



**HAL**  
open science

# Russell et la question des fondements. Etudes d'histoire et de philosophie des mathématiques au tournant du xxe siècle

Sébastien Gandon

## ► To cite this version:

Sébastien Gandon. Russell et la question des fondements. Etudes d'histoire et de philosophie des mathématiques au tournant du xxe siècle. Philosophie. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2009. tel-00782161

**HAL Id: tel-00782161**

**<https://theses.hal.science/tel-00782161>**

Submitted on 29 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **RUSSELL ET LA QUESTION DES FONDEMENTS.**

**ÉTUDES D'HISTOIRE ET DE PHILOSOPHIE DES  
MATHÉMATIQUES AU TOURNANT DU XX<sup>e</sup> SIÈCLE**

## **Note de Synthèse**

**présentée par Sébastien GANDON  
en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches**

### **Jury**

Nicholas Griffin (Prof., McMaster University, Canada)  
Gregory Landini (Prof., The University of Iowa, USA)  
Alain Michel (Prof., Aix)  
François Schmitz (Prof., Nantes)  
Elisabeth Schwartz (Prof., Clermont II) – directrice  
Hourya Sinaceur (DR, IHPST-CNRS)

**27 Novembre 2009  
Université Baise Pascal, Clermont**



# TABLE DES MATIÈRES

<b>I/ NOTE DE SYNTHÈSE</b>	<b>5</b>
<b>1/ Avant propos</b>	<b>5</b>
<b>2/ Du <i>Tractatus</i> à autre chose</b>	<b>8</b>
<b>3/ Le contexte mathématiques des <i>Principles</i></b>	<b>12</b>
<b>4/ La question des fondements de la géométrie à la fin du XIXe</b>	<b>17</b>
<b>5/ Histoire, philosophie, mathématiques</b>	<b>24</b>
<b>6/ Perspective I : l'édition de la correspondance Russell/Whitehead</b>	<b>32</b>
<b>7/ Perspective II : le sens du logicisme russellien</b>	<b>36</b>
<b>8/ Perspective III : enjeux et histoire des géométries finies</b>	<b>43</b>
<b>9/ Conclusion</b>	<b>51</b>
<b>10/ Bibliographie</b>	<b>54</b>
<b>II/ RECAPITULATIF DES ACTIVITÉS DE RECHERCHE (2000-2009)</b>	<b>57</b>



*“When a theory has been apprehended logically, there is often a long and serious labour still required in order to feel it: it is necessary to dwell upon it, to thrust out from the mind, one by one, the misleading suggestions of false but more familiar theories, to acquire the kind of intimacy which, in the case of a foreign language, would enable us to think and dream in it, not merely to construct laborious sentences by the help of grammar and dictionary.”*

Russell, *On Knowledge of External World*, 136.

## **1/ Avant Propos**

Le dossier d’habilitation se compose de trois documents : un mémoire inédit, intitulé « Relations et quantités chez Russell (1897-1913) », auquel je ferai référence dans la suite sous le nom de (M) ; deux volumes regroupant certains des travaux déjà publiés ou à paraître, intitulés « Études d’histoire et de philosophie des mathématiques au tournant du XXe siècle », que je désignerai par (A1) et (A2) ; enfin la présente note de synthèse accompagnée d’un récapitulatif de mes activités de recherche de 2000 (ma thèse a été soutenue fin 1999) à 2009. Le but de cette note est de présenter une vue synoptique de mon parcours scientifique et des résultats obtenus depuis la thèse, ainsi que de décrire les nouvelles perspectives. Le mémoire (M) joint au dossier constitue une partie autonome, dotée d’une introduction et d’une conclusion indépendante. S’il sera bien évidemment question des recherches exposées dans ce manuscrit, la présente note doit être avant tout considérée comme une introduction et un guide à la lecture des articles contenus dans les deux volumes (A1) et (A2). Deux parties la composent. Dans les sections 2 à 5, j’expose les résultats des travaux déjà menés. Les sections 6 à 8 donnent des indications sur mes orientations actuelles, sur les axes qui vont gouverner mes futures recherches. Le reste de cet avant-propos est consacré à un chronogramme de mes recherches, chronogramme rendu nécessaire par le fait que la date de publication des articles ne reflète pas celle de leur rédaction. Je me réfère aux textes de (A1) et (A2) en donnant le numéro sous lequel ils apparaissent dans les volumes, et pour faciliter la lecture, je redonne la liste de ces textes à la fin de cette section<sup>1</sup>.

J’ai eu la chance, après ma thèse soutenue en 1999, d’être élu en 2000 maître de conférences au département de philosophie de l’université Blaise Pascal. Cela m’a permis de préparer, dans les meilleures conditions, la révision de mon mémoire de doctorat pour sa publication en 2002. Durant la même période, j’ai co-organisé avec E. Schwartz et A. Petit un colloque sur Carnap – le texte 1.3 est extrait de la conférence que j’ai prononcé à cette occasion. L’article 1.1, extrait d’une conférence que j’ai prononcée à McMaster University en 2005, date en réalité de la même période de l’immédiate après thèse, qui a été essentiellement consacrée à la rédaction de Gandon 2002.

J’ai assuré la direction du département de philosophie de Clermont de 2002 à 2004. J’ai profité de cette situation, peu propice aux déplacements, pour lire en détail les parties des *Principles* consacrées à la géométrie et me mettre au niveau à la fois en mathématiques et en

---

<sup>1</sup> J’ai souhaité ne pas surcharger la bibliographie placée à la fin de la présente Note. À quelques exceptions près, je n’ai donc pas mentionné les références des titres que je cite déjà dans le mémoire (M) et les volumes (A1) et (A2). Le lecteur peut se reporter à ces documents en cas de besoin.

histoire des mathématiques. C'est de cette période que date la rédaction de 2.1, qui constitue le socle de beaucoup de mes travaux ultérieurs. Ce texte a été rapidement complété par un article plus bref, 2.2.

À partir de 2003-2004, mes recherches se sont de plus en plus tournées vers l'histoire des mathématiques. Les raisons en sont multiples ; j'en détaille quelques unes dans les deux prochaines sections. J'aimerais ici insister sur l'importance des rencontres que j'ai faites à cette période. Rencontre avec le milieu des historiens des mathématiques (P. Nabonnand à Nancy, A. Michel à Aix, I. Smadja et M. Panza au REHSEIS) ; rencontre également avec Y. Perrin à Clermont, avec qui j'ai élaboré un cours d'histoire et de philosophie des mathématiques accessible en option de L3 du cursus mathématique et en option de M1 du cursus de philosophie ; mise en place, avec S. Maronne, à partir de 2005, d'un séminaire régulier d'histoire et de philosophie des mathématiques à Clermont.

Durant cette période, j'ai pris pour objet d'étude des œuvres faisant partie de l'arrière-plan des recherches de Russell sur la géométrie. J'ai découvert les *Vorlesungen* de Pasch, auxquels j'ai consacré deux articles (3.1 et 3.2). J'ai également étudié la postérité grassmannienne à la fin du XIXe, notamment dans l'école italienne de Peano (3.2, 3.3, 3.4). Toujours dans la même perspective, je me suis risqué, suite à un colloque organisé avec S. Maronne sur « les postérités euclidiennes », à une excursion dans la théorie des ratios de De Morgan (4.4). Dans le même temps, j'ai suivi des cours au CNED de niveau licence (fonctions à plusieurs variables, formes bilinéaires et équations quadratiques) et des cours de mathématiques à l'UBP (Analyse, Intégrale de Lebesgue). Cette démarche répondait surtout au désir de renouer avec le plaisir de faire des mathématiques et à la nécessité de mieux ajuster le cours d'histoire et de philosophie des mathématiques.

Depuis 2006, un certain retour vers des préoccupations plus directement philosophique s'est amorcé. Je n'ai, en réalité, jamais abandonné la recherche en philosophie et en histoire de la philosophie, comme le montrent 1.2, 4.1 et 4.3 – mais ces travaux s'inscrivaient dans le prolongement immédiat des recherches sur Russell et sur l'histoire des mathématiques. Depuis environ trois ans, je ressens le besoin de me confronter de façon plus affirmée à des questions plus directement philosophiques, notamment à celle du sens du logicisme russellien. Les articles 5.1, 5.2, 5.3 et 2.3 attestent de cet infléchissement. Certes, les travaux sur Russell et l'histoire de la géométrie sont toujours extrêmement présents – mais je tente aujourd'hui comprendre en quoi ils peuvent contribuer à mieux cerner le sens du projet russellien. Comme le montre le mémoire (M) (voir notamment les chapitres 5 et 6), je ne m'interdis pas non plus de faire référence à des discussions contemporaines en philosophie des mathématiques.

À l'avenir, je compte développer en parallèle des recherches historiques et des travaux plus directement philosophiques, prolongeant et discutant les résultats obtenus dans mes enquêtes historiques – l'idée étant de profiter de la dynamique engendrée par ce double engagement. Plus précisément, je compte éditer, avec Nick Griffin, la correspondance entre Russell et Whitehead (l'autorisation de la famille Whitehead nous a été accordée), et écrire un livre en anglais synthétisant les résultats obtenus sur Russell et interrogeant le sens du logicisme russellien (le contrat avec Palgrave MacMillan Publishing Company est signé) – voir sections 6 et 7 de cette Note. Je compte, d'autre part, poursuivre et élargir mes recherches sur l'histoire des mathématiques en étudiant l'émergence et le développement au XXe siècle des géométries finies – voir section 8.

Un mot encore, avant de passer à la suite, des textes regroupés dans (A1) et (A2). Je suis conscient que les contenus de certains des articles se recoupent, et je voudrai, à ce sujet, distinguer deux cas. Le premier est celui où il y a recouvrement partiel entre des travaux. Ainsi en va-t-il, par exemple, de la troisième section de 3.1 et la quatrième section de 3.2 sur Pasch. Ce genre de recouvrement est inévitable étant donné la forme de ma recherche : je mets

généralement du temps à comprendre ce qui, dans un texte, m'intrigue (à comprendre tout simplement pourquoi je persiste à le lire) ; une fois, la difficulté repérée et le problème décortiqué, j'aime l'attaquer sous différents angles. Par exemple, concernant 3.1 et 3.2, les mêmes remarques concernant l'usage que Pasch fait de la variable me servent à contraster Pasch de Klein (3.1), puis Pasch de Peano (3.2). En un sens, je mets ici et là l'accent sur la même chose – mais celle-ci acquiert un sens différent dans les deux contextes. De ces intersections acceptables et inévitables, je distingue deux cas : 1/ celui de 3.4 (sur Peano) qui synthétise et prolonge légèrement le contenu de 3.2 et 3.3 ; 2/ celui de 5.3, qui résume les développements du chapitre 4 du mémoire (M). Ces deux articles reprennent purement et simplement un contenu déjà développé ailleurs. Si j'ai malgré tout décidé de faire les figurer dans mon dossier d'habilitation, c'est parce qu'ils étaient écrits en anglais, et que leur inclusion faciliterait la tâche aux membres anglophones du jury.

Table de concordance des numéros des dix-huit articles reproduits dans (A1) et (A2) :

**1.1** : Some remarks about Russellian incomplete symbols, *Russell: the journal of the Bertrand Russell Archives*, 27: 41-59, 2007.

**1.2** : Wittgenstein dans la fabrique des *Principia*, sur et autour *Tractatus* 3. 33, à paraître dans C. Chauviré éd., *Lire le Tractatus-Logico-Philosophicus de Wittgenstein*, Paris : Vrin, 91-120, 2009.

**1.3** : Constituer ou Axiomatiser ? Schlick, Russell et Carnap, à paraître dans *Le premier Carnap : postérité et traditions*, E. Schwartz éd., Paris : Vrin.

**2.1** : Russell et l'*Universal Algebra* de Whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903), *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 10 : 187-256, 2004.

**2.2** : Algèbre, géométrie et loi d'intensité : l'enjeu de *A Treatise on Universal Algebra*, in Michel Weber et Diane d'Epremesnil (éds.), *Chromatikon I, Annuaire de la philosophie en procès - Yearbook of Philosophy in Process*, Presses universitaires de Louvain, 2005.

**2.3** : Logicism and mathematical practices – Russell's theory of geometry in the *Principles*, à paraître dans Alvarez & Arana éds., *Analytic Philosophy and the Foundations of Mathematics*, Palgrave / Macmillan.

**3.1** : Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie, *Dialogue*, 14, 653-692, 2005.

**3.2** : La réception des *Vorlesungen über neue Geometrie* de Pasch par Peano, *Revue d'histoire des mathématiques*, 12 : 2, 249-290, 2006.

**3.3** : (avec Y. Perrin) La définition de l'aire d'une surface gauche : Peano et Lebesgue, à paraître dans *Archive for History of Exact Sciences*.

**3.4** : Peano's logical language and Grassmann's Legacy, à paraître dans les *Actes du Congresso Internazionale Giuseppe Peano e la sua Scuola, fra matematica, logica e interlingua*.

**3.5** : De la configuration à l'espace projectif : le statut de la figure dans les géométries finies au début du XX<sup>e</sup> siècle, à paraître dans la *Revue Sénégalaise de Philosophie*.

**4.1** : "To bring Dedekind's research into its proper relation to general metaphysical enquiry": Royce et Russell, critiques de Bradley, *Philosophiques*, 36 : 1, 83-108, 2009.

**4.2** : A Relational Dispute [review of Stewart Candlish, *The Russell/Bradley Dispute and Its Significance for Twentieth-Century Philosophy*], *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*: Vol. 28: 2, Article 6.

**4.3** : Russell, les *sense data* et les objets physiques : une approche géométrique de la notion de classification, *Philosophia Scientiae*, 13 (1), 2009, 71-97.

**4.4** : La théorie des rapports chez A. de Morgan, à paraître dans la *Revue d'Histoire des Sciences*.



**5.1** : Which Arithmetisation for which Logicism? Russell on Quantities and Relations, *History and Philosophy of Logic*, 29: 1, 1-30, 2008.

**5.2** : Toward a topic-specific logicism? Russell's theory of geometry in the *Principles of Mathematics*, *Philosophia Mathematica*, 16, 1-39, 2008.

**5.3** : *Principia Mathematica* Part VI : Russell and Whitehead on Quantity, soumis à *Analyse et Logique*.

## 2/ Du *Tractatus* à autre chose

Ma thèse a porté sur le *Tractatus* de Wittgenstein. Il s'agissait de replacer (de façon très classique) l'œuvre dans le contexte des travaux de Frege et de Russell, en centrant l'interprétation (ce qui l'est moins) sur la théorie de l'expression. Après la parution de Gandon 2002, qui n'est qu'une version remaniée et épurée de la thèse, je me suis toutefois détourné de Wittgenstein en focalisant mes recherches sur Russell et sur l'histoire des mathématiques au tournant du siècle. J'aimerais ici donner les raisons de cette évolution.

En simplifiant, je pourrai dire que deux idées dirigeaient ma thèse :

1/ Russell se lance dans son entreprise de logicisation des mathématiques après, mais néanmoins indépendamment de Frege. Russell dit ainsi avoir compris les *Grundgesetze* seulement à partir de 1901, c'est-à-dire après l'écriture de la première version des *Principles*. Le logicisme russellien, s'il est dans l'esprit, proche des *Grundgesetze*, est donc à la fois dans le détail de ses développements et dans ses hypothèses directrices très différents. L'historien se retrouve donc face à deux programmes philosophiques dont l'ambition est quasiment la même mais qui ne sont pas pourtant identifiables l'un à l'autre. D'une certaine manière, une telle situation, inhabituelle en philosophie où les auteurs se déterminent généralement les uns contre les autres, n'est pas sans analogie avec un état de chose que l'on retrouve souvent en mathématiques, où les découvertes simultanées et indépendantes de preuves ou de théories ne sont en effet pas rares (voir par exemple la naissance du calcul différentiel chez Leibniz et Newton, l'usage de l'algèbre en géométrie chez Descartes et Fermat, etc.). La situation se singularise encore plus lorsque l'on se tourne vers les échanges entre Frege et Russell. On aurait pu s'attendre à ce que les deux auteurs comparent et défendent les mérites respectifs de leurs approches respectives (comme c'est d'ailleurs souvent le cas lors des « querelles de priorité » en mathématiques). Ils le font bien, en un sens, mais très partiellement seulement, car leur rencontre coïncide avec la découverte du paradoxe, que Russell expose à Frege dans sa lettre de 1902, et qui menace indistinctement les deux projets. La correspondance entre Frege et Russell (comme leurs recherches ultérieures) est hantée par la contradiction.

Dans ma thèse, je suis parti de l'idée que le traumatisme de la découverte des paradoxes avait en quelque sorte rendu impossible la discussion philosophique et technique qui aurait dû naître de la confrontation entre les travaux de Frege et de Russell. Mon hypothèse était plus particulièrement que cette « explication » avortée est à l'origine du *Tractatus*. Wittgenstein est certes un élève de Russell – mais il a rencontré Frege en 1912 et il ne fait aucun doute qu'il a été profondément fasciné par son œuvre. La singularité du *Tractatus* est en partie, selon moi, le fruit d'une volonté d'effectuer une forme de synthèse entre ces deux influences majeures – synthèse, qui pour les raisons que j'ai indiquées, n'avait pas été faite jusque là.

Pour plus de clarté, je me permets de citer<sup>2</sup> la conclusion de mon livre, qui reprend et résume cette idée (Gandon 2002, 263-264) :

---

<sup>2</sup> Je vais être amené à citer, à de nombreuses reprises, des textes que j'ai écrits – ce qui est extrêmement étrange. Mais je ne vois pas comment éviter de le faire puisqu'il s'agit ici de discuter de mes propres recherches.

Au lieu de partir d'une idée préconçue du contexte fregéo-russellien, nous avons utilisé les textes de Wittgenstein comme des moyens permettant de placer les œuvres de Frege et de Russell dans une nouvelle perspective. Si le cristal tractatuséen révèle sa structure à la lumière des écrits des deux maîtres, la façon dont cette lumière se diffracte à travers lui nous donne l'opportunité d'en redéfinir la nature et la composition. L'image reconstituée du logicisme proposée ici est, certes, partielle, parfois unilatérale, peut-être contestable ; mais elle a l'avantage de souligner la richesse et les tensions internes de ce qui, de nos jours, est trop souvent considérée comme une tradition monolithique, datée et très bien connue. (...) Il y a (...) une forme de constance dans les relations que Wittgenstein entretient avec Russell et Frege. Ce que l'auteur du *Tractatus* retient de Frege, c'est sa rigueur, c'est-à-dire l'adéquation parfaite entre ce qu'il dit de sa pratique logique et le fonctionnement effectif de son idéographie. Russell est, de ce point de vue, l'antithèse du philosophe allemand. L'auteur des *Principles* ne parvient jamais à ajuster sa prose à ses calculs, soit parce que ses idées théoriques précèdent sa pratique symbolique (c'est le cas dans la théorie de la proposition), soit, inversement, parce que sa pratique devance sa théorie (c'est le cas dans la théorie du symbole incomplet). C'est ce décalage constant entre commentaire et résultat, ce retard jamais comblé de la pensée avec elle-même, que Wittgenstein reproche à son ancien professeur lorsqu'il stigmatise sa superficialité. Ce que l'auteur du *Tractatus* reprend à Russell, ce sont certaines intuitions théoriques et certaines innovations symboliques, fondamentalement anti-fregéennes – l'intuition concernant la place de la proposition dans la logique ; la nouvelle analyse logique mise en place dans *On Denoting*. A chaque fois, il s'agit, pour Wittgenstein, de réaliser ce que Russell n'a pas réussi à faire, c'est-à-dire d'ajuster, dans un sens ou dans un autre, le discours aux calculs – inventer le symbolisme tabulaire pour incarner, au niveau de la notation, ce qui n'est qu'une vague intuition théorique ; produire une nouvelle théorie de l'expression, pour rendre compte du geste effectué en 1905. Le contenu du *Tractatus* est russellien ; mais l'exigence qui le traverse est fregéenne. On retrouve là, nous semble-t-il, la distinction que Wittgenstein introduit dans l'*Avant Propos* entre l'ami Russell (celui qu'il est possible de comprendre à demi-mot), et le modèle Frege (celui qui a su réaliser, avec un matériau différent, ce qu'il faut retrouver).

Dans ma thèse, je n'ai donc pas considéré le *Tractatus* comme une totalité refermée sur elle-même, mais au contraire comme un ensemble de remarques et de commentaires visant à déterminer les différences et les affinités entre les œuvres de Russell et de Frege. Le temps de la thèse a été ainsi pour moi une période, où travaillant sur Wittgenstein, je me suis de plus en plus intéressé à Frege, et surtout à Russell. La découverte du texte de Russell s'est faite *via* Wittgenstein, de sorte que, au sortir de la thèse, il était tout à fait naturel de prolonger le mouvement amorcé, et de continuer à explorer le continent russellien. Autrement dit, je n'ai pas vécu comme une rupture, mais plutôt comme la poursuite d'une même dynamique, mes recherches sur Russell – c'est le même sillon que je creusais.

2/ J'ai défendu dans ma thèse l'idée que, à la doctrine de l'image et de la pensée (*Tractatus* 2.1 *sq.*), il fallait ajouter une autre couche théorique distincte, la théorie de l'expression (*Tractatus* 3.1 *sq.*). J'ai soutenu que cette doctrine de l'expression provenait directement d'une certaine interprétation de la pratique logique russellienne et de la différence entre cette pratique et celle de Frege. Expliquons brièvement l'idée.

Russell prétend que lorsque nous saisissons le sens d'une proposition, notre esprit est directement en « *acquaintance* » avec les constituants ultimes de la proposition. Or, ce que l'on appelle communément le principe d'*acquaintance* a des conséquences potentiellement catastrophiques : comment en effet défendre l'idée que l'analyse logique est difficile, tout en maintenant que la simple compréhension d'un énoncé nous met immédiatement en présence des constituants ultimes et donc de sa forme logique profonde (Gandon 2002, 118-125) ? Faut-il admettre des degrés dans la compréhension ? Ou faut-il au contraire déconnecter l'analyse de la saisie du sens d'un énoncé, et la concevoir comme une activité pré-logique, d'ordre psychologique ? Ce genre de questions, suscitées par les nombreuses discussions que j'avais avec Jérôme Sackur, dirigeaient alors ma recherche, et c'est dans ce contexte que je me suis de plus en plus intéressé à ce que l'on peut appeler les « expérimentations logiques » de Russell – en gros, les très nombreux écrits « mixtes », où des bouts de formalisations logiques étaient commentés, discutés en utilisant le langage ordinaire. De fil en aiguille, j'ai

centré mon attention sur la façon dont les *Principia* était écrit – notamment sur le rôle absolument décisif qu’y jouaient les « symboles incomplets », ces notations dont Russell dit explicitement qu’ils déforment la structure logique des propositions exprimées, mais qu’il utilise massivement et abondamment dans ses preuves (voir pour plus sur ce point, l’article 1.1). L’idée que, contrairement à ce que pourrait suggérer le « principe d’*acquaintance* », la logique n’est pas utilisée dans les *Principia* seulement pour déduire des propositions dans un seul langage complètement analysé (comme c’est le cas chez Frege), mais également pour empiler des systèmes symboliques les uns sur les autres est l’idée clé de mon interprétation du *Tractatus*.

Dans ma thèse, je soutiens que Wittgenstein a bien vu cela – qu’il a saisi la puissance et l’originalité (le caractère non *fregéen*) d’une telle intuition – que plusieurs propositions, réputées parmi les plus difficiles du *Tractatus* (sur la perfection de notre langage ordinaire, sur les problèmes liés à la distinction symbole/signe, sur le statut de la distinction logique/mathématique, sur la généralité, sur la nature de la philosophie et de sa tâche) s’éclairent lorsqu’on prend en compte cette dimension de la pratique logique russellienne. Pour clarifier les choses, citons un passage de Gandon 2002 où je distingue l’approche de Russell de celle de Frege (166-167) :

Pour Frege comme pour Russell, la logique est universelle ; elle s’applique à tout ; et la sortie hors de la logique est une sortie hors de la raison. Chez Frege, il y a cependant un dehors : le langage ordinaire et les relations entre ce langage et l’idéographie. Chez Russell, il n’y a aucun dehors. La logique s’applique à toutes les langues et aux relations entre les langues. Elle s’applique non seulement à tout ce que l’on peut dire, mais aussi à toutes les manières de dire ce que l’on peut dire.

Déjà à l’époque, je me rappelle avoir été intrigué par la conception des mathématiques qui ressortait de cette lecture des *Principia*. Jérôme Sackur m’a dit un jour que, chez Russell, tout se passait comme si le but n’était pas seulement de déduire le contenu des mathématiques, mais aussi de dériver les formes d’écriture utilisées par les mathématiciens lorsqu’ils faisaient des mathématiques. La remarque a fait mouche, et j’y reconnais *a posteriori* une des origines de mon intérêt pour les mathématiques et leurs histoires. Quoi qu’il en soit, l’envie d’étudier de façon beaucoup plus précise que je n’avais eu le temps de le faire jusqu’alors les mathématiques dont Russell parlait, commençait à s’affirmer dès la fin de la thèse. Ma recherche m’avait permis de prendre conscience de la singularité de la structure des *Principia* – mais je sentais qu’il fallait étudier le matériel mathématique sous-jacent pour donner à cet élément sa pleine mesure. L’engagement dans une recherche sur l’histoire des mathématiques à la fin du XIXe ne m’apparaissait donc pas, en 2002, comme une rupture, mais plutôt comme un approfondissement et un élargissement naturel de l’idée qui avait supporté mon interprétation du *Tractatus* et de mon intérêt pour la question de l’expression.

Sur le plan philosophique, il y a donc une continuité entre mon travail de thèse et mes recherches ultérieures sur Russell et sur l’histoire des mathématiques. La réflexion sur la théorie wittgensteinienne du symbolisme, centrale dans ma thèse, était intimement liée à la lecture de Russell et au travail sur l’écriture des mathématiques. Les recherches ultérieures sur l’œuvre russellienne et son contexte mathématique n’ont fait que poursuivre cette première impulsion.

À lire ce qui précède, on pourrait toutefois avoir l’impression que tout était parfaitement maîtrisé et réfléchi – que l’infléchissement d’un travail qui avait jusqu’à présent porté sur Wittgenstein obéissait à une logique implacable et mûrement méditée. Il n’en est évidemment rien. Et afin de corriger le tableau, je veux insister sur trois points :

1/ J'ai découvert, au cours de la thèse, que je n'aimais pas commenter les textes de Wittgenstein. Il y avait là quelque chose de plus profond que la simple « dépression » postdoctorale, qui pousse naturellement le chercheur à se détourner de ce qui l'a obnubilé pendant cinq ans (dans mon cas). Wittgenstein joue, aujourd'hui encore, un rôle considérable dans ma façon d'envisager et de pratiquer la philosophie ; il a notamment très certainement fortement influencé ma lecture de Russell. Je pense cependant ne pas avoir les talents requis pour commenter le *Tractatus* et les *Recherches Philosophiques*. Je préfère en effet travailler sur des textes plus « stables ». J'aime ainsi beaucoup commenter les plans (5.1 est par exemple un commentaire du plan des *Principles*) et, de ce point de vue, les ouvrages de Wittgenstein ont été des crève-cœurs. Il y a là rien d'autre qu'une affaire de goût – qui s'est formé chez moi tardivement, peu à peu, en travaillant.

