



**HAL**  
open science

**Simulation numérique de la combustion turbulente :  
Méthode de frontières immergées pour les écoulements  
compressibles, application à la combustion en aval d'une  
cavité**

Cindy Merlin

► **To cite this version:**

Cindy Merlin. Simulation numérique de la combustion turbulente : Méthode de frontières immergées pour les écoulements compressibles, application à la combustion en aval d'une cavité. Autre [cond-mat.other]. INSA de Rouen, 2011. Français. NNT : 2011ISAM0020 . tel-00783014

**HAL Id: tel-00783014**

**<https://theses.hal.science/tel-00783014>**

Submitted on 31 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée par

**Cindy Merlin**

Pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen**

Discipline : Énergétique  
Spécialité : Mécanique des Fluides  
Formation doctorale : Sciences Physiques, Mathématiques  
et de l'Information pour l'Ingénieur  
Laboratoire d'accueil : CORIA UMR-6614

**Simulation numérique de la combustion turbulente :  
Méthode de frontières immergées pour les écoulements  
compressibles, application à la combustion en aval d'une  
cavité**

soutenance le 8 décembre 2011

Membres du jury :

**Rapporteurs :**

Bénédicte Cuenot Chercheur Senior, CERFACS, Toulouse  
Eric Lamballais Professeur, Université de Poitiers

**Examineurs :**

Sébastien Ducruix Chargé de Recherches, EM2C, Paris  
Bruno Renou Professeur, INSA de Rouen  
Guillaume Godel Ingénieur SNECMA

**Directeurs de thèse :**

Pascale Domingo Directeur de Recherche CNRS, INSA de Rouen  
Luc Vervisch Professeur, INSA de Rouen



# Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au CORIA-UMR-CNRS-6614 (Complexe de Recherche Interprofessionnel en Aérothermochimie), dans les locaux de l'INSA (Institut National des Sciences Appliquées) de Rouen. Il a été effectué dans le cadre du projet européen TECC-AE (Technologies Enhancement for Clean Combustion in Aero Engines).

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à mes directeurs de thèse, Pascale Domingo et Luc Vervisch, pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser cette thèse tout en me laissant une réelle autonomie et en me témoignant leur confiance. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma plus profonde gratitude.

Je veux également exprimer toute ma gratitude à Madame Bénédicte Cuenot et Monsieur Eric Lamballais pour avoir accepté de lire, de commenter et de juger ce mémoire en qualité de rapporteurs. Je remercie aussi Messieurs Bruno Renou, Sébastien Ducruix et Guillaume Godel de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

Un grand merci à Messieurs Vincent Moureau et Ghislain Lartigue pour les discussions informatiques et scientifiques que nous avons eues durant cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Abdelkrim Mourad Boukhalifa pour m'avoir accueilli en tant que doctorante au sein de son laboratoire. J'adresse ma respectueuse sympathie à l'ensemble du personnel du CORIA que j'ai côtoyé durant mes études.

Je souhaite également saluer l'ensemble des doctorants (ou docteurs) du laboratoire avec qui j'ai partagé les vicissitudes de la vie de thésards durant ces années. Tout d'abord, un grand merci à Subbu, Nicolas, Guillaume G. pour les premiers moments passés dans le bureau MaBRc03, François, Guillaume L. et Suresh pour les derniers mais non des moindres échanges scientifiques (pour la plupart, bien évidemment), pour les nombreux moments de bonne humeur, de fou rire et de rigolade que nous avons partagés. Je remercie également tous les autres doctorants ou docteurs que j'ai croisés durant ces années de thèse : David pour m'avoir initié au lancement de calculs parallèles, Marianne sans qui ma motivation aurait été bien faible pour reprendre la piscine et la course à pied, Chloé, Dounia, Memdough, Sébastien, Emilien, Sarah, Florian, Pradip, Jiesheng, Joseph, Elise, Catherine et, plus généralement, à tous ceux que j'aurai oublié de mentionner. Ils ont largement contribué à ce qu'il règne une bonne ambiance au sein du laboratoire et également au dehors. Je leur souhaite une bonne continuation dans leurs travaux de recherche, leur vie professionnelle et personnelle.

Mes pensées vont aussi à tous mes proches pour leur soutien tout au long de cette thèse ainsi qu'à mon compagnon, Damien, qui a été si présent, si compréhensif et n'a jamais cessé de m'encourager. Qu'ils reçoivent toute mon estime pour le soutien qu'ils m'ont offert et sans qui je n'aurais pu arriver jusque là. Le mot de la fin pour ceux qui ont participé un tant soit peu à ce projet : merci Boumbo et Doubitchou !

---

# Table des matières

Table des matières	iii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte scientifique	1
1.2 Contexte industriel	2
1.3 Les turboréacteurs	6
1.4 Objectifs de la thèse et plan du mémoire	9
<b>I Méthode des frontières immergées pour les écoulements compressibles</b>	<b>11</b>
<b>2 Modèles physiques et équations de bilan</b>	<b>13</b>
<b>2.1 Equations de l'aérothermochimie</b>	<b>15</b>
2.1.1 Conservation de la masse	15
2.1.2 Conservation des espèces chimiques	16
2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement	16
2.1.4 Conservation de l'énergie	17
2.1.5 Relations d'état	18
2.1.6 Propriétés de transport moléculaire	18
2.1.7 Viscosité du mélange	19
2.1.8 Nombres caractéristiques	19
2.1.9 Récapitulation des variables et équations à résoudre	20
<b>2.2 Les archétypes de la combustion en régime laminaire</b>	<b>20</b>
2.2.1 Flamme de prémélange	20
2.2.2 Flamme de diffusion	22
2.2.3 Vers la description d'un système de combustion réaliste : la flamme partiellement prémélangée	23
<b>2.3 Représentation de la chimie</b>	<b>24</b>
<b>2.4 Représentation de la turbulence</b>	<b>26</b>
2.4.1 La turbulence	26
2.4.2 RANS-LES-DNS	29
2.4.3 L'opérateur de filtrage	30
2.4.4 Présentation des équations filtrées au sens de Favre	34
2.4.5 Les stratégies de modélisation de la turbulence	38
<b>2.5 Modélisation de la combustion</b>	<b>51</b>
2.5.1 Revue des techniques	51
2.5.2 Combustion turbulente prémélangée	52
2.5.3 Combustion turbulente non-prémélangée	61
2.5.4 Index de Flamme ou indice de Takeno	63
<b>2.6 Réduction de la chimie et tabulation</b>	<b>64</b>
2.6.1 Le mécanisme squelettique	65

2.6.2	Le mécanisme réduit . . . . .	65
2.6.3	Le mécanisme global . . . . .	65
2.6.4	Tabulation . . . . .	65
<b>2.7</b>	<b>Modèle PCM-FPI . . . . .</b>	<b>68</b>
2.7.1	Méthode FPI ( <i>Flame Prolongation of ILDM</i> ) . . . . .	68
2.7.2	Les Moments Conditionnés Présumés ( <i>Presumed Conditional Moments</i> ) . . . . .	71
2.7.3	Modélisation statistique de FPI par les Moments Conditionnés Présumés (PCM-FPI) . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Méthodes Numériques . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>3.1</b>	<b>Volumes Finis . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>3.2</b>	<b>Schémas numériques . . . . .</b>	<b>79</b>
3.2.1	Intégration spatiale . . . . .	79
3.2.2	Discrétisation temporelle . . . . .	84
3.2.3	Critère de stabilité . . . . .	84
<b>3.3</b>	<b>Discrétisation de l'opérateur de filtrage . . . . .</b>	<b>85</b>
3.3.1	Filtre test ou filtre à $2\Delta$ : règle des trapèzes . . . . .	87
3.3.2	Filtre à $4\Delta$ : calcul des moments . . . . .	90
<b>3.4</b>	<b>Conditions limites . . . . .</b>	<b>91</b>
3.4.1	Conditions fortes de type Dirichlet-Neumann . . . . .	92
3.4.2	Conditions limites aux parois avec l'utilisation de points images . . . . .	92
3.4.3	Conditions aux limites par décomposition en ondes caractéristiques . . . . .	94
<b>3.5</b>	<b>Génération des conditions initiales turbulentes : la méthode de Klein . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>4</b>	<b>Méthode des Frontières Immergées . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>4.2</b>	<b>Terminologie . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>4.3</b>	<b>Résumé des méthodes de frontières immergées . . . . .</b>	<b>110</b>
4.3.1	La méthode des frontières immergées . . . . .	111
4.3.2	La méthode de pénalisation . . . . .	112
4.3.3	Les frontières virtuelles . . . . .	113
4.3.4	Le forçage direct . . . . .	114
4.3.5	Conclusion . . . . .	116
<b>4.4</b>	<b>Mise en oeuvre numérique de la méthode de la cellule fantôme . . . . .</b>	<b>116</b>
4.4.1	Identification des cellules solides, fluides et fantômes . . . . .	116
4.4.2	Notion de point image . . . . .	119
4.4.3	Reconstruction du point image : les interpolations polynomiales . . . . .	120
4.4.4	Reconstruction du point fantôme . . . . .	127
4.4.5	Résumé de l'implémentation de la méthode des frontières immergées . . . . .	131
<b>4.5</b>	<b>Couplage frontières immergées-simulation des grandes échelles . . . . .</b>	<b>132</b>
<b>4.6</b>	<b>Couplage frontières immergées - combustion turbulente (PCM-FPI) . . . . .</b>	<b>134</b>
<b>4.7</b>	<b>Validations des Frontières Immergées . . . . .</b>	<b>134</b>
4.7.1	Simulation numérique directe du sillage d'un cylindre non confiné . . . . .	134
4.7.2	Simulation numérique directe de l'écoulement sur un cylindre confiné . . . . .	138
4.7.3	Simulation des Grandes Echelles de l'écoulement autour d'un cylindre carré non confiné . . . . .	141
4.7.4	Comparaison des conditions aux limites pour un mur : murs IBM / NSCBC/ classique . . . . .	144
4.7.5	Erreur sur la conservation de la masse . . . . .	149
<b>4.8</b>	<b>Une méthode de frontières immergées conservative . . . . .</b>	<b>153</b>
4.8.1	Une méthode de frontières immergées conservative pour des écoulements compressibles (CCIB) . . . . .	153

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.8.2	Canal incliné d'un angle variable . . . . .	157
<b>4.9</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>162</b>
<b>5</b>	<b>Etude bibliographique des cavités sous écoulement affleurant . . . . .</b>	<b>163</b>
<b>5.1</b>	<b>Phénoménologie et modèles . . . . .</b>	<b>164</b>
5.1.1	Terminologie . . . . .	164
5.1.2	Instabilités des couches de mélange . . . . .	165
5.1.3	Dynamique de l'écoulement de cavité . . . . .	169
5.1.4	Caractérisation du processus de rétroaction ou auto-asservissement . . . . .	174
5.1.5	Paramètre influençant ces phénomènes . . . . .	176
5.1.6	Modélisation . . . . .	178
<b>5.2</b>	<b>Etat de l'art des différentes études expérimentales et numériques . . . . .</b>	<b>184</b>
5.2.1	Etudes expérimentales . . . . .	184
5.2.2	Etudes numériques . . . . .	184
<b>5.3</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>186</b>
<b>6</b>	<b>Etude de l'écoulement affleurant une cavité transsonique . . . . .</b>	<b>187</b>
<b>6.1</b>	<b>Paramètres de la simulation . . . . .</b>	<b>188</b>
6.1.1	Maillages . . . . .	188
6.1.2	Conditions aux limites . . . . .	189
6.1.3	Conditions initiales . . . . .	190
6.1.4	Stratégies de modélisation des grandes échelles . . . . .	192
<b>6.2</b>	<b>Visualisation de l'écoulement . . . . .</b>	<b>192</b>
<b>6.3</b>	<b>Impact du modèle de turbulence . . . . .</b>	<b>194</b>
<b>6.4</b>	<b>Comparaison des modèles de sous-maille . . . . .</b>	<b>194</b>
6.4.1	Champs de vitesse . . . . .	194
6.4.2	Dissipation turbulente . . . . .	202
6.4.3	Dissipation artificielle . . . . .	204
<b>6.5</b>	<b>Rayonnement acoustique . . . . .</b>	<b>208</b>
<b>6.6</b>	<b>Comparaison murs 3D-NSCBC vs IBM . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>6.7</b>	<b>Impact de la résolution du maillage . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>6.8</b>	<b>Analyse de l'écoulement . . . . .</b>	<b>214</b>
<b>6.9</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>218</b>
<b>II</b>	<b>Etude d'une chambre de combustion de type TVC . . . . .</b>	<b>221</b>
<b>7</b>	<b>Les chambres de combustion de type TVC : Principe et état de l'art . . . . .</b>	<b>223</b>
<b>7.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>223</b>
<b>7.2</b>	<b>Stabilité de flamme . . . . .</b>	<b>224</b>
<b>7.3</b>	<b>Principe du TVC . . . . .</b>	<b>224</b>
<b>7.4</b>	<b>Aperçu historique du TVC . . . . .</b>	<b>226</b>
7.4.1	Chambres de l'Air Force . . . . .	226
7.4.2	Chambre de General Electric . . . . .	229
7.4.3	Autres concepts . . . . .	229
<b>7.5</b>	<b>L'Ultra Compact Combustor . . . . .</b>	<b>233</b>
7.5.1	Etudes des écoulements de type TVC . . . . .	233
7.5.2	Précédentes simulations d'un écoulement non réactif de type TVC . . . . .	233
7.5.3	Précédentes simulations d'un écoulement réactif de type TVC . . . . .	234
7.5.4	Conclusion . . . . .	237
<b>7.6</b>	<b>Description de la chambre du projet TECC au CORIA . . . . .</b>	<b>237</b>
7.6.1	Présentation générale . . . . .	237

7.6.2	Mesures réalisées . . . . .	239
<b>8</b>	<b>Dynamique non réactive d'une chambre de combustion de type TVC</b>	<b>241</b>
<b>8.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>242</b>
<b>8.2</b>	<b>Dynamique du cas de référence . . . . .</b>	<b>244</b>
8.2.1	Paramètres numériques . . . . .	245
8.2.2	Validation des résultats numériques . . . . .	246
8.2.3	Structure de l'écoulement moyen . . . . .	252
8.2.4	Dynamique de la chambre . . . . .	252
8.2.5	Impact du modèle de sous-maille et du modèle d'injection turbulente . . . . .	254
<b>8.3</b>	<b>Effet d'une modification des paramètres géométriques de la chambre . . .</b>	<b>255</b>
8.3.1	M20C07A10_L11 . . . . .	255
8.3.2	M20C07A10_L44 . . . . .	256
<b>8.4</b>	<b>Effet d'une modification du débit de l'écoulement principal . . . . .</b>	<b>258</b>
8.4.1	M10C07A10 . . . . .	258
8.4.2	M30C07A10 . . . . .	262
8.4.3	M60C07A10 . . . . .	263
8.4.4	Pouvoir d'aspiration du barreau en fonction des débits . . . . .	263
<b>8.5</b>	<b>Influence de l'air aval : Cas M20C07 . . . . .</b>	<b>265</b>
<b>8.6</b>	<b>Ajout d'un swirl : M30C07A10S . . . . .</b>	<b>266</b>
<b>8.7</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>270</b>
<b>9</b>	<b>Etude de la stabilité de la flamme dans une chambre de combustion de type TVC</b>	<b>273</b>
<b>9.1</b>	<b>Stratégies de modélisation . . . . .</b>	<b>275</b>
9.1.1	Introduction . . . . .	275
9.1.2	Sortie non réfléchissante à la sortie du canal . . . . .	275
9.1.3	Sortie non réfléchissante-rétrécissement . . . . .	278
9.1.4	Sortie non réfléchissante-élargissement-coflow de gaz brûlés . . . . .	279
9.1.5	Sortie réfléchissante-élargissement-coflow de gaz brûlés . . . . .	280
9.1.6	Géométrie et conditions de sortie retenues . . . . .	280
<b>9.2</b>	<b>Méthodes d'analyse . . . . .</b>	<b>280</b>
9.2.1	Temps de résidence . . . . .	280
9.2.2	Critère de Rayleigh . . . . .	281
<b>9.3</b>	<b>Etude de la flamme instable aux conditions nominales . . . . .</b>	<b>282</b>
<b>9.4</b>	<b>Description du cycle de l'instabilité de combustion aux conditions nominales</b>	<b>282</b>
9.4.1	Evolution de la flamme comparée aux données expérimentales . . . . .	282
9.4.2	Dynamique de la flamme . . . . .	289
<b>9.5</b>	<b>Stabilisation par augmentation du débit principal : Cas M30 . . . . .</b>	<b>296</b>
9.5.1	Evolution de la flamme instable comparée avec l'expérience . . . . .	297
9.5.2	Dynamique de la flamme . . . . .	297
9.5.3	Impact de la condition de sortie : dynamique avec une sortie réfléchissante . .	297
<b>9.6</b>	<b>Stabilisation par augmentation du débit principal : Cas M60 . . . . .</b>	<b>305</b>
9.6.1	Evolution de la flamme stable . . . . .	305
<b>9.7</b>	<b>Stabilisation par ajout d'un swirl . . . . .</b>	<b>309</b>
9.7.1	Signaux de pression expérimental et numérique . . . . .	309
9.7.2	Validation expérimentale . . . . .	309
9.7.3	Evolution de la flamme stable . . . . .	311
9.7.4	Dynamique avec une sortie réfléchissante . . . . .	317
<b>9.8</b>	<b>Effet de l'injecteur d'air . . . . .</b>	<b>318</b>
9.8.1	Signal de pression . . . . .	318
9.8.2	Structure de la flamme . . . . .	318

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>9.9 Cycle limite acoustique</b> . . . . .	<b>321</b>
9.9.1 Equation de bilan . . . . .	321
9.9.2 Application aux simulations réactives de la chambre TVC . . . . .	325
9.9.3 Application technologique des précédentes relations . . . . .	326
<b>9.10 Conclusion</b> . . . . .	<b>326</b>
<b>10 Le modèle PCM-FPI avec correction de la vitesse de flamme : le modèle PCM-FPI-DTF</b>	<b>327</b>
<b>10.1 Présentation des difficultés</b> . . . . .	<b>327</b>
<b>10.2 Correction des équations filtrées</b> . . . . .	<b>328</b>
10.2.1 Champs de la fonction d'élargissement . . . . .	329
<b>10.3 Dynamique associée au cas M30C07A10 avec le modèle PCM-FPI-DTF</b> .	<b>330</b>
<b>10.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>335</b>
<b>11 Conclusion générale</b>	<b>337</b>
<b>11.1 Synthèse Générale</b> . . . . .	<b>337</b>
<b>11.2 Perspectives</b> . . . . .	<b>338</b>
<b>A Notion de densité spectrale acoustique</b>	<b>341</b>
<b>A.1 Méthodes non-paramétriques</b> . . . . .	<b>342</b>
A.1.1 Le périodigramme . . . . .	342
A.1.2 La méthode de Bartlett ou méthode du périodigramme moyenné . . . . .	343
A.1.3 La méthode de Welch ou périodigramme lissé . . . . .	344
A.1.4 Méthode du multitaper . . . . .	344
A.1.5 Conclusion . . . . .	345
<b>A.2 Méthodes paramétriques</b> . . . . .	<b>345</b>
A.2.1 Le modèle auto-régressif (AR) . . . . .	345
A.2.2 Le modèle de Burg . . . . .	346
<b>A.3 Application en CFD</b> . . . . .	<b>346</b>
<b>B Publications</b>	<b>347</b>
<b>Table des figures</b>	<b>349</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>360</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>361</b>



# Nomenclature

## Lettres romaines

Symbole	Signification	Unité
$a$	Vitesse du son	$m.s^{-1}$
$A_{ij}$	Partie déviatrice du tenseur des déformations	$s^{-1}$
$c$	Avancement normalisé de la réaction	—
$c_p$	Capacité calorifique massique à pression constante	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$c_v$	Capacité calorifique massique à volume constant	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
$C_s$	Constante du modèle de Smagorinsky	—
$C_w$	Constante du modèle WALE	—
$C_y$	Constante du modèle de Yoshizawa	—
$D$	Coefficient de diffusion moléculaire	$m^2.s^{-1}$
$D$	Diamètre	$m$
$D_k$	Coefficient de diffusion de l'espèce $k$ dans le mélange	$m^2.s^{-1}$
$e$	Somme des énergies sensible et chimique massique	$J.kg^{-1}$
$e_s$	Energie sensible massique	$J.kg^{-1}$
$e_t$	Energie totale massique	$J.kg^{-1}$
$E$	Energie totale non chimique massique	$J.kg^{-1}$
$f$	Fréquence	$Hz$
$h$	Enthalpie massique	$J.kg^{-1}$
$k$	Energie cinétique turbulente	$m^2.s^{-2}$
$k$	Nombre d'onde	$s^{-1}$
$k_b$	Constante de Boltzmann	$J.K^{-1}$
$L$	Echelle de longueur caractéristique	$m$
$L_{ij}$	Tenseur de Léonard	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$l_t$	Echelle intégrale	$m$
$M$	Nombre de Mach	—
$M_{sgs}$	Nombre de Mach de sous-maille	—
$M_t$	Nombre de Mach turbulent	—
$\mathbf{n}$	Vecteur normal au front	—
$N_{spe}$	Nombre d'espèces chimiques dans le mélange gazeux	—
$\mathcal{P}$	PDF générique	—
$P$	Pression	$Pa$
$r$	Abscisse radiale	$m$
$R$	Constante molaire des gaz parfaits	$J.mol^{-1}.K^{-1}$
$s$	Rapport stoechiométrique	—
$S_L$	Vitesse de flamme laminaire	$m.s^{-1}$
$T$	Température	$K$
$t$	Temps	$s$
$u$	Energie interne massique	$J.kg^{-1}$
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
$u_i$	$i$ -ème composante du vecteur vitesse	$m.s^{-1}$

$V$	Volume du système	$m^3$
$W$	Masse molaire	$kg.mol^{-1}$
$x_k$	Composante k du vecteur position ( $x, y, z$ )	$m$
$X$	Fraction molaire	—
$Y$	Fraction massique	—
$Y_c$	Variable d'avancement de la réaction	—
$Z$	Fraction de mélange	—

### Lettres grecques

Symbole	Signification	Unité
$\gamma$	Rapport des capacités calorifiques	—
$\delta$	Epaisseur caractéristique	$m$
$\delta_{ij}$	Tenseur dit de Kronecker	—
$\Delta$	Échelle du filtre	$m$
$\epsilon$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique	$m^2.s^{-3}$
$\eta_k$	Echelle de Kolmogorov	$m$
$\lambda$	Coefficient de conductivité thermique	$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\mu$	Coefficient de viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\nu$	Coefficient de viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
$\rho$	Masse volumique	$kg.m^{-3}$
$\sigma$	Constante de Stefan-Boltzmann	$W.m^{-2}.K^{-4}$
$\sigma_{ij}$	Tenseur des contraintes visqueuses	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$\Sigma$	Surface de flamme par unité de volume	$m^{-1}$
$\tau_c$	Temps caractéristique de la chimie	$s$
$\tau_{ij}$	Tenseur des contraintes de sous-maille	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$\tau_k$	Temps caractéristique des petites structures turbulentes	$s$
$\tau_t$	Temps caractéristique des grandes structures turbulentes	$s$
$\varphi$	Variable thermodynamique générique	selon variable
$\phi$	Richesse	—
$\chi$	Taux de dissipation scalaire	$s^{-1}$
$\dot{\omega}_k$	Terme source d'espèce	$s^{-1}$
$\dot{\omega}_T$	Terme source d'énergie	$J.kg^{-1}.s^{-1}$
$\varpi$	Macropression	$Pa$
$\vartheta$	Macrotempérature	$K$

### Indices et exposants

Symbole	Signification
0	Relatif à l'état initial
$b$	Burnt
$c$	Critique
$D$	Partie déviatrice
$eq$	Equilibre
$I$	Partie isotrope
$l$	Relatif à l'espèce $l$
$max$	Maximum
$min$	Minimum
$ref$	Variation de référence
$st$	Stœchiométrie

<i>sgs</i>	Sous-maille
<i>t</i>	Turbulent
<i>th</i>	Thermique
<i>u</i>	Unburnt
$\infty$	Condition du champ libre

### Nombres sans dimension

<b>Symbole</b>	<b>Signification</b>
<i>Da</i>	Nombre de Damköhler
<i>Fr</i>	Nombre de Froude
<i>Ka</i>	Nombre de Karlovitz
<i>Le</i>	Nombre de Lewis
<i>Pr</i>	Nombre de Prandtl
<i>Re</i>	Nombre de Reynolds
<i>Sc</i>	Nombre de Schmidt
<i>St</i>	Nombre de Strouhal

### Opérateurs et moyennes

<b>Symbole</b>	<b>Signification</b>
$\bar{\varphi}$	Filtre, moyenne de Reynolds
$\tilde{\varphi}$	Moyenne de Favre
$\hat{\varphi}$	Filtre Test
$\langle \varphi \rangle$	Moyenne statistique temporelle

### Acronymes

<b>Symbole</b>	<b>Signification</b>
3D-NSCBC	Tri-Dimensional Navier-Stokes Characteristic Boundary Condition
ACARE	Advisory Council for Aeronautics Research in Europe
ADEME	Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie
AF	Air Force
AFRL	Air Force Research Laboratory
BML	Bray-Moss-Libby
CCIB	Compressible Conservative Immersed Boundary
CERFACS	Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique
CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant Friedrichs Lewy
CITEPA	Centre Interprofessionnel Technique d'Études de la Pollution Atmosphérique
CMC	Conditional Moment Closure
CNRS	Centre National de la Recherche Scientifique
CORIA	COmplexe de Recherche Interprofessionnel en Aérothermochimie
COV	Composés Organiques Volatils
CPU	Central Processing Unit
CRIHAN	Centre de Ressources Informatiques de Haute-Normandie
DNS	Direct Numerical Simulation
DSM	Dynamic Smagorinsky Model
DSP	Densité Spectrale de Puissance

DTF	Dynamically Thickened Flame
DYM	Dynamic Yoshizawa Model
EBU	Eddy Break-Up
EDC	Eddy Dissipation Concept
EM2C	Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion
EVM	Eddy Viscosity Model
FAR	Fuel Air Ratio
FGM	Flamelet Generated Manifold
FPI	Flame Prolongation of ILDM
FSD	Flame Surface Density
GCM	Ghost Cell Method
GE	General Electric
GEAE	General Electric Aircraft Engines
GES	Gaz à Effet de Serre
IBM	Immersed Boundary Method
IDRIS	Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique
IFP	Institut Français du Pétrole
ILDM	Intrinsic Low Dimensional Manifold
ILES	Implicit Large Eddy Simulation
INSA	Institut National des Sciences Appliquées
ISAT	In Situ Adaptive Tabulation
IT	Injection Turbulente
LDSM	Lagrangian Dynamic Smagorinsky Model
LDV	Laser Doppler Velocimetry
LDYM	Lagrangian Dynamic Yoshizawa Model
LES	Large-Eddy Simulation
LIF	Laser Induced Fluorescence
LODI	Locally One-Dimensional and Inviscid
LPP	Lean Premixed Prevaporized
LTO	Landing Take Off
MILES	Monotone Integrated Large Eddy Simulation
MMC	Multiple Mapping Conditioning
MPI	Message Passing Interface
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NSCBC	Navier-Stokes Characteristic Boundary Condition
PCI	Pouvoir Calorifique Inférieur
PCM	Presumed Conditional Moments
PDF	Probability Density Function
PIV	Particle Image Velocimetry
PSD	Power Spectral Density
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
R&D	Recherche et Développement
RMS	Root Mean Square
RQL	Rich burn, Quick mix, Lean burn
SGE	Simulations aux Grandes Échelles
SGS	Sub-Grid Scale
SiTCom	Simulating Turbulent Combustion
SMS	Selective Mixed Scale
SNECMA	Société Nationale d'Étude et de Construction de Moteurs d'Aviation
TAF	Tube À Flamme
TECC-AE	Technologie Enhancement for Clean Combustion in Aero-Engines

## CHAPITRE 0. NOMENCLATURE

---

TF	Thickened Flame
TTVC	Tangential Trapped Vortex Combustor
TV	Trapped Vortex
TVC	Trapped Vortex Combustor
UCC	Ultra Compact Combustor
UE	Union Européenne
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes
UMR	Unité Mixte de Recherche
VM	Vreman Model
WALE	Wall-Adapting Local Eddy-viscosity



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1 Contexte scientifique . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Contexte industriel . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>1.3 Les turboréacteurs . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.4 Objectifs de la thèse et plan du mémoire . . . . .</b>	<b>9</b>

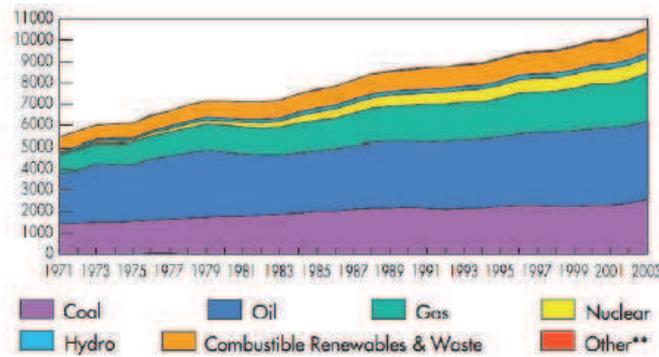
---

Ce chapitre d'introduction présente la problématique générale associée à cette thèse. Les premières sections commencent par une discussion sur les contextes scientifique et industriel qui ont suscité l'étude. Cette thèse s'intéressant à une nouvelle géométrie de chambre de combustion aéronautique, la section 1.3 présente brièvement le principe de fonctionnement d'un turboréacteur. Le plan du manuscrit est ensuite dressé dans ses grandes lignes.

### 1.1 Contexte scientifique

Le calcul scientifique, outil au service de la recherche et de l'industrie, joue un rôle fédérateur entre divers interlocuteurs (théoriciens, expérimentateurs, ...) et la complexité des phénomènes physiques en présence. L'optimisation et la conception de dispositifs industriels (moteurs, turbines) repose de plus en plus sur des outils de simulation numérique, en support aux essais expérimentaux dans l'optique de réduire fortement le temps ainsi que les coûts de développement. Ces investigations numériques fournissent également un niveau de détail difficile à obtenir expérimentalement. Néanmoins, la plupart des dispositifs industriels opèrent dans un régime d'écoulement turbulent impliquant une multitude d'échelles spatio-temporelles qui ne peuvent, malgré les ressources informatiques de nos jours, être résolues simultanément. Il est alors nécessaire de recourir à des stratégies de modélisation couplées à des traitements mathématiques des équations (moyenne, filtrage...). Les expérimentations permettent ensuite de valider et de qualifier le code de calcul. Les approches expérimentale et numérique sont donc bien évidemment complémentaires.

Bien que de nombreuses avancées aient été réalisées pour comprendre et modéliser la combustion turbulente (Bray [44], Borghi [38], Peters [288], Veynante et Vervisch [389]), le champ d'investigation n'en reste pas moins large. En effet, la prédiction des taux de dégagement de chaleur et des concentrations d'espèces, importante pour la description de la stabilisation des flammes, du bruit et des émissions polluantes, représente un challenge. Les flammes turbulentes impliquent un vaste ensemble de phénomènes liés, d'une part aux réactions chimiques et d'autre part à la turbulence. La description de la structure d'une flamme turbulente nécessite de pouvoir tenir compte de la modification des caractéristiques de chacun des éléments (combustion et turbulence), introduite par la présence de l'autre. En décrivant les diverses réactions chimiques, les schémas cinétiques détaillés permettent l'évaluation des taux de production de chaleur et des différentes espèces.



**FIGURE 1.1:** Evolution de la demande mondiale en énergie entre 1971 et 2003 et exprimée en mégatonnes équivalent pétrole [108].

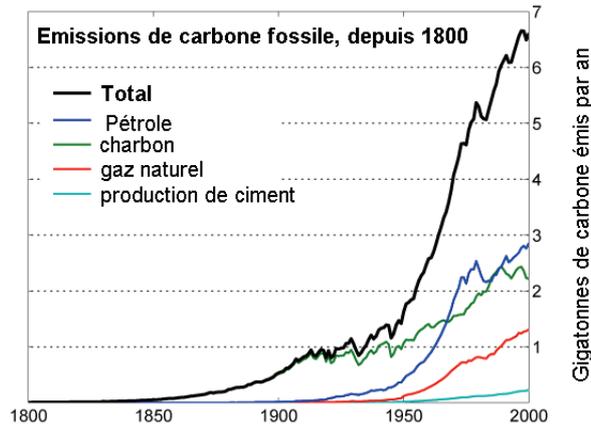
Ces mêmes taux sont soumis à l'influence des propriétés des écoulements turbulents qui interviennent dans les phénomènes de convection, de mélange, de diffusion, de transferts de quantité de mouvement et d'énergie. Par ailleurs, la turbulence dans un écoulement réactif se distingue de la turbulence classique dans un milieu fluide isotherme ou à masse volumique peu variable. A ce vaste ensemble de phénomènes peuvent s'ajouter d'autres éléments spécifiques comme les propriétés multiphysiques d'un corps gazeux, liquide ou solide, les interactions fluide-structure, l'application d'un champ ionisant sous la forme d'un plasma, l'ajout de perturbations acoustiques, d'ondes de choc, etc.

## 1.2 Contexte industriel

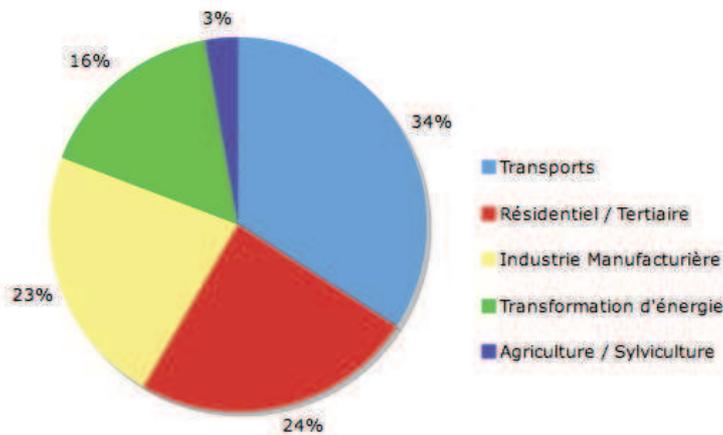
Les phénomènes aérothermochimiques, intrinsèques à la combustion turbulente, caractérisent la quasi-totalité des systèmes énergétiques (en écartant les procédés nucléaires et relatifs aux énergies durables telles que la géothermie, l'éolien,...), des moteurs à combustion interne aux réacteurs aéronautiques. L'étude des systèmes de combustion se rattache ainsi directement à la société, ne serait-ce que par son implication décisive dans l'évolution des moyens de déplacement des individus et des flux commerciaux. Le domaine de la combustion turbulente soulève néanmoins des problèmes écologiques, liés d'une part à l'épuisement progressif des ressources fossiles et surtout à la pollution atmosphérique à l'échelle du globe. En effet, depuis une quarantaine d'années, la consommation mondiale en énergie n'a cessé d'augmenter, comme en témoigne la figure 1.1.

La diminution des émissions polluantes est l'un des principaux axes de recherche actuelle en combustion. L'introduction, directe ou indirecte, de polluants dans l'atmosphère a des conséquences préjudiciables puisqu'elle nuit aux ressources biologiques et aux systèmes, influe sur les changements climatiques et sur la santé publique. Au delà des polluants primaires émis directement dans l'atmosphère (oxydes d'azote générés par la combustion des moteurs et des procédés industriels), on distingue également les polluants secondaires qui résultent de modifications physico-chimiques complexes des polluants primaires.

La liste des polluants atmosphériques est longue. Aux composés polluants tels que le dioxyde de soufre ( $SO_2$ ), les oxydes d'azote ( $NO_x$ ), le monoxyde de carbone ( $CO$ ), les métaux lourds, les composés organiques volatils ( $COV$ ), le fluor, l'acide chlorhydrique,... s'ajoutent les gaz à effet de serre, c'est-à-dire le dioxyde de carbone ( $CO_2$ ), le méthane ( $CH_4$ ), le protoxyde d'azote ( $N_2O$ ), les composés fluorés (les chlorofluorocarbures  $CFC$ , les hydrofluorocarbures  $HFC$ , les perfluorocarbures  $PFC$ , l'hexafluorure de soufre  $SF_6$ ), ainsi que d'autres substances comme les hydrocarbures aromatiques polycycliques ( $HAP$ ), les organochlorés (dioxines et furannes), l'ozone troposphérique ( $O_3$ ), l'ammoniac ( $NH_3$ ) ... L'ozone troposphérique est un polluant secondaire qui résulte principalement de réactions chimiques mettant en jeu des polluants primaires, essentiellement le dioxyde



**FIGURE 1.2:** Evolution au cours du temps des rejets de  $CO_2$  issues de combustibles fossiles, représentée en gigatonnes de carbone émis par an [397].

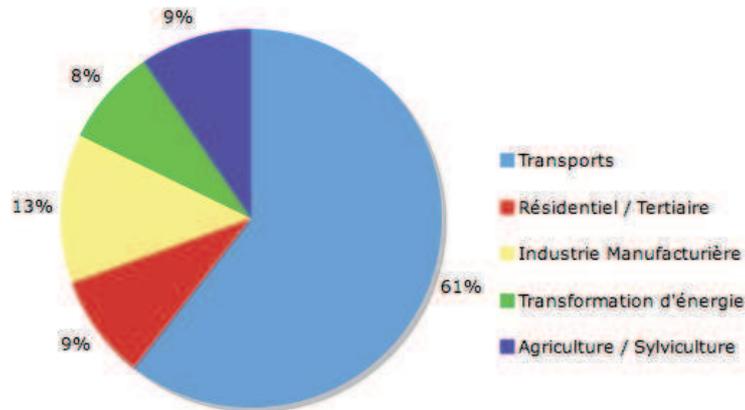


**FIGURE 1.3:** Répartition des émissions de  $CO_2$  par secteur d'activité, en France et pour l'année 2009 (courbe élaborée à partir des données fournies par le rapport d'activité d'avril 2011 du CITEPA [92]).

de carbone. Contrairement à l'ozone stratosphérique, qui filtre les rayons ultraviolets émis par le soleil, l'ozone troposphérique participe à la pollution oxydante ou pollution photochimique, à l'effet de serre et présente des effets irritants pour les voies respiratoires et pour les yeux. Les gaz à effet de serre ( $GES$ ) absorbent le rayonnement infrarouge émis par la surface terrestre et accroissent l'effet de serre, à l'origine du processus de réchauffement climatique.

La figure 1.2 illustre l'accroissement des émissions de  $CO_2$  issues des combustibles fossiles, de 1800 à 2000. La répartition des émissions de  $CO_2$ , par secteur d'activité, pour la France et pour l'année 2009, est illustrée sur la figure 1.3. Le CITEPA rapporte des émissions de  $CO_2$  à hauteur de 364 Mt. En France, le premier secteur contribuant aux émissions est celui des transports avec une importance de 34%. Viennent ensuite le secteur résidentiel/tertiaire, l'industrie manufacturière, la transformation d'énergie et l'agriculture/sylviculture. Au sein du paquet transports, 94% sont associés au transport routier, 4% au transport aérien et 2% au transport fluvial.

De même, les émissions de  $NO_x$  sont reportées sur la figure 1.4 par secteur d'activité, en France et pour l'année 2009. L'appellation générique  $NO_x$  désigne différentes formes d'oxyde d'azote ( $NO$ ,  $NO_2$ ,  $N_2O$ ,  $N_2O_3$ ,  $N_2O_4$ ,  $N_2O_5$ ). Néanmoins, en général, seuls les deux composés les plus abondants ( $NO$  et  $NO_2$ ) sont pris en compte sous le terme de  $NO_x$ . Avec une émission totale de  $NO_x$  de 1 117kt, le premier secteur émetteur est le transport, et en particulier le secteur du transport routier.



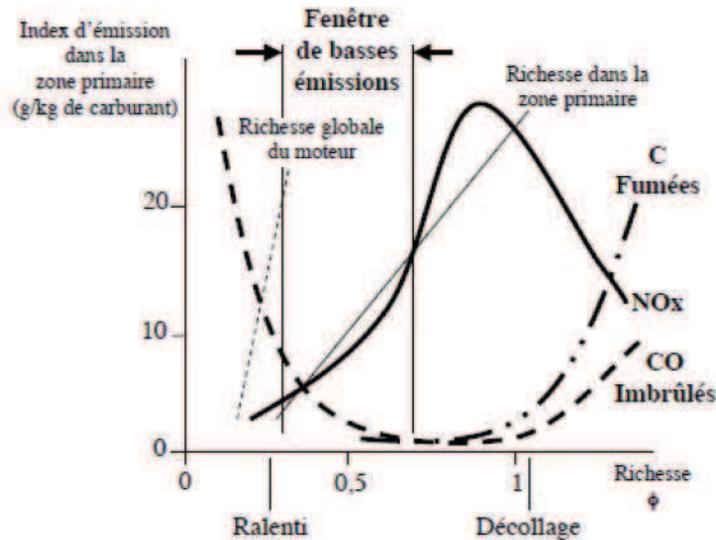
**FIGURE 1.4:** Répartition des émissions de  $NO_x$  par secteur d'activité, en France et pour l'année 2009 (courbe élaborée à partir des données fournies par le rapport d'activité d'avril 2011 du CITEPA [92]).

L'industrie manufacturière représente la seconde source d'émission avec 13 % des émissions. Ces oxydes d'azote sont essentiellement formés dans les chambres de combustion. Ils interviennent dans la formation de l'ozone troposphérique (par le biais d'une réaction avec les  $COV$ ) et, par effet indirect, dans l'augmentation de l'effet de serre mais aussi dans la formation du smog et des pluies acides (formation de l'acide nitrique,  $HNO_3$  lors de sa dissolution dans l'eau). Par ailleurs, le  $NO$  présente des effets néfastes sur la santé, en absorbant l'oxygène dans le sang et en suscitant des problèmes respiratoires. On distingue trois principaux mécanismes dans la formation du monoxyde d'azote :

- **Le  $NO$  thermique.** Le taux de production de ce composé dépend fortement du temps de résidence et de la température. A mesure que la température croît, le taux de production des  $NO_x$  thermique augmente de manière exponentielle (en particulier lorsque la température excède 1850 K). Il résulte des réactions de l'oxygène de l'air avec le diazote ou de l'atome d'azote avec le radical hydroxyl  $OH$ .
- **Le  $NO$  Fuel *Fenimore*.** Ce mécanisme repose sur l'oxydation des molécules d'azote du combustible en oxyde d'azote. Son apport est important lors de la combustion du pétrole ou du charbon.
- **Le prompt  $NO$ .** Ce mécanisme intervient dans le front de flamme et résulte de la réaction du diazote de l'air avec des radicaux ( $C$  ou  $CH$ ). Il est accentué par les hautes pressions (en particulier lors de l'augmentation des performances des moteurs aéronautiques).

Dans le contexte actuel de prise de conscience de l'impact des activités humaines sur le réchauffement climatique, diverses directives et conventions ont été établies. Nous pouvons citer certaines mesures visant :

- L'industrie en général : Signé en 1998, le protocole de Kyoto a fixé des objectifs chiffrés en terme de réduction des émissions des gaz à effet de serre pour les six principaux gaz à effet de serre. Il prévoit, par ailleurs, la mise en place de la bourse du carbone, un marché de négociation et d'échange de droits d'émission de gaz à effet de serre ( $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $N_2O$ ,  $HFC$ ,  $PFC$  et  $SF_6$ ).
- L'automobile : La famille des normes d'émission Euro vise à fixer les limites maximales de rejets polluants dus au transport routier. Les normes Euro de 1 à 5, qui se sont succédés, ont imposé des limites à chaque fois plus restrictives quant aux émissions des oxydes d'azotes,



**FIGURE 1.5:** Evolution des polluants  $CO$ , des hydrocarbures imbrûlés, des fumées et des  $NO_x$ , en fonction de la richesse [403].

de monoxyde de carbone, d'hydrocarbures et de particules. L'entrée en vigueur de la norme Euro 6 est programmée en 2014 et prévoit une réduction de 44% des oxydes d'azote pour les véhicules à moteur Diesel par rapport à la norme Euro 5.

- Le secteur aéronautique : En 2007, l'OACI (Organisation de l'aviation civile internationale) fixe les normes limitant les émissions polluantes des moteurs d'avions pour les turboréacteurs puissants (de poussée maximale excédant 26,7 kN). Une procédure de certification, norme LTO (Landing Take-Off) est basée sur les différentes phases de décollage et d'atterrissage au cours desquelles sont évaluées les rejets polluants ciblés.

Le conseil européen pour la recherche aéronautique, l'ACARE (Advisory Council for Aerautics Research in Europe) a fixé des cibles de réduction des émissions polluantes pour l'horizon 2020 au travers du rapport "Vision 2020". Ces objectifs consistent en une réduction de 80 % des émissions de  $NO_x$ , une réduction de la consommation de kérosène et des rejets de  $CO_2$  de 50% et une diminution du bruit de 50 %.

Le projet européen TECC-AE (Technologie Enhancement for Clean Combustion in Aero-Engines), qui a assuré le financement de cette thèse, s'inscrit dans cette dynamique de réduction des émissions polluantes, de manière à répondre aux objectifs fixés par l'ACARE, et en particulier les émissions d'oxyde d'azote.

Les émissions des  $NO_x$  sont pilotées par les hautes températures et le temps de résidence des gaz chauds dans les zones à haute température. De nombreuses méthodes sont utilisées pour réduire ces émissions. La plupart de ces stratégies se heurtent néanmoins au problème des émissions de  $CO$ . Ce composé résulte d'une combustion incomplète et apparaît en même temps que les imbrûlés. La figure 1.5 représente l'évolution des émissions de  $NO_x$  et de  $CO$  en fonction de la richesse de la flamme. On constate dès lors, qu'il est difficile de diminuer les  $NO_x$  sans contribuer à l'augmentation des émissions de  $CO$ . En effet, à mesure que la richesse diminue, la concentration en  $CO$  augmente puisque ce dernier n'est plus oxydé en  $CO_2$ . Pour des richesses supérieures, l'augmentation de la température induit une augmentation des  $NO_x$ . Lorsque la combustion devient riche, le défaut d'oxygène réduit l'oxydation du  $CO$  en  $CO_2$ . Ce graphe souligne donc l'existence d'une fenêtre où la combustion peut être qualifiée de "propre".

Dans le contexte aéronautique, la première stratégie de réduction des rejets polluants repose donc sur une réduction de la température de la flamme [223]. Cette réduction s'effectue grâce à un passage à un mode de combustion prémélangée (ou partiellement prémélangée) pauvre. Ce régime de fonctionnement se nomme LP (*Lean Premixed*, pour les carburants liquides) ou LPP (*Lean Premixed Prevaporized*, pour les carburants gazeux). L'inconvénient majeur de ce régime de fonctionnement est qu'il est très sensible aux perturbations aérodynamiques de l'écoulement ce qui induit des dynamiques de flammes très instationnaires avec des déplacements importants des fronts de flamme. Le confinement de la chambre de combustion favorise alors l'excitation de modes acoustiques, à l'origine des instabilités thermo-acoustiques. Ces instabilités se caractérisent par la présence de fluctuations de pression de grandes amplitudes qui se couplent aux fluctuations des taux de réaction. Les mouvements aérodynamiques induits par ces instabilités sont susceptibles de déstabiliser la combustion, générer un mouvement de retour de flamme dans l'injecteur (*flashback*) et même conduire à une extinction. Les vibrations générées peuvent endommager la chambre de combustion, les systèmes d'injection et même le moteur dans sa globalité. Ce problème des instabilités de combustion est au centre des développements réalisés actuellement sur les turbines à gaz.

Toujours dans le contexte des chambres de combustion aéronautiques, la deuxième stratégie concerne le contrôle du temps de séjour [223]. Le contrôle de ce paramètre consiste à trouver le meilleur compromis en terme d'émissions polluantes et pour les différents régimes de fonctionnement. En effet, alors qu'un temps de résidence important des gaz au sein de la chambre permet au monoxyde de carbone de s'oxyder, ce maintien dans des zones à haute température peut conduire à l'accroissement des  $NO_x$ . Le temps de résidence est particulièrement conditionné par l'allumage dans des conditions d'alimentation défavorables comme en altitude ou à faible puissance. À faible puissance, les températures étant peu élevées, la cinétique d'oxydation du monoxyde de carbone se trouve réduite. Par ailleurs, l'allumage et la stabilité de la flamme constituent deux éléments délicats à piloter [251].

Pour limiter ces inconvénients, plusieurs choix technologiques existent et comprennent, entre autre :

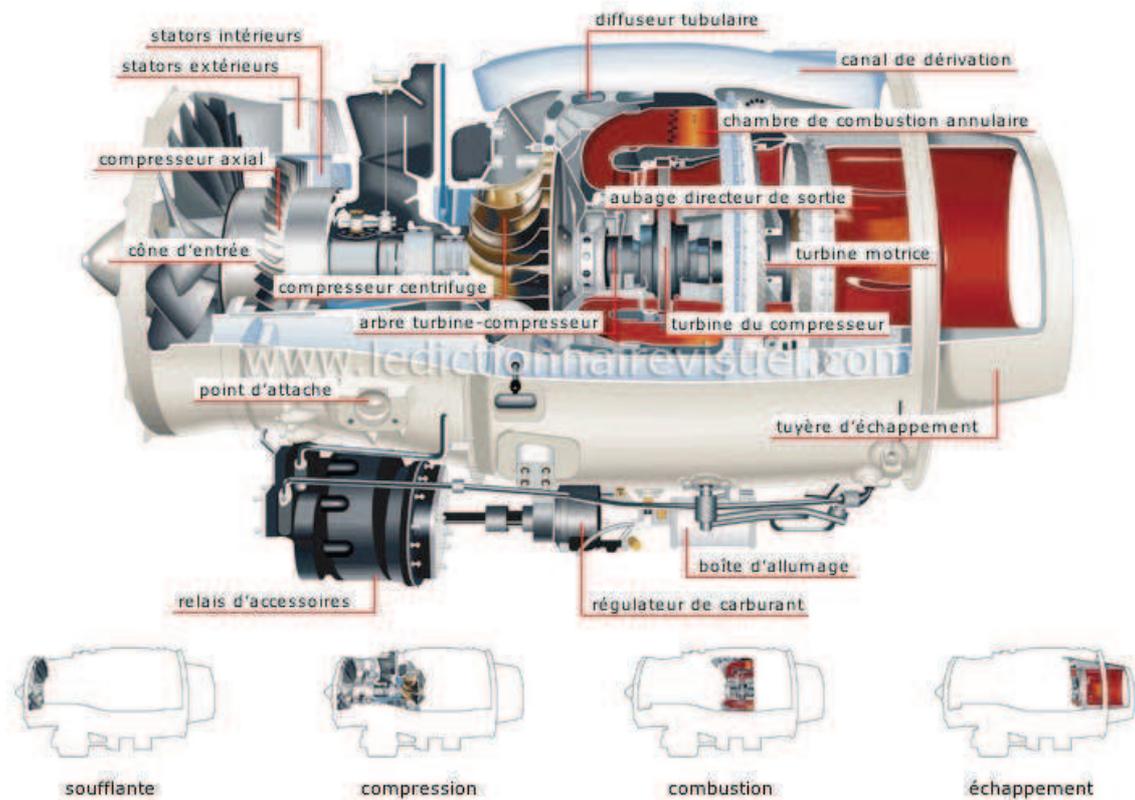
- Une modification des propriétés de la combustion. Cette stratégie passe par l'utilisation d'un autre combustible, par exemple l'hydrogène. Ce dernier brûle plus vite que le méthane. Ainsi, le front de flamme est plus proche de l'injecteur et est moins sensible aux phénomènes vibratoires [251].
- Une modification de la géométrie de l'injecteur pour garantir des conditions aérodynamiques de mélanges optimales. Par exemple, l'injecteur multi-points assure l'homogénéité du mélange combustible-comburant à l'aide d'un réseau de points d'injection disposés en couronne [75, 18].
- L'utilisation d'un catalyseur ou injection de gaz (ammoniac, urée, méthanol [332] ou, plus récemment, de dihydrogène [125]).
- L'utilisation de nouvelles géométries de chambre de combustion avec les concepts de l'*Ultra Compact Combustor* [11] et du *Trapped Vortex Combustor* [318].

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'attachent à étudier le dernier choix technologique, c'est-à-dire la voie de l'optimisation de la géométrie de la chambre de combustion avec le concept du *Trapped Vortex Combustor*.

### 1.3 Les turboréacteurs

Avant d'aborder la structure du présent manuscrit, les principaux éléments d'un turboréacteur ainsi que son principe de fonctionnement sont présentés.

La figure 1.6 illustre les différents éléments constitutifs d'un turboréacteur à double flux. La soufflante ou fan aspire l'air dans le turboréacteur et le divise en deux flux : un flux d'air interne, destiné



**FIGURE 1.6:** Turboréacteur à double flux avec une chambre de combustion annulaire [1].

à la chambre de combustion, et un flux externe qui contourne cette dernière. Cet air est ensuite comprimé par un compresseur axial ou centrifuge, avec parfois plusieurs étages reliés à différents arbres mécaniques pour améliorer le rendement. On qualifie les différents étages de compresseur de basse pression et haute pression. L'air (ou dans le cas illustré sur la figure 1.6, le flux interne d'air) parvient ensuite à la chambre de combustion par le diffuseur. Ce diffuseur a pour rôle de redresser l'écoulement avant son entrée dans la chambre de combustion. Sur la fig. 1.6, cette dernière est de forme annulaire et est constituée d'un foyer, qualifié de tube à flammes, en forme de tore. Ce même tube à flammes est intégré à un carter de forme torique. L'énergie accumulée dans la chambre de combustion est ensuite restituée aux différents étages de turbines. Les turbines transforment l'énergie cinétique et thermique des gaz en énergie mécanique destinée à entraîner le fan et les différents étages de compression. Ces gaz sont ensuite détendus dans une tuyère pour être accélérés et produire la poussée.

Au cours de sa progression dans les différents organes, le fluide suit donc les étapes d'un cycle thermodynamique composés des phases d'admission, compression, combustion, détente et d'éjection. Dans le cadre d'un turboréacteur à simple flux, le cycle thermodynamique idéal (détente et compression isentropiques, pas de perte de charge) est représenté sur la figure 1.7. Il s'agit du cycle de Brayton-Joules. Ce cycle est commun aux turbines à gaz terrestres et aux turboréacteurs. Seul diffère le devenir de l'énergie mécanique aux derniers stades du cycle, destiné à alimenter des alternateurs dans le premier cas et à fournir la poussée nécessaire dans le second.

Dans cette étude, nous nous focaliserons sur la chambre de combustion du turboréacteur. Elle se décompose en plusieurs zones, comme l'illustre la figure 1.8 :

- La zone primaire s'étend du fond de la chambre aux trous primaires. Elle assure la stabilisation de la flamme et favorise le mélange au travers des recirculations d'air dans le foyer et du mouvement de swirl généré par l'injecteur.

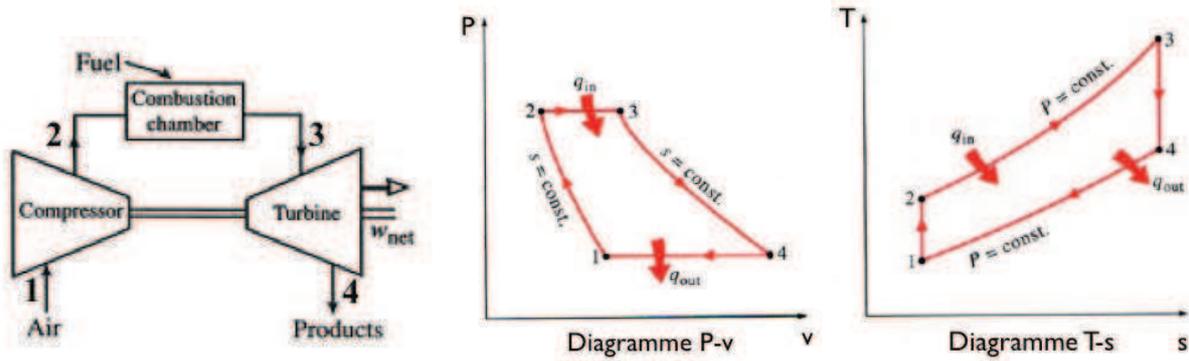


FIGURE 1.7: Cycle de Brayton-Joules pour une turbine à gaz idéal ou un turboréacteur idéal à simple flux.

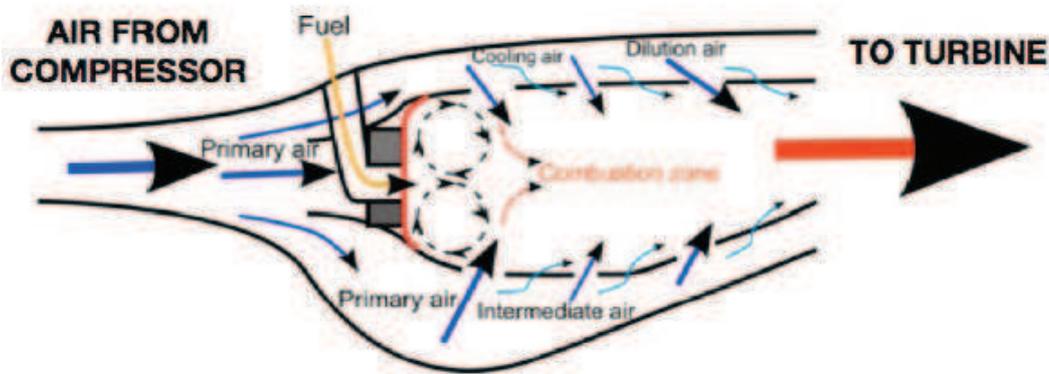


FIGURE 1.8: Schéma de la coupe d'un tube à flamme ou chambre de combustion annulaire.

- Le rôle de la zone secondaire est d'assurer la consommation de la majorité du carburant. Elle fait office de post-combustion et permet d'abaisser la température.
- La zone de dilution assure le mélange des gaz brûlés avec l'air frais issu du contournement et amené par les trous de dilution. Elle permet l'obtention d'un profil de température convenable pour la turbine (aux alentours de 1 400 K) et évite la formation d'éventuels points chauds sur les aubages des turbines.

Pour un fonctionnement optimal, une chambre de combustion aéronautique doit satisfaire un certain nombre de contraintes pour lesquels nous pouvons établir la liste suivante :

- Consommation de la totalité du carburant,
- Rendement de combustion élevé,
- Plage de stabilité importante (sur une large gamme de richesse et de pression),
- Faibles pertes de charge (minimisation des pertes d'énergie de l'écoulement),
- Bonnes performances d'allumage au sol et en altitude (en particulier à faible pression),
- Profils de température des gaz en sortie de chambre convenables pour les aubages des turbines,
- Capacité d'ingestion d'eau,
- Faible poids pour améliorer le rendement global du turboréacteur,
- Faible encombrement,
- Compétitivité en terme de coûts de production, d'utilisation et d'entretien,

- Endurance et fiabilité,
- Respect des normes en vigueur pour les émissions polluantes.

Ces dernières normes, de plus en plus restrictives, orientent les recherches vers de nouvelles architectures de chambres et l'amélioration des systèmes d'injection (d'un point de vue aérodynamique avec de nouvelles géométries et de nouvelles dispositions des injecteurs au sein de la chambre mais aussi d'un point de vue chimique avec l'investigation de nouveaux carburants).

### 1.4 Objectifs de la thèse et plan du mémoire

La problématique de cette thèse est consacrée à la compréhension des mécanismes régissant la stabilisation d'une flamme dans une chambre de turboréacteur de type TVC (*Trapped Vortex Combustor*) par la simulation numérique d'écoulements réactifs compressibles avec un couplage chimique. Afin de conserver les avantages associés à l'utilisation d'un code structuré, la méthode des frontières immergées est utilisée pour décrire des géométries complexes, jusqu'à présent traitées avec des codes de calcul non structurés. Nous nous sommes attachés à décrire les différentes étapes de mise en place d'un traitement des conditions limites immergées et démontrer la pertinence du couplage code compressible/frontières immergées.

Pour représenter les écoulements réactifs, la méthode "PCM-FPI", dite de tabulation chimique, est utilisée au cours de ces travaux. L'approche FPI est basée sur la décomposition d'une flamme turbulente en une collection de flammes laminaires monodimensionnelles pour lesquelles la simple connaissance d'une variable d'avancement, pour caractériser la transition entre les gaz frais et les gaz brûlés, ainsi que la richesse du mélange fournit l'évolution des grandeurs thermochimiques préalablement tabulées. Le modèle PCM assure le couplage entre la turbulence et la chimie par l'introduction de fonctions de densité de probabilité. Les avantages et points faibles de la méthode PCM-FPI seront discutés et ils nous amèneront à l'introduction d'un modèle permettant la conservation de la vitesse de flamme tout en préservant une description chimique fine du front de flamme.

Le manuscrit est structuré de la façon suivante :

- Le **chapitre 1** rappelle les équations gouvernant les fluides compressibles, visqueux, réactifs et non réactifs avec les différentes hypothèses et approximations utilisées. Les principaux types de flammes sont ensuite présentés avec les outils de modélisation actuels. Parmi les trois principales approches de la combustion turbulente, qui sont la simulation numérique directe (*DNS* pour *Direct Numerical Simulation*), la simulation des grandes échelles (*LES* pour *Large Eddy Simulation*) et la simulation des équations moyennées au sens de Reynolds (*RANS* pour *Reynolds Averaged Navier Stokes*), nous nous focaliserons sur la seconde et présenterons les modèles de sous-maille utilisés. Enfin, la dernière section sera dédiée à la présentation de la méthode PCM-FPI.
- Le **chapitre 2** présente les outils numériques utilisés : les schémas numériques et les conditions limites.
- Le **chapitre 3** est dédié à la méthode des frontières immergées. Dans un premier temps, un état de l'art des différentes méthodes de frontières immergées sera présenté. La méthode de la cellule fantôme, retenue pour les présents travaux sera décrite plus précisément. En particulier, les éléments clés pour l'intégration de cette méthode seront exposés. Différents calculs seront alors présentés pour valider cette technique de modélisation.
- L'objectif du **chapitre 4** est l'étude de la dynamique de l'écoulement affleurant une cavité transsonique. Une description de la dynamique de cavité et des précédentes études relatives à ces écoulements est effectuée.

- Au cours du **chapitre 5**, les résultats de la simulation numérique des grandes échelles de l'écoulement dans une cavité rectangulaire transsonique seront exposés. Cet écoulement est piloté par un processus de rétroaction aéroacoustique dont la description est fortement sensible aux conditions limites. Cette étude démontrera la qualité des reconstructions intrinsèques à la méthode des frontières immergées avec des comparaisons de calculs réalisés avec des parois immergées ou décrites avec une approche de type multi-bloc reposant sur un formalisme caractéristique tri-dimensionnelle (3D-NSCBC pour *Tridimensional Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions*). Différents calculs seront également confrontés et analysés suivant le modèle de sous-maille, la résolution du maillage et le niveau de dissipation artificielle.
- Le **chapitre 6** donne un aperçu des différentes configurations de chambres basées sur l'emploi d'une cavité comme élément stabilisateur.
- Le **chapitre 7** rassemble les simulations de l'écoulement non réactif dans une chambre de type TVC avec une étude phénoménologique de la dynamique de la cavité au regard des paramètres géométriques.
- Le **chapitre 8** est dédié à l'étude de la dynamique de la flamme dans cette configuration. La littérature ne mentionne aucune étude de la combustion subsonique dans une cavité avec un code compressible. Les difficultés de représentation de la dynamique de la chambre seront ainsi évoquées. En particulier, nous reproduirons la dynamique instable de la chambre. Des simulations complémentaires orienteront également les futurs choix technologiques pour obtenir une chambre de type TVC stable. Il est aussi montré l'existence d'un cycle limite acoustique. Nous établirons en effet une relation permettant d'anticiper le niveau des fluctuations de pression à partir des variations d'une variable d'avancement décrivant la flamme. Ainsi, connaissant les mouvements instationnaires d'une flamme, il semble possible d'obtenir une estimation de la variation maximale de pression, sans nécessiter le couplage avec un solveur acoustique.
- Enfin le **chapitre 9** présente les développements réalisés afin de corriger un des points faibles de la méthode PCM-FPI, à savoir la conservation de la vitesse du front de flamme.

Première partie

Méthode des frontières immergées pour  
les écoulements compressibles



# Chapitre 2

## Modèles physiques et équations de bilan

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Equations de l'aérothermochimie</b>	<b>15</b>
2.1.1	Conservation de la masse	15
2.1.2	Conservation des espèces chimiques	16
2.1.3	Conservation de la quantité de mouvement	16
2.1.4	Conservation de l'énergie	17
2.1.5	Relations d'état	18
2.1.6	Propriétés de transport moléculaire	18
2.1.7	Viscosité du mélange	19
2.1.8	Nombres caractéristiques	19
2.1.9	Récapitulation des variables et équations à résoudre	20
<b>2.2</b>	<b>Les archétypes de la combustion en régime laminaire</b>	<b>20</b>
2.2.1	Flamme de prémélange	20
2.2.2	Flamme de diffusion	22
2.2.3	Vers la description d'un système de combustion réaliste : la flamme partiellement prémélangée	23
<b>2.3</b>	<b>Représentation de la chimie</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Représentation de la turbulence</b>	<b>26</b>
2.4.1	La turbulence	26
2.4.2	RANS-LES-DNS	29
2.4.3	L'opérateur de filtrage	30
2.4.4	Présentation des équations filtrées au sens de Favre	34
2.4.4.1	Equation d'état	34
2.4.4.2	Equation de continuité	34
2.4.4.3	Quantité de mouvement	34
2.4.4.4	Espèces	34
2.4.4.5	Energie	35
2.4.4.6	Hypothèses simplificatrices	37
2.4.4.7	Système complet des équations filtrées à résoudre	37
2.4.5	Les stratégies de modélisation de la turbulence	38
2.4.5.1	Approche de Boussinesq	39
2.4.5.2	Fermeture des termes de transport scalaire et d'énergie non-résolus	42
2.4.5.3	Modèle Smagorinsky	42
2.4.5.4	Le modèle de Smagorinsky dynamique	43
	La méthode des moyennes spatiales dans des directions homogènes	45
	Le modèle dynamique localisé (DSM)	45
	Le modèle dynamique par suivi lagrangien (LDSM)	46
2.4.5.5	Le modèle de Yoshizawa (fermeture de $\tau_{kk}$ )	48

2.4.5.6	Deux formulations dynamiques du modèle de Yoshizawa . . . . .	48
	L'approche dynamique localisée du modèle de Yoshizawa (DYM) . . . . .	49
	L'approche dynamique lagrangienne du modèle de Yoshizawa (LDYM) . . . . .	49
2.4.5.7	Le modèle WALE . . . . .	50
2.4.5.8	Le modèle de Vreman . . . . .	50
2.4.5.9	MILES approach . . . . .	51
<b>2.5</b>	<b>Modélisation de la combustion . . . . .</b>	<b>51</b>
2.5.1	Revue des techniques . . . . .	51
2.5.2	Combustion turbulente prémélangée . . . . .	52
2.5.2.1	Les régimes de la combustion prémélangée . . . . .	52
2.5.2.2	Le modèle EBU . . . . .	54
2.5.2.3	Le modèle BML . . . . .	55
2.5.2.4	L'approche de la densité de surface de flamme . . . . .	56
2.5.2.5	L'approche géométrique : l'équation de surface $G$ . . . . .	57
2.5.2.6	Le modèle de flammes épaissies artificiellement : TFLES . . . . .	58
2.5.2.7	L'approche du transport de PDF . . . . .	58
2.5.2.8	L'approche des PDF présumées . . . . .	59
2.5.2.9	L'approche de fermeture des moments conditionnés . . . . .	60
2.5.2.10	Le modèle de la chimie tabulée filtrée : F-TACLES . . . . .	60
2.5.3	Combustion turbulente non-prémélangée . . . . .	61
2.5.3.1	Le modèle EDM . . . . .	62
2.5.3.2	L'approche des flammelettes laminaires . . . . .	62
2.5.3.3	L'approche du transport de PDF . . . . .	62
2.5.3.4	Les moments conditionnés CMC ( <i>Conditional Moment Closure</i> ) . . . . .	62
2.5.3.5	L'approche MMC ( <i>Multiple Mapping Conditioning</i> ) . . . . .	63
2.5.4	Index de Flamme ou indice de Takeno . . . . .	63
<b>2.6</b>	<b>Réduction de la chimie et tabulation . . . . .</b>	<b>64</b>
2.6.1	Le mécanisme squelettique . . . . .	65
2.6.2	Le mécanisme réduit . . . . .	65
2.6.3	Le mécanisme global . . . . .	65
2.6.4	Tabulation . . . . .	65
2.6.4.1	La méthode de la variété intrinsèque de dimension réduite (ILDm) . . . . .	65
2.6.4.2	La méthode FPI ( <i>Flame Prolongation of ILDM</i> ) . . . . .	66
2.6.4.3	La méthode ISAT ( <i>In Situ Adaptive Tabulation</i> ) . . . . .	67
<b>2.7</b>	<b>Modèle PCM-FPI . . . . .</b>	<b>68</b>
2.7.1	Méthode FPI ( <i>Flame Prolongation of ILDM</i> ) . . . . .	68
2.7.2	Les Moments Conditionnés Présumés ( <i>Presumed Conditional Moments</i> ) . . . . .	71
2.7.3	Modélisation statistique de FPI par les Moments Conditionnés Présumés (PCM-FPI) . . . . .	73
2.7.3.1	Equation de transport pour la fraction de mélange filtrée . . . . .	73
2.7.3.2	Equation de transport pour la variance de la fraction de mélange . . . . .	74
2.7.3.3	Equation de transport pour la variable d'avancement filtrée . . . . .	74
2.7.3.4	Equation de transport pour le carré filtré des variables d'avancement . . . . .	75

Ce chapitre a pour objectif la description des équations régissant la mécanique des fluides réactifs et non réactifs ainsi que l'introduction des outils de modélisation. Après avoir exposé les équations de Navier-Stokes (section 2.1), la combustion avec les différentes configurations de flammes et leurs variables caractéristiques seront décrites (section 2.2). Quelques éléments clés de la cinétique chimique seront ensuite abordés (section 2.3). Le concept d'écoulement turbulent (section 2.4) sera décrit avec les différents outils de modélisation qui lui sont consacrés. Des modèles de combustion largement utilisés seront ensuite brièvement exposés (section 2.5) avec une attention particulière au modèle PCM-FPI retenu pour cette étude (section 2.7).

## 2.1 Equations de l'aérothermochimie

Les écoulements au sein des chambres de combustion industrielles sont généralement turbulents, multi-espèces, réactifs et diphasiques. Pour établir les équations régissant la dynamique du fluide, on se place dans le cadre théorique de la mécanique des milieux continus. On considère ainsi un mélange gazeux continu comportant  $N$  espèces de sorte à pouvoir appliquer les lois de la thermodynamique et de la mécanique. La dynamique du fluide peut donc être décrite par ses propriétés macroscopiques telles que la pression, la masse volumique et la vitesse. Suivant la complexité du problème, elles sont complétées par d'autres quantités extensives, comme les fractions massiques des espèces chimiques, où chaque nouvelle propriété est associée à un phénomène physique bien distinct.

Les équations de l'aérothermochimie établies ci-dessous sont intégrées sur des volumes de contrôle pourvus d'un nombre important de molécules et justifiant ainsi le concept de moyenne statistique.

En particulier, les équations considérées portent sur la conservation de la masse, la quantité de mouvement, l'énergie totale et les espèces, et découlent du bilan d'une grandeur extensive dans un système défini par un volume donné ou une masse donnée du mélange considéré.

Pour une grandeur extensive notée  $G$  de nature scalaire (masse, énergie, entropie) ou vectorielle (quantité de mouvement), le principe de conservation se présente sous la forme suivante :

Variation temporelle de  $G$  = Production de  $G$  + Echange de  $G$  avec l'extérieur

Chaque grandeur extensive (conservée ou non)  $G$  pouvant s'écrire  $G = mg$  avec  $g$  la densité par unité de masse de  $G$ , l'équation 2.1 de bilan global s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_V \rho g dV \right] + \int_{\Sigma} \Phi_G \cdot \mathbf{n} d\Sigma = \int_V \sigma_G dV \quad (2.1)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $\mathbf{n}$  représente le vecteur unitaire normal à la surface  $\Sigma$  et orienté vers l'extérieur,  $\Phi_G$  la densité de flux ou de courant de  $G$  et  $\sigma_G$  la densité de source (ou, le cas échéant, la densité de puits) de  $G$ . En utilisant la formule de Green-Ostrogradski, la précédente relation (équation. 2.1) s'écrit :

$$\frac{\partial \rho g}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi_G = \sigma_g \quad (2.2)$$

Le flux  $\Phi_G$  se décompose en deux contributions d'échelles différentes associant un flux macroscopique de convection lié au champ de vitesse  $\mathbf{v}$  et un flux de diffusion moléculaire  $\mathbf{J}^G$  :

$$\Phi_G = \rho g \mathbf{u} + \mathbf{J}^G \quad (2.3)$$

Afin d'exprimer le système aérothermochimique, l'équation de bilan global ou principe de conservation d'une grandeur extensive  $G$  est appliquée à la masse, à la quantité de mouvement, aux espèces chimiques ainsi qu'à l'énergie. En utilisant la convention de sommation d'Einstein pour les indices, nous présentons ci-dessous les équations à résoudre dans un système exprimé dans une base cartésienne.

### 2.1.1 Conservation de la masse

Le bilan de conservation de la masse se traduit en utilisant une densité par unité de masse unitaire  $g = 1$ , un flux de masse et un terme source nuls.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.4)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du mélange fluide et  $u_i$  la  $i$ -ième composante du vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ .

### 2.1.2 Conservation des espèces chimiques

L'écriture de la conservation des espèces s'obtient en considérant la fraction massique d'une espèce  $l$  ( $g = Y_l$ ) dont le flux de diffusion s'écrit  $\mathbf{J}^G = \rho \mathbf{V}_{dl}$  avec  $\mathbf{V}_{dl}$  la vitesse de diffusion de l'espèce  $l$  à l'échelle moléculaire :

$$\frac{\partial \rho Y_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho(u_i + V_{dl,i})Y_l}{\partial x_i} = \rho \dot{\omega}_l \quad l = 1 \dots N_{spe} \quad (2.5)$$

où  $\dot{\omega}_l$  est le taux de production de l'espèce chimique  $l$  en unité de masse par unité de volume et de temps. La diffusion moléculaire des espèces chimiques résulte de trois effets : le gradient des fractions massiques (effet direct), le gradient de température (effet Soret) et le gradient de pression (effet baro-diffusif). Dans la plupart des codes de calcul, l'équation 2.5 n'est pas utilisée directement mais est l'objet de simplifications basées sur l'hypothèse suivante :

*Hypothèse 1* : Les effets Soret et baro-diffusifs étant négligés, l'approximation de la loi de Fick est utilisée pour le terme de diffusion :

$$Y_l \mathbf{V}_{dl} = -D_l \nabla Y_l \quad (2.6)$$

où  $D_l$  est le coefficient de diffusion de l'espèce  $l$  dans le mélange.

Il en résulte l'équation de conservation des espèces chimiques suivante :

$$\frac{\partial \rho Y_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i Y_l}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho D_l \frac{\partial Y_l}{\partial x_i} \right) + \rho \dot{\omega}_l \quad l = 1 \dots N_{spe} \quad (2.7)$$

Dans le cadre des écoulements non réactifs, cette équation bilan est également utilisée pour permettre la description d'un scalaire passif (de terme source nul). Ce scalaire passif permet de qualifier le mélange entre deux écoulements et respecte donc l'équation bilan suivante :

$$\frac{\partial \rho Z}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i Z}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho D \frac{\partial Z}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

avec  $D = \frac{\mu}{\rho Sc}$ ,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide et  $Sc$  le nombre de Schmidt.

Etant donné la définition de la fraction massique de l'espèce  $l$  ( $Y_l$ ) et le principe de conservation des espèces, nous obtenons les relations fondamentales suivantes dites de conservation de la masse :

$$\sum_{l=1}^{N_{spe}} Y_l = 1, \quad \sum_{l=1}^{N_{spe}} Y_l \mathbf{V}_{dl} = 0, \quad \sum_{l=1}^{N_{spe}} \dot{\omega}_l = 0 \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Cette équation de bilan repose sur la définition de la quantité de mouvement  $G = m\mathbf{v}$  où  $\mathbf{v}$  est la vitesse de convection globale de l'écoulement. Le flux  $\Phi_G$  est associé au tenseur des contraintes  $\sigma$  et le terme source est une fonction de la force massique  $\mathbf{f}_l$  agissant sur l'espèce  $l$  :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x_j} + \rho \sum_{l=1}^{N_{spe}} Y_l f_{l,i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.10)$$

Le tenseur des pressions  $\Psi$  se décompose en une partie isotrope exprimée en fonction de la pression thermodynamique  $P$  et en un déviateur  $\sigma$ , appelé tenseur des contraintes visqueuses :

$$\Psi_{ij} = \sigma_{ij} - P \delta_{ij} \quad (2.11)$$

où  $\delta_{ij}$  est le tenseur dit de Kronecker.

Comme pour le bilan des espèces, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est l'objet d'hypothèses simplificatrices :

Hypothèse 2 : Le fluide étant Newtonien, le tenseur  $\sigma$  est une fonction linéaire des taux des déformations (hypothèse de Stokes, relation de Lamé) :

$$\sigma_{ij} = 2\mu A_{ij} \quad (2.12)$$

où  $A_{ij}$  représente le déviateur du tenseur des efforts et s'écrit :

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.13)$$

Hypothèse 3 : Les forces de volumes qui s'appliquent sur le fluide sont négligés,  $f_{k,i} = 0$ .

On obtient alors :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j - P \delta_{ij})}{\partial x_j} = 2 \frac{\partial \mu A_{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.14)$$

### 2.1.4 Conservation de l'énergie

Cette équation peut s'écrire sous différentes formes suivant que l'on se base sur l'énergie interne  $u$ , l'énergie totale  $e_t$ , l'énergie totale non chimique  $E$ , la somme de l'énergie sensible et chimique  $e$ , l'énergie sensible  $e_s$  ou l'enthalpie  $h$  [297]. Nous travaillerons avec l'expression basée sur le bilan de l'énergie totale non chimique  $E$ . Cette énergie résulte de la somme de la composante cinétique et sensible, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E &= e_s + \frac{1}{2} u_i u_i \\ E &= \int_{T_0}^T c_v dT - \frac{RT_0}{\bar{W}} + \frac{1}{2} u_i u_i \\ E &= \int_{T_0}^T \left( \sum_{l=1}^{N_{spe}} c_{vl} Y_l \right) dT - \frac{RT_0}{\bar{W}} + \frac{1}{2} u_i u_i \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j E}{\partial x_j} = \rho \dot{\omega}_T - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\Psi_{ij} u_i) + \dot{Q} + \rho \sum_{l=1}^{N_{spe}} Y_l f_{l,j} (u_j + V_{l,j}) \quad (2.16)$$

où les termes  $\dot{\omega}_T$  et  $\dot{Q}$  sont respectivement le terme source d'énergie chimique et le terme source de chaleur "autre" (flux radiatif, allumage par bougie...) à ne pas confondre avec l'énergie libérée au cours de la combustion. Le terme  $\rho \sum_{l=1}^N Y_l f_{l,i} (u_i + V_{l,i})$  représente l'énergie produite par les forces de volumes  $f_l$  sur l'espèce  $l$ . Le flux d'énergie  $q_j$  est la résultante du flux de chaleur, dû au gradient de température et exprimé par la loi de Fourier, et d'un gradient de masse des espèces (effet Dufour) :

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho \sum_{l=1}^N h_{s,l} Y_l V_{l,i} \quad (2.17)$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j E}{\partial x_j} &= \rho \dot{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \sum_{l=1}^{N_{spe}} h_{s,l} Y_l V_{l,j} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} (\Psi_{ij} u_i) + \dot{Q} + \rho \sum_{l=1}^{N_{spe}} Y_l f_{l,j} (u_j + V_{l,j}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

On adopte les hypothèses simplificatrices suivantes :

Hypothèse 4 : Le terme  $\rho \sum_{i=1}^N Y_l f_{l,i}(u_i + V_{l,i})$  sera négligé du fait de l'absence de la force massique  $\mathbf{f}_l$  exercée sur l'espèce  $l$ .

Hypothèse 5 : Le terme source de chaleur  $\dot{Q}$  ne sera pas considéré par la suite.

Hypothèse 6 : Le transport diffusif d'enthalpie sensible décrit par  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \sum_{l=1}^{N_{spe}} h_{s,l} Y_l V_{l,j} \right)$  sera également négligé devant le terme source chimique  $\dot{\omega}_T$ .

Le terme source d'énergie  $\dot{\omega}_T$  lié au dégagement de chaleur lors de la combustion est déterminé avec les enthalpies de formation des espèces :

$$\dot{\omega}_T = - \sum_{l=1}^{N_{spe}} \Delta h_{f,l}^0 \dot{\omega}_l \quad (2.19)$$

Dans le cas d'un écoulement non réactif, la précédente relation 2.16 se simplifie :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho E u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i \Psi_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (2.20)$$

avec  $q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$ .

### 2.1.5 Relations d'état

L'étude numérique des écoulements réactifs et non réactifs revient à caractériser leur évolution thermodynamique. La thermodynamique décrit, à l'échelle macroscopique, la distribution des molécules et leurs interactions. En particulier, une équation d'état fournit la relation entre les différents paramètres physiques (les variables d'état) qui déterminent son état. Il existe différentes équations d'état suivant les comportements et phénomènes physiques à caractériser. Pour la modélisation de la combustion, l'hypothèse des gaz parfaits est généralement admise :

$$P = \rho \left( \frac{R}{\overline{W}} \right) T \quad (2.21)$$

avec  $R$  la constante des gaz parfaits et  $\overline{W}$  la masse molaire moyenne du mélange considéré, exprimée en fonction des fractions massiques  $Y_l$  des  $N_{spe}$  espèces constituant le mélange :

$$\frac{1}{\overline{W}} = \sum_{l=1}^{N_{spe}} \frac{Y_l}{W_l} \quad (2.22)$$

### 2.1.6 Propriétés de transport moléculaire

L'introduction des coefficients de diffusion binaires  $D_{l,j}$  permet la caractérisation du terme de transport moléculaire. Ces coefficients binaires modélisent la capacité de diffusion d'une espèce  $l$  dans une autre espèce  $j$  isolée et sont des fonctions complexes qui dépendent des intégrales de collision et des variables thermodynamiques. Ils sont obtenus à l'aide de la théorie cinétique des gaz [168]. Afin de simplifier le formalisme, les coefficients de diffusion binaire  $D_{l,j}$  sont remplacés par une forme plus compacte  $D_l$  caractérisant la vitesse de diffusion de l'espèce  $l$  dans un mélange décrit statistiquement. La diffusivité moléculaire  $D_l$  est ainsi définie par :

$$D_l = \frac{1 - Y_l}{\sum_{j \neq l}^N X_j / D_{lj}} \quad (2.23)$$

L'utilisation de l'équation 2.23 se révèle intéressante uniquement dans le cadre d'une DNS couplée à une chimie complexe pour laquelle les actions respectives des différents composants doivent être

décrites. Cependant, la plupart des applications (DNS ou LES) emploient des schémas simplifiés et ne nécessitent donc pas une modélisation aussi précise de la diffusivité. La diffusivité est alors simplifiée et exprimée en fonction d'un nombre de Schmidt  $Sc_l$  associé à l'espèce  $l$  et supposé constant :

$$D_l = \frac{\mu}{\rho Sc_l} \quad (2.24)$$

### 2.1.7 Viscosité du mélange

La viscosité moléculaire du mélange est exprimée en fonction de la température avec une loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (2.25)$$

avec  $T_0$  la température de référence,  $S$  la constante dite de Sutherland et  $\mu_0$  la viscosité de référence connue à la température de référence  $T_0$ . Le jeu des paramètres ( $\mu_0$ ,  $T_0$  et  $S$ ) est exprimé pour une espèce donnée et pour une plage de température. Pour l'air, ces données valent  $T_0 = 291,15\text{K}$ ,  $S = 120$  et  $\mu_0 = 1,827 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  pour des températures comprises entre 170 K et 1 900 K.

Pour un mélange fluide, la loi empirique de Wilke est souvent utilisée et s'exprime sous la forme :

$$\mu(T) = \sum_{l=1}^{N_{spe}} \frac{X_l \mu_l(T)}{\sum_{j=1}^{N_{spe}} X_j \Phi_{lj}} \quad (2.26)$$

avec  $\Phi_{lj}$  le coefficient suivant :

$$\Phi_{lj} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{W_l}{W_j} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + \left( \frac{\mu_l}{\mu_j} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{W_j}{W_l} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^2 \quad (2.27)$$

Dans le code de calcul utilisé, SiTCom, la loi de Sutherland sera utilisée avec les coefficients de l'air pour estimer la viscosité moléculaire de tous les mélanges gazeux. En effet, Godel [142] montre dans ses travaux de thèse que la loi de Sutherland, pour des mélanges air/méthane, permet d'obtenir des résultats satisfaisants pour un niveau de complexité inférieur à l'approche de Wilke.

### 2.1.8 Nombres caractéristiques

Cette section rassemble différentes grandeurs caractéristiques. La viscosité cinématique, homogène à une diffusivité de quantité de mouvement, est définie par :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.28)$$

Le nombre de Schmidt  $Sc$  compare la viscosité cinématique  $\nu$  et la diffusion moléculaire  $D$  :

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (2.29)$$

Le nombre de Prandtl  $Pr$  correspond au rapport de la viscosité cinématique et la diffusion thermique :

$$Pr = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{\lambda}{\rho c_p}} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (2.30)$$

Pour les simulations présentées dans ce manuscrit, nous prendrons  $Pr = 0,72$ .

Enfin le nombre de Lewis  $Le$  est le rapport entre la diffusion thermique et la diffusion moléculaire :

$$Le = \frac{\lambda}{\rho c_p D} = \frac{Sc}{Pr} \quad (2.31)$$

Un nombre de Lewis unitaire sera retenu pour nos études.

### 2.1.9 Récapitulation des variables et équations à résoudre

Pour décrire un fluide compressible, tridimensionnel, réactif et constitué de  $N$  espèces, le système à résoudre comporte donc  $(5+N)$  équations :

- une équation de conservation de la masse totale : équation 2.4,
- trois équations de conservation de la quantité de mouvement : équation 2.10,
- une équation de conservation de l'énergie totale non chimique : équation 2.18,
- une équation de conservation pour  $N-1$  espèces : équation 2.7. En effet, la  $N$ -ième composante est obtenue en appliquant le principe de conservation de la masse.

On introduit le vecteur des variables conservatives,  $\mathbf{U}$ , exprimé par :

$$\mathbf{U} = \{\rho \quad \rho u_1 \quad \rho u_2 \quad \rho u_3 \quad \rho E \quad \rho Y_l\}^T$$

et  $\mathbf{Y}$  le vecteur associé aux espèces transportées dont les composantes seront notées  $Y_l$  dans la suite de ce manuscrit. Dans la présente étude, nous utiliserons la méthode PCM-FPI pour modéliser la combustion turbulente. Cette approche, décrite dans la section 2.7, ne repose pas sur le transport de  $m$  espèces mais de 4 paramètres qui permettent de reconstruire le vecteur des compositions.

On décompose le tenseur des flux en une partie convective,  $\mathbf{F}^k$  et une partie diffusive,  $\mathbf{D}^k$ . En notant  $\mathbf{s}$  le vecteur des termes sources, on peut décrire le problème selon la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{D}^k}{\partial x_k} = \mathbf{s}, \quad (2.32)$$

avec :

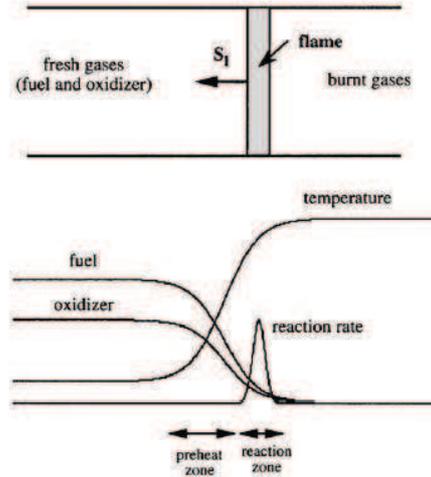
$$\mathbf{F}^k = \begin{pmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{1k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{2k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{3k} p \\ (\rho E + p) u_k \\ \rho Y_l u_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\mu A_{1k} \\ -2\mu A_{2k} \\ -2\mu A_{3k} \\ -2\mu u_j A_{kj} - \frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_k} \\ -\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial Y_l}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \dot{\omega}_T \\ \rho \dot{\omega}_{Y_l} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

## 2.2 Les archétypes de la combustion en régime laminaire

Il existe principalement deux configurations de flammes, indépendantes de la nature turbulente ou non de l'écoulement : la flamme de diffusion et de prémélange. La distinction entre ces deux classifications repose sur le mélange ou non du combustible et du comburant avant la combustion. Lorsque les deux mélanges de carburant et de comburant sont injectés séparément, ils forment une flamme de diffusion ou de combustion non-prémélangée. A l'opposé, le prémélange frais de comburant et de carburant caractérise la combustion prémélangée. Les gaz frais sont alors séparés des gaz brûlés par un front de flamme se propageant librement. Entre ces deux régimes de flamme canonique, on distingue également les flammes partiellement prémélangées, la combustion stratifiée ou encore les flammes triples.

### 2.2.1 Flamme de prémélange

Cette section est consacrée à l'étude de la flamme de prémélange laminaire monodimensionnelle. Sa structure est schématisée sur la figure 2.1. Elle est caractérisée par deux zones de compositions homogènes, séparées par un front de flamme se propageant librement : d'une part un prémélange frais de carburant et de comburant, et d'autre part les produits de combustion (cf. partie supérieure du schéma 2.1). Le front de flamme peut être décomposé en deux zones, une zone de préchauffage et une zone de réaction. Alors que la zone de préchauffage est dominée par les effets de diffusion des espèces, la zone de diffusion est pilotée par les effets chimiques.



**FIGURE 2.1:** Schéma de la structure d'une flamme de prémélange laminaire [389].

L'évolution des grandeurs thermo-chimiques au travers du front de la flamme de prémélange est décrite par la variable d'avancement ou de progrès  $c$  qui constitue un scalaire réactif normalisé. Celle-ci peut être définie à l'aide de grandeurs intensives (la température) ou de grandeurs extensives (certaines fractions massiques d'espèces) et est définie de façon à valoir 0 du côté des gaz frais, où la réaction n'est pas encore initiée, et 1 du côté des gaz brûlés :

$$c = \frac{T - T_u}{T_b - T_u} \quad \text{ou} \quad c = \frac{Y_F - Y_F^u}{Y_F^b - Y_F^u} \quad (2.34)$$

avec les notations  $u$  pour "unburnt" et "b" pour "burnt" afin de caractériser les gaz frais et les gaz brûlés. En restant dans les limites d'inflammabilité du mélange réactif, la flamme peut ainsi être localisée par cet avancement de la réaction globale. Néanmoins, il est important de noter que, pour décrire l'avancée de la réaction globale entre le combustible et l'oxydant, cette grandeur doit nécessairement être monotone à la traversée de la flamme.

Le mélange des gaz frais étant homogène dans un régime de flamme prémélangée, il peut être caractérisé par le rapport adimensionnel de la quantité relative de combustible à cette même quantité relative dans le mélange stoechiométrique. Ce rapport adimensionnel définit la richesse  $\Phi$  du mélange et est inférieur à 1 lorsque le mélange est pauvre (combustible en défaut), supérieur à 1 s'il est riche (combustible en excès) et égal à l'unité dans un mélange stoechiométrique :

$$\Phi = s \frac{Y_{F,0}}{Y_{O,0}} \quad (2.35)$$

où  $s$  est le rapport stoechiométrique<sup>1</sup> et  $Y_{F,0}$  et  $Y_{O,0}$  les fractions massiques de carburant  $F$  et d'oxydant  $O$  initiales. Pour la réaction globale  $\nu_F F + \nu_O O \rightarrow \nu_P P$ , avec  $\nu_F$  et  $\nu_O$  les coefficients molaires stoechiométriques, il vient :

$$s = \frac{\nu_O M_O}{\nu_F M_F} \quad (2.36)$$

L'existence de gradients de température entre les gaz frais et les gaz à l'équilibre permet la propagation de proche en proche, par diffusion, du front de flamme dans les gaz frais à la vitesse de flamme laminaire  $S_L(\Phi)$  qui se détermine à partir de la conservation de la masse de carburant :

$$S_L(\Phi) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\omega}_F dx}{\rho_F^0} \quad (2.37)$$

1. Pour une flamme de prémélange méthane-air, le rapport stoechiométrique  $s$  vaut 4 et autour de 3,5 pour l'isooctane.

avec  $\rho_F^0$  la densité partielle de carburant du côté frais et  $\dot{\omega}_F$  le taux de production ou de destruction du carburant que l'on intègre sur l'ensemble du domaine spatial. Cette vitesse de flamme laminaire constitue une grandeur clé pour la description dynamique des flammes prémélangées, tout comme l'épaisseur thermique de la flamme  $\delta(\Phi)$  :

$$\delta_{th} = \frac{T_b - T_u}{\left| \frac{dT}{dx} \right|_{max}} \quad (2.38)$$

avec  $T_b$  la température adiabatique de fin de combustion (condition "burnt" caractéristique des gaz brûlés) et  $T_u$  la température des gaz frais (condition "unburnt"). Pour une flamme atmosphérique méthane-air proche de la stoechiométrie, l'ordre de grandeur de la vitesse de flamme  $S_L^0$  est de plusieurs dizaines de centimètres par seconde pour une épaisseur thermique inférieure au millimètre.

Ces deux paramètres sont reliés au nombre de Reynolds de la flamme par la relation suivante, dérivée de la théorie de Zeldovitch/Franck-Kamenetski [389] :

$$Re_f = \frac{\delta_{th} S_L}{\nu} \approx 4 \quad (2.39)$$

Concernant la valorisation industrielle, ce régime de flammes se retrouve dans les brûleurs à turbine à gaz (Lefebvre [223]) et dans les moteurs à allumage commandé. Il s'agit également de la flamme observée avec un bec Bunsen.

### 2.2.2 Flamme de diffusion

Dans cette section, nous étudions la flamme de diffusion laminaire. Sa structure est schématisée sur la figure 2.2 dans le cadre d'une flamme à contre-courant où carburant et oxydant sont injectés à contre-courant. La flamme se développe au niveau de la zone de diffusion (mélange intime des deux compositions distinctes) et s'accroche autour de la ligne stoechiométrique. Contrairement à la combustion prémélangée, la flamme de diffusion ne bénéficie d'aucun mécanisme d'auto-propagation, elle est pilotée par la diffusion des espèces chimiques. Son front de flamme est caractérisé par une épaisseur qui varie localement avec le mélange des réactifs et qui résulte de la diffusion des éléments chimiques à une vitesse de diffusion dépendante des contraintes imposées par l'écoulement au niveau de l'interface entre le combustible et l'oxydant.

A l'instar de la flamme de prémélange, on définit une grandeur caractéristique de la structure interne de la flamme. Il s'agit de la notion de fraction de mélange (notée  $Z$ ). Cette variable de Schwab-Zel'dovitch est un scalaire passif qui permet l'évaluation du niveau de mélange entre tous les éléments atomiques fondamentaux d'une composition chimique hétérogène. Elle vaut 1 dans le mélange entrant de carburant et 0 dans le mélange de comburant. La fraction de mélange suit une équation de transport du type convection-diffusion, sans aucun terme source et est définie comme :

$$Z = \frac{\Phi \frac{Y_F}{Y_{F,0}} - \frac{Y_O}{Y_{O,0}} + 1}{\Phi + 1} \quad (2.40)$$

où  $Y_{F,0}$  et  $Y_{O,0}$  sont les fractions massiques de fuel et d'oxydant dans les flux initiaux, et  $Y_F$  et  $Y_O$  les fractions massiques locales.

Si l'on projette les équations de transport des espèces chimiques de l'espace physique à l'espace normalisé de  $Z$ , en négligeant les effets de courbures des iso- $Z$ , on obtient :

$$\frac{\partial \rho Y_l}{\partial t} = \rho D |\nabla Z|^2 \frac{\partial^2 Y_l}{\partial Z^2} + \dot{\omega}_l \quad (2.41)$$

Cette équation fait apparaître une grandeur clé des flammes de diffusion, il s'agit du taux de dissipation scalaire noté  $\chi_Z$  :

$$\chi_Z = 2D |\nabla Z|^2 \quad (2.42)$$

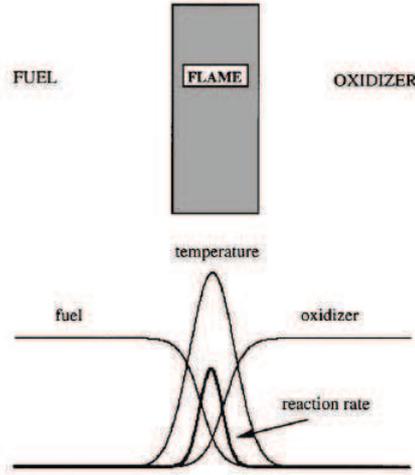


FIGURE 2.2: Structure du front de flamme de diffusion [389].

Ce paramètre mesure l'inverse du temps caractéristique de diffusion. Ainsi, un taux de dissipation scalaire important indique une diffusion rapide des espèces. On peut également définir le nombre de Damköhler. Cette grandeur adimensionnelle compare les influences respectives du temps caractéristique chimique  $\tau_c$  et du temps caractéristique de diffusion  $\tau_D = 1/\chi_Z$  :

$$Da = \frac{1}{\chi_Z \tau_c} \quad (2.43)$$

Lorsque  $Da$  tend vers 0, la chimie est lente et la flamme est gouvernée par la diffusion. On qualifie ce régime de "diffusion pure". L'autre comportement limite d'une flamme de diffusion, caractérisé par un nombre de Damköhler infiniment grand, est le régime de chimie infiniment rapide où les effets chimiques prédominent.

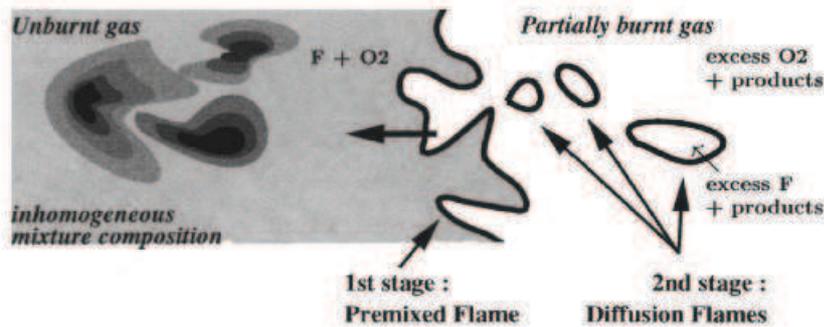
La structure d'une flamme de diffusion se rencontre dans une flamme de bougie. Elle est également présente dans les moteurs à injection directe (Diesel) et divers brûleurs industriels.

### 2.2.3 Vers la description d'un système de combustion réaliste : la flamme partiellement prémélangée

Cette section est dédiée à l'introduction du régime prémélangé ou régime mixte, unifiant le formalisme des deux précédents régimes. En effet, on comprend aisément que les caractéristiques propres aux deux régimes de flammes canoniques sont trop restrictives pour décrire les flammes rencontrées dans la plupart des dispositifs industriels et dans les laboratoires. Ainsi, les applications aéronautiques fonctionnent en régime partiellement prémélangé avec des inhomogénéités de compositions liées à la vaporisation du combustible et au mélange des réactifs (Correa [87]).

Dans les paradigmes de la combustion turbulente, Bilger *et al.* [34] distinguent deux modes de combustion partiellement prémélangée : les flammes stratifiées et la combustion prémélangée/non prémélangée. La distinction entre ces deux modes repose sur l'existence ou non d'un mélange à la stoechiométrie sur l'ensemble des compositions constituant le mélange hétérogène de combustible.

Ainsi, lorsque le mélange des réactifs se situe entièrement du côté pauvre ou riche, sans jamais inclure de mélange stoechiométrique, la combustion est qualifiée de stratifiée. La structure locale de la flamme reprend les caractéristiques de la flamme de prémélange puisqu'en l'absence d'une ligne stoechiométrique, les réactifs pénètrent dans la zone de réaction du même côté. La combustion stratifiée diffère de la flamme de prémélange par des variations du mélange frais qui induisent des fluctuations locales du taux de réaction et donc un plissement du front de flamme. Ce régime des



**FIGURE 2.3:** Structure du front de flamme dans un mélange hétérogène de réactifs [160].

flammes stratifiées suscite, depuis les dernières années, de nombreuses études, en particulier pour des applications liées aux moteurs thermiques à injection directe ainsi que les turbines à gaz. En effet, dans les moteurs à injection directe, la présence d'une stratification en richesse assure la propagation de la flamme sur toute une gamme constituée de richesses pauvres et permet de diminuer la consommation de carburant tout en assurant de faibles niveaux d'émissions polluantes. Néanmoins, la stratification est également à l'origine de variations cycle-à-cycle dont le contrôle et la compréhension physique sont au coeur même des études moteurs. Les mécanismes impliqués dans les flammes stratifiées sont nombreux et délicats à interpréter. En effet, la propagation de la flamme au travers d'un mélange spatialement hétérogène présente des propriétés différentes par rapport à la propagation dans un milieu homogène. Pour prédire la vitesse de consommation des réactifs, l'histoire de la flamme doit être reconstruite. Par ailleurs, le couplage avec la turbulence augmente la complexité du problème.

L'existence d'un mélange stœchiométrique sur la gamme des compositions du mélange hétérogène des réactifs mène à la définition de la combustion mixte de diffusion/prémélange. La flamme emprunte alors des caractéristiques des deux régimes de flammes canoniques.

La figure 2.3 illustre une structure possible d'une flamme partiellement prémélangée. Cette flamme est issue des travaux menés par Hélie et Trouvé [160]. Ils identifient deux étapes dans le mécanisme de combustion : une première étape qui consiste en la propagation d'une flamme de prémélange et la seconde étape qui présente les caractéristiques d'un mode de combustion non prémélangée et qui assure la consommation de l'excès de carburant et d'oxydant à gauche du front de flamme.

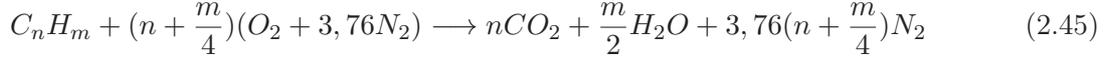
### 2.3 Représentation de la chimie

La combustion peut être définie [91] comme l'évolution irréversible d'un mélange réactif vers son état d'équilibre. Cette évolution est constituée d'un ensemble de réactions chimiques (collisions moléculaires efficaces) qui permettent la description de la réaction finale d'oxydation d'un combustible (généralement un hydrocarbure) par un comburant ou oxydant (dioxygène de l'air). Ce processus de combustion fournit majoritairement de l'eau ( $H_2O$ ) et du dioxyde de carbone ( $CO_2$ ). L'oxydation du combustible est un procédé très exothermique en raison de la libération des énergies de liaisons associées : en moyenne, on considère 40 à 50 MJ/kg pour les hydrocarbures.

Si l'on s'intéresse à l'état final à l'équilibre, la réaction de combustion peut être définie comme une transformation globale, unique et irréversible, impliquant les réactifs et les principaux produits de combustion. Ainsi, la combustion du méthane s'écrit sous la forme :



De manière plus générale, l'oxydation stoechiométrique d'un hydrocarbure  $C_nH_m$  par le dioxygène de l'air  $O_2$  est décrit par la réaction globale :



La chaleur dégagée au cours de la réaction peut être évaluée à partir d'un bilan enthalpique basé sur la différence entre les enthalpies de formation entre les produits et les réactifs.

Toutefois, cette réaction globale ne rend pas compte des étapes élémentaires et intermédiaires menant aux produits finaux de réaction. Seule l'analyse du mécanisme réactionnel détaillé y donne accès. La taille de ce mécanisme détaillé dépend du nombre d'éléments atomiques présents dans les réactifs ( $C, H, O, N, \dots$ ). A mesure que le nombre d'éléments carbone du combustible est augmenté, la taille du mécanisme augmente en raison des multiples combinaisons moléculaires possibles. En prenant l'exemple du méthane, son oxydation implique plusieurs dizaines d'espèces intervenant dans des centaines de réactions. On distingue différentes étapes dans l'évolution du milieu réactif. Le mécanisme de combustion est initié par des réactions dites d'initiation qui sont activées par un apport local d'énergie (étincelle de bougie par exemple). Cet accroissement de température augmente la probabilité des collisions entre molécules. Les collisions engendrent des radicaux susceptibles de dégrader les réactifs initiaux puisqu'ils présentent des centres actifs. Ces radicaux (par exemple  $OH, CH$ ) évoluent ensuite à l'aide d'un mécanisme de propagation de chaînes (en conservant le nombre de centres actifs) ou d'un processus de ramification (qui tend à augmenter le nombre de centres actifs). Ces réactions en chaîne sont particulièrement rapides. Néanmoins, elles sont également souvent endothermiques et tendent à freiner la multiplication des centres actifs. Ces radicaux formés présentent une durée de vie limitée par la cinétique des réactions de recombinaison qui sont principalement plus lentes et fortement exothermiques. Ces réactions de recombinaison permettent la formation des produits de combustion finaux ( $H_2O$  et  $CO_2$ ). On considère que le système est à l'état d'équilibre lorsque toutes ces réactions chimiques, qualifiées d'élémentaires, sont achevées.

Pour prendre en considération ces différentes sous-étapes, on considère le système de  $N_{spe}$  évoluant suivant  $M$  réactions réversibles :

$$\sum_{l=1}^{N_{spe}} \nu'_{lj} \zeta_l \rightleftharpoons \sum_{l=1}^{N_{spe}} \nu''_{lj} \zeta_l \quad \text{avec } j = 1, N_r \quad (2.46)$$

où  $\nu'_{lj}$  et  $\nu''_{lj}$  sont les coefficients stoechiométriques de l'espèce  $l$  dans la réaction  $j$  et  $\zeta_l$  est le symbole chimique de l'espèce  $l$ .

Nous introduisons le terme de réaction  $\dot{\omega}_l$  pour une espèce  $l$  qui est défini comme la somme des taux de réaction de l'espèce  $l$  durant la réaction  $j$ ,  $\dot{\omega}_{lj}$  pour  $j$  variant de 1 à  $M$  :

$$\dot{\omega}_l = \sum_{j=1}^{N_r} \dot{\omega}_{lj} = W_l \sum_{j=1}^{N_r} \nu_{lj} Q_j \quad (2.47)$$

Les coefficients stoechiométriques des réactifs  $\nu'_{lj}$  et  $\nu''_{lj}$  permettent de calculer les coefficients globaux  $\nu_{lj} = \nu''_{lj} - \nu'_{lj}$ . Le taux de réaction  $Q_j$ , associé à la réaction  $j$ , est défini ainsi :

$$Q_j = K_{f,j} \prod_{l=1}^{N_{spe}} [\zeta_l]^{\nu'_{lj}} - K_{r,j} \prod_{l=1}^{N_{spe}} [\zeta_l]^{\nu''_{lj}} \quad (2.48)$$

où  $[\zeta_l]$  représente la concentration molaire de l'espèce  $l$  et  $K_{f,j}$  et  $K_{r,j}$  sont les constantes des réactions directes ("forward") et indirectes ("reverse") de la  $j$ -ième réaction. Cette expression est déterminée à l'aide de la théorie cinétique des gaz de Maxwell. Notons qu'au sein d'un mécanisme réactionnel, les vitesses de réaction  $Q_j$  se répartissent sur un large spectre temporel. On introduit

alors la notion de raideur du schéma cinétique qui rend compte de la forte dispersion temporelle des temps caractéristiques chimiques  $\tau_{c,j}$ .

Les constantes  $K_{f,j}$  sont modélisées avec une loi d'Arrhenius (loi empirique) suivante :

$$K_{f,j}(T) = A_{f,j} T^{\beta_j} \exp\left(-\frac{E_{a,j}}{\mathcal{R}T}\right) \quad (2.49)$$

où  $A_{f,j}$  est le facteur préexponentiel,  $E_{a,j}$  l'énergie d'activation et  $\beta_j$  l'exposant de la température. Les constantes  $K_{r,j}$  sont alors évaluées à partir d'une hypothèse d'équilibre (exprimée en minimisant la fonction d'enthalpie libre  $G$  de Gibbs) :

$$K_{r,j} = \frac{K_{r,j}}{K_{eq}} \quad (2.50)$$

avec  $K_{eq}$  la constante d'équilibre définie par :

$$K_{eq} = \left(\frac{P_0}{\mathcal{R}T}\right)^{\sum_{l=1}^{N_{spe}} \nu_{lj}} \exp\left(\frac{\Delta S_j^0}{\mathcal{R}} - \frac{\Delta H_j^0}{\mathcal{R}T}\right) \quad (2.51)$$

où  $P_0$  est la pression de référence ( $P_0 = 1$  bar) et  $\Delta H_j^0$ ,  $\Delta S_j^0$  sont respectivement les variations d'enthalpie (sensible + chimique) et d'entropie lors de la réaction  $j$  :

$$\Delta H_j^0 = h_j(T) - h_j(0) = \sum_{l=1}^{N_{spe}} \nu_{lj} W_l (h_{s,l}(T) + \Delta h_{f,l}^0) \quad (2.52)$$

$$\Delta S_j^0 = \sum_{l=1}^{N_{spe}} \nu_{lj} W_l s_l(T) \quad (2.53)$$

$\Delta h_{f,l}^0$  est l'enthalpie de formation de l'espèce  $l$  à la température  $T_0 = 0K$ ,  $h_{s,l}$  et  $s_l$  sont respectivement les enthalpies et entropies sensibles de chaque espèce.

Finalement, le terme de dégagement de chaleur  $\dot{\omega}_T$  est défini par :

$$\dot{\omega}_T = - \sum_{j=1}^{N_r} \dot{\omega}_j h_{f,j}^0 \quad (2.54)$$

Il est intéressant de constater que le taux de réaction est non linéaire vis à vis de la température (dépendance exponentielle dans la loi d'Arrhenius) et des concentrations (expression des vitesses de réaction). Il en résulte une libération d'énergie à la fois raide en temps et locale. Néanmoins, la cinétique chimique ne suffit pas à expliquer le taux de dégagement de chaleur. Les mécanismes intrinsèques à la combustion interagissent avec de nombreux paramètres physiques. La réaction chimique ne peut pas subsister sans l'apport continu de réactifs par l'écoulement qui est souvent animé de mouvements turbulents. Cette dualité avec l'écoulement fluide est telle qu'on qualifie souvent le procédé de combustion d'aérothermochimie. Dans la section précédente 2.2, nous avons vu que l'on distingue les flammes, indépendamment de la nature turbulente ou non turbulente de l'écoulement, suivant la manière dont les réactifs sont apportés. Nous allons maintenant aborder la description des mouvements turbulents dans les écoulements.

## 2.4 Représentation de la turbulence

### 2.4.1 La turbulence

La majorité des écoulements rencontrés dans les procédés industriels et dans la nature sont instationnaires et turbulents. La principale différence entre un régime turbulent et un régime laminaire

repose sur la multiplicité des échelles spatiales et temporelles impliquées, sur leur nature instationnaire, leurs fluctuations et leur comportement aléatoire. Pour Chassaing [70], un fluide visqueux passe d'un état laminaire à un état turbulent dès lors qu'il a dépassé le seuil d'énergie cinétique nécessaire à la décohésion des filets fluides. En effet, aux faibles vitesses, les petites perturbations au sein du fluide sont amorties par la viscosité moléculaire qui préserve le caractère laminaire ordonné du fluide. À mesure que la vitesse augmente, les gradients de vitesse deviennent de plus en plus importants et divers mécanismes d'instabilités amplifient, de manière non linéaire, ces petites perturbations. Parmi ces mécanismes d'instabilités, on distingue les instabilités de Kelvin-Helmholtz, caractéristiques de l'enroulement en structures tourbillonnaires et les instabilités de Rayleigh-Taylor, apparaissant à l'interface séparant deux fluides de densités différentes. L'amplification non linéaire des petites perturbations affecte l'ensemble de l'écoulement, à l'origine du passage vers l'état turbulent. Pour distinguer les régimes laminaire et turbulent, on utilise habituellement un paramètre adimensionnel, le nombre de Reynolds noté  $Re$ .

Ce dernier compare les forces d'inertie aux forces de viscosité :

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \quad (2.55)$$

où  $L$  représente une distance (ou taille) caractéristique. Lorsque le nombre de Reynolds est petit, les forces de viscosité dominent et l'écoulement est laminaire. Si on augmente  $Re$ , les forces d'inertie peuvent perturber l'organisation globale de l'écoulement. On assiste alors à la transition vers la turbulence<sup>2</sup>.

L'état turbulent est donc associé à un comportement chaotique (peu prévisible), instable (fortes fluctuations avec le temps et l'espace) et tridimensionnel (perte des symétries existantes). Au sein du large spectre spatial et temporel associé à cet état, on peut hiérarchiser les structures tourbillonnaires par leur état énergétique :

- **L'échelle macroscopique** : Elle est liée aux grandes structures anisotropes qui suivent les directions privilégiées, imposées par la géométrie. Ce sont ces grandes échelles qui portent la quasi-totalité de l'énergie cinétique turbulente. La plus grande échelle rencontrée correspond à l'échelle intégrale, notée  $l_t$  à partir de laquelle on peut définir un nombre de Reynolds turbulent,  $Re_t$  :

$$Re_t = \frac{u'_t l_t}{\nu} \quad (2.56)$$

avec  $u'_t$  la vitesse caractéristique des fluctuations.

- **L'échelle de Taylor** : Elle regroupe les échelles intermédiaires du spectre. Ces dernières assurent le transfert d'énergie de l'échelle macroscopique aux plus petites structures par divers mécanismes de compression/étirement qui limitent l'anisotropie initiale.
- **L'échelle de Kolmogorov** : Cette dernière est associée aux plus petites structures de l'écoulement. Ces structures isotropes assurent la dissipation de l'énergie tourbillonnaire résiduelle en chaleur. Le caractère isotrope de ces structures est un point-clé dans la formulation des modèles pour la LES. La taille caractéristique de ces petites structures est l'échelle de Kolmogorov  $\eta_k$ . Le nombre de Reynolds associé à ces structures est noté  $Re_k$  :

$$Re_k = \frac{u'_k \eta_k}{\nu} \approx 1 \quad (2.57)$$

Afin de décrire le mécanisme de transfert de l'énergie cinétique turbulente des grandes échelles vers les plus petites, Richardson [310] et Kolmogorov [204] introduisent le concept de la cascade

---

2. On définit souvent un nombre de Reynolds critique représentatif de la transition à un état turbulent,  $Re_c$  qui dépend de la configuration étudiée [226].

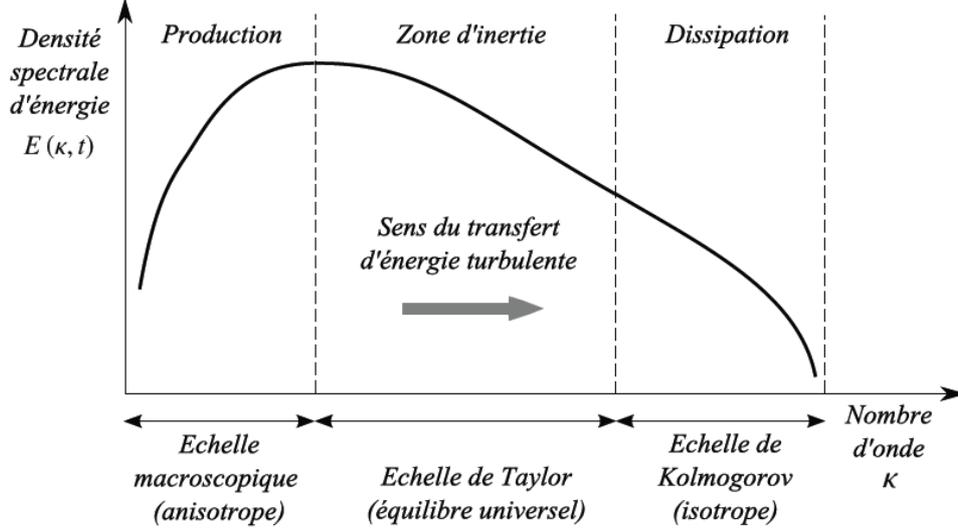


FIGURE 2.4: Cascade d'énergie turbulente de Kolmogorov ([117]).

énergétique illustrée sur la figure 2.4. Cette cascade représente l'évolution de l'énergie dans le spectre des vecteurs d'onde  $\kappa$  (exprimés en  $rad/m$ ) de longueur d'onde  $l = 2\pi/||\kappa||$ . La turbulence est ainsi représentée comme un ensemble de structures tourbillonnaires étalées sur un large spectre de fréquence. L'énergie est produite par les grosses structures aux faibles nombres d'onde du fait des gradients de vitesse importants. Cette énergie est ensuite transférée dans la zone inertielle vers les petites échelles. Cette zone est caractérisée, dans la théorie de Kolmogorov, par une pente en  $k^{-5/3}$ . On définit également un taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\epsilon$  :

$$\epsilon = \frac{u_d^3}{d} \quad (2.58)$$

avec  $d$  une échelle de longueur et  $u_d^3$  une vitesse caractéristique. Au bout de la cascade, les petits tourbillons dissipent l'énergie tourbillonnaire aux grands nombres d'onde.

Sur le principe de la cascade énergétique de Kolmogorov, la dissipation  $\epsilon$  représente à la fois (du fait de la conservation de l'énergie) le taux d'injection d'énergie aux grandes échelles, le flux à travers la cascade et le taux de dissipation par viscosité aux petites échelles. La combinaison des relations 2.57 et 2.56 conduit alors aux relations suivantes couplant  $l_t$  et  $\eta_k$  :

$$\eta_k = \frac{\nu^{3/4}}{\epsilon^{1/4}} \quad (2.59)$$

$$\frac{l_t}{\eta_k} = O(Re_t^{3/4}) \quad (2.60)$$

Ce dernier critère permet de comprendre pourquoi le calcul direct d'une configuration industrielle n'est pas envisageable. En effet, le nombre de points  $N_{pts}$  nécessaire à la description d'un volume cubique de côté  $L$  étant proportionnel au rapport entre  $l_t$  et  $\eta_k$ , il en résulte une dépendance en  $O(Re_t^{9/4})$ . Par ailleurs, pour analyser le coût CPU associé à une DNS, Pope [303] montre que l'avancement temporel est piloté par la relation :

$$\frac{k^{1/2}\Delta t}{\Delta x} \approx \frac{1}{20} \quad (2.61)$$

Si l'on considère une simulation effectuée sur quatre temps caractéristiques de la turbulence ( $\tau = k/\epsilon$ ), le nombre de pas de temps total  $N_{it}$  est déterminé à l'aide de :

$$N_{it} = \frac{4\tau}{\Delta t} = \frac{80}{\Delta x} \left( \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \right) = \frac{80}{\Delta x} L \quad (2.62)$$

Le coût global d'un calcul est alors directement proportionnel au produit  $N_{pts} \times N_{it}$ . Pope [303] évalue ainsi le coût d'une DNS de turbulence homogène isotrope pour différents Reynolds turbulents, analyse reportée dans le tableau 2.1. Il introduit le temps de calcul  $T_{CPU}$ , exprimé en jours et évalué à l'aide de la relation :

$$T_{CPU} = \frac{10^3 \times N_{it} \times N_{pts}^3}{10^9 \times 60 \times 60 \times 24} \text{ jours} \quad (2.63)$$

$Re_t$	$N$	$T_{CPU}$	$T_{CPU}^{PFlops}$
94	104	20 minutes	1 milliseconde
375	214	9 heures	32 millisecondes
1 500	498	13 jours	1 seconde
6 000	1 260	20 mois	1 minute
24 000	3 360	90 ans	50 minutes
96 000	9 218	5 000 ans	43 heures

**TABLE 2.1:** Nombre de points par côté du cube ( $N$ ) et coût CPU d'une DNS de turbulence homogène isotrope, en fonction du  $Re_t$  pour une architecture de 1 Gflop/s (extrait de Pope, 2000, [303]) et pour une architecture actuelle de de 1 Pflop/s .

Le tableau 2.1 est obtenu en supposant un coût unitaire de 1000 opérations par cellule et par pas de temps sur une architecture de 1 Gflop/s<sup>3</sup>. Pour confronter cette analyse réalisée en 2000 aux architectures massivement parallèles actuelles, on rappelle les performances de la machine de calcul IBM Blue Gene/P Babel de l'IDRIS : 10 racks associés à 10 240 noeuds de calcul soit 40 960 coeurs (un rack contenant 32 noeuds et chaque noeud comportant 4 coeurs), pour une puissance crête totale de 139 Tflops/s (puissance théorique de 13,6 Gflop/s par noeud de calcul). La formule 2.63 peut être modifiée pour exprimer le temps CPU sur la base d'une architecture de 1 PetaFlops :

$$T_{CPU}^{PFlops} = \frac{10^3 \times N_{it} \times N_{pts}^3}{10^{15} \times 60 \times 60 \times 24} \text{ jours} \quad (2.64)$$

Cette analyse du coût CPU étant conduite pour un écoulement non réactif, la prise en compte de l'aérothermochimie apporte de nouvelles contraintes. En effet, pour résoudre la flamme sur le maillage, il est nécessaire que son épaisseur caractéristique  $\delta_{th}$ , définie par  $\delta_{th} = (T_b - T_u) / |dT/dx|_{max}$ , respecte le critère :

$$\frac{\delta_{th}}{\Delta_x} < 10 \quad (2.65)$$

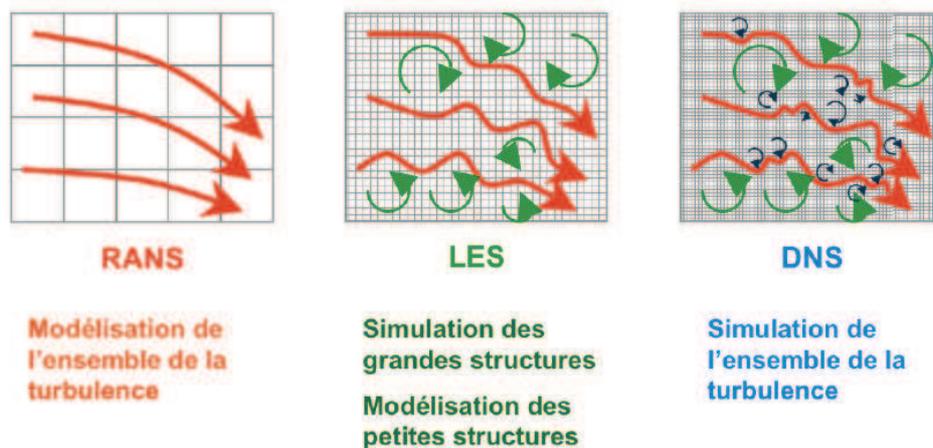
ce qui est particulièrement critique pour la taille du maillage,  $\Delta_x$ .

### 2.4.2 RANS-LES-DNS

Les figures 2.5 et 2.6 rassemblent les trois grandes approches rencontrées en mécanique des fluides numériques.

Dans une Simulation Numérique Directe (DNS pour *Direct Numerical Simulation*), un des extrêmes du paradigme numérique, toutes les échelles de l'écoulement et de la flammes sont résolues. L'ensemble du spectre turbulent est donc résolu. Bien que ces approches soient attractives, l'ajout d'une cinétique chimique détaillée et de procédés de transport, augmentent dramatiquement le coût numérique. Au delà du couplage avec une chimie, la complexité de la dynamique turbulente, liée à une croissance du nombre de degrés de liberté de la turbulence non réactive supérieure à  $O(Re^{11/4})$ ,

3. L'acronyme flops ou flop/s est associé au nombre d'opérations à virgule flottante par seconde (*Floating point Operation Per Second*). Il permet de qualifier la vitesse d'un système informatique. Ainsi, un giga-FLOPS (noté 1Gflop/s) correspond à un milliard d'opérations à virgule flottante par seconde ( $10^9$  FLOPS). De même, un pétaFLOPS représente  $10^{15}$  FLOPS.



**FIGURE 2.5:** Comparaison entre simulation numérique directe (DNS), résolution des équations moyennées (RANS) et simulation aux grandes échelles (LES) (figure tirée de Roux [322]).

où  $Re$  dénote le nombre de Reynolds, rend la DNS inapplicable pour la plupart des écoulements non réactifs d'intérêt. La DNS se trouve donc cantonnée à l'étude de domaines de calcul n'excédant pas quelques  $\text{cm}^3$ .

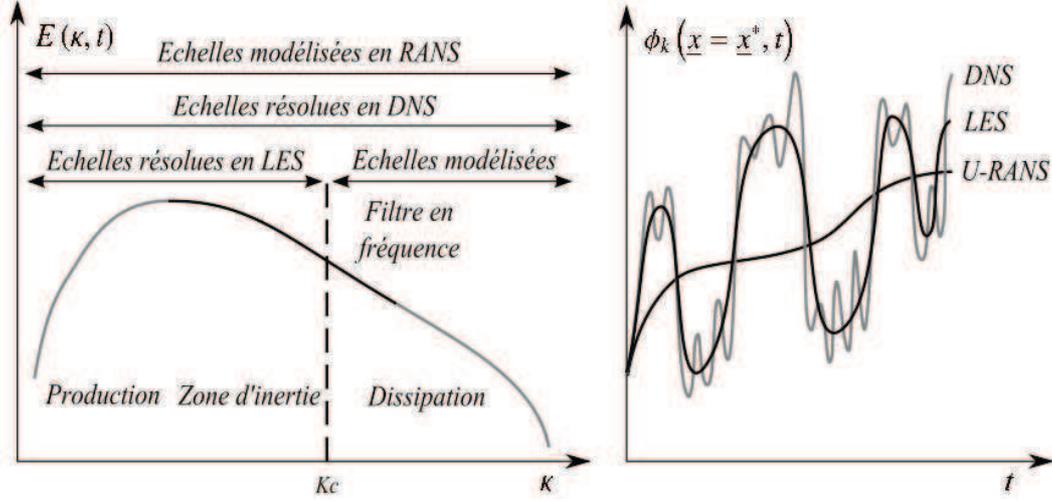
A l'autre extrémité, les simulations des équations de Navier Stokes moyennées au sens de Reynolds (RANS pour *Reynolds-Average Navier-Stokes Simulation*) ne s'attachent qu'à réaliser un suivi des quantités moyennes et ne résolvent ainsi aucune échelle de la turbulence. Les termes non fermés, intervenant dans les équations RANS et impliquant des corrélations entre le spectre turbulent et les grandeurs thermo-chimiques, nécessitent l'introduction de modèles. L'ensemble du spectre se trouve donc modélisé lors d'un calcul de type RANS. Un des points clés au niveau des simulations RANS se situe donc au niveau de la fermeture des termes d'interaction turbulence-chimie fortement non-linéaires.

La méthode intermédiaire se base sur des solutions tronquées en fréquence dont le coût numérique est beaucoup plus faible que celui associé à une DNS tout en donnant accès à une partie du spectre turbulent. Les Simulations des Grandes Echelles, notées SGS ou LES (pour *Large Eddy Simulation*) résolvent les équations des quantités filtrées, en décrivant la dynamique des larges structures énergétiques et modélisent ce qui se passe aux plus petites échelles. En effet, ce sont les grandes échelles du mouvement qui contribuent à la diffusion turbulente de la quantité de mouvement, de la chaleur et des espèces. Elles sont par ailleurs plus sensibles aux conditions aux limites. On peut s'attendre à ce que la prédiction des modèles soit particulièrement satisfaisante pour les petites structures de nature isotrope.

Les principaux challenges associés à la LES sont les problèmes de fermeture. En effet, la non-linéarité des équations de Navier-Stokes nécessite la prise en compte des échelles non résolues dans la dynamique des structures résolues. Cette influence des petites échelles apparaît au travers de modèles de sous-maille. Pour les flammes turbulentes, les échelles chimiques étant typiquement plus petites que l'échelle de Kolmogorov, les interactions chimie-turbulence ne sont pas résolues et nécessitent l'introduction de modèles même en LES (Pope, 1990). Ainsi, la plupart des modèles LES pour la combustion turbulente sont des extensions des modèles RANS (Poinsot et Veynante, 2001).

### 2.4.3 L'opérateur de filtrage

Les équations de transport d'une simulation des grandes échelles (LES) décrivent l'évolution des grandeurs filtrées de l'écoulement et modélisent l'influence de la partie de sous-maille non résolue. La séparation entre les échelles calculées et non résolues est réalisée par une opération de filtrage



**FIGURE 2.6:** Schéma de principe de la DNS, LES et RANS dans l'espace spectral (à gauche) et temporel (à droite)[117].

des équations de transport. Ce filtre, passe-haut pour les échelles de la turbulence ou passe-bas en fréquence, est représenté mathématiquement dans l'espace physique par un produit de convolution. La partie résolue,  $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t)$ , de la variable spatio-temporelle  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  est ainsi définie par <sup>4</sup> :

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\boldsymbol{\xi}, t) G_{\Delta}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d^3 \boldsymbol{\xi} \quad (2.69)$$

où  $G_{\Delta}$  est le noyau de convolution associé à l'opération de filtrage de largeur  $\Delta$ . Le filtre considéré dans l'équation 2.69 est supposé isotropique et homogène et le noyau de convolution tridimensionnelle  $G_{\Delta}$  est déterminé comme le produit de noyaux mono-dimensionnels :

$$G_{\Delta}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1,3} G_{i,\Delta}(x_i - \xi_i) \quad (2.70)$$

La relation 2.69 peut également s'écrire, dans l'espace de Fourier, comme le produit des transformées de Fourier de la fonction et du noyau de convolution (exposant \*) :

$$\bar{\Phi}^*(\mathbf{k}, \omega) = \Phi^*(\mathbf{k}, \omega) G_{k_c}^*(\mathbf{k}) \quad (2.71)$$

4. Plus généralement, l'opérateur de filtrage spatio-temporel s'écrit :

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\boldsymbol{\xi}, t') G_{\Delta}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - t') dt' d^3 \boldsymbol{\xi} \quad (2.66)$$

avec le noyau de convolution spatio-temporel défini comme l'extension tensoriel des noyaux monodimensionnels :

$$G_{\Delta}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - t') = G_t(t - t') \prod_{i=1,3} G_{i,\Delta}(x_i - \xi_i) \quad (2.67)$$

L'opérateur de filtrage utilisé dans les études actuelles est le filtre spatial. En effet, la majorité des études LES d'écoulement compressible sont menées en l'absence d'un filtrage temporel. Néanmoins, il existe un formalisme LES basé sur un filtrage temporel pour concilier les formalismes RANS et LES et ainsi faciliter les approches hybrides. Ce dernier est dénommé TLES pour *Temporal Large Eddy Simulation* (cf. Pruet et al. [305], Fadai-Ghotbi [113]). Par ailleurs, notons que l'opérateur de filtrage spatial induit un filtrage temporel puisque les équations de Navier-Stokes permettent l'association d'une échelle spatiale caractéristique à une échelle temporelle. L'échelle de coupure temporelle peut ainsi être exprimée comme :

$$t_c = \Delta / \sqrt{k_c E(k_c)} \quad (2.68)$$

avec  $k_c E(k_c)$  l'énergie cinétique relative au nombre d'onde de coupure  $k_c$ . L'élimination des échelles supérieures à  $k_c$  (échelles inférieures à la largeur du filtre  $\Delta$ ) revient à supprimer les fréquences supérieures à la fréquence de coupure  $\omega_c = 2\pi/t_c$ .

avec  $\mathbf{k}$  et  $\omega$  respectivement le nombre d'onde et la phase et  $k_c = 2\pi/\Delta$  le nombre d'onde de coupure. Dans l'espace spectral, la grandeur  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  est donc coupée au nombre d'onde  $k_c$  par le filtre passe bas  $G_{k_c}^*$ . La décomposition suivante est alors obtenue :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \overline{\Phi}(\mathbf{x}, t) + \Phi'(\mathbf{x}, t) \quad (2.72)$$

avec  $\Phi'(\mathbf{x}, t)$  la partie non résolue de  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ .

Afin de manipuler les équations de Navier-Stokes, le filtre doit remplir les conditions suivantes :

– la normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\Delta}(\boldsymbol{\xi}) d^3 \boldsymbol{\xi} = 1 \quad (2.73)$$

– la linéarité :

$$\overline{\Phi + \psi} = \overline{\Phi} + \overline{\psi} \quad (2.74)$$

– la commutativité avec la dérivation temporelle ou spatiale :

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial t}} ; \quad \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}} \quad (2.75)$$

Alors que les deux premières propriétés sont assurées sans difficulté, la troisième propriété est plus complexe. Des erreurs de commutation spatiale apparaissent lorsque le filtre est inhomogène, en particulier, lorsque le domaine est délimité par des parois ou lorsque le maillage n'est pas uniforme (cas du maillage raffiné pour les écoulements au voisinage d'objets). Certains auteurs incluent ainsi les termes résultants de la non-commutation dans les modèles de sous-maille [326, 127]. D'autres travaux se basent sur des filtres de largeur non-uniforme qui commutent avec les dérivées partielles [385]. Nous ferons ici l'hypothèse que la commutation spatiale est respectée, hypothèse largement utilisée dans la communauté. Concernant la commutation temporelle, elle est respectée si le filtre n'est pas modifié au cours du temps, c'est-à-dire si le maillage n'évolue pas au cours du calcul LES. Cette problématique est abordée dans la thèse de Moureau [264], pour des applications de type moteur automobile.

On distingue différents filtres dans la littérature pour effectuer la séparation d'échelles : le filtre dit boîte (*top-hat* ou *box*), le filtre gaussien et le filtre passe-bas spectral (*spectral cut-off* ou *sharp cut-off*). Les expressions de ces filtres, dans le domaine physique et spectral, sont renseignées dans la table 2.2.

En pratique, le filtre considéré est le filtre dit implicite, caractéristique du maillage. La séparation entre les échelles résolues et modélisées est en effet dictée par la taille des mailles choisies. A mesure que le maillage est raffiné, les échelles résolues sont de plus en plus fines et la modélisation des petites échelles est moins cruciale. Ainsi, lorsque la taille de la maille tend vers l'échelle de Kolmogorov, la résolution de la LES s'approche d'une résolution DNS. En général, la taille des mailles se rapproche de l'échelle de Taylor. Il faut également remarquer que le filtrage effectué sur le champ total ne résulte pas uniquement de la résolution spatiale. Les erreurs de modélisation et la dissipation induite par les schémas numériques interviennent également dans le processus de filtrage intrinsèque [127].

On souligne également que l'opération de filtrage ainsi définie ne repose pas sur un opérateur de Reynolds. Ainsi, à priori :

$$\overline{\Phi(\mathbf{x}, t)\Psi(\mathbf{x}, t)} \neq \overline{\Phi}(\mathbf{x}, t)\overline{\Psi}(\mathbf{x}, t), \quad \overline{\overline{\Phi}(\mathbf{x}, t)} \neq \overline{\Phi}(\mathbf{x}, t), \quad \overline{\Phi'(\mathbf{x}, t)} \neq 0 \quad (2.76)$$

La taille caractéristique du filtre est définie par Germano *et al.* [128] pour un maillage cartésien non-uniforme :

$$\Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3} \quad (2.77)$$

où  $\Delta_i$  représente la taille de la maille dans la direction  $i$ .

Filtre	Filtre dans l'espace physique : $G_{\Delta}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$	Filtre dans l'espace spectral : $G_{k_c}^*(\mathbf{k})$
Boîte	$\begin{cases} \frac{1}{\Delta^3} & \text{if }  \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_i  < \Delta_i/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$	$\prod_{i=1}^3 \frac{\sin(\Delta_i k_i/2)}{\Delta_i k_i/2}$
Gaussien	$\left(\frac{6}{\pi\Delta^2}\right)^{3/2} e^{-6\left(\frac{(x_1-\xi_1)^2}{\Delta_1^2} + \frac{(x_2-\xi_2)^2}{\Delta_2^2} + \frac{(x_3-\xi_3)^2}{\Delta_3^2}\right)}$	$e^{-(\Delta_1^2 k_1^2 + \Delta_2^2 k_2^2 + \Delta_3^2 k_3^2)/24}$
Passe-bas	$\prod_{i=1}^3 \frac{\sin(k_c(x_i - \xi_i))}{\pi(x_i - \xi_i)} \text{ avec } k_c = \frac{\pi}{\Delta_i}$	$\begin{cases} 1 & \text{si }  k_i  < k_c \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

**TABLE 2.2:** Fonction du filtre dans l'espace réel et dans l'espace spectral pour différents filtres LES.

Dans le cas d'un maillage présentant une forte anisotropie, Scotti *et al.* [335] proposent une formulation améliorée de la taille caractéristique du filtre sous la forme :

$$\Delta = \Delta_{eq} f(a_1, a_2) \quad (2.78)$$

avec  $\Delta_{eq}$  la taille du filtre estimée à l'aide de la formule 2.77 et  $f(a_1, a_2)$  la fonction de correction anisotrope, évaluée à partir du taux de dissipation d'une turbulence isotrope :

$$f(a_1, a_2) = \cosh \sqrt{\frac{4}{27} \left( (\ln a_1)^2 - \ln a_1 \ln a_2 + (\ln a_2)^2 \right)} \quad (2.79)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont les rapports d'aspect inférieurs à l'unité et construits à partir de la longueur de coupure maximale et des deux pas du maillage dans les deux autres directions<sup>5</sup>.

L'application de la décomposition de Reynolds,  $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$  avec  $\bar{\Phi}$  la moyenne de Reynolds, aux équations de Navier-Stokes compressibles ne conduit pas à un système d'équations filtrées proches de celles de départ. En effet, le filtrage n'est pas distribuable ( $\overline{u_i u_j} \neq \bar{u}_i \bar{u}_j$ ). On introduit alors le filtrage au sens de Favre qui repose sur une pondération de la variable à filtrer par la masse volumique :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \Rightarrow \overline{\rho f} = \bar{\rho} \tilde{f} \quad (2.80)$$

Comme précédemment, on décompose la variable  $\Phi$  en une partie haute fréquence  $\Phi''$  associée aux petites structures de sous-maille et une partie basse fréquence  $\tilde{\Phi}$  caractéristique des grandes échelles résolues :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \tilde{\Phi}(\mathbf{x}, t) + \Phi''(\mathbf{x}, t) \quad (2.81)$$

Cet opérateur de Favre ne commute pas avec les opérateurs de dérivation spatiale et temporelle. En effet, le développement de la dérivée spatiale d'une variable filtrée au sens de Favre fournit :

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}} \right) = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{\rho \phi}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} = \frac{\widetilde{\partial \phi}}{\partial x_j} + \underbrace{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \overline{\rho \phi}}{\partial x_j} - \frac{\tilde{\phi}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j}}_{\text{Erreur de commutation}} \quad (2.82)$$

5. Par exemple, si l'on considère la longueur de coupure maximale  $\Delta_{max} = \max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  comme étant  $\Delta_{max} = \Delta_1$ , les rapports d'aspect inférieurs ou égaux à l'unité,  $a_1$  et  $a_2$ , sont déterminés par les expressions :  $a_1 = \Delta_2/\Delta_1$  et  $a_2 = \Delta_3/\Delta_1$ .

Dans le cadre de la modélisation de sous-maille, les approches dites "dynamiques" ou "de similarité" font souvent intervenir une deuxième fréquence de coupure du spectre dans la partie des échelles résolues. Cette coupure repose généralement sur le filtre test, de largeur  $2\Delta$  ou de similarité, de largeur  $4/3\Delta$ . La discrétisation de l'opérateur de filtrage explicite est développée dans la partie 3.3.

#### 2.4.4 Présentation des équations filtrées au sens de Favre

Les équations à résoudre sont obtenues en appliquant l'opérateur de filtrage aux équations de Navier-Stokes ainsi qu'à l'équation d'état.

##### 2.4.4.1 Equation d'état

Le filtrage de la loi des gaz parfaits permet d'obtenir :

$$\bar{p} = \bar{\rho} \tilde{T} \quad (2.83)$$

##### 2.4.4.2 Equation de continuité

En appliquant le filtrage de Favre, la forme de l'équation de continuité reste inchangée.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.84)$$

##### 2.4.4.3 Quantité de mouvement

L'application de l'opérateur de filtrage aux équations de quantité de mouvement fournit dans un premier temps :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.85)$$

Dans cette équation, les termes  $\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j$  et  $\bar{\sigma}_{ij}$  ne sont pas résolus directement. Il convient donc de les modifier en faisant apparaître une partie résolue et une partie à modéliser :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = RHS_M \quad (2.86)$$

$$RHS_M = \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{[-\bar{\rho}(\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)]}_{A_1} + \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(\bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij})}_{A_2} \quad (2.87)$$

avec  $A_1$  et  $A_2$  deux termes de sous-maille. Le terme  $A_1$  est associé au tenseur des contraintes de sous-maille et sera noté, par la suite,  $\tau_{ij}$  avec  $\tau_{ij} = -\bar{\rho}(\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)$ . Le tenseur  $\tilde{\sigma}_{ij}$  correspond à la partie résolue du tenseur des contraintes visqueuses :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu(\tilde{T})\tilde{A}_{ij} \quad (2.88)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \mu(\tilde{T}) \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu(\tilde{T}) \left( \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (2.89)$$

##### 2.4.4.4 Espèces

Le filtrage de l'équation de conservation des espèces fournit :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{Y}_l}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{\rho D_l \frac{\partial Y_l}{\partial x_i}} \right) + \bar{\rho} \tilde{\omega}_l \quad (2.90)$$

Cette équation est modifiée pour faire apparaître des termes plus aisément accessibles :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_l}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{Y}_l}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \bar{\rho} D_l \frac{\partial \tilde{Y}_l}{\partial x_i} \right) - \bar{\rho} \tilde{\omega}_l = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{Y}_l - \tilde{u}_i \tilde{Y}_l) \right]}_{C_1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho D_l \frac{\partial \tilde{Y}_l}{\partial x_i} - \bar{\rho} D_l \frac{\partial \tilde{Y}_l}{\partial x_i} \right)}_{C_2} \quad (2.91)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux termes de sous-maille. En particulier  $C_1$  est un terme de transport turbulent des espèce et sera associé au vecteur flux diffusif de sous-maille des espèces,  $\tau_{Y_l}$ . On note que le taux de réaction chimique des espèces  $l$ ,  $\tilde{\omega}_l$  nécessite également un modèle de fermeture.

#### 2.4.4.5 Energie

Si le traitement des équations précédentes n'a pas posé de problèmes particuliers, il en va autrement pour l'équation de conservation de l'énergie. En effet, la définition de l'énergie totale transportée est différente suivant que l'on se trouve dans un cas réactif ou non réactif. Pour un écoulement turbulent réactif, nous utilisons l'énergie totale non chimique qui résulte de la sommation de l'énergie interne et cinétique. Pour un cas non réactif, l'énergie totale est obtenue en sommant les énergies cinétique et sensible.

Avant de filtrer l'équation de l'énergie totale, il convient de définir l'énergie totale calculable filtrée  $\tilde{E}$ . Cette définition dépendra du cas étudié :

- Cas non réactif : Cette énergie est évaluée à partir des valeurs filtrées telle que :

$$\overline{\rho E} = \overline{\rho c_v T} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i} \quad (2.92)$$

soit, en utilisant l'opérateur de Favre et les composantes du tenseur des contraintes de sous-maille  $\tau_{ii} = -\bar{\rho}(\tilde{u}_i \tilde{u}_i - \tilde{u}_i \tilde{u}_i)$

$$\bar{\rho} \tilde{E} = \bar{\rho} c_v \tilde{T} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i - \frac{1}{2} \tau_{ii} = \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i - \frac{1}{2} \tau_{ii} \quad (2.93)$$

- Cas réactif : L'énergie totale transportée exclut toute quantité d'énergie liée aux réactions chimiques. Cette énergie totale non chimique résulte de la sommation des énergies cinétique  $e_c$  et sensible  $e_s$ . On définit alors l'énergie totale non chimique calculable filtrée :

$$\overline{\rho E} = \overline{\rho \left( \frac{1}{2} u_i u_i + e_s \right)} \quad (2.94)$$

avec

$$e_s = \int_{T_0}^T \left( \sum_{l=1}^{N_{spe}} c_{vl} Y_l \right) dT - \frac{\mathcal{R} T_0}{\bar{W}} \quad (2.95)$$

ou

$$e_s = \sum_{l=1}^{N_{spe}} Y_l e_{s,l} - \frac{\mathcal{R} T_0}{\bar{W}} \quad \text{avec} \quad e_{s,l} = \int_{T_0}^T c_{vl} dT \quad (2.96)$$

L'expression 2.94 peut alors s'écrire :

$$\bar{\rho} \tilde{E} = \frac{1}{2} \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_i - \frac{1}{2} \tau_{ii} + \bar{\rho} \left( \sum_{l=1}^{N_{spe}} \tilde{Y}_l \tilde{e}_{s,l} - \frac{\mathcal{R} T_0}{\bar{W}} \right) \quad (2.97)$$

où  $\frac{\mathcal{R} T_0}{\bar{W}}$  est représentatif de l'état de référence et la masse molaire du système est évaluée à partir des fractions massiques filtrées :

$$\frac{1}{\bar{W}} = \sum_{l=1}^{N_{spe}} \frac{\tilde{Y}_l}{\bar{W}_l} \quad (2.98)$$

Pour déterminer l'équation associée à l'énergie totale filtrée, le même procédé d'application de l'opérateur de filtrage est utilisé.

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_j(\rho E + P)}}{\partial x_j} = \bar{\rho} \tilde{\omega}_T + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i \sigma_{ij}}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu c_p}{Sc} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) \quad (2.99)$$

Il convient alors d'effectuer une décomposition en une partie résolue et une partie qui fera l'objet d'une modélisation de sous-maille :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{u}_j (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{P}))}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu(\tilde{T}) c_p}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) - \bar{\rho} \tilde{\omega}_T = RHS_E \quad (2.100)$$

$$RHS_E = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tilde{u}_j (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{P}) - \overline{u_j(\rho E + P)} \right)}_{D_1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i \sigma_{ij}}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{ij})}_{D_2} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu c_p}{Sc} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu(\tilde{T}) c_p}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right)}_{D_3} \quad (2.101)$$

avec les termes de sous-maille  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$ . Ces termes devront faire l'objet d'une modélisation, c'est-à-dire qu'ils devront être exprimés en fonction des variables accessibles par le calcul ( $\bar{\rho}$ ,  $\tilde{u}_j$ ,  $\bar{P}$ ,  $\tilde{E}$ ).

Pour exprimer le premier terme  $D_1$ , nous devons faire appel à la définition de l'énergie totale filtrée  $\tilde{E}$ . Nous disposons ainsi de deux définitions suivant que nous nous situons dans un cas réactif ou non réactif :

- Cas non réactif :

$$D_1 = \tilde{u}_j \bar{\rho} \tilde{E} + \tilde{u}_j \bar{P} - \overline{u_j \rho E} - \overline{u_j P} \quad (2.102)$$

Il est intéressant de développer  $\overline{\rho u_j E}$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\rho u_j E} &= \overline{u_j \rho c_v T} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i u_j} \\ \overline{\rho u_j E} &= \bar{\rho} c_v \tilde{T} \tilde{u}_j + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i u_j} - \bar{\rho} c_v \tilde{T} \tilde{u}_j + \overline{u_j \rho c_v T} \\ \overline{\rho u_j E} &= \tilde{u}_j \frac{\bar{P}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i u_j} - \bar{\rho} c_v \tilde{T} \tilde{u}_j + \overline{u_j \rho c_v T} \end{aligned} \quad (2.103)$$

En remplaçant  $\rho \tilde{E}$  par son expression 2.93 et  $\overline{\rho u_j E}$  par la relation 2.103, le terme de sous-maille  $D_1$  s'écrit alors

$$D_1 = \tilde{u}_j \bar{P} - \overline{u_j P} + c_v (\bar{\rho} \tilde{T} \tilde{u}_j - \overline{u_j \rho T}) + \frac{1}{2} (\overline{\rho u_i u_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho u_i u_i u_j}) \quad (2.104)$$

$$D_1 = \tilde{u}_j \bar{P} - \overline{u_j P} + c_v (\bar{\rho} \tilde{T} \tilde{u}_j - \overline{u_j \rho T}) + \frac{1}{2} (\overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_j \tau_{ii} - \overline{\rho u_i u_i u_j}) \quad (2.105)$$

- Cas réactif : Contrairement à l'expression précédente, le terme de sous-maille  $D_1$  n'inclut pas les termes résultant de la non-linéarité du filtrage de l'équation de l'énergie interne.

$$\begin{aligned} D_1 &= \tilde{u}_j \bar{\rho} \tilde{E} + \tilde{u}_j \bar{P} - \overline{u_j \rho E} - \overline{u_j P} \\ D_1 &= \tilde{u}_j \bar{P} - \overline{u_j P} + \bar{\rho} \tilde{e}_s \tilde{u}_j - \overline{\rho e_s u_j} + \frac{1}{2} (\overline{\rho u_i u_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho u_i u_i u_j}) \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$(2.107)$$

## 2.4.4.6 Hypothèses simplificatrices

Dans le cadre de tests à priori sur des simulations numériques directes de couches de mélanges bidimensionnelles, Vreman *et al.* [393] et Vreman [392] étudient les contributions relatives de chaque terme de sous-maille. Ces tests sont effectués sur une gamme de nombres de Mach compris entre 0,2 et 1,2. Les auteurs montrent ainsi que les termes de sous-maille résultant des non-linéarités du tenseur visqueux et du flux de chaleur sont négligeables devant les termes diffusifs et convectifs des équations filtrées. Par ailleurs, de nombreux auteurs (Erlebacher *et al.* [111], Moin *et al.* [262], Vreman *et al.* [394]) considèrent que les variations de Mach restent faibles dans la sous-maille grâce à l'hypothèse d'incompressibilité des petites échelles. Ces hypothèses simplificatrices sont confortées par Adams *et al.* [2] lors de l'étude de l'interaction d'une onde de choc avec une couche limite turbulente à  $M = 3$ .

Les hypothèses simplificatrices sont exposées suivant les équations considérées :

- **Equations de moment** : L'influence du terme de sous-maille visqueux étant très faible devant le tenseur des contraintes de sous-maille, le terme  $A_2$  s'annule.
- **Equation de l'énergie totale** : Les termes  $D_2$  et  $D_3$  sont négligeables. Le terme de sous-maille  $D_1$  peut également être simplifié. Quelque soit la nature de l'écoulement étudié (réactif ou non), la nouvelle expression  $D_1$  est la même.  
Pour un écoulement non réactif, en introduisant l'énergie interne  $e_I = c_v T$  et l'énergie interne résolue  $\tilde{e}_I = c_v \tilde{T}$ , le flux d'énergie de sous-maille  $D_1$  devient :

$$D_1 = \gamma \bar{\rho} (\tilde{e}_I \tilde{u}_j - \widetilde{e_I u_j}) + \underbrace{\frac{1}{2} (\overline{\rho u_i u_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho u_i u_i u_j})}_{\mathcal{D}_j} \quad (2.108)$$

Pour un écoulement réactif, le flux d'énergie de sous-maille  $D_1$  s'écrit :

$$\begin{aligned} D_1 &= (\gamma - 1) \bar{\rho} (\tilde{e}_I \tilde{u}_j - \widetilde{e_I u_j}) + \frac{1}{2} (\overline{\rho u_i u_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho u_i u_i u_j}) + \bar{\rho} (\tilde{e}_s \tilde{u}_j - \widetilde{e_s u_j}) \\ D_1 &= (\gamma - 1) \bar{\rho} (\tilde{e}_I \tilde{u}_j - \widetilde{e_I u_j}) + \underbrace{\frac{1}{2} (\overline{\rho u_i u_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho u_i u_i u_j})}_{\mathcal{D}_j} \\ &\quad + \bar{\rho} (\tilde{e}_s \tilde{u}_j - \widetilde{e_s u_j}) \end{aligned} \quad (2.109)$$

Le terme de diffusion turbulente de sous-maille  $\mathcal{D}_j$  sera négligé.

- **Equations des espèces** : Le terme de diffusion des espèces de sous-maille  $C_2$  sera omis.

## 2.4.4.7 Système complet des équations filtrées à résoudre

En définissant la partie déviatrice,  $\tau_{ij}^D$ , à trace nulle du tenseur des contraintes de sous-maille :

$$\tau_{ij}^D = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.110)$$

Les équations de Navier-Stokes filtrées se présentent sous la forme compacte suivante :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}^j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{D}^j}{\partial x_j} = \mathbf{S}, \quad (2.111)$$

avec

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}u_1 \\ \bar{\rho}u_2 \\ \bar{\rho}u_3 \\ \bar{\rho}e \\ \bar{\rho}Y_l \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}^j = \begin{pmatrix} \bar{\rho}u_j \\ \bar{\rho}u_1\tilde{u}_j + \delta_{1j}(\bar{p} - \frac{1}{3}\tau_{ii}) \\ \bar{\rho}u_2\tilde{u}_j + \delta_{2j}(\bar{p} - \frac{1}{3}\tau_{ii}) \\ \bar{\rho}u_3\tilde{u}_j + \delta_{3j}(\bar{p} - \frac{1}{3}\tau_{ii}) \\ (\bar{\rho}E + \bar{p})\tilde{u}_j \\ \bar{\rho}Y_l\tilde{u}_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^j = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\bar{\mu}\tilde{A}_{1j} - \tau_{1j}^d \\ -2\bar{\mu}\tilde{A}_{2j} - \tau_{2j}^d \\ -2\bar{\mu}\tilde{A}_{3j} - \tau_{3j}^d \\ -2\bar{\mu}\tilde{u}_j\tilde{A}_{ji} - \frac{\bar{\mu}c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} - D_1 \\ -\frac{\bar{\mu}}{Sc} \frac{\partial Y_l}{\partial x_j} + C_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\rho}\tilde{\omega}_T \\ \bar{\rho}\tilde{\omega}_{Y_l} \end{pmatrix} \quad (2.112)$$

avec  $\bar{\mu} = \mu(\tilde{T})$ .

Dans cette expression, les termes  $\tau_{ij}$ ,  $D_1$  et  $C_1$  sont les termes de sous-maille à modéliser. Cette modélisation s'effectuera en adoptant différentes approches abordées dans les paragraphes suivants. Il conviendra également de fournir les différents termes sources,  $\bar{\rho}\tilde{\omega}_T$  et  $\bar{\rho}\tilde{\omega}_{Y_l}$  au coeur de la modélisation de la combustion (cf. sections 2.5 et 2.7).

On souligne que le terme  $\tau_{ij}$  peut se décomposer en trois contributions :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= -\bar{\rho}(\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \tilde{u}_i\tilde{u}_j) \\ \tau_{ij} &= \underbrace{-\bar{\rho}(u'_i u'_j)}_{R_{ij}} - \underbrace{\bar{\rho}(\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \tilde{u}_i\tilde{u}_j)}_{L_{ij}} - \underbrace{\bar{\rho}(\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \tilde{u}_j\tilde{u}_i)}_{C_{ij}} \end{aligned} \quad (2.113)$$

Le terme  $L_{ij}$  est le tenseur de Léonard qui résulte de la non-idempotence du filtre ( $\bar{\bar{\phi}} \neq \bar{\phi}$ ). Ce terme peut être déterminé à l'aide des grandeurs filtrées. Néanmoins, sa contribution est généralement négligeable. Il est, par ailleurs, nul dans le cas d'un filtre de type boîte dans le domaine spectral. Le terme  $C_{ij}$  regroupe les termes croisés et représente les échanges d'énergie entre les structures de sous-maille (petites échelles) et les échelles résolues. Si l'on suppose que la fréquence de coupure du filtre se situe dans la zone inertielle du spectre de la turbulence, alors ce terme est faible (hypothèse de Kolmogorov quant à la séparation des échelles). Enfin, le dernier terme,  $R_{ij}$ , rend compte de la dissipation d'énergie par les petites échelles non résolues. Cette contrainte de sous-maille est au coeur des développements qui ont été réalisés pour modéliser la contribution des petites échelles.

#### 2.4.5 Les stratégies de modélisation de la turbulence

La plupart des modèles de sous-maille reposent sur des descriptions simplifiées de la turbulence où le principal phénomène physique caractérisé est la cascade énergétique des grandes structures aux petites échelles. Cette cascade énergétique directe caractérise précisément la turbulence isotropique et les écoulements turbulents pleinement développés à large nombre de Reynolds. On distingue principalement deux grandes familles de modèles de turbulence de sous-maille.

Le paradigme le plus populaire pour la modélisation du transfert énergétique inter-échelles est la viscosité de sous-maille qui reproduit la dissipation d'énergie cinétique résolue par les échelles non résolues. On qualifie cette modélisation d'approche fonctionnelle puisqu'elle s'intéresse uniquement à la fonction des échelles à modéliser. Les modèles fonctionnels évaluent la divergence du tenseur des contraintes de sous-maille ( $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ ) sans déterminer, au préalable, le tenseur des contraintes de

sous-maille. Seul son action sur les champs filtrés est reproduite par le biais d'un terme de viscosité turbulente. Ces modèles reposent sur l'hypothèse de l'alignement des directions principales du tenseur des contraintes de sous-maille et du tenseur des taux de déformations résolues.

On distingue également les modèles à similarité d'échelles et les modèles mixtes. Les approches à similarité d'échelle sont qualifiées de modèles structurels puisque, contrairement aux modèles fonctionnels, ils se concentrent sur la structure des échelles de sous-maille et non plus leur fonction. L'hypothèse de base de cette modélisation est que la structure des échelles de sous-maille est similaire à celle des plus petites échelles résolues. Contrairement aux approches fonctionnelles, ces modèles permettent la prise en compte du non-alignement entre le tenseur des contraintes de sous-maille et le tenseur des taux de déformations résolues ainsi que du non alignement du flux turbulent de quantité de chaleur avec le gradient de température. Ils permettent de reproduire les phénomènes de cascade d'énergie des petites échelles vers les grandes (*backscatter*). Bien qu'ils reproduisent la structure des échelles modélisées, les modèles à similarité d'échelles prédisent passablement les transferts d'énergie cinétique. Il est alors souvent nécessaire de combiner un modèle à similarité d'échelle avec un modèle fonctionnel (souvent de type Smagorinsky) pour compenser cette faible dissipation.

Il existe d'autres approches plus générales qui ne sont pas fondées sur des hypothèses a priori de la dynamique turbulente mais qui reposent sur la manipulation mathématique des équations du mouvement. On distingue ainsi les méthodes de déconvolution, non abordées dans la suite de ce manuscrit. Plusieurs ouvrages sont consacrés à ces outils mathématiques appliqués à la turbulence [303, 127].

Si l'on s'intéresse à l'historique des développements réalisés pour les approches de sous-maille, on remarque que la plupart des modèles proposés est vouée aux écoulements incompressibles avec quelques extensions pour les écoulements à densité variable et pour les écoulements réactifs à faible vitesse. Les modèles utilisés pour la description d'écoulements compressibles reposent ainsi sur des modifications ad hoc des modèles de sous-maille développés pour les écoulements incompressibles au lieu d'approches de modélisation entièrement fondée sur la dynamique turbulente compressible.

Les modèles présentés par la suite sont tous de type fonctionnel. Ces modèles se basent sur l'hypothèse de Boussinesq.

#### 2.4.5.1 Approche de Boussinesq

L'hypothèse de Boussinesq [40] suppose l'alignement du tenseur d'anisotropie de la turbulence et du tenseur de vitesse de déformation. En effet, la décomposition du tenseur des contraintes de sous-maille en une partie isotrope  $\tau_{ij}^I$  et une partie déviatrice  $\tau_{ij}^D$  fournit, en supposant les contributions des tenseurs de Léonard et des termes croisés négligeables :

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^D + \tau_{ij}^I \quad (2.114)$$

$$\tau_{ij}^I = -\frac{1}{3}\bar{\rho}\delta_{ij}\widetilde{u'_k u'_k} = -\frac{2}{3}\bar{\rho}k_{sgs}\delta_{ij} \quad (2.115)$$

$$\tau_{ij}^D = -\bar{\rho}\widetilde{u'_i u'_j} + \frac{1}{3}\bar{\rho}\delta_{ij}\widetilde{u'_k u'_k} \quad (2.116)$$

avec  $k_{sgs}$  l'énergie cinétique turbulente de sous-maille, définie comme  $k_{sgs} = \widetilde{u'_k u'_k}/2$ . Le terme au coeur de la modélisation de sous-maille fonctionnelle est la partie déviatrice  $\tau_{ij}^D$ . Pour modéliser ce terme, Boussinesq introduit la viscosité turbulente afin de relier les déviateurs du tenseur des contraintes turbulentes de sous-maille et du tenseur des efforts :

$$\tau_{ij}^D = 2\mu_t A_{ij} \quad (2.117)$$

avec  $A_{ij}$  la partie déviatrice du tenseur des efforts.

Ainsi l'expression de l'équation de la quantité de mouvement filtrée se présente sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{2}{3} \bar{\rho} k_{sgs} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} [2(\bar{\mu} + \mu_t) \tilde{A}_{ij}] \quad (2.118)$$

Pour fermer cette expression, il convient de modéliser la partie isotrope du tenseur de sous-maille,  $\tau_{ij}^I = -\frac{2}{3} \bar{\rho} k_{sgs} \delta_{ij} = \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}$ . On distingue trois principales approches.

- La première approche consiste à négliger la contribution de l'énergie cinétique turbulente de sous-maille,  $k_{sgs}$ . En effet, l'influence de ce terme est faible pour les écoulements à bas nombre de Reynolds. Ainsi, Erlebacher *et al.* [111] soulignent, dans le cadre de simulations directes d'une turbulence isotropique pour des nombres de Mach de sous-maille inférieurs à 0,4 ( $M_{sgs} = \sqrt{q_{sgs}^2 / \gamma r \tilde{T}}$ ), que l'influence de la pression thermodynamique est plus importante que la partie isotropique du tenseur  $\tau_{ij}$ . Cet effet négligeable de la partie isotropique du tenseur des contraintes de sous-maille pour un écoulement faiblement compressible est corroboré par Speziale *et al.* [351]. En introduisant le nombre de Mach turbulent  $M_t = \frac{1}{\langle a \rangle} \sqrt{\frac{\rho u'_i u'_i}{\rho}}$  avec  $\langle a \rangle$  la vitesse moyenne du son et  $u'_i$  la fluctuation de la  $i$ -ème composante de la vitesse moyennée au sens de Favre, ces auteurs soulignent que la contribution de  $\tau_{ij}^I$  peut être négligée pour un nombre de Mach turbulent  $M_t$  inférieur à 6 (à noter, le nombre de Mach de sous-maille est inférieur au nombre de Mach turbulent). Cette approche est consistante avec l'hypothèse d'incompressibilité des échelles non résolues [392, 86] qui suppose que les effets compressibles affectent essentiellement les grandes échelles résolues.
- La seconde méthode repose sur la modélisation ce terme. Ainsi, Yoshizawa [411] propose un modèle de fermeture pour ce terme en s'inspirant du modèle de Smagorinsky [346]. Ce modèle reposant sur l'hypothèse que les échelles spatiales et temporelles des fluctuations des grandeurs fluides sont faibles devant les échelles associées aux champs moyens, limite néanmoins son champ d'application aux écoulements à faible nombre de Mach présentant de faibles fluctuations de la masse volumique.
- Pour des écoulements compressibles **non réactifs**, de nombreux auteurs dont Ducros *et al.* [102] et Lesieur *et al.* [227], rassemblent les deux parties isotropes des tenseurs des contraintes moléculaires et de sous-maille dans une macropression  $\bar{\omega}$  et introduisent la macrotempérature  $\tilde{\vartheta}$ . La partie isotrope du tenseur de sous-maille n'est plus l'objet d'une modélisation. Cette approche repose néanmoins sur une hypothèse d'un faible nombre de Mach de sous-maille, présentée ci-dessous.

La macropression est définie comme la somme de la pression résolue (partie isotrope du tenseur des contraintes) et de la trace du tenseur des contraintes de sous-maille :

$$\bar{\omega} = \bar{P} - \frac{1}{3} \tau_{jj} \quad (2.119)$$

La macrotempérature prend la forme suivante :

$$\tilde{\vartheta} = \tilde{T} - \frac{1}{2\bar{\rho}c_v} \tau_{jj} \quad (2.120)$$

L'équation d'état filtré s'écrit alors :

$$\bar{\omega} = \bar{\rho} r \tilde{T} - \frac{1}{3} \tau_{jj} = \bar{\rho} r \tilde{\vartheta} + \bar{\rho} r \frac{1}{2\bar{\rho}c_v} \tau_{jj} - \frac{1}{3} \tau_{jj} = \bar{\rho} r \tilde{\vartheta} + \frac{3\gamma - 5}{6} \tau_{jj} \quad (2.121)$$

Si l'on suppose que la partie isotrope du tenseur des contraintes de sous-maille,  $\tau_{jj}$ , est négligeable, la loi d'état basée sur la macropression et la macrotempérature est formulée d'une manière analogue à la loi d'état classique, c'est-à-dire :

$$\bar{\omega} = \bar{\rho} r \tilde{\vartheta} \quad (2.122)$$

Cette hypothèse est néanmoins assujettie à la condition suivante :

$$\frac{1}{3}\gamma M_{sgs}^2 \ll 1 \quad (2.123)$$

avec  $M_{sgs}$  le nombre de Mach de sous-maille défini comme :

$$M_{sgs}^2 = \frac{\tau_{jj}}{\bar{\rho}a^2} = \frac{\tau_{jj}}{\gamma\bar{P}} \quad (2.124)$$

Comte et Lesieur [86] soulignent que cette approche de la macrotempérature et de la macropression est moins restrictive que la précédente approche puisque l'annulation du terme  $\frac{3\gamma-5}{6}\tau_{ii}$  dans l'équation d'état a un impact plus faible que le fait de négliger directement le terme  $\tau_{ii}$ .

En se basant sur ces définitions, les flux convectifs et diffusifs filtrés dans l'équation 2.112 deviennent :

$$\bar{\mathbf{F}}^j = \begin{pmatrix} \bar{\rho}u_j \\ \frac{\bar{\rho}u_1\tilde{u}_j + \delta_{1j}\bar{\omega}}{\bar{\rho}u_2\tilde{u}_j + \delta_{2j}\bar{\omega}} \\ \frac{\bar{\rho}u_2\tilde{u}_j + \delta_{2j}\bar{\omega}}{\bar{\rho}u_3\tilde{u}_j + \delta_{3j}\bar{\omega}} \\ (\bar{\rho}e + \bar{\omega})\tilde{u}_j \\ \frac{\bar{\rho}Y_1\tilde{u}_j}{\bar{\rho}Y_1\tilde{u}_j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^j = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\bar{\mu}\tilde{A}_{1j} - \tau_{1j}^d \\ -2\bar{\mu}\tilde{A}_{2j} - \tau_{2j}^d \\ -2\bar{\mu}\tilde{A}_{3j} - \tau_{3j}^d \\ -2\bar{\mu}\tilde{u}_j\tilde{A}_{ji} - \frac{\bar{\mu}c_p}{Pr} \frac{\partial\vartheta}{\partial x_j} - D_1 \\ -\frac{\bar{\mu}}{Sc} \frac{\partial\tilde{Y}_1}{\partial x_j} + C_1 \end{pmatrix}, \quad (2.125)$$

avec  $\bar{\mu}$  la viscosité dynamique déterminée à partir de la macrotempérature :

$$\bar{\mu}(\tilde{\vartheta}) = \mu_{ref} \left( \frac{\tilde{\vartheta}}{T_{ref}} \right) \frac{T_{ref} + S}{\tilde{\vartheta} + S} \quad (2.126)$$

La pression filtrée  $\bar{P}$  n'étant plus directement accessible, l'énergie totale calculable filtrée ainsi que le terme de sous-maille  $D_1$  sont modifiés et exprimés en fonction de la macrotempérature et de la macropression résolues. Ainsi, l'énergie totale calculable filtrée est obtenue par la relation :

$$\bar{\rho}\tilde{E} = \bar{\rho}c_v\tilde{\vartheta} + \frac{1}{2}\bar{\rho}u_j\tilde{u}_j \quad (2.127)$$

Le flux d'énergie de sous-maille  $D_1$  devient alors :

$$D_1 = \bar{\rho}c_v(\tilde{\vartheta}u_j - \widetilde{T}u_j) + \bar{\omega}u_j - \overline{Pu}_j + \frac{1}{2}\bar{\rho}(\tilde{u}_i\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \widetilde{u_iu_iu_j}) \quad (2.128)$$

$$D_1 = \bar{\rho}\gamma(\tilde{e}_I\tilde{u}_j - \widetilde{e_I}u_j) + \bar{\rho}D_j + \frac{1}{2}\tau_{ii}\tilde{u}_j \quad (2.129)$$

avec l'énergie interne résolue  $\tilde{e}_I = c_v\tilde{\vartheta}$  et le terme de sous-maille de diffusion turbulente de l'énergie cinétique  $D_j = \frac{1}{2}\bar{\rho}u_i\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \frac{1}{2}\overline{\rho u_i u_i u_j}$ .

Les simulations numériques non réactives seront réalisées avec les deux dernières approches, c'est-à-dire la notion de la macropression et de la macrotempérature ainsi qu'avec le modèle de Yoshizawa. Les simulations réactives reposeront, quant à elles, sur l'hypothèse d'une faible contribution de l'énergie cinétique turbulente de sous-maille. Comme le mentionne Sagaut dans son ouvrage dédié à la LES [127], cette partie du tenseur  $\tau_{ij}$  est associée aux phénomènes de compression ou dilatation (terme de divergence des équations de Navier-Stokes). Or, dans ces zones où règnent les effets compressibles, les schémas de dissipation numérique ont tendance à ajouter une forte dissipation numérique qui peut surpasser la contribution d'un éventuel modèle. Ce comportement dissipatif des codes numériques au niveau des zones de compression ou de dilatation explique que de nombreux auteurs considèrent la contribution de la partie isotrope comme négligeable. Dans ce manuscrit, nous avons étudié l'impact d'un tel modèle pour l'écoulement affleurant une cavité transsonique avec un soin particulier apporté à l'activité du schéma de dissipation artificielle.

### 2.4.5.2 Fermeture des termes de transport scalaire et d'énergie non-résolus

Pour fermer les termes relatifs au transport scalaire et au transport d'énergie non résolus, la modélisation la plus simple et très largement utilisée consiste à introduire une diffusivité thermique turbulente  $\kappa_{sgs}$  et une diffusivité turbulente des espèces  $\kappa_{sgs}^{Y_l}$ , en supposant, par analogie avec l'hypothèse de Boussinesq que le transfert d'énergie entre les échelles résolues et les petites échelles est similaire au mécanisme de diffusion moléculaire. Ainsi les flux turbulents de quantité de chaleur et d'espèces sont considérés alignés avec, respectivement, le gradient de température et d'espèce :

$$\overline{\rho Y_l \tilde{u}_j} - \overline{\rho Y_l} \overline{u_j} \approx \overline{\rho \kappa_{sgs}^{Y_l}} \frac{\partial \tilde{Y}_l}{\partial x_j} = \frac{\bar{\nu}_t}{Sc_{t,l}} \frac{\partial \tilde{Y}_l}{\partial x_j} \quad (2.130)$$

$$\overline{\rho T \tilde{u}_j} - \overline{\rho T} \overline{u_j} \approx \overline{\rho \kappa_{sgs}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = \frac{\bar{\nu}_t}{Sc_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (2.131)$$

Les termes de transport turbulent non résolus sont ainsi exprimés en fonction des propriétés de transport turbulent ( $Pr_t$  et  $Sc_{t,l}$ ). Les calculs décrits dans ce manuscrit sont réalisés avec l'hypothèse d'un nombre de Lewis unitaire et d'un même nombre de Schmidt pour les  $N_{spe}$  espèces, c'est-à-dire  $Pr_t = Sc_t = Sc_{t,l} = 0,9$ .

### 2.4.5.3 Modèle Smagorinsky

Le premier modèle de sous-maille est proposé par Smagorinsky [346] pour un écoulement incompressible atmosphérique. Ce modèle part du principe que le transfert d'énergie s'effectue des grandes échelles résolues aux plus petites échelles non résolues et se base sur une hypothèse d'équilibre entre la production et la dissipation d'énergie au niveau de l'échelle de filtrage [326]. La turbulence de sous-maille est alors considérée comme un phénomène dissipatif et modélisée par un terme de viscosité turbulente  $\nu_t$  :

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}| \quad (2.132)$$

Dans cette expression, le terme  $|\bar{S}|$  représente la norme du tenseur de déformation filtrée  $\tilde{S}_{ij}$ . Ce dernier s'écrit :

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.133)$$

avec sa partie déviatrice (à trace nulle) définie par :

$$\tilde{S}_{ij}^D = \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} = \tilde{A}_{ij} \quad (2.134)$$

Son second invariant est déterminé par la relation :

$$|\bar{S}| = \sqrt{2 \tilde{S}_{ij} \tilde{S}_{ij}} \quad (2.135)$$

Dans l'équation 2.132,  $C_s$  représente la constante de Smagorinsky et  $\Delta$  la largeur du filtre. Dans la plupart des calculs LES, la discrétisation spatiale effectue un filtrage implicite. La largeur du filtre est alors associée à la taille de la maille. La constante  $C_s$  peut, quant à elle, être déterminée analytiquement en supposant que la fréquence de coupure du filtre,  $k_c = \pi/\Delta$ , appartient à la zone inertielle du spectre. On peut, dès lors, appliquer l'hypothèse de l'équilibre local entre la dissipation et la production d'énergie cinétique et déterminer la pente de la zone inertielle du spectre de l'énergie cinétique turbulente. La constante de Smagorinsky s'exprime alors en fonction de la constante de Kolmogorov [15] :

$$C_s \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{3C_K}{2} \right)^{-3/4} \quad (2.136)$$

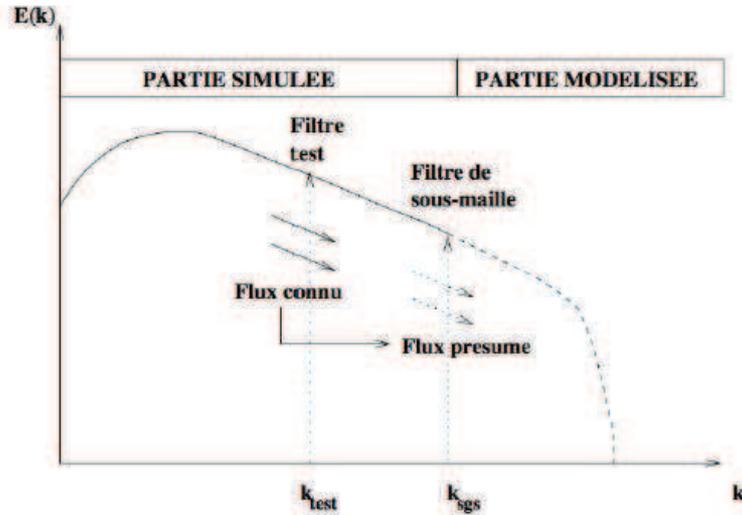


FIGURE 2.7: Spectre d'énergie : principe de l'approche dynamique de Germano (figure tirée de Blin [35]).

