



**HAL**  
open science

# Modélisation et Optimisation de la Connectique des Structures d'Electronique de Puissance

Nadège Piette

► **To cite this version:**

Nadège Piette. Modélisation et Optimisation de la Connectique des Structures d'Electronique de Puissance. Energie électrique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1999. Français. NNT: . tel-00783199

**HAL Id: tel-00783199**

**<https://theses.hal.science/tel-00783199>**

Submitted on 31 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée par

**Nadège PIETTE**

(Ingénieur ENSIEG)

Pour obtenir le grade de **DOCTEUR**  
de l'**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE**  
(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)  
(Spécialité : Génie Electrique)

## **Modélisation et Optimisation de la Connectique des Structures d'Electronique de Puissance**

Date de soutenance : **1 juillet 1999**

Composition du Jury :

|           |               |                   |
|-----------|---------------|-------------------|
| Messieurs | A. FOGGIA     | <i>Président</i>  |
|           | A. RUFER      | <i>Rapporteur</i> |
|           | L. KRAHENBUHL | <i>Rapporteur</i> |
| Madame    | E. CLAVEL     | <i>Examineur</i>  |
| Messieurs | Y. MARECHAL   | <i>Examineur</i>  |
|           | J. ROUDET     | <i>Examineur</i>  |

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble



Ce travail a été réalisé au sein des équipes Modélisation et Electronique de Puissance du laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble.

Je tiens à remercier :

M. Albert Foggia, professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

M. Alfred Rufer, professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, et M. Laurent Krahenbühl, directeur de recherche au Centre de Génie Electrique de Lyon (Cegely), pour avoir accepté d'être rapporteur de ce travail.

M. James Roudet, professeur à l'Université Joseph Fourier, pour avoir été mon directeur de thèse pendant trois ans et avoir, par conséquent, accompli l'ensemble des tâches qui lui incombent.

Je tiens tout particulièrement à remercier M. Yves Maréchal, maître de conférences à l'INPG, et M<sup>me</sup> Edith Clavel, maître de conférences à l'UJF, pour avoir encadré mes travaux de recherche pendant les trois ans et m'avoir permis de mener ma recherche librement et dans une ambiance très agréable.

Je remercie également les directeurs pour m'avoir accueillie au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, les anciens : M. Jean-Claude Sabonnadière et M. Robert Perret et les nouveaux : M. Jean-Pierre Rognon et M. Gérard Meunier.

Je voudrais remercier M. Christian Schaeffer, maître de conférences à l'INPG, pour m'avoir accueillie dans cette grande maison qu'est le laboratoire et pour m'avoir initiée aux us et coutumes de cet univers durant mon DEA.

Ne pouvant pas citer toutes les personnes avec lesquelles j'ai eu l'occasion de travailler, je remercie tous les membres des équipes Electronique de Puissance et Modélisation que j'ai côtoyés au long de ma thèse et qui m'ont permis d'avancer plus rapidement sur différents problèmes.

Je souhaite ne pas oublier toute l'équipe informatique : Etiennette C., Patrick G., Patrick E., Marie-Thérèse L., Bruno F. et Florence F. qui ont été d'agréables secours dès que l'informatique me faisait des misères.

Je voudrais aussi remercier Elise R., Jacqueline D. et Monique B. qui permettent de résoudre tous les problèmes administratifs, mais aussi avec lesquelles il était toujours très agréable de discuter de divers sujets.

Je tiens maintenant à remercier toutes les personnes avec lesquelles je suis allée faire les nombreuses pauses nécessaires au bon équilibre de ma petite tête : Coralie, Séverine, Christophe, Jean-François, Gwenaëlle, Charlotte, Basma, Armando, Jean-Eric, Bertrand et tous les autres thésards que j'ai oublié de citer, mais qui se reconnaîtront sans aucun doute.

Au final, je voudrais aussi citer Maman, Christine et Laurent, Stéphanie, mes grands-parents, Christophe, une autre Stéphanie et tous les nombreux amis extérieurs au labo qui m'ont soutenue tout au long des années et ont su m'encourager à persévérer lorsque les difficultés se présentaient.

# **TABLE DES MATIERES**

PROBATION

DEPARTMENT

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>  | <b>7</b>  |
| <b>2. LES MÉTHODES DE MODÉLISATION</b>                                   | <b>13</b> |
| <b>2.1. Introduction à la modélisation de la connectique</b>             | <b>16</b> |
| 2.1.1. Introduction  | 16        |
| 2.1.2. Présentation des différentes méthodes                             | 16        |
| 2.1.2.1. Les méthodes des éléments finis et des intégrales de frontières | 18        |
| 2.1.2.2. La méthode PEEC   | 19        |
| 2.1.2.3. La méthode des Moments  | 20        |
| 2.1.2.4. La méthode des Lignes de Transmission                           | 21        |
| 2.1.2.5. Comparaison entre les méthodes                                  | 22        |
| <b>2.2. Théorie de la méthode PEEC</b>                                   | <b>23</b> |
| 2.2.1. But et principe de la méthode PEEC                                | 23        |
| 2.2.2. Equations de base et formulation                                  | 24        |
| 2.2.3. Formules des constantes localisées partielles                     | 29        |
| 2.2.3.1. Tension appliquée   | 29        |
| 2.2.3.2. Résistance partielle  | 30        |
| 2.2.3.3. Inductance partielle L et couplage inductif M                   | 30        |
| 2.2.3.4. Capacité partielle C et couplage capacitif                      | 34        |
| <b>2.3. Schéma électrique de la connectique</b>                          | <b>34</b> |
| 2.3.1. Démarche de modélisation  | 34        |
| 2.3.2. Prise en compte de la non-uniformité du courant.                  | 39        |
| 2.3.2.1. modélisation unidirectionnelle                                  | 39        |
| 2.3.2.2. modélisation bidirectionnelle                                   | 40        |
| 2.3.3. Conclusion  | 42        |
| <b>2.4. Analyse de circuit</b>   | <b>42</b> |
| 2.4.1. Introduction  | 43        |
| 2.4.2. Notions élémentaires  | 44        |
| 2.4.2.1. Graphe associé  | 44        |

|   |           |
|---|-----------|
| 2.4.2.2. Théorème d'Euler   | 45        |
| 2.4.2.3. Matrices d'incidence des branches aux nœuds                              | 46        |
| 2.4.2.4. Matrices d'incidence des branches aux mailles                            | 46        |
| 2.4.2.5. Equations des branches   | 47        |
| 2.4.3. Analyse de nos circuits  | 49        |
| 2.4.3.1. Analyse par rapport aux tensions   | 51        |
| 2.4.3.2. Analyse par rapport aux courants   | 54        |
| 2.4.3.3. Comparaison et choix   | 57        |
| 2.4.4. Conclusion   | 60        |
| <b>2.5. Autre modélisation PEEC : les efforts électrodynamiques</b>               | <b>61</b> |
| 2.5.1. Introduction   | 61        |
| 2.5.2. Modélisation des efforts électrodynamiques                                 | 62        |
| 2.5.2.1. Loi de Biot et Savart  | 62        |
| 2.5.2.2. Effort électrodynamique entre deux fils conducteurs minces et filiformes | 63        |
| 2.5.2.3. Effort électrodynamique entre deux conducteurs                           | 65        |
| 2.5.3. Validation des formules  | 68        |
| 2.5.3.1. Description du problème test   | 68        |
| 2.5.3.2. Méthode analytique   | 68        |
| 2.5.3.3. Méthode numérique  | 69        |
| 2.5.3.4. Comparaison des deux méthodes  | 69        |
| 2.5.3.5. Méthode d'implantation   | 70        |
| 2.5.4. Conclusion   | 71        |
| <b>3. OPTIMISATION DE CÂBLAGE</b>   | <b>73</b> |
| <b>3.1. Méthodologie pour le câblage</b>  | <b>75</b> |
| 3.1.1. Introduction   | 75        |
| 3.1.2. Description de la méthodologie d'optimisation pour la connectique          | 75        |
| 3.1.3. Objectifs  | 77        |
| <b>3.2. Techniques d'optimisation</b>   | <b>78</b> |
| 3.2.1. généralités sur les problèmes d'optimisation                               | 78        |
| 3.2.2. Différents points singuliers d'une fonction                                | 79        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>3.3. Les méthodes d'optimisation</b>               | <b>81</b>  |
| 3.3.1. Introduction                                   | 81         |
| 3.3.2. Méthodes déterministes                         | 82         |
| 3.3.2.1. Rappels                                      | 82         |
| 3.3.2.2. Méthodes de transformation                   | 84         |
| 3.3.2.3. Méthode sans contrainte                      | 90         |
| 3.3.2.4. Conclusion                                   | 92         |
| 3.3.3. Les méthodes stochastiques                     | 92         |
| 3.3.3.1. Les algorithmes génétiques                   | 92         |
| 3.3.3.2. Conclusion                                   | 98         |
| 3.3.4. Les Méthodes Hybrides                          | 98         |
| <b>3.4. Analyse de sensibilité : dPEEC</b>            | <b>100</b> |
| 3.4.1. Présentation du problème                       | 100        |
| 3.4.2. Expression du gradient de la fonction objectif | 103        |
| 3.4.2.1. Rappel                                       | 103        |
| 3.4.2.2. Hypothèses                                   | 103        |
| 3.4.2.3. Développement                                | 104        |
| 3.4.2.4. Etat-adjoint                                 | 106        |
| 3.4.2.5. Exemple                                      | 107        |
| 3.4.2.6. Récapitulatif                                | 110        |
| 3.4.3. Expression analytique du gradient de $Z_e$     | 111        |
| 3.4.4. Implantation de la méthode                     | 112        |
| 3.4.5. Conclusion                                     | 114        |
| <b>3.5. Une méthode hybride</b>                       | <b>114</b> |
| 3.5.1. Introduction                                   | 114        |
| 3.5.2. Le processus d'approximation                   | 116        |
| 3.5.2.1. Le principe                                  | 116        |
| 3.5.2.2. Le calcul des fonctions de formes            | 117        |
| 3.5.2.3. Le calcul des coefficients $f_i$             | 117        |
| 3.5.3. Exemple  | 118        |
| 3.5.4. Résumé   | 119        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>3.6. Conclusion</b>  | <b>120</b> |
| <b>4. APPLICATIONS</b>  | <b>121</b> |
| <b>4.1. Modélisation électrique 2D</b>                                      | <b>123</b> |
| 4.1.1. Introduction   | 123        |
| 4.1.2. Présentation de la structure   | 123        |
| 4.1.3. Modélisation   | 125        |
| 4.1.4. Mesures  | 127        |
| 4.1.5. Comparaison et Conclusion  | 127        |
| <b>4.2. Exemple de minimisation de l'inductance de boucle [PIEa] [PIEb]</b> | <b>128</b> |
| 4.2.1. Introduction   | 128        |
| 4.2.2. Etude électrique   | 129        |
| 4.2.3. Minimisation de l'inductance de boucle                               | 131        |
| 4.2.4. Résultats  | 134        |
| 4.2.5. Conclusion   | 136        |
| <b>4.3. Mise en parallèle des composants</b>                                | <b>136</b> |
| 4.3.1. Introduction   | 136        |
| 4.3.2. Contraintes pour la mise en parallèle                                | 137        |
| 4.3.3. Conception de la structure   | 140        |
| 4.3.4. Optimisation de la structure   | 141        |
| 4.3.5. Validations  | 145        |
| 4.3.6. Conclusion   | 147        |
| <b>5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>  | <b>149</b> |
| <b>6. BIBLIOGRAPHIE</b>   | <b>155</b> |
| <b>7. ANNEXES</b>   | <b>165</b> |

# **1. INTRODUCTION GENERALE**



L'Electronique de Puissance est un domaine qui connaît des changements constants (nouveaux composants, structures particulières,...). Son implantation au sein des milieux industriels et domestiques conduit à couvrir toutes les gammes de puissances, ainsi que tous les types d'applications.

L'utilisation fréquente des convertisseurs statiques et l'augmentation des fréquences de découpage, facilitée par des composants de plus en plus performants, amènent à s'intéresser aux problèmes de Compatibilité Electromagnétique (CEM).

L'augmentation des fréquences de découpage entraîne en effet la réduction des temps de commutation, et donc l'augmentation des vitesses de variation du courant et de la tension. Ces forts

$\frac{di}{dt}$  et  $\frac{dV}{dt}$  conduisent à ne plus considérer les connexions (câblages) comme de parfaits court-circuits.

Leurs caractéristiques électriques (surtout inductives) provoquent des surtensions inadmissibles de plusieurs centaines de volts induites par les  $\frac{di}{dt}$  qu'elles contribuent d'ailleurs à fixer au même titre que les semi-conducteurs. Ils sont de plus à l'origine de pollution électromagnétique sur les réseaux électriques (par couplage inductif direct ou indirect), et cet aspect doit faire partie intégrante du cahier des charges, au même titre que le poids, le coût et l'encombrement.

Pour toutes ces raisons, il est indispensable de pouvoir prédire les formes d'ondes en courant et tension au sein des convertisseurs de puissance. Leur connaissance permettra d'accéder ainsi aux contraintes électriques (surtension,...), thermiques (points chauds,...) et CEM utiles pour concevoir un convertisseur robuste, performant au moindre coût.

Le sujet de cette thèse s'inscrit dans la suite des travaux communs aux équipes Electronique de Puissance et Modélisation du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (LEG) sur les aspects modélisation et conception de câblage en vue d'étudier le comportement réel des convertisseurs statiques, spécialement sur les aspects CEM [SCH-1] [CLA-1] [TEU] [YOU].

Le LEG a adopté une méthode de modélisation, basée sur la méthode PEEC (Partial Element Equivalent Circuit), pour évaluer l'apport électrique de la connectique. Au cours des thèses précédentes [CLA] [SCH], cette modélisation a été validée sur de nombreuses structures industrielles. Nous avons pu en effet prédire avec précision les caractéristiques électriques (résistances et inductances) propres à chaque élément du câblage.

Dès lors, la conception d'une structure de convertisseur statique est considérablement fiabilisée. Cependant, cet apport en ce qui concerne la modélisation de la connectique n'est pas suffisant. Tout concepteur de structures d'électronique de puissance se trouve en permanence confronté à la difficulté de devoir concevoir et dimensionner les convertisseurs :

- ✓ réalisant la fonction souhaitée,
- ✓ dans lesquels interviennent des phénomènes non-linéaires et fortement couplés (CEM, électrodynamique, thermique, ...),
- ✓ devant répondre à un cahier des charges induisant des contraintes d'égalité ou d'intervalle sur les paramètres géométriques,
- ✓ et, si possible, devant présenter une solution optimale.

Aujourd'hui, les ingénieurs ont à leur disposition pour réaliser la conception des convertisseurs des logiciels d'analyse. Ces derniers autorisent le concepteur à réaliser des dispositifs plus performants en évitant un certain nombre de prototypes intermédiaires et conduisent à une "optimisation" de la structure par analyse paramétrique (modifications successives des paramètres).

Cette démarche, vers la conception d'un dispositif plus performant, sera grandement facilitée et devient plus efficace dès lors que les modifications successives sont prises en charge de manière automatique par une méthode d'optimisation plutôt que par des tâtonnements plus ou moins intuitifs.

La mise en place d'une telle méthode, pour la conception de structures d'électronique de puissance et plus précisément du câblage, est l'objet de cette thèse.

Cette méthode permet d'utiliser la puissance toujours plus grande des ordinateurs afin de fournir aux électroniciens de puissance un outil d'aide à la conception des structures. Cet outil est non seulement un outil de modélisation et d'analyse, mais surtout un outil qui a la possibilité d'explorer automatiquement l'espace des solutions à partir d'une structure initiale.

Cet outil permettra d'améliorer les structures existantes sur différents critères :

- ✓ géométriques (encombrement, poids),
- ✓ mécaniques (tenue des plaques),
- ✓ électriques (phase de commutation, mise en parallèle des composants),
- ✓ thermiques (localisation de points chauds),
- ✓ couplages de ces quatre aspects : géométriques, mécaniques, électriques et thermiques.

Afin de réaliser cet outil, deux grands aspects seront étudiés :

- ✓ la modélisation de la connectique,
- ✓ les différentes techniques d'optimisation.

Dans la première partie, nous exposerons les différentes possibilités de modélisation du câblage. Puis nous présenterons en détail la méthode choisie : la méthode PEEC. Elle permet d'obtenir une expression analytique des caractéristiques électriques : c'est un atout pour la phase de conception à l'aide des techniques d'optimisation.

En partant de la modélisation de la connectique telle qu'elle est pratiquée au LEG, nous développerons une méthode d'analyse électrique qui a aussi l'avantage d'accélérer le processus d'analyse. En parallèle à cette analyse électrique, nous mettrons en place une analyse électrodynamique qui repose sur le même formalisme que la modélisation électrique. Ce nouveau modèle, ainsi que l'analyse électrique sera validé sur plusieurs exemples.

La deuxième partie est consacrée aux techniques d'optimisation. Les deux grandes classes de méthodes sont brièvement présentées : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

Pour trouver l'optimum, les premières s'appuient sur une direction de recherche qui est en général fournie par les dérivées de la fonction à optimiser. La méthode d'analyse mise en œuvre aboutissant à des formules analytiques, nous sommes en mesure de fournir le gradient analytique de la fonction objectif et ainsi d'utiliser les méthodes déterministes qui sont réputées pour leur efficacité. Cependant, elles trouvent uniquement l'optimum proche de la solution initiale. C'est un inconvénient lorsque nous sommes en présence d'une fonction qui présente plusieurs optima.

Ce problème est résolu à l'aide de l'autre famille de méthodes d'optimisation : les méthodes stochastiques. Quelle que soit la solution initiale choisie, elles sont un bon moyen pour éviter les optima locaux et trouver l'optimum global. En revanche, la recherche de l'optimum repose sur un mécanisme aléatoire et entraîne un nombre d'évaluations important.

Dans cette deuxième partie, nous mettons en place une méthode déterministe et en particulier l'analyse de sensibilité associée à la fonction à optimiser. Puis nous aborderons un troisième type d'optimisation : une méthode hybride, combinaison des deux grandes familles.

La troisième partie de ce mémoire est consacrée à quelques applications en Electronique de Puissance :

- La première illustre les problèmes liés à la modélisation des connectiques des convertisseurs. Cette analyse sera comparée à une série de mesures effectuées.
- L'application suivante représente un problème d'optimisation d'inductance de boucle de puissance au sein d'un convertisseur. Nous sommes partis d'une structure déjà existante que nous avons souhaité modifier afin de réduire les parasites électriques.
- La dernière application présentée traite un problème de plus en plus fréquent au sein de l'électronique de puissance : la répartition équilibrée du courant entre plusieurs interrupteurs. Pour augmenter la puissance des structures, on augmente en effet le courant total commuté et pour cela on associe plusieurs composants de puissance en parallèle. Un bon fonctionnement de la structure impliquant une charge égale de chacun d'entre eux, l'objet est ici de trouver la meilleure configuration au niveau de leur câblage qui réalisera cet objectif.

En ce qui concerne les deux dernières applications, le processus d'optimisation est réalisé uniquement sur les paramètres géométriques de la structure en tenant compte de contraintes diverses imposées par le cahier des charges (contraintes mécaniques ou autres).

Le but de cette partie est ici de valider les méthodes développées au cours de ce mémoire sur des exemples industriels et de comparer les résultats obtenus avec des réalisations réelles.

# **2. LES METHODES DE MODELISATION**

# THE HISTORY OF THE

REIGN OF

CHARLES THE FIRST

BY

JOHN BURNET

IN TWO VOLUMES.

LONDON, Printed by J. Sturges, at the Black-Swan in St. Dunstons Church-yard, 1724.

Nous disposons pour étudier le comportement électrique des convertisseurs de schémas équivalents de tous les composants d'une structure, excepté celui de la connectique. Ces schémas sont en général utilisés au sein d'un solveur circuit, tel que SPICE, afin d'obtenir les formes d'ondes globales de la structure. Cependant cette étude est incomplète car elle ne prend pas en compte les composants électriques de la connectique. C'est pourquoi il est souhaitable de posséder un schéma électrique équivalent du câblage.

Par ailleurs, nous pouvons être amenés à étudier les perturbations créées par la connectique, c'est à dire à évaluer les courants locaux dans les amenées de courant ainsi que les efforts électrodynamiques et les champs magnétiques qui en résultent.

