.J., *Collapse Tests of Pressurized Membrane-like Circular Cylinders for Combined Compression and Bending*. NASA CR 1160, Washington : National Aeronautics and Space Administration, 1968, 46 p.
- [59] Limam, A., Combescure, A., *Flambage de coques minces cylindriques lisses en cisaillement: Viroles Galletly-Blachut*. Rapport CEA DEMA 87/416, 1987, 41p.

- [60] Limam, A., *Flambage de coques cylindriques sous combinaison de charge-ments: pression interne et compression axiale. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1991, 211 p.*
- [61] Lo, H., Crate, H., Schwartz, E.B., *Buckling of Thin-Walled Cylinder Under Ax-ial Compression and Internal Pressure.* NACA Report 1027, Washington : Na-tional Advisory Committee for Aeronautics, 1951, pp.647-655.
- [62] Lorenz, Z., *Achsensymmetrische Verzerrungen in dunwandigen Hohlzylinder.* Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 1908, Vol. 52, pp.1766-1793.
- [63] Love, A.E.H., *On the small free vibrations and deformations of elastic shells.* Philosophical transactions of the Royal Society, London, 1888, Series A, n° 17, pp.491–549.
- [64] Lu, S.Y., *Buckling of Cantilever Cylindrical Shell with a Transverse End Load.* AIAA Journal, 1965, Vol.3, pp.2350-2351.
- [65] Lundquist, E.E., *Strength Tests of Thin-Walled Duralumin Cylinders in Tor-sion.* NACA TR 427, Washington : National Advisory Committee for Aeronau-tics, 1932, 20 p.
- [66] Lundquist, E.E., *Strength Tests of Thin-Walled Duralumin Cylinders in Com-pression.* NACA TR 473, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1933, 18 p.
- [67] Lundquist, E.E., *Strength Tests of Thin-Walled Duralumin Cylinders in Pure Bending.* NACA TR 479, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1933, 18 p.
- [68] Lundquist, E.E., *Strength Tests of Thin-Walled Duralumin Cylinders in Com-bined Transverse Shear and Bending.* NACA TR 523, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1935, 27 p.
- [69] Mathon, C., *Flambage Sous Flexion et Pression Interne de Coques Cylin-driques Minces.* Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 2004, 265p.
- [70] Mathon, C., Limam, A., *Coques Cylindriques sous Chargements Combinés : Pression Interne et Flexion Pure – Prise en Compte de la Plasticité et Proposi-tion de Dimensionnement.* Rapport EADS-INSA de Lyon, 2006, 47 p.
- [71] Matsuura, S., Nakamura, H., Sawada, Y., Ogiso, S., Suzuki, M., Ooka, Y., *Shear Buckling of 304S.S Cylinders Having Radius-to-Thickness Ratio of 100 Thru 400 Transverse Shearing Loads.* **In** : Transaction of the 10<sup>th</sup> International Conference on SMiRT, Anaheim, CA, USA, 1989, Vol.E, pp.229-234.