En considérant une constante de Kolmogorov  $C_K \approx 1,4$ , la constante de Smagorinsky est estimée à  $C_s \approx 0,18$ . Cette valeur est déterminée pour le cas d'une turbulence homogène isotrope. Suivant le cas étudié, Sagaut [326] relate différentes valeurs comprises entre 0,1 et 0,2.

Pour limiter l'impact des erreurs numériques sur la dissipation turbulente, Ducros *et al.* [101] proposent un modèle de Smagorinsky filtré. Cette approche part du principe que les échelles au voisinage de la fréquence de coupure du maillage sont altérées par les approches numériques. Le champ de vitesse est alors filtré explicitement et la viscosité turbulente est exprimée à l'aide de cet opérateur de filtrage explicite :

$$\nu_t = (C_s \widehat{\Delta})^2 \sqrt{2 \widehat{A}_{ij} \widehat{A}_{ij}} \quad (2.137)$$

où  $\widehat{\Delta}$  est la largeur du filtre explicite. Ce modèle filtré permet une meilleure représentation locale des phénomènes turbulents et est particulièrement adapté à la description de la transition vers la turbulence.

Pour une formulation classique avec le filtre implicite, Li *et al.* [228] montrent que la constante de Smagorinsky déterminée dépend fortement des gradients moyens de l'écoulement. Par ailleurs, ce modèle se révèle trop dissipatif pour les études d'écoulements au voisinage de corps solides [326]. Il apparaît alors nécessaire d'ajuster la constante en fonction des informations résolues. Cette adaptation de la constante de Smagorinsky fait l'objet de la section suivante avec les approches dynamiques.

#### 2.4.5.4 Le modèle de Smagorinsky dynamique

Le modèle de Smagorinsky dynamique se base sur la méthode dynamique de Germano [128]. Elle consiste à évaluer les flux de sous-maille en tirant profit de la connaissance des échelles résolues. La constante de Smagorinsky est alors évaluée dynamiquement et localement. Contrairement à la méthode de Smagorinsky présentée auparavant, cette approche permet l'étude d'écoulements complexes instationnaires puisque la constante adopte des variations spatio-temporelles. Historiquement, le premier modèle de sous-maille dynamique a été proposé par Germano *et al.* [128] pour un écoulement incompressible. La généralisation au cas compressible a été proposée par Moin *et al.* [262].

En pratique, cette méthode fait intervenir un second filtre de largeur  $\widehat{\Delta}$  supérieure à  $\Delta$  comme l'illustre la figure 2.7. Typiquement, le rapport  $\widehat{\Delta}/\Delta$  est pris égal à 2. De nombreuses études exposent

une faible sensibilité à ce rapport [128, 262]. En appliquant l'opérateur de filtrage test aux champs résolus, on introduit alors le tenseur des contraintes de sous-maille au niveau test, noté  $T_{ij}$  :

$$T_{ij} = \left( \frac{\widehat{\rho u_i \rho u_j}}{\widehat{\rho}} \right) - \widehat{\rho u_i u_j} \quad (2.138)$$

La forme de ce tenseur est similaire à celle du tenseur des contraintes de sous-maille  $\tau_{ij}$  réécrit sous la forme :

$$\tau_{ij} = \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \overline{\rho u_i u_j} = \left( \frac{\overline{\rho u_i \rho u_j}}{\overline{\rho}} \right) - \overline{\rho u_i u_j} \quad (2.139)$$

On utilise alors l'identité de Germano pour introduire le tenseur de Leonard qui relie les tenseurs des contraintes de sous-maille pour les deux niveaux de filtrage ( $\Delta$  et  $\hat{\Delta}$ ) :

$$L_{ij} = \hat{\tau}_{ij} - T_{ij} \quad (2.140)$$

avec

$$L_{ij} = \widehat{\overline{\rho u_i \tilde{u}_j}} - \widehat{\overline{\rho u_i \hat{u}_j}} \quad (2.141)$$

Ce tenseur peut être calculé explicitement puisqu'il ne dépend que des valeurs résolues.

Par ailleurs, l'hypothèse de Germano repose sur une formulation analogue des tenseurs  $T_{ij}$  et  $\tau_{ij}$ , c'est-à-dire à partir du modèle de Smagorinsky :

$$\tau_{ij}^D = -2C_s^2 \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} \quad (2.142)$$

$$T_{ij}^D = -2C_s^2 \hat{\rho} \hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \hat{S}_{ij} \quad (2.143)$$

En utilisant ces deux expressions, il est possible d'évaluer le tenseur de Leonard sous la forme :

$$L_{ij}^D = 2(\overline{C_s^2 \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| \tilde{A}_{ij}}) - 2\overline{C_s^2 \hat{\rho} \hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \hat{A}_{ij}} \quad (2.144)$$

Cette relation pose trois problèmes pour l'évaluation de la constante  $C_s$ . Le premier consiste en la surdétermination du système 2.144. En effet, le système comporte six équations pour une unique inconnue. Pour contrebalancer cette surdétermination, il existe deux méthodes :

- **La méthode de Germano.** Elle est basée sur la multiplication de part et d'autre de l'équation 2.144 par le tenseur  $\tilde{S}_{ij}$ . Néanmoins, cette méthode peut conduire à une singularité lorsque le membre de droite s'annule.
- **La méthode de Lilly** [234]. Elle consiste à évaluer la constante  $C_s$  en minimisant le terme  $L_{ij}^D - T_{ij}^D + \hat{\tau}_{ij}^D$  par une méthode des moindres carrés. L'approche dynamique présentée dans cette section repose sur cette approche de Lilly.

Le second problème relatif au système 2.144 repose sur le fait que la constante de Smagorinsky  $C_s$  apparaît à l'intérieur du filtre test dans le membre de gauche alors qu'elle est en dehors du filtre dans le terme de droite. Pour permettre l'évaluation de la constante  $C_s$ , Ghosal *et al.* [132] proposent une méthode intégrale consistant à utiliser la relation de Germano [128] sous une forme intégrale et à minimiser une nouvelle fonction erreur associée. Ducros *et al.* [104] évaluent la constante dynamique du modèle avec une méthode de relaxation. La méthode largement utilisée considère que la constante de Smagorinsky reste inchangée sur les deux grilles de filtrage (invariance de la constante en particulier sur la partie du spectre délimitée par la fréquence de coupure du filtre test). La constante  $C_s$  peut ainsi figurer en dehors du filtre. L'expression peut alors s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$L_{ij} = C_s^2 M_{ij} \quad (2.145)$$

avec le tenseur  $M_{ij}$  tenseur défini comme :

$$M_{ij} = \widehat{2(\bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij})} - 2\widehat{\hat{\rho} \hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \hat{S}_{ij}} \quad (2.146)$$

Pour déterminer la constante  $C_s$  malgré la surdétermination du précédent système, on minimise l'erreur commise (résidu),  $E_{ij} = L_{ij}^D - C_s^2 M_{ij}^D$ , par la méthode des moindres carrés [234]. On définit alors la somme des carrés,  $\Sigma = E_{ij} E_{ij}$ . Le développement de ce produit fournit :

$$\Sigma = L_{ij}^D L_{ij}^D - 2L_{ij}^D M_{ij}^D + M_{ij}^D M_{ij}^D \quad (2.147)$$

La minimisation de l'erreur commise sur le calcul de  $C_s$  revient à rechercher le minimum de  $\Sigma$ . Puisque  $\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial C_s^2} > 0$ , cette condition est satisfaite si la dérivée première de  $\Sigma$  est nulle. On en déduit alors :

$$C_s^2 = \frac{M_{ij}^D L_{ij}^D}{M_{kl}^D M_{kl}^D} \quad (2.148)$$

Le troisième problème vient des fortes variations spatiales de la constante  $C_s$  qui peut même devenir négative localement ou être indéterminée si le dénominateur s'annule. Une telle constante négative induit une viscosité turbulente négative traduisant un phénomène de backscatter [67], c'est-à-dire un transfert d'énergie des petites structures aux grandes échelles. La présence d'une constante négative pose de nombreux problèmes numériques notamment en terme de stabilité. Ce problème peut être traité par des méthodes basées sur le calcul de moyennes ou de suivis de particules fluides. On distingue ainsi trois approches pour réguler ce problème, présentées ci-dessous.

#### La méthode des moyennes spatiales dans des directions homogènes

Cette méthode consiste à moyenner la constante  $C_s$  suivant une direction statistiquement homogène de l'écoulement. En notant  $\langle . \rangle_H$  cette opération, la relation suivante est obtenue :

$$C_s^2 = \frac{\langle L_{ij}^D M_{ij}^D \rangle_H}{\langle M_{ij}^D M_{ij}^D \rangle_H} \quad (2.149)$$

Dans le cadre de l'étude d'écoulements dans des canaux, Germano *et al.* [128] et Piomelli *et al.* [292] proposent de moyenner cette relation suivant les plans parallèles aux murs. Cependant la définition de ces directions est particulièrement délicate pour des configurations complexes. On utilise dès lors la seconde approche décrite ci-dessous.

#### Le modèle dynamique localisé (DSM)

Le modèle dynamique localisé [132, 291] consiste à filtrer localement la constante  $C_s$  obtenue avec la relation 2.148 afin d'amortir les variations locales trop importantes. L'argument principal de cette méthode repose sur le fait que la constante  $C_s$  ne doit pas comporter d'échelles inférieures à  $\widehat{\Delta}$  puisqu'elle appartient à l'expression de la viscosité turbulente à l'échelle  $\widehat{\Delta}$ . En notant  $\langle . \rangle_{DSM}$  cette opération de filtrage, il vient :

$$C_s^2 = \frac{\langle L_{ij}^D M_{ij}^D \rangle_{DSM}}{\langle M_{ij}^D M_{ij}^D \rangle_{DSM}} \quad (2.150)$$

Dans la pratique, nous choisissons d'effectuer cette opération de filtrage en appliquant successivement trois opérations de filtrage au niveau test  $\widehat{\Delta}$  afin de déterminer une moyenne impliquant non seulement les cellules avoisinantes mais aussi les cellules situées dans les couches ( $i + 1$ ,  $i + 2$  et  $i + 3$ ).

Pour éviter l'apparition d'instabilités numériques avec l'utilisation de cette méthodes, nous utiliserons la condition suivante est utilisée :

$$C_s \geq 0 \quad (2.151)$$

En évitant l'apparition d'une constante négative, cette approche perd un un des avantages de la formulation dynamique puisqu'il est dès lors impossible de décrire les phénomènes de backscatter.

Par ailleurs, en appliquant une moyenne locale, ce modèle peut limiter l'ajustement automatique de la constante en fonction des informations résolues et dégrader les propriétés locales de l'écoulement. Il est alors nécessaire d'avoir recours à une autre approche. Cette méthode induit toutefois des phénomènes sur-dissipatifs à l'origine d'une grande stabilité numérique (contrairement à la méthode introduite dans le paragraphe suivant) et justifie ainsi son utilisation dans de nombreuses configurations.

### Le modèle dynamique par suivi lagrangien (LDSM)

Cette procédure dynamique, proposée par Meneveau *et al.* [254], adopte un point de vu lagrangien pour estimer la constante  $C_s$  en moyennant sur les trajectoires empruntées par les particules fluides. La constante  $C_s$  est ainsi évaluée en minimisant l'erreur  $(L_{ij}^D - C_s^2 M_{ij})$  le long des trajectoires fluides. Si l'on note  $E_{ij} = L_{ij}^D - C_s^2 M_{ij}^D$ , l'erreur commise dans l'identité de Germano et  $\mathbf{z}(t')$  le vecteur position de la particule fluide au temps  $t'$ , la méthode de moindre carré appliquée au formalisme lagrangien fournit :

$$\epsilon = \int_{-\infty}^t E_{ij}(\mathbf{z}(t'), t') E_{ij}(\mathbf{z}(t'), t') W(t - t') dt' \quad (2.152)$$

avec  $\epsilon$  la somme lagrangienne des carrés et  $W$  une fonction "mémoire" rapidement décroissante. L'objectif de la fonction mémoire est d'ajouter une pondération exponentielle en temps afin de donner plus d'importance aux instants les plus récents. La solution consiste à déterminer  $C_s$  pour que  $\epsilon$  soit minimale, c'est à dire si :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial C_s^2} = 0 \quad (2.153)$$

soit

$$\int_{-\infty}^t 2\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial C_s^2} W(t - t') dt' = 0 \quad (2.154)$$

Cette opération de minimisation fournit la relation suivante pour  $C_s$  [254] :

$$C_s^2(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{I}_{LM}}{\mathcal{I}_{MM}} \quad (2.155)$$

Il convient alors d'introduire deux intégrales qui permettent le suivi des quantités voulues le long des trajectoires fluides :

$$\mathcal{I}_{LM} = \int_{-\infty}^t L_{ij}^d M_{ij}(\mathbf{z}(t'), t') W(t - t') dt' \quad (2.156)$$

$$\mathcal{I}_{MM} = \int_{-\infty}^t M_{ij} M_{ij}(\mathbf{z}(t'), t') W(t - t') dt' \quad (2.157)$$

Pour obtenir ces intégrales, les équations de transport-relaxation suivantes sont utilisées [254] :

$$\frac{D\mathcal{I}_{LM}}{Dt} = \frac{1}{T_{lag}} (L_{ij} M_{ij} - \mathcal{I}_{LM}) \quad (2.158)$$

$$\frac{D\mathcal{I}_{MM}}{Dt} = \frac{1}{T_{lag}} (M_{ij} M_{ij} - \mathcal{I}_{MM}) \quad (2.159)$$

Pour résoudre cette équation au sens lagrangien, des opérations d'interpolation multi-linéaires sont appliquées [254]. L'équation de transport de la grandeur spatio-temporelle  $\phi(\mathbf{x}, t)$  est la suivante :

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{T} [f(\mathbf{x}, t) - \phi(\mathbf{x}, t)] \quad (2.160)$$

Elle peut en effet être approximée au premier ordre en temps par :

$$\frac{\phi^{n+1}(\mathbf{x}) - \phi^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{u}}^n \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{T} [f^{n+1}(\mathbf{x}) - \phi^{n+1}(\mathbf{x})] \quad (2.161)$$

où la valeur  $\phi^n$ , au temps  $n$  et à la position  $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{u}}^n \Delta t$ , est déterminée par des interpolations multilinéaires suivant les trois directions du repère d'espace. Le nouveau champ  $\phi^{n+1}$  est alors exprimé sous la forme :

$$\phi^{n+1}(\mathbf{x}) = \zeta f^{n+1}(\mathbf{x}) + (1 - \zeta)\phi^n(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{u}}^n \Delta t) \quad (2.162)$$

avec  $\zeta = \Delta t / (T + \Delta T)$ .

Dans les relations 2.158 et 2.159,  $T_{lag}$  est le temps de corrélation lagrangien défini sous la forme [326] :

$$T_{lag} = 1,5 \Delta \bar{\rho}^{1/2} (\mathcal{I}_{LM} \mathcal{I}_{MM})^{-1/8} \quad (2.163)$$

De même que la procédure dynamique localisée, pour éviter l'apparition d'une constante  $C_s$  négative, les termes  $\mathcal{I}_{LM}$  et  $\mathcal{I}_{MM}$  sont limités, c'est-à-dire que les conditions  $\mathcal{I}_{LM} \leq 0$  et  $\mathcal{I}_{MM} \leq 0$  sont imposées. Notons que si l'un des deux termes est limité, alors la constante  $C_s$  est considérée comme nulle.

Les simulations réalisées dans ce manuscrit reposeront sur les deux dernières approches (DSM et LDSM).

Par ailleurs, il est possible d'étendre la procédure dynamique (localisée ou lagrangienne) à l'évaluation des flux de chaleur et des espèces de sous-maille. Ainsi, Moin *et al.* [262] proposent de déterminer les propriétés de transport turbulent de manière dynamique (diffusivité thermique  $\kappa_{sgs}$ ) avec une approche lagrangienne.

$$\kappa_{sgs} = \left[ \frac{C_s^2}{Pr_t} \right] (\mathbf{x}, t) \Delta^2 |\tilde{S}| \quad (2.164)$$

Nous pouvons étendre cette approche à la diffusivité des espèces  $\kappa_{sgs}^{Y_i}$  :

$$\kappa_{sgs}^{Y_i} = \left[ \frac{C_s^2}{Pr_t} \right] (\mathbf{x}, t) Le_t \Delta^2 |\tilde{S}| \quad (2.165)$$

avec  $Le_t$  le nombre de Lewis de sous-maille, considéré comme égal à 1. On introduit alors un tenseur modifié de Léonard qui relie les flux d'énergie pour les deux niveaux de filtrage ( $\Delta$  et  $\hat{\Delta}$ ) :

$$\mathcal{K}_j = \hat{q}_j - Q_j \quad (2.166)$$

avec

$$Q_j = \gamma (\widehat{\rho e_I \tilde{u}_j} - \widehat{\rho e_I u_j}), \quad \hat{q}_j = \gamma (\widehat{\rho e_I \hat{u}_j} - \widehat{\rho e_I u_j}) \quad (2.167)$$

Soit :

$$\mathcal{K}_j = \gamma (\widehat{\rho e_I \hat{u}_j} - \widehat{\rho e_I \tilde{u}_j}) \quad (2.168)$$

En évaluant le flux de chaleur au niveau "test",  $Q_j$ , par analogie avec le modèle utilisé pour fermer  $q_j$ , le nouveau tenseur de Léonard s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{K}_{ij} = \frac{\widehat{C_s^2}}{Pr_t} \alpha_j^{e_I} + \frac{C_s^2}{Pr_t} \beta_j^{e_I} \quad (2.169)$$

avec

$$\alpha_j^{e_I} = \gamma \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}| \frac{\partial \tilde{e}_I}{\partial x_j}, \quad \beta_j^{e_I} = \gamma \hat{\rho} \hat{\Delta}^2 |\hat{S}| \frac{\partial \hat{e}_I}{\partial x_j} \quad (2.170)$$

En supposant que le nombre de Prandtl turbulent,  $Pr_t$ , ainsi que la constante de Smagorinsky,  $C_s$ , ne varient pas sur la partie du spectre définie par le filtre test, l'erreur dans l'identité de Germano peut donc s'écrire :

$$E_j^{e_I} = \mathcal{K}_j - \frac{C_s^2}{Pr_t} \mathcal{H}_j, \text{ avec } \mathcal{H}_j = \widehat{\alpha_j^{e_I}} - \beta_j^{e_I} \quad (2.171)$$

L'erreur à minimiser le long des trajectoires fluides est donnée par la relation :

$$\epsilon^{e_I} = \int_{-\infty}^t E_j^{e_I}(\mathbf{z}(t'), t') E_j^{e_I}(\mathbf{z}(t'), t') W(t-t') dt' \quad (2.172)$$

Cette dernière conduit à la définition des intégrales suivantes :

$$\mathcal{I}_{KH} = \int_{-\infty}^t \mathcal{K}_j \mathcal{H}_j(\mathbf{z}(t'), t') W(t-t') dt' \quad (2.173)$$

$$\mathcal{I}_{HH} = \int_{-\infty}^t \mathcal{H}_j \mathcal{H}_j(\mathbf{z}(t'), t') W(t-t') dt' \quad (2.174)$$

Ces intégrales sont évaluées à partir des équations de transport-relaxation :

$$\frac{D\mathcal{I}_{KH}}{Dt} = \frac{1}{T_{lag_{e_I}}} (\mathcal{K}_j \mathcal{H}_j - \mathcal{I}_{KH}) \quad (2.175)$$

$$\frac{D\mathcal{I}_{HH}}{Dt} = \frac{1}{T_{lag_{e_I}}} (\mathcal{H}_j \mathcal{H}_j - \mathcal{I}_{HH}) \quad (2.176)$$

avec le temps caractéristique  $T_{lag_{e_I}}$  donné par :

$$T_{lag_{e_I}} = 3,5 \Delta \bar{\rho}^{1/3} (\mathcal{I}_{KH} \mathcal{I}_{HH})^{-1/12} \quad (2.177)$$

Les propriétés de transport turbulent sont alors exprimées sous la forme :

$$\left[ \frac{C_s^2}{Pr_t} \right] (\mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{I}_{KH}}{\mathcal{I}_{HH}} \quad (2.178)$$

Les simulations réalisées avec un modèle LDSM comporteront ces évaluations des flux de chaleur et des espèces de sous-maille.

#### 2.4.5.5 Le modèle de Yoshizawa (fermeture de $\tau_{kk}$ )

Au cours de la procédure de modélisation des termes de sous-maille, il est d'usage de séparer la partie déviatrice du tenseur des contraintes de sous-maille  $\tau_{ij}$ , notée  $\tau_{ij}^D$  de sa partie isotropique  $\frac{1}{3}\tau_{ii}$ . Ces deux parties font l'objet d'une modélisation indépendante. Dans la section 2.4.5.1, nous avons introduit les trois approches pour fermer la trace du tenseur des contraintes de sous-maille. En particulier, Yoshizawa [411] propose un modèle de fermeture pour ce terme  $\tau_{kk}$  sous la forme :

$$\tau_{kk} = 2C_I \bar{\rho} \Delta^2 |\tilde{S}|^2 \quad (2.179)$$

avec  $C_I$  la constante du modèle de Yoshizawa que Moin *et al.* [262] estiment à 0,005. Erlebacher *et al.* [110] proposent quant à eux une valeur de 0,006. Comme pour le modèle de Smagorinsky, l'emploi d'un coefficient constant rend la formulation moins polyvalente et moins précise. Il est alors intéressant d'adopter un formalisme dynamique pour prendre en compte les variations spatio-temporelles de  $C_I$ . Cette approche dynamique est justifiée par Zang *et al.* [412] qui reportent d'importantes variations de cette valeur.

#### 2.4.5.6 Deux formulations dynamiques du modèle de Yoshizawa

Pour évaluer plus précisément le terme de sous-maille associé à la partie isotropique du tenseur des contraintes de sous-maille, il est intéressant d'évaluer les flux à un niveau du spectre de la turbulence où l'écoulement est résolu pour en déduire la constante  $C_I$ . Dans cet objectif, Moin *et al.* [262] proposent l'expression de la constante  $C_I$  à l'aide d'une approche dynamique combinée avec une opération de moyenne suivant une direction homogène de l'écoulement.

**L'approche dynamique localisée du modèle de Yoshizawa (DYM)**

Pour la modélisation de la partie déviatrice du tenseur des contraintes de sous-maille, les stratégies de modélisation de sous-maille se concentrent sur la partie déviatrice du tenseur de Léonard  $L_{ij}^D$ . Pour fermer la partie isotropique, nous nous focaliserons sur la partie sphérique du tenseur de Léonard exprimée par la relation :

$$L_{kk} = \widehat{\tau}_{kk} - T_{kk} \quad (2.180)$$

Par analogie avec le modèle utilisé pour fermer  $\tau_{kk}$ , il est possible d'évaluer la partie isotropique du tenseur des contraintes au niveau test  $T_{kk}$  :

$$T_{kk} = 2C_I \widehat{\rho} \widehat{\Delta}^2 |\widehat{S}|^2 \quad (2.181)$$

A partir de cette relation, on obtient :

$$L_{kk} = \widehat{2\Delta^2 C_I \rho |\widehat{S}|^2} - 2\widehat{\Delta}^2 C_I \widehat{\rho} |\widehat{S}|^2 \quad (2.182)$$

$$L_{kk} = C_I \underbrace{\left[ \widehat{2\Delta^2 \rho |\widehat{S}|^2} - 2\widehat{\Delta}^2 \widehat{\rho} |\widehat{S}|^2 \right]}_{M_{kk}} \quad (2.183)$$

La détermination de la constante  $C_I$  rencontre le même problème que la procédure dynamique de la constante de Smagorinsky quant au caractère surdéterminé de la précédente équation. Pour définir une relation unique, on minimise l'erreur commise sur le calcul de  $C_I$  avec la méthode des moindres carrés de Lilly [234]. On introduit alors le résidu  $E_{kk}$  tel que :

$$E_{kk} = L_{kk} - C_I M_{kk} \quad (2.184)$$

En minimisant le produit des erreurs ( $\Sigma = E_{kk} E_{kk}$ ), il vient :

$$C_I = \frac{L_{kk}}{M_{kk}} \quad (2.185)$$

Cette équation ne donne aucune propriété particulière à la constante  $C_I$ . On moyenne alors la constante suivant une direction homogène de l'écoulement :

$$C_I = \frac{\langle L_{kk} \rangle_H}{\langle M_{kk} \rangle_H} \quad (2.186)$$

Pour éviter l'apparition de valeur négative, la valeur de  $C_I$  est limitée ( $C_I \geq 0$ ).

**L'approche dynamique lagrangienne du modèle de Yoshizawa (LDYM)**

Nous étendons la procédure dynamique lagrangienne au modèle de Yoshizawa [411]. La minimisation de l'erreur commise dans l'identité de Germano conduit à l'introduction du produit des résidus sous une forme lagrangienne :

$$\epsilon = \int_{-\infty}^t E_{kk}(z(t'), t') E_{kk}(z(t'), t') W(t - t') dt' \quad (2.187)$$

La constante  $C_I$  est alors déterminée en un point  $\mathbf{x}$ , au temps  $t$  de manière à minimiser l'erreur le long des trajectoires fluides. La minimisation du précédent produit conduit à l'introduction des intégrales suivantes :

$$\mathcal{I}_{M_I} = \int_{-\infty}^t M_{kk}(\mathbf{x}(t'), t') W(t - t') dt' \quad (2.188)$$

$$\mathcal{I}_{L_I} = \int_{-\infty}^t L_{kk}(\mathbf{x}(t'), t') W(t - t') dt' \quad (2.189)$$

Ces termes sont déterminés à l'aide des deux équations de transport suivantes :

$$\frac{D\mathcal{I}_{L_I}}{Dt} = \frac{1}{T_{lag_I}}(L_{kk} - \mathcal{I}_{L_I}) \quad (2.190)$$

$$\frac{D\mathcal{I}_{M_I}}{Dt} = \frac{1}{T_{lag_I}}(M_{kk} - \mathcal{I}_{M_I}) \quad (2.191)$$

Le temps caractéristique  $T_{lag_I}$  est estimé à l'aide de la relation :

$$T_{lag_I} = 1.5\Delta\bar{\rho}^{1/2}(\mathcal{I}_{L_I}\mathcal{I}_{M_I})^{-1/8} \quad (2.192)$$

La constante  $C_I$  résulte enfin du rapport :

$$C_I^2(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathcal{I}_{L_I}}{\mathcal{I}_{M_I}} \quad (2.193)$$

#### 2.4.5.7 Le modèle WALE

Ce modèle est proposé par Nicoud et Ducros [272] afin d'introduire un comportement réaliste de la viscosité turbulente en proche paroi et permettre une description correcte de la transition vers la turbulence. Ces deux points constituent en effet les points faibles du modèle de Smagorinsky. La viscosité turbulente est définie selon :

$$\nu_t = C_w^2\Delta^2 \frac{(s_{ij}^d s_{ij}^d)^{3/2}}{(\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij})^{5/2} + (s_{ij}^d s_{ij}^d)^{5/4}} \quad (2.194)$$

où la constante  $C_w$ , évaluée lors de tests à priori sur une turbulence homogène isotrope, est fixée à  $C_w = 0,4929$ . Le tenseur  $s_{ij}$  est défini par la relation suivante :

$$s_{ij}^d = \frac{1}{2}(\tilde{g}_{ij}^2 + \tilde{g}_{ji}^2) - \frac{1}{3}\tilde{g}_{kk}^2\delta_{ij} \quad (2.195)$$

avec  $g_{ij}$  le gradient des vitesses résolues :

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \tilde{g}_{ij}^2 = \tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{kj} \quad (2.196)$$

#### 2.4.5.8 Le modèle de Vreman

Vreman [391] propose de modéliser la partie déviatrice du tenseur de sous-maille avec la viscosité turbulente suivante :

$$\nu_t = 2.5C_s^2\sqrt{\frac{B_\beta}{\alpha_{ij}\alpha_{ij}}} \quad (2.197)$$

où  $C_s$  n'est autre que la constante de Smagorinsky ( $C_s = 0,1$ ). Les grandeurs  $B_\beta$  et  $\alpha_{ij}$  sont corrélées aux gradients de vitesse :

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \quad (2.198)$$

$$\beta_{ij} = \Delta_m^2 \alpha_{mi}\alpha_{mj} \quad (2.199)$$

$$B_\beta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 + \beta_{11}\beta_{33} - \beta_{13}^2 + \beta_{22}\beta_{33} - \beta_{23}^2 \quad (2.200)$$

#### 2.4.5.9 MILES approach

Introduit historiquement par Boris *et al.* [39], l'approche MiLES appartient au concept ILES (*Implicit Large Eddy Simulation*) et ne repose plus sur un modèle explicite de sous-maille. L'approche MiLES (*Monotone Integrated Large Eddy Simulation*) [152] considère le schéma de viscosité artificielle d'un code en volumes finis comme la principale source de dissipation des petites échelles.

En effet le concept ILES se base sur l'hypothèse selon laquelle les modèles de sous-maille ont uniquement une action dissipative qui peut être reproduite par les schémas numériques, utilisés pour la discrétisation du flux convectif (en particulier les schémas décentrés de type *upwind*) ou par le terme de dissipation artificielle. Notons qu'en principe, l'application d'un modèle LES interdit l'utilisation d'une viscosité artificielle du même ordre ou supérieure à la viscosité turbulente ainsi que de schémas numériques de convection introduisant une trop grande diffusion numérique.

Dans le présent manuscrit, le schéma de dissipation artificielle de Jameson *et al.* [184] est employé et est présenté dans la section 3.2.1.2. Ce schéma introduit des termes de dissipation de second et de quatrième ordre. Alors que le terme de dissipation artificielle de second ordre agit principalement sur les discontinuités de pression et de masse volumique que les modèles de sous-maille ne peuvent capturer, la dissipation de quatrième ordre opère comme un modèle de sous-maille [326]. Cette contribution de quatrième ordre amortit les modes hautes fréquences induits par tout schéma centré [361]. Or ces hautes fréquences sont également caractéristiques des petites échelles qui sont dissipées par la modélisation de sous-maille. Pour effectuer un calcul LES implicite, la dissipation de second ordre n'est pas modifiée alors que les coefficients pilotant le terme de quatrième ordre sont augmentés par rapport à une simulation LES employant une modélisation explicite.

Bien que cette méthode soit particulièrement attractive en terme de complexité et de temps de calcul (lié à l'absence des procédures de filtrage explicite), il reste délicat de piloter et de justifier la dissipation introduite.

## 2.5 Modélisation de la combustion

Cette section apporte un aperçu général des techniques de modélisation de la combustion turbulente. La première partie de cet exposé est vouée à la présentation des différentes approches suivies pour la description mathématique de la flamme. L'objectif n'étant pas l'exhaustivité, la seconde partie est consacrée à la présentation synthétique des outils permettant la représentation du phénomène de combustion turbulente et mis en oeuvre pour les différents régimes de flammes. A l'issue de la bibliographie, l'approche de chimie détaillée tabulée PCM-FPI (pour *Presumed Conditional Moments-Flame Prolongation of ILDM*) est décrite.

### 2.5.1 Revue des techniques

On distingue généralement trois catégories d'outils mathématiques pour modéliser les effets de sous-maille. Ces outils sont présentés sur la figure 2.8 et sont classés suivant :

- **L'approche géométrique** qui considère le front de flamme comme une surface géométrique très fine et mobile dans l'espace physique. Plusieurs modèles appartiennent à cette famille de pensée et concernent essentiellement les flammes turbulentes prémélangées. On distingue principalement l'approche de la  $G$ -équation, les modèles à densité de surface de flamme et les approches dites de flammes épaissies.
- **L'approche algébrique** qui relie le mélange moléculaire et turbulent aux termes sources chimiques. Particulièrement adaptés aux flammes de prémélange, les modèles appartenant à ce type de représentation mathématique reposent sur deux paramètres de contrôle qui sont le nombre de Damköhler  $Da$ , présenté par la suite, et le taux de dissipation scalaire  $\chi_Z$ .

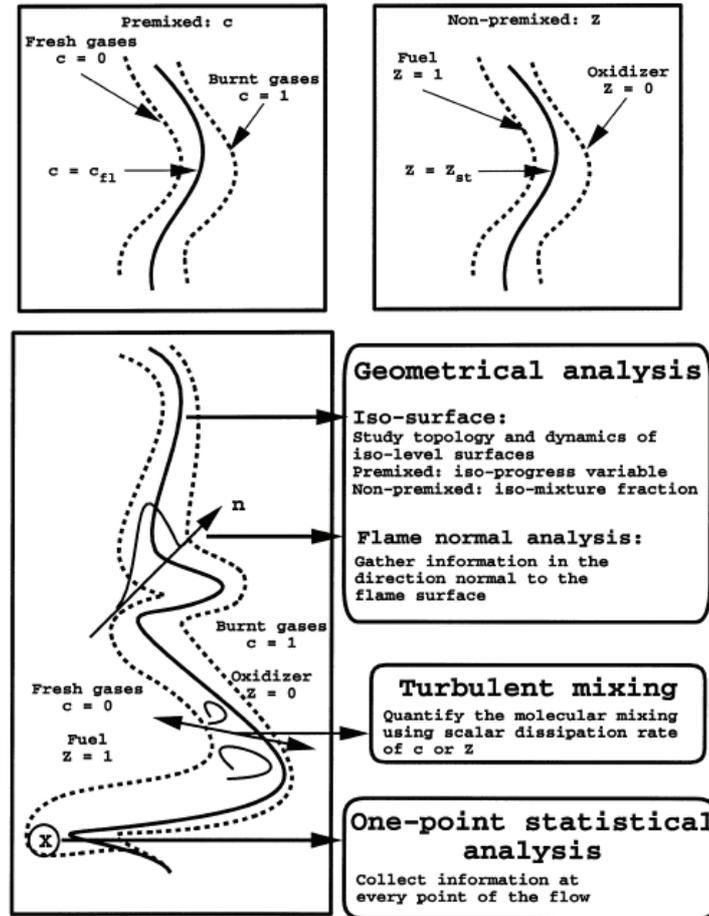


FIGURE 2.8: Synthèse des différentes approches en combustion turbulente (figure tirée de Vervisch et Veynante [389]).

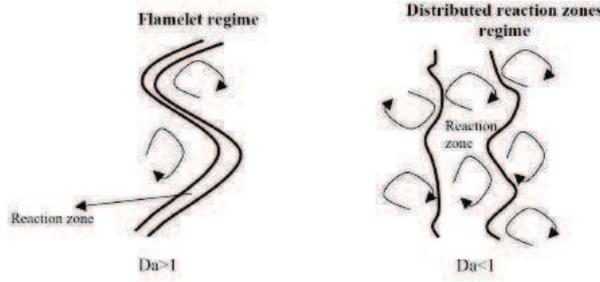
- **L’approche statistique** en un point qui décrit la structure de la flamme à l’aide des fonctions de densité de probabilité. Cette approche se décline aussi bien pour les flammes de diffusion que de prémélange. Initialement, elle fut développée pour des flammes non-prémélangées puis étendue à la combustion prémélangée,

## 2.5.2 Combustion turbulente prémélangée

Cette section est dédiée à la présentation exhaustive des principaux modèles de la combustion turbulente prémélangée, précédée de l’introduction des différents régimes de la combustion prémélangée.

### 2.5.2.1 Les régimes de la combustion prémélangée

Damköhler [89] est le premier à identifier différents régimes de combustion pour décrire la structure topologique de la flamme. Il envisage un régime où toutes les structures tourbillonnaires sont beaucoup plus grandes que les échelles caractéristiques de la flamme de sorte que la structure interne du front de flamme ne puisse pas être modifiée par les tourbillons. Cette situation apparaît pour des nombres de Damköhler largement supérieurs à un et est appelé régime des flammellettes (*flamelet regime*). Le **nombre de Damköhler** compare les temps liés à la chimie et à la turbulence (plus



**FIGURE 2.9:** Effet de la turbulence sur la structure de la zone de réaction.

spécifiquement le temps associé aux échelles intégrales) :

$$Da = \frac{\tau_t}{\tau_c} = \frac{l_t/u'}{\delta_{th}/s_L^0} \quad (2.201)$$

avec  $l_t$  l'échelle intégrale,  $u'$  la fluctuation de la vitesse turbulente,  $\delta_{th}$  l'épaisseur de flamme de Zeldovitch et  $s_L^0$  la vitesse de flamme laminaire. Pour un schéma cinétique simplifié, le temps lié à la chimie est associé au temps nécessaire à la flamme pour qu'elle se propage sur une distance égale à son épaisseur caractéristique  $\tau_c = \delta_{th}/S_L$ . Avec le concept de flammelettes, la structure locale de la flamme se rapproche de la flamme laminaire académique [389]. La turbulence peut néanmoins plisser ou étirer le front de flamme, augmentant ainsi sa surface, le taux de consommation des réactifs par unité de temps et la vitesse de déplacement du front turbulent [376]. La flammelette peut ainsi être convectée à une vitesse  $S_T$ , supérieure à la vitesse de flamme laminaire  $s_L^0$ , dont une expression simple est proposée par Damköhler [89] :

$$\frac{S_T}{s_L^0} \simeq \frac{A_T}{A_c} = 1 + \frac{u'}{s_L^0} \quad (2.202)$$

Le paramètre  $A_T$  représente la surface de la flamme turbulence plissée et  $A_c$  son aire projetée. La vitesse de flamme turbulente,  $S_T$ , regroupe ainsi les effets de la turbulence et de la chimie et est l'objet de nombreuses études [288, 389, 339, 298].

La configuration opposée se produit lorsque  $Da \ll 1$ , où tous les temps caractéristiques de la turbulence sont largement inférieurs au temps chimique. Le mélange des espèces lié aux mouvements turbulents s'effectue bien avant les réactions chimiques. Ce régime se rapproche du réacteur parfaitement prémélangée [232] (*Perfectly Stirred Reactor*).

Suivant le critère de Klimov-Williams [201, 398], même pour des nombres de Damköhler  $Da > 1$ , les petites structures, associées aux échelles de Kolmogorov,  $\eta_k$ , peuvent pénétrer le front de flamme et modifier sa structure topologique, ce qui a motivé l'introduction d'un autre paramètre pour caractériser la topologie de la flamme. Pour compléter la description des différents régimes de flammes, on introduit donc le **nombre de Karlovitz**,  $Ka$ , qui compare le temps chimique au temps associé aux plus petites structures turbulentes [286] :

$$Ka = \frac{\tau_c}{\tau_k} = \frac{\delta_{th}}{\eta_k} \frac{u'_k}{s_L^0} \quad (2.203)$$

avec  $\tau_k$  le temps des échelles de Kolmogorov.

Peters [288] adjoint à cette idée la décomposition de la flamme laminaire en trois zones distinctes : une zone de préchauffage, une zone de réaction interne et la couche d'oxydation. La zone de réaction s'étend typiquement sur un dixième de l'épaisseur de flamme. L'échelle de Kolmogorov doit donc être extrêmement fine pour pénétrer cette région. Le nombre de Karlovitz permet de rendre compte des

interactions possibles entre ces petites structures et la flamme elle-même. Plusieurs cas sont possibles et sont représentés sur le diagramme des régimes de flammes de Peters [288]. Sur ce diagramme, la classification des régimes repose sur plusieurs paramètres dont le nombre de Reynolds turbulent, défini par :

$$Re = \frac{u' L_T}{\nu_u} \quad (2.204)$$

qui, pour un nombre de Prandtl égal à 1 vaut  $Re = (u' L_T)/(s_L^0 \delta_{th})$ .

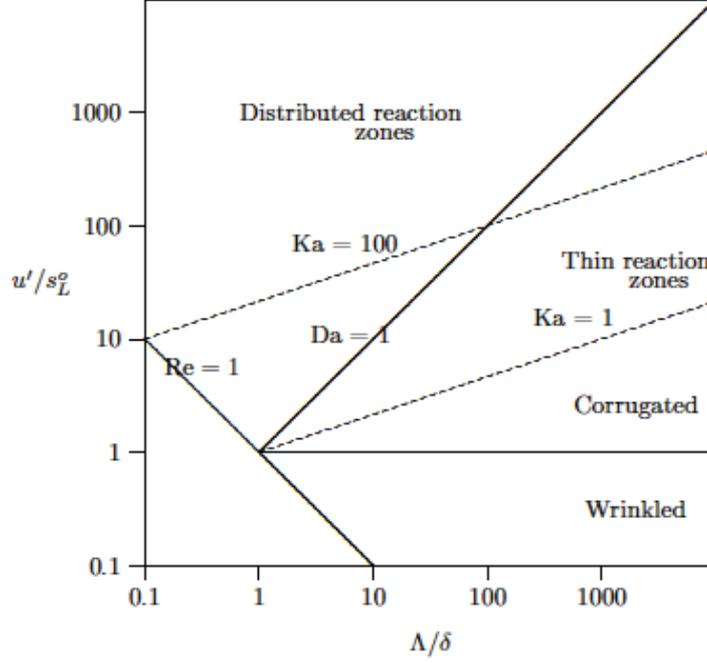
La région comprise entre  $Ka = 1$  et  $Ka = 100$  constitue la zone de réaction mince (*thin reaction zone*) où les échelles de Kolmogorov, beaucoup plus petites que l'épaisseur de flamme, pénètrent dans la zone de préchauffage. Cependant, la zone réactionnelle ne se trouve pas affectée. Lorsque  $Ka > 100$ , toute la structure interne de la flamme est modifiée par les structures tourbillonnaires et la réaction se produit sur une région distribuée dans l'espace. Il s'agit du régime de flammes épaissies ou flammes à zone de réaction distribuée (*thickened flame* ou *distributed reaction zones*). Sous la ligne  $Ka = 1$ , on distingue les flammes plissées avec la formation de poches (*corrugated flamelets*) et les flammelettes plissées (*wrinkled flamelets*) qui sont séparées par la ligne  $u'/s_L^0 = 1$ . La distinction entre ces deux régimes de flammelettes se fait sur l'analyse du rapport  $u'/s_L^0$ . Ainsi, si  $u'/s_L^0 < 1$ , les tourbillons ne peuvent pas plisser réellement la flamme réduisant ainsi l'interaction flamme/turbulence. À l'opposé, lorsque  $u'/s_L^0 > 1$ , on assiste à la formation de poches de gaz frais et brûlés. La transition des flammelettes plissées aux flammes épaissies, à mesure que l'intensité de la turbulence augmente, est illustrée sur la figure 2.9.

Il est important de rappeler que le diagramme de Peters (illustré sur la figure 2.10) repose sur des grandeurs qualitatives et des hypothèses simplificatrices. De nombreuses expériences ont tenté, et parfois réussi à définir les limites exactes des domaines de validité des différents régimes de combustion prémélangée. Il existe ainsi des diagrammes "améliorés" basés sur des résultats expérimentaux [74]. Avec des simulations de type DNS, Poinot *et al.* [298] proposent un autre diagramme basé sur les résultats de l'interaction d'une flamme avec une structure tourbillonnaire. Mais, en dépit des incertitudes sur les limites réelles des différents régimes, ces idées qualitatives sont largement utilisées pour formuler les concepts inhérents aux différents modèles de combustion et pour justifier leur applicabilité suivant le cas étudié.

Ce découpage du diagramme en régimes de combustion a permis la formulation d'hypothèses simplificatrices pour des modélisations spécifiques. Ainsi, dans le cadre du réacteur parfaitement prémélangé, le temps chimique étant largement supérieur au temps caractéristique de la turbulence, les fluctuations des grandeurs thermochimiques sont petites puisqu'elles sont rapidement homogénéisées par les mouvements turbulents. Ainsi le taux de réaction moyen peut être évalué, d'une manière raisonnable, sur la base des quantités moyennes [232]. Dans la limite des flammelettes, on suppose que la structure du front de flamme correspond à celle d'une flamme laminaire, il s'agit de l'approximation des "flammelettes laminaires". Le taux de réaction moyen peut, dès lors, être déduit du taux de réaction d'une flamme laminaire (typiquement, une flamme canonique) et des statistiques des flammelettes en un point donné. Dans la plupart des applications, le scénario de combustion se rapproche d'un régime de flammelettes [286]. Ainsi, de nombreux modèles de combustion prémélangée et de diffusion se basent sur le concept de flammelettes. Les approches de type flammelettes ainsi que d'autres modélisations spécifiques sont présentées, succinctement, ci-dessous.

### 2.5.2.2 Le modèle EBU

Le modèle EBU (pour *Eddy-Break-Up Model*) proposé par Spalding [350, 250] repose sur l'hypothèse que la chimie est plus rapide que le transport turbulent, c'est-à-dire pour des nombres de Reynolds et de Damköhler élevés ( $\gg 1$ ). Le taux de réaction moyen est donc piloté par la vitesse à laquelle les réactifs frais entrent en contact avec les produits de combustion. Le taux de réaction



**FIGURE 2.10:** Diagramme des régimes de flammes prémélangées, basé sur les travaux de Peters [288].

moyen s'écrit donc :

$$\bar{\omega}_F = C_{EBU} \bar{\rho} \frac{\epsilon}{k} \sqrt{Y_F''^2} \quad (2.205)$$

avec  $C_{EBU}$  la constante du modèle et  $\widetilde{Y_F''^2}$  la variance de Favre liée à l'amplitude des fluctuations de la fraction massique d'espèce. Le taux de réaction moyen pour la variable de progrès  $c$  s'exprime sous la forme :

$$\bar{\omega}_c = -C_{EBU} \bar{\rho} \frac{\epsilon}{k} \sqrt{c''^2} = C_{EBU} \bar{\rho} \frac{\epsilon}{k} \tilde{c}(1 - \tilde{c}) \quad (2.206)$$

Malgré son expression relativement simple et le faible coût numérique relatif à son implémentation, cette première approche présente l'inconvénient de surestimer le taux moyen de réaction, en particulier dans les régions soumises à de forts gradients (étirement du front de flamme) où le temps de mélange turbulent devient important. Par ailleurs, ce modèle ne peut prédire la concentration des produits de combustion minoritaires et reproduire des effets de non-équilibre des réactions chimiques.

### 2.5.2.3 Le modèle BML

Le modèle de Bray-Moss-Libby (BML) propose une fermeture de l'état thermodynamique du mélange basée sur une fonction de densité de probabilité de la variable de progrès  $c(\mathbf{x}, t)$  [49, 52, 44]. Cette pdf est définie comme la somme de trois probabilités :  $\alpha$  liée à la présence de gaz frais,  $\beta$  pour caractériser la probabilité de trouver des gaz brûlés et  $\gamma$  associée à la zone de réaction.

$$\bar{P}(c = \zeta, \mathbf{x}, t) = \underbrace{\alpha(\mathbf{x}, t)\delta(\zeta)}_{\text{frais}} + \underbrace{\beta(\mathbf{x}, t)\delta(1 - \zeta)}_{\text{produits}} + \underbrace{\gamma(\mathbf{x}, t)f(\zeta)}_{\text{réaction}} \quad (2.207)$$

avec  $\delta(\zeta)$  et  $\delta(1 - \zeta)$  des fonctions de Dirac. La normalisation de la pdf fournit les relations suivantes :

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(\zeta)d\zeta = 1 \quad (2.208)$$

Une quantité thermochimique moyenne s'écrit alors :

$$\bar{\Phi}_\alpha = \int_0^1 \Phi_\alpha(\zeta) P(\zeta, \mathbf{x}, t) d\zeta \quad (2.209)$$

soit, en remplaçant  $P(\zeta, \mathbf{x}, t)$  par son expression 2.207 :

$$\bar{\Phi}_\alpha = \alpha(\mathbf{x}, t) \Phi_\alpha(0) + \beta(\mathbf{x}, t) \Phi_\alpha(1) + \gamma(\mathbf{x}, t) \int_0^1 \Phi_\alpha(\zeta) f(\zeta) d\zeta \quad (2.210)$$

Ce modèle a permis l'étude de flammes pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds et des nombres de Damköhler élevés, dans les limites de l'hypothèse des flammelettes, où le front de flamme est mince et la probabilité d'être dans la zone de réaction négligeable devant les contributions des réactifs et des produits. Il a également aidé à mettre en évidence la diffusion à contre-courant, où le flux de scalaire est positif suivant les gradients de  $\tilde{c}$  positifs [50]. Le point clé de cette méthode reste néanmoins la fermeture du terme source moyen  $\bar{\omega}$ , non résolu avec l'approche BML. En effet, l'utilisation de la relation 2.210 restreint le terme source moyen à l'ordre  $\mathcal{O}(\gamma)$ , qui est supposé négligeable. Pour fermer le terme source moyen, d'autres approches alternatives furent proposées. Bray [45], à partir de son analyse des équations de transport pour  $\tilde{c}$  et  $\tilde{c}''^2$  et en utilisant les hypothèses de l'approche BML, relie ainsi le taux de réaction moyen au taux moyen de dissipation scalaire  $\bar{\epsilon}_c$  :

$$\bar{\omega} = \frac{2}{2C_m - 1} \bar{\rho} \bar{\epsilon}_c \quad \text{avec} \quad C_m = \frac{\int_0^1 \zeta \dot{\omega}(\zeta) P(\zeta) d\zeta}{\int_0^1 \dot{\omega}(\zeta) P(\zeta) d\zeta} \quad (2.211)$$

avec le taux de dissipation scalaire moyen défini comme :

$$\bar{\rho} \bar{\epsilon}_c = \overline{\rho D_c \frac{\partial c''}{\partial x_i} \frac{\partial c''}{\partial x_i}} \quad (2.212)$$

Cette formulation pose par ailleurs le problème de la fermeture du taux de dissipation scalaire moyen. En utilisant un des modèles classiques développés pour les scalaires passifs dans des écoulements turbulents non réactifs,  $\bar{\rho} \bar{\epsilon}_c = \bar{\rho} \tilde{c}''^2 / \tau_t$ , sous les hypothèses du modèle BML où  $\tilde{c}''^2 \sim \tilde{c}(1 - \tilde{c})$  et en estimant le temps caractéristique de la turbulence comme  $\tau_t \sim \tilde{k} / \tilde{\epsilon}$ , le modèle BML revient à la formulation EBU de Mason et Spalding [250] :

$$\bar{\omega}_c \approx C_{EBU} \frac{\bar{\rho}}{\tau_t} \tilde{c}''^2 C_{EBU} \bar{\rho} \frac{\epsilon}{k} \tilde{c}(1 - \tilde{c}) \quad (2.213)$$

Une autre formulation du terme source moyen, proposée par Bray *et al.* [51], associe le taux moyen de réaction à une fréquence de passage  $\nu_f$  du front de flamme en un point donné ;

$$\bar{\omega}_c = \dot{\omega}_f \nu_f \quad (2.214)$$

avec  $\dot{\omega}_f$  le taux de réaction associé.

Malgré les améliorations du modèle pour la fermeture du terme source moyen et du taux de dissipation scalaire moyen, un des principaux inconvénients de ce modèle reste la méconnaissance de la chimie.

#### 2.5.2.4 L'approche de la densité de surface de flamme

Cette approche, complémentaire au modèle BML, suppose que le taux de réaction chimique moyen par unité de volume  $\bar{\omega}_i$  est le produit d'un taux de réaction par unité de surface de flamme  $\dot{\Omega}_i$  à une densité de surface de flamme  $\Sigma$  [248] :

$$\bar{\omega}_i = \dot{\Omega}_i \Sigma \quad (2.215)$$

En supposant que le taux de réaction par unité de surface de la flammelette puisse être relié à la vitesse de flamme laminaire, le taux de réaction de la flammelette devient :

$$\bar{\omega}_i = \rho_u \langle s_c \rangle_s \Sigma \quad (2.216)$$

où  $s_c$  correspond à la vitesse de consommation de la flamme et la notation  $\langle \rangle_s$  représente une moyenne sur une surface de flamme. La densité de surface de flamme correspond à la surface moyenne de la flamme par unité de volume. L'estimation de cette densité de surface de flamme s'effectue en utilisant soit une expression algébrique de fermeture ou une équation de transport pour  $\Sigma$ . Ainsi, en utilisant des considérations géométriques, Bray *et al.* [48] proposent une expression algébrique de  $\Sigma$  basée sur l'analyse de la fréquence de passage de la flamme alors que Gouldin *et al.* [148] se basent sur les théories fractales pour proposer une formulation de  $\Sigma$ . Pope [300], de son côté, propose une formulation statistique de la densité de surface de flamme d'une iso-surface  $c = \zeta$  :

$$\Sigma = \langle |\nabla c| c = \zeta \rangle P(\zeta) \quad (2.217)$$

avec  $\langle |\nabla c| c = \zeta \rangle$  la moyenne de  $|\nabla c|$  conditionnée sur  $c = \zeta$  et  $P(\zeta)$  une pdf.

L'équation de transport de  $\Sigma$  peut s'écrire sous la forme [65, 300, 375] :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_i \rangle_s \Sigma}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle s_d n_i \rangle_s \Sigma] = \langle a_T + s_d \frac{\partial n_i}{\partial x_i} \rangle_s \Sigma \quad (2.218)$$

avec  $n_i$  la  $i$ -ème composante du vecteur unitaire normal à la surface de flamme,  $s_d$  la vitesse de déplacement de la surface de flamme et  $a_T$  le taux d'étirement tangentiel, définis par [296] :

$$a_T = (\delta_{ij}) n_i n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad s_d = \left( \frac{1}{\langle \nabla c \rangle} \frac{Dc}{Dt} \Big|_{c=\zeta} \right) \quad (2.219)$$

La plupart des calculs de flammes turbulentes basés sur l'utilisation de cette équation néglige le dernier terme à gauche (LHS) relatif à la vitesse de propagation normale. Le terme de convection est alors exprimé comme  $\langle u_i \rangle_s = \tilde{u}_i + \langle u_i'' \rangle_s$ , et le taux d'étirement tangentiel est divisé en deux contributions liées à l'écoulement moyen et aux fluctuations turbulentes. Le dernier terme du membre de droite (RHS), associé à la courbure, est traité comme un terme de destruction s'opposant à une croissance infinie de la surface de la flamme. Il existe de nombreux modèles de fermeture du taux d'étirement tangentiel et du terme de destruction (Poinsot et Veynante [296] et Veynante et Vervisch [389]).

Avec l'hypothèse d'un front de flamme similaire à celui d'une flamme laminaire non étirée plane, la vitesse de consommation  $s_c$  est proche de la vitesse de la flamme laminaire,  $s_L^0$ . Pour décrire des configurations de flammes plus réalistes, où les tourbillons courbent et étirent le front de flamme et modifient ainsi sa vitesse de consommation, Bray et Cant [47] regroupent les effets de la turbulence sous la forme d'un facteur d'étirement  $I_0$ , de sorte que  $\langle s_c \rangle_s = I_0 s_L^0$  avec  $I_0$  défini comme :

$$I_0 = \frac{1}{s_L^0} \int s_c(\kappa) P(\kappa) d\kappa \quad (2.220)$$

Le terme d'étirement est ainsi le rapport de la vitesse moyenne de consommation de la flammelette et de la vitesse de la flamme laminaire non étirée.

### 2.5.2.5 L'approche géométrique : l'équation de surface $G$

Cette approche considère le front de flamme comme une surface dont la propagation peut être suivie de manière déterministe. Cette surface est supposée être une discontinuité entre des gaz frais et des gaz brûlés. Ainsi l'épaisseur du front de flamme demeure nulle par consistance mathématique. Ce formalisme est également appelé *level-set* et est basé sur l'équation de surface  $G$  [288, 399]. La

variable  $G(\mathbf{x}, t)$  est définie comme la distance d'une position de l'espace  $\mathbf{x}$  au front de flamme  $G_0$ . Les valeurs  $G > G_0$  sont associées aux gaz brûlés alors que les valeurs  $G < G_0$  correspondent aux gaz frais. Ce formalisme pose le problème de la non-unicité de la solution puisque, loin du front de flamme le scalaire  $G$  peut être défini de différentes manières. Afin de prescrire un champ de solution unique pour la flamme turbulente, le scalaire  $G$  est défini comme la distance séparant les fronts de flamme moyens et instantanés mesurés suivant la direction normale à la flamme turbulente moyenne. Ainsi, le front de flamme moyen est localisé en  $\tilde{G} = G_0$ . La variance de  $G$ ,  $\overline{G'^2}$ , fournit une mesure de l'épaisseur de flamme. La propagation du front est décrite par une équation de transport de  $\tilde{G}$  [287] :

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_i} = \bar{\rho} S_T \left| \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_i} \right| - \mu_t \mathcal{K} \left| \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_i} \right| \quad (2.221)$$

Le premier terme du membre de droite représente la propagation normale du front de flamme turbulent alors que le second est un terme associé à la courbure. Pour fermer cette équation, la vitesse de la flamme turbulente,  $S_T$ , doit être modélisée. On l'exprime ainsi sous la forme  $S_T = s_L^0 (1 + \tilde{\sigma}_t)$  où apparaissent la vitesse de la flammelette laminaire,  $s_L^0$ , et le rapport  $\tilde{\sigma}_t$  lié à l'accroissement de la surface de flamme turbulente par rapport à la surface de la flammelette laminaire. Peters [287] dérive une équation de transport pour ce rapport d'accroissement de surface de flamme, valide dans les limites des régimes des flammes plissées avec la formation de poches (*corrugated regimes*) et des flammes à zone de réaction mince, et fournit ainsi des expressions algébriques pour la fermeture de la vitesse de flamme turbulente  $S_T$ .

Pour qualifier l'état thermodynamique du mélange, la distance normale au front de flamme normalisée,  $x_n$ , est introduite et repose sur le scalaire  $G$  :

$$x_n = \frac{G - G_0}{|\nabla G|} \quad (2.222)$$

Les équations relatives aux flammelettes laminaires monodimensionnelles sont alors résolues afin d'exprimer les grandeurs thermo-chimiques  $\Phi_\alpha$  en fonction de  $x_n$ . Les quantités moyennes associées  $\bar{\Phi}_\alpha$  sont obtenues en utilisant les solutions laminaires couplées à des pdf [167].

### 2.5.2.6 Le modèle de flammes épaissies artificiellement : TFLES

Cette méthode des flammes épaissies propose de résoudre la propagation d'une flamme laminaire sur un maillage grossier [64, 82]. Pour capturer le front de flamme sur un maillage grossier, la flamme est artificiellement épaissie d'un facteur d'élargissement  $F$  dont une valeur typique est comprise entre 5 et 30. Les équations de transport des espèces s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \rho Y_F}{\partial F t} + \frac{\partial \rho u Y_F}{\partial F x} = \frac{\partial}{\partial F x} \left( \rho D F \frac{\partial Y_F}{\partial F x} \right) + \frac{\dot{\omega}_F}{F} \quad (2.223)$$

L'épaississement de la flamme à  $F \delta_F^0$  entraîne une division du nombre de Damköhler par  $F$ . Les temps chimique et turbulent sont alors différents, ce qui induit une réponse différente de la flamme à la turbulence. Pour limiter cet effet, un facteur d'efficacité,  $E$ , est introduit de sorte à corriger la sous-estimation du plissement de la flamme et préserver la vitesse de flamme turbulente.

Une des difficultés majeures à cette technique est la détermination du facteur d'élargissement  $F$ . Pour s'affranchir de ce réglage, Legier *et al.* [224] proposent un modèle dynamique d'épaississement.

### 2.5.2.7 L'approche du transport de PDF

L'approche basée sur le transport de pdf fournit une fermeture exacte du taux de réaction moyen dès lors que les pdf jointes de tous les scalaires thermo-chimiques sont connues. Ainsi, dans le cas

d'une réaction à une étape, le taux de consommation moyen du combustible est estimé précisément sous la forme :

$$\bar{\dot{\omega}}_F = \int \int \int \dot{\omega}_F(Y_F, Y_O, T) P(Y_F, Y_O, T) dY_F dY_O dT \quad (2.224)$$

$$\bar{\dot{\omega}}_R = \int_{Y_1} \int_{Y_2} \dots \int_{Y_N} \int_T \omega_k(Y_1, Y_2 \dots Y_N, T) P(Y_1, Y_2 \dots Y_N, T) dY_1 dY_2 \dots dT \quad (2.225)$$

où  $P(Y_F, Y_O, T)$  est la pdf jointe des fractions massiques des espèces et de la température. Pour un système complexe comportant  $N$  espèces, les taux de réactions sont fermés grâce à la pdf jointe des compositions en un point,  $P(\Phi)$ , avec le vecteur des compositions  $\Phi = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N, T)$ . Une équation de transport additionnelle fournit la pdf jointe filtrée [273, 299] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{P}(\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{P}(\Phi)] + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \Phi_\alpha} \left[ \frac{1}{\rho} \dot{\omega}_\alpha(\Phi) \bar{\rho} \tilde{P}(\Phi) \right] = \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle u_i'' | \Phi \rangle \bar{\rho} \tilde{P}(\Phi)] + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \Phi_\alpha} \left( \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_{i,\alpha}}{\partial x_i} \middle| \Phi \right\rangle \bar{\rho} \tilde{P}(\Phi) \right) \end{aligned} \quad (2.226)$$

avec  $J_{i,\alpha} = V_{i,\alpha} Y_\alpha$  le flux de diffusion moléculaire. Alors que les trois termes de gauche sont fermés, le premier terme de droite lié au transport turbulent dans l'espace physique nécessite un modèle de fermeture basé, dans la plupart des études, sur une hypothèse de transport de gradient. Le transport de la pdf jointe des compositions et des vitesses peut permettre de s'abstenir de ce modèle de fermeture et fournit également les expressions des termes non fermés des équations de moment. Le second terme de droite exprime le mélange moléculaire dans l'espace des compositions et constitue la principale difficulté de modélisation de cette approche [301].

Le principal inconvénient de cette méthode réside dans le coût numérique lié à la résolution de la pdf jointe en chaque point de l'espace (système de dimension  $N + 1$ ). Pour résoudre l'équation de la pdf, l'utilisation de méthodes numériques comme les différences finies étant à proscrire, des approches de type Monte Carlo sont utilisées et consistent à traquer de nombreuses particules fluides afin de reconstruire la pdf jointe à partir de leurs distributions de compositions [299]. Ainsi, cette méthode est accessible numériquement pour l'étude d'un système chimique complexe puisque le coût numérique croît linéairement avec la dimension de la pdf. Néanmoins, cette approche reste excessivement coûteuse comparée aux autres modèles.

### 2.5.2.8 L'approche des PDF présumées

Afin de réduire les coûts numériques liés à l'équation de transport de la pdf et à la dimension importante de la pdf jointe, l'approche des pdf présumées caractérise l'état thermochimique à partir d'un nombre limité de scalaires en présumant la forme des pdf associées aux scalaires. Les modèles BML et la *G-equation* reposent ainsi sur cette hypothèse puisque l'état thermochimique est déterminé à partir de la variable de progrès ou de  $G$ . En présumant la forme de la pdf, les calculs thermo-chimiques sont, par ailleurs, dissociés des calculs fluides. Les grandeurs thermo-chimiques moyennes sont calculées a priori et tabulées en fonction des moments des scalaires caractéristiques. Ainsi, la connaissance de ces moments permet la lecture dans la table des différentes grandeurs nécessaires au calcul de la flamme turbulente. La forme de la pdf présumée fournit le nombre de moments de scalaires nécessaires pour la tabulation. Ainsi, la pdf du modèle BML requiert seulement la connaissance de  $\tilde{c}$ , alors que la  $\beta$ -pdf nécessite deux moments :  $\bar{c}$  et  $\tilde{c}''^2$  [41, 296, 334]. Pour connaître ces différents moments, des équations de transport doivent être ajoutées.

Il existe de nombreuses approches basées sur des pdf présumées. Ces approches diffèrent par le nombre et la définition des scalaires impliqués dans la description de l'état thermochimique. Ainsi, au sein de l'approche des flammelettes laminares [41, 384, 135], la relation entre les scalaires et l'état

chimique est assurée par des calculs de flammes laminaires canoniques. Les différentes quantités moyennes recherchées,  $\tilde{\Phi}$ , sont ainsi obtenues grâce à la relation :

$$\tilde{\Phi} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\zeta)P(\zeta)d\zeta \quad (2.227)$$

où  $\Phi(\zeta)$  est la solution laminaire.

### 2.5.2.9 L'approche de fermeture des moments conditionnés

Cette approche des moments conditionnés repose sur l'hypothèse que les fluctuations des grandeurs thermo-chimiques des flammes turbulentes sont corrélées aux fluctuations d'un unique scalaire : la variable de progrès, dans le cas des flammes de prémélange. Alors que les fluctuations autour des moyennes non conditionnées peuvent être importantes, les fluctuations autour de la moyenne conditionnée par ce scalaire sont faibles. La moyenne non conditionnée est alors exprimée en fonction de la moyenne conditionnée :

$$\bar{\Phi}_\alpha = \int \langle \Phi_\alpha | c = \zeta \rangle P(\zeta) d\zeta \quad (2.228)$$

Les grandeurs thermo-chimiques conditionnées par le scalaire réactif  $c$  sont obtenues à partir de leurs équations de transport respectives, écrites sous la forme [200] :

$$\langle \rho | \zeta \rangle \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} + \langle \rho u_i | \zeta \rangle \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_i} = \langle \rho | \zeta \rangle \langle N_c | \zeta \rangle \frac{\partial^2 Q_\alpha}{\partial \zeta^2} + \langle \dot{\omega}_\alpha | \zeta \rangle - \langle \dot{\omega} | \zeta \rangle \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \zeta} + e_{Q_\alpha} + e_{y_\alpha} \quad (2.229)$$

avec  $\dot{\omega}_\alpha$  le taux global de production massique des réactions chimiques,  $\dot{\omega}$  le taux de réaction de la variable de progrès et  $N_c$  le taux de dissipation scalaire instantané défini par :

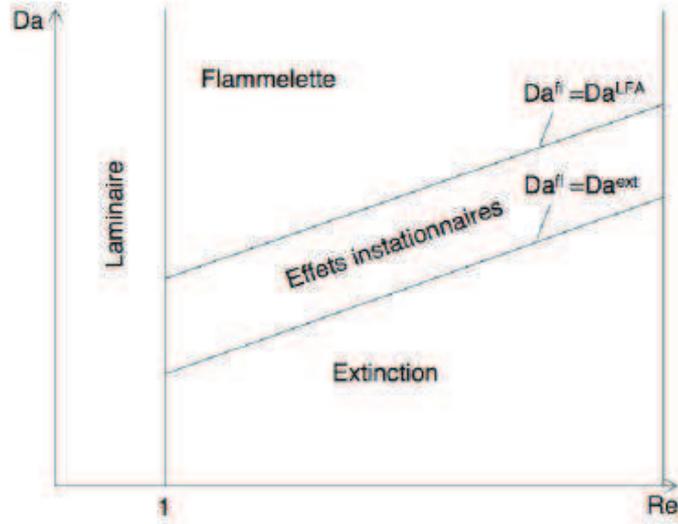
$$N_c \equiv D_c \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (2.230)$$

Les termes  $e_{Q_\alpha}$  et  $e_{y_\alpha}$  sont associés respectivement à la diffusion moléculaire et aux fluctuations turbulentes conditionnées [360]. Le terme de diffusion moléculaire  $e_{Q_\alpha}$  devient négligeable à mesure que le nombre de Reynolds augmente.

Les problèmes majeurs de ce formalisme concernent la fermeture du taux de dissipation scalaire conditionné ainsi que la définition d'une variable de progrès [200]. Par ailleurs, cette approche est particulièrement coûteuse puisque la thermo-chimie nécessite la résolution de  $(N_{spe} + 1)$  équations de transport, multipliées par le nombre de points dans l'espace de la variable de conditionnement. Par rapport aux autres approches décrites ci-dessus et basées sur des arguments phénoménologiques, ce formalisme offre l'avantage de prédire les polluants et leurs taux de formation.

### 2.5.2.10 Le modèle de la chimie tabulée filtrée : F-TACLES

Le modèle F-TACLES (*Filtered TABulated Chemistry for LES*) proposé récemment par Fiorina *et al.* [120, 14, 13] est une approche transversale au modèle T-FLES et à l'approche des flammelettes laminaires de prémélange. Pour reproduire la dynamique du front de flamme en LES, ce modèle associe, aux équations filtrées, une table chimique filtrée. En particulier, l'équation de la variable de progrès filtrée est fermée par la tabulation de flammes laminaires monodimensionnelles de prémélange filtrées. Ainsi, cette approche repose sur l'introduction d'un filtre dont la taille caractéristique est plus grande que la taille de maille et est choisie a priori. Cette approche permet de garantir la bonne dégénérescence du modèle pour une flamme de prémélange monodimensionnelle (la vitesse de flamme monodimensionnelle est bien retrouvée quelque soit la taille du filtre).



**FIGURE 2.11:** Diagramme des régimes de flammes non-prémélangées en fonction du nombre de Reynolds et de Damköhler [389].

### 2.5.3 Combustion turbulente non-prémélangée

Cette section présente les principaux modèles applicables dans le cadre de flammes turbulentes non-prémélangées. La combustion non-prémélangée étant pilotée principalement par la diffusion et dépourvue de vitesse de propagation, on introduit, pour caractériser sa structure topologique, la notion d'épaisseur de mélange,  $l_d$  :

$$l_d = \frac{\mathcal{D}}{\tilde{\chi}_{st}} \quad (2.231)$$

avec  $\tilde{\chi}_{st}$  la valeur moyenne conditionnée de la dissipation scalaire pour  $Z = Z_{st}$ ,  $\chi_{st} = D|\nabla Z|_{st}^2$  et  $\mathcal{D}$  le coefficient de diffusion moléculaire. Le terme de dissipation scalaire,  $\chi_Z$ , décrit l'interaction des structures turbulentes avec la structure de la flamme.

On peut également définir un nombre de Damköhler,  $Da^* = (\tau_c \chi_{st})^{-1}$ , avec le temps chimique,  $\tau_c$ , qui dépend de la chimie du combustible. Les pentes à Damköhler  $Da^*$  constant sont des lignes de coefficient directeur 1/2 dans l'espace  $\log(Re)$ - $\log(Da)$  du diagramme 2.11. La distinction en différents régimes de combustion, présentée sur la figure 2.11 repose sur le nombre de Damköhler et le nombre de Reynolds.

Ainsi, lorsque le temps chimique est largement inférieur au temps caractéristique de la turbulence ( $Da \gg 1$ ), la combustion peut être assimilée à un modèle de combustion infiniment rapide ou régime des flammelettes (*infinitely fast chemistry*). Cette condition correspond à  $Da^* \geq Da_{LFA}$ . A mesure que les échelles de temps de la turbulence augmentent pour un même temps chimique, les structures tourbillonnaires agissent sur la structure de flamme, il s'agit du régime de chimie finie où les effets instationnaires liés à la turbulence doivent être pris en considération. Au delà d'un seuil, lorsque la turbulence devient l'élément directeur, on assiste à l'extinction de la flamme (lorsque  $Da^* \leq Da_{ext}$ ). Pour de faibles nombres de Reynolds ( $Re \leq 1$ ), la flamme est laminaire.

Ainsi les principaux modèles de la combustion turbulente non-prémélangée se distinguent suivant l'hypothèse sous-jacente formulée concernant le comportement de la chimie (chimie infiniment rapide, etc).

### 2.5.3.1 Le modèle EDM

Le modèle EDM [245], largement utilisé pour des applications industrielles, repose sur l'hypothèse d'une chimie infiniment rapide. Ce modèle suppose que le taux de réaction moyen d'une chimie à une étape puisse être relié au mélange turbulent :

$$\bar{\omega} = \bar{\rho} A \frac{\epsilon}{k} \min \left( \bar{Y}_F, \frac{\bar{Y}_O}{s}, \frac{B \bar{Y}_P}{1+s} \right) \quad (2.232)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes du modèle et  $s$  la fraction massique stoechiométrique. Le taux de réaction moyen est exprimé comme celui associé à la réaction chimique la plus lente dont l'évolution est prédite par le mélange turbulent. Ce modèle ne peut pas prédire précisément les espèces minoritaires stables mais fournit une bonne évaluation du taux de dégagement de chaleur.

### 2.5.3.2 L'approche des flammelettes laminaires

L'approche des flammelettes laminaires, introduite par Peters [284], suppose que les zones de réaction sont suffisamment fines pour être assimilées, localement, à des flammes laminaires assujetties à une dissipation scalaire. Ainsi, les flammes laminaires sont calculées a priori en utilisant une chimie détaillée et une bibliothèque de flammelettes est générée. Cette bibliothèque pré-calculée stocke les grandeurs thermo-chimiques nécessaires (composition, température, taux de réaction) en fonction des paramètres fondamentaux, qui sont la fraction de mélange et le taux de dissipation scalaire  $\chi_Z$ .

L'équation de la flammelette laminaire instationnaire s'écrit [288] :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \tau} = \frac{\rho}{Le} \frac{\chi_Z}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial Z^2} + \dot{\omega} \quad (2.233)$$

avec  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N, T)$  le vecteur des espèces et de la température et  $\dot{\omega}$  le terme source chimique associé à chaque coordonnée. Le terme  $\chi_Z$  est exprimé à l'aide des gradients de la fraction de mélange dans l'espace physique et peut être transporté dans l'espace des compositions. Un niveau élevé de  $\chi_Z$  implique que les effets diffusifs au sein de la flammelette sont prédominants avec d'importants transferts de masse et de chaleur. Au delà d'une valeur seuil correspondant à l'extinction et associée au taux de diffusion scalaire d'extinction  $\chi_{Z_q}$ , la flammelette n'existe plus.

La flammelette est valide pour le régime caractérisé par  $Da \gg 1$  et  $Ka < 1$ . A mesure que l'intensité de la turbulence augmente, les tourbillons pénètrent la structure de flamme. La flamme ne peut donc plus être considérée localement comme une flamme de diffusion laminaire.

### 2.5.3.3 L'approche du transport de PDF

L'approche statistique basée sur une équation de transport de la pdf existe également pour les flammes de diffusion puisque cette méthode fut proposée à l'origine pour traiter les flammes de diffusion [299]. A l'instar des flammes de prémélange, l'équation de transport est résolue pour la pdf de la fraction de mélange.

### 2.5.3.4 Les moments conditionnés CMC (*Conditional Moment Closure*)

Le modèle de fermeture, nommé CMC et proposé par Bilger [33] et Klimenko et Bilger [200], repose sur la corrélation des fluctuations turbulentes de la température et de la composition avec les fluctuations de plusieurs variables clés, par exemple, la fraction de mélange. Dans un premier temps, la variable associée à la fraction de mélange  $Z$  est soumise à une moyenne conditionnée, définie comme l'intégration de tous les membres du sous-ensemble de la grandeur thermodynamique disposant de la même valeur que la fraction de mélange.

La fermeture directe du modèle, au premier ordre, suppose que les variances et les covariances conditionnées sont négligeables. L'utilisation de la formulation CMC, au premier ordre, fournit l'expression suivante pour les fractions massiques moyennées au sens de Favre :

$$\tilde{Y}_l = \int_0^1 (\overline{Y_l|Z^*}) p(Z^*) dZ^* \quad (2.234)$$

La grandeur  $(\overline{Y_l|Z^*})$  représente la moyenne conditionnée à la fraction de mélange  $Z^*$  et est déterminée à l'aide de la relation :

$$(\overline{Y_l|Z^*}) = \int_0^1 Y_l p(Y_l|Z^*) dY_l \quad (2.235)$$

où  $p(Y_l|Z^*)$  est la PDF conditionnée de  $Y_l$ , évaluée à l'aide de la PDF jointe de  $Y_l$  et  $Z^*$  :

$$p(Y_l|Z^*) = \frac{p(Y_l, Z^*)}{p(Z^*)} \quad (2.236)$$

Des résultats intéressants ont été obtenus pour des simulations de recirculation [80] et d'auto-allumage [197]. Néanmoins, cette fermeture soulève quelques difficultés pour les zones d'extinction et de ré-allumage. En particulier, lorsque les fluctuations des scalaires réactifs de fraction de mélange  $Z$  sont importantes, ce modèle n'est plus adapté. Pour améliorer cette approche, une extension au second ordre est possible avec l'utilisation de moments doublement conditionnés (par exemple, la fraction de mélange et l'enthalpie sensible pour Kronenburg et Kostka [209]).

Ce modèle de fermeture implique de résoudre une équation de transport pour chaque niveau de  $Z$ . L'espace de  $Z$  est en effet discrétisé selon plusieurs points (ou niveaux) afin de conserver une précision satisfaisante (50 points [209]). Cette méthode induit donc un coût CPU total important.

### 2.5.3.5 L'approche MMC (*Multiple Mapping Conditioning*)

Cette méthode repose sur le couplage des méthodes à PDF avec les moments conditionnés CMC. Elle recherche le nombre minimal de paramètres à suivre pour modéliser l'évolution du système réactif et utilise une densité de probabilité qui est conditionnée par les paramètres choisis. Ainsi, contrairement à l'approche CMC où la variable conditionnant les moyennes est uniquement la fraction de mélange, un jeu de nouvelles variables est utilisé (la vitesse, les taux de dissipation, ...). Le nombre de ces variables correspond à celui des espèces transportées. La distribution de la composition du mélange est alors évaluée, en tout point, à l'aide de deux quantités : la PDF jointe des variables de référence et la moyenne de concentration de l'espèce conditionnée selon ces mêmes variables.

### 2.5.4 Index de Flamme ou indice de Takeno

Pour la plupart des configurations industrielles, il est difficile de prévoir le mode de combustion pré-dominant. Afin d'adapter les stratégies de modélisation, l'index de flamme ou indice de Takeno est parfois utilisé. Introduit par Yamashita *et al.* [407], cet outil permet de distinguer une flamme de prémélange d'une flamme de diffusion à partir des gradients de concentrations de fuel et d'oxydant :

$$G_{FP} = \nabla Y_F \cdot \nabla Y_O \quad (2.237)$$

Cet indice prend des valeurs positives dans le cas d'une flamme de prémélange et négatives pour une flamme de diffusion.

Domingo *et al.* [97] proposent un index de flamme normalisé  $\xi_p$  sous la forme :

$$\xi_p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{G_{FO}}{|G_{FO}|} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{N_{FO}}{|N_{FO}|} \right) \quad (2.238)$$

avec  $N_{FO} = \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_O$  le produit des normales aux surfaces des iso-réactifs avec  $\mathbf{n}_i = -\nabla Y_i / |Y_i|$ . Ce produit peut en effet révéler la nature du régime de combustion. Alors que les flammes de diffusion sont caractérisées par un produit croisé  $N_{FO} < 0$  du fait de la présence des réactifs de part et d'autre de la ligne stoechiométrique, les flammes de prémélange prennent des valeurs  $N_{FO} > 0$  avec les gradients des réactifs orientés vers le front de flamme. L'index de flamme  $\xi_p$  prend la valeur  $\xi_p = 1$  pour les flammes prémélangées et  $\xi_p = 0$  pour les flammes de diffusion.

Cet indice est utilisé pour l'étude de DNS comme en témoigne les travaux de Favier et Vervisch [115]. Son application aux simulations des grandes échelles soulève néanmoins des problèmes quant à la généralisation de cet index sur toutes les échelles de la turbulence. Appliquée aux champs issus d'une LES, le facteur d'orientation se présente sous la forme :

$$\tilde{N}_{FO} = \tilde{\mathbf{n}}_F \cdot \tilde{\mathbf{n}}_O = \frac{\nabla \tilde{Y}_F \cdot \nabla \tilde{Y}_O}{|\nabla \tilde{Y}_F| |\nabla \tilde{Y}_O|} \quad (2.239)$$

Comme le soulignent Domingo *et al.* [97], l'indice déterminé à partir des contributions résolues  $\tilde{N}_{FO}$  n'indique en rien la nature de la flamme à l'intérieur de la sous-maille. Les directions des gradients de fuel et d'oxydant peuvent présenter des propriétés topologiques différentes de celles présentes au niveau du filtre. On peut très bien imaginer l'existence d'une flamme de diffusion au niveau des échelles résolues et caractérisée par  $\tilde{\mathbf{n}}_F \cdot \tilde{\mathbf{n}}_O < 0$  qui présenterait des topologies de flammes de prémélange dans la sous-maille. Pour vérifier l'apparition de telles séquences, il convient d'utiliser une modélisation SGS comme proposée par Domingo *et al.* [97] et Knudsen et Pitsch [203].

## 2.6 Réduction de la chimie et tabulation

Les mécanismes de chimie détaillée implique plusieurs dizaines d'espèces ( $N$ ) et des centaines de réactions conduisant à un système d'équations à résoudre de  $(N+5)$ . Par ailleurs, ce système d'équations est raide en raison de l'évolution exponentielle des taux de réaction et de la large gamme des échelles de temps et d'espace impliquées. La résolution numérique d'une chimie détaillée nécessite ainsi l'emploi d'un pas de temps très petit pour pallier à des problèmes de stabilité numérique. La résolution d'un tel système nécessite donc l'utilisation de méthodes numériques particulières. Ainsi, les flammes sont rarement calculées à l'aide d'une chimie détaillée du fait du coût numérique exorbitant et de la mémoire énorme requise. En effet, le temps de calcul requis ainsi que la mémoire à allouer augmentent rapidement avec le nombre d'équations différentielles à résoudre. Ce nombre d'équations est directement lié au nombre d'espèces du mécanisme cinétique. Pour limiter le temps de calcul et la mémoire à allouer, il est possible de réduire les schémas cinétiques en diminuant le nombre d'espèce et la raideur du système d'équations différentielles tout en préservant certaines qualités prédictives du mécanisme. Il est néanmoins difficile de définir la méthodologie de réduction. Cette dernière nécessite que les objectifs en terme de domaine d'applications soient préalablement définis. En effet, plus le nombre de grandeurs et de comportements à reproduire est important et plus la taille du mécanisme augmente. Par ailleurs, il convient également de fixer les objectifs en terme d'écart relatif maximum à ne pas dépasser pour les grandeurs d'intérêt. La réduction du mécanisme cinétique est restreinte par la précision exigée sur les grandeurs à reproduire. En général, les réactions et les espèces sont qualifiées de "déterminantes, importantes", "nécessaires, non déterminantes" ou "redondantes" suivant leur capacité à piloter le schéma réactionnel. Alors que les réactions importantes détiennent les informations essentielles à la description des chemins réactionnels, les réactions nécessaires contribuent également à l'information stoechiométrique. Les réactions redondantes ont, quant à elles, une action négligeable sur le schéma réactionnel. Suivant la précision de la description voulue, on distingue trois niveaux de réduction du schéma [225].

### 2.6.1 Le mécanisme squelettique

Le mécanisme squelettique comporte plusieurs dizaines d'espèces et plusieurs centaines de réactions. Ce mécanisme repose sur un schéma détaillé réduit suite au retrait des espèces et réactions dites redondantes [379, 240]. La théorie des perturbations singulières (CSP pour *Computational Singular Perturbation*), proposée initialement par Lam et Goussis [211], repose sur l'analyse des temps caractéristiques associés à chaque vitesse de réaction afin de déterminer la contribution de chaque réaction au schéma réactionnel.

### 2.6.2 Le mécanisme réduit

Le mécanisme réduit avec une dizaine d'espèces et une centaine de réactions. Pour obtenir ce mécanisme réduit [285], le choix des espèces et réactions à supprimer est optimisé à l'aide de critères locaux dans l'espace des compositions (richesse, température). Il repose principalement sur deux méthodes de réduction chimique : l'Approximation des Etats Quasi-Stationnaires de certaines espèces (AEQS), proposée par Bodenstein et Lutkemeyer [37], et l'Approximation des Equilibres Partiels de certaines espèces (AEP) [285]. Ces méthodes considèrent négligeables les phénomènes rapides ou de faible durée de vie. En éliminant ces espèces "rapides", c'est-à-dire à faible durée de vie, qui sont à l'origine des petits pas de temps d'intégration lors de la résolution des équations différentielles caractéristiques des différentes réactions, la raideur du système chimique est diminuée.

### 2.6.3 Le mécanisme global

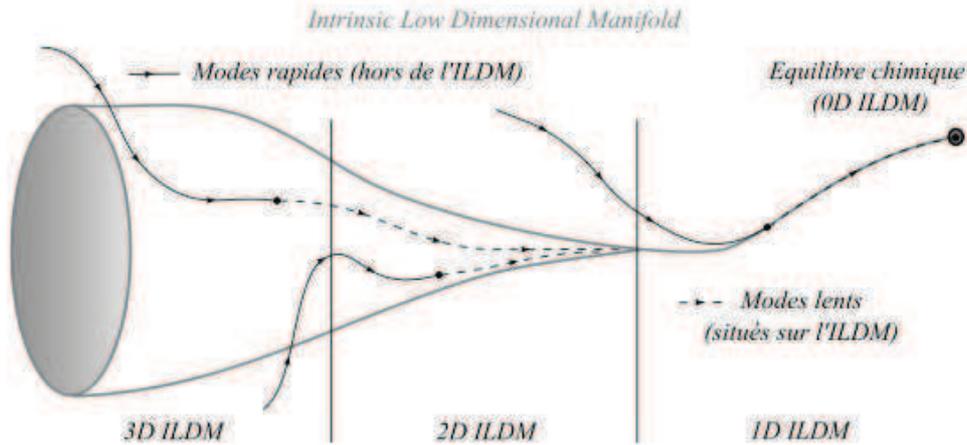
Le mécanisme global est constitué de quelques espèces (essentiellement les espèces majoritaires telles que  $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $H_2$ ,  $CO$ ,...) et d'une dizaine de réactions. Il s'agit d'un schéma réactionnel dégénéré à l'extrême. Très utilisé dans les codes CFD, il est néanmoins limité à la description des vitesses de flamme et des limites d'inflammabilité [116]. Il ne peut en aucun cas prédire la formation des polluants.

### 2.6.4 Tabulation

Un moyen de contourner le coût numérique lié à la description d'un mécanisme complexe est de tabuler la thermochimie à l'aide d'un nombre réduit de grandeurs représentatives [244, 384]. Seules les équations de transport associées à ce jeu de variables doivent être traitées et couplées aux équations décrivant le mouvement fluide. Ces méthodes de tabulation sont de plus en plus utilisées dans la recherche et dans le milieu industriel. On recense principalement trois approches de tabulation : la méthode de la variété intrinsèque de dimension réduite (ILDM), la méthode FPI (*Flame Prolongation of ILDM*) et la méthode ISAT (*In Situ Adaptive Tabulation*).

#### 2.6.4.1 La méthode de la variété intrinsèque de dimension réduite (ILDM)

Par l'analyse de la dynamique des équations chimiques, Maas et Pope [244] observent que les évolutions des fractions massiques  $Y_i(t)$  des espèces  $\psi_i$  convergent, après un délai très court, vers un ensemble de trajectoires bien définies si l'on se place dans un certain sous-espace des compositions. Ce sous-espace attracteur se nomme la variété ou *manifold*. Le schéma de la figure 2.12 illustre ce principe. La majorité des évolutions liées à la cinétique chimique semble donc s'effectuer sur des surfaces de dimensions réduites dans l'espace des phases. Cette technique est basée sur l'analyse des temps caractéristiques chimiques et applique un formalisme similaire à l'approche CSP (*Computational Singular Perturbation*) [211] qui consiste à différencier les modes lents et rapides de chaque concentration  $C_i$  de l'espèce  $\psi_i$ . Mathématiquement, le schéma chimique, pour des conditions opératoires données ( $\Phi$ ,  $P$ ,  $T$ ) est exprimé sous forme matricielle. L'analyse des vecteurs et valeurs propres de ce système permet l'obtention d'un anneau (une hypersurface) de faible dimension sur lequel l'évolution du système est représentée. En effet, les trajectoires  $Y_i$  convergent plus ou moins



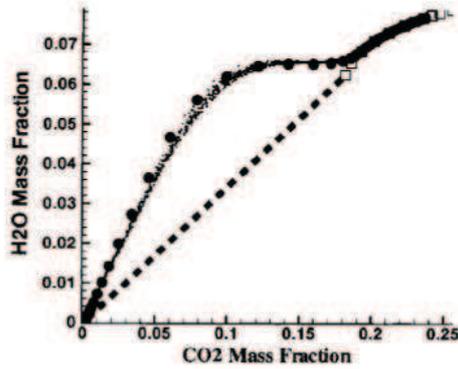
**FIGURE 2.12:** Convergence des trajectoires  $Y_k(t)$  vers l'ILDM [117].

vite vers l'ILDM (trajectoire agissant comme un attracteur) suivant le temps caractéristique (inverse des valeurs propres du système) de leur mode propre associé. En relaxant les modes propres rapides (associés à des temps caractéristiques petits), seuls les modes lents affectent l'évolution de la chimie sur la variété lente [419]. Il est intéressant de noter que l'état d'équilibre appartient à la variété et demeure le seul point vers lequel convergent toutes les trajectoires 0D IDLM comme illustrée sur la figure 2.12.

L'anneau est ensuite paramétré à l'aide d'un nombre restreint de coordonnées, c'est-à-dire que l'on projette cet anneau dans un sous-espace de dimension inférieure. Les coordonnées de ce sous-espace sont généralement choisies parmi les fractions massiques de produits de combustion. Par exemple, la variété de dimension 2 (avec le couple  $Y_{CO_2}$ ,  $Y_{H_2O}$ ) consiste en une surface dans l'espace des compositions qui permet de déterminer correctement l'évolution des espèces chimiques, comme l'illustre la figure 2.13. Notons qu'à mesure où l'on réduit la dimension du sous-espace, les limites de validité de l'approche sont restreintes. Les espèces  $Y_l(t)$  sont en effet exprimées en fonction des paramètres qui décrivent le sous-espace attracteur, en général la variable d'avancement  $c$  ou la fraction de mélange  $Z$ .

#### 2.6.4.2 La méthode FPI (*Flame Prolongation of ILDM*)

La méthode ILDM fournit d'excellents résultats pour les zones chaudes de la flamme ou proches de l'équilibre chimique. Néanmoins, comme le souligne Gicquel [134], des difficultés apparaissent lors de la modélisation des zones de préchauffage ou plus généralement des zones à basse température puisqu'elles requièrent une dimensionnalité de la manifold assez importante pour être décrites correctement. Le principal problème repose que l'hypothèse de relaxation des modes rapides situés hors de l'ILDM qui revient à négliger les temps caractéristiques courts dans ces zones de basses températures. Les zones de basses températures sont donc souvent approximées linéairement dans l'espace des phases comme l'illustre la figure 2.13. Néanmoins cette approche conduit à une mauvaise estimation de la vitesse de flamme. Pour pallier aux défauts de la méthode ILDM et ainsi permettre la description des problèmes d'allumage, des phénomènes transitoires ou d'autres phénomènes de diffusion, Gicquel [134] propose la méthode FPI qui consiste à prolonger l'ILDM avec *des calculs 1D de flammes laminaires stationnaires à cinétique détaillée*. Ainsi, FPI conserve l'anneau monodimensionnel ILDM qui permet la description de l'état d'équilibre associé à un mélange donné et le complète par un anneau bidimensionnel associé à la trajectoire d'une flamme stationnaire prémélangée dans l'espace des phases. Dans le cadre de FPI, les données liées à la thermochimie sont donc tabulées et cartographiées dans un sous-espace constitué des deux variables de contrôle : la



**FIGURE 2.13:** Projection d'une flamme prémélangée turbulente  $CO/H_2/air$  en chimie complexe dans le sous-espace ou ILDM ou encore variété de dimension 2  $(Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$  : (○) : état d'équilibre, (●) : trajectoire d'une flamme laminaire 1D dans les mêmes conditions, (-) : approximation linéaire de la zone froide [135].

variable d'avancement  $c$  et la fraction de mélange  $Z$ . L'approche FPI s'apparente donc à un ILDM de dimension 2.

Par ailleurs cette approche respecte la même démarche et les hypothèses de la méthode FGM (*Flamelet Generated Manifold*) présentée dans les travaux de thèse de Van Oijen [383].

#### 2.6.4.3 La méthode ISAT (*In Situ Adaptive Tabulation*)

A mesure que l'on augmente la complexité du problème physique, il est nécessaire d'accroître la dimension de la table (avec, par exemple, comme coordonnées,  $Z$ ,  $c$ ,  $h_t$  l'enthalpie totale,..). Il en résulte des tables numériquement coûteuses en raison de la taille mémoire, des problèmes d'accès et des interpolations multi-linéaires à réaliser. En partant du constat qu'au cours d'une simulation, seule une infime partie de la table est utilisée en raison de la localité de la zone réactive dans l'espace des compositions, Pope [302] propose la méthode ISAT. Cette dernière repose sur une génération dynamique de la partie de la table utile au cours de la simulation (génération de la tabulation in situ). De manière pratique, le calcul commence avec une table vide. Cette dernière est ensuite enrichie au fur et à mesure des itérations. Cette tabulation In Situ est souvent couplée à une méthode de pdf transportée qui modélise un écoulement réactif avec un nombre élevé de variables. Pour une simulation monoprocasseur, cette méthode s'est révélée très efficace avec un gain du temps de calcul de l'ordre de  $10^3$  comparée à l'intégration directe d'un schéma complet. L'efficacité de cette méthode est néanmoins fortement dégradée sur les architectures parallèles de processeurs [73].

Tout processus de tabulation repose donc sur les étapes suivantes :

- L'analyse des structures de flammes afin de déterminer le nombre de degrés de liberté du système chimique réduit.
- Le choix des coordonnées du sous-espace, c'est-à-dire les entrées de la table. Ces paramètres peuvent reposer directement sur une grandeur thermochimique ou résulter d'une combinaison linéaire de variables indépendantes. Ce choix va directement impacter la taille de la table et le coût numérique.
- La construction de la table avec une cartographie de certaines quantités thermochimiques nécessaires au cours du calcul en fonction des paramètres d'entrée.
- L'utilisation des données de la table pour déterminer d'autres quantités thermochimiques.

Pour générer les tables, il est nécessaire d'effectuer des simulations des flammelettes laminaires

avec une chimie détaillée. Pour résoudre un tel système de chimie détaillée, il existe plusieurs codes de calcul pour des configurations de flammes canoniques [42, 192, 242, 349]. Ces flammes canoniques sont souvent monodimensionnelles (1D) ou quasi monodimensionnelle et sont caractérisées par de petites échelles spatiales. Ainsi, on peut citer le module PREMIX du logiciel CHEMKIN [191].

## 2.7 Modèle PCM-FPI

Le modèle PCM-FPI (*Presumed Conditional Moments-Flame Prolongation of ILDM*) propose de coupler une tabulation de la chimie détaillée avec une pdf présumée. Il est proposé à l'origine pour des calculs de type RANS [386, 119, 325, 387] puis étendu ensuite aux simulations des grandes échelles [99, 126, 98]. Son principal avantage est d'offrir une description assez fine des différentes fractions massiques de l'écoulement réactif pour une chimie non-infiniment rapide.

Le modèle PCM-FPI comporte deux étapes successives : tout d'abord la génération de la table avec le traitement de la chimie (étape FPI), ensuite son couplage avec la turbulence (étape PCM). Ces deux phases sont présentées dans cette section.

Le présent modèle PCM-FPI n'assure cependant pas la reproduction de la vitesse de propagation du front de flamme. Pour contrebalancer cet effet, la section 10 présentera une correction du modèle PCM-FPI basée sur le calcul dynamique d'un épaississement artificiel du front de flamme.

### 2.7.1 Méthode FPI (*Flame Prolongation of ILDM*)

La dénomination FPI est proposée par Gicquel *et al.* [134, 135] et consiste en une technique de réduction de la chimie détaillée avec l'emploi de flammelettes de prémélange proposées par Bradley [43]. Cette méthode dérive du concept ILDM (*Intrinsic Low Dimensional Manifold*) exposé par Maas et Pope [244] et est décrit brièvement dans la section 2.6.4.1.

Dans la méthode FPI, les données associées à la thermochimie sont tabulées et stockées selon deux paramètres de contrôle : la fraction de mélange  $Z$  qui rend compte de la richesse du mélange initial,  $\phi$ , et la variable d'avancement,  $Y_c$ , associée au degré d'avancement de la réaction vers l'état d'équilibre. Cette dernière est construite à partir de combinaisons linéaires de fractions massiques. Plus précisément, pour déterminer les propriétés de la flamme, associées au vecteur  $\Phi_{FPI}$  (comportant des grandeurs scalaires telles que la température, les fractions massiques d'espèces, ...), la méthode FPI fournit une description de la flamme en passant du système :

$$\Phi_{FPI} = \Phi(\phi, x) \tag{2.240}$$

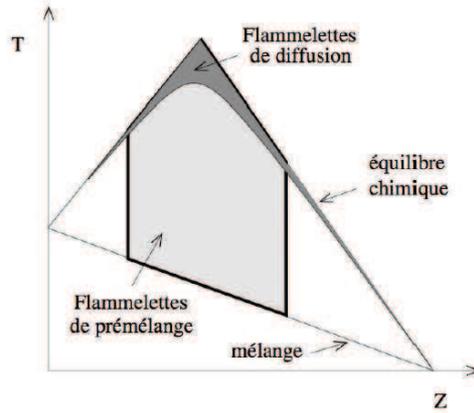
vers le système paramétré suivant :

$$\Phi_{FPI} = \Phi(Z, Y_c) \tag{2.241}$$

L'espace physique  $x$  est ainsi transposé dans l'espace des compositions représenté ici par la variable d'avancement. Pour un mécanisme de combustion méthane-air, cette variable d'avancement est souvent définie comme une combinaison linéaire des produits majoritaires comme le  $CO$  et le  $CO_2$  [99, 143], soit :

$$Y_c = Y_{CO} + Y_{CO_2} \tag{2.242}$$

Pour être consistante avec le formalisme adopté, cette variable doit être croissante monotone de 0 à  $Y_c^{eq}$  lorsque l'on parcourt le front de flamme des gaz frais aux produits de combustion. En effet, le passage de l'espace physique à l'espace des compositions nécessite une relation bi-univoque unique entre ces deux espaces et donc que  $Y_c$  réalise une bijection sur l'épaisseur de la zone de réaction. De même, la deuxième coordonnée  $Z(\phi)$ , rendant compte de la variation du rapport d'équivalence  $\phi$ , doit être bijective sur  $\phi$ .



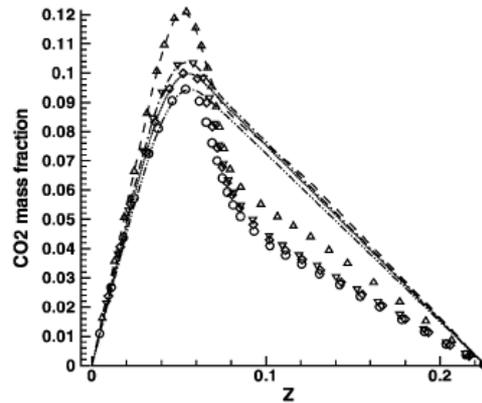
**FIGURE 2.14:** *Domaine de combustion dans l'espace réduit des compositions à l'équilibre chimique. Schéma représentant la température (avec préchauffage du côté carburant) en fonction de la fraction de mélange. En gris foncé : domaines des flammelettes de diffusion. En gris clair : domaines des flammelettes de prémélange [269].*

Nous pouvons également introduire une variable de progrès normalisée, telle que  $0 \leq c \leq 1$ , définie par la relation suivante :

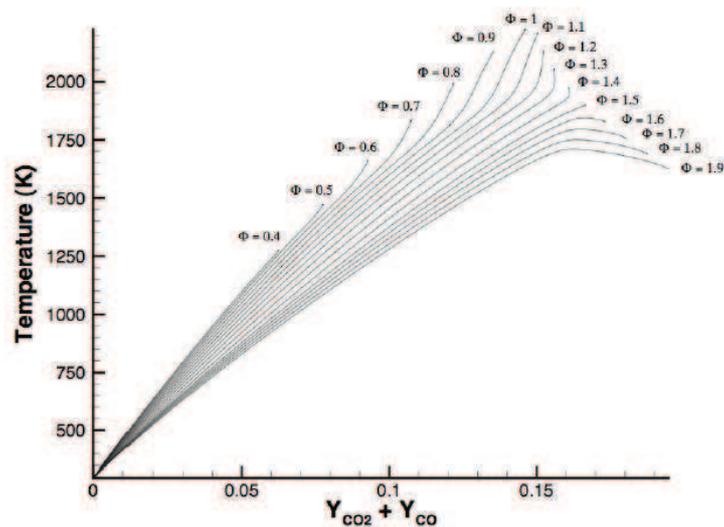
$$c = \frac{Y_c}{Y_c^{eq}} = \frac{Y_{CO_2} + Y_{CO}}{(Y_{CO_2} + Y_{CO})^{eq}} \quad (2.243)$$

Par rapport à ILDM, la méthode FPI choisit de décrire les zones de basses températures par des projections de flammes de prémélange laminaires monodimensionnelles. Ainsi les propriétés chimiques des flammes de prémélange laminaires sont tabulées dans tout le domaine de flammabilité d'une réaction donnée, comme l'illustre la figure 2.14. La tabulation couvre ainsi le domaine de validité des flammes ainsi que la zone en dehors de l'inflammabilité afin de respecter la définition des variables réduites. Cette zone est pilotée par les phénomènes de diffusion différentielle des espèces chimiques qui seront négligés afin de procéder à une interpolation linéaire des variables thermodynamiques entre les limites de flammabilité et la valeur extrême de la fraction de mélange. La méthode FPI repose donc sur l'hypothèse sous-jacente que la réponse d'une flamme, dans n'importe quel régime de combustion, puisse être correctement représentée dans le sous-espace  $(Y_c, Z)$ . Ainsi, le front de la flamme laminaire ou turbulente est décomposé en un collection de petites flammes laminaires de prémélange indépendantes, à la même richesse et au même niveau d'avancement que le point considéré.

Fiorina *et al.* [119] étudient les limites de la méthode FPI. En comparant les résultats issus des simulations d'une flamme laminaire de diffusion et de prémélange avec la méthode FPI et une chimie détaillée, Fiorina *et al.* [119] montrent l'existence d'une zone de richesse, proche de la stoechiométrie, où les flammes de diffusion et de prémélange présentent des comportements très similaires. Néanmoins, pour la zone constituée des richesses en dehors de la limite supérieure de flammabilité, les comportements des flammes de diffusion et de prémélange avec l'approche FPI diffèrent significativement des résultats issus des simulations avec une chimie complexe. En effet, cette zone est dominée par les phénomènes de diffusion des espèces au travers des iso-surfaces de richesse (comportement propre aux flammes de diffusion). La figure 2.15 illustre cette limite de la méthode FPI avec la comparaison avec un calcul à chimie détaillée de la fraction massique de  $CO_2$  dans une flamme de prémélange riche. La méthode FPI requiert une bijection entre l'espace physique  $(x)$  et l'espace des phases  $(Y_c)$  ainsi qu'une surjection entre  $Y_c$  et  $\Phi_{FPI}$ . Néanmoins, la bijection entre l'espace physique et l'espace des phases n'est pas assurée sur certaines plages de richesses, comme le montre la figure



**FIGURE 2.15:** Comparaison entre FPI et une chimie détaillée pour une flamme riche partiellement prémélangée pour la fraction massique de  $\text{CO}_2$ . Symboles : calculs FPI avec différents taux d'étirement, lignes pointillées : chimie détaillée (figure extraite de [119]).

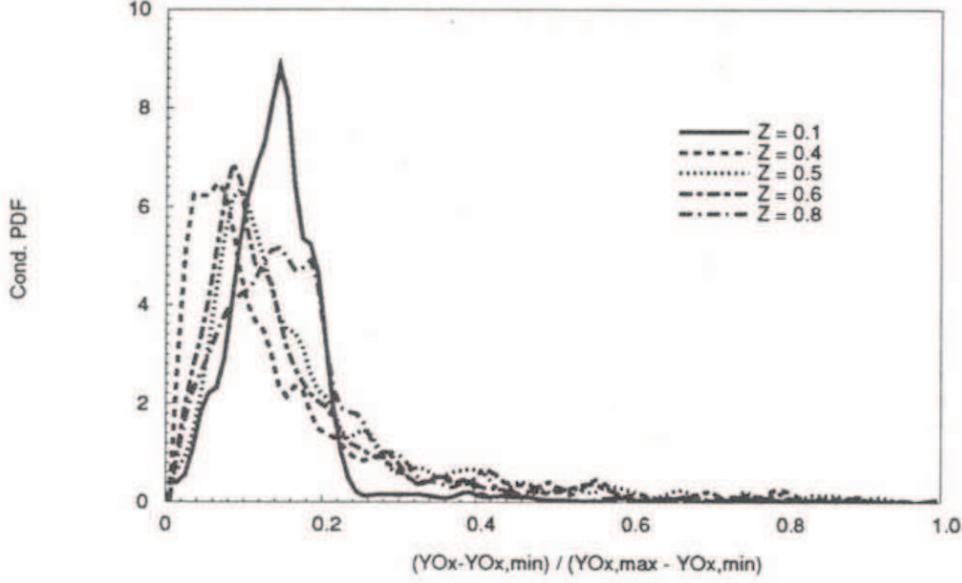


**FIGURE 2.16:** Température en fonction de la variable de progrès  $Y_c = Y_{\text{CO}} + Y_{\text{CO}_2}$  pour des flammes laminaires de prémélange méthane/air ([269]).

2.16 (par exemple, pour les richesses  $\phi = 1, 2; 1, 3$  et  $1, 4$ ). Néanmoins, la plupart des dispositifs industriels fonctionnant en régime pauvre, cette faiblesse du côté riche impacte peu les résultats numériques de telles configurations.

Pour pallier à ces difficultés, Nguyen *et al.* [271] proposent une extension au modèle FPI, l'approche MFM (*Multi-dimensional Flamelet-generated Manifold*) qui permet de prendre en compte des phénomènes de diffusion des espèces.

L'approche FPI a été utilisée avec succès pour les simulations de flammes prémélangées, partiellement prémélangées et de diffusion [99, 119, 309]. Néanmoins, les échelles impliquées dans le processus de combustion étant plus faibles que les échelles caractéristiques de l'écoulement fluide, un modèle de sous-maille doit être introduit pour reproduire les phénomènes de mélange aux petites échelles non résolues. Vervisch *et al.* [387] proposent ainsi de fermer le mélange de sous-maille avec des moments conditionnés présumés (PCM).



**FIGURE 2.17:** Tracés de PDF conditionnées  $P(c|Z^*)$  en fonction de  $c$  pour des fractions de mélange comprises entre 0,1 et 0,8, extraits des résultats DNS de Vervisch [386].

### 2.7.2 Les Moments Conditionnés Présumés (*Presumed Conditional Moments*)

L'étape des moments conditionnés présumés assure le couplage entre un solveur de mécanique des fluides et la table chimique en permettant la fermeture des taux de réaction filtrés. Dans le cadre des bibliothèques de flammes de prémélange paramétrées par  $Z$  et  $c$  (hypothèse flammelette), toute grandeur physique extensive filtrée peut être décrite, d'un point de vue statistique, en reliant cette grandeur (termes sources des espèces  $\dot{\omega}_k$  et fraction massique de l'espèce  $k$ ,  $Y_k$ ) à une PDF jointe :

$$\overline{\rho\varphi} = \bar{\rho} \tilde{\varphi} = \bar{\rho} \int_{c^*=0}^{c^*=1} \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} \varphi(Z^*, c^*) \tilde{P}(Z^*, c^*) dZ^* dc^* \quad (2.244)$$

où  $\tilde{P}(Z^*, c^*)$  est la PDF jointe de  $Z$  et de  $c$ . Cette PDF jointe est difficile à modéliser en raison de la corrélation entre  $Z^*$  et  $c^*$ .

L'étude DNS de Vervisch [386] montre que la probabilité conditionnée  $\bar{P}(c^* | Z^*)$  est peu dépendante de la fraction de mélange  $Z$ . Les analyses effectuées par Rullaud *et al.* [325] sur la base des données expérimentales de Sandia conduisent aux mêmes conclusions. La figure 2.17 illustre cette indépendance, où la localisation du pic ainsi que son amplitude dépendent faiblement de la richesse. Ce constat a ainsi conduit à la formulation de l'hypothèse de décorrélation suivante :

$$\bar{P}(c^* | Z^*) \approx \bar{P}(c^*) \quad (2.245)$$

Cette hypothèse est l'une des plus dures du formalisme PCM-FPI. A partir de la relation exacte  $\tilde{P}(Z^*, c^*) = \bar{P}(c^* | Z^*) \times P(Z^*)$ , on obtient alors la décomposition de la PDF jointe en deux contributions séparées :

$$\tilde{P}(Z^*, c^*) = \bar{P}(c^*) \times \bar{P}(Z^*) \quad (2.246)$$

Après avoir supposé l'indépendance entre  $c$  et  $Z$ , l'expression de la variable filtrée se présente sous la forme :

$$\tilde{\varphi} = \int_{c^*=0}^{c^*=1} \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} \varphi(Z^*, c^*) \bar{P}(Z^*) \bar{P}(c^*) dZ^* dc^* \quad (2.247)$$

Les PDF de la fraction de mélange  $\bar{P}(Z^*)$  et de la variable d'avancement  $\bar{P}(c^*)$  sont présumées avec une fonction Beta (dite  $\beta$ -PDF). En choisissant une variables générique  $X$  égale soit à  $Z$  ou à  $c$ , la fonction  $\beta$  est paramétrée par les deux premiers moments de la variable :

$$P(X) = X^{a-1}(1-X)^{b-1} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \quad (2.248)$$

où la fonction  $\Gamma(\cdot)$  ainsi que les deux paramètres de contrôle  $a$  et  $b$  déterminent la forme de la PDF, soit :

$$P(X) = \frac{X^{a-1}(1-X)^{b-1}}{\int_0^1 (X-1)^{a-1}(1-X)^{b-1} dX} \quad (2.249)$$

avec

$$a = \tilde{X} \left( \frac{1}{S(\tilde{X})} - 1 \right) \quad (2.250)$$

$$b = a \left( \frac{1}{\tilde{X}} - 1 \right) \quad (2.251)$$

La quantité  $S(\tilde{X})$  est le facteur de ségrégation, défini comme le rapport entre la variance ( $X_v = \widetilde{X\tilde{X}} - \tilde{X}\tilde{X}$ ) et sa valeur maximale :

$$S(\tilde{X}) = \frac{X_v}{\tilde{X}(1-\tilde{X})} = \frac{\widetilde{X\tilde{X}} - \tilde{X}\tilde{X}}{\tilde{X}(1-\tilde{X})} \quad (2.252)$$

La figure 2.18 présente les différentes allures que peut prendre la  $\beta$ -PDF :

- Lorsque la ségrégation est faible, le pic de probabilité est centré autour du point  $X$ . Cette ségrégation traduit un faible niveau de fluctuations de sous-maille et décrit un écoulement parfaitement résolu (cas d'une simulation DNS ou d'une LES très raffinée).
- À mesure que la ségrégation augmente, la  $\beta$ -PDF présente une forme de cloche gaussienne plus ou moins large, centrée sur la valeur de  $X$ . Cette cloche rend compte de la répartition probable des valeurs de  $X$  au sein de la sous-maille (cas généralement rencontré lors d'une LES avec une résolution modérée).
- Enfin, lorsqu'elle tend vers 1, la PDF présente deux pics de probabilités aux valeurs 0 et 1, reliés par un plateau. On dit alors que la PDF est à double-pic. Elle est caractéristique des zones de forte inhomogénéité avec une alternance entre carburant et comburant (si  $X = Z$ ) ou entre gaz frais et gaz brûlés (si  $X = c$ ). On assiste alors à une probabilité binaire au niveau de la sous-maille (cas d'un calcul RANS).

En ce qui concerne la  $\beta$ -PDF de la variable de progrès, cette dernière ne peut pas être directement déterminée puisque ses deux paramètres,  $\tilde{c}$  et  $S_c$ , ne sont pas transportés. En effet, pour diverses raisons pratiques, les équations de transport sont habituellement exprimées pour  $Y_c$  et  $\widetilde{Y_c Y_c}$ . La variable  $Y_c$  évolue entre 0 et sa valeur à l'équilibre  $Y_c^{eq}(Z)$ . Pour obtenir la variable  $\tilde{c}$ , on procède à la normalisation de  $\widetilde{Y_c}$  :

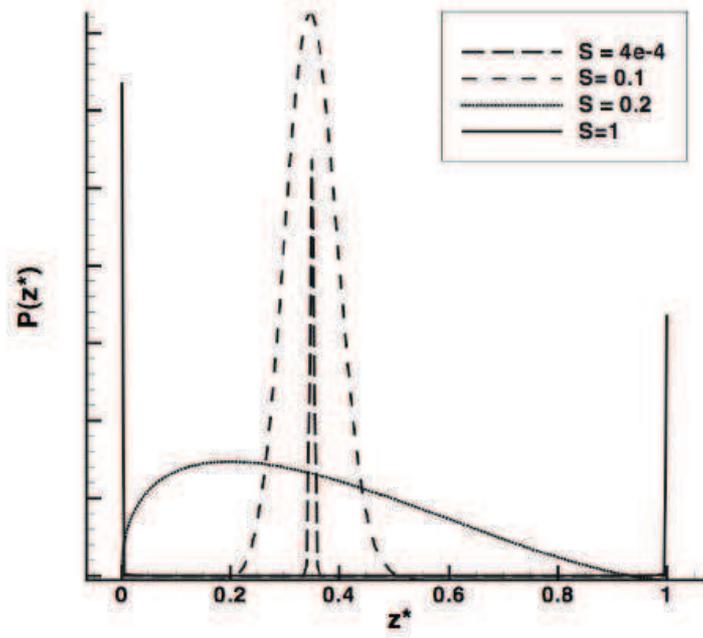
$$\tilde{c} = \frac{\widetilde{Y_c}}{\widetilde{Y_c^{eq}}} \quad (2.253)$$

où  $\widetilde{Y_c^{eq}}$  résulte de l'intégration de la fraction de mélange à travers la PDF :

$$\widetilde{Y_c^{eq}} = \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} Y_c^{eq}(Z^*) P(Z^*) dZ^* \quad (2.254)$$

Le facteur de ségrégation, exprimé à l'aide des champs transportés, devient :

$$S_c = \frac{\frac{\widetilde{Y_c Y_c}}{\widetilde{Y_c^{eq2}}} - \frac{\widetilde{Y_c}}{\widetilde{Y_c^{eq}}} \frac{\widetilde{Y_c}}{\widetilde{Y_c^{eq}}}}{\frac{\widetilde{Y_c}}{\widetilde{Y_c^{eq}}} \left( 1 - \frac{\widetilde{Y_c}}{\widetilde{Y_c^{eq}}} \right)} \quad (2.255)$$



**FIGURE 2.18:** Forme de la  $\beta$ -PDF pour une valeur moyenne de  $\tilde{Z} = 0,35$ , selon différentes valeurs du facteur de ségrégation  $S(\tilde{X})$  (extrait de [269]).

avec :

$$\widetilde{Y_c^{eq2}} = \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} Y_c^{eq}(Z^*) Y_c^{eq}(Z^*) P(Z^*) dZ^* \quad (2.256)$$

### 2.7.3 Modélisation statistique de FPI par les Moments Conditionnés Présumés (PCM-FPI)

Cette section est destinée à l'écriture des différentes équations de transport associées au modèle PCM-FPI. Ce modèle PCM-FPI nécessite la résolution de quatre équations de transport additionnelles pour l'évolution de la fraction de mélange filtrée  $\tilde{Z}$ , de la variable d'avancement filtrée  $\tilde{Y}_c$  et des deux termes liés à leur variance de sous-maille. Le code compressible réactif compte alors neuf équations de transport : l'équation de continuité, de quantité de mouvement, de l'énergie totale ainsi que des quatre nouvelles variables transportées.

#### 2.7.3.1 Equation de transport pour la fraction de mélange filtrée

L'équation de transport pour la fraction de mélange filtrée s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Z}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{Z}) = -\nabla \cdot \bar{\tau}_Z + \nabla \cdot (\bar{\rho} D \nabla \tilde{Z}) \quad (2.257)$$

avec  $\bar{\tau}_Z$  le terme de transport turbulent défini par la relation :

$$\bar{\tau}_Z = (\overline{\rho \mathbf{u} \tilde{Z}} - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{Z}) \quad (2.258)$$

Notons que la fraction de mélange est considérée comme un scalaire passif puisqu'elle n'est pas associée à un taux de production/destruction. Néanmoins, lors de la description d'écoulements multiphasiques, le terme source n'est plus nul mais traduit le taux de production de  $Z$  lié au changement de phase.

Pour fermer le terme de transport turbulent, on utilise une hypothèse de type gradient :

$$(\overline{\rho\mathbf{u}Z} - \overline{\rho}\tilde{\mathbf{u}}\tilde{Z}) = -\frac{\nu_t}{S_{c_t}}\nabla\tilde{Z} \quad (2.259)$$

### 2.7.3.2 Equation de transport pour la variance de la fraction de mélange

De la même manière, on introduit l'équation de transport pour la variance de sous-maille  $Z_v$  :

$$\frac{\partial\overline{\rho}Z_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\tilde{\mathbf{u}}Z_v) = -\nabla \cdot \overline{\tau}_{Z_v} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\mathcal{D}\nabla Z_v) - 2\overline{\tau}_Z \cdot \nabla\tilde{Z} - 2\overline{s}_{\chi_Z} \quad (2.260)$$

On rappelle que

$$Z_v = \widetilde{ZZ} - \tilde{Z}\tilde{Z} \quad (2.261)$$

Le terme de transport  $\overline{\tau}_{Z_v} = (\overline{\rho\mathbf{u}Z_v} - \overline{\rho}\tilde{\mathbf{u}}Z_v)$  est également modélisé par une hypothèse de type gradient. Le dernier terme dans l'équation 2.260,  $\overline{s}_{\chi_Z}$ , est un terme de dissipation scalaire de sous-maille qui caractérise le taux de mélange turbulent dans la sous-maille. Ce terme apparaît lorsque l'on décompose le taux de dissipation scalaire de la fraction de mélange en une partie résolue et une partie non résolue :

$$\overline{\rho}\tilde{\chi}_Z = \overline{\rho\mathcal{D}|\nabla Z|^2} = \overline{\rho}\mathcal{D}|\nabla\tilde{Z}|^2 + \overline{s}_{\chi_Z} \quad (2.262)$$

Le terme de dissipation scalaire de sous-maille requiert un modèle de fermeture. Généralement, on utilise une hypothèse de relaxation linéaire de la variance dans la sous-maille qui assimile le temps de mélange scalaire au temps turbulent, caractérisé par le rapport  $\Delta/\nu_t$  :

$$\overline{s}_{\chi_Z} = \overline{\rho}C_{\chi_Z}\frac{\nu_T}{S_{c_t}\Delta^2}Z_v \quad (2.263)$$

Le modèle de dissipation scalaire de la fraction de mélange dépend ainsi directement du modèle de sous-maille en vigueur. La constante  $C_{\chi_Z}$  peut être modélisée de manière statique ou dynamique. L'évaluation dynamique de ce coefficient se heurte néanmoins à des difficultés lorsque la ségrégation est maximale [96]. Les calculs LES présentés dans ce manuscrit ont été réalisés avec une constante  $C_{\chi_Z}$  fixée à 1.

Nous pouvons également introduire le facteur de ségrégation de la fraction de mélange  $S_Z$  qui est un autre paramètre clé de la méthode PCM-FPI. Ce facteur est obtenu en normalisant la variance de la fraction de mélange :

$$S_Z = \frac{Z_v}{\widetilde{Z}(1-\tilde{Z})} \quad (2.264)$$

Alors qu'une ségrégation nulle indique que la  $\beta$ -PDF associée à la fraction de mélange se présente sous la forme d'un pic de Dirac centré sur sa valeur moyenne et donc que le mélange est homogène dans la sous-maille, une ségrégation maximale ( $S_Z = 1$ ) est caractéristique d'une distribution de la fraction de mélange dans la sous-maille fortement hétérogène et modélisée par une PDF bimodale.

### 2.7.3.3 Equation de transport pour la variable d'avancement filtrée

L'équation de la variable d'avancement filtrée,  $\tilde{Y}_c$ , s'écrit :

$$\frac{\partial\overline{\rho}\tilde{Y}_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\tilde{\mathbf{u}}\tilde{Y}_c) = -\nabla \cdot \overline{\tau}_{Y_c} + \nabla \cdot (\overline{\rho}\mathcal{D}\nabla\tilde{Y}_c) + \overline{\tilde{\omega}}_{Y_c} \quad (2.265)$$

Contrairement à l'équation de transport pour la fraction de mélange, la présente équation dispose d'un terme source filtré  $\overline{\tilde{\omega}}_{Y_c}$ . La variable  $Y_c$  peut donc être qualifiée de variable réactive. Ce terme source filtré est évalué à partir de la table FPI. Le flux turbulent  $\overline{\tau}_{Y_c} = (\overline{\rho\mathbf{u}Y_c} - \overline{\rho}\tilde{\mathbf{u}}Y_c)$  est toujours fermé avec une hypothèse de type gradient :

$$(\overline{\rho\mathbf{u}Y_c} - \overline{\rho}\tilde{\mathbf{u}}Y_c) = -\frac{\nu_t}{S_{c_t}}\nabla\tilde{Y}_c \quad (2.266)$$

## 2.7.3.4 Equation de transport pour le carré filtré des variables d'avancement

Concernant la variable  $\widetilde{Y_c Y_c}$ , on dispose de l'expression :

$$\frac{\partial \overline{\rho \widetilde{Y_c Y_c}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho \tilde{\mathbf{u}} \widetilde{Y_c Y_c}}) = -\nabla \cdot \overline{\tau_{Y_c Y_c}} + \nabla \cdot (\overline{\rho \mathcal{D} \nabla \widetilde{Y_c Y_c}}) - 2\overline{\rho \chi_{Y_c}} + 2\overline{\rho \widetilde{Y_c} \dot{\omega}_{Y_c}} \quad (2.267)$$

Pour fermer le terme de la dissipation scalaire de la variable d'avancement,  $\overline{\rho \chi_{Y_c}} = \overline{\rho \mathcal{D} |\nabla \widetilde{Y_c}|^2} = \overline{\rho \mathcal{D} |\nabla \widetilde{Y_c}|^2} + \overline{\tau_{\chi_{Y_c}}}$ , on peut utiliser une approche similaire à l'équation 2.263, à savoir une hypothèse de relaxation linéaire de la variance de sous-maille :

$$\overline{\tau_{\chi_{Y_c}}} = \overline{\rho} C_{\chi_{Y_c}} \frac{\nu_T}{S_{c_t} \Delta^2} Y_{cv} \quad (2.268)$$

avec  $Y_{cv} = \widetilde{Y_c Y_c} - \widetilde{Y_c} \widetilde{Y_c}$  et une constante  $C_{\chi_{Y_c}}$  assimilée à 1. Néanmoins, la variable de progrès étant un scalaire réactif, elle est particulièrement sensible à la chimie. Ainsi alors que les gradients de la fraction de mélange sont seulement pilotés par les fluctuations de vitesse dans la sous-maille, les gradients de la variable d'avancement sont affectés par ces mêmes fluctuations de vitesse dans la sous-maille mais aussi par les réactions chimiques dans la sous-maille. Ce dernier effet peut même devenir prédominant. Il est donc nécessaire d'inclure un terme de réaction de sous-maille dans le modèle de dissipation scalaire. La fermeture basée sur une hypothèse de relaxation linéaire fournit de bons résultats lorsque la distribution de la variable d'avancement dans la sous-maille est décrite par une PDF de forme gaussienne, c'est-à-dire associée à un faible niveau de ségrégation de  $Y_c$ . Lorsque la sous-maille est le siège de fortes réactions, la PDF adopte une forme bimodale avec la transition de l'état frais aux produits de combustion (signal télégraphique pour la distribution spatiale de la variable d'avancement). Pour contrer ces difficultés, Domingo *et al.* [99] proposent de compléter l'hypothèse de relaxation linéaire de  $Y_c$  par une approche type analyse bi-modale représentée par :

$$\overline{\rho \chi_{Y_c}} = \overline{Y_c \dot{\omega}_{Y_c}} + \overline{Y_c^{Eq} \dot{\omega}_{Y_c}} / 2 \quad (2.269)$$

Ce modèle dérive de la théorie BML [46] et considère la flamme comme une interface fine séparant les gaz frais des gaz brûlés et donc représentée par une PDF bimodale. Finalement, le modèle SGS basé sur ces deux contributions se présente sous la forme :

$$\overline{\tau_{\chi_{Y_c}}} = (1 - S_c) \times \overline{\rho} C_{\chi_{Y_c}} \frac{\nu_t (\widetilde{Y_c^2} - \widetilde{Y_c}^2)}{S_{c_t} \Delta^2} + S_c \times \left( -\overline{\rho \mathcal{D} |\nabla \widetilde{Y_c}|^2} + \overline{\rho \widetilde{Y_c} \dot{\omega}_{Y_c}} + \overline{\rho Y_c^{Eq} \dot{\omega}_{Y_c}} / 2 \right) \quad (2.270)$$

with  $S_c = (\overline{c^2} - \overline{c}^2) / (\overline{c}(1 - \overline{c}))$

Les différents termes sources qui apparaissent dans le système d'équations à résoudre sont tabulés et stockés dans la table chimique PCM-FPI. Pour obtenir les valeurs filtrées associées, ces grandeurs sont ensuite intégrées avec les  $\beta$ -PDF de la façon suivante :

$$\widetilde{\dot{\omega}_T} = \int_{c^*=0}^{c^*=1} \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} \dot{\omega}_T(Z^*, c^*) \overline{P}(c^*) P(Z^*) dZ^* dc^* \quad (2.271)$$

$$\widetilde{\dot{\omega}_{Y_c}} = \int_{c^*=0}^{c^*=1} \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} \dot{\omega}_{Y_c}(Z^*, c^*) \overline{P}(c^*) P(Z^*) dZ^* dc^* \quad (2.272)$$

$$\widetilde{Y_c \dot{\omega}_{Y_c}} = \int_{c^*=0}^{c^*=1} \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} Y_c(Z^*, c^*) \dot{\omega}_{Y_c}(Z^*, c^*) \overline{P}(c^*) P(Z^*) dZ^* dc^* \quad (2.273)$$

$$\widetilde{Y_c^{Eq} \dot{\omega}_{Y_c}} = \int_{c^*=0}^{c^*=1} \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} Y_c^{Eq}(Z^*, c^*) \dot{\omega}_{Y_c}(Z^*, c^*) \overline{P}(c^*) P(Z^*) dZ^* dc^* \quad (2.274)$$

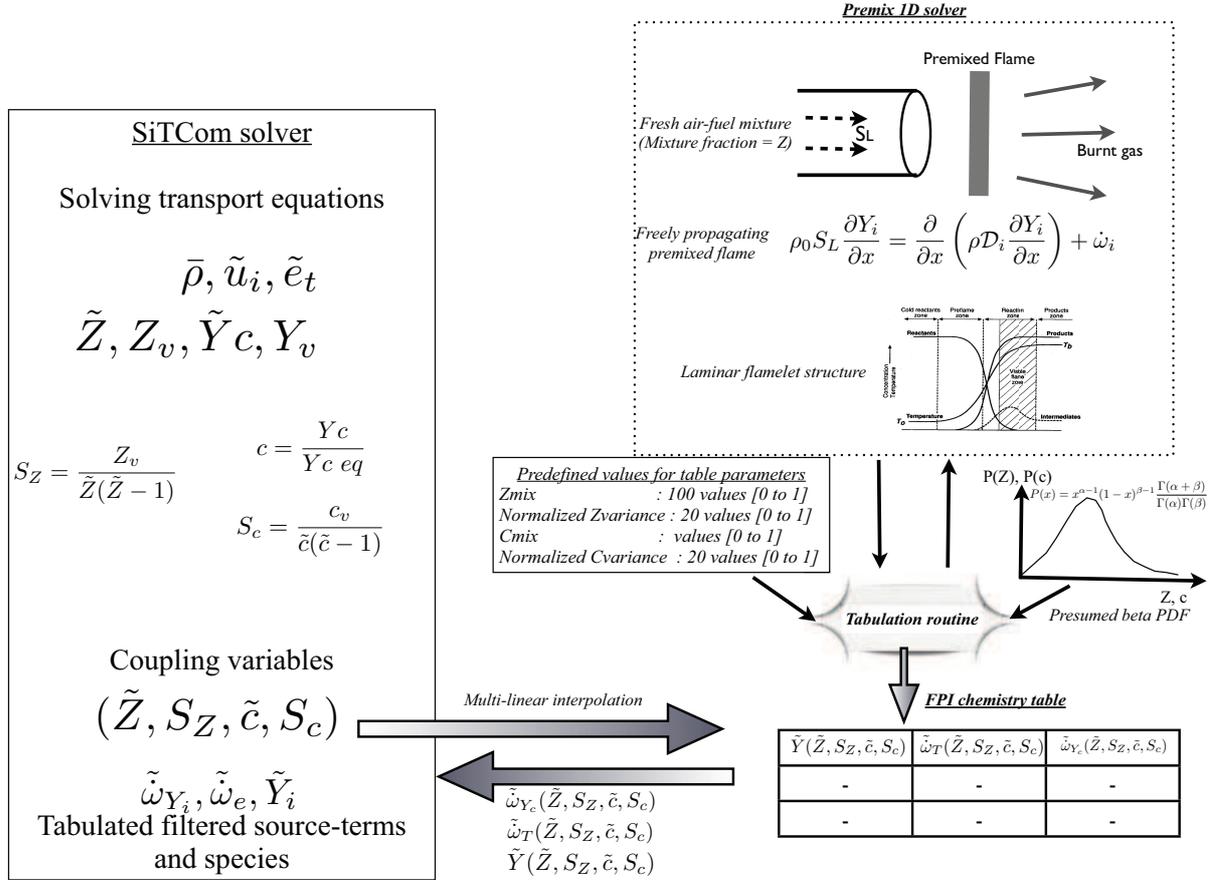
Pour coupler la méthode de tabulation PCM-FPI avec le code compressible, les fractions massiques de  $N_{spe,LES}$  sont tabulées afin de reconstruire la température à partir de l'énergie transporté [126, 142]. Dans le cas d'une combustion  $CH_4$ /air, 9 espèces sont tabulées, à savoir  $CO_2$ ,  $CH_4$ ,  $O_2$ ,  $H_2$ ,  $OH$ ,  $H_2O$ ,  $CO$ ,  $NO$  et  $N_2$ . Alors que l'énergie sensible s'exprime sous la forme théorique :

$$e_s = \int_{T_0}^T c_v dT - \frac{\mathcal{R}T_0}{\bar{W}} = \int_{T_0}^T \left( \sum_{l=1}^{l=N_{spe}} c_{vl} Y_l \right) dT - \frac{\mathcal{R}T_0}{\bar{W}} \quad (2.275)$$

Pour obtenir les fractions massiques filtrées du vecteur d'espèces nécessaire à la reconstruction de la température, chaque espèce  $Y_k$  est filtrée à l'aide de la relation décrite ci-dessous et stockée dans la table.

$$\tilde{Y}_c = \int_{c^*=0}^{c^*=1} \int_{Z^*=0}^{Z^*=1} Y_k(Z^*, c^*) \bar{P}(c^*) P(Z^*) dZ^* dc^* \quad (2.276)$$

Finalement, la procédure intrinsèque à la méthode PCM-FPI est résumée sur la figure 2.19.



**FIGURE 2.19:** Schéma de la méthode de tabulation PCM-FPI exposant le couplage entre le code de calcul et la table chimique (extrait de [358]).

# Chapitre 3

## Méthodes Numériques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Volumes Finis</b>	<b>78</b>
<b>3.2</b>	<b>Schémas numériques</b>	<b>79</b>
3.2.1	Intégration spatiale	79
3.2.1.1	Flux eulériens	80
3.2.1.2	Opérateurs de viscosité artificielle	80
3.2.1.3	Flux visqueux	83
3.2.2	Discrétisation temporelle	84
3.2.3	Critère de stabilité	84
3.2.3.1	Critère CFL	84
3.2.3.2	Critère de Fourier	85
3.2.3.3	Critère chimique	85
<b>3.3</b>	<b>Discrétisation de l'opérateur de filtrage</b>	<b>85</b>
3.3.1	Filtre test ou filtre à $2\Delta$ : règle des trapèzes	87
3.3.2	Filtre à $4\Delta$ : calcul des moments	90
<b>3.4</b>	<b>Conditions limites</b>	<b>91</b>
3.4.1	Conditions fortes de type Dirichlet-Neumann	92
3.4.2	Conditions limites aux parois avec l'utilisation de points images	92
3.4.2.1	Cas d'une paroi glissante	93
3.4.2.2	Cas d'une paroi non glissante	94
3.4.3	Conditions aux limites par décomposition en ondes caractéristiques	94
3.4.3.1	Formulation pour le traitement d'une face	97
3.4.3.2	Condition de sortie non-réfléchissante	100
3.4.3.3	Condition de sortie réfléchissante	101
3.4.3.4	Condition d'entrée non-réfléchissante subsonique	102
3.4.3.5	Condition d'entrée partiellement réfléchissante	103
3.4.3.6	Condition de paroi non glissante avec les caractéristiques	103
3.4.3.7	Formulation pour le traitement d'une arête ou d'un coin	103
<b>3.5</b>	<b>Génération des conditions initiales turbulentes : la méthode de Klein</b>	<b>104</b>

---

Les équations de Navier Stokes font intervenir des dérivées partielles spatiales de premier et second ordre ainsi que des dérivées temporelles de premier ordre. Pour discrétiser ces équations, le formalisme des Volumes Finis est utilisé. Ce chapitre est consacré, dans un premier temps, à la méthodologie de résolution des équations de Navier-Stokes. La discrétisation de l'opérateur de filtrage est ensuite décrite. Pour fermer le système numérique aux frontières du domaine de calcul, des conditions aux limites numériques et/ou physiques doivent être spécifiées. Le traitement aux limites sera également présenté dans ses grandes lignes.

### 3.1 Volumes Finis

La méthode des volumes finis permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Contrairement à la méthode des différences finies, qui reposent sur des approximations des dérivées, la méthode des volumes finis se base sur des approximations d'intégrales et assure ainsi le principe de conservation.

Le principe de conservation d'une quantité stipule que la variation de cette quantité dans un volume de contrôle  $\mathcal{V}$  est liée aux flux  $\mathbf{F}$  de cette quantité à travers le volume et aux effets des sources internes volumiques  $Q_v$ . La forme intégrale de ce principe, pour un vecteur  $\mathbf{U}$ , s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} dV + \oint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}} Q_v dV \quad (3.1)$$

Rappelons que  $\mathbf{U}$  est le vecteur constitué des grandeurs conservatives moyennées sur une cellule. Dans l'équation 3.1, le premier terme représente l'évolution temporelle de  $\mathbf{U}$  sur le volume de contrôle  $\mathcal{V}$ . Le second quantifie, quant à lui, les échanges de flux sur les surfaces délimitant la cellule de contrôle (dans la notation adoptée, ce terme inclut à la fois les flux diffusifs et convectifs).

Les équations intégrales de Navier-Stokes se présentent donc sous la forme :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_S \rho u_j dS_j = 0 \quad (3.2)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV + \oint_S (\rho u_i u_j + \delta_{ij} p) dS_j = \oint_S 2\mu A_{ij} dS_j \quad (3.3)$$

où

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (3.4)$$

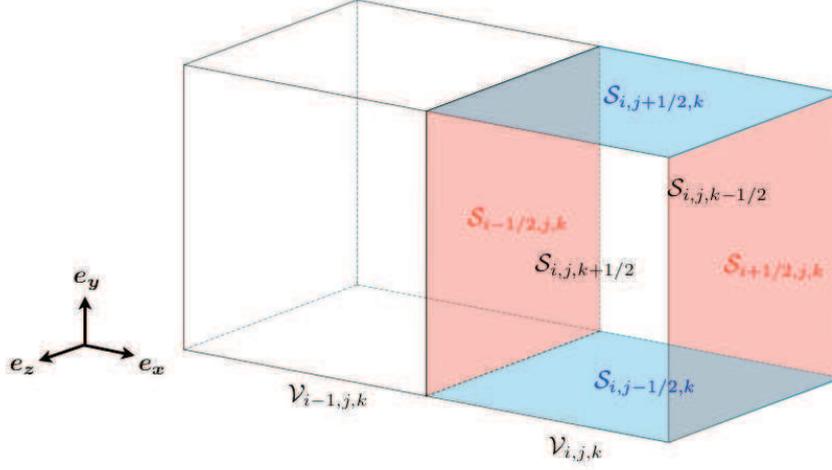
$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho e}{\partial t} dV + \oint_S (\rho e + p) u_i dS_i = \oint_S \left( 2\mu u_j A_{ij} + \frac{\mu c_p}{P_r} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dS_i \quad (3.5)$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho Y_l}{\partial t} dV + \oint_S \rho Y_l u_i dS_i = \oint_S \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial Y_l}{\partial x_i} dS_i \quad (3.6)$$

où  $\mu c_p / P_r = \lambda$  représente le coefficient de conduction de la chaleur.

La discrétisation en Volumes Finis de ces équations est présentée ci-dessous pour un maillage dit structuré. Le domaine physique est décomposé en éléments géométriques (intervalles en 1D, surfaces en 2D ou volumes en 3D) constituant le maillage structuré. Ces éléments sont indexés par un entier  $i$  en 1D, un couplet  $(i, j)$  en 2D ou un triplet  $(i, j, k)$  en 3D. Chaque élément sera qualifié de cellule ou volume de contrôle. Nous utiliserons également les notations suivantes pour les volumes de contrôle :  $\mathcal{V}_i$  en 1D,  $\mathcal{V}_{i,j}$  en 2D et  $\mathcal{V}_{i,j,k}$  en 3D. Une face de volume sera indexée suivant le volume lui-même et le volume adjacent par cette face. Ainsi, la face d'un volume  $\mathcal{V}_i$  en 1D (respectivement  $\mathcal{V}_{i,j}$  en 2D et  $\mathcal{V}_{i,j,k}$  en 3D) à l'interface avec le volume  $\mathcal{V}_{i+1}$  en 1D (respectivement  $\mathcal{V}_{i+1,j}$  en 2D et  $\mathcal{V}_{i+1,j,k}$  en 3D) sera notée  $S_{i+1/2}$  en 1D (respectivement  $\mathcal{S}_{i+1/2,j}$  en 2D et  $\mathcal{S}_{i+1/2,j,k}$  en 3D). Cette indexation est illustrée sur la figure 3.1

Le code de calcul utilisé adopte une discrétisation VF (Volume Finie) de type *cell-centered* ou "centrées sur les cellules". Dans ce type d'approche, les inconnues sont au centre des cellules. Les valeurs moyennes sont considérées sur les volumes du maillage initial qualifié de primal. On dit également que les variables sont co-localisées (*collocated arrangement*). A l'inverse, dans l'approche dite *vertex-centered* ou "localisées aux sommets", les inconnues sont aux noeuds du maillage. Les volumes de contrôle sont assimilés aux cellules du maillage dual basées sur les centres des faces et les barycentres de la grille du maillage primal. L'utilisation d'un arrangement centré sur la cellule nécessite toutefois l'interpolation des vecteurs vitesses aux interfaces des cellules, afin d'évaluer les différents flux.



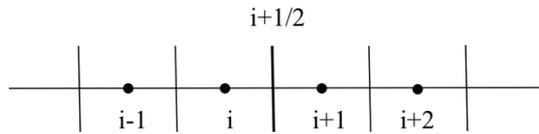
**FIGURE 3.1:** Nomenclature pour l'indexation des surfaces d'un volume de contrôle  $\mathcal{V}_{i,j,k}$ .

En adoptant le formalisme des volumes finies, l'équation 3.1 est reformulée en utilisant les relations suivantes :

$$\int_{\mathcal{V}_{i,j,k}} \phi dV \simeq \hat{\phi} \mathcal{V}_{i,j,k} \quad \text{et} \quad \oint_{\Sigma} \phi dS_m \simeq \sum_{i=1}^6 [\phi]_i \mathcal{S}_i^m \quad (3.7)$$

où  $\hat{\phi}$  est la valeur moyenne de  $\phi$  sur le volume de contrôle  $\mathcal{V}_{i,j,k}$  et  $dS_m = n_m dS$  représente l'élément de surface dans la  $m$ -ième direction. Dans le second terme, la sommation sur les différentes surfaces  $\mathcal{S}_i^m$  délimitant le volume de contrôle  $\mathcal{V}_{i,j,k}$  fournit ainsi :

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \phi dS_m \simeq & [\phi_1]_{i+1/2,j,k} \mathcal{S}_{i+1/2,j,k}^1 - [\phi_1]_{i-1/2,j,k} \mathcal{S}_{i-1/2,j,k}^1 \\ & + [\phi_2]_{i,j+1/2,k} \mathcal{S}_{i,j+1/2,k}^2 - [\phi_2]_{i,j-1/2,k} \mathcal{S}_{i,j-1/2,k}^2 \\ & + [\phi_3]_{i,j,k+1/2} \mathcal{S}_{i,j,k+1/2}^3 - [\phi_3]_{i,j,k-1/2} \mathcal{S}_{i,j,k-1/2}^3 \end{aligned} \quad (3.8)$$



**FIGURE 3.2:** Schéma du stencil à 4 noeuds impliquées dans la reconstruction des flux.

## 3.2 Schémas numériques

### 3.2.1 Intégration spatiale

La méthode de discrétisation dans SiTCom repose sur une méthode des volumes finis centrée sur les cellules pour laquelle les inconnues sont stockées aux centres des cellules de contrôle. Si nous simplifions l'écriture du système discrétisé en considérant les équations de transport monodimensionnel, le schéma numérique se présente sous la forme :

$$\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial t} + \frac{\mathcal{F}\mathcal{C}_{i+1/2} \mathcal{S}_{i+1/2} - \mathcal{F}\mathcal{C}_{i-1/2} \mathcal{S}_{i-1/2}}{\mathcal{V}_i} = \frac{\mathcal{F}\mathcal{V}_{i+1/2} \mathcal{S}_{i+1/2} - \mathcal{F}\mathcal{V}_{i-1/2} \mathcal{S}_{i-1/2}}{\mathcal{V}_i} \quad (3.9)$$

avec  $\hat{\varphi}_i$  la valeur moyenne associée à la quantité scalaire  $\varphi$  et intégrée sur le volume de contrôle  $\mathcal{V}_i$  ainsi que

$$\begin{aligned}\mathcal{FC}_{i\pm 1/2} &= [\varphi u]_{i\pm 1/2} \\ \mathcal{FV}_{i\pm 1/2} &= \left[ \kappa \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{i\pm 1/2}\end{aligned}$$

Les flux discrets, convectifs et visqueux sont déterminés au niveau des interfaces des cellules en fonction de la quantité transportée  $\varphi = \rho\phi$  et de la grandeur primitive  $\phi$ . Le terme  $\kappa$  constitue le coefficient de diffusion.

### 3.2.1.1 Flux eulériens

Les flux eulériens sont déterminés à partir du schéma centré de quatrième ordre (*skew-symmetric-like*) de Ducros *et al.* [104]. Ce schéma explicite sur quatre points s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{FC}_{i\pm 1/2}^{\mathcal{O}4} &= \frac{1}{3}(\hat{\varphi}_i + \hat{\varphi}_{i+1})(\hat{u}_i + \hat{u}_{i+1}) \\ &\quad - \frac{1}{24} \left[ (\hat{\varphi}_i + \hat{\varphi}_{i+2})(\hat{u}_i + \hat{u}_{i+2}) + (\hat{\varphi}_{i-1} + \hat{\varphi}_{i+1})(\hat{u}_{i-1} + \hat{u}_{i+1}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2}(\hat{\varphi}_i \hat{u}_i + \hat{\varphi}_{i+1} \hat{u}_{i+1}) - \frac{1}{4}(\hat{\varphi}_i + \hat{\varphi}_{i+1})(\hat{u}_i + \hat{u}_{i+1}) \right]\end{aligned}\quad (3.10)$$

avec  $\varphi = \rho\phi$  la quantité convectée conservative. Le stencil de reconstruction de ce flux est illustré sur la figure 3.2.

La formulation quatrième ordre est dégradée au voisinage des frontières du domaine pour obtenir un schéma de deuxième ordre :

$$\mathcal{FC}_{i+1/2}^{\mathcal{O}2} = \frac{1}{4}(\hat{\varphi}_i + \hat{\varphi}_{i+1})(\hat{u}_i + \hat{u}_{i+1})\quad (3.11)$$

En effet, le formalisme caractéristique étant retenu pour le traitement des conditions limites, les flux convectifs affectés aux cellules frontières (cellules 1 et  $ni$  en 1D) sont exprimés sous la forme d'une combinaison linéaire des amplitudes d'ondes caractéristiques. Seules les premières cellules appartenant au domaine (cellules 2 et  $ni - 1$ ) nécessitent une approche dégradée puisqu'un schéma sur quatre points engloberait des noeuds externes (flux convectifs  $\mathcal{FC}_{1/2}$  et  $\mathcal{FC}_{ni-1/2}$ ).

### 3.2.1.2 Opérateurs de viscosité artificielle

Les schémas centrés ne sont pas dissipatifs mais ils induisent de la dispersion dans les solution. Ces schémas centrés ayant tendance à générer des oscillations au voisinage de discontinuités (forts gradients tels que les chocs ou gradients de scalaire), des termes de dissipation numérique sont ajoutés afin de lisser ces oscillations. Le solveur SiTCom comporte deux opérateurs de viscosité artificielle, combinant des termes du deuxième et du quatrième ordre, proposés par Jameson *et al.* [184] et dont les caractéristiques respectives sont présentées ci-dessous :

- **La viscosité de deuxième ordre** agit comme une viscosité moléculaire. Elle ajoute de la dissipation pour lisser les gradients trop raides (ondes de chocs). Son action est contrôlée par un senseur qui déclenche son ajout dès qu'un problème est détecté. Ce terme apparaît sous la forme d'un coefficient  $\epsilon_{i+1/2}^{(2)}$  :

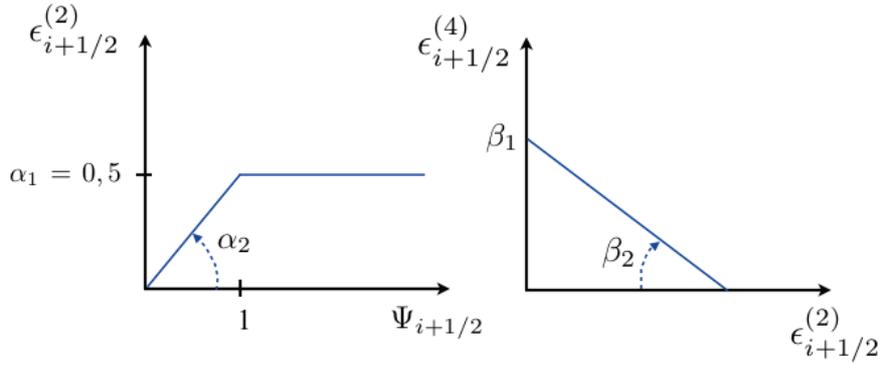
$$\epsilon_{i+1/2}^{(2)} = \min(\alpha_1, \alpha_2 \Psi_{i+1/2})\quad (3.12)$$

Le terme  $\Psi_i$  est défini ci-après et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux coefficients calculés pour diffuser de manière décentrée en amont de l'écoulement (*upwind*) à proximité d'un gradient raide. Alors que  $\alpha_1$  est toujours posé comme  $\alpha_1 = 0,5$  afin de converger vers le formalisme *upwind*, le coefficient  $\alpha_2$ , qui caractérise la vitesse à laquelle on détecte une discontinuité, peut être modifié suivant la nature de l'écoulement (faiblement subsonique ou transsonique). Généralement, on pose  $\alpha_2 = 0,5$ . Néanmoins, pour pouvoir capturer des chocs dans un cas supersonique, Ducros *et al.* [103] augmentent la viscosité artificielle de second ordre à  $\alpha_2 = 1,5$ . Les contributions de ces deux coefficients sont synthétisées sur la figure. 3.3.

- **La partie de quatrième ordre** tend à stabiliser les zones où l'on rencontre des instabilités numériques (ou *wiggles*) de courtes longueurs d'ondes et dépend du terme  $\epsilon_{i+1/2}^{(4)}$  :

$$\epsilon_{i+1/2}^{(4)} = \max(0, \beta_1 - \beta_2 \epsilon_{i+1/2}^{(2)}) \quad (3.13)$$

avec  $\beta_1$  le coefficient qui quantifie l'intensité de l'amortissement de quatrième ordre (pour les fréquences hautes) et  $\beta_2$  qui caractérise la vitesse à laquelle le terme de quatrième ordre est éteint à l'approche d'une discontinuité. En effet, l'ajout simultané de termes de deuxième et quatrième ordre est fortement instable. Les valeurs retenues sont,  $\beta_1 = 0,016$  et  $\beta_2 = 1$ . La figure 3.3 rend compte de leur comportement respectif.



**FIGURE 3.3:** Evolution des termes de dissipation de second et quatrième ordre en fonction du senseur de pression.

La transition entre les deux termes est pilotée par le senseur modifié de pression de Swanson *et al.* [361] :

$$\Psi_i = \frac{|\hat{P}_{i+1} - 2\hat{P}_i + \hat{P}_{i-1}|}{(1 - \omega_\Psi)\mathcal{P}_{TVD} + \omega_\Psi\mathcal{P}_{JST} + \epsilon_0} \quad (3.14)$$

avec  $\mathcal{P}_{JST}$  le senseur de pression de Jameson *et al.* [184] et  $\mathcal{P}_{TVD}$  la version respectant le critère TVD (*Total Variation Diminishing*) :

$$\mathcal{P}_{TVD} = |\hat{P}_{i+1} - \hat{P}_i| + |\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}| \quad (3.15)$$

$$\mathcal{P}_{JST} = \hat{P}_{i+1} + 2\hat{P}_i + \hat{P}_{i-1} \quad (3.16)$$

Le senseur est déterminé aux centres des volumes de contrôle. L'opérateur de flux étant discrétisé au niveau des interfaces, ce terme doit être exprimé au niveau des frontières des volumes élémentaires :

$$\Psi_{i+1/2} = \max(\Psi_i, \Psi_{i+1}) \quad (3.17)$$

La variable  $\omega_\Psi$  vaut typiquement 0,5 et  $\epsilon_0$  est une quantité infinitésimale évitant l'apparition d'un dénominateur nul dans l'équation 3.14.

Ces termes de viscosité sélective sont ensuite ajoutés aux flux convectifs (exprimés au niveau des interfaces) sous la forme :

$$\mathcal{FC}_{i+1/2} = \mathcal{FC}_{i+1/2}^{\mathcal{O}^*} - \mathcal{AD}_{i+1/2} \quad (3.18)$$

avec  $\mathcal{FC}_{i+1/2}^{\mathcal{O}^*}$  le flux eulérien standard, calculé à partir des équations 3.10 et 3.11 à l'interface  $i + 1/2$  entre les cellules  $i$  et  $i + 1$ , et  $\mathcal{AD}_{i+1/2}$  le terme de dissipation artificielle évalué sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{AD}_{i+1/2} &= \epsilon_{i+1/2}^{(2)} |\lambda_{i+1/2}| \Delta \varphi_{i+1/2} \\ &\quad - \epsilon_{i+1/2}^{(4)} |\lambda_{i+1/2}| (\Delta \varphi_{i+3/2} - 2\Delta \varphi_{i+1/2} + \Delta \varphi_{i-1/2}) \\ &\quad - \epsilon_{i+1/2}^{\mathcal{O}^4} \lambda_{i+1/2} (\Delta \varphi_{i+3/2} - \Delta \varphi_{i-1/2}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

avec  $\Delta \varphi_{i+1/2} = (\hat{\varphi}_{i+1} - \hat{\varphi}_i)$  l'opération de différenciation décentrée et  $\epsilon_{i+1/2}^{\mathcal{O}^4}$  un facteur de correction afin de retrouver la formulation quatrième ordre du flux eulérien.

$$\epsilon_{i+1/2}^{\mathcal{O}^4} = \begin{cases} \frac{1}{6} \epsilon_{i+1/2}^{(2)} & \text{si } \mathcal{FC}_{i+1/2}^{\mathcal{O}^4} \\ 0 & \text{si } \mathcal{FC}_{i+1/2}^{\mathcal{O}^2} \end{cases}$$

Le terme  $\lambda_{i+1/2}$  est un facteur scalaire déterminé par la vitesse convective au niveau de l'interface  $\lambda_{i+1/2} = u_{i+1/2}^{\mathcal{O}^*}$ . En effet, suivant la localisation de l'interface, la vitesse en  $i + 1/2$  est évaluée à l'aide d'une approximation de quatrième ordre si cette interface appartient à l'intérieur du domaine de calcul et à l'aide d'une approximation de deuxième ordre si cette interface est localisée au niveau des frontières :

$$u_{i+1/2}^{\mathcal{O}^4} = \frac{7}{12} (\hat{\varphi}_i + \hat{\varphi}_{i+1}) - \frac{1}{12} (\hat{\varphi}_{i+2} + \hat{\varphi}_{i-1}) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (3.20)$$

$$u_{i+1/2}^{\mathcal{O}^2} = \frac{1}{12} (\hat{\varphi}_i + \hat{\varphi}_{i+1}) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.21)$$

La dissipation sélective scalaire est modifiée au niveau des frontières du domaine, de sorte à avoir, pour les premières cellules fluides (2 et  $ni-1$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{AD}_{i+1/2} &= \epsilon_{i+1/2}^{(2)} |\lambda_{i+1/2}| \Delta \varphi_{i+1/2} \\ &\quad - \epsilon_{i+1/2}^{(4)} |\lambda_{i+1/2}| (\Delta \varphi_{i-1/2} - \Delta \varphi_{i+1/2}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

De même, les cellules frontières traitées avec l'approche 3D-NSCBC se voient soustraire un terme correctif de dissipation sélective :

$$\mathcal{FC}_{i+1/2} = \mathcal{FC}_{i+1/2} - (\mathcal{AD}_{i+1/2} - \mathcal{AD}_{i-1/2}) \quad (3.24)$$

Deux schémas de dissipation artificielle sont disponibles dans SiTCom. La formulation originale de Jameson *et al.* [184], basée sur la détection d'anomalies de pression, ajoute de la viscosité sur l'équation de l'énergie, des espèces et de la quantité de mouvement. Néanmoins chaque équation se voit affecter la même intensité de dissipation. De ce fait, ce schéma peut se révéler très dissipatif et en particulier pour les plus petites échelles résolues. Pour limiter cet effet, le code est également doté de la formulation matricielle de Swanson *et al.* [361]. Cette approche dérive de la formulation de Jameson [184] et induit une dissipation différente suivant l'équation traitée. En effet, l'approche scalaire de Jameson quantifie la dissipation à introduire dans l'ensemble des équations en fonction du rayon spectral de la matrice jacobienne des flux associés aux équations de Navier-Stokes. L'approche matricielle relie, quant à elle, le taux de dissipation aux différentes valeurs propres de cette matrice jacobienne et induit ainsi un traitement dissipatif différent suivant l'équation traitée.

Dans les simulations présentées par la suite, les coefficients du schéma de Jameson sont augmentées durant la phase de transition et diminués ensuite. Pour analyser la nature dissipative de ce schéma par rapport aux modèles de sous-maille, nous présenterons, au cours des travaux réalisés sur la cavité transsonique, une étude de la diffusion artificielle par rapport aux diffusions moléculaire et turbulente.

### 3.2.1.3 Flux visqueux

Les termes visqueux sont exprimés à partir d'un schéma centré de quatrième ordre :

$$\mathcal{FV}_{i+1/2}^{\mathcal{O}4} = \frac{7}{12} \left( \left[ \kappa \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_i + \left[ \kappa \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_{i+1} \right) - \frac{1}{12} \left( \left[ \kappa \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_{i+2} + \left[ \kappa \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_{i-1} \right) \quad (3.25)$$

avec  $[\kappa \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}]_i$  le produit du coefficient de diffusion et du gradient de la quantité  $\hat{\phi}$  en  $i$  que nous poserons, par la suite,  $\kappa [\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}]_i$ . Au niveau des frontières ce schéma est dégradé. Ainsi, le flux diffusif au niveau de la dernière interface fluide est évalué à l'aide d'une approximation de troisième ordre :

$$\mathcal{FV}_{i+1/2}^{\mathcal{O}3} = \frac{1}{3} \left[ \kappa \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_{i+1} + \frac{5}{6} \left[ \kappa \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_i - \frac{1}{6} \left[ \kappa \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_{i-1} \quad (3.26)$$

Pour déterminer les gradients qui interviennent dans les flux diffusifs numériques, le théorème de Gauss est utilisé sur le volume de contrôle de la cellule considérée :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial x_m} dV = \int_{\mathcal{V}} \phi dS_m \simeq \sum_i [\phi]_i \mathcal{S}_i^m \quad (3.27)$$

Dans un cas mono-dimensionnel, la précédente relation conduit à l'approximation de troisième ordre du gradient :

$$\left[ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_i = \frac{[\phi]_{i+1/2}^{\mathcal{O}4} \mathcal{S}_{i+1/2} - [\phi]_{i-1/2}^{\mathcal{O}4} \mathcal{S}_{i-1/2}}{\mathcal{V}_i} \quad (3.28)$$

où  $[\phi]_{i+1/2}^{\mathcal{O}4}$  est évalué à l'aide d'une approximation de quatrième ordre dont l'expression est fournie par l'équation 3.20. Aux frontières du domaine de calcul, cette approximation du gradient est dégradée au second ordre. En prenant l'exemple d'une frontière localisée en  $i$  sur la figure 3.4, les expressions des gradients modifiées sont les suivantes :

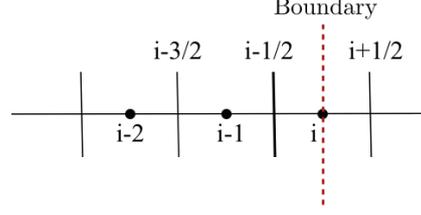
$$\left[ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_{i-1} = \frac{[\phi]_{i-1/2}^{\mathcal{O}3} \mathcal{S}_{i-1/2} - [\phi]_{i-3/2}^{\mathcal{O}4} \mathcal{S}_{i-3/2}}{\mathcal{V}_{i-1}} \quad (3.29)$$

$$\left[ \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_i = \frac{[\phi]_{i+1/2}^{\mathcal{O}3} \mathcal{S}_{i+1/2} - [\phi]_{i-1/2}^{\mathcal{O}3} \mathcal{S}_{i-1/2}}{\mathcal{V}_{i+1}} \quad (3.30)$$

où les valeurs aux interfaces,  $[\phi]_{i-1/2}^{\mathcal{O}3}$  et  $[\phi]_{i+1/2}^{\mathcal{O}3}$  sont évaluées à l'aide d'approximations décentrées au troisième ordre :

$$\phi_{i-1/2}^{\mathcal{O}3} = -\frac{1}{6} \hat{\phi}_{i-2} + \frac{5}{6} \hat{\phi}_{i-1} + \frac{1}{3} \hat{\phi}_i \quad (3.31)$$

$$\phi_{i+1/2}^{\mathcal{O}3} = \frac{1}{3} \hat{\phi}_{i-2} - \frac{7}{6} \hat{\phi}_{i-1} + \frac{11}{6} \hat{\phi}_i \quad (3.32)$$



**FIGURE 3.4:** Stencil des noeuds impliqués dans la reconstruction des flux diffusifs aux abords des frontières.

### 3.2.2 Discrétisation temporelle

La solution est avancée en temps avec le schéma Runge-Kutta TVD (*Total Variation Diminishing*) de troisième ordre proposé par Gottlieb et Shu [147]. L'évolution temporelle d'une variable conservative est alors décrite par l'équation :

$$\frac{\hat{\phi}_i^{n+1} - \hat{\phi}_i^n}{\Delta t} + \mathcal{R}_i(\phi^n) = 0 \quad (3.33)$$

où  $\mathcal{R}$  est le résidu qui englobe les flux convectifs et diffusifs ainsi que les termes de dissipation artificielle et les termes sources. On calcule ainsi le champ  $\hat{\phi}_i^{n+1}$  à l'instant  $n+1$  à partir de sa valeur  $\hat{\phi}_i^n$  à l'instant antérieur  $n$ . Le résidu  $\mathcal{R}_i(\phi^n)$  est également évalué à partir des différents champs au temps  $n$ . L'intégration de l'équation 3.33 est effectuée en trois étapes :

$$\hat{\phi}_i^{(1)} = \hat{\phi}_i^n - \Delta t \mathcal{R}_i(\phi^n) \quad (3.34)$$

$$\hat{\phi}_i^{(2)} = \frac{3}{4} \hat{\phi}_i^n + \frac{1}{4} \hat{\phi}_i^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathcal{R}_i(\phi^{(1)}) \quad (3.35)$$

$$\hat{\phi}_i^{n+1} = \frac{1}{3} \hat{\phi}_i^n + \frac{2}{3} \hat{\phi}_i^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathcal{R}_i(\phi^{(2)}) \quad (3.36)$$

Ce schéma explicite présente l'avantage d'un faible coût en terme de stockage. En effet, seuls deux tableaux,  $\hat{\phi}_i^n$  et  $\hat{\phi}_i^{n+1}$ , sont nécessaires à l'intégration temporelle de troisième ordre, ce qui réduit considérablement l'espace mémoire nécessaire au cours de l'avancement en temps.

### 3.2.3 Critère de stabilité

Le pas de temps  $\Delta t$  est un des paramètres les plus importants dans une simulation numérique. Comme pour toute méthode explicite, la stabilité de l'algorithme requiert que le pas de temps  $\Delta t$  vérifie trois critères : le critère de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) lié aux termes convectifs, le critère de Fourier associé aux termes visqueux et aux termes de conduction-diffusion ainsi qu'un critère chimique.

#### 3.2.3.1 Critère CFL

Ce critère impose qu'une perturbation se propageant à la vitesse  $u_i \pm c$  pendant le temps  $\Delta t$  parcourt une distance inférieure à la distance entre deux points du maillage. En particulier :

$$\Delta t^C < \text{CFL} \times \min_{i,j,k} \left( \frac{\Delta x_i}{|u_1| + a}; \frac{\Delta y_j}{|u_2| + a}; \frac{\Delta z_k}{|u_3| + a} \right) \quad (3.37)$$

avec  $a = \sqrt{\gamma r T}$ . Le code de calcul SiTCom, couplé à des dérivées spatiales de 4ème ordre et un schéma de Runge Kutta de troisième ordre, autorise un *CFL* maximum de 1. Néanmoins, les simulations présentées dans ce manuscrit ont été effectuées avec une condition légèrement inférieure : *CFL* = 0,95. On constate que le pas de temps le plus petit est imposé par la plus petite maille, ce qui constitue un des principaux inconvénients des méthodes explicites.

### 3.2.3.2 Critère de Fourier

Les flux visqueux respectent également un critère de discrétisation spatio-temporelle afin d'assurer la convergence de l'algorithme :

$$\Delta t^V < C_{\text{visqueux}} \times \min_{i,j,k} \left( \frac{\Delta x_i^2}{\nu_{eff}}, \frac{\Delta y_j^2}{\nu_{eff}}, \frac{\Delta z_k^2}{\nu_{eff}} \right) \quad (3.38)$$

où  $C_{\text{visqueux}}$  est le critère de Fourier considéré comme  $C_{\text{visqueux}} = CFL$  et  $\nu_{eff}$  est la viscosité cinématique effective qui regroupe les contributions des viscosités moléculaires et turbulentes<sup>1</sup>. Ainsi cette viscosité effective s'écrit :

$$\nu_{eff} = \begin{cases} \mu_m & \text{pour une DNS} \\ \frac{\mu_m + \mu_t}{\rho} & \text{pour une LES} \end{cases} \quad (3.39)$$

Il est intéressant de noter, qu'en pratique, le critère CFL est toujours plus restrictif que le critère de Fourier.

### 3.2.3.3 Critère chimique

Cette condition est liée à la présence des termes sources et ne constitue pas un critère de stabilité à proprement parler. Dans certains cas, les termes sources sont des fonctions très raides en temps et non linéaires. Un pas de temps trop grand peut conduire à une fraction massique négative ou supérieure à 1. Bien qu'une telle dérive ne conduit pas à la divergence du calcul, on introduit un pas de temps "chimique" pour éviter ces éventuelles valeurs aberrantes :

$$\Delta t^{S_l} < C_{\text{chimique}} \times \min_{i,j,k} \left( \frac{\rho Y_l}{\dot{\omega}_{Y_l}} \right) \quad (3.40)$$

En particulier, dans le contexte PCM-FPI, deux pas de temps chimiques sont déterminées :

$$\Delta t^{S_{Y_c}} < C_{\text{chimique}} \times \min_{i,j,k} \left( \frac{\rho Y_c}{\dot{\omega}_c} \right) \quad (3.41)$$

$$\Delta t^{S_E} < C_{\text{chimique}} \times \min_{i,j,k} \left( \frac{\rho E}{\dot{\omega}_e} \right) \quad (3.42)$$

où le seuil chimique  $C_{\text{chimique}}$  est supposé constant et égal au CFL.

Finalement le pas de temps utilisé pour la simulation d'un écoulement réactif est fourni par :

$$\Delta t = \min(\Delta t^C, \Delta t^V, \Delta t^{S_E}, \Delta t^{S_{Y_c}}) \quad (3.43)$$

## 3.3 Discrétisation de l'opérateur de filtrage

L'opération de filtrage de la variable  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  peut se définir sous la forme [326, 127] :

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\boldsymbol{\xi}, t) G_{\Delta} \left( \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\Delta} \right) d^3 \boldsymbol{\xi} \quad (3.44)$$

En considérant un filtre monodimensionnel défini sur  $[\alpha\Delta, \beta\Delta]$  avec  $\alpha \neq \beta$  (soit  $\xi$  évoluant entre  $x - \alpha\Delta$  et  $x + \beta\Delta$ ) et en effectuant le changement de variable  $z\Delta = x - \xi$ , cette expression devient :

$$\bar{\Phi}(x, t) = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x - z\Delta, t) G_{\Delta}(z) dz \quad (3.45)$$

1. En toute logique, le terme de viscosité artificielle devrait être ajouté à la viscosité cinématique effective. Or, le schéma de dissipation artificielle utilisé ne permet pas le calcul d'un terme de viscosité explicite puisqu'il intervient comme une correction aux flux convectifs. Bien que la contribution artificielle puisse surpasser les termes moléculaires et turbulentes, nous n'incluons pas cette contribution à la viscosité effective. D'autant que, le critère CFL est généralement le plus restrictif.

Sous l'hypothèse des faibles variations de l'écoulement turbulent, le développement en série de Taylor de la fonction  $\Phi(\xi, t)$  autour de  $(x, t)$  se traduit par :

$$\Phi(\xi, t) = \Phi(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\xi - x)^k}{k!} \frac{\partial^k \Phi(x, t)}{\partial x^k} \quad (3.46)$$

soit, après un changement de variable :

$$\Phi(x - z\Delta, t) = \Phi(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z\Delta)^k}{k!} \frac{\partial^k \Phi(x, t)}{\partial x^k} \quad (3.47)$$

L'introduction de 3.47 dans l'expression 3.45, combinée aux propriétés de symétrie et de conservation des constantes du filtre  $G$ , fournit :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, t) &= \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(x, t) G_{\Delta}(z) dz + \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z\Delta)^k G_{\Delta}(z) \frac{\partial^k \Phi(x, t)}{\partial x^k} dz \\ \bar{\Phi}(x, t) &= \Phi(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k M_k \frac{\partial^k \Phi(x, t)}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (3.48)$$

avec  $M_l$  le moment d'ordre  $l$  du noyau de convolution  $G$ , défini comme :

$$M_l = \int_{\alpha}^{\beta} z^l G_{\Delta}(z) dz \quad (3.49)$$

Pour un filtre centré, les moments pairs s'annulent. Par ailleurs, jusqu'aux moments d'ordre deux, les filtres créneau et gaussien se confondent.

Pour un maillage uniforme de pas  $\Delta x$ , la forme discrète du filtre relie le champ filtré du noeud  $i$  de la grille de calcul aux noeuds  $(M+N+1)$  intervenant dans le schéma de filtrage :

$$\bar{\Phi}_i = G_{\Delta} \Phi_i = \sum_{n=-M}^N a_n \Phi_{i+n} \quad (3.50)$$

où  $a_n$  constituent les coefficients de l'opérateur discret de filtrage.

L'utilisation des séries de Taylor pour chaque  $n$  fournit :

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\pm n \Delta x)^l}{l!} \frac{\partial^l \Phi(x, t)}{\partial x^l} \quad (3.51)$$

Soit, par substitution dans l'équation 3.50 :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=-M}^N a_n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n^l \Delta x^l}{l!} \frac{\partial^l \Phi(x, t)}{\partial x^l} \\ \bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) &= \left( 1 + \sum_{l=1}^{\infty} a_n^* \Delta x^l \frac{\partial^l}{\partial x^l} \right) \Phi_i \end{aligned} \quad (3.52)$$

avec  $a_n^* = \frac{1}{n!} \sum_{n=-M}^N a_n n^l$ .

En utilisant le rapport de la largeur du filtre à la taille de la cellule constituant le maillage uniforme,  $\epsilon = \Delta/\Delta_x$ , l'expression 3.48 devient :

$$\Phi_{i\pm n} = \Phi(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\epsilon \Delta x)^k M_k \frac{\partial^k \Phi(x, t)}{\partial x^k} \quad (3.53)$$

Pour connaître la grandeur filtrée, il nous faut déterminer les coefficients du filtre  $a_n$  à partir des équations 3.52 et 3.51. L'approximation de second ordre du filtre porte ou gaussien conduit ainsi à l'expression :

$$\Phi_i = \frac{16\epsilon^2 - \epsilon^4}{288}(\Phi_{i+1} + \Phi_{i-1}) + \frac{\epsilon^4 - 20\epsilon^2 + 192}{192}\Phi_i \quad (3.54)$$

Pour  $\epsilon = \sqrt{6}$ , on obtient le filtre symétrique à trois points :

$$\Phi_i = \frac{1}{4}(\Phi_{i-1} + 2\Phi_i + \Phi_{i+1}) \quad (3.55)$$

Cette expression est souvent utilisée pour discrétiser le filtre test, moyennant la correction du terme de sous-maille pour prendre en compte le rapport effectif du filtre et du maillage  $\epsilon$  (c'est-à-dire la correction du rapport  $\widehat{\Delta}/\Delta = \sqrt{6}$  pour les modèles dynamiques). Pour des maillages non uniformes, cette expression, basée sur l'hypothèse de mailles constantes, introduit des erreurs. Pour prendre en compte les variations du maillage, on utilise la règle des trapèzes exposée ci-dessous.

L'écriture discrétisée exacte du filtre  $2\Delta$  ( $\epsilon = 2$ ) constitue la règle d'intégration de Simpson. Cette expression, moins utilisée dans la littérature que l'expression précédente, se présente sous la forme :

$$\Phi_i = \frac{1}{6}(\Phi_{i-1} + 4\Phi_i + \Phi_{i+1}) \quad (3.56)$$

Similairement au filtre symétrique à trois points, cette formulation se heurte aux mêmes difficultés en présence d'un maillage non uniforme.

Pour réaliser l'opération de filtrage sur des maillages raffinés en proche paroi, le filtre test est évalué avec une règle des trapèzes qui prend en compte les distances effectives entre le centre d'une cellule et ses proches voisins.

### 3.3.1 Filtre test ou filtre à $2\Delta$ : règle des trapèzes

La discrétisation de l'opérateur de filtrage à l'échelle  $2\Delta$  est inspirée des travaux de Zang *et al.* [413]. Dans le cadre d'un maillage uniforme tridimensionnel, la grandeur filtrée  $\widehat{\Phi}_{i,j,k}$  est déterminée à l'aide de la loi des trapèzes. Cette procédure de filtrage est illustrée sur la figure 3.5 et repose sur l'expression suivante :

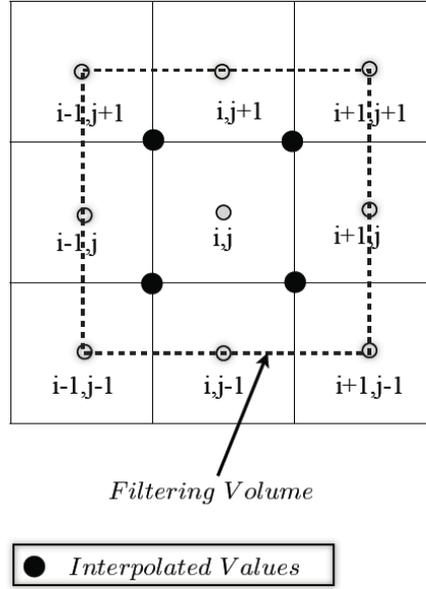
$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{i,j,k} = & \frac{1}{8}(\Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}) \\ & + \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}) \\ & + \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}) \\ & + \Phi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les quantités impliquées dans l'opérateur de filtrage résultent de l'application successive d'interpolations linéaires basées sur les noeuds avoisinants. En considérant l'approche monodimensionnelle, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \Phi_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(\Phi_i + \Phi_{i+1}) \\ \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4}(\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i+1,j+1}) \\ \Phi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{8}(\Phi_{i,j,k} + \Phi_{i+1,j,k} + \Phi_{i,j+1,k} + \Phi_{i+1,j+1,k} \\ & \quad + \Phi_{i,j,k+1} + \Phi_{i+1,j,k+1} + \Phi_{i,j+1,k+1} + \Phi_{i+1,j+1,k+1}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Les noeuds interpolés apparaissent sous la forme de cercles noirs sur la figure 3.5. La généralisation de la précédente relation, selon les différentes directions d'interpolation, fournit :

$$\Phi_{i\pm\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2},k\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}(\Phi_{i,j,k} + \Phi_{i\pm 1,j,k} + \Phi_{i,j\pm 1,k} + \Phi_{i\pm 1,j\pm 1,k} + \Phi_{i,j,k\pm 1} + \Phi_{i\pm 1,j,k\pm 1} + \Phi_{i,j\pm 1,k\pm 1} + \Phi_{i\pm 1,j\pm 1,k\pm 1}) \quad (3.59)$$

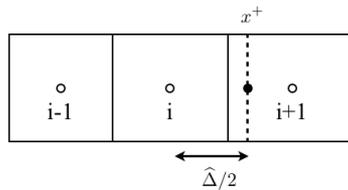


**FIGURE 3.5:** Volume d'intégration associé au schéma de filtrage explicite test en 2D.

Pour les maillages raffinés, la précédente relation est modifiée pour assurer la construction d'un opérateur de filtrage isotropique. Les relations 3.59 et 3.57 sont alors reformulées à l'aide des distances effectives entre les noeuds interpolés. Si l'on note  $x^+ = x_i \pm \widehat{\Delta}/2$ ,  $y^+ = y_j \pm \widehat{\Delta}/2$  et  $z^+ = z_k \pm \widehat{\Delta}/2$ , le champ  $\Phi$  en  $x^+$  devient, pour un cas monodimensionnel :

$$\begin{aligned} \Phi(x^+) &= \Phi_i + \frac{\widehat{\Delta}}{2} \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{x_{i+1} - x_i} \\ \Phi(x^+) &= \left(1 - \frac{\widehat{\Delta}/2}{x_{i+1} - x_i}\right) \Phi_i + \left(\frac{\widehat{\Delta}/2}{x_{i+1} - x_i}\right) \Phi_{i+1} \end{aligned} \quad (3.60)$$

La procédure d'évaluation de l'opérateur de filtrage, par l'intermédiaire de noeuds interpolés, est illustrée sur la figure 3.6 et se base sur la formule de Taylor-Young.