Ces demandes des électroniciens de puissance nous amènent donc à établir une démarche précise pour l'étude complète d'un convertisseur (figure 2.1-1)

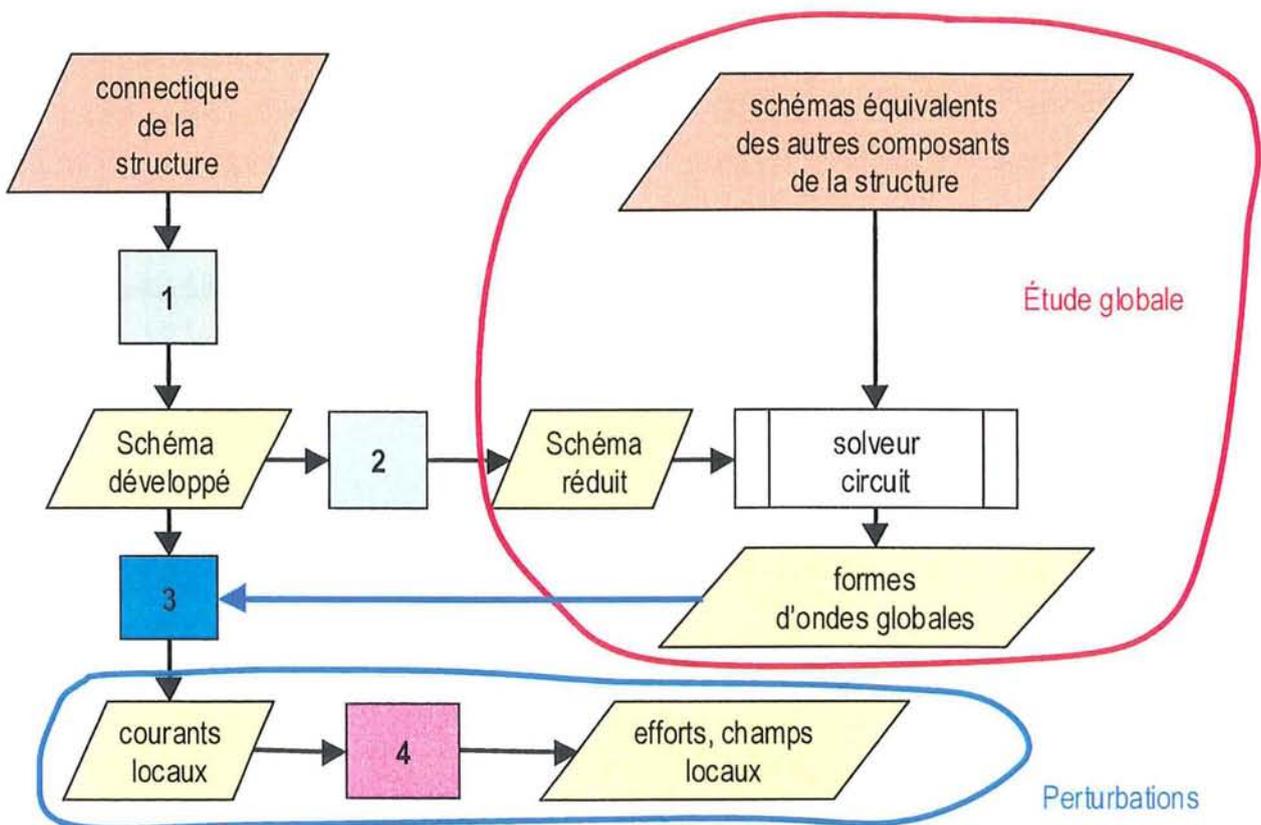


figure 2.1-1 : Processus de modélisation

Pour satisfaire à la fois à l'étude globale et à l'étude des perturbations, il est nécessaire de trouver un schéma électrique développé de la connectique.

Cette partie sera consacrée à la réalisation des 4 étapes décrites par la figure 2.1-1. Nous commencerons par définir comment obtenir un schéma électrique développé de la connectique (paragraphe 2.1., 2.2. et 2.3.), pour ensuite traiter parallèlement les étapes 2 et 3 (paragraphe 2.4.). Pour conclure cette partie, nous présenterons un modèle analytique des efforts électrodynamiques au sein de la connectique (paragraphe 2.5.).

## **2.1. Introduction à la modélisation de la connectique**

### **2.1.1. Introduction**

De nombreuses méthodes existent aujourd'hui pour réaliser l'étape 1 décrite dans la figure 2.1-1, ce qui en rend le choix particulièrement difficile. Cependant, les conditions rencontrées dans les structures d'Electronique de Puissance nous amènent à constater que certaines méthodes sont plus appropriées à nos problèmes. En effet, les conducteurs sont courts devant les longueurs d'ondes liées aux fréquences de travail ( $f < 100$  MHz), les fronts de commutation sont élevés (quelques  $1000$  A/ $\mu$ s) et l'environnement n'est pas pris en compte.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, il faut pouvoir disposer d'un modèle utilisable par des simulateurs électriques. C'est pourquoi nous favoriserons les méthodes orientées « circuit », c'est à dire celles qui modélisent la connectique par des réseaux électriques pour rendre compte des phénomènes électromagnétiques.

### **2.1.2. Présentation des différentes méthodes**

Les méthodes les plus connues pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques peuvent être différenciées par leurs variables d'état.

Deux types de méthodes existent :

- les premières travaillent sur les valeurs du champ et des potentiels. Si nous voulons obtenir les grandeurs telles que le courant et la tension, il est nécessaire d'inclure les équations de circuit. Quant aux valeurs des impédances, elles sont obtenues grâce à un post-traitement.

- les secondes conduisent directement aux valeurs des impédances électriques. Le couplage avec l'analyse de circuit électrique permet d'évaluer les courants et les tensions. En revanche, le champ et les potentiels nécessitent un traitement supplémentaire.

Ces différences sont résumées dans le tableau suivant :

**Tableau 2.1 : Caractéristiques des différentes méthodes**

|          | Méthodes  | Variables d'Etat  | Couplage avec les équations de circuit   | post traitement   |
|----------|---|---|--|---|
| groupe 1 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eléments Finis</li> <li>• Intégrales de Frontières</li> </ul>        | <ul style="list-style-type: none"> <li>• champ</li> <li>• potentiels</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• tension</li> <li>• courant</li> </ul> | impédance Z   |
| groupe 2 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• PEEC</li> <li>• Moments</li> <li>• Lignes de transmission</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• tension</li> <li>• courant</li> </ul>  | impédance Z  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• champ</li> <li>• potentiels</li> </ul> |

La résolution numérique des équations de Maxwell est devenue possible dans les années 60 grâce à l'apparition des ordinateurs. Les différentes méthodes sont apparues à peu près en même temps.

Une autre différence existe entre les méthodes : si l'emploi des premières méthodes nécessite la description de tout l'environnement électromagnétique (les conducteurs et la matière autour comme l'air ou les diélectriques), les autres permettent de se limiter uniquement à celle des conducteurs traversés par un courant.

En Electronique de Puissance, nous sommes principalement intéressés par les impédances équivalentes de la connectique, c'est pourquoi nous nous sommes orientés vers les méthodes du deuxième groupe.

Finalement les méthodes suivantes seront présentées :

- ✓ la méthode des éléments finis et la méthode des intégrales de frontières,

- ✓ la méthode PEEC (Partial Equivalent Electrical Circuit),
- ✓ la méthode des moments (MoM),
- ✓ la méthode des lignes de transmission.

### 2.1.2.1. Les méthodes des éléments finis et des intégrales de frontières

Ces méthodes sont, parmi les méthodes différentielles numériques, les plus connues pour calculer les problèmes électromagnétiques. Le principe fondamental de la méthode des éléments finis ou de celle des intégrales de frontières réside dans le découpage du domaine d'étude en domaines élémentaires de dimension finie.

Les méthodes des éléments finis conduisent à des matrices très creuses alors que celles des intégrales de frontières donnent des systèmes pleins. En contre partie, le maillage n'est qu'un maillage de peau pour la méthode des intégrales de frontières.

Pour ces méthodes, les variables d'état sont généralement de type champ électrique ou magnétique, ou potentiels dont dérivent les champs. L'introduction des équations de circuit permet de calculer les courants et les tensions.

Dans de nombreux cas, cette méthode a largement prouvé son efficacité, et nous l'emploierons principalement comme référence pour valider nos modèles.

Nous avons utilisé le logiciel FLUX3D comme logiciel d'éléments finis. La description d'un problème physique dans FLUX3D comporte plusieurs étapes :

- ✓ une analyse fine de la géométrie pour prendre en compte toutes les symétries et autres caractéristiques telles que les conditions aux limites,
- ✓ une subdivision du problème en régions afin d'attribuer les caractéristiques physiques appropriées à celles-ci,
- ✓ un maillage adapté à la structure.
- ✓ une résolution et un post-traitement

La réalisation de ces étapes conditionnera la bonne résolution du problème.

Remarque :

Il est à noter que le maillage de régions minces, telles que les plaques des busbars, a été étudié par C. Guérin [KRA] [GUE]. Une solution a été proposée : elle consiste à remplacer les régions volumiques par des surfaces que l'on discrétise par la suite avec des éléments coques.

Les autres méthodes que nous présentons sont en partie analytiques.

Dans les sections suivantes, nous effectuons une rapide présentation des trois méthodes précédemment citées. [TEU] et [YOU] ont effectué des comparaisons de toutes ces méthodes et c'est principalement sur ces travaux que nous nous appuyons.

### 2.1.2.2. La méthode PEEC

La méthode PEEC est une méthode de modélisation d'interconnexions, issue d'une description de la géométrie . Chaque partie de la géométrie est représentée par une équation intégrale qui peut être interprétée en termes de composants électriques équivalents. Ceux-ci sont directement liés aux différentes parties de la géométrie de la structure. C'est l'application des conditions quasi-statiques qui va permettre de résoudre ces équations pour certaines formes, comme les barres rectangulaires. Les équations établies par [HOE] donnent l'inductance partielle et la mutuelle partielle entre deux barres. Ces expressions nécessitent l'hypothèse d'un courant uniformément réparti dans la section droite de la barre. Ainsi, cela implique un maillage des barres pour prendre en compte l'effet de la fréquence ou celui de la proximité des barres [CLA-2].

Depuis 1969, origine de la méthode, de nombreuses évolutions ont été apportées à celle-ci . Par ordre chronologique :

- ✓ le comportement capacitif idéal des interconnexions,
- ✓ la combinaison des modèles inductifs et capacitifs,
- ✓ les interconnexions au dessus des plans de masses,
- ✓ les simplifications dans les techniques d'inversion de matrices d'inductances partielles,
- ✓ les interconnexions de forme non-rectangulaires,
- ✓ les retards dus à la vitesse finie des ondes électromagnétiques, appelé rPEEC,
- ✓ les diélectriques parfaits,
- ✓ les diélectriques avec pertes,
- ✓ l'influence de champs incidents (appelé sPEEC),
- ✓ l'influence de champs incidents 3D,

- ✓ et finalement, en 1995, une méthode a été proposée pour prendre en compte la dépendance de la fréquence des valeurs des éléments partiels [KHA].

### 2.1.2.3. La méthode des Moments

Cette méthode a un domaine d'application plus large que la méthode PEEC et la méthode des Lignes de Transmission. D'une part, elle ne nécessite pas l'hypothèse de l'état quasi-statique, et d'autre part elle n'impose pas un mode de propagation transversale. Il s'agit en fait d'une méthode très générale de résolution d'équations aux dérivées partielles. On peut écrire les équations sous forme temporelle mais le plus souvent sous forme fréquentielle.

Cette méthode permet en particulier la résolution d'une équation intégrale linéaire en courant, et donc de déterminer précisément la distribution du courant dans les structures étudiées, puis de remonter au champ rayonné en tout point de l'espace.

Datant du début du siècle, elle a connu un essor avec l'arrivée des ordinateurs dans les années 60. Elle est détaillée dans l'ouvrage qui sert de référence [HAR].

Tout comme pour la méthode des éléments finis, la première étape consiste à définir le type de problème et donc la fonction  $f$  à évaluer :

$L(f) = g$  avec  $L$  un opérateur linéaire et  $g$  une fonction connue.

Ensuite celle-ci est approchée par une combinaison linéaire de fonctions de base  $f_j$  :

$$f = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot f_j \quad (2.1-1)$$

Dans le but de déterminer les coefficients  $\alpha_j$  de la combinaison linéaire, nous utilisons des fonctions tests  $\omega_i$ , tel que l'égalité suivante soit vraie :

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot \langle \omega_i, L(f_j) \rangle = \langle \omega_i, g \rangle \text{ pour tout } i \in [1 \dots N] \quad (2.1-2)$$

avec  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire entre  $x$  et  $y$

Cette égalité peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V} \tag{2.1-3}$$

avec  $z_{ij} = \langle \omega_i, L(f_j) \rangle$

$$i_j = \alpha_j$$

$$v_i = \langle \omega_i, g \rangle$$

I est donc obtenu par résolution du système précédent.

La résolution du problème est liée au choix des fonctions  $f_j$  et  $\omega_i$ . De ce choix dépendent la précision de la solution, la facilité d'évaluer  $\mathbf{Z}$ , sa taille (pour l'inversion) et son conditionnement.

### 2.1.2.4. La méthode des Lignes de Transmission

Une ligne de transmission consiste en une paire de lignes portant des courants de valeurs égales mais de signes opposés.

Dans les lignes longues et étroites, le principal mode de propagation des ondes électromagnétiques liées au courant de Mode Différentiel est le mode TEM (champs transversaux au sens du courant) [BAD]. A partir du schéma équivalent d'un tronçon d'une ligne de transmission (figure 2.1-1), on exprime ses équations générales (2.1-4).

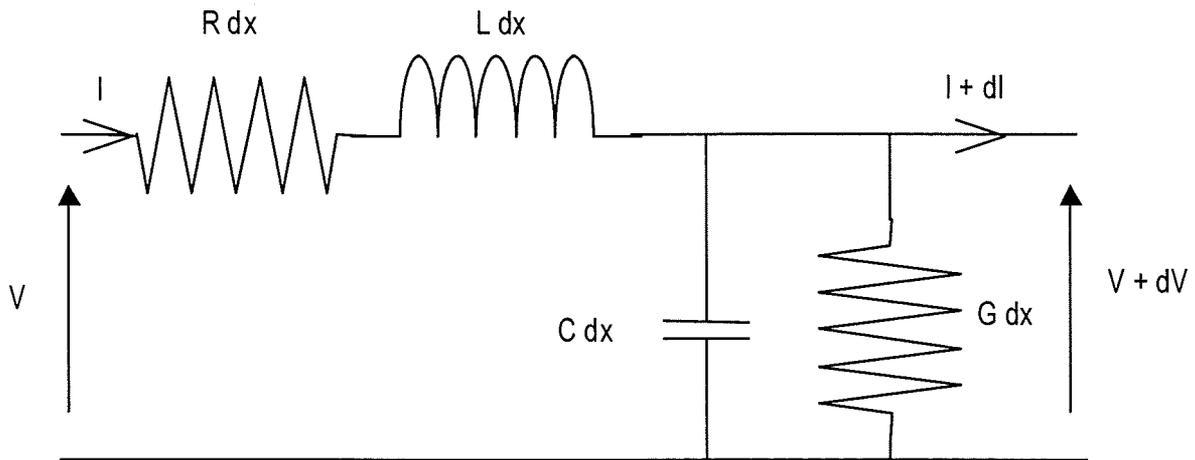


figure 2.1-1 : Schéma équivalent d'un tronçon de ligne

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial V}{\partial t} + RGV \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial I}{\partial t} + RGI \end{cases} \tag{2.1-4}$$

La résolution de (2.1-4) permet d'exprimer les valeurs des composantes électriques équivalentes par unité de longueur (paramètres linéiques).

Cette méthode n'est plus applicable si les conducteurs subissent des effets de bord, le mode de propagation n'est plus alors restreint au mode TEM même en basse fréquence. Il est alors nécessaire de faire appel aux autres méthodes telles que la méthode des moments ou la méthode PEEC.

### 2.1.2.5. Comparaison entre les méthodes

Les méthodes des éléments finis et des intégrales de frontières ne satisfont pas à notre objectif, qui est de déterminer immédiatement les impédances équivalentes de la connectique des structures d'Electronique de Puissance. Il faut en effet passer par un post-traitement ce qui nécessite beaucoup de travail si nous voulons une impédance fonction de la fréquence par exemple, ou remplir la matrice impédance  $Z$ .

Si l'on est dans les conditions de validité de la méthode des lignes de transmission, il est possible de modéliser les structures jusqu'à 1GHz. Si les courants de ligne présentent des asymétries dues par exemple à la présence de mode commun, ou à une hétérogénéité dans la répartition des champs résultant de la faible longueur des connexions, alors le mode de propagation n'est plus le mode TEM. Il faut donc utiliser une autre méthode, et nous proposons la méthode PEEC, pour calculer les caractéristiques électriques de la ligne de transmission. Cette dernière méthode permet d'atteindre 500Mhz [PAU].

Dans le cas des méthodes basées sur l'approximation quasi-statique, la modélisation par des circuits électriques passifs équivalents est impossible si les conditions sont dépassées. Il est alors nécessaire de faire appel à la méthode rPEEC (jusque 1GHz) ou la méthode des moments (MoM) (toujours valable). Au delà, la théorie des guides d'ondes doit être employée.

Cependant, pour les structures rencontrées en Electronique de Puissance, les fréquences ne dépassent pas encore 200MHz et permettent donc de faire, dans la plupart des cas, l'hypothèse quasi-statique.

La méthode PEEC semble alors être la plus intéressante pour trois raisons :

- ✓ les valeurs des composants passifs calculées sont plus précises qu'avec les autres méthodes (ligne de transmission par exemple),

- ✓ les grandeurs courant et tension sont accessibles sur toutes les mailles de la structure,
- ✓ et les courants de mode commun et mode différentiel peuvent être pris en compte en même temps.

Pour la suite de cette thèse la méthode PEEC suffit pour définir nos modèles. Dans la section suivante, nous présenterons plus en détail la théorie de cette méthode.

## 2.2. Théorie de la méthode PEEC

### 2.2.1. But et principe de la méthode PEEC

La méthode PEEC va nous permettre d'obtenir un schéma électrique équivalent très fin de la connectique des structures d'Electronique de Puissance. Deux exploitations de ce schéma électrique sont possibles :

- nous voulons faire une analyse complète du convertisseur et donc relier les modèles des différents éléments qui le composent : des éléments passifs, des interrupteurs et la connectique. Il est alors indispensable de simplifier le modèle obtenu pour la connectique en vue de modéliser finement le comportement des semi-conducteurs. Pour cette phase, nous parlerons dans la suite de **réduction** ou de **condensation** du schéma électrique. On pourra alors étudier précisément les états transitoires des convertisseurs.
- nous voulons nous occuper uniquement des phénomènes qui se passent au niveau de la connectique : connaître, par exemple, la répartition du courant sur une plaque. A partir du schéma électrique équivalent, obtenu par la méthode PEEC, une **analyse** électrique sera menée sur le schéma complet.

Dans de nombreux cas, les deux approches seront imbriquées.

Dans ce chapitre, nous allons développer la méthode PEEC, et ainsi montrer comment on obtient le schéma électrique développé équivalent d'une connectique. Dans le suivant, nous expliquerons comment réduire le schéma et comment obtenir les grandeurs globales telles que le courant.

## 2.2.2. Equations de base et formulation

Afin de pouvoir traiter les méthodes intégrales, la méthode PEEC en particulier, il faut avoir une relation entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , en évitant les opérateurs de dérivées partielles tels que le rotationnel ( $\text{rot}$ ) et la divergence ( $\text{div}$ ). Pour dérouler les calculs, nous cherchons à formuler les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  en un point  $P$  qui se trouve à l'intérieur d'un bon conducteur (figure 2.2-1). Le point  $P$  est parcouru par un courant de densité  $\mathbf{J}$ , et subit un champ statique extérieur  $\mathbf{E}_0$ .

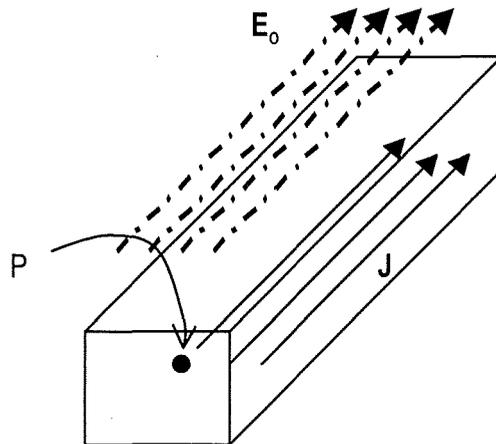


figure 2.2-1 : Point  $P$  à l'intérieur d'une structure conductrice

Pour connaître les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , on commence d'abord par appliquer les équations de Maxwell sous la forme différentielle :

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2-1)$$

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (2.2-2)$$

Trois autres équations peuvent être écrites :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mathbf{E} \quad (2.2-3)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.2-4)$$

$$\text{div}(\mathbf{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.2-5)$$

Pour un bon conducteur, comme par exemple le cuivre qui est utilisé en Electronique de Puissance, la polarisation  $\mathbf{P}$  et la magnétisation  $\mathbf{M}$  sont négligeables. La permittivité relative est alors proche de 1, ainsi que la perméabilité relative. Les équations (2.2-1) et (2.2-2) deviennent donc :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.2-6)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (2.2-7)$$

Le champ électrique  $\mathbf{E}$  est en fait la somme du champ statique et du champ dynamique :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{dyn}} + \mathbf{E}_{\text{stat,int}} + \mathbf{E}_0 \quad (2.2-8)$$

où  $\mathbf{E}_0$  est un champ d'excitation imposé de l'extérieur,

$\mathbf{E}_{\text{stat,int}}$  est la partie de champ de réaction qui dérive du potentiel électrique  $V$ ,

$$\mathbf{E}_{\text{stat,int}} = -\mathbf{grad}(V) = -\nabla V \quad (2.2-9)$$

et  $\mathbf{E}_{\text{dyn}}$  est la partie restante de ce champ de réaction, qu'il nous reste donc à déterminer.

On utilise le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{A}) \quad (2.2-10)$$

(2.2-6) devient :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \quad (2.2-11)$$

D'où l'égalité suivante à un gradient près :

$$\mathbf{E}_{\text{dyn}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.2-12)$$

Le champ  $\mathbf{E}$  s'exprime donc ainsi :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.2-13)$$

On peut dans le métal relier  $\mathbf{E}$  à la densité de courant  $\mathbf{J}$  par :

$$\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (2.2-14)$$

où  $\sigma$  est la conductivité du métal.