2/ L'intérêt pour l'histoire des mathématiques ne s'explique pas simplement par des raisons philosophiques. Il se trouve que j'avais envie de refaire des mathématiques, de renouer, après Wittgenstein, avec les raisonnements secs et nets des mathématiciens. J'attribue à ce goût pour la logique et les mathématiques le choix (tardif là encore, puisqu'il s'est fait deux ans après le début de ma thèse) du premier plutôt que du second Wittgenstein. J'ai hésité, après la Terminale, entre une classe préparatoire en mathématique et une classe préparatoire en lettres, et m'intéresser à l'histoire des mathématiques m'est apparu comme une manière habile de retrouver mes anciens intérêts. J'ai notamment toujours beaucoup apprécié la géométrie. Le fait d'avoir un poste à Clermont très rapidement m'a permis d'avoir du temps pour faire un travail de fond et commencer à « dérouiller » mon cerveau.

3/ Les premiers volumes des *Collected Papers* de Russell étaient disponibles à la bibliothèque universitaire clermontoise. Ces volumes sont de véritables mines. On y trouve à la fois des manuscrits non publiés (reproduits avec les diagrammes qui les accompagnent) et très peu étudiés, ainsi que des introductions très claires et informatives sur le contexte dans lesquels ils ont été écrits. Ils constituaient donc un document permettant de mener sans se déplacer constamment à Paris une recherche originale. J'ai d'autre part découvert à la bibliothèque du centre de philosophie un exemplaire de *Universal Algebra* de Whitehead (certainement commandé par Vuillemin), que j'ai au départ ouvert simplement par curiosité – mais qui est devenu un de mes principaux objets d'étude. Ainsi, alors que j'étais très insatisfait de l'édition des textes de Wittgenstein, je trouvais, à Clermont même, l'ensemble des documents permettant d'entreprendre le type de recherche sur Russell que je souhaitais entreprendre.

Il y a donc bien eu un changement de cap après ma thèse. J'ai réécrit deux textes sur Wittgenstein (1.2 et 1.3), mais lorsque je parle ou j'écris sur cet auteur, j'ai soit l'impression de me répéter (1.2 est une traduction en anglais d'idées déjà exprimées dans ma thèse), soit l'impression de parler d'autres choses, comme c'est le cas dans 1.3 (sur cet article, voir plus bas). J'ai souligné l'existence de ces circonstances contingentes et extérieures à « l'évolution de mes idées philosophiques » aussi parce que j'ai l'impression que le hasard joue un rôle important dans ma manière de travailler. Le fait de ne pas avoir de programmes bien identifiés me permet paradoxalement d'acquérir une forme de certitude dans l'identification des sujets de recherche : si je retombe plusieurs fois sur la même idée alors que je ne la cherchais pas (consciemment en tout cas), c'est que cette idée joue un rôle fondamental dans mes recherches, qu'elle doit être considérée en elle-même et mise au centre de mes préoccupations. Je reviendrai sur ce rôle des « circonstances » plus loin.

De cette période de « sortie » du *Tractatus* date le texte « Constituer ou axiomatiser ? Schlick, Russell et Carnap » (1.3), écrit pour le colloque Carnap organisé à Clermont à l'occasion de la

première traduction française de l'*Aufbau* réalisé par T. Rivain, introduite et annotée par E. Schwartz. Je tentais, dans cet article, d'exploiter de façon nouvelle mes recherches sur la structure des *Principia* en distinguant deux sortes de symboles incomplets – ceux qui se comportent formellement comme des noms (et que l'on peut nommer constructions) ; ceux qui ne le font pas (comme les descriptions définies). Je cherchais à montrer que cette distinction permettait d'articuler de façon originale la distinction entre *a priori* et *a posteriori* et que le Carnap de l'*Aufbau* l'avait compris. Cette excursion dans l'œuvre de Carnap fut toutefois sans lendemain – je vois plusieurs raisons à cela : l'intérêt pour Russell était alors trop fort ; j'étais moins armé pour comprendre le contexte scientifique (notamment l'émergence de la nouvelle physique et le développement des théories des probabilités) de la pensée de Carnap ; enfin, le sujet était déjà beaucoup travaillé.

Dans le dossier d'HDR, j'ai également fait figurer deux textes qui se rattachent à Wittgenstein. Le premier intitulé « Some Remarks about Russellian incomplete symbols » (1.1), est la version remaniée d'une conférence prononcée à l'occasion du colloque sur le centenaire de *On Denoting* à McMaster University : il reprend, en anglais, une des idées principales de la thèse. L'autre, « Wittgenstein dans la fabrique des *Principia* » (1.2), est plus récent, et vise à montrer que certaines critiques de la théorie des types communément attribuées à Wittgenstein ont été anticipées par Whitehead et Russell. Je ne suis pas entièrement satisfait par cet article, qui reflète, à bien des égards, mes difficultés à écrire sur Wittgenstein. C. Chauviré, l'éditrice du recueil dans lequel 1.3 est publié, m'avait demandé de rédiger une introduction à une partie du *Tractatus*. J'ai pris le parti de montrer que le contexte russellien était bien plus complexe qu'on ne le croyait habituellement, et que l'articulation de la pensée de Wittgenstein pouvait s'y opérer de multiples manières. Mais, a posteriori, il me semble que l'article révèle que je suis en réalité plus intéressé par les propos de Russell et Whitehead que par les réactions de Wittgenstein, tout en étant embarrassé par le fait de ne pas pouvoir, dans le cadre de l'étude, m'y consacrer entièrement.

Si je n'ai pas récemment réécrit sur le *Tractatus*, je n'ai toutefois pas complètement déserté le terrain wittgensteinien, puisque j'ai organisé en juin 2009 un colloque intitulé « Le *Tractatus* en contexte ». Depuis 2000, plusieurs commentateurs (Landini, Marion, Potter, Sackur) se sont intéressés de plus près à l'histoire de la rédaction du premier livre de Wittgenstein, et ont souligné l'importance de la filiation russellienne, quelque peu occultée dans les travaux classiques de Anscombe, de Baker et Hacker, mais aussi, dans ceux plus récents de Diamond. Cet infléchissement dans les études wittgensteiniennes rejoint finalement ce que j'avais cherché à montrer dans ma thèse, et il m'a semblé que, à la fois pour mettre un point final à mes travaux sur Wittgenstein et pour des raisons liées à l'actualité scientifique (les livres de Landini et de Potter sont sortis en 2007 et 2009), organiser ce colloque avait un sens.

### **3/ Le contexte mathématique des *Principles***

Au sortir de la thèse et de la rédaction d'une version remaniée, deux idées, assez vagues, dirigeaient donc mes lectures : approfondir l'examen des œuvres de Russell et de Frege ; m'intéresser à l'arrière-plan mathématique du logicisme. Un point m'a alors particulièrement intrigué – le fait que Frege et Russell se soient intéressés tous deux, de très près, à la géométrie projective. J'ai lu les textes de Frege portant sur ce sujet, l'*Essay* de Russell et surtout la partie VI des *Principles*. Cette conjonction d'intérêts m'est cependant vite apparu comme purement fortuite : la géométrie projective dont parle Frege n'est pas du tout la même que celle que travaille Russell. L'exploration de cette fausse piste a néanmoins eu une conséquence importante : la découverte de l'article de M. Wilson, intitulé « Frege : The Royal Road from Geometry » (1992), qui a joué pour moi à l'époque un rôle fondamental. Après

avoir reconstruit le contexte des discussions et des pratiques géométriques de l'époque (notamment, les travaux de Plücker), Wilson montre, dans son texte, comment les premiers travaux de Frege s'y insèrent, et comment Frege généralise ensuite, en arithmétique, des techniques et un type de questionnement alors florissant en géométrie. Wilson va jusqu'à soutenir que des distinctions conceptuelles majeures, comme celle entre sens et référence, trouve leur origine, ou en tout cas, trouve une illustration particulièrement suggestive, dans les réflexions frégréennes sur la géométrie. L'idée qu'il faudrait accomplir concernant Russell quelque chose de similaire à ce que Wilson a réussi à réaliser concernant Frege a commencé à germer dans mon esprit.

Je me suis vite rendu compte que, pour mener à bien un tel projet, *L'Essay* n'était pas le bon candidat. Le rapport aux mathématiques est trop lointain et lâche ; le texte a d'autre part été déjà abondamment commenté. La partie VI des *Principles*, plus pointue et moins exploitée, semblait, en revanche, plus prometteuse. Russell effectue, dans ce texte, une distinction entre géométrie projective (chap. 45) et géométrie descriptive (chap. 46). Le point de départ de mon enquête a été de chercher à savoir ce que recouvrait la distinction qui n'était pas utilisée par les mathématiciens de l'époque. Dans le chapitre 45, Russell fait avant tout référence à Von Staudt et à Pieri – la géométrie dont il est question dans cette section correspond donc bien à la géométrie projective, au sens où on entend aujourd'hui ce terme. La doctrine du chapitre 46 est bien plus mystérieuse. La géométrie descriptive de Russell n'a ainsi rien à voir avec les théories de Monge puisque c'est aux travaux du mathématicien allemand M. Pasch que Russell renvoie. Mais Pasch est connu comme étant le premier à avoir axiomatisé et fondé rigoureusement la géométrie projective. Pourquoi appeler descriptive la géométrie de Pasch ? Un manuel de mathématique m'a, à l'époque, fait gagner beaucoup de temps : *The Real Projective Plane*, de H. S. M. Coxeter (1949). Il présentait l'avantage de varier les présentations de la géométrie projective et d'inclure quelques remarques historiques très précieuses. L'ouvrage m'a également permis de réaliser qu'il en allait en mathématiques comme il en va en philosophie – quand c'est possible, il vaut mieux, plutôt que d'aller chercher dans la littérature secondaire, travailler directement les ouvrages originaux ou écrits par des spécialistes de la discipline. Même si l'on ne comprend pas tout (le livre de Coxeter est cependant extrêmement clair), les modes de présentation adoptés sont souvent très suggestifs et permettent de construire son propre chemin. Grâce au livre de Coxeter, j'ai compris ce qu'apportait véritablement Pieri, et commencé à percevoir le lien entre la géométrie descriptive des *Principles* et la présentation de l'espace projective comme complétion de l'espace affine. Mais ce n'est qu'en lisant Pasch (ce qui m'a pris du temps, car les *Vorlesungen* ne sont disponibles qu'en allemand) que j'ai véritablement saisi ce dont parlait le chapitre 46 : non pas véritablement de l'espace affine (ou la notion de parallélisme est définie) mais de l'espace « absolu », i.e. de la structure commune aux espaces euclidien et hyperbolique.

Plus précisément, j'ai commencé à réaliser que, derrière cette distinction entre géométrie projective et descriptive, c'est une réflexion sur la nature du concept d'espace qui était engagée. Dans le chapitre 45, Russell, suivant Pieri, conçoit l'espace projectif comme une structure d'incidence – la seule relation fondamentale du système étant les relations « être sur » et « contenir » entre les points, les droites et les plans de l'espace. En revanche, dans le chapitre 46, Russell, suivant Pasch, dérive l'espace projectif de la relation ordinaire « entre » définie sur l'ensemble des points. L'hypothèse, qui se forgeait peu à peu, était donc que, derrière cette double présentation de l'espace projectif réel, il y avait une double approche de l'espace, en termes de relations d'incidence d'une part, en termes de structures d'ordre, d'autre part.

Plusieurs problèmes se posaient alors. D'abord, celui de comprendre la raison pour laquelle Russell affirme la prééminence conceptuelle de l'approche de Pieri sur celle de Pasch. Russell

ne cesse de souligner l'importance des relations d'ordre en mathématiques ; pourquoi la géométrie ferait-elle exception ? D'autre part, il me fallait étayer les conclusions fortes que je commençais à tirer de la seule lecture des premiers chapitres de la partie VI ; pouvait-on vraiment considérer que deux concepts de l'espace se faisaient concurrence dans les *Principles* ? Ces interrogations m'ont conduit à revenir sur la genèse de la partie VI, c'est-à-dire à la fois sur les manuscrits publiés dans les *Collected Papers* II et III, et sur diverses lettres datées de 1899-1901, adressées notamment à Couturat. La lecture de ces textes m'a conduit :

1/ à découvrir que la question de la place des considérations ordinales en géométrie projective était alors liée à un problème mathématique profond, mis à jour par Klein, lié au caractère lacunaire de la preuve que Von Staudt présente du théorème fondamental de la géométrie projective. Von Staudt considérait la géométrie projective comme une théorie de l'incidence entre points, droites et plans. Mais pour dériver la proposition qu'une homographie entre deux systèmes ponctuels est fixée dès que les images de trois points sont connues (une des formulations du théorème fondamental de la géométrie projective), il faut montrer qu'un réseau rationnel (qu'un réseau de Möbius) est dense sur la droite, ce que Von Staudt ne fait pas. Selon Klein, des considérations ordinales relatives à la continuité de la droite projective sont, à cette étape, inévitables – l'idée que la théorie projective peut être conçue comme une pure théorie de l'incidence est donc par là remise en question. Coxeter explique que l'originalité de Pieri consiste, dans ce contexte, à prouver le théorème fondamental en restant dans le cadre élaboré par Von Staudt : il est possible, en posant des contraintes sur la façon dont les points, les droites et les plans se coupent dans l'espace, de définir un ordre (une relation de séparation) sur la droite projective et de formuler l'ensemble des conditions permettant de déduire le théorème fondamental. Russell se montre parfaitement conscient des implications techniques de ses réflexions sur la nature de l'espace, et c'est pourquoi il attache une aussi grande importance à l'œuvre de Pieri.

2/ à réaliser qu'entre l'*Essay* et les *Principles*, un événement fondamental a lieu : la publication de l'*Universal Algebra* de Whitehead. L'introduction (la seule partie que l'on cite d'habitude quand on cite ce livre) de cet ouvrage ne m'a pas intéressé – en revanche, les livres II et III permettent non seulement de saisir le sens du projet whiteheadien, mais aussi de déchiffrer certains manuscrits russelliens. L'*Universal Algebra* est essentiellement une réécriture de la seconde édition de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann que j'ai, à cette occasion, étudiée. Dans le même temps, je me suis aperçu que Peano, une autre référence russellienne, avait également beaucoup étudié Grassmann. Ce que Russell retire de sa lecture et de sa critique de l'*Universal Algebra*, c'est l'idée que la géométrie projective est une science de l'incidence et que tout concept ordinal doit donc être, si possible, éliminé. J'ai en particulier établi, en me servant d'une lettre que Russell envoie à Couturat le 21 juin 1900 et en commentant le manuscrit anglais de la réponse que Russell fait à Poincaré en 1899 (intitulée *The Axioms of Geometry*), que le philosophe tente d'expurger du calcul grassmannien toute référence aux scalaires pour ne retenir qu'un calcul du produit, « progressif » et « régressif », algébrisant les relations d'incidence, respectivement de « projections » et de « sections ».

3/ à lire les traités sur la géométrie projective et la géométrie descriptive que Whitehead écrit en 1906 et 1907. Ce n'est qu'en découvrant l'introduction de Whitehead 1906 que j'ai été véritablement convaincu de la justesse de mon approche : il y a là un passage formidable (cité entièrement dans 2.1 et repris dans 4.3), dans lequel Whitehead distingue les classifications logiques et les classifications géométriques et affirme que « la géométrie est une science des

classifications croisées (cross-classification) » – les axiomes de classifications croisées correspondant très exactement à ce que nous appelons aujourd’hui axiomes d’incidence. Whitehead, qui présente explicitement ses deux ouvrages comme un développement du point de vue exposé dans les *Principles*, reprend donc exactement l’hypothèse que j’avais formulée sans connaître ses traités. Dans le même temps, je réalisais que l’idée de considérer l’incidence comme le concept fondamental de la géométrie était loin d’être mathématiquement absurde – qu’à la même époque, les géométries finies et la théorie des structures d’incidence commençaient à émerger. Je reviendrai sur ce dernier point dans la section 8.

Toutes ces recherches ont abouti à la rédaction de l’article « Russell et l’*Universal Algebra* de Whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903) » (2.1). J’ai soumis ce texte à la *Revue d’histoire des mathématiques*, non pas à une revue de philosophie, parce que je voulais m’assurer que la façon dont je parlais de la géométrie au tournant du siècle était recevable par les spécialistes de la discipline. Cet article a été pour moi très important ; il présente un matériel sur lequel je vais constamment revenir ensuite. Il aura trois prolongements immédiats :

1/ Dans 2.1, je m’intéresse aux critiques que Russell fait de Whitehead et non au projet de Whitehead. Mais en lisant l’*Universal Algebra*, notamment le chapitre 4 du livre III, et en le comparant à la seconde édition de l’*Ausdehnungslehre*, j’ai cru saisir le sens original du projet whiteheadien. Chez Grassmann, la géométrie (identifiée alors à la géométrie euclidienne) est une application particulière de l’algèbre ; or, Whitehead, prenant appui sur les travaux de Cayley et de Klein, montre que les algèbres grassmanniennes s’ajustent parfaitement à la généralisation de la géométrie euclidienne qu’est la théorie projective. Autrement dit, loin d’apparaître comme une application particulière du calcul, l’espace apparaît chez Whitehead comme le contenu même de l’algèbre universelle. Comme le dit l’auteur en conclusion de son introduction (Whitehead 1898, 32) : « le résultat de (mes recherches) est qu’un traité sur l’Algèbre Universelle est également dans une certaine mesure un traité sur certaines idées généralisées de l’espace ». L’article « Algèbre, géométrie et loi d’intensité : l’enjeu de *A Treatise on Universal Algebra* » (2.2) est le fruit de cet effort pour lire le texte de Whitehead comme une œuvre originale, et non pas seulement à travers les lunettes russelliennes. Whitehead est déjà un penseur singulier en 1898, et certaines idées qui seront développées dans son œuvre philosophique ultérieure (l’idée que le plus abstrait coïncide miraculeusement avec le plus concret) sont présentes en germe dans *Universal Algebra*. Je développe un peu ce thème à la fin du chapitre 5 du mémoire (M).

2/ J’ai été intrigué par un ensemble de textes datant de 1898-99 où Russell cherchait apparemment à engendrer de nouvelles « qualités » à partir de différences entre « quantités » – à introduire une forme de dynamisme et de dialectique dans les structures d’espaces vectoriels. J’avais commenté, dans 2.1 (229-234), ces « expérimentations mathématiques » russelliennes, sans avoir encore une claire vision de ce que Russell cherchait à faire. Ce n’est qu’une fois le texte publié que j’ai commencé à m’intéresser aux écrits que le jeune Russell a consacré à la quantité, et comprendre à quel point la dialectique hégélienne, revisitée par Bradley et Bosanquet, avait été importante pour lui. J’ai donc rédigé un article « Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1903) » (que je n’ai pas inclus dans le volume car son contenu est repris dans la première section du chapitre 1 de (M)), où je fais le lien entre la première théorie de la quantité russellienne et ces réflexions sur les algèbres grassmanniennes. Une des idées développées dans ce texte est que l’effort pour articuler doctrines philosophiques et développements mathématiques précède la conversion de Russell au



« réalisme ». L'idéaliste Russell était un idéaliste rationaliste ; le développement du concept (ici, celui de quantité) devait pour lui s'incarner dans des théories mathématiques – et la manière dont il combinait les deux dimensions, métaphysique et mathématique, de son analyse de la quantité, était déjà extrêmement fine. La thèse selon laquelle l'idéalisme n'est pas, contrairement à ce que Russell affirmera par la suite, incompatible avec une réflexion informée sur les mathématiques du début du XXe siècle est reprise et développée dans 4.1.

3/ Le texte sur les *cross-classifications* de Whitehead m'a conduit à m'intéresser au lien entre ce thème et le monisme neutre développé par Russell à partir des années 20s, mais discuté dès les années 10s. La question de la classification est en effet au centre du monisme neutre, et j'ai eu très tôt (dès 2002) l'idée que l'on pouvait voir l'ontologie moniste de Russell comme une généralisation, à la métaphysique, des classifications géométriques. Je n'étais toutefois pas alors en mesure de défendre cette thèse, très engagée, car il fallait d'abord établir que Russell avait bien développé une conception de la géométrie en termes d'incidence. Ce n'est que récemment, en 2007, que j'ai rédigé et soumis à *Philosophia Scientiae* « Russell, les *sense data* et les objets physiques : une approche géométrique de la notion de classification » (4.3). Je reparlerai bientôt de ce travail (sections 5 et 8).

La géométrie projective n'est pas toute la géométrie. Dans la sixième partie des *Principles*, aux chapitres 47 et 48, Russell développe aussi une théorie de la géométrie métrique. Il fallait donc, pour compléter le tableau, étudier en détail les textes que Russell consacrait à cette discipline. Mais la chose n'était pas simple. Car Russell parle de la géométrie métrique comme d'une géométrie quantitative, et renvoie par là le lecteur à la curieuse et difficile partie III des *Principles*, consacrée à la grandeur. C'est initialement parce que la théorie de la quantité intervenait de façon cruciale dans les réflexions russelliennes sur la géométrie métrique que je me suis intéressé au sujet. Rapidement, toutefois, le thème m'a happé, et j'ai perdu de vue la question initiale. Un des intérêts de la théorie de la grandeur est en effet qu'elle permet une étude de l'évolution de la pensée de Russell, de 1897 au *Principia* – ce qui n'est pas le cas de sa réflexion sur l'espace, puisque le quatrième volume des *Principia*, qui devait être consacré à la géométrie, n'est jamais paru. Un autre attrait de la théorie de la quantité est d'être plus intimement liée au questionnement sur la nature des relations, et donc sur la nature de la logique. L'article « Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1903) », déjà évoqué, représente, de ce point de vue, une étape importante dans mon travail, puisque sa rédaction coïncide avec la découverte des paragraphes 2, 7 et 8 de l'original anglais de *Sur la Logique des Relations*. Ces quelques pages jouent un rôle central dans l'interprétation que je présente dans le mémoire (M) intitulé « Relations et quantités chez Russell (1897-1913) ». Ces paragraphes permettent en effet de saisir ce qui constitue l'unité profonde des conceptions de Russell sur la quantité, de 1903 à 1913. Je renvoie le lecteur à l'introduction de (M) pour plus sur ce point.

J'ai repris en 2006, suite à une invitation à prononcer une conférence aux Archives Poincaré de Nancy, la question du statut de la géométrie métrique dans les *Principles*. Le cadre des Archives me semblait particulièrement approprié pour rouvrir ce dossier, puisque le problème du statut de la métrique est chez Russell intimement lié à la première des confrontations qui l'a opposée à Poincaré. Dans le chapitre 3 de (M), je reviens sur cette dispute, en essayant de montrer que la conception défendue dans les *Principles*, souvent négligée par les commentateurs, constitue un progrès par rapport aux positions précédentes – et, qu'au final, sur certains points clés, les thèses des deux protagonistes sont moins opposées qu'elles ne le paraissent à première vue.

Dans « Logicism and mathematical practices – Russell's theory of geometry in the *Principles* » (2.3), mon angle d'attaque est différent : je m'attache à comprendre pourquoi,

alors même que Russell développe les outils techniques lui permettant de soutenir l'idée que la géométrie métrique est une discipline relevant des mathématiques pures, Russell choisit de défendre, contre Poincaré, la thèse selon laquelle la géométrie métrique est une science empirique. Cet article a été écrit en 2008 et reflète, en un sens, des préoccupations plus récentes, puisqu'il s'attache à répondre à la question : que nous apprennent les écrits que Russell consacre à la géométrie sur le sens général de son projet ? Je parlerai plus longuement de ce travail dans la section 7.

#### 4/ La question des fondements de la géométrie à la fin du XIXe

L'article sur Russell et l'*Universal Algebra* a été bien reçu par les historiens des mathématiques en France et m'a permis d'entrer en contact, notamment grâce à P. Nabonnand, avec cette communauté très dynamique. L'accueil m'a encouragé à persévérer dans cette voie.

Afin de comprendre la partie VI des *Principles*, j'avais été amené à lire les *Vorlesungen* de Pasch, à étudier les travaux de Klein, ceux de Grassmann et les premières recherches de Peano sur les calculs géométriques. Ce *corpus* me semblait relativement cohérent et peu étudié. Plus précisément, la question des fondements de la géométrie à la fin du XIXe siècle me paraissait pâtir dans l'historiographie du poids de deux références : les *Grundlagen* de Hilbert et le programme d'Erlangen de Klein. D'une certaine façon, tous les travaux que j'étudiais, pourtant fort différents entre eux, étaient usuellement considérés comme des marchepieds sur lesquels Hilbert et Klein seraient passés sans s'attarder dans l'élaboration de leurs magistrales synthèses. En un sens, le diagnostic n'est pas faux. Il y a une puissance et une fécondité dans les approches hilbertienne et kleinienne qu'aucune des œuvres que je considérais n'approchait. Mais j'étais frappé par le fait que, pour comprendre *ce que faisait Russell*, pour rendre intelligible son projet *philosophique*, il fallait rompre ce charme. Russell et Whitehead, qui ont lu Hilbert et Klein, mais n'ont pas attaché grande importance à leurs ouvrages ; on peut certes le regretter ; mon but était toutefois d'expliquer les raisons de leurs « aveuglements » – d'identifier quelles étaient les mathématiques qui s'interposaient alors entre eux et la démarche axiomatique d'un Hilbert et celle algébrique d'un Klein. Mon intérêt pour Russell m'amena donc naturellement à m'intéresser à des pans de la réflexion sur les fondements de la géométrie à la fin du XIXe siècle habituellement négligés par les historiens des mathématiques. Même Torretti 1978, qui consacre pourtant une quarantaine de pages à l'*Essay* de Russell, ne dit pas grand-chose de Pasch, et pratiquement rien sur les calculs géométriques post-grassmanniens. Je reviendrai sur la question des rapports entre histoire des mathématiques et histoire de la philosophie dans la prochaine section.

Le premier texte dans lequel j'aborde un traité de mathématique pour lui-même, sans l'articuler à une œuvre philosophique, est « Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie » (3.1). Je connaissais Pasch comme étant l'auteur de la première axiomatisation des relations d'ordre dans l'espace affine, et notamment de l'axiome de Pasch (que l'on peut énoncer de façon vague ainsi : toute droite entrant dans un triangle par un côté en ressort par un autre). J'avais l'habitude d'utiliser son axiomatisation de l'ordre dans mes cours, pour présenter ce qu'était un système axiomatique – les étudiants étaient souvent surpris par le fait que l'on puisse « définir » conceptuellement ce qui paraît relever de l'évidence perceptive. D'un point de vue historique, d'ailleurs, il est bien connu que, dans les *Éléments* et sa postérité, les rapports ordinaux entre les éléments d'une figure échappent complètement à l'ordre discursif et ne sont capturés que par la distinction des cas. Avoir eu l'idée, et être parvenu à définir formellement des propriétés aussi évidemment intuitives que les propriétés

ordinales (« de ce côté-ci de la droite », « entre les deux points », etc.) me fascinait et me semblait dénoter une puissance intellectuelle hors norme. J'avais donc une raison indépendante de mes recherches sur Russell pour me plonger dans les *Vorlesungen*.

Mon point de départ a été le suivant. Pasch est le premier à avoir défendu le point de vue axiomatique qui sera adopté plus tard par Hilbert. Un des passages les plus cités des *Vorlesungen* (Pasch 1882, 98) dit en effet ceci :

En réalité, pour que la géométrie soit véritablement déductive, il faut que le processus de déduction soit partout indépendant du sens (*Sinn*) des concepts géométriques [...] ; seules les relations entre les concepts géométriques telles qu'elles sont explicitées dans les propositions et les définitions utilisées doivent être prises en considération. Au cours d'une déduction, il est certes permis et utile de conserver à l'esprit la signification (*Bedeutung*) des concepts géométriques employés, mais ce n'est d'aucune façon nécessaire.