**FIGURE 3.6:** Opération de filtrage suivant la direction  $x$ .

En notant  $\xi^+$  le coefficient  $\frac{\widehat{\Delta}}{2(x_{i+1} - x_i)}$ , l'extension au cas bidimensionnel fournit :

$$\Phi(x^+, y^+) = (1 - \eta^+) [(1 - \xi^+) \Phi_{i,j} + \xi^+ \Phi_{i+1,j}] + \eta^+ [(1 - \xi^+) \Phi_{i,j+1} + \xi^+ \Phi_{i+1,j+1}] \quad (3.61)$$

avec  $\eta^+$  défini par :

$$\eta^+ = \frac{\widehat{\Delta}}{2(y_{j+1} - y_j)} \quad (3.62)$$

De même, l'extension à un cas tridimensionnel donne :

$$\begin{aligned} \Phi(x^+, y^+, z^+) &= (1 - \zeta^+) [(1 - \eta^+)(1 - \xi^+) \Phi_{i,j,k} + (1 - \eta^+) \xi^+ \Phi_{i+1,j,k} \\ &\quad + \eta^+(1 - \xi^+) \Phi_{i,j+1,k} + \eta^+ \xi^+ \Phi_{i+1,j+1,k}] \\ &\quad + \zeta^+ [(1 - \eta^+)(1 - \xi^+) \Phi_{i,j,k+1} + (1 - \eta^+) \xi^+ \Phi_{i+1,j,k+1} \\ &\quad + \eta^+(1 - \xi^+) \Phi_{i,j+1,k+1} + \eta^+ \xi^+ \Phi_{i+1,j+1,k+1}] \end{aligned} \quad (3.63)$$

avec

$$\zeta^+ = \frac{\widehat{\Delta}}{2(z_{k+1} - z_k)} \quad (3.64)$$

Les différents noeuds interpolés sont ainsi déterminés sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi(x^\pm, y^\pm, z^\pm) &= a_0 \Phi_{i\pm 1, j\pm 1, k\pm 1} + b_0 \Phi_{i,j,k} \\ &\quad + c_1 \Phi_{i\pm 1, j\pm 1, k} + c_2 \Phi_{i\pm 1, j, k\pm 1} + c_3 \Phi_{i, j\pm 1, k\pm 1} \\ &\quad + d_1 \Phi_{i\pm 1, j, k} + d_2 \Phi_{i, j\pm 1, k} + d_3 \Phi_{i, j, k\pm 1} \end{aligned} \quad (3.65)$$

où le signe renseigne sur la position du noeud interpolé par rapport à la quantité recherchée. Les coefficients des interpolations multilinéaires valent :

$$\begin{aligned} a_0 &= \xi^\pm \eta^\pm \zeta^\pm, & b_0 &= (1 - \xi^\pm)(1 - \eta^\pm)(1 - \zeta^\pm) \\ c_1 &= \xi^\pm \eta^\pm (1 - \zeta^\pm), & d_1 &= \xi^\pm (1 - \eta^\pm)(1 - \zeta^\pm) \\ c_2 &= \xi^\pm (1 - \eta^\pm) \zeta^\pm, & d_2 &= (1 - \xi^\pm) \eta^\pm (1 - \zeta^\pm) \\ c_3 &= (1 - \xi^\pm) \eta^\pm \zeta^\pm, & d_3 &= (1 - \xi^\pm)(1 - \eta^\pm) \zeta^\pm \end{aligned}$$

Le champ filtré  $\widehat{\Phi}_{i,j,k}$  est alors exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_{i,j,k} &= \frac{1}{8} (\Phi(x^+, y^+, z^+) + \Phi(x^-, y^+, z^+)) \\ &\quad + \Phi(x^+, y^-, z^+) + \Phi(x^-, y^-, z^+) \\ &\quad + \Phi(x^+, y^+, z^-) + \Phi(x^-, y^+, z^-) \\ &\quad + \Phi(x^+, y^-, z^-) + \Phi(x^-, y^-, z^-) \end{aligned} \quad (3.66)$$

La discrétisation de l'opérateur de filtrage sur un maillage uniforme 3.57 et sur un maillage non-uniforme 3.66 implique ainsi un jeu de 27 noeuds d'interpolation. Le champ  $\widehat{\Phi}_{i,j,k}$  est alors exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$\widehat{\Phi}_{i,j,k} = \sum_{\epsilon} \alpha_{i+\epsilon, j+\epsilon, k+\epsilon} \Phi_{i+\epsilon, j+\epsilon, k+\epsilon} \quad (3.67)$$

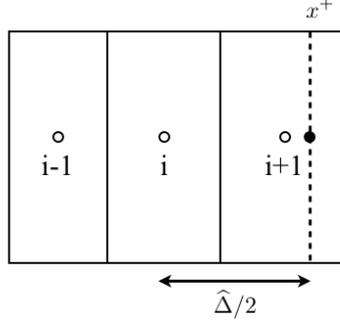
avec  $\alpha$  les coefficients d'interpolation linéaire ( $a_0, b_0, c_{1,2,3}, d_{1,2,3}$ ) et  $\epsilon$  représente le trio d'indices  $\epsilon = -1, 0, 1$  impliqué dans les différentes combinaisons linéaires.

L'utilisation de la formule de Taylor-Young dans l'expression 3.60 réduit l'utilisation de la formule 3.66 aux cas légèrement raffinés. En effet, cette formule de discrétisation sur un maillage non uniforme nécessite le respect des conditions suivantes :

$$x_{i+1} - x_i > \widehat{\Delta}/2 \quad (3.68)$$

$$y_{j+1} - y_j > \widehat{\Delta}/2 \quad (3.69)$$

$$z_{k+1} - z_k > \widehat{\Delta}/2 \quad (3.70)$$



**FIGURE 3.7:** Opération de filtrage suivant la direction  $x$  qui ne permet pas l'emploi de la formule spatiale non uniforme (Eq. 3.66).

Ces relations ne sont plus assurées pour les maillages fortement raffinés (en particulier au voisinage d'objet immergé) comme en témoigne la figure 3.7. Dans l'implémentation actuelle de l'opérateur de filtrage, on choisit alors de basculer de la formule non-uniforme à la formulation sur maillage uniforme dès le non respect de ces critères .

Par ailleurs, les précédentes relations nécessitent un traitement particulier au voisinage des parois solides où l'opérateur de filtrage peut impliquer une distance d'interpolation supérieure à la distance au mur. Le volume de filtrage est alors dégradé par la présence du mur et l'opérateur de filtrage ainsi défini n'assure plus les propriétés isotropiques. Dans les simulations présentées par la suite, lorsque la longueur de coupure du filtre est supérieure à la distance au mur, l'ordre du schéma de filtrage est dégradé et le filtrage est effectué dans un plan parallèle à la paroi solide.

### 3.3.2 Filtre à $4\Delta$ : calcul des moments

L' expression du filtre (Eq. 3.48) se rapproche d'une équation de diffusion et peut donc être déterminée à l'aide d'opérateurs différentiels. En particulier, cette expression peut être résolue implicitement en une seule étape ou explicitement avec un certain nombre de sous-étapes afin de respecter le critère de Fourier [265].

En partant de l'expression de l'opération de filtrage en fonction des moments (Eq. 3.48), on obtient, pour un filtre porte ou gaussien défini avec des moments d'ordre deux :

$$\bar{\Phi}(x) = \Phi(x) + \frac{\Delta^2}{24} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x) \quad (3.71)$$

Pour évaluer l'opérateur de filtrage à une échelle  $n_\Delta = \widehat{\Delta}/\Delta$ , il est nécessaire d'appliquer la précédente relation à différents niveaux :

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= \Phi + \frac{\Delta^2}{24} \nabla \nabla \Phi^{(0)} \\ \Phi^{(2)} &= \Phi + 2 \frac{\Delta^2}{24} \nabla \nabla \Phi^{(0)} + \frac{\Delta^4}{24^2} \nabla \nabla \nabla \nabla \Phi^{(0)} \\ \Phi^{(3)} &= \Phi + 3 \frac{\Delta^2}{24} \nabla \nabla \Phi^{(0)} + 3 \frac{\Delta^4}{24^2} \nabla \nabla \nabla \nabla \Phi^{(0)} + \frac{\Delta^6}{24^3} \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \nabla \Phi^{(0)} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Pour évaluer un filtre de largeur  $n_\Delta = \widehat{\Delta}/\Delta$ , ce processus itératif est appliqué  $n_s$  fois, avec  $n_s$  le nombre d'étapes successives :

$$n_s = \frac{1}{4} \left( \frac{\widehat{\Delta}}{\Delta} + 1 \right)^2 + 1 \quad (3.73)$$

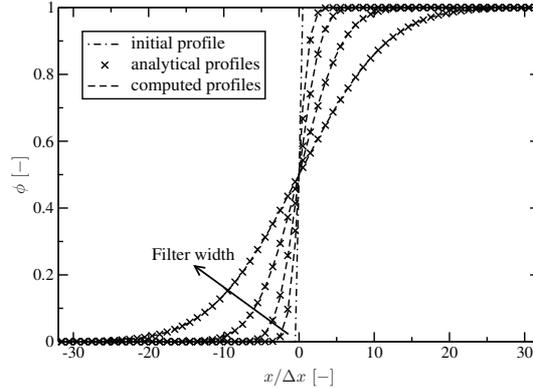
Le champ filtré à l'échelle  $n_s \Delta$  s'écrit alors :

$$\Phi^{(n_s)} = \Phi^{(n_s-1)} + \frac{n_s \Delta^2}{24} \frac{1}{n_s} \nabla \nabla \Phi^{(n_s-1)} \quad (3.74)$$

Cette opération de filtrage pour des filtres supérieurs à deux fois la taille du maillage est proposée par Moureau *et al.* [265]. Pour valider cette opération, un créneau est filtré pour différentes largeurs de filtres et comparé à la solution analytique pour un filtre gaussien :

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{6}x}{\Delta}\right)}{2} \quad (3.75)$$

Les résultats de cette opération sont présentés sur la figure 3.8. Les solutions filtrées et analytiques sont en très bon accord.



**FIGURE 3.8:** Opération de filtrage d'un créneau pour une largeur de filtre de 4, 8, 16 et 32 fois la taille du maillage  $\Delta x$  (extrait de Moureau et al. [265]).

### 3.4 Conditions limites

Les conditions limites constituent un élément essentiel des simulations. Elles permettent de fermer le problème mathématique en spécifiant les valeurs que doivent prendre les grandeurs primitives ainsi que leurs dérivées aux frontières du domaine de calcul. En particulier, pour un code compressible où la résolution de l'acoustique est primordiale, le traitement des conditions limites constitue son talon d'Achille. En effet, le calcul peut être pollué par des réflexions numériques parasites. Ces réflexions altèrent la précision et la stabilité des solutions. Pour limiter cette "pollution acoustique", les conditions limites compressibles doivent respecter un cahier des charges particulièrement vaste :

- Elles doivent prescrire les valeurs cibles des différentes grandeurs (vitesse, pression, température, fraction massique d'espèces,...) impliquées dans le problème physique modélisé.
- Elles doivent reproduire correctement le comportement acoustique des conditions aux limites modélisées, tel que l'impédance nulle aux murs, les réflexions partielles ou totales aux entrées et sorties.

La solution la plus simple pour remplir ces conditions consiste à implanter des conditions périodiques pour lesquelles les équations de Navier Stokes sont résolues à l'aide du schéma intérieur. Néanmoins, ce choix limite fortement les applications possibles. Pour représenter des configurations réalistes, il faut pouvoir traiter des conditions d'entrée et de sortie, des murs glissants et non glissants. Malgré les nombreuses études consacrées à ce problème, il n'existe pas de formulation idéale. Les conditions aux limites interagissent avec les méthodes numériques choisies et la complexité du problème physique modélisé.

Dans le code SiTCom, il existe différentes approches des conditions aux limites qui seront brièvement exposées dans la suite de ce chapitre. Notons que l'on distingue deux catégories de conditions aux limites : les conditions physiques et les conditions numériques. Les conditions physiques imposent directement le comportement physique attendu d'une ou plusieurs grandeurs primitives. Elles sont

indépendantes des méthodes numériques. Le nombre de conditions physiques à prescrire est arrêté par l'analyse théorique du système mathématique à résoudre. Une telle analyse est reportée par Poincot et Lele [295] et les références qui s'y trouvent. Des conditions numériques peuvent également être ajoutées aux conditions physiques pour fournir un nombre de conditions égal au nombre de variables inconnues. Ces conditions numériques consistent souvent en la traduction numérique de conditions physiques et sont donc dépendantes des méthodes numériques choisies. Au sein de ces conditions numériques, on discerne les conditions numériques fortes et les conditions numériques faibles. Alors que les conditions limites fortes spécifient explicitement le comportement d'une variable sans utiliser les informations intérieures, les conditions faibles imposent l'effet attendu par une condition numérique.

### 3.4.1 Conditions fortes de type Dirichlet-Neumann

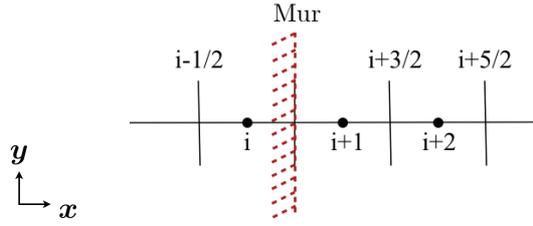
Ces conditions aux limites constituent des conditions non caractéristiques. Les valeurs cibles telles que la pression, la vitesse ou la température sont imposées de manière forte. Ces conditions sont donc réfléchissantes. Pour les codes compressibles, on leur préférera donc la formation caractéristique. Notons que ce type de conditions aux limites sera utilisé dans nos calculs compressibles pour modéliser les murs adiabatiques glissants et non glissants décrits avec la méthode des frontières immergées abordées dans la section suivante. Elles imposent toutes deux un flux de chaleur et d'espèces ainsi qu'un gradient de pression nuls (condition dite de type Neumann) et annulent les composantes de vitesse nécessaires à la description de parois glissantes et non glissantes.

### 3.4.2 Conditions limites aux parois avec l'utilisation de points images

Néanmoins, pour les conditions limites aux parois, on distingue un autre type d'approche qui consiste en l'utilisation de points images qui simulent la réflexion au niveau de la paroi (par analogie optique). Ainsi, des points fictifs sont positionnés à l'intérieur de la paroi pour permettre la description de réflexions symétriques et anti-symétriques. Avant de présenter la formulation et l'implémentation de ce type de conditions de paroi, rappelons les principales différences entre un mur glissant et non glissant.

La principale différence entre l'expression glissante et non glissante réside en son traitement des composantes de vitesse. Pour un fluide eulérien (non visqueux) la condition de glissement sur une paroi rigide se traduit par la nullité de la composante normale de la vitesse relative du fluide par rapport à la paroi. Pour un fluide visqueux pour lequel un terme de dissipation visqueuse ainsi qu'une diffusion thermique coexistent, la présence des dérivées secondes des composantes de vitesse dans les équations de conservation de la quantité de mouvement requiert des conditions de type cinématiques plus fortes (pour un fluide eulérien non dissipatif, seules apparaissent les dérivées premières). Ainsi la condition de glissement est remplacée par une condition d'adhérence qui spécifie que la vitesse relative du fluide par rapport au mur est nulle (et non plus seulement la composante normale). Notons que, pour les gaz raréfiés, cette condition d'adhérence doit être corrigée comme en témoignent les travaux expérimentaux reportés dans [396, 277].

Dans le présent code de calcul, on ajoute une ligne de points fictifs en dessous de la paroi. Ces points fictifs sont évalués à l'aide d'une réflexion antisymétrique et symétrique d'autres variables. Pour cette modélisation de la paroi, la disposition des volumes fluides et de la paroi est illustrée sur la fig. 3.9. Il convient de garder à l'esprit que ces points images fictifs ne constituent pas des points physiques. Ils permettent l'utilisation des schémas intérieurs en  $x$  (pour l'exemple choisi). Rappelons par ailleurs que les différents schémas numériques intervenant dans l'évaluation des flux de la cellule  $i + 1$  sont dégradés en ordre et décentrés vers le domaine intérieur.



**FIGURE 3.9:** Représentation du type de maillage pour une formulation non caractéristique du mur : la paroi est à l'interface des cellules  $i$  et  $i + 1$ .

Dans cette section, les composantes du vecteur vitesse seront notées :

$$\mathbf{u} = u\mathbf{x} + v\mathbf{y} + w\mathbf{z} \quad (3.76)$$

### 3.4.2.1 Cas d'une paroi glissante

En se basant sur les indices et la disposition de la figure 3.9, la rangée de points fictifs à déterminer est placée en  $i$ . Pour une paroi glissante, ces points fictifs en  $i$  sont évalués à l'aide d'une réflexion antisymétrique pour  $u$  et symétrique pour les autres variables. Ainsi les grandeurs primitives associées au point fictif  $i$  sont décrites par :

$$\begin{aligned} u_i &= -u_{i+1} \\ f_i &= f_{i+1} \quad \text{avec} \quad f = v, w, P, T, \rho, Y_l, E \end{aligned}$$

Notons que certains auteurs ajoutent à ce système, la condition de glissement  $u_i = 0$  pour prévenir une dérive numérique [139]. Dans notre code une telle surimposition n'est pas utilisée. Au lieu de cette condition de glissement, nous choisissons de conditionner les variables conservatives en respectant les principes de réflexion des variables primitives. Ainsi le système précédent est complété par le jeu de conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \rho u_i &= -\rho u_{i+1} \\ \rho f_i &= \rho f_{i+1} \quad \text{avec} \quad f = v, w, Y_l, E \end{aligned}$$

Bien que la condition de paroi ainsi formulée sur-spécifie le problème, elle s'est révélée particulièrement robuste au cours des différents tests. Cette méthode est conforme avec l'analyse conduite par Gloerfelt [139]. Pour une méthode de réflexion appliquée uniquement aux variables primitives, il reporte que la solution de cette méthode de réflexion n'est pas exacte mathématiquement. En n'affectant que les variables primitives, il montre qu'il en résulte une dérive des flux dans les équations de la quantité de mouvement. Pour contourner cette difficulté, il propose ainsi de spécifier d'annuler directement les flux  $\frac{\partial \rho v}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \rho w}{\partial x}$  dans l'équation de moment pour  $v$  et  $w$ .

Concernant la détermination de la pression (ou de la densité) pariétale, elle est évaluée à partir de la condition  $\frac{\partial P}{\partial x}|_w = 0$  (qui conduit à prendre la réflexion  $P_i = P_{i+1}$  à l'ordre 2). Cette évaluation se base sur l'approximation de la couche limite et fournit  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$  qui reste valable pour toute la couche limite. Notons que de manière générale, les extrapolations utilisées pour évaluer les valeurs de  $P$  et  $\rho$  reposent sur une simple approximation numérique et ne présentent pas de signification physique réelle. Par ailleurs, de telles méthodes n'assurent plus la conservation des quantités ce qui peut induire des erreurs numériques pour des configurations particulières (interactions choc/couches limites, point de séparation,...). En particulier, l'évaluation physique de la pression et de la densité demeure un problème ouvert pour les schémas numériques d'ordre élevé [139].

### 3.4.2.2 Cas d'une paroi non glissante

Toujours en se basant sur les indices et la disposition de la figure 3.9, les points fictifs en  $i$  sont évalués avec le système :

$$\begin{aligned}
 u_i &= -u_{i+1} \\
 v_i &= -v_{i+1} \\
 w_i &= -w_{i+1} \\
 f_i &= f_{i+1} \quad \text{avec} \quad f = P, T, \rho, Y_l, E \\
 \rho u_i &= -\rho u_{i+1} \\
 \rho v_i &= -\rho v_{i+1} \\
 \rho w_i &= -\rho w_{i+1} \\
 \rho f_i &= \rho f_{i+1} \quad \text{avec} \quad f = Y_l, E
 \end{aligned}$$

Notons que la description des conditions aux limites pour une paroi adiabatique est également assujettie à des couplages avec la procédure de détermination des flux sur le domaine intérieur. L'évaluation d'une méthode de modélisation des conditions aux limites doit intégrer les méthodes numériques utilisées. Il est donc difficile d'évaluer, à priori, la précision des méthodes de traitement des frontières de différents codes.

### 3.4.3 Conditions aux limites par décomposition en ondes caractéristiques

Différentes approches ont été proposées pour résoudre le problème lié à l'acoustique et donc aux réflexions aux entrées/sorties de domaine de calcul. On distingue ainsi la méthode des conditions limites caractéristiques, introduite par Thompson [371, 372] et généralisée aux équations de Navier Stokes par Poinso et Lele [298] ainsi que la méthode des conditions de rayonnement, introduite par Tam et Webb [368] pour un écoulement uniforme et étendue aux écoulements non uniformes par Tam et Dong [367]. Alors que la méthode des conditions limites caractéristiques s'appuie sur le concept des caractéristiques monodimensionnelles, les conditions de rayonnement utilisent une expression asymptotique en champ acoustique lointain des équations d'Euler. Afin de décrire des conditions limites non réfléchissantes, nous nous baserons sur l'approche des conditions limites dites caractéristiques présentée ci-dessous.

Initialement développée pour des systèmes hyperboliques (équations d'Euler), cette approche décompose l'écoulement en termes d'ondes caractéristiques. Rappelons que les équations d'Euler sont des équations hyperboliques non linéaires qui expriment les principes de conservation fondamentaux (de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale) pour un fluide parfait compressible. Ainsi, les équations hyperboliques décrivent la propagation d'ondes sans dissipation. L'étude monodimensionnelle des conditions limites caractéristiques est appliquée avec succès aux équations multidimensionnelles d'Euler par Thompson [371] et repose sur la diagonalisation des équations d'Euler 1D pour faire apparaître les invariants tourbillonnaires, entropiques et acoustiques ainsi que leurs vitesses de propagation. Imposer les bonnes conditions limites revient alors à fixer certains de ces invariants et en particulier les variations des ondes ou perturbations entrantes. La généralisation de cette approche en 2D et en 3D est exposée par Thompson [372]. Elle consiste à appliquer les relations caractéristiques 1D dans la direction perpendiculaire à la frontière et à avancer les flux dans les autres directions à l'aide du schéma intérieur. La résolution des arêtes et coins du domaine applique la même stratégie mais selon deux ou trois directions du maillage.

L'extension aux équations de Navier-Stokes est proposée par Poinso et Lele [298] afin de prendre en compte les termes visqueux, connue sous le terme NSCBC (*Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions*). Cette méthode repose toujours sur la décomposition de l'écoulement à la frontière en variables pseudo-caractéristiques, dérivées des variables conservatives en supposant le caractère

monodimensionnel (ondes se propageant suivant la direction normale à la frontière), et rassemblées par le système dit LODI (*Locally One-Dimensional and Inviscid*). Les conditions aux limites sont également étendues aux écoulements réactifs (prenant en compte une multitude d'espèces) par Baum *et al.* [22], Okong et Bellan [274], Sutherland [359] et Moureau *et al.* [267]. Les principaux domaines d'applications de ces méthodes caractéristiques sont les domaines de l'aéro-acoustique [85, 83, 84] et des instabilités de combustion [295, 21].

Bien que cette approche fonctionne pour un écoulement parfaitement orthogonal à la frontière, lorsque l'écoulement présente des fluctuations aux incidences obliques, des réflexions ainsi que des distorsions des grandeurs fluides peuvent apparaître. Giles [136] est le premier à soulever ce principal défaut des caractéristiques et à proposer une méthodologie de prise en compte des effets d'incidence oblique. Néanmoins, sa technique soulève d'importants problèmes de stabilité. Pour résoudre ces difficultés, Yoo *et al.* [410, 409] montrèrent combien la prise en compte des termes transverses (convection transverse et gradients de pression) et sources permettent d'augmenter la précision du calcul et la convergence vers les bonnes valeurs cibles tout en réduisant les distorsions subies par l'écoulement dans des régions présentant de forts gradients transverses. Par la suite, Lodato *et al.* [238] proposent de prendre en compte les termes transverses pour donner naissance à la méthode dite 3D-NSCBC qui a permis la description précise de la dynamique proche paroi pour un jet en impact. Albin *et al.* [5] considèrent ensuite une approche caractéristique basée sur les lignes de courant pour modéliser la sortie d'ondes obliques.

Quelque soit le formalisme adopté (NSCBC ou 3D-NSCBC), les conditions aux limites caractéristiques reposent sur le principe suivant : alors que les ondes sortant du domaine sont déterminées correctement puisqu'elles contiennent l'information issue du domaine de calcul et ne sont donc pas modifiées, les ondes entrantes, c'est-à-dire arrivant de l'extérieur du domaine, ne sont pas calculées par le schéma numérique mais doivent être fixées par l'utilisateur. Rappelons la formulation caractéristique des conditions aux limites. Si l'on considère les équations de Navier-Stokes sous leur forme conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{D}^k}{\partial x_k} = \mathbf{s}, \quad (3.77)$$

avec les vecteurs de flux, de diffusion et de terme source, notés respectivement  $\mathbf{F}^k$ ,  $\mathbf{D}^k$  et  $\mathbf{s}$  suivants :

$$\mathbf{F}^k = \begin{pmatrix} \rho u_k \\ \rho u_1 u_k + \delta_{1k} p \\ \rho u_2 u_k + \delta_{2k} p \\ \rho u_3 u_k + \delta_{3k} p \\ (\rho e + p) u_k \\ \rho Y_l u_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\mu A_{1k} \\ -2\mu A_{2k} \\ -2\mu A_{3k} \\ -2\mu u_j A_{kj} - \frac{\mu c_p}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_k} \\ -\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial Y_l}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \dot{\omega}_T \\ \rho \dot{\omega}_{Y_l} \end{pmatrix}, \quad (3.78)$$

et  $\mathbf{Y}$  le vecteur des compositions qui, dans le cadre de l'approche PCM-FPI, se présente sous la forme :

$$\mathbf{Y} = \{Z \quad Y_c \quad Z_v \quad Y_c Y_c\}^T$$

et dont les composantes sont notées  $Y_l$  avec  $l = 1, 2, 3, 4$ . Par souci de clarté, les équations présentées supposent la sommation sur l'indice  $l$  des espèces et permettent un formalisme "plus compact". Par ailleurs, la fraction de mélange étant un scalaire passif, son terme source associé est nul, soit  $\rho \dot{\omega}_{Y_1} = 0$  et  $\rho \dot{\omega}_{Y_3} = 0$ .

Le vecteur des variables primitives s'écrit :

$$\mathbf{u} = \{\rho \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad p \quad Y_l\}^T,$$

Les équations conservatives 3.77 sont écrites sous une forme quasi-linéaire à l'aide de la matrice de transformation  $\mathbf{P}$ , définie comme  $\mathbf{P} = \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{U}$ . Cette matrice constitue la matrice Jacobienne de passage entre les grandeurs conservatrices et non conservatives et s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}u_k u_k & \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 & 1/\varkappa & 0 \\ Y_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

La matrice inverse associée est :

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -u_3/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ \frac{\varkappa}{2}u_k u_k & -\varkappa u_1 & -\varkappa u_2 & -\varkappa u_3 & \varkappa & 0 \\ -Y_l/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\rho \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

avec

$$\varkappa = \gamma - 1. \quad (3.81)$$

Il est donc important de connaître localement la valeur de  $\gamma$  qui intervient dans l'expression de  $\varkappa$ . En partant des relations  $c_p - c_v = r$ ,  $r = \mathcal{R}/\overline{W}$  et  $\gamma = c_p/c_v$ , on obtient :

$$\gamma = 1 + \frac{\mathcal{R}}{\overline{W}c_v} \quad (3.82)$$

où, dans le cadre d'écoulements réactifs tabulés,  $c_v$  est déterminée à l'aide de polynômes d'ordre deux en fonction de la température [142].

La forme quasi-linéaire des équations de Navier-Stokes s'obtient en multipliant l'Eq. 3.77 par  $\mathbf{P}^{-1}$  et en usant de la relation  $\mathbf{P}^{-1}\partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{U} = \mathbf{I}^2$  :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathcal{F}^j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} + \mathcal{D} = \mathcal{S} \quad (3.83)$$

où

$$\mathcal{D} = \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathcal{D}^i}{\partial x_i}$$

est le vecteur de flux qui englobe les termes visqueux et diffusifs,  $\mathcal{F}^k = \partial \mathbf{F}^k / \partial \mathbf{U}$  constitue la matrice Jacobienne non conservative qui rend compte de la linéarisation suivant la  $k$ -ième direction et la matrice

$$\mathcal{S} = \mathbf{P}^{-1} \mathcal{s}$$

qui résulte de la transformation du vecteur des termes sources.

Dans le cas présent, nous obtenons :

$$\mathcal{F}^k = \begin{pmatrix} u_k & \delta_{1k}\rho & \delta_{2k}\rho & \delta_{3k}\rho & 0 & 0 \\ 0 & u_k & 0 & 0 & \delta_{1k}/\rho & 0 \\ 0 & 0 & u_k & 0 & \delta_{2k}/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_k & \delta_{3k}/\rho & 0 \\ 0 & \delta_{1k}\gamma p & \delta_{2k}\gamma p & \delta_{3k}\gamma p & u_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_k \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

---

2. La matrice  $\mathbf{I}$  est la matrice identité

La forme caractéristique est finalement le résultat de la diagonalisation des matrices jacobiniennes non conservatives  $\mathcal{F}^k$  à l'aide de la transformation linéaire suivante :

$$\mathbf{S}_k^{-1} \mathcal{F}^k \mathbf{S}_k = \mathbf{\Lambda}^k \quad (3.85)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}^k$  la matrice diagonale qui comporte les valeurs propres de  $\mathcal{F}^k$ ,  $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$  la vitesse du son et :

$$\mathbf{\Lambda}^k = \begin{pmatrix} u_k - a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_k + a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_k \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

$$\mathbf{S}_k = \begin{pmatrix} 1/(2a^2) & \delta_{1k}/a^2 & \delta_{2k}/a^2 & \delta_{3k}/a^2 & 1/(2a^2) & 0 \\ -\delta_{1k}/(2\rho a) & 1 - \delta_{1k} & 0 & 0 & \delta_{1k}/(2\rho a) & 0 \\ -\delta_{2k}/(2\rho a) & 0 & 1 - \delta_{2k} & 0 & \delta_{2k}/(2\rho a) & 0 \\ -\delta_{3k}/(2\rho a) & 0 & 0 & 1 - \delta_{3k} & \delta_{3k}/(2\rho a) & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.87)$$

et

$$\mathbf{S}_k^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{1k}\rho a & -\delta_{2k}\rho a & -\delta_{3k}\rho a & 1 & 0 \\ \delta_{1k}a^2 & 1 - \delta_{1k} & 0 & 0 & -\delta_{1k} & 0 \\ \delta_{2k}a^2 & 0 & 1 - \delta_{2k} & 0 & -\delta_{2k} & 0 \\ \delta_{3k}a^2 & 0 & 0 & 1 - \delta_{3k} & -\delta_{3k} & 0 \\ 0 & \delta_{1k}\rho a & \delta_{2k}\rho a & \delta_{3k}\rho a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Soit :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathbf{S}_j \mathbf{\Lambda}^j \mathbf{S}_j^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_j} + \mathcal{D} = \mathcal{S} \quad (3.89)$$

Les lois de conservation fondamentales sont donc exprimées en fonction des variations d'ondes caractéristiques. Le traitement aux limites consiste à imposer les amplitudes des ondes entrantes se propageant orthogonalement à la frontière ou aux frontières suivant la configuration (face, arête, coin).

### 3.4.3.1 Formulation pour le traitement d'une face

On considère une frontière orthogonale à la direction  $x_1$  sur laquelle on diagonalise  $\mathbf{F}^1$ . Le système d'équations 3.89 devient alors :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathbf{S}_1 \mathbf{\Lambda}^1 \mathbf{S}_1^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1} + \mathcal{F}^2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2} + \mathcal{F}^3 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3} + \mathcal{D} = \mathcal{S} \quad (3.90)$$

En appliquant la méthode de Thompson [371], on introduit le vecteur  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L} = \mathbf{\Lambda}^1 \mathbf{S}_1^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1} \quad (3.91)$$

Ce vecteur regroupe les différents invariants  $\mathcal{L}_i$  associés : aux perturbations entropiques ( $\mathcal{L}_2$ ), tourbillonnaires ( $\mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$ ), acoustique progressive ( $\mathcal{L}_5$ ) et acoustique retrograde ( $\mathcal{L}_1$ ) :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} - \rho a \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\ \lambda_2 \left( a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) \\ \lambda_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \lambda_4 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \lambda_5 \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} + \rho a \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\ \lambda_{6i} \frac{\partial Y_l}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

avec  $\lambda_i$  les différentes valeurs propres.

L'équation 3.90 est alors reformulée en fonction des variations des amplitudes des ondes :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathbf{d} + \mathcal{F}^2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2} + \mathcal{F}^3 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_3} + \mathcal{D} = \mathcal{S} \quad (3.93)$$

avec

$$\mathbf{d} = \mathcal{S} \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} \left[ \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] \\ \frac{1}{2\rho a} (\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \\ \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \\ \mathcal{L}_{6i} \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Le passage des variables primitives aux grandeurs conservatives s'effectue en multipliant les premières par la matrice  $\mathbf{P}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{P} \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{F}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{F}^3}{\partial x_3} + \frac{\partial \mathbf{D}^i}{\partial x_i} = \mathbf{s} \quad (3.95)$$

avec

$$\mathbf{P} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_1 u_1 + \rho d_2 \\ d_1 u_2 + \rho d_3 \\ d_1 u_3 + \rho d_4 \\ d_1 \frac{u_k u_k}{2} + \rho u_j d_{j+1} + \frac{d_5}{\gamma-1} \\ d_1 Y_l + \rho d_6 \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

Pour construire la condition limite, il faut spécifier les perturbations entrantes. En appliquant la méthode NSCBC classique [298], les invariants sont exprimés sous la forme d'un système monodimensionnel non visqueux, connu généralement sous le nom LODI (*Locally One-Dimensional and Inviscid assumption*). Ce système est obtenu à partir de l'équation 3.90 en formulant l'hypothèse que les flux convectifs transverses ainsi que les termes diffusifs sont négligeables. Pour un écoulement non réactif, soit  $l = 1$  et  $Y_1 = Z$  un scalaire passif rendant compte du mélange, le système LODI s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathbf{d} = 0 \quad (3.97)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left[ \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2\rho a} (\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathcal{L}_3 = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathcal{L}_4 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + \mathcal{L}_6 = 0 \end{array} \right. \quad (3.98)$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la méthode NSCBC classique se basant sur le système LODI est efficace pour des fluctuations qui arrivent dans la direction normale à la frontière mais, elle s'avère mal adaptée aux configurations présentant des incidences obliques. Pour prendre en compte ces incidences, on utilise la méthode 3D-NSCBC développée par Lodato *et al.* [238]. Cette méthode repose sur une hypothèse moins restrictive, puisque seuls les termes diffusifs et visqueux sont négligeables dans le système reliant les invariants  $\mathcal{L}_i$ , c'est-à-dire que dans l'équation 3.90, seul le terme  $\mathcal{D}$  est omis. Ainsi le nouveau système se présente sous la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathbf{d} - \mathcal{T} - \mathcal{S} = 0 \quad (3.99)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left[ \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] - \mathcal{T}_1 - S_1 = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2\rho a} (\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) - \mathcal{T}_2 - S_2 = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathcal{L}_3 - \mathcal{T}_3 - S_3 = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathcal{L}_4 - \mathcal{T}_4 - S_4 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) - \mathcal{T}_5 - S_5 = 0 \\ \frac{\partial Y_l}{\partial t} + \mathcal{L}_{6_l} - \mathcal{T}_{6_l} - S_{6_l} = 0 \end{array} \right. \quad (3.100)$$

Les vecteurs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{S}$  sont respectivement le terme transverse qui rassemble les flux transverses et les gradients de pression selon les directions  $x_2$  et  $x_3$  et le terme source :

$$\mathcal{T} = -\mathcal{F}^t \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \rho u_t}{\partial x_t} \\ -u_t \frac{\partial \rho u_1}{\partial x_t} \\ -u_t \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} \\ -u_t \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_3} \\ -u_t \frac{\partial P}{\partial x_t} - \gamma P \frac{\partial u_t}{\partial x_t} \\ -u_t \frac{\partial Y_l}{\partial x_t} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho(\gamma - 1)\dot{\omega}_e \\ \dot{\omega}_{Y_l} \end{pmatrix} \quad \text{avec } t = 2, 3. \quad (3.101)$$

En multipliant l'équation 3.99 par la matrice  $\mathcal{S}_1^{-1}$  et en remplaçant le vecteur  $\mathbf{d}$  par son expression dans 3.94, les variations des amplitudes des ondes sont directement reliées aux dérivées temporelles des variables primitives :

$$\mathcal{S}_1^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \mathcal{L} - \mathfrak{T}^1 - \mathfrak{S}^1 = 0 \quad (3.102)$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial P}{\partial t} - \rho a \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \mathcal{L}_1 - \mathfrak{T}_1^1 - \mathfrak{S}_1^1 = 0 \\ \left( a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \mathcal{L}_2 - \mathfrak{T}_2^1 - \mathfrak{S}_2^1 = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathcal{L}_3 - \mathfrak{T}_3^1 - \mathfrak{S}_3^1 = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 - \mathfrak{T}_4^1 - \mathfrak{S}_4^1 = 0 \\ \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \rho a \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \mathcal{L}_5 - \mathfrak{T}_5^1 - \mathfrak{S}_5^1 = 0 \\ \frac{\partial Y_l}{\partial t} + \mathcal{L}_{6l} - \mathfrak{T}_{6l}^1 - \mathfrak{S}_{6l}^1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.103)$$

avec  $\mathfrak{T}_k^m$  et  $\mathfrak{S}_k^m$  respectivement le terme transverse caractéristique et le terme source caractéristique dans un plan perpendiculaire à la direction  $x_m$  et pour la  $k$ -ième grandeur caractéristique. En particulier, nous avons :

$$\mathfrak{T}^1 = \mathcal{S}_1^{-1} \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_5 - \rho a \mathcal{T}_2 \\ a^2 \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_5 \\ \mathcal{T}_3 \\ \mathcal{T}_4 \\ \mathcal{T}_5 + \rho a \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_{6l} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}^1 = \mathcal{S}_1^{-1} \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \rho(\gamma - 1)\dot{\omega}_e \\ -\rho(\gamma - 1)\dot{\omega}_e \\ 0 \\ 0 \\ \rho(\gamma - 1)\dot{\omega}_e \\ \dot{\omega}_{Y_l} \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

Pour les conditions aux limites présentées ci-dessous, les invariants entrants sont évalués à l'aide du système 3.103, les dérivées temporelles des variables primitives étant fournies par les conditions limites dites physiques.

### 3.4.3.2 Condition de sortie non-réfléchissante

Pour une sortie subsonique, on dispose d'une caractéristique entrante qui est  $\mathcal{L}_1$  si la frontière est positionnée en  $x_1 = L_x$  ou  $\mathcal{L}_5$  si la frontière est positionnée en  $x_1 = 0$  ainsi que 5 caractéristiques sortantes ( $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_{6l}$  et  $\mathcal{L}_5$  si  $x_1 = L_x$  ou  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_{6l}$  et  $\mathcal{L}_1$  si  $x_1 = 0$ ). Pour évaluer les invariants sortants, on utilise les expressions 3.92 qui sont calculées avec le schéma intérieur. Pour déterminer la caractéristique entrante, par exemple  $\mathcal{L}_1$  si l'on considère que la sortie est placée en  $x_1 = L_x$ , on utilise la première équation caractéristique 3.103. Pour une condition de sortie parfaitement non réfléchissante, l'invariant  $\mathcal{L}_1$  doit simuler une condition de champ libre, c'est-à-dire que  $\mathcal{L}_1 = 0$ . Aucune information ne pénètre dans le domaine de calcul. En particulier, rien n'indique la valeur de la pression statique  $P_\infty$  à l'extérieur du domaine de calcul et sa valeur risque de dériver. Pour limiter ce problème, Rudy et Strikwerda [324] proposent d'ajouter un terme correctif dans l'expression de l'onde entrante sous la forme<sup>3</sup> :

$$\mathcal{L}_1^* = \sigma \frac{a(1 - M_{max}^2)}{L_x} \Delta P \quad (3.105)$$

avec  $M_{max}$  le nombre de Mach maximum,  $a$  la célérité du son,  $L_x$  la taille caractéristique du domaine selon  $x_1$ ,  $\sigma$  un coefficient de relaxation sur la pression et  $\Delta P = P - P_\infty$  la différence entre la pression et sa valeur cible. Ainsi, l'information sur la pression statique est apportée par les ondes provenant

3. La notation  $\mathcal{L}_k^*$  est utilisée pour indiquer un invariant calculé à partir du système LODI, c'est-à-dire avec le formalisme de Poinot et Lele [295]

de l'extérieur du domaine. Lorsque que la pression de sortie diffère de  $P_\infty$ , une fraction d'ondes est réfléchiée dans le plan de sortie pour ramener la pression vers une valeur proche de sa valeur cible. Cette fraction d'ondes réfléchiées est pilotée par le coefficient  $\sigma$ . Notons que lorsque  $\sigma = 0$ , nous revenons au formalisme parfaitement non réfléchissant proposé par Thompson [371].

Pour prendre en compte les incidences obliques dans le plan de sortie, Yoo *et al.* [410, 409] ajoutent un terme additionnel de relaxation transverse. Le modèle effectif permettant le calcul de l'évolution de la caractéristique acoustique entrante est alors [410] :

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} - \rho a \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \sigma \frac{a(1 - M_{max}^2)}{L_x} \Delta P - \beta_t (\mathfrak{T}_1^1 - \mathfrak{T}_{1,ex}^1) = 0 \quad (3.106)$$

où  $\mathfrak{T}_{1,ex}^1$  est le terme transverse exact et  $\beta_t$  est un terme de relaxation transverse, dont la valeur est corrélée à la vitesse de l'écoulement dans le plan de sortie, et est donc pris comme étant la valeur du nombre de Mach de référence pour l'écoulement [410, 409]. Ce nombre de Mach de référence est évalué à l'aide des propriétés de l'écoulement injecté dans le domaine de calcul. Les études menées par Yoo *et al.* [410, 409] ainsi que par Lodato [237] soulignent l'apparition d'instabilités numériques lorsque ce paramètre varie. Pour les configurations non réactives, le choix du nombre de Mach de référence comme critère de relaxation est relativement satisfaisant [237]. Néanmoins, pour des écoulements réactifs, des instabilités numériques peuvent apparaître et sont liées, entre autre, à la différence entre le nombre de Mach en entrée et en sortie mais également à l'interaction avec les termes sources. Ainsi, la plupart des études menées en réactif ne considèrent pas les termes transverses dans le plan de sortie.

Dans la plupart des écoulements, le choix de  $\mathfrak{T}_{1,ex}^1 = 0$  est satisfaisant. Néanmoins, lorsque l'on dispose d'une solution analytique stationnaire de l'écoulement au niveau de la frontière, le terme transverse peut être évalué. Ainsi en combinant le système 3.101 et 3.104, il vient :

$$\mathfrak{T}_{1,ex}^1 = -u_t \frac{\partial P}{\partial x_t} - \gamma P \frac{\partial u_t}{\partial x_t} + \rho a u_t \frac{\partial u_1}{\partial x_t} \quad \text{avec } t = 2, 3. \quad (3.107)$$

où les différents champs  $P$ ,  $u_k$ ,  $\rho$  et  $a$  correspondent à la solution analytique de l'écoulement qualifié de cible.

En ajoutant un terme de relaxation sur les termes sources avec une approche similaire à celle adoptée par Yoo *et al.* [410] et en combinant les équations 3.106 et 3.103, l'onde acoustique entrante est alors évaluée sous la forme

$$\mathcal{L}_1 = \sigma \frac{a(1 - M_{max}^2)}{L_x} \Delta P + (1 - \beta_t)(\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{S}_1^1) + \beta_t(\mathfrak{T}_{1,ex}^1 - \mathfrak{S}_{1,ex}^1) \quad (3.108)$$

où  $\mathfrak{S}_{1,ex}^1$  est considéré nul. Notons que l'emploi du couple  $\mathfrak{T}_{1,ex}^1 = 0$  et  $\beta_t = 0$  permet de retrouver les expressions classiques de l'approche NSCBC de Poinot et Lele [295].

Conformément à l'analyse de Poinot et Lele [295], cette condition limite non visqueuse doit être renforcée par un jeu de conditions aux limites visqueuses :

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho J_1}{\partial x_1} = 0 \quad (3.109)$$

### 3.4.3.3 Condition de sortie réfléchissante

Cette méthode consiste à imposer directement la pression de sortie statique  $P(L_x, y, z, t) = P_\infty(y, z, t)$ . Cette condition aux limites non visqueuse conduit ainsi à une réflexion des différentes ondes. Pour fermer le problème mathématique, l'onde entrante  $\mathcal{L}_1$  doit toujours être spécifiée. L'équation 5 du système 3.100 fournit :

$$\mathcal{L}_1 = -\mathcal{L}_5 - 2 \frac{dP}{dt} + 2(\mathcal{T}_5 + \mathcal{S}_5) \quad (3.110)$$

En négligeant la contribution des termes transverses et du terme source et en considérant que la pression statique est stationnaire, l'expression ci-dessous se simplifie :

$$\mathcal{L}_1 = -\mathcal{L}_5$$

De manière similaire à la formulation de la condition de sortie non réfléchissante, cette condition non visqueuse est renforcée par une condition visqueuse qui spécifie que les contraintes tangentielles ainsi que le flux de chaleur à travers la frontière sont constants.

Ce formalisme sera utilisé pour certains cas tests réactifs de la chambre de type TVC pour prévenir la dérive de la pression observée lors de la simulation d'une configuration instable.

#### 3.4.3.4 Condition d'entrée non-réfléchissante subsonique

Pour réaliser une condition d'entrée non réfléchissante, on doit spécifier 5 caractéristiques entrantes ( $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$ ,  $\mathcal{L}_4$ ,  $\mathcal{L}_{6l}$  et  $\mathcal{L}_5$  pour un plan d'entrée localisé en  $x_1 = 0$ ). Il est donc nécessaire de disposer de 5 conditions physiques pour fermer le problème mathématique. En particulier, pour une condition d'entrée, nous choisissons d'imposer les grandeurs physiques ( $u_i$ ,  $T$  et  $Y_m$ ). Notons qu'il est également possible d'imposer, comme conditions physiques, la masse volumique ou le débit massique. Dans le cas d'une entrée subsonique non-réfléchissante, les équations suivantes exposées par Yoo *et al.* [410] sont utilisées pour imposer les conditions limites :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \rho a \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \eta_5 \frac{\rho a^2 (1 - M_{max}^2)}{L_x} \Delta u_1 &= 0, \\ \left( a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \eta_2 \frac{\rho a R}{L_x} \Delta T &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \eta_3 \frac{a}{L_x} \Delta u_2 &= 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \eta_4 \frac{a}{L_x} \Delta u_3 &= 0, \\ \frac{\partial Y_m}{\partial t} + \eta_6 \frac{a}{L_x} \Delta Y_l &= 0, \end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\tag{3.112}$$

où  $\eta_2, \dots, \eta_5$  représentent des coefficients de relaxation considérés généralement comme égaux à [410] :

$$\begin{aligned} \eta_3 &= \eta_4 = \eta_6 = 0,28 \\ \eta_2 &= \eta_5 = -0,28 \end{aligned}$$

Les quantités  $\Delta u_k = u_k - u_{k0}$ ,  $\Delta T = T - T_0$ ,  $\Delta Y = Y - Y_0$  représentent respectivement les écarts entre les valeurs des composantes de vitesse, de la température et du vecteur des espèces avec les valeurs cibles, identifiées par l'indice 0.

Les invariants à spécifier pour la condition d'entrée sont alors spécifiées en combinant les équations 3.112 et 3.103 :

$$\mathcal{L}_5 = \eta_5 \frac{\rho a^2 (1 - M_{max}^2)}{L_x} \Delta u_1 + \mathfrak{T}_5^1 + \mathfrak{S}_5^1 \tag{3.113}$$

$$\mathcal{L}_2 = \eta_2 \frac{\rho a R}{L_x} \Delta T + \mathfrak{T}_2^1 + \mathfrak{S}_2^1 \tag{3.114}$$

$$\mathcal{L}_3 = \eta_3 \frac{a}{L_x} \Delta u_2 + \mathfrak{T}_3^1 + \mathfrak{S}_3^1 \tag{3.115}$$

$$\mathcal{L}_4 = \eta_4 \frac{a}{L_x} \Delta u_3 + \mathfrak{T}_4^1 + \mathfrak{S}_4^1 \tag{3.116}$$

$$\mathcal{L}_6 = \eta_6 \frac{a}{L_x} \Delta Y_l + \mathfrak{T}_6^1 + \mathfrak{S}_6^1 \tag{3.117}$$

Contrairement à la condition de sortie, cette condition d'entrée ne requiert pas de condition visqueuse additionnelle puisque la seule inconnue du problème est la masse volumique qui est spécifiée à l'aide de l'équation de continuité qui n'implique aucun terme visqueux.

### 3.4.3.5 Condition d'entrée partiellement réfléchissante

Pour imposer une condition d'entrée, on peut également imposer directement certaines variables dans le plan d'entrée et constituer une condition d'entrée "partiellement réfléchissante". Ainsi, au lieu de prescrire les caractéristiques  $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_{6l}$  et  $\mathcal{L}_5$ , on spécifie les variables primitives associées aux composantes de la vitesse, à la température et au vecteur des espèces. Cette méthode se révèle plus réfléchissante que la précédente puisqu'aucune relaxation vers les valeurs spécifiées n'est utilisée. L'unique onde sortante est l'onde acoustique  $\mathcal{L}_1$ , évalué à l'aide du schéma intérieur. La plupart des grandeurs primitives étant imposées directement, seule la variable  $\rho$  doit être avancée en temps. En imposant, avec une condition forte, la composante de vitesse  $u_1$  dans le plan d'entrée, l'équation 2 du système 3.100 fournit :

$$\mathcal{L}_5 = \mathcal{L}_1 - 2\rho a \frac{dU}{dt} + 2\rho a (\mathcal{T}_2 + \mathcal{S}_2) \quad (3.118)$$

Cette méthode, exposée par Poinot et Lele [295], sera utilisée pour modéliser les injecteurs pariétaux de la chambre de type TVC. En effet, pour les entrées présentant une faible section de passage, ce formalisme permet de mieux contrôler le débit injecté et prévient toute dérive de la vitesse.

### 3.4.3.6 Condition de paroi non glissante avec les caractéristiques

Pour une condition de paroi non glissante, seules les deux ondes acoustiques  $\mathcal{L}_5$  et  $\mathcal{L}_1$  sont non nulles. En effet la condition de non glissement avec la nullité des composantes de vitesse simplifie les autres invariants et les termes transverses associés. Comme l'exposent Poinot et Lele [295], l'unique condition physique à prescrire pour un mur non glissant se traduit par une variation temporelle nulle de la vitesse  $u_1$ , normale à la frontière :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \quad (3.119)$$

Cette condition, combinée à l'équation 2 du système 3.100, conduit à :

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_5 \quad (3.120)$$

Ainsi l'amplitude de l'onde réfléchi est égale à l'amplitude de l'onde incidente.

Pour tenir compte des effets visqueux, deux conditions supplémentaires sont ajoutées [295] : la nullité du flux de chaleur normal  $q_1 = 0$  et du flux diffusif  $J_1 = 0$ .

### 3.4.3.7 Formulation pour le traitement d'une arête ou d'un coin

Pour modéliser les conditions au niveau des arêtes et des coins, la formulation de Lodato *et al.* [237] est adoptée. Les ondes traversant deux ou trois directions sont alors analysées avec les différents termes transverses et termes sources associés. Ayant présenté la méthodologie pour une face et en raison du nombre important de combinaisons possibles entre les conditions d'entrée, de sortie et de mur, nous ne détaillerons pas l'implémentation de ces conditions aux limites 2D et 3D. Le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de Lodato *et al.* [237].

Dans la version originale du code, seules les frontières du domaine de calcul étaient l'objet d'un traitement des conditions aux limites. Pour permettre l'étude de configurations plus complexes, nous avons modifié la structure du présent code pour pouvoir décrire des faces, des arêtes ainsi que des coins au sein du domaine de calcul. Dans la suite de ce manuscrit, cette approche sera qualifiée d'approche multi-blocs.

### 3.5 Génération des conditions initiales turbulentes : la méthode de Klein

Toute simulation LES ou DNS se doit de bien poser, mathématiquement, le problème de la condition d'entrée mais aussi d'imposer une reconstruction précise des fluctuations turbulentes en entrée. L'écoulement en amont du domaine de calcul n'étant pas connu de manière déterministe, il convient d'appliquer une procédure pour traiter la condition d'entrée.

La méthode la plus simple consiste à superposer, au champ moyen obtenu expérimentalement,  $U(\mathbf{x})$ , un champ perturbateur stochastique élaboré à partir d'un générateur de bruit blanc :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \quad (3.121)$$

Cette approche conduit néanmoins à la perte des informations de phase et à la mauvaise reconstruction des corrélations à deux points. En effet, le spectre fréquentiel induit par ce type d'injection étant plat, toutes les échelles de la turbulence, réparties sur toute la gamme des longueurs d'ondes, se voient affecter la même énergie turbulente. L'essentiel de la turbulence se trouvant aux niveaux des faibles longueurs d'ondes, il en résulte un manque d'énergie dans le spectre de la turbulence. La pseudo-turbulence imposée est alors atténuée ce qui conduit à une relaminarisation de l'écoulement.

Pour reconstruire des fluctuations turbulentes consistantes avec la dynamique non linéaire des équations de Navier-Stokes, il est nécessaire de prendre en compte à la fois l'énergie cinétique et la cohérence des fluctuations d'entrée [326]. Il existe différentes méthodes qui permettent une reproduction correcte des corrélations à un point et à deux points (cf. Sagaut [326]). En particulier, la méthode proposée par Klein *et al.* [199], est basée sur l'utilisation d'un filtre digital (linéaire non récursif), affecté à des nombres aléatoires. Cette méthode permet de reconstruire rapidement un spectre énergétique cohérent. La vitesse est alors prescrite par la relation :

$$u_i = \bar{u}_i + a_{ij} \mathcal{U}_j \quad (3.122)$$

où  $\mathcal{U}_j$  est le terme aléatoire filtré (bruit blanc corrélé en espaces) dont le calcul est détaillé dans l'article de Klein *et al.* [199]. La matrice  $(a_{ij})$  correspond à la décomposition de Cholesky du tenseur des contraintes de Reynolds  $R_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Ce tenseur peut être déterminé soit expérimentalement soit à l'aide de lois analytiques ou empiriques. Il en résulte la matrice suivante :

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} R_{11}^{1/2} & 0 & 0 \\ R_{21}/a_{11} & (R_{22} - a_{21}^2)^{1/2} & 0 \\ R_{31}/a_{11} & (R_{32} - a_{12}a_{31})/a_{22} & (R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2)^{1/2} \end{pmatrix} \quad (3.123)$$

La composante aléatoire  $\mathcal{U}_j$  n'est pas rafraîchie à chaque pas de temps comme le suggèrent Klein *et al.* [199] mais dépend du pas de temps dicté par la fréquence d'injection turbulente. Cette fréquence est déterminée comme l'inverse du temps mis par une perturbation aléatoire pour parcourir la première cellule du domaine de calcul à la vitesse  $U_\infty$  :

$$f_{ti} = \frac{U_\infty}{\Delta x} \quad (3.124)$$

Les conditions aux limites ouvertes (entrée/sortie) étant décrites avec la formulation caractéristique, seules les variations temporelles associées aux amplitudes des ondes sont prescrites en entrée. Le couplage de l'approche 3D-NSCBC et de la méthode de Klein nécessite donc d'inclure les fluc-

tuations de vitesse [238] au ondes entrantes sous la forme [295] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi &= \eta_\phi \frac{\rho a^2 (1 - M_{max}^2)}{L_x} \Delta u_1 + \mathfrak{T}_\phi^1 - \eta(\phi) \rho a \frac{dU_1^0}{dt} \\ \mathcal{L}_2 &= \eta_2 \frac{\rho a R}{L_x} \Delta T + \mathfrak{T}_2^1 + \gamma \rho R \frac{dT^0}{dt}\end{aligned}\quad (3.125)$$

$$\mathcal{L}_3 = \eta_3 \frac{a}{L_x} \Delta u_2 + \mathfrak{T}_3^1 - \eta(\phi) \rho a \frac{dU_2^0}{dt} \quad (3.126)$$

$$\mathcal{L}_4 = \eta_4 \frac{a}{L_x} \Delta u_3 + \mathfrak{T}_4^1 - \eta(\phi) \rho a \frac{dU_3^0}{dt} \quad (3.127)$$

$$\mathcal{L}_{6m} = \eta_6 \frac{a}{L_x} \Delta Z_m + \mathfrak{T}_{6m}^1 - \frac{dZ_m^0}{dt}$$

où  $L_x$  est la dimension caractéristique du domaine selon la direction  $x$ ,  $M_{max}$  le nombre de Mach en entrée,  $\eta_k$  les paramètres de relaxation du plan d'entrée et  $\mathfrak{T}_\phi^k$  le vecteur des termes transverses. Le terme  $\Delta u_k$  s'écrit :

$$\Delta u_k = u_k - u_{k0} - U_{rnd}^{n+1} \quad \text{avec } t \in [t^n : t^{n+1}] \quad (3.128)$$

avec  $n$  le nombre d'injections turbulentes (paramètre modifié toutes les  $1/f_{ti}$  secondes),  $u_{k0}$  la vitesse moyenne cible,  $u_k$  la composante de vitesse au temps  $t^n$  et  $U_{rnd}^{n+1}$  le bruit aléatoire corrélé, déterminé à l'aide de la relation :

$$U_{rnd}^{n+1} = a_{kl} \mathcal{U}(i, j) \quad (3.129)$$

Les dérivées temporelles du signal aléatoire,  $\frac{dU_k^0}{dt}$ , sont déterminées à partir des composantes du signal discret et reliées à l'aide d'une sinusoïde :

$$\frac{dU_{rnd}^{n+1}}{dt} \simeq \frac{\pi}{2} f_{ti} \Delta U_{rnd}^n \sin[\pi f_{ti}(t - t^n)] \quad (3.130)$$

Cette approximation, proposée par Lodato [238], permet de retrouver une valeur satisfaisante de la variance du bruit injecté.



# Chapitre 4

## Méthode des Frontières Immergées

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>108</b>
<b>4.2</b>	<b>Terminologie . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>4.3</b>	<b>Résumé des méthodes de frontières immergées . . . . .</b>	<b>110</b>
4.3.1	La méthode des frontières immergées . . . . .	111
4.3.1.1	Principe . . . . .	111
4.3.1.2	Champs d'application . . . . .	112
4.3.2	La méthode de pénalisation . . . . .	112
4.3.2.1	Principe . . . . .	112
4.3.2.2	Champs d'application . . . . .	113
4.3.3	Les frontières virtuelles . . . . .	113
4.3.3.1	Principe . . . . .	113
4.3.3.2	Champs d'application . . . . .	114
4.3.4	Le forçage direct . . . . .	114
4.3.4.1	La cellule fantôme . . . . .	115
	Principe : . . . . .	115
	Champs d'application : . . . . .	115
4.3.4.2	La cellule coupée . . . . .	115
	Principe : . . . . .	115
	Champs d'application : . . . . .	115
4.3.5	Conclusion . . . . .	116
<b>4.4</b>	<b>Mise en oeuvre numérique de la méthode de la cellule fantôme . . . . .</b>	<b>116</b>
4.4.1	Identification des cellules solides, fluides et fantômes . . . . .	116
4.4.1.1	La distance signée . . . . .	116
4.4.1.2	Les marqueurs de corps ( <i>body markers</i> ) . . . . .	119
4.4.2	Notion de point image . . . . .	119
4.4.3	Reconstruction du point image : les interpolations polynomiales . . . . .	120
4.4.3.1	Approche linéaire . . . . .	121
4.4.3.2	Approche bilinéaire . . . . .	122
4.4.3.3	Approche trilinéaire . . . . .	124
4.4.3.4	Reconstruction quadratique . . . . .	125
4.4.3.5	Reconstruction d'ordre élevée . . . . .	126
4.4.3.6	Comparaison des différentes reconstruction polynomiales . . . . .	126
4.4.3.7	Un autre schéma de reconstruction : la pondération par l'inverse des distances . . . . .	126
4.4.3.8	Implémentation d'une reconstruction polynomiale . . . . .	127
4.4.4	Reconstruction du point fantôme . . . . .	127
4.4.4.1	Conditions limites de type Dirichlet . . . . .	127

Cas particulier avec un point de reconstruction sur la frontière immergée . . . . .	128
4.4.4.2 Conditions limites de type Neumann . . . . .	129
Cas particulier avec un point de reconstruction sur la frontière . . . . .	129
4.4.4.3 Précision des schémas de conditions limites . . . . .	130
4.4.5 Résumé de l'implémentation de la méthode des frontières immergées . . . . .	131
4.4.5.1 Etapes préliminaires . . . . .	131
4.4.5.2 Etapes nécessaires à chaque sous-étape du schéma temporel . . . . .	132
<b>4.5 Couplage frontières immergées-simulation des grandes échelles . . . . .</b>	<b>132</b>
<b>4.6 Couplage frontières immergées - combustion turbulente (PCM-FPI) . . . . .</b>	<b>134</b>
<b>4.7 Validations des Frontières Immergées . . . . .</b>	<b>134</b>
4.7.1 Simulation numérique directe du sillage d'un cylindre non confiné . . . . .	134
4.7.1.1 A propos des conditions limites transverses . . . . .	138
4.7.2 Simulation numérique directe de l'écoulement sur un cylindre confiné . . . . .	138
4.7.3 Simulation des Grandes Echelles de l'écoulement autour d'un cylindre carré non confiné . . . . .	141
4.7.4 Comparaison des conditions aux limites pour un mur : murs IBM / NSCBC / classique . . . . .	144
4.7.4.1 Formulation caractéristique de la condition limite mur . . . . .	144
4.7.4.2 Cas test d'une onde de pression sphérique dans une boîte fermée décrite avec les différentes formulations . . . . .	146
4.7.5 Erreur sur la conservation de la masse . . . . .	149
<b>4.8 Une méthode de frontières immergées conservative . . . . .</b>	<b>153</b>
4.8.1 Une méthode de frontières immergées conservative pour des écoulements compressibles (CCIB) . . . . .	153
4.8.2 Canal incliné d'un angle variable . . . . .	157
<b>4.9 Conclusion . . . . .</b>	<b>162</b>

---

## 4.1 Introduction

La génération du maillage est une étape primordiale pour toute simulation numérique. En particulier, lorsque l'objet est de forme complexe, un maillage mal adapté peut générer des instabilités numériques qui, couplées à un éventuel problème de résolution en proche paroi, peuvent nuire fortement à la qualité des résultats. Ainsi, alors qu'une configuration simple peut être modélisée à l'aide d'un maillage régulier (cas par exemple d'un canal plan), la description de géométries complexes repose soit sur une approche adaptative de la grille de calcul (*body-fitted*), où le maillage épouse la surface du solide immergé dans l'écoulement fluide et avec laquelle les équations de Navier-Stokes sont exprimées en coordonnées généralisées, soit sur un maillage non structuré. Bien que le maillage non structuré soit plus intéressant que la transformation en coordonnées curvilignes en terme de consommation de temps CPU et de mémoire (matrices de passage en coordonnées généralisées...), la génération d'une grille n'est pas triviale et requiert parfois plus de temps que la simulation elle-même. Par ailleurs, l'adaptation du maillage induit inévitablement de fortes distorsions sur les mailles au voisinage des fortes irrégularités de surface, à l'origine d'une dégradation des résultats numériques. Ces erreurs numériques, qu'elles soient liées au manque de précision des schémas de discrétisation ou aux erreurs associées aux distorsions de maillage, nuisent à la description de la dynamique d'un ensemble de structures tourbillonnaires. Afin de réduire ces distorsions de maillage, on peut introduire un gradient de mailles à proximité du solide de sorte à augmenter le nombre de mailles. Cette méthode améliore la qualité de la simulation mais alourdit considérablement le calcul pour des objets de forme complexe. D'autre part, comparés aux maillages structurés, les codes non structurés requièrent plus de temps de calcul CPU (d'un facteur cinq environ) et plus de mémoire. Les schémas numériques d'ordre élevé s'adaptent également plus facilement aux grilles cartésiennes.

Au delà des problèmes liés aux distorsions des maillages non structurés aux abords de discontinuités et au coût CPU, dans la plupart des applications industrielles, la complexité géométrique de l'objet est souvent combinée à un mouvement de ce même objet, ce qui augmente les difficultés de calcul puisque le maillage doit alors être régénéré à chaque pas de temps.

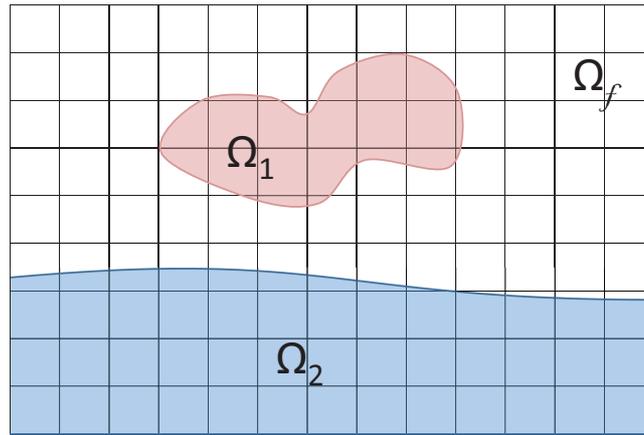
Au vu de ces difficultés, une alternative numérique qui pourrait traiter la complexité de l'écoulement tout en conservant la précision et l'efficacité des calculs réalisés sur des maillages réguliers pourrait représenter une avancée significative dans l'étude des écoulements académiques et industriels. Cette alternative réside dans la modélisation des parois par la méthode des frontières immergées. Notons, que différentes méthodes sont regroupées sous l'appellation de frontières immergées (IBM ou *Immersed Boundary Method*). Ainsi, le terme de *frontière immergée* se réfère souvent à la théorie globale.

La méthode des frontières immergées permet l'étude de configurations géométriques complexes à l'aide d'un simple maillage cartésien, en introduisant une condition de forçage dans les équations gouvernant l'écoulement ou en modifiant le schéma de discrétisation numérique aux abords de la frontière. Elle permet donc le traitement des conditions limites pour des surfaces non alignées avec le maillage, tout en gérant l'interaction fluide/solide. Notons que cette méthode peut également être utilisée dans des solveurs non-structurés pour traiter des géométries mobiles avec un maillage fixe. Elle évite aussi les problèmes associés aux maillages mobiles (par exemple, pour l'écoulement au sein d'un cylindre moteur avec mouvement du piston).

La frontière immergée pouvant couper le maillage de manière arbitraire, le point clé réside dans le traitement de la frontière de sorte qu'il ne dégrade pas la précision et les propriétés de conservation du solveur. Différentes approches ont ainsi été développées sur la base de ce concept. Les principales différences entre ces modèles résident dans la définition du terme additionnel et, plus généralement, des schémas de discrétisation utilisés à la proximité des surfaces immergées. Ces différentes méthodes regroupées sous la théorie de l'IBM, seront présentées, de manière non exhaustive, dans la suite de ce chapitre après un rappel terminologique. Cet exposé va nous orienter vers la méthode de la cellule fantôme dont les détails de mise en oeuvre seront présentés. Les stratégies du couplage de ce traitement des parois solides avec la simulation des grandes échelles seront ensuite présentées. Enfin, la dernière section sera consacrée à la démonstration du potentiel des frontières immergées pour la description d'objets complexes compressibles. Il faudra attendre le chapitre 5 pour éprouver cette technique dans une configuration compressible (une cavité transsonique) pour laquelle les conditions limites sont particulièrement critiques pour la description de la dynamique (bouclage aéroacoustique présenté dans le chapitre 6).

### 4.2 Terminologie

Quelque soit la méthode de frontière immergée utilisée pour la reconstruction d'un objet sur un maillage, le domaine de calcul est divisé en deux parties par la frontière immergée  $\Gamma$  : le domaine fluide représenté par  $\Omega_f$  et le domaine solide par  $\Omega_i$ , comme représentés sur la figure 4.1. Deux configurations d'immersion sont possibles : la région entièrement immergée  $\Omega_1$ , dont l'intégralité de la frontière  $\partial\Omega_1$  est en contact avec le fluide, et la région  $\Omega_2$  partiellement immergée, pour laquelle on distingue la partie de la frontière du domaine en contact avec le fluide  $\partial\Omega_2$ . L'objet de la modélisation de parois par forçage (IBM) consiste à imposer les conditions limites sur  $\partial\Omega_1$  et  $\partial\Omega_2$ . Pour ce faire, on distingue principalement deux approches. La première consiste à ajouter un champ de force sur une partie ou la totalité des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , pour prendre en compte la présence du corps immergé sur le maillage cartésien. La seconde, quant à elle, ne modifie pas les équations gouvernant le mouvement fluide, mais repose sur une modification du schéma numérique aux abords des frontières immergées.



**FIGURE 4.1:** Vue schématique de deux types de région dans le domaine de calcul.

Pour les méthodes basées sur l'introduction d'un terme correctif, le terme de forçage apparaît explicitement dans l'équation de la quantité de mouvement sous la forme d'une force volumique  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  et est évalué de sorte à obtenir la vitesse  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$  sur la frontière  $\partial\Omega_i$ . L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide compressible s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial x_j} = f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

avec  $\Psi_{ij} = \sigma_{ij} - P\delta_{ij}$  le tenseur des pression,  $P$  la pression et  $f_k$  la  $k$ -ième composante du forçage volumique appliquée à l'élément fluide.

### 4.3 Résumé des méthodes de frontières immergées

Les principales méthodes de modélisation des parois par forçage, les plus utilisées actuellement en DNS/LES, sont [213] : **les frontières immergées**, **la méthode de pénalisation**, **les frontières virtuelles** et **la méthode de forçage direct**. Ces mêmes méthodes peuvent se partager en deux grandes familles.

Tout d'abord on distingue les méthodes de **forçage continu**, appelées aussi techniques de forçage explicite puisque le terme de forçage est intégré aux équations de Navier-Stokes continues avant leur discrétisation. Cette famille comporte la première méthodologie des frontières immergées due à Peskin [279] ainsi que d'autres approches dérivées [145] .

L'autre famille des méthodes IBM est répertoriée en tant que technique de **forçage discret**. Le terme de forçage est intégré, implicitement ou explicitement, aux équations de Navier-Stokes discrétisées (Moyhd-Yusof [261], Fadlun *et al.* [114], Kim *et al.* [196], Udaykumar *et al.* [381], Balaras [16]). Le terme de forçage est alors calculé de sorte à compenser directement les erreurs entre les vitesses calculées et la vitesse souhaitée sur la frontière immergée.

L'avantage de l'approche du forçage continu réside dans sa formulation quasi-indépendante de l'opération de discrétisation spatiale, ce qui simplifie son intégration dans un code Navier-Stokes préexistant. Ce n'est pas le cas pour les méthodes de forçage discret puisque le forçage est dépendant du schéma de discrétisation spatiale. L'avantage de cette seconde catégorie repose, cependant, sur le fait que certaines formulations permettent une description précise de la frontière immergée, alors que la première catégorie tend à fournir une description diffuse de la frontière. En effet, dans toute

approche continue, la condition limite sur la frontière immergée n'est pas satisfaite de manière précise localement mais plutôt dans une région diffuse autour de la frontière. Par ailleurs, la famille des méthodes discrètes permet le contrôle de la précision numérique et des propriétés de conservation des volumes fluides puisque le forçage est directement dépendant du schéma de discrétisation.

Nous présentons ci-dessous les différentes méthodes de forçages continus et discrets avec les avantages/inconvénients relatifs à chaque méthode. Un exposé détaillé de ces différentes méthodes est disponible dans les papiers de Mittal et Iaccarino [260] et de Lamballais [213].

### 4.3.1 La méthode des frontières immergées

#### 4.3.1.1 Principe

Dans un souci de clarté, il est important de noter que le terme de *frontières immergées* se rapporte à la fois à la théorie globale et à une méthode précise, en référence aux travaux pionniers de Peskin [279, 280, 281, 282, 283]. La méthode de forçage continu est introduite par Peskin [279], afin de décrire les interactions entre un fluide et les parois qui l'entourent, pour des applications tournées vers la Biomécanique et, en particulier, pour décrire l'écoulement sanguin dans le cœur et la valve mitrale. Cette méthode est donc conçue, préalablement, pour tenir compte des déformations (élastiques) des frontières dans un écoulement incompressible à de faibles nombres de Reynolds.

Cette méthode consiste à suivre, au cours de son mouvement, la surface immergée déformable qui est représentée comme un ensemble de points lagrangiens dont la déformation propre permet la détermination de la force exercée par la paroi sur le fluide et donc du terme de forçage. On parle d'approche mixte Eulérienne/Lagrangienne puisque la résolution des équations de Navier-Stokes s'effectue de façon Eulérienne (grille de calcul fixe) tandis que le suivi des frontières est de nature Lagrangienne.

La frontière immergée utilise une fonction de Dirac pour représenter l'interface. La force corrective correspond à la force élastique exercée par la frontière sur le fluide et s'écrit :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_0^L \mathbf{F}(\mathbf{s}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{s}, t)) ds \quad (4.2)$$

Le champ  $\mathbf{F}(\mathbf{s}, t)$  représente la densité de force volumique ramenée à la longueur élémentaire. Sa forme dépend de la loi de comportement adoptée par les parois déformables considérées (en général, la loi de Hooke).

La condition d'adhérence du fluide à une telle surface permet d'écrire l'équation d'évolution des points matériels constituant l'interface :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{s}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{s}, t)) \quad (4.3)$$

Les vitesses associées aux points matériels sont alors déduites en utilisant à nouveau une fonction de Dirac.

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{s}, t), t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(x, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{s}, t)) dx \quad (4.4)$$

Cette méthode a subi plusieurs améliorations successives pour le traitement de discontinuités (Lai *et al.* [210], Li *et al.* [230, 231],[230]), la vérification des propriétés de conservation (Peskin *et al.* [283]) ou en terme de précision. L'utilisation d'une fonction de Dirac génère un effet de diffusion de la frontière dans la région fluide ce qui tend à diminuer la précision de la solution. Afin de généraliser cette approche aux frontières solides indéformables, Beyer *et al.* [31] modifient la déformation des frontières élastiques en remplaçant la fonction delta par une approximation discrète. Depuis cette approche, initialement proposée pour un problème mono-dimensionnel, de nombreuses variantes ont été proposées [261, 388, 210, 145]. Ainsi, Goldstein *et al.* [145] modifient le concept de la frontière immergée en ajoutant à la fois des conditions de saut et des constantes d'amortissement afin de

réduire le champ d'action du forçage. Cette approche dérivée a fait l'objet de nombreuses études (Griffith et Peskin [149], Uhlmann [382] et Taira et Colonius [362]). Notons que les conditions de sauts et les coefficients d'amortissement sont dépendants du problème et limitent souvent le pas de temps. Pour réduire la limitation du pas de temps, un traitement spécifique de ces derniers doit être effectué (Lee [221], Newren *et al.* [270]).

#### 4.3.1.2 Champs d'application

Cette méthode des frontières immergées est utilisée pour des applications incompressibles couplées à des parois élastiques. Les champs d'applications regroupent les travaux tournés vers la Biomécanique [213, 230] (coagulation, déformation des tissus, écoulements rénaux, déplacement d'animaux aquatiques, écoulement sanguin ...) ou vers d'autres disciplines (les écoulements de suspensions [213, 230], les vibrations amorties d'un tube élastique immergé [213, 282] ,...). Elle est particulièrement adaptée aux problèmes où les parois ne sont pas solides mais déformables et pouvant subir de grands mouvements. En revanche, pour des configurations plus simples avec un solide indéformable, cette méthode soulève le problème de la représentation diffuse de la frontière ce qui est particulièrement limitant pour l'étude d'écoulements à grand nombre de Reynolds.

Cette méthode conduisant à une description diffuse de la frontière immergée, elle sera écartée de nos études qui portent sur l'utilisation d'interfaces rigides. Elle induit une dissipation importante en proche paroi et rend donc la prédiction de couches limites difficile, voir impossible.

### 4.3.2 La méthode de pénalisation

#### 4.3.2.1 Principe

La méthode de pénalisation (*penalty methods, fictitious domain methods, domain embedding methods*) repose sur la modification des équations initiales pour maintenir le champ de vitesse à une valeur donnée, appelée champ cible. Le domaine solide est alors modélisé comme un milieu faiblement poreux immergé dans un fluide. Ce milieu est traduit par le biais de l'équation suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\epsilon(\mathbf{x}, t)}{\eta}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)] \quad (4.5)$$

où  $\eta$  correspond au coefficient de pénalisation relatif à la porosité du milieu et  $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ , un champ binaire (prenant exclusivement les valeurs 1 et 0) qui informe si le forçage est actif (1) ou non. Ainsi, dans la région fluide, ce champ est nul ce qui revient à masquer l'utilisation de tout terme de forçage.

La description de l'écoulement fluide (zone où le forçage est inactif) est gouverné par les équations de Navier-Stokes alors que les régions "quasi-solides" sont décrites par la loi de Darcy (basée sur la proportionnalité entre vitesse et pression) dans les régions 'quasi solides' avec :

$$\nabla P + \frac{\epsilon(\mathbf{x}, t)}{\eta}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (4.6)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (4.7)$$

avec  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$  la valeur du champ cible. On considère alors que la méthode de pénalisation résout les équations de Navier Stokes-Brinkman, c'est-à-dire les équations de Navier Stokes avec l'addition d'un terme de traînée volumique appelée la traînée de Darcy, qui tient compte des effets de la porosité de la frontière sur le fluide. Une description détaillée de cette méthode est présentée dans les travaux de Khadra *et al.* [194], Angot *et al.* [9] et Kevlahan *et al.* [193].

Le principal inconvénient de cette méthode, soulevé par Kevlahan *et al.* [193], est l'obligation de conserver un pas de temps proportionnel à la perméabilité (du type  $\Delta t \simeq \eta$ ) pour maintenir

la stabilité du calcul. Ainsi, la description d'un objet solide immergé, qui reviendrait à prendre un coefficient de pénalisation ou de perméabilité quasi-nul ( $\eta \rightarrow 0$ ), nécessite de trouver un compromis, pour limiter le temps de calcul, entre la fidélité de la description ( $\eta \rightarrow 0$ ) et le choix d'un pas de temps raisonnable.

#### 4.3.2.2 Champs d'application

Proposée à l'origine par Arguis et Caltagirone [12] afin de décrire les mouvements de convection naturelle dans une cavité poreuse, la méthode est généralisée par Angot et Caltagirone [10] dans des systèmes fluide-solides poreux complexes. En utilisant des méthodes numériques implicites, Khadra *et al.* [194] étudient les écoulements fluides et les transferts thermiques pour un cylindre et une marche. Toutes ces applications, bidimensionnelles, sont réalisées avec des fluides incompressibles.

En raison de la contrainte sur le pas de temps pour assurer la stabilité, nous écartons cette méthode de pénalisation puisque le temps de calcul deviendrait vite déraisonnable pour modéliser un solide.

#### 4.3.3 Les frontières virtuelles

##### 4.3.3.1 Principe

Développée par Goldstein *et al.* [145], cette méthode repose sur un terme de forçage comportant deux modes de contrôle sur le champ fluide : un mode intégral similaire à une force de rappel d'un ressort et un mode simple relatif à un amortissement :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\epsilon(\mathbf{x}, t)\alpha \int_0^t [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t') - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t')] dt'}_{\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\epsilon(\mathbf{x}, t)\beta[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)]}_{\mathbf{f}_\beta(\mathbf{x}, t)} \quad (4.8)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes négatives à calibrer. Le champ  $\mathbf{u}_0$  est la vitesse de la frontière qui, de part sa dépendance en temps et en espace, peut caractériser des corps mobiles et déformables.

L'équation 4.8 doit conduire à  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  sur la frontière immergée. En fait, le premier terme  $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}, t)$  décroît en temps puisqu'il devient négatif à mesure que la différence de vitesse  $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t') - \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t')]$  croît et tend ainsi à annuler la différence entre  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}_0$ . Le second terme peut être, quant à lui, interprété comme la résistance de la surface à assurer une vitesse  $\mathbf{u}$  différente de  $\mathbf{u}_0$  [114, 183].

Un argument intuitif pour comprendre l'action du forçage par les frontières virtuelles est le suivant : retenons uniquement le premier terme à gauche de l'équation de moment (*cf.* Eq. 4.1) et le dernier terme à droite :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \epsilon\alpha \int_0^t (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dt' + \epsilon\beta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (4.9)$$

En considérant que le forçage est actif sur le domaine décrit par cette équation et un champ cible indépendant du temps, il vient, en notant  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$  :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}'}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} - \alpha \mathbf{u}' = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Cette équation se comporte comme un oscillateur amorti ou un système masse-ressort (Iaccarino *et al.* [183], Lamballais [213], Fadlun *et al.* [114]) dont les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  permettent de caractériser la fréquence des oscillations. Ainsi, lorsque la vitesse  $\mathbf{u}$  sur la frontière s'écarte de la valeur de référence  $\mathbf{u}_0$ , la fonction de forçage  $\mathbf{f}$  ramène  $\mathbf{u}$  vers la valeur  $\mathbf{u}_0$ . Notons que pour l'obtention de résultats corrects, le couple des valeurs prises par  $\alpha$  et  $\beta$  est relativement restreint. En effet, le temps d'oscillation du terme de forçage doit être inférieur à celui de la dynamique du phénomène physique.

Cette méthode pose, de plus, des problèmes de stabilité analogues à ceux rencontrés dans la méthode de pénalisation. En effet, l'intégration temporelle du terme de forçage est soumise à de sévères restrictions ce qui tend à augmenter considérablement le temps de calcul. Goldstein *et al.* [145]

réalisent une étude de stabilité et montrent que, lorsque les termes de forçage sont calculés explicitement avec un schéma d'Adams-Bashforth, la limite de stabilité du pas de temps prend la forme suivante :

$$\Delta t < \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha k}}{\alpha} \quad (4.11)$$

avec  $k$  une constante de l'ordre de 1.

Cet examen fait également apparaître la problématique du choix des valeurs du couple ( $\alpha$  et  $\beta$ ). En effet, si ces valeurs ne sont pas suffisantes pour garantir le forçage, c'est-à-dire  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_0$ , le champ de vitesse peut dériver de sa valeur cible. Par ailleurs, le forçage ne peut être assuré que de façon approchée puisqu'il est directement lié à la restriction du pas de temps. Ainsi, cette méthode nécessite également un compromis entre un pas de temps prohibitif et un écart raisonnable par rapport aux conditions limites souhaitées.

Notons que Fadlun *et al.* [114] proposent d'appliquer un traitement implicite sur la partie  $\mathbf{f}_\beta$  du forçage afin d'étendre la zone de stabilité temporelle du forçage avec un schéma de Crank-Nicolson (schéma choisi en raison de sa relative simplicité algébrique). Lamballais *et al.* [214] reprennent cette méthode d'intégration temporelle partiellement implicite et parviennent à étendre la zone de stabilité du forçage en prenant un schéma plus stable qu'un Crank-Nicolson, à savoir un simple schéma d'Euler avancé. Un traitement implicite en temps du second terme de forçage permet donc d'augmenter le pas de temps qui dépend des constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , du type d'écoulement et du nombre de Reynolds. Néanmoins, il est important de noter que cette amélioration est superficielle en terme de temps de calcul.

#### 4.3.3.2 Champs d'application

Cette méthode est utilisée pour la description de l'écoulement incompressible (2D ou 3D) au voisinage de parois solides indéformables. Fadlun *et al.* [114] étudient ainsi la structure du sillage d'une sphère et l'écoulement interne d'un cylindre d'un moteur à piston.

Les études de stabilité relatives à cette méthode de frontières virtuelles montrent qu'elles ne permettent pas les simulations de type LES (Iccarino *et al.* [183]). Nous écartons donc cette approche pour notre étude qui nécessitera la prédiction des structures cohérentes turbulentes. En particulier, notre étude ayant pour but le développement d'une méthode de simulation d'un écoulement tridimensionnel de géométrie complexe, la limitation (pas de temps) est trop restrictive pour parfaire une étude 3D.

#### 4.3.4 Le forçage direct

La méthode de forçage direct, au vu des méthodes présentées jusqu'à maintenant, se révèle une méthode 'plus brutale' puisqu'elle consiste à imposer directement sur la solution, la condition de forçage, en s'affranchissant de tout calcul fastidieux du terme de forçage ou de temps d'oscillations caractéristiques. Ainsi, on impose directement la condition  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  pour la partie solide, sans prédétermination de la forme du terme de forçage. Les cellules frontalières (qualifiées de cellules fantômes) sont reconstruites en modifiant les schémas numériques au voisinage de la géométrie immergée. Par ailleurs, le choix du pas de temps reste à l'entière discrétion du numéricien. Au lieu d'utiliser une fonction de distribution "diffuse", qui dégrade fortement la solution pour de larges nombres de Reynolds, cette technique de forçage discret fournit une description plus précise de l'interface.

Au sein de cette méthode de forçage direct (discret), on distingue deux approches : l'approche de la cellule coupée (*cut-cell*) et la méthode de la cellule fantôme (*ghost-cell*).

#### 4.3.4.1 La cellule fantôme

**Principe :**

La méthode de la cellule fantôme (GCM ou *Ghost-Cell Method*) repose sur le remplacement du forçage dans les équations de Navier-Stokes par une interpolation (Majumdar *et al.* [247], Tseng et Ferziger [378], Fadlun *et al.* [114]). Cette approche est également qualifiée de méthode de reconstruction (*reconstruction method*) ou d'interpolation (Gilmanov *et al.* [138], Gilmanov et Sotiropoulos [137]). Une formule d'interpolation remplace les équations de transport à proximité de la frontière immergée et a pour but de reconstruire, localement, le champ de vitesse proche à la paroi immergée. Les paramètres de l'écoulement sont uniquement déterminés dans la partie fluide. La partie solide ne nécessite aucun traitement particulier, ce qui permet d'économiser du temps de calcul CPU et évite l'utilisation de descriptions non physiques (telles que celles intrinsèques aux méthodes de pénalisation et des frontières virtuelles).

L'étape clé de la cellule fantôme consiste à déterminer les variables dans la cellule fantôme (premières cellules adjacentes à la frontière). Ne connaissant dans l'absolu que la formulation des conditions d'un mur rigide glissant ou non glissant sur la position exacte de la frontière et les variables fluides dans le domaine fluide, ces cellules fantômes sont interpolées. Ils existent plusieurs variantes de cette méthode. La principale différence entre les différentes méthodes de cellule fantôme réside dans le choix du schéma d'interpolation et en particulier dans l'ordre de cette interpolation (linéaire, bilinéaire, trilineaire, quadratique...) [247, 183, 131].

**Champs d'application :**

Les méthodes adoptées par Mohd-Yusof (1997) [261], Majumdar *et al.* [247] et de Tseng et Ferziger (2003) [378] présentent l'avantage de reposer sur une formulation simple à implanter. Néanmoins, ces méthodes étant basées sur une reconstruction locale du champ de vitesse dans la région solide et des variables d'état, nous pouvons nous attendre à une perte de précision. De nombreuses études, disponibles dans la littérature, de l'interaction écoulement-solide avec la cellule fantôme démontrent l'aptitude de cette méthode à décrire les écoulements d'intérêts. Néanmoins, la majorité de ces études se limite aux écoulements incompressibles. La première implémentation compressible est proposée par Ghias *et al.* [130].

#### 4.3.4.2 La cellule coupée

**Principe :**

Les méthodes relatives à la cellule coupée (Clarke *et al.* [79, 381], Udaykumar *et al.* [381], Kirkpatrick *et al.* [198],...) ne reposent pas sur la modification des équations principales. Afin de garantir les propriétés de conservation de la masse et du moment, qui ne sont pas assurées avec la méthode de la cellule fantôme, la méthode de la cellule coupée dérive de l'approche des volumes finis. Seules les cellules du domaine de calcul traversées par la frontière sont traitées différemment et comportent de nouveaux opérateurs volume fini ou différence finie afin de prendre en compte le volume fluide effectif. Pour déduire les variables fluides au niveau des cellules fluides contiguës à la frontière, un schéma d'interpolation ou d'extrapolation est utilisé pour fournir les flux sur les faces de la cellule redessinée. Ces méthodes sont précises. Néanmoins, la complexité et la faible convergence liée à la présence de petites cellules constituent les principaux désavantages de ces méthodes. Par ailleurs, ces méthodes reposent toujours sur l'utilisation de schémas d'interpolation, qui nuisent à la précision du code.

**Champs d'application :**

Cette méthode est utilisée, avec succès, par Mittal *et al.* [260] pour décrire des écoulements 2D incompressibles. L'extension de cette méthode à un calcul tridimensionnel n'est cependant pas triviale. En effet, cette technique conduit à la génération de cellules coupées complexes où les équations

tions de l'écoulement sont difficilement discrétisables. Cette méthode pose également le problème des faibles pas de temps associés aux cellules coupées. Pour limiter la réduction du pas de temps, Ye *et al.* [408] proposent de fusionner les cellules de faibles volumes avec les cellules fluides avoisinantes. Sur ce principe, Meyer *et al.* [256] suggèrent une extension de la cellule coupée pour des écoulements incompressibles tridimensionnels.

Toutes les approches de cellule coupée (*cut-cell*), figurant dans la littérature, sont employées à la description d'écoulements incompressibles.

### 4.3.5 Conclusion

Seules les méthodes de forçage direct assurent la description correcte d'écoulement à grand nombre de Reynolds. Ainsi, nous utiliserons cette méthode de forçage direct. De part leur relative simplicité d'implémentation, nous avons opté pour l'intégration de la méthode des cellules fantômes dans notre code. Nous démontrerons, par la suite, l'aptitude de cette méthode de frontières immergées à décrire des écoulements complexes compressibles.

Une méthode de la cellule coupée sera également considérée pour des géométries simples, en raison du traitement complexe des cellules coupées, des problèmes de stabilité liés à l'existence de cellules de taille variable et des problèmes de précision associés aux interpolations des flux. En particulier, nous proposerons une formulation compressible de cette approche. Pour les applications d'intérêt, nous démontrerons ainsi que, par rapport à la cellule fantôme, la méthode de la cellule coupée apporte un faible gain en terme de conservation de la masse et augmente la complexité de l'implémentation.

## 4.4 Mise en oeuvre numérique de la méthode de la cellule fantôme

Comme nous l'avons précisé auparavant, la simulation de l'écoulement autour d'un objet solide, avec une méthode de modélisation des parois par forçage, requiert la génération d'un maillage couvrant le domaine d'intérêt sans l'objet ainsi qu'une description géométrique de l'objet considéré. Dans le cadre de notre étude, nous nous sommes focalisés sur la méthode de la cellule fantôme (Fadlun *et al.*, 2000[114], Iaccarino *et al.*, 2003 [183], Ghias *et al.*, 2007 [130], Balaras *et al.*, 2004[16]). L'idée intrinsèque à cette méthode repose sur la résolution des équations sur ce maillage ainsi que sur le calcul des variables transportées pour une couche de cellules adjacentes à la frontière immergée, les cellules fantômes (ou *ghost-cells*), de sorte à ce que les conditions limites soient vérifiées sur la frontière immergée.

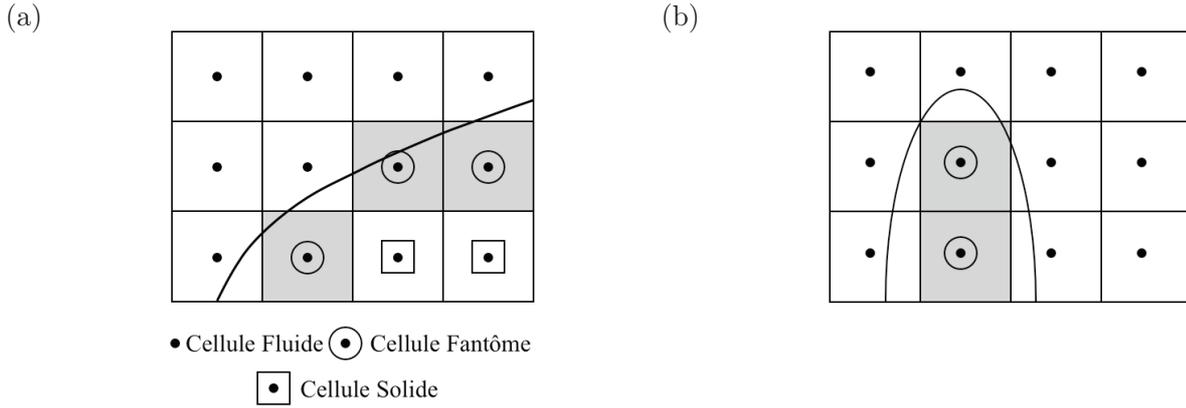
Ainsi, la première étape consiste en la définition de la frontière immergée afin de dissocier une région fluide et solide dans le domaine physique.

### 4.4.1 Identification des cellules solides, fluides et fantômes

Il existe différentes approches afin de déterminer la nature des cellules. En particulier, on distingue la notion de distance signée, utilisée dans le présent manuscrit, et l'approche des marqueurs de corps brièvement exposée.

#### 4.4.1.1 La distance signée

La position de chaque cellule par rapport à la frontière immergée  $\Gamma$  est déterminée à l'aide d'une fonction  $d(x, y, z, t)$ , la distance signée, qui est définie pour chaque point du domaine  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$ . Cette distance est déterminée en chacun des centres des cellules connaissant leurs coordonnées



**FIGURE 4.2:** Identification des cellules fantômes à l'aide de la distance signée. (a) Cas où le domaine est correctement discrétisé. (b) Cas où une courbure trop importante impose un raffinement du maillage.

spatiales et la fonction de description géométrique de la frontière<sup>1</sup>.

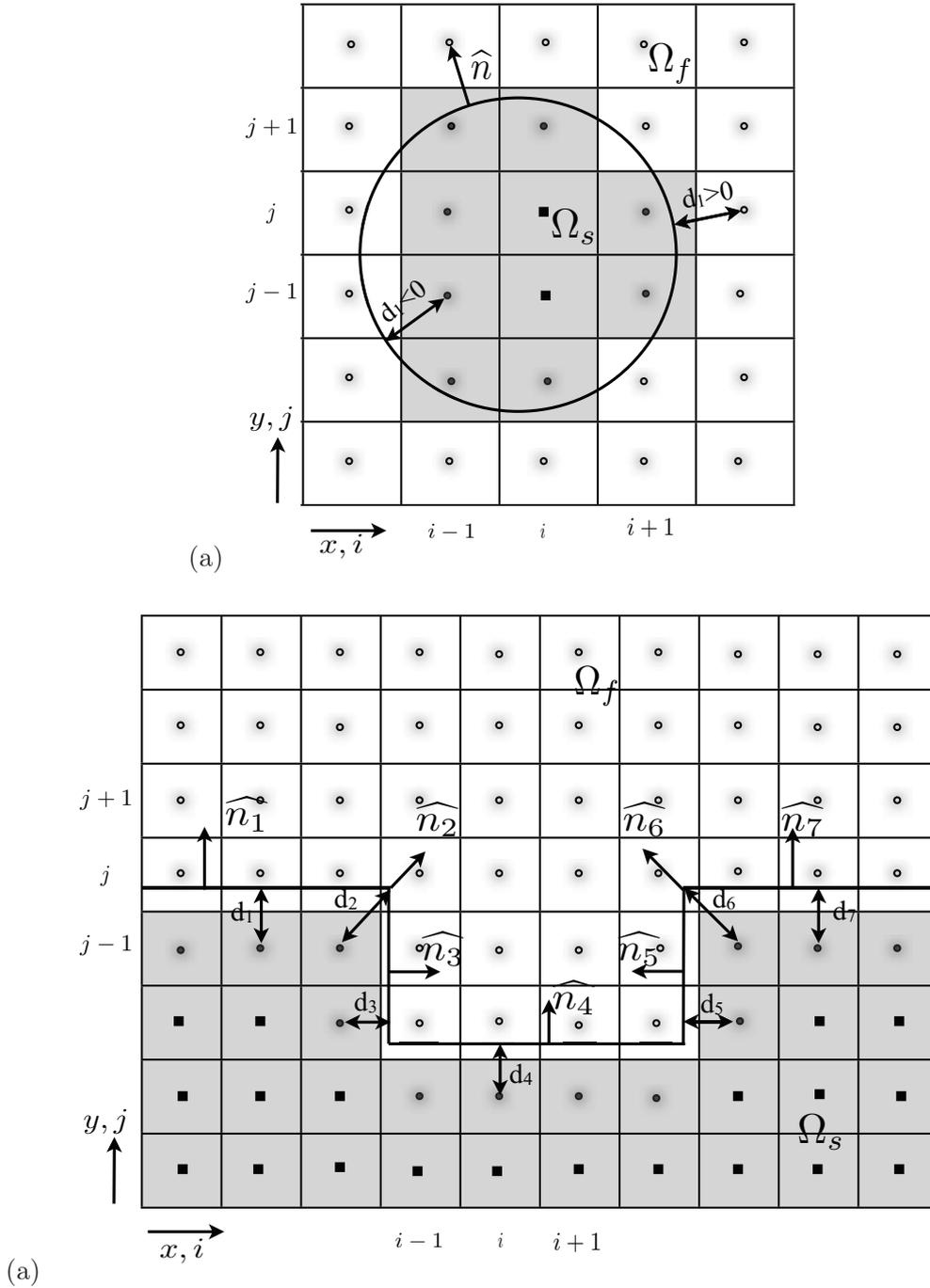
Elle est strictement positive si la cellule  $X$  appartient à  $\Omega_f$  et négative autrement. Le niveau zéro,  $d = 0$ , définit la position de la frontière. Les cellules fantômes sont alors identifiées comme les cellules où s'effectue un changement de signe de la fonction  $d$  (figure 4.2 (a)). En modifiant les variables fluides associées aux cellules fantômes, la méthode de la cellule fantôme garantit que les cellules fluides adjacentes prennent en compte la position effective de la frontière.

Suivant la complexité de la géométrie, il est parfois nécessaire d'introduire une ou plusieurs distances signées pour les différentes surfaces et discontinuités à décrire. Ces fonctions peuvent être prescrites analytiquement, dans le cas d'interfaces simples, ou peuvent être construites numériquement pour des surfaces complexes [259, 76]. Lorsque plusieurs distances signées sont introduites, la fonction level set de  $d$  retenue correspond à la distance minimale entre le point considéré et l'interface. Toute géométrie peut ainsi être décrite, moyennant son découpage en différents segments. Cette technique du niveau zéro de la fonction level-set nécessite néanmoins un certain niveau de raffinement au niveau des géométries convexes. Lorsque deux changements de signe sont constatés dans une même direction, pour une même cellule, le rayon de courbure est trop important (figure 4.2 (b)). Il convient alors de raffiner le maillage.

Par ailleurs, l'utilisation d'un niveau zéro pour la distance signée n'est pas adaptée à la description de coins ou d'objets excessivement minces. Pour traiter ces frontières irrégulières, Berthelsen et Faltinsen [29] conservent une formulation level set mais modifient l'approche de la cellule fantôme par l'extension de la solution au travers de la frontière, suivant chaque direction de discrétisation. Dans la présente étude, nous proposons de modifier la fonction level-set au niveau des coins et remplaçons ainsi la fonction level-set obtenue par la procédure précédemment décrite, par la distance effective entre la position du coin et la cellule fluide, comme illustrée sur la figure 4.3.

Avec une formulation level set et la modification proposée pour le traitement des surfaces discontinues, un cylindre 2D immergé peut être reconstruit à l'aide d'une unique fonction de distance basée sur l'équation du cercle, alors que la localisation de l'interface constituant une cavité requiert l'introduction de plusieurs distances, pour chaque segment et chaque coin, comme l'illustre la figure 4.3.

1. La connaissance des coordonnées des points  $\mathbf{x}_\Gamma$  appartenant à la frontière immergée  $\Gamma$  peut suffire afin de déterminer la distance signée en un point  $\mathbf{x}$  en posant  $d(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_f|$ .



**FIGURE 4.3:** Identification des cellules fluides, solides et fantômes avec la notion de distance signée (level set function) (a) : Une géométrie simple (telle qu'un cylindre) requiert une unique fonction de distance signée (b) : Une géométrie plus complexe, par exemple une cavité, nécessite l'introduction de plusieurs distances signées pour chaque surface continue constituant la cavité et pour les coins (spécifiés par la donnée des fonctions  $d_2$  et  $d_6$ ) avec :  $\circ$  pour les cellules fluides,  $\bullet$  les noeuds fantômes où la solution fluide doit être reconstruite et  $\blacksquare$  les noeuds solides.

Lorsque les frontières sont fixes, la détermination de la nature des différents noeuds (fantômes, fluides ou solides) s'effectue une seule fois pour toute, au début de la simulation. La nature des cellules est ainsi stockée dans un tableau.

#### 4.4.1.2 Les marqueurs de corps (*body markers*)

Lorsque la géométrie devient particulièrement complexe et que la spécification des différentes distances signées devient inconcevable, il est nécessaire d'introduire une technique plus générale. Cette technique constitue l'approche des marqueurs de corps et ne sera pas utilisée dans le cadre de cette thèse. Nous en présentons néanmoins les grandes lignes.

Utilisée par Ghias *et al.* [130], la frontière est représentée par des marqueurs de corps peu espacés. Des segments linéaires sont alors dressés entre les marqueurs voisins afin de compléter la spécification de la frontière. Les cellules fluides sont identifiées comme les cellules dont les noeuds sont localisés à l'extérieur du corps solide et les cellules solides comme celles dont les noeuds sont liés à la partie solide. Cette différenciation sur la nature des cellules peut être réalisée de différentes manières telle que le *ray-tracing* [229]. Les cellules fantômes sont, quant à elles, les cellules qui ont, au moins, un voisin dans la partie solide. Ainsi, Ghias *et al.* [130] identifient les cellules fantômes comme les cellules ayant un voisin immédiat dans le fluide, incluant même les voisins suivant les diagonales.

#### 4.4.2 Notion de point image

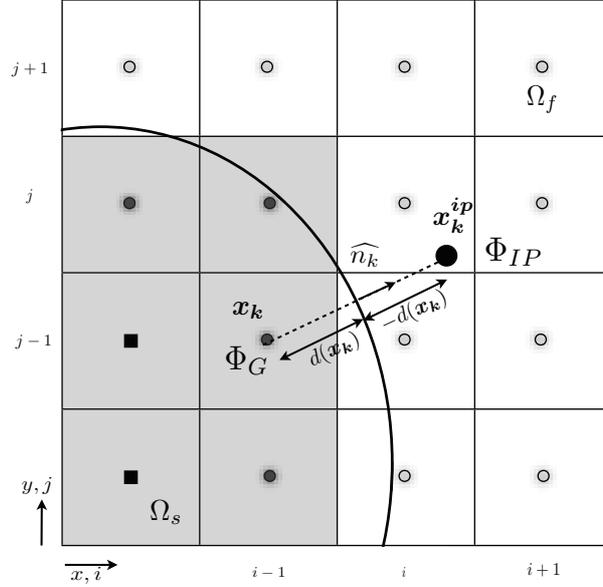
Ayant identifié les cellules fantômes, la seconde étape repose sur la dérivation d'un schéma permettant le calcul des variables fluides sur chaque cellule fantômes de sorte à ce que les conditions limites soient effectivement appliquées sur la frontière immergée. Pour ce faire, la notion de point image est introduite.

La méthode des frontières immergées permet l'étude d'objets complexes sur un maillage relativement simple. Ce maillage n'épousant pas forcément les frontières du solide, il ne détient pas l'information de la position exacte du contour de l'objet, ce qui nuit à la précision du calcul. En effet, la région de proche paroi ne pourra jamais bénéficier d'une précision supérieure à l'ordre un ce qui est particulièrement critique dans le cas d'écoulements compressibles où la précision de la région de proche paroi joue un rôle capital sur la qualité des résultats. Afin de limiter ce défaut de précision, il convient de faire intervenir des schémas d'interpolation. La précision de la modélisation de la région de proche paroi correspond alors à celle de la méthode d'interpolation choisie.

Les premiers schémas d'interpolation proposés se basaient sur la reconstruction directe du point fantôme, à partir des valeurs prises en des points les plus proches du fluide et du point d'intersection de la frontière avec la droite portée par  $\mathbf{n}$  en  $G$ . Cependant, ces méthodes se sont révélées instables numériquement en raison de la définition de poids relatifs négatifs. Pour contrecarrer cet effet, Majumdar *et al.* [247] proposent de ne plus reconstruire directement la solution au point fantôme, mais d'utiliser un point image à la cellule fantôme noté *IP* (*Image Point*), projection par rapport à la frontière immergée de la cellule fantôme. Les valeurs des variables fluides associées aux cellules fantômes sont alors déterminées à partir d'une reconstruction locale de ces cellules images. Les points impliqués dans la reconstruction étant alors répartis autour du point *IP*, les différents poids  $\omega_i$  prennent des valeurs comprises entre 0 et 1, ce qui assure la stabilité de la reconstruction.

La procédure d'initialisation, au cours de laquelle est définie la notion de distance signée, est ainsi suivie de l'identification des cellules images qui interviendront directement dans le schéma d'interpolation. Afin d'identifier les cellules images, associées aux cellules fantômes, il convient de définir la normale à la frontière immergée. Cette dernière est établie en chaque centre de cellule par :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla d(\mathbf{x}_k)}{|\nabla d(\mathbf{x}_k)|} \quad (4.12)$$



**FIGURE 4.4:** Détermination du point image (IP) associé à la cellule fantôme ( $G$ ) par la projection par rapport à la normale à la frontière immergée du point fantôme avec :  $\circ$  les cellules fluides,  $\bullet$  les cellules nécessitant une reconstruction et  $\blacksquare$  les noeuds solides.

avec  $n = (n_x, n_y, n_z)$  le vecteur normal unitaire à la frontière. La normale à la frontière est calculée numériquement à l'aide d'un schéma centrée dans  $\Omega$  et décentré sur les bords de  $\Omega$ .

Le point image associé au noeud fantôme est alors identifié sur la droite normale à la frontière, tel que la surface immergée soit équidistante des points image et fantôme, comme l'illustre la figure 4.4.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la formulation level set ne fonctionne pas pour une géométrie discontinue. A l'instar de la modification de la distance signée pour les irrégularités de surface, un traitement particulier est affecté aux éléments irréguliers, afin de déterminer la normale en ces points spécifiques. Au lieu d'utiliser l'Eq. 4.12, la normale est spécifiée comme la bissectrice de l'angle formé par les deux segments constituant le coin, comme présentée sur la figure 4.5.

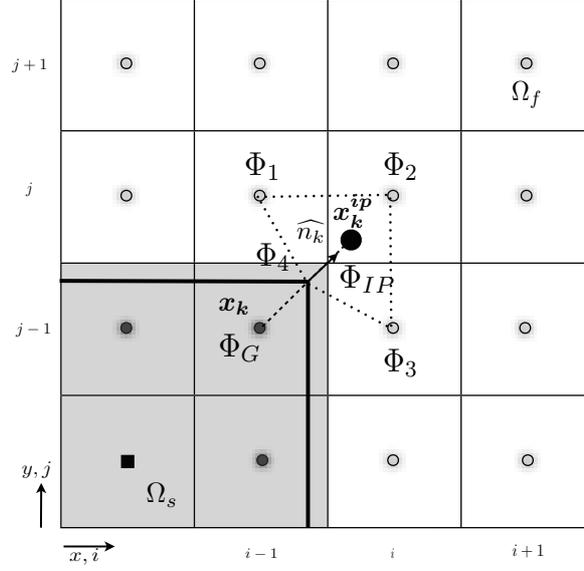
### 4.4.3 Reconstruction du point image : les interpolations polynomiales

Après avoir déterminé les coordonnées du point image que nous noterons  $(x_{IP}, y_{IP}, z_{IP})$ , il est nécessaire de reconstruire ce point image. Cette reconstruction repose sur différentes fonctions polynomiales dont le degré dépend de la précision souhaitée. La littérature fait cependant état d'une limitation dans le choix du degré des polynômes de reconstruction. En effet, un polynôme de degré élevé peut conduire à des instabilités numériques. Ainsi, nous présenterons, suivant les dimensions du plan géométrique impliqué dans la reconstruction du point fantôme, la reconstruction linéaire (monodimensionnelle), la reconstruction bilinéaire (bidimensionnelle) et trilinéaire (tridimensionnelle).

Considérons un espace 2D repéré par un système de coordonnées  $(x, y)$ . Recherchons la valeur  $\Phi$  d'une variable fluide en un point  $IP$  (Image Point), caractéristique de la cellule fantôme. Cette variable  $\Phi$  est déterminée à partir des points  $X_i (1 \leq i \leq n_i)$  pour laquelle la solution est connue sous la forme :

$$\Phi_{IP} = \sum_{i=1}^m \omega_i \Phi_i \quad (4.13)$$

Les coefficients  $\omega_i$  sont les poids relatifs de chaque point  $X_i$  intervenant dans la reconstruction du



**FIGURE 4.5:** Détermination du point image (IP) associé à la cellule fantôme ( $G$ ) pour une frontière irrégulière avec :  $\circ$  les cellules fluides,  $\bullet$  les cellules nécessitant une reconstruction et  $\blacksquare$  les noeuds solides.

point image  $IP$ . Ces coefficients ne dépendent que des coordonnées des points  $X_i$  et du point  $IP$  et sont donc calculés une seule fois dans le cas d'une simulation avec une frontière immergée immobile. Le nombre  $m$  indique le nombre de points impliqués dans la reconstruction du point fantôme et dépend du schéma d'interpolation choisi.

Le polynôme d'interpolation  $P_i(x_{IP}, y_{IP}) = \omega_i$ , de degré  $m$  doit vérifier :

$$\begin{aligned} P_i(x_i, y_i) &= 1 \\ P_i(x_j, y_j) &= 0 \quad \forall j \neq i \end{aligned} \quad (4.14)$$

Notons que, dans la méthode classique de reconstruction, le champ de vitesse dans la région solide est mis à zéro à chaque pas de temps.

#### 4.4.3.1 Approche linéaire

En 1D, cette approche se base sur une reconstruction linéaire de la valeur au point image  $IP$  avec les valeurs des deux points fluides les plus proches sur la droite portée par  $\mathbf{n}$  en  $G$  (points 1 et 2 sur la figure 4.6). Le polynôme d'interpolation linéaire en un point comporte deux constantes et s'écrit :

$$P(x) = a_1 + a_2x \quad (4.15)$$

Afin de déterminer les constantes de ce polynôme, deux points différents sont nécessaires. La relation 4.13 fournit alors :

$$\Phi_{IP} = \omega_1\Phi_1 + \omega_2\Phi_2 \quad (4.16)$$

En utilisant les relations 4.14 et 4.15, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1) &= a_1^{(1)} + a_2^{(1)} x_1 \\ &= 1 \\ P_1(x_2, y_2) &= 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ainsi, nous disposons d'un système d'équations linéaires, d'inconnues  $a_k^{(k)}$  dont l'écriture matricielle est la suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

La matrice  $\mathbf{A}$  est la matrice des coefficients du polynôme d'interpolation et  $\mathbf{V}$ , la matrice Vandermonde correspondant au schéma d'interpolation linéaire.

Par ailleurs, nous obtenons, à partir de  $P_i(x_{IP}, y_{IP}) = \omega_i$ , la relation suivante au point image  $IP$  :

$$\begin{aligned} P_1(x_{IP}, y_{IP}) &= a_1^{(1)} + a_2^{(1)} x_{IP} \\ P_1(x_{IP}, y_{IP}) &= \omega_1 \end{aligned}$$

Soit, en effectuant la même opération pour les polynôme  $P_2(x_{IP}, y_{IP})$ , le système matriciel suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^T} \begin{pmatrix} 1 \\ x_{IP} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

Ainsi, la connaissance de la matrice  $\mathbf{A}$  à partir du système 4.18, ainsi que des coordonnées du point image  $IP$ , permet le calcul des différents poids relatifs (Eq. 4.19) intervenant dans la reconstruction du point image (Eq. 4.16).

Notons que deux configurations peuvent être rencontrées lorsque l'on utilise un schéma linéaire :

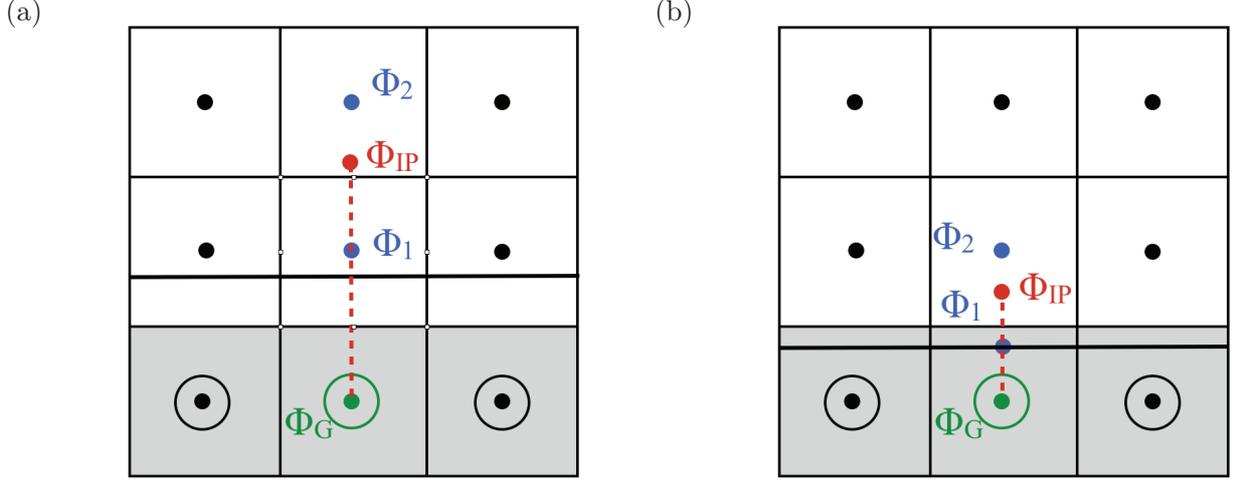
- Les deux cellules intervenant dans le schéma sont fluides (figure 4.6 (a)). Le système utilisé est inchangé.
- Une des deux entités est la cellule fantôme elle-même. Dans ce cas, le système se retrouve mal posé et l'on remplace, dès lors, la cellule fantôme par la valeur sur la frontière résultant de l'intersection de la frontière immergée et de la droite portée par la normale en la cellule fantôme (figure 4.6 (b)).

#### 4.4.3.2 Approche bilinéaire

Dans le cas de l'interpolation bilinéaire, le polynôme d'interpolation prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (c_1 + c_2 x)(c_3 + c_4 y) \\ &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \end{aligned} \tag{4.20}$$

Afin de déterminer les quatre constantes du polynôme  $a_{i=1,4}$ , quatre points sont nécessaires dans le schéma d'interpolation. A l'instar de la reconstruction linéaire, les relations 4.14 et 4.20



**FIGURE 4.6:** Interpolation linéaire. (a) Cas où les deux cellules sont fluides. (b) Cas où une cellule de reconstruction est la cellule fantôme avec :  $\circ$  pour les cellules fluides,  $\bullet$  les noeuds fantômes où la solution fluide doit être reconstruite et  $\blacksquare$  les noeuds solides.

fournissent :

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1) &= a_1^{(1)} + a_2^{(1)} x_1 + a_3^{(1)} y_1 + a_4^{(1)} x_1 y_1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$P_1(x_2, y_2) = 0$$

$$P_1(x_3, y_3) = 0$$

$$P_1(x_4, y_4) = 0$$

Nous obtenons alors le système matriciel :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & a_1^{(4)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & a_2^{(4)} \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & a_3^{(4)} \\ a_4^{(1)} & a_4^{(2)} & a_4^{(3)} & a_4^{(4)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

ce qui nous donne la relation suivante pour les poids :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & a_1^{(4)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & a_2^{(4)} \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & a_3^{(4)} \\ a_4^{(1)} & a_4^{(2)} & a_4^{(3)} & a_4^{(4)} \end{pmatrix}^T}_{\mathbf{A}^T = (\mathbf{V}^{-1})^T} \begin{pmatrix} 1 \\ x_{IP} \\ y_{IP} \\ x_{IP} y_{IP} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

La valeur au point image de la variable générique  $\Phi_{IP}$  s'obtient alors à l'aide des coefficients constituant la matrice  $\mathbf{W}$  et des valeurs de la variable générique en quatre points qui appartiennent soit au fluide, soit à la frontière ( $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ ) :

$$\Phi_{IP} = \omega_1 \Phi_1 + \omega_2 \Phi_2 + \omega_3 \Phi_3 + \omega_4 \Phi_4. \quad (4.23)$$

Suivant la disposition de la cellule image par rapport à la frontière immergée, trois configurations peuvent être rencontrées :

- Les quatre cellules intervenant dans la reconstruction de la cellule image sont fluides (Figure 4.7 (a)). Le schéma utilisé pour déterminer la valeur de la grandeur  $\Phi$  au point image est celui indiqué par l'équation 4.23 avec les différents points calculés à partir du système 4.22.
- Un des quatre points avoisinants la cellule image est le point image lui-même (Figure 4.7 (b)). Le schéma d'interpolation 4.22 ainsi constitué de la cellule fantôme est mal posé. Pour contrer cette difficulté, Ghias *et al.* [130] proposent d'utiliser le point interceptant la frontière immergée et la droite portée par la normale à la cellule fantôme. Ainsi pour fermer le système 4.22, nous utilisons les conditions limites sur ce point de la frontière ainsi que les valeurs nodales des trois autres points.
- Le stencil d'interpolation comporte des cellules fantômes autres que celles dont nous recherchons le point image associé (Figure 4.7 (c)). Dans ce cas, nous modifions le stencil d'interpolation de sorte à remplacer, comme précédemment, le point immergé fantôme par l'intersection à la frontière immergée.

Revenons sur la nécessité d'introduire un point image dans le polynôme d'interpolation. Les difficultés rencontrées, dans le cas d'une interpolation directement appliquée au point fantôme  $G$ , reposaient d'une part sur un mauvais conditionnement de la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}$  ainsi que sur l'inversion délicate de cette dernière mais aussi sur des poids négatifs ou très grands, instables numériquement, puisque le point fantôme  $G$ , objet de l'interpolation, se retrouve en dehors de l'aire du quadrilatère d'interpolation  $X_1X_2X_3X_4$ . C'est la raison pour laquelle Majumdar *et al.* [247] introduisent la notion de point image, afin d'assurer la présence de poids stables dans le schéma de reconstruction.

#### 4.4.3.3 Approche trilinéaire

Pour l'approche trilinéaire, le polynôme d'interpolation prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 P(x, y) &= (c_1 + c_2x)(c_3 + c_4y)(c_5 + c_6z) \\
 &= \underbrace{c_1c_3c_5}_{a_1} + \underbrace{c_2c_3c_5}_{a_2}x + \underbrace{c_1c_4c_5}_{a_3}y + \underbrace{c_1c_3c_6}_{a_4}z + \\
 &\quad \underbrace{c_2c_4c_5}_{a_5}yx + \underbrace{a_2a_3a_6}_{a_6}xz + \underbrace{a_1a_4a_6}_{a_7}yz + \underbrace{a_2a_4a_6}_{a_8}xyz \\
 P(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6xz + a_7yz + a_8xyz
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

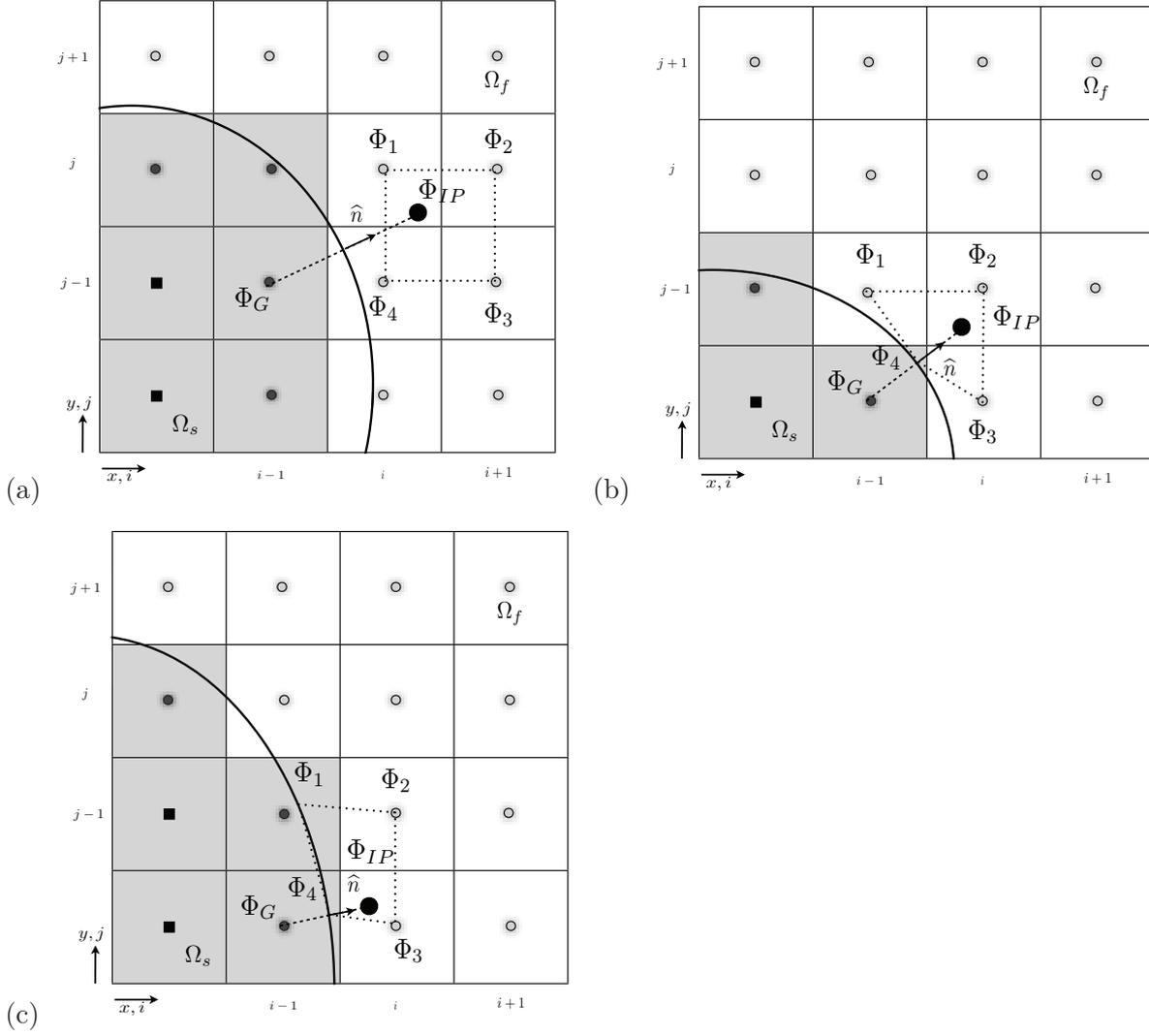
Le point image est exprimé en fonction de huit cellules fluides :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{IP} &= \omega_1\Phi_1 + \omega_2\Phi_2 + \omega_3\Phi_3 + \omega_4\Phi_4 + \\
 &\quad \omega_5\Phi_5 + \omega_6\Phi_6 + \omega_7\Phi_7 + \omega_8\Phi_8
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

dont les poids relatifs sont évalués après l'inversion du système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \\ \omega_8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & a_1^{(4)} & a_1^{(5)} & a_1^{(6)} & a_1^{(7)} & a_1^{(8)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & a_2^{(4)} & a_2^{(5)} & a_2^{(6)} & a_2^{(7)} & a_2^{(8)} \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & a_3^{(4)} & a_3^{(5)} & a_3^{(6)} & a_3^{(7)} & a_3^{(8)} \\ a_4^{(1)} & a_4^{(2)} & a_4^{(3)} & a_4^{(4)} & a_4^{(5)} & a_4^{(6)} & a_4^{(7)} & a_4^{(8)} \\ a_5^{(1)} & a_5^{(2)} & a_5^{(3)} & a_5^{(4)} & a_5^{(5)} & a_5^{(6)} & a_5^{(7)} & a_5^{(8)} \\ a_6^{(1)} & a_6^{(2)} & a_6^{(3)} & a_6^{(4)} & a_6^{(5)} & a_6^{(6)} & a_6^{(7)} & a_6^{(8)} \\ a_7^{(1)} & a_7^{(2)} & a_7^{(3)} & a_7^{(4)} & a_7^{(5)} & a_7^{(6)} & a_7^{(7)} & a_7^{(8)} \\ a_8^{(1)} & a_8^{(2)} & a_8^{(3)} & a_8^{(4)} & a_8^{(5)} & a_8^{(6)} & a_8^{(7)} & a_8^{(8)} \end{pmatrix}^T}_{\mathbf{A}^T=(\mathbf{V}^{-1})^T} \begin{pmatrix} 1 \\ x_{IP} \\ y_{IP} \\ z_{IP} \\ x_{IP}y_{IP} \\ x_{IP}z_{IP} \\ y_{IP}z_{IP} \\ x_{IP}y_{IP}z_{IP} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

La matrice carrée  $\mathbf{A}$  est inversée à l'aide de l'élimination de Gauss-Jordan ou méthode du pivot de Gauss.



**FIGURE 4.7:** Interpolation bilinéaire. (a) Cas où les quatre cellules sont fluides. (b) Cas où une cellule est la cellule fantôme elle-même. (c) Cas où interviennent d'autres cellules fantômes avec :  $\circ$  les cellules fluides,  $\bullet$  les noeuds fantômes où la solution fluide doit être reconstruite et  $\blacksquare$  les noeuds solides.

#### 4.4.3.4 Reconstruction quadratique

Afin d'augmenter la précision de la reconstruction, il est possible de développer une interpolation quadratique où les variables de l'écoulement sont supposées varier de façon quadratique à proximité de la frontière. Le polynôme quadratique est alors défini, pour un cas 2D, comme

$$P(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \quad (4.27)$$

Ainsi, la reconstruction quadratique en 2D se base sur six points. Pour une configuration tridimensionnelle, le stencil devient rapidement coûteux.

Néanmoins, les études relatives à ce schéma de reconstruction révèlent que les poids ne sont plus assurément compris entre 0 et 1 ce qui conduit à une implémentation plutôt instable de la reconstruction quadratique. En particulier, cette méthode soulève de nombreux problèmes aux frontières du domaine de calcul. La parallélisation d'une telle méthode est également particulièrement complexe en raison du nombre élevé d'informations à transférer entre processus. Ainsi, la reconstruction bilinéaire ou trilineaire est souvent préférée.

#### 4.4.3.5 Reconstruction d'ordre élevée

D'autres types de reconstruction polynomiale, d'ordre plus élevé, sont envisageables. Néanmoins, à mesure que l'on augmente l'ordre de reconstruction, on accroît le risque d'instabilités et le temps CPU lié aux échanges entre processeurs.

Dans cette optique de gain de précision, Luo *et al.* [241] proposent d'utiliser un polynôme de troisième ordre pour reconstruire le point image pour des applications biomédicales. Le choix des cellules encadrantes s'effectue sur la base de cercles concentriques de rayons croissants de sorte à minimiser un critère de moindres carrés. Ils obtiennent ainsi, pour une étude 3D, un nombre de cellules minimal de 20 pour reconstruire le point image. Une telle méthode devient donc rapidement coûteuse en terme de stockage et de temps CPU (échange de données aux interfaces des processus) pour le faible gain apporté en termes de précision. En effet, au voisinage d'un mur, l'ordre des schémas numériques est souvent dégradé. Un schéma d'interpolation polynomiale de second ordre est ainsi suffisant à la description de la proche paroi.

#### 4.4.3.6 Comparaison des différentes reconstruction polynomiales

Majumdar *et al.* [247], en comparant les reconstructions linéaires, bilinéaires et quadratiques pour des simulations 2D de type RANS soulignent des résultats concordants. De même, Tseng et Ferziger [377], en étudiant les différences entre les reconstructions bilinéaires et quadratiques, dans le cadre de l'écoulement autour d'un cylindre pour différents nombres de Reynolds, révèlent que les résultats diffèrent peu avec l'ordre de la reconstruction. Néanmoins, ces travaux [247, 377] montrent que la précision du schéma influence les résultats dès lors que l'on s'intéresse de près à la couche limite autour d'un objet immergé.

Verzicco *et al.* [388] obtiennent une bonne précision avec l'approche linéaire lorsque la frontière immergée est alignée avec les lignes du maillage. Néanmoins, pour des surfaces courbes, un schéma de reconstruction plus complexe est requis.

#### 4.4.3.7 Un autre schéma de reconstruction : la pondération par l'inverse des distances

Un autre schéma de reconstruction de la cellule fantôme consiste en une pondération par l'inverse des distances. Cette méthode s'avère plutôt efficace pour de faibles variations à proximité de la frontière. Elle évite la formation d'oscillations parasites et la présence d'extrema erronées qui accompagnent souvent les reconstructions polynomiales d'ordre élevé. Franke [124] propose l'écriture suivante afin d'obtenir directement la variable  $\Phi$  au point fantôme  $G$  :

$$\Phi_G = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i \Phi_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i} \quad (4.28)$$

avec  $\omega_i$  le poids relatif du point  $i$  défini par

$$\omega_i = \left( \frac{H - h_i}{H h_i} \right)^p \quad (4.29)$$

Le paramètre  $m$  quantifie le nombre de points  $X_i$  impliqués dans la reconstruction,  $h_i$  représente la distance entre les points  $X_i$  et  $G$ ,  $H$  est le maximum de ces distances et le paramètre puissance  $p$  est pris généralement égal à 2.

Cette interpolation peut supporter n'importe quel nombre de points (traduit par  $m$ ) ; les poids relatifs  $\omega_i$  varient toujours entre 0 et 1. Les études relatives à cette méthode de reconstruction révèlent, néanmoins, que prendre un nombre de points supérieur à 4 ne modifie plus, de manière significative, la valeur  $\Phi_G$  recherchée. C'est la raison pour laquelle, de nombreux auteurs se basent sur une pondération par l'inverse des distances sur quatre cellules.

De Tullio *et al.* [94, 93] montrent, en usant de techniques de raffinement localisé, que la technique d'interpolation basée sur une pondération des distances est précise en second ordre. De même, Iaccarino *et al.* [183] modélisent avec succès divers écoulements incompressibles (en particulier autour d'un cylindre, d'un canal ondulé, d'un assemblage piston-cylindre . . .) avec cette méthode de pondération par l'inverse des distances.

Dans le présent manuscrit, les reconstructions polynomiales sont préférées aux pondérations par l'inverse des distances.

#### 4.4.3.8 Implémentation d'une reconstruction polynomiale

Dans le cadre de notre étude, nous avons implémenté les approches linéaires, bilinéaires et trilineaires. L'approche quadratique est écartée puisqu'elle s'est révélée particulièrement instable au cours des essais de modélisation d'objets immergés. Un algorithme est intégré afin de choisir les points intervenant dans la reconstruction, en fonction de la position des cellules image et fantôme (deux points pour une interpolation linéaire, quatre pour une reconstruction bilinéaire et huit pour une reconstruction trilineaire). Dans certaines situations, un polynôme de degré important peut s'avérer inadapté, par exemple, à proximité des frontières du domaine où le nombre de points disponibles est insuffisant.

#### 4.4.4 Reconstruction du point fantôme

Pour notre étude, nous nous sommes concentrés sur la technique de la cellule fantôme en utilisant des schémas d'interpolations polynomiales pour lesquels l'ordre est adapté à la configuration spatiale de l'étude. Avec cette approche, toutes sortes de conditions limites peuvent être imposées à la frontière immergée. Nous détaillerons les procédures servant à imposer des conditions de type Dirichlet et de type Neumann [241]. Ces procédures peuvent être étendues afin de décrire des conditions mixtes pouvant intervenir dans les écoulements réactifs (*cf.* Tseng *et al.* [377]).

Pour les écoulements qui nous intéressent (corps solides immobiles), le schéma d'interpolation introduit afin de décrire la présence du solide dans l'écoulement, doit assurer la condition d'adhérence aux parois, avec un champ de vitesse nul sur l'objet solide (condition de type Dirichlet). En ce qui concerne la température et la pression, usant de parois adiabatiques, il est nécessaire d'imposer la valeur du gradient normal à la surface immergée.

##### 4.4.4.1 Conditions limites de type Dirichlet

Ayant déterminé la valeur de la variable générique au point image, il nous faut dériver un schéma afin d'imposer, à la cellule fantôme, la valeur permettant le respect de la condition limite sur la frontière immergée. La première étape consiste à prendre le point situé sur la frontière immergée qui est le plus proche du centre de la cellule fantôme. Ce point est déterminé par l'intersection de la droite portée par la normale à la cellule fantôme et de la frontière immergée; et est noté *BI* (*Body Intercept*). C'est en ce point que la condition limite est satisfaite.

$$\Phi_{BI} = \Phi_0 \tag{4.30}$$

Afin de décrire la condition limite de type Dirichlet, la solution est supposée varier linéairement selon la direction normale à la paroi immergée. Ainsi, nous avons, pour une grandeur fluide  $\Phi$  dont le comportement limite est décrit par une condition de type Dirichlet, la relation suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{BI} &= \frac{\Phi_G + \Phi_{IP}}{2} \\ \text{soit } \Phi_G &= 2\Phi_{BI} - \Phi_{IP} \end{aligned} \tag{4.31}$$

En remplaçant la valeur du point image par son expression polynomiale en fonction des points intervenant dans la reconstruction, il vient :

$$\begin{aligned}\Phi_{BI} &= \frac{\Phi_G + \Phi_{IP}}{2} \\ \text{soit } \Phi_G &= 2\Phi_{BI} - \sum_{i=1}^m \omega_i \Phi_i\end{aligned}\quad (4.32)$$

avec  $m$  le nombre de points intervenant dans la reconstruction ( $m = 2/4/8$ ). Cette expression est valable uniquement si les  $m$  points de l'interpolation polynomiale sont fluides. Lorsque le stencil de reconstruction du point image inclut un ou plusieurs points sur la frontière immergée, l'équation précédente 4.32 doit être modifiée.

### Cas particulier avec un point de reconstruction sur la frontière immergée

Considérons un exemple bidimensionnel reposant sur une reconstruction bilinéaire où la valeur  $\Phi_{IP}$  associée à la cellule image est déterminée à partir de quatre points. Supposons que le premier point appartienne au volume immergé (cellule fantôme). Il est substitué par le point le plus proche sur la frontière et noté  $BI$  (*Body Intercept*). Les trois autres points fluides sont identifiés par des indices compris entre 2 à 4. La valeur sur la frontière est connue (condition limite). Le polynôme au point  $BI$  nécessite la connaissance des coordonnées  $(x_{BI}, y_{BI})$  évaluée à partir de la distance signée et de la normale à la frontière :

$$\mathbf{x}_{BI} = \mathbf{x}_{i,j} - d(\mathbf{x}_{i,j})\mathbf{n}_{i,j}\quad (4.33)$$

où le vecteur  $\mathbf{x}_{i,j}$  réunit les coordonnées du point appartenant au volume immergé avant substitution.

Les coordonnées du point sur la frontière ainsi que la valeur cible sur la paroi étant connues, le système 4.21 est modifié pour inclure les coordonnées du point sur la frontière ( $BI$ ) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_{BI} & y_{BI} & x_{BI}y_{BI} \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & a_1^{(4)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & a_2^{(4)} \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & a_3^{(4)} \\ a_4^{(1)} & a_4^{(2)} & a_4^{(3)} & a_4^{(4)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (4.34)$$

Pour fermer le problème sur la frontière immergée, le système linéaire à résoudre est le suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & a_1^{(4)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & a_2^{(4)} \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & a_3^{(4)} \\ a_4^{(1)} & a_4^{(2)} & a_4^{(3)} & a_4^{(4)} \end{pmatrix}^T}_{\mathbf{A}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \\ x_I y_I \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}\quad (4.35)$$

L'inversion du système  $\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{B}$  avec l'algorithme de Gauss Jordan fournit alors le vecteur des poids relatifs :

$$\begin{pmatrix} \omega_{BI} \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 1 & x_{BI} & y_{BI} & x_{BI}y_{BI} \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T \begin{pmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \\ x_I y_I \end{pmatrix}\quad (4.36)$$

Le champ fluide associé à la cellule fantôme (Eq. 4.32) est alors exprimé sous la forme :

$$\Phi_G = 2\Phi_{BI} - \omega_{BI}\Phi_{BI} - \omega_2\Phi_2 - \omega_3\Phi_3 - \omega_4\Phi_4\quad (4.37)$$

$$\Phi_G = (2 - \omega_{BI})\Phi_{BI} - \omega_2\Phi_2 - \omega_3\Phi_3 - \omega_4\Phi_4\quad (4.38)$$

## 4.4.4.2 Conditions limites de type Neumann

Le point appartenant à la frontière (noté  $BI$ ) est le point où s'applique directement la condition limite de Neumann exprimée sous la forme :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi)_{BI} = \Psi \quad (4.39)$$

avec  $\Psi$  la valeur du gradient de la variable générique  $\Phi$  à imposer sur la frontière. Pour évaluer le champ fluide associé à la cellule fantôme, ce gradient est approximé avec un schéma de premier ordre décentré :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_k} = \frac{\Phi_{IP} - \Phi_G}{2|d(x_k^G)|} \quad (4.40)$$

avec  $d(x_k^G)$  la distance signée selon la  $k$ -ième direction en  $G$  ( $d(x_k^G) = d(\mathbf{x}^G) \cdot \mathbf{n}$ ) qui représente la distance entre la frontière et le centre de la cellule fantôme. La distance signée étant de signe négatif pour les cellules immergées, cette relation devient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\Phi_G - \Phi_{IP}}{2d(x_k^G)} \quad (4.41)$$

soit :

$$\Phi_G = 2d(x_k^G) \frac{\partial \Phi_{BI}}{\partial n_k} + \omega_1 \Phi_1 + \omega_2 \Phi_2 + \omega_3 \Phi_3 + \omega_4 \Phi_4 \quad (4.42)$$

**Cas particulier avec un point de reconstruction sur la frontière**

Considérons le cas d'une reconstruction bilinéaire pour laquelle le premier point du stencil d'interpolation est une cellule immergée. Comme nous l'avons vu précédemment, la cellule immergée est remplacée par le point identifié comme l'intersection de la frontière immergée avec la droite portée par la normale. En utilisant la même notation que le cas avec la condition de type Dirichlet, le point modifié est noté  $BI$  (*Body Intercept*) et les trois autres points fluides sont repérés par des indices allant de 2 à 4. Ne connaissant que le flux limite (condition de type Neumann), le polynôme associé au point  $BI$  est modifié. En particulier, le gradient du polynôme d'interpolation est considéré.

Le gradient d'une variable  $\Phi$  dans la direction normale à la paroi est exprimé sous la forme :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma}$$

En décomposant la dérivée dans la base  $(x, y,)$  pour le cas bidimensionnel, il vient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y \quad (4.43)$$

Les valeurs des composantes  $n_x$  et  $n_y$  de la normale en un point  $BI$  appartenant à la frontière immergée se déterminent à partir de la relation Eq. 4.12. Le gradient normal du polynôme d'interpolation s'écrit alors :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial x} n_x + \frac{\partial P}{\partial y} n_y \quad (4.44)$$

En remplaçant les dérivées partielles par leurs expressions en fonction des coefficients  $a_i$ , il vient :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial n} = (a_2 + a_4 y) n_x + (a_3 + a_4 x) n_y \quad (4.45)$$

Le polynôme d'interpolation exprimant la valeur du gradient vérifie toujours :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{BI}}{\partial n}(x_{BI}, y_{BI}) &= 1 \\ \frac{\partial P_{BI}}{\partial n}(x_j, y_j) &= 0 \quad \forall j \neq BI \end{aligned} \quad (4.46)$$

Le point sur la frontière étant repéré à l'aide de la normale à la frontière, le système 4.21 est modifié pour inclure l'expression du gradient du polynôme d'interpolation :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & x_{BI}n_y + y_{BI}n_x \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & a_1^{(4)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & a_2^{(4)} \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & a_3^{(4)} \\ a_4^{(1)} & a_4^{(2)} & a_4^{(3)} & a_4^{(4)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Pour fermer le problème sur la frontière immergée, le système linéaire à résoudre est le suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & a_1^{(4)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} & a_2^{(4)} \\ a_3^{(1)} & a_3^{(2)} & a_3^{(3)} & a_3^{(4)} \\ a_4^{(1)} & a_4^{(2)} & a_4^{(3)} & a_4^{(4)} \end{pmatrix}^T}_{\mathbf{A}^T} \begin{pmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \\ x_I y_I \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

En modifiant la matrice  $\mathbf{A}$  pour inclure le point frontalier, il vient ainsi :

$$\begin{pmatrix} \omega_{BI} \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y & x_{BI}n_y + y_{BI}n_x \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{pmatrix}^{-1} \right)^T \begin{pmatrix} 1 \\ x_I \\ y_I \\ x_I y_I \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

La relation 4.42 s'écrit alors :

$$\Phi_G = 2d(x_k^G) \frac{\partial \Phi_{BI}}{\partial n_k} + \omega_{BI} \frac{\partial \Phi_{BI}}{\partial n_k} + \omega_2 \Phi_2 + \omega_3 \Phi_3 + \omega_4 \Phi_4 \quad (4.50)$$

soit :

$$\Phi_G = (2d(x_k^G) + \omega_{BI}) \frac{\partial \Phi_{BI}}{\partial n_k} + \omega_2 \Phi_2 + \omega_3 \Phi_3 + \omega_4 \Phi_4 \quad (4.51)$$

Au vu de cet exposé, le calcul des conditions limites sur le corps immergé nécessite le calcul et le stockage de deux jeux de coefficients (pour la condition de Dirichlet et de Neumann) pour chaque cellule fantôme. Afin d'estimer correctement les flux numériques des cellules fluides à proximité de la frontière immergée, le vecteur des variables primitives associé à la cellule fantôme est rafraîchi à chaque étape du schéma temporel de Runge Kutta.

#### 4.4.4.3 Précision des schémas de conditions limites

Alors que la condition limite IBM de type Dirichlet fournit une précision de second ordre, la condition de type Neumann est localement de premier ordre mais globalement de second ordre, comme le démontrent Mittal *et al.* [259].

La condition de Dirichlet voit ses limites dans l'approximation linéaire du comportement proche paroi. En effet, à proximité de la paroi, le profil de vitesse imposé via la condition de Dirichlet est supposé linéaire, ce qui nécessite un maillage relativement fin à proximité du corps immergé afin de conserver un degré de précision convenable. Pour les géométries complexes, les maillages cartésiens structurés ne permettent pas toujours un raffinement local et, dès lors, l'hypothèse de linéarité du profil induit un biais non négligeable si l'on s'intéresse à la dynamique proche paroi.

Afin de résoudre correctement l'écoulement turbulent en proche paroi, les points adjacents à la frontière effective doivent se situer dans la sous-couche visqueuse. Ainsi, les composantes du vecteur

vitesse peuvent être déterminées à l'aide d'une interpolation linéaire. Lorsque cette condition est remplie, Iaccarino et Verzicco [183] obtiennent de bons résultats avec un simple schéma d'interpolation linéaire, pour des écoulements avec un nombre de Reynolds élevé interagissant avec une surface complexe. Lorsque la résolution est marginale, le traitement conventionnel de l'écoulement fluide peut nécessiter une loi de paroi. On comprend aisément qu'une simple interpolation linéaire ne pourra fournir des résultats précis dans ce cas. Pour minimiser cette dégradation de la solution, Majumdar *et al.* [247] utilisent des interpolations d'ordre élevé, et en particulier pour la composante normale. Dans le cadre d'une LES peu résolue, Capizzano [66] propose ainsi d'intégrer, au schéma d'interpolation, une loi de paroi établie pour des équations RANS.

Afin d'assurer un niveau de raffinement satisfaisant et donc une condition de Dirichlet moins restrictive, Fadlun *et al.* [114] proposent de combiner les approches de maillages localisés (les méthodes *B-Splines* de Shariff *et al.* [338] et Kravchenko *et al.* [207]) et du forçage direct. Néanmoins, il convient de vérifier que le rapport coût/bénéfice rend toujours la technique des frontières immergées avantageuse par rapport aux méthodes sur maillages non structurés ou sur maillages structurés conformes à la géométrie et développés en coordonnées curvilignes. Dans cette optique d'optimisation du maillage cartésien, afin de mieux répondre aux exigences de raffinement en proche paroi, De Tullio *et al.* [94, 93] combinent avec succès une technique de raffinement localisé avec la méthode des cellules fantômes, afin de décrire des écoulements compressibles sur une large gamme de nombres de Mach en résolvant les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS).

Afin de contrôler, de manière optimale, la résolution du maillage dans des régions localisées telles que les couches limites, Ghias *et al.* [130] optent pour l'expression de la méthode de la cellule fantôme sur un maillage curvilinéaire.

Choi *et al.* [76] proposent d'utiliser des interpolations séparées pour les composantes tangentes et normales à la surface. La vitesse tangentielle proche paroi est construite sur la base d'une fonction puissance de la distance locale normale à la paroi. L'usage d'une loi de puissance appropriée aux écoulements à nombre de Reynolds élevé a permis l'approximation des effets d'une couche limite turbulente ( $Re = 5 \times 10^5$  et  $Re = 10^9$ ) autour d'un profil *NACA 0012*. Leur étude comparative de la reconstruction de la vitesse, à l'aide d'une loi linéaire ou de puissance, a révélé que cette décomposition et ce traitement de la composante tangentielle influençaient de manière non négligeable les résultats.

Dans notre implémentation, nous n'intégrons pas ces méthodologies basées sur un traitement différent des composantes de vitesse ou sur un maillage raffiné. Les tests présentés par la suite montrent la validité de la méthode, sans l'usage de ces approches complexes.

### 4.4.5 Résumé de l'implémentation de la méthode des frontières immergées

Cette section a pour objectif de reprendre les principales étapes pour l'implémentation de la cellule fantôme. Ces étapes sont regroupées en deux parties : la première étant effectuée une seule fois avant le début des itérations et la seconde réalisée à chaque sous-étape du schéma temporel.

#### 4.4.5.1 Etapes préliminaires

- 1) Description analytique de la géométrie.
- 2) Détermination des distances signées.
- 3) Identification des cellules fantômes, solides et fluides.
- 4) Evaluation ou prescription des normales aux surfaces.
- 5) Renormalisation éventuelle des vecteurs normaux.
- 6) Identification des cellules images.
- 7) Recherche des 2/4/8 noeuds (fluides ou fantômes) intervenant dans le schéma de reconstruction.

- 8) Recherche des coordonnées des points du polynôme d'interpolation. Si l'un de ces points constitue une cellule fantôme, on le remplace par sa projection sur la frontière immergée. Ses coordonnées sont alors évaluées à l'aide de la relation 4.33.
- 9) Evaluation des vecteurs des poids relatifs pour une condition de type Dirichlet et de type Neumann ( $\omega$ ) à l'aide de la méthode du pivot de Gauss avec la relation 4.26. Les systèmes linéaires sont en effet différents dès lors qu'un point d'interpolation est considéré sur la paroi. Pour une condition de type Dirichlet, les coordonnées du point sur la frontière ( $BI$ ) sont directement introduits dans la matrice des coefficients  $a_i$ , alors que la condition de type Neumann requiert l'expression du gradient normal du polynôme d'interpolation.

#### 4.4.5.2 Etapes nécessaires à chaque sous-étape du schéma temporel

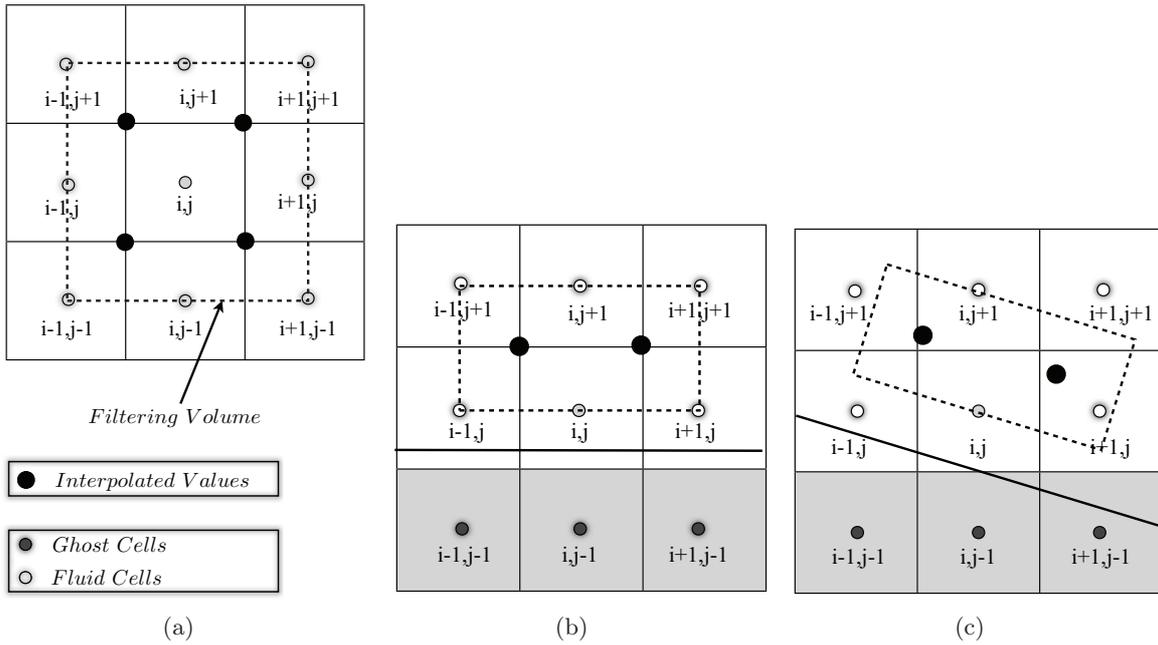
- 10) Evaluation des gradients et des flux nécessaires à l'intégration des volumes fluides contiguës à la frontière avec des schémas décentrés et/ou dégradés.
- 11) Dès lors que le vecteur des grandeurs primitives associé au point image est évalué, on reconstruit les conditions de type Dirichlet et de type Neumann pour fermer le problème physique sur les frontières immergées (*cf.* Eq. 4.42 et 4.32) .

## 4.5 Couplage frontières immergées-simulation des grandes échelles

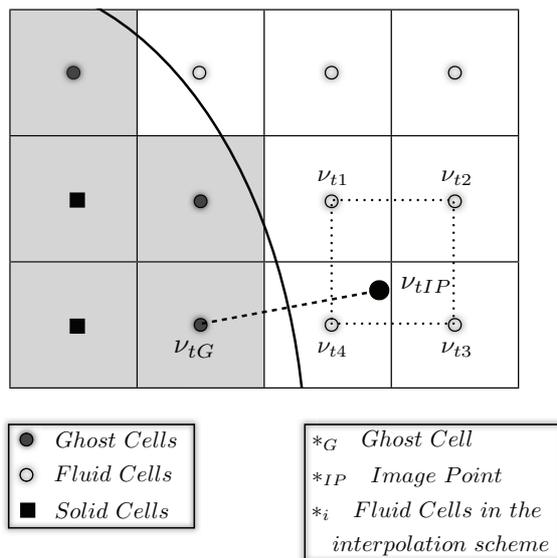
La combinaison d'une méthode de frontières immergées et de la simulation des grandes échelles est étudiée par différents auteurs ([114, 196, 183, 378, 16, 150, 380]). Un soin particulier doit être apporté au couplage modèles de sous-maille et des cellules fantômes.

Afin d'estimer le coefficient dynamique qui apparaît dans les modèles de viscosité turbulente, les champs résolus sont filtrés avec un opérateur de filtrage discret de largeur  $2\Delta$ , avec  $\Delta$  le filtre implicite du maillage. Cet opérateur de filtrage est décrit par une loi des trapèzes (Zang [413]) généralisée pour l'application sur un maillage cartésien non uniforme. Cette opération doit être modifiée en proche paroi afin de ne pas inclure des noeuds solides dans le schéma de filtrage discret. Les quantités filtrées au voisinage de la frontière immergée sont ainsi estimées en dégradant le volume de filtrage. Plus précisément, l'opérateur de filtrage tridimensionnel se réduit à un traitement bi-dimensionnel dans le plan parallèle à la frontière immergée, comme exposé sur la figure 4.8. Cette opération peut néanmoins introduire des erreurs de commutation puisque le filtre devient anisotrope. De manière similaire, la construction lagrangienne le long d'une particule fluide est dégradée à proximité des frontières immergées.

La viscosité turbulente est requise par toute cellule fluide ou fantôme afin d'estimer les flux diffusifs. Pour les cellules fantômes, au lieu de déduire la viscosité turbulente de l'opération de filtrage explicite, la viscosité turbulente associée est considérée égale à celle de la cellule image (condition de type Neumann). En effet, l'utilisation d'une condition de type Dirichlet avec une viscosité turbulente nulle sur la frontière conduirait à une viscosité négative dans la cellule fantôme et représenterait ainsi un phénomène de backscatter. La viscosité turbulente associée au point image est évaluée à l'aide d'un schéma d'interpolation comme illustrée sur la figure 4.9.



**FIGURE 4.8:** Volume d'intégration du schéma de filtrage explicite test en 2D. (a) : Dans la région fluide. (b) : A proximité d'un mur horizontal immergé. (c) : A proximité d'un mur incliné par rapport au maillage.



**FIGURE 4.9:** Procédure d'interpolation de la viscosité turbulente associée à la cellule fantôme en deux dimensions (interpolation bilinéaire).

## 4.6 Couplage frontières immergées - combustion turbulente (PCM-FPI)

Pour les applications réactives, nous utilisons la méthode PCM-FPI qui introduit quatre nouvelles grandeurs  $\widetilde{Z}$ ,  $Z_v$ ,  $\widetilde{Y}_c$  et  $\widetilde{Y}_c\widetilde{Y}_c$ . Pour fermer le problème mathématique sur les cellules frontalières, ces grandeurs doivent être spécifiées. En particulier, pour la fraction de mélange  $\widetilde{Z}$  et sa variance  $Z_v$ , nous choisissons d'appliquer des conditions de type Neumann avec un flux nul de ces grandeurs au travers de la frontière alors que pour la variable de progrès  $Y_c$  et son carré filtré  $\widetilde{Y}_c\widetilde{Y}_c$ , nous proposons l'utilisation de conditions de type Dirichlet avec une valeur cible nulle.

Dès lors que l'on dispose de ces grandeurs, on recherche dans la table le vecteur des compositions qui, combiné avec la température et la pression, fournit l'énergie totale.

## 4.7 Validations des Frontières Immergées

Afin de valider la précision des reconstructions inhérentes aux frontières immergées et en particulier au niveau des couches limites, différents cas tests sont étudiés. Les sillages de cylindres de section circulaire ou cubique dans des écoulements turbulents faiblement compressibles sont ainsi simulés. Nous démontrerons ainsi le potentiel de la méthode des frontières immergées à décrire des écoulements turbulents du niveau de résolution le plus fin (DNS), au niveau intermédiaire (LES). La méthode de la cellule fantôme est également évaluée en terme de conservation de la masse et d'impédance acoustique du mur. Une méthode de frontières immergées conservative est ensuite proposée afin de réduire d'avantage l'erreur sur la conservation de la masse lors de l'étude de configurations confinées sur des maillages grossiers.

La prise en compte de parois non adiabatiques, avec une méthode de frontières immergées, est également considérée avec la modélisation de flux, pour l'application d'une machine à compression rapide (*cf.* Publication soumise dans *Combustion and Flame*).

### 4.7.1 Simulation numérique directe du sillage d'un cylindre non confiné

Pour valider l'implémentation de la méthode de la cellule fantôme dans le code de calcul SiTCom, le sillage d'un cylindre de section circulaire est simulé dans une configuration non confinée. Ce premier cas test, réalisé en 2D, est étudié dans le cadre d'une simulation numérique directe<sup>2</sup>. Cet écoulement turbulent est caractérisé par un nombre de Reynolds de  $Re_d = 300$ , où  $Re_d$  est défini sur la vitesse de l'écoulement libre  $U_\infty$  et sur le diamètre du cylindre  $d$  :

$$Re_d = \frac{U_\infty d}{\nu} \quad (4.53)$$

Cette configuration nous a permis de comparer directement les résultats numériques aux précédentes investigations expérimentales et numériques (Ye *et al.*, 1999 [408] et Williamson *et al.*, 1996 [400]). Le domaine de calcul comporte une grille cartésienne de dimension  $20d \times 10d$  pour un maillage non uniforme, raffiné au niveau de l'axe du cylindre et comportant  $162 \times 100 \times 5$  noeuds<sup>3</sup>. L'axe du cylindre est aligné suivant la troisième direction  $x_3$ , localisé à la mi-hauteur du domaine de calcul et situé cinq longueurs caractéristiques ( $5d$ ) en aval du plan d'entrée. Les parois verticales

2. Pour simplifier, par la suite, seront dénommées DNS les simulations réalisées sans modèle de sous-maille et avec des coefficients pour le schéma de dissipation prenant des valeurs minimales, soit le jeu de constantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0,5 \\ \alpha_2 = 0,25 \\ \beta_1 = 0,016 \\ \beta_2 = 1 \end{cases} \quad (4.52)$$

3. Les simulations 2D comportent 5 mailles suivant la troisième direction en raison des schémas numériques utilisés.

ainsi que le plan de sortie sont évaluées en tant que sorties caractéristiques subsoniques non réfléchissantes [238], avec des termes transverses obtenus à l'aide de la solution de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre. En particulier, pour les sorties selon l'axe  $y$ , la méthode des conditions limites caractéristiques tridimensionnelles (3D-NSCBC) requiert la prescription de l'onde acoustique entrante :

$$\mathcal{M}_\Phi = \sigma \frac{a(1 - M_{max}^2)}{L_x} \Delta P + (1 - \beta_t) \mathfrak{F}_\Phi^2 + \beta_t \mathfrak{F}_{\Phi,ex}^2 \quad (4.54)$$

avec :

$$\Phi = \begin{cases} 5 & \text{si } x_2 = 0 \\ 1 & \text{si } x_2 = L_y \end{cases} \quad (4.55)$$

et

$$\mathfrak{F}_{\Phi,ex}^2 = -\widehat{u}_t \frac{\partial \widehat{P}}{\partial x_t} - \gamma \widehat{P} \frac{\partial \widehat{u}_t}{\partial x_t} - \zeta(\Phi) \widehat{\rho} \widehat{a} \widehat{u}_t \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial x_t} \quad \text{avec } t = 1, 3. \quad (4.56)$$

où les différents champs  $\widehat{P}$ ,  $\widehat{u}_k$ ,  $\widehat{\rho}$  et  $\widehat{a}$  correspondent à la solution analytique de l'écoulement qualifié de cible et  $\zeta(\Phi)$  un scalaire défini par :

$$\zeta(\Phi) = \frac{\Phi - 1}{2} - 1 = \begin{cases} -1 & \text{si } x_2 = L_y \\ 1 & \text{si } x_2 = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

En partant de la solution potentiel de l'écoulement autour d'un cylindre, il vient :

$$\mathfrak{F}_{1,ex}^2 = -\gamma P \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial x_1} + \rho a \widehat{u}_1 \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial x_1} \quad (4.58)$$

$$\mathfrak{F}_{5,ex}^2 = -\gamma P \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial x_1} - \rho a \widehat{u}_1 \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial x_1} \quad (4.59)$$

où les solutions analytiques à préciser sont :

$$\widehat{u}_1 = U_\infty + U_\infty d^2 \left( \frac{1}{2} \frac{y^2}{r^2} - \frac{1}{4r} \right) \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial x_1} = U_\infty d^2 \left( \frac{1}{2} \frac{(x-5)^2}{r^2} - \frac{2(x-5)y^2}{r^3} \right) \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial x_1} = U_\infty d^2 \left( -\frac{1}{2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{2(x-5)^2 y}{r^3} \right) \quad (4.62)$$

avec  $r = (y^2 + (x-5)^2)$  puisque le cylindre est positionné en  $(0, 5d)^4$ .

Afin d'initialiser l'instabilité du sillage, une perturbation (oscillation de type *flapping*) est introduite en entrée sur une courte période avant le relevé des résultats.

Cette étude, basée sur un maillage lâche, nous permet d'éprouver le schéma d'interpolation inhérent à cette méthode, en particulier au niveau des couches limites autour du cylindre. Le tableau 4.1 résume les propriétés géométriques des maillages utilisés.

Pour un Reynolds de 300, le sillage du cylindre est turbulent et instationnaire en aval. En particulier, on assiste à la formation des allées de Von Karman dont la fréquence caractéristique peut être évaluée à l'aide des coefficients de traînée et de portance. Ces paramètres sont évalués à l'aide de la force exercée par le fluide sur l'obstacle :

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (4.63)$$

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (4.64)$$

---

4. Pour les calculs non réactifs, les champs fluides sont adimensionnés. En particulier, les paramètres géométriques sont adimensionnés par le diamètre du cylindre.

	M1	M2
Maillage	162×100 × 5	480×250 × 5
$x_{min}/d$	$1,71 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-3}$
$x_{max}/d$	$7 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$
$y_{min}/d$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$
$y_{max}/d$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$

**TABLE 4.1:** Propriétés des maillages utilisés pour l'étude du cylindre non confiné.

En particulier, le coefficient de traînée résulte de la contribution de deux termes : la traînée de pression notée  $C_{D,p}$  et la traînée de frottement due à la friction et notée  $C_{D,f}$ . Ces paramètres sont évaluées avec les expressions suivantes :

$$C_{D,p} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty} \cos\theta d\theta \quad (4.65)$$

$$C_{D,f} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty} \cos\theta d\theta \quad (4.66)$$

avec  $\tau$  le frottement sur le contour de l'objet immergé. Le coefficient de traînée s'exprime alors comme :

$$C_D = C_{D,p} + C_{D,f} \quad (4.67)$$

La contribution de chacun des deux termes dépend de la forme aérodynamique du corps et des conditions de l'écoulement. Lorsque l'écoulement autour d'un profil aérodynamique reste attaché à la surface de l'objet sans manifester de lâcher tourbillonnaire, la traînée de pression reste faible par rapport au terme de frottement visqueux. Par contre, lorsque l'on assiste à la séparation de la couche limite autour d'un objet et à la formation d'un sillage à basse pression, la contribution relative de la traînée de pression prédomine. Cette dernière configuration correspond, entre autre, au cas du sillage turbulent en aval d'un cylindre.

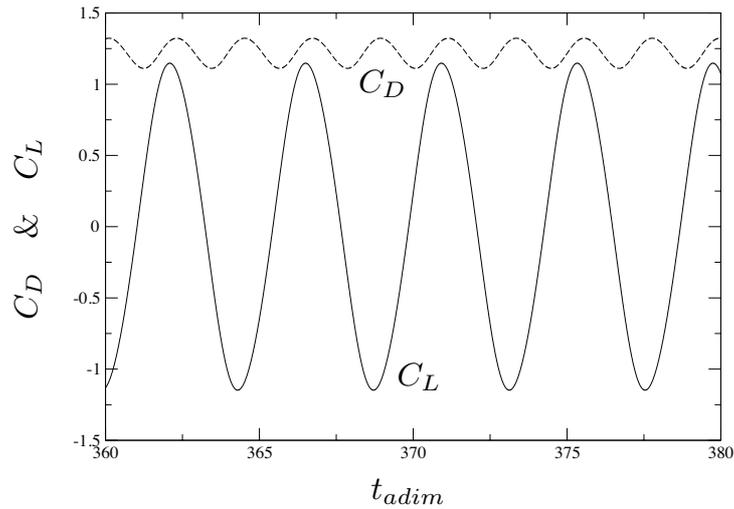
Dans la présente étude, la force exercée par le fluide sur le solide peut donc être évaluée en intégrant le champ de pression sur la frontière (Xu [406], Ghias *et al.* [130], Mittal *et al.* [259]) ou en appliquant le théorème d'Euler (Choi *et al.* [76]). Ces deux méthodes considèrent négligeable le cisaillement visqueux. Les deux coefficients sont alors exprimés sous la forme :

$$C_D = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty} \cos\theta d\theta \quad (4.68)$$

$$C_L = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty} \sin\theta d\theta \quad (4.69)$$

La figure 4.10 expose les variations des coefficients de traînée et de portance au cours du temps. Le régime périodique des coefficients aérodynamiques étant caractérisé par la fréquence de détachement des tourbillons, nous déterminons le nombre de Strouhal, défini comme  $St = fd/U_\infty$ , avec  $f$  la fréquence caractéristique du lâcher tourbillonnaire et  $U_\infty$  la vitesse à l'infini amont. Le coefficient de traînée moyen ainsi que le nombre de Strouhal sont déterminés à partir de ces évolutions temporelles. Nous retrouvons les valeurs  $C_D = 1.37$  et  $St = 0.21$ , qui sont en accord avec les valeurs obtenues numériquement par Ye *et al.* [408].

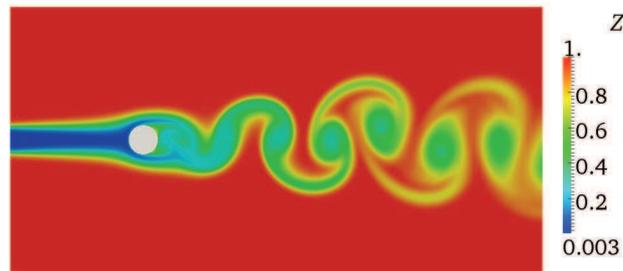
Il est important de noter que la présente étude est réalisée à l'aide d'une simulation bidimensionnelle, alors que le sillage du cylindre présente une structure tridimensionnelle. Cette structure tridimensionnelle se manifeste par l'émission oblique de vortex et par la perte de cohérence suivant l'axe du cylindre. En négligeant les contributions transverses (dans la troisième direction), l'hypothèse d'une structure bidimensionnelle induit une valeur surestimée du coefficient de traînée moyen,



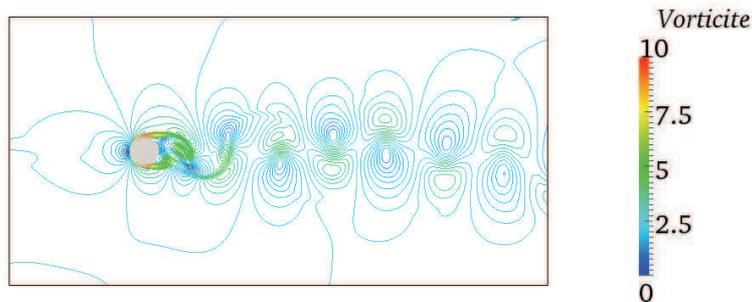
**FIGURE 4.10:** Variations des coefficients de traînée et de portance au cours du temps pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec  $Re_d = 300$ .

comme le soulignent Mittal et Balachandar [258]. Pour s'assurer de la qualité des présents résultats, nous les avons comparés à ceux issus de la simulation 2D de Ye *et al.* [408].

Nous avons également étudié un cas plus raffiné dont les propriétés géométriques sont données dans le tableau 4.1. Sur ce maillage raffiné, l'évaluation du nombre de Strouhal fournit la même valeur  $St = 0,21$ , par contre le coefficient de traînée moyen est plus faible  $C_D = 1,3$ . L'allée de Von Karman est illustrée sur les figures 4.11 et 4.12 avec le scalaire passif et la norme 2D de la vorticité.



**FIGURE 4.11:** Carte instantan e du scalaire passif pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec  $Re_d = 300$  obtenu avec le maillage M2.

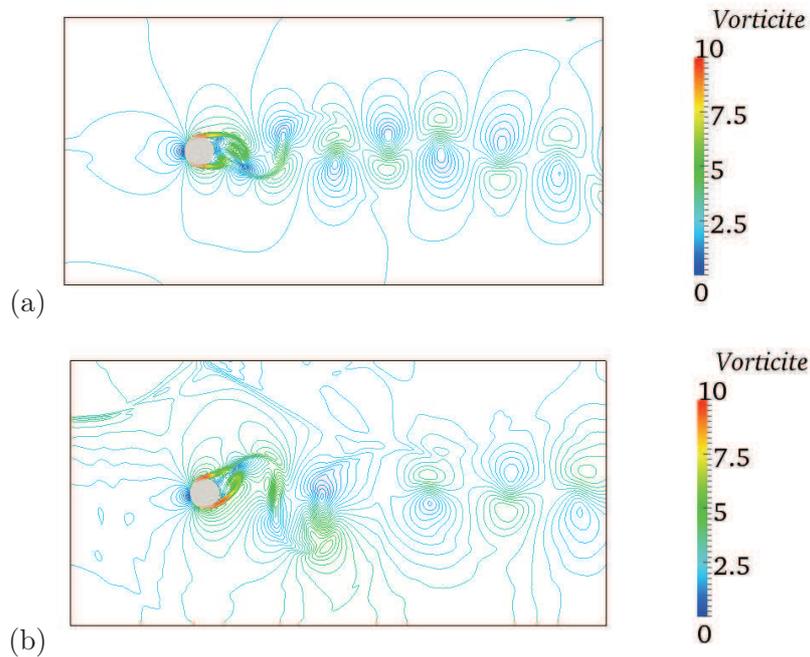


**FIGURE 4.12:** Iso-contours de la norme 2D de la vorticité normalis e obtenus avec le maillage M2.

#### 4.7.1.1 A propos des conditions limites transverses

Cette aparté vise à souligner l'importance des conditions aux limites pour un code compressible. Le cas test du cylindre non confiné, bien que relativement simple a priori, soulève le problème de la description des conditions aux limites suivant la direction axiale (selon  $y$ ).

L'utilisation de conditions de symétrie peut induire des erreurs numériques importantes à mesure que l'on raffine le maillage. Ainsi, les figures 4.13 et 4.14 soulignent l'apparition de réflexions parasites avec les conditions de symétrie. Ces réflexions conduisent à une augmentation de l'énergie acoustique comprise dans le domaine de calcul et modifient la dynamique de l'écoulement. La zone en amont du cylindre est affectée par ces ondes parasites comme en témoigne la figure 4.15. Ce comportement se manifeste souvent dans le cadre de DNS où les niveaux de viscosité sont relativement faibles. Pour une simulation de type LES, la viscosité turbulente ou numérique limite l'apparition de ces erreurs numériques.

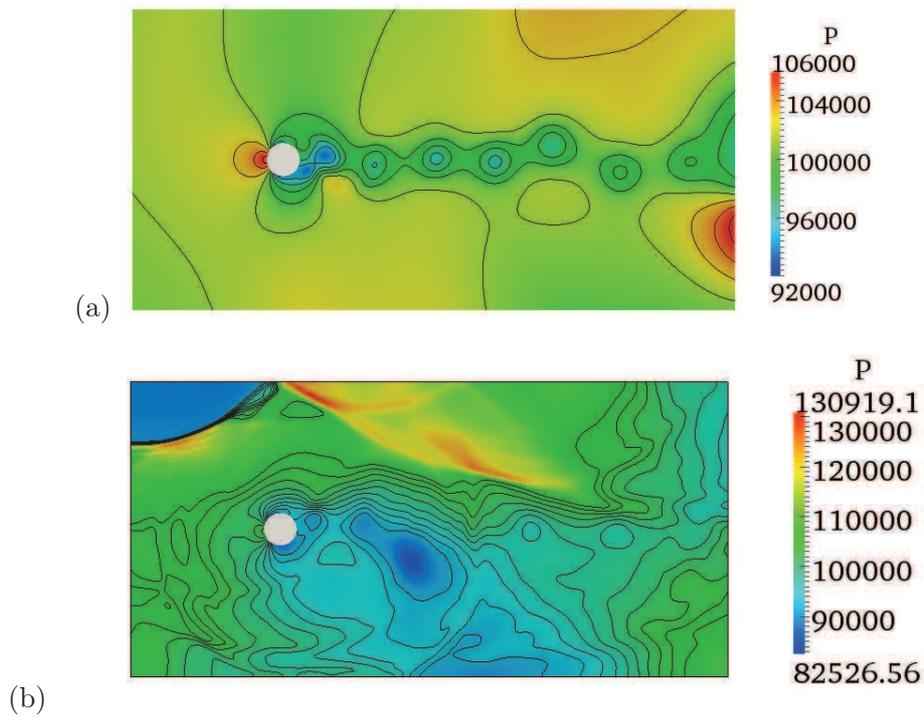


**FIGURE 4.13:** Iso-contours de la norme 2D de la vorticité normalisée, obtenus avec le maillage M2 pour lequel les conditions aux limites selon  $y$  sont traitées avec un formalisme 3D-NSCBC (a) et des conditions de symétrie (b).

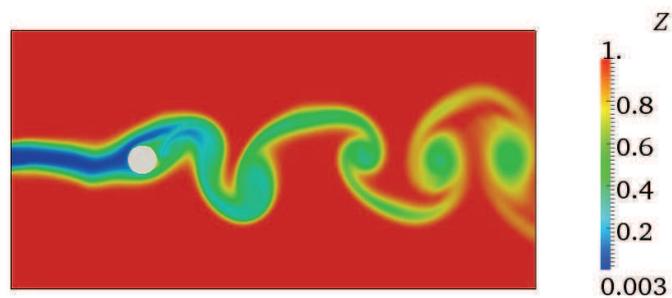
Les parois transversales requièrent donc l'utilisation de conditions de sortie de type caractéristique. En particulier, seules les conditions caractéristiques développées par Lodato *et al.* [238] affectent peu la structure de l'écoulement. Des calculs réalisés avec la formulation originale de Poinso et Lele [298] (sans termes transverses) perturbent le sillage comme l'expose la figure 4.16. En effet, sans la prise en compte des termes transverses, l'écoulement est dévié.

