



HAL
open science

Comportement dynamique des ensembles tournants de turbomachines : Maîtrise des effets des dispositifs de liaisonnement amortisseurs

Baraa Al Al Faraj Sayed

► **To cite this version:**

Baraa Al Al Faraj Sayed. Comportement dynamique des ensembles tournants de turbomachines : Maîtrise des effets des dispositifs de liaisonnement amortisseurs. Autre. INSA de Lyon, 2011. Français. NNT : 2011ISAL0022 . tel-00782341

HAL Id: tel-00782341

<https://theses.hal.science/tel-00782341v1>

Submitted on 29 Jan 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES ENSEMBLES TOURNANTS DE TURBOMACHINES. MAÎTRISE DES EFFETS DES DISPOSITIFS DE LIAISONNEMENT AMORTISSEURS

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

pour obtenir le grade de DOCTEUR

Ecole doctorale

MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE

Formation doctorale : GÉNIE MÉCANIQUE

BARAA AL SAYED

Thèse soutenue le 09 mars 2011 devant le jury composé de :

A. BERLIOZ	Professeur, Univ. Paul Sabatier	Rapporteur
L. BAILLET	Professeur, Univ. Joseph Fourier	Rapporteur
E. CHATELET	Maître de conférences, INSA de Lyon	Co-encadrant de thèse
B. FAVERJON	Maître de conférences, INSA de Lyon	Co-encadrant de thèse
G. JAQUET-RICHARDET	Professeur, INSA de Lyon, LaMCoS	Directeur de thèse
J. RAVOUX	PhD, consultant ANSYS	Examineur

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS)
CNRS UMR5259 - INSA de Lyon

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales
Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU edeza@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM. 64.43 - Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.26 23 59 50 Fax : 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16 06 07 53 89 13 Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : C. DAYEYAN	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 44 82 94 Fax : 04 72 43 13 10 infomaths@bat710.univ-lyon1.fr alain.mille@liris.cnrs.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 -Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@lva.insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* M. Lionel OBADIA Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. Lionel OBADIA Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mes deux directeurs de thèse, M. Georges Jacquet-Richardet Professeur et M. Eric Chatelet Maître de conférences, au Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon pour l'opportunité et l'envie d'avoir fait cette thèse. Ils ont toujours été présents pour me porter une oreille attentive. Leurs encouragements ont contribué à l'aboutissement de cette thèse.

C'est une très grande reconnaissance que je dois à Mme Béatrice Faverjon et M. Sébastien Baguet pour leurs conseils et l'aide qu'il m'ont apportés tout au long de ce travail ainsi que pour tout ce que j'ai pu apprendre sur le plan scientifique.

J'adresse mes sincères remerciements à messieurs les Professeurs Berlioz et Baillet qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir être rapporteurs de ce manuscrit. Je remercie également monsieur Ravoux, PhD et consultant chez ANSYS de s'être intéressé à mes travaux en acceptant de faire partie du jury de thèse.

Une thèse n'est pas seulement l'occasion de se former à la recherche, c'est aussi pouvoir rencontrer des personnes formidables. Ainsi je voudrais remercier tous les membres du LaMCoS, permanents ou doctorants, pour leur présence, leurs suggestions et leur bonne humeur, ainsi que mes collègues du bureau, surtout Nadège et Stéphanie. Leur aide, leurs encouragements ou encore leur amitié ont rendu mon travail plus stimulant et plus agréable.

Je souhaiterais enfin remercier mon mari et mon fils auxquels je dois une grande partie de l'accomplissement de cette thèse par leurs présence à mes côtés. Enfin je souhaiterais remercier mes parents qui dès mon plus jeune âge m'ont fait savoir l'importance des études et qui m'ont toujours soutenu et épaulé sans jamais rien attendre en retour.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	vii
Nomenclature	viii
Résumé	1
Abstract	2
1 Introduction	1
1.1 Technologies associées aux aubes et aux frotteurs	3
1.1.1 Principaux types d'aubes radiales	3
1.1.2 Conception des frotteurs	4
1.2 Frottement de type Macroslip et Microslip	7
1.2.1 Modèle Macroslip de Coulomb	8
1.2.2 Modèle Macroslip de Masing	9
1.2.3 Modèle Macroslip de Dahl	11
1.2.4 Modèle Microslip de Mindlin	11
1.2.5 Modèle Microslip de type Iwan	12
1.2.6 Modèle Microslip unidirectionnel	12
1.2.7 Modèles Microslip bi et tri dimensionnels	17
1.2.8 Modèles plus récents	17
1.3 Formulation du contact frottant	19
1.3.1 Traitement du contact unilatéral	20
1.3.2 Conditions de frottement	21
1.3.3 Méthodes de résolution adaptées	24
1.3.4 Synthèse	27
1.4 Approche éléments finis d'un problème de contact	27
1.4.1 Introduction	27
1.4.2 Modélisation	27
1.4.3 Modèle masse-ressort-frotteur	28
1.4.4 Synthèse	35
1.5 Positionnement et objectifs de la thèse	37
2 Méthodes fréquentielles pour la dynamique non linéaire du contact frottant	41
2.1 Contexte	42
2.2 Méthodes fréquentielles pour l'analyse des systèmes non linéaires amortis par frottement sec	42
2.3 Etude par la balance multi harmonique d'un Modèle de frottement de type Macroslip excité par une force harmonique	44
2.3.1 Développement du modèle de contact	45

2.3.2	Calcul de l'expression de la force non linéaire pour l'état collé (Stick) et l'état glissant (Slip)	46
2.3.3	Résolution du problème de contact par MHBM	48
2.3.4	Comparaison de la méthode MHBM avec une méthode d'intégration temporelle	52
2.3.5	Considérations physiques	53
2.4	Analyse de la dynamique de l'aplatissement de pics	58
2.4.1	Approche énergétique	59
2.4.2	Changement de l'état du contact du au comportement de stick/slip	63
	Conclusion	71
3	Application aux ensembles aubés	73
3.1	Terminologie liée aux vibrations des disques aubés et au phénomène du désaccordage	74
3.1.1	La symétrie cyclique	74
3.1.2	Classification des modes de disques aubés	75
3.1.3	Phénomènes aéroélastiques	76
3.1.4	Excitations de type ordre moteur	77
3.1.5	Le désaccordage et ses conséquences	79
3.1.6	Frequency veering	80
3.2	Réductions d'ordre des modèles	81
3.3	Techniques statistiques et probabilistes pour la modélisation du désaccordage	84
3.4	Modélisation stochastique d'un système à un degré de liberté par Monte Carlo	87
3.4.1	Les différents paramètres à considérer	88
3.4.2	Etude paramétrique déterministe du système à un degré de liberté suite à la variation des paramètres du contact	90
3.4.3	Convergence du nombre de tirages	96
3.4.4	Incertitude sur le paramètre kd	100
3.4.5	Incertitude sur le paramètre μ	111
3.4.6	Incertitude sur le paramètre F_n	119
3.5	Extension de la modélisation stochastique à un système à géométrie cyclique de treize aubes	126
3.5.1	Mise en équation du modèle numérique à 13 aubes	126
3.5.2	Excitation ponctuelle, Excitation ordre moteur	128
3.5.3	Etude paramétrique déterministe du système accordé à treize degrés de liberté	131
3.5.4	Modélisation aléatoire par Monte Carlo à un système à treize aubes	137
3.5.5	Incertitudes sur kd	137
3.5.6	Incertitudes sur F_n	152
4	Conclusion et perspectives	167
	Bibliographie	175
A	Annexes	176
A.1	Matrices de masse raideur et amortissement	177
A.2	Développement de la méthode MHBM	178

A.3	COMBIN40	180
A.4	Figures des densités de probabilité pour le système à un degré de liberté	181
	A.4.1 Incertitude sur le paramètre kd	181
	A.4.2 Incertitude sur le paramètre μ	185
A.5	Ajustement analytique des densités de probabilité du système à 13 aubes	189
	A.5.1 Densités de probabilité analytiques	189
	A.5.2 Ajustement analytique des densités de probabilité	189
A.6	Essai d'ajustement analytique des densités de probabilité du système à treize aubes pour une variation aléatoire de kd dans le domaine stick/slip à majorité slip	197
	Liste des figures	198
	Liste des tableaux	208

NOMENCLATURE

Grandeurs réelles

M	matrice masse
m	masse pour un degré de liberté
C	matrice d'amortissement visqueux
c	amortissement visqueux pour un degré de liberté
F_n	Force normale du contact
kd	Raideur tangentielle du contact
f_{nl}	Force nonlinéaire tangentielle
μ	Coefficient de frottement
θ^*	Angle du passage de l'état bloqué à l'état glissant
θ_0	Angle du passage de l'état glissant à l'état bloqué
τ	Pourcentage de stick
$E_{frottement}$	Energie dissipée par frottement sec
E_{visc}	Energie dissipée par amortissement visqueux
E_{tot}	Energie totale dissipée
f_{nlcos}	composante cosinus de la force non linéaire fonction du temps
f_{nlsin}	composante sinus de la force non linéaire fonction du temps
F_{nlcos}	composante cosinus maximale de la force non linéaire
F_{nlsin}	composante sinus maximale de la force non linéaire

RÉSUMÉ

La fatigue à nombre de cycles élevé (HCF) est un mode de défaillance courant et dangereux pour les aubages de turbomachines. Elle est induite par les efforts dynamiques élevés générés lors de résonances présentes dans la plage de fonctionnement de ces machines. Les dispositifs amortisseurs basés sur l'utilisation du frottement sec, tels que les nageoires ou les frotteurs sous-plateformes, permettent de réduire les amplitudes vibratoires, voire de repousser les fréquences de résonance hors des zones de fonctionnement. Cependant la conception de ces dispositifs reste encore largement basée sur l'empirisme et ils peuvent être la source d'un effet de désaccordage potentiellement nuisible. L'objectif ici est de développer des modélisations adaptées au traitement du problème de vibration des aubages en présence de frottement sec, ceci afin de mieux maîtriser les comportements physiques mis en jeu et donc, de mieux maîtriser leur processus de conception. Plusieurs modélisations numériques sont testées et confrontées à des résultats de référence. Une comparaison entre procédures de résolution temporelle et fréquentielle est menée et montre l'efficacité des méthodes fréquentielles. La méthode fréquentielle de la balance harmonique à plusieurs harmoniques est adaptée au problème et exploitée dans le cadre d'une étude énergétique. Cette étude conduit à une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu lors de l'aplatissement des pics en fonctionnement; elle permet de démontrer que l'alternance des états de contact glissant et bloqué est à l'origine de cet aplatissement et non la dissipation d'énergie comme souvent avancé dans la littérature. Enfin, la méthode est exploitée pour décrire le comportement des disques aubés désaccordés. La méthode de Monte Carlo est utilisée pour obtenir les caractéristiques statistiques de la réponse forcée d'un système discret, en tenant compte des variations stochastiques des paramètres du contact notamment, la charge normale, la raideur du contact et le coefficient de frottement. Les résultats obtenus permettent de mieux comprendre les effets de la nature variable de ces paramètres fondamentaux sur la dynamique d'ensemble du système non linéaire.

ABSTRACT

Fatigue with high number of cycles (HCF) is a current and dangerous mode of failure for the blades of turbo shaft engines. It is induced by the high dynamic stresses generated at resonance in the operating range of these machines. The rubbing devices based on use of dry friction, such as shrouds or under-platform dampers, make it possible to reduce the vibratory amplitudes, to even push back the resonance frequencies out of the operation zones.

However the design of these devices remains still largely based on empiricism and they can be the source of a potentially harmful effect of mistuning. The goal is to develop adapted modelling for the treatment of blades vibration problem in the presence of dry friction, this in order to better control the concerned physical behaviours and thus, to better control their process of design.

Several numerical modelling are tested and confronted with reference results. A comparison between procedures of time and frequency domains resolution is carried out and shows the effectiveness of frequential methods. The frequential method of the Harmonic Balance including several harmonics is adapted to the problem and is used within an energy study. This study leads to a better comprehension of the phenomena of peaks flattening and it shows that the alternation of the states of slipping and sticking contact is the real cause of this flattening and not energy dissipation like often advanced in the literature. Lastly, the method is exploited to describe the behaviour of mistuned bladed disks. The Monte Carlo method is used to obtain the statistical characteristics of the forced response for a lumped system, by taking account of the stochastic variations of parameters in the contact, specifically the normal load, the stiffness of the contact and the coefficient of friction. Results obtained make it possible to better include/understand the effects of the variable nature of these fundamental parameters on dynamics of nonlinear system.

INTRODUCTION



SOMMAIRE

1.1	TECHNOLOGIES ASSOCIÉES AUX AUBES ET AUX FROTTEURS	3
1.1.1	Principaux types d'aubes radiales	3
1.1.2	Conception des frotteurs	4
1.2	FROTTEMENT DE TYPE MACROSLIP ET MICROSLIP	7
1.2.1	Modèle Macroslip de Coulomb	8
1.2.2	Modèle Macroslip de Masing	9
1.2.3	Modèle Macroslip de Dahl	11
1.2.4	Modèle Microslip de Mindlin	11
1.2.5	Modèle Microslip de type Iwan	12
1.2.6	Modèle Microslip unidirectionel	12
1.2.7	Modèles Microslip bi et tri dimensionnels	17
1.2.8	Modèles plus récents	17
1.3	FORMULATION DU CONTACT FROTTANT	19
1.3.1	Traitement du contact unilatéral	20
1.3.2	Conditions de frottement	21
1.3.3	Méthodes de résolution adaptées	24
1.3.4	Synthèse	27
1.4	APPROCHE ÉLÉMENTS FINIS D'UN PROBLÈME DE CONTACT	27
1.4.1	Introduction	27
1.4.2	Modélisation	27
1.4.3	Modèle masse-ressort-frotteur	28
1.4.4	Synthèse	35
1.5	POSITIONNEMENT ET OBJECTIFS DE LA THÈSE	37

LA fatigue à nombre de cycles élevé (High Cycle Fatigue), liée à la résonance des aubes dans la plage de fonctionnement, constitue un mode de défaillance courant pour les turbomachines. En raison des impératifs forts de fiabilité, de sécurité et de flexibilité d'utilisation, il est nécessaire d'éliminer ou de réduire les fortes amplitudes de résonances qui provoquent usure des composants, défaillance par fatigue et bruit. Cet objectif est souvent atteint grâce à l'augmentation du taux d'amortissement au moyen de frottement sec. L'amortissement par frottement sec existe naturellement entre deux surfaces en contact frottant l'une contre l'autre.

Il peut être obtenu soit par ajout d'éléments frottants reliant deux aubes adjacentes, soit en plaçant des frotteurs sous la plateforme entre les aubes et le disque. Plusieurs technologies de frotteurs sont rencontrées pour les ensembles aubés de turbomachines. Ils peuvent assurer deux fonctions qui sont utilisées conjointement ou séparément :

- Apporter de la rigidité structurale globale aux ensembles aubés afin de les rendre moins sensibles au flottement aéroélastique et/ou repousser les fréquences naturelles de l'aubage au delà de la plage de fonctionnement.
- Apporter de l'amortissement par frottement sec afin de limiter les amplitudes de vibrations.

Ces systèmes frottants, lorsqu'ils sont soumis à des perturbations dynamiques externes, induisent des mouvements pouvant être intermittents traduisant une succession d'états collés (stick) et glissants (slip). Ce comportement, collé glissant nommé stick/slip, est à la base de la diminution des amplitudes de vibrations. Les facteurs les plus importants qui dictent l'efficacité de l'amortissement par frottement sec sont la masse mise en jeu, le coefficient de frottement au contact de l'élément frottant et, dans une moindre mesure, la rigidité et la géométrie des surfaces en contact.

Les systèmes dynamiques avec frottement sec se traduisent mathématiquement par des équations non linéaires. Celles-ci peuvent être résolues soit directement par intégration numérique temporelle, soit par des techniques qui travaillent dans le domaine fréquentiel. Les méthodes élément finis associées aux techniques d'intégration temporelle donnent des solutions précises. Cependant elles sont généralement lourdes et induisent des temps et des coûts de calculs prohibitifs. La méthode de la Balance Multi Harmonique MHBM (et ses dérivées) demeure l'une des méthodes fréquentielles les plus utilisées pour la résolution des systèmes non linéaires. L'avantage de ce type de méthode réside dans la transformation des équations différentielles non linéaires en des équations algébriques non linéaires, résolues plus rapidement. Les méthodes temporelles nécessitent de nombreuses itérations dans le régime transitoire avant de converger vers un régime permanent, au contraire des méthodes fréquentielles qui travaillent directement dans le domaine (régime) permanent.

En plus des phénomènes non linéaires liés au frottement des dispositifs amortisseurs, les amplitudes de réponses des structures aubagées sont grandement conditionnées par le phénomène de désaccordage. Un système est dit désaccordé quand les secteurs (aube + partie du disque) qui le composent possèdent des propriétés différentes (assemblage, géométrie, matériaux, paramètres de contact...). Il s'ensuit un comportement dynamique global de la structure partiellement ou totalement modifié par rapport à celui de la structure dite accordée, comportement pouvant entraîner des phénomènes de localisation de vibration, sources d'amplification des niveaux de déplacement.

Une approche statistique de la réponse forcée des systèmes désaccordés s'avère alors nécessaire. En effet les petites variations des propriétés des aubes et du disque ainsi que celles des paramètres de contact constituent des paramètres aléatoires qu'il est impossible de mesurer précisément et/ou de contrôler. Par conséquent, la réponse d'une aube donnée ne peut généralement pas être exprimée par une seule quantité déterministe. Elle doit être caractérisée par une fonction de densité de probabilité à travers laquelle toute l'information statistique peut être calculée, comme la moyenne, la variance de la réponse ou encore l'écart-type.

1.1 TECHNOLOGIES ASSOCIÉES AUX AUBES ET AUX FROTTEURS

1.1.1 Principaux types d'aubes radiales

Les aubes de turbomachines, en configuration radiale, sont généralement assemblées de deux manières différentes :

1. aubes libres.
2. aubes groupées.

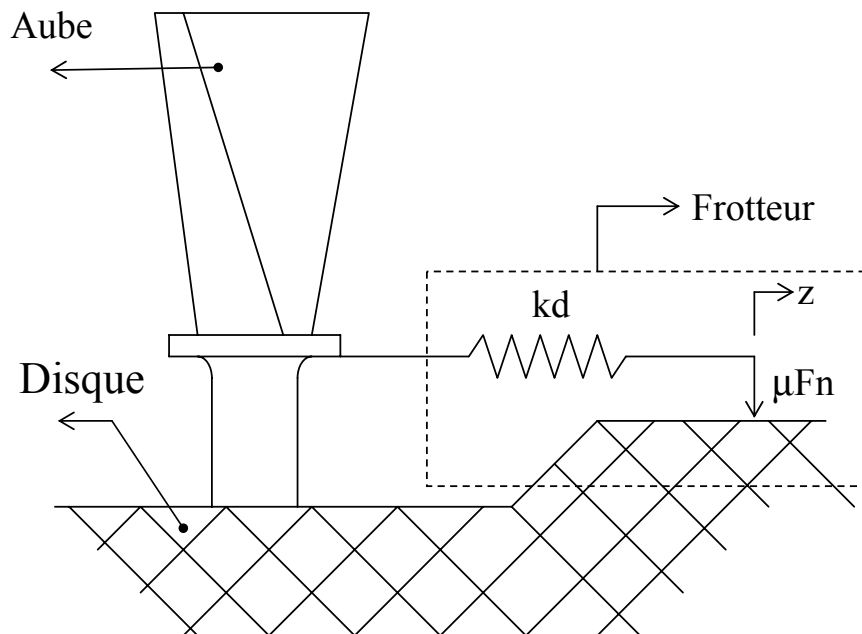


FIGURE 1.1 – Aube en présence de frotteur sous plateforme

Dans la conception **aubes libres**, chaque aube est indépendante des autres et les aubes ne sont reliées que par le disque sur lequel elles sont montées. Dans ce cas les amortisseurs par frottement sec ne peuvent être placés que sous plateformes comme schématisé fig.1.1.

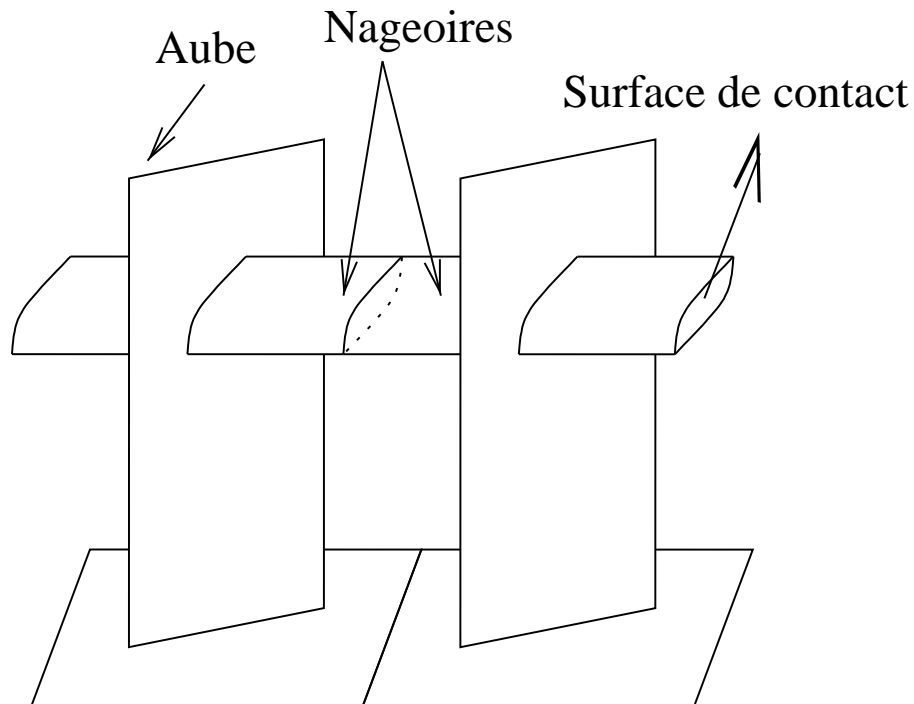


FIGURE 1.2 – Aubes groupées ensemble par des nageoires

Dans la conception **aubes groupées**, les aubes sont liées entre elles par l'adjonction de nageoires ou de fils qui les relient. Les nageoires sont habituellement utilisées pour les étages d'aubes très élancées ; elles procurent non seulement de la rigidité à l'aube, mais peuvent également apporter de l'amortissement par frottement sec.

Les nageoires sont attachées au $3/4$ de la longueur de l'aube ou bien à son extrémité. Au cours du fonctionnement, la force centrifuge induit un dévissage des aubes. Ainsi les nageoires des aubes adjacentes rentrent en contact les unes avec les autres (fig.1.2).

1.1.2 Conception des frotteurs

Pour les ensembles aubés, plusieurs sources sont associées à l'apport d'amortissement par frottement :

L'amortissement en pied de l'aube

Dans cette configuration (fig.1.3), le glissement relatif entre l'attache de l'aube et le disque peut fournir de l'amortissement. Cependant, en raison des forces centrifuges élevées qui s'appliquent en rotation, le glissement relatif est réduit au minimum et limite ainsi l'efficacité de ce type de frotteur.

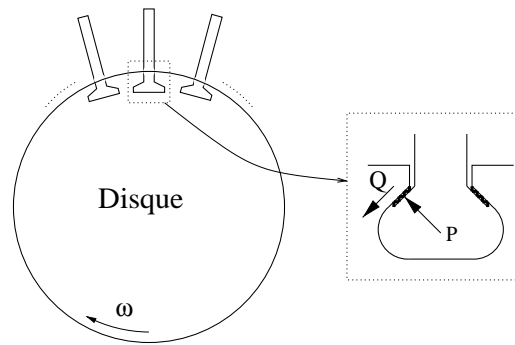


FIGURE 1.3 – L'amortissement en pied d'aube

Les nageoires inter aubes



FIGURE 1.4 – Les nageoires

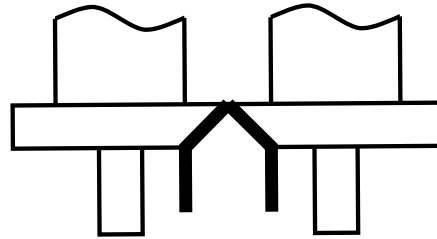
Une autre technique pour mettre en oeuvre de l'amortissement par frottement sec se base sur l'utilisation de dispositifs appelés nageoires et positionnées entre aubes adjacentes [1] (fig.1.4). Quand le rotor est au repos, un jeu existe entre les nageoires. A mesure que la vitesse de rotation augmente, les aubes sont dévibrées et les nageoires sont mises en contact les unes contre les autres et auront un mouvement relatif possible.

Les frotteurs sous-plateforme

Les frotteurs sous-plateforme [2], [3], [4], [5] sont constitués généralement d'une pièce métallique introduite entre le disque et les plateformes des aubes adjacentes. Ils sont mis en contact avec les plateformes par la force centrifuge pendant la rotation. L'atténuation des vibrations des aubes se produit quand il y a glissement relatif entre les aubes et les frotteurs. Les frotteurs sous plateforme offrent d'importants avantages, notamment un amortissement ajouté important et une grande facilité d'implantation dans les systèmes. De plus, ils n'altèrent pas les rendements des aubages.

Le frotteur de type cottage-roof [6], [7], [8] présenté sur la fig.1.5, est l'un des plus utilisés dans l'industrie. En raison de sa forme, une région rectangulaire de contact est obtenue. Des expériences ont montré que cette

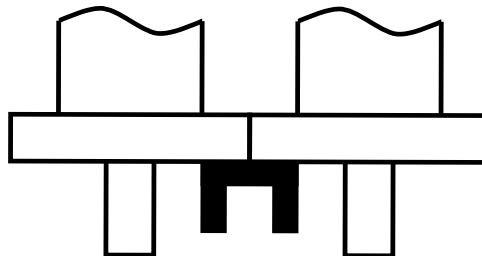
géométrie induit un mouvement de basculement, atténuant les modes de vibration en phase des aubes. Ce frotteur possède une grande rigidité normale entre les points de contact.



Cottage damper

FIGURE 1.5 – *cottage damper* [9]

Le frotteur plat (flat damper), illustré fig.1.6, produit également une région de contact rectangulaire. La différence entre le frotteur cottage roof et le frotteur plat réside dans le fait que l'interface de contact demeure ici parallèle au mouvement de vibration. Ce frotteur introduit également une grande rigidité normale entre les points de contact.



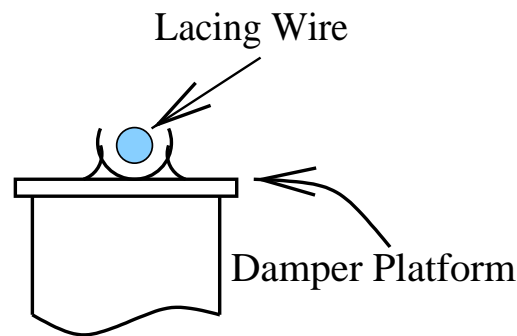
Flat damper

FIGURE 1.6 – *Flat damper* [9]

Le développement de géométries de frotteurs sous plateforme, apportant la meilleure efficacité et présentant la robustesse de fonctionnement la plus grande, reste d'actualité.

Fil amortisseur (Lacing wire)

Le principe d'utilisation du fil amortisseur, présenté sur la fig.1.7, est simple. Un fil passe par des trous percés dans chaque aube. Du fait des efforts centrifuges, le fil est mis en contact avec le haut du trou. Le mouvement relatif entre le fil et l'aube produit alors le mouvement de glissement. Ce dispositif raidit légèrement l'ensemble des aubes et est utilisé généralement pour les turbines à vapeur.

FIGURE 1.7 – *Lacing wire* [9]

Tous ces types de frotteurs mettent en jeu des phénomènes non linéaires causés par le frottement sec entre surfaces. La modélisation de ce frottement peut être simplifiée en considérant que la surface de contact est réduite à un point, et toute l'information relative à l'état du contact sera concentrée en ce point, ou bien en modélisant le contact par une approche plus complexe, qui tient compte de l'inhomogénéité de l'état de contact sur toute la surface. Ces deux approches, connues sous les noms de Macroslip et Microslip font l'objet du paragraphe suivant.

1.2 FROTTEMENT DE TYPE MACROSLIP ET MICROSLIP

Les modèles dits Macroslip [10] considèrent que tous les points de l'interface de contact ont un mouvement identique ; l'interface est alors soit en état purement bloqué soit en état purement glissant. Ces modèles peuvent être considérés comme des modèles de contact point sur point. En ce sens, ils ne permettent pas de rendre compte de situations de glissements ou adhérences partiels des surfaces.

Les modèles dits Microslip [11], [12] considèrent une interface de contact spatialement distribuée où peut se produire des situations de glissement/adhérence localisées. Ils peuvent être considérés comme des modèles de contact surface sur surface. Ainsi un contact multipoints nœud/nœud peut être utilisé pour représenter cette approche.

Même si l'approche de type Microslip est plus réaliste, l'hypothèse simplifiée du contact ponctuel envisagée dans l'approche de type Macroslip lui confère une efficacité de mise en oeuvre plus élevée, rendant ainsi son utilisation largement plus répandue pour l'étude des problèmes non linéaires impliquant du frottement sec.

Les différences de comportement entre ces deux modèles peuvent être illustrées en comparant les courbes efforts/déflexions (courbes d'hystérésis) telles que représentées fig.1.8.

Pour le modèle Macroslip fig.1.8, le contact est tout d'abord bloqué et l'interface de frottement se caractérise par une rigidité constante comme indiqué par la nature linéaire par morceaux de la courbe effort/déplacement. Pour une valeur seuil de la force de frottement, le contact devient parfaitement glissant ; ceci correspond aux segments horizontaux de la boucle d'hystérésis. Dans le cas du modèle Microslip, l'interface présente une ri-

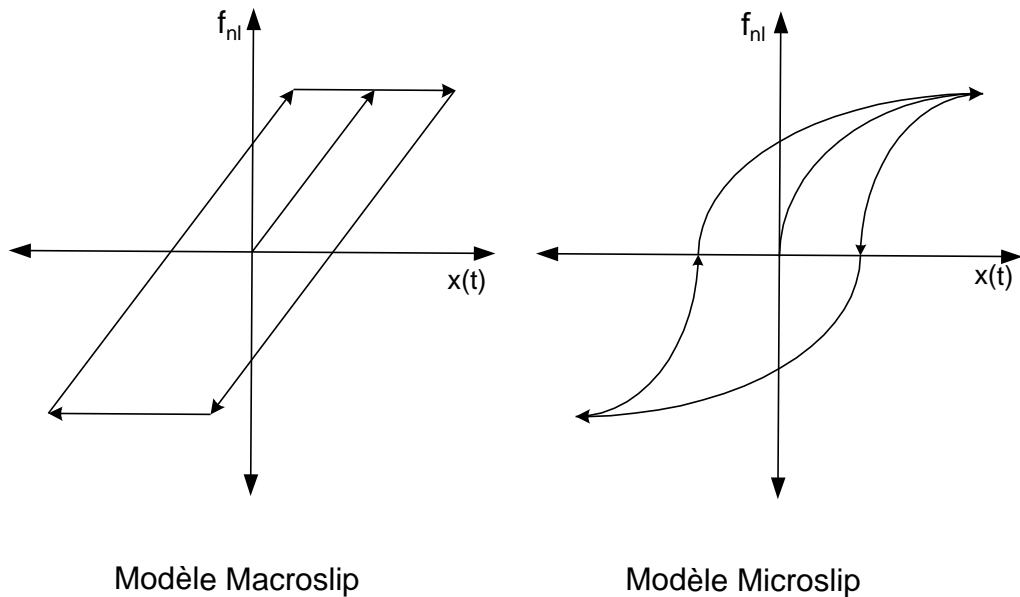


FIGURE 1.8 – Courbes Effort/déplacement pour les cas Macroslip (gauche) et Microslip (droite)

gidité maximale dans l'état pour lequel aucun glissement relatif n'existe. Dès qu'une perte d'adhérence partielle se produit, la rigidité de l'interface diminue et la courbe montre un comportement d'assouplissement (softening behavior). L'importance de la zone de glissement augmente, réduisant ainsi la rigidité de l'interface.

Pour chacune des deux formulations Macroslip et Microslip, les cycles de chargement et de déchargement des courbes effort/déplacement sont très différents. Après un premier chargement, suivi par d'un déchargement de l'effort ramené à zéro, un déplacement résiduel à l'interface reste observable (hystérésis). La surface comprise à l'intérieur des boucles d'hystérésis est représentative de l'énergie dissipée durant un cycle de chargement/déchargement.

1.2.1 Modèle Macroslip de Coulomb

Un premier niveau de modélisation du contact est donné par le modèle de Coulomb. Pour un système simple à 1 degré de liberté tel que schématisé fig.1.9, la force transverse non linéaire f_{nl} transmise par le contact se traduit mathématiquement par les relations suivantes (1.1) :

$$\begin{cases} f_{nl} < \mu_s \cdot F_n & \text{si } \dot{x}_t = 0 \\ f_{nl} = \mu_d \cdot F_n & \text{si } \dot{x}_t > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec F_n force normale au contact, μ_s et μ_d coefficients de frottement sta-

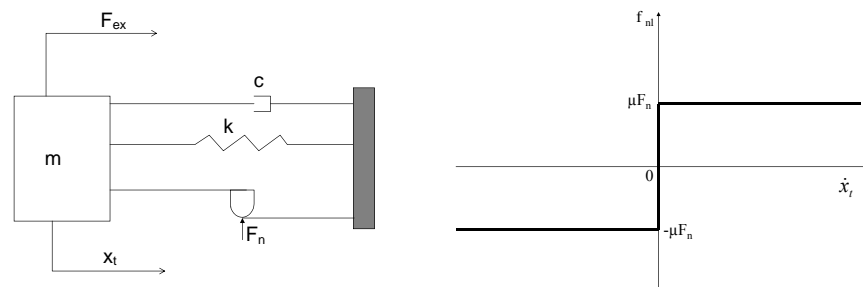
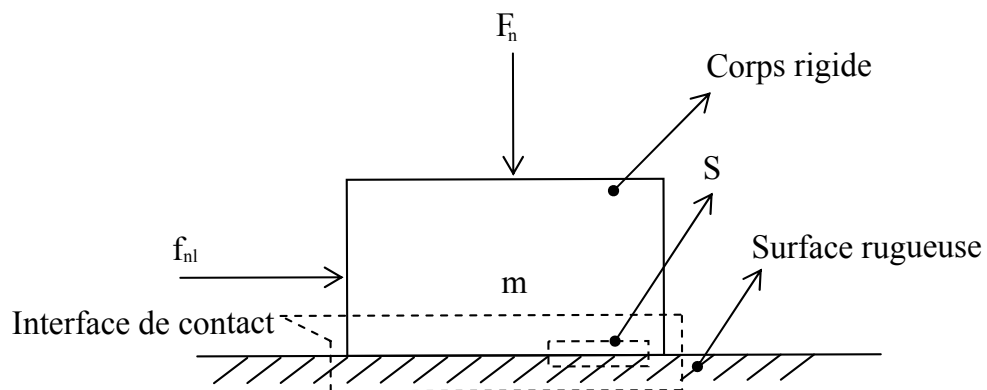


FIGURE 1.9 – Système à 1 degré de liberté :Schématisation du contact selon Coulomb

tique et dynamique. L'approche de Coulomb n'intègre pas les surfaces de contact. La loi montre simplement que la force tangentielle s'oppose au mouvement et que le coefficient de frottement statique quand le contact reste bloqué (μ_s) est différent du coefficient de frottement dynamique (μ_d) en phase de glissement. Dans ce dernier cas, la valeur de la force transmise est égale à $f_{nl} = \mu_d \cdot F_n$, alors que dans le cas bloqué, sa valeur demeure inférieure à $\mu_s \cdot F_n$, mais reste indéterminée. La loi de Coulomb est illustrée graphiquement sur la fig.1.9.

1.2.2 Modèle Macroslip de Masing

Considérons un corps rigide de masse m posé sur une surface et soumis à une force F_n dans la direction normale à la surface de contact et à une force f_{nl} dans la direction tangentielle suivant la fig.1.10. Si la force non linéaire f_{nl} est suffisamment grande, le corps rigide pourra se déplacer. Le processus du passage de l'état de repos à l'état de mouvement peut être modélisé à l'échelle microscopique par la fig.1.11.

FIGURE 1.10 – Exemple d'un corps soumis à un effort tangentiel f_{nl} en contact sur une base rugueuse

La fig.1.11 représente une vue microscopique d'une petite région S de l'interface de contact indiquée sur la fig.1.10. Quand la force tangentielle

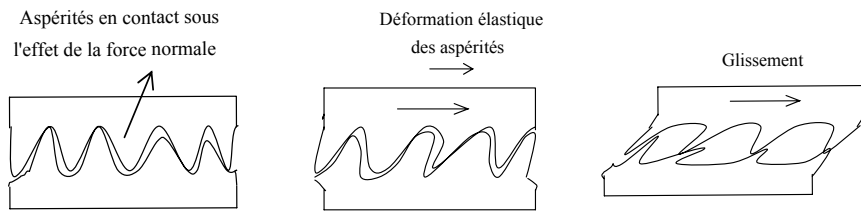


FIGURE 1.11 – Vue microscopique de l'interface de contact S : aspérités écrasées par le glissement

f_{nl} est appliquée, les aspérités en contact commencent à se déformer et le corps rigide débute un micro-mouvement. Quand la force tangentielle augmente, la situation évolue jusqu'à une configuration où les aspérités sont complètement déformées et, à partir de cet instant, le corps commence à glisser sur la surface.

Du point de vue de la modélisation, le comportement de l'interface de frottement peut être représenté par le modèle de la fig.1.12. La masse m représente le corps rigide et le bloc représente l'élément de Macroslip qui intègre l'effet de l'interaction des aspérités. La raideur kd du ressort entre la masse m et l'élément Macroslip représente la rigidité de cisaillement des aspérités. Quand un déplacement suffisamment grand x est atteint le glissement se produit. Tout en glissant, la masse est soumise à la force de frottement $\mu F_n \text{sign}(\dot{x})$, où μ représente le coefficient du frottement. Ainsi le terme z peut être considéré comme le mouvement du frotteur.

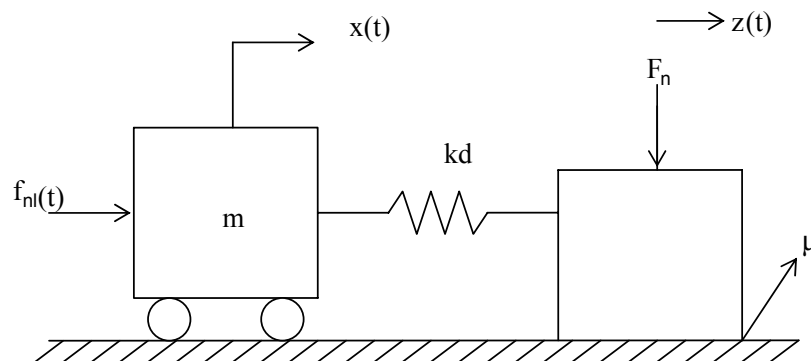


FIGURE 1.12 – Modèle de comportement de l'interface de frottement

Ce modèle de type Masing [13] permet une meilleure analyse du comportement de l'état homogène bloqué de la structure. La différence principale par rapport au modèle de Coulomb réside dans l'adjonction d'un ressort de raideur kd mis en série avec le frotteur, comme illustré figure (1.13). Les déformations induites par un mouvement tangentiel, sont, en première approximation, élastiques en raison des écrasements des aspérités de la surface de contact. Par conséquent, le ressort a un fonctionnement linéaire classique et sa valeur représente la raideur tangentielle au contact. La valeur de la force transverse en fonction du déplacement $x(t)$

est illustrée figure (1.13). L'introduction de la raideur dans la modélisation est d'une importance primordiale : pendant une période d'excitation, l'état du contact peut alterner d'un état glissant à un état bloqué et vice versa, avec pour avantage d'avoir une transition entre ces états continue [14].

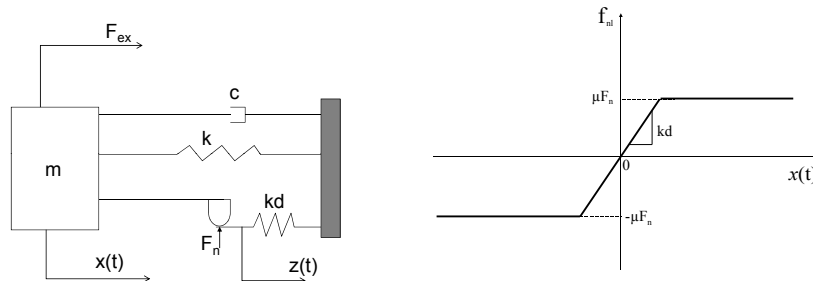


FIGURE 1.13 – Système à 1 degré de liberté : Schématisation du contact selon Masing

1.2.3 Modèle Macroslip de Dahl

Le modèle de Dahl est une généralisation du modèle de coulomb qui consiste à décrire analytiquement avec des fonctions continues les courbes des forces de restitution en fonction du déplacement au point de dissipation. Cette approche générale peut être appliquée à tous les systèmes où est présent un phénomène dissipatif quelconque. Une des premières applications a été proposée par Dahl [15] pour la caractérisation du frottement sec des roulements à billes. L'expression de la force transmise par le contact est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial F_t}{\partial x} = \sigma \left| 1 - \frac{F_t}{\mu F_n} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right|^i \operatorname{sgn} \left(1 - \frac{F_t}{\mu F_n} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \right) \quad (1.2)$$

avec σ et i paramètres du modèle à recaler par rapport aux courbes d'hystérésis obtenues expérimentalement.

Plusieurs études expérimentales [16] prouvent que le comportement des interfaces n'est pas toujours homogène, avec des états glissants qui se développent exclusivement sur une partie de la surface alors que la partie restante est caractérisée par un comportement bloqué. Pour rendre compte de ces comportements, il s'avère nécessaire de développer des modèles de contact plus complets et plus généralistes que ceux décrits précédemment, prenant en compte différents états le long de la surface de contact.

1.2.4 Modèle Microslip de Mindlin

Comme reporté par Popp [14], un premier modèle de type microslip a été proposé puis amélioré par Mindlin [12] dans les années 1940. Le modèle de Mindlin traduit d'une façon globale le comportement inhomogène de la surface de contact. L'approche est très similaire à la modélisation de type Masing, mais la différence fondamentale concerne la raideur de contact. Contrairement au modèle Macroslip, le comportement inhomogène de la surface de contact est pris en compte par l'intermédiaire d'une variation

de la raideur de contact en fonction de la force transverse (fig.1.14). Cette variation modifie la forme des boucles d'hystérésis par rapport au cas Macroslip. Le cas complètement glissant demeure représenté par une ligne droite à $\pm\mu F_n$.

En revanche, en phase bloquée, la boucle suit une ligne courbe et non plus une droite. La raideur tangentielle varie et, par conséquent, la pente le long de la ligne a-b n'est plus constante mais change en fonction de la force transverse et du déplacement. Grâce à sa simplicité et à sa facilité de programmation, ce modèle est souvent utilisé lors d'études paramétriques. Plus récemment, cette modélisation a été appliquée pour une caractérisation du contact des frotteurs sous plate-forme des aubes de turbines [17]. Bien que l'approche du problème reste très simple et qu'une bonne concordance expérimentale/numérique n'ait pas été obtenue, le modèle reproduit de façon relativement satisfaisante les courbes d'hystérésis expérimentales ainsi que le comportement réel du contact, du moins d'un point de vue phénoménologique.

1.2.5 Modèle Microslip de type Iwan

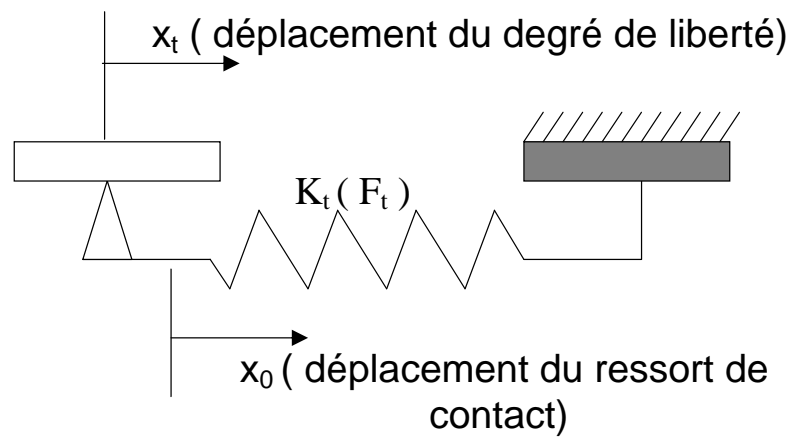
Iwan [18] a été le premier à schématiser la surface de contact non pas par un point unique mais par une ligne de contact. L'originalité de cette approche permet de traduire d'un point de vue numérique le comportement réel du stick/slip. Une combinaison d'éléments bilinéaires peut être considérée comme un modèle de contact multipoints, dans lequel tous les éléments peuvent coller ou glisser indépendamment les uns des autres. Dans ce cas, le stick/slip traduit donc l'état inhomogène de la surface à un instant donné de la vibration et pas seulement un passage entre deux états différents pendant un cycle comme dans le cas Macroslip.

Iwan assemble une combinaison d'éléments bilinéaires de type macroslip pour constituer un modèle microslip. Les éléments de base sont assemblés en parallèle fig.1.15 ou en série comme montré en fig.1.16. De cette façon, chaque ressort schématise une partie de la surface de contact. Selon les différentes valeurs de raideur de contact kd_i ou bien des forces normales $F_n(i)$ appliquées sur chaque contact, des états différents sont obtenus d'un élément à l'autre. Ceci crée donc bien des zones de surface qui restent bloquées et d'autres glissantes. Les boucles d'hystérésis obtenues par cette approche sont très similaires à celles données en fig.1.14, comme l'ont montré Sanliturk et Ewins [19].

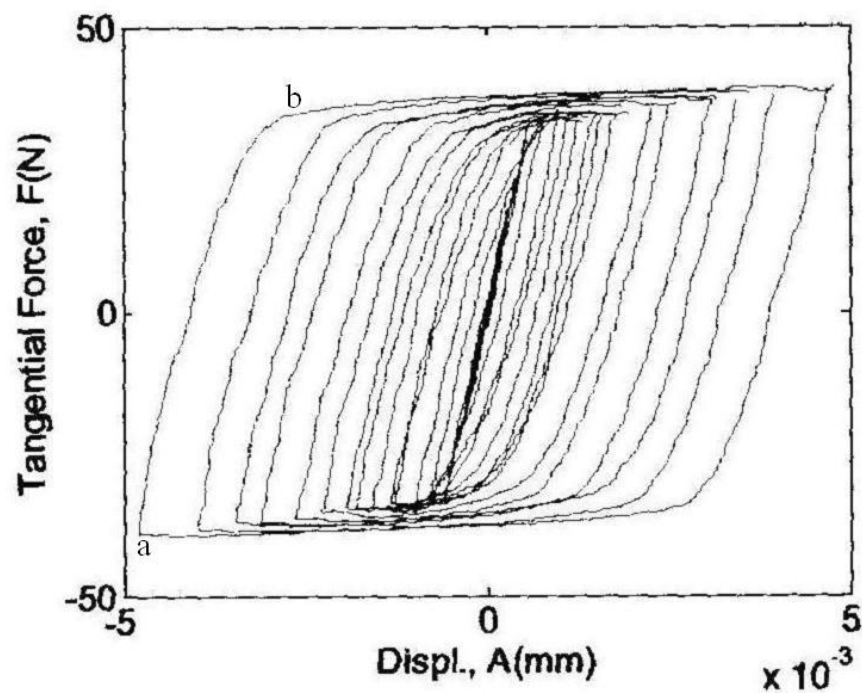
1.2.6 Modèle Microslip unidirectionnel

Menq et al. [11], [20] ont présenté un nouveau modèle et comparé leurs résultats à des résultats expérimentaux. L'approche de Menq [10] permet de passer de la modélisation discrète d'Iwan à une modélisation continue (fig.1.17). Comme le modèle d'Iwan, ce modèle rend possible différents cas de glissement partiel entre les surfaces en contact.

Le glissement peut se restreindre à une fraction de la surface, la partie



(a)



(b)

FIGURE 1.14 – Modélisation de modèle du type Microslip - Mindlin : Modélisation du contact (a), boucle d'hystérésis (b)

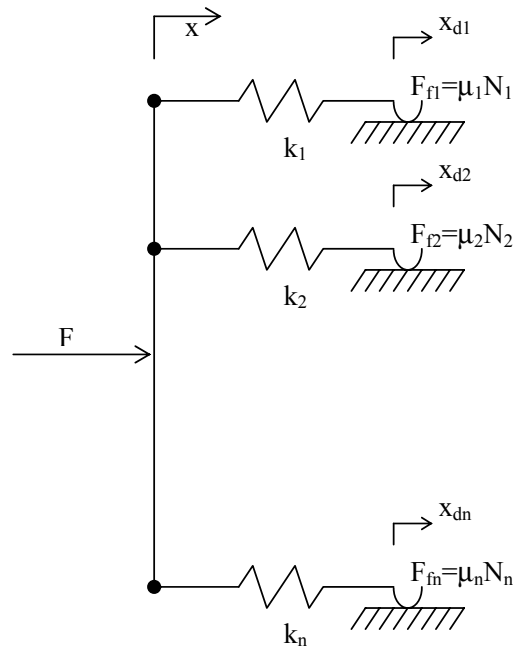


FIGURE 1.15 – Modèle de Iwan : frotteurs Macroslip en parallèle

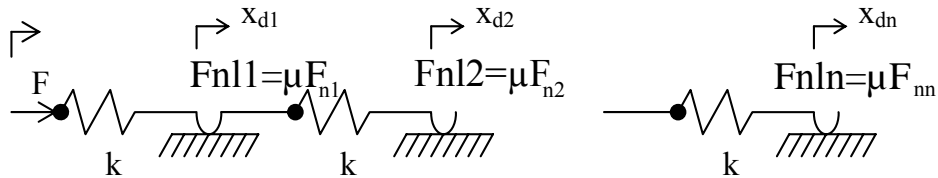


FIGURE 1.16 – Modèle de Iwan : frotteurs Macroslip en série

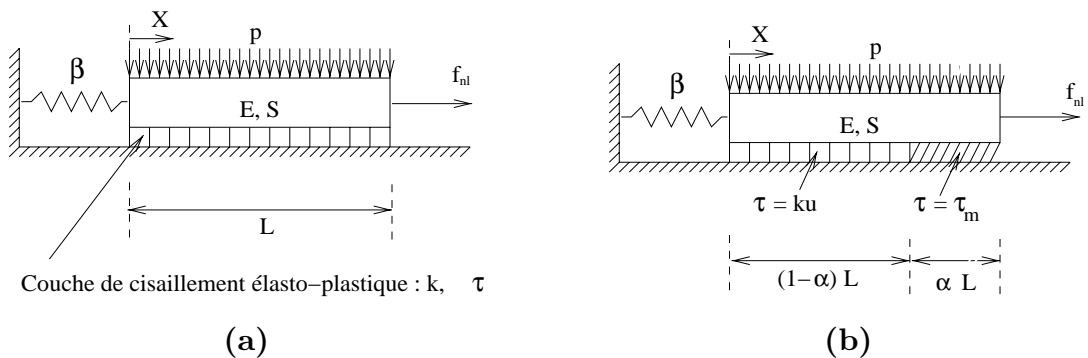


FIGURE 1.17 – Schématisation du modèle Microslip de Menq (a) à l'instant initial $t=0$, (b) en glissement partiel [11]

restante demeurant bloquée. Les différentes étapes de transition entre les états complètement bloqué et complètement glissant sont, en revanche, hiérarchisées comme suit :

- contact complètement bloqué
- une extrémité du contact commence à glisser
- les deux extrémités du contact glissent alors que la partie centrale est encore bloquée
- contact complètement glissant (toute la surface glisse)

Trois passages intermédiaires doivent donc être analysés. L'aspect théorique est clairement rappelé par [10] et les conclusions les plus importantes sont mises en exergue ci-dessous. La relation liant la force transverse f_{nl} au déplacement relatif des surfaces x ainsi que les boucles d'hystérésis associées sont illustrées fig.1.18. La raideur tangentielle équivalente pour le modèle Macroslip constitue un paramètre d'entrée, alors qu'elle devient une conséquence des caractéristiques de surface induites par les propriétés du matériau et par le rapport des surfaces en contact pour le modèle Microslip. Sa valeur reste constante pour le cas Macroslip jusqu'au glissement des surfaces alors que la valeur de la raideur tangentielle équivalente est ici déterminée par la pente variable de la courbe force-déplacement. Le module de la raideur diminue dès qu'une extrémité commence à glisser (fig.1.19) et par conséquent, les courbes représentatives de la force transverse en fonction du déplacement relatif des surfaces évoluent en forme.

Les différents points de la fig.1.18 représentent les changements d'état du contact. Du point a jusqu'au point b, le contact est complètement bloqué et la raideur est constante. Dès qu'une extrémité commence à glisser, alors que le reste de la surface est encore bloquée, la raideur équivalente du contact diminue et par conséquent la pente entre les points b et c varie en diminuant. De même, entre les points c et d, quand l'autre extrémité du contact commence à glisser (alors que la partie centrale reste bloquée) la raideur diminue encore. C'est seulement quand toute la surface en contact glisse complètement que la force transverse est déterminée par une valeur constante μF_n .

L'examen des boucles d'hystérésis montre que si les déplacements relatifs sont faibles et que seul un glissement partiel des surfaces est permis, l'évolution de la courbe n'est pas linéaire et une certaine quantité d'énergie est dissipée par frottement sec (boucle d'hystérésis 1 fig.1.18).

Les limitations de ce type de modèle concernent l'uniformité de la pression de contact et l'unidirectionnalité du contact. L'approche analytique du problème impose au glissement de s'instaurer d'abord aux extrémités des surfaces et de se propager ensuite vers la partie centrale. Le modèle de Menq est repris et généralisé par [21] dans le cas où la pression de contact n'est plus uniforme mais parabolique. Deux configurations distinctes sont considérées :

1. le mouvement relatif d'une surface sur un solide indéformable (one-bar méthode)
2. deux surfaces en contact supposées déformables. Cette méthode est

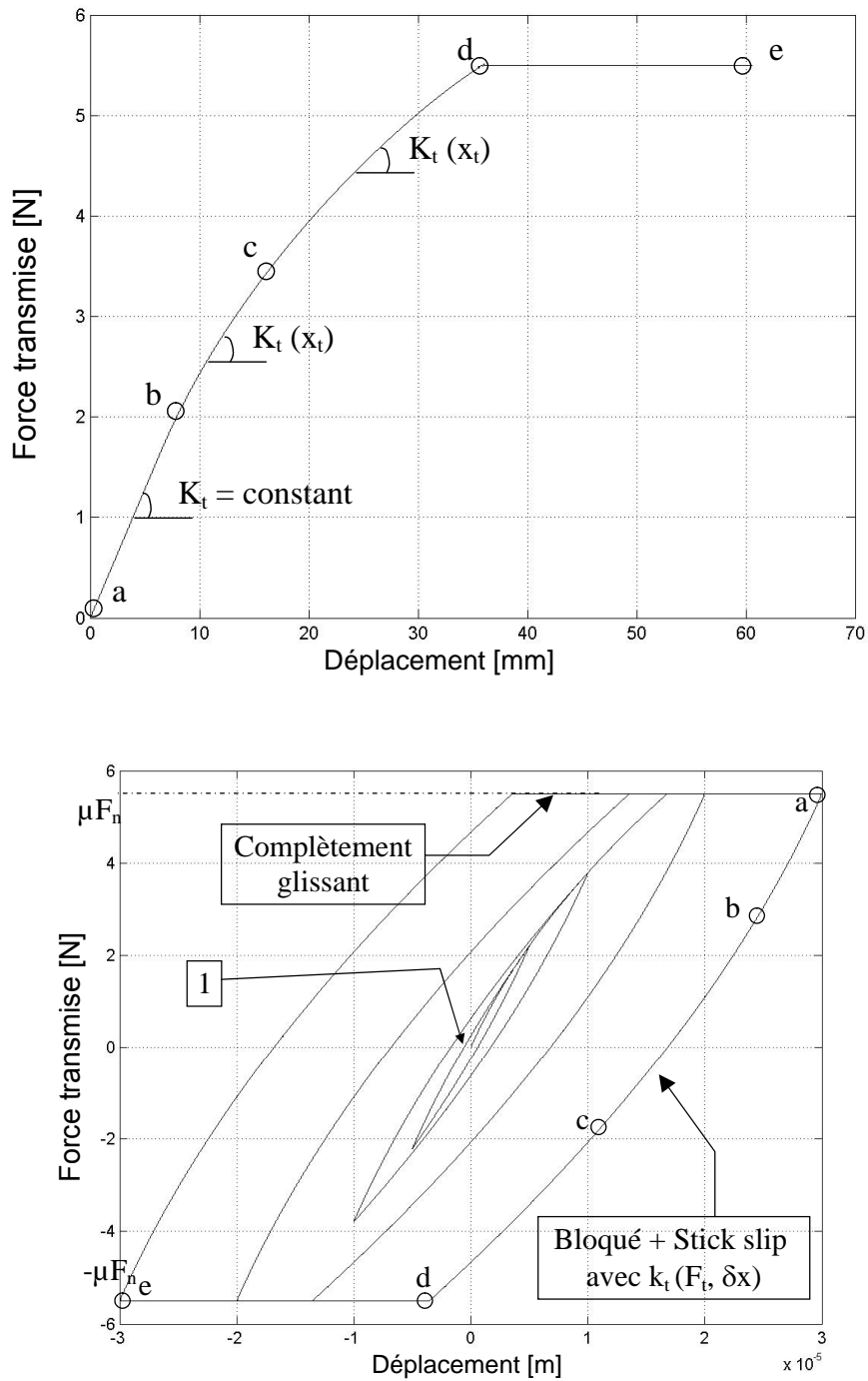


FIGURE 1.18 – Modélisation du modèle de contact du type Microslip - Mindlin : Force transmise en fonction du déplacement relatif. Boucles d'hystérésis - modèle de Menq

particulièrement apte à décrire le comportement du contact de type frotteur sous plate-forme [8] et [22].

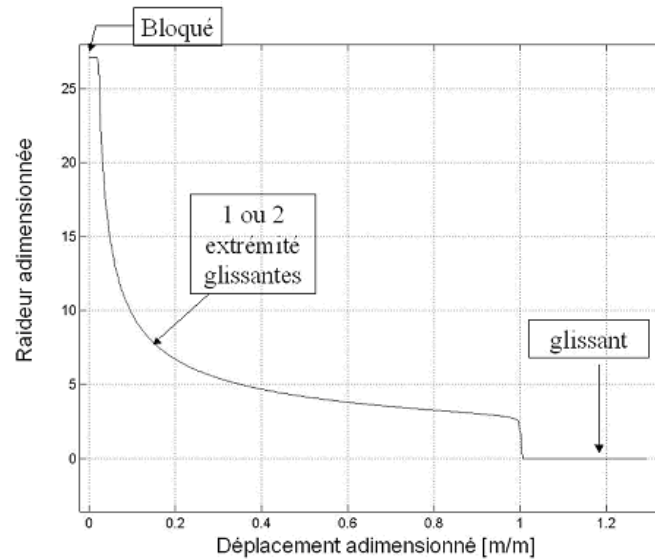


FIGURE 1.19 – Raideur équivalente - Cas Microslip du type Menq

1.2.7 Modèles Microslip bi et tri dimensionnels

Menq [23] a également analysé le problème de contact frottant bi-dimensionnel par une méthode de balance harmonique tronquée au premier harmonique. Sanliturk et Ewins [19] mettent en avant le problème de la directionnalité du mouvement relatif entre les points de contact. Ils considèrent une modélisation de type Iwan à ressorts concentrés avec des trajectoires relatives entre les deux points de contact de forme circulaire ou elliptique. La direction du frottement est identifiée par la valeur de la raideur de contact la plus faible. Le cas d'une trajectoire quelconque est traité par Petrov [24]. Les applications naturelles de cette méthode concernent essentiellement les systèmes d'aubes liaisonnées où la connaissance du mouvement relatif a une importance majeure.

1.2.8 Modèles plus récents

Les modèles les plus récents tentent de modéliser la cinématique du contact. Le modèle cinématique a pour objet d'exprimer les déplacements relatifs à l'interface de contact le long de la direction tangentielle et normale afin d'être en mesure de caractériser la boucle d'hystérésis par des critères de transition d'état du contact. Yang [7] considère un modèle de frotteur basé sur l'hypothèse selon laquelle la cinématique du frotteur est le résultat du mouvement relatif de translation pure entre les plates-formes. Il suppose également que l'amortisseur est toujours maintenu en contact avec les plates-formes de l'aube par la force centrifuge. Les déplacements relatifs sont donc censés être uniquement dans le plan de contact. Le frotteur n'a aucune propriété d'inertie, sa masse est utilisée uniquement pour déterminer la force centrifuge. D'autres développements ultérieurs [25], [4] considèrent la présence de la force d'inertie dans le modèle du frotteur ; les raideurs normale et tangentielle sont modélisées par

des ressorts reliant un point de chaque surface de plate forme au centre de gravité du frotteur. Dans [16], les régions de contact réelles sont prises en considération et les propriétés d'inertie restent concentrées au centre de gravité du frotteur. Dans [26] [6], la masse et les propriétés élastiques du frotteur sont prises totalement en considération par l'intermédiaire d'un modèle éléments finis.

Expérimentalement [27], on peut également observer une variation de la force normale autour d'une valeur moyenne imposée. La variation de la charge normale est donnée par le produit de la raideur normale au contact k_n par le déplacement normal. Bien évidemment, même si k_n est assez élevée, les déplacements sont caractérisés par des valeurs assez petites et le produit n'atteint pas normalement de valeurs importantes. En général les variations sont beaucoup plus faibles que celles de la force transverse. Cette variation est prise en compte dans les modèles les plus récents de contact et son influence au niveau des réponses forcées n'apparaît pas toujours négligeable. Les modèles introduits par Petrov et Yang [28] [29] [13] [30] [31] prennent en compte la variation de la charge normale et montrent que cette variation peut provoquer la séparation des surfaces. Ferrone [32] a testé l'efficacité de deux types de frotteurs (cylindrical et cottage-roof damper). Les deux sous structures du modèle élément finis sont couplées en utilisant des éléments de contact Macroslip bidimensionnels qui prennent en considération la perte du contact, le stick slip et la variation de la force normale de contact. Cigeroglu et al [33] ont travaillé sur un modèle Microslip développé antérieurement afin d'inclure le mouvement dans deux dimensions avec une charge normale variable. Ils ont proposé d'utiliser un nouveau modèle avec HBM, pour déterminer la réponse forcée des structures avec des conditions limites de frottement. Comme illustration pratique, ils ont cherché à exprimer la réponse d'une seule aube reliée au bâti par un contact frottant.

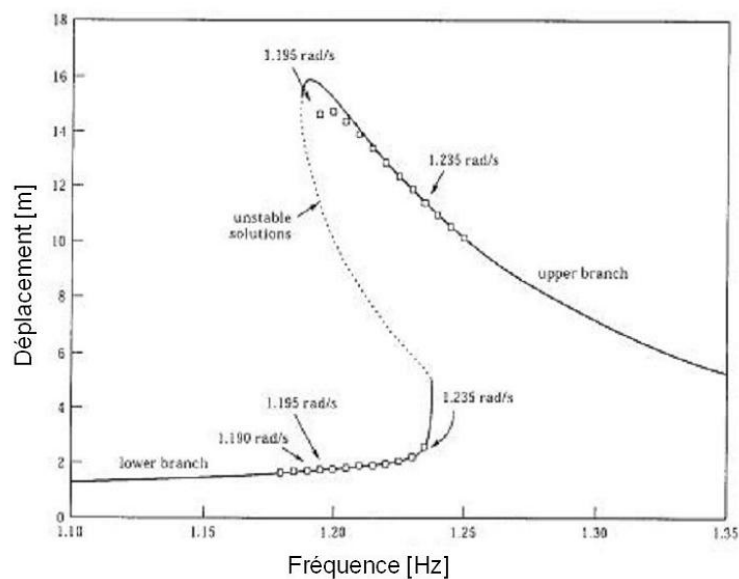


FIGURE 1.20 – Saut de l'amplitude de la réponse forcée [27]

Yang et al. [29] montrent (fig.1.20) que la présence d'une charge normale variable et la modélisation de l'état décollé du contact peuvent amener une discontinuité de la fonction de réponse fréquentielle. Le système possède ainsi plusieurs réponses pour une même fréquence d'excitation. Parmi les réponses possibles, certaines sont stables et d'autres pas. Pendant un balayage sinusoïdal, l'amplitude de la réponse forcée saute entre deux branches stables et une faible variation de la fréquence d'excitation peut dans ce cas causer une forte variation des amplitudes. Des résultats similaires ont été obtenus par Petrov [31].

Pour les modèles de contact $2D$ et $3D$ considérant la perte de contact et la variation de la force normale, il est nécessaire de connaître les raideurs tangentielle et normale ainsi que les coefficients de frottement. Il existe un certain nombre d'études basées sur la prédiction expérimentale et numérique de ces valeurs [34] [35] [36].

Après avoir décrit les principales modélisations du contact, nous allons maintenant nous attacher à décrire la théorie générale du contact frottant.

1.3 FORMULATION DU CONTACT FROTTANT

L'objectif de ce paragraphe est une présentation théorique synthétique des outils de base associés aux problèmes de contact frottants. Ce rappel sera suivi par une application numérique sur un modèle disque aubé avec nageoires dans le code éléments finis ANSYS et WORKBENCH.

Les ingrédients de base nécessaires au traitement des problèmes de contact avec frottement sont comme le note Zhong [37] :

- Une formulation variationnelle qui permet la discrétisation du problème en éléments finis.
- Une formulation des éléments qui permet de calculer les contributions élémentaires et le vecteur de chargement.
- Une modélisation du matériau qui détermine les relations contraintes déformations.
- Une loi de frottement et une méthode de contact contraint qui fournit des moyens de calculer les forces de contact inconnues.
- Un algorithme de recherche de contact qui recherche les nœuds potentiellement en contact et détermine la position des nœuds de contact avec précision.
- Une méthode d'intégration temporelle qui réalise l'intégration en temps.
- Une linéarisation et une procédure itérative qui transforment un problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires.

Deux relations régissent le contact entre deux structures :

- La relation de contact unilatéral qui traduit la non interpénétrabilité entre les corps solides.
- La relation de frottement qui régit la variation des efforts tangentiels dans le contact, (par exemple la loi de Coulomb).

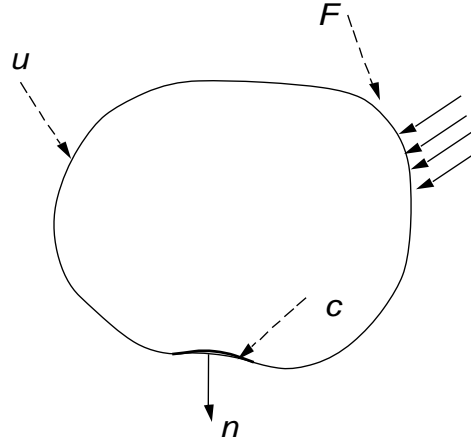


FIGURE 1.21 – Exemple de corps élastique Ω en contact sur une fondation rigide

1.3.1 Traitement du contact unilatéral

Soit un corps élastique dans l'espace soumis à un effort normal et en contact avec une base rigide. L'équation du mouvement du corps élastique en milieux continus s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x, t)}{\partial x_j} + b_i(x, t) = \rho a_i(x, t) \quad (1.3)$$

où $i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3$, t est le temps, x le vecteur position, $u(x, t)$ le champ de déplacement et $a_i(x, t)$ un champ d'accélération du corps. $\sigma_{ij}(x, t)$ est le tenseur de contrainte de Cauchy, $b_i(x, t)$ est la i^{ime} composante du vecteur force exercée sur le corps par unité de volume et $\rho a_i(x, t)$ est la force d'inertie.

La surface limite du volume Ω ou bien frontière, est notée par Γ . Elle est constituée de trois parties distinctes : $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c$, avec Γ_u la partie de la frontière où les déplacements sont imposés, Γ_f la partie où les efforts externes sont appliqués, Γ_c la partie où le contact peut survenir.

La loi de comportement élastique relie le tenseur des contraintes au tenseur de déformations. En élasticité linéaire, la relation contrainte déformation pour le matériau est donnée par la loi généralisée de Hooke telle que : $\sigma(u) = C\varepsilon(u)$

$$\sigma_{ij}(x, t) = c_{ijkl} e_{kl}(x, t) \quad (1.4)$$

avec c_{ijkl} le tenseur d'élasticité du matériau généralement symétrique, ce qui réduit notablement le nombre d'inconnues qui le décrivent : $c_{ijkl} = c_{klij}$

Les conditions aux limites associées au problème sont :

- Conditions aux limites géométriques en déplacement, [37] appelées conditions de Dirichlet :

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t) \quad (1.5)$$

avec $x \in \Gamma_u$.

- Conditions aux limites en effort (force normale), appelées conditions de Neumann :

$$\sigma_{ij}(x, t)N_j = \bar{q}_i(x, t) \quad (1.6)$$

avec $x \in \Gamma_f$ et où $\bar{u}_i(x, t)$ et $\bar{q}_i(x, t)$ sont respectivement les déplacements et les efforts externes imposés, et N_j sont les composantes du vecteur unité de la normale dirigée vers l'extérieur de la surface limite Γ_f .

- Conditions initiales que doit satisfaire le champ de déplacement $u(x, t)$ exprimées par :

$$u(x, 0) = \bar{u}(x) \quad (1.7)$$

$$v(x, 0) = \bar{v}(x) \quad (1.8)$$

avec $x \in \Omega$. Sur la frontière Γ_c la condition à satisfaire est que la contrainte normale de contact doit être compressive (contact maintenu) et que la pénétration de cette frontière dans la base est interdite.

- Conditions de non pénétration :

$$g(x, t) = g(x) - u(x, t) \cdot N \geq 0 \quad (1.9)$$

avec $x \in \Gamma_c$. $g(x, t)$ jeu (gap) entre les surfaces de contact, $g(x)$ valeur initiale de $g(x, t)$

- Effort de compression :

$$q_1(x, t) = q_c(x, t) \cdot N \leq 0 \quad (1.10)$$

$q_1(x, t)$, pression de contact, est la composante normale de $q_c(x, t)$ dans la direction normale dirigée vers l'extérieure de la surface de contact, $q_c(x, t)$ étant la force de traction au contact.

1.3.2 Conditions de frottement

Pour le contact frottant, lorsque le frottement est modélisée par la loi de coulomb au niveau de la surface, la composante tangentielle de la force de traction au contact, notée par $q_t(x, t)$, doit satisfaire la condition suivante :

$$q_t(x, t) \leq \mu q_1(x, t) \quad (1.11)$$

avec $x \in \Gamma_c$, et μ coefficient de frottement. La vitesse tangentielle de la frontière en contact (ou la vitesse relative du corps 1 par rapport au corps 2), nommée $v_t(x, t)$ doit satisfaire la condition :

$$v_t(x, t) = 0 \quad \text{si } q_t(x, t) < \mu q_1(x, t) \quad \text{contact bloqué} \quad (1.12)$$

$$v_t(x, t) = -\lambda q_t(x, t) \quad \text{si } q_t(x, t) = \mu q_1(x, t) \quad \text{contact glissant} \quad (1.13)$$

avec λ scalaire non négatif.

Les équations de (1.9) à (1.13) caractérisent les conditions de contact. Les quantités utilisées dépendent explicitement du temps et de x .

Deux approches sont généralement retenues pour traiter ce problème [37] [38]. La première consiste à traiter le contact par l'intermédiaire d'un problème de minimisation se basant sur une inégalité variationnelle. La seconde plus intuitive est régie par une égalité variationnelle. La formulation variationnelle permet une discrétisation en domaine des éléments finis et se base sur une approche énergétique ou sur le principe du travail virtuel plus adapté aux problèmes de contact-impact. Il s'agit de trouver un champ de déplacement tel que les équations précédentes soient satisfaites. En appliquant le principe du travail virtuel, nous supposons que la force de contact n'existe que sur les frontières effectivement en contact. Soit Γ_c la frontière du contact, alors :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{b}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{q}_i \delta u_i dS + \int_{\Gamma_c} q_1 \delta u_1 d\Gamma \quad (1.14)$$

La formulation variationnelle établie sur le domaine matériel, il convient de discrétiser les différentes expressions virtuelles sur ce domaine. Pour cela on décompose le domaine Ω en sous-domaines Ω_j (éléments finis). Le domaine correspond alors à l'assemblage de tous les sous-domaines Ω_j de la structure : $\Omega = \cup \Omega_j$. Une représentation de la discrétisation spatiale en éléments quadrangles à 4 nœuds est donnée par la fig. (1.22).

Dans chaque sous-domaine, les approximations nodales du champ de déplacements u , du champ de vitesses \dot{u} et du champ d'accélération \ddot{u} sont définies respectivement par les équations de (1.15) à (1.17).

$$u_j = \sum_k N^k u_j^k \quad (1.15)$$

$$\dot{u}_j = \sum_k N^k \dot{u}_j^k \quad (1.16)$$

$$\ddot{u}_j = \sum_k N^k \ddot{u}_j^k \quad (1.17)$$

où N^k représente les fonctions d'interpolation (fonctions de forme) des déplacements au nœud k . Les vecteurs u_j^k , \dot{u}_j^k et \ddot{u}_j^k représentent respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération du nœud k de l'élément Ω_j . La forme discrétisée de la formulation variationnelle faible de l'équation d'équilibre est ainsi obtenue à l'instant t :

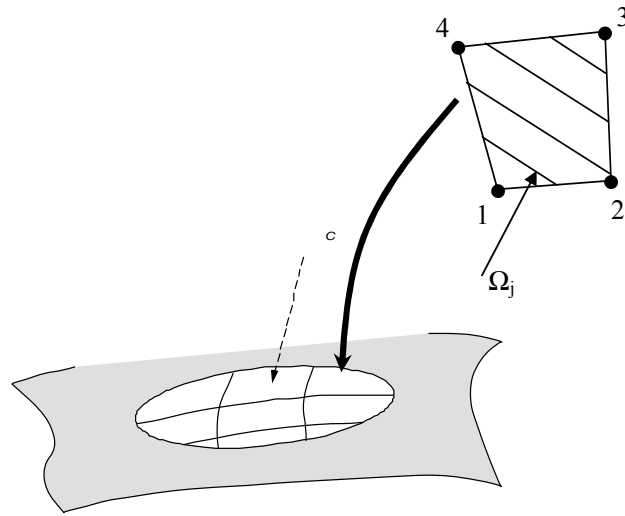


FIGURE 1.22 – Représentation de la discrétisation spatiale en éléments quadrangles à 4 nœuds

$$M\ddot{u}_t + C\dot{u}_t + F_t^{\text{int}} = F_t^{\text{ext}} \quad (1.18)$$

M représente la matrice de masse :

$$M = A \int_j \rho N N^T d\Omega_j \quad (1.19)$$

C est la matrice d'amortissement qui peut être définie de différentes façons. Elle peut décrire l'amortissement visqueux du matériau et peut aussi être exprimée par un amortissement de Rayleigh, la matrice d'amortissement est alors une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur : $[C] = \alpha_R[M] + \beta[K]$ avec les paramètres α_R et β qui doivent être déterminés expérimentalement. Dans cette étude, c'est l'amortissement du matériau que la matrice C représentera.

F_t^{int} représente le vecteur des forces internes :

$$F_t^{\text{int}} = A \int_j B^T \sigma d\Omega_j \quad (1.20)$$

et F_t^{ext} est le vecteur des forces externes :

$$F_t^{\text{ext}} = A \int_j N^T f d\Omega_j + A \int_j N^T F dS_j + A \int_j N^T F_c dS_j \quad (1.21)$$

Enfin, A_j symbolise le passage des intégrales élémentaires aux intégrales sur l'ensemble du maillage et B est la matrice des gradients B^k des fonctions de forme N^k :

$$B^k = \frac{\partial N^k}{\partial x} \quad (1.22)$$

Dans la suite des méthodes destinées à gérer le contact frottant seront exposées.

1.3.3 Méthodes de résolution adaptées

Les problèmes de contact se caractérisent par des contraintes de contact qui doivent être imposées sur les frontières. Il existe différentes méthodes permettant de gérer le contact entre deux solides ou entre un solide et une surface rigide, comme par exemple la méthode de pénalisation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la méthode mixte ou hybride .

La fonctionnelle de l'énergie est représentée par :

$$\Pi(u_t) = \frac{1}{2} u_t^T K u_t - u_t^T F \quad (1.23)$$

avec u_t est le vecteur des déplacements nodaux K est la matrice de raideur globale et F est le vecteur force globale.

Le problème alors consiste à minimiser $\Pi(u_t)$.