- [72] Matsuura, S., Nakamura, H., Kawamoto, Y., Murakami, T., Ogiso, S., Akiyama, H., *Shear-Bending Buckling Strength of FBR Main Vessels*. **In** : *Transaction of the 13<sup>th</sup> International Conference on SMIRT*, Porto Alegre, Brazil, 1995, Vol. E, pp. 457-462.
- [73] Mc Comb, H.G., Zender, G.W., Mikulas, M.M., *The membrane approach to bending instability of pressurized cylindrical shells*. NASA TN D-1510, 1962, pp.229-237.
- [74] Mossman, R.W., Robinson, R.G., *Bending tests on metal monocoque fuselage construction*. NACA TN 357, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1930, 30p.
- [75] Murakami T., Yoguchi, H., Hirayama, H., Nakamura, H., Matsuura, S., *The Effects of Geometrical Imperfection on Buckling Strength of Cylindrical Shells in Bending*. **In** : *Transaction of the 12<sup>th</sup> International Conference on SMiRT*, Stuttgart, Germany, 1993, Vol.E, pp.257-268.
- [76] Öry, H., *Space Course I+II*. Aachen (Germany) : Institut für Leichtbau, RWTH Aachen, 1991, 350 p.
- [77] Peterson, J.P., *Bending tests on ring-stiffened circular cylinders*. NACA TN 3735, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1956, 14 p.
- [78] Peterson, J.P., Updegraff, R.G., *Test of Ring-Stiffened Circular Cylinders Subjected to a Transverse Shear Load*. NACA TN 4403, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1958, 12 p.
- [79] Pircher, M., Bridge, R., *The influence of circumferential weld-induced imperfections on the buckling of silos and tanks*. *Journal of constructional steel research*, 2001, Vol.57, pp.569-580.
- [80] Pircher, M., Berry, P.A., Ding, X., Bridge, R.Q., *The shape of circumferential weld-induced imperfections in thin-walled steel silos and tanks*. *Thin-Walled Structures*, 2001, Vol.39, pp.999-1014.
- [81] Powell G. and Simons J., *Improved Iteration Strategy for Nonlinear Structures*. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1981, Vol. 17, pp.1455–1467.
- [82] Rafel, N., *Effect of Normal Pressure on the Critical Compressive Stress of Curved Sheet*. NACA WR L258, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1942, 9 p.

- [83] Ramm, E., *Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points. Non-linear Finite Element Analysis* **In** : Structural Mechanics: Proceedings of the Europe–US Workshop, 1980, Springer, Berlin, pp. 63–89.
- [84] Rhode, R.V., Lundquist, E.E., *Strength Tests on Paper Cylinders in Compression, Bending and Shear*. NACA TN 370, Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1931, 30 p.
- [85] Riks, E., *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*. International Journal of Solids and Structures, 1979, Vol.15, pp.524-551.
- [86] Rotter, J.M., Teng, J.G., *Elastic Stability of Cylindrical Shells with Weld Depressions*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1989, Vol.115, pp.1244-1263.
- [87] Rotter, J.M., *Local Inelastic Collapse of Pressurised Thin Cylindrical Steel Shells under Axial Compression*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1990, Vol. 116, pp.1955–1970.
- [88] Rotter, J.M., *Development of proposed European design rules for buckling of axially compressed cylinders*. Advances in Structural Engineering, 1998, Vol. 1, pp.273-286.
- [89] Rotter, J.M., *Cylindrical Shells under Axial Compression*. **In** : *Buckling of Thin Metal Shells*, Teng, J.G., Rotter, J.M., London : Spoon Press, 2004, pp.455-489.
- [90] Rotter, J.M., *Elephant's Foot Buckling in Pressurized Cylindrical Shells*. Stahlbau, 2006, Vol.75, pp.742-747.
- [91] Saal, H., Kahmer, H., Reif, A., *Beullasten axial gedruckter Kreiszyinderschalen mit Innendruck; Neue Versuche und Vorschriften*. Der Stahlbau, 1979, Vol.48, pp.262-269.
- [92] Sanders, J.L., *Nonlinear Theories for Thin Shells*. Quarterly Journal of Applied Mathematics, England, 1963, Vol.20, n°1, pp.20-36.
- [93] Schauder, B., *Coque Cylindrique Isotrope sous Flexion et Pression Interne*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1997, 169 p.
- [94] Schmidt, H., Winterstetter, T.A., *Cylindrical shells under torsion and transverse shear*. **In** : *Buckling of Thin Metal Shells*, Teng, J.G., Rotter, J.M., London : Spoon Press, 2004, pp 207-229.

