HAL open science

Coordination et robustesse des systèmes dynamiques multi-agents

Samuel Martin

To cite this version:

Samuel Martin. Coordination et robustesse des systèmes dynamiques multi-agents. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT : 2012GRENM101 . tel-00782478v2

HAL Id: tel-00782478

https://theses.hal.science/tel-00782478v2

Submitted on 22 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel :

Présentée par

Samuel Martin

Thèse dirigée par **Guillaume James**
et codirigée par **Antoine Girard**

préparée au sein **du Laboratoire Jean Kuntzmann**
et de **l'Ecole Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Coordination et robustesse des systèmes dynamiques multi-agents

Thèse soutenue publiquement le ,
devant le jury composé de :

M. Jamal Daafouz
PR, Université de Lorraine, Rapporteur
M. Robert MacKay
PR, Université de Warwick, Rapporteur
M. Pierre-Alexandre Bliman
DR, INRIA Paris - Rocquencourt, Examinateur
M. Vincent Blondel
PR, Université Catholique de Louvain, Examinateur
M. Carlos Canudas-de-Wit
DR, Université de Grenoble, Examinateur
M. Guillaume James
PR, Université de Grenoble, Directeur de thèse
M. Antoine Girard
MdC, Université de Grenoble, Co-Directeur de thèse

Remerciements

La thèse, travail souvent solitaire, ne peut aboutir qu'avec l'aiguillage, l'encouragement, et le soutien de nombreuses personnes. Je tiens ici à les remercier.

Premièrement, je remercie Antoine Girard, mon co-directeur de thèse. Antoine a toujours été d'excellent conseil. Tout en me laissant une liberté suffisante dans mes recherches, il a su m'aiguiller lorsque nécessaire. Sa grande précision de pensée et ses idées lucides ont été pour moi d'une grande inspiration. Je remercie Guillaume James mon directeur de thèse pour les discussions scientifiques et informelles. Sa bonne humeur est communicative. Ses conseils lors de la rédaction du manuscrit ont été décisifs.

Je souhaite remercier chaleureusement mes deux rapporteurs, Jamal Daafouz et Robert MacKay qui ont accepté de relire mon manuscrit en détail et pris le temps d'écrire un rapport. Je remercie Vincent Blondel pour avoir accepté d'être le président de mon jury de thèse et pour m'avoir donné l'occasion de présenter mes travaux à l'Université Catholique de Louvain. Je remercie Carlos Canudas-de-Wit pour ses encouragements lors de nos rencontres durant la thèse et pour avoir accepté d'être mon examinateur. Merci enfin à Pierre-Alexandre Bliman, pour s'être intéressé à mes travaux et avoir accepté le rôle d'examinateur.

Merci à Ali Jadbabaie et George J. Pappas pour m'avoir accueilli à l'Université de Pennsylvanie pendant l'été 2011. Ce séjour a permis plusieurs rencontres bienheureuses. Merci à Arastoo Fazeli, pour son enthousiasme concernant mes travaux et sa collaboration. Merci à Victor M. Preciado pour nos discussions scientifiques fructueuses.

Un grand merci à Lisa Haye, collaboratrice enthousiaste et amie, pour m'avoir initié à la sociologie des réseaux de controverse et pour avoir partagé ses précieuses donnnées. J'ai ainsi pu utiliser mes connaissances mathématiques dans ce domaine passionnant.

Merci à Rodney Coleman pour son intérêt pour mon sujet de thèse et les relectures d'articles. Merci à Boris Thibert et Claudine Chaffy pour leur investissement dans la prépa-

ration des enseignements que nous avons partagés.

Merci à ceux qui ont façonné mon esprit critique et ma pensée scientifique, en particulier Mr Darge, Mr Mascaro, Mr Meniel et Mr Princiaux, des enseignants inspirés.

Je remercie le contribuable, qui a financé sans contrepartie, via l'Etat français, cette thèse et mes années d'étude en France et en séjours à l'étranger. Je lui suis redevable.

Parce que le labo, ce n'est pas que le travail, je salue les collègues pour les bons moments passés, en particulier les doctorants et post-doctorants du laboratoire Jean Kuntzmann pour les pauses café, les midis, les soirées (et les relectures de chapitres de ce manuscrit). Merci à Souleymane, Roland, Madison, Thomas, Amin, Lukas, David, Brice, Constantin, Euriell, Pierre-Jean et tous les autres.

Un grand merci à mes colocs, Alizée, Aurore, Charlotte, Emma, Fab, Léo, Mélie, Sara ; leur présence, leur soutien, leur amitié, leur tolérance, les bons petits plats (et les Colons de Catane) ont largement égayé mes deux dernières années de thèse.

Merci à Lily et Jenny pour leur relecture d'articles, leur aide en Anglais, les beaux voyages et le reste.

Merci aux membres d'Effet Papillon pour leur engagement dans la préservation de l'environnement et les bons moments passés ensemble.

Merci à la femme de ménage du Bureau 16, représentante de ces personnes discrètes, bienveillantes, souvent anonymes, et sans qui notre travail serait impossible.

Une pensée toute particulière va à ma famille, mes modèles du quotidien. Merci à ma mère, mon père, Anne, Bernard. Merci aux petites pousses qui grandissent bien vite, Yaël, Coline et Lilian. Merci à Solène et Kevin. Merci à Laure et Nathalie pour avoir fait le déplacement pour assister à la soutenance, cela m'a beaucoup touché et aidé.

Merci à Marion...

Table des matières

Table des matières i

1 Introduction 3
1.1 Introduction générale . . . 3
1.2 Contexte . . . 4
1.2.1 Comportements collectifs dans les systèmes naturels . . . 4
1.2.2 Applications des systèmes multi-agents . . . 5
1.2.3 Contrôle décentralisé face au contrôle centralisé . . . 6
1.2.4 Communautés scientifiques des systèmes dynamiques multi-agents . . . 7
1.2.5 Mathématiques utiles à l'étude des systèmes multi-agents . . . 8
1.2.6 Lien avec l'étude des réseaux sociaux . . . 9
1.3 Résumé des contributions . . . 10
1.4 Publications . . . 21
1.4.1 Publications en lien avec la thèse . . . 21
1.4.2 Publications non liées à la thèse . . . 22

I Consensus dans les systèmes multi-agents 23

2 Consensus dans les systèmes multi-agents 25
2.1 Présentation . . . 25
2.1.1 Présentation du système . . . 25
2.1.2 Prémices de l'analyse . . . 27
2.1.3 Lien avec la théorie algébrique des graphes . . . 28
2.2 Etat de l'art : conditions pour le consensus . . . 29
2.2.1 Connexité sur un intervalle de temps borné . . . 29

2.2.2 Connexité sur un intervalle de temps non borné 30
2.2.3 Interactions équilibrées 30
2.2.4 Graphe des poids d'interaction intégrés 31
2.2.5 Synthèse 33
2.3 Divergence des poids d'interaction réciproques 34
2.3.1 Présentation du résultat 34
2.3.2 Discussion des hypothèses et exemples illustratifs 37
2.3.3 Estimation de la vitesse de contraction du diamètre 41
2.4 Discussion et perspectives 51

II Alignement en vitesse dans les systèmes multi-agents (Flocking) 53

3 Introduction au flocking 55
3.1 Origine et définition 55
3.2 Etat de l'art 56
3.2.1 Alignement en vitesse 56
3.2.2 Alignement et force de rappel 59
3.2.3 Flocking stochastique 61
3.2.4 Synthèse 63
3.3 Présentation de l'étude 63

4 Modèle déterministe avec interactions métriques 65
4.1 Description du problème 65
4.2 Approche algébrique de l'alignement en vitesse 66
4.3 Conditions suffisantes pour l'alignement en vitesse 67
4.4 Robustesse du graphe 68
4.4.1 Préservation de sous graphe 68
4.4.2 Sous graphe cœur 71
4.4.3 Optimisation de la borne 74
4.5 Optimalité de la borne 78
4.6 Sources de conservatisme 84
4.6.1 Majoration du diamètre par la norme 2 84
4.6.2 L'importance de l'orientation des vitesses 86
4.6.3 Evolution de la topologie au cours du temps 87
4.6.4 Amélioration de la condition pour le flocking 89

5 Modèle stochastique **93**
5.1 Introduction . . . 93
5.2 Présentation du problème . . . 94
5.3 Consensus au sein d'un réseau aléatoire . . . 95
5.4 Probabilité de l'alignement en vitesse . . . 96
5.4.1 Résultat principal . . . 96
5.4.2 Processus de majoration . . . 98
5.5 Application aux réseaux sans fil . . . 104
5.5.1 Calcul et optimisation de la borne . . . 105
5.5.2 Simulations . . . 107

6 Interactions topologiques **109**
6.1 Introduction . . . 109
6.1.1 Présentation du système . . . 109
6.1.2 Approche . . . 110
6.2 Conditions suffisantes pour l'alignement en vitesse . . . 111
6.2.1 Structure hiérarchique . . . 111
6.2.2 Résultat principal . . . 114
6.2.3 Contraction du diamétre . . . 115
6.2.4 Robustesse de la structure hiérarchique . . . 117
6.2.5 Preuves . . . 120
6.3 Etude numérique . . . 127
6.3.1 Optimisation de la borne . . . 127
6.3.2 Simulations . . . 129

7 Discussions **133**
7.1 Contributions . . . 133
7.2 Perspectives . . . 134

III Analyse de réseaux sociaux **137**

8 Analyse de réseaux sociaux **139**
8.1 Introduction . . . 139
8.2 Présentation de la problématique . . . 140
8.2.1 Les loisirs motorisés hors route . . . 140
8.2.2 Les sources de conflit . . . 141

8.2.3 Des conflits à la controverse et vice-versa . . . 141
8.2.4 La place des objets dans la controverse . . . 142
8.2.5 L'incertitude au cœur de la controverse . . . 143
8.2.6 Le pouvoir au sein de la controverse . . . 143
8.3 Présentation des données disponibles . . . 144
8.3.1 Méthode d'investigation . . . 144
8.3.2 Présentation des scènes étudiées . . . 145
8.3.3 Codage des données . . . 147
8.3.4 Précautions . . . 149
8.4 Agrégation des données . . . 150
8.4.1 Agrégation pour la visualisation . . . 150
8.4.2 Agrégation pour les calculs de centralité . . . 151
8.5 Visualisation . . . 152
8.5.1 Présentation des algorithmes de spatialisation . . . 153
8.5.2 Spatialisation par groupes . . . 155
8.6 Analyse quantitative . . . 156
8.6.1 Sélection des mesures de centralité . . . 156
8.6.2 Q-mesures de centralité . . . 164
8.7 Application au réseau social . . . 167
8.7.1 Résultats de la spatialisation . . . 167
8.7.2 Résultats de l'analyse quantitative . . . 171
8.8 Interprétation des résultats . . . 179
8.8.1 Le cœur du réseau . . . 180
8.8.2 Le conflit, créateur de lien . . . 182
8.8.3 Des objets qui mobilisent . . . 182
8.8.4 Lien entre positions topologiques et opinions . . . 185
8.8.5 Limites de l'interprétation . . . 187
8.9 Conclusions et Perspectives . . . 187

9 Conclusion **191**

Bibliographie **195**

A Notations et notions élémentaires **205**
A.1 Eléments d'algèbre et théorie des ensembles . . . 205
A.2 Eléments de la théorie des graphes . . . 206
A.3 Eléments de la théorie algébrique des graphes . . . 207

A.4 Eléments de la théorie des systèmes dynamiques 209
A.5 Eléments de la théorie des processus stochastiques 210

B Matériel complémentaire 213

Introduction

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction générale

Les récents développements en robotique tels que la miniaturisation des composants, l'augmentation de la taille de stockage et des capacités de calcul ainsi que l'apparition des dispositifs de communication sans fils permettent la conception de systèmes d'agents coopératifs. Pour exploiter les potentiels de ces dispositifs, il est nécessaire de disposer d'une capacité à analyser et à contrôler ces types de systèmes. Cette thèse s'inscrit dans cette direction de recherche en présentant l'analyse de systèmes dynamiques multi-agents. Un système dynamique multi-agents est un système composé d'une multitude d'entités ou agents interagissant ensemble qui évoluent dans le temps dans le but d'effectuer certaines tâches. L'utilisation de tels systèmes est particulièrement bien adaptée lorsque la tâche à réaliser est trop coûteuse en énergie ou trop complexe pour être réalisée par une seule entité.

Lorsque plusieurs agents interagissent et échangent des données, il est souvent nécessaire qu'ils puissent s'accorder sur des valeurs communes (un objectif à atteindre, un lieu de rendez-vous, une répartition de la charge de travail, etc.). Ainsi, le problème de consensus joue un rôle central dans l'étude des systèmes multi-agents. Dans le cadre du contrôle d'un groupe d'agents mobiles, il est souhaitable d'obtenir un mouvement collectif cohérant : les agents restent à proximité les uns des autres, évitent les collisions et adoptent une direction commune. Un tel type de mouvement collectif est appelé *flocking* en référence aux nuées d'oiseaux (*flock* en anglais) qui possèdent ces propriétés. Pour le flocking, il s'agit en particulier pour les agents de trouver un consensus sur la direction de leurs déplacements. Dans la première partie de ce manuscrit, nous présentons un algorithme de consensus

et cherchons à déterminer des conditions amenant le groupe vers un consensus. Dans la seconde partie, nous présentons un algorithme de flocking et cherchons à déterminer des conditions amenant le groupe à adopter un comportement de flocking.

L'étude des systèmes multi-agents possède des liens avec l'analyse des réseaux de grande taille tant via les supports théoriques utilisés que par les applications qui en découlent. Ces deux domaines ont pour application l'analyse des dynamiques d'opinions et des réseaux sociaux. Cette proximité de disciplines a rendu possible une collaboration avec des sociologues dont les travaux ont porté sur l'analyse du réseau d'interaction de la controverse dans les loisirs motorisés en montagne. Les résultats de cette collaboration sont présentés dans la troisième partie du manuscrit.

Un chapitre présentant les notations et les notions mathématiques élémentaires utilisées dans ce manuscrit est donné en annexe A. Le lecteur pourra consulter cette annexe après la lecture du présent chapitre d'introduction.

1.2 Contexte

1.2.1 Comportements collectifs dans les systèmes naturels

Lorsqu'on travaille sur les systèmes dynamiques multi-agents, l'objectif est souvent de parvenir à la conception d'une multitude d'entités relativement simples, capables d'interagir entre elles pour réaliser une tâche complexe. On parle alors de phénomène émergent. Une telle approche est nécessaire ou avantageuse lorsque la conception d'une entité unique pour la réalisation de la même tâche aurait été trop compliquée ou simplement trop coûteuse. Il semble que certains systèmes biologiques, ayant été façonnés par la sélection naturelle, réalisent exactement ce type de comportements. Cela explique pourquoi les mécanismes utilisés pour la conception des systèmes dynamiques multi-agents s'inspirent largement de ces systèmes naturels. Comprendre les mécanismes des phénomènes émergents permet de les reproduire lors de la conception des systèmes dynamiques multi-agents.

Nous donnons ici quelques exemples de comportements collectifs naturels en se concentrant sur ceux qui mettent en jeu le processus de consensus, objet d'étude principal de cette thèse. Le lecteur intéressé par une description relativement exhaustive des phénomènes de mouvements collectifs pourra consulter le rapport [VZ17].

Le processus de consensus apparait directement dans les mouvements collectifs d'animaux vivant en groupe qui peuvent aller de quelques individus à plusieurs milliers voir millions. Un des exemples de mouvement collectif les plus spectaculaires est celui formé par les nuées d'étourneaux autour des zones de nidification. On peut les voir former un

amas aérien se déplaçant comme s'il s'agissait d'un unique individu. Il a été récemment observé que chaque individu est influencé en moyenne uniquement par ses six ou sept plus proches voisins [BCC+08]. Le moyen de communication, ici la vision, permet aux oiseaux de s'accorder sur la direction et la vitesse à adopter : il s'agit d'un processus de consensus dont l'objet est la vitesse de vol. Des comportements similaires sont observés chez les bancs de poissons ainsi que les troupeaux de certains mammifères. De même, il est possible de relier ce phénomène aux mouvements de panique chez les humains ; ce dernier comportement diffère des autres par la présence de contacts physiques entre les individus, ce qui peut engendrer des phénomènes d'arc-boutement.

Un comportement collectif analogue est le suivant. Les cardiomyocytes, cellules du tissu musculaire cardiaque, déchargent un courant électrique de manière périodique permettant au cœur de battre. Ces cellules communiquent en transmettant un courant via les stries scalariformes. La présence d'un groupe de cellules identiques communicantes rend le mécanisme robuste vis à vis d'une défaillance de l'une d'entre elles. Ceci est une des caractéristiques fondamentales des comportements collectifs sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe 1.2.3. Similairement, les lucioles ont la capacité de scintiller de manière synchronisée. Pour cela, chacune réagit aux signaux de ses congénères en avançant ou retardant son propre signal.

Ces comportements mettent en jeu la synchronisation d'oscillateurs couplés. L'étude théorique de ce type de phénomène (la synchronisation sur des variétés non-linéaires) a notamment fait l'objet des travaux d'Alain Sarlette durant son doctorat [Sar09]. La synchronisation de la phase d'oscillateurs diffère du processus de consensus étudié ici, puisque ce dernier porte sur des espaces linéaires alors que la phase appartient au cercle unité.

1.2.2 Applications des systèmes multi-agents

La robotique fournit des applications directes des systèmes dynamiques multi-agents et de la théorie du consensus. Ces concepts sont sollicités lorsque l'on souhaite coordonner une équipe de robots dans le but de réaliser une tâche. Les robots utilisés peuvent évoluer dans des milieux variés (terre, air, eau) et sont amenés à réaliser des tâches telles que l'exploration d'un domaine donné, par exemple à la recherche d'une source d'énergie [BASCDW11]. La flotte peut aussi se déployer sur un territoire afin d'effectuer des mesures ou des opérations de surveillance. Une équipe de robots peut aussi servir à effectuer la maintenance de postes fixes dispersés dans une région donnée. Dans tous ces exemples, les robots doivent interagir entre eux pour se coordonner. Les outils de communication disponibles (radio, wifi...) disposent souvent d'une portée limitée. La préservation de la connexion au sein du

groupe devient alors un des objectifs à satisfaire pour que la tâche puisse être accomplie avec succès. Une des possibilités pour garantir cette contrainte est le déplacement en *formation* permettant de préserver la structure géométrique du groupe.

Proche de la robotique, la conception de réseaux de capteurs nécessite aussi l'utilisation des théories liées aux systèmes dynamiques multi-agents. Les réseaux de capteurs permettent des relevés de mesure sur des zones étendues. Pour des raisons de coût, les capteurs utilisés ont des portées limitées pour communiquer. Ceci ne leur permet pas de transmettre leurs mesures directement à une unité centrale lointaine. L'information est alors transmise de proche en proche. Les capteurs doivent agréger les données de leurs voisins avec les leurs avant de les transmettre. Les algorithmes de consensus permettent de réaliser cette tâche et peuvent être utilisés comme algorithmes décentralisés pour obtenir une moyenne des relevés effectués.

Les réseaux d'énergies forment un autre domaine dans lequel on a récemment introduit des méthodes multi-agents. Pour qu'un réseau de production-consommation d'énergie fonctionne, il est impératif que la production soit en équilibre avec la consommation à chaque instant. La violation d'une telle contrainte peut entraîner des pannes à grande échelle telles que celles ayant eu lieu récemment aux Etats Unis ou en Europe [ADF+05]. De plus, les sources de production de taille réduite se multiplient à travers le réseau. Les algorithmes de synchronisation décentralisés deviennent donc adaptés et nécessaires pour gérer ce nouveau contexte.

Les algorithmes distribués sont utiles au contrôle coopératif des systèmes dynamiques multi-agents tels que les flottes de robots. De manière réciproque, les systèmes coopératifs réels sont aussi utilisés comme analogie pour créer des algorithmes distribués aux propriétés intéressantes. L'optimisation par essaim particulaire suit cette idée [ES00] : il s'agit d'une méthode d'optimisation décentralisée où les processus agissent tels des particules communicantes en combinant une descente de gradient classique avec un algorithme de flocking, ce qui permet de sortir des optima locaux. Cette méthode est particulièrement bien adaptée lorsque la fonction à optimiser est inconnue et la dimension de l'espace à explorer est trop importante pour que l'optimisation soit faite par des méthodes exhaustives. Cette méthode appartient à la classe des algorithmes évolutionnistes.

1.2.3 Contrôle décentralisé face au contrôle centralisé

Dans les comportements naturels et dans les applications aux systèmes multi-agents, nous avons mis en avant l'approche décentralisée où les actions sont le résultat de la coordination d'une multitude d'entités simples via leurs interactions locales, où chaque entité n'a qu'une

vision partielle de l'ensemble des informations du groupe. Cette approche s'oppose à une approche centralisée où une entité principale (centre de calcul, leader, etc.) communique avec toutes les autres pour les contrôler. Les deux approches présentent des avantages et des inconvénients. Le choix de favoriser l'une plutôt que l'autre dépend des propriétés que l'on souhaite obtenir du système global. Un avantage important de l'approche décentralisée est la robustesse vis à vis des défaillances, offerte par le caractère redondant du groupe. La rapidité d'exécution est un autre avantage : partager les tâches à effectuer permet d'accélérer sa réalisation. Ceci peut être souhaité pour la maintenance d'entités fixes ou dans les opérations de surveillance. Cette méthode est aussi très utilisée en informatique dans la programmation concurrente. Le coût peut aussi jouer en faveur de l'approche décentralisée : il est parfois moins coûteux de concevoir un groupe d'entités simples qu'une seule entité complexe. En revanche, il est difficile de garantir que la solution adoptée avec l'approche décentralisée soit optimale étant donné qu'aucune des parties ne disposent de la totalité des informations utilisées par le groupe. S'il est nécessaire que la solution corresponde à l'optimum global, l'approche centralisée peut être préférable. De plus, la conception et l'analyse des systèmes décentralisés sont plus difficiles, ceci est dû à leur complexité. D'un autre côté, l'approche centralisée supporte mal le changement d'échelle, c'est à dire, l'augmentation de la quantité d'information à traiter ou l'augmentation du nombre d'individus à contrôler. Ces questions ne posent pas de difficulté lorsqu'on choisit l'approche décentralisée. Enfin, comme précédemment décrit, la nature favorise souvent l'approche décentralisée pour contrôler les groupes d'individus ; ceci démontre d'une part la qualité de cette approche et offre d'autre part des systèmes réels sur lesquels il est possible de s'inspirer.

1.2.4 Communautés scientifiques des systèmes dynamiques multi-agents

Les problèmes qui apparaissent autour de l'étude des systèmes multi-agents se retrouvent dans des disciplines scientifiques variées. La possibilité d'interagir avec des scientifiques issus d'autres disciplines comme la biologie, les sciences humaines et sociales, la physique statistique, l'informatique et la robotique fait partie des attributs qui rendent le travail sur les systèmes dynamiques multi-agents particulièrement intéressant. En revanche, les communautés scientifiques manipulant ces systèmes, étant issues de domaines éloignés, emploient, pour parler de concepts similaires, un vocabulaire distinct. Cela ne rend pas toujours aisée la compréhension mutuelle. Dans la littérature, on verra régulièrement, pour caractériser les systèmes dynamiques multi-agents les adjectifs *distribué*, *décentralisé*, *parallèle*, *concurrent*, *en réseau*, *coopératif*, *coordonné* ou *collectif*. Ces adjectifs se rapportent souvent à l'un

des noms suivants : *système*, *algorithme*, *protocole*, *calcul*, *contrôle*, *mouvement* ou *comportement*.

Les termes *mouvements* et *comportement* sont utilisés par les biologistes et chercheurs en sciences humaines ; leur objet d'étude étant l'être vivant. Proche de cela, le terme *système* apparait dans les travaux en physique statistique et mathématiques appliquées ; il permet de grouper de manière abstraite l'ensemble des individus à l'intérieur d'un tout. Dès lors qu'il est possible d'influencer le système étudié, par exemple s'il agit d'un groupe de robots, on parlera de *contrôle*. Ce terme est familier aux sciences de l'ingénieur et à la robotique. Lorsqu'il s'agit de reproduire des phénomènes multi-agents sous forme de simulation, on entre dans le domaine de l'informatique et on parlera d'*algorithme* ou parfois de *protocole*.

De la même manière, les qualificatifs choisis dépendent du contexte et des caractéristiques que l'on souhaite mettre en avant. Les termes *collectif*, *coordonné* et *coopératif* se rapportent le plus souvent à des systèmes biologiques ou à des comportements humains, indiquant que le comportement observé est le résultat des actions d'un groupe d'individus via leurs interactions par opposition, soit à une entité seule, soit à un groupe évoluant sans communiquer. Par extension, on retrouve en robotique ce vocabulaire d'emprunt. Les adjectifs *distribué*, *parallèle* et *concurrent* appartiennent plus particulièrement au domaine de l'informatique et se rapportent aux algorithmes. Les algorithmes distribués sont développés avant tout pour permettre l'utilisation simultanée de plusieurs machines en vue d'accélérer les calculs à effectuer. Dans ce cas, la question des interactions entre entités passe au second plan ; les algorithmes parallèles et concurrents utilisent souvent une zone de mémoire commune à laquelle toutes les entités de calcul peuvent accéder. L'aspect local des interactions n'entre donc pas en jeu alors qu'il est central dans les comportements collectifs tels que ceux étudiés dans cette thèse. La notion de système *en réseau* met l'accent sur la topologie des interactions entre les entités. Cette notion se retrouve beaucoup en informatique et plus largement dans les technologies de l'information, ayant été popularisée par le *World Wide Web*. Enfin, l'adjectif *décentralisé* est fondamental dans les systèmes dynamiques multi-agents et s'utilise dans tous les domaines. Il permet de souligner une opposition vis à vis de l'approche centralisée où, bien que plusieurs entités composent le système, une seule est chargée des prises de décision alors que les autres lui sont subordonnées. Nous avons traité cette question plus en détails dans le paragraphe 1.2.3.

1.2.5 Mathématiques utiles à l'étude des systèmes multi-agents

L'étude des systèmes dynamiques multi-agents fait appel à des branches des mathématiques diverses. Nous présentons brièvement celles utilisées dans ces travaux en commençant par l'une des plus centrales : la théorie des graphes. Les applications des systèmes dynamiques

multi-agents sont toutes basées sur des objets pouvant être abstraits de manière similaire : il s'agit d'un groupe au sein duquel des interactions locales sont générées. L'ensemble de ces interactions peut être représenté sous forme d'un réseau d'interactions (pouvant varier au court du temps). L'objet mathématique adapté pour modéliser ces réseaux est le graphe, les agents sont alors représentés par les nœuds du graphe et leurs interactions par ses liens. La théorie des graphes, qui porte sur l'étude de ces objets, est ainsi naturellement mise en jeu. Pour représenter un graphe en mathématique, il est possible d'utiliser une matrice carrée dite *matrice d'adjacence* dont la taille correspond au nombre d'agents. Le coefficient de la ligne i et la colonne j représente alors le poids de l'influence de j sur i. Cette représentation matricielle offre un outil puissant : l'algèbre linéaire. La théorie des systèmes dynamiques complète la théorie algébrique des graphes en permettant d'étudier le caractère changeant des systèmes dynamiques multi-agents. Nous l'invoquerons pour parler des questions de comportements asymptotiques, de convergence et de stabilité des systèmes étudiés. Dans le cadre des applications en ingénierie où l'on souhaite contrôler ces systèmes de manière coopérative, nous ferons appel à la théorie du contrôle. Les systèmes dynamiques multi-agents réels, naturels ou conçus par l'homme, évoluent dans un environnement complexe et bruité. Pour modéliser de telles caractéristiques, on introduit des phénomènes aléatoires dans les algorithmes. Nous formaliserons ces phénomènes à l'aide de la théorie des processus stochastique. D'autres domaines des mathématiques, comme la topologie, peuvent aussi être utiles à l'étude des systèmes dynamiques multi-agents (voir par exemple la thèse soutenue par Muhammad Abubakr [M.05]). Nous nous sommes cependant limités à mentionner les théories qui seront utilisées tout au long de cette thèse.

1.2.6 Lien avec l'étude des réseaux sociaux

La conception de systèmes dynamiques multi-agents s'inspire souvent des mécanismes émanant des systèmes coopératifs biologiques. Il existe un autre domaine où l'on constate les mêmes types de phénomènes émergents : les réseaux sociaux chez les humains. En effet, un réseau social est un système composé d'un ensemble d'individus qui s'influencent via leurs comportements et leurs interactions.

Un certain nombre de questions émerge de l'observation de réseaux sociaux. Notamment, quel est le rôle particulier joué par chaque individu dans le réseau ? Certains acteurs peuvent avoir une position de *leader*, servir d'intermédiaire, ou encore bloquer la communication entre individus. Répondre à ces questions apporte des clés pour comprendre la dynamique d'un réseau social. Une approche sociologique permet généralement d'adresser ces questions. Cependant, la nature *multi-agent* des réseaux sociaux va permettre de

compléter cette première approche par une approche mathématique. Celle-ci consiste à développer des outils sur lesquels le sociologue peut s'appuyer pour interpréter ses données. L'ensemble de ces outils forme la base de l'*analyse structurale* des réseaux. L'analyse structurale inclue notamment les méthodes de spatialisation (projection en deux ou trois dimensions du réseau social pour sa visualisation) et les mesures de centralité (importance) des acteurs dans le réseau. Nous retrouverons dans ce contexte les théories mathématiques utiles à l'étude des systèmes dynamiques multi-agents (exposées dans la section 1.2.5), en particulier la théorie algébrique des graphes.

Ce type d'étude trouve des applications dans plusieurs domaines tels que le *marketing viral* (l'utilisation des individus comme vecteur de transmission d'information à caractère publicitaire, notamment dans les réseaux sociaux en ligne). Un autre domaine d'application est la gestion de conflits et controverses par les preneurs de décision tels que les pouvoirs publics. Ce dernier domaine fait l'objet de la troisième partie du manuscrit.

1.3 Résumé des contributions

Dans cette section, nous résumons les contributions émanant de cette thèse. Dans un souci de concision, nous présentons les résultats de manière relativement informelle sans définir précisément l'ensemble des symboles utilisés. Le lecteur pourra consulter la suite du manuscrit pour obtenir le détail.

Partie I - Chapitre 2

Présentation du problème

Dans le chapitre 2, nous étudions le système dynamique multi-agents

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)), \ i \in \mathcal{N},$$

$x_i(t)$ est la position de l'agent i et $a_{ij}(t)$ représente l'influence de l'agent j sur l'agent i au temps t. Dans la totalité du manuscrit, $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ désigne l'ensemble des labels des agents, où n est le nombre d'agents. L'objectif de l'étude est de déterminer des conditions suffisantes sur les poids d'interaction a_{ij} au cours du temps garantissant la convergence de la trajectoire du système vers un état de consensus, *i.e.*

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = x^*,$$

où x^* est l'état final commun à tous les agents.

Aperçu de l'état de l'art

Une condition suffisante connue dans la littérature depuis 2003 consiste à supposer que les poids sont fortement symétriques $a_{ij} = a_{ji}$ et bornés $a_{ij} \in [\alpha, \beta]$ et que l'union des graphes d'interaction $(\mathcal{N}, \mathcal{E}(t))$ est connexe sur tout intervalle borné [JLM03]. Un grand nombre d'extensions et de généralisations ont été établies depuis lors (pour un aperçu des références sur le sujet, voir par exemple [OSFM07a] et les références contenu dans le chapitre 2).

Nous avons cherché à relaxer cette condition pour la rendre moins conservative, notamment en permettant aux poids d'être non fortement symétriques. Ceci complique largement l'analyse du système.

Résultat

Notre résultat de convergence nécessite deux hypothèses que nous présentons brièvement ici. Pour plus de précision, le lecteur pourra consulter la section 2.3.1.

Hypothèse (Hypothèse 10 : Connexité persistante)**.** *Le graphe* $(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{E}})$ *est fortement connexe avec*

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ (j,i) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \int_0^{+\infty} a_{ij}(s)ds = +\infty \right\}.$$

Nous définissons $\mathbf{r}$, le ratio maximum entre les poids d'interaction réciproques (voir équation (2.8) et précédentes). Le ratio $\mathbf{r}$ est une fonction croissante vérifiant :

$$\forall S \neq \emptyset, S \subsetneq \mathcal{N},\ \forall \tau \in [0,t],\ \frac{1}{\mathbf{r}(t)} \sum_{i \in S, j \notin S} a_{ij}(\tau) \leq \sum_{i \in S, j \notin S} a_{ji}(\tau) \leq \mathbf{r}(t) \sum_{i \in S, j \notin S} a_{ij}(\tau).$$

Considérons un exemple de trois agents tels que $x_1(0) = -1$, $x_2(0)$ et $x_3(0) = 1$. Soit p dans $\mathbb{N}$. Pour $t \in [2p, 2p+1[$, l'agent 2 interagit avec 1 : $a_{12}(t) = 1$ et $a_{21}(t) = \rho_p$, où la suite (ρ_p) est croissante et supérieure à 1. Pour $t \in [2p+1, 2p+2[$, l'agent 2 interagit avec 3 : $a_{32}(t) = 1$ et $a_{23}(t) = \rho_p$. Dans cette exemple, le ratio des poids d'interactions réciproques est $\mathbf{r}(2p) = \rho_p$. Nous verrons dans la section 2.3.2 que la condition pour obtenir un consensus repose sur le comportement asymptotique de (ρ_p) et donc de $\mathbf{r}$. Précisément, si le ratio entre l'influence de 2 et 3 sur 1 (*i.e.* ρ_p) par rapport à l'influence de 1 sur 2 et 3 (*i.e.* 1) croît trop vite, alors l'agent 1 oscille entre 2 et 3 sans que la distance entre 2 et 3 ne converge vers 0. Pour éviter ce type de comportements oscillatoires, nous imposons à la divergence entre les poids d'interaction réciproques d'être lente :

Hypothèse (Hypothèse 16 : Divergence lente des poids d'interaction réciproques)**.** *Pour tout* $t \geq 0$, $\mathbf{r}(t)$ *est fini et la somme*

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \mathbf{r}(t_p)^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = +\infty,$$

où $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ *est une séquence d'instants qui découpe* $\mathbb{R}^+$ *en intervalle de temps sur lesquels chaque sous ensemble* $S \subset \mathcal{N}$ *et son complémentaire échangent une quantité d'interaction minimale.*

Dans l'exemple précédent, seuls trois agents étaient présents. Lorsque le nombre d'agents augmente, la divergence des poids d'interaction réciproques doit être plus lente encore, c'est la raison de la présence de l'exposant $-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dans l'hypothèse.

Théorème (Théorème 17)**.** *Si les hypothèses de connexité persistante et de divergence lente des poids d'interaction réciproques sont vérifiées, alors la trajectoire du système converge vers un consensus.*

Remarque. *Ce résultat étend le résultat récent de Hendrickx et Tsitsiklis [HT12] qui lui-même généralise [CZZ11] ayant pour la première fois présenté l'hypothèse de connexité persistante. Nos contributions sont les suivantes :*

- *Notre résultat inclut une majoration sur la vitesse de convergence vers le consensus (proposition 15) qui permet notamment de montrer que sous l'hypothèse d'un ratio* $\mathbf{r}$ *borné (comme exigé dans [HT12]), le consensus est atteint à vitesse exponentielle.*
- *Les poids d'interaction réciproques* $\sum_{i \in S, j \notin S} a_{ij}(s)$ *et* $\sum_{i \in S, j \notin S} a_{ji}(s)$ *ont la possibilité de croître indéfiniment (comme c'était déjà le cas dans [HT12]). En outre, ils sont maintenant autorisés à diverger l'un de l'autre (hypothèse de divergence lente des poids d'interaction réciproques), contrairement au résultat obtenu dans [HT12].*

Outils sollicités

Notre preuve fait appel à une fonction de Lyapunov, à un système équivalent préservant l'ordre des agents et est basée sur un raisonnement par récurrence sur le déplacement des agents en direction du centre du groupe.

Optimalité des conditions de convergence

Nous avons prouvé que notre condition suffisante est aussi nécessaire pour une classe de systèmes à trois agents (section 2.3.2). Ceci nous amène à conjecturer que la borne donnée par l'hypothèse de divergence lente des poids d'interaction réciproques est fine.

Partie II

Présentation du problème

Dans cette partie, nous étudions plusieurs instances du système de flocking

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= v_i(t),\\ \dot{v}_i(t) &= \sum_{j\in\mathcal{N}} a_{ij}(t)(v_j(t) - v_i(t)),\end{aligned}$$

où $x_i(t)$ est la position de l'agent i au temps t, $v_i(t)$ sa vitesse et $a_{ij}(t)$ est le poids d'interaction représentant l'influence de l'agent j sur i.

Contrairement au système de consensus étudié dans le chapitre 2, dans cette partie, nous donnerons explicitement une règle d'interaction de façon à ce que $a_{ij}(t)$ soit une fonction des positions des agents au temps t. L'objectif est de déterminer des conditions suffisantes dépendant **uniquement** de la configuration initiale (positions et vitesses) garantissant l'alignement en vitesse, *i.e.*

$$\lim_{t\to+\infty} v_i(t) = v^*,$$

où v^* est la vitesse finale commune à tous les agents.

Aperçu de l'état de l'art

Dans [CS07], Cucker et Smale considèrent des poids qui diminuent de manière graduelle et continue avec la distance entre les agents :

$$a_{ij}(t) = \frac{H}{1 + \|x_i(t) - x_j(t)\|^\beta}$$

où $H > 0$ et $\beta \geq 0$ sont des paramètres du modèle. Avec de tels poids, les auteurs obtiennent des conditions suffisantes sur les vitesses et positions initiales pour l'alignement en vitesse. Cependant, les poids considérés autorisent des interactions à longue portée, *i.e.* des interactions entre agents indéfiniment éloignés. Ceci n'est pas réaliste.

D'autre part, dans [LG08], Liu et Guo étudient le cas des interactions dites métriques où les poids sont définis par

$$a_{ij}(t) = \chi\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq R\right)$$

où χ () désigne la fonction caractéristique [*], R, le rayon d'interaction, est un paramètre du modèle. Le graphe d'interaction $G(t)$ de matrice d'adjacence $A(t) = (a_{ij}(t))$ est appelé graphe

[*]Pour A une assertion, $\chi(A) = 1$ si A est vraie est 0 sinon.

de proximité. Les auteurs obtiennent eux aussi des conditions suffisantes sur les vitesses et positions initiales pour l'alignement en vitesse.

Cependant, dans les deux cas présentés, [CS07] et [LG08], les conditions à respecter pour l'alignement en vitesse proscrivent la déconnexion d'arêtes initialement présentes dans le graphe d'interaction.

Dans notre étude, nous obtenons des conditions pour l'alignement en vitesse possédant les propriétés suivantes :

- nos conditions portent sur un modèle sans interaction à longue portée,
- elles dépendent uniquement des positions et vitesses initiales,
- enfin, nos résultats autorisent la déconnexion d'arêtes, non nécessaires pour garantir l'alignement en vitesse.

Ces propriétés rendent nos conditions moins conservatives que celles présentées dans l'état de l'art.

Méthode

Pour les trois systèmes que nous étudions dans cette partie, nous utilisons un squelette de raisonnement similaire. Nous montrons et utilisons les deux assertions suivantes :

- **Alignement en vitesse** Si le graphe d'interaction préserve une propriété topologique donnée (connexité, connexité *en moyenne* ou présence d'un sous arbre couvrant, suivant le cas), alors le désaccord entre les vitesses diminue à taux exponentiel (que nous pouvons estimer), et par conséquent la modification des distances entre agents est finie et nous pouvons la quantifier.
- **Robustesse des interactions** Si la perturbation des distances entre agents est inférieure à la *robustesse du graphe* (que nous définirons) alors la préservation de la propriété topologique nécessaire à l'alignement en vitesse est garantie.

La combinaison de ces deux assertions nous donne une relation entre les positions et les vitesses initiales à respecter pour garantir l'alignement en vitesse.

Chapitre 4 : Interactions métriques déterministes

Dans ce chapitre nous étudions le cas où les agents interagissent lorsque leur distance est inférieure à un rayon d'interaction $R > 0$:

$$a_{ij}(t) = \chi\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq R\right).$$

Résultat principal Soit $x^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ un vecteur de positions initiales des agents tel que le graphe d'interaction associé G_{x^0} soit connexe. On se donne une quantité $\rho \in [0, R]$ qui représentera la perturbation maximale autorisée sur les distances entre agents. On définit $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}) = (\mathcal{N}, \mathcal{S}_\rho(\mathcal{E}_{x^0}))$ le sous graphe de G_{x^0} stable par perturbation ρ où

$$\mathcal{S}_\rho(\mathcal{E}_{x^0}) = \left\{(j,i) \in \mathcal{N}\times\mathcal{N} \mid \|x_i^0 - x_j^0\| + \rho \leq R\right\}.$$

On suppose le graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ connexe. Nous explicitons l'existence de la perturbation maximale vérifiant cette propriété. Nous l'appelons *robustesse du graphe* G_{x^0}. Nous dénommons *sous graphe cœur* le graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ associé à la robustesse de G_{x^0}. Nous définissons le vecteur de désaccord en vitesse $\delta(t) = v(t) - v^*$, où v^* est la vitesse moyenne qui mesure la distance de la trajectoire par rapport à l'alignement en vitesse. Nous avons le résultat suivant :

Théorème (Théorème 35)**.** *Soit $v^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ un vecteur de vitesses initiales tel que $\delta(0)$, le vecteur de désaccord correspondant, vérifie*

$$\|\delta(0)\| \leq \frac{\lambda_2^*\,\rho}{\sqrt{2}}$$

où $\lambda_2^* = \lambda_2(\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}))$, la connexité algébrique du graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est un sous graphe de $G(t)$. De plus, le désaccord en vitesse converge exponentiellement vers 0.

Remarque. *La condition $\|\delta(0)\| \leq \frac{\lambda_2^*\,\rho}{\sqrt{2}}$ du théorème lie les vitesses initiales (représentées par le désaccord initial entre les vitesses $\|\delta(0)\|$) et les positions (représentées par le produit $\lambda_2^* \cdot \rho$ dont préservation de λ_2^* est garantie lorsque la perturbation sur les distances des agents est inférieure à ρ).*

Le produit $\lambda_2^* \cdot \rho$ a tendance à augmenter avec la densité des positions des agents. Par conséquent, le théorème montre que plus le désaccord initial entre les vitesses est grand, plus le groupe d'agent devra être dense pour garantir l'alignement en vitesse.

Outils sollicités Nous utilisons la norme du vecteur de désaccord en vitesse $\|\delta\|$ comme fonction de Lyapunov (voir [OSM04b]). Nous définissons une notion de robustesse de graphe à l'aide du graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$.

Optimalité des conditions pour l'alignement en vitesse Nous montrons que la borne du théorème 35 est optimale pour un système à deux agents et proche d'être optimale (à un facteur $\sqrt{2}$ près) pour une classe de systèmes d'un nombre d'agents quelconque (voir section 4.5). Les simulations montrent aussi que les bornes obtenues ne sont pas toujours optimales. Pour cette raison, nous avons évalué les sources de conservatisme dans le cas des interactions métriques (section 4.6) que nous listons ici :

- La majoration du diamètre $\Delta_{\mathcal{N}}(x,t) = \max_{i,j\in\mathcal{N}} \|x_i(t) - x_j(t)\|$ par $\sqrt{2}\|x(t)\|_2$, où $\|x(t)\|_2$ désigne la norme 2, n'est pas optimale lorsque les positions et vitesses sont choisies de manière aléatoire (l'écart entre les deux normes croit alors proportionnellement à $\sqrt{n}$).
- L'approche utilisée ne prend pas en compte l'orientation des vitesses par rapport aux positions.
- Nous utilisons une minoration du taux de convergence des vitesses garantie par la préservation d'un sous graphe (nécessairement contenu dans le graphe d'interaction initial) au cours du temps. Initialement, cette estimation sous-estime le taux réel garanti par l'ensemble des interactions initialement présentes.

Nous donnons des pistes pour répondre aux deux premières sources de conservatisme, basées sur une analyse de la dynamique locale du système, dans la section 4.6.4.

Chapitre 5 : Interactions métriques stochastiques

Nous étudions le cas où le rayon d'interaction diffère suivant les agents et change au cours du temps de manière aléatoire. Les rayons d'interactions sont des processus stochastiques supposés symétriques, indépendants et identiquement distribués :

$$a_{ij}(t) = \chi\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq R_{ij}(t)\right),$$

avec $R_{ij} = R_{ji}$. Pour éviter les complications techniques liées aux équations différentielles stochastiques, nous supposons que le système évolue en temps discret : pour $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_i(\varepsilon t + \varepsilon) &= x_i(\varepsilon t) + \varepsilon v_i(\varepsilon t) \\ v_i(\varepsilon t + \varepsilon) &= v_i(\varepsilon t) + \varepsilon \sum_{j\in\mathcal{N}} a_{ij}(\varepsilon t)(v_j(\varepsilon t) - v_i(\varepsilon t)), \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre donné du système. Pour simplifier l'écriture, nous faisons un changement de variable en considérant $\bar{x}_i(t) = x_i(\varepsilon t)$, $\bar{v}_i(t) = v_i(\varepsilon t)$, $\bar{a}_{ij}(t) = a_{ij}(\varepsilon t)$. Nous obtenons alors le système

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(t+1) &= \bar{x}_i(t) + \varepsilon \bar{v}_i(t) \\ \bar{v}_i(t+1) &= \bar{v}_i(t) + \varepsilon \sum_{j\in\mathcal{N}} \bar{a}_{ij}(t)(\bar{v}_j(t) - \bar{v}_i(t)). \end{aligned}$$

Par abus de notation, nous abandonnons la notation $\bar{\cdot}$ dans la totalité de l'analyse. Pour éviter toute confusion, nous nous référons uniquement au deuxième système.

Résultat Dû au caractère stochastique du système étudié, le résultat que nous obtenons donne une condition garantissant l'alignement en vitesse avec une probabilité minimum. Puisque les rayons d'interaction changent au cours du temps, le sous graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ dépend aussi du temps, nous le notons donc $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}, t)$. Nous notons $\tilde{L}(t)$ sa matrice Laplacienne et $\tilde{\lambda}_2 = \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))$ l'espérance de la connexité algébrique du graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}, t)$.

Théorème (Théorème 45)**.** *Supposons que $\rho > 0$, $\tilde{\lambda}_2 > 0$ et $\|\delta(0)\| \leq \frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}}$. Alors, la probabilité que les agents atteignent un alignement en vitesse est supérieure à*

$$1 - \frac{1}{1+\kappa^2} \text{ où } \kappa = \frac{1}{\nu_\varepsilon}\left(\frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}\|\delta(0)\|} - 1\right)^2,$$

et

$$\nu_\varepsilon = \frac{\varepsilon \operatorname{var}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))}{(2\tilde{\lambda}_2 - \varepsilon\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2))} \in [0,1],$$

où $\operatorname{var}(\lambda_2(\tilde{L}(t))) = \mathbb{E}((\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2) - \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2$ *est la variance de* $\lambda_2(\tilde{L}(t))$.

Remarque. *Le résultat nous permet d'obtenir une probabilité d'alignement arbitrairement proche de 1 de deux manières. Premièrement, nous pouvons choisir un vecteur de désaccord en vitesse suffisamment petit. Deuxièmement, puisque $\lim_{\varepsilon\to 0} \nu_\varepsilon = 0$, nous supposons que la condition sur $\|\delta(0)\|$ est satisfaite, puis nous choisissons ε suffisamment petit.*

De plus, lorsque ε tend vers 0, la borne du théorème 45 correspond avec celle obtenue par le théorème 35 pour le système de flocking déterministe en temps continu. Ici, la connexité algébrique λ_2^* du graphe déterministe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est remplacée par la valeur moyenne $\tilde{\lambda}_2$ de la connexité algébrique du graphe stochastique $\tilde{G} = \mathcal{S}_\rho(G_{x^0}, t)$. L'interprétation de ce constat est la suivante : lorsque ε tend vers 0, la rapidité des changements de rayons $R_i(t)$ est telle que le système se comporte comme un système déterministe, régit par un rayon d'interaction égal à l'espérance du rayon stochastique $R_i(t)$.

Enfin, nous appliquons le théorème 45 au cas où les agents communiquent via un réseau sans fil (section 5.5). Nous démontrons que la borne du théorème peut être calculée et explicitons une méthode de calcul par optimisation polynomiale (théorème 56).

Outils sollicités Nous utilisons la même fonction de Lyapunov que dans le cas métrique, nous reprenons aussi la notion de robustesse de graphe. Cependant, le fait que le graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ dépende du temps ajoute une difficulté. Pour la contourner, nous introduisons deux processus de majoration, l'un majorant le désaccord en vitesse et l'autre la perturbation sur les distances entre agents. Pour conclure sur la probabilité d'alignement, nous faisons appel à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Chapitre 6 : Interactions topologiques

Dans ce chapitre, nous reprenons le système de flocking déterministe en temps continu

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \sum_{j\in\mathcal{N}} a_{ij}(t)(v_j(t) - v_i(t)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

pour étudier une instance où les interactions ne sont pas symétriques. Pour cela, nous nous basons sur une récente étude de terrain [BCC+08] soutenant la thèse selon laquelle les étourneaux sont influencés non pas par l'ensemble des voisins dans un rayon d'interaction constant mais plutôt par les 6 ou 7 plus proche voisins. Pour étudier les conséquences de ce type d'interaction sur notre système, nous supposons

$$a_{ij} = \chi\left(\left|\left\{ k \in \mathcal{N} \mid \|x_i - x_j\| > \|x_i - x_k\| \right\}\right| < m\right),$$

où m est une constante dépendant du modèle choisi. Dans [BCC+08], de telles interactions sont nommées *interactions topologiques*, nous préservons cette nomenclature.

Résultat Dans le cas non symétrique, nous savons que l'alignement en vitesse est garanti pourvu que le graphe d'interaction préserve un sous arbre couvrant au cours du temps (voir par exemple [Mor04]). Par conséquent, l'objet de l'étude porte sur la préservation d'un sous graphe constant H_ρ contenant lui-même un sous arbre couvrant (ρ représente la perturbation maximale autorisée sur les distances entre agents pour préserver H_ρ dans le graphe d'interaction). Si H_ρ est préservé, nous montrons que le diamètre des vitesses $\Delta_{\mathcal{N}}(t)$ converge vers 0 avec un taux exponentiel de $(1-\tilde{c})^{\frac{1}{\tilde{T}}}$ où $\tilde{c}$ et $\tilde{T}$ sont des constantes dépendant uniquement de H_ρ (théorème 66). Nous complétons ce résultat par une proposition sur la robustesse du graphe d'interaction pour le résultat suivant :

Théorème (Théorème 64)**.** *Supposons que H_ρ possède un sous arbre couvrant et que*

$$\Delta_{\mathcal{N}}(0) \leq \frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}\rho. \tag{1.2}$$

Alors, pour toute trajectoire $(x(t), v(t))$ du système (1.1) définie sur $\mathbb{R}^+$, H_ρ est préservée dans le graphe d'interaction $G(t)$ pour tout temps $t \geq 0$ et tous les agents convergent asymptotiquement vers l'alignement en vitesse.

Outils sollicités Pour parvenir à notre résultat, nous définissons une notion de robustesse adaptée aux interactions topologiques. Le diamètre des vitesses sert de fonction de Lyapunov. La preuve du résultat portant sur la convergence du diamètre des vitesses est inspirée des travaux de Angeli et Bliman [AB09] et de la preuve par Moreau contenue dans [Mor04].

Optimalité des conditions pour le flocking

Pour chaque cas, nous avons effectué des simulations démontrant que les conditions de flocking fournies par nos résultats sont facilement vérifiables. Les bornes obtenues sont valables pour toutes les configurations, elles sont donc naturellement plus fine dans certains cas. Pour cette raison, nous avons effectué une étude numérique détaillée dans le cas des interactions métriques.

Partie III

Cette partie présente les résultats d'une collaboration avec Lisa Haye, doctorante en sciences sociales. Sa thèse a pour objet l'étude du réseau social portant sur la controverse nationale concernant la pratique des loisirs motorisés en espace naturel.

Présentation de la problématique

La pratique des loisirs motorisés constitue une source importante de conflit entre les différents usagers des chemins. De plus, l'absence de certitude concernant la légalité des pratiques a pour conséquence la mise en avant par les différents camps d'arguments stéréotypés, rendu visible à l'échelle nationale par différents collectifs pro- et anti-motorisés. Cet échange d'arguments par les deux camps constitue ce que nous appelons la controverse.

L'objectif du sociologue est de comprendre comment les arguments stéréotypés de la controverse se forment, de quelle manière les conflits locaux alimentent cette controverse et en retour quel est l'impact de la controverse sur les conflits locaux. Dans cette optique, nous tentons de saisir quels flux d'information circulent entre les différentes scènes et camps et quels sont les jeux d'influence entre les acteurs. De manière complémentaire, nous nous attachons à rechercher l'identité des acteurs jouant un rôle important dans le réseau, par exemple en faisant le lien entre scènes et entre camps.

Nous disposons de données concernant les relations entre les acteurs de la scène nationale, du Parc Naturel Régional du Pilat, des Chambarans et de La Grave.

Méthode

Pour répondre à la problématique du sociologue, nous faisons appel aux outils d'analyse structurale des réseaux sociaux, basés notamment sur la théorie des graphes. Pour cela, nous agrégeons les données pour obtenir un graphe symétrique. Ensuite, nous présentons et utilisons la méthode de spatialisation basée sur l'algorithme de Fruchterman-Reingold pour visualiser le réseau d'interaction en deux dimensions. En outre, nous souhaitons mettre en valeur l'appartenance des actants du réseau à leur scène ou à leur camp. Pour cela, nous développons une version modifiée de l'algorithme de Fruchterman-Reingold que nous appelons l'algorithme de Fruchterman-Reingold par groupes.

Pour compléter ces outils, nous utilisons deux centralités permettant de déterminer l'importance des acteurs dans le réseau. La centralité α, radiale, mesure la proximité d'un actant avec le reste du réseau (et donc sa capacité à obtenir de l'information rapidement) ; tandis que la centralité de courant, médiane, indique la capacité à se trouver sur le chemin de l'information (et donc à pouvoir la contrôler, à choisir de la transmettre ou de la retenir). Nous adaptons la centralité α pour quantifier la proximité d'un actant vis à vis d'une scène ou d'un camp et la centralité de courant pour déterminer quels actants assument le rôle d'intermédiaire entre deux scènes ou deux camps. Ces deux nouvelles mesures sont baptisées Q-mesures α et de courant, par analogie d'autres mesures de type similaire.

Résultats et interprétations

L'application des outils de l'analyse structurale au réseau social sur les loisirs motorisés hors route nous a permis d'obtenir un certain nombre de résultats :

- En ce qui concerne le lien entre les scènes, la spatialisation par scènes et les Q-mesures de courant entre scènes nous permettent d'observer qu'il n'existe pas de relation directe entre les scènes locales. Le lien entre ces scènes est effectué principalement par la scène nationale et par les actants non-humains.

- De plus, nous constatons que le réseau possède une structure cœur/périphérie. Le cœur du réseau est principalement occupé par des actants de la scène nationale, du Pilat et des non-humains.

- Ainsi, il existe un lien fort entre la conflictualité d'une zone (typiquement dans le Pilat et au niveau national) et la quantité de relations liées à cette zone.

- L'étude des acteurs centraux met en lumière l'importance des actants non-humains (habituellement négligés dans la littérature sur les réseaux sociaux) dans le réseau, tels que la Loi de 1991 et la Circulaire Olin.

- Enfin, nous constatons une corrélation entre le positionnement des actants dans le réseau et leur opinion : deux actants d'opinion proche ont tendance à se retrouver à proximité dans le réseau.

1.4 Publications

1.4.1 Publications en lien avec la thèse

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont donné lieu à plusieurs publications.

Journaux

Continuous-time consensus under persistent connectivity and slow divergence of reciprocal interaction weights. Samuel Martin et Antoine Girard. Accepté pour publication dans *SIAM Journal on Control and Optimization* sous réserve de modifications mineures.

Actes de conférence avec comité de sélection

Multi-agent Flocking with Random Communication Radius. Samuel Martin, Arastoo Fazeli, Ali Jadbabaie et Antoine Girard. Présenté à l'*American Control Conference*, Montréal, Canada, Juin 2012.

Sufficient conditions for flocking via graph robustness analysis. Samuel Martin et Antoine Girard. Présenté à la 49ème *IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, Georgia, USA, Décembre 2010.

Présentations lors de conférences

Saisir les relations multiples à l'aide d'outils d'analyse de systèmes complexes dans le cadre des théories de l'acteur-réseau. Lisa Haye et Samuel Martin. Présenté au XIX congrès international des sociologues de langue française, Rabat, Maroc, Juillet 2012.

1.4.2 Publications non liées à la thèse

En parallèle de cette thèse, d'autres travaux ont pu faire l'objet de publications. Nous les mentionnons pour donner une vue d'ensemble de nos recherches.

Journaux

Synthesis for constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices. Antoine Girard et Samuel Martin. Publié dans *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012.

Towards the rational design of synthetic cells with prescribed population dynamics. Neil Dalchau, Matthew Smith, Samuel Martin, James Brown, Stephen Emmott et Andrew Phillips. Publié dans le *Journal of the Royal Society Interface*, volume en ligne, *The Royal Society*, Mai 2012.

Actes de conférence avec comité de sélection

Motion planning for nonlinear systems using hybridizations and robust controllers on simplices. Antoine Girard et Samuel Martin. Présenté à la 47ème *IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexique, Décembre 2008.

Présentations lors de conférences

Hybrid ecosystem simulation system for model structure and parameter optimisation of lakes. Samuel Martin et Friedrich Recknagel. Présenté à la 7ème *International Conference on Ecological Informatics*, Ghent, Belgique, Décembre 2010.

Première partie

Consensus dans les systèmes multi-agents

Chapitre 2

Consensus dans les systèmes multi-agents

2.1 Présentation

L'objet de ce chapitre est de présenter de nouvelles conditions suffisantes pour le système de consensus linéaire garantissant la convergence de sa trajectoire vers un consensus. Nous commençons par donner une présentation générale du système étudié (section 2.1.1). Ensuite, nous établissons un état de l'art concernant les principaux résultats de convergence vers un consensus pour le modèle linéaire (section 2.2). Nous présentons alors les contributions principales du chapitre (section 2.3). Nous terminons le chapitre par une discussion sur les extensions possibles permettant de généraliser davantage.

2.1.1 Présentation du système

Dans ce paragraphe, nous présentons le système de consensus que nous analyserons dans le chapitre. Le lecteur familier avec ce système pourra directement passer à la section 2.1.2.

Le problème de consensus apparait naturellement dans un certain nombre de systèmes multi-agents. Que ce soit des oiseaux au sein d'une nuée volant dans la même direction ou des capteurs en réseau qui transmettent une estimation commune de la température d'un milieu, il s'agit toujours pour les individus du groupe de parvenir à un accord concernant une certaine quantité. Tout au long du manuscrit, lorsque nous considérons le système de consensus général sans préciser son application, les quantités caractérisant les individus

seront dénommées leurs *états*, suivant la nomenclature habituelle des systèmes dynamiques. Dans ce chapitre, nous étudions un système d'ordre 1. Pour ce cas particulier, nous utilisons le terme *position* pour désigner l'état d'un agent. Chaque individu est labélisé par un indice dans $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ où n est le nombre d'individus. Le système que nous présentons ici est un système décentralisé largement utilisé pour modéliser le processus de consensus, il s'agit du système de consensus linéaire : la position x_i de chaque individu $i \in \mathcal{N}$ évolue suivant

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)(x_j(t) - x_i(t)), \ t \in \mathbb{R}^+, i \in \mathcal{N}, \tag{2.1}$$

où $a_{ij}(t) \geq 0$ représente l'influence de l'agent j sur l'agent i au temps t. En considérant ce système nous faisons un ensemble d'hypothèses que nous listons :

- Nous faisons l'hypothèse que la position des agents évolue dans $\mathbb{R}^d$, un espace vectoriel de dimension finie d. Ce choix est adéquat pour représenter des quantités telles que les positions et vitesses des individus, par exemple dans les mouvements collectifs naturels ou de robots. Pour un exemple de consensus sur la sphère de dimension 1, le lecteur pourra consulter [Sar09].

- Nous supposons que la position de l'agent évolue de manière continue dans le temps, *i.e.* $t \in \mathbb{R}^+$. Cette hypothèse est la plus proche de la réalité physique. Une alternative est de choisir une évolution discrète avec $t \in \mathbb{N}$ qui est plus adaptée pour l'implémentation sur machine et facilite souvent l'analyse du comportement du système :

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t), \text{ avec } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) = 1, \ i \in \mathcal{N}. \tag{2.2}$$

  Nous analyserons uniquement le système en temps continu dans ce chapitre. Nous utiliserons le cas discret dans le chapitre traitant d'un modèle de flocking stochastique (chapitre 5).

- Nous supposons que les agents contrôlent la dérivée première de leurs états, qu'on appellera *vitesse* dans ce chapitre. Une autre possibilité est d'imposer un contrôle sur les dérivées d'ordres supérieurs. Certains travaux de la littérature vont dans cette direction, *e.g.* [LLLR11].

- Nous imposons $a_{ij}(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, $i, j \in \mathcal{N}$. Le poids $a_{ij}(t) = 0$ signifie que l'agent j n'a pas d'influence sur l'agent i. Le choix $a_{ij}(t) < 0$ permettrait de représenter des influences négatives ayant pour conséquence l'éloignement plutôt que l'attraction. Le lecteur peut se référer à [BGP09] pour plus d'informations sur ce sujet.

- La vitesse est proportionnelle à la distance entre les agents et peut donc être indéfiniment grande. Ceci peut paraître peu réaliste puisque que dans les applications concrètes, les contraintes physiques limitent l'amplitude des variables des agents. Le lecteur pourra consulter [YGSS12] où les vitesses sont sujettes à saturation.

- Le système de consensus étudié est linéaire. Le lecteur intéressé par le problème de consensus pour des algorithmes non linéaires pourra consulter [HH08, BGP06, Mor05]. Une direction future de recherche est de généraliser les résultats au cas non linéaire en gardant des raisonnements similaires.

Le modèle de consensus linéaire à n agents (2.1) semble capturer l'essence du processus de consensus : dans les mouvements collectifs, les individus ont tendance à se diriger en direction de leurs voisins pour réduire l'écart qui les sépare. De plus, ce modèle est suffisamment simple pour être analysé en détails.

2.1.2 Prémices de l'analyse

Avant de commencer une étude fine du système (2.1) nous donnons quelques propriétés générales et outils utiles pour l'analyse. Premièrement, nous nous penchons sur les questions d'existence et d'unicité des solutions du système (2.1).

Théorème 1 ([Kha02])**.** *Supposons que pour $i, j \in \mathcal{N}$, $t \longmapsto a_{ij}(t)$ est continue par morceaux. Alors le système (2.1) admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}^+$.*

Il est possible de relaxer les conditions suffisantes garantissant l'existence et l'unicité des solutions. Dans le cas où les fonctions a_{ij} ne sont pas continues, l'équation devrait être comprise au sens d'une *équation différentielle de Carathéodory* (voir [Fil88] et la section A.4). Une solution au sens de *Carathéodory* de l'équation (2.1) est une fonction localement absolument continue $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times d}$ qui satisfait presque partout l'équation intégrale suivante :

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)(x_j(s) - x_i(s))ds, \ i \in \mathcal{N}. \tag{2.3}$$

Théorème 2 ([Fil88])**.** *Supposons que les fonctions $t \longmapsto a_{ij}(t)$ sont sommable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}^+$. Etant données des positions initiales $x_i(0) = x_i^0$, $i \in \mathcal{N}$, la solution au sens de Carathéodory du système (2.1) existe et est unique. On appelle trajectoire du système une telle solution.*

L'étude du système (2.1) passe par plusieurs points. Une fois traitées les questions d'existence et d'unicité des trajectoires, nous nous interrogerons sur la convergence du système. Enfin vient la question de la convergence vers un consensus. Formellement, on dit que la trajectoire du système converge vers un consensus lorsque pour tout $i \in \mathcal{N}$, les limites $\lim_{t \longrightarrow +\infty} x_i(t)$ existent et sont égales. Lorsque c'est le cas, on appelle *valeur de consensus* (ou plus simplement *consensus*) cette limite.