Dans le but de supprimer le rotationnel de l'équation (2.2-7), nous utilisons à nouveau le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . En substituant (2.2-10) à (2.2-7), on obtient :

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{A})) = \mu_0 \cdot \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.2-15)$$

On utilise l'identité suivante :

$$\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{A})) = \text{grad}(\text{div}(\mathbf{A})) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.2-16)$$

$$\text{Avec : } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2-17)$$

et on utilise par ailleurs la jauge de Coulomb

$$\text{div}(\mathbf{A}) = 0. \quad (2.2-18)$$

(2.2-15) devient alors :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \cdot \left( \mathbf{J} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.2-19)$$

On insère (2.2-14) dans (2.2-19) :

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \cdot \left( \sigma \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.2-20)$$

Les équations de Maxwell sont donc devenues :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V + \mathbf{E}_0 \quad (2.2-21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \cdot \left( \sigma \cdot \mathbf{E} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.2-22)$$

Ces deux équations sont couplées, ce qui rend difficile leur intégration.

Pour découpler (2.2-21) et (2.2-22), nous allons appliquer l'approximation quasi-statique. On néglige alors le terme du courant de déplacement ( $\epsilon_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ ).

Les équations de Maxwell deviennent alors :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V + \mathbf{E}_0 \quad (2.2-23)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (2.2-24)$$

On rappelle que les 4 termes de (2.2-23) représentent :

- ✓ le champ électrique,
- ✓ le champ lié à la présence du champ magnétique variable dans le temps,
- ✓ le champ lié au gradient de potentiel,
- ✓ et le champ électrique imposé de l'extérieur.

La résolution des équations (2.2-23) et (2.2-24) donne les expressions de  $\mathbf{A}$  et  $V$  pour une structure de  $K$  conducteurs [RUE-1] :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^K \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{V_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \cdot dV' \quad (2.2-25)$$

$$V(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^K \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{V_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}', t) \cdot dV' \quad (2.2-26)$$

Où  $\mathbf{r}'$  est la distance entre le point P et le conducteur k,  
et  $V_k$  est le volume du conducteur k.

(2.2-23) peut être réécrite comme suit :

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{k=1}^K \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{V_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \cdot dV' \right] + \sum_{k=1}^K \nabla \left[ \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{V_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}', t) \cdot dV' \right] = \mathbf{E}_0 \quad (2.2-27)$$

Cette équation peut être interprétée comme l'application de la loi d'Ohm au champ électrique total.

Pour la densité de courant, on écrit :

$$\mathbf{J} = J_x \cdot \mathbf{x} + J_y \cdot \mathbf{y} + J_z \cdot \mathbf{z} \quad (2.2-28)$$

On note  $\gamma = x, y, z$  pour chaque direction. Si on introduit ce résultat dans (2.2-27), on obtient pour la direction  $\gamma$  :

$$\frac{J_\gamma(r, t)}{\sigma} + \sum_{k=1}^K \left[ \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\partial J_\gamma(r', t)}{\partial t} \cdot \int_{V_k} \frac{1}{|r-r'|} \cdot dV' \right] + \sum_{k=1}^K \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \int_{S_k} \frac{1}{|r-r'|} \cdot q(r', t) \cdot dS' \right] \quad (2.2-29)$$

Dans laquelle  $J_\gamma$  est constant sur chaque volume  $V_k$ , et où la densité de charges volumiques  $q$  a été remplacée par la densité surfacique de charges, également notée  $q$ . Ceci est autorisé dans un bon conducteur, les charges libres se situant en surface.

On intègre maintenant (2.2-29) sur un volume  $V_l$  appartenant à un des conducteurs  $K$ .

On obtient alors :

$$\frac{J_\gamma \cdot V_l}{\sigma} + \sum_{k=1}^K \left[ \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\partial J_\gamma}{\partial t} \int_{V_l} \int_{V_k} \frac{1}{|r-r'|} dV' dV_l \right] + \sum_{k=1}^K \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_l} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \int_{S_k} \frac{1}{|r-r'|} q(r', t) dS' \right] dV_l = \int_{V_l} E_{0,\gamma} dV_l \quad (2.2-30)$$

On reconnaît aussitôt :

1) que le premier terme représente la chute de tension d'origine résistive sur le volume  $V_l$  :

$$V_{r,l} = R_\gamma \cdot I_\gamma \quad (2.2-31)$$

2) que le deuxième terme correspond à l'ensemble  $V_{L,l}$  des couplages inductifs. Le terme entre parenthèses représente le couplage entre les conducteurs  $l$  et  $k$ .

3) que le troisième terme symbolise l'ensemble  $V_{C,l}$  des couplages capacitifs.

4) que le terme de droite est la tension appliquée  $E_0$

Nous pouvons aussi faire apparaître le schéma électrique du conducteur  $l$  (figure 2.2-2).

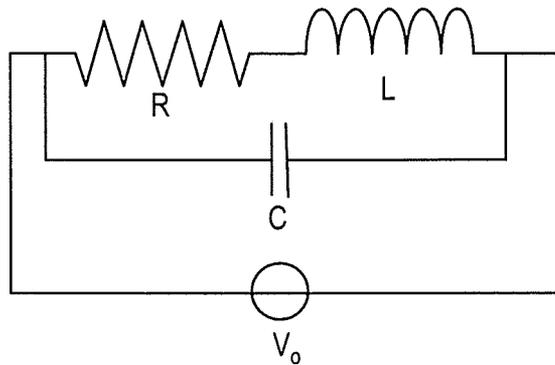


figure 2.2-2 : Schéma électrique équivalent d'un conducteur

Chacun des termes composant le schéma électrique sera détaillé dans la section suivante.

A partir de (2.2-30), A.E. Ruehli [RUE-2] a créé la notion d'éléments partiels afin de pouvoir modéliser la connectique d'une structure, à l'aide d'un circuit électrique à constantes localisées ( $R, L, C$  et  $M$ ).

### 2.2.3. Formules des constantes localisées partielles

La détermination des expressions analytiques des éléments partiels nécessite la répartition uniforme du courant dans le conducteur étudié.

#### 2.2.3.1. Tension appliquée

Le dernier terme de (2.2-30) est la tension appliquée  $V_0$  au conducteur : c'est l'intégrale du champ appliqué sur le circuit. Pour une source localisée (figure 2.2-3), le champ appliqué peut être considéré comme le gradient d'un potentiel.

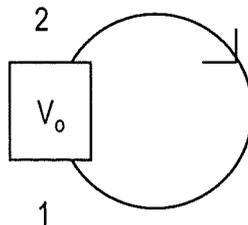


figure 2.2-3 : Boucle avec source localisée.

### 2.2.3.2. Résistance partielle

Le premier terme de l'équation (2.2-30) correspond à la chute résistive, il faut exprimer  $R_\gamma$ . Pour cela, nous allons maintenant utiliser la formule suivante

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} \quad (2.2-32)$$

- où  $L$  est la longueur du conducteur,
- $S$  est la section du conducteur,
- $\rho$  est la résistivité du matériau.

### 2.2.3.3. Inductance partielle $L$ et couplage inductif $M$

Le terme inductif est représenté par le deuxième terme de l'équation (2.2-30). Nous allons maintenant exprimer de manière analytique cette inductance. Pour une meilleure compréhension, nous rappelons les principales étapes qui permettent d'arriver aux différentes formules.

On considère une boucle rectangulaire filiforme parcourue par un courant  $I$ . Les dimensions de cette boucle sont supposées négligeables devant la longueur d'onde, et donc le courant est constant le long de la boucle (figure 2.2-4).

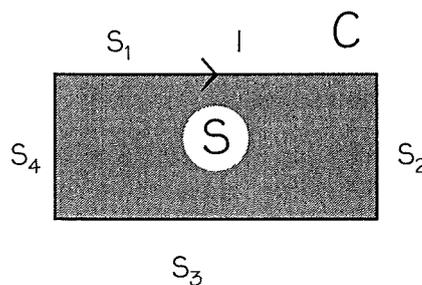


figure 2.2-4 : Boucle rectangulaire filiforme

En appliquant le théorème de Stokes, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \left( \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right) = \frac{d}{dt} \left( \iint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) \\ &= L_b \cdot \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (2.2-33)$$

avec  $L_b$  qui est l'inductance de boucle

La circulation de  $\mathbf{A}$  peut se décomposer sur chacun des 4 segments :

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2-34)$$

De plus, le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  est égal à la somme de la contribution de chaque segment :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{S_1} + \mathbf{A}_{S_2} + \mathbf{A}_{S_3} + \mathbf{A}_{S_4} \quad (2.2-35)$$

Ainsi la combinaison des équations (2.2-33), (2.2-34) et (2.2-35) permet d'écrire

$$L_b = \frac{1}{I} \cdot \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 \int_{S_m} \mathbf{A}_{S_n} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2-36)$$

De (2.2-36), apparaissent les définitions de l'inductance partielle  $L_{pm}$  et de la mutuelle partielle  $M_{pmn}$  entre 2 segments :

$$L_{pm} = \frac{1}{I} \cdot \int_{S_m} \mathbf{A}_{S_m} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2-37)$$

$$M_{pmn} = \frac{1}{I} \cdot \int_{S_m} \mathbf{A}_{S_n} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2-38)$$

A partir de cette dernière formule la mutuelle entre deux fils parallèles (figure 2.2-5) peut être exprimée analytiquement.

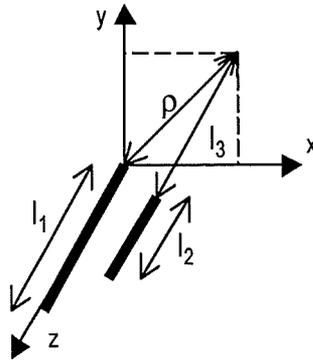


figure 2.2-5 : Mutuelle entre deux conducteurs filiformes

$$M_{p12} = \frac{1}{l_1} \cdot \int_{\text{fil2}} \mathbf{A}_{s_1} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2-39)$$

$$\text{et } \mathbf{A}_{s_1} (M) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^{l_1} \frac{l_1}{dr} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{avec } r = \sqrt{\rho^2 + (z_0 - z)^2} \quad (2.2-40)$$

$$\text{D'où } M_{p12} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \left[ z \cdot \ln \left( z + \sqrt{\rho^2 + z^2} \right) - \sqrt{\rho^2 + z^2} \right]_{|_{z_3+l_2-l_1, l_3}}^{|_{z_3-l_1, l_3+l_2}} \quad (2.2-41)$$

$$\text{Avec } [f(x)]_{x_2, x_4}^{x_1, x_3} = f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) - f(x_4)$$

Cette formule ne permet pas le calcul de l'inductance partielle car celle-ci diverge lorsque  $\rho$  et  $l_3$  sont nuls. Il est possible d'exprimer l'inductance partielle d'un conducteur cylindrique en déterminant séparément l'inductance externe et l'inductance interne. Mais celles-ci n'ont pas été utilisées car les formules volumiques sont plus utiles pour l'Electronique de Puissance.

Les connectiques rencontrées peuvent être en effet soit de section circulaire (fil rond) soit le plus souvent de section rectangulaire (piste de circuit imprimé, barres de connexion, ...) (figure 2.2-6). Pour ce dernier type, l'expression de la mutuelle est obtenue par intégrations successives de la formule entre deux fils filiformes, selon l'épaisseur et la largeur de chaque barre. Nous aboutissons alors à l'expression (2.2-42) de C.Hoer et C.Love [HOE].

Au cours de leurs travaux de thèse, J.L.Schanen [SCH-1] et E.Clavel [CLA-1] ont validé l'utilisation de cette méthode analytique pour la modélisation de la connectique d'Electronique de Puissance. Cette

méthode a d'ailleurs été introduite au sein d'un logiciel de modélisation (InCa) [INC] qui a permis de valider la modélisation sur des structures réelles.

C'est cette dernière que nous utiliserons par la suite.

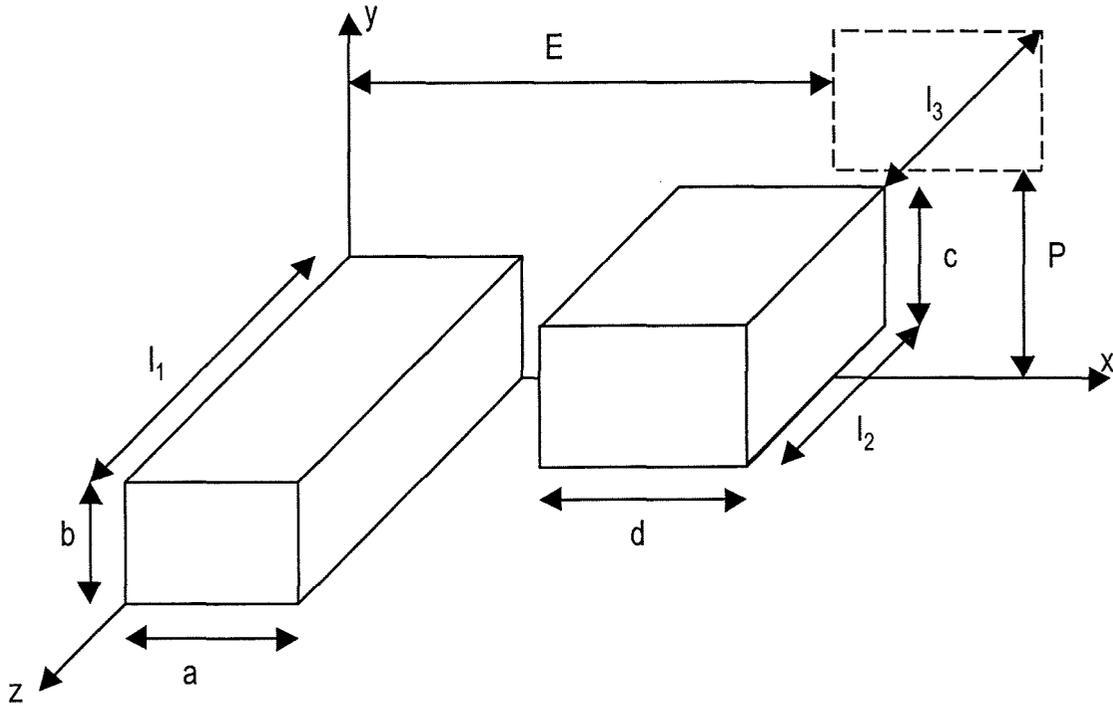


figure 2.2-6 : Mutuelle partielle entre deux barres massives parallèles

$$M = \frac{0,001}{abcd} \begin{bmatrix} \left( \frac{y^2 z^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) \cdot x \cdot \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \\ \left( \frac{x^2 z^2}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) \cdot x \cdot \ln \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \\ \left( \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{y^4}{24} \right) \cdot x \cdot \ln \frac{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \\ \frac{1}{60} \cdot (x^4 + y^4 + z^4 - 3x^2 y^2 - 3y^2 z^2 - 3x^2 z^2) - \\ \frac{xyz^3}{6} \cdot \text{Arctg} \frac{xy}{z \cdot \sqrt{x+y+z}} - \frac{xy^3 z}{6} \cdot \text{Arctg} \frac{xz}{y \cdot \sqrt{x+y+z}} - \\ \frac{x^3 yz}{6} \cdot \text{Arctg} \frac{yz}{x \cdot \sqrt{x+y+z}} \end{bmatrix} \begin{matrix} -E-a, E+d \\ P-b, P+c \\ l_3 - l_1, l_3 + l_2 \\ (x) \\ (y) \\ (z) \\ E+d-a, E \\ P+c-b, P \\ l_3 + l_2 - l_1, l_3 \end{matrix} \quad (2.2-42)$$

$$\text{Avec } \left[ \left[ \left[ f(x,y,z) \right]_{x_2, x_4}^{x_1, x_3} (x) \right]_{y_2, y_4}^{y_1, y_3} (y) \right]_{z_2, z_4}^{z_1, z_3} (z) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{1+i+j+k} \cdot f(x_i, y_j, z_k)$$

Pour obtenir l'inductance partielle d'une barre, il faut annuler  $l_3$ , E et P et prendre d, c,  $l_1$  respectivement égaux à a, b et  $l_2$ .

Cette expression est valable, si la densité de courant est uniforme et constante dans la section de chaque élément. Cela signifie que le courant circule parallèlement aux surfaces du conducteur et qu'il n'y a pas d'accumulations de charges sur les surfaces. Ainsi, les composants électriques équivalents obtenus ne dépendent que de la géométrie du circuit.

#### 2.2.3.4. Capacité partielle C et couplage capacitif

Comme pour les inductances partielles, une expression analytique de C peut être trouvée. Les différentes manières de prendre en compte ces capacités dans le schéma électrique équivalent ont été étudiées [YOU] [RUE-3] [RUE-4]. Les applications que nous avons traitées au cours de cette thèse ne nous ont pas donné l'occasion de prendre en compte ces capacités.

En revanche, dans la suite, la démarche d'optimisation que nous emploierons pourra intégrer des capacités.

### 2.3. Schéma électrique de la connectique

#### 2.3.1. Démarche de modélisation

La modélisation de la connectique a pour but de connaître le comportement réel du convertisseur (figure 2.3-1), notamment l'influence des conducteurs reliant les différents composants actifs ou passifs qui ne sont plus considérés parfaits. Ils peuvent engendrer des pertes supplémentaires, des déséquilibres en courant ou des surtensions.

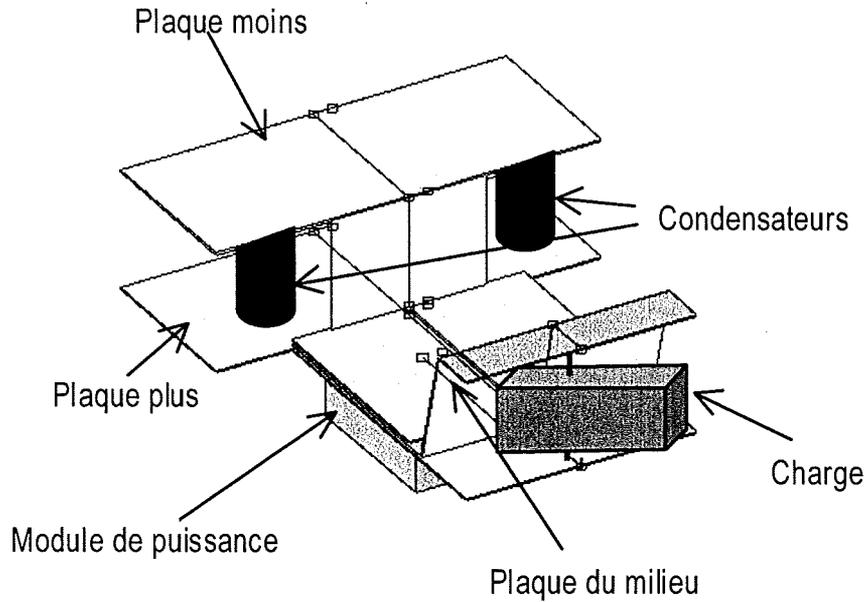


figure 2.3-1 : Dessin du convertisseur de CEFC'98

Rappelons que la formule obtenue par C. Hoer et C. Love pour le calcul de la mutuelle s'applique à des conducteurs parallélépipédiques, parcourus par des courants constants et unidirectionnels. Dès lors, une découpe de la géométrie (figure 2.3-2) de la structure en portions rectilignes s'avère indispensable (figure 2.3-3).

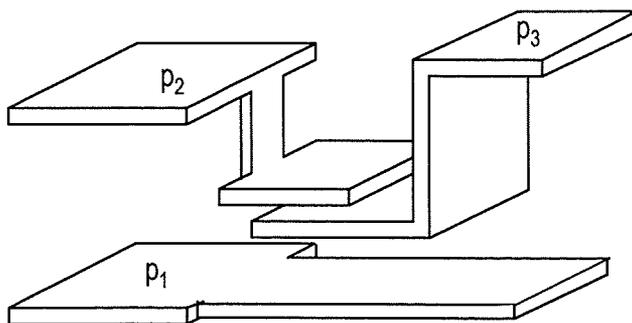


figure 2.3-2 : Géométrie de la connectique

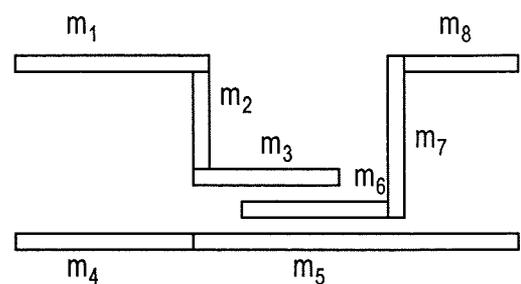


figure 2.3-3 : Maillage de la connectique

Ensuite les inductances, résistances et mutuelles inductives sont évaluées à l'aide de la formule (2.2-42), et le schéma électrique est alors établi (figure 2.3-4).