1.3.3.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange [37] [39] permet de respecter la condition de non pénétration et d'éviter les problèmes liés au choix des coefficients de pénalisation. Par contre elle nécessite l'introduction d'inconnues supplémentaires (multiplicateurs de Lagrange) et d'autre part elle nécessite généralement la définition d'une surface maîtresse et d'une surface esclave. Les conditions de contact sont imposées aux nœuds esclaves qui ne doivent pas pénétrer dans le domaine délimité par les surfaces maîtres. L'introduction des multiplicateurs de Lagrange modifie la fonctionnelle de l'énergie totale à l'instant t de la façon suivante :

$$\Pi_L(u_t) = \Pi(u_t) + {}^T ML \lambda_t \cdot g_t \quad (1.24)$$

${}^T ML \lambda_t = [{}^T ML \lambda_t^n, {}^T ML \lambda_t^t]$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à chaque nœud en contact, u_t est le vecteur des déplacements nodaux. g_t correspond au vecteur de pénétration nodale à l'instant t lorsque le nœud est autorisé à pénétrer. La minimisation de la fonctionnelle $\Pi_L(u_t)$ donne :

$$\begin{cases} \delta \Pi(u_t) + \langle {}^T ML \lambda_t \rangle \delta \{g_t\} = 0 \\ \delta \langle {}^T ML \lambda_t \rangle \{g_t\} \leq 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

La formulation matricielle semi-discrétisée de l'équation d'équilibre est donnée par l'équation (1.26) à l'instant $t + \Delta t$:

$$\begin{cases} M\ddot{u}_{t+\Delta t} + C\dot{u}_{t+\Delta t} + F_{t+\Delta t}^{\text{int}} + G_{t+\Delta t}^{\text{dep}} \cdot {}^{ML}\lambda_{t+\Delta t} - F_{t+\Delta t}^{\text{ext}} = 0 \\ G_{t+\Delta t}^{\text{dep}} \{X_t + u_{t+\Delta t} - u_t\} \leq 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

avec $G_{t+\Delta t}^{\text{dep}}$ une matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires des contraintes de contact en déplacement et $\{X_t + u_{t+\Delta t} - u_t\}$ vecteur des coordonnées à $t + \Delta t$. La résolution de ces équations permet de déterminer les incréments de déplacement ainsi que les multiplicateurs de Lagrange. Ces derniers correspondent aux forces de contact agissant sur les nœuds esclaves [38] [39] et sont tels que :

$$[F_{t+\Delta t}^c = G_{t+\Delta t}^{\text{dep}} \cdot {}^T \cdot {}^{ML}\lambda_{t+\Delta t} \quad (1.27)$$

Cette méthode présente l'avantage de satisfaire parfaitement les conditions de contact et ne nécessite pas l'introduction de paramètres réglables.

La méthode de Lagrange perturbée consiste à ajouter des termes sur la fonctionnelle d'énergie de la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$\Pi_{pL} = \Pi_L + \frac{1}{2} \Lambda^T \varepsilon \Lambda \quad (1.28)$$

où ε est une matrice diagonale avec les éléments suivants $\varepsilon_{ii}, i = 1, L$ qui sont les paramètres de perturbation.

1.3.3.2 Méthode de pénalisation

Cette méthode permet de gérer le contact entre un nœud frontière d'un corps élastique et une surface. Cette surface peut soit être une surface rigide (contact élastique-rigide) soit être le segment d'un élément d'un autre corps élastique (contact élastique-élastique). Le problème considéré est présenté fig.1.23. Soit un segment $[AB]$ du corps élastique 1 (ou de la surface rigide 1) de normale rentrante \vec{n} et de composante tangentielle \vec{t} et M un nœud du corps élastique 2 de coordonnées $[{}^M n_t, {}^M t_t]^T$ à l'instant t dans le repère (\vec{n}, \vec{t}) . Soit P le projeté orthogonal de M sur le segment $[AB]$ et de coordonnées dans le repère (avec ${}^P t_t = {}^M t_t$). Une légère pénétration g_t^n du nœud M dans le corps 1 (ou la surface rigide 1) à l'instant t est autorisée lorsqu'il y a contact. Cette pénétration est définie à l'instant t par :

$$g_t^n = ({}^M n_t - {}^P n_t) > 0 \quad (1.29)$$

Cette méthode ne respecte donc pas les conditions de Signorini puisqu'une légère pénétration est admise. Pendant un incrément de temps Δt , le nœud $M_{t-\Delta t}$ se déplace en M_t . Le projeté orthogonal $P_{t-\Delta t}$ du nœud $M_{t-\Delta t}$ sur le segment $[AB]$ se déplace donc au point P_t . g_t^n correspond à la pénétration normale du nœud dans le corps 1 à l'instant t et g_t^t est l'évaluation de l'incrément de déplacement tangentiel du nœud entre les instants $t - \Delta t$ et t .

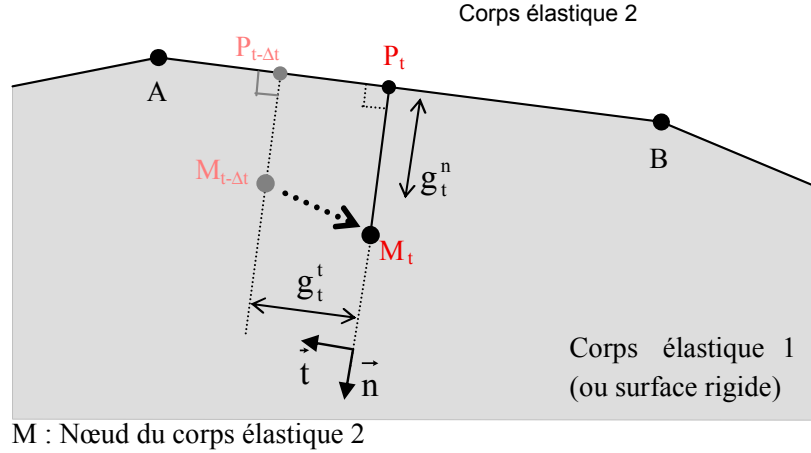


FIGURE 1.23 – Représentation du problème pour une résolution par la méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation consiste à augmenter la fonctionnelle de l'énergie totale par une fonction de pénalisation :

$$\Pi_p(u_t) = \Pi(u_t) + \frac{k}{2} g_t \cdot g_t \quad (1.30)$$

Avec $\Pi(u_t)$ la fonctionnelle de l'énergie totale associée aux corps en contact, u_t le vecteur des déplacements nodaux à l'instant t , $g_t = [g_t^n, g_t^t]^T$ le vecteur de la pénétration nodale à l'instant t et k le coefficient de pénalisation. En minimisant la fonctionnelle $\Pi_p(u_t)$, on obtient l'équation variationnelle discrète :

$$\delta \Pi(u_t) = \Pi(u_t) + k^T g_t \cdot \delta g_t \quad (1.31)$$

Il est alors possible de calculer les forces de contact normale (F_t^n) et tangentielle (F_t^t) à l'instant t . Celles-ci sont proportionnelles à g_t^n et à g_t^t .

$$F_t^n = F_{t-\Delta t}^n + k^n g_t^n \quad (1.32)$$

$$F_t^t = F_{t-\Delta t}^t + k^t g_t^t \quad (1.33)$$

Ces forces de contact correspondent aux réactions dues à deux ressorts fictifs introduits entre les entités en contact (nœud M et segment [AB]). k^n et k^t sont les deux coefficients de pénalisation (ou raideur de contact), le premier agit selon la direction normale au contact suivant et le deuxième agit selon la direction tangente.

Cette méthode est facile à mettre en oeuvre dans un code d'éléments finis que ce soit avec un schéma d'intégration explicite ou implicite. Contrairement à la méthode des multiplicateurs de Lagrange [37], elle ne nécessite pas l'ajout de variables supplémentaires. Le principal désavantage de cette méthode est le choix des coefficients de pénalisation (ou raideur de contact)

qui ont une influence directe sur les résultats. En effet, une faible valeur de ces coefficients conduit à de grandes valeurs de pénétration qui ne sont pas acceptables physiquement tandis qu'une valeur élevée tend à rigidifier le système et engendre des oscillations et des problèmes de convergence numérique [39], [37]. Il est donc nécessaire de choisir une valeur appropriée pour les coefficients de pénalisation.

1.3.4 Synthèse

La méthode de Lagrange augmentée combine la méthode des multiplicateurs de Lagrange et celle de pénalisation. La méthode de Lagrange est naturellement la plus précise parmi les méthodes citées. La méthode de pénalisation introduit des pénétrations pouvant être contrôlées en changeant les paramètres de pénalité, donc l'exactitude de la solution dépend du choix de ces paramètres. Des paramètres de pénalité très importants causent des problèmes numériques sévères dans le processus de résolution et parfois rendent la résolution impossible. La méthode des multiplicateurs de Lagrange introduit de nouvelles inconnues, ce qui augmente la dimension du système à résoudre. La méthode des pénalités n'introduit pas de nouvelles inconnues et donc elle n'augmente pas la taille du système à résoudre.

1.4 APPROCHE ÉLÉMENTS FINIS D'UN PROBLÈME DE CONTACT

1.4.1 Introduction

Une fois les bases théoriques établies il est apparu important de réaliser une étude préliminaire afin d'évaluer les modélisations du contact disponibles dans les codes éléments finis commerciaux de calcul des structures. Une série d'analyses successives ont également permis une meilleure connaissance des phénomènes physiques qui ont lieu entre les contacts surface contre surface. Le passage par **une modélisation Macroslip** en éléments finis **unidimensionnels puis tridimensionnels** permet la mise en évidence des phénomènes classiques associés aux systèmes non linéaires frottants, comme l'aplatissement des pics de résonance. Cette mise en évidence sera ici réalisée à partir d'un ensemble de deux aubes simplifiées avec nageoires. Ces aubes sont issues d'un système cyclique plus complexe de type disque aubé avec 13 aubes et frotteurs de type nageoires. Ensuite une modélisation reflétant la physique du contact surface sur surface est traitée et les résultats obtenus sont confrontés aux résultats issus du modèle Macroslip. Les modèles numériques linéaires sont recalés par rapport à des résultats expérimentaux [40].

1.4.2 Modélisation

Trois types de modélisations basées sur l'utilisation du logiciel ANSYS ont été testées :

- Modélisation de chaque aube par des éléments discrets masse et ressort recalés sur la première fréquence de flexion des aubes et modélisation

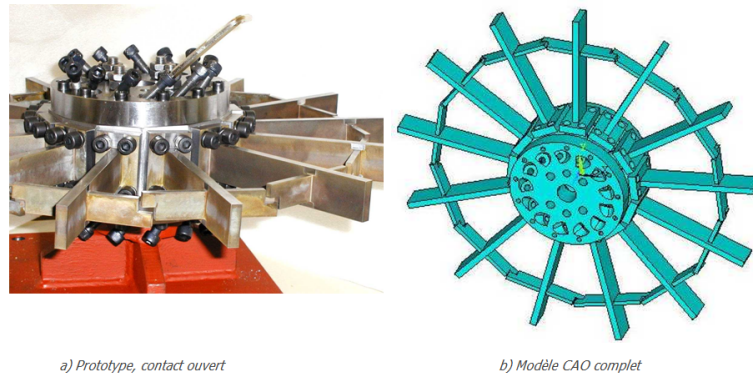


FIGURE 1.24 – Prototype expérimental existant au LaMCoS [40]

du comportement du frotteur par un modèle Macroslip de Menq. Cette modélisation utilise un élément de contact point sur point.

- Modélisation basée sur la théorie de poutres associée à un frotteur de type Macroslip. Le modèle est ici recalé sur les deux premières fréquences de flexion de chaque aube.
- Modélisation tridimensionnelle du système à deux aubes et du contact par une surface maître et une surface esclave.

Seuls les principaux résultats obtenus avec les modélisations discrètes et 3D seront présentés ici.

1.4.3 Modèle masse-ressort-frotteur

L'élément de contact utilisé est le COMBIN40 qui est un élément de contact nœud sur nœud de type Macroslip qui traduit classiquement le frottement sans prendre en compte ni les surfaces de contact ni les matériaux mis en jeux.

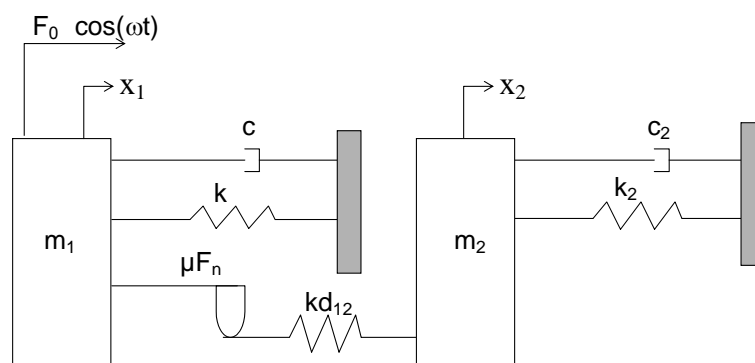


FIGURE 1.25 – Système masse-ressort (2 aubes avec 1 frotteur)

La fig.1.25 montre la modélisation de chaque aube par un élément masse-ressort, recalés sur la première fréquence de l'aube dans le plan, fréquence

identifiée expérimentalement à 251Hz [40].

Les courbes de réponses fréquentielles sont construites point par point (fig.1.26, 1.27 et 1.28). Les déplacements sont obtenus par un calcul de réponse temporelle, une fois le régime permanent établi. Il est clair que la finesse de la courbe dépend du nombre de fréquences considérées dans le calcul. Les courbes suivantes ont été obtenues pour un système accordé (deux mêmes masses et raideurs) et pour une excitation ponctuelle sur l'aube numéro 2 (masse 2).

Pour des forces normales faibles ($F_n = 1\text{N}$) on distingue un pic à 250Hz qui traduit une réponse avec contact glissant. Pour les forces variant entre $60\text{N} < F_n < 200\text{N}$, le contact est de type stick/slip avec un second pic compris entre 250 et 290 Hz. Pour un chargement supérieur, le contact est stick/slip mais à majorité bloqué.

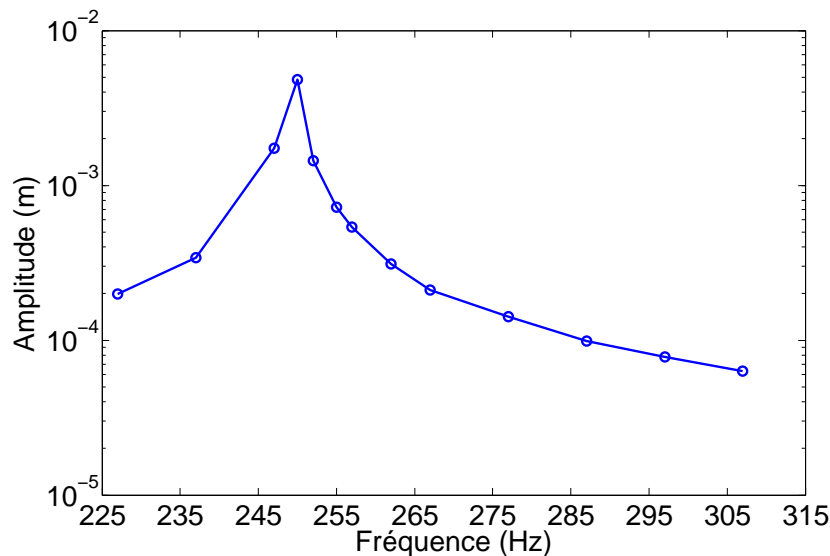
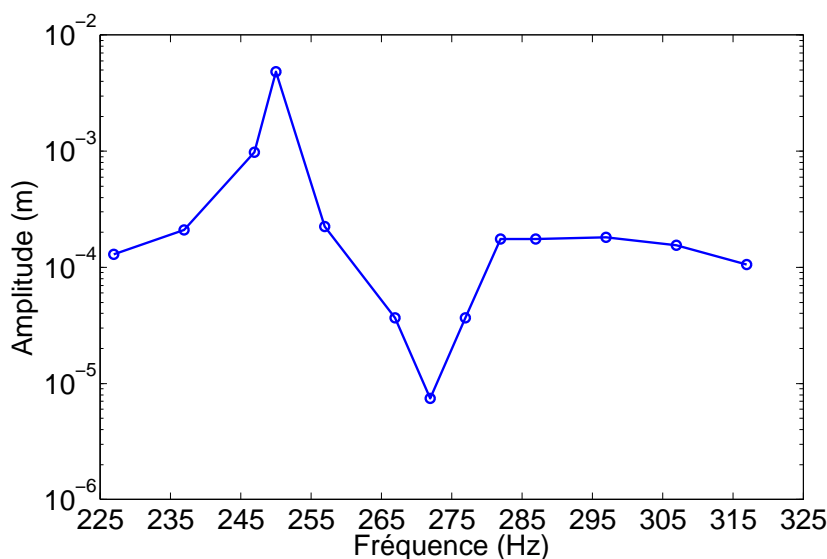
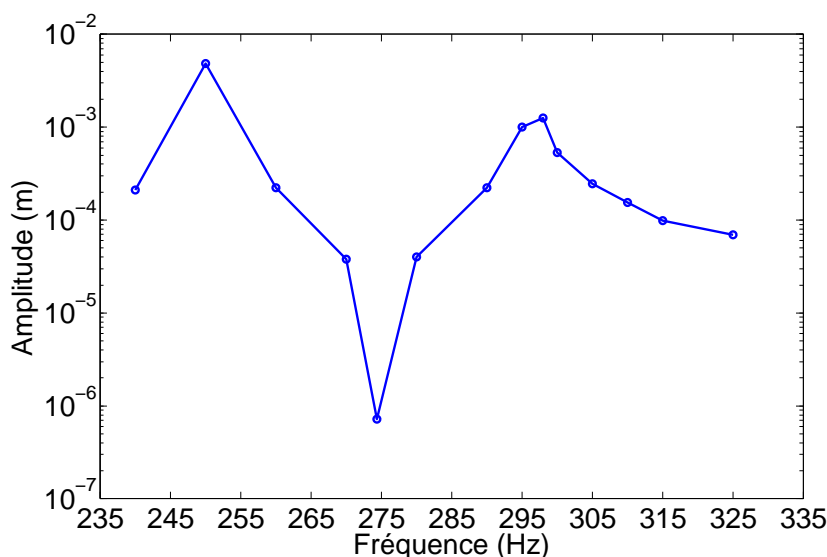


FIGURE 1.26 – Contact glissant pour $F_n = 1\text{N}$

Ces courbes de réponse illustrent le phénomène classique d'aplatissement et d'amortissement des pics à la résonance. L'utilisation d'un processus d'intégration temporelle implique que pour chaque valeur de charge normale et pour chaque fréquence, il faut lancer une simulation, obtenir le régime permanent (10-20 minutes pour chaque fréquence), extraire les amplitudes maximales de déplacement de la masse et les traiter. Dès lors, l'obtention d'une courbe de réponse fréquentielle nécessite environ une demi-journée au mieux pour une résolution de 10Hz sur une plage de 120Hz. L'extension vers le système à 13 aubes s'avère possible mais les temps de calculs deviennent vite prohibitifs.

La modélisation de type poutre s'appuie sur l'emploi de l'élément *BEAM4* qui permet de modéliser une structure dans l'espace et de réaliser un modèle proche de la structure réelle, notamment grâce à l'emploi d'éléments de masse négligeable et de raideur infinie permettant la prise en compte du décalage de la nageoire au niveau du contact. La géométrie ainsi obtenue

FIGURE 1.27 – Contact stick/slip pour $F_n = 100N$ FIGURE 1.28 – Contact stick/slip majorité bloqué pour $F_n = 1000N$

nue est identique à la géométrie réelle des aubes et permet l'introduction d'un élément de contact de type *COMBIN40* comme pour le système masse-ressort précédent. Les résultats obtenus mettent en évidence le même comportement phénoménologique que celui obtenu avec le système discret. Toutefois, ces modèles ne donnent pas d'informations précises au niveau de la zone de contact (le modèle de contact ayant été retenu étant de type Macroslip nœud sur nœud). Pour cela il est nécessaire d'établir un modèle volumique et ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

Nous nous intéressons à présent à une modélisation par éléments finis tridimensionnels du problème. L'objectif est de mieux comprendre, par le biais du modèle numérique, la physique réelle au niveau du contact entre

les 2 aubes. Le maillage est ici généré automatiquement par le logiciel ANSYS WorkBench : le choix du type d'élément est automatique, seuls quelques paramètres peuvent être imposés. Le modèle est constitué de 6557 nœuds et 1167 éléments. Les éléments présents dans le modèle sont des SOLID186, CONTA174 et TARGE170. Le SOLID186 est un élément 3D à 20 nœuds qui possèdent chacun 3 degrés de liberté, le CONTA174 est un élément de contact 3D déformable à 8 nœuds et le TARGE170 est un élément de contact propre à la surface cible ou esclave associé à l'élément CONTA174 (élément 3D à 3 nœuds).

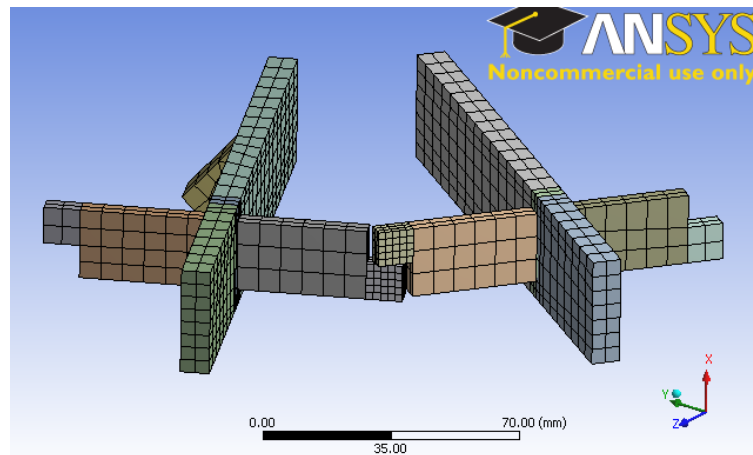


FIGURE 1.29 – Maillage du modèle à deux aubes réalisé sous ANSYS WB

Au cours de cette étude paramétrique, le module d'Young a été ajusté de sorte à ce que les fréquences propres obtenues par analyse modale coïncident avec les fréquences propres obtenues par essai pour le cas bloqué et le cas glissant. En prenant $E=198\text{MPa}$ avec $\rho = 7850\text{kg/m}^3$, le modèle numérique est calé sur le modèle expérimental, du moins en ce qui concerne les modes de première et seconde flexion dans le plan : $f_{1F} = 250.5\text{ Hz}$ et $f_{2F} = 1409\text{ Hz}$. Cette valeur offre le meilleur rapport entre proximité avec le module d'Young de référence (acier standard) et les fréquences de référence.

Le coefficient de frottement acier-acier étant de 0.1, le choix du contact rugueux a été écarté car on recherche à simuler le phénomène de stick/slip ce qui est difficile avec ce type de contact. La méthode du Lagrangien augmenté a été retenue car il s'agit de la méthode la plus efficace pour un contact avec frottement. Le contact est considéré comme symétrique afin d'éviter toute pénétration d'une surface de contact dans une autre. L'utilisation d'un contact symétrique augmente la taille des matrices car elle impose à la surface de contact de ne pas pénétrer la surface cible (target surface) mais en plus la surface cible a pour contrainte supplémentaire de ne pas pénétrer dans la surface maître contrairement au contact asymétrique.

Parmi les multiples supports liés à la définition des conditions limites proposé par ANSYS WB, deux semblent être les plus intéressants : le



FIGURE 1.30 – Type de contact ANSYS WB et contrôle de la pénétration

support fixe et le support élastique. Le support fixe est retenu.

Chargement et conditions limites

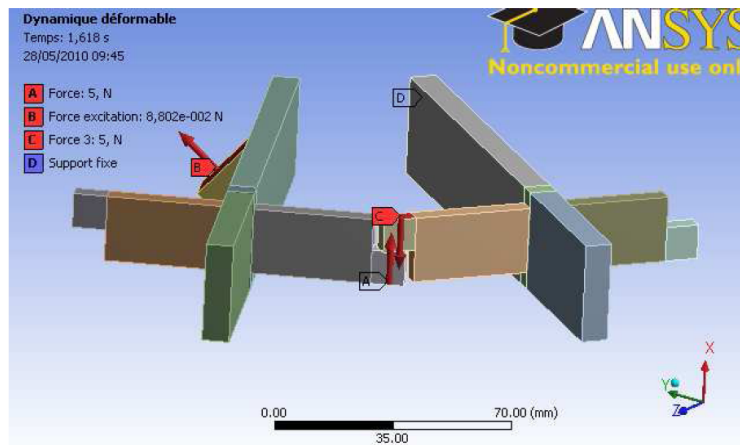


FIGURE 1.31 – Efforts appliqués sur le modèle à deux aubes ANSYS WB

La figure ci-dessus illustre les efforts et conditions limites appliquées au modèle :

- A et C représentent la mise en charge du contact : le choix d'une force répartie permet d'assurer la bonne répartition des efforts sur la surface de contact et de conserver un contact initial dans le plan horizontal.
- B : force d'excitation.
- D : le pied de chaque aube est un support fixe, équivalent d'un encastrement.

Le type d'analyse transitoire fait quand à lui appel à un schéma de NEW-MARK.

Résultats obtenus

Les temps de calculs sont longs, de l'ordre de plusieurs journées. Pour les cas linéaires ou quasi linéaires mis en évidence précédemment, $0.01N < F_n < 50N$, il est possible d'obtenir une réponse du modèle au cours du temps avec un pas de temps de l'ordre de $p = \frac{1}{20f_{ex}}$.

Pour les cas non linéaires, le modèle converge plus difficilement et il devient impossible de réaliser un ensemble de réponses temporelles pour des fréquences d'excitation variables, ce qui aurait permis de tracer une réponse fréquentielle. La réduction de la finesse du maillage alliée à un maillage plus grossier permet d'obtenir la convergence.

Le pas de temps utilisé pour faire converger le modèle avec excitation spatiale donne des temps de calcul de l'ordre de la semaine sur PC, il n'est donc pas exploitable en l'état. Seuls les résultats obtenus pour une excitation dans le plan avec un chargement du contact de 10N sont présentés sur les fig.1.32 à 1.37.

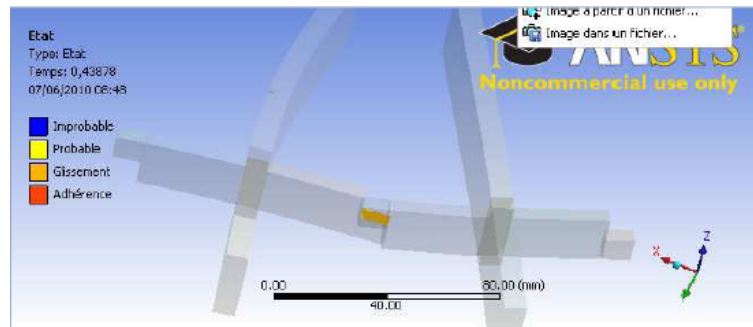


FIGURE 1.32 – Etat du contact pour un chargement de 10N et une excitation plane

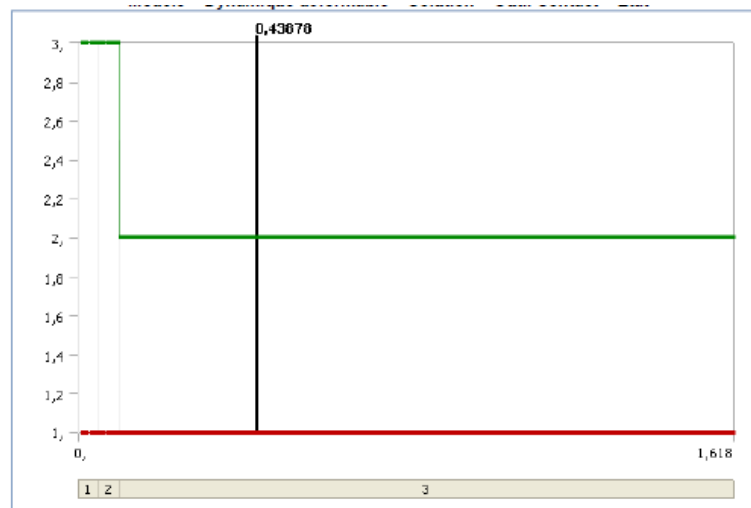


FIGURE 1.33 – Comportement global du contact,3 : contact fermé et collé et 2 : contact fermé et glissant 10N

On vérifie que pour un chargement de 10N et une excitation plane, le contact est glissant. La fig.1.35 présentant la variation de la pression totale exercée sur la surface de contact montre qu'il n'y a pas d'ouverture du contact au cours du temps car cette pression ne s'annule jamais. Le chargement reste constant à 10N au cours de l'analyse mais la pression de contact varie avec l'étendue de la surface de contact. Cette dernière est liée aux déplacements des nageoires l'une par rapport à l'autre.

Les résultats obtenus pour une excitation plane avec un chargement du contact de 100N sont présentés sur les fig.1.38 à 1.43.

Pour un chargement normal de 100N, le contact est clairement de nature stick-slip : en témoigne la fig.1.39 où l'on peut aisément remarquer l'alternance d'états glissants et bloqués.

Les pressions de contact et la contrainte de frottement augmentent ce

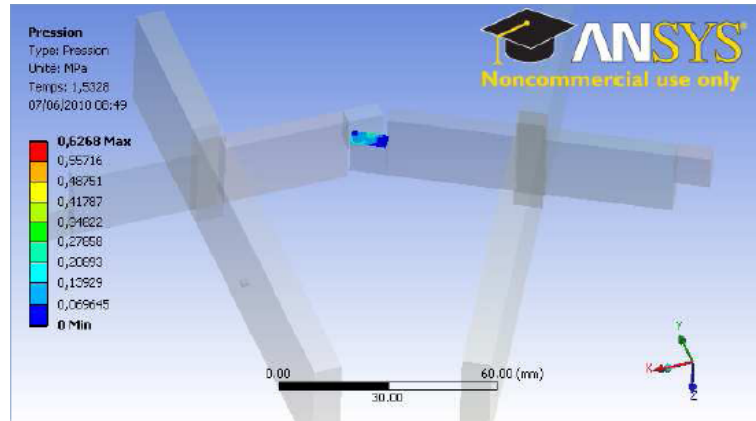


FIGURE 1.34 – Pression exercée sur la surface de contact

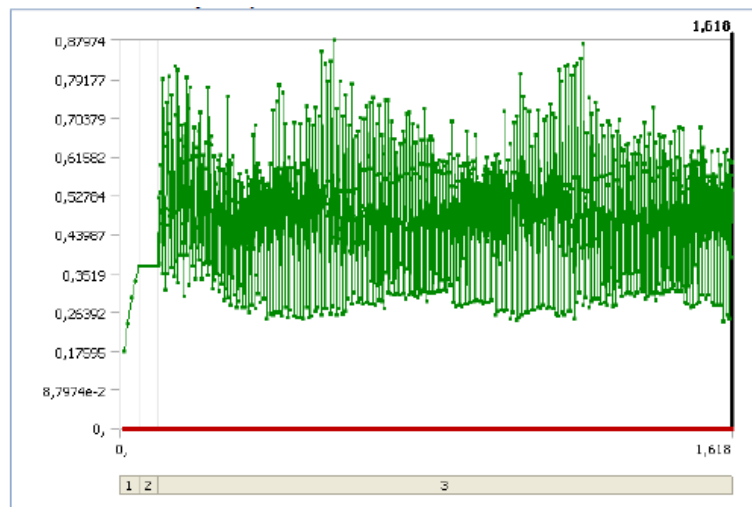


FIGURE 1.35 – Variation de la pression totale exercée sur la surface de contact

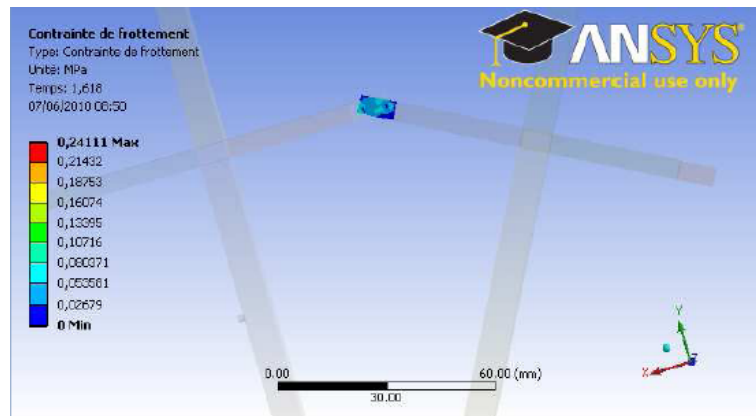


FIGURE 1.36 – Contrainte de frottement tangentielle

qui fait suite à l'augmentation de la charge appliquée. Le déplacement augmente fortement (un ordre de grandeur) : cela peut s'expliquer soit par une moindre énergie dissipée par frottement (importance des états bloqués) soit par une mauvaise résolution. Une vérification des résultats

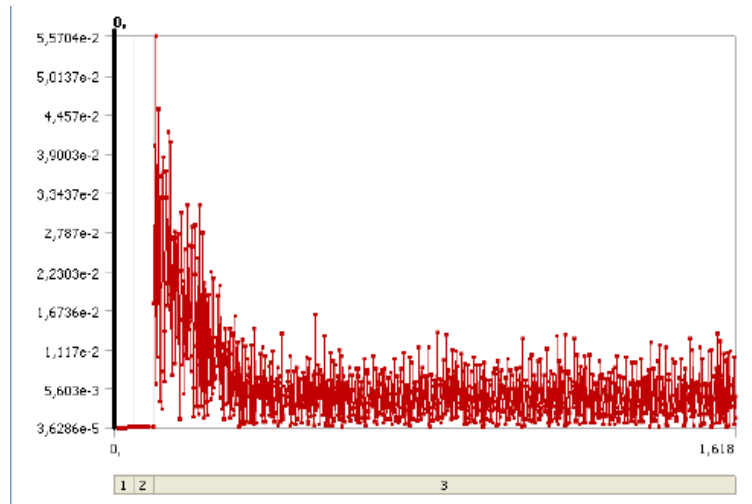


FIGURE 1.37 – Déplacement total en bout d'aube

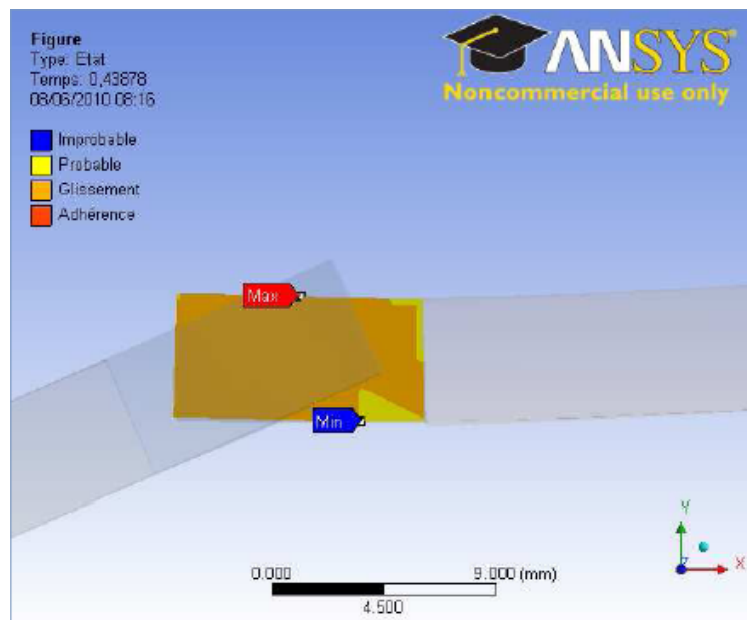


FIGURE 1.38 – Etat du contact pour un chargement de 100N et une excitation plane

numériques par expérimentation est indispensable à la validation du modèle.

1.4.4 Synthèse

Se basant sur les connaissances acquises sur les contacts frottant, une modélisation Macroslip simple en éléments finis unidimensionnels, bidimensionnels puis tridimensionnels est effectuée pour un modèle formé de deux aubes avec une nageoire inter aubes. Le modèle unidimensionnel simple, a permis de mettre clairement en évidence le phénomène classique d'aplatissement des pics dans les systèmes non linéaires avec frottement sec. Cette modélisation aussi simplifiée soit elle, a nécessité un temps de

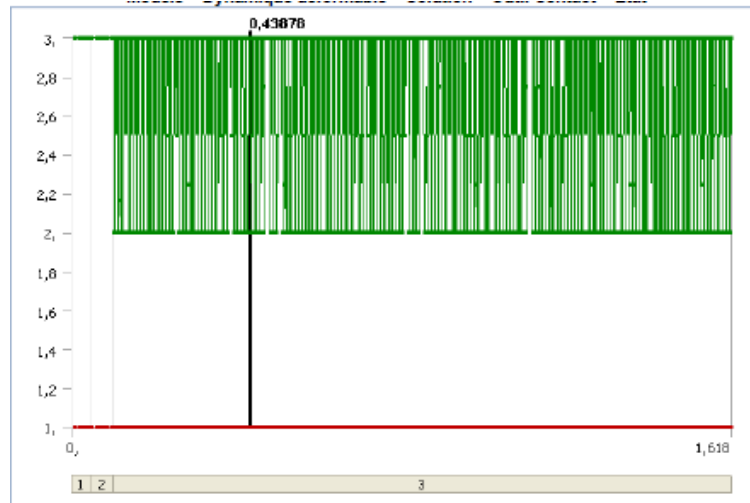


FIGURE 1.39 – Comportement global du contact,3 : contact fermé et collé et 2 : contact fermé et glissant 100N

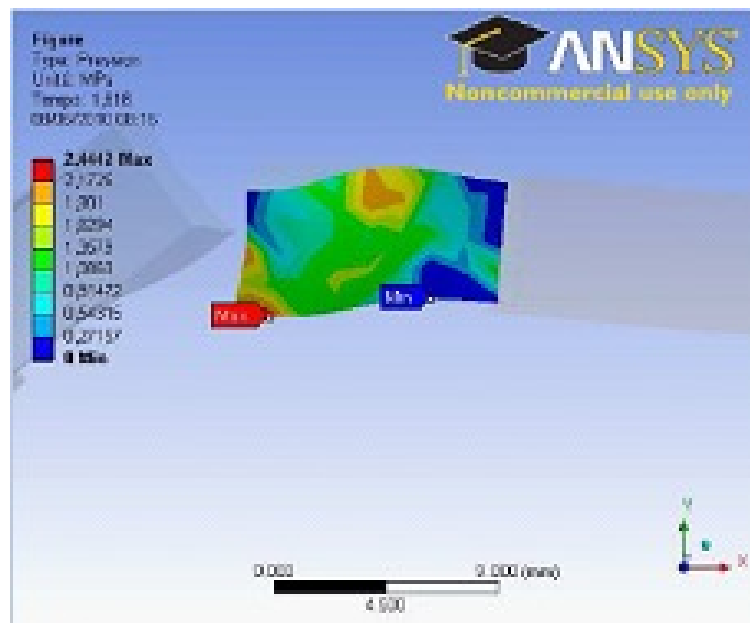


FIGURE 1.40 – Pression exercée sur la surface de contact 100N

calcul important pour la construction de la courbe de réponse. Une modélisation Microslip du contact par une approche éléments finis avec des éléments de contact surface sur surface a permis de mieux connaître le comportement des surfaces lors des phases frottantes. La modélisation spatiale Microslip est lourde à mettre en oeuvre et reste difficilement exploitable pour le moment, vu le temps extrêmement long nécessaire pour obtenir le régime permanent et les difficultés issues du problème de non convergence et les paramètres nombreux à fournir pour la résolution. Les difficultés rencontrées ont empêché la poursuite de l'application de ces modélisations sur les systèmes à 13 aubes. Pour palier ces problèmes de résolution des non linéarités par les méthodes temporelles, les méthodes approximatives fréquentielles et hybrides ont

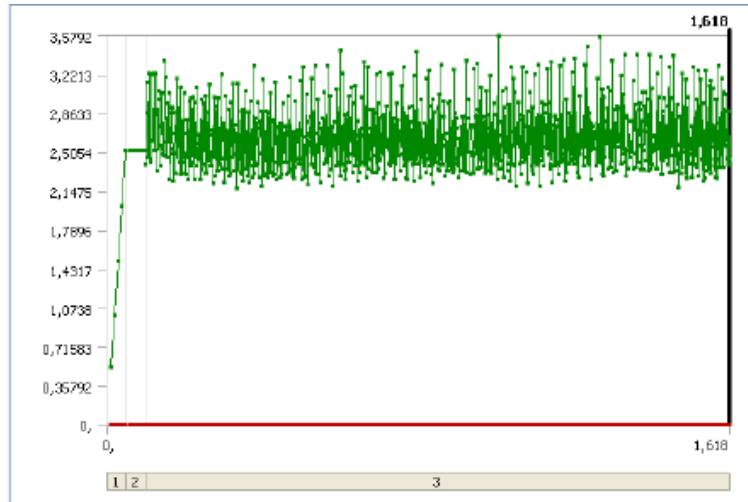


FIGURE 1.41 – Variation de la pression totale exercée sur la surface de contact 100N

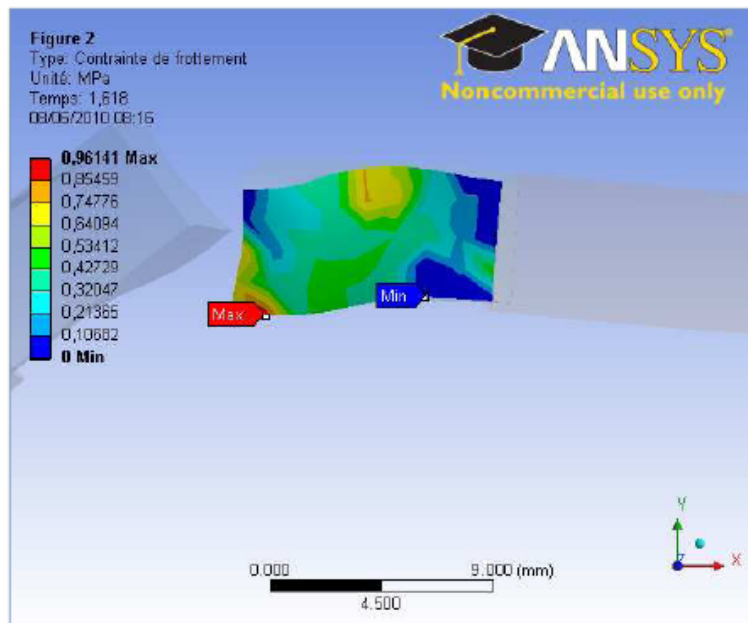


FIGURE 1.42 – Contrainte de frottement tangential 100N

connues un très grand essor durant ses vingt dernières années. Ces méthodes réduisent considérablement les durées des calculs et sont plus pratiques à manipuler pour des études statistiques et paramétriques. Ces méthodes seront retenues et utilisées dans les chapitres suivants.

1.5 POSITIONNEMENT ET OBJECTIFS DE LA THÈSE

La présentation des notions et outils de base associés au traitement des problèmes avec contacts frottants a permis une meilleur maîtrise de la modélisation basée sur l'utilisation des outils de contact disponibles dans les logiciels éléments finis. L'étude d'un système simple composé de deux

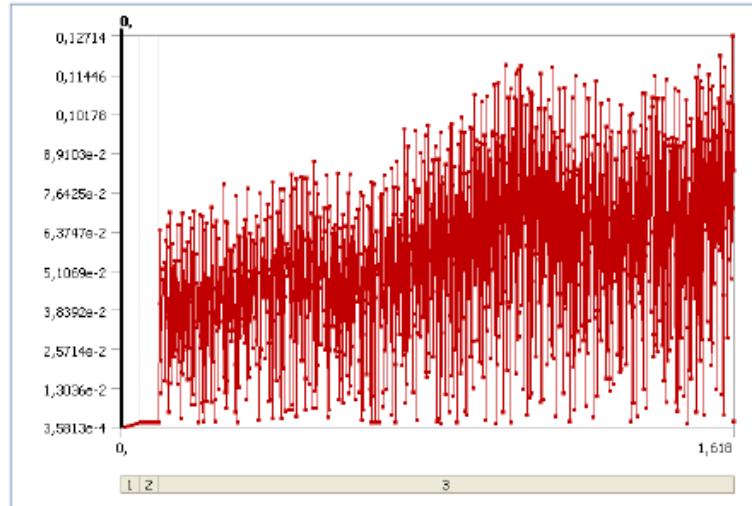


FIGURE 1.43 – Déplacement total en bout d'aube 100N

aubes avec des nageoires a permis la mise en évidence des points forts et des points faibles de différentes modélisations : modélisation discrète à un degré de liberté par aube associée à une approche macroslip, modélisation par la théorie des poutres associée à une approche macroslip, modélisation en 3D associée à une approche microslip. La modélisation par un contact de type microslip, surface sur surface, permet une meilleure définition du comportement des surfaces en frottement ainsi que des variations des différents paramètres qui interviennent. Cependant les résultats obtenus montrent qu'elle reste encore difficilement exploitable du fait de sa lourdeur d'utilisation.

L'examen bibliographique, a permis de consolider les connaissances acquises et de dégager les aspects les plus importants pour l'étude envisagée. En revanche, malgré le niveau actuel de connaissance et de compréhension des phénomènes liés au frottement et au désaccordage, le comportement global des ensembles à géométrie cyclique désaccordés en présence d'éléments de contact inter-aube reste encore mal maîtrisé. Compte tenu des difficultés d'interprétation constatées, la stratégie retenue a consisté à revenir à des études plus simples, afin d'acquérir une meilleure maîtrise des phénomènes de base. Dans le chapitre suivant, la modélisation du contact de type macroslip est associée à une résolution par la méthode de la balance harmonique à plusieurs harmoniques (MHBM) pour résoudre les équations différentielles non linéaires des modèles numériques avec contact frottant. Le modèle mis au point sera ensuite utilisé pour mieux analyser l'origine de l'aplatissement des pics classiquement rencontré dans les systèmes avec frottement sec. Enfin, la méthode est exploitée pour décrire le comportement des disques aubés désaccordés. La méthode de Monté Carlo est utilisée pour obtenir les caractéristiques statistiques de la réponse forcée d'un système discret, en tenant compte des variations stochastiques des paramètres du contact, notamment la charge normale, la raideur du contact et le coefficient de frottement. Cette méthode est tout d'abord appliquée sur un système à un seul degré de liberté, puis étendue sur les systèmes à géométrie cyclique. Les résultats obtenus permettent

de mieux comprendre les effets de la nature variable de ces paramètres fondamentaux.

MÉTHODES FRÉQUENTIELLES POUR LA DYNAMIQUE NON LINÉAIRE DU CONTACT FROTTANT

SOMMAIRE

2.1	CONTEXTE	42
2.2	MÉTHODES FRÉQUENTIELLES POUR L'ANALYSE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES AMORTIS PAR FROTTEMENT SEC	42
2.3	ÉTUDE PAR LA BALANCE MULTI HARMONIQUE D'UN MODÈLE DE FROTTEMENT DE TYPE MACROSLIP EXCITÉ PAR UNE FORCE HARMONIQUE	44
2.3.1	Développement du modèle de contact	45
2.3.2	Calcul de l'expression de la force non linéaire pour l'état collé (Stick) et l'état glissant (Slip)	46
2.3.3	Résolution du problème de contact par MHBM	48
2.3.4	Comparaison de la méthode MHBM avec une méthode d'intégration temporelle	52
2.3.5	Considérations physiques	53
2.4	ANALYSE DE LA DYNAMIQUE DE L'APLATISSEMENT DE PICS	58
2.4.1	Approche énergétique	59
2.4.2	Changement de l'état du contact du au comportement de stick/slip	63
	CONCLUSION	71

DANS le chapitre précédent, une étude dynamique réalisée sur un exemple concret a permis de mettre en évidence les difficultés rencontrées dans la modélisation et la résolution des problèmes éléments finis non linéaires par des méthodes d'intégration temporelle.

Dans cette partie, une étude bibliographique sur les méthodes fréquentielles et hybrides les plus couramment utilisées est effectuée. Plus précisément, une des ces méthodes fréquentielles, la Méthode de la Balance Multi Harmonique (Multi Harmonic Balance Method (MHBM)) associée à un modèle de contact de type Macroslip nœud sur nœud, est présentée en détails.

2.1 CONTEXTE

Dans la littérature, de nombreuses approches destinées à l'étude des solutions périodiques d'un système dynamique non linéaire existent. Parmi toutes ces méthodes, deux grandes classes se distinguent en particulier :

1. Les méthodes analytiques, limitées à des systèmes de petite taille et souvent à certains types de non linéarités.
2. les méthodes numériques qui se divisent elles-mêmes en deux catégories :
 - les méthodes basées sur l'utilisation d'intégration temporelle directe.
 - les méthodes basées sur une approximation de la solution et l'utilisation de procédures de projection [41].

La catégorie des méthodes analytiques regroupe les méthodes de perturbation. Ces méthodes supposent que les termes non linéaires sont petits et proportionnels à un petit paramètre ε .

La méthode des échelles multiples [41] se démarque au sein de cette catégorie. La validité de cette approche dépend de l'exactitude de l'hypothèse émise sur la faiblesse de la non-linéarité (ε petit).

Les méthodes numériques ont généralement en commun l'utilisation d'un solveur non linéaire de type Newton-Raphson. Parmi celles qui utilisent des intégrations temporelles directes, citons les méthodes de tir (shooting) qui sont basées sur une reformulation du problème initial temporel en terme de problèmes aux limites. Ces méthodes, couramment utilisées, présentent les limitations inhérentes à l'intégration temporelle (stabilité en particulier, temps de calculs souvent prohibitifs lorsque des modèles de taille importante sont considérés). La deuxième sous-catégorie se base sur une approximation de la solution sous forme de séries paramétrées [42] : $u(t) = \sum_{n=0}^N a_n u_n(t)$. Les coefficients a_n de cette série sont déterminés à l'aide d'une minimisation des résidus dans le cas des méthodes de Ritz ou en respectant des conditions d'orthogonalité dans le cas des méthodes de Galerkin. Ces méthodes comme les précédentes ne font pas d'hypothèse a priori sur la non linéarité.

Les méthodes fréquentielles et en particulier celle de balance harmonique se classent également dans cette catégorie. Elles s'avèrent être particulièrement bien adaptées aux traitements numériques en présence de non linéarité et dans le cas de problèmes de taille importante.

2.2 MÉTHODES FRÉQUENTIELLES POUR L'ANALYSE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES AMORTIS PAR FROTTEMENT SEC

Ferri [43] note que l'intégration temporelle directe peut s'avérer inefficace si l'on s'intéresse principalement à la réponse en régime permanent sous excitation périodique, puisque le faible taux d'amortissement structural dans les turbomachines exige d'effectuer l'intégration des équations du système sur des centaines de périodes jusqu'à ce que la réponse transitoire

se soit estompée. En outre, plusieurs auteurs ([44],[45]) ont souligné les difficultés importantes impliquées dans la mise en œuvre des critères de transition entre les différents états des interfaces de contact (stick, slip et/ou séparation) menant habituellement à un choix coûteux de pas de temps anormalement petit pour détecter ces changements d'états avec précision. Pour palier ces problèmes et conserver des temps de calculs raisonnables, des méthodes approximées spécifiques ont été continuellement mises en place au cours des 20 dernières années.

Lorsque le système est entièrement linéaire, une excitation harmonique de période T va engendrer une réponse harmonique de même période. Malheureusement, lorsque le système présente des non linéarités, la solution n'est pas aussi immédiate car la réponse ne se décompose pas toujours avec une seule harmonique. Les non linéarités peuvent venir exciter d'autres harmoniques. Toutefois, il est possible de supposer, sous certaines conditions, que la réponse du système reste périodique (et pas forcément de même période que l'excitation) et qu'il est possible de la décomposer en série de Fourier. Cette approche correspond à la méthode dite de la Balance Harmonique et de ses variantes.

La méthode de la balance harmonique classique est très largement employée dans des applications traitant la dynamique des structures périodiquement excitées avec contact frottant. Elle permet l'obtention des réponses du système directement dans le régime permanent, par la décomposition dans le domaine fréquentiel de la réponse périodique non linéaire en une série de Fourier. Cette décomposition conduit à un système d'équations algébriques non linéaires. La réponse du système est composée de l'harmonique fondamentale de l'excitation et des harmoniques multiples de l'harmonique fondamentale. La précision de cette méthode pour prévoir des réponses et des forces de frottement dépend fortement du nombre d'harmoniques retenues dans la décomposition. Inversement, l'utilisation d'un nombre trop grand d'harmoniques engendre un coût de calcul très important et réduit l'intérêt de la méthode.

Wang et Chen [46] proposent une approximation mono harmonique et multi harmonique pour calculer la réponse permanente d'un système à seul degré de liberté avec frotteur sec. Yang et Menq [47] ont formulé un élément de frottement sous chargement normal variable pour calculer les vibrations en régime établi de systèmes disques-aubes avec des nageoires disposées au sommet des aubes. Ils ont également utilisé la méthode de Newton Raphson pour tracer les solutions multiples dans le domaine fréquentiel. Leur étude sur un modèle d'oscillateur à deux degrés de liberté a clairement démontré la présence de conditions de glissement, d'adhérence et de séparation. Au cours de la même année, Sanliturk et al [48] présentent une approche semblable ; toutefois leur approximation est appliquée à un modèle de contact de type Microslip. Le modèle microslip basé sur un modèle de frottement de Dahl sous entend une expression exponentielle pour le comportement de la courbe de force-déplacement. La méthode HBM tronquée à la première harmonique est alors appliquée. Menq et Yang [13] ont aussi exploité la méthode de balance harmonique sur un contact bidimensionnel avec des modifications. Puisque le mou-

vement du frotteur est dans le plan, différents critères de transition sont employés pour déterminer la transition de l'état slip à l'état stick. En conséquence, la force de frottement est divisée en deux parties orthogonales, une contribuant à la rigidité du frotteur et une autre contribuant à l'amortissement par frottement.

L'approche est élargie pour les contacts tridimensionnels entre les aubes d'un système accordé par Chen [30] où une condition de perte de contact due à un mouvement normal au plan du contact est imposée. Les auteurs ont déterminé analytiquement les états de transition entre adhérence, glissement et séparation en supposant que l'interface de contact subit un mouvement périodique tridimensionnel. Pour la résolution, ils ont utilisé la méthode de balance multi harmonique (MHBM) combinée avec la FFT et des procédures itératives de continuation. Leurs résultats ont été validés par comparaison avec des solutions issues de l'intégration temporelle. Sanliturk et al [2] ont analysé les caractéristiques dynamiques d'un disque aubé avec des frotteurs de type "wedge damper" par une combinaison de la balance harmonique et une approche de modification structurale. L'approche proposée est connue particulièrement pour son efficacité pour l'analyse de larges modèles avec des non linéarités localisées.

Petrov et al [31] ont formulé un élément de frottement sous des conditions de charges normales variables. Les états de contact de types stick/slip et séparation sont déterminés numériquement grâce à l'introduction de plusieurs harmoniques. Ce modèle de frottement est implémenté dans une procédure de type Newton Raphson pour tracer les réponses pour différents ordres moteurs dans le domaine fréquentiel.

Des techniques spécifiques ont été développées pour l'analyse des ensembles disques-aubes désaccordés qui impliquent autant d'interfaces de frottement qu'il y a d'aubes. Chen et Sinha [49] ont étudié le comportement d'un disque aubé désaccordé avec frotteurs tandis que Lin et Mignolet [50] ont augmenté la complexité de ces systèmes en considérant un désaccordage supplémentaire issu des caractéristiques des frotteurs.

Dans le paragraphe suivant, la méthode de la Balance Multi Harmonique sera développée et servira pour trouver la solution d'un système à un seul degré de liberté avec frottement sec.

2.3 ÉTUDE PAR LA BALANCE MULTI HARMONIQUE D'UN MODÈLE DE FROTTEMENT DE TYPE MACROSLIP EXCITÉ PAR UNE FORCE HARMONIQUE

Pour une fréquence d'excitation donnée, la réponse de la structure et la force non linéaire sont décomposées en série de Fourier avec N le nombre d'harmoniques retenu pour l'expression de la réponse :

$$x(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \quad (2.1)$$

$$f_{nl}(t) = \sum_{n=1}^N f_{c_n} \cos(n\theta) + f_{s_n} \sin(n\theta) \quad (2.2)$$

$\theta = \omega t$ avec ω la pulsation d'excitation.

Le problème se réduit alors à la détermination des coefficients a_n et b_n . Théoriquement, quand N tend vers l'infini la solution s'approche de la solution analytique.

2.3.1 Développement du modèle de contact

Le système dissipatif à un seul degré de liberté présenté (fig.2.1) peut modéliser en première approximation une aube de turbomachines couplée à un frotteur, avec le paramètre de masse m , de raideur k et d'amortissement visqueux c . Le frotteur est modélisé par une raideur kd , un coefficient de frottement μ à l'interface de contact et par une force normale F_n supposée constante au cours de l'étude. Cette force assure la permanence du contact.

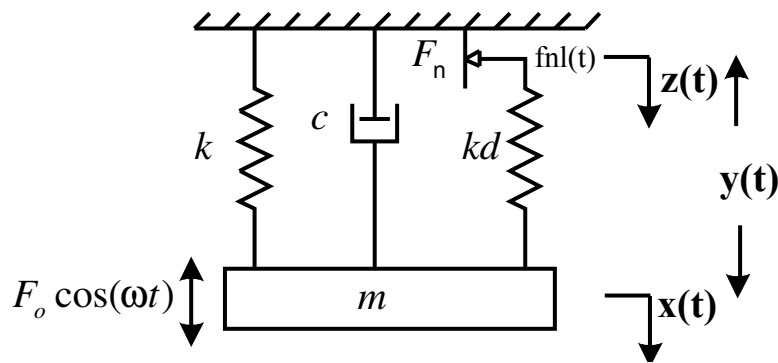


FIGURE 2.1 – Modèle à un seul degré de liberté avec frotteur

Pour un tel système, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + f_{nl} = F_{ex} \quad (2.3)$$

avec $F_{ex}(t) = f_0 \cos(\omega t)$ et $f_0 = 1$. L'équation (2.3) est une équation différentielle de second ordre, qui généralement ne peut pas être résolue analytiquement en raison de la présence de la force de frottement discontinue f_{nl} .

La masse m a un déplacement absolu noté $x(t)$.

Le frotteur a un déplacement absolu $z(t)$ qui représente le déplacement du point de contact par rapport au bâti.

Le déplacement relatif entre la masse et le point du contact du frotteur est noté $y(t)$ tel que $y(t) = x(t) - z(t)$.

La force tangentielle résultante du contact frottant, appelée force d'interface, est donnée par $f_{nl}(t) = kd \cdot z(t)$.

Pour une approche Macroslip selon le modèle de Masing, la force de frottement f_{nl} s'exprime par :

$$f_{nl}(t) = \begin{cases} +kd(x(t) - y(t)) & \text{pour } kd|x - y| \leq \mu F_n \\ +\mu F_n \text{sign}(\dot{y}) & \text{pour } kd|x - y| \geq \mu F_n \end{cases} \quad (2.4)$$

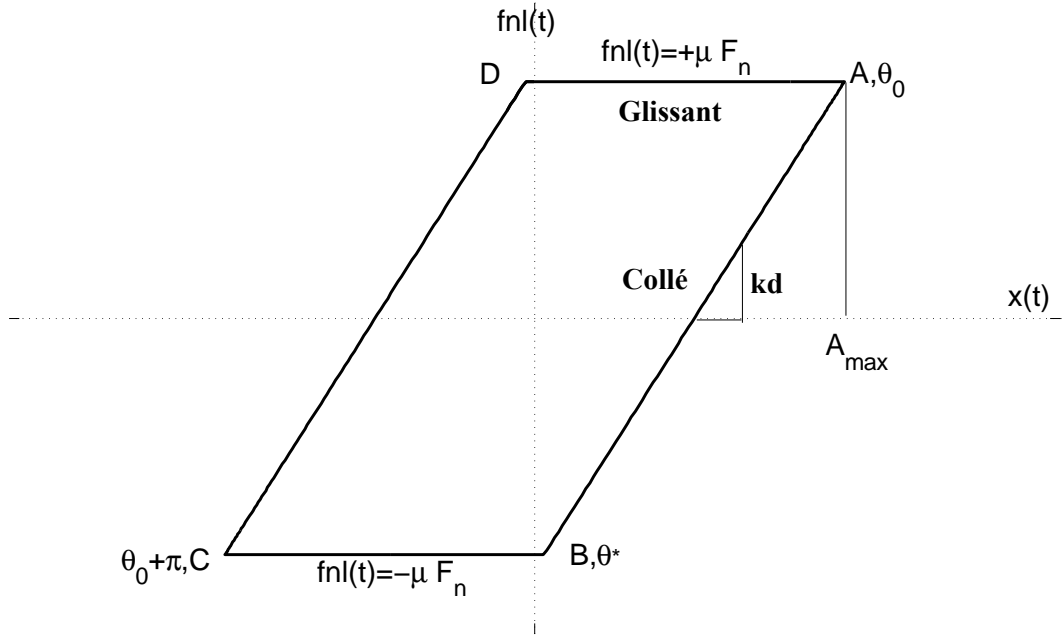


FIGURE 2.2 – Courbe d’hystérésis (Modèle de Masing) : Evolution de $f_{nl}(t)$ sur une période : $\theta = 0 \dots 2\pi$

Dans la suite, les paramètres associés à l’expression de la force non linéaire seront calculés pour chacune des branches de la courbe d’hystérésis de la fig.2.2.

2.3.2 Calcul de l’expression de la force non linéaire pour l’état collé (Stick) et l’état glissant (Slip)

Les différents états de contact liés au modèle de Masing sont identifiés de la manière suivante : AB et CD branches correspondant à l’état collé. BC et DA branches correspondant à l’état glissant.

a) Le cas collé

Dans ce cas, le frotteur bloqué est collé à la masse, donc la vitesse relative entre masse et frotteur est nulle. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= 0 \\ \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) \\ y(t) &= \text{const} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Lors de la résolution par intégration temporelle (régime transitoire de la solution), la valeur de cette constante dépend de la valeur initiale donnée au déplacement relatif $y(t)$ en début de simulation. Une fois le régime permanent atteint, cette valeur converge vers une valeur constante notée *const*. Bien sûr, la valeur de la constante est différente selon que l'on considère l'état bloqué sur la branche AB ou celui sur la branche CD.

Branche AB : en A :

$$\begin{aligned} x(A) &= A_{\max} \\ z(A) &= +\frac{\mu F_n}{kd} \end{aligned} \quad (2.6)$$

alors,

$$z(A) = x(A) - \text{const} \quad (2.7)$$

et

$$\text{const} = A_{\max} - \frac{\mu F_n}{kd} \quad (2.8)$$

Branche CD : en C :

$$\begin{aligned} x(C) &= -A_{\max} \\ z(C) &= -\frac{\mu F_n}{kd} \end{aligned} \quad (2.9)$$

alors,

$$z(C) = x(C) - \text{const} \quad (2.10)$$

et

$$\text{const} = -A_{\max} + \frac{\mu F_n}{kd} \quad (2.11)$$

Collé	AB	CD
$\dot{y}(t)$	o	o
$y(t)$	$A_{\max} - \frac{\mu F_n}{kd}$	$-A_{\max} + \frac{\mu F_n}{kd}$
$z(t)$	$x(t) - \left(A_{\max} - \frac{\mu F_n}{kd} \right)$	$x(t) - \left(-A_{\max} + \frac{\mu F_n}{kd} \right)$
$f_{ni}(t)$	$kd \left(x(t) - \left(A_{\max} - \frac{\mu F_n}{kd} \right) \right)$	$kd \left(x(t) - \left(-A_{\max} + \frac{\mu F_n}{kd} \right) \right)$

TABLEAU 2.1 – Résumé du cas collé (stick)

Le tab.2.1 résume les différentes valeurs prises par la force non linéaire et les déplacements relatifs et absolus pour la branche de l'état collé (stick) de la courbe d'hystérésis.

b) Le cas glissant

Dans le cas glissant, la force d'interface atteint sa valeur seuil ou limite correspondant au glissement. Il vient $F_{int} = \mu F_n$. Or cette force s'exprime par la relation $F_{int} = kd.z(t)$. D'où l'expression $z(t) = \pm \frac{\mu F_n}{kd} = \text{const}$ alors :

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= \dot{x}(t) \\ y(t) &= x(t) - \left(\pm \frac{\mu F_n}{kd} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Branche BC : en C :

$$z(C) = -\frac{\mu F_n}{kd} \quad (2.13)$$

Branche DA : en A :

$$z(A) = +\frac{\mu F_n}{kd} \quad (2.14)$$

Glissant	AB	CD
$\dot{z}(t)$	o	o
$y(t)$	$x(t) - \left(-\frac{\mu F_n}{kd} \right)$	$x(t) - \left(+\frac{\mu F_n}{kd} \right)$
$z(t)$	$-\frac{\mu F_n}{kd}$	$+\frac{\mu F_n}{kd}$
$f_{nl}(t)$	$kd \left(-\frac{\mu F_n}{kd} \right)$	$kd \left(+\frac{\mu F_n}{kd} \right)$

TABLEAU 2.2 – Résumé du cas glissant (slip)

Le tab.2.2 résume les différentes valeurs prises par la force non linéaire et les déplacements relatifs et absolus pour la branche de l'état glissant (slip) de la courbe d'hystérésis.

Finalement, l'expression de la force non linéaire donnée par l'équation 2.4 devient :

$$f_{nl}(t) = \begin{cases} kd(x(t) - A_{max}) + \mu.F_n & \text{si contact collé} & \theta \in [\theta_0, \theta^*] \\ \mu.F_n \cdot \text{sign}(\dot{x}) = -\mu.F_n & \text{si contact glissant} & \theta \in [\theta^*, \theta_0 + \pi] \end{cases} \quad (2.15)$$

où A_{max} est l'amplitude maximale du déplacement total $x(t)$ exprimée en

fonction de θ .

2.3.3 Résolution du problème de contact par MHBM

Le régime permanent associé à l'équation 2.3 peut être obtenu au moyen de la méthode MHBM en considérant le déplacement total comme une superposition des composantes harmoniques de pulsations ω .

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \quad (2.16)$$

où $\theta = \omega t$ et a_n et b_n sont les composantes harmoniques sinusoïdales et cosinusoidales du déplacement, N est le nombre d'harmoniques retenu dans la solution. Les dérivées du déplacement par rapport au temps sont données par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega n (a_n \sin(n\theta) - b_n \cos(n\theta)) \\ \ddot{x}(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n\omega)^2 (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))\end{aligned}\quad (2.17)$$

Les deux paramètres θ_0 et θ^* sont introduits pour être en mesure d'identifier facilement si le contact est dans un état collé ou bien s'il est dans un état glissant. L'angle θ_0 est associé au point A du cycle d'hystérésis à la transition de l'état slip à l'état stick. L'angle θ^* est associé au point B, qui marque le passage de l'état bloqué à l'état glissant. En considérant ces deux paramètres qui régissent les états de contact, la force non linéaire peut être développée en deux expressions distinctes selon que le frotteur est en phase bloquée caractérisée par $\theta_0 < \theta < \theta^*$ ou en phase glissante pour $\theta^* < \theta < \pi + \theta_0$.

Ainsi les fig.2.2 et 2.3, montrent que l'état bloqué est caractérisé par le segment (AB) et l'état glissant par le segment (BC). Les changements de l'état du contact du slip au stick sont identifiés par les points A et C, respectivement pour $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_0 + \pi$. Les changements de l'état stick à l'état slip ont lieu aux points B pour $\theta = \theta^*$ et D pour $\theta = \theta^* + \pi$. Ainsi, l'amplitude maximale du déplacement A_{max} peut s'exprimer sous la forme :

$$A_{max} = x(\theta_0) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\theta_0) + b_n \sin(n\theta_0) \quad (2.18)$$

La force non linéaire due au frottement sec est également approximée par une série de Fourier tronquée à N harmoniques :

$$f_{nl}(t) = \sum_{n=1}^N f_{c_n}(\theta) \cos(n\theta) + f_{s_n}(\theta) \sin(n\theta) \quad (2.19)$$

$f_{c_n}(\theta)$ et $f_{s_n}(\theta)$ dépendent du modèle du contact choisi. Par ailleurs, la force non linéaire étant antisymétrique, juste les coefficients impaires des harmoniques sont conservés dans le calcul du déplacement et de la force non linéaire. Les intégrales de Fourier découlant de ces coefficients sont les suivants :

$$f_{c_n}(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} f_{nl}(t) \cos(n\theta) d\theta \quad (2.20)$$

$$f_{s_n}(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi} f_{nl}(t) \sin(n\theta) d\theta \quad (2.21)$$

Pour calculer ces intégrales, on découpe le domaine d'intégration sur $[\theta_0, \theta^*]$ et $[\theta^*, \theta_0 + \pi]$ et on introduit les expressions 2.15 de $f_{nl}(t)$ sur chaque intervalle ainsi que les développements en série 2.16 et 2.18. Le détail de ces calculs et donnée en Annexe A.2. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} f c_n &= \sum_{k=1}^N (S_{nk}(\theta_0, \theta^*) a_k + C_{nk}(\theta_0, \theta^*) b_k + \frac{4\mu F_n}{\pi n} \sin(n\theta^*)) \\ f s_n &= \sum_{k=1}^N (\bar{C}_{nk}(\theta_0, \theta^*) a_k + \bar{S}_{nk}(\theta_0, \theta^*) b_k - \frac{4\mu F_n}{\pi n} \cos(n\theta^*)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

En introduisant 2.16 et ses dérivées 2.17 dans l'équation du mouvement 2.3 il vient :

$$\begin{aligned} &-m\omega^2 \left[\sum_{n=1}^N n^2 (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \right] - c \left[\sum_{n=1}^N n (a_n \sin(n\theta) - b_n \cos(n\theta)) \right] \\ &+ k \left[\sum_{n=1}^N a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right] + \sum_{n=1}^N f c_n \cos(n\theta) + f s_n \sin(n\theta) \\ &= f_0 \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Après identification des harmoniques, on obtient le système suivant à $2N$

équations :

$$\begin{pmatrix} Z_1 & & & & & & \\ & Z_2 & & & & & \\ & & Z_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & Z_n & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & Z_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_n \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \\ \vdots \\ \Gamma_n \\ \vdots \\ \Gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \omega \\ 2\omega \\ 3\omega \\ \vdots \\ n\omega \\ \vdots \\ N\omega \end{matrix} \quad (2.24)$$

$$Z_n = \begin{pmatrix} K - n^2\omega^2 M & n\omega C \\ -n\omega C & K - n^2\omega^2 M \end{pmatrix}$$

$$D_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} f c_n \\ f s_n \end{pmatrix}$$

On reporte les expressions 2.22 de Γ_n dans 2.24 d'où

$$[Z] D + [\Lambda(\theta_0, \theta^*)] D = F \quad (2.25)$$

Que l'on réécrit sous la forme :

$$[H(\theta_0, \theta^*)] D = F \quad (2.26)$$

avec $[H] = [Z] + [\Lambda(\theta_0, \theta^*)]$.

$[\Lambda]$ est une matrice de taille $2N \times 2N$ telle que :

$$[\Lambda] = [\Lambda_{nk}] \quad 1 \leq n \leq N \\ 1 \leq k \leq N \quad \text{avec :}$$

$$\Lambda_{nk} = \begin{pmatrix} S_{nk}(\theta_0, \theta^*) & C_{nk}(\theta_0, \theta^*) \\ \bar{C}_{nk}(\theta_0, \theta^*) & \bar{S}_{nk}(\theta_0, \theta^*) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad F_1 = \begin{pmatrix} f_0 - \frac{4\mu F_n}{\pi} \sin \theta^* \\ + \frac{4\mu F_n}{\pi} \cos \theta^* \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_n = \begin{pmatrix} -\frac{4\mu F_n}{\pi n} \sin(n\theta^*) \\ + \frac{4\mu F_n}{\pi n} \cos(n\theta^*) \end{pmatrix}$$

Le système 2.25 est un système à $2N$ équations algébriques avec $2N + 2$ inconnues $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N, \theta_0$ et θ^* . Deux équations supplémentaires sont nécessaires. La première impose que pour $\theta = \theta_0$, le déplacement $x(t)$ atteint sa valeur maximale A_{max} et donc que la vitesse s'annule en ce point. Cette condition de vitesse nulle se traduit mathématiquement par :

$$f(\theta_0, \theta^*, a_n, b_n) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\theta=\theta_0} = \omega \sum_{n=1}^N n (-a_n \sin(n\theta_0) + b_n \cos(n\theta_0)) = 0 \quad (2.27)$$

La seconde équation impose la continuité de la force non linéaire $f_{nl}(t)$ entre les états collé (stick) et glissant (slip) au point B (fig.2.2), soit

$$\mu F_n + kd(x(\theta^*) - A_{max}) = -\mu F_n \quad (2.28)$$

$$g(\theta_0, \theta^*, a_n, b_n) = 2\mu F_n + kd \sum_{n=1}^N [a_n (\cos(n\theta^*) - \cos(n\theta_0)) + b_n (\sin(n\theta^*) - \sin(n\theta_0))] = 0 \quad (2.29)$$

On obtient finalement le système algébrique non linéaire suivant de taille $2N + 2$:

$$\begin{cases} [H(\theta_0 - \theta^*)] D = F & 2N \\ f(a_n, b_n, \theta_0, \theta^*) = 0 & 1 \\ g(a_n, b_n, \theta_0, \theta^*) = 0 & 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

qui se résout à l'aide d'une méthode itérative de Newton-Raphson.

Les $2N$ premières équations sont linéaires en $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$ et non linéaires en θ_0 et θ^* seulement. On procède donc à une condensation des variables $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$ afin de les éliminer des fonctions f et g et ainsi réduire la taille du système non linéaire à résoudre. De cette manière la méthode de Newton-Raphson ne porte que sur les deux dernières équations que l'on réécrit sous la forme :

$$G(\theta_0, \theta^*) = \begin{cases} f(\theta_0, \theta^*) \\ g(\theta_0, \theta^*) \end{cases} = 0 \quad (2.31)$$

Soit $\Theta^0 = (\theta_0^0, \theta^{*0})$ une solution initiale approchée de 2.31. On corrige cette solution initiale par itérations successives à l'aide de l'algorithme suivant :

1. Solution initiale $\Theta^0 = (\theta_0^0, \theta^{*0})$
2. Calcul de $D = (a_1, b_1, \dots, a_N, b_N)$ solution de 2.26
3. Calcul de $G(\Theta^k) = G(\theta_0^k, \theta^{*k})$ à l'aide de 2.31
4. Calcul de la jacobienne $J = \left. \frac{\partial G}{\partial \Theta} \right|_{\theta_0^k, \theta^{*k}}$
5. Calcul de $\Delta\Theta$ solution de $J\Delta\Theta = -G(\Theta^k)$
6. Correction $\Theta^{k+1} = \Theta^k + \Delta\Theta$
7. Test $\|G(\Theta^{k+1})\| < \varepsilon$

oui : $\Theta^{k+1} = (\theta_0^{k+1}, \theta^{*k+1})$ solution.
non : retour en 2. (itération supplémentaire)

L'expression de la jacobienne J est donnée par :

$$J = \left. \frac{\partial G}{\partial \Theta} \right|_{\theta_0^k, \theta^{*k}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_0} & \frac{\partial f}{\partial \theta^*} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta_0} & \frac{\partial g}{\partial \theta^*} \end{pmatrix}_{\theta_0^k, \theta^{*k}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(\theta_0^k) & 0 \\ -kf(\theta_0^k) & kf(\theta^{*k}) \end{pmatrix}$$

Une fois θ_0 et θ^* obtenues, on calcule les coefficients $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$ à l'aide de 2.26 et on peut ensuite reconstruire les déplacements $x(t)$ et la force de contact $f_{nl}(t)$ à l'aide de 2.16 et de 2.19 et 2.22.

Dans la suite la méthode de la balance multiharmonique est comparée à une méthode d'intégration temporelle pour mettre en évidence son efficacité à donner avec précision des solutions pour un système non linéaire avec un temps de calcul raisonnable.

2.3.4 Comparaison de la méthode MHBM avec une méthode d'intégration temporelle

Afin de juger de la précision de la méthode de Balance Multi Harmonique, une application numérique est réalisée sur un système à un degré de liberté avec un modèle de frottement de type Macroslip. Les paramètres considérés pour cette application sont :

Masse	$m = 1.24\text{Kg}$
Raideur	$k = 17890\text{N/m}$
Amortissement visqueux	$c = 0.134\text{Ns/m}$
Raideur du contact	$kd = 3500\text{N/m}$
Coefficient de frottement	$\mu = 0.5$
Force d'excitation	$f_0 = 1\text{N}$

Les fig.2.3 et 2.4 montrent l'évolution de la force non linéaire respectivement en fonction du temps et du déplacement. Les résultats obtenus par la méthode MHBM en considérant respectivement $N=1$ et $N=55$ harmoniques sont comparés à ceux obtenus via une intégration temporelle (méthode de Newmark avec accélération moyenne). La méthode de la MHBM limitée à la première harmonique est désignée par 1HBM. Comme observé sur ces graphiques, il est confirmé que la précision de cette méthode augmente avec le nombre d'harmoniques retenues.

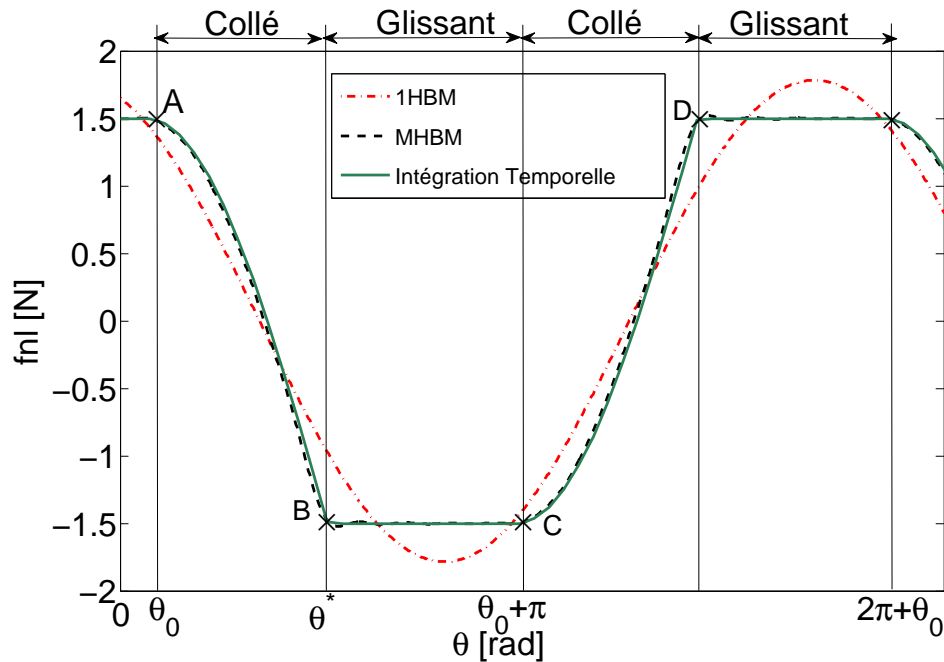


FIGURE 2.3 – Forces non linéaires en fonction du temps pour 1HBM, MHBM ($N = 55$) et intégration temporelle pour $F_n = 3$ N, fréquence=20 Hz

La fig.2.5 montre l'erreur obtenue pour la force non linéaire $f_{nl}(t)$ en fonction de la force normale F_n en utilisant la 1HBM (les résultats de référence sont obtenus par la MHBM avec $N=55$).