Un outil utile à l'analyse de la convergence vers un consensus est le diamètre du groupe défini par

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t, x) = \max_{i,j \in \mathcal{N}} \|x_i(t) - x_j(t)\|. \tag{2.4}$$

Lorsque le contexte le permet, on écrit simplement $\Delta_{\mathcal{N}}(t)$.

Proposition 3. *Le diamètre permet de caractériser le système grâce aux propriétés suivantes.*

- *Le diamètre $t \longmapsto \Delta_{\mathcal{N}}(t)$ est une fonction décroissante.*
- *La trajectoire du système converge vers un consensus* <u>*ssi*</u>

$$\forall i, j \in \mathcal{N}, \lim_{t \longrightarrow +\infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0 \ \underline{ssi} \ \lim_{t \longrightarrow +\infty} \Delta_{\mathcal{N}}(t) = 0.$$

La démonstration de ce résultat vient de l'équivalence du système (2.1) avec le système équivalent préservant l'ordre des agents décrit dans la section 2.3.3 (voir aussi [HT12]).

Nous nous intéressons donc à la convergence asymptotique de la trajectoire vers un consensus. Il pourra aussi être utile d'avoir des informations sur le régime transitoire du système en plus de l'état stationnaire. Nous nous intéresserons en particulier dans ce chapitre à la vitesse de convergence vers le consensus. D'autre part, les applications peuvent nécessiter que le consensus soit atteint en temps fini. Ce point n'est pas étudié dans ce travail. Un lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de [HHB10, SH07, WH10, WX10] pour obtenir des éléments de réponse faisant appel à des systèmes de consensus non linéaire. Un autre point qui ne sera pas abordé dans notre travail est l'étude de la valeur précise vers laquelle converge la trajectoire du système. Pour cela, on pourra consulter les références [OSM04b, Cor08].

2.1.3 Lien avec la théorie algébrique des graphes

Les interactions entre les agents peuvent être représentées par un graphe pondéré dynamique $G(t) = (\mathcal{N}, \mathcal{E}(t), A(t))$ où $A_{ij}(t) = a_{ij}(t)$ pour $i, j \in \mathcal{N}$, t désignant un réel positif dans le cas du modèle en temps continu (2.1) et un entier naturel dans le cas discret (2.2). Ce

graphe dynamique est appelé *graphe d'interaction*. Cette approche permet de lier l'étude des systèmes (2.1) et (2.2) avec la théorie algébrique des graphes présentée dans l'annexe des notations et notions élémentaires (voir section A.3). Pour cela, on note $x(t)$ le vecteur concaténé des positions des agents au temps t : $x(t) = (x_1(t)^T, x_2(t)^T, \ldots, x_n(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{n\times d}$. On définit $\mathbf{A}(t) = A(t) \otimes I_d$ et $\mathbf{L}(t) = L(t) \otimes I_d$ où $L(t)$ est la matrice Laplacienne du graphe $G(t)$ et $\otimes$ désigne le produit de Kronecker (voir section A.1 pour une définition). On appelle $\mathbf{A}(t)$ et $\mathbf{L}(t)$ les matrices d'adjacence et Laplacienne augmentées du graphe d'interaction. On peut alors réécrire les systèmes sous forme matricielle : (2.1) est équivalent à

$$\dot{x}(t) = -\mathbf{L}(t)x(t) \tag{2.5}$$

et (2.2) est équivalent à

$$x(t+1) = \mathbf{A}(t)x(t). \tag{2.6}$$

2.2 Etat de l'art : conditions pour le consensus

Nous présentons dans cette section un ensemble de résultats obtenus pour l'un des systèmes (2.1) ou (2.2). Nous avons sélectionné les résultats suivant des critères de généralité et d'originalité de l'approche au moment où ils ont été publiés. Nous ajoutons à titre informatif les méthodes de preuve utilisées pour parvenir à chaque résultat. Cette présentation n'est pas exhaustive, le lecteur pourra consulter [RBA05] et [OSFM07b] pour compléter cette liste.

2.2.1 Connexité sur un intervalle de temps borné

Le résultat présenté dans cette section est issu de [JLM03] mais fut originellement démontré dans la thèse de John N. Tsitsiklis [Tsi84] et publié dans [TBA86]. On considère le système de consensus en temps discret (2.2). On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices F telles que pour $i, j \in \mathcal{N}$,

$$F_{ij} = \frac{\chi\left(i = j\right) + A_{ij}}{1 + \sum_{k=1}^{n} A_{ik}},$$

où A décrit $\mathcal{A}_S$, l'ensemble des matrices d'adjacence canoniquement associées aux graphes symétriques d'ordre n (voir section A.3). On suppose que le graphe d'interaction $G(t) = (\mathcal{N}, \mathcal{E}(t), F(t))$ vérifie $F(t) \in \mathcal{F}$. L'ensemble $\mathcal{A}_S$ étant fini, $G(t)$ peut prendre un ensemble fini de valeurs distinctes.

Théorème 4. *Supposons qu'il existe une série d'intervalles contigus d'entiers, non vides, uniformément bornés* $[t_i, t_{i+1}[$ *pour* $i \in \mathbb{N}$ *sur lesquels le graphe d'interaction est connecté, i.e. tel que* $\cup_{t\in[t_i,t_{i+1}[} G(t)$ *est connecté. Alors les trajectoires des agents convergent vers un consensus.*

La preuve du résultat est basée sur la convergence des produits infinis de matrices ergodiques qui découle du théorème 75 présenté dans l'annexe A sur les préliminaires.

2.2.2 Connexité sur un intervalle de temps non borné

Le résultat présenté dans cette section est issu de [Mor05] et [BHOT05]. On considère le système de consensus en temps discret (2.2). On suppose ici les poids d'interaction non nuls, uniformément majorés et uniformément minorés par un nombre strictement positif. De plus, on suppose les interactions faiblement symétriques (*i.e.* $a_{ij}(t) > 0$ <u>ssi</u> $a_{ji}(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $i, j \in \mathcal{N}$). On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5 (Connexité ultime)**.** *Pour tout* $t \geq 0$*, le graphe* $\bigcup_{s\geq t}(\mathcal{N}, \mathcal{E}(s))$ *est connexe.*

Alors dans ce cas, on obtient le résultat suivant :

Théorème 6. *Si l'hypothèse de connexité ultime est vérifiée alors la trajectoire du système (2.2) converge vers un consensus.*

2.2.3 Interactions équilibrées

Le résultat présenté dans cette section est issu de [OSM04b]. On considère le système de consensus en temps continu (2.1). On suppose le graphe d'interaction équilibré pour tout temps (*i.e.* les degrés entrant et sortant des nœuds sont égaux, voir section A.3) et les poids d'interaction sont supposés à valeurs dans $\{0, 1\}$. On note $x^* = (x_1^0 + \cdots + x_n^0)/n$ la position moyenne initiale. Le graphe d'interaction étant équilibré, on a, d'après la proposition 77, $\mathbf{1} \in \ker(L^T(t))$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, la valeur moyenne des positions est invariante au cours du temps. Cela signifie que si la trajectoire converge vers un consensus, la valeur de consensus est nécessairement x^*. Pour $i \in \mathcal{N}$, on note $\delta_i(t) = x_i(t) - x^*$ et on définit le *vecteur de désaccord* $\delta(t) = (\delta_1(t)^T, \ldots, \delta_n(t)^T)^T$.

Théorème 7. *On suppose que le graphe* $G(t)$ *prend ses valeurs dans un ensemble* Π *de graphes fortement connexes et équilibrés pour tout temps* $t \geq 0$*. Dans ces conditions, la propriété suivante est vérifiée :*

$$\|\delta(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|\delta(0)\|$$

où $\kappa = \min_{G \in \Pi} \lambda_2 \left(\frac{L(G) + L(G)^T}{2} \right) > 0.$

Ce qui montre d'une part que la trajectoire converge vers le consensus et d'autre part que la convergence se fait à vitesse exponentielle. Dans [OSM04a], le résultat est établi pour une dimension de l'espace des positions $d = 1$. Cependant, le résultat se généralise sans effort aux autres dimensions. La preuve du résultat est assez simple et intéressante, nous la présentons donc en détail.

Démonstration. Notons $V(\delta) = \frac{1}{2}\|\delta\|^2$. Nous allons démontrer que la fonction V est une fonction de Lyapunov pour le système (2.1). Nous avons

$$\frac{dV(\delta)}{dt} = -\delta^T \frac{L + L^T}{2} \delta \leq -\lambda_2 \left(\frac{L + L^T}{2} \right) \|\delta\|^2 \leq -\kappa \|\delta\|^2,$$

où nous avons utilisé la proposition 79. L'ensemble des graphes connexes d'ordre n (et donc Π) est fini. En conséquence, κ est bien défini et strictement positif (voir section A.3). Par intégration, on obtient alors

$$V(\delta(t)) \leq e^{-2\kappa t} \|\delta(0)\|^2,$$

ce qui, après passage à la racine, donne le résultat attendu. □

2.2.4 Graphe des poids d'interaction intégrés

Cas général

Le résultat présenté dans cette section est issu de [Mor04] par Moreau. On considère le système de consensus en temps continu (2.1). On suppose les poids d'interaction continus par morceaux et uniformément majorés. De plus, on suppose que la propriété suivante est vérifiée :

Hypothèse 8. *Il existe* $r \in \mathcal{N}$, $\delta > 0$ *et* $T > 0$ *tels que pour tout* $t \geq 0$, *le graphe* $(\mathcal{N}, \mathcal{E}_{\delta,T}(t))$ *possède un sous arbre couvrant de racine* r *où*

$$\mathcal{E}_{\delta,T}(t) = \left\{ (j,i) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \int_t^{t+T} a_{ij}(s) ds > \delta \right\}.$$

Théorème 9. *Si l'hypothèse 8 est satisfaite, la trajectoire du système (2.1) converge vers un consensus.*

La preuve de ce résultat est assez technique. Elle est donnée pour $x_i(t) \in \mathbb{R}$ et est basée sur la convergence vers 0 du diamètre du groupe. En particulier, Moreau étudie l'évolution du diamètre d'un sous groupe d'individus $S \subseteq \mathcal{N}$ due au reste du groupe $S' = \mathcal{N} \setminus S$. Pour cela, il considère l'accumulation sur un intervalle de temps $[t_0, t_1]$ des poids d'interaction entre les groupes S et S' et au sein de S au moyen des quantités suivantes :

$$a_{SS'} = \sum_{i \in S, j \in S'} \int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(s)ds, \quad a_{S'S} = \sum_{i \in S, j \in S'} \int_{t_0}^{t_1} a_{ji}(s)ds \quad \text{et} \quad a_{SS} = \sum_{i \in S, j \in S} \int_{t_0}^{t_1} a_{ij}(s)ds.$$

Cas des interactions symétriques

Le résultat présenté dans cette section est issu de [CZZ11]. On considère le système de consensus en temps continu (2.1). On suppose les poids d'interaction continus par morceaux et fortement symétriques : $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$ pour tout $i, j \in \mathcal{N}$ et $t \geq 0$. Le résultat donne une condition nécessaire et suffisante et fait usage de l'hypothèse suivante :

Hypothèse 10 (Connexité persistante)**.** *Le graphe* $(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{E}})$ *est connexe où*

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ (j, i) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \int_0^{+\infty} a_{ij}(s)ds = +\infty \right\}.$$

Théorème 11. *Dans le cas des interactions fortement symétriques, la trajectoire du système converge vers un consensus* <u>*ssi*</u> *l'hypothèse 10 est vérifiée.*

La première partie du résultat est basée sur l'utilisation de la trajectoire équivalente préservant l'ordre des positions des agents (cette trajectoire sera définie formellement dans la section 2.3.3) ainsi que sur le fait que les fonctions

$$s_k = t \longmapsto max \left\{ \sum_{i \in I} x_i(t) \mid I \subseteq \mathcal{N}, |I| = k \right\}, \; k \in \mathcal{N}$$

sont décroissantes.

Cas de la coupe équilibrée

Le résultat présenté dans cette section est issu de [HT12]. On considère le système de consensus en temps continu (2.1). On suppose les poids d'interaction mesurables et d'intégrale finie sur tout intervalle borné. Le résultat utilise la propriété de la *coupe équilibrée* :

Hypothèse 12 (Coupe équilibrée)**.** *Il existe $K \geq 1$ tel que pour tout sous ensemble strict non vide $S \subsetneq \mathcal{N}$ et pour tout temps $t \geq 0$,*

$$K^{-1} \sum_{i \in S, j \notin S} a_{ji}(t) \leq \sum_{i \in S, j \notin S} a_{ij}(t) \leq K \sum_{i \in S, j \notin S} a_{ji}(t).$$

Théorème 13. *Si l'hypothèse 12 (coupe équilibrée) est vérifiée, la trajectoire converge. Si de plus, l'hypothèse 10 (connexité persistante) est vérifiée alors la trajectoire converge vers un consensus.*

Les auteurs parviennent au résultat en prouvant que les fonctions

$$S_m = t \longmapsto \sum_{i=1}^{m} K^{-i} y_i(t), \ m \in \{1, \ldots, n\}$$

sont des fonctions de Lyapunov. Les y_i sont les trajectoires équivalentes préservant l'ordre citées dans le paragraphe précédant et détaillées dans la section 2.3.3.

2.2.5 Synthèse

Nous pouvons classer les résultats d'obtention d'un consensus dans deux ensembles, suivant s'ils utilisent ou non une notion de réciprocité des poids d'interaction. Les différents types de réciprocité incluent :

- *interactions fortement symétriques* : lorsque l'agent i influence l'agent j via le poids d'interaction $a_{ji}(t) > 0$, l'agent j influence aussi l'agent i via le même poids $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$;
- *interactions faiblement symétriques* : lorsque l'agent i influence l'agent j via le poids d'interaction $a_{ji}(t) > 0$, l'agent j influence aussi l'agent i via un poids $a_{ij}(t) > 0$;
- *interactions équilibrées* : les sommes des poids d'interaction entrant et sortant d'un agent sont égales, *i.e.* $\sum_{j \neq i} a_{ji}(t) = \sum_{j \neq i} a_{ij}(t)$;
- *interactions de coupe équilibrée* : pour tout sous groupe d'agent S, le ratio entre poids d'interaction réciproques $\sum_{i \in S, j \notin S} a_{ij}(t) \ / \ \sum_{i \in S, j \notin S} a_{ji}(t)$ est borné.

Les hypothèses de réciprocité facilitent l'analyse de la convergence. De plus elles permettent de relaxer l'hypothèse de connexité des interactions. Ceci est illustré par les deux résultats [Mor04] et [CZZ11]. Dans le premier cas, on n'impose aucune réciprocité. Dans le second cas, on suppose une symétrie forte. Grâce à cette dernière hypothèse, il n'est plus nécessaire, pour obtenir le consensus, d'exiger une connexité des poids intégrés sur

tout intervalle de temps borné (hypothèse 8) mais uniquement sur $[0, +\infty[$ (hypothèse 10 de connexité persistante) ; la première hypothèse étant inclue dans la seconde. Le résultat présenté dans ce chapitre fera lui aussi appel à une notion de réciprocité.

2.3 Divergence des poids d'interaction réciproques

Dans cette section, nous présentons une contribution originale à l'étude des conditions suffisantes pour la convergence de la trajectoire du système (2.1) vers un consensus. Précisément, nous généralisons le résultat de Hendrickx et Tsitsiklis [HT12] présenté dans la section 2.2.4 en remplaçant l'hypothèse de la coupe équilibrée par une hypothèse moins exigeante : nous autorisons une divergence lente entre les poids d'interaction réciproques, *i.e.* le ratio des poids réciproques est autorisé à diverger lentement vers l'infini. Ceci permet aux poids d'interaction réciproques d'être indéfiniment éloignés. De plus, la preuve que nous présentons suit une approche différente de celle donnée dans [HT12] et permet d'obtenir une borne explicite sur la vitesse de convergence de la trajectoire vers le consensus. Dans le reste de la section, nous commençons par présenter le résultat. Nous discutons ensuite de la pertinence des conditions suffisantes que nous avançons. Nous donnons alors la preuve du résultat principal.

2.3.1 Présentation du résultat

Nous considérons le système de consensus en temps continu (2.1). Nous supposons ici que les positions $x_i(t)$ pour $i \in \mathcal{N}$ évoluent en une dimension, *i.e.* $d = 1$. Le résultat peut se généraliser pour d quelconque en l'appliquant aux coordonnées des trajectoires $x_i(t)$. Notre résultat de convergence est principalement basé sur des hypothèses concernant les poids d'interaction. Pour s'assurer de l'existence et unicité de la trajectoire (au sens de Carathéodory), nous supposerons que les poids a_{ij} sont intégrables sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}^+$. Le théorème 2 assure alors l'existence et l'unicité de la trajectoire. Nous élaborons maintenant le matériel nécessaire à l'établissement de la convergence vers le consensus. Soit S un sous ensemble strict de $\mathcal{N}$. On définit le ratio entre les poids d'interaction réciproques

de S à $\mathcal{N} \setminus S$ par :

$$r_S(t) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\sum_{i\in S, j\notin S} a_{ij}(t)}{\displaystyle\sum_{i\in S, j\notin S} a_{ji}(t)} & \text{si le dénominateur est strictement positif,} \\ 1 & \text{si le numérateur et le dénominateur sont égaux à 0,} \\ +\infty & \text{si le dénominateur est nul et le numérateur est strictement positif.} \end{cases}$$

On définit alors le ratio maximum entre les poids d'interaction réciproques comme suit :

$$r(t) = \max_{S\neq\emptyset, S\subsetneq\mathcal{N}} r_S(t). \tag{2.7}$$

Pour des raisons de maniabilité, nous utiliserons la valeur maximum de r entre 0 et t :

$$\mathbf{r}(t) = \max_{s\in[0,t]} r(s). \tag{2.8}$$

Défini ainsi, $\mathbf{r}$ est une fonction croissante du temps et $\mathbf{r}(t)$ est toujours supérieur à 1. Une conséquence directe de cette définition est l'assertion suivante :

$$\forall S \neq \emptyset, S \subsetneq \mathcal{N},\ \forall s \in [0,t],\ \frac{1}{\mathbf{r}(t)} \sum_{i\in S, j\notin S} a_{ij}(s) \leq \sum_{i\in S, j\notin S} a_{ji}(s) \leq \mathbf{r}(t) \sum_{i\in S, j\notin S} a_{ij}(s). \tag{2.9}$$

Ainsi, quand un sous groupe S d'agents influence le reste du groupe à travers des poids d'interaction de somme $a(s) > 0$ au temps $s \leq t$, nous savons que S se voit influencer en retour par des poids d'interaction de somme supérieure à $\frac{a(s)}{\mathbf{r}(t)}$.

Dans notre résultat de convergence, nous utiliserons deux hypothèses sur les poids d'interaction. Le premier porte sur la topologie des interactions et a déjà été présenté dans la section 2.2.4, il s'agit de l'hypothèse 10 (connexité persistante) que nous mentionnons ici à nouveau :

Hypothèse 14 (Connexité persistante)**.** *Le graphe* $(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{E}})$ *est fortement connexe avec*

$$\tilde{\mathcal{E}} = \left\{ (j,i) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \int_0^{+\infty} a_{ij}(s)ds = +\infty \right\}.$$

Cette hypothèse nous permet de définir une séquence de temps $(t_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui introduit de manière implicite un changement d'échelle du temps cohérent avec la vitesse de croissance de $t \longmapsto \int_0^t a_{ij}(s)ds$ pour $(j,i) \in \tilde{\mathcal{E}}$. Notons $t_0 = 0$. Pour $p \in \mathbb{N}$, nous définissons t_{p+1} comme le

dernier élément de la séquence finie $(t_p^0, t_p^1, \ldots, t_p^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière, $t_p^0 = t_p$ et pour $q \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, t_p^{q+1} est le plus petit temps $t \geq t_p^q$ tel que

$$\min_{S \subsetneq \mathcal{N}, S \neq \emptyset} \left(\sum_{i \in S} \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus S} \int_{t_p^q}^{t} a_{ij}(s) ds \right) = 1. \tag{2.10}$$

Un tel temps t existe toujours puisque $(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{E}})$ est fortement connexe et donc pour tout ensemble non vide $S \subsetneq \mathcal{N}$, il existe $i \in S$ et $j \in \mathcal{N} \setminus S$ tels que $(j, i) \in \tilde{\mathcal{E}}$. Essentiellement, la séquence $(t_p^0, t_p^1, \ldots, t_p^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ définit des intervalles de temps $[t_p^q, t_p^{q+1}]$ sur lesquels l'influence cumulée sur tout sous groupe d'agents par le reste du groupe est supérieure à 1. Il est important de remarquer que, puisque les poids d'interaction a_{ij} sont intégrables sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}^+$, la séquence $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ diverge vers l'infini quand p tend vers $+\infty$.

Nous montrerons que les interactions sur l'intervalle $[t_p^q, t_p^{q+1}]$ induisent une chaîne de mouvements des agents en direction du centre du groupe. Ces mouvements se propagent en direction de l'agent ayant la position la plus petite ou la plus grande en moins de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ intervalles de ce type et résultent en la contraction du diamètre de l'ensemble des positions du groupe entre les temps t_p et t_{p+1}. Nous prouverons dans la section 2.3.3 la proposition suivante, qui constitue la principale contribution de cette section et qui forme le cœur de notre résultat :

Proposition 15 (Taux de contraction du diamètre du groupe)**.** *Si l'hypothèse 10 (connexité persistante) est vérifiée, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t_{p+1}) \leq \left(1 - \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(8n^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \Delta_{\mathcal{N}}(t_p).$$

D'après la proposition précédente, il est clair que la suite $(\mathbf{r}(t_p))_{p \in \mathbb{N}}$ joue un rôle central dans le fait que la trajectoire converge ou non vers un consensus. De cette manière, nous introduisons la deuxième hypothèse concernant les poids d'interaction :

Hypothèse 16 (Divergence lente des poids d'interaction réciproques)**.** *Pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{r}(t)$ est fini et la somme $\sum_{p \in \mathbb{N}} \mathbf{r}(t_p)^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = +\infty$.*

L'hypothèse demande que $\mathbf{r}(t)$ ne croisse pas trop rapidement. Par exemple, $\mathbf{r}(t_p) = O(p^{2/n})$ (qui inclut le cas où $\mathbf{r}$ est borné) satisfait l'hypothèse 16, alors que ce n'est pas le cas pour $\mathbf{r}(t_p) = p^{4/n}$. En conséquence, cette hypothèse permet la divergence des poids d'interaction pourvu qu'elle soit lente. Remarquons que lorsque le nombre d'agents augmente, la divergence autorisée diminue. Nous pouvons maintenant présenter le résultat principal de la section :

Théorème 17. *Si les hypothèses 10 (connexité persistante) et 16 (divergence lente des poids d'interaction réciproques) sont vérifiées, alors la trajectoire du système (2.1) converge vers un consensus.*

Démonstration. D'après la proposition 15 et en utilisant une simple récurrence, il est possible de montrer que pour tout $P \geq 1$,

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t_P) \leq \prod_{p=1}^{P} \left(1 - \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(8n^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\right) \Delta_{\mathcal{N}}(0). \tag{2.11}$$

Le produit à droite de l'inégalité converge vers 0 quand P tend vers l'infini si et seulement si $\sum_{p\in\mathbb{N}} \mathbf{r}(t_p)^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = +\infty$. Cette dernière assertion est vraie d'après l'hypothèse 16. En conséquence, le diamètre du groupe converge vers 0 et la trajectoire converge vers un consensus. □

Nous insistons sur le fait que non seulement la proposition 15 nous permet de prouver que le consensus est atteint mais nous donne en plus une estimation sur le taux de convergence vers la valeur de consensus. Dans la section suivante, nous discutons plus en détails nos hypothèses.

2.3.2 Discussion des hypothèses et exemples illustratifs

Connectivité persistante pour deux agents

Dans un premier temps, nous explicitons la raison pour laquelle l'hypothèse de connexité persistante que nous utilisons est appropriée. En particulier, nous montrons par un exemple que la connexité ultime (hypothèse 5) utilisée par [Mor05, BHOT05] dans le cas du système en temps discret (2.2) n'est pas adaptée dans le cas du temps continu (2.1).

Nous exhibons un système en temps continu respectant à la fois la connexité ultime et possédant des poids d'interaction bornés et symétriques dont la trajectoire ne converge pas vers un consensus. Ceci montre que le résultat établi dans [Mor05, BHOT05] ne peut être directement transposé au cas en temps continu. Considérons le système de la forme (2.1) de deux agents avec $x_1(0) < x_2(0)$ et avec les poids d'interaction

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ a_{12}(t) = a_{21}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists k \in \mathbb{N}, t \in [k, k + \frac{1}{2^{k+1}}] \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$$

Ces poids sont bornés, symétriques et constants par morceaux. Sous ces conditions, le théorème 1 donne l'existence et l'unicité de la trajectoire du système. De plus, il est clair que

l'hypothèse 5 est vérifiée. En résolvant l'équation différentielle, nous obtenons pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_2(k+1) - x_1(k+1) = e^{-2\int_k^{k+1} a_{12}(s)ds}(x_2(k) - x_1(k)) = e^{-\frac{1}{2^k}}(x_2(k) - x_1(k)).$$

Ce qui donne pour $k \in \mathbb{N}$,

$$x_2(k) - x_1(k) = \prod_{h=0}^{k-1} e^{-\frac{1}{2^h}}(x_2(0) - x_1(0)) = e^{-\frac{1-1/2^k}{1-1/2}}(x_2(0) - x_1(0)) \geq e^{-2}(x_2(0) - x_1(0)).$$

Ceci prouve que la trajectoire ne converge pas vers un consensus (bien qu'elle converge). On remarque que ceci pourrait être modifié en forçant $\int_0^t a_{12}(s)ds$ à diverger vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$, ce qui correspond exactement à l'hypothèse 10. Ainsi, cet exemple décrit la raison pour laquelle la connexité persistante est plus adaptée que la connexité ultime dans le cas du système de consensus en temps continu.

Divergence des poids d'interaction réciproques pour trois agents

Nous présentons un exemple simple pour lequel l'hypothèse 16 est une condition nécessaire et suffisante. Soit $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Nous considérons un système dynamique multi-agents constitué de 3 agents où $x_1(0) < x_2(0) < x_3(0)$ dont la dynamique est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \rho_p(x_1(t) - x_2(t)) \quad , \quad \text{si } t \in [2p, 2p+1[\\ \dot{x}_3(t) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = \rho_p(x_3(t) - x_2(t)) \quad , \quad \text{si } t \in [2p+1, 2p+2[. \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

Ce système vérifie l'hypothèse 10 de connexité persistante (avec $(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{E}})$ le graphe ligne non dirigé). La suite $(t_p)_{p\in\mathbb{N}}$, définie par l'équation (2.10) et servant à rééchelonner le temps est dans le cas présent donnée pour $p \in \mathbb{N}$ par $t_p = 2p$, et $\mathbf{r}(t_p) = \rho_p$. En conséquence, l'hypothèse 16 est vérifiée si et seulement si $\sum_{p\in\mathbb{N}} {\rho_p}^{-1} = +\infty$. La validité de l'hypothèse 16 dépend donc du choix de la suite $(\rho_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Dans le cas étudié ici, on peut montrer que l'hypothèse 16 est nécessaire et suffisante pour que la trajectoire du système converge vers un consensus. En effet, d'après le théorème 17, nous savons qu'il s'agit d'une condition suffisante. Montrons que si $\sum_{p\in\mathbb{N}} {\rho_p}^{-1} < +\infty$ alors la trajectoire ne converge pas vers un consensus.

La définition du système donne directement que $x_1(t)$ est croissant, $x_3(t)$ est décroissant et pour tout $t \geq 0$, $x_1(t) \leq x_2(t) \leq x_3(t)$. En intégrant la dynamique du système, nous pouvons montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_1(2p+1) &= (1-\lambda_p)x_1(2p) + \lambda_p x_2(2p) \\ x_2(2p+1) &= \rho_p\lambda_p x_1(2p) + (1-\rho_p\lambda_p)x_2(2p) \\ x_3(2p+1) &= x_3(2p) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_1(2p+2) &= x_1(2p+1) \\ x_2(2p+2) &= (1-\rho_p\lambda_p)x_2(2p+1) + \rho_p\lambda_p x_3(2p+1) \\ x_3(2p+2) &= \lambda_p x_2(2p+1) + (1-\lambda_p)x_3(2p+1) \end{cases}$$

où $\lambda_p = \frac{1-e^{-(\rho_p+1)}}{1+\rho_p}$. Nous remarquons de plus que

$$\begin{aligned} x_3(2p+2) &= \lambda_p x_2(2p+1) + (1-\lambda_p)x_3(2p+1) \\ &\geq \lambda_p x_1(2p+1) + (1-\lambda_p)x_3(2p+1) \geq \lambda_p x_1(2p) + (1-\lambda_p)x_3(2p). \end{aligned}$$

De même,

$$x_1(2p+2) = x_1(2p+1) = (1-\lambda_p)x_1(2p) + \lambda_p x_2(2p) \leq (1-\lambda_p)x_1(2p) + \lambda_p x_3(2p).$$

Par conséquent,

$$x_3(2p+2) - x_1(2p+2) \geq (1-2\lambda_p)(x_3(2p) - x_1(2p)).$$

Par récurrence sur l'équation précédente, nous obtenons pour tout $P \in \mathbb{N}$,

$$x_3(2P) - x_1(2P) \geq \prod_{p=0}^{P-1}(1-2\lambda_p)(x_3(0) - x_1(0)). \tag{2.12}$$

Si $\sum_{p\in\mathbb{N}} {\rho_p}^{-1} < +\infty$, alors nécessairement la limite de (ρ_p) est infinie. Alors, $\lambda_p \leq {\rho_p}^{-1}$, et donc $\sum_{p\in\mathbb{N}} \lambda_p < +\infty$. Ceci implique que le terme à gauche de l'inégalité (2.12) ne converge pas vers 0 et que la trajectoire du système ne peut converger vers un consensus. En conclusion, pour ce système spécifique, l'hypothèse 16 est une condition nécessaire et suffisante pour l'obtention d'un consensus.

Lien avec les résultats de la littérature

Hendrickx et Tsitsiklis ont récemment montré [HT12] que la trajectoire du système (2.1) converge vers un consensus lorsque les hypothèses 10 et 12 sont vérifiées. L'hypothèse 12

généralise à la fois l'hypothèse des poids symétriques ($a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$ pour $i, j \in \mathcal{N}$) et l'hypothèse des poids équilibrés ($\sum_{j\neq i} a_{ij}(t) = \sum_{j\neq i} a_{ji}(t)$ pour $i \in \mathcal{N}$). En particulier, le résultat de [HT12] inclut ceux de [CZZ11] (faisant appel à des poids symétriques) et [OSM04a] (utilisant des poids équilibrés).

En effet, supposons que les hypothèses 10 et 12 sont satisfaites. Alors, d'après la définition du ratio maximal entre les poids d'interaction réciproques donnée par (2.7) et (2.8), $\mathbf{r}(t) \leq K$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, ce qui montre que $\mathbf{r}(t)$ est borné, en conséquence l'hypothèse 16 est satisfaite. Ainsi, le théorème 17 montre que la trajectoire du système (2.1) converge vers un consensus. Cela montre que le résultat de convergence contenu dans [HT12] peut-être vu comme un cas particulier du théorème 17.

Remarquons que le théorème 17 est cependant plus général. En effet, en se rapportant à l'exemple présenté dans la section 2.3.2, il est clairement possible que l'hypothèse 12 ne soit pas satisfaite bien que la trajectoire converge vers un consensus (*e.g.* si $\rho_p = p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$). Dans ce cas, le résultat de [HT12] ne permet pas de conclure que le consensus est atteint alors que le théorème 17 le permet.

De plus, [HT12] ne précise aucune estimation concernant la vitesse de convergence vers un consensus alors que la proposition 15 nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Proposition 18. *Supposons que les hypothèses 10 (connexité persistante) et 12 (poids de coupe équilibrée) soient satisfaites. Soit $P : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ par $P(t) = p$ si $t \in [t_p, t_{p+1})$. Alors,*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \Delta_{\mathcal{N}}(t) \leq \left(1 - \frac{1}{(8Kn^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\right)^{P(t)} \Delta_{\mathcal{N}}(0).$$

Démonstration. En utilisant le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{r}(t) \leq K$, l'équation (2.11) donne pour tout $P \geq 1$,

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t_P) \leq \prod_{p=1}^{P} \left(1 - \frac{1}{(8Kn^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\right) \Delta_{\mathcal{N}}(0) = \left(1 - \frac{1}{(8Kn^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\right)^{P} \Delta_{\mathcal{N}}(0).$$

Donc, puisque $\Delta_{\mathcal{N}}$ est décroissant, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Delta_{\mathcal{N}}(t) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_{P(t)})$ ce qui nous permet de conclure. □

En particulier, si les poids d'interaction sont bornés, la proposition précédente énonce que si $P(t)$ croît linéairement (*i.e.* la fréquence des interactions ne converge pas vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini), alors la trajectoire converge vers un consensus avec une vitesse exponentielle. Au contraire, si $P(t)$ augmente de façon logarithmique (*i.e.* les

interactions se produisent de moins en moins souvent lorsque le temps tend vers l'infini), alors le consensus est approché avec une vitesse polynômiale.

Un autre résultat lié a été démontré par Moreau dans [Mor04] (voir section 2.2.4). Contrairement à notre hypothèse 10 de connexité persistante, l'hypothèse 8 faite dans [Mor04] ne nécessite pas que le graphe soit fortement connexe. Cependant, la connexité est demandée sur tout intervalle de longueur constante T. Pour illustrer ce qu'implique cette différence, nous considérons le système de 2 agents de poids d'interaction symétriques $a_{12}(t) = a_{21}(t) = 1/t$. Soient $\delta > 0$, $T > 0$ et $t > 0$, nous avons

$$\int_t^{t+T} a_{12}(s)ds > \delta \ \underline{ssi} \ \ln\left(1 + \frac{T}{t}\right) > \delta \ \underline{ssi} \ t < \frac{T}{e^\delta - 1}.$$

Donc, le graphe $(\mathcal{N}, \mathcal{E}_{\delta,T}(t))$ n'est plus connexe pour $t > \frac{T}{e^\delta - 1}$. Ceci invalide l'hypothèse 8. D'autre part, $\int_0^{+\infty} a_{12}(s)ds = +\infty$, ce qui montre que l'hypothèse 10 est vérifiée. De plus, puisque les poids d'interaction sont symétriques, l'hypothèse 16 est aussi vérifiée. Le théorème 17 nous permet donc de conclure que la trajectoire du système converge vers un consensus, conclusion qui n'aurait pu être obtenue de [Mor04].

2.3.3 Estimation de la vitesse de contraction du diamètre

Dans cette section, nous donnons la preuve de la proposition 15. Nous démontrons le résultat non pas pour le système (2.1) directement mais pour un système équivalent qui préserve l'ordre relatif des positions des agents. Comme justifié au début de la section 2.3.1, nous considérons le cas en dimension $d = 1$.

Système équivalent préservant l'ordre des positions

La manipulation de la trajectoire x du système (2.1) serait plus aisée si les positions des agents restaient dans le même ordre. Ceci n'est en général pas vérifié. Cependant, nous pouvons imaginer une trajectoire équivalente y, appelée *trajectoire ordonnée*, pour laquelle lorsque deux agents x_i et x_j échangent leurs positions, les agents échangent leur labels de sorte que l'ordre reste inchangé pour la trajectoire y. Cette idée d'échange de labels a aussi été utilisée dans [HT12] où les auteurs parviennent à démontrer certaines propriétés intéressantes vérifiées par la trajectoire ordonnée. Nous commençons par définir la permutation de classement.

Définition 19. *Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on note σ_t la permutation sur $\mathcal{N}$ vérifiant pour tout $i, j \in \mathcal{N}$,*

$$i < j \ \Rightarrow \ x_{\sigma_t(i)}(t) < x_{\sigma_t(j)}(t) \text{ ou } (x_{\sigma_t(i)}(t) = x_{\sigma_t(j)}(t) \text{ et } \sigma_t(i) < \sigma_t(j)).$$

Cette permutation ordonne la séquence $(x_i(t), i)$ dans l'ordre lexicographique. Ceci amène à définir y la trajectoire préservant l'ordre associée à x comme suit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall i \in \mathcal{N},\ y_i(t) = x_{\sigma_t(i)}(t). \tag{2.13}$$

Cette définition donne directement lieu aux propriétés suivantes sur y :

Proposition 20. *Considérons y donnée par (2.13), alors*

- *pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $i, j \in \mathcal{N}$, $i < j \implies y_i(t) \leq y_j(t)$,*
- *les fonctions y_1 et y_n sont respectivement croissante et décroissante,*
- *pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\Delta_{\mathcal{N}}(t) = y_n(t) - y_1(t)$.*

Démonstration. La première propriété est une conséquence directe de (2.13) et de la définition 19. Cette propriété et le fait que σ_t soit une bijection donne alors :

$$y_1(t) = \min_{j\in\mathcal{N}} y_j(t) = \min_{j\in\mathcal{N}} x_j(t) \text{ et } y_n(t) = \max_{i\in\mathcal{N}} y_i(t) = \max_{i\in\mathcal{N}} x_i(t).$$

Le fait que $\min_{j\in\mathcal{N}} x_j(t)$ et $\max_{i\in\mathcal{N}} x_i(t)$ soient respectivement croissante et décroissante donne ensuite la deuxième propriété. Enfin, nous avons

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t) = \max_{i\in\mathcal{N}} x_i(t) - \min_{j\in\mathcal{N}} x_j(t) = y_n(t) - y_1(t).$$

□

Nous définissons aussi pour y, trajectoire préservant l'ordre, les poids d'interaction b_{ij} donnés au temps $t \in \mathbb{R}^+$ par $b_{ij}(t) = a_{\sigma_t(i)\sigma_t(j)}(t)$. Le résultat suivant, établi dans [HT12], montre que y est une solution d'une équation différentielle de Carathéodory (même si les agents échangent leurs positions un nombre infini de fois en temps fini pour le système original x) et justifie l'appellation de système équivalent préservant l'ordre.

Proposition 21 ([HT12])**.** *Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, y satisfait l'équation*

$$y_i(t) = y_i(0) + \int_0^t \sum_{j\in\mathcal{N}} b_{ij}(s)(y_j(s) - y_i(s))ds,\ i \in \mathcal{N}. \tag{2.14}$$

La cadre permettant l'utilisation du système équivalent est posé. Nous présentons les propriétés du système qui seront utiles pour la preuve de la proposition 15.

Lemme 22. *Les poids d'interaction b_{ij} vérifient l'inégalité suivante*

$$\forall S \neq \emptyset, S \subsetneq \mathcal{N},\ \forall s \in [0,t],\ \frac{1}{\mathbf{r}(t)} \sum_{i\in S, j\notin S} b_{ij}(s) \leq \sum_{i\in S, j\notin S} b_{ji}(s) \leq \mathbf{r}(t) \sum_{i\in S, j\notin S} b_{ij}(s).$$

Démonstration. Soient s dans $[0,t]$ et S un sous ensemble strict et non vide de $\mathcal{N}$. Notons $S' = \sigma_s(S)$. Puisque σ_s est une bijection, nous avons $\sigma_s(\mathcal{N} \setminus S) = \mathcal{N} \setminus S'$. Ainsi, en utilisant la définition de $b_{ij}(s)$,

$$\sum_{i\in S, j\notin S} b_{ij}(s) = \sum_{i\in S, j\notin S} a_{\sigma_s(i)\sigma_s(j)}(s) = \sum_{i\in S', j\notin S'} a_{ij}(s)$$

et

$$\sum_{i\in S, j\notin S} b_{ji}(s) = \sum_{i\in S, j\notin S} a_{\sigma_s(j)\sigma_s(i)}(s) = \sum_{i\in S', j\notin S'} a_{ji}(s).$$

L'équation (2.9) avec $S := S'$ nous permet de conclure. □

Lemme 23. *Soient t et t' tels que $0 \leq t < t'$. Supposons qu'il existe $l \in \{1,\dots,n-1\}$, $c \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ avec $c < C$ satisfaisant*

$$\forall s \in [t,t'],\ y_l(s) \leq c \text{ et } C \leq y_{l+1}(s). \tag{2.15}$$

Alors, pour tout $s \in [t,t']$, les ensembles $\sigma_s(\{1,\dots,l\})$ et $\sigma_s(\{l+1,\dots,n\})$ sont constants.

Démonstration. Supposons que $\sigma_\cdot(\{1,\dots,l\})$ n'est pas constant. Dans ce cas, il existe $k \in \sigma_t(\{1,\dots,l\})$ et s dans $[t,t']$ tels que $k \notin \sigma_s(\{1,\dots,l\})$. Puisque σ_s est une bijection, nous avons k dans $\sigma_s(\{l+1,\dots,n\})$. Notons $i \in \{1,\dots,l\}$ et $j \in \{l+1,\dots,n\}$ tels que $k = \sigma_t(i)$ et $k = \sigma_s(j)$. Nous avons

$$x_k(t) = x_{\sigma_t(i)}(t) = y_i(t) \leq y_l(t) \leq c \text{ et } x_k(s) = x_{\sigma_s(j)}(s) = y_j(s) \geq y_{l+1}(s) \geq C.$$

Par continuité de x_k, il existe $\tau \in [t,s]$ tel que $x_k(\tau) = \frac{c+C}{2}$. Notons $m \in \mathcal{N}$ tel que $k = \sigma_\tau(m)$. Alors $y_m(\tau) = x_{\sigma_\tau(m)}(\tau) = x_k(\tau) = \frac{c+C}{2}$. Donc, l'équation (2.15) donne $y_l(\tau) < y_m(\tau) < y_{l+1}(\tau)$ ce qui est en contradiction avec le fait que les coordonnées de $y(\tau)$ sont ordonnées. □

Le lemme suivant provient d'une adaptation de la preuve contenue dans [HT12]. Dans leur article, les auteurs exhibent des fonctions de Lyapunov $S_l = t \longmapsto \sum_{i=1}^{l} R^{-i} y_i(t)$ dont les dérivées sont strictement positives [HT12, Lemme 1]. Nous établissons ici une minoration de ces dérivées :

Lemme 24. *Supposons que pour tout $i, j \in \mathcal{N}$, les poids b_{ij} soient positifs et que $R \geq 1$ soit une constante vérifiant*

$$\forall S \neq \emptyset, S \subsetneq \mathcal{N},\ \frac{1}{R} \sum_{i\in S, j\notin S} b_{ij} \leq \sum_{i\in S, j\notin S} b_{ji} \leq R \sum_{i\in S, j\notin S} b_{ij}.$$

Alors, pour tout vecteur ordonné y dans $\mathbb{R}^n$, pour tout $l \in \mathcal{N}$

$$\sum_{i=1}^{l} R^{-i}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_j - y_i)\right) \geq 0$$

et pour tout $l \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$\sum_{i=1}^{l} R^{-i}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_j - y_i)\right) \geq (y_{l+1} - y_l)R^{-l}\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{l} b_{ji}.$$

Démonstration. La première inégalité a été démontrée dans [HT12]. La preuve de la seconde inégalité est aussi adaptée de [HT12]. En suivant l'article cité précédemment, nous utilisons la notation $w_k = R^{-k}$ pour $k \in \{1 \ldots l\}$ et $w_k = 0$ pour $k > l$. L'inégalité suivante est établie dans [HT12] :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_j - y_i)\right) \geq \sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1} - y_k)\left(w_k \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} b_{ji} - w_{k+1}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\right).$$

En utilisant la définition de w_k, cette inégalité peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{l} R^{-i}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y_j - y_i)\right) \quad \geq \quad & \sum_{k=1}^{l-1}(y_{k+1} - y_k)R^{-k}\left(\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} b_{ji} - \frac{1}{R}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\right) \\ & +(y_{l+1} - y_l)R^{-l}\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{l} b_{ji}.\end{aligned}$$

Le premier terme à droite de l'inégalité est strictement positif dû à l'hypothèse sur les poids b_{ij} et le vecteur y. Cette observation nous conduit à l'inégalité souhaitée. □

Preuve de la proposition 15

La proposition 15 est le cœur de notre résultat principal. Rappelons que notre objectif est de montrer que le diamètre $\Delta_{\mathcal{N}}$ diminue sur l'intervalle $[t_p, t_{p+1}]$ d'un facteur fonction de $\mathbf{r}$, ratio des interactions réciproques. Puisque y_n est décroissant, l'augmentation de y_1 entraîne nécessairement la réduction du diamètre $\Delta_{\mathcal{N}}$. Nous allons étudier ce point. La preuve est basée sur le cheminement d'idées suivant :

(i) (lemme 26) Supposons qu'au temps $\tau \leq t_p^q$, deux agents successifs l et $l+1$ sont à distance non nulle. Alors, un agent $m \leq l$ est poussé par les interactions entre les groupes $\{1, \ldots, l\}$ et $\{l+1, \ldots, n\}$ (grâce à l'hypothèse 10 de connexité persistante) à croître, proportionnellement à l'écart entre y_{l+1} et y_l :

$$y_m(\tau') - y_m(\tau) \geq c_p(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)),$$

où c_p est fonction de $\mathbf{r}$ et $\tau' \geq \tau$. La définition de la séquence $(t_p^q)_q$ permet le choix $\tau' \leq t_p^{q+1}$.

Remarque 25. *Le lemme 26 est utilisé à plusieurs reprises dans la preuve. Premièrement, d'après ce lemme, y_1 augmente sur l'intervalle $[\tau, \tau']$ proportionnellement à l'écart $y_2(\tau) - y_1(\tau)$. Par conséquent, il suffit de démontrer que l'écart entre $y_2(\tau) - y_1(\tau)$ est suffisamment grand pour obtenir l'augmentation de y_1. Ceci nous amène à la suite de notre raisonnement.*

(ii) La croissance d'un agent m sur $[\tau, \tau']$ provoque un écart entre deux agents successifs l' et $l'+1$ avec $l'+1 \leq m$ proportionnel à la croissance de m. La réunion de cette assertion et du lemme 26 peut se résumer par la phrase suivante :

(Lemme 27) Si au temps $\tau \leq t_p^q$, deux agents successifs l et $l+1$ sont à distance non nulle, alors au temps futur $\tau' \leq t_p^{q+1}$, deux agents successifs $l' < l$ et $l'+1$ sont à distance proportionnelle à $y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)$:

$$y_{l'+1}(\tau') - y_{l'}(\tau') \geq c'_p(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)),$$

où c'_p est fonction de $\mathbf{r}$. La récurrence suivante se base sur ce lemme.

(iii) (Preuve de la proposition 15) Constatons que si $\Delta_{\mathcal{N}}(t_p) > 0$, alors il existe deux positions consécutives y_l et y_{l+1} avec un écart au temps t_p étant plus grand que $\Delta_{\mathcal{N}}(t_p)/n > 0$. Ce constat initialise une récurrence sur le lemme 27 qui permet de conclure d'après la remarque 25.

Lemme 26. *Soient $q \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, $\tau \in [t_p, t_p^q]$ et $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ tels que $y_l(\tau) < y_{l+1}(\tau)$. Alors, il existe $m \in \{1, \ldots, l\}$ et $\tau' \in [t_p, t_p^{q+1}]$ tels que*

$$y_m(\tau') - y_m(\tau) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{m-(l+1)}}{4n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right),$$

Démonstration. L'une des assertions suivantes est nécessairement vérifiée :

(a) $\forall s \in [\tau, t_p^{q+1}]$, $y_l(s) \leq \frac{3}{4} y_l(\tau) + \frac{1}{4} y_{l+1}(\tau)$ et $y_{l+1}(s) \geq \frac{1}{4} y_l(\tau) + \frac{3}{4} y_{l+1}(\tau)$;

(b) $\exists s \in [\tau, t_p^{q+1}]$, $y_l(s) > \frac{3}{4}y_l(\tau) + \frac{1}{4}y_{l+1}(\tau)$;

(c) $\exists s \in [\tau, t_p^{q+1}]$, $y_{l+1}(s) < \frac{1}{4}y_l(\tau) + \frac{3}{4}y_{l+1}(\tau)$.

Nous allons démontrer le résultat attendu dans les trois cas successivement. Dans ce qui suit, nous notons $R = \mathbf{r}(t_{p+1})$.

Cas (a) : L'hypothèse du cas (a) garantit qu'un écart minimum est préservé entre $y_{l+1}(s)$ et $y_l(s)$ pour tout $s \in [\tau, t_p^{q+1}]$:

$$y_{l+1}(s) - y_l(s) \geq \frac{1}{2}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right). \tag{2.16}$$

D'après le lemme 22, les hypothèses du lemme 24 sont satisfaites avec $y_i := y_i(s)$ et $b_{ji} := b_{ji}(s)$ pour tout s dans $[\tau, t_p^{q+1}] \subseteq [0, t_{p+1}]$. Donc, le lemme 24 donne

$$\sum_{i=1}^{l} R^{-i}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s)(y_j(s) - y_i(s))\right) \geq (y_{l+1}(s) - y_l(s))R^{-l}\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{l} b_{ji}(s). \tag{2.17}$$

Les Equations (2.17) et (2.16) nous donnent alors que pour tout $s \in [\tau, t_p^{q+1}]$:

$$\sum_{i=1}^{l} R^{-i}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s)(y_j(s) - y_i(s))\right) \geq \frac{1}{2}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right)R^{-l}\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{l} b_{ji}(s).$$

Nous intégrons chaque côté de l'inégalité précédente sur l'intervalle $[\tau, t_p^{q+1}]$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{l} R^{-i}(y_i(t_p^{q+1}) - y_i(\tau)) \geq \frac{1}{2}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right)R^{-l}\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\int_{\tau}^{t_p^{q+1}} b_{ji}(s)ds.$$

En utilisant l'hypothèse du cas (a), le lemme 23, avec $c := \frac{3}{4}y_l(\tau) + \frac{1}{4}y_{l+1}(\tau)$ et $C := \frac{1}{4}y_l(\tau) + \frac{3}{4}y_{l+1}(\tau)$, permet de dire que les ensembles $\sigma_s(\{1, \ldots, l\})$ et $\sigma_s(\{l+1, \ldots, n\})$ sont constant sur $[\tau, t_p^{q+1}]$. Ainsi,

$$\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\int_{\tau}^{t_p^{q+1}} b_{ji}(s)ds = \sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\int_{\tau}^{t_p^{q+1}} a_{\sigma_\tau(j)\sigma_\tau(i)}(s)ds = \sum_{j'\in S}\sum_{i'\in\mathcal{N}\setminus S}\int_{\tau}^{t_p^{q+1}} a_{j'i'}(s)ds$$

où $S = \sigma_\tau(\{1, \ldots, l\})$ (σ_τ étant une bijection, le changement d'indexe est possible). Nous utilisons ici l'hypothèse de connexité persistante. Puisque l'intervalle $[\tau, t^{q+1}]$ contient $[t^q, t^{q+1}]$ et que les termes sous l'intégrale sont positifs, l'équation (2.10) donne

$$\sum_{j'\in S}\sum_{i'\in\mathcal{N}\setminus S}\int_{\tau}^{t_p^{q+1}} a_{j'i'}(s)ds \geq 1.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{l} R^{-i}(y_i(t_p^{q+1}) - y_i(\tau)) \geq \frac{1}{2}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) R^{-l}.$$

Notons $m \in \{1, \ldots, l\}$ l'argument maximal de la somme à gauche de l'inégalité précédente. Notons $\tau' = t_p^{q+1}$, alors

$$lR^{-m}(y_m(\tau') - y_m(\tau)) \geq \frac{1}{2}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) R^{-l},$$

ce qui, en utilisant $l \leq n$ et $R \geq 1$, nous donne

$$y_m(\tau') - y_m(\tau) \geq \frac{1}{2l}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) R^{m-l} \geq \frac{1}{4n}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) R^{m-(l+1)}. \tag{2.18}$$

Cas (b) : Notons $m = l$ et $\tau' = s$. Alors, en utilisant l'hypothèse du cas (b), ainsi que $m = l$ et $R \geq 1$, nous obtenons

$$y_m(\tau') - y_m(\tau) \geq \frac{1}{4}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) \geq \frac{1}{4n}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) R^{m-(l+1)}. \tag{2.19}$$

Cas (c) : D'après le lemme 22, les hypothèses du lemme 24 sont satisfaites avec $l := l + 1$, $y_i := y_i(t)$ et $b_{ji} := b_{ji}(t)$ pour tout $t \in [\tau, t_p^{q+1}] \subseteq [0, t_{p+1}]$. Donc, le lemme 24 donne pour tout $t \in [\tau, t_p^{q+1}]$

$$\sum_{i=1}^{l+1} R^{-i}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)(y_j(t) - y_i(t))\right) \geq 0.$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[\tau, s] \subseteq [\tau, t_p^{q+1}]$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{l+1} R^{-i}\left(y_i(s) - y_i(\tau)\right) = \sum_{i=1}^{l} R^{-i}\left(y_i(s) - y_i(\tau)\right) + R^{-(l+1)}\left(y_{l+1}(s) - y_{l+1}(\tau)\right) \geq 0.$$

L'hypothèse du cas (c) donne alors

$$\sum_{i=1}^{l} R^{-i}\left(y_i(s) - y_i(\tau)\right) \geq R^{-(l+1)}\left(y_{l+1}(\tau) - y_{l+1}(s)\right) \geq R^{-(l+1)}\frac{1}{4}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right).$$

Notons $m \in \{1, \ldots, l\}$ l'argument maximal de la somme à gauche de l'inégalité et notons $\tau' = s$. Alors,

$$lR^{-m}(y_m(\tau') - y_m(\tau)) \geq R^{-(l+1)}\frac{1}{4}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right),$$

ce qui en utilisant $l \leq n$ peut se réécrire

$$y_m(\tau') - y_m(\tau) \geq R^{m-(l+1)} \frac{1}{4l} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) \geq R^{m-(l+1)} \frac{1}{4n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right). \tag{2.20}$$

□

Lemme 27. *Soient $q \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$, $\tau \in [t_p, t_p^q]$ et $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ tels que $y_l(\tau) < y_{l+1}(\tau)$. Alors, il existe $\tau' \in [t_p, t_p^{q+1}]$ tel qu'une des assertions suivantes est vérifiée :*

$$y_1(\tau') - y_1(\tau) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-l}}{8n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right)$$

ou

$$\exists l' \in \{1, \ldots, l-1\},\ y_{l'+1}(\tau') - y_{l'}(\tau') \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{l'-l}}{8n^2} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right).$$

Démonstration. D'après le lemme 26, nous obtenons qu'il existe $m \in \{1, \ldots, l\}$ et $\tau' \in [t_p, t_p^{q+1}]$ tels que

$$y_m(\tau') - y_m(\tau) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{m-(l+1)}}{4n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right).$$

Dans un premier temps, nous traitons le cas où $m = 1$ (on remarque que cela est toujours le cas si $l = 1$). Dans ce cas, l'inégalité précédente donne

$$y_1(\tau') - y_1(\tau) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{1-(l+1)}}{4n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-l}}{8n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right).$$

Ainsi, la première assertion est vérifiée.

Si $m > 1$, en utilisant le fait que $y_m(\tau) \geq y_1(\tau)$, nous avons

$$y_m(\tau') - y_1(\tau') + y_1(\tau') - y_1(\tau) \geq y_m(\tau') - y_m(\tau) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{m-(l+1)}}{4n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right).$$

Donc, soit

$$y_1(\tau') - y_1(\tau) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{m-(l+1)}}{8n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right)$$

ou

$$y_m(\tau') - y_1(\tau') \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{m-(l+1)}}{8n} \left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right).$$

Dans le premier cas, $m > 1$ implique que la première assertion est vérifiée. Dans le second cas, on peut remarquer que

$$y_m(\tau') - y_1(\tau') = \sum_{i=1}^{m-1} \left(y_{i+1}(\tau') - y_i(\tau')\right).$$

Soit $l' \in \{1, \dots, m-1\} \subseteq \{1, \dots, l-1\}$ l'argument maximal de cette somme. Alors,

$$(m-1)\left(y_{l'+1}(\tau') - y_{l'}(\tau')\right) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{m-(l+1)}}{8n}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right)$$

qui donne, en utilisant $l' \leq m-1 \leq n$ et $\mathbf{r}(t_{p+1}) \geq 1$,

$$y_{l'+1}(\tau') - y_{l'}(\tau') \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{m-(l+1)}}{8n(m-1)}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{l'-l}}{8n^2}\left(y_{l+1}(\tau) - y_l(\tau)\right).$$

Ainsi, la deuxième assertion est vérifiée. □

Preuve de la proposition 15. Rappelons qu'il nous faut montrer

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t_{p+1}) \leq \left(1 - \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(8n^2)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right)\Delta_{\mathcal{N}}(t_p). \tag{2.21}$$

Si $\Delta_{\mathcal{N}}(t_p) = 0$, puisque $\Delta_{\mathcal{N}}$ est décroissant, nous obtenons $\Delta_{\mathcal{N}}(t_{p+1}) = 0$ et (2.21) est clairement satisfait.

Supposons maintenant que $\Delta_{\mathcal{N}}(t_p) > 0$. Remarquons que

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t_p) = \sum_{i=1}^{n-1} \Big(y_{i+1}(t_p) - y_i(t_p)\Big).$$

Notons $l^0 \in \{1, \dots, n-1\}$ un argument maximal de cette somme. Alors,

$$y_{l^0+1}(t_p) - y_{l^0}(t_p) \geq \frac{1}{n-1}\Delta_{\mathcal{N}}(t_p) \geq \frac{1}{n}\Delta_{\mathcal{N}}(t_p). \tag{2.22}$$

Supposons dans un premier temps que $l^0 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (le cas $l^0 > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sera traité plus tard). Nous procédons par récurrence sur le lemme 27. Il existe une suite finie strictement décroissante $l^0 > l^1 > \cdots > l^{\bar{q}}$ telle que $l^{\bar{q}} = 1$ (ce qui implique $\bar{q} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$) et une suite finie $\tau^0, \tau^1, \dots, \tau^{\bar{q}}, \tau^{\bar{q}+1}$ telle que $\tau^0 = t_p$, $\tau^q \in [t_p, t_p^q] \subseteq [t_p, t_{p+1}]$ pour tout $q \in \{1, \dots, \bar{q}+1\}$ et

$$y_{l^q+1}(\tau^q) - y_{l^q}(\tau^q) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{l^q - l^{q-1}}}{8n^2}\Big(y_{l^{q-1}+1}(\tau^{q-1}) - y_{l^{q-1}}(\tau^{q-1})\Big), \ \forall q \in \{1, \dots, \bar{q}\}$$

ainsi que

$$y_1(\tau^{\bar{q}+1}) - y_1(\tau^{\bar{q}}) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-l^{\bar{q}}}}{8n} \left(y_{l^{\bar{q}}+1}(\tau^{\bar{q}}) - y_{l^{\bar{q}}}(\tau^{\bar{q}})\right).$$

L'équation précédente avec (2.22) donne

$$\begin{aligned} y_1(\tau^{\bar{q}+1}) - y_1(\tau^{\bar{q}}) &\geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-l^{\bar{q}}}}{8n} \left(\prod_{q=1}^{\bar{q}} \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{l^q - l^{q-1}}}{8n^2} \right) \left(y_{l^0+1}(\tau^0) - y_{l^0}(\tau^0) \right) \\ &\geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-l^0}}{(8n^2)^{\bar{q}+1}} \Delta_{\mathcal{N}}(t_p). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $l^0 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\bar{q} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ et $\mathbf{r}(t_{p+1}) \geq 1$, nous pouvons écrire

$$y_1(\tau^{\bar{q}+1}) - y_1(\tau^{\bar{q}}) \geq \frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(8n^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \Delta_{\mathcal{N}}(t_p). \tag{2.23}$$

$\tau^{\bar{q}}$ et $\tau^{\bar{q}+1}$ appartiennent tous deux à $[t_p, t_{p+1}]$ et puisque y_1 est croissant, nous avons $y_1(t_p) \leq y_1(\tau^{\bar{q}})$ et $y_1(\tau^{\bar{q}+1}) \leq y_1(t_{p+1})$. En conséquence,

$$y_1(t_{p+1}) - y_1(t_p) \geq y_1(\tau^{\bar{q}+1}) - y_1(\tau^{\bar{q}}). \tag{2.24}$$

De plus, y_n est décroissant. Ainsi, $y_n(t_{p+1}) \leq y_n(t_p)$ et

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{N}}(t_{p+1}) &= y_n(t_{p+1}) - y_1(t_{p+1}) \\ &\leq y_n(t_p) - y_1(t_p) + y_1(t_p) - y_1(t_{p+1}) = \Delta_{\mathcal{N}}(t_p) + y_1(t_p) - y_1(t_{p+1}). \end{aligned}$$

Cette inégalité avec (2.23) et (2.24) donne (2.21).

Si $l^0 \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, alors en adaptant les lemmes 26 et 27, il est possible de montrer qu'il existe une suite finie strictement croissante $l^0 < l^1 < \cdots < l^{\bar{q}}$ telle que $l^{\bar{q}} = n$ (ce qui implique $\bar{q} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$) et une suite finie $\tau^0, \tau^1, \ldots, \tau^{\bar{q}}, \tau^{\bar{q}+1}$ telle que $\tau^0 = t_p$, $\tau^q \in [t_p, t_p^q] \subseteq [t_p, t_{p+1}]$ pour tout $q \in \{1, \ldots, \bar{q}+1\}$ et

$$y_n(\tau^{\bar{q}+1}) - y_n(\tau^{\bar{q}}) \leq -\frac{\mathbf{r}(t_{p+1})^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(8n^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \Delta_{\mathcal{N}}(t_p).$$

De manière similaire au cas précédant, cette équation conduit à (2.21). Ceci termine la preuve de la proposition 15. □

2.4 Discussion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons dréssé un état de l'art sur les conditions suffisantes pour que la trajectoire du système de consensus linéaire (2.1) converge vers un consensus. Ceci a servi de point de départ pour énoncer de nouvelles conditions moins restrictives que celles de la littérature : les hypothèses de connexité persistante et de divergence lente des interactions réciproques suffisent pour obtenir un consensus. Ce résultat étend les récents travaux de Hendrickx et Tsitsiklis [HT12]. Nous soulignons que l'hypothèse de divergence lente des interactions réciproques autorise les poids d'interaction réciproques $\sum_{i\in S, j\notin S} a_{ij}(t)$ et $\sum_{i\in S, j\notin S} a_{ji}(t)$ à diverger l'un de l'autre. Enfin, nous avons montré que nos deux hypothèses sont fines pour des classes de systèmes particuliers.

Nous voyons plusieurs directions de recherche pour la suite. Le premier point concerne l'optimalité de notre résultat : nous avons montré que notre condition est nécessaire et suffisante pour une classe de système à trois agents. Nous pensons que ce résultat peut s'étendre à un système semblable à n agents. Deuxièmement, l'hypothèse de divergence lente des interactions réciproques est basée sur une réciprocité que l'on peut qualifier d' *instantanée* : quand un sous groupe d'agents S influence le reste du groupe à travers des poids d'interaction de somme $a(s) > 0$ au temps $s \leq t$, l'hypothèse impose à S d'être influencé au même temps s par des poids d'interaction de somme supérieure à $\frac{a(s)}{\mathbf{r}(t)}$. L'influence **sur** S répond immédiatement à une influence **par** S. Nous conjecturons que, sous certaines hypothèses, cette réciprocité pourrait être différée dans le temps.