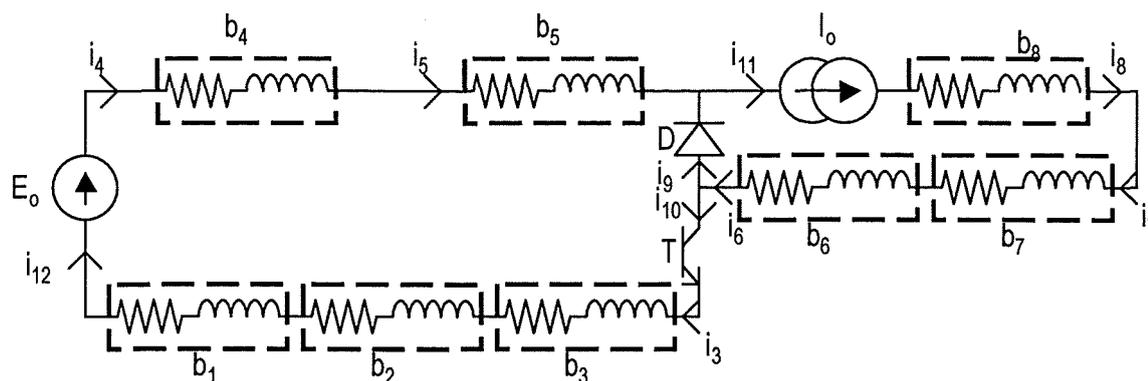


figure 2.3-4 : Schéma électrique complet issu de la modélisation

Remarque :

Pour une meilleure compréhension du schéma électrique, nous ne représenterons pas les inductances mutuelles  $M_{ij}$ .

Ce schéma peut être alors synthétisé dans un système matriciel :

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \quad (2.3-1)$$

avec  $\mathbf{I} = [i_1 \dots i_{12}]$

$$\mathbf{U} = [u_1 \dots u_{12}]$$

et  $\mathbf{Z}$  matrice des impédances propres à chacune des branches et des couplages.

Les inconnues du système sont alors  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{U}$ , hormis des valeurs de courants de branche  $i_i$  et des tensions de branches  $u_j$  connues, correspondant aux sources.

En partant du schéma de la figure 2.3-4, deux aspects peuvent être étudiés :

☞ **La réduction** : le comportement global du convertisseur. Pour cela, nous utiliserons le modèle de la connectique, mais aussi ceux des interrupteurs, des composants passifs et des sources (figure 2.3-5). Le but est alors de connaître les formes d'ondes du courant et de la tension propres à chaque composant.

Aujourd'hui, nous sommes en mesure d'obtenir tous les modèles des composants des convertisseurs. Cependant, tous ces modèles sont obtenus avec des logiciels différents, ce qui nécessite d'utiliser un solveur circuit indépendant pour les assembler. Si les modèles sont tous développés, il sera difficile de pouvoir les grouper au sein d'un même logiciel. C'est pourquoi il est nécessaire que le volume de tous

les modèles utilisés soit limité et que ces modèles soient de même type (par exemple des schémas électriques) afin de pouvoir les assembler facilement. Ceci nécessitera une réduction du modèle de la connectique en particulier : c'est l'étape 2 de la figure 2.1-1.

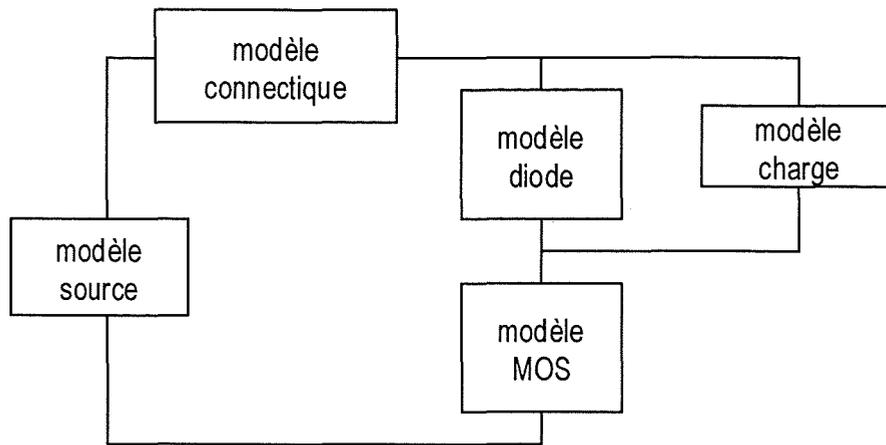


figure 2.3-5 : Modèle global du convertisseur

Dans la section suivante, nous montrerons comment il est possible d'assembler tous les modèles.

☞ **L'analyse** : les phénomènes locaux au sein du convertisseur, comme la répartition des courants sur une plaque de connectique (étape 3 de la figure 2.1-1), en vue de la détermination des efforts électrodynamiques (étape 4 de la figure 2.1-1). Ainsi, il faudra dans ce cas un modèle fin de la connectique afin de réaliser cette analyse. Le schéma électrique ne prendra plus en compte tous les modèles des différents composants du convertisseur. On supposera parfait le comportement de certains composants (figure 2.3-6) et les sources de tension et de courant seront prises en compte.

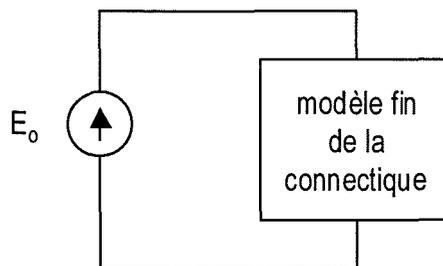


figure 2.3-6 : Modèle pour une analyse locale

Dans la suite, il ne faudra pas oublier les deux approches possibles du traitement du modèle électrique.

Ici, nous avons découpé notre géométrie en conducteurs rectilignes pour appliquer les formules des inductances et des résistances. Pour cela, nous avons supposé que l'hypothèse d'une densité de courant uniforme et constante dans la section de chaque élément est réalisée. Ceci ne peut plus être considéré comme valable lorsqu'on travaille à des fréquences élevées. Il apparaît alors un effet de peau qui ne permet plus de supposer que la densité de courant est uniforme et constante dans la section d'un élément.

De plus, lorsque les conducteurs sont proches les uns des autres, un déséquilibre du courant se crée. Le courant se concentre alors sur les bords des plaques : c'est l'effet de proximité.

Une troisième approche (figure 2.3-7) peut-être développée. C'est une variante des deux précédentes. Lors de l'analyse, les sources de tension sont des sources statiques, imposées par le concepteur. Une autre possibilité existe. Après avoir étudié le comportement global du convertisseur (phase de réduction), nous pouvons utiliser les formes d'ondes exactes du courant et de la tension pour obtenir les tensions et courants locaux au sein des plaques des busbars. Dès lors, il sera possible, moyennant un post-traitement de déterminer l'induction **B** et les forces **F** qui s'appliquent sur les plaques.

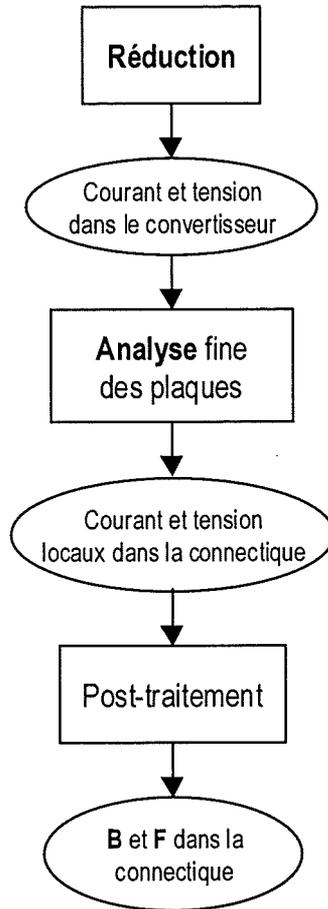


figure 2.3-7 : calcul du champ **B** et des forces **F**

### 2.3.2. Prise en compte de la non-uniformité du courant.

Selon les conditions de fonctionnement des structures, il peut apparaître différents effets : effet de peau, effet de proximité,... Nous devons alors revenir à des cas où l'hypothèse d'uniformité du courant est valable pour pouvoir appliquer les formules de C.Hoer et C.Love. Pour cela, nous devons discrétiser la géométrie. Deux cas se distinguent ainsi selon l'allure des lignes de courant.

#### 2.3.2.1. modélisation unidirectionnelle

La connectique en électronique de puissance est souvent réalisée en circuit imprimé ou à l'aide de busbars. Dans la plupart des segments rectilignes, nous considérerons que les lignes de courants sont rectilignes et parallèles entre elles (figure 2.3-8).

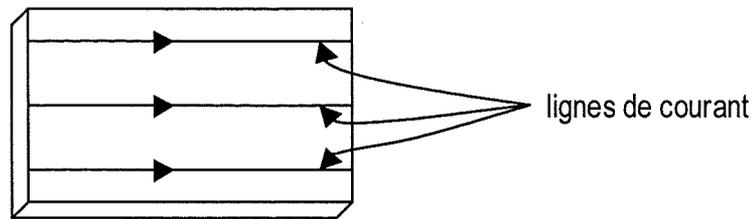


figure 2.3-8 : Lignes de courants parallèles

Il suffit dans ces cas de subdiviser le conducteur selon le sens du courant et ensuite d'évaluer pour chaque subdivision, le circuit équivalent L, R série et les mutuelles inductives M (figure 2.3-9).

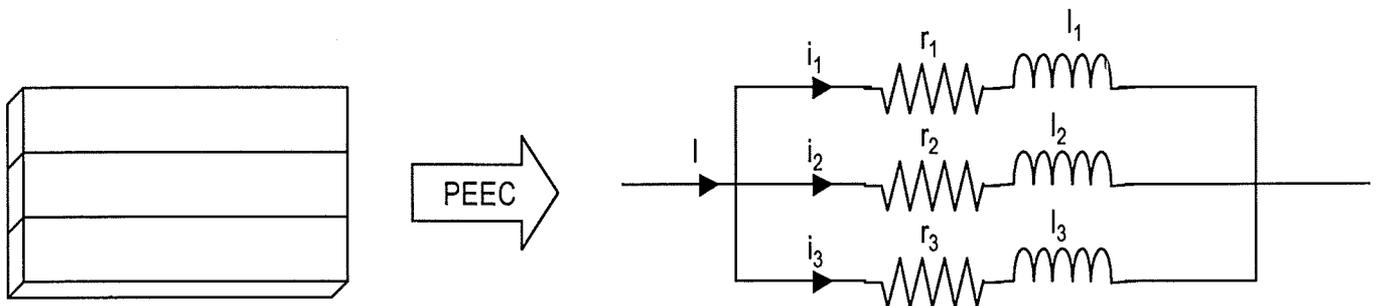


figure 2.3-9 : Modélisation électrique

### 2.3.2.2. modélisation bidirectionnelle

Le type de modélisation précédent n'est pas toujours suffisant. En effet, il est par exemple possible que dans certains cas les connexions entre les composants se fassent à l'aide de vis au milieu des plaques (figure 2.3-10).

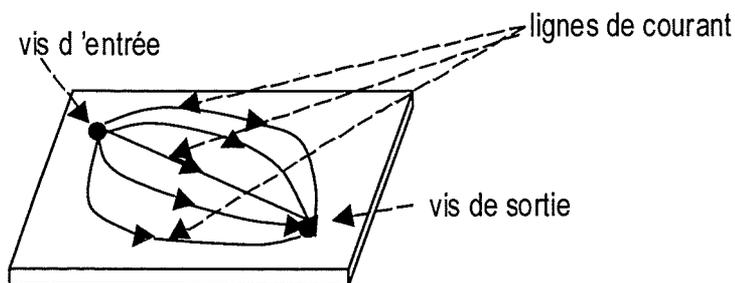


figure 2.3-10 : Courant bidirectionnel

Il est alors impossible de considérer les lignes de courants rectilignes et parallèles entre elles. Ceci implique la subdivision de la plaque selon les deux directions de propagation du courant, afin de prendre en compte le chemin exact de celui-ci (figure 2.3-10).

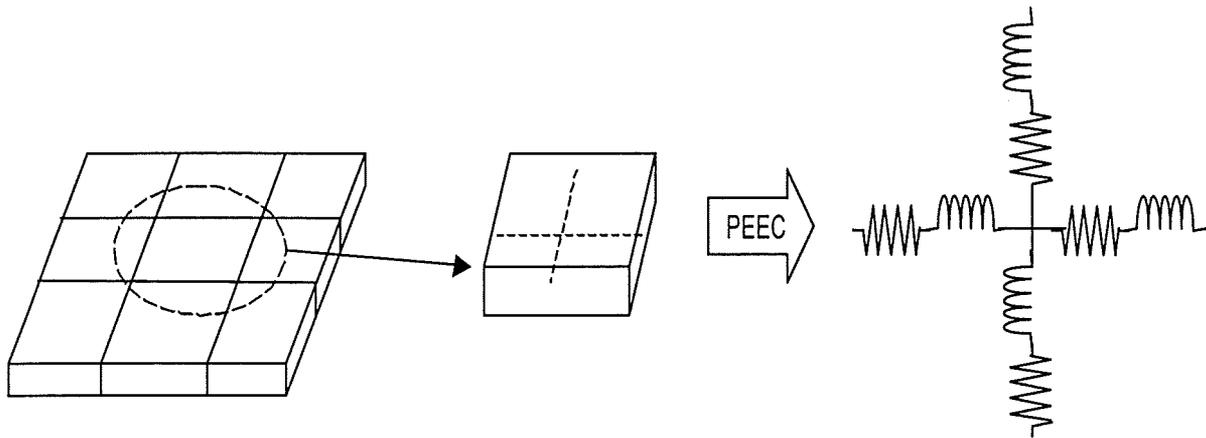


figure 2.3-11 : Modélisation 2D d'une plaque

Pour chaque élément, nous calculons les composantes électriques du schéma équivalent, représenté sur la figure 2.3-11, avec les formules de C.Hoer et C.Love. Ensuite lorsque nous assemblons toutes les caractéristiques électriques évaluées, nous obtenons un treillis de R, L série et des mutuelles de couplage entre chaque inductance (figure 2.3-12).

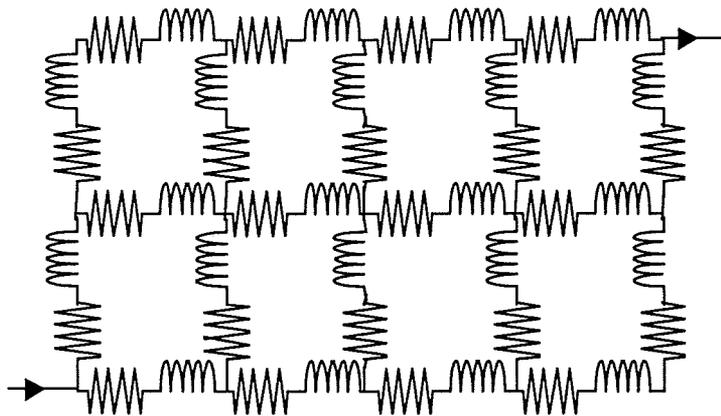


figure 2.3-12 : Schéma électrique d'une plaque modélisée en 2D

Une modélisation 2d d'une plaque de connectique aboutit très facilement à des matrices d'impédances de dimension supérieures à 1000.

Remarques :

- Pour des raisons de clarté, nous ne représentons pas les mutuelles entre les inductances. Mais pour  $n$  inductances, il existe  $\frac{n(n-1)}{2}$  mutuelles. Certaines sont nulles lorsque les éléments sont perpendiculaires. On s'aperçoit que le treillis de R, L série obtenu après une modélisation 2D devient très vite complexe à exploiter, si une méthode d'analyse n'est pas développée en même temps.
- Il est possible de réaliser une modélisation 3D : le courant se déplace alors dans un massif. Mais elle n'est pas développée car elle est très peu rencontrée en Electronique de Puissance.

### 2.3.3. Conclusion

Dans cette partie, nous avons montré comment modéliser une structure de convertisseur. La modélisation aboutit à la résolution d'un système matriciel :

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{I}$  sont respectivement les tensions et les courants relatifs à chaque élément du convertisseur,

et  $\mathbf{Z}$  la matrice impédance composée des éléments calculés avec la méthode PEEC.

La résolution du système devra nous laisser le choix du comportement (local ou global) du convertisseur que nous souhaitons étudier.

## 2.4. Analyse de circuit

Dans la partie précédente, nous avons réalisé l'étape 1 du processus décrit en introduction de ce chapitre (figure 2.4-1). Nous avons un schéma développé du câblage, nous allons maintenant nous intéresser aux étapes 2 et 3.

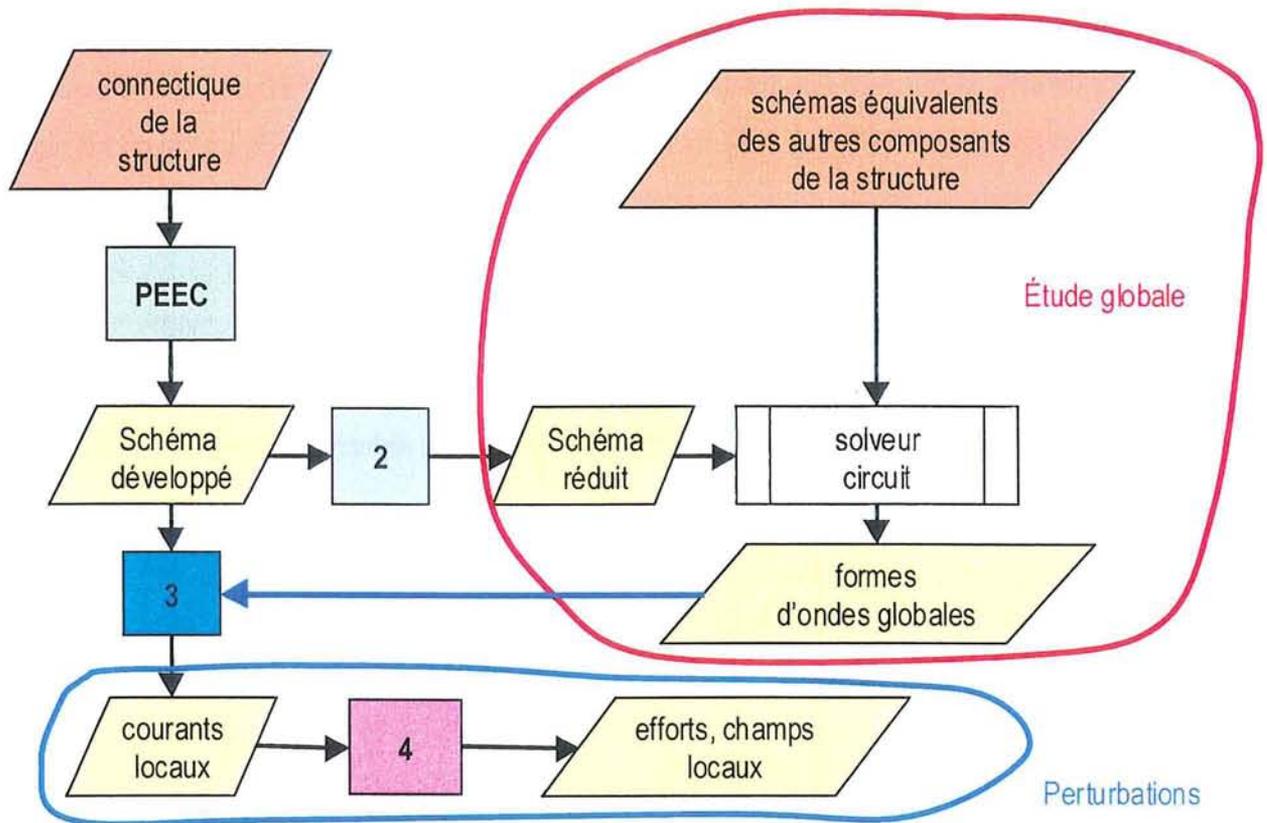


figure 2.4-1 : Processus de modélisation

### 2.4.1. Introduction

Dans la section précédente, nous avons expliqué comment modéliser les connexions d'Electronique de Puissance afin d'obtenir leur schéma électrique équivalent. Celui-ci est formé de composants électriques localisés en nombre relativement important si le maillage des plaques est dense. Il s'est avéré indispensable de mettre au point une méthodologie reproductible à tous les types de connectique que nous pouvons rencontrer en Electronique de Puissance : fils, circuits imprimés, busbars, ...

Après application de la méthode PEEC, nous avons un système matriciel  $\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$ . Il faut réussir à la fin de cette analyse de circuit :

- soit à obtenir une relation réduite  $u = z \cdot i$  si nous souhaitons étudier le comportement global du système,
- soit à évaluer  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{I}$ .

Une seconde contrainte associée à la méthode d'analyse est rattachée à des besoins d'optimisation. Jusqu'à présent, la démarche de modélisation à l'aide de la méthode PEEC donne des expressions analytiques pour le calcul de R, L et M et donc des gradients analytiques de R, L et M en fonction des paramètres géométriques. Ce caractère analytique est l'un des avantages de cette méthode sur les autres (MoM, ou éléments finis).

En vue d'une optimisation avec l'utilisation des gradients en fonction de la géométrie, ce caractère analytique est de plus un atout.

Pour toutes ces raisons, nous allons développer une méthode de réduction d'analyse dont la contrainte est de garder les formulations analytiques aussi loin que possible.

Nous nous sommes orientés vers une analyse topologique systématique qui utilise les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles).

## 2.4.2. Notions élémentaires

### 2.4.2.1. Graphe associé

Les lois de Kirchhoff ne dépendent pas du type de composants (actif ou passif, linéaire ou non-linéaire), mais seulement du graphe orienté du circuit. Par exemple, la figure 2.4-2 montre un circuit électrique et son graphe associé.