Cette erreur est de 10% pour l'état quasi glissant, puis elle augmente jusqu'à 25% et finalement diminue pour atteindre zéro au voisinage de la région de stick correspondant à des valeurs élevées de force normale F_n . Donc, la 1HBM apporte comme attendu une description peu précise de la courbe d'hystérésis et des forces non linéaires, en particulier pour les faibles valeurs de force normale qui conduisent à des comportements fortement non linéaires.

2.3.5 Considérations physiques

La fig.2.6 montre les Fonctions de Réponses Fréquentielles (FRF) obtenues pour des valeurs différentes de charge normale F_n en utilisant la MHBM ($N=55$).

Pour $F_n = 0.01$ N, le contact est toujours glissant et le système se comporte linéairement. Dans ce cas la raideur équivalente est $k_{eq} = k$ et la résonance

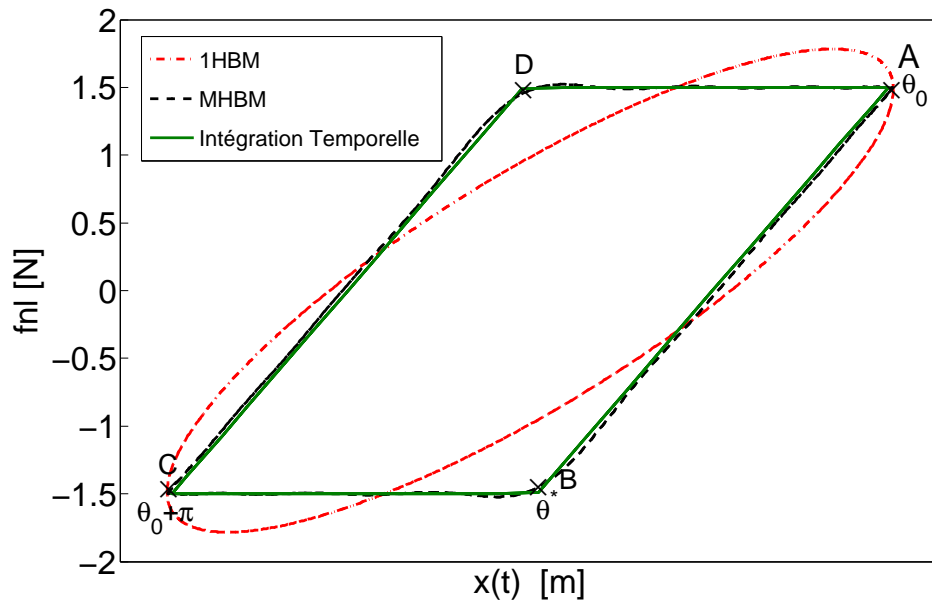


FIGURE 2.4 – Courbes d’Hystérésis obtenues par 1HBM, MHBM ($N=55$) et intégration temporelle pour $F_n = 3 \text{ N}$, fréquence=20 Hz

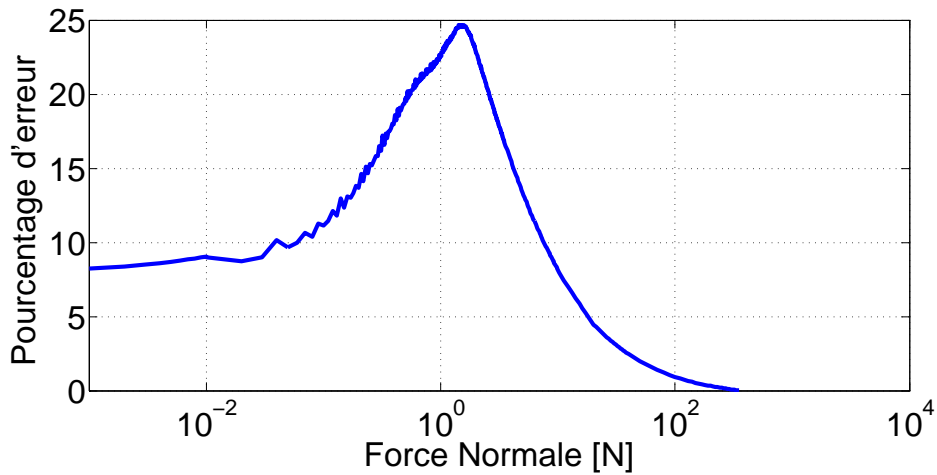


FIGURE 2.5 – Pourcentage d’erreur relative de la force non linéaire calculée avec 1HBM et MHBM

se produit à :

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{keq}{m}} = 19.1\text{Hz} \quad (2.32)$$

Pour $F_n > 500\text{N}$, le contact est complètement collé et la fréquence de résonance associée à cet état est une fonction de la raideur du système et de la raideur du contact du frotteur. La raideur équivalente est $k_{eq} = k + kd$ et la résonance survient à :

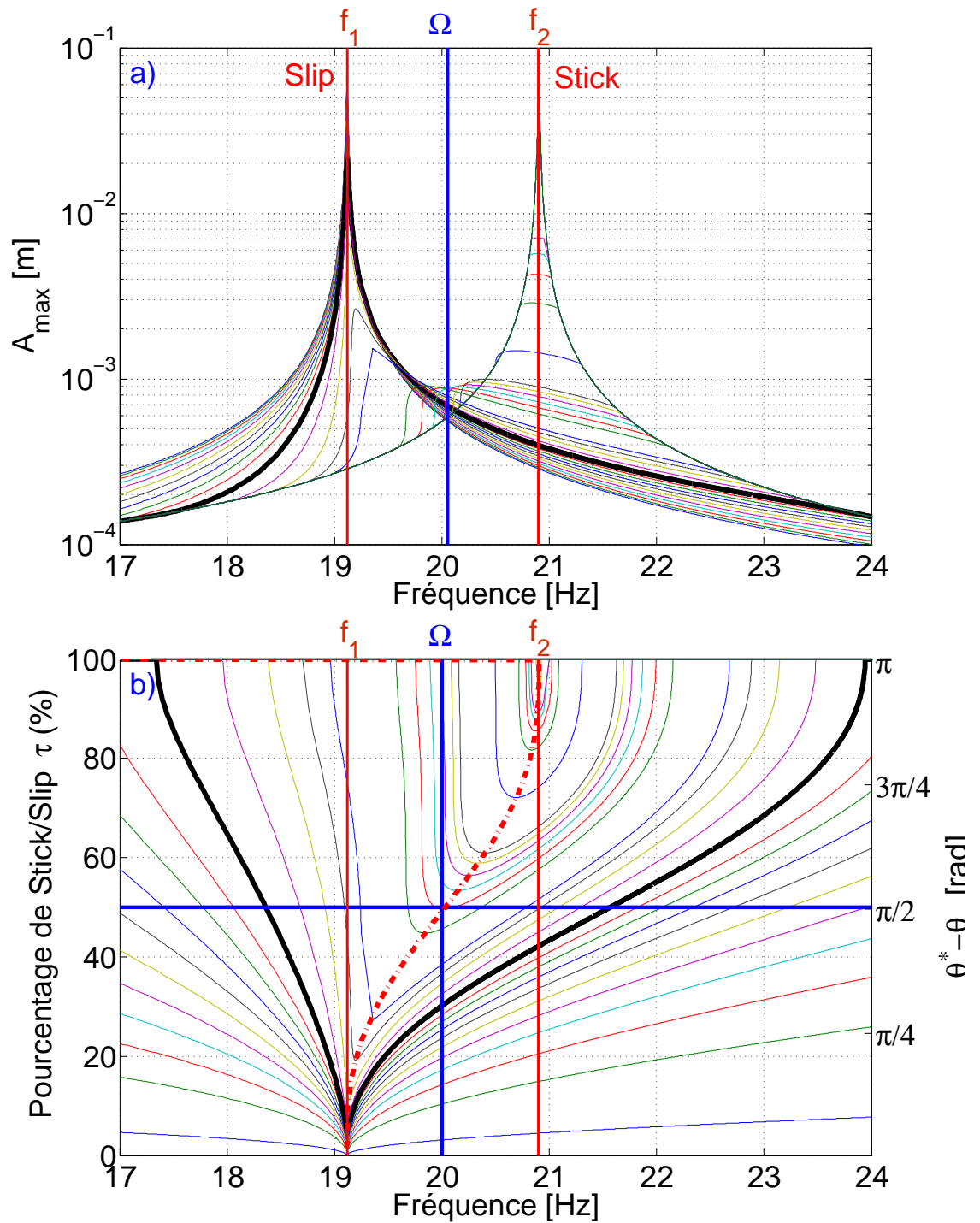


FIGURE 2.6 – Fonctions de réponses fréquentielles obtenues pour différentes valeurs de force normale par la MHBM et leur pourcentage du stick/slip associé

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kd + k}{m}} = 20.9\text{Hz} \quad (2.33)$$

Lorsque la force normale diminue en passant de 500 N à 0.01 N, les états de contact passent de l'état bloqué à l'état mixte collé/glissant (stick/slip). Suite à ces changements, les pics d'amplitude s'aplatissent et les amplitudes obtenues deviennent inférieures à celles associées aux cas quasi linéaires obtenus lorsque le contact est bloqué ou bien glissant. Le comportement dynamique montre les trois différents états de contact (stick, stick/slip et slip) et l'aplatissement des pics de résonance est classiquement observé.

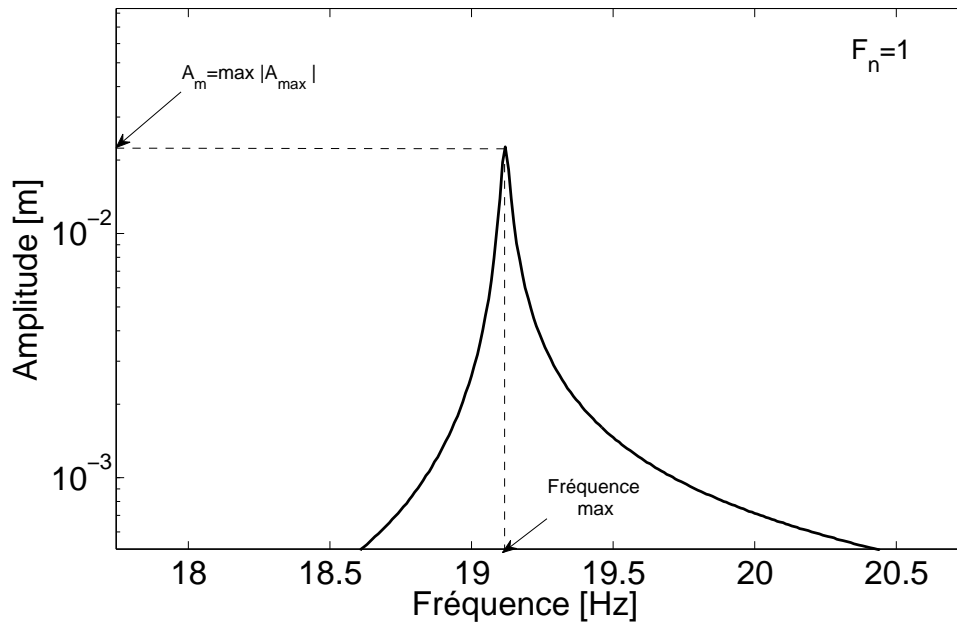


FIGURE 2.7 – Amplitude de la réponse fréquentielle pour $F_n = 1\text{ N}$

La fig.2.7 montre que pour une force normale donnée F_n , il n'existe qu'un seul maximum d'amplitude et une fréquence correspondante associée. Pour chaque force normale F_n de la fig.2.6, le maximum de l'amplitude A_{max} de la courbe FRF obtenu par un balayage fréquentiel sera noté : $A_m = \max |A_{max}|$. A cette valeur, est associée une fréquence $freq_{max}$ et la force normale F_n correspondante. D'après la fig.2.6(b), il apparaît qu'à cette fréquence et à cette valeur de F_n correspond un ensemble unique de paramètres de contact θ^* et θ_0 .

La physique du frotteur pourra être expliquée plus clairement en introduisant le pourcentage de stick. Le pourcentage d'état de stick τ sur une période de mouvement est défini par $\tau = 100 \cdot (\theta^* - \theta_0) / \pi$.

D'après la fig.2.6(b), pour chaque $A_m = \max |A_{max}|$ correspond un ensemble unique de paramètres de contact θ^* et θ_0 et par conséquent une valeur unique de τ .

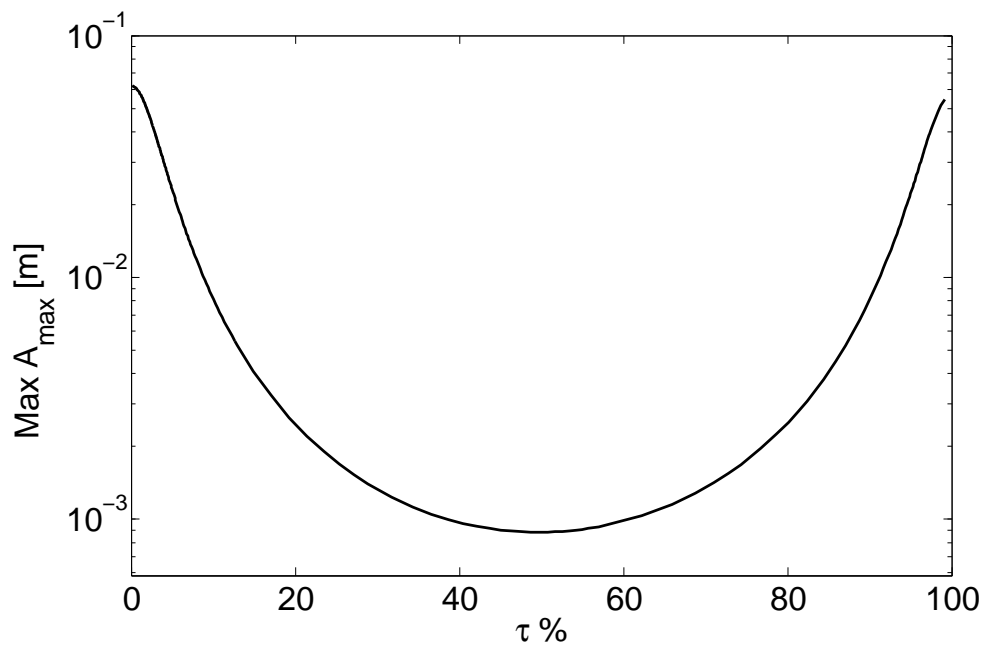


FIGURE 2.8 – Evolution du déplacement maximal $A_m = \max |A_{max}|$ en fonction du paramètre τ

La fig.2.8 donne l'évolution du paramètre $A_m = \max |A_{max}|$ en fonction du pourcentage de stick. Etant donné que le pourcentage de stick τ est proportionnel au paramètre $(\theta^* - \theta_0)$, il est très faible pour les systèmes avec une faible charge normale voire nul pour les systèmes sans frottement et croît avec l'augmentation de la force normale de contact jusqu'à la valeur $(\theta^* - \theta_0) = \pi$ qui implique $\tau = 100\%$. Par conséquent $\tau = 0\%$ et $\tau = 100\%$ correspondent respectivement à l'état totalement glissant et à l'état totalement bloqué. L'efficacité maximale du dispositif de frottement considéré, correspondant à l'amplitude minimum de la fig.2.8, est observée à une fréquence $\Omega = 20$ Hz et pour une force normale $F_n = 3$ N. Selon la fig.2.6, $(\theta^* - \theta_0)$ est dans ce cas égal à $\pi/2$ correspondant à $\tau = 50\%$. Cet état spécifique correspond à une configuration moitié stick moitié slip ce qui signifie une même durée de stick et de slip durant une période.

Une illustration de la transformation de la courbe d'hystérésis est donnée par la fig.2.9. L'état de contact glissant (pour $F_n = 1$ N) induit une faible différence entre θ^* et θ_0 et, graphiquement, au voisinage de cet état le point B devient plus proche du point A que du point C (fig.2.2).

Dans ce cas, la courbe d'hystérésis dégénère et se réduit à deux lignes horizontales situées à $\pm \mu F_n$. Puisque pour les cas glissants la force normale est très faible, le produit $\pm \mu F_n$ est aussi faible et les deux courbes horizontales finissent par se confondre. Au voisinage de l'état bloqué (pour $F_n = 10$ N sur la fig.2.9), la différence entre les deux paramètres tend vers π , et le point B devient plus proche du point C. Dans ce cas, la largeur de la partie de la courbe relative à la région du stick diminue de plus en plus (la largeur des segments CB et DA diminue), et les deux branches de la

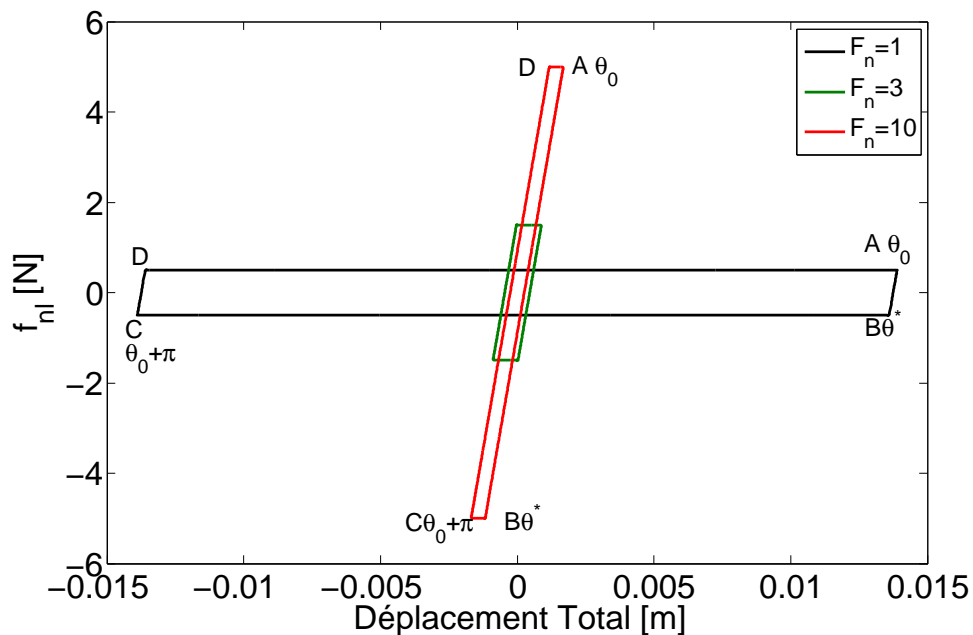


FIGURE 2.9 – Courbes d’hystérésis tracées pour trois états différents de contact

courbe (AB et CD) traduisant l’état stick se rapprochent fig.2.9. La courbe d’hystérésis sera réduite à une droite d’une pente kd .

2.4 ANALYSE DE LA DYNAMIQUE DE L’APLATISSEMENT DE PICS

Tous les dispositifs de frottement ont pour caractéristique commune l’aplatissement de la fonction de réponse fréquentielle obtenu avec des valeurs spécifiques de charges normales appliquées au contact. Quand la charge normale est très élevée ou bien très faible par rapport à la force d’excitation [51],[52], le comportement dynamique du système est quasi linéaire et la FRF montre des amplitudes de résonance très élevées. Pour les charges normales intermédiaires, l’amplitude de la réponse fréquentielle diminue et la FRF s’aplatit. Ce phénomène d’aplatissement de pic est expliqué par deux approches différentes. L’approche énergétique [53] suppose un rapport direct entre l’aplatissement des pics et l’énergie dissipée par frottement sec. Expérimentalement, il a été observé que pendant les états de stick/slip, l’amplitude de la FRF diminue et le rapport entre l’énergie dissipée et l’énergie apportée au système augmente. Par conséquent, l’énergie dissipée par frottement sec est considérée comme source d’aplatissement des pics. D’autre part, l’aplatissement des pics peut être expliqué comme une conséquence des changements dans les conditions aux limites durant les états de stick/slip. L’occurrence des différents états de contact induit une différence de phase entre le déplacement et les composantes de la force non linéaire qui limite ses effets et, par suite, explique l’aplatissement des pics. Afin d’arriver à une meilleure compréhension de ce phénomène, un modèle numérique simple basé sur un système à un seul degré de liberté est utilisé dans cette étude. Une analyse énergétique couplée avec une analyse des forces d’équilibre en résonance sont consi-

dérées. Une méthode de balance multi harmonique classique (MHBM) en domaine fréquentiel et une solution temporelle sont utilisées pour la détermination de l'influence de l'énergie dissipée et le changement des conditions limites associées aux états du contact.

2.4.1 Approche énergétique

L'énergie dissipée par le frottement sec $E_{frottement}$ et par l'amortissement visqueux E_{visc} sont calculées sur une période du cycle en régime permanent par l'intermédiaire des expressions suivantes :

$$E_{frottement} = \int_T f_{nl}(t) \dot{y} dt \quad (2.34)$$

$$E_{visc} = \int_T F_{visc} \dot{x} dt = \int_T c(\dot{x})^2 dt = \pi c \omega (A_{max}(\omega))^2 \quad (2.35)$$

où $f_{nl}(t)$ est la force non linéaire de contact, $y(t)$ le déplacement relatif entre le frotteur et la masse, et A_{max} l'amplitude du déplacement total $x(t)$ associé à la fréquence d'excitation ω .

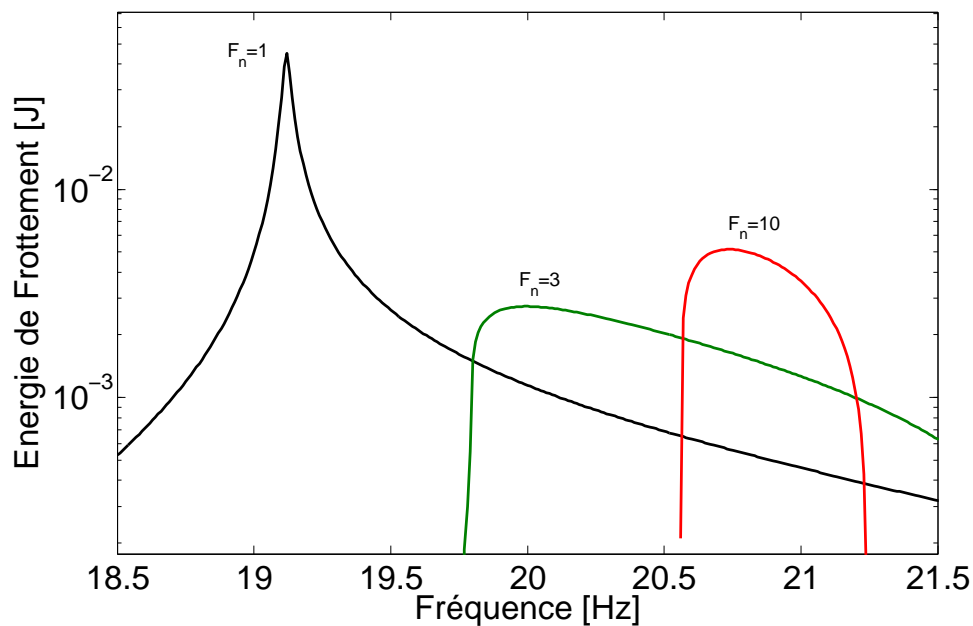


FIGURE 2.10 – *Énergie dissipée par frottement sec pour différentes valeurs de force normale*

L'énergie dissipée par frottement sec est calculée grâce à la courbe d'hystérésis, illustrant l'évolution de la force non linéaire de frottement $f_{nl}(t)$ en fonction du déplacement relatif $y(t)$. Les relations entre les fonctions de réponses fréquentielles et l'énergie dissipée par frottement sec sont illustrées dans les fig.2.10 à 2.13. Ces résultats sont associés à trois valeurs données de la force normale de contact F_n qui impliquent trois états différents de contact : un contact à majorité glissant pour $F_n = 1$ N, un contact stick/slip pour $F_n = 3$ N et finalement un contact à majorité bloqué $F_n = 10$ N. Le

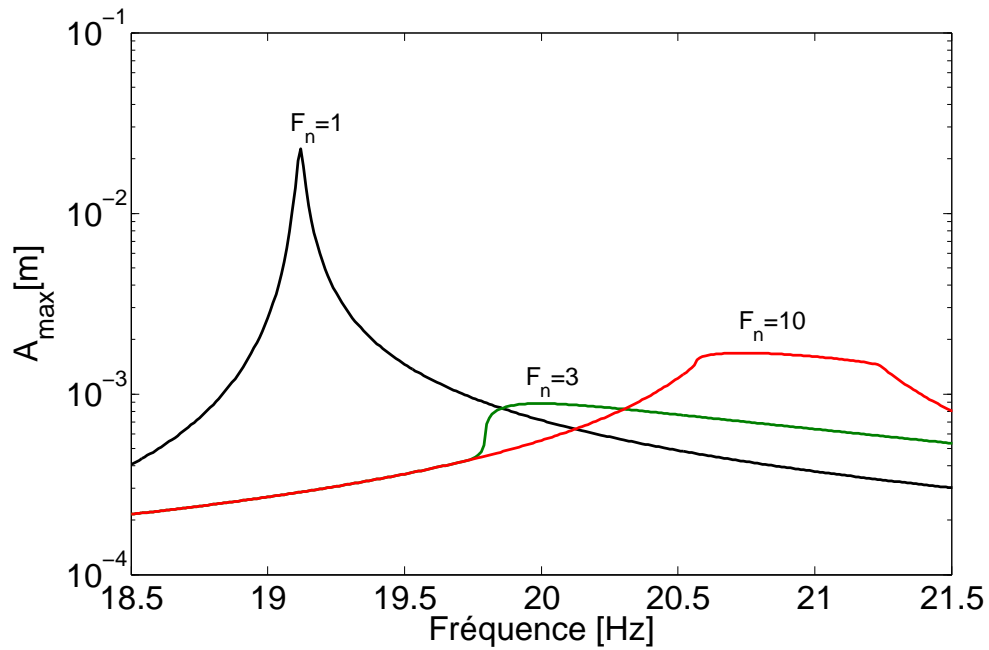


FIGURE 2.11 – Niveaux de réponse pour différentes valeurs de force normale

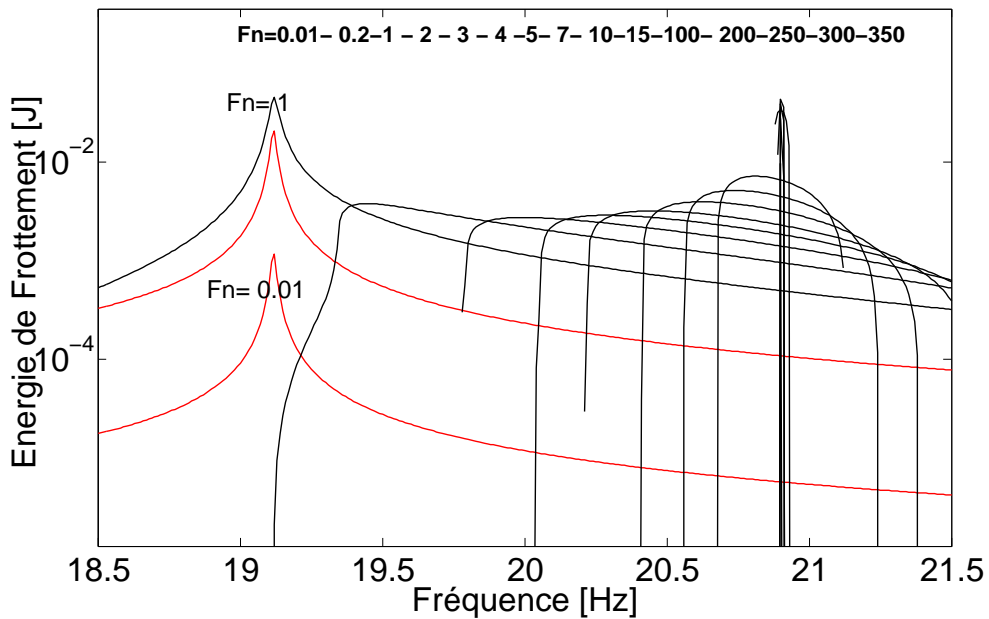


FIGURE 2.12 – Energie dissipée par frottement sec pour différentes valeurs de force normale

cas où $F_n = 1$ N produit l'amplitude de la réponse la plus élevée, l'énergie dissipé par frottement sec est d'autant plus élevée que l'amplitude de la réponse est élevée. $F_n = 3$ N donne l'amplitude la plus faible associée à la courbe d'hystérésis la plus étroite, alors que $F_n = 10$ N conduit à des amplitudes de vibrations plus élevées.

La fig.2.12 montre l'énergie dissipée par frottement sec pour différentes valeurs de forces normales variant entre 0.01 N et 350 N. Pour de très

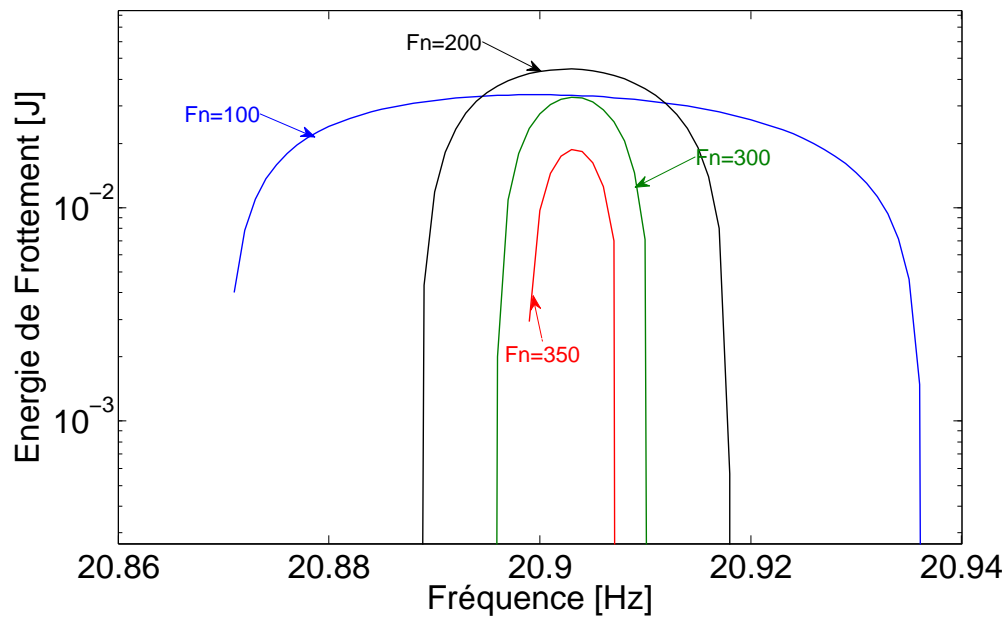


FIGURE 2.13 – Energie dissipée par frottement sec pour $F_n = 100 - 200 - 300 - 350$ N

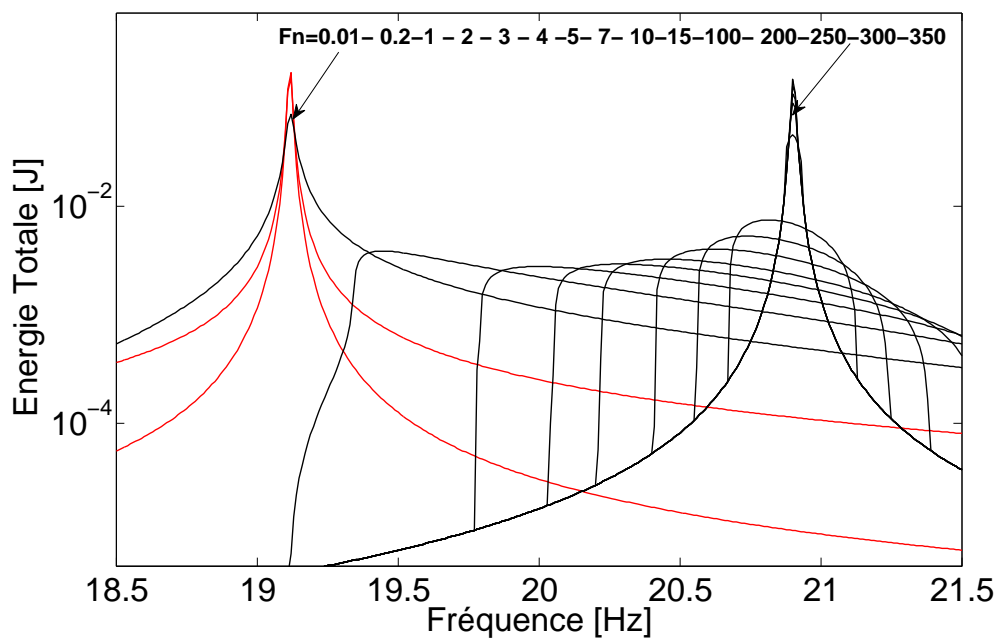


FIGURE 2.14 – Energie totale dissipée pour différentes valeurs de forces normales

faibles valeurs de forces normales le système est en glissement pur. Dans ce cas, l'énergie de frottement tend vers zéro (fig.2.13). Pour les valeurs élevées de la force normale $F_n > 350$ N, le mouvement relatif devient impossible (état bloqué) et l'énergie dissipée par frottement sec tend aussi vers zéro. Pour ces deux cas linéaires extrêmes, l'énergie du frottement est nulle.

L'énergie totale dissipée est obtenue par addition de la dissipation due au

frottement sec $E_{frottement}$ et à la dissipation visqueuse E_{visc} ; elle s'exprime par la relation :

$$E_{tot} = E_{frottement} + E_{visc} \quad (2.36)$$

La fig.2.14 montre l'évolution de l'énergie totale dissipée et la conclusion faite auparavant apparaît clairement. L'énergie totale dissipée diminue aussi avec la diminution de l'amplitude.

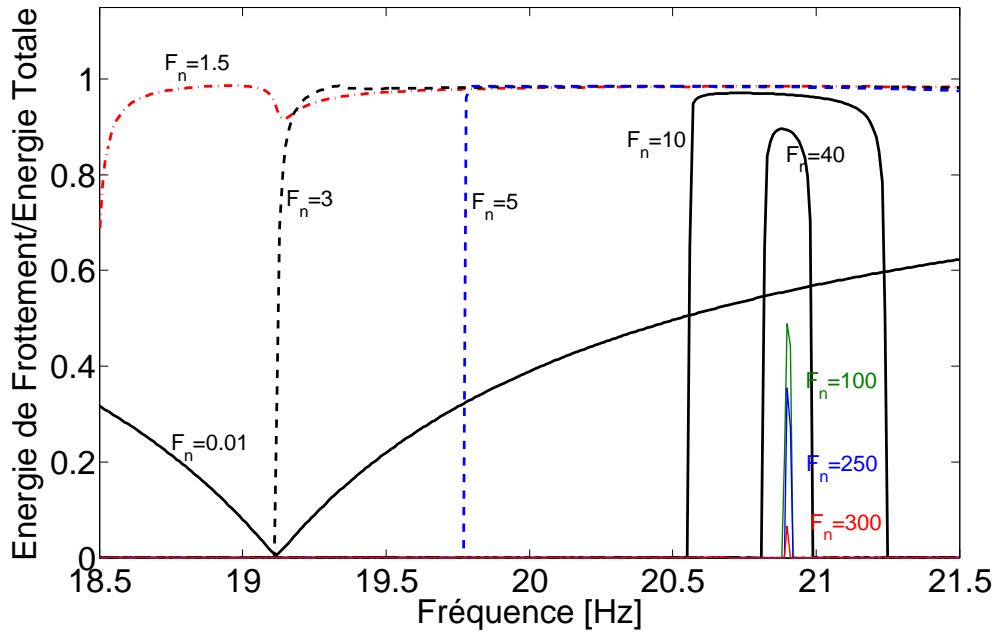


FIGURE 2.15 – Rapport de l'énergie dissipée par frottement sec $E_{frottement}$ à l'énergie totale dissipée E_{tot} en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de forces normales

Il est intéressant d'examiner le rapport des énergies associées au frottement sec et à l'amortissement visqueux (fig.2.15). Pour les faibles valeurs de force normale, le contact est principalement glissant et le frotteur joue son rôle d'amortissement et peut dissiper jusqu'à 95% de l'énergie totale dissipée. Pour les états stick/slip, l'influence du frotteur l'emporte sur l'influence de l'amortisseur visqueux. L'énergie de dissipation visqueuse devient quasiment négligeable dans la zone de stick/slip et ne participe sensiblement que pour les cas quasi linéaires associés aux charges normales les plus faibles et les plus élevées.

La fig.2.16 superpose l'évolution du maximum de l'énergie totale, de l'énergie dissipée par frottement sec et celle dissipée par l'élément visqueux en fonction de τ (obtenues par les fig.2.12) et 2.16). Avec cette représentation, les faibles forces normales se situent au voisinage de $\tau = 0\%$ alors que les forces normales élevées se situent au voisinage de $\tau = 100\%$. L'énergie dissipée par frottement sec montre deux maxima, correspondant à $F_n = 1$ N et $F_n = 200$ N (fig.2.12 et fig.2.13). Ces maxima sont aussi associés aux pics de résonance comme le prouve la fig. 2.6. En dessous de $F_n = 1$ N, le système tend vers un comportement purement glissant ; par conséquent $E_{frottement}$ tend vers zéro (fig.2.12). En dessus de $F_n = 200$ N, le système tend vers un comportement purement bloqué et $E_{frottement}$ tend

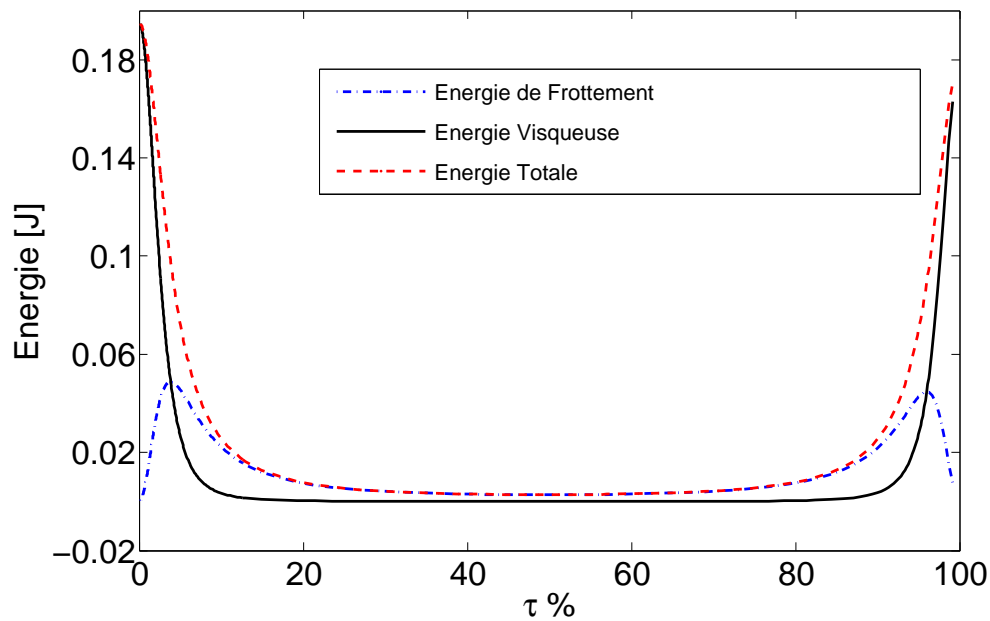


FIGURE 2.16 – Evolution de l'énergie totale dissipée en fonction du paramètre τ associé au déplacement maximal

aussi vers zéro (fig.2.13). $E_{\text{frottement}}$ possède une valeur minimale pour la valeur optimale de l'état de stick/slip, qui correspond à l'amplitude minimale du déplacement rencontrée à $\tau = 50\%$ (fig.2.8).

L'énergie totale est également minimale pour $\tau = 50\%$ et suit globalement la même évolution que l'amplitude maximale de la réponse de la fig.2.8.

En conclusion, comme le minimum du déplacement ne correspond pas au maximum de l'énergie dissipée, l'énergie dissipée par frottement sec et l'énergie totale dissipée s'avèrent être insuffisantes pour expliquer l'aplatissement des pics des FRF. Dans la suite la deuxième cause possible pour le l'aplatissement des pics, le changement des conditions limites lors des transitions stick/slip sera examinée.

2.4.2 Changement de l'état du contact du au comportement de stick/slip

La méthode MHBM possède un intérêt majeur dans ce contexte puisqu'elle permet définir un paramètre de phase qui décrit les changements des conditions limites durant les mouvements de stick/slip, la force tangentielle non linéaire s'exprime par :

$$f_{nl}(t) = \sum_{n=1}^N f c_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^N f s_n \sin(n\theta) = f_{nl\cos}(\theta) + f_{nl\sin}(\theta) \quad (2.37)$$

la fig.2.18 montre l'évolution de $x(t)$ et $f_{nl}(t)$ sur une période d'un cycle 2π (fig.2.3) avec ses composantes cosinus et sinus $f_{nl\cos}(t)$ et $f_{nl\sin}(t)$.

Cette figure a été obtenue pour une valeur de $F_n = 5$ N et à $f = 20.8$ Hz (2.17). En cette fréquence l'amplitude de la FRF ne correspond pas au maximum obtenu pour cette force normale (à savoir, pour $F_n = 5$ le

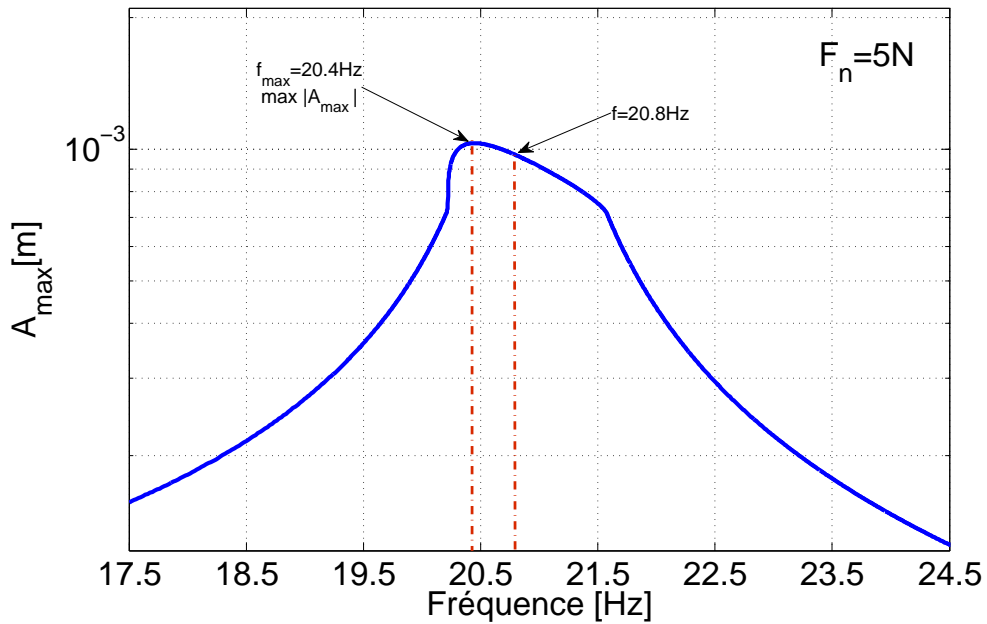


FIGURE 2.17 – Courbe FRF obtenue pour $F_n = 5 \text{ N}$

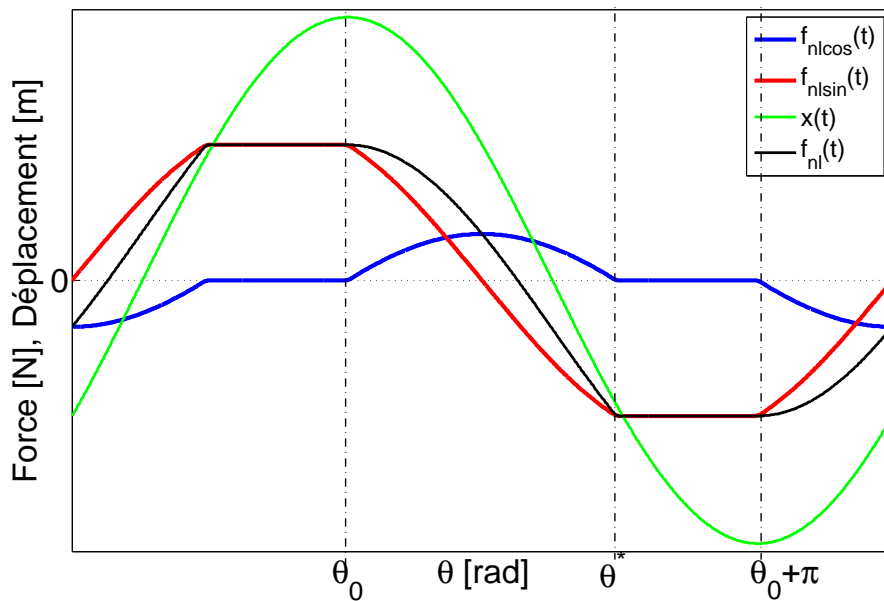


FIGURE 2.18 – $f_{nlcos}(t)$, $f_{nlsin}(t)$, $f_{nl}(t)$ and $x(t)$ en fonction de l'angle θ : $F_n = 5 \text{ N}$ et $f = 20.8 \text{ Hz}$

maximum de l'amplitude est atteint à $f = 20.4 \text{ Hz}$).

On voit clairement qu'il n'y a pas une relation particulière entre le déphasage de la force $f_{nl}(t)$ et de ces 2 composantes $f_{nlcos}(t)$ et $f_{nlsin}(t)$, et le déplacement du système $x(t)$.

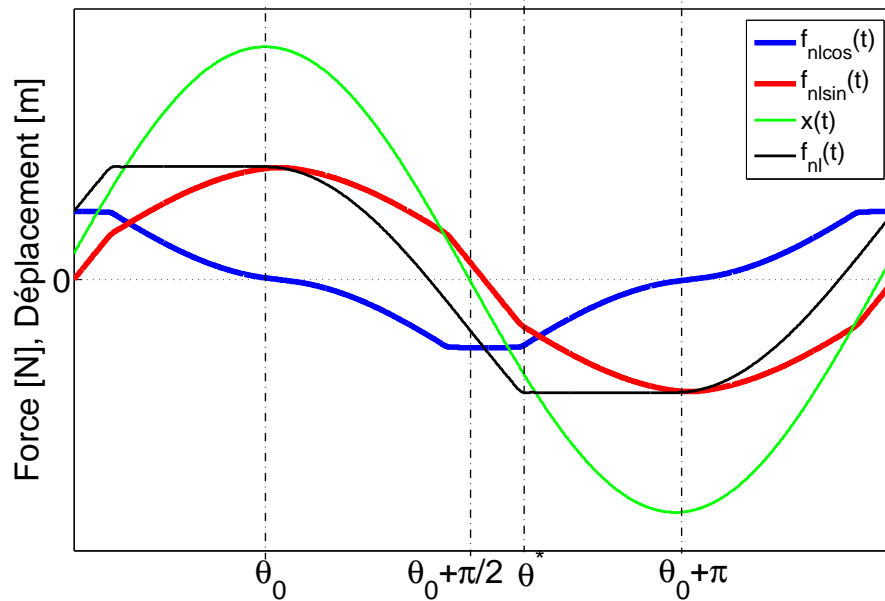


FIGURE 2.19 – $f_{nl\cos}(t)$, $f_{nl\sin}(t)$, $f_{nl}(t)$ and $x(t)$ en fonction de l'angle θ : $F_n = 5 \text{ N}$ et $f = 20.4 \text{ Hz}$

Cependant, lorsque la fréquence donne le maximum de la réponse (dans ce cas pour le couple ($F_n = 5 \text{ N}$, $f = 20.4 \text{ Hz}$) fig.2.19 et 2.17, la composante sinusoïdale $f_{nl\sin}(t)$ de la force non linéaire sera en phase avec $x(t)$.

Cependant, lorsque la fréquence donne le maximum de la réponse (dans ce cas pour le couple ($F_n = 5 \text{ N}$, $f = 20.4 \text{ Hz}$) fig.2.19 et 2.17, la composante sinusoïdale $f_{nl\sin}(t)$ de la force non linéaire sera en phase avec $x(t)$.

D'autre part, la partie cosinoïdale $f_{nl\cos}(t)$ de la force non linéaire est déphasée de 90 par rapport au déplacement.

Pour chaque force normale F_n de la fig.2.6, le maximum de l'amplitude A_{max} de la courbe FRF noté : $A_m = \max |A_{max}|$ ainsi que la fréquence associée $freq_{max}$ la F_n correspondante et les deux paramètres (θ_0, θ^*) sont employés pour construire les vecteurs temporels $x(t)$, $f_{nl}(t)$, $f_{nl\cos}(t)$ et $f_{nl\sin}(t)$. Ensuite l'amplitude de chaque vecteur est extraite et on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} F_{nl\cos} &= \max_{2\pi} |f_{nl\cos}(\theta)| = |f_{nl\cos}(\theta_0 + \frac{\pi}{2})| \\ F_{nl\sin} &= \max_{2\pi} |f_{nl\sin}(\theta)| = |f_{nl\sin}(\theta_0)| \\ F_{nl} &= \max_{2\pi} |f_{nl}(\theta)| = |f_{nl}(\theta_0)| = |f_{nl}(\theta^*)| \end{aligned} \quad (2.38)$$

L'observation effectuée précédemment à travers fig.2.19 sur l'état de la phase entre les différentes composantes de f_{nl} et $x(t)$ peut être étendue pour chaque couple ($freq_{max}, F_n$) qui donne le maximum $A_m = \max |A_{max}|$. Ces différents paramètres sont obtenus sur la fig.2.20. La fig.2.20 présente l'évolution de la force tangentielle non linéaire F_{nl} ainsi que l'évolution de ses composantes en phase $F_{nl\sin}$ et déphasée $F_{nl\cos}$ de la force non linéaire calculée grâce à la méthode MHBM (N=55) en fonction du paramètre τ .

Pour des faibles forces normales et donc pour des faibles valeurs du pour-

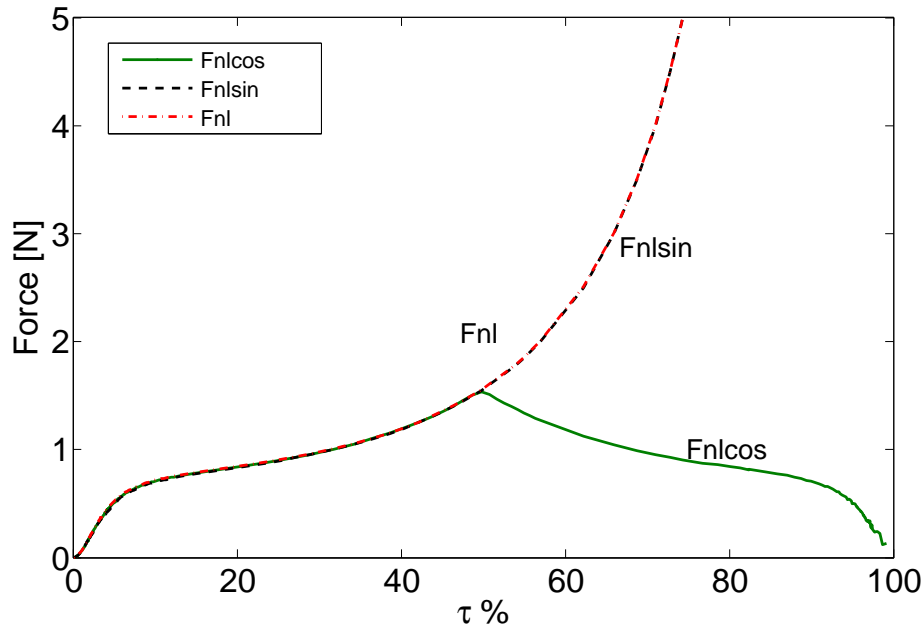


FIGURE 2.20 – Composantes en phase et déphasée de 90 de la force non linéaire avec MHBM

centage de stick τ proche de 0%, l'amplitude de la force non linéaire commence à zéro (état totalement glissant). Les deux composantes F_{nlcos} et $F_{nl sin}$ possèdent la même contribution jusqu'à ce que l'état optimum de stick/slip soit atteint pour $\tau = 50\%$.

A partir de cette valeur, F_{nlcos} commence à diminuer et la force non linéaire augmente et devient quasiment égale à $F_{nl sin}$ en s'approchant de l'état bloqué. Au voisinage de l'état bloqué ($\tau = 100\%$), $f_{nl}(t)$ est quasiment égale à l'amplitude de sa composante en phase $F_{nl sin}$ tandis que l'amplitude de la composante déphasée F_{nlcos} est presque nulle.

Ce phénomène peut être physiquement expliqué comme suit : au voisinage de l'état bloqué, la force non linéaire devient linéaire et en phase avec le déplacement ; ce qui implique que la contribution de la composante en phase est dominante alors que la contribution de la composante déphasée devient négligeable.

En examinant toutes les forces agissant sur le système, la force visqueuse et la composante cosinus de la force non linéaire sont toujours déphasées de 90 par rapport au déplacement, alors que la force d'inertie, la force de rappel du ressort et la composante sinusoïdale de la force non linéaire sont en phase avec le déplacement. L'aplatissement de pic est mesuré à l'amplitude maximale A_{max} qui se produit pour une valeur particulière de fréquence ω notée Ω . Les forces en phase par rapport au déplacement $x(t)$ sont :

Force d'inertie :

$$f_{in}(t) = m\ddot{x}(t) \quad (2.39)$$

Force de restitution :

$$f_{spring}(t) = k.x(t) \quad (2.40)$$

Force tangentielle en-phase :

$$f_{nlsin}(\theta) = \sum_{n=1}^N f_{sn} \sin(n\theta) \quad (2.41)$$

Par conséquent la valeur maximale de la force totale en phase F_p associée aux amplitudes maximales est obtenue sous la forme :

$$F_p = F_{in} + F_{spring} + F_{nlsin} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} F_{in} &= \max_{2\pi} |m\ddot{x}(t)| = |m\ddot{x}(\theta_0)| \\ F_{spring} &= \max_{2\pi} |kx(t)| = kx(\theta_0) = kA_{\max} \\ F_{nlsin} &= \max_{2\pi} |f_{nlsin}(\theta)| = |f_{nlsin}(\theta_0)| \end{aligned} \quad (2.43)$$

Les forces déphasées de 90 sont :

Force visqueuse :

$$f_{visc}(t) = c\dot{x}(t) \quad (2.44)$$

Force tangentielle déphasée :

$$f_{nlcos}(\theta) = \sum_{n=1}^N f_{cn} \cos(n\theta) \quad (2.45)$$

avec un maximum F_o pour :

$$F_o = F_{visc} + F_{nlcos} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} F_{visc} &= \max_{2\pi} |c\dot{x}(\theta)| = |c\dot{x}(\theta_0 + \frac{\pi}{2})| \\ F_{nlcos} &= \max_{2\pi} |f_{nlcos}(\theta)| = |f_{nlcos}(\theta_0 + \frac{\pi}{2})| \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ces forces peuvent être exprimées par unité de déplacement par $F_{p/x}$ et $F_{o/x}$ tel que :

$$F_{p/x} = k - \frac{F_{in}}{A_{\max}} + \frac{F_{nlsin}}{A_{\max}} \quad (2.48)$$

$$F_{o/x} = \frac{F_{visc}}{A_{\max}} + \frac{F_{nlcos}}{A_{\max}} \quad (2.49)$$

En considérant l'équilibre des forces il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
 F_{tot/x} &= \sqrt{F_{o/x}^2 + F_{p/x}^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{F_{visc}}{A_{max}} + \frac{F_{nlcos}}{A_{max}}\right)^2 + \left(k - \frac{F_{in}}{A_{max}} + \frac{F_{nlsin}}{A_{max}}\right)^2} \\
 &= \frac{f_0}{A_{max}}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

où f_0 est la force d'excitation.

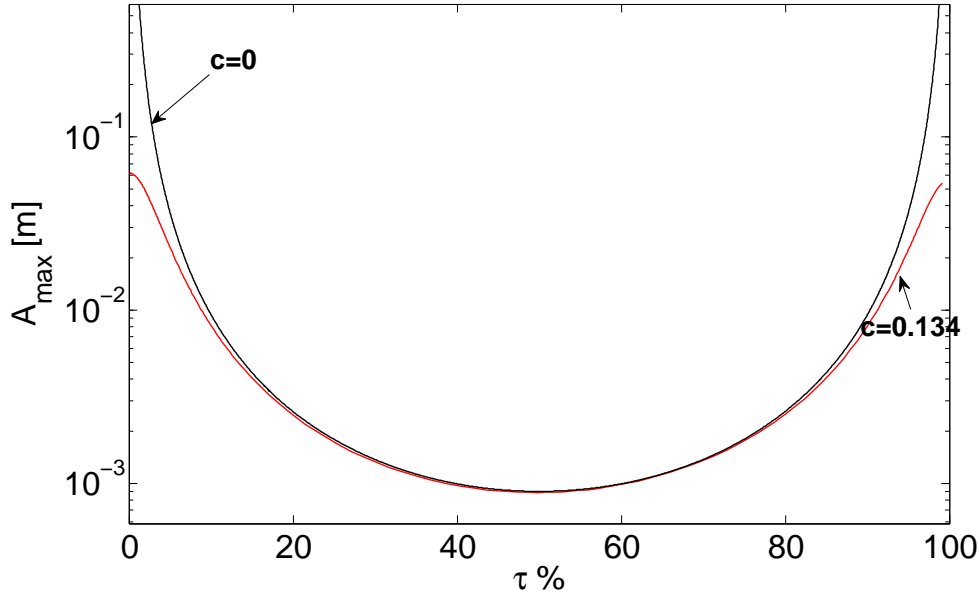


FIGURE 2.21 – Evolution du déplacement maximal A_{max} en fonction de τ pour $c = 0$ et $c = 0.134$

La fig.2.21 présente l'évolution de l'amplitude A_{max} en fonction du pourcentage de stick τ . Comme on l'a déjà vu, les amplitudes maximales sont obtenues pour les cas de contact quasi linéaires collant ou glissant. L'état optimal associé à l'amplitude la plus faible est obtenu pour $\tau = 50\%$, valeur pour laquelle une période d'oscillation est constituée par des mouvements mi collés mi glissants.

La fig.2.22 montre l'évolution des forces en phase et déphasées par unité de déplacement $F_{p/x}$ et $F_{o/x}$. La force totale en phase apparait clairement négligeable comparée à la composante déphasée, à l'exception de la région se situant au voisinage des états purement glissants et collés où les deux composantes possèdent le même niveau d'amplitude. La valeur maximale de $F_{o/x}$ se produit pour $\tau = 50\%$ où l'amplitude maximale A_{max} possède sa valeur minimale comme mentionné précédemment.

La fig.2.23 superpose les deux composantes de la force totale déphasée $F_{o/x}$ associée au frottement sec F_{nlcos}/A_{max} et à l'amortissement visqueux F_{visc}/A_{max} . L'effet de l'amortissement visqueux ne peut pas être négligé au voisinage des états de contact complètement collé et complètement glissant. Ailleurs, la force déphasée totale $F_{o/x}$ est bien approximée par F_{nlcos}/A_{max} . Ce résultat est confirmé par la fig.2.21 qui montre l'amplitude

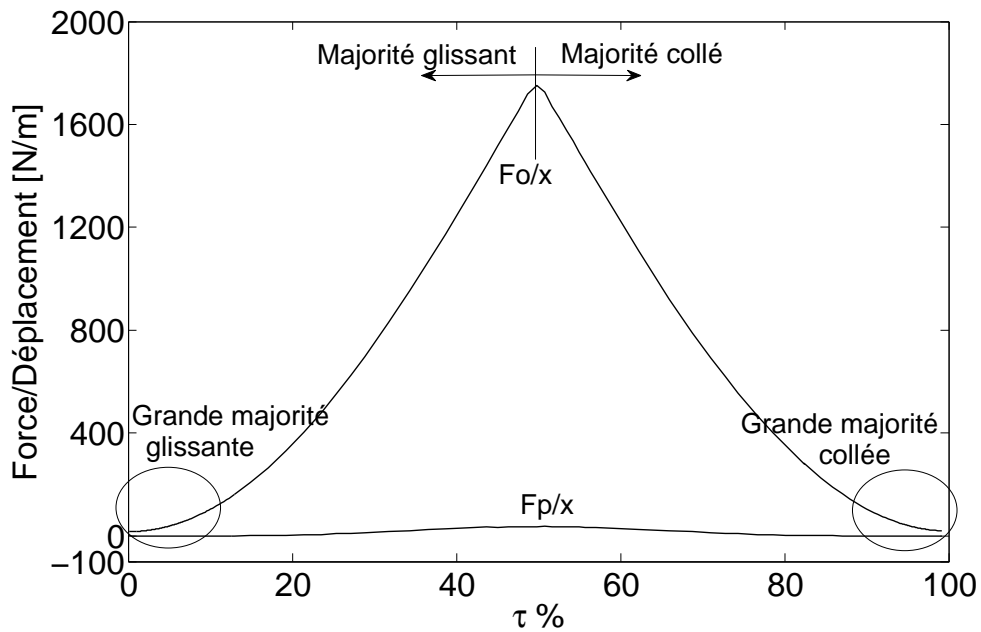


FIGURE 2.22 – Evolution des forces en phase et déphasées par unité de déplacement ($F_{p/x}$, $F_{o/x}$) en fonction de τ

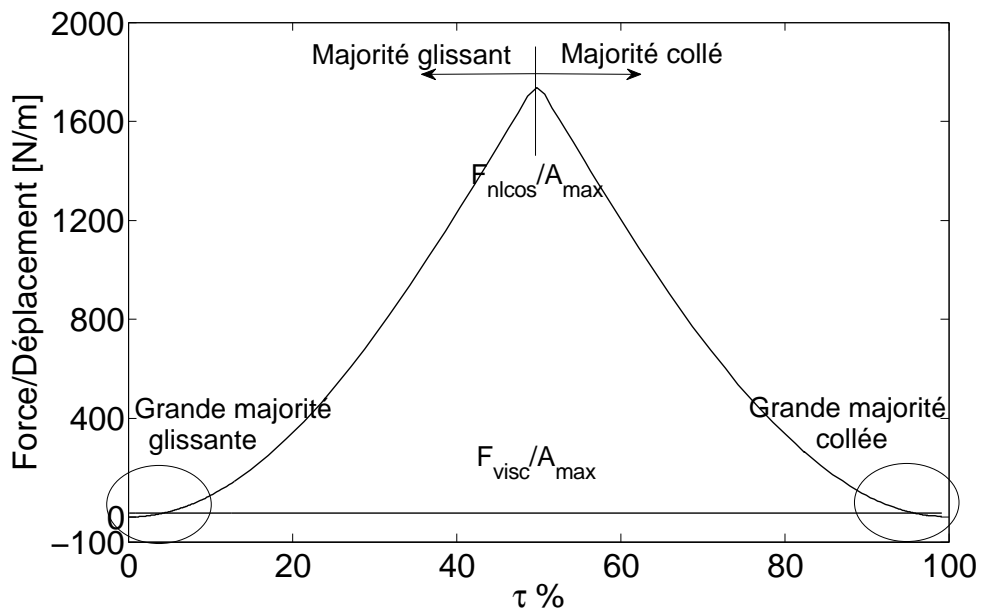


FIGURE 2.23 – Evolution de $(F_{nl\cos}/A_{max})$ et (F_{visc}/A_{max}) les composantes de la force déphasée par unité de déplacement en fonction de τ

maximale A_{max} en fonction des différents états de contact pour les deux cas avec ou sans amortissement visqueux. Quelque soit le cas, l'état optimal de stick/slip reste pour $\tau = 50\%$ avec à peu près la même valeur d'amplitude ; l'effet de l'amortissement visqueux est uniquement significatif pour les états complètement glissant et complètement collé.

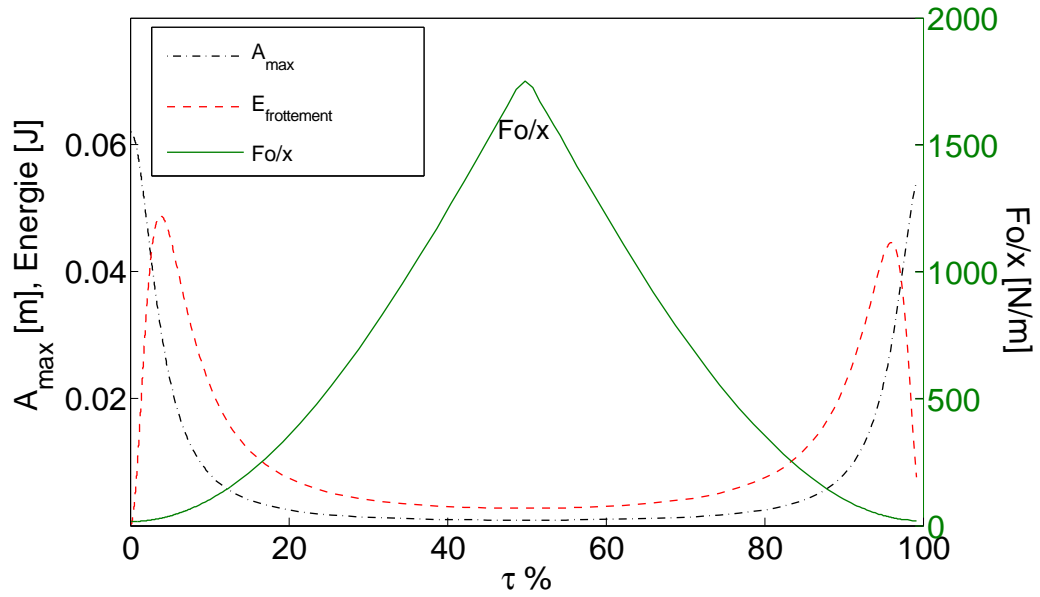


FIGURE 2.24 – Amplitude maximale, énergie de dissipation sec et force déphasée par unité de déplacement en fonction de τ

La fig.2.24 superpose l'évolution de l'amplitude maximale du déplacement, l'énergie dissipée par frottement sec $E_{frottement}$ et la force déphasée par unité de déplacement $F_{o/x}$ donnée en fonction du pourcentage de stick τ .

Quand A_{max} atteint sa valeur minimale pour $\tau = 50\%$, l'énergie dissipée par frottement sec $E_{frottement}$ est minimum alors que la force déphasée $F_{o/x}$ atteint son maximum.

L'effet de la force non linéaire apparaît clairement lorsque l'amortissement visqueux n'est pas pris en considération. L'amplitude maximale à la résonance et, dans ce cas la force totale en phase, par unité de déplacement $F_{p/x}$ donnée par l'équation 2.48 est classiquement égale à zéro. Sans amortissement visqueux, la force totale déphasée par unité de déplacement $F_{o/x}$ est constituée uniquement par la composante cosinus F_{nlcos} de la force non linéaire :

$$F_{o/x} = \frac{F_{nlcos}}{A_{max}} \quad (2.51)$$

Par suite, les équations d'équilibre se réduisent à :

$$F_{tot/x} = \sqrt{F_{o/x}^2 + F_{p/x}^2} = F_{o/x} = \frac{F_{nlcos}}{A_{max}} = f_0 / A_{max} \quad (2.52)$$

Par conséquent, l'amplitude maximale A_{max} est inversement proportionnelle à la composante déphasée de la force par unité de déplacement.

Ainsi, les changements des états du contact pendant les phases du stick/slip ont une influence majeure sur la composante déphasée F_{nlcos} de la force de contact par unité de déplacement et, par conséquent, sur l'amplitude maximale de la vibration.

En conclusion, l'aplatissement des pics de la FRF ne peut pas être expliqué par l'approche de l'énergie dissipée par le frotteur mais par la perturbation des conditions aux limites induites au cours de chaque cycle de vibration.

CONCLUSION

Dans ce chapitre la méthode de la balance harmonique est décrite et implémentée via un modèle de contact de type Macroslip. Ses possibilités sont évaluées par comparaison avec une méthode d'intégration temporelle. Cette corrélation confirme la rapidité et l'exactitude de la méthode pour calculer les réponses en fréquence d'un système simple à 1ddl présentant une non linéarité de type frottement sec (rencontrée dans les nageoires inter-aubes). La FRF du système montre les trois états de contact différents selon le niveau de la force normale appliqué sur le frotteur. Le frotteur permet de réduire les amplitudes de vibration du système dans la zone non linéaire de son fonctionnement.

L'objectif de cette partie est également dirigé vers une meilleure identification des causes physiques susceptibles d'expliquer le phénomène d'aplatissement de pics des structures associés à des dispositifs de frottement sec. Deux hypothèses différentes, classiquement rencontrées dans la littérature, ont été examinées : la première est liée à l'énergie dissipée et la deuxième implique des changements des états de contact pendant les mouvements de stick/slip. Les résultats numériques obtenus montrent que l'aplatissement des pics ne peut pas être associé à une augmentation de l'énergie dissipée par le frottement sec ni à une augmentation de l'énergie totale dissipée (par frottement sec et dissipation visqueuse) puisque ces deux quantités diminuent avec l'amplitude. Considérant la dissipation, il faut cependant noter qu'une majorité de l'énergie absorbée peut être associée au frottement sec dans des états de stick/slip. En revanche, l'analyse des différentes forces agissant sur le système à la résonance montre que, lorsque l'état du contact tend vers des états de stick/slip, la force déphasée par unité de déplacement augmente, impliquant une diminution des amplitudes de vibration. L'état de contact qui réduit au minimum ces amplitudes est moitié collé/moitié glissant quand l'amortissement visqueux est négligé. Si l'amortissement visqueux est considéré et pour des valeurs classiques des constantes d'amortissement, l'état optimal du contact tend légèrement vers des configurations collées. Ainsi l'augmentation de la force déphasée par unité de déplacement quand le contact tend vers des états de stick/slip, est identifiée comme la vraie cause de l'aplatissement des pics.

APPLICATION AUX ENSEMBLES AUBÉS

3

SOMMAIRE

3.1	TERMINOLOGIE LIÉE AUX VIBRATIONS DES DISQUES AUBÉS ET AU PHÉNOMÈNE DU DÉSACCORDAGE	74
3.1.1	La symétrie cyclique	74
3.1.2	Classification des modes de disques aubés	75
3.1.3	Phénomènes aéroelastiques	76
3.1.4	Excitations de type ordre moteur	77
3.1.5	Le désaccordage et ses conséquences	79
3.1.6	Frequency veering	80
3.2	RÉDUCTIONS D'ORDRE DES MODÈLES	81
3.3	TECHNIQUES STATISTIQUES ET PROBABILISTES POUR LA MODÉLISATION DU DÉSACCORDAGE	84
3.4	MODÉLISATION STOCHASTIQUE D'UN SYSTÈME À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ PAR MONTE CARLO	87
3.4.1	Les différents paramètres à considérer	88
3.4.2	Etude paramétrique déterministe du système à un degré de liberté suite à la variation des paramètres du contact	90
3.4.3	Convergence du nombre de tirages	96
3.4.4	Incertitude sur le paramètre kd	100
3.4.5	Incertitude sur le paramètre μ	111
3.4.6	Incertitude sur le paramètre F_n	119
3.5	EXTENSION DE LA MODÉLISATION STOCHASTIQUE À UN SYSTÈME À GÉOMÉTRIE CYCLIQUE DE TREIZE AUBES	126
3.5.1	Mise en équation du modèle numérique à 13 aubes	126
3.5.2	Excitation ponctuelle, Excitation ordre moteur	128
3.5.3	Etude paramétrique déterministe du système accordé à treize degrés de liberté	131
3.5.4	Modélisation aléatoire par Monte Carlo à un système à treize aubes	137
3.5.5	Incertitudes sur kd	137
3.5.6	Incertitudes sur F_n	152

ON constate généralement que l'amortissement interne du matériau, l'amortissement apporté par le fluide et l'amortissement induit par les fixations des aubes au disque ne suffisent pas pour réduire les contraintes dynamiques dans les aubes en situation de résonance. C'est pourquoi il convient, pour assurer un fonctionnement suffisamment fiable, d'ajouter d'autres sources d'amortissement. Dans ce contexte, comme montré précédemment, les systèmes avec contacts et frottement sec sont les plus pratiques et efficaces. Cependant, ces contacts frottants sont aussi une des sources du désaccordage, liée à la perte de la propriété de symétrie cyclique, qui peut entraîner une localisation dangereuse de la vibration. Pour les ensembles aubés désaccordés, l'énergie vibratoire, au lieu de se répartir uniformément sur l'ensemble de l'aubage, vient se concentrer sur quelques aubes générant des amplitudes beaucoup plus importantes que celles prédites sur la même structure accordée. Le désaccordage est inévitable et, s'il n'est pas maîtrisé, peut s'avérer nuisible à la tenue des turbomachines.

La méthode de la balance harmonique développée dans les chapitres précédents s'est montrée d'une très grande efficacité pour l'obtention des réponses non linéaires des systèmes discrets avec frotteurs. Dans ce chapitre, cette méthode est appliquée à un système cyclique de 13 aubes avec frotteurs inter-aubes afin d'examiner les effets du désaccordage lorsque celui-ci est associé aux paramètres du contact frottant. En effet, l'étude du comportement dynamique des ensembles aubés, intégrant les effets combinés du désaccordage et des non linéarités liées au frottement sec est encore relativement peu développée, la compréhension complète et claire du phénomène reste insuffisante.

Une étude bibliographique succincte et l'exposé des différentes terminologies liées aux systèmes aubés est tout d'abord proposée pour une meilleure compréhension du problème. Comme le but de ce chapitre est une étude statistique de la phénoménologie du comportement dynamique des structures à géométrie cyclique en présence de désaccordage lié au frottement inter-aubes, le modèle macroslip sera utilisé et une représentation du dispositif ne considérant qu'un seul degré de liberté par aube est adoptée. Une étude paramétrique permet de mieux cerner l'influence de variations aléatoires des paramètres du contact sur la réponse fréquentielle. Enfin l'étude statistique est étendue sur un système à 13 degrés de liberté, illustrant l'effet du désaccordage par le contact sur la dynamique des ensembles disque aubes.

3.1 TERMINOLOGIE LIÉE AUX VIBRATIONS DES DISQUES AUBÉS ET AU PHÉNOMÈNE DU DÉSACCORDAGE

3.1.1 La symétrie cyclique

Un disque aubé est une structure périodique en rotation. Cette périodicité, lorsqu'elle est parfaite, rend la théorie de la symétrie cyclique applicable

et permet d'obtenir la dynamique de la structure entière, à partir du calcul mené sur une unité représentative de base : le secteur.

L'hypothèse de symétrie cyclique permet de réduire considérablement les temps de calcul en ne discrétisant qu'un seul secteur au lieu de la structure entière. Elle s'applique sur les systèmes linéaires mais peut également être utilisée en présence de non linéarités.

Petrov [54] a développé une méthode d'analyse de la réponse périodique forcée des structures non linéaires à symétrie cyclique. Cette méthode permet le calcul de la réponse multi harmonique d'un disque aubé entier, en utilisant un modèle de secteur périodique. Trois types de non linéarités sont examinés : non linéarité due aux frotteurs sous plate forme, non linéarité de jeu ou gap et non linéarité induite par un ressort de raideur cubique. Comparés à ceux obtenus par une modélisation du système entier en éléments finis, les résultats numériques présentés montrent l'efficacité de la méthode.

3.1.2 Classification des modes de disques aubés

Les disques aubés à symétrie cyclique se caractérisent par des modes de vibration spécifiques présents sous forme de paires orthogonales (deux modes à fréquences identiques) ou bien sous forme de modes simples. Par analogie avec les structures axisymétriques ces modes sont classés par le nombre de diamètres nodaux présents sur leur circonférence ainsi que par le nombre de lignes nodales circulaires désignées sous le nom de cercles nodaux fig.3.1. Sur cette figure on observe deux fréquences liées à un mode à deux diamètres ($2D$). En effet le mode $2D$ est caractérisé sur chacune des deux figures par deux lignes diamétrales perpendiculaires les unes aux autres et qui divisent le système à géométrie cyclique en quatre parties (en bleu). Les fréquences de flexion caractérisent la vibration de chaque aube, première déformée correspond à la fréquence de première flexion du mode $2D$ notée $1F - 2$, et la seconde est la fréquence de deuxième flexion du mode $2D$ notée $2F - 2$ (caractérisée par une ligne nodale perpendiculaire à la longueur de chaque aube et située près du milieu de chaque aube).

Pour une structure possédant la propriété de symétrie cyclique constituée de N secteurs identiques (N aubes), le nombre maximum des diamètres nodaux possible est :

$$\begin{aligned} \frac{(N-1)}{2} & \text{ si } N \text{ est impair} \\ \frac{N}{2} & \text{ si } N \text{ est pair} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Plus le nombre d'aubes augmente, plus la structure à symétrie cyclique tend vers un comportement axisymétrique (disque continu).