#### 4.7.2 Simulation numérique directe de l'écoulement sur un cylindre confiné

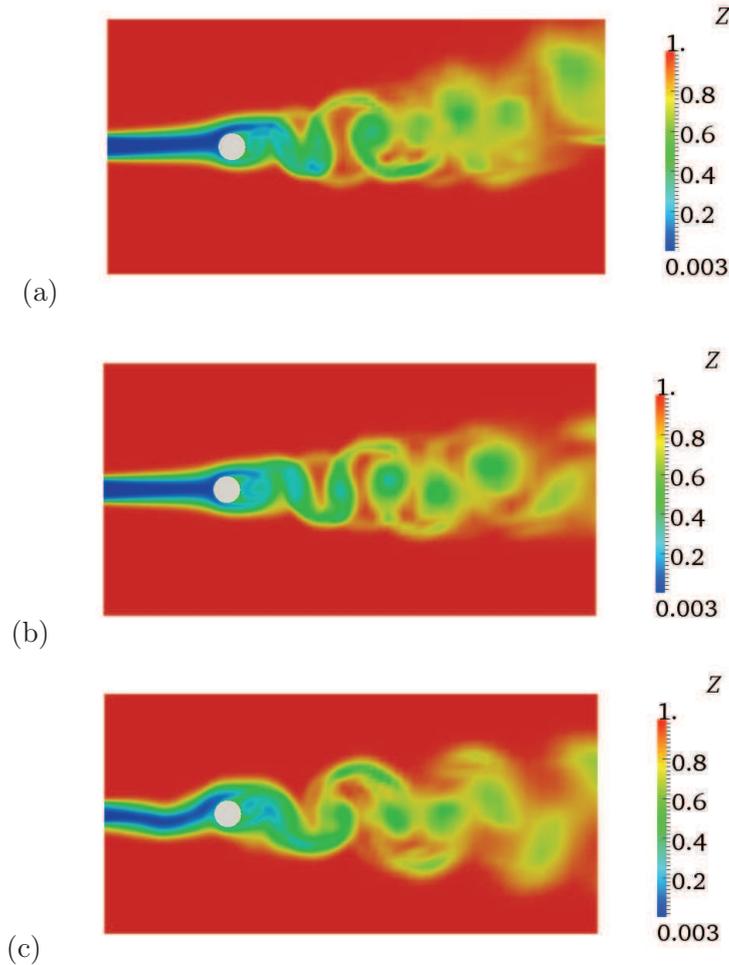
Cette deuxième partie aborde la simulation numérique directe de l'écoulement de sillage d'un cylindre confiné dans un canal de hauteur  $h$ . En particulier, nous nous sommes attachés à reproduire l'expérience de la bifurcation de sillage de Ye *et al.* [408] et Chen *et al.* [72]. Cette étude repose sur l'identification du nombre de Reynolds critique (basé sur la vitesse infinie amont  $U_\infty$ , le diamètre du cylindre  $d$  et la viscosité cinématique du fluide  $\nu$ ,  $Re = U_\infty d / \nu$ ), à partir duquel se produit la transition de cet écoulement vers la turbulence. Un large consensus établit cette valeur à  $Re = 231$  [195, 72].



**FIGURE 4.14:** Cartes de la pression obtenues avec le maillage M2 pour lequel les conditions aux limites selon  $y$  sont traitées avec un formalisme 3D-NSCBC (a) et des conditions de symétrie (b).



**FIGURE 4.15:** Carte instantanée du scalaire passif pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec  $Re_d = 300$  obtenu avec le maillage M2 et des conditions de symétrie pour les plans en  $y$ .



**FIGURE 4.16:** Cartes instantanées du scalaire passif pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec  $Re_d = 300$ , obtenues avec le maillage M1 et : la formulation NSCBC de Poinso et Lele [298] (a), 3D-NSCBC proposée par Lodato et al. [238] (b) et les conditions de symétrie (c).

Maillage	$200 \times 80 \times 5$
$x_{min}/h$	$7 \cdot 10^{-3}$
$x_{max}/h$	$3 \cdot 10^{-1}$
$y_{min}/h$	$9,5 \cdot 10^{-3}$
$y_{max}/h$	$2,1 \cdot 10^{-2}$

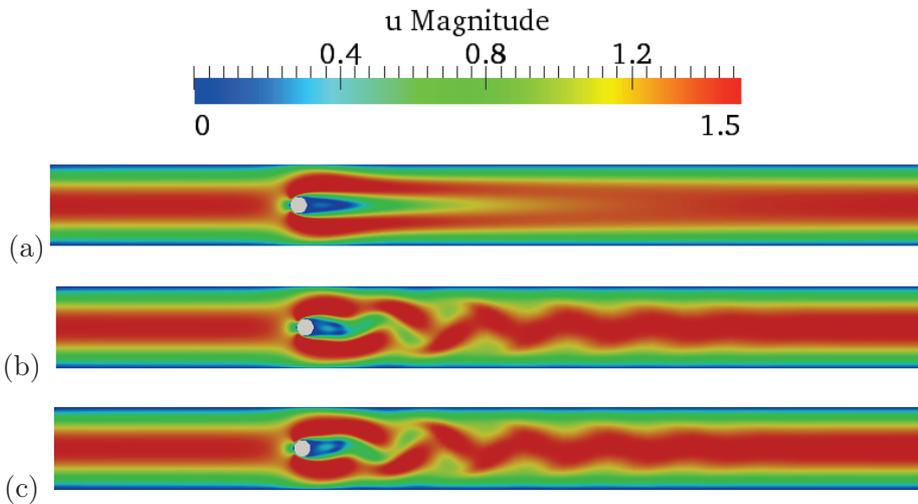
**TABLE 4.2:** Propriétés des maillages utilisés pour l'étude du cylindre confiné dans un canal de hauteur  $h = 5d$ .

Afin de déterminer le nombre de Reynolds caractéristique de la transition du régime stationnaire à un régime périodique instationnaire, différentes valeurs de ce paramètre, compris entre 200 et 300, sont testées. Le cylindre de diamètre  $d$  est confiné dans un cylindre de hauteur  $h = 5d$ . Le domaine de calcul présente une longueur de  $3h$  en amont de la sphère, pour éviter l'apparition de réflexions parasites, et une longueur totale de  $10,5h$  et est discrétisé sur un maillage comportant  $200 \times 82 \times 5$  noeuds raffiné au voisinage du cylindre. Les propriétés géométriques du maillage sont exposées dans le tableau 4.2. A l'entrée du domaine, la vitesse, spécifiée par une approche non réfléchissante, présente un profil parabolique. Les parois latérales sont adiabatiques et non glissantes et la sortie du domaine est non réfléchissante.

Pour chaque étude, à différent nombre de Reynolds, une perturbation axisymétrique est ajoutée au profil d'entrée sur une courte période. Après cette période de forçage, l'écoulement est libre de revenir à un état stationnaire. Au cours des études de Ye *et al.* [408] et de Chen *et al.* [72], l'instabilité se trouve amortie pour des nombres de Reynolds allant jusque 230, alors que pour des valeurs supérieures à ce seuil critique, on assiste à l'amplification de la perturbation.

Pour les faibles nombres de Reynolds ( $Re_h < 230$ ), l'écoulement est stationnaire et ne manifeste pas de lâcher tourbillonnaire alors qu'au-delà de cette limite, l'allée de Von Karman se manifeste. La figure 4.17 représente l'évolution temporelle de la norme de la vitesse. Pour des raisons de concision, on se contente d'y montrer trois cas.

Ce cas test sera réutilisé dans la section 4.7.5 afin de vérifier les propriétés de conservation de l'implémentation IBM.



**FIGURE 4.17:** Cartes instantanées de la norme de la vitesse normalisée pour différents nombre de Reynolds : (a)  $Re_h = 200$ , (b)  $Re_h = 230$  et (c)  $Re_h = 232$ .

### 4.7.3 Simulation des Grandes Echelles de l'écoulement autour d'un cylindre carré non confiné

Afin d'éprouver les reconstructions des frontières au voisinage de surfaces discontinues, nous étudions l'écoulement tridimensionnel autour et en aval d'un cylindre carré. Cet objet, de longueur  $d$ , est immergé dans un écoulement de vitesse infinie amont uniforme  $u_\infty$ . Le nombre de Reynolds, basé sur la longueur du carré  $d$ , est fixé à 22 000. Cet écoulement est analysé expérimentalement par Lyn *et al.* [243] et McLean *et al.* [252] et numériquement par Voke [390] et Murakami *et al.* [268] avec des maillages cartésiens épousant la forme de l'objet (*body-fitted*) et par Grigoriadis *et al.* [151] avec une méthode de frontières immergées.

Les dimensions du domaine de calcul sont  $(L_x, L_y, L_z) = (14d, 8d \text{ and } 4d)$ . Le cylindre carré immergé est situé à une distance  $5d$  en aval du plan d'entrée. Le maillage comporte  $300 \times 186 \times 50$  noeuds et est raffiné au niveau du carré. Les propriétés géométriques de ce maillage sont synthétisées dans le tableau 4.3. Un soin particulier est apporté pour éviter que le maillage ne coïncide avec la forme de l'objet. Ainsi, la méthode des frontières immergées est bien utilisée pour reconstruire les parois adiabatiques non glissantes immergées. Des conditions aux limites de symétrie et de périodicité sont appliquées respectivement pour la direction normale ( $y$ ) et la direction tangentielle ( $z$ ) qui correspond, entre autre, à l'axe du cylindre. Dans le présent cas, la présence de conditions de symétrie ne semblent pas altérer la forme du sillage. La présence d'un modèle de sous-maille adjoint à un

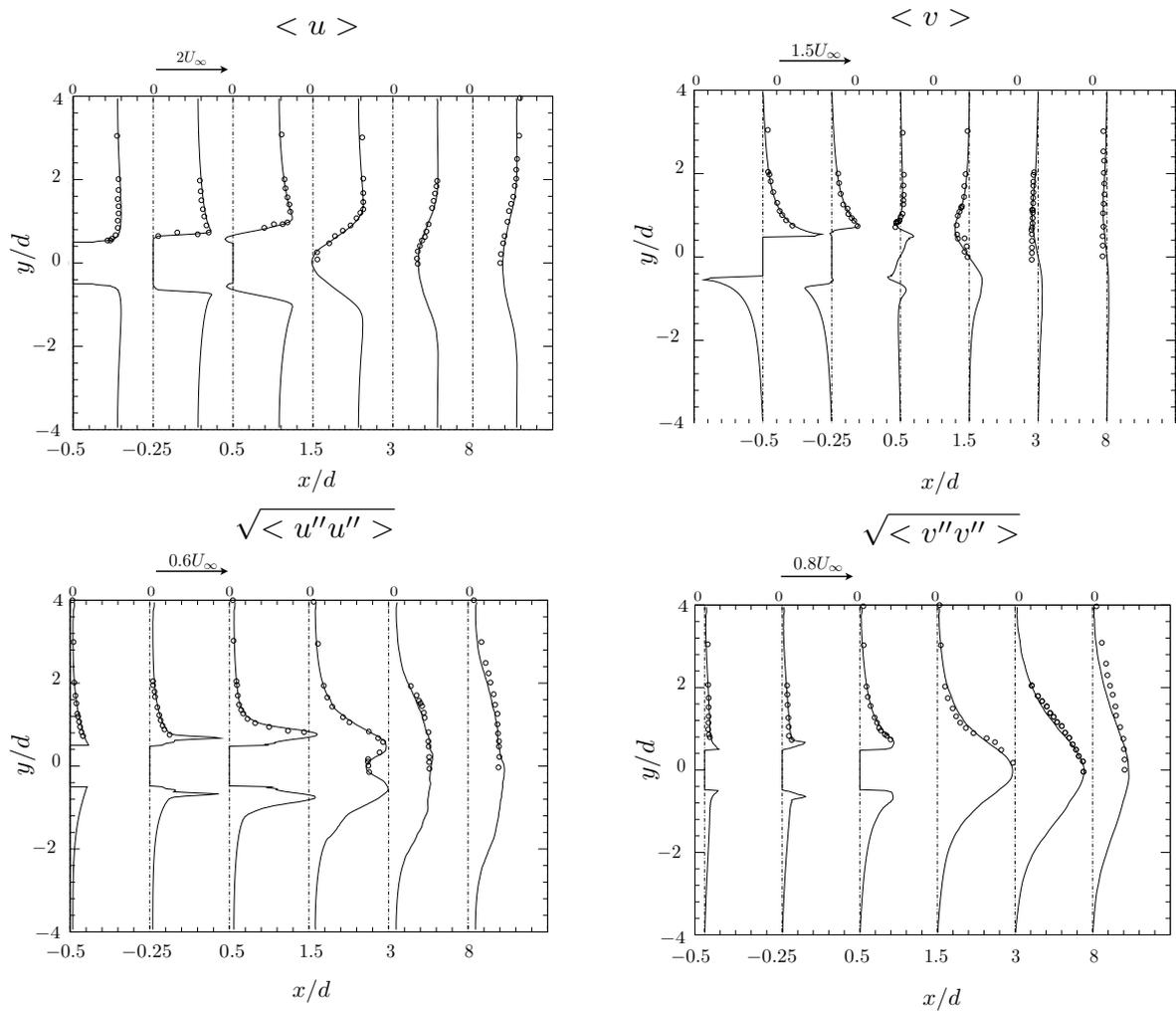
<i>Maillage</i>	300×186 × 50
$x_{min}/d$	$2,8 \cdot 10^{-2}$
$x_{max}/d$	$6,5 \cdot 10^{-1}$
$y_{min}/d$	$4,7 \cdot 10^{-2}$
$y_{max}/d$	$3,5 \cdot 10^{-1}$
$z_{min}/d$	$6,3 \cdot 10^{-2}$
$z_{max}/d$	$1,3 \cdot 10^{-1}$

**TABLE 4.3:** *Propriétés des maillages utilisés pour l'étude du cylindre carré immergé de section  $d = 4 \cdot 10^{-2}$  m.*

modèle de viscosité artificielle limite en effet l'apparition d'ondes parasites. Les limites ouvertes sont traitées de manière non-réfléchissante avec une vitesse uniforme en entrée  $u_\infty = 1$ , et  $v = 0$  et  $w = 0$ . Afin de reproduire le niveau de turbulence mesuré en amont du cylindre par Lyn *et al.* [243], à savoir 2% de la valeur moyenne, un bruit corrélé est superposé aux profils de vitesses moyens à l'aide de la méthode d'injection turbulente de Klein *et al.* [199].

Cette simulation est réalisée avec le modèle de sous-maille WALE, proposé par Nicoud et Ducros [272]. Après un régime transitoire, nécessaire à la relaxation vers les profils de vitesse en entrée et à l'initiation du lâcher tourbillonnaire dans le sillage du cylindre, les statistiques sont collectées et comparées aux résultats expérimentaux. La figure 4.18 compare ainsi les vitesses moyennes et les fluctuations de vitesses, pour les composantes axiales et normales, avec les données expérimentales acquises sur le cylindre carré et dans son sillage. Une excellente concordance est observée.

La structure de l'écoulement est illustrée sur la figure 4.7.3 avec un contour du critère  $Q$ .



**FIGURE 4.18:** Comparaison des champs de vitesse expérimentaux (sphères) et numériques (lignes) pour différentes abscisses dans le sillage du cylindre.



**FIGURE 4.19:** Iso-contour du critère  $Q$  colorié par la pression ( $Q = 300 \text{ s}^{-2}$ ).

#### 4.7.4 Comparaison des conditions aux limites pour un mur : murs IBM / NSCBC/ classique

La différence entre les conditions limites caractéristiques de type NSCBC, présentées dans la section 3.4.3, et les conditions de type Neumann et Dirichlet pour un mur ("conditions dites fortes") est étudiée pour la première fois par Lamarque *et al.* [212], dans le cadre de maillages conformes aux objets modélisés. Dans cette section, l'impact d'une reconstruction de type IBM est évalué et est comparé au traitement classique d'un mur, coïncidant avec le maillage. Le comportement de la méthode des frontières immergées est ainsi éprouvé au regard de la formulation caractéristique du mur, où les conditions limites sont imposées de manière moins directe, via l'expression des amplitudes des ondes caractéristiques. Nous vérifions également que le schéma d'interpolation ne produise pas de réflexions acoustiques parasites.

Avant de comparer la formulation caractéristique des équations de Navier-Stokes, souvent utilisée pour traiter les frontières ouvertes et fermées d'une configuration compressible, avec les frontières immergées, les éléments clés du premier formalisme sont discutés.

##### 4.7.4.1 Formulation caractéristique de la condition limite mur

Introduite par Thompson [371] pour les équations d'Euler, l'approche caractéristique décompose l'écoulement sous la forme d'ondes caractéristiques, qui voyagent dans la direction normale à la frontière. Les ondes sortantes étant connues (à partir des grandeurs fluides des cellules appartenant au domaine de calcul), seules les ondes entrantes doivent être évaluées.

Pour ce faire, les équations de Navier-Stokes sont écrites sous une forme quasi-linéaire en fonction des grandeurs primitives :

$$\mathbf{u} = \{\rho \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad p \quad Z\}^T,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{F}^j \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \mathcal{D} = 0 \quad (4.70)$$

avec  $\mathcal{F}^j$  la matrice Jacobienne non-conservative liée à la  $k$ -ième direction et  $\mathcal{D}$  la matrice comportant les termes visqueux et diffusifs. En diagonalisant la matrice Jacobienne non conservative, exprimée pour les composantes normales à la frontière, la forme caractéristique suivante est obtenue (avec la frontière normale à l'axe  $x$ ) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{S}_1 \mathcal{L} + \mathcal{F}^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \mathcal{F}^3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} + \mathcal{D} = 0 \quad (4.71)$$

En utilisant le tenseur  $\mathfrak{T}$  pour les termes diffusifs et les composantes convectives tangentielles, il vient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{S}_1 \mathcal{L} + \mathfrak{T} = 0 \quad (4.72)$$

Le vecteur  $\mathcal{L}$  représente les variations temporelles des amplitudes relatives aux ondes caractéristiques et résulte de l'analyse caractéristique des équations gouvernant l'écoulement, suivant la

direction  $x$  :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} (u_1 - a) \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho a \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\ u_1 \left( a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \\ u_1 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ u_1 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ (u_1 + a) \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho a \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\ u_1 \left( \frac{\partial Z}{\partial x_1} \right) \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Les termes  $\mathcal{L}_k$  constituent les ondes caractéristiques, de nature différente et exprimées en fonction des vitesses caractéristiques  $\lambda_k$  :

$$\lambda_1 = u_1 - a, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_6 = u_1 \quad \text{et} \quad \lambda_5 = u_1 + a \quad (4.74)$$

Les ondes représentées par les grandeurs  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_5$  décrivent les perturbations acoustiques et sont qualifiées d'ondes acoustiques. La quantité  $\mathcal{L}_2$  est une onde entropique ou convective, associée à la vitesse de convection des ondes entropiques. Les grandeurs  $\mathcal{L}_3$  et  $\mathcal{L}_4$  sont des ondes de vorticité. Enfin, l'onde  $\mathcal{L}_6$  est associ e aux variations du scalaire passif.

Afin de spécifier les conditions limites, les variations des amplitudes des ondes doivent être décrites. Alors que les ondes sortantes sont directement calcul es avec une approximation d centr e de troisième ordre des différents gradients, les ondes entrantes ne peuvent pas être directement d termin es à partir de l'extérieur du domaine de calcul et requièrent une analyse physique ainsi que des modèles.

Les variables relatives sont associ es aux variations des amplitudes des différentes ondes caractéristiques à l'aide du système dit LODI (*Locally One-Dimensional and Inviscid assumption of the NSCBC procedure*) modifié par Lodato *et al.* [238]. Le système modifié est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left[ \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] - \mathfrak{T}_1 = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2\rho a} (\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) - \mathfrak{T}_2 = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathcal{L}_3 - \mathfrak{T}_3 = 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathcal{L}_4 - \mathfrak{T}_4 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) - \mathfrak{T}_5 = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + \mathcal{L}_6 - \mathfrak{T}_6 = 0 \end{array} \right. \quad (4.75)$$

Lodato *et al.* [238] forment le jeu d'équations décrivant les conditions limites pour une face, une arête ou un coin et proposent un traitement des termes transverses afin de réduire les distorsions subies par l'écoulement dans les régions présentant de forts gradients transverses.

Dans le cas d'un mur non glissant, toutes les composantes de vitesse s'annulent [295] (*no-slip conditions*). Toutes les variations d'ondes sont nulles, hormis les ondes acoustiques  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_5$ . Suivant la position de la frontière, l'onde sortante est  $\mathcal{L}_1$  en  $x_1 = 0$  ou  $\mathcal{L}_5$  en  $x_1 = L_x$  alors que l'onde entrante n'est autre que  $\mathcal{L}_5$  en  $x_1 = 0$  ou  $\mathcal{L}_1$  en  $x_1 = L_x$ . Il est alors nécessaire de prescrire la variation support e par une onde acoustique. La combinaison du système LODI modifié et de la

condition limite physique associée à un mur (imposant une dérivée temporelle de la vitesse normale nulle  $\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$ ) fournit la relation suivante :

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_5 \quad (4.76)$$

Cette relation traduit la propriété de réflexion acoustique du mur.

La combinaison de l' Eq. 4.76 et de la relation 5 du système 4.75 fournit :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0 \quad (4.77)$$

Les conditions fortes de type Dirichlet pour les composantes de vitesse  $\left(u\Big|_{BI} = 0\right)$ , avec  $BI$  l'indice associé au point sur la surface immergée (*Boundary Intercept*), et les conditions de type Neumann pour le gradient de pression nul  $\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\Big|_{BI} = 0\right)$  sont ainsi analytiquement équivalentes à la formulation 3D-NSCBC des murs. Ces deux méthodes prescrivent la même impédance acoustique ( $Z \rightarrow \infty$ ). Le seule différence réside d'un point de vue numérique. Alors que la première est qualifiée de condition forte, la forme caractéristique est une condition faible puisqu'elle ne fixe pas les variables du système mais impose plutôt l'effet attendu par la traduction numérique des conditions physiques.

#### 4.7.4.2 Cas test d'une onde de pression sphérique dans une boîte fermée décrite avec les différentes formulations

Bien que les deux formulations des conditions limites (conditions faibles caractéristiques et conditions fortes de type Dirichlet et Neumann) soient analytiquement équivalentes, nous évaluons leur comportement numérique respectif. De même, les schémas de reconstruction des frontières immergées sont éprouvés dans une configuration tridimensionnelle où une onde pression sphérique est libre de se développer dans une boîte fermée de longueur  $L = 0,013\text{m}$ .

Le champ de pression est initialisé avec une impulsion de pression de forme gaussienne et exprimée sous la forme :

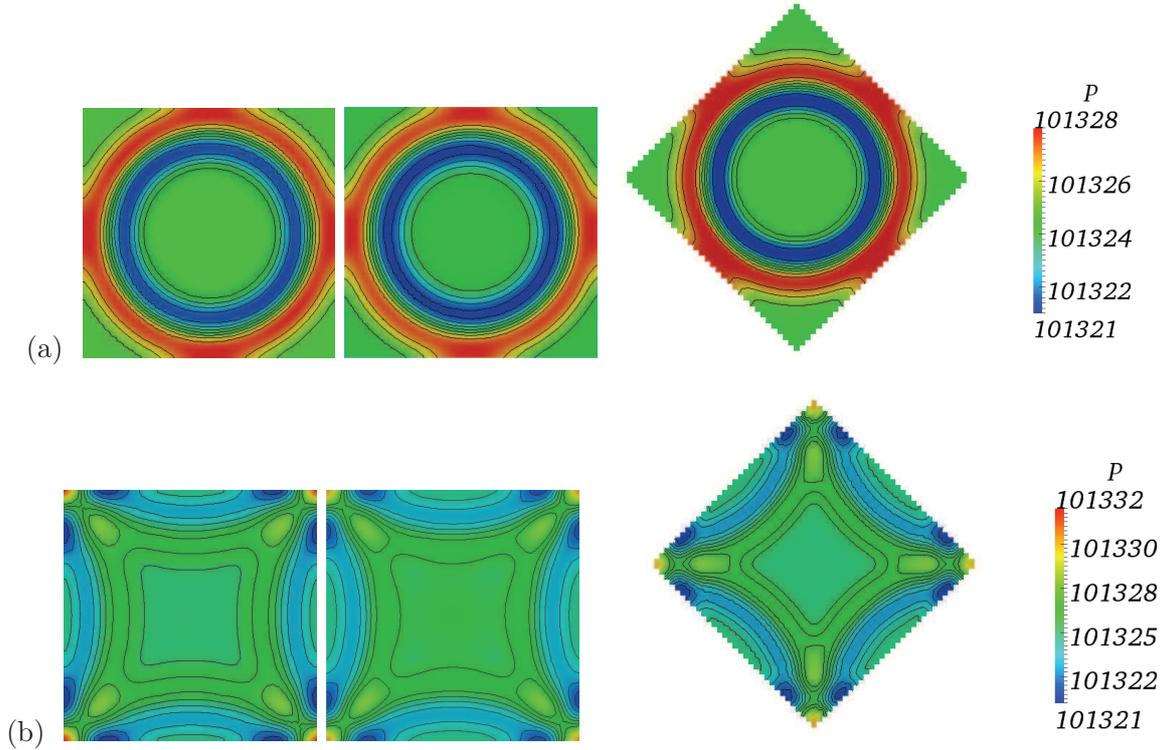
$$p(r) = p_\infty \left[ 1 + \delta \times \exp\left(-\frac{r^2}{2R_p^2}\right) \right] \quad (4.78)$$

où  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  est la distance du centre du domaine de calcul,  $R_p$  la dimension caractéristique de l'impulsion de pression ( $R_p = 0,05L$ ),  $\delta$  l'amplitude de l'impulsion de pression de forme gaussienne ( $\delta = 0,001$ ),  $T_0 = 300\text{K}$  et  $p_\infty = 1 \text{ atm}$  constituent les paramètres initiaux.

Les calculs sont réalisés avec un maillage conforme à la géométrie et des conditions de type 3D-NSCBC (Lodato *et al.* [238]) ainsi que sur un maillage non conforme avec la méthode de la cellule fantôme. Ils vont nous permettre de vérifier l'évolution du front de l'onde acoustique et, en particulier, la réflexion de cette dernière sur les parois de la boîte cubique. Notons que lors de la simulation réalisée avec la formulation caractéristique des équations de Navier-Stokes, les limites du domaine de calcul sont directement les parois de la boîte alors que pour la simulation en frontières immergées, la boîte est immergée dans le domaine de calcul.

Dans le cadre de la méthode de la cellule fantôme, le front de l'onde de pression est reconstruit à l'aide d'un schéma d'interpolation. Alors que les faces et arêtes sont reconstruits à l'aide d'une interpolation bilinéaire, les coins reposent sur un schéma tridimensionnel. On peut s'attendre à ce que la précision de la reconstruction dépende de l'orientation du maillage cartésien par rapport à la surface immergée. En effet, lorsque l'onde de pression se propage selon la direction normale à la frontière, le schéma de reconstruction du point fantôme implique des cellules situées sur la trajectoire de l'onde de pression. Pour évaluer l'impact d'une inclinaison entre la grille et l'objet, nous avons également analysé les réflexions acoustiques dans une boîte inclinée de 45 degrés.

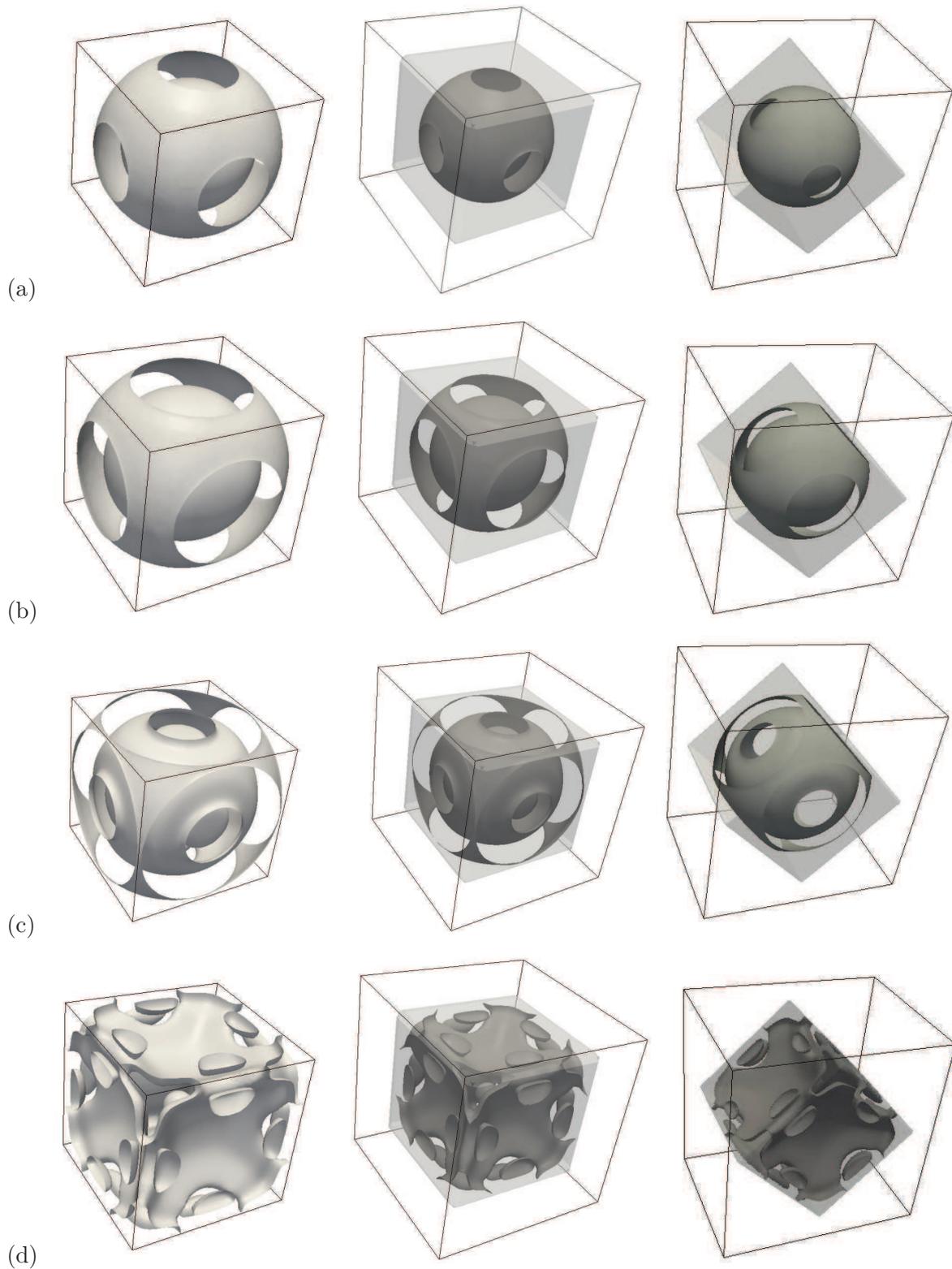
Les trois simulations sont réalisées sur des maillages uniformes comportant  $60 \times 60 \times 60$  noeuds dans la boîte.



**FIGURE 4.20:** Cartes de pression et contours de pression en deux instants. A gauche, la formulation caractéristique du mur (3D-NSCBC) ; au milieu, la méthode de la cellule fantôme avec des murs immergés parallèles au maillage et à droite, la méthode de la cellule fantôme dans un cube incliné de  $45^\circ$  par rapport au maillage avec : (a)  $t = 16,4\mu s$  et (b)  $t = 26,9\mu s$ .

La figure 4.20 présente le champ de pression et les contours de pression sur un plan en deux instants et pour les différents traitements aux limites. Cet intervalle de temps est choisi afin de mettre en évidence l'interaction du front d'onde avec les limites du domaine. Les trois approches aux limites présentent des cartes de pression similaires et préservent la courbure du front d'onde. La déformation du front d'onde est également éprouvée à l'aide des iso-surfaces de pression, tracées en différents instants, et illustrée sur la figure 4.21. Quelque soit le schéma d'interpolation utilisée et l'inclinaison du cube immergé, la méthode de la cellule fantôme ne perturbe pas la réflexion de l'onde de pression.

Pour évaluer plus précisément l'impact du traitement du mur en fonction des conditions aux limites utilisées, nous positionnons différents capteurs de pression aux centres d'une face, d'une arête et au niveau d'un coin (cf. figure 4.22). Les profils de pression obtenus pour ces différents capteurs sont reportés sur la figure 4.23 où  $tr$  est un temps d'adimensionnement, calculé comme le temps mis par l'onde de pression, supposée se déplacer à la vitesse  $a \simeq 347,6m/s$ , pour parcourir une demi-distance  $L$ , soit  $tr = \frac{L}{2a} \simeq 1,87.10^{-5}s$ . Un très bon accord entre les différents formalismes est observé. Néanmoins, on observe au bout d'un certain temps, l'apparition d'un faible écart entre le cube incliné et le cube horizontal (traité indifféremment avec la 3D-NSCBC ou avec les frontières immergées). Cet écart peut être lié au maillage du cube incliné qui présente des cellules dont les tailles sont légèrement différentes par rapport au cube non incliné (cf. tableau 4.4).

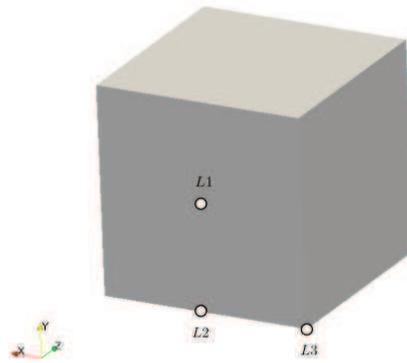


**FIGURE 4.21:** Iso-surface de pression en quatre instants : formulation 3D-NSCBC (droite), IBM avec les parois du cube parallèles au maillage (centre) et IBM avec un cube immergé incliné de  $45^\circ$  : (a)  $t = 14,2\mu s$ , (b)  $t = 17,9\mu s$ , (c)  $t = 22,2\mu s$  et (d)  $t = 26,9\mu s$ .

	3D-NSCBC	IBM 0°	IBM 45°
$x/L$	$1,67.10^{-2}$	$1,67.10^{-2}$	$1,65.10^{-2}$
$y/L$	$1,67.10^{-2}$	$1,67.10^{-2}$	$1,66.10^{-2}$
$z/L$	$1,67.10^{-2}$	$1,67.10^{-2}$	$1,74.10^{-2}$

**TABLE 4.4:** Propriétés des maillages utilisés pour l'étude de l'onde de pression sphérique avec  $L = 0,013 m$ .

Par ailleurs, pour estimer l'influence des frontières immergées sur la précision du schéma numérique en proche paroi, d'autres simulations sont réalisées avec des résolutions comprises entre 40 et 70 noeuds dans chaque direction, pour le cas d'un maillage conforme à la géométrie et d'un cube immergé incliné de 45°. Deux capteurs sont positionnés au centre d'une face et d'un coin pour enregistrer l'évolution de la pression au cours du temps. Ces signaux sont ensuite comparés à un cas de référence obtenu avec un maillage conforme et une résolution de 150 cellules fluides selon chaque direction. Les erreurs en norme L1 et L2 sont évaluées pour une fenêtre temporelle comportant 30 temps caractéristiques et sont reportées sur la figure 4.24. Pour les simulations avec un maillage conforme à la géométrie (approche 3D-NSCBC pour les conditions limites) et des frontières immergées, le schéma de discrétisation à la paroi est de second ordre.

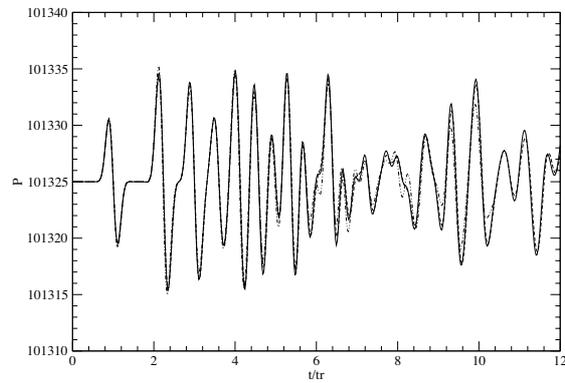


**FIGURE 4.22:** Position des différents capteurs ( $L1$ ,  $L2$  et  $L3$ ) de pression sur le mur.

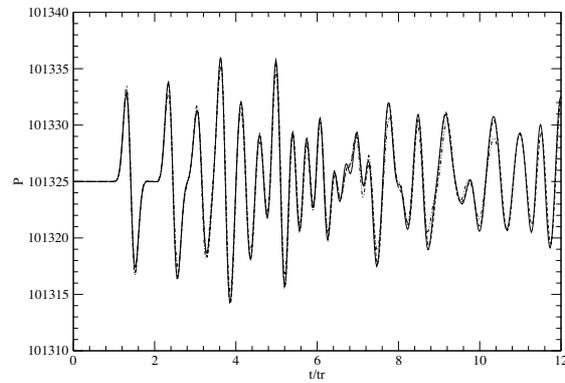
#### 4.7.5 Erreur sur la conservation de la masse

Lorsqu'une méthode de volumes finis est utilisée avec un maillage conforme à la géométrie, les équations de transport écrites sous forme intégrale sont intégrées sur des volumes élémentaires. Les informations aux frontières du domaine sont directement introduites dans la forme discrète des équations et suivent ainsi les lois de conservation.

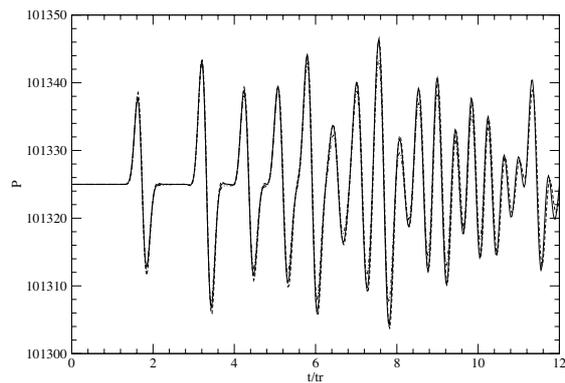
La méthode de la cellule fantôme impose, quant à elle, directement la condition limite sur la surface immergée en utilisant un schéma d'interpolation qui combine les conditions limites sur la surface effective et les variables fluides des cellules les plus proches. Les variables primitives sont donc interpolées sans aucune considération du principe de conservation intrinsèque aux volumes finis et les lois de conservation ne sont plus vérifiées à proximité des parois reconstruites.



(a)

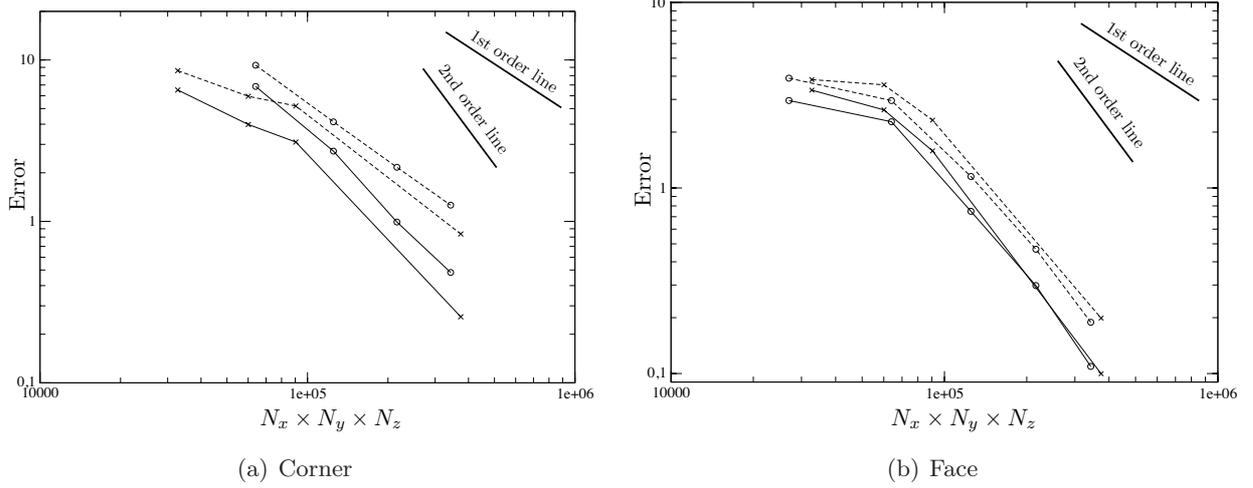


(b)



(c)

**FIGURE 4.23:** Evolution de la pression au cours du temps sur le mur pour : (a) capteur L1 relatif au centre d'une face, (b) capteur L2 associé au centre d'une arête et (c) capteur L3 pour un coin. Ligne continue : 3D-NSCBC, tirets : frontière immergée et pointillés : la frontière immergée avec un cube incliné de  $45^\circ$ .



**FIGURE 4.24:** Evolution de l'erreur sur la pression en fonction du nombre de cellules fluides avec les normes  $L1$  (ligne continue) et  $L2$  (tirets). Cercles : maillage conforme (3D-NSCBC) et croix : frontières immergées pour un cube incliné de  $45^\circ$ .

Pour quantifier l'erreur sur la conservation de la masse<sup>5</sup>, l'écoulement autour d'un cylindre circulaire placé dans un canal est analysé. Cet écoulement confiné, caractérisé par son nombre de Reynolds,  $Re = 232$ , avec  $d$  le diamètre du cylindre circulaire, est discrétisé sur un maillage raffiné au niveau du cylindre et comportant  $200 \times 82 \times 5$  noeuds. Ce cylindre est placé à mi-hauteur du canal et trois hauteurs en aval du plan d'entrée pour éviter toute réflexion parasite.

Alors que les parois latérales sont des murs adiabatiques, décrits numériquement avec des conditions fortes, les plans d'entrée et de sortie sont prescrits avec une méthode caractéristique (3D-NSCBC [238]), comme décrit précédemment (*cf.* section 4.7.2).

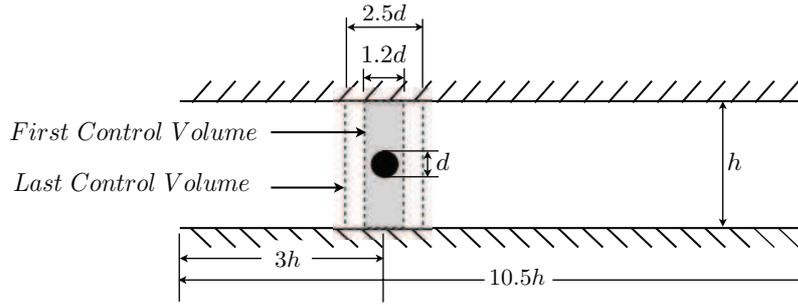
Afin d'évaluer l'erreur sur la conservation de la masse, la masse est intégrée au cours de deux cycles caractéristiques, défini comme le rapport entre le diamètre du cylindre et la vitesse au centre de l'écoulement. Puisque nous nous attendons à voir diminuer l'erreur sur la conservation de la masse, à mesure que le volume d'intégration augmente, différents volumes d'intégration sont considérés. Le premier domaine, constituant le plus petit volume d'intégration, est délimité par le cylindre lui-même et les parois horizontales du canal. Les autres domaines sont définis par translation des plans verticaux, de sorte à inclure de plus en plus de cellules fluides, comme illustré sur la figure 4.25. L'erreur sur la conservation de la masse est estimée à partir de l'intégration de l'équation de conservation de la masse et est définie comme :

$$\Delta M(t) = \frac{1}{M(t)} \left| M(t) - M(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t (\dot{Q}_m(x_{max}) - \dot{Q}_m(x_{min})) dt \right| \quad (4.79)$$

où  $M(t)$  est la masse incluse dans le volume d'intégration au temps  $t$  et  $\dot{Q}_m(x = x_{min})$  (respectivement  $\dot{Q}_m(x = x_{max})$ ) le débit massique dans le plan de sortie (respectivement plan d'entrée) du domaine d'intégration.

L'erreur relative sur la conservation de la masse est illustrée sur la figure 4.26, où l'erreur massique en pourcentage est tracée en fonction du taux d'encombrement, correspondant au rapport des volumes fluides et solides. Afin d'estimer le défaut/gain dû à la frontière immergée, les erreurs sur la masse sont reportées dans un cas avec et sans frontière immergée (c'est-à-dire les cas avec et sans

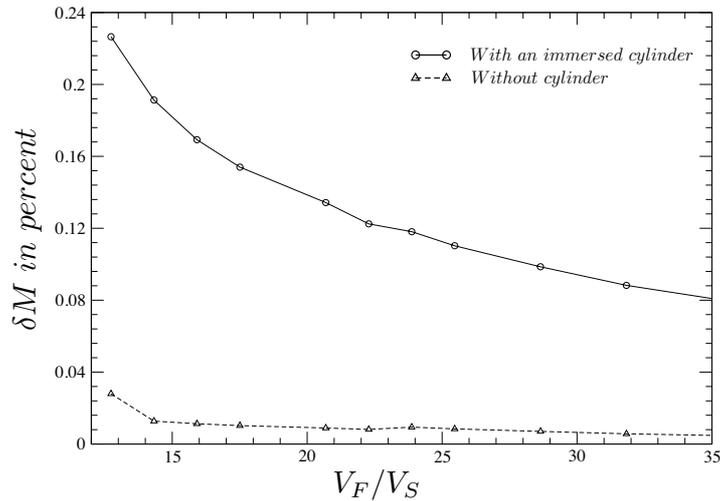
5. Il faut noter ici qu'un solveur de type 'low-Mach' ne rencontre pas de problèmes de conservation de la masse, qui est explicitement imposée lors du calcul des incréments de vitesse. Dans ce cas, si une erreur existe, elle est distribuée pour assurer la conservation (terme en divergence de la vitesse).



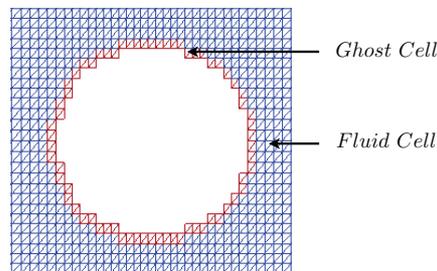
**FIGURE 4.25:** Paramètres géométriques pour la vérification de la conservation de la masse pour l'écoulement autour d'un cylindre confiné dans un canal.

cylindre immergé) et pour un même volume d'intégration. Notons que dans le cadre de cette étude, le cylindre de diamètre  $d$  est discrétisé sur 70 cellules fantômes comme le montre la figure 4.27.

La frontière immergée nuit peu à la conservation de la masse, puisque, dans le cas présent, nous observons une déviation maximale de la masse (gain ou perte) de deux millièmes.



**FIGURE 4.26:** Vérification des propriétés de conservation de la masse à proximité d'un cylindre immergé dans un canal.



**FIGURE 4.27:** Maillage à proximité du cylindre immergé.

## 4.8 Une méthode de frontières immergées conservative

Cette section est dédiée au développement d'une méthode de frontières immergées conservative. Nous avons démontré dans la section précédente, que la méthode de la cellule fantôme induisait une faible erreur sur la conservation de la masse. Néanmoins, on trouve dans la littérature des cas où cette erreur n'est plus négligeable [370]. Il s'agit essentiellement d'écoulements confinés, résolus sur des maillages grossiers. En effet, à mesure que le rapport des volumes fluides et solides croît, l'écart sur la conservation de la masse augmente exponentiellement. On peut donc s'attendre à voir une déviation sur la masse importante dans le cas, par exemple, de longs canaux inclinés et discrétisés sur un faible nombre de mailles. Ainsi, les principales applications relatant ce problème se rencontrent dans le domaine biomédical (réseau ventriculaire).

### 4.8.1 Une méthode de frontières immergées conservative pour des écoulements compressibles (CCIB)

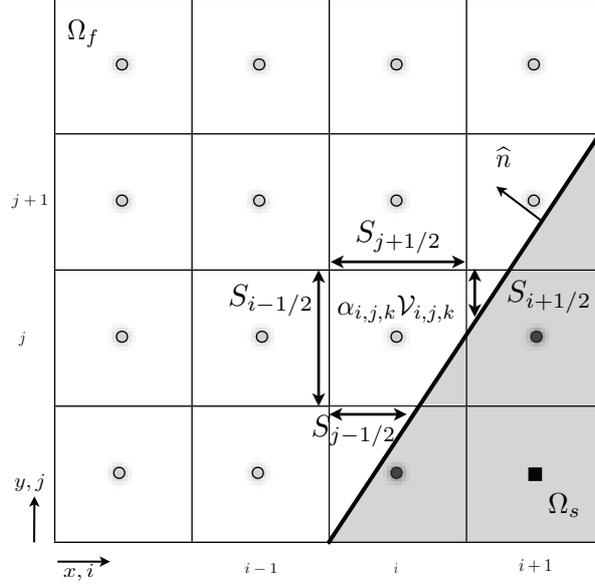
Nous avons vu que la méthode de la cellule fantôme ne repose aucunement sur les lois de conservation, ce qui peut induire une perte ou un gain de masse. Comme nous l'avons démontré précédemment, lorsque le maillage est suffisamment raffiné, l'erreur sur la conservation de la masse est négligeable. Néanmoins, lorsque le rapport entre le volume des cellules fluides et le volume des cellules solides est faible à l'intérieur du domaine de calcul ou lorsque le maillage est très lâche, cette erreur peut être réduite en utilisant une formulation conservative de la méthode des frontières immergées. Nous proposons alors une méthode de frontières immergées conservatives compressibles (CCIB pour *Compressible Conservative Immersed Boundary*). Cette dernière est une extension de l'approche de la cellule coupée, proposée par Meyer *et al.* [256] et Kirkpatrick *et al.* [198]. Elle repose sur la modification des schémas numériques à proximité de la frontière immergée et respecte la formulation des volumes finis. En particulier, la méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations gouvernant l'écoulement et écrites sous forme intégrale, sur un volume de contrôle  $\mathcal{V}$ . Dans le cas d'un maillage structuré cartésien, les équations de transport discrétisées s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial t} = & \frac{\mathcal{FC}_{i+1/2,j,k} \mathcal{S}_{i+1/2,j,k} + \mathcal{FC}_{i-1/2,j,k} \mathcal{S}_{i-1/2,j,k}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \\
 & + \frac{\mathcal{FV}_{i+1/2,j,k} \mathcal{S}_{i+1/2,j,k} + \mathcal{FV}_{i-1/2,j,k} \mathcal{S}_{i-1/2,j,k}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \\
 & + \frac{\mathcal{FC}_{i,j+1/2,k} \mathcal{S}_{i,j+1/2,k} + \mathcal{FC}_{i,j-1/2,k} \mathcal{S}_{i,j-1/2,k}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \\
 & + \frac{\mathcal{FV}_{i,j+1/2,k} \mathcal{S}_{i,j+1/2,k} - \mathcal{FV}_{i,j-1/2,k} \mathcal{S}_{i,j-1/2,k}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \\
 & + \frac{\mathcal{FC}_{i,j,k+1/2} \mathcal{S}_{i,j,k+1/2} + \mathcal{FC}_{i,j,k-1/2} \mathcal{S}_{i,j,k-1/2}}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \\
 & + \frac{\mathcal{FV}_{i,j,k+1/2} \mathcal{S}_{i,j,k+1/2} - \mathcal{FV}_{i,j,k-1/2} \mathcal{S}_{i,j,k-1/2}}{\mathcal{V}_{i,j,k}}
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

avec  $\mathcal{FC}_{i+1/2,j,k}$ ,  $\mathcal{FC}_{i,j+1/2,k}$  et  $\mathcal{FC}_{i,j,k+1/2}$  l'approximation des flux convectifs à l'interface  $x_{i+1/2}$ ,  $y_{j+1/2}$  et  $z_{k+1/2}$ ,  $\mathcal{FV}_{i+1/2,j,k}$ ,  $\mathcal{FV}_{i,j+1/2,k}$  et  $\mathcal{FV}_{i,j,k+1/2}$  les flux visqueux approximés en  $x_{i+1/2}$ ,  $y_{j+1/2}$  et  $z_{k+1/2}$  et  $\hat{\varphi}$  la valeur moyenne de la variable conservative sur le volume de contrôle  $\mathcal{V}_{i,j,k}$ .

Contrairement à la méthode de la cellule fantôme, où la forme effective de la cellule n'est pas prise en compte, la présente approche repose sur la modification des volumes de contrôle avoisinants la frontière afin d'ôter la fraction solide.

Ainsi, la première étape repose sur l'identification des cellules coupées, c'est-à-dire les cellules dont le volume de contrôle englobe une partie solide. Afin de corriger le bilan local des flux sur ces



**FIGURE 4.28:** Traitement des cellules à proximité de la surface immergée : le bilan des flux est réalisé sur le volume fluide effectif.

cellules coupées, leur volume de contrôle est multiplié par la fraction volumique fluide,  $\alpha_{i,j,k}$  avec  $0 \leq \alpha_{i,j,k} \leq 1$ , de sorte à obtenir le volume fluide effectif ( $\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}$ ) comme l'illustre la figure 4.28. On détermine également les surfaces mouillées ( $\mathcal{S}_{i-1/2,j,k}$ ,  $\mathcal{S}_{i+1/2,j,k}$ ,  $\mathcal{S}_{i,j-1/2,k}$ ,  $\mathcal{S}_{i,j+1/2,k}$ ,  $\mathcal{S}_{i,j,k-1/2}$  et  $\mathcal{S}_{i,j,k+1/2}$ ) pour effectuer le bilan des flux sur les surfaces fluides du volume de contrôle  $\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}$ . Les cellules fantômes, appartenant au domaine solide et déterminées à l'aide d'un point image et d'une hypothèse de relaxation linéaire des variables selon la direction normale à la frontière, sont toujours identifiées afin d'évaluer, de manière précise, les flux aux interfaces des cellules coupées. En ce qui concerne les flux visqueux, le bilan visqueux de la cellule coupée inclut un terme supplémentaire, appelé  $\mathcal{D}_{i,j,k}$ , qui décrit les forces de frottements sur la frontière  $\Gamma_{i,j,k}$  :

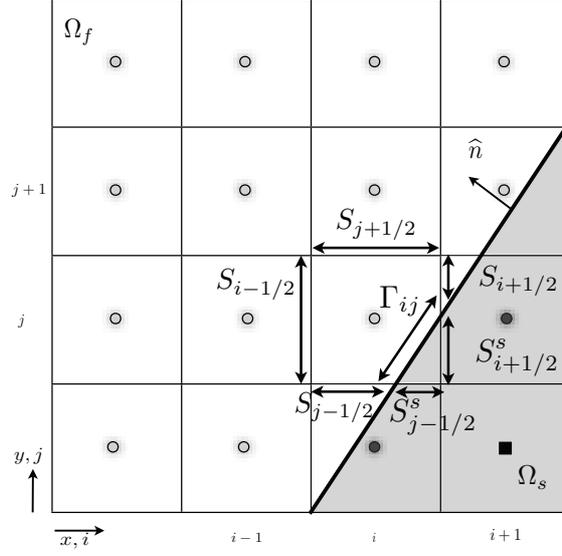
$$\mathcal{D}_{i,j,k} = - \int_{\Gamma_{i,j,k}} \tau dS \quad (4.81)$$

Pour traiter les murs immergés dans un écoulement incompressible, Meyer *et al.* [256], en négligeant les gradients de vitesse suivant les directions tangentiels, expriment le tenseur des contraintes visqueuse sur la frontière sous la forme :

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u_{\parallel}}{\partial x_{\parallel}} \right) \quad (4.82)$$

avec  $u_{\parallel}$  la composante de vitesse parallèle au mur et  $x_{\parallel}$  la distance de la cellule au mur. Afin d'estimer cette force de frottement, Meyer *et al.* [256] reconstruisent le tenseur des contraintes visqueuses à l'aide d'un schéma d'interpolation et projettent ce terme sur les axes associés au repère cartésien. Après avoir évalué cette force de frottement, Meyer *et al.* [256] effectuent le bilan visqueux des volumes coupés en utilisant cette même force de frottement interpolée ainsi que les surfaces mouillées. Cette méthode étant uniquement dérivée pour les écoulements incompressibles, une approche alternative est alors dérivée et repose sur la modification de l'évaluation des composantes visqueuses.

Nous proposons ainsi d'estimer les flux visqueux à l'aide des cellules fantômes. Les flux visqueux, le long de la surface immergée, sont exprimés comme la moyenne surfacique des flux visqueux des plans solides délimitant le volume de contrôle  $\mathcal{V}_{i,j,k}$  (flux estimés à l'aide du point fantôme), que nous



**FIGURE 4.29:** Traitement des flux visqueux dans une cellule coupée.

multiplions ensuite à la surface immergée, comme l'illustre la figure 4.29. Le terme  $\mathcal{D}_{i,j,k}$  devient (figure 4.29) :

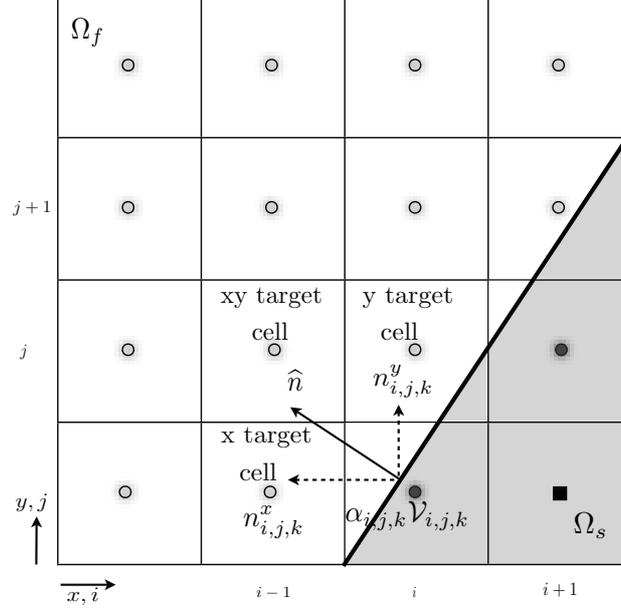
$$\mathcal{D}_{i,j,k} = \frac{1}{2} \Gamma_{i,j,k} (\mathcal{FV}_{i+1/2,j,k} + \mathcal{FV}_{j-1/2,j,k}) \quad (4.83)$$

Le terme  $\frac{1}{2}(\mathcal{FV}_{i+1/2,j,k} + \mathcal{FV}_{j-1/2,j,k})$  représente la force de frottement "linéique". Ainsi, le bilan des flux, au niveau des cellules coupées, s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial t} = & \frac{\mathcal{FC}_{i+1/2,j,k} \mathcal{S}_{i+1/2,j,k} + \mathcal{FC}_{i-1/2,j,k} \mathcal{S}_{i-1/2,j,k}}{\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}} \\ & + \frac{\mathcal{FV}_{i+1/2,j,k} \mathcal{S}_{i+1/2,j,k} + \mathcal{FV}_{i-1/2,j,k} \mathcal{S}_{i-1/2,j,k}}{\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}} \\ & + \frac{\mathcal{FC}_{i,j+1/2,k} \mathcal{S}_{i,j+1/2,k} + \mathcal{FC}_{i,j-1/2,k} \mathcal{S}_{i,j-1/2,k}}{\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}} \\ & + \frac{\mathcal{FV}_{i,j+1/2,k} \mathcal{S}_{i,j+1/2,k} - \mathcal{FV}_{i,j-1/2,k} \mathcal{S}_{i,j-1/2,k}}{\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}} \\ & + \frac{\mathcal{FC}_{i,j,k+1/2} \mathcal{S}_{i,j,k+1/2} + \mathcal{FC}_{i,j,k-1/2} \mathcal{S}_{i,j,k-1/2}}{\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}} \\ & + \frac{\mathcal{FV}_{i,j,k+1/2} \mathcal{S}_{i,j,k+1/2} - \mathcal{FV}_{i,j,k-1/2} \mathcal{S}_{i,j,k-1/2}}{\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}} \\ & + \frac{\mathcal{D}_{i,j,k}}{\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Afin d'éviter l'apparition de cellules de petite taille, qui peuvent nuire à la stabilité numérique du code, la procédure de "mélange des cellules" proposée par Hu *et al.* [180] et reprise par Meyer *et al.* [256] est utilisée pour les cellules coupées disposant d'une faible fraction volumique fluide et dont les centres sont situés dans le domaine solide (cellules qualifiées de fantômes dans la présente approche). Cette méthode consiste à reporter les fractions volumiques de ces petites cellules coupées au niveau des cellules fluides voisines.

Afin de déterminer les cellules cibles, nous déterminons les directions de mélange et les fractions de mélange à partir des composantes des vecteurs normaux aux cellules coupées. Ainsi, comme le montre la figure 4.30, la cellule fantôme  $(i, j, k)$  de fraction volumique fluide  $\alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}$  dispose de trois cellules cibles pour un cas 2D. Ces cellules seront modifiées de sorte à effectuer un "mélange" fluide conservatif. La première cellule cible est identifiée le long de l'axe  $x$  comme la cellule  $(i+1, j, k)$  ou  $(i-1, j, k)$  (suivant le signe de la première composante du vecteur normal  $\mathbf{n}_{i,j,k}$ ); la seconde, suivant l'axe  $y$  et la dernière suivant la direction normale à la frontière.



**FIGURE 4.30:** Schéma de la procédure de mélange pour une cellule fantôme, c'est-à-dire une cellule de faible rapport volumique fluide.

Comme l'illustre la figure 4.30, la cellule fantôme  $(i, j, k)$  va échanger avec la cellule cible sur l'axe  $x$  de coordonnées  $(i-1, j, k)$ , la fraction volumique  $\beta_{i,j,k}^x \alpha_{i,j,k}$  (produit de la fraction de mélange et de la fraction fluide), soit le volume  $\beta_{i,j,k}^x \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}$ . Les variables conservatives associées à cette cellule cible fluide subissent donc la variation volumique suivante :

$$M_{trg}^x = \underbrace{\left( \frac{\beta_{i,j,k}^x \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} \mathbf{U}_{i,j,k} + \mathcal{V}_{trg}^x \mathbf{U}_{trg}^x}{\beta_{i,j,k}^x \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} + \mathcal{V}_{trg}^x} \right)}_{\text{champ conservatif après du mélange}} \mathcal{V}_{trg}^x - \underbrace{\mathcal{V}_{trg}^x \mathbf{U}_{trg}^x}_{\text{champ conservatif avant mélange}} \quad (4.85)$$

soit

$$M_{trg}^x = \frac{\beta_{i,j,k}^x \mathcal{V}_{trg}^x \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k}}{\beta_{i,j,k}^x \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} + \mathcal{V}_{trg}^x} \left[ \mathbf{U}_{i,j,k} - \mathbf{U}_{trg}^x \right] \quad (4.86)$$

En généralisant cette approche, les corrections à apporter aux grandeurs conservatives des cellules cibles associées à la cellule fantôme  $(i, j, k)$  sont déterminées à l'aide des relations :

$$\begin{aligned} M_{trg}^x &= \frac{\beta_{i,j,k}^x \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} \mathcal{V}_{trg}^x}{\beta_{i,j,k}^x \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} + \mathcal{V}_{trg}^x} \left[ \mathbf{U}_{i,j,k} - \mathbf{U}_{trg}^x \right] \\ M_{trg}^y &= \frac{\beta_{i,j,k}^y \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} \mathcal{V}_{trg}^y}{\beta_{i,j,k}^y \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} + \mathcal{V}_{trg}^y} \left[ \mathbf{U}_{i,j,k} - \mathbf{U}_{trg}^y \right] \\ M_{trg}^{xy} &= \frac{\beta_{i,j,k}^{xy} \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} \mathcal{V}_{trg}^{xy}}{\beta_{i,j,k}^{xy} \alpha_{i,j,k} \mathcal{V}_{i,j,k} + \mathcal{V}_{trg}^{xy}} \left[ \mathbf{U}_{i,j,k} - \mathbf{U}_{trg}^{xy} \right] \end{aligned} \quad (4.87)$$

où le jeu d'indices-exposants  $trg^x$ ,  $trg^y$  et  $trg^{yx}$  est lié aux coordonnées des cellules cibles selon les axes  $x$  et  $y$  et selon la direction normale. Les coefficients  $\beta_{i,j,k}^x$ ,  $\beta_{i,j,k}^y$  et  $\beta_{i,j,k}^{xy}$  représentent les fractions de mélange normalisées et définies comme :

$$\begin{aligned}\beta_{i,j,k}^x &= \frac{|n_{i,j,k}^x|^2}{|n_{i,j,k}^x|^2 + |n_{i,j,k}^y|^2 + |n_{i,j,k}^x n_{i,j,k}^y|} \\ \beta_{i,j,k}^y &= \frac{|n_{i,j,k}^y|^2}{|n_{i,j,k}^x|^2 + |n_{i,j,k}^y|^2 + |n_{i,j,k}^x n_{i,j,k}^y|} \\ \beta_{i,j,k}^{xy} &= \frac{|n_{i,j,k}^x n_{i,j,k}^y|}{|n_{i,j,k}^x|^2 + |n_{i,j,k}^y|^2 + |n_{i,j,k}^x n_{i,j,k}^y|}\end{aligned}\tag{4.88}$$

Après avoir identifié les différentes cellules coupées par la frontière immergée, les cellules dont le centre est situé dans la région fluide sont modifiées pour effectuer le bilan des flux sur la fraction fluide et pondérer ce bilan par la fraction fluide effective. Par contre, toute cellule coupée appartenant à la région solide (cellule fantôme) doit être mélangée avec les cellules fluides voisines. La fraction fluide associée à cette cellule est donc distribuée aux cellules fluides voisines avec les équations 4.87.

Après avoir évalué toutes les cellules fantômes nécessitant un mélange conservatif, on détermine toutes les variations volumiques  $\mathbf{M}$  des cellules fluides contiguës à la frontière immergée. Les cellules fluides faisant l'objet d'une correction conservative sont alors modifiées pour inclure les contributions de toutes les cellules fantômes voisines (une cellule fluide peut en effet être la cellule cible de plusieurs cellules fantômes). Si l'on note maintenant  $(i, j, k)$  les indices associés à une cellule fluide, le champ conservatif de cette cellule est évalué comme :

$$\mathbf{U}_{i,j,k} = \mathbf{U}_{i,j,k}^* + \frac{1}{\mathcal{V}_{i,j,k}} \left( \sum \mathbf{M}_{i,j,k}^x + \sum \mathbf{M}_{i,j,k}^y + \sum \mathbf{M}_{i,j,k}^{xy} \right)\tag{4.89}$$

avec  $\mathbf{U}_{i,j,k}^*$  les quantités conservatives avant mélange, et  $\mathbf{M}_{i,j,k}^x$ ,  $\mathbf{M}_{i,j,k}^y$  et  $\mathbf{M}_{i,j,k}^{xy}$  les quantités conservatives provenant des cellules fantômes voisines qui utilisent la procédure de mélange.

Cette procédure peut être étendue à un cas tridimensionnel. Néanmoins, une telle extension nécessitant des reconstructions géométriques complexes ainsi qu'un coût CPU supplémentaire, elle ne sera pas présentée dans le présent manuscrit. Les coefficients de la procédure de mélange tridimensionnel sont néanmoins exposés par Meyer *et al.* [256]. L'objectif de cette parenthèse est de démontrer l'aptitude de la méthode de la cellule fantôme à traiter des géométries complexes tout en affectant le moins possible le bilan conservatif. L'approche de la cellule fantôme et cette approche conservative sont donc confrontées sur un cas académique.

### 4.8.2 Canal incliné d'un angle variable

Cette section est dédiée à l'étude d'un écoulement de Poiseuille dans un canal, pour différents maillages et inclinaisons du canal. Les simulations sont réalisées dans un premier temps avec la méthode de la cellule fantôme et dans un second temps avec l'approche conservative. L'impact de la méthode CCIB est alors quantifié en terme de conservation de la masse.

Cette étude se base sur l'écoulement générique de Poiseuille, présenté par Poinot et Lele [295]. Les cas 2D sont réalisés pour un nombre de Mach de  $M = 0, 1$ . Le nombre de Reynolds, basé sur la mi-hauteur du canal  $h$ , est  $Re_h = 15$ . L'entrée et la sortie sont traitées avec les conditions limites caractéristiques non réfléchissantes. Les conditions d'entrée (valeurs cibles des profils) sont :

$$\begin{aligned}u(0, y, t) &= u_\infty F(y) \cos(\beta) \\ v(0, y, t) &= u_\infty F(y) \sin(\beta) \\ T(0, y, t) &= T_\infty\end{aligned}\tag{4.90}$$

Maillage	Nombre de cellules	$N_0$	$N_{20}$	$N_{30}$	$N_{45}$
A	$30 \times 30$	-	9	-	-
B	$40 \times 40$	-	12	-	-
C	$60 \times 60$	52	22	-	-
D	$90 \times 90$	78	32	-	-
E	$120 \times 120$	102	42	34	26
F	$200 \times 200$	-	72	-	-

**TABLE 4.5:** Maillage et nombre de cellules sur la hauteur du canal  $N_\beta$  pour différentes inclinaisons par rapport au maillage (paramètre  $\beta$ )

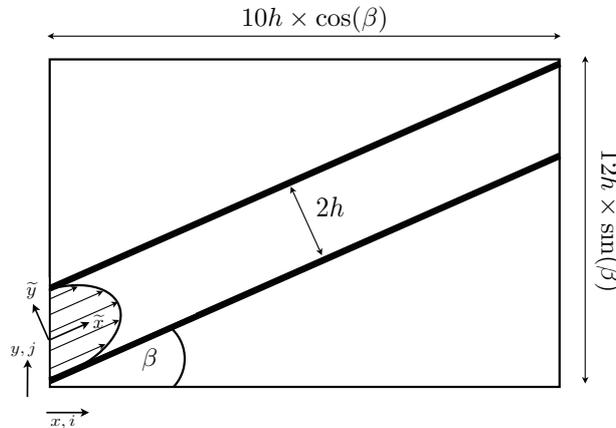
Ces conditions sont évaluées avec  $0 < y < 2h$  et  $F(y) = \cos(\pi(y/h - 1)/2)^2$ ,  $u_\infty$  la vitesse maximale dans le plan d'entrée,  $T_\infty = 298,15K$  la température initiale et  $\beta$  l'angle d'inclinaison du canal. Ce profil d'entrée est différent du profil établi mais assure le même débit massique en entrée :

$$\dot{m} = u_\infty h \quad (4.91)$$

Ce profil doit évoluer vers la solution analytique [333, 295] :

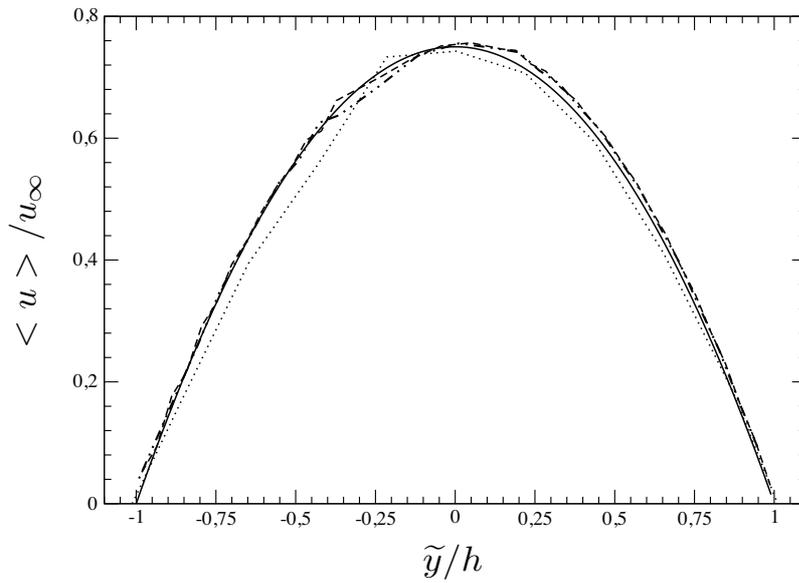
$$F(y) = \frac{3}{4\mu} \frac{1}{Re_h} \frac{\rho_\infty U}{h} y(2h - y) \quad (4.92)$$

La canal dispose d'une longueur dix fois supérieure à sa mi-hauteur. Le domaine de calcul est représenté sur la figure 4.31. Les caractéristiques des maillages utilisés sont exposées dans le tableau 4.5.

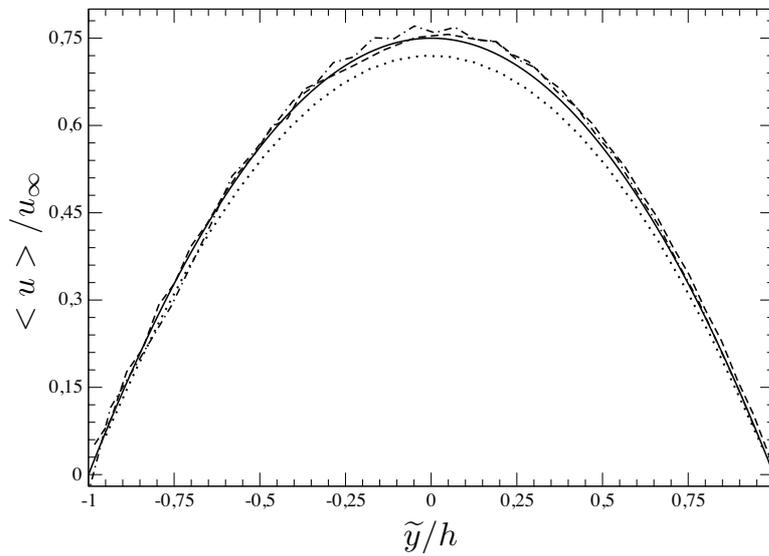


**FIGURE 4.31:** Domaine de calcul pour l'étude de l'écoulement dans un canal.

Dans un premier temps, la cellule fantôme est évaluée pour différentes résolutions et inclinaisons du canal. La figure 4.32 montre les profils de la vitesse longitudinale pour un canal incliné de 20 degrés et différents maillages (maillages A, D et E) et met ainsi en évidence la distorsion du profil de vitesse à mesure que le nombre de cellules sur une hauteur de canal diminue. On remarque que le profil de vitesse est surestimé sur les bords lorsque la résolution est faible. La figure 4.33 compare les profils de vitesse pour différentes inclinaisons du canal et pour un seul et même maillage, le maillage E. A mesure que l'angle augmente, la vitesse longitudinale est sous-estimée.

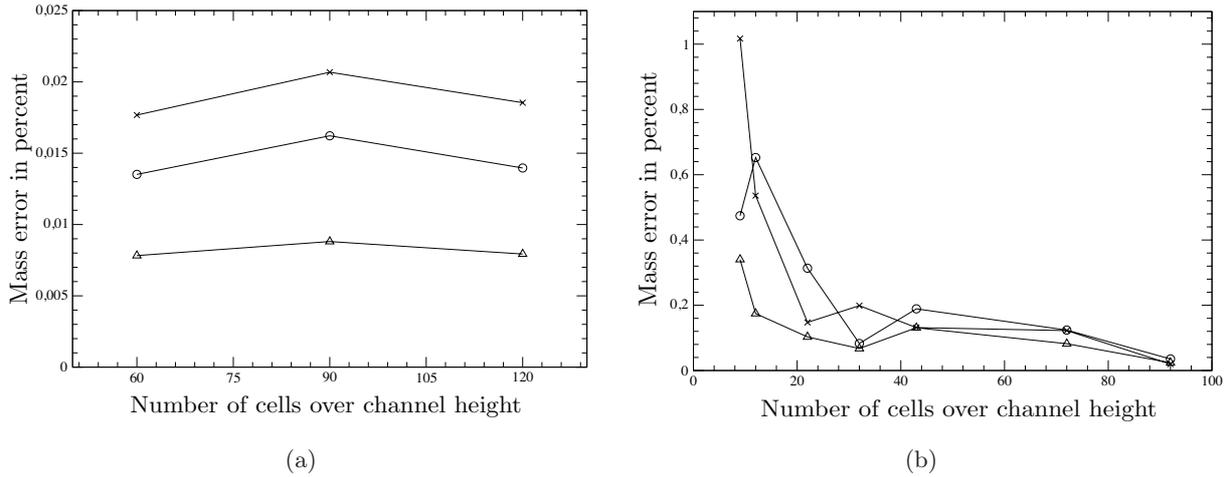


**FIGURE 4.32:** Profils de vitesse longitudinale obtenus avec la méthode de la cellule fantôme (GCM) pour le canal incliné de  $\beta = 20^\circ$  et pour différents maillages : Maillage A ( $\cdots$ ), Maillage D ( $- - -$ ) et Maillage E ( $-\cdot-\cdot-$ ), comparés à la solution analytique ( $-$ ).



**FIGURE 4.33:** Profils de vitesse longitudinale obtenus avec la méthode de la cellule fantôme (GCM) pour différentes inclinaisons du canal et le maillage E :  $\beta = 45^\circ$  ( $\cdots$ ),  $\beta = 30^\circ$  ( $-\cdot-\cdot-$ ) et  $\beta = 20^\circ$  ( $- - -$ ), comparés à la solution analytique ( $-$ ).

Afin d'évaluer l'erreur sur la conservation de la masse, nous étudions l'évolution du débit massique le long du canal. Le débit volumétrique total est constant sur chaque section du canal et vaut  $\dot{m} = u_\infty h$ . Pour évaluer la déviation de masse avec la méthode de la cellule fantôme, nous accumulons l'erreur absolue en pourcentage entre deux plans particuliers durant 20 000 itérations et pour différentes sections. Les résultats sont reportés sur la figure 4.34, pour un canal horizontal et incliné de  $\beta = 20$  avec différents maillages. Notons que l'erreur sur la masse est tracée en fonctions du nombre de cellules le long d'une hauteur de canal et pour différentes sections. Comme spécifié dans la section précédente, la cellule fantôme n'introduit pas une perte ou un gain de masse important. Par ailleurs, à mesure que le volume d'intégration croît, l'erreur absolue augmente.

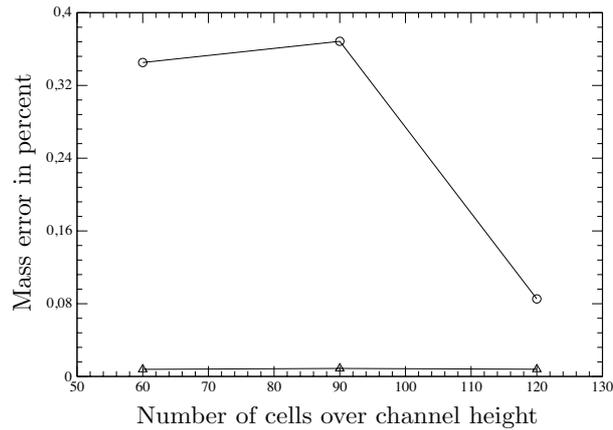


**FIGURE 4.34:** Evolution de l'erreur sur la masse au travers de différentes sections et pour deux inclinaisons de canal avec la méthode de la cellule fantôme (GCM). (a) : 0 degrés. (b) : 20 degrés. Les triangles représentent la variation du débit massique entre  $\tilde{x} = 3$  et  $\tilde{x} = 5$ . Les cercles représentent la variation du débit massique entre  $\tilde{x} = 3$  et  $\tilde{x} = 6$ . Les croix représentent la variation du débit massique entre  $\tilde{x} = 3$  et  $\tilde{x} = 7$ .

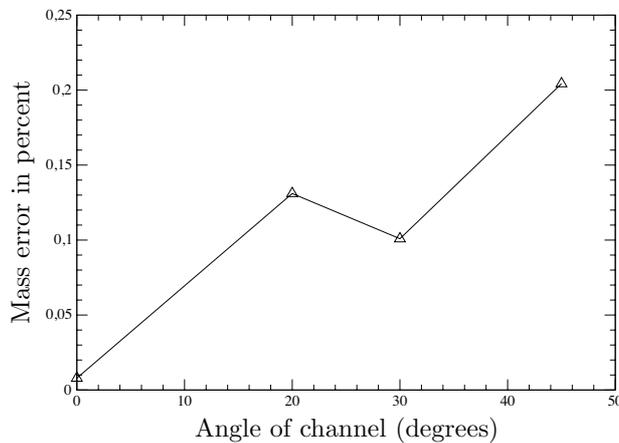
La figure 4.35 compare, quant à elle, les résultats d'un calcul avec un canal horizontal immergé (dont les parois ne coïncident pas avec le maillage) et avec un canal conforme à la grille. Cette étude est réalisée avec la méthode de la cellule fantôme pour la description des parois immergées et la description caractéristique pour les murs coïncidents (3D-NSCBC [238]). On remarque ainsi que l'approche caractéristique induit une déviation plus importante de la masse en raison de l'approximation des flux convectifs et visqueux. Ainsi, pour décrire un mur, les conditions fortes (de type Dirichlet/Neumann) semblent mieux adaptées que les conditions limites caractéristiques qui induisent un défaut de conservation de la masse.

Pour évaluer l'impact de l'inclinaison du canal, nous étudions l'écoulement pour quatre inclinaisons du canal par rapport au maillage :  $\beta = 0$ ,  $\beta = 20$ ,  $\beta = 30$  et  $\beta = 45$ . La figure 4.36 expose l'erreur commise sur la masse pour ces différents angles et dans le cadre du maillage E. En effet, nous pouvons nous attendre à une déviation plus importante de la conservation de la masse à mesure que l'inclinaison du canal augmente, la direction de reconstruction des cellules images n'étant pas alignée avec les axes du maillage.

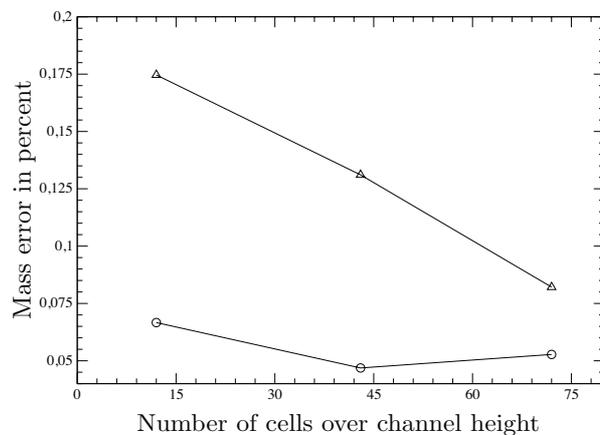
L'approche conservative proposée (CCIB) est ensuite évaluée au regard de la méthode de la cellule fantôme. La figure 4.37 compare ainsi les propriétés de conservation de la masse de ces deux approches. Pour un maillage grossier, l'erreur sur la masse produite par la méthode de reconstruction de la frontière est moins importante avec l'approche conservative qu'avec la procédure de la cellule fantôme. En effet, l'utilisation du concept de volumes finis et le bilan des flux associé, sur les cellules frontalières, préserve l'expression des lois de conservation.



**FIGURE 4.35:** Evolution de l'erreur sur la conservation de la masse dans un canal horizontal décrit avec la méthode de la cellule fantôme (triangles) et les conditions limites caractéristiques de type NSCBC (cercles).



**FIGURE 4.36:** Evolution de l'erreur sur la conservation de la masse pour différents canaux inclinés, dont les murs sont décrits avec la cellule fantôme et discrétisés avec le maillage  $E$ .



**FIGURE 4.37:** Evolution de l'erreur sur la conservation de la masse pour le canal incliné de  $\beta = 20^\circ$ , dont les murs sont décrits avec la cellule fantôme GCM (triangles) et l'approche conservative CCIB (cercles).

Néanmoins, à mesure que le maillage est raffiné, l'écart entre les deux méthodes décroît. En effet, l'erreur induite par l'interpolation de la cellule fantôme et le non respect du formalisme des volumes finis est faible lorsque le maillage est raffiné. Les volumes de contrôle étant plus petits, l'erreur reportée sur l'ensemble du domaine de calcul diminue à mesure que le maillage est raffiné. Les deux méthodes induisent donc la même déviation de masse à mesure que le maillage est raffiné.

### 4.9 Conclusion

Ce chapitre a démontré que la méthode des frontières immergées basée sur une approche de la cellule fantôme est particulièrement adaptée à la description d'écoulements compressibles. Par ailleurs, cette méthode ne semble pas modifier les propriétés de réflexions acoustiques des murs et induit un défaut de conservation de la masse négligeable. Pour des applications impliquant un rapport cellules fantômes sur cellules fluides relativement élevés (par exemple un canal de faible section peu raffiné), nous avons dérivé une approche conservative dont l'implémentation est plus complexe que la méthode de la cellule fantôme. Cette méthode montre son efficacité. Néanmoins, le gain apporté par cette approche conservative étant négligeable pour des écoulements suffisamment résolus, dans la suite de ce manuscrit, les études seront réalisées avec la méthode de la cellule fantôme.

# Chapitre 5

## Etude bibliographique des cavités sous écoulement affleurant

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Phénoménologie et modèles</b>	<b>164</b>
5.1.1	Terminologie	164
5.1.2	Instabilités des couches de mélange	165
5.1.3	Dynamique de l'écoulement de cavité	169
5.1.3.1	Les oscillations de type "fluide-dynamique"	171
5.1.3.2	Les oscillations de type "fluide-élastique"	172
5.1.3.3	Les oscillations de type "fluide-résonance"	173
5.1.3.4	Le "sheartone" ou processus d'auto-asservissement	174
5.1.4	Caractérisation du processus de rétroaction ou auto-asservissement	174
5.1.4.1	La boucle de retour ou la notion de feedback aérodynamique	174
5.1.4.2	Processus d'apport et de rejet périodique de fluide dans la cavité	175
5.1.5	Paramètre influençant ces phénomènes	176
5.1.5.1	Nature de la couche limite incidente	177
5.1.5.2	Longueur de la cavité	177
5.1.5.3	Largeur de la cavité	177
5.1.5.4	Vitesse de l'écoulement incident	177
5.1.6	Modélisation	178
5.1.6.1	Le modèle de Rossiter	178
5.1.6.2	Le modèle de Bilanin et Covert	181
5.1.6.3	Le modèle de Tam et Block	181
5.1.6.4	Les modèles de Howe	182
<b>5.2</b>	<b>Etat de l'art des différentes études expérimentales et numériques</b>	<b>184</b>
5.2.1	Etudes expérimentales	184
5.2.2	Etudes numériques	184
<b>5.3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>186</b>

---

Les phénomènes auto-entretenus au sein d'un écoulement résultent le plus souvent de la sollicitation d'une zone potentiellement instable par une interaction de type fluide-structure. Cette dernière se rencontre dans les écoulements affleurant une cavité, mais aussi dans les jets en impaction et les interactions de sillage.

Ce chapitre est dédié à l'étude de la dynamique de cavité, reposant sur l'apparition d'oscillations, rendues possibles par la nature instable des couches de mélanges. Il existe un grand nombre de configurations liées aux écoulements "de cavité". Nous présenterons ainsi, en premier lieu, certains concepts généraux pour la classification terminologique des cavités avant de nous intéresser à la dynamique des écoulements affleurant une cavité. Dans un second temps, nous dresserons un état de l'art non exhaustif des simulations numériques présentes dans la littérature sur ce sujet.

## 5.1 Phénoménologie et modèles

### 5.1.1 Terminologie

La plupart des configurations présentes dans la littérature [141, 215, 216, 217, 328, 100] se basent sur des cavités parallélépipédiques. La terminologie présentée ci-dessous peut éventuellement être étendue à d'autres géométries. Les cavités sont classées suivant trois paramètres : la longueur de la cavité, la profondeur et l'envergure notées respectivement  $L$ ,  $D$  et  $W$ . La première classification est établie suivant le rapport  $L/D$  et repose plus précisément sur la localisation du point de rattachement de la couche cisailée :

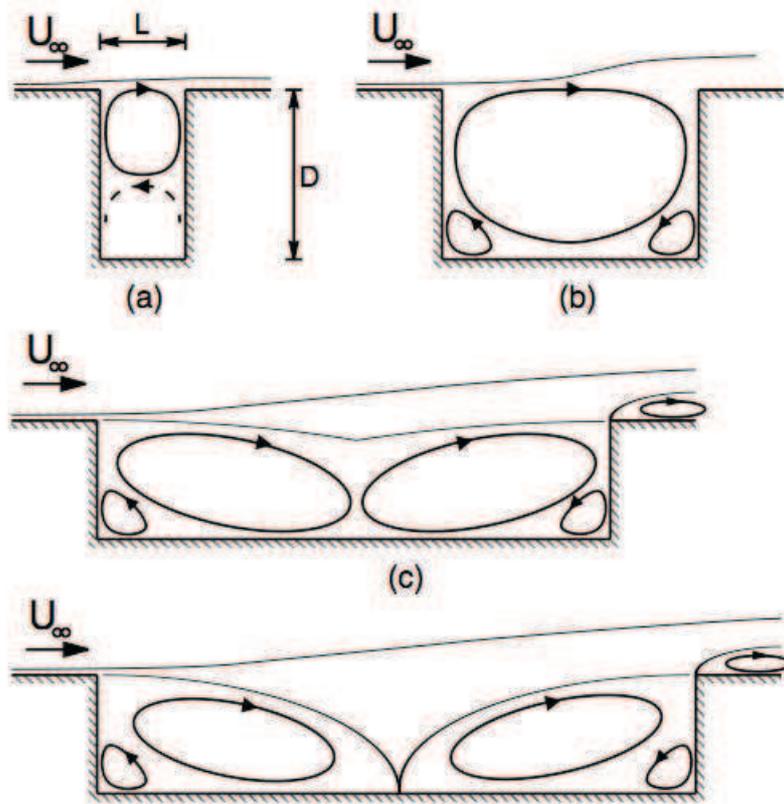
- Lorsque le rapport  $L/D$  n'excède pas 1, on qualifie la cavité de "**profonde**". Cette dernière présente généralement une zone de recirculation primaire dans la partie supérieure de la cavité ainsi que des zones de recirculation secondaires (*cf.* figure 5.1). La dynamique des cavités profondes est pilotée par un phénomène de résonance dû aux modes de profondeur qui se superposent à un phénomène de bouclage aérodynamique (*cf.* section 5.1.3 sur les classes d'interaction entre le fluide et la cavité). Ce phénomène de résonance devient par ailleurs prépondérant pour les faibles valeurs du nombre de Mach ( $M < 0,2$ ) [364].
- Les cavités **peu profondes** reposent sur un rapport  $L/D > 1$ . Trois déclinaisons sont possibles :
  - Lorsque l'on assiste à un recollement de la couche de mélange dans le fond de la cavité, la cavité est dite "**fermée**". On rencontre ce type d'écoulement pour des rapports  $L/D$  au-delà de 10. La figure 5.1 rend compte de la dynamique propre à cet écoulement où l'on observe des tourbillons confinés aux niveaux des bords (amont et aval), une zone de recirculation supplémentaire entre le point de recollement et l'angle aval ainsi qu'une zone décollée en aval. Notons que cette limite n'est pas rigoureuse. Ainsi, Charwat *et al.* [69] observent la transition vers une cavité fermée pour un rapport de forme de 11, pour un écoulement supersonique. Dans le cas d'un écoulement affleurant subsonique avec une couche limite laminaire, Sarohia [331] fixe cette limite à 7. La cavité fermée peut être considérée comme la succession d'une marche descendante et d'une marche montante.
  - Pour des rapports  $L/D$  inférieurs à 10, on parle de cavités "**ouvertes**". La couche cisailée se rattache directement au niveau de l'angle aval et forme "un pont" entre les deux angles amont et aval. L'écoulement présent dans cette cavité comporte généralement un tourbillon confiné au sein de la cavité avec des zones de recirculation au niveau des angles inférieurs.
  - Entre ces deux catégories, à mesure que la longueur de la cavité augmente, le fluide évolue d'un état ouvert à un état fermé; il s'agit de l'état **transitionnel**. Pour des écoulements de cavité en régime transsonique, Stallings et Wilcox [352] définissent ainsi la cavité transitionnelle (*transitional cavity flow*) pour des rapports d'aspect compris entre 9 et 11. Ce régime est caractérisé par la présence de deux zones de recirculation dans la cavité, sans recollement de la couche de mélange au fond de la cavité. Alors que la transition de l'écoulement de cavité ouverte à fermée est graduelle pour les fluides subsoniques, l'évolution est beaucoup plus complexe avec des fluides supersoniques et implique différentes phases (Stallings and Wilcox [352]).

Pour les cavités peu profondes, le mécanisme principal d'interaction entre le fluide et la cavité est le phénomène de rétroaction aérodynamique (*cf.* section 5.1.3).

Enfin, le caractère bidimensionnel ou tridimensionnel de la cavité est spécifié par le rapport  $W/L$ . Ainsi pour un rapport  $W/L < 1$  la cavité est dite tridimensionnelle et bidimensionnelle dans le cas contraire. En effet, l'allongement transversal facilite l'apparition d'un comportement essentiellement bidimensionnel alors qu'un faible facteur de forme  $W/L$  favorise les effets tridimensionnels liés à la présence des murs latéraux et des coins. Néanmoins, ce paramètre de forme ne permet pas de s'abstenir d'une simulation tridimensionnelle de l'écoulement. Ainsi, Ahuja *et al.* [4] montrent que,

## CHAPITRE 5. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CAVITÉS SOUS ÉCOULEMENT AFFLEURANT

pour une cavité de rapport  $W/L > 1$ , l'analyse bidimensionnelle de l'écoulement permet de retrouver les fréquences acoustiques mais que seule l'étude tridimensionnelle permet de capter les bonnes amplitudes acoustiques.

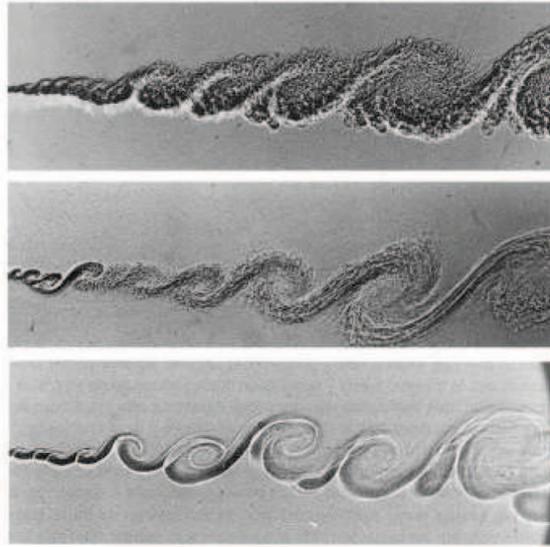


**FIGURE 5.1:** Classification des cavités ; (a) : cavité profonde, (b) : cavité peu profonde ouverte, (c) : cavité peu profonde transitionnelle, (d) : cavité peu profonde fermée (figure tirée des travaux de thèse de Chatellier [71]).

### 5.1.2 Instabilités des couches de mélange

L'apparition de phénomènes auto-entretenus, tels que ceux rencontrés dans un écoulement de cavité, résulte généralement de la sollicitation d'une zone particulièrement instable par le biais d'une interaction de type fluide-structure. D'une manière générale, l'apparition des oscillations qui conduisent à un couplage aéroacoustique repose sur l'instabilité naturelle d'une couche de mélange. Cette couche de mélange naît de la mise en contact de deux couches de fluides parallèles, animées de vitesses différentes. Elle est le lieu propice à l'apparition des instabilités de Kelvin Helmholtz, décrite pour la première fois au cours de l'expérience de Reynolds (1883) et de Thorpe (1969) où un tube horizontal, rempli d'une couche d'eau surmontée d'une couche de saumure, est incliné. L'écoulement cisailé est mis en évidence avec la descente de la saumure et la montée de l'eau. Au niveau de l'interface cisailée, ils observent une instabilité sinusoïdale qui se développe et donne naissance à des rouleaux réguliers. Cette instabilité repose essentiellement sur l'inertie des fluides, les effets de la viscosité étant minimes (croissance de l'instabilité par diffusion de la quantité de mouvement). L'étude des couches de mélange, des jets de des sillages met également en évidence ce type d'instabilité qui peut être observé dès les faibles nombres de Reynolds. De même, Rayleigh s'intéresse très tôt aux instabilités de sillage [306] et justifie leur existence par l'instabilité des couches cisailées. Dans le cadre de l'interaction entre un jet et un obstacle, il suggère l'idée d'une rétroaction se propageant vers l'amont à la vitesse du son. Il propose également le théorème du point d'inflexion en 1880 (dit

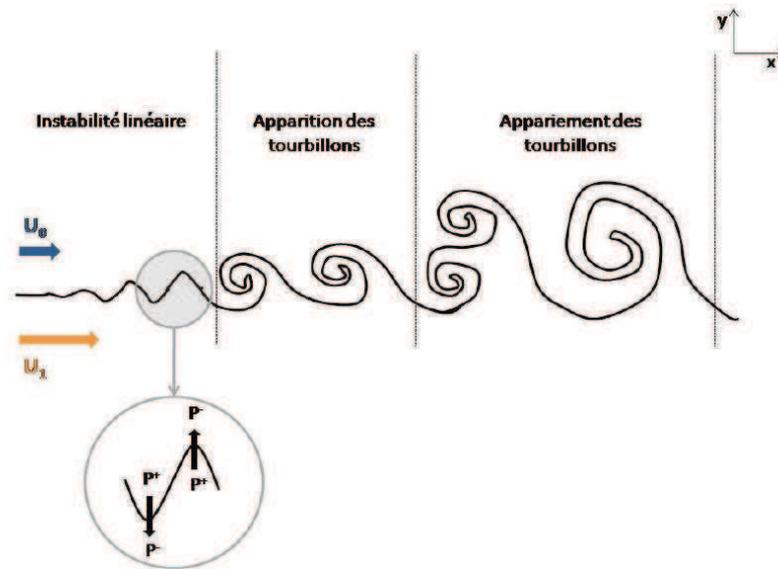
de Rayleigh), où l'existence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse moyenne est une condition nécessaire d'instabilité (mais non suffisante) [68].



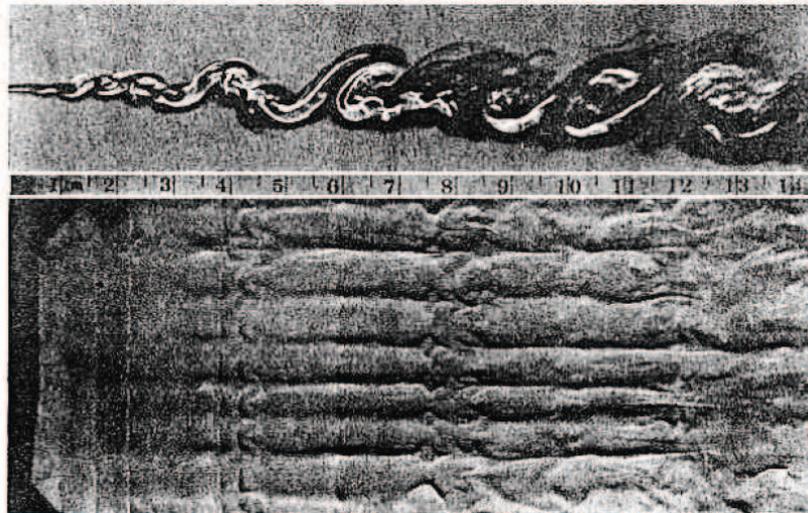
**FIGURE 5.2:** Visualisations d'une couche de cisaillement par ombroscopie (figures tirées des expériences de Brown et Roshko [54]).

Les nombreuses études expérimentales consacrées aux couches de mélange se développant librement soulignent la formation et la convection d'enroulements transversaux de fluides comme le montrent les visualisations de Brown et Rosko [54] présentées sur la figure 5.2. Ces tourbillons résultent de la déformation de l'interface entre les deux courants de fluide et s'amplifient en aval de l'écoulement en favorisant le mélange entre les deux courants et en augmentant ainsi l'épaisseur de la couche de mélange. En effet, lorsqu'une infime fluctuation de vitesse déforme l'interface, perturbant par la même l'équilibre initial de l'écoulement, l'interface fluide se retrouve soumise à une oscillation de cisaillement. D'après l'équation de Bernouilli, la pression étant plus élevée du côté concave de l'oscillation que du côté convexe, il en résulte un gradient de pression qui amplifie l'oscillation. Néanmoins, la couche de cisaillement ne pouvant pas se développer indéfiniment, l'instabilité finit par saturer et l'interface fluide s'enroule sur elle-même pour constituer un tourbillon primaire de Kelvin-Helmholtz. La présence d'une zone de dépression dans le sillage d'un tourbillon peut accélérer sa vitesse jusqu'à ce qu'il rencontre un autre tourbillon avec lequel s'apparier. La fusion de ces deux tourbillons donne alors naissance à une structure tourbillonnaire de taille plus importante. C'est ce phénomène d'appariement qui régit l'élargissement d'une couche de mélange. L'appariement des tourbillons et l'amplification de la couche de mélange favorisent sa transition vers un état turbulent. Ce mécanisme est illustré sur la figure 5.3.

Malgré le caractère apparemment bidimensionnel d'une couche cisailée, elle présente également des structures tridimensionnelles à plus petite échelle. En effet, les instabilités primaires ne sont pas les seules mises en jeu dans une couche de mélange. Benney [26] démontre, par l'analyse non-linéaire des équations de Navier-Stokes, l'existence d'une vorticité tridimensionnelle donnant lieu à des instabilités secondaires ou instabilités tridimensionnelles. Les expériences de Bernal et Roshko [28] mettent en évidence ces structures tridimensionnelles consistant en des tourbillons contrarotatifs longitudinaux insérés dans les enroulements transversaux (*cf.* figure 5.4). Ces structures secondaires résultent d'effets centrifuges créés par l'enroulement de la couche de mélange et présentent donc des similitudes avec les instabilités centrifuges de Görtler qui apparaissent dans les couches limites le long des surfaces concaves [330].



**FIGURE 5.3:** Schéma du principe de formation et d'appariement des instabilités de Kelvin-Helmholtz (figure tirée de [90]).

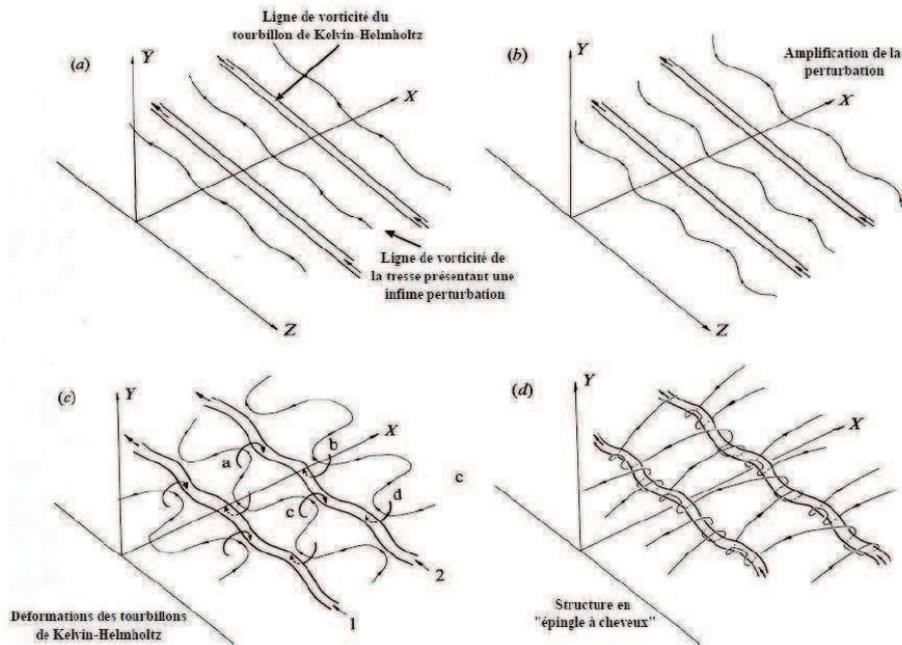


**FIGURE 5.4:** Visualisations d'une couche de mélange. Coupes transverses et longitudinales de l'écoulement (Bernal et Roshko [28]).

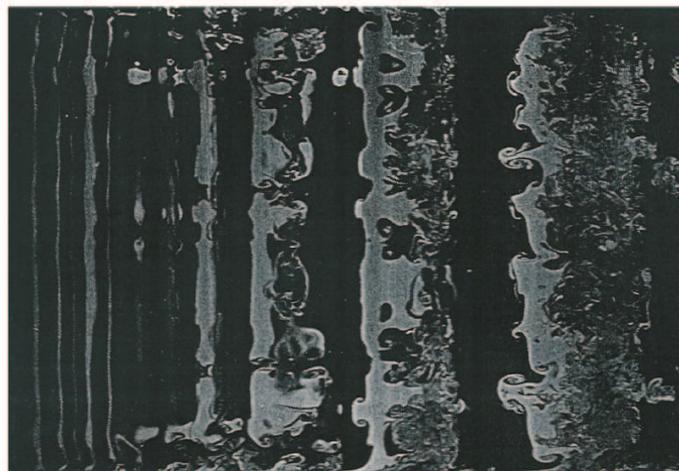
Lasheras *et al.* [218, 219] proposent une explication du mécanisme de formation et de développement des structures secondaires dans une couche de cisaillement, représentée sur la figure 5.5. Ces structures se forment entre les tourbillons primaires de Kelvin-Helmholtz, sur une partie de la nappe de vorticité, dans la zone dite de tresse (*braid*). La transition vers une structure tridimensionnelle est pilot e par différents phénomènes. Le premier méchanisme, soulign e par Lasheras *et al.* [218, 219] repose sur la présence d'une perturbation en amont de l'écoulement (telle que celle g en er e par les aspérités des parois) qui conduit à une déformation des lignes de vorticité transversale (figure 5.5 (a)). Le second phénomène résulte des appariements des structures primaires. En effet, l'étirement et la contraction des structures de Kelvin-Helmholtz modifient la vitesse radiale et génèrent ainsi des composantes de vorticité longitudinale. Pierrehumbert et Widnall [289] introduisent également l'idée d'une instabilité "translative" qui génère une ondulation transversale des tourbillons primaires.

## CHAPITRE 5. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CAVITÉS SOUS ÉCOULEMENT AFFLEURANT

La perturbation introduite est ensuite amplifiée par l'étirement de la nappe par les tourbillons de Kelvin-Helmholtz (figure 5.5 (b)). L'interaction de la vorticité longitudinale secondaire et de la vorticité primaire conduit à la déformation des tourbillons primaires (figure 5.5 (c)) et est responsable de l'enroulement de la ligne de vorticité secondaire autour de ces tourbillons de Kelvin-Helmholtz, à l'origine des structures tridimensionnelles en "épingle à cheveux" (figure 5.5 (d)). Ces nouvelles structures interagissent alors pour constituer des tourbillons contrarotatifs sous la forme de champignons comme l'illustre la figure 5.6.



**FIGURE 5.5:** Mécanisme de formation des structures secondaires ou structures tridimensionnelles dans une couche de cisaillement (Lasheras et al. [218]).

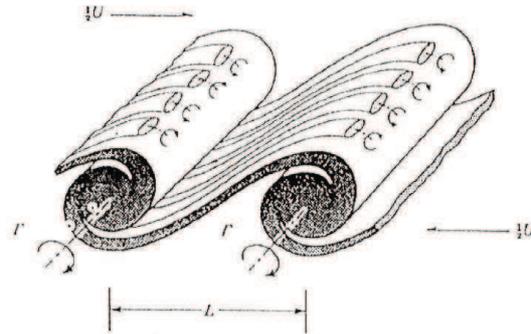


**FIGURE 5.6:** Visualisation des tourbillons longitudinaux contrarotatifs sur une coupe transversale d'une couche de cisaillement par tomographie laser (Bernal et Roshko [28]).

La couche de mélange constitue donc une zone propice au développement d'instabilités qui évoluent fortement dans le temps et l'espace. En particulier, les instabilités d'une couche de cisaillement

## CHAPITRE 5. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CAVITÉS SOUS ÉCOULEMENT AFFLEURANT

sont pilotées par les structures primaires de Kelvin Helmholtz et les structures secondaires tridimensionnelles. Ces structures fondatrices des instabilités sont résumées sur la figure 5.7 tirée des travaux de Bernal et Roshko [28]. La structure tridimensionnelle de cet écoulement favorise sa transition vers la turbulence. Notons néanmoins, que l'état turbulent conserve l'organisation initiale des structures de l'écoulement. Ainsi, par des calculs d'autocorrélation de vitesse en aval d'une couche de mélange, Rockwell et Knisely [315] soulignent l'existence d'une organisation persistante de l'écoulement qu'ils justifient par la possibilité d'une rétroaction de l'aval vers l'amont. Les oscillations générées par la nature instable des couches de mélange présenteraient donc les mêmes propriétés qu'un système d'oscillations auto-entretenues.

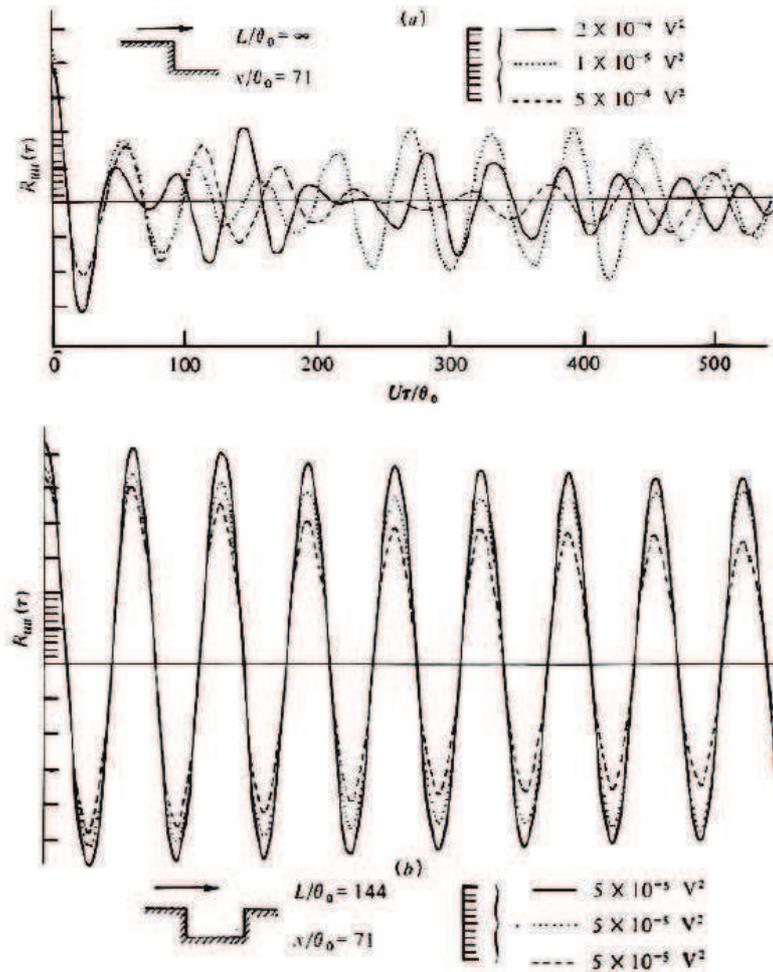


**FIGURE 5.7:** Schéma des structures cohérentes présentes dans une couche de cisaillement (Bernal et Roshko [28]).

Pour analyser la transition vers un régime auto-entretenu, Rockwell et Knisely [315] comparent la cohérence des oscillations dans une couche de mélange en développement libre et en présence d'un obstacle. En présence et en l'absence d'un obstacle, ils soulignent une périodicité quasi-identique des structures comme l'expose la figure 5.8. Par ailleurs, la présence d'un obstacle en aval de la couche de mélange amplifie les oscillations et réduit la dispersion temporelle de l'écoulement. Ainsi, alors qu'en l'absence d'un obstacle, la rétroaction de l'aval sur l'amont est faible et le cycle décrit sur la figure 5.8 reste relativement peu déterministe ; la présence d'un obstacle renforce le phénomène de rétroaction et favorise l'établissement d'un régime d'oscillations cohérentes de forte amplitude. De nombreuses études ont été menées afin de comprendre le mécanisme d'établissement des oscillations auto-entretenues. On peut ainsi citer les travaux expérimentaux de Rockwell et Knisely [316], Ho et Nosseir [169], Knisely et Rockwell [202], Ziada et Rockwell [418], Rockwell [314], les études numériques conduites par Powell [304], Howe [171], Durbin [105] ou Crighton [88]. Ces oscillations auto-entretenues sont souvent associées à une remontée des perturbations générées lors de l'interaction des structures tourbillonnaires avec un obstacle placé en aval. Malgré toutes ces études, aujourd'hui encore il n'existe aucune véritable description du mécanisme des oscillations auto-entretenues compte tenu de la difficulté à représenter la nature de l'interaction entre une structure tourbillonnaire et un obstacle. Par ailleurs il existe de nombreuses configurations mettant en jeu un système d'oscillations auto-entretenues (jets en impact, couches de mélange aux abords d'objets complexes,...). Nous nous focaliserons ici sur le problème particulier de l'écoulement de cavité.

### 5.1.3 Dynamique de l'écoulement de cavité

Le bruit produit par un écoulement affleurant une cavité se rencontre dans de nombreuses situations : les soutes à bombes d'avions militaires, la cavité du train d'atterrissage d'un avion, les fenêtres ou le toit ouvrant d'une voiture [311], les joints des pare-brises, les interstices entre les différents étages d'un compresseur, les cavités d'une chambre de combustion, les instruments de musiques (en particulier les instruments à vent), le champ aéro-optique avec les cavités-laser...



**FIGURE 5.8:** Autocorrélations de vitesses mesurées dans des couches de mélange avec et sans obstacle [315]. Pour chaque configuration, différents cas ont été mesurés pour évaluer la dispersion temporelle.

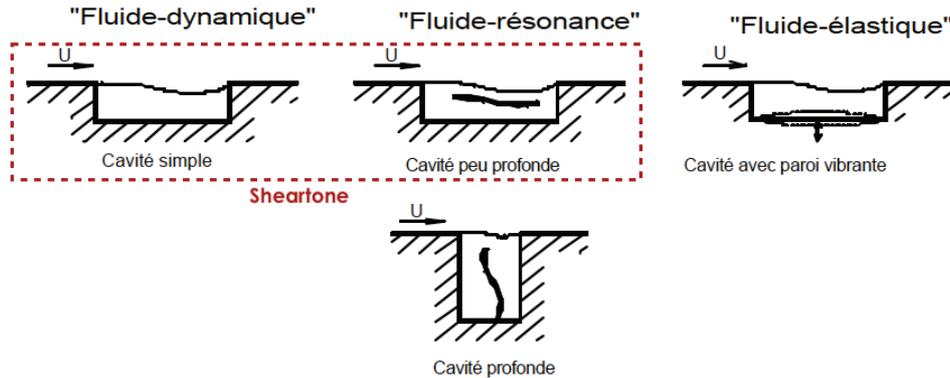
Dès lors qu'une ouverture est soumise à un écoulement affleurant, on assiste à de larges fluctuations de pression, de masse volumique, de vitesse ainsi que d'intenses ondes acoustiques. Le bruit de cavité se manifeste parfois sous la forme d'oscillations auto-entretenues associées à des pics intenses sur les spectres acoustiques (en particulier pour les écoulements à forte vitesse). Ces oscillations peuvent conduire à des effets indésirables comme la fatigue des structures, les vibrations, la génération d'un bruit, la modification des transferts thermiques et la modification de la traînée. L'écoulement de cavité est donc particulièrement complexe et dépend de nombreux paramètres. Le bruit de cavité a fait l'objet de nombreuses études et peut être caractérisé en différentes familles :

- Tout d'abord on distingue le bruit large bande (ou bruit de turbulence) qui résulte des fluctuations aérodynamiques de l'écoulement affleurant [146]. Ce bruit est qualifié de large bande puisqu'il couvre l'ensemble du spectre audible de 20 Hz à 20 kHz. Notons que la majorité des bruits industriels sont de nature large bande. Nous pouvons citer l'exemple du bruit généré par la soufflante d'un turboréacteur qui résulte des fluctuations de pression créés par des zones de turbulence sur la surface de la pale.
- La seconde catégorie décrit le bruit de type tonal, c'est-à-dire un bruit qui est dominé par une ou plusieurs composantes tonales (bruit ou son pur) nettement distinctes. Pour revenir à l'exemple de la soufflante, elle génère également un son tonal caractérisé par un sifflement vers 3500 Hz. Ce bruit tonal résulte de l'interaction entre le rotor et le stator de la soufflante et est étudié par Barbot [19]. Dans le cadre des écoulements de cavité, ce dernier résulte

## CHAPITRE 5. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CAVITÉS SOUS ÉCOULEMENT AFFLEURANT

d'une organisation cohérente des instabilités aérodynamiques au dessus de la cavité et conduit à l'auto-excitation de la couche de mélange.

Différents phénomènes physiques peuvent conduire à ces oscillations auto-entretenues. Ainsi, Rockwell et Naudascher [317] distinguent trois modes d'évolution du phénomène oscillatoire menant à un bruit tonal représentés sur la figure 5.9 : les interactions d'origine aéro- ou hydrodynamiques ou oscillations "fluide-dynamique" (*fluid-dynamic oscillations*), les phénomènes de résonance acoustique ou oscillations "fluide-résonance" (*fluid-resonant oscillations*) et les interactions de type élastique ou oscillations "fluide-élastique" (*fluid-elastic oscillations*).



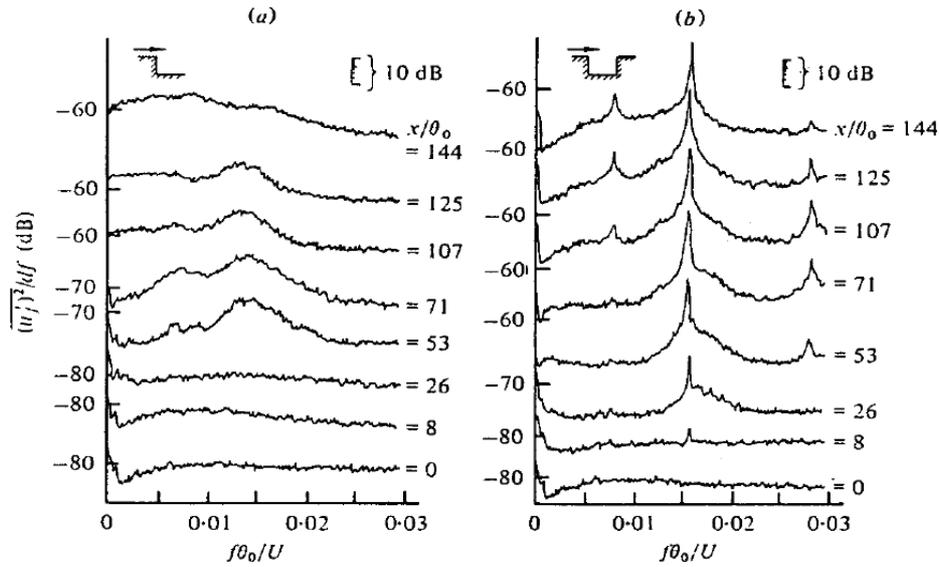
**FIGURE 5.9:** Différents modes d'évolution du phénomène oscillatoire dans la cavité (d'après Rockwell et Naudascher [317]).

### 5.1.3.1 Les oscillations de type "fluide-dynamique"

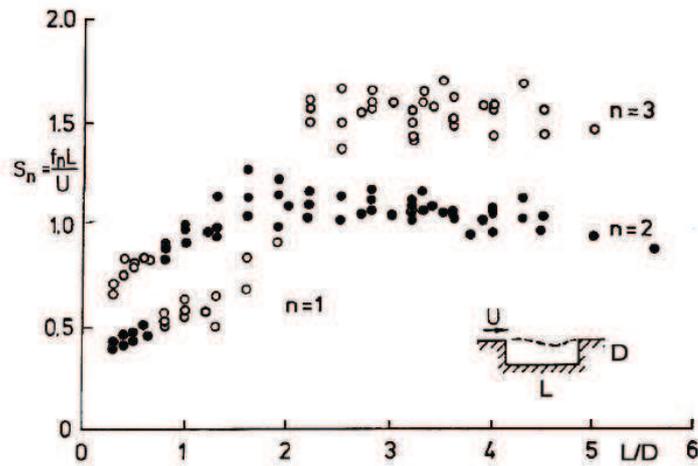
Les oscillations de type "fluide-dynamique" sont associées à un mécanisme d'amplification par boucle retour (rétroaction) des instabilités de la couche de cisaillement de la cavité. Les instabilités de la couche de mélange, présentes sous la forme de modes hydrodynamiques de type Kelvin Helmholtz, sont fortement amplifiées par la présence du bord aval de la cavité. Ainsi, Rockwell et Knisely [315] mettent en évidence l'apparition d'oscillations de type "fluide-dynamique" en présence d'un bord aval. La figure 5.10 montre comment l'organisation cohérente des instabilités d'une couche de mélange peut être perturbée par la présence d'un bord d'impact. La présence d'un pic fréquentiel sur la figure de droite souligne l'organisation cohérente et périodique de l'écoulement. On remarque également l'existence d'une fréquence plus faible sur le spectre de la couche de mélange en développement libre qui correspond à la fréquence la plus instable de la couche de cisaillement.

Les tourbillons (instabilités de Kelvin-Helmholtz) qui se développent dans la couche cisailée impactent l'angle aval de la cavité, ce qui génère des fluctuations aérodynamiques (couplage aérodynamique) qui se propagent vers l'amont et excitent la couche de mélange au niveau de la séparation (bord amont). On assiste alors à un phénomène de bouclage ou de rétro-action aérodynamique.

L'étude de Ethembabaoglu [112], d'un écoulement turbulent dans l'eau, montre que ces oscillations de type "fluide-dynamique" sont distribuées selon deux ou trois modes de résonance simultanés. Ces modes sont globalement associés à des valeurs constantes du nombre de Strouhal et ne sont pas liés par des relations harmoniques. Les observations de Ethembabaoglu [112] sont reportées sur la figure 5.11. On constate qu'une réduction du rapport  $L/D$  s'accompagne d'une diminution de la fréquence des différents modes. Alors que les oscillations de type fluide-dynamique se rencontrent dans des cavités peu profondes à faible nombre de Mach ( $M < 0,2$ ), les écoulements à grand nombre de Mach sont principalement gouvernés par des oscillations de type fluide-résonance, présentées ci-dessous.



**FIGURE 5.10:** Etude longitudinale des spectres de vitesse dans la couche de mélange : (a) sans bord d'impact et (b) avec un bord d'impact (extrait de [315]).



**FIGURE 5.11:** Modes de résonance des oscillations de type "fluide-dynamique" observés en cavité sous écoulement turbulent d'après Ethembabaoglu (extrait de [317]). Le mode prépondérant est indiqué par le symbole ●.

### 5.1.3.2 Les oscillations de type "fluide-élastique"

Cette deuxième classe se rencontre rarement et est liée à l'excitation élastique des parois de la cavité. Les phénomènes vibratoires peuvent exciter la couche de mélange et générer de nouvelles instabilités. Le processus d'amplification des perturbations de la couche de mélange suit un processus de résonance similaire à celui observé pour les oscillations de type "fluide-résonance". La principale différence repose sur la résonance de la structure vibrante et non plus la résonance acoustique de la cavité.

## CHAPITRE 5. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CAVITÉS SOUS ÉCOULEMENT AFFLEURANT

### 5.1.3.3 Les oscillations de type "fluide-résonance"

Cette dernière catégorie tient compte des phénomènes d'excitation acoustique de la cavité par les fluctuations aérodynamiques. En effet, si la fréquence de cette excitation est proche d'une fréquence de résonance de la cavité, le rayonnement acoustique de l'écoulement affleurant peut exciter de manière périodique la couche de mélange. On distingue trois classes de couplage fluide-résonant :

- Le mode fluide-résonant longitudinal, présent dans les écoulements subsoniques et supersoniques. C'est ce mode qui nous intéressera tout particulièrement par la suite.
- Le couplage aéroacoustique normal associé, à des cavités profondes ou d'allongement  $L/D$  modéré à faible nombre de Mach ( $M < 0,2$ ). Pour des cavités profondes, le mode normal quart d'onde est excité en priorité comme le souligne les études de East [106], Jungowski *et al.* [185] et Bruggeman *et al.* [55, 56, 57]. Pour les cavités peu profondes, les modes acoustiques normaux (modes transversaux et longitudinaux) sont difficilement identifiables.
- La résonance de type Helmholtz liée aux mécanismes d'ondes de surface libre menant au mode de volume ou encore mode zéro d'une cavité.

Le mode fluide-résonant longitudinal est mis en évidence par les travaux expérimentaux de Rositer [320] conduits pour des écoulements subsoniques et transsoniques. Pour expliquer le couplage longitudinal entre les bords amont et aval de la cavité, il introduit alors la notion de rétroaction acoustique directe (couplage aéroacoustique). Ce processus d'auto-asservissement résulte de la réceptivité de l'écoulement amont à une perturbation provenant de l'aval. Ainsi, Powell [304] explique la présence d'oscillations auto-entretenues par la rétro-propagation de l'onde acoustique qui est générée lors de l'impact des instabilité aérodynamiques au niveau du bord aval. Cette perturbation vient exciter, de manière périodique, la couche de mélange au niveau de la séparation de l'écoulement. L'onde acoustique sélectionne un mode de perturbation particulier, le mode aérodynamique, à l'origine d'une organisation cohérente des instabilités.

Le couplage fluide-résonant longitudinal peut donner lieu à cinq fréquences de résonance coexistantes comme le souligne la figure 5.12 en fonction du nombre de Mach.

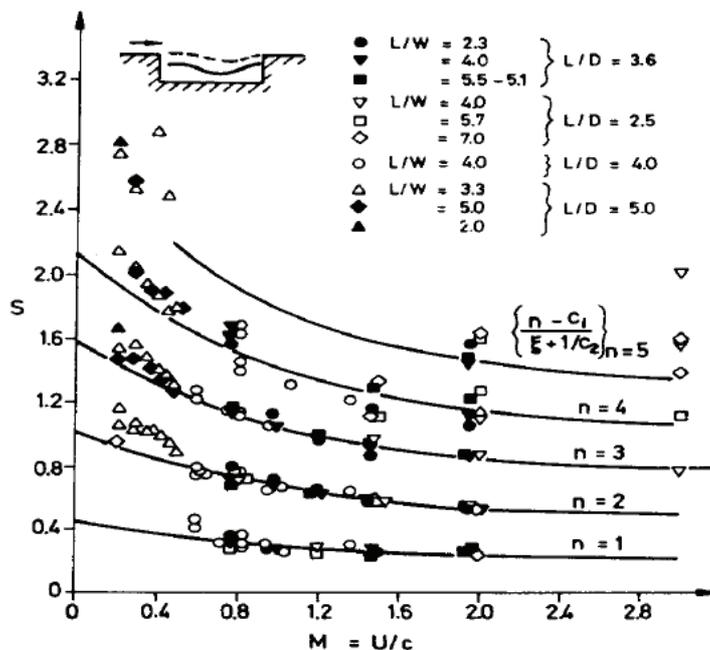


FIGURE 5.12: Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Mach pour une cavité rectangulaire peu profonde (extrait de Heller et Bliss [162]).

Le phénomène de rétroaction est également observé pour les écoulements à faible nombre de Mach mais est piloté par la perturbation hydrodynamique générée lors de l'impact des tourbillons avec le bord aval, justifiant ainsi la considération d'un mode "fluide-dynamique" (présenté précédemment). Pour ces écoulements, on ne peut pas employer le terme de couplage "fluide-résonance" puisque le couplage n'implique pas d'ondes de pression. On regroupe alors les auto-oscillations engendrées par le couplage aérodynamique (mode "fluide-dynamique") et par le couplage acoustique direct (mode "fluide-résonant") sous le terme de "sheartone".

### 5.1.3.4 Le "sheartone" ou processus d'auto-asservissement

Par analogie avec "l'edgetone" qui représente l'interaction entre un jet et un bord d'impact, on utilise le terme de "sheartone" pour caractériser le phénomène à l'origine des oscillations lorsqu'une couche de cisaillement interagit avec un coin, dans le cas présent un coin aval. Il regroupe le mécanisme de rétroaction par couplage aérodynamique et par couplage acoustique. Le mode de couplage impliqué dépend de la vitesse de l'écoulement. On emploie le terme de rétroaction acoustique pour caractériser les écoulements rapides et la notion de couplage aérodynamique pour les écoulements lents. Ces deux qualificatifs sont pilotés par les mêmes phénomènes physiques. Dans de nombreux travaux, ces phénomènes sont également regroupés sous le terme d'oscillations aérodynamiques. Le couplage aérodynamique constitue en fait un cas particulier de la rétroaction acoustique pour laquelle la longueur de la cavité est négligeable devant la longueur d'onde de l'onde acoustique. Ainsi, l'auto-oscillation aérodynamique peut être considéré comme incompressible.

Les études du bruit de cavité ayant été dédiées en grande partie aux applications aéronautiques, il existe peu d'études expérimentales et théoriques des oscillations de type "fluide-dynamique" (couplage aérodynamique) pour des écoulements à faible nombre de Mach. Ce phénomène est par ailleurs associé à un couplage de faible énergie, aussi le bruit de cavité implique des niveaux de fluctuations beaucoup plus faibles que ceux produits par l'intervention d'une résonance acoustique. Ainsi, la majorité des études considèrent la rétroaction acoustique directe.

## 5.1.4 Caractérisation du processus de rétroaction ou auto-asservissement

### 5.1.4.1 La boucle de retour ou la notion de feedback aérodynamique

Pour décrire le phénomène d'oscillation auto-entretenues, Rockwell et Knisely [315] introduisent la notion d'une boucle de retour aérodynamique qui entretiendrait le phénomène oscillatoire. Cette boucle retour est illustrée sur la figure 5.13. Ce processus peut être décrit de la manière suivante :

- Une perturbation se développe dans la couche de mélange.
- Cette perturbation est amplifiée au cours de sa convection vers l'aval et l'élargissement de la couche cisailée peut être analysé à l'aide de la théorie de la stabilité linéaire des écoulements parallèles non visqueux [401].
- L'impact de la perturbation avec la paroi aval produit une nouvelle perturbation, de nature acoustique ou dynamique. Dans le cas d'un bouclage aéroacoustique, il est intéressant d'analyser la déformation des structures tourbillonnaires présentes au niveau du bord aval pour évaluer à la fois la force fluctuante exercée sur cette paroi et le mode de génération des fluctuations de pression qui se propagent vers l'amont. Ainsi, en visualisant les tourbillons qui viennent impacter le bord aval, Rockwell et Knisely [316] soulignent l'existence de trois sortes d'impact : par destruction complète lorsque le tourbillon pénètre dans la cavité ; par scission partielle menant à plusieurs tourbillons et par échappement lorsque le tourbillon passe au dessus du coin aval. En particulier, ils observent que les couches limites incidentes fines ou turbulentes ne sont pas pilotées par un unique mode d'impact mais présentent une alternance de ces modes (*jitter*) ce qui conduit à l'apparition de composantes hautes et basses fréquences dans les spectres.

- Cette perturbation se propage vers l'amont et vient forcer la zone de grande sensibilité de la couche cisailée, c'est-à-dire près de la séparation, fermant ainsi la boucle de rétroaction. La conversion des fluctuations de pression qui parviennent au niveau de la région initiale de la couche cisailée est étudiée par Morkovin et Paranjape [263]. Pour décrire ce mécanisme de conversion, ils supposent que le mouvement de va-et-vient au niveau de la séparation assure la transformation des fluctuations de pression irrotationnelles en fluctuations de vorticité rotationnelles.

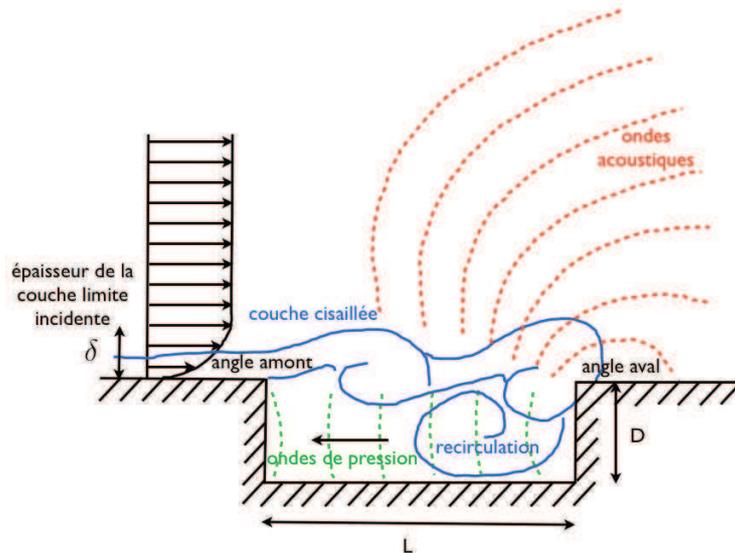


FIGURE 5.13: Principe de la boucle de rétroaction dans une cavité.

La condition de phase, dans la boucle de rétroaction, est décrite par le temps de transit de la perturbation dans la couche. En notant  $T$  la période du phénomène oscillatoire,  $L$  la longueur de la cavité,  $U_c$  la vitesse de convection des tourbillons vers le bord aval (ou bord de traîne) et  $c_0$  la vitesse de déplacement vers l'amont de l'onde générée, on a la relation :

$$T = \frac{L}{U_c} + \frac{L}{c_0} \quad (5.1)$$

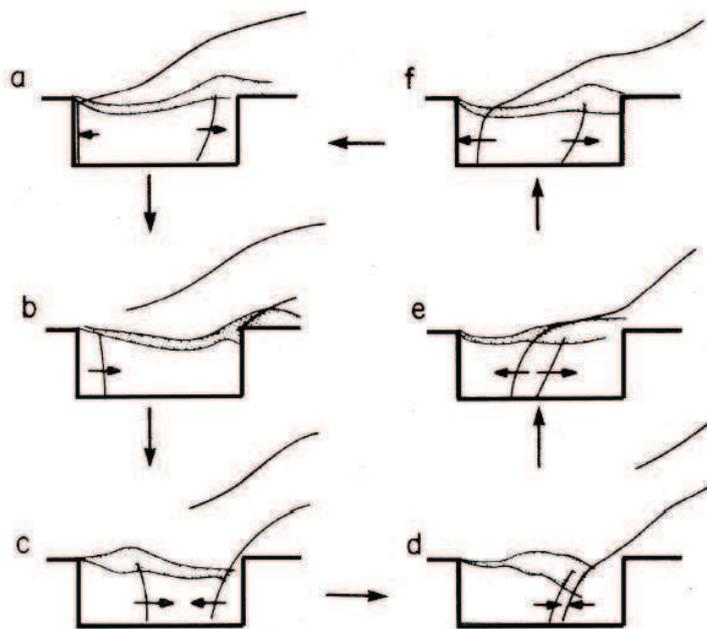
En effet, le temps entre la naissance d'une instabilité au niveau du bord amont (bord d'attaque) et la génération de la perturbation qui remonte l'écoulement est  $L/U_c$ . De même, le temps entre la création d'une instabilité au bord de traîne et l'arrivée de cette instabilité au bord amont est  $L/c_0$ . La période du phénomène oscillatoire est la somme des temps d'aller et de retour.

#### 5.1.4.2 Processus d'apport et de rejet périodique de fluide dans la cavité

Dans certaines configurations, le concept de rétroaction par impact des tourbillons sur la paroi aval ne peut être vérifié. Ainsi Krishnamurty [208] et Heller *et al.* [163], montrent, à partir de visualisations par strioscopie d'écoulements de cavités fortement subsoniques et supersoniques, que les oscillations importantes de la couche de mélange ne sont pas toujours associées à des structures cohérentes. Heller et Bliss [161] proposent alors une alternative au concept de rétroaction pour les cavités peu profondes en régime supersonique ou à bas Mach. Ils invoquent un flux périodique de fluide sortant et rentrant qui entraînerait, simultanément, une compression et une détente périodique du milieu fluide contenu dans la cavité. Ce processus d'apport et de rejet périodique de fluide dans la cavité adopte des mécanismes aérodynamiques et acoustiques. Il génère un apport et un rejet périodique de fluide à l'intérieur de la cavité ainsi que des ondes de pression qui se propagent vers l'amont. Ce scénario est représenté sur la figure 5.14 où les différentes étapes, reprises ci-dessous,

sont associées à l'émission, la propagation et la réflexion d'ondes de compression générées lors du passage de la couche de mélange sous le niveau de l'interface du bord aval.

- (a) La figure a montre un front d'onde issu du bord aval qui parvient au bord amont et une onde qui a été réfléchié quelques instants auparavant par ce même bord. Au même instant, le fluide provenant de la cavité passe au dessus du bord aval.
- (b) La figure b montre que le front d'onde qui s'est réfléchi sur la paroi amont progresse dans le sens de l'écoulement moyen et s'accompagne d'un déplacement vertical de la couche de mélange, tandis que le second front qui a atteint le bord aval s'est dissipé. A cet instant, la couche de mélange au-dessus de la cavité s'amincit et on assiste à la formation d'une zone de compression.
- (c) La zone de compression a généré une onde de pression qui se propage vers l'amont tandis que le front d'onde provenant de la paroi aval progresse.
- (d) Les deux fronts d'onde en provenance de l'amont et de l'aval ont progressé et se croisent. Au même instant, la cavité subit un apport de masse.
- (e) L'onde qui se propage vers l'amont est déformée par les variations de vitesse au travers de la couche de mélange. L'écoulement freine donc la propagation de cette onde.
- (f) A mesure que les ondes se déplacent, la couche de mélange s'épaissit.



**FIGURE 5.14:** Cycle d'oscillations proposé par Heller et Bliss [161].

### 5.1.5 Paramètre influençant ces phénomènes

Les oscillations auto-entretenues associées à la dynamique de cavité dépendent de nombreux paramètres, les principaux étant la nature (laminaire ou turbulente) de la couche limite incidente, la longueur et la largeur de la cavité et la vitesse de l'écoulement en amont de la cavité.

### 5.1.5.1 Nature de la couche limite incidente

L'épaisseur  $\delta_0$  et la nature (laminaire ou turbulente) de la couche limite incidente sont deux paramètres importants. Ainsi, Rossiter [320] montre que l'augmentation du rapport  $\delta_0/L$  conduit à une diminution de l'amplitude des fluctuations de pression dans la cavité. Pour une cavité peu profonde, Heller *et al.* [163] soulignent que le spectre d'une couche limite laminaire s'accompagne de fréquences discrètes de plus grandes amplitudes que celles générées par une couche limite turbulente.

### 5.1.5.2 Longueur de la cavité

Plentovich *et al.* [293] montrent qu'à faible nombre de Mach, l'augmentation du rapport  $L/D$  facilite l'établissement des modes de couplage longitudinal (aéroacoustique) au détriment des modes hydrodynamiques. Néanmoins, ils constatent, pour les cavités de très grand allongement ( $L/D > 10$ ) soumis à un écoulement fortement turbulent, une perte de la cohérence des tourbillons convectés au niveau du bord aval, ce qui limite le couplage aéroacoustique à une gamme intermédiaire de nombres de Mach.

Sarohia [331] analyse l'influence de la longueur de la cavité sur l'apparition d'oscillations. Il souligne que la profondeur de la cavité influence le phénomène oscillatoire, dès qu'elle est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la couche limite.

### 5.1.5.3 Largeur de la cavité

Nous avons distingué les cavités 2D des cavités 3D par le rapport  $L/W$  (avec  $W$  la largeur de la cavité). Alors que le rapport  $L/W > 1$  est associé à un écoulement tridimensionnel, le rapport  $L/W < 1$  manifeste souvent une dynamique bidimensionnelle. Mendoza et Ahuja [253] mentionnent que les fréquences d'oscillations ne sont pas affectées par l'élargissement de la cavité. Néanmoins, ils soulignent que les cavités tridimensionnelles manifestent souvent un niveau de bruit plus faible sur l'ensemble du spectre. Pour expliquer ce phénomène, Mendoza et Ahuja se rapportent au bruit large bande émis par le transfert d'énergie des grosses structures de la couche cisailée aux plus petites. Ils soulignent que ce transfert est particulièrement important lorsque les grosses structures contenues dans la couche cisailée sont cohérentes sur toute la largeur de la cavité. En augmentant l'envergure de la cavité, ces structures deviennent de moins en moins cohérentes ce qui réduit ce transfert d'énergie.

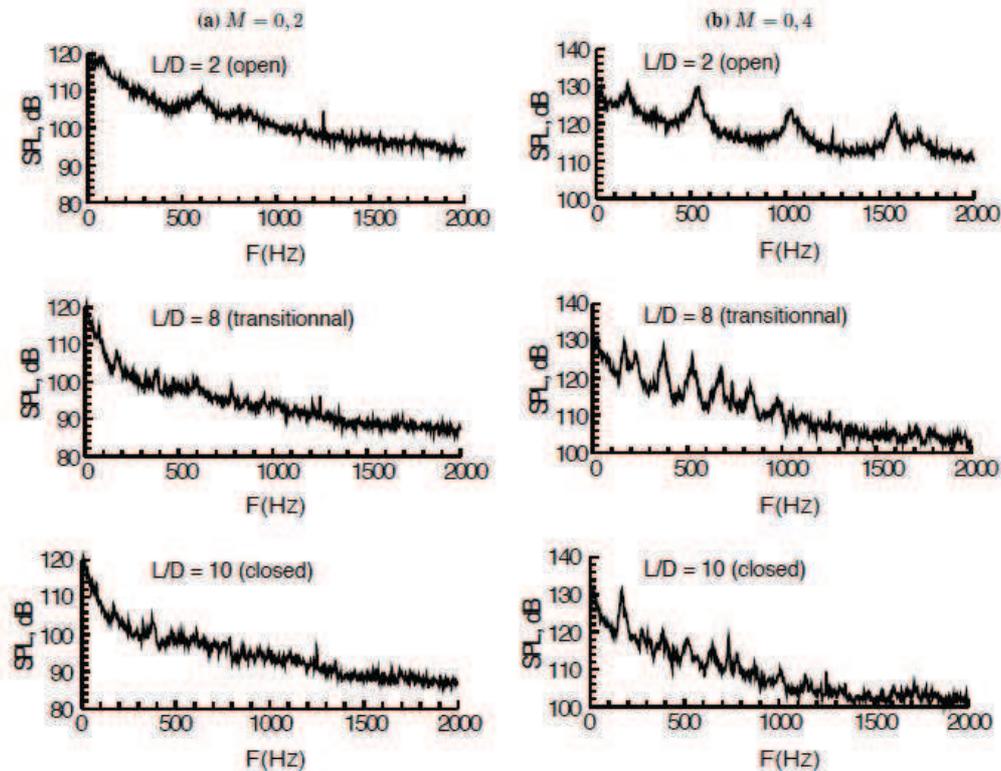
### 5.1.5.4 Vitesse de l'écoulement incident

La vitesse de l'écoulement incident est un des paramètres les plus importants pour expliquer le mode d'oscillation susceptible de se développer.

Les cavités profondes sont pilotées par un phénomène de résonance acoustique lié aux modes de profondeur qui se couple parfois avec un phénomène de rétroaction aéroacoustique. Néanmoins, ce phénomène de résonance est fortement dépendant de la vitesse de l'écoulement. Ainsi, les mesures expérimentales de Forestier [122, 123] montrent que la cavité profonde est dominée par la boucle de rétroaction à grande vitesse (hautement subsonique et supersonique) alors que les faibles nombres de Mach ( $M < 0,2$ ) sont dominés par des modes de résonance normaux.

Pour les cavités peu profondes, Plentovich *et al.* [293] associent les domaines d'apparition du mode fluide-résonant longitudinal et du mode hydrodynamique au caractère ouvert ou fermé de la cavité, lui même piloté par le nombre de Mach de l'écoulement incident. En particulier, à mesure que le nombre de Mach augmente, le mode d'oscillation hydrodynamique évolue vers un régime de couplage aéroacoustique longitudinal. La transition entre ces deux modes est illustrée sur les spectres acoustiques de la figure 5.15 obtenus pour des configurations  $L/D = 8$  et  $L/D = 10$ . Le passage à un mécanisme de couplage aéroacoustique est associé à l'apparition d'un mode de résonance longitudinale aux alentours de 400 Hz. A partir de cette figure, on observe qu'à faible

nombre de Mach, l'allongement de la cavité n'assure pas nécessairement la transition vers un couplage aéroacoustique. Par contre, pour le nombre de Mach plus élevé, la cavité est ouverte et permet l'installation des modes de couplage. L'augmentation du nombre de Mach intensifie le mécanisme de rétroaction qui présente des fréquences discrètes annonçant, par la même, un couplage fortement résonant.



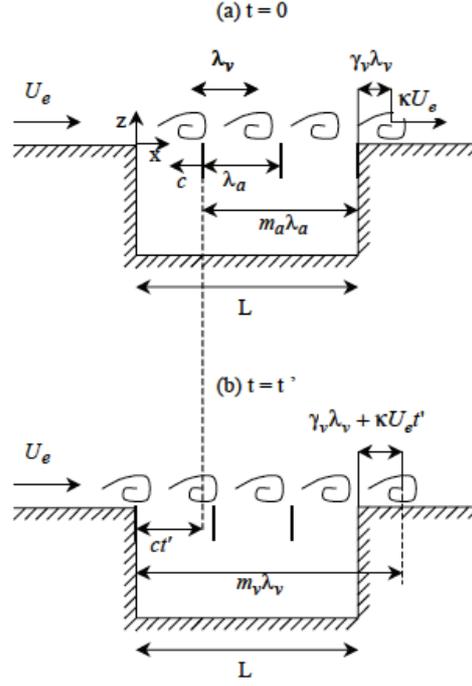
**FIGURE 5.15:** Evolution d'un mode d'oscillation hydrodynamique vers un régime de couplage aéroacoustique longitudinal pour une cavité peu profonde de rapport d'aspect  $L/D = 2 - 8 - 10$  à  $M = 0,2$  et  $M = 0,4$  (extrait de Plentovich et al. [293]).

### 5.1.6 Modélisation

La section précédente a souligné l'existence d'oscillations auto-entretenues dans l'écoulement ainsi que dans le champ acoustique à des fréquences discrètes bien définies. La présence de ces fréquences suggère l'existence d'une relation de phase stable entre l'angle amont et l'angle aval de la cavité, c'est-à-dire d'un intervalle de temps privilégié entre l'impact au niveau du bord aval et la sollicitation de la couche cisailée au niveau de la séparation au bord amont. Par ailleurs, les investigations expérimentales ont révélé l'existence de paliers fréquentiels en fonction de la vitesse de l'écoulement, de la longueur de la cavité et de l'épaisseur de la couche limite incidente. Les modèles décrits ci-dessous impliqueront donc un nombre entier,  $n$ , caractéristique de ces paliers de fréquences.

#### 5.1.6.1 Le modèle de Rossiter

A partir d'observations par ombroscopie (visualisation des gradients transverses de l'indice du milieu traversé), Rossiter [321] propose un modèle semi-empirique pour estimer la période du cycle d'oscillations dans une cavité peu profonde (de rapport de forme  $L/D$  compris entre 1 et 4). Ce modèle repose sur une interprétation physique similaire à celui de "l'edgetone". En considérant que la fréquence acoustique mesurée correspond à la fréquence de lâcher des tourbillons, ce modèle



**FIGURE 5.16:** *Modèle simplifié de l'écoulement affleurant une cavité (figure tirée de [121]).*

considère la couche de mélange comme une allée de tourbillons ponctuels dont l'impact au niveau de la paroi aval génère une onde acoustique qui provoque l'apparition de vorticité au bord amont.

Soit  $T$  la période du phénomène, caract ris e par la présence de  $n$  tourbillons sur la longueur  $L$  de la cavité. Cette allée de tourbillons est convect e à la vitesse  $U_c$  définie comme  $U_c = \kappa U$  avec  $\kappa$  une constante. On introduit également  $\lambda_a$  la longueur d'onde des fronts acoustiques et  $\lambda_v$  la longueur d'onde aérodynamique qui représente la distance de séparation entre deux tourbillons consécutifs. A l'instant  $t = 0$  (*cf.* figure 5.16), on suppose qu'une onde est  mise au niveau de la paroi aval et que la cavité contient  $n_a$  longueurs d'ondes complètes  $\lambda_a$ . A cet instant, un tourbillon se trouve à une distance  $\gamma_v \lambda_v$  derrière le coin aval. Au temps  $t = t'$ , un front d'onde acoustique s'est déplacé de  $ct'$  et atteint l'angle amont ce qui provoque, au même instant, la génération d'un tourbillon à cet angle. Depuis l'instant précédent, les tourbillons ont avancé de  $U_c t'$ . Ainsi, le tourbillon identifié précédemment derrière l'angle aval se trouve maintenant à la distance  $\gamma_v \lambda_v + U_c t'$ . Nous avons donc la relation suivante pour les  $m_v$  tourbillons au dessus de la cavité :

$$m_v \lambda_v = L + \gamma_v \lambda_v + U_c t' \quad (5.2)$$

En parallèle, les informations acoustiques se sont d plac es de  $ct'$  vers l'amont. Nous disposons donc également de la relation suivante :

$$m_a \lambda_a + ct' = L \quad (5.3)$$

Si on élimine l'instant  $t'$  entre ces deux dernières relations, il vient :

$$\frac{m_v \lambda_v - L - \gamma_v \lambda_v}{\kappa U_\infty} = \frac{L - m_a \lambda_a}{c} \quad (5.4)$$

Le temps mis par une instabilité pour parcourir la distance inter-tourbillons  $\lambda_v$  se présente sous la forme  $\frac{1}{f} = \frac{\lambda_v}{\kappa U_e}$  et le temps pour qu'un front d'onde acoustique se déplace de  $\lambda_a$  étant égal à  $\frac{1}{f} = \frac{\lambda_a}{c}$ , les harmoniques du mécanisme de rétroaction sont estim es par :

$$f = \frac{U_\infty}{L} \frac{m_v + m_a - \gamma_v}{M \frac{a}{c} + \frac{1}{\kappa}} \quad (5.5)$$

## CHAPITRE 5. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CAVITÉS SOUS ÉCOULEMENT AFFLEURANT

où  $c$  est la célérité du son dans la cavité,  $a$  la célérité du son au-dessus de la cavité et  $M$  le nombre de Mach défini par  $M = U_e/a$ .

Si l'on pose :

$$\begin{cases} m_v + m_a = n \\ \gamma_v = \gamma \\ a = c \end{cases} \quad (5.6)$$

On obtient la formule de Rossiter :

$$f_n = \frac{U_\infty}{L} \frac{n - \gamma}{M + \frac{1}{\kappa}} \quad (5.7)$$

Dans cette formule,  $n$  est le mode impliqué (pic fréquentiel) et  $\kappa$  est le rapport entre la vitesse de convection de l'allée tourbillonnaire et la vitesse externe, pour lequel Rossiter [320] propose une valeur de 0,57. Les travaux expérimentaux de Ahuja et Mendoza [4] rapportent que cette constante  $\kappa$  peut évoluer suivant les structures considérés. Ainsi, ils proposent de prendre  $\kappa = 0,66$  pour les grosses structures alors que la valeur  $\kappa = 0,6$  est adaptée pour les petites. La constante  $\gamma$  correspond au décalage temporel entre l'impact d'une structure tourbillonnaire en aval et l'émission acoustique correspondante. Cette variable est généralement déterminée de manière empirique pour permettre une bonne représentation des résultats expérimentaux [122]. Elle varie en fonction du rapport  $L/D$ . Ainsi, pour différents rapports  $L/D$ , Rossiter [320] adapte le coefficient comme le souligne le tableau 5.1.

$L/D$	<4	6	8	10
$\gamma$	0,25	0,38	0,54	0,58

**TABLE 5.1:** Evolution du paramètre  $\gamma$  du modèle de Rossiter en fonction du rapport  $L/D$  [320].

Le modèle de Rossiter repose sur l'hypothèse que la vitesse du son dans la cavité est égale à celle à l'extérieur et n'est donc valable que si les variations de température sont faibles dans la cavité. Ce modèle n'est donc pas directement transposable aux écoulements réactifs. Par ailleurs, le paramètre  $\kappa$  étant considéré comme une constante, ce modèle néglige les éventuelles recirculations dans la cavité.

Bien que la formule de Rossiter décrive de manière satisfaisante les écoulements transsoniques, elle est mise en défaut pour les valeurs plus importantes du nombre de Mach. Ainsi, Heller *et al.* [163] proposent une amélioration de la formule de Rossiter qui tient compte de la différence entre la vitesse du son dans la cavité et celle de l'écoulement pour les grands nombres de Mach ( $M > 1,2$ ). En effet, pour ces vitesses élevées, la célérité du son dans la cavité s'écrit, d'après Gibson [133] :

$$\frac{c}{a} = 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (5.8)$$

avec  $c$  la vitesse du son dans la cavité,  $a$  la célérité du son dans l'écoulement extérieur et  $r$  le coefficient de récupération thermique défini comme :

$$r = \frac{T_c - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (5.9)$$

avec  $T_\infty$ ,  $T_0$  et  $T_c$  les températures statiques de l'écoulement libre, de stagnation et à l'intérieur de la cavité. En prenant  $r = 1$  (soit  $T_c \simeq T_0$ ), Heller *et al.* [163] corrigent la formule de Rossiter :

$$f = \frac{U_\infty}{L} \frac{n - \gamma}{\frac{M}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} + \frac{1}{\kappa}} \quad (5.10)$$

## CHAPITRE 5. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CAVITÉS SOUS ÉCOULEMENT AFFLEURANT

### 5.1.6.2 Le modèle de Bilanin et Covert

Bilanin et Covert [32] tentent de modéliser la dynamique de cavité, en l'absence de constantes empiriques, pour des nombres de Mach compris entre 0,8 et 3. Ils assimilent la couche de mélange d'une cavité peu profonde bidimensionnelle à une nappe de vorticité (vortex sheet) infiniment mince qui serait perturb e par une source monopolaire localis e sur le bord aval (cf. figure 5.17). Les instabilités de cette nappe de vorticité sont alors représentatives du mécanisme d'oscillations de la cavité.

Pour étudier la stabilité de la nappe de vorticité, ils imposent une pression périodique sur le bord amont, à l'origine de la couche de mélange. Cette pression modélise l'excitation de la couche cisaill e par les ondes acoustiques qui remontent l'écoulement. Pour compléter le modèle, ils utilisent une source de rayonnement acoustique qui " met" de manière périodique au niveau du bord aval afin de représenter le rayonnement acoustique. L'écriture de la continuité de la pression de part et d'autre de la ligne de vorticité permet alors la formulation du mouvement de la couche de mélange. En particulier, en reliant les oscillations de l'interface (nappe de vorticité)   la puissance de la source monopolaire, ils aboutissent à l'expression :

$$f = \frac{U_\infty}{L} \frac{n - \frac{3}{8} - \frac{\Phi}{2\Pi}}{\frac{Mc_+}{c_-} + \frac{K_r U_+}{\omega}} \quad (5.11)$$

avec  $c_\pm$  la célérité du son de part et d'autre de l'interface,  $K_r$  la partie réelle du nombre d'onde des oscillations de la couche de mélange dans la direction longitudinale et  $\omega$  la pulsation d'excitation au niveau de l'angle aval. Cette formule converge vers la formule de Rossiter si l'on choisit :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\Phi}{2\Pi} + \frac{3}{8} \\ \kappa = \frac{\omega}{K_r U_+} \end{cases} \quad (5.12)$$

où  $\Phi$  et  $2\Pi \times 3/8$  représentent les déphasages liés respectivement aux angles amont et aval. Bilanin et Covert n'explicitent pas la valeur de la phase  $\Phi$ . Au cours de son étude de la formule de Bilanin et Covert, Block [36] suppose qu'elle est nulle, ce qui est en accord avec la formulation de Rossiter qui n'introduit pas de déphasage à l'angle amont ( $\Phi$ ).

Par rapport au modèle de Rossiter, cette approche prend en compte les effets de compressibilité en introduisant le rapport  $c_+/c_-$ . Les résultats obtenus avec ce modèle sont en bon accord pour des vitesses hautement supersoniques ( $M > 2 - 3$ ) mais des écarts importants sont obtenus dans les autres régimes (en particulier pour  $0,6 < M < 1,2$ ).

Block [36] propose une généralisation du modèle de Bilanin et Covert pour prendre en considération les effets de la profondeur de la cavité sur le champ rayonné. En prenant en compte, au cours de son analyse, des réflexions sur le fond, elle aboutit à la formule suivante :

$$f = \frac{U_\infty}{L} \frac{n}{\frac{1}{\kappa} + M(1 + \frac{0,514}{L/D})} \quad (5.13)$$

### 5.1.6.3 Le modèle de Tam et Block

Tam et Block [366] proposent un modèle mathématique qui repose sur le couplage des instabilités de la couche de cisaillement et de la rétroaction acoustique. Leur modèle se base sur l'approche de Bilanin et Covert [32], et, en particulier, sur les concepts de ligne de vorticité et de source localis e au bord aval. Pour décrire les caractéristiques des instabilités de la couche de cisaillement, ils éliminent l'hypothèse d'une force ponctuelle excitatrice au bord amont et prennent en compte, à l'instar de Block [36], la contribution des réflexions des ondes acoustiques sur le fond de la cavité. Ils reprennent également le modèle de Tam [363, 365] qui décrit l'interaction des fronts de pression avec une couche de mélange. Par ailleurs, ce modèle permet la description des critères d'instabilités de l'écoulement affleurant une cavité en fonction de la géométrie de la cavité et de la couche limite incidente.

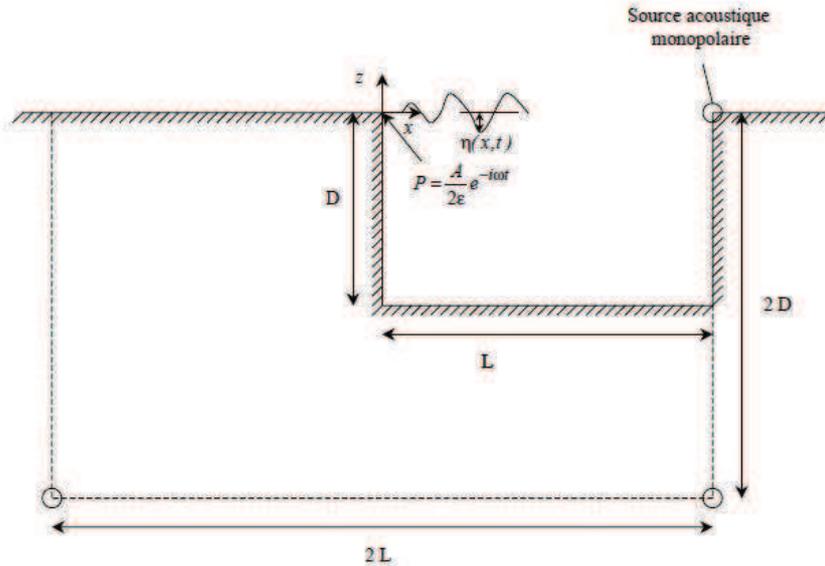


FIGURE 5.17: Modèle du couplage longitudinal par Bilanin et Covert [32] (extrait de [121]).

Ce modèle a donc un rôle fédérateur entre les mécanismes de résonance et celui d'auto-asservissement. Les résultats de ce modèle représentent bien les résultats expérimentaux de Tam de Block et de Rositer pour  $0,1 < M < 0,4$  et pour différentes géométries de cavité ( $L/D = 0,787$  et  $L/D = 2,36$ ) comme l'illustre la figure 5.18. On distingue deux régimes d'écoulement de part et d'autres de  $M = 0,2$ . Pour les valeurs inférieures à Mach 0,2, l'écoulement est piloté par la résonance acoustique de la cavité (modes de profondeur), alors que les nombres de Mach élevés sont dominés par le mécanisme de rétroaction.

L'extension du modèle de Tam et Dong au régime supersonique est proposée par Zhang et Edwards [416].

#### 5.1.6.4 Les modèles de Howe

Howe *et al.* [172, 173, 174, 175] proposent plusieurs modélisations fines de la dynamique de cavité pour de faibles nombres de Mach ainsi que des descriptions des oscillations de couches de mélange en interaction avec des parois solides. La majorité de ces modèles est établie en utilisant le concept de nappe de vorticité qui conduit à la distinction de deux régions de l'écoulement. Certaines formules étendent, par ailleurs, ce concept aux nappes tourbillonnaires confin es dans des géométries variables. La simulation de la rétroaction par une source monopolaire au niveau du bord aval, utilis e par Bilanin et Covert [32], est remplac e par une formulation intégrale tridimensionnelle qui reproduit la rétroaction par des fonctions de Green. Ainsi, au lieu de présumer la forme de la perturbation, les oscillations de la couche de mélange sont directement calcul es.

Howe [176] utilise ses modèles pour confronter différentes configurations avec les observations expérimentales. Ses résultats reproduisent bien la dynamique de cavité pour des nombres de Mach compris entre 0 et 0,2.

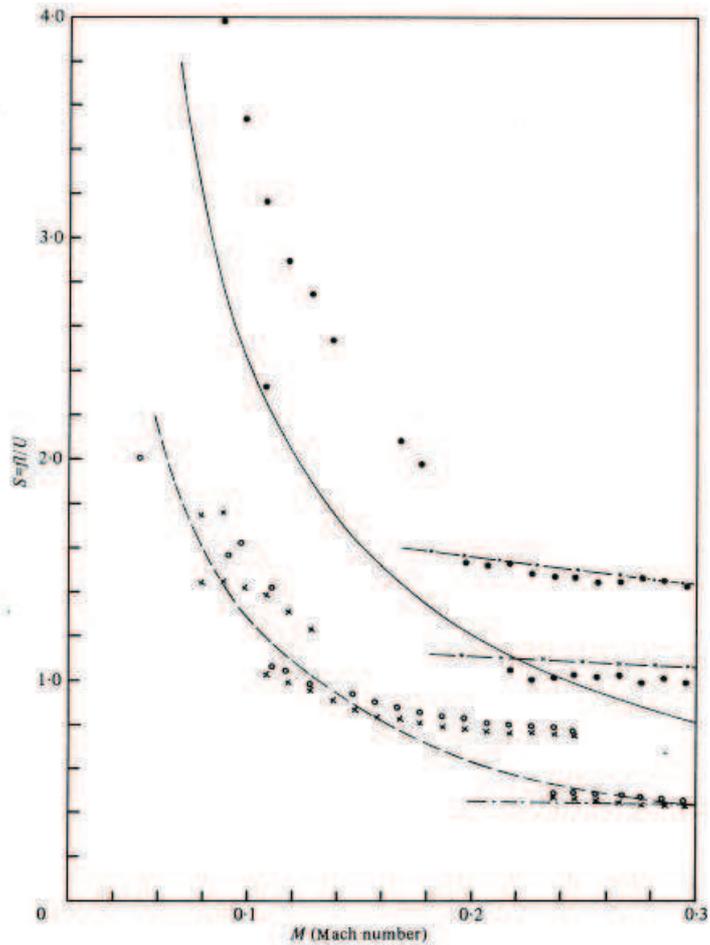


FIGURE 18. Discrete tone frequencies as a function of Mach number.

Data	$L$ (cm)	$D$ (cm)	$L/D$
○	4	5.08	0.787
×	2.5	3.175	0.787
●	7.5	3.175	2.36

Theoretical predictions: —, equations (25); ×—×, equations (21) and (19),  $L/2\theta = 70$ ; —, equations (24); —, equations (21) and (19),  $L/2\theta = 50$ .

FIGURE 5.18: Résultats obtenus à faible nombre de Mach pour le modèle de Tam et Block (extrait de Tam et Block [366]).

## 5.2 Etat de l'art des différentes études expérimentales et numériques

La majorité des études présentes dans la littérature portent sur des cavités rectangulaires. Une cavité annulaire est étudiée expérimentalement par Gharib et Roshko [129] pour évaluer l'impact de la longueur de la cavité sur la traînée. Ces travaux seront mentionnés plus précisément au cours de l'étude bibliographique du TVC.

### 5.2.1 Etudes expérimentales

La dynamique de l'écoulement de cavité a suscité de nombreuses études au cours des quarante dernières années. Ces investigations, présentées en grande partie dans la section précédente, couvrent un large domaine et soulignent l'existence d'un mécanisme de rétroaction et de couplages fortement dépendants des caractéristiques géométrique de la cavité et de l'écoulement incident.

De nombreuses études expérimentales ont été dédiées à l'étude d'une telle boucle de rétroaction avec des analyses du spectre de pression et du rayonnement acoustique (Rockwell and Naudascher [317], Komerath *et al.* [205], Sarohia [331], Howe [176], Chung [78]). Ces études se sont focalisées sur l'analyse du couplage aéroacoustique à l'origine des oscillations auto-entretenu. Peu d'entre elles se sont intéressées au champ aérodynamique avec la mesure des champs de vitesse au sein de la cavité. Une base de données complète est néanmoins fournie, pour une cavité profonde et peu profonde en régime transsonique, par Forestier *et al.* [122]. Nous baserons donc les travaux numériques du prochain chapitre sur cette base de données.

### 5.2.2 Etudes numériques

Les premiers calculs CFD d'un écoulement au dessus d'une cavité résolvent les équations de Navier Stokes moyennées (RANS) pour des écoulements subsoniques, transsoniques, supersoniques et même hypersoniques. La plupart des études porte sur des cavités rectangulaires de rapport  $L/D$  compris entre 2 et 10. De nombreux auteurs ont également étudié les effets d'un contrôle passif en analysant l'influence de modifications de la géométrie de la cavité. Le tableau 5.2 relate quelques études RANS présentes dans la littérature.

Référence	Nature du calcul	Modèles de fermeture	Etude
Hankey et Shang (1980) [155]	RANS	Modèle de relaxation de Cebeci-Smith	Etude 2D de la distribution de pression sur les parois d'une cavité de rapport $L/D = 2, 25$ à Mach 1,5.
Baysal <i>et al.</i> (1994) [23]	RANS	Modèle de Baldwin-Lomax	Impact du coin aval mis en évidence en remplaçant une cavité par une rampe. Simulations 2D d'une cavité transsonique de rapport $L/D = 4, 5$ .
Chokani [77]	RANS	Modèle $k - \epsilon$	Etude cavité hypersonique à $M = 10$ .
Sinha <i>et al.</i> (2000) [345]	RANS	Modèle $k - \epsilon$	Etudes 3D instationnaires de cavités transsoniques.
Soemarwoto (2003) [348]	RANS	Modèle $k - \epsilon$	Etude 3D d'une cavité de rapport $L/D = 4, 5$ avec un Mach $M = 1, 2$ . Effet du remplacement de l'angle droit aval par une rampe à $45^\circ$ .

**TABLE 5.2:** Quelques études numériques de type RANS des écoulements de cavité.

## CHAPITRE 5. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES CAVITÉS SOUS ÉCOULEMENT AFFLEURANT

Référence	Nature du calcul	Modèles de fermeture	Etude
Shieh et Morris (2000) [340, 341]	Méthode hybride RANS/LES	Modèle de Spalart/Allmaras	Etude 3D d'une cavité de paramètres $L/D = 4,4$ , $L/W = 4,4$ à $M = 0,6$ .
Sinha <i>et al.</i> (2000) [345]	LES	Modèle Smagorinsky	Etude 3D d'une cavité de paramètres $L/D = 4,5$ , $L/W = 4,5$ à $M = 2$ .
Smith <i>et al.</i> (2000) [347]	LES	Modèle Smagorinsky	Etude 3D d'une cavité de paramètres $L/D = 4,5$ , $L/W = 4,5$ à $M = 1,5$ .
Rizzetta et Visbal (2003) [313]	LES	Modèle Smagorinsky Dynamique	Etude 3D d'une cavité de rapport $L/D = 5$ , supersonique à $M = 1,19$ .
Larchevêque <i>et al.</i> (2003) [217]	LES	Modèle <i>selective mixed-scale</i> + loi de paroi (de type Van Driest)	Simulation 3D d'un écoulement transsonique $M = 0,8$ de rapport $L/D = 0,42$ .
Larchevêque <i>et al.</i> (2004) [216]	LES	Modèle <i>selective mixed-scale</i> + loi de paroi (de type Van Driest)	Simulation 3D d'un écoulement transsonique $M = 0,85$ de rapport $L/D = 5$ .
Gloerfelt (2004) [140]	LES	Modèle Smagorinsky Dynamique + loi de paroi (de type Van Driest)	Simulation LES 3D d'un écoulement transsonique $M = 0,4$ de rapport $L/D = 4$ .
Larchevêque <i>et al.</i> (2007) [215]	LES	Modèle <i>selective mixed-scale</i> et MiLES + loi de paroi (de type Van Driest)	Simulation 3D d'un écoulement transsonique $M = 0,8$ de rapport $L/D = 2$ .
Liggett <i>et al.</i> (2010) [233]	LES	Modèle Smagorinsky	Etude de la structure d'un écoulement transsonique.

**TABLE 5.3:** *Etudes numériques de type LES des écoulements de cavité.*

La dynamique de la cavité étant pilotée par les grosses structures tourbillonnaires, la simulation des grandes échelles (LES) s'est ensuite révélée être une bonne candidate à l'étude de l'écoulement affleurant la cavité. Le champ d'investigation des cavités par LES est ainsi particulièrement vaste. Pour disposer d'une vision générale des études réalisées en régime subsonique et fortement subsonique, les principaux calculs numériques sont mentionnés dans le tableau 5.3.

Les études de type DNS présentes dans la littérature sont limitées à des études 2D. En effet, la reproduction de la dynamique d'une cavité dans un régime fortement subsonique requerrait un maillage énorme. Le tableau 5.4 présentent quelques études de type DNS.

La majorité de ces études s'intéresse au bruit rayonné par l'écoulement affleurant une cavité. Les études réalisées portent donc principalement sur des cavités transsoniques et supersoniques pour différents rapports  $L/D$ . En effet, le paramètre de forme  $L/D$  est un élément clé dans la description du bouclage aéroacoustique puisqu'il conditionne la nature du bruit rayonné ainsi que la dynamique tourbillonnaire. Une analyse complète de l'écoulement de cavité est ainsi fournie par Gloerfelt [141], Larchevêque *et al.* [215, 216, 217, 328] et Colonius et Lele [84].

Référence	Etude
Gloerfelt (2001) [139]	2D d'une cavité de rapport $L/D = 4$ à Mach 0,5.
Gloerfelt (2001) [139]	2D d'une cavité de rapport $L/D = 2$ à Mach 0,7.
Hamed <i>et al.</i> (2001) [154]	2D d'une cavité de rapport $L/D = 2$ pour $M = 0,9$ et $M = 1,1$ .
Rowley <i>et al.</i> (2002) [323]	2D de plusieurs cavités de rapport $L/D = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et pour différents nombres de Mach ( $M = 0,2$ , $M = 0,3$ , $M = 0,4$ , $M = 0,5$ , $M = 0,6$ , $M = 0,7$ et $M = 0,8$ ). Etudes de la nature des oscillations.
Brès et Colonius (2008) [53]	Etudes des instabilités hydrodynamiques et acoustiques à l'aide de DNS 3D de cavités telles que $L/D = 1, 2$ ou $4$ et $0,1 \leq M \leq 0,8$ .

**TABLE 5.4:** *Etudes numériques de type DNS des écoulements de cavité.*

### 5.3 Conclusion

L'écoulement de cavité implique une multitude de phénomènes physiques. Il est difficile d'appréhender la structure même de l'écoulement puisque les frontières entre les différentes configurations de cavité (ouverte/fermée, 2D/3D,...) sont mal définies. De plus, nous avons introduit le mécanisme de rétroaction, qui sera au coeur même des simulations présentées dans la section suivante et qui est une conséquence directe du caractère instable des couches de mélange. La boucle de rétroaction comporte différentes étapes : la convection des perturbations tourbillonnaires présentes dans la couche cisailée du bord de séparation (bord amont) à l'angle aval, l'impact de ces perturbations avec l'angle aval, l'émission d'ondes de pression qui remontent en amont et la génération de nouvelles structures tourbillonnaires lorsque ces ondes parviennent à l'angle amont de la cavité. La relation de phase, proposée par Rossiter [320], permet d'évaluer les fréquences discrètes des oscillations.

Dans le cadre de cette thèse, nous envisageons l'étude d'une cavité transsonique qui, au vu du présent exposé, est pilotée par un mécanisme de rétroaction aéroacoustique. La seconde partie de notre travail concerne l'étude d'une cavité faiblement compressible pour laquelle le phénomène prépondérant devrait être le mode d'oscillations de type fluide-dynamique.

# Chapitre 6

## Etude de l'écoulement affleurant une cavité transsonique

### Sommaire

---

<b>6.1 Paramètres de la simulation</b>	<b>188</b>
6.1.1 Maillages	188
6.1.2 Conditions aux limites	189
6.1.3 Conditions initiales	190
6.1.4 Stratégies de modélisation des grandes échelles	192
<b>6.2 Visualisation de l'écoulement</b>	<b>192</b>
<b>6.3 Impact du modèle de turbulence</b>	<b>194</b>
<b>6.4 Comparaison des modèles de sous-maille</b>	<b>194</b>
6.4.1 Champs de vitesse	194
6.4.2 Dissipation turbulente	202
6.4.3 Dissipation artificielle	204
<b>6.5 Rayonnement acoustique</b>	<b>208</b>
<b>6.6 Comparaison murs 3D-NSCBC vs IBM</b>	<b>211</b>
<b>6.7 Impact de la résolution du maillage</b>	<b>211</b>
<b>6.8 Analyse de l'écoulement</b>	<b>214</b>
<b>6.9 Conclusion</b>	<b>218</b>

---

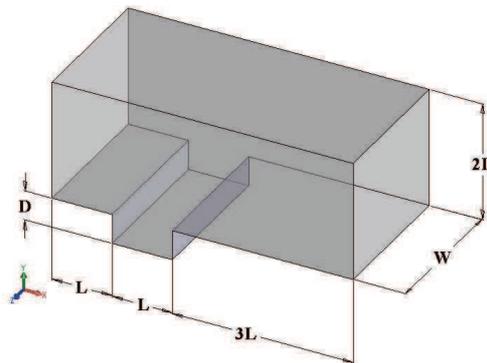
De nombreuses études sont dédiées à l'étude de cavités de forme parallélépipédique [141, 215, 216, 217, 328, 100]. La simulation d'écoulement au voisinage de surfaces simples discontinues, telles que les escaliers ou les cavités, est généralement réalisée avec un traitement de type multi-bloc sur une grille cartésienne. Pour évaluer les capacités de prédiction d'un code compressible avec une méthode des frontières immergées, la description des parois de la cavité est entreprise avec cette méthode des frontières immergées. Comme nous l'avons introduit précédemment, la méthode des frontières immergées repose sur un maillage cartésien dont les noeuds ne coïncident pas avec le pourtour de l'objet intégré et modifie les équations au voisinage des parois pour imposer les conditions aux limites.

Ce chapitre est dédié à la simulation des grandes échelles d'une cavité rectangulaire à Mach 0,8. L'étude de l'écoulement affleurant cette cavité transsonique nous permettra d'évaluer la présence éventuelle de perturbations acoustiques liées aux interpolations des cellules. Les étapes nécessaires à la description du mécanisme de résonance fluide-acoustique, nommé mode de couche de cisaillement (*shear layer mode*) seront détaillées. Différentes stratégies de modélisation de sous-maille sont utilisées. Les résultats des simulations seront comparés avec les données expérimentales et analysés suivant le modèle de sous-maille, la résolution du maillage, l'intensité de la turbulence synthétique et le niveau de dissipation artificielle octroyé.