Deuxième partie

Alignement en vitesse dans les systèmes multi-agents (Flocking)

Chapitre 3

Introduction au flocking

Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons décrit et analysé un système de consensus modélisant le processus d'accord au sein d'un groupe d'individus. Comme nous l'avions signalé dans le chapitre d'introduction, ce système joue un rôle important dans les systèmes dynamiques multi-agents. Dans cette partie, nous nous proposons d'explorer un des domaines où les individus font appel au processus de consensus. Nous explorons un type de mouvement collectif particulier apparaissant dans les systèmes naturels (notamment chez les oiseaux) : le *flocking*.

Dans ce chapitre d'introduction, nous commençons par mentionner l'origine des modèles de flocking. Ensuite, nous présentons l'état de l'art des principales études portant sur les modèles de flocking. Enfin, nous décrivons le problème général que nous explorons dans les trois chapitres suivants. Ces chapitres contiennent l'analyse de convergence de différents systèmes de flocking. Cette analyse est basée sur une nouvelle approche permettant l'obtention de résultats moins conservatifs que ceux obtenus dans la littérature.

3.1 Origine et définition

On parle de *mouvements collectifs* dès lors que des individus parviennent via leurs interactions à engendrer un mouvement de groupe cohérent. Le flocking est un exemple de tels comportements. Le terme *flocking* provient de l'anglais et signifie originellement *vol en formation* ou en *nuée* par analogie avec les comportements collectifs des oiseaux. Les premiers modèles de ces comportements sont apparus dans les années 1980. Reynolds, pionnier dans le domaine, fut le premier à proposer un modèle multi-agent décentralisé simple permet-

tant d'émuler le flocking [Rey87]. D'après Reynolds, un mouvement est dit de type flocking lorsqu'il vérifie les trois caractéristiques suivantes :

- la **séparation** : les agents n'entrent pas en collision et observent une distance minimum avec leurs voisins,
- la **cohésion** : les agents restent à proximité les uns des autres et
- l'**alignement en vitesse** : tous les agents observent une vitesse identique (en direction et amplitude).

Reynolds proposa une implémentation simple et décentralisée capable d'émuler le comportement de flocking de manière remarquablement réaliste. Son algorithme, exécuté sur ordinateur, était défini en temps discret. Nous en donnons ici une version analogue en temps continu :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \mathit{alignement}_i(t) + \mathit{repulsion}_i(t) + \mathit{attraction}_i(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $x_i(t), v_i(t) \in \mathbb{R}^d$ représentent respectivement la position et la vitesse de l'agent i à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$, et $\mathit{alignement}_i(t)$, $\mathit{repulsion}_i(t)$ et $\mathit{attraction}_i(t)$ sont les termes modélisant respectivement l'alignement, la répulsion et l'attraction de l'agent i avec ses voisins. Comme nous le verrons par la suite, le terme $\mathit{alignement}_i(t)$ est habituellement implémenté par un terme de consensus linéaire de la forme (2.1) sur les vitesses. Les termes $\mathit{repulsion}_i(t)$ et $\mathit{attraction}_i(t)$ sont souvent fusionnés et implémentés par le gradient d'un potentiel d'attractif à longue portée et répulsif à courte distance (voir section 3.2). L'expression précise de chaque terme ainsi que la définition du voisinage d'interaction dépendent de chaque modèle.

3.2 Etat de l'art

Dans cette section, nous mentionnons différents modèles de flocking étant apparus dans la littérature ainsi que les résultats de convergence leur étant liés. Ceci nous permettra de comprendre la nouveauté de l'approche adoptée dans cette partie du manuscrit.

3.2.1 Alignement en vitesse

Nous commençons par présenter les modèles n'implémentant que le terme d'alignement en vitesse.

Modèle de Cucker-Smale

Dans [CS07], Cucker et Smale étudient un système de type (3.1) où seul le terme d'alignement en vitesse est implémenté :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)(v_j(t) - v_i(t)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Les auteurs considèrent des poids d'interaction qui diminuent de manière graduelle et continue avec la distance entre les agents :

$$a_{ij}(t) = \frac{H}{1 + \|x_i(t) - x_j(t)\|^{\beta}}$$

où $H > 0$ et $\beta \geq 0$ sont des paramètres du modèle. Pour mesurer la distance par rapport à l'alignement en vitesse, on note pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \|v_i(t) - v_j(t)\|^2, \quad \Gamma(t) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \|x_i(t) - x_j(t)\|^2, \ \Lambda_0 = \Lambda(0) \text{ et } \Gamma_0 = \Gamma(0).$$

Les auteurs démontrent le résultat suivant :

Théorème 28 ([CS07])**.** *Soient $x(0) = x^0$ et $v(0) = v^0$ des conditions initiales. La trajectoire du système (3.2) est alors unique et définie sur $\mathbb{R}^+$. Supposons que l'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée :*

$$\textbf{(i)}\ \beta < \tfrac{1}{2}, \quad \textbf{(ii)}\ \beta = \tfrac{1}{2} \ \textit{et}\ \Lambda_0 < \tfrac{(nH)^2}{2}, \quad \textbf{(iii)}\ \beta > \tfrac{1}{2} \ \textit{et}\ \left(\tfrac{(nH)^2}{2\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} \mathbf{T} > 2(1 + \Gamma_0),$$

$$\textit{où } \mathbf{T} = \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} - \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{2\beta}{2\beta-1}}.$$

Alors, la trajectoire vérifie la propriété de cohésion et converge vers l'alignement en vitesse : il existe une constante B_0 telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+, \Gamma(t) \leq B_0$ et

$$\Lambda(t) \leq \Lambda_0 e^{-2\frac{nH}{B_0^{\beta}}t}.$$

La preuve du théorème est basée sur des méthodes d'analyse et d'intégration et fait appel à la théorie algébrique des graphes présentée dans la section A.3.

Ce théorème fait une hypothèse forte en imposant des interactions entre agents indéfiniment éloignés. Dans certaines applications, une telle hypothèse est irréaliste.

Par la suite, Ha et Liu ont apporté une preuve simplifiée du théorème (28) en exhibant une fonction de Lyapunov explicite en montrant que le système 3.2 vérifie un système d'inégalités différentielles dissipatives [HL09].

Modèle de Vicsek

Dans [LG08], les auteurs étudient un modèle d'alignement en vitesse en temps discret analogue au *modèle de Vicsek* (originellement décrit dans [VCBJ+95]). Dans [LG08], le modèle est traité sans les perturbations qui sont prises en compte dans [VCBJ+95]. Le modèle est le suivant :

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + w_0 e^{\mathbf{i}\theta_i(t)}, \\ \theta_i(t+1) &= \arctan \frac{\sum_{j\in\mathcal{N}} a_{ij}(t)\sin(\theta_j(t))}{\sum_{j\in\mathcal{N}} a_{ij}(t)\cos(\theta_j(t))}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\theta_i(t)$ représente l'angle de la vitesse de l'agent i au temps t et w_0 l'amplitude des vitesses. Les poids $a_{ij}(t)$ sont définis comme suit :

$$a_{ij}(t) = \chi\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| < R\right),$$

où $R > 0$ est le rayon d'interaction du modèle. L'analyse du modèle permet d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 29 ([LG08], Théorème 2.1)**.** *Soient $x(0) = x^0$ et $\theta(0) = \theta^0$ des conditions initiales vérifiant pour $i \in \mathcal{N}$, $\theta_i^0 \in]-\pi/2, \pi/2[$ et telles que le graphe d'interaction initial $G(0) = (\mathcal{N}, \mathcal{E}(0), A(0))$ de matrice d'adjacence $A(0) = (a_{ij}(0))$ est connexe. Enfin, supposons que w_0 vérifie*

$$w_0 \leq \frac{\rho}{\Delta(0)}\left(\frac{cos\|\theta^0\|_\infty}{n}\right)^n,$$

où $\rho = R - \max_{(i,j)\in\mathcal{E}(0)} \|x_i^0 - x_j^0\|$ et $\Delta(0) = \max_{i,j\in\mathcal{N}}(\tan\theta_i(0) - \tan\theta_j(0))$. Alors la trajectoire converge vers l'alignement en vitesse.

Les auteurs obtiennent aussi un résultat pour la version linéarisée du système (3.3). Dans ce cas, la contrainte $\theta_i^0 \in]-\pi/2, \pi/2[$ est remplacée par $\theta_i^0 \in [0, 2\pi[$. La preuve utilise la théorie algébrique des graphes ainsi que la fonction de Lyapunov $t \longmapsto \Delta(t)$.

Ce théorème est intéressant puisqu'il donne des conditions vérifiables uniquement à partir de la configuration initiale du système (positions et vitesses). Cependant, il est fortement conservatif car il proscrit la déconnexion d'arêtes (i, j) originellement connectées. Comme

nous le verrons dans le chapitre 4, ceci n'est pas nécessaire pour obtenir l'alignement en vitesse.

Dans [XJZ11], les auteurs modifient le système (3.3) en supposant que l'amplitude w_0 est distincte pour chaque agent et évolue au cours du temps suivant un système de consensus linéaire. Ils obtiennent un résultat d'alignement en vitesse similaire au théorème 29. Ils montrent de plus que sous une condition plus forte, la trajectoire vérifie la propriété de séparation.

3.2.2 Alignement et force de rappel

Nous passons en revue les modèles intégrant un terme d'alignement (tel que présenté dans la section précédente) avec un terme de répulsion et/ou d'attraction.

Modèle d'Olfati-Saber

Le système proposé par Olfati-Saber dans [Os06] implémente les 3 termes pour le flocking : alignement en vitesse, attraction et répulsion. Le terme d'alignement en vitesse est un terme de consensus sur les vitesses, et les termes d'attraction et répulsion sont implémentés via un potentiel de rappel :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)(v_j(t) - v_i(t)) - \nabla_{x_i} V(\|x_i(t) - x_j(t)\|), \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $a_{ij}(t) = \chi\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq R\right)$ et V est un potentiel de rappel continu sur $\mathbb{R}^+$, décroissant sur $[0, r]$, croissant sur $[r, R]$ et constant sur $[R, +\infty[$ ($r > 0$ est la distance souhaitée entre les agents et $R > r$ est le rayon maximal d'interaction).

Dans [Os06], l'analyse du système (3.4) permet l'obtention du résultat suivant :

Théorème 30. *Si l'on suppose qu'une trajectoire du système (3.4) respecte la propriété de cohésion (i.e. , la distance maximum entre deux agents est bornée au cours du temps) et que l'énergie totale initiale du système (i.e. $\sum_{i\in\mathcal{N}} \|x_i^0\|^2 + \sum_{i,j\in\mathcal{N}, i\neq j} V(\|x_i(t) - x_j(t)\|)$) est suffisamment faible alors la trajectoire du système converge asymptotiquement vers un état de flocking : séparation, cohésion et alignement en vitesse sont garantis.*

Il est important de remarquer ici que le résultat avancé ne permet pas de conclure sur l'obtention du flocking puisque l'hypothèse de cohésion n'est pas nécessairement satisfaite.

Dans [Os06], il est démontré que l'ajout d'un leader suivi sans condition sur la distance permet de garantir la cohésion du groupe. Les preuves des résultats sont basées sur l'exhibition d'une fonction de Lyapunov pour le système (3.4) ainsi que sur le principe d'invariance de Lasalle.

Modèle de Zavlanos et al.

Dans [ZJP07], Zavlanos et al. proposent un modèle de structure similaire à celui de Olfati-Saber [Os06] à la différence que le potentiel de rappel V diverge vers l'infini lorsque la distance $\|x_i - x_j\|$ approche le rayon d'interaction R par valeurs inférieures, ou 0 par valeurs supérieures, ce qui permet d'empêcher les déconnections des agents initialement connectés ainsi que les collisions. L'analyse du système permet aux auteurs de montrer la convergence de la trajectoire vers un état de flocking pourvu que le graphe d'interaction soit initialement connexe. Ce résultat est intéressant. Cependant, l'hypothèse du potentiel d'interaction non borné n'est pas réaliste pour tous les systèmes physiques.

La preuve du résultat est basée sur des outils similaires à ceux utilisés dans [Os06]. La cohésion est garantie par le potentiel non borné.

Extension du modèle de Cucker-Smale

Le modèle de Cucker-Smale présenté dans la section 3.2.1 fut par la suite généralisé pour inclure une force de rappel dans [PKH10]. Les résultats obtenus dans ce dernier article furent étendus dans [ACHL12], dont nous présentons le résultat principal. Notons $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ la distance entre les agents i et j. Le système de Cucker-Smale généralisé est le suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\
\dot{v}_i(t) &= \tfrac{K_0}{n} \sum_{j=1}^{n} \psi(r_{ij})(v_j - v_i) \\
&+ \tfrac{K_1}{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{2r_{ij}^2} \langle v_i - v_j | x_i - x_j \rangle (x_j - x_i) + \frac{K_2}{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{2r_{ij}} (r_{ij} - r)(x_j - x_i),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

où $K_0, K_1, K_2 > 0$ sont des constantes du modèle, r est la distance optimale souhaitée entre 2 agents et ψ est une fonction strictement positive, bornée, décroissante et Lipchitz sur $\mathbb{R}^+$. Les deux derniers termes qui ont été ajoutés au modèle original ont été déterminés pour que dans le cas $n = 2$, l'écart $r_{ij} - r$ converge exponentiellement vers 0. On note $x^* = 1/n \cdot (x_1 + \cdots + x_n)$, $v^* = 1/n \cdot (v_1 + \cdots + v_n)$, $y_i = x_i - x^*$, $\delta_i = v_i - v^*$, pour $i \in \mathcal{N}$, $y = (y_i, \ldots, y_n)$ et $\delta = (\delta_i, \ldots, \delta_n)$. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 31 ([ACHL12] Théorème 3.3)**.** *Soient $x(0) = x^0$ et $v(0) = v^0$ des conditions initiales. Le système (3.2) possède alors une unique trajectoire définie sur $\mathbb{R}^+$. Supposons que cette trajectoire vérifie les hypothèses suivantes*

$$\|\delta^0\|_\infty > 0 \ , \ \|\delta^0\|_\infty < \frac{K_0}{2} \min\left(\int_0^{2\|y^0\|_\infty} \psi(s)ds \ , \ \int_{2\|y^0\|_\infty}^{\infty} \psi(s)ds \right).$$

Alors, la trajectoire vérifie la propriété de cohésion et converge vers l'alignement en vitesse : il existe $x_m, x_M > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$,

$$x_m \leq \|y(t)\|_\infty \leq x_M \ \ et \ \ \|\delta(t)\|_\infty \leq \|\delta^0\|_\infty e^{-K_0\psi(2x_M)t}.$$

La preuve du théorème est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov. Il est remarquable que contrairement aux résultats usuels de la littérature, ce résultat porte sur les normes ∞ des positions et vitesses plutôt que sur les normes 2.

Une nouvelle fois, le modèle suppose des interactions entre agents indéfiniment éloignés ce qui peut paraître irréaliste.

Le modèle original de Cucker-Smale a aussi été étendu dans [CD11] par l'ajout d'une force de répulsion non décentralisée où $\dot{v}_i$ est fonction de l'ensemble des $v_j(t)$ pour $j \in \mathcal{N}$.

3.2.3 Flocking stochastique

Dans les applications en ingénierie telles qu'en robotique, les systèmes multi-agents sont sujets à perturbations et leur modélisation se heurte à des incertitudes. Par conséquent, il est utile de considérer des perturbations aux systèmes de flocking que nous avons vu précédemment.

Modèle de Vicsek

Un des catalyseurs de la récente reprise des études sur les modèles de flocking fut l'article de Vicsek et al. [VCBJ+95]. Le modèle proposé dans [VCBJ+95] correspond au système (3.3) où l'équation régissant l'évolution de l'angle θ_i est modifiée par l'ajout d'un bruit $\nu_i(t)$. La variance du bruit σ^2 est un paramètre du système. Notons que dans ce modèle les positions et vitesses appartiennent à un espace torique de sorte que la cohésion est toujours garantie. Vicsek et al. expliquent au moyen de simulations numériques que le système passe d'un état désordonné à un état ordonné (proche de l'alignement en vitesse) à la manière d'un changement de phase des particules d'un fluide lorsque le paramètre σ^2 est diminué. Aucune preuve formelle ne fut avancée dans cet article.

Modèle de Cucker-Smale stochastique

Une autre approche est suivie dans [DM09] où les auteurs considèrent un système d'alignement en vitesse de type (3.2) en temps discret pour lequel les interactions sont sujet à défaillance. Il s'agit donc d'un bruit multiplicatif. Le système étudié est le suivant :

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + \varepsilon v_i(t) \\ v_i(t+1) &= v_i(t) + \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(t)(v_j(t) - v_i(t)), \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\varepsilon \in]0, 1/(n-1)]$, avec n le nombre d'agents. Les auteurs supposent que les interactions suivent une structure hiérarchique, *i.e.* la matrice d'adjacence du graphe d'interaction est triangulaire. On note $\mathcal{L}_i$ l'ensemble des leaders de i, *i.e.* les agents pouvant influencer i. Les ensembles $\mathcal{L}_i$ sont supposés constants. Les auteurs font l'hypothèse que les poids a_{ij} pour $j \in \mathcal{L}_i$ vérifient

$$\mathbb{E}(a_{ij}(t+1)|\mathcal{F}_t) \geq \frac{H}{1 + \|x_i(t) - x_j(t)\|^\beta},$$

où $H \in]0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ sont des constantes du modèle et $\mathcal{F}_t$ représente la trajectoire jusqu'au temps t. Sous cette hypothèse, les auteurs obtiennent le résultat suivant :

Théorème 32. *Si* **(i)** $\beta < 1$ *ou* **(ii)** $\beta = 1$ *et les coefficients*

$$\gamma_i = \sum_{j \in \mathcal{L}_i} \frac{H}{\|v_i(0) - v_j(0)\|}$$

vérifient $\gamma_i > n - i + 2$ *pour* $i \geq 3$ *et* $\gamma_2 > n - 1$, *alors la trajectoire converge vers un alignement en vitesse et les distances entre les agents convergent.*

La preuve utilise une récurrence partant du premier leader et descendant le long de la structure hiérarchique des interactions. De la même façon que dans le cas déterministe, ce modèle suppose des interactions irréalistes entre agents indéfiniment éloignés.

Dans [HLL09] et [CM08], les auteurs étudient un système de type (3.2) auquel ils ajoutent un bruit additif portant sur l'évolution des vitesses. Ce bruit est de moyenne nulle et de variance constante. Dans ce cas, l'analyse montre que les écarts entre les vitesses diminuent jusqu'à atteindre une amplitude proportionnelle au bruit puis oscillent autour de l'équilibre. Par conséquent, les distances entre agents ne se stabilisent pas pour ce type de système, la propriété de cohésion ne peut donc être satisfaite.

3.2.4 Synthèse

Nous pouvons classer les modèles présentés dans cet état de l'art d'après le critère suivant : le modèle autorise-t-il des *interactions à longue portée*, *i.e.* des interactions entre agents indéfiniment éloignés ?

L'hypothèse des interactions à longue portée, telle que faite dans les modèles de Cucker-Smale [CS07, PKH10, ACHL12, CD11, DM09, HLL09, CM08], simplifie leur analyse. Elle permet d'obtenir des conditions pour l'alignement en vitesse et la cohésion dépendant uniquement des conditions initiales. Au contraire, les modèles proscrivant les interactions à longue portée doivent faire d'autres hypothèses fortes pour garantir l'alignement : le résultat d'Olfati-Saber [Os06] utilise la propriété de cohésion comme hypothèse tandis que Zavlanos et al. [ZJP07] se basent sur une force de rappel non bornée lorsque la distance entre agents approche le rayon d'interaction R. Seule l'analyse du Modèle de Vicsek (sans interaction à longue portée) par Liu et Guo dans [LG08] donne un résultat d'alignement sans hypothèse particulière. Cependant, soulignons que l'ensemble des résultats présentés ici proscrit la déconnexion d'arêtes initialement présentes dans le graphe d'interaction.

Dans notre étude, nous tâcherons d'une part d'obtenir, pour un modèle sans interaction à longue portée, des conditions pour l'alignement en vitesse dépendant uniquement des positions et vitesses initiales (de même que dans [LG08]). D'autre part, nos résultats autoriserons la déconnexion d'arêtes, non nécessaires pour garantir l'alignement en vitesse. Ceci rend nos conditions moins conservatives que celles présentées dans l'état de l'art.

3.3 Présentation de l'étude

Dans ce manuscrit, nous portons notre intérêt sur le terme d'alignement du système général (3.1). Par conséquent les systèmes que nous étudierons sont de type :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= alignement_i(t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $alignement_i(t)$ modélise l'alignement de l'agent i avec ses voisins. Comme nous l'avons vu pour le modèle de Cucker-Smale dans l'état de l'art, l'analyse du système (3.7) constitue un point de départ pour l'étude du système général de flocking (3.1).

Le premier chapitre de cette partie s'intéresse au cas déterministe lorsque les poids d'interaction a_{ij} sont de type $\chi(\|x_i - x_i\| \leq R)$: les agents interagissent si leur distance est inférieure à un rayon d'interaction R. Nous parlerons dans ce cas d' *interactions métriques*. Le chapitre suivant s'intéresse au cas stochastique où les rayons d'interaction diffèrent pour

chaque paire d'agents et changent aléatoirement au cours du temps. Enfin, nous explorons le cas où les agents interagissent avec leur m-plus proches voisins où m est un paramètre fixe du modèle. Nous parlerons dans ce cas d'interactions topologiques.

L'objectif principal est, pour un système donné, d'exhiber des conditions suffisantes garantissant que la trajectoire du système converge vers un état de flocking comme décrit dans [Rey87]. Etant donné que dans ce manuscrit nous étudions le système réduit (3.7), par flocking nous entendrons alignement en vitesse et cohésion ; la séparation n'étant plus garantie en l'absence du terme de répulsion. Dans la première partie du manuscrit, nous avons déterminé des conditions suffisantes pour la convergence vers le consensus. Les conditions de convergence reposent sur l'évolution des poids d'interaction au cours du temps. Ce type d'exigence est mal adapté aux applications réelles. Ici, nous proposons des conditions basées sur la configuration initiale (positions et vitesses des agents) uniquement qui peuvent être vérifiées à priori sans avoir recours à la simulation.

La méthode générale pour parvenir à cet objectif suit le raisonnement suivant :

- **Alignement en vitesse** Si le graphe d'interaction préserve une propriété topologique donnée (connexité, connexité *en moyenne* ou présence d'un sous arbre couvrant, suivant le cas), alors le désaccord entre les vitesses diminue à taux exponentiel (que nous pouvons estimer), et par conséquent la modification des distances entre agents est finie et nous pouvons la quantifier.

- **Robustesse des interactions** Si la perturbation des distances entre agents est inférieure à la *robustesse du graphe* (que nous définirons) alors la préservation de la propriété topologique nécessaire à l'alignement en vitesse est garantie.

La combinaison de ces deux assertions nous donne une relation entre les positions et les vitesses initiales à respecter pour garantir l'alignement en vitesse. Les études de robustesse que nous développons n'avaient pas encore été obtenues dans la littérature.

Remarque 33. *Contrairement à la première partie du manuscrit, nous ne traiterons pas ici la question d'existence et d'unicité des trajectoires.*

Chapitre 4

Modèle déterministe avec interactions métriques

4.1 Description du problème

Dans ce chapitre, nous étudions un système dynamique multi-agents en temps continu de type (3.1). Ici, seul le terme d'alignement en vitesse est implémenté. Les positions et vitesses initiales sont données par $x_i(0) = x_i^0 \in \mathbb{R}^d$ et $v_i(0) = v_i^0 \in \mathbb{R}^d$ pour $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$. Les agents évoluent d'après le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(t)(v_j(t) - v_i(t)), \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $a_{ij}(t)$ sont les poids d'interaction définis par

$$a_{ij}(t) = \chi\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq R\right)$$

avec $R > 0$ le rayon à l'intérieur duquel les agents interagissent. Le graphe d'interaction $G(t)$ de matrice d'adjacence $A(t) = (a_{ij}(t))$ est alors appelé *graphe de proximité*. Puisque le graphe de proximité dépend exclusivement des positions des agents, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ un vecteur de positions, nous utilisons la notation $G_x = (\mathcal{N}, \mathcal{E}_x)$ avec

$$\mathcal{E}_x = \left\{(j, i) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \|x_i - x_j\| \leq R\right\}.$$

Le but de l'étude est de déterminer des conditions sur les positions et vitesses initiales garantissant que tous les agents convergent vers une même vitesse (*i.e.* l'alignement en vitesse est atteint). Pour cela, nous définissons une nouvelle notion de robustesse de graphe qui nous permet d'établir les conditions recherchées. Notre approche fait appel à des résultats de la littérature tels que [OSM04a] (voir la section 2.2.3). Formellement, on dit que les agents parviennent à un alignement asymptotique en vitesse lorsque qu'il existe $v^* \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall i \in \mathcal{N},\ \lim_{t\to+\infty} v_i(t) = v^*.$$

4.2 Approche algébrique de l'alignement en vitesse

Dans cette section, nous adaptons le résultat de [OSM04a] présenté dans l'état de l'art sur le consensus (section 2.2.3) au cas du consensus sur les vitesses. Nous définissons les vecteurs des positions et vitesses empilées : $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $v^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0) \in \mathbb{R}^{n\times d}$. Nous utilisons la notation de la matrice Laplacienne augmentée (section A.3) $\mathbf{L}(t) = L(t) \otimes I_d$ où I_d est la matrice identité de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\otimes$ désigne le produit de Kronecker. Alors, la seconde équation de (4.1) peut se réécrire sous forme matricielle :

$$\dot{v}(t) = -\mathbf{L}(t)v(t). \tag{4.2}$$

Notons $v^* = (v_1^0 + \cdots + v_n^0)/n$ la moyenne des vitesses initiales. Puisque $L(t)$ est symétrique et $\mathbf{1}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0, la vitesse moyenne des vitesses est préservée par le système (4.2). En conséquence, si les agents parviennent à un alignement asymptotique en vitesse, la vitesse commune est nécessairement v^*.

Pour $i \in \mathcal{N}$, on note $\delta_i(t) = v_i(t) - v^*$. On définit le *vecteur de désaccord en vitesse* $\delta(t) = (\delta_1(t)^T, \dots, \delta_n(t)^T)^T$. Notons $y_i(t) = x_i(t) - v^* t$ et $y(t) = (y_1(t)^T, \dots, y_n(t)^T)^T$, alors $\dot{y}(t) = \delta(t)$. Le vecteur $y(t)$ permet de décrire les positions relatives entre les agents puisque nous avons

$$\forall i, j \in \mathcal{N},\ x_i(t) - x_j(t) = y_i(t) - y_j(t).$$

Supposons que le graphe $G(t)$ reste dans un ensemble Π de graphes connexes pour tout temps $t \in \mathbb{R}^+$. L'ensemble des graphes connexes composés de n nœuds, et par inclusion Π, est fini, ce qui implique que $\min_{G\in\Pi} \lambda_2(G)$ est bien défini et strictement positif. Nous citons maintenant le résultat de [OSM04a] montrant que si le graphe d'interaction $G(t)$ reste connexe au cours du temps alors les agents parviennent à un alignement en vitesse.

Théorème 34. *[OSM04a] Soient $I \subseteq \mathbb{R}^+$ un intervalle contenant 0 et $v : I \to \mathbb{R}^{n\times d}$ une solution du système (4.2). Si le graphe $G(t)$ reste dans l'ensemble de graphes connexes Π pour tout $t \in I$, alors*

pour tout $t \in I$

$$\|\delta(t)\| \leq e^{-\kappa t}\|\delta(0)\|$$

où $\kappa = \min_{G \in \Pi} \lambda_2(G)$.

Dans [OSM04a], on fait l'hypothèse que les agents évoluent dans un espace de une dimension ($d = 1$). Cependant, ce résultat s'étend directement aux dimensions supérieures. Le résultat précédent nous donne une condition suffisante pour parvenir à l'alignement en vitesse. Néanmoins, sans hypothèses sur les positions et vitesses initiales, on ne peut conclure sur la préservation de la connexité du graphe $G(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Dans la suite du chapitre, nous identifions un ensemble de conditions initiales basées sur une mesure de robustesse de graphe permettant de garantir cette propriété.

4.3 Conditions suffisantes pour l'alignement en vitesse

Dans cette section, nous proposons un théorème donnant une condition suffisante sur les positions et vitesses initiales sous laquelle la trajectoire du système (4.1) converge vers un état de flocking. Considérons une trajectoire du système (4.1) définie sur $\mathbb{R}^+$ de configuration initiale $x^0 \in \mathbb{R}^{n \times d}$ pour la position des agents. Ce résultat met en lien la norme initiale du vecteur de désaccord en vitesse $\|\delta(0)\|$, la perturbation maximale souhaitée ρ ainsi que la connexité algébrique d'un sous graphe de G_{x^0} défini en fonction de ρ. Ce théorème démontre de plus que si la condition est satisfaite, le graphe d'interaction reste connexe pour tout temps.

Dans un premier temps, on se donne une quantité $\rho \in [0, R]$ qui représente la perturbation maximale souhaitée sur les positions relatives. On définit $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}) = (\mathcal{N}, \mathcal{S}_\rho(\mathcal{E}_{x^0}))$ le sous graphe de G_{x^0} stable par perturbation ρ où

$$\mathcal{S}_\rho(\mathcal{E}_{x^0}) = \left\{(j, i) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \|x_i^0 - x_j^0\| + \rho \leq R\right\}. \tag{4.3}$$

Puisque $\rho \in [0, R]$, on a $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}) \subseteq G_{x^0}$. On remarque que $\mathcal{S}_0(G_{x^0}) = G_{x^0}$ et $\mathcal{S}_R(G_{x^0}) = (\mathcal{N}, \emptyset)$ (sauf pour un ensemble de mesure nulle de conditions initiales). De plus, $\rho \longmapsto \mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est une fonction constante par morceaux et décroissante pour la relation d'ordre $\subseteq$. Nous notons la connexité algébrique de $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$

$$\lambda_2^*(\rho) = \lambda_2(\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})).$$

Lorsque le contexte le permet, nous notons plus simplement $\lambda_2^* = \lambda_2^*(\rho)$.

Théorème 35. *Soit $x^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ un vecteur de positions initiales des agents tel que le graphe d'interaction associé G_{x^0} soit connexe. Soit $\rho > 0$ une perturbation maximale souhaitée telle que le graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ soit connexe. Soit $v^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ un vecteur de vitesses initiales tel que $\delta(0)$, le vecteur de désaccord correspondant, vérifie*

$$\|\delta(0)\| \leq \frac{\lambda_2^* \rho}{\sqrt{2}} \tag{4.4}$$

où $\lambda_2^* = \lambda_2(\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}))$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est un sous graphe de $G(t)$. De plus,

$$\|x(t) - v^* t - x^0\| \leq \frac{\|\delta(0)\|}{\lambda_2^*}$$

et

$$\|\delta(t)\| \leq e^{-\lambda_2^* t}\|\delta(0)\|.$$

La preuve du résultat nécessite l'introduction de la notion de *robustesse de graphe* et est en conséquence transférée dans la section 4.4. Nous donnons les grandes lignes de cette preuve :

(i) La préservation du sous graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ dans le graphe d'interaction garantit la décroissance du désaccord en vitesse à un taux exponentiel $\lambda_2(G(t)) \geq \lambda_2^*(\rho)$ (théorème 34).

(ii) La convergence des vitesses à un taux supérieur à $\lambda_2^*(\rho)$ permet de majorer la perturbation sur les distances par $\sqrt{2}\|\delta(0)\|/\lambda_2^*(\rho)$ (Preuve du théorème 35).

(iii) La majoration de la perturbation des distances avec l'hypothèse $\|\delta(0)\| \leq \lambda_2^*(\rho)\rho/\sqrt{2}$ donne la préservation du graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ (proposition 36).

Il est important de remarquer que le théorème fait l'hypothèse que le sous graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est connexe. Ceci n'est *a priori* pas nécessairement vérifié. Pour cela, nous exhibons dans la section 4.4 un sous graphe spécifique étant connexe. Ce sous graphe est appelé *sous graphe cœur*.

4.4 Robustesse du graphe

4.4.1 Préservation de sous graphe

Dans cette section, nous définissons une notion de robustesse pour les graphes de proximité. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ une configuration de référence pour la position des agents. Nous supposons que G_{x^0} est un graphe connexe et nous cherchons à caractériser un voisinage de x^0 tel que

pour toute configuration perturbée y dans ce voisinage, le graphe G_y est connexe bien que non nécessairement identique à G_{x^0}. Nous introduisons une mesure de robustesse du graphe G_{x^0} nous permettant d'identifier un tel voisinage. Nous montrons de plus qu'il existe un sous graphe de G_{x^0} connexe qui est aussi sous graphe de G_y pour tout y dans ce voisinage. Enfin, nous proposons un algorithme permettant de calculer cette mesure de robustesse.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 36. *Soit x^0 une configuration de référence telle que le graphe G_{x^0} soit connexe. Soit $\rho \in [0, R]$. Soit y une configuration perturbée vérifiant*

$$\|y - x^0\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}. \tag{4.5}$$

Alors,

$$\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}) \subseteq G_y.$$

De plus, si $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est connexe, G_y l'est aussi.

Démonstration. Notons $z = (z_1^T, \ldots, z_n^T)^T \in \mathbb{R}^{n \times d}$ tel que $z = y - x^0$. Pour tout $i, j \in \mathcal{N}$, nous avons $-2\langle z_i | z_j \rangle \leq \|z_i\|^2 + \|z_j\|^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|z_i - z_j\|^2 &= \|z_i\|^2 + \|z_j\|^2 - 2\langle z_i | z_j \rangle \\ &\leq 2(\|z_i\|^2 + \|z_j\|^2) \\ &\leq 2\|z\|^2 = 2\|y - x^0\|^2. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'équation (4.5), nous avons que pour tout $i, j \in \mathcal{N}$, $\|z_i - z_j\| \leq \rho$. Soit $(i, j) \in \mathcal{S}_\rho(\mathcal{E}_{x^0})$. Par définition, $\|x_i^0 - x_j^0\| \leq R - \rho$. Donc,

$$\begin{aligned} \|y_i - y_j\| &= \|x_i^0 - x_j^0 + z_i - z_j\| \\ &\leq \|x_i^0 - x_j^0\| + \|z_i - z_j\| \\ &\leq R - \rho + \rho \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Ceci signifie que $(i, j) \in \mathcal{E}_y$. Par conséquent $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est un sous graphe de G_y. La dernière assertion de la proposition vient du fait qu'un graphe contenant un sous graphe couvrant connexe est connexe (voir la section A.2). □

La proposition précédente montre que si la perturbation reste dans un certain voisinage de la configuration de référence, il est possible de préserver un certain sous graphe du graphe

initial. Pour garantir la préservation de la connexité, il suffit alors que ce sous graphe soit lui même connexe. Dans la section suivante, nous exhibons un tel sous graphe.

Le résultat précédent, associé au résultat issu de [OSM04b], nous permet de donner la preuve du théorème 35.

Démonstration. Soit $\rho \in [0, R]$ tel que $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ soit connexe. Soit Π l'ensemble des graphes à n nœuds ayant $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ pour sous graphe. Puisque $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est connexe, tout graphe de Π est connexe et puisque $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}) \in \Pi$,

$$\min_{G \in \Pi} \lambda_2(G) = \lambda_2(\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})) = \lambda_2^* > 0.$$

Supposons qu'il existe $t > 0$ tel que $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ ne soit pas un sous graphe de $G(t)$ (*i.e.* $G(t) \notin \Pi$). Notons

$$t^* = \inf\{t \in \mathbb{R}^+;\ G(t) \notin \Pi\}.$$

Si $t^* > 0$, le théorème 34 démontre que pour tout $t \in [0, t^*]$

$$\|\delta(t)\| \leq e^{-\lambda_2^* t}\|\delta(0)\| \leq e^{-\lambda_2^* t}\frac{\lambda_2^* \rho}{\sqrt{2}}.$$

En remarquant que

$$y(t) = x^0 + \int_0^t \delta(s)ds,$$

nous avons pour tout $t \in [0, t^*]$

$$\|y(t) - x^0\| \leq \frac{\lambda_2^* \rho}{\sqrt{2}} \int_0^t e^{-\lambda_2^* s} ds < \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

Donc, par continuité de y, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0, t^* + \varepsilon]$,

$$\|y(t) - x^0\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

Si $t^* = 0$, puisque $y(0) = x^0$ et par continuité de y, la même sorte de propriété est vérifiée. Par la proposition 36, nous avons pour tout $t \in [0, t^* + \varepsilon], G_{y(t)} \in \Pi$. En remarquant que pour tout $i, j \in \mathcal{N}, x_i(t) - x_j(t) = y_i(t) - y_j(t)$, il s'en suit que le graphe $G(t) = G_{x(t)} = G_{y(t)}$. Donc, pour tout $t \in [0, t^* + \varepsilon], G(t) \in \Pi$. Ceci contredit la définition de t^*. En conséquence, pour tout $t \in \mathbb{R}^+, G(t) \in \Pi$. Ceci prouve la première partie du théorème. Ensuite, d'après le théorème 34, nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|\delta(t)\| \leq e^{-\lambda_2^* t}\|\delta(0)\|$$

et

$$\|y(t) - x^0\| \leq \int_0^t \|\delta(s)\| ds \leq \int_0^t e^{-\lambda_2^* s} \|\delta(0)\| ds \leq \frac{\|\delta(0)\|}{\lambda_2^*}.$$

□

4.4.2 Sous graphe cœur

Définition

Notre mesure de robustesse du graphe G_{x^0} repose sur une quantification de l'éloignement maximum que deux agents peuvent provoquer avant que leur interaction ne soit interrompue. Ceci est mesuré par la *robustesse d'un chemin* $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ du graphe G_{x^0} définie par

$$s(i_1, i_2, \ldots, i_p) = \min_{k=1}^{p-1} (R - \|x_{i_k}^0 - x_{i_{k+1}}^0\|).$$

Par définition de G_{x^0}, nous avons que, pour tout chemin $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, $0 \leq s(i_1, i_2, \ldots, i_p) \leq R$. Intuitivement, si les distances entre paires d'agents ne changent pas plus que $s(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, alors le chemin $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ sera préservé.

Nous pouvons maintenant définir la *robustesse* ρ_{ij} entre deux agents i et $j \in \mathcal{N}$ avec $i \neq j$ comme la robustesse maximale parmi tous les chemins de G_{x^0} joignant i et j :

$$\rho_{ij} = \max_{(i_1, i_2, \ldots, i_p) \in \text{Chemins}(i,j)} s(i_1, i_2, \ldots, i_p)$$

où Chemins(i, j) est l'ensemble des chemins de i à j dans G_{x^0}. Puisque G_{x^0} est supposé connexe, Chemins(i, j) n'est pas vide et pour tout $i, j \in \mathcal{N}$, $0 \leq \rho_{ij} \leq R$. Intuitivement, si les distances entre agents ne varient pas plus de ρ_{ij} alors il restera au moins un chemin entre les agents i et j. Pour que la définition qui suit soit cohérente, nous posons $\rho_{ii} = R$ pour $i \in \mathcal{N}$. Enfin, la *robustesse* $\rho_{G_{x^0}}$ du graphe G_{x^0} est définie comme la robutesse minimale entre toutes les paires d'agents :

$$\rho_{G_{x^0}} = \min_{(i,j) \in \mathcal{N}^2} \rho_{ij}.$$

Nous avons $0 \leq \rho_{G_{x^0}} \leq R$. Si les distances entre agents ne changent pas plus que $\rho_{G_{x^0}}$ alors pour toute paire d'agents $i, j \in \mathcal{N}$, il restera au moins un chemin entre i et j et par conséquent, le graphe restera connexe. Nous démontrons que le sous graphe correspondant à la perturbation $\rho_{G_{x^0}}$ est d'une part connexe et est préservé dans la configuration perturbée. Nous appelons ce sous graphe particulier le *sous graphe cœur* de G_{x^0} et notons

$$\mathcal{C}(G_{x^0}) = (\mathcal{N}, \mathcal{C}(\mathcal{E}_{x^0})) = \mathcal{S}_{\rho_{G_{x^0}}}(G_{x^0}).$$

Remarquons que puisque $\rho_{G_{x^0}} \geq 0$, $\mathcal{C}(G_{x^0})$ est un sous graphe de G_{x^0}, le résultat suivant montre qu'il est connexe.

Lemme 37. *Soit $x^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ une configuration de référence telle que le graphe G_{x^0} soit connexe. Alors, le sous graphe cœur $\mathcal{C}(G_{x^0})$ est connexe. De plus, pour $\rho > \rho_{G_{x^0}}$, $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ n'est pas connexe.*

Démonstration. Soient i et $j \in \mathcal{N}$, alors $\rho_{ij} \geq \rho_{G_{x^0}}$. Soit $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ un chemin de G_{x^0} entre i et j de robustesse maximale, *i.e.* $s(i_1, i_2, \ldots, i_p) = \rho_{ij}$. Alors, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$,

$$R - \|x^0_{i_k} - x^0_{i_{k+1}}\| \geq s(i_1, i_2, \ldots, i_p) \geq \rho_{G_{x^0}}.$$

Par conséquent, $(i_k, i_{k+1}) \in \mathcal{C}(\mathcal{E}_{x^0})$, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. On en déduit que $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ est un chemin de $\mathcal{C}(G_{x^0})$ entre i et j. Ceci est vérifié pour tout $i, j \in \mathcal{N}$, donc $\mathcal{C}(G_{x^0})$ est connexe.

Concernant la deuxième partie du résultat, nous avons $\rho > \rho_{G_{x^0}}$. Notons $(i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tel que $\rho > \rho_{ij}$, la robustesse entre i et j. Ainsi, pour tout chemin de i à j dans G_{x^0}, il existe une arête (i_k, i_{k+1}) telle que $R - \|x^0_{i_k} - x^0_{i_{k+1}}\| < \rho$. Ce qui signifie, d'après la définition de $S_\rho(G_{x^0})$, que (i_k, i_{k+1}) n'appartient pas au graphe $S_\rho(G_{x^0})$. Par conséquent, aucun chemin de i à j de G_{x^0} n'est présent dans $S_\rho(G_{x^0})$. Or $S_\rho(G_{x^0}) \subseteq G_{x^0}$, donc *a fortiori*, aucun chemin de $S_\rho(G_{x^0})$ ne lie i et j. Cela signifie que $S_\rho(G_{x^0})$ n'est pas connexe. □

Un exemple de sous graphe cœur est fourni dans la figure 4.1. Nous adaptons maintenant le théorème 35 au cas du sous graphe cœur.

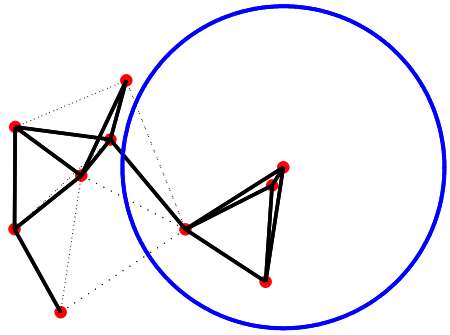


FIGURE 4.1: Le graphe G_{x^0} (tous les traits) et le sous graphe cœur associé $\mathcal{C}(G_{x^0})$ (uniquement les traits gras). Le cercle de rayon R représente la zone d'interaction d'un agent.

Théorème 38. *Soit $x^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ un vecteur de positions initiales des agents tel que le graphe d'interaction associé G_{x^0} soit connexe. Supposons de plus que $\rho_{G_{x^0}} > 0$. Soit $v^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ un vecteur de vitesses initiales tel que $\delta(0)$ le vecteur de désaccord correspondant vérifie*

$$\|\delta(0)\| \leq \frac{\lambda_2^* \rho_{G_{x^0}}}{\sqrt{2}} \triangleq b_{coeur} \tag{4.6}$$

où $\lambda_2^* = \lambda_2(C(G_{x^0}))$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $C(G_{x^0})$ est un sous graphe de $G(t)$. De plus,

$$\|y(t) - x^0\| \leq \frac{\|\delta(0)\|}{\lambda_2^*}$$

et

$$\|\delta(t)\| \leq e^{-\lambda_2^* t}\|\delta(0)\|.$$

La preuve du théorème 35 s'adapte directement pour le cas du théorème 38 en remarquant que la condition de connexité de $C(G_{x^0})$ nécessaire pour la preuve est vérifiée d'après le lemme 37.

La borne sur le vecteur de désaccord en vitesse initial donnée par le théorème 38 est proportionelle à la fois à la robustesse du graphe d'interaction initial et à la connexité algébrique du sous graphe cœur associé. Dans le cas des graphes d'interaction de proximité, ces deux quantités sont des fonctions croissantes de la densité des agents. Par conséquent, le théorème 38 montre que plus le désaccord sur les vitesses initiales est grand, plus le groupe d'agents devra être dense pour garantir l'alignement en vitesse. Cette observation est raisonnable. Remarquons que la robustesse et la connexité algébrique d'un graphe sont bornées par R et n respectivement. Cela montre que lorsque le désaccord sur les vitesses initiales est trop grand, il n'y a *a priori* pas toujours une configuration de positions des agents assurant l'alignement final des vitesses.

Le théorème 38 donne une condition suffisante pour l'alignement en vitesse. Une question importante est de savoir si la borne donnée sur la norme du vecteur de désaccord est optimale : *i.e.* pouvons-nous trouver une configuration d'agents où le non respect de l'inégalité (4.6) empêche l'alignement en vitesse. Une telle configuration est donnée dans la section 4.4.3.

Algorithme de calcul

Dans le paragraphe précédent, nous avons caractérisé un voisinage de la configuration de référence pour lequel la connexité du graphe est préservée. Pour que le théorème 38 soit fonctionnel, la robustesse $\rho_{G_{x^0}}$ doit être calculable. Ceci peut être réalisé en utilisant la

programmation dynamique par adaptation de l'algorithme de plus court chemin de Floyd-Warshall (voir par exemple [CLR90]) comme le montre l'Algorithme 1. Cet algorithme s'exécute avec une complexité spatiale de $O(n^2)$ et temporelle de $O(n^3)$.

Algorithme 1 Calcul de la robustesse $\rho_{G_{x^0}}$

```
// Initialisation :
∀(i, j) ∈ N², ρ^0_ij ← R − ||x^0_i − x^0_j|| ;
// Boucle principale :
for k ∈ N do
  for i ∈ N do
    for j ∈ N do
      ρ^k_ij ← max(ρ^{k−1}_ij, min(ρ^{k−1}_ik, ρ^{k−1}_kj)) ;
    end for
  end for
end for
// Calcul de la robustesse :
ρ_{G_{x^0}} = min_{(i,j)∈V²} ρ^n_ij;
```

L'idée principale de l'Algorithme 1 est la suivante. Notons ρ_{ij}^k la robustesse maximale de tous les chemins $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ entre i et j dont les nœuds intermédiaires $i_2, \ldots, i_{p-1}$ sont dans $\{1, \ldots, k\}$. S'il n'existe pas de chemin entre i et j avec les nœuds intermédiaires dans $\{1, \ldots, k\}$, on pose $\rho_{ij}^k < 0$. Ensuite, pour calculer ρ_{ij}^k à partir de ρ_{ij}^{k-1}, ou bien le chemin entre i et j de robustesse maximale avec les nœuds intermédiaires dans $\{1, \ldots, k\}$ ne contient pas le nœud k et $\rho_{ij}^k = \rho_{ij}^{k-1}$ ou bien il contient le nœud k et $\rho_{ij}^k = \min(\rho_{ik}^{k-1}, \rho_{kj}^{k-1})$. Enfin, la robustesse entre i et j et définie par $\rho_{ij} = \rho_{ij}^n$.

Remarquons que puisque le graphe G_{x^0} est symétrique, il est clair que pour tout $i, j, k \in \mathcal{N}$, nous avons $\rho_{ij}^k = \rho_{ji}^k$. Cela signifie que dans l'Algorithme 1 il est seulement nécessaire de calculer ρ_{ij}^k pour $j \leq i$, ce qui divise la complexité temporelle par deux.

4.4.3 Optimisation de la borne

Théorie

Nous avons vu dans la section 4.3 par le théorème 35 que le désaccord en vitesse peut être choisi aussi élevé que la borne $\lambda_2^* \rho / \sqrt{2}$ sans compromettre l'alignement en vitesse asymptotique où λ_2^* est la connexité algébrique du graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ défini par (4.3). Pour x^0 et R fixés, $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est une fonction constante par morceaux et décroissante de ρ. Ainsi, d'après

la proposition 78, λ_2^* est aussi une fonction constante par morceaux et décroissante de ρ. Par conséquent, la borne donnée par le théorème 35 est une fonction positive de ρ, on peut donc noter cette borne

$$b = \begin{pmatrix} [0, R] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \rho & \longmapsto & \frac{\lambda_2^* \rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

D'après le lemme 37 (connexité du sous graphe cœur) et la proposition 78, $b(\rho) > 0$ pour $\rho \in]0, \rho_{G_{x^0}}[$ et $b(\rho) = 0$ pour $\rho \in \{0\} \cup]\rho_{G_{x^0}}, R]$. De plus, b est une fonction affine par morceaux. L'objectif de cette section consiste à trouver le désaccord en vitesse maximal garantissant l'alignement en vitesse asymptotique. Par conséquent, il s'agit de déterminer la valeur de

$$b_{opt} = \max_{\rho \in]0, \rho_{G_{x^0}}]} b(\rho), \tag{4.8}$$

le maximum de la borne b. Cela peut être effectué simplement en utilisant le résultat suivant :

Proposition 39. *Lorsque ρ varie dans l'intervalle $]0, \rho_{G_{x^0}}]$, la connexité algébrique λ_2^* du graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ prend au plus $E + 1$ valeurs distinctes où E est le nombre d'arêtes contenues dans le graphe G_{x^0} diminué du nombre d'arêtes de $C(G_{x^0})$.*

Démonstration. Pour le vérifier, il suffit d'ordonner dans l'ordre croissant les valeurs $R - \|x_i^0 - x_j^0\|$ pour (i, j) arête de G_{x^0} sans prendre en compte les arêtes étant dans $C(G_{x^0})$ (pour lesquelles $R - \|x_i^0 - x_j^0\| \geq \rho_{G_{x^0}}$) sauf la moins robuste (pour laquelle $R - \|x_i^0 - x_j^0\| = \rho_{G_{x^0}}$). On note (ρ_k) la séquence des valeurs ainsi obtenues, (ρ_k) comporte exactement $E + 1$ valeurs. Par construction, $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est constant pour $\rho \in]\rho_k, \rho_{k+1}]$ où $k \in \{1, \ldots, E\}$. A chaque graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ est associé une connectivité algébrique λ_2^*. Ce qui permet de conclure. □

L'étude du profil analytique de λ_2^* en fonction de ρ sort du cadre de notre travail. En revanche, la preuve précédente nous donne un moyen pour obtenir la borne optimale : λ_2^* est constant pour ρ variant dans $]\rho_k, \rho_{k+1}]$ ainsi sur cet intervalle b trouve son maximum en ρ_{k+1}. Par conséquent,

$$b_{opt} = \max_{k \in \{1, \ldots, E+1\}} b(\rho_k).$$

Cette dernière équation permet d'obtenir la borne optimale en testant E valeurs.

Exemple

la section précédente présente une optimisation de la borne sur le désaccord en vitesse donné par le théorème 35. Pour évaluer l'amélioration apportée par rapport à la borne liée donnée en utilisant le sous graphe cœur (théorème 38), nous considérons un système à n agents. Les

positions initiales sont choisies de manière aléatoire : pour $i \in \mathcal{N}$, $x_i(0) \in [0,1]^2$ où chaque coordonnée est tirée de manière uniforme dans l'intervalle $[0,1]$. Pour que la comparaison entre la borne du théorème 35 et la borne effective lorsque n varie ait un sens, nous souhaitons préserver le type de structure du graphe d'interaction initial. Ainsi, pour obtenir un nombre de voisins homogène indépendamment du nombre d'agents, nous choisissons le rayon d'interaction R de sorte que l'aire du disque de rayon R soit proportionnelle à l'*aire moyenne* occupée par chaque agent, *i.e.* l'aire totale de $[0,1]^2$ divisée par le nombre d'agents. En somme, on choisit $R \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$ (dans notre cas nous avons choisi $R = \frac{2}{\sqrt{n}}$ pour que le graphe ait une probabilité importante d'être connexe). Nous avons réalisé une étude numérique pour n variant de 5 à 200 (en rejetant les jeux de positions donnant un graphe non connexe). Nous donnons pour information la courbe du degré moyen dans la figure 4.2 qui montre que le degré moyen est relativement homogène pour n suffisamment grand.

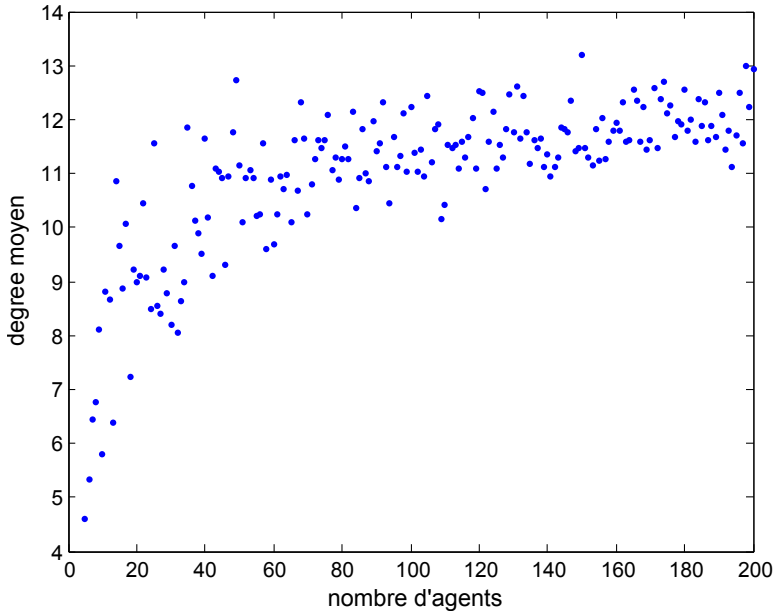


FIGURE 4.2: Degré moyen dans le graphe d'interaction initial G_{x^0} en fonction du nombre d'agents.

Nous présentons dans la figure 4.3 le ratio entre b_{coeur}, la borne liée au graphe cœur (équation (4.6)) et b_{opt}, la borne optimale obtenue par la méthode de la section précédente (équation (4.8)). Nous obtenons en moyenne une amélioration de la borne par un facteur 2.

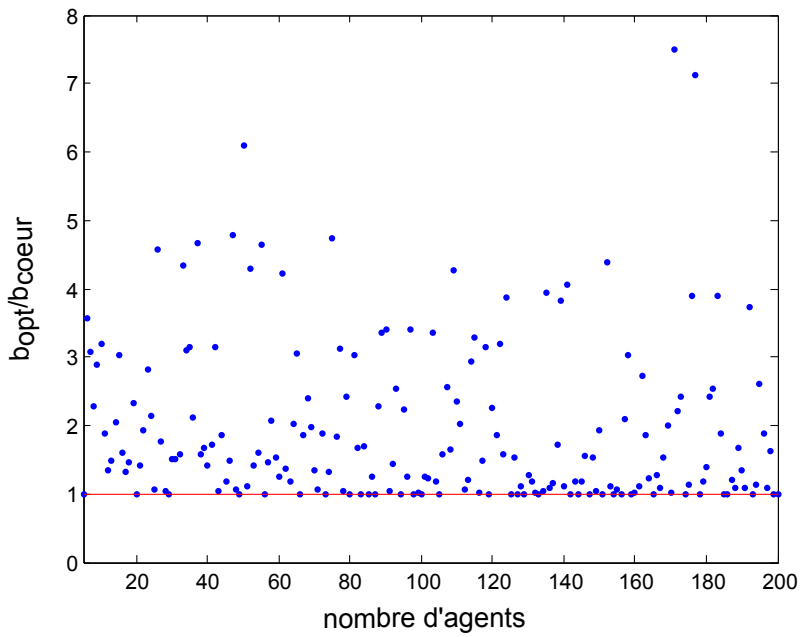


FIGURE 4.3: Ratio entre la borne optimale et la borne liée au graphe cœur : b_{opt}/b_{coeur} en fonction du nombre d'agents.

Nous présentons dans la figure 4.4 un aperçu de l'évolution de la connexité algébrique λ_2^* du graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ ainsi que la borne $\lambda_2^*\rho/\sqrt{2}$ en fonction de la robustesse ρ, pour un jeu de position particulier correspondant à 50 agents où l'amélioration est particulièrement importante : $b_{opt}/b_{coeur} = 6.1$. Nous constatons que la connexité algébrique décroît avec ρ et ne semble pas être une fonction analytiquement simple à exprimer. Remarquons que la valeur ρ pour laquelle la borne b atteint son maximum est largement éloignée de la robustesse du graphe cœur $\rho_{G_{x^0}}$.

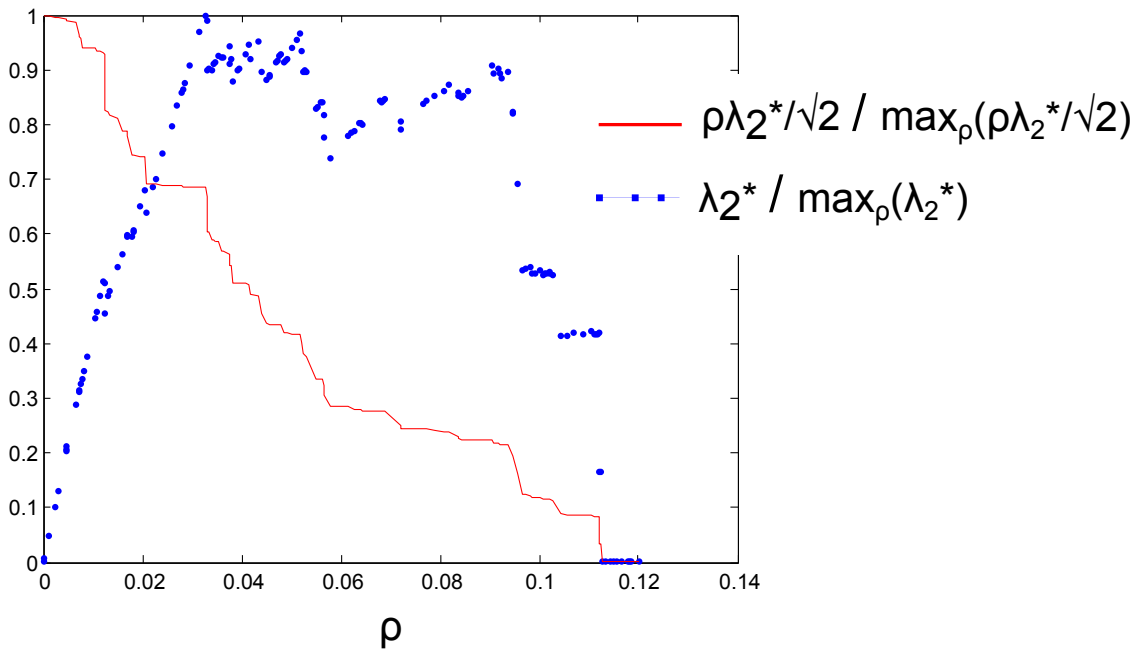


FIGURE 4.4: Borne $\rho\lambda_2^*/\sqrt{2}$ divisée par son maximum $\max_{\rho\in[0,\rho_{coeur}]} \rho\lambda_2^*/\sqrt{2}$ (en pointillés bleus) et connexité algébrique λ_2^* divisée par son maximum $\max_{\rho\in[0,\rho_{coeur}]} \lambda_2^*$ (en trait continu rouge) en fonction de la robustesse ρ pour le jeu de positions correspondant à 50 agents. Les deux courbes ont été normalisées pour pouvoir être visualisées dans le même graphique.

4.5 Optimalité de la borne

Dans cette section, nous tentons d'évaluer la qualité du résultat fourni par le théorème 35. Nous comparons la borne b_{p^t} donnée par le théorème 35 avec la valeur de $\|\delta(0)\|$ limite pour laquelle la trajectoire converge vers l'alignement en vitesse. Nous obtenons cette valeur limite numériquement. Nous effectuons cette comparaison pour différentes configurations : dans le cas de 2 agents, nous montrons analytiquement que la borne donnée par le théorème 35 est optimale ; dans le cas de n agents, nous étudions une configuration pour laquelle b_{opt} est quasi-optimale à une constante $\sqrt{2}$ près. Enfin, nous étudions une configuration pour laquelle la borne est sous-optimale.

Cas de deux agents

Dans cette section, nous exhibons un cas de 2 agents pour lequel la borne b_{opt} donnée dans le théorème 35 est optimale, *i.e.* l'inégalité (4.4) est une condition nécessaire et suffisante pour le flocking.

Nous considérons un ensemble de deux agents évoluant dans $\mathbb{R}$. Initialement, les agents possèdent la même position $x_1^0 = x_2^0 = 0$. Ceci implique que G_{x^0} est le graphe complet d'ordre 2. La robustesse du graphe est maximale $\rho_{G_{x^0}} = R$ et $C(G_{x^0}) = G_{x^0}$. Nous avons donc $\lambda_2^* = 2$ et $b_{opt} = b_{coeur}$.

Initialement, les agents se déplacent avec des vitesses opposées $v_1^0 = -v_2^0 = -\alpha$, où $\alpha > 0$. La norme du vecteur de désaccord est donc $\|\delta(0)\| = \|v^0\| = \sqrt{2}\alpha$. Nous choisissons α tel que l'équation (4.4) ne soit pas satisfaite, c'est à dire $\alpha > R$. Nous allons montrer que dans ce cas, la distance entre les deux agents devient plus grande que R après un certain temps et que les agents se déplacent de manière indépendante en directions opposées par la suite. Tant que $\|x_2(t) - x_1(t)\| \leq R$, le graphe d'interaction reste le même. D'après l'équation (4.1), nous avons

$$\dot{v}_2(t) - \dot{v}_1(t) = -2(v_2(t) - v_1(t)).$$

Puisque $v_2(0) - v_1(0) = 2\alpha$ et $x_2(0) - x_1(0) = 0$,

$$v_2(t) - v_1(t) = 2\alpha e^{-2t}$$

et

$$x_2(t) - x_1(t) = \alpha(1 - e^{-2t}).$$

Au temps $T = -\frac{1}{2}\log(1 - R/\alpha)$, $\|x_2(T) - x_1(T)\| = R$ et l'interaction est perdue. Alors, l'équation (4.1) donne $\dot{v}_1(t) = \dot{v}_2(t) = 0$. Donc, pour tout $t > T$,

$$v_2(t) - v_1(t) = 2(\alpha - R) > 0$$

et

$$x_2(t) - x_1(t) = R + 2(\alpha - R)(t - T).$$

Par conséquent, après le temps T, les deux agents deviennent indépendants et continuent d'évoluer à vitesse constante dans des directions opposées. Les agents ne parviennent pas à un alignement en vitesse. Ceci montre que la réciproque du théorème 35 est vérifiée dans ce cas précis, ce qui fait de l'inégalité donnée par le théorème une condition nécessaire et suffisante pour l'alignement en vitesse.