Les formes de modes correspondant à $n = 0$ et $n = N/2$ sont des modes simples. Dans ce cas, chaque secteur vibre avec le même déplacement respectivement en phase et en opposition de phase. Pour les autres modes, la vibration de chaque secteur est reliée par le paramètre de phase β tel que :

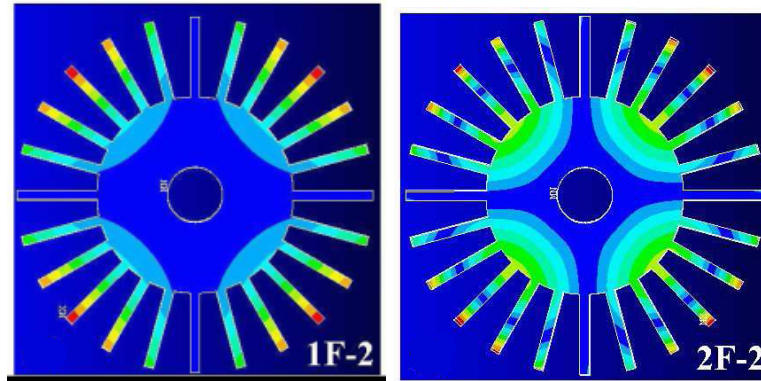


FIGURE 3.1 – Formes des modes d'un système à 24 aubes pour les fréquences $1F - 2$ et $2F - 2$

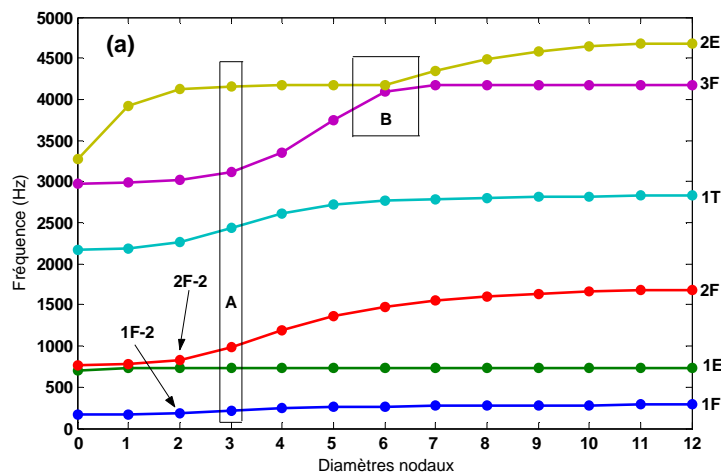


FIGURE 3.2 – Diagramme fréquentiel pour un système à 24 aubes [55]

$$\beta = \pm \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{N}, n = 0, \dots, N/2 \quad (3.2)$$

Les modes sont doubles de type $\sin(n\theta)$ et $\cos(n\theta)$ en fonction du déplacement circulaire et orthogonal. Ils peuvent se combiner pour former un mode avec n'importe quel positionnement circulaire. Le comportement dynamique des aubages est présenté sous la forme montrée fig.3.2. Les fréquences obtenues pour chaque déphasage intersecteurs possibles sont reportées et reliées pour identifier des familles de modes similaires. La densité modale obtenue est généralement élevée.

3.1.3 Phénomènes aéroélastiques

Dans le domaine de l'aéroélasticité des turbomachines, deux types de comportements principaux sont généralement identifiés : les phénomènes de type réponses forcées et les phénomènes auto-entretenus.

Dans le cas des phénomènes auto-entretenus, les forces aérodynamiques sont liées aux vibrations des aubes. Le mouvement vibratoire induit une

variation du champ de pression environnant qui lui même modifie la vibration. Le fluide peut alors amortir le mouvement de l'aube ou au contraire l'amplifier de manière dramatique. Ce type de phénomène est identifié généralement par le nom de vibrations auto excitées, d'instabilité aéroelastique ou de flottement. La fréquence de vibration associée est différente des fréquences naturelles des aubes.

La réponse forcée des roues aubagées est le plus souvent générée par les excitations aérodynamiques dues aux variations des caractéristiques de l'écoulement fluide sur la circonférence; ces variations sont produites par les sillages des redresseurs en amont, et potentiellement par ceux des obstacles en aval ou toute autre dissymétrie dans la veine fluide. Les problèmes les plus communs de vibrations forcées sont provoqués par le mouvement relatif entre les pièces tournantes et non-tournantes.

Du point de vue d'une aube mobile, ces excitations sont stationnaires dans le repère fixe, et par conséquent, les fréquences d'excitation sont des multiples entiers de la fréquence de passage des aubes statoriques. On parle donc d'excitations synchrones de la vitesse de rotation du rotor. De telles vibrations peuvent surgir en raison des déformations à l'entrée d'air, aux interactions de rangée d'aubes et aux déformations d'écoulement dues aux brûleurs.

Les vibrations forcées non-synchronisées peuvent également se produire dans un moteur dû aux phénomènes d'écoulement qui ne sont pas synchronisés avec la vitesse de rotor, le décollement de tourbillon etc. Les vibrations résonantes se produisent si la fréquence et la forme de l'instabilité du champ de pression coïncident avec la fréquence propre et la forme d'un mode structural du rotor.

L'étude conduite ici est uniquement consacrée aux cas d'excitations forcées. Les excitations forcées sont diverses et les plus importantes, connues sous le nom d'excitations d'ordre moteur, sont exposées dans le paragraphe suivant.

3.1.4 Excitations de type ordre moteur

L'excitation de type ordre moteur constitue une source majeure de vibrations forcées dans les turbomachines. C'est l'une des excitations les plus importantes, mais aussi les plus complexes car on considère l'excitation générée par la rotation du système aubé à travers un champ de pression statique ou à travers un champ forcé dont la force varie avec la position angulaire de la machine. Ces variations dans le flux constant sont inévitables en raison de la présence d'obstructions (vannes, supports, paliers,...) du flux de fluide et des variations de distributions de l'écoulement de ce même fluide.

La rotation de l'ensemble disque aube provoque des variations de pression qui sont alors perçues par les aubes comme des forces variables en temps avec la fréquence ou périodiquement basées sur la vitesse de rotation.

L'excitation effective peut être décrite par l'analyse suivante. Supposons

que la force permanente (statique) possède une variation cosinusoidale de la forme :

$$f(\theta) = F_n \cos(n\theta) \quad (3.3)$$

La force exercée sur l'aube j pour un temps t et une vitesse angulaire Ω , localisée à l'angle θ_j où $\theta_j = \frac{2\pi j}{N} + \Omega t$ s'écrit :

$$F_j = F_n \cos\left(n\Omega t + \frac{2\pi nj}{N}\right) \quad (3.4)$$

L'excitation totale s'exerçant sur le système complet (puisque les forces s'appliquent simultanément sur toutes les aubes) s'écrit comme le vecteur de forces :

$$\{F\} = F_n \begin{Bmatrix} \cos(n\Omega t + 1\Delta) \\ \cos(n\Omega t + 2\Delta) \\ \cos(n\Omega t + 3\Delta) \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

avec $\Delta = \frac{2\pi n}{N}$.

Par application des formules trigonométriques, on peut réécrire plus simplement cette excitation de type ordre moteur par la sommation de deux composantes harmoniques, chacune ayant le même nombre de diamètres nodaux et la même fréquence (n fois la vitesse de rotation) mais avec une différence de phase temporelle de 90° :

$$\{F\} = F_n \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cos(j\Delta) \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \cos(n\Omega t) + F_n \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \sin(j\Delta) \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \sin(n\Omega t) \quad (3.6)$$

D'après cette formulation, une excitation d'ordre moteur n ne pourra exciter que les modes à n diamètres nodaux. Pour un système parfaitement accordé, avec des aubes et des interconnexions identiques, cela signifie que chaque excitation d'ordre moteur (H) générera seulement des réponses des modes "sélectionnés" c'est-à-dire des modes à n diamètres nodaux. Même si l'excitation est exactement à la fréquence d'un m diamètre ($m \neq n$), la seule réponse qui sera générée sera celle de la composante hors résonance du mode à n diamètres. Il y aura une réponse nulle pour le mode à m diamètres.

Bien évidemment en pratique, il n'y a que très peu d'assemblages avec des modes à purs diamètres nodaux. En effet, la majorité des systèmes présentent du désaccordage ; ils posséderont donc des modes qui auront des composantes à n diamètres dans leur déformée. Ils seront alors tous susceptibles d'être excités partiellement par une excitation de type n ordre moteur.

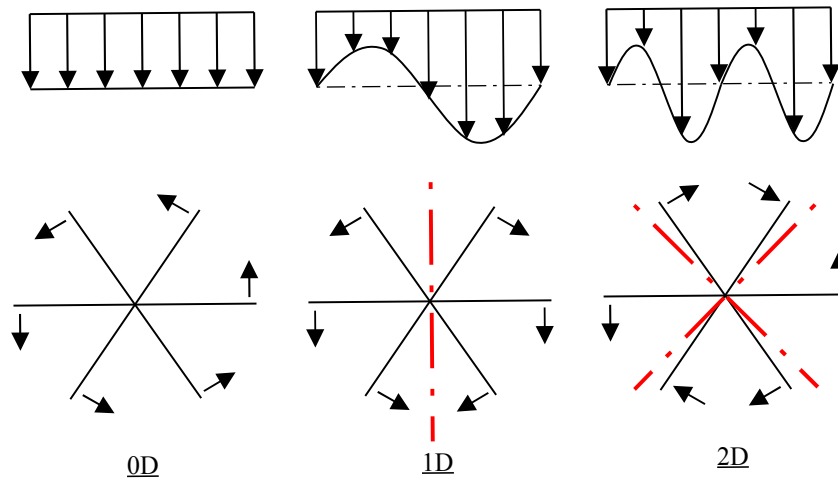


FIGURE 3.3 – Schémas du mouvement des aubes et des diamètres nodaux pour différentes excitations d'ordre moteur

L'excitation du système par une ordre moteur $H = 0$ correspond à une force de même valeur et de même signe pour chaque degré de liberté. Une réponse où tous les degrés de liberté vibreront ensemble et en phase est obtenue pour cette excitation $H = 0$ et le système vibre sur son mode de $0D$ comme le montre la fig.3.3.

Une excitation ordre moteur $H = 1$ désigne une excitation de forme sinusoïdale et de période s'étalant sur les n ddl. Dans ce cas, la moitié des ddl vibreront dans un sens et l'autre moitié en sens inverse ; on caractérise cette distribution par un diamètre nodal qui sépare le système en deux comme le montre la fig. 3.3 pour le mode $1D$. Par la suite, pour des valeurs de H supérieures, on aura des distributions à H diamètres, jusqu'à ce qu'on atteigne $H = (nddl + 1)/2$, où $nddl$ est le nombre de degrés de liberté du système considéré.

3.1.5 Le désaccordage et ses conséquences

Le désaccordage conduit au dédoublement des modes accordés. Le dédoublement de modes est la séparation des fréquences des modes doubles. Ewins et Han [56] montrent que le désaccordage des aubes a comme conséquence la séparation des modes doubles à diamètres nodaux en des modes à différentes fréquences. Les fréquences obtenues sont très voisines les unes des autres mais les modes respectifs deviennent distincts et se caractérisent par un contenu harmonique plus riche que celui associé au mode correspondant accordé. (voir [57]). Les modes des disques aubés désaccordés sont donc constitués par plusieurs " diamètres nodaux " et par conséquent ils peuvent être excités par des plusieurs types d'ordre moteurs (fig.3.5).

La localisation spatiale se produit lorsque l'énergie de vibration dans un disque aubé devient confinée sur une ou plusieurs aubes plutôt que d'être uniformément distribué sur tout le système. Ce phénomène peut être ex-

pliqué en considérant l'énergie vibratoire du système comme étant une onde de déplacement. Dans un système accordé, l'onde se propage dans chaque secteur identique, et conduit à des amplitudes de vibration uniformes qui diffèrent seulement par leur déphasage de l'une par rapport aux autres. Dans le cas désaccordé, la présence des irrégularités provoque la réflexion de l'onde sur chaque secteur. Ceci peut mener au confinement de l'énergie vibratoire sur une petite région et en conséquence, en présence de vibration forcée, certaines aubes peuvent subir des amplitudes et des contraintes qui dépassent celles prévues par une analyse de la structure accordée, ce qui raccourcit leur durée de vie.

Castanier et al [58], Pierre et Wei [59] ont analysé les possibilités d'apparition de vibrations fortement localisées dans les systèmes cycliques désaccordés non linéaires sous l'influence d'une excitation de type ordre moteur, en utilisant une méthode de balance multi-harmonique. L'étude traite également de l'effet de l'amortissement par frottement sec et visqueux sur la localisation. Les résultats montrent que le degré de localisation diminue lorsque l'amortissement augmente et que les systèmes amortis par frottement sec sont plus sensibles aux vibrations localisées que les systèmes amortis par amortissement visqueux.

Sextro et al [60] ont mis au point une méthode approximative pour calculer les enveloppes des FRF d'un disque aubé avec symétrie cyclique en présence de frotteurs sous plateforme, pour des fréquences propres des aubes statistiquement variables. Cette méthode permet d'identifier des régions où la localisation peut se produire avec une probabilité élevée.

Le désaccordage des aubes est par nature aléatoire ([61], [57]) et il est difficile de le localiser et de le quantifier avec précision, ce qui rend aussi difficile la prévision du degré et du positionnement de la localisation. Ce problème doit donc de préférence être abordé dans le cadre d'analyses statistiques. Dans nombre d'articles sur le sujet, le désaccordage est supposé maîtrisé. Dans ce cas, le désaccordage est imposé en faisant varier intentionnellement une des caractéristiques du système comme la masse, la raideur, ou la fréquence. Le désaccordage intentionnel se rapporte à une introduction systématique de variations des propriétés d'un système pour obtenir une réponse désirée. Le désaccordage harmonique se rapporte à un changement harmonique des paramètres du désaccordage. Le paramètre perturbé est désigné explicitement par le numéro de l'harmonique et l'amplitude du désaccordage correspondant. [62] a utilisé le concept du désaccordage harmonique pour améliorer la compréhension de la sensibilité du problème au désaccordage. Des désaccordages mono et multi harmonique sont introduit en variant harmoniquement la raideur du modèle. La méthode de perturbation est utilisée pour identifier l'influence de la contribution des phénomènes de modification et de séparation de modes sur la réponse.

3.1.6 Frequency veering

Le phénomène de coalescence de modes ou encore appelé " frequency veering " ou " curve veering " [63] est l'interaction ou le couplage entre dif-

férentes familles de modes lorsque le système évolue du fait de la rotation. La sensibilité de la réponse forcée au désaccordage est très fortement influencée par la présence de ce phénomène [61], [64][63]. Les disques aubés modernes sont particulièrement sensibles au "frequency veering" à cause de la grande densité de leur comportement vibratoire [64]. Une illustration de ce phénomène est présentée région B fig.3.2.

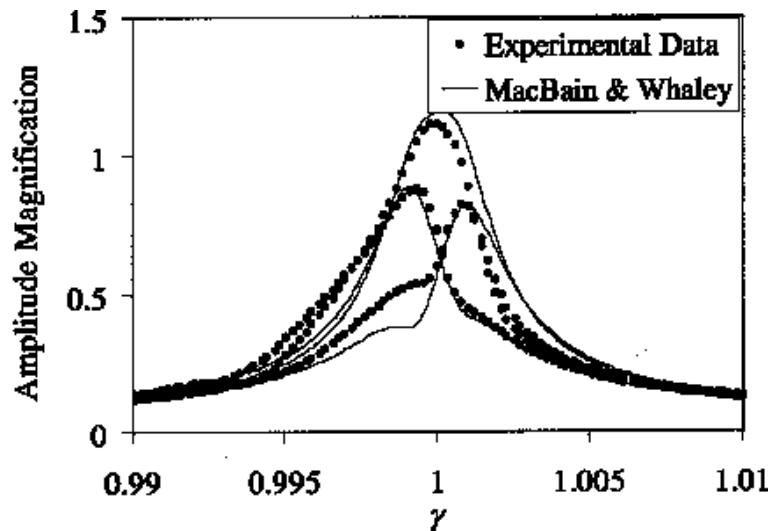


FIGURE 3.4 – Effet d'un faible désaccordage :dédoublment des fréquences du mode à $H = 3$ [65]

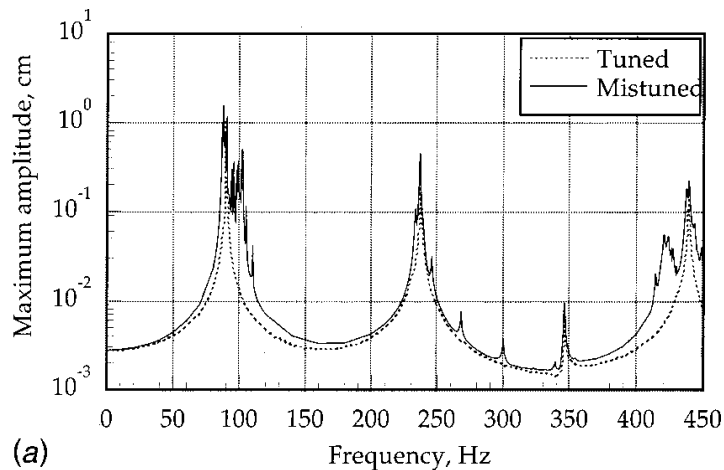


FIGURE 3.5 – Exemple de réponse accordée et désaccordée en fonction de la fréquence [66]

L'effet du désaccordage se doit d'être pris en considération dans l'analyse dynamique des disques aubés pour obtenir des prédictions précises de la réponse vibratoire.

3.2 RÉDUCTIONS D'ORDRE DES MODÈLES

Avec le développement des méthodes éléments finis, les géométries de plus en plus réalistes ont pu être analysées. A mesure que la complexité

du modèle augmente, les coûts de calcul augmentent également. Par conséquent, malgré les puissances de calculs élevées disponibles l'intérêt pour les techniques de réduction de modèles ne faiblit pas. Pour les systèmes désaccordés, la propriété de symétrie cyclique ne peut pas être utilisée. Une technique de réduction originale a été développée par [58] et [67] et elle a été adaptée aux ensembles aubés par [68]. Les techniques de réductions utilisent généralement une de ses trois méthodes :

1. Celle basée sur les techniques de sous structuration (component mode synthesis), pour laquelle le disque aubé est divisé en secteurs qui sont modélisés et réduits séparément puis assemblés [69] et [70].
2. Celle basée sur la réduction modale utilisant un sous-ensemble de modes nominaux accordés (SNM) [71]. Cette technique écrit les modes désaccordés du système comme une combinaison linéaire de modes nominaux du système accordé [64].
3. Une combinaison de ces deux approches sous forme d'une technique de réduction d'analyse modale secondaire (SMART) [69][70].

Bladh et al [69][70] ont généré un modèle éléments finis d'ordre réduit, basé principalement sur les techniques de sous structuration (SMART). Ils utilisent la méthode de Craig and Bampton, reformulée spécialement pour l'analyse des disques aubés désaccordés. Dans cette approche, une analyse modale secondaire est réalisée sur un modèle déjà réduit par la méthode de sous structuration. Cette réduction constituée de ces deux étapes, réduit nettement l'ordre du modèle original. Le désaccordage est introduit dans le domaine modal. La méthode est appliquée à l'analyse dynamique de deux modèles de disques aubés. Les analyses par la méthode SMART sont exceptionnellement rapides une fois la réduction acquise, ce qui la rend bien adaptée pour réaliser des études statistiques de réponse forcée de structures désaccordées. Elle présente également une bonne capacité pour rendre compte des fréquences propres dans une région de frequency veering ainsi que des modes désaccordés localisés. Bladh et al [61] ont implanté la méthode dans un logiciel baptisé REDUCE. Qui permet de rendre compte de la variation statistique des amplitudes de réponse due au désaccordage aléatoire. Le modèle à ordre réduit, combiné avec une loi de distribution de Weibull, montre une très bonne efficacité comparée à celle des simulations de Monte Carlo.

Yang et Griffin [64] ont développé une méthode modale (SNM) qui suppose que les modes désaccordés dans une certaine famille de mode (par exemple la première flexion) peuvent être exprimé par une combinaison des modes de l'assemblage accordé qui appartiennent à cette même famille. Les aubes et le disque sont traités comme une seule entité et pas en tant que sous structures séparées avec différentes représentations mathématiques. Les légères variations de fréquences propres des différentes aubes ne sont pas associées à des changements importants de la forme des modes des aubes mais induisent la localisation de la vibration sur

l'assemblage. Cette méthode suppose la connaissance des formes modales de l'ensemble accordé et des matrices de masse et de rigidité des aubes.

Feiner et Griffin [72] ont amélioré la méthode pour considérer une famille de modes isolés et l'ont appelé le modèle fondamental de désaccordage (FMM). Elle s'applique quand les modes excités font partie d'une famille de modes isolés dont l'énergie de déformation est principalement localisée sur les aubes. Avec l'hypothèse que les fréquences propres dans une famille de modes sont proches les unes des autres, il n'est plus nécessaire de calculer les matrices de masse et de rigidité pour une aube.

Lorsque la SNM est simplifiée pour reproduire le modèle fondamental, elle requiert deux paramètres d'entrée seulement (mesures expérimentales) : les fréquences propres d'une famille isolée de modes du système accordé et la déviation des fréquences individuelles de chaque aube du système désaccordé par rapport à leurs valeurs dans le cas accordé. Plus tard, Feiner et al [73],[74] ont amélioré la FMM et l'ont nommée la FMM ID basique. La FMM est alors utilisée pour identifier le désaccordage de chaque aube à partir des mesures expérimentales de la réponse vibratoire de l'ensemble du système.

Un des changements principaux de la FMM généralisée ([73],[74]) est qu'elle utilise un nouveau terme appelé la déviation de la fréquence du secteur comme mesure du désaccordage pour chaque secteur de disque-aube. Dans la formulation de la FMM originale, le désaccordage a été mesuré par des déviations de fréquences de l'aube.

L'avantage de la nouvelle mesure du désaccordage est qu'elle quantifie non seulement le désaccordage dans l'aube, mais capture également le désaccordage dans le disque aussi bien que les variations des conditions de contact de la région de liaison des aubes au disque. Ces méthodes sont particulièrement adaptées aux rotors avec aubes intégrées (IBR), dont les aubes ne peuvent pas être détachées pour qu'on fasse des mesures individuelles sur chacune ce qui montre sa différence avec l'ancienne FMM.

Dans la même année Feiner et al, 2003 [57] ont développé une méthode de prédiction de la réponse forcée maximale pour un système aubé désaccordé à partir de la distorsion d'un mode structural. Dans cette étude, le mode désaccordé est représenté comme une somme des modes accordés où les coefficients des modes accordés dans la sommation modale représentent la quantité de distorsion du mode. Ils ont démontré que pour un léger désaccordage et amortissement le premier phénomène le plus caractéristique est la distorsion des modes ; ce qui conduit à la localisation et l'amortissement dans le mode désaccordé.

Petrov et al [66] ont proposé une nouvelle méthode pour l'analyse dynamique des disques aubes désaccordés. La méthode est basée sur le calcul exact de la réponse d'un système désaccordé utilisant des niveaux de réponse pour l'assemblage accordé avec une matrice de changement construite à partir de la matrice de fonction de réponse en fréquence du système accordé et d'une matrice décrivant le désaccordage. Les principaux avantages de la méthode sont son efficacité et son exactitude qui

permettent l'utilisation des modèles éléments finis de grande taille pour des disques aubés réels dans des études paramétriques des effets de désaccordage sur les amplitudes de vibration.

Petrov et Ewins [75] ont utilisé cette méthode pour calculer le modèle de désaccordage qui mène à la réponse la plus élevée dans les disques aubés. Ils ont formé un problème d'optimisation basé sur l'algorithme de calcul analytique des coefficients de sensibilité pour la réponse la plus élevée en ce qui concerne le désaccordage de l'aube.

Plus tard Petrov et Ewins [76] ont utilisé cette méthode pour calculer la réponse non linéaire forcée multi harmonique d'un disque aubé avec des nageoires en présence de désaccordage par l'intermédiaire de la fréquence propre et de la dispersion des caractéristiques d'interface de contact. Cette technique est basée sur la condensation exacte des modèles éléments finis non linéaires des disques aubés désaccordés. Elle utilise la technique de la balance multi harmonique et facilite l'utilisation des modèles éléments finis en grandes échelles pour de véritables disques aubés. Elle permet de réduire le nombre de degrés de libertés des équations au nombre des forces d'interaction non linéaires appliquées. Cette méthode préserve totalement la précision du modèle et le système réduit obtenu par condensation est exact si les matrices du système original sont constantes.

Récemment, Nikolic et al [77] ont utilisé la méthode mentionnée ci-dessus pour développer des stratégies robustes pour la réduction de la réponse forcée maximale.

3.3 TECHNIQUES STATISTIQUES ET PROBABILISTES POUR LA MODÉLISATION DU DÉSAccORDAGE

Nous avons vu que le phénomène de désaccordage couple les différents modes à diamètres. En plus de ce phénomène, certaines variations de paramètres sont difficiles à prédire, ce qui oblige à les considérer incertains et donc à utiliser une modélisation aléatoire. La réponse aléatoire est alors totalement définie non pas par une seule quantité mais par sa densité de probabilité ou ses moments. Des variations, de type géométrique ou mécanique apparaissent à la fabrication ou en fonctionnement (effets d'usure, d'oxydation, de vieillissement, de variation de température, etc). Cela est particulièrement vrai pour les coefficients de contact (coefficient de frottement, coefficient de rigidité de contact et force normale) en régime de fonctionnement variable. La méconnaissance des forces d'excitation effectivement appliquées est aussi à considérer.

Des études aléatoires du désaccordage pour des systèmes à géométrie cyclique non-linéaires (non-linéarités de contact par l'adjonction de frotteurs, coefficient de frottement, raideur de contact, force normale de contact, perte de contact, etc) ont été réalisées soit par la méthode de Monte Carlo (Castanier [58], Bladh et Pierre [61]), soit par des méthodes

approchées comme la méthode de perturbation moins coûteuse en temps de calcul mais moins précise et plus difficile de mise en œuvre selon le cas choisi (Sextro [78] et [79], Petrov [80]).

La méthode de Monte Carlo est largement répandue car elle ne pose pas de problème de transposition pour le traitement des problèmes non-linéaires. Elle a donc été utilisée dans de nombreux travaux de recherche, cependant, elle nécessite un grand nombre de tirages pour converger puisque cette loi, répétant n fois la résolution du problème déterministe pour chaque variable aléatoire d'entrée, suit la loi des grands nombres et peut donc devenir inutilisable si le problème déterministe est déjà conséquent.

Dans le cas de la méthode de perturbation, Sextro [78],[79] et Petrov [80] obtiennent la sensibilité de la réponse forcée non linéaire en fonction des paramètres variables à l'entrée. Les différents moments (moyenne et écart type) sont déterminés via des approximations basées sur la sensibilité de la réponse forcée sur un intervalle de fréquence. Les coefficients de sensibilité du premier et second ordre, fonctions des paramètres aléatoires d'entrée, sont dérivés analytiquement à l'aide d'un développement de Taylor. La densité de probabilité est soit choisie a priori ([78],[79]), soit calculée analytiquement pour peu de paramètres d'entrée aléatoires ([80]).

D'autres méthodes ont été développées mais se restreignent à des problèmes linéaires, citons par exemple la méthode de perturbation, (Sinha :[81] et [82], Mignolet : [83], [83] et [84], Wei et Pierre :[85]), la projection sur une base stochastique (Bah 2003 [86] , Sinha 2006 [87]) et le modèle non paramétrique issu du principe du maximum d'entropie (Capiez et Soize [88]).

Sinha en 1986 et 1989 ([81],[82]) développe la réponse d'un système discret sur une série de Taylor en fonction d'une raideur modale aléatoire gaussienne au premier ordre puis à des ordres supérieurs dont le nombre dépend du facteur d'amortissement de la structure et du rapport écart type-moyenne de la fréquence propre de chaque aube. D'après le théorème de la limite centrale, la loi de probabilité choisie pour la réponse est la loi gaussienne. Les réponses sont très inexacts pour des amortissements faibles : cette méthode est limitée au fort couplage inter-aubes

Mignolet [89] [90]) montre qu'une loi gaussienne pour la réponse ne représente pas avec exactitude la loi de la réponse dans les turbomachines. Il étend les travaux de Sinha en développant analytiquement une fonction de densité de probabilité spécifique (Combined closed-Form Perturbation approach), au lieu de la poser a priori, sous forme intégrale avec l'hypothèse que des non-linéarités sont négligées. Des techniques de perturbation déterministe sont utilisées donnant alors une valeur approchée de la réponse mais valable pour différents types d'amortissement. Cependant pour certaines excitations d'ordre de moteur (exemple : ordre de moteur $H = 0$), cette méthode n'est pas précise. En plus de cette loi analytique approchée, le maximum de l'amplitude de la réponse aléatoire pour une excitation fréquentielle ou sur un balayage de fréquences peut être aussi représenté avec exactitude par un modèle paramétrique de Weibull choisi a priori (trois paramètres à identifier via quelques tirages de Monte Carlo). Il dé-

veloppe ensuite la méthode adaptative (Mignolet, [90]) où les paramètres sont pris aléatoires directement dans la fonction de réponse puis l'expression de la réponse est trouvée en utilisant un calcul approché dans les cas de faible et fort couplages. Une identification des moments aléatoires est effectuée grâce à quelques tirages de Monte Carlo.

Wei et Pierre [85] considèrent le désaccordage au travers de la fréquence propre de chaque aube puis expriment la réponse forcée par superposition modale à l'aide d'un développement de Taylor. Cette méthode combinée avec la méthode de Monte Carlo (Hybrid Statistical Technique) permet de calculer à moindre coût la réponse aléatoire puisqu'elle diminue significativement le nombre d'inconnues à trouver. De plus, des ordres élevés dans le développement peuvent être utilisés.

Bah [86] utilise une base réduite stochastique de sous-espaces de Krylov en vue de calculer la réponse aléatoire via la détermination des vecteurs de Krylov stochastiques. Cette méthode a été adaptée pour des problèmes vibratoires de systèmes discrets sans frotteur donc linéaires. Sinha, [91], [87] quant à lui, décompose la réponse sur une base du chaos polynomial. Un cas simple avec une raideur modale gaussienne est considéré. Les résultats montrent l'existence d'une contribution non gaussienne de la réponse.

Capiez et Soize [88] reconstruisent la densité de probabilité de la réponse linéaire à partir du principe du maximum d'entropie pour des paramètres modaux ou des tolérances de fabrication des aubes aléatoires. Les incertitudes considérées sont non seulement dues aux variations de paramètres mais aussi aux incertitudes de modèle, ce qui ne peut pas être accessible dans le cas de méthodes paramétriques. Cette méthode consiste à construire un modèle matriciel moyen (méthode de synthèse modale, Craig et Bampton) où chaque sous-structure est incertaine (rigidité modale aléatoire) et définie par une fonction de probabilité non paramétrique donnée, cette approche amène donc un côté non physique dans la modélisation aléatoire. De plus, les cas traités restent dans le domaine de vibrations linéaires.

Dans toutes ces études, les systèmes aubés sont modélisés de manière discrète ou discrétisés via les éléments finis. De plus, l'évaluation de la réponse doit inclure la notion de la densité de probabilité en plus des deux premiers moments de la loi.

Dans la suite, une étude stochastique par l'intermédiaire de la méthode de Monte Carlo sera conduite en premier sur un système discret à un seul degré de liberté modélisant une aube d'un disque aubé muni d'un frotteur. Ensuite cette même étude sera appliquée sur un système discret à géométrie cyclique constitué de 13 aubes avec frotteur de type nageoire. Le système cyclique est le même que celui cité dans le chapitre 1 (fig.1.24).

3.4 MODÉLISATION STOCHASTIQUE D'UN SYSTÈME À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ PAR MONTE CARLO

La méthode de Monte Carlo peut être définie comme toute technique numérique de résolution de problèmes stochastiques dans laquelle on utilise des nombres aléatoires. Les simulations de Monte Carlo présentent une approche directe pour déterminer les statistiques de la réponse maximale des structures.

On définit tout d'abord un certain nombre de propriétés aléatoires des disques aubés qui suivent des lois propres. Puis la réponse déterministe du système est calculée pour chaque ensemble de tirages aléatoires de ces paramètres. Finalement, une analyse statistique de la population des réponses déterministes produites est conduite pour obtenir une évaluation de la fonction de densité de probabilité correspondante.

La technique de simulation de Monte Carlo est simple à utiliser mais nécessite un très grand nombre de tirages aléatoires pour converger vers une fonction de densité de probabilité.

Les variations stochastiques considérées concernent les paramètres de contact du frotteur de type nageoire. La charge normale, la raideur du contact et le coefficient de frottement d'interface seront les grandeurs aléatoires de cette étude et suivent une loi normale. Les moments statistiques de toutes les aubes sont identiques (même moyenne et même écart-type).

On cherche ici à reconstruire la réponse aléatoire due aux paramètres aléatoires de contact. La difficulté se situe au niveau de la nature non linéaire du contact frottant ne permettant pas de calculer mathématiquement facilement une réponse forcée de sortie aléatoire à partir des paramètres aléatoires d'entrée (les paramètres du frotteur)(fig.3.6)

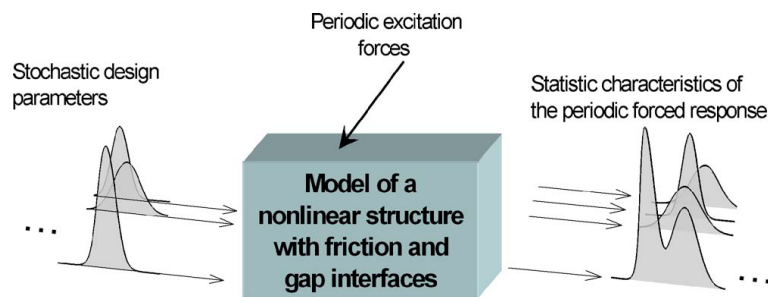


FIGURE 3.6 – La dépendance globale des caractéristiques statistiques de la réponse forcée issue des paramètres de conception [80]

Dans un premier temps, les caractéristiques stochastiques de la réponse non linéaire d'un système à un seul degré de liberté avec frotteur seront considérées. Ensuite, cette approche sera étendue à un système à géométrie cyclique à 13 aubes et 26 nageoires. Dans les deux cas les variables aléatoires sont considérées gaussiennes.

3.4.1 Les différents paramètres à considérer

La connaissance de la loi de probabilité qui régit la variation des variables aléatoires du contact est difficile. Petrov [80] a réalisé une étude de Monte Carlo sur un modèle éléments finis de disques aubés avec frotteurs sous plateformes avec désaccordage via les paramètres du contact frottant. D'après ces études, on choisit pour notre cas d'étudier des lois gaussiennes pour trois paramètres aléatoires et de scinder le domaine d'étude en trois domaines : un se rapportant à l'état stick/slip, un autre à l'état stick/slip à majorité slip et un dernier à l'état stick/slip à majorité stick.

La structure masse ressort 1ddl avec frotteur utilisée représente une seule aube avec frotteur du banc d'essai treize aubes considéré précédemment.

Le frotteur possède trois paramètres susceptibles de varier :

1. la raideur tangentielle kd
2. le coefficient de frottement μ
3. la force normale au contact F_n

Le choix du coefficient de la variation de chaque paramètre doit relever du domaine pratique des turbomachines. En effet, le paramètre de la force normale F_n reste faible par rapport aux autres paramètres, puisqu'il est du à la variation dans le couple de serrage du contact entre les nageoires. C'est le dévissage des aubes sous l'action de la force centrifuge qui met en contact les deux parties des nageoires. Les deux autres paramètres kd et le paramètre du coefficient de frottement μ dépendent de l'état des surfaces en contact frottant et ont des variations plus importantes.

Tous ces paramètres sont supposés suivre une loi normale de caractéristiques :

– Paramètre kd :

L'écart type de kd	$\sigma_{kd} = 24276 \text{ N/m}$
La moyenne de kd	$E_{kd} = 1.7e5 \text{ N/m}$
Le coefficient de variation de kd	$\delta_{kd} = \frac{\sigma_{kd}}{E_{kd}} = 14.28\%$

– Paramètre μ :

L'écart type de μ	$\sigma_{\mu} = 0.08$
La moyenne de μ	$E_{\mu} = 0.4$
Le coefficient de variation de μ	$\delta_{\mu} = \frac{\sigma_{\mu}}{E_{\mu}} = 20\%$

– Paramètre F_n :

Selon chaque type d'état de contact (stick/slip, stick/slip à majorité slip, stick/slip à majorité stick) la valeur déterministe de F_n est différente. Donc pour chacun de ces domaines, la loi de probabilité de F_n sera différente. Cependant on la prend loi normale pour chacun de ces domaines :

1. Cas d'alternance stick/slip : $F_n = 160$ N

Moyenne de F_n	$E_{F_n} = 160$ N
Ecart type de F_n	$\sigma_{F_n} = 10.656$ N
Coefficient de variation de F_n	$\delta_{F_n} = 6.66\%$

2. Cas stick/slip à majorité slip : $F_n = 75$ N

Moyenne de F_n	$E_{F_n} = 75$ N
Ecart type de F_n	$\sigma_{F_n} = 4.995$ N
Coefficient de variation de F_n	$\delta_{F_n} = 6.66\%$

3. Cas stick/slip à majorité stick : $F_n = 5000$ N

Moyenne de F_n	$E_{F_n} = 5000$ N
Ecart type de F_n	$\sigma_{F_n} = 333$ N
Coefficient de variation de F_n	$\delta_{F_n} = 6.66\%$

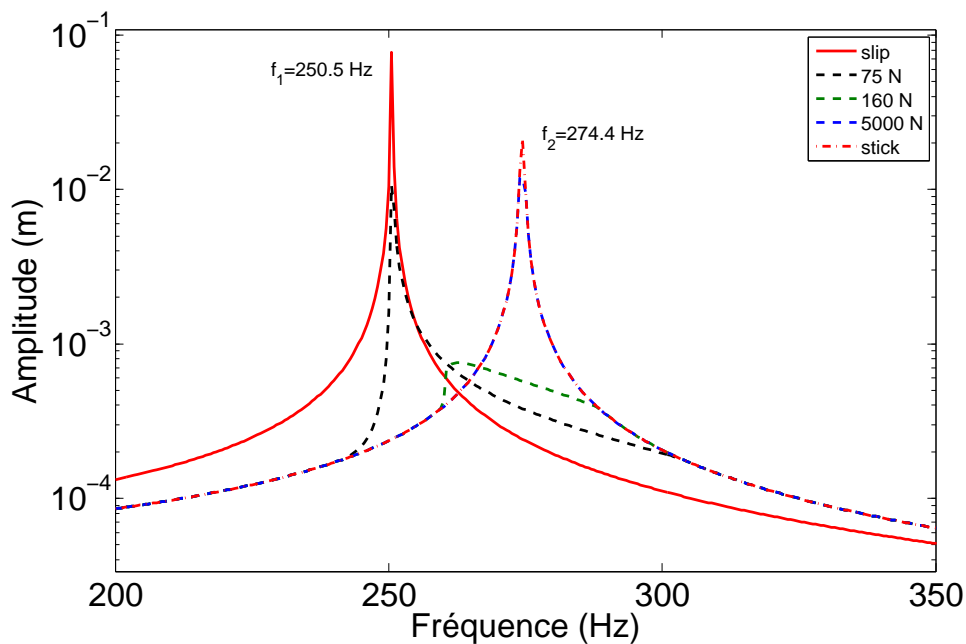


FIGURE 3.7 – FRF pour les valeurs nominales des paramètres du frotteur pour les 3 cas de forces normales et les deux cas extrêmes stick et slip

Pour connaître l'appartenance aux différents domaines et choisir par la suite les dispersions des lois de probabilité, les FRF déterministes associées aux trois cas de forces normales ($F_n = 75$ N stick/slip à majorité slip, $F_n = 160$ N stick/slip, $F_n = 5000$ N stick/slip à majorité stick) ainsi que les deux cas extrêmes quasi linéaires stick et slip sont tracés fig.3.7. L'état quasi linéaire de slip a lieu à une fréquence $f_1 = 250.5$ Hz et l'état quasi linéaire de stick a lieu à une fréquence $f_2 = 274.4$ Hz.

3.4.2 Etude paramétrique déterministe du système à un degré de liberté suite à la variation des paramètres du contact

3.4.2.1 Variation du paramètre kd

On choisit de faire varier dans cette étude le paramètre kd . La valeur nominale de kd étant de $1.7e5$ N/m, en pratique l'intervalle où kd est susceptible de varier sera : $[7.2e4, 2.7e5]$ N/m.

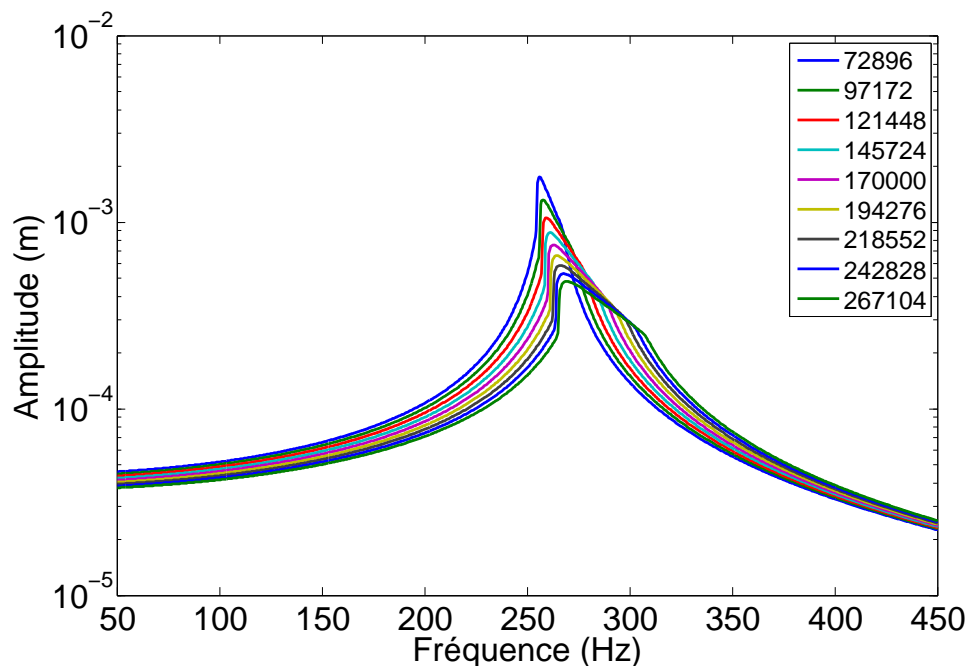


FIGURE 3.8 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre kd pour un contact stick/slip

La variation du paramètre kd du plus faible au plus élevé dans le contact stick/slip à majorité stick (fig.3.10) déplace clairement les pics d'amplitude vers des fréquences plus élevées et des amplitudes moins faibles. Ces diminutions peuvent s'expliquer par le fait qu'augmenter la raideur du contact change les caractéristiques du système qui pour atteindre le cas parfaitement stick aura besoin d'une plus forte intensité de force normale. Or dans notre cas on fixe la force normale à une certaine valeur et on change les caractéristiques de la raideur du contact ce qui fait passer le système vers des configurations de contact de plus en plus stick/slip. Dans le cas de contact stick/slip (fig.3.8) le décalage des fréquences est aussi observé. Le cas de contact stick/slip à majorité slip (fig.3.9) est très peu influencé par la raideur du contact (pic observé à la fréquence 250.5 Hz de résonance de l'état slip). En effet le décalage de fréquence n'est plus observé et les amplitudes des différentes configurations restent très rapprochées, c'est l'état de contact le moins influencé par la variation de kd . En effet, lors de changement de la raideur de contact, les différentes configurations associées à chacune des valeurs de kd induisent différentes fréquences de stick qui sont fonctions de kd qui varie et de la raideur k de la structure qui est inchangée ($f(kd + k)$). En revanche toutes ces différentes configurations

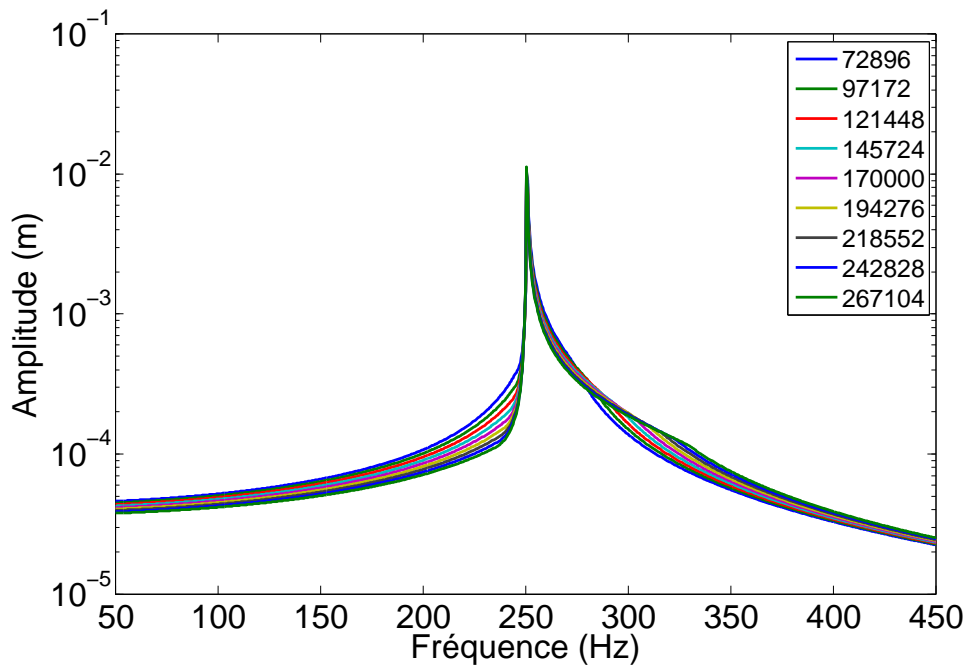


FIGURE 3.9 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre kd pour un contact stick/slip à majorité slip

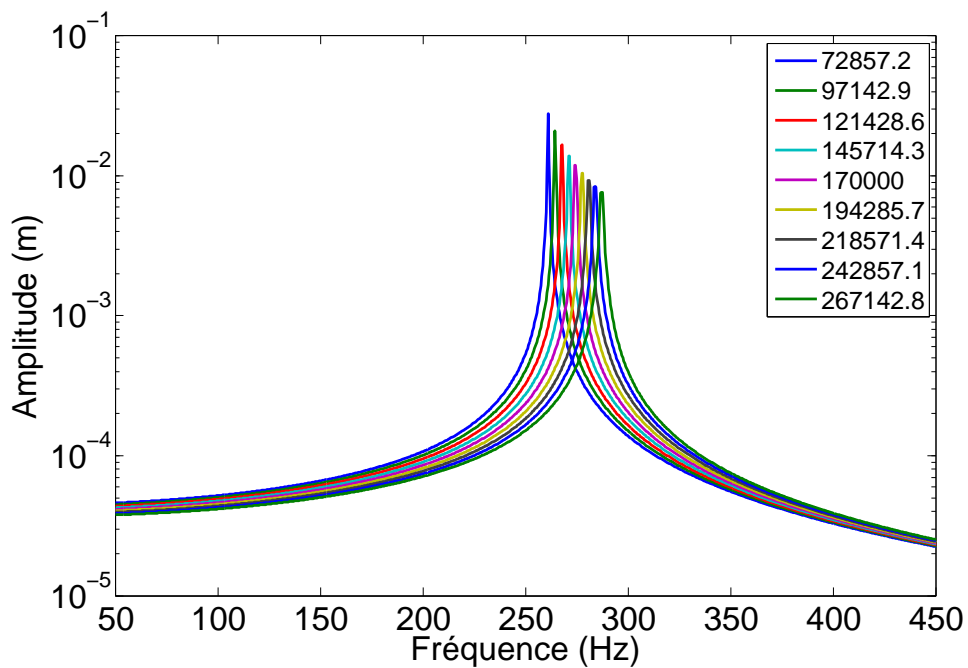


FIGURE 3.10 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre kd pour un contact stick/slip à majorité stick

tendent vers un état de slip unique fonction de k raideur de la structure qui est supposée invariable.

3.4.2.2 Variation du paramètre μ

La valeur nominale de μ est de 0.4 et l'intervalle de sa variation est :[0.08,0.72].

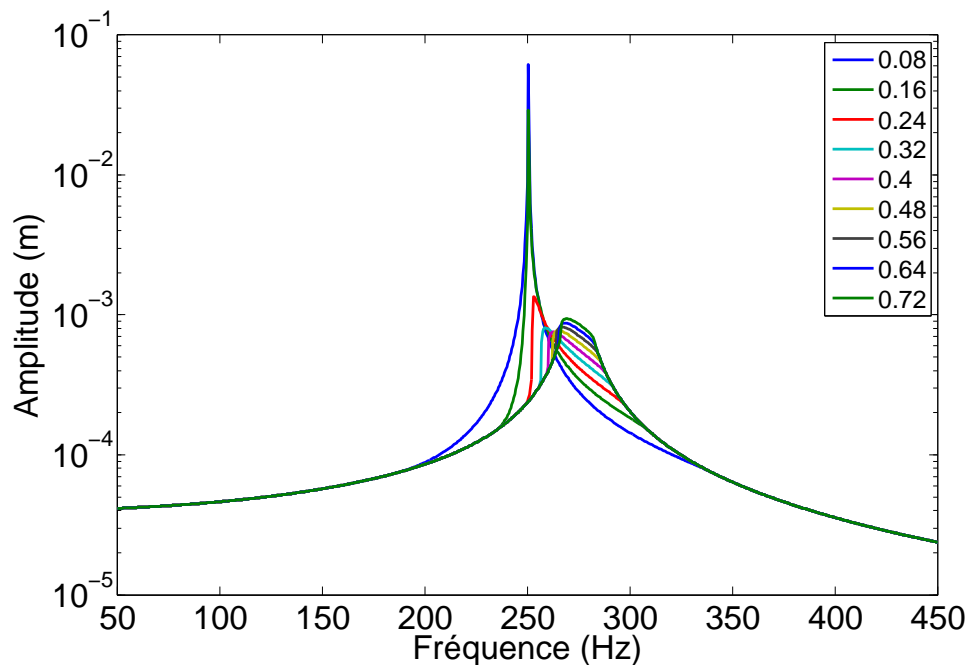


FIGURE 3.11 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre μ pour un contact stick/slip

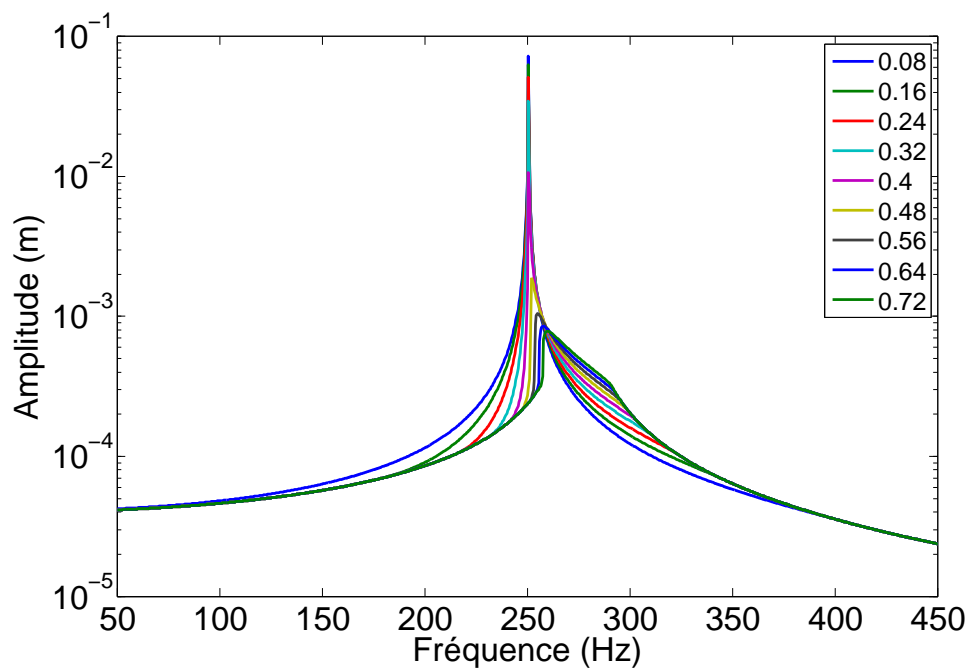


FIGURE 3.12 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre μ pour un contact stick/slip à majorité slip

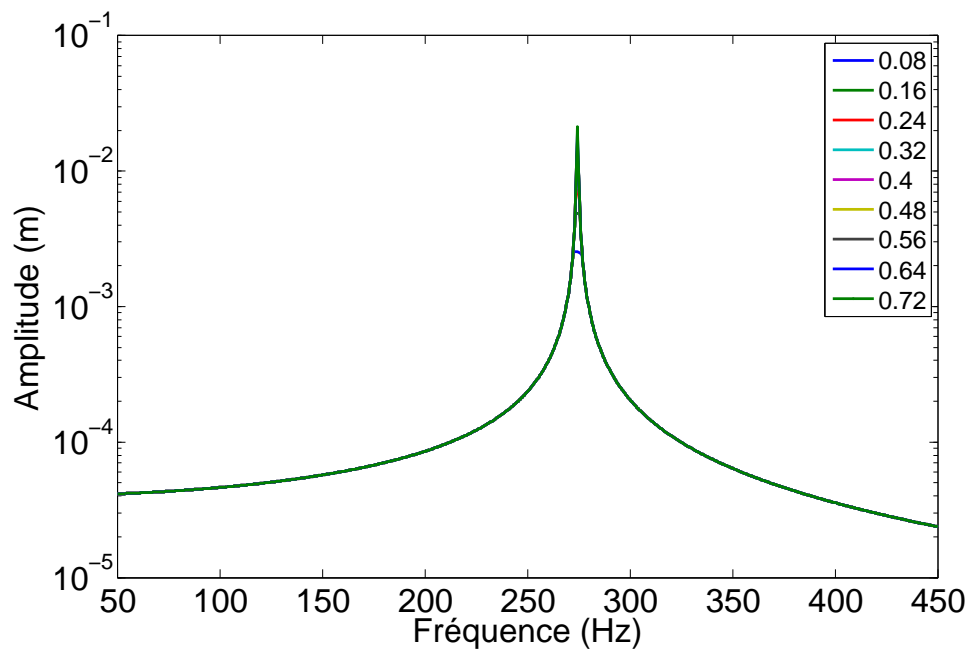


FIGURE 3.13 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre μ pour un contact stick/slip à majorité stick

L'augmentation du coefficient de frottement μ dans les trois états de contact stick/slip (fig.3.11), stick/slip à majorité slip (fig.3.12) et stick/slip à majorité stick (fig.3.13) entraînent un passage du contact de l'état à majorité slip à l'état à majorité stick. Ce passage est moins marqué sur le dernier état vu que le système étant déjà dans une configuration très stick, toute augmentation (ou diminution) supplémentaire faible du coefficient μ ne peut que maintenir cet état proche du stick.

3.4.2.3 Variation du paramètre F_n

La valeur nominale de F_n dans le domaine se stick/slip est 160 N et l'intervalle de sa variation est :[117, 202] N. La valeur nominale de F_n dans le domaine se stick/slip à majorité slip est 75 N et l'intervalle de sa variation est :[55, 95] N. La valeur nominale de F_n dans le domaine se stick/slip à majorité stick est 5000 N et l'intervalle de sa variation est :[3668, 6332] N. L'influence de ce paramètre est similaire à celle de μ . Le paramètre F_n conditionne aussi le passage du slip au stick mais d'une façon moins importante vu que en pratique sa variation est moindre (fig.3.14, 3.15, 3.16).

Ces trois variations des paramètres dans chacun des trois états de contact permettent de mieux comprendre leur influence et leur poids sur le comportement du système non linéaire. Dans la suite, ce même système sera exploité dans le cadre d'une étude stochastique.

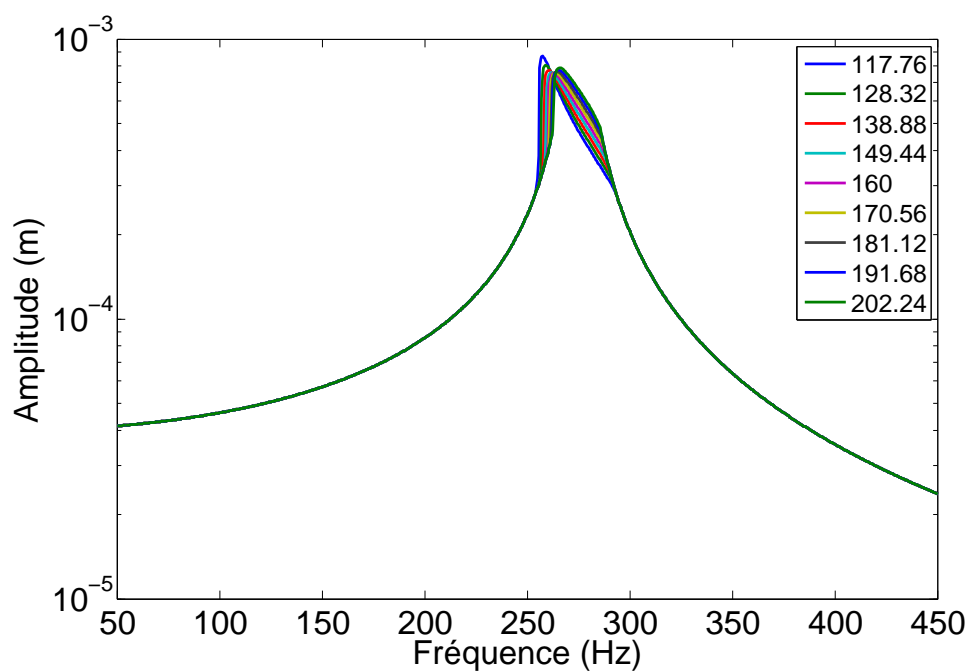


FIGURE 3.14 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre F_n pour un contact stick/slip

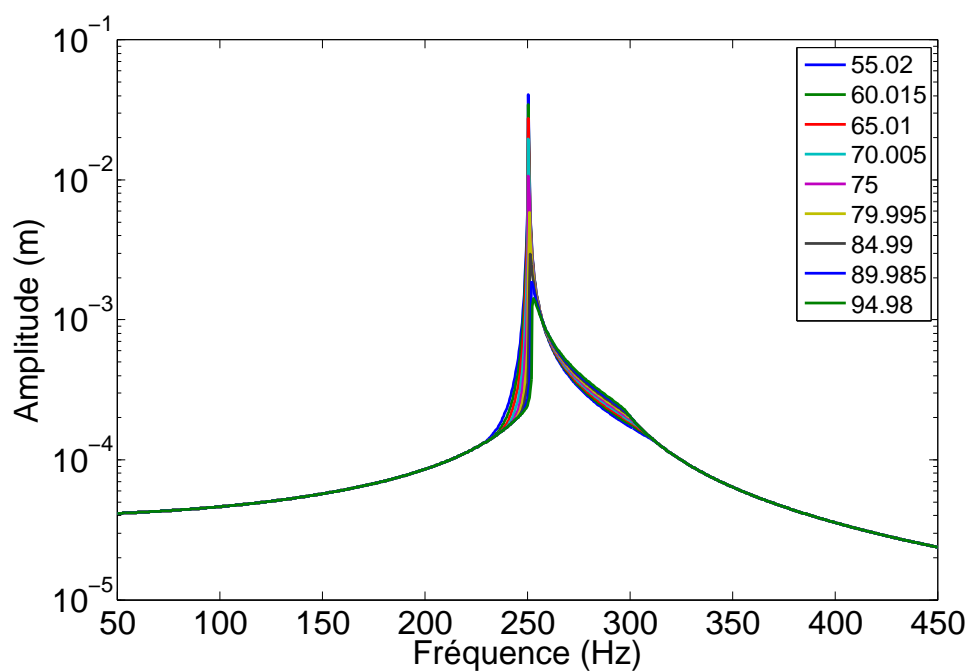


FIGURE 3.15 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre F_n pour un contact stick/slip à majorité slip

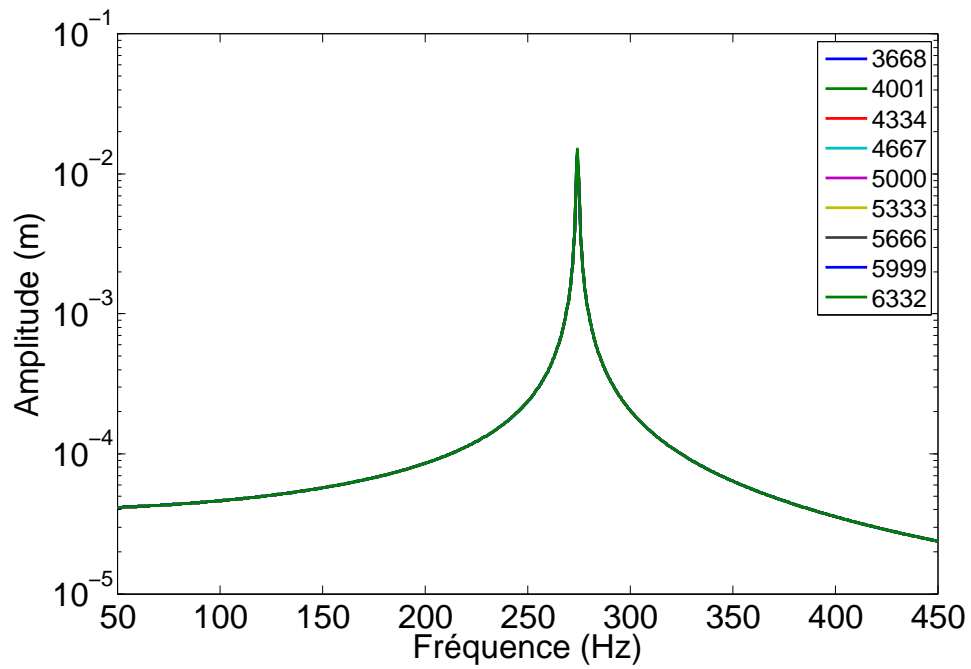


FIGURE 3.16 – Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre F_n pour un contact stick/slip à majorité stick

3.4.3 Convergence du nombre de tirages

Un compromis sur le nombre de fréquences traitées est à faire car pour visualiser clairement le passage stick/slip, il est nécessaire d'avoir une bonne finesse de discrétisation en fréquences. Il s'agit en particulier d'avoir un intervalle suffisant pour encadrer les phénomènes de stick slip, et cela pour tous les tirages. Pour chacun des paramètres du frotteur (raideur du contact, force normale et coefficient de frottement), des simulations de Monte Carlo avec des tirages allant de 3000 à 10000 tirages sont effectuées. Il est alors possible de construire la moyenne et l'écart-type des réponses non linéaires aléatoires obtenues et également de vérifier la convergence de la méthode.

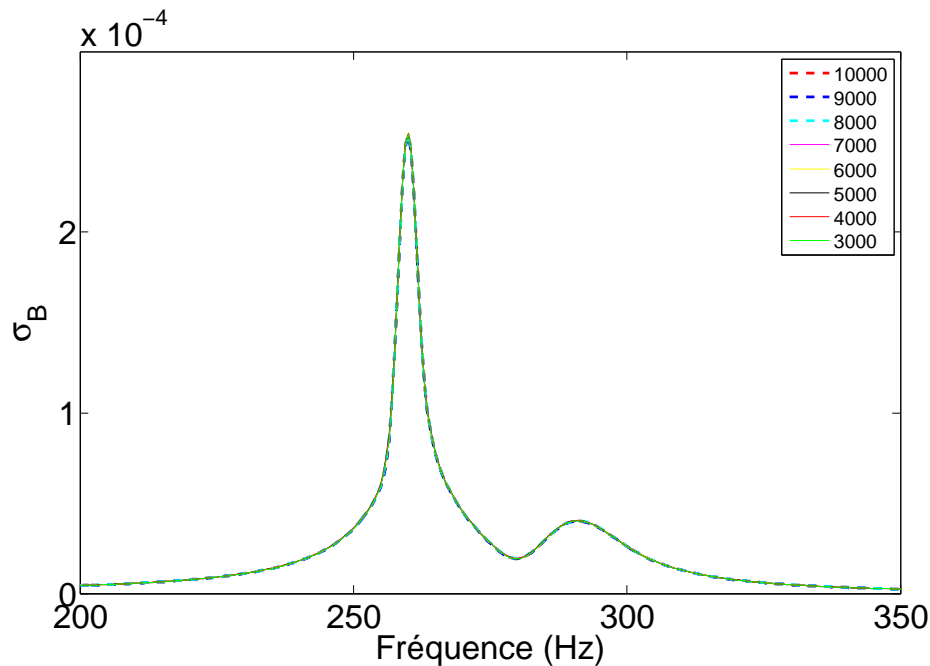


FIGURE 3.17 – Convergence de l'écart type σ_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de kd

Une simulation avec 8000 tirages s'avère suffisante pour converger pour chacune des variables aléatoires du contact frottant considérées (pour l'écart-type : fig.3.17, 3.18 et 3.19 et pour la moyenne : fig.3.20, 3.21 et 3.22). En effet à partir de la valeur de 8000 tirages, les courbes de la moyenne et l'écart-type des réponses (μ et σ) commencent à se superposer, ce qui signifie que 8000 tirages est suffisant pour assurer une convergence de la méthode. Ce nombre de tirages est retenu pour toute l'étude du système à un seul degré de liberté. L'allure de ces deux moments statistiques des tirages sera exploitée dans les paragraphes suivants en définissant le coefficient de variation de la réponse découlant de ces deux derniers. Les résultats de la réponse non linéaire aléatoire seront alors présentés via l'ensemble des tirages de MC, sa moyenne (μ), son coefficient de variation (δ_B et $\delta_{\theta^*-\theta_0}$) défini par le rapport de la moyenne des réponses ($E_{\theta^*-\theta_0}$ et E_B) à l'écart-type de ces réponses ($\sigma_{\theta^*-\theta_0}$ et σ_B) ainsi que la reconstruction de la fonction de densité de probabilité par un histogramme des tirages. Dans la suite la dispersion de l'amplitude de la réponse et la dispersion du

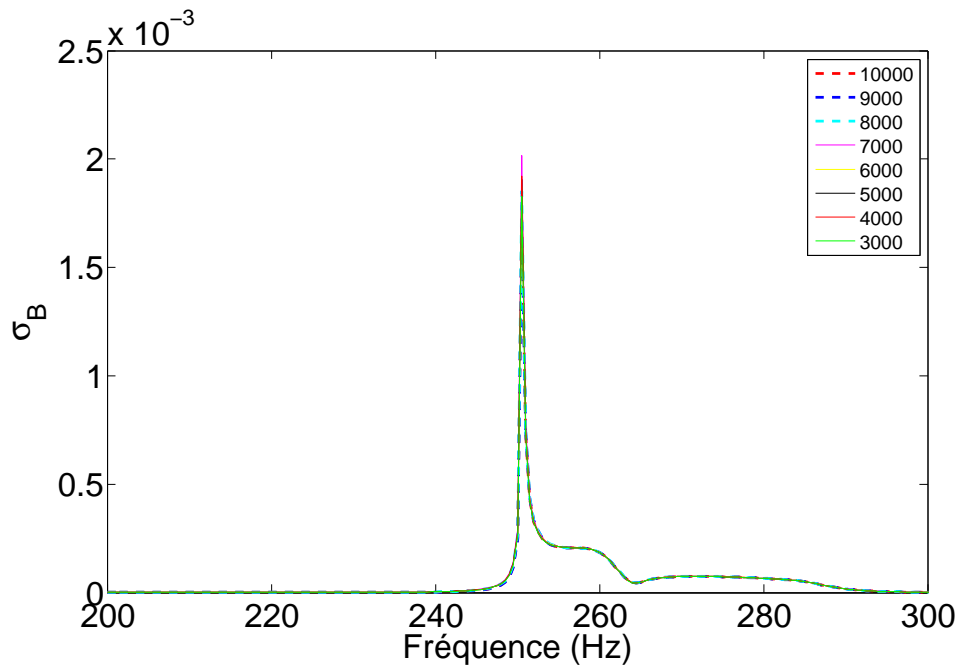


FIGURE 3.18 – Convergence de l'écart type σ_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de μ

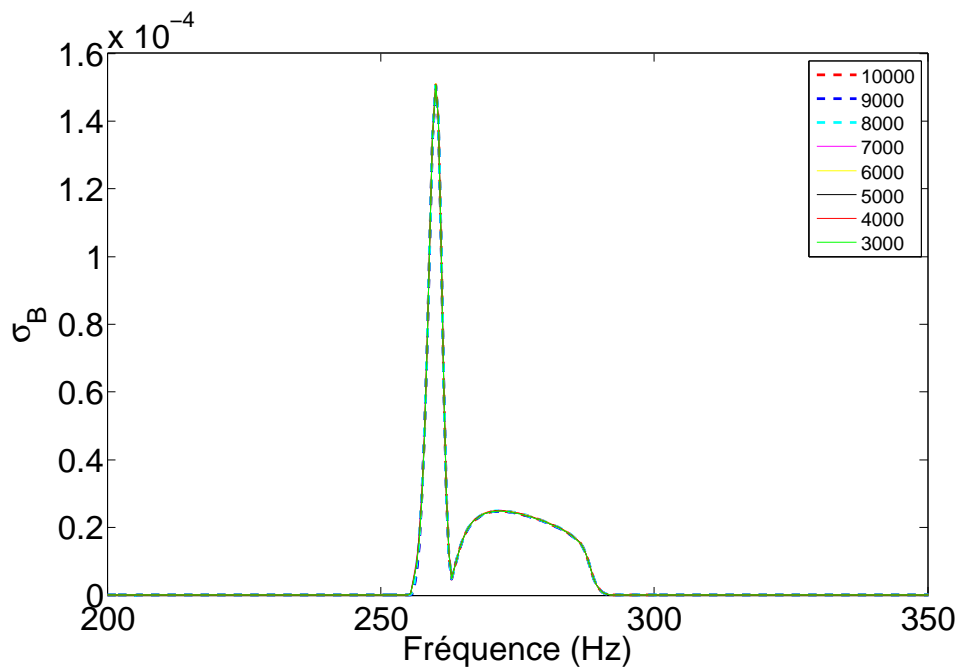


FIGURE 3.19 – Convergence de l'écart type σ_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de F_n

paramètre $\theta^* - \theta_0$ dues à la variation des différents paramètres du contact sont étudiées.

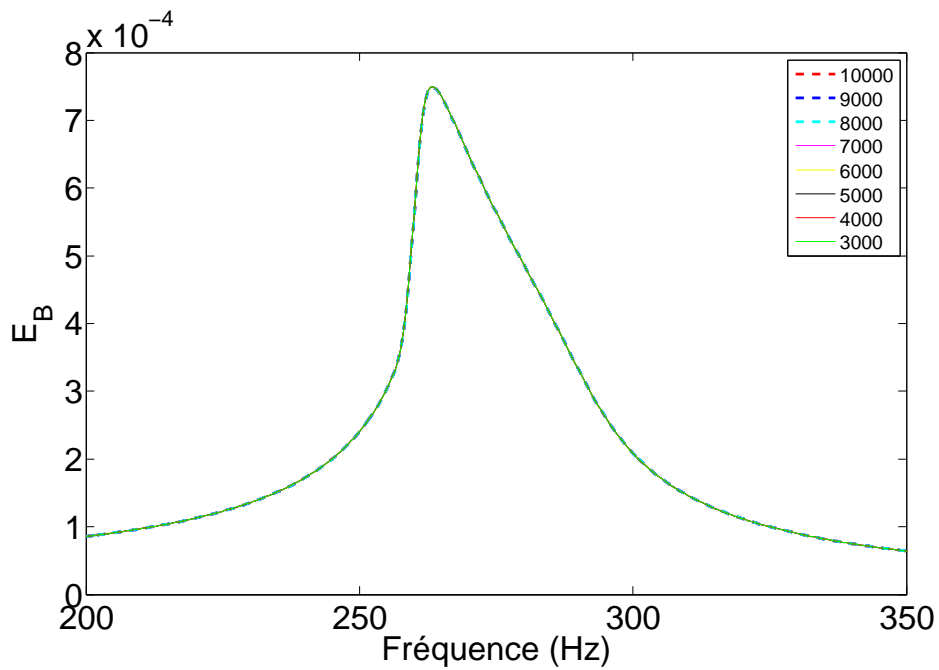


FIGURE 3.20 – Convergence de la moyenne E_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de kd

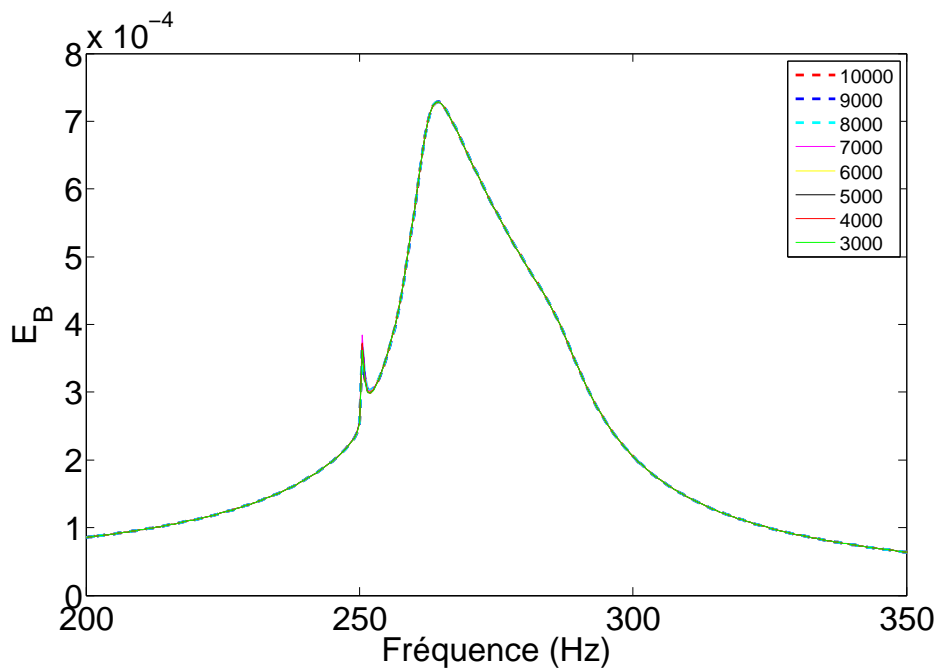


FIGURE 3.21 – Convergence de la moyenne E_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de μ

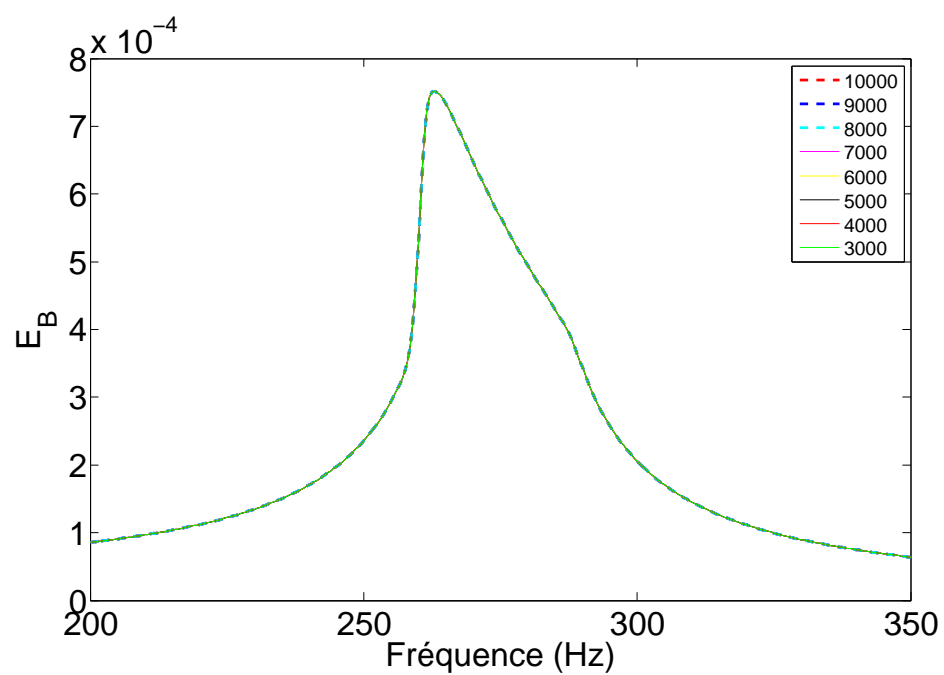


FIGURE 3.22 – Convergence de la moyenne E_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de F_n

3.4.4 Incertitude sur le paramètre kd

A rappeler ici que la loi de probabilité de kd est celle donnée au paragraphe 3.4.1.