Dans un second temps, la qualité des reconstructions intrinsèques à la méthode des frontières immergées sera évaluée par des calculs complémentaires sur des maillages cartésiens de type multi-bloc, pour lesquels les murs sont conformes au maillage et décrits sans reconstruction, et avec des conditions limites basées sur des caractéristiques tridimensionnelles. Cette étude démontrera le potentiel du concept de frontière immergée pour la description d'un régime compressible.

## 6.1 Paramètres de la simulation

L'écoulement affleurant une cavité transsonique est reproduit numériquement à l'aide de simulations des grandes échelles. Cet écoulement instationnaire et tridimensionnel est étudié sur des maillages cartésiens où les murs de la cavité ne coïncident pas avec les lignes du maillages. Concernant la géométrie de la cavité, cette dernière est de forme parallélépipédique et a un rapport longueur/profondeur de  $L/D=2$ , ce qui correspond à la catégorie des cavités peu profondes, et un rapport largeur/profondeur,  $W/D = 4,8$ . Les dimensions du domaine de calcul sont reportées sur la figure 6.1. Cet écoulement est caractérisé par un nombre de Reynolds de  $Re_L = 6,8 \times 10^6$ , basé sur la longueur de la cavité, et un nombre de Mach en entrée du domaine de calcul de  $M = 0,8$  (soit une vitesse  $U_\infty$  de 259 m/s). La pression et la température de référence sont respectivement  $P_\infty = 65602$  Pa et  $T_\infty = 259,75$  K<sup>1</sup>. Cette cavité a été analysée expérimentalement par Forestier (2000) *et al.* [121, 122] et numériquement, à l'aide de simulations des grandes échelles, par Larchevêque *et al.* [215]. Les oscillations auto-entretenues qui gouvernent cet écoulement ont été étudiées expérimentalement avec des visualisations strioscopiques (*Schlieren*) et les propriétés de l'écoulement moyennées en phase ont été évaluées avec un système vélocimétrie laser doppler [121].



**FIGURE 6.1:** Dimensions du domaine de calcul pour l'analyse de la cavité transsonique.

### 6.1.1 Maillages

L'écoulement de la cavité transsonique est décrit numériquement à l'aide d'une méthode de frontières immergées. Ainsi la cavité est "immergée" sur la grille de calcul. Un soin particulier est apporté afin de vérifier que la géométrie ne soit pas conforme au maillage et justifier ainsi pleinement l'utilisation de la méthode de la cellule fantôme. Les parois rigides de la cavité sont donc décrites à l'aide de schémas d'interpolation. Afin d'obtenir un niveau de résolution "convenable" dans la région de proche paroi, le maillage est raffiné à proximité des murs et selon les trois directions. En particulier, le raffinement suivant  $x$  et  $y$  assure la description précise de la couche de cisaillement au-dessus de la cavité. Quant au raffinement suivant  $z$ , il permet de retrouver les homogénéités transverses, liées à la présence des parois latérales.

---

1. L'expérience de Forestier [121] fournit la pression d'arrêt ( $P_e \approx 1$  bar), la température d'arrêt ( $T_e = 293K$ ) et le nombre de Mach ( $M = 0,8$ ). A l'aide de ces grandeurs, on évalue la célérité du son, la vitesse de l'écoulement ainsi que la pression et la température génératrices.

## CHAPITRE 6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AFFLEURANT UNE CAVITÉ TRANSSONIQUE

Maillage	M1	M2
Nodes	290×188×122	514×258×226
$\Delta x^+$	[30,130]	[4,30]
$\Delta y^+$	[20,70]	[7,40]
$\Delta z^+$	[20,50]	[15,30]
$\Delta x/\delta_o$	[0.04,0.5]	[0.01,0.3]
$\Delta y/\delta_o$	[0.002,0.2]	[0.002,0.15]
$\Delta z/\delta_o$	[0.06,0.13]	[0.03,0.08]

**TABLE 6.1:** Propriétés des maillages utilisés en unités de parois (notées  $^+$ ) et normalisées par  $\delta_o$ , l'épaisseur de la couche limite mesurée expérimentalement  $0,1L$  en amont de la cavité.

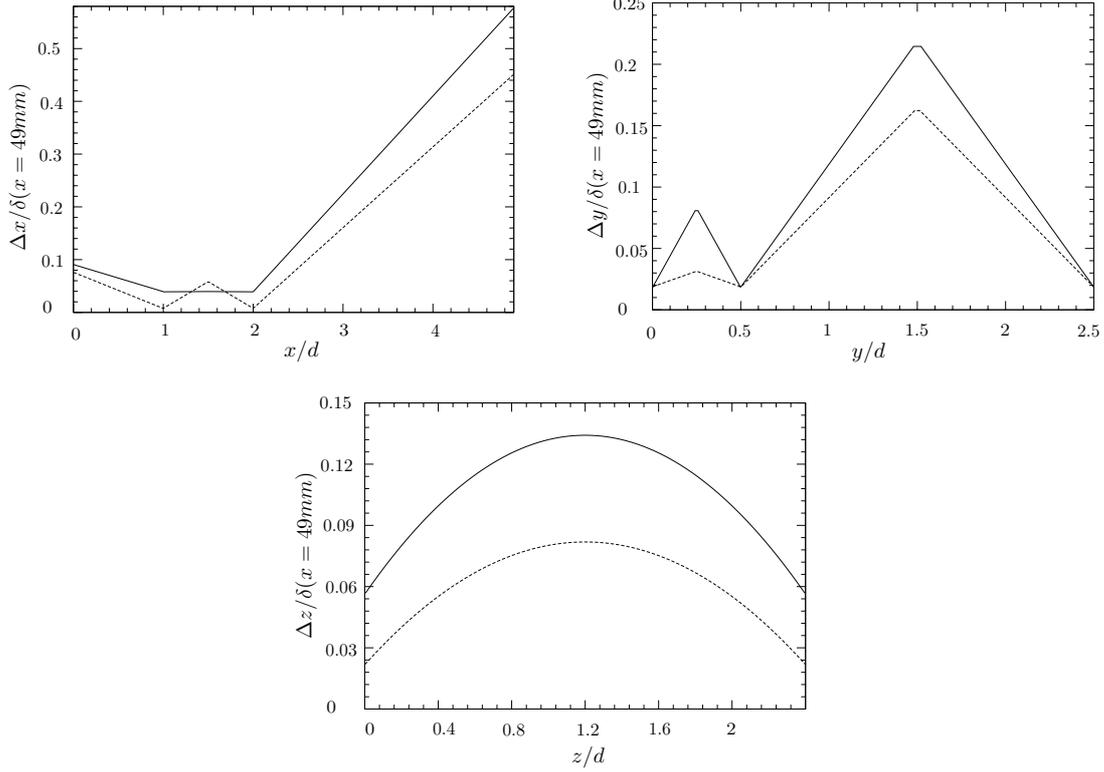
Deux maillages (6,6 et 30 millions de cellules) seront utilisés afin de décrire la dynamique de cavité. Leurs principales caractéristiques sont exposées dans le tableau Table 6.1 avec la résolution à proximité des murs de cavité exprimée en unité de parois. De nombreuses simulations ont été conduites sur ces deux maillages. Notons que le premier maillage est relativement semblable à celui utilisé par Larchevêque *et al.* [215].

Pour décrire avec précision la dynamique en proche paroi, le maillage doit respecter le critère  $\Delta y^+ < 12$  (en unité de parois). Lorsque ce critère n'est pas respecté, il est d'usage d'utiliser une loi de paroi. Cette dernière repose souvent sur la modification des flux visqueux lorsque la première cellule fluide avoisinant la frontière n'est pas située dans la sous-couche visqueuse [290]. Dans la présente étude, bien que le premier maillage ne respecte jamais le critère de précision, aucune loi de paroi n'est utilisée. Nous supposons que le schéma de dissipation artificielle compense ce manque de précision et joue ainsi le rôle d'un modèle visqueux à proximité des parois rigides. Cette hypothèse est d'autant plus fondée que la dissipation artificielle est active en proche paroi, là où la contribution des modèles de sous-maille est négligeable.

Afin de reproduire précisément le mécanisme de résonance fluide-acoustique, le maillage doit être suffisamment fin, dans la direction normale à la paroi, pour résoudre les gradients dans la couche de mélange et dans la couche limite au niveau du bord d'attaque et décrire ainsi la complexité des phénomènes physiques au niveau de l'interface de la cavité. Rappelons que la couche limite, au niveau de bord amont de la cavité, est excitée par les différents modes acoustiques remontant la cavité. De même, le maillage doit être raffiné suivant la direction longitudinale afin de décrire précisément la propagation des informations acoustiques, éléments-clés de la boucle de rétroaction. La figure 6.2 reporte ainsi les variations de taille des mailles ( $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  et  $\Delta_z$ ), normalisées par l'épaisseur de la couche limite mesurée  $0,1L$  en amont du coin de cavité (épaisseur fournie par Forestier *et al.* [121, 122],  $\delta(x = 49 \text{ mm}) = 9.79 \text{ mm}$ ). Ces variations sont également reportées dans le tableau 6.1.

### 6.1.2 Conditions aux limites

La simplicité géométrique de cette étude n'implique pas une simplicité des phénomènes physiques mis en jeu. En effet, l'écoulement affleurant une cavité génère de nombreux mécanismes : boucle de rétroaction aéro-acoustique, développement d'instabilités au niveau de la couche cisailée... Pour décrire ces mécanismes, les conditions aux limites, pour les plans d'entrée et de sortie, doivent être les plus transparentes possibles. En effet, le traitement des frontières du domaine peut générer des ondes parasites et induire un bruit d'origine numérique pouvant exciter, de manière artificielle, l'écoulement. Ce type d'auto-excitation est reporté par Buell et Huerre [60], qui observent un forçage de la condition de sortie sur la condition d'entrée pour le développement d'une couche de mélange. Ils associent ce forçage à une nouvelle boucle de rétroaction dont la dimension caractéristique est corrélée à la taille du domaine de calcul.



**FIGURE 6.2:** Taille des mailles normalisée par l'épaisseur de la couche limite, mesurée  $0,1L$  en amont du coin de cavité, et pour les deux maillages : — le maillage très raffiné (30 millions de cellules) et - - - le maillage moyen (6 millions de cellules). (a) : Longueur des cellules :  $\Delta_x$ . (b) : Hauteur des cellules :  $\Delta_y$ . (c) : Largeur des cellules :  $\Delta_z$ .

Pour limiter ce bruit numérique, nous utilisons des conditions limites caractéristiques, l'approche 3D-NSCBC, qui limitent les réflexions parasites en entrée et sortie du domaine calcul.

Pour s'assurer de l'absence d'une rétroaction du plan de sortie sur le plan d'entrée, nous ajoutons également une zone éponge, conformément aux précédentes simulations de l'écoulement d'une cavité [141, 215, 216, 217, 328]. Cette zone éponge consiste en l'existence d'un maillage lâche en sortie, pour dissiper les oscillations non désirées (qu'il s'agisse des structures tourbillonnaires et ondes acoustiques avant leur partielle réflexion dans le plan de sortie, ou des ondes réfléchies). Cet étirement du maillage augmente artificiellement la viscosité en sortie afin de dissiper les structures tourbillonnaires.

### 6.1.3 Conditions initiales

Le calcul est initialisé en imposant les conditions initiales uniquement dans le plan d'entrée. Les profils de vitesse résultent de solutions expérimentales approchées et fournies par Larchevêque :

$$u = \min \left( 1., \left( 0.5 * \left( \tanh((y_{\text{parois}} + 0.628666)/0.600411) + 1.0 \right) * \left( \tanh(90.2497 * y_{\text{parois}}^{2.53365})^{0.0268129} - \tanh(10.1516 * y_{\text{parois}}^{1.97484})^{0.313656} \right) + \tanh(10.1516 * y_{\text{parois}}^{1.97484})^{0.313656} \right) * \left( \tanh(6.7708 * z_{\text{parois}})^{0.128828} \right) \right)$$

avec  $y_{\text{parois}} = \min(y, 2 - y)$  et  $z_{\text{parois}} = \min(z, 2.4 - z)$ .

## CHAPITRE 6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AFFLEURANT UNE CAVITÉ TRANSSONIQUE

Les deux autres composantes de vitesse sont considérées nulles :  $v = 0$  et  $w = 0$ . Pour les conditions initiales, nous ajoutons également des fluctuations de vitesse aux profils moyens avec l'approche du filtre digital de Klein *et al.* (2003) [199]. Cette méthode reproduit une turbulence synthétique corrélée en temps et en espace. Les profils moyens des fluctuations de vitesse sont les suivantes :

$$u' = 0.10 * \text{yparois}^{0.01} * \exp(-11. * \text{yparois}^{1.1}) \quad (6.1)$$

$$v' = 0.07 * u'^{0.02} * \exp(-20. * \text{yparois}^{1.9}) \quad (6.2)$$

$$w' = 0.7 * u' \quad (6.3)$$

La méthode du filtre digital de Klein *et al.* [199] superpose aux profils moyens un bruit blanc corrélé. Cette excitation est contrôlée par la fréquence d'injection turbulente qui dépend de la nature de l'écoulement. L'approche caractéristique décompose l'écoulement en termes d'ondes caractéristiques et prescrit la forme du signal en fonction des variations temporelles des amplitudes des ondes. Dans le cas d'une entrée subsonique, les ondes entrantes sont les ondes acoustiques  $\mathcal{L}_5$  ou  $\mathcal{L}_1$ , suivant la position de la frontière ouverte ( $x = x_{min}$  ou  $x = x_{max}$ ) et les ondes de vorticit   dont l'  volution d  pend des composantes de vitesse et des dérivés temporelles de ces derni  res. Ainsi, le couplage de l'approche 3D-NSCBC et de la m  thode de Klein n  cessite la reformulation des ondes entrantes pour inclure les fluctuations de vitesse [238].

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= \eta_\phi \frac{\rho a^2 (1 - M_{max}^2)}{L_k} \Delta u_1 + \mathcal{T}_\phi^1 - \eta(\phi) \rho a \frac{dU_1^0}{dt} \\ \mathcal{L}_3 &= \eta_3 \Delta u_2 + \mathcal{T}_3^1 - \eta(\phi) \rho a \frac{dU_2^0}{dt} \\ \mathcal{L}_4 &= \eta_4 \Delta u_3 + \mathcal{T}_4^1 - \eta(\phi) \rho a \frac{dU_3^0}{dt} \end{aligned} \quad (6.4)$$

o    $L_k$  est la dimension caract  ristique du domaine dans la  $k$ -i  me direction,  $M_{max}$  le nombre de Mach en entré,  $\eta$  les param  tres de relaxation du plan d'entré et  $\mathcal{T}_\phi^k$  les termes transverses. Le terme  $\Delta u_k$  s'  crit :

$$\Delta u_k = u_k - u_{k0} - U_{rnd}^{n+1} \quad (6.5)$$

avec  $u_{k0}$  la vitesse moyenne cible,  $u_k$  la composante de vitesse au temps  $t^n$  et  $U_{rnd}^{n+1}$  le bruit al  atoire corr  l   d  termin   comme :

$$U_{rnd}^{n+1} = a_{kl} \Phi_l(i, j) \quad (6.6)$$

avec  $a_{kl}$  la d  composition de Cholesky du tenseur des contraintes de Reynolds et  $\Phi_l(i, j)$  un nombre al  atoire modifi   de sorte que  $U_{rnd}^{n+1}$  respecte les propri  t  s statistiques inh  rentes    l'algorithme de Klein (section 3.5).

Les dérivés temporelles du signal al  atoire,  $\frac{dU_k^0}{dt}$ , sont déterminés    partir des composantes du signal discret, reliés    l'aide d'une sinuso  de :

$$U_{rnd}^{n+1} = \frac{\pi}{2} f_t \Delta U_{rnd}^n \sin[\pi f_t (t - t^n)] \quad (6.7)$$

avec  $f_t$  la fr  quence de rafra  chissement du signal al  atoire corr  l  .

Dans le cadre des   coulements transsoniques, un soin particulier doit   tre apport   au choix de cette fr  quence du signal al  atoire. En effet, lorsque nous couplons la m  thode de Klein    l'approche caract  ristique, la fr  quence d'injection turbulente doit rester en accord avec le temps de r  ponse (ou temps de relaxation) du profil de vitesse en entré, exprim   sous la forme :

$$\tau_u = \frac{L_k}{\eta_\phi a (1 - M_{max}^2)} \quad (6.8)$$

La méthode des conditions limites caractéristiques prescrit les profils en entrée au travers des variations des amplitudes des ondes caractéristiques. Pour la condition de vitesse en entrée, cette variation est caractérisée par la constante de temps  $\tau_u$ . Pour permettre la relaxation des composantes de vitesse vers les valeurs cibles ( $u_k - u_{k0}$ ), l'intervalle de temps, pour le rafraîchissement du signal aléatoire, doit être suffisamment long par rapport à la constante de temps. Pour des configurations subsoniques, il est d'usage d'exprimer la fréquence de collecte des signaux aléatoires en fonction du temps mis par une particule pour traverser la première cellule fluide (critère de résolution acoustique). Cette approche ne peut plus être employée lors de la description d'un écoulement transsonique puisque ce temps de transport acoustique est très faible devant le temps de réponse du profil d'entrée. Imposer le temps de rafraîchissement comme étant celui du transport acoustique sur une cellule conduit ainsi à une dérive dans la formulation des ondes et donc à une mauvaise formulation de la condition initiale. Pour spécifier le temps de rafraîchissement du signal aléatoire, il faut donc analyser le temps de transport de l'information acoustique sur la première maille ainsi que le temps de relaxation du système caractéristique. En particulier, dans la présente étude, le temps de rafraîchissement est augmenté en accord avec le temps de relaxation caractéristique.

#### 6.1.4 Stratégies de modélisation des grandes échelles

Gloerfelt [139] a effectué une simulation numérique directe 2D d'une cavité présentant les mêmes paramètres géométriques mais en diminuant le nombre de Mach incident ( $M = 0,7$ ). La structure tridimensionnelle de cet écoulement est étudiée par Larchevêque *et al.* [215] avec des simulations des grandes échelles reposant sur l'approche MiLES et le modèle des échelles sélectives (SMS pour *Selective Mixed Scale*). Pour notre étude, nous avons utilisé l'approche MiLES, différentes formulations dynamiques du modèle de Smagorinsky (le modèle Smagorinsky dynamique lagrangien, LDSM, avec les notions de macropression et de macrotempérature ou avec une formulation dynamique du modèle de Yoshizawa pour la partie isotropique du tenseur des contraintes et le modèle Smagorinsky dynamique localisé, DSM avec les notions de macropression et de macrotempérature) ainsi que le modèle de Vreman. Les simulations LES explicites (réalisées avec un modèle de sous-maille) reposent sur un schéma de dissipation artificielle basé sur les coefficients suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0,5 \\ \alpha_2 = 0,5 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_1 = 0,032 \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Les simulations LES implicites (de type MiLES) sont réalisées avec le coefficient  $\beta_1 = 0,25^2$ .

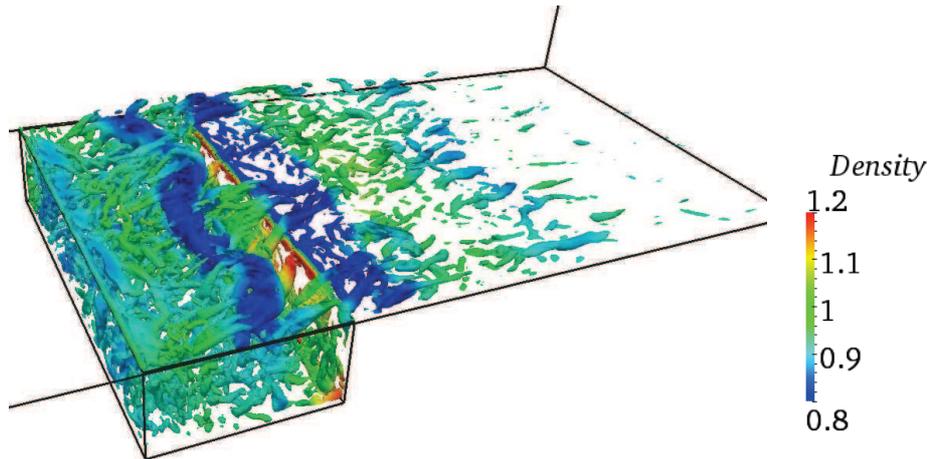
## 6.2 Visualisation de l'écoulement

L'écoulement affleurant une cavité est complexe, de nature instationnaire et tridimensionnelle. Cet écoulement englobe différents points théoriques, au-delà des phénomènes d'oscillations de cavité, tels que les mécanismes de séparation d'une couche cisailée, le tourbillon de cavité associé à la recirculation de l'écoulement et la dépendance de la dynamique à la géométrie de cavité.

Les différentes structures tourbillonnaires sont mises en évidence par le critère Q, comme le montre la figure 6.3. On observe la présence d'un rouleau de vorticité de grande échelle dans la cavité. L'interaction des structures cohérentes avec le coin aval est également soulign e avec le détachement de structures tourbillonnaires ou la recirculation au sein de la cavité.

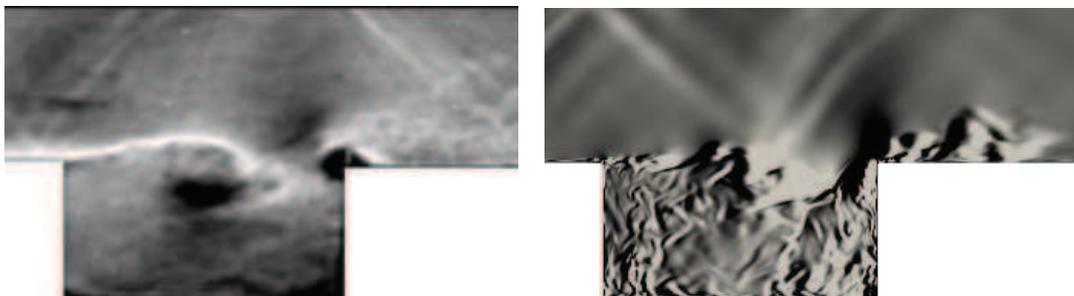
---

2. Pour des écoulements subsoniques, le schéma de viscosité artificielle est principalement contrôlé par le coefficient  $\beta_1$  qui est associé à la dissipation de quatrième ordre. Pour des DNS, la valeur minimale de ce coefficient est consid r e,  $\beta_1 = 0,016$  [369, 361, 184]. Les simulations de type LES explicites requièrent le double ( $\beta_1 = 0,032$ ) alors que les simulations LES implicites nécessitent une contribution dissipative artificielle plus importante pour se substituer au modèle de sous-maille ( $\beta_1 = 0,25$ , soit un facteur 8 par rapport à une LES explicite).



**FIGURE 6.3:** Structures tourbillonnaires tridimensionnelles mises en évidence par un iso-contour du critère  $Q$  colorié par la masse volumique, pour une simulation de la cavité transsonique réalisée avec le maillage M1 (Table 6.1) et le modèle Smagorinsky dynamique localisé (DSM).

La figure 6.4 représente une strioscopie numérique. Nous reproduisons le motif acoustique complexe observé par Forestier *et al.* [122] et constitué d'ondes de pression se propageant en amont et en aval. Les oscillations de la couche de cisaillement au dessus de la cavité sont également mises en évidence ainsi que les interactions entre les différentes structures tourbillonnaires. Les simulations des grandes échelles réalisées semblent suffisamment résolues pour capturer les structures responsables du mécanisme de rétroaction acoustique.



**FIGURE 6.4:** Clichés strioscopiques issus de l'expérience [122] (gauche) et d'un calcul MiLES (droite) avec le maillage M1.

L'étude expérimentale des champs de vitesse, pour cet écoulement, a mis en évidence l'existence d'une asymétrie que nous capturons, comme le montre les cartes de la vitesse moyenne longitudinale et de l'énergie turbulente cinétique 2D, dans le plan rasant la cavité (figure 6.5). Larchevêque *et al.* [215] ont étudié la nature de cette asymétrie. La bifurcation de l'écoulement résulte d'un effet de confinement par la présence des parois latérales. Notons que les quantités moyennées sont reportées pour différents modèles de sous-maille avec le maillage M1 (*cf.* Table 6.2). Les cartes de la vitesse moyenne longitudinale manifestent une zone constituée de deux noyaux dans la partie gauche de la cavité et une zone avec un unique noyau à droite. Ces deux zones justifient la présence d'extrema de vitesse non symétriques. Pour la vitesse moyenne longitudinale, nous observons une bonne similitude entre les différentes stratégies de modélisation, en dehors des zones de forte vitesse où de légères différences subsistent. Les écarts entre les différents modèles de sous-maille sont plus accentués pour l'énergie turbulente cinétique 2D. Une comparaison plus fine des résultats obtenus avec les différentes approches de modélisation de sous-maille sera présentée dans la suite de ce manuscrit. Notons que

ces différences sur les champs moyens apparaissent dans le plan rasant la cavité, où la dissipation turbulente peut affecter le développement de la couche de mélange.

### 6.3 Impact du modèle de turbulence

Pour cette configuration, l'injection de la turbulence ne joue pas un rôle crucial dans la boucle de rétroaction acoustique. En effet, la turbulence est essentiellement générée par les instabilités de Kelvin-Helmholtz et par les différentes zones de recirculation. Ce rôle négligeable de l'injection turbulente est également reporté par Sagaut *et al.* [328], pour la même configuration. Ainsi, que les calculs soient réalisés avec ou sans injection turbulente, les résultats obtenus sont quasiment identiques.

### 6.4 Comparaison des modèles de sous-maille

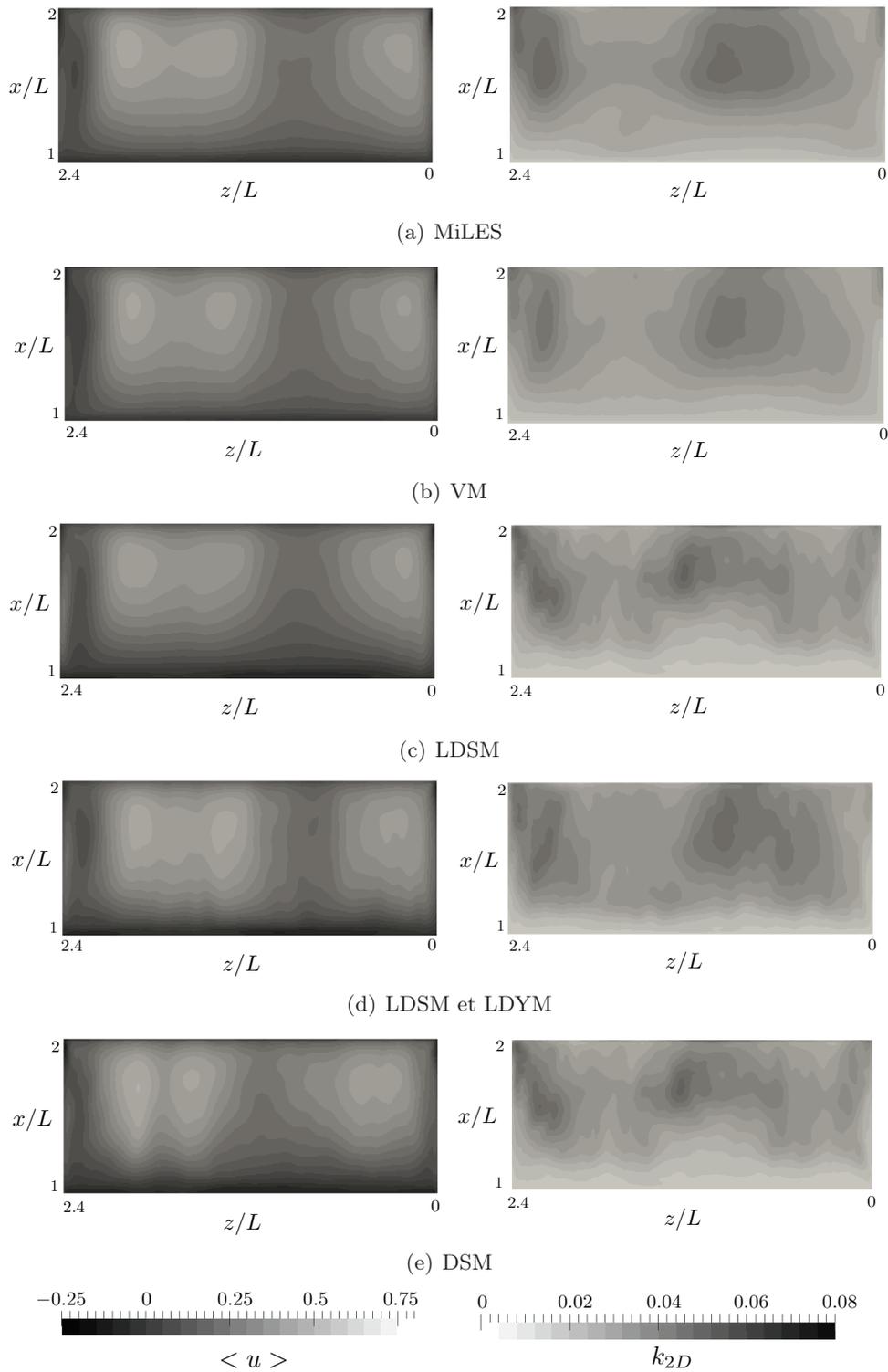
Dans cette section, nous analysons les différences observées entre les différentes stratégies de sous-maille. Cette analyse est réalisée pour le maillage M1 comportant  $6,6 \times 10^6$  noeuds. L'écoulement est en effet plus sensible au modèle SGS utilisé puisque la contribution de sous-maille est plus importante.

#### 6.4.1 Champs de vitesse

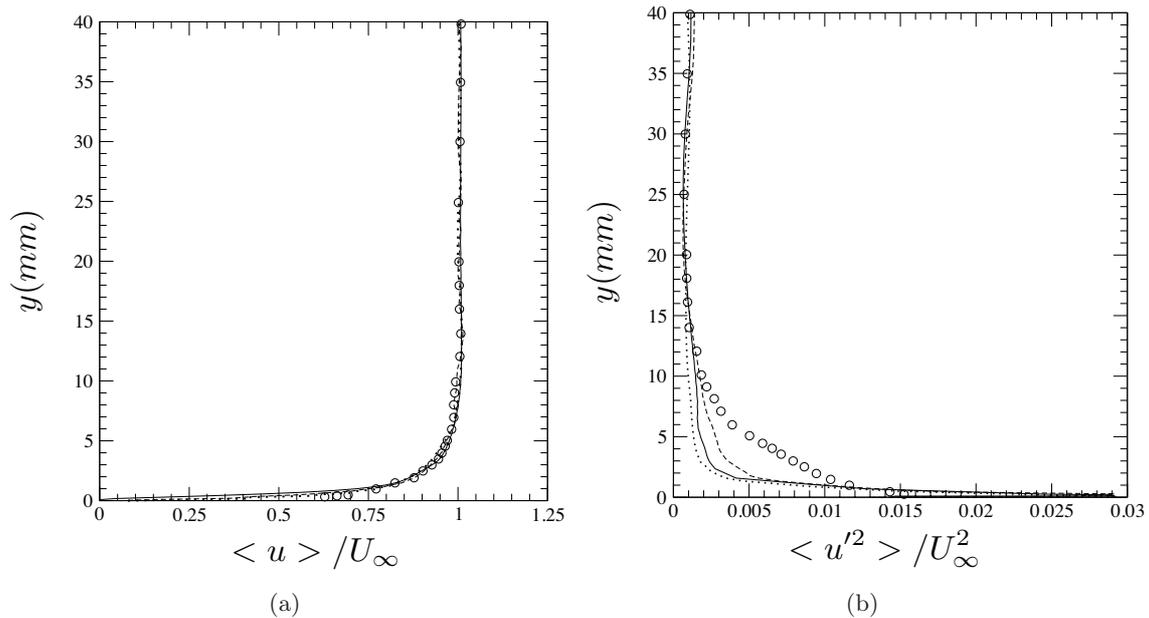
Comme nous l'avons mentionné précédemment, les présentes simulations sont réalisées sans modèle de paroi. Or, il est impératif de décrire correctement la couche limite incidente qui est un acteur principal de la boucle de rétroaction aéro-acoustique. Le niveau de résolution de la couche limite dépend de la résolution numérique à proximité du mur et du niveau de dissipation turbulente et/ou artificielle introduit. La figure 6.6 représente la dynamique dans la couche limite en amont de la cavité. La vitesse moyenne longitudinale et la fluctuation associée sont reportées à  $0,1L$  en amont de la cavité. Pour la vitesse moyenne longitudinale, un très bon accord est observé entre les différents modèles de sous-maille et les données expérimentales.

La situation est quelque peu différente pour la fluctuation de la vitesse longitudinale. En effet, on observe quelques différences entre les différentes modélisations, dans la région de proche paroi. Les différences observées semblent donc être liées au niveau de dissipation turbulente et/ou artificielle introduit. On constate que l'approche SGS implicite (MiLES) reproduit un niveau de fluctuation en meilleur accord avec l'expérience. Notons que ce dernier ne repose que sur le schéma de dissipation artificielle alors que les autres simulations combinent viscosités turbulente et numérique.

La figure 6.7 montre les profils de la vitesse moyenne longitudinale en différentes positions axiales, dans la cavité, et pour les différentes stratégies de modélisation de sous-maille. Ces derniers sont comparés aux données expérimentales obtenues par Forestier *et al.* [122] au moyen de la Vélocimétrie Laser à Franges. On observe un bon accord entre les simulations et l'expérience. Dans la première partie de la cavité, on constate que la vitesse longitudinale est surestimée. La tendance s'inverse à mesure que l'on s'approche de la paroi aval. Pour expliquer ces différences, il convient de s'attarder sur la description de la couche de cisaillement dans le plan rasant de la cavité. Sur le premier profil de vitesse ( $x/L = 1,08$ ), il semblerait que la couche de mélange soit plus fine que celle observée numériquement. Cet argument est également avancé par Thornber et Drikakis [374], au cours de l'étude d'une cavité profonde. Ils justifient ainsi les écarts sur les profils de vitesse à une évaluation dégradée de l'épaisseur de la couche de mélange. A mesure que l'on s'approche du plan médian de la cavité, les écarts entre les différents modèles de sous-maille s'accroissent. La contribution de modèle de sous-maille est en effet plus importante au centre de la cavité. Il est difficile de choisir le meilleur candidat pour la modélisation de sous-maille. Suivant la position au sein de la cavité, l'approche reproduisant au mieux la dynamique locale évolue.



**FIGURE 6.5:** Cartes dans le plan rasant la cavité pour différents modèles de sous-maille et le maillage M1. A gauche : La vitesse moyenne longitudinale. A droite : L'énergie cinétique turbulente 2D. (a) L'approche MiLES. (b) Le modèle de Vreman (VM). (c) Le modèle Smagorinsky dynamique lagrangien avec une formulation des équations filtrées combinant macropression et macrotempérature (LDSM). (d) Le modèle Smagorinsky dynamique lagrangien avec une formulation dynamique lagrangienne du modèle de Yoshizawa pour la partie isotropique du tenseur des contraintes (LDSM+LDYM). (e) Le modèle Smagorinsky dynamique localisé (DSM).



**FIGURE 6.6:** Profils de vitesse dans la couche limite  $0,1L$  en amont de la cavité : — LDSM, - - - MiLES,  $\cdots$  VM et  $\circ$  données expérimentales. (a) : Vitesse moyenne longitudinale. (b) : Fluctuation de la vitesse longitudinale.

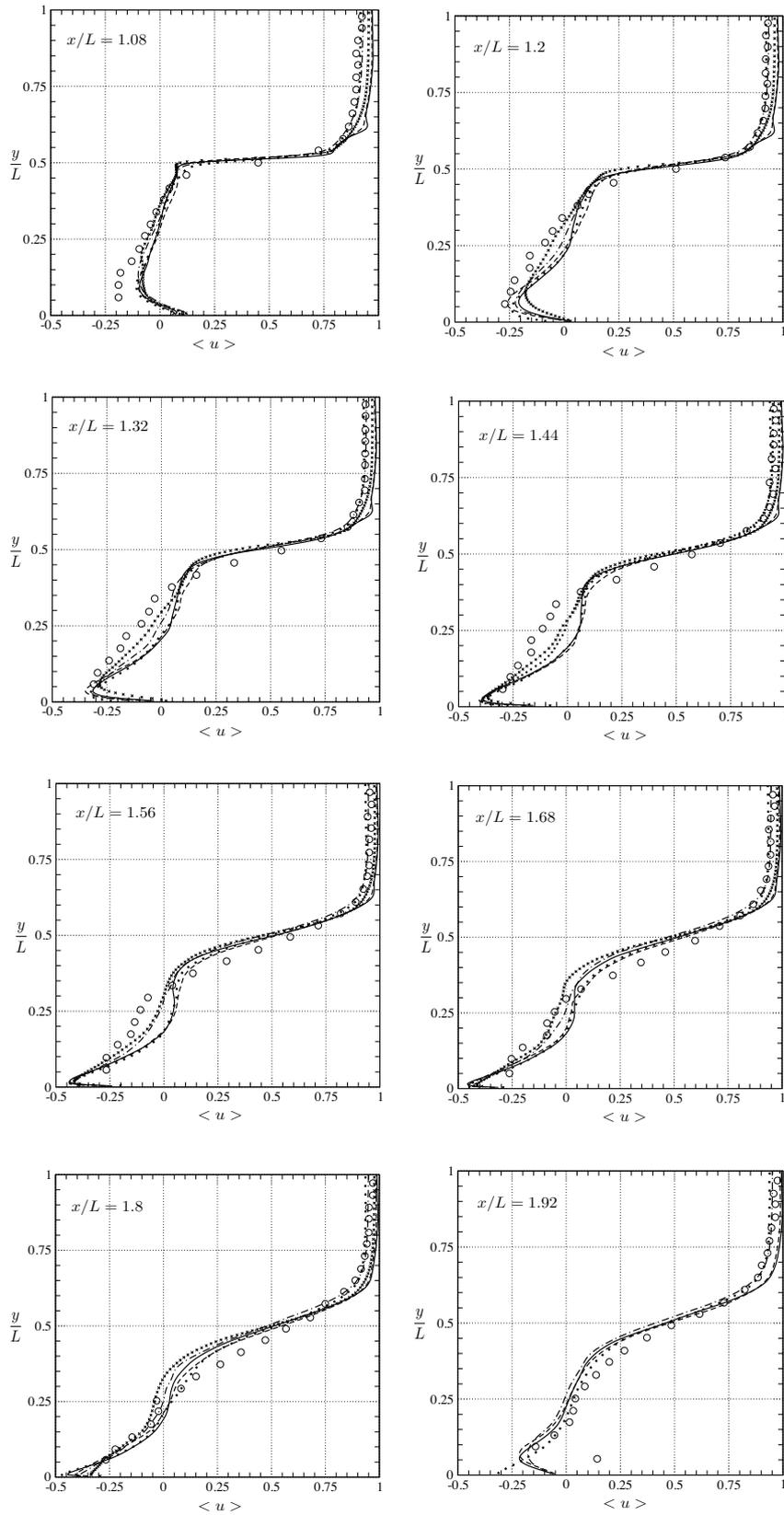
Néanmoins, quelque soit le modèle utilisé, ces différences restent faibles. Les dynamiques reproduites sont peu dépendantes de la modélisation de sous-maille.

La figure 6.8 présente les profils de la vitesse moyenne verticale. La dynamique de cavité est correctement reproduite. La comparaison fait apparaître une légère sous-prédiction de la vitesse moyenne verticale. Néanmoins, la variation de la vitesse verticale subit une plus faible amplitude par rapport à la composante longitudinale.

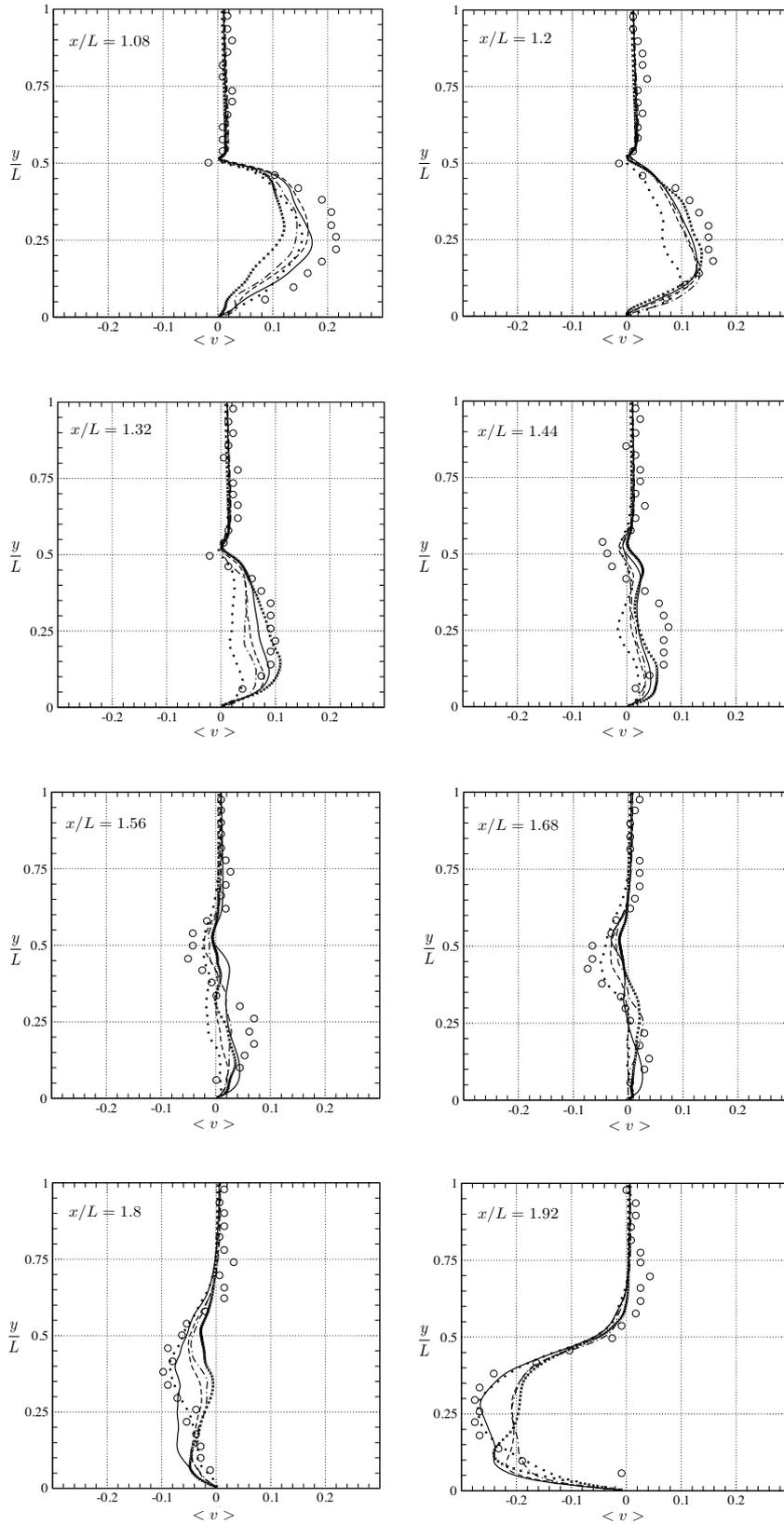
Les évolutions des fluctuations des vitesses longitudinales et axiales sont reportées sur les figures 6.9 et 6.10. La contrainte de Reynolds, qui représente la fonction de corrélation entre les composantes longitudinales et verticales de la fluctuation de vitesse, est représentée sur la figure 6.11. Bien que les niveaux de turbulence soient correctement reproduits à proximité de la couche de mélange, les fluctuations de vitesse sont légèrement sous-estimées dans la cavité (de  $x/L=1,32$  à  $x/L=1,8$  sur la figure 6.9). Larchevêque *et al.* [215] justifient ces écarts par la faible cohérence du tourbillon de Stuart reproduit numériquement et qui ne parvient pas à reproduire la double "bosse" dans la cavité. Les contraintes de Reynolds sont en bon accord avec l'expérience et présentent des écarts comparables à ceux obtenus par Larchevêque *et al.* [215].

Au vu des résultats obtenus, il est difficile de discriminer les approches de sous-maille. Nous tenterons donc de différencier les modèles utilisés par l'étude d'autres quantités, telle que les niveaux de viscosités turbulente et numérique ainsi que le rayonnement acoustique.

## CHAPITRE 6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AFFLEURANT UNE CAVITÉ TRANSSONIQUE

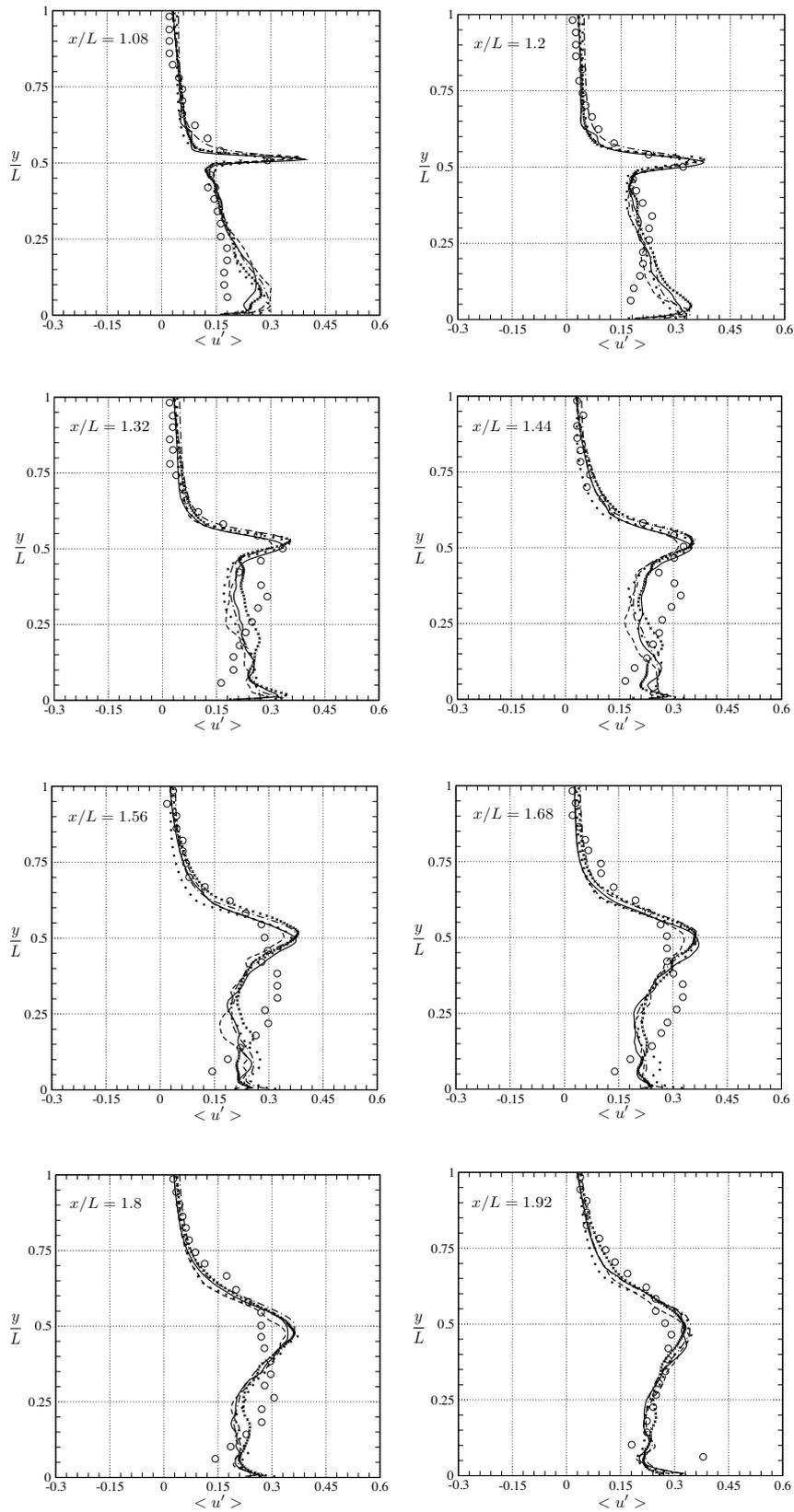


**FIGURE 6.7:** Vitesse moyenne longitudinale dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe  $x$  : — LDSM+LDYM, - - - LDSM avec la macropression et la macrotempérature, ··· DSM, - · - MiLES, × VM et ○ données expérimentales.

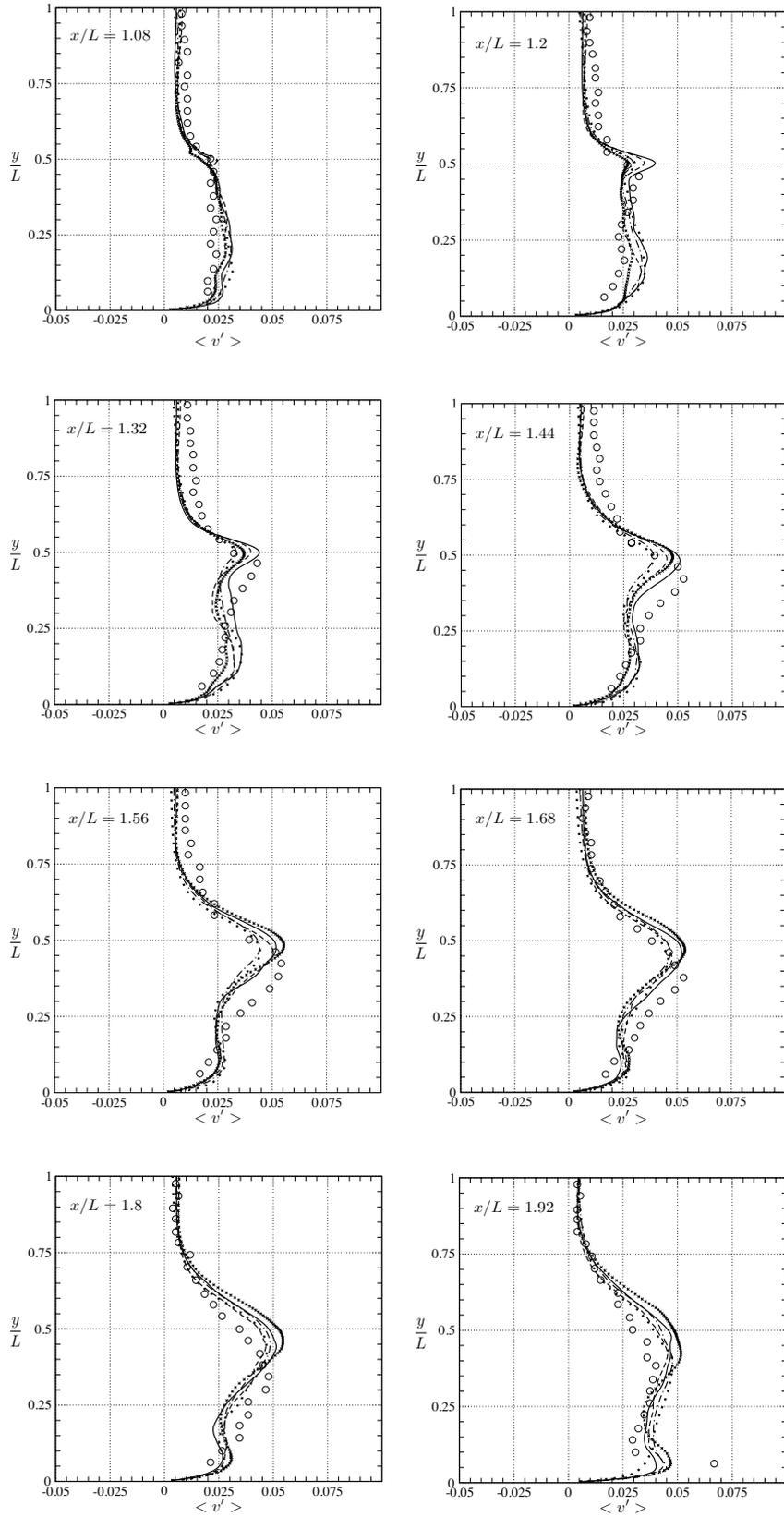


**FIGURE 6.8:** Vitesse moyenne verticale dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe  $x$  : — LDSM+LDYM, - - - LDSM,  $\cdots$  DSM, - - - MiLES,  $\times$  VM et  $\circ$  données expérimentales.

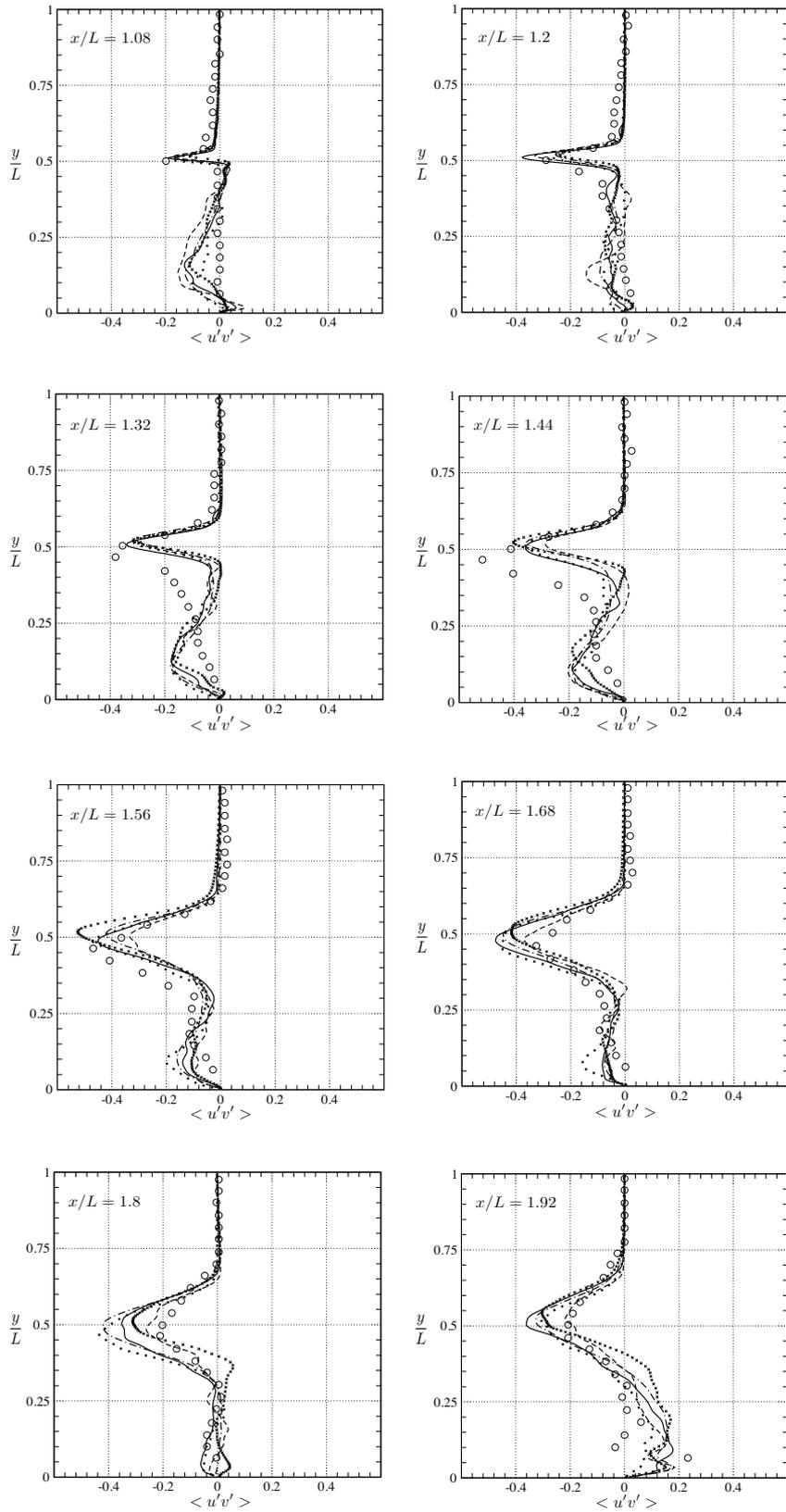
## CHAPITRE 6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AFFLEURANT UNE CAVITÉ TRANSSONIQUE



**FIGURE 6.9:** Fluctuation de la vitesse longitudinale dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe  $x$  : — LDSM+LDYM, - - - LDSM,  $\dots$  DSM, - · - MiLES,  $\times$  VM et  $\circ$  données expérimentales.



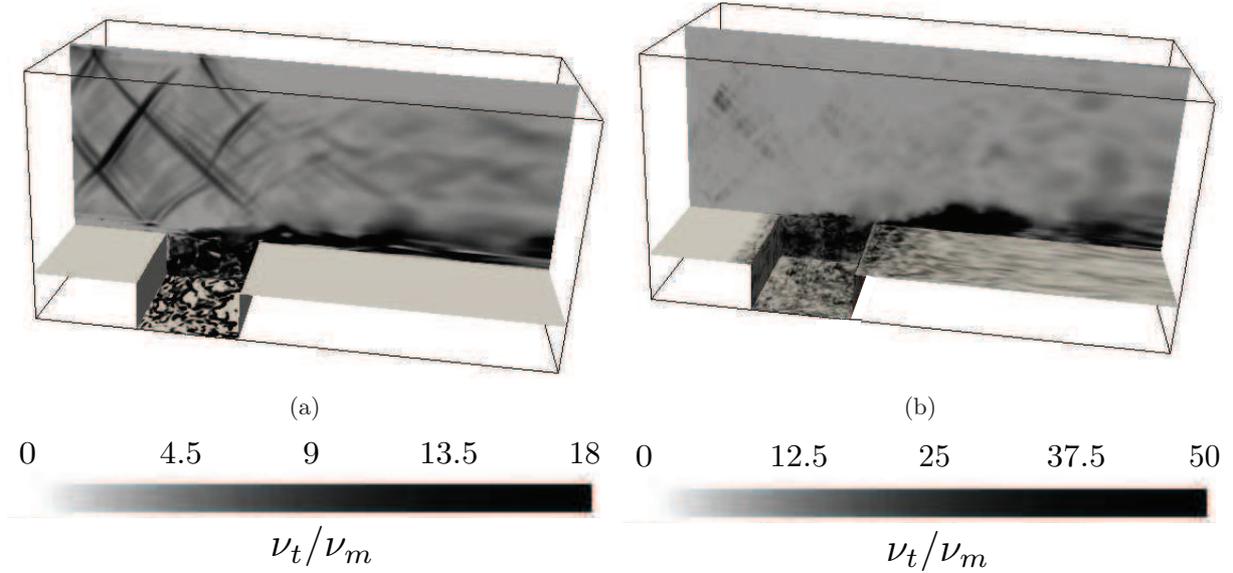
**FIGURE 6.10:** Fluctuation de la vitesse verticale dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe  $x$  : — LDSM+LDYM, - - - LDSM,  $\cdots$  DSM, - · - MiLES,  $\times$  VM et  $\circ$  données expérimentales.



**FIGURE 6.11:** Contrainte de Reynolds dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe  $x$  :— LDSM+LDYM, - - LDSM,  $\dots$  DSM, - · - MiLES,  $\times$  VM et  $\circ$  données expérimentales.

### 6.4.2 Dissipation turbulente

Cette section compare les modèles de sous-maille par le niveau de viscosité turbulente introduit. Ainsi la figure 6.12 confronte le modèle de Vreman au modèle Smagorinsky dynamique lagrangien (LDSM) par la distribution spatiale instantanée du rapport de la viscosité turbulente et de la viscosité moléculaire,  $\nu_{ratio} = \nu_t/\nu_m$ , dans le plan transverse médian et au niveau des parois de la cavité. Le modèle de Vreman introduit plus de dissipation turbulente que le modèle Smagorinsky dynamique lagrangien. Il est probable que la constante fixe du modèle de Vreman soit responsable de cette sur-dissipation.

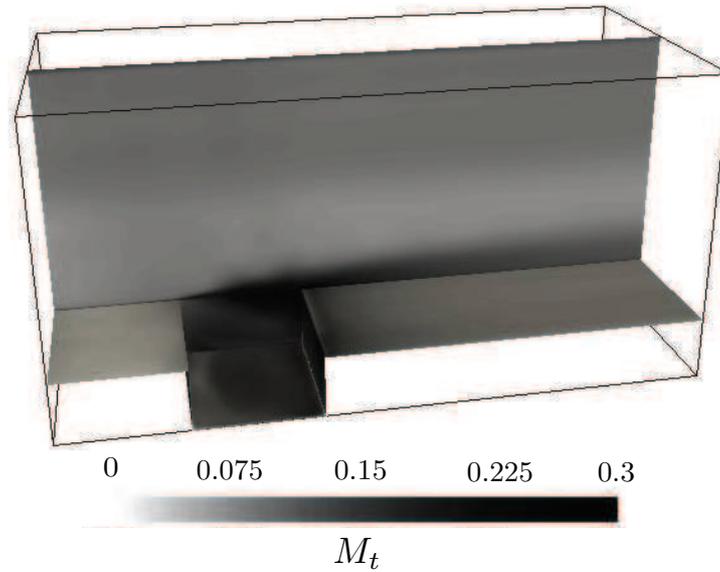


**FIGURE 6.12:** Cartes du rapport de la viscosité turbulente et moléculaire  $\nu_{ratio}$ . (a) : LDSM. (b) : VM.

Nous avons testé différentes formulations dynamiques du modèle de Smagorinsky (approche localisée avec un filtre explicite, lagrangien et lagrangien couplé au modèle de Yoshizawa). L'ajout d'un modèle dynamique pour modéliser la trace du tenseur des contraintes améliore légèrement le comportement statistique des composantes de vitesse. Il semblerait que le centre de la couche de mélange soit mieux défini, comme en témoignent les contraintes de Reynolds (*cf.* figure 6.11) et les fluctuations de vitesse (*cf.* figures 6.9 et 6.10). Pour évaluer les effets de compressibilité, nous déterminons le nombre de Mach turbulent résolu, exprimé sous la forme :

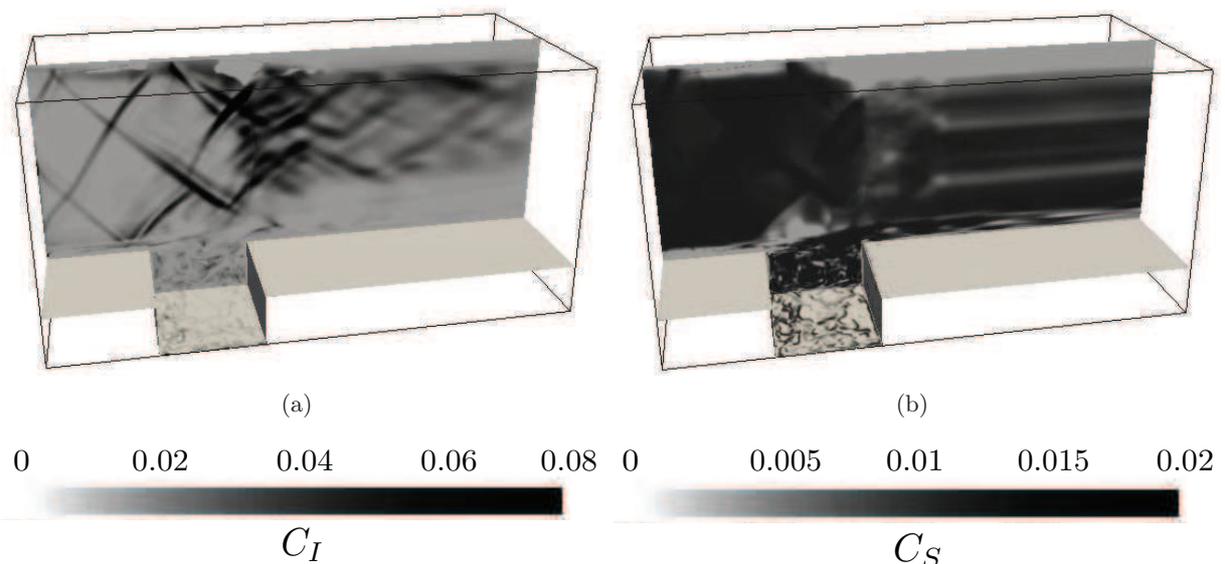
$$M_T = \frac{1}{\langle c \rangle} \left[ \frac{\langle \bar{\rho}(\tilde{\mathbf{u}})^2 \rangle}{\langle \bar{\rho} \rangle} - \left( \frac{\langle \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \rangle}{\langle \bar{\rho} \rangle} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.10)$$

avec  $\langle c \rangle$  la vitesse moyenne du son et  $\langle \bar{\rho} \rangle$  la masse volumique moyenne. La figure 6.13 expose une carte du nombre de Mach turbulent résolu obtenue avec une approche MiLES. L'écoulement dans la cavité est caractérisé par un champ compressible pour lequel le nombre de Mach turbulent résolu varie entre 0,2 à 0,3, ce qui confirme la nature compressible de l'écoulement. Les cartes des constantes des parties anisotropiques et isotropiques du tenseur des contraintes de sous-maille sont exposées sur la figure 6.14. La constante isotropique de Yoshizawa ( $C_I$ ) peut dépasser la constante de Smagorinsky ( $C_s$ ), indiquant que le gradient de la pression thermodynamique est au même niveau que l'énergie cinétique de sous-maille. On constate que la constante  $C_I$  manifeste de grandes valeurs au voisinage des ondes de pression alors que la partie anisotrope est particulièrement active dans la couche cisailée et l'écoulement libre ainsi que dans la cavité.



**FIGURE 6.13:** Carte du nombre de Mach turbulent résolu pour le maillage M1 et l'approche MiLES.

La constante  $C_I$  se manifestant au niveau des ondes de pression où le schéma de dissipation artificielle de second ordre est actif, les faibles différences observées entre les différentes modélisations de sous-maille pourraient résulter de l'activation de la dissipation de second ordre lorsqu'aucun modèle n'est fourni pour la partie isotropique. D'une manière similaire, la dissipation de sous-maille intervient dans des régions où la composante de quatrième ordre du schéma de dissipation artificielle est particulièrement active. Il est donc important de considérer les niveaux et la nature de la dissipation artificielle introduite, pour analyser les comportements des différentes approches de sous-maille.



**FIGURE 6.14:** Constantes des modèles dynamiques pour le maillage M1 : (a) : Constante de Yoshizawa pour la trace du tenseur des contraintes. (b) : Constante de Smagorinsky pour la partie anisotropique du tenseur des contraintes.

### 6.4.3 Dissipation artificielle

Contrairement aux modèles de sous-maille qui modélisent la contribution des échelles non résolues au travers d'une viscosité turbulente,  $\nu_t$  pouvant être comparée à la contribution moléculaire  $\nu_m$ , le schéma de dissipation artificielle n'introduit pas explicitement un terme de viscosité mais corrige, au niveau discret, les flux convectifs aux interfaces des volumes de contrôle [184]. Le niveau de dissipation artificielle ne peut donc pas être rapporté à un terme de viscosité. Pour identifier la contribution artificielle, nous isolons la modification artificielle des flux. Nous reformulons ensuite les flux visqueux comme la somme des contributions moléculaire, turbulente et artificielle :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}^k}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{D}_m^k}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{D}_t^k}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{D}_a^k}{\partial x_k} = \mathbf{0}, \quad (6.11)$$

avec

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \frac{\rho u_1}{\bar{\rho}} \\ \frac{\rho u_2}{\bar{\rho}} \\ \frac{\rho u_3}{\bar{\rho}} \\ \frac{\bar{\rho} e}{\bar{\rho} Z} \end{pmatrix}, \quad \bar{F}^k = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\rho} u_k}{\bar{\rho}} \\ \frac{\rho u_1 \widetilde{u}_k + \delta_{1k}(\bar{p} - \frac{1}{3}\tau_{jj})}{\bar{\rho}} \\ \frac{\rho u_2 \widetilde{u}_k + \delta_{2k}(\bar{p} - \frac{1}{3}\tau_{jj})}{\bar{\rho}} \\ \frac{\rho u_3 \widetilde{u}_k + \delta_{3k}(\bar{p} - \frac{1}{3}\tau_{jj})}{\bar{\rho}} \\ \frac{(\bar{\rho} e + \bar{p}) \widetilde{u}_k}{\bar{\rho} Z} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

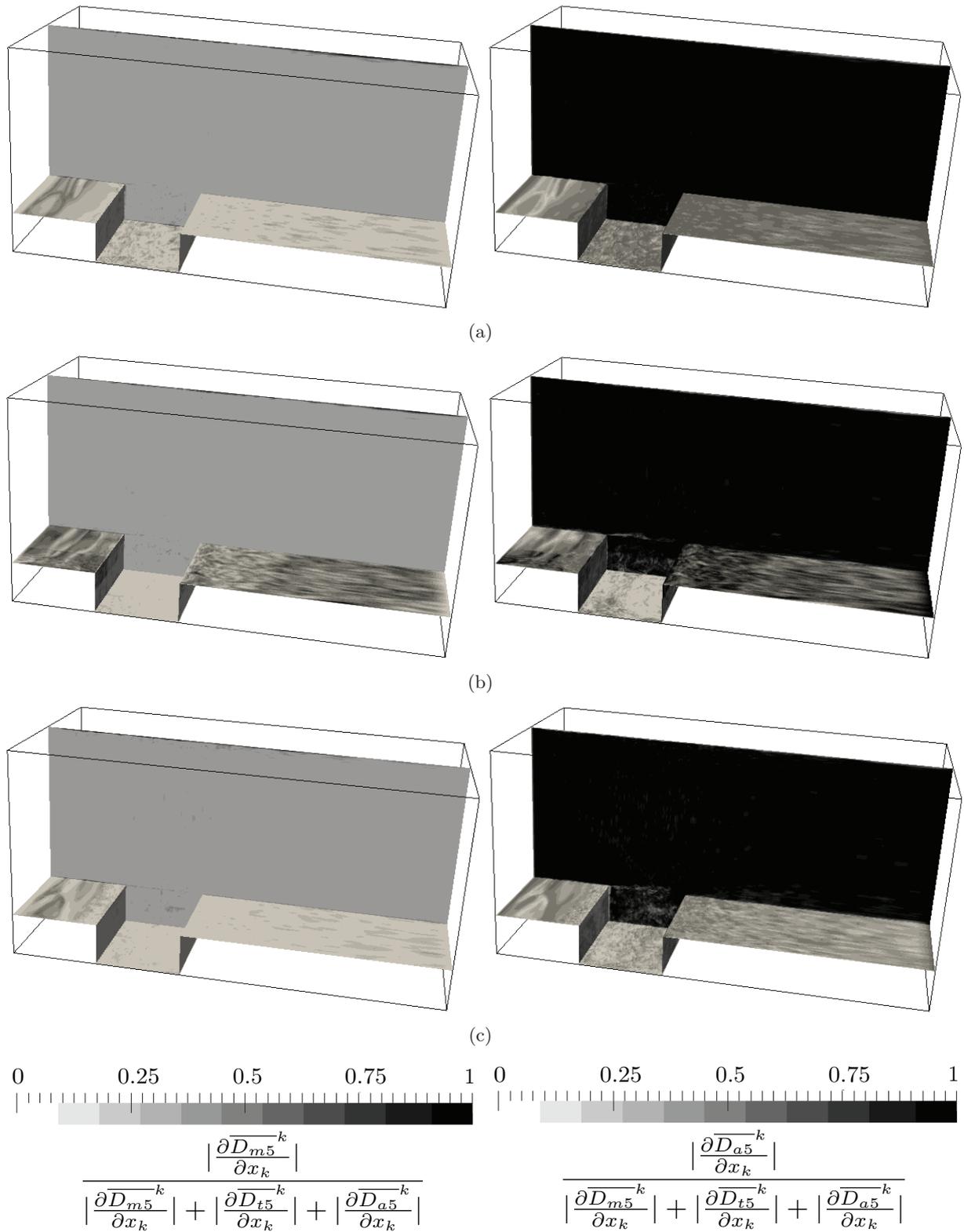
Les vecteurs  $\bar{D}_m^k$ ,  $\bar{D}_t^k$  et  $\bar{D}_a^k$  représentent les dissipations moléculaire, turbulente et artificielle avec :

$$\bar{D}_m^k = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\bar{\mu} \widetilde{A}_{1k} \\ -2\bar{\mu} \widetilde{A}_{2k} \\ -2\bar{\mu} \widetilde{A}_{3k} \\ -2\bar{\mu} \widetilde{u}_j \widetilde{A}_{kj} - \frac{\bar{\mu} c_p}{Pr} \frac{\partial \widetilde{\vartheta}}{\partial x_k} \\ -\frac{\bar{\mu}}{Sc} \frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial x_k} \end{pmatrix}, \quad \bar{D}_t^k = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\bar{\rho} \nu_t \widetilde{A}_{1k} \\ -2\bar{\rho} \nu_t \widetilde{A}_{2k} \\ -2\bar{\rho} \nu_t \widetilde{A}_{3k} \\ -\gamma \frac{\bar{\rho} \nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \widetilde{e}_I}{\partial x_k} \\ -\frac{\bar{\rho} \nu_t}{Sc_t} \frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial x_k} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

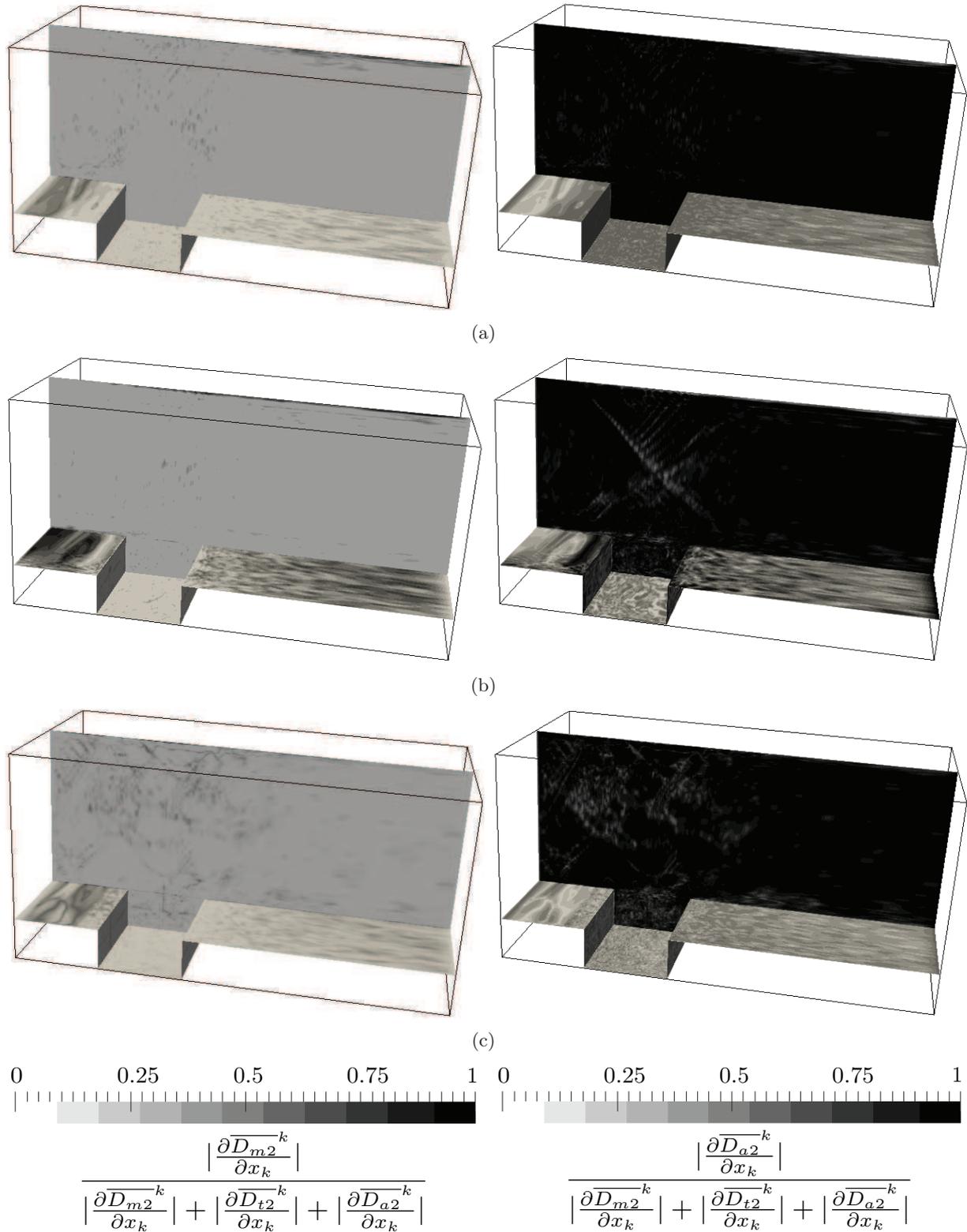
La dissipation artificielle agissant comme un correction des flux convectifs aux interfaces des volumes élémentaires, le terme  $\frac{\partial \bar{D}_a^k}{\partial x_k}$  est évalué en intégrant la correction artificielle sur chaque volume.

Les figures 6.15 et 6.17 montrent ainsi l'impact des dissipations moléculaire, artificielle et turbulente sur le bilan global des flux diffusifs, pour les équations de l'énergie et du premier moment. On remarque ainsi que la dissipation artificielle prévaut sur la dissipation turbulente, ce qui réduit l'importance des modèles de sous-maille. Pour cet écoulement de cavité, dominé par des oscillations auto-entretenues et présentant un nombre de Mach turbulent résolu relativement élevé ( $M_t = 0,3$ ), le sensur du schéma de dissipation artificielle est particulièrement actif. Cette prédominance de la dissipation artificielle sur la dissipation turbulente a déjà été reportée dans la littérature dans le cadre d'écoulement avec des chocs [103] et de faibles discontinuités de pression [329].

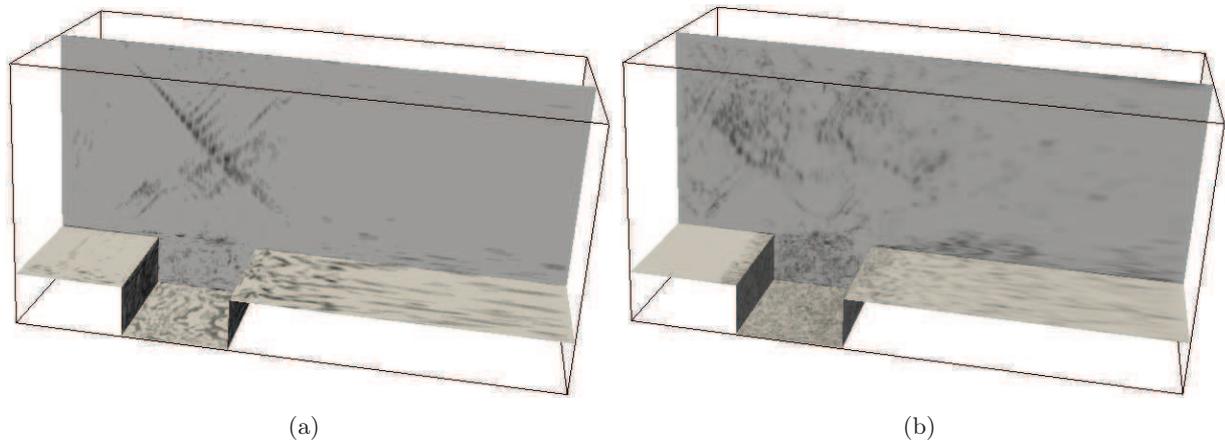
L'élément clé à toute simulation d'un écoulement de cavité transsonique est donc la dissipation artificielle. Pour déterminer la dissipation associée au second-ordre, la figure 6.18 expose la carte du sensur de pression,  $\Psi_1$ , selon la direction  $x$  et pour l'approche MiLES. Pour la prsentetude, ce sensur prsentedesval



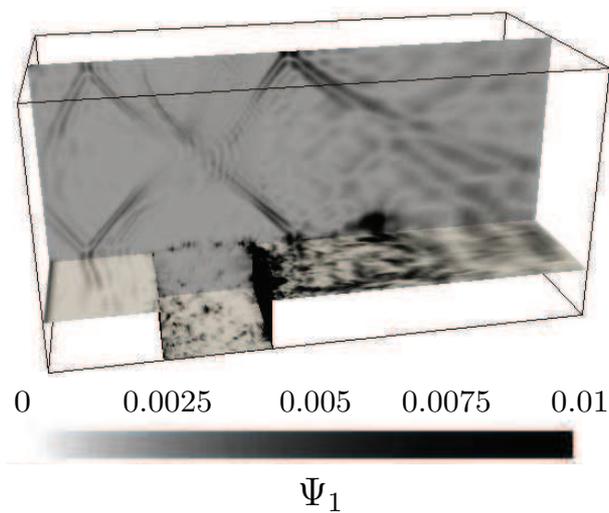
**FIGURE 6.15:** Cartes instantanées des contributions des flux moléculaire (gauche) et artificielle (droite) pour le bilan d'énergie (a) : MiLES. (b) : LDSM. (c) : VM.



**FIGURE 6.16:** Cartes instantanées des contributions des flux moléculaire (gauche) et artificielle (droite) pour l'équation du premier moment. (a) : MiLES. (b) : LDSM. (c) : VM.



**FIGURE 6.17:** Cartes instantanées de la contribution du flux turbulent pour l'équation du premier moment. (a) : LDSM. (b) : VM.



**FIGURE 6.18:** Carte du senseur de pression selon  $x$  pour l'approche MiLES.

## 6.5 Rayonnement acoustique

L'écoulement de cavité est dominé par un mécanisme de rétroaction aéro-acoustique caractérisé par des oscillations auto-entretenues. Ces oscillations sont auto-entretenues à la suite d'un certain nombre d'interactions entre l'écoulement et l'obstacle. En particulier, les perturbations tourbillonnaires générées au niveau de l'angle amont sont convectées vers l'aval dans la couche cisailée et viennent impacter l'angle aval. Cet impact produit des ondes de pression qui remontent en amont et viennent exciter la couche cisailée au niveau du bord de séparation, produisant ainsi de nouvelles structures tourbillonnaires. La relation de phase entre l'amont et l'aval joue un rôle fondamental dans la description de ces oscillations à des fréquences discrètes bien définies.

Pour décrire le phénomène de rétroaction et caractériser les fréquences d'oscillations dans la cavité, les signaux temporels de pression sont enregistrés en un point situé à mi-hauteur de la paroi verticale amont. La fonction de densité spectrale de puissance (PSD pour *Power Spectral Density* ou DSP pour *Densité Spectrale de Puissance*) est déterminée pour différents modèles de sous-maille. Le champ acoustique rayonné est ainsi décrit par la distribution fréquentielle de l'énergie du signal de pression. Les différents spectres de pression sont représentés comme le niveau de bruit (SPL pour *Sound Pressure Level*), exprimé en décibels par Hertz, en fonction du nombre de Strouhal, au moyen de la formule de conversion suivante :

$$SPL(dB) = 10 \log_{10} \left( \frac{\sqrt{S_{p'p'}}}{4 \times 10^{-10}} \right) \quad (6.14)$$

avec  $S_{p'p'}$  le module du spectre en  $\text{Pa}^2$ .

Pour l'analyse spectrale du signal de pression, ne disposant que d'un faible intervalle de temps, la méthode de Burg est utilisée [249, 62]. Cette méthode paramétrique est en effet plus précise que les méthodes non paramétriques largement utilisées et basées sur des transformées de Fourier. Alors que les méthodes non paramétriques estiment directement la densité spectrale de puissance à partir du signal sous la forme de la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation, les méthodes paramétriques modélisent le spectre sous la forme d'un système linéaire. Le point clé d'une méthode paramétrique réside dans la détermination des paramètres du système linéaire dont l'entrée est un bruit et la sortie les données à modéliser. Cette approche de modélisation garantit une meilleure résolution du spectre que les méthodes non paramétriques, lorsque le signal est particulièrement court. Pour modéliser le système linéaire, le modèle des pôles multiples est utilisé. La sortie du système linéaire, avec un bruit blanc en entrée, est caractérisée par un modèle auto-régressif (AR). Ainsi, dans la présente étude, la méthode de Burg [62] estime le contenu spectral du signal de pression en évaluant un modèle auto-régressif du signal.

La figure 6.19 expose le spectre de puissance obtenu avec la méthode de Burg pour le maillage moyen avec trois approches de sous-maille : l'approche MiLES, le modèle de Vreman et le modèle Smagorinsky dynamique lagrangien (LDSM). En particulier, la figure 6.20 représente une partie du spectre de puissance sur une certaine gamme de fréquences. Sur ces spectres, nous avons reporté les résultats expérimentaux. La procédure d'obtention de ces données expérimentales est justifiée par Larchevêque *et al.* [215]. Les spectres expérimentaux sont obtenus par moyennage de 50 spectres (un spectre par période) extraits d'un signal comportant 7 500 périodes. Ils déterminent ainsi les fonctions de densité de probabilité des différents modes et de leurs harmoniques. Sont reportées ainsi sur la figure 6.20, les limites inférieures et supérieures à 99% des fonctions de densité de probabilité. Pour chaque mode et les harmoniques associées, la valeur la plus probable ainsi que les limites inférieures et supérieures à 99% des fonctions de densité de probabilité sont rassemblées dans le tableau 6.2.

## CHAPITRE 6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AFFLEURANT UNE CAVITÉ TRANSSONIQUE

Mode	St (th)	%	St (exp)			SPL (exp)		
1	0,353	100	0,362	0,365	0,368	159,2	162,6	168,8
2 × 1	0,706	100	0,726	0,728	0,753	142,5	146,8	150,8
2	0,745	67	0,789	0,803	0,811	120,5	125,5	136,5
3 × 1	1,059	88	1,087	1,092	1,104	114,6	122,3	126,0
3	1,136	18	1,152	1,164	1,202	110,3	113,8	119,2
4 × 1	1,412	94	1,451	1,455	1,470	117,2	121,5	128,4
4	1,528	13	1,507	1,522	1,542	110,8	114,8	118,7

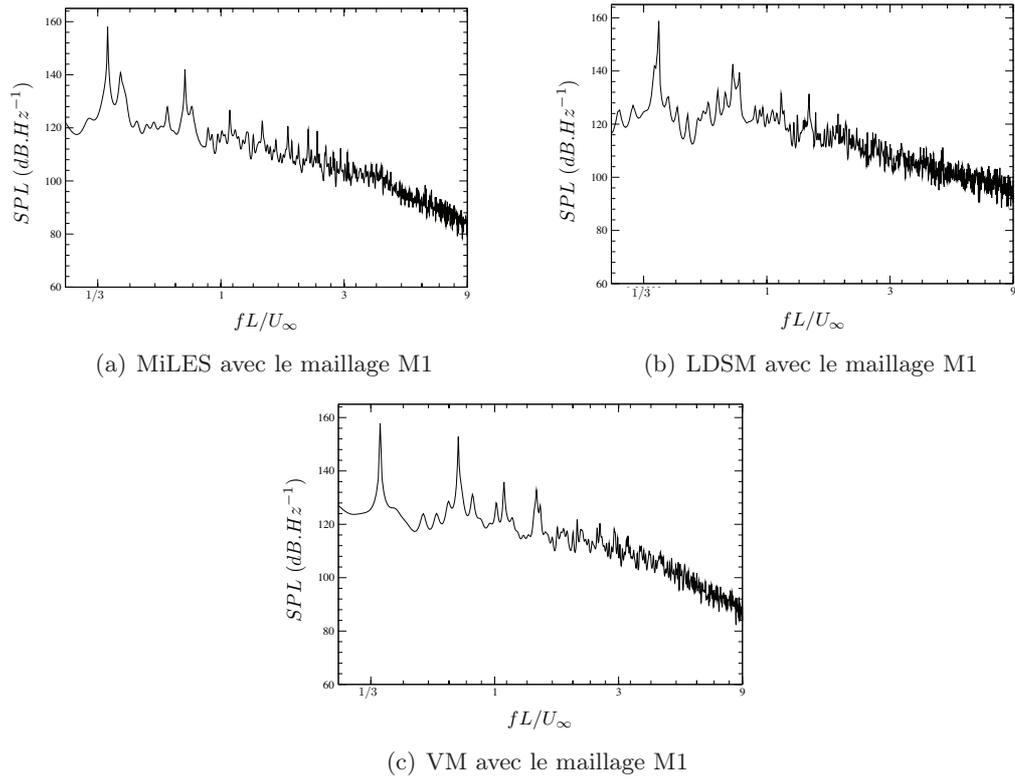
**TABLE 6.2:** Caractéristiques des modes de Rossiter ( $n$ ) et de leurs  $i$ èmes harmoniques ( $(i + 1) \times n$ ). Les nombres de Strouhal théoriques sont évalués avec la formule de Rossiter [320]. Les valeurs expérimentales sont reportées d'après l'analyse statistique de Larchevêque et al. [215] avec la valeur la plus probable, encadrée par les limites inférieures et supérieures à 99% des fonctions de densité de probabilité. La colonne % recense la probabilité d'apparition du mode ou de l'harmonique, évaluée à partir de la base de données expérimentales.

La formule de Rossiter, présentée dans la section 5.1.6.1, est également utilisée pour évaluer les valeurs théoriques. Pour chaque mode de Rossiter,  $n$ , et son  $i$ ème harmonique, notée  $(i + 1) \times n$ , le nombre de Strouhal théorique est évalué à l'aide de la relation :

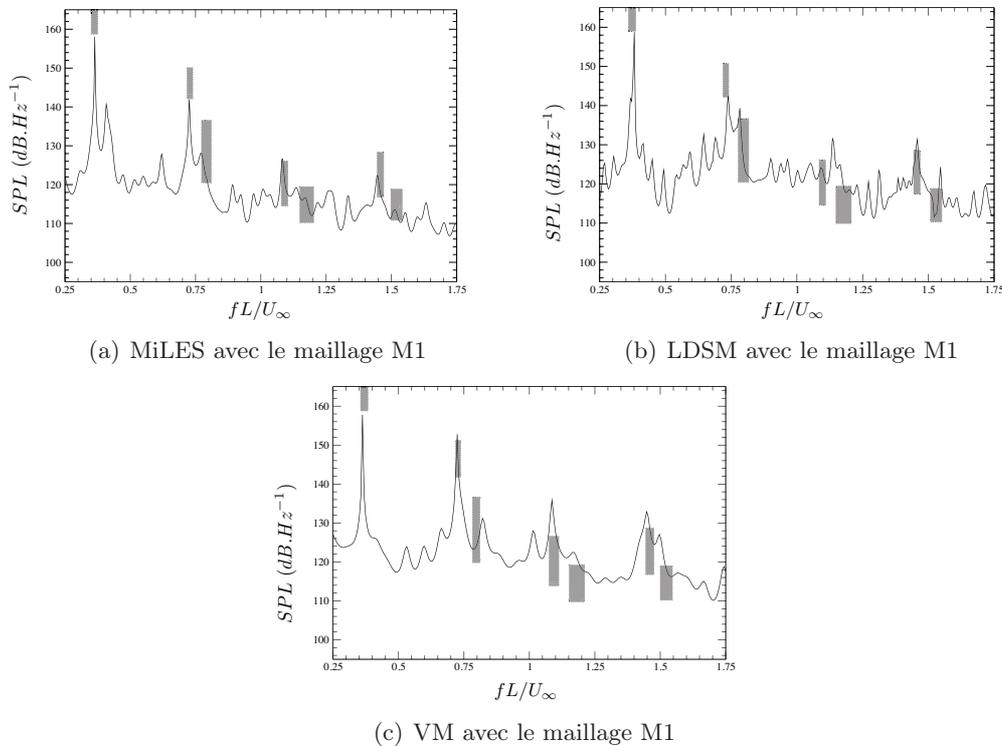
$$St = \frac{n - \gamma}{M + \kappa^{-1}} \quad (6.15)$$

avec  $\gamma$  et  $\kappa$  deux paramètres à spécifier qui évoluent suivant la nature de l'écoulement et le rapport de forme  $L/D$ . Pour la présente étude, les valeurs  $\kappa = 0,57$  et  $\gamma = 0,098$  sont retenues, conformément à l'étude de Larchevêque *et al.* [217].

Les spectres de puissance comportent des raies bien distinctes, superposées à un spectre continu. Les principales raies spectrales de l'écoulement sont reproduites. Les différences observables entre les différents spectres numériques reposent sur l'approche de modélisation de sous-maille utilisée. Le modèle Smagorinsky Lagrangien semble ainsi introduire un niveau de bruit plus important, puisque son spectre de puissance présente des raies parasites. Ces erreurs peuvent être associées au filtrage explicite anisotrope ou au suivi lagrangien le long des particules fluides, réalisés dans les approches dynamiques. En effet, des erreurs de commutation apparaissent à proximité des frontières (où le volume de filtrage est dégradé) et dans le cas de cellules non uniformes (opérations de raffinement). Ces erreurs peuvent également résulter d'une dégradation de la procédure de suivi lagrangien. En effet, à proximité des frontières ouvertes et fermées, l'opération de moyennage le long des particules fluides est modifiée. Les erreurs introduites pour déterminer de manière dynamique la constante de sous-maille pourrait donc expliquer les écarts observés pour le modèle LDSM. Le modèle reproduisant au mieux le contenu spectral semble être l'approche MiLES. Ce résultat est également avancé par Larchevêque *et al.* [215]. Enfin, pour le modèle de Vreman, bien que le premier mode et sa première harmonique, ainsi que le second mode soient correctement prédits, les autres harmoniques des premiers modes de Rossiter sont surévaluées.



**FIGURE 6.19:** Spectres de puissance acoustique issus d'un capteur central amont pour trois approches de modélisation de sous-maille.



**FIGURE 6.20:** Spectres de puissance acoustique issus d'un capteur central amont pour trois approches de modélisation de sous-maille. Les valeurs expérimentales sont reportées dans les boîtes grises et sont délimitées par les limites inférieures et supérieures à 99% des fonctions de densité de probabilité [215].

### 6.6 Comparaison murs 3D-NSCBC vs IBM

Pour évaluer la précision des reconstructions des parois de la cavité avec la méthode de la cellule fantôme, les simulations réalisées précédemment sont reconduites sur des maillages conformes avec un traitement de type 3D-NSCBC pour les murs et une approche multi-blocs. Les différents blocs sont définis selon les différents axes du repère cartésien. Nous utilisons des marqueurs pour identifier les faces, arêtes et coins de la cavité et leur affecter les conditions limites appropriées. En effet, suivant la nature du volume de contrôle, une, deux ou trois directions sont exprimées sous la forme d'ondes caractéristiques. Le traitement aux limites des murs de cavité est donc différent suivant la configuration. Cette stratégie évite l'apparition d'instabilités numériques comme celles observées par Gloerfelt [139] au cours de son étude 2D, en différences finies, de cette cavité.

L'objectif de cette étude est de disculper la frontière immergée des différences observées entre les données numériques et les mesures expérimentales. En effet, la boucle de rétroaction aéro-acoustique étant générée par la réflexion d'ondes sur la paroi aval, toute réflexion parasite ou dégradée pourrait altérer le couplage dynamique.

La figure 6.21 expose ainsi les propriétés statistiques de l'écoulement de cavité lors d'une discrétisation multi-bloc avec une description des conditions limites de type 3D-NSCBC. Cette étude est réalisée avec une précision similaire à celle du maillage M1. Trois approches de sous-maille sont évaluées sur ce nouveau maillage : l'approche implicite (MiLES), le modèle Smagorinsky dynamique lagrangien (LDSM) et le modèle de Vreman (VM) pour valider la procédure de filtrage pour les cellules fluides contiguës à la frontière.

Les propriétés statistiques sont similaires à celle obtenues avec l'approche de la frontière immergée. Ainsi, le traitement des murs ne semble pas dégrader les champs statistiques. Les interpolations polynomiales ne semblent pas introduire de perturbations. Les conditions aux limites de type Neumann et Dirichlet préservent les propriétés de réflexion des murs.

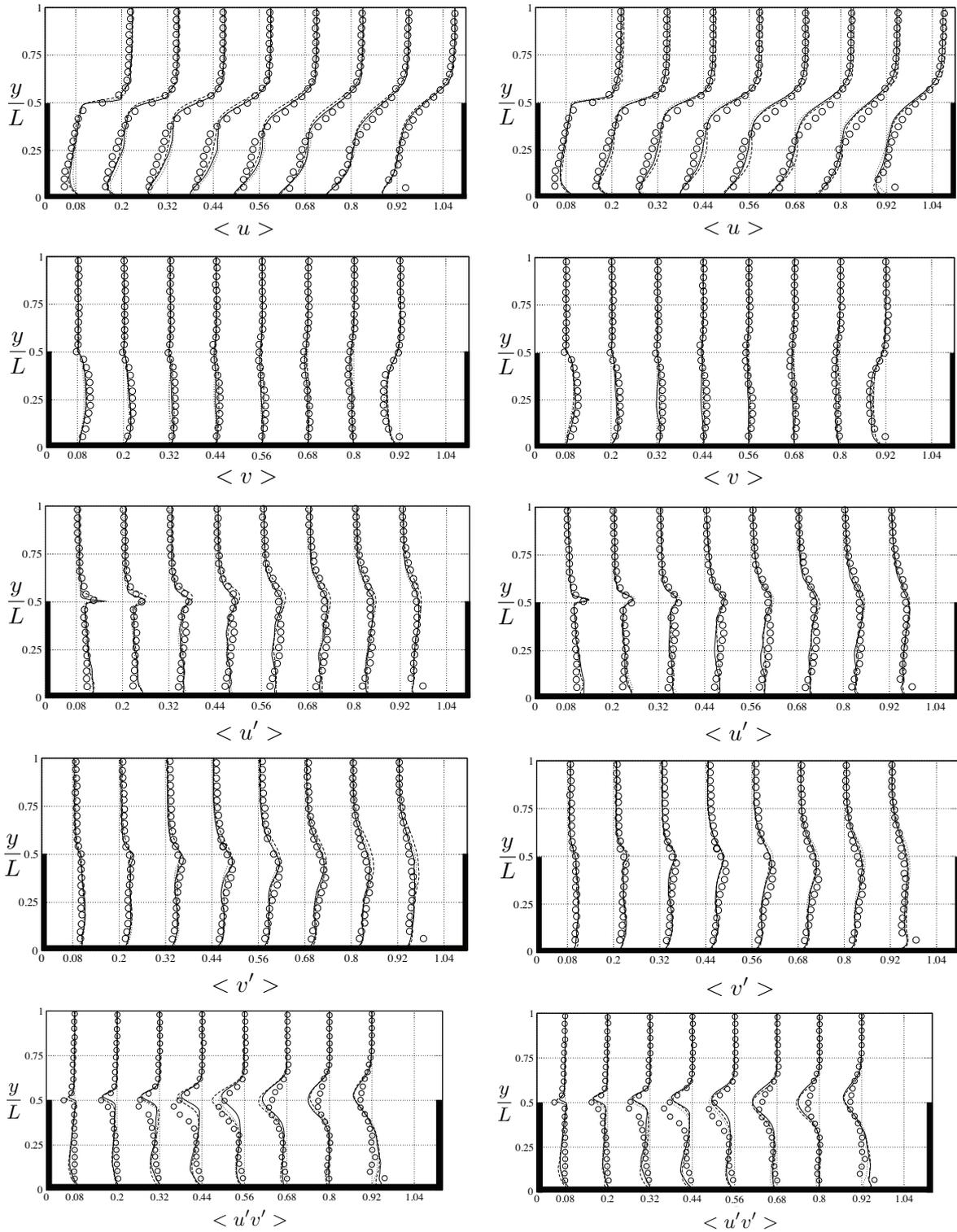
### 6.7 Impact de la résolution du maillage

Les résultats obtenus avec le maillage "moyen" montrent des différences sur les moments statistiques des composantes de vitesse. Pour justifier ces différences, nous pouvons avancer deux explications :

1. La résolution du premier maillage n'est pas suffisante pour capturer la bonne épaisseur de la couche limite incidente. Thornber et Drikakis [374] ont ainsi démontré la sensibilité des profils de vitesse au profil de la couche limite incidente pour une cavité profonde.
2. Le principal vecteur dissipatif étant le schéma de dissipation artificielle, il se pourrait que le terme de second ordre impacte fortement l'écoulement. En effet, cet opérateur est particulièrement actif au voisinage de discontinuités ou sauts de masse volumique et d'ondes de pression. Comme le soulignent Ducros *et al.* [103], la dissipation artificielle de second ordre peut affecter l'écoulement turbulent au voisinage de la discontinuité lorsque les constantes du schéma artificiel sont mal ajustées.

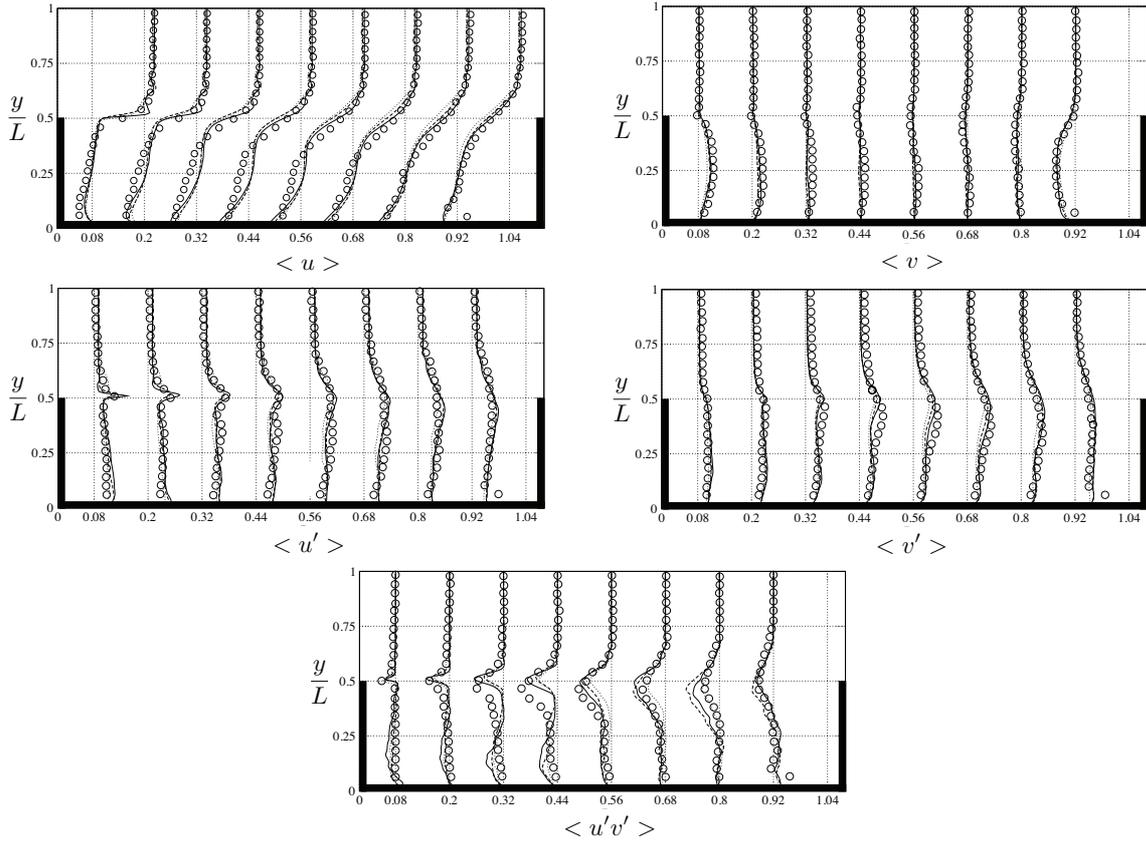
Pour discriminer une éventuelle sous-résolution de la couche de mélange, nous avons analysé cet écoulement de cavité sur un maillage raffiné comportant 30 millions de mailles. La figure 6.22 expose les propriétés statistiques de l'écoulement de cavité. Les résultats sont légèrement en meilleur accord avec l'expérience. Si l'on se focalise sur le profil de la vitesse moyenne longitudinale, on constate que l'épaisseur de la couche de mélange est mieux capturée, ce qui induit une meilleure description du centre de la couche de mélange et donc de la dynamique tourbillonnaire.

Les figures 6.23 et 6.24 confrontent les densités spectrales acoustiques pour les maillages M1 et M2 avec l'approche MiLES. Les différentes raies du spectre acoustique sont correctement reproduites.



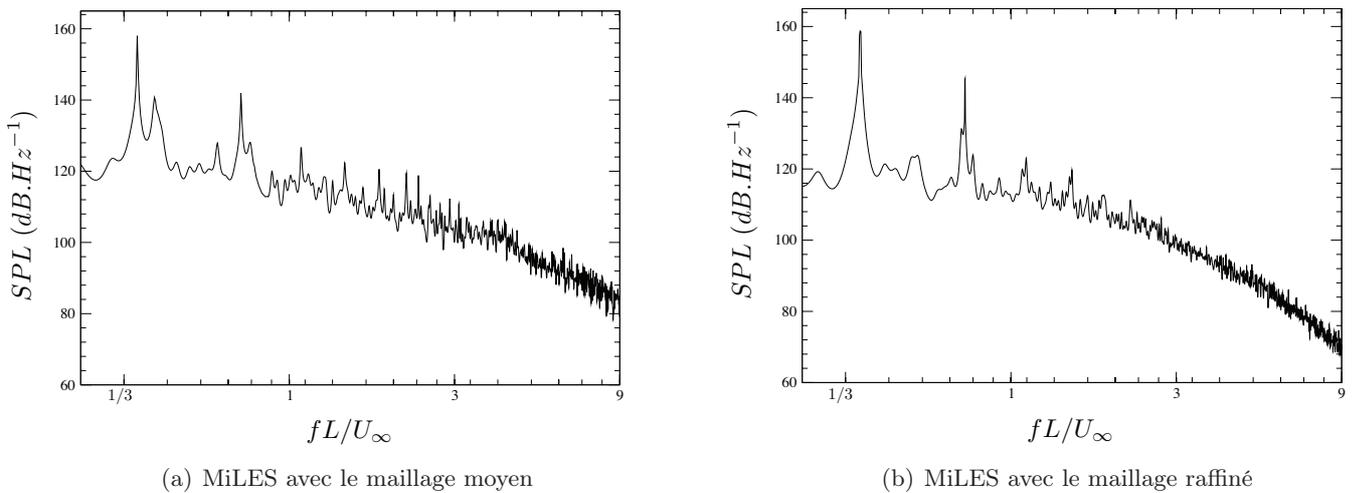
**FIGURE 6.21:** Statistiques des composantes de vitesse dans le plan médian avec une description 3D-NSCBC : vitesse moyenne longitudinale, vitesse moyenne verticale, fluctuations des vitesses longitudinale et verticale avec : — LDSM, - - - MiLES,  $\cdots$  VM et  $\circ$  données expérimentales. Gauche : avec une approche multi-blocs. Droite : avec une méthode de frontières immergées.

## CHAPITRE 6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AFFLEURANT UNE CAVITÉ TRANSSONIQUE

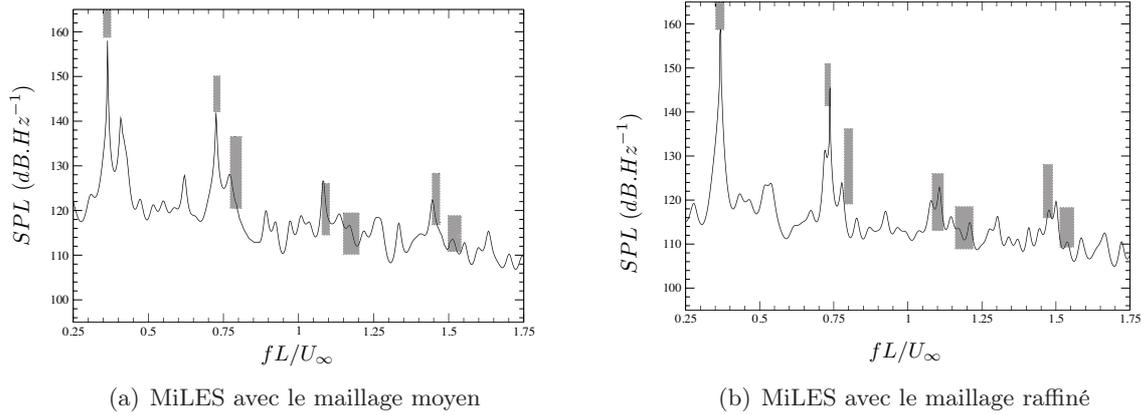


**FIGURE 6.22:** Statistiques des composantes de vitesse dans le plan médian avec le maillage raffiné : vitesse moyenne longitudinale, vitesse moyenne verticale, fluctuations des vitesses longitudinale et verticale avec : — LDSM, - - - MiLES,  $\cdots$  VM et  $\circ$  données expérimentales.

Malgré l'utilisation d'un maillage plus fin, il est difficile de comparer les deux niveaux de raffinement. En effet, les spectres sont relativement similaires.



**FIGURE 6.23:** Spectres de puissance acoustique issus d'un capteur central amont.



**FIGURE 6.24:** Spectres de puissance acoustique issus d'un capteur central amont. Les valeurs expérimentales sont reportées dans les boîtes grises et sont délimitées par les limites inférieures et supérieures à 99% des fonctions de densité de probabilité [215].

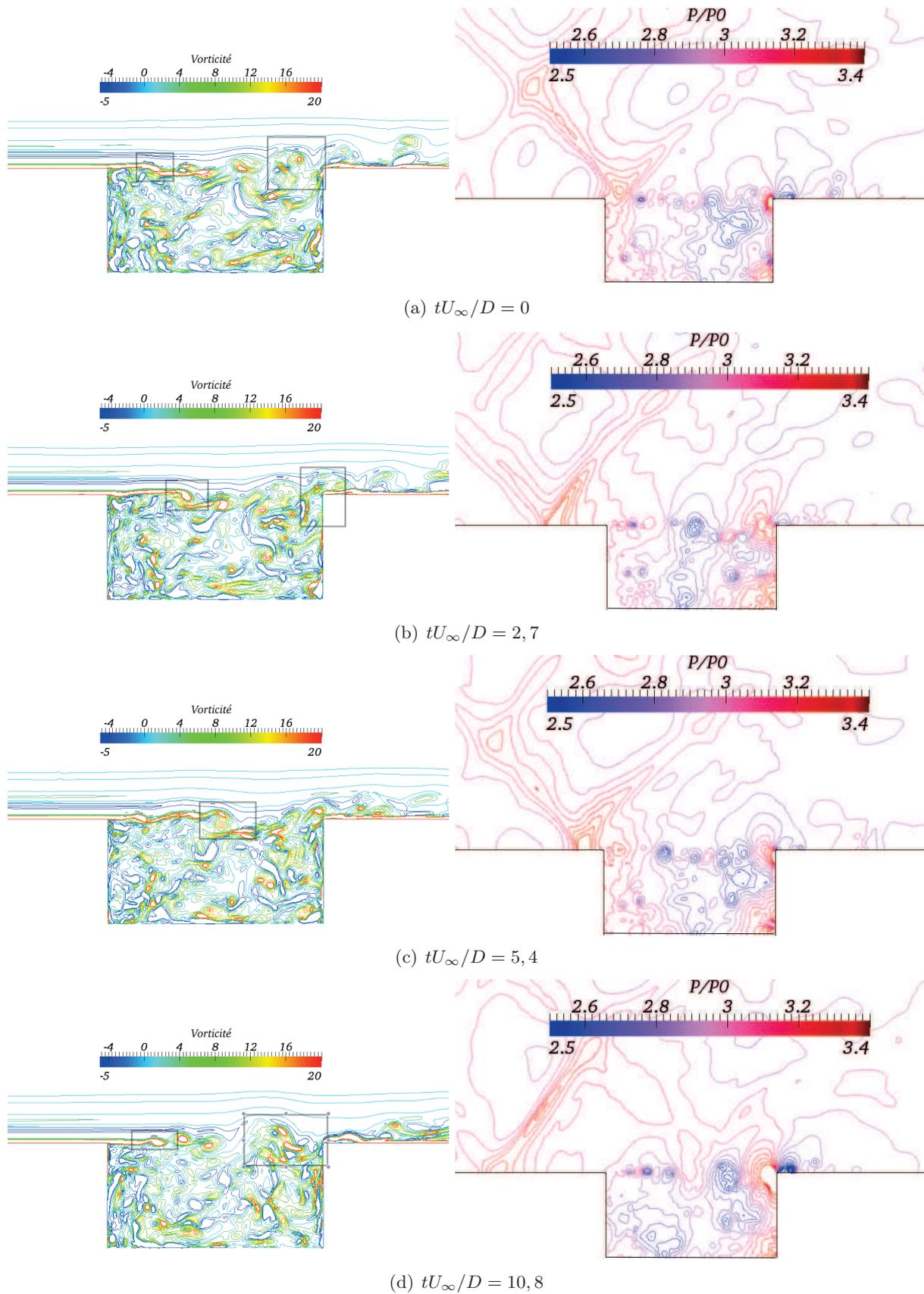
## 6.8 Analyse de l'écoulement

La vorticité, exprim e sous la forme  $\boldsymbol{w} = 1/2\text{rot}(\boldsymbol{u})$ , est un outil permettant de déceler les structures cohérentes. Ainsi, la figure 6.25 représente la composante transversale du rotationnel ( $\text{rot}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{x}_3$ ) pour quatre instants successifs durant un cycle d'oscillation. Ces cartes instantanées sont r alis es dès que les oscillations sont bien établies. En particulier, les évolutions de deux structures tourbillonnaires dans la couche cisailée sont repr sent es sur les figures de la vorticité transversale. Sur la figure 6.25(a), une structure tourbillonnaire vient de se former au niveau du point de séparation amont et un deuxième tourbillon est convecté dans la couche cisailée. En (b), cette deuxième structure atteint le bord aval et se scinde en deux parties. Alors que la première fraction tourbillonnaire est  ject e dans la couche limite qui se rattache après le bord aval et augmente ainsi son épaisseur, la seconde fraction pénètre dans la cavité. En (c) le premier tourbillon est amplifié au cours de sa convection dans la couche cisailée. Sur la figure 6.25(d), il parvient au bord aval et son impact contre cette paroi va initier un nouveau cycle.

Les cartes de la pression instantan e associ es aux iso-contours de la vorticité transversale révèlent des zones de basse pression dans la couche cisailée associ es aux structures tourbillonnaires. Des régions de haute pression s'intercalent entre ces différents tourbillons. Sur la figure 6.25(a), la région de faible pression aux abords du coin amont indique la formation d'une nouvelle structure rotationnelle. L'impact d'une structure contre la paroi aval génère une zone de haute pression qui va initier un nouveau cycle (figure 6.25(d)). Ainsi, en (a), l'onde de pression se situe au niveau du coin amont et remonte l'écoulement en (b) et (c).

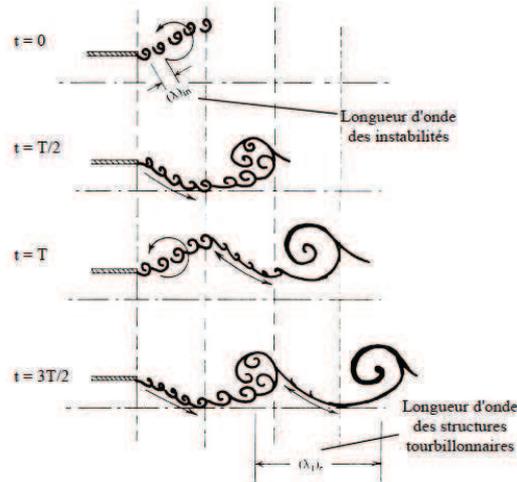
La zone initiale de la couche de mélange, visualis e sur la figure 6.25(d) peut être décrite avec le mécanisme d'interaction collective de Ho et Huang [170]. Ce mécanisme est schématisé sur la figure 6.26 et correspond à un processus de création de structures tourbillonnaires par fusion collective de petites structures. Ils représentent ainsi la couche de mélange comme une nappe de vorticité où les structures sont espac es d'une distance égale à la longueur d'onde des instabilités de la couche de mélange. Les structures tourbillonnaires sont d plac es verticalement et s'enroulent par induction mutuelle pour former une unique structure tourbillonnaire. Au temps  $t = T/2$  où  $T$  représente la période du forçage, le changement d'orientation du déplacement latéral conduit à un étirement de la nappe de vorticité et empêche ainsi la fusion des structures. Ce mécanisme appar it sous deux conditions : un forçage caractérisé par une fréquence inférieure aux fréquences d'instabilités de la couche de mélange et dont l'amplitude est importante.

## CHAPITRE 6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT AFFLEURANT UNE CAVITÉ TRANSSONIQUE



**FIGURE 6.25:** Isocontours de la composante transversale du rotationnel (gauche) et de la pression (à droite) pour quatre temps successifs.

Au cours de leur étude de l'impact d'un jet subsonique sur une plaque, Ho et Nosseir [169] montrent que le mécanisme d'auto-asservissement peut être représenté avec le processus d'interaction collective. Ainsi, la figure 6.25(d) souligne la formation de plusieurs petites structures tourbillonnaires qui s'échappent du bord de fuite.



**FIGURE 6.26:** Schéma de l'interaction collective (extrait de Ho et Nosseir [169]).

Gloerfelt [139] et Forestier [122] expliquent la présence d'un double pic sur les profils de la fluctuation de la vitesse longitudinale expérimentale en l'assimilant à un tourbillon de Stuart [355]. Ce second pic est également souligné par Oster *et al.* [275] au cours de leur étude de couches de mélange forcées et par Ziada et Rockwell [417, 418] pour l'interaction d'une couche cisailée et d'un coin. Le tourbillon de Stuart est défini par les relations suivantes [417, 418] :

$$U(x, y) = U_c + \frac{\sinh(2\pi y/\lambda)}{\cosh(2\pi y/\lambda) + \alpha \cos[2\pi(x - U_c t)/\lambda]} \quad (6.16)$$

$$V(x, y) = \frac{\alpha \sin[2\pi(x - U_c t)/\lambda]}{\cosh(2\pi y/\lambda) + \alpha \cos[2\pi(x - U_c t)/\lambda]} \quad (6.17)$$

avec  $U_c$  la vitesse de convection ( $U_c = 0,5U_\infty$ ),  $\lambda$  la taille caractéristique ( $\lambda = D$ ) et  $\alpha$  le coefficient d'anisotropie ( $\alpha = 0,7$ ). Comme le suggère Gloerfelt [139], les moments de second ordre associés aux tourbillons de Stuart sont comparés aux statistiques obtenues pour la cavité transsonique. Le calcul d'une allée de tourbillons de Stuart avec la relation 6.17 fournit le champ de vorticité transverse illustré sur la figure 6.27. Ce champ est obtenu sur un domaine de calcul comportant  $200 \times 200 \times 5$  noeuds répartis de manière uniforme sur un volume de  $5D \times 2D \times 0,5D$ .

Les fluctuations moyennes longitudinales et verticales associées au tourbillon de Stuart sont déterminées et reportées avec les fluctuations obtenues numériquement sur la figure 6.28. La seconde bosse sur le profil des fluctuations longitudinales, que la simulation ne parvient pas à reproduire, se compare bien à un tourbillon de Stuart. Bien que la partie supérieure de la couche cisailée soit proche de la prédiction du modèle de Stuart, au sein de la cavité les écarts s'accroissent. Ils sont par ailleurs plus importants à mesure que l'on se rapproche du bord aval où les ondes acoustiques rayonnées génèrent d'importantes fluctuations.

La présence de pics secondaires au niveau de la paroi inférieure pour les fluctuations des vitesses longitudinales et verticales peut être représentée par un écoulement de type jet plan le long de la paroi verticale et sur une partie de la paroi inférieure. Cet écoulement est étudié par Lin et Rockwell [235]. Lors de l'impact d'un jet plan contre une paroi verticale (en l'occurrence la paroi aval), les structures tourbillonnaires sont scindées en deux parties : une première évacuée en aval de la cavité

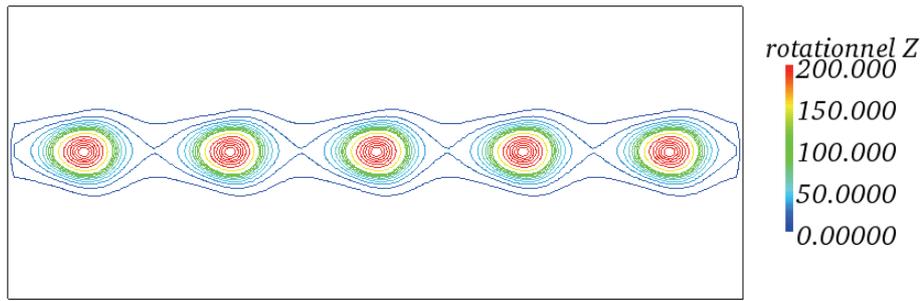


FIGURE 6.27: Iso-contours de la composante transversale du rotationnel.

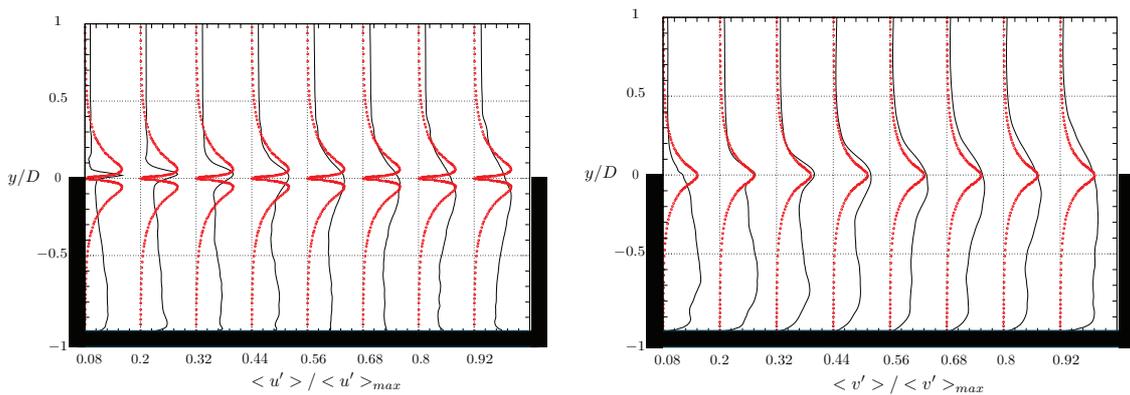


FIGURE 6.28: Profils des fluctuations de la vitesse longitudinale et verticale pour plusieurs positions le long de l'axe  $x$  obtenus au cours des simulations de la cavité transsonique (lignes) et associés à un tourbillon de Stuart (symboles).

et la seconde qui est aspirée dans la cavité et qui induit une large zone de recirculation. Ainsi, la présence d'un pic en proche paroi apparaît rapidement sur les profils de la fluctuation de la vitesse longitudinale. Cette large zone de recirculation liée à l'impact contre la paroi aval est illustrée sur la figure 6.29. Le bord aval de la cavité est donc le siège d'importants phénomènes instationnaires associés à la présence d'importants gradients verticaux suite au battement de la couche de mélange.

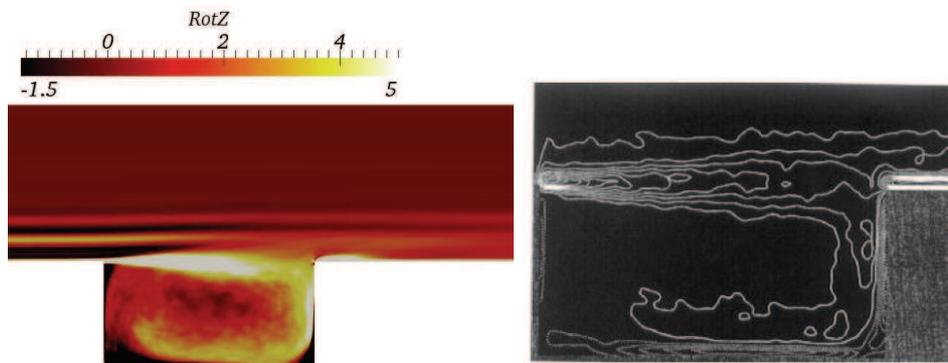


FIGURE 6.29: Visualisation de l'interaction de l'écoulement avec la paroi aval. A gauche : composante transversale de la vorticité moyenne. A droite : isocontours de la vorticité moyenne obtenus par imagerie de particules [235].

L'étude des structures cohérentes avec le critère  $Q$  et le maillage M2 souligne l'existence de deux types de structures : les structures tourbillonnaires transversales et les structures longitudinales (*ribs*). Le critère  $Q$  correspond au deuxième invariant du tenseur des déformations et est défini par la relation :

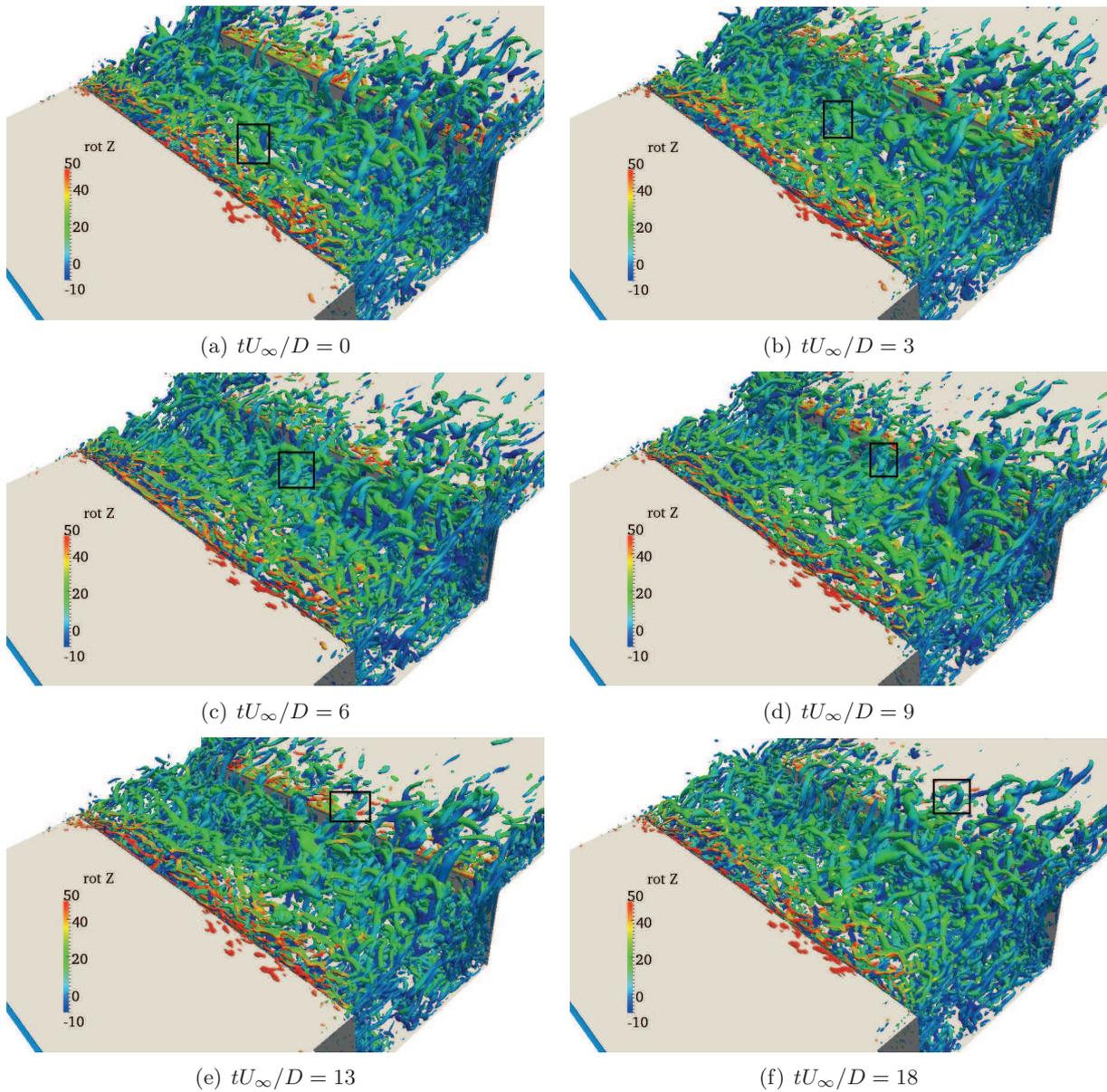
$$Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}) \quad (6.18)$$

Alors que les valeurs positives soulignent les structures pour lesquelles la rotation est prépondérante, les valeurs négatives sont associées à un effet d'étirement des structures.

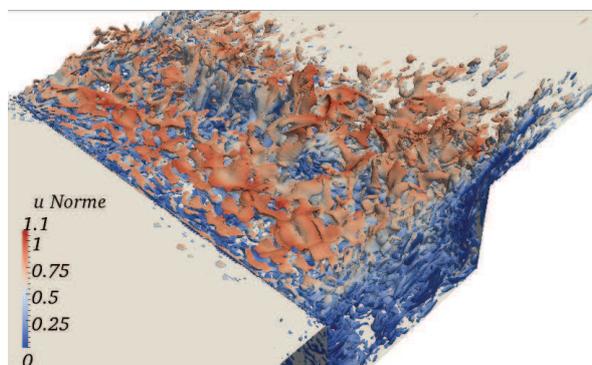
L'iso-surface du critère  $Q$ , illustrée sur la figure 6.30, pour six instants successifs, témoigne de l'évolution des structures dans l'écoulement affleurant la cavité. Au niveau du bord amont, on assiste à la formation de petites structures transversales bidimensionnelles (sur la figure 6.30 (a)). Au cours du temps, ces structures transversales sont convectées au sein de la couche cisillée et voient leur surface augmentée. La cellule repérée sur la figure 6.30 (b) souligne ainsi une structure de taille plus grande avec une énergie plus importante. En effet, le critère  $Q$  étant exprimé en  $s^{-2}$  ou  $H z^2$ , une structure plus grande est associée à une fréquence caractéristique élevée et donc à une énergie importante. En (b), la structure tourbillonnaire est située dans la région du point selle qui consiste en une région de fort étirement. Ainsi, le contour du critère  $Q$  négatif de la figure 6.31 témoigne des zones d'étirement. Cet étirement continu des structures tourbillonnaires transversales entraîne la production de structures longitudinales (ou *ribbs*). L'existence de structures longitudinales dans la région du point selle est également soulignée, dans la littérature, pour les études de couches de mélange (Hussain et Hayakawa, [181], Leboeuf et Mehta [220]). La formation de la structure longitudinale est ainsi repérée sur les figures 6.30 (c) et (d). Ainsi de nombreuses structures longitudinales sont présentes en amont du bord aval. Lors de l'impact des structures tourbillonnaires sur le bord aval (figure 6.30 (e)), une fraction est éjectée de la cavité pendant que la fraction restante est aspirée dans la cavité pour alimenter la zone de recirculation. Au niveau de la couche limite recollée en aval de la cavité, on assiste à la formation de nouvelles structures (f).

## 6.9 Conclusion

L'écoulement affleurant une cavité transsonique, pour laquelle Forestier *et al.* [122] fournissent une base de données complète, a été étudié. Les résultats ont été confrontés aux mesures expérimentales et sont en très bon accord. Le processus de rétroaction aéroacoustique, qui repose sur l'interaction des instabilités de la couche de mélange avec le coin aval et sur l'émission d'ondes acoustiques se propageant vers l'amont, est reproduit. Nous avons démontré que les reconstructions des murs avec la méthode de la cellule fantôme ne dégradent pas la dynamique de l'écoulement. Le couplage LES/IBM est donc un très bon candidat à la description d'écoulements compressibles complexes.



**FIGURE 6.30:** Iso-surface du critère  $Q$  ( $Q = 0.35(U_\infty/D)^2$ ) coloriée par la composante transversale du rotationnel pour six temps successifs avec le maillage M2.



**FIGURE 6.31:** Iso-surface d'un critère  $Q$  ( $Q = -0.35(U_\infty/D)^2$ ) coloriée par la norme de la vitesse et témoignant des zones d'étirement (maillage M2).



Deuxième partie

Etude d'une chambre de combustion de  
type TVC



# Chapitre 7

## Les chambres de combustion de type TVC : Principe et état de l'art

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>223</b>
<b>7.2</b>	<b>Stabilité de flamme . . . . .</b>	<b>224</b>
<b>7.3</b>	<b>Principe du TVC . . . . .</b>	<b>224</b>
<b>7.4</b>	<b>Aperçu historique du TVC . . . . .</b>	<b>226</b>
7.4.1	Chambres de l'Air Force . . . . .	226
7.4.1.1	Première Génération . . . . .	226
7.4.1.2	Seconde Génération . . . . .	228
7.4.1.3	Troisième Génération . . . . .	228
7.4.2	Chambre de General Electric . . . . .	229
7.4.3	Autres concepts . . . . .	229
7.4.3.1	Concept proposé par le département énergie et technologie du laboratoire national américain . . . . .	230
7.4.3.2	Chambre de Ramgen Power Systems . . . . .	230
7.4.3.3	Chambre de ALM Turbines . . . . .	231
7.4.3.4	Chambre de l'US Navy . . . . .	231
7.4.3.5	Le concept du TTVC ( <i>Tangential Trapped Vortex Combustor</i> ) . . . . .	231
7.4.3.6	Le concept du <i>High G-Load Trapped Vortex Combustor</i> . . . . .	232
<b>7.5</b>	<b>L'Ultra Compact Combustor . . . . .</b>	<b>233</b>
7.5.1	Etudes des écoulements de type TVC . . . . .	233
7.5.2	Précédentes simulations d'un écoulement non réactif de type TVC . . . . .	233
7.5.3	Précédentes simulations d'un écoulement réactif de type TVC . . . . .	234
7.5.4	Conclusion . . . . .	237
<b>7.6</b>	<b>Description de la chambre du projet TECC au CORIA . . . . .</b>	<b>237</b>
7.6.1	Présentation générale . . . . .	237
7.6.2	Mesures réalisées . . . . .	239

---

### 7.1 Introduction

La variété des applications impliquant l'interaction d'une cavité et d'un écoulement a motivé de nombreuses études expérimentales, numériques et théoriques. La plupart de ces études portent sur l'analyse de l'écoulement non réactif affleurant une cavité qui est caractérisé par de larges fluctuations de pression, de masse volumique ou de vitesse, et en particulier sur les mécanismes de génération de bruit par une cavité afin de développer des moyens de contrôles pour différentes configurations

(soutes à bombes des avions militaires, trains d'atterrissage,...). Le champ d'application s'étend également au refroidissement et à la réduction de la traînée sur des projectiles, pour des réacteurs supersoniques (Scramjet pour *Supersonic Combustion Ramjet*) et dans le cadre de l'incinération des déchets. La variété des applications des cavités a ensuite motivé l'étude de la stabilisation de flamme par une cavité en régime subsonique (plus couramment nommé TV pour *Trapped Vortex*).

Ce chapitre a pour objectif la présentation du concept d'une chambre de combustion disposant d'une cavité (de type TV). Nous aborderons donc la notion de stabilité de flamme ainsi que le principe d'une chambre de type TVC (TVC pour *Trapped Vortex Combustor*). Ce dispositif vise à stabiliser la flamme au moyen de tourbillons bloqués dans une cavité. Ces tourbillons stationnaires limitant l'entraînement de l'air principal dans la cavité, l'injection directe de combustible et d'air est nécessaire dans la cavité. Différentes générations de chambres ont ainsi vu le jour et font l'objet de la troisième partie. Dans un quatrième temps, nous ferons une revue des études numériques existantes. Enfin, la dernière partie présente le dispositif expérimental à partir duquel nous allons réaliser nos études numériques.

## 7.2 Stabilité de flamme

La stabilisation des flammes est un sujet très étudié, présent dans de nombreuses applications (brûleurs domestiques, fours industriels, turbines à gaz ou encore moteur fusée,...). Cette problématique concerne aussi bien les flammes de prémélange que de diffusion ou de prémélange partiel. Une flamme est qualifiée de stable lorsque, indépendamment des écoulements fluides alimentant la combustion, la zone de réaction est fixe dans l'espace. Cette stabilisation dépendant à la fois de la qualité du mélange et de la vitesse des réactifs, la majorité des dispositifs industriels opte pour une modification de la géométrie du brûleur ou pour un dispositif spécial visant à modifier l'écoulement. Ainsi, les différentes solutions employées passent par l'ajout d'une flamme pilote, l'utilisation d'un obstacle (corps solides : *bluff bodies*, marche arrière : *rearward facing step...*) ou la mise en rotation du fluide (*swirl*). Ces deux dernières induisent des zones de recirculation où le temps de séjour plus important des gaz permet à la flamme de s'accrocher. Ainsi, dans les turbines à gaz, cette zone de recirculation est générée par un swirl localisé autour de l'injection de combustible. Cependant, pour garantir de faibles émissions de  $NO_x$ , ce type de chambre de combustion fonctionne en régime pauvre, parfois à l'origine d'instabilités de combustion. Ces instabilités se manifestent par des oscillations des différents paramètres de l'écoulement pouvant perturber le fonctionnement du système. Une classification de ces instabilités de combustion est disponible dans la thèse d'Etat de Poinsot [294]. Le contrôle de ces instabilités est un défi majeur pour le développement de chambres de combustion bénéficiant d'une bonne performance.

L'étude, dans l'industrie aéronautique, des géométries TVC est donc entreprise afin d'améliorer les performances des turbines à gaz tout en préservant un faible taux d'émission de polluants. Cette technologie est plus stable que les chambres de combustion swirlées et, en particulier, aux abords des zones d'extinction par excès d'air (LBO pour *Lean Blowout*) rencontrées lors des opérations à haute altitude. En effet, dans une chambre TV, la zone de recirculation reste dans la cavité puisque le tourbillon s'y trouve piégé. Cette zone est moins sensible aux variations de l'écoulement principal dues aux conditions de fonctionnement du moteur ou suite à des distorsions du fluide à l'entrée de la chambre [357].

## 7.3 Principe du TVC

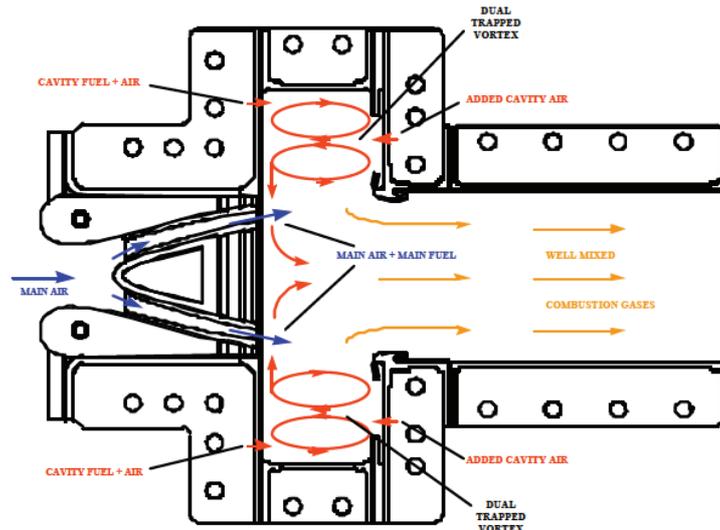
Les nombreuses études relatives à la dynamique de l'écoulement affleurant une cavité sont dédiées à la réduction de la traînée et de la distribution de pression. En effet, le lâcher tourbillonnaire derrière un corps conduit à un coefficient de traînée important. Au cours de son étude de l'écoulement non réactif entre deux disques axisymétriques, Mair [246] observe une réduction du coefficient de traînée

## CHAPITRE 7. LES CHAMBRES DE COMBUSTION DE TYPE TVC : PRINCIPE ET ÉTAT DE L'ART

avec la longueur de la cavité et note l'existence d'une distance de séparation optimale pour une traînée minimale. Ainsi, le piégeage des tourbillons entre deux disques diminuerait la traînée engendrée par la présence du premier corps. Cette observation est confortée par les travaux expérimentaux de Roshko et Koenig [319] et de Little et Whipkey [236]. Hendricks *et al.* [166] associent la réduction de traînée observée pour une distance optimale à la présence d'une zone de recirculation stable dans la cavité qui se manifeste par la présence de tourbillons piégés dans la cavité. L'analyse expérimentale de la structure de l'écoulement fluide pour différents coefficients de traînée (Gharib et Roshko [129]) relie l'existence d'une dynamique tourbillonnaire stable à la stagnation de la couche cisailée au niveau du coin aval. Cette condition d'existence d'un tourbillon stable pour la réduction de la traînée est également reportée par Little et Whipkey [236]. Néanmoins, bien que la zone tourbillonnaire soit bloquée dans la cavité, cette réduction de la traînée n'est pas toujours assurée puisque, pour une longueur de cavité légèrement supérieure à la distance optimale, on assiste à une augmentation importante du coefficient de traînée. La stabilité de l'écoulement implique donc un paramètre autre que la longueur de cavité, il s'agit de l'effet d'entraînement de l'écoulement principal dans la cavité souligné par ces différents auteurs.

La nature des structures tourbillonnaires, présentes dans une cavité, ainsi que leurs divers avantages aérodynamiques ont intrigué durant de nombreuses années nombre d'aérodynamiciens. La projection des divers avantages liés à la présence d'une cavité sur la dynamique de flamme se voit proposée pour la première fois par Hsu *et al.* [179] qui introduisent alors le concept de TV (*Trapped Vortex*). Ce concept se base sur la capture d'un tourbillon dans une cavité pour stabiliser la flamme. En effet, alors que l'écoulement derrière un premier corps se sépare et donne lieu à des instabilités de couches de cisaillement qui sont, dans la plupart des cas, les mécanismes primaires conduisant à l'extinction, les tourbillons se retrouvent piégés entre les deux corps constituant la cavité.

Les premiers résultats, datés de 1995 [179], visent à démontrer les avantages du TVC, à savoir, la puissance disponible sur une large gamme de stabilité, des émissions polluantes minimales ainsi qu'une réduction de la chute de pression au travers de la chambre. La technologie TV assure également une relative simplicité du système d'injection, des propriétés d'allumage intéressantes, une chambre de moindre poids global et réduit ainsi les coûts de production.



**FIGURE 7.1:** Schéma du principe d'un *Trapped Vortex Combustor* [342] (pour une configuration avec une double section de passage pour l'écoulement principal et double vortex dans les cavités).

Le principe du TVC est synthétisé sur la figure 7.1. Cette stratégie assure la stabilisation de la flamme turbulente par les deux cavités supérieure et inférieure, sièges de zones de recirculation où

sont mélangés les produits de combustion et les réactifs et qualifiées de "zones pilotes". Les réactifs sont introduits au moyen de deux injecteurs : le premier, au niveau de la paroi amont, injecte un prémélange alors que le second, en aval, apporte l'air nécessaire à la combustion. En effet, les études menées par Katta et Roquemore [186, 187] montrent que seule une faible fraction de l'écoulement principal pénètre dans la cavité (à raison de  $\sim 3\%$  de la masse totale tourbillonnaire). L'injection directe des réactifs dans la cavité assure ainsi le mélange turbulent des réactifs et compense le manque de comburant liée au faible échange entre l'écoulement principal et la zone tourbillonnaire. Dépourvue de l'injection directe de comburant dans la cavité, la chambre TV n'est plus adaptée. Les injecteurs contribuent également à la stabilisation de la dynamique de la cavité et offrent l'avantage d'une large gamme de conditions de fonctionnement (différents débits combustible-comburant). Sturgess et Hsu [357] tentent de quantifier le débit d'air nécessaire dans la cavité et recommandent une injection supérieure à 5 % de l'air principal (10% étant le ratio optimal). Ils notent qu'au-delà de 15%, l'injecteur d'air n'améliore plus la stabilisation de l'écoulement.

La flamme pilote dans la cavité obtenue par l'injection d'air et de combustible directement dans la cavité assure ainsi une zone de recirculation stable. La stabilité de la flamme pilote est indépendante des conditions de l'écoulement principal. La cavité communique avec l'écoulement principal au travers d'accroches flammes radiaux situés entre les deux sections de passage de l'écoulement principal sur la figure 7.1 . Les gaz brûlés sont ainsi transportés dans la zone de sillage des accroches flammes ce qui améliore le mélange entre les gaz frais et brûlés. Ce dispositif assure donc une combustion rapide et efficace, même lors de conditions critiques où l'écoulement pauvre en combustible arrive à grande vitesse. Par ailleurs, la présence d'accroches flammes (barreaux, le plus souvent en amont de la cavité) fournit un profil de température radial acceptable à la sortie de la chambre de combustion. Cette technique de TVC garantit donc une large plage de fonctionnement stable, une bonne efficacité de combustion et une limite d'extinction pauvre basse.

Une chambre de type TVC produit moins d'émissions polluantes [308]. En effet, lié au faible niveau d'entraînement dans la cavité, la quantité d'air disponible dans la cavité est insuffisante pour l'oxydation complète du combustible dans cette région. L'air principal intervient alors pour diluer les produits de combustion et oxyder le combustible dans des conditions pauvres, ce qui produit de faibles émissions polluantes. Par ailleurs, la surface de la flamme se trouvant augmentée, l'efficacité de la combustion est assurée et les émissions de CO sont réduites. Suivant les caractéristiques de l'injecteur pilote, le TVC utilise la technique RQL (Rich burn quick Quench Lean burn), utilisée dans les turbines à gaz pour réduire les  $NO_x$ . Cette technique du RQL repose sur la consommation de l'ensemble du carburant sur deux étages disposés en série. Le premier étage consiste en un foyer prémélangé riche. Il est suivi d'un module de "Quenching" qui mélange aux gaz brûlés une quantité importante d'air de manière rapide et homogène pour ensuite déboucher sur un étage pauvre. Ainsi, l'utilisation d'un injecteur pilote riche fait de la chambre TV un système compact RQL.

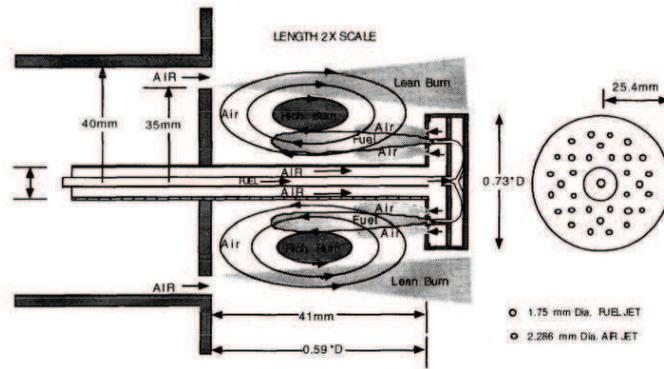
## 7.4 Aperçu historique du TVC

Les chambres de type TVC, usant d'un tourbillon piégé dans une cavité pour stabiliser la flamme, furent proposées et explorées par les laboratoires de recherche de l'Air Force et de General Electric et étudiées par la suite par d'autres institutions de recherche. On distingue différentes générations, présentées ci-dessous.

### 7.4.1 Chambres de l'Air Force

#### 7.4.1.1 Première Génération

Les premières études de chambres de type TVC furent menées dans les laboratoires de l'Air Force, au début des années 1990 avec les travaux expérimentaux de Hsu *et al.* [179] pour des turbines à gaz



**FIGURE 7.2:** Schéma de la première génération du TVC proposée par le laboratoire de l'Air Force (Air Force Research Laboratory) [357].

du secteur aéronautique. D'autres travaux furent ensuite consacrés à la stabilisation de la combustion et à la réduction des émissions polluantes [178, 356, 357, 318, 188, 177].

Le dispositif comporte deux disques montés sur un arbre en tandem. L'écoulement affleurant la cavité est composé uniquement d'air injecté dans un tube annulaire à 42m/s. Pour parer à la faible quantité d'air principal qui entre dans la cavité et pour assurer la stabilité de l'écoulement tourbillonnaire, le combustible gazeux (propane) et l'air sont injectés dans la cavité au moyen d'orifices dans le disque aval et représentés sur la figure 7.2. Les injecteurs sont disposés en trois rangées co-annulaires où seule la rangée de milieu distribue le combustible. Ainsi, la fraction de mélange entre le combustible et l'air et la stabilité du tourbillon de la cavité sont directement contrôlées par l'apport en gaz frais.

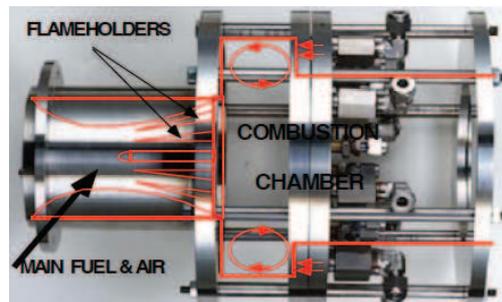
L'étude paramétrique réalisée sur les écoulements non réactifs et réactifs [179] montrent que la distance optimale de stabilisation de l'écoulement de cavité (basée sur l'existence d'un tourbillon piégé, associé à un faible lâcher tourbillonnaire de la cavité) est obtenue pour une longueur de cavité de  $0,6 D_0$  et un disque aval de diamètre  $0,73 D_0$  avec  $D_0$  le diamètre caractéristique du disque amont. Cette conclusion est confortée par les travaux numériques de Katta et Roquemore [186, 187]. Ces auteurs tentent également d'expliquer l'augmentation de la traînée observée pour une longueur de cavité ne correspondant pas à la distance optimale. Pour ce dispositif et une longueur de cavité en dessous de la longueur optimale, la dynamique de cavité comporte plusieurs tourbillons et le lâcher tourbillonnaire de la cavité est toujours présent. L'entraînement dans la cavité est donc plus important et le temps de résidence se trouve réduit. Pour une longueur supérieure au seuil optimal, on distingue une seule structure tourbillonnaire. Néanmoins, le faible entraînement de l'écoulement principal et le temps de résidence, réduits par la scission cyclique du tourbillon principal, écartent cette géométrie.

Le bruit induit par l'écoulement dans cette chambre est étudié par Sturgess et Hsu [357]. Pour l'écoulement non réactif, il s'agit d'un bruit large bande dont le niveau croît avec la vitesse de l'écoulement principal. L'ajout de la combustion augmente encore le niveau de bruit. Ces résultats analysent également l'effet de la richesse sur le spectre acoustique. En particulier, le bruit généré pour un écoulement de cavité à richesse 1,05 et 0,73 se révèle plus intense près de la stoechiométrie. Sturgess et Hsu [357] associent cette observation à l'existence d'un couplage entre la structure fluide et le dégagement de chaleur à une richesse supérieure à la stoechiométrie. Il semblerait que ce couplage soit absent à une richesse inférieure du fait de la dissipation visqueuse liée à des températures de cavité plus faibles et donc à une viscosité plus élevée.

#### 7.4.1.2 Seconde Génération

La seconde génération de TVC présente un corps axisymétrique. Les cavités sont localisées sur la partie externe de la chambre (cf. figure 7.3). La profondeur de la cavité reste sensiblement la même que celle de la première génération. L'écoulement principal est désormais un prémélange de combustible et d'air. Afin d'assurer un mélange optimal entre les gaz frais et les gaz brûlés, des accroches flammes (avec un taux d'obstruction de 50%) sont ajoutés. Les injecteurs aval d'air et de combustible assurent la stabilité de l'écoulement de cavité.

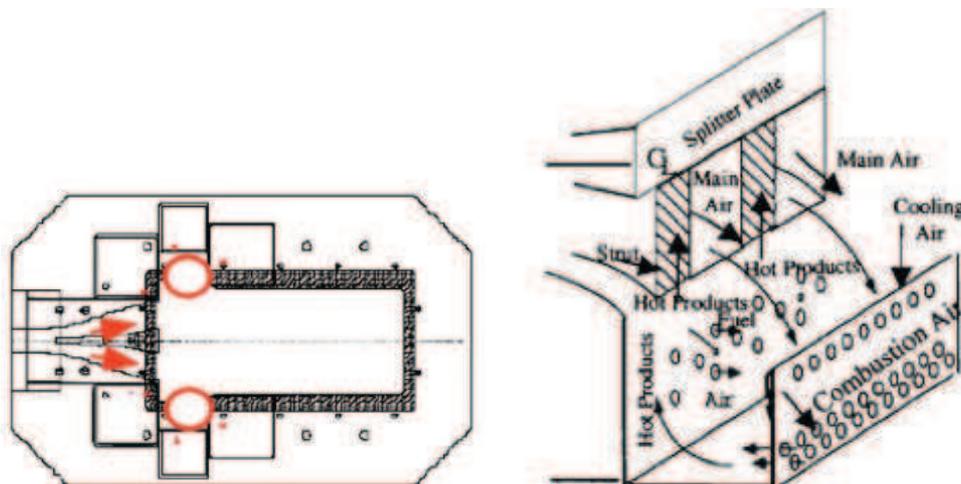
Les expériences entreprises montrent que l'écoulement principal affecte peu la flamme pilote mais intervient sur la stabilité du tourbillon. Par ailleurs, ce dispositif est opérationnel sur une large gamme de fonctionnement puisque la richesse de l'écoulement principal peut être réduite jusqu'à 0,05 tout en assurant une combustion stable.



**FIGURE 7.3:** Schéma de la deuxième Génération du TVC proposée par le laboratoire de l'Air Force (Air Force Research Laboratory) [353].

#### 7.4.1.3 Troisième Génération

La troisième génération du TVC, proposée par l'Air Force, est illustrée sur la figure 7.4. La géométrie axi-symétrique est remplacée par un secteur bi-dimensionnel permettant un meilleur accès à la cavité pour l'appareillage optique. Cette génération fut proposée pour répondre à un objectif de combustion avec du combustible liquide.



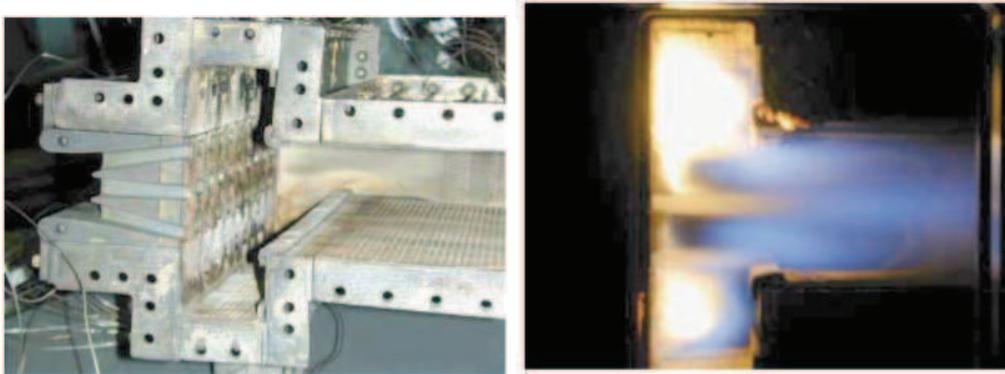
**FIGURE 7.4:** Schémas de la troisième Génération du TVC proposée par le laboratoire de l'Air Force (Air Force Research Laboratory) [353].

## CHAPITRE 7. LES CHAMBRES DE COMBUSTION DE TYPE TVC : PRINCIPE ET ÉTAT DE L'ART

L'historique des chambres TVC au sein de l'Air Force est détaillée par Roquemore *et al.* [318]. Les études, toute génération confondue, effectuées par l'Air Force démontrent le potentiel du TVC pour des chambres de combustion aéronautiques par rapport aux chambres conventionnelles swirlées (limite basse d'extinction, facilité d'allumage quelque soit l'altitude, faibles émissions de  $NO_x$ ...).

### 7.4.2 Chambre de General Electric

General Electric travaille sur le concept de chambre TVC depuis le milieu des années 90 et dispose de plus de dix brevets sur ce concept. Les études menées sont une extension de la troisième génération de TVC, proposée par les laboratoires de l'Air Force. Ces dernières reposent sur l'écoulement principal de combustible liquide et comportant deux cavités rectangulaires, comme illustrées sur la figure 7.5. Les cavités supérieure et inférieure sont pourvues d'injecteurs de combustible liquide et d'air ainsi que d'injecteurs servant à refroidir les parois. La chambre principale est alimentée au moyen d'un système de diffusion comportant trois passages (*Tri-pass configuration* de la figure 7.5).



**FIGURE 7.5:** Photos du TVC proposé par le laboratoire de General Electric avec un diffuseur à 3 passes (gauche) [164].

Hendricks *et al.* [166] étudient 19 configurations afin de déterminer les positions optimales pour l'injection de l'air et du combustible dans la cavité. L'objectif de cette étude est de concevoir une chambre de combustion fonctionnant à des régimes basses puissances et disposant d'une limite basse de soufflage optimisée. Pour fonctionner au ralenti, la cavité doit être profonde et assurer ainsi la combustion complète du combustible. Deux schémas d'injection, dans la cavité, du mélange carburant-comburant sont distingués et mènent à des dynamiques de cavité distinctes (caractérisées par un simple tourbillon ou deux structures tourbillonnaires). Le système d'injection conduisant à une double structure dans la cavité se révèle le plus adaptée à une richesse globale très pauvre et en particulier pour des conditions au sol. Roquemore *et al.* [318] justifient ce choix par le fait que la configuration menant à un unique tourbillon est très sensible à la position des injecteurs. Le meilleur choix, quant à la position de l'injecteur d'air, se situe au niveau supérieur de la paroi aval. En effet, cette configuration favorise la recirculation des gaz brûlés au niveau de la paroi amont et garantit ainsi une meilleure stabilité de flamme.

La NASA a financé d'autres travaux pour étendre cette géométrie à des applications où la vitesse d'entrée est importante (situation de vol à grande vitesse [165, 166]).

### 7.4.3 Autres concepts

Les autres concepts sont rassemblés dans cette section dérivent des concepts initiaux présentés ci-dessus. Les principales modifications portent sur la position des injecteurs de combustible et d'air dans la cavité.

Ainsi de nombreuses études dérivent du concept développé au cours du partenariat de General Electric et de l'Air Force et se basent sur une configuration à double vortex avec une cavité dont le bord aval est en retrait par rapport au bord amont. On peut citer les travaux expérimentaux de He *et al.* [158, 159] et Xing *et al.* [404] qui portent sur différents débits et températures, les travaux de Xing *et al.* [405] qui analysent différents modes d'injection de carburant, l'étude de Wu *et al.* [402] sur la combustion avec de l'hydrogène.

#### 7.4.3.1 Concept proposé par le département énergie et technologie du laboratoire national américain

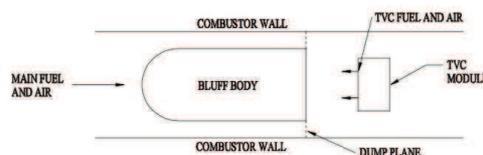
Ce concept [353] résulte d'un partenariat du laboratoire de l'Air Force (AFRL) et du département énergie et technologique du laboratoire national américain (NETL) dès 1999. L'objectif principal de cette chambre, illustrée sur la figure 7.6, est la réduction des émissions polluantes par la combinaison d'un TVC et d'une zone pilote RQL (Rich Quick Lean) pour les turbines à gaz terrestres. En effet, la technologie RQL assure le mélange rapide du combustible et de l'air associé à la structure tourbillonnaire stable dans la cavité et donc induit de faibles niveaux de monoxydes d'azote. Différentes chambres ont vu le jour et proviennent de programmes de coopération avec la société Ramgen et General Electric.



**FIGURE 7.6:** Schéma du TVC proposée par le laboratoire national d'énergie et de technologie (NETL) couplant une cavité et une zone pilote RQL [353].

#### 7.4.3.2 Chambre de Ramgen Power Systems

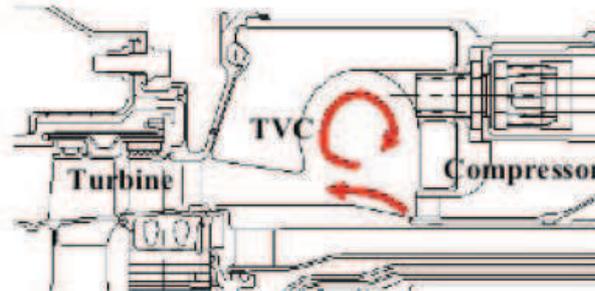
Bucher *et al.* [59], financés par la société américaine RAMGEN, développent une chambre de combustion TV pour des applications de turbines à gaz fonctionnant avec un prémélange pauvre. Ce nouveau dispositif est représenté sur la figure 7.7 et présente une forme semblable au TVC de première génération, la principale différence étant l'absence d'un tube central. L'écoulement principal est constitué d'un prémélange de méthane et d'air assisté par des injecteurs de méthane et d'air sur la paroi aval, conformément aux analyses de Roquemore *et al.* [318]. Dans l'optique de réduire les émissions  $CO$ , cette chambre se voit ajouter des accroches flammes dans la partie principale [107, 59].



**FIGURE 7.7:** Schéma du TVC proposée par le laboratoire de Ramgen Power Systems [59].

### 7.4.3.3 Chambre de ALM Turbines

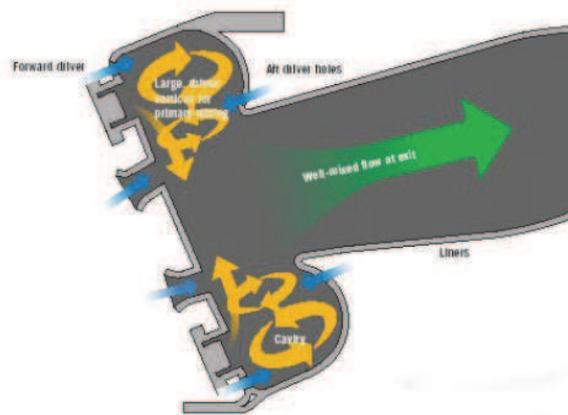
La société ALM a développé un concept de chambre TV pour des microturbines et des turbines industrielles à forte puissance. Cette technologie, exposée sur la figure 7.8, diffère des concepts présentés précédemment. La chambre comporte une cavité suivie d'une tuyère. La dynamique tourbillonnaire est utilisée différemment puisque la combustion a lieu essentiellement dans la tuyère.



**FIGURE 7.8:** Schémas de la troisième Génération du TVC proposée par le laboratoire de ALM Turbines [353].

### 7.4.3.4 Chambre de l'US Navy

Suite au partenariat de la section moteur aéronautique de General Electric (GEAE pour *GE Aircraft Engines*) et de la marine américaine (*US Navy*), une autre chambre de type TVC a été proposée et repose sur une géométrie annulaire. Cette chambre est illustrée sur la figure 7.9 et utilise l'approche RQL. La totalité du carburant est introduit dans les cavités dans lesquels il s'évapore et se mélange avec une partie de l'air de la chambre. L'autre fraction d'air est injectée dans la partie supérieure de la cavité pour piéger les tourbillons dans la cavité et augmenter, par la même le temps de mélange, mais aussi pour permettre la combustion complète des gaz issus de la cavité.



**FIGURE 7.9:** Schéma de la chambre TV de l'US Navy [20].

### 7.4.3.5 Le concept du TTVC (*Tangential Trapped Vortex Combustor*)

Zhang *et al.* [415] proposent de coupler le concept du TVC et de l'Ultra Compact Combustor (que nous présenterons dans la section suivante) et présentent le TTVC (*Tangential Trapped Vortex*

*Combustor*). Cette chambre repose sur un mouvement de swirl afin d'éliminer le diffuseur en entrée de la chambre de combustion. Les phénomènes d'évaporation, de mélange et de réaction du spray liquide se produisent selon la direction tangentielle. L'ajout d'une cavité permet de stabiliser la flamme sur une large gamme de fonctionnement. Le carburant est injecté dans la cavité comme le montre la figure 7.10.

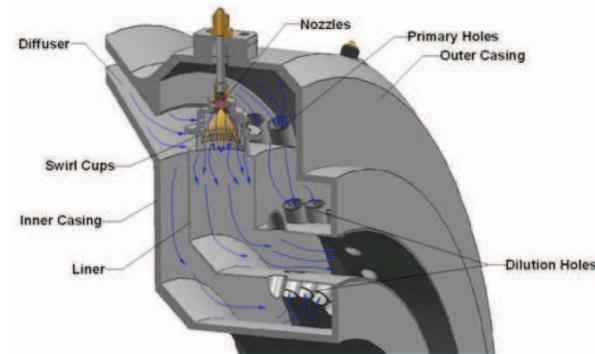


FIGURE 7.10: Schéma du Tangential Trapped Vortex Combustor [415].

#### 7.4.3.6 Le concept du High G-Load Trapped Vortex Combustor

Lee *et al.* [222] étudient le concept du *High G-Load Trapped Vortex Combustor*, qui combine les technologies du TVC et de l'UCC. Ce concept est destiné aux micro-turbines et promet d'étendre les limites d'extinction et de diminuer les émissions de  $NO_x$ . Le TVC de 75 mm de long est positionné après des vannes radiales et en amont de la zone de recirculation principale. Le schéma de ce concept est exposé sur la figure 7.11. Le combustible gazeux est injecté avec de l'air comprimé en (1). En (2), il en résulte un mélange uniforme pauvre qui est animé d'un mouvement de giration et est injecté dans la préchambre (3) avant de se mélanger avec les gaz chauds piégés dans la cavité. Lorsque les gaz s'échappent de la cavité, ils parviennent au niveau d'une expansion géométrique où ils sont ralentis et entraînent la formation de structures tourbillonnaires. Les gaz brûlés sont alors expulsés vers le centre du tourbillon où la pression est plus faible qu'à l'extérieur de la structure tourbillonnaire et les gaz chaud remontent en amont de la chambre.

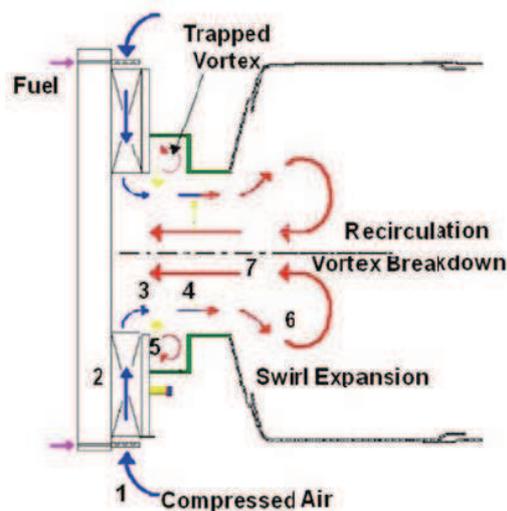


FIGURE 7.11: Schéma du High G-Load Trapped Vortex Combustor [222].

## 7.5 L'Ultra Compact Combustor

Alors que dans une chambre de combustion swirlée traditionnelle, la combustion a lieu principalement selon la direction axiale (*cf.* figure 7.12), le concept de l'UCC utilise la circonférence de la chambre afin d'assurer la combustion tout en réduisant son volume. Cette chambre comporte en effet une cavité sur le pourtour du stator. Par ailleurs, l'ajout d'un swirl améliore le processus de combustion et réduit la flamme [11]. Le principe de l'UCC est illustré sur la figure 7.13 où la combinaison d'une chambre de combustion et d'un stator permet ainsi de réduire de 66% l'espace nécessaire à la chambre. Les gaz brûlés issus de la cavité suivent les aubes afin de finir de brûler en mélange pauvre. Le combustible est injecté dans la cavité de sorte à générer un important mouvement de rotation de l'écoulement.

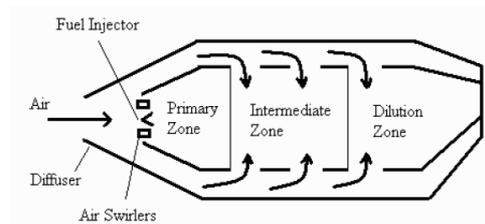


FIGURE 7.12: Schéma d'une chambre de combustion traditionnelle [223].

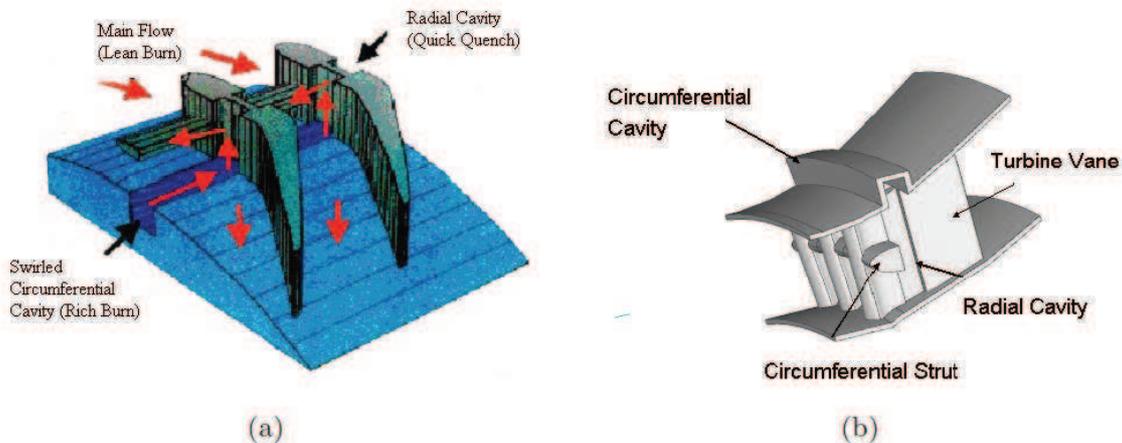


FIGURE 7.13: Intégration du concept de l'UCC sur un étage de turbine [11].

Zelina *et al.* [414] étudient différentes méthodes d'injection dans la cavité pour optimiser le concept.

### 7.5.1 Etudes des écoulements de type TVC

Cette section est destinée à l'état de l'art des études numériques des chambres de combustion de type TVC. Les études réactives et non réactives sont ainsi distinguées.

### 7.5.2 Précédentes simulations d'un écoulement non réactif de type TVC

Les calculs numériques des écoulements non-réactifs dans une chambre de type TVC sont synthétisés dans le tableau 7.2.

Référence	Nature du calcul	Modèles de fermeture	Etude
Katta et Roquemore (1998) [187]	RANS-Ecoulement low Mach	Modèle de turbulence $k-\epsilon$	Première génération du TVC. $U_\infty = 30m/s$
Mishra <i>et al.</i> (2010) [257]	RANS stationnaire et instationnaire-Ecoulement low Mach	Modèle de turbulence $k-\epsilon$	Etude 2D d'une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 1,2/1/1,4$ . $U_\infty = 20/40/80m/s$
Singhal <i>et al.</i> (2011) [344]	RANS stationnaire et instationnaire-Ecoulement low Mach	Modèle de turbulence $k-\epsilon$	Etude d'une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 0,8/1/1,2$ . $U_\infty \simeq 100m/s$

**TABLE 7.1:** *Etudes numériques des écoulements non réactifs dans les cavités subsoniques.*

### 7.5.3 Précédentes simulations d'un écoulement réactif de type TVC

Les premiers calculs d'un écoulement dans une chambre TV sont dus à Katta et Roquemore [187]. Ils résolvent les équations de Navier-Stokes moyennées axi-symétriques et instationnaires (*RANS pour Reynolds Averaged Navier-Stokes*) avec le modèle de turbulence  $k-\epsilon$  et un schéma aux différences finies implicite (QUICKEST pour *Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics with Estimated Streaming Terms*) de troisième ordre en espace et en temps. Dans un premier temps, Katta et Roquemore emploient un maillage 2D de 30191 points pour discrétiser leur domaine constitué d'une cavité formée par l'association en tandem de deux disques (dispositif similaire à celui de Little et Whipkey, [236]) et analysent l'écoulement affleurant la cavité constitué d'air à la vitesse de 30m/s pour différentes longueurs de cavité. Dans un second temps, l'étude de l'écoulement réactif est abordé dans le cadre de la première génération de TVC (géométrie proposée par Hsu *et al.* [179]). Pour décrire la combustion d'un mélange riche propane-air ( $\Phi \sim 4,4$ ), la chimie est décrite au moyen d'une cinétique simple globale impliquant le propane, l'oxygène, l'eau, le dioxyde de carbone et le diazote sur un maillage 2D comportant  $251 \times 101$  cellules. Cette étude relate les caractéristiques du temps de résidence et de l'entraînement de l'écoulement de cavité pour différentes longueurs de cavité.

Les calculs de Katta et Roquemore [189] ont été réalisés avec du RANS instationnaire, une cinétique chimique détaillée comportant 99 espèces de 1066 réactions élémentaires pour des flammes air- $C_2H_4$ , un modèle de rayonnement et un modèle pour les suies caractérisent les polluants formés dans une chambre TV de première génération. Les hydrocarbures aromatiques polycycliques sont formés en grande partie dans la cavité. Alors que la taille des suies croît dans la zone de faible vitesse localisée aux abords de la paroi amont, une certaine fraction se trouve oxydée en aval.

Hendricks *et al.* [165] utilisent le modèle de turbulence  $k-\epsilon$  associé à un modèle d'évaporation des gouttes et un modèle de combustion à une étape dans le cadre d'une géométrie de troisième génération. L'écoulement principal est constitué d'air et d'un spray de combustible. Ils analysent ainsi la nature de l'écoulement. Ils étudient ensuite [164, 166] la sensibilité de la chambre à des variations des injections toujours dans le cadre RANS associé à un modèle de spray et un modèle de combustion à dissipation tourbillonnaire (EDC).

Goldin *et al.* [144] ont mis en évidence la capacité d'un code industriel, FLUENT, à reproduire les comportements d'une chambre de combustion TV. Ils réalisent la simulation stationnaire 3D de cette chambre avec trois différents modèles de combustion dont les résultats sont comparés : l'approche des flammelettes laminaires stationnaire, le concept de dissipation tourbillonnaire (EDC pour *Eddy Dissipation Concept*) ainsi qu'un modèle de transport de pdf. Ces modèles sont analysés avec un schéma cinétique réduit de 19 espèces et la méthode de tabulation in situ ISAT. Les auteurs

## CHAPITRE 7. LES CHAMBRES DE COMBUSTION DE TYPE TVC : PRINCIPE ET ÉTAT DE L'ART

---

analysent la carte des températures et les concentrations en  $CO$  et  $NO_x$ .

Bruno et Losurdo [58] étudient trois configurations à l'aide de simulations incompressibles de type RANS : la première reposant sur la première génération de TVC et deux concepts dérivés de cette première génération. Ces concepts utilisent deux cavités successives. La première cavité permet la formation d'une zone de recirculation stable. La seconde, greffée directement sur la première, assure l'apport en combustible et comburant. Ces deux concepts diffèrent par la position des injecteurs dans la cavité qui peuvent se présenter sur une même face ou en opposition. Toutes les chambres fonctionnent en mode RQL. Ainsi le combustible est uniquement injecté dans la seconde cavité et l'écoulement principal n'est constitué que d'air. Pour décrire la combustion, la réaction propane/air est décrite au moyen de mécanismes à une ou deux étapes couplée à la turbulence au moyen du modèle *Eddy Dissipation* ou *Finite Rate*. Cette étude présente principalement les avantages/inconvénients en terme d'efficacité de combustion entre les différentes configurations.