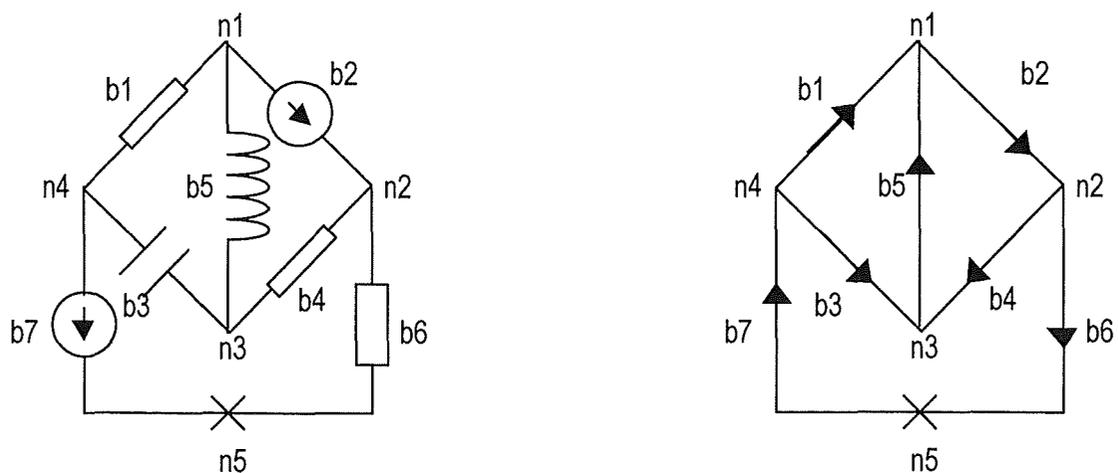


figure 2.4-2 : Circuit électrique et son graphe associé

Ce circuit électrique est constitué de 7 composants qui sont représentés dans le graphe associé par les segments orientés. Les points de connexions, ici au nombre de 5, des bornes des composants sont les **nœuds** topologiques. Et les segments orientés dans le sens de référence s'appellent les **branches**.

On définit aussi la notion de **maille**, qui est une courbe fermée, orientée dans un sens de référence, qui suit les branches, telle que celles-ci soient parcourues au plus une seule fois. Pour notre exemple, il existe 6 mailles comme nous pouvons le voir sur la figure 2.4-3. Mais il apparaît que ces mailles sont redondantes et ne forment pas un système indépendant. Il va donc falloir trouver le nombre de mailles indépendantes qui permettent de décrire à elles seules le système.

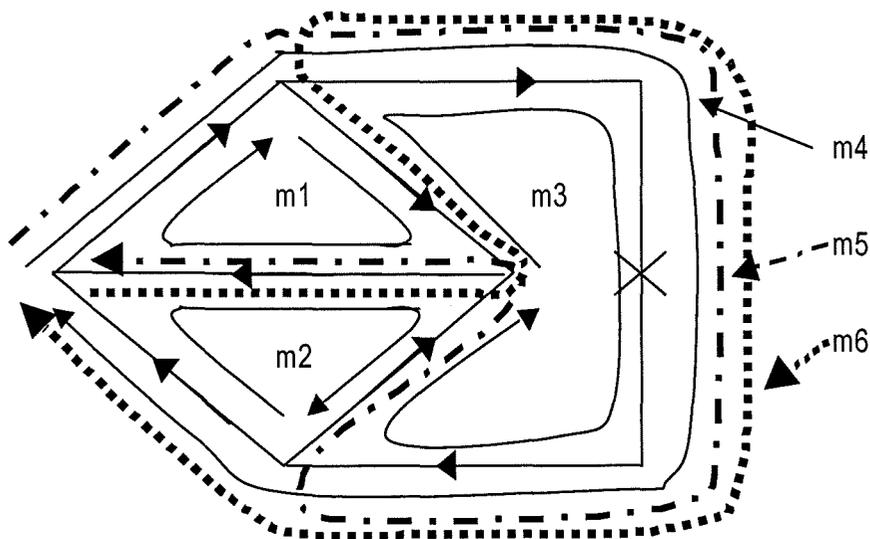


figure 2.4-3 : Mailles électriques

### 2.4.2.2. Théorème d'Euler

Si on considère le graphe d'un circuit électrique connexe comportant  $b$  branches et  $n$  nœuds, le système des équations intégrodifférentielles indépendantes pour le calcul des tensions et des courants dans les composants comprend  $n - 1$  équations de nœuds et  $b - n + 1$  équations de mailles.

Il faut noter que le nombre  $b$  de branches est plus grand que le nombre  $n$  de nœuds, ce qui pourra constituer un facteur de choix quant à l'algorithme de calcul.

Dans le cas précédent, il faut donc trouver 3 mailles indépendantes (car  $b = 7$  et  $n = 5$ ). Pour la suite, nos 3 mailles indépendantes seront les mailles  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$ .

### 2.4.2.3. Matrices d'incidence des branches aux nœuds

Soit la matrice d'incidence  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1b} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nb} \end{bmatrix}$

avec  $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la branche } j \text{ part du nœud } i \\ -1, & \text{si la branche } j \text{ arrive au nœud } i \\ 0, & \text{si la branche } j \text{ n'est pas connecté au nœud } i \end{cases}$

La matrice  $\mathbf{N}$  sera appelée dans la suite matrice **noeud-branche**. Avec cette matrice  $\mathbf{N}$ , on peut écrire la loi des nœuds :

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (2.4-1)$$

avec  $\mathbf{I}$  le vecteur des courants de branche, dimension  $b$

La matrice  $\mathbf{N}$  n'est pas régulière. Pour la transformer, il faut lui supprimer une ligne et l'on obtient alors la matrice d'incidence réduite  $\mathbf{N}'$  qui est régulière. Cette opération correspond au choix d'un nœud de référence. On peut toujours écrire la relation :

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (2.4-2)$$

### 2.4.2.4. Matrices d'incidence des branches aux mailles

Soit la matrice  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1b} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mb} \end{bmatrix}$

avec  $m = b - n + 1$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si la branche } j \text{ appartient à la maille } i \text{ et si elles sont orientées dans le même sens} \\ -1, & \text{si la branche } j \text{ appartient à la maille } i \text{ et si elles sont orientées dans le sens opposé} \\ 0, & \text{si la branche } j \text{ n'appartient pas à la maille } i \end{cases}$$

La matrice **M** sera appelée dans la suite matrice **maille-branche**. On peut ainsi écrire la loi des mailles :

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.4-3)$$

avec **U** le vecteur des tensions de branche, dimension b.

#### 2.4.2.5. Equations des branches

Dans les paragraphes précédents, nous avons fait abstraction des composants du circuit. Nous allons les prendre en compte en exprimant la loi d'Ohm sur chaque branche. Deux méthodes duales existent.

##### Les courants de branches fonction des tensions de branches :

Dans les systèmes que nous décrivons, il est toujours possible d'écrire la loi d'Ohm :

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} \quad (2.4-4)$$

avec **I** : vecteur des courants de branche,

**U** : vecteur des tensions de branche,

**Y** : matrice des impédances relatives aux branches.

Les vecteurs **I** et **U** ne sont pas alors composés entièrement d'inconnues. Certains  $i_i$  et  $u_j$  peuvent être fixés par la structure : ce sont alors des sources de courant et de tension.

Dans cette approche, l'inconnue est le vecteur **U**.

Les sources de courant vont être isolées dans un vecteur  $\mathbf{I}_g$ . La loi (2.4-4) devient alors :

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{I}_g \quad (2.4-5)$$

avec  $\mathbf{I}_g$  le vecteur des générateurs de courants

Afin d'illustrer ceci, nous reprenons l'exemple de la figure 2.4-2 et nous supposons que les générateurs sont des générateurs de courant. Nous avons alors les expressions suivantes :

$$I_g = [0 \quad I_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad I_2]^t \text{ et } Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & jC\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{jL\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Les tensions de branches en fonction des courants de branches :**

Pour cette approche, nous exprimons la loi d'Ohm ainsi :

$$U = Z \cdot I \tag{2.4-6}$$

avec **U** : vecteur des tensions de branches,

**I** : vecteur des courants de branches,

**Z** : matrice des impédances relatives à chaque branche.

Comme dans le cas précédent, il peut y avoir des sources de tensions et de courants.

L'inconnue est ici le vecteur courant **I**. Les sources de tension sont réunies dans le vecteur **U<sub>g</sub>**.

La loi (2.4-6) devient :

$$U = Z \cdot I + U_g \tag{2.4-7}$$

avec **U<sub>g</sub>** le vecteur des générateurs de tension

Cette fois-ci, nous supposons que les générateurs sont des générateurs de tension. Nous avons alors les expressions suivantes :

$$U_g = [0 \quad E_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad E_2]^t \text{ et } Z = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{jC\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & jL\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.4.3. Analyse de nos circuits

Nous avons défini précédemment les éléments indispensables au déroulement de notre analyse. Nous allons expliquer dans la suite les répercussions des deux approches précédentes. Puis nous exposerons notre choix et les raisons de celui-ci. Pour dérouler le principe des deux méthodes, nous allons prendre un exemple simple : 2 barres rectilignes, que nous modéliserons en 1D respectivement en 2 et 3 éléments (figure 2.4-4). Ici, les barres ont été isolées du convertisseur.

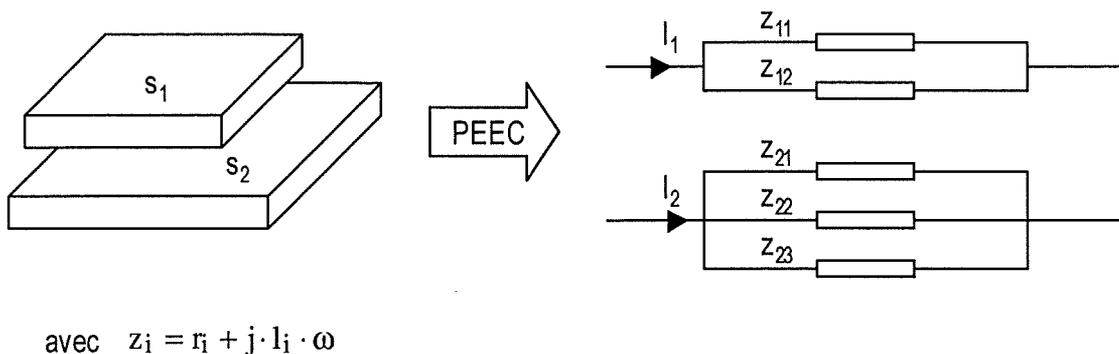


figure 2.4-4 : Modélisation PEEC

Dans le cas présent, nous voulons étudier l'influence de chacune des barres ( figure 2.4-5 ). Dans ce but, deux composants fictifs sont ajoutés. Ceux-ci peuvent être assimilés à des capteurs d'impédance, dans le cas d'une réduction de schéma, ou à des sources pour une phase d'analyse.

Un capteur d'impédance peut être assimilé à un appareil qui mesure l'impédance équivalente de la connectique : pour le cas précis d'une impédance uniquement résistive, il s'agit d'un ohmmètre.

On cherche à identifier est :

- soit  $Z_1^1, Z_2^2$  et  $Z_2^1$  si c'est le comportement global que nous voulons connaître,

Grâce à ces derniers, en effet, il est possible d'écrire :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1^1 & Z_1^2 \\ Z_2^1 & Z_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } Z_2^1 = Z_1^2$$

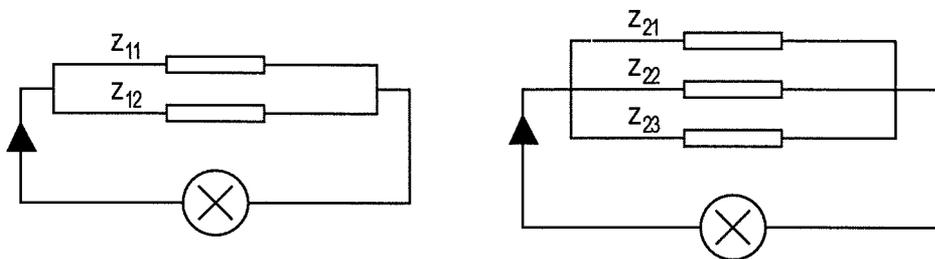


figure 2.4-5 : Modèle adapté

- soit  $i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}$  et  $i_{23}$  si c'est le comportement local qu'on souhaite étudier.

Définissons le graphe associé à cet ensemble électrique (figure 2.4-6).

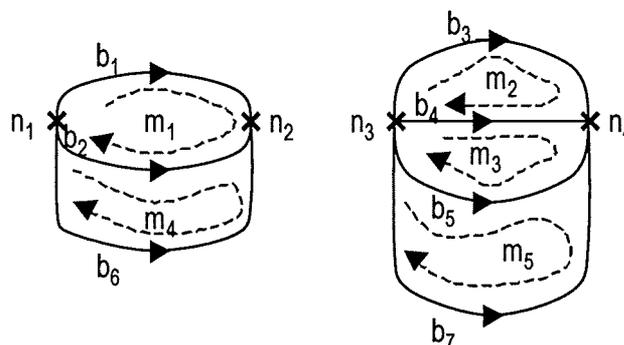


figure 2.4-6 : Graphe associé

A partir de ce graphe, nous pouvons définir les nœuds  $N_i$  ( $i \in \{1 \dots n\}$ ), les branches  $B_i$  ( $i \in \{1 \dots b\}$ ) et les mailles indépendantes  $M_i$  ( $i \in \{1 \dots m\}$ ). Il faut également définir le nombre  $s$  des capteurs d'impédance (ici,  $s = 2$ ).

Pour notre exemple, nous avons  $n = 4$ ,  $m = 5$  et  $b = 7$ .

Notons  $Z$  la matrice impédance obtenue lors de la modélisation avec la méthode PEEC.

$$Z = \begin{bmatrix} R_{1_1} + j\omega L_{1_1} & j\omega M_{1_1}^{12} & j\omega M_{1_1}^{21} & j\omega M_{1_1}^{22} & j\omega M_{1_1}^{23} \\ j\omega M_{1_1}^{12} & R_{1_2} + j\omega L_{1_2} & j\omega M_{1_2}^{21} & j\omega M_{1_2}^{22} & j\omega M_{1_2}^{23} \\ j\omega M_{1_1}^{21} & j\omega M_{1_2}^{21} & R_{2_1} + j\omega L_{2_1} & j\omega M_{2_1}^{22} & j\omega M_{2_1}^{23} \\ j\omega M_{1_1}^{22} & j\omega M_{1_2}^{22} & j\omega M_{2_1}^{22} & R_{2_2} + j\omega L_{2_2} & j\omega M_{2_2}^{23} \\ j\omega M_{1_1}^{23} & j\omega M_{2_3}^{12} & j\omega M_{2_1}^{23} & j\omega M_{2_2}^{23} & R_{2_3} + j\omega L_{2_3} \end{bmatrix}$$

La notation employée est la suivante :

- $M_{A_i}^{B_j}$  qui est la mutuelle entre l'élément  $i$  de la barre  $A$  et l'élément  $j$  de la barre  $B$ ,
- $R_{A_i}$  qui est la résistance propre à l'élément  $i$  de la barre  $A$ ,
- $L_{A_i}$  qui est l'inductance propre à l'élément  $i$  de la barre  $A$ .

Remarquons que  $M_{A_i}^{B_j} = M_{B_j}^{A_i}$ .

### 2.4.3.1. Analyse par rapport aux tensions

Dans cette approche, l'inconnue sera le vecteur des tensions de branches  $\mathbf{U}$ . Nous utiliserons pour cela les lois concernant la matrice  $\mathbf{N}'$  d'incidence des branches aux nœuds et la loi d'Ohm exprimée à l'aide des admittances.

Rappelons ces lois :

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{2.4-8}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_e \cdot \mathbf{U} + \mathbf{I}_g \tag{2.4-9}$$

où  $\mathbf{I}$  est le vecteur des courants de branche,

$\mathbf{U}$  est le vecteur des tensions de branche,

$I_g$  est le vecteur des sources de courants.

Les capteurs d'impédance du modèle adapté (figure 2.4-5) sont, pour cette méthode, des générateurs de courant. Pour notre exemple, nous avons :

$$I_g = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ I_1 \ I_2]^t \text{ et}$$

$$Y_e = \begin{bmatrix} & & & & & 0 \\ & Z^{-1} & & & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{bmatrix}$$

$\xleftarrow{b-s} \quad \xrightarrow{s}$

$\uparrow \quad \downarrow$   
 $b-s \quad s$

La combinaison des équations (2.4-8) et (2.4-9) donne :

$$N' \cdot Y_e \cdot U + N' \cdot I_g = 0 \tag{2.4-10}$$

Si on choisit un nœud de référence par système indépendant, nous pouvons définir le vecteur  $V$  des différences de potentiel entre chaque nœud et son nœud de référence associé.  $V$  est de dimension  $(n-s)$  et il est lié au vecteur des tensions  $U$  par l'expression suivante :

$$U = N'^t \cdot V \tag{2.4-11}$$

Dans notre cas, nous avons pris les nœuds  $n_2$  et  $n_4$  comme nœuds de référence.

En remplaçant  $U$  dans l'équation (2.4-10), on obtient l'égalité qui suit :

$$N' \cdot Y_e \cdot N'^t \cdot V + N' \cdot I_g = 0 \tag{2.4-12}$$

Pour simplifier l'équation (2.4-12), on note :

$$Y_n = N' \cdot Y_e \cdot N'^t \tag{2.4-13}$$

Pour l'exemple étudié, on a :

$$Y_n = \begin{bmatrix} Y_{11}^1 + Y_{12}^1 + 2Y_{12}^1 & Y_{12}^1 + Y_{22}^1 + Y_{23}^1 + Y_{21}^1 + Y_{22}^1 + Y_{23}^1 \\ Y_{21}^1 + Y_{22}^1 + Y_{23}^1 + Y_{21}^1 + Y_{22}^1 + Y_{23}^1 & Y_{21}^2 + Y_{22}^2 + Y_{23}^2 + 2Y_{22}^2 + 2Y_{23}^2 + 2Y_{23}^2 \end{bmatrix}$$

Notation :

$Y_{A_i}^{B_j}$  est l'admittance entre l'élément  $i$  de la barre A et l'élément  $j$  de la barre B.

L'équation (2.4-12) devient alors :

$$\mathbf{Y}_n \cdot \mathbf{V} + \mathbf{N}' \cdot \mathbf{I}_g = \mathbf{0} \quad (2.4-14)$$

Afin d'obtenir les potentiels des courants de générateur, et donc de trouver les impédances équivalentes de chaque système, ainsi que les mutuelles entre deux systèmes, il faut inverser  $\mathbf{Y}_n$  afin d'exprimer  $\mathbf{V}$  comme suit :

$$\mathbf{V} = -\mathbf{Y}_n^{-1} \cdot \mathbf{N}' \cdot \mathbf{I}_g \quad (2.4-15)$$

Pour revenir aux tensions de maille, nous utilisons à nouveau l'équation (2.4-11) et on obtient alors l'expression suivante :

$$\mathbf{U} = -\mathbf{N}^{it} \cdot \mathbf{Y}_n^{-1} \cdot \mathbf{N}' \cdot \mathbf{I}_g \quad (2.4-16)$$

On appelle  $\mathbf{Z}_b$  la matrice  $-\mathbf{N}^{it} \cdot \mathbf{Y}_n^{-1} \cdot \mathbf{N}'$

Rappelons que le vecteur  $\mathbf{I}_g$  est un vecteur composé principalement de 0, sauf les  $s$  derniers termes qui sont égaux aux courants fixés par les capteurs d'impédance.

La matrice  $\mathbf{Z}_b$  peut se décomposer comme suit :

$$\mathbf{Z}_b = \begin{bmatrix} & \\ & \mathbf{Z}_c \end{bmatrix}$$





$$\text{Ici, } \mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} Z_{11} - 2Z_{11}^{12} + Z_{12} & Z_{11}^{21} - Z_{12}^{21} - Z_{11}^{22} + Z_{12}^{22} & Z_{11}^{22} - Z_{12}^{22} - Z_{11}^{23} + Z_{12}^{23} & Z_{11}^{12} - Z_{12} & Z_{11}^{23} - Z_{12}^{23} \\ Z_{11}^{21} - Z_{12}^{21} - Z_{11}^{22} + Z_{12}^{22} & Z_{21} + Z_{22} - 2Z_{21}^{22} & Z_{21}^{22} + Z_{22}^{23} - Z_{21}^{23} - Z_{11} & Z_{12}^{21} - Z_{12}^{22} & Z_{21}^{23} - Z_{22}^{23} \\ Z_{11}^{22} - Z_{12}^{22} - Z_{11}^{23} + Z_{12}^{23} & Z_{21}^{22} + Z_{22}^{23} - Z_{21}^{23} - Z_{11} & Z_{22} - 2Z_{22}^{22} + Z_{23} & Z_{12}^{22} - Z_{12}^{23} & Z_{22}^{23} - Z_{23} \\ Z_{11}^{12} - Z_{12} & Z_{12}^{21} - Z_{12}^{22} & Z_{12}^{22} - Z_{11}^{23} & Z_{12} & Z_{12}^{23} \\ Z_{11}^{23} - Z_{12}^{23} & Z_{21}^{23} - Z_{22}^{23} & Z_{22}^{23} - Z_{23} & Z_{12}^{23} & Z_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{U}_m = [0 \quad 0 \quad 0 \quad -E_1 \quad -E_2]$$

L'introduction de (2.4-22) et (2.4-23) dans (2.4-21) aboutit à cette nouvelle équation :

$$\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{I}_m + \mathbf{U}_m = \mathbf{0} \tag{2.4-24}$$

Le développement de (2.4-20) permet d'écrire les deux égalités suivantes :

$$i_{m4} = i_{11} + i_{12} = I_1 \tag{2.4-25}$$

$$i_{m5} = i_{21} + i_{22} + i_{23} = I_2 \tag{2.4-26}$$

A ce stade de l'analyse, il faut différencier la méthode selon deux paramètres :

- si nous voulons effectuer une réduction de schéma, il faudra exprimer les impédances équivalentes recherchées, et donc trouver  $Z_c$  telle que :

$$\mathbf{Z}_c \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \tag{2.4-27}$$

On écrit l'équation (2.4-24) de manière développée :

$$\mathbf{Z}_m \cdot \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \\ i_{m4} \\ i_{m5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \tag{2.4-28}$$

L'obtention de  $Z_c$  se fera au moyen d'une méthode de triangularisation partielle de  $Z_m$ , avec par exemple, la méthode du Pivot de Gauss. Ce qui permet d'obtenir l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & Z_{c11} & Z_{c12} \\ 0 & 0 & 0 & Z_{c21} & Z_{c22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \\ i_{m4} \\ i_{m5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons extraire la matrice  $Z_c$  et donc les impédances équivalentes de chaque système indépendant.