3.4.4.1 Cas stick/slip

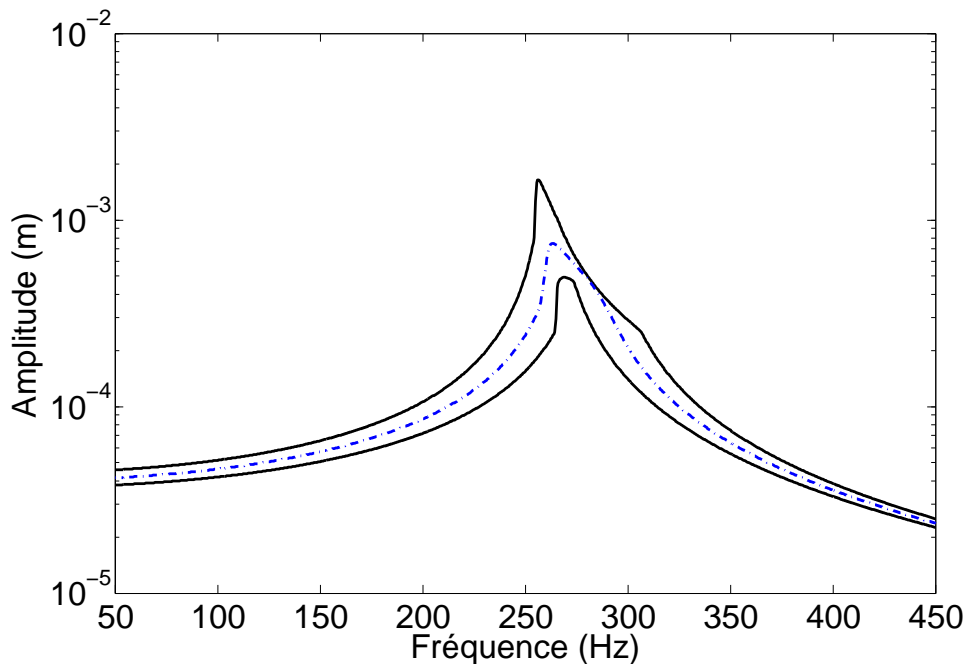


FIGURE 3.23 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$

La fig.3.23 représente les enveloppes minimale et maximale (en trait noir) des amplitudes des réponses des 8000 tirages ainsi que leur moyenne en trait pointillé bleu et la fig.3.24 présente l'évolution du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$. On rappelle que ce paramètre détermine l'état du contact (chapitre 2). Une valeur maximale de $(\theta^* - \theta_0) = \pi$ désigne un état de contact stick pur, une valeur nulle désigne l'état de slip pur. Entre ces deux cas extrêmes, un contact en alternance de stick/slip existe et selon le rapprochement de l'état stick/slip de l'un des cas slip pure ou stick pure, l'état de contact sera respectivement à majorité slip ou bien à majorité stick. Les coefficients de variation du niveau de réponse maximale B noté δ_B , et de $(\theta^* - \theta_0)$ noté $\delta_{\theta^* - \theta_0}$, définis dans le paragraphe 3.4.3 sont tracés respectivement sur les fig.3.25 et 3.26. Rappelons que les deux états quasi linéaires du stick et du slip ont lieu à des fréquences respectives $f_1 = 250.5$ Hz et $f_2 = 274.4$ Hz représentées par des lignes en traits pointillés verticales sur les figures. La valeur maximale de δ_B est de 50% à une fréquence de 259 Hz et se trouve dans la région du stick/slip (fig.3.25).

Un autre pic d'amplitude moindre 13.8% est observé à 294.5 Hz en région quasi stick. Pour le coefficient de variation de $(\theta^* - \theta_0)$, on remarque que le pic dans la région stick/slip est de nouveau présent (30%) mais moins

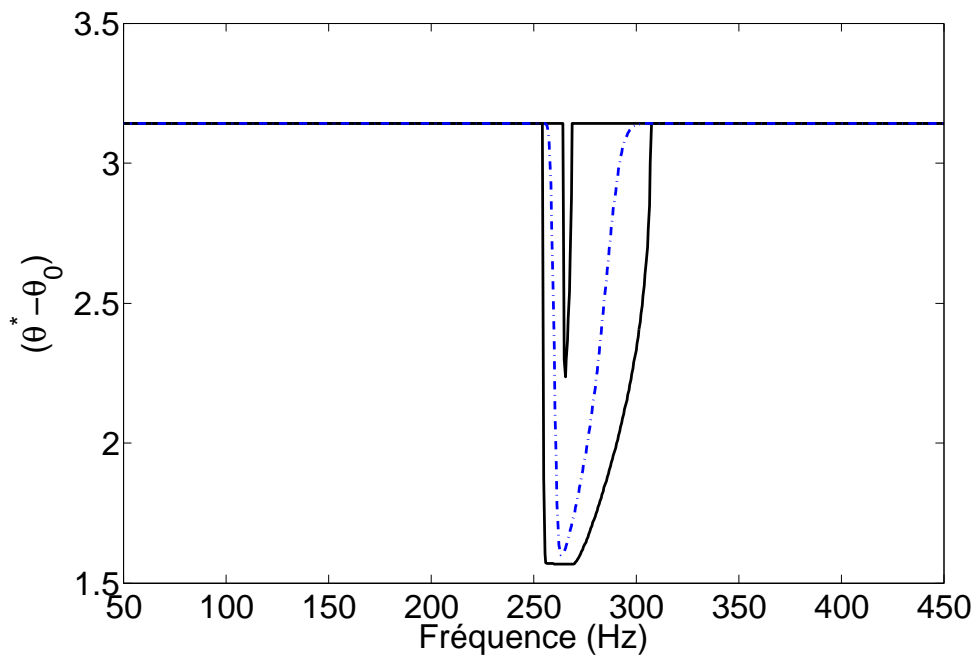


FIGURE 3.24 – (Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$

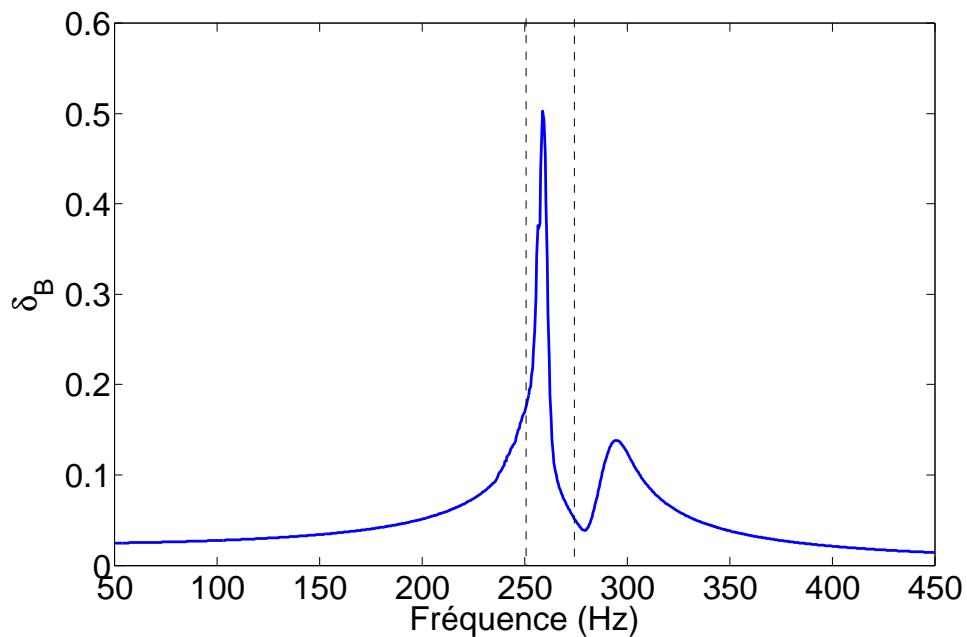


FIGURE 3.25 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$

important que pour δ_B ; par contre le deuxième pic dans la région stick est légèrement décalé de 285 Hz. Sa valeur (15%) est similaire à celle de δ_B . Donc une variation de kd de 14.28% entraîne des variations δ_B et $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ supérieures.

De plus, le paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ est insensible à la variation aléatoire de

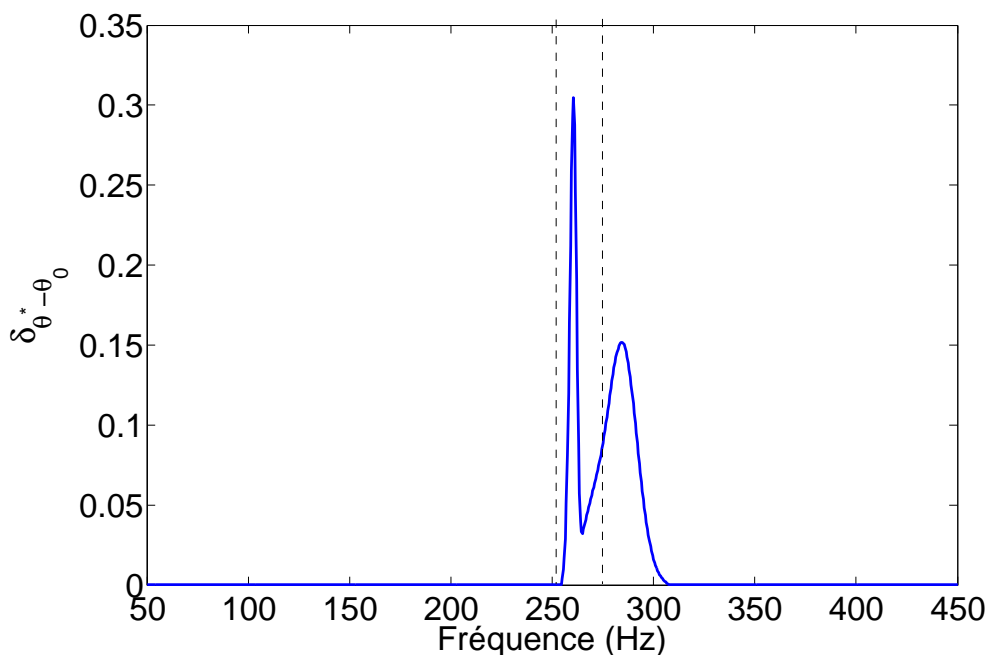


FIGURE 3.26 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$

kd en dehors de l'intervalle $[254.5 - 307.5]$ Hz (fig.3.26). En effet en dehors de cette zone, il n'y a pas d'intermittence de stick et de slip, et l'état du contact est bloqué, le paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ atteint son maximum de π comme observé sur la fig.3.24.

Sur la fig.3.23, on peut voir que l'ensemble des tirages du stick/slip déborde sur le domaine stick/slip à majorité slip, alors que la moyenne reste dans un contact purement stick/slip.

Les 8000 tirages Monte Carlo effectués ont généré 8000 réponses non linéaires pour chaque fréquence du domaine fréquentiel considéré. Le système étant non linéaire, la densité de probabilité de la réponse doit être reconstruite et du fait de la non linéarité, la variation aléatoire normale des paramètres d'entrée au système, ne produira pas nécessairement une réponse suivant une loi normale.

La fig.3.27 est construite à partir des histogrammes de la densité de probabilité pour chaque fréquence d'excitation des 8000 réponses aléatoires des tirages de MC. Elle représente une vue globale des densités de probabilité des amplitudes de la réponse non linéaire aléatoire est présentée pour chaque fréquence d'excitation appartenant aux domaines approximativement stick pour $f = [50 - 254.5]$ Hz et $f = [307 - 450]$ Hz et stick/slip pour $f = [254.5 - 307]$ Hz. On extrait de ce graphique des densités de probabilités relatives à certaines fréquences particulières (100, 150, 250, 260, 262.5, 265, 300 et 400 Hz) et on les expose dans le tableau 3.1. On remarque que les lois dans la région stick ressemblent plutôt la distribution normale tandis que dans la région du stick/slip, quelques fréquences ont des distributions résultant d'un mélange de distributions ayant des para-

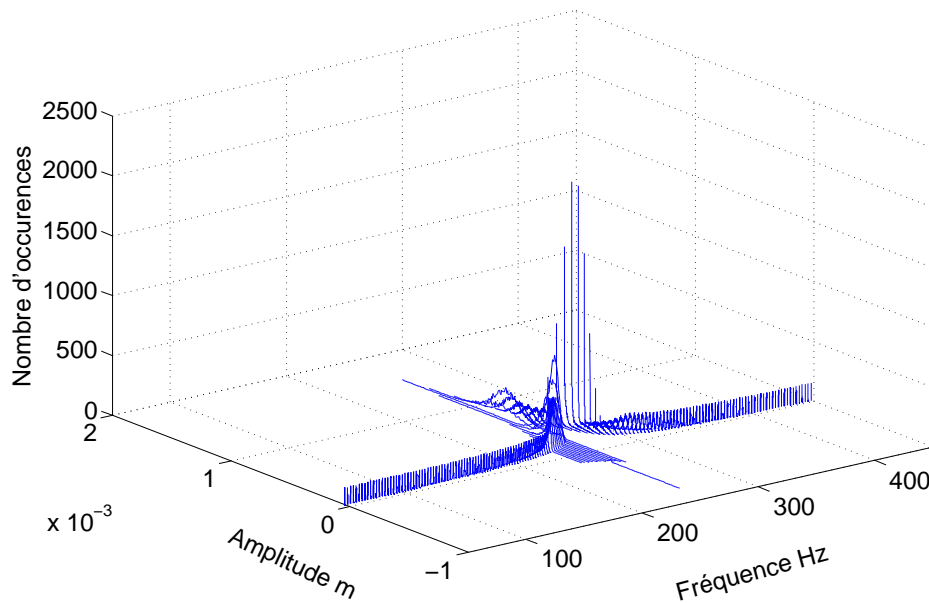


FIGURE 3.27 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour chaque fréquence pour une variable aléatoire k_d pour 8000 tirages Monte Carlo en état de stick/slip avec $\delta_{kd} = 14.28\%$

mètres différents (fréquences 260 et 262.5 Hz). Dans le paragraphe 3.5 on étudiera la forme des densités de probabilité de façon plus approfondie.

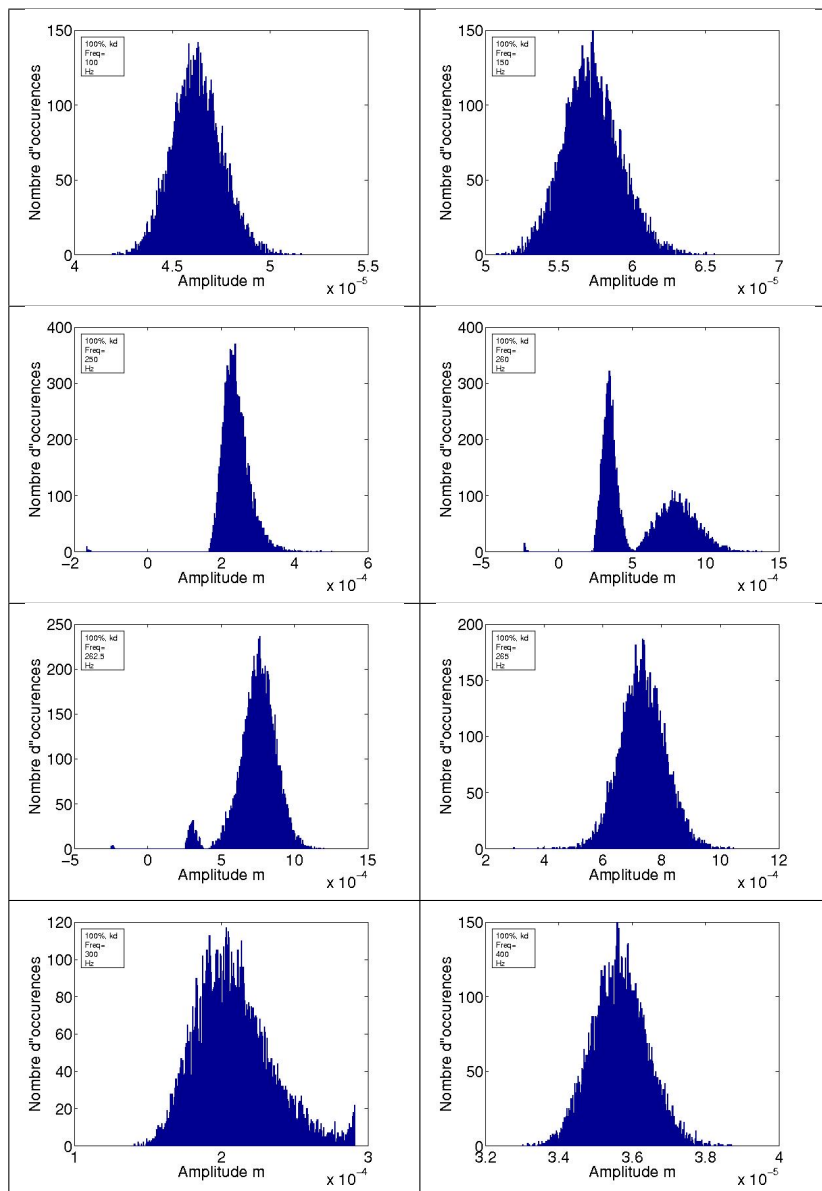


TABLEAU 3.1 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 100, 150, 250, 260, 262.5, 265, 300 et 400 Hz

3.4.4.2 Cas stick/slip à majorité slip

Les réponses associées aux différents tirages sont représentées sur la fig.3.28. On remarque qu'une variation des paramètres du contact kd dans l'état stick/slip à majorité slip implique une faible dispersion des amplitudes des réponses de tous les tirages autour de la valeur moyenne de la réponse, ce qui corrobore les faibles valeurs du coefficient de variation de l'amplitude de l'ordre de 10% (à 240 Hz) (fig.3.30). De plus, d'après le coefficient de variation de l'amplitude, pour la fréquence de résonance 250.5 Hz du totalement slip, cette dispersion est quasiment nulle.

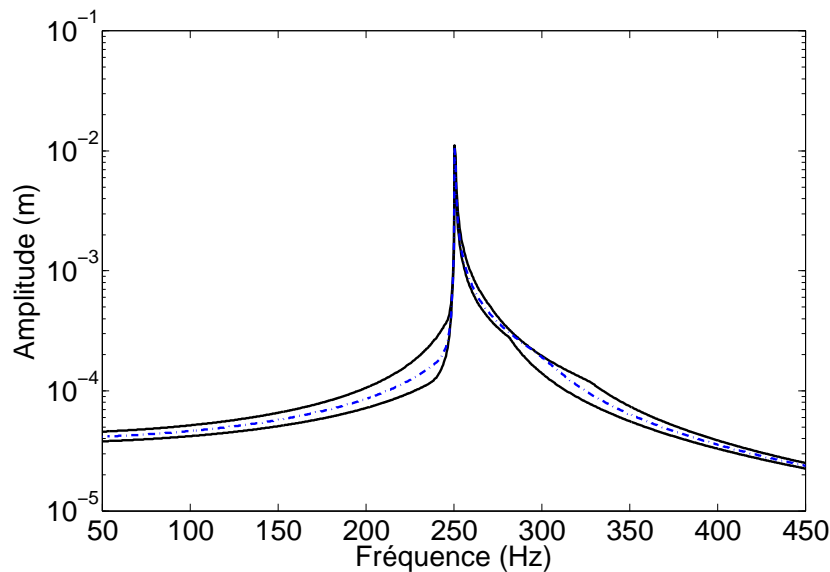


FIGURE 3.28 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$

Le paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ (fig.3.29 et 3.31) varie jusqu'à 15% sur le domaine fréquentiel considéré. Le minimum de dispersion de ce paramètre (à l'extérieur de la zone où le paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ devient égal à π) est également observé à la fréquence de résonance de 250 Hz. Les densités de probabilité sont représentées en annexe A.4.

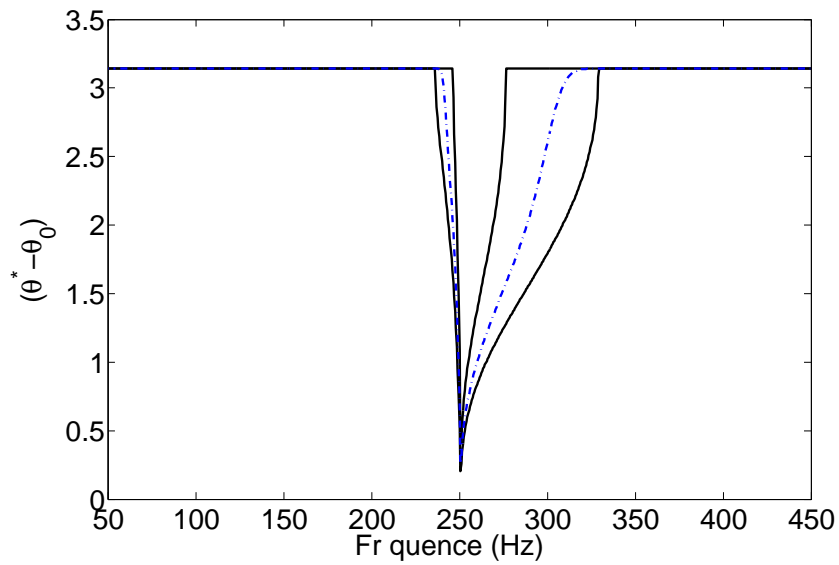


FIGURE 3.29 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$

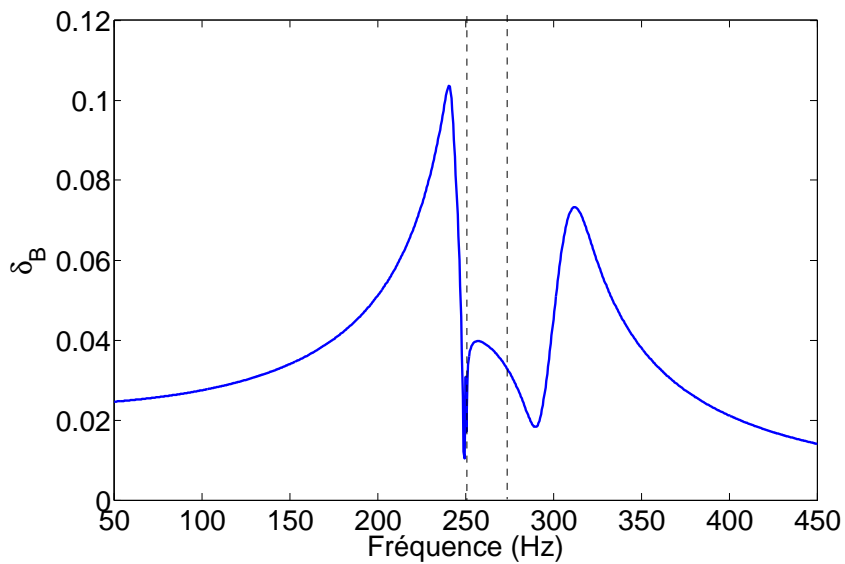


FIGURE 3.30 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$

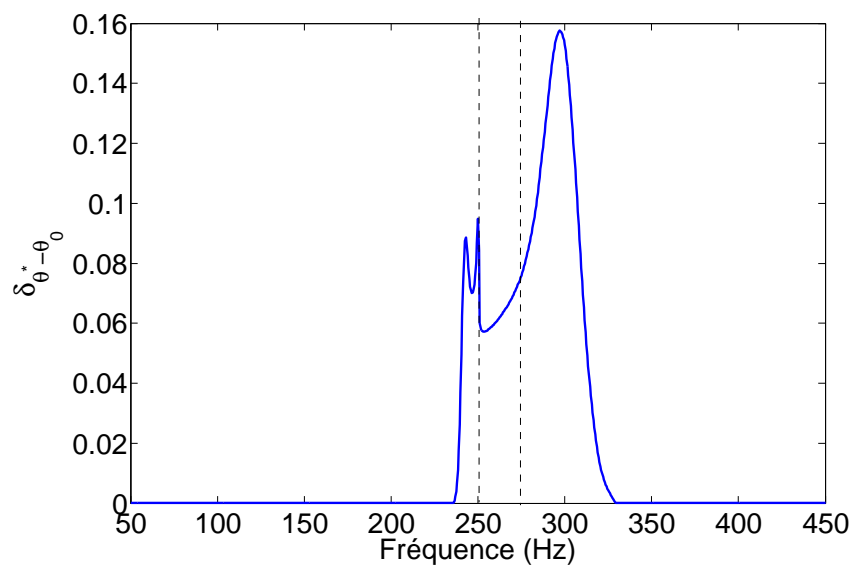


FIGURE 3.31 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$

3.4.4.3 Cas stick/slip à majorité stick

La fig.3.32 montre une forte dispersion de la réponse autour de la moyenne, dispersion confirmée par la valeur très élevée du coefficient de variation δ_B jusqu'à 155% (fig.3.34). Sur la fig.3.34 deux pics de 155% et de 115% sont observés respectivement à 267 et 280.5 Hz. Entre ces deux pic, il existe un minimum local de 89% observé à la fréquence de 274.4 Hz, fréquence de résonance pour le contact quasi stick.

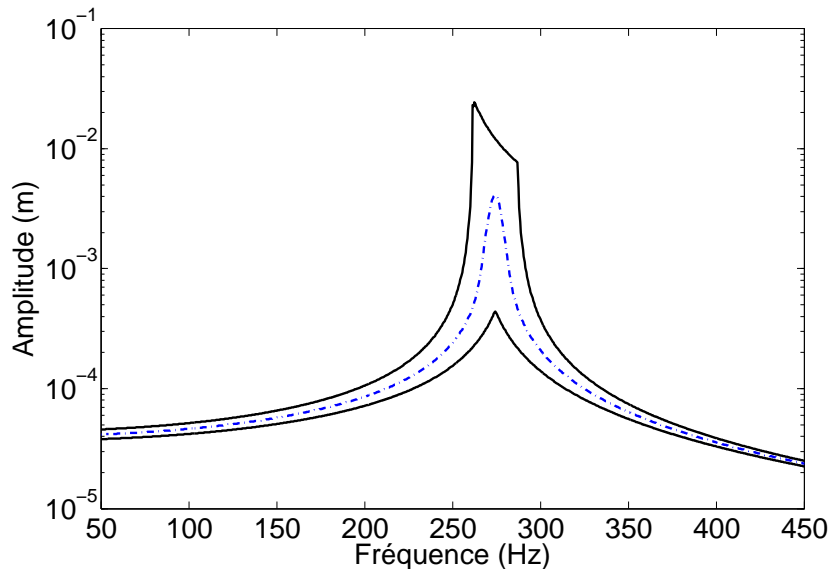


FIGURE 3.32 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{kd} = 14.28\%$

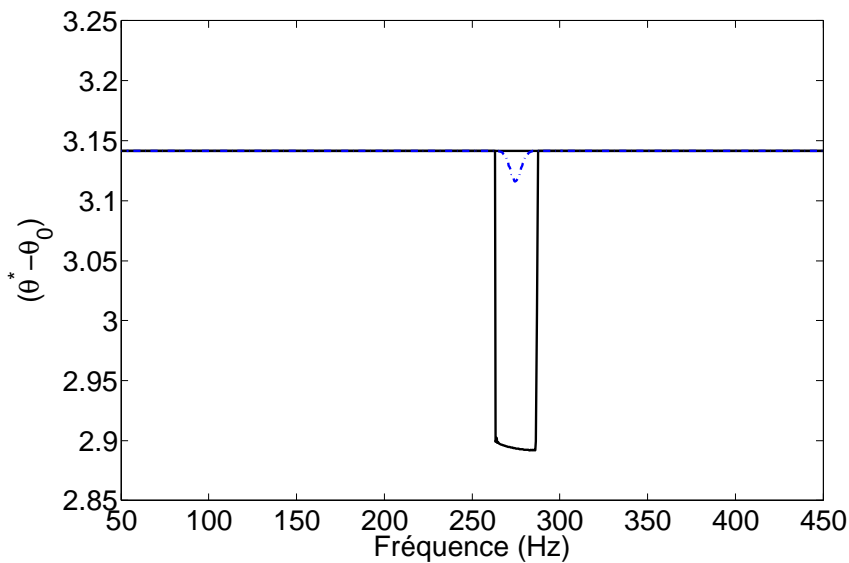


FIGURE 3.33 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{kd} = 14.28\%$

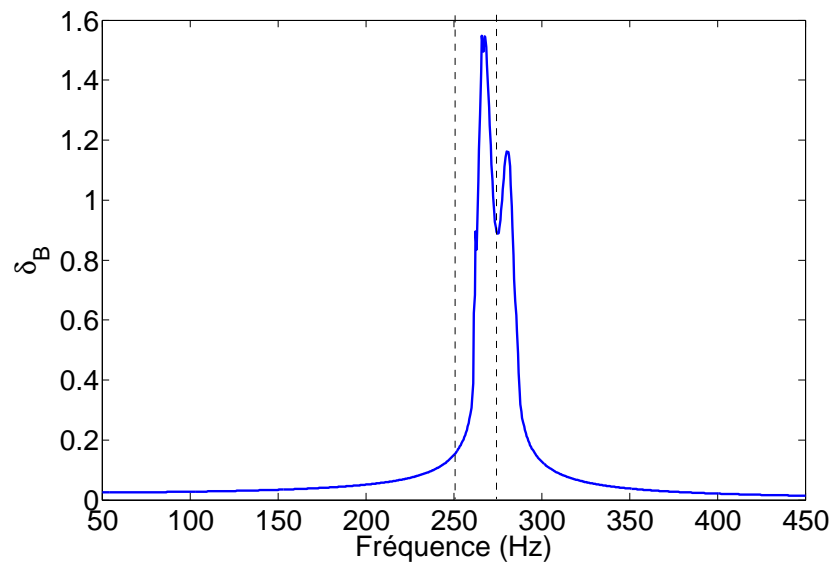


FIGURE 3.34 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{kd} = 14.28\%$

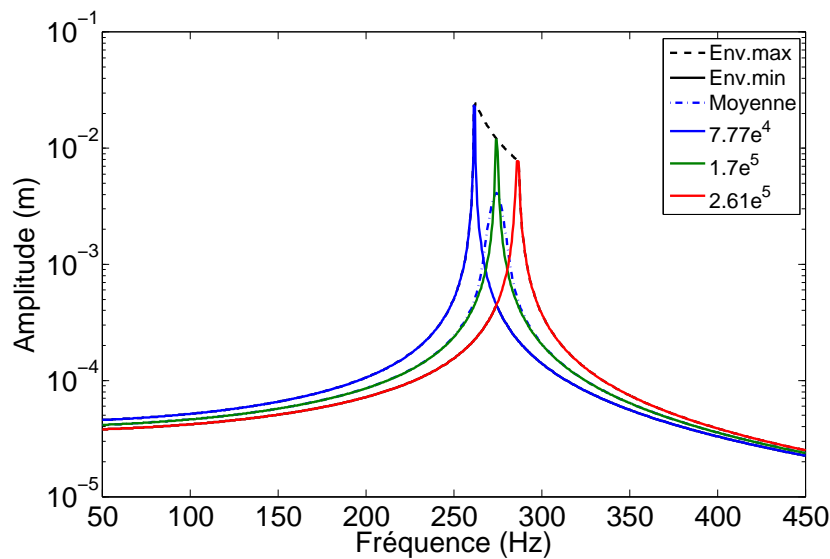


FIGURE 3.35 – Enveloppes minimale, maximale, la moyenne de la réponse en amplitude, ainsi que les réponses déterministes pour $kd = 7.77e4\text{N/m}$, $kd = 2.6e5\text{ N/m}$ et $kd = 1.7e5\text{ N/m}$

Cette très forte dispersion comparée à celle obtenue dans le domaine stick/slip (50%), ainsi que la présence des deux pics très marqués (150% et 100%) à la place d'un majoritaire à la fréquence de l'amplitude maximale de la moyenne peuvent s'expliquer par la présence de variation en fréquence du maximum de l'amplitude, liée à la variation de raideur. On voit d'après la fig.3.35 donnant les réponses à trois valeurs déterministes de kd (la raideur minimale du tirage sur kd ($kd = 7.77e4\text{N/m}$), la raideur maximale ($kd = 2.6e5\text{ N/m}$) et la valeur nominale de $kd = 1.7e5\text{ N/m}$) que la résonance est naturellement décalée suivant la valeur choisie de kd .

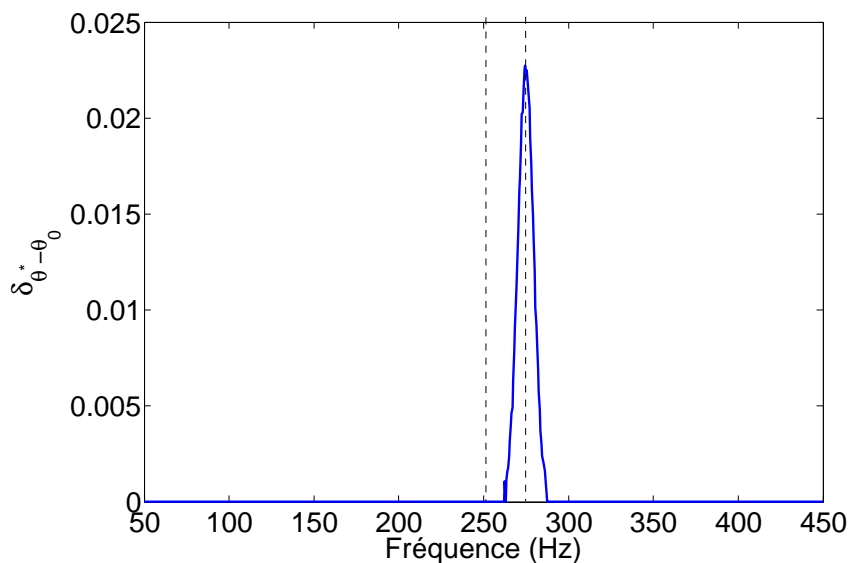


FIGURE 3.36 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{kd} = 14.28\%$

Ainsi la dispersion autour de la moyenne sera maximale pour kd minimal (cf coefficient de variation δ_B (fig.3.34)) puis aura un minimum local pour la valeur moyenne de kd puis un autre maximum inférieur au premier pour kd maximal.

En ce qui concerne $(\theta^* - \theta_0)$ (fig.3.33), une faible dispersion existe dans le domaine quasi stick (2.5% fig.3.36) inférieure à celle dans le domaine stick/slip (30%). Les densités de probabilité sont représentées en annexe A.4.

La même étude menée sur le paramètre kd dans les trois domaines de contact sera reprise pour le paramètre μ dans le paragraphe suivant.

3.4.5 Incertitude sur le paramètre μ

Dans le but d'étudier l'influence des incertitudes sur le coefficient de frottement μ une variation possible de 20% est envisagée.

3.4.5.1 Cas stick/slip

La variation de μ induit un décalage en fréquence de l'amplitude maximale (fig.3.37), en effet elle permet le passage du contact stick/slip au contact stick slip à majorité slip et, d'une manière moins importante, au contact stick slip à majorité stick. Cependant les valeurs extrêmes restent confinées dans les deux courbes des domaines linéaires stick et slip (fig.3.7). Cette tendance est visualisée par la largeur du pic du coefficient de variation de l'amplitude (500% à la fréquence du cas slip fig.3.39) plus importante que pour le cas de variation de kd . Il est à noter que $(\theta^* - \theta_0)$ est insensible à toute variation de μ en dehors de l'intervalle [204.5-330] Hz (fig.3.38). Les densités de probabilité sont représentées en annexe A.4.

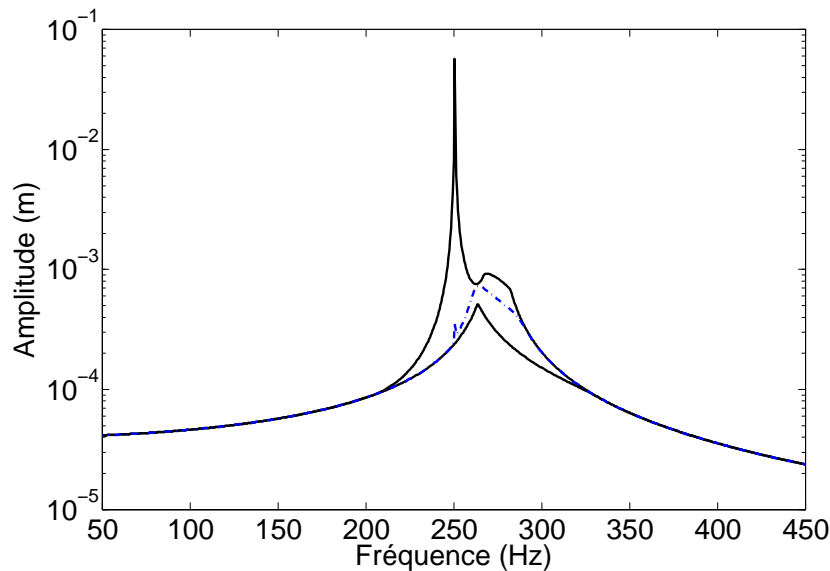


FIGURE 3.37 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_\mu = 20\%$

La fig.3.41 des courbes des valeurs extrêmes montre clairement un changement d'état du contact du stick/slip pour $\mu = 0.699$ au quasi slip pour $\mu = 0.0961$, ce qui justifie le fort coefficient de variation de la réponse.

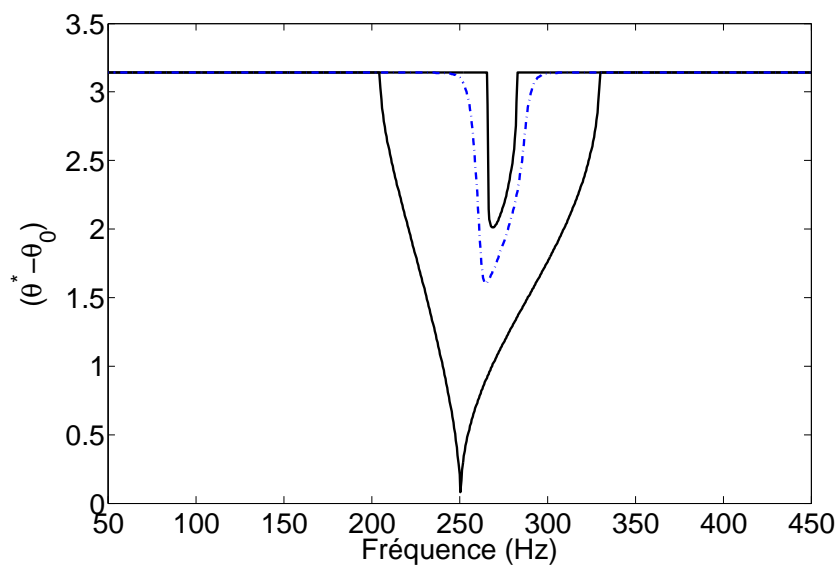


FIGURE 3.38 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_\mu = 20\%$

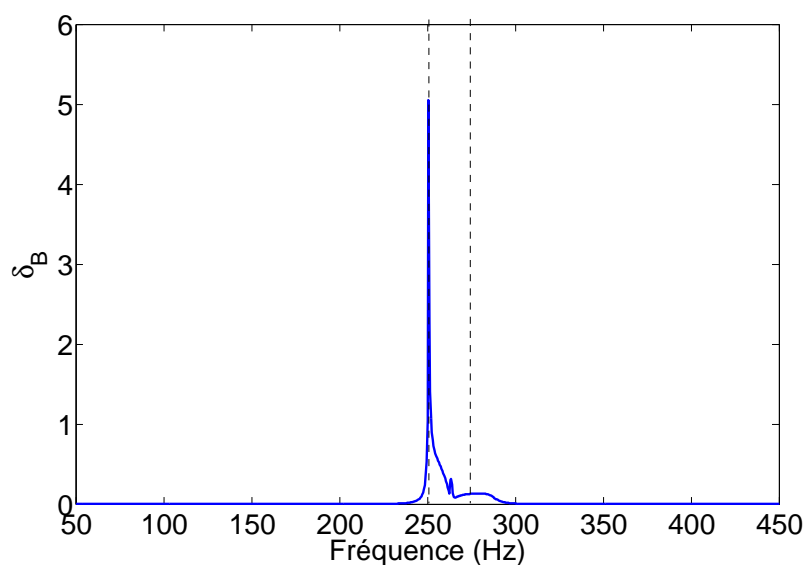


FIGURE 3.39 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip : $\delta_\mu = 20\%$

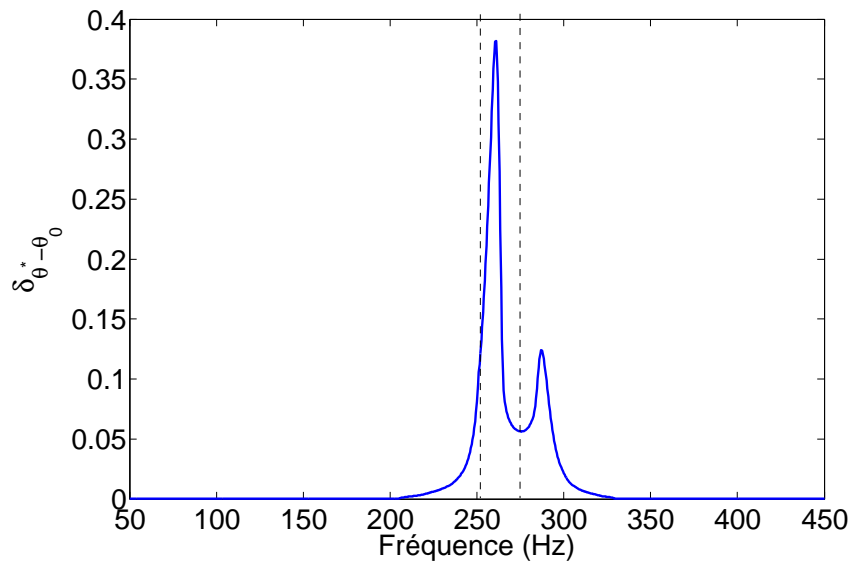


FIGURE 3.40 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip : $\delta_\mu = 20\%$

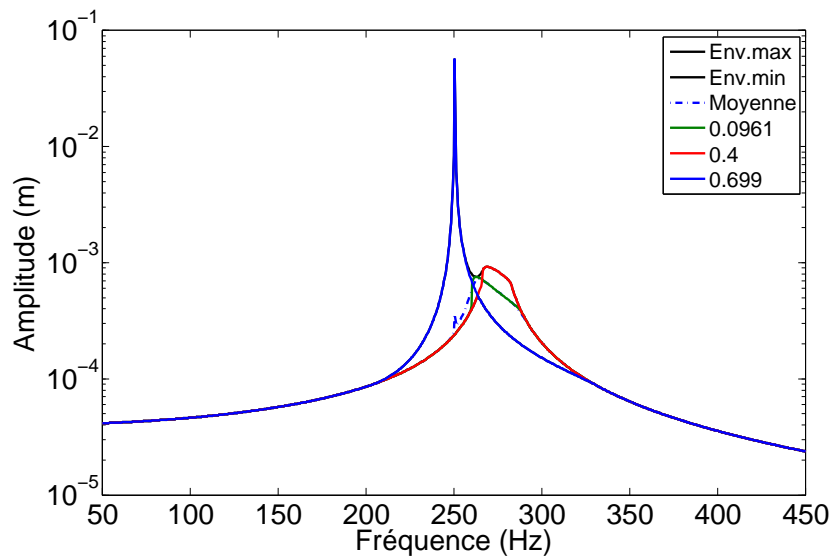


FIGURE 3.41 – Enveloppes minimale, maximale, la moyenne de la réponse en amplitude, ainsi que les réponses déterministes pour $\mu = 0.0961$, $\mu = 0.699$ et $\mu = 0.4$

3.4.5.2 Cas stick/slip à majorité slip

Dans le domaine stick/slip à majorité slip, l'influence de la variation de μ est importante : 100% à la fréquence de 250 Hz au niveau de la dispersion de l'amplitude de la réponse aléatoire (fig.3.42 et 3.44). Pour $(\theta^* - \theta_0)$, la dispersion obtenue est du même ordre (fig.3.43 et 3.45). La présence d'un pic important à la fréquence de 250.5 Hz est liée à l'influence de la variation de μ sur le décalage en fréquence de la réponse vers une configuration de plus en plus slip.

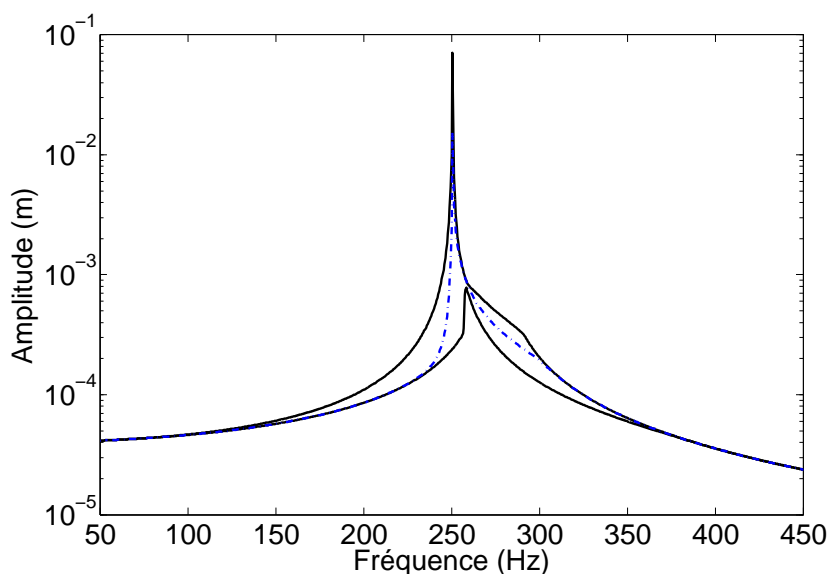


FIGURE 3.42 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_\mu = 20\%$

La fig.3.46 montrent clairement un changement d'état du contact du stick/slip pour $\mu = 0.699$ au quasi slip pour $\mu = 0.0961$, ce qui justifie le fort coefficient de variation de la réponse. Les densités de probabilité sont représentées en annexe A.4.

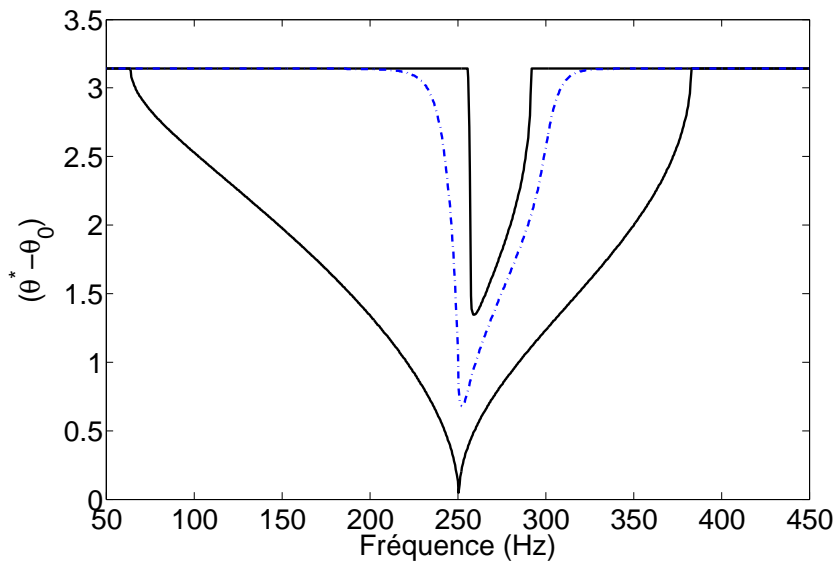


FIGURE 3.43 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_\mu = 20\%$

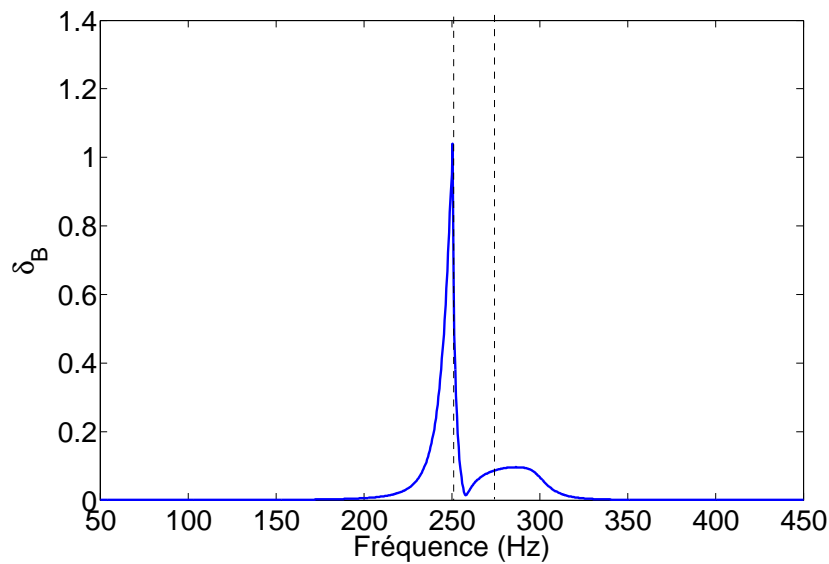


FIGURE 3.44 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_\mu = 20\%$

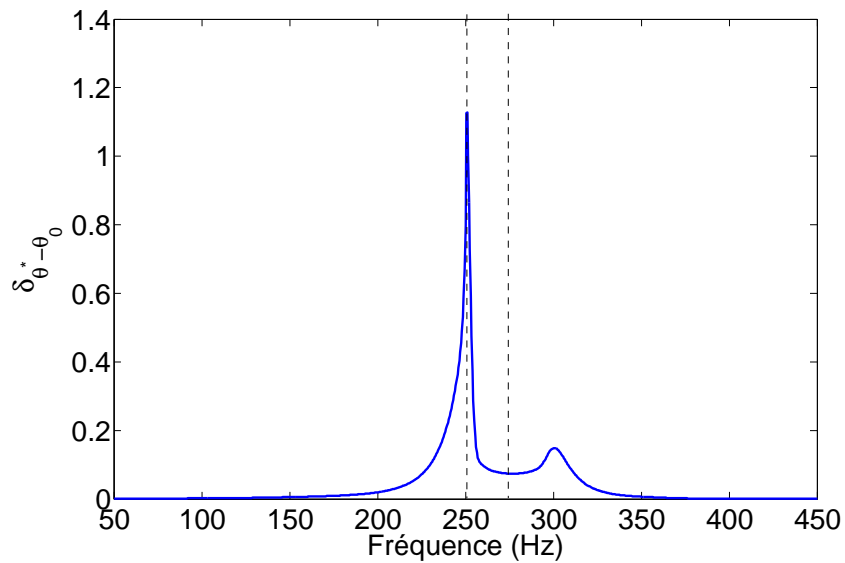


FIGURE 3.45 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_\mu = 20\%$

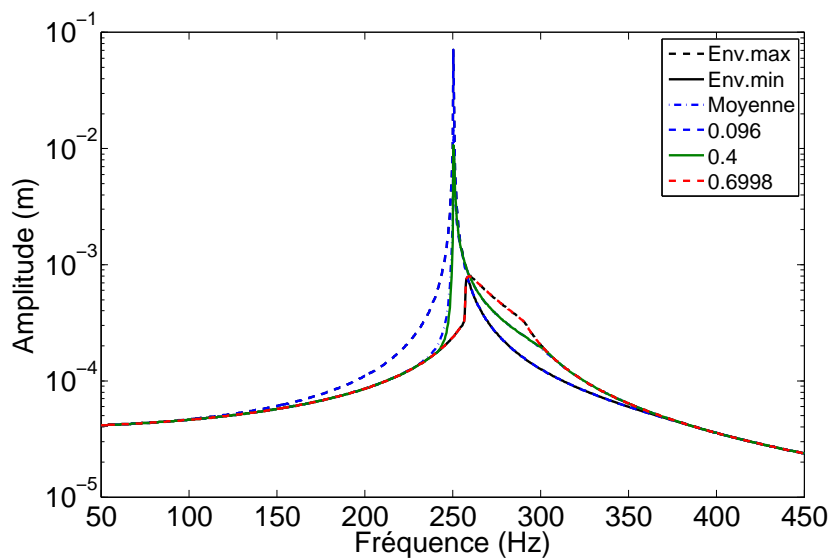


FIGURE 3.46 – Enveloppes minimale, maximale, la moyenne de la réponse en amplitude, ainsi que les réponses déterministes pour $\mu = 0.0961$, $\mu = 0.699$ et $\mu = 0.4$

3.4.5.3 Cas stick/slip à majorité stick

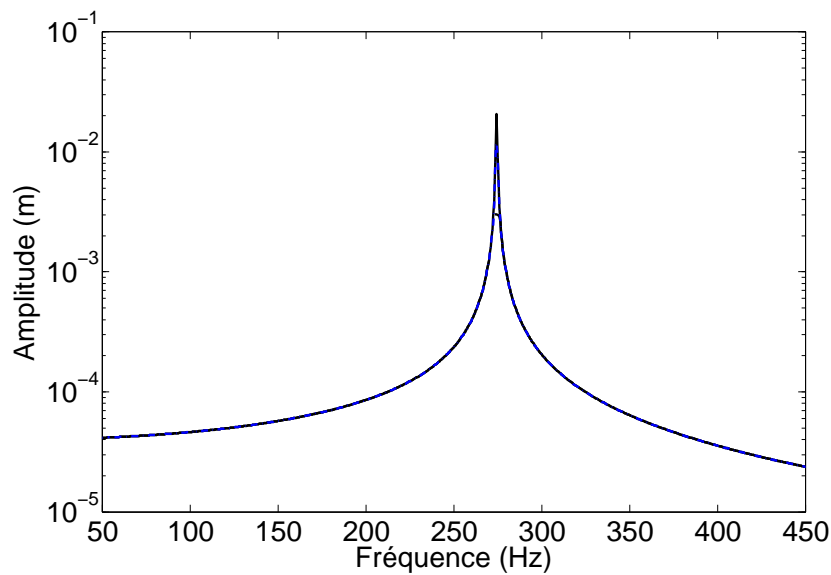


FIGURE 3.47 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{\mu} = 20\%$

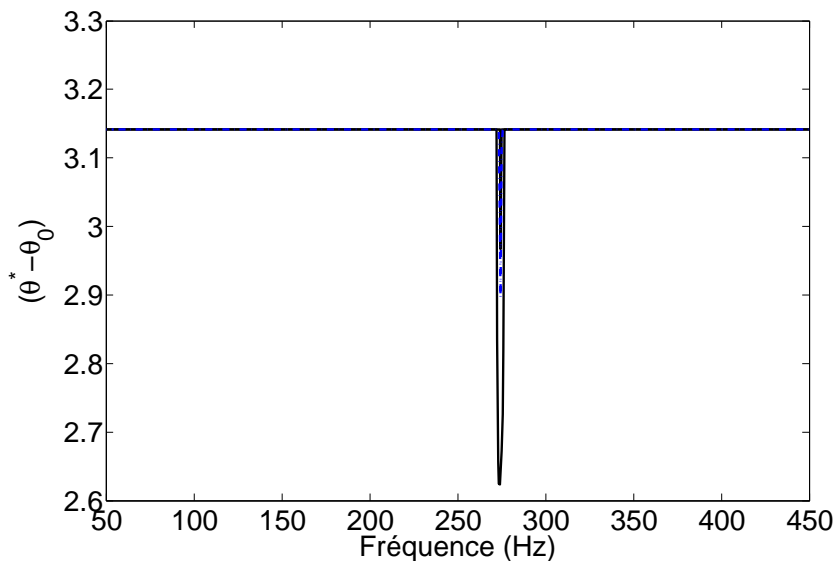


FIGURE 3.48 – Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{\mu} = 20\%$

La dispersion autour de la moyenne pour l'amplitude maximale B et pour $(\theta^* - \theta_0)$ porte clairement sur l'amplitude seule et pas sur la fréquence (fig.3.47 à 3.50) dans l'intervalle restreint de fréquence $[270 - 276.5]$ Hz. De plus les coefficients de variation de B et de $(\theta^* - \theta_0)$ montrent que la dispersion est beaucoup plus petite dans ce domaine (71% pour B et 3.4%

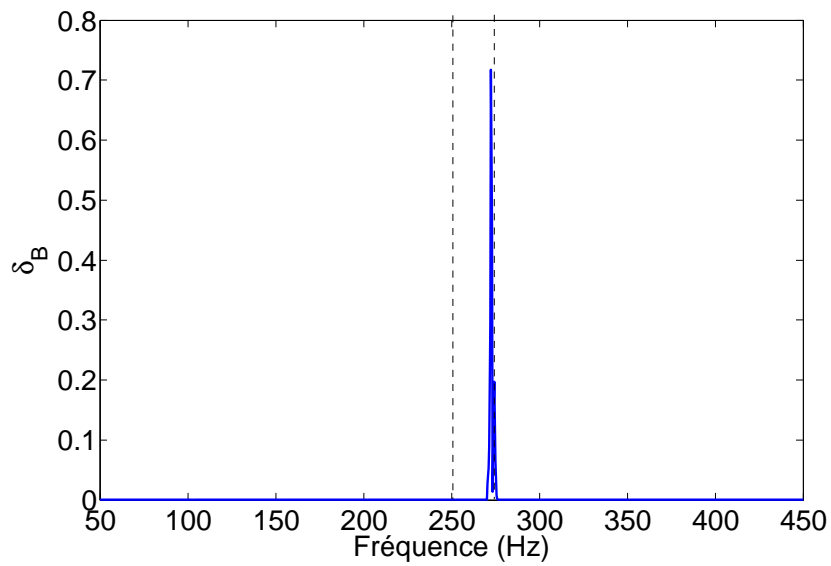


FIGURE 3.49 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_\mu = 20\%$

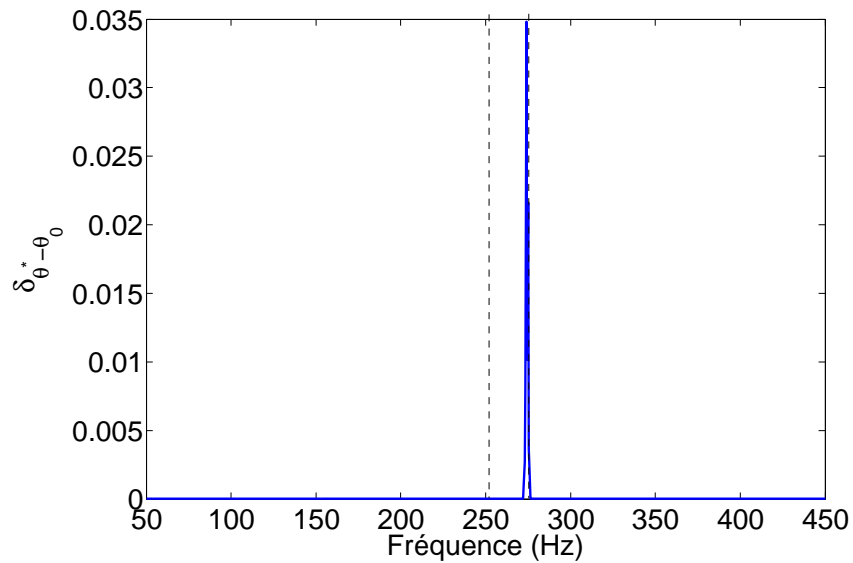


FIGURE 3.50 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_\mu = 20\%$

pour $(\theta^* - \theta_0)$) que dans le domaine stick/slip (500% pour B et 38% pour $(\theta^* - \theta_0)$). Les densités de probabilité sont représentées en annexe A.4.

3.4.6 Incertitude sur le paramètre F_n

Pour les trois domaines : stick/slip, stick/slip à majorité slip et stick/slip à majorité stick, l'influence de F_n aléatoire sur la réponse est logiquement similaire à celle de μ mais moins importante. Les fig.3.51 à 3.62 illustrent ce résultat. La différence la plus marquée est obtenue sur l'amplitude de la réponse dans le domaine stick/slip . La variation de μ étant plus importante, elle déplace les réponses vers des configurations de plus en plus slip, d'où un pic très marqué de l'enveloppe de la réponse à la fréquence de 250.5 Hz, pic presque absent pour la variation de F_n .

3.4.6.1 Cas stick/slip

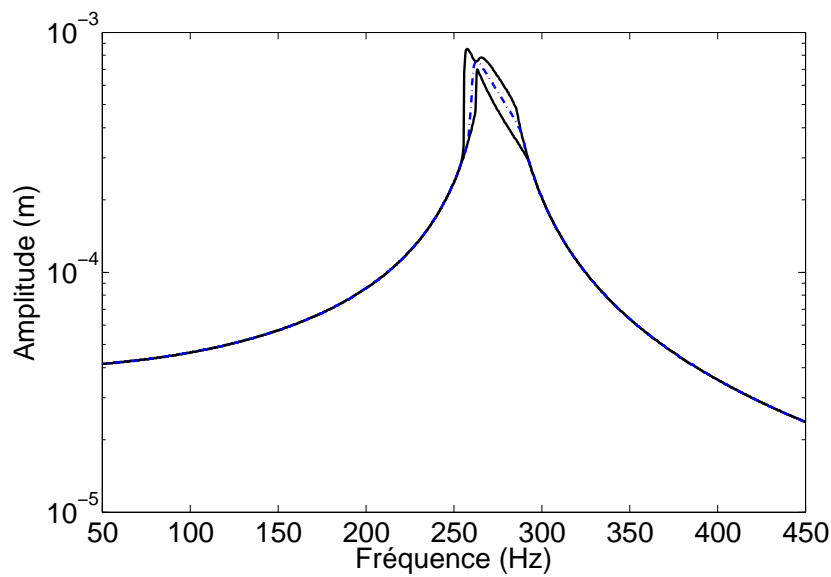


FIGURE 3.51 – Enveloppes minimales et maximales (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

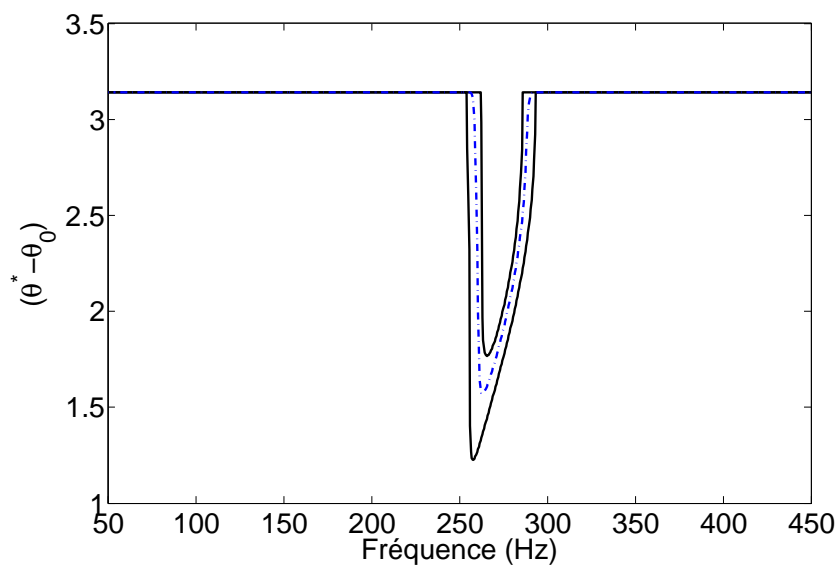


FIGURE 3.52 – Enveloppes minimales et maximales (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

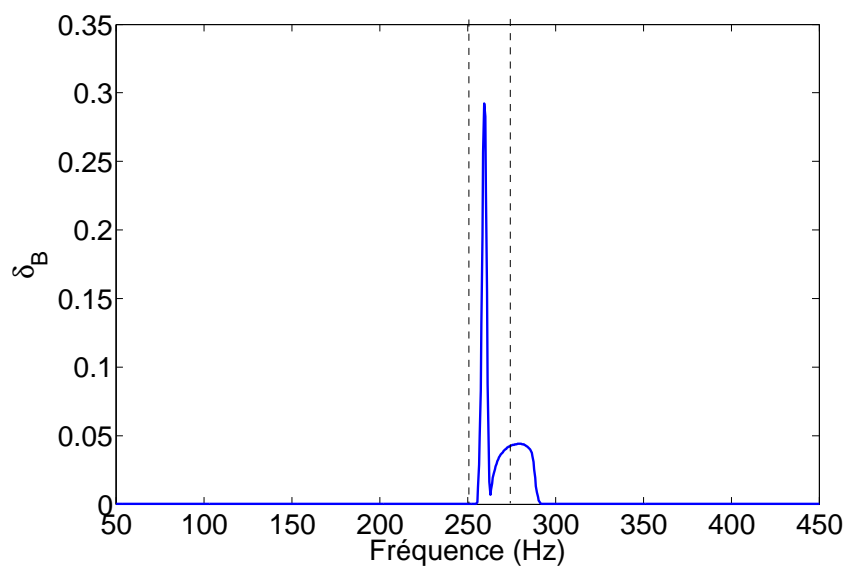


FIGURE 3.53 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

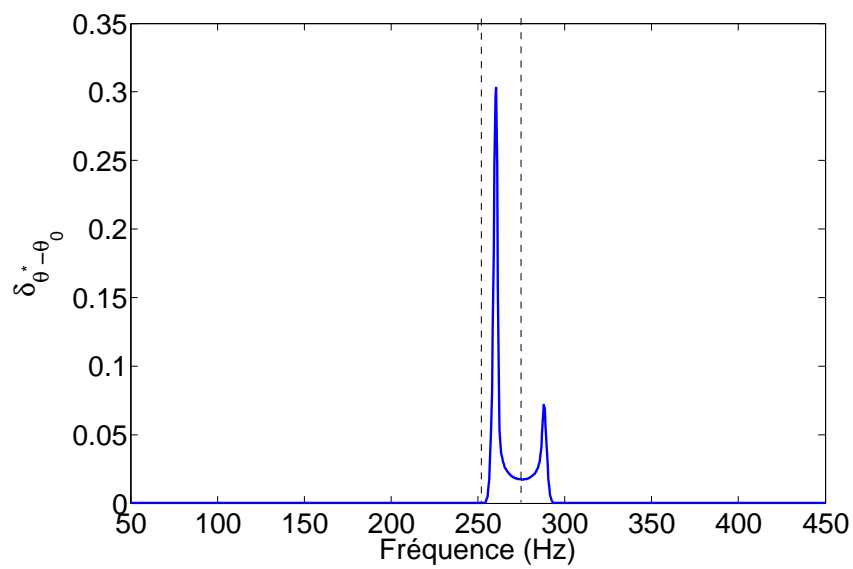


FIGURE 3.54 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

3.4.6.2 Cas stick/slip à majorité slip

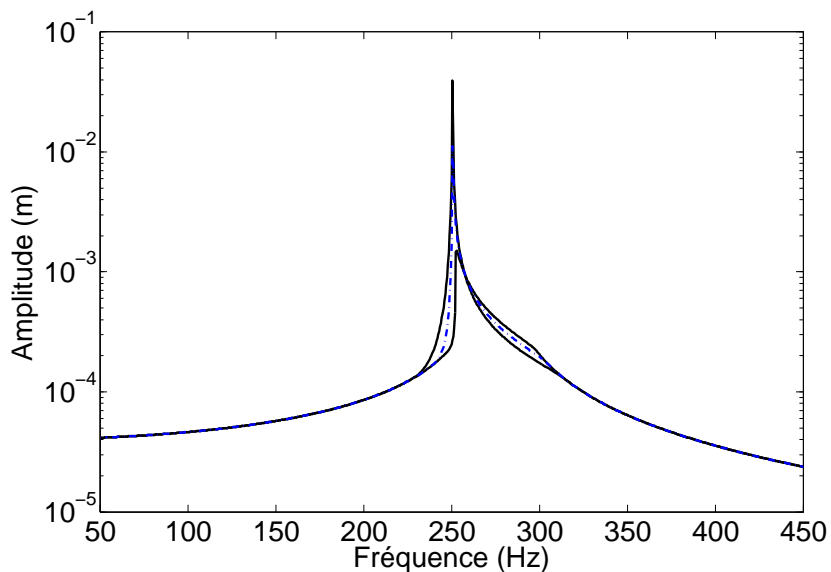


FIGURE 3.55 – Enveloppes minimales et maximales (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

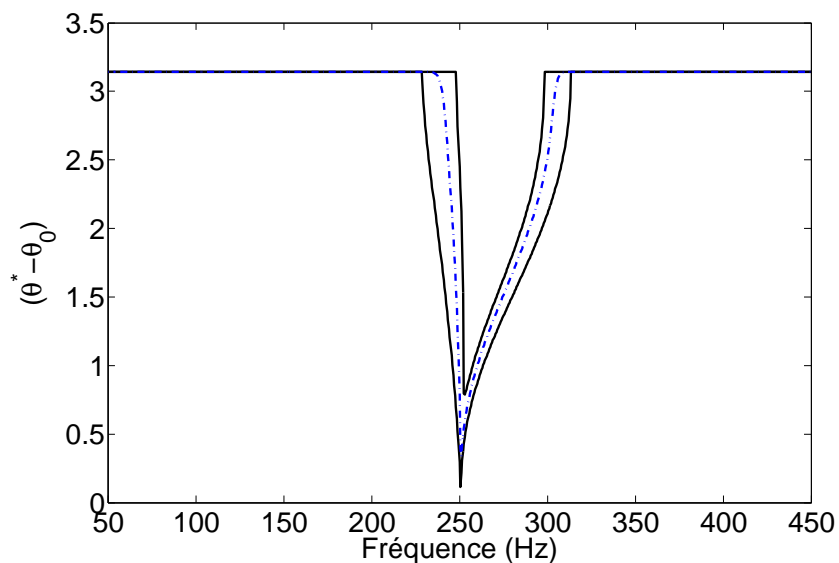


FIGURE 3.56 – Enveloppes minimales et maximales (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

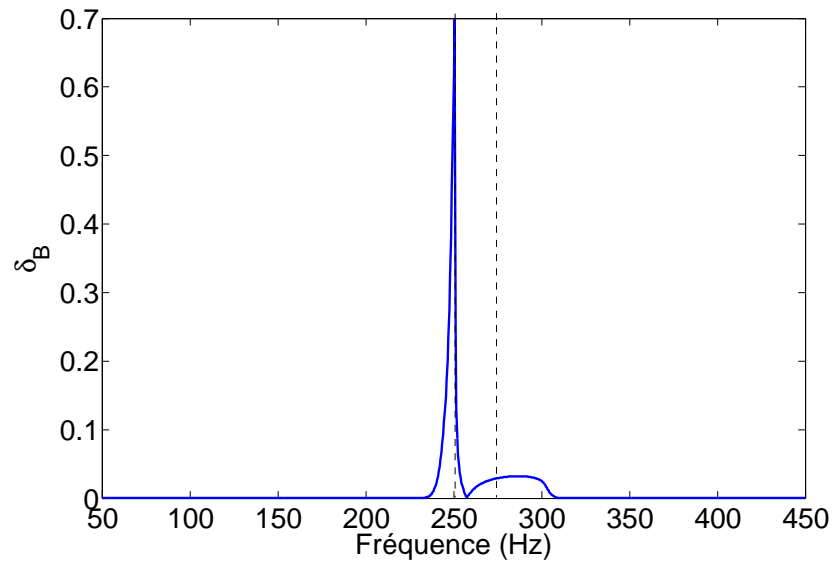


FIGURE 3.57 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

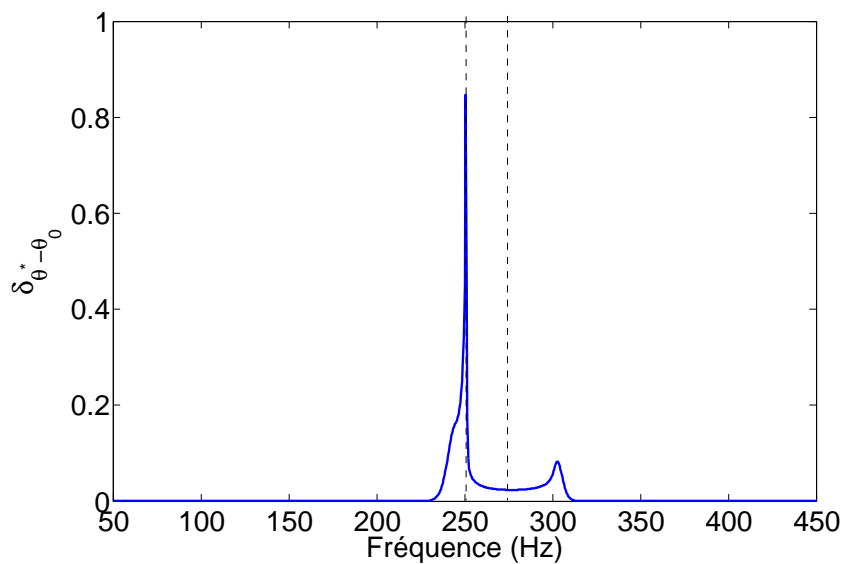


FIGURE 3.58 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

3.4.6.3 Cas stick/slip à majorité stick

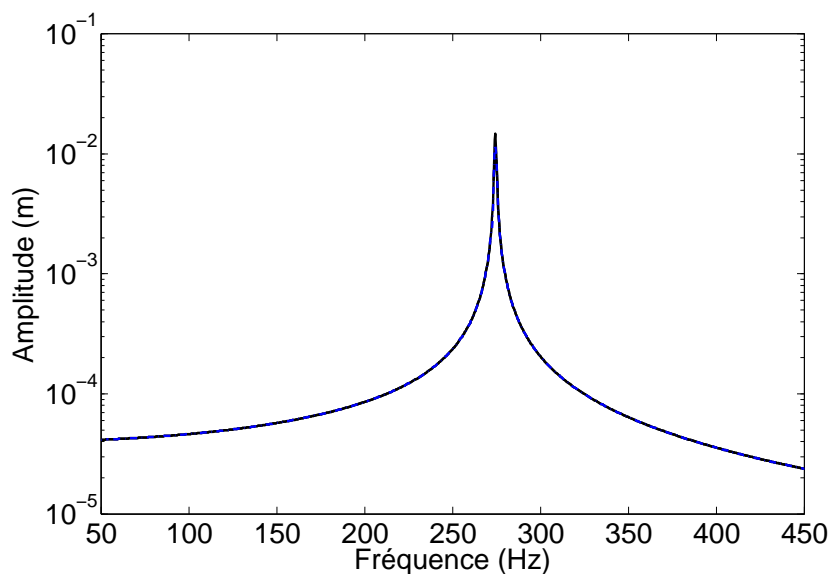


FIGURE 3.59 – Enveloppes minimales et maximales (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

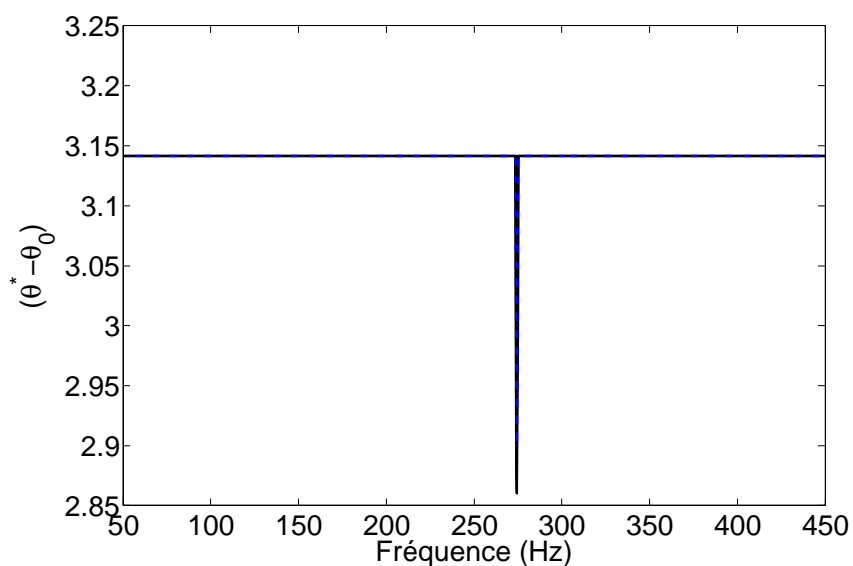


FIGURE 3.60 – Enveloppes minimales et maximales (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

Conclusion

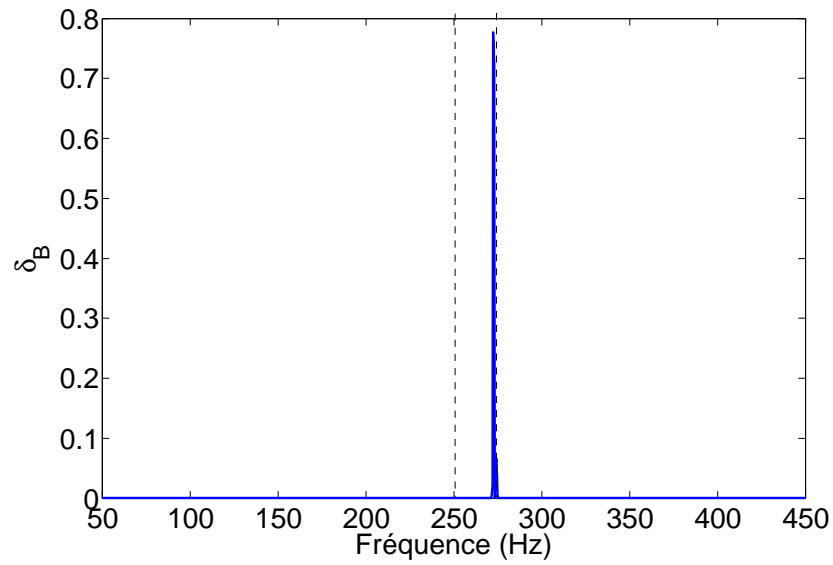


FIGURE 3.61 – Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

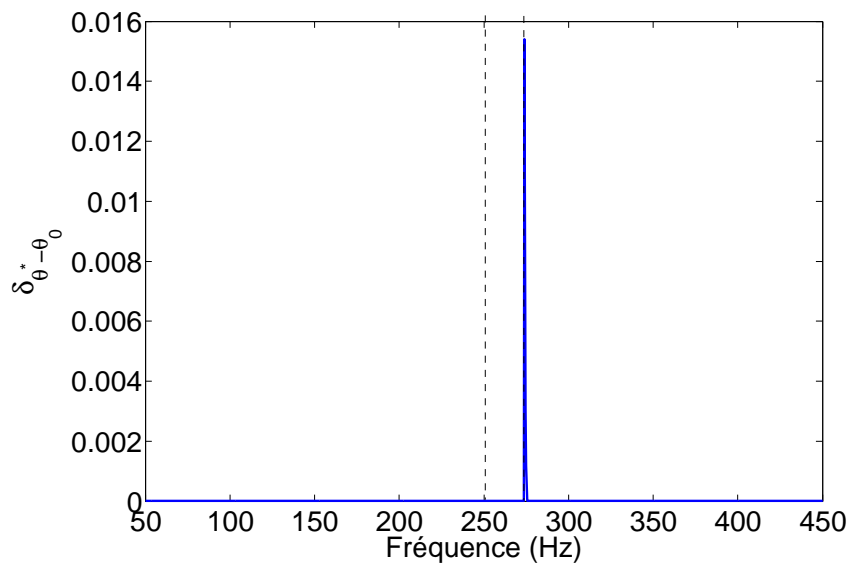


FIGURE 3.62 – Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{F_n} = 6.66\%$

3.5 EXTENSION DE LA MODÉLISATION STOCHASTIQUE À UN SYSTÈME À GÉOMÉTRIE CYCLIQUE DE TREIZE AUBES

3.5.1 Mise en équation du modèle numérique à 13 aubes

L'intérêt de cette étude sur un système à 13 degrés de liberté porte sur le facteur d'amplification qui décrit le comportement vibratoire le plus défavorable du système désaccordé. Son étude stochastique sur le système à 13 aubes reprend l'étude du système à 1 ddl. Les paramètres aléatoires considérés sont kd et F_n (μ apporte le même comportement que F_n sur la réponse) et la réponse aléatoire est décrite par sa moyenne, son coefficient de variation, ses enveloppes maximales et minimales. Le facteur d'amplification est donné par sa densité de probabilité. On essaye d'ajuster analytiquement cette dernière à l'aide de lois de probabilités classiques. Les applications numériques développées dans la suite seront basées sur un modèle représentatif du dispositif expérimental à 13 aubes introduit dans le chapitre précédent. Le modèle retenu est un modèle discret recalé sur les caractéristiques mécaniques et les fréquences de résonance des deux cas quasi linéaires de stick et de slip du banc expérimental. La fig.3.64 montre une schématisation du dispositif 13 aubes à symétrie cyclique ([40]). Le banc expérimental est constitué de 13 aubes identiques, ayant chacune les mêmes caractéristiques géométriques et les caractéristiques mécaniques suivantes pour $i = 1...13$:

$$\begin{aligned} m_i &= 0.344Kg \\ k_i &= 8.52685e^5 N/m \\ c_i &= 0.1N/ms^{-1} \end{aligned}$$

Les aubes sont équipées de frotteurs de type nageoires au 3/4 de la hauteur de chaque aube. Les valeurs moyennes des caractéristiques de ces frotteurs sont les suivantes : $kd_i = 1.7e^5 N/m$ et $\mu_i = 0.4$.