Dans le même temps (et ce point est moins connu), Pasch est radicalement empiriste. Il considère en effet que le sens des concepts géométriques fondamentaux provient de notre expérience perceptive (1882, 18) :

Nous apprenons les concepts fondamentaux et les propositions fondamentales de la géométrie à partir d'objets par rapport auxquels nous ne sommes que peu éloignés; à l'extérieur de ce domaine leur application n'est pas justifiée sans autre condition.

La seconde affirmation conduit à défendre l'idée que la géométrie est une science empirique – la première tend à définir la géométrie comme une discipline purement déductive. Comment concilier ces deux points de vue ?

Une première réponse est fournie par l'analyse de la structure des *Vorlesungen*. Pasch n'élabore pas une seule axiomatisation, mais présente deux systèmes de géométrie. Le premier est la « géométrie élémentaire » que Pasch expose dans les deux premiers paragraphes de son ouvrage ; le second, le système de géométrie projective, est étudié à partir de la section neuf des *Vorlesungen*. Les deux axiomatiques ne sont pas seulement différentes ; elles n'ont pas le même statut. Le système élémentaire exposé dans les deux premières sections est une description formelle de l'expérience immédiate : il a donc une portée empirique. En revanche, le second système, celui de la géométrie projective, n'a pas de connexion immédiate avec l'expérience – il est le résultat d'un processus de généralisation de la théorie élémentaire. Les deux remarques citées ci-dessus ne seraient donc pas contradictoire ; elles porteraient sur deux systèmes différents. Cette première réponse n'est toutefois pas satisfaisante. D'une part, le propos de Pasch, dans les deux extraits, est complètement général – ce sont tous les termes et principes géométriques qui sont dits, dans le premier paragraphe, trouver leur origine dans la perception ; ce sont également toutes les déductions qui, selon le second, doivent faire abstraction du contenu des concepts géométriques. D'autre part, les deux systèmes des *Vorlesungen* ne sont pas déconnectés : le second naît du premier par un processus de dépassement des limitations imposées par l'expérience -- processus exposé dans les sections 3 à 8, certainement les plus originales de l'ouvrage. Il fallait donc pour résoudre le problème creuser plus avant.

Le déclic est venu de la lecture du second *Aufsatz* de *Über die Sogenannte Nicht Euklidische Geometrie* de Klein (1873). Klein, suivant Von Staudt, cherche à développer la géométrie projective indépendamment de toute considération métrique. Afin de repousser une possible objection à la façon dont Von Staudt lui-même réalise le programme (Von Staudt considérait qu'il n'y a qu'un point à l'infini sur une droite projective, ce qui, dit Klein, revient à présupposer la métrique euclidienne), Klein explique, au début de son article, qu'il souhaite prouver l'unicité de la construction du quadrilatère (une des étapes clés de la construction) en se plaçant dans une portion limitée de l'espace euclidien et en effectuant toutes les

constructions requises sans sortir des limites spatiales qu'il s'impose. Selon moi, Pasch, dans ses *Vorlesungen*, ne fait que radicaliser la proposition de Klein : la géométrie élémentaire des deux premières sections est une formalisation de la géométrie de l'espace limité dans lequel les constructions sont à effectuer. Et la géométrie projective de la section 9 est la géométrie de Von Staudt, le résultat du processus de construction entrepris par Klein. Une différence sépare toutefois les deux approches. Chez Klein, l'hypothèse d'un espace limité n'est qu'une contrainte formulée pour garantir l'indépendance de la géométrie projective sur la théorie euclidienne (i.e. pour garantir l'existence d'une infinité de points idéaux). Chez Pasch, le fait que l'espace soit limité (le fait que le plan du géomètre correspond peu ou prou celui de la feuille sur laquelle il trace les figures) est un trait qui appartient en propre au concept d'espace tel qu'il est originellement lié à notre expérience. Et cette charge supplémentaire dont est investie l'hypothèse de l'espace limité n'est pas sans conséquence sur le développement des preuves. En effet, dans de nombreux cas, Klein présuppose la possibilité de s'extraire des limites qu'il s'impose en adoptant une « *bird-eye view* » : certes, les constructions doivent être selon lui toutes effectuées à l'intérieur de l'espace limité donné, mais pour s'assurer de l'équivalence entre ces constructions et les constructions standard, il se permet d'abolir les restrictions initiales. Pour Pasch, une telle sortie hors de notre expérience est absolument impossible, et le genre de raisonnement effectué par Klein doit donc être rejeté. Dans l'article 2.1, je montre comment l'axiomatisation de la géométrie élémentaire (et notamment des relations d'ordre) provient directement de l'exigence de ne pas faire appel dans les preuves à des objets inaccessibles. La définition des points comme gerbes de droites, et surtout la célèbre définition des gerbes de droites comme étant l'ensemble des droites coplanaires à deux droites coplanaires données, a précisément pour fonction de donner un sens à la notion de point idéal, sans pour autant remettre en question le caractère limité de l'espace donné.

La comparaison avec Klein permet donc de saisir l'unité et le sens de la démarche de Pasch. L'empirisme n'est pas ici un adversaire de la formalisation ; au contraire, il est l'aiguillon qui incite à redéfinir les notions de façon à pouvoir les généraliser sans sortir du cadre initial. Le processus de construction de la géométrie projective est un processus progressif de libération des restrictions imposées par l'expérience – mais cette libération s'effectue de façon interne, sans que les contraintes empiristes initiales aient été, de quelque manière que ce soit, levées. On aurait donc tort de voir dans les *Vorlesungen* une anticipation encore confuse des *Grundlagen* de Hilbert : Pasch suivait un agenda propre et les inventions conceptuelles qu'il met en place sont suffisamment riches pour ne pas les recouvrir et les affadir par des comparaisons non pertinentes. J'ai été particulièrement frappé par le fait que la question, classique en philosophie contemporaine, de l'accessibilité des objets et des vérités mathématiques (je pense aux discussions autour de l'intuitionnisme, du finitisme et de l'ultra-finitisme) prend, chez Klein et Pasch, un tour extrêmement « concret » ; c'est littéralement que les deux géomètres enferment le mathématicien dans un espace limité.

Je suis revenu sur ce thème à l'occasion d'une conférence donnée à Stanford en 2007, intitulée « From Figures to Forms: Pasch on the use of diagram in projective geometry ». Je défendais l'idée que cet enfermement dans une portion d'espace, que l'on retrouve à la fois chez Klein et chez Pasch, avait des origines plus anciennes. Le grand géomètre allemand Jacob Steiner, que Klein et Pasch ne pouvaient pas ne pas connaître, distingue en effet trois sortes de construction (M. E. Stark and R. C. Archibald, *Jacob Steiner's Geometrical Constructions with a Ruler, Given a Fixed Circle with Its Center*, Yeshiva University, 1970, 65) :

Seeking theoretically or practically the way in which every geometrical problem may be constructed most simply, most exactly, and most surely, and indeed which is the most suitable process (1) in general, (2) under limitations as to instrument, and (3) with obstructions existing in the plane of construction.

Comme Steiner l'indique la suite de son texte, le troisième type de construction fait référence à tout un ensemble de recherches, d'abord menées par les mathématiciens français Servois et Brianchon, liées à l'art militaire et notamment à l'artillerie. Il s'agissait pour eux de déterminer comment effectuer certaines constructions standards (par exemple, tracer une droite passant par un point donné coupant deux droites concourantes données à leur point d'intersection) dans des situations où certaines parties du plan (celles où les deux droites concourantes se coupent) sont inaccessibles ... parce qu'elles sont occupées par l'armée ennemie. Des considérations « projectives » sont développées pour contourner l'obstacle. Je proposais donc, dans cette conférence, de voir dans les contraintes imposées par Klein et Pasch une reprise de ces problèmes géométrique avec « obstruction dans le plan de construction » – plus généralement, je suggérais que la question des éléments idéaux, tel qu'ils étaient conçus par Klein et par Pasch, pouvaient être liés à ces questions relatives aux obstructions dans le plan de construction (que les points idéaux pouvaient être conçus comme ceux qui se trouvaient derrière les lignes ennemies).

Pasch est mort très tardivement en 1930 et a écrit de nombreux ouvrages non traduits sur les fondements des mathématiques (sur l'arithmétique, la théorie des ensembles, etc.). Ces textes, je crois, mériteraient d'être plus travaillé. Son importance est loin d'avoir été négligeable. Il a été un correspondant de Frege, et Carnap l'a certainement lu – il est ainsi fort probable que ce soit au *Vorlesungen* que le philosophe pense dans le §4 de l'*Aufbau* sur l'unité du système des objets.

Un second pan de ma recherche en histoire des mathématiques a porté sur le calcul géométrique de Peano. J'ai consacré deux articles à ce sujet.

Le premier, « La réception des *Vorlesungen über neue Geometrie* de Pasch par Peano » (3.2), se focalise sur la lecture que Peano a faite des deux premières sections du livre de Pasch. En 3.1, j'avais été frappée par la façon dont Pasch parvenait à incarner son empirisme dans les procédures formelles qu'il mettait en place. Ainsi, Pasch fait un usage de la variable tout à fait particulier. Au lieu, comme il est habituel aujourd'hui, de renvoyer la variable à un domaine de variation, Pasch conçoit la notion comme étant liée à une indétermination dans une proposition. Par exemple, la droite n'est pas définie dans les *Vorlesungen* comme un ensemble de points  $x$  tel que  $x$  est entre  $a$  et  $b$ ,  $a$  est entre  $b$  et  $x$ ,  $b$  est entre  $a$  et  $x$ . Cette définition, mise au point par Peano, présuppose en effet la position d'un espace infini, d'une réserve inépuisable de points – présupposition absurde pour l'empiriste qu'est Pasch. En revanche, il est tout à fait possible, selon Pasch, de *parler* d'un segment limité sans déterminer précisément ces extrémités – c'est ainsi la considération métalinguistique du discours sur les objets mathématiques qui permet à Pasch d'introduire l'idée d'indétermination et de variabilité indispensable à la définition de la droite.

J'avais déjà en 3.1 ébauché une comparaison entre Pasch et Peano, qui représentait pour moi le point de vue moderne, celui que l'on adoptera par la suite, et qui n'était ni celui de Klein ni celui de Pasch. Mais une question m'avait alors empêché d'approfondir la confrontation. En 1888, Peano publie son *Calcolo Geometrico* et en 1889 son *I principii di geometria logicamente esposti*. Dans la littérature secondaire, l'opinion est souvent exprimée que le travail sur Grassmann aurait favorisé et préparé l'approche axiomatique et formelle que Peano adoptera par la suite. J'avais lu le *Calcolo* quand je travaillais sur l'*Universal Algebra* et la seconde *Ausdehnungslehre*, et une telle interprétation me paraissait insoutenable : dans la perspective de Grassmann, l'algèbre révèle les propriétés de certaines entités, les formes, que le système ne définit pas. La variabilité des interprétations n'est ainsi pas une idée très facile à implémenter dans un cadre grassmannien – or elle est à la base de la révolution axiomatique. J'étais cependant troublé par la rapidité avec laquelle Peano avait changé de perspective : en

moins d'un an, il abandonne les calculs grassmanniens pour adopter le cadre axiomatique. Comment comprendre ce changement ? Fallait-il mettre cette évolution sur le compte d'une forme de pragmatisme ? Peano est avant tout un mathématicien, il n'est pas un philosophe – on peut tout à fait imaginer qu'il adopte un nouveau cadre conceptuel, simplement parce qu'il lui paraît plus propice au développement des recherches en cours.

Mais il restait malgré tout un problème. Ce cadre, Peano ne le trouve précisément pas déjà tout fait chez Pasch. Comme je l'avais développé dans 3.1, Pasch, dans les deux premières sections des *Vorlesungen* (celles sur lesquelles se concentre précisément Peano), adopte une position extrêmement particulière sur des questions aussi fondamentales que les variables, la possibilité de se donner un modèle de l'axiomatique, etc. Un logicien du calibre de Peano ne pouvait pas manquer cela. La lecture qu'il fait de Pasch est ainsi, sur bien des points, une réinvention de la géométrie élémentaire. Mais qu'est-ce, alors, qui a mené Peano à aller plus loin que Pasch dans la voie de l'abstraction ?

Relisant *I principii di geometria*, je me suis aperçu que, s'ils avaient fortement souligné l'importance des notations logiques, les commentateurs n'avaient rien dit sur le symbolisme géométrique que Peano mettait en place dans les sections 2 et 3 de son article – rien dit, notamment, sur son usage des signes d'apostrophes pour exprimer les relations d'ordre. Or, une lecture détaillée des théorèmes et du développement du système montre que Peano met ici en place un nouveau calcul, qui complexifie le produit grassmannien en introduisant une asymétrie dans les notations. Ainsi, alors que  $ab$  désignait chez Grassmann, une droite,  $ab'$  dénote la demi droite d'origine  $b$  passant par  $a$ . Autrement dit, Peano ne se « convertit » pas à l'axiomatisation après avoir lu Pasch – comme si le modèle hilbertien était déjà là dans les *Vorlesungen* ou dans la tête de Peano. Il reçoit Pasch en lecteur de Grassmann : il voit dans les axiomes sur l'ordre de Pasch les règles d'un nouveau calcul, d'un nouveau triple produit, dont les propriétés formelles (associativité, distributivité, élément neutre, etc.) sont analogues au produit grassmannien. C'est ce « *background* » grassmannien qui permet à Peano de laisser de côté tout ce qui, chez Pasch, renvoyait à la question des limites de notre expérience de l'espace, et de lever les fortes contraintes qui pesait sur les formalismes. En un sens, donc, l'impact du calcul géométrique a bien contribué chez Peano à adopter un point de vue plus abstrait ; mais la conséquence n'est pas directe ; *I Principii* conjugue point de vue axiomatique et approche algébrique. Peano ne définit pas une classe de modèles – il construit une nouvelle opération de multiplication géométrique.

Le second texte consacré au calcul géométrique de Peano, « La définition de l'aire d'une surface gauche : Peano et Lebesgue » (3.3), a été co-écrit avec Y. Perrin. Il poursuit le même objectif que 3.2 : explorer la façon à la fois surprenante et inventive dont Peano utilise les algèbres géométriques grassmanniennes. Dans la première section de 3.2, j'avais évoqué brièvement le problème de la définition de l'aire. Ce qui m'intéressait était que, lorsque Peano ou ses disciples parlaient du calcul géométrique, ils mettaient toujours l'accent sur la dimension « réaliste » de ce calcul (ainsi, les calculs géométriques permettent de considérer directement les formes spatiales, rendant inutiles les détours par les coordonnées). J'avais cru comprendre que la définition de l'aire en termes de bivecteurs illustre particulièrement bien ce goût pour les caractérisations intrinsèques et directes. Mais les mathématiques qu'il fallait maîtriser pour étayer cette hypothèse étaient alors trop difficiles et trop nouvelles pour moi. Je travaillais à l'époque avec Yvette Perrin sur le cours d'option en licence de mathématiques et le projet s'est naturellement formé d'étudier ensemble la définition de l'aire d'une surface donnée par Peano. 3.3 est le résultat de cette coopération.

Ce qui ne devait concerner qu'une courte note (4 pages) de Peano est, de fil en aiguille, devenu un panorama des différentes réactions au contre-exemple de Schwarz, qui démontre le caractère erroné de la définition de l'aire donnée par Serret. Dans 3.3, nous distinguons quatre types de réaction (je reprends ici la conclusion de notre article) :

Certains mathématiciens (Harnack, puis Cartan, Young, Fréchet...) cherchent à reprendre la stratégie de l'inscription empruntée par Serret, en imposant aux surfaces approximantes des contraintes supplémentaires. D'autres (Hermite) reviennent à Cauchy, et cherchent à approcher la surface cible par un système d'éléments plans non continus, tous tangents à la surface. La troisième voie est celle ouverte par Peano. Le maintien de l'analogie archimédienne et de la rigueur exige, ici, une reconfiguration des concepts géométriques élémentaires par l'algèbre grassmannienne. Enfin, Lebesgue explore une quatrième piste, où les approximations sont encore des surfaces polyédriques (non nécessairement inscrites) et où l'aire n'est pas définie comme limite, mais comme plus petite limite.

Cette histoire de l'erreur de Serret, et de la redéfinition de l'aire par Lebesgue, est célèbre. Mais elle n'est pas pour autant bien connue. En particulier, on croit souvent que la thèse de Lebesgue met un point final aux questions ouvertes par le contre-exemple de Schwarz. Or, comme Lebesgue le dit d'ailleurs lui-même très fortement, ce n'est pas le cas. Ce qui nous a intéressés dans ce travail, c'est précisément la coexistence de plusieurs stratégies concurrentes, déclinant toutes le même argumentaire fondé sur l'analogie entre rectification de courbe et quadrature de surface. Nous avons également voulu mettre en évidence la proximité mais aussi la distance entre l'approche de Lebesgue et celle de Peano. Les deux auteurs en appellent à une solution géométrique ; mais la géométrie du premier n'est pas celle du second. L'appel à la géométrie élémentaire (au chiffonnage d'une feuille de papier, par exemple) a souvent pour fonction chez Lebesgue de souligner les limites des solutions analytiques (c'est-à-dire calculatoires) traditionnelles. Loin d'être une algèbre, la géométrie est pour lui ce qui met à distance les calculs et amorce une généralisation et un approfondissement de l'analyse. Chez Peano, en revanche, la géométrie se donne sous la forme d'un calcul ; la nouvelle algèbre de Grassmann, qui nous dévoile ce que sont les formes spatiales fondamentales et expriment leurs propriétés, fournit le contexte naturel d'une définition de l'aire d'une surface gauche. L'erreur de Serret est donc due, selon Peano, à l'absence d'un cadre algébrique adéquat – absence à laquelle le *Calcolo* remédie. Le commun appel à une solution géométrique dissimule donc un usage très différent, et à certains égards même opposé, de la référence géométrique.

Dans 3.3, notre propos était de faire un travail d'historien des mathématiques et donc de réduire les analyses philosophiques à la partie congrue. Toutefois, ce travail n'est pas sans débouché philosophique possible. En particulier, la diversité persistante des réponses au contre-exemple de Schwarz s'ajuste mal à la « méthode des preuves et réfutations » telle que Lakatos l'expose. Lakatos se concentre généralement sur des situations où le moment clé de la découverte mathématique est l'identification du lemme responsable (*guilty lemma*) du contre-exemple. Ainsi, la conjecture fautive de Cauchy selon laquelle la limite d'une série convergente de fonctions continues est continue est corrigée lorsque la distinction de la convergence simple et de la convergence uniforme est faite (*Proofs and Refutations*, 1976, 127-141). Or si la séquence conjecture / contre-exemple est illustrée dans le cas qui nous occupe, le moment de l'identification du « *guilty lemma* » n'existe pas : il y a plusieurs diagnostics possibles, qui débouchent sur divers concepts non coïncidents (même extensionnellement) d'aire d'une surface courbe. De façon plus générale, les philosophes qui s'intéressent aux questions liées à l'extension des concepts mathématiques, que ce soit dans la tradition de Lakatos, ou dans une veine plus logicienne (voir notamment Buzaglo 2002), prennent souvent comme exemple des situations où la solution donnée aux contre-exemples a rapidement fait consensus. Le cas de la définition de l'aire d'une surface courbe est intéressant en ce qu'il interroge ce présupposé. Il n'y a pas de réponse unique aux paradoxes engendrés par l'extension du concept d'aire aux surfaces courbes et les mathématiciens s'en accommodent finalement très bien : ils n'ont pas renoncé pour autant à utiliser la notion. Bien entendu, il ne s'agit là que du premier état d'une réflexion encore inaboutie ; il faudrait du travail (notamment lire plus précisément les textes de Lakatos, et distinguer différents cas

d'extensions de concept) pour pouvoir exploiter philosophiquement le matériel présenté dans cet article.

Cette étude menée en commun avec Y. Perrin m'a procurée beaucoup de plaisir. L'élaboration d'un questionnement intelligible à la fois d'un point de vue mathématique et historique (voire philosophique) est un travail rendu encore plus passionnant lorsqu'il s'effectue en collaboration avec un mathématicien. Mon style a aussi évolué. J'ai une tendance à m'appesantir de façon excessive sur les distinctions que je mets en place – peut-être une déformation due à l'enseignement. Yvette m'a fait comprendre que je ne faisais pas suffisamment confiance à l'intelligence du lecteur – qu'à rabâcher, on ne fait qu'ennuyer. J'essaie actuellement d'écrire de plus en plus en anglais, et le problème est là légèrement différemment. Mais la leçon m'a servi. Durant la rédaction du manuscrit (M), j'ai par exemple cherché à aller plus directement au but.

Je ne dirai rien de « Peano's logical language and Grassmann's legacy » (3.4) qui n'est qu'une reprise et un léger approfondissement, en anglais, des principaux résultats de 3.2 et 3.3 sur Peano. Je reparlerai en détail de 3.5 dans la dernière section 8 de la présente Note de synthèse. Avant de passer à la suite, j'aimerais souligner ce qui me paraît une des traits de ma manière de travailler : je me fais constamment « happer » par des sujets que je n'aborde au départ que pour clarifier d'autres problèmes. Ce sentiment doit être partagé par beaucoup de chercheurs et n'est certainement pas original. L'ensemble de mes travaux en histoire des mathématiques s'inscrit en tout cas dans cette dynamique. Lorsque j'ai commencé à lire Pasch, à jeter un œil sur Whitehead et sur Grassmann, à m'intéresser à Peano, il ne s'agissait pour moi que d'éclairer l'arrière plan de la partie VI des *Principles*. J'ai cependant trouvé ce contexte si intéressant que j'en ai fait mon objet d'étude. Le texte co-écrit avec Yvette Perrin représente de ce point de vue un nouveau palier puisque le calcul géométrique de Peano n'apparaît là que comme un élément, parmi d'autres, d'une trame bien plus générale, dans lequel toute trace de Russell est effacée. Je ne pense pas cependant avoir perdu mon temps dans cette expédition, loin de mes terres d'origine. Se risquer à l'histoire des mathématiques a été pour moi formateur. La simple exigence de produire un texte que des historiens des mathématiques et des mathématiciens peuvent comprendre (même si c'est pour le critiquer, voire le réfuter) n'est pas du tout acquis. La contrainte de devoir trouver un angle permettant de développer un questionnement philosophique tout en permettant, simultanément, d'exposer des techniques de preuve et des concepts mathématiques (la contrainte de ne pas perdre les mathématiques quand on parle de philosophie, et vice versa) m'a conduit à mettre en pratique un thème sur lequel j'avais disserté dans ma thèse : celui du rapport entre calcul et prose (pour parler comme Wittgenstein) dans la pensée de Russell. L'idée que les questions philosophiques s'incarnent dans les symbolismes et les raisonnements mathématiques m'a ainsi guidé dans les *Vorlesungen* de Pasch. C'est sans doute ce désir d'éprouver certaines idées, jusque là abordées de façon théorique et abstraite, qui explique pourquoi je me suis plongé si rapidement dans l'histoire des mathématiques après ma thèse.

J'ajouterai, pour conclure, deux choses. La *Revue d'histoire des mathématiques* comme la *Revue d'histoire des sciences* ont une procédure de sélection des manuscrits qui passent par une évaluation de ceux-ci par des rapporteurs extérieurs anonymes. J'ai appris depuis que certaines revues philosophiques françaises proposent aussi un tel système – mais je ne le savais pas alors. L'existence d'un tel dispositif m'a incité à envoyer mes travaux à ces journaux plutôt qu'aux revues philosophiques traditionnelles. Je me disais que, au pire, je connaîtrai les raisons pour lesquelles mon travail a été refusé et que je pourrai donc progresser. Même si je pense *a posteriori* avoir eu une vision un peu naïve de la fonction de « referee », je ne peux que reconnaître que ce travail avec les éditeurs et les relecteurs m'a fait progresser (voir section 7).



En second lieu, mon travail en histoire des mathématiques a été à la fois suscité et rendu possible par la masse de documents mis en ligne récemment sur internet. L'ensemble des premiers numéros des *Mathematische Annalen* et de nombreuses autres revues est aujourd'hui en libre accès ; des serveurs comme « Numdam » permettent de faire des recherches croisées sur une base de données impressionnante ; enfin, de nombreux sites ont numérisé des ouvrages mathématiques originaux du XIXe et du XXe siècle, dont il ne reste parfois que bien peu d'exemplaires papier (voir Gallica, le site de l'University of Michigan, etc.). Il y a dix ans à peine, je n'aurais pas pu mener à bien le même travail. Il aurait fallu, en effet, pour chacun des articles présentés ici, entreprendre des allers-retours incessants entre Clermont et la Bibliothèque Nationale à Paris, voraces en temps et en énergie.

Bref, comme je l'ai déjà dit, mon engagement dans l'histoire des mathématiques s'expliquent aussi par des faits contingents. Que la plupart des revues françaises de philosophie, contrairement à celles d'histoire des sciences, n'aient pas mis en place des procédures claires d'évaluation des manuscrits, et que la mise en ligne des ouvrages et des journaux mathématiques soit en avance par rapport à celle des textes philosophiques m'a incité à poursuivre dans l'exploration de cette voie.

## **5/ Histoire, philosophie, mathématiques**

Dans cette partie, je vais préciser le rapport entre mathématiques, histoire et philosophie qui sous-tend ma recherche. Les articles de la section 4 illustrent tous à leur manière la façon, quelque peu compliquée, dont j'aborde les choses. Dans mes travaux sur Pasch, sur Peano et sur l'aire d'une surface courbe, j'ai adopté un point de vue historique, au sens général où je cherche à rendre compte de la façon dont certains textes et certains concepts se sont constitués. L'approche historique ne me satisfait toutefois pas entièrement, dans la mesure où l'histoire peut, dans certain cas, constituer un obstacle à l'usage philosophique d'un *corpus* mathématique. Je considère en effet les mathématiques avant tout comme un formidable réservoir d'exemples permettant d'illustrer les problèmes et les questions philosophiques. En mathématique, il y a une forme de transparence de la raison vis-à-vis d'elle-même et de ses procédures, qui permet de cerner, de déterminer et de donner vie mieux que nulle part ailleurs à des questions que la raison se pose. Cet usage des mathématiques n'est absolument rien d'original. Lorsque Locke soulève la question de la nature et du statut de l'idée générale, il fait référence au concept euclidien du triangle quelconque, qui n'est ni droit, ni scalène, etc. ; lorsque Platon cherche à établir la réalité de l'intelligible dans *République* VI, il renvoie à la pratique des géomètres. Les mathématiques rendent « concrets » certains problèmes ou concepts métaphysiques, et c'est fondamentalement cette dimension qui m'intéresse en elles. Or, l'histoire des mathématiques peut parfois s'opposer à (ou tout du moins ne pas favoriser) un tel usage « philosophique ».