- si nous voulons connaître la répartition du courant dans les conducteurs, il faut alors résoudre le système défini par (2.4-24) en utilisant une méthode directe telle que Choleski, ou une méthode itérative telle que le gradient conjugué ou le GMRES.

En résumé, le résultat est obtenu :

- ✓ soit par résolution d'un système  $m \times m$  (pour l'analyse)
- ✓ soit consécutivement à une triangularisation partielle de  $Z_m$  (dimension  $m \times m$ )

### 2.4.3.3. Comparaison et choix

Dès le début de l'analyse par rapport aux tensions, le caractère analytique est perdu alors que nous le gardons jusque la triangularisation ou l'inversion dans l'analyse par rapport aux courants.

Afin de comparer les deux types d'analyse précédemment exposés, nous allons rappeler dans un tableau récapitulatif les caractéristiques de chaque méthode.

**Tableau 2.2 : Opérations pour les méthodes courant et tension**

| analyse par rapport<br>aux tensions   | analyse par rapport<br>aux courants  |
|---|--|
| <b>Inversion</b> de deux matrices :<br>✓ $(b - s) \times (b - s)$<br>✓ $(n - s) \times (n - s)$ | <b>Triangularisation</b> ou <b>Inversion</b><br>d'une matrice $m \times m$ |

Rappelons la signification de  $b$ ,  $n$ ,  $m$  et  $s$  :

- $b$  est le nombre de branches de la structure,
- $n$  est le nombre de nœuds de la structure,
- $m$  est le nombre de mailles suffisantes pour décrire la structure,
- $s$  est le nombre de capteurs d'impédance ajoutés à la structure initiale.

L'équation suivante lie  $b$ ,  $n$  et  $m$  pour chaque circuit :

$$m = b - n + 1 \quad (2.4-29)$$

Or,  $m$  est un nombre positif. Il s'ensuit la relation suivante :

$$m < b \quad (2.4-30)$$

De plus,  $s$  est en général petit, alors que  $b$  est grand devant  $m$ . (2.5-5) peut être étendue :

$$m < b - s \quad (2.4-31)$$

En conclusion, l'analyse du Tableau 2.2 met en évidence deux phénomènes principaux :

- en terme de coût de calcul, l'analyse par rapport aux tensions est nettement plus chère que celle par rapport aux courants,
- les deux inversions pour la méthode des tensions fait perdre l'avantage des formules analytiques utilisées par la modélisation PEEC.

Pour ces deux principales raisons, nous avons choisi la méthode des courants. Nous gardons ainsi le plus loin possible les formules analytiques, ce qui sera un avantage lors de la phase d'optimisation des structures de convertisseurs d'électronique de puissance.

On peut donc maintenant présenter le synoptique complet de la modélisation (figure 2.4-7).

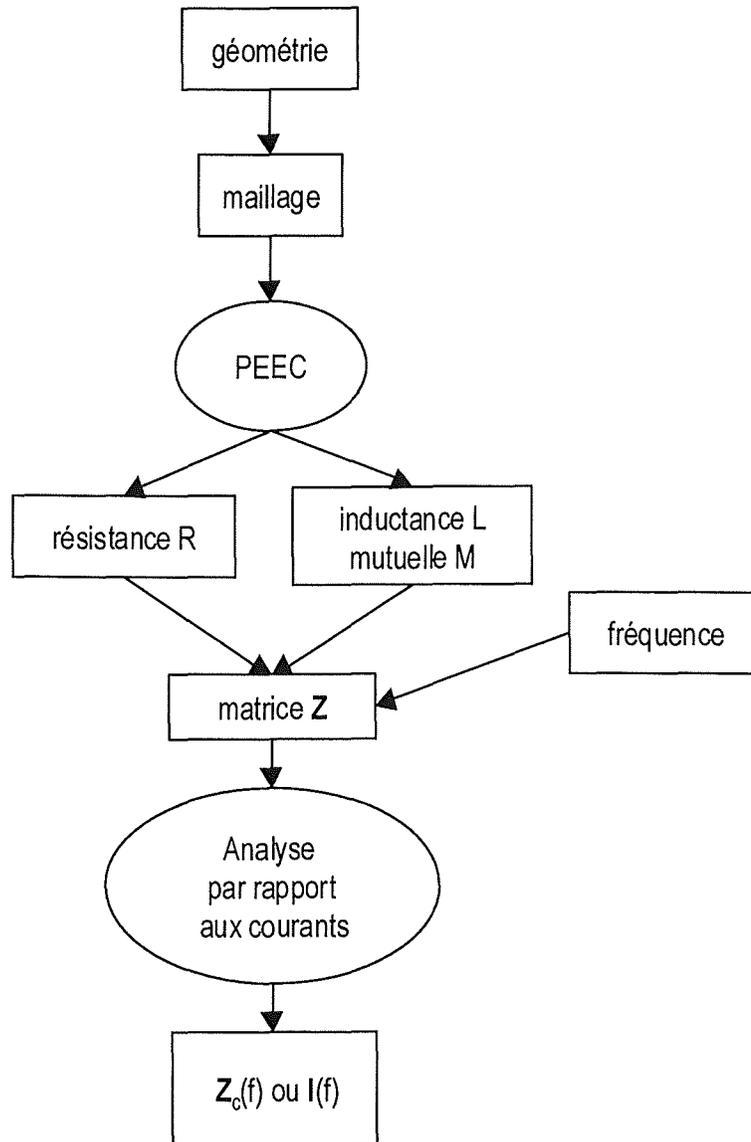


figure 2.4-7 : Synoptique de la modélisation

On s'aperçoit que jusqu'à la construction de la matrice  $Z$  la fréquence n'intervient pas dans la modélisation. Par contre, pendant la réduction du schéma, il n'est pas possible de s'affranchir de

l'influence de la fréquence. Donc, si nous voulons faire une étude fréquentielle, il faudra réaliser autant de triangularisation partielle que de points de calcul souhaités.

### 2.4.4. Conclusion

Au début de cette section, nous possédions un schéma électrique volumineux de la connectique des convertisseurs. En utilisant les méthodes d'analyse des circuits électriques, nous arrivons à déterminer soit un schéma électrique plus compact, soit les grandeurs locales telles que le courant. Deux styles d'analyse – en fonction des courants et des tensions – ont été étudiés.

Cependant, seule la méthode reposant sur les courants permet de garder l'aspect analytique des calculs. En outre, cette analyse est aussi la plus économique au niveau des calculs. C'est pourquoi nous l'avons choisie.

Nous sommes donc maintenant en mesure de réaliser l'étude électrique complète du câblage des convertisseurs. En effet, nous avons réalisé les étapes 2 et 3 du processus de modélisation défini en introduction de ce chapitre (figure 2.4-8).

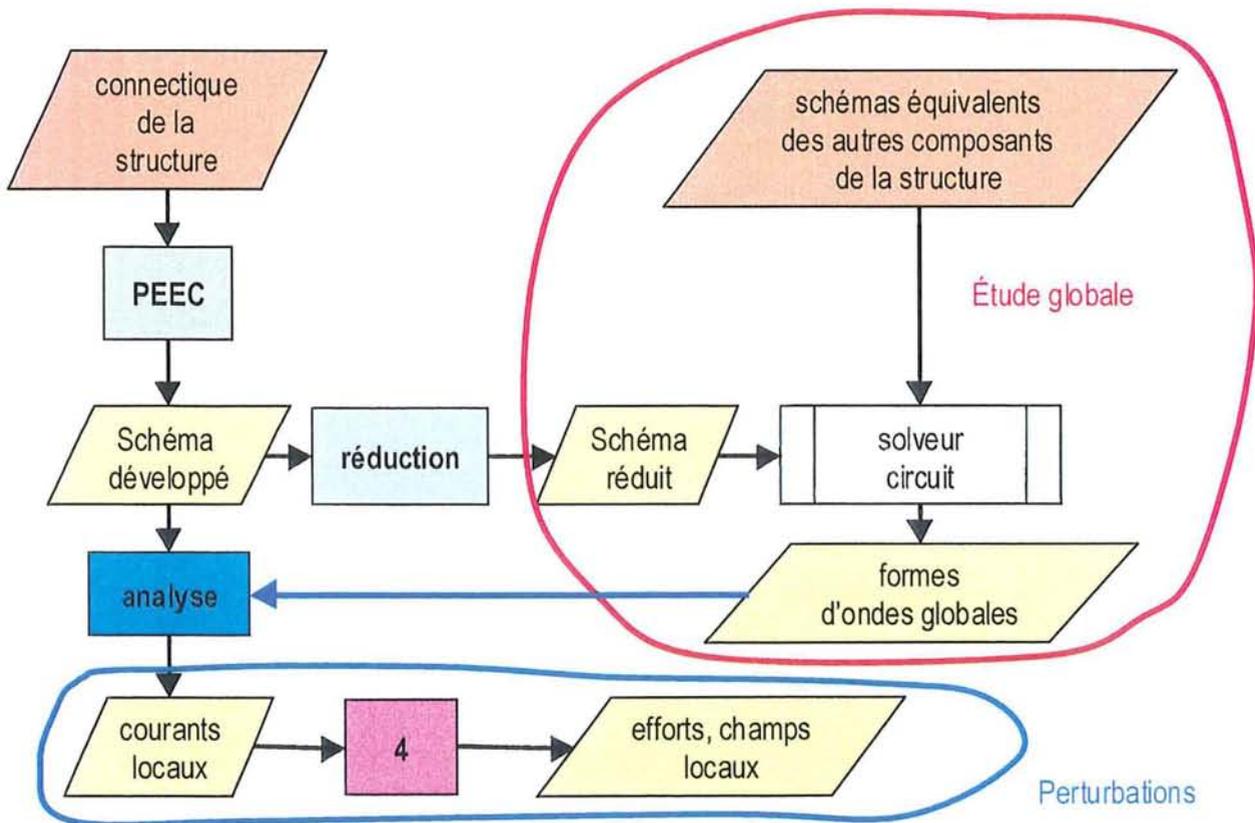


figure 2.4-8 : Processus de modélisation

Dans la section suivante, nous verrons comment utiliser le même formalisme que celui de l'analyse électrique, pour traiter l'étape 4 qui nous permettra d'étudier les perturbations qui proviennent de la connectique.

## 2.5. Autre modélisation PEEC : les efforts électrodynamiques

### 2.5.1. Introduction

Pourquoi s'intéresser aux efforts électrodynamiques ? Comme nous l'avons déjà dit, les connectiques telles que les busbars sont principalement composées de plaques parallèles entre elles. Or, la présence de courant dans chacune de ces plaques peut les déformer en raison de l'induction électromagnétique  $\mathbf{B}$  créé par les courants traversant les plaques (figure 2.5-1).

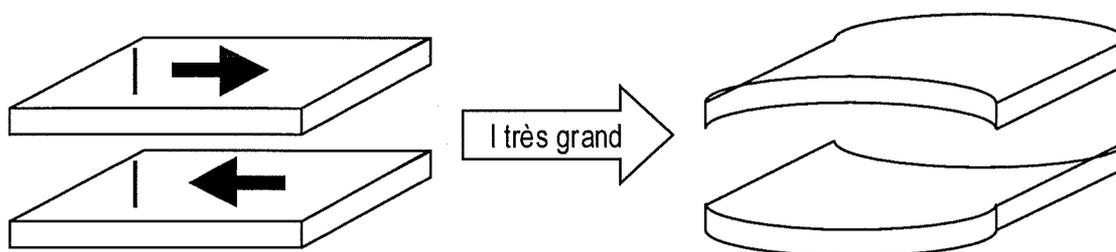


figure 2.5-1 : Déformation d'un busbar par défaut de courant

Différents travaux se sont orientés vers l'expression de  $\mathbf{B}$  créé par la connectique. Ainsi en s'appuyant sur la loi de Biot et Savart dans l'air, [YOU] a pu exprimer le champ de manière analytique pour ensuite calculer le rayonnement émis par les différentes plaques.

Pour notre part, nous avons à disposition, après l'analyse électrique, la répartition du courant au sein des plaques. C'est pourquoi, nous avons développé dans cette section une méthode pour calculer les efforts électrodynamiques entre deux plaques.

Afin de pouvoir dans le futur utiliser facilement les différentes modélisations, nous allons garder, dans la mesure du possible, le même formalisme que celui employé précédemment.

Cette section sera divisée en deux parties. Dans la première partie, le calcul théorique des efforts sera développé. Puis dans la seconde, nous étudierons la validité de notre théorie, en nous basant sur une méthode numérique connue : la méthode des éléments finis.

## 2.5.2. Modélisation des efforts électrodynamiques

### 2.5.2.1. Loi de Biot et Savart

Afin de trouver l'expression analytique de l'effort entre deux plaques massives, nous exprimons un des principes fondamentaux de l'électromagnétisme : le champ créé par un élément  $dl$  parcouru par un courant  $I_1$  en un point  $M$  de l'espace (figure 2.5-2)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 \cdot dl \wedge r}{r^3} \quad (2.5-1)$$

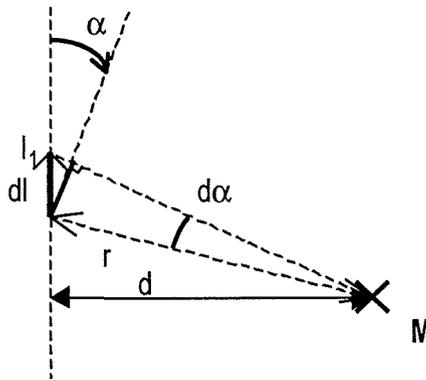


figure 2.5-2 : champ crée en un point  $M$  par un courant  $I_1$

Pour simplifier l'équation (2.5-1) et ne plus avoir l'outil mathématique vectoriel ( $\wedge$ ), nous exprimons  $r$  et  $dl$  en fonction des distances  $\delta$  et  $d$ , ainsi que de l'angle  $\alpha$  :

$$\delta = r \cdot d\alpha \quad (2.5-2)$$

$$\delta = dl \cdot \cos \alpha \quad (2.5-3)$$

$$d = r \cdot \cos \alpha \quad (2.5-4)$$

La combinaison des équations (2.5-1), (2.5-2), (2.5-3) et (2.5-4) aboutissent à l'expression suivante :

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4\pi d} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot n \quad (2.5-5)$$

Le vecteur  $n$  est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par  $dl$  et  $r$ .

A partir de cette expression, il est possible de calculer l'expression du champ  $B$  créé en un point  $M$  par un fil fini (figure 2.5-3) en intégrant  $dB$  entre les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

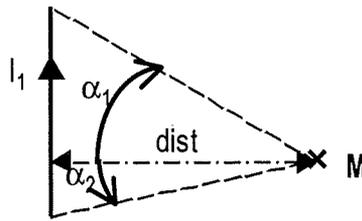


figure 2.5-3 : Champ créée par un fil parcouru par un courant  $I_1$  en un point M

Le champ  $\mathbf{B}$  s'exprime alors comme suit :

$$\mathbf{B}(M) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB \cdot \mathbf{n} \quad (2.5-6)$$

Après intégration, nous obtenons l'expression suivante :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{4 \cdot \pi \cdot \text{dist}} \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \cdot \mathbf{n} \quad (2.5-7)$$

Le champ  $\mathbf{B}$  est donc perpendiculaire au courant  $I_1$ .

### 2.5.2.2. Effort électrodynamique entre deux fils conducteurs minces et filiformes

Dans le paragraphe précédent, (2.5-7) exprime le champ  $\mathbf{B}$  en un point M créé par un fil parcouru par  $I_1$ .

Rappelons que nous nous intéressons à l'effort entre deux plaques. Connaissant  $\mathbf{B}(M)$ , nous pouvons utiliser la loi de Laplace qui exprime la variation  $d\mathbf{f}$  de la force exercée sur un élément  $d\mathbf{l}$  placé en M, parcouru par un courant  $I_2$ , immergé dans le champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Pour calculer l'effort, nous utilisons la loi de Laplace :

$$d\mathbf{f} = I_2 \cdot d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B} \quad (2.5-8)$$

Nous nous plaçons dans le cas où les courants  $I_1$  et  $I_2$  sont parallèles entre eux, et donc les conducteurs qui les portent aussi (figure 2.5-4). C'est le cas de la majorité des busbars utilisés.

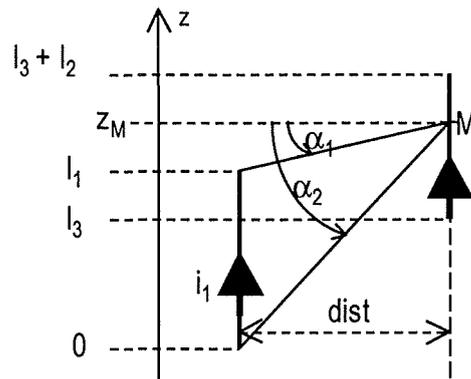


figure 2.5-4 : Effort entre deux conducteurs minces et rectilignes

Ainsi,  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire à  $d\mathbf{l}$  et on a :

$$\|d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}\| = dl \cdot B \quad (2.5-9)$$

La combinaison de (2.5-7), (2.5-8) et (2.5-9) permet d'écrire l'équation suivante :

$$df = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{4 \cdot \pi \cdot \text{dist}} \cdot (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \cdot dl \quad (2.5-10)$$

L'effort  $F$  entre les deux fils parcourus par  $I_1$  et  $I_2$  s'obtient par intégration de  $df$  le long du fil 2 :

$$F = \int_{\text{fil2}} df \quad (2.5-11)$$

Pour pouvoir calculer l'effort  $F$ , il faut d'abord simplifier (2.5-10). Exprimons  $\sin \alpha_1$ ,  $\sin \alpha_2$  et  $dl$  en fonction de  $z_M$ .

$$\sin \alpha_1 = \frac{z_M}{\sqrt{d^2 + z_M^2}} \quad (2.5-12)$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{l_1 - z_M}{\sqrt{d^2 + (l_1 - z_M)^2}} \quad (2.5-13)$$

$$dl = dz_M \quad (2.5-14)$$

Il en résulte l'expression analytique suivante :

$$F = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{4 \cdot \pi \cdot \text{dist}} \left[ \sqrt{\text{dist}^2 + z^2} \right]_{I_3 - I_1, I_3}^{I_3 + I_2, I_3 + I_2 - I_1} \quad (2.5-15)$$

avec :  $[f(z)]_{z_2, z_4}^{z_1, z_3} = f(z_1) - f(z_2) + f(z_3) - f(z_4)$

### 2.5.2.3. Effort électrodynamique entre deux conducteurs

Afin d'obtenir l'effort électrodynamique F entre deux plaques ou deux barres, il faut intégrer l'expression selon les deux autres directions x et y.

A partir de (2.5-15), nous pouvons exprimer l'effort dF entre deux éléments finis filaires des plaques p<sub>1</sub> et p<sub>2</sub> (figure 2.5-5).

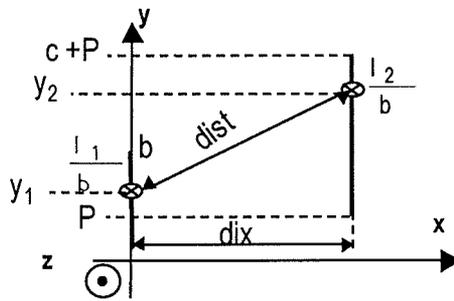


figure 2.5-5 : Effort électrodynamique entre deux plaques minces

Les plaques p<sub>1</sub> et p<sub>2</sub> sont respectivement traversées par un courant I<sub>1</sub> et I<sub>2</sub>. On fait l'hypothèse d'un courant uniformément réparti dans chacune des deux plaques.

Le courant associé à l'élément dy<sub>1</sub> de la plaque p<sub>1</sub> vaut alors  $\frac{I_1 \cdot dy_1}{b}$ , il en est de même pour la plaque

p<sub>2</sub>.

De plus, on a :

$$\text{dist}^2 = \text{dix}^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (2.5-16)$$

L'effort dF s'exprime alors ainsi :

$$dF = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{4 \cdot \pi \cdot b \cdot c} \left[ \sqrt{1 + \frac{z}{dix^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right]_{l_3 - l_1, l_3}^{l_3 + l_2, l_3 + l_2 - l_1} dy_1 \cdot dy_2 \quad (2.5-17)$$

Afin d'obtenir l'effort F entre deux plaques, on intègre dF selon y<sub>1</sub> et y<sub>2</sub>.

$$F = \int_0^b \int_c^{P+c} dF \quad (2.5-18)$$

L'intégration de (2.5-18) demande la connaissance de la primitive de  $\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{x^2 + \beta^2}}$  selon la variable

x. Cette primitive est assez complexe (nous l'avons trouvée dans une table d'intégrales [GRA]). Elle fait partie des fonctions elliptiques, et est composée de sommes infinies.