Mishra *et al.* [257] effectuent des simulations 2D d'une chambre rectangulaire munie de trois injecteurs sur la paroi aval (deux injecteurs d'air séparés par un injecteur de combustible). L'écoulement principal est constitué uniquement d'air. Cette étude aborde le micro-mélange entre le combustible et le comburant et se base sur l'introduction d'un facteur de ségrégation qui quantifie la diffusion moléculaire et donc le micro-mélange. La combustion est décrite au moyen d'une réaction à une étape pour un mélange méthane-air. L'interaction de la combustion et de la turbulence repose sur un modèle de type *Eddy Dissipation*. Le micro-mélange est analysé suivant la nature réactive ou non réactive de l'écoulement pour différentes longueurs de cavité (pilotées par la paramètre  $L/D$  qui prend les valeurs 1/1,2/1,4) ainsi que pour différentes vitesses de l'écoulement principal ( $U_\infty = 20/40/80 m.s^{-1}$ ).

Di Marco *et al.* [95] étudient une chambre axi-symétrique constituée de deux cavités disposées en série sur le corps principal. L'apport en combustibles est réalisé dans les cavités au moyen d'injecteurs multi-points débitant du méthane, du dihydrogène ou de l'air. Les simulations de type RANS, stationnaires et instationnaires présentent l'effet d'une augmentation de la puissance du dispositif (débit principal) et d'une modification de la richesses des injecteurs sur les structures de flamme.

Singhal *et al.* [344] analysent la dynamique réactive et non réactive d'une chambre rectangulaire présentant un rapport  $L/D$  variable ( $L/D = 0,8/1/1,2$ ). L'écoulement principal est constitué d'un mélange méthane-air de richesse  $\Phi = 0,2$ . Deux injecteurs de combustible et d'air sont également positionnés dans la cavité au niveau de la partie inférieure de la paroi amont et, respectivement, au niveau supérieur de la paroi aval. Ces injections sont assurés au moyen d'un dispositif multi-points. La richesse dans la cavité est ainsi de l'ordre de  $\Phi = 1,8$ . Les simulations non réactives sont basées sur du RANS low Mach instationnaire, alors que les calculs réactifs sont conduits avec une hypothèse de stationnarité. Les réactions chimiques sont modélisées à l'aide d'une réaction à une étape couplée à la turbulence au moyen du modèle *Eddy Dissipation*. Cette étude qualifie le mélange dans la cavité.

**CHAPITRE 7. LES CHAMBRES DE COMBUSTION DE TYPE TVC : PRINCIPE  
ET ÉTAT DE L'ART**

Référence	Nature du calcul	Modèles de fermeture	Mécanismes chimiques	Étude
Katta et Roquemore (1998) [187]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• RANS</li> <li>• Instationnaire</li> <li>• Low Mach</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k-\epsilon</math></li> </ul>	$C_3H_8$ /air avec une loi d'Arrhenius	Première génération du TVC avec $U_\infty = 30m/s$ .
Hendricks et al. (2001,2004) [165, 164, 166]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• RANS</li> <li>• Instationnaire</li> <li>• Incompressible</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k-\epsilon</math></li> <li>• Modèle d'évaporation</li> <li>• <i>Eddy-Dissipation Model</i></li> </ul>	Combustible liquide/air avec un mécanisme à une étape	Etude d'une chambre de troisième génération à $M = 0,7$ .
Goldin et al. (2003) [144]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• RANS</li> <li>• Instationnaire</li> <li>• Low Mach</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k-\epsilon</math></li> <li>• L'approche des flammelettes laminaires stationnaires, <i>Eddy Dissipation Concept</i> ou un modèle de transport de pdf</li> </ul>	$CH_4$ /air avec un mécanisme comportant 19 espèces	Etude d'un secteur 1/10 d'un TVC axisymétrique.
Katta et Roquemore (2004) [189]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• RANS</li> <li>• Instationnaire</li> <li>• Low Mach</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k-\epsilon</math></li> <li>• Modèle de rayonnement simple</li> <li>• Modèle pour les suies</li> </ul>	$C_2H_4$ /air avec une cinétique chimique détaillée comportant 99 espèces et 1066 réactions élémentaires	Etude d'une chambre de première génération.
Bruno et Losurdo (2007) [58]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• RANS</li> <li>• Instationnaire</li> <li>• Incompressible</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k-\epsilon</math></li> <li>• <i>Eddy-Dissipation Model</i> ou <i>Finite Rate</i></li> </ul>	$C_3H_8$ /air avec une ou deux étapes	Etude de trois configurations dérivées de la première génération.
Mishra et al. (2010) [257]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• RANS</li> <li>• Stationnaire et instationnaire</li> <li>• Low Mach</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k-\epsilon</math></li> <li>• <i>Eddy-Dissipation Model</i></li> </ul>	$CH_4$ /air avec une étape-	Etude 2D d'une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 1,2/1/1,4$ . $U_\infty = 20/40/80m/s$ .
Di Marco et al. (2010) [95]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• RANS</li> <li>• Stationnaire et instationnaire</li> <li>• Low Mach</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k-\epsilon</math></li> <li>• Modèle de rayonnement</li> <li>• <i>Eddy-Dissipation Model</i></li> </ul>	$CH_4/H_2$ /air avec un schéma détaillé comportant 13 espèces et 37 réactions	Etude d'une secteur d'une configuration axisymétrique.
Singhal et al. (2011) [344]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• RANS</li> <li>• Stationnaire</li> <li>• Low Mach</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>k-\epsilon</math></li> <li>• <i>Eddy-Dissipation Model</i></li> </ul>	$CH_4$ /air avec une étape	Etude d'une cavité rectangulaire de rapport $L/D = 0,8/1/1,2$ $U_\infty \simeq 100m/s$ .

**TABLE 7.2:** *Etudes numériques des écoulements réactifs dans les cavités subsoniques.*

### 7.5.4 Conclusion

Toutes les simulations présentes dans la littérature sur les chambres de combustion de type TVC sont traitées avec une hypothèse d'incompressibilité ou de faible nombre de Mach. Par ailleurs, une simulation réactive de type LES n'a jamais été réalisée pour ce type de configurations. Peu d'études ont été destinées à la compréhension du couplage de la combustion avec une cavité dans des régimes subsoniques. Par contre, il en est tout autrement pour les géométries de type ramjet/scramjet (cavité avec un écoulement supersonique).

## 7.6 Description de la chambre du projet TECC au CORIA

### 7.6.1 Présentation générale

Conçu au CORIA pour analyser l'interaction de la dynamique de la cavité sur la stabilisation de flamme, le brûleur expérimental est basé sur la stabilisation de la flamme principale par la recirculation des gaz brûlés issus d'une flamme de prémélange partiel piégée dans une cavité. L'objectif de ce dispositif est d'étudier les mécanismes de stabilisation de la flamme par une cavité avec la possibilité de jouer sur différents paramètres géométriques tels que la longueur de cavité et les caractéristiques des accroches-flammes. En particulier, cette influence des accroches flammes est abordée avec une analyse de la structure de la flamme pour différentes tailles et divers espacements des barreaux. L'étude expérimentale comporte aussi l'influence d'un mouvement de giration qui tend à réunir au sein d'une même chambre les concepts du Trapped Vortex Combustor et de l'Ultra Compact Combustor précédemment présentés. Le principe du TVC est illustré sur la figure 7.14 où une flamme dans la cavité sert de flamme pilote et permet la stabilisation de la flamme principale.

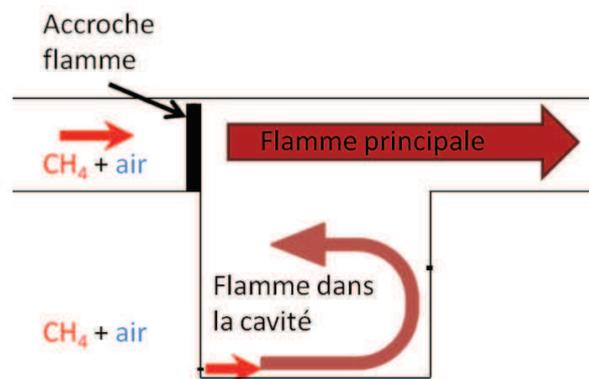


FIGURE 7.14: Principe de la chambre TV du projet TECC au CORIA (extrait de [63]).

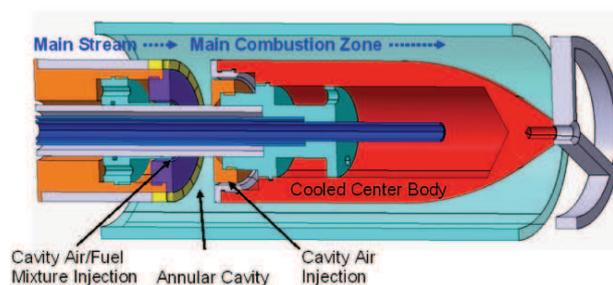
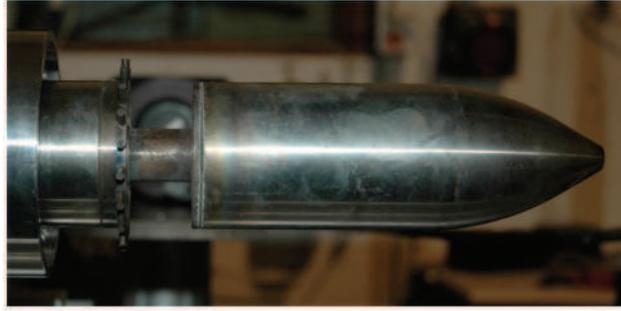


FIGURE 7.15: Schéma de la chambre TV.



**FIGURE 7.16:** Image de la chambre TV du projet TECC au CORIA.

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 7.15 et est caractérisé par un écoulement principal prémélangé de méthane et d'air. La géométrie est annulaire afin d'ajouter un mouvement de giration et la cavité est située dans la partie interne de la chambre pour limiter l'encombrement. Cette chambre de combustion illustrée sur la figure 7.16 est intégrée à un cylindre de quartz pour permettre l'accès optique. La pression absolue dans la chambre peut atteindre 3 bars grâce à un convergent localisé à la sortie (col sonique). La puissance totale délivrable sur ce dispositif étant limitée, la vitesse maximale accessible dans le plan d'entrée est de 15 m/s.

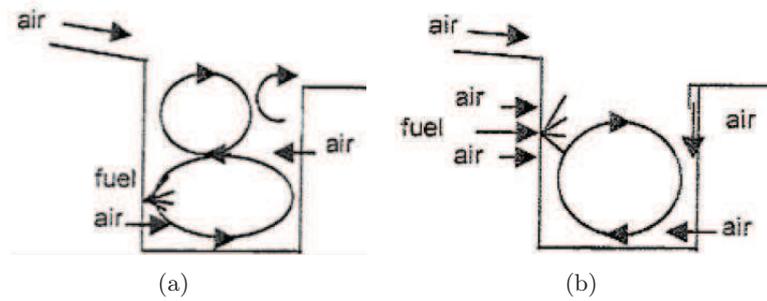
Afin de générer une zone de dépression au dessus de la cavité et ainsi améliorer le mélange entre les gaz brûlés et le mélange frais, des accroches flammes sont ajoutées. Ces derniers limitent également la création d'imbrûlés et de  $CO$  et tendent à homogénéiser le profil de température en sortie de chambre. Ces accroches flammes reposent sur des barreaux cylindriques afin de s'assurer que leurs sections apparentes soient indépendantes de l'angle d'incidence de l'air (en particulier lors de l'ajout du mouvement de giration).

Le dispositif comporte aussi deux injecteurs annulaires. Le premier, au bas de la paroi amont (à 1 mm du fond de la cavité), introduit un prémélange de méthane et d'air et maximise l'espace disponible à la combustion. Le second, au  $2/3$  de la hauteur de la paroi aval, améliore le mélange et refroidit l'angle aval. Le choix de l'emplacement des injecteurs a été réalisé au regard des précédentes générations de TVC et en particulier avec le retour d'expérience des première et troisième générations de TVC. Les études de performance réalisées par Roquemore *et al.* [318] soulignent que la configuration en double vortex illustrée sur la figure 7.17 (a) présente de meilleures performances à bas régime que la configuration en simple vortex de la figure 7.17 (b). En effet, la configuration en double tourbillon favorise l'expulsion des gaz brûlés vers la paroi amont et renforce ainsi la remontée des gaz dans la zone de dépression créée par les accroches flammes. Cette configuration assure également le refroidissement du coin aval soumis à d'importantes contraintes thermiques comme l'illustre la figure 7.17 (a) avec la présence d'une petite structure tourbillonnaire au niveau du coin aval qui l'isole de la dynamique de la cavité. Le choix d'une injection par fentes annulaires assure une injection la plus homogène possible.

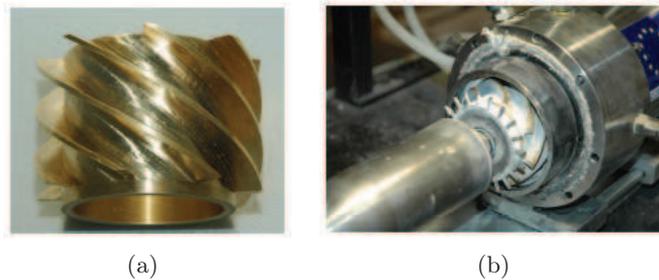
Comme illustrée sur la figure 7.15, la chambre est refroidie au moyen d'un conduit d'eau interne. De l'air de dilution est également introduit en amont du col sonique afin de refroidir l'écoulement à la sortie de la chambre de combustion.

La mise en giration de l'écoulement est prévue au moyen d'un swirl axial dont les aubes sont inclinées de  $60^\circ$  comme l'illustre la figure 7.18.

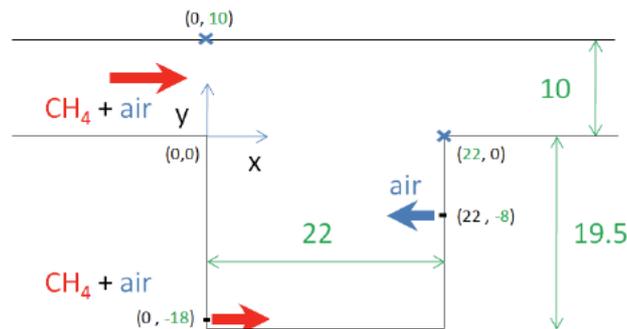
Les dimensions nominales de la chambre sont indiquées sur la figure 7.19. Les accroches flammes consistent en 20 barreaux cylindriques avec un diamètre de 3 mm. La structure théorique de la flamme est illustrée sur la figure 7.20 avec une dynamique de cavité comportant deux tourbillons et le pouvoir dépressionnaire des accroches flammes.



**FIGURE 7.17:** (a) : Configuration avec deux tourbillons. (b) : Configuration avec un seul tourbillon [318].



**FIGURE 7.18:** (a) : Image du swirl ajouté au dispositif. (b) : Configuration expérimentale avec le swirl.



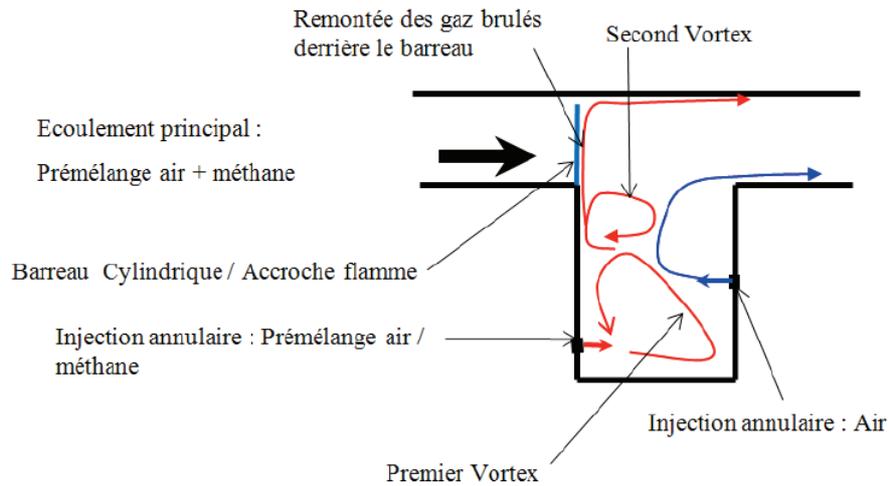
**FIGURE 7.19:** Dimensions de la chambre TV.

### 7.6.2 Mesures réalisées

Cette section recense les différents types d'investigations expérimentales ayant été réalisées par Burguburu [63].

Pour caractériser la dynamique non réactive du TVC, des mesures de vitesse par PIV (*Particle Image Velocimetry*) ainsi que par ADL (Anémométrie Doppler Laser) sont disponibles.

La combustion est caractérisée par des techniques de chimiluminescence de l'espèce  $CH^*$ . Cette espèce permet de mieux évaluer la zone du front de flamme que  $OH^*$  qui dispose d'une durée de vie importante (de l'ordre de quelques  $\mu s$ ). Bien qu'il soit particulièrement sensible aux variations de richesse, de débits et de pression, le radical  $CH^*$  est un bon indicateur des taux de réaction [156]. Par ailleurs cette information sur le taux de réaction n'est valable que dans le cadre de flammes de prémélange. Nous confrontons donc ces mesures aux taux de production d'énergie filtrée. Des mesures de PIV ont également été réalisées à chaud. Par ailleurs, les concentrations d'hydrocarbures imbrûlés ( $UHC$ ), d'oxydes d'azote ( $NO_x$ ) et de monoxyde de carbone ( $CO$ ) sont disponibles. Ces



**FIGURE 7.20:** Schéma de la structure de l'écoulement (extrait de [63]).

émissions polluantes ont été collectées dans le tube d'échappement, en aval du col sonique.

Pour les mesures à froid et à chaud, un capteur de pression dynamique est positionné en sortie de la chambre, en aval de l'air de dilution afin de déterminer les principaux modes acoustiques de la chambre.

La complexité de ce dispositif ne permet pas un contrôle précis des entrées fluides. Ainsi, les expériences ont rencontré un certain nombre de problèmes, en particulier, au niveau de l'alimentation en air qui fluctue dans la cavité et qui résulte, probablement, de pertes de charges dans les lignes d'alimentation.

# Chapitre 8

## Dynamique non réactive d'une chambre de combustion de type TVC

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>242</b>
<b>8.2</b>	<b>Dynamique du cas de référence . . . . .</b>	<b>244</b>
8.2.1	Paramètres numériques . . . . .	245
8.2.2	Validation des résultats numériques . . . . .	246
8.2.3	Structure de l'écoulement moyen . . . . .	252
8.2.4	Dynamique de la chambre . . . . .	252
8.2.5	Impact du modèle de sous-maille et du modèle d'injection turbulente . . .	254
<b>8.3</b>	<b>Effet d'une modification des paramètres géométriques de la chambre .</b>	<b>255</b>
8.3.1	M20C07A10_L11 . . . . .	255
8.3.2	M20C07A10_L44 . . . . .	256
<b>8.4</b>	<b>Effet d'une modification du débit de l'écoulement principal . . . . .</b>	<b>258</b>
8.4.1	M10C07A10 . . . . .	258
8.4.1.1	Écoulement moyen . . . . .	258
8.4.1.2	Dynamique de la cavité . . . . .	258
8.4.2	M30C07A10 . . . . .	262
8.4.3	M60C07A10 . . . . .	263
8.4.4	Pouvoir d'aspiration du barreau en fonction des débits . . . . .	263
<b>8.5</b>	<b>Influence de l'air aval : Cas M20C07 . . . . .</b>	<b>265</b>
<b>8.6</b>	<b>Ajout d'un swirl : M30C07A10S . . . . .</b>	<b>266</b>
<b>8.7</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>270</b>

---

Ce chapitre est dédié à l'étude des Simulations des Grandes Echelles (LES) de l'écoulement non réactif de la chambre axisymétrique. Dans un premier temps, la simulation de la configuration nominale est réalisée et comparée aux résultats expérimentaux afin de démontrer la pertinence des outils de simulation numérique pour la description d'une cavité de forme plus complexe que celle abordée jusqu'à présent. L'étude numérique d'une configuration non rectangulaire munie d'un accroche flamme est usuellement traitée avec des codes de calcul non structurés. Dans le cadre de cette thèse, nous avons fait le choix de conserver un code structuré tout en modifiant les méthodes numériques (avec l'ajout d'une méthode de frontières immergées). Nous pouvons ainsi conserver les avantages des codes structurés pour une géométrie complexe.

Nous effectuerons également une étude de la dynamique de la cavité pour différentes conditions impliquant des changements de la longueur de la cavité, ainsi qu'une augmentation du débit principal, l'ajout d'un swirl ou encore la suppression de l'injecteur d'air. Ces différentes simulations nous permettront d'analyser le couplage entre l'aérodynamique de la cavité et le champ acoustique rayonné

et d'anticiper d'éventuelles causes d'instabilités de combustion telles que l'existence de lâchers de tourbillons, d'une vidange de la cavité, etc.

## 8.1 Introduction

Toutes les études présentées par la suite sont effectuées sur un secteur, un quart de la géométrie annulaire, illustrée sur la figure 8.1. Les frontières latérales du domaine de calcul sont traitées avec des conditions limites axi-symétriques (périodicité annulaire). Ces conditions aux limites constituent un cas particulier des conditions périodiques et reposent sur l'application d'une correction angulaire (matrice de rotation) pour les quantités vectorielles et tensorielles. L'implémentation de ces conditions aux limites a ainsi nécessité une modification de la parallélisation du code afin de transférer les diverses informations entre les faces axi-symétriques. Cette modification inclut l'identification des processus entre lesquels les informations sont échangées (plus complexe que la recherche des processus destinataires et émetteurs pour une topologie cartésienne) et la modification des informations échangées (correction angulaire). Ainsi suivant que les données proviennent de la face ( $y = 0$  ou  $z = 0$ ), les vecteurs sont modifiés à l'aide d'une matrice de rotation autour de l'axe  $x$  d'un angle  $\theta$  avec  $\theta = \pm\pi/2$  comme le montre la figure 8.2 :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\text{face i}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\text{face j}} \quad (8.1)$$

avec le vecteur vitesse exprimé dans la base cartésienne  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  :

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_x + u_2\mathbf{e}_y + u_3\mathbf{e}_z \quad (8.2)$$

En particulier, nous avons :

$$\mathbf{u}_{\text{face a}} = \mathbf{M}_{\theta=3\pi/2} \cdot \mathbf{u}_{\text{face b}} = \mathbf{M}_{\theta=-\pi/2} \cdot \mathbf{u}_{\text{face b}} \quad (8.3)$$

$$\mathbf{u}_{\text{face b}} = \mathbf{M}_{\theta=-3\pi/2} \cdot \mathbf{u}_{\text{face a}} = \mathbf{M}_{\theta=\pi/2} \cdot \mathbf{u}_{\text{face a}} \quad (8.4)$$

$$\underline{\phi}_{\text{face a}} = \mathbf{M}_{\theta=-\pi/2} \cdot \underline{\phi}_{\text{face b}} \quad (8.5)$$

$$\underline{\phi}_{\text{face b}} = \mathbf{M}_{\theta=\pi/2} \cdot \underline{\phi}_{\text{face a}} \quad (8.6)$$

$$(8.7)$$

avec  $\mathbf{M}$  la matrice de rotation,  $\mathbf{u}$  le vecteur des vitesses et  $\underline{\phi}$  un champ tensoriel.

Pour l'étude de la dynamique non réactive, l'écoulement principal ainsi que les injecteurs pariétaux débiteront uniquement de l'air. Le mélange entre le combustible et le comburant ne sera donc pas considéré. Néanmoins, pour qualifier le mélange dans la cavité, les injecteurs pilote et d'air introduiront un scalaire passif.

Pour la comparaison avec les résultats expérimentaux, l'origine du repère se situe au niveau de l'angle amont de la cavité. Les barreaux sont donc localisés en -3 mm. En notant  $L_{cav}$  la longueur de la cavité du cas de référence ( $L_{cav} = 22mm$ ), le domaine de calcul est constitué de  $3L_{cav} \times 1,9L_{cav} \times 1,9L_{cav}$ . Cette géométrie est discrétisée de manière non homogène, une loi de raffinement axial est utilisée au voisinage des parois de la cavité en économisant des points à mesure que l'on s'approche du plan de sortie. En étirant les mailles en sortie en aval de la cavité, une zone éponge est construite en sortie de la zone cisailée afin de dissiper les tourbillons et détruire par la même le bruit d'origine numérique généré lors de leur sortie. Le maillage n'est pas resserré suivant les directions  $y$  et  $z$  en raison de la complexité de la géométrie qui ne manifeste, par ailleurs, aucun axe de raffinement privilégié dans ces deux directions (maillage cartésien pour une géométrie cylindrique).

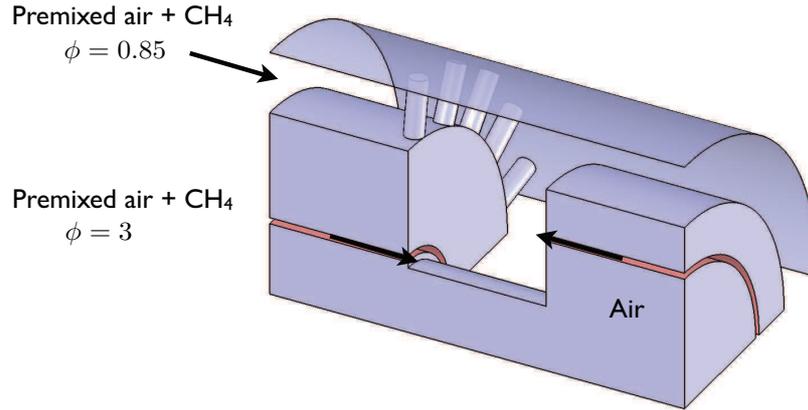


FIGURE 8.1: Secteur comportant 1/4 de la chambre du TVC.

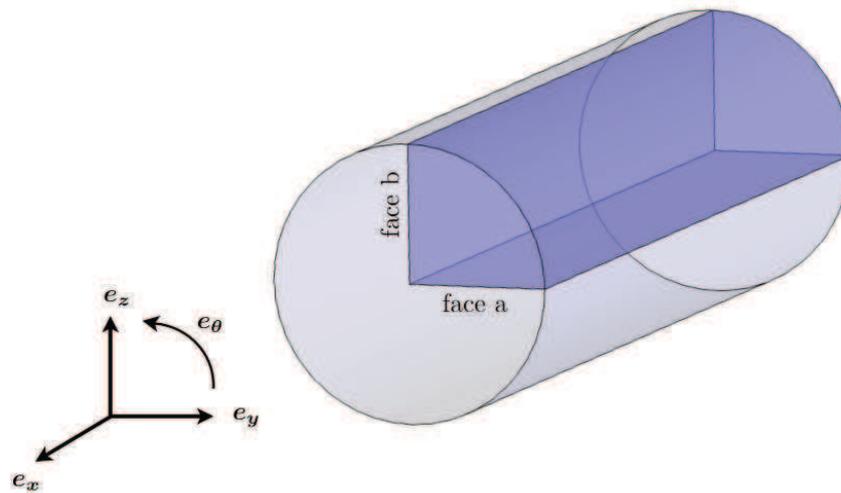
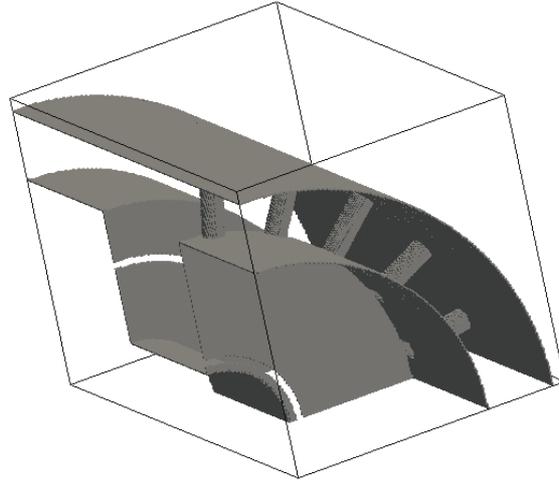


FIGURE 8.2: Conditions axi-symétriques.

Ce maillage correspond, en terme de taille de cellules, à  $\Delta_{xmin} = 188\mu m$ ,  $\Delta_{xmax} = 462\mu m$ ,  $\Delta_y = 209\mu m$  et  $\Delta_z = 209\mu m$ . Il comporte 10 853 864 cellules dont 4 709 770 cellules fluides, 5 889 085 cellules solides et 255 009 cellules fantômes (43% fluide pour 54 % solide). La géométrie étudiée et identifiée avec les cellules fantômes est représentée sur la figure 8.3. La description de cette géométrie est réalisée de manière analytique.

La première section est consacrée à l'étude statistique des champs de vitesse pour la configuration de référence, exposée sur la figure 8.4, et présente les résultats en perspective avec les données expérimentales. Les parties suivantes sont consacrées à l'étude de la dynamique de cavité suite à un changement des paramètres géométriques. Ainsi, alors que la seconde partie présente l'effet d'une modification de la longueur de la cavité, la troisième section est consacrée à l'effet d'une diminution ou augmentation du débit principal et la quatrième se concentre sur l'effet de l'injecteur d'air. La dernière partie expose la dynamique en présence lors de l'ajout d'un swirl en amont de la chambre. L'ensemble des configurations abordées est résumé dans le tableau 8.1 qui spécifie, par ailleurs, si ces configurations ont fait l'objet d'investigations expérimentales.



**FIGURE 8.3:** *Paroi immergée du TVC.*

Nom	$Q_{aM}$	$Q_{aC}$	$Q_{aA}$	$L$	Données expérimentales	Swirl
<i>M20C07A10</i>	20 g/s	0,7 g/s	1 g/s	22 mm	PIV et ADL	Non
<i>M20C07</i>	20 g/s	0,7 g/s	-	22 mm	PIV et ADL	Non
<i>M10C07A10</i>	10 g/s	0,7 g/s	1 g/s	22 mm	PIV et ADL	Non
<i>M30C07A10</i>	30 g/s	0,7 g/s	1 g/s	22 mm	Non	Non
<i>M60C07A10</i>	60 g/s	0,7 g/s	1 g/s	22 mm	Non	Non
<i>M20C07A10_L11</i>	20 g/s	0,7 g/s	1 g/s	11 mm	Non	Non
<i>M20C07A10_L44</i>	20 g/s	0,7 g/s	1 g/s	44 mm	Non	Non
<i>M30C07A10_S</i>	30 g/s	0,7 g/s	1 g/s	22 mm	Non	Oui

**TABLE 8.1:** *Liste des configurations étudiées avec les données expérimentales disponibles, le débit massique d'air principal ( $Q_{aM}$ ), le débit massique d'air dans le coflow ( $Q_{aC}$ ), le débit massique de l'injecteur d'air ( $Q_{aA}$ ) et la longueur de la cavité ( $L$ ).*

Par la suite, ces différentes configurations seront nommées à l'aide de la présente nomenclature :

- *M20* indique le débit d'air dans l'écoulement principal, ici 20 g/s
- *C07* fournit le débit d'air dans l'injecteur pilote, ici 0,7 g/s
- *A10* renseigne sur le débit d'air dans l'injecteur d'air, ici 1 g/s
- *L11* spécifie la longueur de la cavité, ici 11 mm
- *S* indique l'ajout d'un mouvement swirlé à l'écoulement principal

Les valeurs des nombres de Reynolds, déterminés à partir de la hauteur d'injection, et des vitesses d'injection correspondantes sont synthétisées dans le tableau 8.2.

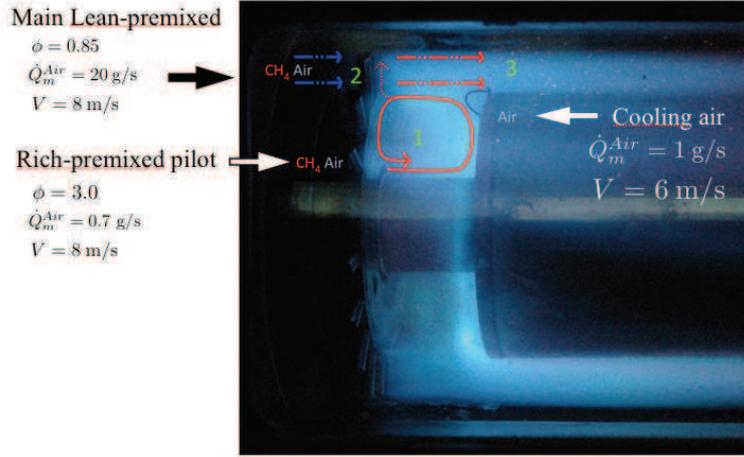
## 8.2 Dynamique du cas de référence

Le cas que nous nommerons cas de référence correspond à la configuration pour laquelle les expérimentateurs ont trouvé une flamme allumée stable dans un diagramme de stabilité. Cette configuration de référence est représentée sur la figure 8.4 avec les différents débits et richesses utilisés. A noter que les calculs non réactifs seront réalisés uniquement avec de l'air.

## CHAPITRE 8. DYNAMIQUE NON RÉACTIVE D'UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

Injection	Débit massique d'air	Vitesse( $m.s^{-1}$ )	Reynolds
M10	10 g/s	3,9	2 453
M20	20 g/s	7,7	4 843
M30	30 g/s	11,6	7 296
M60	40 g/s	15,5	9 748
C07	0,7 g/s	7,9	497
A10	1 g/s	6,2	390

**TABLE 8.2:** Caractéristiques des vitesses d'injection et des nombres de Reynolds déterminés sur la hauteur d'injection.



**FIGURE 8.4:** Photo de la configuration de référence (M20C07A10).

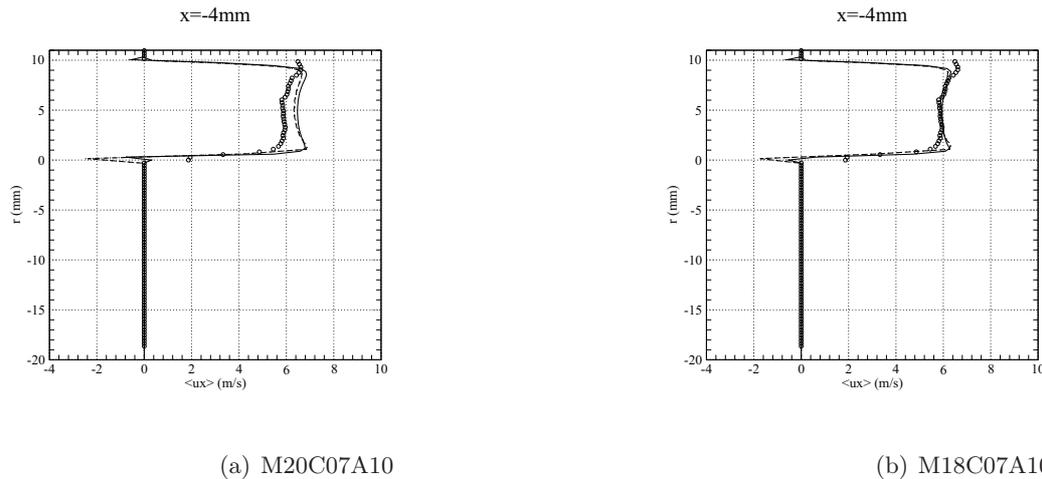
### 8.2.1 Paramètres numériques

Le calcul est initialisé en imposant un profil de vitesse sur toute la longueur du canal. La vitesse  $u$  vaut alors zéro dans la cavité. Le profil de vitesse longitudinale correspond à une expression polynomiale normalisée et extrapolée à partir des données expérimentales. Les trois autres variables sont prises constantes  $v = 0$ ,  $w = 0$ ,  $P = P_\infty$  et  $\rho = \rho_\infty$ . Ce choix d'une initialisation de la couche limite sur toute la longueur de la cavité a été entrepris pour limiter l'apparition d'oscillations numériques, particulièrement intenses pour des vitesses inférieures à 20 m/s dans ce code compressible (mauvais conditionnement des équations de Navier-Stokes à faible vitesse). Par ailleurs, une initialisation sur tout le domaine présente aussi l'avantage de réduire le transitoire.

Les conditions limites couplent des conditions non réfléchissantes tridimensionnelles d'entrée et de sortie, des conditions de parois immergées non glissantes et adiabatiques pour les parois de la cavité et des conditions de périodicité annulaire pour les deux plans de coupe. Les conditions de sortie sont renforcées par la présence d'une zone éponge reposant sur une augmentation croissante de la viscosité moléculaire (d'un facteur 10 sur une zone s'étendant  $1/2 L_{cav}$  en amont du plan de sortie). Pour la condition d'entrée, le coefficient de relaxation sur la vitesse axiale est  $\eta_5 = 3,28$  et vaut  $\eta_{2,3} = 0,28$  pour les composantes verticales et transverses. La condition de sortie est caractérisée par un coefficient de relaxation  $\sigma_1 = 2,25$  pour respecter la formule suivante dérivée des travaux de Selle *et al.* [337] :

$$\sigma_1 = \frac{0,58 * L_x}{D_h} \quad (8.8)$$

avec  $D_h$  le diamètre hydraulique ( $D_h = 4 \times \text{Aire} / \text{Périmètre}$ ). Le coefficient de relaxation transverse est  $\beta_t = M = 0,02$ . Aucun terme transverse cible n'est prescrit, soit  $\mathfrak{T}_k^m = 0$ . Les simulations présentées sont, en majorité, le résultat d'une approche MiLES qui repose sur le schéma de Jameson statique



**FIGURE 8.5:** *Vitesse moyenne longitudinale en différentes positions suivant l'axe  $x$  derrière un barreau : - - - angle de  $27^\circ$ ,  $\cdots$  angle de  $63^\circ$ , — angle de  $45^\circ$  et  $\circ$  données expérimentales.*

avec les coefficients :  $\alpha_1 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = 0,5$ ,  $\beta_1 = 0,3$  et  $\beta_2 = 1$ . D'autre part, le pas de temps imposé par la condition de stabilité (CFL=1) et la maille la plus petite est  $\Delta t = 4,3 \times 10^{-7} s$ . Le calcul a été réalisé sur 512 processeurs IBM Power6 du calculateur Vargas de l'IDRIS. La période transitoire est calculée sur 50 000 itérations (soit 8 temps caractéristiques,  $T_c = U_\infty/L_x$ ). Les statistiques sont ensuite collectées sur 190 000 itérations (soit 30 temps caractéristiques).

## 8.2.2 Validation des résultats numériques

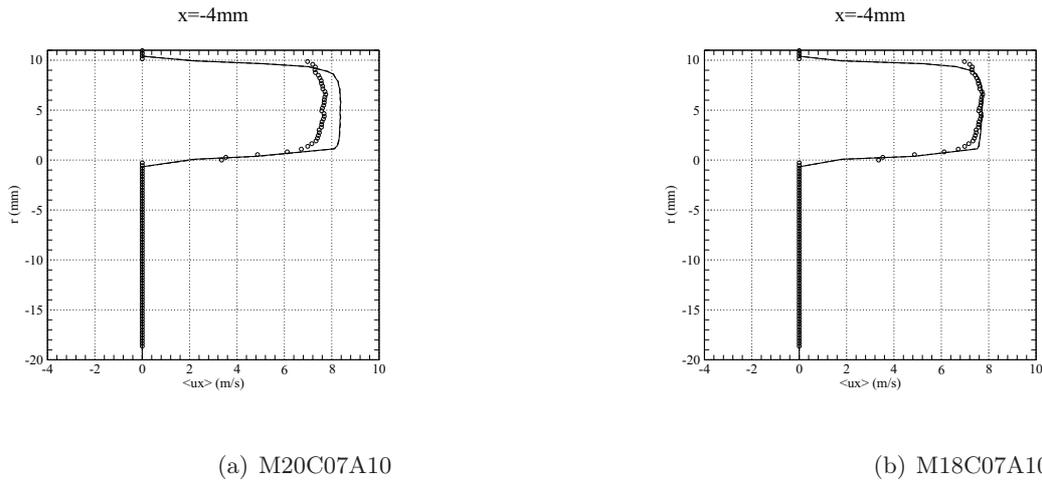
Les résultats obtenus avec une vitesse d'injection de l'air à 7,7 m/s fournissent des champs de la vitesse moyenne longitudinale supérieurs en amplitude à ceux obtenus expérimentalement. Le débit de l'écoulement principal a été modifié pour injecter le même débit nominal que l'expérience. En effet, on s'aperçoit, d'après les champs PIV, que la vitesse d'injection est de l'ordre de 6,9 m/s ce qui implique un débit massique de 17,9 g/s au lieu de 20 g/s. La différence entre le champ incident moyen avec et sans la correction du débit est illustrée sur les figures 8.6 et 8.5.

Les simulations présentées dans cette section sont effectuées avec cette modification du débit. La comparaison entre les données expérimentales et la LES est effectuée dans un plan entre deux barreaux ou derrière un barreau. Les cartes des vitesses moyennes longitudinales et axiales ainsi que leurs fluctuations sont reportées sur les figures 8.7 à 8.14. Les caractéristiques principales de l'écoulement sont reproduites. La vitesse radiale et de sa fluctuation sont évaluées de la manière suivante :

$$\tilde{u}_r = \tilde{u}_2 \cos(\theta) + \tilde{u}_3 \sin(\theta) \quad (8.9)$$

$$\langle u_r'' u_r'' \rangle = \langle \tilde{u}_r \tilde{u}_r \rangle - \langle \tilde{u}_r \rangle \langle \tilde{u}_r \rangle \quad (8.10)$$

Avant de comparer plus finement les différents résultats, il est important de souligner que l'investigation expérimentale d'une configuration aussi complexe introduit un biais non négligeable, particulièrement au voisinage des parois. La forme des hublots génère des réflexions parasites à l'origine d'éventuelles sources d'erreurs sur les mesures expérimentales. Pour vérifier l'hypothèse de l'axi-symétrie, différents plans sont sélectionnés et spécifiés par leur inclinaison par rapport au plan horizontal. Les profils de la vitesse moyenne axiale et la fluctuation associée sont représentés plus précisément sur les figures 8.15 et 8.16 pour différents plans derrière un barreau.



**FIGURE 8.6:** *Vitesse moyenne longitudinale en différentes positions suivant l'axe  $x$  entre deux barreaux : - - - angle de  $36^\circ$ , — angle de  $54^\circ$  et  $\circ$  données expérimentales.*

Les champs moyens sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. On constate également que l'hypothèse d'une axi-symétrie est confortée puisque les comportements sont similaires quelque soit le plan sélectionné. Les écarts observés aux abords de la paroi inférieure de la cavité sont probablement dues aux erreurs de projection sur les divers plans radiaux.

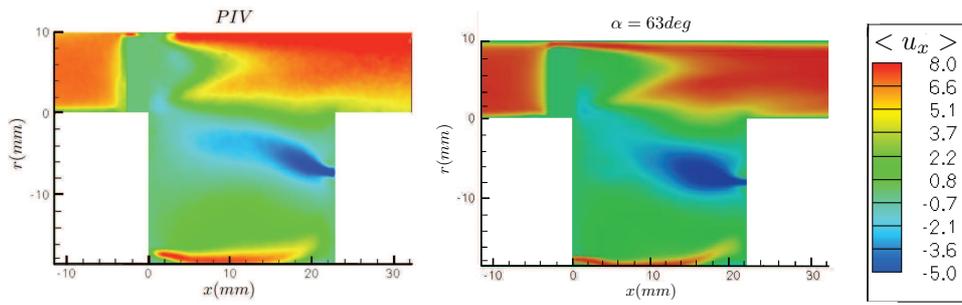


FIGURE 8.7: Vitesse moyenne longitudinale en différentes positions suivant l'axe  $x$  derrière un barreau (gauche : PIV, droite : LES).

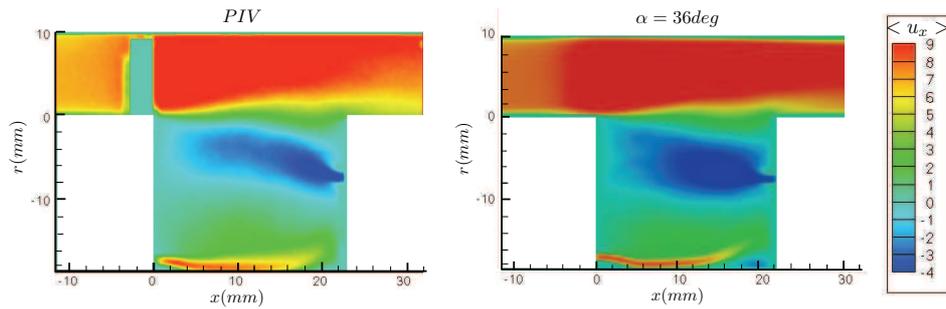


FIGURE 8.8: Vitesse moyenne longitudinale en différentes positions suivant l'axe  $x$  entre deux barreaux (gauche : PIV, droite : LES).

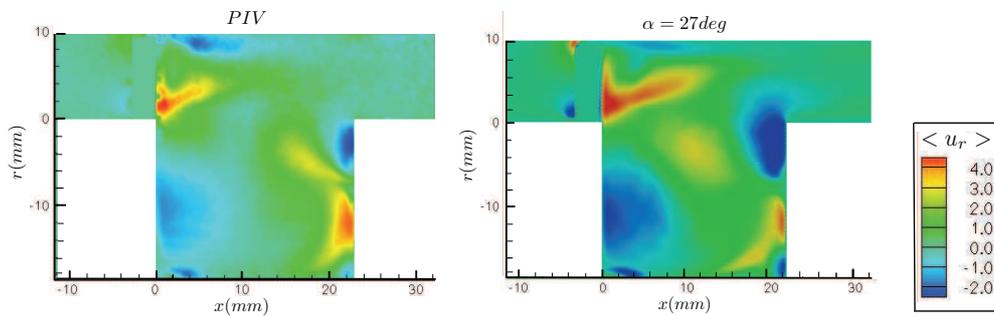


FIGURE 8.9: Vitesse moyenne radiale en différentes positions suivant l'axe  $x$  derrière un barreau (gauche : PIV, droite : LES).

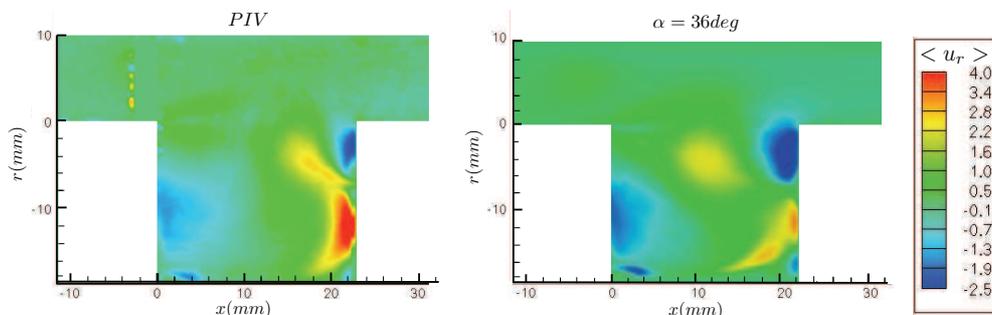


FIGURE 8.10: Vitesse moyenne radiale en différentes positions suivant l'axe  $x$  entre deux barreaux (gauche : PIV, droite : LES).

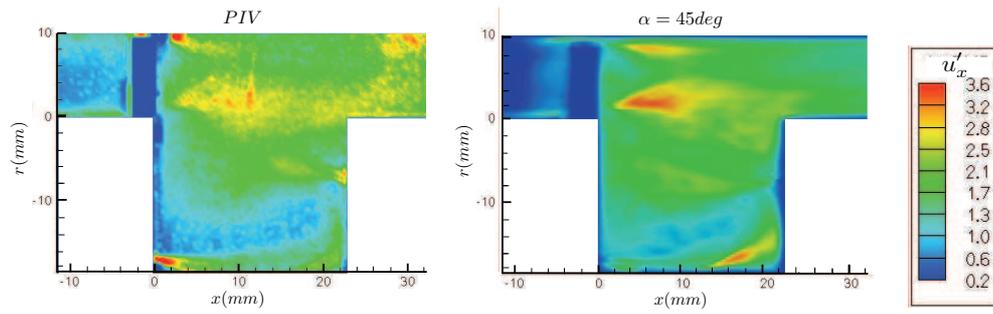


FIGURE 8.11: Fluctuation de la vitesse longitudinale en différentes positions suivant l'axe  $x$  derrière un barreau (gauche : PIV, droite : LES).

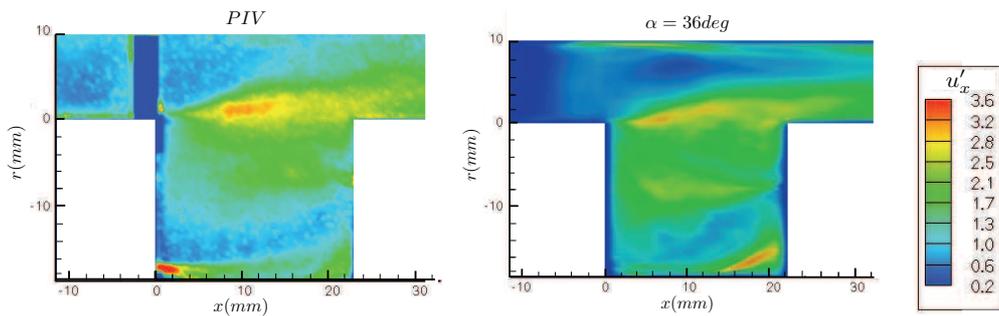


FIGURE 8.12: Fluctuation de la vitesse longitudinale en différentes positions suivant l'axe  $x$  entre deux barreaux (gauche : PIV, droite : LES).

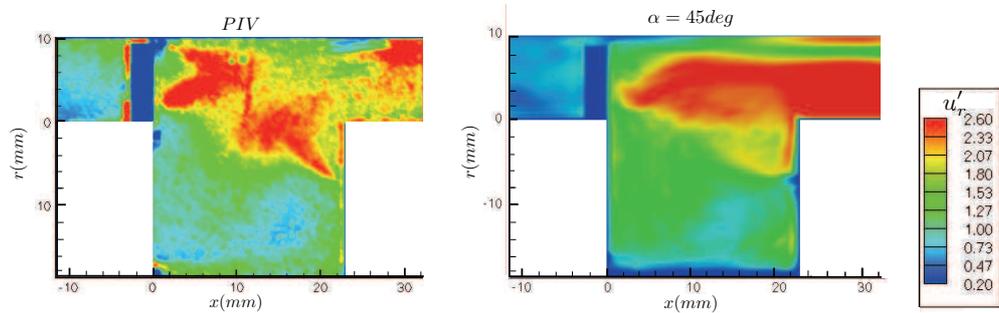


FIGURE 8.13: Fluctuation de la vitesse radiale en différentes positions suivant l'axe  $x$  derrière un barreau (gauche : PIV, droite : LES).

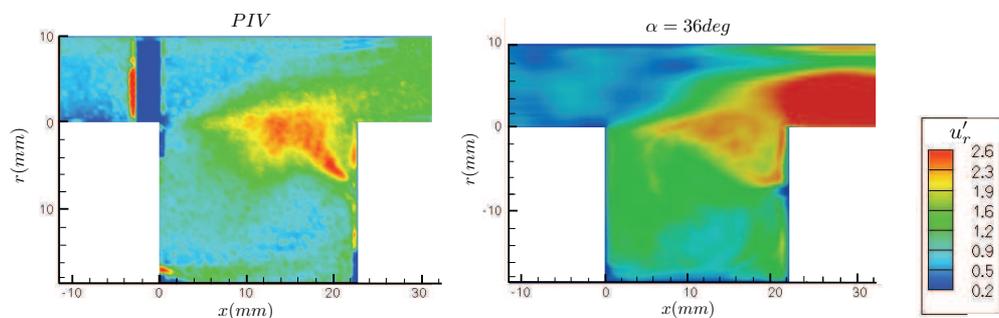


FIGURE 8.14: Fluctuation de la vitesse radiale en différentes positions suivant l'axe  $x$  entre deux barreaux (gauche : PIV, droite : LES).

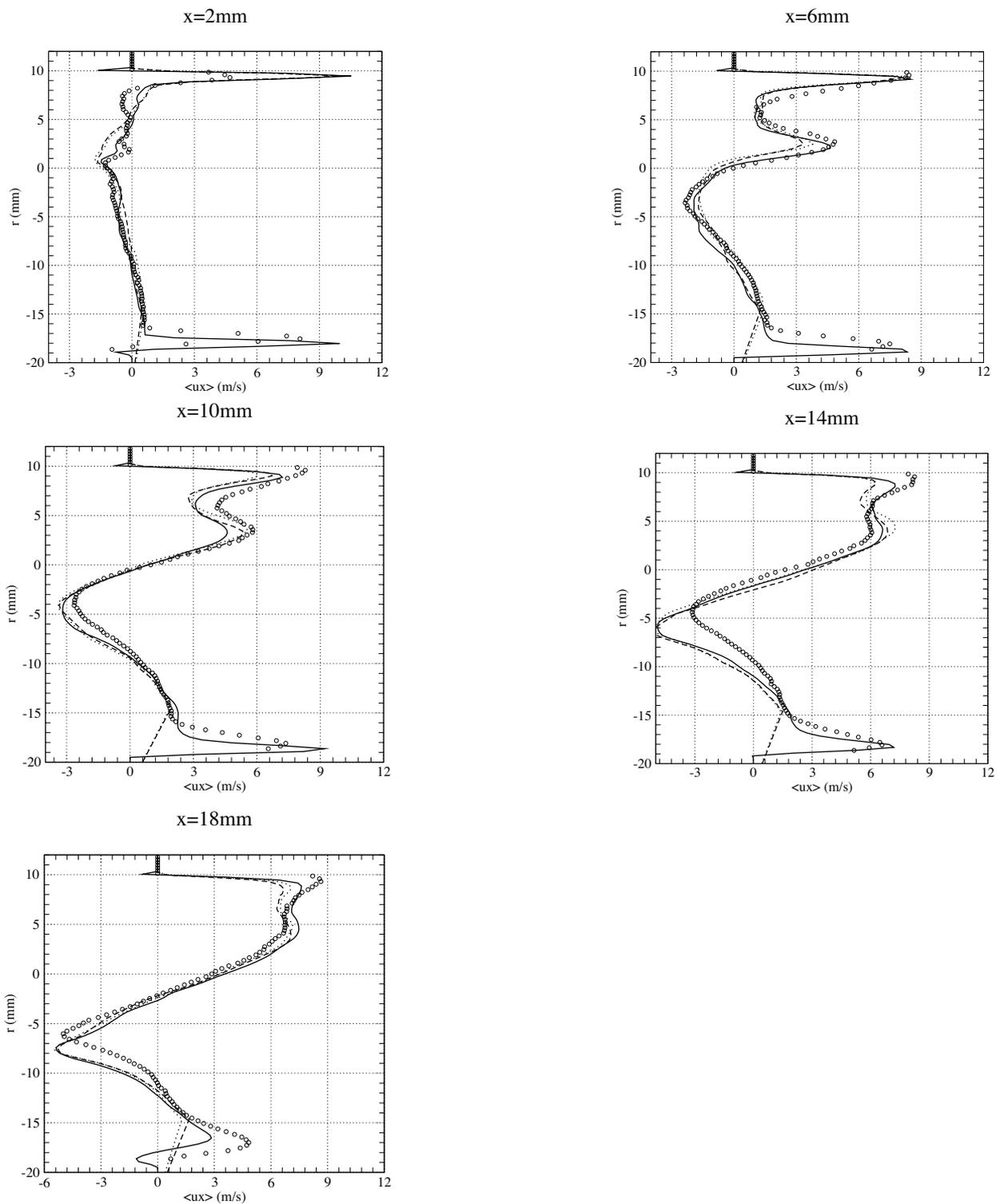
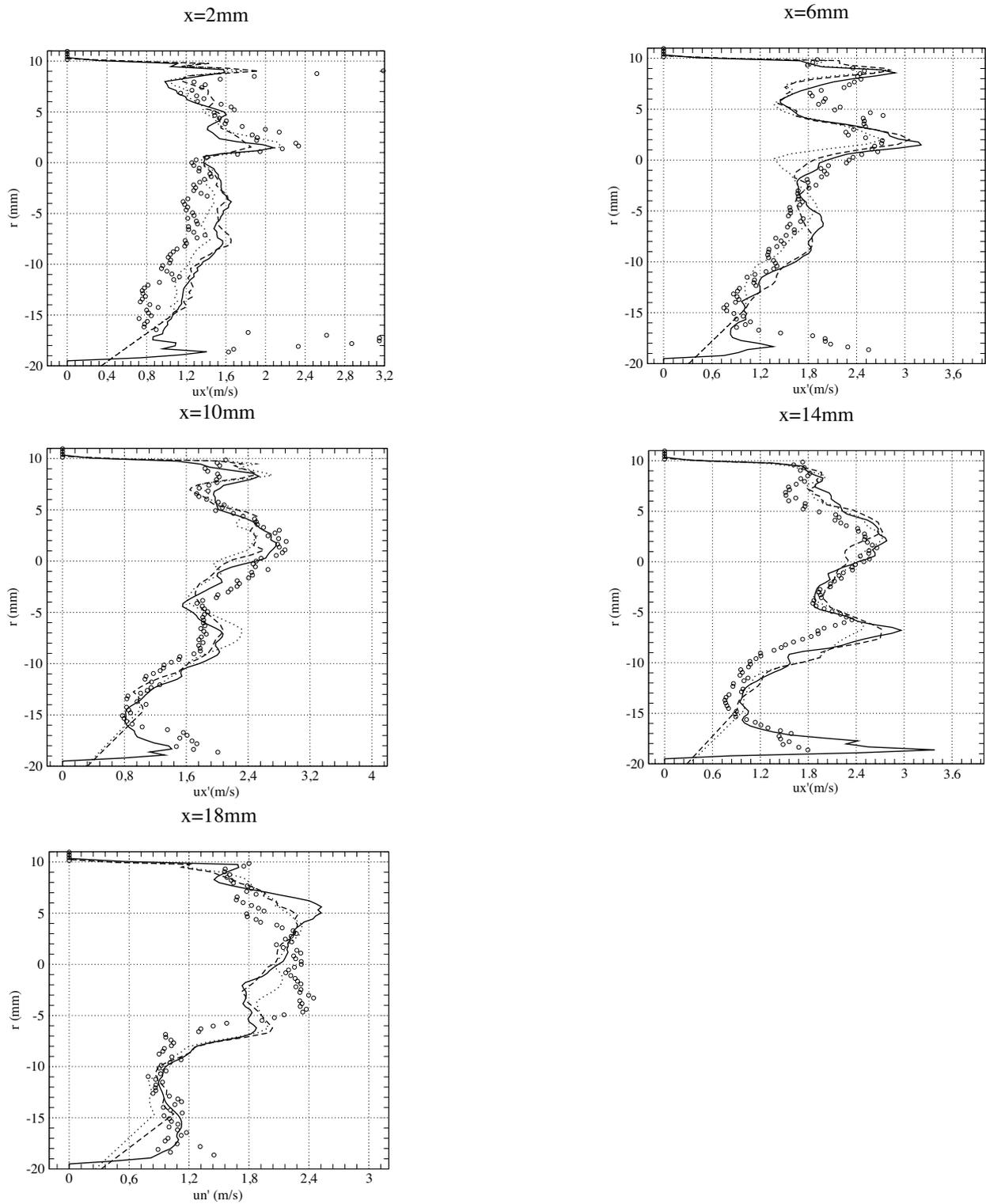
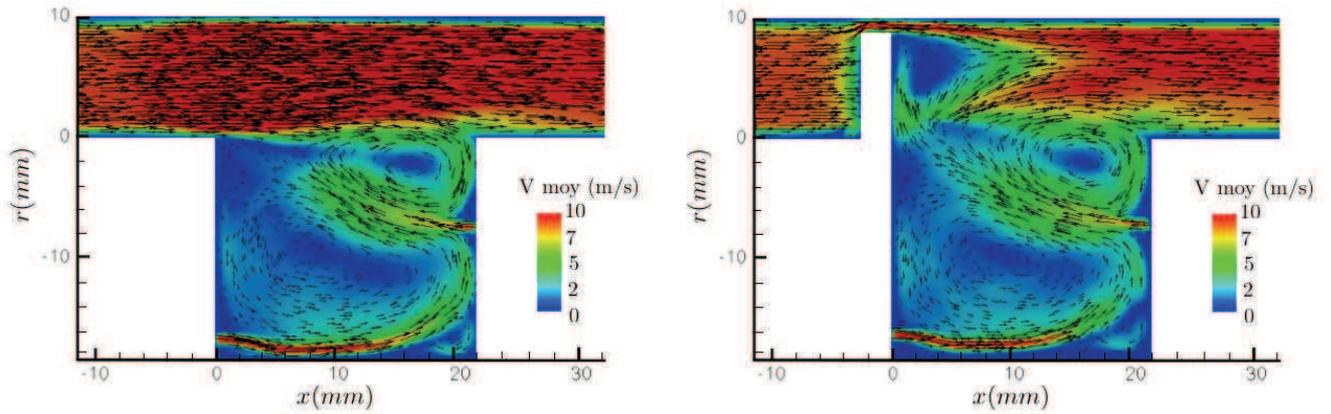


FIGURE 8.15: Profils radiaux de la vitesse moyenne longitudinale derrière un barreau pour différentes positions longitudinales :- - - angle de  $27^\circ$ ,  $\cdots$  angle de  $63^\circ$ , — angle de  $45^\circ$  et  $\circ$  données expérimentales.



**FIGURE 8.16:** Profils radiaux de la fluctuation de la vitesse moyenne longitudinale derrière un barreau pour différentes positions longitudinales : - - - angle de  $27^\circ$ ,  $\cdots$  angle de  $63^\circ$ , — angle de  $45^\circ$  et  $\circ$  données expérimentales.



**FIGURE 8.17:** Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) avec les vecteurs vitesses pour le cas M20C07A10.

### 8.2.3 Structure de l'écoulement moyen

La figure 8.17 présente le champ de vitesse moyen superposé à la carte de la norme de la vitesse moyenne dans un plan derrière un barreau ou au milieu. Elle souligne l'existence d'une forte zone de recirculation au fond de la cavité ainsi que d'une seconde zone tourbillonnaire au niveau du coin aval de la cavité, juste au dessus de l'injection d'air. On note également la présence d'une troisième zone de recirculation, moins intense que les précédentes, au niveau du coin inférieur aval. Le phénomène d'aspiration du barreau apparaît sur le plan derrière un barreau et contribue principalement au phénomène de vidange de la cavité. Cette zone assure le mélange entre les gaz issus de la cavité et l'écoulement principal. Elle est particulièrement soulignée par les cartes de la vitesse moyenne radiale derrière un barreau (Figure 8.9). Les champs moyens montrent que la cavité se vide également en faible proportion aux abords du coin aval où une faible partie est éjectée lors de l'impact de la seconde zone de recirculation sur la paroi aval.

Les figures 8.11 et 8.12 montrent que les maxima des fluctuations de la vitesse longitudinale se situent dans la couche de mélange (taux de fluctuations maximal  $u'_x/U_\infty \simeq 38\%$ ). On note également la présence d'une poche de fluctuations au coin inférieur aval de la cavité liée à la déviation du jet pilote et en aval de l'interstice entre les barreaux et la paroi horizontale supérieure. Que ce soit dans un plan médian ou derrière un barreau, le champ de la fluctuation de la vitesse longitudinale est très semblable. Seuls les niveaux impliqués diffèrent légèrement.

Les figures 8.13 et 8.14, relatives aux fluctuations de la vitesse radiale témoignent d'une dynamique différente dans le plan médian et derrière un barreau. La présence du barreau crée une zone dépressionnaire à l'origine d'intenses fluctuations de la vitesse radiale dans son sillage (taux de fluctuations maximal  $u'_r/U_\infty \simeq 42\%$ ). Pour le plan médian, la poche de fluctuations radiales souligne l'importance du deuxième mode de vidange de la cavité par la seconde structure tourbillonnaire située dans la partie supérieure de la cavité. Les taux de fluctuations restent importants à la sortie de la cavité en raison de l'intense activité tourbillonnaire générée à la fois par le barreau et l'évacuation de la cavité. La norme des fluctuations de la vitesse longitudinale et radiale est également représentée sur la figure 8.18.

### 8.2.4 Dynamique de la chambre

Pour évaluer la présence d'un éventuel lâcher de tourbillons, des capteurs de pression et de vitesse ont été positionnés en différents points de l'écoulement comme le montre la figure 8.19 pour un plan situé derrière un barreau et entre deux barreaux. Le choix du positionnement des différents capteurs est le même que celui retenu dans l'expérience pour les mesures ADL. De manière similaire aux

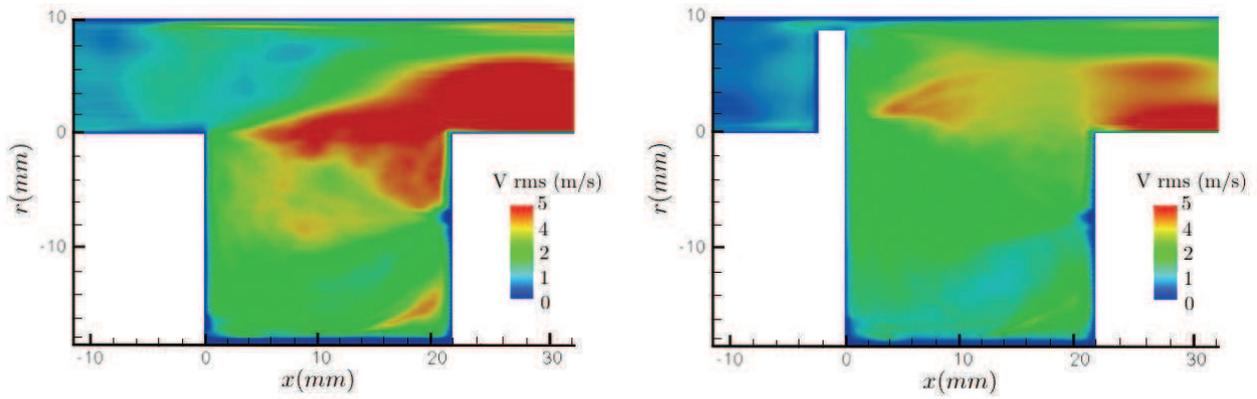


FIGURE 8.18: Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10.

relevés expérimentaux, le signal de pression ne manifeste pas de fréquences particulières associées à un phénomène de lâcher tourbillonnaire. Le signal de pression issu du capteur 7 est représenté sur la figure 8.20 où on observe une variation maximale de 350 Pa.

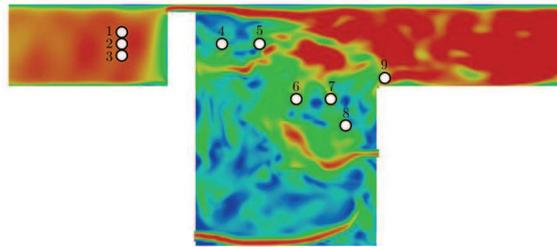


FIGURE 8.19: Position des capteurs de pression et vitesse.

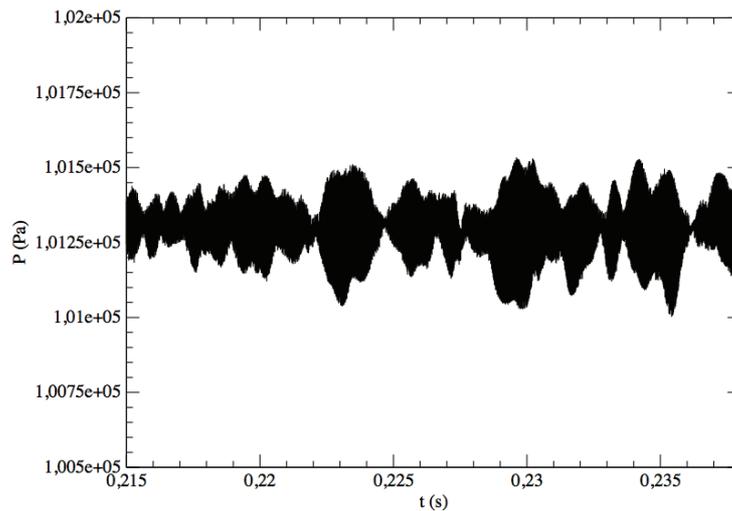
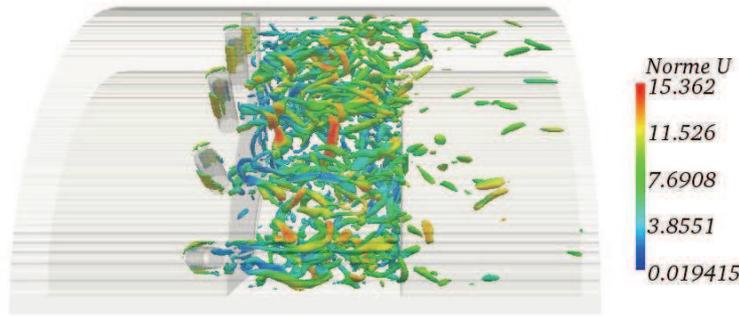
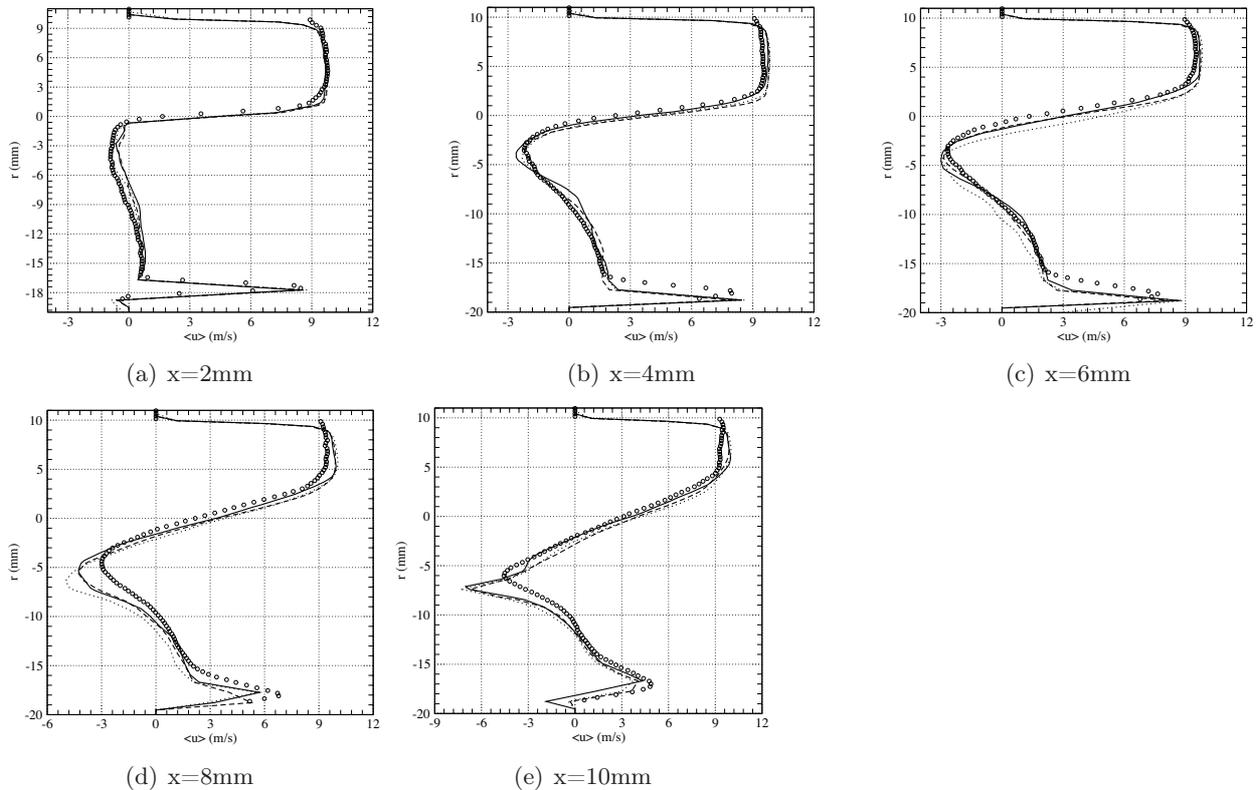


FIGURE 8.20: Signal de pression au cours du temps issu du capteur 7 dans un plan derrière un barreau.

La dynamique de cette cavité est illustrée sur la figure 8.21 qui souligne l'importance de l'activité tourbillonnaire en aval des barreaux.



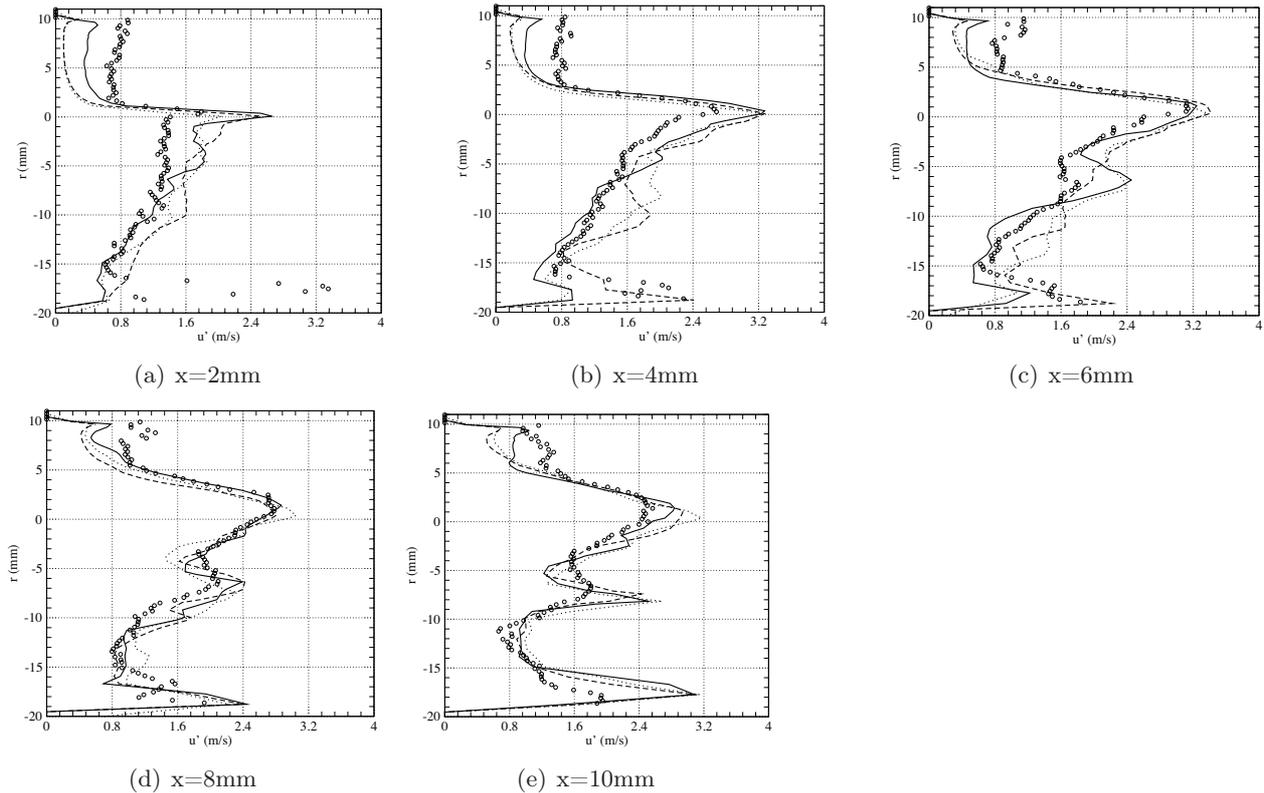
**FIGURE 8.21:** Contour d'un critère  $Q$  ( $Q = 9.10^7 s^{-2}$ ) colorié par la norme de la vitesse 3D pour la configuration nominale.



**FIGURE 8.22:** Profils radiaux de la vitesse moyenne longitudinale entre deux barreaux pour différentes positions longitudinales : - - - MILES,  $\cdots$  VM, — MILES avec IT et  $\circ$  données expérimentales

### 8.2.5 Impact du modèle de sous-maille et du modèle d'injection turbulente

Nous avons réalisé différentes simulations avec un débit principal d'air modifié ( $Q_a = 18g/s$ ) et deux modèles SGS : l'approche MiLES et le modèle Vreman ainsi qu'avec et sans une injection turbulente avec un modèle de Klein. Similairement à l'étude de la cavité transsonique, les deux modèles de sous-maille conduisent à des moments de premier et second ordre sur les composantes de vitesse sensiblement identiques. De même l'ajout ou non d'une injection turbulente n'affecte pas les statistiques obtenues, l'essentiel des mouvements turbulents étant généré par les barreaux et la cavité. Ainsi, les figures 8.22 et 8.23 exposent les profils radiaux de la vitesse moyenne longitudinale et de la fluctuation de la vitesse longitudinale, pour un plan situé entre deux barreaux et trois approches de modélisation : l'approche MILES, le modèle de Vreman et l'approche MILES couplée à un modèle d'injection turbulente (IT pour Injection Turbulente).



**FIGURE 8.23:** Profils radiaux de la fluctuation de la vitesse moyenne longitudinale entre deux barreaux pour différentes positions longitudinales : - - - MILES, . . . VM, — MILES avec IT et  $\circ$  données expérimentales.

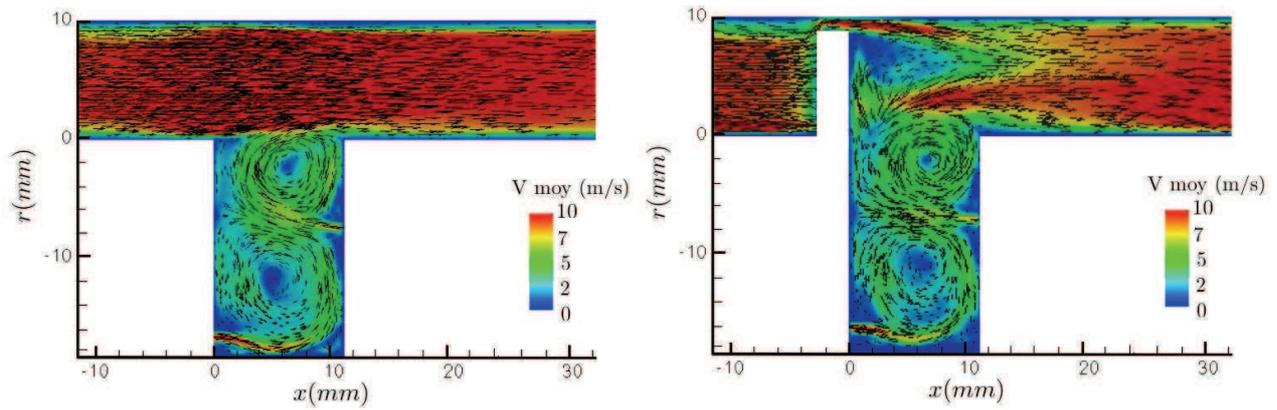
Les trois stratégies de modélisation fournissent des champs relativement semblables.

### 8.3 Effet d'une modification des paramètres géométriques de la chambre

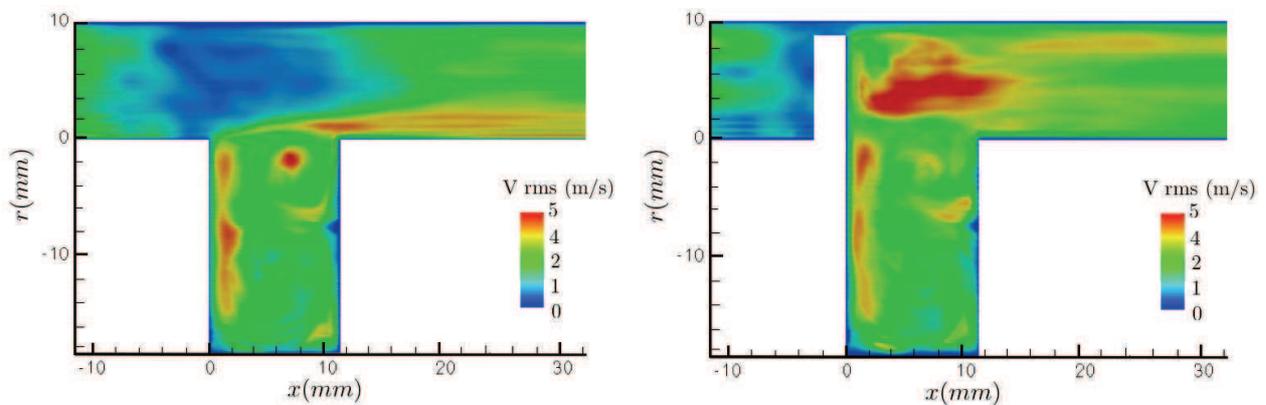
Cette section est destinée à l'étude de l'influence des paramètres géométriques de la chambre et, en particulier, la longueur de la cavité sur la structure de l'écoulement.

#### 8.3.1 M20C07A10\_L11

Les figures 8.24 et 8.25 présentent le champ de la vitesse moyenne superposé à la carte de la norme de la vitesse moyenne ainsi que la carte de la norme des fluctuations de vitesse dans un plan derrière un barreau ou au milieu pour une cavité réduite de moitié en longueur. On constate alors que la structure tourbillonnaire au-dessus de l'injecteur d'air a fortement augmenté et occupe désormais toute la partie supérieure de la cavité. La cavité se vide toujours principalement au niveau du bord amont de la cavité et en faible partie au niveau du bord aval. L'interaction des deux structures tourbillonnaires avec la paroi amont justifie la présence de fluctuations de vitesse plus importantes. La zone de dépression derrière le barreau est également le siège d'intenses fluctuations de vitesse. Le vecteur principal de vidange de la cavité étant cette zone de dépression, les fluctuations de vitesse en aval de la cavité sont beaucoup moins importantes que dans le cas nominal.



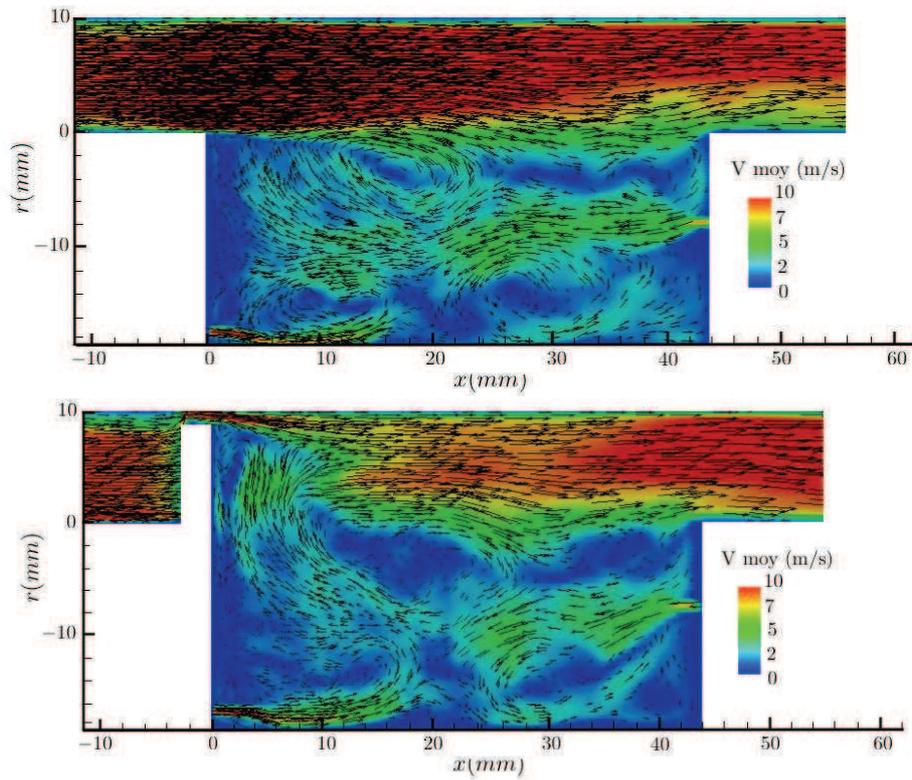
**FIGURE 8.24:** Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10\_L11.



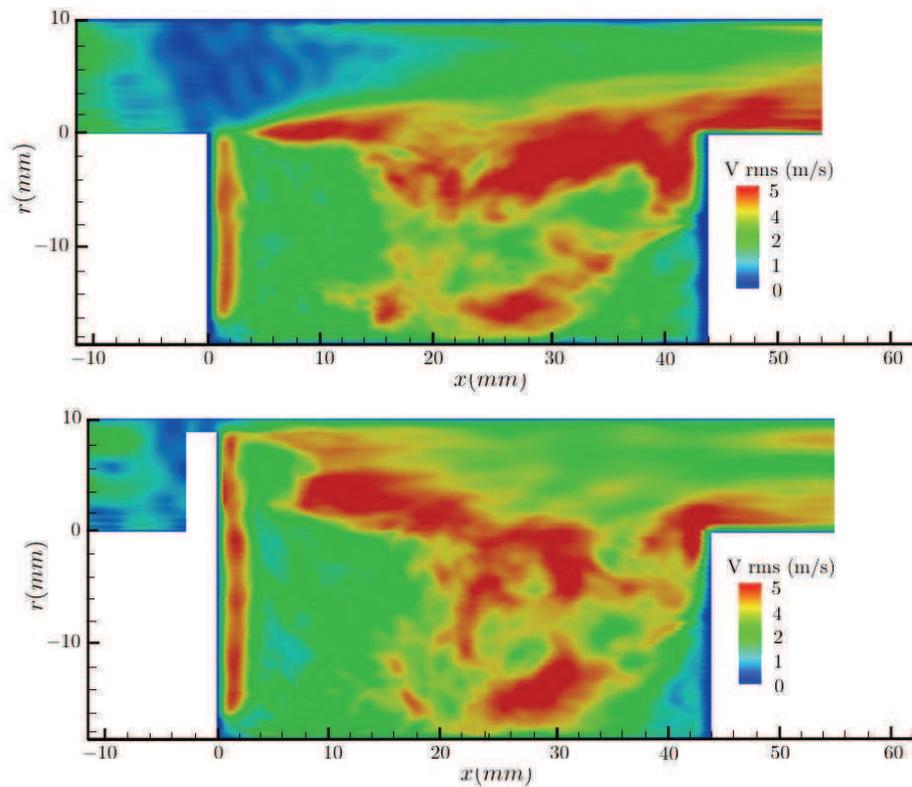
**FIGURE 8.25:** Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10\_L11.

### 8.3.2 M20C07A10\_L44

L'augmentation de la taille de la cavité d'un facteur deux donne naissance à de nombreuses structures tourbillonnaires comme l'illustre la figure 8.26. En particulier, les deux injecteurs génèrent deux tourbillons dans la partie inférieure de la cavité. On note également la présence de deux structures tourbillonnaires contrarotatives dans la partie supérieure de la cavité. La dépression créée par la présence du barreau assure toujours l'essentiel de la vidange de la cavité. Le niveau des fluctuations de vitesse, illustré sur la figure 8.27, est important dans la couche de mélange. On observe également la présence d'une poche de fluctuations de vitesse relativement intense au niveau de la partie inférieure aval de la cavité. Cette poche marque l'interaction de la structure tourbillonnaire avec la paroi horizontale inférieure.



**FIGURE 8.26:** Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10\_L44.



**FIGURE 8.27:** Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10\_L44.

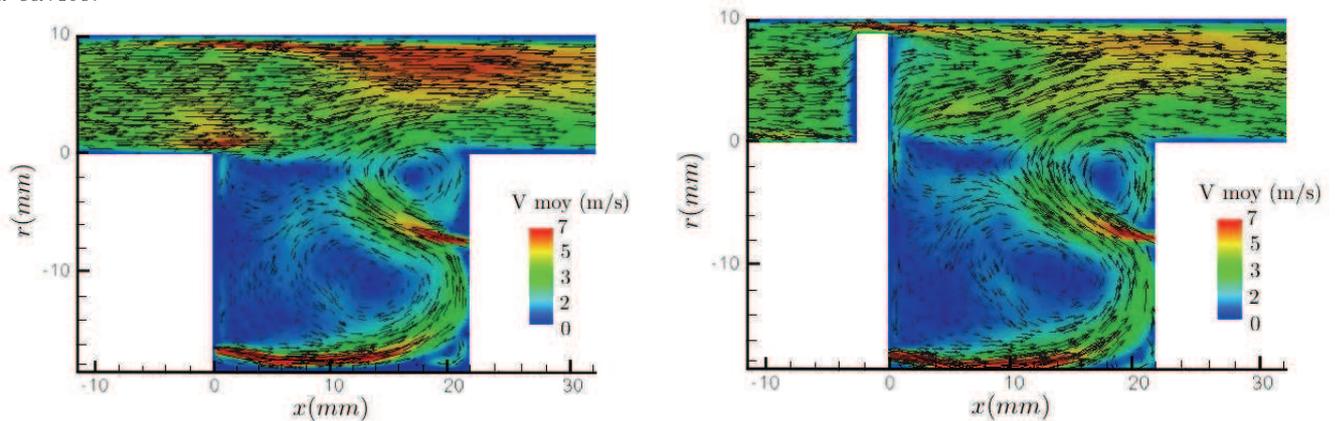
## 8.4 Effet d'une modification du débit de l'écoulement principal

Cette section présente l'évolution des structures moyennes de l'écoulement suite à un changement du débit principal.

### 8.4.1 M10C07A10

#### 8.4.1.1 Écoulement moyen

Ce premier cas repose sur l'investigation de l'écoulement affleurant une cavité avec une réduction d'un facteur deux sur le débit principal. Les structures moyennes de l'écoulement, dans un plan médian et derrière un barreau sont illustrées sur la figure 8.28. La figure 8.29 compare les comportements moyens observés derrière un barreau au cours de la simulation et expérimentalement. La déviation du jet aval, légèrement moins marquée dans l'expérience, pourrait s'expliquer par un débit aval quelque peu différent. Dans l'ensemble, la dynamique tourbillonnaire moyenne est reproduite de manière satisfaisante. Ces figures illustrent la réduction de la structure tourbillonnaire située dans la partie inférieure de la cavité. On remarque également l'existence d'une zone de recirculation au niveau du coin amont de la cavité qui assure la communication entre l'écoulement principal et les gaz issus de la cavité. La dépression créée par le barreau semble plus faible que le cas nominal puisque le tourbillon à l'interface entre la cavité et l'écoulement principal limite la remontée des gaz issus de la cavité.



**FIGURE 8.28:** Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M10C07A10.

De même les niveaux de fluctuations sont exposés pour un plan situé entre deux barreaux et derrière un barreau sur la figure 8.30. Le niveau des fluctuations derrière le barreau est beaucoup plus faible que dans le cas nominal ce qui renforce l'hypothèse d'un faible pouvoir dépressionnaire pour ce faible débit. On peut donc supposer que le mélange ne sera pas optimal à cette vitesse. On observe principalement deux poches de fluctuations de vitesse associées à l'impact de la structure tourbillonnaire inférieure contre la paroi aval et au tourbillon supérieur.

#### 8.4.1.2 Dynamique de la cavité

Les mesures ADL, pour ce faible débit, ont révélé la présence d'un battement à une fréquence de 49 Hz, associé à un phénomène de lâcher de tourbillons. Pour mettre en évidence cette fréquence, le spectre de la vitesse longitudinale expérimentale a été déterminé. Nous adoptons la même approche. Le spectre de la vitesse longitudinale est déterminé à l'aide de la méthode de Burg (minimisation d'entropie) basée sur 5 000 pôles et est représenté sur la figure 8.31. Les spectres de la vitesse longitudinale présentent les mêmes fréquences quelque soit le capteur utilisé (capteur 2, 5 et 7 de la figure 8.19).

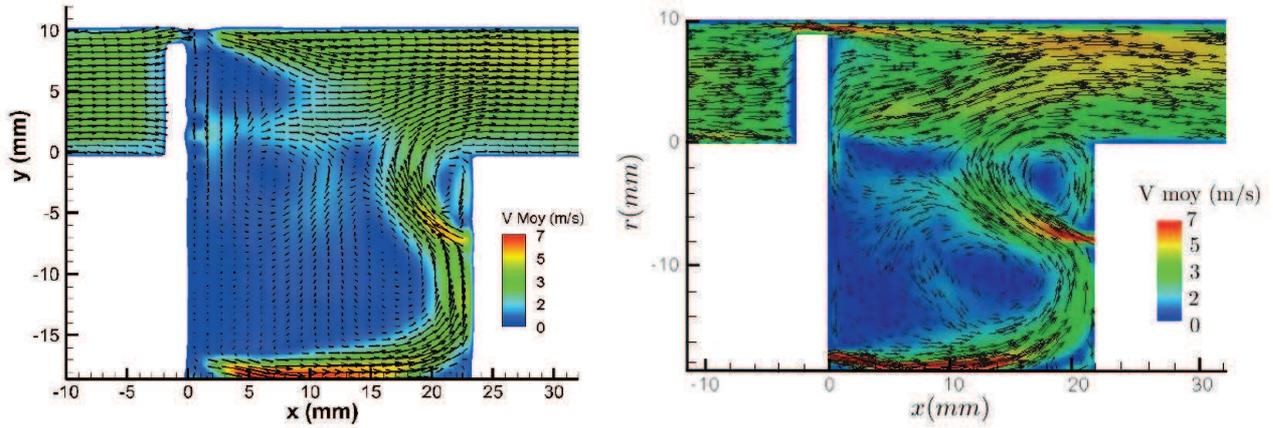


FIGURE 8.29: Norme de la vitesse moyenne et vecteurs 2D moyens dans un plan situé derrière un barreau. Données expérimentales (droite) et LES (gauche) pour le cas M10C07A10.

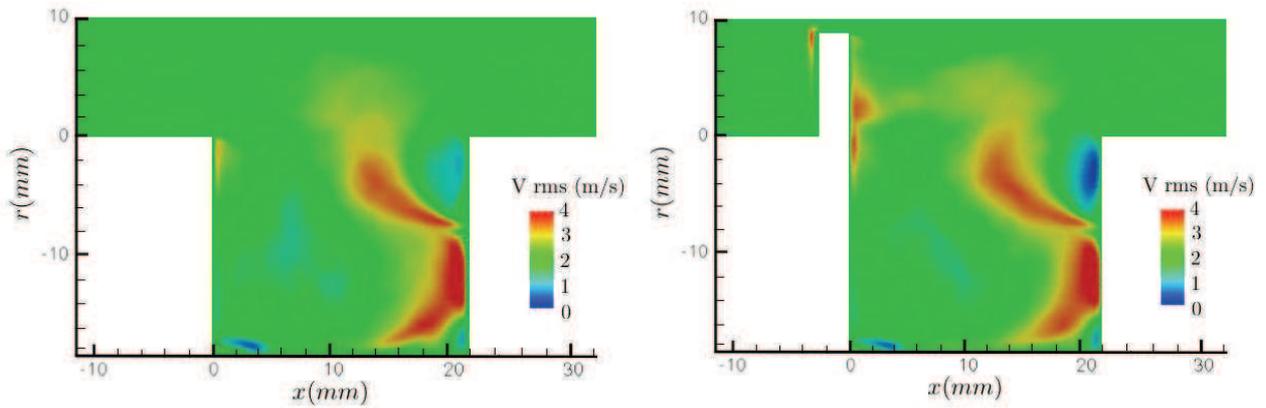


FIGURE 8.30: Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M10C07A10.

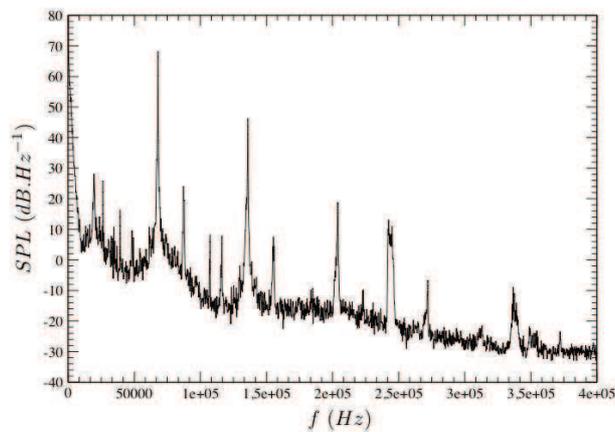


FIGURE 8.31: Spectre de la vitesse longitudinale issu du capteur 7 et obtenu avec la méthode de Burg et 5000 pôles pour le cas M10C07A10.

Ils sont caractérisés par la présence de pics d'amplitude à des fréquences discrètes, concentrées sur les hautes fréquences du signal. Au vu des ordres de grandeur impliqués, il semblerait qu'il s'agisse de bruit numérique. En effet, en prenant la plus petite longueur d'une cellule ( $\Delta x = 188\mu m$ ) et la vitesse débitante ( $U_\infty = 3,86m/s$ ), il vient  $f = U/\Delta x \simeq 20500Hz$ . La première fréquence discrète étant supérieure à cette valeur, nous sommes bien en présence de bruit numérique.

La faible fréquence associée au lâcher tourbillonnaire n'apparaît pas. En effet, pour observer la fréquence du lâcher tourbillonnaire, le calcul aurait dû durer environ 50 fois la période du battement, soit 1s. Ce calcul présentant un pas de temps de  $4,5.10^{-7}s$ , les senseurs auraient dû être actifs au moins sur 2 222 230 itérations soit 520 heures sur 512 processeurs IBM Power6 du calculateur Vargas de l'IDRIS. Or l'acquisition des présents signaux incluent environ 5 périodes. Il est donc impossible de souligner la fréquence du battement à l'aide d'une analyse spectrale.

Pour vérifier que les fréquences observées numériquement ne sont pas attachées à des phénomènes physiques tels que le détachement tourbillonnaire, les séquences d'impact, nous calculons les fréquences prédites par les théories décrites dans le chapitre 6.

Nous sommes en régime subsonique à  $M_\infty = 0,01$ . Rappelons la formule de Rossiter :

$$St = \frac{f_n L}{U_\infty} = \frac{n - \alpha}{\frac{1}{\kappa} + M_\infty} \quad (8.11)$$

En prenant  $\alpha = 0,25$  et  $\kappa = 0,52$ , il vient pour le mode  $m = 1$ , la fréquence  $f_1 = 68$  Hz et  $f_1 = 74$  Hz pour  $\kappa = 0,57$ . Les observations expérimentales et numériques ne sont pas en accord avec les prédictions du modèle de Rossiter et attestent que nous ne sommes pas en présence d'un mécanisme d'oscillations auto-entretenu tel que celui décrit par Rossiter. Cette observation rejoint les études décrites dans le chapitre 6 qui mentionnent l'absence de bouclage aéroacoustique à faible nombre de Mach.

Nous nous intéressons également aux modes acoustiques de la cavité pour voir si un phénomène de résonance pourrait expliquer la présence des modes observés. Dans le cas d'une cavité close, les modes acoustiques de la cavité sont déterminées par la relation [8] :

$$f = \frac{a}{2d} \quad (8.12)$$

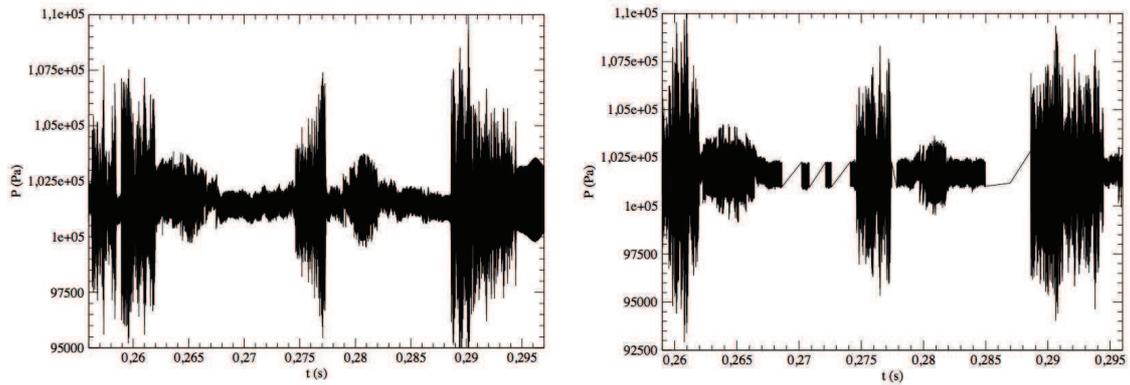
avec  $a$  la célérité du son dans la cavité et  $d$  l'une des dimensions géométriques (soit la longueur  $L$  ou la profondeur  $D$ ). Nous pouvons calculer le mode acoustique de profondeur, noté  $f_D$  et le mode acoustique longitudinal  $f_L$ . On obtient :  $f_D = 9150$  Hz et  $f_L = 7900$  Hz. Ces modes n'apparaissent pas sur notre spectre. Par ailleurs, les modes observés sont beaucoup plus haut que les modes acoustiques de la cavité (facteur 7 entre le premier mode observé et le mode de profondeur).

Les figures 8.32 et 8.33 présentent une partie des signaux acquis par les capteurs 5 et 7 dans un plan médian et derrière un barreau.

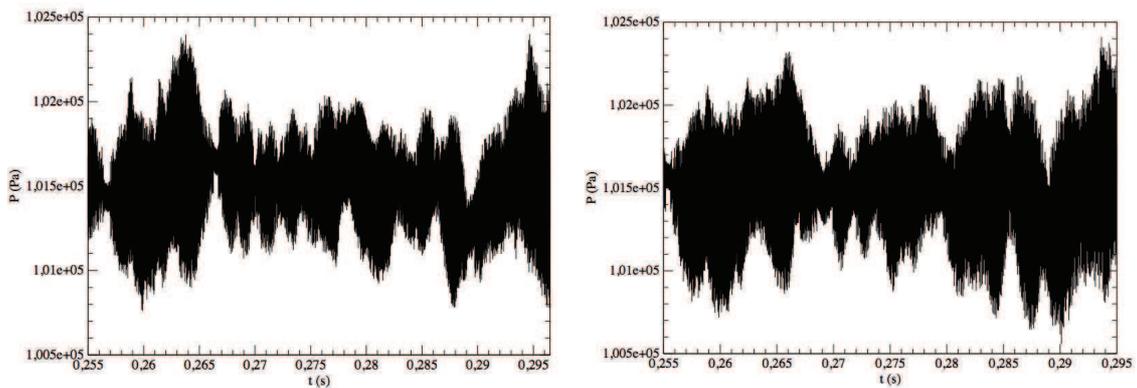
La position de plan de sonde (médian ou derrière un barreau) influe peu sur la forme des signaux de pression. Par contre, l'emplacement selon la direction longitudinale modifie fortement la forme des signaux. Alors que le capteur 5 présente d'importantes fluctuations de pression ( $\Delta P_{max} = 17500$  Pa) associé à un phénomène de battement à une fréquence d'environ 55 Hz (évaluée en estimant la période sur laquelle le motif de pression se reproduit), le capteur 7 ne souligne pas la présence d'un quelconque lâcher tourbillonnaire ( $\Delta P_{max} = 1600$  Pa). L'amplitude des fluctuations de pression entre les capteurs 5 et 7 varie ainsi d'un facteur 10. Notons par ailleurs, que par rapport au cas nominal caractérisé par une amplitude maximale de 350 Pa, la présente configuration implique des niveaux de fluctuations de pression beaucoup plus élevé.

La dynamique de l'écoulements est soulignée sur la figure 8.34 avec un iso-contour du critère  $Q$  qui met en évidence les deux principales structures de l'écoulement ; la première associée à un tourbillon piégé dans la cavité et la seconde caractéristique du détachement tourbillonnaire.

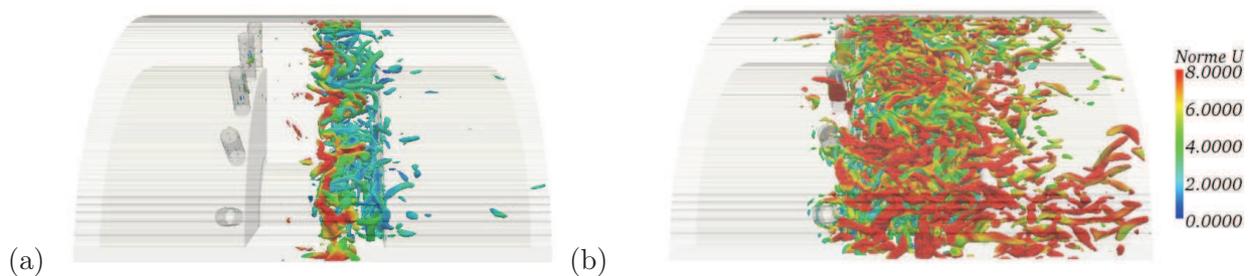
## CHAPITRE 8. DYNAMIQUE NON RÉACTIVE D'UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



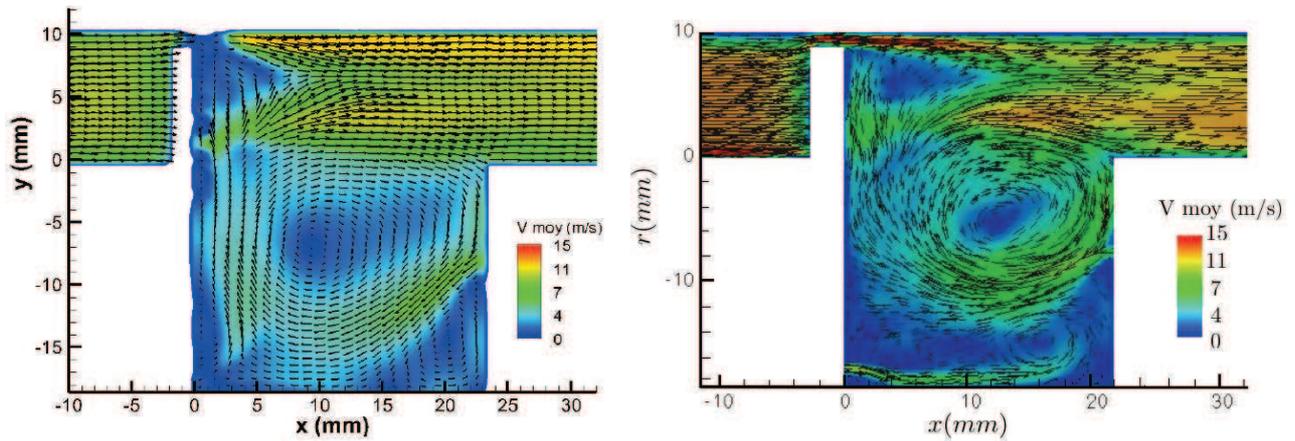
**FIGURE 8.32:** Signal de pression pour le capteur 5 positionné derrière un barreau (gauche) et dans un plan médian (droite) pour la configuration M10C07A10.



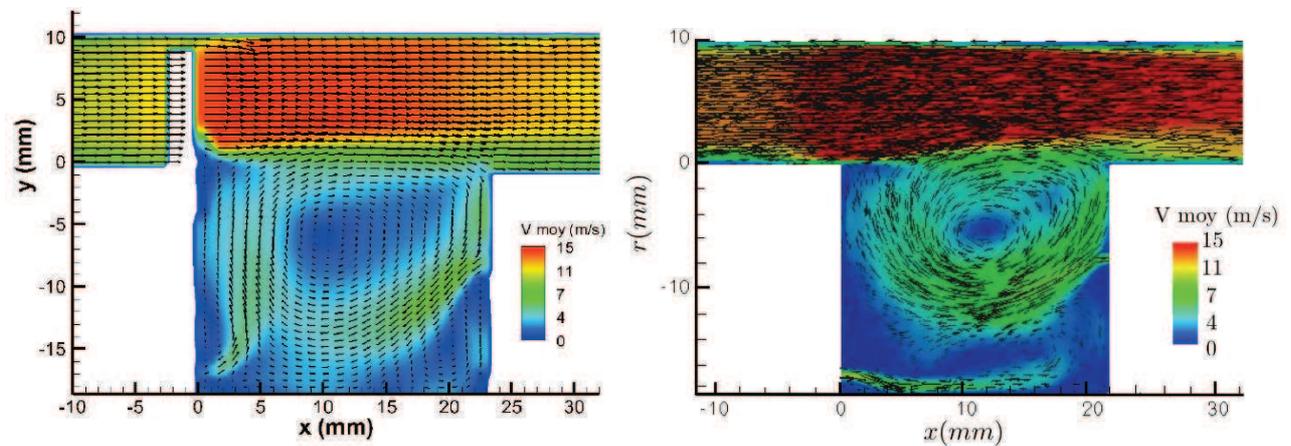
**FIGURE 8.33:** Signal de pression pour le capteur 7 positionné derrière un barreau (gauche) et dans un plan médian (droite) pour la configuration M10C07A10.



**FIGURE 8.34:** Iso-contour du critère  $Q$  ( $Q = 9,2 \cdot 10^7 s^{-2}$ ) pour la configuration M10C07A10 en deux instants : (a) la structure est piégée dans la cavité ( $t = 0,229s$ ), (b) on assiste au lâcher tourbillonnaire ( $t = 0,239s$ ).



**FIGURE 8.35:** Norme de la vitesse moyenne et vecteurs 2D moyens dans un plan situé derrière un barreau. Données expérimentales (droite) et LES (gauche) pour le cas M30C07A10.

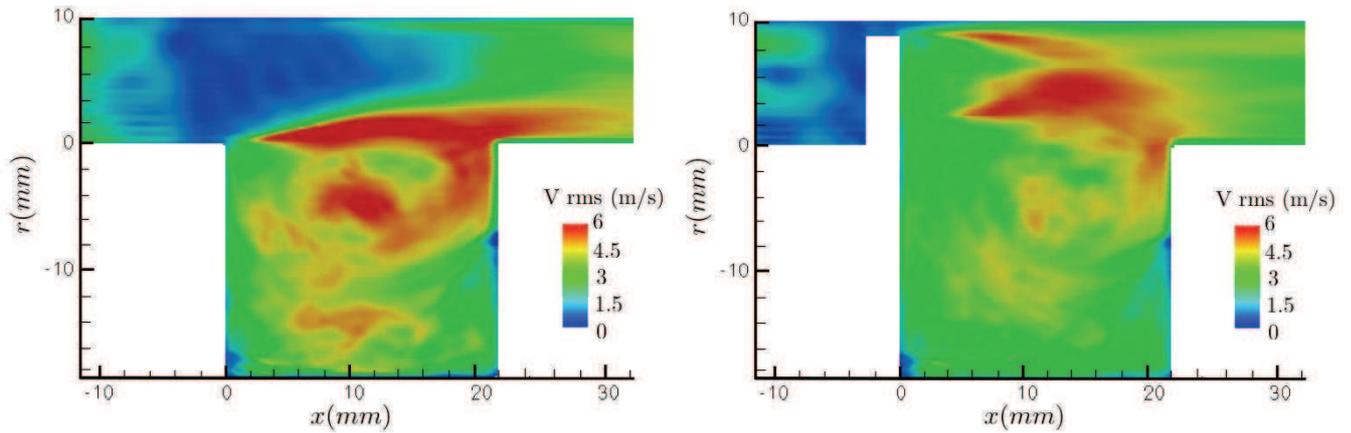


**FIGURE 8.36:** Norme de la vitesse moyenne et vecteurs 2D moyens dans un plan situé entre deux barreaux. Données expérimentales (droite) et LES (gauche) pour le cas M30C07A10.

Au vu des précédentes remarques, on peut donc s'attendre à ce que la dynamique intense de la cavité se couple avec les phénomènes réactifs pour générer d'importantes instabilités de combustion. Cette hypothèse fut validée par l'expérience pendant laquelle la flamme a manifesté d'importants mouvements instationnaires. Nous écarterons donc cette configuration au cours de notre étude réactive.

#### 8.4.2 M30C07A10

Lorsque la vitesse de l'écoulement affleurant la cavité est augmentée, la structure de l'écoulement dans la cavité est fortement modifiée. La structure tourbillonnaire dans la partie supérieure de la cavité est amplifiée et entraîne une proportion plus importante de l'écoulement principal dans la cavité comme le souligne les cartes de la vitesse moyenne expérimentale et issue de la simulation pour un plan derrière un barreau (figure 8.35) et dans un plan médian (figure 8.36). Les données expérimentales et numériques sont en bon accord. La structure tourbillonnaire supérieure s'est intensifiée au détriment du tourbillon inférieur. Par rapport au cas précédent associé à une diminution du débit principal, l'effet dépressionnaire du barreau est de nouveau opérationnel et amplifie le mélange entre les gaz issus de la cavité et l'écoulement principal. On constate également que le sens de rotation de la structure tourbillonnaire principale, dans la cavité, s'est inversé.

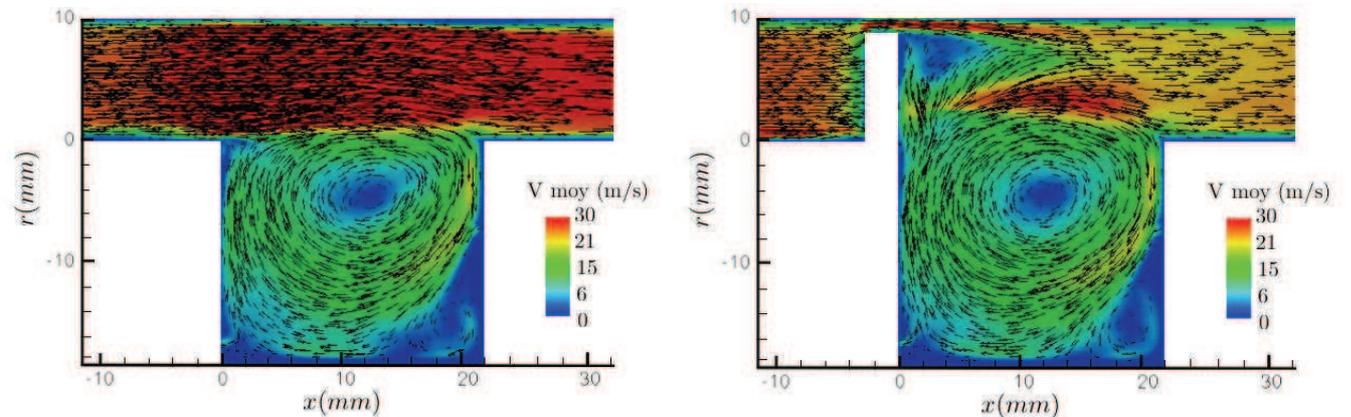


**FIGURE 8.37:** Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M30C07A10.

La norme des fluctuations de vitesse longitudinale et radiale est reportée sur la figure 8.37 et s'est intensifiée, par rapport au cas nominal, dans la couche de mélange. Le sillage des barreaux manifeste également des poches de fluctuations, à l'origine d'un meilleur mélange.

### 8.4.3 M60C07A10

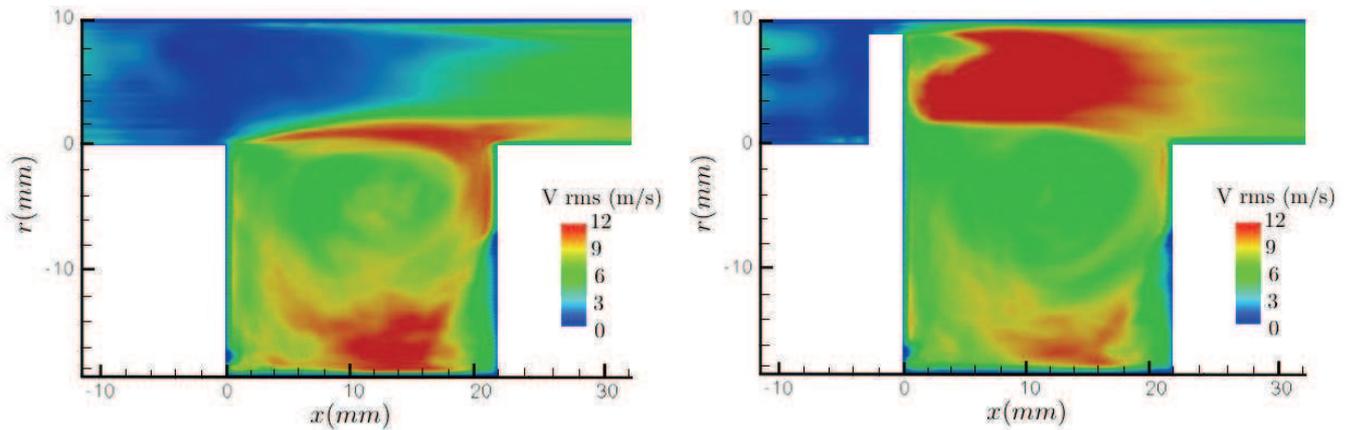
En augmentant d'avantage le débit, la structure tourbillonnaire s'intensifie et occupe toute la cavité. L'entraînement de l'écoulement principal dans la cavité se retrouve par la même amplifié. La dynamique moyenne est illustrée sur les figures 8.38 et 8.39.



**FIGURE 8.38:** Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M60C07A10.

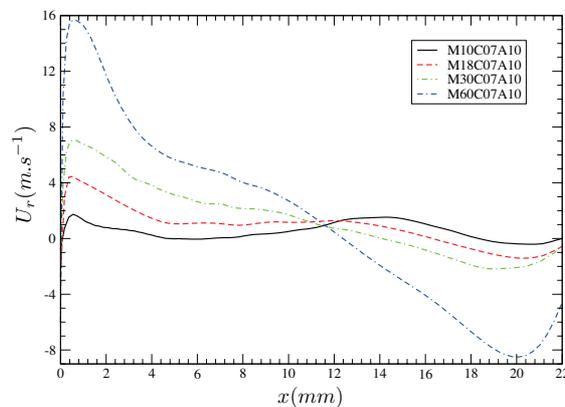
### 8.4.4 Pouvoir d'aspiration du barreau en fonction des débits

Le lien principal entre l'écoulement principal et la cavité repose sur l'existence d'une zone de dépression derrière les barreaux. L'aspiration derrière le barreau est principalement pilotée par le débit principal comme le souligne les précédentes études à débit variable. Nous avons donc reporté, pour chaque débit étudié, l'évolution de la vitesse radiale légèrement au-dessus du plan rasant la cavité (à 1 mm de ce plan rasant) en fonction de la position longitudinale (figure 8.40). A mesure que le débit principal augmente, l'aspiration derrière le barreau croît. Ainsi, pour une vitesse de l'écoulement principal de 3,5 m/s (M10C07A10), la vitesse derrière le barreau s'élève à 1,8 m/s (1,9



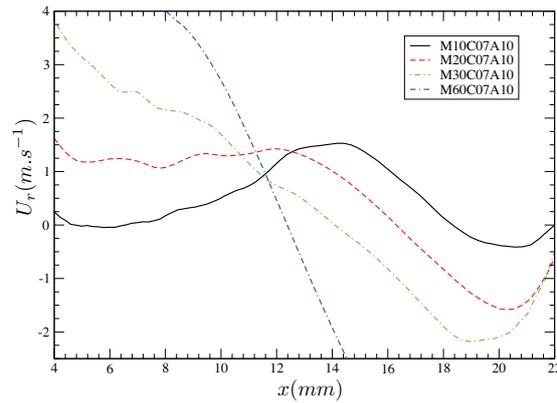
**FIGURE 8.39:** Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M60C07A10.

m/s dans l'expérience); pour une vitesse de 7,7 m/s (M20C07A10), la vitesse atteint 4,4 m/s (4,2 m/s pour les mesures expérimentales); pour une vitesse de 11 m/s (M30C07A10), elle parvient à 7 m/s (6,8 m/s pour l'expérience) et pour un écoulement principal s'élevant à 25 m/s (M60C07A10), cette vitesse d'aspiration monte jusqu'à 15,7 m/s. A noter qu'au-delà de 11 m/s, l'aspiration derrière le barreau est favorisée par la structure de l'écoulement dans la cavité. En effet, à partir de cette vitesse, la dynamique de la cavité est profondément modifiée puisque la hiérarchie des deux structures tourbillonnaires est inversée. Ainsi, alors que les faibles vitesses s'accompagnent d'une importante zone de recirculation au fond de la cavité couplée à un faible tourbillon au niveau du coin supérieur aval, l'augmentation du débit amplifie cette structure et tend à faire disparaître la dynamique tourbillonnaire engendrée par l'injecteur de cavité dans la partie inférieure.



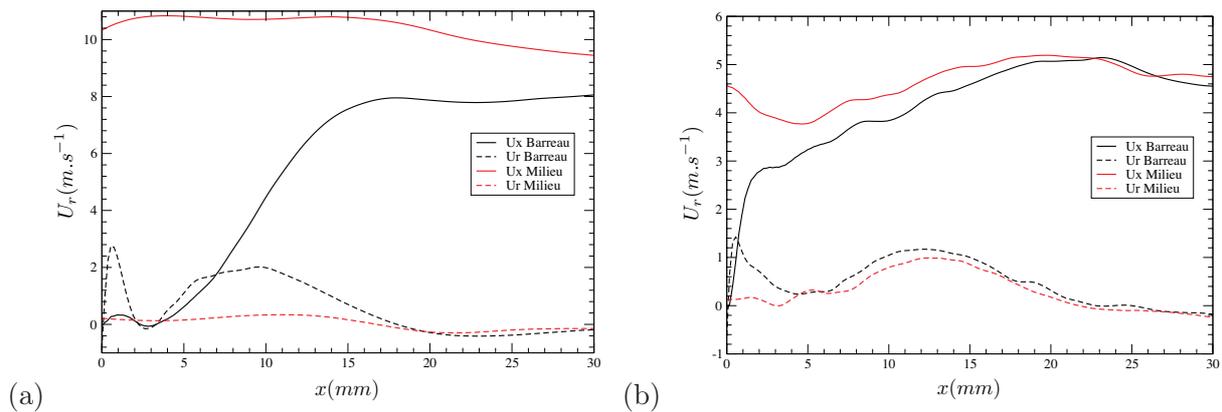
**FIGURE 8.40:** Vitesse de remontée de l'air issu de la cavité en fonction de la position le long de la cavité pour différents débits principaux dans un plan positionné à 1mm du plan rasant ( $r = -1\text{mm}$ ).

Si l'on se focalise sur la partie aval de la cavité (figure 8.41), on remarque que la pénétration de la couche de mélange dans la cavité est d'autant plus forte que la vitesse est importante. Par ailleurs, les modes d'évacuations de la cavité sont profondément modifiés suivant le débit principal. Ainsi, pour des vitesses inférieures à 11 m/s, le profil de la vitesse radiale présente une double concavité qui illustre un phénomène de vidange de la cavité sur le bord aval. L'évacuation engendrée par la zone de recirculation au-dessus de l'injecteur d'air s'amenuise à mesure que la vitesse principale augmente. En particulier, le débit nominal marque la transition vers un régime où l'air de la cavité s'évacue principalement derrière les barreaux.



**FIGURE 8.41:** Zoom sur la vitesse de remontée de l'air issu de la cavité en fonction de la position le long de la cavité pour différents débits principaux dans un plan positionné à 1mm du plan rasant ( $r = -1mm$ ).

Le faible pouvoir dépressionnaire des barreaux à faible vitesse est illustré sur la figure 8.42 où les vitesses moyennes longitudinales et radiales au milieu du canal principal sont reportées pour le cas nominal et le cas à faible débit (M10C07A10) dans un plan situé entre deux barreaux ou derrière un barreau. Notons que la cavité est située entre  $x = 0mm$  et  $x = 22mm$ . A mesure que le débit diminue, l'évacuation de la cavité dans le sillage des barreaux décroît.

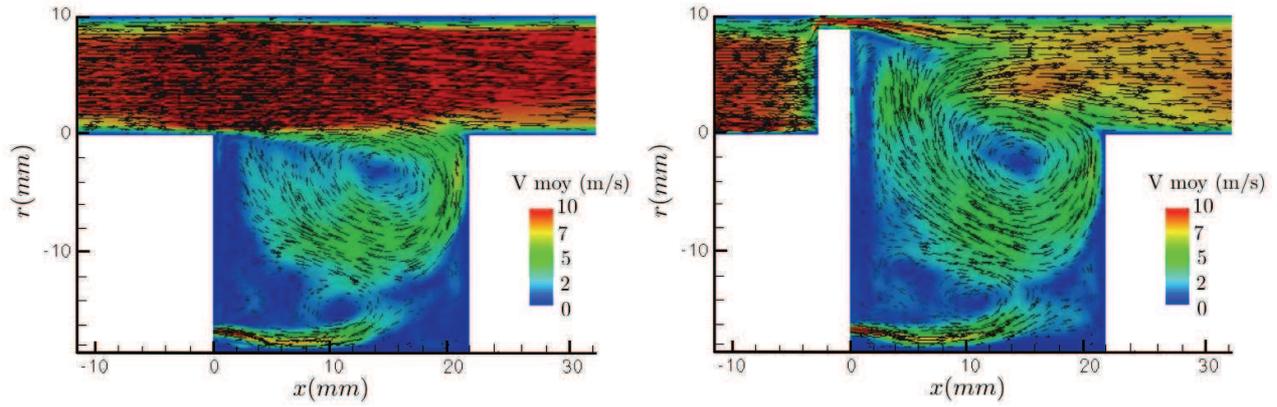


**FIGURE 8.42:** Vitesses longitudinale et radiale au milieu du canal principal ( $y=5mm$ ) en fonction de la position le long de la cavité, pour les cas M20C07A10 (a) et M10C07A10 (b).

## 8.5 Influence de l'air aval : Cas M20C07

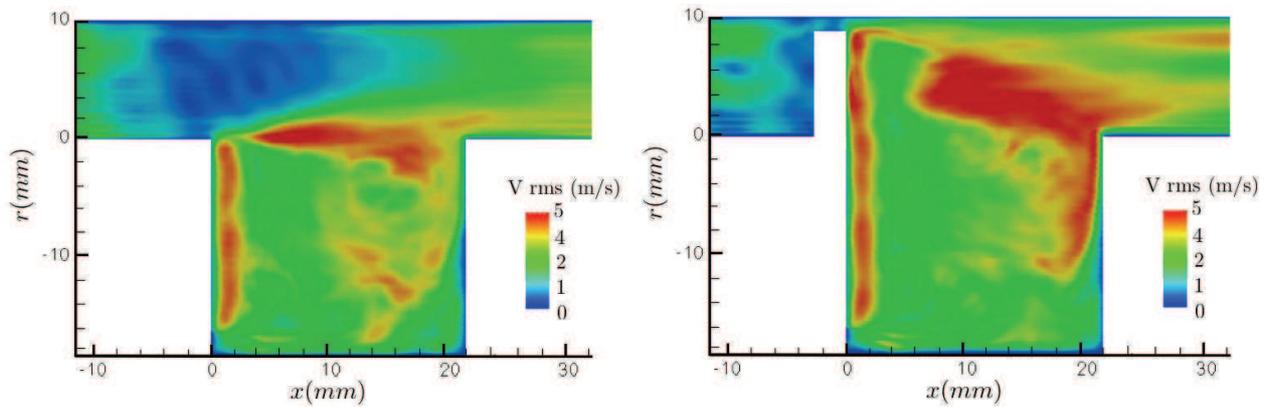
Cette partie a pour objectif de montrer l'effet de l'air aval sur la structure de l'écoulement. Nous avons donc étudié la configuration avec un débit principal identique à celui du cas nominal en l'absence de l'injecteur d'air.

La structure de l'écoulement moyen derrière un barreau ou entre deux barreaux est illustrée sur la figure 8.43. En l'absence de l'injecteur d'air, le tourbillon aval est plus important et devient le principal vecteur de l'évacuation de la cavité. Les vitesses impliquées dans cette structure sont néanmoins de plus faibles amplitudes que celles présentes avec l'injecteur. Par ailleurs, on constate que le sens de rotation du tourbillon s'est inversé. L'injecteur d'air joue donc un rôle important dans la dynamique de cavité.



**FIGURE 8.43:** Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07.

Les fluctuations de vitesse dans la cavité sont plus intenses comme le montre la figure 8.44.



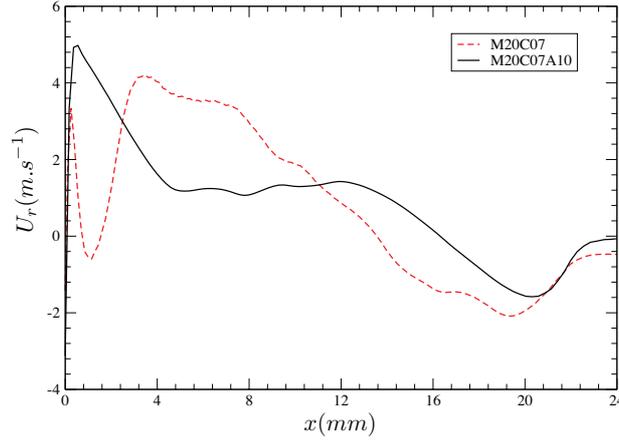
**FIGURE 8.44:** Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07.

Pour comprendre l'effet de l'injecteur d'air sur l'interaction écoulement principal/cavité, la figure 8.45 reporte l'évolution de la vitesse radiale derrière un barreau, avec et sans l'injecteur d'air. Le cas sans injecteur manifeste deux vecteurs d'évacuation : le premier, généré par le tourbillon aval et le second, par la dépression liée aux barreaux. Cette scission de l'évacuation amont résulte probablement des faibles vitesses présentes dans la cavité en l'absence d'injecteur d'air.

## 8.6 Ajout d'un swirl : M30C07A10S

Nous étudions dans cette section, l'influence de l'ajout d'un swirl sur la dynamique de la cavité. Le swirl repose sur l'ajout d'une contribution azimutale au champ de vitesse d'un écoulement. Pour les écoulements confinés, il en résulte un équilibre entre les forces centrifuges qui agissent sur les particules fluides et les forces de pression (Béer et Chigier [24]), qui génère un effet de courbure au niveau de la zone de mélange (Panda et McLaughlin [276]). Pour caractériser un écoulement swirlé (ou vrillé), le nombre de swirl  $S$  est défini :

$$S = \frac{G_\phi}{RG_x} \quad (8.13)$$



**FIGURE 8.45:** Vitesse de remontée de l'air issu de la cavité en fonction de la position le long de la cavité pour un débit principal de  $20g.s^{-1}$  (M20) et la présence ou non de l'injecteur d'air aval dans un plan positionné à 1mm du plan rasant ( $r = -1mm$ ).

avec  $R$  le rayon,  $G_\phi$  le flux axial de moment angulaire et  $G_x$  le flux axial de moment axial (ou la poussée axiale). En comparant le flux de quantité de mouvement tangentielle  $G_\theta$  au flux de quantité de mouvement dans la direction de propagation  $G_x$ , ce nombre donne une idée de l'intensité du swirl. A partir des composantes de vitesse, il peut aussi s'exprimer ainsi :

$$S = \frac{\int_{R_i}^{R_{ext}} U_x U_\theta r^2 dr}{R_{ext} \int_{R_i}^{R_{ext}} U_x^2 r dr} \quad (8.14)$$

avec  $r$  la position radiale,  $U_\theta$  la vitesse tangentielle et  $U_x$  la vitesse axiale. Les hélices du swirl étant inclinées de  $60^\circ$ , soit :

$$U_\theta = \tan 60^\circ \cdot U_x = \sqrt{3} U_x \quad (8.15)$$

Il en résulte un nombre de swirl  $S \simeq 1,5$ . L'écoulement est alors qualifié de fortement swirlé ( $S > 0,6$ ). Pour ces écoulements fortement swirlés, les gradients de pressions longitudinaux ne suffisent plus pour compenser l'énergie cinétique des particules fluides. Une zone de recirculation toroïdale apparaît alors dans l'écoulement.

Les cartes de la norme de la vitesse moyenne ainsi que de la norme des fluctuations de vitesse sont représentées sur les figures 8.46 et 8.47. La présence d'un swirl modifie fortement la structure de l'écoulement. La dynamique de l'écoulement dans la cavité semble indépendante de l'écoulement principal, que l'on soit derrière un barreau ou à une position médiane, elle présente deux structures tourbillonnaires avec des échelles semblables. Cette dynamique se rapproche plus de la configuration M20C07A10 que du cas M30C07A10. L'aspiration créée par le barreau est fortement diminuée. L'évacuation de la cavité est essentiellement pilotée par la structure supérieure. On observe par ailleurs une amplification des fluctuations de vitesse au dessus de la cavité. Contrairement aux cas sans swirl, ces fluctuations présentent les mêmes amplitudes derrière et entre les barreaux.

Le tracé de la vitesse radiale juste au-dessus du plan rasant la cavité (figure 8.48) met en évidence un mélange plus intense entre l'écoulement principal et l'air issu de la cavité. Derrière un barreau, on note la présence de deux vecteurs d'évacuation : le premier, piloté par le tourbillon supérieur et le second, de même amplitude, résultant de la dépression créée par le barreau. Il est intéressant de noter qu'à proximité du barreau, la vitesse de remontée de l'air de la cavité est de même amplitude que le cas M20C07A10. L'effet du swirl est manifeste dans la position médiane, où jusqu'à présent, aucune vitesse de remontée de l'air de la cavité significative n'était présente. L'ajout du swirl génère une structure tourbillonnaire importante en cette position qui amplifie les échanges entre la cavité et l'écoulement principal.

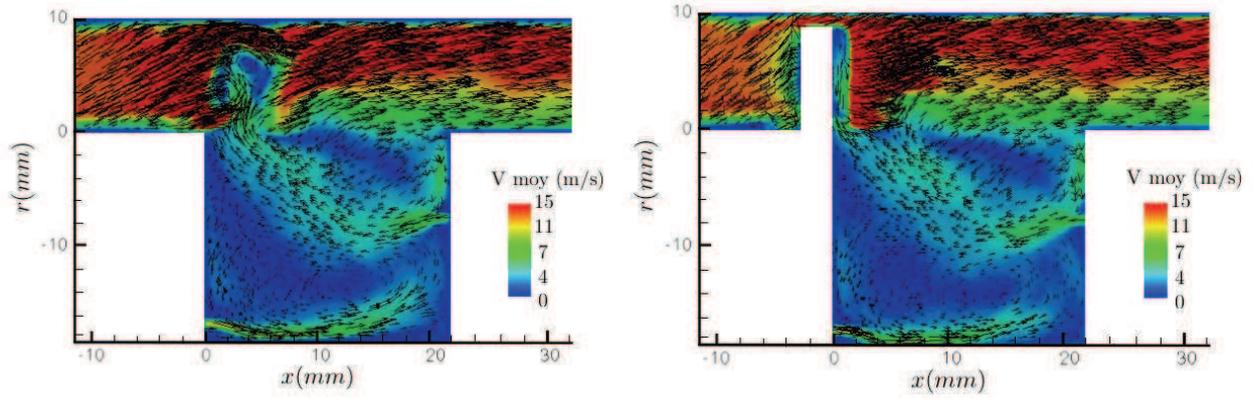


FIGURE 8.46: Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M30C07A10S.

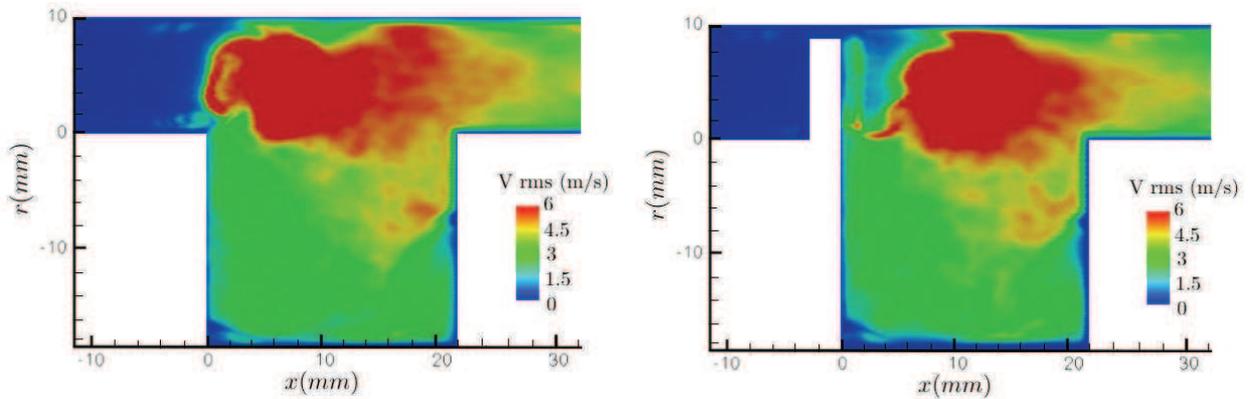


FIGURE 8.47: Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M30C07A10S.

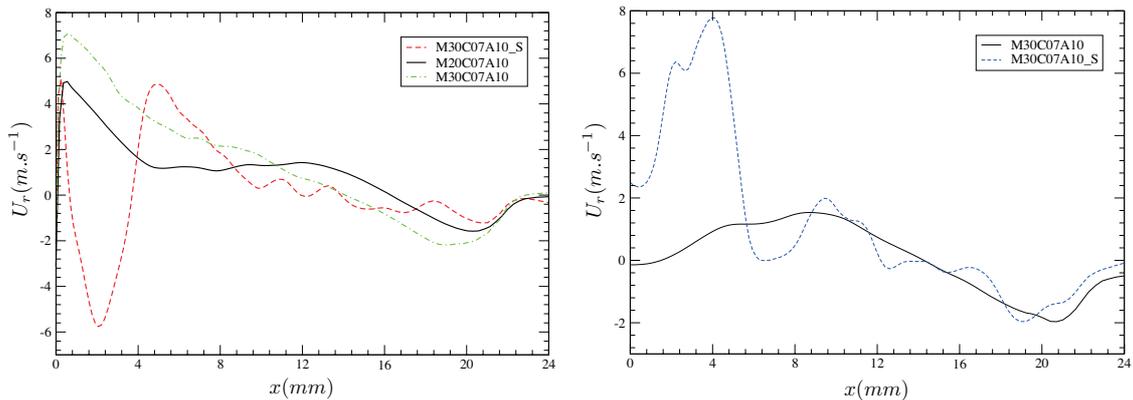
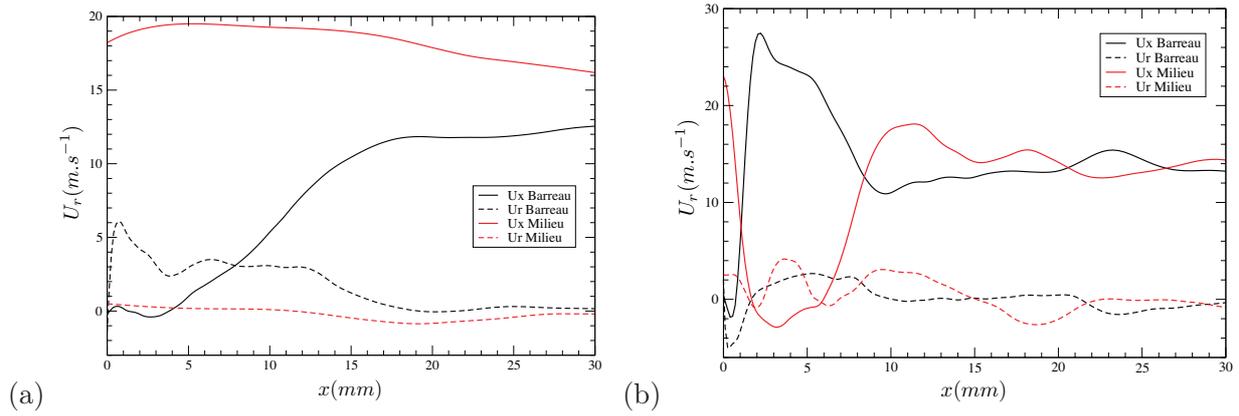


FIGURE 8.48: Vitesse de remontée de l'air issu de la cavité en fonction de la position le long de la cavité pour les cas avec et sans swirl pour un plan situé derrière un barreau et entre deux barreaux dans un plan positionné à 1mm du plan rasant ( $r = -1\text{mm}$ ).

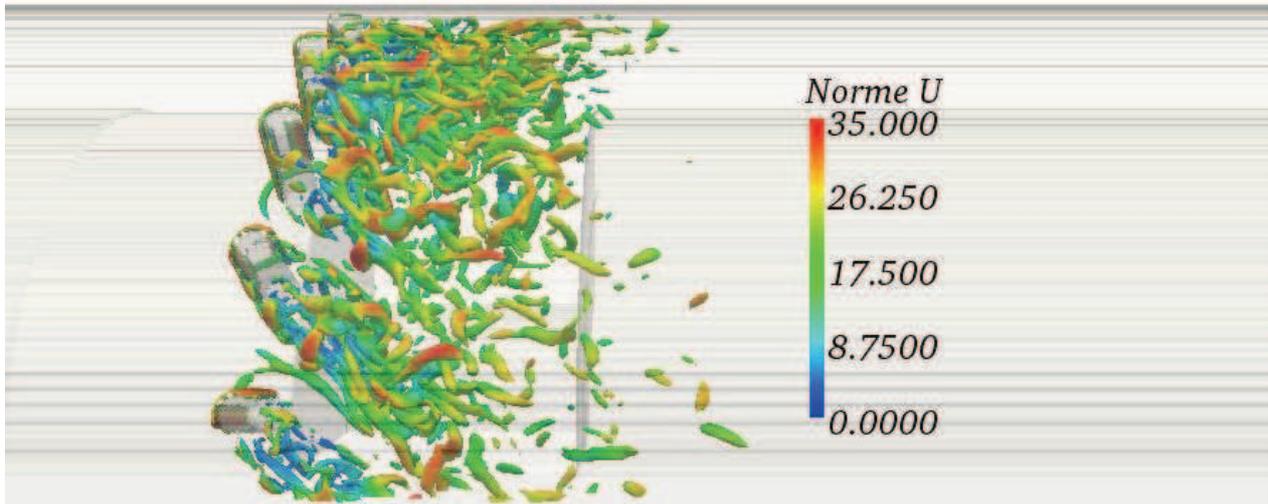
La rupture entre l'écoulement avec et sans swirl est illustrée sur la figure 8.49 où les vitesses longitudinales et radiales sont tracées au milieu du canal principal.

Le mouvement de swirl induit une dynamique plus intense dans la partie supérieure de la cavité, comme en témoigne la figure 8.50 représentant un iso-contour du critère Q.

## CHAPITRE 8. DYNAMIQUE NON RÉACTIVE D'UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 8.49:** Vitesse longitudinale et radiale au milieu du canal principal ( $y=5mm$ ) en fonction de la position le long de la cavité, pour le cas avec swirl (b) et sans swirl (a).

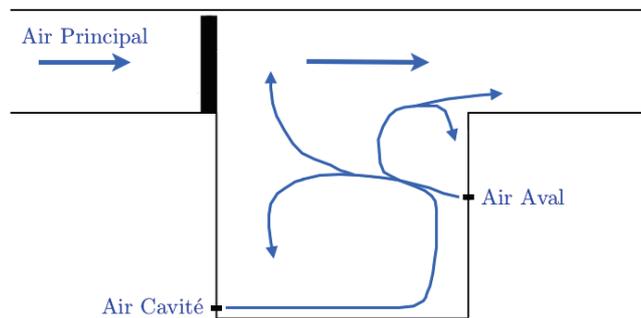


**FIGURE 8.50:** Contour d'un critère  $Q$  ( $Q = 2 \cdot 10^7 s^{-2}$ ) colorié par la norme de la vitesse 3D.

## 8.7 Conclusions

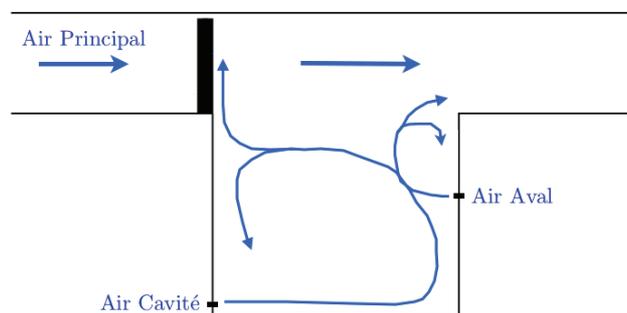
La dynamique non réactive du TVC est étudiée pour le cas de référence et d'autres configurations présentant un débit principal modifié, une longueur de cavité changée, l'ajout d'un mouvement de swirl ou l'absence de l'injecteur d'air dans la cavité. On distingue principalement trois topologies d'écoulement présentées ci-dessous :

- **Les écoulements de type "mixte"** : Cet écoulement comporte deux régimes distincts, pilotés par le lâcher tourbillonnaire, à l'origine d'intenses fluctuations de pression. En particulier, ce mode est à l'interface entre deux régimes de cavité, puisqu'il emprunte, par alternance, les propriétés du régime dit de "vidange" et du régime "clos". Ainsi, l'air de la cavité peut s'échapper au niveau du coin aval sans recirculer dans la cavité (écoulement de type "vidange") ou recirculer à l'intérieur de la cavité (écoulement de type "clos"). Cette topologie d'écoulement a été rencontrée pour le cas M10C07A10 et est favorisée par un débit de l'écoulement principal faible. Un schéma de la structure de l'écoulement est disponible sur la figure 8.51.



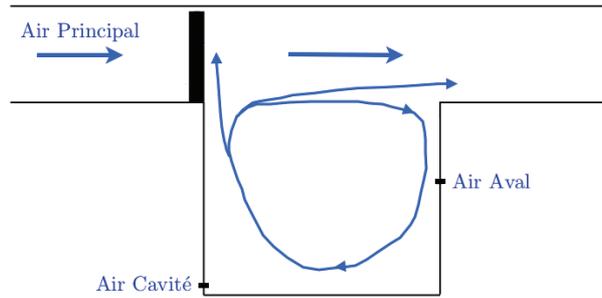
**FIGURE 8.51:** Schéma d'un écoulement de type "Mixte".

- **Les écoulements de type "clos"** : Cet écoulement ne manifeste pas de lâcher périodique de tourbillons. La cavité présente, en permanence, une structure tourbillonnaire dans le sens anti-horaire. Cet écoulement s'est manifesté pour le cas M20C07A10 et est représenté sur la figure 8.52. On note également la présence d'une recirculation au niveau du coin aval à l'origine d'une faible fuite de l'écoulement de cavité. A mesure que la longueur de la cavité diminue, cette structure tourbillonnaire, au niveau du coin aval, tend à augmenter (cas M20C07A10\_L11). La chambre se vide principalement au niveau du bord amont de la cavité.



**FIGURE 8.52:** Schéma d'un écoulement de type "Clos".

- **Les écoulements de type "rempli"** : Cet écoulement présente une unique structure tourbillonnaire dans le sens horaire. Le principal vecteur d'évacuation de la cavité est le bord amont. Cet écoulement est favorisé par une augmentation du débit de l'écoulement principal et un faible débit d'air aval. La figure 8.53 illustre la topologie de cet écoulement.



**FIGURE 8.53:** Schéma d'un écoulement de type "Rempli".

Nom	Dynamique de cavité
M10C07A10	Mixte
M20C07A10	Clos
M20C07	Rempli
M30C07A10	Rempli
M60C07A10	Rempli
M20C07A10_L11	Clos
M20C07A10_L44	Clos

**TABLE 8.3:** Evolution de la structure de l'écoulement en fonction de différents paramètres : le débit d'air principal, le débit d'air aval et la longueur de la cavité.

A mesure que le débit augmente, l'écoulement passe d'une structure de type "mixte" (M10C07A10) à un écoulement de type "clos" (M20C07A10) puis à un mode "rempli" (M30C07A10). Le tableau 8.3 résume le comportement global de la chambre en fonction de différents paramètres : le débit d'air principal, le débit d'air aval et la longueur de la cavité.

Ce chapitre a montré l'importance du débit principal sur la dynamique interne à la cavité. En particulier, le pouvoir dépressionnaire du barreau est augmenté à mesure que le débit principal croît, ce qui augmente le mélange entre les gaz issus de la cavité et l'écoulement principal. Par ailleurs, l'ajout d'un swirl à faible débit amplifie le mélange entre le fluide dans la cavité et l'écoulement principal. L'absence de l'injecteur d'air modifie également la topologie de l'écoulement. Ces trois paramètres interviendront dans la recherche d'une configuration stable pour la chambre.



# Chapitre 9

## Etude de la stabilité de la flamme dans une chambre de combustion de type TVC

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Stratégies de modélisation</b>	<b>275</b>
9.1.1	Introduction	275
9.1.2	Sortie non réfléchissante à la sortie du canal	275
9.1.3	Sortie non réfléchissante-rétrécissement	278
9.1.4	Sortie non réfléchissante-élargissement-coflow de gaz brûlés	279
9.1.5	Sortie réfléchissante-élargissement-coflow de gaz brûlés	280
9.1.6	Géométrie et conditions de sortie retenues	280
<b>9.2</b>	<b>Méthodes d'analyse</b>	<b>280</b>
9.2.1	Temps de résidence	280
9.2.2	Critère de Rayleigh	281
<b>9.3</b>	<b>Etude de la flamme instable aux conditions nominales</b>	<b>282</b>
<b>9.4</b>	<b>Description du cycle de l'instabilité de combustion aux conditions nominales</b>	<b>282</b>
9.4.1	Evolution de la flamme comparée aux données expérimentales	282
9.4.2	Dynamique de la flamme	289
<b>9.5</b>	<b>Stabilisation par augmentation du débit principal : Cas M30</b>	<b>296</b>
9.5.1	Evolution de la flamme instable comparée avec l'expérience	297
9.5.2	Dynamique de la flamme	297
9.5.3	Impact de la condition de sortie : dynamique avec une sortie réfléchissante	297
<b>9.6</b>	<b>Stabilisation par augmentation du débit principal : Cas M60</b>	<b>305</b>
9.6.1	Evolution de la flamme stable	305
<b>9.7</b>	<b>Stabilisation par ajout d'un swirl</b>	<b>309</b>
9.7.1	Signaux de pression expérimental et numérique	309
9.7.2	Validation expérimentale	309
9.7.3	Evolution de la flamme stable	311
9.7.4	Dynamique avec une sortie réfléchissante	317
<b>9.8</b>	<b>Effet de l'injecteur d'air</b>	<b>318</b>
9.8.1	Signal de pression	318
9.8.2	Structure de la flamme	318
<b>9.9</b>	<b>Cycle limite acoustique</b>	<b>321</b>
9.9.1	Equation de bilan	321
9.9.2	Application aux simulations réactives de la chambre TVC	325
9.9.3	Application technologique des précédentes relations	326
<b>9.10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>326</b>

---

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

Ce chapitre est dédié à l'étude de la stabilisation de la combustion dans une chambre de combustion de type TVC, étudiée expérimentalement au CORIA (travaux de thèse de Burguburu [63]). Le dispositif expérimental a été introduit dans la section 7.6 et a pour objectif d'appréhender les dynamiques de flammes dans une chambre munie d'une cavité. Au vu de la complexité de la chambre, le contrôle des paramètres expérimentaux est plus ardu que l'étude relative à la cavité transsonique. Le contrôle précis des débits des différentes entrées fluides n'est pas assuré. Ainsi, la dynamique réactive intense se couple à des problèmes d'alimentation en air qui fluctue dans la cavité, et résultant de pertes de charge difficilement contrôlables dans la ligne d'alimentation. Les incertitudes sur les mesures expérimentales sont également plus importantes que dans la cas de la cavité transsonique. En effet, l'usage de dispositifs optiques non-intrusifs sur une géométrie annulaire s'accompagne de réflexions parasites.

Ce dispositif 'semi-industriel' rend donc difficile la description fine des mécanismes physiques internes à la cavité ainsi que la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux. Les simulations numériques tâcheront donc de reproduire la dynamique globale de la combustion et permettront également l'exploration de conditions d'alimentation (variations de débit) inaccessibles sur le banc d'essai. Par ailleurs, bien que ce dispositif ne soit pas conçu pour l'étude d'instabilités de combustion, une étude comparative expérience/numérique sera conduite pour voir si nous sommes en mesure de reproduire certaines composantes acoustiques.

Dans un premier temps, nous aborderons les difficultés spécifiques aux descriptions de dynamiques de flammes instables avec un code compressible structuré et des conditions aux limites caractéristiques tridimensionnelles. Les outils d'analyses utilisés pour qualifier la dynamique de la chambre seront ensuite présentés. Dans un troisième temps, nous reproduirons la dynamique instable de la flamme observée pour un faible débit principal, dans les conditions nominales de fonctionnement de l'expérimentation. Les deux sections suivantes seront dédiées à la recherche de conditions de stabilité pour orienter les futures investigations expérimentales des chambres de type TVC. Pour assurer la stabilité, deux voies seront étudiées : l'augmentation du débit dans un premier temps et l'ajout d'un swirl dans un second temps. Les essais expérimentaux soulignant l'existence de fluctuations du débit d'air dans la cavité, une simulation sera réalisée en l'absence de l'injecteur d'air afin d'analyser son impact sur la dynamique de flamme.

Le tableau 9.1 relate les différentes études menées numériquement, pour l'écoulement réactif, avec les paramètres caractéristiques de la configuration (débits, présence d'un swirl), l'obtention d'une flamme stable et la nature des données expérimentales disponibles.

Nom	$QaM$	$QaC$	$QaA$	Données expérimentales	Swirl	Flamme stable
<i>M20C07A10</i>	20 g/s	0,7 g/s	1 g/s	PIV-CH*	Non	Non
<i>M30C07A10</i>	30 g/s	0,7 g/s	1 g/s	CH*	Non	Non
<i>M30C07</i>	30 g/s	0,7 g/s	-	Non	Non	Non
<i>M30C07A10_S</i>	30 g/s	0,7 g/s	1 g/s	PIV-CH*	Oui	Oui
<i>M60C07A10</i>	60 g/s	0,7 g/s	1 g/s	Non	Non	Oui

**TABLE 9.1:** Liste des configurations étudiées avec les données expérimentales disponibles, le débit massique d'air principal ( $QaM$ ), le débit massique d'air dans le coflow ( $QaC$ ), le débit massique de l'injecteur d'air ( $QaA$ ) et le caractère stable ou instable de la flamme.

## 9.1 Stratégies de modélisation

### 9.1.1 Introduction

Cette section présente les stratégies de modélisation des conditions ouvertes du domaine de calcul. L'écoulement de cavité engendre en effet d'intenses fluctuations du champ aérodynamique qui peuvent perturber les expressions des conditions aux limites et le couplage avec la combustion. Les simulations LES réactives sont donc conduites sur des domaines de calcul différents de ceux utilisés pour l'investigation à froid. Par ailleurs, les conditions limites de sortie sont modifiées pour permettre la description la moins biaisée possible de la dynamique de combustion. En effet, de nombreux calculs ont été nécessaires afin de trouver la forme et la formulation de la condition de sortie permettant une description de l'écoulement réactif. La nature instable de la dynamique du TVC est difficile à reproduire numériquement sans une dérive des grandeurs conservatives dans le plan de sortie. Cette difficulté explique probablement l'absence, dans la littérature, de toute simulation compressible de la combustion dans une cavité subsonique. Ainsi, différentes stratégies de modélisation résumées ci-dessous ont été testées.

### 9.1.2 Sortie non réfléchissante à la sortie du canal

La figure 9.1 représente le domaine calculé. Le canal principal est allongé et la sortie est traitée avec une condition de sortie non réfléchissante.



**FIGURE 9.1:** *Domaine de calcul constitué d'un canal d'une longueur totale de  $12L_{cav}$ .*

L'utilisation d'une condition de sortie de type caractéristique tridimensionnelle avec l'ajout de termes transverses permet de décrire la naissance de l'instabilité. Néanmoins, le mouvement de va-et-vient de la flamme se trouve amplifié par le traitement aux limites. En effet, le traitement sous forme d'ondes caractéristiques n'impose pas une relaxation suffisamment forte vers la pression de référence. L'amplitude des variations de pression, résultant du phénomène de vidange de la cavité, est importante et tend à faire dériver la pression à la sortie du domaine. En effet, la théorie des conditions limites caractéristiques exprime les caractéristiques entrantes dans le plan de sortie, en fonction d'une seule et même pression de référence. Or, le relevé de la pression à la sortie de la chambre de combustion (figure 9.8) révèle d'importantes fluctuations autour de la valeur de référence (ici, la pression atmosphérique) qui ne sont pas prises en compte dans la description de la condition de sortie.

Ainsi la figure 9.2 représente différentes structures de flammes mises en évidence par l'iso-surface de mélange stoechiométrique colorée par la température. Cette figure illustre quatre cycles de vidange de la cavité et met en évidence l'amplification du mouvement de va et vient de la flamme. En (a) la flamme croît dans la cavité avant d'être convectée en aval en (b) qui marque la fin d'un premier cycle. En (c) une nouvelle flamme s'est développée et remonte légèrement en amont des barreaux. La cavité se vide en (d) et une nouvelle flamme s'installe dans la cavité (fin du deuxième cycle). En (e) la flamme est aspirée dans le sillage des barreaux et poursuit sa remontée en aval des accroches

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

flammes en (f) et (g) avant d'être évacuée en (h) et (i). Le quatrième cycle commence en (j) où une nouvelle flamme se développe dans la cavité. Cette flamme remonte l'écoulement en (k) et est convectée en aval en (l). Les cartes instantanées (c), (f) et (k), associées à la présence de la flamme en amont des barreaux, montrent que la flamme parcourt des distances, en amont, de plus en plus importantes et soulignent bien l'amplification de l'activité de la flamme.

Par ailleurs, au cours de la remontée de la flamme en amont des accroches flammes, l'écoulement principal étant inversé, des points de vitesse longitudinale négative (*backflow*) peuvent apparaître dans le plan de sortie. Bien que les conditions aux limites aient été modifiées pour prendre en compte ces points de *backflow* (où lorsque la vitesse dans le plan de sortie est inversée, la condition limite devient une entrée pour laquelle on spécifie les  $4+N_{spe}$  expressions entrantes), ce type de formalisme est instable lorsque l'occurrence du *backflow* devient fréquente. Ainsi, la figure 9.3 illustre la dérive en pression qui peut être observée.

Pour limiter cet "emballement acoustique" de la sortie, un terme de forçage volumique est proposé et testé sur cette configuration. Ce forçage repose sur l'introduction d'un terme de rappel sur la vitesse en sortie pour éviter une dérive. Au delà d'une pression en sortie variable, cette dérive peut également résulter de l'adjonction des termes visqueux dans la condition limite, des termes transverses, .... Les équations de moment et d'énergie sont ainsi modifiées sous la forme :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = \dots + \rho \left( \frac{\dot{Q}_m f(y) - U(x, y, z)}{\tau} \right) \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = \dots + \rho U(x, y, z) \left( \frac{\dot{Q}_m f(y) - U(x, y, z)}{\tau} \right) \quad (9.2)$$

avec  $\tau$  le temps caractéristique de relaxation évalué comme le rapport entre la longueur de la zone de forçage active et la vitesse cible :

$$\tau = \frac{L_{PML}}{U_{target}} \quad (9.3)$$

et  $U_{target}$  la vitesse cible déterminée à partir du débit dans une section du canal aval :

$$U_{target} = \frac{\dot{Q}_m}{\rho A} f(y) \quad (9.4)$$

où  $\dot{Q}_m$  est le débit en sortie et  $f(y)$  un profil normalisé d'un canal turbulent qui assure une vitesse cible nulle sur la paroi. Cette formulation présente néanmoins l'inconvénient d'appliquer une force de rappel différente pour les cellules présentes dans le volume de forçage. Le forçage volumique est alors modifié de sorte à appliquer une même force de rappel volumique sur l'ensemble des cellules présentes dans le domaine corrigé. Ainsi, les équations finales se présentent sous la forme :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = \dots + \rho \underbrace{\left( \frac{(U_{target} - U_{bulk})}{\tau} \right)}_{f_i} \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = \dots + \rho U(x, y, z) f_i \quad (9.6)$$

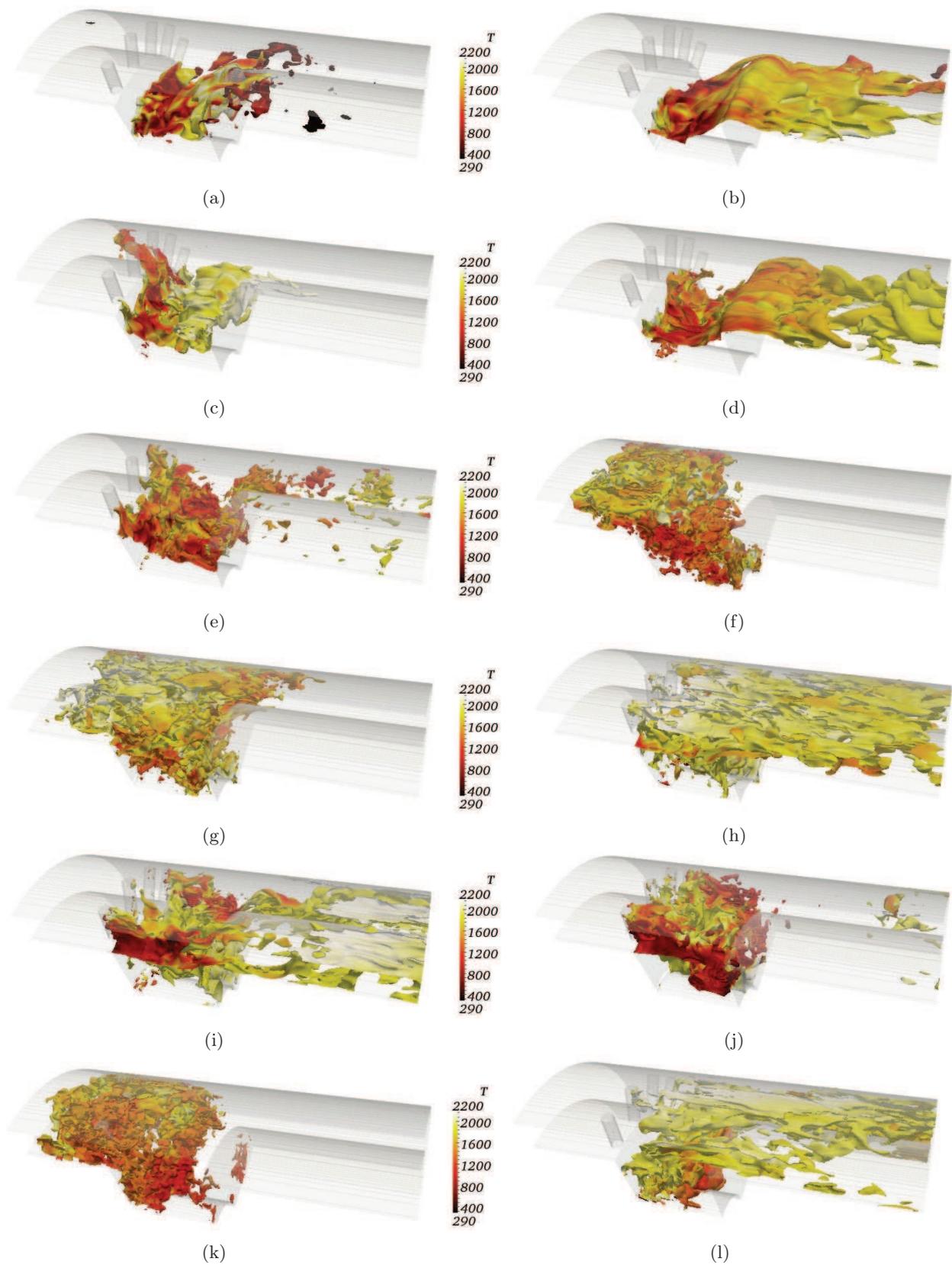
avec

$$U_{target} = \frac{\dot{Q}_m L_{PML}}{\int_V \rho dV} \quad (9.7)$$

$$U_{bulk} = \frac{\int_V \rho U dV}{\int_V \rho dV} \quad (9.8)$$

Bien que ce forçage volumique soit actif sur un secteur situé à proximité du plan de sortie (cf. figure 9.4), la pression dans le plan de sortie dérive toujours.

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 9.2:** Iso-surface du mélange stoechiométrique coloriée par la température pour le cas M20C07A10.

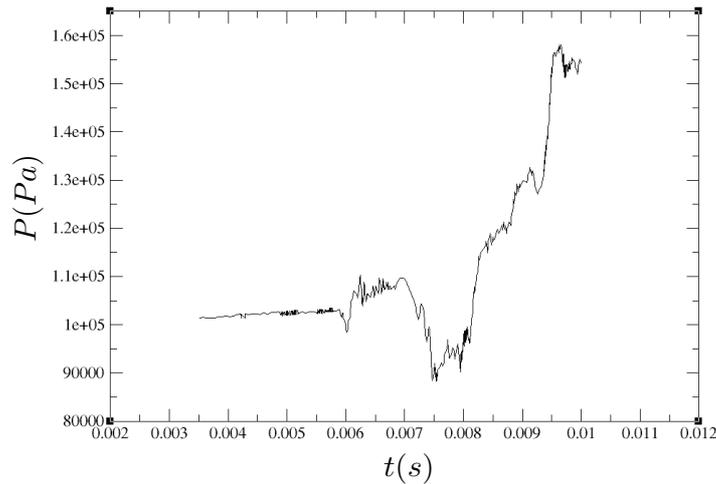


FIGURE 9.3: Dérive du signal de pression.

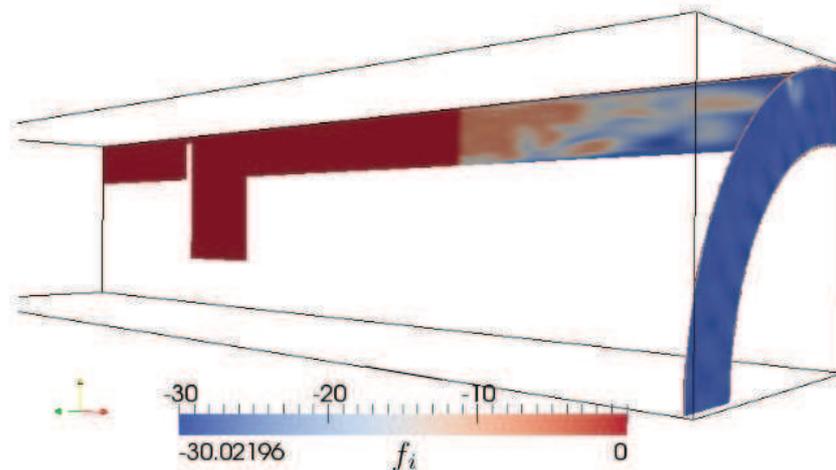


FIGURE 9.4: Carte du terme de forçage volumique  $f_i$  pour le cas M20C07A10.

### 9.1.3 Sortie non réfléchissante-rétrécissement

Pour limiter l'apparition de points de vitesse longitudinale négative dans le plan de sortie, un convergent est ajouté au canal de sortie pour accélérer le fluide sur les dernières longueurs. Cette stratégie est utilisée, dans la littérature, pour les études compressibles de ramjet. Contrairement à un scramjet, l'écoulement en entrée d'un ramjet n'est pas supersonique. L'ajout d'un convergent permet l'obtention d'une sortie supersonique, plus favorable aux simulations numériques compressibles [255]. En effet, la condition caractéristique de sortie supersonique est plus robuste que son homologue subsonique et s'exprime uniquement en fonction des ondes sortantes. Aucune formulation empirique n'intervient dans l'expression des variables conservatives. Néanmoins, dans la présente étude, la vitesse de l'écoulement principal ainsi que la hauteur du canal sont trop faibles pour permettre un éventuel amorçage dans le plan de sortie. L'utilisation d'un convergent permettra uniquement d'assurer l'absence de *backflow* en sortie qui sera toujours tributaire de l'onde entrante basée sur un rappel de la pression cible.

Le domaine de calcul utilisé est illustré sur la figure 9.5. Bien que la présence d'un convergent limite la présence de cellules de vitesse longitudinale négative dans le plan de sortie, le signal de pression en sortie du domaine dérive toujours comme en témoigne la figure 9.6.

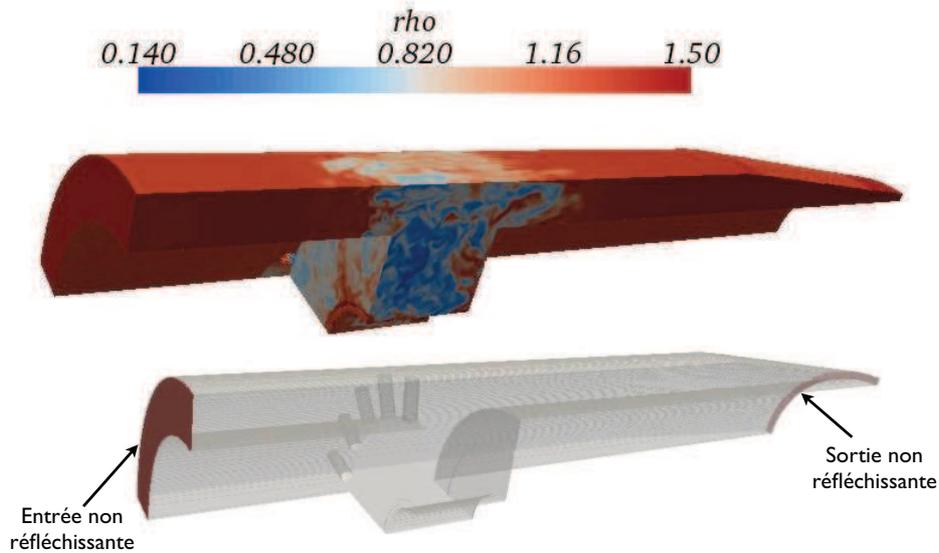


FIGURE 9.5: *Domaine de calcul : le canal en aval de la cavité présente un convergent.*

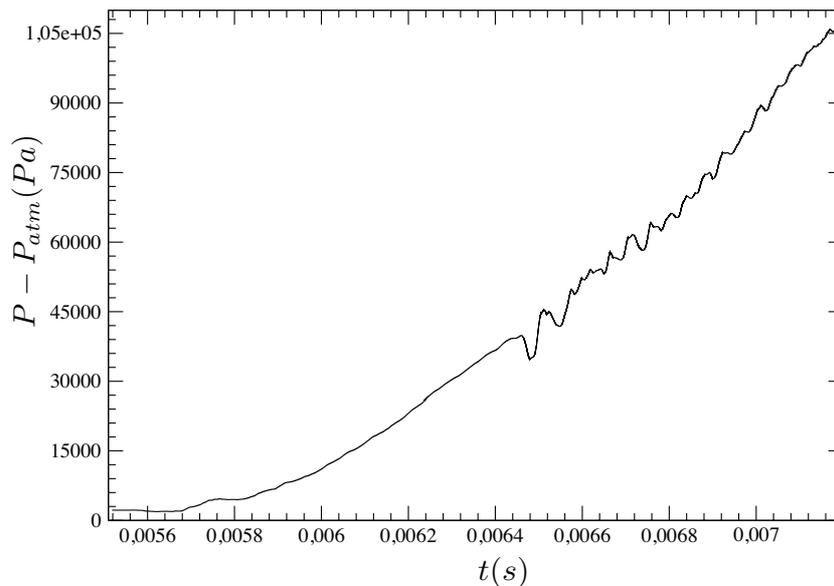
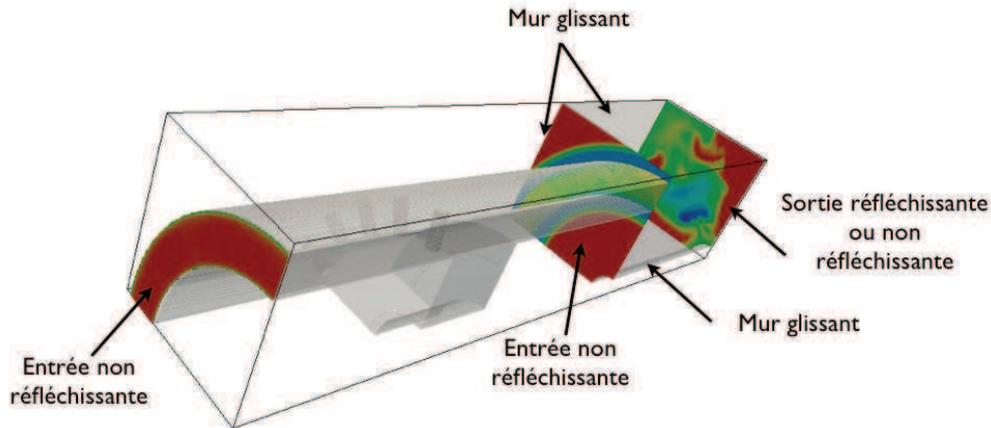


FIGURE 9.6: *Signal de pression pour un domaine de calcul présentant un rétrécissement.*

#### 9.1.4 Sortie non réfléchissante-élargissement-coflow de gaz brûlés

Le choix d'un élargissement renforcé par la présence d'un coflow de gaz brûlés possède l'avantage de limiter la présence de points en écoulement inverse (*backflow*) dans le plan de sortie numérique. La géométrie ainsi modélisée est représentée sur la figure 9.7. Les murs de cet élargissement sont considérés comme glissants. Le coflow est décrit au moyen de conditions caractéristiques d'entrée partiellement réfléchissantes (cf. section 3.4.3.5). Pour la sortie, le formalisme non réfléchissant avec des termes transverses est adopté. Les mailles sont fortement étirées en sortie pour prodiguer une zone éponge afin de dissiper les structures tourbillonnaires et détruire par la même le bruit numérique produit lors de leur sortie. Cette zone dissipative est par ailleurs intensifiée par l'ajout d'une zone éponge reposant sur une augmentation progressive de la viscosité moléculaire sur les deux dernières longueurs (seuil maximal de 50 fois la viscosité moléculaire).

Le maillage est resserré au niveau des barreaux afin d'obtenir une résolution suffisante de la dynamique de cavité. Le maillage comporte  $434 \times 202 \times 202$  points pour une géométrie s'étendant sur  $12L \times 1,9L \times 1,9L$ . Le raffinement correspond, en terme de taille de cellule, à  $\Delta_{x_{min}} = 176\mu m$ ,  $\Delta_{x_{max}} = 2,5mm$ ,  $\Delta_y = 209\mu m$  et  $\Delta_z = 209\mu m$ .



**FIGURE 9.7:** *Domaine de calcul : le canal en aval de la cavité débouche dans un élargissement dont la sortie est imposée réfléchissante et non réfléchissante et l'entrée est un jet d'entraînement.*

Néanmoins, la présence d'intenses fluctuations des grandeurs conservatives tend à faire dériver la pression dans le plan de sortie. Il est ainsi difficile de stabiliser la configuration sur plus de trois cycles de vidange de la cavité.

### 9.1.5 Sortie réfléchissante-élargissement-coflow de gaz brûlés

Pour éviter toute dérive de la pression dans le plan de sortie, la sortie est décrite au moyen d'une condition réfléchissante mais la géométrie précédente est conservée (cf. figure 9.7). Contrairement au cas précédent reposant sur l'utilisation de conditions non réfléchissantes pour la sortie, la présente configuration assure la répétabilité du cycle de vidange de la cavité.

### 9.1.6 Géométrie et conditions de sortie retenues

Pour la présente étude, la géométrie comportant un élargissement et un coflow est retenue. Pour la sortie, les simulations seront conduites avec une expression des caractéristiques réfléchissantes et non réfléchissantes. Dans la suite de cet exposé, les conséquences d'un caractère réfléchissant ou non réfléchissant de la sortie seront discutées en fonction des structures de flammes obtenues et du signal de pression résultant.