Cas d'un nombre d'agents quelconque

Considérons n agents se déplaçant suivant le système (4.1). Initialement, les agents se divisent en deux groupes de $n - 1$ et 1 agents respectivement pointant dans des directions

opposées. Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $v_i(0) = -\alpha/n$ et $v_n(0) = \alpha$. La vitesse moyenne est donc $v^* = 0$ et le désaccord initial en vitesse est

$$\|\delta(0)\| = \sqrt{\sum_{i \in \mathcal{N}} \|\delta_i(0)\|^2} = \alpha \sqrt{\frac{n-1}{n^2} + 1}$$

de limite α lorsque n diverge vers $+\infty$. Ainsi, il est possible de faire varier simplement $\|\delta(0)\|$ en modifiant α. Concernant les positions, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i(0) = 0$. On obtient que le graphe d'interaction initial est le graphe complet K_n de connectivité algébrique $\lambda_2(K_n) = n$ [Fie73]. Pour le graphe complet, on a donc $\rho = R$. Dans une telle configuration, les $n-1$ premiers agents ont une dynamique strictement identique. Le graphe restera complet jusqu'à ce que la distance entre les $n-1$ premiers agents et le dernier agent soit supérieure à R, alors l'agent n se retrouvera complètement isolé et le graphe sera déconnecté. Dans le but de comparer la borne donnée par le théorème 35 avec le désaccord en vitesse initial autorisé, nous démontrons la proposition suivante :

Proposition 40. *Pour le système décrit ci-dessus, le groupe converge vers un alignement en vitesse si et seulement si*

$$\alpha \leq \frac{n^2 R}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} nR.$$

Démonstration. Comme nous l'avons signalé, le graphe d'interaction est le graphe complet K_n jusqu'à ce que la distance entre l'agent n et les autres agents soit supérieure à R, alors le graphe d'interaction est déconnecté et l'alignement en vitesse ne peut être atteint. De plus, d'après le système (4.1) et la configuration initiale donnée, la distance sus-citée est croissante. Notons $d(t)$ cette distance. Nous avons

$$d(t) = wx(t),$$

où $w = (0, \dots, 0, -1, 1)$. Notons t^* le temps défini par

$$t^* = sup\{t | d(t) \leq R\}.$$

Pour tout $t \in [0, t^*]$, le graphe d'interaction est constant et complet. Nous reprenons les notations matricielles présentées dans la section 4.2, avec L la matrice Laplacienne du graphe complet :

$$L = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Soit $t \in [0, t^*]$. Nous avons $\dot{\delta}(t) = -L\delta(t)$ donc $\delta(t) = e^{-Lt}\delta(0)$ et

$$x(t*) = L^{\dagger}(I - e^{-Lt*})\delta(0)$$

où $L^{\dagger} = L/n^2$ est la matrice pseudo-inverse de L. On a alors

$$d(t^*) = wx(t^*) = \frac{1}{n^2} wL(I - e^{-Lt^*})\delta(0).$$

Par conséquent, $t^* < +\infty$ (*i.e.* le graphe se déconnecte) si et seulement si l'équation

$$R = \frac{wL(I - e^{-Lt^*})\delta(0)}{n^2}$$

admet une solution en t^*. Puisque $d(t)$ est croissante, ceci se produit <u>ssi</u>

$$R < \frac{wL\delta(0)}{n^2} \ \underline{ssi} \ R < \frac{\alpha(n+1)}{n^2} \ \underline{ssi} \ \alpha > \frac{Rn^2}{n+1},$$

ce qui termine la preuve. □

Par comparaison, le théorème 35 garantit l'alignement en vitesse si

$$\|\delta(0)\| \leq \frac{\lambda_2^* \rho}{\sqrt{2}},$$

soit en fonction d'α,

$$\alpha \sqrt{\frac{n-1}{n^2} + 1} \leq \frac{nR}{\sqrt{2}},$$

ou encore

$$\alpha \leq \frac{nR}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{n-1}{n^2} + 1}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{nR}{\sqrt{2}}.$$

Cette dernière équation comparée avec la proposition 40 montre qu'asymptotiquement, le ratio entre la borne du théorème 35 et le désaccord en vitesse maximal permis est constant, égal à $\sqrt{2}$ donc proche de 1. Ceci prouve que pour n'importe quel nombre d'agents, on peut trouver une configuration pour laquelle la borne donnée par le théorème 35 est du même ordre de grandeur que la borne réelle. On peut remarquer que le coefficient $\sqrt{2}$ provient de la majoration du diamètre $\Delta_{\mathcal{N}}(t, x) \leq \sqrt{2}\|x\|_2$ utilisée (sur le vecteur des positions) pour le théorème 35 alors que dans l'exemple présenté ici, nous avons asymptotiquement $\|\Delta_{\mathcal{N}}(0, \delta)\|_\infty = \|\delta(0)\|_2$. Nous reviendrons sur cette source de conservatisme dans la section 4.6.1.

Cas aléatoire

Nous présentons ici une configuration aléatoire où, contrairement au cas présenté précédemment, le ratio $\|\delta(0)\|_2/\Delta_{\mathcal{N}}(0,\delta)$ diverge lorsque le nombre d'agents croît. Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que la borne du théorème 35 ne soit pas aussi fine que dans le cas précédent.

Nous reprenons ici les configurations des positions présentées dans la section 4.4.3. Concernant les vitesses initiales, nous choisissons pour $i \in \mathcal{N}$, $v_i(0) = \alpha w_i + c$ où α est utilisé pour paramétrer le désaccord en vitesse initial et w_i est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ où chaque coordonnée est choisie de manière uniforme dans $[-1/4, 1/4]$ tandis que c est une constante commune à tous les agents de sorte qu'elle n'influe pas sur le flocking et est simplement utile à la visualisation. La vitesse moyenne est alors $v^* = 1/n(\alpha \sum_{i\in\mathcal{N}} w_i + c)$ donc $\delta_i(0) = \alpha(w_i - 1/n \sum_{i\in\mathcal{N}} w_i)$. Notons $\gamma_i = w_i - 1/n \sum_{i\in\mathcal{N}} w_i$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, on a alors

$$\|\delta(0)\| = \alpha\|\gamma\|.$$

Ainsi, pour γ fixe, α permet de paramétrer le désaccord en vitesse initial. Pour chaque jeu de positions (n variant de 5 à 200), nous définissons la borne b_{num} par

$$b_{num} = \inf\{\alpha\|\gamma\| \,|\, \alpha > 0, \neg flocking\},$$

où $\neg flocking$ signifie que la trajectoire n'atteint pas l'alignement en vitesse. Dans les illustrations, b_{num} est calculée numériquement, ce qui ne permet pas de garantir des résultats exacts. La figure 4.5 présente cette limite. Après avoir effectué une régression linéaire, il semble que pour ce type de configurations, la norme limite de $\|\delta(0)\|$ permettant le flocking soit en moyenne une fonction affine du nombre d'agents. Nous restons cependant prudent sur la validité de cette remarque puisqu'une seule configuration par nombre d'agents a servi pour cette analyse.

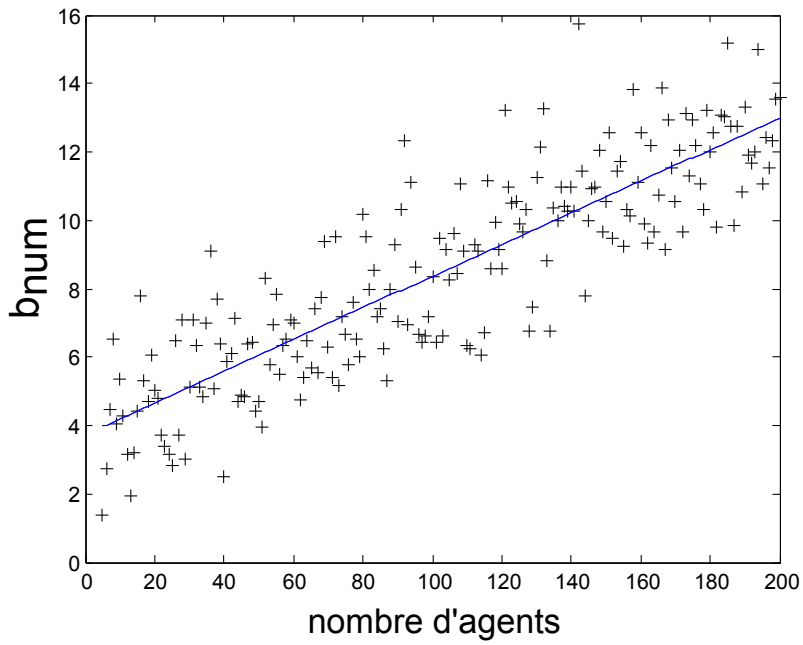


FIGURE 4.5: La borne b_{num}, norme limite pour $\|\delta(0)\|$ en deçà de laquelle le système converge vers l'alignement en vitesse et au delà de laquelle le graphe d'interaction finit par se déconnecter en fonction de n le nombre d'agents (croix noires). La régression linéaire donne la fonction affine $0.04623n + 3.746$ (ligne bleue) avec un coefficient de détermination ajusté $\bar{R}^2 = 0.73$ [The75].

Pour comparer la borne obtenue par le théorème 35 et la borne b_{num}, nous les affichons en échelle logarithmique dans la figure 4.6. Ainsi, l'écart entre les deux nuages de points est croissant avec le nombre d'agents et tandis que la valeur limite b_{num} pour obtenir le flocking est croissante, notre condition suffisante donne une borne décroissante. Nous discutons dans la section suivante des sources potentielles de ce conservatisme.

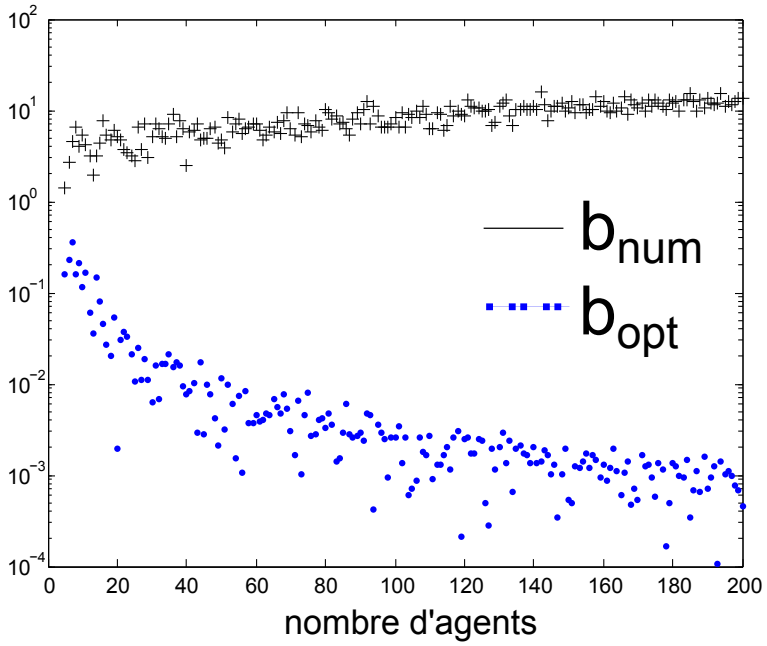


FIGURE 4.6: L'axe vertical du graphique est donné en échelle logarithmique. Les croix noires représentent la borne b_{num} limite pour le flocking en fonction de n le nombre d'agents. Les points bleus représentent la borne optimale b_{opt} obtenue par le théorème 35.

4.6 Sources de conservatisme

Dans la section précédente, nous avons montré que la qualité de la borne donnée par le théorème 35 est du même ordre que la borne réelle pour un cas particulier mais que dans d'autres cas, notamment lorsque les positions et vitesses des agents sont choisies de manière aléatoire, cette borne s'éloigne rapidement du désaccord limite garantissant le flocking. Dans la présente section, nous évoquons les causes de ce conservatisme.

4.6.1 Majoration du diamètre par la norme 2

Le théorème 35 (par la preuve de la proposition 36) fait usage de l'inégalité $\Delta_{\mathcal{N}}(t, y) \leq \|y(t)\|_2$, où $\Delta_{\mathcal{N}}(t, y)$ représente le diamètre sur les positions, pour majorer la perturbation des distances entre agents. Lorsque la configuration est choisie de manière aléatoire, cette majoration risque fortement d'être conservative.

Nous allons illustrer ce degré de conservatisme en utilisant les données issues de l'exemple de la section 4.5. Initialement, la perturbation sur les distances est directement liée

au vecteur de désaccord initial puisque l'on a $\dot{y} = \delta$ (voir la section 4.2). Un développement limité à l'ordre 1 donne

$$y_i(\varepsilon) - y_j(\varepsilon) = y_i(0) - y_j(0) + \varepsilon(\delta_i(0) - \delta_j(0)) + o_\varepsilon(\varepsilon).$$

Ainsi, le degré de conservatisme est illustré par le ratio entre $\sqrt{2}\|\delta(0)\|_2$ et le diamètre sur les vitesses $\Delta(0) = \max_{i,j\in\mathcal{N}} \|\delta_i(0) - \delta_j(0)\|$.

Proposition 41. *Pour la configuration aléatoire, le ratio entre $\sqrt{2}\|\delta(0)\|_2$ et le diamètre sur les vitesses $\Delta(0)$ est de l'ordre de $O(\sqrt{n})$ où n est le nombre d'agents lorsque n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Par définition, $\Delta_{\mathcal{N}}(0)$ est le maximum des $\|\delta_i(0) - \delta_j(0)\|$ pour $i, j \in \mathcal{N}$ avec $\delta_i(0) = \alpha(w_i - 1/n \sum_{i\in\mathcal{N}} w_i)$. Pour la démonstration, on suppose $\alpha = 1$ sans perte de généralité. Puisque les coordonnées de w_i sont tirées uniformément dans $[-1/4, 1/4]$, $1/n \sum_{i\in\mathcal{N}} w_i$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc, lorsque n diverge vers $+\infty$, $\Delta_{\mathcal{N}}(0)$ converge vers $1/\sqrt{2}$ le maximum pouvant être obtenu par le tirage aléatoire. Notons $\langle w_i \rangle = 1/n \sum_{i\in\mathcal{N}} w_i$ et $\langle \|w_i\|^2 \rangle = 1/n \sum_{i\in\mathcal{N}} \|w_i\|^2$ les moyennes empiriques de w_i et $\|w_i\|^2$ respectivement. Lorsque n diverge vers $+\infty$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \langle w_i \rangle = \mathbb{E}w_i = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \langle \|w_i\|^2 \rangle = \mathbb{E}\|w_i\|^2 = \frac{1}{24}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|\delta(0)\|_2 &= \sqrt{\sum_{i\in\mathcal{N}} \|w_i - \langle w_i \rangle\|^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\sum_{i\in\mathcal{N}} \|w_i\|^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\sum_{i\in\mathcal{N}} \langle \|w_i\|^2 \rangle + (\|w_i\|^2 - \langle \|w_i\|^2 \rangle)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n\mathbb{E}(\|w_i\|^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{\sqrt{2}\|\delta(0)\|_2}{\Delta_{\mathcal{N}}(0)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.$$

□

Nous illustrons la proposition 41 dans la figure 4.7.

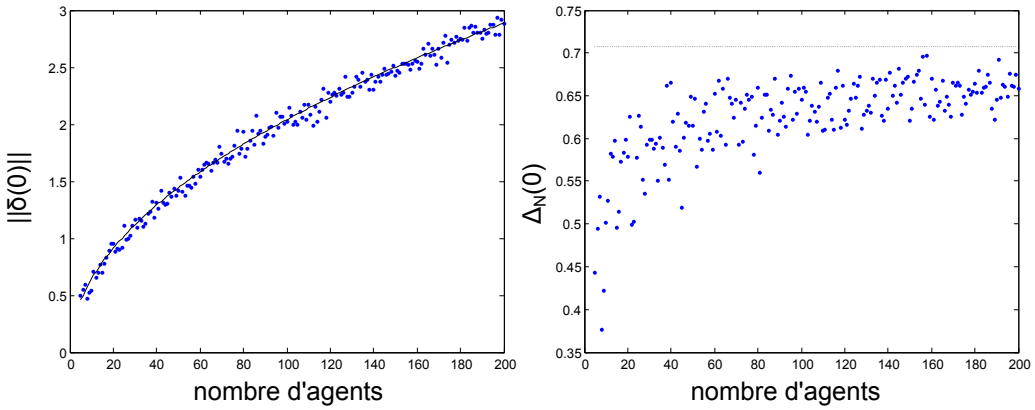


FIGURE 4.7: Figure de gauche : les points bleus représentent $\|\delta(0)\|_2$ en fonction du nombre d'agents n ; la courbe noire est le modèle $\frac{n}{2\sqrt{6}}$ en fonction de n. On obtient un coefficient de corrélation linéaire entre les deux courbes de $R^2 = 0.988$ [The75]. Figure de droite : les points bleus représentent $\Delta_{\mathcal{N}}(0)$ en fonction du nombre d'agents n ; la ligne en pointillés constante correspond au maximum théorique de $1/\sqrt{2}$.

4.6.2 L'importance de l'orientation des vitesses

Dans les exemples pour lesquels nous avons trouvé que la borne donnée par le théorème 35 était fine (sections 4.5 et 4.5), les vitesses initiales sont orientées vers l'extérieur de l'enveloppe convexe des positions initiales. Il est possible de garder le même ensemble des vitesses initiales tout en changeant son ordre d'affectation sur les agents de manière à ce que les vitesses pointent vers l'intérieur de cette enveloppe convexe tout en préservant le même désaccord $\|\delta(0)\|$. Dans ce cas, on devrait obtenir une configuration plus robuste, permettant un désaccord initial en vitesse plus important tout en préservant le flocking. On remarque que cette possibilité n'est pas prise en compte par le théorème 35 dont l'inégalité $\|\delta(0)\| \leq \rho\lambda_2^*/\sqrt{2}$ ne fait pas intervenir l'orientation des vitesses relativement aux positions.

Pour illustrer cette discussion, considérons un système de deux agents où $x_1(0) = -\frac{1}{2}$ et $x_2(0) = \frac{1}{2}$ et $R = \frac{3}{2}$ suivant le système (4.1). Ici, le graphe cœur $\mathcal{C}(G_{x^0})$ est égal au graphe initial $G_{x^0} = K_2$. On a donc $\rho_{G_{x^0}} = R - (x_2(0) - x_1(0)) = \frac{1}{2}$ et $\lambda_2^* = 2$. La borne donnée par le théorème 35 est donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En supposant que les deux agents restent connectés, l'intégration du système (4.1) donne

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} x_2(t) - x_1(t) = x_2(0) - x_1(0) + \frac{1}{2}(v_2(0) - v_1(0)) \tag{4.9}$$

Nous allons étudier deux cas possibles pour les vitesses initiales.

Orientation vers l'extérieur

Nous posons dans un premier temps $v_1(0) = -\frac{\alpha}{2}$ et $v_2(0) = \frac{\alpha}{2}$ où $\alpha > 0$ est un paramètre du système. On a donc $\|\delta(0)\| = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Le théorème 35 garantit le flocking pour $\alpha \leq 1$. D'après l'équation (4.9), nous avons

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} x_2(t) - x_1(t) = 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, le graphe reste connexe si et seulement si

$$1 + \frac{\alpha}{2} \leq \frac{3}{2} \ \underline{ssi} \ \alpha \leq 1.$$

Dans cette configuration, la borne donnée par le théorème est donc optimale.

Orientation vers l'intérieur

Dans un deuxième temps, nous inversons l'ordre d'affectation des vitesses initiales : $v_1(0) = \frac{\alpha}{2}$ et $v_2(0) = -\frac{\alpha}{2}$. On conserve $\|\delta(0)\| = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Le théorème 35 garantit toujours le flocking pour $\alpha \leq 1$. D'après l'équation (4.9), nous avons

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} x_2(t) - x_1(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, le graphe reste connexe si et seulement si

$$1 - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{3}{2} \ \underline{ssi} \ \alpha \leq 5.$$

Par conséquent, pour cette configuration où les vitesses pointent vers l'intérieur de l'enveloppe convexe des positions, le désaccord en vitesse limite est 5 fois plus élevé que le désaccord autorisé par le théorème 35.

4.6.3 Evolution de la topologie au cours du temps

Nous reprenons le point **(i)** des grandes lignes de la preuve du théorème 35 (voir section 4.3) :

La préservation du sous graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ dans le graphe d'interaction garantit la décroissance du désaccord en vitesse à un taux exponentiel $\lambda_2(G(t)) \geq \lambda_2^*(\rho)$ (théorème 34).

Dans la preuve du théorème 35, $\lambda_2(G(t))$ est majorée par une constante. Par conséquent, pour les valeurs de t telles que $\lambda_2(G(t))$ est largement supérieure à $\min_{t \geq 0} \lambda_2(G(t))$, la majoration est nécessairement conservative. Nous illustrons ceci en utilisant la configuration aléatoire de

l'exemple de la section 4.5 pour $n = 50$ agents. Nous présentons dans la figure 4.8 l'évolution de $\lambda_2(G(t))$ au cours du temps, due au changement de topologie du graphe $G(t)$.

Pour réduire ce conservatisme, nous pouvons étudier l'évolution de $G(t)$ au cours du temps. Nous proposons une méthode sans donner de preuve formelle : Sous les hypothèses du théorème 35, il est possible de garantir, pour $t \geq 0$ et $s \in [0, t]$, $\mathcal{S}_{\tilde{\rho}(t)}(G_{x^0}) \subseteq G(t)$ avec

$$\tilde{\rho}(t) = \sqrt{2} \int_0^t e^{-\lambda_2^*(\rho)t} \|\delta(0)\| < \rho. \tag{4.10}$$

Ceci peut se montrer en reprenant la preuve du théorème 35. Nous avons donc une nouvelle majoration moins conservative :

$$\lambda_2(G(t)) \geq \lambda_2^*(\tilde{\rho}(t)).$$

Il est possible de rendre cette majoration encore plus fine en remplaçant $\lambda_2^*(\rho)$ dans l'équation (4.10) par $\lambda_2^*(\tilde{\rho}(s))$. Nous obtenons alors une équation implicite moins évidente à manipuler. Cette discussion montre qu'une majoration des perturbations sur les distances variant au cours du temps permet d'obtenir une meilleure borne sur le taux de décroissance en vitesse. Ceci se fait au prix d'une augmentation de la complexité du résultat.

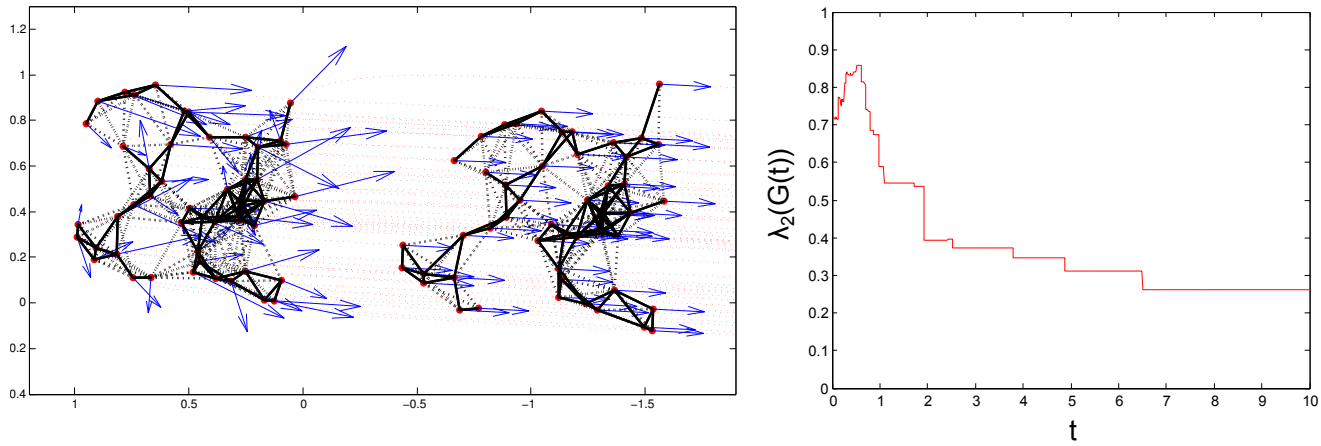


FIGURE 4.8: Figure à gauche du graphique : Les trajectoires des 50 agents ainsi que leurs positions, vitesses et interactions au temps initial et à un temps futur, pour $\|\delta(0)\| = 755\frac{\rho\lambda_2^*(\rho_{coeur})}{\sqrt{2}}$. Les points rouges représentent les positions des agents. Les flèches bleues représentent les vitesses des agents. Les lignes noires entre les points représentent les interactions. Les lignes noires continues représentent les interactions faisant partie du sous graphe cœur. Figure à droite du graphique : $\lambda_2(G(t))$ en fonction du temps t.

4.6.4 Amélioration de la condition pour le flocking

Dans les sections précédentes, nous avons exposé différentes sources de conservatisme provenant du théorème 35. Nous donnons ici des pistes pour répondre à certaines de ces sources.

Évolution du désaccord en vitesse local

Dans cette section, nous donnons une piste pour répondre à la source de conservatisme liée à la majoration du diamètre par la norme 2 du désaccord en vitesse (voir section 4.6.1). Ceci est effectué dans le but d'améliorer notre borne sur le désaccord en vitesse initial permettant le flocking.

Le cheminement qu'il faudrait suivre pour parvenir à ce résultat est le suivant (les idées avancées sont données sans preuves) :

(i) Supposons que le graphe d'interaction $G(t)$ est encadré par des graphes connexes constants : $\underline{G} \subseteq G(t) \subseteq \bar{G}$. Notons alors, pour $i, j \in \mathcal{N}$, $\underline{\mathcal{N}}_i = \{j \in \mathcal{N} | (j,i) \in \underline{G}\}$ et $\bar{\mathcal{N}}_i = \{j \in \mathcal{N} | (j,i) \in \bar{G}\}$ les ensembles de voisins du nœud i dans les graphes $\underline{G}$ et $\bar{G}$ respectivement. Notons de plus $\underline{n}_{ij} = 2\,\chi\left((i,j) \in \underline{\mathcal{E}}\right) + |\underline{\mathcal{N}}_i \cap \underline{\mathcal{N}}_j|$, où $\underline{\mathcal{E}}$ désigne l'ensemble d'arêtes de $\underline{G}$.

(ii) Sous cette hypothèse, il est possible de majorer l'évolution du désaccord en vitesse locale : pour $t \geq 0$,

$$\overbrace{\|\delta_i(t) - \delta_j(t)\|}^{\cdot} \leq -\underline{n}_{ij}\|\delta_i(t) - \delta_j(t)\| + f_{ij}(t),$$

avec

$$f_{ij}(t) = \sum_{k \in \bar{\mathcal{N}}_i \setminus (\underline{\mathcal{N}}_j \cup \{i,j\})} \|\delta_k(t) - \delta_i(t)\| \sum_{k \in \bar{\mathcal{N}}_j \setminus (\underline{\mathcal{N}}_i \cup \{i,j\})} \|\delta_k(t) - \delta_j(t)\|.$$

La preuve de cette équation est basée sur l'idée suivante : la présence de voisins communs à i et j encourage la décroissance de $\|\delta_i(t) - \delta_j(t)\|$ tandis que les voisins non communs favorisent plutôt son augmentation.

(iii) Par intégration de la dernière équation, la perturbation sur les distances est majorée localement. Il est alors possible de garantir que l'arête (i,j) préserve son statut initial, *i.e.*

$$(i,j) \in \underline{G} \Rightarrow \forall t \geq 0, (i,j) \in G(t), \text{ et } (i,j) \notin \bar{G} \Rightarrow \forall t \geq 0, (i,j) \notin G(t).$$

Dans ce cas, le graphe d'interaction reste encadré. Par conséquent, l'alignement en vitesse est obtenu.

Ce raisonnement permet d'obtenir une nouvelle borne sur le désaccord en vitesse initial garantissant le flocking. Nous avons effectué cette analyse et avons appliqué notre nouvelle borne sur les configurations aléatoires de la section 4.5 pour la comparer avec b_{opt}, la borne du théorème 35 (obtenue après optimisation). Les résultats sont données dans la figure 4.9. Le gain est assez faible (de l'odre de 20%). Par conséquent, la nouvelle borne conserve le même ordre de grandeur que b_{opt}, ce qui montre qu'elle n'est pas optimale, comme nous l'avons vu dans la section 4.6. De plus, cette approche possède un désaventage : elle exige de garantir l'exclusion d'arêtes. Ceci n'était pas nécessaire dans l'approche prise par le théorème 35. Par cette nouvelle approche, il est possible que l'exclusion de certains couples d'agents soit difficile à maintenir, réduisant ainsi la robustesse globale par rapport à la préservation de l'encadrement du graphe d'interaction. Enfin, le calcul de la nouvelle borne est coûteux en temps. Ces arguments justifient que nous ne présentions pas le détail de l'analyse.

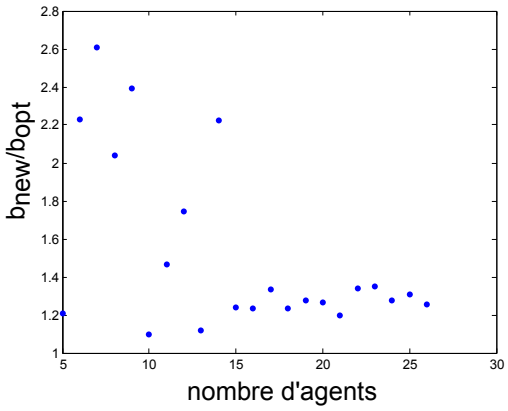


FIGURE 4.9: Ratio entre les valeurs de la nouvelle borne et les valeurs de b_{opt} (théorème 35) obtenues après optimisation, en fonction du nombre d'agents n.

Prise en compte de l'orientation

Il est possible d'obtenir une borne encore plus fine que la précédente en prenant en compte l'orientation des vitesses par rapport aux positions. Sous les mêmes hypothèses d'encadrement du graphe d'interaction que celles données dans le point **(i)** de la section précédente, nous pouvons démontrer, pour $s \geq 0$ et $i, j \in \mathcal{N}$,

$$\langle \delta_i(s) - \delta_j(s) | x_i^0 - x_j^0 \rangle \leq e^{-\underline{n}_{ij} s} \left(|\langle \delta_i^0 - \delta_j^0 | x_i^0 - x_j^0 \rangle| + \int_0^s e^{-\underline{n}_{ij} w} f_{ij}(w) dw \, \|x_i^0 - x_j^0\| \right).$$

Cette équation est la base du raisonnement pour obtenir une autre condition pour l'alignement en vitesse. Pour les mêmes raisons que celles évoquées dans la section précédente, nous ne présentons pas l'analyse détaillée.

Chapitre 5

Modèle stochastique

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un système dynamique multi-agents de type (3.1) similaire au système (4.1) étudié dans le chapitre 4. Dans ce dernier cas, les comportements étudiés sont modélisés par un système déterministe. Il semble cependant que dans de nombreuses applications, la topologie des interactions soit sujette à des phénomènes aléatoires. La prise en compte de tels aléas fait l'objet de ce chapitre.

Précisément, nous considérons un groupe d'agents dont les interactions sont similaires à celles étudiées dans le chapitre précédent, à la différence qu'au lieu d'être constants, les rayons d'interaction sont donnés par des processus stochastiques indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) au cours du temps. Pour éviter des complications techniques dues au caractère stochastique du modèle, nous supposons que les agents évoluent en temps discret.

L'objectif de l'étude est de déterminer des conditions sur les positions et vitesses initiales des agents, de manière analogue au théorème 35, garantissant que les agents s'accordent asymptotiquement sur une vitesse commune avec une certaine probabilité.

Ainsi définie, la dynamique des agents dépend de l'état du système et n'est donc pas i.i.d.. Nous exhibons un processus i.i.d. majorant la dynamique et nous permettant d'utiliser des travaux de la littérature tels que [TSJ06], pour établir notre résultat.

Bien que conservative, notre approche propose des conditions qui peuvent être vérifiées à priori. Nous illustrons notre résultat par des simulations.

5.2 Présentation du problème

Nous étudions un système en temps discret où les agents évoluent en dimension d. Chaque agent $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ est caractérisé par sa position $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$ et sa vitesse $v_i(t) \in \mathbb{R}^d$ au temps t. Les positions et vitesses initiales sont données par $x_i(0) = x_i^0$ et $v_i(0) = v_i^0$. L'évolution de chaque agent $i \in \mathcal{N}$ est décrite par le système suivant : pour $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_i(\varepsilon t + \varepsilon) &= x_i(\varepsilon t) + \varepsilon v_i(\varepsilon t) \\ v_i(\varepsilon t + \varepsilon) &= v_i(\varepsilon t) + \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij}(\varepsilon t)(v_j(\varepsilon t) - v_i(\varepsilon t)), \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre donné du système et $a_{ij}(\varepsilon t)$ est le poids d'interaction entre i et j. Le poids $a_{ij}(\varepsilon t) = 1$ si l'agent j influence l'agent i au temps εt et 0 autrement. Pour simplifier l'écriture, nous faisons un changement de variable en considérant $\bar{x}_i(t) = x_i(\varepsilon t)$, $\bar{v}_i(t) = v_i(\varepsilon t)$, $\bar{a}_{ij}(t) = a_{ij}(\varepsilon t)$. Nous obtenons alors le système

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(t+1) &= \bar{x}_i(t) + \varepsilon \bar{v}_i(t) \\ \bar{v}_i(t+1) &= \bar{v}_i(t) + \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij}(t)(\bar{v}_j(t) - \bar{v}_i(t)). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Par abus de notation, nous abandonnons la notation $\bar{\cdot}$ dans la totalité de l'analyse. Pour éviter toute confusion, nous nous référons uniquement au deuxième système. Dans ce chapitre, nous supposons que les poids d'interaction sont définis par

$$a_{ij}(t) = \chi\left(\|x_i(t) - x_j(t)\| \leq R_{ij}(t) \text{ et } i \neq j\right) \tag{5.2}$$

où χ () est la fonction caractéristique et $R_{ij}(t)$ est une variable aléatoire représentant le rayon en deça duquel l'agent j influence i au temps t. Nous supposons que $R_{ij} = R_{ji}$ ce qui rend le graphe d'interaction fortement symétrique (*i.e.* l'agent i influence j <u>ssi</u> j influence i et les poids d'interaction sont identiques). Nous supposerons, dans l'intégralité de ce chapitre, que ces processus sont i.i.d.. Rigoureusement, nous devrions écrire $R_{ij}(t, \omega)$ où $\omega \in \Omega$, l'espace des événements probabilistes (voir section A.5). Par simplicité de la notation, nous abandonnons le symbole ω, sauf si nécessaire.

Ainsi défini, le système que nous considérons est un processus de Markov en temps discret. Pour une réalisation des processus R_{ij}, on dit que les agents atteignent un alignement en vitesse lorsque tous les agents convergent en vitesse :

$$\forall i, j \in \mathcal{N}, \ \lim_{t \to +\infty} |v_i(t) - v_j(t)| = 0.$$

L'objectif de l'étude est de déterminer une borne inférieure sur la probabilité que l'alignement en vitesse est atteint. Le respect de cette borne devra pouvoir être facilement évalué en fonction des positions et vitesses initiales uniquement.

5.3 Consensus au sein d'un réseau aléatoire

Dans cette section, nous commençons par donner certains résultats issus de la théorie algébrique des graphes qui seront utiles à l'étude. Pour compléter cette présentation, le lecteur pourra consulter la section A.3 et les références [GR01] et [Mer94] notamment. Ensuite, nous appliquons le formalisme algébrique au système (5.1) pour obtenir des résultats préliminaires. Une approche semblable fut aussi utilisée dans [TSJ06] et [KM07].

Comme dans les chapitres précédents, nous notons $A(t) = (a_{ij}(t))$ la matrice d'interaction et $L(t)$ la matrice Laplacienne associée. Soit $W(t) = I - \varepsilon L(t)$. Pour ce paragraphe, nous abandonnons la dépendance au temps. Nous notons les valeurs propres de L dans l'ordre croissant :

$$0 = \lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \ldots \leq \lambda_n(L).$$

La matrice W est symétrique et a, par conséquent, toutes ses valeurs propres réelles. Nous les notons dans l'ordre décroissant :

$$1 = \lambda_1(W) \geq \lambda_2(W) \geq \ldots \geq \lambda_n(W),$$

de sorte que les spectres des matrices W et L vérifient, pour $i \in \mathcal{N}$,

$$\lambda_i(W) = 1 - \varepsilon\lambda_i(L). \tag{5.3}$$

Lemme 42 (Lemme 8 [KM07])**.** *Soit $J = \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$. Le rayon spectral de $W - J$ est*

$$\mu(W - J) = \max(1 - \varepsilon\lambda_2(L), -1 + \varepsilon\lambda_n(L)).$$

Remarque 43. *Dans la suite de l'étude, nous supposerons $\varepsilon < \frac{1}{\lambda_n(L)}$ pour toutes les matrices Laplaciennes considérées. Ceci est toujours possible en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2(n-1)}$ (voir par exemple [GR01]). Sous cette hypothèse, le rayon spectral est $1 - \varepsilon\lambda_2(L)$. Cette hypothèse garantit aussi $\varepsilon < \frac{1}{\lambda_2(L)}$ et donc $1 - \varepsilon\lambda_2(L) > 0$.*

Nous reprenons les notations habituelles des vecteurs des positions et vitesses empilées $x(t) = (x_1(t)^T, \ldots, x_n(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $v(t) = (v_1(t)^T, \ldots, v_n(t)^T)^T \in \mathbb{R}^{n\times d}$. Nous définissons de même les vecteurs initiaux : $x^0 = (x_1^{0^T}, \ldots, x_n^{0^T})^T \in \mathbb{R}^{n\times d}$ et $v^0 = (v_1^{0^T}, \ldots, v_n^{0^T})^T \in \mathbb{R}^{n\times d}$. Nous utilisons les matrices augmentées $\mathbf{L}(t) = L(t) \otimes I_d$, $\mathbf{W}(t) = W(t) \otimes I_d$ et $\mathbf{J}(t) = J(t) \otimes I_d$ où I_d est la matrice identité et $\otimes$ le produit de Kronecker (voir section A.1). Nous pouvons alors réécrire le système (5.1) sous forme matricielle

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) + \varepsilon v(t) \\ v(t+1) &= \mathbf{W}(t)v(t) = (I_{nd} - \varepsilon\mathbf{L}(t))v(t). \end{aligned} \tag{5.4}$$

$L(t)$ étant symétrique et $\mathbf{1}$ étant un vecteur propre de $L(t)$ associé à la valeur propre 0, la vitesse moyenne est préservée par (5.4). En conséquence, si les agents s'alignent en vitesse, la valeur de consensus sera nécessairement $v^* = (v_1^0 + \cdots + v_n^0)/n$.

Pour $i \in \mathcal{N}$, notons $\delta_i(t) = v_i(t) - v^*$, nous définissons le *vecteur de désaccord en vitesse* $\delta(t) = (\delta_1(t), \ldots, \delta_n(t))$. Soit $y_i(t) = x_i(t) - \varepsilon v^* t$ et $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$. Notons $z(t) = y(t) - x^0$. Nous avons $z(0) = 0$. Le vecteur $y(t)$ nous donne la position relative entre les agents étant donné que

$$\forall i, j \in \mathcal{N},\ x_i(t) - x_j(t) = y_i(t) - y_j(t),$$

alors que $z(t)$ quantifie les modifications apparues sur des positions relatives puisque

$$\forall i, j \in \mathcal{N},\ z_i(t) - z_j(t) = x_i(t) - x_j(t) - (x_i^0 - x_j^0). \tag{5.5}$$

Les vecteurs z et δ suivent les dynamiques

$$\begin{aligned} z(t+1) &= z(t) + \varepsilon\delta(t), \\ \delta(t+1) &= (\mathbf{W}(t) - \mathbf{J})\delta(t). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Lemme 44. *Pour tout temps $t \in \mathbb{N}$,*

$$\|\delta(t+1)\| \leq (1 - \varepsilon\lambda_2(L(t)))\|\delta(t)\|.$$

Démonstration. En utilisant la symétrie de $\mathbf{W}(t) - I_{nd}$, nous avons

$$\|\delta(t+1)\|^2 = \delta(t)^T(\mathbf{W}(t) - \mathbf{J})^2\delta(t) \leq (\mu(\mathbf{W}(t) - \mathbf{J}))^2\|\delta(t)\|^2,$$

où $\mu(\cdot)$ est le rayon spectral. Puisque le produit de Kronecker avec I_d préserve le spectre, le lemme 42 et la remarque 43 nous permettent de démontrer le lemme. □

Le lemme 44 nous donne une condition suffisante pour l'alignement en vitesse, *i.e.* $\prod_{t=0}^{\infty}(1 - \varepsilon\lambda_2(L(t))) = 0$. Néanmoins, cette condition n'est pas facile à vérifier puisque $L(t)$ est une matrice aléatoire dépendant de la position des agents. C'est pourquoi, dans la section suivante, nous introduisons une fonction majorant $\|\delta(t)\|$ qui est plus facile à manipuler.

5.4 Probabilité de l'alignement en vitesse

5.4.1 Résultat principal

Dans cette section, nous proposons un théorème permettant de minorer la probabilité de l'alignement en vitesse. La borne indiquée ne dépend que de la configuration initiale du

système. Pour cela, de manière analogue au chapitre 4 (voir section 4.3), nous introduisons la quantité $\rho > 0$ représentant la perturbation maximale souhaitée sur les positions relatives. Nous discuterons de la manière optimale pour choisir cette quantité dans la section 5.5.1. On définit le graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}, t) = (\mathcal{N}, \mathcal{S}_\rho(\mathcal{E}_{x^0}, t))$ où

$$\mathcal{S}_\rho(\mathcal{E}_{x^0}, t) = \left\{(j,i) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \mid \|x_i^0 - x_j^0\| + \rho \leq R_{ij}(t)\right\}. \tag{5.7}$$

Puisque $\rho > 0$, on remarque que pour une réalisation des processus R_{ij}, $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}, 0)$ est un sous graphe de G_{x^0}. De plus, $\mathcal{S}_0(G_{x^0}, 0) = G_{x^0}$ et $\mathcal{S}_R(G_{x^0}, 0) = (\mathcal{N}, \emptyset)$ (sauf pour un ensemble de mesure nulle de conditions initiales). Pour une quantité ρ fixée, nous utilisons les notations $\tilde{G}(t) = \mathcal{S}_\rho(G_{x^0}, t)$, la matrice d'adjacence $\tilde{A}(t) = A(\tilde{G}(t))$, la matrice Laplacienne $\tilde{L}(t) = L(\tilde{G}(t))$ et les poids d'interaction

$$\tilde{a}_{ij}(t) = \tilde{A}_{ij}(t) = \chi\left(\|x_i(0) - x_j(0)\| + \rho \leq R_{ij}(t)\right). \tag{5.8}$$

Puisque les $R_{ij}(t)$ sont des processus i.i.d., $\tilde{a}_{ij}(t)$, $\tilde{A}(t)$ et $\tilde{L}(t)$ le sont aussi. Par conséquent, $\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))$ ne dépend pas du temps. Alors, nous pouvons noter $\tilde{\lambda}_2 = \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))$. Dans le reste de l'étude, nous supposons $\tilde{\lambda}_2 > 0$. Ceci se produit lorsque $\tilde{G}(t)$ est connexe avec une probabilité non nulle (*e.g.* $\rho = 0$ est un choix adéquat pourvu que $G(0)$ soit connexe avec une probabilité non nulle).

D'après [TSJ06], si le graphe d'interaction est connexe en moyenne pour tout temps (*i.e.* $\forall t \geq 0, \mathbb{E}(\lambda_2(L(t))) > 0$), alors l'alignement en vitesse est réalisé. Or, d'après la proposition 78, si $\tilde{G}(t) \subseteq G(t)$, $\mathbb{E}(\lambda_2(L(t))) \geq \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))) > 0$. Par conséquent, l'objectif de notre étude est de préserver $\tilde{G}(t)$ dans le graphe d'interaction au cours du temps. Pour cela, nous devrons introduire un processus de majoration. Avant d'entrer dans les détails, nous donnons le résultat final que cette étude permet d'obtenir :

Théorème 45. *Supposons que $\rho > 0$, $\tilde{\lambda}_2 > 0$ et $\|\delta(0)\| \leq \frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}}$. Alors, la probabilité que les agents atteignent un alignement en vitesse est supérieure à*

$$1 - \frac{1}{1+\kappa} \text{ où } \kappa = \frac{1}{\nu_\varepsilon}\left(\frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}\|\delta(0)\|} - 1\right)^2,$$

et

$$\nu_\varepsilon = \frac{\varepsilon \operatorname{var}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))}{(2\tilde{\lambda}_2 - \varepsilon\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2))} \in [0,1],$$

où $\operatorname{var}(\lambda_2(\tilde{L}(t))) = \mathbb{E}((\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2) - \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2$ *est la variance de* $\lambda_2(\tilde{L}(t))$.

Remarque 46. *Ainsi présenté, le résultat nous permet d'obtenir une probabilité d'alignement arbitrairement proche de* 1 *de deux manières. Premièrement, nous pouvons choisir un vecteur de désaccord en vitesse suffisamment petit. Deuxièmement, puisque* $\lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon = 0$*, nous supposons que la condition sur* $\|\delta(0)\|$ *est satisfaite, puis nous choisissons* ε *suffisamment petit.*

De plus, lorsque ε *tend vers* 0*, la borne du théorème 45 correspond avec celle obtenue par le théorème 35 pour le système de flocking déterministe en temps continu. Ici, la connexité algébrique* λ_2^* *du graphe déterministe* $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0})$ *est remplacée par la valeur moyenne* $\tilde{\lambda}_2$ *de la connexité algébrique du graphe stochastique* $\tilde{G} = \mathcal{S}_\rho(G_{x^0}, t)$*. L'interprétation de ce constat est la suivante : lorsque* ε *tend vers* 0*, la rapidité des changements de rayons* $R_i(t)$ *est telle que le système se comporte comme un système déterministe, régit par un rayon d'interaction égal à l'espérance du rayon stochastique* $R_i(t)$*.*

Nous développons dans la section suivante les outils nécessaires à la preuve de ce résultat.

5.4.2 Processus de majoration

Nous nous donnons un système de deux variables à valeurs réelles (p, q) qui vont jouer le rôle de processus de majoration pour le système (5.1) :

$$\begin{aligned} p(t+1) &= p(t) + \varepsilon q(t), \\ q(t+1) &= (1 - \varepsilon \lambda_2(\tilde{L}(t)))q(t), \end{aligned} \tag{5.9}$$

où $p(0) = 0$ et $q(0) = \|\delta(0)\|$. Puisque $\lambda_2(\tilde{L}(t))$ est i.i.d., le comportement de (p, q) est aisé à caractériser. Sous certaines conditions, nous montrerons que p majore la modification des distances entre agents $\|z\|$, tandis que q sert de borne pour le vecteur de désaccord en vitesse $\|\delta\|$ (voir les équations (5.9) et (5.6)).

Nous donnons les grandes lignes de la preuve du résultat sous forme d'un raisonnement par conditions suffisantes :

(i) Comme expliqué dans la section précédente, l'objectif de l'étude est de déterminer des conditions pour obtenir

$$\forall t \geq 0, \tilde{G}(t) \subseteq G(t).$$

Ceci est vérifié si $\|z(t)\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ (lemme 47).

(ii) Il est clair que l'assertion $\|z(t)\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ est vérifiée si pour tout $t \geq 0$, $\|z(t)\| \leq p(t)$ et $p(t) < \frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Or, d'après le lemme 48,

$$\left(\forall t \in \mathbb{N}, p(t) < \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(\forall t \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} \|\delta(t)\| \leq q(t) \\ \|z(t)\| \leq p(t) \end{array} \right.\right).$$

(iii) Pour résumer les points précédents, si $\forall t \geq 0, p(t) < \frac{\rho}{\sqrt{2}}$, alors $\tilde{G}(t) \subseteq G(t)$ pour tout $t \geq 0$ et donc l'alignement en vitesse est atteint (théorème 49).

(iv) $\lambda_2(\tilde{L}(t))$ étant i.i.d., la probabilité pour laquelle $p(t) < \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ est relativement directe à obtenir. C'est l'objet des lemmes 50 et 53 et du corollaire 54.

Nous donnons maintenant le détail du raisonnement. La définition de la robustesse ρ nous permet de donner le résultat suivant :

Lemme 47. *Soit $z(t) = y(t) - x^0$ pour $t \geq 0$ comme dans la section 5.3. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, si*

$$\|z(t)\| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$$

alors $\tilde{G}(t)$ est un sous graphe de $G(t)$ et $\lambda_2(\tilde{G}(t)) \leq \lambda_2(G(t))$.

Nous omettons la preuve qui est identique à celle de la proposition 36. L'inégalité entre les deux connexités algébriques est due à la proposition 78. Nous pouvons maintenant donner la propriété de majoration :

Lemme 48. *Nous avons*

$$\left(\forall t \in \mathbb{N}, p(t) < \frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left(\forall t \in \mathbb{N}, \begin{cases} \|\delta(t)\| \leq q(t) \\ \|z(t)\| \leq p(t) \end{cases}\right).$$

Démonstration. Nous montrons le résultat par induction sur le temps t. Supposons que l'assertion à gauche de l'implication soit satisfaite. Par définition, $q(0) = \|\delta(0)\|$ et $p(0) = \|z(0)\| = 0$. Supposons que le résultat est vrai pour un temps t donné : $\|\delta(t)\| \leq q(t)$ et $\|z(t)\| \leq p(t)$. L'inégalité sur les positions au temps $t+1$ s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} \|z(t+1)\| &= \|z(t) + \varepsilon\delta(t)\| \leq \|z(t)\| + \varepsilon\|\delta(t)\| \\ &\leq p(t) + \varepsilon q(t) = p(t+1). \end{aligned}$$

Pour l'inégalité sur les vitesses, nous avons $\|z(t)\| \leq p(t) < \rho/\sqrt{2}$, où nous avons utilisé l'assertion à gauche de l'implication. Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme 47 pour obtenir $\lambda_2(L(t)) \geq \lambda_2(\tilde{L}(t))$. Donc, le lemme 44 donne

$$\begin{aligned} \|\delta(t+1)\| &\leq (1 - \varepsilon\lambda_2(L(t)))\|\delta(t)\| \\ &\leq (1 - \varepsilon\lambda_2(\tilde{L}(t)))\|\delta(t)\| \\ &\leq (1 - \varepsilon\lambda_2(\tilde{L}(t)))q(t) = q(t+1). \end{aligned}$$

□

Ce dernier lemme entraîne le résultat suivant :

Théorème 49. *Soit une réalisation R_{ij} du processus. Si pour tout temps t, $p(t) \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ alors l'alignement en vitesse est asymptotiquement atteint, i.e.* $\lim_{t\to+\infty} \|\delta(t)\| = 0$.

Démonstration. q est positive et décroissante, donc elle converge. On peut voir que si $\lim_{t\to+\infty} q(t) > 0$ alors p diverge. Donc, $\lim_{t\to+\infty} q(t) = 0$. En utilisant le lemme 48, nous avons $\|\delta(t)\| \leq q(t)$, donc $\lim_{t\to+\infty} \|\delta(t)\| = 0$, ce qui garantit l'alignement en vitesse. □

Pour pouvoir utiliser le lemme précédent, nous avons besoin de caractériser l'évolution de p en fonction de la configuration initiale du système. Ceci est fait dans le reste de la section.

Lemme 50. *Pour tout $t \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\begin{cases} \mathbb{E}(q(t+1)) = \alpha\mathbb{E}(q(t)), \\ \mathbb{E}(q(t+1)^2) = \beta\mathbb{E}(q(t)^2) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \alpha &= \mathbb{E}(1-\varepsilon\lambda_2(\tilde{L}(t))) = 1-\varepsilon\tilde{\lambda}_2, \\ \beta &= \mathbb{E}((1-\varepsilon\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2) \\ &= 1-2\varepsilon\tilde{\lambda}_2+\varepsilon^2\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2). \end{cases} \tag{5.10}$$

Démonstration. Par définition, $\tilde{L}(t)$ est indépendant de $q(t)$, donc nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(q(t+1)) &= \mathbb{E}\left((1-\varepsilon\lambda_2(\tilde{L}(t)))q(t)\right) \\ &= (1-\varepsilon\tilde{\lambda}_2)\mathbb{E}(q(t)) = \alpha\mathbb{E}(q(t)). \end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\mathbb{E}(q(t+1)^2) = \mathbb{E}\left((1-\varepsilon\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2 q(t)^2\right) = \beta\mathbb{E}(q(t)^2).$$

□

Le processus de majoration est utile seulement si la variance de $q(t)$ converge vers 0. Ceci est vrai sous la condition donnée dans la remarque 43 concernant ε :

Remarque 51. *En supposant $\varepsilon < 1/\lambda_n(\tilde{L}(t))$ pour tout t comme précisé dans la remarque 43, α et β sont dans l'intervalle* $]0,1[$.

La remarque précédente est vérifiée puisque d'après la remarque 43, $1 - \varepsilon\lambda_2(\tilde{L}(t)) \in]0,1[$ pour toute réalisation des processus stochastiques $R_{ij}(t)$ et tout choix ρ. Alors, les définitions de α et β nous permettent de conclure.

Un corollaire direct du lemme 50 est le suivant :

Corollaire 52. *Pour tout $t, u \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\begin{cases} \mathbb{E}(q(t)) = \alpha^t q(0), \\ \mathbb{E}(q(t)^2) = \beta^t q(0)^2, \\ \mathbb{E}(q(t+u)q(t)) = \alpha^u \mathbb{E}(q(t)^2) \end{cases}$$

Démonstration. Les première et deuxième équations sont triviales. La troisième est aussi une conséquence du fait que $\tilde{L}(t)$ est i.i.d. :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(q(t+u)q(t)) &= \mathbb{E}(\prod_{j=0}^{u-1}(1 - \varepsilon\lambda_2(\tilde{L}(t+j)))q(t)^2) \\ &= (1 - \varepsilon\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))^u \mathbb{E}(q(t)^2). \end{aligned}$$

□

En remarquant que $p(t) = \varepsilon \sum_{k=0}^{t-1} q(k)$ et avec l'hypothèse $\tilde{\lambda}_2 > 0$, nous avons :

Lemme 53. *Si nous supposons que $\tilde{\lambda}_2 > 0$, nous avons, pour tout $t \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{cases} \mathbb{E}(p(t)) = \varepsilon \frac{q(0)}{1-\alpha} + o(t), \\ \sigma^2(p(t)) = \varepsilon^2 \frac{(\beta-\alpha^2)q(0)^2}{(1-\alpha)^2(1-\beta)} + o(t) \end{cases}$$

où $\sigma^2(p(t)) = \mathbb{E}(p(t)^2) - \mathbb{E}(p(t))^2$ et $o(t)$ est une fonction convergeant vers 0 lorsque le temps approche l'infini.

Démonstration. La première inégalité vient de la remarque précédente et la première équation donnée par le corollaire 52 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p(t)) &= \varepsilon \sum_{k=0}^{t-1} \mathbb{E}(q(k)) = \varepsilon \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k q(0) \\ &= \varepsilon \frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} q(0) = \varepsilon \frac{q(0)}{1-\alpha} + o(t) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $|\alpha| < 1$ comme précisé dans la remarque 51.

En ce qui concerne la deuxième inégalité,

$$\begin{aligned} p(t)^2 &= \varepsilon^2 \sum_{k,j=0}^{t-1} q(k)q(j) \\ &= \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{t-1} q(k)^2 + 2 \sum_{k<j} q(j)q(k) \right) \\ &= \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{t-1} \left(q(k)^2 + 2 \sum_{u=1}^{t-1-k} q(k+u)q(k) \right). \end{aligned}$$

En utilisant la linéarité de l'espérance, le corollaire 52 et $|\alpha| < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p(t)^2) &= \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{t-1} \left(\mathbb{E}(q(k)^2) + 2 \sum_{u=1}^{t-1-k} \alpha^u \mathbb{E}(q(k)^2) \right) \\ &= \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{t-1} \left(1 + 2(\frac{1-\alpha^{t-k}}{1-\alpha} - 1) \right) \mathbb{E}(q(k)^2) \\ &= \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{t-1} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - (\frac{2\alpha^t}{1-\alpha}\alpha^{-k}) \right) \beta^k q(0)^2 \\ &= \varepsilon^2 \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{t-1} \beta^k - \frac{2\alpha^t}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{t-1} (\frac{\beta}{\alpha})^k \right) q(0)^2. \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\beta = 1 - 2\varepsilon\tilde{\lambda}_2 + \varepsilon^2 \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2) < 1 - 2\varepsilon\tilde{\lambda}_2 + \varepsilon\tilde{\lambda}_2 = \alpha.$$

Donc, $\beta \neq \alpha$. Aussi $|\beta| < 1$, de sorte que nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(p(t)^2) &= \varepsilon^2 \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{1-\beta^t}{1-\beta} - \frac{2\alpha^t}{1-\alpha} \frac{1-(\beta/\alpha)^t}{1-(\beta/\alpha)} \right) q(0)^2 \\ &= \varepsilon^2 \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{1-\beta^t}{1-\beta} - \frac{2}{1-\alpha} \frac{\alpha^t - \beta^t}{1-(\beta/\alpha)} \right) q(0)^2 \\ &= \varepsilon^2 \frac{1+\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)} q(0)^2 + o(t). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \sigma^2(p(t)) &= \mathbb{E}(p(t)^2) - \mathbb{E}(p(t))^2 \\ &= \varepsilon^2 \left(\frac{1+\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)} - \frac{1}{(1-\alpha)^2} \right) q(0)^2 + o(t). \end{aligned}$$

Reformuler le terme à droite de la dernière égalité nous donne le résultat attendu. □

Enfin, nous transcrivons l'équation du lemme précédent en fonction de l'espérance et la variance de la connexité algébrique :

Corollaire 54. *Pour tout $t \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\begin{cases} \mathbb{E}(p(t)) = \frac{\|\delta(0)\|}{\tilde{\lambda}_2} + o(t), \\ \sigma^2(p(t)) = \frac{\nu_\varepsilon \|\delta(0)\|^2}{\tilde{\lambda}_2^2} + o(t), \end{cases}$$

où $\nu_\varepsilon \in [0,1]$ est défini dans le théorème 45.

Remarque 55. *Puisque $\lim_{\varepsilon \to 0} \nu_\varepsilon = 0$, le résultat précédent montre qu'il est possible d'obtenir la limite de la variance de $p(t)$ aussi petite que souhaitée en choisissant ε suffisamment petit.*

Démonstration. Remarquons que les définitions de α et β donnent

$$\begin{aligned} &1 - \alpha = \varepsilon \tilde{\lambda}_2,\ 1 - \beta = \varepsilon(2\tilde{\lambda}_2 - \varepsilon \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2)), \\ &1 + \alpha = 2 - \varepsilon \tilde{\lambda}_2,\ \beta - \alpha^2 = \varepsilon^2(\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2) - \tilde{\lambda}_2^2). \end{aligned}$$

La première partie du résultat est une conséquence directe de l'avant dernière égalité. Nous obtenons la seconde de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma^2(p(t)) &= \varepsilon^2 \frac{(\beta - \alpha^2) q(0)^2}{(1-\alpha)^2(1-\beta)} + o(t) \\ &= \varepsilon^4 \frac{(\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2) - \tilde{\lambda}_2^2)\|\delta(0)\|^2}{\varepsilon^3 \tilde{\lambda}_2^2 (2\tilde{\lambda}_2 - \varepsilon \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2))} + o(t) \\ &= \frac{\nu_\varepsilon \|\delta(0)\|^2}{\tilde{\lambda}_2^2} + o(t). \end{aligned}$$

Le fait que $\nu_\varepsilon \geq 0$ peut être déduit de $\sigma^2(p(t)) \geq 0$. L'inégalité $\nu_\varepsilon \leq 1$ vient de la remarque 43 : $0 < \varepsilon < \frac{1}{\lambda_2(\tilde{L}(t))}$ pour toute réalisation $R_{ij}(t)$ et pour tout choix ρ. Par conséquent, $\varepsilon \lambda_2(\tilde{L}(t))^2 < \lambda_2(\tilde{L}(t))$ ce qui donne

$$\varepsilon \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2) = \mathbb{E}(\varepsilon \lambda_2(\tilde{L}(t))^2) < \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))) = \tilde{\lambda}_2.$$

Donc, $\tilde{\lambda}_2 < 2\tilde{\lambda}_2 - \varepsilon \mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2)$ et

$$\nu_\varepsilon < \varepsilon \frac{(\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2) - \tilde{\lambda}_2^2)}{\tilde{\lambda}_2} \leq \varepsilon \frac{\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t))^2)}{\tilde{\lambda}_2} < 1.$$

□

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème central de l'étude.

Preuve du théorème 45. Le théorème 49 démontre que la probabilité d'alignement en vitesse est supérieure à la probabilité que pour tout temps t, $p(t) \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Notons $\mathcal{A}_t = \{\omega \in \Omega | p(t) \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}\}$. Puisque p est croissant, $(\mathcal{A}_t)$ est une suite décroissante d'évènements et nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\forall t, p(t) \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}) &= \mathbb{P}(\cap_{t\geq 0}\mathcal{A}_t) \\
&= \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}(p(t) \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}) \\
&= 1 - \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}(p(t) > \frac{\rho}{\sqrt{2}}).
\end{aligned}$$

La borne sur la probabilité d'alignement provient de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (voir section A.5) :

$$\mathbb{P}(p(t) > \frac{\rho}{\sqrt{2}}) \leq \frac{1}{1 + k(t)}$$

où $k(t) = \frac{\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} - \mathbb{E}(p(t))\right)^2}{\sigma^2(p(t))}$. Nous nous intéressons uniquement à la limite lorsque t diverge vers l'infini. Nous utilisons le corollaire 54 pour obtenir une borne inférieure sur la limite de $k(t)$:

$$\frac{\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} - \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(p(t))\right)^2}{\lim_{t\to+\infty} \sigma^2(p(t))} \geq \frac{1}{\nu_\varepsilon}\left(\frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}||\delta(0)||} - 1\right)^2.$$

□

5.5 Application aux réseaux sans fil

Jusqu'à présent, nous n'avons imposé aucune contrainte sur les rayons d'interaction $R_{ij}(t)$ si ce n'est d'être des variables aléatoires positives et i.i.d. satisfaisant la contrainte $R_{ij}(t) = R_{ji}(t)$. Dans cette section, nous appliquons notre résultat au cas où $R_{ij}(t) = \min(R_i(t), R_j(t))$ avec $R_i(t)$ suivant une distribution uniforme sur l'intervalle $[0, R_{max}]$ où $R_{max} > 0$ est un rayon d'interaction maximal donné. Le rayon $R_i(t)$ représente la portée de communication maximale de l'agent i au temps t. Le choix $R_{ij}(t) = \min(R_i(t), R_j(t))$ signifie que deux agents interagissent si et seulement si chacun peut percevoir l'autre. Comme nous l'avons signalé en introduction du chapitre, il a été montré que la distribution uniforme est une bonne approximation du modèle d'ombre de décroissance log-normale utilisé dans les communications sans fil [BW09]. Cette hypothèse est par conséquent pertinente en pratique.

5.5.1 Calcul et optimisation de la borne

Le Théroème 45 minore la probabilité de l'alignement en vitesse pour le système (5.1). Pour être utile, la borne de ce théorème doit pouvoir être calculée. Dans cette section, nous explicitons les deux quantités qui posent des difficultés dans le calcul de cette borne : $\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))$ et $\mathbb{E}((\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2)$. Puisque les rayons $R_i(t)$ pour $i \in \mathcal{N}$ sont i.i.d., ces deux quantités sont indépendantes du temps. L'objectif de la section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 56. *Les espérances $\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))$ et $\mathbb{E}((\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2)$ sont des polynômes en ρ dont l'expression exacte sera donnée par la proposition 60.*

Remarque 57. *D'après le théorème 56, le produit $\tilde{\lambda}_2\rho$ est un polynôme en ρ. Par conséquent, déterminer la probabilité maximum de flocking d'après le théorème 45 revient à maximiser un polynôme, ce qui peut se faire par des méthodes numériques. Une fois le ρ optimal obtenue, la proposition 60 permet aussi de déterminer ν_ε.*

Puisque les deux espérances à calculer sont indépendantes du temps, nous abandonnons la marque de dépendance au temps. La méthode de calcul sera la même pour $\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))$ et $\mathbb{E}((\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2)$, pour cette raison, nous considérons une fonction $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\phi(\tilde{L})$ soit mesurable.