On obtient alors le résultat suivant :

$$F = \frac{\mu_0 \cdot l_1 \cdot l_2}{4 \cdot \pi \cdot b \cdot c} \cdot \left[ f(y, z) \right]_{y_1, y_3}^{y_2, y_4} \left[ (y) \right]_{z_2, z_4}^{z_1, z_3} (z) \quad (2.5-19)$$

avec :

$f(y, z) =$

$$\left( \begin{aligned} & \text{dix} \sqrt{\frac{z^2}{\text{dix}^2} + 1} \left( \begin{aligned} & \text{dix} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \right)^2 \frac{2n}{2n-1} \left( \frac{z^2}{z^2 + \text{dix}^2} \right) \sum_{j=1}^4 (-1)^j \left( \begin{aligned} & \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \frac{y^2}{\text{dix}^2} \right] \\ & - \frac{y}{\text{dix}} \operatorname{artan} \left( \frac{y}{\text{dix}} \right) \end{aligned} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \left( \begin{aligned} & \text{dix} \sum_{j=1}^4 (-1)^j \left( \begin{aligned} & \ln \left( \sqrt{1 + \frac{y^2}{\text{dix}^2}} \right) \\ & - \sum_{q=1}^n \frac{1}{2q} \left( \frac{y^2}{\text{dix}^2 + y^2} \right)^q \sum_{p=n+1}^{\infty} \left( \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \right)^2 \frac{2p}{2p-1} \left( \frac{z^2}{z^2 + \text{dix}^2} \right)^p \end{aligned} \right) \right) \end{aligned} \right) \\ & - \frac{1}{2} \text{dix}^2 \sum_{j=1}^4 (-1)^j \left( \begin{aligned} & \sqrt{1 + \frac{y^2}{\text{dix}^2}} \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{\text{dix}^2}} \\ & + \frac{z^2}{\text{dix}^2} \ln \left( \sqrt{1 + \frac{y^2}{\text{dix}^2}} \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{\text{dix}^2}} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right)$$

$$\text{et } \left[ f(y, z) \right]_{y_1, y_3}^{y_2, y_4} \left[ (y) \right]_{z_2, z_4}^{z_1, z_3} (z) = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{j+k+1} \cdot f(y_j, z_k)$$

Avant de continuer l'intégration pour obtenir l'expression de l'effort entre deux barres, il faut s'interroger sur l'utilité de sa connaissance.

Nous avons déjà en effet dans (2.5-19) des sommes infinies qui poseront problème lors d'une programmation informatique. De plus, l'expression de l'effort entre deux barres sera fondée sur l'hypothèse d'une densité de courant uniforme sur tout le volume des barres. Or, après la modélisation électrique, nous obtenons la carte du courant pour chaque subdivision.

C'est pourquoi nous proposons d'utiliser la formule fil à fil (2.5-15) en maillant au préalable les conducteurs.

Dans la prochaine section nous choisirons cette formule (2.5-15) pour un cas simple et nous le comparerons au résultat obtenu avec celui des éléments finis.

### 2.5.3. Validation des formules

#### 2.5.3.1. Description du problème test

Nous avons pris un cas simple : deux plaques disposées en vis à vis l'une en face de l'autre (figure 2.5-6). Leurs caractéristiques géométriques sont les suivantes : longueur = 500 mm , largeur = 40 mm et épaisseur = 8 mm . Elles sont distantes de  $d = 50$  mm . Cet exemple est caractéristique de plaques composant les busbars : l'épaisseur est petite devant la longueur et la largeur (figure 2.5-6).

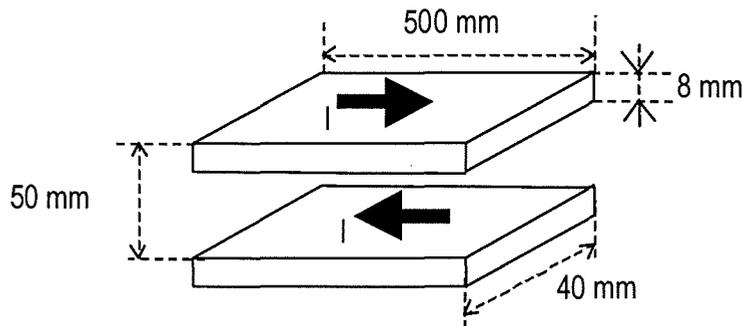


figure 2.5-6 : Géométrie des plaques

Ces deux plaques sont chacune parcourues dans un sens contraire par un courant  $I$ , égal à 1200 A . L'effort qui en résultera sera un effet d'écartement des deux plaques.

#### 2.5.3.2. Méthode analytique

Les deux plaques ont été subdivisées en  $n$  sous-éléments dans le sens de la largeur ainsi que dans celui de l'épaisseur. Afin d'étudier l'influence du nombre de subdivisions, le calcul a été réalisé pour un nombre  $n$  compris entre 1 et 30.

### 2.5.3.3. Méthode numérique

Ce calcul a été réalisé avec le logiciel FLUX3D [FLU], développé au LEG. Celui-ci repose sur la méthode des éléments finis et permet de résoudre les problèmes électrodynamiques.

Nous avons utilisé un modèle électrocinétique avec des éléments finis nodaux du second ordre. Le nombre d'éléments volumiques pour décrire le problème est 400. Le modèle analytique de Biot et Savart a permis d'évaluer l'induction électromagnétique  $\mathbf{B}$ .

FLUX3D a tout d'abord évalué la répartition du courant dans les barres, pour ensuite évaluer la distribution de l'induction à l'aide de l'intégrale numérique de  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ . L'effort, exercé sur chaque barre, est obtenu par intégration de la force élémentaire de Laplace sur le volume considéré.

### 2.5.3.4. Comparaison des deux méthodes

Sur la figure 2.5-7, on représente l'évolution de l'effort calculé avec la méthode PEEC en fonction du nombre de subdivision. La convergence est rapide.

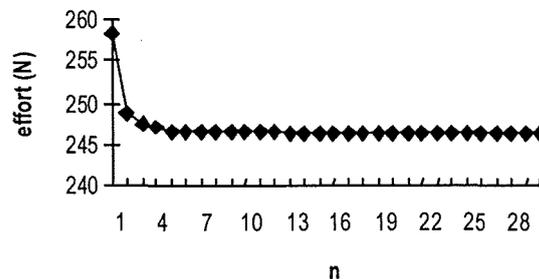


figure 2.5-7 : Evolution de l'effort en fonction du nombre de subdivisions n

Dans le cas de la modélisation avec les éléments finis, nous avons obtenu une valeur de 236 N. Cette valeur est légèrement inférieure à la valeur limite obtenue avec la méthode analytique. L'écart entre ces deux valeurs est de 4,2 %.

De plus, l'évolution de l'effort avec le nombre de subdivision pour le modèle analytique est très satisfaisant puisque le calcul converge pour  $n$  petit (de l'ordre de 7).

Il apparaît donc que le modèle analytique développé est correct.

Ceci nous amène à conclure que la méthode analytique pourra être, à terme, utilisée comme modélisation électromagnétique.

### 2.5.3.5. Méthode d'implantation

Nous présentons dans ce paragraphe les 4 différentes étapes nécessaires à la modélisation analytique électrodynamique.

#### **Etape 1** : *description physique et géométrique de la structure*

Cette étape nécessite une intervention importante de l'utilisateur. Il lui faut découper la structure en plusieurs conducteurs rectilignes puis en fournir les différentes caractéristiques. L'ordinateur intervient ici, uniquement pour recevoir les données géométriques et physiques.

Il sera possible de récupérer la géométrie décrite pour la modélisation électrique, puisque nous avons utilisé le même mode de description des barres l'une vis à vis de l'autre.

#### **Etape 2** : *maillage des barres*

Celui-ci est automatique dès que l'utilisateur a fourni le nombre de subdivisions pour chaque élément rectiligne. Puis les caractéristiques géométriques de chaque sous-élément sont évaluées. Pour des structures importantes, la durée de cette étape peut-être élevée. Il faudra donc réaliser un maillage intelligent de la structure, ce qui nécessite le savoir-faire de l'utilisateur.

Ce savoir-faire est le même que celui requis pour le maillage lors d'une analyse électrique.

#### **Etape 3** : *calcul des efforts locaux*

A l'aide de la formule (2.5-15) qui a été programmée, l'ensemble des efforts entre tous les couples de sous-éléments appartenant à des conducteurs rectilignes différents est évalué.

Si on considère deux conducteurs rectilignes subdivisés respectivement en  $n_1$  et  $n_2$  sous-éléments, il faudra évaluer  $n_1 \cdot n_2$  efforts électrodynamiques.

#### **Etape 4** : *assemblage des efforts entre sous-éléments*

L'effort entre deux conducteurs s'exprime avec la formule suivante :

$$F_{12} = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} F_{ij} \quad (2.5-20)$$

avec  $F_{ij}$  l'effort entre le sous-élément  $i$  du conducteur 1 et le  $j$  du 2.

Remarques :

- Une automatisation est envisageable pour déterminer un maillage correct dans l'étape 2. L'utilisateur n'aura plus qu'à fournir trois nombres :
  - un nombre  $n$  de subdivision dans la largeur ,
  - un nombre  $m$  de subdivision dans la longueur,
  - une précision  $\varepsilon$  pour le calcul de  $F$Le procédé sera alors le suivant
  1. Subdivision en  $n \times m$  éléments
  2. Calcul de  $F$
  3. Subdivision en  $2n \times 2m$  éléments
  4. Calcul de  $F'$
  5. a) si  $|F - F'| < \varepsilon$  , le résultat est assez précis,  $F_{\text{final}} = F$   
b) si  $|F - F'| > \varepsilon$  , retour à 3 avec une subdivision  $3n \times 3m$ , puis 4 et 5 à nouveau
  
- Les étapes 1 et 2 sont communes aux deux modélisations (électrique et électrodynamiques). A terme, ces deux modélisations pourront être réunies dans le même logiciel.

#### 2.5.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré un autre aspect de la méthode PEEC. Après avoir seulement utilisé cette méthode pour la modélisation électrique, nous avons mis au point la modélisation électrodynamique de la connectique.

Par la suite, ces deux modèles seront utilisés pour améliorer le dimensionnement des connectiques des structures d'Electronique de Puissance.



# **3. OPTIMISATION DE CABLAGE**

THE  
HISTORY OF  
THE  
CITY OF  
NEW YORK

### **3.1. Méthodologie pour le câblage**

#### **3.1.1. Introduction**

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment la connectique des convertisseurs d'Electronique de Puissance est modélisée. Il est possible, avec la méthode proposée, d'obtenir un schéma électrique équivalent afin d'analyser les comportements tant électriques, qu'électromécaniques d'une structure existante.

Maintenant, il est aussi utile de pouvoir déterminer la géométrie d'une structure à partir du comportement souhaité par le concepteur, c'est à dire réaliser la fonction inverse de celle exposée dans la partie précédente. Sans atteindre une conception automatique pour laquelle il faudrait inclure les connaissances humaines scientifiques, on peut à l'aide de méthodes mathématiques améliorer les structures déjà existantes.

La méthode d'optimisation est alors une minimisation d'une fonction coût qui dépend en général des caractéristiques géométriques et physiques de la structure considérée.

De nombreux travaux de recherche ont été réalisés afin de déterminer les méthodes d'optimisation et leur faculté d'adaptation aux problèmes à traiter. Nous nous contenterons de les énoncer et d'expliquer le choix effectué. Celui-ci est très difficile car chaque méthode a ses avantages et ses inconvénients. Ce choix est lié de manière très forte au type de problème que nous traitons. C'est pourquoi, avant de déterminer quelle méthode d'optimisation nous emploierons, il nous faut mettre en place la méthodologie suivie pour améliorer la connectique.

#### **3.1.2. Description de la méthodologie d'optimisation pour la connectique**

Tout d'abord, deux aspects de la connectique pourront être modifiés :

- ✓ les propriétés physiques
- ✓ les caractéristiques géométriques

Les formules analytiques de la méthode PEEC sont liées aux deux types de variables. Dans les problèmes liés au câblage d'Electronique de Puissance, la modification des propriétés physiques se résume en général à une alternative entre deux matériaux : le cuivre ou l'aluminium. C'est pourquoi nous ne ferons pas d'optimisation sur les propriétés physiques de la structure, seules les caractéristiques géométriques pourront être modifiées.

Cette réflexion amène donc à faire une optimisation purement géométrique des structures. La conception optimale de connectiques repose sur plusieurs phases d'analyse.

La première étape est avant tout consacrée à la réflexion et ne peut être réalisée automatiquement. Elle consiste en effet à définir de manière précise le cahier des charges. Celui-ci comprend trois parties :

- les caractéristiques électriques, ou autres, souhaitées (**objectifs** ou **critères**),
- les **paramètres** de conception qui, modifiés, pourront changer les objectifs,
- les **contraintes** liées à la structure (tenue mécanique, coût, encombrement,...)

La définition du cahier des charges est importante, car ce dernier détermine le succès de l'optimisation.

L'étape suivante est la suite logique puisqu'elle consiste à traduire mathématiquement le cahier des charges. La grande difficulté réside dans la traduction mathématique de l'objectif. Nous verrons qu'il existe plusieurs fonctions pour un même critère et que toutes n'aboutissent pas au même résultat.

La troisième phase est elle complètement automatique : c'est la résolution du problème en utilisant une méthode d'optimisation adaptée. Comme nous l'avons signalé précédemment, le choix du type de méthode sera expliqué ultérieurement.

Enfin, une fois la solution obtenue, il faudra vérifier que celle-ci répond au cahier des charges défini, afin d'y apporter d'éventuelles modifications. Pour fixer les idées, nous avons représenté sur la figure 3.1-1 le schéma de cette méthodologie.

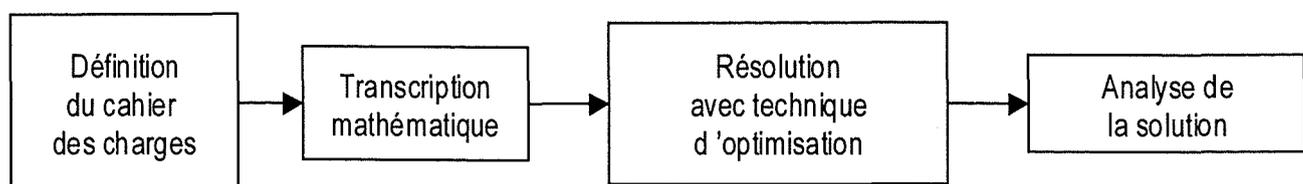


figure 3.1-1 : Synoptique de l'optimisation

### 3.1.3. Objectifs

Comme nous l'avons vu dans la partie sur la modélisation électrique, nos problèmes sont issus de la modélisation du câblage des structures d'Electronique de Puissance. En ce qui concerne la modélisation électrique de la connectique, deux aspects ont été développés :

- ✓ la **condensation** de modèle ,
- ✓ l'**analyse** de la connectique.

De cette analyse, nous avons mis en place le calcul des **efforts** électromagnétiques entre les plaques. L'apport de cette modélisation peut être symbolisé par le synoptique de la figure 3.1-2.

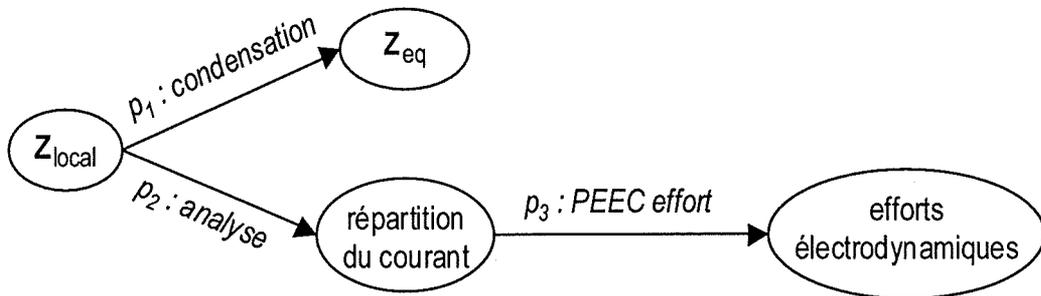
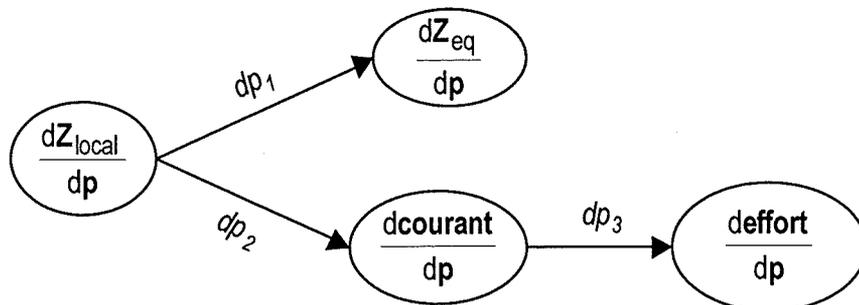


figure 3.1-2 : Synoptique de la modélisation

Ces trois aspects de la modélisation peuvent constituer chacun un objectif pour un problème d'optimisation. C'est pourquoi il sera intéressant de pouvoir développer les processus permettant de relier les différentes dérivées présentées ci-dessus, afin de pouvoir réaliser les différentes fonctions de la figure 3.1-3.



avec  $p$  le vecteur des paramètres géométriques

figure 3.1-3 : Synoptique de l'analyse de sensibilité

En effet, les opérateurs  $dp_1$ ,  $dp_2$  et  $dp_3$  permettront de réaliser le calcul de sensibilité nécessaire aux optimisations reposant sur des méthodes déterministes.

Lors d'une première réflexion, on pense à dériver directement les procédés  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$ . Mais on se rend vite compte que ceci n'est pas réalisable, il est alors nécessaire de trouver un autre procédé qui permettra d'évaluer la sensibilité par rapport aux paramètres de conception.

Le développement de ce procédé nécessite de respecter certaines contraintes. En particulier nous devons garder l'aspect analytique de la modélisation à la fois pour une question de coût et de précision des calculs.

L'autre moyen de réaliser le calcul de sensibilité est en effet le calcul par différences finies. Cette méthode amènerait alors deux évaluations de la fonction objectif, contre une seule pour le gradient analytique. Le coût est alors doublé et la précision dégradée.

Pour résumer, nous avons à développer trois procédés tout en respectant la contrainte de formulations analytiques. Nous verrons dans la suite comment réaliser ces objectifs. Dans un premier temps, nous présentons les caractéristiques liées aux méthodes d'optimisation que nous utiliserons.

### 3.2. Techniques d'optimisation

#### 3.2.1. généralités sur les problèmes d'optimisation

Un problème d'optimisation peut être écrit sous la forme :

$$(P) \begin{cases} \min f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^p \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0 & i \in \{1 \dots c_i\} \\ h_j(\mathbf{x}) = 0 & j \in \{1 \dots c_e\} \\ x_k^{\min} \leq x_k \leq x_k^{\max} & k \in \{1 \dots p\} \end{cases} \quad (3.2-1)$$

$\mathbf{x}$  est le vecteur des paramètres, il est de dimension  $p$ . On dit alors que le problème d'optimisation est de dimension  $p$ . Pour nos travaux de recherche, les composants  $x_k$  seront des paramètres géométriques.

La fonction  $f$  est la fonction coût à minimiser et  $g_i$  et  $h_j$  représentent les contraintes d'inégalité et d'égalité. Les  $x_k^{\min}$  et les  $x_k^{\max}$  encadrent les paramètres, et sont appelées contraintes de domaines.

Elles pourront au besoin être reformulées en contraintes d'inégalité ( 3.2-2 ).

$$\begin{cases} x_k^{\min} - x_k \leq 0 \\ x_k - x_k^{\max} \leq 0 \end{cases} \quad (3.2-2)$$

Dans la suite, nous ne prendrons en compte que les contraintes d'inégalité. En effet, chaque contrainte d'égalité est équivalente à deux contraintes d'inégalité ( 3.2-3 ).

$$h_j(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h_j(x) \leq 0 \\ -h_j(x) \leq 0 \end{cases} \quad (3.2-3)$$

L'espace des contraintes est noté C :

$$C = \{x \in \mathfrak{R}^p / g_i(x) \leq 0, \forall i \in \{1 \dots c_i\}\} \quad (3.2-4)$$

### 3.2.2. Différents points singuliers d'une fonction

Afin de mieux comprendre les problèmes liés à l'optimisation, les points particuliers d'une fonction monovariante sont présentés dans ce paragraphe (figure 3.2-1). Ces caractéristiques seront les mêmes pour les fonctions multivariantes, qui seront le plus souvent utilisées dans nos problèmes.