- [95] Schmidt, H., Winterstetter, T.A., *Cylindrical shells under combined loading: axial compression, external pressure and torsional shear*. **In** : *Buckling of Thin Metal Shells*, Teng, J.G., Rotter, J.M., London : Spoon Press, 2004, pp 261-285.
- [96] Schnell, W., *Zur Stabilität dünnwandiger längsgedrückter Kreiszyinderschalen bei zusätzlichem Innendruck*. **In**: Proceedings of the IUTAM Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, 1959, Delft, Netherlands, pp.167-188.
- [97] Schröder, P., *Über die Stabilität der Querkraft Belasteten Dünnwandigen Kreiszyinderschale*. ZAMM, 1972, Vol.52, pp.145-148.
- [98] Sebek, R.W.L, *Imperfection surveys and data reduction of ariane interstage I/II and II/III*. Master's thesis, Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1981.
- [99] Seide, P., Weingarten, V.I., *On the Buckling of Circular Cylindrical Shells Under Pure Bending*. Journal of Applied Mechanics, 1961, Vol.28, pp.112-116.
- [100] Seide, P., Weingarten, V.I., Morgan, E.J., *Final Report on the Development of Design Criteria for Elastic Stability of Thin Shell Structures*. Space technology Laboratories, STL/TR 60-0000-19425, 1960, 196 p.
- [101] Shanley, F.R., *Inelastic column Theory*. Journal of the Aeronautical Sciences, 1947, Vol.14, pp.261-267.
- [102] Singer J., Arbocz. J., Weller T., *Buckling Experiments*. New York : J. Wiley & Sons, 1998.
- [103] Southwell, R.V., *On the general theory of elastic stability*. Philosophical transactions of the Royal Society, London, 1914, Series A, n°213, pp.187-202.
- [104] Stein, M., Hedgepeth, J.M., *Analysis of partly wrinkled membranes*. NASA TN D-813, Washington : National Aeronautics and Space Administration, 1961, 32p.
- [105] Stuart, F.R, Goto, J.T., Sechler, E.E., *The Buckling of Thin-Walled Circular Cylinders under Axial Compression and Bending*. NASA CR 1160, Washington : National Aeronautics and Space Administration, 1968, 46 p.
- [106] Suer, H.S., Harris, L.A., Skene, W.T., Benjamin, R.J., *The Bending Stability of Thin-Walled Unstiffened Circular Cylinders Including the Effects of Internal Pressure*. Journal of the Aeronautical Sciences, 1958, Vol.25, pp.281-287.

- [107] Teng, J.G., Rotter, J.M., *Buckling of Pressurised Axisymmetrically Imperfect Cylinders under Axial Loads*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1992, Vol.118, pp.229-247.
- [108] Tennyson, R.C., Muggeridge, D.B., *Buckling of Axisymmetric Imperfect Circular Cylindrical Shells Under Axial Compression*. AIAA Journal, 1969, Vol.17, pp.2127-2131.
- [109] Timoshenko, S.P., *Einige stabiats Probleme der Elastizitatstheorie*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 1910, Vol. 58, pp.337-357.
- [110] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*. Auckland : McGraw-Hill, 1963, 541 p.
- [111] Waeckel, N., *Imperfections Géométriques Initiales et Instabilités de Structures Minces*. Thèse de Doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1984, 306 p.
- [112] Waeil, F.A., *Flambage plastique des coques cylindriques sous compression axiale : influence des imperfections géométriques et des imperfections de conditions aux limites*. Thèse de doctorat, Lyon : INSA de Lyon, 1988, 255p.
- [113] Weingarten, V.I., Morgan, E.J., Seide, P., *Elastic Stability of Thin-Walled Cylindrical and Conical Shells under Combined Internal Pressure and Axial Compression*. AIAA Journal, 1965, Vol.3, pp.1118-1125.
- [114] Wilson, W.M., Newmark, N.M., *The strength of thin cylindrical shells as columns*. Bulletin n°255, Engineering Experimental Station, University of Illinois, 1933, 50p.
- [115] Winterstetter, T.A., *Beulen von Kreiszyinderschalen aus Stahl unter kombinierter Beanspruchung*. PhD Thesis, Universität Essen, Germany, 2000.
- [116] Yamaki, N., *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*. Amsterdam : North-Holland, 1984, 558 p.