Un exemple permettra de comprendre ce que je veux dire. Pour expliquer l'opposition qu'il y a entre la conception aristotélicienne de l'espace comme système de lieux et la vision moderne, post-newtonienne, d'un espace abstrait et indifférent aux corps qui l'occupent, je parle souvent dans mes cours de la façon dont les géomètres grecs utilisaient les systèmes de coordonnées. Les grecs faisaient parfois usage de coordonnées dans leurs études des propriétés des courbes, mais leur système d'axes était toujours adapté à la courbe. Ainsi, les points d'une spirale d'Archimède sont repérés par la distance par rapport au point d'origine et l'angle par rapport à un demi-axe. Ce système n'était pas appliqué à l'étude d'une ellipse par exemple. Dans les mathématiques postcartésiennes, toutes les courbes, quelles que soient leur nature, peuvent être rapportées au même système d'axes. Euler développe des formules générales de changements de coordonnées, dont l'existence manifeste clairement que la façon

dont on repère les courbes est indépendante de leurs propriétés géométriques. D'une certaine façon, dans les mathématiques postcartésiennes, l'espace (et avec lui, toutes les possibilités d'inscrire les courbes géométriques) est donné avec les axes de coordonnées ; l'indépendance des coordonnées par rapport à ce qu'elles coordonnent illustre l'indépendance de l'espace par rapport à ce qu'il contient. Dans la pratique géométrique grecque, en revanche, les systèmes de coordonnées sont toujours ajustés à ce qu'ils coordonnent, exactement comme le lieu n'est pas indifférent à ce qui l'occupe. Cette opposition rend la différence entre les conceptions anciennes et modernes de l'espace plus vivantes pour les étudiants mathématiciens, et même les « philosophes » me disent avoir été éclairés par l'analogie. Or cette connexion est, d'un point de vue historique, doublement fautive. D'une part, la théorie des lieux d'Aristote, telle qu'elle est exposée dans la *Physique*, n'a pas de lien immédiat avec l'espace géométrique, puisque les lieux sont, pour Aristote, les limites des corps, et que les objets géométriques sont des formes. D'autre part, on ne peut évidemment absolument pas faire de Descartes le penseur de l'espace vide. Faut-il pour autant renoncer à utiliser cet exemple ? Dans Gandon 2002 (chap. 2), j'ai montré que Wittgenstein utilisait la notion lagrangienne de coordonnées généralisées pour défendre une conception « aristotélicienne » de l'espace logique. Je pourrai donc reprendre dans mes cours l'exemple, historiquement plus pertinent, des coordonnées généralisées pour développer la même analogie. Mais expliquer le contexte, plus technique et moins connu des étudiants, prendrait beaucoup trop de temps pour un gain qui n'est pas évident.

Ce dilemme illustre une situation que je retrouve souvent dans ma recherche. Certains concepts, certaines théories, certaines méthodes mathématiques sont philosophiquement extrêmement suggestives – elles permettent de donner corps ou au contraire de remettre en cause certaines problématiques métaphysiques. Mais cet usage « philosophique » n'a souvent rien à voir avec la genèse historique des théories dont il est question – il ne coïncide pas non plus nécessairement avec la façon dont elles ont été reçues et utilisées par les mathématiciens. D'une certaine façon, chez Pasch, les choses se passaient idéalement bien pour moi ; Pasch est un mathématicien qui se montre dans les *Vorlesungen* très conscient des enjeux philosophiques sous-jacents à sa démarche. Mais chez Peano déjà, la situation est beaucoup moins claire. Le mathématicien italien est un pragmatiste : il adapte son approche aux mathématiques auxquelles il s'attaque. Certes, la référence à Leibniz est omniprésente chez lui ; mais bien souvent, elle n'est qu'une façade permettant de rassembler des développements extrêmement hétérogènes entre eux. Dans le cas des géométries finies (dont je parlerai dans la section 8), la situation est encore pire ; les mathématiciens ont développés leurs théories pour toutes sortes de raisons qui n'ont qu'un lointain rapport avec celles qui me poussent à m'y intéresser. Comment donc écrire sur cette portée potentiellement philosophique des mathématiques, qui n'est pas nécessairement dévoilée lorsque l'on adopte une perspective strictement historique ?

La réponse la plus simple serait de faire ce que certains philosophes de la tradition analytique ont de plus en plus tendance à faire : 1/ exposer l'état de l'art concernant un problème philosophique bien connu et bien identifié dans la tradition analytique et/ou dans l'histoire de la philosophie ; 2/ montrer, à partir de l'étude d'un cas particulier, que la façon habituelle de formuler les questions ne permet pas de prendre en compte certains traits de l'exemple mathématique que l'on travaille ; 3/ suggérer des pistes permettant de reformuler les problématiques philosophiques de façon à mieux les ajuster à ce que les mathématiques nous présentent. On trouve de beaux exemples de cette approche dans les articles de M. Wilson (1994) et de J. Tappenden (2008), qui traitent respectivement de la question du statut de la forme syntaxique et de la distinction entre définition réelle et définition nominale. Si je compte à l'avenir adopter moi aussi cette stratégie (voir pour plus à ce sujet, les sections 7 et 8), directe et naturelle, je ne l'ai pas fait jusqu'à présent. Les articles que j'ai réunis dans la

quatrième section de (A1) et (A2) sont les fruits d'une approche différente, plus indirecte, dans laquelle, pour contrecarrer les difficultés parfois engendrées par la démarche strictement historique, je dédouble, en quelque sorte, mon propos. Dans ces articles, je continue à adopter la perspective de l'historien – mais l'histoire à laquelle je m'intéresse n'est pas celle des mathématiques, mais celle de la réception par des philosophes d'un pan de mathématiques. Cette réception peut être erronée : les philosophes en question, en l'occurrence Royce et Russell, n'ont peut-être pas compris les mathématiques dont ils parlent. Là n'est cependant pas pour moi la question : l'usage qu'ils font des mathématiques est suffisamment intéressant pour lui consacrer une étude. Je vais prendre un à un les trois textes de cette section<sup>3</sup>, et les commenter en insistant sur l'aspect méthodologique.

1/ « “To bring Dedekind's research into its proper relation to general metaphysical enquiry” : Royce et Russell critiques de Bradley » (4.1) est la version remaniée d'une conférence prononcée à l'occasion du colloque « Comment être idéaliste ? Bradley et Collingwood » organisé à Clermont. J'étais tombé sur l'Appendice de Royce un peu par hasard, en furetant à la bibliothèque de l'ENS. J'ai été intrigué, puis séduit, par cette lecture très étrange, prenant à contre-pied l'interprétation de Dugac, de *Die Zahlen*. Elle montrait en tout cas qu'il y avait, à la fin du XIXe siècle, des idéalistes de langue anglaise qui n'avaient pas d'aversion particulière et connaissaient les nouvelles mathématiques. L'existence de ce texte conduisait donc à mettre en question l'idée, fréquemment exprimée, d'une incompatibilité entre l'idéalisme et les mathématiques.

Royce établit une relation entre le célèbre §66 de *Die Zahlen*, dans lequel Dedekind prouve l'existence d'un système infini en prenant comme exemple le « monde des pensées », et la réflexivité du sujet dans l'idéalisme de Fichte et de Hegel. Mon but dans l'article n'est pas de défendre la pertinence de cette interprétation, mais de faire état de son existence et d'explorer ses conséquences sur le rapport qu'entretient Royce à l'idéalisme de Bradley. Faire de l'histoire de la philosophie me permet ici paradoxalement de me libérer du cadre contraignant de l'histoire des mathématiques. Je ne m'intéresse en effet ni à la genèse de *Die Zahlen*, ni à sa postérité mathématique immense, mais à la façon qu'a eue un philosophe de la fin du XIXe siècle de le lire. Le texte de Royce a le mérite de connecter d'une façon assez naturelle deux thématiques qui *a priori* sont très éloignées : la structure réflexive du soi et l'arithmétique. Je n'aurai sans doute pas eu moi-même l'idée d'effectuer un tel rapprochement (qui n'est toutefois pas spécifique à Royce ; voir par exemple Potter 2000). Mais même si j'avais eu une telle intuition, je n'aurai probablement pas eu le courage de la poursuivre et de la défendre. Le fait qu'un auteur de la fin du XIXe ait suivi cette piste facilite l'étude de cette comparaison et ces conséquences. Faisons le parallèle avec l'analogie entre systèmes de coordonnées et conceptions de l'espace dans l'Antiquité et dans les temps moderne. Imaginons qu'un philosophe du XVIIIe, par exemple, ait eu l'idée de développer cette analogie – je pourrai alors adosser mon cours sur ce texte, et m'« abriter » derrière lui pour développer une analyse philosophiquement intéressante et suggestive, mais qui, du point de vue de la vérité historique, pouvait prêter à confusion. C'est exactement ce que me permet le texte de Royce. Paradoxalement, c'est en combinant histoire des mathématiques et histoire de la philosophie – en ayant recours deux fois à l'histoire, que je parviens, dans cet article, à m'en libérer. Je ne fais ici ni de l'histoire de la philosophie (la métaphysique de Royce ne m'intéresse pas), ni de l'histoire des mathématiques (je ne traite qu'indirectement de *Die Zahlen*) ; mon but est de présenter une réception philosophique d'une œuvre mathématique importante, et plus généralement, de suggérer que l'on apprend beaucoup d'un point de vue philosophique (et pas

---

<sup>3</sup> La note de lecture 4.2 n'est en réalité qu'une continuation de 4.1 ; elle ne fera pas ici l'objet d'un commentaire séparé.

seulement d'un point de vue historique) en s'intéressant certains usages des mathématiques développés par les philosophes. L'article déborde toutefois ce cadre de deux manières.

Dans la dernière section de (4.1), je défends l'idée que l'analyse de Royce n'est certainement pas sans pertinence. Je reviens donc là à l'histoire des mathématiques après un détour par l'histoire de la philosophie. Bien entendu, je ne prétends pas (ce serait absurde) que Dedekind cherche, dans *Die Zahlen*, à prolonger la théorie de Fichte. Mais l'hypothèse d'une influence des idéalistes *via* certains textes de Lotze, semble devoir être prise au sérieux. On sait que Dedekind a assisté à au moins un cours de Lotze, et il n'est pas impossible de rapprocher certains passages de Lotze de certaines affirmations de Dedekind. Aucune preuve textuelle n'est apportée dans mon article. Il existe cependant de nombreux indices convergents. L'étude de la réception philosophique de théories mathématiques peut donc permettre de formuler de nouvelles hypothèses sur la genèse d'une œuvre mathématique. Dans le manuscrit (M), j'ai effectué un mouvement similaire. Russell, alors qu'il reconnaît que la quantité est un concept qui n'appartient pas à la sphère des mathématiques pures, s'intéresse beaucoup à la notion. J'avais cru au départ à une lubie de philosophe, à un intérêt anachronique pour une forme théorique dépassée par les mathématiques de son temps. Rien n'est plus faux. Comme je l'indique dans le chapitre 1 du mémoire (M), les mathématiciens au tournant du siècle se préoccupèrent beaucoup de la théorie de la quantité. Le concept de quantité ou de grandeur est alors une catégorie qui, au même titre que celles de groupe ou de corps (avec lesquelles elle partage de nombreux points communs), permet de structurer la recherche. L'importance des théories de la quantité au début du XXe siècle n'est pas très connue des historiens des mathématiques. Sur ce point également, l'examen de la réception philosophique des mathématiques permet d'enrichir l'image que les historiens se font des mathématiques à une époque donnée.

Mais l'article a également un autre objectif : en interrogeant l'affirmation russellienne selon laquelle l'idéalisme est incompatible avec « les mathématiques de Cantor et de Dedekind », il vise à mettre en question l'idée que les mathématiques contiendraient en elles-mêmes une métaphysique implicite. Je ne pense pas que les mathématiques, ou même certaines mathématiques, soient en elles-mêmes platoniciennes, empiristes, idéalistes, monistes, pluralistes, nominalistes, etc. La raison en est que les mathématiques sont philosophiquement fondamentalement ambiguës : il n'y pas une unique façon de les lire, il n'y a pas d'univocité dans la traduction de leurs procédures et de leurs jargons ; or ce sont les façons dont nous aménageons les passages entre les calculs et la prose, entre les symbolismes logico-mathématiques et la langue de tous les jours, qui engagent l'interprétation philosophique dans un sens ou dans un autre. Ce point sous-tend les réserves que j'ai à l'encontre des différents travaux contemporains se réclamant d'une « philosophie des pratiques mathématiques ». Selon moi, les pratiques mathématiques, par elles-mêmes, ne disent rien sur le plan philosophique ; cela ne signifie pas qu'on peut faire dire n'importe quoi aux mathématiques ; cela veut simplement dire qu'il y a toujours plusieurs interprétations possibles de ces pratiques, plusieurs façons de faire le départ entre ce qui, en elles, est philosophiquement important et ce qui ne l'est pas, et que le choix entre ces diverses lectures relèvent d'une décision philosophique. Je ne crois pas à l'idée que l'on pourrait directement tirer des pratiques mathématiques une philosophie – je reviendrai sur la question dans la section 7. Pour en revenir à l'article sur Royce et Dedekind, j'ai été heureux de pouvoir montrer qu'il y avait un idéalisme qui exploitait, pour se défendre, les mêmes sources mathématiques que les *Principles*. Loin de le contredire, cela a confirmé mon intérêt pour Russell. Ce que je retiens et que j'admire dans l'œuvre russellienne, c'est avant tout l'idée que la confrontation avec les mathématiques est philosophiquement indispensable ; que l'exploration des « calculs » et des « pratiques » puissent amener vers d'autres conclusions que celles tirées par Russell (qui a d'ailleurs souvent lui-même oscillé entre diverses voies possibles) ne me posent absolument

aucun problème ; au contraire, cela démontre que la façon dont la circulation entre mathématiques et métaphysique s'opère est aussi affaire de choix et de décision philosophique, ce qui est une autre leçon russellienne.

2/ L'idée développée dans « Russell, les *sense data* et les objets physiques : une approche géométrique de la notion de classification » (4.3) date de mes premières recherches sur la géométrie projective dans les *Principles*. L'image des matrices (des tableaux à deux entrées) s'était naturellement imposée à moi lorsque j'avais lu les passages de *On Knowledge of External World* sur la construction des corps à partir des *sense-data* (cf. l'exemple des photons, que l'on pouvait regrouper en fonction de leur étoile d'origine, ou en fonction de la plaque photographique qu'ils impressionnaient, ou bien l'exemple des adresses postales, que l'on pouvait classer ou bien selon la proximité qu'ils avaient avec une adresse donnée, ou bien selon l'ordre alphabétique des noms des personnes occupant les lieux), et leurs reprises plus tardives dans le cadre du monisme neutre. En étudiant le rôle des relations d'incidence (et donc des tables d'incidence) dans la théorie des *Principles*, j'ai immédiatement pensé aux exemples que Russell construit pour illustrer son « monisme neutre ». Une première version de 2.1 se concluait d'ailleurs par une analyse de la version russellienne du monisme neutre – le versant purement mathématique prenant de l'ampleur, j'ai finalement renoncé à ce qui était censé constituer une dernière partie.

Dans son ouvrage sur Leibniz (1900), Russell explique que le primat accordé à la forme sujet / copule / prédicat et le rejet corrélatif des propositions relationnelles anime souterrainement toute la métaphysique leibnizienne. Cette thèse est, on le sait, vivement contestée aujourd'hui. L'idée qu'il existe un lien entre logique ou mathématique et métaphysique est toutefois centrale dans la philosophie de Russell. L'auteur des *Principles* affirme ainsi que seule une logique des relations permet de rendre compte de la vérité des mathématiques et de la réalité de l'espace. Dans 4.3, je suggère que, de la même façon qu'il tire des conclusions métaphysiques de son analyse logique de l'ordre, Russell, dans ses constructions de 1914, généraliserait ses réflexions sur les relations d'incidence. Je n'ai pas de preuve textuelle de ce que j'avance. Si Russell dit explicitement, à de très nombreuses reprises, que le refus d'accorder une réalité aux relations est à la base de la métaphysique de Leibniz (monadisme) et de Bradley (monisme), il ne dit rien sur un éventuel lien entre géométrie projective et monisme neutre. Dans l'article, deux arguments en faveur de cette lecture sont avancés : le fait que Russell, à la différence de James, ne fonde pas son monisme neutre sur la psychologie, d'une part ; le fait que James lui-même, dans un article que Russell cite souvent, reprend l'exemple du point d'intersection de deux droites pour répondre à l'objection qu'un même objet ne peut pas être à la fois mental et corporel, de l'autre. Mais ces deux arguments sont indirects et ne peuvent à eux seuls soutenir la charge que je leur fais supporter.

Si je défends cette thèse, c'est avant tout pour m'attaquer à l'image qu'a parfois Russell dans la philosophie contemporaine, celle d'un auteur « pour débutant », dont les écrits sont extrêmement clairs mais souvent superficiels. Certes, le style argumentatif russellien a souvent été loué pour sa simplicité et sa transparence – Russell est cependant loin d'être toujours clair, comme un rapide survol de la partie I des *Principles* le montre. Mais surtout, cette simplicité est souvent seulement apparente. Les véritables motifs, les plus intéressants, sont fréquemment masqués, non pas à dessein, mais parce que Russell distingue très nettement les contextes d'exposition. Prenons les *Principia*. On peut distinguer au moins quatre types de textes à l'intérieur du livre. Il y a la longue introduction aux trois volumes, dont Russell et Whitehead savaient très certainement qu'elle serait la seule chose qui serait lue, et qui peut donc être lue indépendamment du reste ; il y a les introductions aux parties, beaucoup plus précises, parce qu'elles présentent à un lecteur qui a déjà parcouru du chemin les enjeux et les objectifs poursuivis, indépendamment du projet général ; il y a les

introductions aux sections dont le rôle est d'orienter le lecteur « motivé » à l'examen des principaux théorèmes ; enfin il y a les preuves, elles-mêmes souvent accompagnées de commentaires. Les textes philosophiques des années 10s, même « The Relation of Sense Data to Physics », correspondent *grosso-modo* selon moi aux parties les plus faciles de l'introduction des *Principia*. Cela veut dire qu'ils peuvent être lus de façon autonome car ils ont été écrits pour cela. Mais ces réflexions sont néanmoins connectées, du moins est-ce le pari que fait l'article, à des développements techniques, exactement comme l'introduction des *Principia* l'est avec le reste de l'ouvrage. Mon but dans 4.3 était de suggérer que les écrits métaphysiques de Russell ne doivent pas être séparés de ces recherches sur les mathématiques, même si aucun lien explicite n'est fait par lui.

On peut présenter les choses légèrement différemment. J'ai mis en exergue de cette Note un texte extrait de *On Knowledge of External World* :

When a theory has been apprehended logically, there is often a long and serious labour still required in order to *feel* it: it is necessary to dwell upon it, to thrust out from the mind, one by one, the misleading suggestions of false but more familiar theories, to acquire the kind of intimacy which, in the case of a foreign language, would enable us to think and dream in it, not merely to construct laborious sentences by the help of grammar and dictionary

Dans « Russell, les *sense data* et les objets physiques », je défends l'idée que Russell, en 1903, n'aurait pas fait qu'appréhender logiquement la théorie de Pieri ; il l'aurait suffisamment travaillé pour la « sentir », il aurait acquis avec elle cette sorte d'intimité qui permet de penser et de se mouvoir en elle. Le monisme neutre, en germe dans les constructions de 1914, ne serait qu'une lointaine conséquence de cette première imprégnation, une rêverie à partir de la trame mise en place dans les *Principles*. L'idée qu'un espace est avant tout une structure d'incidence referait surface dans un tout autre contexte, purement ontologique. J'aurai d'ailleurs pu pousser l'argument plus loin (peut-être le ferai-je un jour) : il y a bien des motifs dans la métaphysique du dernier Russell qui rappelle des choses familières à qui connaît un peu ces premiers écrits sur la géométrie projective ; pensons par exemple à la théorie des individus comme « faisceaux » de propriétés et à l'espèce de dualité entre particuliers et universaux qui en découle.

Cette interprétation, très risquée je l'admets, de textes bien connus de Russell illustre en tout cas le même intérêt que l'article sur Royce pour l'usage philosophique d'une théorie mathématique (ici, la géométrie projective vue comme une théorie de l'incidence). À la différence de 4.1 toutefois, dans lequel celui qui développe l'analyse mathématique (Dedekind) et celui qui l'exploite philosophiquement (Royce) sont deux personnes différentes, ici les rôles sont joués par un seul et même auteur. Comme je l'ai déjà évoqué, ce qu'il y a de singulier chez Russell, c'est la dimension « homme-orchestre » du personnage : alors qu'il reconnaît une différence entre les mathématiques et la philosophie, Russell ne s'interdit pas d'intervenir sur les deux tableaux ; il ne cesse d'aller des mathématiques à la métaphysique et de retourner de la métaphysique aux mathématiques. C'est pourquoi il y a un sens, lorsqu'on étudie la pensée de Russell, à vouloir dégager les canevas mathématiques originaux qui sont susceptibles d'avoir, souterrainement, gouverner la réflexion. Bien entendu, la méthode employée en 4.3, n'est applicable, pour des raisons évidentes (pour être imprégné à ce point de mathématiques, il faut souvent avoir fait soi-même œuvre de logicien ou de mathématicien), qu'à un type très particulier de philosophes – si on se limite à la période étudiée : Frege, Carnap, Quine, Weyl – sans doute également Peirce et Husserl.

3/ La dernière étude de la quatrième partie de (A1-A2) « La théorie des rapports chez A. de Morgan » (4.4) propose une troisième stratégie. Je pars cette fois d'une discussion récente entre Gardiès et Vitrac concernant le point de savoir si l'usage de la théorie des relations

russelliennes pour éclairer l'ouvrage d'Euclide est pertinent. Gardiès va très loin dans cette direction puisque, de considérations logiques sur le type et l'arité des relations (grandeur, proportion, etc.), il dérive des conclusions concernant la genèse du texte euclidien. Vitrac a vivement critiqué la méthode, en soutenant que l'importation de concepts et d'outils complètement étrangers au texte euclidien gauchit, bien plus qu'il n'éclaire, les *Éléments*. La controverse reprend (en la dramatisant par la référence à la logique) une question très importante et très balisée en histoire des mathématiques – a-t-on le droit pour interpréter des mathématiques du passé d'utiliser les mathématiques d'aujourd'hui ? L'interprétation de D. H. Fowler (1987), certainement plus convaincante que celle de Gardiès, a ainsi suscité les mêmes sortes de réserve (l'auteur utilise des résultats de Lagrange sur le développement en fraction continue).

Dans l'article (4.4), je défends la thèse que la lecture « logicisante » de Gardiès n'est en réalité pas « anhistorique ». On peut en effet avancer a été (partiellement) anticipée par De Morgan et Russell. Il y a une théorie des ratios dans les *Principia* : elle est développée dans la partie VI et s'appuie sur l'idée que les rapports eudoxiens sont des relations entre relations (entre grandeurs) – voir sur ce point le chapitre 4 du manuscrit (M). Gardiès passe ce fait complètement sous silence. L'ignorait-il, ou le laissait-il volontairement de côté parce qu'il n'apportait pas d'éléments nouveaux pour interpréter Euclide ? C'est toutefois, dans 4.4, à la figure de De Morgan que je m'attache. De Morgan a publié un ouvrage important sur la théorie des rapports eudoxiens, que les commentateurs d'Euclide (Vitrac et Heath) citent, mais qui n'a jamais fait, à ma connaissance, le sujet d'une étude. J'ai donc voulu dans l'article d'abord combler une lacune. Travailler sur De Morgan était également pour moi l'occasion d'étudier une des origines de la théorie des relations russellienne. J'ai été particulièrement intéressé par l'analogie faite par De Morgan entre la théorie relationnelle de la copule et la théorie (euclidienne) des rapports de rapports. Le lien explicite tissé entre les deux doctrines montre que les connexions plus tardives que Russell et Gardiès établissent entre la notion logique de relation et le concept de rapports de grandeurs ne naissent pas sur un terrain complètement vierge.

À la différence des deux articles précédents, je ne m'intéresse pas dans 4.4 à la réception philosophique d'un morceau de mathématiques. Je montre plutôt comment une discussion concernant la façon de faire de l'histoire des mathématiques gagnerait à être replacée dans un contexte historique – à savoir, celui de la réception de la doctrine euclidienne par certains logiciens du XIXe-XXe, De Morgan et Russell. Mon rapport aux mathématiques et à leur réception est donc ici encore moins direct que précédemment. Il s'agit en effet de montrer comment une dispute de nature philosophique, concernant l'épistémologie de l'histoire des mathématiques, peut être elle-même historicisée – d'établir que la nouvelle logique des relations, loin de naître toute armée dans la tête de Russell, a eu une lente maturation et que la théorie des rapports a joué un rôle non négligeable dans son émergence. Sur le fond, ce travail se présente, en un sens, comme une défense de l'hypothèse faite par Gardiès – on peut faire un lien entre théorie des rapports et théorie des relations. Mais ce soutien est ambigu, dans la mesure où ce lien n'est pas fondé sur le texte des *Éléments*, mais bien plutôt sur l'histoire (passée sous silence chez Gardiès) de l'outillage logique dont le commentateur d'Euclide se sert dans son interprétation.

Avec du recul, ce texte me paraît moins convaincant et moins riche que les deux autres. Il y a deux raisons à cela. L'idée de départ est d'abord un peu trop artificielle. J'aurai sans doute du me contenter de faire un article purement historique sur l'ouvrage de De Morgan et sur les liens que le logicien établit entre théorie des rapports et théorie des relations. Les allusions, en introduction et en conclusion, aux débats entre Gardiès et Vitrac ne sont pas indispensables. Ensuite, et les deux points sont liés, ma thèse fondamentale (i.e. l'idée qu'il y a une connexion intime entre la réception de la théorie des rapports euclidiens et l'élaboration de la logique des

relations chez De Morgan) ne tient, en réalité, que partiellement ; toute la construction, très originale, des rapports de grandeurs en termes de distribution ordinale des équi-multiples ne joue absolument aucun rôle dans la logique de De Morgan.

Mon intérêt philosophique pour les mathématiques et leur histoire s'est donc avant tout traduit jusqu'à présent par des études prenant pour objet la réception philosophique des mathématiques. En redoublant l'histoire des mathématiques par l'histoire de la philosophie, j'ai eu l'impression d'introduire du jeu dans le rapport à l'histoire – de multiplier les angles d'attaques, d'enrichir les perspectives tant sur les mathématiques (4.1) que sur les doctrines philosophiques (4.3). Certes, on peut trouver le dispositif compliqué. Il s'est cependant imposé à moi de façon naturelle – sans vraiment que je le cherche. La stratégie plus directe, que j'ai évoquée plus haut (voir page 25), est au contraire une découverte récente, due à la lecture de la littérature secondaire.

L'idée que les mathématiques sont un réservoir d'exemples pour la philosophie pourrait déboucher, à moyen terme, sur un autre type de production : j'aimerais élaborer un site mettant en ligne des séquences pédagogiques destinées à favoriser la coopération entre enseignants de philosophie et enseignants de mathématiques en classe de Terminale. L'expérience accumulée dans les cours de licence et les discussions avec les collègues mathématiciens et philosophes du secondaire me poussent à croire qu'il est possible, qu'il serait même très utile, de mettre en place un tel dispositif. Les mathématiques font souvent peur aux enseignants de philosophie et la philosophie impressionne beaucoup les collègues mathématiciens. C'est très dommage car ce double « blocage » interdit tout échange. L'accès à des séquences incluant des textes de philosophes, des présentations de concepts mathématiques, et une rapide mise en correspondance entre les deux, pourrait permettre de briser la glace, de faciliter et amorcer le dialogue entre les enseignants. J'ai beaucoup aimé préparer des cours en me contraignant à ce qu'ils soient intelligibles à la fois à des étudiants de philosophie et de mathématique. Cette expérience m'a permis de réaliser que, souvent, de petites explications suffisaient pour intéresser les élèves d'une discipline à celle qu'ils ne connaissent pas. De plus, s'il existe actuellement de nombreux portails sur internet (souvent très bien faits) de vulgarisation des mathématiques à destination des collègues mathématiciens (citons « Images des mathématiques » <http://images.math.cnrs.fr/>, et un site plus spécifiquement destiné aux enseignants de mathématiques, « Culturemath » <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>), rien, à ma connaissance, ne s'adresse spécifiquement à la fois aux enseignants de philosophie et de mathématiques.