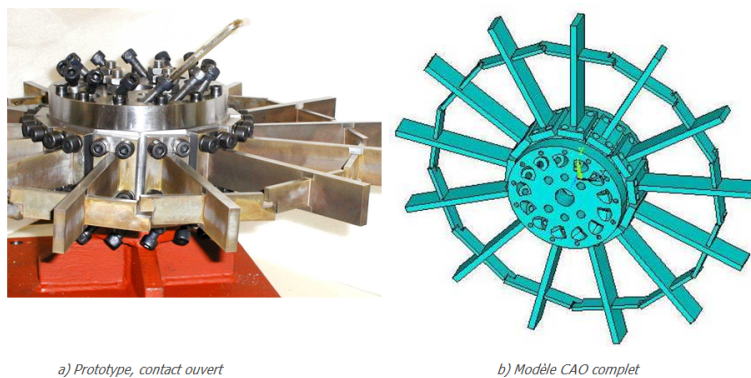


FIGURE 3.63 – Prototype expérimental existant au LaMCoS [40]

Afin d'obtenir un système d'équations le plus simple possible, la structure est réduite à un assemblage de 13 degrés de liberté discrets, comme présenté en fig.3.65. Le premier et le dernier degrés de liberté sont reliés entre eux afin de former une structure cyclique fermée.

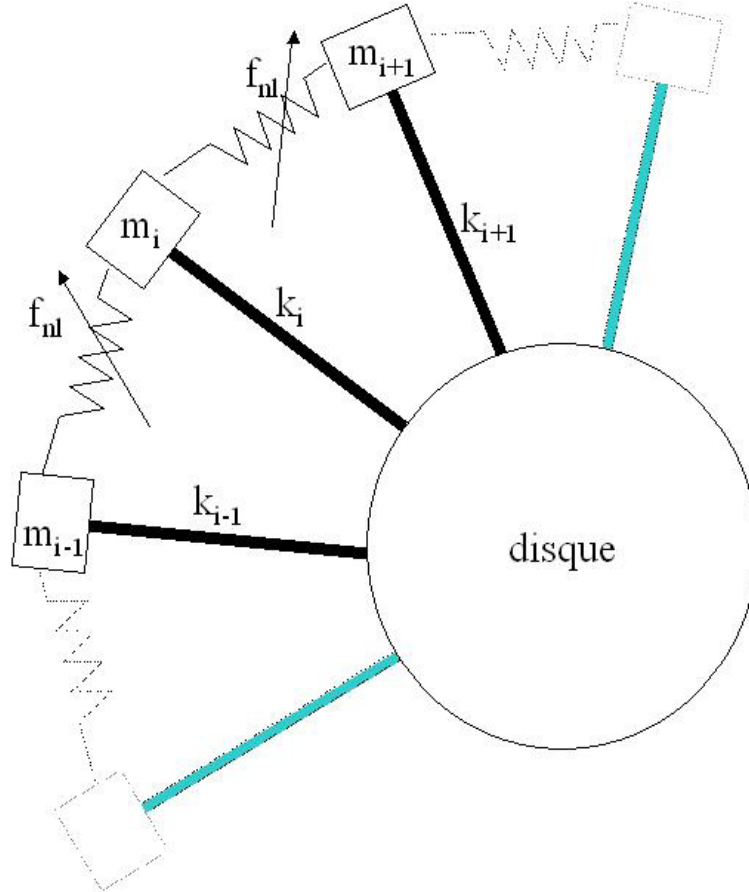


FIGURE 3.64 – Schématisation d'une poutre du dispositif 13 aubes à géométrie cyclique

La force est tout d'abord appliquée seulement sur le premier ddl et les contacts sont positionnés entre deux aubes consécutives. Le système d'équations est écrit sous forme classique :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F_{ex}\} - \{F_{nl}\} \quad (3.7)$$

avec $[M]$, $[C]$ et $[K]$ respectivement matrices de masse, raideur et amortissement (matrices développées en Annexe A.1). $\{F_{ex}\}$ est le vecteur des forces d'excitation sur chaque degré de liberté et $\{F_{nl}\}$ est le vecteur des forces non linéaires relatives à chaque frotteur.

Afin de généraliser la méthode de la balance harmonique ($N=1$) au cas de système à 13 degrés de liberté, les déplacements et les forces non linéaires dans le cas du stick/slip sont écrits sous la forme :

$$x_i(t) = a_i \cdot \cos(\omega t) + b_i \cdot \sin(\omega t) \quad (3.8)$$

De plus, dans ce cas,

$$f_{nl_{i-1,i}} = f_{nl_i} - f_{nl_{i-1}} \quad (3.9)$$

avec

$$f_{nl_i}(t) = f_{c_i}(Arel_i) \cos(\theta) + f_{s_i}(Arel_i) \sin(\theta) \quad (3.10)$$

où $Arel_i = [(a_{i+1} - a_i)^2 + (b_{i+1} - b_i)^2]^{1/2}$ est le déplacement relatif pour chaque frotteur i et a_i et b_i sont les amplitudes du déplacement absolu

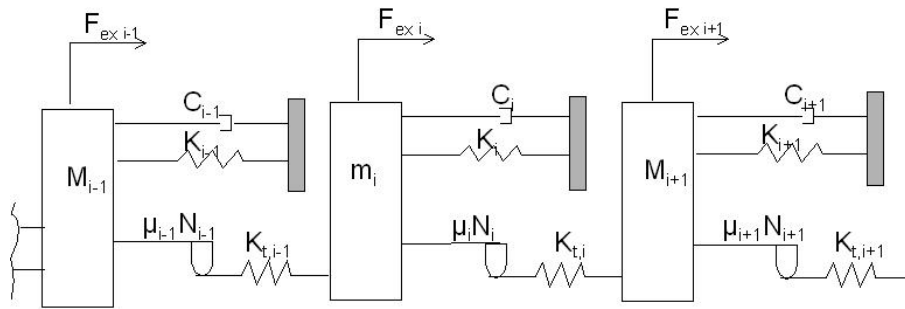


FIGURE 3.65 – Schématisation du dispositif 13 aubes à géométrie cyclique

de l'aube i associés à la partie cosinus et sinus, fc_i et fs_i développés en 2.3 (pour $n=1$). En substituant ces valeurs dans l'équation (3.10), il vient :

$$f_{nl_i}(t) = \left[\frac{kd_i}{\pi} [\theta_i^* - 05 \sin(2\theta_i^*)] Arel_i \right] \cos(\theta) - \left[\frac{kd_i}{\pi} (\sin^2 \theta_i^*) Arel_i \right] \sin(\theta) \quad (3.11)$$

avec

$$\theta_i^* = \cos^{-1}(1 - 2 \cdot \mu_i F_n(i) / (kd_i Arel_i)) \quad (3.12)$$

Soit un système qui se caractérise par une dimension égale à deux fois le nombre d'aubes choisies :

$$[A]\{y\} = \{B\} \quad (3.13)$$

3.5.2 Excitation ponctuelle, Excitation ordre moteur

Les mécanismes d'excitation des systèmes à symétrie cyclique ont déjà été exposés précédemment. Dans ce paragraphe une étude paramétrique est menée sur le système à 13 ddl afin de quantifier, en première approximation l'influence de chaque paramètre sur le système.

Les réponses accordées du système à 13 aubes sous deux sortes d'excitations : ponctuelle sur l'aube numéro 1 et ordre moteur (de 1 à 6 H) avec une même amplitude de force excitatrice $F_0 = 41N$ sont calculées pour une force normale $F_n = 5000N$. Cette valeur induit une situation voisine du cas complètement collé (quasi stick) pour tous les modes de vibration de la structure. Introduisons la notation suivante : $\Phi D = \text{mode}$ à Φ diamètre pour désigner les différents modes de la structure cyclique.

Pour la réponse à une excitation ponctuelle fig.3.66, chaque couleur sur le graphique désigne la réponse absolue d'une aube parmi les 13 aubes du système. Il existe 7 modes de résonance pour le système considéré compte tenu des modes à diamètres nodaux possibles. En effet, si $nddl$ représente le nombre d'aubes du système, le nombre de modes est alors égal à $\frac{(nddl+1)}{2} = 7$ dans notre cas.

Les fréquences associées aux modes du système accordé sont listées dans le tableau 3.2.

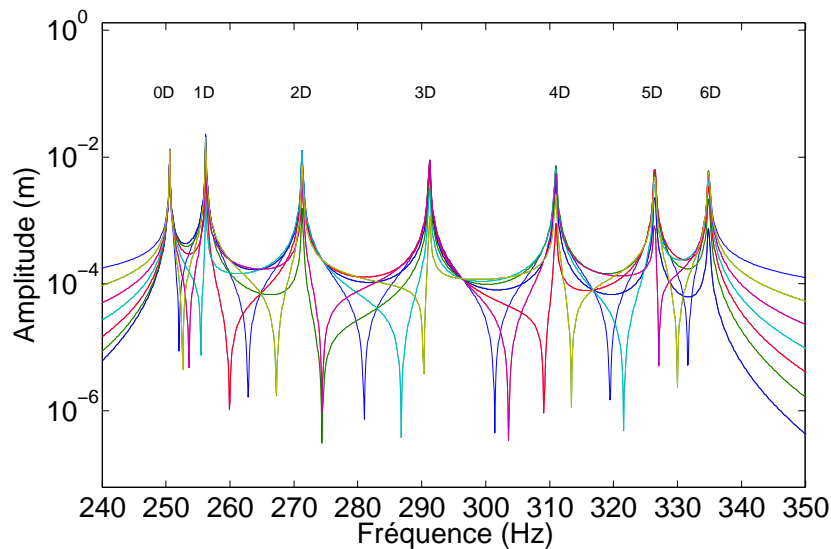


FIGURE 3.66 – Réponse des 13 aubes à une excitation ponctuelle accordée sur l'aube 1 en état quasi stick

Mode	Fréquence (Hz)
0D	250.6
1D	256.2
2D	271.3
3D	291.2
4D	310.9
5D	326.5
6D	334.9

TABLEAU 3.2 – Fréquences propres des modes à n diamètres du système à géométrie cyclique considéré

Le cas d'une excitation de type ordre moteur en présence d'un contact quasi stick (quasi bloqué) est illustré fig.3.67, 3.68 et 3.69 avec les mêmes paramètres que précédemment. Sur ces figures sont représentées simultanément la réponse à l'excitation de type ordre moteur (courbe en bleu), et son homologue obtenu pour une excitation ponctuelle (courbe en rouge). On confirme que l'excitation de type ordre moteur ne permet pas d'exciter tous les modes de la structure, comme dans le cas d'une excitation ponctuelle.

Les fig.3.70 et 3.71 illustrent la réponse fréquentielle à deux excitations ordre moteur $H = 3$ et $H = 6$ pour différentes forces normales. Quand on augmente l'ordre de l'excitation moteur H , les états de contacts sont de plus en plus bloqués pour des valeurs identiques de charge normale. Par exemple pour une valeur donnée de $F_n = 50$ N, l'état du contact pour l'excitation $H = 3$ est quasi slip, alors que la même force normale dans le cas de l'excitation $H = 6$ donne une réponse avec un état de contact stick/slip. Ce type de comportement peut être expliqué en analysant le nombre de frotteurs qui doivent changer d'état. Dans le cas $H = 3$, à chaque ins-

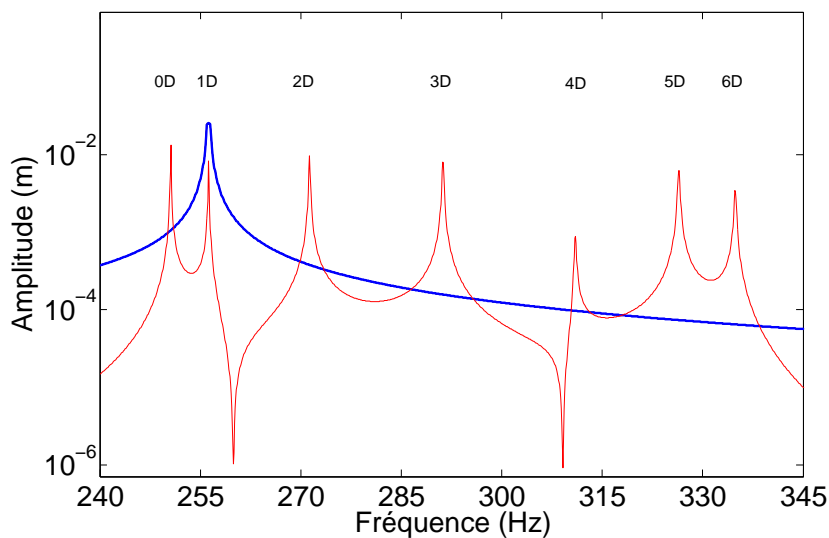


FIGURE 3.67 – Réponse des 13 aubes avec $H = 1$ et excitation ponctuelle accordée sur l'aube 1 en état quasi stick

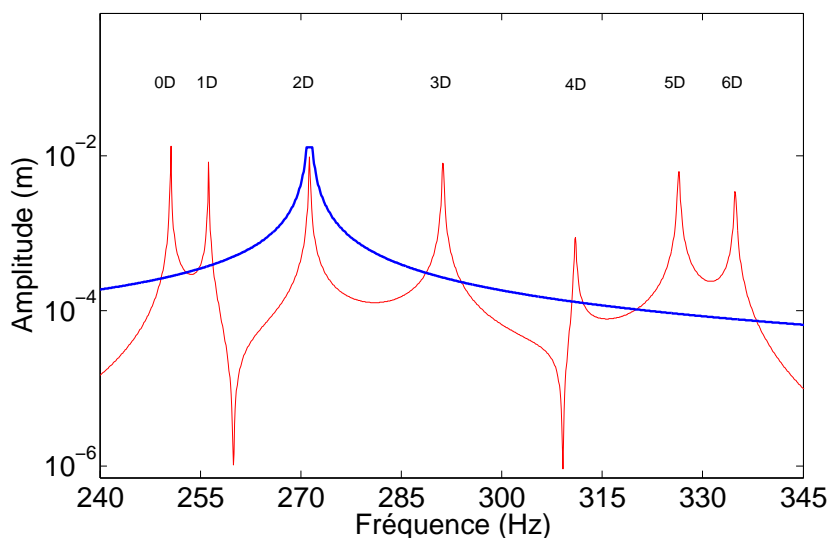


FIGURE 3.68 – Réponse des 13 aubes avec $H = 2$ et excitation ponctuelle accordée sur l'aube 1 en état quasi stick

tant, seuls les frotteurs aux abords des 3 lignes nodales présentent un état stick/slip alors que les autres sont complètement bloqués (aucun mouvement relatif significatif entre eux n'étant présent). Pour $H = 3$, les frotteurs concernés par ce changement d'état sont donc au nombre de 6. Quand le cas $H = 6$ est envisagé, au même instant, 12 frotteurs sur les 13 au total, sont en condition de stick/slip. La force nécessaire pour faire glisser 12 frotteurs au lieu de 6, doit donc augmenter. Puisque la force d'excitation F_{ex} est constante, pour obtenir le même état de contact, par exemple glissant, il est indispensable que la force normale diminue. Dans la suite une étude paramétrique est menée afin de connaître l'influence des différents paramètres du contact sur la réponse du système cyclique considéré.

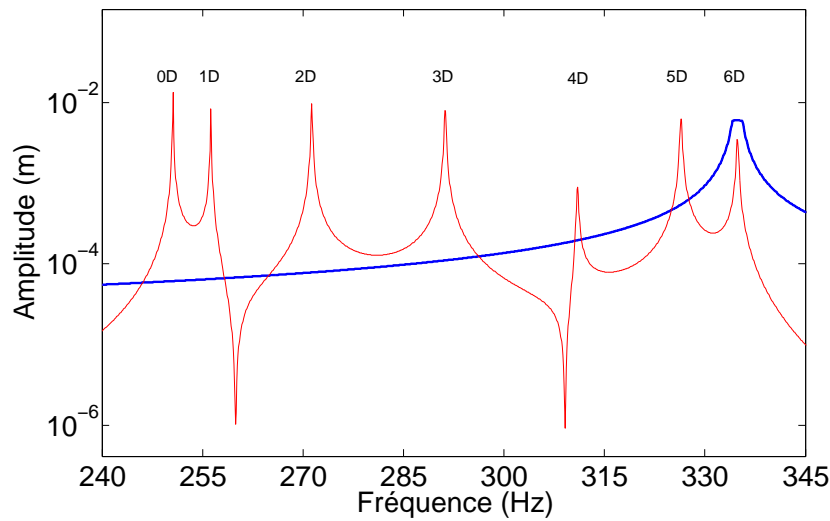


FIGURE 3.69 – Réponse des 13 aubes avec $H = 6$ et excitation ponctuelle accordée sur l'aube 1 en état quasi stick

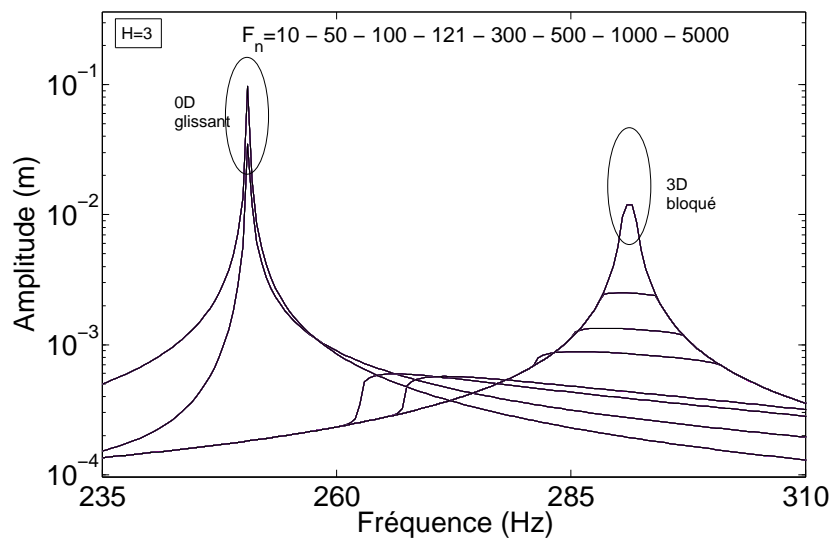


FIGURE 3.70 – Réponse des 13 aubes à une excitation ordre moteur $H = 3$ pour différentes valeurs de force normale

3.5.3 Etude paramétrique déterministe du système accordé à treize degrés de liberté

Le caractère imprévisible de la réponse, pour une excitation connue au préalable, nous amène à appliquer des études d'incertitudes sur les variables aléatoires provoquant ce désaccordage. Avec ces méthodes, il devient possible d'extraire une enveloppe de la réponse dans laquelle toutes les réponses issues des désaccordages par les paramètres aléatoires sont incluses. Bien entendu, cette enveloppe dépend des valeurs supposées a priori pour les moments des variables stochastiques en question. L'objectif ici est de montrer l'influence des caractéristiques des trois paramètres de contact sur les réponses en amplitude et en fréquence des systèmes liaisonnés par frotteurs. C'est une étude préparatoire à l'étude de Monte Carlo

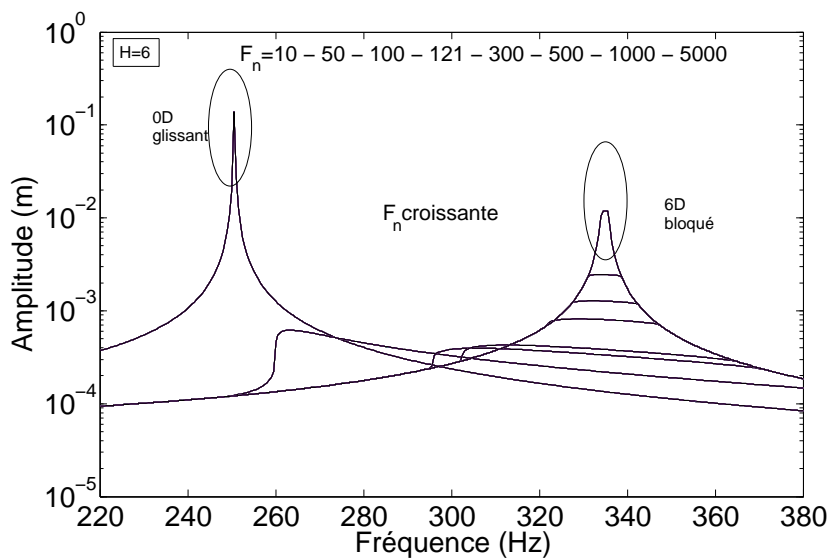


FIGURE 3.71 – Réponse des 13 aubes à une excitation ordre moteur $H = 6$ pour différentes valeurs de force normale

qui va être menée dans les paragraphes à suivre. L'influence de chacun des 3 paramètres est évaluée séparément.

3.5.3.1 Influence de la raideur de contact kd_i

La raideur de contact kd_i prend les valeurs suivantes :

$$kd_i = 0.5e^5 - 1e^5 - 1.7e^5 - 2.7e^5 - 3.7e^5 \text{ N/m} \quad i = 1 : 13$$

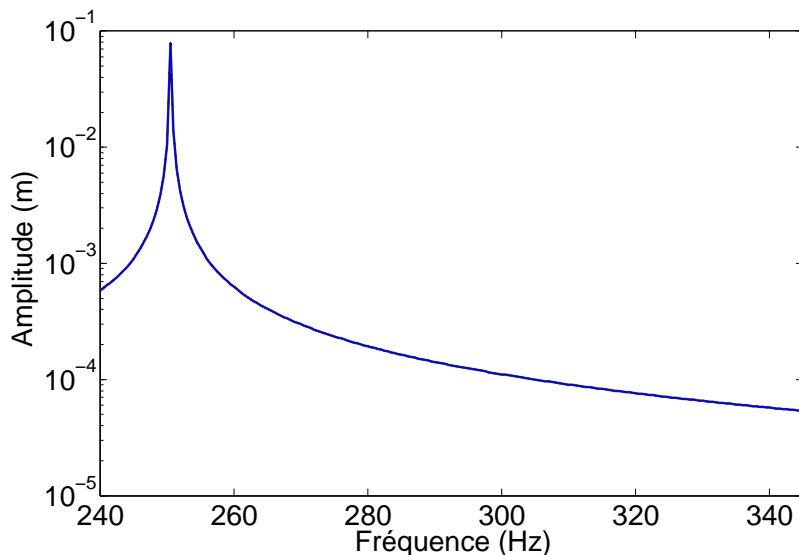


FIGURE 3.72 – Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 0$ et différentes raideurs de contact

Les fig.3.72, 3.73 et 3.74 montrent l'évolution de la réponse non linéaire de chacun des ddl du système en fonction de l'excitation par des ordres moteurs respectivement $H = 0, 1$ et 4 . Comme mentionné préalablement,

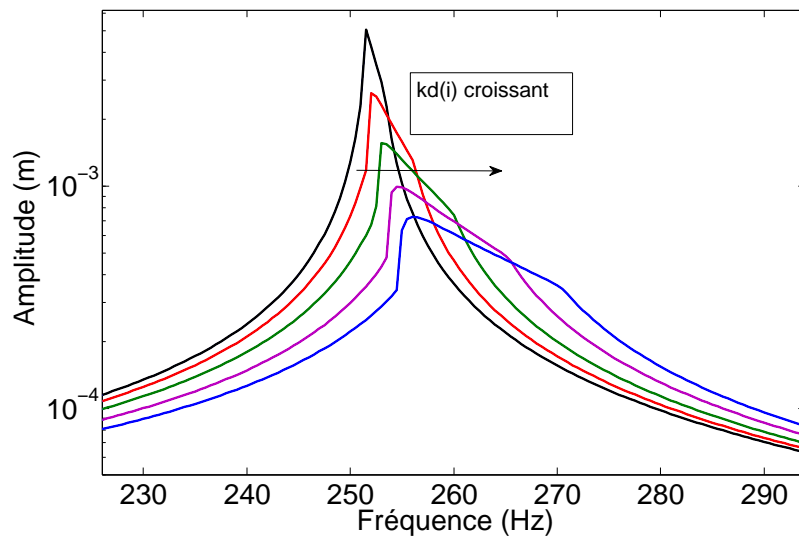


FIGURE 3.73 – Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 1$ et différentes raideurs de contact

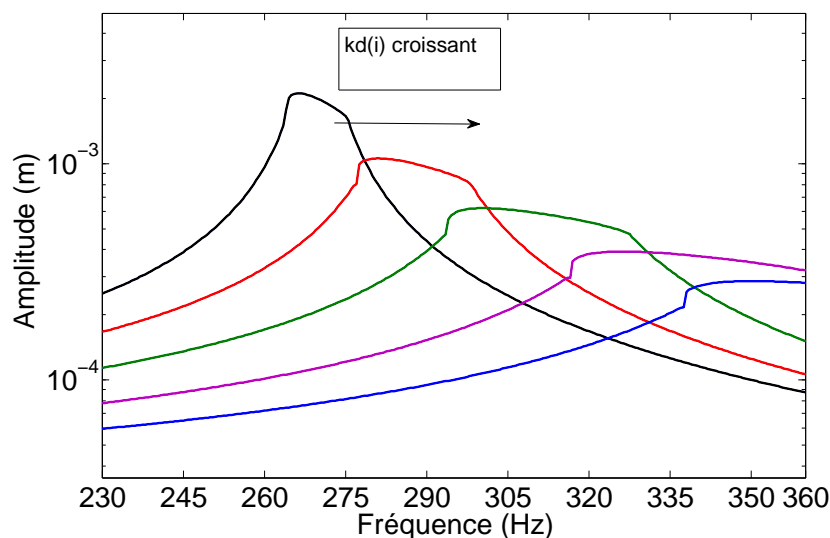


FIGURE 3.74 – Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 4$ et différentes raideurs de contact

les 13 courbes se superposent pour une excitation ordre moteur pour un système accordé, et ainsi une seule couleur apparaît pour l'ensemble. Pour $H = 0$, la variation de la raideur conduit à des courbes parfaitement superposées les unes sur les autres pour chaque cas. Ceci indique que la valeur de la raideur tangentielle kd_i n'a aucune influence sur la première fréquence de résonance $0D$ obtenue pour une excitation $H = 0$, située à 250.5Hz, ainsi que sur l'amplitude de son mode associé. En effet ce mode caractérise la vibration de toutes les aubes en phase et par conséquent toutes les aubes possèdent le même déplacement absolu (le déplacement relatif entre elles devient nul).

Les fig.3.73 et 3.74 montrent respectivement pour chacun des deux modes

1D et 4D excités une diminution de l'amplitude de la réponse et un glissement à droite des fréquences de résonance, avec l'augmentation de la raideur du contact. Le contact passe d'un état à majorité slip, à un contact stick/slip, tendant vers l'aplatissement des pics. Donc la raideur possède une double influence : sur l'amplitude de la réponse et sur les valeurs des fréquences de résonance qui sont repoussées. Logiquement, l'augmentation des raideurs kd_i rejette la résonance des modes à des fréquences plus élevées.

3.5.3.2 Influence du coefficient du frottement μ_i

Le coefficient de frottement μ varie entre 0.2 et 0.5. L'effet du coefficient de frottement μ est très facilement identifiable.

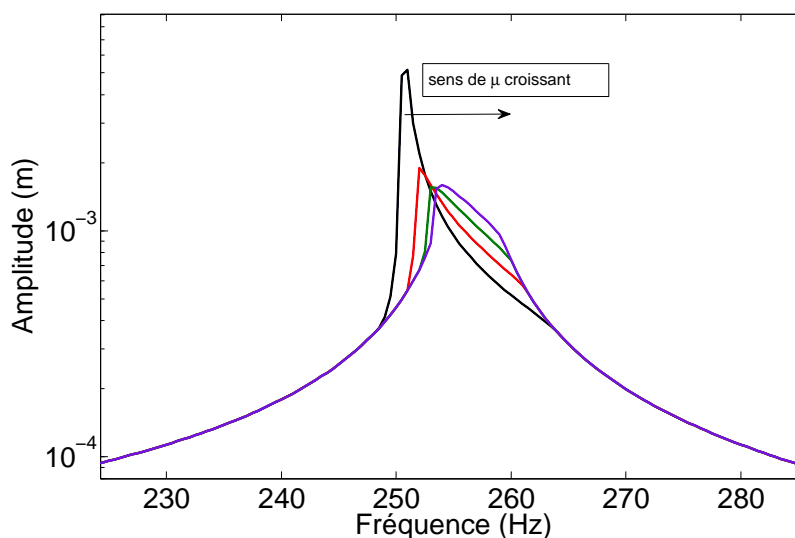


FIGURE 3.75 – Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 1$ et différents coefficients de frottement

Alors que les fréquences de résonance dans les états de stick et de slip sont inchangées par la variation de μ , l'augmentation du coefficient de frottement fait passer le système d'un état à majorité slip vers un état à majorité stick en passant par un état optimal de stick slip. De ce fait, μ n'influe que sur l'amplitude de la réponse du système, mais n'a aucune influence sur la fréquence de résonance. Les fig.3.75 et 3.76 montrent clairement que plus le coefficient est faible, plus la part de slip est importante (le seuil de glissement $\mu.F_n$ diminue si μ diminue). Ceci a donc pour effet complémentaire de diminuer la valeur des amplitudes aux fréquences de résonance (augmentation de la stabilité du système).

3.5.3.3 Influence de la force normale au contact F_{n_i}

Les cas suivants sont étudiés.

Pour $H = 4$ $F_n = 100 - 150 - 200 - 300 - 1000$

Pour $H = 1$ $F_n = 10 - 20 - 30 - 50 - 100 - 150 - 200 - 300 - 310 - 500$

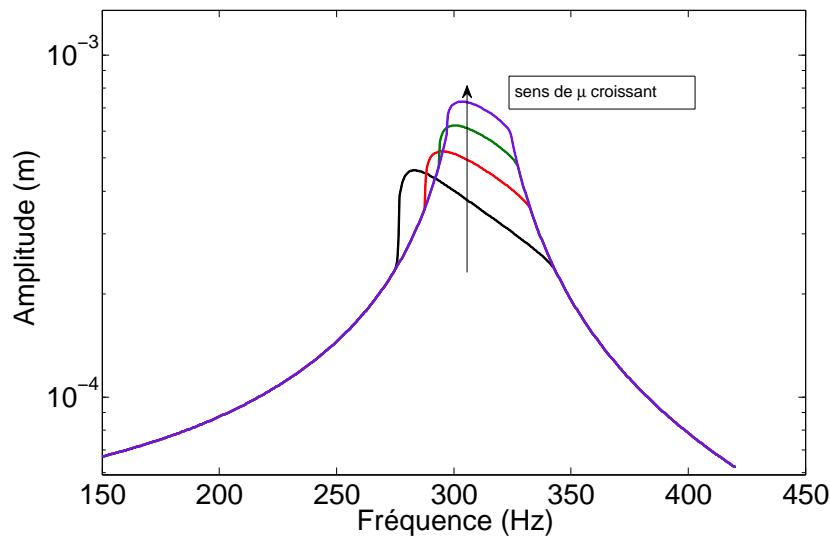


FIGURE 3.76 – Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 4$ et différents coefficients de frottement

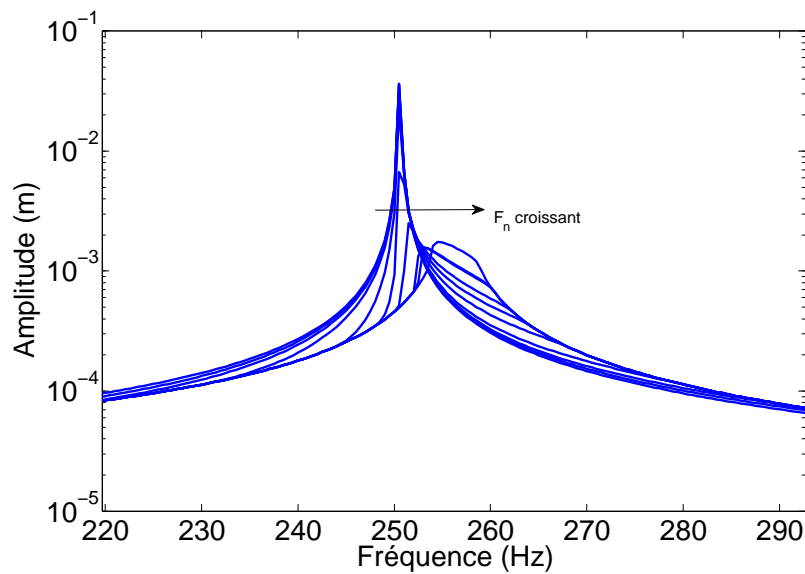


FIGURE 3.77 – Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 1$ et différentes forces normales du contact

Les fig.3.77 et 3.78 confirment la similitude de l'influence de F_n et de μ sur le comportement du système. Si F_n augmente, la part de stick/slip diminue et les amplitudes maximales augmentent, tandis que les fréquences de résonance restent insensibles aux variations de F_n . Remarquons qu'il est tout à fait logique que les paramètres μ et F_n aient la même influence sur le glissement et les amplitudes puisque le produit $\mu.F_n$ définit le seuil de glissement. Ainsi, plus ce produit est élevé, plus le système reste bloqué, avec des amplitudes maximales importantes ; inversement, si ce produit diminue le glissement devient plus important, faisant chuter le niveau d'amplitudes maximales.

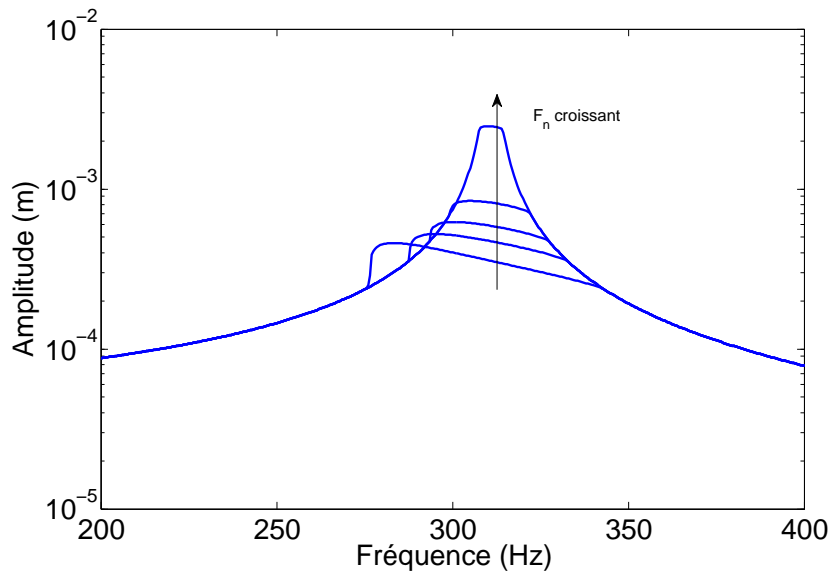


FIGURE 3.78 – Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 4$ et différentes forces normales du contact

CONCLUSION

L'influence des paramètres μ et F_n conditionne l'augmentation ou la diminution des amplitudes, tout en restant à l'intérieur de l'enveloppe des deux courbes déterminées par la fréquence de stick total et celle du slip total. Ces deux courbes des états quasi linéaires ne varient pas puisque la raideur du système ne varie pas. La variation de la raideur du contact reste comprise entre la raideur du système k pour l'état slip et la sommation de la raideur du système avec la raideur tangentielle du contact $kd + k$ pour l'état stick. Par contre, la variation de la raideur du contact conduit à un étalement de la courbe, de part et d'autre des valeurs initiales de fréquences de résonance, ce qui implique un intervalle de fréquence non constant. Cela nous amène à définir l'intervalle de variation de kd avec précaution. En se basant sur cette étude paramétrique, le paragraphe suivant porte sur une étude du système à 13 aubes désaccordées à partir des caractéristiques du contact frottant entre nageoires.

3.5.4 Modélisation aléatoire par Monte Carlo à un système à treize aubes

Dans ce paragraphe, une approche numérique est mise en œuvre afin d’analyser l’influence du désaccordage des seuls paramètres de contact quand la structure à géométrie cyclique en présence de frottement sec est considérée. L’excitation du système désaccordé est effectuée avec une excitation d’ordre moteur $H = 3$. Pour cet ordre moteur, la valeur de la force normale de contact qui induit l’état optimum stick/slip pour le mode 3D dans le cas accordé est $F_n = 121$ N (fig.3.79).

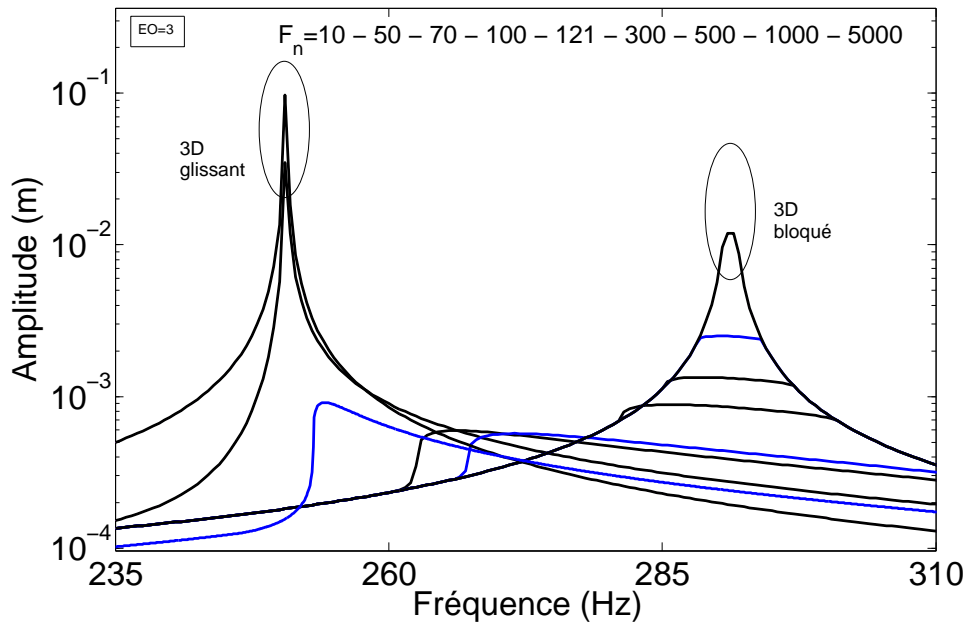


FIGURE 3.79 – Amplitudes de vibrations dans le cas accordé pour différentes valeurs de la charge normale : excitation ordre moteur $H = 3$

Chaque domaine stick/slip, stick/slip à majorité slip, stick/slip à majorité stick, sera donc représenté par les valeurs de F_n égales à 121 N, 70 N et 1000 N.

Suivant les différentes variations de paramètres, le nombre de tirages de MC pour chaque aube sera choisi en conséquence. Les paramètres aléatoires sont la raideur de contact kd_i et la force normale de contact F_{n_i} de l’aube i . Le coefficient de variation du paramètre kd_i de l’aube i est de 20% et le coefficient de variation de F_{n_i} est 6.66%. L’influence du coefficient de frottement μ étant semblable à celle de F_n , μ n’est pas considéré comme aléatoire et est pris égal à 0.4.

3.5.5 Incertitudes sur kd

3.5.5.1 Contact stick/slip

La moyenne pour kd est choisie à $1.7e5$ N/m et le coefficient de variation δ_{kd} est de 20%. Pour chacune des 13 aubes du système on extrait des 9000 tirages aléatoires de MC la moyenne ainsi que les enveloppes maximales

et minimales de tous les tirages. Ces 9000 tirages sont suffisants pour la convergence des résultats. La fig.3.80 donne les réponses (amplitude) pour un désaccordage de kd de $\delta_{kd} = 20\%$ dans le cas d'un contact optimum stick/slip pour $F_n = 121$ N et un ordre moteur $H = 3$. Cette figure donne également, pour référence, l'amplitude du système accordé pour une excitation ordre moteur $H = 3$. La moyenne des tirages donne un résultat quasi identique à celui obtenu sur le système accordé. Sur l'enveloppe maximale, on observe un pic à 253.5 Hz correspondant à la configuration vibratoire la plus défavorable, qui implique l'amplitude la plus élevée de toutes les réponses des tirages considérés. Cette configuration correspond donc au facteur d'amplification le plus élevé et on se situera par la suite sur cette fréquence de 253.5 Hz. On définit le facteur d'amplification maximale $\beta(\omega)$ en fonction de la fréquence par le rapport entre l'amplitude maximale de la réponse en fonction de la fréquence et l'amplitude maximale de la réponse accordée pour l'ordre moteur considéré, sur toutes les fréquences :

$$\beta(\omega) = \frac{\text{Enveloppe maximale de l'amplitude}(\omega)}{\max_{\omega}(\text{amplitude accordée})}$$

La fig.3.81 présente l'évolution de ce facteur. On retrouve bien le pic à 253.5 Hz correspondant à la configuration la plus défavorable pour laquelle on peut voir sur les fig.3.83 et 3.84 l'allure de la densité de probabilité via les tirages de MC.

Une étude sur des possibles formes analytiques de la densité de probabilité du facteur d'amplification est affichée en annexe A.5. A cette fréquence le facteur d'amplification maximale montre que la localisation de la vibration la plus forte se situe sur l'aube 11 (3.85). L'aube 12 a aussi une forte vibration. Les valeurs du paramètre aléatoire kd_i sur chaque aube i données dans le tableau 3.3 correspondent au jeu de valeurs qui ont provoqué la survenue de la configuration la plus défavorable (la réponse ayant le facteur d'amplification le plus élevé) donnée par la fig.3.86.

Aube	1	2	3	4	5	6	7
$kd_i \times 10^5$ N/m	1,518	1,533	1,782	1,194	2,081	1,492	2,050
Aube	8	9	10	11	12	13	
$kd_i \times 10^5$ N/m	1,819	1,942	0,2451	2,030	2,350	1,650	

TABLEAU 3.3 – Valeurs du paramètre aléatoire kd_i correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube i , $i = 1 \dots 13$

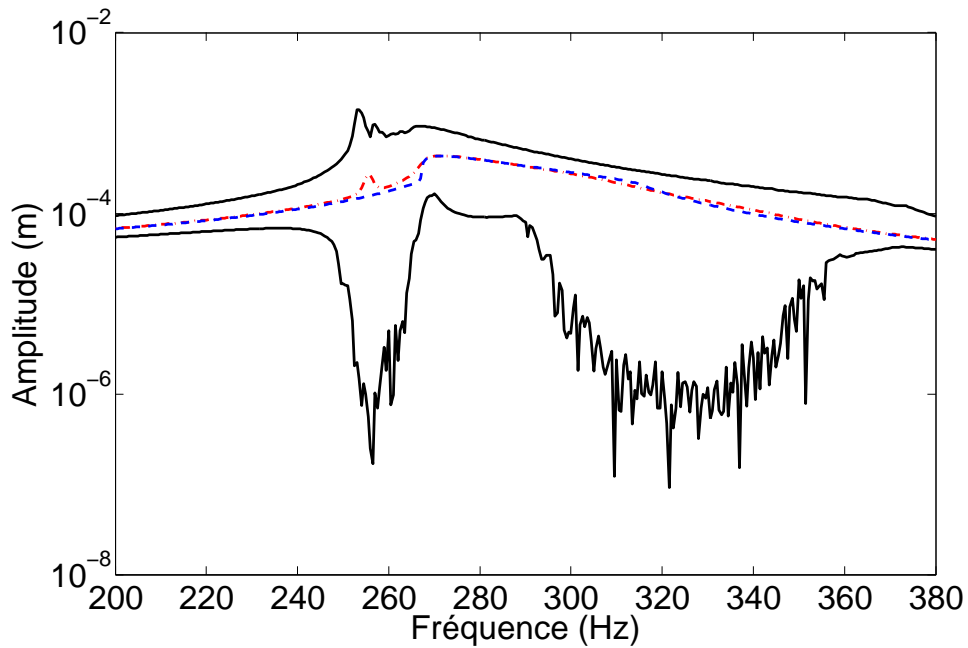


FIGURE 3.80 – Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{kd} = 20\%$ dans le domaine stick/slip en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$

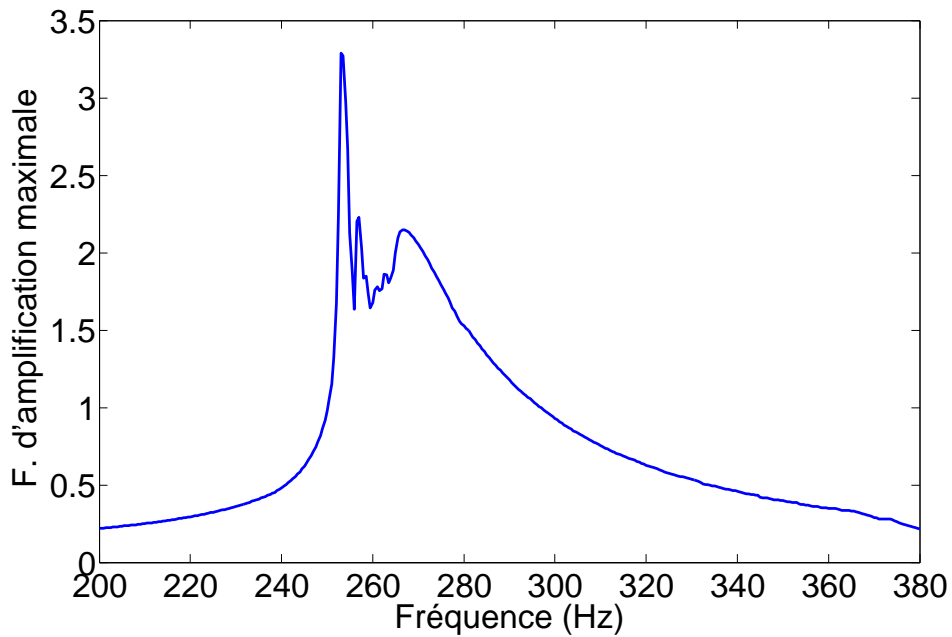


FIGURE 3.81 – Facteur d'amplification de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de kd avec $\delta_{kd} = 20\%$ et contact stick/slip, $F_n = 121N$ et $H = 3$

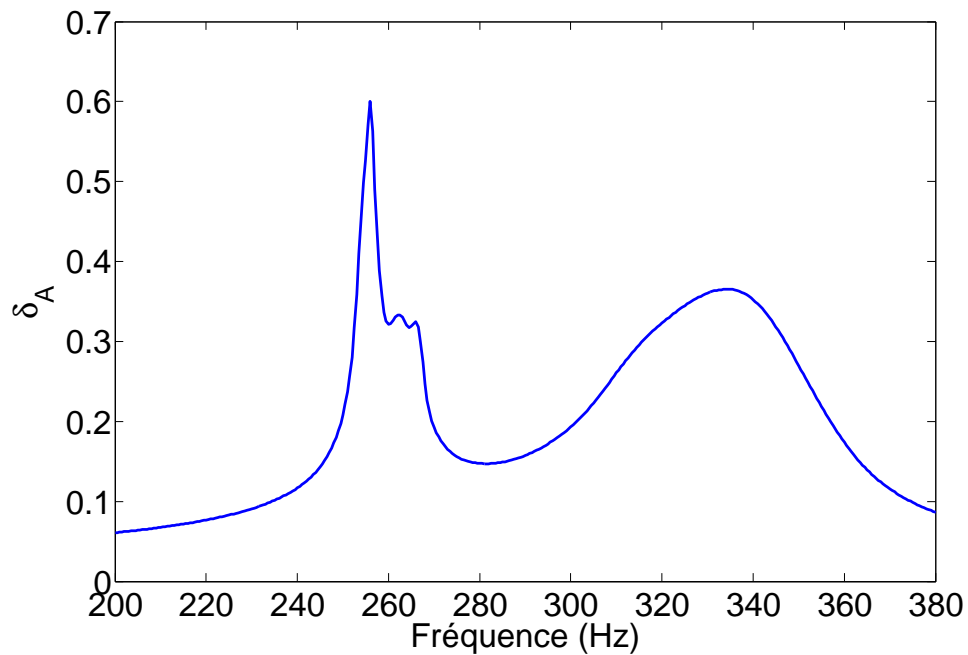


FIGURE 3.82 – Coefficient de variation δ_A de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de kd avec $\delta_{kd} = 20\%$ et un contact stick/slip, $F_n = 121N$ et $H = 3$

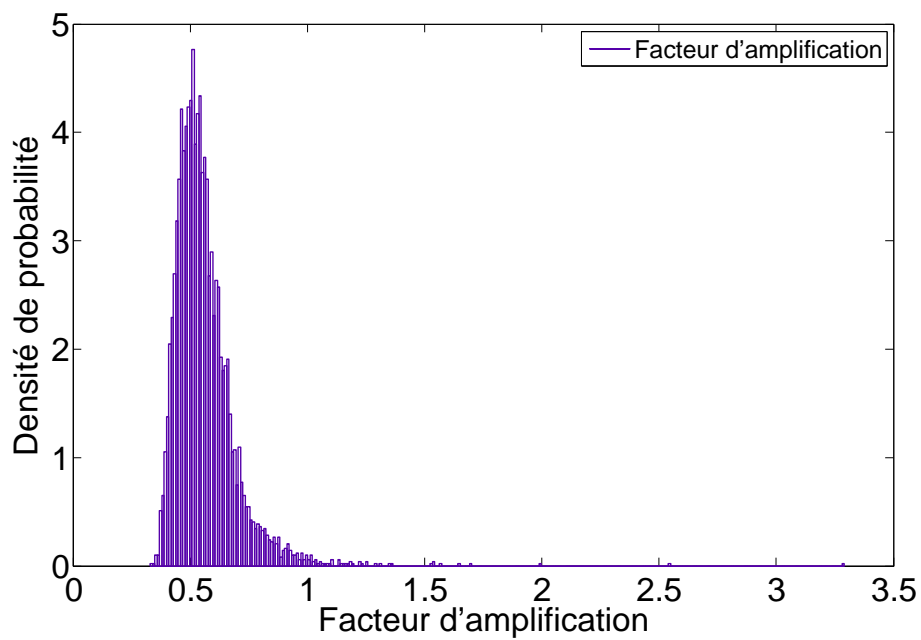


FIGURE 3.83 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

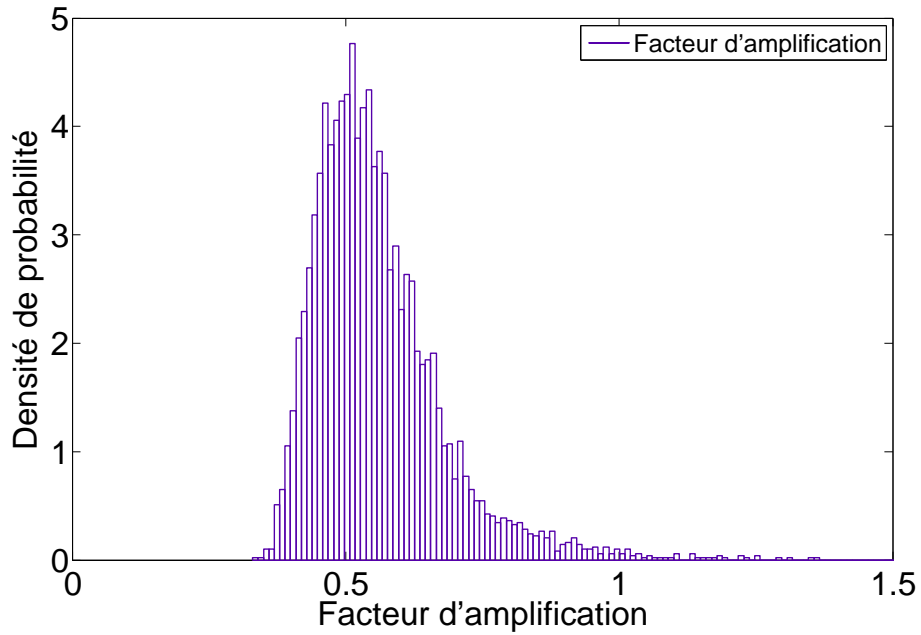


FIGURE 3.84 – Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

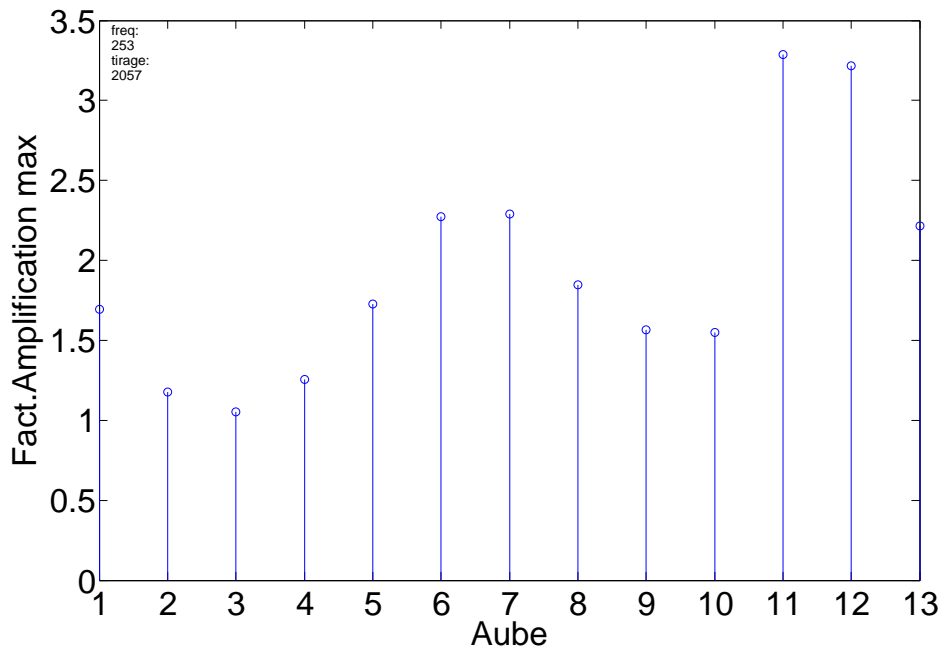


FIGURE 3.85 – Repartition des coefficients d'amplifications sur les 13 aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable pour un contact stick/slip

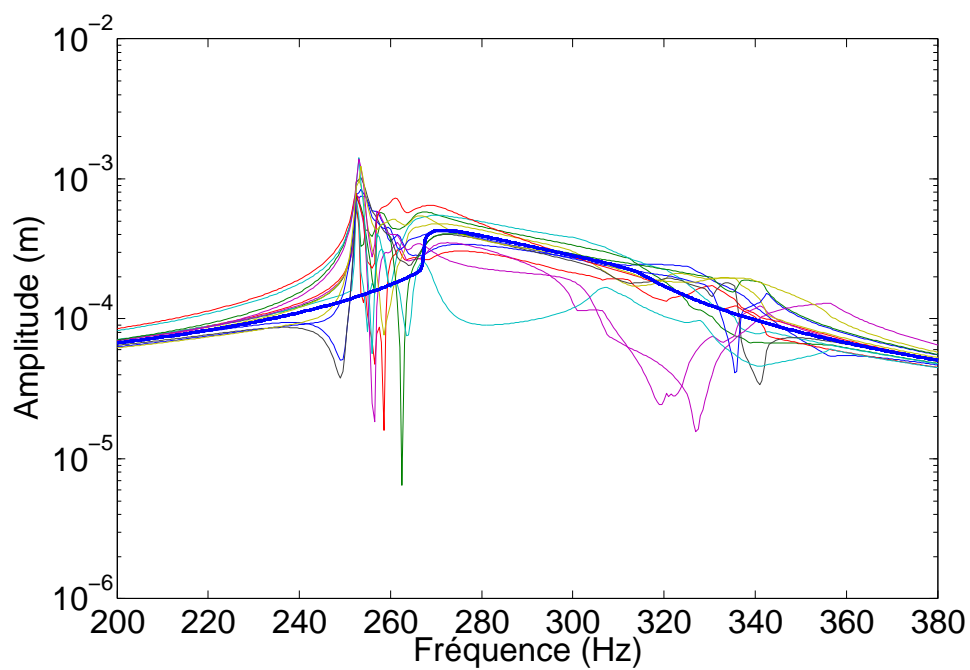


FIGURE 3.86 – Réponses des 13 aubes pour le tirage le plus défavorable 2057

3.5.5.2 Contact stick/slip à majorité slip

La valeur de la force normale F_n choisie pour représenter le contact stick/slip à majorité slip vaut $F_n = 70$ N. Les fig.3.87 et 3.89 montrent la moyenne de la réponse désaccordée aléatoire ainsi que la dispersion autour de celle ci par son enveloppe et son coefficient de variation.

Deux dispersions importantes se situent au niveau des fréquences 251 Hz et 335 Hz ce qui amène une plus grande incertitude sur la connaissance de la réponse quand kd varie à ces deux fréquences. La fréquence la plus défavorable est donnée à la fig.3.87 par l'enveloppe supérieure plus précisément à la fig.3.88 par le facteur d'amplification maximal ; sa valeur est de 253 Hz, et la réponse associée est celle de l'aube 8 (fig.3.91) pour le tirage 5057. Les réponses des 13 aubes de raideur kd (tableau 3.4) associées à ce tirage sont présentées fig.3.92. Ce sont les aubes 8 et 10 (fig.3.91) qui vibrent le plus.

La densité de probabilité (fig.3.90) construite pour la fréquence la plus défavorable, est de forme moins concentrée autour d'une seule valeur et plus éparpillée sur plusieurs valeurs de facteur d'amplification : On a une densité de probabilité de 1 pour de nombreuses valeurs du facteur comprise dans $[[0.35;0.6], 0.95]$. Elle est de forme moins concentrée et de plus comporte deux pics : le premier pour un coefficient d'amplification de 0.5, le deuxième pour un coefficient d'amplification de 1. Ces deux pics peuvent s'expliquer par l'influence des deux états : stick/slip (fig.3.83et 3.84) pour le pic à 0.5 ; contact à majorité slip (fig.A.13 étude dans l'annexe) pour le pic à 1. Une étude sur des possibles explications de la forme de la densité de probabilité du facteur d'amplification est affichée en annexe A.6.

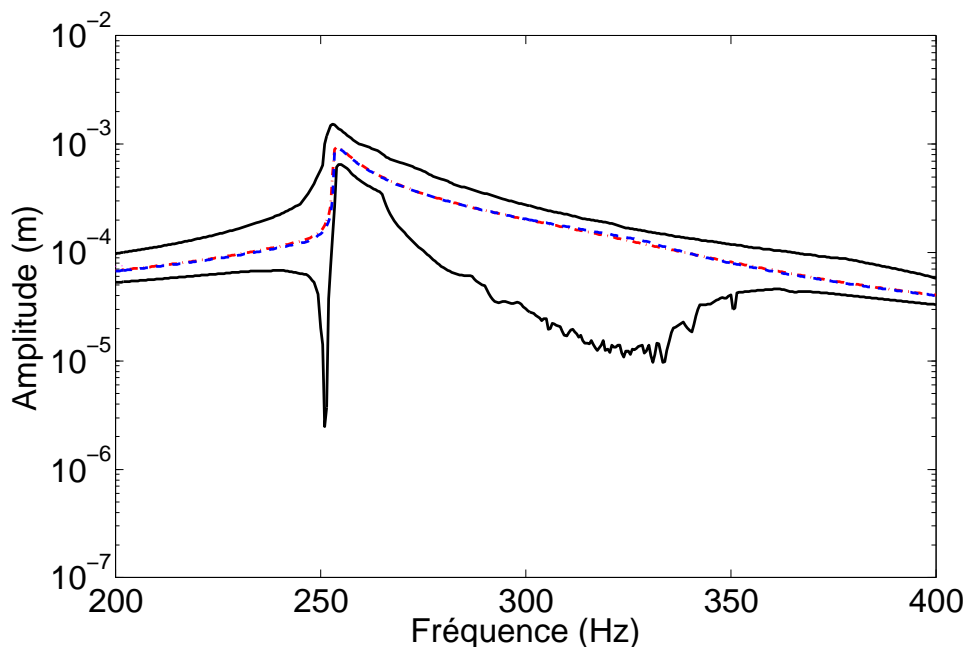


FIGURE 3.87 – Moyenne (- . rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{kd} = 20\%$ dans le domaine stick/slip à majorité slip en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$

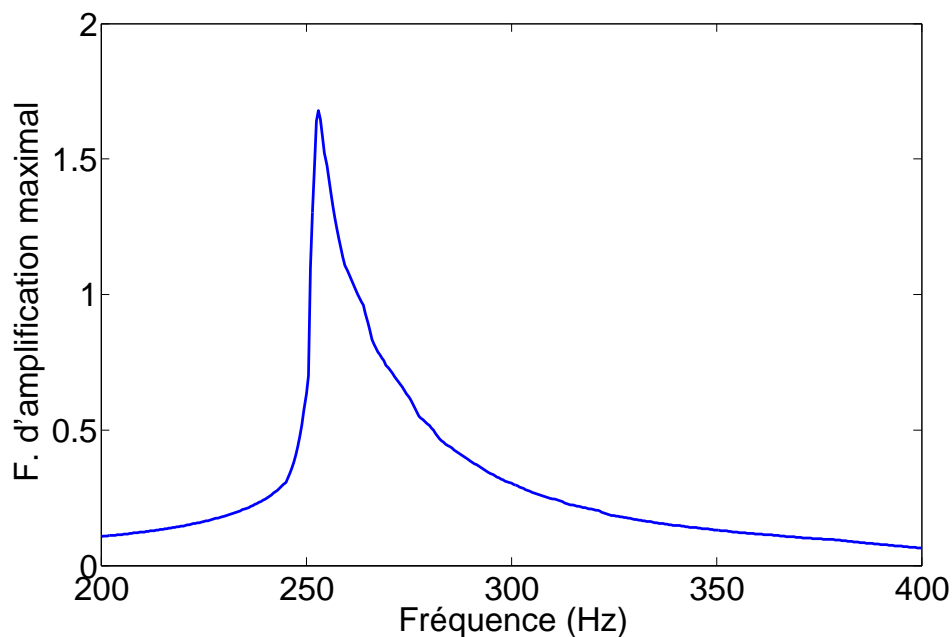


FIGURE 3.88 – Coefficient de variation δ_A de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de kd avec $\delta_{kd} = 20\%$ et un contact stick/slip, $F_n = 70$ N et $H = 3$

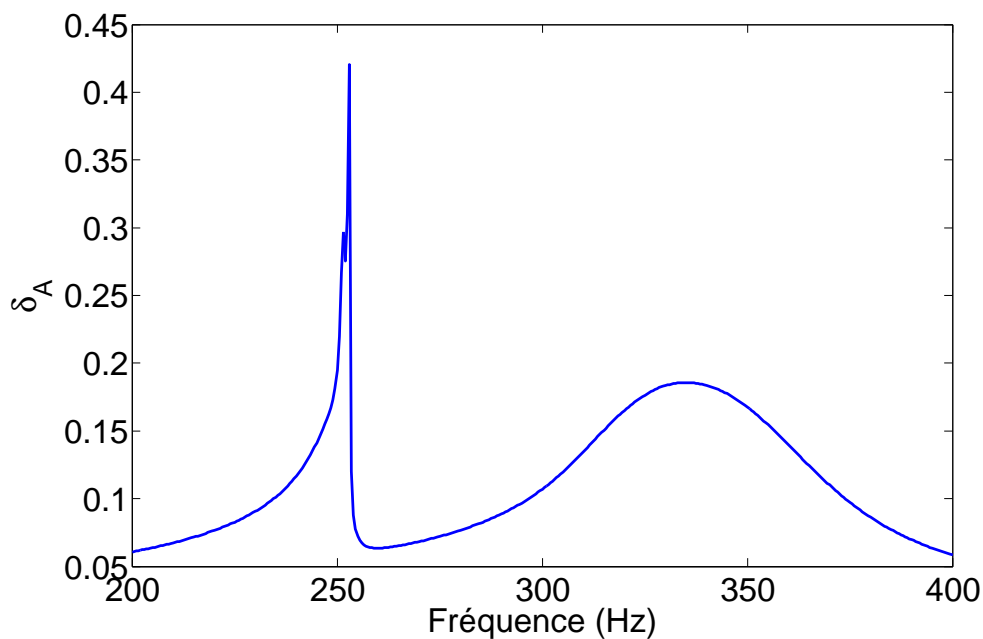


FIGURE 3.89 – Coefficient de variation de l'amplitude A δ_A pour les 13 aubes, désaccordage kd , $\delta_{kd} = 20\%$, contact stick/slip à majorité slip $F_n = 70$ N et $H = 3$

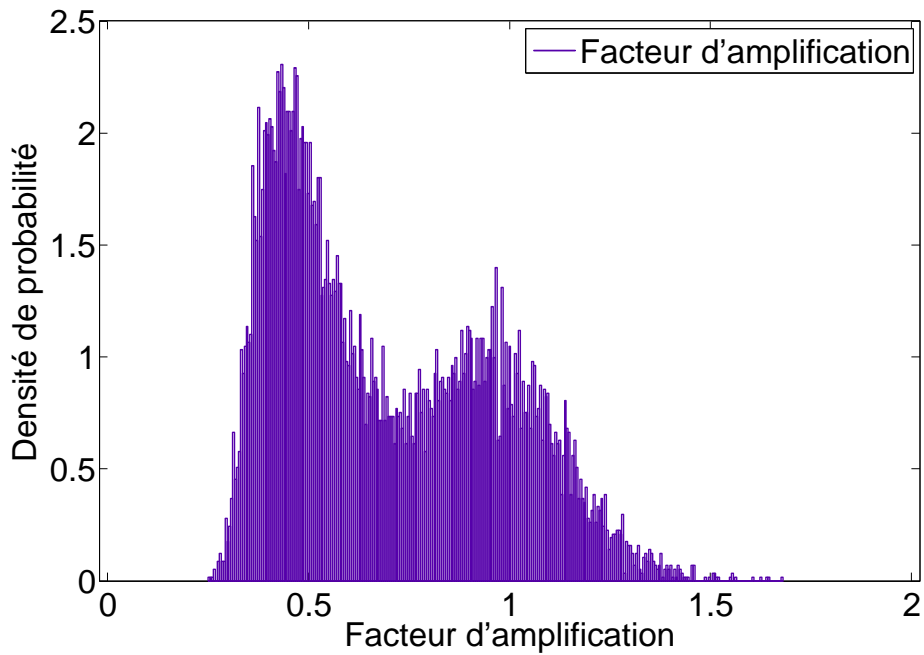


FIGURE 3.90 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

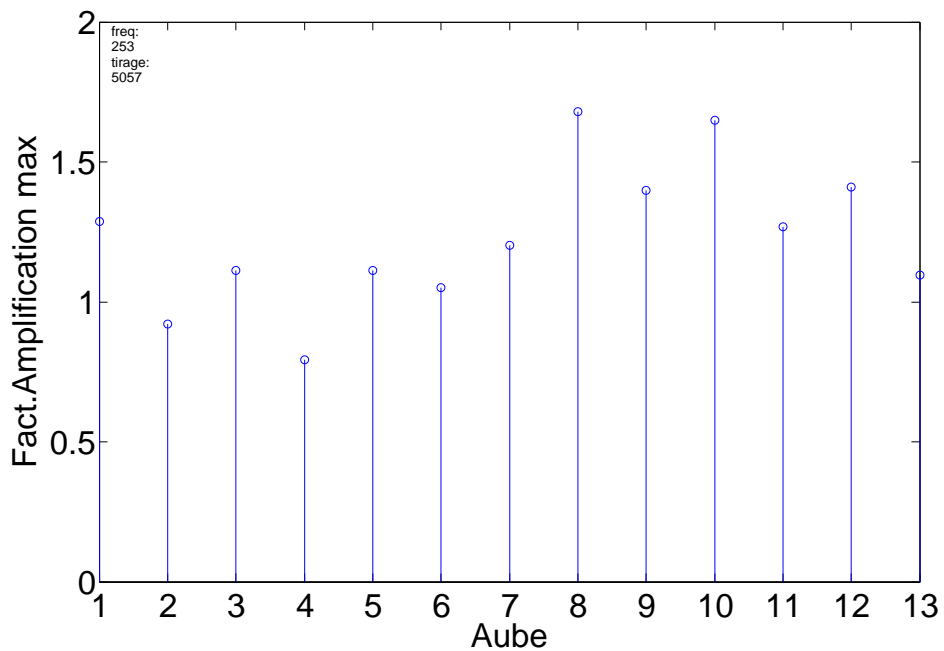


FIGURE 3.91 – Repartition des coefficients d'amplifications sur les aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable pour un contact stick/slip à majorité slip

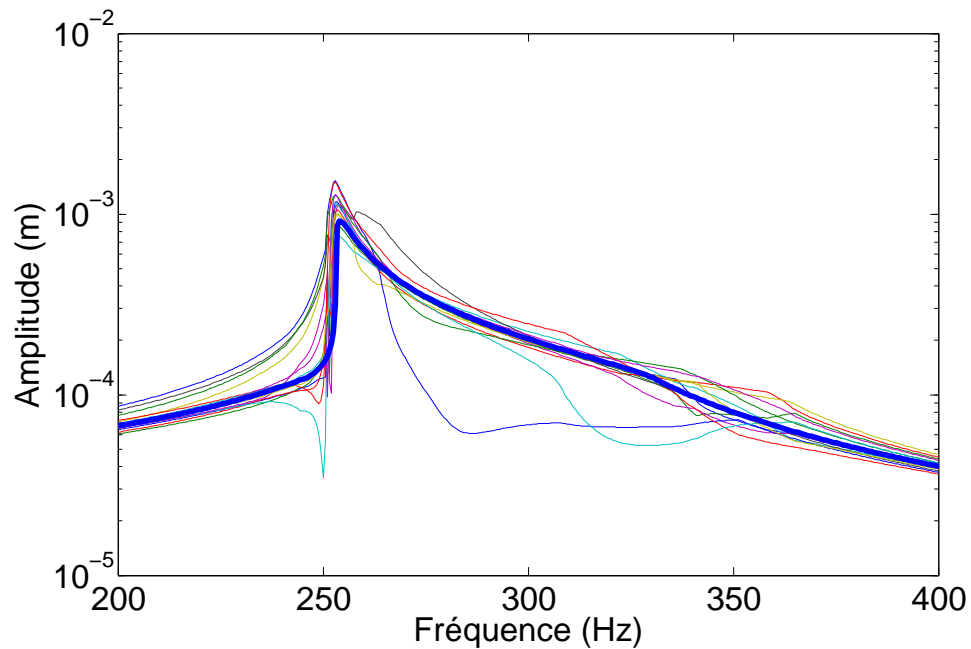


FIGURE 3.92 – Réponses des 13 aubes pour le tirage le plus défavorable 5057

Aube	1	2	3	4	5	6	7
$kd_i \times 10^5$ N/m	1,954	2,248	2,040	1,363	2,016	2,213	0,245
Aube	8	9	10	11	12	13	
$kd_i \times 10^5$ N/m	1,987	1,425	1,164	2,347	1,489	1,794	

TABLEAU 3.4 – Valeurs du paramètre aléatoire kd_i correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube i , $i = 1 \dots 13$

3.5.5.3 Contact stick/slip à majorité stick

La valeur de F_n est ici de 1000 N. La tendance moyenne (fig.3.93) de la réponse est vis à vis de l'excitation $H = 3$ met en évidence une réponse des modes 1D, 2D et bien évident 3D puis très légèrement au niveau des modes 4D à 6D. La forme de l'enveloppe supérieure (fig.3.93 et fig.3.94) est liée au décalage en fréquence des pics (pour des fréquences supérieures à 280 Hz) puisque kd varie. On aperçoit deux pics sur cette enveloppe aux fréquences 253 Hz et 270 Hz où les réponses des différents tirages sont concentrées, ce qui pourrait s'expliquer par une nature stick du premier pic (étroit) et mélangée stick/slip, stick du deuxième pic.

On remarque de plus dans ce domaine que la région délimitée par les enveloppes supérieures et inférieures est beaucoup plus importante que celle des autres domaines, ce qui met en évidence plus d'incertitudes sur la réponse. Ce phénomène provient de la variation de la réponse en fonction du kd dans le domaine stick/slip à majorité stick. La fréquence la plus défavorable (fig.3.94) de 254.5 Hz est légèrement plus élevée que celle dans les deux autres domaines et l'aube la plus sollicitée est la 9 (fig.3.96). Ici encore, plusieurs aubes sont également beaucoup sollicitées (aubes 1 à 4, 7 à 10). La fig.3.97 montre les réponses associées à ces aubes de raideur kd (tableau 3.5). La densité de probabilité (fig.3.98 et 3.99) est centrée par un facteur d'amplification faible (0.15) donc le système désaccordé sera globalement faiblement amplifié par rapport au système accordé. Une étude sur des possibles formes analytiques de la densité de probabilité du facteur d'amplification est affichée en annexe A.5.