Nous supposons que $\rho \in [0, R_{max}]$ est fixé, sauf mention contraire. Notons le graphe $\mathcal{S}_\rho^{max}(G_{x^0}) = (\mathcal{N}, \mathcal{E}_\rho^{max})$ où

$$\mathcal{E}_\rho^{max} = \left\{(j,i) \mid \|x_i^0 - x_i^0\| + \rho \leq R_{max} \text{ et } i \neq j\right\}.$$

Le graphe $\mathcal{S}_\rho^{max}(G_{x^0})$ est égale au graphe $\mathcal{S}_\rho(G_{x^0}, t)$ (équation (5.7)) lorsque, pour tout $i \in \mathcal{N}$, $R_i(t) = R_{max}$. Notons, pour $(j,i) \in \mathcal{E}_\rho^{max}$, $r_{ij} = \|x_i^0 - x_i^0\| + \rho$. Notons pour $i \in \mathcal{N}$, d_i le degré du nœud i dans le graphe $\mathcal{S}_\rho^{max}(G_{x^0})$. Pour i fixé, nous trions les d_i valeurs $r_{ij} \leq R_{max}$ par ordre croissant et notons $(r_i^1, r_i^2, \ldots, r_i^{d_i})$ la séquence résultant de ce tri. Pour obtenir les valeurs r_{ij} en fonction des r_i^k, nous utilisons la fonction de correspondance σ telle que

$$r_{i,\sigma(i,k)} = r_i^k,$$

de sorte que $\sigma(i,\cdot)$ soit une bijection entre $\{1, \ldots, d_i\}$ et l'ensemble des indices $j \in \mathcal{N}$ tels que $(j,i) \in \mathcal{E}_\rho^{max}$. Posons de plus $r_i^0 = 0$ et $r_i^{d_i} = R_{max}$. Ces notations nous permettent d'énoncer que $\tilde{L}$ est une fonction constante par morceaux des R_i pour $i \in \mathcal{N}$:

Lemme 58. *Soient $k_i \in \{0, \ldots, d_i\}$ pour $i \in \mathcal{N}$. Alors, $\tilde{L}$ est constante lorsque les rayons R_i varient dans l'intervalle $[r_i^{k_i}, r_i^{k_i+1}[$. Précisément, $\tilde{L}$ est définie par*

$$\tilde{a}_{ij} = \chi\left(r_{ij} \leq \min(r_i^{k_i}, r_j^{k_j})\right).$$

Nous notons $\tilde{L}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ cette constante.

Remarque 59. *Dans le lemme précédent, $\tilde{L}$ ne dépend pas de ρ, en effet :*

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \chi\left(\|x_i^0 - x_j^0\| = 0\right) & \text{si } k_i = 0 \text{ ou } k_j = 0, \\ \chi\left(\|x_i^0 - x_j^0\| \leq \min\left(\|x_i^0 - x_{\sigma(i,k_i)}^0\|, \|x_j^0 - x_{\sigma(j,k_j)}^0\|\right)\right) & \text{si } k_i > 0 \text{ et } k_j > 0. \end{cases}$$

La preuve du lemme 58 est transférée à la suite du résultat principal de la section :

Proposition 60. *La quantité $\mathbb{E}(\phi(\tilde{L}))$ est un polynôme en ρ de la forme*

$$\mathbb{E}(\phi(\tilde{L})) = \frac{1}{R_{max}^n} \sum_{k_1=0}^{d_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{d_n} \prod_{i=1}^{n} (r_i^{k_i+1} - r_i^{k_i}) \phi(\tilde{L}(k_1, k_2, \ldots, k_n)),$$

où dans la formule précédente, $r_i^{k_i+1} - r_i^{k_i}$ est une fonction affine de ρ uniquement lorsque $k_i \in \{0, d_i\}$ et les autres facteurs sont indépendants de ρ.

Il suffit de remplacer $\phi(\tilde{L})$ dans la proposition 60 par $\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}(t)))$ ou $\mathbb{E}((\lambda_2(\tilde{L}(t)))^2)$ pour obtenir l'expression exacte de ces espérances.

Remarque 61. *Pour des degrés d_i homogènes, le nombre de constantes $\tilde{L}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ à calculer est de l'ordre de $O(d^n)$ où d est le degré moyen des nœuds. Ceci est possible pour n petit. Lorsque n est trop grand, on préfèrera calculer une valeur approximative de $\mathbb{E}(\phi(\tilde{L}))$ par une méthode de Monte-Carlo [MU49].*

Preuve du lemme 58. Les $k_i \in \{0, \ldots, d_i\}$ pour $i \in \mathcal{N}$ sont fixés. Soient $R_i \in [r_i^{k_i}, r_i^{k_i+1}[$ pour $i \in \mathcal{N}$. Soient $i, j \in \mathcal{N}$ distincts. Nous allons montrer que $\tilde{a}_{ij}$ est indépendant des R_i. Nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= \chi\left(\|x_i^0 - x_j^0\| + \rho \leq \min(R_i, R_j)\right) \\ &= \chi\left(r_{ij} \leq \min(R_i, R_j)\right). \end{aligned}$$

Si $r_{ij} > R_{max}$, $\tilde{a}_{ij} = 0$. Donc $\tilde{a}_{ij}$ est indépendant de R_i et R_j. Supposons que $r_{ij} \leq R_{max}$. Supposons de plus que $R_i \leq R_j$ de sorte que

$$\tilde{a}_{ij} = \chi\left(r_{ij} \leq R_i\right).$$

Pour le cas $R_i > R_j$, on pourra appliquer un raisonnement similaire. Notons $k \in \{0, \ldots, d_i\}$ tel que $r_{ij} = r_i^k$. Si $k \leq k_i$, alors, puisque $R_i \geq r_i^{k_i}$, $\tilde{a}_{ij} = 1$. Si $k \geq k_i + 1$, alors $\tilde{a}_{ij} = 0$. Dans chaque cas, $\tilde{a}_{ij}$ est indépendant de la valeur de R_i. □

Preuve de la proposition 60. Pour souligner que la matrice $\tilde{L}$ est une fonction des rayons R_i, nous notons $\tilde{L}(R_1, R_2, \ldots, R_n)$. Les R_i pour $i \in \mathcal{N}$ sont des processus aléatoires indépendants, par conséquent la densité de probabilité du vecteur $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ est le produit des densités de probabilité des R_i pour $i \in \mathcal{N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(\tilde{L})) &= \frac{1}{R_{max}^n} \int_{R_1=0}^{R_{max}} \int_{R_2=0}^{R_{max}} \cdots \int_{R_n=0}^{R_{max}} \phi(\tilde{L}(R_1, R_2, \ldots, R_n)) dR_1 dR_2 \cdots dR_n \\
&= \frac{1}{R_{max}^n} \sum_{k_1=0}^{d_1} \int_{R_1=r_1^{k_1}}^{r_1^{k_1+1}} \sum_{k_2=0}^{d_2} \int_{R_2=r_2^{k_2}}^{r_2^{k_2+1}} \cdots \sum_{k_n=0}^{d_n} \int_{R_n=r_n^{k_n}}^{r_n^{k_n+1}} \phi(\tilde{L}(R_1, R_2, \ldots, R_n)) dR_1 dR_2 \cdots dR_n.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors utiliser le lemme 58, de sorte que

$$\mathbb{E}(\phi(\tilde{L})) = \frac{1}{R_{max}^n} \sum_{k_1=0}^{d_1} (r_1^{k_1+1} - r_1^{k_1}) \sum_{k_2=0}^{d_2} (r_2^{k_2+1} - r_2^{k_2}) \cdots \sum_{k_n=0}^{d_n} (r_n^{k_n+1} - r_n^{k_n}) \phi(\tilde{L}(k_1, k_2, \ldots, k_n)).$$

□

5.5.2 Simulations

Dans cette section, nous utilisons un système de six agents pour illustrer notre résultat théorique. Les agents se divisent initialement en deux sous groupes ayant des vitesses dont les coordonnées en y sont opposées. Les positions initiales induisent un graphe d'interaction connexe avec une probabilité non nulle. Nous nous interrogeons sur la probabilité avec laquelle le groupe parviendra à dépasser son conflit initial et à s'aligner asymptotiquement en vitesse. D'après le théorème 45, notre borne sur la probabilité d'alignement dépend du ratio $\frac{\tilde{\lambda}_2 \rho}{\|\delta(0)\|}$. Le numérateur est complètement déterminé par les positions des agents (vecteur x^0) alors que le dénominateur est une fonction des vitesses initiales (vecteur v^0). Dans le but d'explorer les différents types de comportement possible, nous fixons les positions initiales et faisons varier les vitesses initiales. Nous nous donnons dans un premier temps un vecteur de désaccord en vitesse de référence $w = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 1, -1, -1, -1)^T$ de telle sorte que $\|w\| = 1$. Nous choisissons la coordonnée en y du vecteur de vitesse initial $v_y^0 = \alpha w$ où nous utilisons α comme paramètre variable du système. Nous fixons la coordonnée en x comme suit : $v_x^0 = c\mathbf{1}$ où $c > 0$ est une constante arbitraire qui n'influence nullement le résultat de l'alignement en vitesse et est utile uniquement pour la visualisation. Nous avons $\|\delta(0)\| = \|(I - J)v^0\| = \|\alpha w\| = \alpha$ donc α représente l'amplitude du désaccord en vitesse initial.

Puisque x^0 est fixé, nous pouvons déterminer le produit optimal $\mathbb{E}(\lambda_2(\tilde{L}))\rho$ pour $\rho \in [0, R_{max}]$, en utilisant la méthode présentée dans la section 5.5.1. Pour les simulations numériques, nous utilisons $R_{max} = 15$. L'optimisation nous donne $\rho_{opt} = 1.9$ et $\mathbb{E}(\lambda_2(\rho_{opt}))\rho_{opt} = 0.76$.

Nous choisissons le pas de temps $\varepsilon = 0.2$ comme suggéré dans la remarque 43 ce qui donne $\nu_\varepsilon = 0.37$.

Pour illustrer le résultat, nous avons exécuté plusieurs simulations. Dans un premier temps, nous avons choisi $\|\delta(0)\| = 0.9\frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}}$ qui nous donne une borne inférieure sur la probabilité d'alignement de 0.6. Ensuite, nous avons choisi $\|\delta(0)\| = 15\frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}}$ pour laquelle le théorème 45 ne permet pas de conclure en ce qui concerne l'alignement asymptotique en vitesse. La figure 5.1 présente des aperçus de l'évolution de la trajectoire du système pour des réalisations différentes des processus aléatoires. Chaque simulation illustre un choix différent de $\|\delta(0)\|$ et correspond à un résultat distinct. Dans le premier cas, le groupe converge asymptotiquement vers un alignement en vitesse bien que le graphe d'interaction ne soit pas connexe pour tout temps. La seconde partie de la figure présente un cas où le désaccord initial en vitesse est trop important et les deux sous groupes se séparent, rendant impossible l'alignement en vitesse.

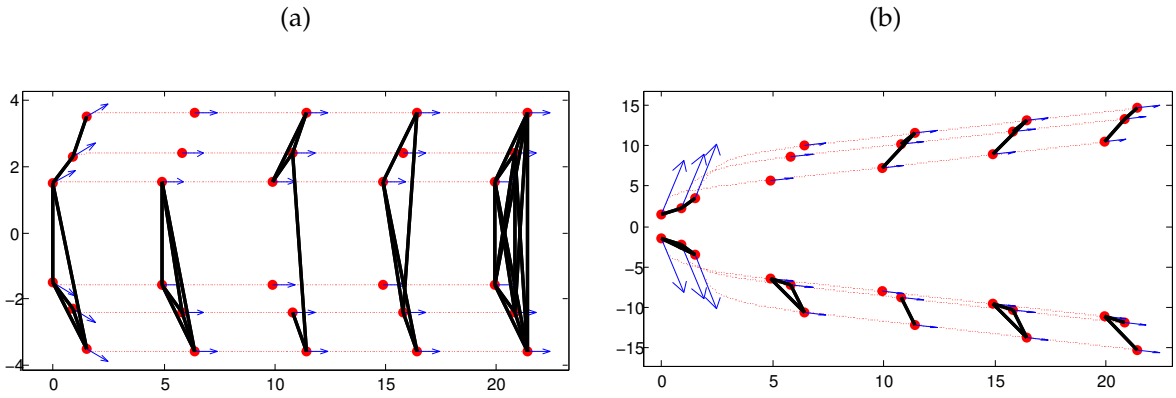


FIGURE 5.1: La partie supérieure de la figure présente une réalisation de la trajectoire lorsque $\|\delta(0)\| = 0.9\frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}}$. La partie inférieure est une réalisation pour $\|\delta(0)\| = 15\frac{\rho\tilde{\lambda}_2}{\sqrt{2}}$. La figure montre les trajectoires des 6 agents ainsi que leurs positions, vitesses et interactions pour 5 temps donnés. Les six points rouges à l'extrême gauche représentent les positions initiales des agents. Les flèches bleues représentent les vitesses des agents (leurs amplitudes ont été multipliées par 2 pour faciliter la visualisation). Les lignes noires entre les points représentent les interactions.

Chapitre 6

Interactions topologiques

6.1 Introduction

6.1.1 Présentation du système

Dans ce chapitre, nous étudions un système pour l'alignement en vitesse similaire au système (4.1). Dans le cas des chapitres 4 et 5, le poids des interactions a_{ij} est une fonction binaire de la distance entre i et j. Une caractéristique importante de ce choix est la symétrie des poids d'interaction. Cela facilitent l'analyse du système. Dans le présent chapitre, nous souhaitons explorer les conséquences d'interactions potentiellement non symétriques sur la dynamique du système d'alignement en vitesse. Une expérience de terrain [BCC+08] a récemment montré que, chez les nuées d'étourneaux, les individus sont influencés par un nombre constant de plus proches voisins (6 ou 7 d'après les mesures effectuées). De telles interactions sont appelées *interactions topologiques*. Dans le cas des interactions métriques étudiées dans les deux chapitres précédents, le poids d'interaction dépend uniquement de la distance entre les agents i et j. Dans le cas présent des interactions topologiques, a_{ij} dépend de la distance $\|x_i - x_j\|$ relativement aux autres distances $\|x_i - x_k\|$ pour $k \in \mathcal{N} \setminus \{i, j\}$. Ces interactions sont en général non symétriques. Une autre propriété remarquable des graphes d'interaction topologiques est le fait qu'ils soient m-réguliers, *i.e.* le degré entrant de chaque agent dans le graphe d'interaction est constant, égal à m (voir section A.2).

Nous nous saisissons de ce nouveau résultat pour explorer son impact sur notre système d'alignement. De manière analogue au chapitre 4, nous chercherons à déterminer des conditions dépendant uniquement de la configuration initiale. Dans un premier temps et

pour éviter de superposer les difficultés techniques, nous considérons le modèle de flocking déterministe, contrairement au chapitre 5 : pour $i \in \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)(v_j(t) - v_i(t)), \end{aligned} \tag{6.1}$$

avec $a_{ij}(t) = 1$ <u>ssi</u> j fait partie des m plus proches voisins de i au temps t, *i.e.*

$$a_{ij} = \chi\left(\left|\left\{ k \in \mathcal{N} \mid \|x_i - x_j\| > \|x_i - x_k\| \right\}\right| < m\right),$$

où m est une constante dépendant du modèle choisi.

Dans le reste du chapitre, nous commençons par présenter l'approche que nous avons utilisée (en particulier, nous soulignons les différences avec le cas symétrique). Par la suite, nous proposons un résultat sur l'alignement en vitesse que nous illustrons par des simulations.

6.1.2 Approche

Pour montrer que la trajectoire du système (6.1) converge vers un alignement en vitesse, nous procédons de manière analogue à l'étude présentée dans le chapitre 4, notre approche suit le raisonnement suivant :

(i) La préservation d'un sous arbre couvrant dans le graphe d'interaction garantit l'alignement en vitesse à un taux exponentiel (théorème 66). Ce taux dépend de la structure hiérarchique induite par le sous graphe préservé (voir section 6.2.1).

(ii) En utilisant ce qui précède, l'intégration des vitesses permet d'estimer la perturbation sur les distances. Une étude de robustesse similaire à celle effectuée dans le chapitre 4 garantit alors la préservation du sous graphe nécessaire à l'alignement en vitesse (lemme 68).

(iii) La combinaison des deux observations précédentes donne une condition sur les positions et vitesses initiales sous laquelle la trajectoire du système converge vers un alignement en vitesse (théorème 64).

L'obtention du taux de convergence vers l'alignement en vitesse (théorème 66) s'appuie sur des idées de [Mor04] et [AB09]. Dans [Mor04], Moreau démontre que la trajectoire du système converge vers un consensus sous une hypothèse générale de connexité (voir

section 2.2.4). Cependant, la généralité de son résultat ne lui a pas permis d'exhiber le taux de contraction dont nous avons besoin ici. Dans [AB09], Angeli et Bliman ont déterminé un taux de contraction asymptotique pour le système en temps discret (2.2). Cependant, ce résultat ne peut être directement utilisé dans notre cas puisque d'une part nous étudions un système en temps continu et surtout puisque notre approche se base sur un taux de convergence valable pour tout temps.

De plus, l'obtention du taux de convergence vers l'alignement en vitesse est largement plus compliquée dans le cas non symétrique. Par conséquent, ceci constitue l'essentiel des contributions du chapitre. Nous détaillons l'obtention du taux dans les sections 6.2.3 et 6.2.5. En particulier, contrairement au cas symétrique, l'approche algébrique n'est plus satisfaisante ici : dans le cas des interactions symétriques, le système (4.1) préserve la vitesse moyenne v^* au cours du temps :

$$\dot{v}^* = \frac{1}{n}\mathbf{1}^T\dot{v} = -\frac{1}{n}\mathbf{1}^T L v = 0,$$

puisque $\mathbf{1}$ est un vecteur propre à gauche de L associé à la valeur propre 0 lorsque L est symétrique (proposition 77). Ceci nous avait permis de définir le désaccord en vitesse $\delta = v - v^*$ et de montrer que $\|\delta\|^2/2$ est une fonction de Lyapunov pour le système (4.1) en utilisant la proposition 79 qui nécessite une matrice Laplacienne symétrique. Ce n'est plus le cas ici. De plus, nous avons vu dans la section 4.6 que l'approche algébrique faisait partie des sources de conservatisme pour quantifier les perturbations sur les positions. Par conséquent, nous préférons utiliser une autre fonction de Lyapunov plus adaptée au cas non symétrique, que nous avons déjà rencontrée dans l'étude du consensus (chapitre 2) : le diamètre des vitesses

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t) = \max_{i,j\in\mathcal{N}} \|v_i(t) - v_j(t)\|.$$

6.2 Conditions suffisantes pour l'alignement en vitesse

6.2.1 Structure hiérarchique

Nous commençons par introduire les notations associées à la structure hiérarchique induite par la présence d'un sous arbre couvrant. Nous considérons un graphe H d'ensemble de nœuds $\mathcal{N}$ et de matrice d'adjacence $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$. Nous supposons de plus que H contient un sous arbre couvrant. Nous notons r la racine et D la profondeur de ce sous arbre. Le graphe H jouera le rôle du sous graphe à préserver dans le graphe d'interaction.

Suivant l'idée d'Angeli et Bliman, nous définissons deux séquences de $D+1$ sous ensembles de nœuds de $\mathcal{N}$. Pour $k \in \{0, \ldots, D\}$, $\mathcal{S}_k$ contient les nœuds à distance k de la racine r et l'ensemble $\mathcal{U}_k$ est l'union des $\mathcal{S}_l$ pour $l \leq k$:

- $\mathcal{S}_0 = \{r\}$,
- $\forall k \in \{0, \ldots, D\}, \mathcal{U}_k = \cup_{l=0}^{k} \mathcal{S}_l$,
- $\forall k \in \{0, \ldots, D-1\}, \mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{N}_{\mathcal{S}_k}^{+} \backslash \mathcal{U}_k$,

où $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_k}^{+}$ est l'ensemble des voisins sortants du groupe de nœuds $\mathcal{S}_k$ dans le graphe H (voir section A.2). La séquence $(\mathcal{S}_k)_{k \in \{0,\ldots,D\}}$ forme une partition de l'ensemble des nœuds $\mathcal{N}$ et $(\mathcal{U}_k)_{k \in \{0,\ldots,D\}}$ est une famille croissante vérifiant $\mathcal{U}_D = \mathcal{N}$. Pour $k \in \{1, \ldots, D-1\}$, nous minorons la somme des poids d'interaction de $\mathcal{U}_k$ vers $\mathcal{U}_k$ dans H :

$$\alpha_k = \min_{i \in \mathcal{U}_{k+1}} \sum_{j \in \mathcal{U}_k} \tilde{a}_{ij}. \tag{6.2}$$

Nous donnons un exemple de structure hiérarchique pour un graphe d'interaction topologique dans la figure 6.1.

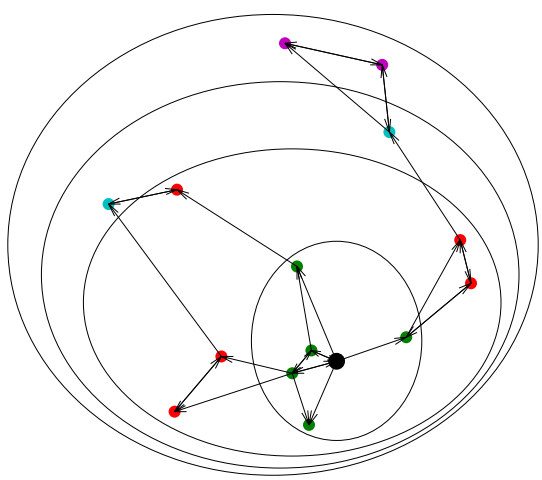


FIGURE 6.1: Les points de couleurs représentent les positions des agents. Les flèches représentent les influences d'après les interactions topologiques pour $m = 2$. Le large point noir est la racine r. Les cercles noirs symbolisent la séquence croissante des ensembles $\mathcal{U}_k$ pour $k \in \{1, \ldots, D\}$. Seul le cercle symbolisant $\mathcal{U}_0 = \{r\}$ n'est pas représenté. Ici $D = 4$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

Ces notations vont nous permettre de présenter notre contribution principale dans ce chapitre. Pour cela, nous devons de plus introduire les notations suivantes. Nous définissons pour $k \in \{0, \dots, D-1\}$ les fonctions de $\mathbb{R}^+$

$$c_0 = \tau \longmapsto \frac{1}{m+1}(1 - e^{-(m+1)\tau})$$

et pour $k \geq 1$,

$$c_k = \tau \longmapsto e^{-m\tau}(e^{\alpha_k \tau} - 1).$$

Ceci nous permet de définir les fonctions $c : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $T : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$c = \tau \longmapsto \prod_{k=0}^{D-1} c_k(\tau_k)$$

et

$$T = \tau \longmapsto \sum_{k=0}^{D-1} \tau_k,$$

où $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{D-1})$. Nous choisissons une famille $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_{D-1})$ de réels positifs maximisant le quotient c/T. Si une telle famille n'est pas unique, nous en choisissons une de façon arbitraire. Remarquons qu'une telle famille existe puisque la fonction à optimiser est continue sur $(\mathbb{R}^+)^D$ et possède une limite nulle lorsque $\|\tau\|$ tend vers $+\infty$ (ce qui montre que la fonction est bornée). Pour terminer, nous définissons

$$\tilde{T} = T(\tilde{\tau}) \tag{6.3}$$

et

$$\tilde{c} = c(\tilde{\tau}), \tag{6.4}$$

de sorte que le quotient $\tilde{c}/\tilde{T}$ soit la valeur maximale de la fonction quotient c/T. La justification des notations précédentes deviendra claire dans la section 6.2.3. Nous donnerons dans la section 6.3.1 une méthode pour calculer les quantités $\tilde{c}$ et $\tilde{T}$.

Considérons un graphe d'interaction G de matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$. L'analyse de robustesse du graphe d'interaction de la section 6.2.4 a pour but l'obtention de l'hypothèse suivante :

Hypothèse 62 (Préservation de la structure hiérarchique)**.** *Le graphe d'interaction G vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *pour $i \in \mathcal{U}_1$, $a_{ir} = 1$.*

- *pour* $k \in \{1, \dots, D-1\}$ *et* $i \in \mathcal{U}_{k+1}$,

$$\sum_{j \in \mathcal{U}_k} a_{ij} \;\geq\; \alpha_k \quad \textit{et} \quad \sum_{j \notin \mathcal{U}_k} a_{ij} \;\leq\; (m - \alpha_k).$$

Pour obtenir l'hypothèse précédente, nous avons la proposition suivante :

Proposition 63. *Soit G soit un graphe d'interaction m-régulier contenant le sous graphe couvrant H décrit ci-dessus. Alors, l'hypothèse 62 est vérifiée.*

Cette proposition se déduit directement de la définition de α_k, du fait que G soit m-régulier et que $H \subseteq G$.

6.2.2 Résultat principal

Considérons une quantité $\rho \in [0, \Delta_{\mathcal{N}}(0)]$ représentant la perturbation maximale autorisée sur les distances entre agents (voir section 6.2.4). Nous définissons le sous graphe $H_\rho = (\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{A}) \subseteq G_{x^0}$ où $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ avec

$$\tilde{a}_{ij} = \chi\left(\left|\left\{ k \in \mathcal{N} \mid \|x_i - x_j\| > \|x_i - x_k\| - 2\rho \right\}\right| < m\right). \tag{6.5}$$

H_ρ correspond au sous graphe de G_{x^0} préservé lorsque la perturbation sur les distances entre agents est inférieure à ρ (lemme 68). Pour le résultat sur l'alignement en vitesse, nous supposons que H_ρ contient un sous arbre couvrant et donc *a fortiori* que G_{x^0} en contient un aussi. Nous détaillerons dans la section 6.3.1 comment choisir ρ de sorte que cette propriété soit vérifiée. Nous pouvons utiliser les notations de structure hiérarchique présentées dans la section 6.2.1 en posant $H := H_\rho$. Sous cette condition, le résultat suivant est vérifié.

Théorème 64. *Soient x^0 et v^0, des vecteurs initiaux des positions et vitesses empilées. Soit $\rho \in [0, \Delta_{\mathcal{N}}(0)]$ tel que H_ρ possède un sous arbre couvrant. Supposons que le diamètre en vitesse initial vérifie*

$$\Delta_{\mathcal{N}}(0) \leq \frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}\rho. \tag{6.6}$$

Alors, pour toute trajectoire $(x(t), v(t))$ du système (6.1) définie sur $\mathbb{R}^+$, H_ρ est préservé dans le graphe d'interaction $G(t)$ pour tout temps $t \geq 0$ et tous les agents convergent asymptotiquement vers l'alignement en vitesse.

Ce théorème montre que plus la perturbation autorisée, ρ, est grande, plus le diamètre initial en vitesse autorisé, $\Delta_{\mathcal{N}}(0)$, est grand. Cependant, le quotient $\frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}$ est une fonction décroissante de ρ comme nous le démontrerons dans la section 6.3.1. Nous discuterons dans

cette section comment choisir ρ de façon à optimiser la borne $\frac{\tilde{c}\rho}{\tilde{T}}$. La preuve du théorème nécessite plusieurs résultats intermédiaires, notamment pour caractériser le taux de convergence du diamètre (voir théorème 66), par conséquent, nous la transférons à la fin de la section 6.2.5.

6.2.3 Contraction du diamétre

Dans cette section, nous montrons que la préservation de la structure hiérarchique comme explicité dans la section 6.2.1 permet de minorer le taux de contraction du diamètre.

Considérons le système du consensus suivant

$$\dot{v}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(v_j - v_i), i \in \mathcal{N}, \tag{6.7}$$

où $v_i \in \mathbb{R}^d$, pour $j \in \mathcal{N}, a_{ij} \in \{0,1\}$ et $\sum_{j\in\mathcal{N}} a_{ij} = m$ une constante donnée. Les idées qui serviront à analyser ce système sont adaptées de [Mor04] et [AB09]. La contraction du diamètre des vitesses nécessite la préservation de la structure hiérarchique du graphe d'interaction. Nous utilisons les notations r, D, $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{U}_k$ et α_k, etc. comme définies dans la section 6.2.1. Pour un sous ensemble $S \subseteq \mathcal{N}$, nous notons

$$\Delta_S(t) = \max_{i,j\in S} \|v_i(t) - v_j(t)\|$$

le diamètre en vitesse de S au temps $t \geq 0$. Nous pouvons alors introduire le lemme nous permettant de caractériser $\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}$, diamètre de $\mathcal{U}_{k+1}$, en fonction de $\Delta_{\mathcal{U}_k}$, diamètre de $\mathcal{U}_k$, pour $k \in \{0,\dots,D-1\}$. Une induction sur ce lemme nous permettra d'obtenir le taux de contraction de $\Delta_{\mathcal{N}}$.

Lemme 65. *Soit k dans $\{0,\dots,D-1\}$. Soient t_0 et t des temps tels que $t_0 < t$ et $\tau \geq 0$. Supposons que le graphe d'interaction $G(s)$ vérifie l'hypothèse 62 pour $s \in [t, t+\tau]$. Alors nous avons*

$$\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t+\tau) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - c_k(\tau)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t)) \tag{6.8}$$

où les $c_k(\tau)$ ont été définis dans la section 6.2.1.

Ce lemme est le cœur de notre résultat. Sa preuve est donnée dans la section 6.2.5. Pour donner le résultat principal, nous utilisons la famille d'intervalles de temps $(\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_{D-1})$ ainsi que les notations $\tilde{T}$ et $\tilde{c}$ comme définies dans la section 6.2.1 :

Théorème 66 (Contraction du diamètre des vitesses)**.** *Considérons v une trajectoire du système (6.7) définie sur $\mathbb{R}^+$ et supposons que $G(t)$ vérifie l'hypothèse 62 (préservation de la structure hiérarchique) sur l'intervalle de temps $[0, Q\tilde{T}]$ pour $Q \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $q \in \{0, \dots, Q\}$ nous avons*

$$\Delta_{\mathcal{N}}(q\tilde{T}) \leq (1 - \tilde{c})^q \Delta(0). \tag{6.9}$$

Remarque 67. *Comme corollaire imédiat du théorème 66, nous obtenons que le diamètre des vitesses décroit de exponentiellement vers* 0.

Démonstration. Le cœur du théorème réside dans le lemme 65 dont la preuve est donnée dans la section 6.2.5. La présente preuve est adaptée de [AB09]. Nous démontrons par récurrence la proposition suivante : pour tout t_0 dans $\mathbb{R}^+$, pour $k \in \{1, \dots, D-1\}$,

$$P_k \Leftrightarrow \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t_0 + \sum_{h=0}^{k} \tilde{\tau}_h) \leq \left(1 - \prod_{h=0}^{k} c_h(\tilde{\tau}_h)\right) \Delta_{\mathcal{N}}(t_0).$$

Premièrement, remarquons que le lemme 65 appliqué à $k = 0$ et $\tau = \tilde{\tau}_0$ donne

$$\Delta_{\mathcal{U}_1}(t_0 + \tilde{\tau}_0) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - c_0(\tilde{\tau}_0)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_0}(t_0)).$$

Puisque $\mathcal{U}_0 = \{r\}$, $\Delta_{\mathcal{U}_0} = 0$ et l'équation précédente devient

$$\Delta_{\mathcal{U}_1}(t_0 + \tilde{\tau}_0) \leq (1 - c_0(\tilde{\tau}_0))(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0)),$$

ce qui nous donne l'initialisation de la récurrence. Supposons maintenant que pour $k \in \{1, \dots, D-2\}$,

$$\Delta_{\mathcal{U}_k}(t_0 + \sum_{h=0}^{k-1} \tilde{\tau}_h) \leq \left(1 - \prod_{h=0}^{k-1} c_h(\tilde{\tau}_h)\right) \Delta_{\mathcal{N}}(t_0).$$

Alors, en utilisant une nouvelle fois le lemme 65 appliqué à k et $\tau = \tilde{\tau}_k$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t_0 + \sum_{h=0}^{k} \tilde{\tau}_h) &\leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - c_k(\tilde{\tau}_k)\left(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t_0 + \sum_{h=0}^{k-1} \tilde{\tau}_h)\right) \\
&\leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - c_k(\tilde{\tau}_k)\left(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - (1 - \prod_{h=0}^{k-1} c_h(\tilde{\tau}_h))(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0))\right) \\
&\leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - c_k(\tilde{\tau}_k)\left((\prod_{h=0}^{k-1} c_h(\tilde{\tau}_h))\Delta_{\mathcal{N}}(t_0)\right) \\
&\leq \left(1 - \prod_{h=0}^{k} c_h(\tilde{\tau}_h)\right) \Delta_{\mathcal{N}}(t_0),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la récurrence. Nous utilisons la proposition de récurrence avec $k = D - 1$ pour obtenir

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t_0 + \tilde{T}) \leq (1 - \tilde{c})\Delta_{\mathcal{N}}(t_0).$$

On obtient le résultat du théorème en répétant l'inégalité. □

6.2.4 Robustesse de la structure hiérarchique

Dans un premier temps nous démontrons que si les distances relatives subissent une perturbation inférieure à ρ alors le sous graphe H_ρ défini dans la section 6.2.1 est préservé. Nous reprenons les notations de la section 6.2.1.

Lemme 68 (Préservation de sous graphe)**.** *Nous considérons un vecteur de position de référence $x^0 \in \mathbb{R}^{n\times d}$ ainsi qu'un vecteur de positions perturbées y vérifiant pour tout $i, j \in \mathcal{N}$*

$$\|y_j - y_i - (x_j^0 - x_i^0)\| \leq \rho.$$

Alors, le graphe H_ρ défini par l'équation (6.5) est préservé dans le graphe d'interaction topologique G_y.

La contrainte donnée sur les positions perturbées exige que la modification des distances relatives entre agents soit inférieure à ρ.

Démonstration. Soient i et j dans $\mathcal{N}$ tels que l'arête (j, i) soit présente dans le graphe H_ρ (*i.e.* $\tilde{a}_{ij} = 1$). Notons V_{x^0} l'ensemble $\{k \in \mathcal{N} \mid \|x_i^0 - x_j^0\| > \|x_i^0 - x_k^0\| - 2\rho\}$ et V_y l'ensemble $\{k \in \mathcal{N} \| \|y_i - y_j\| > \|y_i - y_k\|\}$. Nous montrons que l'arête (j, i) est aussi présente dans G_y, ce qui est vrai si $|V_y| < m$. Puisque $\tilde{a}_{ij} = 1$, $|V_{x^0}| < m$. Il est donc suffisant de montrer $V_y \subseteq V_{x^0}$. Soit k dans V_y. En utilisant l'hypothèse du lemme,

$$\begin{aligned}
\|x_j^0 - x_i^0\| &\geq \|x_j^0 - x_i^0\| + \|y_j - y_i - (x_j^0 - x_i^0)\| - \rho \\
&\geq \|y_j - y_i\| - \rho,
\end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité, nous avons utilisé l'inégalité triangulaire. Avec les mêmes arguments,

$$\begin{aligned}
\|x_k^0 - x_i^0\| &\leq \|x_k^0 - x_i^0\| - \|y_k - y_i - (x_k^0 - x_i^0)\| + \rho \\
&\leq \|y_k - y_i\| + \rho.
\end{aligned}$$

En combinant les deux inégalités précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|x_j^0 - x_i^0\| - \|x_k^0 - x_i^0\| &\geq \|y_j - y_i\| - \|y_k - y_i\| - 2\rho \\
&> -2\rho,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $k \in V_y$ pour la dernière inégalité. Ceci montre que $k \in V_{x^0}$. □

Le théorème 64 fait l'hypothèse que ρ, la perturbation maximale autorisée, est choisie de sorte que H_ρ possède un sous arbre couvrant. Nous exhibons un ensemble de valeurs de ρ pour lesquelles cette hypothèse est vérifiée. La plus grande de ces valeurs est notée $\rho_{G_{x^0}}$ et est appelée la *robustesse du graphe* G_{x^0}. Le graphe associé $H_{\rho_{G_{x^0}}}$ est appelé sous graphe cœur de G_{x^0} et est noté $\mathcal{K}(G_{x^0})$.

Pour $(j,i) \in G_{x^0}$, la robustesse de l'interaction de j vers i est définie par

$$s(j,i) = \frac{1}{2}\left(\|x_i^0 - x_{p(i)}^0\| - \|x_i^0 - x_j^0\|\right),$$

où $p(i)$ est l'indice du m-ème plus proche agent de i (par conséquent l'agent $p(i)$ n'influe pas sur i dans le graphe d'interaction initial). La robustesse $s(j,i)$ est choisie de sorte que si les distances initiales entre agents ne sont pas perturbées de plus de $s(j,i)$, l'agent j continue à influencer l'agent i. Considérons un sous arbre couvrant contenu dans G_{x^0}. Notons r sa racine. Soient $i \in \mathcal{N} \setminus \{r\}$ et $(i_0, i_2, \ldots, i_q)$ un chemin de r à i dans G_{x^0}. Nous définissons la robustesse de ce chemin par

$$s(i_0, i_2, \ldots, i_q) = \min_{0 \le k \le q-1} s(i_k, i_{k+1}).$$

Comme précédemment, si la perturbation sur les distances initiales est inférieure à la robustesse $s(i_0, i_2, \ldots, i_q)$ alors $(i_0, i_2, \ldots, i_q)$, chemin d'influence de la racine r à i, est préservé dans le graphe d'interaction. Pour préserver un sous arbre couvrant de racine r, il est nécessaire qu'au moins un chemin soit préservé de r à i pour tout $i \in \mathcal{N} \setminus \{r\}$. Nous définissons la robustesse entre r et i par

$$\rho_{ri} = \max_{(i_0, i_2, \ldots, i_q) \in Chemins_{G_{x^0}}(r,i)} s(i_0, i_2, \ldots, i_q),$$

et la robustesse de r en tant que racine d'un sous arbre couvrant de G_{x^0} par

$$\rho_r = \min_{i \in \mathcal{N} \setminus \{r\}} \rho_{ri}.$$

Nous pouvons enfin définir la robustesse de G_{x^0} pour la conservation d'au moins un sous arbre couvrant par

$$\rho_{G_{x^0}} = \max_{r \in \mathcal{N}} \rho_r.$$

Nous notons alors $\mathcal{K}(G_{x^0}) = H_{\rho_{G_{x^0}}}$ le sous graphe cœur de G_{x^0}. Ces définitions nous permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 69. *Supposons que le graphe initial G_{x^0} possède un sous arbre couvrant. Alors, pour $\rho \in [0, \rho_{G_{x^0}}]$, H_ρ possède un sous arbre couvrant tandis que pour $\rho > \rho_{G_{x^0}}$, H_ρ est dépourvu de sous arbre couvrant.*

Démonstration. Nous commençons par prouver la première partie de la proposition. Soit $\rho \in [0, \rho_{G_{x^0}}]$. Notons $r \in \mathcal{N}$ tel que

$$\rho_{G_{x^0}} = \rho_r.$$

Nous allons montrer que H_ρ contient un sous graphe de racine r. Soit $i \in \mathcal{N} \setminus \{r\}$. Notons $(i_0, i_2, \ldots, i_q)$ chemin de r à i dans G_{x^0} tel que

$$s(i_0, i_2, \ldots, i_q) = \rho_{ri}.$$

Soit $k \in \{0, \ldots, q-1\}$. Nous avons donc

$$s(i_k, i_{k+1}) \geq s(i_0, i_2, \ldots, i_q) = \rho_{ri} \geq \rho_r = \rho_{G_{x^0}} \geq \rho.$$

Nous allons montrer que l'arc (i_k, i_{k+1}) est contenu dans H_ρ. Pour alléger les notations, notons $h = i_k$ et $l = i_{k+1}$. Ainsi,

$$\|x_l^0 - x_{p(l)}^0\| - \|x_l^0 - x_h^0\| \geq 2\rho.$$

Notons $V = \{u \in \mathcal{N} \setminus \{h\} \mid \|x_l^0 - x_h^0\| > \|x_l^0 - x_u^0\| - 2\rho\}$. Soit u dans V. Nous allons montrer que u est un voisin entrant de l dans G_{x^0}

$$\begin{aligned} \|x_l^0 - x_u^0\| &< 2\rho + \|x_l^0 - x_h^0\| \\ &< (\|x_l^0 - x_{p(l)}^0\| - \|x_l^0 - x_h^0\|) + \|x_l^0 - x_h^0\| \\ &< \|x_l^0 - x_{p(l)}^0\|. \end{aligned}$$

Comme annoncé, d'après la définition de p_l, u fait partie des m plus proches voisins de l dans G_{x^0} et par définition $u \neq h$, donc u peut prendre au plus $m-1$ valeurs : $|V| < m$. Ceci montre que $(h, l) \in H_\rho$. On en déduit que pour tout $i \in \mathcal{N} \setminus \{r\}$, il existe un chemin de r à i dans H_ρ. Ainsi, H_ρ possède un sous arbre couvrant de racine r.

En ce qui concerne la deuxième partie du résultat, supposons $\rho > \rho_{G_{x^0}}$. Alors, pour tout $r \in \mathcal{N}$, $\rho_r < \rho$. Il est possible de répéter le même type de raisonnement que pour la première partie de la preuve pour obtenir que pour tout $i \in \mathcal{N} \setminus \{r\}$, et tout chemin $(i_0, i_2, \ldots, i_q)$ de r à i dans G_{x_0}, il existe $k \in \{0, \ldots, q-1\}$ tel que (i_k, i_{k+1}) ne soit pas dans H_ρ. Ceci est dû au fait que $p_{i_{k+1}}$, le m-ème plus proches agents de i_{k+1} dans G_{x^0} est dans l'ensemble des voisins de i_{k+1} dans H_ρ. □

6.2.5 Preuves

Dans cette section nous démontrons le lemme 65 ainsi que le théorème 64. Pour prouver le lemme 65, l'objectif est de démontrer que l'influence de $\mathcal{U}_k$ sur $\mathcal{U}_{k+1}$ sur l'intervalle de temps $[t, t+\tau]$ entraîne la diminution du diamètre de $\mathcal{U}_{k+1}$ comme suit (équation 6.8) :

$$\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t+\tau) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - c_k(\tau)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t)).$$

Pour parvenir à ce résultat, nous adoptons le raisonnement suivant :

(i) (lemme 71) L'évolution de $\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}$ au temps $s \in [t, t+\tau]$ (*i.e.* $\dot{\Delta}_{\mathcal{U}_{k+1}}(s)$) est due à deux termes :

- $\alpha_k(\Delta_{\mathcal{U}_k}(s) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s))$: $\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}$ diminue grâce aux agents de $\mathcal{U}_k$, et
- $(m - \alpha_k)(\Delta_{\mathcal{N}(t_0)}(s) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s))$: $\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}$ augmente à cause des agents n'étant pas dans $\mathcal{U}_k$.

(ii) Il serait possible d'intégrer le résultat du lemme 71. Cependant, la valeur $\Delta_{\mathcal{U}_k}(s)$ dans le premier terme est manquante. Pour l'obtenir, nous procédons ainsi : puisque l'augmentation de $\Delta_{\mathcal{U}_k}$ n'est due qu'aux influence des agents hors de $\mathcal{U}_k$, on obtient

$$\dot{\Delta}_{\mathcal{U}_k}(s) \leq (m - \alpha_k)(\Delta_{\mathcal{N}(t_0)}(s) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(s)).$$

Une intégration permet alors d'obtenir la valeur manquante $\Delta_{\mathcal{U}_k}(s)$ en fonction de $\Delta_{\mathcal{U}_k}(t)$ (lemme 70).

(iii) L'injection du résultat du lemme 70 dans celui du lemme 71, suivi d'une intégration entraîne finalement le lemme 65, comme souhaité.

Lemme 70. *Soit $k \in \{1, \ldots, D\}$. Soit $t_0 \geq 0$ un temps initial. Soient $t \geq t_0$ et $s > t$ des temps futurs. Alors, nous avons,*

$$\Delta_{\mathcal{U}_k}(s) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - e^{-(m-\alpha_k)(s-t)}(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t)). \tag{6.10}$$

Pour la deuxième étape de la preuve du lemme 65, nous utilisons le lemme 70 dans le but d'estimer le taux de contraction de $\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}$.

Lemme 71. *Soient $t_0 \geq 0$ un temps initial et $s > t_0$ un temps futur. Alors nous avons*

$$\begin{array}{rrcl} \dot{\Delta}_{\mathcal{U}_1}(s) & \leq & -\Delta_{\mathcal{U}_1}(s) & + \; m(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_1}(s)) \\ \textit{et pour } k \in \{1, \ldots, D-1\}, \; \dot{\Delta}_{\mathcal{U}_{k+1}}(s) & \leq & \underbrace{\alpha_k(\Delta_{\mathcal{U}_k}(s) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s))}_{\substack{\textit{décroissance de } \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}} \\ \textit{due à } \mathcal{U}_k}} & + \; \underbrace{(m - \alpha_k)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s))}_{\substack{\textit{croissance de } \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}} \\ \textit{due au reste du groupe}}}. \end{array} \tag{6.11}$$

Nous joignons ce dernier résultat à la borne sur $\Delta_{\mathcal{U}_k}(s)$ pour $s > t$ donnée par le lemme 70 pour obtenir une borne sur $\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t+\tau)$. Nous donnons les preuves des lemmes 70, 71 et 65 dans cet ordre.

Dans les preuves, nous ferons appel au lemme suivant :

Lemme 72. *Soient x, y et z dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\|x-y\| \geq \|x-z\|$. Alors*

$$\langle y-x|z-y\rangle \leq 0.$$

Démonstration. $\langle y-x|z-y\rangle \leq \langle y-x|z-x+x-y\rangle \leq \langle y-x|z-x\rangle - \|x-y\|^2 \leq \|y-x\|(\|z-x\|-\|x-y\|) \leq 0$. □

Preuve du lemme 70. Soient t_0, t et s des temps successifs tels que $t_0 < t < s$. Soit k dans $\{1,\dots,D-1\}$. Soient i et j deux indices de $\mathcal{U}_k$ maximisant la distance entre les vitesses au temps s (*i.e.* tels que $\|v_i(s)-v_j(s)\| = \Delta_{\mathcal{U}_k}(s)$). Nous majorons la dérivée de $\|v_i - v_j\|$ en utilisant

$$\dot{\overbrace{\|v_i - v_j\|}} = \frac{\langle \dot{v}_i - \dot{v}_j | v_i - v_j\rangle}{\|v_i - v_j\|}. \tag{6.12}$$

Nous pouvons réécrire le numérateur à droite de l'égalité de la manière suivante :

$$\langle \dot{v}_i - \dot{v}_j | v_i - v_j\rangle = \sum_{h\in\mathcal{N}} a_{ih}\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle + \sum_{l\in\mathcal{N}} a_{jl}\langle v_l - v_j | v_j - v_i\rangle. \tag{6.13}$$

Dans les deux sommes de cette équation, i et j jouent des rôles symétriques. Nous commençons par étudier la première somme ; le résultat sur la seconde sera obtenu en suivant un raisonnement analogue. Nous pouvons découper la première somme en deux parties : l'influence provenant des agents dans $\mathcal{U}_k$ et celle provenant des agents en dehors, ce qui donne

$$\sum_{h\in\mathcal{N}} a_{ih}\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle = \sum_{h\in\mathcal{U}_k} a_{ih}\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle + \sum_{h\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k} a_{ih}\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle.$$

En appliquant le lemme 72 avec $(x,y,z) := (v_j, v_i, v_h)$, nous obtenons que la première somme de l'égalité précédente est positive. Ceci reflète le fait que les agents de $\mathcal{U}_k$ ne participent pas de manière positive à l'augmentation du diamètre $\Delta_{\mathcal{U}_k}$. Notons h_{max} dans $\mathcal{N}$ tel que

$$\langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j\rangle = \max_{h\in\mathcal{N}} \langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle.$$

Nous obtenons alors

$$\sum_{h\in\mathcal{N}} a_{ih}\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle \leq \sum_{h\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k} a_{ih}\langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j\rangle.$$

Par définition de h_{max}, nous avons $\langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j \rangle \geq 0$.

Donc, d'après la proposition 63,

$$\sum_{h \in \mathcal{N}} a_{ih} \langle v_h - v_i | v_i - v_j \rangle \leq (m - \alpha_k) \langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j \rangle. \tag{6.14}$$

Par un raisonnement analogue, nous avons

$$\sum_{l \in \mathcal{N}} a_{jl} \langle v_l - v_j | v_j - v_i \rangle \leq (m - \alpha_k) \langle v_{l_{max}} - v_j | v_j - v_i \rangle, \tag{6.15}$$

où $l_{max} \in \mathcal{N}$ est défini de sorte que

$$\langle v_{l_{max}} - v_j | v_j - v_i \rangle = \max_{l \in \mathcal{N}} \langle v_l - v_j | v_j - v_i \rangle.$$

Les équations (6.14), (6.15) et (6.13) donnent

$$\begin{aligned}
\langle \dot{v}_i - \dot{v}_j | v_i - v_j \rangle &\leq (m - \alpha_k) \Big(\langle v_{h_{max}} - v_{l_{max}} | v_i - v_j \rangle + \langle v_i - v_j | v_j - v_i \rangle \Big) \\
&\leq (m - \alpha_k) \Big(\langle v_{h_{max}} - v_{l_{max}} | v_i - v_j \rangle - \|v_i - v_j\|^2 \Big) \\
&\leq (m - \alpha_k) \Big(\|v_{h_{max}} - v_{l_{max}}\| \cdot \|v_i - v_j\| - \|v_i - v_j\|^2 \Big) \\
&\leq (m - \alpha_k) \Big(\Delta_{\mathcal{N}} \|v_i - v_j\| - \|v_i - v_j\|^2 \Big).
\end{aligned}$$

Ce résultat associé avec l'équation (6.12) et $\Delta_{\mathcal{N}}(s) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0)$ implique que

$$\dot{\Delta}_{\mathcal{U}_k}(s) \leq (m - \alpha_k)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(s)).$$

Après intégration sur l'intervalle $[t, s]$, nous obtenons

$$\Delta_{\mathcal{U}_k}(s) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - e^{-(m-\alpha_k)(s-t)} (\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t)). \tag{6.16}$$

□

Preuve du lemme 71. La preuve de ce lemme procède de manière analogue à la preuve du lemme 70. Soient t_0 et s tels que $0 \leq t_0 \leq s$. Soit k dans $\{0, \ldots, D-1\}$. Soient $i, j \in \mathcal{U}_{k+1}(s)$ distincts tels que $\|v_i(s) - v_j(s)\| = \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s)$.

De manière similaire à la preuve précédente, nous allons majorer

$$\langle \dot{v}_i - \dot{v}_j | v_i - v_j \rangle = I_{\mathcal{U}_k} + I_{\mathcal{N} \setminus \mathcal{U}_k},$$

avec les notations

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{U}_k} &= \sum_{h\in\mathcal{U}_k} a_{ih}\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle + \sum_{l\in\mathcal{U}_k} a_{jl}\langle v_l - v_j | v_j - v_i\rangle, \\ I_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k} &= \sum_{h\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k} a_{ih}\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle + \sum_{l\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k} a_{jl}\langle v_l - v_j | v_j - v_i\rangle, \end{aligned}$$

où $I_{\mathcal{U}_k}$ représente l'influence des agents de $\mathcal{U}_k$ sur l'évolution de $\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}$ et $I_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k}$ celle des agents hors de $\mathcal{U}_k$. Nous commençons par majorer $I_{\mathcal{U}_k}$.

Majoration de $I_{\mathcal{U}_k}$

Nous choisissons des indices h_{max} et l_{max} dans $\mathcal{U}_k$ vérifiant

$$\begin{aligned} \langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j\rangle &= \max_{h\in\mathcal{U}_k}\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle \\ \text{et } \langle v_{l_{max}} - v_j | v_j - v_i\rangle &= \max_{l\in\mathcal{U}_k}\langle v_l - v_j | v_j - v_i\rangle. \end{aligned}$$

Si $k = 0$, alors $\mathcal{U}_k = \{r\}$ et $h_{max} = l_{max} = r$. Nous étudions deux cas distincts.

Cas où $i = r$ ou $j = r$.

Par symétrie des rôles de i et j, nous pouvons supposer sans perte de généralité $i = r$. Alors, puisque $i \neq j$, $j \neq r$ et $j \in \mathcal{N}_r^+$, donc $a_{jr} = 1$. Ceci donne

$$I_{\mathcal{U}_0} \leq a_{jr}\langle v_r - v_j | v_j - v_r\rangle \leq -\|v_j - v_r\|^2 = -\|v_j - v_i\|^2. \tag{6.17}$$

Cas où $i \neq r$ et $j \neq r$.

Dans ce cas, $a_{jr} = 1$ et $a_{ir} = 1$ et alors

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{U}_0} &\leq a_{ir}\langle v_r - v_i | v_i - v_j\rangle + a_{ir}\langle v_r - v_j | v_j - v_i\rangle \\ &\leq \langle v_r - v_i | v_i - v_j\rangle + \langle v_r - v_j | v_j - v_i\rangle = \langle v_j - v_i | v_i - v_j\rangle \\ &\leq -\|v_j - v_j\|^2. \end{aligned}$$

Nous avons dans les deux cas obtenus le même résultat.

Si $k \geq 1$, nous pouvons faire appel au lemme 72 et au fait que $\|v_i - v_j\| = \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}$ pour montrer que $\langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle \leq 0$ et $\langle v_l - v_j | v_j - v_i\rangle \leq 0$ pour tout h, l dans $\mathcal{U}_k$. Ainsi,

$$I_{\mathcal{U}_k} \leq \alpha_k(\langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j\rangle + \langle v_{l_{max}} - v_j | v_j - v_i\rangle).$$

L'inégalité précédente peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{U}_k} &\leq \alpha_k(\langle v_{h_{max}} - v_{l_{max}} | v_i - v_j\rangle + \langle v_i - v_j | v_j - v_i\rangle) \\ &\leq \alpha_k(\Delta_{\mathcal{U}_k}\|v_i - v_j\| - \|v_i - v_j\|^2). \end{aligned}$$

Nous majorons maintenant $I_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k}$.

Majoration de $I_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k}$

Pour cette partie de la preuve, il est possible de traiter simultanément les cas où $k = 0$ et $k \geq 1$ en posant $\alpha_0 = 0$. Choisissons h_{max} et l_{max} dans $\mathcal{N}$ satisfaisant

$$\begin{aligned}\langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j\rangle &= \max_{h\in\mathcal{N}} \langle v_h - v_i | v_i - v_j\rangle \\ \langle v_{l_{max}} - v_j | v_j - v_i\rangle &= \max_{l\in\mathcal{N}} \langle v_l - v_j | v_j - v_i\rangle.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{N}\setminus\mathcal{U}_k} &\leq (m-\alpha_k)(\langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j\rangle + \langle v_{l_{max}} - v_j | v_j - v_i\rangle) \\ &\leq (m-\alpha_k)(\langle v_{h_{max}} - v_{l_{max}} | v_i - v_j\rangle + \langle v_i - v_j | v_j - v_i\rangle) \\ &\leq (m-\alpha_k)(\Delta_{\mathcal{N}}\|v_i - v_j\| - \|v_i - v_j\|^2),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé $\langle v_{h_{max}} - v_i | v_i - v_j\rangle \leq 0$ et $\langle v_{l_{max}} - v_j | v_j - v_i\rangle \leq 0$ puisqu'il est toujours possible de choisir $h_{max} := i$ et $l_{max} := j$.

Ainsi, en associant le dernier résultat avec la borne sur $I_{\mathcal{U}_k}$ exhibée plus haut, nous obtenons pour $k = 0$

$$\overbrace{\|v_i(s) - v_j(s)\|}^{\cdot} \leq -\|v_j(s) - v_i(s)\| + m(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \|v_i(s) - v_j(s)\|),$$

et pour $k \geq 1$

$$\overbrace{\|v_i(s) - v_j(s)\|}^{\cdot} \leq \alpha_k(\Delta_{\mathcal{U}_k}(s) - \|v_j(s) - v_i(s)\|) + (m-\alpha_k)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \|v_i(s) - v_j(s)\|).$$

D'après la définition de i et j, ceci se réécrit

$$\begin{array}{rcl} \dot{\Delta}_{\mathcal{U}_1}(s) & \leq & -\Delta_{\mathcal{U}_1}(s) \quad + \quad m(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_1}(s)) \\ \text{et pour } k \geq 1,\ \dot{\Delta}_{\mathcal{U}_{k+1}}(s) & \leq & \underbrace{\alpha_k(\Delta_{\mathcal{U}_k}(s) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s))}_{\substack{\text{décroissance de } \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}} \\ \text{due à } \mathcal{U}_k}} \quad + \quad \underbrace{(m-\alpha_k)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s))}_{\substack{\text{croissance de } \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}} \\ \text{due au reste du groupe}}}. \end{array}$$

□

Preuve du lemme 65. Nous traitons le cas où $k = 0$. Le lemme 71 donne

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_{\mathcal{U}_1}(s) &\leq -\Delta_{\mathcal{U}_1}(s) + m(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_1}(s)) \\ &\leq (m+1)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_1}(s)) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0).\end{aligned}$$

Après intégration, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{U}_1}(t+\tau) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) &\leq e^{-(m+1)\tau}\left(\Delta_{\mathcal{U}_1}(t) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \int_t^{t+\tau} e^{(m+1)(s-t)}\Delta_{\mathcal{N}}(t_0)ds\right) \\
&\leq e^{-(m+1)\tau}\left(\Delta_{\mathcal{U}_1}(t) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \frac{1}{m+1}(e^{(m+1)\tau}-1)\Delta_{\mathcal{N}}(t_0)\right) \\
&\leq e^{-(m+1)\tau}\left(\Delta_{\mathcal{U}_1}(t) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \frac{1}{m+1}(e^{(m+1)\tau}-1)\Delta_{\mathcal{N}}(t_0)\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta_{\mathcal{U}_1}(t) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0)$, nous avons

$$\Delta_{\mathcal{U}_1}(t+\tau) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \frac{1}{m+1}(1-e^{-(m+1)\tau})\Delta_{\mathcal{N}}(t_0).$$

En utilisant la notation $c_0(\tau) = \frac{1}{m+1}(1-e^{-(m+1)\tau})$, nous obtenons le résultat attendu.

Pour $k \geq 1$, nous remplaçons $\Delta_{\mathcal{U}_k}(s)$ dans l'équation (6.11) du lemme 71 par sa majoration donnée par l'équation (6.10) du lemme 70 pour obtenir

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_{\mathcal{U}_{k+1}}(s) &\leq \alpha_k\left(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - e^{-(m-\alpha_k)(s-t)}\left(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t)\right) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s)\right) + (m-\alpha_k)\left(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s)\right) \\
&\leq m\left(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s)\right) - \alpha_k e^{-(m-\alpha_k)(s-t)}\left(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t)\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{d}{ds}\left(\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0)\right) \leq -m\left(\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(s) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0)\right) - \alpha_k e^{-(m-\alpha_k)(s-t)}\left(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t)\right).$$

Après intégration, nous avons

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t+\tau) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) \\
&\leq e^{-m\tau}\left(\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \int_t^{t+\tau} e^{m(s-t)}\alpha_k e^{-(m-\alpha_k)(s-t)}(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t))ds\right) \\
&\leq e^{-m\tau}\left(\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \alpha_k(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t))\int_t^{t+\tau} e^{\alpha_k(s-t)}ds\right) \\
&\leq e^{-m\tau}\left(\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - (\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t))(e^{\alpha_k\tau}-1)\right) \\
&\leq e^{-m\tau}(\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t) - \Delta_{\mathcal{N}}(t_0)) - (\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t))(e^{-(m-\alpha_k)\tau} - e^{-m\tau}).
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0)$, nous pouvons plus simplement écrire

$$\Delta_{\mathcal{U}_{k+1}}(t+\tau) \leq \Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - c_k(\tau)(\Delta_{\mathcal{N}}(t_0) - \Delta_{\mathcal{U}_k}(t)),$$

avec $c_k(\tau) = e^{-(m-\alpha_k)\tau}(1-e^{-\alpha_k\tau}) \geq 0$. □

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème principal.

Preuve du théorème 64. Nous démontrons ce résultat par contradiction. Supposons qu'il existe un temps $t > 0$ pour lequel $G(t)$ ne vérifie pas l'hypothèse 62 (*i.e.* il existe k dans $\{1, \ldots, D-1\}$, α_k n'est pas une borne valide dans $G(t)$). Notons t^* la borne inférieure sur de tels temps. Si $t^* > 0$, nous savons d'après le théorème 66 que pour tout t dans $[0, t^*[$

$$\Delta_{\mathcal{N}}(t) \leq (1-\tilde{c})^h \Delta_{\mathcal{N}}(0),$$

où h est tel que $h \leq t/\tilde{T} < h+1$. Soient j et i dans $\mathcal{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\|(x_j(t^*) - x_i(t^*)) - (x_j(0) - x_i(0))\| &\leq \|\int_0^{t^*} (v_j(s) - v_i(s))ds\| \\
&\leq \int_0^{t^*} \|v_j(s) - v_i(s)\|ds \\
&\leq \int_0^{t^*} \Delta_{\mathcal{N}}(s)ds \\
&\leq \sum_{h=0}^{k} \int_{h\tilde{T}}^{(h+1)\tilde{T}} \Delta_{\mathcal{N}}(s)ds
\end{aligned}$$

où k est tel que $k \leq t^*/\tilde{T} < k+1$. Par ce calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
\|(x_j(t^*) - x_i(t^*)) - (x_j(0) - x_i(0))\| &\leq \tilde{T} \sum_{h=0}^{k} (1-\tilde{c})^h \Delta_{\mathcal{N}}(0)ds \\
&< \tilde{T} \sum_{h=0}^{+\infty} (1-\tilde{c})^h \Delta_{\mathcal{N}}(0) \\
&< \frac{\tilde{T}}{\tilde{c}} \Delta_{\mathcal{N}}(0).
\end{aligned}$$

En utilisant la borne donnée sur $\Delta_{\mathcal{N}}(0)$ dans l'hypothèse du théorème, nous avons

$$\|(x_j(t^*) - x_i(t^*)) - (x_j(0) - x_i(0))\| < \rho.$$

Par continuité de la trajectoire x, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [t^*, t^* + \varepsilon]$

$$\|(x_j(t) - x_i(t)) - (x_j(0) - x_i(0))\| \leq \rho.$$

Si $t^* = 0$, la continuité de x nous donne la même propriété. D'après le lemme 68, nous avons pour tout $t \in [0, t^* + \varepsilon]$, $H_\rho \subseteq G(t)$ et donc d'après la proposition 63, $G(t)$ vérifie l'hypothèse 62 (les α_k restent des bornes valides pour $G(t)$). Ceci mène à une contradiction avec la définition de t^*. Ainsi, $G(t)$ vérifie l'hypothèse 62 pour tout $t \geq 0$. Nous pouvons alors reprendre le raisonnement de la preuve pour en déduire que $H_\rho \subseteq G(t)$ pour tout $t \geq 0$. Par conséquent, le théorème 66 démontre que le diamètre $\Delta_{\mathcal{N}}(t)$ converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. L'alignement en vitesse est asymptotiquement atteint. □

6.3 Etude numérique

6.3.1 Optimisation de la borne

Dans cette section, nous explicitons une méthode pour maximiser la borne $\frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}\rho$ donnée par le théorème 64.

Premièrement, nous supposons que la perturbation maximale ρ et la racine r sont fixées. Les ensembles $(\mathcal{U}_k)$ et $(\mathcal{S}_k)$ pour $k \in \{0, \ldots, D\}$ et valeurs (α_k) pour $k \in \{1, \ldots, D-1\}$ sont donc déterminés. Nous explicitons la famille $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_0, \ldots, \tilde{\tau}_{D-1})$ pour laquelle le quotient $\frac{c}{T}$ est maximal. Nous discuterons ensuite de la manière de choisir ρ et r.