Je n'ai pas encore les idées claires sur l'ensemble du projet (qui serait un projet de « valorisation de la recherche » plus que de recherche proprement dite). Quelques pistes de réflexion cependant :

1/ Il serait nécessaire d'associer à l'élaboration des séquences des collègues du secondaire, philosophes et mathématiciens – ce qui sous-entend qu'il faudrait leur permettre de dégager du temps pour se consacrer à l'élaboration du dispositif, et donc négocier avec les rectorats des décharges. Il faudrait aussi tenter une collaboration avec les institutions structurant l'enseignement dans le secondaire, l'inspection générale en philosophie, les (ou des) IREM en mathématiques.

2/ Une collaboration avec un « webmaster » serait nécessaire pour permettre l'usage de l'ensemble des instruments aujourd'hui accessibles (les logiciels interactifs permettant à l'utilisateur de construire des figures, etc.) et pour garantir la pérennité des documents mis en place ; une collaboration avec des sites existants (« Images des mathématiques » ou « Culturemath ») pourraient être envisagée.



3/ les parties les plus stables (pour ne pas avoir à renouveler les séquences tous les ans) du programme de Terminale en mathématiques constitueraient le point de départ naturel du travail. Il faudrait rechercher quel type de problèmes et de textes philosophiques articuler aux différentes notions passées en revue. Il est à mes yeux important de ne pas se restreindre aux parties « épistémologiques » du programme de philosophie. Les mathématiques peuvent fournir des exemples à des développements en morale, en esthétique, en métaphysique. Ainsi, par exemple, la question de l'idée générale chez Locke pourrait avec profit être rapprochée du concept de variable ; les problèmes liés à la justice pourraient donner lieu à des développements sur la combinatoire ; la question du choix pourrait être abordée dans le cadre d'un développement sur l'axiome du choix.

4/ Il conviendrait d'aller assez loin dans l'élaboration pédagogique. Notamment, en plus des documents attendus (textes ou analyses philosophiques, référence à des parties du cours de mathématiques), il serait bon de proposer des exercices spécifiques : proposer des sujets de dissertation permettant d'exploiter les exemples mathématiques ; construire des exercices de mathématiques permettant de mieux saisir comment s'articule l'analyse philosophique.

5/ On pourrait éventuellement songer à étendre le domaine, et à proposer des séquences philosophie / physique ou philosophie / biologie, en plus des séances philosophie / mathématiques. Je ne suis toutefois pas certain que ce soit une bonne idée : il y a, me semble-t-il, un lien particulier entre les mathématiques et la philosophie, que l'on ne retrouve ni en biologie ni en physique.

Les deux disciplines auraient tout à gagner à être croisées dès l'année de Terminale : du côté des mathématiques, montrer aux étudiants que les concepts qu'ils manipulent peuvent avoir un sens hors du cours de mathématiques peut prévenir et désarmer certaines critiques trop souvent émises ; du côté de la philosophie, montrer aux étudiants qu'ils peuvent utiliser dans leurs dissertations et commentaires des exemples tirés de leur cours de mathématiques, ou d'autres cours, pourrait rendre les copies moins abstraites et plus vivantes. Ce projet pourrait faire l'objet d'une réponse à un appel à projet ANR.

Je vais à présent me pencher sur des travaux plus récents, et pour certains d'entre eux encore en gestation. Le projet d'édition, avec N. Griffin, de la correspondance Russell / Whitehead est le premier sur la liste.

## **5) Perspective I : la correspondance Russell / Whitehead**

J'ai eu la chance d'aller, en 2005, à l'occasion de la conférence pour le centenaire de *On Denoting*, à McMaster University, dans l'Ontario, visiter les archives Russell. Les conférences duraient quatre jours, mais je suis resté une semaine supplémentaire au Canada pour pouvoir consulter la correspondance de Russell. Je souhaitais en particulier étudier les échanges avec les italiens. Je me suis cependant aperçu rapidement que l'ensemble des lettres, actuellement non publiées, que Whitehead avaient envoyées à Russell de 1899 à 1913 représentait un document absolument extraordinaire. Lors de cette première lecture, j'ai d'abord été frappé par l'intérêt de certains passages, absolument superbes, sur la quantité, sur les types, sur les notations, etc. que j'ai d'ailleurs souvent réutilisées dans mes articles ultérieurs. J'ai également buté sur des lettres, extrêmement complexes et intriquées, dont je ne saisissais pas même exactement de quoi elles parlaient. Il se dégagait malgré tout de l'ensemble de la correspondance une forte continuité : même si certains échanges paraissaient très obscurs au premier abord, ils ne rompaient pas le fil général. On pouvait même espérer en

rendre compte en les recoupant avec d'autres passages. J'étais donc, au final, extrêmement surpris que cette correspondance n'ait pas été publiée, ni plus exploitée dans la littérature secondaire. J'en ai parlé à N. Griffin, qui m'a dit entretenir depuis longtemps le projet de la publier. J'ai profité de la mise au concours d'un Bertrand Russell Visiting Professorship, en 2007, pour présenter un projet autour de l'édition de cette correspondance. Le dossier a été accepté, et m'a permis, de janvier à juin 2008, de relire et travailler de façon plus approfondie l'ensemble des lettres. Avec N. Griffin, nous avons tout récemment obtenu de la famille Whitehead les droits de publier la correspondance. Rien ne s'oppose désormais à l'édition de ces lettres.

C'est la présence des *Collected Papers* de Russell à la bibliothèque de Clermont qui m'a, comme je l'ai dit, incité à orienter mes recherches sur Russell (plutôt que sur Frege, par exemple). Je trouve cette édition remarquable parce qu'elle permet au chercheur d'avoir accès à une masse impressionnante de documents toujours très bien contextualisés, tout en le laissant complètement libre de forger son propre cheminement. La possibilité de collaborer avec N. Griffin et de contribuer à élaborer un document qui, je l'espère, sera de la qualité de ceux qui m'ont permis de développer mes propres recherches, est pour moi un honneur et une grande opportunité. Quand je commente un texte ou lorsque je fais cours, j'aime avoir une ligne problématique nettement définie. Rédiger des notes neutres, informatives, mais laissant au lecteur la liberté de construire ses propres questions, n'est pas pour moi habituel et me demandera certainement un effort important – mais l'exercice, pour cette raison même, sera certainement formateur.

Je suis extrêmement intéressé par l'ensemble des questions concrètes concernant l'édition de la correspondance. Comment procéder avec le matériel ? Comment régler les difficultés dues au déchiffrement de l'écriture de Whitehead ? Un des sujets abordés dans la correspondance est celui du symbolisme. Comment (et peut-on) numériser les très nombreuses notations, parfois extrêmement étranges, utilisées et commentées par Whitehead ? Des lettres ne sont pas datées : comment combler les lacunes ? Whitehead mentionne souvent des événements familiaux : comment combiner la dimension biographique avec les considérations philosophiques ? Enfin, il y a vraisemblablement des lettres qui resteront énigmatiques, étant donné à la fois la difficulté de leur contenu et le caractère extrêmement allusif des remarques : comment les présenter, comment les annoter, sans forcer la lecture ? Toutes ces questions ne sont pas des problèmes que je me pose habituellement lorsque je rédige un article. L'expérience que je vais acquérir me sera non seulement utile si je me lance dans d'autres projets éditoriaux, mais elle est également susceptible d'affecter et d'affiner mon rapport aux textes que je commente.

Sur le plan du contenu, ce projet d'édition a pour moi, doublement, un sens. Je n'ai d'abord cessé, depuis que je lis Russell, de croiser Whitehead. Lors de la rédaction de 2.1, j'ai découvert l'*Universal Algebra*, puis les traités de géométrie projective et descriptive de 1906 et 1907. J'ai consacré un article au premier (2.2), et l'introduction de Whitehead 1906 joue un rôle capital dans nombre de mes travaux (2.1, 4.3, 5.1). Ensuite, depuis quelques années, je m'intéresse de plus en plus au *Principia*. J'avais commencé par étudier, au sortir de ma thèse, les *Principles* parce que le rapport aux mathématiques y était plus riche et varié que dans les *Principia*, dont le quatrième volume devant porter sur la géométrie n'est jamais paru. Mais mon travail sur la quantité m'a naturellement conduit à me pencher sur la partie VI des *Principia*, essentiellement écrite par Whitehead – et à lire les parties précédentes pour situer la place de la doctrine dans l'édifice. Or la correspondance Russell / Whitehead porte essentiellement sur les *Principia*. De ce point de vue, son étude ne fait donc que prolonger une dynamique déjà en place.

La collaboration avec Whitehead a été selon moi absolument décisive pour Russell. Ce que le premier apporte au second, ce n'est pas simplement ses « compétences mathématiques » ou

même une quelconque « influence philosophique » – c’est bien plus que cela. Citons la conclusion du mémoire (M), où je reviens sur cette collaboration :

La lecture de (la correspondance Russell / Whitehead) montre que si les deux auteurs se sont divisés le travail (Russell se chargeant des premiers livres, Whitehead du livre VI et de la géométrie), l’ensemble des sujets faisait l’objet d’une reprise commune. Les manuscrits de Russell (qui ne contenaient la plupart du temps que les développements formels) faisaient l’objet d’une lecture soignée par Whitehead, qui élevait des objections de nature fondationnelle ou technique, et explorait des voies alternatives. Russell répondait, et la recherche avançait ainsi de cette manière. Inversement, pour ce qui concerne la partie VI, Whitehead envoyait les manuscrits que Russell relisait, critiquait et réorganisait. Si, donc, il est bien vrai que Russell s’est concentré plutôt sur les parties logiques, et que Whitehead a pris en charge plutôt les parties mathématiques, on aurait tort de croire que la théorie des types n’a été l’œuvre que du premier et la partie VI l’œuvre que du second. On aurait surtout tort de penser que Russell était dans le tandem le « philosophe », et Whitehead le « technicien » ; les deux auteurs endossent tour à tour les habits du philosophe et du logicien. Cette réversibilité des points de vue a sans aucun doute joué un rôle fondamental dans la maturation des *Principia*. Pour pouvoir ajuster les calculs à la prose, pour éviter de faire de l’un l’annexe de l’autre tout en maintenant une forme d’équilibre entre les deux, il fallait en effet être deux. Il fallait pouvoir s’immerger complètement dans les développements formels, pour s’en déprendre ensuite totalement. Les échanges entre Russell et Whitehead donnent à chacun cet autre regard, indispensable à l’accomplissement de leur projet commun. Seul, la tentation aurait été en effet grande de sacrifier la « prose » philosophique pour garantir la cohérence, la simplicité et la systématisme du « calcul », ou, encore de ne pas expliciter le désaccord entre les réquisits techniques et les analyses philosophiques. Whitehead a été pour Russell une voix le rappelant constamment à l’exigence de leur entreprise ; dans telle lettre, Whitehead convainc son ami de la nécessité de tenir bon sur certains présupposés philosophiques (par exemple, l’universalisme) ; dans telle autre, il lui rappelle que la voie de nouveau explorée, si elle est métaphysiquement plus satisfaisante, est techniquement une impasse.

La double dimension, mathématique et philosophique, de l’œuvre exigeait en quelque sorte une co-écriture. Loin d’être simplement un complément à la lecture des *Principia*, les lettres de Whitehead révèlent, mieux qu’aucun autre document, qu’une des forces des *Principia* provient de la circulation ininterrompue entre différentes couches de rationalités, hétérogènes entre elles, que le texte instaure. Que les *Principia* aient été rédigés par un philosophe faisant de la logique et par un mathématicien qui se révélait de plus en plus intéressé par la philosophie est donc bien plus qu’anecdotique : ce fait révèle quelque chose d’essentiel sur la nature du projet qui animait les deux compagnons.

Lors de mon retour à McMaster en 2008 et de la relecture de l’ensemble des lettres, deux nouveaux éléments m’ont arrêté – deux éléments qui pourraient faire l’objet de futurs travaux de recherche :

1/ Le projet de coécrire les *Principia* date, semble-t-il, de décembre 1902. Entre 1902 et 1913, les deux philosophes vont être en interaction constante. Ils échangent leurs manuscrits et les relisent attentivement ; ils discutent surtout très régulièrement de l’avancée de leurs travaux. Le ton général des lettres de Whitehead est amical, mais sérieux – les discussions relatives aux manuscrits absorbent l’essentiel de la correspondance. Il y a une très grande franchise dans ces lettres : lorsqu’il n’est pas d’accord, Whitehead le dit sans détour ; lorsqu’il a mal compris, il le reconnaît rapidement. Il n’y a pas, de la part de Whitehead, ni complaisance vis-à-vis du travail de Russell, ni entêtement ou désir d’avoir le dernier mot. L’échange reflète un engagement intellectuel constant, le souhait d’avancer le plus efficacement possible dans la construction de l’œuvre commune. La discussion, durant dix ans, n’est polluée par aucune apparence de vanité ou de blessure narcissique. On sait pourtant (Lowe en parle dans sa biographie de Whitehead) que Russell a eu une relation trouble avec Evelyn, la femme de Whitehead – qu’il aidait d’autre part financièrement la famille de son ami, à l’insu de celui-ci.

Comment un tel échange intellectuel a-t-il pu, dans ce contexte, durer aussi longtemps ? Les lettres que Whitehead envoie à Russell pendant la guerre révèlent à quel point les deux auteurs sont attachés l'un à l'autre malgré leur désaccord. Après 1918, leur relation s'interrompt. Mais durant plus d'une dizaine d'années, de 1902 à 1913, les deux philosophes vont interagir constamment, en parvenant à protéger leur collaboration, intellectuellement extrêmement intense, de toutes les dérives et les renoncements qui la menaçaient. Comment ont-ils fait ?

Platon souligne à de nombreuses reprises combien la réfutation est une expérience difficile, humiliante, et il insiste fréquemment sur le fait que le dialogue nécessite l'existence d'un contexte passionnel tout à fait particulier qu'il nomme amitié. En lisant cette correspondance asymétrique (puisque les réponses de Russell nous sont inconnues), on a l'impression de saisir en acte ce que Platon veut dire. Comment des personnes aussi évidemment différentes que Russell et Whitehead (leurs œuvres ultérieures le montrent assez) ont-ils pu collaborer aussi longtemps, aussi intensément et aussi efficacement ? Certaines habitudes (Russell et Whitehead semblaient par exemple attacher beaucoup d'importance au fait de poursuivre de vive voix les discussions entamées dans les lettres) ont-elles facilité leur collaboration ? Le fait que Russell, à la différence de Whitehead, n'ait pas de charge académique et consacre toute son énergie à la rédaction des *Principia* a-t-il joué un rôle ? Quelle fonction attribuée, dans cette perspective, à l'invocation (souvent ambiguë, et d'ailleurs peu fréquente) de la neutralité philosophique de leur reconstruction logique ?

Quoique l'on pense de leurs œuvres respectives, Russell et Whitehead sont, à n'en pas douter, des figures de premier plan de la philosophie au XXe siècle. Or l'histoire de la philosophie ne nous offre que peu d'exemple de collaboration scientifique entre deux auteurs de ce calibre. À vrai dire, je ne vois pas d'autres exemples. Il y a certes eu des entreprises collectives (pensons à l'Encyclopédie du XVIIIe et à celle, positiviste, du XXe siècle). Mais l'œuvre philosophique (le livre) est la plupart du temps le résultat d'un travail solitaire. Or *Principia Mathematica* échappe à cette règle. J'aimerais étudier la correspondance entre Russell et Whitehead dans cette perspective. Comment les deux auteurs ont-ils réussi à préserver leur singularité tout en s'engageant absolument, sans reste, dans le projet commun ?

2/ Il y a une crise dans cette correspondance, crise que j'avais complètement manquée lors de ma première lecture : janvier 1911. Whitehead demande alors à Russell de retarder la publication du second volume des *Principia* à cause de problèmes relatifs à la théorie des types et à l'axiome de l'infini. C'est le seul moment de l'échange où l'on sent qu'une rupture entre les deux amis est possible. Russell refuse en effet, dans un premier temps, de reporter la publication – il semble cependant se laisser convaincre et finit par céder. Une révision de la totalité du manuscrit est entreprise, et le « Prefatory Statement » est rédigé. Quel était exactement le problème qui préoccupait Whitehead ? Il ne fait aucun doute qu'il concernait les types. Mais il est extrêmement difficile d'être plus précis. Whitehead parle de beaucoup de choses dans ces lettres : de la question de l'ambiguïté, de l'axiome de l'infini, des variables dépendantes, de la définition des cardinaux, etc. En outre, on ne connaît pas les manuscrits que Whitehead critiquait. On ne peut être certain que du caractère très sérieux de la difficulté et du fait que la révision et la composition du « Prefatory Statement » réglaient, aux yeux des deux auteurs, le problème (quel qu'il soit) ; on peut aussi souligner que cette crise est précédée par de nombreuses lettres, datant de 1910, dans lesquelles Whitehead se montre de plus en plus inquiet concernant les types.

Les commentateurs ne se sont étonnamment que peu intéressés au « Prefatory Statement » et à cet épisode qui a pourtant compromis la publication des volumes II et III des *Principia*. La seule explication que je connaisse a été proposée par I. Grattan-Guinness (2000, 400-401). Whitehead aurait tout simplement oublié, dans la rédaction de la partie sur les cardinaux, de

prendre en compte le fait que l'axiome de l'infini devait être autant que possible évité ; son souhait de suspendre la publication aurait pour origine la volonté de corriger son erreur. Cette hypothèse n'est guère convaincante : on voit mal d'abord comment Whitehead aurait pu « oublier » une telle chose ; Whitehead ne fait ensuite référence à aucune erreur de sa part ; enfin, la solution de Grattan-Guinness ne permet de donner sens qu'à une très petite partie des lettres, et certainement pas, comme il le reconnaît d'ailleurs lui-même (2000, 585) au « Prefatory Statement ». Avec Brice Halimi, nous aimerions tenter de tirer cette affaire au clair, i.e. de déterminer quelle est la nature du problème soulevé par Whitehead et quel sens a la réponse développée dans les « Prefatory Statement ». Notre intuition est que la difficulté est beaucoup plus profonde que ne le suggère Grattan-Guinness – qu'elle tient au statut des types et des ordres, et que les lettres de Whitehead sont donc susceptibles de nous en dire beaucoup sur la manière dont les deux auteurs concevaient en 1911 leur théorie. Comme la question des types est au cœur des *Principia*, l'étude de cette crise de 1911 revêt, selon nous, une importance très considérable. Cette recherche prolongerait ce qui n'a été que trop rapidement ébauché dans l'article 1.3 – article dans lequel je cite et analyse deux lettres datant de 1910, portant sur la théorie des types.

## 6) Perspective II : le sens du logicisme russellien

Dans mes articles, je suis souvent plus attaché à l'élaboration d'une question, qu'à la défense d'une thèse. Ainsi, dans « Some Remarks about Russellian incomplete symbols » (1.1), je tente de restituer à la notion de symbole incomplet sa part d'opacité conceptuelle. Je ne propose pas une nouvelle interprétation du concept ; je tente seulement d'attirer l'attention des lecteurs sur des aspects qui n'ont pas été jusqu'à présent étudiés et qu'il n'est pas évident pour nous aujourd'hui de ressaisir. J'ai adopté la même démarche dans mes travaux sur l'histoire des mathématiques. Dans « Pasch entre Klein et Peano » (3.1), par exemple, je soulève la question de la compatibilité entre la méthode axiomatique et le parti-pris empiriste du mathématicien. Je m'attache dans l'étude à illustrer comment la traduction des « contraintes » empiristes dans les formalismes singularise le cadre mis en place par Pasch par rapport à celui qui est aujourd'hui le nôtre. Mon but n'est pas de résoudre le problème posé en introduction – il est plutôt de manifester sa pertinence, de le regarder de se déployer dans les dispositifs techniques exposés dans les *Vorlesungen*.

Cette tendance à concevoir la recherche comme la construction progressive d'une question se manifeste cependant surtout dans mes travaux sur Russell. « Russell et l'*Universal Algebra* de Whitehead » (2.1) fait encore une fois figure de texte matriciel, puisque la question qu'il soulève, sans jamais y répondre, est celle de savoir pourquoi, alors qu'il avait les moyens de concevoir la géométrie projective comme une théorie de l'ordre et que l'ordre est un concept central dans ses conceptions logiques, Russell conçoit malgré tout la géométrie projective comme une théorie de l'incidence. De même, le manuscrit (M) (ainsi que « *Principia Mathematica* Part VI » (5.3)) est traversé par l'interrogation suivante : pourquoi, alors qu'il sait très bien que la notion de quantité a perdu son caractère central en mathématique, Russell persiste-t-il dans son projet d'élaborer une théorie générale de la grandeur ? Dans tous ces travaux, je souligne que ce que fait Russell dans les parties « reculées » des *Principles* ou des *Principia* ne correspond pas à ce que l'image qu'on a de lui laisse supposer qu'il ferait. Mais je n'indique pas ce qui, dans cette image, est à revoir.

J'aimerais, à l'avenir, répondre à la question que soulèvent mes travaux et déterminer précisément ce que les développements que Russell consacre à la géométrie et à la grandeur nous apprennent sur le sens de son projet général. Je me suis engagé, en 2008, à écrire un livre en anglais sur ce thème (titre provisoire *Russell's Unknown Logicism: A Study*

*in the History and Philosophy of Mathematics*, à paraître en 2012 chez Palgrave Macmillan). Les articles 5.1, 5.2 et 2.3, sont les premières tentatives pour affronter directement le problème. Avant de décrire mes perspectives actuelles, quelques mots sur chacun de ces trois textes :

1/ Le stimulus qui a conduit à la rédaction de « Toward a topic-specific logicism ? Russell's theory of geometry in the *Principles of Mathematics* » (5.2) est la lecture de l'article de M. Detlefsen sur les critiques adressées par Poincaré à Russell. Cette étude a été pour moi stimulante, parce qu'elle me permettait d'énoncer en termes généraux les conclusions de mon travail sur la partie VI des *Principles*. Pour dire vite, Detlefsen affirme que la logicisation aboutit à éliminer les spécificités des domaines mathématiques particuliers ; or, dans 2.1, j'avais montré que tout l'effort de Russell dans les chapitres 45 et 46 des *Principles* consistait à dégager une forme d'essence de la géométrie projective – et ceci, au prix de complications logiques importantes, puisque Russell pouvait, grâce à Pasch, fonder l'ensemble de l'édifice projectif sur les relations ordinales dont il avait par ailleurs développé la théorie. Le Russell qui m'intriguait et m'intéressait aurait donc été tout à fait d'accord avec Poincaré et Detlefsen pour reconnaître l'importance qu'il y a à préserver, dans la reconstruction des mathématiques, les traits qui singularisent les disciplines mathématiques les unes par rapport aux autres.

Cet article a été l'objet de nombreuses révisions. R. Thomas, éditeur de *Philosophia Mathematica*, auquel j'avais soumis une première version de l'article, m'a indiqué qu'il choisirait un rapporteur parmi les philosophes des mathématiques dont la sensibilité était proche de celle de Poincaré, l'autre parmi les « russelliens ». Cette première ébauche était plus ambitieuse que la version qui a été publiée : je cherchais à identifier « l'erreur » de Detlefsen, i.e. à dégager dans le logicisme russellien ce qui lui permettait d'être « *topic-specific* ». Le premier *referee* a demandé que la partie historique soit plus développée (ce qui m'a conduit à ajouter la section 3), tandis que le second (le « russellien ») a émis des doutes sur la réponse à la question générale que je soulevais (comment réformer l'image du logicisme russellien de façon à la rendre adéquate à ce que Russell propose dans la partie VI ?). R. Thomas m'a suggéré de diviser l'article en deux parties : la première (celle publiée) aurait instruit une question – la seconde y aurait répondu. J'ai fait ce qu'il demandait. La première partie a été acceptée par les deux rapporteurs, mais le relecteur « russellien » n'a pas été convaincu par le second volet et a demandé beaucoup de corrections – j'ai réalisé que les critiques qu'il m'adressait étaient justifiées et que s'attaquer à une telle tâche était pour moi prématuré. J'ai donc retiré la seconde partie et présenté simplement la première, qui approfondit et problématise en anglais 2.1.

Je raconte cet épisode, car il est à l'origine de ma volonté d'écrire le livre que je projette. J'ai pris conscience, grâce à cette discussion avec les « *referee* » et l'éditeur de *Philosophia Mathematica*, que le format de l'article se révélait inadapté à mon projet. J'avais besoin de plus d'espace, l'espace d'un livre, pour développer mon analyse du logicisme.

2/ « Logicism and mathematical practices – Russell's theory of geometry in the *Principles* » (2.3) vise un double objectif : exposer les grandes lignes de l'approche russellienne de la géométrie métrique (voir section 3 *supra*.) et faire le point sur les discussions autour de l'« *if-thenism* ». J'avais buté sur cette question lors de ma tentative d'écrire le second volet de « Toward a topic-specific logicism » (5.2). Comme les défenseurs de l'idée qu'il y a un « *if-thenism* » dans les *Principles* se focalisaient sur la géométrie métrique, j'ai pris le parti de traiter les deux sujets en un article.

J'ai voulu montrer que A. Coffa, qui a écrit un article influent sur cette question, commet une confusion grave. Il présuppose que, pour Russell, le fait qu'une théorie mathématique soit dérivable de la logique et que ses concepts fondamentaux soient définissables à partir des

concepts logiques (quel que soit le sens que l'on donne à « dérivation » et à « définition ») suffit à considérer la discipline comme faisant partie de la logique. Or le critère est nécessaire, mais nullement suffisant. L'exemple de la géométrie métrique le montre de façon spectaculaire : Russell affirme que la géométrie métrique peut être dérivée de la géométrie projective, elle-même conçue comme une science purement logique ; il maintient cependant que la géométrie métrique est avant tout une science empirique, qui ne peut être qu'en un sens second et dérivé considérée comme une science purement mathématique. Autrement dit, ce n'est pas parce qu'une théorie peut être « logicisée » qu'elle appartient nécessairement à la logique. Cette remarque, même si elle ne règle pas la question de savoir si oui ou non Russell est un adepte de l'« *if-thenism* », est décisive, car elle permet de relativiser l'importance qu'on attribue généralement à toute la question – peu importe, finalement, que Russell soit ou non « *if-thenist* », puisque le problème de la démarcation entre l'*a priori* et l'*a posteriori*, entre le logique et l'empirique, est complètement indépendant de la question. Dans l'article, je fais l'hypothèse que c'est parce que Coffa reste obnubilé par la construction logique de l'arithmétique qu'il attache autant d'importance au problème. En effet, dans le cas de l'arithmétique, l'effort de Russell est de dégager une voie permettant de définir les concepts et de dériver les axiomes de Peano tout en évitant de tomber dans la contradiction. Ici, la possibilité de la dérivation est véritablement le critère du caractère logique de l'arithmétique (et encore, il faudrait nuancer, car Russell ne cherche pas seulement à éviter la contradiction mais à trouver un système philosophiquement satisfaisant permettant d'effectuer la déduction – des contraintes philosophiques et « extra-logiques » pèsent donc, là encore, sur la définition de la sphère de l'*a priori*). Mais dès que l'on s'intéresse aux parties plus « reculées » des *Principles* et des *Principia*, on voit que Russell et Whitehead ne se satisfont pas de ce qu'ils appellent parfois des arguments « formels ». Leur analyse tient toujours compte du contenu ciblé ; la possibilité de dériver logiquement la théorie est un des éléments que leur examen prend en compte ; il n'est certainement pas le seul.

Ce travail sur la géométrie métrique et la conditionalisation prolonge donc l'étude précédente. Je tente plus prudemment que je ne l'avais fait en 5.2 de dégager certaines conclusions générales (encore négatives puisqu'elles visent à critiquer la conception que Coffa présente du logicisme) à partir d'une étude locale, celle de la théorie russellienne de la géométrie métrique.