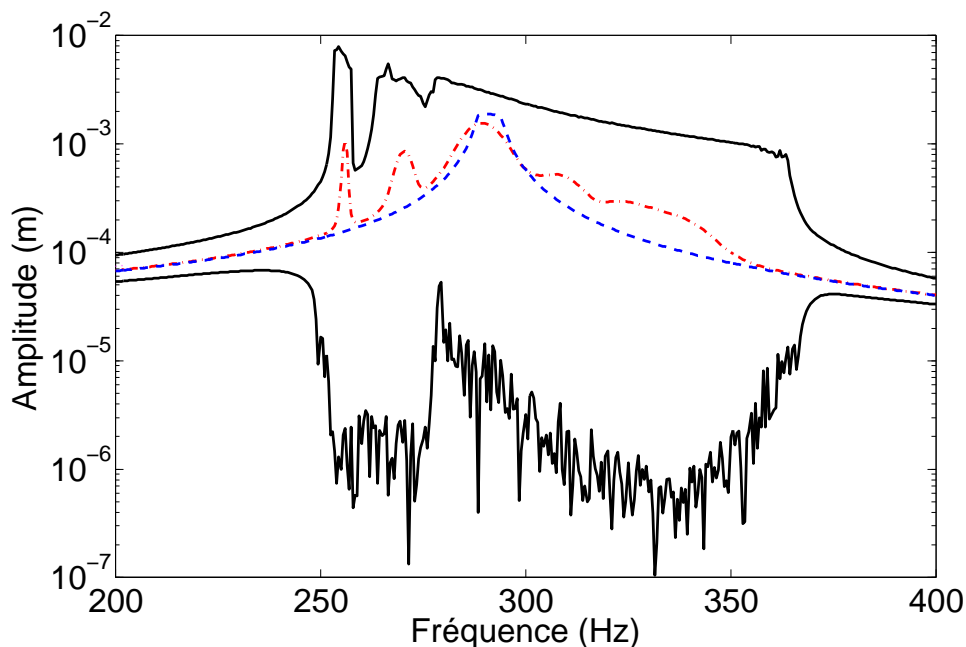


FIGURE 3.93 – Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{kd} = 20\%$ dans le domaine stick/slip à majorité stick en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$

Cette excitation avec le système désaccordé excite tous les modes du sys-

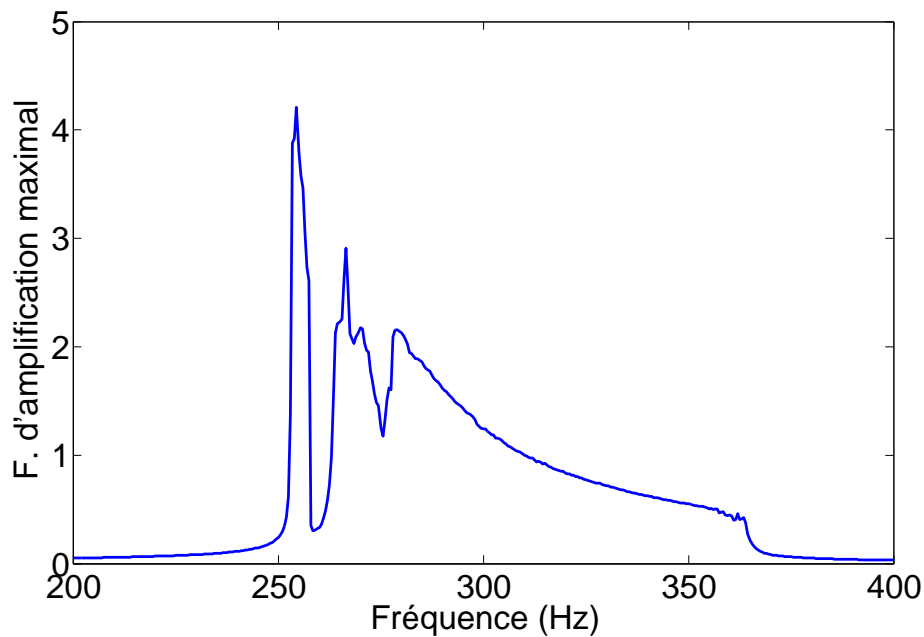


FIGURE 3.94 – Coefficient de variation δ_A de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de kd avec $\delta_{kd} = 20\%$ et un contact stick/slip à majorité stick, $F_n = 1000\text{ N}$ et $H = 3$

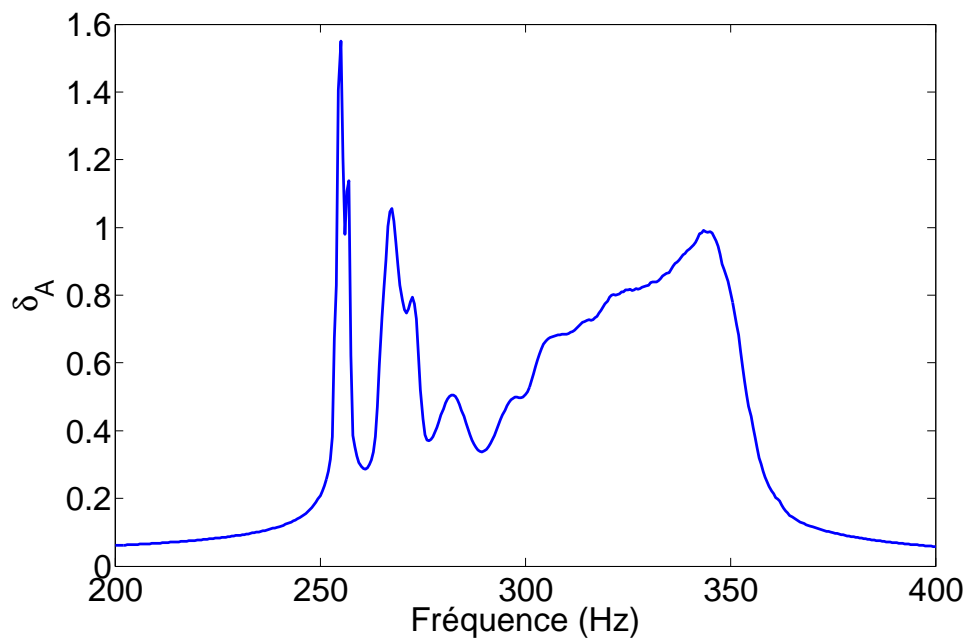


FIGURE 3.95 – Coefficient de variation de l'amplitude A δ_A pour les 13 aubes, désaccordage kd , $\delta_{kd} = 20\%$, contact stick/slip à majorité stick $F_n = 1000\text{ N}$ et $H = 3$

tème (fig.3.97). Les modes excités sont tous dédoublés à l'exception du mode $6D$, avec une variation de fréquence la plus élevée pour le mode $6D$. Le mode $1D$ est dans un état de contact quasi stick. Le mode $2D$ et dédoublé en deux modes dont l'un est en état stick, et l'autre stick/slip à

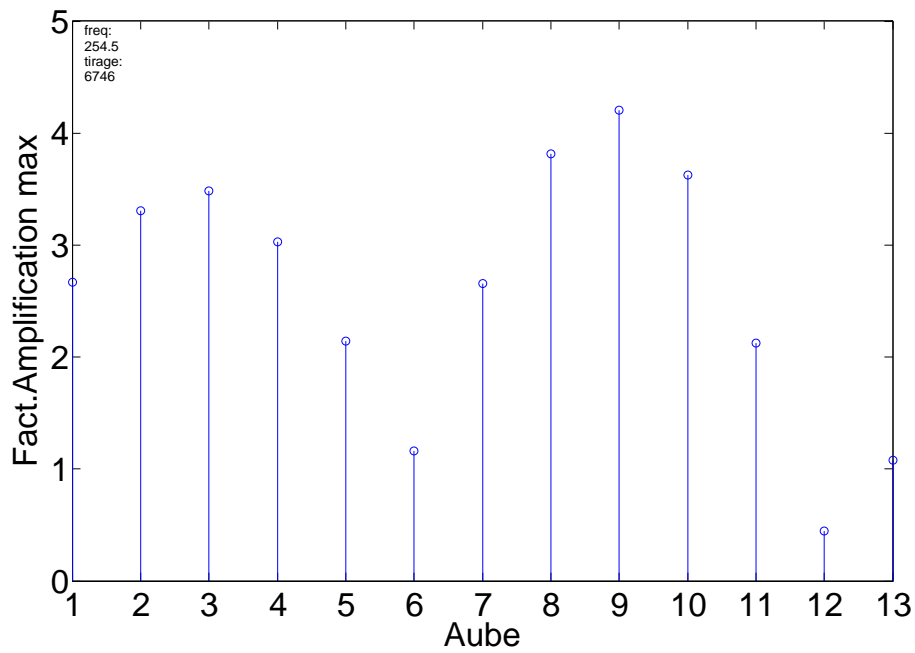


FIGURE 3.96 – Répartition des coefficients d’amplifications sur les aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable pour un contact stick/slip à majorité stick

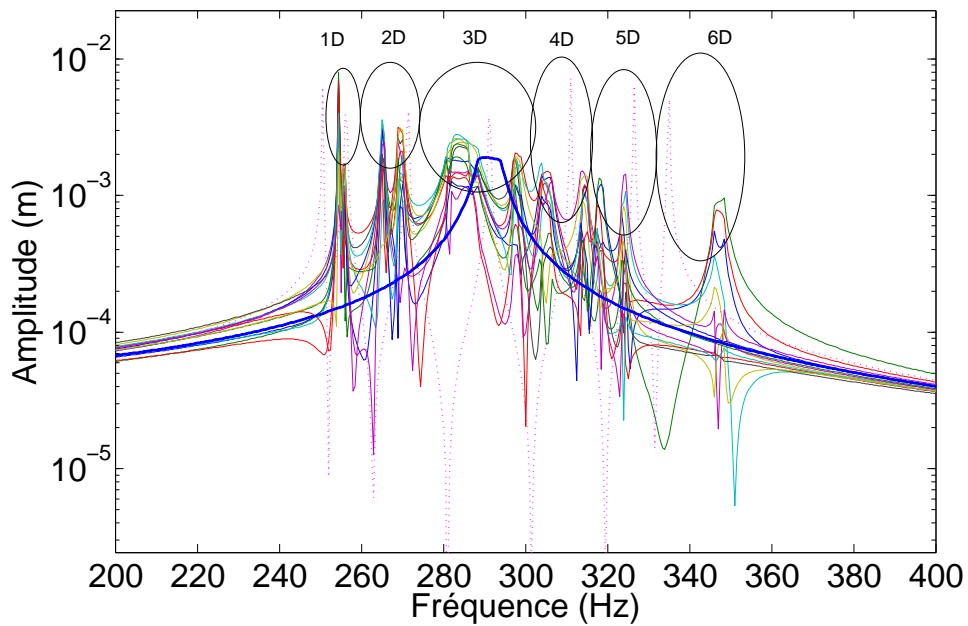


FIGURE 3.97 – Réponses des 13 aubes pour le tirage le plus défavorable 6746

majorité stick. On remarque que les modes 2D 4D et 5D vibrent avec des amplitudes presque aussi élevées que l’amplitude du mode naturellement excité 3D.

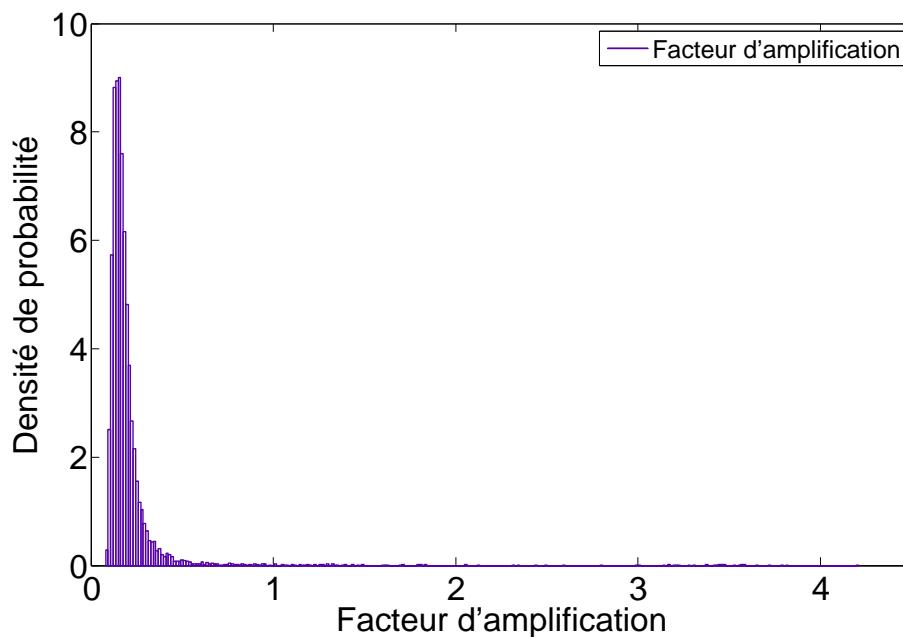


FIGURE 3.98 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

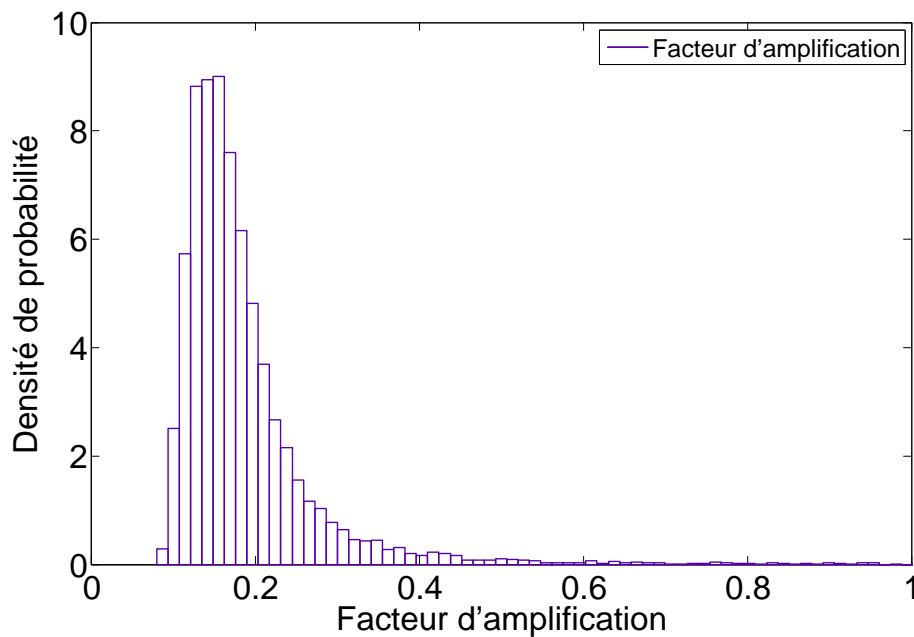


FIGURE 3.99 – Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

Aube	1	2	3	4	5	6	7
$kd_i \times 10^5$ N/m	2,265	2,454	1,546	1,612	1,813	0,564	1,416
Aube	8	9	10	11	12	13	
$kd_i \times 10^5$ N/m	1,631	1,210	1,174	1,243	1,452	1,244	

TABLEAU 3.5 – Valeurs du paramètre aléatoire kd_i correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube i , $i = 1 \dots 13$

3.5.6 Incertitudes sur F_n

Dans ce paragraphe l'incertitude sur F_n est considérée avec un coefficient de variation de F_n pris $\delta_{F_n} = 6.66\%$.

3.5.6.1 Contact stick/slip

La valeur de $F_n = 121N$ est conservée dans le cas de contact stick/slip.

La fig.3.100 montre que la moyenne du cas désaccordé se confond avec l'amplitude de la réponse du cas accordé. Le système dans le domaine stick/slip répond globalement sur le mode 3D pour une excitation $H = 3$. La région de confiance est régulière quelle que soit la fréquence et dans le domaine stick (*fréquence* < 255 Hz et *fréquence* > 325 Hz) est nulle, ces tendances étant confirmées par le coefficient de variation (fig.3.101). Un léger pic à 256 Hz (mode 1D) est observé au niveau de la dispersion de la réponse (fig.3.100 et 3.101) et du facteur d'amplification (fig.3.102).

Le facteur d'amplification (fig.3.102 et fig.3.103) le plus élevé est de 1.32 situé à la fréquence la plus défavorable de 268.5 Hz et l'aube la plus sollicitée est la 2. On remarque que plus de la moitié des aubes dans le cas le plus défavorable, possèdent un facteur d'amplification supérieur à 1 (fig.3.103). A noter que ce facteur est plus faible que ceux du cas de variation du paramètre kd sur tous les domaines du contact, ce qui est aussi le cas pour la valeur maximale du coefficient de variation de la réponse (22.7% sur la fig.3.102). La fig.3.104 montre les réponses pour le cas le plus défavorable, correspondant aux valeurs de forces normales figurant dans le tableau 3.6. La variation aléatoire de la réponse est donné par la densité de probabilité (fig.3.105). Une étude sur des possibles formes analytiques de la densité de probabilité du facteur d'amplification est affichée en annexe A.5.

Aube	1	2	3	4	5	6	7
F_{n_i} N	121,130	100,958	127,277	111,981	128,961	105,978	116,726
Aube	8	9	10	11	12	13	
F_{n_i} N	115,606	127,707	94,283	115,871	108,851	129,407	

TABLEAU 3.6 – Valeurs du paramètre aléatoire F_{n_i} correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube i , $i = 1 \dots 13$

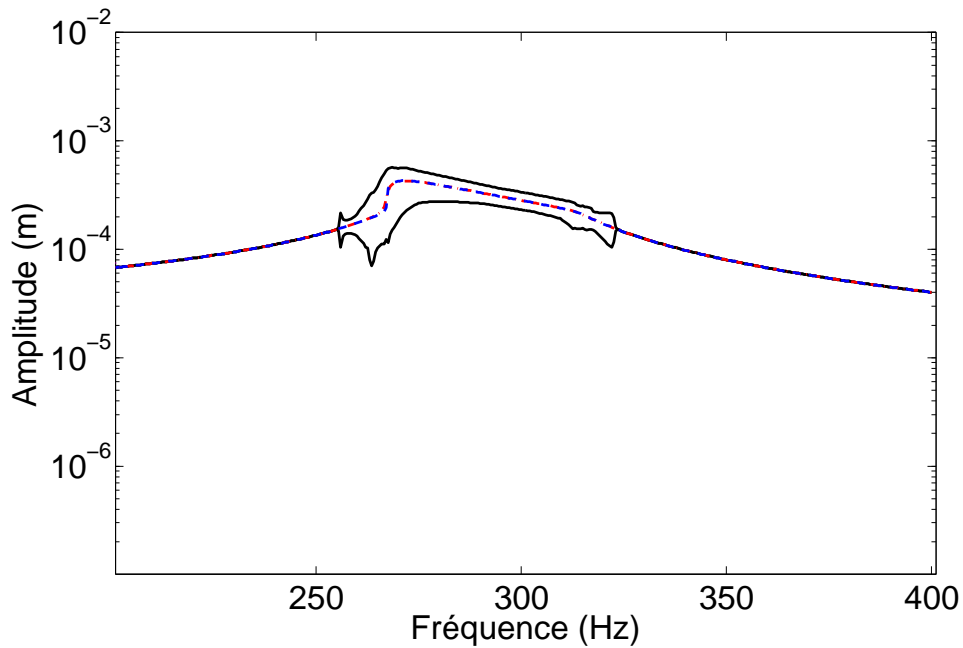


FIGURE 3.100 – Moyenne (- . rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ dans le domaine stick/slip en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$

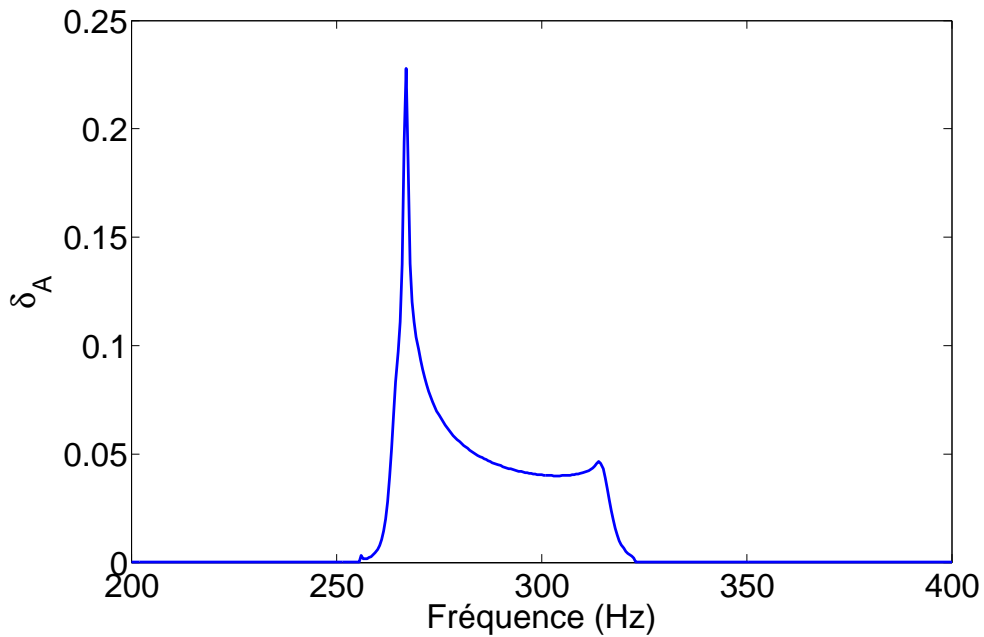


FIGURE 3.101 – Coefficient de variation δ_A de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de F_n avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ et un contact stick/slip, $F_n = 121$ N et $H = 3$

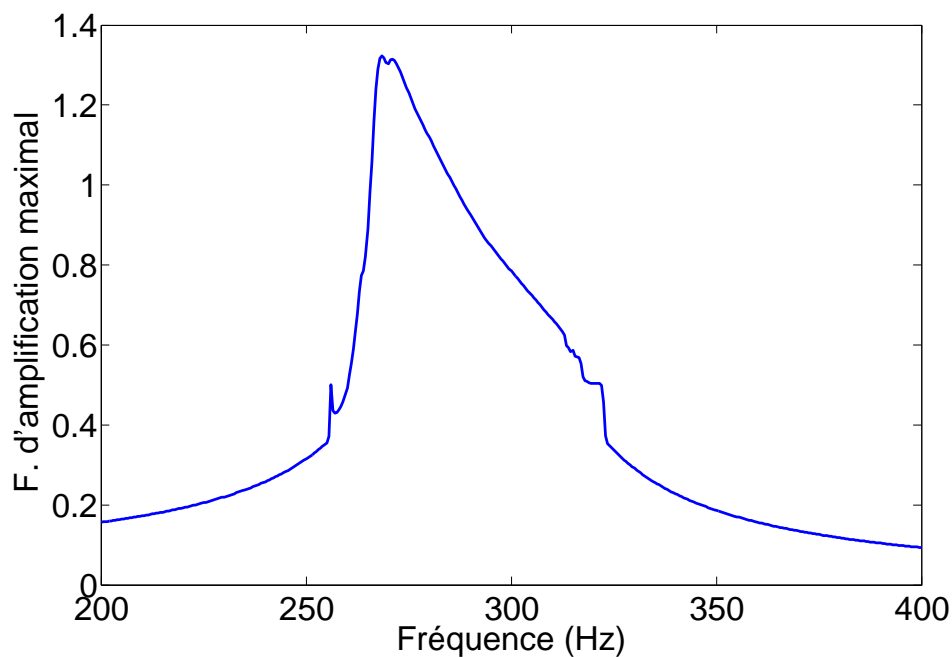


FIGURE 3.102 – Facteur d'amplification de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de F_n avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ et contact stick/slip, $F_n = 121$ N et $H = 3$

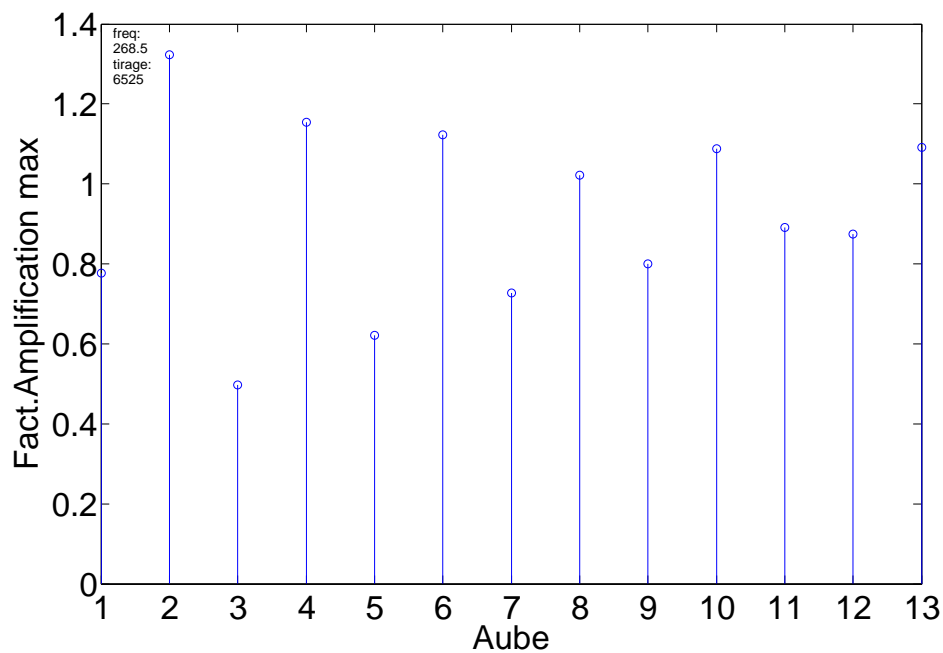


FIGURE 3.103 – Repartition des coefficients d'amplifications sur les 13 aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable pour un contact stick/slip

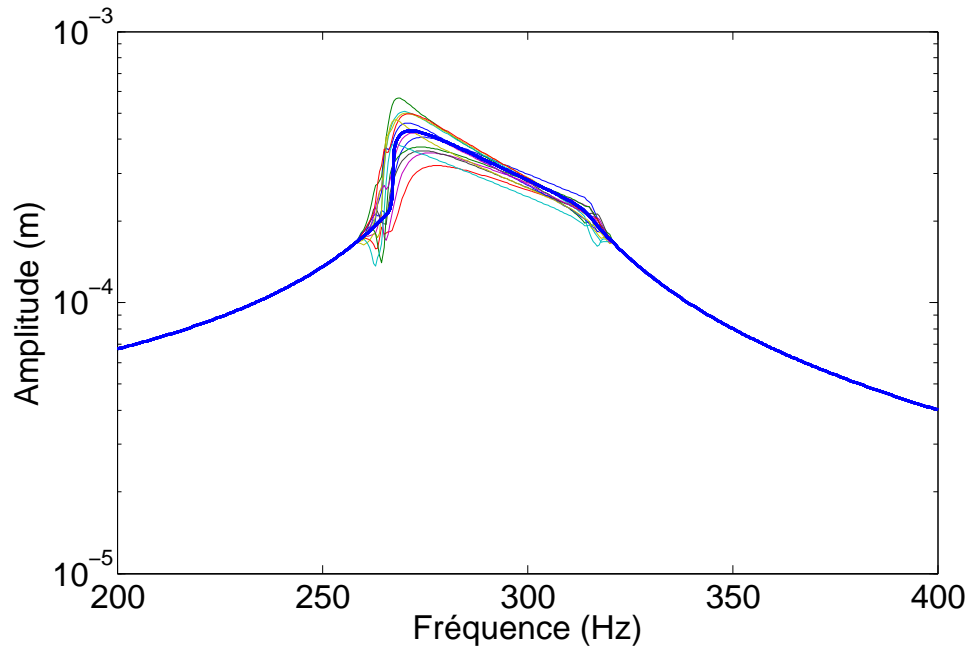


FIGURE 3.104 – Réponses des 13 aubes pour le tirage le plus défavorable 6525

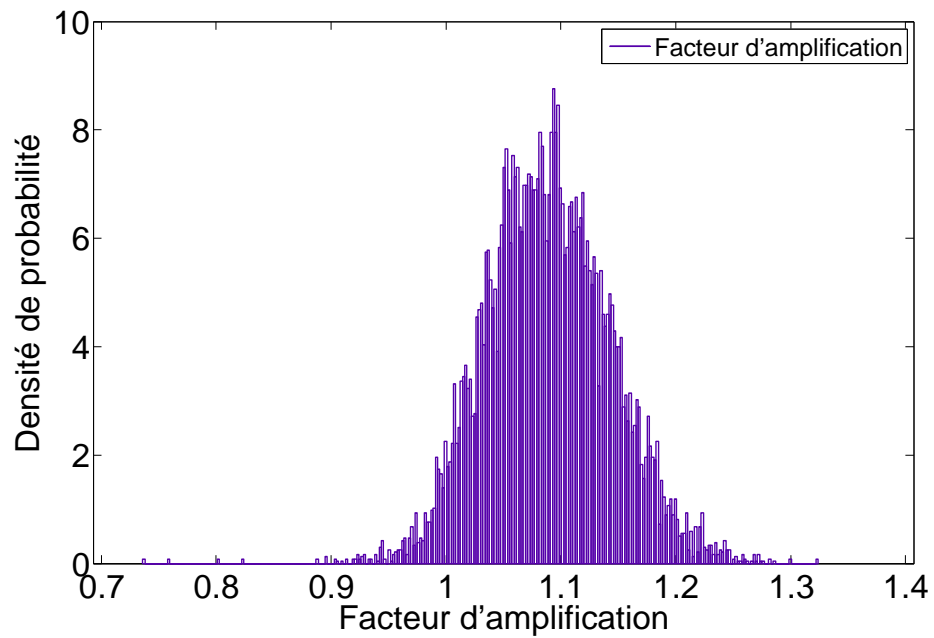


FIGURE 3.105 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

3.5.6.2 Contact stick/slip à majorité slip

F_n est pris à 70 N.

L'enveloppe donnée (fig.3.106) montre une l'amplitude élevée autour de 250.5 Hz et puis étroite aux fréquences supérieures correspond à l'influence du cas slip (amplification forte) et du cas stick/slip (amplification faible). Cette tendance est observée également par le coefficient de variation (fig.3.107).

Comparé à tous les autres cas d'étude (variation kd , F_n , 3 domaines), le facteur d'amplification est ici le plus élevé, soit 8.4 atteint à la fréquence la plus défavorable de 250.5Hz (fig.3.108). Les deux aubes les plus amplifiées sont les 9 et 10 (fig.3.109). On voit clairement une localisation de l'amplitude de vibration sur ces deux aubes, les amplifications des autres aubes restent plus faibles (autour de 2). La fig.3.110 montre les réponses associées au cas le plus défavorable correspondant aux valeurs de forces normales figurant dans le tableau 3.7. La densité de probabilité est donnée sur les fig.3.111 et 3.112. Une étude sur des possibles formes analytiques de la densité de probabilité du facteur d'amplification est affichée en annexe A.5.

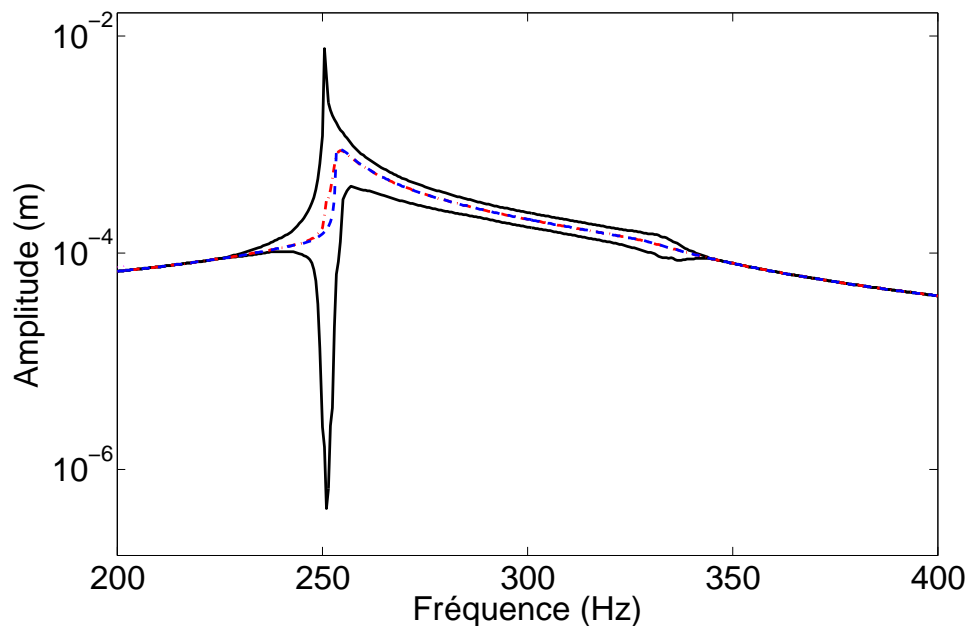


FIGURE 3.106 – Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ dans le domaine stick/slip à majorité slip en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$

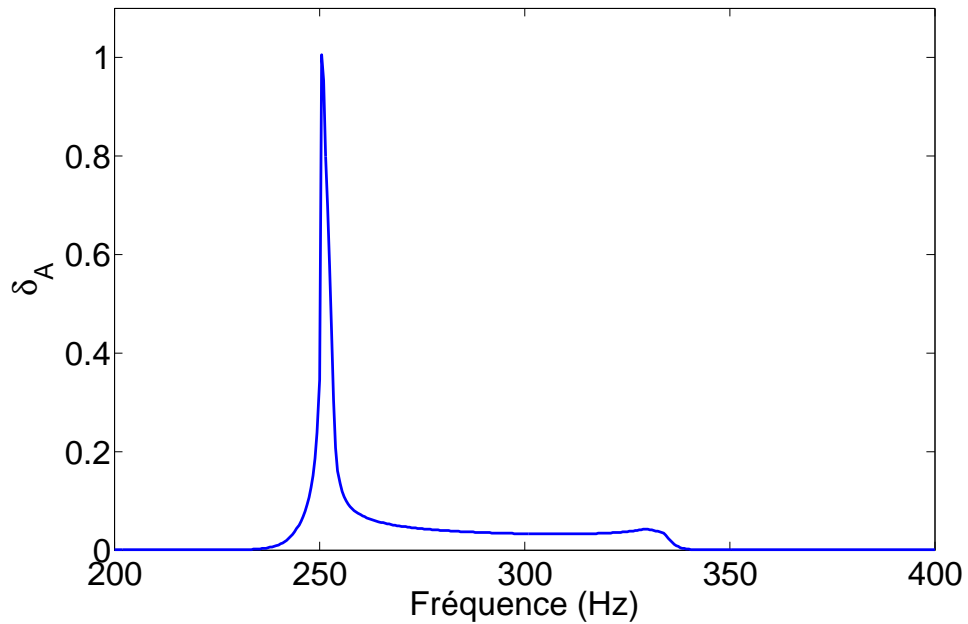


FIGURE 3.107 – Coefficient de variation de l'amplitude A δ_A pour les 13 aubes, désaccordage F_n , $\delta_{F_n} = 6.66\%$, contact stick/slip à majorité slip $F_n = 70$ N et $H = 3$

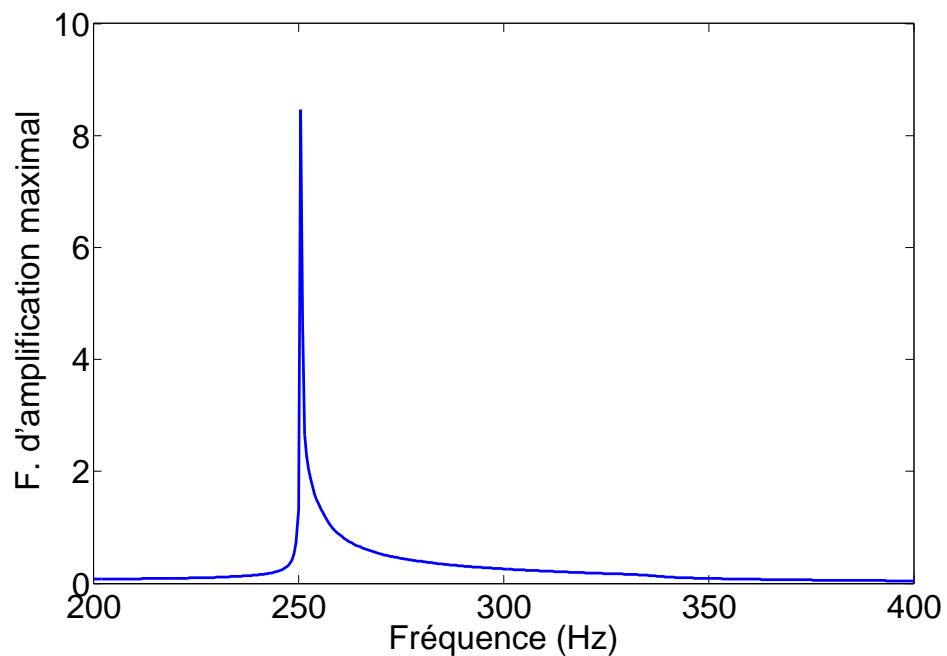


FIGURE 3.108 – Facteur d'amplification maximale sur toutes les aubes et tous les tirages pour un désaccordage F_n , $\delta_{F_n} = 6.66\%$, contact stick/slip à majorité slip $F_n = 70$ N et $H = 3$

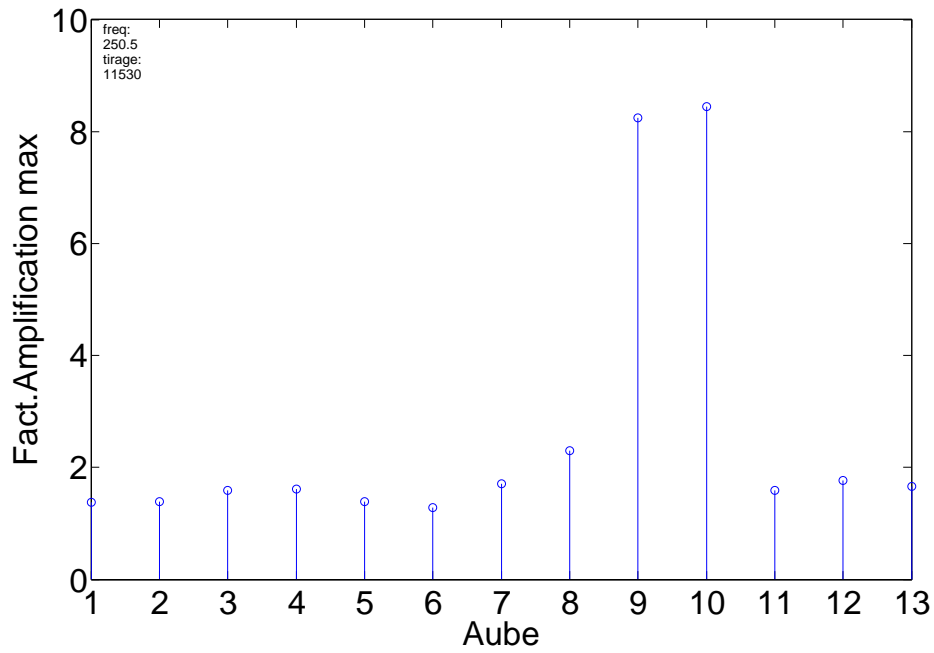


FIGURE 3.109 – *Repartition des coefficients d'amplifications sur les aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable*

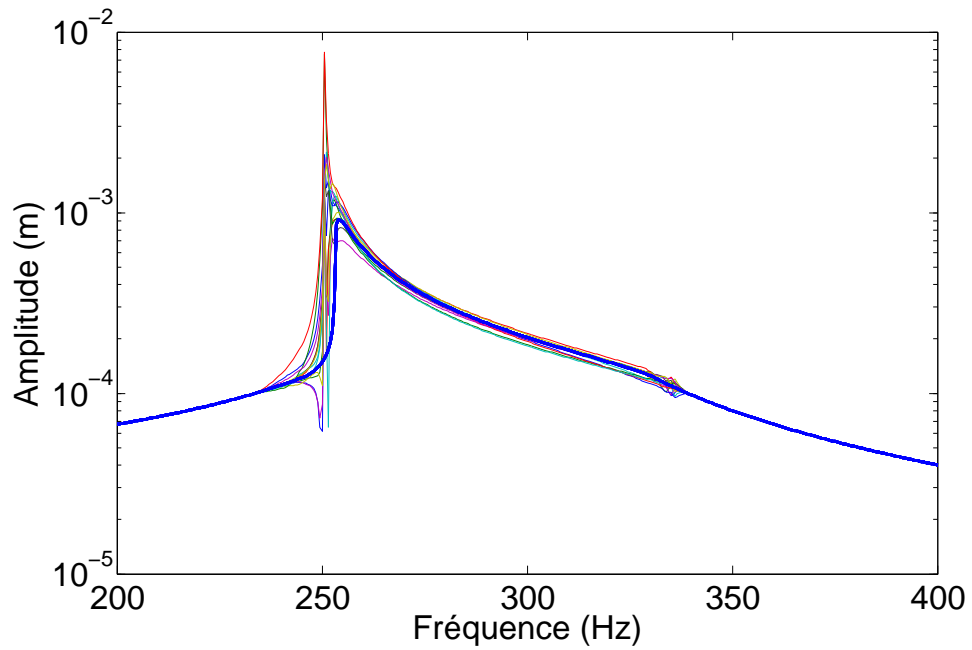


FIGURE 3.110 – *Amplitude de la réponse du tirage le plus défavorable 11530, pour les 13 aubes*

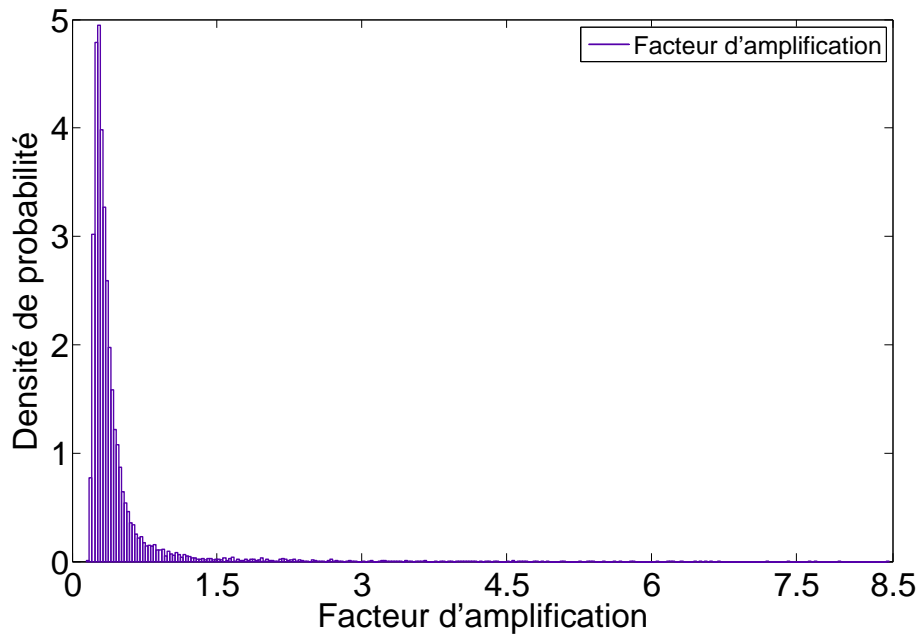


FIGURE 3.111 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

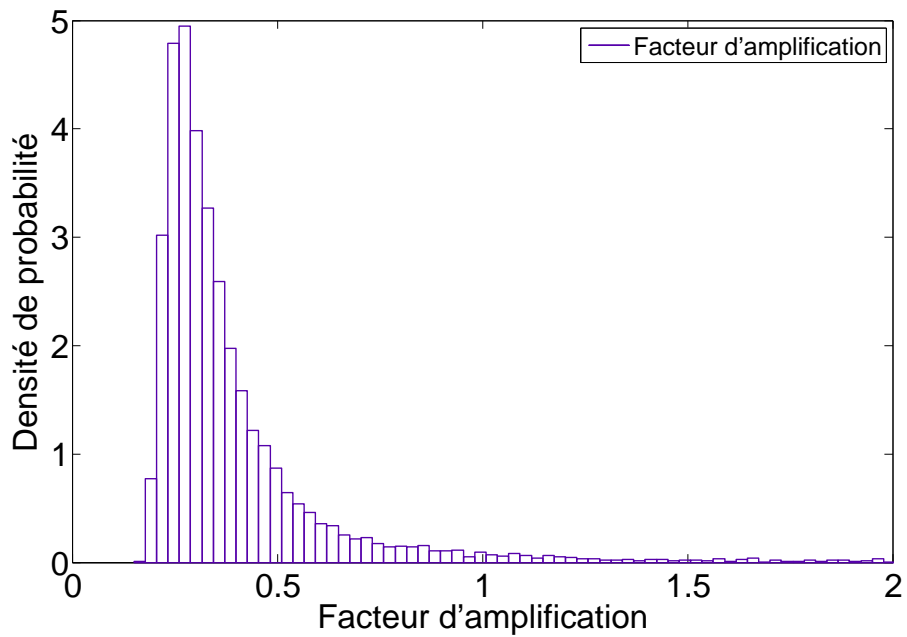


FIGURE 3.112 – Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

Aube	1	2	3	4	5	6	7
$F_{n_i} N$	69,573	77,057	70,536	65,476	76,055	69,420	66,470
Aube	8	9	10	11	12	13	
$F_{n_i} N$	56,521	64,062	55,848	67,101	71,128	68,925	

TABLEAU 3.7 – Valeurs du paramètre aléatoire F_{n_i} correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube i , $i = 1 \dots 13$

3.5.6.3 Contact stick/slip à majorité stick

La force normale considérée dans ce cas est de 1000 N. La fig.3.113 de l'enveloppe de l'amplitude de la réponse montre une très faible dispersion concentrée autour du mode 3D. La moyenne des amplitudes des réalisations coïncide avec l'amplitude de la réponse accordée. Comparé avec toutes les autres études menées et surtout au cas de contact stick/slip à majorité stick pour la variation du paramètre kd (maximum de dispersion fig.3.95), le contact stick/slip à majorité stick possède la plus faible dispersion autour de la moyenne : coefficient de variation δ_A de 5.7% près de la fréquence du mode 3D. Le facteur d'amplification maximal (fig.3.115) atteint est lui aussi le plus faible, 1.202 à la fréquence la plus défavorable 289.5 Hz. On peut voir que dans ce cas il n'y a pas de localisation de vibration sur une aube spéciale.

La distribution des facteurs d'amplifications sur les aubes pour le cas le plus défavorable à la fréquence 289.5 Hz associé aux paramètres F_n du (tableau 3.8) est donné à la fig.3.116. On remarque que la majorité des aubes sont amplifiées d'un facteur voisin de 1.07, ce qui signifie que l'amplitude de la réponse du cas désaccordé considéré est similaire à celle du cas accordé. L'aube à la réponse la plus amplifiée est la 11. L'allure globale de cette densité de probabilité est similaire à celle obtenue dans le cas d'un contact stick/slip pour la même variation du paramètre F_n (fig.3.118). Une étude sur des possibles formes analytiques de la densité de probabilité du facteur d'amplification est affichée en annexe A.5.

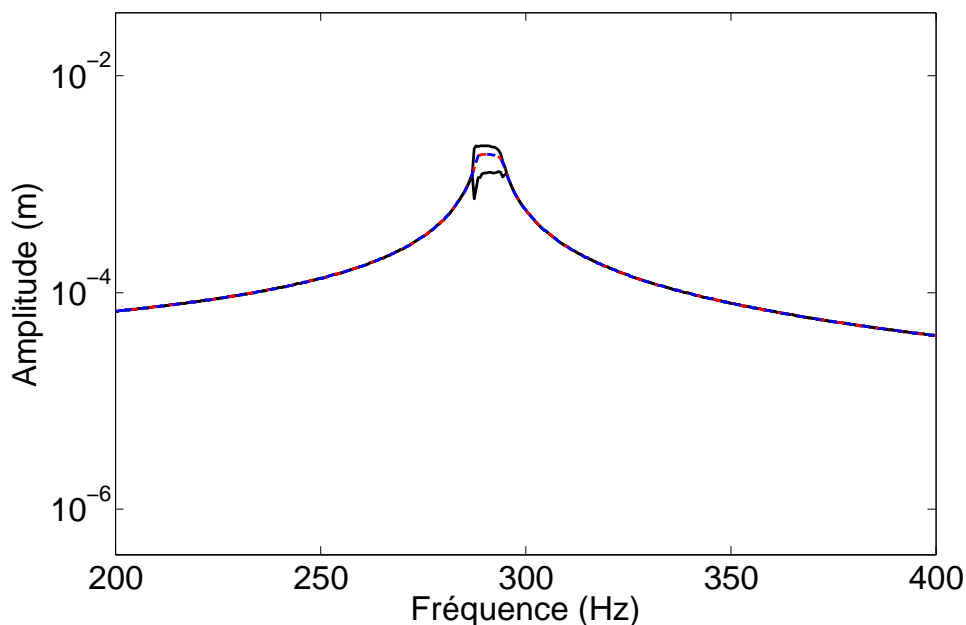


FIGURE 3.113 – Moyenne (–. rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ dans le domaine stick/slip à majorité stick en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (– – bleu) excité par $H = 3$

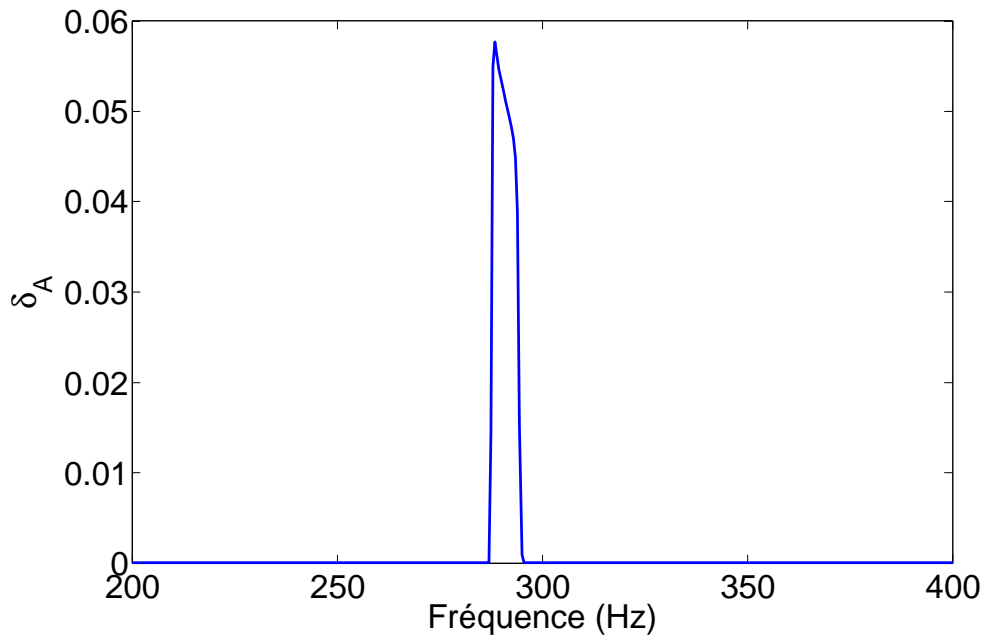


FIGURE 3.114 – Coefficient de variation de l'amplitude A δ_A pour les 13 aubes, désaccordage F_n , $\delta_{F_n} = 20\%$, contact stick/slip à majorité stick $F_n = 1000$ N et $H = 3$

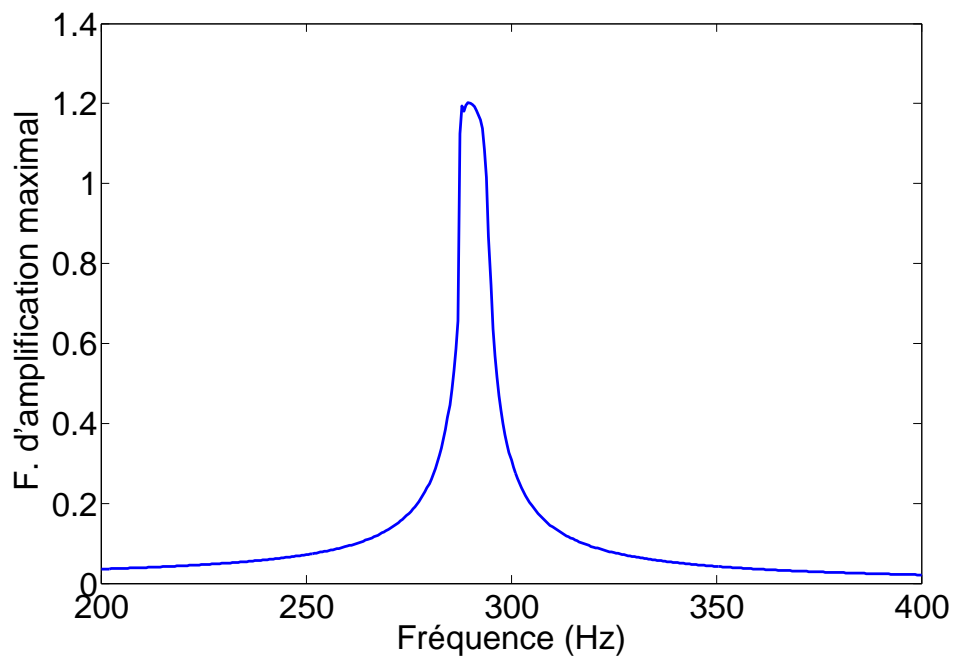


FIGURE 3.115 – Facteur d'amplification maximale sur toutes les aubes et tous les tirages pour un désaccordage F_n , $\delta_{F_n} = 6.66\%$, contact stick/slip à majorité stick $F_n = 1000$ N et $H = 3$

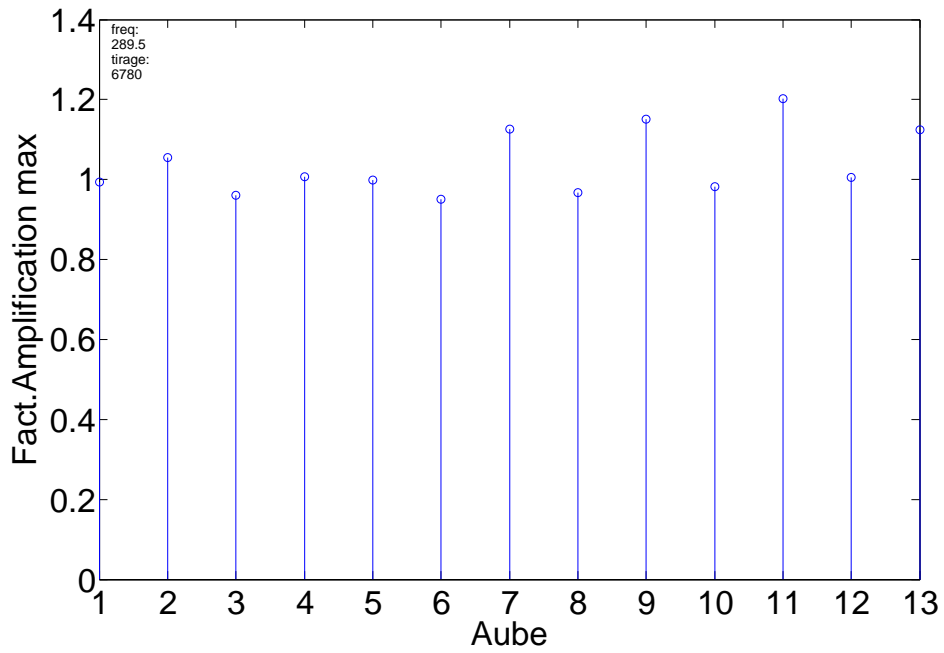


FIGURE 3.116 – *Repartition des coefficients d'amplifications sur les aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable*

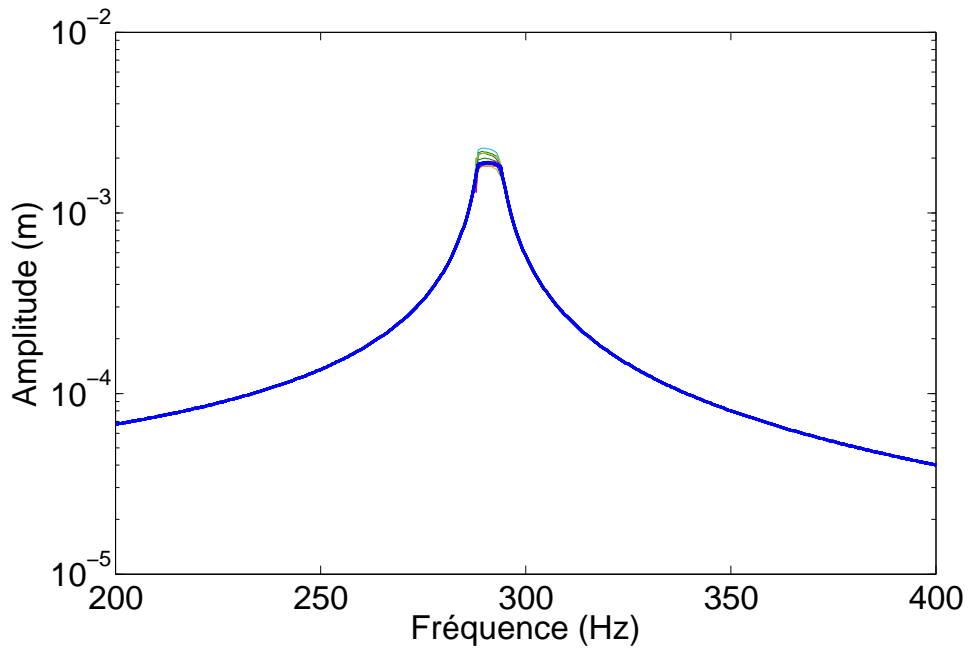


FIGURE 3.117 – *Amplitude de la réponse du tirage le plus défavorable 6780, pour les 13 aubes*

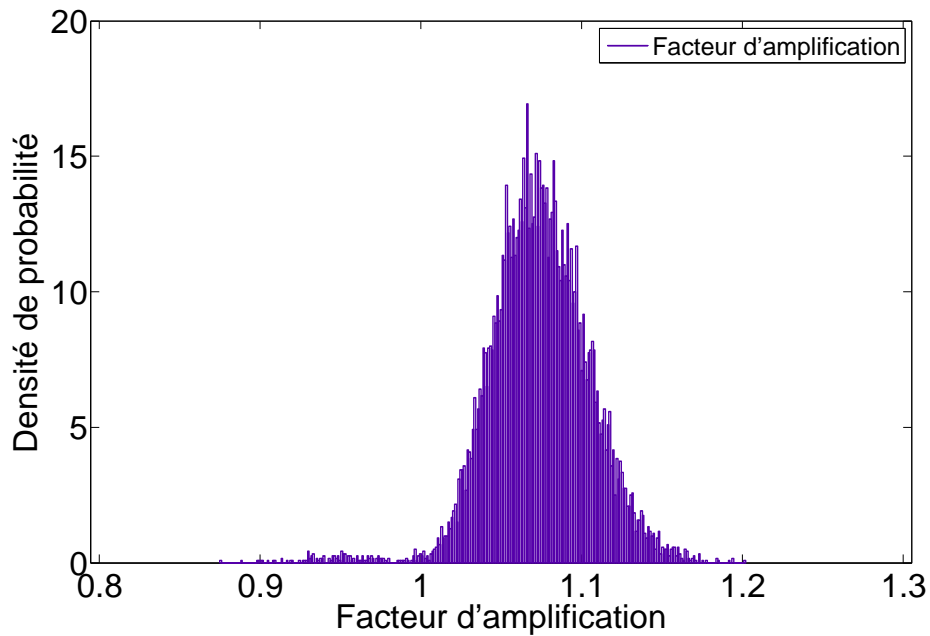


FIGURE 3.118 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

Aube	1	2	3	4	5	6	7
$F_{n_i} N$	1051,920	898,540	1108,716	851,298	1097,037	1027,431	1100,971
Aube	8	9	10	11	12	13	
$F_{n_i} N$	1044,186	1081,875	1184,124	1045,876	1097,856	1017,217	

TABLEAU 3.8 – Valeurs du paramètre aléatoire F_{n_i} correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube i , $i = 1 \dots 13$

CONCLUSION

La variation des paramètres de contact provoque des amplifications très dangereuses sur les systèmes à géométrie cyclique. L'application de l'aléatoire sur le système à un degré de liberté en premier, nous a servi de connaître le comportement stochastique individuel d'une seule aube en présence de l'incertitude sur les paramètres du contact frottant. Ce comportement possède une forte tendance vers les états de contact quasi linéaires et surtout slip comme déjà démontré et des faibles variations des paramètres du contact permet le passage à ces deux états extrêmes. Le comportement des système à 13 aubes avec géométrie cyclique, présente des phénomènes de dédoublements de pics de vibrations ainsi que des localisations de la vibration sur des aubes spécifiques qui sont liés au phénomène de désaccordage des aubes. L'étude faite montre que la connaissance a priori d'une forme bien déterminée de la réponse est impossible du fait de la nature aléatoire des variations des paramètres du système (paramètres du contact). L'utilisation de la méthode de MC nous a permis de prévoir le comportement vibratoire de ces systèmes ainsi que l'intervalle de confiance dans lequel il est inscrit (construction des enveloppes des amplitudes des réponses). Ce comportement stochastique de la réponse dépendent de la variation du paramètre supposé aléatoire. On constate que : 1/le paramètre kd est caractéristique du décalage des fréquences de vibrations et du dédoublement des pics de vibrations comme remarqué dans le système à géométrie cyclique étudié, 2/le paramètre F_n est caractéristique de l'augmentation en amplitude de la réponse des systèmes, 3/le paramètre μ amène une forte variation de la réponse puisqu'elle varie d'un domaine à un autre (tendance au domaine quasi slip), reste à mentionner que cette étude sur le système à 13 ddl a été restreinte sur l'excitation $3D$ et il serait utile d'élargir l'étude pour considérer l'influence d'autres ordres moteurs.

UNE des causes les plus fréquentes qui conduit à la rupture des ensembles aubés réside dans la fatigue à nombre élevé de cycle. Pour remédier à ce problème, différents dispositifs d'atténuation des vibrations sont mis au point par les constructeurs. Ces dispositifs, appelés frotteurs, sont basés sur les effets du frottement sec. La connaissance précise du comportement dynamique des aubages en présence de ce type de frottement devient donc indispensable pour pouvoir prédire leur durée de vie de manière suffisamment précise.

Dans un premier temps, une étude bibliographique répartie sur les trois chapitres est dédiée à la fois aux différentes modélisations du contact utilisées pour l'étude dynamique du système, à la théorie du contact frottant ainsi qu'aux différentes méthodes statistiques de la prédiction de la réponse non linéaire des contacts avec frottement sec et au désaccordage. L'étude des systèmes désaccordés en présence de non linéarité est récente et il apparaît que la compréhension de leur comportement dynamique d'ensemble reste encore mal maîtrisée.

Le second chapitre de ce manuscrit s'intéresse à la méthode de la balance multi harmonique. La MHBM est utilisée pour confirmer l'origine du phénomène d'aplatissement de l'amplitude de la vibration des réponses des systèmes avec frotteur sec. L'analyse énergétique menée montre que, ni l'énergie dissipée par frottement sec, ni l'énergie totale dissipée, peuvent être la cause réelle de l'atténuation des amplitudes de vibration. Le changement des conditions aux limites induit par les alternances de stick/slip l'explique par contre parfaitement. La présence du frotteur est inefficace sur les cas quasi linéaires, mais son effet devient important dans la zone de comportement non linéaire du contact. Cette étude est basée sur l'évolution des forces déphasées et en phase par unité de déplacement du système en fonction de la fréquence. Plus précisément, le changement permanent d'état permet aux efforts déphasés par rapport au déplacement de devenir prépondérants quand le contact passe d'une condition complètement bloquée à stick/slip à majorité bloquée, entraînant la diminution des amplitudes maximales. Quand l'état du contact change vers des configurations de plus en plus glissantes, l'alternance des contacts bloqués et glissants, pendant la phase stick/slip, perd de son efficacité et par conséquent l'effort généré par le frotteur diminue. Dans cette configuration, les amplitudes maximales des pics augmenteront de nouveau et la présence du frotteur devient de plus en plus inefficace. Pour ces états des contacts (stick/slip à majorité glissante et complètement glissante) la présence du frotteur ne joue pas un rôle fondamental mais l'énergie dissipée par frottement sec

atteint en revanche ses valeurs maximales. Dans le troisième chapitre, une étude numérique du système accordé à géométrie cyclique est conduite et débute par une étude paramétrique de l'effet des différents paramètres du contact. Cette étude permet de préparer l'étude stochastique ultérieure sur le désaccordage basée sur une étude statistique du désaccordage par Monte Carlo. Cette étude met en évidence les phénomènes causés par le désaccordage du système à géométrie cyclique, comme l'amplification de la réponse et l'excitation d'autres modes que celui ciblé par l'excitation à ordre moteur.

Les perspectives de développement concernent la capacité d'intégration d'une modélisation microslip dans les études numériques de dynamique frottante. En effet, une approche macroslip reste une approximation et ne relève pas de la réalité du contact frottant dans les systèmes disques aubes industriels. Les différents phénomènes qui surviennent à l'échelle du contact surface sur surface sont inaccessibles via une modélisation point sur point macroslip. Ensuite, vu les difficultés rencontrées dans la résolution de modèles numériques en 3D en terme de temps de calculs énormes, une réduction d'ordre de ces systèmes s'avère nécessaire. Une résolution éléments finis de systèmes industriels comporte un nombre important de degrés de liberté à gérer et par suite une modélisation de ses systèmes sans adoption d'une méthode de réduction d'ordre des systèmes est difficile. Afin de compléter l'étude statistique de Monte Carlo sur les modèles numériques de systèmes à géométrie cyclique, une méthode plus solide et plus efficace en terme de temps de calculs des statistiques de la réponse non linéaires doit être développée. Une approche de chaos polynomial intégrant des non linéarités de frottement n'est pas développée jusqu'à présent, la plupart des études rencontrées sur des systèmes à géométrie cyclique se basent sur des systèmes linéaires

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. D'Ambrosio, E. Chatelet, J. Ravoux, and G. Jacquet-Richardet. Influence of contact states on the dynamic behavior of rubbing structures. *ASME Conference Proceedings*, 2005(47276) :429–440, 2005. (Cité page 5.)
- [2] K. Y. Sanliturk, D. J. Ewins, and A. B. Stanbridge. Underplatform dampers for turbine blades : Theoretical modeling, analysis, and comparison with experimental data. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(4) :919–929, 2001. (Cité pages 5 et 44.)
- [3] C. M. Firrone and S. Zucca. Underplatform dampers for turbine blades : The effect of damper static balance on the blade dynamics. *Mechanics Research Communications*, 36(4) :515 – 522, 2009. (Cité page 5.)
- [4] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Advanced modeling of underplatform friction dampers for analysis of bladed disk vibration. *Journal of Turbomachinery*, 129(1) :143–150, 2007. (Cité pages 5 et 17.)
- [5] C. M. Firrone, S. Zucca, and M. M. Gola. The effect of underplatform dampers on the forced response of bladed disks by a coupled static/dynamic harmonic balance method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, In Press, Corrected Proof :-, 2010. (Cité page 5.)
- [6] E. P. Petrov. Explicit finite element models of friction dampers in forced response analysis of bladed disks. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 130 :0742–4795, 2008. (Cité pages 5 et 18.)
- [7] B. D. Yang and C. H. Menq. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading : Part 1—stick-slip contact kinematics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 120(2) :410–417, 1998. (Cité pages 5 et 17.)
- [8] M.H. Jareland. A parametric study of a cottage-roof damper and comparison with experimental results. In *ASME Turbo Expo*, New Orleans, Louisiana,USA, June 4-7 2001. (Cité pages 5 et 16.)
- [9] S. Narasimha, G. Venkata Rao, and S. Ramakrishna. Stress and vibration analysis of a gas turbine blade with a cottage-roof friction damper using finite element method. In *14th National Conference on Machines and Mechanisms (NaCoMM-09)*, NIT, Durgapur, India, 2009. (Cité pages 6, 7 et 198.)
- [10] C. H. Menq. *The vibration response of frictionally constrained gas turbine engine blades*. Thesis mechanical engineering, Carnegie-Mellon University,, Pittsburg, Pennsylvania, 1985. 172 p. (Cité pages 7, 12 et 15.)
- [11] C. H. Menq, J. Bielak, and J. H. Griffin. The influence of microslip on vibratory response, part i : A new microslip model. *Journal of Sound and Vibration*, 107(2) :279 – 293, 1986. (Cité pages 7, 12, 14 et 198.)

- [12] R. D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics*, 16 :259–268, 1949. (Cité pages 7 et 11.)
- [13] C. H. Menq and B. D. Yang. Non-linear spring resistance and friction damping of frictional constraint having two-dimensional motion. *Journal of Sound and Vibration*, 217(1) :127–143, 1998. (Cité pages 10, 18 et 43.)
- [14] K. Popp, L. Panning, and W. Sextro. Vibration damping by friction forces : Theory and applications. *Journal of Vibration and Control*, 9(3-4) :419–448, 2003. (Cité page 11.)
- [15] J. Bastien, G. Michon, L. Manin, and R. Dufour. An analysis of the modified dahl and masing models : Application to a belt tensioner. *Journal of Sound and Vibration*, 302(4-5) :841 – 864, 2007. (Cité page 11.)
- [16] L. Panning, W. Sextro, and K. Popp. Optimization of interblade friction damper design. In *ASME Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*, number 2000-GT-541, Munich, 2000. (Cité pages 11 et 18.)
- [17] K. H. Koh, J. H. Griffin, S. Filippi, and A. Akay. Characterization of turbine blade friction dampers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127(4) :856–862, 2005. (Cité page 12.)
- [18] W.D. Iwan. On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems. *Journal of Applied Mechanics*, 34(3) :612–617, 1967. (Cité page 12.)
- [19] K. Y. Sanliturk and D. J. Ewins. Modelling two-dimensional friction contact and its application using harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2) :511 – 523, 1996. (Cité pages 12 et 17.)
- [20] C. H. Menq, J. H. Griffin, and J. Bielak. The influence of microslip on vibratory response, part ii : A comparison with experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 107(2) :295 – 307, 1986. (Cité page 12.)
- [21] G. Csaba. *Modelling microslip friction damping and its influence on turbine blade vibrations*. Mechanical engineering, Linköping University, Linköping, Sweden, 1998. S-581 83, 1998,216 p. (Cité page 15.)
- [22] M H Jareland and G Csaba. Friction damper mistuning of a bladed disk and optimization with respect to wear. In *ASME Turbo Expo*, number 2000-GT-363, Munich, Germany, May 8-11 2000. (Cité page 16.)
- [23] C. H. Menq, P. Chidamparam, and J. H. Griffin. Friction damping of two-dimensional motion and its application in vibration control. *Journal of Sound and Vibration*, 144(3) :427 – 447, 1991. (Cité page 17.)
- [24] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Generic friction models for time-domain vibration analysis of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 126(1) :184–192, 2004. (Cité page 17.)
- [25] T. Berruti, M. M. Gola, S. Zucca, and G. P. DePoli. Underplatform damper performance with turbine blades. In *NATO Symposium on Evaluation, Control and Prevention of High Cycle Fatigue in Gas Turbine Engines for Land, Sea and Air Vehicles*, Granada, 2005. (Cité page 17.)
- [26] C. M. Firrone, D. Botto, and M. M. Gola. Modelling a friction damper : Analysis of the experimental data and comparison with numerical

- results. *ASME Conference Proceedings*, 2006(42509) :469–478, 2006. (Cité page 18.)
- [27] T. Berruti, S. Filippi, L. Goglio, M. M. Gola, and S. Salvano. A test rig for frictionally damped bladed segments. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(2) :388–394, 2002. (Cité pages 18 et 198.)
- [28] B. D. Yang and C. H. Menq. Characterization of 3d contact kinematics and prediction of resonant response of structures having 3d frictional constraint. *Journal of Sound and Vibration*, 217(5) :909 – 925, 1998. (Cité page 18.)
- [29] B. D. Yang, M. L. Chu, and C. H. Menq. Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load. *Journal of Sound and Vibration*, 210(4) :461 – 481, 1998. (Cité pages 18 et 19.)
- [30] J. J. Chen, B. D. Yang, and C. H. Menq. Periodic forced response of structures having three-dimensional frictional constraints. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4) :775 – 792, 2000. (Cité pages 18 et 44.)
- [31] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 125(2) :364–371, 2003. (Cité pages 18, 19 et 44.)
- [32] C. M. Firrone. Measurement of the kinematics of two underplatform dampers with different geometry and comparison with numerical simulation. *Journal of Sound and Vibration*, 323(1-2) :313 – 333, 2009. (Cité page 18.)
- [33] E. Cigeroglu, N. An, and C.H. Menq. A microslip friction model with normal load variation induced by normal motion. *Nonlinear Dynamics*, 50 :609–626, 2007. 10.1007/s11071-006-9171-4. (Cité page 18.)
- [34] J. Szwedowicz, M. Kissel, B. Ravindra, and R. Kellerer. Estimation of contact stiffness and its role in the design of a friction damper. In *ASME TurboExpo*, number 2001-GT-290, New Orleans, 2001. (Cité page 19.)
- [35] C. Siewert, L. Panning, A. Schmidt-Fellner, and A. Kayser. The estimation of the contact stiffness for directly and indirectly coupled turbine blading. In *jkgjkgikgk*, volume 5 PART B, pages 841 – 853, Barcelona, Spain, 2006. Turbine blading ;Vibrational amplitudes ;Underplatform dampers ;Contact stiffness ;. (Cité page 19.)
- [36] S. Filippi, E. B. Rodrigues, and M. M. Gola. Experimental characterization of contact hysteresis at high temperatures. *ASME Conference Proceedings*, 2006(42401) :893–902, 2006. (Cité page 19.)
- [37] Zhi Zhua Zhong. *Finite Element Procedures For Contact-Impact Problems*. Oxford Science publications, 1993. (Cité pages 19, 21, 22, 24, 26 et 27.)
- [38] Peter Wriggers. *Computational contact mechanics*. Springer-Verlag, 2006. (Cité pages 22 et 25.)
- [39] T. Belytschko. *Nonlinear Finite Elements For Continua And Structures*. Wiley, 2000. (Cité pages 24, 25 et 27.)

- [40] J. Ravoux. *Réponse forcée des aubages de turbomachines liaisonnées par nageoires*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2003. (Cité pages 27, 28, 29, 126, 199 et 203.)
- [41] Ali Hasan Nayfeh. *nonlinear oscillations*. JOHN WILEY & SONS, INC., 1979. (Cité page 42.)
- [42] W. Szemplinska-Stupnicka, R. H. Plaut, and J. C Hsieh. Period doubling and chaos in unsymmetric structures under parametric excitation. *Journal of Applied Mechanics*, 56 :947–952, 1989. (Cité page 42.)
- [43] A. A. Ferri. Friction damping and isolation systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 117(B) :196–206, 1995. (Cité page 42.)
- [44] M. Berthillier I. Korkmaz, J. J. Barrau and S. Crézé. Theoretical dynamic analysis of a cantilever beam damped by a dry friction damper. In *1995 Design Engineering Technical Conferences, the 15th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, pages 1117–1124, Boston, MA, September 17-20 1995. (Cité page 43.)
- [45] A. Toufine, J. J. Barrau, and M. Berthillier. Dynamic study of a simplified mechanical system with presence of dry friction. *Journal of Sound and Vibration*, 225(1) :95 – 109, 1999. (Cité page 43.)
- [46] J. H. Wang and W. K. Chen. Investigation of the vibration of a blade with friction damper by hbm. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 115(2) :294–299, 1993. (Cité page 43.)
- [47] B. D. Yang and C.H. Menq. Modeling of friction contact and its application to the design of shroud contact. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119(4) :958–963, 1997. (Cité page 43.)
- [48] K. Y. Sanliturk, M. Imregun, and D. J. Ewins. Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 119(1) :96 – 103, 1997. Contact surfaces ;Friction dampers ;Harmonic balance vibration analysis ;Sine sweep excitation ;Time marching analysis ;Turbine blades ;. (Cité page 43.)
- [49] S. Chen and A. Sinha. Probabilistic method to compute the optimal slip load for a mistuned bladed disk assembly with friction dampers. *Journal of Vibration and Acoustics*, 112(2) :214–221, 1990. (Cité page 44.)
- [50] C. C. Lin and M. P. Mignolet. Effects of damping and damping mistuning on the forced vibration response of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 193(2) :525 – 543, 1996. (Cité page 44.)
- [51] L. Panning, K. Popp, W. Sextro, F. Gotting, A. Kayser, and I. Wolter. Asymmetrical underplatform dampers in gas turbine bladings : Theory and application. *ASME Conference Proceedings*, 2004(41715) :269–280, 2004. (Cité page 58.)
- [52] W. Sextro. The calculation of the forced response of shrouded blades with friction contacts and its experimental verification. In *ASME TURBO EXPO*, Munich, Germany, 8-11 May 2000. (Cité page 58.)
- [53] T. Berruti, S. Filippi, M. M. Gola, and S. Salvano. Friction damping of interlocked vane segments : Experimental results. *International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*, 124(4) :1018–1024, 2002. (Cité page 58.)

- [54] E. P. Petrov. A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 126(1) :175–183, 2004. (Cité page 75.)
- [55] Ibrahim Ata Sever. *Experimental Validation of Turbomachinery Blade Vibration Predictions*. PhD thesis, Imperial College London, 2004. (Cité pages 76 et 200.)
- [56] D. J. Ewins and Z. C. Han. Resonant vibration levels of a mistuned bladed disk. *Journal of Vibration, Acoustic, Stress, and Reliability in Design*, 106 :211–217, 1984. (Cité page 79.)
- [57] J. A. Kenyon, J. H. Griffin, and D. M. Feiner. Maximum bladed disk forced response from distortion of a structural mode. *Journal of Turbomachinery*, 125(2) :352–363, 2003. (Cité pages 79, 80 et 83.)
- [58] M. P. Castanier, G. Ottarsson, and C. Pierre. A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119(3) :439–447, 1997. (Cité pages 80, 82 et 84.)
- [59] S.-T. Wei and C. Pierre. Effects of dry friction damping on the occurrence of localized forced vibrations in nearly cyclic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 129(3) :397 – 416, 1989. (Cité page 80.)
- [60] W. Sextro, K. Popp, and T. Krzyzynski. Localization in nonlinear mistuned systems with cyclic symmetry. *Nonlinear Dynamics*, 25 :207–220, 2001. 10.1023/A :1012915002568. (Cité page 80.)
- [61] R. Bladh, C. Pierre, M. P. Castanier, and M. J. Kruse. Dynamic response predictions for a mistuned industrial turbomachinery rotor using reduced-order modeling. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(2) :311–324, 2002. (Cité pages 80, 81, 82 et 84.)
- [62] J. A. Kenyon and J. H. Griffin. Forced response of turbine engine bladed disks and sensitivity to harmonic mistuning. *International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*, 125(1) :113–120, 2003. (Cité page 80.)
- [63] J. A. Kenyon, J. H. Griffin, and N. E. Kim. Sensitivity of tuned bladed disk response to frequency veering. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 127(4) :835–842, 2005. (Cité pages 80 et 81.)
- [64] M. T. Yang and J. H. Griffin. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(4) :893–900, 2001. (Cité pages 81 et 82.)
- [65] J. A. Kenyon and J. H. Griffin. Experimental demonstration of maximum mistuned bladed disk forced response. *Journal of Turbomachinery*, 125(4) :673–681, 2003. (Cité pages 81 et 200.)
- [66] E. P. Petrov, K. Y. Sanliturk, and D. J. Ewins. A new method for dynamic analysis of mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and mistuned systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(3) :586–597, 2002. (Cité pages 81, 83 et 200.)
- [67] M. J. Kruse and C. Pierre. Forced response of mistuned bladed disks using reduced-order modeling. In *37th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, volume 4, New York, 1996. AIAA. (Cité page 82.)