Proposition 73. *La valeur $\tilde{T}$ est la solution de l'équation en T*

$$e^T = ((m+1)T+1)^{\frac{1}{m+1}} \prod_{k=1}^{D-1} \left(\frac{mT+1}{(m-\alpha_k)T+1} \right)^{\frac{1}{\alpha_k}}. \tag{6.18}$$

De plus, la famille optimale $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_0, \ldots, \tilde{\tau}_{D-1})$ est définie par

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{1}{m+1} \ln\Big((m+1)\tilde{T}+1\Big),$$

et pour $k \in \{1, \ldots, D-1\}$,

$$\tilde{\tau}_k = \frac{1}{\alpha_k} \ln\left(\frac{m\tilde{T}+1}{(m-\alpha_k)\tilde{T}+1} \right).$$

Démonstration. Soit $k \in \{0, \ldots, D-1\}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{c}{T}}{\partial \tau_k} &= \frac{\frac{\partial c}{\partial \tau_k} \cdot T - c}{T^2} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial c_k}{\partial \tau_k}(\tau_k)T - c_k(\tau_k)\right) \prod_{h=0, h\neq k}^{D-1} c_h(\tau_h)}{T^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque pour tout $h \in \{0, \ldots, D-1\}$, $\tau_h > 0$, nous avons

$$\frac{\partial \frac{c}{T}}{\partial \tau_k} = 0 \ \ \underline{ssi} \ \ \frac{\partial c_k}{\partial \tau_k}(\tau_k)T - c_k(\tau_k) = 0.$$

Le calcul donne, pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_k}{\partial \tau_k}(\tau_k) &= -me^{-m\tau_k}(e^{\alpha_k \tau_k} - 1) + \alpha_k e^{-m\tau_k} e^{\alpha_k \tau_k} \\ &= e^{-m\tau_k}(m - (m - \alpha_k)e^{\alpha_k \tau_k}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \frac{c}{T}}{\partial \tau_k} = 0 \ &\Leftrightarrow \ (m - (m - \alpha_k)e^{\alpha_k \tau_k})T = e^{\alpha_k \tau_k} - 1 \\ &\Leftrightarrow \ mT + 1 = e^{\alpha_k \tau_k}(1 + (m - \alpha_k)T) \\ &\Leftrightarrow \ \tau_k = \tfrac{1}{\alpha_k} \ln\left(\tfrac{mT+1}{(m-\alpha_k)T+1}\right). \end{aligned} \tag{6.19}$$

De manière similaire, pour $k = 0$,

$$\frac{\partial c_0}{\partial \tau_0}(\tau_0) = e^{-(m+1)\tau_0}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \frac{c}{T}}{\partial \tau_0} = 0 \ &\Leftrightarrow \ e^{-(m+1)\tau_0} T = \tfrac{1}{m+1}(1 - e^{-(m+1)\tau_0}) \\ &\Leftrightarrow \ e^{-(m+1)\tau_0}((m+1)T + 1) = 1 \\ &\Leftrightarrow \ \tau_0 = \tfrac{1}{m+1} \ln((m+1)T + 1). \end{aligned} \tag{6.20}$$

En utilisant la définition de T, pour $k \in \{0, \ldots, D-1\}$, $\frac{\partial \frac{c}{T}}{\partial \tau_k} = 0$ si et seulement si

$$T = \frac{1}{m+1} \ln((m+1)T + 1) + \sum_{k=1}^{D-1} \frac{1}{\alpha_k} \ln\left(\frac{mT+1}{(m-\alpha_k)T+1}\right), \tag{6.21}$$

d'une part, et d'autre part les τ_k sont définies en fonction de T d'après les égalités que l'on vient d'obtenir (équations (6.19) et (6.20)). L'équation (6.21) peut se réécrire

$$e^T = ((m+1)T + 1)^{\frac{1}{m+1}} \prod_{k=1}^{D-1} \left(\frac{mT+1}{(m-\alpha_k)T+1}\right)^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

ce qui correspond à l'équation (6.18) annoncée dans la proposition. Il reste à montrer qu'elle possède une unique solution en dehors de la solution triviale 0. Nous montrons ceci pour l'équation équivalente (6.21). Le terme à droite de cette équation est nul pour $T = 0$. Dériver

deux fois ce terme prouve qu'il est concave en T. De plus, ce terme est équivalent en $T = 0$ à $(1 + \sum_{k=1}^{D-1} \frac{m}{\alpha_k})T$, dont la croissance est strictement plus rapide que la fonction identité. Enfin, ce terme est équivalent pour T tendant vers $+\infty$ à $\frac{\ln((m+1)T)}{m+1}$, dont la croissance est strictement plus lente que la fonction identité. Par conséquent, ce terme possède exactement deux intersections avec la première bissectrice dont une est obtenue pour $T = 0$ et l'autre pour $T > 0$. Il s'agit de $\tilde{T}$. Enfin, le quotient $\frac{c}{T}$ est positif, nul pour $\tau_k = 0$ et pour $\tau_k \to +\infty$. Par conséquent, l'optimum obtenu est nécessairement le maximum recherché. □

Supposons maintenant que seule la perturbation ρ est fixée. Une possibilité pour trouver la racine r donnant le quotient optimal $\frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}$ est de tester l'ensemble des nœuds du graphe. Alternativement, on peut s'attendre à ce qu'un arbre de profondeur minimale permette une propagation plus rapide et permette donc d'obtenir la valeur maximale $\frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}$.

Enfin, pour le choix de ρ, nous utilisons la même la logique que celle utilisée pour l'optimisation de la borne faite dans le chapitre 4 (section 4.4.3) : il suffit de tester un nombre fini de valeurs de ρ distinctes pour obtenir la meilleure. Ces valeurs correspondent aux différentes valeurs des $\left| \|x_i^0 - x_k^0\| - \|x_i^0 - x_j^0\| \right|$ pour $i, j, k \in \mathcal{N}$ distincts donnant un graphe H_ρ connexe.

6.3.2 Simulations

Dans cette section, nous effectuons des simulations pour illustrer le théorème 64.

Considérons un système de quatre agents se déplaçant suivant le système (6.1) où chaque agent est influencé par $m = 1$ agent. Initialement, concernant les positions, nous avons $x_1^0 = (0, 2.7)$, $x_2^0 = (0, 2.5)$, $x_3^0 = (0, 1.5)$, $x_4^0 = (0, 0)$ et concernant les vitesses, $w_1^0 = (0, 1)$, $w_2^0 = (0, 1)$, $w_3^0 = (0, -1)$ et $w_4^0 = (0, 1)$. Nous choisissons alors $v_i^0 = \alpha w_i^0 + (c, 0)$ où c est une constante n'influençant pas l'alignement en vitesse utilisée uniquement pour la visualisation et α est un paramètre utilisé pour modifier le diamètre initial des vitesses. Une telle configuration initiale donne la matrice d'adjacence du graphe d'interaction suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le sous graphe H_ρ contenant un sous arbre couvrant contenu dans le graphe d'interaction initial est le graphe initial lui même. La robustesse maximale ρ permettant de le conserver (*i.e.* telle que $H_\rho = G_{x^0}$) est la moitié de la distance entre les agents 2 et 3 : $\rho = 0.25$.

Concernant la structure hiérarchique liée au graphe G_{x^0}, nous avons $D = 2$ la profondeur de l'arbre, la racine $r = 2$, $\mathcal{S}_0 = \{2\}$, $\mathcal{S}_1 = \{1, 3\}$ et $\mathcal{S}_2 = \{4\}$. Ces ensembles sont associés au flux $\alpha_1 = 1$. Nous obtenons la borne

$$\frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}\rho = 0.0351.$$

La figure 6.2 présente les résultats de simulations pour différentes valeurs du diamètre en vitesse initial (modifié à l'aide du paramètre α). Lorsque le diamètre initial est égal à la borne $\frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}\rho$, le graphe d'interaction préserve le sous arbre et ici G_{x^0} au cours du temps, comme garanti par le théorème 64. En revanche, lorsque le diamètre initial des vitesses est trop grand (*e.g.* $\Delta_{\mathcal{N}}(0) = 13\frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}\rho$), l'agent 3 se rapproche de l'agent 4 de sorte que la distance entre 3 et 4 devient inférieure à celle entre 3 et 2. Par conséquent, le graphe d'interaction se déconnecte et l'alignement en vitesse ne peut être atteint. D'autre part, notons que pour $\Delta_{\mathcal{N}}(0) = 10\frac{\tilde{c}}{\tilde{T}}\rho$, instance où le théorème 64 ne permet pas de conclure, le groupe converge vers l'alignement en vitesse. Ceci illustre le fait que le théorème 64 propose uniquement une condition suffisante mais non nécessaire.

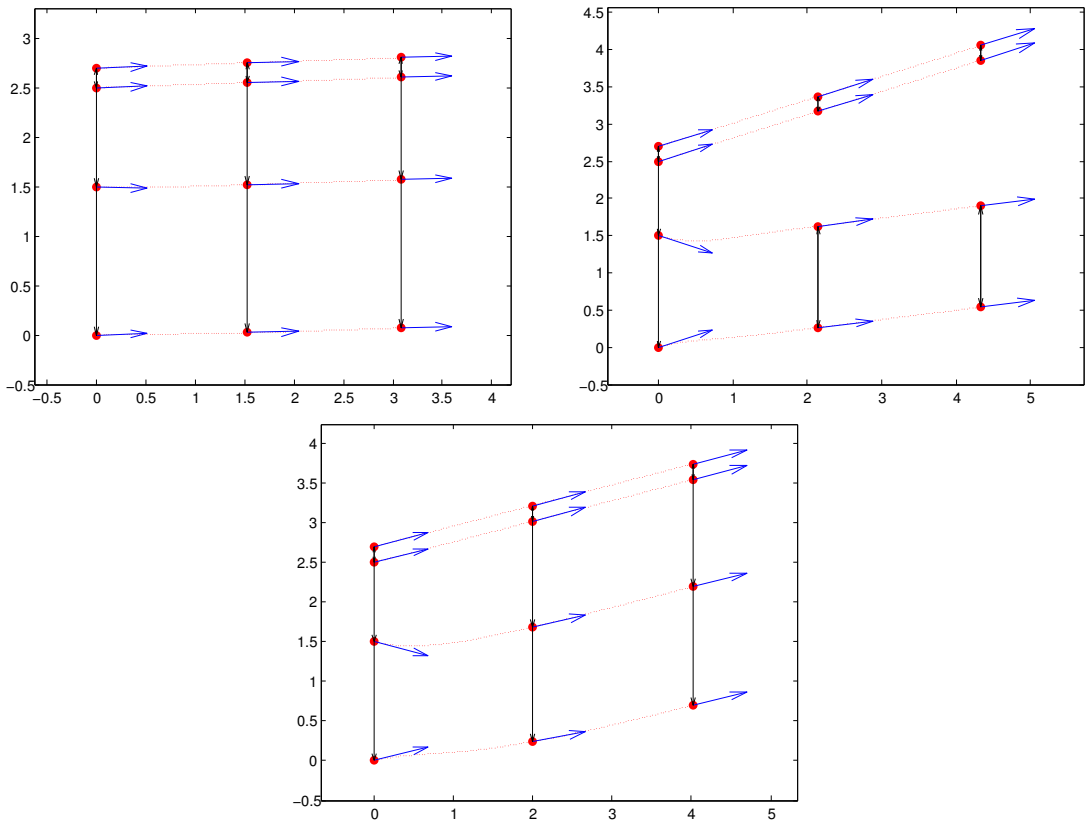


FIGURE 6.2: La partie supérieure gauche de la figure présente une instantiation de la trajectoire lorsque $\Delta_{\mathcal{N}}(0) = \frac{\tilde{c}}{\bar{T}}\rho$. La partie supérieure droite est une instanciation pour $\Delta_{\mathcal{N}}(0) = 13\frac{\tilde{c}}{\bar{T}}\rho$ et la partie inférieure pour $\Delta_{\mathcal{N}}(0) = 10\frac{\tilde{c}}{\bar{T}}\rho$. La figure montre les trajectoires des 4 agents ainsi que leurs positions, vitesses et interactions pour 3 temps donnés. Les points rouges représentent les positions des agents. Les flèches bleues représentent les vitesses des agents. Les flèches noires entre les points représentent les interactions.

Chapitre 7

Discussions

7.1 Contributions

Dans cette partie, nous avons établi un état de l'art des différents modèles de flocking et avons décrit les analyses les accompagnant. Il est apparu que les résultats de la littérature présentent souvent des hypothèses peu réalistes autorisant des interactions à longue portée, *i.e.* entre agents indéfiniment éloignés. Dans le cas des modèles proscrivant les interactions à longue portée, les résultats s'appuient sur des hypothèses fortes et difficiles à vérifier, telle que la préservation de la connexité du graphe d'interaction au cours du temps. Il existe de rares conditions portant sur les positions et vitesses initiales garantissant le flocking. Cependant, ces conditions n'autorisent pas la déconnexion d'arêtes initialement présentes dans le graphe d'interaction. Enfin, l'ensemble des résultats de la littérature font l'hypothèse que les poids d'interaction sont fortement symétriques : pour $i, j \in \mathcal{N}$, et $t \geq 0$, $a_{ij}(t) = a_{ji}(t)$.

Partant de ces constats, nous avons étudié plusieurs modèles de flocking pour améliorer les résultats existant. Nous avons fait le choix d'abandonner les termes de répulsion et d'attraction contenus dans le modèle original de flocking pour nous concentrer sur le terme d'alignement en vitesse. Ce cas particulier permet une analyse plus fine du comportement du système.

Dans les deux premiers chapitres de cette partie, nous avons étudié un modèle d'interactions à courte portée dites *métriques* utilisant les graphes de proximité. Dans le premier chapitre, le rayon d'interaction est supposé identiques pour tous les agents et constant dans le temps. Le deuxième chapitre étend les résultats du premier pour des rayons d'interaction distincts pour chaque agent et évoluant dans le temps de manière aléatoire : les rayons sont

modélisés par des processus stochastiques indépendants et identiquement distribués.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous explorons les conséquences d'interactions topologiques où chaque agent est influencé par un nombre constant de ses plus proches voisins, les interactions sont alors en général non symétriques.

Dans les trois cas, les conditions données portent uniquement sur les positions et vitesses initiales. De plus, ces conditions autorisent la déconnexion d'arêtes non nécessaires à la préservation de la connexité du graphe (en moyenne pour le cas stochastique).

L'approche que nous avons utilisée avec succès dans les trois cas étudiés suit le raisonnement suivant :

- **(Alignement en vitesse)** Si le graphe d'interaction préserve une propriété topologique donnée (connexité, connexité *en moyenne* ou présence d'un sous arbre couvrant, suivant le cas), alors le désaccord entre les vitesses diminue avec un taux exponentiel (que nous pouvons estimer). Dans ce cas, la modification des distances entre agents est finie et nous pouvons la quantifier.

- **(Robustesse des interactions)** Les interactions entre agents peuvent se maintenir malgré des modifications sur leurs distances. Nous avons défini la robustesse d'une interaction comme le maximum des perturbations toléré par cette interaction. Nous avons alors défini la *robustesse du graphe* comme la perturbation maximale tolérée pour maintenir la propriété de connexité nécessaire à l'alignement en vitesse.

La combinaison de ces deux assertions nous a donné une borne sur le désaccord en vitesse initial (en fonction des positions initiales) pour garantir l'alignement en vitesse.

7.2 Perspectives

Les perspectives d'amélioration et d'extension des présents travaux sont nombreuses.

Premièrement, nous envisageons plusieurs directions pour l'amélioration des conditions suffisantes pour le flocking. Une liste de sources de conservatisme a été établie dans le chapitre 4. D'après cette liste, une approche locale permet de mieux estimer les perturbations sur les distances entre agents. Suivant cette idée, nous pourrions étudier l'évolution du désaccord locale en vitesse $\frac{d}{dt}\left(\|\delta_i - \delta_j\|\right)$. Une autre idée à considérer est la suivante : une orientation des vitesses vers l'intérieur de l'enveloppe convexe des positions favorise la réduction des distances, tandis qu'une orientation vers l'extérieur entraîne augmentation des distances. Ce constat est masqué lorsqu'on étudie l'évolution de la norme du désaccord.

Une possibilité pour améliorer notre borne est alors de considérer l'évolution des vitesses par rapport aux positions : $\langle \frac{d}{dt}\left(\delta_i - \delta_j\right)|x_i - x_j\rangle$.

D'autre part, notre approche a été de préserver une sous structure constante connexe au cours du temps, dans le but d'assurer la convergence du désaccord en vitesse. Cependant, l'étude que nous avons mené dans la première partie nous encourage vers une nouvelle direction. Pour obtenir l'alignement en vitesse, il suffit que le graphe d'interaction vérifie l'hypothèse 12 de coupe balancée au cours du temps. Sous cette condition, notre résultat sur le consensus offre un taux de convergence vers cet alignement. Pour compléter cette approche, il reste à étudier la robustesse du graphe d'interaction en ce qui concerne la préservation de la coupe balancée au cours du temps. Pour cela, une possibilité est de déterminer une minoration de la connexité algébrique sous une hypothèse de coupe balancée.

Nos travaux offrent aussi des perspectives plus générales, à commencer par l'extension des résultats à différents modèles. Dans le cas des interactions métriques, il semble possible de généraliser nos résultats pour des poids d'interaction génériques de type

$$a_{ij}(t) = \phi(\|x_i(t) - x_j(t)\|),$$

où ϕ est une fonction décroissante, positive.

En outre, compléter notre modèle avec une force de rappel constitue une extension naturelle. Une autre possibilité est d'ajouter des perturbations extérieures modélisées sous la forme d'un bruit additif dont l'amplitude décroit exponentiellement avec le temps.

Une autre direction d'extension du modèle est de faire l'hypothèse de la présence d'un grand nombre d'agents, voire d'une infinité. La première possibilité orienterait la recherche vers une borne inférieure sur le nombre d'agents nécessaire pour obtenir une certaine probabilité de flocking. La seconde possibilité pourrait faire appel à des modèles d'équations aux dérivées partielles.

Il existe un domaine d'application des systèmes dynamiques multi-agents où les modèles utilisés se rapprochent de ceux étudiés dans cette partie : il s'agit de l'optimisation par essaims particulaires dont nous avons parlée dans l'introduction générale (section 1.2.2). L'optimisation par essaims particulaires est une méthode d'optimisation heuristique pour laquelle peu de preuves de convergence existent. L'adaptation de nos méthodes d'analyse de flocking à ce nouveau contexte semble être une direction prometteuse.

Enfin, nous pouvons utiliser nos résultats de robustesse pour le contrôle décentralisé des systèmes dynamiques multi-agents, par exemple en supposant que les agents ont la possibilité d'augmenter leur puissance de communication en cas de danger de déconnection. Une autre possibilité est de diriger le groupe en contrôlant complètement un agent ou un sous groupe d'agents qui ne seraient pas soumis au système de flocking.

Troisième partie

Analyse de réseaux sociaux

Chapitre 8

Analyse de réseaux sociaux

8.1 Introduction

Les théories mathématiques développées pour l'étude des systèmes dynamiques multi-agents trouvent aussi des applications pour la compréhension des réseaux sociaux. En effet, un réseau social peut se voir comme un système dynamique multi-agents dont les individus sont des humains. Comme explicité dans la section 1.2.6 de l'introduction générale, les outils mathématiques d'analyse structurale peuvent appuyer le sociologue dans ses recherches. Cette partie présente les résultats d'une collaboration avec Lisa Haye, doctorante en sciences sociales du laboratoire *Sport et ENvironnement Social (SENS)*. Sa thèse a pour objet l'étude du réseau social portant sur la controverse nationale concernant la pratique des loisirs motorisés en espace naturel.

Pour le sociologue, la compréhension du réseau social (d'un point de vue statique dans un premier temps) dans sa globalité est un défi en soi : le réseau d'interactions étudié comporte plusieurs centaines d'acteurs et des milliers de relations. La visualisation d'un tel réseau n'est donc pas évidente. Dans un premier temps, pour appuyer le sociologue, nous allons d'une part adapter et mettre en application des méthodes de spatialisation du réseau (*i.e.* la représentation du réseau sous la forme de cartes en deux dimensions), et d'autre part nous adapterons un ensemble de mesures de centralité (*i.e.* d'importance des acteurs suivant leur position dans le réseau), en nous appuyant sur la théorie des graphes et la théorie des chaines de Markov.

Concernant la structure de la troisième partie du manuscrit, dans la section 8.2, nous décrivons la problématique du sociologue face à la controverse sur la pratique des loisirs

motorisés en espace naturel. Dans la section 8.3, nous présentons les données disponibles ayant été récoltées par le sociologue dans le but de répondre à sa problématique. Le réseau social étudié met en jeu des interactions de natures diverses. Par contraste, la majorité des méthodes d'analyse de réseau prennent en entrée un graphe dont les relations sont homogènes. Par conséquent, un prétraitement des données est nécessaire avant l'utilisation des méthodes d'analyse de réseau. Les choix d'agrégation de données sont présentés dans la section 8.4. La section 8.5 présente les méthodes de spatialisation de graphes. Dans la section 8.6 sont exposées les mesures de centralité. La section 8.7 donne les résultats de spatialisation obtenus sur le réseau étudié ainsi que les calculs faits sur le réseau. Pour terminer cette analyse du réseau, nous donnons dans la section 8.8 un aperçu des interprétations du sociologue permises par les outils présentés. Nous donnons nos conclusions et perspectives dans la section 8.9.

8.2 Présentation de la problématique

Dans cette section, nous effectuons un rapide résumé de la première partie de la thèse de doctorat de Lisa Haye [Hay12]. L'étude du sociologue porte sur les conflits liés aux loisirs motorisés hors route (que nous décrivons dans la section 8.2.1), qui font partie des loisirs pratiqués en espace rural. De par la spécificité des loisirs motorisés, ces conflits permettent d'exemplifier les usages antagonistes dans les espaces naturels. Avant de donner un aperçu plus précis des dits conflits et de la controverse nationale leur étant liée, nous donnons brièvement un contexte à la question des loisirs en nature (ceci va nous permettre de mieux comprendre les enjeux soulevés par la problématique des loisirs motorisés).

8.2.1 Les loisirs motorisés hors route

La nature constitue un lieu propice à certaines activités de loisir. Plusieurs visions idéalisées lui sont associées. La nature représente d'une part le sauvage, la pureté, la simplicité et la liberté. En opposition à cette vision, les espaces ruraux de France sont en réalité le résultat d'interventions humaines. Cette nature est notamment le support d'activités agricoles, touristiques et forestières. En outre, la majorité des espaces naturels est constituée d'espaces privés. L'adoption de telle ou telle vision dépend du rapport que chaque acteur entretient avec la nature. Ce lien est important pour la problématique du sociologue puisque qu'il joue un rôle dans le positionnement des acteurs de la controverse.

Les loisirs motorisés hors route constituent l'exemple par excellence des usages antagonistes dans les espaces naturels. En effet, ces loisirs sont à la fois caractérisés par des

valeurs de liberté, d'aventure, de dépassement des limites, et sont aussi associés par leurs détracteurs à la vitesse (et donc au danger), au bruit et à la pollution. De nombreux citadins espèrent trouver dans la campagne un lieu de simplicité et de calme, permettant de se ressourcer loin de l'activité incessante des villes.

8.2.2 Les sources de conflit

Les sources de conflit constituent un des points investigués par le sociologue lors de ses enquêtes de terrain. Les conflits viendraient du manque d'espace forçant les individus à pratiquer sur les mêmes espaces des activités différentes, faisant appel à des fonctions de la nature difficilement conciliables, telles que la production, l'habitat, le loisir ou la conservation. On parle alors de proximité géographique subie. Un certain nombre de ces conflits porte sur la pratique des loisirs motorisés qui est le thème de cette étude.

Ainsi, nombre des conflits sont liés à des incertitudes concernant l'impact des pratiques sur le milieu les accueillant. Par exemple, suivant les conditions météorologiques, un chemin peut passer de carrossable à non carrossable, la pratique des loisirs motorisés pouvant alors devenir interdite si le chemin est public. De plus, dans la loi régissant les pratiques, certains termes peuvent être interprétés de diverses manières et sont donc utilisés différemment suivant l'opinion de la personne qui y fait référence. Les incertitudes peuvent aussi être de nature technique ou scientifique.

8.2.3 Des conflits à la controverse et vice-versa

La diversité des usages, des valeurs et des intérêts vis-à-vis des espaces naturels d'une part et l'incertitude liée à la pratique des loisirs motorisés d'autre part poussent les acteurs à prendre position. L'absence de certitude a pour conséquence la mise en avant par les différents camps d'arguments stéréotypés, c'est-à-dire ne prenant en compte qu'une facette de la réalité (ex : *la nature est un espace sauvage que les loisirs motorisés ne cessent de détériorer*, ou à l'inverse *la nature appartient à l'homme, qui n'a donc pas à se préoccuper des conséquences des activités qu'il y pratique*). Chaque camp (pro ou anti loisirs motorisés) est rendu visible par des collectifs. Pour les défenseurs de ces activités, il s'agit du Codever et de la Confédération des randonneurs motorisés et usagers des chemins. Les détracteurs sont eux représentés par différentes entités regroupées au sein de la Coordination nationale pour l'Adaptation des Loisirs Motorisés à l'Environnement (CALME). Chacun des groupes est actif à l'échelle nationale et diffuse les argumentaires génériques via des articles de presse, des sondages, des activités de lobbying auprès des élus locaux et nationaux. Cet échange d'arguments par les deux camps constitue ce que nous appelons la controverse.

À première vue, on pourrait imaginer que la dynamique de la controverse peut se résumer par un ensemble de conflits locaux nourrissant une controverse à l'échelle nationale comme un phénomène émergent. Cependant il semble que la réalité soit plus complexe et que les flux d'information soient dirigés dans les deux sens, du local vers le national et vice-versa. La théorie de l'acteur-réseau (ANT) [Lat05] est adaptée pour appréhender ce type d'objet. Cette théorie propose de ne pas présupposer de hiérarchie entre les échelles mais plutôt d'aplanir le réseau d'interaction [LJV+12]. Par conséquent, lorsque nous parlons de *scènes locales* et *scène nationale*, nous nous référons soit à la localité géographique des acteurs, soit à leur rôle (par exemple *habitant du Parc National du Pilat* pour une scène locale ou *ministre de l'environnement* pour la scène nationale). Nous décrirons de manière plus précise les différentes scènes étudiées dans la section 8.3.2 présentant les données récoltées lors des entretiens. De la même manière, la division par camps est aussi une préconception dont la réalité est nécessairement moins manichéenne et nous aurons l'occasion de discuter de sa pertinence lors de l'analyse des résultats obtenus.

L'objectif du sociologue est de comprendre comment les arguments stéréotypés de la controverse se forment, de quelle manière les conflits locaux alimentent cette controverse et en retour quel est l'impact de la controverse sur les conflits locaux. Dans cette optique, nous tenterons de saisir quels flux d'information circulent entre les différentes scènes et camps et quels sont les jeux d'influence entre les acteurs. De manière complémentaire, nous nous attacherons à rechercher l'identité des acteurs jouant un rôle important dans le réseau, par exemple en faisant le lien entre scènes et entre camps. En particulier, nous nous interrogerons sur le rôle spécifique, s'il existe, des objets au sein du réseau.

8.2.4 La place des objets dans la controverse

Dans le cadre de l'étude de la controverse autour des loisirs motorisés hors route, il apparait qu'un certain nombre d'objets - de non-humains - tels que le bruit, le moteur, la loi, la moto, etc. prennent une place importante dans les discours des individus interrogés. Traditionnellement, les réseaux d'acteurs analysés en sciences sociales ne sont formés que d'individus humains. Cependant, il semble que ceci puisse être une limitation importante pour entrevoir de manière exhaustive les relations formant le réseau étudié. En effet, de la même manière que l'homme agit sur les objets, les objets loin d'être inertes influencent le cours de l'action [Lat05], mettant les objets et les humains au même niveau. Le pratiquant conduit la moto, le moteur de la moto est bruyant, le bruit dérange le randonneur. Dans ce sens, nous ne ferons pas de distinction *a priori* entre humains et non-humains. Pour cela, nous utilisons le terme d'*actants* pour désigner toute entité prenant part à la dynamique

du réseau. Nous aurons l'occasion d'explorer plus en profondeur la place prise par les objets dans le réseau dans la section 8.8 portant sur l'interprétation des résultats obtenus de l'analyse des données recueillies.

8.2.5 L'incertitude au cœur de la controverse

Comme nous l'avons signalé plus haut, les incertitudes sont à la base de la controverse et sont inhérente à la pratique des loisirs motorisés hors route. Nous distinguons différents types d'incertitudes : les incertitudes techniques ou scientifiques. De plus, il arrive que les acteurs eux-mêmes soient peu sûrs de leur propre opinion concernant ces questions.

Une autre forme d'incertitude provient du fait que le comportement des actants peut parfois être incertain pour d'autres acteurs. Lorsque cela se produit, l'acteur source d'incertitude est appelé *médiateur* dans la théorie de l'acteur réseau (ANT). Dans le cas où l'acteur n'est pas source d'incertitude, il est dit *intermédiaire*. Remarquons que pour un acteur, un tel statut est sujet à variation : un même acteur peut être médiateur pour certains actants et intermédiaire pour d'autres ; un acteur peut être médiateur à un instant puis devenir intermédiaire dans le futur.

8.2.6 Le pouvoir au sein de la controverse

Dans le cadre de la controverse, les acteurs doivent se positionner face à un objet incertain. Pour cela, ils sont amenés à chercher des sources d'information dans le réseau d'acteurs. Ainsi, de la position de chaque acteur dans le réseau va dépendre sa capacité à obtenir l'information souhaitée et à influencer le comportement des autres acteurs en quête de l'information.

On peut distinguer plusieurs types de pouvoir. Le premier est la maitrise de compétences. Un juriste va être plus à même d'interpréter la loi. Les autres acteurs viennent le consulter pour obtenir des informations la concernant. Il sera donc source d'information et pourra de cette manière influencer les autres acteurs. Remarquons qu'ici encore le pouvoir provient de l'incertitude (ici l'incertitude qu'ont les acteurs face à la loi) qui crée une asymétrie dans les relations entre acteurs.

Un second type de pouvoir correspond à l'utilisation de règle formelle. Un garde forestier demandant à des pratiquants de sortir d'une zone interdite aux loisirs motorisés fait usage de son statut formel. Pour donner un exemple plus subtil, il peut arriver que lorsqu'un pratiquant de loisir motorisé hors route connait mieux la loi que l'agent assermenté lui ayant donné une contravention, le pratiquant puisse la faire annuler en utilisant un argumentaire adapté.

Les deux derniers types de pouvoir que nous mentionnons sont liés à la place des actants dans le réseau et nous intéressent particulièrement. Le troisième type de pouvoir se définit en fonction de la proximité qu'un acteur entretient avec les acteurs pertinents, qui lui permettent ou non d'avoir accès à l'information ou d'influencer autrui par le biais de ces acteurs. Un ami du juriste obtiendra plus facilement les renseignements souhaités qu'un acteur éloigné dans le réseau de ce même juriste ; un détracteur des loisirs motorisés ami du garde forestier pourra lui signaler la présence de pratiquants pour que ces derniers soient réprimandés.

Enfin, se trouver sur le point de passage de l'information permet la maitrise de l'information et constitue un quatrième type de pouvoir, d'autant plus si l'individu est l'unique lien entre un acteur possédant une information et un acteur à la recherche de cette information. De cette manière, un acteur étant en bonne entente avec à la fois des détracteurs et des pratiquants des loisirs motorisés (deux groupes *a priori* peu connectés) possède des informations circulant au sein d'un camp mais faisant défaut à l'autre, ce qui lui donne une position de force. Il peut alors choisir de donner ou non ces informations.

Analyser le réseau social lié à la controverse va nous aider à comprendre les jeux d'influence tels que nous venons de les décrire brièvement. Nous décrivons dans la section suivante les données disponibles pour mener à bien cette analyse.

8.3 Présentation des données disponibles

Les données présentées dans cette section ont été rassemblées par Lisa Haye durant son master puis son doctorat. Elles contiennent une description des différents actants qui ont été identifiés comme faisant partie de la controverse sur les loisirs motorisés hors route au sein des différentes scènes étudiées ainsi qu'un inventaire des liens existants entre les différents actants.

8.3.1 Méthode d'investigation

Les données sont issues d'un ensemble de source de diverses natures : la participation à des réunions de collectifs pro ou anti loisirs motorisés hors route, la collecte d'information provenant de la presse, de forums en ligne ainsi que la conduite d'entretiens avec les acteurs de la controverse.

La controverse sur les loisirs motorisés hors route n'a pas été étudiée de manière exhaustive dans le passé. Pour cette raison, l'ensemble des acteurs de cette controverse n'est pas connu. Il a donc été nécessaire pour les identifier de cheminer dans le réseau d'inter-

action en utilisant un certain nombre de points d'entrée. Pour cela, Lisa Haye a utilisé sa connaissance *a priori* du réseau ainsi qu'un ensemble d'articles du domaine. Ceci a permis d'identifier les acteurs prenant part à la controverse qui devaient alors servir de points de départ. Une méthode de boule de neige a ensuite été utilisée pour mettre à jour le reste des acteurs de la controverse : chaque acteur interrogé était invité à mentionner les autres acteurs qui lui paraissaient pertinents vis à vis de la controverse. Cette méthode a été arrêtée lorsque les entretiens ne faisaient plus émerger de nouveaux acteurs. Remarquons que cette méthode suppose que le réseau d'interaction soit connexe (ce qui semble être une hypothèse vraisemblable), ou bien d'avoir au moins une personne par composante connexe servant de point d'entrée.

8.3.2 Présentation des scènes étudiées

Les données sur le réseau des acteurs de la controverse sont issues d'un ensemble de quatre scènes que nous avons différenciées. La première est la scène nationale, la seule qui ne soit pas localisée géographiquement. Les trois autres correspondent à des terrains géographiquement situés.

Scène nationale

Certains actants ont une portée nationale au sens ou leurs actions ne se limitent pas à un site géographique localisé. On peut citer notamment les collectifs anti- et pro-motorisé dont les publications ont une portée nationale. La scène nationale regroupe donc tous les actants ne se limitant pas à un terrain particulier. Il semble que les arguments stéréotypés générant la controverse évoqués dans la présentation de la problématique (section 8.2) proviennent de cette scène.

Scène du parc naturel régional du Pilat

Le parc naturel régional (PNR) du Pilat est situé à proximité des agglomérations de Lyon et Saint-Etienne, servant de lieu pour les loisirs en nature des habitants de ces agglomérations. Il occupe une superficie de $700km^2$ constituée à moitié par des forêts et un tiers par des terres agricoles. Il est recouvert d'un réseau de $2300km$ de chemin. Il contient de plus des zones écologiques prioritaires contenant divers milieux naturels. La densité du parc est de 77 habitants au km^2.

Cette scène fait l'objet de concertation entre différents acteurs dans le but d'encadrer la pratique des loisirs motorisés hors route et est ainsi parfois citée en exemple à l'échelle

nationale. Ceci en fait un terrain pertinent pour étudier les liens entre scènes locales et nationale. Ces concertations ont notamment débouché sur la mise en place de zones de silence où les activités motorisées sont interdites.

Le PNR est géré par un syndicat mixte. Deux associations de défense de l'environnement - Terre commune et Environnement et Nature Burdignes - agissent sur le parc. Plusieurs clubs de moto dont *Moto verte du Pilat* et *le piston-club de Trèves* y sont aussi implantés, de même que deux circuits de moto-cross en périphérie du parc. Des concessionnaires de quad et de moto sont situés non loin du parc. Enfin, une association pour la randonnée (motorisée ou non) s'est aussi créée dans le parc.

Scène du canton de la Grave - Villar d'Arène

Cette scène se situe à l'entrée du Parc National des Ecrins entre 1400 et 3983 mètres et s'étale sur $200km^2$. Elle constitue une zone faiblement peuplée avec moins de 4 habitants au km^2. Une partie du canton est utilisée comme zone de pâturage alors que l'autre constitue un domaine skiable en hors piste. Cet endroit est éloigné des grandes agglomérations puisque les plus proches, Grenoble et Briançon, se situent à 1h15 et 45min de route respectivement.

Contrairement à la scène du Pilat, la scène de la Grave ne présente pas de conflits apparents bien que les loisirs motorisés soient pratiqués. Elle constitue ainsi un contre point intéressant.

Une partie des habitants est formée de familles traditionnelles vivant sur le canton depuis des décennies grâce à l'agriculture et au bâtiment. Les saisonniers constituent une autre partie de la population. Il n'y a ni club ou concessionnaire pour les loisirs motorisés ni association de protection de l'environnement installés sur le canton.

Scène des Chambarans

Cette scène s'étale sur 22 communes et est recouverte principalement par la forêt de Chambarans de $7300ha$. Elle se localise entre les agglomérations de Grenoble, Valence et Lyon mais ne jouit pas d'une forte attraction naturelle telle que dans le cas du Pilat ou de la Grave.

L'intérêt de cette scène provient de l'existence d'une démarche - Attitude Quad - visant à résoudre les conflits liés à la pratique du Quad. Cette démarche, lancée par un Office de Tourisme des Chambarans, est supposée mettre en lien les acteurs pro- et anti-motorisé et serait ainsi à l'origine d'une modification de la structure du réseau d'interactions.

Outre l'office de tourisme concerné, cette scène abrite un concessionnaire de quad, des militants d'associations naturalistes et un ensemble de randonneurs. L'Organisme National de la Forêt (ONF) joue aussi un rôle important puisqu'une partie de la forêt est domaniale.

8.3.3 Codage des données

Nous souhaitons mettre à profit les outils de l'analyse structurale des réseaux se basant sur la théorie des graphes pour comprendre la controverse autour des loisirs motorisés hors route. La première étape pour atteindre cet objectif est de transformer la masse d'informations rassemblée par Lisa Haye lors des entretiens et de l'étude de la littérature spécialisée en un ensemble de données structurées. Cette phase de prétraitement constitue le codage des données. Nous codons les données sous la forme de deux tables, l'une combinant les informations portant sur les actants, l'autre agrégeant les données sur les liens entre ces mêmes actants.

Le prétraitement implique nécessairement une épuration des données originelles (issues des entretiens et de la littérature). Nous avons conservé les informations utiles au réseau d'interaction, entre autres les informations nécessaires à la résolution de la problématique originelle : quel lien existe-t-il entre scènes et entre camps, entre conflits locaux et controverse nationale ? Le réseau social que nous obtenons est un réseau hétérogène par deux aspects. Premièrement, les actants du réseau forment un ensemble hétérogène. Ils possèdent divers statuts sociaux. Ils sont localisés géographiquement (suivant leur scène). Nous connaissons aussi l'opinion de chaque actant concernant les loisirs motorisés hors route. Deuxièmement, les liens entre les individus sont hétérogènes. Les relations peuvent être amicales, conventionnelles, conflictuelles, etc. Nous préservons dans un premier temps toute cette complexité. Ceci laissera l'entière liberté par la suite de filtrer les relations non désirables suivant la question à laquelle nous souhaitons répondre.

Codage des actants

Les actants sont codés sous la forme d'une table où chaque ligne regroupe les informations sur un actant. Les informations retenues sont son *nom*, son *type* correspondant à son statut ou à son rôle dans la controverse (élu, technicien, pratiquant de loisir motorisé, association, institution, non-humain, etc.), sa *scène* qui est définie suivant l'appartenance de l'actant à une des scènes étudiées, et enfin son *camp* qui permet d'attribuer à l'individu son positionnement vis à vis des loisirs motorisés hors route (pro-motorisé, anti-motorisé, neutre). La table 8.1 présente la structure des données des actants. La table 8.2 liste les différents types d'actants qui ont émergés avec le codage.

Codage des liens entre actants

De manière similaire à la table des actants, une ligne est attribuée pour chaque relation dans la table des relations. Les relations sont différenciées lorsque qu'elles possèdent au moins

ID	Nom	Type	Scène	Camp	Position
1	RD	Militant	Nationale	Anti-motorise	
2	NV	Militant	Nationale	Anti-motorise	
3	BG	Militant	Nationale	Anti-motorise	
4	BJP	Militant	Nationale	Anti-motorise	

Table 8.1: Table des actants [Hay12]

Militant	Simple pratiquant (et chasseur)
Professionnel	Lambda
Technicien	Professionnel dans le motorise
Elu	Institution
Propriétaire terrien	Association
Adhérent	Groupe de Professionnels
Professionnel (+ adhérent)	IndividuS
Exploitant agricole ou forestier	Professionnels dans le motorise
Chasseur	Élus & Techniciens
Simple pratiquant	Non Humain

Table 8.2: Différents types des actants [Hay12]

un attribut (nature ou origine) distinct. Par origine, nous entendons la personne ayant mentionné la dite relation lors de son entretien. Ce qui signifie qu'une paire d'actants peut se retrouver sur plusieurs lignes différentes si ces deux actants sont liés par plus d'un type de relation (amitié et conventionnelle par exemple) ou si une même relation a été mentionnée par plusieurs actants. Chaque ligne possède la structure suivante : *ID* (numéro unique pour chaque ligne), *actant* 1, *actant* 2 (la relation peut être unidirectionnelle auquel cas la relation est dirigée du premier actant vers le second), *code* (identificateur de la nature de la relation, nous détaillons la signification de ce code dans la suite de cette section), *symétrie* (valeur booléenne égale à 1 si la relation est bidirectionnelle et à 0 sinon), *date* (indication sur la date à laquelle est apparue cette relation, notons que par manque de données, cette colonne n'a pas été utilisée dans l'analyse de la controverse ; nous reviendrons sur ce fait dans les limitations données dans la section 8.8.5)), *fréquence* (indicateur de la fréquence avec laquelle la relation donne lieu à une interaction entre les deux protagonistes ; de la même manière que pour la colonne date, nous n'avons pas pu faire usage de cette information), *origine* (nom de l'actant ayant reporté l'existence de cette relation lors des entretiens). La table 8.3 exemplifie la structure de la table des relations.

ID	Actant1	Actant2	Code	Symetrie	Lien	Date	Frequence	Origine
1								
2								
3								
4								

TABLE 8.3: Table des relations [Hay12]

Pour décrire les relations, Lisa Haye les regroupe au sein des diverses classes qui ont émergées durant le dépouillement des entretiens. Les informations liées à la nature des relations sont représentées par la colonne *code* dans la table des relations (voir table 8.3). La signification de chaque code est détaillée dans une troisième table que nous reproduisons dans la table B.1 en annexe. À chaque code de relation sont associées trois informations contenues dans trois colonnes de la table : *type* (indique le type de la relation, par exemple *fonctionnel* ou *familier* ; les définitions précises de ces types de relations sont données dans la table B.2 en annexe), *catégorie* (donne la force du lien, *e.g. non lien*, un actant en ignore un autre, *lien fort*, *lien faible*, *lien négatif*, etc.), et *liaison* (précise s'il s'agit d'un lien direct entre 2 actants ou si la relation est médiée par un objet).

8.3.4 Précautions

Nous avons présenté notre objet d'étude : un réseau d'interaction représentant la controverse nationale sur le théme des loisirs motorisés hors route. Nous demandons cependant au lecteur de rester conscient des limites suivantes :

- Le modèle du réseau d'interaction est statique (nous n'avons pas pu obtenir suffisamment de données temporelles pour parvenir à les exploiter) alors que le réseau réel est dynamique : les relations se font et se défont ; elles donnent lieu à des interactions plus ou moins fréquentes ; certaines en précèdent d'autres tant au niveau temporel que causal. On peut donc voir le réseau d'interaction que nous avons obtenu comme une projection de l'ensemble des relations suivant l'axe du temps. Ceci est un biais à ne pas négliger.

- Trois scènes locales ont été étudiées et codées dans le but d'exemplifier les caractéristiques principales de la controverse. La réalité est plus complexe et de nombreuses scènes locales y participent. Par manque de ressource, ces entrées n'ont pas été prises en compte dans le réseau malgré leur impact potentiel sur la dynamique globale.

Ainsi, les données sur lesquels nous travaillons sont loin d'être exhaustives pour retracer le réseau d'interaction de la controverse. La récolte de données de terrain est un travail de longue haleine. Nous pouvons dans un premier temps nous satisfaire du jeu de données obtenu.

8.4 Agrégation des données

Notre objet d'étude est un réseau dirigé hétérogène puisqu'un couple d'actants peut être relié par plusieurs relations de natures distinctes. Par contraste, la majorité des algorithmes de spatialisation et d'analyse de réseau prennent en entrée un réseau homogène dont les relations sont le plus souvent non dirigées et seulement parfois pondérées ; ceci permet l'usage des outils de la théorie des graphes présentée dans en annexe A. Par conséquent, un second prétraitement des données s'impose pour pouvoir utiliser de tels outils : il s'agit de l'agrégation des données qui consiste à filtrer ou à fusionner certaines données pour obtenir un graphe simple. Cette étape de traitement dépend de l'application visée.

8.4.1 Agrégation pour la visualisation

Le principe de base de la spatialisation est le suivant : les actants partageant des relations doivent se retrouver à proximité alors que les agents distants topologiquement doivent être éloignés géographiquement sur la carte. L'algorithme que nous utilisons pour la spatialisation prend en entrée un graphe non dirigé potentiellement pondéré. Plus le poids entre deux actants est important, plus ils sont placés proches l'un de l'autre.

Il nous faut donc passer d'un réseau dirigé hétérogène à un graphe pondéré non dirigé. Nous notons A la matrice d'adjacence du graphe obtenue après agrégation. Concernant la direction des arêtes, le choix le plus simple est de considérer l'ensemble des relations comme non dirigé, choix que nous adoptons. Ensuite vient la question de la pondération. Plusieurs choix s'offrent à nous, nous en citons 3 :

1. $A_{ij} = A_{ji} = 1$ si il existe au moins une relation entre i et j, et 0 sinon ;

2. $A_{ij} = A_{ji} = k$ où k est le nombre de relations entre i et j ;

3. pour chaque type de relation (amitié, conventionnelle, etc.) un poids fixe est défini correspondant à l'importance du type de la relation, $A_{ij} = A_{ji}$ est alors choisi comme la somme des poids de l'ensemble des relations entre i et j.

Sans étude sociologique sur la question, la définition des poids par type de relation serait arbitraire. Par conséquent, nous écartons le troisième choix. Les deux premiers choix sont acceptables. Cependant, le second pourrait favoriser certaines paires d'actant de manière injustifiée : si une première paire d'actants possède les relations *bonne entente* et *conventionnelle* par exemple et qu'une seconde paire possède uniquement la relation *familier*, il est difficile de conclure que les interactions entre les actants de la première paire sont 2 fois plus importantes que celles de la seconde. Par simplicité, nous optons pour le premier choix.

Une dernière question reste à traiter. Doit-on prendre en compte l'ensemble des relations pour effectuer la spatialisation ? En particulier, doit-on prendre en compte uniquement les relations dites positives ou au moins supprimer les relations négatives ? Puisque l'objet d'étude principal est le lien entre conflit (*i.e.* incarné par des relations négatives) et la controverse, il nous paraît fondamental de faire ressortir les relations négatives et donc de les inclure au même titre que les autres. En revanche, certains types de relations disponibles dans la base de données que nous avons créée ne porte pas d'information pertinente pour la spatialisation. Nous supprimons ainsi les relations de types *absence de lien / ignorance mutuelle*, *ne croise pas*, *ne connaît pas* et *connaissance sans echange particulier*.

8.4.2 Agrégation pour les calculs de centralité

Dans le cas des calculs de centralité, il est possible de prendre en entrée des algorithmes un graphe pondéré et dirigé.

La centralité comme nous la définissons prend deux interprétations suivant ce que représente les relations considérées. Dans le cas où les relations représentent les flux d'information entre les actants, la centralité d'un actant est sa capacité à obtenir (dans le cas de centralités radiales) ou à intercepter (dans le cas de centralités médianes) l'information circulant dans le réseau. Lorsque les relations représentent l'influence d'un actant sur un autre, la centralité d'un actant mesure sa capacité à influencer au sein du réseau à travers des chaînes d'influences entre actants.

Le graphe à obtenir à partir de notre réseau hétérogène doit donc refléter soit la transmission d'information, soit les jeux d'influence. Prenons l'exemple des relations de conseil. Supposons que l'actant i conseille l'actant j. Par ce biais, l'actant j a accès à de l'information, ressource importante dans le cadre d'une controverse. D'autre part, cette relation permet à i d'influencer l'actant j par ses conseils, de sorte que cette relation augmente son importance au sein du réseau d'après la seconde interprétation de la centralité citée plus haut. Par cet exemple, nous voyons qu'une relation de conseil dirigée (i, j) augmente la centralité de j vis à vis des flux d'information au sein du réseau et celle de i par rapport aux jeux d'influence

du réseau.

Une première possibilité pour définir le graphe utilisé pour les calculs de centralité est de passer en revue l'ensemble des relations pour déterminer le sens de l'influence ainsi que le sens de la transmission de l'information pour chaque type de relations, pour ainsi obtenir deux graphes dirigés et deux mesures de centralité par actants. Cependant, contrairement à la relation de conseil, la correspondance entre le sens codé dans les données et le sens de la transmission d'information ou d'influence n'est pas systématique. Il arrive que certaines relations dirigées dans les données soient le support d'un transfert d'information bidirectionnel. Il serait donc nécessaire de passer en revue l'ensemble des relations (plus de 4000) pour déterminer le sens à utiliser. Par conséquent, nous faisons le choix de fusionner les deux mesures de centralité (information et influence) pour obtenir une mesure de centralité globale, et suivant l'exemple de la relation de conseil, nous faisons l'hypothèse que pour chaque relation, les deux agents gagnent soit de l'information soit de l'influence (ou les deux). Ceci nous amène à considérer un graphe non dirigé où une arête (i, j) est présente lorsqu'au moins une relation existe entre i et j dans le réseau. En ce qui concerne les poids du graphe, nous raisonnons comme précédemment suivant le principe de parcimonie en choisissant $A_{ij} = 1$ lorsque l'arête est présente et 0 sinon.

Une fois encore, nous préservons les liens négatifs qui sont le support de transferts d'information et d'influences négatives. Nous supprimons les relations non pertinentes comme pour la spatialisation.

8.5 Visualisation

Le réseau d'actants consiste en plusieurs centaines de nœuds et milliers de relations. Pour le sociologue, il est quasi impossible de donner du sens à cette quantité de données sans avoir recours à des outils formels. En particulier, pour comprendre la structure du réseau, nous utilisons des méthodes de visualisation de grands graphes sur une carte de deux dimensions. Comme nous l'avons signalé, le principe de base est le suivant : les actants partageant des relations doivent se retrouver à proximité alors que les agents distants topologiquement doivent être éloignés géographiquement sur la carte. Nous présenterons succinctement les algorithmes les plus connus pour réaliser une telle spatialisation. Une fois ce principe assimilé, il est possible d'inclure des contraintes supplémentaires pour la spatialisation en vue de faire apparaître d'autres informations telles que les liens entre scène et camp, notamment. Dans la littérature, peu d'algorithmes existent pour traiter ce type de question. Nous présenterons donc la méthode que nous avons développée pour mener à bien cette tâche.

8.5.1 Présentation des algorithmes de spatialisation

Dans cette section, nous supposons que l'étape d'agrégation des données a été effectuée. Le résultat est un graphe de relation symétrique non pondéré de matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = a_{ji}$ et $a_{ij} > 0$ si i et j partagent au moins une relation.

Il existe plusieurs types d'algorithmes de spatialisation pour les graphes, chaque type s'adaptant particulièrement bien à certains graphes et moins à d'autres. Les graphes issus de réseaux sociaux présentent souvent des propriétés remarquables telles que la présence de communautés (ensemble d'actants fortement connectés entre eux et peu connectés avec le reste du réseau). Pour visualiser de tels graphes, les algorithmes basés sur les forces (*force-based layout* en anglais) sont bien adaptés et par conséquent largement utilisés. Ces algorithmes utilisent une analogie du système masses-ressorts où les nœuds du graphe sont vus comme des masses dont le mouvement dépend des forces d'attraction ou de répulsion agissant entre les nœuds. Ces algorithmes prennent un graphe simple, non dirigé et connexe en entrée.

L'algorithme historique de spatialisation le plus utilisé est l'algorithme de *Fruchterman-Reingold* [FR91]. Dans cet algorithme, le calcul de l'ensemble de des forces d'attraction possède une complexité en temps de $O(e)$ où e est le nombre d'arrêtes. Nous avons écarté de nos travaux l'algorithme de *Kamada-Kawai* [KK89] pour lequel le calcul de l'ensemble des forces possède une complexité en temps de $O(n^2)$ où n est le nombre d'agents. De plus, pour l'algorithme de Fruchterman-Reingold, une approximation de la densité permet de calculer l'énergie de répulsion d'un nœud en temps constant, ce qui n'est pas possible dans le cas de l'algorithme de Kamada-Kawai.

Algorithme de Fruchterman-Reingold

Dans l'algorithme de Fruchterman-Reingold, deux types de forces sont présentes. Premièrement, tous les nœuds sont sujets à une force de répulsion E_{ij}^{rep} importante à faible distance, inversement proportionnelle au carré de la distance. Deuxièmement, les nœuds voisins sont sujets à une force d'attraction E_{ij}^{att} proportionnelle à leur distance. L'énergie potentielle résultante est la suivante :

$$E_{FR} = \sum_{i,j \in N, i \neq j} E_{ij}^{rep} + E_{ij}^{att},$$

avec

$$E_{ij}^{rep} = \frac{L^2}{\|x_i - x_j\|} \text{ et } E_{ij}^{att} = a_{ij} \frac{\|x_i - x_j\|^2}{L}, \tag{8.1}$$

où $a_{ij} = 1$ si i et j sont voisins et $a_{ij} = 0$ sinon, L représente la distance idéale souhaitée entre deux voisins dans le graphe. La fonction E_{FR} est non-convexe et présente des minima locaux, de sorte qu'il est nécessaire de faire appel à des méthodes d'optimisation non-convexe pour approcher son minimum.

Optimisation non linéaire

L'algorithme de spatialisation de Fruchterman-Reingold consiste à minimiser l'énergie potentielle E_{FR}. Lorsque la fonction à minimiser est convexe, on utilise classiquement les méthodes de descente de gradient qui consistent à actualiser successivement la variable dans la direction opposée du gradient de la fonction au point courant. Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe précédent, ces méthodes ont la mauvaise propriété de rester bloquées dans les minima locaux lorsque la fonction n'est pas convexe.

Les métaheuristiques sont des algorithmes d'optimisation globale visant à résoudre ce problème. Ces algorithmes explorent l'espace des variables de manière itérative et semi-aléatoire, ce qui leur permet à la fois d'améliorer leur estimation de la configuration optimale tout en échappant aux minima locaux. Il s'agit d'heuristique dans le sens où l'algorithme ne garantit pas la convergence vers un optimum global et elles sont méta puisqu'elle ne nécessite pas de connaissance *a priori* sur la fonction à optimiser. La recherche de métaheuristiques efficaces est un domaine actif de recherche et a donné lieu à la création d'un grand nombre d'algorithmes distincts. Le lecteur intéressé pourra consulter [Yan11] pour un récent aperçu de la littérature sur le sujet. Il est remarquable qu'un grand nombre de ces algorithmes sont originellement inspirés par des phénomènes d'optimisation naturelle, issus de processus biologiques ou physiques.

Les performances de ces algorithmes dépendent fortement de la fonction qu'ils cherchent à optimiser. Nous utiliserons l'*algorithme de Recuit Simulé*. Cet algorithme s'inspire d'un système thermodynamique. Il est donc simple d'utiliser cet algorithme en interprétant les nœuds du graphe comme les particules du système thermodynamique. Précisément, l'algorithme par Recuit Simulé (*Simulated Annealing* en anglais) [MRR+53, KGV83] est un algorithme simulant le processus de recuit d'un matériau. Ce processus consiste à augmenter, stabiliser puis diminuer la température du matériau de manière graduelle afin de permettre au système thermodynamique de préserver un état quasi-stationnaire. Ceci a pour effet de minimiser l'énergie du matériau. La première utilisation de l'algorithme par recuit simulé pour la spatialisation de graphe fut décrite par Davidson et Harel dans un rapport de 1989 publié par la suite dans [DH96].

8.5.2 Spatialisation par groupes

Une des questions de la problématique du sociologue est de comprendre ce qui fait le lien entre les différents camps et les différentes scènes du réseau autour des loisirs motorisés hors route. L'algorithme de spatialisation que nous avons présenté ne prend pas en compte l'appartenance des nœuds aux camps ou aux scènes. Pour pallier à ce constat, nous allons avoir recours aux méthodes de *spatialisation par groupes*. Dans ce chapitre, par *groupes*, nous entendons un ensemble de nœuds déterminé *a priori* par l'utilisateur. La *visualisation par groupes* consiste à appliquer une méthode de spatialisation rapprochant particulièrement les nœuds d'un même groupe. L'objectif est de faire ressortir visuellement cette appartenance. Les groupes que nous considèrerons sont soit les scènes soit les camps. Par conséquent, les algorithmes que nous présentons prennent en entrée une partition des nœuds en groupes : chaque nœud appartient à un unique groupe. La littérature sur les méthodes de visualisation par groupe est peu fournie. Nous présentons une méthode de la littérature puis une méthode alternative que nous avons développée :

- Une première idée est de découper le plan en plusieurs régions. Chaque région va alors accueillir un des groupes. Les travaux présentés dans [TFMP05] suivent cette démarche. Pour déterminer l'emplacement des régions pour chaque groupe, les auteurs appliquent une première fois l'algorithme de spatialisation en considérant les groupes comme des super-nœuds. Le poids de la relation entre deux super-nœuds correspond alors à la somme des poids des relations inter-groupes. Les positions obtenues seront alors utilisées comme barycentres des groupes. Pour placer les nœuds, l'algorithme de spatialisation est appliqué une nouvelle fois à l'intérieur du groupe. Dans ce deuxième calcul, seules les relations intra-groupes sont prises en compte. Par conséquent, les nœuds en bordure de groupe ne sont pas nécessairement bien connectés avec les autres groupes. Ainsi, cette méthode ne permet pas de visualiser les nœuds faisant le lien entre scènes ou entre camps.

- (Fruchterman-Reingold par groupes) Pour remédier au problème de la méthode précédente, il est nécessaire d'appliquer l'algorithme à l'ensemble des nœuds simultanément. Pour s'assurer que les nœuds sont géographiquement regroupés par groupe, nous proposons une méthode alternative. Cette méthode consiste à modifier la distance idéale souhaitée entre les nœuds dans l'algorithme de Fruchterman-Reingold. Nous remplaçons le paramètre L de l'algorithme par un jeu de paramètres (L_{ij}) pour $i, j \in \mathcal{N}$ distincts. Pour ce faire, nous déterminons une position idéale pour les centres de chaque groupe. Ceci peut être fait en appliquant par exemple la méthode issue de [TFMP05], citée dans le paragraphe précédent. Une autre possibilité est de choisir

les positions manuellement de sorte que leurs distances soient de l'ordre de $L\sqrt{n}$. Ceci est simple lorsque le nombre de groupes est faible, comme pour notre réseau.

Nous notons $C_C(i)$ la position du centre du groupe de l'agent i. Lorsque i et j appartiennent au même groupe, nous préservons $L_{ij} = L$, de manière à ce que les nœuds d'un même groupe restent proches. Dans le cas contraire, leur distance idéale L_{ij} est choisie comme la distance entre $C_C(i)$ et $C_C(j)$ les centres des groupes de i et j respectivement. Un défaut de cette méthode est qu'elle ne donne pas toujours au groupe une région bien localisée, en particulier lorsque les nœuds d'un groupe sont peu connectés.

Les résultats de la dernière méthode de spatialisation sont présentés dans la section 8.7.1.

8.6 Analyse quantitative

Les outils de visualisation présentés dans la section 8.5 permettent au sociologue d'explorer le réseau pour mieux comprendre sa structure de manière qualitative. Pour compléter cette approche, nous présentons dans cette section des méthodes qui apportent des informations quantitatives sur le réseau. Précisément, nous allons utiliser différentes mesures de centralité pour déterminer quels acteurs jouent un rôle important notamment dans la transmission d'information entre les différentes scènes et camps. Nous chercherons aussi à évaluer quelles influences les acteurs ont dans le réseau et au sein des différentes scènes et différents camps, pour cela nous utilisons les Q-mesures, dérivées des centralités (voir section 8.6.2).

8.6.1 Sélection des mesures de centralité

Nous supposons que l'étape d'agrégation des données a été effectuée suivant la méthode présentée dans la section 8.4.2. Le résultat est un graphe symétrique, non pondéré, de matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} > 0$ peut représenter soit la capacité d'un transfert d'information de j vers i, soit la capacité qu'a l'agent i à influencer l'agent j. Nous supposons de plus que ce graphe est connexe. Les actants non connectés à la principale composante du réseau recevront une valeur de centralité égale à 0.

Ainsi que nous l'avons signalé dans la section 8.2, un des objectifs du sociologue est de comprendre quels sont les jeux d'influence entre actants et d'identifier les actants jouant un rôle important à ce niveau. Nous avons mentionné l'existence de plusieurs types de pouvoir, dont le pouvoir d'expertise, le pouvoir lié au statut formel, le pouvoir lié à la proximité avec les acteurs pertinents, et enfin le pouvoir lié à la position d'intermédiaire sur les flux d'information. Les deux premiers types de pouvoir sont intrinsèques aux individus.

Aussi, l'analyse de la position des individus dans le réseau n'apporte pas d'information pour ce type de pouvoir. Au contraire, les deux derniers types de pouvoir dépendent de la position topologique des acteurs dans le réseau, il est donc possible de quantifier de tels pouvoir pour chaque actant en utilisant différentes mesures de *centralité*.

Nous présentons une brève classification de ces mesures de centralité pour comprendre lesquelles sont les plus adaptées à notre réseau ; nous les utilisons par la suite. Pour cela nous nous basons sur la récente étude sur le sujet [BE06] par Borgatti et Everett. Les actants sont impliqués dans divers chemins de relations traversant le graphe. L'étude de ces chemins constitue le cœur de la méthode de mesure.

Un premier critère de classification réside dans la position du nœud dont la centralité est calculée (appelons-le nœud i) par rapport aux chemins considérés : les *centralités radiales* considèrent des chemins dont le nœud i est une extrémité ; au contraire, les *centralités médianes* considèrent les chemins passant par i. Le premier type quantifie la distance qui sépare i des autres nœuds. Lorsque les relations au sein du réseau représentent la présence de flux (par exemple d'information), ce type de mesure renseigne sur la fréquence avec laquelle l'information émanant des autres nœuds parvient au nœud i. S'il s'agit d'un réseau d'influence, les centralités radiales représentent la capacité du nœud i à atteindre les autres nœuds pour les influencer (potentiellement indirectement). De manière complémentaire, les centralités de type médiane calculent la capacité du nœud i à intercepter voire à bloquer les flux (d'information, de bien, de personnes, etc. suivant la nature du réseau considéré). Ce type de centralité peut par exemple donner le pouvoir à un actant d'exiger des contreparties pour la transmission du flux en question (par exemple, il peut s'agir de taxe pour le passage de biens dans un réseau de transport). Les centralités médianes et radiales sont complémentaires, apportant des éléments d'information différents sur les nœuds.

Un deuxième critère se situe dans le type des chemins pris en considération. Dans ce cas, deux visions s'opposent : les premières mesures historiques de centralité, telles que la *centralité de proximité* (*closeness centrality* en anglais), une mesure de centralité radiale de Freeman [Fre79], considèrent uniquement les géodésiques (*i.e.* les plus courts chemins au sens de la distance topologique) dans leur calcul ; une autre école préfère prendre en compte l'ensemble des chemins avec la possibilité que l'importance d'un chemin soit négativement corrélée à sa longueur.

Le premier choix est bien adapté lorsque les flux ne passent que par les plus courts chemins (*e.g.* dans les réseaux de transport). Dans ce cas, la centralité radiale adaptée est la *centralité d'intermédiarité* (*betweenness centrality* en anglais) de Freeman [Fre80].

En revanche, les flux d'information et d'influence ont la possibilité de circuler via des chemins indirects, il est donc nécessaire de prendre en compte l'ensemble des chemins. Par

conséquent, nous nous focaliserons sur les mesures utilisant l'ensemble des chemins plutôt que les plus courts chemins uniquement, ce qui est mieux adapté au type du réseau de la présente étude.