3/ Bien que rédigée avant les deux précédents articles, « Which Arithmetisation for Which Logicism ? Russell on Quantities and Relations » (5.1) est sans doute le plus abouti des trois. Je pars, là encore, d'une question : comment Russell peut-il rester logiciste tout en n'adhérant pas au programme d'arithmétisation de l'analyse ? Mais ici, j'avance une hypothèse. Je défends l'idée que, dans les *Principles*, Russell cherche non seulement à déduire les mathématiques de la logique, mais également à distinguer, grâce à la logique, les différentes disciplines mathématiques les unes des autres. Plus précisément, je prétends qu'il est possible d'assigner aux principales parties des *Principles*, des types de relation (au sens du §8) qui constitueraient leur objet d'étude privilégié. Ainsi, la partie II (arithmétique) porterait sur les relations d'équivalence, la partie III (quantité) sur les produits relationnels, les parties IV et V (analyse) sur les relations d'ordre, la partie VI (géométrie) sur les relations d'incidence et enfin la partie VII (mécanique) sur les relations ternaires. Vouloir réduire une science mathématique à une autre (par exemple, la géométrie à l'analyse) serait dans cette perspective une faute grave qui reviendrait à confondre deux types différents de relations.

La thèse est risquée, car nulle part Russell n'affirme qu'il y a un lien entre types et disciplines mathématiques. Mais elle me paraît toujours juste – à condition de ne pas trop la radicaliser. Que les parties des *Principles* soient régies par des principes autonomes est une évidence, et que chaque partie porte préférentiellement sur un type particulier de relation me semble

incontestable. La seule nuance que j'apporterai est la suivante : le fait que chaque partie soit plus particulièrement concernée par un type relationnel n'empêche pas que d'autres formes de relations soient utilisées. L'hypothèse donne en tout cas corps à ce qui constitue le nerf de ma critique de Detlefsen en 5.2 : l'appel à une intuition n'est pas le seul moyen de garantir la spécificité d'un domaine mathématique – la référence à un type, i.e. à la forme logique des concepts fondamentaux d'une discipline, peut tout à fait assurer cette fonction.

Un des enjeux sous-jacent à 5.1 était de mettre en relief une différence entre le logicisme de Frege et celui de Russell. Frege, on le sait, cherche à réduire l'arithmétique, et seulement l'arithmétique, à la logique – Russell est plus ambitieux, puisqu'il vise à logiciser l'ensemble des mathématiques. Cette différence n'est pas simplement « quantitative » ; elle oblige Russell à se poser une question qui n'est pas soulevée (ou plutôt, trop rapidement réglée) chez Frege : celle de l'architecture des mathématiques. La réduction logique doit-elle tenir compte des différences entre les sciences mathématiques, ou bien, au contraire, doit-elle les ignorer ? La question du rapport entre géométrie et analyse est, de ce point de vue, fondamental, puisqu'il fait encore à l'époque l'objet d'une discussion entre les mathématiciens. Pour Frege, les deux disciplines sont épistémologiquement différentes : la source de la connaissance géométrique est intuitive alors que l'analyse est dérivée de la logique. Pour Russell, les deux branches ne sont pas épistémologiquement différenciées (il n'y a pas chez Russell d'intuition pure de l'espace) ; elles le sont cependant d'un point de vue logique : géométrie et analyse ne portent pas sur les mêmes types de relation.

L'interprétation proposée dans « Which Arithmetisation for Which Logicism ? », je m'en rends compte rétrospectivement, donne pour la première fois forme à une préoccupation qui animait souterrainement ma réflexion depuis la fin de la thèse (qui perçait déjà derrière mon intérêt pour la structure des *Principia*) : quel statut donner à l'organisation interne des mathématiques dans le logicisme ? La différence entre les « pratiques » du géomètre et de l'analyste, par exemple, doit-elle être considérée comme logiquement non pertinente, comme relevant de l'histoire et de la sociologie, voire de la psychologie – ou, au contraire, doit-elle être conçue comme une distinction logiquement fondamentale ? Plus généralement, comment faire le départ, chez Russell, entre ce qui, dans les mathématiques, relève du contenu et que le logicien doit donc reconstruire, et ce qui relève de la forme contingente et accidentelle dans laquelle ce contenu est exprimé ?

L'article 5.1 est important, car, en donnant à mes préoccupations une forme plus stable et plus serrée, il m'a ouvert un nouveau champ de recherche. La lecture présentée là n'est toutefois pas pleinement satisfaisante. D'une part, la connexion faite entre les types et les champs mathématiques nécessitent d'être mieux étayée – la question de savoir si ce lien persiste dans les *Principia* n'est notamment pas abordée en 5.2. D'autre part, en admettant la validité de l'interprétation, certaines questions restent sans réponse : comment Russell prend-il la décision de considérer telle ou telle partie des mathématiques comme un champ indépendant ? La logique joue-t-elle un rôle dans cette décision, ou bien Russell ne fait-il que sanctionner des distinctions que l'histoire et la tradition lui lèguent ? On retrouve en filigrane et sous une autre forme une question déjà soulevée dans ma thèse : quel statut accorder à l'organisation interne des *Principles* et des *Principia* ? Le développement du système logique est-il guidé par des considérations logiques, ou bien faut-il, pour rendre intelligible son développement, prendre en compte des données extra-logiques (l'état des mathématiques au début du XXe siècle) ?

Ces questions animent en réalité le projet de livre sur le logicisme russellien et ne sont pas encore complètement réglées pour moi. La rédaction du manuscrit (M), l'étude de la partie VI des *Principia*, a toutefois permis au chantier d'avancer. Je pense aujourd'hui qu'il y a un lien extrêmement étroit entre la distinction forme réelle / forme apparente des propositions, faite



explicitement par Russell à partir de 1905, mais déjà présente en 1903, et le problème de l'architecture des mathématiques. Je développe ce point dans les deux dernières sections du chapitre 5 du mémoire (M), consacré à l'usage architectonique de l'*Application Constraint*. En bref, l'idée que la forme logique réelle des énoncés mathématiques ne coïncide pas nécessairement avec leur forme de surface interdit de fonder les différences entre champs mathématiques sur la distinction entre des « catégories » d'énoncé (énoncés relevant de l'arithmétique, de la géométrie, du calcul différentiel, etc.), c'est-à-dire sur la présence ou l'absence de certains marqueurs syntaxiques. Par exemple, ce n'est pas parce qu'une proposition contient des noms d'entiers qu'elle appartient à l'arithmétique ; ce qui fait qu'une proposition appartient à tel ou tel champ disciplinaire, c'est la structure de sa forme logique profonde. La question de la classification et de l'organisation interne des mathématiques est ainsi solidaire, chez Russell, de celle de l'analyse des concepts mathématiques fondamentaux. L'usage que Russell fait de Pieri dans les *Principles* est de ce point de vue exemplaire : les relations ordinales de séparation sont complètement reconfigurées par Pieri de façon à les faire apparaître comme des relations entre relations d'incidence. Et c'est seulement grâce à cette reformulation que l'ensemble de la géométrie projective peut être considéré comme un champ théorique autonome, indépendant de toutes considérations métriques et quantitatives.

Une fois ce lien entre analyse des concepts et architecture des mathématiques établis, un pas supplémentaire doit être encore fait : l'analyse d'un *corpus* mathématique donné peut toujours, chez Russell et Whitehead, être effectuée de plusieurs manières. Ni l'objet étudié, ni les outils utilisés dans l'analyse (la logique, i.e. la théorie ramifiée des types) ne déterminent de façon univoque la voie à suivre. Comme j'y insiste dans le chapitre 5 de (M) et dans 2.3, le problème, pour les auteurs des *Principia*, n'est pas seulement de découvrir un chemin qui mène de la logique aux mathématiques, il est de déterminer quelle est, parmi tous les trajets possibles et toutes les réductions envisageables, celui qu'il convient d'emprunter. L'emphase mise sur la question des paradoxes et le peu d'intérêt des « *scholars* » pour les parties « reculées » des *Principia* a occulté l'existence de cette seconde difficulté, mais le problème est bien réel : il est celui de l'articulation du contenu logique, et donc du plan de l'œuvre. Pour décider entre les diverses alternatives, Russell et Whitehead introduisent des principes « intermédiaires », « régulateurs », dont le statut est trouble. Ils ne sont ni purement logique, ni purement empirique – ni complètement nécessaire, ni purement conventionnel. L'*Application Constraint* est une de ces règles qui guide l'analyse. Il y en a d'autres. Le souhait de préserver la « pureté » des disciplines détermine parfois le choix entre tel et tel cheminement. En d'autres occasions, certains développements, pourtant techniquement possibles, sont disqualifiés tout simplement parce qu'ils sont considérés comme « trop compliqués » – Russell et Whitehead font donc implicitement appel à un (ou probablement plusieurs) critère(s) de simplicité pour discriminer entre les analyses.

On pourrait reformuler le propos des deux paragraphes précédents d'une autre manière, en centrant l'attention sur le statut particulier que Russell assigne à la logique. Comme le rappelle Landini, la logique n'est pas, pour Russell, une science « formelle », qui s'appliquerait à un contenu extérieur à elle. La logique a un domaine propre, celui des faits complètement généraux, et c'est la généralité de son objet d'étude qui fonde son universelle applicabilité. Le cœur du problème (tel que je le vois actuellement) provient du fait que cette science de la complète généralité qu'est la logique se particularise, se divise en différentes branches, se fragmente. Quels sont les principes, nécessairement généraux, qui guident cette différenciation interne ? Comment introduire de la particularité dans la généralité, sans faire référence à des constantes non logiques ? Le dilemme est connu : il porte finalement, comme l'a vu F. Rivenc (1993), sur le statut de la logique en tant que science première. D'un côté, on ne peut pas faire précéder la logique par une discipline expliquant comment la logique se structure, car ce serait déchoir la logique de son statut ; mais de l'autre, on ne peut pas faire

comme si la question de l'organisation interne ne se posait pas, car c'est le statut de la logique comme science, comme discours *articulé*, qui est alors menacé – ce n'est en effet pas sans raison que la logique se subdivise en branches, et ces raisons, il convient de les discuter et de les présenter. Le danger est toujours ici de négliger un des deux aspects, c'est-à-dire soit de considérer que la particularité des objets et des disciplines mathématiques s'introduit « en contrebande », par des constantes non logiques (par exemple, par une simple référence à l'état de développement des mathématiques du début du XXe siècle), soit de penser que, la logique étant complètement générale, les domaines mathématiques n'ont, dans les *Principia*, aucune spécificité. Le caractère ambigu des « principes intermédiaires » évoqué plus haut n'est ainsi pas la conséquence d'un manque de clarté de la part des auteurs des *Principia* ; il est consubstantiel à leur projet. Ces règles n'ont certes pas le statut qu'ont les *Primitive Propositions* du livre I. Leur introduction « en cours de route » n'est cependant par arbitraire : elle révèle que Russell et Whitehead ne peuvent tout simplement pas reprendre les distinctions traditionnelles entre domaines mathématiques telles quelles, qu'un traitement préalable, complexe, permettant d'identifier leur « véritable » forme est nécessaire afin de les intégrer dans la construction.

Je suis bien conscient des difficultés que soulèvent ma position, et il est probable que la façon dont je formule actuellement les choses ne me satisfera plus dans quelque temps. Mais je crois avoir réussi, en rédigeant le mémoire (M), à connecter de façon convaincante et stable la question de l'architecture des mathématiques à trois autres problèmes, reconnus comme centraux dans les études russelliennes : celui de la distinction forme apparente / forme réelle, celui de la multiplicité de l'analyse, celui de la logique comme science première. Dans le même temps, j'ai avancé également sur un autre front, celui de la confrontation avec la philosophie contemporaine des mathématiques. Le problème que je me pose concerne Russell – mais il offre des perspectives sur deux interrogations qui traversent la scène actuelle :

1/ Selon le célèbre et influent article Benacerraf 1973, le philosophe des mathématiques est pris dans un dilemme : soit il adhère à ce que Shapiro nomme la *faithfulness constraint* (i.e. il prend les énoncés mathématiques au pied de la lettre sans modifier, ou en modifiant seulement à la marge, leur forme syntaxique), et alors il ne peut rendre compte de la connaissance mathématique de façon vraisemblable ; soit il rejette le principe de « fidélité », mais il devient alors la proie du problème des réductions multiples illustrées dans Benacerraf 1965. Autrement dit, la seule raison pour laquelle un philosophe des mathématiques contemporain pourrait renoncer à la *faithfulness constraint* provient, selon Benacerraf, du désir d'offrir une réponse plausible (i.e. non platonicienne) à la question épistémologique touchant à la nature de la connaissance mathématique. C'est à l'élaboration, avec Ivahn Smadja, d'un volume sur la philosophie contemporaine des mathématiques que je dois d'avoir réalisé à quel point ce dilemme était important dans la philosophie contemporaine de tradition analytique ; des programmes comme le structuralisme, mais aussi comme le néo-logicisme ou le naturalisme à la Penelope Maddy sont des réponses à Benacerraf 1973.

Russell est immédiatement mis hors-jeu par le dilemme. En effet, l'auteur des *Principia* rejette de façon très spectaculaire la *faithfulness constraint*. Mais il adhère à une conception « platonicienne » de la connaissance des entités abstraites, selon laquelle notre esprit serait en *acquaintance* avec les entités logiques comme il l'est avec le goût de l'ananas. Russell perd donc sur tous les tableaux, et le poids de Benacerraf explique en partie, me semble-t-il, le relatif désintérêt des philosophes contemporains pour les *Principia*. J'aimerais, à l'inverse, me servir de Russell pour questionner la pertinence du dilemme de Benacerraf, et de la conception du rapport entre philosophie et mathématique qu'il induit. Le nerf de mon argument (voir chap. 5 de (M)) consiste à souligner que la question des analyses multiples n'est pas, comme le croit Benacerraf, une question « métaphysique », dénué de tout intérêt

mathématique, mais, au contraire, une question que les mathématiciens ne cessent de poser. On peut évoquer, à fin d'illustration, les recherches de Pieri sur la « vraie » forme des propositions ordinales – mais on peut aussi et plus généralement, penser aux situations très fréquentes où un même théorème (par exemple le théorème fondamental de l'algèbre) ne cesse d'être reprouvé de façon à montrer qu'il est purement algébrique, ou purement topologique, ou purement arithmétique, etc. L'argument de Benacerraf conduit donc à exclure de l'horizon philosophique tout un pan de l'activité mathématique. Une philosophie des mathématiques qui prétend régler une fois pour toutes le problème des analyses multiples, indépendamment de toute considération sur ce qui fait l'objet de la réduction, doit être ainsi, selon moi, considérée *a priori* comme irrecevable. S'il faut rompre avec la contrainte de « fidélité », ce n'est pas pour résoudre le problème épistémologique de la connaissance mathématiques, mais seulement parce que ce principe court-circuite la question des réductions multiples – question pourtant centrale en mathématique.

Il y a donc des raisons profondes à l'inactualité de la pensée de Russell : le cadre dans lequel la philosophie contemporaine des mathématiques se déploie restreint considérablement, à cause de la place qu'elle accorde au dilemme de Benacerraf, le champ des possibles. Certains auteurs ont déjà souligné qu'une attention exagérée aux formes syntaxiques des énoncés mathématiques rendait difficile la prise en compte des reconfigurations constantes des théories et des pratiques mathématiques (voir par exemple Wilson 1994). Mais les relations que j'établis entre le dilemme de Benacerraf d'une part, et le logicisme de Russell de l'autre, n'ont pas, à ma connaissance, été explorées.

2/ La question des « pratiques mathématiques » occupe depuis quelques années le devant de la scène (voir par exemple Corfield 2003, Mancosu 2008). L'idée directrice est de corriger ce qui est perçu comme une faiblesse de l'approche dominante dans la tradition analytique, qui, parce qu'elle s'interrogerait uniquement sur les « fondements », négligerait complètement les mathématiques « réelles », celles qui sont développées par les mathématiciens. Pour ces philosophes (au demeurant très divers entre eux), il faut, comme le dit élégamment Corfield « laisser les mathématiques avoir leur mot à dire dans ce que l'on dit à leur propos » (2003, 270). J'ai une attitude ambivalente vis-à-vis de ces approches. Je partage l'idée qu'une certaine philosophie des mathématiques a aujourd'hui tendance à ne plus parler de mathématique ; j'ai de plus beaucoup appris des études souvent détaillées des auteurs qui se réclament de cette tendance. Mais, comme je le rappelle dans la conclusion de (M), je ne suis pas convaincu par l'opposition entre « philosophie des fondements » et « philosophie des pratiques ». Russell est souvent pris comme bouc-émissaire par les auteurs qui s'attachent à penser à partir des pratiques concrètes des mathématiciens. Ainsi, dans l'article de Detlefsen sur Russell et Poincaré représentent plus qu'eux-mêmes – les deux figures incarnent deux manières opposées de comprendre ce qu'il faut faire en philosophie des mathématiques. Ce qui m'intéresse chez Russell est cependant de montrer que, bien qu'il soit un philosophe des « fondements », il est aussi un philosophe des « pratiques ». Là encore, le cadre dans lequel se développe aujourd'hui la réflexion sur les mathématiques n'offre que peu d'espace au projet russellien (tel que je le vois). Mais précisément, ici aussi, l'intérêt de Russell pourrait provenir de son inactualité : il y a dans les *Principles* et les *Principia* de quoi questionner les alternatives qui façonnent les discussions et les débats contemporains.

Tout philosophe (et même tout historien) qui se penche sur des « pratiques » mathématiques doit faire le départ entre des traits singularisant son objet d'étude et des caractéristiques plus accidentelles. La démarcation peut être tracée de différentes façons, et il peut y avoir des désaccords sur ce point, certains estimant que la côte est coupée trop large (que l'on accorde trop d'importance à des parties inessentiels de la théorie), d'autres au contraire qu'elle est trop congrue (que des traits essentiels des pratiques sont négligés). Mais une chose est

absolument claire : des choix sont à faire. Je reproche aux « philosophes des pratiques » d'occulter ce moment du choix. Pour eux, en effet, les mathématiques devraient pouvoir idéalement se métamorphoser en philosophie – tout serait, selon eux, affaire, en philosophie des mathématiques, d'explicitation d'une pensée déjà présente dans les formalismes et les « pratiques » – pensée qui ne demanderait, pour ainsi dire, qu'à éclore. Je crois au contraire que les mathématiques sont sous-déterminées philosophiquement, qu'elles peuvent se lire et être articulées de différentes façons, et que la démarcation entre ce qui est important et ce qui l'est moins au sein d'un champ est une affaire de décision. La force du logicisme russellien est de ne pas tricher sur cette question, c'est-à-dire de poser le moment du choix comme un perpétuel problème. Nous l'avons vu, Russell souligne à la fois le fait qu'il y a une multiplicité d'analyses possibles d'une même théorie, et que ces analyses ne sont pas équivalentes sur le plan philosophique – l'une est meilleure que les autres. Comment alors justifier une décision dont la nécessité est assumée ? La référence aux « pratiques » ne suffit pas, car précisément le choix a à voir avec la façon dont on trace la distinction entre les traits importants et accidentels au sein de ces « pratiques ». Russell, en accord avec les « philosophes des pratiques » cette fois, rejette cependant toute possibilité de lister de façon *a priori*, avant la considération du contenu analysé, les critères devant guider la décision. Le moment du choix et de sa justification philosophique est donc posé ici sans détour.

Pour le dire autrement, contrairement à ce que suggère Corfield, les mathématiques n'ont pas de « mots » à dire ; elles parlent leur langage et il est donc illusoire de croire qu'on peut régler tous les problèmes en leur donnant la parole. Reconnaître cela, ce n'est toutefois pas nécessairement se murer dans une philosophie des « fondements », sourde aux mathématiques « réelles ». Il y a entre ces deux extrêmes une position plus équilibrée, plus difficile aussi, celle esquissée par Russell, où le philosophe, sous la figure du logicien, assume son geste, sans pour autant renoncer à la confrontation avec les mathématiques.

Comme je l'ai expliqué dans la conclusion de (M), la façon dont je lis Russell se rapproche de la manière dont Couturat l'interprétait dans sa réécriture des *Principles*. Russell reprochait à son ami français de ne pas avoir mis au premier plan les problèmes logiques, et d'avoir trop insisté sur le lien entre son œuvre et les développements mathématiques contemporains. On pourrait me reprocher la même chose. Mais l'époque a changé. Aujourd'hui plus personne ne remet en cause le fait que la logique soit une science indépendante ; en revanche, l'idée que la philosophie des mathématiques doit porter sur les mathématiques ne va plus de soi. C'est ce changement de contexte qui me semble redonner à la réception de Couturat une certaine fraîcheur. Certes, bien des choses sont à revoir dans la présentation rapide que je viens d'esquisser, mais je demeure persuadé de la fécondité de cet usage, à contre-emploi, des *Principia* et de l'intérêt qu'il y a à confronter Russell aux contemporains.

### **7) Perspective III : enjeux et histoire des géométries finies.**

Les perspectives de recherche déjà évoquées se concentrent pour l'instant sur l'œuvre de Russell. La première vise à éditer et à étudier la correspondance Russell / Whitehead. La seconde a pour objectif la publication d'un livre en anglais sur le logicisme russellien, qui viserait à replacer les recherches déjà effectuées sur la géométrie et la théorie de la quantité dans une perspective à la fois plus générale et plus contemporaine. Pour l'instant, je n'ai pas parlé d'histoire de mathématique. Or, il est vital pour moi de ne pas désertier ce champ. Comme je l'ai plusieurs fois évoqué, c'est par un mouvement incessant d'aller retour entre philosophie, histoire de la philosophie et histoire des mathématiques que mes recherches avancent – que de nouvelles idées et de nouvelles envies émergent. Le programme en histoire

de la philosophie et en philosophie s'annonce très lourd ces cinq prochaines années, ce qui m'oblige à ne plus papillonner et à définir de façon plus serrée qu'auparavant mon champ de recherche en histoire des mathématiques. Ce sera celui des géométries finies. Il y a plusieurs raisons à cela. Le sujet n'est pas à ma connaissance travaillé, ni en histoire ni en philosophie des mathématiques. Or il peut, comme je le montrerai, être abordé selon de nombreux angles, tous prometteurs. D'autre part, il constitue une extension naturelle de mes recherches sur la géométrie projective et les géométries d'incidence (rappelons que Whitehead fait référence aux géométries finies dans l'introduction de son 1906).

J'ai consacré un premier article à ce thème (3.5), mais je suis encore au stade des premiers défrichages. Ce que je vais développer maintenant est donc moins abouti que ce que j'ai raconté dans les deux sections précédentes. Mon unique objectif est ici de convaincre les lecteurs de l'intérêt intrinsèque (historique et philosophique) de ce champ d'étude, et de la cohérence de ma démarche. Je distinguerai trois modes d'entrée dans le sujet :

### 1/ Les diagrammes et les figures en géométrie finie

Dans l'article « De la configuration à l'espace projectif : le statut de la figure dans les géométries finies au début du XXe siècle » (3.5), écrit en 2008-2009, je combine une approche historique à une visée plus proprement épistémologique. Sur le plan historique, je tente de reconstituer une partie du contexte de l'article « Finite Projective Geometry » de Veblen et Bussey (1906), i.e. de présenter les traits saillants des recherches sur la théorie de la configuration.

D'un point de vue historique, mon analyse confirme un point bien connu : les *Grundlagen* de Hilbert ont eu un impact décisif sur les mathématiciens américains – mais elle révèle aussi que cette influence n'a pas joué dans le sens attendu. Habituellement, on considère que l'importance de Hilbert tient au pas décisif qu'il accomplit vers une compréhension plus abstraite de la géométrie. Or, la géométrie des configurations, développée par E. H. Moore notamment, est déjà extrêmement « abstraite » : les objets étudiés sont des systèmes d'éléments en relation qui n'ont pas nécessairement de signification géométrique. Dans ce contexte, loin de conduire à un niveau supplémentaire dans l'abstraction, l'axiomatisation a été, pour Veblen et Bussey, un instrument permettant de réintroduire une dimension proprement géométrique dans une théorie purement combinatoire. L'étude menée en 3.5 montre donc que l'impact des *Grundlagen* sur les mathématiciens américains, s'il est important, est également plus ambigu qu'on ne le pense souvent.

C'est toutefois la dimension philosophique que je privilégie dans l'article. On oppose généralement, en histoire comme en philosophie des mathématiques, les géométries de la « figure » (dans laquelle les mathématiciens étudient les propriétés de figures inscrites dans un espace dont les caractéristiques ne sont pas complètement explicitées) aux géométries de « l'espace » (qui, à partir de la fin du XIXe siècle, définissent directement un espace par le biais d'une axiomatique ou l'introduction d'un groupe d'automorphismes). Cette ligne de fracture, qui correspond à celle introduite par Hilbert et le programme d'Erlangen de Klein, est tellement évidente qu'elle est souvent non explicitée – l'idée est simplement que toute comparaison entre les géométries classiques (jusqu'au milieu du XIXe siècle, disons) et les géométries « modernes » doit tenir compte de cette révolution, sous peine de n'y plus rien comprendre. Le but de mon article n'est pas de remettre frontalement en question la pertinence de cette alternative, mais de montrer qu'il faut prendre garde à ne pas l'étendre à toutes les formes théoriques : les géométries finies ont ceci de singulier qu'elles portent sur un espace que l'on peut représenter sous forme de figures. Le fait que les espaces considérés soient finis permet d'envisager de les dessiner. La situation échappe ici à la dichotomie espace *versus* figure : les figures en géométrie finie sont des figures-espaces. Mon objectif dans 3.5

est de souligner l'existence de cette singularité épistémologique et de poser les premiers jalons à une étude des propriétés de ces diagrammes.

Dans « De la configuration à l'espace projectif », je me suis plus particulièrement intéressé à une triple distinction, celle entre figures, configurations et espaces – et j'ai focalisé mon attention sur le cas des configurations géométriquement impossibles (des configurations que l'on ne pouvait pas construire dans le plan euclidien ou projectif). La chose intéressante est que l'exemple paradigmatique d'une configuration abstraite non géométriquement constructible, chez Moore, à savoir la configuration  $7_3$ , devient dix après, le modèle le plus simple du plan projectif. Cette transformation manifeste de façon très spectaculaire l'apport épistémologique introduit par le nouveau point de vue : le cercle (ou la courbe quadratique) apparaissant dans le diagramme correspondant à  $7_3$  manifeste pour Moore que la configuration n'a aucun contenu géométrique ; chez Veblen et Bussey, le cercle en question est une droite, car il satisfait l'ensemble des propriétés que le système attribue aux droites et son équation est une équation linéaire dans le corps de Galois d'ordre 2. Perçu comme une configuration,  $7_3$  est une structure combinatoire sans contenu géométrique ; conçu comme le modèle d'une géométrie,  $7_3$  est un espace. Ce point m'a intéressé car il prolonge certaines intuitions que j'avais eues lorsque je travaillais sur Pasch. Pasch restreint la « taille » de l'espace ou du plan dans lequel il effectue ses constructions, et cette décision conduit le mathématicien à s'intéresser de très près aux types de relation qu'une figure entretient, dans la géométrie euclidienne, avec son « environnement ». On n'a pas la « même » figure (pas les mêmes possibilités de construction), selon que l'on se donne ou non le droit de sortir de la feuille sur laquelle elle est tracée. Le concept de configuration (sur lequel Pasch a travaillé avant les *Vorlesungen*) me frappait déjà par son caractère « autarcique » : une configuration est un système de points et de droites qui se définit indépendamment de toute inscription dans un espace sous-jacent. L'émergence de la figure-espace radicalise en quelque sorte une dimension déjà présente dans le concept de configuration.