- [68] R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. Reduced order modeling and vibration analysis of mistuned bladed disk assemblies with shrouds. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 121(3) :515–522, 1999. (Cité page 82.)
- [69] R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks—part i : Theoretical models. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(1) :89–99, 2001. (Cité page 82.)
- [70] R. Bladh, M. P. Castanier, and C. Pierre. Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks—part ii : Application. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(1) :100–108, JANUARY 2001. (Cité page 82.)
- [71] M. T. Yang and J. H. Griffin. A reduced order approach for the vibration of mistuned bladed disk assemblies. *SME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119(0742-4795) :161–167, 1997. (Cité page 82.)
- [72] D. M. Feiner and J. H. Griffin. A fundamental model of mistuning for a single family of modes. *Journal of Turbomachinery*, 124(4) :597–605, 2002. (Cité page 83.)
- [73] D. M. Feiner and J. H. Griffin. Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model—part i : Theory. *Journal of Turbomachinery*, 126(1) :150–158, 2004. (Cité page 83.)
- [74] D. M. Feiner and J. H. Griffin. Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model—part ii : Application. *Journal of Turbomachinery*, 126(1) :159–165, 2004. (Cité page 83.)
- [75] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disk assemblies. *Journal of Turbomachinery*, 125(4) :623–631, 2003. (Cité page 84.)
- [76] E. P. Petrov and D. J. Ewins. Method for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of mistuned bladed disks with scatter of contact interface characteristics. *Journal of Turbomachinery*, 127(1) :128–136, 2005. (Cité page 84.)
- [77] M. Nikolic, E. P. Petrov, and D. J. Ewins. Robust strategies for forced response reduction of bladed disks based on large mistuning concept. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 130(2) :022501, 2008. (Cité page 84.)
- [78] F. Gotting, W. Sextro, L. Panning, and K. Popp. Systematic mistuning of bladed disk assemblies with friction contacts. *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2004*, 6 :257 – 266, 2004. Friction contacts ;Friction dampers ;Mistuned bladed disk assemblies ;System parameters ;. (Cité page 85.)
- [79] W. Sextro, L. Panning, F. Gotting, and K. Popp. Fast calculation of the statistics of the forced response of mistuned bladed disk assemblies with friction contacts. *ASME Conference Proceedings*, 2002(36096) :981–989, 2002. (Cité page 85.)
- [80] E. P. Petrov. A sensitivity-based method for direct stochastic analysis of nonlinear forced response for bladed discs with friction in-

- terfaces. *ASME Conference Proceedings*, 2007(47942) :1167–1177, 2007. (Cité pages 85, 87, 88 et 200.)
- [81] A. Sinha. Calculating the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly. *AIAA Journal*, 24 :1797–1801, november 1986. (Cité page 85.)
- [82] A. Sinha and S. Chen. A higher order technique to compute the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly. *Journal of Sound and Vibration*, 130(2) :207 – 221, 1989. (Cité page 85.)
- [83] M. P. Mignolet. Towards a comprehensive and direct prediction strategy of the effects of mistuning on the forced response of forced response of turbomachinery blades. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 71(5) :462 – 469, 1999. (Cité page 85.)
- [84] M. P. Mignolet, W. Hu, and I. Jadic. On the forced response of harmonically and partially mistuned bladed disks. part ii : Partial mistuning and applications. *International Journal of Rotating Machinery*, 6(1) :43–56, 2000. (Cité page 85.)
- [85] S. T. Wei and C. Pierre. Statistical analysis of the forced response of mistuned cyclic assemblies. *AIAA journal*, 28(5) :861–868, 1990. American Institute of Aeronautics and Astronautics. (Cité pages 85 et 86.)
- [86] M. T. Bah, P. B. Nair, A. Bhaskar, and A. J. Keane. Forced response statistics of mistuned bladed disks : a stochastic reduced basis approach. *Journal of Sound and Vibration*, 263(2) :377 – 397, 2003. (Cité pages 85 et 86.)
- [87] A. Sinha. Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos. *Journal of vibration and acoustics*, 128(36878) :449–457, 2006. (Cité pages 85 et 86.)
- [88] E. Capiez-Lernout and C. Soize. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126(3) :610–618, 2004. (Cité pages 85 et 86.)
- [89] M. P. Mignolet and C. C. Lin. The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks. *Journal of Turbomachinery*, 115(4) :771–780, 1993. (Cité page 85.)
- [90] C. C. Lin and M. P. Mignolet. An adaptive perturbation scheme for the analysis of mistuned bladed disks. *Journal of engineering for gas turbines and power*, 119(1) :153–160, 1997. (Cité pages 85 et 86.)
- [91] A. Sinha. Statistics of the peak maximum amplitude of the forced response of a mistuned bladed disk. *ASME Conference Proceedings*, 2005(47276) :563–570, 2005. (Cité page 86.)

A ANNEXES

A.1 MATRICES DE MASSE RAIDEUR ET AMORTISSEMENT

Pour un système à nddl à masses, concentrées comme montré en figure 3.65, l'énergie cinétique totale l'énergie de déformation et l'énergie de dissipation sont données par A.1

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \dot{x}_i^2 \quad U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot k_i \cdot x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot k_{l_i} \cdot (x_{i+1}^2 - x_i^2)^2 + \frac{1}{2} \cdot k_{l_n} \cdot (x_1 - x_n)^2$$

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot c_i \cdot \dot{x}_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot c_{l_i} \cdot (\dot{x}_{i+1}^2 - \dot{x}_i^2)^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{l_n} \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_n)^2 \quad (\text{A.1})$$

D'après la formulation de Lagrange on obtient que :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = Q_i \quad \text{avec } i = 1 \dots n \quad (\text{A.2})$$

avec Q_i le vecteur des forces généralisées. En développant les dérivées partielles on obtient que les matrices de masse, raideur et amortissement du système à symétrie cyclique sont données par :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & m_i & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_{l_1} & -k_{l_2} & 0 & \cdot & -k_{l_n} \\ -k_{l_2} & k_2 + k_{l_2} & -k_{l_3} & \cdot & 0 \\ \cdot & -k_{l_i} & k_i + k_{l_i} & -k_{l_{i+1}} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -k_{l_n} & 0 & 0 & -k_{l_{n-1}} & k_n + k_{l_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_{l_1} & -c_{l_2} & 0 & \cdot & -c_{l_n} \\ -c_{l_2} & c_2 + c_{l_2} & -c_{l_3} & \cdot & 0 \\ \cdot & -c_{l_i} & c_i + c_{l_i} & -c_{l_{i+1}} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ -c_{l_n} & 0 & 0 & -c_{l_{n-1}} & c_n + c_{l_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A.2 DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE MHBM

$$\begin{aligned}
f_{c_n} &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta^*} f_{nl}(\theta) \cos(n\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\theta^*}^{\theta_0+\pi} f_{nl}(\theta) \cos(n\theta) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta^*} kd \left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \right) \cos(n\theta) d\theta + \dots \\
&\quad - \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta^*} kd \cdot Am \cdot \cos(n\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta^*} \mu \cdot F_n \cdot \cos(n\theta) d\theta - \frac{2}{\pi} \int_{\theta^*}^{\theta_0+\pi} \mu \cdot F_n \cos(n\theta) d\theta \\
f_{c_n} &= \frac{kd}{\pi} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N a_k \left[\left(\frac{\sin(k+n)\theta}{k+n} \right)_{\theta_0}^{\theta^*} + \left(\frac{\sin(k-n)\theta}{k-n} \right)_{\theta_0}^{\theta^*} \right] + a_n \left[\left(\frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right)_{\theta_0}^{\theta^*} + (\theta)_{\theta_0}^{\theta^*} \right] + \dots \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N b_k \left[\left(\frac{\cos(k+n)\theta}{k+n} \right)_{\theta_0}^{\theta^*} + \left(\frac{\cos(k-n)\theta}{k-n} \right)_{\theta_0}^{\theta^*} \right] - b_n \left[\left(\frac{\cos(2n\theta)}{2n} \right)_{\theta_0}^{\theta^*} + (0)_{\theta_0}^{\theta^*} \right] \right) + \dots \\
&\quad + \frac{2 \cdot Am}{2n} (\sin n\theta^* - \sin n\theta_0) + \frac{2 \mu \cdot F_n}{\pi n} (\sin n\theta^* - \sin n\theta_0) - \frac{2 \mu \cdot F_n}{\pi n} (-\sin n\theta^* - \sin n\theta_0) \\
f_{c_n} &= \frac{kd}{\pi} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left(\begin{aligned} &a_k \left(\frac{1}{k+n} (\sin(k+n)\theta^* - \sin(k+n)\theta_0) + \frac{1}{k-n} (\sin(k-n)\theta^* - \sin(k-n)\theta_0) \right) + \right. \\ &\left. - b_k \left(\frac{1}{k+n} (\cos(k+n)\theta^* - \cos(k+n)\theta_0) + \frac{1}{k-n} (\cos(k-n)\theta^* - \cos(k-n)\theta_0) \right) \cdot \right. \\ &\left. + a_n ((\theta^* - \theta_0) + \frac{1}{2n} (\sin 2n\theta^* - \sin 2n\theta_0)) - b_n \left(\frac{1}{2n} (\cos 2n\theta^* - \cos 2n\theta_0) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 \cdot Am}{\pi n} (\sin n\theta^* - \sin n\theta_0) + \frac{4 \mu \cdot F_n}{\pi n} \sin n\theta^* \right]
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Enfin de compte on obtient que :

$$f_{c_n} = \sum_{k=1}^N (S_{nk}(\theta_0, \theta^*) a_k + C_{nk}(\theta_0, \theta^*) b_k + \frac{4 \mu F_n}{\pi n} \sin(n\theta^*))$$

avec :

$$\begin{cases}
S_{nk}(\theta_0, \theta^*) = \frac{kd}{\pi} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{k+n} [\sin(k+n)\theta^* - \sin(k+n)\theta_0] + \dots \\ &+ \frac{1}{k-n} [\sin(k-n)\theta^* - \sin(k-n)\theta_0] + \dots \\ &- \frac{2}{n} \cos(k\theta_0) [\sin(n\theta^*) - \sin(n\theta_0)] \end{aligned} \right] \\
S_{nn}(\theta_0, \theta^*) = \frac{kd}{\pi} \left[\begin{aligned} &\frac{1}{2n} [\sin(2n\theta^*) - \sin(2n\theta_0)] + \dots \\ &+ (\theta^* - \theta_0) + \dots \\ &- \frac{2}{n} \cos(n\theta_0) [\sin(n\theta^*) - \sin(n\theta_0)] \end{aligned} \right] \\
C_{nk}(\theta_0, \theta^*) = \frac{kd}{\pi} \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{k+n} [\cos(k+n)\theta^* - \cos(k+n)\theta_0] + \dots \\ &-\frac{1}{k-n} [\cos(k-n)\theta^* - \cos(k-n)\theta_0] + \dots \\ &-\frac{2}{n} \sin(k\theta_0) [\sin(n\theta^*) - \sin(n\theta_0)] \end{aligned} \right] \\
C_{nn}(\theta_0, \theta^*) = \frac{kd}{\pi} \left[\begin{aligned} &-\frac{1}{2n} [\cos(2n\theta^*) - \cos(2n\theta_0)] + \dots \\ &-\frac{2}{n} \sin(n\theta_0) [\sin(n\theta^*) - \sin(n\theta_0)] \end{aligned} \right]
\end{cases}$$

Pour la partie sinus de f_{nl} :

$$\begin{aligned}
f_{S_n} &= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta^*} f_{nl}(\theta) \sin(n\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\theta^*}^{\theta_0+\pi} f_{nl}(\theta) \sin(n\theta) d\theta \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta^*} kd \left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \right) \sin(n\theta) d\theta + \dots \\
&\quad - \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta^*} kd \cdot \sin(n\theta) d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta^*} \mu \cdot F_n \cdot \sin(n\theta) d\theta - \frac{2}{\pi} \int_{\theta^*}^{\theta_0+\pi} \mu \cdot F_n \sin(n\theta) d\theta \\
f_{S_n} &= \frac{kd}{\pi} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left(a_k \left(-\frac{1}{k+n} [\cos(k+n)\theta^* - \cos(k+n)\theta_0] + \frac{1}{k-n} [\cos(k-n)\theta^* - \cos(k-n)\theta_0] \right) + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_k \left(-\frac{1}{k+n} [\sin(k+n)\theta^* - \sin(k+n)\theta_0] + \frac{1}{k-n} [\sin(k-n)\theta^* - \sin(k-n)\theta_0] \right) + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a_n \left(\frac{1}{2n} [\cos(2n\theta^*) - \cos(2n\theta_0)] \right) + b_n \left((\theta^* - \theta_0) - \frac{1}{2n} [\sin(2n\theta^*) - \sin(2n\theta_0)] \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 \cdot kd \cdot A_n}{\pi n} (\cos n\theta^* - \cos n\theta_0) - \frac{4\mu \cdot F_n}{\pi n} \cos n\theta^* \right]
\end{aligned}$$

Enfin de compte :

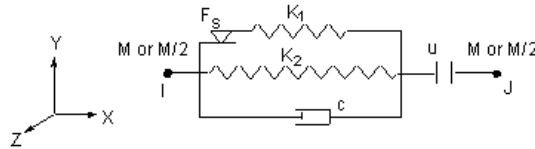
$$f_{S_n} = \sum_{k=1}^N (\bar{C}nk(\theta_0, \theta^*) a_k + \bar{S}nk(\theta_0, \theta^*) b_k - \frac{4\mu F_n}{\pi n} \cos(n\theta^*))$$

avec :

$$\begin{cases}
\bar{C}nk(\theta_0, \theta^*) = \frac{kd}{\pi} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{k+n} [\cos(k+n)\theta^* - \cos(k+n)\theta_0] + \dots \\ +\frac{1}{k-n} [\cos(k-n)\theta^* - \cos(k-n)\theta_0] + \dots \\ +\frac{2}{n} \cos(k\theta_0) [\cos(n\theta^*) - \cos(n\theta_0)] \end{array} \right] \\
\bar{C}nn(\theta_0, \theta^*) = \frac{kd}{\pi} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2n} [\cos(2n\theta^*) - \cos(2n\theta_0)] + \dots \\ +\frac{2}{n} \cos(n\theta_0) [\cos(n\theta^*) - \cos(n\theta_0)] \end{array} \right] \\
\bar{S}nk(\theta_0, \theta^*) = \frac{kd}{\pi} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{k+n} [\sin(k+n)\theta^* - \sin(k+n)\theta_0] + \dots \\ +\frac{1}{k-n} [\sin(k-n)\theta^* - \sin(k-n)\theta_0] + \dots \\ +\frac{2}{n} \sin(k\theta_0) [\cos(n\theta^*) - \cos(n\theta_0)] \end{array} \right] \\
\bar{S}nn(\theta_0, \theta^*) = \frac{kd}{\pi} \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2n} [\sin(2n\theta^*) - \sin(2n\theta_0)] + \dots \\ +(\theta^* - \theta_0) + \dots \\ +\frac{2}{n} \sin(n\theta_0) [\cos(n\theta^*) - \cos(n\theta_0)] \end{array} \right]
\end{cases}$$

A.3 COMBIN40

COMBIN40 - Combination

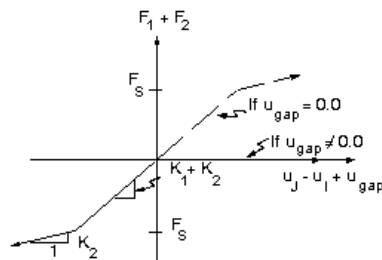


Matrix or Vector	Shape Functions	Integration Points
Stiffness, Mass, and Damping Matrices	None (nodes may be coincident)	None

Characteristics of the Element

The **force**-deflection relationship for the combination element under initial loading is as shown below (for no damping).

Figure 14.29 Force-Deflection Relationship



where:

F_1 = force in spring 1 (output as F1)

F_2 = force in spring 2 (output as F2)

K_1 = stiffness of spring 1 (input as K1 on **R** command)

K_2 = stiffness of spring 2 (input as K2 on **R** command)

u_{gap} = initial gap size (input as GAP on **R** command) (if zero, gap capability removed)

u_I = displacement at node I

u_J = displacement at node J

F_s = force required in spring 1 to cause sliding (input as FSLIDE on **R** command)

Element Matrices for Structural Applications

The element mass matrix is:

$$[M_e] = M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ if KEYOPT(6) = 0} \quad (14-297)$$

A.4 FIGURES DES DENSITÉS DE PROBABILITÉ POUR LE SYSTÈME À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

A.4.1 Incertitude sur le paramètre kd

A.4.1.1 Cas stick/slip à majorité slip

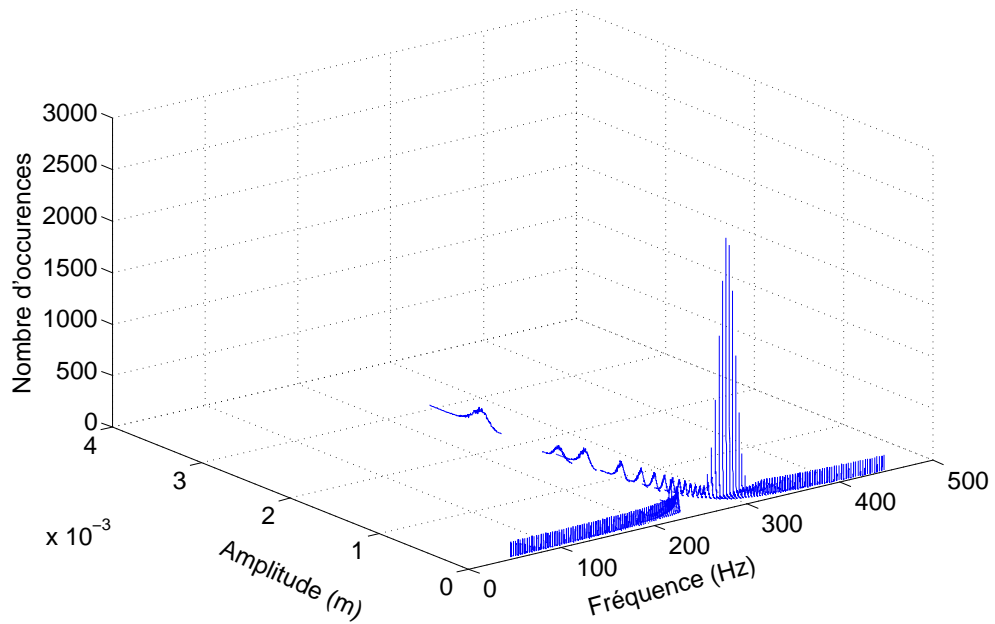


FIGURE A.1 – histogrammes des réponses aléatoires pour chaque fréquence et une variation aléatoire de kd pour 8000 tirages Monte Carlo avec $\delta_{kd} = 14.28\%$

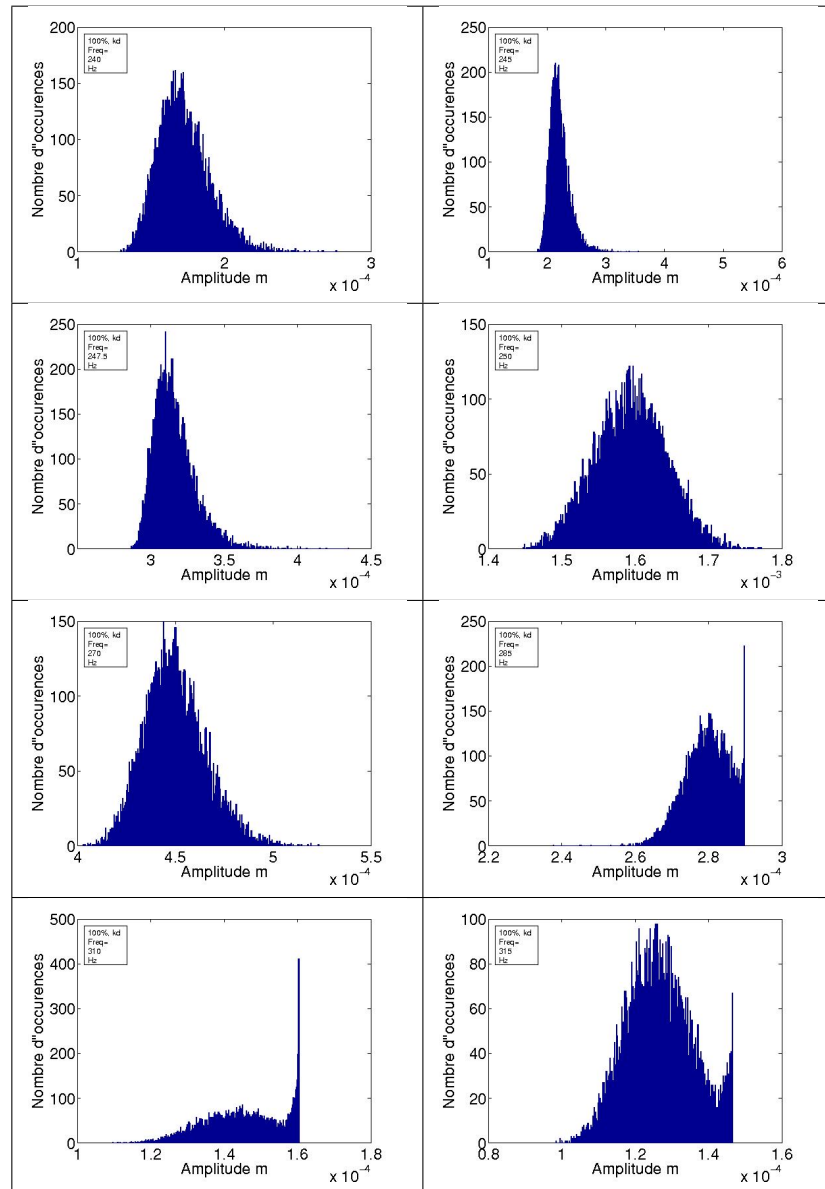


TABLEAU A.1 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 240, 245, 247.5, 250, 270, 285, 310 et 315 Hz pour $\delta_{kd} = 14.28\%$

A.4.1.2 Cas stick/slip à majorité stick

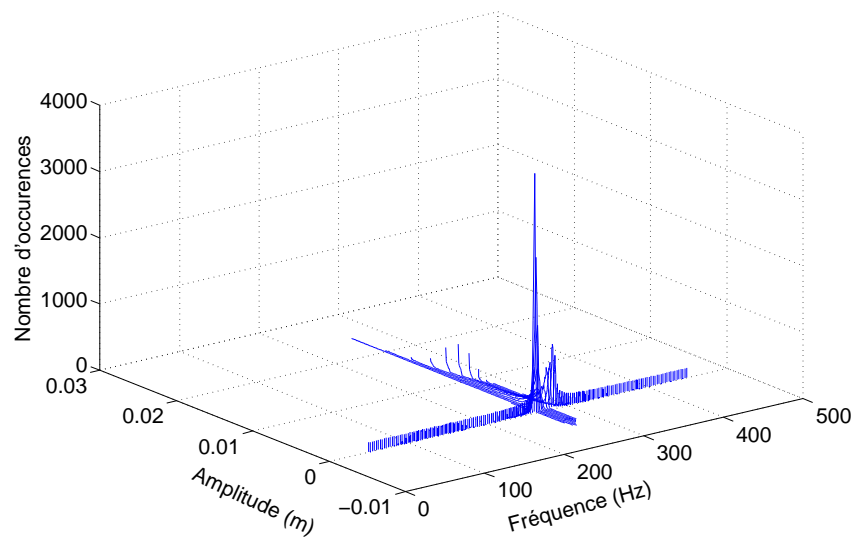


FIGURE A.2 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour chaque fréquence et une variation aléatoire de k_d pour 8000 tirages Monte Carlo avec $\delta_{k_d} = 14.28\%$

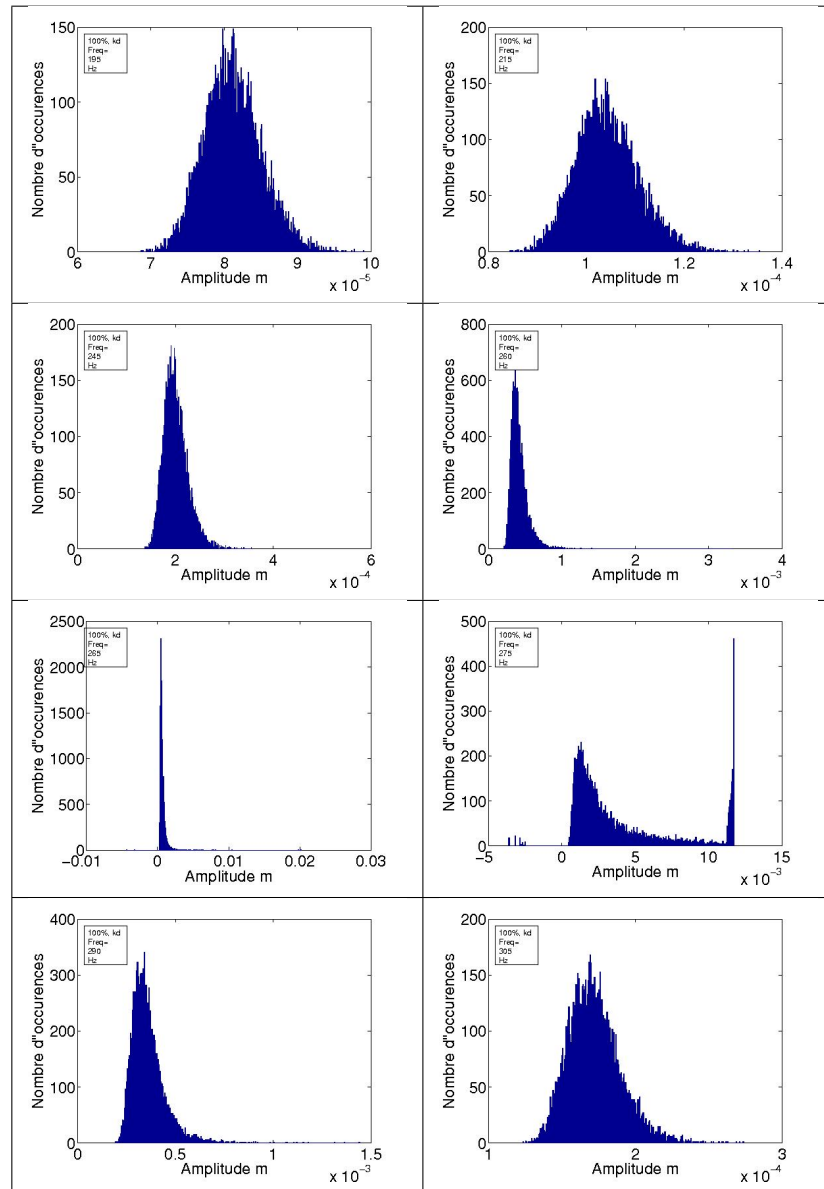


TABLEAU A.2 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 195, 215, 245, 260, 265, 275, 290 et 305 Hz pour $\delta_{kd} = 14.28\%$

A.4.2 Incertitude sur le paramètre μ

A.4.2.1 Cas stick/slip

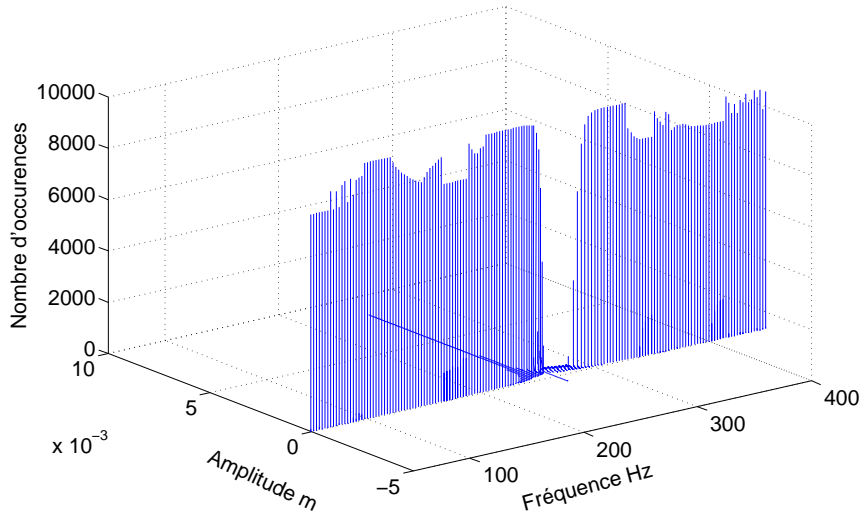


FIGURE A.3 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour chaque fréquence et une variation aléatoire de μ pour 8000 tirages Monte Carlo avec $\delta_\mu = 20\%$

La fig.A.3 donne une représentation 3D des densités de probabilité de la réponse du système à la variation de la variable stochastique μ , pour chaque fréquence. Le tab.A.4 représente les densités de probabilité de la réponse pour quelques fréquences 260 – 265 – 270 – 275 – 280 – 282.5 – 285 – 290.

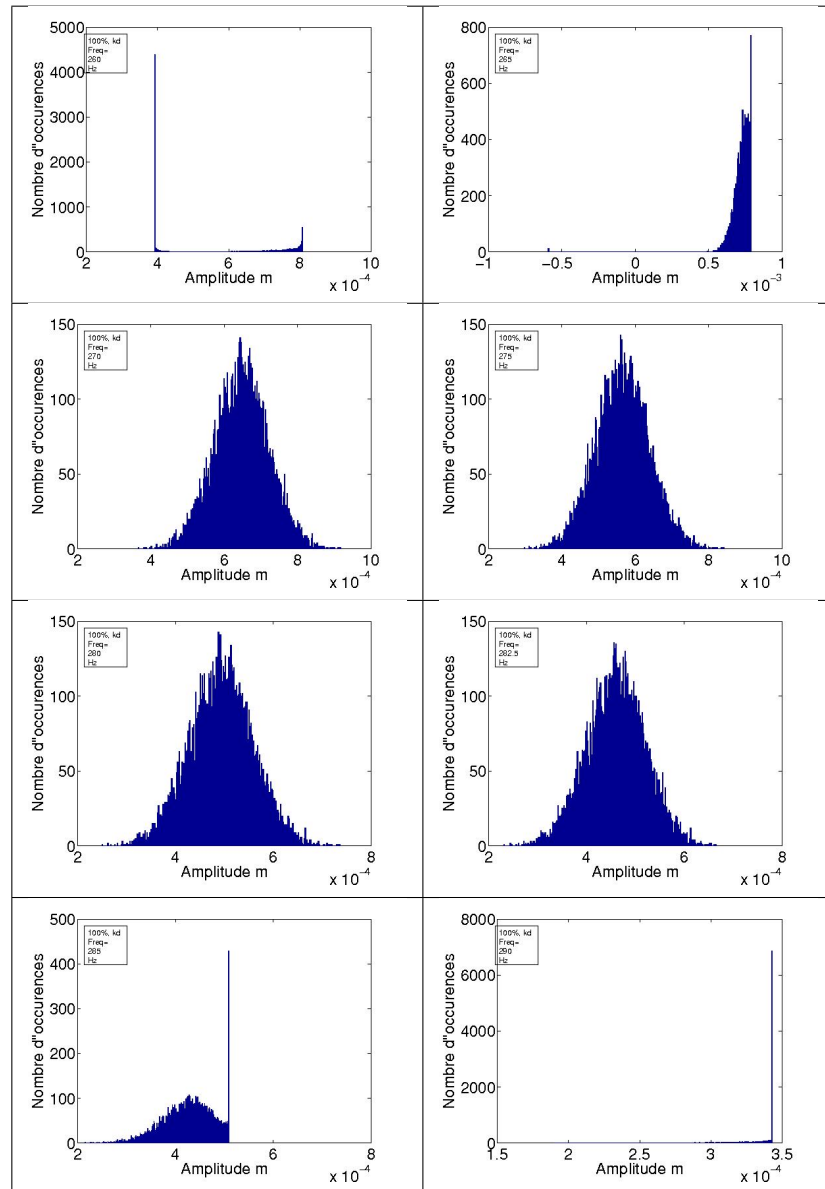


TABLEAU A.3 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 260, 265, 270, 275, 280, 282.5, 285, 290 avec $\delta_{\mu} = 20\%$

A.4.2.2 Cas stick/slip à majorité slip

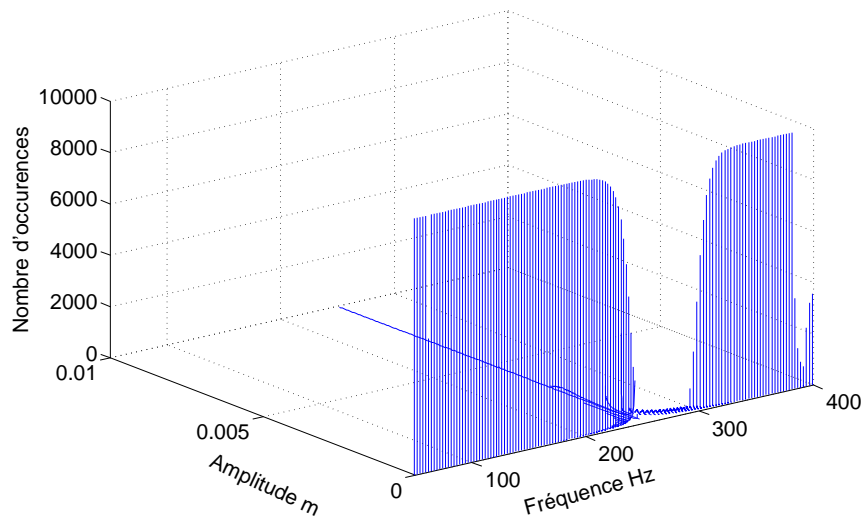


FIGURE A.4 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour chaque fréquence et une variation aléatoire de μ pour 8000 tirages Monte Carlo avec $\delta_\mu = 20\%$

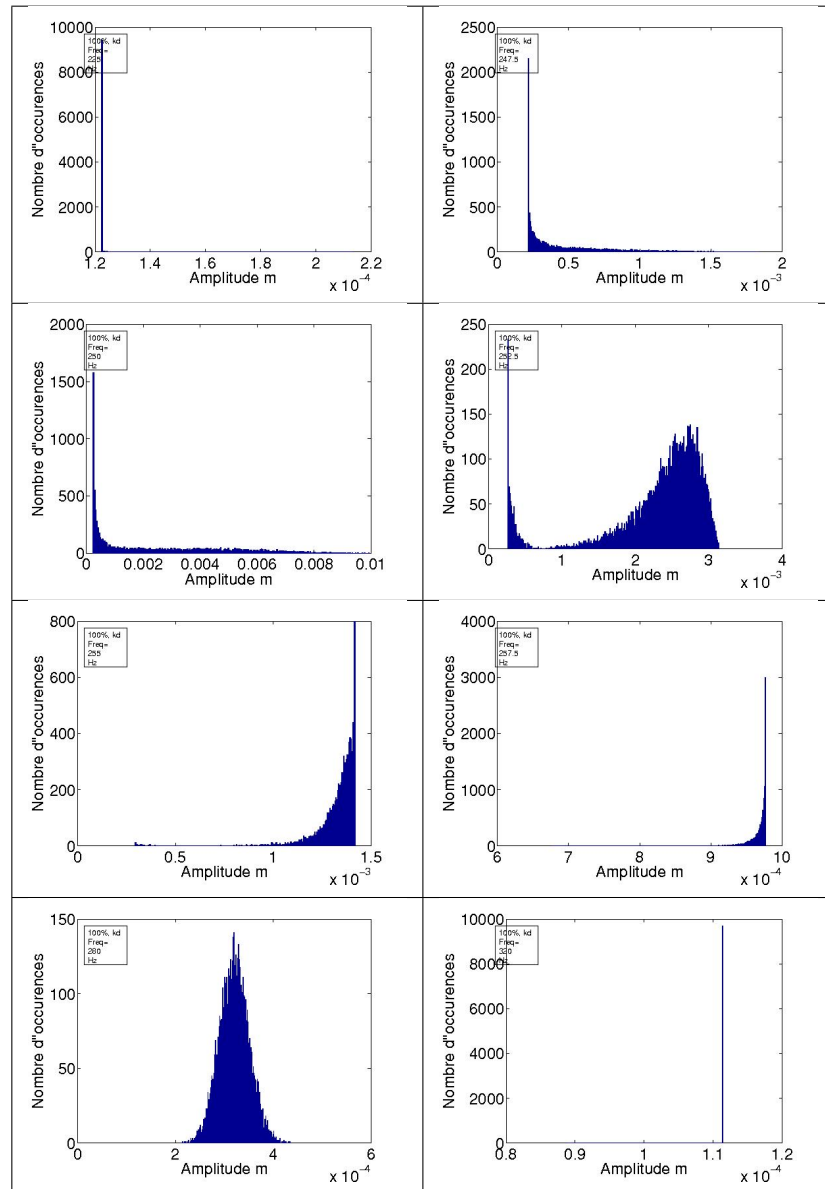


TABLEAU A.4 – Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 225, 247.5, 250, 252.5, 255, 257.5, 280, 320 avec $\delta\mu = 20\%$

A.5 AJUSTEMENT ANALYTIQUE DES DENSITÉS DE PROBABILITÉ DU SYSTÈME À 13 AUBES

A.5.1 Densités de probabilité analytiques

A.5.1.1 Loi normale

Une variable aléatoire réelle X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ strictement positif si cette variable aléatoire réelle X admet pour densité de probabilité la fonction $f(x)$ définie, pour tout nombre réel x , par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{A.6})$$

A.5.1.2 Loi des valeurs extrêmes généralisée

Dans la théorie des probabilités et des statistiques, la loi des valeurs extrêmes généralisée (GEV) est une famille de distributions de probabilités continues développés par la théorie des valeurs extrêmes et contient les familles de Gumbel , Fréchet et Weibull aussi connu sous le nom de type I, II et III . La densité de probabilité de la loi des valeurs extrêmes généralisées est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \zeta \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{(-1/\zeta)-1} \exp \left(- \left[1 + \zeta \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\zeta} \right) \quad (\text{A.7})$$

avec σ est le paramètre d'échelle, ζ est le paramètre de forme et μ est le paramètre d'emplacement.

A.5.1.3 Loi t-location scale

La densité de probabilité de la loi t-location scale est donnée par :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{\nu + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{\nu} \right]^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \quad (\text{A.8})$$

avec σ est le paramètre d'échelle, ν est le paramètre de forme et μ est le paramètre d'emplacement.

A.5.2 Ajustement analytique des densités de probabilité

A.5.2.1 Paramètre kd

On retrouve bien le pic à 253.5 Hz correspondant à la configuration la plus défavorable pour laquelle on peut voir sur les fig.A.5 et A.6 l'allure de la densité de probabilité via les tirages de MC.

Etat stick/slip

La densité de probabilité du facteur d'amplification est donnée dans les fig.A.5 et A.6. Elle est ajustée par une loi de valeurs extrêmes généralisée de paramètres suivants :

$$\begin{aligned}\mu &= 3.371 \\ \sigma &= 0.0819 \\ \xi &= 0.538\end{aligned}$$

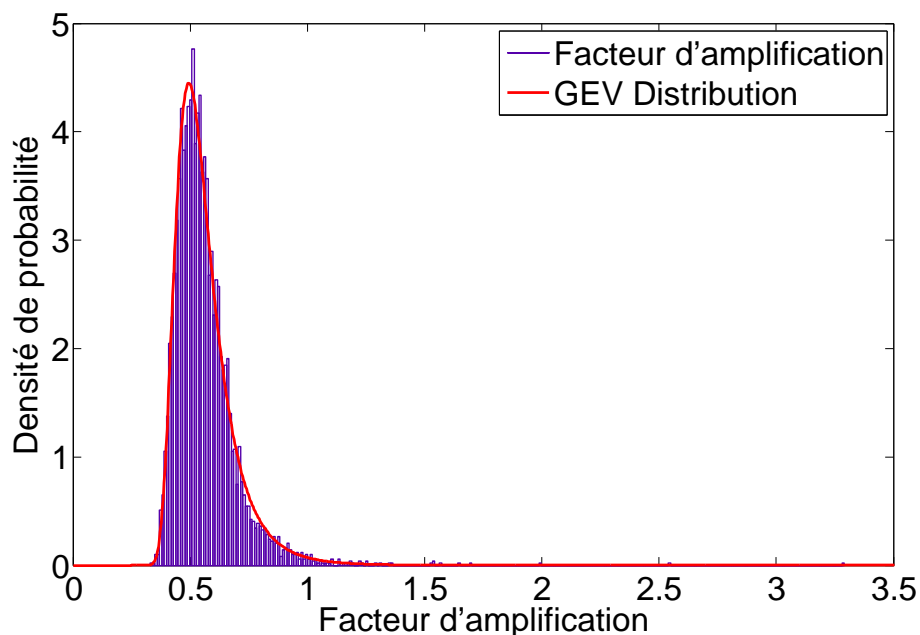


FIGURE A.5 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

Etat stick/slip à majorité stick

La densité de probabilité (fig.A.7 et A.8) est centrée par un facteur d'amplification faible (0.15) donc le système désaccordé sera globalement faiblement amplifié par rapport au système accordé. Elle est ajustée par une loi de valeurs extrêmes généralisée de paramètres suivants :

$$\begin{aligned}\mu &= 1.5739 \\ \sigma &= 0.03436 \\ \xi &= 0.1608\end{aligned}$$

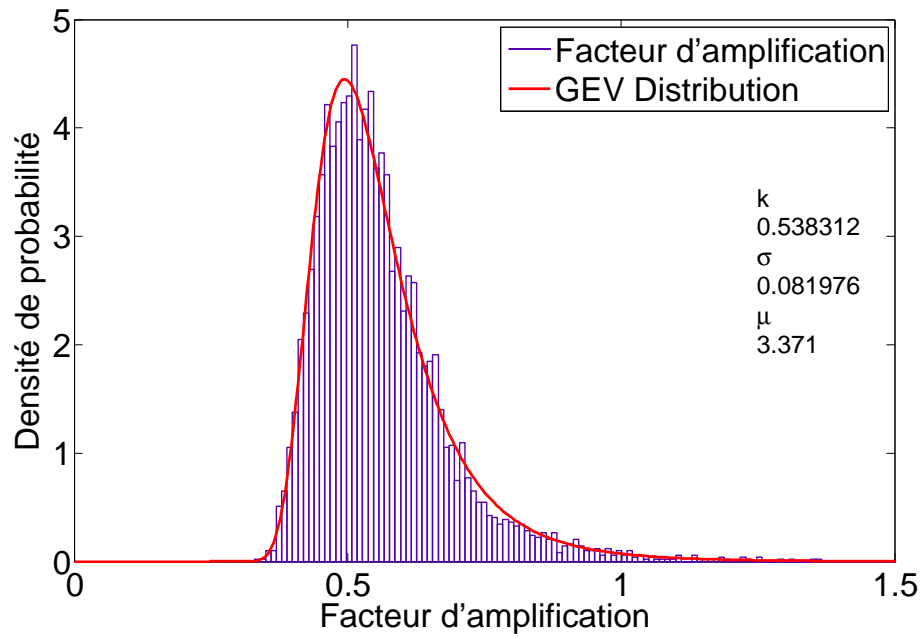


FIGURE A.6 – Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

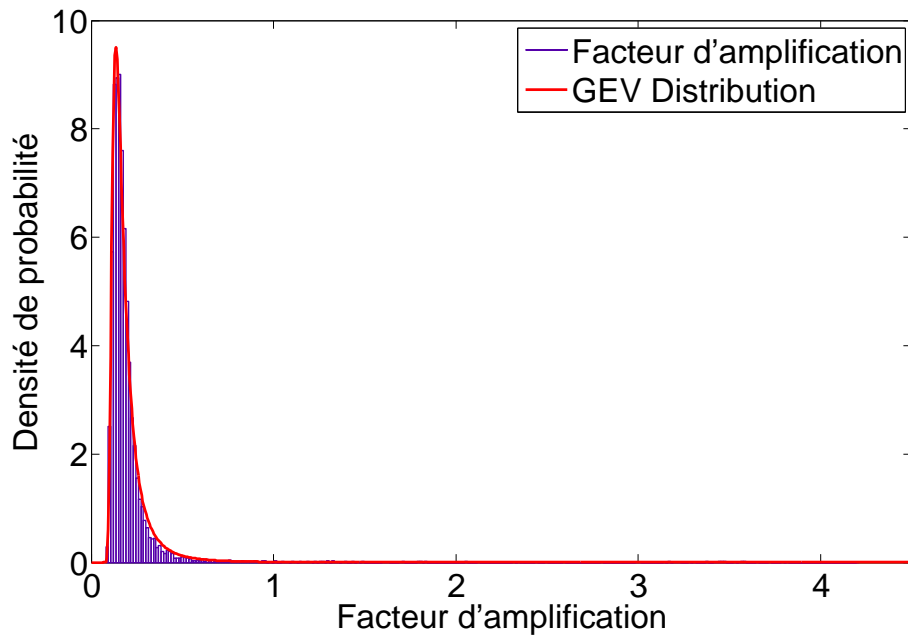


FIGURE A.7 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

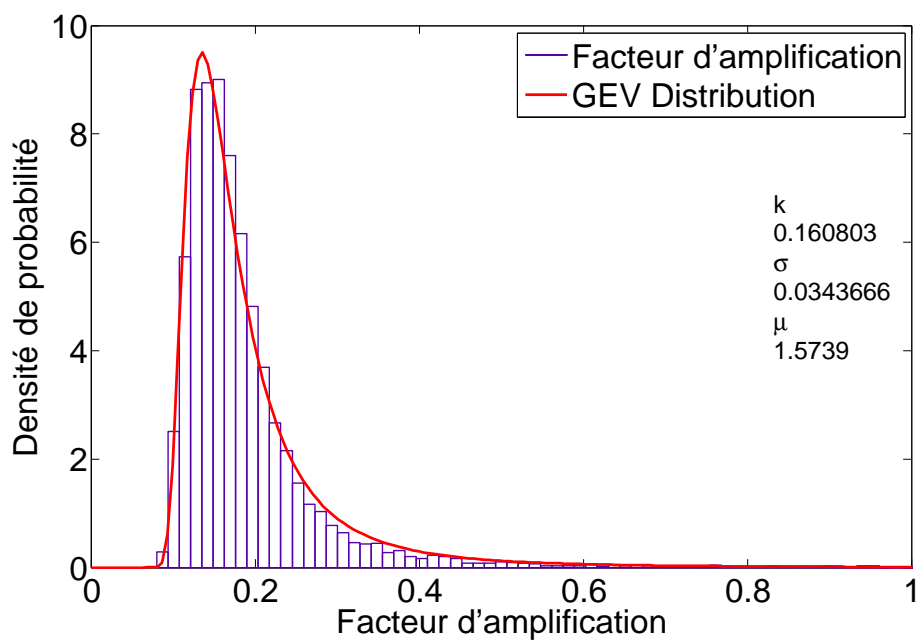


FIGURE A.8 – Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

A.5.2.2 Paramètre F_n

Etat stick/slip

La variation aléatoire de la réponse est donné par la densité de probabilité (fig.A.9). On note que sa forme ressemble à celle d'une loi normale de moyenne 1.08 et d'écart type 0.05.

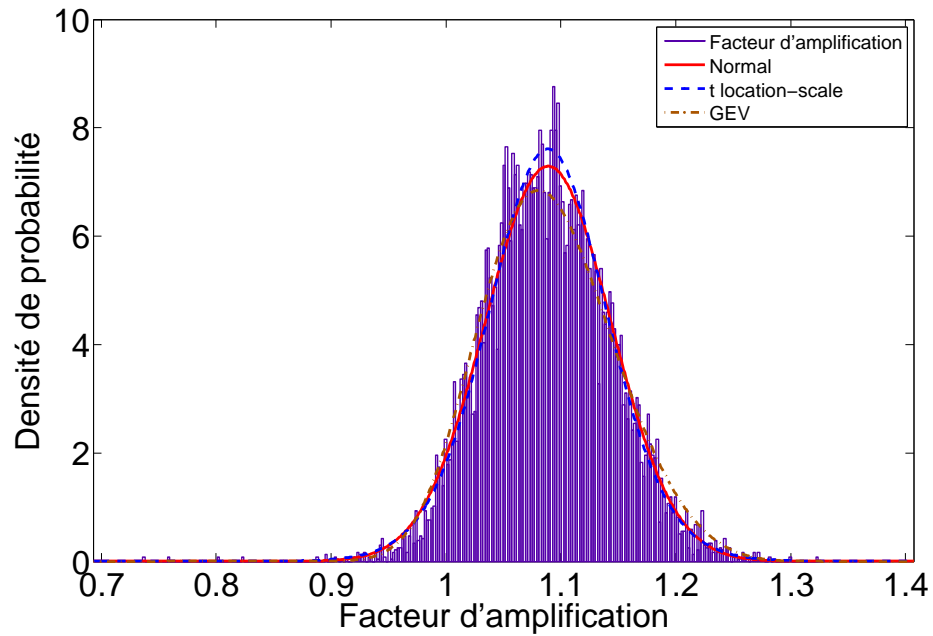


FIGURE A.9 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

Etat stick/slip à majorité slip

La densité de probabilité est donnée sur les fig.A.10 et A.11.Elle est ajustée par une loi de valeurs extrêmes généralisée de paramètres suivants :

$$\mu = 1.2116$$

$$\sigma = 0.0685$$

$$\xi = 0.306$$

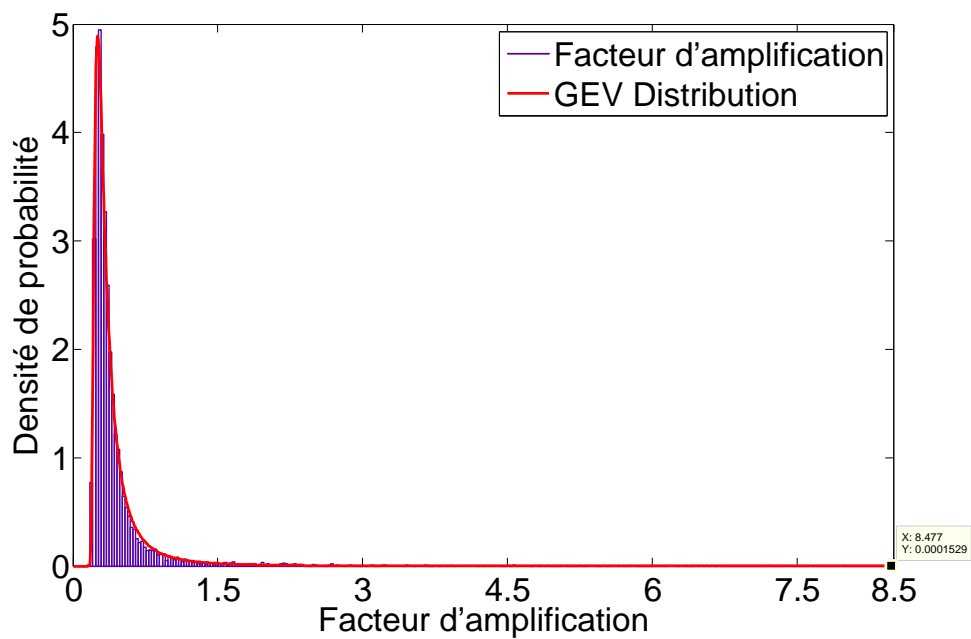


FIGURE A.10 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

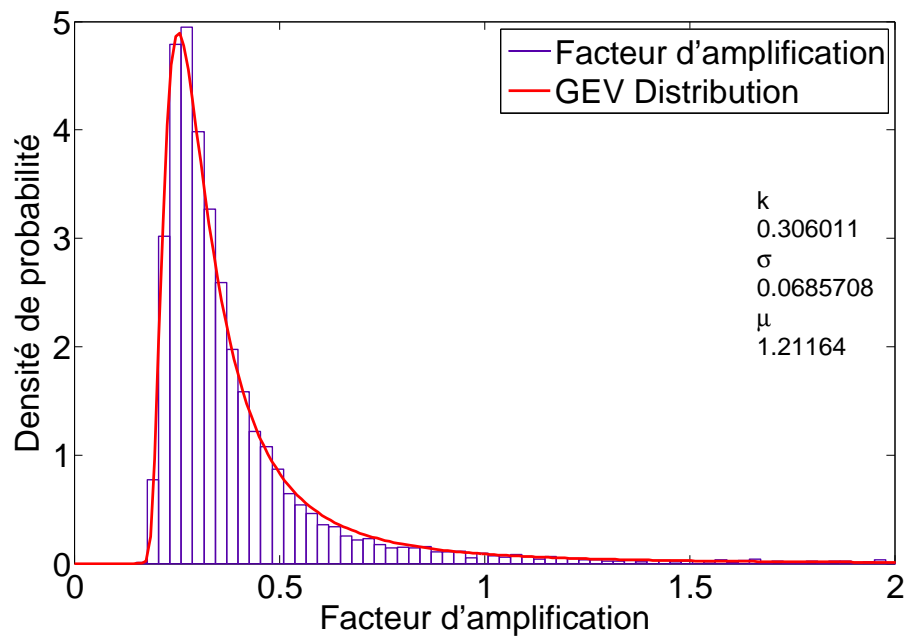


FIGURE A.11 – Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

Etat stick/slip à majorité stick

L'allure globale de cette densité de probabilité est similaire à celle obtenue dans le cas d'un contact stick/slip pour la même variation du paramètre F_n (fig.A.12). Elle est ajustée par une loi de t-location scale de paramètres suivants :

$$\mu = 1.0742$$

$$\sigma = 0.0264$$

$$\nu = 7.0486$$

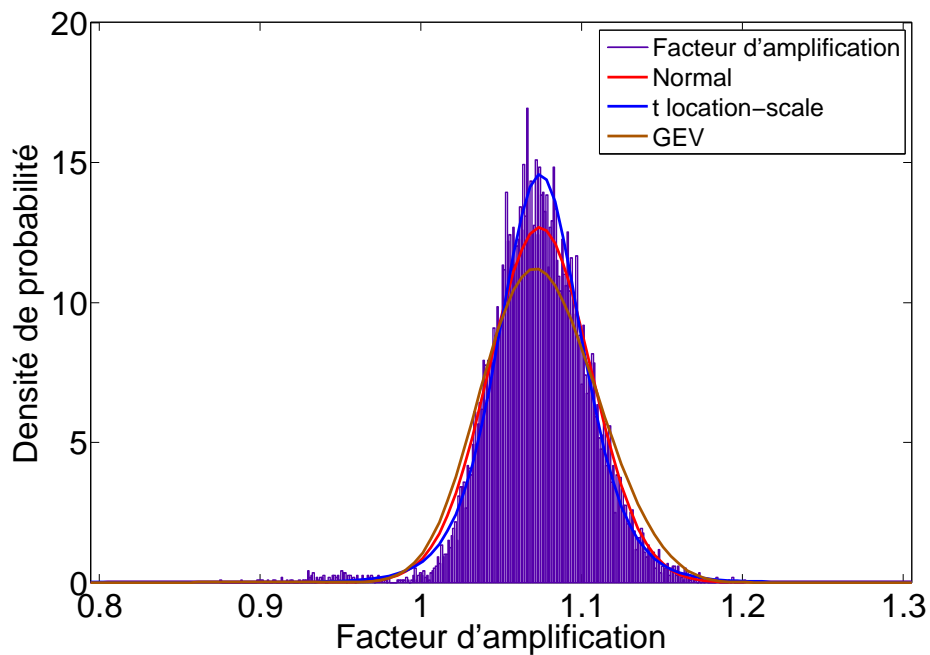


FIGURE A.12 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

A.6 ESSAI D'AJUSTEMENT ANALYTIQUE DES DENSITÉS DE PROBABILITÉ DU SYSTÈME À TREIZE AUBES POUR UNE VARIATION ALÉATOIRE DE kd DANS LE DOMAINE STICK/SLIP À MAJORITÉ SLIP

Suite à une étude similaire au paragraphe 3.5.5 mais située dans le domaine slip ($F_n = 50$ N) la densité de probabilité du facteur d'amplification est présentée à la fig.A.13. L'ajustement montre que la densité de probabilité concorde mieux avec une loi normale de paramètres :

$$\begin{aligned}\mu &= 1.006 \\ \sigma &= 0.0028\end{aligned}$$

Cet ajustement pourrait expliquer la forme du deuxième pic de la fig.3.90. De plus un ajustement possible de la densité de probabilité du facteur d'amplification pour une variation de kd dans le domaine stick/slip à été présenté avec les fig.A.5 et A.6 de l'annexe A.5 de loi analytique GEV. Un changement de paramètres de cette loi pourrait correspondre au premier pic de la densité de probabilité du facteur d'amplification dans le domaine stick/slip à majorité slip (fig.3.90).

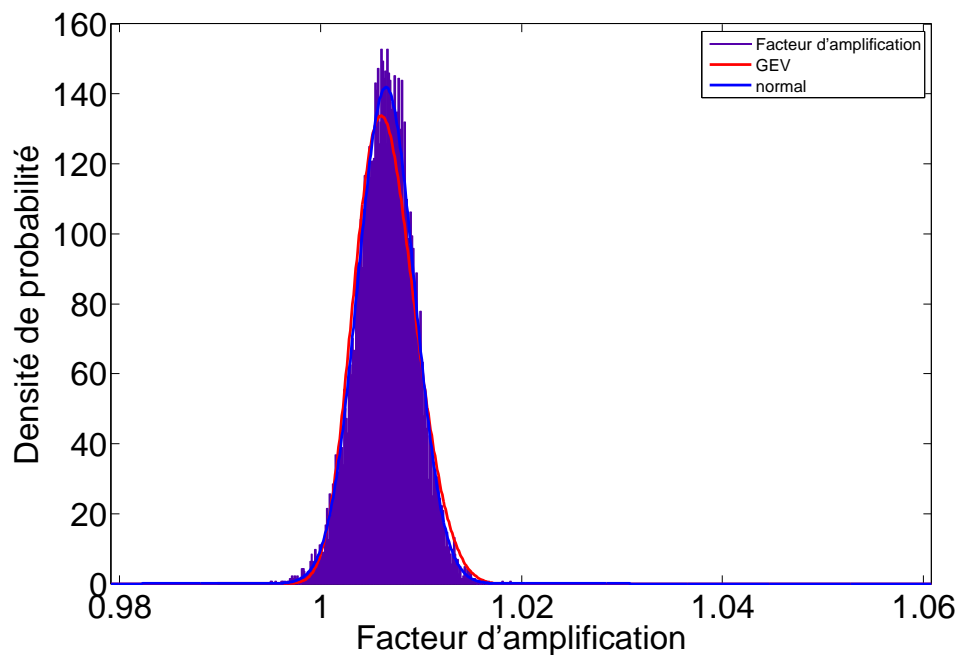


FIGURE A.13 – Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable

LISTE DES FIGURES

1.1	Aube en présence de frotteur sous plateforme	3
1.2	Aubes groupées ensemble par des nageoires	4
1.3	L'amortissement en pied d'aube	5
1.4	Les nageoires	5
1.5	cottage damper [9]	6
1.6	Flat damper [9]	6
1.7	Lacing wire [9]	7
1.8	Courbes Effort/déplacement pour les cas Macroslip (gauche) et Microslip (droite)	8
1.9	Système à 1 degré de liberté :Schématisation du contact selon Coulomb	9
1.10	Exemple d'un corps soumis à un effort tangentiel f_{nl} en contact sur une base rugueuse	9
1.11	Vue microscopique de l'interface de contact S : aspérités écrasées par le glissement	10
1.12	Modèle de comportement de l'interface de frottement	10
1.13	Système à 1 degré de liberté : Schématisation du contact selon Masing	11
1.14	Modélisation de modèle du type Microslip - Mindlin : Modélisation du contact (a), boucle d'hystérésis (b)	13
1.15	Modèle de Iwan : frotteurs Macroslip en parallèle	14
1.16	Modèle de Iwan : frotteurs Macroslip en série	14
1.17	Schématization du modèle Microslip de Menq (a) à l'instant initial $t=0$, (b) en glissement partiel [11]	14
1.18	Modélisation du modèle de contact du type Microslip - Mindlin : Force transmise en fonction du déplacement relatif. Boucles d'hystérésis - modèle de Menq	16
1.19	Raideur équivalente - Cas Microslip du type Menq	17
1.20	Saut de l'amplitude de la réponse forcée [27]	18
1.21	Exemple de corps élastique Ω en contact sur une fondation rigide	20
1.22	Représentation de la discrétisation spatiale en éléments quadrangles à 4 nœuds	23
1.23	Représentation du problème pour une résolution par la méthode de pénalisation	26

1.24	Prototype expérimental existant au LaMCoS [40]	28
1.25	Système masse-ressort (2 aubes avec 1 frotteur)	28
1.26	Contact glissant pour $F_n = 1\text{N}$	29
1.27	Contact stick/slip pour $F_n = 100\text{N}$	30
1.28	Contact stick/slip majorité bloqué pour $F_n = 1000\text{N}$	30
1.29	Maillage du modèle à deux aubes réalisé sous ANSYS WB	31
1.30	Type de contact ANSYS WB et contrôle de la pénétration	32
1.31	Efforts appliqués sur le modèle à deux aubes ANSYS WB	32
1.32	Etat du contact pour un chargement de 10N et une excitation plane	33
1.33	Comportement global du contact,3 : contact fermé et collé et 2 : contact fermé et glissant 10N	33
1.34	Pression exercée sur la surface de contact	34
1.35	Variation de la pression totale exercée sur la surface de contact	34
1.36	Contrainte de frottement tangentielle	34
1.37	Déplacement total en bout d'aube	35
1.38	Etat du contact pour un chargement de 100N et une excitation plane	35
1.39	Comportement global du contact,3 : contact fermé et collé et 2 : contact fermé et glissant 100N	36
1.40	Pression exercée sur la surface de contact 100N	36
1.41	Variation de la pression totale exercée sur la surface de contact 100N	37
1.42	Contrainte de frottement tangentiel 100N	37
1.43	Déplacement total en bout d'aube 100N	38
2.1	Modèle à un seul degré de liberté avec frotteur	45
2.2	Courbe d'hystérésis (Modèle de Masing) : Evolution de $f_{nl}(t)$ sur une période : $\theta = 0 \dots 2\pi$	46
2.3	Forces non linéaires en fonction du temps pour 1HBM, MHBM ($N = 55$)et intégration temporelle pour $F_n = 3\text{N}$, fréquence=20 Hz	53
2.4	Courbes d'Hystérésis obtenues par 1HBM, MHBM ($N=55$) et intégration temporelle pour $F_n = 3\text{N}$, fréquence=20 Hz	54
2.5	Pourcentage d'erreur relative de la force non linéaire calculée avec 1HBM et MHBM	54
2.6	Fonctions de réponses fréquentielles obtenues pour différentes valeurs de force normale par la MHBM et leur pourcentage du stick/slip associé	55
2.7	Amplitude de la réponse fréquentielle pour $F_n = 1\text{N}$	56
2.8	Evolution du déplacement maximal $A_m = \max A_{max} $ en fonction du paramètre τ	57
2.9	Courbes d'hystérésis tracées pour trois états différents de contact	58
2.10	Energie dissipée par frottement sec pour différentes valeurs de force normale	59
2.11	Niveaux de réponse pour différentes valeurs de force normale	60
2.12	Energie dissipée par frottement sec pour différentes valeurs de force normale	60

2.13	Energie dissipée par frottement sec pour $F_n = 100 - 200 - 300 - 350$ N	61
2.14	Energie totale dissipée pour différentes valeurs de forces normales	61
2.15	Rapport de l'énergie dissipée par frottement sec $E_{frottement}$ à l'énergie totale dissipée E_{tot} en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de forces normales	62
2.16	Evolution de l'énergie totale dissipée en fonction du paramètre τ associé au déplacement maximal	63
2.17	Courbe FRF obtenue pour $F_n = 5$ N	64
2.18	$f_{nlcos}(t)$, $f_{nlsin}(t)$, $f_{nl}(t)$ and $x(t)$ en fonction de l'angle θ : $F_n = 5$ N et $f = 20.8$ Hz	64
2.19	$f_{nlcos}(t)$, $f_{nlsin}(t)$, $f_{nl}(t)$ and $x(t)$ en fonction de l'angle θ : $F_n = 5$ N et $f = 20.4$ Hz	65
2.20	Composantes en phase et déphasée de 90 de la force non linéaire avec MHBM	66
2.21	Evolution du déplacement maximal A_{max} en fonction de τ pour $c = 0$ et $c = 0.134$	68
2.22	Evolution des forces en phase et déphasées par unité de déplacement ($F_{p/x}$, $F_{o/x}$) en fonction de τ	69
2.23	Evolution de (F_{nlcos}/A_{max}) et (F_{visc}/A_{max}) les composantes de la force déphasée par unité de déplacement en fonction de τ	69
2.24	Amplitude maximale, énergie de dissipation sec et force déphasée par unité de déplacement en fonction de τ	70
3.1	Formes des modes d'un système à 24 aubes pour les fréquences $1F - 2$ et $2F - 2$	76
3.2	Diagramme fréquentiel pour un système à 24 aubes [55]	76
3.3	Schémas du mouvement des aubes et des diamètres nodaux pour différentes excitations d'ordre moteur	79
3.4	Effet d'un faible désaccordage :dédoublment des fréquences du mode à $H = 3$ [65]	81
3.5	Exemple de réponse accordée et désaccordée en fonction de la fréquence [66]	81
3.6	La dépendance globale des caractéristiques statistiques de la réponse forcée issue des paramètres de conception [80]	87
3.7	FRF pour les valeurs nominales des paramètres du frotteur pour les 3 cas de forces normales et les deux cas extrêmes stick et slip	89
3.8	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre kd pour un contact stick/slip	90
3.9	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre kd pour un contact stick/slip à majorité slip	91
3.10	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre kd pour un contact stick/slip à majorité stick	91
3.11	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre μ pour un contact stick/slip	92

3.12	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre μ pour un contact stick/slip à majorité slip	92
3.13	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre μ pour un contact stick/slip à majorité stick	93
3.14	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre F_n pour un contact stick/slip	94
3.15	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre F_n pour un contact stick/slip à majorité slip	94
3.16	Amplitude de la réponse du système à un degré de liberté à une variation du paramètre F_n pour un contact stick/slip à majorité stick	95
3.17	Convergence de l'écart type σ_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de kd	96
3.18	Convergence de l'écart type σ_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de μ	97
3.19	Convergence de l'écart type σ_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de F_n	97
3.20	Convergence de la moyenne E_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de kd	98
3.21	Convergence de la moyenne E_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de μ	98
3.22	Convergence de la moyenne E_B de l'amplitude B de la réponse non linéaire aléatoire pour différents nombres de tirages MC, due à une variation de F_n	99
3.23	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$	100
3.24	(Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$	101
3.25	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$	101
3.26	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$	102
3.27	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour chaque fréquence pour une variable aléatoire kd pour 8000 tirages Monte Carlo en état de stick/slip avec $\delta_{kd} = 14.28\%$	103
3.28	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$	105

3.29	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$. . .	106
3.30	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$	106
3.31	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{kd} = 14.28\%$	107
3.32	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{kd} = 14.28\%$	108
3.33	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{kd} = 14.28\%$. .	108
3.34	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{kd} = 14.28\%$	109
3.35	Enveloppes minimale, maximale, la moyenne de la réponse en amplitude, ainsi que les réponses déterministes pour $kd = 7.77e4\text{N/m}$, $kd = 2.6e5\text{ N/m}$ et $kd = 1.7e5\text{ N/m}$	109
3.36	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{kd} = 14.28\%$	110
3.37	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{\mu} = 20\%$	111
3.38	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{\mu} = 20\%$	112
3.39	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip : $\delta_{\mu} = 20\%$	112
3.40	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip : $\delta_{\mu} = 20\%$	113
3.41	Enveloppes minimale, maximale, la moyenne de la réponse en amplitude, ainsi que les réponses déterministes pour $\mu = 0.0961$, $\mu = 0.699$ et $\mu = 0.4$	113
3.42	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{\mu} = 20\%$	114
3.43	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{\mu} = 20\%$	115
3.44	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{\mu} = 20\%$	115
3.45	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{\mu} = 20\%$	116
3.46	Enveloppes minimale, maximale, la moyenne de la réponse en amplitude, ainsi que les réponses déterministes pour $\mu = 0.0961$, $\mu = 0.699$ et $\mu = 0.4$	116
3.47	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{\mu} = 20\%$	117

3.48	Enveloppes minimale et maximale (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_\mu = 20\%$	117
3.49	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_\mu = 20\%$	118
3.50	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_\mu = 20\%$	118
3.51	Enveloppes minimales et maximales (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	119
3.52	Enveloppes minimales et maximales (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	120
3.53	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	120
3.54	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	121
3.55	Enveloppes minimales et maximales (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	122
3.56	Enveloppes minimales et maximales (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	122
3.57	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	123
3.58	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité slip : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	123
3.59	Enveloppes minimales et maximales (trait noir) de l'amplitude de la réponse des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	124
3.60	Enveloppes minimales et maximales (trait noir) du paramètre $\theta^* - \theta_0$ des 8000 tirages MC et leur moyenne (trait pointillé bleu) pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	124
3.61	Coefficient de variation δ_B de l'amplitude B maximale pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	125
3.62	Coefficient de variation $\delta_{\theta^* - \theta_0}$ du paramètre $(\theta^* - \theta_0)$ pour le cas stick/slip à majorité stick : $\delta_{F_n} = 6.66\%$	125
3.63	Prototype expérimental existant au LaMCoS [40]	126
3.64	Schématisme d'une poutre du dispositif 13 aubes à géométrie cyclique	127
3.65	Schématisme du dispositif 13 aubes à géométrie cyclique	128
3.66	Réponse des 13 aubes à une excitation ponctuelle accordée sur l'aube 1 en état quasi stick	129
3.67	Réponse des 13 aubes avec $H = 1$ et excitation ponctuelle accordée sur l'aube 1 en état quasi stick	130

3.68	Réponse des 13 aubes avec $H = 2$ et excitation ponctuelle accordée sur l'aube 1 en état quasi stick	130
3.69	Réponse des 13 aubes avec $H = 6$ et excitation ponctuelle accordée sur l'aube 1 en état quasi stick	131
3.70	Réponse des 13 aubes à une excitation ordre moteur $H = 3$ pour différentes valeurs de force normale	131
3.71	Réponse des 13 aubes à une excitation ordre moteur $H = 6$ pour différentes valeurs de force normale	132
3.72	Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 0$ et différentes raideurs de contact	132
3.73	Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 1$ et différentes raideurs de contact	133
3.74	Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 4$ et différentes raideurs de contact	133
3.75	Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 1$ et différents coefficients de frottement	134
3.76	Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 4$ et différents coefficients de frottement	135
3.77	Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 1$ et différentes forces normales du contact	135
3.78	Réponse susperposée des 13 aubes du système accordé avec $H = 4$ et différentes forces normales du contact	136
3.79	Amplitudes de vibrations dans le cas accordé pour différentes valeurs de la charge normale : excitation ordre moteur $H = 3$	137
3.80	Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{kd} = 20\%$ dans le domaine stick/slip en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$	139
3.81	Facteur d'amplification de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de kd avec $\delta_{kd} = 20\%$ et contact stick/slip, $F_n = 121N$ et $H = 3$	139
3.82	Coefficient de variation δ_A de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de kd avec $\delta_{kd} = 20\%$ et un contact stick/slip, $F_n = 121N$ et $H = 3$	140
3.83	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	140
3.84	Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	141
3.85	Repartition des coefficients d'amplifications sur les 13 aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable pour un contact stick/slip	141
3.86	Réponses des 13 aubes pour le tirage le plus défavorable 2057	142
3.87	Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{kd} = 20\%$ dans le domaine stick/slip à majorité slip en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$	143

3.88	Coefficient de variation δ_A de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de kd avec $\delta_{kd} = 20\%$ et un contact stick/slip, $F_n = 70$ N et $H = 3$	144
3.89	Coefficient de variation de l'amplitude A δ_A pour les 13 aubes, désaccordage kd , $\delta_{kd} = 20\%$, contact stick/slip à majorité slip $F_n = 70$ N et $H = 3$	144
3.90	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	145
3.91	Repartition des coefficients d'amplifications sur les aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable pour un contact stick/slip à majorité slip	145
3.92	Réponses des 13 aubes pour le tirage le plus défavorable 5057	146
3.93	Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir)de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{kd} = 20\%$ dans le domaine stick/slip à majorité stick en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$	147
3.94	Coefficient de variation δ_A de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de kd avec $\delta_{kd} = 20\%$ et un contact stick/slip à majorité stick, $F_n = 1000$ N et $H = 3$	148
3.95	Coefficient de variation de l'amplitude A δ_A pour les 13 aubes, désaccordage kd , $\delta_{kd} = 20\%$, contact stick/slip à majorité stick $F_n = 1000$ N et $H = 3$	148
3.96	Repartition des coefficients d'amplifications sur les aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable pour un contact stick/slip à majorité stick	149
3.97	Réponses des 13 aubes pour le tirage le plus défavorable 6746	149
3.98	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	150
3.99	Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	150
3.100	Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir)de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ dans le domaine stick/slip en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$	153
3.101	Coefficient de variation δ_A de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de F_n avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ et un contact stick/slip, $F_n = 121$ N et $H = 3$	153
3.102	Facteur d'amplification de l'amplitude A des 13 aubes pour un désaccordage de F_n avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ et contact stick/slip, $F_n = 121$ N et $H = 3$	154
3.103	Repartition des coefficients d'amplifications sur les 13 aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable pour un contact stick/slip	154
3.104	Réponses des 13 aubes pour le tirage le plus défavorable 6525	155
3.105	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	155

3.106	Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ dans le domaine stick/slip à majorité slip en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$	156
3.107	Coefficient de variation de l'amplitude A δ_A pour les 13 aubes, désaccordage F_n , $\delta_{F_n} = 6.66\%$, contact stick/slip à majorité slip $F_n = 70$ N et $H = 3$	157
3.108	Facteur d'amplification maximale sur toutes les aubes et tous les tirages pour un désaccordage F_n , $\delta_{F_n} = 6.66\%$, contact stick slip à majorité slip $F_n = 70$ N et $H = 3$	157
3.109	Repartition des coefficients d'amplifications sur les aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable	158
3.110	Amplitude de la réponse du tirage le plus défavorable 11530, pour les 13 aubes	158
3.111	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	159
3.112	Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	159
3.113	Moyenne (-. rouge) et enveloppe (trait noir) de toutes les réponses aléatoires du système désaccordé excité par $H = 3$ avec $\delta_{F_n} = 6.66\%$ dans le domaine stick/slip à majorité stick en fonction de la fréquence, comparées à la réponse du système accordé (- - bleu) excité par $H = 3$	161
3.114	Coefficient de variation de l'amplitude A δ_A pour les 13 aubes, désaccordage F_n , $\delta_{F_n} = 20\%$, contact stick/slip à majorité stick $F_n = 1000$ N et $H = 3$	162
3.115	Facteur d'amplification maximale sur toutes les aubes et tous les tirages pour un désaccordage F_n , $\delta_{F_n} = 6.66\%$, contact stick/slip à majorité stick $F_n = 1000$ N et $H = 3$	162
3.116	Repartition des coefficients d'amplifications sur les aubes pour la fréquence de la configuration la plus défavorable	163
3.117	Amplitude de la réponse du tirage le plus défavorable 6780, pour les 13 aubes	163
3.118	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	164
A.1	histogrammes des réponses aléatoires pour chaque fréquence et une variation aléatoire de kd pour 8000 tirages Monte Carlo avec $\delta_{kd} = 14.28\%$	181
A.2	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour chaque fréquence et une variation aléatoire de kd pour 8000 tirages Monte Carlo avec $\delta_{kd} = 14.28\%$	183
A.3	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour chaque fréquence et une variation aléatoire de μ pour 8000 tirages Monte Carlo avec $\delta_{\mu} = 20\%$	185
A.4	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour chaque fréquence et une variation aléatoire de μ pour 8000 tirages Monte Carlo avec $\delta_{\mu} = 20\%$	187

A.5	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	190
A.6	Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	191
A.7	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	191
A.8	Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	192
A.9	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	193
A.10	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	194
A.11	Zoom de la densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable	195
A.12	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	196
A.13	Densité de probabilité du facteur d'amplification sur toutes les aubes et pour la fréquence du cas le plus défavorable . .	197

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Résumé du cas collé (stick)	47
2.2	Résumé du cas glissant (slip)	48
3.1	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 100, 150, 250, 260, 262.5, 265, 300 et 400 Hz	104
3.2	Fréquences propres des modes à n diamètres du système à géométrie cyclique considéré	129
3.3	Valeurs du paramètre aléatoire kd_i correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube $i, i = 1 \dots 13$	138
3.4	Valeurs du paramètre aléatoire kd_i correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube $i, i = 1 \dots 13$	146
3.5	Valeurs du paramètre aléatoire kd_i correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube $i, i = 1 \dots 13$	151
3.6	Valeurs du paramètre aléatoire F_{n_i} correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube $i, i = 1 \dots 13$	152
3.7	Valeurs du paramètre aléatoire F_{n_i} correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube $i, i = 1 \dots 13$	160
3.8	Valeurs du paramètre aléatoire F_{n_i} correspondants à la configuration la plus défavorable pour chaque aube $i, i = 1 \dots 13$	164
A.1	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 240, 245, 247.5, 250, 270, 285, 310 et 315 Hz pour $\delta_{kd} = 14.28\%$. .	182
A.2	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 195, 215, 245, 260, 265, 275, 290 et 305 Hz pour $\delta_{kd} = 14.28\%$. . .	184
A.3	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 260, 265, 270, 275, 280, 282.5, 285, 290 avec $\delta_{\mu} = 20\%$	186
A.4	Histogrammes des amplitudes des réponses aléatoires pour les fréquences (gauche à droite puis de haut en bas) : 225, 247.5, 250, 252.5, 255, 257.5, 280, 320 avec $\delta_{\mu} = 20\%$	188