## 9.2 Méthodes d'analyse

Cette section est dédiée à la présentation des outils d'analyse qui seront utilisés par la suite : le temps de résidence et le critère de Rayleigh.

### 9.2.1 Temps de résidence

Le mélange est un élément central dans la description de la dynamique des flammes turbulentes. Pour évaluer la durée pendant laquelle le mélange agit sur les particules fluides, une variable supplémentaire,  $\tilde{\tau}_{res}$  est transportée et représente le temps de résidence [109]. On définit un champ scalaire

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

$\Phi$  associé à une particule fluide qui vérifie l'équation lagrangienne suivante :

$$\frac{d\Phi}{dt} = S \quad (9.9)$$

où la variable  $S$  représente un terme source d'accumulation de la variable  $\Phi$  le long de la trajectoire :  $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$ . En notant  $\Phi_0$  la valeur initiale du champ scalaire, son évolution est fournie par l'équation :

$$\Phi = \Phi_0 + \int S(\mathbf{x}(t), t) dt \quad (9.10)$$

On considère alors le champ eulérien  $\Phi(\mathbf{x}(t), t)$  comme la moyenne d'ensemble des particules incluses dans un volume de contrôle. Ce dernier respecte l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \Phi) = \nabla \cdot (\rho D \nabla \Phi) + \rho S \quad (9.11)$$

où le terme de diffusivité moléculaire  $D$  inclut les interactions avec les particules des volumes de contrôle avoisinants. Ce terme de diffusivité est supposé identique pour chaque espèce. A l'aide de cette équation, on peut retracer l'histoire d'une particule fluide et, en particulier, évaluer le temps de résidence de la particule fluide dans le domaine de calcul depuis son introduction. Ce temps de résidence est un scalaire de même nature que  $\Phi$  et présente un terme source constant, uniforme et unitaire :  $\tau_{res} = \int dt$ . Il s'agit d'une quantité eulérienne, c'est-à-dire associée à la moyenne d'un ensemble de particules fluides dans un volume fluide. Ainsi l'équation de conservation de cette quantité devient :

$$\frac{\partial \rho \tau_{res}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \tau_{res}) = \nabla \cdot (\rho D \nabla \tau_{res}) + \rho \quad (9.12)$$

En appliquant l'opérateur de filtrage à cette équation, il vient :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\tau}_{res}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\tau}_{res}) = \nabla \cdot (\overline{\rho D \nabla \tau_{res}} - T_{\tau_{res}}) + \bar{\rho} S^+ \quad (9.13)$$

avec  $T_{\tau_{res}}$  le flux turbulent de sous-maille,  $T_{\tau_{res}} = \overline{\rho \mathbf{u} \tau_{res}} - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\tau}_{res}$ . Ce flux non résolu est fermé à l'aide de l'hypothèse de Boussinesq. Le flux turbulent du temps de résidence est alors supposé aligné avec le gradient de ce même temps de résidence :

$$\overline{\rho \mathbf{u} \tau_{res}} - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{\tau}_{res} \approx \bar{\rho} \kappa_{sgs} \frac{\partial \tilde{\tau}_{res}}{\partial x_j} = \frac{\bar{\nu}_t}{Sc_t} \frac{\partial \tilde{\tau}_{res}}{\partial x_j} \quad (9.14)$$

Ce terme est donc directement corrélé aux propriétés de transport turbulent.

Etant donné que nous nous intéressons à l'histoire des particules fluides au sein de la cavité, l'intégration du terme de résidence est effectuée uniquement dans la cavité. Ainsi le terme source  $S^+$  vaut un dans la cavité et est nul ailleurs.

### 9.2.2 Critère de Rayleigh

Le couplage entre le dégagement de chaleur et l'acoustique peut être caractérisé par le paramètre de Rayleigh [307], noté  $Ra(\mathbf{x})$  et défini comme le produit moyenné en temps des oscillations de pression  $P'(\mathbf{x}, t)$  et des fluctuations de dégagement de chaleur  $\dot{\omega}'_e(\mathbf{x}, t)$ . En associant les fluctuations de dégagement de chaleur aux fluctuations du terme source d'énergie, ce paramètre s'écrit :

$$Ra(\mathbf{x}) = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} P'(\mathbf{x}, t) \dot{\omega}'_e(\mathbf{x}, t) dt \quad (9.15)$$

avec  $\tau$  la période des oscillations. Il est également possible d'intégrer le terme de Rayleigh spatio-temporel  $Ra(\mathbf{x}, t)$  sur le volume de la chambre, il vient alors :

$$Ra(t) = \int_{\Omega} P'(\mathbf{x}, t) \dot{\omega}'_e(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (9.16)$$

Le critère de stabilité de Rayleigh spécifie que la chambre est instable lorsque la phase relative entre les fluctuations de pression et du terme source d'énergie est telle que cette intégrale est positive.

Pour évaluer les fluctuations de la pression et du terme source d'énergie, on soustrait aux moyennes temporelles, les grandeurs résolues, soient les relations suivantes :

$$P'(\mathbf{x}, t) = \langle P(\mathbf{x}) \rangle - \bar{P}(\mathbf{x}, t) \quad (9.17)$$

$$\dot{\omega}'_e(\mathbf{x}, t) = \langle \dot{\omega}_e(\mathbf{x}) \rangle - \tilde{\omega}_e(\mathbf{x}, t) \quad (9.18)$$

### 9.3 Etude de la flamme instable aux conditions nominales

Cette section est dédiée à l'étude de la dynamique de la flamme dans les conditions nominales de fonctionnement (cas M20C07A10). Avant d'analyser les résultats numériques, la dynamique observée expérimentalement est décrite.

### 9.4 Description du cycle de l'instabilité de combustion aux conditions nominales

Cette section présente **le cycle de l'instabilité de combustion observée expérimentalement** pour les conditions nominales (nomenclature de ce cas : M20C07A10). La structure de flamme, mise en évidence par l'émission CH\*, et la dynamique de cavité, représentée par les vecteurs vitesse (PIV à chaud), sont décrites sur la figure 9.9 suivant la position sur le signal de pression récupéré à la sortie de la chambre (figure 9.8).

Au cours de la première partie du cycle (phase 1 à 2), la pression augmente en raison de l'expansion thermique de la flamme. La flamme, située en début de cycle au niveau du mur amont (phase 7), est plaquée contre la paroi aval (phase 1) et poursuit son expansion dans toute la cavité (phase 2). La vitesse dans l'écoulement principal diminue avec l'augmentation de la pression. A l'étape 2, la pression est maximale et la vitesse dans l'écoulement principal devient négative. La flamme commence à remonter en amont des barreaux.

Durant les phases 3 à 4, la pression diminue, entraînant une augmentation de la vitesse. Néanmoins, à l'étape 3, la vitesse principale demeure négative, la flamme poursuit sa remontée dans l'écoulement. Au cours des essais expérimentaux, les flammes observées ont ainsi atteint les zones situées une à deux longueurs en amont de la cavité. A la phase 4, la vitesse principale redevient positive, la cavité amorce sa vidange et la flamme est emportée par le tourbillon éjecté de la cavité.

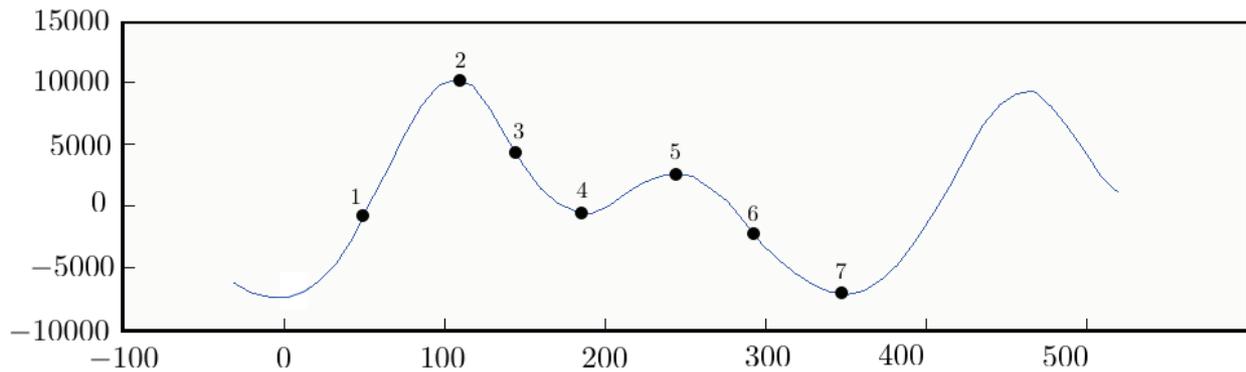
Pendant l'étape 5, la pression augmente légèrement et la cavité achève sa vidange. La pression diminue ensuite (des phases 6 à 7). Durant la phase 6, un nouveau noyau de flamme se développe. La flamme poursuit son développement au cours de la phase 7.

#### 9.4.1 Evolution de la flamme comparée aux données expérimentales

Cette section présente les résultats obtenus aux conditions nominales avec une stratégie de modélisation de la sortie reposant sur **un élargissement renforcé par un coflow de gaz brûlés et une formulation caractéristique non réfléchissante de la sortie**. Comme nous l'avons souligné dans la section précédente, cette condition de fonctionnement est le siège d'instabilités thermo-acoustiques. Ne disposant d'aucunes quantités moyennées expérimentales, nous nous efforcerons, dans un premier temps, de retrouver les mêmes structures de flammes. Nous effectuerons ensuite une analyse des données issues de la simulation.

Pour différentes étapes du cycle (illustrées sur la figure 9.8), nous pouvons comparer les structures de flammes expérimentales et numériques. Ainsi les figures 9.13 et 9.14 représentent l'évolution de

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 9.8:** *Signal de pression expérimental obtenu à la sortie de la chambre de combustion pour le cas nominal M20C07A10.*

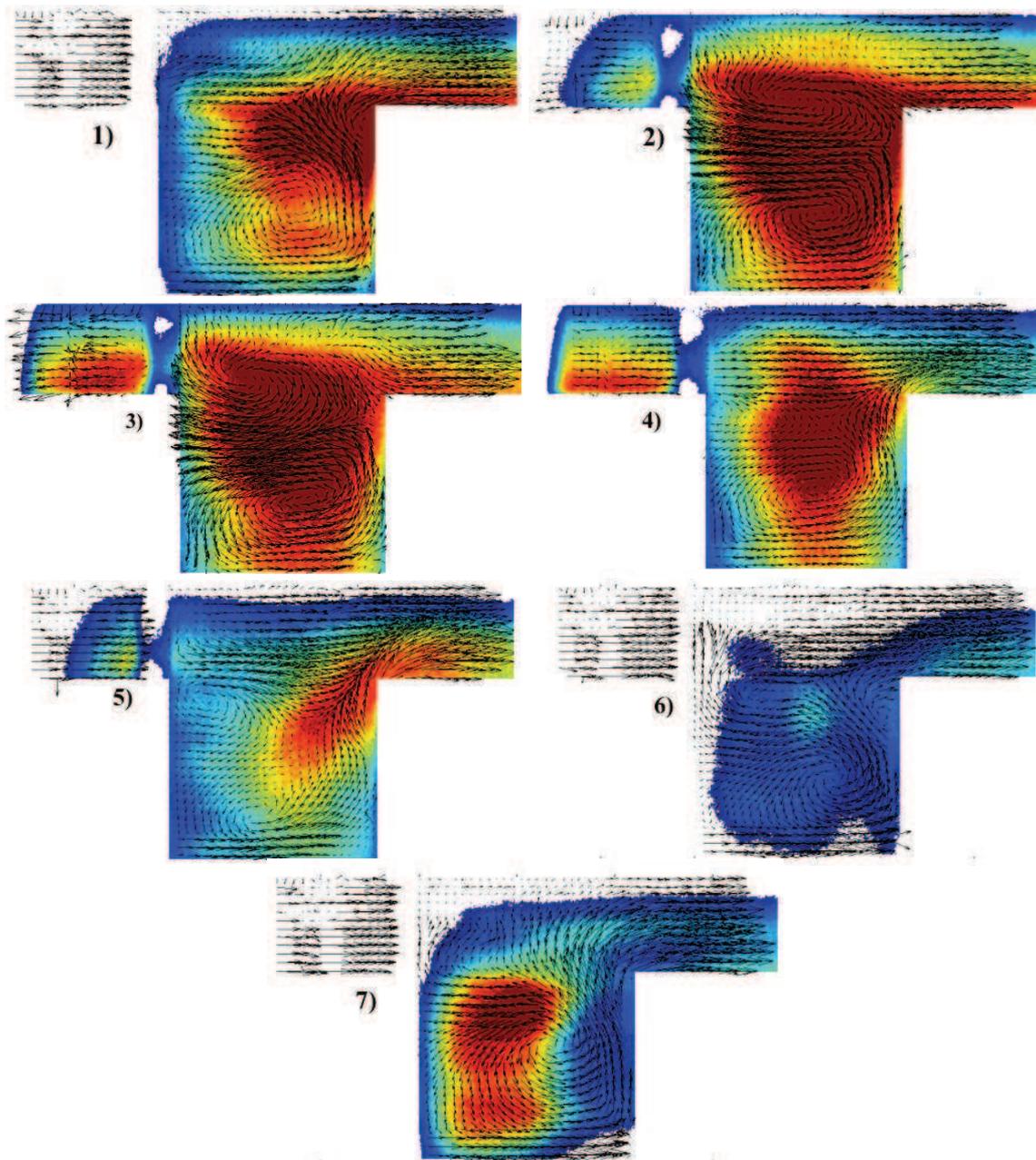
la flamme numérique au regard de la flamme expérimentale. Il est important de souligner que les approches numérique et expérimentale diffèrent sur de nombreux points, ce qui peut rendre notre comparaison discutable :

- La structure de la flamme visualisée au moyen des émissions  $CH^*$  correspond à un signal intégré sur l'ensemble de la chambre. Nous ne disposons pas de structures de la flamme en différents plans. Seul un signal intégré est atteint.
- Pour reproduire au mieux ce signal intégré perçu par la caméra, nous avons sommé les termes sources d'énergie pour les différents plans le long de l'axe  $z$ .
- Les mesures de PIV à chaud sont des mesures bidimensionnelles soumises à un filtrage temporel et à un filtrage spatial dont les fréquences de coupure dépendent du dispositif utilisé.
- Ne pouvant reproduire, avec précision, la démarche de filtrage temporelle et spatiale, nous comparerons les champs de vitesse bidimensionnels avec ceux obtenus par la LES sans traitement particulier.

L'approche adoptée dans l'expérience pour les clichés  $CH^*$  et la PIV est résumée sur la figure 9.10. Les champs PIV et les émissions  $CH^*$  sont moyennés par classe (cf. Burguburu [63]).

De manière à adopter la même méthodologie de traitement des données, les cartes instantanées obtenues au cours de la simulation sont repérées sur le signal de pression représenté sur la figure 9.11. Ce signal de pression est issu de l'intégration de la pression sur un plan localisé trois longueurs en aval de la cavité. La forme du signal expérimental est rappelée sur la figure 9.12. La fréquence du cycle d'oscillations obtenu numériquement est de 250 Hz au lieu de la fréquence expérimentale de 150 Hz. Par rapport au signal expérimental, le signal numérique présente principalement deux maxima locaux. Néanmoins, la seconde élévation est d'amplitude beaucoup plus élevée que celle observée numériquement (entre les points 4 et 5 numériques et expérimentaux). En effet, ces deux positions sur le spectre sont les plus critiques. En 4, l'écoulement principal s'inverse pour amorcer la vidange de la cavité qui s'achève à l'étape 5. L'inversion du sens de l'écoulement principal rend la simulation discutable et explique les différences observées avec le dispositif expérimental.

Les figures 9.13 et 9.14 représentent l'intégration du terme source d'énergie ainsi que le champ de vitesse instantané issu d'un plan médian pour l'expérience et la simulation et pour différentes étapes représentées sur les spectres de pression. A l'étape 1 (a), la vitesse dans le canal principal est positive et la flamme est plaquée contre la paroi aval. L'écoulement dans la cavité s'évacue principalement au niveau de l'angle aval. A l'étape 2 (b), la vitesse dans l'écoulement principal devient négative et les gaz de la cavité s'échappent dans le sillage du barreau. En (c), la flamme occupe toute la cavité et atteint la zone en amont des accroches flammes.

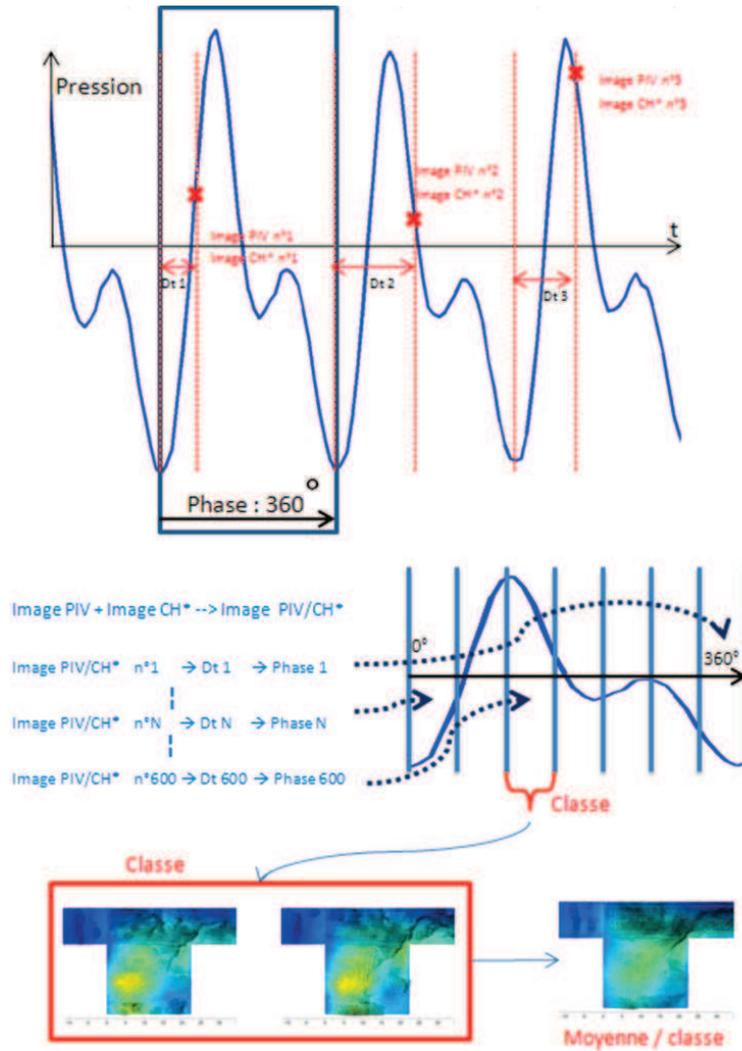


**FIGURE 9.9:** Structure de la flamme en différents points du cycle associée au cas M20C07A10 : Emission  $CH^*$  et vecteurs vitesse 2D obtenus par PIV.

La vitesse est toujours négative dans le canal principal. En (d), la flamme poursuit sa remontée en amont des barreaux. L'activité dépressionnaire du barreau n'est plus visible et les gaz de la cavité s'échappent au coin aval. La vitesse principale devient positive et convecte la flamme présente dans le canal principal. A l'étape 5, l'écoulement principal évacue la flamme et la cavité achève sa vidange. Les vitesses sont particulièrement importantes au coin aval. A l'étape 6, seul un noyau de flamme subsiste dans la cavité. Cette nouvelle flamme se développe au cours de l'étape 7.

Dans l'ensemble, la simulation numérique semble ainsi reproduire la dynamique de la flamme dans la cavité puisque les structures de flammes sont relativement similaires. Par contre, les champs de vitesse manifestent des écarts plus importants. Ces écarts peuvent être attribués, en partie, aux fluctuations de l'alimentation en air dans la cavité dans le dispositif expérimental, où il n'a pas été possible de contrôler avec précision le débit d'air. En effet, pour ce cas, l'effet de l'air aval est visible

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 9.10:** Méthode expérimentale pour le signal  $CH^*$  intégré et les données PIV (figure extraite de Burguburu [63]).

de manière intermittente comme le souligne la figure (c). Ainsi, l'effet de l'air se manifeste plus dans les résultats numériques. L'interaction de la dynamique globale de l'écoulement dans la cavité rend difficile le contrôle des injecteurs.

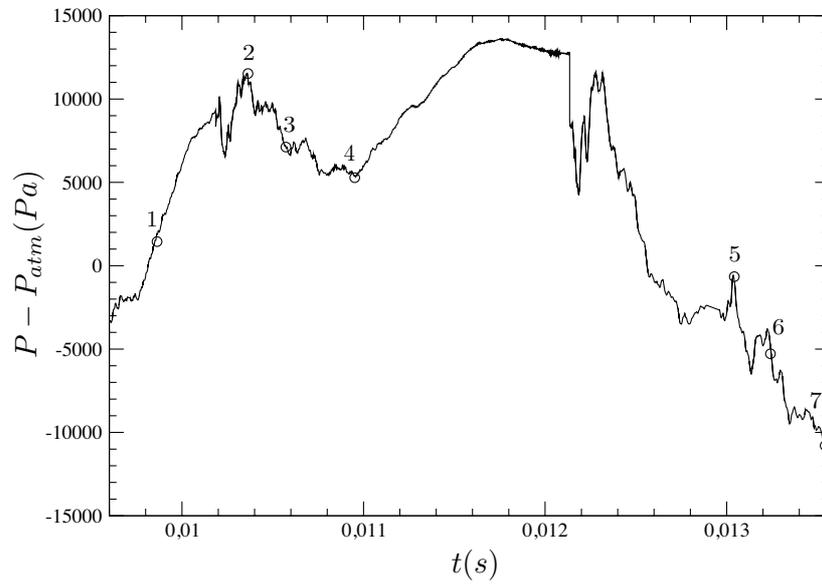


FIGURE 9.11: Signal de pression moyenné obtenu trois longueurs en aval de la cavité.

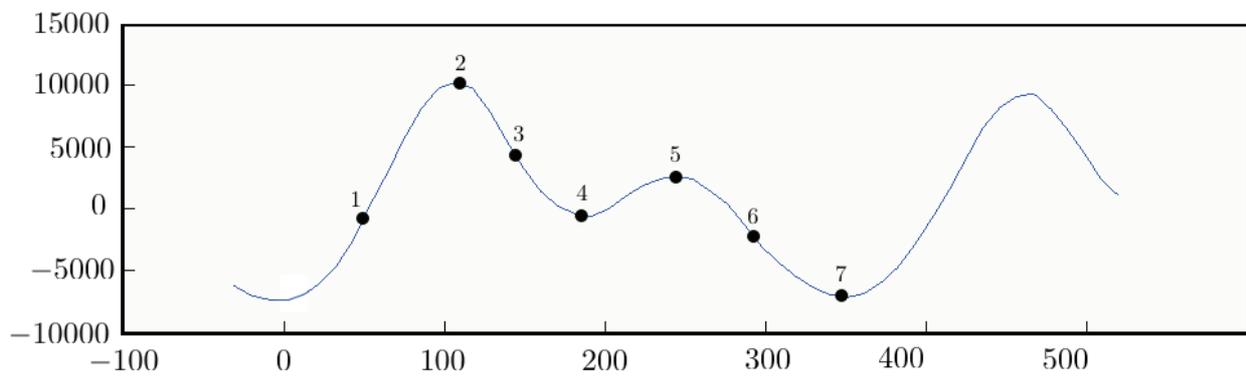
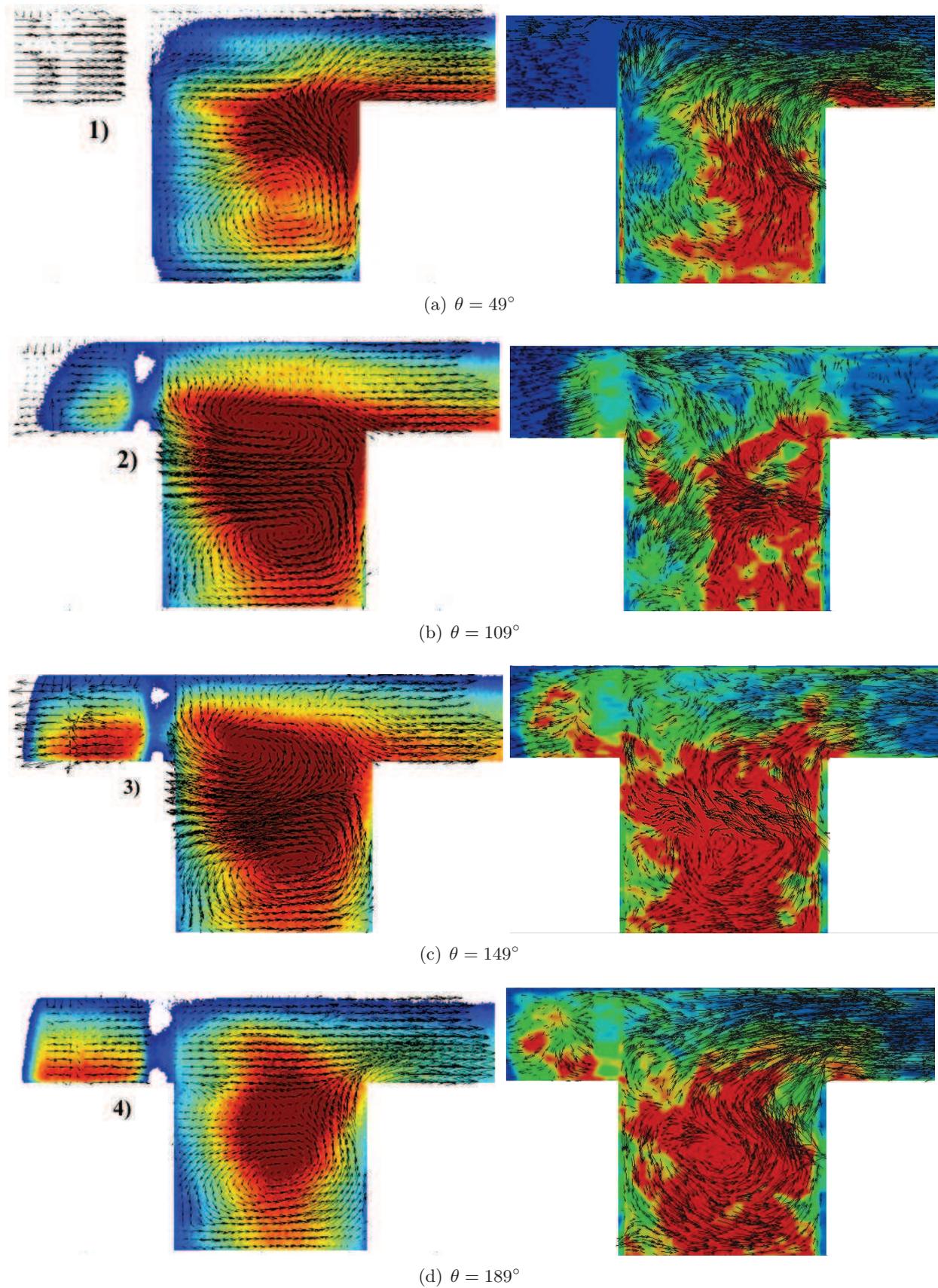
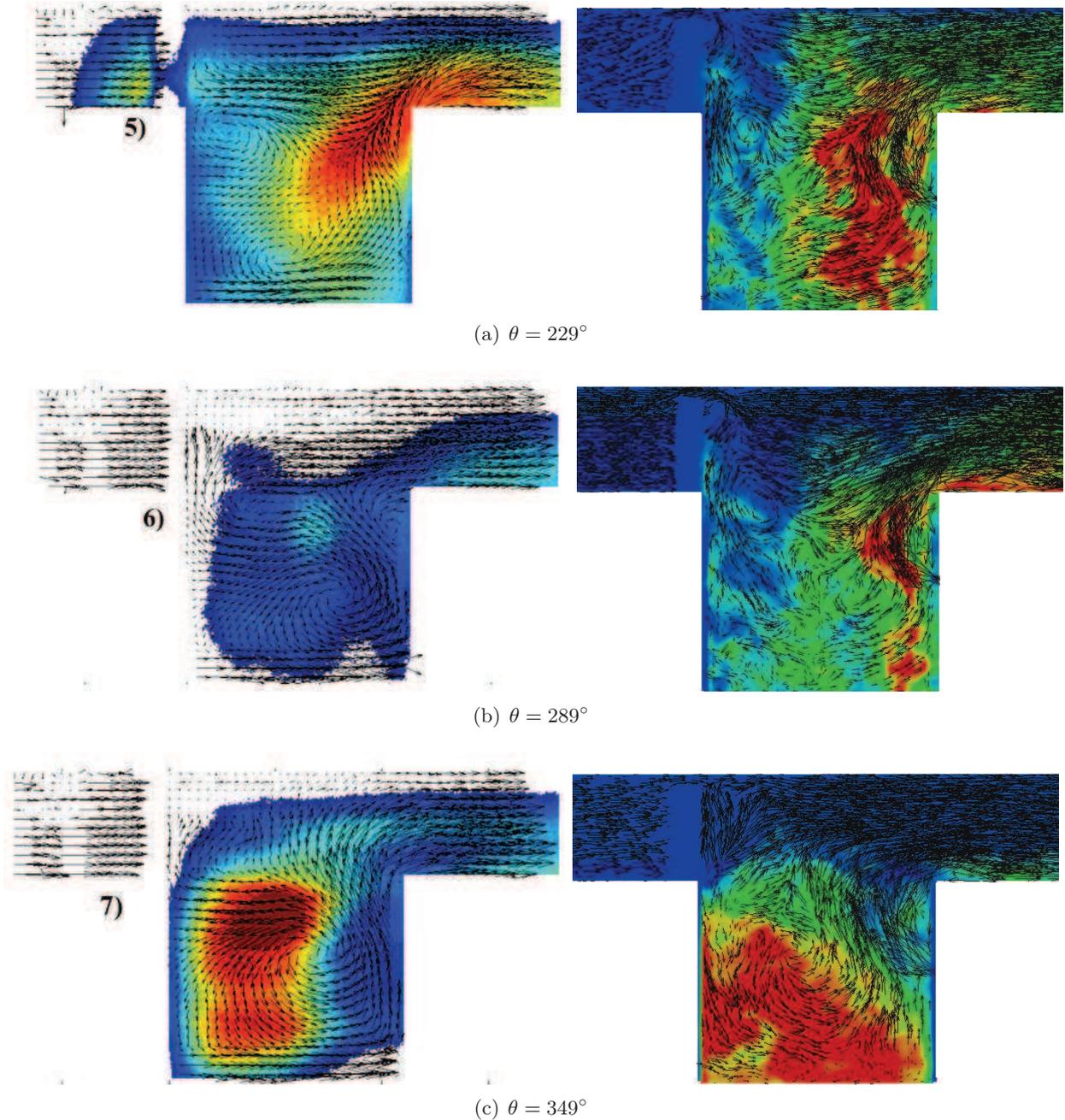


FIGURE 9.12: Signal de pression expérimental obtenu à la sortie de la chambre de combustion.



**FIGURE 9.13:** Cartes  $CH^*$  adjointes aux champs PIV 2D obtenues expérimentalement (gauche) et intégration des termes sources d'énergie et vecteurs vitesse des plans entre barreaux obtenus numériquement (droite) pour la configuration M20C07A10.



**FIGURE 9.14:** Cartes  $CH^*$  adjointes aux champs PIV 2D obtenues expérimentalement (gauche) et intégration des termes sources d'énergie et vecteurs vitesse des plans entre barreaux obtenus numériquement (droite) pour la configuration M20C07A10.

### 9.4.2 Dynamique de la flamme

La dynamique de la flamme est illustrée sur les figures 9.15 et 9.16 au moyen d'un iso-contour de la variable de progrès  $Y_c = 0,2$  et de l'iso-température à 1700K coloriées par la richesse. Le rôle primordial de la flamme pilote dans la cavité est ainsi soulignée. Alors que la flamme est riche dans le bas de la cavité aux abords de l'injecteur pilote, la flamme principale demeure pauvre.

Le cycle de combustion aux conditions nominales s'accompagne d'importantes fluctuations de la position de la flamme et du champ de pression. Ce couplage entre la dynamique instable de la flamme et les ondes de pression associées est représenté sur la figure 9.17 pour un plan médian et 9.18 pour un plan derrière un barreau. Au cours de l'expansion de la flamme, la pression augmente. Lorsqu'elle atteint son maximum, la flamme remonte. Quelque soit le plan sélectionné, la dynamique de la flamme est relativement similaire ce qui indique que les accroches flammes ne constituent pas l'élément pilote.

La flamme est particulièrement instable. La figure 9.19 expose la surface stoechiométrique en différents instants du cycle coloriée par la température. Cette surface est tortueuse ce qui suggère l'existence de fortes instabilités dans le système.

Le couplage entre les oscillations de dégagement de chaleur et l'acoustique peut être caractérisé par le paramètre de Rayleigh présenté dans la section 9.2.2. La figure 9.20 représente le paramètre de Rayleigh intégré en volume  $Ra(t)$  et normalisé ainsi que les fluctuations de pression  $\Delta P(t)/\langle P \rangle$  et du terme source d'énergie  $\Delta \dot{\omega}_e(t)/\langle \dot{\omega}_e \rangle$  normalisées et évaluées à l'aide des relations :

$$\Delta P(t) = \int_{\Omega} P'(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (9.19)$$

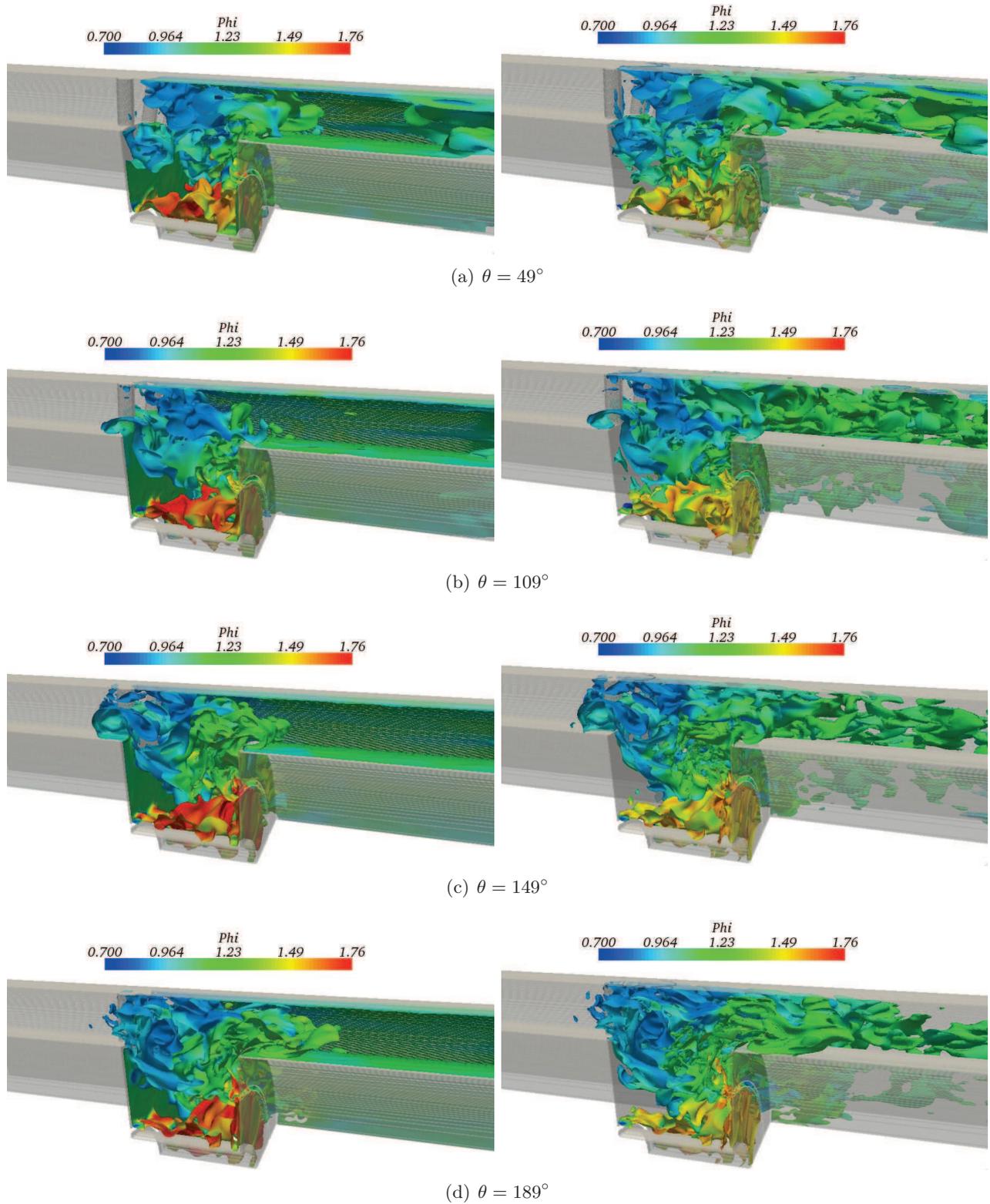
$$\Delta \dot{\omega}'_e(t) = \int_{\Omega} \dot{\omega}'_e(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (9.20)$$

$$\langle \dot{\omega}_e \rangle = \int_{\Omega} \langle \dot{\omega}_e(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \quad (9.21)$$

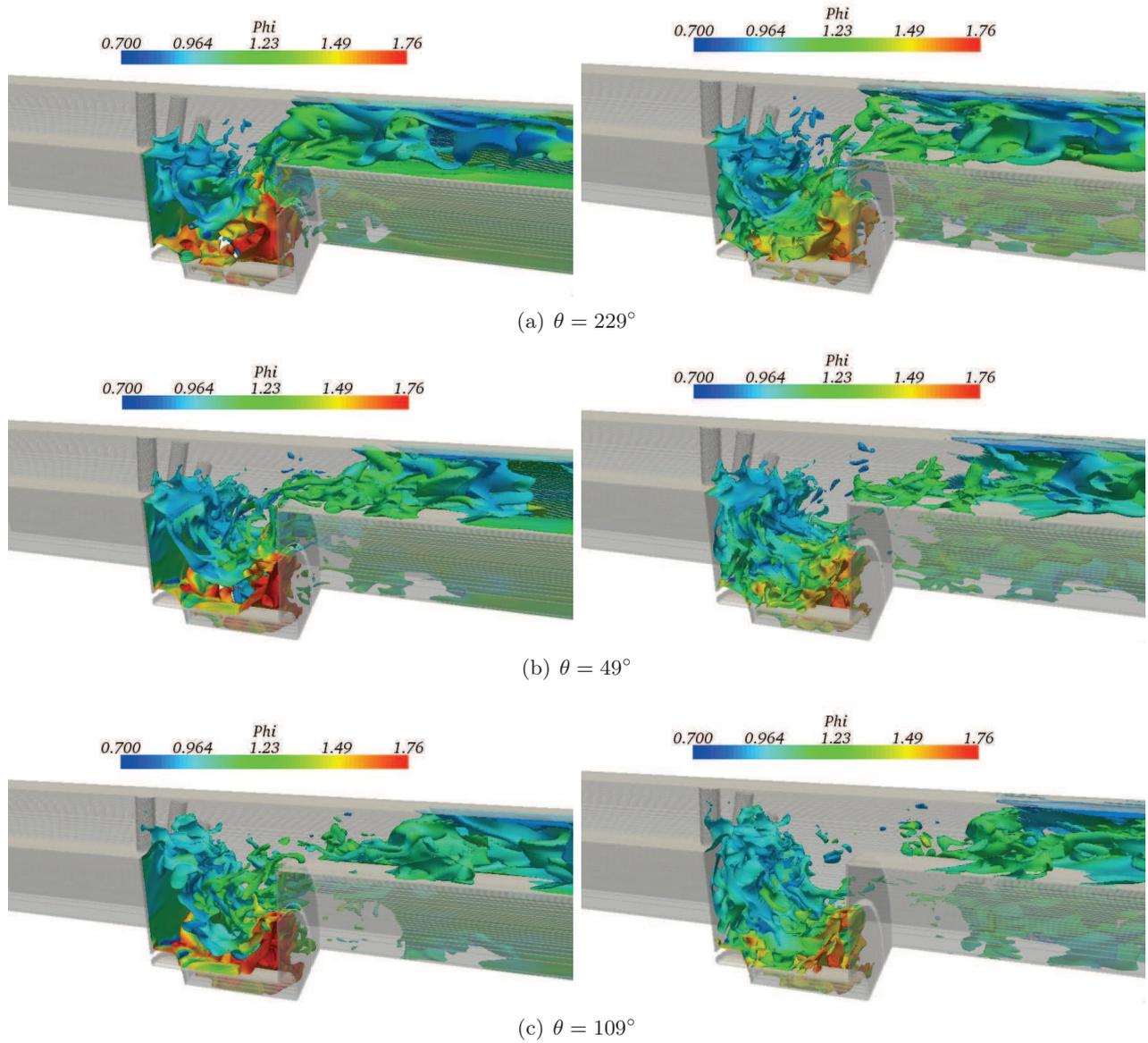
$$\langle P \rangle = \int_{\Omega} \langle P(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x} \quad (9.22)$$

Ce critère révèle une partie du spectre où la combustion est instable (aire sous la courbe du critère de Rayleigh positive). Cette période instable apparaît au niveau de l'étape 4 lorsque le signe de l'écoulement dans le canal principal s'inverse. Les étapes suivantes associées à la formation d'une nouvelle flamme ne sont pas associées à un régime instable de combustion.

CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 9.15:** Structure de la flamme instable révélée par : le contour de la variable d'avancement  $Y_c = 0,2$  et l'iso-température à 1 700K coloriés par la richesse pour le cas M20C07A10.



**FIGURE 9.16:** Structure de la flamme instable révélée par : le contour de la variable d'avancement  $Y_c = 0,2$  et l'iso-température à 1700K coloriés par la richesse pour le cas M20C07A10.

CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

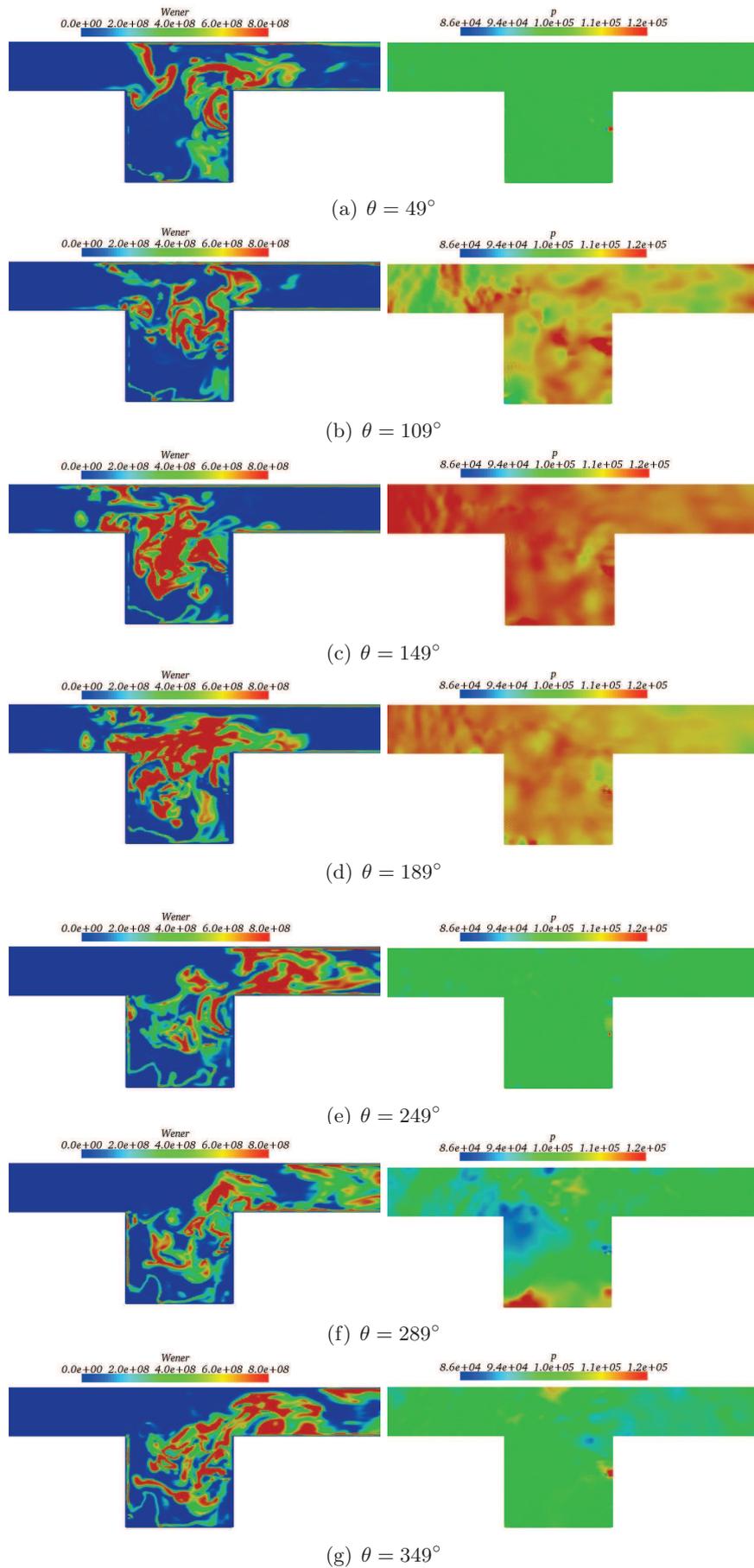
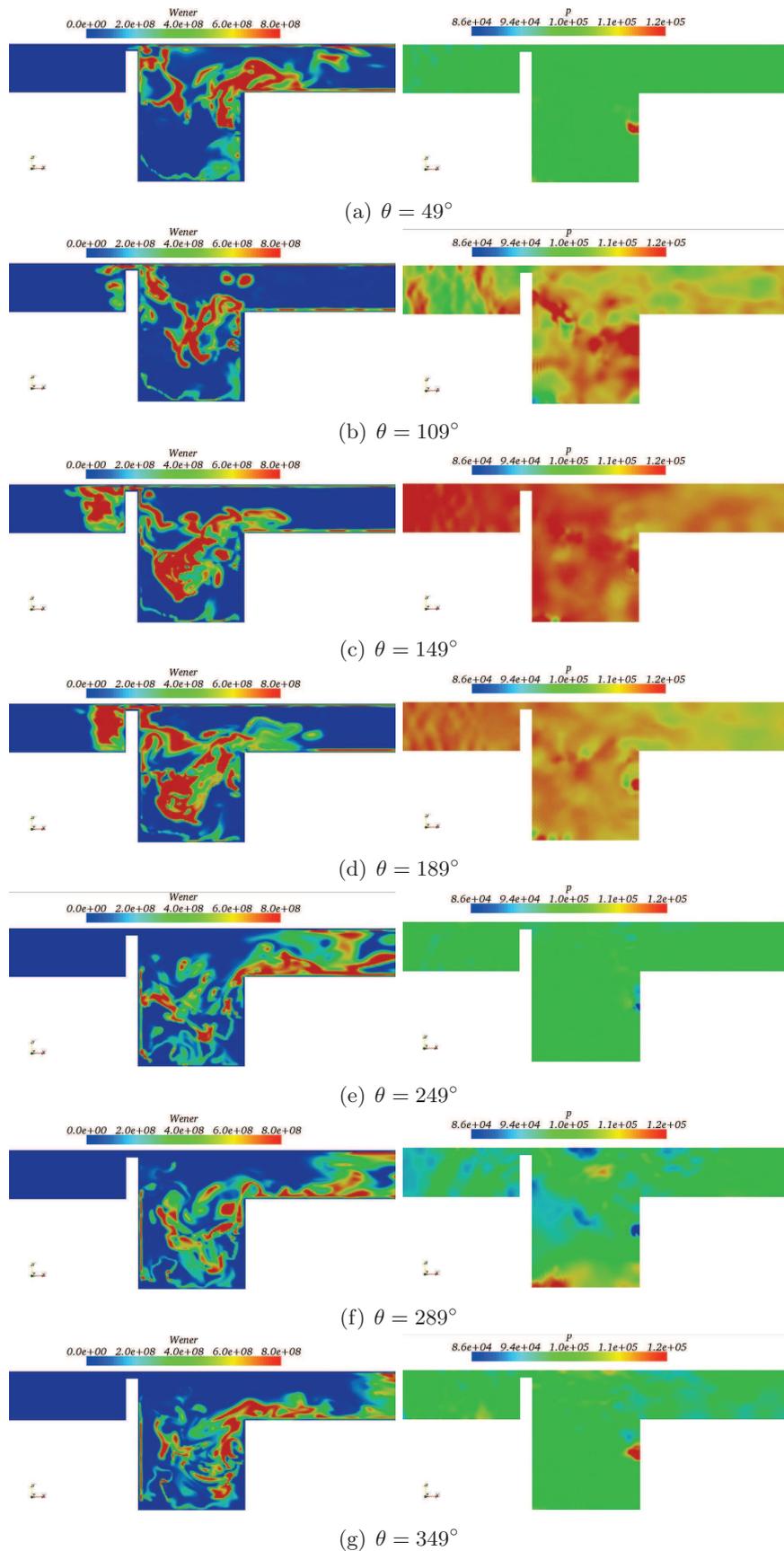


FIGURE 9.17: Cartes instantanées du terme source d'énergie et de la pression pour un plan situé entre deux barreaux pour le cas M20C07A10.

# CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 9.18:** Cartes instantanées du terme source d'énergie et de la pression pour un plan situé derrière un barreau pour le cas M20C07A10.

CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE  
CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

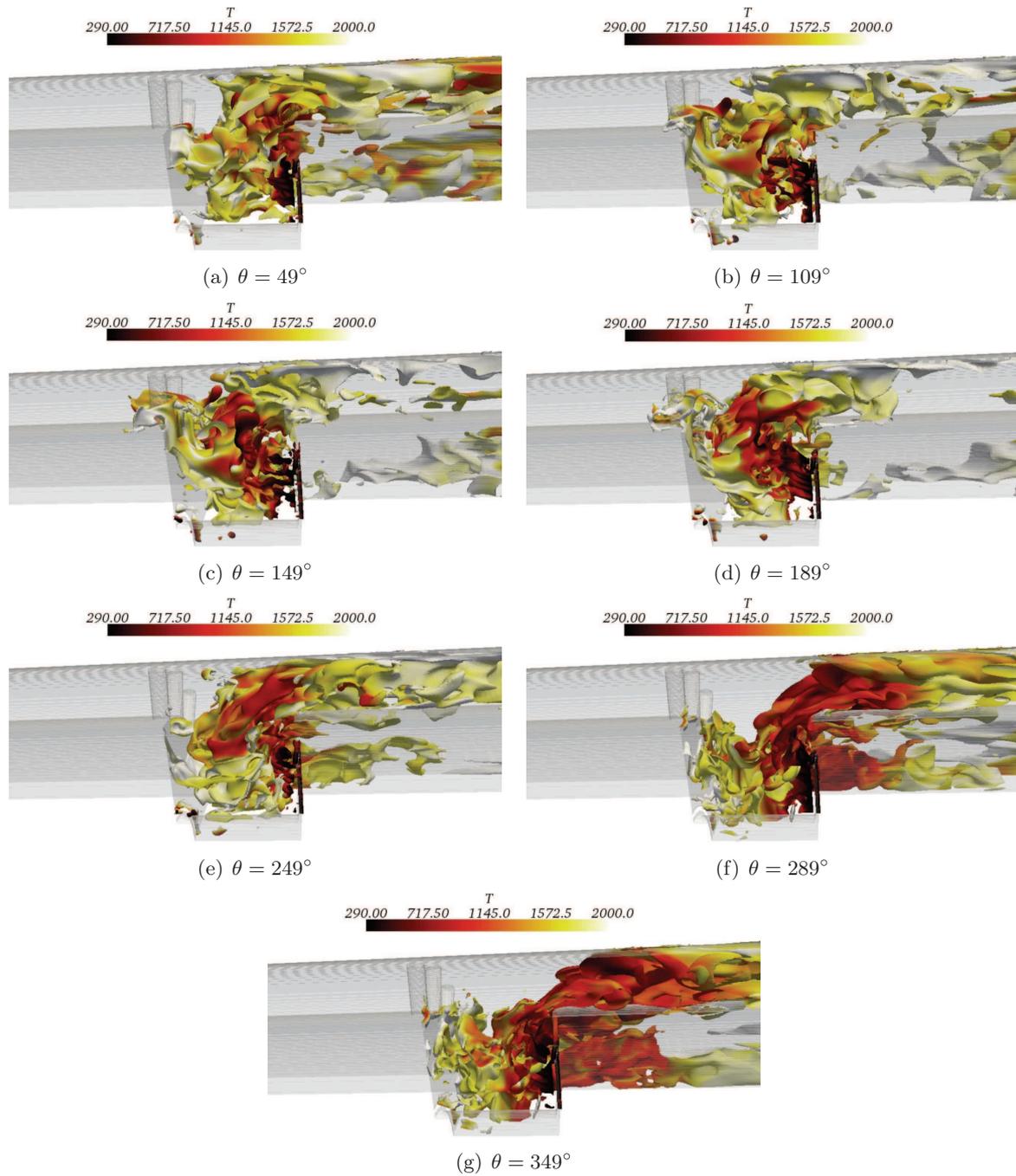
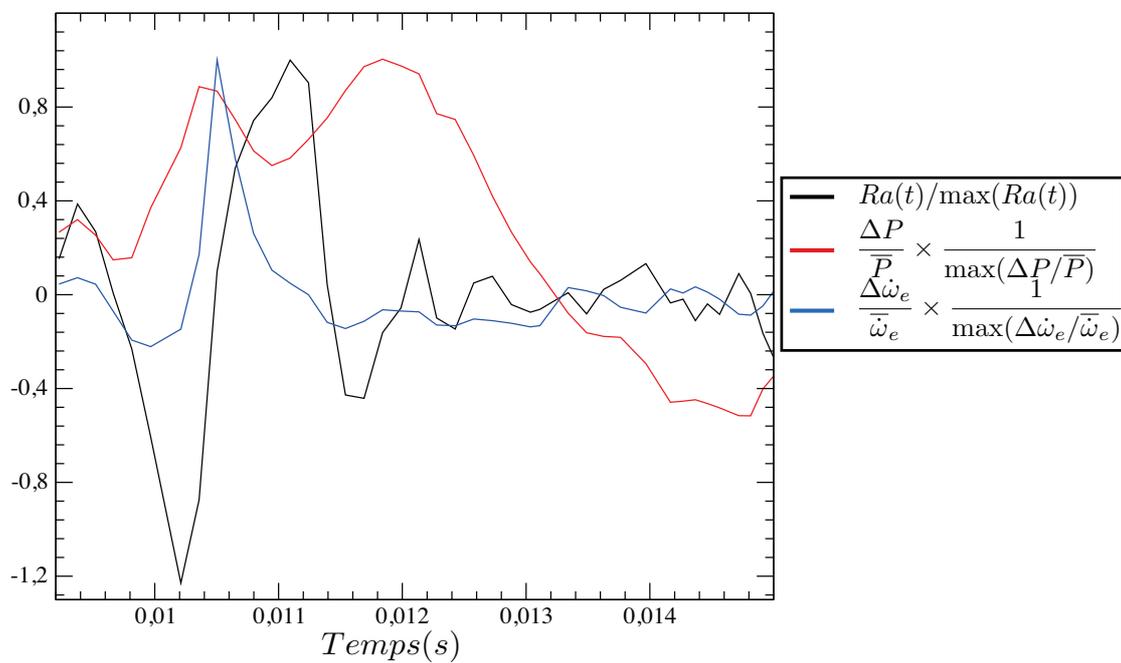


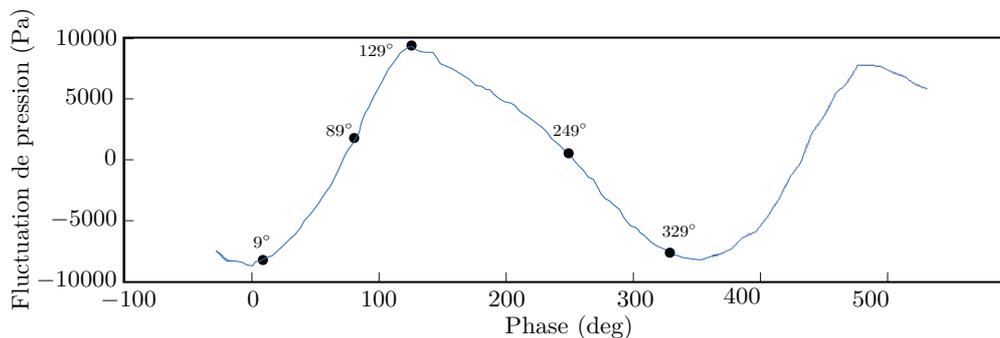
FIGURE 9.19: Surface stœchiométrique pour le cas M20C07A10.



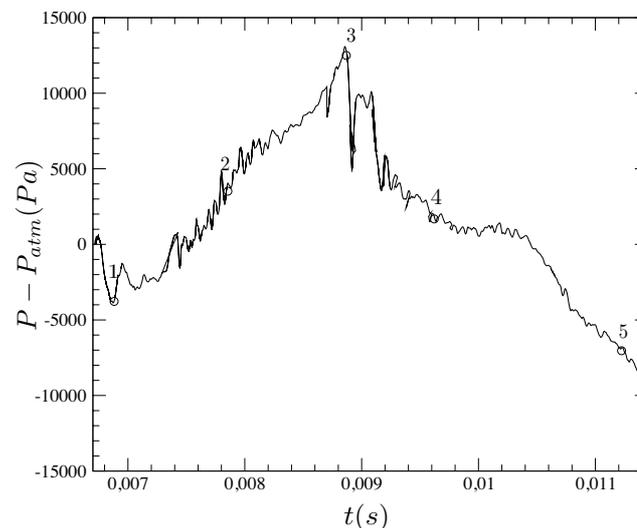
**FIGURE 9.20:** Critère de Rayleigh temporel pour la configuration M20C0710.

## 9.5 Stabilisation par augmentation du débit principal : Cas M30

Dans cette section, nous étudions l'effet d'une augmentation du débit principal sur la dynamique de la flamme. Dans le cas précédent, la vitesse de l'écoulement principal n'est pas suffisamment forte pour s'opposer à la dynamique de la flamme qui tend à remonter l'écoulement. On peut donc s'attendre à ce que l'augmentation du débit principal diminue le phénomène de vidange de la cavité. Néanmoins, l'expérience a révélé que cette augmentation n'est pas suffisante pour prévenir l'apparition de fortes oscillations et du couplage de la flamme avec la dynamique fluide à l'origine de l'instabilité thermo-acoustique. Bien que le volume parcouru par la flamme soit moins important, les fluctuations de pression sont toujours intenses comme en témoigne le spectre expérimental représenté sur la figure 9.21. La chambre présente des oscillations de pression de l'ordre de 20 000 Pa au lieu des 30 000 Pa du cas précédent.



**FIGURE 9.21:** Signal de pression expérimental obtenu à la sortie de la chambre de combustion en fonction de la phase du cycle de cavité et points caractéristiques qui seront comparés aux résultats numériques pour le cas M30C07A10.



**FIGURE 9.22:** Signal de pression numérique intégré sur un plan situé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M30C07A10.

Nous avons reproduit numériquement cette dynamique instable de la chambre de combustion. Le domaine de calcul débouche toujours sur un élargissement et la sortie est décrite avec une condition de sortie non réfléchissante. Le signal de pression obtenu en sortie de la chambre est illustré sur la figure 9.22. Rappelons que ce signal résulte de l'intégration de la pression sur un plan situé

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

---

trois longueurs en aval de la cavité. Il est caractérisé par un pic principal. La fréquence associée à la dynamique de la chambre est ainsi de l'ordre de 210 Hz. Cette fréquence est plus élevée que celle mesurée expérimentalement (120 Hz). Cette différence peut être imputée au traitement des conditions limites dont les impédances ne prennent pas en compte l'interaction de la chambre de combustion avec le dispositif expérimental.

### 9.5.1 Evolution de la flamme instable comparée avec l'expérience

La structure de la flamme en différents points du cycle de pression numérique et expérimental est illustrée sur la figure 9.23. Les cartes expérimentales témoignent des émissions de  $CH^*$  dans l'ensemble de la chambre alors que les cartes numériques présentent le terme source d'énergie intégré et projeté sur un plan entre deux barreaux. L'étape (a) illustre l'expansion thermique de la flamme dans la cavité. Cette expansion se poursuit à l'étape (b). En (c), la flamme se propage légèrement en amont. L'étape (d) correspond à la fin de la vidange de la cavité et à la naissance d'une nouvelle flamme qui croît en (e).

### 9.5.2 Dynamique de la flamme

La dynamique de la flamme est illustrée sur la figure 9.24. La flamme tend à remonter en amont des barreaux en (c). La flamme pilote riche entretient la flamme dans la cavité comme le souligne les étapes (d) et (e) où une flamme riche est particulièrement prononcée dans la cavité.

La figure 9.25 représente les cartes du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux ou derrière un barreau et illustre la position du front de flamme. Bien que le débit ait été augmenté, la flamme est toujours instable. Par contre, contrairement au cas M20C07A10, la flamme tend à s'accrocher aux barreaux.

L'évolution du temps de résidence est représentée sur la figure 9.26 pour différentes étapes du cycle de pression. Ce temps de résidence augmente des phases (d) à (c) au cours de l'expansion thermique de la flamme. La cavité piège la flamme sur une période du cycle avant que l'écoulement principal apporte des conditions favorables à la remontée de l'écoulement et à l'évacuation de la cavité. Au début du cycle (phase d), l'existence de poches de temps de résidence élevé révèle que la cavité ne se vide pas entièrement à chaque fin de cycle, un noyau de flamme subsiste au fond de la cavité et permet l'initiation d'un nouveau cycle.

Le critère de Rayleigh est illustré sur la figure 9.27 où sont reportées les évolutions du paramètre de Rayleigh intégré en volume  $Ra(t)$  et normalisé ainsi que les fluctuations de pression  $\Delta P / \langle P \rangle$  et du terme source d'énergie  $\Delta \dot{\omega}_e / \langle \dot{\omega}_e \rangle$  normalisées.

Cette figure illustre la présence de deux zones instables où les oscillations de pression et du terme source d'énergie sont en phase. Alors que le premier pic apparaît au cours de l'expansion de la flamme dans la cavité, le second est associé à l'évacuation de la cavité.

### 9.5.3 Impact de la condition de sortie : dynamique avec une sortie réfléchissante

Les précédents résultats sont obtenus avec une sortie non réfléchissante. Bien que cette approche soit mieux appropriée pour le traitement d'une sortie compressible, pour une cavité réactive subsonique, elle se heurte à de nombreuses difficultés (fluctuations des quantités thermodynamiques intenses...) qui peuvent induire une dérive. Pour limiter cette dérive et assurer ainsi une répétabilité du cycle de combustion, les simulations sont également conduites avec **une sortie réfléchissante**.

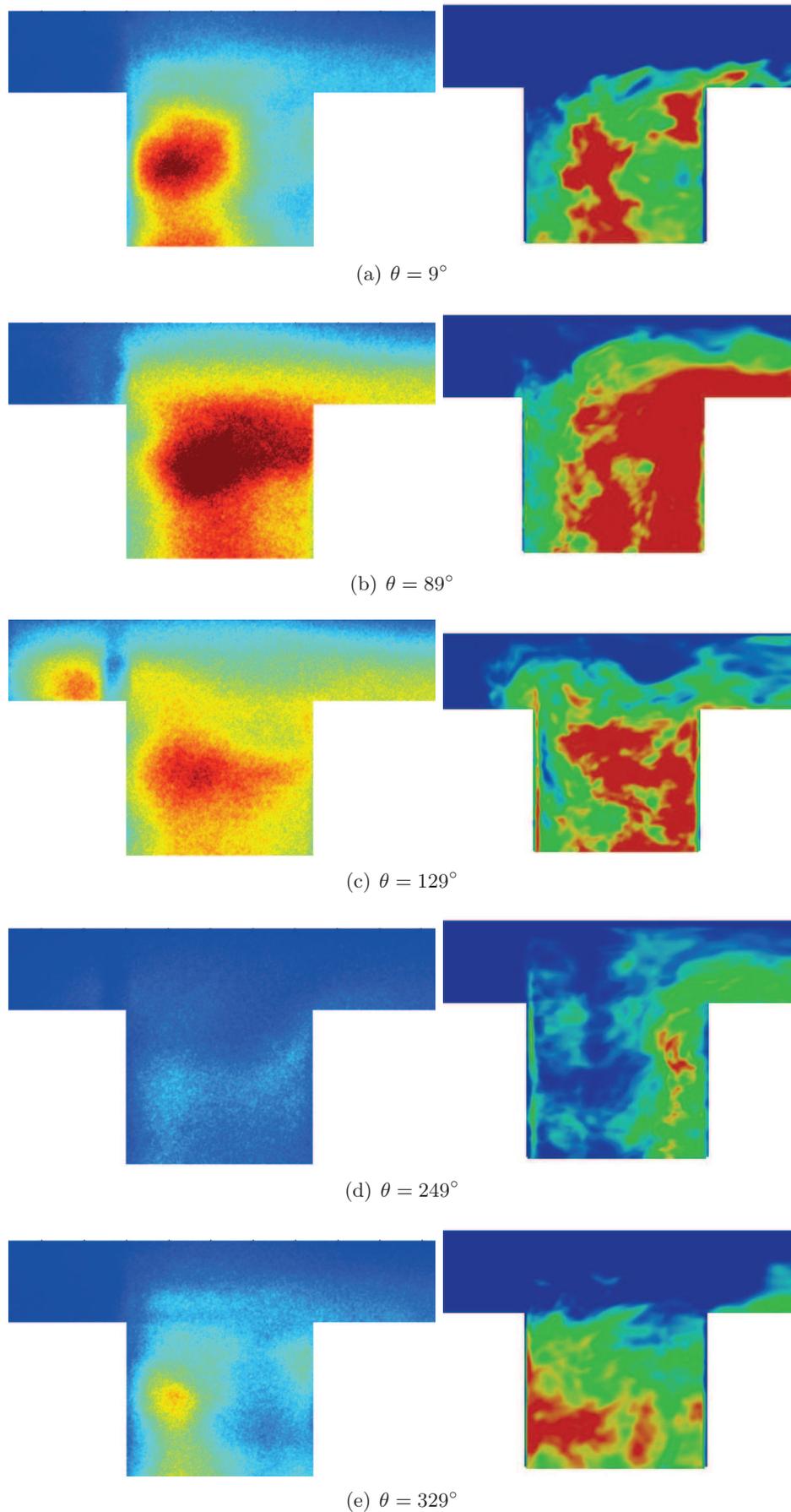
Le signal de pression obtenue avec une sortie réfléchissante est illustré sur la figure 9.28. L'amplitude du signal de pression est similaire à celle obtenue avec une sortie non réfléchissante. Par contre, l'utilisation d'une condition réfléchissante modifie la fréquence du cycle de combustion. Cette der-

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

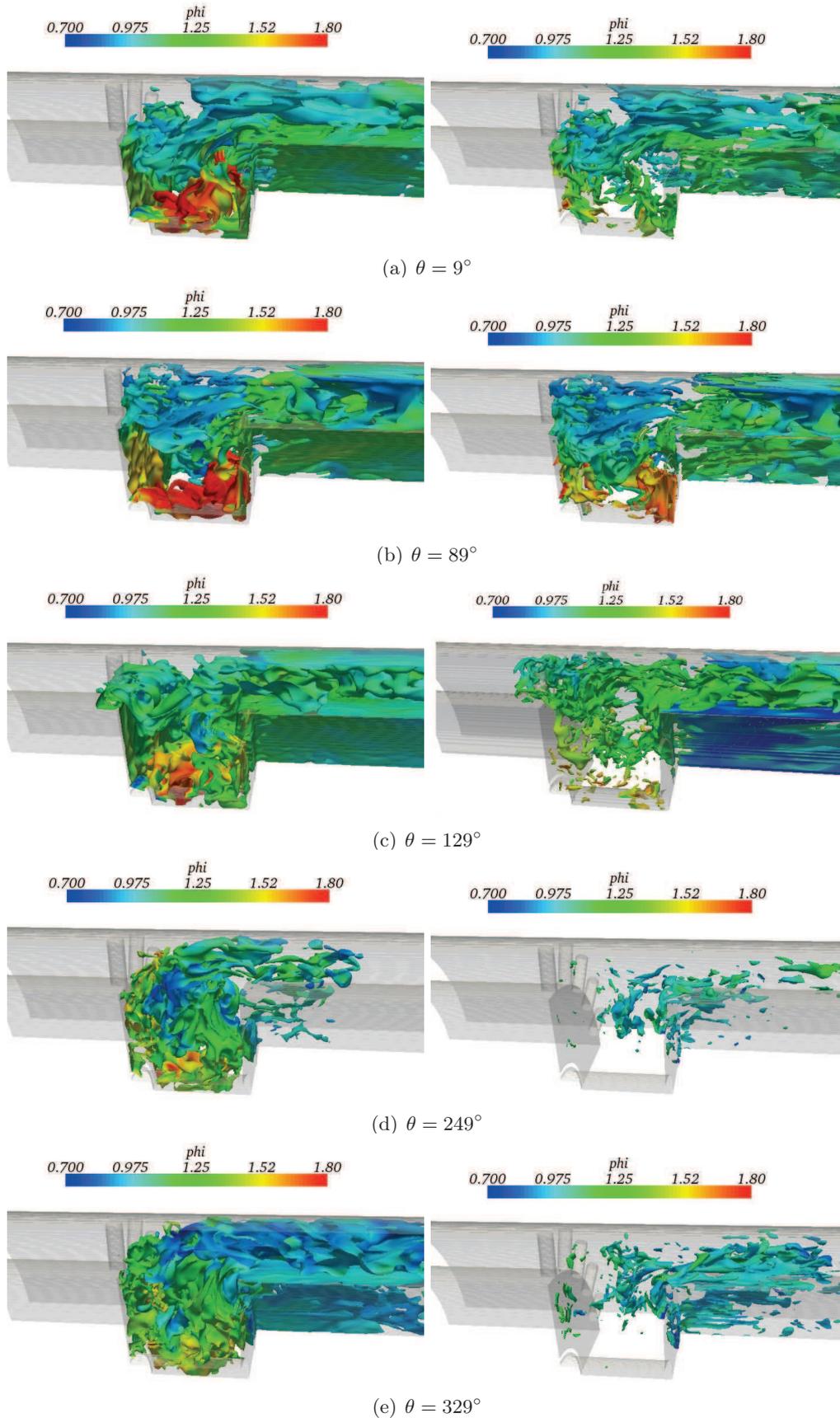
---

nière est de l'ordre de 900 Hz, alors que la fréquence obtenue avec une sortie non réfléchissante était de 210 Hz pour une valeur expérimentale de 120 Hz. Elle peut être associée au temps de retournement dans la cavité ( $f \sim 2 \times 12/22.10^{-3} = 1090$  Hz).

L'augmentation de la fréquence du cycle de combustion modifie peu la structure de la flamme comme en témoigne la figure 9.29 qui représente le contour du terme source colorié par la température. La succession des étapes de croissance de la flamme, remontée en amont des barreaux, vidange de la cavité et formation d'une nouvelle flamme est respectée.

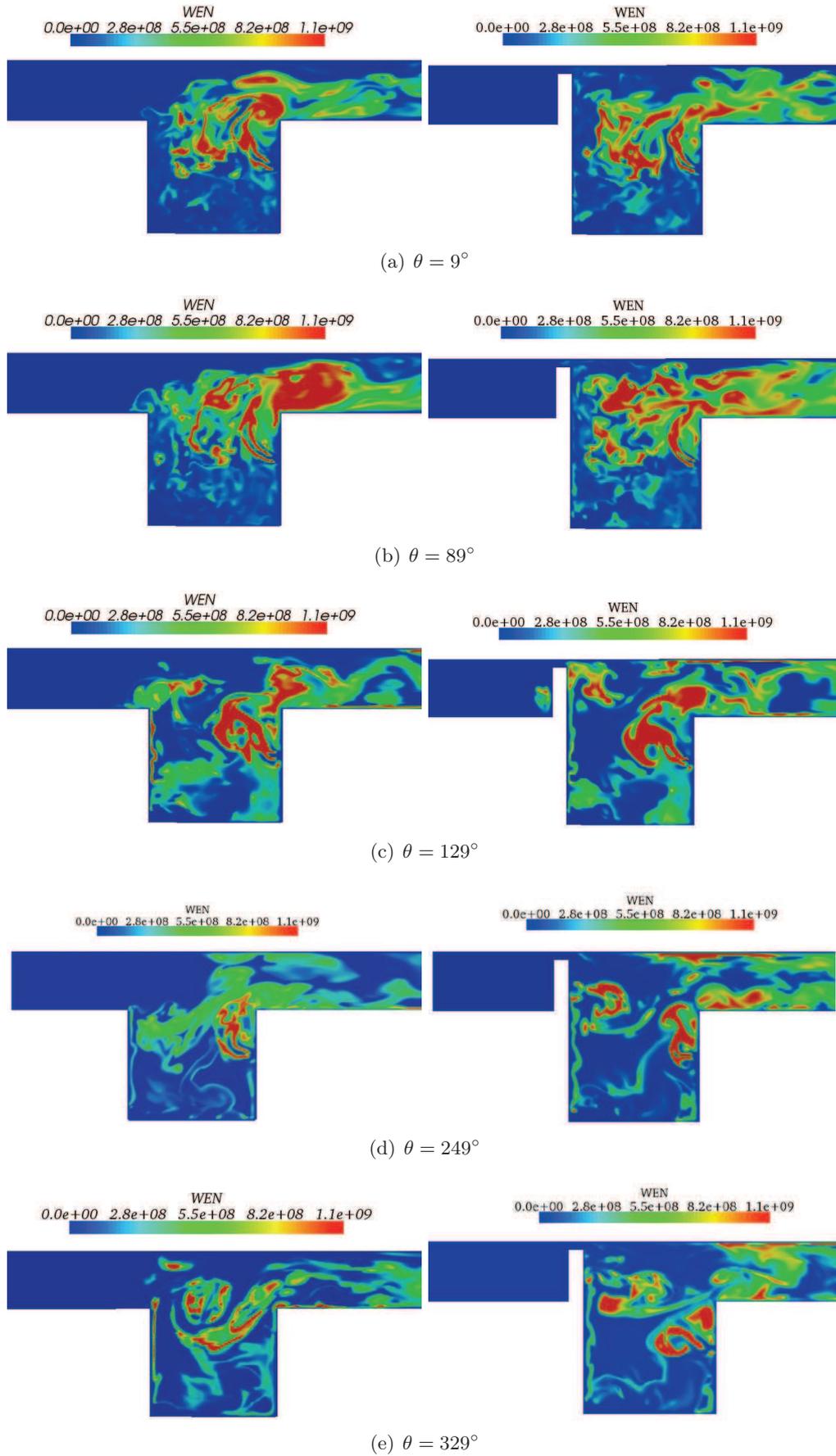


**FIGURE 9.23:** *Intégration des termes sources d'énergie obtenus numériquement (droite) et mesure  $CH^*$  (gauche) pour le cas M30C07A10.*

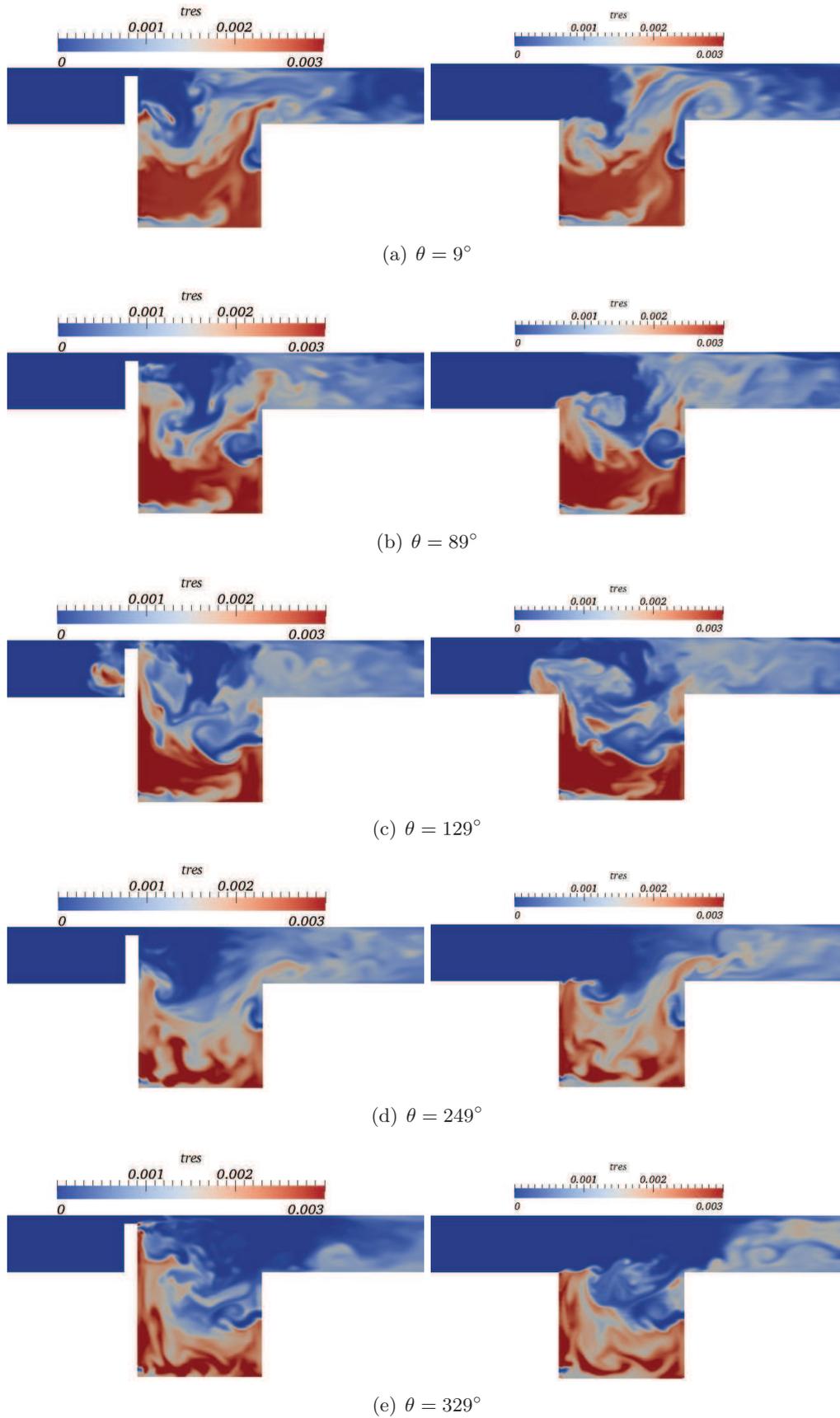


**FIGURE 9.24:** Structure de la flamme instable révélée par : le contour de la variable d'avancement  $Y_c = 0,2$  et par l'iso-température à  $1700K$  coloriés par la richesse pour le cas M30C07A10.

# CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 9.25:** Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux et derrière un barreau pour le cas M30C07A10.



**FIGURE 9.26:** Evolution du temps de résidence derrière un barreau (gauche) et entre deux barreaux (droite) pour le cas M30C07A10.

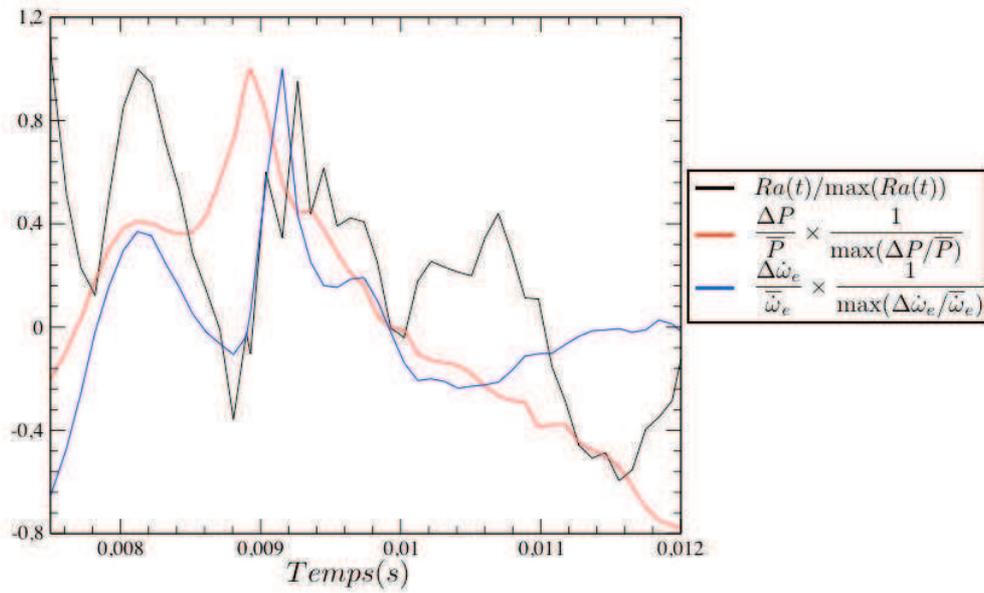


FIGURE 9.27: Critère de Rayleigh temporel pour la configuration M30C0710.

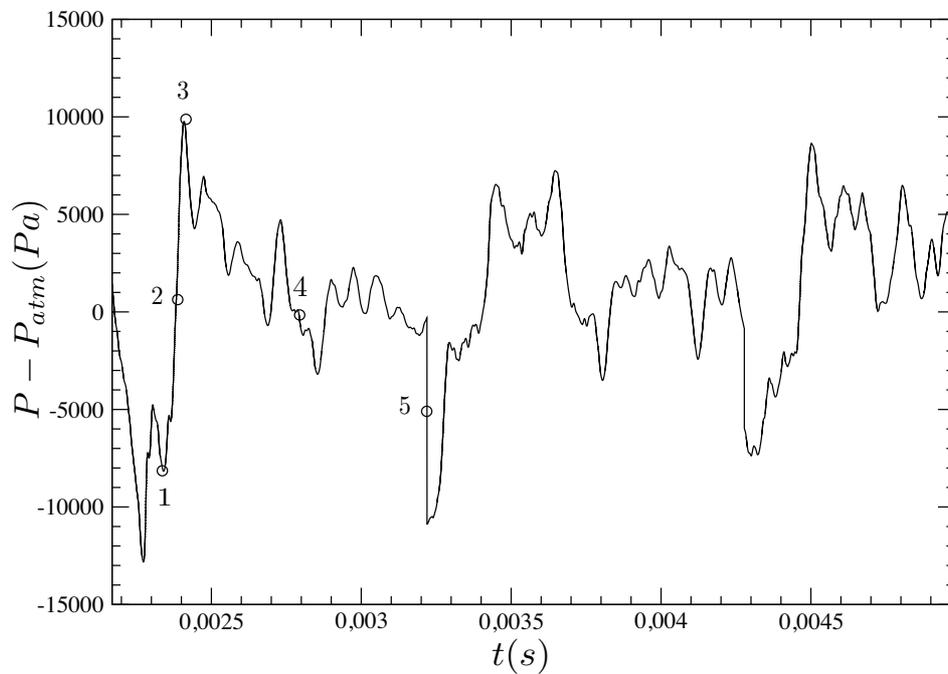
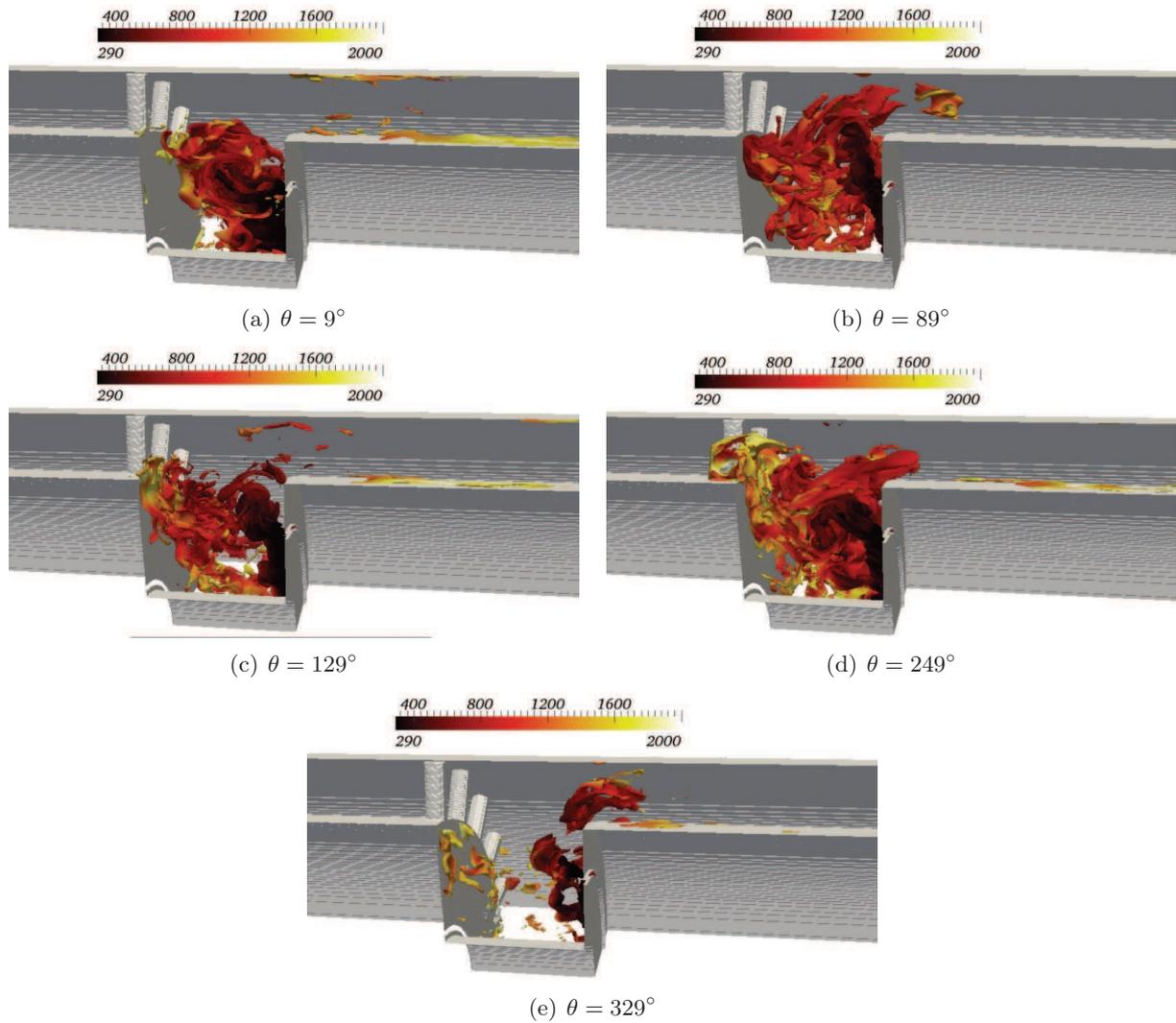


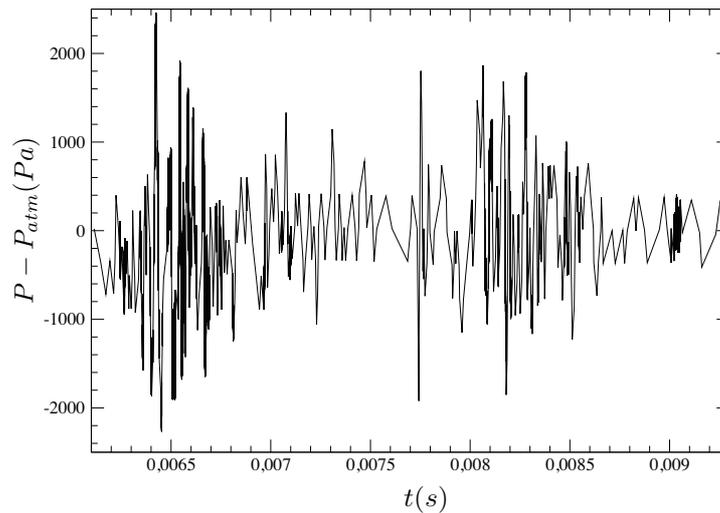
FIGURE 9.28: Signal de pression issu d'un capteur placé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M30C07A10 avec une sortie réfléchissante.



**FIGURE 9.29:** Iso-contours du terme source d'énergie ( $\dot{\omega}_e = 1.10^9 J.kg^{-1}.s^{-1}$ ) pour le cas M30C07A10 avec une sortie réfléchissante.

## 9.6 Stabilisation par augmentation du débit principal : Cas M60

L'augmentation du débit principal à 60 g/s a pour effet de diminuer le mouvement instationnaire de la flamme. Les fluctuations de pression générées par le couplage de la flamme avec la dynamique de cavité sont fortement réduites comme le montre le signal de pression de la figure 9.6. Ce signal de pression ne résulte pas de l'intégration de la pression sur un plan situé trois longueurs en aval de la cavité mais provient d'une cellule fluide localisée à la mi-hauteur du canal. Le signal résultant présente ainsi un aspect plus bruité. L'amplitude maximale est de  $\Delta P \simeq 4000 Pa$  au lieu de  $\Delta P \simeq 15000 Pa$  pour le cas M20C07A10.



**FIGURE 9.30:** Signal de pression issu d'un capteur placé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M60C07A10.

### 9.6.1 Evolution de la flamme stable

L'évolution de la structure de la flamme est illustrée sur la figure 9.31 où les contours de la variable d'avancement ainsi que de la température sont représentés suivant 5 étapes. La cavité manifeste toujours un phénomène de vidange. En (a), la flamme se développe dans la cavité. En (b), la surface de la flamme croît et la flamme se stabilise dans le sillage du barreau. En (c), la flamme est présente dans la cavité et dans le sillage des barreaux. En (d), la cavité amorce sa vidange et la flamme est plaquée contre la paroi avale. En (e), la vidange de la cavité se poursuit. Un noyau de flamme plus important que les cas précédents subsiste néanmoins au sein de la cavité et permet l'initiation d'un nouveau cycle. Le phénomène de vidange étant moins prononcé, les fluctuations de pression résultantes sont moins intenses. Cette évolution de la flamme est également illustrée sur les figures 9.32 et 9.33 qui représentent respectivement l'évolution de la surface stoechiométrique et du terme source d'énergie.

CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

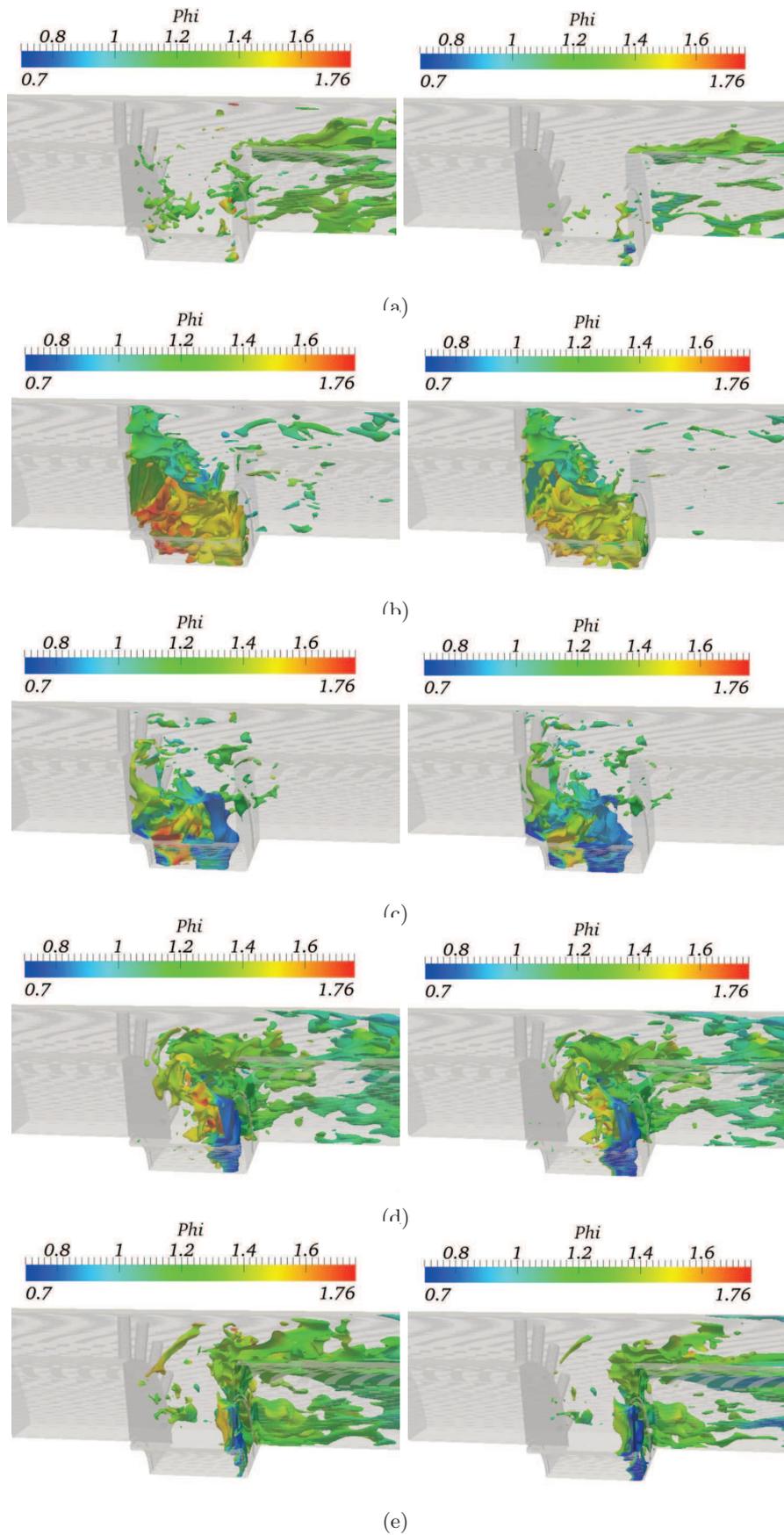
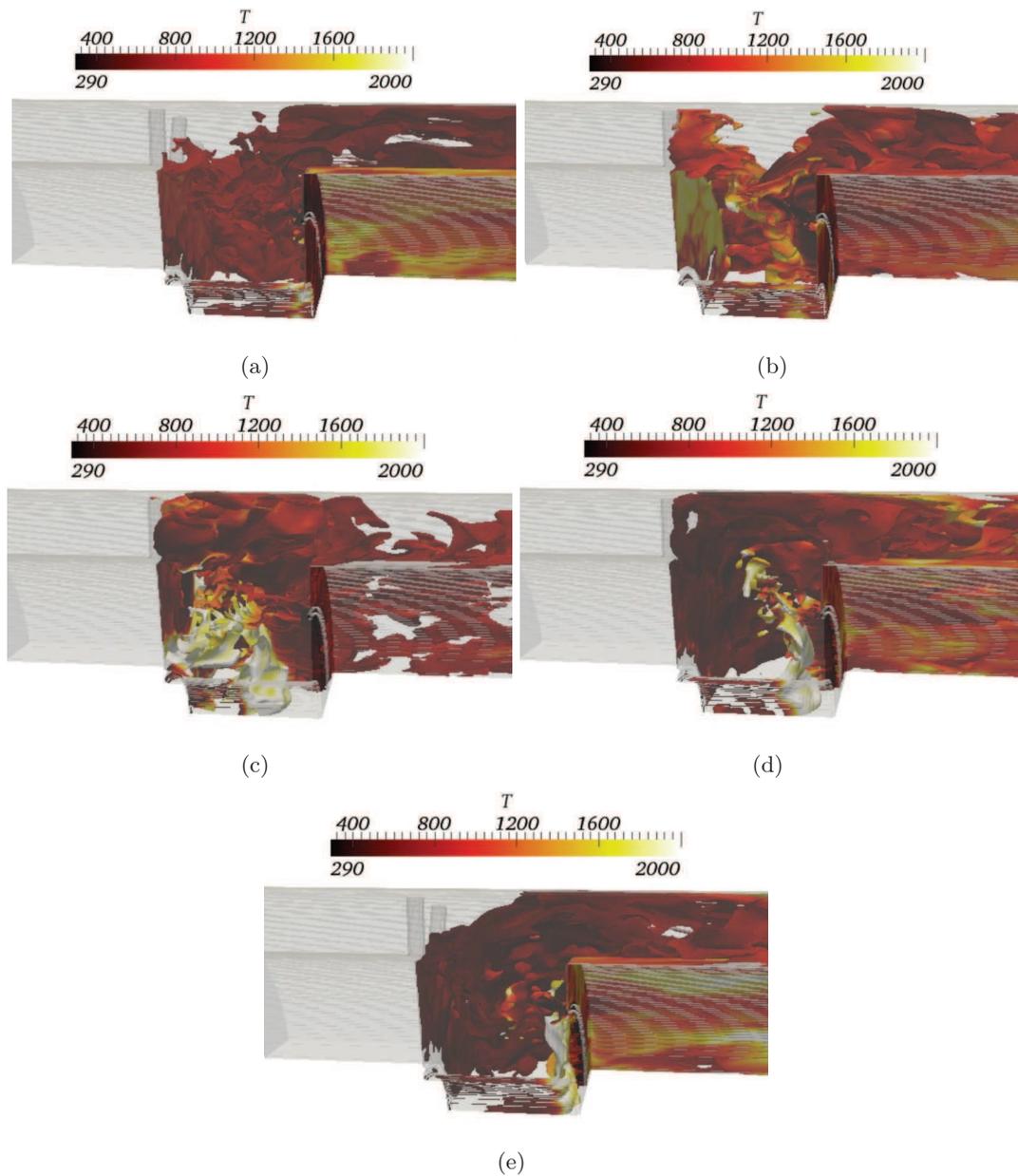
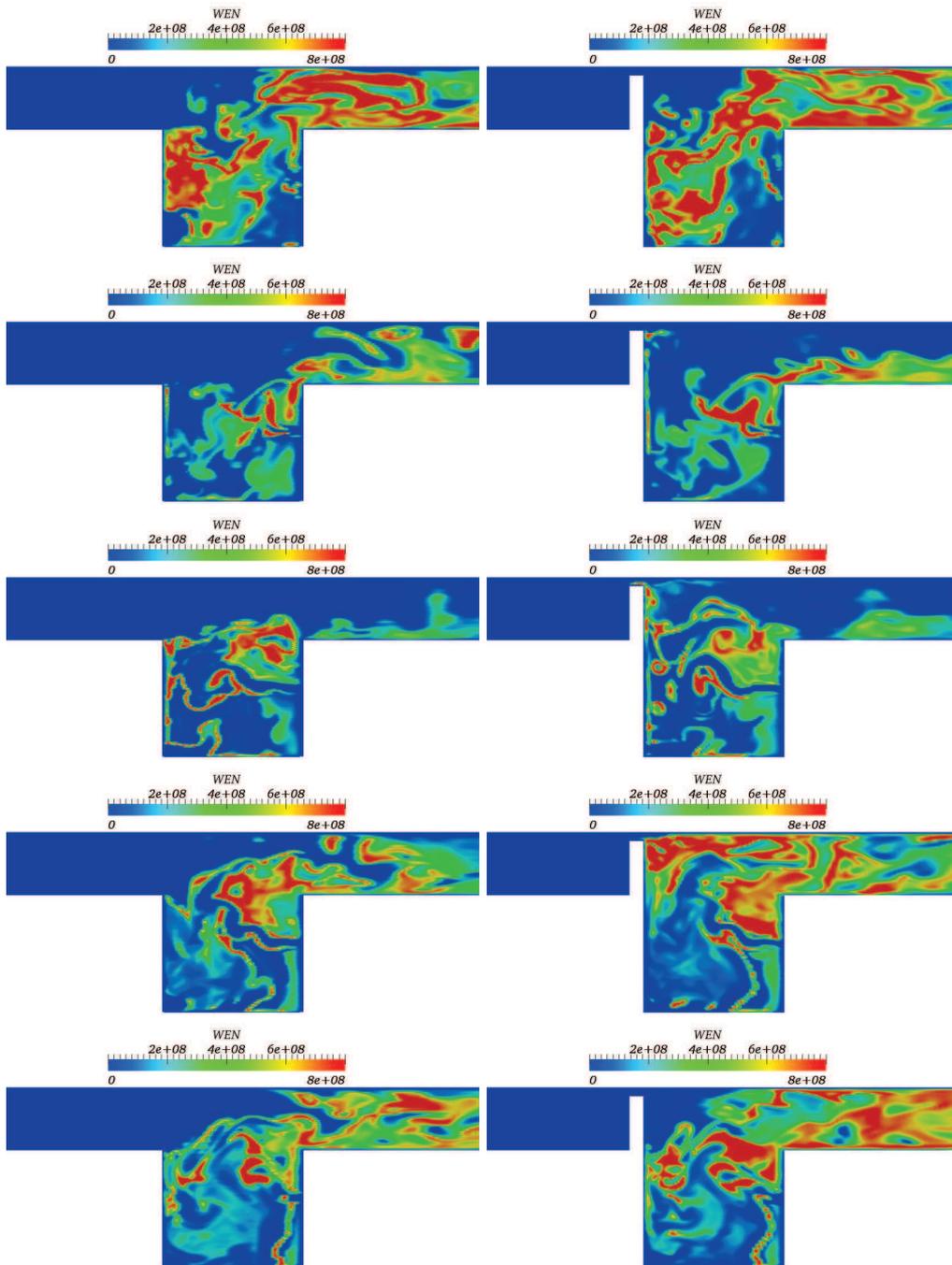


FIGURE 9.31: Structure de la flamme instable révélée par : le contour de la variable d'avancement  $Y_c = 0,2$  et par l'iso-température à  $1700K$  coloriés par la richesse pour le cas M60C07A10.

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 9.32:** Structure de la flamme instable révélée par la surface stoechiométrique colorée par la température pour le cas M60C07A10.



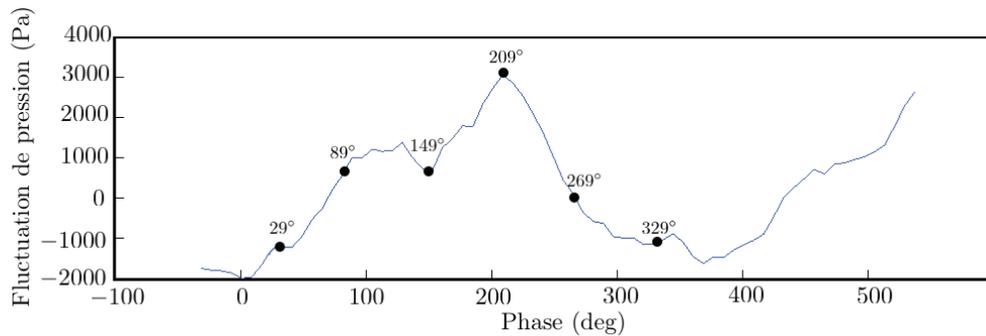
**FIGURE 9.33:** *Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux et derrière un barreau pour le cas M60C07A10.*

## 9.7 Stabilisation par ajout d'un swirl

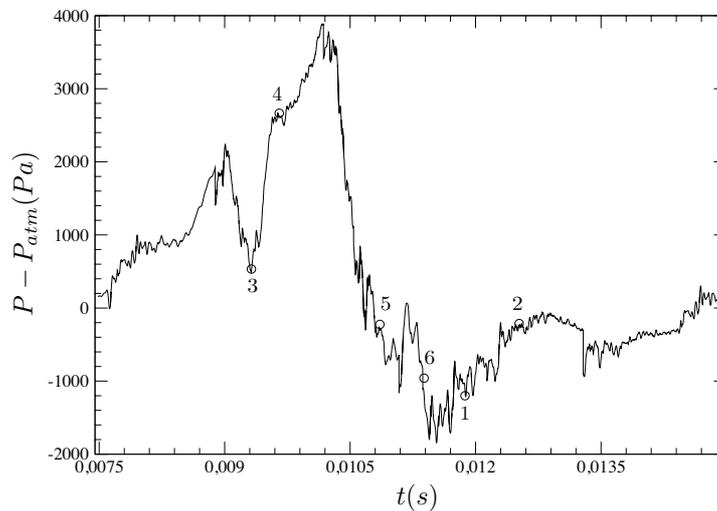
L'effet de l'ajout d'un swirl est ensuite analysé. Pour cette étude, la condition de sortie est considérée, dans un premier temps, comme **non réfléchissante**.

### 9.7.1 Signaux de pression expérimental et numérique

La figure 9.34 représente le signal de pression expérimental issu d'un capteur positionné en sortie de chambre. Le signal de pression obtenu numériquement est représenté sur la figure 9.35. Ce dernier est moyenné dans un plan situé trois longueurs en aval de la cavité. Les différents points de comparaison sont indiqués par des symboles. La forme de ce signal ainsi que les amplitudes de pression sont, cette fois, en accord avec l'expérience.



**FIGURE 9.34:** Signal de pression expérimental obtenu à la sortie de la chambre de combustion en fonction de la phase du cycle de cavité et points caractéristiques comparés aux résultats numériques pour le cas *M30C07A10\_S*.



**FIGURE 9.35:** Signal de pression numérique pour le cas *M30C07A10\_S*.

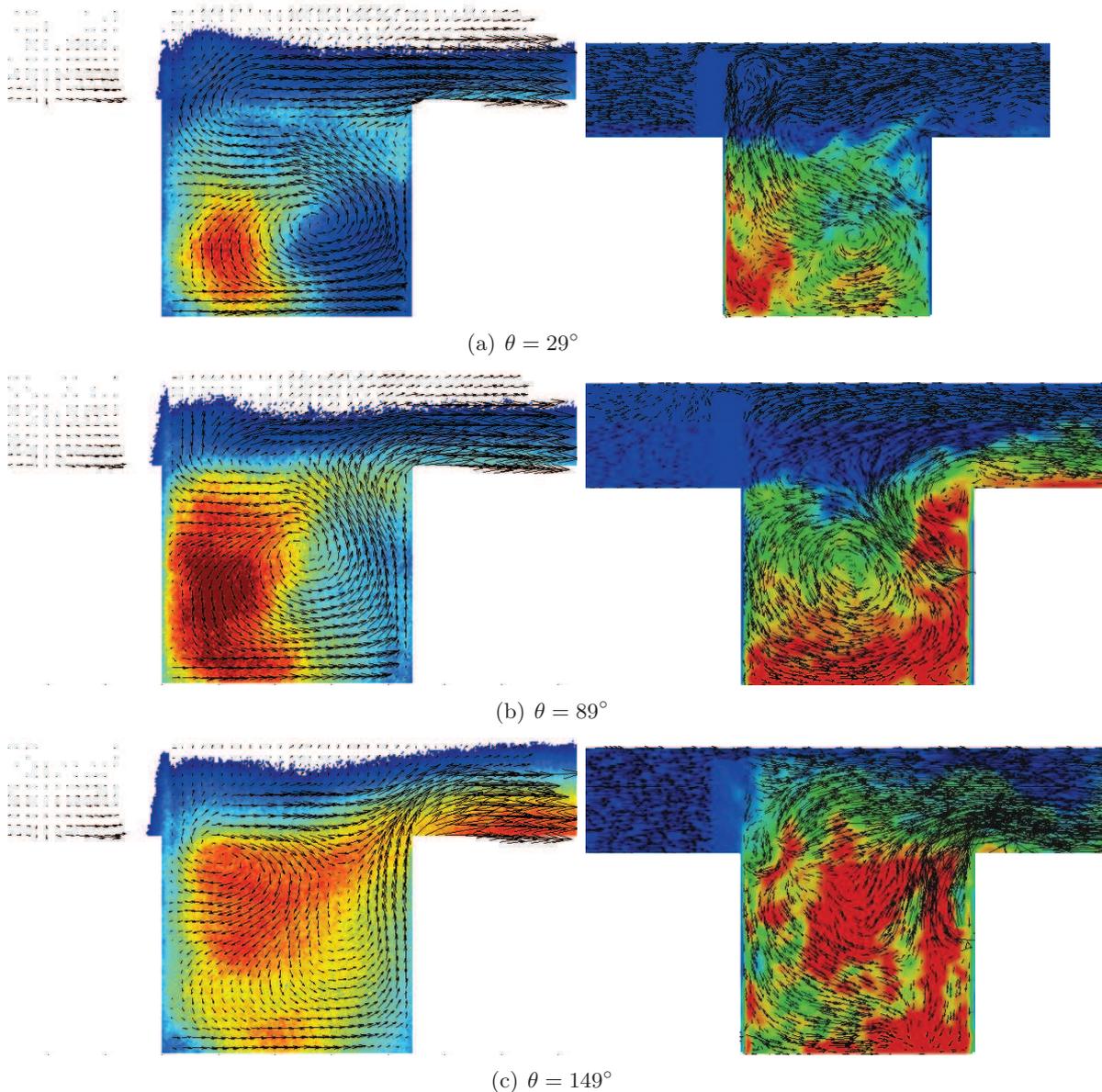
### 9.7.2 Validation expérimentale

Cette section présente la comparaison qualitative des structures de flamme obtenues expérimentalement et numériquement. Les résultats expérimentaux représentent les émissions  $CH^*$  de la flamme ramenées à un plan auxquelles se superposent des champs PIV acquis entre deux barreaux.

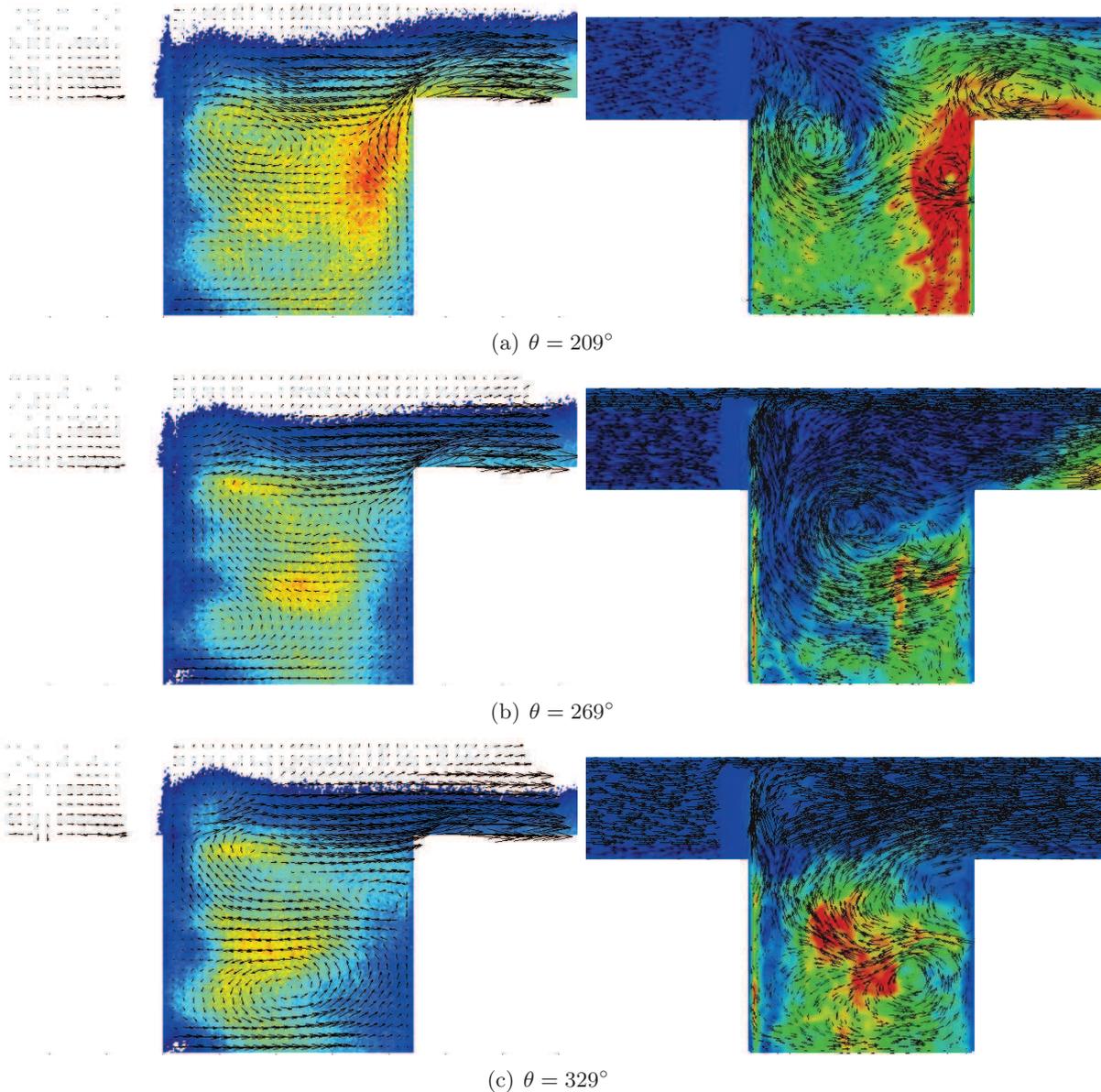
## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

Ces signaux sont moyennés en espace et en temps afin de mettre en évidence la dynamique des principales structures tourbillonnaires. La fenêtre d'acquisition temporelle n'étant pas connue, afin de se rapprocher de ces données, nous effectuons une sommation spatiale suivant la 3-ième direction du terme terme d'énergie. Les vecteurs vitesse issus des trois plans entre barreaux sont alors sommés et superposés. Les structures de flammes numériques et expérimentales adjointes au champ de vitesse sont illustrées sur les figures 9.36 et 9.37.

En (a), la flamme est située au niveau de la paroi amont. La dynamique de la cavité présente deux structures tourbillonnaires au fond de la cavité et au niveau de la couche cisillée. En (b), la flamme se développe dans la cavité. Le tourbillon central s'amplifie. En (c), la flamme pleinement développée commence son évacuation au niveau du coin aval. Au cours de l'étape (d), la flamme est plaquée contre la paroi avale et poursuit son évacuation. En (e), un noyau de flamme se constitue au niveau de l'injecteur d'air. La dernière étape illustre le développement de ce noyau de flamme.



**FIGURE 9.36:** Cartes  $CH^*$  adjointes aux champs PIV 2D obtenues expérimentalement (gauche) et intégration des termes sources d'énergie et vecteurs vitesse des plans entre barreaux obtenus numériquement (droite) pour la configuration M30C07A10\_S.



**FIGURE 9.37:** Cartes  $CH^*$  adjointes aux champs PIV 2D obtenues expérimentalement (gauche) et intégration des termes sources d'énergie et vecteurs vitesse des plans entre barreaux obtenus numériquement (droite) pour la configuration M30C07A10\_S.

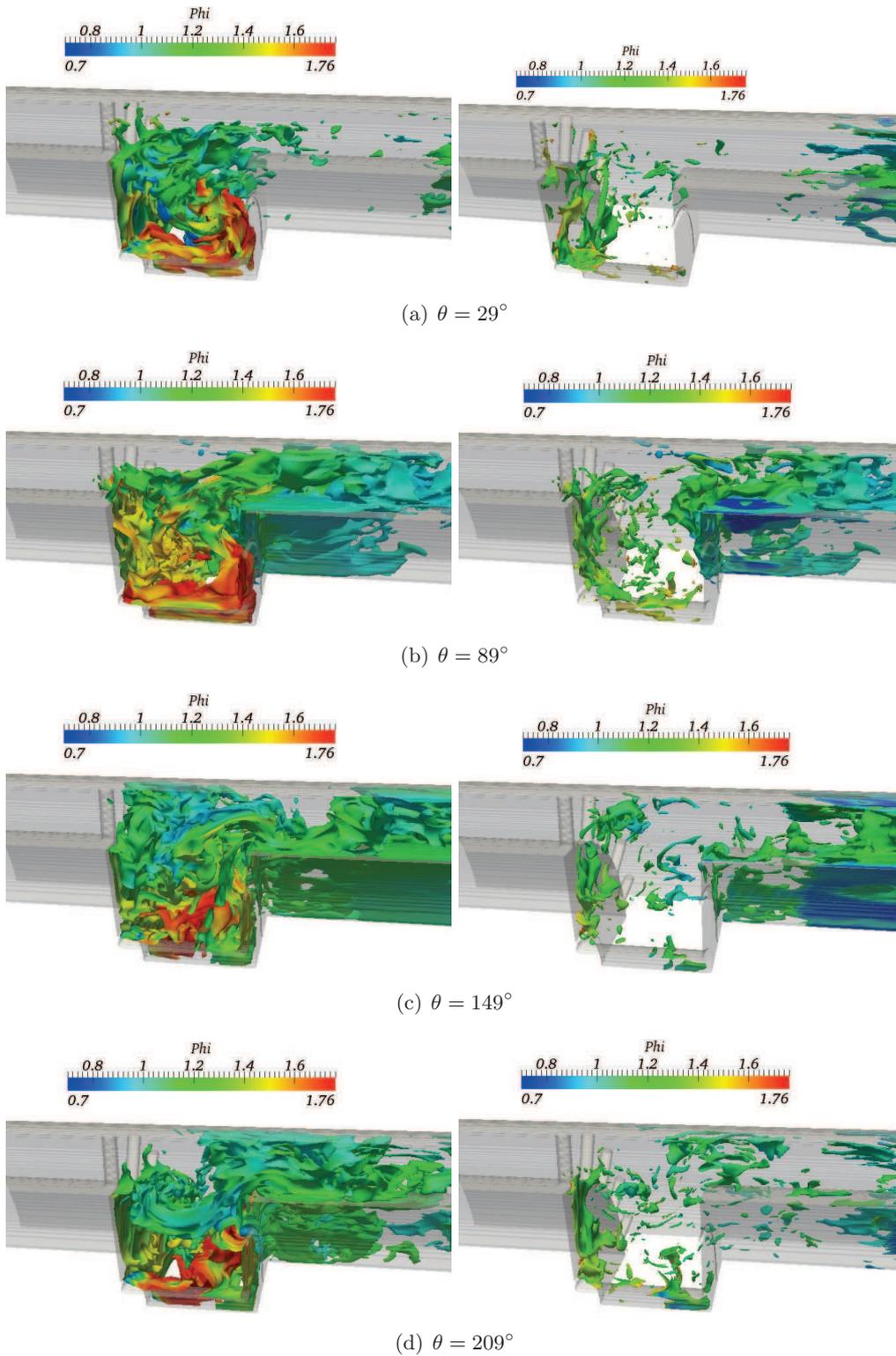
### 9.7.3 Evolution de la flamme stable

La structure de la flamme est représentée sur les figures 9.38 et 9.39 au moyen d'un iso-contour de la variable d'avancement et d'une iso-température.

La figure 9.40 montre l'évolution du terme sources en différentes étapes du cycle de combustion. Contrairement au cas M30C07A10, la cavité piège la flamme qui ne remonte jamais en amont des barreaux. Les accroches flammes interviennent dans la dynamique de la cavité, puisque la flamme se stabilise dans le sillage des barreaux.

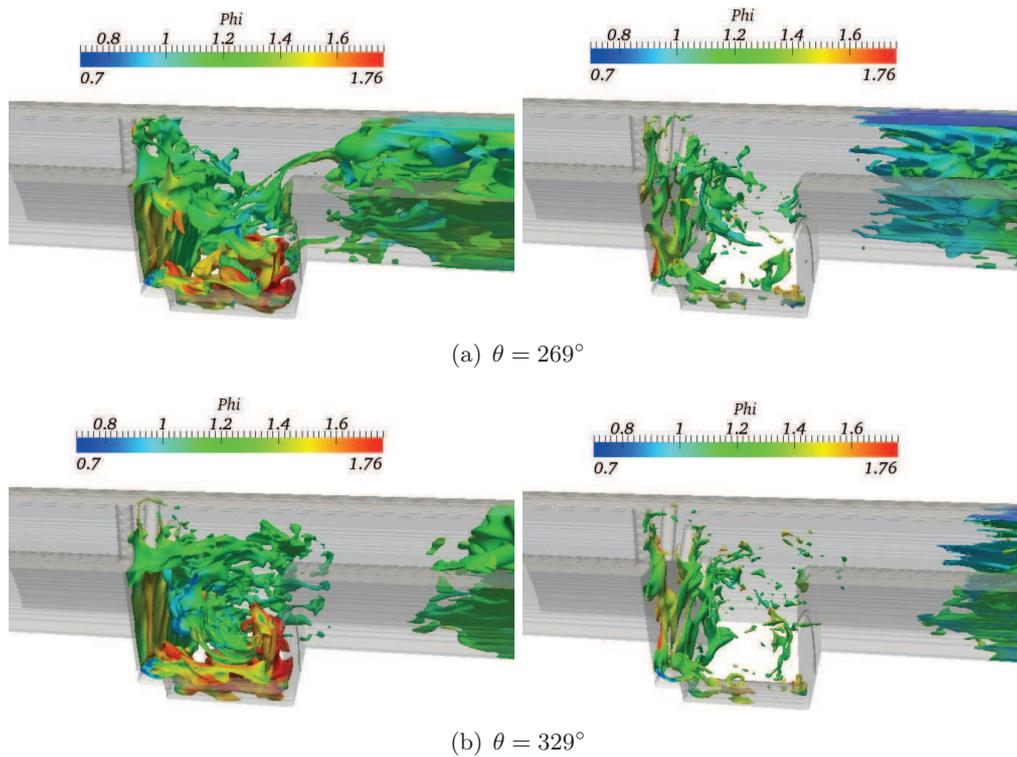
La figure 9.41 illustre la dynamique tourbillonnaire au dessus et dans la cavité. Le mouvement de swirl empêche la propagation de la flamme en amont.

CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC



**FIGURE 9.38:** Structure de la flamme stable révélée par : le contour de la variable d'avancement  $Y_c = 0,2$  colorié et l'iso-température à 1700K coloriés par la richesse pour le cas M30C07A10<sub>S</sub>.

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

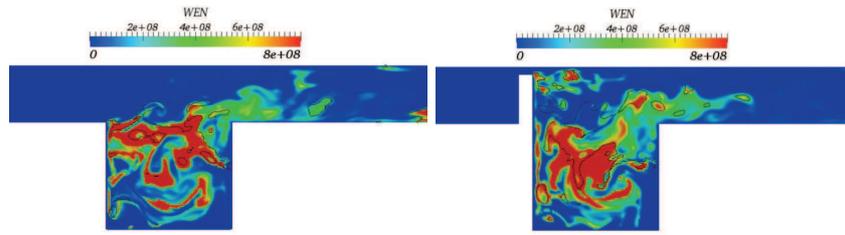


**FIGURE 9.39:** Structure de la flamme stable révélée par : le contour de la variable d'avancement  $Y_c = 0,2$  et l'iso-température à  $1700K$  coloriés par la richesse pour le cas M30C07A10<sub>S</sub>.

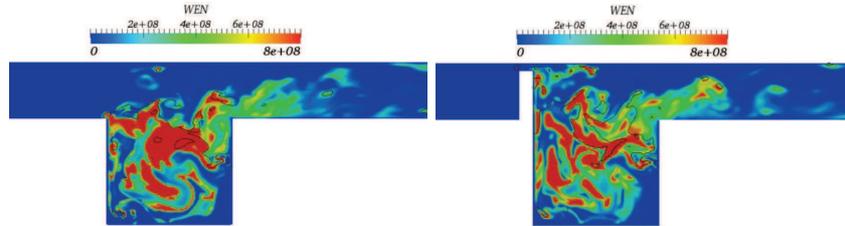
La figure 9.42 représente l'évolution temporelle du paramètre de Rayleigh intégré en volume  $Ra(t)$  et normalisé ainsi que les fluctuations de pression  $\Delta P / \langle P \rangle$  et du terme source d'énergie  $\Delta \dot{\omega}_e / \langle \dot{\omega}_e \rangle$  normalisés.

On distingue un pic central où le critère de Rayleigh est positif et indique l'existence d'un couplage entre les fluctuations de la pression et du terme source d'énergie qui induit une instabilité de combustion. Cette instabilité de combustion se manifeste à l'étape 4 du cycle de pression, au moment où la cavité amorce sa vidange.

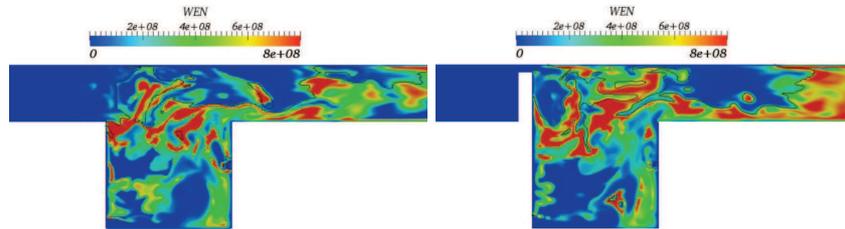
L'évolution du temps de résidence est illustrée sur la figure 9.43 pour un plan médian ou situé derrière un barreau. Le temps de résidence est important dans la cavité qui piège les produits de combustion et assure le mélange avec les gaz frais. En (c), les niveaux atteints par le temps de résidence sont plus faibles car la cavité commence sa vidange. Contrairement au cas sans swirl (M30C07A10), une fraction plus importante de gaz brûlés persiste dans la cavité. Le mélange dans la cavité est donc moins hétérogène en présence d'un swirl.



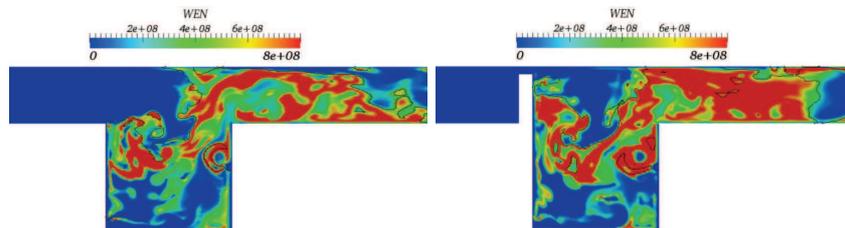
(a)  $\theta = 29^\circ$



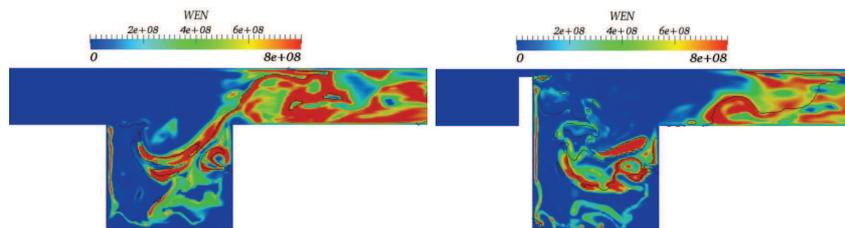
(b)  $\theta = 89^\circ$



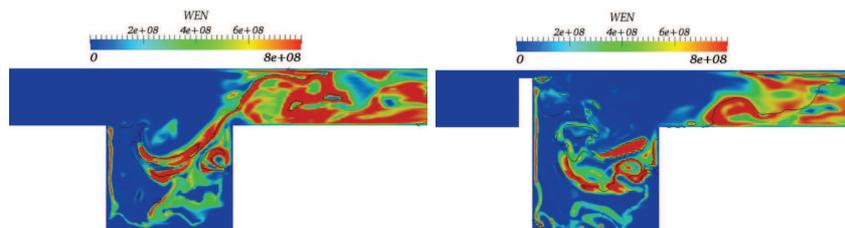
(c)  $\theta = 149^\circ$



(d)  $\theta = 209^\circ$

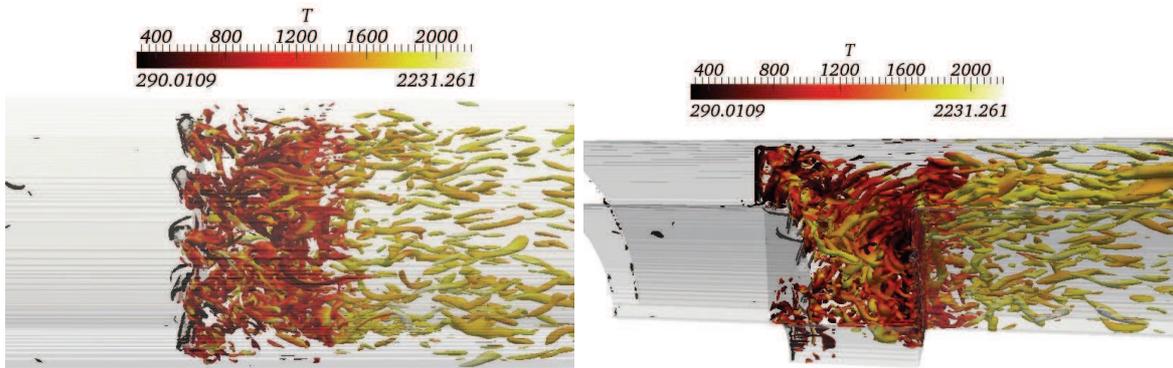


(e)  $\theta = 269^\circ$

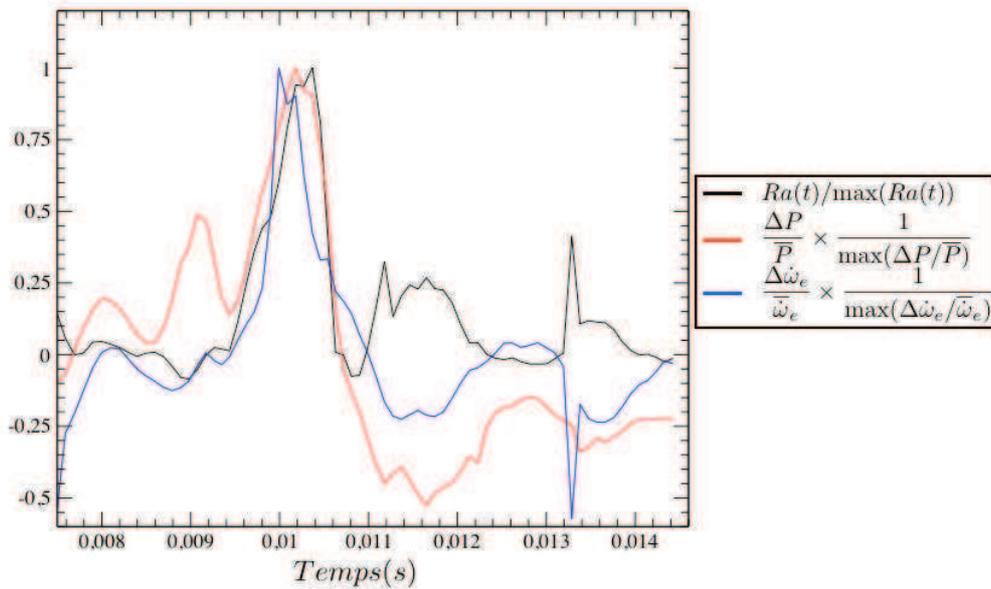


(f)  $\theta = 329^\circ$

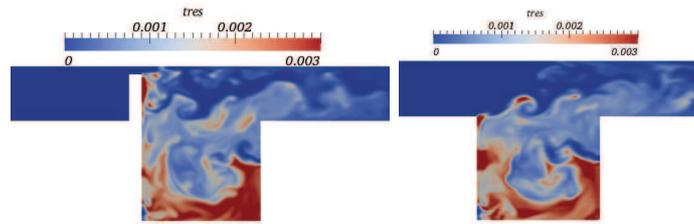
**FIGURE 9.40:** Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux (gauche) et derrière un barreau (droite) avec la ligne stoechiométrique en noir pour le cas  $M30C07A10_S$ .



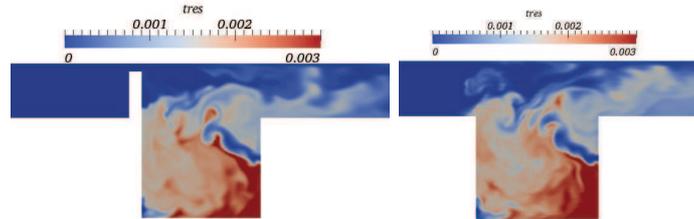
**FIGURE 9.41:** Iso-contours du critère  $Q$  à la valeur  $Q = 2.10^8 s^{-2}$  coloriés par la température pour le cas  $M30C07A10_S$ .



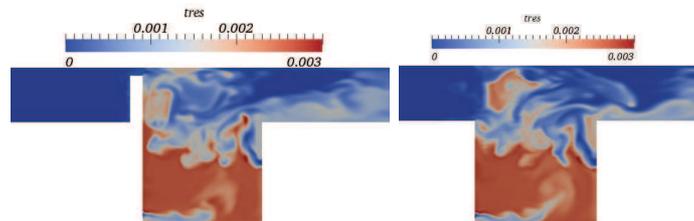
**FIGURE 9.42:** Critère de Rayleigh temporel pour la configuration  $M30C0710_S$ .



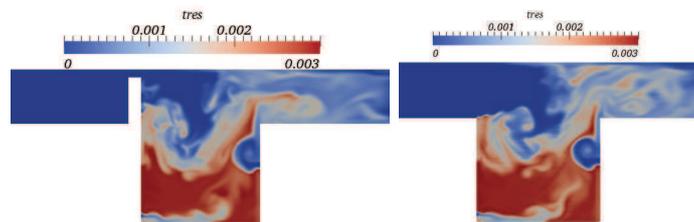
(a)  $\theta = 29^\circ$



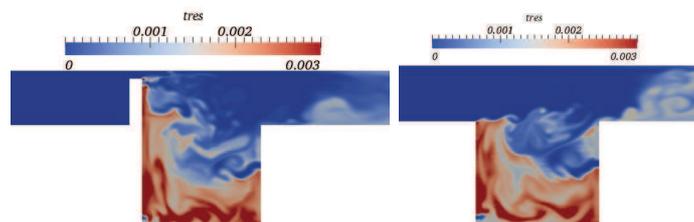
(b)  $\theta = 89^\circ$



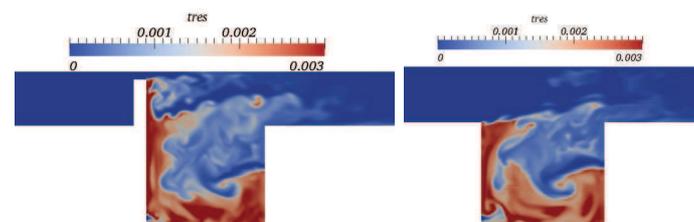
(c)  $\theta = 149^\circ$



(d)  $\theta = 209^\circ$



(e)  $\theta = 269^\circ$



(f)  $\theta = 329^\circ$

**FIGURE 9.43:** Evolution du temps de résidence derrière un barreau et entre deux barreaux pour la configuration M30C0710\_S.

9.7.4 Dynamique avec une sortie réfléchissante

L'étude de la dynamique de la cavité en présence d'un swirl est reconduite avec **une sortie caractéristique purement réfléchissante**. Comme le cas M30C07A10, l'amplitude du signal de pression est reproduite (cf. figure 9.44). Néanmoins, la fréquence du cycle est augmentée et est de l'ordre de 850 Hz.

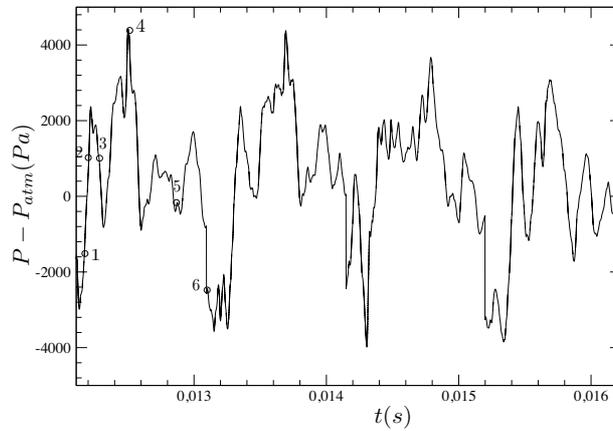


FIGURE 9.44: Signal de pression numérique pour le cas M30C07A10S avec une sortie réfléchissante.

La dynamique de la flamme est également reproduite comme le montre la figure 9.45.

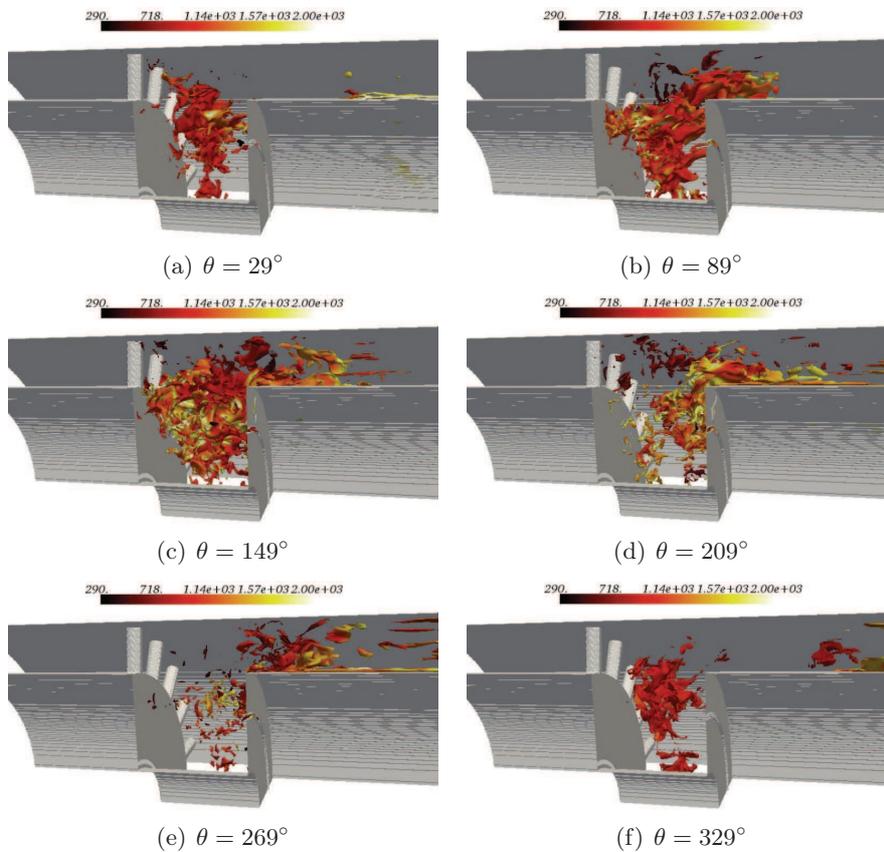


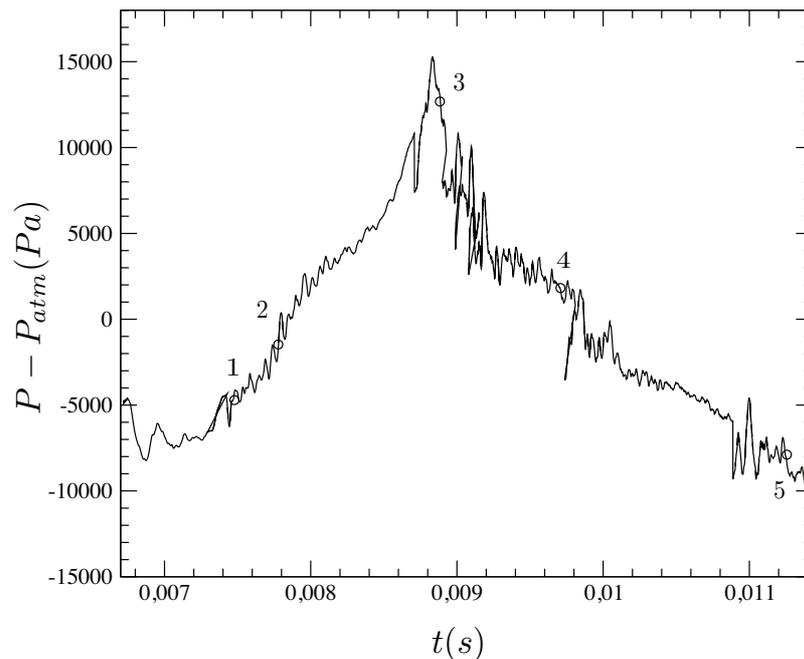
FIGURE 9.45: Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux (gauche) et derrière un barreau (droite) avec la ligne stoechiométrique en noir.

## 9.8 Effet de l'injecteur d'air

Cette section est destinée à montrer l'effet de l'injecteur d'air sur la structure interne à la cavité.

### 9.8.1 Signal de pression

Les signaux de pression expérimentale et numérique sont représentés sur les figures 9.21 et 9.46 respectivement. L'absence de l'injecteur d'air génère, dans la simulation, des fluctuations de pression légèrement plus importantes par rapport au cas M30C07A10 (figure 9.22).

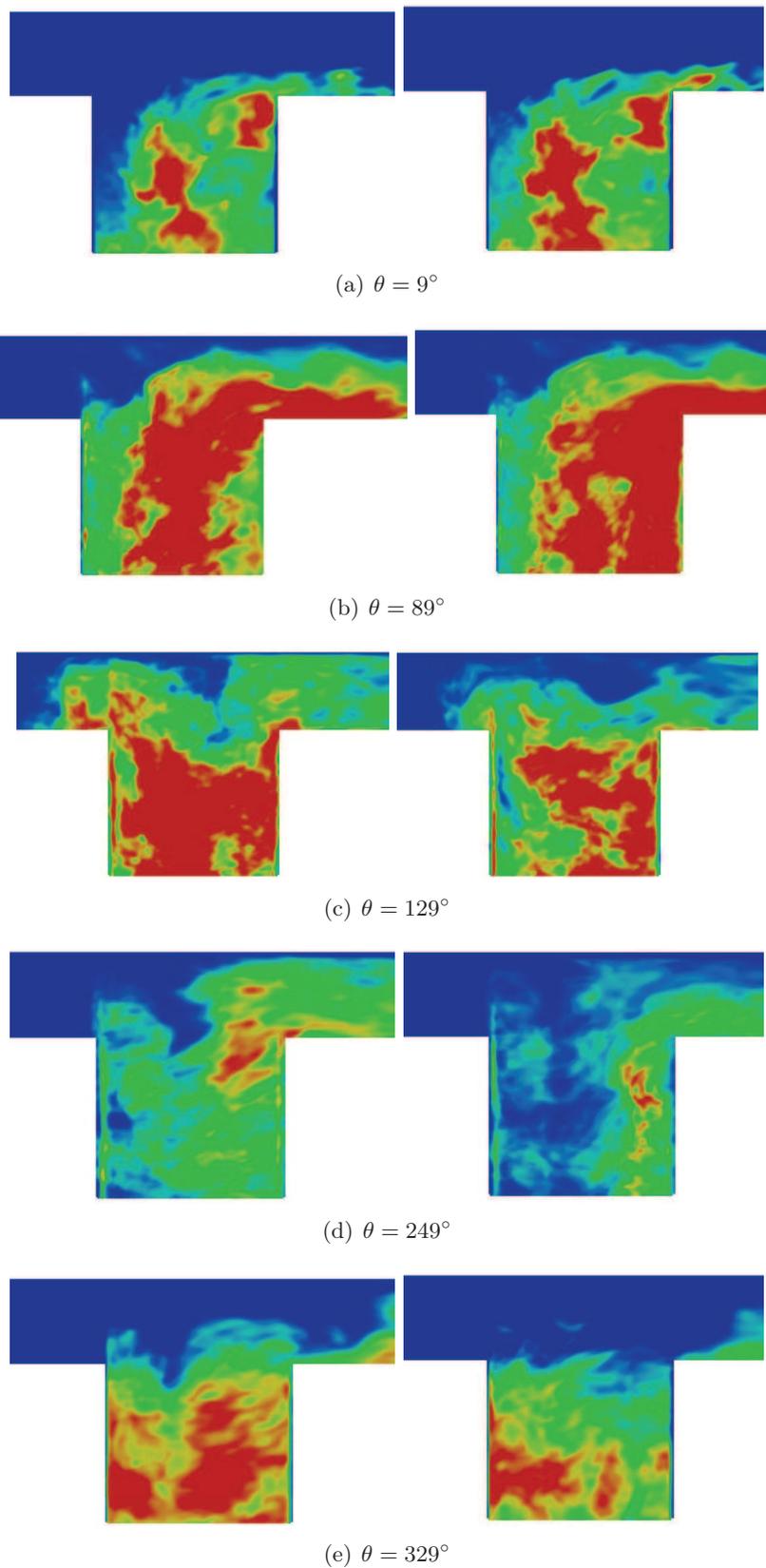


**FIGURE 9.46:** Signal de pression numérique intégré sur un plan situé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M30C07.

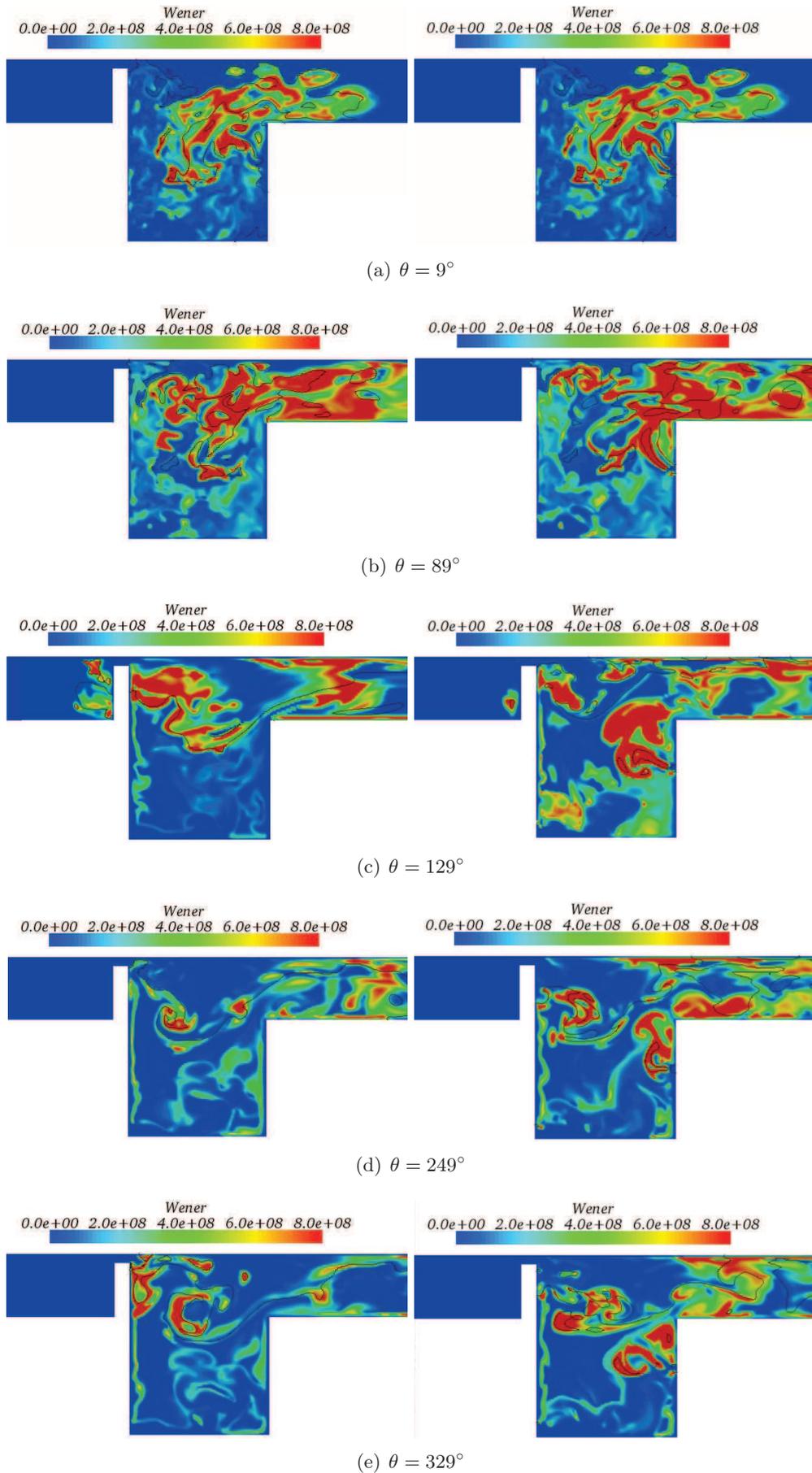
### 9.8.2 Structure de la flamme

La figure 9.47 représente le résultat de l'intégration du terme source d'énergie pour le cas avec et sans injecteur d'air. Les structures de flammes sont très similaires. Néanmoins, les mouvements de la flamme sont légèrement amplifiés en l'absence de l'injecteur d'air. La figure 9.48 expose l'évolution du terme source dans un plan derrière un barreau en présence et en l'absence de l'injecteur d'air. En (c), la flamme semble s'étendre sur une région en amont des barreaux plus importante que le cas avec injecteur d'air. Par ailleurs, en (d), le noyau de flamme qui persiste dans la cavité est plus faible sans injecteur d'air et résulte du phénomène de vidange plus important de la cavité.

La présente étude ne manifeste pas des structures de flamme sensiblement différentes au cas avec injecteur d'air. Par ailleurs, ces structures de flammes ne présentent pas un meilleur accord avec l'expérience. Pour reproduire la dynamique expérimentale, il faudrait certainement reproduire la présence intermittente de l'injecteur d'air.



**FIGURE 9.47:** *Intégration des termes sources d'énergie obtenus numériquement pour le cas M30C07 (gauche) et M30C07A10 (droite).*



**FIGURE 9.48:** Cartes instantanées du terme source d'énergie pour le cas M30C07 (gauche) et M30C07A10 (droite).

## 9.9 Cycle limite acoustique

Cette partie souligne les difficultés inhérentes à la modélisation de la dynamique des instabilités de combustion à l'aide d'un code compressible. Nous avons vu, au cours des chapitres précédents, que l'écoulement de cavité est particulièrement complexe et implique souvent des oscillations auto-entretenues. Couplées à la combustion, ces ondes de pression se combinent aux fluctuations du taux de dégagement de chaleur pour générer des instabilités de combustion. La description numérique de ces instabilités soulèvent de nombreux problèmes, en particulier aux conditions aux limites. Par ailleurs, le comportement acoustique d'une chambre de combustion est souvent conditionné par la ligne complète d'assemblage (compresseur-chambre de combustion-turbine). Cet assemblage engendre souvent des modes longitudinaux qui peuvent piloter la dynamique interne à la chambre. Pour décrire au mieux l'acoustique d'un système et fournir une description fine des instabilités de combustion générées dans une chambre, il est d'usage d'effectuer une étude complémentaire de l'acoustique du système. Cette étude est souvent conduite avec un code différent du code LES et résout les équations de l'acoustique linéaire non réactive dans l'espace fréquentiel (équations de la forme Helmholtz) [336]. Elle fournit ainsi les modes propres de la chambre et permet d'ajuster les impédances des conditions limites à la fréquence du mode propre recherché. Dans la présente étude, nous ne cherchons pas à comprendre les mécanismes impliqués dans les instabilités de combustion, en raison de la géométrie particulière du dispositif expérimental, l'objectif principal étant la description de l'interaction de la dynamique de la cavité avec le champ réactif. Par ailleurs, le dispositif expérimental ne permet pas la caractérisation des instabilités de combustion.

Malgré la complexité du dispositif, nous nous sommes intéressés à la forme du spectre acoustique obtenu numériquement. Bien que les méthodes numériques et expérimentales ne soient pas adaptées à la description des instabilités de combustion, les simulations numériques reproduisent un cycle de forme semblable à celui observé expérimentalement.

Quelque soit le traitement des conditions limites, c'est-à-dire avec un formalisme caractéristique réfléchissant ou non réfléchissant, les simulations numériques fournissent des niveaux de fluctuations de pression relativement semblables. Par contre, la fréquence des instabilités de combustion est mal reproduite. L'écart entre les fréquences observées expérimentalement et numériquement croît à mesure que la condition de sortie devient de plus en plus réfléchissante. La condition de sortie apparaît comme primordiale afin de reproduire le cycle acoustique d'une chambre de combustion. L'étude précise de l'activité acoustique d'une chambre de combustion ne peut être conduite sans l'utilisation de conditions aux limites améliorées impliquant la notion d'impédance. Il est aussi essentiel que le dispositif expérimental intègre les éléments qui permettent une simulation numérique.

La présente étude semble montrer l'existence d'un cycle limite, c'est-à-dire d'une variation de pression maximale observable ( $\Delta P$ ), quelque soit les réflexions présentes aux frontières du domaine de calcul. Ce cycle limite est piloté principalement par la quantité de réactifs introduits dans la chambre alors que la fréquence du cycle est fortement dépendante des conditions aux limites. L'objectif dans cette section est donc d'établir une équation de bilan afin d'évaluer ce cycle limite acoustique.

### 9.9.1 Equation de bilan

Nous rappelons tout d'abord les équations bilan relatives aux moments et à l'énergie pour un écoulement réactif multi-espèces sous une forme tensorielle et en fonction des dérivées particulières définies comme :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f \quad (9.23)$$

avec  $f$  un scalaire. On omet toujours les forces de volume et les sources volumiques de chaleur. On obtient alors les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement suivantes :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (9.24)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (9.25)$$

L'équation de l'énergie est la suivante [297] :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \dot{\omega}'_T + \frac{DP}{Dt} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - \left( \rho \sum_{k=1}^N C_{p,k} Y_k \mathbf{V}_k \right) \cdot \nabla T \quad (9.26)$$

avec  $\mathbf{V}_k$  la vitesse de diffusion du vecteur des espèces  $k$  et  $\dot{\omega}'_T$  un terme de réaction différents de  $\dot{\omega}_T$  :

$$\dot{\omega}'_T = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\omega}_k = - \sum_{k=1}^N h_{sk} \dot{\omega}_k - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^0 \dot{\omega}_k = - \sum_{k=1}^N h_{sk} \dot{\omega}_k - \dot{\omega}_T \quad (9.27)$$

En divisant l'équation 9.26 par  $\rho C_p T$  et en utilisant la relation d'état  $P = \rho r T$  ainsi que l'équation 9.24, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{D \ln P}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho C_p T} \left[ \dot{\omega}'_T + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - \left( \rho \sum_{k=1}^N C_{p,k} Y_k \mathbf{V}_k \right) \cdot \nabla T \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{Dr}{Dt} \end{aligned} \quad (9.28)$$

La relation 9.25 est également exprimée en fonction de  $\ln(P)$  :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{c_0^2}{\gamma} \nabla \ln P = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (9.29)$$

avec  $c_0$  la vitesse locale du son définie comme  $c_0^2 = \gamma P / \rho$ .

En combinant les équations 9.28 et 9.29, il vient [297] :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{c_0^2}{\gamma} \nabla \ln P \right) - \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{D \ln P}{Dt} \right) &= \nabla \cdot (\rho^{-1} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \\ &\quad - \frac{D}{Dt} \left[ \frac{1}{\rho C_p T} \left( \dot{\omega}'_T + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} - \left( \rho \sum_{k=1}^N C_{p,k} Y_k \mathbf{V}_k \right) \cdot \nabla T \right) \right] \\ &\quad - \frac{D}{Dt} \left[ \frac{D}{Dt} (\ln r) \right] - \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Par la suite, nous ferons les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est à faible nombre de Mach, aussi  $M = \frac{|\mathbf{u}|}{c_0} \ll 1$
- Toutes les espèces sont de même masse molaire. Puisque  $\sum_{k=1}^N \dot{\omega}_k = 0$ , on a :

$$\dot{\omega}'_T = - \sum_{k=1}^N h_k \dot{\omega}_k = - \sum_{k=1}^N h_{sk} \dot{\omega}_k - \sum_{k=1}^N \Delta h_{f,k}^0 \dot{\omega}_k = - h_s \sum_{k=1}^N \dot{\omega}_k - \dot{\omega}_T = \dot{\omega}_T \quad (9.31)$$

Par une analyse des ordres de grandeur impliqués dans l'équation 9.30, Kotake [206] indique que les principaux termes sources dans le terme de droite (RHS) sont le terme source chimique et les perturbations de vitesse et simplifie donc cette équation sous la forme :

$$\nabla \cdot \left( \frac{c_0^2}{\gamma} \nabla \ln P \right) - \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{D \ln P}{Dt} \right) = - \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho C_p T} \dot{\omega}_T \right) - \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \quad (9.32)$$

En dérivant le logarithme de la pression, on obtient finalement :

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho c^2} \frac{DP}{Dt} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla P \right) = \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} + \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho C_p T} \dot{\omega}_T \right) \quad (9.33)$$

On opère une intégration spatiale de cette équation 9.33 :

$$\int_{\Omega} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho c^2} \frac{DP}{Dt} \right) dV - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla P \right) dV = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} dV + \int_{\Omega} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho C_p T} \dot{\omega}_T \right) dV \quad (9.34)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski (ou théorème de flux-divergence), on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho c^2} \frac{DP}{Dt} \right) dV = \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} dS_n \quad (9.35)$$

Si l'on suppose que les flux de pression sont nuls aux frontières du domaine d'intégration et que la contribution  $\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}$  est négligeable devant le terme  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho C_p T} \dot{\omega}_T \right)$ , il vient :

$$\int_{\Omega} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho c^2} \frac{DP}{Dt} \right) dV = \int_{\Omega} \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho C_p T} \dot{\omega}_T \right) dV \quad (9.36)$$

Notons que dans le cas non réactif, le terme  $\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}$  est responsable du bruit de l'écoulement turbulent. Pour les écoulements réactifs, on sait que le principal vecteur du bruit de combustion et des instabilités est le terme où apparaît le terme source d'énergie.

On introduit les décompositions de  $\mathbf{u}$ ,  $P$ ,  $\rho$  et  $\dot{\omega}_T$  suivantes :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \quad \text{avec} \quad \frac{u_1}{c_0} \ll 1 \quad (9.37)$$

$$P = P_0 + P_1 \quad \text{avec} \quad \frac{P_1}{P_0} \ll 1 \quad (9.38)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad \text{avec} \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} \ll 1 \quad (9.39)$$

$$\dot{\omega}_T = \dot{\omega}_{T,0} + \dot{\omega}_{T,1} \quad \text{avec} \quad \frac{\dot{\omega}_{T,0}}{\dot{\omega}_{T,1}} \ll 1 \quad (9.40)$$

où l'indice 0 est associé au terme moyen pour lequel on peut négliger l'évolution temporelle ( $\frac{\partial f_0}{\partial t} = 0$ ) et l'indice 1 pour les perturbations.

En supposant un écoulement à faible nombre de Mach, le terme convectif ( $o(M_0)$ ) devient négligeable devant le terme temporel ( $o(1)$ ) pour les dérivées particulières des grandeurs instationnaires :

$$\frac{Df_1}{Dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla f_1 \quad (9.41)$$

$$\frac{Df_1}{Dt} \simeq \frac{\partial f_1}{\partial t} \quad (9.42)$$

En effet, la grandeur instationnaire peut être caractérisée par un temps acoustique  $\tau_{ac}$  associé à une échelle de longueur  $\lambda_{ac} = \tau_{ac} c$ . En effectuant une analyse de l'ordre de l'expression précédente, il vient :

$$o\left(\frac{Df_1}{Dt}\right) = o\left(f_1 \left( \frac{1}{\tau_{ac}} + \frac{|u|}{\lambda_{ac}} \right)\right) \quad (9.43)$$

$$= o\left(\frac{f_1}{\tau_{ac}} (1 + M)\right) \quad (9.44)$$

Le terme convectif étant de même ordre que le nombre de Mach lui-même très faible, on peut négliger sa contribution. La dérivée particulière d'une fonction scalaire  $f$  devient alors, au premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{Df_0}{Dt} + \frac{Df_1}{Dt} \\ &\simeq \frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \nabla f_0 + \frac{\partial f_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.45)$$

**CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE  
CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC**

---

avec les ordres de grandeurs suivants :

$$\frac{Df}{Dt} = \underbrace{\mathbf{u}_0 \nabla f_0}_{o(0)} + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \nabla f_1}_{o(1)} \quad (9.46)$$

On intègre en temps l'équation 9.36, en négligeant les termes d'intégration temporelle des termes convectifs apparaissant dans les dérivées particulières :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\rho c^2} \frac{DP_1}{Dt} dV = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho C_p T} \dot{\omega}_{T,1} dV \quad (9.47)$$

Si l'on écrit que le terme source d'énergie est proportionnel au terme source de la variable de progrès :

$$\dot{\omega}_T \sim \Delta H_r \dot{\omega}_c \quad (9.48)$$

avec  $\Delta H_r \sim C_p \Delta T = \int_{T_0}^T C_p dT$  la variation d'enthalpie de la réaction et que le terme source de la variable de progrès est directement lié à la variation temporelle de cette même variable de progrès, il vient :

$$\int \dot{\omega}_c dV = \int \frac{D\rho c_1}{Dt} dV \quad (9.49)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho c^2} \frac{DP_1}{Dt} dV &= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho C_p T} C_p \Delta T \dot{\omega}_{c,1} dV \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\rho c^2} \frac{DP_1}{Dt} dV &= \int_{\Omega} \frac{\Delta T}{\rho T} \frac{D\rho c_1}{Dt} dV \end{aligned} \quad (9.50)$$

On intègre de nouveau en temps, en émettant plusieurs hypothèses :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\rho c^2} P_1 dV = \int_{\Omega} \frac{\Delta T}{T} c_1 dV \quad (9.51)$$

Soit la relation finale :

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta P}{\gamma P} dV = \int_{\Omega} \frac{\Delta T}{T} \Delta c dV \quad (9.52)$$

La fluctuation de pression  $\Delta P$  est donc proportionnelle à l'échauffement  $\Delta T$  et à la variable de progrès.

On remarquant que :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_T &= -\text{PCI} \times \dot{\omega}_F \\ \dot{\omega}_T &= -\text{PCI} \times \dot{\omega}_c Y_{F,0} \end{aligned} \quad (9.53)$$

On obtient une autre relation qui n'implique pas l'échauffement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\Delta P}{\gamma P} dV &= \int_{\Omega} \frac{\text{PCI} \times Y_{F,0}}{C_p} \frac{\Delta c}{T} dV \\ \int_{\Omega} \frac{\Delta P}{\gamma P} dV &= \text{PCI} \times Y_{F,0} \int_{\Omega} \frac{\Delta c}{C_p T} dV \end{aligned} \quad (9.54)$$

## CHAPITRE 9. ETUDE DE LA STABILITÉ DE LA FLAMME DANS UNE CHAMBRE DE COMBUSTION DE TYPE TVC

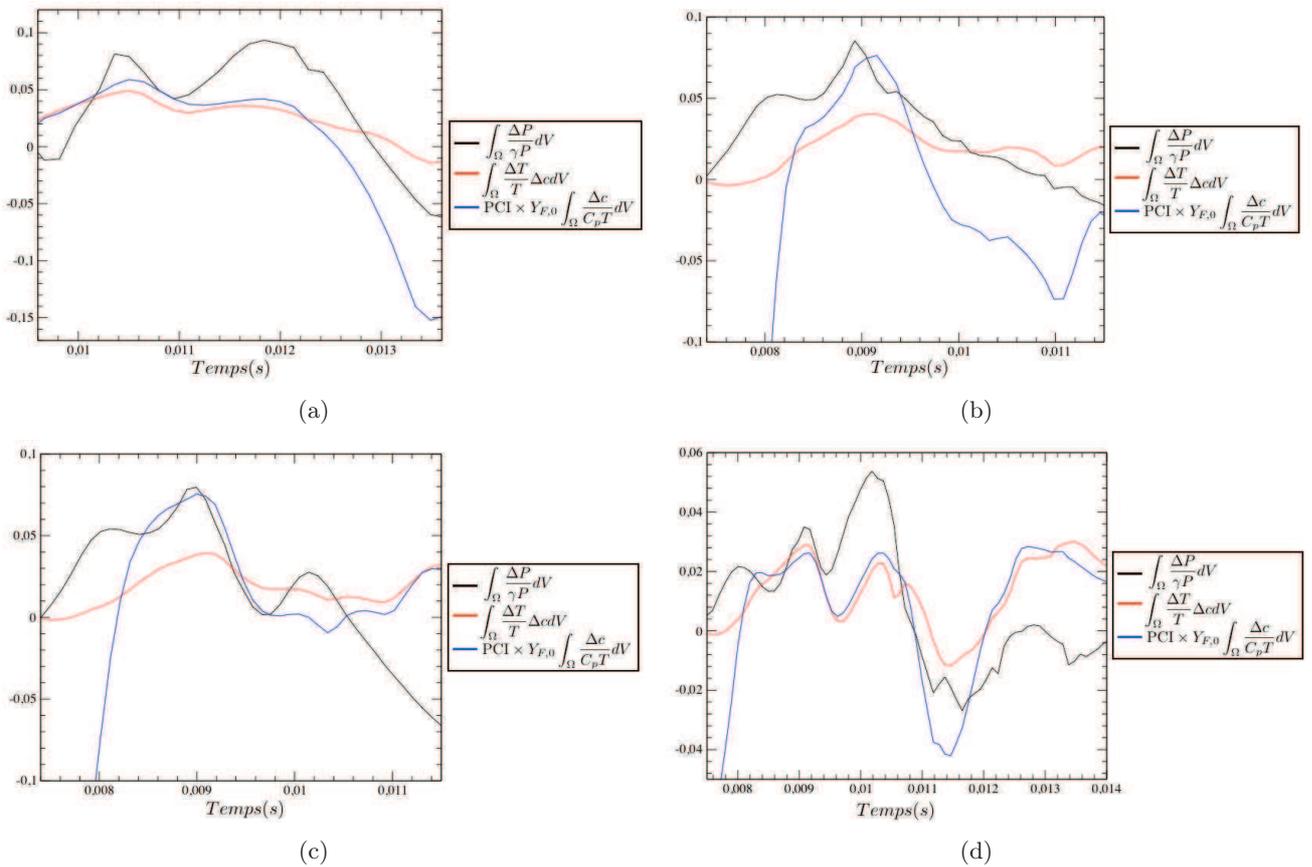
### 9.9.2 Application aux simulations réactives de la chambre TVC

Pour valider les expressions précédentes du cycle limite acoustique (équations 9.52 et 9.54) exprimées soit en fonction de l'échauffement ou du PCI, les termes de droite et de gauche de ces expressions sont représentés sur la figure 9.49 pour différentes configurations dont la sortie est décrite avec un formalisme non réfléchissant. Cette étude se base sur les grandeurs suivantes :

$$\text{PCI} = 50100 \text{ kJ/kg} \quad (9.55)$$

$$Y_{F,0} = 0,04 \quad (9.56)$$

Bien que ces deux expressions soient le résultat de nombreuses hypothèses, les principales excroissances de pression (terme de gauche) sont reproduites par les deux expressions. En particulier, il semblerait que la loi dépourvue de l'échauffement (équation 9.54) soit mieux prédictive que son homologue.



**FIGURE 9.49:** Evolution des termes des équations 9.52 et 9.54 pour les configurations M20C07A10 (a), M30C07A10 (b), M30C07 (c) et M30C07A10\_S (d).

Dès lors que la dynamique de la flamme est correctement reproduite, les relations 9.52 et 9.54 montrent que l'amplitude du signal de pression est prédite de manière satisfaisante. Ainsi, les calculs réalisés avec une sortie réfléchissante témoignent des mêmes évolutions de flamme et donc fournissent les bons niveaux de pression. Ces relations peuvent également être utilisées pour expliquer l'emballement de la flamme observée lorsque le domaine de calcul ne comporte pas un élargissement en aval de la cavité. La dérive de la pression entraîne une augmentation du volume occupé par la flamme.

### **9.9.3 Application technologique des précédentes relations**

Les équations 9.52 et 9.54 montre que l'amplitude des oscillations de pression est directement proportionnelle aux fluctuations de la variable de progrès. Ainsi, la génération d'ondes acoustiques est pilotée par les fluctuations de la variable de progrès. Pour réduire le bruit émis par les chambres de combustion, il semblerait judicieux de diminuer le terme  $\int \Delta cdV$ . Un moyen pour y parvenir pourrait consister en :

- L'amélioration des techniques d'accrochage de flamme pour limiter le "volume" parcouru par la flamme.
- La génération de zones de recirculation plus stables pour limiter les fluctuations de la variable de progrès.

## **9.10 Conclusion**

Pour les conditions de débit principal choisi, la chambre TVC se révèle particulièrement instable. La présence d'une cavité génère un phénomène de vidange de la flamme. Pour un faible débit, l'écoulement principal peut fournir des conditions satisfaisantes pour une propagation de la flamme en amont des barreaux. L'écoulement principal interagit alors avec la cavité pour générer des variations de pression plus importantes.

L'ajout d'un swirl s'est révélé bénéfique afin de réduire les fluctuations de pression associées au régime instable de la flamme. Par ailleurs, l'investigation numérique de plusieurs cas à débit variable souligne qu'une augmentation du débit principal (au delà d'un facteur trois sur le débit nominal) permet l'obtention d'une chambre "stable". Le dispositif expérimental actuel étant limité en terme de puissance, les futures investigations expérimentales devront permettre l'exploration de cette piste.

Le présent dispositif expérimental constitue une phase préliminaire à l'étude des chambres de type TVC. Si l'on se rapporte aux dispositifs présentés dans la littérature, on se rend compte que les précédents dispositifs de type TVC présentaient tous des vitesses débitantes principales plus importantes. Le dispositif actuel souffre donc d'un "défaut" de dynamique.

# Chapitre 10

## Le modèle PCM-FPI avec correction de la vitesse de flamme : le modèle PCM-FPI-DTF

### Sommaire

---

<b>10.1 Présentation des difficultés . . . . .</b>	<b>327</b>
<b>10.2 Correction des équations filtrées . . . . .</b>	<b>328</b>
10.2.1 Champs de la fonction d'élargissement . . . . .	329
<b>10.3 Dynamique associée au cas M30C07A10 avec le modèle PCM-FPI-DTF</b>	<b>330</b>
<b>10.4 Conclusion . . . . .</b>	<b>335</b>

---

Ce chapitre est consacré au développement d'une approche permettant la description fine de la cinétique chimique tout en préservant la vitesse de propagation du front de flamme, il s'agit du modèle PCM-FPI-DTF (*Presumed Conditional Moments- Flame Prolongation of ILDM- Dynamically Thickened Flames*).

### 10.1 Présentation des difficultés

La modélisation des grandes échelles de la combustion a pour principaux objectifs la prédiction de phénomènes instationnaires tels que les extinctions de flamme ou les émissions polluantes... Ces différents phénomènes sont pilotés par la cinétique chimique et nécessitent ainsi une description fine des mécanismes intrinsèques à la chimie. Pour réduire le coût numérique qui serait associé au transport d'une équation bilan par espèce impliqué dans le schéma réactionnel et qui serait impossible pour les dispositifs de combustion pratiques, il est d'usage de tabuler la chimie. En particulier, dans le présent manuscrit, la méthode de tabulation repose sur une méthode de flammelettes prémélangées. Les méthodes de tabulation se confrontent néanmoins au problème récurrent de la résolution numérique du front de flamme. En effet, l'épaisseur du front de flamme est généralement inférieure à la taille du maillage. Alors que la première est de l'ordre de la fraction du millimètre, les maillages accessibles pour la LES comportent des mailles de l'ordre du millimètre. Le profil de la variable de progrès étant particulièrement raide, la structure du front de flamme ne peut être résolue directement sur le maillage sous peine d'induire d'importantes erreurs numériques. Pour surmonter cette difficulté, différentes méthodes ont été proposées et reposent par exemple sur un épaississement artificiel de la flamme [64, 82], sur le suivi du front de flamme avec une méthode de suivi d'interface de type *level-set* [266] ou sur le filtrage du taux de réaction à des échelles supérieures.

En particulier, dans cette étude, l'approche considérée repose sur l'évaluation des termes sources filtrés dont les contributions de sous-maille sont retranscrites sous la forme de  $\beta$ -pdf. Néanmoins, cette approche est connue pour fournir une vitesse de propagation du front de flamme erronée [120].

Pour retrouver la vitesse de propagation du front de flamme, nous proposons un nouveau modèle, le modèle PCM-FPI-DTF.

## 10.2 Correction des équations filtrées

Pour corriger le modèle PCM-FPI et assurer une bonne description de la vitesse de propagation du front de flamme, nous introduisons, similairement à l'approche de la flamme épaissie (TF), la fonction d'élargissement  $\mathcal{F}$ . Cette fonction assure une dilatation des échelles spatiales du front de flamme de sorte à pouvoir le résoudre numériquement sur un maillage grossier tout en préservant ses principales caractéristiques (vitesse de flamme, température de fin de combustion,...). Cette idée d'un épaississement de la flamme fut proposée historiquement par Butler et O'Rourke [64] pour des flammes laminaires de prémélange. En multipliant par  $\mathcal{F}$  les flux diffusifs et en divisant par  $\mathcal{F}$  le terme source, ils ont montré que la flamme voit son épaisseur augmentée d'un facteur  $\mathcal{F}$  tandis que la vitesse de flamme  $s_L^0$  reste inchangée. Néanmoins, un tel changement d'échelles modifie également l'interaction du front de flamme et de la turbulence. En effet, à mesure que la flamme est épaissie, elle est moins plissée par les structures tourbillonnaires. Pour prendre en compte cette dégradation de l'interaction flamme-turbulence, Colin *et al.* [82] introduisent une fonction d'efficacité  $\mathcal{E}$  qui modélise le plissement "perdu" à cause de l'épaississement. Cette méthode a subi de nombreuses modifications afin de s'adapter aux différentes flammes canoniques. On peut citer le modèle de flamme épaissie dynamiquement proposé par Légier *et al.* [224] (ou modèle DTF pour *Dynamically Thickened Flame*) qui est une généralisation du modèle de flamme épaissie qui assure la dégénérescence vers les cas limites de mélange sans réaction et de la combustion parfaitement prémélangée et retrouve les principales caractéristiques de la limite des flamme de diffusion.

En ce qui concerne le choix de la fonction  $\mathcal{F}$ , il se base essentiellement sur des arguments pragmatiques puisque le seul critère de choix est qu'elle soit suffisamment grande pour permettre la résolution de la flamme épaissie sur le maillage. Ainsi chaque cas se voit attribuer une fonction  $\mathcal{F}$ . Par exemple, Selle [336] utilise pour ses calculs un épaississement de  $\mathcal{F} = 25$ . Pour estimer au préalable ce paramètre, on peut utiliser la relation :

$$\mathcal{F} = \frac{n\Delta x}{\delta_L^0} \quad (10.1)$$

où  $n$  est le nombre de points nécessaires à la résolution du front de flamme et  $\Delta x$ .