Depuis ce premier travail, certaines choses ont avancé. La lecture du livre de B. Polster (1998) sur les figures en géométrie et en combinatoire m'a fait réaliser que la problématique des figures-espaces était encore plus intéressante que je ne le croyais. En géométrie moderne, un des outils pour étudier les propriétés d'un espace est de considérer le groupe des automorphismes associé. Cette préoccupation se retrouve en géométrie finie, mais ici, elle s'accompagne du souci de construire des figures qui maximisent les symétries de l'espace qu'elles représentent. Il y a ainsi un jeu complexe qui s'instaure entre les deux points de vue, celui de l'espace et celui de la figure. Une bonne représentation d'un espace fini est une figure dont les symétries, dans le plan ou l'espace euclidien, correspondent aux automorphismes de l'espace représenté. La « bonne » figure n'est donc pas la figure quelconque de la géométrie classique, mais, au contraire, elle est (idéalement) la figure invariante selon les automorphismes associés à l'espace qu'elle représente. Par exemple, selon un théorème démontré par Steinitz, il est possible de représenter  $7_3$  en n'utilisant que des droites et une courbe quadratique. On aurait donc pu croire qu'user d'une parabole ou d'une ellipse, plutôt que d'un cercle, pour représenter la configuration aurait été « meilleur », parce que plus général. Il n'en est rien : lorsque le cercle est utilisé, les rotations de  $\pi/3$ , qui correspondent à des automorphismes de  $PG(2, 2)$ , laissent la figure invariante – invariance qui est brisée dès que des ellipses (non circulaires) ou des paraboles sont utilisées. Afin de maximiser le nombre de symétrie, Polster (1998) souligne que les mathématiciens usent souvent des polyèdres réguliers pour représenter des plans projectifs finis.

De façon plus générale, la combinatoire constitue un champ riche et (me semble-t-il) sous-exploité pour qui s'intéresse aux rôles des figures et des diagrammes en mathématique. J'en donnerai juste un exemple (qui me servira aussi dans la suite de la présentation. Un carré latin d'ordre  $n$  est un tableau comportant  $n$  lignes et  $n$  colonnes dont les cases sont remplies par les

$n$  premiers entiers, de façon à ce que les entiers apparaissent une et une seule fois dans chaque ligne et chaque colonne. Voici un exemple de carré latin d'ordre 3 :

1	2	3
2	3	1
3	1	2

fig. 1

Mais on peut voir aussi un carré latin comme un tableau ( $3 \times n^2$ ), appelé « tableau en ligne » associé au carré latin. Le tableau en ligne associé au carré latin de la figure 1 est le suivant (L représente les numéros de lignes, C les numéros de colonnes, E les éléments remplissant la case dont les numéros de ligne et de colonne sont donnés par L et C) :

L : 111222333  
 C : 123123123      fig. 2  
 E : 123231312

On vérifie que dans la seconde ligne ( $L = 2$ ) et la troisième colonne ( $C = 3$ ) de fig. 1, on trouve l'élément 1 ( $E = 1$ ) – comme l'indique la 6<sup>ème</sup> colonne de fig. 2. Un des concepts fondamentaux dans la théorie des carrés latins est celui de « conjugaison ». Les carrés conjugués sont obtenus par une permutation du triplet  $\langle L, C, E \rangle$ . Par exemple, le carré « transposé »  $\langle C, L, E \rangle$  est un carré conjugué ; mais le résultat de la permutation  $\langle E, L, C \rangle$  est également un carré conjugué. Son tableau en ligne est :

L : 123231312  
 C : 111222333  
 E : 123123123,

ce qui donne :

1	3	2
2	1	3
3	2	1

La notion de conjugaison est à la base de nombreux théorèmes, notamment de ceux visant à déterminer dans quelles conditions un « rectangle latin » (un carré non entièrement rempli) peut être complété afin de former un carré latin. Or, pour définir la notion, il est nécessaire de passer par le tableau en ligne associé. Qu'est ce qui se révèle dans la représentation en tableau en ligne (fig. 2) qui se dérobe dans la représentation en carré (fig. 1) ?

La représentation en carré latin manifeste une asymétrie entre le cadre et les entiers qui remplissent les cases ; or, comme, par définition, la possibilité de répéter un élément dans les lignes ou les colonnes est exclue, il y a en réalité une symétrie parfaite entre les « abscisses », les « ordonnées » et les valeurs numériques : chaque ligne peut être repérée en indiquant le numéro de la colonne et l'élément qui l'occupe. C'est cette symétrie entre lignes, colonnes et valeurs que dévoile le tableau en ligne et les permutations entre L, C et E. Ce changement dans la représentation est mathématiquement fécond – à cause de l'asymétrie entre le cadre et ce qui le remplit, la représentation en carré ne permet pas en effet de comprendre quelles sont les permutations considérées dans le concept de conjugaison.

Je ne sais pas exactement où peut mener une telle analyse ; mais la situation m'apparaît riche, comme emblématique de quelque chose que j'aimerais réussir à cerner. Et cet exemple ne représente qu'une toute petite partie des situations très diverses, suggestives qu'offre l'usage des diagrammes en combinatoire.

## 2/ La question de l'identité des disciplines

Une des idées qui dirige mes recherches sur Russell concerne le statut, logique ou non, qu'il faut accorder à l'organisation interne aux mathématiques. Cette préoccupation me conduit à m'intéresser à la question, classique en histoire des mathématiques, de ce qui constitue l'identité disciplinaire d'un champ de recherche. De ce point de vue, la géométrie finie, et plus généralement, la combinatoire, constitue un terrain particulièrement riche. Lorsque l'on regarde en effet comment ce champ est structurée, on est frappé par son éparpillement : on trouve côte à côte une théorie des graphes, une théorie des « designs », une théorie des espaces finis, une théorie des codes, etc. Des manuels sont spécifiquement consacrés à chacune de ces (sous-)disciplines – qui, dès que l'on passe les chapitres introductifs, se révèlent être extrêmement connectées les unes aux autres. On s'aperçoit de plus, que le champ, il y a quelques décennies, était organisé autour d'autres concepts – ainsi, au début du siècle, on ne parlait pas encore de graphes, mais on étudiait les propriétés des systèmes de Steiner ou des configurations. La situation est donc particulière : il existe à la fois un éclatement du domaine entre disciplines fortement individualisées (un théoricien des graphes n'est pas un spécialiste des designs) et une très grande connexion entre les théories (les problèmes se recoupent, les concepts d'une discipline se retraduisent dans une autre). Pour reprendre une image utilisée par Wiener, « le résultat ressemble à ce qui s'est passé lorsque l'Oregon a été occupé simultanément par des colons américains, anglais, mexicains et russes – un réseau inextricable d'explorations, de nomenclatures et de lois » (Wiener 1948, 2-3). Pour qui souhaite interroger ce qui constitue l'identité d'une discipline, le champ de la combinatoire représente donc un cas d'école intéressant. J'aimerais aborder le sujet selon trois axes :

- Les quelques articles sur l'histoire de la combinatoire que j'ai trouvés sont souvent l'œuvre de mathématiciens travaillant dans une des branches actuellement distinguées, et qui cherchent à élaborer une histoire de leur discipline. Ainsi, H. Gropp a publié plusieurs travaux sur le concept de configuration (voir son 2004) ; N. L. Biggs, E. K. Lloyd et R. J. Wilson ont consacré un beau livre à la théorie des graphes (1976) ; I. Anderson a écrit quelques articles sur les problèmes liés aux systèmes de Steiner et aux tournois de whist (voir 2007). Ces recherches sont extrêmement précieuses : elles exposent clairement les questions que se posaient les mathématiciens du début du siècle en adoptant le point de vue des mathématiques d'aujourd'hui. Mais en utilisant le jargon actuel, elles introduisent dans les mathématiques d'alors un découpage qui leur est étranger – cela amène les auteurs à restreindre de façon artificielle leur champ d'étude. Ainsi H. Gropp ne parle pas du tout de l'article de E. H. Moore, connue surtout pour ses résultats sur les systèmes de Steiner. Inversement, I. Anderson, qui présente les principales découvertes de Moore 1896 ne mentionne pas le fait que le mathématicien américain inscrivait toutes ses recherches dans le cadre de la théorie des configurations. La situation est donc pour un « *outsider* » comme moi idéale. Je n'ai pas le niveau mathématique requis pour effectuer le travail de traduction que les mathématiciens historiens ont effectué. Mais en même temps, il manque à ces travaux quelque chose que je suis en mesure d'apporter : une interrogation sur les identités disciplinaires et sur la manière dont le champ de la combinatoire s'organisait au début du XXe siècle.

- Au sein de la combinatoire, la géométrie finie a une histoire particulièrement compliquée. Elle naît avec l'article de Veblen et Bussey, puis sombre dans l'oubli. L'intérêt



des mathématiciens renaît dans les années quarante, suite aux travaux de l'algébriste indien R. C. Bose (1938), qui démontre que les plans projectifs finis ont des applications en statistique (voir plus bas) – aucune raison interne, tenant à la nature même du champ d'étude, ne justifie cependant à cette époque, le développement de la discipline. Il faut attendre l'article Beniamino Segre (1955) pour que les géométries finies soient de nouveau étudiées pour elles-mêmes. Segre établit que, dans un plan projectif d'ordre  $q$ , avec  $q$  impair, tous les ovales sont des coniques. Un ovale est un arc qui contient  $q+1$  points (c-à-d le même nombre de points que les droites). Un arc est un ensemble de points qui est tel que, quel que soit le sous-ensemble de trois points que l'on considère, les trois points en question ne sont pas colinéaires. De façon imagée et peu exacte, on pourrait dire que les ovales sont des courbes, formées du même nombre de points que les droites, mais dont aucune « partie » n'est droite ; le théorème de Segre dit que lorsque l'ordre d'un plan projectif est impair, tous les ovales sont des courbes décrites par une équation quadratique. On comprend que ce résultat ait pu fasciner les géomètres : les seules courbes « vraiment courbes » sont, dans les plans finis d'ordre impair, des coniques ! Sans doute faut-il, pour qu'une théorie axiomatisée se constitue en tant que véritable géométrie, quelque chose de plus qu'une simple ressemblance entre ses postulats et ceux des géométries standard. En montrant que le concept de conique a une pertinence inattendue en géométrie finie, l'article de Segre offre précisément cet élément additionnel. J'aimerais, dans cette perspective, étudier en détail Segre 1955 et son importante réception.

- Comme je l'ai expliqué, la combinatoire est divisée en très nombreux courants qui développent leur propre ligne de recherche et leur propre terminologie. Le débutant est souvent perdu et découragé par l'aspect labyrinthique de l'édifice – le même concept apparaît sous de multiples formes selon le point de vue adopté. Prenons l'exemple du plan de Fano, le plan projectif d'ordre 2 ; la structure (très simple) est équivalente à  $7_3$  – mais elle peut perçue comme un  $2-(7, 3, 1)$  design (c'est-à-dire comme un ensemble de 7 éléments pris avec les sous-ensembles de trois éléments qui n'ont en commun qu'un point et qui sont tels que deux quelconque de leurs membres déterminent univoquement le troisième), comme un graphe d'incidence bipartite de 14 sommets, ou encore comme un système de Steiner d'ordre 7 – et j'exclus ici volontairement toute la terminologie issue de la théorie des codes (voir pour plus sur les multiples formes du plan de Fano, Polster 1998, chap. 1-2, et Colbourg et alii 2007, chap. 1). On pourrait être tenté de voir dans ces multiples recouvrements le revers d'une absence d'unité, une forme de vice architectural. Pour les auteurs du *Handbook of Combinatorial Designs*, il n'en est rien – au contraire, le caractère protéiforme des structures étudiées constitue une des raisons de la fécondité de la (des ?) discipline(s) : « il faut insister sur le fait que n'importe quel design combinatoire peut apparaître sous des formulations équivalentes employant un jargon différent et liées à différentes lignes de recherche. Le réseau intriqué des connexions entre designs constitue sans doute un obstacle pour ceux qui débute dans la discipline – mais c'est néanmoins une force. » (Colbourg et alii 2007, 11). Cette remarque est très juste : la difficulté propre à ces mathématiques consiste souvent à reconnaître comme identique deux représentations d'une même structure (voir l'exemple des carrés latins et de leur tableau en ligne). Ce n'est qu'en circulant constamment d'un champ à l'autre (en remarquant que telle configuration ou telle design est aussi un certain graphe) que la pensée avance. En plus de questionner ce qui constitue l'identité des disciplines, ce dernier trait fait ainsi également écho à mon intérêt pour toutes les questions liées à la circulation entre les notations dans les *Principia*.

### 3/ Combinatoire, structure d'incidence et plans d'expérience

La géométrie finie entretient des rapports à première vue très étonnant avec la théorie des plans d'expérience élaborée par R. A. Fisher dans les années vingt mais popularisée dans la décade suivante. Avant de dire quelques mots sur l'intérêt que représente ce champ, je vais rapidement préciser la nature du lien entre théorie des plans d'expérience et géométrie finie.

Dans son livre de 1935, intitulé *The Design of Experiments*, Fisher explique que l'exploitation statistique d'une expérimentation n'est possible que si, en amont, la procédure mise en place est conforme à des règles extrêmement strictes. Le point essentiel, clairement expliqué par Fisher dans une note de 1926 intitulée « The Arrangement of Field Experiments », est que l'interprétation statistique nécessite deux choses : 1) posséder une estimation du « bruit », c'est-à-dire des variations dans le résultat qui sont dues aux variations incontrôlées des conditions et non aux différences entre les traitements ; 2) minimiser cette « erreur », qui parasite et interdit l'interprétation des résultats. L'importance de 1) découle de l'élaboration, au début du XXe siècle, des tests statistiques permettant de déterminer si le résultat d'une expérimentation est ou non significatif.

L'idée fondamentale de Fisher est très simple : les conditions 1) et 2) jouent souvent en sens contraire. Prenons un exemple, celui du test de l'efficacité de deux engrais E et F sur des plants de haricots. Simplifions le cadre et imaginons que l'expérimentateur divise une bande de terre rectangulaire en six lots (quatre lots devant recevoir deux traitements E et F, deux devant servir d'échantillons de référence, et qu'il réplique plusieurs fois la même expérience sur plusieurs bandes). Afin de diminuer les effets de l'hétérogénéité des sols (la source du « bruit » dans ce contexte), les expérimentateurs, explique Fisher, auront généralement tendance à répartir les traitements de façon équilibrée sur toute la bande. Une affectation du type : EEFF-- sera systématiquement rejetée, car si la partie gauche de la bande de terre s'avérait plus fertile que la partie droite, un biais serait introduit. Or, explique Fisher, ces décisions « au coup par coup » ne sont pas sans effet sur la mesure de l'erreur, et par ricochet, compromettent l'usage des tests de signification. Afin de permettre une juste estimation de l'erreur, il est nécessaire que l'allocation des traitements soit, dans chaque réplification, « randomisé », c'est-à-dire qu'elle soit établie de façon arbitraire, par un jeu de pile ou face par exemple – et ceci, même si la « randomisation » aboutit à la distribution intuitivement très imparfaite EEFF--.

Bien entendu, surtout si l'expérience n'est répétée qu'un nombre restreint de fois, il y a de forte chance que la procédure conduise à augmenter la valeur du « bruit », et donc à rendre le résultat non significatif. L'expérimentation sera alors de nouveau un échec, non pas parce que l'erreur aura été mal estimée, mais parce que la procédure suivie pour la mesurer correctement conduit inévitablement à l'augmenter. La seule façon d'éviter ce double écueil (mal évaluer *versus* accroître le bruit) est de déterminer de façon plus fine ce qui doit être « randomisé ». C'est par ce biais que le lien avec la combinatoire s'introduit. En effet, si les modalités de la « randomisation » dépendent de la nature de l'expérimentation, Fisher souligne que, dans de nombreux cas, les carrés latins constituent les arrangements les plus à même « d'éliminer la plus grande partie de l'hétérogénéité du sol tout en fournissant (...) une estimation des erreurs résiduelles » (1926, 510). Pour reprendre l'exemple pris plus haut, au lieu de diviser le champ en bande rectangulaire de six et d'appliquer la « randomisation » à l'allocation sur ces six lots, Fisher propose de construire un carré latin six par six dont la configuration particulière est choisie au hasard. Le fait de demander que les traitements soient réparties de manière équilibrée sur les colonnes et les lignes (et pas seulement les lignes comme c'était le cas plus haut) exclut une partie des biais, sans pour autant remettre en cause le principe de la randomisation. Le problème soulevé par Fisher aboutit donc très rapidement à une question de dénombrement des carrés latins d'un certain ordre car, pour pouvoir en prendre un au hasard,

il faut être certain qu'on les a tous dénombrés. Dans Fisher et Yates (1936), une énumération des carrés latins d'ordre six<sup>4</sup> est ainsi présentée.

Certaines expérimentations plus complexes nécessitent l'étude d'autres structures combinatoires, notamment celles des ensembles maximaux de carrés latins orthogonaux. Deux carrés latins de même ordre sont orthogonaux lorsqu'aucune case correspondante n'est occupée par une même valeur. Il est évident que le nombre maximum de carrés latins d'ordre  $n$  mutuellement orthogonaux (ensemble noté MOLS) est  $n-1$ . Le mathématicien indien R. C. Bose établit en 1938 qu'il y a une relation fort simple entre l'existence des MOLS et celle des plans projectifs : lorsque  $n \geq 3$ , la condition nécessaire et suffisante pour que  $n-1$  MOLS d'ordre  $n$  existent est qu'un plan projectif d'ordre  $n$  existe. Ce résultat, avec d'autres, ont contribué à lier la géométrie projective finie aux recherches sur les plans d'expérience. Plus généralement, toute une partie de la combinatoire (la théorie des designs, celle des carrés latins, etc.) est, dans les années cinquante-soixante, connectée très étroitement à la statistique et à la théorie des plans d'expérience.

Il y a bien des aspects de cette interaction entre combinatoire et statistique que je ne maîtrise pas encore. Je m'intéresse pourtant à Fisher et à cet étrange destin de la géométrie finie depuis longtemps. Comme je l'ai expliqué, j'ai été intrigué par le possible rapport entre le monisme neutre de Russell et les géométries de l'incidence dès la rédaction de 2.1. C'est en lisant Dembowski 1968 que j'ai appris quel usage Fisher faisait des carrés latins (qui peuvent être considérés comme des structures d'incidence). La ressemblance entre mon hypothèse concernant le monisme neutre de Russell et la réflexion de Fisher sur les plans d'expérience m'a frappé. J'ai d'abord cherché une filiation – or, même si Fisher a été étudiant à Cambridge, même s'il est connu pour avoir une intuition géométrique extrêmement forte, rien ne permet d'établir que les *cross-classification* de Whitehead ont directement influencé les tableaux croisés du statisticien. Il reste que les deux approches ont bien quelque chose en commun.

Le problème de base auquel s'attaque Fisher est finalement très simple : il s'agit de déterminer si un effet est ou non la conséquence d'un traitement. La question est très ancienne. Elle joue un rôle important dans la philosophie de Stuart Mill par exemple : l'idée de faire varier volontairement les éléments d'une expérience afin de distinguer une relation de causalité d'une relation de concomitance accidentelle est à la base de sa théorie de l'induction. Toute la question est de savoir comment structurer ces variations volontaires. Les plans d'expérience de Fisher sont la réponse rigoureuse à cette question : en appliquant au hasard à des lots similaires des traitements différents un nombre égal de fois, on s'assure que le différentiel dans les effets, s'il existe, sera causé par la seule différence des traitements. Ce qui m'intéresse ici est le concept d'expérience qui supporte la formulation du problème. Mill parle de la nature comme d'un tissu, fait de fils (représentant des régularités partielles) qui s'enchevêtrent les uns dans les autres<sup>5</sup>. La tâche de l'expérimentateur est alors perçue comme consistant isoler les différents composants qui se rencontrent en un événement. L'idée qu'un événement est fondamentalement une intersection de plusieurs chaînes joue donc ici, comme chez Russell, un rôle déterminant – et c'est ce rapport que je crois percevoir entre la notion « technique » d'incidence et un certain concept d'expérience qui m'intéresse chez Fisher comme chez Russell.

---

<sup>4</sup> Citons le début de ce texte : "The problem of the Latin square has become of practical interest in recent years in conjunction with the development of an adequate theoretical basis for the design of biological experiments (...). The reason for its special suitability lies in its satisfactorily fulfilling two distinct requirements: (1) in equalising more thoroughly than can be done in other ways the fertility of the land on which the different treatments are to be tested, and (2) in allowing, subject to the fixed restrictions of the Latin square, of a random choice among the different possible squares which could be laid down on the same area. This element of randomisation is now recognized to be a necessary condition for the validity of the estimate of error by which the results of the experiment are to be judged, and it is the fact that it is not a particular Latin square but a random selection from an aggregate of possible squares which is required for agricultural practice, that have given a renewed interest to Euler's problem of their enumeration."

<sup>5</sup> Mill 1843, III, chap. 4, 381 sq.

On peut légitimement douter de la possibilité de poursuivre une telle piste. Il semble en effet y avoir un écart épistémologique trop important entre la notion mathématique de structure d'incidence et les réflexions, assez vague finalement, sur l'expérience d'un Mill, d'un Russell ou même d'un Fisher. Assailli par ces doutes, j'ai, en 2006, sollicité un rendez-vous auprès de Marc Barbut, dont j'avais lu les articles sur la géométrie finie et la statistique (les seuls à ma connaissance sur la question en français). Je lui ai parlé du lien que je faisais entre monisme neutre et structure d'incidence, et lui ai demandé s'il pensait qu'un rapport analogue pouvait exister entre le concept géométrique d'incidence et la notion d'expérience, tel qu'elle était développée par Mill. Il a compris la question (ce qui m'a surpris !) et m'a répondu que ce lien était pour lui une évidence – qu'il remontait à Bacon, à la formule de l'*experimentum crucis*, où l'image de la croix, du carrefour entre deux embranchements, était déjà présente<sup>6</sup>. Sa réponse m'a bien évidemment encouragé à poursuivre dans cette voie.

Je suis bien conscient d'être encore très loin de parvenir à établir quelque résultat que ce soit ; je ne peux même pas encore cerner véritablement l'objet de ma recherche. De façon minimaliste, je dirai que je veux comprendre comment le rapport se noue entre statistique et combinatoire chez Fisher et sa postérité ; de façon plus ambitieuse, que je souhaite interroger deux concepts qui jouent un rôle important à la fois en combinatoire et en statistique : celui d'incidence et celui de structure bien équilibrée (*balanced*) ; de manière plus vague, plus lointaine, mais aussi plus intéressante, que je veux explorer les connexions entre un certain concept d'expérience (développé dans la tradition dont Fisher se réclame) et la notion technique de structure d'incidence.

## 8) Conclusion

Pour résumer, trois axes ont jusqu'ici gouverné mes recherches et continueront à le faire dans les prochaines années : l'histoire de la philosophie « analytique », l'histoire des mathématiques au XIXe et début du XXe siècle, la philosophie des mathématiques. Ces trois éléments se fécondent les uns les autres. Les travailler simultanément permet également de libérer la pensée de ce que chacun d'eux comportent potentiellement de contraignant et de routinier. Ainsi, travailler conjointement l'histoire de la philosophie et des mathématiques permet d'explorer de nouvelles pistes en philosophie des mathématiques – questionner, par exemple, la pertinence d'un dilemme (celui de Benacerraf) qui façonne la réflexion contemporaine. L'étude conjointe de l'histoire de la philosophie et de la philosophie des mathématiques est, quant à elle, susceptible de dégager des champs nouveaux en histoire des mathématiques – ainsi en va-t-il des recherches sur la quantité chez les mathématiciens du début du XXe siècle ou celles sur le rapport entre combinatoire et statistique. Enfin, la confrontation entre l'histoire et la philosophie des mathématiques permet de revisiter certains classiques de la philosophie analytique – les *Principles* et les *Principia*, la construction des corps physiques dans Russell 1914, etc. L'hétérogénéité des ces trois champs, de leurs jargons et de leurs problèmes, celle également des communautés qui les cultivent est pour moi absolument essentielle : l'étude d'un domaine divertit des recherches sur les autres, et c'est dans cette diversion que se situe la possibilité de renouvellement. À l'avenir, comme je l'ai déjà indiqué, j'aimerais, sans abandonner les deux autres fronts, contribuer plus directement aux discussions contemporaines sur la philosophie des mathématiques.

Quand je fais retour sur mes recherches et que je compare ma situation à celles d'autres collègues, de ma génération ou de celle qui la précède, une chose me frappe : je ne parviens

---

<sup>6</sup> En réalité, on ne trouve pas chez Bacon l'expression *experimentum crucis*. En revanche, la formule *instantiae crucis* est bien présente (une instance cruciale est par exemple un panneau indicateur planté à un carrefour qui indique la route à prendre).

pas à définir de façon claire, et ce même provisoirement, un positionnement bien défini. Alors que la plupart des enseignants chercheurs en philosophie que je côtoie semblent défendre des thèses assez fortes, je ne me reconnais ni positiviste, ni idéaliste, ni réaliste, ni nominaliste, ni wittgensteinien, ni même logiciste. Philosophiquement parlant, je n'ai pas d'attache ferme, ni n'éprouve le besoin d'en avoir. J'ai l'impression d'être empiriste quand je commente Pasch, réaliste quand je parle de Russell, idéaliste quand je commente Royce. Ce côté « girouette » n'est pas pleinement satisfaisant. Mais une telle incapacité à adhérer à un courant bien déterminé n'est peut-être toutefois pas complètement négative. J'ai en effet l'impression d'être à l'aise dans l'illustration ou l'exemplification des problèmes philosophiques, et ce, quelle que soit la nature des problèmes considérés. Ce que j'aime faire, c'est discerner comment une question s'incarne, se déploie et se diffracte au sein des mathématiques – ou plus généralement, au sein d'un contexte qui n'est pas celui, réservé généralement à la philosophie, de la pure argumentation. Je comparerais ainsi volontiers mon travail à celui d'un illustrateur. La tâche de l'illustrateur n'est pas d'inventer des histoires, mais de les mettre en image. Il en va de même pour moi. J'ai besoin, pour travailler, de sortir des textes et des mots de la philosophie pour aller vers d'autres « supports », en l'occurrence les mathématiques. L'indifférence concernant mes « propres » positions philosophiques n'est ainsi probablement que le revers du type de recherche que je conduis. Il reste que voir dans une disposition supposée à illustrer les questionnements philosophiques le corrélat d'une incapacité à affirmer ses propres conceptions reste au final peu réjouissant.

Il y aurait cependant une alternative, moins pessimiste. On pourrait avancer que cette manière d'approcher la philosophie, si elle rend la définition d'une position plus difficile, ne s'y oppose pas nécessairement – que cette volonté de défendre et d'illustrer différentes philosophies pourrait, au contraire, peu à peu, progressivement, s'articuler elle-même et se muer en une forme déterminée permettant de les ressaisir toutes. Ce souci de parvenir à élaborer petit à petit, à partir de préoccupations pour l'instant encore éclatées, une synthèse stable et équilibrée explique sans doute mon intérêt pour Russell. L'auteur des *Principia* n'est pas un philosophe à programme. Il commence lui-aussi par circuler entre différents domaines de rationalité et fait des choses dont il ne sait pas lui-même exactement où elles vont le mener. Mais il ne renonce pour autant jamais à viser une forme, problématique, d'unité. Tenter, comme je le fais actuellement, de ressaisir le sens de son projet philosophique à partir de ses travaux sur les mathématiques, pourrait ainsi me permettre d'avancer dans la voie d'une intégration plus aboutie de mes intérêts et de mes idées. Mais dégager une position philosophique susceptible de rassembler les différents types de travaux présentés ici, et qui, loin de l'interdire, sous-tendrait l'activité visant à exemplifier des problèmes et des théories philosophiques aussi divers que ceux auxquels je m'intéresse, reste aujourd'hui encore un horizon<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> Je remercie Jean-Claude Gandon, Brice Halimi et Yvette Perrin pour l'aide qu'ils m'ont apporté dans l'élaboration de mon dossier de HDR.