Enfin, un troisième critère de classification dépend de la propriété mesurée sur les chemins considérés. Une possibilité est de prendre en compte la longueur des chemins considérés. On peut alors en extraire une statistique telle que la longueur moyenne. On choisit alors la centralité comme étant inversement corrélée à la longueur moyenne. Un second choix est d'examiner le volume des chemins, c'est à dire de compter leur nombre. Il est enfin possible de choisir une mesure hybride entre volume et longueur en calculant une somme des chemins pondérés par leur longueur. Lorsque les pondérations sont toutes identiques, on retrouve la mesure par le volume alors que des poids très distants les uns des autres permettent de souligner l'importance de la longueur des chemins.

En ce qui concerne nos calculs de centralité, nous sélectionnons deux mesures complémentaires qui nous paraissent les mieux adaptées à notre contexte, d'après la discussion précédente. Dans le but de mesurer le pouvoir lié à la proximité avec les acteurs pertinents, nous sélectionnons une mesure radiale : la *centralité α* (*α-centrality* en anglais) de Bonacich et Lloyd [BL01] qui généralise la *centralité par vecteur propre* (*eigenvector centrality* en anglais) de Bonacich [Bon72] et qui offre des résultats cohérents sur des graphes dirigés et pondérés, contrairement à cette dernière. Pour quantifier le pouvoir lié à la position d'intermédiaire, nous choisissons une mesure médiane : la *centralité de courant* (*current-flow betweenness* en anglais) développée par Newman [New03], qui utilise l'ensemble des chemins entre actants. Pour illustrer les différentes mesures, nous calculerons les centralités des dix nœuds du graphe présenté dans la figure 8.1.

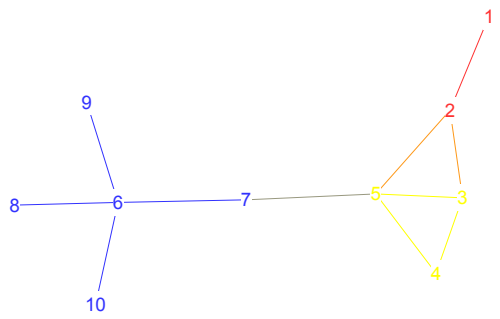


FIGURE 8.1: Graphe d'illustration des différentes mesures de centralité. Les dix nœuds sont séparés en trois groupes, $A = \{1, 2\}$ (en rouge), $B = \{3, 4, 5\}$ (en jaune) et $C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ (en bleu).

Centralité α (α-centrality)

La centralité α est une centralité radiale comptabilisant l'ensemble des chemins dirigés arrivant au nœud dont on souhaite connaître la centralité. Elle est notamment utilisée pour mesurer le statut social des individus au sein d'un réseau de connaissance ou d'influence. Pour calculer cette mesure, on suppose que chaque individu i possède un statut social exogène $e_i \in \mathbb{R}$ indépendant du réseau *. Rappelons que A désigne la matrice d'adjacence du graphe symétrique non pondéré, obtenu après agrégation des données, que nous supposons connexe. Par conséquent, le rayon spectral (*i.e.* l'amplitude maximale des valeurs propres de la matrice A) vérifie $\rho(A) \geq 1$ (voir *e.g.* [BP79]). La centralité α est alors définie par

$$c_\alpha(i) = \sum_{j \in \mathcal{N}} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k (A^k)_{ij} e_j, \tag{8.2}$$

où α est un paramètre de la mesure, vérifiant

$$0 < \alpha < 1/\rho(A) \leq 1,$$

*Le statut exogène d'un agent mesure son importance indépendamment de sa place dans le réseau. Par exemple, les experts pourraient se voir attribuer un statut exogène plus important que les autres actants dû à leur connaissance.

le choix $\alpha < 1/\rho(A)$ étant nécessaire pour garantir la convergence de la série. Le choix précis de α est commenté à la fin de cette section. Pour interpréter cette mesure, il faut savoir que le coefficient $(A^k)_{ij}$ correspond au nombre de chemins de longueur k partant de j pour arriver à i. Ainsi, la centralité α $c_\alpha(i)$ correspond à une somme pondérée des nombres de chemins de longueur k arrivant à i. Le nombre de chemins est pondéré par α^k et par le statut exogène du nœud source e_j (lorsque le statut exogène des individus est inconnu, comme c'est le cas dans notre étude, nous supposons $e_i = 1$ pour tout i comme première approximation). Le coefficient α^k, décroissant de manière exponentielle avec k, permet d'atténuer l'importance des chemins suivant leur longueur. Cette mesure est très proche (à une constante près) de la mesure de centralité proposée par Katz [Kat53].

Pour compléter cette interprétation nous reprenons l'équation (8.2). Sous forme matricielle, nous obtenons

$$c_\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k (A^k) e,$$

où c_α est le vecteur colonne des centralités et e est le vecteur colonne des statuts exogènes. Puisque la matrice $I - \alpha A$ est inversible (ce qui est vérifié pour tout choix de α), on obtient alors directement

$$c_\alpha = (I - \alpha A)^{-1} e,$$

ou encore

$$(I - \alpha A) c_\alpha = e,$$

ce qui signifie

$$c_\alpha(i) = e_i + \sum_{j \in \mathcal{N}} \alpha A_{ij} c_\alpha(j). \tag{8.3}$$

Une nouvelle interprétation de la centralité α est alors possible : la centralité d'un individu i dépend d'une part de son statut exogène et d'une somme pondérée des centralités des individus avec lesquels il est en lien. Ainsi un individu en lien avec une personne de forte centralité (*i.e.* très influente ou ayant un accès important à l'information) verra lui même sa centralité augmentée. L'équation (8.3) montre que le coefficient α quantifie la transmitivité de statut entre les individus : plus la valeur de α est grande plus la popularité des voisins aura un impact sur sa propre popularité. Dans l'ensemble de nos calculs, nous avons choisi un coefficient $\alpha = 0.9/\rho(A)$, supposant une capacité à influencer (ou à obtenir de l'information) relativement importante. La figure 8.2a montre les centralités α pour le graphe de la figure 8.1.

Centralité de courant (current-flow betweenness)

La centralité de courant est une mesure de centralité médiane proposée par Newman en 2003 qui prend en compte l'ensemble des chemins pour calculer le nombre moyen de fois qu'une information, circulant de manière aléatoire d'un nœud source à un nœud cible, passe par le nœud dont on souhaite calculer la centralité. La centralité de courant se base sur un graphe fortement connexe potentiellement pondéré et dirigé. Notons $A = (a_{ij})$ la matrice d'adjacence du réseau de circulation de l'information (a_{ij} est la force de la relation (j, i)) et D la matrice diagonale des degrés sortants des nœuds (*i.e.* la matrice dont les coefficients diagonaux sont ceux du vecteur $\mathbf{1}^T A$). On note enfin $P = AD^{-1}$ la matrice de transition. Le coefficient P_{ij} représente la probabilité qu'une information passe de j à i à un instant donné de sorte que

$$P_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_j^+},$$

où $d_j^+ = D_{jj}$ est le degré sortant du nœud j, *i.e.* la somme des forces des relations émanant de j.

Dans un premier temps, nous allons calculer le nombre de fois où l'information passe sur l'arête (j, i) en moyenne. On suppose qu'une information part d'un nœud source s pour arriver à un nœud cible t, avec j distinct de s et t. On suppose que lorsque l'information arrive en t, elle reste bloquée (t est dit *absorbant*). Pour obtenir la nouvelle matrice de transition, notée $[P'_{-t}]$, on remplace la t-ème colonne de P par le vecteur $\mathbf{1}_t$ dont la t-ème coordonnée vaut 1 et les autres 0. Du fait que t est absorbant, les calculs de centralité ne feront pas usage du coefficient 1, par conséquent nous le remplaçons par 0 dans $[P'_{-t}]$ pour obtenir la matrice de transition modifiée $[P_{-t}]$. Pour illustrer, supposons $t = 1$, la matrice de transition modifiée prend alors la forme

$$[P_{-1}] = \begin{pmatrix} 0 & [R_{-1}] \\ \mathbf{0} & [Q_{-1}] \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

où $\mathbf{0}$ est le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n-1}$ composé de 0, $[R_{-1}]$ est un vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, et $[Q_{-1}] \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$.

Proposition 74. *Pour i et j distincts dans $\mathcal{N}$, le nombre moyen d'occurrences où l'information arrive à j puis passe en i en partant de s est*

$$f_{st}(j, i) \triangleq [P_{-t}]_{ij}((I - [P_{-t}])^{-1}_{js},$$

où I est la matrice identité de taille n.

Le nombre moyen d'occurrences où l'information arrive à j et y reste et nul : $f_{st}(j, j) = 0$.

Démonstration. En supposant que l'information part de s, la probabilité qu'elle arrive à j après r étapes est $[P'_{-t}]^r_{js}$. Ainsi, la probabilité que l'information partant de s, arrive en j en r étapes, puis passe au nœud i à l'étape $r+1$, est $[P'_{-t}]_{ij}[P'_{-t}]^r_{js}$.

Supposons $j \neq t$, puisque t est bloquant, aucun chemin de s vers j ne passe par t. Par conséquent $[P'_{-t}]^r_{js}$ est indépendant du (t,t)-coefficient de $[P'_{-t}]$. Aussi, $[P'_{-t}]_{ij}[P'_{-t}]^r_{js} = [P_{-t}]_{ij}[P_{-t}]^r_{js}$. Si $j = t$, $[P'_{-t}]_{ij} = [P_{-t}]_{ij} = 0$, donc nous avons aussi $[P'_{-t}]_{ij}[P'_{-t}]^r_{js} = [P_{-t}]_{ij}[P_{-t}]^r_{js}$.

En sommant cette probabilité pour $r \in \mathbb{N}$, on obtient que le nombre moyen d'occurrences où l'information arrive à j puis passe en i en partant de s est

$$f_{st}(j,i) \triangleq \sum_{r=0}^{+\infty} [P_{-t}]_{ij}([P_{-t}]^r)_{js}.$$

On note I_{n-1} la matrice identité de taille $n-1$. Puisque le réseau est supposé connexe, la matrice $I_{n-1} - [Q_{-t}]$ est inversible (voir *e.g.* [KS60]). Par conséquent, la matrice $I - [P_{-t}]$ est inversible (ceci justifie le choix $[P_{-t}]_{tt} = 0$). Ceci permet d'obtenir

$$f_{st}(j,i) = [P_{-t}]_{ij}((I - [P_{-t}])^{-1}_{js}.$$

□

L'écart $|f_{st}(j,i) - f_{st}(i,j)|$ représente le nombre moyen de fois où l'information passe par l'arête $\{i,j\}$ dans un sens sans repasser dans l'autre sens. Ceci évite de prendre en compte les chemins qui vont et viennent entre les nœuds i et j et qui n'ont pas de sens d'un point de vue de la transmission de l'information [New03]. La centralité de courant doit son nom à l'existence d'une analogie avec les circuits électriques. Si on suppose que A_{ij} représente la conductance de l'arête (j,i), le terme $|f_{st}(j,i) - f_{st}(i,j)|$ correspond au courant en valeur absolue traversant l'arête (j,i) lorsque l'on fixe un potentiel de $1V$ au nœud s et $-1V$ au nœud t. Alors, l'importance du nœud j par rapport à la transmission d'information de s à t, où j est distincts de t et s, est définie comme la demi-somme des courants traversant les arêtes (j,i), comptés positivement, où i est un voisin de j :

$$c_{st}(j) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{N}} |f_{st}(j,i) - f_{st}(i,j)|.$$

On considère que les nœuds aux extrémités des chemins ne sont pas pris en compte dans la centralité par conséquent, on pose $c_{st}(s) = c_{st}(t) = 0$. La centralité de courant du nœud j est définie comme la moyenne suivante :

$$c_C(j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{s,t \in \mathcal{N}, s \neq t} c_{st}(j).$$

La figure 8.2b montre les centralités de courant pour le graphe de la figure 8.1.

Application sur le graphe d'illustration

Pour évaluer les mesures de centralité que nous utiliserons dans l'interprétation, nous avons aussi calculé les mesures de centralité historiques, la centralité d'intermédiarité (*betweenness centrality*) et la centralité de proximité (*closeness centrality*), basées sur les plus courts chemins uniquement. La première centralité est médiane et la seconde radiale.

La figure 8.2a montre que la centralité α valorise particulièrement les nœuds appartenant à des zones de nœuds de degré important. Ainsi les nœuds du groupes B (en jaune) possèdent des fortes centralités α. Au contraire, le nœud au centre du groupe A obtient une faible centralité α malgré son degré important, car il n'est connecté qu'à des nœuds de faible importance.

La centralité de proximité, visualisée dans la figure 8.2c, ne fait pas de différence entre la proximité avec des actants importants et les autres. Par conséquent, elle donne une centralité importante aux nœuds peu éloigné de l'ensemble des autres, sans distinction. Les mesures de centralité de proximité sont donc assez homogènes, contrairement à la précédente.

Les deux centralités médianes sont similaires, elles donnent une forte importance aux nœuds incontournables pour relier certains nœuds entre eux. Ceci explique la forte centralité des nœuds 5, 6 et 7. Contrairement à la centralité de courant, la centralité d'intermédiarité néglige totalement les chemins indirects. Pour cette raison, l'importance du nœud 3 en jaune est sous-estimée par rapport à la centralité de courant.

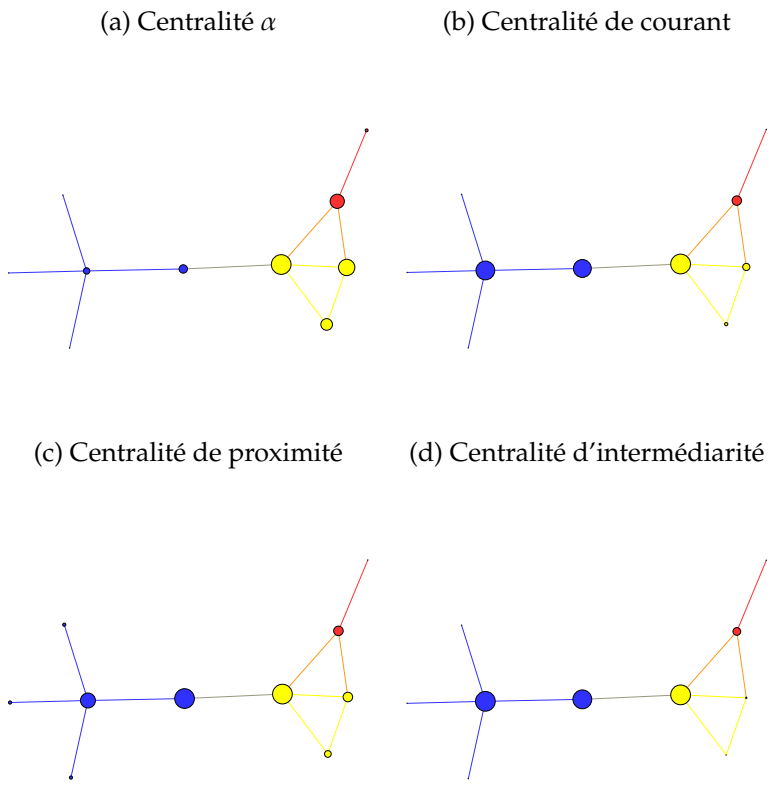


FIGURE 8.2: Visualisation des différentes centralités calculées. La taille des nœuds est une fonction affine de la centralité, normalisée de sorte que les tailles maximales et les tailles minimales soient identiques pour toutes les centralités.

8.6.2 Q-mesures de centralité

Les mesures de centralité présentées dans la section précédente donnent des informations globales sur les actants. Les centralités médianes mesurent la capacité à intercepter l'information circulant entre les actants ; les centralités radiales mesurent la capacité moyenne d'un nœud à atteindre les autres nœuds pour les influencer (potentiellement indirectement). Ces mesures moyennes ne donnent pas toujours des informations très pertinentes *. Il est possible d'adapter les mesures de centralités pour obtenir des informations sur les actants

*Borgatti et Everett dans [BE06] donnent une analogie pour comprendre ceci : donner une information moyenne sur l'ensemble du réseau revient à résumer les goûts d'un groupe de personne, dont la moitié aime le thé bien chaud et l'autre préfère le thé glacé, en concluant que globalement le groupe aime le thé tiède.

relativement à un ou plusieurs groupes. Les nouvelles mesures obtenues sont appelées *les Q-mesures (de centralité)*.

Une adaptation similaire a été effectuée par Rousseau et Zhang [RR08] dans le cas de la *centralité de flux* † (*flow betweenness* en anglais), qui s'inspirent eux même d'une mesure définie par Flom et al. [FFSN04].

Q-mesure α

Lorsqu'on étudie la proximité des actants avec un sous groupe $S \in \mathcal{N}$ du réseau, il est possible d'adapter la centralité α pour définir la Q-mesure α. Pour cela, nous modifions le vecteur des statuts exogènes e en supposant que les seuls nœuds de S ont un statut exogène non nul égal à 1. Le vecteur des centralités devient alors

$$Q_S^\alpha = \frac{1}{|S|}(I - \alpha A)^{-1}\mathbf{1}_S,$$

où le i-ème coefficient du vecteur colonne $\mathbf{1}_S$ vaut $\chi\,(i \in S)$ ‡. Remarquons que pour $i \in S$, $Q_S^\alpha(i) \geq \frac{1}{|S|}$. Par conséquent, cette mesure avantage de manière importante les nœuds de S par rapport aux autres. En conséquence, on ne peut comparer les Q-mesures α entre un nœud de S et un nœud hors de S. On l'utilisera pour comparer les nœuds de S entre eux et les nœuds hors de S entre eux. Nous avons normalisé la Q-mesure α par le nombre d'agents du groupe S de sorte à pouvoir comparer les Q-mesures α d'un même nœud par rapport à deux groupes S et S' distincts. La figure 8.3 donne les Q-mesures α pour le graphe d'illustration de la figure 8.1.

Il apparait que les nœuds obtenant les plus fortes Q-mesures α sont ceux à la fois proche ou à l'intérieur du groupe considéré et à la fois proches d'autres nœuds possédant ces mêmes caractéristiques. Ceci illustre une nouvelle fois que la centralité α et sa Q-mesure associée modélisent un aspect auto-entretenu de l'influence entre actants.

†Nous avons écarté la centralité de flux car elle ne prend pas en compte l'ensemble des chemins mais uniquement ceux contribuant au flot maximal (voir [Fre91]).

‡Pour une assertion A, $\chi\,(A) = 1$ si A est vraie et 0 sinon.

(a) par rapport au groupe A (b) par rapport au groupe B (c) par rapport au groupe C

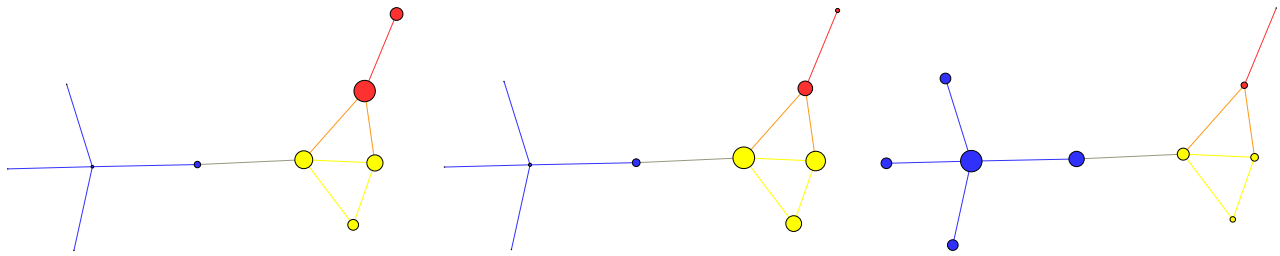


FIGURE 8.3: Visualisation des différentes Q-mesures α. La taille des nœuds est une fonction affine de la Q-mesure, normalisée de sorte que les tailles maximales et les tailles minimales soient identiques pour toutes les mesures.

Q-mesure de courant

Il est possible d'adapter la centralité de courant pour obtenir l'importance d'un nœud dans la transmission d'information d'un groupe de nœuds vers un autre. Pour un nœud j et deux sous ensembles disjoints de nœuds S et S', on définit la Q-*mesure* de courant de j de S vers S' par

$$Q_{S,S'}(j) = \frac{1}{2|S||S'|} \sum_{s \in S, t \in S'} c_{st}(j) + c_{ts}(j).$$

La figure 8.4 donne les Q-mesures de courant pour le graphe d'illustration de la figure 8.1. La figure montre que la Q-mesure de courant est efficace pour détecter les nœuds se trouvant sur les chemins entre les deux groupes considérés et écarter les autres.

(a) par rapport aux groupes $A - B$ (b) par rapport aux groupes $B - C$ (c) par rapport aux groupes $A - C$

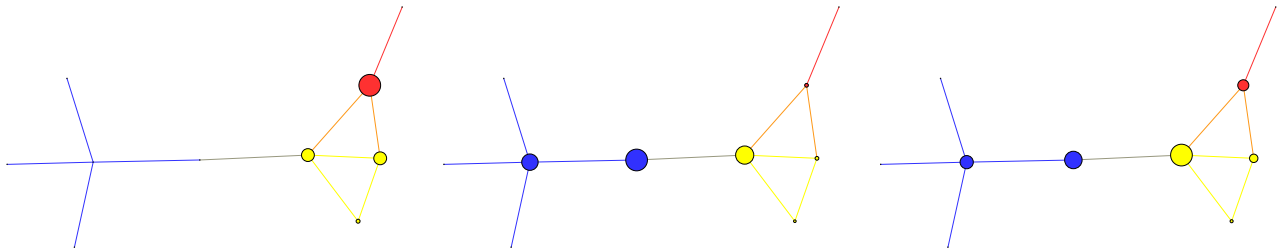


FIGURE 8.4: Visualisation des différentes Q-mesures de courant. La taille des nœuds est une fonction affine de la Q-mesure, normalisée de sorte que les tailles maximales et les tailles minimales soient identiques pour toutes les mesures.

8.7 Application au réseau social

8.7.1 Résultats de la spatialisation

Dans cette section, nous présentons les résultats graphiques issus des méthodes de spatialisation présentées dans la section 8.5. Dans un premier temps nous donnons les représentations globales pour la spatialisation neutre puis pour la spatialisation par groupes (camps ou scènes). Les interprétations du sociologue ayant été rendues possibles par les méthodes de spatialisation sont données dans la section 8.8.

Représentations globales du réseau

Pour une première spatialisation du réseau dans sa globalité, nous avons utilisé l'algorithme de Fruchterman-Reingold avec des positions initiales aléatoires en appliquant la méthode d'optimisation par recuit simulé. Le graphe utilisé en entrée des algorithmes est tel que décrit dans la section 8.4.1. La représentation globale du réseau est présentée dans la figure 8.5.

La spatialisation obtenue par l'algorithme Fruchterman-Reingold illustre l'hétérogénéité des acteurs en plaçant les nœuds bien connectés au centre et les autres en périphérie. Ceci est cohérent avec la nature sociale du réseau.

Cette spatialisation comporte un danger : la relation entre distance spatiale et distance topologique n'est pas nécessairement linéaire. Pour cette raison, nous compléterons les

résultats de la visualisation par une analyse quantitative du réseau dans la section 8.6.

Il est difficile d'obtenir des informations en visualisant le réseau dans son ensemble. Aussi, nous utiliserons des filtres pour se concentrer sur certaines relations et certains nœuds. Le logiciel *Gephi* * permet ce type de manipulation [BHJ09].

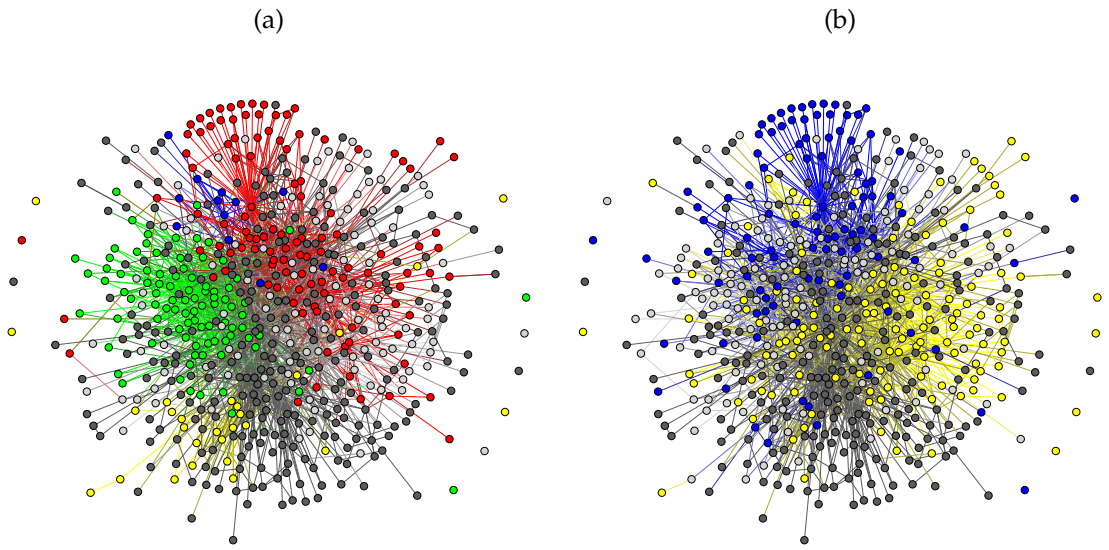


FIGURE 8.5: Spatialisation du réseau social lié à la controverse des loisirs motorisés hors route obtenue par l'algorithme Fruchterman-Reingold. À titre informatif, les couleurs des nœuds de la figure (a) donne leur scènes : *Nationale* (rouge), *Pilat* (vert), *La Grave* (jaune), *Chambarans* (bleu), *Local* sans scène particulière (gris clair), *Autre* (gris foncé) ; et les couleurs des nœuds de la figure (b) représentent leurs camps : *Pro-motorisés* (jaune), *Anti-motorisés* (bleu), *Neutre* (gris clair), *Non-humain* (gris foncé).

Représentations par groupes

Pour mettre en valeur l'appartenance aux scènes et aux camps, nous appliquons la méthode décrite dans la section 8.5.2 : Fruchterman-Reingold par groupes. Dans les représentations, la proximité des nœuds appartenant à certains groupes nous importe particulièrement. Nous appelons ces groupes les *groupes contraints* tandis que les autres sont dits *groupes libres*. Dans le cas de la représentation par scènes, les scènes contraintes sont *Pilat*, *La Grave*, *National* et

*Le logiciel *opensource* Gephi est disponible à l'adresse *http ://gephi.org/*.

Chambarans et les scènes libres sont *Locale* et *Autre*. Concernant les camps, *Pro-motorisé* et *Anti-motorisé* sont contraints tandis que *Non-humain* et *Neutre* sont libres.

Pour l'algorithme Fruchterman-Reingold par groupes, nous avons choisi les centres des groupes manuellement. En ce qui concerne les scènes, les coordonnées des centres sont $(-20, 0)$ pour *Pilat*, $(0, -20)$ pour *La Grave*, $(-20, 20)$ pour *National* et $(0, 20)$ pour *Chambarans*. Concernant les camps, nous avons $(0, 20)$ pour *Pro-motorisé* et $(0, -20)$ pour *Anti-motorisé*. Rappelons que les centres des groupes renseignent uniquement sur les distances relatives entre groupes. Pour un actant $i \in \mathcal{N}$ faisant partie d'un groupe libre et j dans un autre groupe, nous fixons la distance idéale inter-groupe $L_{ij} = L$. De cette manière, les nœuds des groupes libres, lorsque bien liés à plusieurs groupes contraints, sont placés entre ces groupes.

La figure 8.6a présente la représentation par scènes tandis que la figure 8.6b présente la représentation par camps.

Comme nous l'avions signalé dans la section 8.5.1, il arrive que certains nœuds soient piégés dans des minima locaux d'énergie. C'est le cas de certains nœuds de *La Grave* (en jaune) bloqués par des nœuds de *Chambarans* (en bleu) dans la figure 8.6a.

Un autre aspect peu seyant de la spatialisation de Fruchterman-Reingold par groupes se manifeste dans la figure 8.6b : certains nœuds se retrouvent diamétralement opposés à la majorité des nœuds de leur camps. Ceci se produit lorsque le nœud est très faiblement connecté au reste du graphe. Cet aspect permet néanmoins d'identifier ce type de nœuds particulier.

(a) Algorithme FR par scènes

(b) Algorithme FR par camps

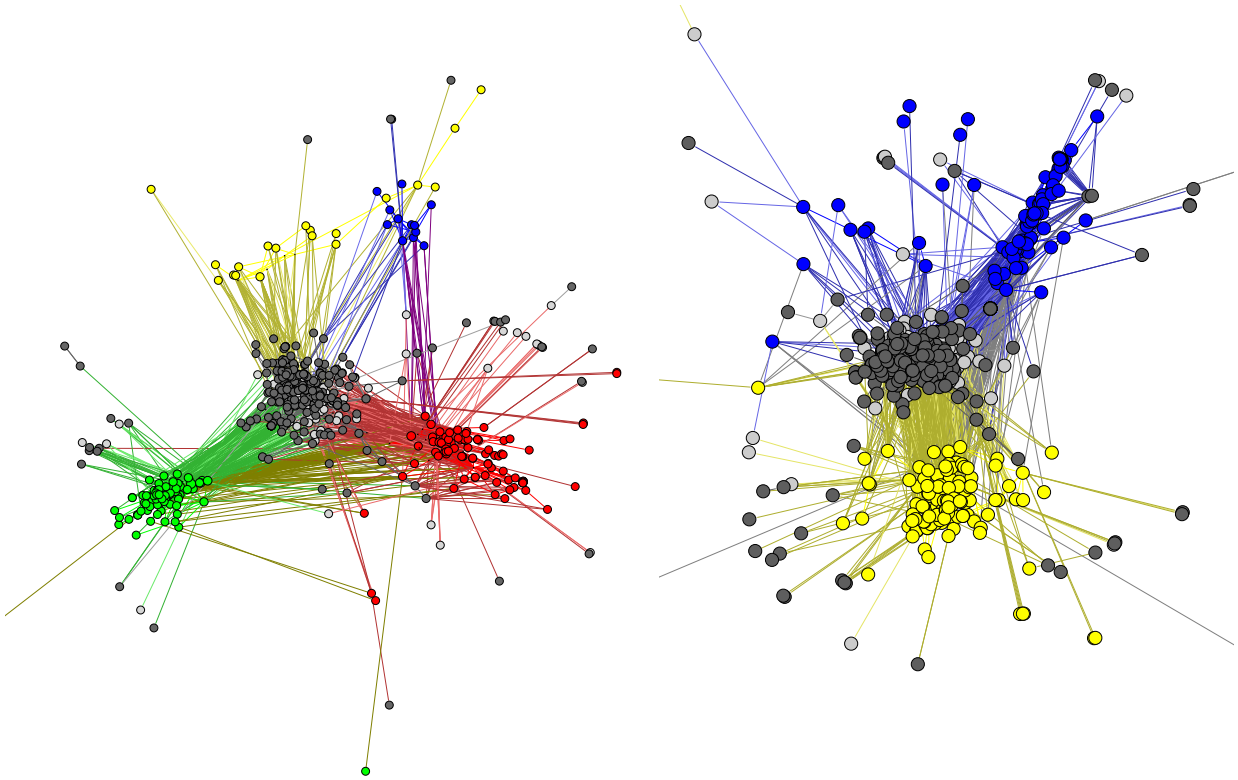


FIGURE 8.6: Spatialisations par groupes du réseau global. La figure (a) représente la spatialisation par l'algorithme de Furchterman-Reingold par scènes. Les scènes représentées sont les suivantes : nationale (rouge), Pilat (vert), Local sans scène particulière (gris clair), La Grave (jaune), Chambarans (bleu), autres (gris foncé). La figure (b) représente la spatialisation par l'algorithme de Furchterman-Reingold par camps. Les camps représentés sont les suivants : *Pro-motorisés* (bleu), *Anti-motorisés* (jaune), *Neutre* (gris clair), *Non-humain* (gris foncé). Certains nœuds de degré 1 en périphérie du réseau (de faible importance) ont été tronqués pour permettre une meilleure visualisation du reste du réseau.

8.7.2 Résultats de l'analyse quantitative

Mesures de centralité

Dans cette section, nous présentons les résultats des calculs de centralité effectués sur le réseau social autour des loisirs motorisés hors route. La table 8.4 présente les corrélations entre les différentes mesures. La figure 8.7 présente graphiquement le résultat des mesures de centralité.

Comme l'indique la table 8.4, la centralité de courant est relativement proche de la centralité d'intermédiarité (avec un coefficient de corrélation égal à 0.92). Ces mesures sont toutes deux médianes, et possèdent des définitions proches. Cependant, la seconde prend en compte uniquement les plus courts chemins. Ceci explique la raison pour laquelle un nombre important de nœuds voient leur centralité d'intermédiarité (relative) s'affaiblir par rapport à leur centralité de courant (voir les figures 8.7b et 8.7d). Ceci montre l'importance de l'utilisation de la centralité de courant lorsque ce qui circule entre les actants ne prend pas toujours le chemin le plus court, comme c'est le cas pour l'information et l'influence entre actants.

Concernant les mesures radiales, la table 8.4 indique que la centralité α et la centralité de proximité sont peu corrélées. Ces deux centralités mesurent la capacité des actants à atteindre rapidement leurs voisins, mais le font de manières très différentes. La centralité de proximité du nœud i est définie comme l'inverse de la longueur moyenne, pour $j \in \mathcal{N}$, du plus court chemin partant de i pour aller à j *. La centralité α favorise particulièrement la proximité avec des voisins importants et est plus locale puisque l'importance des chemins décroit de manière exponentielle avec leur longueur (équation (8.2)). Ce constat illustre l'intérêt de la centralité α par rapport à la centralité de proximité pour mesurer l'influence des actants dans le réseau.

Les deux mesures que nous utilisons, la centralité α et la centralité de courant, sont bien corrélées (avec un coefficient de corrélation égal à 0.92 d'après la table 8.4). Ceci est remarquable car ce n'est pas le cas pour tous les types de réseaux. Par exemple, les figures 8.2a et 8.2b montrent que ça n'est pas le cas pour le graphe donné en illustration dans la section précédente. Comme nous l'avons décrit dans la section 8.6.1, les mesures médianes et radiales sont complémentaires. Les premières mesurent la capacité à se trouver sur le passage de l'information tandis que les secondes mesurent la capacité d'un actant à atteindre les autres actants. Il existe une situation où ces deux mesures donnent des

*Du fait de sa simplicité, la centralité de proximité est choisie comme mesure de centralité radiale dans une partie importante de la littérature et dans nombreux logiciels d'analyse de réseaux, malgré le fait qu'elle soit souvent peu adaptée.

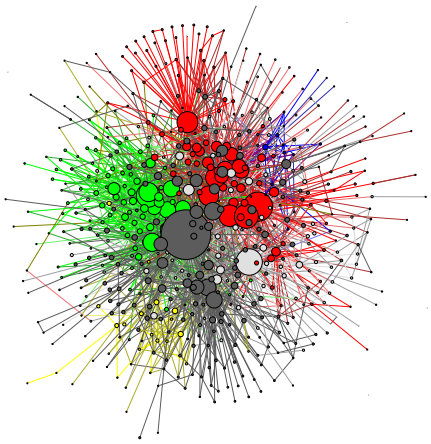
résultats similaires : lorsque le réseau est de type cœur-périphérie [BE99]. Les réseaux de ce type possèdent un unique centre de nœuds à forte centralité, bien connectés entre eux, tandis que les autres nœuds sont situés en périphérie, peu connectés au reste du réseau. La représentation donné par l'algorithme Fruchterman-Reingold confirme que notre réseau suit le type cœur-périphérie (figure 8.5). Ainsi, les nœuds du cœur du réseau ont à la fois une centralité radiale importante (ils sont proches des autres nœuds) et une centralité médiane importante (ils font le lien entre les nœuds de la périphérie).

Centralité	α	de courant	d'intermédiarité	de proximité
α	1	0.92	0.80	0.83
de courant	0.92	1	0.92	0.68
d'intermédiarité	0.80	0.92	1	0.51
de proximité	0.83	0.68	0.51	1

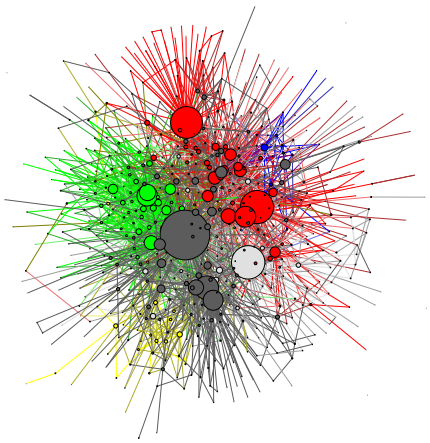
Table 8.4: Coefficients de corrélations entre les différentes centralités. Le coefficient α est choisi égal à $0.9/\rho(A)$

.

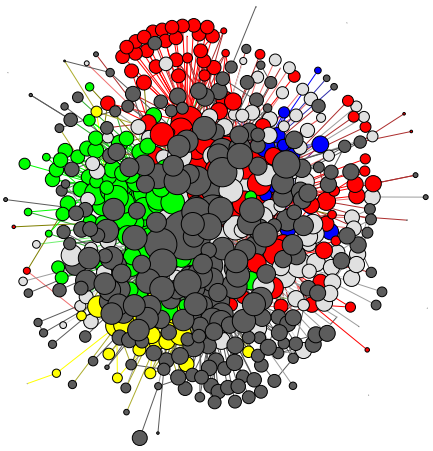
(a) Centralité α (= $0.9/\rho(A)$)



(b) Centralité de courant



(c) Centralité de proximité



(d) Centralité d'intermédiarité

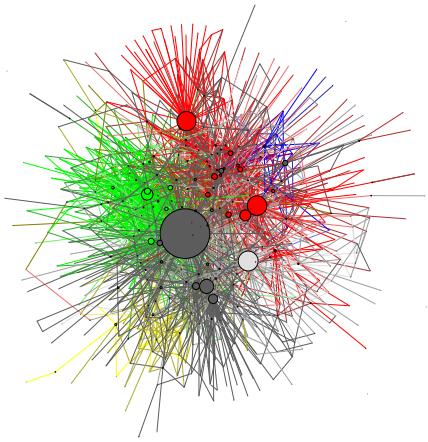


FIGURE 8.7: Visualisation des différentes centralités calculées. La taille des nœuds est une fonction linéaire de la centralité, normalisée de sorte que les tailles maximales soient identiques pour toutes les centralités.

Q-Mesures de centralité

Les mesures de centralité donnent une information globale sur la place des actants au sein du réseau. Pour compléter cette information, les Q-mesures (décrites dans la section 8.6.1) nous renseignent sur l'importante des actants vis à vis des scènes ou des camps. Les Q-mesures de courant informent sur l'importance des actants dans la transmission de l'information qui circule entre groupes (et donc potentiellement de son contrôle), tandis que les Q-mesures α calculent la proximité des actants par rapport aux différents groupes d'intérêt (les scènes et les camps).

La figure 8.8 présente les résultats des Q-mesures α par rapport aux scènes. Le premier constat est l'importante différence de résultats entre les scènes *National* et *Pilat* d'une part et *Chambarans* et *La Grave* d'autre part. Les Q-mesures α par rapport aux deux premières scènes sont proches de la centralité α. À l'opposé, les Q-mesures α par rapport à *Chambarans* et *La Grave* produisent un écart substantiel entre les nœuds de la scène à laquelle la mesure se rapporte et les nœuds des autres scènes. Cet écart confirme que ces deux scènes sont peu connectées avec le reste du réseau. En effet, les nœuds en dehors de ces scènes bénéficient peu de l'influence des nœuds appartenant à ces scènes. Au contraire, les scènes *National* et *Pilat* possèdent des actants centraux qui sont bien connectés au reste du réseau. Ceci permet aux actants leur étant connectés d'obtenir des Q-mesures α importantes.

La figure 8.9 présente les résultats des Q-mesures α par rapport aux camps. Le constat concernant les scènes du *Pilat* et de *National* s'applique pour les camps *Pro-motorisés* et *Anti-motorisé* : ces deux camps comportent chacun des actants centraux bien connectés avec les nœuds du camp adverse.

Outre la comparaison de la place tenue par les différents groupes, il est aussi intéressant d'analyser les différences de classement au sein d'un même groupe. Ainsi, certains actants du camp *Anti-motorisé* très centraux au sein de leur scène obtiennent une Q-mesure relativement moyenne par rapport au camp adverse. Ceci est le cas pour *La Calme*, actant le plus central du camp *Anti-motorisé*. Pour la Q-mesure α par rapport au camp *Pro-motorisé*, cet actant est surpassé par l'actant *Ministère de l'écologie* (du camp *Anti-motorisé*), qui est moins central dans son propre camp mais très proche du camp adverse. On peut penser que ce dernier actant sert de liaison entre les deux camps. Cette question va pouvoir être abordée à l'aide des Q-mesures de courant.

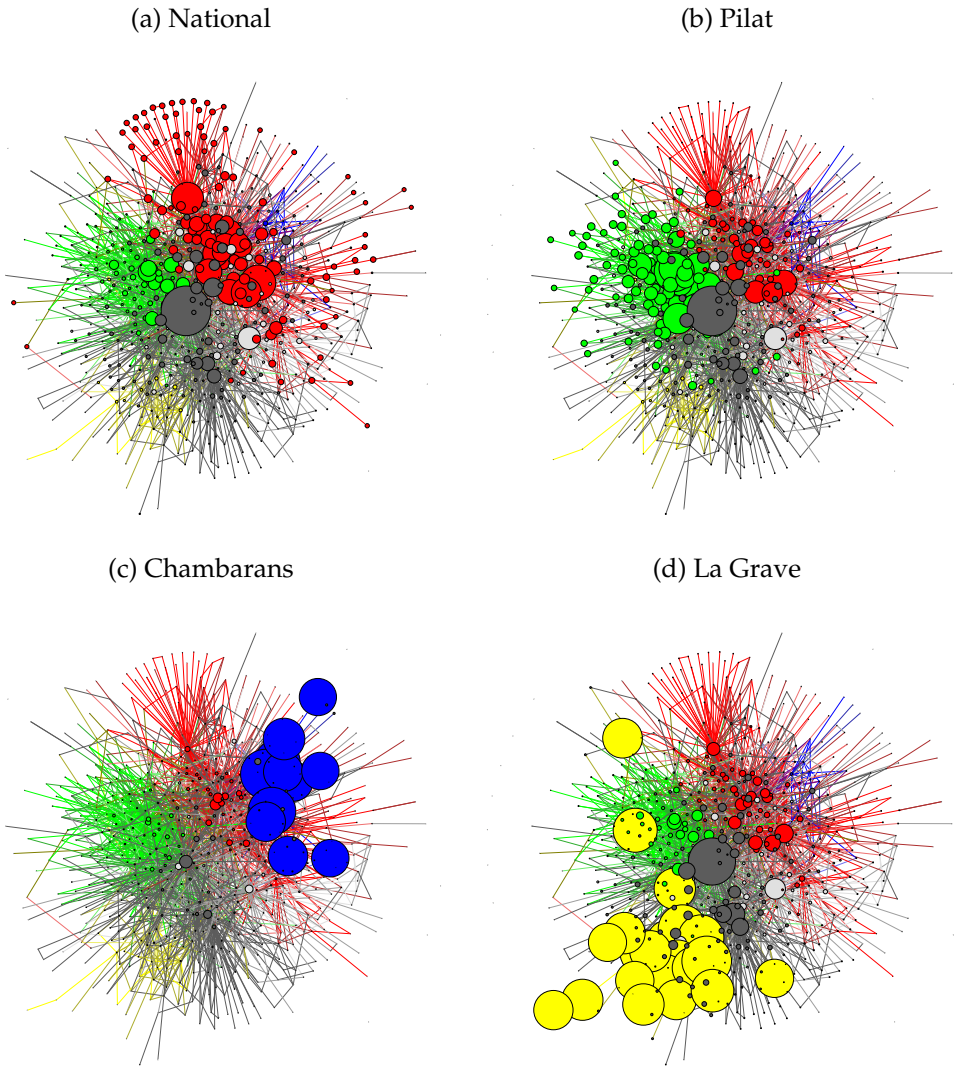


FIGURE 8.8: Q-mesures α par rapport aux scènes. La taille des nœuds est une fonction affine de la Q-mesure, normalisée de sorte que les tailles maximales et les tailles minimales soient identiques pour toutes les Q-mesures.

(a) Anti-motorisés (b) Pro-motorisés

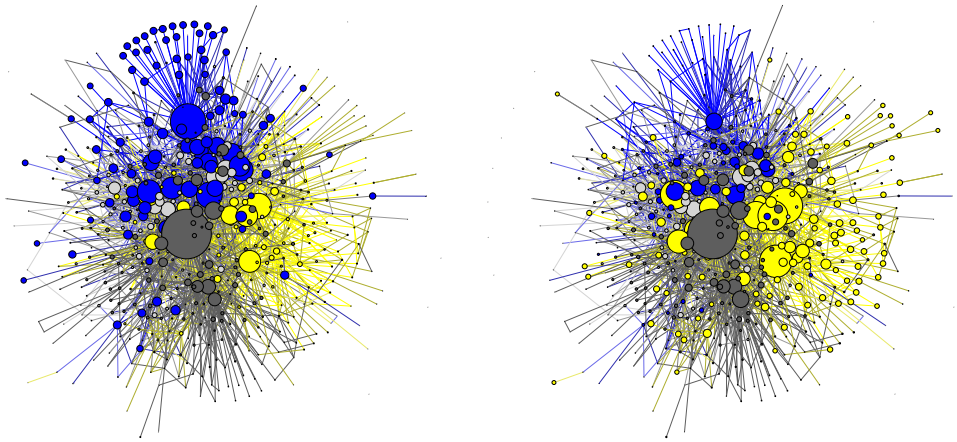


FIGURE 8.9: Q-mesures α par rapport aux camps. La taille des nœuds est une fonction affine de la Q-mesure, normalisée de sorte que les tailles maximales et les tailles minimales soient identiques pour toutes les Q-mesures.

La figure 8.10 présente les résultats des Q-mesures de courant par rapport aux scènes.

Les figures 8.10a, 8.10b et 8.10c permettent d'étudier le lien entre la scène *National* et les scènes locales que sont *Le Pilat*, *Chambarans* et *La Grave*. Plusieures caractéristiques sont identiques pour les trois cas. Premièrement, aucun actant des scènes locales n'a un rôle important à jouer dans la liaison entre la scène *National* et les scènes locales auxquelles il n'appartient pas. Par conséquent, la scène *National* reste la scène faisant l'intermédiaire entre les scènes locales. Deuxièmement, deux actants de la scène *National* gardent une place importante indépendamment de la scène locale observée : il s'agit de la CALME (fédération nationale des associations anti loisirs motorisés) et du Codever (collectif de défense des loisirs motorisés).

Ces trois figures présentent aussi des points de divergence. En ce qui concerne le lien entre *National* et *Chambarans*, deux nouveaux acteurs nationaux succèdent au Codever et à la CALME : il s'agit de DD et HF. Ceci est d'une importance particulière puisque ces actants sont des humains. Le premier est un élu (pro-motorisés) et le second un technicien (neutre). Du côté de la scène *Chambarans*, les principaux actants faisant le lien avec la scène *National* sont Attitude Quad (association pro-motorisé), le Groupe de travail LM Chambarans (neutre), CD et SK (tous deux pro-motorisés). Le quad joue aussi un rôle important dans le lien entre les deux scènes.

Concernant le lien entre les scènes *National* et *Pilat*, les nouveaux actants du *Pilat* qui prennent de l'importance sont PPT (association Pilat Pour Tous, de défense des loisirs motorisés), l'actant générique *Les pratiquants de LM*, le PNR Pilat (l'organisme de gestion du parc naturel, anti-motorisé) et le *Comité chemins Pilat* (neutre).

Au niveau de la scène de *La Grave*, le lien entre *National* et *La Grave* est assuré avant tout par un actant : CX, élu anti-motorisé.

Les liaisons entre scènes locales distinctes sont assurés par les actants que nous avons déjà cités pour le lien entre chaque scène locale et la scène *National*. Remarquons que contrairement aux liaisons *Chambarans-Pilat* et *Chambarans-La Grave*, les actants de la scène *National* prennent peu part à la liaison *Pilat-La Grave*.

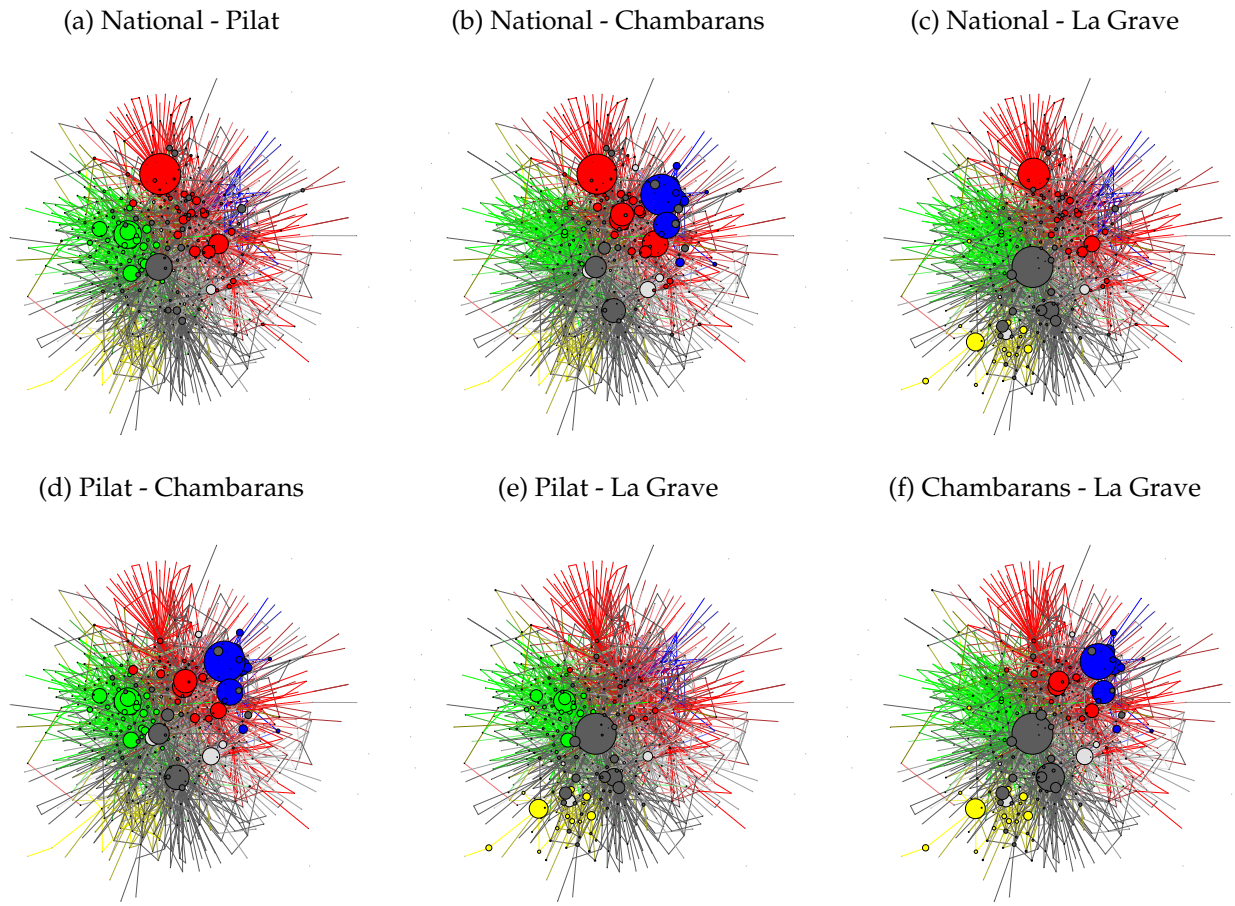


FIGURE 8.10: Q-mesures de courant entre les différentes scènes. La taille des nœuds est une fonction affine de la Q-mesure, normalisée de sorte que les tailles maximales et les tailles minimales soient identiques pour toutes les Q-mesures.

La figure 8.11 présente les Q-mesures de courant entre les camps pro- et anti-motorisés. Plusieurs collectifs pro- et anti-motorisés, que nous avons déjà cité concernant les liens entre scènes, font le lien entre ces deux camps. De manière originale, trois nouveaux actants entrent en haut du classement de la Q-mesure de courant : les *États généraux plein air*, NV et VJP. Les deux derniers actants sont deux militants anti-motorisés. Nous pouvons maintenant répondre à la question : le ministère de l'écologie (anti-motorisé mais proche du camp adverse) fait-il plus le lien entre les deux camps que la CALME, anti-motorisée et bien ancrée dans son camps. Les Q-mesures de courant par rapport au lien *Anti-motorisés-Pro-motorisés* donne 0.27 pour la CALME et seulement 0.04 pour le ministère de l'écologie. Ainsi, la CALME reste plus incontournable en ce qui concerne la liaison entre les deux camps. Ceci est dû au fait qu'un grand nombre d'actants anti-motorisés sont reliés au réseau uniquement (ou presque) par leur lien avec la CALME. En revanche, le ministère de l'écologie bien que positionné entre les deux camps ne possède pas cette position d'exclusivité.

(a) Pro-motorisés - Anti-motorisés

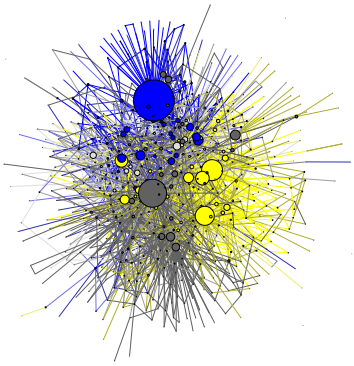


FIGURE 8.11: Q-mesures de courant entre les différents camps. La taille des nœuds est une fonction affine de la Q-mesure, normalisée de sorte que les tailles maximales et les tailles minimales soient identiques pour toutes les Q-mesures.

8.8 Interprétation des résultats

Dans la section précédente, nous avons appliqués au réseau des outils d'analyse structurale (spatialisations et centralités). Dans la présente section, nous allons voir comment le sociologue se saisit de ces résultats pour mettre en lumière certains aspects de la controverse autour des loisirs motorisés hors route. Nous donnons ici plusieurs exemples révélateurs,

sans prétendre à l'exhaustivité. Pour un exposé complet sur les résultats obtenus par le sociologue, le lecteur pourra consulter la thèse de Lisa Haye [Hay12].

8.8.1 Le cœur du réseau

Les résultats de centralité et Q-mesures ont montré qu'un faible nombre d'actants se retrouvaient de manière récurrente avec les centralités les plus importante. Ces actants forment ce que nous avons appelé le cœur du réseau social autour des loisirs motorisés hors route. Nous avons extrait les sous graphes induits par les 26 actants présentant les plus fortes valeurs pour la centralité α d'une part, et la centralité de courant d'autre part. Nous présentons ces graphes dans la figure 8.12. Les acronymes des différents collectifs du cœur du réseau sont donnés dans la table 8.5.

D'après les mesures, le cœur du réseau est constitué principalement d'actants des scènes *Autre* (formée en grande partie par des actants non-humains), *National* et *Pilat*. La scène *Local* (en gris clair) comporte aussi un actant central, il s'agit de l'actant *Pratiquants de loisirs motorisés*, ce qui est cohérent. Enfin, les actants des scènes *Chambarans* et *La Grave* semblent être placés, dans leur totalité, en périphérie du réseau.

On remarque que les deux camps anti- et pro-motorisés sont représentés de façon relativement équilibrée dans le cœur du réseau en terme de nombre d'actants. Du côté du camp pro-motorisé, ce sont presque exclusivement les collectifs et associations qui sont présents tandis qu'au niveau du camp anti-motorisés, les individus en tant que tels viennent appuyer les associations. On note que certains actants non-humains tiennent aussi une place centrale dans le réseau, c'est le cas des loisirs motorisés, du bruit, du quad et de la moto ainsi que les deux textes de lois que sont la Loi de 1991 et la Circulaire Olin, sur lesquels nous revenons dans la section 8.8.3.

LM	Loisirs Motorisés
Codever	Collectif de Défense des Loisirs Verts
CALME	Coordination pour l'Adaptation des Loisirs Motorisés à l'Environnement
FFM	Fédération Française de Moto
PPT	Pilat Pour Tous
Coramuc	Confédération des randonneurs motorisés et usagers des chemins

Table 8.5: Acronymes des différents collectifs au cœur du réseau.

(a) cœur du réseau d'après la centralité α (b) cœur du réseau d'après la centralité de courant

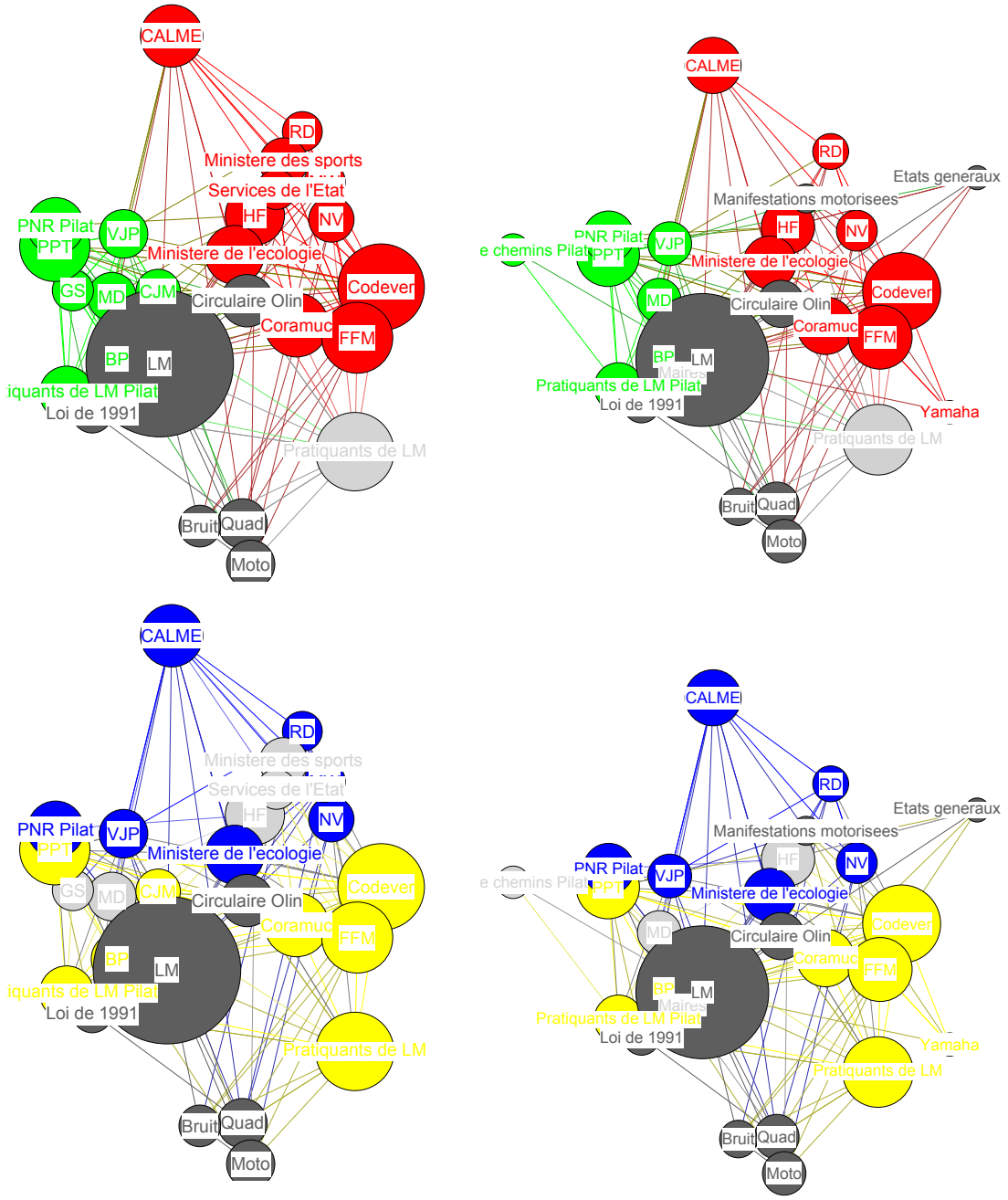


FIGURE 8.12: Graphes induits par les 26 actants de centralité (α à gauche, et de courant à droite) les plus importantes. Les couleurs dans les graphiques du haut correspondent aux scènes des actants, les couleurs en bas correspondent aux camps. Les noms des personnes ont été anonymisés. La signification des acronymes est donnée dans la table 8.5.

8.8.2 Le conflit, créateur de lien

Les résultats de la spatialisation d'après l'algorithme de Fruchterman-Reingold (voir figure 8.5a) ainsi que les différentes mesures de centralités indiquent que, outre les actants locaux qui n'appartiennent à aucune scène spécifique (*e.g.* l'actant *Élus Locaux*) et les non-humains (contenus dans *Autre*), les actants occupant le cœur du réseau appartiennent aux scènes *Pilat* et *National*. D'autre part, le nombre d'actants impliqués dans la controverse est largement plus important pour ces deux dernières scènes que pour les scènes locales *Chambarans* et *La Grave*. Pour compléter ce constat, la spatialisation d'après l'algorithme Fruchterman-Reingold par scènes (figure 8.6a) montre des différences significatives dans la quantité de relations que les différentes scènes entretiennent entre elles : les scènes *Pilat* et *National* sont reliées par un grand nombre de relations directes, la scène *National* possède aussi de nombreux liens avec *Chambarans* ; *La Grave*, enfin, semble dépourvue de lien direct avec les scènes *Chambarans*, *Pilat* et *National*. D'après Lisa Haye, ce phénomène montre que le conflit favorise la création de lien entre actants. En effet, *La Grave* est une scène où peu de conflits existent autour des loisirs motorisés hors route, ce qui explique sa relative déconnexion des autres scènes. À l'opposé, *Pilat* est une scène fortement conflictuelle, ce qui justifie sa forte connexion avec la scène *National*.

8.8.3 Des objets qui mobilisent

Deux règlements nationaux forment des points centraux dans le réseau : la *Loi de 1991* (dite *Loi Lalonde*) et la *Circulaire Olin*. La Loi de 1991 régit la circulation des loisirs motorisés hors route. La Circulaire Olin, datant de 2005, vient compléter la Loi de 1991 en ajoutant notamment des dispositions sur les quads, ayant été homologués en 2003, et en introduisant la notion de carrossabilité *. D'après leur lieu d'émanation, ces deux textes appartiennent à la scène nationale. Comme semble l'indiquer le placement de ces deux actants dans la figure 8.12, la réalité du réseau est plus complexe puisque la loi est placée plus proche des actants de la scène *Pilat* que de ceux de la scène *National*. Pour compléter ce constat, nous visualisons les ego-réseaux * des deux actants dans la figure 8.13. La figure semble indiquer que les deux textes jouent des rôles particulièrement différents.

Pour confirmer ces observations visuelles, nous donnons les mesures de Q-courant entre la scène *National* et les scènes locales dans la table 8.6 et les Q-mesures α par rapport aux

*La carrossabilité définit si un chemin peut être emprunté ou non par les véhicules motorisés.