Pour le développement du modèle PCM-FPI-TF, nous reprenons l'idée de base du modèle de flamme épaissie. Tout d'abord, rappelons l'expression de l'équation de transport de la variable d'avancement filtré,  $\tilde{Y}_c$  :

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{Y}_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{Y}_c) = -\nabla \cdot \tilde{\tau}_{Y_c} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \mathcal{D} \nabla \tilde{Y}_c) + \tilde{\omega}_{Y_c}(\tilde{Y}_c, \tilde{Z}, \tilde{Y}_c \tilde{Y}_c, Z_v) \quad (10.2)$$

Si l'on écrit l'expression de l'équation de transport de la variable d'avancement filtré, élargie artificiellement, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{Y}_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{Y}_c) = -\nabla \cdot \tilde{\tau}_{Y_c} + \nabla \cdot (\mathcal{F} \tilde{\rho} \mathcal{D} \nabla \tilde{Y}_c) + \frac{\tilde{\omega}_{Y_c}(\tilde{Y}_c, \tilde{Z})}{\mathcal{F}} \quad (10.3)$$

En effet, la fonction  $\mathcal{F}$  apparaît dans le terme de diffusion et dans le terme source. L'utilisation du changement d'échelle permettant de résoudre directement la flamme turbulente, le terme source impliqué est le terme source réel non filtré et donc indépendant des paramètres de la  $\beta$ -pdf.

Ces deux expressions montrent qu'il est possible d'estimer de manière dynamique la fonction d'élargissement à appliquer en posant :

$$\mathcal{F} = \frac{\tilde{\omega}_{Y_c}(\tilde{Y}_c, \tilde{Z}, 0, 0)}{\tilde{\omega}_{Y_c}(\tilde{Y}_c, \tilde{Z}, \tilde{Y}_c \tilde{Y}_c, Z_v)} \quad (10.4)$$

où  $\bar{\omega}_{Y_c}(\tilde{Y}_c, \tilde{Z}, \tilde{Y}_c \tilde{Y}_c, Z_v)$  est obtenu avec le modèle PCM-FPI.

La fonction d'élargissement évaluée, on corrige les équations de transport de l'énergie filtrée et de la variable de progrès filtrée :

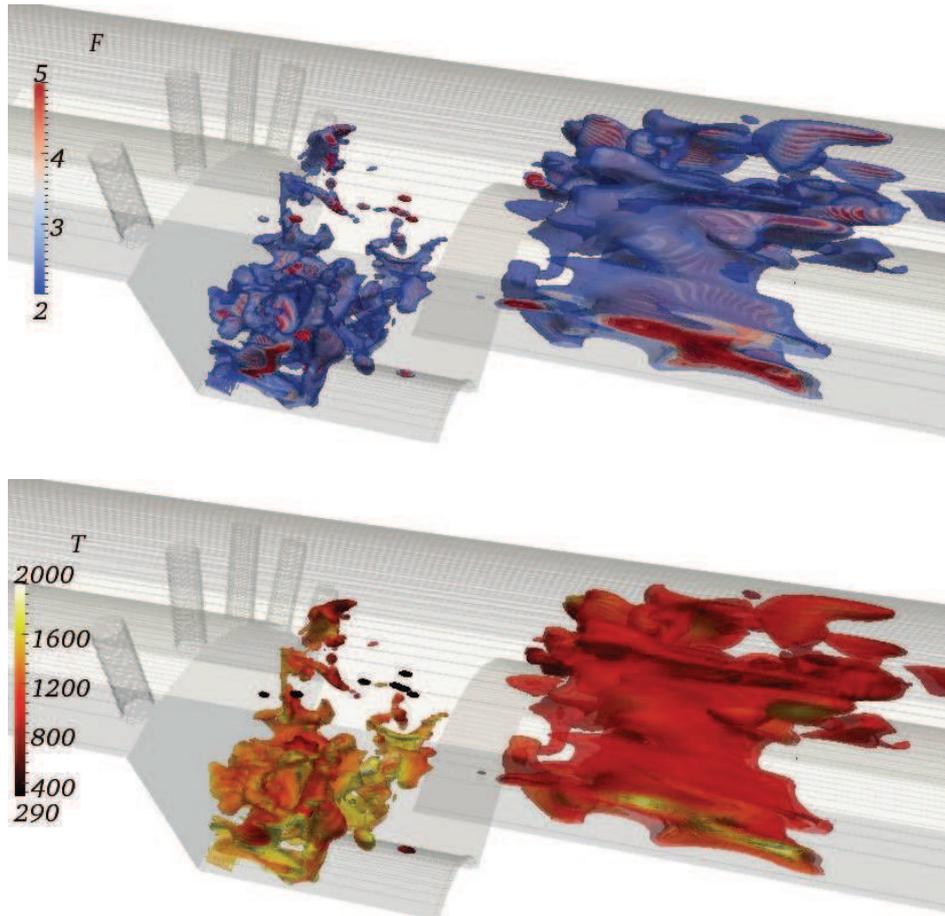
$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{u}_j (\bar{\rho} \tilde{E} + \bar{P}))}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mathcal{F} \mu(\tilde{T}) c_p}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) + \bar{\rho} \tilde{\omega}_T \quad (10.5)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \tilde{Y}_c) = -\nabla \cdot \bar{\tau}_{Y_c} + \nabla \cdot (\mathcal{F} \bar{\rho} \mathcal{D} \nabla \tilde{Y}_c) + \bar{\rho} \tilde{\omega}_{Y_c}(\tilde{Y}_c, \tilde{Z}, \tilde{Y}_c \tilde{Y}_c, Z_v) \quad (10.6)$$

Pour limiter l'apparition d'instabilités numériques, le paramètre  $\mathcal{F}$  ne peut être inférieur à un.

### 10.2.1 Champs de la fonction d'élargissement

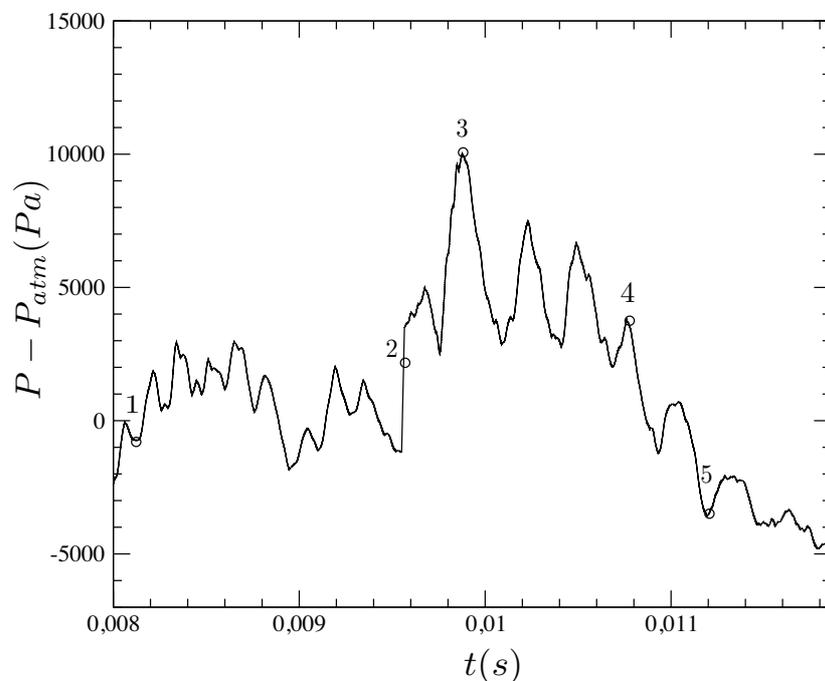
Dans le cadre de la modélisation d'une chambre de combustion de type TVC, nous avons utilisé ce modèle pour évaluer la dynamique de la configuration M30C07A10. La formulation dynamique de la fonction d'élargissement est illustrée sur la figure 10.1 qui représente des contours de la fonction d'élargissement pour des valeurs de  $\mathcal{F}$  comprises entre 2 et 10. Cette figure est obtenue à la fin du cycle de combustion de la configuration M30C07A10 où un nouveau de flamme se développe au sein de la cavité.



**FIGURE 10.1:** Visualisations 3D de la fonction d'élargissement pour des valeurs de  $\mathcal{F}$  comprises entre 2 et 10 ; a) Contours coloriés par  $\mathcal{F}$  ; b) Contours coloriés par  $T$ .

### 10.3 Dynamique associée au cas M30C07A10 avec le modèle PCM-FPI-DTF

L'étude de la dynamique de la flamme pour la configuration M30C07A10 est étudiée avec ce modèle modifié. Le domaine de calcul comporte toujours un élargissement pour lequel la sortie est traitée avec un formalisme non réfléchissant. Le spectre de pression obtenu est illustré sur la figure 10.2. Les fluctuations de pression relevées sont moins importantes que le cas étudié avec la formulation classique PCM-FPI. La fréquence du cycle observé est de l'ordre de 250 Hz (par rapport à la fréquence de 120 Hz mesurée expérimentalement). Nous observons un accord satisfaisant sur l'existence d'un cycle de combustion et les amplitudes de pression impliquées. Pour comparer qualitativement les structures de flamme expérimentales et numériques, cinq points sont repérés sur le signal de pression numérique afin de suivre la même procédure d'identification des structures de flammes expérimentales. Les résultats sont reportés sur la figure 10.3. Le phénomène de vidange est reproduit. Néanmoins, les structures de flammes ne sont pas exactement les mêmes probablement en raison des traitements d'intégration différents et des problèmes relatifs au contrôle expérimental des débits dans la cavité.



**FIGURE 10.2:** Signal de pression numérique intégré sur un plan situé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M30C07A10 avec le modèle PCM-FPI-DTF.

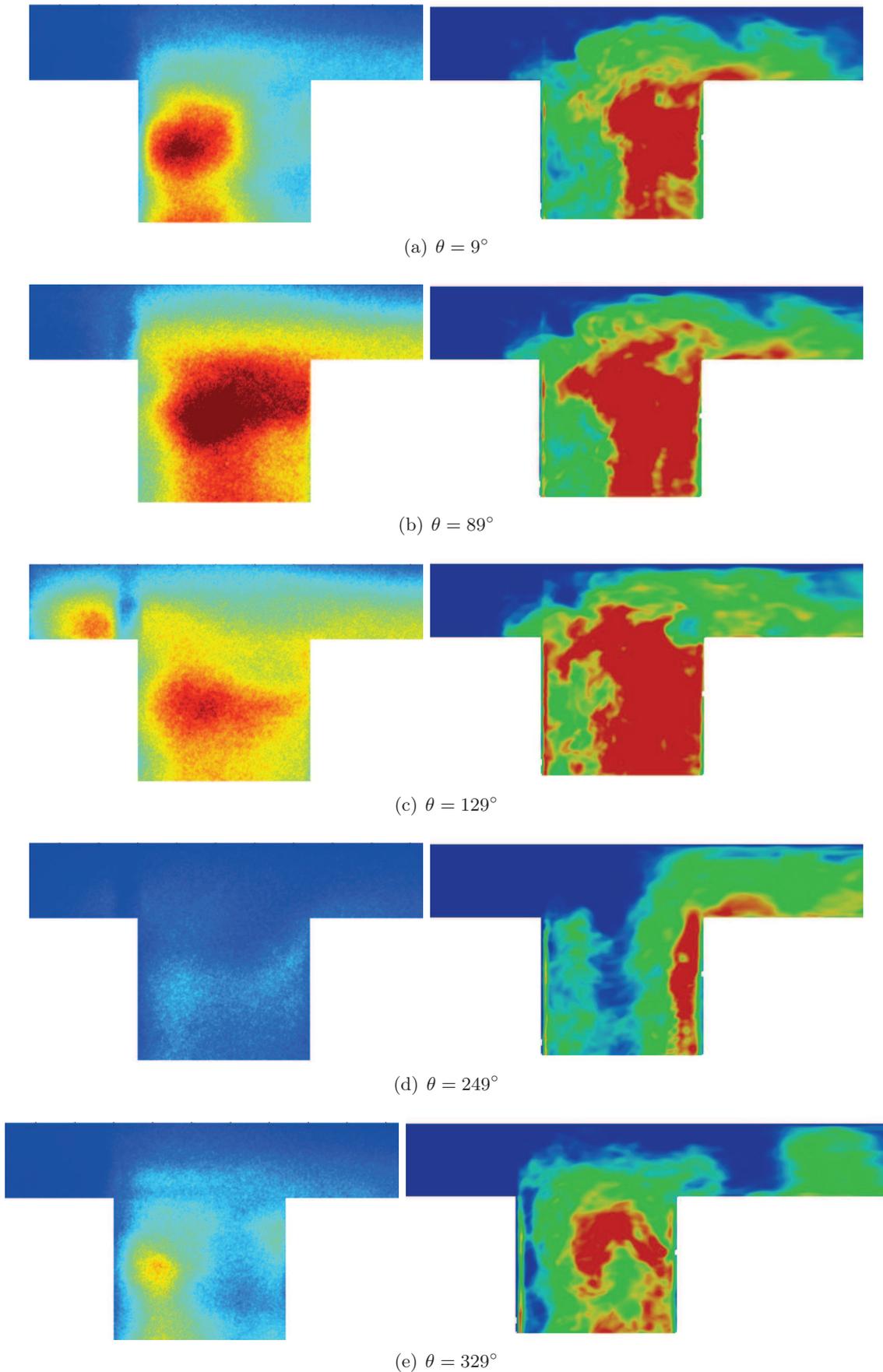
La fonction d'élargissement augmente artificiellement l'épaisseur du front de flamme afin de le résoudre sur le maillage considéré. Pour visualiser cet effet d'élargissement, la figure 10.4 représente les cartes du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux ou derrière un barreau. Le calcul dynamique de la fonction d'élargissement fournit des valeurs comprises entre 1 et 20. Ces valeurs sont relativement proches des valeurs retenues pour les modèles de flammes épaissies introduits au cours du chapitre 2, c'est-à-dire de l'ordre de 10 à 20 (ce qui induit une résolution de la flamme turbulente sur 8 à 10 points du maillage LES [6]).

Par rapport aux cartes obtenues avec la formulation classique PCM-FPI (figure 9.25), les zones associées à un terme source d'énergie plus important semblent plus diffuses. Pour appréhender le niveau "d'élargissement" du front de flamme, la figure 10.5 expose des cartes de la fonction d'élargissement  $\mathcal{F}$ .

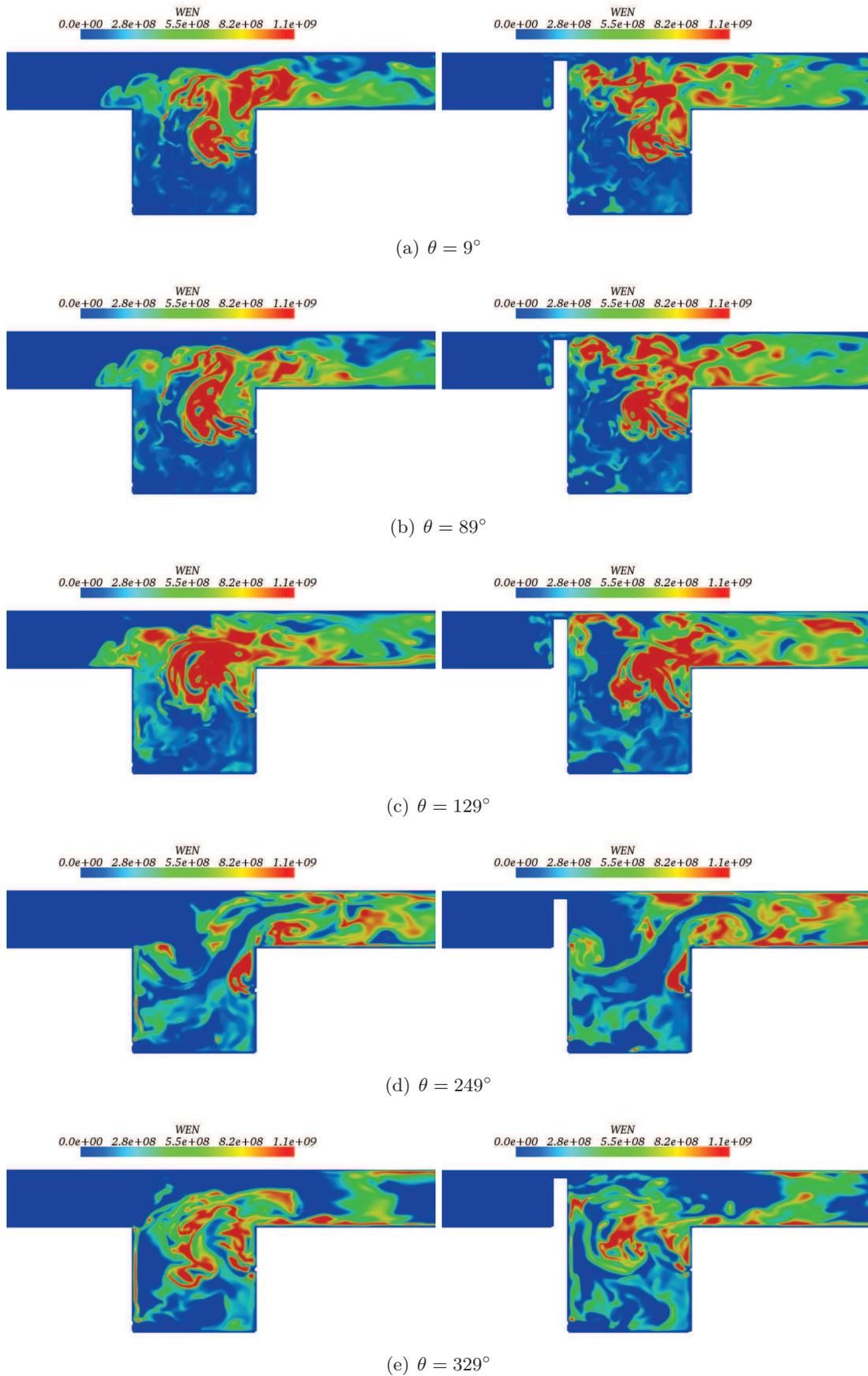
## CHAPITRE 10. LE MODÈLE PCM-FPI AVEC CORRECTION DE LA VITESSE DE FLAMME : LE MODÈLE PCM-FPI-DTF

---

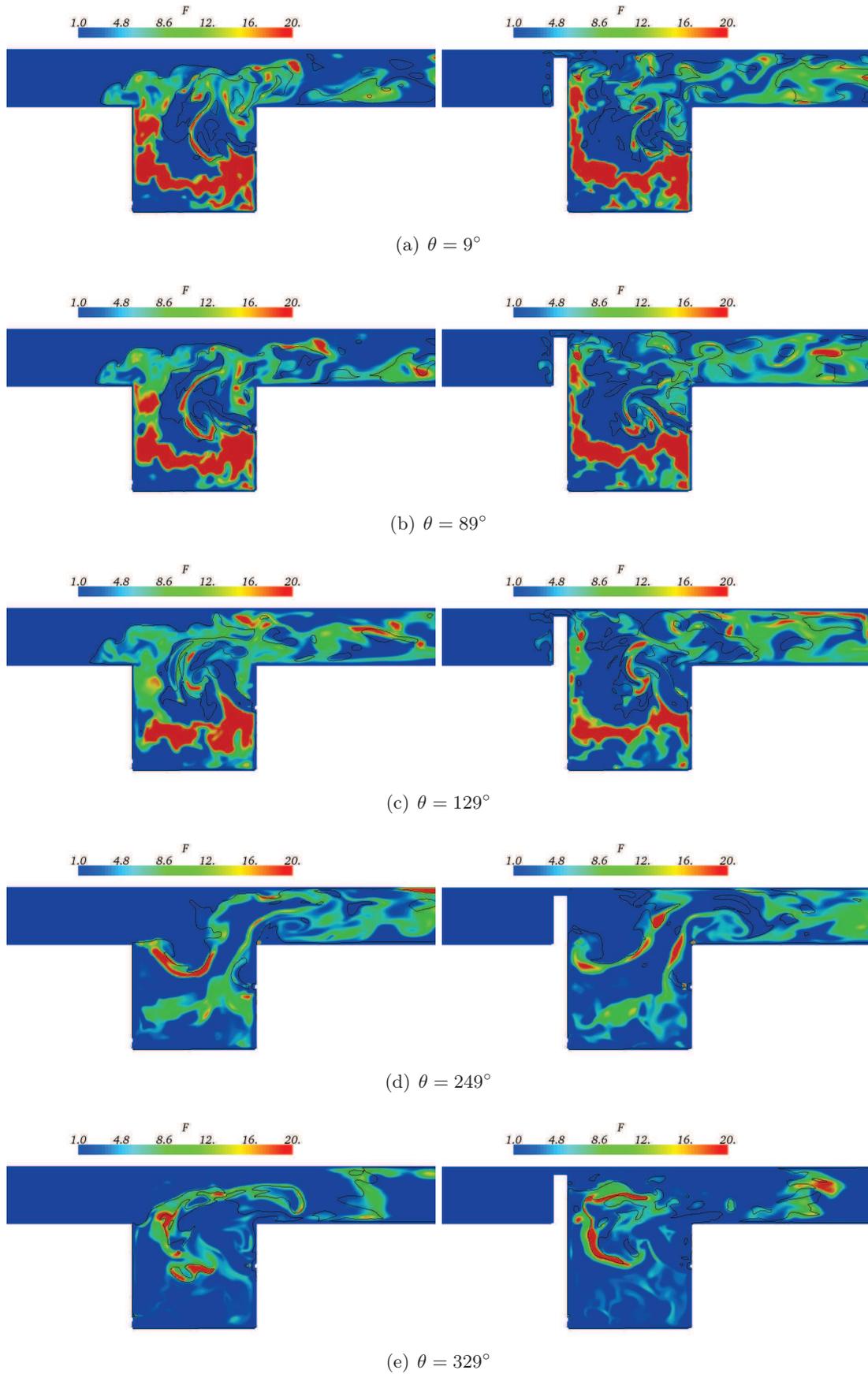
Bien qu'il soit difficile de quantifier précisément les écarts entre les résultats expérimentaux et numériques, le modèle modifié semble décrire la bonne dynamique de flamme sans induire de comportements vibratoires amplifiés, l'amplitude des fluctuations de pression étant plus proche de l'expérience que le cas traité avec la formulation classique PCM-FPI. Par ailleurs, le présent calcul est plus "stable" en présence d'une sortie non réfléchissante que la précédente étude sans correction de la vitesse de flamme. Toutes ces observations peuvent être attribuées aux termes de diffusion qui se retrouvent augmentés pour préserver la vitesse de flamme.



**FIGURE 10.3:** *Intégration des termes sources d'énergie obtenus numériquement (droite) et mesure  $CH^*$  (gauche) pour le cas M30C07A10.*



**FIGURE 10.4:** Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux (gauche) et derrière un barreau (droite) pour le cas M30C07A10.



**FIGURE 10.5:** Cartes instantanées de la fonction d'élargissement  $\mathcal{F}$  pour un plan situé entre deux barreaux (gauche) et derrière un barreau (droite) pour le cas M30C07A10 avec la ligne stoechiométrique en trait continu noir.

## **10.4 Conclusion**

La correction apportée au modèle PCM-FPI pour corriger la vitesse de flamme semble mieux reproduire la dynamique de flamme. En effet, la propagation du front de flamme à la bonne vitesse conditionne la reproduction des instabilités de combustion. Néanmoins, en raison de la complexité de la configuration étudiée, ce modèle nécessiterait d'autres investigations numériques avec des flammes canoniques.



# Chapitre 11

## Conclusion générale

### 11.1 Synthèse Générale

Une méthode des frontières immergées a été développée pour la simulation numérique d'écoulements compressibles dans un code structuré. Les codes structurés sont en effet de très bons candidats à la description précise d'objets complexes, de part la relative simplicité de génération du maillage et d'implémentation de schémas numériques d'ordre élevé. La topologie de la grille de calcul réduit également le coût CPU par rapport aux codes non structurés (recherche des connectivités).

La méthode des frontières immergées retenue a été soumise à de nombreux cas tests, pour évaluer son aptitude à décrire la dynamique d'écoulements compressibles, mais également à reproduire les propriétés de réflexion acoustique d'un mur (notion d'impédance acoustique) et à ne pas induire un défaut de conservation de la masse trop important. Une approche basée sur l'utilisation de cellules fantômes est retenue pour les frontières immergées. Pour assurer que cette méthode n'induit pas une déviation de masse conséquente, une approche conservative, dérivée de l'approche de la cellule coupée, est développée et confrontée à la méthode de la cellule fantôme dans le cadre d'écoulements de canaux inclinés. Le faible gain apportée par rapport au degré de complexité de l'implémentation justifie finalement l'emploi de la méthode de la cellule coupée.

L'étude bibliographique de l'écoulement affleurant une cavité fait ensuite ressortir différents types d'interactions entre l'écoulement et la cavité. On distingue ainsi le couplage aérodynamique, associé à l'impact d'une couche cisailée contre un obstacle, le couplage acoustique caractéristique des résonances suivant des modes de cavité ou de type Helmholtz et un couplage de type fluide-structure. Dans un premier temps, on s'intéresse au couplage aérodynamique pour lequel il existe différents modèles analytiques. En particulier, le modèle de Rossiter fournit une relation de phase entre l'amont et l'aval de la cavité.

La méthode des frontières immergées est ensuite appliquée dans le cadre de calculs LES (*Large Eddy Simulation*) d'une cavité transsonique pour laquelle une base de données expérimentales complète est disponible. Les calculs fournissent des résultats très satisfaisants quant à la détermination des champs aérodynamiques moyens et à la reproduction du bouclage aéro-acoustique. Ce bouclage aéro-acoustique étant très sensible aux conditions aux limites, cette étude conforte notre choix d'une modélisation des parois par une méthode de frontières immergées. Cette configuration permet également d'éprouver les différents modèles de sous-maille ajoutés au code et modifiés pour s'adapter, le cas échéant, aux frontières immergées. Un travail a été mené sur la comparaison des stratégies de modélisation de sous-maille et l'analyse des comportements observés. Il s'avère que le schéma de viscosité artificiel, utilisé dans tout code effectuant des calculs de type LES, joue un rôle souvent sous-estimé dans la dissipation de sous-maille. Toute comparaison entre divers modèles de sous-maille devrait donc s'accompagner d'une comparaison entre les niveaux de dissipations artificielle ou turbulent introduits.

Diverses études sont ensuite réalisées pour aider au dimensionnement d'un nouveau concept de chambre de combustion où la flamme est stabilisée par la recirculation de gaz brûlés dans une cavité. Après avoir rappelé le concept du TVC et les différentes chambres ayant vu le jour sur la base de cette configuration, la phénoménologie de l'écoulement non réactif dans une chambre de type TVC est explorée au moyen de diverses simulations. Cette analyse des phénomènes est conduite pour différentes conditions de débit principal avec ou sans la présence d'un injecteur d'air dans la cavité. La présence d'un swirl est également explorée. La capacité du code SiTCom à retrouver les caractéristiques de l'écoulement est démontrée à travers des comparaisons entre les calculs LES et l'expérience.

Diverses études de la dynamique de flamme dans une chambre de type TVC sont ensuite réalisées pour diverses conditions de fonctionnement. Les spécificités de mise en oeuvre d'une simulation d'un écoulement de ce type sont discutées et un soin particulier est apporté au traitement de la condition de sortie, qui constitue le maillon délicat de la chaîne de modélisation. Malgré les difficultés de stabilisation de l'écoulement imputables aux conditions limites et les problèmes de pilotage et de caractérisation expérimentales, les dynamiques de flammes sont en bon accord avec l'expérience. L'analyse des phénomènes relevés dans ce type d'écoulement de cavité souligne des phénomènes d'instabilités et de retour de la flamme. La configuration dotée d'un swirl est également explorée et permet de stabiliser la flamme. Afin d'orienter les futures investigations expérimentales, les outils de simulation sont utilisés pour analyser des points de fonctionnement non disponibles sur le montage expérimental actuel. En particulier, la simulation réalisée avec un débit principal fortement augmenté, limite le développement d'intenses instabilités thermo-acoustiques. Enfin, est exposée une étude sur l'existence d'un cycle limite acoustique : en particulier une formule permettant d'anticiper le niveau des fluctuations de pression à partir des variations d'une variable d'avancement décrivant la flamme. Cette analyse souligne que la reproduction des amplitudes des fluctuations de pression est directement relié au volume balayé par la flamme. Ainsi, tout code compressible, s'il est en mesure de reproduire les mouvements instationnaires de la flamme, peut fournir la variation maximale de pression observable sans nécessiter le couplage avec un solveur acoustique et le calcul précis des impédances acoustiques aux limites.

Dans la dernière partie du manuscrit, une correction au modèle PCM-FPI est apportée afin de préserver la vitesse de flamme et d'assurer une reproduction plus précise de la dynamique de flamme. Cette correction est évaluée au cours d'une simulation d'une chambre de type TVC et semble améliorer la reproduction de la dynamique de la flamme.

## 11.2 Perspectives

Ces travaux de thèse nous permettent de dresser quelques perspectives intéressantes par rapport aux évolutions possibles de la méthode des frontières immergées, des paramètres de la chambre de type TVC et de la modélisation de la combustion turbulente. Les potentiels axes d'études sont les suivants :

- Faire évoluer la méthode des frontières immergées.

L'implémentation actuelle de la méthode des frontières immergées repose sur une méthode level-set avec laquelle la géométrie est décrite analytiquement. Bien que cette méthode soit particulièrement intéressante pour des objets relativement simples, la description analytique de géométries complexes n'est pas toujours possible. Il convient alors de traiter la géométrie avec une approche alternative d'identification des parois. Ainsi, la nouvelle version de SiTCom (SiTComB) permet maintenant d'extraire le contour de la frontière à partir d'un fichier STL généré à l'aide du logiciel CATIA. Cette approche d'extraction des parois nécessite de nombreuses investigations pour analyser, entre autre, la description des coins et de géométries de fine épaisseur.

- Améliorer la génération du maillage.

Le point suivant est la mise en oeuvre d'une méthode de raffinement localisé. La description précise d'un écoulement turbulent requiert une résolution suffisante du maillage au niveau des parois. Les échelles de Kolmogorov étant proportionnelles à  $Re^{-3/4}$ , toute augmentation du nombre de Reynolds s'accompagne d'une diminution de la taille des plus petites échelles. La gestion du raffinement selon différents axes constitue le point faible de tout maillage cartésien couplé à une méthode de frontières immergées. Pour contrer cette faiblesse, de nombreuses études relatives aux frontières immergées adjoignent une méthode de raffinement localisé (AMR pour *Adaptive Mesh Refinement*) qui nécessite toujours moins de mémoire et de temps CPU que les approches non-structurées [27, 3, 17, 81, 153, 182]. Il serait intéressant de développer une telle approche dans le présent code de calcul pour permettre des raffinements anisotropes.

- Etudier plus en détail la correction au modèle PCM-FPI.

Le modèle PCM-FPI-DTF proposé semble améliorer la description de la dynamique de la flamme. La complexité de la configuration empêchant une comparaison fine des résultats numériques et expérimentaux, ce modèle devrait être analysé pour des flammes canoniques pour lesquelles les paramètres de contrôle (débits, richesses,...) sont parfaitement contrôlés.

- Analyser plus précisément la formule dérivée pour le cycle limite acoustique.

La description de la condition de sortie étant le talon d'Achille des simulations relatives aux TVC, le caractère réfléchissant ou partiellement réfléchissant de la sortie est discuté par rapport à la reproduction du cycle d'instabilité de la flamme. Une formule est dérivée pour estimer le cycle limite acoustique. Bien que nos résultats semblent conforter l'idée selon laquelle la variation maximale de pression observable soit principalement conditionnée par le volume balayé par la flamme, la présente formule requiert d'autres analyses. En particulier, il serait intéressant de valider cette expression et les hypothèses sous-jacentes pour des dispositifs moins complexes et dans le cadre de simulations fines des comportements thermo-acoustiques.

- Faire évoluer le formalisme PCM-FPI.

Cela implique d'affiner la méthode PCM-FPI avec, par exemple, le concept de flammelettes multi-dimensionnelles qui considère les phénomènes de flux entre les iso-surfaces [271, 239], l'ajout de nouvelles dimensions dans la tabulation pour décrire la dilution par les gaz brûlés [278, 395] et les pertes enthalpiques [118].

- Etudier un concept amélioré du TVC.

Le dispositif expérimental choisi ne permettait pas l'investigation de points de fonctionnement stables. En particulier, la dynamique dans la chambre n'est pas suffisante pour limiter les phénomènes de remontée de flammes. Le futur dispositif devrait permettre l'adaptation d'un module de puissance plus important afin d'augmenter le débit dans l'écoulement principal.



## Annexe A

# Notion de densité spectrale acoustique

L'estimation du spectre de puissance est souvent utilisée lors de l'analyse de la turbulence dans un écoulement et notamment pour extraire une information d'un signal bruité. En particulier, la pression constitue un signal aléatoire qu'il convient d'analyser en utilisant la densité spectrale pour obtenir ses différentes composantes spectrales. Obtenu numériquement ou expérimentalement, il s'agit d'un signal discret. La fréquence d'échantillonnage  $f_e$  avec laquelle le signal est échantillonné doit respecter le théorème de Shannon :

$$f_e \leq 2f_{max} \quad (\text{A.1})$$

avec  $f_{max}$  la fréquence maximale du spectre du signal. En effet, la perte d'information liée au passage d'un signal continu à un signal discret est importante lors d'un sous-échantillonnage.

La densité spectrale de puissance (notée DSP pour Densité Spectrale de Puissance ou PSD pour *Power Spectral Density*) représente la distribution, en fonction de la fréquence, de la puissance contenue dans un signal (énergie ou variance d'un signal). Si  $x(t)$  représente un processus stochastique, la puissance est distribuée en fréquence selon l'expression :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)df = \int_0^{+\infty} G_{xx}(f)df \quad (\text{A.2})$$

avec  $\sigma_x^2$  la variance du signal  $x(t)$ ,  $S_{xx}(f)$  la densité spectrale de puissance et  $G_{xx}(f)$  la densité de puissance unilatérale.

La densité spectrale de puissance représente également la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $R_{xx}(\tau)$  d'un signal  $x(t)$  (théorème de Wiener-Khintchine) :

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)e^{-2\pi if\tau}d\tau \quad (\text{A.3})$$

soit, inversement,

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)e^{2\pi if\tau}df \quad (\text{A.4})$$

La fonction  $x$  étant réelle, son autocorrélation  $R_{xx}$  est une fonction réelle paire ce qui implique que la DSP,  $S_{xx}(f)$ , est une fonction réelle, positive et paire. La densité spectrale de puissance unilatérale  $G_{xx}(f)$  est donc définie comme :

$$G_{xx}(f) = S_{xx}(f) + S_{xx}(-f) = 2S_{xx}(f) \text{ pour } f \text{ positif ou nulle} \quad (\text{A.5})$$

Dans la majorité des cas, la notion de "densité spectrale" est associée à  $G_{xx}(f)$ . En effet, lorsqu'un appareil de mesure fournit une estimation de la DSP à l'aide d'un échantillon de signal, il s'agit d'une DSP unilatérale.

En général, un processus est relevé pendant un temps fini. On ne dispose donc que d'un échantillon fini de données pour un signal  $x(t)$ . Par ailleurs, ce signal ne comporte souvent qu'une seule réalisation expérimentale. Pour un processus stochastique stationnaire, l'hypothèse ergodique doit donc être appliquée afin d'en déduire le comportement sur un certain nombre de réalisations. La DSP est donc estimée à partir d'un échantillon limité du processus.

On distingue trois approches pour l'estimation de la densité spectrale de puissance  $\hat{S}_{xx}(f)$ . La première regroupe les méthodes dites classiques ou non paramétriques basées sur le périodigramme. Ces procédures non-paramétriques emploient une transformée de Fourier rapide (FFT pour *Fast Fourier Transform*). La seconde famille contient les méthodes paramétriques reposant sur un modèle du processus. Les méthodes paramétriques modélisent les données collectées comme la sortie d'un système linéaire excité par un bruit blanc (de moyenne nulle et de DSP constante). L'obtention des coefficients du filtre permet de décrire le signal. La dernière famille regroupe les méthodes de sous-espaces (*Subspace methods*) appelées aussi méthodes de haute résolution ou encore méthodes à super-résolution. Elles sont basées sur la décomposition de la matrice de corrélation associée au signal. Ces différentes méthodes sont toutes entachées d'erreurs. La méthode la plus adaptée à l'étude spectrale d'un signal dépendra donc de la nature de ce même signal (obtenu avec un échantillonnage régulier ou non) ainsi que des caractéristiques prioritaires de la DSP (résolution,...).

Une liste non exhaustive des techniques utilisées pour l'estimation de la DSP est présentée ci-dessous. Pour plus de détails sur ces différentes approches, il est conseillé de lire les ouvrages de Stoica et Moses [354], de Bendat et Piersol [25], de Kay [190] et Marple [249]. Dans le cadre de l'analyse numérique de la turbulence, Sagaut *et al.* [327] comparent les méthodes paramétriques et non paramétriques de traitement spectral, pour des signaux de courte durée, et mettent en évidence les différences des deux principales approches.

## A.1 Méthodes non-paramétriques

Contrairement aux méthodes paramétriques, les approches non-paramétriques ne supposent pas que l'évolution du signal puisse être décrite par un modèle mathématique. La DSP est directement estimée à partir des données. La technique paramétrique la plus simple est le périodigramme. Les méthodes du périodigramme moyenné puis de Welch constituent des versions améliorées du périodigramme. Il existe également la technique plus récente du multitaper (MTM pour *Multitaper Method*). Toutes ces méthodes sont intégrées à l'outil MATLAB.

### A.1.1 Le périodigramme

Le théorème de Wiener-Khintchine définit la DSP comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Dans la pratique, la fonction d'autocorrélation n'est pas connue, on utilise donc la relation suivante (résultat de l'application de la relation de Plancherel dans la définition de la puissance moyenne  $\sigma_x^2$  [312]) :

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \left[ |X(f, T)|^2 \right] \quad (\text{A.6})$$

avec  $X(f, t)$  la transformée de Fourier du signal  $x(t)$  donnée par :

$$X(f, T) = \int_0^T x(t) e^{-2j\pi ft} dt \quad (\text{A.7})$$

On définit le périodigramme (estimateur de la densité spectrale de puissance) par :

$$\hat{S}_{xx}^{per}(f) = \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \quad (\text{A.8})$$

La DSP est donc estimée par le carré du module de la transformée de Fourier du processus, divisé par le temps d'intégration  $T$ .

Le périodigramme est la méthode la plus classique. Elle nécessite un échantillonnage régulier pour effectuer la transformée de Fourier. Cette transformée de Fourier n'étant définie que sur une suite finie, on sélectionne une séquence finie du signal avec une fenêtre rectangulaire. Ce type de fenêtre est caractérisé par un lobe central bien défini mais ajoute des lobes latéraux importants. On utilise donc généralement d'autres fenêtres de pondération ou d'apodisation qui tendent vers zéro sur les bords gauche et droit de l'échantillon [157] (fenêtres de Hamming, Hann ou Hanning, Blackman ou Blackman-Harris, Bartlett...). Notons que la qualité d'une fenêtre de pondération est évaluée suivant la largeur de son lobe central (liée au "pouvoir de résolution") et la hauteur de ses lobes secondaires (à l'origine des phénomènes de "fuites d'énergie" ou *leakage*). Pour un signal  $x(t)$  comportant  $N$  échantillons échantillonnés à la période  $T_e$  soit la séquence  $x_N[n] = x(nT_e)$ , appliquer une fenêtre autre que rectangulaire au processus revient à multiplier chaque élément de la séquence par une fonction de pondération :

$$\tilde{x}_N[n] = x_N[n].w[n] \quad (\text{A.9})$$

Ainsi l'estimateur devient :

$$\hat{S}_{xx}^{per.m}(f) = \frac{1}{TW} |\tilde{X}(f, T)|^2 \quad (\text{A.10})$$

où  $W$  est une constante liée à l'utilisation d'une fenêtre de pondération qui assure que le périodigramme modifié  $\hat{S}_{xx}^{per.m}(f)$  soit non biaisé :

$$W = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2 \quad (\text{A.11})$$

Pour évaluer les performances d'un estimateur, il est nécessaire d'étudier son biais et sa variance. Le périodigramme constituant un estimateur de la densité spectrale de puissance d'un processus  $x(nT_e)$  (signal  $x(t)$  comportant  $N$  valeurs échantillonnées à la période  $T_e$ ), en augmentant le nombre de données, le périodigramme devrait se rapprocher de la valeur du spectre  $S_{xx}(f)$ , c'est-à-dire :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[ \hat{S}_{xx}^{per}(f) - S_{xx}(f) \right]^2 \right\} = 0 \quad (\text{A.12})$$

Afin de converger en moyenne quadratique, le périodigramme doit être asymptotiquement non biaisé :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \hat{S}_{xx}^{per}(f) \right\} = S_{xx}(f) \quad (\text{A.13})$$

et sa variance doit converger vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var} \left\{ \hat{S}_{xx}^{per}(f) \right\} = 0 \quad (\text{A.14})$$

On dit que  $\hat{S}_{xx}^{per}(f)$  doit estimer le spectre avec consistance.

La littérature montre que le périodigramme est un estimateur biaisé. Néanmoins, lorsque l'on fait tendre le nombre d'échantillons  $N$  vers l'infini, le périodigramme est asymptotiquement non biaisé. Par ailleurs, cet estimateur est inconsistant puisque la variance ne tend pas vers zéro même dans le cas où  $N$  tend vers l'infini.

### A.1.2 La méthode de Bartlett ou méthode du périodigramme moyenné

Pour améliorer les performances de l'estimateur précédent, on détermine plusieurs périodigrammes sur différents segments du signal [190]. On détermine ensuite la moyenne des différents périodigrammes. Si nous découpons le processus discret  $x_N[n]$  en  $L$  blocs de longueur  $M$  qui ne se recouvrent

pas, on note les  $L$  réalisations décorréliées de ce processus :

$$x_M^{(i)}[n] = x[iM + k], \quad 0 \leq i \leq L - 1 \quad 0 \leq n \leq M - 1 \quad (\text{A.15})$$

L'estimateur de Bartlett s'écrit :

$$\hat{S}_{xx}^{bar}(f) = \frac{T_e}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{|X_M^{(i)}(f)|^2}{M} \quad (\text{A.16})$$

calculé aux fréquences  $\left(f_n = \frac{n}{MT_e}\right)_{n=0, \dots, M/2}$  avec  $X_M^{(i)}(f)$  la transformée de Fourier de  $x_M^{(i)}$ .

Cette technique réduit la variance d'un facteur égal au nombre de périodigrammes calculés. Elle permet de mieux distinguer les composantes du signal de celles du bruit. En effet, le signal est à priori toujours le même alors que le bruit est une composante aléatoire. En moyennant des périodigrammes calculés à partir de signaux bruités différemment, les composantes du signal sont mieux identifiées. Néanmoins, puisque ces derniers sont calculés à partir de séquences plus courtes de longueur  $L$ , la résolution s'en trouve réduite. Avec cette technique on est donc face à un compromis entre une faible variance (nombre élevé de segments  $L$ ) et la résolution (nombre important de données au sein d'un segment).

### A.1.3 La méthode de Welch ou périodigramme lissé

Cette méthode consiste à déterminer plusieurs périodigrammes à l'aide d'une fenêtre glissante (de Hanning ou autre...) appliquée sur un seul signal. Ces périodigrammes sont ensuite moyennés. L'estimateur de Welch dérive donc de celui de Bartlett et comporte deux modifications. La première permet désormais aux séquences de se recouvrir et la seconde est de rajouter une fenêtre à chacune de ses séquences. En notant  $\tilde{x}_M^{(i)}[n]$  la séquence discrétisée sur laquelle on applique une fenêtre (fonction d'apodisation  $w_M$ ), soit

$$\tilde{x}_M^{(i)}[n] = x_M^{(i)}[n] \cdot w_M[n] \quad (\text{A.17})$$

l'estimateur de Welch s'écrit :

$$\hat{S}_{xx}^{welch}(f) = \frac{T_e}{WL} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{|\tilde{X}_M^{(i)}(f)|^2}{M} \quad (\text{A.18})$$

avec

$$W = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |w_M[n]|^2 \quad (\text{A.19})$$

La fenêtre la plus utilisée pour cet estimateur est la fenêtre de Hamming, qui s'écrit :

$$w_M^{Ham}[n] = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2k\pi}{M-1}\right) \quad (\text{A.20})$$

L'utilisation de cette méthode permet d'obtenir un estimateur non biaisé de part la multiplication temporelle entre le signal et la fenêtre glissante. Cet estimateur est également à faible variance grâce au moyennage des périodigrammes. Le recouvrement, en général de l'ordre de 50%, permet d'obtenir plus de séquences que la méthode précédente de Bartlett et induit donc une diminution plus importante de la variance.

### A.1.4 Méthode du multitaper

La méthode du multitaper permet de réduire le biais de l'estimation pour un faible nombre d'échantillons et se base sur l'utilisation d'une fenêtre de pondération de type *taper* [373]. En particulier cette technique, peu utilisée, repose sur l'application de fenêtres orthogonales appliquées aux données du processus afin de réduire les effets de bruit.

### A.1.5 Conclusion

En conclusion, bien que les méthodes non paramétriques produisent de bons résultats dans de nombreux domaines, elles présentent certains inconvénients (en particulier pour des signaux de courte durée). Le premier problème réside au niveau de la résolution fréquentielle, c'est-à-dire la capacité à distinguer les réponses spectrales de plusieurs signaux. Cette résolution spectrale est fonction de la réciproque de l'intervalle de temps sur lequel les données sont collectées. Ces approches sont également limitées de part l'utilisation de fenêtres sur les données qui tendent à déformer la réponse spectrale.

Le problème avec une méthode à base de FFT est qu'il faut faire un compromis entre la résolution fréquentielle constante et la variance (bruit) de l'estimateur du spectre, au travers du découpage du signal complet en sous-blocs (éventuellement se chevauchant) sur lesquels on calcule les sous-spectres que l'on moyenne ensuite pour obtenir le spectre final. La présence de nombreux sous-blocs limite le bruit mais conduit aussi à une faible résolution spectrale ( $\Delta f = 1/(n \times \Delta t)$  avec  $n$  la taille du sous-bloc). Par ailleurs, un faible nombre de sous-blocs implique une meilleure résolution mais un bruit important. Pour le cas extrême d'un unique bloc, l'écart-type de l'estimateur, à une fréquence donnée, est égale à la valeur elle-même, soit une incertitude de 100%. Le fenêtrage, avec par exemple l'approche du multitaper, permet une légère amélioration du gain.

Les méthodes paramétriques, présentées ci-dessous, permettent de s'affranchir partiellement de cette problématique en raison d'une discrétisation en fréquence du spectre optimisé par rapport au signal.

## A.2 Méthodes paramétriques

Alors que les méthodes non paramétriques sont basées sur l'estimation de le DSP à l'aide d'une transformée de Fourier (Eq. A.10), les méthodes paramétriques supposent que le processus stochastique sous-jacent peut être décrit avec un certain nombre de paramètres. Elles reposent sur l'estimation de la fonction d'autocorrélation (Eq. A.3). L'élément clé inhérent à ces méthodes est donc le choix des paramètres décrivant le processus. L'approche paramétrique la plus populaire est basée sur des modélisations auto-régressives du signal (modèles AR pour *Auto-regressive*). D'autres modèles sont basés sur une moyenne mobile (MA pour *Moving Average*) et sur une moyenne mobile auto-régressive (ARMA pour *Autoregressive Moving Average*). On distingue également la méthode de Burg qui estime la spectre par maximisation de l'entropie (basée sur les chaînes de Markov).

### A.2.1 Le modèle auto-régressif (AR)

Le signal est supposé prédictible en fonction d'un certain nombre de ses valeurs antérieures :

$$x[n] = \sum_{i=1}^p a_i x[n-i] + e[n] \text{ où } p \leq N \quad (\text{A.21})$$

avec  $x[n]_{k=0 \dots N-1} = x(kTe)$  la séquence des données,  $(a_i)_{i \in [1,p]}$  les paramètres du modèles et  $e[n]$  un bruit blanc décorrélé de  $x[n]$  de variance  $\sigma^2$  et de moyenne nulle et indiquant l'erreur de prédiction. En réalisant la transformée en  $Z$  de cette équation, on obtient :

$$X(Z) \left( 1 - \sum_{i=1}^p a_i Z^{-i} \right) = E(Z) \quad (\text{A.22})$$

Le signal  $x[n]$  peut donc s'assimiler au passage d'un Dirac ou d'un bruit blanc  $e[n]$  à travers un filtre autorégressif (AR), d'ordre  $p$  et de fonction de transfert  $H(Z)$  donné par :

$$H(Z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^p a_i Z^{-i}} \quad (\text{A.23})$$

La DSP estimée est alors :

$$\hat{S}_{xx}^{AR}(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^N a_i e^{-j2\pi f i} \right|^2} \quad (\text{A.24})$$

Ce modèle est souvent qualifié de filtre tous pôles puisque la seule dépendance fréquentielle du spectre se situe au niveau du dénominateur. Pour estimer la DSP, les coefficients  $(a_i)_{i \in [1,p]}$  et  $\sigma^2$  doivent donc être déterminés.

Pour déterminer ces paramètres, on utilise l'équation suivante de Yule-Walker qui relie ces paramètres à la matrice des autocorrélations  $\mathbf{R}$  (dont les éléments sont notés  $\{r_{xx}(k)\}_{k=0,\dots,p}$ ) :

$$\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer le modèle AR à partir du signal, ce système doit être résolu. L'algorithme de Levinson est un algorithme récursif sur l'ordre du modèle AR et permet de résoudre ce système rapidement. Les détails de la résolution des équations de Yule-Walker figurent dans les cours [7, 30] et certains ouvrages spécialisés [343].

### A.2.2 Le modèle de Burg

Proposée par Burg [62, 61], cette approche paramétrique de type maximum d'entropie, permet la résolution des équations de Yule-Walker. Par rapport à l'algorithme de Levinson, cette méthode garantit un filtre stable. Cette méthode paramétrique est présentée en détail dans les ouvrages de Stoica *et al.* [354] et de Marple [249]. Pour les études spectrales menées au cours de ces travaux de thèse, nous avons utilisé cette approche pour laquelle nous disposons d'un programme en fortran ou de la fonction *pburg* du logiciel Matlab. L'élément clé à cette méthode est le nombre de pôles utilisés (ou ordre du filtre auto-régressif).

## A.3 Application en CFD

Il existe donc une multitude de méthodes d'analyse spectrale dont le choix dépend de l'application considérée. En général, les méthodes non paramétriques sont utilisées pour des signaux longs et stationnaires alors que les méthodes paramétriques trouvent plutôt leur intérêt pour des signaux brefs et non stationnaires. En particulier dans le cadre de signaux obtenus au cours d'une simulation numérique et donc de courte durée, les méthodes paramétriques fournissent une meilleure résolution que les méthodes non paramétriques puisqu'elles modélisent les données. Néanmoins, il convient de connaître les hypothèses sous-jacentes à chaque technique avant d'entreprendre toute analyse spectrale ce qui a motivé l'état de l'art précédent des méthodes d'analyses spectrales.

Pour effectuer l'analyse spectrale de données numériques (processus de courte durée), on considère la densité de puissance unilatérale  $G_{xx}(f)$ . La DSP étant décrite comme la distribution en fréquence de la variance, la contribution de la plage fréquentielle considérée à l'énergie totale peut être mise en évidence en traçant le spectre comme  $f \cdot G_{xx}(f) / \sigma^2$  dans un système d'axe linéaire-logarithmique :

$$\sigma_x^2 = \int_0^{+\infty} G_{xx}(f) df = \int_0^{+\infty} f \cdot G_{xx}(f) d[\log(f)] \quad (\text{A.25})$$

Les signaux étudiés en CFD et en particulier le signal de pression comporte des sinusoïdes énergétiques "noyées" dans un bruit blanc. Pour mettre en évidence les composantes spectrales d'un tel signal, on utilise souvent le niveau de bruit de pression SPL (pour *Sound Pressure Level*) :

$$SPL = 20 \log_{10} \left( \frac{\sqrt{G(f)}}{2 \cdot 10^{-5}} \right) \quad (\text{A.26})$$

## Annexe B

# Publications

Merlin C., Domingo P., Vervisch L. Immersed boundaries in Large Eddy Simulation of a transonic cavity flow, *Direct and Large-Eddy Simulation VIII*, 2011.

Merlin C., Domingo P., Vervisch L. Immersed boundaries in Large Eddy Simulation of compressible flow, *Flow, Turbulence and Combustion*, submitted.

Lodier G., Merlin C., Domingo P., Vervisch L., Ravet F. Self-ignition scenarios after rapid compression of a turbulent mixture weakly-stratified in temperature, *Combustion and Flame*, submitted.



# Table des figures

1.1	<i>Evolution de la demande mondiale en énergie entre 1971 et 2003 et exprimée en mégatonnes équivalent pétrole [108]. . . . .</i>	2
1.2	<i>Evolution au cours du temps des rejets de CO<sub>2</sub> issues de combustibles fossiles, représentée en gigatonnes de carbone émis par an [397]. . . . .</i>	3
1.3	<i>Répartition des émissions de CO<sub>2</sub> par secteur d'activité, en France et pour l'année 2009 (courbe élaborée à partir des données fournies par le rapport d'activité d'avril 2011 du CITEPA [92]). . . . .</i>	3
1.4	<i>Répartition des émissions de NO<sub>x</sub> par secteur d'activité, en France et pour l'année 2009 (courbe élaborée à partir des données fournies par le rapport d'activité d'avril 2011 du CITEPA [92]). . . . .</i>	4
1.5	<i>Evolution des polluants CO, des hydrocarbures imbrûlés, des fumées et des NO<sub>x</sub>, en fonction de la richesse [403]. . . . .</i>	5
1.6	<i>Turboréacteur à double flux avec une chambre de combustion annulaire [1]. . . . .</i>	7
1.7	<i>Cycle de Brayton-Joules pour une turbine à gaz idéal ou un turboréacteur idéal à simple flux. . . . .</i>	8
1.8	<i>Schéma de la coupe d'un tube à flamme ou chambre de combustion annulaire. . . . .</i>	8
2.1	<i>Schéma de la structure d'une flamme de prémélange laminaire [389]. . . . .</i>	21
2.2	<i>Structure du front de flamme de diffusion [389]. . . . .</i>	23
2.3	<i>Structure du front de flamme dans un mélange hétérogène de réactifs [160]. . . . .</i>	24
2.4	<i>Cascade d'énergie turbulente de Kolmogorov ([117]). . . . .</i>	28
2.5	<i>Comparaison entre simulation numérique directe (DNS), résolution des équations moyennées (RANS) et simulation aux grandes échelles (LES) (figure tirée de Roux [322]). . . . .</i>	30
2.6	<i>Schéma de principe de la DNS, LES et RANS dans l'espace spectral (à gauche) et temporel (à droite)[117]. . . . .</i>	31
2.7	<i>Spectre d'énergie : principe de l'approche dynamique de Germano (figure tirée de Blin [35]). . . . .</i>	43
2.8	<i>Synthèse des différentes approches en combustion turbulence (figure tirée de Vervisch et Veynante [389]). . . . .</i>	52
2.9	<i>Effet de la turbulence sur la structure de la zone de réaction. . . . .</i>	53
2.10	<i>Diagramme des régimes de flammes prémélangées, basé sur les travaux de Peters [288]. . . . .</i>	55
2.11	<i>Diagramme des régimes de flammes non-prémélangées en fonction du nombre de Reynolds et de Damköhler [389]. . . . .</i>	61
2.12	<i>Convergence des trajectoires <math>Y_k(t)</math> vers l'ILDM [117]. . . . .</i>	66
2.13	<i>Projection d'une flamme prémélangée turbulente CO/H<sub>2</sub>/air en chimie complexe dans le sous-espace ou ILDM ou encore variété de dimension 2 (<math>Y_{CO_2}, Y_{H_2O}</math>) : (○) : état d'équilibre, (●) : trajectoire d'une flamme laminaire 1D dans les mêmes conditions, (-) : approximation linéaire de la zone froide [135]. . . . .</i>	67
2.14	<i>Domaine de combustion dans l'espace réduit des compositions à l'équilibre chimique. Schéma représentant la température (avec préchauffage du côté carburant) en fonction de la fraction de mélange. En gris foncé : domaines des flammelettes de diffusion. En gris clair : domaines des flammelettes de prémélange [269]. . . . .</i>	69

2.15	<i>Comparaison entre FPI et une chimie détaillée pour une flamme riche partiellement prémélangée pour la fraction massique de <math>CO_2</math>. Symboles : calculs FPI avec différents taux d'étirement, lignes pointillées : chimie détaillée (figure extraite de [119]).</i>	70
2.16	<i>Température en fonction de la variable de progrès <math>Y_c = Y_{CO} + Y_{CO_2}</math> pour des flammes laminaires de prémélange méthane/air ([269]).</i>	70
2.17	<i>Tracés de PDF conditionnées <math>P(c Z^*)</math> en fonction de <math>c</math> pour des fractions de mélange comprises entre 0,1 et 0,8, extraits des résultats DNS de Vervisch [386].</i>	71
2.18	<i>Forme de la <math>\beta</math>-PDF pour une valeur moyenne de <math>\tilde{Z} = 0,35</math>, selon différentes valeurs du facteur de ségrégation <math>S(\tilde{X})</math> (extrait de [269]).</i>	73
2.19	<i>Schéma de la méthode de tabulation PCM-FPI exposant le couplage entre le code de calcul et la table chimique (extrait de [358]).</i>	76
3.1	<i>Nomenclature pour l'indexation des surfaces d'un volume de contrôle <math>\mathcal{V}_{i,j,k}</math>.</i>	79
3.2	<i>Schéma du stencil à 4 noeuds impliquées dans la reconstruction des flux.</i>	79
3.3	<i>Evolution des termes dissipation de second et quatrième ordre en fonction du senseur de pression.</i>	81
3.4	<i>Stencil des noeuds impliqués dans la reconstruction des flux diffusifs aux abords des frontières.</i>	84
3.5	<i>Volume d'intégration associé au schéma de filtrage explicite test en 2D.</i>	88
3.6	<i>Opération de filtrage suivant la direction <math>x</math>.</i>	88
3.7	<i>Opération de filtrage suivant la direction <math>x</math> qui ne permet pas l'emploi de la formule spatiale non uniforme (Eq. 3.66).</i>	90
3.8	<i>Opération de filtrage d'un créneau pour une largeur de filtre de 4, 8, 16 et 32 fois la taille du maillage <math>\Delta x</math> (extrait de Moureau et al. [265]).</i>	91
3.9	<i>Représentation du type de maillage pour une formulation non caractéristique du mur : la paroi est à l'interface des cellules <math>i</math> et <math>i + 1</math>.</i>	93
4.1	<i>Vue schématique de deux types de région dans le domaine de calcul.</i>	110
4.2	<i>Identification des cellules fantômes à l'aide de la distance signée. (a) Cas où le domaine est correctement discrétisé. (b) Cas où une courbure trop importante impose un raffinement du maillage.</i>	117
4.3	<i>Identification des cellules fluides, solides et fantômes avec la notion de distance signée (level set function) (a) : Une géométrie simple (telle qu'un cylindre) requiert une unique fonction de distance signée (b) : Une géométrie plus complexe, par exemple une cavité, nécessite l'introduction de plusieurs distances signées pour chaque surface continue constituant la cavité et pour les coins (spécifiés par la donnée des fonctions <math>d_2</math> et <math>d_6</math>) avec : <math>\circ</math> pour les cellules fluides, <math>\bullet</math> les noeuds fantômes où la solution fluide doit être reconstruite et <math>\blacksquare</math> les noeuds solides.</i>	118
4.4	<i>Détermination du point image (IP) associé à la cellule fantôme (<math>G</math>) par la projection par rapport à la normale à la frontière immergée du point fantôme avec : <math>\circ</math> les cellules fluides, <math>\bullet</math> les cellules nécessitant une reconstruction et <math>\blacksquare</math> les noeuds solides.</i>	120
4.5	<i>Détermination du point image (IP) associé à la cellule fantôme (<math>G</math>) pour une frontière irrégulière avec : <math>\circ</math> les cellules fluides, <math>\bullet</math> les cellules nécessitant une reconstruction et <math>\blacksquare</math> les noeuds solides.</i>	121
4.6	<i>Interpolation linéaire. (a) Cas où les deux cellules sont fluides. (b) Cas où une cellule de reconstruction est la cellule fantôme avec : <math>\circ</math> pour les cellules fluides, <math>\bullet</math> les noeuds fantômes où la solution fluide doit être reconstruite et <math>\blacksquare</math> les noeuds solides.</i>	123
4.7	<i>Interpolation bilinéaire. (a) Cas où les quatre cellules sont fluides. (b) Cas où une cellule est la cellule fantôme elle-même. (c) Cas où interviennent d'autres cellules fantômes avec : <math>\circ</math> les cellules fluides, <math>\bullet</math> les noeuds fantômes où la solution fluide doit être reconstruite et <math>\blacksquare</math> les noeuds solides.</i>	125

4.8	<i>Volume d'intégration du schéma de filtrage explicite test en 2D. (a) : Dans la région fluide. (b) : A proximité d'un mur horizontal immergé. (c) : A proximité d'un mur incliné par rapport au maillage. . . . .</i>	133
4.9	<i>Procédure d'interpolation de la viscosité turbulente associée à la cellule fantôme en deux dimensions (interpolation bilinéaire). . . . .</i>	133
4.10	<i>Variations des coefficients de traînée et de portance au cours du temps pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec <math>Re_d = 300</math>. . . . .</i>	137
4.11	<i>Carte instantanée du scalaire passif pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec <math>Re_d = 300</math> obtenu avec le maillage M2. . . . .</i>	137
4.12	<i>Iso-contours de la norme 2D de la vorticité normalis�e obtenus avec le maillage M2. . . . .</i>	137
4.13	<i>Iso-contours de la norme 2D de la vorticité normalis�e, obtenus avec le maillage M2 pour lequel les conditions aux limites selon <math>y</math> sont traitées avec un formalisme 3D-NSCBC (a) et des conditions de symétrie (b). . . . .</i>	138
4.14	<i>Cartes de la pression obtenues avec le maillage M2 pour lequel les conditions aux limites selon <math>y</math> sont traitées avec un formalisme 3D-NSCBC (a) et des conditions de symétrie (b). . . . .</i>	139
4.15	<i>Carte instantan�e du scalaire passif pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec <math>Re_d = 300</math> obtenu avec le maillage M2 et des conditions de symétrie pour les plans en <math>y</math>. . . . .</i>	139
4.16	<i>Cartes instantanées du scalaire passif pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec <math>Re_d = 300</math>, obtenues avec le maillage M1 et : la formulation NSCBC de Poinso et Lele [298] (a), 3D-NSCBC propos�e par Lodato et al. [238] (b) et les conditions de symétrie (c). . . . .</i>	140
4.17	<i>Cartes instantanées de la norme de la vitesse normalis�e pour différents nombre de Reynolds : (a) <math>Re_h = 200</math>, (b) <math>Re_h = 230</math> et (c) <math>Re_h = 232</math>. . . . .</i>	141
4.18	<i>Comparaison des champs de vitesse expérimentaux (sphères) et numériques (lignes) pour différentes abscisses dans le sillage du cylindre. . . . .</i>	143
4.19	<i>Iso-contour du critère <math>Q</math> colorié par la pression (<math>Q = 300 \text{ s}^{-2}</math>). . . . .</i>	143
4.20	<i>Cartes de pression et contours de pression en deux instants. A gauche, la formulation caractéristique du mur (3D-NSCBC); au milieu, la méthode de la cellule fantôme avec des murs immergés parallèles au maillage et à droite, la méthode de la cellule fantôme dans un cube incliné de <math>45^\circ</math> par rapport au maillage avec : (a) <math>t = 16,4\mu\text{s}</math> et (b) <math>t = 26,9\mu\text{s}</math>. . . . .</i>	147
4.21	<i>Iso-surface de pression en quatre instants : formulation 3D-NSCBC (droite), IBM avec les parois du cube parallèles au maillage (centre) et IBM avec un cube immergé incliné de <math>45^\circ</math> : (a) <math>t = 14,2\mu\text{s}</math>, (b) <math>t = 17,9\mu\text{s}</math>, (c) <math>t = 22,2\mu\text{s}</math> et (d) <math>t = 26,9\mu\text{s}</math>. . . . .</i>	148
4.22	<i>Position des différents capteurs (L1, L2 et L3) de pression sur le mur. . . . .</i>	149
4.23	<i>Evolution de la pression au cours du temps sur le mur pour : (a) capteur L1 relatif au centre d'une face, (b) capteur L2 associé au centre d'une arête et (c) capteur L3 pour un coin. Ligne continue : 3D-NSCBC, tirets : frontière immerg�e et pointillés : la frontière immerg�e avec un cube incliné de <math>45^\circ</math>. . . . .</i>	150
4.24	<i>Evolution de l'erreur sur la pression en fonction du nombre de cellules fluides avec les normes L1 (ligne continue) et L2 (tirets). Cercles : maillage conforme (3D-NSCBC) et croix : frontières immergées pour un cube incliné de <math>45^\circ</math>. . . . .</i>	151
4.25	<i>Paramètres géométriques pour la vérification de la conservation de la masse pour l'écoulement autour d'un cylindre confiné dans un canal. . . . .</i>	152
4.26	<i>Vérification des propriétés de conservation de la masse à proximité d'un cylindre immergé dans un canal. . . . .</i>	152
4.27	<i>Maillage à proximité du cylindre immergé. . . . .</i>	152
4.28	<i>Traitement des cellules à proximité de la surface immerg�e : le bilan des flux est réalisé sur le volume fluide effectif. . . . .</i>	154
4.29	<i>Traitement des flux visqueux dans une cellule coupée. . . . .</i>	155

4.30	<i>Schéma de la procédure de mélange pour une cellule fantôme, c'est-à-dire une cellule de faible rapport volumique fluide.</i> . . . . .	156
4.31	<i>Domaine de calcul pour l'étude de l'écoulement dans un canal.</i> . . . . .	158
4.32	<i>Profils de vitesse longitudinale obtenus avec la méthode de la cellule fantôme (GCM) pour le canal incliné de <math>\beta = 20^\circ</math> et pour différents maillages : Maillage A (<math>\cdot\cdot\cdot</math>), Maillage D (<math>- - -</math>) et Maillage E (<math>- \cdot - \cdot -</math>), comparés à la solution analytique (<math>-</math>).</i> . . . . .	159
4.33	<i>Profils de vitesse longitudinale obtenus avec la méthode de la cellule fantôme (GCM) pour différentes inclinaisons du canal et le maillage E : <math>\beta = 45^\circ</math> (<math>\cdot\cdot\cdot</math>), <math>\beta = 30^\circ</math> (<math>- \cdot - \cdot -</math>) et <math>\beta = 20^\circ</math> (<math>- - -</math>), comparés à la solution analytique (<math>-</math>).</i> . . . . .	159
4.34	<i>Evolution de l'erreur sur la masse au travers de différentes sections et pour deux inclinaisons de canal avec la méthode de la cellule fantôme (GCM). (a) : 0 degrés. (b) : 20 degrés. Les triangles représentent la variation du débit massique entre <math>\tilde{x} = 3</math> et <math>\tilde{x} = 5</math>. Les cercles représentent la variation du débit massique entre <math>\tilde{x} = 3</math> et <math>\tilde{x} = 6</math>. Les croix représentent la variation du débit massique entre <math>\tilde{x} = 3</math> et <math>\tilde{x} = 7</math>.</i> . . . . .	160
4.35	<i>Evolution de l'erreur sur la conservation de la masse dans un canal horizontal décrit avec la méthode de la cellule fantôme (triangles) et les conditions limites caractéristiques de type NSCBC (cercles).</i> . . . . .	161
4.36	<i>Evolution de l'erreur sur la conservation de la masse pour différents canaux inclinés, dont les murs sont décrits avec la cellule fantôme et discrétisés avec le maillage E.</i> . . . . .	161
4.37	<i>Evolution de l'erreur sur la conservation de la masse pour le canal incliné de <math>\beta = 20^\circ</math>, dont les murs sont décrits avec la cellule fantôme GCM (triangles) et l'approche conservative CCIB (cercles).</i> . . . . .	161
5.1	<i>Classification des cavités ; (a) : cavité profonde, (b) : cavité peu profonde ouverte, (c) : cavité peu profonde transitionnelle, (d) : cavité peu profonde fermée (figure tirée des travaux de thèse de Chatellier [71]).</i> . . . . .	165
5.2	<i>Visualisations d'une couche de cisaillement par ombroscopie (figures tirées des expériences de Brown et Roshko [54]).</i> . . . . .	166
5.3	<i>Schéma du principe de formation et d'appariement des instabilités de Kelvin-Helmholtz (figure tirée de [90]).</i> . . . . .	167
5.4	<i>Visualisations d'une couche de mélange. Coupes transverses et longitudinales de l'écoulement (Bernal et Roshko [28]).</i> . . . . .	167
5.5	<i>Mécanisme de formation des structures secondaires ou structures tridimensionnelles dans une couche de cisaillement (Lasheras et al. [218]).</i> . . . . .	168
5.6	<i>Visualisation des tourbillons longitudinaux contrarotatifs sur une coupe transversale d'une couche de cisaillement par tomographie laser (Bernal et Roshko [28]).</i> . . . . .	168
5.7	<i>Schéma des structures cohérentes présentes dans une couche de cisaillement (Bernal et Roshko [28]).</i> . . . . .	169
5.8	<i>Autocorrélations de vitesses mesurées dans des couches de mélange avec et sans obstacle [315]. Pour chaque configuration, différents cas ont été mesurés pour évaluer la dispersion temporelle.</i> . . . . .	170
5.9	<i>Différents modes d'évolution du phénomène oscillatoire dans la cavité (d'après Rockwell et Naudascher [317]).</i> . . . . .	171
5.10	<i>Etude longitudinale des spectres de vitesse dans la couche de mélange : (a) sans bord d'impact et (b) avec un bord d'impact (extrait de [315]).</i> . . . . .	172
5.11	<i>Modes de résonance des oscillations de type "fluide-dynamique" observés en cavité sous écoulement turbulent d'après Ethembabaoglu (extrait de [317]). Le mode prépondérant est indiqué par le symbole <math>\bullet</math>.</i> . . . . .	172
5.12	<i>Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Mach pour une cavité rectangulaire peu profonde (extrait de Heller et Bliss [162]).</i> . . . . .	173
5.13	<i>Principe de la boucle de rétroaction dans une cavité.</i> . . . . .	175
5.14	<i>Cycle d'oscillations proposé par Heller et Bliss [161].</i> . . . . .	176

5.15	<i>Evolution d'un mode d'oscillation hydrodynamique vers un régime de couplage aéroacoustique longitudinal pour une cavité peu profonde de rapport d'aspect <math>L/D = 2 - 8 - 10</math> à <math>M = 0,2</math> et <math>M = 0,4</math> (extrait de Plentovich et al. [293]).</i>	178
5.16	<i>Modèle simplifié de l'écoulement affleurant une cavité (figure tirée de [121]).</i>	179
5.17	<i>Modèle du couplage longitudinal par Bilanin et Covert [32] (extrait de [121]).</i>	182
5.18	<i>Résultats obtenus à faible nombre de Mach pour le modèle de Tam et Block (extrait de Tam et Block [366]).</i>	183
6.1	<i>Dimensions du domaine de calcul pour l'analyse de la cavité transsonique.</i>	188
6.2	<i>Taille des mailles normalisée par l'épaisseur de la couche limite, mesurée <math>0,1L</math> en amont du coin de cavité, et pour les deux maillages : — le maillage très raffiné (30 millions de cellules) et - - - le maillage moyen (6 millions de cellules). (a) : Longueur des cellules : <math>\Delta_x</math>. (b) : Hauteur des cellules : <math>\Delta_y</math>. (c) : Largeur des cellules : <math>\Delta_z</math>.</i>	190
6.3	<i>Structures tourbillonnaires tridimensionnelles mises en évidence par un iso-contour du critère <math>Q</math> colorié par la masse volumique, pour une simulation de la cavité transsonique réalisée avec le maillage M1 (Table 6.1) et le modèle Smagorinsky dynamique localisé (DSM).</i>	193
6.4	<i>Clichés strioscopiques issus de l'expérience [122] (gauche) et d'un calcul MiLES (droite) avec le maillage M1.</i>	193
6.5	<i>Cartes dans le plan rasant la cavité pour différents modèles de sous-maille et le maillage M1. A gauche : La vitesse moyenne longitudinale. A droite : L'énergie cinétique turbulente 2D. (a) L'approche MiLES. (b) Le modèle de Vreman (VM). (c) Le modèle Smagorinsky dynamique lagrangien avec une formulation des équations filtrées combinant macropression et macrotempérature (LDSM). (d) Le modèle Smagorinsky dynamique lagrangien avec une formulation dynamique lagrangienne du modèle de Yoshizawa pour la partie isotropique du tenseur des contraintes (LDSM+LDYM). (e) Le modèle Smagorinsky dynamique localisé (DSM).</i>	195
6.6	<i>Profils de vitesse dans la couche limite <math>0,1L</math> en amont de la cavité : — LDSM, - - - MiLES, <math>\cdots</math> VM et <math>\circ</math> données expérimentales. (a) : Vitesse moyenne longitudinale. (b) : Fluctuation de la vitesse longitudinale.</i>	196
6.7	<i>Vitesse moyenne longitudinale dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe <math>x</math> : — LDSM+LDYM, - - - LDSM avec la macropression et la macrotempérature, <math>\cdots</math> DSM, - - - MiLES, <math>\times</math> VM et <math>\circ</math> données expérimentales.</i>	197
6.8	<i>Vitesse moyenne verticale dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe <math>x</math> : — LDSM+LDYM, - - - LDSM, <math>\cdots</math> DSM, - - - MiLES, <math>\times</math> VM et <math>\circ</math> données expérimentales.</i>	198
6.9	<i>Fluctuation de la vitesse longitudinale dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe <math>x</math> : — LDSM+LDYM, - - - LDSM, <math>\cdots</math> DSM, - - - MiLES, <math>\times</math> VM et <math>\circ</math> données expérimentales.</i>	199
6.10	<i>Fluctuation de la vitesse verticale dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe <math>x</math> : — LDSM+LDYM, - - - LDSM, <math>\cdots</math> DSM, - - - MiLES, <math>\times</math> VM et <math>\circ</math> données expérimentales.</i>	200
6.11	<i>Contrainte de Reynolds dans le plan transverse moyen pour différentes positions suivant l'axe <math>x</math> : — LDSM+LDYM, - - - LDSM, <math>\cdots</math> DSM, - - - MiLES, <math>\times</math> VM et <math>\circ</math> données expérimentales.</i>	201
6.12	<i>Cartes du rapport de la viscosité turbulente et moléculaire <math>\nu_{ratio}</math>. (a) : LDSM. (b) : VM.</i>	202
6.13	<i>Carte du nombre de Mach turbulent résolu pour le maillage M1 et l'approche MiLES.</i>	203
6.14	<i>Constantes des modèles dynamiques pour le maillage M1 : (a) : Constante de Yoshizawa pour la trace du tenseur des contraintes. (b) : Constante de Smagorinsky pour la partie anisotropique du tenseur des contraintes.</i>	203
6.15	<i>Cartes instantanées des contributions des flux moléculaire (gauche) et artificielle (droite) pour le bilan d'énergie (a) : MiLES. (b) : LDSM. (c) : VM.</i>	205

6.16	<i>Cartes instantanées des contributions des flux moléculaire (gauche) et artificielle (droite) pour l'équation du premier moment. (a) : MiLES. (b) : LDSM. (c) : VM. . . . .</i>	206
6.17	<i>Cartes instantanées de la contribution du flux turbulent pour l'équation du premier moment. (a) : LDSM. (b) : VM. . . . .</i>	207
6.18	<i>Carte du senseur de pression selon <math>x</math> pour l'approche MiLES. . . . .</i>	207
6.19	<i>Spectres de puissance acoustique issus d'un capteur central amont pour trois approches de modélisation de sous-maille. . . . .</i>	210
6.20	<i>Spectres de puissance acoustique issus d'un capteur central amont pour trois approches de modélisation de sous-maille. Les valeurs expérimentales sont reportées dans les boîtes grises et sont délimitées par les limites inférieures et supérieures à 99% des fonctions de densité de probabilité [215]. . . . .</i>	210
6.21	<i>Statistiques des composantes de vitesse dans le plan médian avec une description 3D-NSCBC : vitesse moyenne longitudinale, vitesse moyenne verticale, fluctuations des vitesses longitudinale et verticale avec : — LDSM, - - - MiLES, <math>\cdots</math> VM et <math>\circ</math> données expérimentales. Gauche : avec une approche multi-blocs. Droite : avec une méthode de frontières immergées. . . . .</i>	212
6.22	<i>Statistiques des composantes de vitesse dans le plan médian avec le maillage raffiné : vitesse moyenne longitudinale, vitesse moyenne verticale, fluctuations des vitesses longitudinale et verticale avec : — LDSM, - - - MiLES, <math>\cdots</math> VM et <math>\circ</math> données expérimentales. . . . .</i>	213
6.23	<i>Spectres de puissance acoustique issus d'un capteur central amont. . . . .</i>	213
6.24	<i>Spectres de puissance acoustique issus d'un capteur central amont. Les valeurs expérimentales sont reportées dans les boîtes grises et sont délimitées par les limites inférieures et supérieures à 99% des fonctions de densité de probabilité [215]. . . . .</i>	214
6.25	<i>Isocontours de la composante transversale du rotationnel (gauche) et de la pression (à droite) pour quatre temps successifs. . . . .</i>	215
6.26	<i>Schéma de l'interaction collective (extrait de Ho et Nasseir [169]). . . . .</i>	216
6.27	<i>Iso-contours de la composante transversale du rotationnel. . . . .</i>	217
6.28	<i>Profils des fluctuations de la vitesse longitudinale et verticale pour plusieurs positions le long de l'axe <math>x</math> obtenus au cours des simulations de la cavité transsonique (lignes) et associés à un tourbillon de Stuart (symboles). . . . .</i>	217
6.29	<i>Visualisation de l'interaction de l'écoulement avec la paroi aval. A gauche : composante transversale de la vorticité moyenne. A droite : isocontours de la vorticité moyenne obtenus par imagerie de particules [235]. . . . .</i>	217
6.30	<i>Iso-surface du critère <math>Q</math> (<math>Q = 0.35(U_\infty/D)^2</math>) coloriée par la composante transversale du rotationnel pour six temps successifs avec le maillage M2. . . . .</i>	219
6.31	<i>Iso-surface d'un critère <math>Q</math> (<math>Q = -0.35(U_\infty/D)^2</math>) coloriée par la norme de la vitesse et témoignant des zones d'étirement (maillage M2). . . . .</i>	219
7.1	<i>Schéma du principe d'un Trapped Vortex Combustor [342] (pour une configuration avec une double section de passage pour l'écoulement principal et double vortex dans les cavités). . . . .</i>	225
7.2	<i>Schéma de la première génération du TVC proposée par le laboratoire de l'Air Force (Air Force Research Laboratory) [357]. . . . .</i>	227
7.3	<i>Schéma de la deuxième Génération du TVC proposée par le laboratoire de l'Air Force (Air Force Research Laboratory) [353]. . . . .</i>	228
7.4	<i>Schémas de la troisième Génération du TVC proposée par le laboratoire de l'Air Force (Air Force Research Laboratory) [353]. . . . .</i>	228
7.5	<i>Photos du TVC proposé par le laboratoire de General Electric avec un diffuseur à 3 passes (gauche) [164]. . . . .</i>	229
7.6	<i>Schéma du TVC proposée par le laboratoire national d'énergie et de technologie (NETL) couplant une cavité et une zone pilote RQL [353]. . . . .</i>	230
7.7	<i>Schéma du TVC proposée par le laboratoire de Ramgen Power Systems [59]. . . . .</i>	230

7.8	<i>Schémas de la troisième Génération du TVC proposée par le laboratoire de ALM Turbines [353].</i>	231
7.9	<i>Schéma de la chambre TV de l'US Navy [20].</i>	231
7.10	<i>Schéma du Tangential Trapped Vortex Combustor [415].</i>	232
7.11	<i>Schéma du High G-Load Trapped Vortex Combustor [222].</i>	232
7.12	<i>Schéma d'une chambre de combustion traditionnelle [223].</i>	233
7.13	<i>Intégration du concept de l'UCC sur un étage de turbine [11].</i>	233
7.14	<i>Principe de la chambre TV du projet TECC au CORIA (extrait de [63]).</i>	237
7.15	<i>Schéma de la chambre TV.</i>	237
7.16	<i>Image de la chambre TV du projet TECC au CORIA.</i>	238
7.17	<i>(a) : Configuration avec deux tourbillons. (b) : Configuration avec un seul tourbillon [318].</i>	239
7.18	<i>(a) : Image du swirl ajouté au dispositif. (b) : Configuration expérimentale avec le swirl.</i>	239
7.19	<i>Dimensions de la chambre TV.</i>	239
7.20	<i>Schéma de la structure de l'écoulement (extrait de [63]).</i>	240
8.1	<i>Secteur comportant 1/4 de la chambre du TVC.</i>	243
8.2	<i>Conditions axi-symétriques.</i>	243
8.3	<i>Paroi immergée du TVC.</i>	244
8.4	<i>Photo de la configuration de référence (M20C07A10).</i>	245
8.5	<i>Vitesse moyenne longitudinale en différentes positions suivant l'axe x derrière un barreau : - - - angle de 27°, ··· angle de 63°, — angle de 45° et o données expérimentales.</i>	246
8.6	<i>Vitesse moyenne longitudinale en différentes positions suivant l'axe x entre deux barreaux : - - - angle de 36°, — angle de 54° et o données expérimentales.</i>	247
8.7	<i>Vitesse moyenne longitudinale en différentes positions suivant l'axe x derrière un barreau (gauche : PIV, droite : LES).</i>	248
8.8	<i>Vitesse moyenne longitudinale en différentes positions suivant l'axe x entre deux barreaux (gauche : PIV, droite : LES).</i>	248
8.9	<i>Vitesse moyenne radiale en différentes positions suivant l'axe x derrière un barreau (gauche : PIV, droite : LES).</i>	248
8.10	<i>Vitesse moyenne radiale en différentes positions suivant l'axe x entre deux barreaux (gauche : PIV, droite : LES).</i>	248
8.11	<i>Fluctuation de la vitesse longitudinale en différentes positions suivant l'axe x derrière un barreau (gauche : PIV, droite : LES).</i>	249
8.12	<i>Fluctuation de la vitesse longitudinale en différentes positions suivant l'axe x entre deux barreaux (gauche : PIV, droite : LES).</i>	249
8.13	<i>Fluctuation de la vitesse radiale en différentes positions suivant l'axe x derrière un barreau (gauche : PIV, droite : LES).</i>	249
8.14	<i>Fluctuation de la vitesse radiale en différentes positions suivant l'axe x entre deux barreaux (gauche : PIV, droite : LES).</i>	249
8.15	<i>Profils radiaux de la vitesse moyenne longitudinale derrière un barreau pour différentes positions longitudinales :- - - angle de 27°, ··· angle de 63°, — angle de 45° et o données expérimentales.</i>	250
8.16	<i>Profils radiaux de la fluctuation de la vitesse moyenne longitudinale derrière un barreau pour différentes positions longitudinales : - - - angle de 27°, ··· angle de 63°, — angle de 45° et o données expérimentales.</i>	251
8.17	<i>Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) avec les vecteurs vitesses pour le cas M20C07A10.</i>	252
8.18	<i>Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10.</i>	253
8.19	<i>Position des capteurs de pression et vitesse.</i>	253
8.20	<i>Signal de pression au cours du temps issu du capteur 7 dans un plan derrière un barreau.</i>	253

8.21	<i>Contour d'un critère <math>Q</math> (<math>Q = 9.10^7 s^{-2}</math>) colorié par la norme de la vitesse 3D pour la configuration nominale.</i>	254
8.22	<i>Profils radiaux de la vitesse moyenne longitudinale entre deux barreaux pour différentes positions longitudinales : - - - MILES, ... VM, — MILES avec IT et o données expérimentales</i>	254
8.23	<i>Profils radiaux de la fluctuation de la vitesse moyenne longitudinale entre deux barreaux pour différentes positions longitudinales : - - - MILES, ... VM, — MILES avec IT et o données expérimentales.</i>	255
8.24	<i>Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10_L11.</i>	256
8.25	<i>Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10_L11.</i>	256
8.26	<i>Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10_L44.</i>	257
8.27	<i>Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07A10_L44.</i>	257
8.28	<i>Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M10C07A10.</i>	258
8.29	<i>Norme de la vitesse moyenne et vecteurs 2D moyens dans un plan situé derrière un barreau. Données expérimentales (droite) et LES (gauche) pour le cas M10C07A10.</i>	259
8.30	<i>Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M10C07A10.</i>	259
8.31	<i>Spectre de la vitesse longitudinale issu du capteur 7 et obtenu avec la méthode de Burg et 5000 pôles pour le cas M10C07A10.</i>	259
8.32	<i>Signal de pression pour le capteur 5 positionné derrière un barreau (gauche) et dans un plan médian (droite) pour la configuration M10C07A10.</i>	261
8.33	<i>Signal de pression pour le capteur 7 positionné derrière un barreau (gauche) et dans un plan médian (droite) pour la configuration M10C07A10.</i>	261
8.34	<i>Iso-contour du critère <math>Q</math> (<math>Q = 9,2.10^7 s^{-2}</math>) pour la configuration M10C07A10 en deux instants : (a) la structure est piégée dans la cavité (<math>t = 0,229s</math>), (b) on assiste au lâcher tourbillonnaire (<math>t = 0,239s</math>).</i>	261
8.35	<i>Norme de la vitesse moyenne et vecteurs 2D moyens dans un plan situé derrière un barreau. Données expérimentales (droite) et LES (gauche) pour le cas M30C07A10.</i>	262
8.36	<i>Norme de la vitesse moyenne et vecteurs 2D moyens dans un plan situé entre deux barreaux. Données expérimentales (droite) et LES (gauche) pour le cas M30C07A10.</i>	262
8.37	<i>Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M30C07A10.</i>	263
8.38	<i>Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M60C07A10.</i>	263
8.39	<i>Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M60C07A10.</i>	264
8.40	<i>Vitesse de remontée de l'air issu de la cavité en fonction de la position le long de la cavité pour différents débits principaux dans un plan positionné à 1mm du plan rasant (<math>r = -1mm</math>).</i>	264
8.41	<i>Zoom sur la vitesse de remontée de l'air issu de la cavité en fonction de la position le long de la cavité pour différents débits principaux dans un plan positionné à 1mm du plan rasant (<math>r = -1mm</math>).</i>	265
8.42	<i>Vitesses longitudinale et radiale au milieu du canal principal (<math>y=5mm</math>) en fonction de la position le long de la cavité, pour les cas M20C07A10 (a) et M10C07A10 (b).</i>	265
8.43	<i>Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07.</i>	266

8.44	<i>Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M20C07.</i> . . . . .	266
8.45	<i>Vitesse de remontée de l'air issu de la cavité en fonction de la position le long de la cavité pour un débit principal de <math>20\text{g}\cdot\text{s}^{-1}</math> (M20) et la présence ou non de l'injecteur d'air aval dans un plan positionné à 1mm du plan rasant (<math>r = -1\text{mm}</math>).</i> . . . . .	267
8.46	<i>Norme 2D de la vitesse moyenne dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M30C07A10S.</i> . . . . .	268
8.47	<i>Norme 2D de la fluctuation de vitesse dans un plan situé entre deux barreaux (droite) et derrière un barreau (gauche) pour le cas M30C07A10S.</i> . . . . .	268
8.48	<i>Vitesse de remontée de l'air issu de la cavité en fonction de la position le long de la cavité pour les cas avec et sans swirl pour un plan situé derrière un barreau et entre deux barreaux dans un plan positionné à 1mm du plan rasant (<math>r = -1\text{mm}</math>).</i> . . . . .	268
8.49	<i>Vitesse longitudinale et radiale au milieu du canal principal (<math>y=5\text{mm}</math>) en fonction de la position le long de la cavité, pour le cas avec swirl (b) et sans swirl (a).</i> . . . . .	269
8.50	<i>Contour d'un critère <math>Q</math> (<math>Q = 2\cdot 10^7\text{s}^{-2}</math>) colorié par la norme de la vitesse 3D.</i> . . . . .	269
8.51	<i>Schéma d'un écoulement de type "Mixte".</i> . . . . .	270
8.52	<i>Schéma d'un écoulement de type "Clos".</i> . . . . .	270
8.53	<i>Schéma d'un écoulement de type "Rempli".</i> . . . . .	271
9.1	<i>Domaine de calcul constitué d'un canal d'une longueur totale de <math>12L_{cav}</math>.</i> . . . . .	275
9.2	<i>Iso-surface du mélange stoechiométrique colorée par la température pour le cas M20C07A10.</i> . . . . .	277
9.3	<i>Dérive du signal de pression.</i> . . . . .	278
9.4	<i>Carte du terme de forçage volumique <math>f_i</math> pour le cas M20C07A10.</i> . . . . .	278
9.5	<i>Domaine de calcul : le canal en aval de la cavité présente un convergent.</i> . . . . .	279
9.6	<i>Signal de pression pour un domaine de calcul présentant un rétrécissement.</i> . . . . .	279
9.7	<i>Domaine de calcul : le canal en aval de la cavité débouche dans un élargissement dont la sortie est imposée réfléchissante et non réfléchissante et l'entrée est un jet d'entraînement.</i> . . . . .	280
9.8	<i>Signal de pression expérimental obtenu à la sortie de la chambre de combustion pour le cas nominal M20C07A10.</i> . . . . .	283
9.9	<i>Structure de la flamme en différents points du cycle associée au cas M20C07A10 : Emission <math>CH^*</math> et vecteurs vitesse 2D obtenus par PIV.</i> . . . . .	284
9.10	<i>Méthode expérimentale pour le signal <math>CH^*</math> intégré et les données PIV (figure extraite de Burguburu [63]).</i> . . . . .	285
9.11	<i>Signal de pression moyenné obtenu trois longueurs en aval de la cavité.</i> . . . . .	286
9.12	<i>Signal de pression expérimental obtenu à la sortie de la chambre de combustion.</i> . . . . .	286
9.13	<i>Cartes <math>CH^*</math> adjointes aux champs PIV 2D obtenues expérimentalement (gauche) et intégration des termes sources d'énergie et vecteurs vitesse des plans entre barreaux obtenus numériquement (droite) pour la configuration M20C07A10.</i> . . . . .	287
9.14	<i>Cartes <math>CH^*</math> adjointes aux champs PIV 2D obtenues expérimentalement (gauche) et intégration des termes sources d'énergie et vecteurs vitesse des plans entre barreaux obtenus numériquement (droite) pour la configuration M20C07A10.</i> . . . . .	288
9.15	<i>Structure de la flamme instable révélée par : le contour de la variable d'avancement <math>Y_c = 0,2</math> et l'iso-température à 1 700K coloriés par la richesse pour le cas M20C07A10.</i> . . . . .	290
9.16	<i>Structure de la flamme instable révélée par : le contour de la variable d'avancement <math>Y_c = 0,2</math> et l'iso-température à 1 700K coloriés par la richesse pour le cas M20C07A10.</i> . . . . .	291
9.17	<i>Cartes instantanées du terme source d'énergie et de la pression pour un plan situé entre deux barreaux pour le cas M20C07A10.</i> . . . . .	292
9.18	<i>Cartes instantanées du terme source d'énergie et de la pression pour un plan situé derrière un barreau pour le cas M20C07A10.</i> . . . . .	293
9.19	<i>Surface stœchiométrique pour le cas M20C07A10.</i> . . . . .	294
9.20	<i>Critère de Rayleigh temporel pour la configuration M20C0710.</i> . . . . .	295

9.21	<i>Signal de pression expérimental obtenu à la sortie de la chambre de combustion en fonction de la phase du cycle de cavité et points caractéristiques qui seront comparés aux résultats numériques pour le cas M30C07A10.</i> . . . . .	296
9.22	<i>Signal de pression numérique intégré sur un plan situé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M30C07A10.</i> . . . . .	296
9.23	<i>Intégration des termes sources d'énergie obtenus numériquement (droite) et mesure <math>CH^*</math> (gauche) pour le cas M30C07A10.</i> . . . . .	299
9.24	<i>Structure de la flamme instable révélée par : le contour de la variable d'avancement <math>Y_c = 0,2</math> et par l'iso-température à 1700K coloriés par la richesse pour le cas M30C07A10.</i> . . . . .	300
9.25	<i>Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux et derrière un barreau pour le cas M30C07A10.</i> . . . . .	301
9.26	<i>Evolution du temps de résidence derrière un barreau (gauche) et entre deux barreaux (droite) pour le cas M30C07A10.</i> . . . . .	302
9.27	<i>Critère de Rayleigh temporel pour la configuration M30C0710.</i> . . . . .	303
9.28	<i>Signal de pression issu d'un capteur placé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M30C07A10 avec une sortie réfléchissante.</i> . . . . .	303
9.29	<i>Iso-contours du terme source d'énergie (<math>\dot{\omega}_e = 1.10^9 J.kg^{-1}.s^{-1}</math>) pour le cas M30C07A10 avec une sortie réfléchissante.</i> . . . . .	304
9.30	<i>Signal de pression issu d'un capteur placé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M60C07A10.</i> . . . . .	305
9.31	<i>Structure de la flamme instable révélée par : le contour de la variable d'avancement <math>Y_c = 0,2</math> et par l'iso-température à 1700K coloriés par la richesse pour le cas M60C07A10.</i> . . . . .	306
9.32	<i>Structure de la flamme instable révélée par la surface stoechiométrique coloriée par la température pour le cas M60C07A10.</i> . . . . .	307
9.33	<i>Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux et derrière un barreau pour le cas M60C07A10.</i> . . . . .	308
9.34	<i>Signal de pression expérimental obtenu à la sortie de la chambre de combustion en fonction de la phase du cycle de cavité et points caractéristiques comparés aux résultats numériques pour le cas M30C07A10_S.</i> . . . . .	309
9.35	<i>Signal de pression numérique pour le cas M30C07A10_S.</i> . . . . .	309
9.36	<i>Cartes <math>CH^*</math> adjointes aux champs PIV 2D obtenues expérimentalement (gauche) et intégration des termes sources d'énergie et vecteurs vitesse des plans entre barreaux obtenus numériquement (droite) pour la configuration M30C07A10_S.</i> . . . . .	310
9.37	<i>Cartes <math>CH^*</math> adjointes aux champs PIV 2D obtenues expérimentalement (gauche) et intégration des termes sources d'énergie et vecteurs vitesse des plans entre barreaux obtenus numériquement (droite) pour la configuration M30C07A10_S.</i> . . . . .	311
9.38	<i>Structure de la flamme stable révélée par : le contour de la variable d'avancement <math>Y_c = 0,2</math> colorié et l'iso-température à 1700K coloriés par la richesse pour le cas M30C07A10_S.</i> . . . . .	312
9.39	<i>Structure de la flamme stable révélée par : le contour de la variable d'avancement <math>Y_c = 0,2</math> et l'iso-température à 1700K coloriés par la richesse pour le cas M30C07A10_S.</i> . . . . .	313
9.40	<i>Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux (gauche) et derrière un barreau (droite) avec la ligne stoechiométrique en noir pour le cas M30C07A10_S.</i> . . . . .	314
9.41	<i>Iso-contours du critère <math>Q</math> à la valeur <math>Q = 2.10^8 s^{-2}</math> coloriés par la température pour le cas M30C07A10_S.</i> . . . . .	315
9.42	<i>Critère de Rayleigh temporel pour la configuration M30C0710_S.</i> . . . . .	315
9.43	<i>Evolution du temps de résidence derrière un barreau et entre deux barreaux pour la configuration M30C0710_S.</i> . . . . .	316
9.44	<i>Signal de pression numérique pour le cas M30C07A10_S avec une sortie réfléchissante.</i> . . . . .	317
9.45	<i>Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux (gauche) et derrière un barreau (droite) avec la ligne stoechiométrique en noir.</i> . . . . .	317

9.46	<i>Signal de pression numérique intégré sur un plan situé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M30C07.</i> . . . . .	318
9.47	<i>Intégration des termes sources d'énergie obtenus numériquement pour le cas M30C07 (gauche) et M30C07A10 (droite).</i> . . . . .	319
9.48	<i>Cartes instantanées du terme source d'énergie pour le cas M30C07 (gauche) et M30C07A10 (droite).</i> . . . . .	320
9.49	<i>Evolution des termes des équations 9.52 et 9.54 pour les configurations M20C07A10 (a), M30C07A10 (b), M30C07 (c) et M30C07A10_S (d).</i> . . . . .	325
10.1	<i>Visualisations 3D de la fonction d'élargissement pour des valeurs de <math>\mathcal{F}</math> comprises entre 2 et 10; a) Contours coloriés par <math>\mathcal{F}</math>; b) Contours coloriés par <math>T</math>.</i> . . . . .	329
10.2	<i>Signal de pression numérique intégré sur un plan situé trois longueurs en aval de la cavité pour le cas M30C07A10 avec le modèle PCM-FPI-DTF.</i> . . . . .	330
10.3	<i>Intégration des termes sources d'énergie obtenus numériquement (droite) et mesure <math>CH^*</math> (gauche) pour le cas M30C07A10.</i> . . . . .	332
10.4	<i>Cartes instantanées du terme source d'énergie pour un plan situé entre deux barreaux (gauche) et derrière un barreau (droite) pour le cas M30C07A10.</i> . . . . .	333
10.5	<i>Cartes instantanées de la fonction d'élargissement <math>\mathcal{F}</math> pour un plan situé entre deux barreaux (gauche) et derrière un barreau (droite) pour le cas M30C07A10 avec la ligne stoechiométrique en trait continu noir.</i> . . . . .	334

# Liste des tableaux

2.1	<i>Nombre de points par côté du cube (<math>N</math>) et coût CPU d'une DNS de turbulence homogène isotrope, en fonction du <math>Re_t</math> pour une architecture de 1 Gflop/s (extrait de Pope, 2000, [303]) et pour une architecture actuelle de de 1 Pflop/s . . . . .</i>	29
2.2	<i>Fonction du filtre dans l'espace réel et dans l'espace spectral pour différents filtres LES. . . . .</i>	33
4.1	<i>Propriétés des maillages utilisés pour l'étude du cylindre non confiné. . . . .</i>	136
4.2	<i>Propriétés des maillages utilisés pour l'étude du cylindre confiné dans un canal de hauteur <math>h = 5d</math>. . . . .</i>	140
4.3	<i>Propriétés des maillages utilisés pour l'étude du cylindre carré immergé de section <math>d = 4 \cdot 10^{-2}</math> m. . . . .</i>	142
4.4	<i>Propriétés des maillages utilisés pour l'étude de l'onde de pression sphérique avec <math>L = 0,013</math> m. . . . .</i>	149
4.5	<i>Maillage et nombre de cellules sur la hauteur du canal <math>N_\beta</math> pour différentes inclinaisons par rapport au maillage (paramètre <math>\beta</math>) . . . . .</i>	158
5.1	<i>Evolution du paramètre <math>\gamma</math> du modèle de Rossiter en fonction du rapport <math>L/D</math> [320]. . . . .</i>	180
5.2	<i>Quelques études numériques de type RANS des écoulements de cavité. . . . .</i>	184
5.3	<i>Etudes numériques de type LES des écoulements de cavité. . . . .</i>	185
5.4	<i>Etudes numériques de type DNS des écoulements de cavité. . . . .</i>	186
6.1	<i>Propriétés des maillages utilisés en unités de parois (notées <math>+</math>) et normalisées par <math>\delta_o</math>, l'épaisseur de la couche limite mesurée expérimentalement <math>0,1L</math> en amont de la cavité. . . . .</i>	189
6.2	<i>Caractéristiques des modes de Rossiter (<math>n</math>) et de leurs <math>i</math>èmes harmoniques (<math>(i+1) \times n</math>). Les nombres de Strouhal théoriques sont évalués avec la formule de Rossiter [320]. Les valeurs expérimentales sont reportées d'après l'analyse statistique de Larchevêque et al. [215] avec la valeur la plus probable, encadrée par les limites inférieures et supérieures à 99% des fonctions de densité de probabilité. La colonne % recense la probabilité d'apparition du mode ou de l'harmonique, évaluée à partir de la base de données expérimentales. . . . .</i>	209
7.1	<i>Etudes numériques des écoulements non réactifs dans les cavités subsoniques. . . . .</i>	234
7.2	<i>Etudes numériques des écoulements réactifs dans les cavités subsoniques. . . . .</i>	236
8.1	<i>Liste des configurations étudiées avec les données expérimentales disponibles, le débit massique d'air principal (<math>QaM</math>), le débit massique d'air dans le coflow (<math>QaC</math>), le débit massique de l'injecteur d'air (<math>QaA</math>) et la longueur de la cavité (<math>L</math>). . . . .</i>	244
8.2	<i>Caractéristiques des vitesses d'injection et des nombres de Reynolds déterminés sur la hauteur d'injection. . . . .</i>	245
8.3	<i>Evolution de la structure de l'écoulement en fonction de différents paramètres : le débit d'air principal, le débit d'air aval et la longueur de la cavité. . . . .</i>	271
9.1	<i>Liste des configurations étudiées avec les données expérimentales disponibles, le débit massique d'air principal (<math>QaM</math>), le débit massique d'air dans le coflow (<math>QaC</math>), le débit massique de l'injecteur d'air (<math>QaA</math>) et le caractère stable ou instable de la flamme. . . . .</i>	274

# Bibliographie

- [1] Moteur typique d'avion avec chambre de combustion annulaire. <http://www.ikonet.com/fr/ledictionnairevisuel/transport-et-machinerie/transport-aerien/turboreacteur-a-double-flux.php>.
- [2] N. A. Adams. Direct simulation of the turbulent boundary layer along a compression ramp at  $M=3$  and  $Re\theta=1685$ . *Journal of Fluid Mechanics*, 420 :47–83, 2000.
- [3] M. J. Aftosmis, M. J. Berger, and J. E. Melton. Robust and efficient cartesian mesh generation for component-based geometry. *AIAA journal*, 36(6) :952–960, 1998.
- [4] K. K. Ahuja and Mendoza J. Effects of cavity dimensions, boundary layer and temperature on cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes. Nasa contractor report 4653, 1995.
- [5] E. Albin, Y. D'Angelo, and L. Vervisch. Flow streamline based navier-stokes characteristic boundary conditions : Modeling for transverse and corner outflows. *Computers & Fluids*, 51 :115–126, Computers & Fluids.
- [6] G. Albouze. *Simulation aux grandes échelles des écoulements réactifs non prémélangés*. PhD thesis, INP Toulouse, 2009.
- [7] G. Almouzni. Traitement du signal. <http://ga.perso.eisti.fr/download/TsPoly.pdf>.
- [8] X. Amandolèse, P. Hémon, and C. REGARDIN. Study of the acoustic oscillations by flows over cavities - part 1. internal flows. In *IMECE2002 - ASME International Mechanical Engineering Congress Exposition*, volume IMECE2002-33375, Orleans, Louisiana, November 2002.
- [9] P. Angot, C. H. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numer. Math.*, 81 :497–520, 1999.
- [10] P. Angot and J. P. Caltagirone. Natural convection through periodic porous media. In *Proceedings 9th Int. Heat Transfer Conf., Jerusalem, Hemisphere*, volume 5, pages 219–224, 1990.
- [11] R. A. Anthenien, R. A. Mantz, W. M. Roquemore, and G. J. Sturgess. Experimental results for a novel, high swirl, ultra compact combustor for gas turbine engines. In *Western States Section Combustion Institute Meeting, Berkely CA*, 2001.
- [12] E. Arquis and J. P. Caltagirone. Interacting convection between fluid and open porous layers. In *ASME Annual Winter Meeting, Boston*, 1987.
- [13] P. Auzillon, B. Fiorina, R. Vicquelin, N. Darabiha, O. Gicquel, and D. Veynante. Modeling chemical flame structure and combustion dynamics in les. *Proceedings of the Combustion Institute*, 2010.
- [14] P. Auzillon, R. Vicquelin, O. Gicquel, N. Darabiha, D. Veynante, and B. Fiorina. A filtered tabulated chemistry model for large eddy simulation of reactive flows. 2010.
- [15] Ch. Bailly and G. Comte-Bellot. *Turbulence*. CNRS Editions edition, 2003.

- [16] E. Balaras. Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large eddy simulations. *Computers and Fluids*, 33 :375–404, 2004.
- [17] D. S. Balsara and C. D. Norton. Highly parallel structured adaptive mesh refinement using parallel language-based approaches. *Parallel Computing*, 27(1-2) :37–70, 2001.
- [18] S. Barbosa, P. Scoufflaire, and S. Ducruix. Time resolved flowfield, flame structure and acoustic characterization of a staged multi-injection burner. *Proceedings of the Combustion Institute*, 32(2) :2965–2972, 2009.
- [19] B. Barbot. *Caractérisation perceptive des bruits d’avions : Influence de leur qualité sonore confrontée à la répétition des évènements sur l’expression de la gêne fonctionnelle*. PhD thesis, Université de Cergy Pontoise, 2008.
- [20] K. Barlow. Trapped vortex combustor development for military aircraft. Technical report, DTIC Document, 2008.
- [21] D. T. M. Baum and T. J. Poinsot. Description of accurate boundary conditions for the simulation of reactive flows. *Direct numerical simulation for turbulent reacting flows*, page 11, 1996.
- [22] M. Baum, T. Poinsot, and D. Thevenin. Accurate boundary conditions for multicomponent reactive flows. *Journal of Computational Physics*, 116 :247–261, 1994.
- [23] O. Baysal, G.W. Yen, and K. Fouladi. Navier-stokes computations of cavity aeroacoustics with suppression devices. *Journal of vibration and acoustics*, 116 :105, 1994.
- [24] J. M. Beér and N. A. Chigier. Swirling flows. *Combustion Aerodynamics*, pages 100–142, 1972.
- [25] J. S. Bendat and A. G. Piersol. *Random data : Analysis and measurements procedures*. Wiley Interscience, New York, 1971.
- [26] D. J. Benney. A non-linear theory for oscillations in a parallel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 10(02) :209–236, 1961.
- [27] M. J. Berger and J. Olinger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of computational Physics*, 53(3) :484–512, 1984.
- [28] L. P. Bernal and A. Roshko. Streamwise vortex structure in plane mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 170(1) :499–525, 1986.
- [29] P. A. Berthelsen and O. M. Faltinsen. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries. *Journal of Computational Physics*, 227(9) :4354–4397, 2008.
- [30] O. Besson. Analyse spectrale paramétrique. [http://perso.telecom-paristech.fr/~chollet/Biblio/Cours/Parole/Codage/obesson\\_a.sp.pdf](http://perso.telecom-paristech.fr/~chollet/Biblio/Cours/Parole/Codage/obesson_a.sp.pdf).
- [31] R. P. Beyer and R. J. Leveque. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. *SIAM Journal on Numerical Mathematics*, 29 :332–364, 1992.
- [32] A. J. Bilanin and E. E. Covert. Estimation of possible excitation frequencies for shallow rectangular cavities. *AIAA journal*, 11 :347–351, 1973.
- [33] R. W. Bilger. Conditional moment closure for turbulent reacting flow. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 5 :436, 1993.
- [34] R. W. Bilger, S. B. Pope, K. N. C. Bray, and J. F. Driscoll. Paradigms in turbulent combustion research. *Proceedings of the Combustion Institute*, 30(1) :21–42, 2005.
- [35] L. Blin. *Modélisation statistique et simulation des grandes échelles des écoulements turbulents : application aux inverseurs de poussée*. PhD thesis, Université de Rouen, 1999.

- [36] P. J. W. Block. Noise response of cavities of varying dimensions at subsonic speeds. Technical report, NASA Technical Note D-8351, 1976.
- [37] M. Bodenstein and H. Lutkemeyer. Quasi-steady state assumption. *Z. Physics and Chemistry*, 114, 1924.
- [38] R. Borghi. Turbulent combustion modelling. *Progress in Energy and Combustion Science*, 14(4) :245–292, 1988.
- [39] J. P. Boris, F. F. Grinstein, E. S. Oran, and R. J. Kolbe. New Insights into Large Eddy Simulation. *Fluid Dyn. Res.*, 10 :199, 1992.
- [40] J. Boussinesq. *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Imprimerie Nationale, 1877.
- [41] D. Bradley, P. H. Gaskell, and X. J. Gu. Application of a reynolds stress, stretched flamelet, mathematical model to computations of turbulent burning velocities and comparison with experiments. *Combustion and flame*, 96(3) :221–248, 1994.
- [42] D. Bradley, P. H. Gaskell, and X. J. Gu. Burning velocities, markstein lengths, and flame quenching for spherical methane-air flames : a computational study. *Combustion and Flame*, 104(1-2) :176–198, 1996.
- [43] D. Bradley, L. K. Kwa, A. K. C. Lau, M. Missaghi, and S. B. Chin. Laminar flamelet modeling of recirculating premixed methane and propane-air combustion. *Combustion and flame*, 71(2) :109–122, 1988.
- [44] K. Bray. Turbulent flows with premixed reactants. *Turbulent reacting flows*, pages 115–183, 1979.
- [45] K. N. C. Bray. The interaction between turbulence and combustion. In *Symposium (International) on Combustion*, volume 17, pages 223–233. Elsevier, 1979.
- [46] K. N. C. Bray. The challenge of turbulent combustion. In *Symposium International on Combustion*, volume 1, pages 1–26. Combustion Institute, 1996.
- [47] K. N. C. Bray and R. S. Cant. Some applications of Kolmogorov’s turbulence research in the field of combustion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 434(1890) :217, 1991.
- [48] K. N. C. Bray, M. Champion, and P. A. Libby. The interaction between turbulence and chemistry in premixed turbulent flames. *Turbulent Reacting Flows*, 40 :541–563, 1989.
- [49] K. N. C. Bray and P. A. Libby. Interaction effects in turbulent premixed flames. *Physics of Fluids*, 19 :1687, 1976.
- [50] K. N. C. Bray, P. A. Libby, G. Masuya, and J. B. Moss. Turbulence production in premixed turbulent flames. *Combustion Science and Technology*, 25(3) :127–140, 1981.
- [51] K. N. C. Bray, P. A. Libby, and J. B. Moss. Flamelet crossing frequencies and mean reaction rates in premixed turbulent combustion. *Combustion Science and Technology*, 41(3) :143–172, 1984.
- [52] K. N. C. Bray and J. B. Moss. A unified statistical model of the premixed turbulent flame. *Acta Astronautica*, 4(3-4) :291–319, 1977.
- [53] G.A. Brès and T. Colonius. *Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities*, volume 1, pages 309–339. 2008.
- [54] G. L. Brown and A. Roshko. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 64(04) :775–816, 1974.

- [55] J. C. Bruggeman, A. Hirschberg, M. E. H. Van Dongen, A. P. J. Wijnands, and J. Gorter. Flow induced pulsations in gas transport systems : analysis of the influence of closed side branches. *Journal of fluids engineering*, 111 :484, 1989.
- [56] J. C. Bruggeman, A. Hirschberg, M. E. H. Van Dongen, A. P. J. Wijnands, and J. Gorter. Self-sustained aero-acoustic pulsations in gas transport systems : experimental study of the influence of closed side branches. *Journal of Sound and Vibration*, 150(3) :371–393, 1991.
- [57] J. C. Bruggeman, J. C. Vellekoop, F. G. P. Van der Knaap, and P. J. Keuning. Flow excited resonance in a cavity covered by a grid : theory and experiments. *Flow Noise Modeling, Measurement and Control ASME*, pages 135–144.
- [58] C. Bruno and M. Losurdo. The trapped vortex combustor : an advanced combustion technology for aerospace and gas turbine applications. *Advanced Combustion and Aerothermal Technologies*, pages 365–384, 2007.
- [59] J. Bucher, R. G. Edmonds, R. C. Steele, Kendrick D. W., B. C. Chenevert, and Malte P. C. The development of a lean-premixed Trapped Vortex Combustor. In *Proceedings of ASME Turbo Expo*, volume Power for Land, Sea and Air, page 7. ASME, July 16-19 2003.
- [60] J. C. Buell and P. Huerre. Inflow/outflow boundary conditions and global dynamics of spatial mixing layers. In *Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases, 2*, volume 1, pages 19–27, 1988.
- [61] J. P. Burg. *Maximum entropy spectral analysis*, pages 34–41. IEEE Press, New-York, 1978.
- [62] J.P. Burg. *Maximum entropy spectral analysis*. Stanford University, 1975.
- [63] J. Burguburu. *Etude expérimentale de la stabilité d'une flamme dans une chambre de combustion aéronautique par recirculation de gaz brûlés et par ajout d'hydrogène*. PhD thesis, INSA de Rouen, prévue en 2011.
- [64] T. D. Butler and P. J. O'Rourke. A numerical method for two dimensional unsteady reacting flows. In *Symposium International on Combustion*, volume 16, pages 1503–1515. Elsevier, 1977.
- [65] S. M. Candel and T. J. Poinso. Flame stretch and the balance equation for the flame area. *Combustion Science and Technology*, 70(1) :1–15, 1990.
- [66] F. Capizzano. A turbulent wall model for immersed boundary methods. *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2010.
- [67] D. Carati, S. Ghosal, and P. Moin. On the representation of backscatter in dynamic localization models. *Physics of Fluids*, 7 :606, 1995.
- [68] F. Charru. *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences, 2001.
- [69] A. F. Charwat and J. A. Hitz. An investigation of separated flows- part 1- the pressure field. *Journal of Aerospace Sciences*, 28 :6, 1961.
- [70] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique des fluides : analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur (Politech)*. Cépaduès edition, 2000.
- [71] L. Chatellier. *Modélisation et contrôle actif des instabilités aéroacoustiques en cavité sous écoulement affleurant*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2002.
- [72] J. H. Chen, W. G. Pritchard, and S. J. Tavener. Bifurcation for flow past a cylinder between parallel planes. *J. Fluid Mech.*, 284 :23, 1995.
- [73] J. Y. Chen. Analysis of in situ adaptive tabulation performance for combustion chemistry and improvement with a modified search algorithm. *Combustion science and technology*, 176(7) :1153–1169, 2004.

- [74] Y. C. Chen and R. W. Bilger. Simultaneous 2-D imaging measurements of reaction progress variable and oh radical concentration in turbulent premixed flames : Instantaneous flame-front structure. *Combustion science and technology*, 167(1) :187–222, 2001.
- [75] G. M. Choi, M. Tanahashi, and T. Miyauchi. Control of oscillating combustion and noise based on local flame structure. *Proceedings of the Combustion Institute*, 30(2) :1807–1814, 2005.
- [76] J.-I. Choi, R. C. Oberoi, J. R. Edwards, and J. A. Rosati. An immersed boundary method for complex incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 224 :757–784, 2007.
- [77] N. Chokani. Prediction of hypersonic cavity flow dynamics. *AIAA Paper*, 99-0171, 1999.
- [78] K. M. Chung. Three-dimensional effect on transonic rectangular cavity flows. *Exp. Fluids*, 30 :531–536, 2001.
- [79] D. Clarke, M. Salas, and H. Hassan. Euler calculations for multi-element airfoils using cartesian grids. *AIAA Journal*, 24 :1128–1135, 1986.
- [80] M. J. Cleary, J. H. Kent, and R. W. Bilger. Prediction of carbon monoxide in fires by conditional moment closure. *Proceedings of the Combustion Institute*, 29(1) :273–279, 2002.
- [81] W. J. Coirier and K. G. Powell. An accuracy assessment of Cartesian-mesh approaches for the Euler equations. *Journal of Computational Physics*, 117(1) :121–131, 1995.
- [82] O. Colin, F. Ducros, D. Veynante, and T. Poinso. A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion. *Physics of Fluids*, 12 :1843, 2000.
- [83] T. Colonius. Numerically nonreflecting boundary and interface conditions for compressible flow and aeroacoustic computations. *AIAA journal*, 35(7) :1126–1133, 1997.
- [84] T. Colonius and S. K. Lele. Computational aeroacoustics : progress on nonlinear problems of sound generation. *Progress in Aerospace sciences*, 40(6) :345–416, 2004.
- [85] T. Colonius, S. K. Lele, and P. Moin. Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation. *AIAA journal*, 31(9) :1574–1582, 1993.
- [86] P. Comte and M. Lesieur. Large-eddy simulations of compressible turbulent flows. *Advances in turbulence modelling*, 1998.
- [87] S. M. Correa. Power generation and aeropropulsion gas turbines : from combustion science to combustion technology. In *Symposium (International) on Combustion*, volume 27, pages 1793–1807. Elsevier, 1998.
- [88] D. G. Crighton. The jet edge-tone feedback cycle ; linear theory for the operating stages. *Journal of Fluid Mechanics*, 234(1) :361–391, 1992.
- [89] G. Z. Damkohler. *Effects of Reynolds Number on the Flame Speed*. Elektrochem, 1940.
- [90] A. Danlos. *Dynamique des jets contrôlés : Application à l'étude du mélange dans des écoulements de jets annulaires à très grand rapport de diamètres*. PhD thesis, Université de Rouen, 2010.
- [91] N. Darabiha. Modélisation et simulation de la combustion. Technical report.
- [92] Centre Interprofessionnel Technique D'Etudes de la Pollution Atmosphérique (CITEPA). Citepa.
- [93] M. D. De Tullio, P. De Palma, G. Iaccarino, G. Pascazio, and M. Napolitano. An immersed boundary method for compressible flows using local grid refinement. *J. Comput. Phys.*, 225 :2098–2117, 2007.

- [94] M. D. De Tullio and G. Iaccarino. Immersed boundary technique for compressible flow simulations on semi-structured meshes. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, pages 71–83, 2005.
- [95] A. Di Marco, R. Camussi, and S. Giammartini. Hydrogen Combustion in a double Cavity Trapped Vortex Combustor. 14-17 June 2010.
- [96] P. Domingo and L. Vervisch. Dns of partially premixed flame propagating in a turbulent rotating flow. *Proceedings of the Combustion Institute*, 31(1) :1657–1664, 2007.
- [97] P. Domingo, L. Vervisch, and K. Bray. Partially premixed flamelets in LES of nonpremixed turbulent combustion. *Combustion Theory and Modelling*, 6(4) :529–551, 2002.
- [98] P. Domingo, L. Vervisch, S. Payet, and R. Hauguel. DNS of a premixed turbulent V flame and LES of a ducted flame using a FSD-PDF subgrid scale closure with FPI-tabulated chemistry. *Combust. Flame*, 143 :566–586, 2005.
- [99] P. Domingo, L. Vervisch, and D. Veynante. Large eddy simulation of a lifted methane jet flame in a vitiated coflow. *Combust. Flame*, 152 :415–432, 2008.
- [100] Y. Dubief and F. Delcayre. On the coherent-vortex identification in turbulence. *J. Turbulence*, 1 :11, 2000.
- [101] F. Ducros, P. Comte, and M. Lesieur. Large-eddy simulation of transition to turbulence in a boundary layer spatially developing over a flat plate. *J. Fluid Mech*, 326(1), 1996.
- [102] F. Ducros, P. Comte, and Lesieur M. Large-eddy simulation of a spatially growing boundary layer over an adiabatic flat plate at low mach number. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 16(5) :341–348, 1995.
- [103] F. Ducros, V. Ferrand, F. Nicoud, C. Weber, D. Darracq, C. Gacherieu, and Poinso T. Large eddy simulation of the shock/turbulence interaction. *J. Comput. Phys.*, 152 :517–549, 1999.
- [104] F. Ducros, P. Sagaut, and P. Quéméré. On the use of relaxation methods for localized dynamic models. *Physics of Fluids*, 12 :3297, 2000.
- [105] P. A. Durbin. Resonance in flows with vortex sheets and edges. *Journal of Fluid Mechanics*, 145(1) :275–285, 1984.
- [106] L. F. East. Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities. *Journal of Sound and Vibration*, 3(3) :277–287, 1966.
- [107] R. G. Edmonds, R. C. Steele, J. T. Williams, D. L. Straub, K. H. Casleton, and A. Bining. Ultra-low NOx advanced vortex combustor. *Proceedings of the ASME Turbo Expo*, pages 255–262, 2006.
- [108] IEA. International energy agency. *Key world statistics, 2005*, 2005.
- [109] N. Enjalbert, P. Domingo, and L. Vervisch. Mixing time-history effects in large eddy simulation of non-premixed turbulent flames : Flow-controlled chemistry tabulation. *Combustion and Flame*, 2011.
- [110] G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, C. G. Speziale, and T. A. Zang. Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows. NASA Contractor Report 178273, ICASE Report 87-20, 1987.
- [111] G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, C. G. Speziale, and T. A. Zang. Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 238 :155–185, 1992.
- [112] S. Ethembabaoglu. *On the fluctuating flow characteristics in the vicinity of gate slots*. PhD thesis, University of Trondheim, 1973.

- [113] A. Fadai-Ghotbi, C. Friess, R. Manceau, T.B. Gatski, and J. Borée. Temporal filtering : A consistent formalism for seamless hybrid rans-les modeling in inhomogeneous turbulence. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 31(3) :378–389, 2010.
- [114] E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof. Combined Immersed-Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations. *J. Comput. Phys.*, 161 :35–60, 2000.
- [115] V. Favier and L. Vervisch. Edge flames and partially premixed combustion in diffusion flame quenching. *Combustion and flame*, 125(1-2) :788–803, 2001.
- [116] E. Fernandez-Tarrazo, A. L. Sanchez, A. Linan, and F. A. Williams. A simple one-step chemistry model for partially premixed hydrocarbon combustion. *Combustion and flame*, 147(1-2) :32–38, 2006.
- [117] V. Fichet. *Modélisation de la combustion du gaz naturel par réseaux de réacteurs avec cinétique chimique détaillée*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2008.
- [118] B. Fiorina, R. Baron, O. Gicquel, D. Thevenin, S. Carpentier, and N. Darabiha. Modelling non-adiabatic partially premixed flames using flame-prolongation of ildm. *Combust. Theory Modelling*, 7(3) :449–470, 2003.
- [119] B. Fiorina, O. Gicquel, L. Vervisch, S. Carpentier, and N. Darabiha. Approximating the chemical structure of partially premixed and diffusion counterflow flames using FPI flamelet tabulation. *Combust. Flame*, 140 :147–160, 2005.
- [120] B. Fiorina, R. Vicquelin, P. Auzillon, N. Darabiha, O. Gicquel, and D. Veynante. A filtered tabulated chemistry model for les of premixed combustion. *Combustion and Flame*, 157(3) :465–475, 2010.
- [121] N. Forestier. *Etude expérimentale d’une couche cisailée au-dessus d’une cavité en régime transsonique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- [122] N. Forestier, P. Geffroy, and L. Jacquin. Etude expérimentale des propriétés instationnaires d’une couche de mélange compressible sur une cavité : cas d’une cavité ouverte peu profonde. Rt 22/00153 dafe, ONERA (in French), 2003.
- [123] N. Forestier, L. Jacquin, and P. Geffroy. The mixing layer over a deep cavity at high-subsonic speed. *J. Fluid Mech.*, 475 :101–145, 2003.
- [124] R. Franke. Scattered data interpolation : tests of some methods. *Math. Comput.*, 38 :181–200, 1982.
- [125] J. P. Frenillot, G. Cabot, M. Cazalens, B. Renou, and M. A. Boukhalfa. Impact of H2 addition on flame stability and pollutant emissions for an atmospheric kerosene/air swirled flame of laboratory scaled gas turbine. *International Journal of Hydrogen Energy*, 34(9) :3930–3944, 2009.
- [126] J. Galpin, A. Naudin, L. Vervisch, C. Angelberger, O. Colin, and P. Domingo. Large-eddy simulation of a fuel-lean premixed turbulent swirl-burner. *Combustion and Flame*, 155(1-2) :247–266, 2008.
- [127] E. Garnier, N. Adams, and P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Scientific Computation. Springer Science, 2009.
- [128] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids. A*, 3 :1760–1765, 1991.
- [129] M. Gharib and A. Roshko. The Effect of Flow Oscillations on Cavity Drag. *J. Fluid Mech.*, 177 :501–530, 1987.

- [130] R. Ghias, R. Mittal, and H. Dong. A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 225 :528–553, 2007.
- [131] R. Ghias, R. Mittal, and T. S. Lund. A non-body conformal grid method for simulation of compressible flows with complex immersed boundaries. *AIAA Paper*, 2004.
- [132] S. Ghosal, T. S. Lund, P. Moin, and K. Akselvoll. A dynamic localization model for large eddy simulation of turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 286 :229–255, 1995.
- [133] J. E. Gibson. *An analysis of supersonic cavity flow*. PhD thesis, MIT Department of Aeronautics and Astronautics, 1958.
- [134] O. Gicquel. *Développement d’une nouvelle méthode de réduction des schémas cinétiques : Application au méthane*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 1999.
- [135] O. Gicquel, N. Darabiha, and D. Thevenin. Laminar premixed hydrogen/air counterflow flame simulations using flame prolongation of ildm with differential diffusion. In *Proc. Combust. Inst*, volume 28, pages 1901–1908, 2000.
- [136] M. B. Giles. Nonreflecting boundary conditions for euler equation calculations. *AIAA Journal*, 28(12) :2050–2058, 1990.
- [137] A. Gilmanov and F. Sotiropoulos. A hybrid cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3d, geometrically complex, moving bodies. *J. Comput. Phys.*, 207 :457–492, 2005.
- [138] A. Gilmanov, F. Sotiropoulos, and E. Balaras. A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3d immersed boundaries on cartesian grids. *JCP*, 191 :660–669, 2003.
- [139] X. Gloerfelt. *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : Simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [140] X. Gloerfelt. Large-eddy simulation of a high reynolds number flow over a cavity including radiated noise. *AIAA Paper*, 2863 :2004, 2004.
- [141] X. Gloerfelt. Cavity noise. VKI Lectures : Aerodynamic noise from wall-bounded flows. Von Karman Institute, 2009.
- [142] G. Godel. *Modélisation de sous-maille de la combustion turbulente : développement d’outils pour la prédiction de la pollution dans une chambre aéronautique*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2010.
- [143] G. Godel, P. Domingo, and L. Vervisch. Tabulation of NOx chemistry for large-eddy simulation of non-premixed turbulent flames. *Proceedings of the Combustion Institute*, 32(1) :1555–1561, 2009.
- [144] G. M. Goldin, M. Madsen, D. L. Straub, W. A. Rogers, and K. H. Casleton. Detailed chemistry simulations of a trapped vortex combustor. *ASME Conference Proceedings*, 2003(36843) :121–128, 2003.
- [145] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich. Modeling a no-slip boundary condition with an external force field. *J. Comput. Phys.*, 105 :354–366, 1993.
- [146] J. Golliard and J. C. Bruggeman. Broadband noise of flow-excited cavities : comparison of prediction models with experimental data. *AIAA Paper*, 98 :2381, 1998.
- [147] S. Gottlieb and C. Shu. Total variation diminishing runge-kutta schemes. *Mathematics of Computation*, 67(221) :73–85, 1998.
- [148] F. C. Gouldin, K. N. C. Bray, and J. Y. Chen. Chemical closure model for fractal flamelets. *Combustion and flame*, 77(3-4) :241–259, 1989.

- [149] B. E. Griffith and C. S. Peskin. On the order of accuracy of the immersed boundary method : Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *J. Comput. Phys.*, 208 :75–105, 2005.
- [150] D. G. E. Grigoriadis, J. G. Bartzis, and A. Goulas. Efficient treatment of complex geometries for large eddy simulations of turbulent flows. *Computers and Fluids*, 33 :201–222, 2004.
- [151] D. G. E. Grigoriadis, J. G. Bratzis, and A. Goulas. LES of the flow past a rectangular cylinder using the immersed boundary concept. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41 :615–632, 2003.
- [152] F. F. Grinstein and C. Fureby. Recent progress on MILES for high reynolds number flows. *J. Fluids Eng.*, 24 :848–861, 2002.
- [153] F. E. Ham, F. S. Lien, and A. B. Strong. A cartesian grid method with transient anisotropic adaptation. *Journal of Computational Physics*, 179(2) :469–494, 2002.
- [154] A. Hamed, D. Basu, and K. Das. Numerical simulations of transonic flow acoustic resonance in cavity. In *Proceedings of the seventh international congress on fluid dynamics and propulsion. Cairo, Egypt*, 2001.
- [155] W. L. Hankey and J. S. Shang. Analyses of pressure oscillations in an open cavity. *AIAA Journal*, 18 :892–898, 1980.
- [156] Y. Hardalupas, M. Orain, et al. Chemiluminescence sensor for local equivalence ratio of reacting mixtures of fuel and air (flameseek). *Applied thermal engineering*, 24(11-12) :1619–1632, 2004.
- [157] F. J. Harris. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. volume 66, pages 51–83, January 1978.
- [158] X. He and F. Yao. Effect of flow parameters and equivalence ratio on the trapped vortex combustor performance. *Journal of Aerospace Power*, 5, 2006.
- [159] X.-M. He, J. S. Xu, and Su J.-Q. Experimental research of the performance of the trapped-vortex combustor. *Hangkong Dongli Xuebao/Journal of Aerospace Power*, 24 :318–323, 2009.
- [160] J. Hélie and A. Trouvé. A modified coherent flame model to describe turbulent flame propagation in mixtures with variable composition. *Proceedings of the Combustion Institut*, 28(1) :193–201, 2000.
- [161] H. H. Heller and D. B. Bliss. Flow-induced pressure fluctuations in cavities and concepts for their suppression. *AIAA paper*, 45 :281–296, 1976.
- [162] H. H. Heller and D. B. Bliss. The physical mechanism of flow-induce pressure fluctuations in cavities and concepts for their suppression. *AIAA Paper*, 45 :281–296, 1976.
- [163] H. H. Heller, D. G. Holmes, and E. E. Covert. Flow-induced pressure oscillations in shallow cavities. *Journal of sound and Vibration*, 18(4) :545–546, 1971.
- [164] R. C. Hendricks, R. C. Ryder, A. Brankovic, D. T. Shouse, W. M. Roquemore, and N.-S. Liu. Computational parametric study of fuel distribution in an experimenatl trapped vortex combustor sector rig. In *Proceedings of ASME Turbo Expo*, volume 1, pages 81–92. ASME, 2004.
- [165] R. C. Hendricks, D. T. Shouse, W. M. Roquemore, D. L. Burrus, B. S. Duncan, R. C. Ryder, A. Brankovic, N.-S. Liu, J. R. Gallagher, and J. A. Hendricks. Experimental and computational study of trapped vortex combustor sector rig with high-speed diffuser flow. *Int. J. Rotating Machinery*, 7(6) :375–385, 2001.
- [166] R. C. Hendricks, D. T. Shouse, W. M. Roquemore, D. L. Burrus, B. S. Duncan, R. C. Ryder, A. Brankovic, N.-S. Liu, J. R. Gallagher, and J. A. Hendricks. Experimental and computaional study of trapped vortex combustor sector rig with tri-pass diffuser. Technical memorandum, NASA TM-2004-212507, 2004.

- [167] M. Herrmann. Numerical simulation of turbulent bunsen flames with a level set flamelet model. *Combustion and flame*, 145(1-2) :357–375, 2006.
- [168] J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, R. B. Bird, and University of Wisconsin. Theoretical Chemistry Laboratory. *Molecular theory of gases and liquids*, volume 26. Wiley New York, 1954.
- [169] C. M. Ho and N. S. Nosseir. Dynamics of an impinging jet. Part 1. The feedback phenomenon. *Journal of Fluid Mechanics*, 105(1) :119–142, 1981.
- [170] C.M. Ho and L.S. Huang. Subharmonics and vortex merging in mixing layers. *J. Fluid Mech*, 119 :443–473, 1982.
- [171] M. S. Howe. Contributions to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute. *Journal of Fluid Mechanics*, 71(4) :625–673, 1975.
- [172] M. S. Howe. The influence of mean shear on unsteady aperture flow, with application to acoustical diffraction and self-sustained cavity oscillations. *Journal of Fluid Mechanics*, 109(1) :125–146, 1981.
- [173] M. S. Howe. Edge, cavity and aperture tones at very low mach numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 330(1) :61–84, 1997.
- [174] M. S. Howe. Low Strouhal number instabilities of flow over apertures and wall cavities. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102 :772, 1997.
- [175] M. S. Howe. *Acoustics of fluid-structure interactions*. Cambridge University Press, 1998.
- [176] M. S. Howe. Mechanism of sound generation by low mach number flow over a wall cavity. *J. Sound Vib.*, 273 :103–123, 2003.
- [177] K. Hsu, C. D. Carter, et al. Characteristics of Combustion Instability Associated with Trapped-Vortex Burner. In *37th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit Jan*, pages 11–14. Air Force Research Laboratory, Wright-Patterson AFB, OH, 1999.
- [178] K.-Y. Hsu, L. P. Goss, and W. M. Roquemore. Characteristics of a Trapped Vortex Combustor. *Journal of Propulsion and Power*, 14(1) :57–65, 1998.
- [179] K.-Y. Hsu, L. P. Goss, D. D. Trump, and W. M. Roquemore. Performance of a Trapped-Vortex Combustor. *AIAA Paper*, 0810, January 1995.
- [180] X. Y. Hu, B. C. Khoo, N. A. Adams, and F. L. Huang. A conservative interface method for compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 219(2) :553–578, 2006.
- [181] A. Hussain and M. Hayakawa. Eduction of large-scale organized structures in a turbulent plane wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 180 :193–229, 1987.
- [182] G. Iaccarino, G. Kalitzin, P. Moin, and B. Khalighi. Local grid refinement for an immersed boundary rans solver. *AIAA Paper 2004*, 586, 2004.
- [183] G. Iaccarino and R. Verzicco. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations. *Appl. Mech. Rev.*, 56(3) :331–347, 2003.
- [184] A. Jameson, W. Schmidt, and E. Turkel. Numerical solutions of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time-stepping schemes. *AIAA paper*, 1259 :1981, 1981.
- [185] W. M. Jungowski, K. K. Botros, and W. Studzinski. Cylindrical side-branch as tone generator. *Journal of sound and vibration*, 131(2) :265–285, 1989.
- [186] V. R. Katta and W. M. Roquemore. Numerical Studies on Trapped-Vortex Combustor. *AIAA Paper*, 2660, July 1996.

- [187] V. R. Katta and W. M. Roquemore. Numerical Studies on Trapped-Vortex Concepts for Stable Combustion. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 120 :60–68, January 1998.
- [188] V. R. Katta and W. M. Roquemore. Study on Trapped-Vortex Combustor : Effect of Injection on Flow Dynamics. *Journal of Propulsion and Power*, 14(3) :273–281, 1998.
- [189] V. R. Katta and W. M. Roquemore. Simulation of paths in trapped-vortex combustor. In *Proceedings of ASME Turbo Expo*, volume 1, pages 753–760, Vienna, June 2004. ASME.
- [190] S. Kay. *Modern Spectral Estimation. Theory and Application*. Signal Processing series. Prentice Hall, 1988.
- [191] R. J. Kee, J. F. Grcar, M. D. Smooke, and J. A. Miller. PREMIX : A Fortran program for modeling laminar one-dimensional premixed flames. *Sandia National Laboratories Report No. SAND85-8240*, 1985.
- [192] R. J. Kee and Sandia National Laboratories. *A Fortran computer code package for the evaluation of gas-phase, multicomponent transport properties*. Citeseer, 1988.
- [193] N. Kevlahan and J. M. Ghidaglia. Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with brinkman penalization. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 20 :333–350, 2001.
- [194] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, and J.-P. Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of navier-stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 34 :651–684, 2000.
- [195] I. Kim and A.J. Pearlstein. Stability of the flow past a sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, 211(-1) :73–93, 1990.
- [196] J. Kim, D. Kim, and C. Haecheon. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *J. Comput. Phys.*, 171 :132–150, 2001.
- [197] S. H. Kim and K. Y. Huh. Use of the conditional moment closure model to predict no formation in a turbulent ch<sub>4</sub>/h<sub>2</sub> flame over a bluff-body. *Combustion and flame*, 130(1-2) :94–111, 2002.
- [198] M. P. Kirkpatrick, S. W. Armfield, and J. H. Kent. A representation of curved boundaries for the solution of the navier-stokes equations on a staggered three-dimensional cartesian grid. *Journal of Computational Physics*, 184(1) :1–36, 2003.
- [199] M. Klein, A. Sadiki, and J. Janicka. A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulation. *J. Comput. Phys.*, 186 :652–665, 2003.
- [200] A.Y. Klimenko and R.W. Bilger. Conditional moment closure for turbulent combustion. *Progress in energy and combustion science*, 25(6) :595–688, 1999.
- [201] A. M. Klimov. Laminar flame in a turbulent flow. *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, 3 :49–58, 1963.
- [202] C. Knisely and D. Rockwell. Self-sustained low-frequency components in an impinging shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 116(1) :157–186, 1982.
- [203] E. Knudsen and H. Pitsch. A general flamelet transformation useful for distinguishing between premixed and non-premixed modes of combustion. *Combustion and Flame*, 156(3) :678–696, 2009.
- [204] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 30, pages 9–13, 1941.
- [205] N. L. Komerath, K. K. Ahuja, and F. W. Chambers. Prediction and measurements of flows over cavities-a survey. *AIAA Paper*, pages 87–0166, 1987.

- [206] S. Kotake. On combustion noise related to chemical reactions. *Journal of Sound and Vibration*, 42(3) :399–410, 1975.
- [207] A. P. Kravchenko, P. Moin, and R. D. Moser. Zonal embedded grids for numerical simulations of wall-bounded turbulent flows. *J. Comput. Phys.*, 2 :412–423, 1996.
- [208] K. Krishnamurty. *Acoustic radiation from two-dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces*, volume NACA Technical Note, TN-3487. National Advisory Committee for Aeronautics, 1955.
- [209] A. Kronenburg and M. Kostka. Modeling extinction and reignition in turbulent flames. *Combustion and flame*, 143(4) :342–356, 2005.
- [210] M.-C. Lai and C. S. Peskin. An immersed boundary method with formal second order accuracy and reduced numerical viscosity. *J. Comput. Phys.*, 160 :705–719, 2000.
- [211] S. H. Lam and D. A. Goussis. The CSP method for simplifying kinetics. *International Journal of Chemical Kinetics*, 26(4) :461–486, 1994.
- [212] N. Lamarque, M. Porta, F. Nicoud, and T. Poinsot. On the stability and dissipation of wall boundary conditions for compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 62(10) :1134–1154, 2010.
- [213] E. Lamballais. Simulation numérique des mouvements tourbillonnaires dans les fluides. Habilitation à diriger des recherches, Université de Poitiers, 2003.
- [214] E. Lamballais and J. Silvestrini. Direct numerical simulation of interactions between a mixing layer and a wake around a cylinder. *J. Turbulence*, 3, 2002.
- [215] L. Larchevêque, P. Sagaut, and O. Labbé. Large-eddy simulation of a subsonic cavity flow including asymmetric three-dimensional effects. *J. Fluid Mech.*, 577 :105–126, 2007.
- [216] L. Larchevêque, P. Sagaut, T. H. Lê, and P. Comte. Large eddy simulation of a compressible flow in a three dimensional open cavity at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 516 :265–301, 2004.
- [217] L. Larchevêque, P. Sagaut, I. Mary, and O. Labbé. Large-eddy simulation of a compressible flow past a deep cavity. *Phys. Fluids.*, 15(1) :193–210, 2003.
- [218] J. C. Lasheras, J. S. Cho, and T. Maxworthy. On the origin and evolution of streamwise vortical structures in a plane, free shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 172(1) :231–258, 1986.
- [219] J. C. Lasheras and H. Choi. Three-dimensional instability of a plane free shear layer : an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 189(1) :53–86, 1988.
- [220] R. L. Leboeuf and R. D. Mehta. Vortical structure morphology in the initial region of a forced mixing layer : roll-up and pairing. *Journal of Fluid Mechanics*, 315(1) :175–221, 1996.
- [221] C. Lee. Stability characteristics of the virtual boundary method in three-dimensional applications. *J. Comput. Phys.*, 184 :559–591, 2003.
- [222] J. G. Lee, J. P. Armstrong, and A. Santavicca. Experiments on lean blow out and NOx emissions of a premixed Trapped Vortex Combustor with high g-loading. In Proceedings of the ASME Turbo Expo, editor, *2011 ASME Turbo Expo*, pages pp. GT2011–46396, Vancouver, British Columbia, Canada, June 6 2011. American Society of Mechanical Engineers.
- [223] A. H. Lefebvre. *Gas turbine combustion*. CRC, 1999.
- [224] J. P. Légier, T. Poinsot, and D. Veynante. Dynamically thickened flame les model for premixed and non-premixed turbulent combustion. *Proc. of the summer program*, pages 157–168, 2000.

- [225] V. Lepage. *Elaboration d'une méthode de réduction des schémas cinétiques détaillés. application aux mécanismes de combustion du gaz naturel et du n-décane*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 2000.
- [226] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*, volume 84. Springer Verlag, 2008.
- [227] M. Lesieur, O. Métais, and P. Comte. *Large-Eddy Simulation of Turbulence*. Cambridge University Press, 2005.
- [228] Y. Li and C. Meneveau. Analysis of mean momentum flux in subgrid models of turbulence. *Physics of Fluids*, 16 :3483, 2004.
- [229] Z. Li. An overview of the immersed interface method and its applications. *Taiwanese J. Math.* 7, pages 1–49, 2003.
- [230] Z. Li and K. Ito. *The Immersed Interface Method, Numerical Solutions of PDEs Involving Interfaces and Irregular Domains*. Number ISBN 0-89871-609-8. Frontiers in Applied Mathematics, 2006.
- [231] Z. Li and M.-C. Lai. The Immersed Interface Method for the Navier-Stokes Equations with singular forces. *J. Comput. Phys.*, 171 :822–842, 2001.
- [232] P. A. Libby and F. A. Williams. *Turbulent reactive flows*, 1980.
- [233] N. D. Liggett and M. J. Smith. Cavity flow assessment using advanced turbulence modeling. In *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting 1200*, 2010.
- [234] D. Lilly. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids. A*, 4 :633–635, 1992.
- [235] J. C. Lin and D. Rockwell. Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity. *AIAA Journal*, 39(6) :1139–1151, 2001.
- [236] B. H. Little and R. R. Whipkey. Locked Vortex Afterbodies. *Journal of Aircraft*, 16(5), 1979.
- [237] G. Lodato. *Conditions aux Limites Tridimensionnelles pour la Simulation Directe et aux Grandes Echelles des Ecoulements Turbulents. Modélisation de Sous-Maille pour la turbulence en région de proche paroi*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2009.
- [238] G. Lodato, P. Domingo, and L. Vervisch. Three-dimensional boundary conditions for direct and large-eddy simulation of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 227(10) :5105–5143, 2008.
- [239] G. Lodier, L. Vervisch, V. Moureau, and P. Domingo. Composition-space premixed flamelet solution with differential diffusion for in situ flamelet-generated manifolds. *Combustion and Flame*, 2011.
- [240] J. Luche. *Obtention de modèles cinétiques réduits de combustion. application aux mécanismes du kérosène*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2003.
- [241] H. Luo, R. Mittal, X. Zheng, S. A. Bielamowicz, R. J. Walsh, and J. K. Hahn. An immersed-boundary method for flow structure interaction in biological systems with application to phonation. *J. Comput. Phys.*, 227 :9303–9332, 2008.
- [242] A. E. Lutz, R. J. Kee, J. F. Grcar, and F. M. Rupley. OPPDIF : A fortran program for computing opposed-flow diffusion flames. *Sandia National Laboratories Report SAND96-8243*, 1996.
- [243] D. A. Lyn, S. Einavv, W. Rodi, and J. H. Park. A laser-doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder. *J. Fluid Mech.*, 304 :285–319, 1995.

- [244] U. Maas and S. B. Pope. Simplifying chemical kinetics : intrinsic low-dimensional manifolds in composition space. *Combustion and Flame*, 88(3-4) :239–264, 1992.
- [245] B. F. Magnussen and B. H. Hjertager. On mathematical modeling of turbulent combustion with special emphasis on soot formation and combustion, 16th symp.(int.) on combustion. *The Combustion Institute, Pittsburgh*, pages 719–729, 1976.
- [246] W. A. Mair. The Effect of Rear-Mounted Disc on the Drag of a Blunt-Based Body of Revolution. *The Aeronautical Quarterly*, 10(4) :350–360, November 1965.
- [247] S. Majumdar, G. Iaccarino, and P. Durbin. RANS solver with adaptive structured boundary non-conforming grids. *Annual Research Briefs*, pages 353–366, 2001.
- [248] F. E. Marble. The coherent flame model for turbulent chemical reactions. Technical report, DTIC Document, 1977.
- [249] S. L. Marple. *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice Hall, 1987.
- [250] H. B. Mason and D. B. Spalding. Combustion institute european symposium, 1973.
- [251] J. Maunand. Production d'électricité par turbine à gaz. *Techniques de l'ingénieur. Génie électrique*, 8(D4001), 2005.
- [252] I. McLean and I. Gartshore. Spanwise correlation of pressure on a rigid square section cylinder. *Journal of Wind Engineering*, 41 :779–808, 1992.
- [253] J. Mendoza and K. K. K Ahuja. The effects of width on cavity noise. *Journal of Aircraft*, 14(9) :833–837, 1995.
- [254] C. Meneveau, T. Lund, and W. Cabot. A lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 319 :353–385, 1996.
- [255] S. Menon and W. H. Jou. Large-eddy simulations of combustion instability in an axisymmetric ramjet combustor. *Combustion science and technology*, 75(1-3) :53–72, 1991.
- [256] M. Meyer, A. Devesa, S. Hickel, and N. A. Adams. A conservative immersed interface method for Large-Eddy Simulation of incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 229 :6300–6317, 2010.
- [257] D. P. Mishra and R. Sudharshan. Numerical analysis of fuel–air mixing in a two-dimensional trapped vortex combustor. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, 224(1) :65–75, 2010.
- [258] R. Mittal and S. Balachandar. Effect of intrinsic three-dimensionality on the lift and drag of nominally two-dimensional cylinders. *Phys. Fluids.*, 7(8) :1841, 1995.
- [259] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F. M. Najjar, A. Vargas, and A. Von Loebbecke. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *Journal of computational physics*, 227(10) :4825–4852, 2008.
- [260] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37 :239–261, 2005.
- [261] J. Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary/B-spline methods for simulations of flow in complex geometries. *Annual Research Briefs*, pages 317–327, 1997.
- [262] P. Moin, K. Squires, W. Cabot, and C. Lee. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. *Phys. Fluids. A*, 3(11) :2746–2757, 1991.
- [263] M. V. Morkovin and S. V. Paranjape. On acoustic excitation of shear layer. *Z. Flugwiss*, 8/9(2) :328–335, 1971.
- [264] V. Moureau. *Simulation aux grandes échelles de l'aérodynamique interne des moteurs à piston*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2004.

- [265] V. Moureau, P. Domingo, and L. Vervisch. From large-eddy simulation to direct numerical simulation of a lean premixed swirl flame : Filtered laminar flame-pdf modeling. *Combustion and Flame*, 158 :1340–1357, 2011.
- [266] V. Moureau, B. Fiorina, and H. Pitsch. A level set formulation for premixed combustion les considering the turbulent flame structure. *Combustion and Flame*, 156(4) :801–812, 2009.
- [267] V. Moureau, G. Lartigue, Y. Sommerer, C. Angelberger, O. Colin, and T. Poinso. Numerical methods for unsteady compressible multi-component reacting flows on fixed and moving grids. *Journal of Computational Physics*, 202(2) :710–736, 2005.
- [268] S. Murakami and R. Izuka, S. ans Oka. Cfd analysis of turbulent flow past square cylinder using dynamic les. *J. Fluids and Struct.*, 13 :1097–1112, 1999.
- [269] A. Naudin. *Simulation des grandes échelles de la combustion turbulente avec chimie détaillée tabulée*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2008.
- [270] E. P. Newren, A. L. Fogelson, R. D. Guy, and R. M. Kirby. Unconditionally stable discretizations of the immersed boundary equations. *J. Comput. Phys.*, 222 :702–719, 2007.
- [271] P. D. Nguyen, L. Vervisch, V. Subramanian, and P. Domingo. Multidimensional flamelet-generated manifolds for partially premixed combustion. *Combustion and Flame*, 157(1) :43–61, 2010.
- [272] F. Nicoud. Defining wave amplitude in characteristic boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 149 :418–422, 1999.
- [273] E. O’Brien. The probability density function (pdf) approach to reacting turbulent flows. *Turbulent Reacting Flows*, pages 185–218, 1979.
- [274] N. Okong’o and J. Bellan. Consistent boundary conditions for multicomponent real gas mixtures based on characteristic waves. *Journal of Computational Physics*, 176(2) :330–344, 2002.
- [275] D. Oster and I. Wygnanski. The forced mixing layer between parallel streams. *Journal of Fluid Mechanics*, 123(1) :91–130, 1982.
- [276] J. Panda and D. K. McLaughlin. Experiments on the instabilities of a swirling jet. *Physics of Fluids*, 6 :263, 1994.
- [277] R. L. Panton. *Incompressible flow*, 1984.
- [278] S. Payet. *Analyse de l’oxy-combustion en régime dilué par simulation des grandes échelles de la turbulence*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2007.
- [279] C. S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *J. Comput. Phys.*, 10 :252–271, 1972.
- [280] C. S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comput. Phys.*, 25 :220–250, 1977.
- [281] C. S. Peskin. The fluid dynamics of heart valves : Experimental, theoretical and computational methods. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 14 :135–259, 1982.
- [282] C. S. Peskin and D. McQueen. A three dimensional computational method for blood flow in the heart-i. immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid. *J. Comput. Phys.*, 81 :372–405, 1989.
- [283] C. S. Peskin and B. F. Printz. Improved volume conservation in the computation of flows with immersed elastic boundaries. *J. Comput. Phys.*, 105 :33–46, 1993.
- [284] N. Peters. Local quenching due to flame stretch and non-premixed turbulent combustion. *Combustion Science and Technology*, 30(1) :1–17, 1983.

- [285] N. Peters. Numerical simulation of combustion phenomena. *Lecture Notes in Physics*, 241 :90–109, 1985.
- [286] N. Peters. Laminar flamelet concepts in turbulent combustion. In *Symposium (International) on Combustion*, volume 21, pages 1231–1250. Elsevier, 1988.
- [287] N. Peters. The turbulent burning velocity for large-scale and small-scale turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 384(-1) :107–132, 1999.
- [288] N. Peters. *Turbulent combustion*. Cambridge University Press, 2000.
- [289] R. T. Pierrehumbert and S. E. Widnall. The two-and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 114(1) :59–82, 1982.
- [290] U. Piomelli, J. H Ferziger, P. Moin, and J. Kim. New approximate boundary conditions for large eddy simulation of wall-bounded flows. *Phys. Fluids. A*, 1 :1061, 1989.
- [291] U. Piomelli and J. Liu. Large-eddy simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model. *Physics of fluids*, 7 :839, 1995.
- [292] U. Piomelli, T. A. Zang, C. G. Speziale, and M. Y. Hussaini. On the large-eddy simulation of transitional wall-bounded flows. *Phys. Fluids. A*, 2(2) :257–265, 1990.
- [293] E. B. Plentovich, R. L. Stallings, and M. B. Tracy. Experimental cavity pressure measurements at subsonic and transonic speeds. *NASA Technical Paper*, 3358, 1993.
- [294] T. Poinso. *Analyse des instabilités de combustion de foyers turbulents prémélangés*. PhD thesis, Université d’Orsay, 1987.
- [295] T. Poinso and S. Lele. Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *J. Comput. Phys.*, 101 :104–129, 1992.
- [296] T. Poinso and D. Veynante. *Theoretical and numerical combustion*,. 2001.
- [297] T. Poinso and D. Veynante. *Theoretical and numerical combustion*. RT Edwards, Inc., 2005.
- [298] T. Poinso, D. Veynante, and S. Candel. Quenching processes and premixed turbulent combustion diagrams. *Journal of Fluid Mechanics*, 228(-1) :561–606, 1991.
- [299] S. B. Pope. Pdf methods for turbulent reactive flows. *Progress in Energy and Combustion Science*, 11(2) :119–192, 1985.
- [300] S. B. Pope. The evolution of surfaces in turbulence. *International journal of engineering science*, 26(5) :445–469, 1988.
- [301] S. B. Pope. Computations of turbulent combustion : progress and challenges. In *Symposium (International) on Combustion*, volume 23, pages 591–612. Elsevier, 1991.
- [302] S. B. Pope. Computationally efficient implementation of combustion chemistry using in situ adaptive tabulation. *Combust. Theory Modelling*, 1 :43–63, 1997.
- [303] S.B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge Univ Pr, 2000.
- [304] A. Powell. On the edgetone. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 33 :395, 1961.
- [305] CD Pruet, TB Gatski, CE Grosch, and WD Thacker. The temporally filtered navier–stokes equations : properties of the residual stress. *Physics of Fluids*, 15(8) :2127–2140, 2003.
- [306] B. J. W. S. Rayleigh. *The theory of sound*, volume 2. Macmillan, 1896.
- [307] J. W. S. Rayleigh. *The theory of sound*, revised and enlarged (in 2 vols.), 1945.
- [308] J. Y. Ren, F. N. Egolfopoulos, and T. T. Tsotsis. NOx emission control of lean methane-air combustion with addition of methane reforming products. *Combustion science and technology*, 174(4) :181–205, 2002.

- [309] G. Ribert, M. Champion, O. Gicquel, N. Darabiha, and D. Veynante. Modeling nonadiabatic turbulent premixed reactive flows including tabulated chemistry. *Combustion and flame*, 141(3) :271–280, 2005.
- [310] L. F. Richardson. Weather prediction by numerical process, 1922.
- [311] D. Ricot. *Simulation Numérique d'un écoulement affleurant une cavité par la méthode Boltzmann sur réseau et application au toit ouvrant des véhicules automobiles*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2002.
- [312] O. Rioul. Modulation numériques. notes de cours. densité spectrale de puissance.
- [313] D. P. Rizzetta and M. R. Visbal. Large-eddy simulation of supersonic cavity flowfields including flow control. *AIAA journal*, 41(8) :1452–1462, 2003.
- [314] D. Rockwell. Oscillations of impinging shear layers. *AIAA Journal*, 1983.
- [315] D. Rockwell and C. Knisely. The organized nature of flow impingement upon a corner. *Journal of Fluid Mechanics*, 93(03) :413–432, 1979.
- [316] D. Rockwell and C. Knisely. Vortex-edge interaction : Mechanisms for generating low frequency components. *Physics of fluids*, 23 :239, 1980.
- [317] D. Rockwell and E. Naudascher. Review self-sustained oscillations of flow past cavities. *J. Fluids Eng.*, 100 :152–165, 1978.
- [318] W. M. Roquemore, D. Shouse, et al. Trapped vortex combustor concept for gas turbine engines. In *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit Jan*, volume AIAA 2001-0483, pages 8–11, 2001.
- [319] A. Roshko and K. Koenig. Interaction Effects on the Drag of Bluff Bodies in Tandem. In *Aerodynamic Drag Mechanisms of Bluff Bodies and Road Vehicles*. General Motors Research Laboratories, September 27-28 1976.
- [320] J. E. Rossiter. Winf tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Technical report 64037, Royal Aircraft Establishment, October 1964.
- [321] J. E. Rossiter. Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Technical report, ARC RM 3438, 1966.
- [322] S. Roux. *Influence de la modélisation du mélange air/carburant et de l'étendue du domaine de calcul dans la simulation aux grandes échelles des instabilités de combustion : application à des foyers aéronautiques*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007.
- [323] C. W. Rowley, T. Colonius, and A. J. Basu. On self-sustained oscillations in two-dimensional compressible flow over rectangular cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 455(2) :315–346, 2002.
- [324] D. H. Rudy and J. C. Strikwerda. A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier-Stokes calculations. *Journal of Computational Physics*, 36(1) :55–70, 1980.
- [325] M. Rullaud. *Modélisation de la combustion turbulente via une méthode de tabulation de la cinétique chimique détaillée couplée à des fonctions de densités de probabilité. Application aux foyers aéronautiques*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2004.
- [326] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer, 2000.
- [327] P. Sagaut, S. Deck, and L. Larchevêque. Numerical simulation data : from validation to physical analysis. In *Congrès Francophone de Technique Laser, Futuroscope*, September 16-19 2008. CFTL 2008.
- [328] P. Sagaut, E. Garnier, E. Tromeur, L. Larchevêque, and E. Labourasse. Turbulent inflow conditions for large-eddy simulation of supersonic and subsonic wall flows. *AIAA Journal*, 42 :469–477, 2004.

- [329] R. Samtaney, D. I. Pullin, and B. Kosovic. Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics. *Phys. Fluids.*, 13 :1415–1430, 2001.
- [330] W. S. Saric. Gortler vortices. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26 :379–410, 1994.
- [331] V. Sarohia. Experimental investigation of oscillations in flows over shallow cavities. *AIAA Journal*, 15(7), 1977.
- [332] A. Saul and D. Altemark. Lean-burn premixed combustion in gas turbine combustors. *Gas, W*  
*arme international*, 40(7-8) :336–342, 1991.
- [333] H. Schlichting, K. Gersten, and K. Gersten. *Boundary-layer theory*. Springer Verlag, 2000.
- [334] E. Schneider, A. Sadiki, and J. Janicka. Modeling and 3d-simulation of the kinetic effects in the post-flame region of turbulent premixed flames based on the g-equation approach. *Flow, turbulence and combustion*, 75(1) :191–216, 2005.
- [335] A. Scotti, C. Meneveau, and D. K. Lilly. Generalized smagorinsky model for anisotropic grids. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 5 :2306, 1993.
- [336] L. Selle. *Simulation aux grandes échelles des interactions flamme/acoustique dans un écoulement vrillé*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004.
- [337] L. Selle, F. Nicoud, and T. Poinsot. Actual impedance of non-reflecting boundary conditions : implications for the computation of resonators. *AIAA Journal*, 42(5) :958–964, 2003.
- [338] K. Shariff and R. D. Moser. Two-dimensional mesh embedding for b-spline methods. *J. Comput. Phys.*, 145(2) :471–488, 1998.
- [339] I. G. Shepherd, R. K. Cheng, T. Plessing, C. Kortschik, and N. Peters. Premixed flame front structure in intense turbulence. In *Proceedings of the Combustion Institute*, volume 29 of 2, pages 1833–1840, 2002.
- [340] C. M. Shieh and P. J. Morris. Parallel computational aeroacoustic simulation of turbulent subsonic cavity flow. *AIAA Paper*, 2000-1914, 2000.
- [341] C. M. Shieh and P. J. Morris. Comparison of two and three-dimensional turbulent cavity flows. *AIAA Paper*, 2001-0511, 2001.
- [342] D. T. Shouse. Trapped vortex combustion technology. Technical report, MITE Workshop, 2000.
- [343] B. W. Silverman. *Density estimation for statistics and data analysis*, volume 26. Chapman & Hall/CRC, 1986.
- [344] A. Singhal and R. V. Ravikrishna. Single cavity trapped vortex combustor dynamics-part-2 : Simulations. *International Journal of Spray and Combustion Dynamics*, 3(1) :45–62, 2011.
- [345] N. Sinha, S. Arunajatesan, and L. Ukeiley. High fidelity simulation of weapons bay aeroacoustics attenuation using active flow control. *Paper No. AIAA-2000-1968*, 6 :12–14.
- [346] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91(3) :99–164, 1963.
- [347] B. R. Smith, J. K. Jordan, E. E. Bender, S. N. Rizk, and L. L. Shaw. Computational simulation of active control of cavity acoustics. In *AIAA/CEAS, 21 st AIAA Aeroacoustics Conference, Lahaina, HI*, 2000.
- [348] B. I. Soemarwoto. Computations of three-dimensional unsteady supersonic cavity flow to study the effect of different downstream geometries. Technical report, DTIC Document, 2003.

- [349] L. M. T. Somers and Universitat Politècnica d'Eindhoven. *The simulation of flat flames with detailed and reduced chemical models*. Technische Universiteit Eindhoven, 1994.
- [350] D. B. Spalding. Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent flames. In *Symposium (International) on Combustion*, volume 13, pages 649–657. Elsevier, 1971.
- [351] C. G. Speziale, G. Erlebacher, T. A. Zang, and M. Y. Hussaini. The subgrid-scale modeling of compressible turbulence. *Phys. Fluids.*, 31 :940–942, 1988.
- [352] R. L. Stallings and F. Wilcox. Experimental cavity pressure distributions at supersonic speeds. Technical report, NASA TP-2683, 1987.
- [353] R. C. Steele.
- [354] P. Stoica and R. Moses. *Introduction to Spectral Analysis*. Prentice Hall, February 16 1997.
- [355] J. T. Stuart. On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers. *J. Fluid Mech*, 29(Part 3) :417–440, 1967.
- [356] G. J. Sturgess and K.-Y. Hsu. Entrainment of mainstream flow in a Trapped-Vortex Combustor. *AIAA Paper*, 0261, 1997.
- [357] G. J. Sturgess and K.-Y. Hsu. Combustion Characteristics of a Trapped Vortex Combustor. In *RTO AVT Symposium on "Gas Turbine Engine Combustion, Emissions and Alternative Fuels"*, volume RTO MP-14, Lisbon, Portugal, 12-16 October 1998.
- [358] V. Subramanian. *Numerical Simulation of Forced Ignition using LES coupled with a Tabulated Detailed Chemistry Approach*. PhD thesis, INSA de Rouen, 2010.
- [359] J. C. Sutherland and C. A. Kennedy. Improved boundary conditions for viscous, reacting, compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 191(2) :502–524, 2003.
- [360] N. Swaminathan and R. W. Bilger. Analyses of conditional moment closure for turbulent premixed flames. *Combustion Theory and Modelling*, 5(2) :241–260, 2001.
- [361] R. Swanson and E. Turkel. On central-difference and upwind schemes. *J. Comput. Phys.*, 101(2) :292–306, 1992.
- [362] K. Taira and T. Colonius. The immersed boundary method : A projection approach. *J. Comput. Phys.*, 225 :2118–2137, 2007.
- [363] C. K. W. Tam. Directional acoustic radiation from a supersonic jet generated by shear layer instability. *J. Fluid Mech*, 46(4) :757–798, 1971.
- [364] C. K. W. Tam. The acoustic modes of a two-dimensional rectangular cavity. *J. Sound Vib.*, 49 :353–364, 1976.
- [365] C. K. W. Tam. Excitation of instability waves in a two-dimensional shear layer by sound. *Journal of Fluid Mechanics*, 89(02) :357–371, 1978.
- [366] C. K. W. Tam and P. W. Block. On the tones and pressure oscillations induced by flow over rectangular cavities. *Journal of Fluid Mechanics*, 89(Part 2) :373–399, 1978.
- [367] C. K. W. Tam and Z. Dong. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *Journal of Computational Acoustics*, 4(2) :175–201, 1996.
- [368] C. K. W. Tam and J. C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 107(2) :262–281, 1993.
- [369] S. Tatsumi, L. Martinelli, and A. Jameson. Flux-limited schemes for the compressible navier-stokes equations. *AIAA Journal*, 33(2) :252–261, 1995.

- [370] B. Tayllamin, S. Mendez, R. Moreno, M. Chau, and F. Nicoud. Comparison of body-fitted and immersed boundary methods for biomechanical applications. In ECCOMAS CFD 2010, editor, *V European Conference on Computational Fluid Dynamics*, Lisbon, Portugal, 2010.
- [371] K. W. Thompson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *J. Comput. Phys.*, 68 :1–24, 1987.
- [372] K. W. Thompson. Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems II. *J. Comput. Phys.*, 89 :439–461, 1990.
- [373] D. J. Thomson. Spectrum estimation and harmonic analysis. In *Proceedings of the IEEE*, volume 70, pages 1055–1096, 1982.
- [374] B. Thornber and D. Drikakis. Implicit large-eddy simulation of a deep cavity using high-resolution methods. *AIAA Journal*, 46(10) :2634–2645, 2008.
- [375] A. Trounev and Poinso T. The evolution equation for the flame surface density. *J. Fluid Mech.*, 278 :1–31, 1994.
- [376] K. Truffin. *Simulation aux grandes échelles et identification acoustique des turbines à gaz en régime partiellement prémélangé*. PhD thesis, INP Toulouse, 2005.
- [377] Y.-H. Tseng and J. H. Ferziger. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *J. Comput. Phys.*, 192 :593–623, 2003.
- [378] Y. H. Tseng and J. H. Ferziger. LES of 3D turbulent wavy boundary flow :validation of a ghost-cell immersed boundary method. In *In Proc. 3rd International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Sendai, Japan,*, 2003.
- [379] T. Turanyi. Review - sensitivity analysis of complex kinetics systems. tools and applications. *Journal of Mathematical Chemistry*, 5 :202–248, 1990.
- [380] M. Tyagi and S. Acharya. Large eddy simulation of turbulent flows in complex and moving rigid geometries using the immersed boundary method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 48 :691–722, 2005.
- [381] H. S. Udaykumar, R. Mittal, P. Rampunggoon, and A. Khanna. A sharp interface cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries. *J. Comput. Phys.*, 174 :345–380, 2001.
- [382] M. Uhlmann. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *J. Comput. Phys.*, 209 :448–476, 2005.
- [383] J. A. Van Oijen. *Flamelet-Generated Manifolds : Developement and Application to Premixed Laminar Flames*. PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
- [384] J. A. Van Oijen and L. P. H. De Goey. Modelling of premixed laminar flames using flamelet-generated manifolds. *Combustion Science and Technology*, 161(1) :113–137, 2000.
- [385] O.V. Vasilyev, T.S. Lund, and P. Moin. A general class of commutative filters for les in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 146(1) :82–104, 1998.
- [386] L. Vervisch. Study and modeling of finite rate chemistry effects in turbulent non-premixed flames. *Annual Research Briefs. Center for Turbulence Research, Stanford Univ./NASA Ames*, (94) :411–429, 1992.
- [387] L. Vervisch, P. Domingo, M. Rullaud, and R. Hauguel. Three facets of turbulent combustion modelling : DNS of premixed v-flame, LES of lifted nonpremixed flame and RANS of jet-flame. *Journal of turbulence*, 5 :1–36, 2004.
- [388] R. Verzicco, J. Mohd-Yusof, P. Orlandi, and D. Haworth. Les in complex geometries using boundary body forces. *AIAA*, 38 :427–433, 2000.

- [389] D. Veynante and L. Vervisch. Turbulent combustion modeling. *Progress in Energy and Combustion Science*, 28(3) :193–266, 2002.
- [390] P. R. Voke. *Flow past a square cylinder :test cas LES2.*, volume Direct and Large Eddy Simulation II. ERCOFTAC Series,, 1997.
- [391] A. W. Vreman. An eddy-viscosity subgrid-scale model for turbulent shear flow : Algebraic theory and applications. *Phys. Fluids.*, 16(10), 2004.
- [392] B. Vreman. Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer. *Ph. D. Dissertation, Dept. of Applied Mathematics, Univ. of Twente, Twente, The Netherlands, June*, 1995.
- [393] B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten. A priori tests of large eddy simulation of the compressible plane mixing layer. *Journal of engineering mathematics*, 29(4) :299–327, 1995.
- [394] B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten. Subgrid-modelling in les of compressible flow. *Applied scientific research*, 54(3) :191–203, 1995.
- [395] K. Wang, G. Ribert, P. Domingo, and L. Vervisch. Self-similar behavior and chemistry tabulation of burnt-gas diluted premixed flamelets including heat-loss. *Combustion Theory and Modelling*, 14(4) :541–570, 2010.
- [396] F. M. White. Viscous fluid flow, 1974.
- [397] Wikipedia. [http://fr.wikipedia.org/wiki/Gaz\\_à\\_effet\\_de\\_serre](http://fr.wikipedia.org/wiki/Gaz_à_effet_de_serre), 2011.
- [398] F. A. Williams. Criteria for existence of wrinkled laminar flame structure of turbulent premixed flames. *Combustion and Flame*, 26 :269–270, 1976.
- [399] G. Williams. Combustion theory. 1985.
- [400] C. H. K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 28 :477–539, 1996.
- [401] J. P. Wooley and K. Karamcheti. Role of jet stability in edgetone generation. *AIAA journal*, 12(11) :1457–1458, 1974.
- [402] H. Wu, Q. Chen, W. Shao, Y. Zhang, Y. Wang, and Y. Xiao. Combustion of hydrogen in an experimental trapped vortex combustor. *Journal of Thermal Science*, 18(3) :256–261, 2009.
- [403] A. Wulff and J. Hourmouziadis. Technology review of aeroengine pollutant emissions. *Aerospace science and technology*, 1(8) :557–572, 1997.
- [404] F. Xing, W. Fan, Y. Liu, Z. Kong, Y. Liu, and M. Yang. Effect of different fuel-air matching forms on combustion performance of trapped vortex combustor. *Hangkong Dongli Xuebao/Journal of Aerospace Power*, 23 :871–876, 2008.
- [405] F. Xing, R. Zhang, W. Fan, Y. Liu, and Y. Yan. Experiment study on single/fuel-lean rapped vortex combustor ignition and limit blow-out at different main air and mix air temperatures. *Hangkong Dongli Xuebao/ Journal of Aerospace Power*, 23 :2280–2285, 2008.
- [406] S. Xu. The immersed interface method for simulating prescribed motion of rigid objects in an incompressible viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 227(10) :5045–5071, 2008.
- [407] H. Yamashita, M. Shimada, and T. Takeno. A numerical study on flame stability at the transition point of jet diffusion flames. In *Symposium (International) on Combustion*, volume 26, pages 27–34. Elsevier, 1996.
- [408] T. Ye, R. Mittal, H. S. Udaykumar, and W. Shyy. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *J. Comput. Phys.*, 156 :209–240, 1999.

- 
- [409] C. Yoo and H. Im. Characteristic boundary conditions for simulations of compressible flows with multi-dimensional, viscous and reaction effects. *Combustion Theory and Modelling*, 11(2) :259–286, 2007.
- [410] C.S. Yoo, Y. Wang, A. Trouvé, and H.G. Im. Characteristic boundary conditions for direct simulations of turbulent counterflow flames. *Combustion Theory and Modelling*, 9(4) :617–646, 2005.
- [411] A. Yoshizawa. Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling. *Phys. Fluids.*, 29 :2152–2164, 1986.
- [412] T. A. Zang, Dahlburg R. B., and Dalburg J. P. Direct and large-eddy simulations of three-dimensional compressible navier-stokes turbulence. *Phys. Fluids. A*, 4(1) :127–140, 1992.
- [413] Y. Zang, R. L. Street, and J. R. Koseff. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Phys. Fluids. A*, 5(12) :3186–3196, 1993.
- [414] J. Zelina. High Gravity (g) Combustion. Tech. Report AFRL-PR-WP-TR- 2006-2079, DTIC Document, 2006.
- [415] C. Zhang, Y. Lin, Q. Xu, and G. Liu. Investigation of tangential trapped vortex combustor. ASME, 2009.
- [416] X. Zhang and JA Edwards. An investigation of supersonic oscillatory cavity flows driven by thick shear layers. *Aeronautical Journal*, 94(940) :355–364, 1990.
- [417] S. Ziada and D. Rockwell. Generation of highet harmonics in a self-oscillating mixing layer edge system. *AIAA Journal*, 20 :196–199, 1981.
- [418] S. Ziada and D. Rockwell. Vortex–leading-edge interaction. *Journal of Fluid Mechanics*, 118(1) :79–107, 1982.
- [419] S. Zurbach. *Modélisation de la combustion turbulente non-prémélangée avec prise en compte d’une cinétique chimique détaillée*. PhD thesis, Ecole centrale des arts et manufactures, Châtenay-Malabry, 1998.

**Résumé : Simulation numérique de la combustion turbulente.  
Méthode de frontières immergées pour les écoulements compressibles,  
application à la combustion en aval d'une cavité.**

Une méthode de frontières immergées est développée pour la simulation d'écoulements compressibles et validée au travers de cas-tests spécifiques (réflexion d'ondes acoustiques et quantification de la conservation de la masse dans des canaux inclinés). La simulation aux grandes échelles (LES) d'une cavité transsonique est ensuite présentée. Le bouclage aéro-acoustique, très sensible aux conditions aux limites, est reproduit avec précision par la LES dans le cas où les parois sont immergées dans un maillage structurée. La comparaison des stratégies de modélisation de sous-maille pour cet écoulement transsonique et l'adaptation des filtres en présence de frontières immergées sont également discutées. Le rôle, souvent sous-estimé, du schéma de viscosité artificiel, est quantifié.

Dans la dernière partie du manuscrit, des études sont réalisées pour aider au dimensionnement d'un nouveau concept de chambre de combustion où la flamme est stabilisée par la recirculation de gaz brûlés dans une cavité (chambre TVC pour Trapped Vortex Combustor). La modélisation de la combustion turbulente est basée sur une chimie tabulée, couplée à une fonction densité de probabilité présumée (PCM-FPI).

L'étude de la dynamique de la flamme est réalisée pour diverses conditions de fonctionnement (débit de l'écoulement principal et présence ou non d'un swirl). Les spécificités de mise en oeuvre de la simulation d'un écoulement de ce type sont discutées et un soin particulier est apporté au traitement de la condition de sortie, qui constitue un point sensible de la chaîne de modélisation. Les phénomènes d'instabilités et de retour de la flamme sont mis en évidence ainsi que les modifications à apporter au dispositif afin de minimiser ces effets. L'existence d'un cycle limite acoustique est souligné et une formule permettant d'anticiper le niveau des fluctuations de pression est proposée et validée. Une correction au modèle PCM-FPI est présentée afin de préserver la vitesse de flamme et d'assurer une reproduction plus précise de la dynamique de flamme.

**Mots clés :** Frontières immergées - Simulation des grandes échelles - Ecoulements compressibles - Chambre TVC - Modélisation de la combustion turbulente - Cycle limite acoustique.

**Abstract : Numerical simulation of turbulent combustion.  
Immersed Boundary Method for compressible flow,  
application to combustion behind a cavity.**

An immersed boundary method has been developed for the simulation of compressible flow and validated with reference test cases (pressure wave reflection and quantification of mass conservation for various inclined channels). Large Eddy Simulation (LES) of a transonic cavity is then presented. The aeroacoustic feedback loop, which is highly sensitive to the boundary conditions, was accurately reproduced where the walls are immersed inside a structured grid. The comparison between the modeling approaches for this transonic flow and the correction of the filtering operation near immersed boundaries are also discussed. The often underestimated role of the numerical artificial dissipation is also quantified.

In the last part of this manuscript, many studies are realized to help in the design of a new combustion chamber for Trapped Vortex Combustor (TVC). The turbulent combustion model is based on tabulated chemistry and a presumed probability density function (PCM-FPI) method.

The flame dynamics is studied for various operating conditions (flowrate of the main flow and presence of swirl motion). Details concerning the realization of such a flow are discussed and special care is taken for the treatment of the most sensitive outlet boundary condition. The phenomena of combustion instabilities and of flame backflow are highlighted along with the modifications to be made for the device to minimize these effects. The existence of a acoustic limit cycle is emphasized and a formula is proposed and validated to anticipate the level of pressure fluctuations. Finally a correction to the PCM-FPI model is suggested to preserve the flame front speed and to ensure a more accurate description of the flame dynamics.

**Keywords :** Immersed Boundaries - Large Eddy Simulation - Compressible flow - Trapped Vortex Combustor - Turbulent combustion modeling - Limit acoustic cycle.