# BIBLIOGRAPHIE

Anderson I, Colbourn C. J, Dinitz J. H., Griggs T. S., “Design Theory: Antiquity to 1950”, in Colbourn & alii 2007, 11-24.

Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J., *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, 1976.

Bose R. C., On the application of the properties of Galois fields to the problem of construction of hyper-Graeco-Latin squares, *Sankhyā*, Vol. 3, 323-338, 1938.

Buzaglo M., *The Logic of Concept Expansion*, CUP, 2002

Carnap R., *La construction logique du monde*, (1928), tr. fr. Rivain T., révision et notes E. Schwartz, Paris : Vrin, 2002.

Colbourn C., Dinitz J., *Handbook of Combinatorial Designs*, Chapman & Hall/CRC, 2007.

Corfield D., *Towards a Philosophy of Real Mathematics*, Cambridge University Press, 2003

Coxeter H. S. M., *The Real Projective Plane*, York : Maple Press Company, 1949

Dembowski P., *Finite Geometries*, Berlin, Springer Verlag, 1968

Detlefsen M., “Poincaré vs. Russell on the role of logic in mathematics”, *Philosophia Mathematica*, (3) 1, 1993, 24-49

Fisher R. A., “The Arrangement of Field Experiments”, *Journal of the Ministry of Agriculture of Great Britain*, 33, 1926, 505-513.

Fisher R. A., *The Design of Experiments*, Mcmillan Publishing Company (9ème edition 1971), 1935

Fisher R. A. & Yates F., “The 6 x 6 Latin Squares”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 30: 492-507, 1936

Fowler D. H., *The Mathematics of Plato’s Academy, A new reconstruction*, Oxford: Clarendon Press, 1987

Gandon S., *Logique et langage. Etudes sur le premier Wittgenstein*, Vrin, 2002

Gandon S., Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1903), *Philosophiques*, 33-2, 333-362, 2006

- Grassmann H., *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strender Form bearbeitet*, Berlin, 1862; trad. anglaise de L. C. Kannenberg, Providence, American Mathematical Society, 2000.
- Grattan-Guinness I., *The Search for Mathematical Roots, 1870-1940*, Princeton University Press, 2000
- Gropp H., Configurations between geometry and combinatorics, *Discrete Applied Mathematics*, 138, 2004
- Lakatos I., *Proofs and Refutations – the logic of mathematical discovery*, CUP, 1976.
- Landini G., *Wittgenstein's Apprenticeship with Russell*, Cambridge University Press, 2007.
- Lowe V., *Alfred North Whitehead: The Man and his Work*, I, The John Hopkins University Press, 1985.
- Mancosu P. éd., *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, 2008
- Mill J. S., *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive: Being a Connected View of the Principles of Evidence, and Methods of Scientific Investigation*, John W. Parker ed., 1843.
- Pasch M., *Vorlesungen über neue Geometrie*, Teubner, 1882.
- Pieri M., I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo, *Memori della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 48, 1-62, 1898.
- Polster B., *A geometrical Picture Book*, Springer Verlag, 1998
- Potter M., *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*, Oxford: Oxford University Press, 2000
- Rivenc F., *Recherches sur l'universalisme logique*, Payot, 1993.
- Russell B., 1983-? *The Collected Papers of Bertrand Russell*, London and New-York, Routledge
- Russell B., *A critical exposition of the philosophy of Leibniz with an appendix of leading passages*, CUP, 1900.
- Russell B., *Our Knowledge of External World as a Field for Scientific Method in Philosophy*, Open Court, London, 1914.
- Sackur J., *Formes et faits. Analyse et théorie de la connaissance dans l'atomisme logique*, Vrin, 2005.
- Segre B., Curve normali e k-archi negli spazi finiti, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 39, 357-379, 1955.
- Stark M. E. & Archibald R. C., *Jacob Steiner's Geometrical Constructions with a Ruler, Given a Fixed Circle with Its Center*, Yeshiva University, 1970

Tappenden J., Mathematical concepts and definitions, in Mancosu 2008.

Torretti R., *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Reidel, 1978.

Whitehead A. N., *A treatise on universal algebra with applications*, Cambridge University Press, 1898. Reéd. New York, Hafner, 1960.

Whitehead A. N., *The axioms of projective geometry*, Cambridge University Press, 1906. Reéd. New York, Hafner, 1971.

Whitehead A. N., *The axioms of descriptive geometry*, Cambridge University Press, 1907. Reéd. New York, Hafner, 1971.

Wiener N., *Cybernetics. Control and Communication in the Animal and the Machine*, MIT Press, 1948 (2nde édition, 1961)

Wilson M., Frege: The Royal Road From Geometry, *Noûs* 26 (2): 149-180, 1992.

Wilson M., Can We Trust Logical Form?, *Journal of Philosophy*, 91, 519-544, 1994.





# RÉCAPITULATIF DES ACTIVITÉS DE RECHERCHE (2000-2009)

- 1/ Livres
- 2/ Articles dans des revues internationales à comité de lecture
- 3/ Articles dans des revues sans comité de lecture
- 4/ Articles dans des recueils collectifs
- 5/ Recensions
- 6/ Traductions
- 7/ Organisation de colloques ou workshops à dimension internationale
- 8/ Organisation de colloques ou workshops à dimension nationale
- 9/ Autres organisations
- 10/ Prix et distinctions
- 11/ Conférences invités
- 12/ Participation à des congrès nationaux ou internationaux
- 13/ Autres conférences
- 14/ Descriptif du programme « Histoire et Epistémologie des Sciences Mathématiques » (2005-2007)

**NB : j'ai figuré en gras les travaux parus ou à paraître non intégrés dans le dossier d'habilitation.**

## 1/ Livres

[A1] *Logique et Langage – Etudes sur le premier Wittgenstein*, Vrin, 2002 (275 p.)

[A2] avec Marion Mathieu, édition d'un numéro spécial de *Philosophiques*, 36 (1), Printemps 2009, sur « l'idéalisme britannique », regroupant des contributions de N. Griffin, G. d'Oro, W. J. Manders, L. Jaffro, C. Koyabashi, M. Marion, S. Gandon.

[A3] avec Ivahn Smadja, édition commentée d'un recueil d'articles *Philosophie des mathématiques*, collection «Textes clés», Vrin. En préparation.

[A4] avec Ivahn Smadja eds., édition d'un numéro spécial de *Les études philosophiques sur la philosophie des mathématiques*, regroupant les contributions de M. Detlefsen, B. Halimi, D. Bonnay, J. Mumma, A. Arana, J. Avigad. En préparation.

[A5] *Russell's Unknown Logicism : Studies in History and Philosophy of Mathematics*, Palgrave Macmillan, contrat signé, manuscrit devant être remis en mai 2011.

[A6] avec Nick Griffin, *Russell/Whitehead Correspondence*, publication de la correspondance entre Russell et Whitehead (les ayants-droits ont accordé l'autorisation).

## 2/ Articles dans des revues internationales à comité de lecture

[Pa1] Russell, les *sense data* et les objets physiques: une approche géométrique de la notion de classification, *Philosophia Scientiae*, 13(1), 71-97, 2009 (26 p.).

[Pa2] Toward a topic-specific logicism? Russell's theory of geometry in the *Principles of Mathematics*, *Philosophia Mathematica*, 16, 1-39, 2008 (39 p.)

[Pa3] Which Arithmetisation for which Logicism? Russell on Quantities and Relations, *History and Philosophy of Logic*, 29: 1, 1-30, 2008 (30 p.)

[Pa4] Some remarks about Russellian incomplete symbols, *Russell: the journal of the Bertrand Russell Archives*, 27: 41-59, 2007 (18 p.)

[Pa5] La réception des *Vorlesungen über neue Geometrie* de Pasch par Peano, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 12 : 2, 249-290, 2006 (41 p.)

[Pa6] **Grandeurs, vecteurs et relations chez Russell (1897-1903), *Philosophiques*, 33-2 : 333-362, 2006 (29 p.)**

[Pa7] Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie, *Dialogue*, 14 : 653-692, 2005 (39 p.)

[Pa8] Russell et l'*Universal Algebra* de Whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903), *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 10 : 187-256, 2004 (69 p.)

[Pa9] "To bring Dedekind's research into its proper relation to general metaphysical enquiry": Royce et Russell, critiques de Bradley, *Philosophiques*, 36 : 1, 83-108, 2009 (25 p.)

[Pa10] avec M. Marion, L'idéalisme britannique : histoire et actualité, *Philosophiques*, 36 : 1, 3-34, 2009 (31 p.)

[Pa11] La théorie des rapports chez A. de Morgan, *Revue d'Histoire des Sciences* La théorie des rapports chez A. de Morgan, *Revue d'histoire des sciences*, 61 (2), 2008, 287-312 (25 p.).

[Pa12] La définition de l'aire d'une surface gauche : Peano et Lebesgue, à paraître dans *Archive for History of Exact Sciences* (40 p.)

### 3/ Articles dans des revues sans comité de lecture

[Pb1] Comment lire une expression fonctionnelle ? Écriture fonctionnelle, formation de noms et invention conceptuelle chez Frege, *Revue Auvergne*, 585 (2), 63-72 (9 p.)

[Pb2] De la configuration à l'espace projectif : le statut de la figure dans les géométries finies au début du XXe siècle, à paraître dans la *Revue Sénégalaise de Philosophie* (14 p.)

### 4/ Articles dans des recueils collectifs

[Pc1] Wittgenstein dans la fabrique des *Principia*, sur et autour *Tractatus* 3. 33, à paraître dans C. Chauviré éd., *Lire le Tractatus-Logico-Philosophicus de Wittgenstein*, Paris : Vrin, 91-120, 2009 (29 p.)

[Pc2] Algèbre, géométrie et loi d'intensité : l'enjeu de *A Treatise on Universal Algebra*, in Michel Weber et Diane d'Eprémèsnil (éds.), *Chromatikon I, Annuaire de la philosophie en procès - Yearbook of Philosophy in Process*, Presses universitaires de Louvain, 2005. (12 p.)

[Pc3] Les origines russelliennes du concept de problème philosophique chez Wittgenstein, in C. Chauviré, S. Laugier, J-P. Rosat, *Wittgenstein : les mots de l'esprit*, Paris : Vrin, 2001. (25 p.)

[Pc4] Constituer ou Axiomatiser ? Schlick, Russell et Carnap. », à paraître dans les actes du colloque *Le premier Carnap : postérité et traditions*, E. Schwartz éd. (20 p.)

[Pc5] Peano's logical language and Grassmann's Legacy, à paraître dans les *Actes du Congresso Internazionale Giuseppe Peano e la sua Scuola, fra matematica, logica e interlingua*, C. Roero et alii éd. (14 p.)

[Pc6] Logicism and mathematical practices – Russell's theory of geometry in the *Principles*, à paraître dans Alvarez C. & Arana A. éds., *Analytic Philosophy and the Foundations of Mathematics*, Palgrave / Macmillan. (15 p.)

### 5/ Recensions

[R1] A Relational Dispute [review of Stewart Candlish, *The Russell/Bradley Dispute and Its Significance for Twentieth-Century Philosophy*], *Russell: the Journal of Bertrand Russell Studies*, 28: 2, 2008, 171-190 (9 p.)

[R2] Recension du livre de M. Marion, *Introduction au Tractatus Logico-Philosophicus*, Paris : PUF, 2004, pour *Philosophiques*, 32, 2005, 266-268 (3 p.)

[R3] Recension du livre de M. Potter, *Wittgenstein's Notes on Logic*, OUP, 2009 pour *History and Philosophy of Logic*, en préparation.

## 6/ Traductions

[T1] Traduction de “Bertrand Russell and Harold Joachim” de N. Griffin, à paraître dans [A2].

[T2] Traduction de “Carnap and The Evolution of the A Priori” de N. Friedman, publiée dans Les actes du colloque *Le premier Carnap : postérité et traditions*, éd. par E. Schwartz.

[T3] Traduction des vingt premières pages (préface, chapitre 1 et 2) de *Science without Numbers* de H. Field, à paraître dans [A3].

[T4] Projet de traduction des *Principles of Mathematics* de B. Russell avec B. Halimi, J. Sackur et I. Smadja. La partie IV est traduite, les parties I à III sont en révision.

## 7/ Organisation de colloques ou workshops à dimension internationale

[Ca1] Juin 2009 : organisateur du colloque « le *Tractatus* en contexte », IUF/PHIER Clermont.

Participants : P. Sullivan (Stirling U), M. Marion (UQAM), K. Wehmeier (Irvine UC), G. Landini (Iowa U), M. Beaney (York U), M. Potter (Cambridge), D. Perrin (Grenoble), E. Schwartz (Clermont II), S. Gandon.

[Ca2] Mars 2009 : organisateur avec M. Panza d'une journée d'étude sur la grandeur, la quantité et les réels, IUF/REHSEIS/PHIER.

Participants : B. Hale (Sheffield), P. Cantu (Milan), J. Diez (Barcelona), M. Panza (Rehseis, Paris), O. Darrigol (Rehseis, Paris), S. Gandon

[Ca3] Juin 2006 : organisateur du colloque : « Comment être idéaliste ? Bradley, Collingwood », PHIER, Clermont.

Participants : N. Griffin (McMaster U.), M. Girel (Paris), G. Rametta (Bologne), M. Marion (UQAM), C. Kobayashi (UQAM), L. Jaffro (Clermont), A. Petit (Clermont), S. Gandon (Clermont).

[Ca4] Avril 2007 : organisateur avec S. Maronne du colloque : « Les traditions euclidiennes », Maison des Sciences de l'Homme, Clermont.

Conférenciers : F. Acerbi (Lille), H. Belhosta (Aix), D. Descotes (Clermont, CERHAC-CIBP), M. Galuzzi (Milan), S. Maronne (Clermont, REHSEIS), P. Nabonnand (Nancy), D.

Rabouin (Paris, REHSEIS), K. Saito (Osaka), B. Vitrac (Lille), M. Panza (Paris, REHSEIS), S. Gandon.

[Ca5] Avril 2006 : organisateur avec S. Maronne du colloque : « Algèbre et Géométrie à l'âge classique », Maison des Sciences de l'Homme, Clermont.

Participants : C. Alvarez (UNAM), P. Freguglia (Rome, Aquila), F. Loget (Limoges), M. Galuzzi (Milan), M. Panza (REHSEIS, Paris), J. Dhombres (C. Koyré, Paris), S. Maronne (Clermont), V. Jullien (Brest), E. Schwartz (Clermont).

[Ca6] Octobre 2002 : organisateur avec E. Schwartz et A. Petit d'une conférence internationale sur Carnap : « Le premier Carnap : postérités et traditions », PHIER, Clermont.

Conférenciers : M. Friedman (Stanford), G. Wolters (Konstanz), M. Marion (Ottawa), F. Rivenc (Paris 1), G. Crocco (Aix), I. Thomas-Fogiel (Paris 1), J. English (Rennes), A. Michel (Aix), F. Schmitz (Nantes), J. Sackur (Paris X), J.-B. Rauzy (Aix), M. Malherbe (Nantes), Petit (Clermont), E. Schwartz (Clermont), S. Gandon.

## **8/ Organisation de colloques ou workshops à dimension nationale**

[Cb1] Janvier 2009 : organisateur d'une journée d'étude sur « l'individu : aspect logique et métaphysique », IUF/PHIER.

Participants : F. Clementz (Aix), F. Drapeau-Contim (Rennes), B. Gnassounou (Nantes), S. Motta (Nantes)

[Cb2] Octobre 2006 : organisateur avec E. Audureau (Aix) de la journée d'étude sur « Peano et les mathématiques italiennes », CEPERC/PHIER à Aix-en-Provence.

Participants : E. Marchisotto (Northwestern University, Californie), P. Cantu (Milan), A. Michel (Aix), Y. Perrin et S. Gandon.

[Cb3] Octobre 2005 : organisation de la journée d'étude « L'idée d'ordre dans les mathématiques du XIX<sup>ème</sup> siècle », PHIER, Clermont.

Participants : E. Schwartz (Clermont), H. Sinaceur (IHPST, Paris), A. Michel (Aix), J.-P. Alcantara (Clermont), S. Gandon.

## **9/ Autres organisations**

[Cc1] Coordinateur pour la MSH du programme (deux ans) « Epistémologie et la Philosophie des Sciences Mathématiques », Maison des Sciences de l'Homme (MSH) et Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), Clermont, 2005-2007.

Voir liste des séances du séminaire en annexe.

[Cc2] Membre du comité de pilotage du Paris-Nancy PhilMath Workshop 2009 (avec M. Detlefsen, J. Dubucs, G. Heinzmann, J.-J. Szczeciniarz).

## **10/ Prix et distinctions**

2008 : Bertrand Russell Visiting Professor pour le semestre d'hiver à l'université McMaster, Hamilton, Canada.

2007-2012 : Membre junior de l'Institut Universitaire de France.

## 11/ Conférences invités

[Sa1] Mai 2009 : « Abstraction et explication intrinsèque : de Hartry Field à la géométrie projective », REHSEIS, séminaire sur l'abstraction.

[Sa2] Septembre 2008 : « What is a quantity ? Russell's and Whitehead's part VI of *Principia* », conférence sur la philosophie de Whitehead, Université de Liège, Belgique.

[Sa3] Avril 2008 : “Logical languages in Russell's and Frege's theory”, Speaker series, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada.

[Sa4] Avril 2008 : “Russell's logicism and the theory of quantity in *Principia Mathematica*”, à l'occasion d'une conférence sur History of Early Analytical Philosophy, organisé par G. Landini, Iowa University, Iowa City, USA.

[Sa5] Mars 2008 : « Qu'est-ce qu'une quantité? Russell et Whitehead critique de la 'theory of measurement' », conférence donné à l'UQAM, Montréal, Canada.

[Sa6] Octobre 2007 : “From Figures to Forms: Pasch on the use of diagram in projective geometry”, à l'occasion du colloque “Diagrams in mathematical practices” organisé par le CNRS et Stanford U. à Stanford, Californie, USA.

[Sa8] Avril 2007 : « Geometry in a logicist framework : Russell's *Principles*, Part VI » présenté à l'occasion de la Conférence Internationale sur « Qu'est-ce que la géométrie à l'époque classique et contemporaine ? », organisé par P. Nabonnand (Nancy, France) et K. Volkert (Köln, Germany), Centre International de Rencontres Mathématiques, Luminy, France.

[Sa9] Décembre 2006 : « Le statut de la géométrie métrique dans les *Principles* » présenté dans le cadre du séminaire des Archives Poincaré, Nancy.

[Sa10] Mai 2006 : « Non-sens fregéen, non-sens russellien, non-sens wittgensteinien » présenté à l'occasion d'une journée d'étude sur le non-sens chez Wittgenstein, Archives Poincaré, Nancy.

[Sa11] Mars 2006 : « Le logicisme de Russell doit-il être conçu comme un prolongement du mouvement d'arithmétisation de l'analyse ? » présenté à l'occasion d'une journée d'étude sur Russell, REHSEIS, Paris.

[Sa12] Aout 2005 : « La réception des *Vorlesungen* de Pasch par Peano » présenté à l'occasion de la Conférence Internationale sur l'Histoire de la Géométrie, organisé par P. Nabonnand (Nancy, France) et K. Volkert (Köln, Germany), Centre International de Rencontres Mathématiques, Luminy, France.

[Sa13] Juin 2005 : « Le contexte grassmannien des *Principles of Mathematics* » présenté dans le cadre du séminaire sur l'histoire de la géométrie de D. Flament, Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

[Sa14] Décembre 2003-Janvier 2004 : « *L'Aufbau* de Carnap », deux conférences présentées à l'Ecole Normale Supérieure (Ulm), Paris.

[Sa15] Novembre 2003 : « Whitehead et Russell : la géométrie projective entre ordre et incidence », présenté dans le cadre du séminaire « Chromatiques Whiteheadiennes ».

[Sa16] Mars 2003 : « Russell et la géométrie projective » présenté dans le cadre du séminaire d'épistémologie, CEPERC, Aix-Marseille.

[Sa17] Février 2003 : « Le foundationalisme de Russell », présenté à Poitiers dans le cadre d'une journée d'étude sur Russell, Poitiers.

[Sa18] Mars 2002 : « Wittgenstein et les sciences physiques », présenté dans le cadre du séminaire de DEA, Paris-1 Sorbonne.

[Sa19] Janvier 2002 : « La construction des nombres cardinaux chez Russell », présenté à l'occasion d'une journée d'étude sur Russell, Ecole Normale Supérieure, Lyon.

[Sa20] Juin 2000 : Intervention au Collège International de Philosophie dans le cadre de la journée consacrée à D. Pears, organisée par le Professeur A. Soulez, Paris.

## **12/ Participation à des congrès nationaux et internationaux**

Octobre 2008 : “Peano Logical Language and Grassmann's *Ausdehnungslehre*”, à l'occasion du Congresso Internazionale du Studi G. Peano, Torino, Italy.

Octobre 2007 : « De la configuration à l'espace projectif : le statut de la figure dans les géométries finies au début du XXe siècle » à l'occasion du colloque commun de la société française et italienne d'histoire des mathématiques, Paris.

Aout 2007 : “The ghost of quantity : Russell's and Whitehead's Part VI of the *Principia*”, à l'occasion du 13th International Congress of Logic Methodology and Philosophy of Science. Tsinghua University, Beijing, Chine.

Juin 2006 : « N. Wiener et l'analyse logique de la mesure psychophysique » présenté à l'occasion du 6<sup>th</sup> International History of Philosophy of Science Congress, HOPOS, Paris.

Mai 2005 : “Some remarks on Russell's incomplete symbols” présenté à l'occasion de la conférence internationale “Russell vsus Meinong Conference”, McMaster University, Canada.

Avril 2004 : « Les reprises du calcul grassmanien à la fin du XIXème siècle : une comparaison entre le *Calcolo Geometrico* de Peano et l'*Universal Algebra* de Whitehead » présenté lors du Congrès de la Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques, Poitiers.



### **13/ Autres conférences**

Juin 2009 : “How to Write Logic ? Russell’s incomplete symbols and Wittgenstein’s signs”, dans le cadre du colloque « *Le Tractatus en contexte* », IUF/PHIER/

Mars 2009 : “Russell on Quantities and Numbers : an architectonic use of the application constraint”, dans le cadre du colloque “Numbers and Quantities”, REHSEIS/Paris VII/PHIER-IUF.

Janvier 2009 : « Négation, incompatibilité, détermination », présenté à l’occasion du séminaire sur la négation du PHIER.

Avril 2007 : « La théorie des ratios chez A. de Morgan », à l’occasion du colloque « traditions euclidiennes » organisé à Clermont-Ferrand (MSH).

Octobre 2006 : « La définition de l’aire d’une surface chez Peano » présenté avec Y. Perrin à l’occasion d’une journée d’étude sur Peano et les mathématiques italiennes, Aix-en-Provence, CEPERC/PHIER.

Janvier 2006 : « Grandeur et quantité dans les *Principles* de B. Russell » présenté à l’occasion du séminaire IREM-MSH (see [Cc1]), Clermont.

Octobre 2005 : « Ordre et géométrie dans les *Principles* de B. Russell » présenté à l’occasion de la journée d’étude sur « l’idée d’ordre dans les mathématiques du XIX<sup>ème</sup> siècle », PHIER, Clermont.

Janvier 2005 : « Pasch, Klein et la question de l’empirisme géométrique » présenté dans le cadre du séminaire de philosophie du PHIER, Clermont.

Octobre 2002 : « Constituer ou Axiomatiser ? Schlick, Russell et Carnap » dans le cadre du colloque *Le premier Carnap : postérité et traditions*.

Novembre 2001 : « La pensée et l’expression chez Russell et Wittgenstein », présenté dans le cadre du séminaire de recherche du PHIER.

Janvier 2001 : « La naturalisation de l’épistémologie chez Quine et Carnap », présenté dans le cadre des journées communes Aix-Clermont.

Avril 2000 : « La question du scepticisme chez Frege et Russell », présenté dans le cadre du séminaire de philosophie du PHIER, Clermont.

### **14/ Descriptif du programme « Histoire et Epistémologie des sciences mathématiques » (Voir Cc1)**

ANNEE 2005-2006

Mercredi 12 octobre 2005 : L’analyse au XVII<sup>ème</sup> siècle

Paul-Louis Hennequin (Université de Clermont-Ferrand II), Jeanne Peiffer (Centre Koyré, CNRS).

Mercredi 30 novembre 2005 : La tradition des *Coniques* d'Apollonius

Micheline Decorps et Michel Federspiel (Clermont-Ferrand), Alain Bernard (IUFM de Créteil).

Mercredi 18 janvier 2006 : Géométrie projective au XIX<sup>ème</sup> siècle

Philippe Nabonnand (Nancy, ACERHP), Sébastien Gandon (Clermont-Ferrand, PHIER).

Mercredi 8 mars 2006 : Logique et mathématiques

Alex Esbelin (Clermont-Ferrand, IUFM d'Auvergne), Marcel Guillaume (Université de Clermont I).

Mercredi 5 avril et jeudi 6 avril 2006 : colloque « Algèbre et Géométrie de la Renaissance à l'Age classique » [Ca5]

Elisabeth Schwartz (Clermont-Ferrand, PHIER), Sébastien Maronne (Clermont-Ferrand, REHSEIS), Carlos Alvarez (Mexico, UNAM), Jean Dhombres (Paris, Centre Koyré), Marco Panza (Paris, REHSEIS), François loget (Limoges, REHSEIS), Vincent Jullien (Université de Brest), Paolo Freguglia (Roma, Università di L'Aquila).

Mercredi 10 Mai : Les traditions euclidiennes à l'âge classique

Sabine Rommevaux (Tours), Dominique Descotes (Clermont).

ANNEE 2006-2007

11 octobre 2006 : Histoire de probabilités

Paul-Louis Hennequin (Univ. Clermont-Ferrand), Pierre Crépel (Univ. Lyon 1 et CNRS)

2 décembre 2006 : Fonder les mathématiques ? Structures, Catégories, Ensembles.

Frédéric Patras (Nice, CNRS), Brice Halimi (Paris, REHSEIS)

7 février 2007 : Le statut du nombre dans l'Antiquité : Babylone et la Grèce.

Christine Proust (Paris, REHSEIS), Alain Petit (Clermont-Ferrand, PHIER)

Mercredi 25 avril et vendredi 27 avril: colloque « Traditions Euclidiennes » [Ca4]

Bernard Vitrac (Lille, CNRS), David Rabouin (Paris, REHSEIS), Dominique Descotes (Clermont-Ferrand, CERHAC-CIBP), Ken Saito (Osaka), Sébastien Maronne (Clermont-Ferrand, PHIER-REHSEIS), Fabio Acerbi (Lille, CNRS), Massimo Galuzzi (Univ. Milano), Philippe Nabonnand (Nancy, ACERHP), Marco Panza (Paris, REHSEIS), Sabine Rommevaux (Tours), Hélène Bellosta (Aix), Sébastien Gandon (Clermont-Ferrand, PHIER)

16 mai 2007 : Philosophie des mathématiques

Roshdi Rashed (Villejuif, CHSPAM), Ivahn Smadja (Caen, REHSEIS)

Décembre 2007 : Le calcul intégral à la fin du XIXe

Alain Michel (CEPERC, Aix), Sébastien Gandon & Yvette Perrin (Clermont II).