*L'ego-réseau d'un actant i dans le graphe $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ est le graphe $(\mathcal{S}_{ego}(i), \mathcal{E}_{ego}(i))$ dont l'ensemble de nœuds $\mathcal{S}_{ego}(i)$ correspond au nœud i ainsi que ces voisins : $\mathcal{S}_{ego}(i) = \{i\} \bigcup \mathcal{N}_i$ et l'ensemble des arêtes $\mathcal{E}_{ego}(i)$ rassemble les arêtes du réseau original dont les deux nœuds appartiennent à $\mathcal{S}_{ego}(i)$: $\mathcal{E}_{ego}(i) = \mathcal{E} \bigcap \mathcal{S}_{ego}(i) \times \mathcal{S}_{ego}(i)$

scènes dans la table 8.7. Les Q-mesures α confirment que la loi est plus proche du *Pilat* que de la scène *National*. Cependant, contrairement à ce que les observations pouvaient laisser penser, la Circulaire Olin apparait être plus importante dans le lien entre la scène *National* et les scènes locales. De manière plus surprenante, la Circulaire Olin est aussi plus proche des scènes locales que la Loi de 1991. L'interprétation de ces différences est la suivante : d'après Lisa Haye, l'ensemble des actants semblent accepter la Loi de 1991 tandis que la Circulaire Olin créée du débat puisqu'elle restreint l'accès de certains chemins aux véhicules motorisés. Les anti-motorisés sont donc en faveur de cette circulaire alors que les pro-motorisés sont contre. Par conséquent, les actants se positionnent beaucoup plus par rapport à la Circulaire Olin que par rapport à la Loi de 1991, plus consensuelle. Ceci explique le fait qu'elle prenne une place plus importante sur la scène *National*, où sont échangés les arguments stéréotypés de la controverse. De plus, les acteurs y font référence au niveau local puisqu'elle impacte le comportement des actants dans leur pratique, notamment via la notion de carrossabilité.

Cette discussion permet de souligner l'insuffisance de l'observation visuelle pour inférer des conclusions sur le réseau. L'observation visuelle est utile puisqu'elle permet d'appréhender une masse d'information importante, pour intuiter des résultats difficiles à obtenir directement dans les données. C'est ensuite par une combinaison entre les mesures quantitatives et la connaissance du sociologue que l'on peut obtenir des résultats fiables.

(a) Loi de 1991 (b) Circulaire Olin

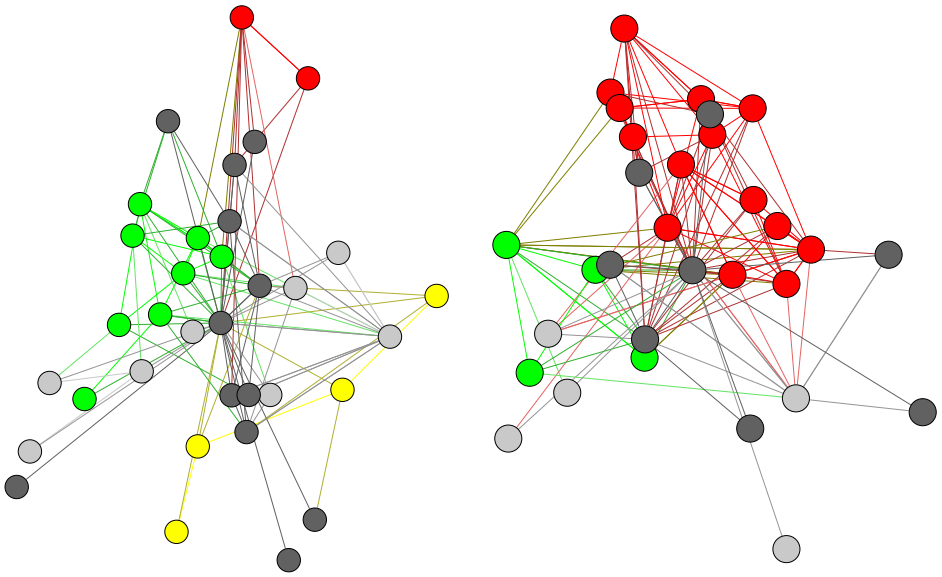


FIGURE 8.13: Ego-réseaux de la Loi de 1991 et de la Circulaire Olin.

	National-Pilat	National-Chambarans	National-La Grave
Loi de 1991	0.029	0.017	0.071
Circulaire Olin	0.040	0.035	0.038

TABLE 8.6: Q-mesures de courant des Loi de 1991 et Circulaire Olin par rapport aux différentes scènes.

	National	Pilat	Chambarans	La Grave
Loi de 1991	0.026	0.032	0.007	0.019
Circulaire Olin	0.043	0.039	0.011	0.013

TABLE 8.7: Q-mesures α des actants Loi de 1991 et Circulaire Olin par rapport aux différentes scènes

8.8.4 Lien entre positions topologiques et opinions

Dans une controverse, une objectivité qui se baserait sur une connaissance totale et certaine est impossible. Chaque actant possède plutôt une vision partielle du réseau qui dépend de son positionnement au sein de ce dernier. Ce positionnement est lié au rôle que l'acteur occupe dans le réseau. Il serait logique de penser que la vision que l'on a du réseau soit corrélée à l'opinion que l'on porte sur l'objet de la controverse, ici les loisirs motorisés hors route.

La spatialisation par l'algorithme de Fruchterman-Reingold place les actants connectés entre eux proches les uns des autres. La figure 8.5b montre que, par cet algorithme, les nœuds du camp *Anti-motorisé* sont largement rassemblés dans la partie haute à gauche tandis que les nœuds du camp *Pro-motorisé* sont plutôt groupés en bas à droite. Remarquons que le positionnement des actants du camp *Neutre* est moins tranché, bien que les actants neutres semblent être plus proches de actants anti-motorisés que des actants pro-motorisés.

Pour obtenir une réponse significative concernant l'hypothèse du lien entre positionnements topologique et opinions, il serait nécessaire de mesurer la corrélation entre proximité et appartenance au même camp. Ceci est laissé pour de futurs travaux.

Lorsque la corrélation entre positionnement topologique et opinion a été démontré, il reste la question de causalité : un actant est-il en faveur des loisirs motorisés car il fréquente des actants du camp *Pro-motorisé* ou fréquente-il plutôt ces actants car il est avant tout en faveur des loisirs motorisés ? L'étude détaillée de la question sort du cadre de ces travaux. Cependant, pour illustrer notre discussion, nous prenons l'exemple de deux acteurs particuliers du réseau : DR est militant de la CALME-MW (association anti-motorisé) et HF est un gestionnaire ayant une position neutre. D'après les entretiens effectués, DR a une opinion relativement caricaturale de la pratique des loisirs motorisés tandis que HF possède une connaissance plus fine de ces mêmes pratiques. Premièrement, nous nous interrogeons sur leur proximité respective avec le camp pro-motorisé. Nous affichons les ego-réseaux des deux actants dans la figure 8.14. D'après la figure, HF est proche d'un plus grand nombre d'actants du camp pro-motorisé que DR. Les Q-mesures α viennent confirmer ce fait (voir table 8.8). Ceci valide, pour ces actants particuliers, la corrélation entre la positionnement

dans le réseau et opinion sur la question des loisirs motorisés.

En ce qui concerne le lien de causalité entre positionnement et opinion, nous ne pouvons pas obtenir de réponse avec des données statiques. Dans ce cas, seule la connaissance par le sociologue de l'histoire des acteurs peut nous éclairer : HF est un gestionnaire arrivé dans le réseau avec une opinion plutôt anti-motorisée. Son rôle de gestionnaire et son implication dans le réseau l'ont amené à rencontrer les divers acteurs anti- et pro-motorisés. Ces entretiens lui ont demandé de prendre en compte la diversité des points du vue des acteurs, ce qui l'a amené à une position très mesurée sur la question des loisirs motorisés.

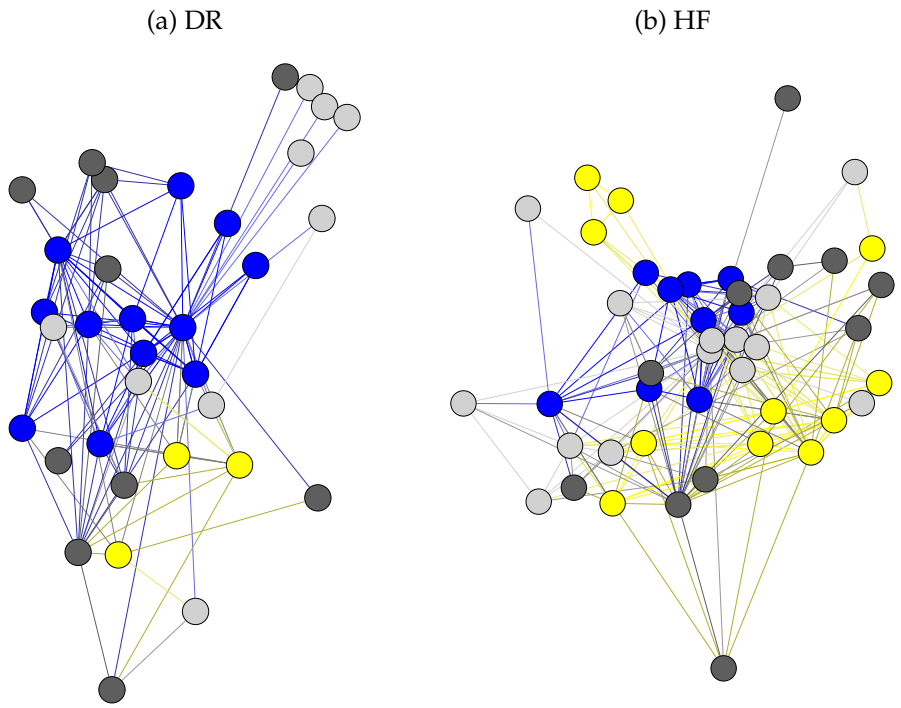


FIGURE 8.14: Ego-réseaux de DR et HF.

	Anti-motorisé	Neutre	Pro-motorisé
DR	0.041	0.020	0.022
HF	0.040	0.041	0.039

TABLE 8.8: Q-mesures α des actants *DR* et *HF* par rapport aux différents camps

8.8.5 Limites de l'interprétation

Avant de terminer la section, nous souhaiterions émettre une réserve quant à l'interprétation des nos résultats de calculs de centralité. Cette réserve porte sur les choix d'agrégation de données présentés dans la section 8.4. Nous résumons ces choix : une arête de poids constant a été placée entre deux nœuds dès lors que ces deux nœuds possèdent au moins une relation entre eux. De plus, la direction des relations a été abandonnée dû à la difficulté rencontrée pour la déterminer de façon sûre. Ces choix s'avèrent parfois sensiblement éloignés de la réalité. Nos calculs de centralité sont basés sur l'hypothèse selon laquelle la présence d'une arrête entre deux nœuds correspond à la transmission d'information et/ou à l'exercice d'influence. Prenons l'exemple des deux relations suivantes :

- NV $\longrightarrow$ Quad (Connaissance technique),
- Chasseurs de La Grave $\longrightarrow$ Quad (Fonctionnel),

où la nature de la relation est donnée entre parenthèses. D'après les choix d'agrégation, NV échangerait de l'information via l'actant Quad avec les Chasseurs de La Grave, ce qui d'après les relations données n'a pas de sens. Ceci met en évidence l'importance de la préservation du sens des relations. Lors du codage des données, les mesures de centralité n'avaient pas été envisagées, aussi les directions codées ne correspondent pas toujours à la transmission d'information, ce qui explique la raison pour laquelle nous ne les avons pas prises en compte. Un travail de recodage sera nécessaire pour pouvoir utiliser de façon plus sûre les résultats obtenus. Les méthodes d'analyse gardent cependant leur validité.

8.9 Conclusions et Perspectives

Ce chapitre a permis de présenter une étude de cas faisant appel aux outils d'analyse structurale des réseaux sociaux basés notamment sur la théorie des graphes.

Nous avons ainsi présenté et utilisé la méthode de spatialisation basée sur l'algorithme de Fruchterman-Reingold. Nous avons adapté cette méthode pour mettre en valeur l'appartenance des actants du réseau à leur scène ou à leur camp. Nous avons appelé ce nouvel algorithme l'algorithme de Fruchterman-Reingold par groupe.

Pour compléter ces outils, nous avons présenté deux centralités permettant de déterminer l'importance des acteurs dans le réseau. La centralité α, radiale, mesure la proximité d'un actant avec le reste du réseau (et donc sa capacité à obtenir de l'information rapidement) ; tandis que la centralité de courant, médiane, indique la capacité à se trouver sur le chemin

de l'information (et donc à pouvoir la contrôler, à choisir de la transmettre ou de la retenir). Nous avons adapté la centralité α pour quantifier la proximité d'un actant vis à vis d'une scène ou d'un camp et la centralité de courant pour déterminer quels actants assumaient le rôle d'intermédiaire entre deux scènes ou deux camps. Ces nouvelles mesures sont baptisées Q-mesures de courant et α, par analogie avec des mesures de type similaire.

L'application des outils de l'analyse structurale au réseau social sur les loisirs motorisés hors route nous a permis d'obtenir un certain nombre de résultats que nous résumons ici. En ce qui concerne le lien entre les scènes, la spatialisation par scènes et les Q-mesures de courant entre scènes nous ont permis de conclure qu'il n'existait pas de relation directe entre les scènes locales. Le lien entre ces scènes est effectué principalement par la scène *National* et par les actants non-humains. De plus, nous avons vu que le réseau possède une structure cœur/périphérie. Le cœur du réseau est principalement occupé par des actants de la scène *National*, du *Pilat* et des non-humains. Ainsi, il existe un lien fort entre la conflictualité d'une partie du réseau et la quantité de liens au sein et émanant de cette partie. L'étude des acteurs centraux a aussi mis en lumière l'importance des actants non-humains (habituellement négligés dans la littérature) dans le réseau, tels que la loi de 1991 et la Circulaire Olin. Enfin, nous avons pu constater une corrélation entre le positionnement des actants dans le réseau et leur opinion : deux actants d'opinion proche ont tendance à se retrouver à proximité dans le réseau.

Les perspectives de ces travaux ne manquent pas. Notamment, comme nous l'avons déjà signalé dans la section 8.8.5, il sera nécessaire de reprendre le codage des données. Nous reprendrons les sens des relations pour qu'ils correspondent aux influences entre actants. Ceci est nécessaire pour la validité des mesures de centralité. De plus, le codage des données fait usage d'actants génériques tels que *Quad* ou *Elus locaux*. Par les relations qu'ils entretiennent avec des actants non génériques, ces actants créent des ponts artificiels entre actants non connectés. Nous devrons revoir le codage pour supprimer ce type d'artefact.

Toujours concernant le prétraitement des données, il serait intéressant de faire une étude sur la sensibilité des mesures de centralité par rapport aux différents choix d'agrégation. Par exemple, nous pourrons envisager des poids différents suivant les types de relation.

Jusqu'à présent le codage des données n'inclut pas leur aspect temporel. Pourtant, cet aspect constitue une richesse importante. Les relations entre individus ne sont pas statiques, elles se font et se défont. Cette temporalité nécessite de répondre à de nouvelles questions, par exemple : comment définir la centralité d'un actant dans un réseau en mouvement ?

Conclusion

Chapitre 9

Conclusion

Cette thèse est consacrée à l'analyse de coordination et de robustesse de systèmes dynamiques multi-agents. Dans ce manuscrit, nous avons étudié plusieurs problèmes faisant intervenir le système de consensus linéaire.

Dans une première partie, nous avons étudié le système de consensus linéaire d'ordre 1. Nous avons établi de nouvelles conditions suffisantes portant sur les poids d'interaction du système permettant de garantir la convergence de l'ensemble des agents vers un état de consensus. Ces conditions sont basées sur deux hypothèses. Premièrement, nous avons considéré le graphe dont les arêtes correspondent aux poids d'interaction d'intégrale infinie sur $\mathbb{R}^+$. L'hypothèse de *connexité persistante* exige que ce graphe soit connexe. Ceci permet d'obtenir une quantité d'interaction suffisante entre tout sous ensemble d'agents S et son complémentaire. Deuxièmement, nous avons défini le ratio des poids d'interaction réciproque. Ce ratio correpond au maximum, pour S un sous ensemble d'agents, du quotient ayant pour numérateur la somme des poids d'interaction de S vers son complémentaire, et pour dénominateur la somme des poids d'interaction du complémentaire de S vers S. Ce ratio quantifie donc l'écart maximum entre l'influence de S sur son complémentaire et *vice versa*. Sous l'hypothèse de connexité persistante, nous avons montré que la vitesse de décroissance du diamètre du groupe d'agents est liée à ce ratio. L'hypothèse de *divergence lente des poids d'interaction réciproques* exige que ce ratio ne croisse pas trop vite. La croissance autorisée diminue avec le nombre d'agents. Notre résultat principal stipule que sous les hypothèses de *connexité persistante* et de *divergence lente des poids d'interaction réciproques*, la trajectoire du système converge vers un consensus. De plus, nous avons montré que pour certains systèmes particuliers, l'hypothèse de divergence lente des poids d'interac-

tion réciproques est nécessaire pour éviter que certains agents n'oscillent indéfiniment, ne convergeant ainsi pas vers un état de consensus.

Dans la deuxième partie, nous avons considéré un système de flocking d'ordre 2 où les vitesses sont régies par un système de consensus linéaire. Dans cette partie et contrairement à la précédente, les poids d'interaction sont des fonctions explicites des distances entre les agents. Nous avons étudié trois types d'interactions distincts modélisant la capacité des agents à communiquer. Dans le premier cas, dit des *interactions métriques*, les agents intéragissent entre eux lorsqu'ils sont à distance inférieure à un rayon d'interaction, constant dans le temps et identique pour tous les agents. Le graphe des interactions est alors appelé *graphe de proximité*. Dans le second cas, le rayon d'interaction est distinct pour chaque agent. Les rayons évoluent au cours du temps de manière aléatoire, indépendantes et sont identiquement distribués. Enfin, nous avons étudié le cas des *interactions topologiques*, inspiré d'une étude sur le vol des étourneaux. Dans ce dernier cas, les agents sont influencés par leurs m plus proches voisins. Le graphe des interactions devient alors non symétrique.

Dans les trois cas, nous avons déterminés des conditions suffisantes garantissant l'alignement asymptotique des vitesses des agents à un taux exponentiel. Notre approche est basée sur une étude de robustesse du graphe des interactions. Celle-ci permet de garantir une quantité d'interaction suffisante pour le flocking. Précisément, nous garantissons la préservation de la connexité dans le premier cas, de la connexité en moyenne dans le second cas, et de la présence d'un sous arbre couvrant dans le troisième cas. Nos conditions portent sur les positions et vitesses initiales uniquement. De plus, nos conditions autorisent la déconnexion d'arêtes non nécessaires à la préservation de la connexité des interactions. Dans chaque cas, nous avons exposé des méthodes pour évaluer les conditions suffisantes pour le flocking. Des simulations confirment la validité de ces méthodes. Enfin, nous avons cherché dans le cas des interactions métriques à déterminer les sources de conservatisme et d'amélioration potentielle des conditions obtenues.

Dans la troisième partie du manuscrit, nous avons présenté les résultats d'une collaboration avec une doctorante en sociologie. Ce travail porte sur une analyse du réseau social concernant la controverse autour de la pratique des loisirs motorisés hors route. Nous avons vu que le réseau social est un système dynamique multi-agents particuliers, mélangeant actants humains et non-humains. Par conséquent, une partie des théories utiles à l'étude des systèmes dynamiques multi-agents est adaptée pour adresser les questions liées à l'analyse des réseaux sociaux.

Le réseau social que nous avons étudié comporte deux camps : pro- et anti-motorisé. Les actants agissent sur plusieurs scènes : une scène nationale, où les collectifs des deux

camps s'échangent des arguments stéréotypés ; et des scènes locales, lieux des conflits de terrain. L'objectif du sociologue était d'une part de comprendre quelles sont les relations entre les différentes scènes et différents camps, et d'autre part de déterminer quels actants sont centraux dans le réseau.

Pour appuyer le sociologue dans sa démarche, nous avons présenté, adapté et appliqué plusieurs outils de l'analyse structurale des réseaux, basées en particulier sur la théorie des graphes.

Nous avons présenté l'algorithme de Fruchterman-Reingold, permettant de visualiser le réseau social en deux dimensions. Nous avons adapté cet algorithme en modifiant les longueurs idéales entre les actants de groupes (scènes ou camps) distincts. Ceci a permis de mettre en évidence la quantité de lien entre les différentes scènes et camps.

Nous avons complété ces algorithmes par des mesures de centralité. Après avoir constaté que les mesures de centralité historiques (la centralité d'intermédiarité et la centralité de proximité), basées sur les plus courts chemins traversant le graphe, n'étaient pas adaptées à notre contexte, nous les avons remplacées par des mesures plus pertinentes pour mesurer l'importance des actants dans un réseau d'influence ou de tranmission d'informations. La centralité de courant, de type médiane, permet de détecter les actants qui jouent un rôle d'intermédiaire au sein du réseau. La centralité α, de type radiale, complète la première en calculant la capacité des actants à atteindre rapidement les autres (pour les influencer ou pour obtenir de l'information). La première centralité est basée sur un modèle de chaîne de Markov. La seconde suppose que l'influence des actants est une combinaison linéaire de l'influence de ces voisins. Nous avons ensuite adapté la centralité α pour mettre en évidence l'importance des actants relativement à un groupe en particulier (scène ou camp). Nous avons aussi modifié la centralité de courant pour révéler l'importance des actants quant à leur rôle d'intermédiaire entre deux groupes particuliers.

L'application des outils de l'analyse structurale au réseau social étudié nous a amènés à un certain nombre de conclusions. Premièrement, la forte corrélation, pour l'ensemble des actants, entre la centralité radiale et la centralité médiane indique que le réseau possède une structure cœur/périphérie : un petit nombre d'actants constituent le cœur du réseau. Les actants du cœur possèdent à la fois des centralités médianes importantes et des centralités radiales importantes. Deuxièmement, les scènes présentes au cœur du réseau sont la scène nationale et celle du Pilat. Il s'agit aussi des scènes les plus conflictuelles. Nous avons donc inféré un lien de causalité entre la présence de conflits et la quantité de relations créées par les actants, sans pour autant conclure quant à la direction de la causalité. Troisièmement, nous avons vu par les calculs de centralité que les actants non-humains, souvent négligés dans la littérature sur les réseaux sociaux, jouent des rôles importants dans le réseau. Enfin, nous

avons observé une corrélation entre la proximité des acteurs dans le réseau et la proximité de leurs opinions.

Les problèmes que nous avons traités dans cette thèse donnent lieu à de nombreuses perspectives.

La suite logique de la première partie est de continuer à généraliser les conditions suffisantes pour le consensus de manière à se rapprocher de conditions nécessaires et suffisantes. Pour cela, une possibilité est de supposer que la réciprocité de l'influence entre les groupes d'actants est non plus instantanée mais différée dans le temps. Une autre piste de recherche consisterait à étendre nos conditions aux modèles de consensus non-linéaires.

Comme nous l'avons vu dans la deuxième partie, les conditions suffisantes pour le flocking pourraient être affinées. Notamment, des études locales devraient donner des résultats intéressants. Nous pouvons de plus étendre notre approche à des systèmes de flocking incluant une force de rappel entre les agents. En outre, notre approche pourrait être adaptée dans différents contextes. Par exemple, nous pourrions l'utiliser pour obtenir des preuves de convergence sur les algorithmes d'optimisation par essaims particulaires.

L'analyse structurale des réseaux sociaux est un domaine à la frontière entre sociologie et mathématiques. Dans ce domaine, beaucoup reste à faire. Les résultats que nous avons obtenus dans la troisième partie de ce manuscrit devront être appronfondis. Notamment, il sera nécessaire de reprendre le codage des données pour qu'il corresponde systématiquement à l'influence ou à la transmission d'informations entre actants. Outre les outils auquels nous avons fait appel, les algorithmes de détection de communautés (voir *e.g.* [MG11, BGLL08]) pourraient se révéler utiles pour comprendre quels sont groupes pertinents à considérer dans le réseau.

Bibliographie

[AB09] D. Angeli and P-A Bliman. Convergence speed of unsteady distributed consensus : Decay estimate along the settling spanning-trees. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(1) :1–32, 2009. [cited at p. 19, 110, 111, 115, 116]

[ACHL12] S. M. Ahn, H. Choi, S.-Y. Ha, and H. Lee. On collision-avoiding initial configurations to cucker-smale type flocking models. *Communications in Mathematical Sciences*, 10 :625–643, 2012. [cited at p. 60, 61, 63]

[ADF+05] G. Andersson, P. Donalek, R. Farmer, N. Hatziargyriou, I. Kamwa, P. Kundur, N. Martins, J. Paserba, P. Pourbeik, J. Sanchez-Gasca, R. Schulz, A. Stankovic, C. Taylor, and V. Vittal. Causes of the 2003 major grid blackouts in North America and Europe, and recommended means to improve system dynamic performance. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(4) :1922–1928, 2005. [cited at p. 6]

[BASCDW11] L. Briñon Arranz, A. Seuret, and C. Canudas De Wit. Collaborative Estimation of Gradient Direction by a Formation of AUVs. In *International ICST Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools*, page 8, Cachan, France, May 2011. [cited at p. 5]

[BCC+08] M. Ballerini, N. Cabibbo, R. Candelier, A. Cavagna, E. Cisbani, I. Giardina, V. Lecomte, A. Orlandi, G. Parisi, A. Procaccini, M. Viale, and V. Zdravkovic. Interaction ruling animal collective behavior depends on topological rather than metric distance : Evidence from a field study. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(4) :1232–1237, January 2008. [cited at p. 5, 18, 109]

[BE99] S.P. Borgatti and M.G. Everett. Models of core/periphery structures. *Social Networks*, 21 :375–395, 1999. [cited at p. 172]

[BE06] S. P. Borgatti and M. G. Everett. A graph-theoretic perspective on centrality. *Social Networks*, 28(4) :466–484, 2006. [cited at p. 157, 164]

[BGLL08] V. Blondel, J-L Guillaume, R. Lambiotte, and E. Lefebvre. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2008(1) :10008, Oct 2008. [cited at p. 194]

[BGP06] D. Bauso, L. Giarré, and R. Pesenti. Non-linear protocols for optimal distributed consensus in networks of dynamic agents. *Systems and Control Letters*, 55(11) :918 – 928, 2006. [cited at p. 27]

[BGP09] D. Bauso, L. Giarre, and R. Pesenti. Dissensus, death and division. In *acc*, pages 2307 –2312, june 2009. [cited at p. 26]

[BHJ09] M. Bastian, S. Heymann, and M. Jacomy. Gephi : An open source software for exploring and manipulating networks. In *International AAAI Conference on Weblogs and Social Media*, pages 361–362, 2009. [cited at p. 168]

[BHOT05] V. D. Blondel, J. M. Hendrickx, A. Olshevsky, and J. N. Tsitsiklis. Convergence in multiagent coordination, consensus, and flocking. In *cdc and ecc*, pages 2996 – 3000, dec. 2005. [cited at p. 30, 37]

[BL01] P. Bonacich and P. Lloyd. Eigenvector-like measures of centrality for asymmetric relations. *Social Networks*, 23(3) :191–201, 2001. [cited at p. 158]

[Bon72] P. Bonacich. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *Journal of Mathematical Sociology*, 2 :113–120, 1972. [cited at p. 158]

[BP79] A. Berman and R. J. Plemmons. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Academic Press, New York, 1979. also Classics in Applied Mathematics 9, SIAM, Philadelphia, 1994. [cited at p. 159]

[BW09] S. Bermudez and S. B. Wicker. Connectivity of finite wireless networks with random communication range nodes. In *IEEE International Conference on Communications*, pages 1–5, 2009. [cited at p. 104]

[CD11] F. Cucker and J-G Dong. A general collision-avoiding flocking framework. *tac*, 56(5) :1124 –1129, may 2011. [cited at p. 61, 63]

[CLR90] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. MIT Press and McGraw-Hill, 1990. [cited at p. 74]

[CM08] F. Cucker and E. Mordecki. Flocking in noisy environments. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 89(3) :278 – 296, 2008. [cited at p. 62, 63]

[Cor08] J. Cortés. Distributed algorithms for reaching consensus on general functions. *Automatica*, 44(3) :726–737, 2008. [cited at p. 28]

[CS07] F. Cucker and S. Smale. On the mathematics of emergence. *Japanese Journal of Mathematics*, 2 :197–227, 2007. [cited at p. 13, 14, 57, 63]

[CZZ11] L. Cao, Y. Zheng, and Q. Zhou. A necessary and sufficient condition for consensus of continuous-time agents over undirected time-varying networks. *tac*, 56(8) :1915–1920, 2011. [cited at p. 12, 32, 33, 40]

[DH96] R. Davidson and D. Harel. Drawing graphs nicely using simulated annealing. *ACM Transactions on Graphics*, 15(4) :301–331, 1996. [cited at p. 154]

[DM09] F. Dalmao and E. Mordecki. Cucker-Smale Flocking Under Hierarchical Leadership and Random Interactions. *ArXiv e-prints*, December 2009. [cited at p. 62, 63]

[ES00] R.C. Eberhart and Y. Shi. Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization. In *Congress on Evolutionary Computation*, volume 1, pages 84–88, 2000. [cited at p. 6]

[FFSN04] P. L. Flom, S. R. Friedman, S. Strauss, and A. Neaigus. A new measure of linkage between two sub-networks. *Connections*, pages 62–70, 2004. [cited at p. 165]

[Fie73] M. Fiedler. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23(2) :298–305, 1973. [cited at p. 80]

[Fil88] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988. Translated from the Russian. [cited at p. 27, 209]

[FR91] T. M. J. Fruchterman and E. M. Reingold. Graph Drawing by Force-directed Placement. *Software– Practice and Experience*, 21(11) :1129–1164, November 1991. [cited at p. 153]

[Fre79] L. C. Freeman. Centrality in social networks : conceptual clarification. *Social Networks*, 1 :215–239, 1979. [cited at p. 157]

[Fre80] L. C. Freeman. The gatekeeper, pair-dependency and structural centrality. *Quality and Quantity*, 14 :585–592, 1980. [cited at p. 157]

[Fre91] L. Freeman. Centrality in valued graphs : A measure of betweenness based on network flow. *Social Networks*, 13(2) :141–154, June 1991. [cited at p. 165]

[GR01] C. Godsil and G. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Springer, April 2001. [cited at p. 95, 208]

[Hay12] L. Haye. Les loisirs motorisés hors route, conflits, controverse et réseaux d'actants. *Thèse de doctorat*, December 2012. [cited at p. 140, 148, 149, 180, 213, 215]

[HH08] Q. Hui and W. M. Haddad. Distributed nonlinear control algorithms for network consensus. *Automatica*, 44(9) :2375 – 2381, 2008. [cited at p. 27]

[HHB10] Q. Hui, W. M. Haddad, and S. P. Bhat. Finite-time semistability, filippov systems, and consensus protocols for nonlinear dynamical networks with switching topologies. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 4(3) :557 – 573, 2010. [cited at p. 28]

[HJ85] R. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985. [cited at p. 205]

[HL09] S-Y Ha and J-G Liu. A simple proof of the cucker-smale flocking dynamics and mean-field limit. *Communications in Mathematical Sciences*, 7(2) :297–325, may 2009. [cited at p. 58]

[HLL09] S-Y Ha, K. Lee, and D. Levy. Emergence of time-asymptotic flocking in a stochastic cucker-smale system. *Communications in Mathematical Sciences*, 7 :453–469, 2009. [cited at p. 62, 63]

[HT12] J. Hendrickx and J. Tsitsiklis. Convergence of type-symmetric and cut-balanced consensus seeking systems. *tac*, PP(99) :1, 2012. [cited at p. 12, 28, 32, 34, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 51]

[JLM03] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *tac*, 48 :998–1001, 2003. [cited at p. 11, 29]

[Kat53] L. Katz. A new status index derived from sociometric analysis. *Psychometrika*, 18 :39–43, 1953. [cited at p. 160]

[KGV83] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220, 4598 :671–680, 1983. [cited at p. 154]

[Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 3rd edition, 2002. [cited at p. 27]

[KK89] T. Kamada and S. Kawai. An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing Letters*, 31(1) :7–15, apr 1989. [cited at p. 153]

[KM07] S. Kar and J. M. F. Moura. Sensor networks with random links : Topology design for distributed consensus. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56, 2007. [cited at p. 95]

[KS60] J.G. Kemeny and J.L. Snell. *Finite Markov Chains*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1960. [cited at p. 162]

[Lat05] B. Latour. *Reassembling the Social : An Introduction to Actor-network-theory (Clarendon Lectures in Management Studies)*. Oxford University Press, September 2005. [cited at p. 142]

[LG08] Z. Liu and L. Guo. Connectivity and synchronization of vicsek model. *Science in China Series F : Information Sciences*, 51 :848–858, 2008. 10.1007/s11432-008-0077-2. [cited at p. 13, 14, 58, 63]

[LJV+12] B. Latour, P. Jensen, T. Venturini, S. Grauwin, and D. Boullier. The whole is always smaller than its parts : A digital test of gabriel tarde's monads. *British Journal of Sociology*, 2012. [cited at p. 142]

[LLLR11] Z. Li, X. Liu, P. Lin, and W. Ren. Consensus of linear multi-agent systems with reduced-order observer-based protocols. *Systems and Control Letters*, 60(7) :510 – 516, 2011. [cited at p. 26]

[M.05] Abubakr M. *Graphs, Simplicial Complexes and Beyond : Topological Tools for Multi-agent Coordination*. PhD thesis, Georgia Tech Institute, USA, November 2005. [cited at p. 9]

[Mer94] R. Merris. Laplacian matrices of graphs : a survey. *Linear Algebra and its Applications*, 197-198 :143 – 176, 1994. [cited at p. 95]

[MG11] I.-C. Morarescu and A. Girard. Opinion dynamics with decaying confidence : Application to community detection in graphs. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 56(8) :1862 –1873, aug. 2011. [cited at p. 194]

[Mor04] L. Moreau. Stability of continuous-time distributed consensus algorithms, September 2004. Available electronically at `http://arxiv.org/abs/math/0409010`. [cited at p. 18, 19, 31, 33, 41, 110, 115]

[Mor05] L. Moreau. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Trans. Automatic Control*, 50(2) :169–182, Feb 2005. [cited at p. 27, 30, 37]

[MRR+53] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21 :1087–1092, 1953. [cited at p. 154]

[MU49] N. Metropolis and S. Ulam. The monte carlo method. *Journal of the American statistical Association*, 44(247) :335–341, 1949. [cited at p. 106]

[New03] M. E. J. Newman. A measure of betweenness centrality based on random walks. *eprint arXiv :cond-mat/0309045*, September 2003. [cited at p. 158, 162]

[Os06] R. Olfati-saber. Flocking for multi-agent dynamic systems : Algorithms and theory. *tac*, 51 :401–420, 2006. [cited at p. 59, 60, 63]

[OSFM07a] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1) :215–233, 2007. [cited at p. 11]

[OSFM07b] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95 :215–233, 2007. [cited at p. 29]

[OSM04a] R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans. Automatic Control*, 49(9) :1520–2533, September 2004. [cited at p. 31, 40, 66, 67]

[OSM04b] R. Olfati-Saber and R.M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9) :1520–1533, 2004. [cited at p. 15, 28, 30, 70]

[Pap91] Athanasios Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1991. [cited at p. 210]

[PKH10] J. Park, H.J. Kim, and S-Y Ha. Cucker-smale flocking with inter-particle bonding forces. *tac*, 55(11) :2617 –2623, nov. 2010. [cited at p. 60, 63]

[RB05] W. Ren and R. W. Beard. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies. *tac*, 50(5) :655–661, May 2005. [cited at p. 208]

[RBA05] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins. A survey of consensus problems in multi-agent coordination. *acc*, pages 1859–1864 vol. 3, 2005. [cited at p. 29]

[Rey87] C. W. Reynolds. Flocks, herds, and schools : A distributed behavioral model. *Computer Graphics*, 21(4) :25–34, 1987. [cited at p. 56, 64]

[RR08] L. Zhang R. Rousseau. Betweenness centrality and q-measures in directed valued networks. *Scientometrics*, 75 :575–590, 2008. [cited at p. 165]

[Sar09] A. Sarlette. *Geometry and Symmetries in Coordination Control*. PhD thesis, University of Liège, Belgium, January 2009. [cited at p. 5, 26]

[SH07] S. Sundaram and C.N. Hadjicostis. Finite-time distributed consensus in graphs with time-invariant topologies. In *acc*, pages 711 –716, july 2007. [cited at p. 28]

[TBA86] J. N. Tsitsiklis, D. Bertsekas, and M. Athans. Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms. *IEEE Trans. Automatic Control*, 31(9) :803–812, 1986. [cited at p. 29]

[TFMP05] A. L. Traud, C. Frost, P. J. Mucha, and M. A. Porter. Visualization of communities in networks. *Chaos, Gallery of Nonlinear Images*, 19(247), 2005. [cited at p. 155]

[The75] H. Theil. *Economic forecasts and policy*. North Holland, Amsterdam, 1975. [cited at p. 83, 86]

[Tsi84] J. N. Tsitsiklis. *Problems in Decentralized Decision Making and Computation*. PhD thesis, MIT, November 1984. Technical Report LIDS-TH-1424, Laboratory for Information and Decision Systems. [cited at p. 29]

[TSJ06] A. Tahbaz-Salehi and A. Jadbabaie. On consensus over random networks. In *cdc*, September 2006. [cited at p. 93, 95, 97]

[VCBJ+95] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.*, 75(6) :1226–1229, Aug 1995. [cited at p. 58, 61]

[VZ17] T. Vicsek and A. Zafeiris. Collective motion. *Reviews of Modern Physics*, submitted, preprint available : http ://arxiv.org/abs/1010.5017. [cited at p. 4]

[WH10] X. Wang and Y. Hong. Distributed finite-time χ-consensus algorithms formulti-agent systems with variable coupling topology. *Journal of Systems Science and Complexity*, 23(2) :209, 2010. [cited at p. 28]

[Wol63] J. Wolfowitz. Product of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices. *Proceedings of American Mathematical Society*, 14(5) :733–737, 1963. [cited at p. 205]

[WX10] L. Wang and F. Xiao. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 55(4) :950 –955, april 2010. [cited at p. 28]

[XJZ11] S. Xue, Z. Jiandong, and Y. Zhanmin. Heading consensus with collision avoidance for linearized vicsek model with a connected initial graph. In *Chinese Control Conference*, pages 4763 –4767, july 2011. [cited at p. 59]

[Yan11] X-S Yang. Review of metaheuristics and generalized evolutionary walk algorithm. *arXiv*, 1105.3668v1, may 2011. [cited at p. 154]

[YGSS12] T. Yang, H. F. Grip, A. Saberi, and A.A. Stoorvogel. Output consensus for networks of non-identical, non-introspective agents subject to actuator saturation. In *acc*, jun. 2012. [cited at p. 27]

[ZJP07] M.M. Zavlanos, A. Jadbabaie, and G.J. Pappas. Flocking while preserving network connectivity. In *cdc*, pages 2919 –2924, dec. 2007. [cited at p. 60, 63]

Annexes

Annexe A

Notations et notions élémentaires

A.1 Eléments d'algèbre et théorie des ensembles

Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille p. Pour A dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $A_{i,j}$ désigne le coefficient de la ligne i et de la colonne j. I_p désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. $\otimes$ désigne le produit de Kronecker : pour $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A \otimes B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{mp,nq}(\mathbb{R})$ définie par blocs de taille $p \times q$ avec le bloc d'indice i, j étant égale à la matrice $A_{ij}\, B$.

Une matrice carré $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, *i.e.* , $A\mathbf{1}_p = \mathbf{1}_p$ où $\mathbf{1}_p$ et le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 (si le contexte le permet on notera simplement $\mathbf{1} = \mathbf{1}_p$). Une matrice stochastique A telle que $\lim_{j \to +\infty} A^j$ est une matrice de rang 1 est dite ergodique [HJ85].

Théorème 75 (Wolfowitz [Wol63])**.** *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n matrices ergodiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que pour toute séquence finie d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_j$ dans $\{1, \ldots, n\}$, le produit matriciel $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_j}$ est ergodique. Alors, pour toute suite infinie (i_j) d'indice de $\{1, \ldots, n\}$, il existe un vecteur colonne c tel que*

$$\lim_{j \to +\infty} M_{i_j} M_{i_{j-1}} \cdots M_{i_1} = \mathbf{1} c^T$$

où c^T désigne le vecteur transposé de c.

La notation $|E|$, où E est un ensemble, désigne le cardinal de E. Les notations $\|x\|$ et $\langle x|y \rangle$, pour $x = (x_1, \ldots, x_d), y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, désignent (sauf mention contraire) la norme 2 et

le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^d$ respectivement, *i.e.*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \text{ et } \langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i\, y_i.$$

En dimension finie, la norme 2 est équivalente à la norme 1 et on a pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{d}\|x\| \tag{A.1}$$

où $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$.

Lorsque A est une assertion logique, on note $\chi(A)$ la fonction caractéristique de A, *i.e.*

$$\chi(A) = 1 \text{ si } A \text{ est vraie et } 0 \text{ sinon.}$$

A.2 Eléments de la théorie des graphes

Un graphe G est un couple $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ consistant en un ensemble de *nœuds* $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ et un ensemble d'*arcs* $\mathcal{E} \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. On supposera que $\mathcal{E}$ est antiréflexif, *i.e.* $\forall i \in \mathcal{N}, (i,i) \notin \mathcal{E}$. On note Γ l'ensemble de tels graphes. On dit que G est *symétrique* ou *non dirigé* lorsque pour tout $i, j \in \mathcal{N}$, $(i,j) \in \mathcal{E}$ <u>*ssi*</u> $(j,i) \in \mathcal{E}$. Dans ce cas, les arcs sont appelés *arêtes*. Lorsque $(i,j) \in \mathcal{E}$, on dit que i est un *voisin entrant* de j et j est un *voisin sortant* de i. L'ensemble des voisins entrant (respectivement sortant) d'un nœud est son *voisinage* entrant (respectivement sortant). On note $\mathcal{N}_i^+ = \{j|(i,j) \in \mathcal{E}\}$ et $\mathcal{N}_i^- = \{j|(j,i) \in \mathcal{E}\}$. Lorsque le graphe est symétrique, ces deux ensembles sont égaux, on note alors simplement $\mathcal{N}_i$ et on parle de voisinage d'un nœud. Pour un sous ensemble de nœuds $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$, on définit de manière analogue les ensembles de voisins sortants et entrants comme l'union des voisins de chaque nœud :

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}}^+ = \bigcup_{i \in \mathcal{S}} \mathcal{N}_i^+ \text{ et } \mathcal{N}_{\mathcal{S}}^- = \bigcup_{i \in \mathcal{S}} \mathcal{N}_i^-.$$

Un *chemin* de i à j est une séquence de nœuds $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ telle que $i_1 = i$, $i_p = j$ et $\forall k \in \{1, \ldots, p-1\}, (i_k, i_{k+1}) \in \mathcal{E}$; $p-1$ est appelé sa longueur. La *distance (topologique)* entre deux nœuds i et j est la longueur du plus court chemin allant de i à j. Nous notons $Chemins_G(i,j)$ (ou $Chemins(i,j)$ si aucune ambigüité est possible) l'ensemble des chemins de i à j dans le graphe G. Dans ce manuscrit, nous considérons uniquement les chemins sans boucle : pour tout $k, k' \in \{1, \ldots, p-1\}$, $k \neq k'$ implique que $i_k \neq i_{k'}$. Un graphe est dit *fortement connexe* lorsque pour tout couple (i,j), il existe un chemin de i à j dans le graphe ; si le graphe est symétrique, on dit simplement qu'il est *connexe*. Un sous graphe couvrant de G

est un graphe $G' = (\mathcal{N}, \mathcal{E}')$ tel que $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$. Un graphe possédant un sous graphe couvrant (fortement) connexe est (fortement) connexe. Un *cycle* est un chemin de i à i. Un *arbre* est un graphe sans cycle tel qu'il existe un nœud r tel que pour tout $j \in \mathcal{N} \setminus \{r\}$, il existe un chemin de r à j ; un tel nœud est appelé *racine* de l'arbre. La profondeur D de l'arbre est la longueur maximale de l'ensemble des plus courts chemins de la racine r au nœud i pour $i \in \mathcal{N}$. Soit I un ensemble d'indices potentiellement indénombrable et $(G_i)_{i \in I}$ une suite de graphe ayant pour ensemble de nœuds $\mathcal{N}$. On appelle *union* de ces graphes le graphe dont l'ensemble d'arcs est l'union des ensembles des arcs des graphes :

$$\bigcup_{i \in I} G_i = (\mathcal{N}, \bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i).$$

Le *graphe complet d'ordre n* est le graphe $(\mathcal{N}, \mathcal{N} \times \mathcal{N})$.

A.3 Eléments de la théorie algébrique des graphes

Un *graphe pondéré* G est un triplet $(\mathcal{N}, \mathcal{E}, A)$ où $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ est un graphe et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_{ij} > 0$ <u>*ssi*</u> $(j, i) \in \mathcal{E}$. À un graphe $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$, on associe le graphe pondéré canonique de matrice A où $A_{ij} = 1$ <u>ssi</u> $(j, i) \in \mathcal{E}$ et 0 autrement. Cette matrice est appelé la *matrice d'adjacence* du graphe. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de ce type, *i.e.* les matrices de $\mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ ayant une diagonale nulle. De cette façon, les notions définies à partir des graphes pondérés s'étendent directement aux graphes en considérant leurs graphes pondérés canoniquement associés. Dans les graphes pondérés, la longueur d'un chemin est la somme des poids des arêtes du chemin. Pour deux graphes pondérés G et G' d'ensemble de nœuds $\mathcal{N}$ et de matrice d'adjacence A et A', on dit que G' est un sous graphe couvrant de G lorsque pour tout $i, j \in \mathcal{N}$, on a $A'_{ij} \leq A_{ij}$. On dit qu'un graphe pondéré est symétrique lorsque sa matrice d'adjacence l'est. On s'intéresse aux spectres de la matrice d'adjacence A, on note les valeurs propres de A par ordre décroissant sur leur partie réelle :

$$\mathcal{R}e(\lambda_1(A)) \geq \mathcal{R}e(\lambda_2(A)) \geq \ldots \geq \mathcal{R}e(\lambda_n(A)).$$

Le *degré entrant* d'un nœud i est $\sum_{j \in \mathcal{N}} A_{ij}$, on note d_i^-. Le *degré sortant* d'un nœud i est $\sum_{j \in \mathcal{N}} A_{ji}$, on note d_i^+. Lorsque A est symétrique, degrés entrant et sortant sont égaux, on parlera simplement de degré du nœud i et on notera d_i. On note $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ le sous ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{A}$. On dit que le graphe est *équilibré* lorsque pour tout $i \in \mathcal{N}, d_i^+ = d_i^-$. Les graphes dont la matrice d'adjacence est symétrique sont équilibrés. On note D^+, D^- et D les matrices diagonales dont le i-ème coefficient diagonal est d_i^+, d_i^- et d_i, respectivement.

La *matrice Laplacienne* du graphe est définie par

$$L = D^- - A.$$

Lorsque, par l'utilisation simultanée de plusieurs graphes, les notations peuvent porter à confusion, nous utiliserons les notations $A(G)$, $D^-(G)$, $D^+(G)$, $L(G)$, etc. On note les valeurs propres de la matrice Laplacienne dans l'ordre croissant de leur partie réelle :

$$0 = \mathcal{R}e(\lambda_1(L)) \leq \mathcal{R}e(\lambda_2(L)) \leq \ldots \leq \mathcal{R}e(\lambda_n(L)).$$

On utilisera aussi la notation $\lambda_i(G) = \lambda_i(L)$ pour $i \in \mathcal{N}$, lorsque le lien entre le graphe G et la matrice L est explicite. Le spectre de L,*i.e.* l'ensemble des valeurs propres de L, est noté $Sp(L)$.

Proposition 76. *La matrice Laplacienne vérifie les propriétés suivantes :*

- *Toutes les parties réelles des valeurs propres du Laplacien sont positives :* $\mathcal{R}e(Sp(L)) \subset \mathbb{R}^+$.
- *Sa plus petite valeur propre est* 0, *associé au vecteur propre* $\mathbf{1}$ *:* $L\mathbf{1} = 0$.

Dans le cas où le graphe est équilibré, on a de plus la proposition suivante :

Proposition 77. *Lorsque le graphe est équilibré, on a* $L^T\mathbf{1} = 0$.

On appelle $\lambda_2(L)$ la *connexité algébrique* du graphe G. D'après la proposition suivante, elle permet de mesurer la qualité de la connexité du graphe.

Proposition 78. *La connexité algébrique possède les propriétés suivantes :*

- *[RB05]* $\lambda_2(L) > 0$ *ssi le graphe possède un sous arbre couvrant.*
- *Pour* G *et* G' *deux graphes pondérés symétriques de matrices Laplaciennes* L *et* L'*, si* G' *est un sous graphe couvrant de* G *alors* $\lambda_2(L) \geq \lambda_2(L')$.

Dans le cas ou le graphe est équilibré, la matrice $\frac{L+L^T}{2}$ est une matrice Laplacienne d'un graphe symétrique. Nous avons la propriété suivante :

Proposition 79 ([GR01])**.** *La matrice Laplacienne* L *d'un graphe pondéré symétrique et connexe vérifie la propriété suivante*

$$\min_{\substack{\delta \neq 0 \\ \mathbf{1}^T\delta = 0}} \frac{\delta^T L \delta}{\|\delta\|^2} = \lambda_2(L).$$

Lorsque l'ensemble des degrés entrants d'un graphe sont identiques, *i.e.* $D^- = mI_n$ où $m \in \{1, \dots, n\}$ est une constante, le graphe est dit m-régulier. On a alors pour $i \in \mathcal{N}$,

$$\lambda_i(L) = m - \lambda_i(A).$$

A.4 Eléments de la théorie des systèmes dynamiques

Nous considérons le système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), t \in \mathbb{R}^+, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n, \tag{A.2}$$

où x^0 est une condition initiale donnée et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Nous avons le résultat classique suivant.

Théorème 80. *Supposons f continue par morceaux en t et telle qu'il existe $L > 0$ vérifiant*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Alors, il existe une unique fonction x dérivable sur $\mathbb{R}^+$ solution du système (A.2).

On apelle cette solution la trajectoire du système et pour $i \in \{1, \dots, n\}$, la i-ème fonction coordonnée $x_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée i-ème trajectoire du système (A.2). Pour un temps $t > 0$, $x(t)$ est appelé état du système au temps t. Nous préciserons cette nomenclature en fonction de ce que représente la variable x suivant le contexte. Lorsque f n'est pas continue, le système (A.2) n'est pas bien défini. On lui préfère alors sa forme intégrale (étant équivalente lorsque f est continue)

$$x(t) = x^0 + \int_0^t f(s, x(s))ds, \ t \in \mathbb{R}^+, \ x^0 \in \mathbb{R}^n. \tag{A.3}$$

Une solution du système (A.3) est dite solution de (A.2) au sens de *Carathéodory*. Considérons le cas particulier où f est linéaire en x, on note alors pour $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t, x(t)) = A(t)x(t)$ où $A(t)$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 81 ([Fil88])**.** *Supposons A sommable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}^+$. Alors le système (A.3) admet une unique solution appelée, de même que précédemment, trajectoire du système.*

A.5 Eléments de la théorie des processus stochastiques

Nous présentons dans cette section les éléments nécessaires à la compréhension du chapitre 5 qui porte sur l'étude de processus stochastiques en temps discret. Pour une introduction plus complète, voir par exemple [Pap91].

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où

- Ω est un ensemble appelé *univers*,
- $\mathcal{F}$ est une tribu (ou σ-algèbre) sur Ω (*i.e.* un ensemble de parties de Ω non vide, stable par complémentaire et par union dénombrable) dont les éléments sont appelés *événements* et
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ est une fonction telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et pour des évènements $A_1, A_2, \ldots$ disjoints on a $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$.

On se donne un tel espace de probabilité.

Proposition 82. *Pour $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'évènements on a*

$$\mathbb{P}(\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{i\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un *espace mesurable* est un ensemble muni d'une tribu sur cet ensemble. Une fonction X de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est dite *mesurable* lorsque pour tout $B \in \mathcal{E}$, l'image réciproque $X^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{F}$. La fonction X est alors appelée *variable aléatoire*. Un *processus stochastique* discret est une suite indexée sur $\mathbb{N}$ de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans un ensemble E. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique. Pour un $\omega \in \Omega$ donné, on dit que $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{N}}$ est une *réalisation* du processus stochastique.

Un *processus de Markov* est un processus stochastique vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = x | X_0, X_1, \ldots, X_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = x | X_t),$$

où $\mathbb{P}(X|Y)$ désigne la probabilité de X sachant Y et $X_0, X_1, \ldots, X_t$ désigne l'événement intersection $X_0 \bigcap X_1 \bigcap \cdots \bigcap X_t$. On dit que des variables $X_0, X_1, \ldots$ sont indépendantes et identiquement distribuées lorsqu'elles suivent la même loi de probabilité, *i.e.*

$$\forall B \in \mathcal{E}, \forall i, j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_i \in B) = \mathbb{P}(X_j \in B),$$

et sont mutuellement indépendantes, *i.e.*

$$\forall B, C \in \mathcal{E}, \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(X_i \in B, X_j \in C) = \mathbb{P}(X_i \in B)\mathbb{P}(X_j \in C).$$

L'espérance d'une variable aléatoire X est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

et sa variance est

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Pour deux variables aléatoires X et Y mutuellement indépendantes, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Proposition 83 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Considérons X une variable aléatoire à valeurs réelles. Pour tout réel positif α, on a*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma_X^2}{\alpha^2}.$$

Annexe B

Matériel complémentaire

Nous présentons dans les tables suivantes les informations détaillées concernant la nature des relations. La table B.1 présente les informations associées à chaque type de relation (code, type, catégorie). La table B.2 donne les définitions précises de ces types de relations.

Différentes natures de relations [Hay12]

Code	Type	Catégorie
1101	Fonctionnel	Régimes de Thevenot (1..)
1102	Conventionnel	Régimes de Thevenot (1..)
1103	Proche (familier)	Régimes de Thevenot (1..)
1201	Production (source de)	Production (source de) (2..)
1301	Conseil	Conseil / Expertise (3..)
1302	Expertise / référent	Conseil / Expertise (3..)
1401	Connaissance (sans échange particulier)	Neutre (4..)
1402	Ne connait pas	Neutre (4..)
1403	Interlocuteur (simple discussion)	Neutre (4..)
1404	Discussion dans le cadre de réunions	Neutre (4..)
1405	Croise	Neutre (4..)
1406	Ne croise pas	Neutre (4..)
1407	Connaissance technique	Neutre (4..)
1408	Connaissance juridique	Neutre (4..)
1409	Connaissance de terrain	Neutre (4..)
1410	Connaissance naturaliste	Neutre (4..)
1411	Fait partie de (est inclus dans)	Neutre (4..)

Code	Type	Catégorie
1501	Partenariat	Positive (5..)
1502	Collaboration	Positive (5..)
1503	Confiance	Positive (5..)
1504	Soutien	Positive (5..)
1505	Adhésion	Positive (5..)
1506	Moteur / militant actif	Positive (5..)
1507	Bonne entente	Positive (5..)
1508	Attire	Positive (5..)
1509	Protège	Positive (5..)
1601	Lobbying	Lobbying (6..)
1701	Non lien / ignorance mutuelle	Négative (7..)
1702	Rejet	Négative (7..)
1703	Dérangement, nuisance, dégradation	Négative (7..)
1704	Absence / manque de confiance	Négative (7..)
1705	Dialogue impossible	Négative (7..)
1706	Dénonciation (porte plainte contre)	Négative (7..)
1707	Blocage, frein	Négative (7..)
1708	Peur	Négative (7..)
1709	Manque de moyens	Négative (7..)
1710	Impératif de justification	Négative (7..)
1711	Violence	Négative (7..)
1712	Dangereux	Négative (7..)
1713	Flou	Négative (7..)
1714	Non respect	Négative (7..)
1715	Frontière	Négative (7..)
1716	Mépris	Négative (7..)
1717	Interprète mal (a son avantage)	Négative (7..)
1801	Propriété	Appartenance / appropriation (8..)
1802	Appropriation	Appartenance / appropriation (8..)
2001	Article "presse généraliste"	
2002	Article "presse spécialisée" pro	
2003	Article "presse spécialisée" anti	
2004	Plaquette d'information	
2005	Lettre / mail / forums / téléphone	
2006	Plainte / remontée de problèmes	
2007	Rapport / note	
2008	Charte	

Code	Type	Catégorie
2009	Présentation diaporama	
2010	Question au gouvernement	
2011	Document réglementaire	
2012	Jugement	
2013	Financement / retombées économiques (argent)	
2014	Communique de presse	
2015	Information Internet (site internet)	
2016	Connaissance technique	
2017	Connaissance juridique	
2018	Connaissance de terrain	
2019	Connaissance naturaliste / environnementales	
2020	Verbalisation	
2021	Connaissance positionnement militant	

Définitions des différentes natures de relations [Hay12]

Type de relation	Définition
Fonctionnel	Un actant a recours à un autre ou deux actants se portent mutuellement secours
Conventionnel	Ensemble des relations qui sont le support de conventions, de contrats de quelque nature que ce soit
Proche (familier)	Deux actants sont liés par une relation de familiarité qui est le fruit d'un « accommodement progressif »
Production (source de)	Un actant en produit, en crée, un autre
Conseil	Un actant en conseille un autre
Expertise / référent	Un actant est reconnu comme expert, comme référent, sur un sujet. Il apporte son expertise à d'autres actants.
Connaissance (sans échange particulier)	Un actant en connaît un autre mais n'a pas d'échange particulier avec celui-ci
Ne connaît pas	Un actant n'en connaît pas un autre
Interlocuteur (simple discussion)	Un acteur est reconnu comme interlocuteur par un autre. Ces deux acteurs échangent dans le cadre de simples discussions.
Discussion dans le cadre de réunions	Deux acteurs (ou plus) discutent dans le cadre de réunion de concertation (même si quelqu'un ne prend pas la parole, il est comptabilisé comme ayant ce type de relation car il fait partie de la concertation.

Type de relation	Définition
Croise	Un acteur croise un actant (sur un chemin par exemple). Il n'y a pas d'autre échange particulier qu'un éventuel signe ou quelques mots échangés.
Ne croise pas	Un acteur ne croise pas un autre actant.
Connaissance technique	Un acteur possède des connaissances techniques sur un autre actant.
Connaissance juridique	Un acteur possède des connaissances juridiques sur un autre actant.
Connaissance de terrain	Un acteur possède des connaissances de terrain sur un autre actant.
Connaissance naturaliste (environnementales)	Un acteur possède des connaissances naturalistes (environnementales) sur un autre actant.
Fait partie de (est inclus dans)	Un actant est inclus dans un autre actant (cette relation permet de faire le lien entre un actant et le groupe (la catégorie) dont il fait partie). Même si les catégories a priori sont rejetées de la théorie de l'acteur réseau, dans la mesure où elles sont évoquées et où elles agissent pour les acteurs, je les prends en compte. Il faut ensuite que je situe quels autres actants évoqués font partie de ces catégories. Cela doit également permettre de repérer quelles catégories restent du Social 4 et pour quels actants.
Partenariat	Deux actants sont liés par un contrat (avantageux pour les deux) visant à travailler en coopération pour atteindre avec des objectifs concomitants (communs).
Collaboration	Deux actants agissent ensemble pour des objectifs concomitants.
Confiance	Un actant fait confiance à un autre actant.
Soutien	Un actant soutient un autre actant. Il affirme le soutenir et/ou il le soutient publiquement.
Adhésion	Un acteur adhère à une association (adhésion légale)
Moteur / militant actif	Un actant est moteur pour un autre actant (souvent un acteur est moteur dans une association ou une institution).
Bonne entente	Deux actants entretiennent des relations cordiales.
Lobbying	Un actant fait pression sur un autre (politique, pouvoir public, décideur), pour favoriser ses propres intérêts.

Type de relation	Définition
Non lien / ignorance mutuelle	Un actant refuse tout lien avec un autre actant. Un actant en ignore un autre (cette ignorance peut être mutuelle ou non).
Rejet	Un actant en rejette un autre (critique, conflit etc.)
Dérangement, nuisance, dégradation	Un actant gêne, nuit ou dégrade un autre actant.
Absence / manque de confiance	Un actant n'a pas confiance en un autre actant. Cela peut aller jusqu'au soupçon. Il n'est pas sûr de la légitimité d'un autre actant, ou n'est pas sûr de la véracité des ses propos et/ou de ses actes.
Dialogue impossible	Deux actants ne peuvent échanger dans le cadre d'une discussion « normale ». Dialogue de sourd. Impossibilité de se comprendre mutuellement.
Dénonciation (porte plainte contre)	Un actant en dénonce un autre. Soit publiquement, verbalement ou par écrit, soit de manière légale par dépôt de plainte.
Blocage, frein	Un actant constitue un frein pour un autre actant. Il empêche (ou freine) le cours de ses actions.
Peur	Un actant inspire la peur à un autre actant.
Manque de moyens	Un actant n'a pas les moyens de produire un autre actant ou bien de faire respecter un autre actant (la loi par exemple)
Impératif de justification	Un actant impose à un autre actant de se justifier.
Violence	Un actant fait acte de violence envers un autre actant.
Dangereux	Un actant représente un danger pour un autre actant.
Flou	Un actant est flou pour un autre actant. Ce dernier ne parvient pas à l'identifier (l'actant ou son contenu) de manière certaine.
Non-respect	Un actant ne respecte pas un autre actant.
Propriété	Un actant est propriétaire d'un autre actant (voir les différents niveaux de propriété)
Appropriation	Un actant s'approprie un autre actant (voir les différents types d'appropriation)
Article "presse généraliste"	Forme
Article "presse spécialisée" pro	Forme

Type de relation	Définition
Article "presse spécialisée" anti	Forme
Plaquette d'information	Forme
Lettre / mail / forums / téléphone	Forme
Plainte	Forme
Rapport / note	Forme
Charte	Forme
Présentation diaporama	Forme
Question au gvt	Forme
Document réglementaire	Forme
Jugement	Forme
Financement / retombées économiques (argent)	Forme
Communiqué de presse	Forme
Information Internet (site internet)	Forme
Connaissance technique	Forme
Connaissance juridique	Forme
Connaissance de terrain	Forme
Connaissance naturaliste / environnementales	Forme

Résumé

Cet thèse présente une étude de systèmes multi-agents. Ce type de systèmes trouve de nombreuses applications telles que le contrôle de flotte de véhicules en robotique, la conception de réseaux d'énergie distribués ainsi que la modélisation de dynamiques d'opinions.

Dans une première partie, nous présentons un nouveau résultat en théorie de consensus qui approfondit et étend les récents travaux de Hendrickx et Tsitsiklis sur le consensus sous condition de coupe balancée.

Par la suite, nous appliquons le consensus au contrôle de flotte de véhicules. Nous présentons plusieurs résultats concernant l'obtention de l'alignement en vitesse (flocking). Cette étude s'appuie sur une analyse de robustesse du réseau d'interaction en vue de préserver sa connexité. Cette notion est centrale dans la thèse.

Enfin, nous présentons les résultats d'une collaboration avec une chercheuse en sociologie concernant l'analyse du réseau social de la controverse sur les loisirs motorisés hors route. Nous étudions le lien entre les scènes nationale et locales. Pour cela, nous faisons appel à des outils de visualisation de grands graphes et calculons la centralité des acteurs du réseau.

Abstract

This thesis presents a study on multi-agent systems. Such systems find numerous applications such as multi-vehicle control in robotics, the design of smart distributed energy networks and the modeling of opinion dynamics. In a first part, we present new results regarding consensus theory which extend the recent work from Hendrickx and Tsitsiklis on cut-balanced consensus.

Then, we apply the consensus system to the control of a fleet of vehicles. We present several results regarding velocity alignment (flocking). This study is based upon a graph robustness analysis in order to preserve the connectivity of the interaction network. This concept is of main importance in this study.

In the last part, we state results from a collaborative work with a sociologist regarding the social network linked to the controversy concerning off-road motorized leisure in France. We study the link between the national and local scenes. To do so, we use large graph visualization tools and actor centrality measures.