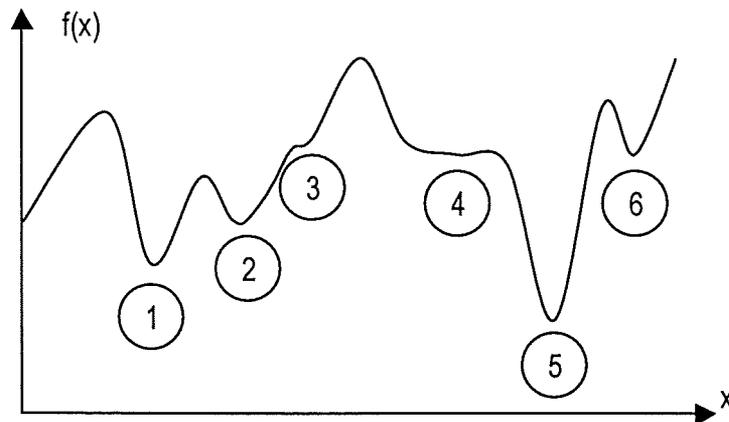


figure 3.2-1 : Points singuliers d'une fonction

Les points représentés sur la figure 3.2-1 sont les suivants :

- points 1, 2 et 6 : minima locaux
- point 5 : minimum global
- point 3 : point d'inflexion

- point 4 : plateau

Les minima locaux et le minimum global sont définis mathématiquement ainsi :

- $x^*$  est un minimum local s'il existe un voisinage de  $x^*$  noté  $V(x^*)$  tel que  $\forall x \in V(x^*), f(x^*) \leq f(x)$
- $x^*$  est un minimum global si  $\forall x \in C, f(x^*) \leq f(x)$

Seuls ces deux types de points sont recherchés lors des processus d'optimisation. Par contre, les quatre types de points ont une propriété commune :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} = 0 \quad (3.2-5)$$

La différence sera faite avec la dérivée seconde :

- pour un minimum,  $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x^*} > 0$
- pour un point d'inflexion,  $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x^*} = 0$
- pour un plateau, il existe un intervalle  $I$ , tel que  $\forall y \in I, \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=y} = 0$

Ceci met en évidence la difficulté qu'il y aura pour trouver le minimum d'une fonction, et donc l'importance de certaines propriétés mathématiques de la fonction objectif, telles que la continuité et la dérivabilité.

### 3.3. Les méthodes d'optimisation

#### 3.3.1. Introduction

Nombreuses sont les méthodes d'optimisation. On peut toutefois les classer en deux grandes catégories : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

Les premières ne laissent aucune place au hasard et pour une configuration initiale donnée, conduiront toujours à la même solution finale. La recherche se base sur la connaissance d'une direction de recherche, qui peut être déterminée par le gradient de la fonction à optimiser. En général, ces méthodes sont efficaces et peu coûteuses mais nécessitent en contrepartie une solution initiale proche de la solution optimale. Ainsi, si la fonction a plusieurs optima, le processus d'optimisation n'aboutira pas obligatoirement à l'optimum global.

En revanche, les méthodes stochastiques sont, elles, capables de résoudre ce type de problème. En partie grâce à des mécanismes de transitions aléatoires, elles explorent l'espace des solutions, ce qui peut conduire à plusieurs résultats finaux pour un même point de départ. Toutefois ces méthodes sont intéressantes pour plusieurs raisons :

- ✓ elles ne nécessitent pas le calcul du gradient : ce qui constitue un avantage si le problème possède des paramètres discrets ou si la fonction ne dispose pas d'expression explicite,
- ✓ le second avantage est la capacité à déterminer l'optimum global.

En contrepartie, ces méthodes demandent un nombre important d'évaluations avant d'atteindre l'optimum : en temps de calcul, cela peut devenir particulièrement gênant si le problème est volumineux.

Nous allons dans cette section étudier les deux types de méthodes.

Parmi les méthodes déterministes, nous avons choisi la méthode du Lagrangien Augmenté, qui est un processus d'optimisation basé sur la transformation du problème sous contraintes en une suite de problèmes sans contrainte. Pour traiter ces derniers, nous développerons et utiliserons une méthode Quasi-Newton.

Quant aux méthodes stochastiques, nous avons choisi l'algorithme génétique. Ces dernières années ceux-ci ont été à la base de nombreuses recherches. Nous verrons tout d'abord son principe de base, puis comment l'exploiter afin de tirer profit de ses avantages.

### 3.3.2. Méthodes déterministes

Les méthodes déterministes peuvent être divisées en deux catégories :

- La première regroupe toutes les méthodes d'ordre 0, c'est à dire qui ne nécessitent pas la connaissance du gradient de la fonction objectif ou de celui des contraintes. Ces méthodes sont en général peu précises et convergent très lentement vers l'optimum local [FOX].

En revanche, elles permettent de se passer du calcul du gradient, en particulier si la fonction objectif n'est pas différentiable, ou si le calcul du gradient est coûteux. Généralement, ces méthodes sont employées pour des petits problèmes ou pour localiser en début de recherche l'optimum local.

- La seconde catégorie nécessite que les fonctions  $f$ ,  $g_i$  et  $h_j$  soient continûment dérivables. Cette propriété est très importante pour la direction de recherche de l'optimum. On les appelle les méthodes d'ordre 1.

Dans cette section, nous ne présenterons que les méthodes du second groupe. Nous débuterons par des rappels sur l'optimum, puis nous exposerons diverses méthodes de résolution de problèmes contraints.

#### 3.3.2.1. Rappels

Rappelons notre problème (P) :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1 \dots c_i \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{cases} \quad (3.3-1)$$

**Définition :**

On appelle fonction de Lagrange associée au problème (P) la fonction suivante :

$$\phi(x, \lambda) = f + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j \quad (3.3-2)$$

où les  $\lambda_j \geq 0$  sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

**Conditions de Kuhn et Tucker**

Une condition nécessaire pour que  $x_0^*$  soit un optimum local de (P) est qu'il existe un vecteur

$\lambda_0^* = (\lambda_j^*)_{j=1, \dots, m}$  appelé multiplicateur de Kuhn et Tucker tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x_0^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \cdot \nabla g_j(x^*) = 0 \\ \lambda_j^* \cdot g_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in \{1 \dots c_i\} \\ \lambda_j^* \geq 0 \quad \forall j \in \{1 \dots c_i\} \end{array} \right. \quad (3.3-3)$$

Les conditions de Kuhn et Tucker sont nécessaires et suffisantes dans le cas de fonctions f et g<sub>j</sub> convexes. x\* est alors un optimum global.

Dans le cas où figurent uniquement des contraintes d'égalité, on obtient les conditions de Lagrange : il existe des multiplicateurs  $(\mu_j^*)_{j=1, \dots, c_e}$  de signes quelconques tels que :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{c_e} \mu_j^* \cdot \nabla h_j(x^*) = 0 \quad (3.3-4)$$

En électrotechnique, l'hypothèse de convexité n'est pas souvent réalisée sur tout le domaine mais uniquement sur un domaine réduit [KAD]. On peut alors déduire une condition suffisante pour déterminer un optimum local :

$$x^* \text{ est un optimum local de (P)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} - f \text{ et } g_j \text{ sont convexes sur un voisinage de } x^* \\ - \text{ Les conditions de Kuhn et Tucker sont vérifiées en } x^*. \end{array}$$

Les méthodes d'ordre 1 sont constituées de deux grandes classes :

- la première regroupe les méthodes qui opèrent directement sur le problème à résoudre, sans le modifier. Ces dernières possèdent l'avantage de fournir à chaque itération une solution approchée

qui satisfait les contraintes [MIN]. Nous n'en parlerons pas car ces méthodes se révèlent être moins efficaces et moins robustes que la seconde classe de méthodes.

- la seconde transforme le problème initial pour le ramener à la résolution d'une suite de problèmes sans contrainte : elles sont appelées méthodes de transformation.

### 3.3.2.2. Méthodes de transformation

#### Méthodes de pénalité :

Les méthodes de pénalité font partie des algorithmes très utilisés car elles sont simples d'un point de vue théorique, et elles ont une relative efficacité pratique [RYA].

L'idée de base est de transformer la résolution d'un problème avec contraintes en une suite de résolutions de problèmes sans contrainte. Ces derniers proviennent de l'introduction des contraintes dans la fonction objectif afin de pénaliser l'évaluation dès qu'une des contraintes est violée.

Deux variantes se distinguent au sein des méthodes de pénalité :

- ✓ la méthode de pénalité extérieure [FIA],
- ✓ et la méthode des pénalités intérieures [CAR].

#### Méthode des pénalités extérieures :

$$\text{Soit (P) le problème : (P) } \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, i = 1 \dots m \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{cases}$$

Le problème (P) peut être remplacé par le problème sans contrainte :

$$(P_1) \quad \min \phi(x,r) = f(x) + r \cdot \sum_{i=1}^m [\max(0, g_i(x))]^2$$

avec  $r > 0$ , coefficient de pénalité.

Le problème (P<sub>1</sub>) peut être résolu directement pour une valeur r suffisamment grande pour satisfaire les contraintes. Mais ce choix entraîne un mauvais conditionnement de  $\phi$  et engendre des problèmes numériques lors de la résolution.

C'est pourquoi les méthodes sont résolues de manière itérative. Une suite croissante de r est générée et à chaque étape du processus, on résout le problème d'optimisation sans contrainte :

$$(P_1^k) \quad \min_x \phi(x, r^k) = f(x) + r^k \cdot \sum_{i=1}^m [\max(0, g_i(x))]^2$$

L'avantage principal de cette méthode est que le point initial peut être situé en dehors du domaine des contraintes C. En revanche, la suite de solutions approchées  $x^k$  n'appartient pas à C : la solution est dite « approchée par l'extérieur de C ».

Ainsi, si le processus est arrêté avant la convergence, la solution approchée est non réalisable. C'est pour cette raison que des méthodes dites de pénalités intérieures ont été mises en œuvre.

#### Méthodes de pénalités intérieures :

Le problème (P) est remplacé par :

$$(P_2) \quad \min_x \phi(x, r) = f(x) - \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}$$

avec  $r > 0$ , facteur de pénalité.

$$B(x) = \sum_{i=1}^m -\frac{1}{g_i(x)} \text{ une fonction barrière.}$$

Lorsque x appartient à C, B(x) est positif. Si x tend vers la frontière de C, B(x) tend vers l'infini. Aussi est-il impossible de franchir la frontière de C au cours d'un processus d'optimisation. Il s'en suit que toutes les solutions approchées  $x^k$  seront réalisables. Cependant la détermination d'un point initial de C n'est pas aisée et il faut souvent faire appel à un algorithme supplémentaire pour le trouver.

Les méthodes de pénalité présentent certains inconvénients. Notamment lorsque  $r^k$  est très grand, la fonction  $\phi$  peut être mal conditionnée, ce qui entraîne une convergence lente. Mais leur simplicité pratique permettra de les utiliser avec un algorithme génétique pour la résolution de problèmes sous contraintes.

La méthode présentée dans le paragraphe suivant permet d'assurer une convergence vers l'optimum sans que le paramètre de pénalité tende vers l'infini.

**Méthode de Lagrangien augmenté :**

Nous présenterons tout d'abord la transformation des problèmes sous contraintes d'égalité (Approche de Hestenes et Powell), puis nous étendrons aux contraintes d'inégalité (Approche de Rockafeller). Seul le principe de la méthode sera exposé. Le lecteur intéressé pourra trouver une description complète de diverses variantes dans différents ouvrages [MIN], [VAS].

*Problèmes à Contraintes d'égalité :*

$$\text{Soit (P)} \begin{cases} \min f(x) \\ h_k(x) = 0, k = 1 \dots c_e \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{cases}$$

Rappelons que si  $x^*$  est un minimum de  $f$ , il existe des multiplicateurs de Lagrange de signe quelconque tel que la condition de Lagrange soit satisfaite :

$$\exists (\mu_j^*)_{j=1 \dots c_e} \in \mathfrak{R}^e / \nabla f(x^*) + \sum_{k=1}^{c_e} \mu_k^* \cdot \nabla h_k(x^*) = 0 \quad (3.3-5)$$

On pose :

$$L(x, \lambda, r) = f(x) + \sum_{k=1}^{c_e} \lambda_k \cdot h_k(x) + r \cdot \sum_{k=1}^{c_e} h_k^2(x) \quad (3.3-6)$$

avec :  $r > 0$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{c_e}) \in \mathfrak{R}^{c_e}$$

La fonction  $L$  s'appelle la fonction lagrangienne augmentée. On distingue clairement dans cette somme, la fonction lagrangienne classique augmentée par une fonction de pénalité extérieure.

*Principe de la Méthode :*

La méthode consiste à résoudre, de façon itérative, le problème augmenté  $\text{Min } L(x, \lambda, r)$  sans contrainte.

On génère ainsi une suite de points  $x^k$  qui réalise à chaque itération  $k$  le problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda^k, r).$$

Pour que  $x^k$  soit un minimum local, il faut :

$$\nabla_x L(x, \lambda^k, r) = 0 \quad (3.3-7)$$

De manière développée, ( 3.3-7 ) peut s'écrire :

$$\nabla_x f(x) + \sum_{j=1}^{ce} \lambda_j^k \cdot \nabla_x h_j(x^k) + 2r \cdot \sum_{k=1}^{ce} \nabla_x h_k(x^k) = 0 \quad (3.3-8)$$

Si l'on utilise la formule ( 3.3-9 ) de réactualisation proposée par Hestenes [HES], on simplifie ( 3.3-8 ) :

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + 2r \cdot h_j(x^k), \forall j = 1 \dots ce \quad (3.3-9)$$

$$\nabla f(x^k) + \sum_{j=1}^{ce} \lambda_j^{k+1} \cdot \nabla h_j(x^k) + h_j(x^k) = 0 \quad (3.3-10)$$

A l'optimum  $(x^*, \lambda^*)$ , on a :

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{ce} \lambda_j^* \cdot \nabla h_j(x^*) = 0 \quad (3.3-11)$$

$$\text{et } \lambda_j^* = \lambda^* + 2r \cdot h_j(x^*) \quad (3.3-12)$$

De ( 3.3-12 ), on déduit :

$$h_j(x^*) = 0 \quad (3.3-13)$$

Ainsi, si  $(x^*, \lambda^*)$  est la solution du problème sans contrainte de Lagrangien augmenté, alors  $(x^*, \lambda^*)$  vérifie le système suivant :

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda^*, r) &= 0 \\ h_j(x^*) &= 0, j = 1 \dots l \end{aligned} \tag{3.3-14}$$

C'est en fait les conditions d'optimalité de Lagrange du problème (P).

L'utilisation du lagrangien augmenté améliore nettement le conditionnement numérique du problème sans contrainte. En effet, le gradient  $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, r)$  est nul en  $x^*$  indépendamment de la valeur prise par  $r$ .

En revanche, dans le cas des méthodes de pénalités extérieures, le gradient  $\nabla_x \phi(x, r)$  en  $x^*$  est égal à celui de  $f$  :

$$\nabla_x \phi(x, r) = \nabla f(x^*) \tag{3.3-15}$$

Il est donc en général non nul. C'est pourquoi pour ces méthodes  $r$  est généralement pris très grand afin de converger vers  $x^*$  le plus précisément. La fonction  $\phi$  devient alors mal conditionnée.

Problèmes à contraintes d'inégalités :

L'extension de cette méthode aux problèmes sous contraintes d'inégalités a été suggérée par Rockafeller.

$$\text{soit (P)} \left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ y_i(x) \leq 0, i = 1 \dots c_i \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{array} \right.$$

(P) est transformé en un problème sous contraintes d'égalités en ajoutant des variables  $s_i$  ( $i \in \{1 \dots c_i\}$ ) d'écart positives :

$$(P_3) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ y_i(x) + s_i = 0, i = 1 \dots c_i \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{array} \right.$$

La fonction lagrangienne augmentée s'écrit alors :

$$L(x, \lambda, r) = f(x) + \sum_{i=1}^{c_i} \lambda_i \cdot (g_i(x) + s_i) + r \cdot \sum_{i=1}^{c_i} (g_i(x) + s_i)^2 \quad (3.3-16)$$

avec  $r > 0$ .

$L(x, \lambda, r)$  doit alors être minimisée par rapport à  $x$  et au vecteur  $s$  des variables d'écart.

La minimisation par rapport à  $s$ , à  $x$  fixe, peut être menée analytiquement. On exprime la condition nécessaire d'optimalité :

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = r \cdot s_i^2 + (2 \cdot r \cdot g_i - \lambda_i) \cdot s_i = 0 \quad (3.3-17)$$

donc, si  $r > 0$ , le minimum est atteint pour :

$$\begin{cases} s_i^* = -g_i(x) - \frac{\lambda_i}{2r} & \text{si } g_i(x) \leq -\frac{\lambda_i}{2r} \\ s_i^* = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$L$  devient une fonction ne dépendant que de  $x$  en posant :

$$L(x, \lambda, r) = f(x) + \sum_{i=1}^{c_i} G(g_i(x), \lambda_i, r) \quad (3.3-18)$$

avec :

$$G(g_i(x), \lambda_i, r) = \begin{cases} -\frac{\lambda_i^2}{4r} & g_i(x) \leq -\frac{\lambda_i}{2r} \\ \lambda_i \cdot g_i(x) + r \cdot (g_i(x))^2 & g_i(x) \geq -\frac{\lambda_i}{2r} \end{cases}$$

La réactualisation utilisée des multiplicateurs de Lagrange pourra être une variante de celle proposée par Hestenes :

$$\lambda_i^{k+1} = \max(0, \lambda_i^k + 2r \cdot g_i(x^k))$$

Dans la pratique, il existe plusieurs formules de réactualisation dont certaines sont basées sur les dérivées premières ou secondes. L'inconvénient majeur est le calcul des dérivées, qui n'est pas toujours possible dans des domaines tels que le nôtre.

Cependant, si la minimisation du problème sans contrainte ( $\min L(x, \lambda^k, r)$ ) est résolue par une méthode quasi-Newton (développée dans le chapitre suivant), il sera alors intéressant d'utiliser toutes les données obtenues et en particulier l'approximation H de l'inverse du Hessien  $[\nabla_x^2 L]^{-1}$ .

Comme pour les multiplicateurs de Lagrange, il faut à chaque itération mettre à jour le coefficient de pénalité  $r$ . Celui-ci peut selon les méthodes être une suite géométrique de raison  $\rho$  :

$$r^{k+1} = \rho \cdot r^k \text{ avec } \rho > 1.$$

Nous avons vu précédemment que les coefficients  $r$  élevés ne sont pas nécessaires, ce qui entraîne alors un meilleur conditionnement du problème.

Cependant, la formule de réactualisation des multiplicateurs de Lagrange converge d'autant mieux vers  $\lambda^*$  que  $r$  est grand [LUE]. Un compromis entre le conditionnement du problème sans contrainte et la convergence des multiplicateurs de Lagrange est à trouver. Il faut donc avoir des valeurs initiales de  $r$  faibles et utiliser une méthode de gradient conjugué ou quasi-Newtonienne pour la minimisation du problème.

### 3.3.2.3. Méthode sans contrainte

Les deux types de méthode présentés, jusque là, sont en fait des moyens pour transformer un problème de minimisation sous contraintes, en un problème de minimisation sans contrainte. A chaque étape de la transformation, une résolution d'un problème sans contrainte est nécessaire.

Pour le conditionnement du problème, la minimisation du problème nécessite l'utilisation d'une méthode de type gradient conjugué ou de type Quasi-Newton. Les méthodes Quasi-Newton nécessitent environ  $n$  fois moins d'étapes que celles du gradient conjugué. En outre, les calculs effectués durant la minimisation permettront la mise en œuvre d'une formule de réactualisation des multiplicateurs de Lagrange, reposant sur les dérivées premières et secondes.

Pour toutes ces raisons, nous ne présenterons que le principe de la méthode Quasi-Newton.

Cette méthode suppose que la fonction  $f$  est deux fois continûment différentiable. Elle peut être vue comme une extension de la méthode de Newton, c'est à dire une méthode dans laquelle la direction de recherche s'exprime à l'aide d'une formule :

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \cdot H^k \cdot \nabla f(x^k) \quad (3.3-19)$$

avec  $H^k$  une approximation de l'inverse du Hessian de  $f$ ,

$\alpha$  le coefficient de descente,  $\alpha > 0$ .

Notons que pour la méthode de Newton,  $H^k$  est égale à  $\nabla^2 f(x^k)$ .

En 1970, Broyden [Bro], Fletcher [Fle], Goldfarb [Gol] et Schanno [Sch] ont proposé une méthode récursive pour calculer  $H^{k+1}$  à partir de  $H^k$  : elle est appelée BFGS.

$$H^{k+1} = H^k + \left[ 1 + \frac{\gamma_k^t \cdot H^k \cdot \gamma_k}{\delta_k^t \cdot \gamma_k} \right] \cdot \frac{\delta_k \cdot \delta_k^t}{\delta_k^t \cdot \gamma_k} - \frac{\delta_k \cdot \gamma_k^t \cdot H^k + H^k \cdot \gamma_k \cdot \delta_k^t}{\delta_k^t \cdot \gamma_k} \quad (3.3-20)$$

avec :

$$\gamma_k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$$

$$\delta_k = x^{k+1} - x^k$$

L'algorithme de la méthode Quasi-Newton est alors :

1. Choisir un point de départ  $x_0$ .
2. Choisir une matrice initiale  $H^0$  définie positive (la matrice identité par exemple).
3. A chaque itération  $k$  :

On cherche la solution  $\alpha^k$  du problème  $\min_{\alpha} \{ f(x^k) - \alpha \cdot H^k \cdot \nabla f(x^k) \}$ .

La nouvelle solution approchée devient  $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \cdot H^k \cdot \nabla f(x^k)$ .

On calcule l'approximation de l'inverse du Hessian à l'aide de la formule BFGS.

4. Arrêt du procédé s'il y a convergence sinon retour à l'étape 3.

Si  $\delta_k^t \cdot \gamma_k$  est négatif, la matrice  $H^k$  n'est pas alors nécessairement définie positive. Ceci peut alors empêcher la convergence globale de l'algorithme. Il est donc nécessaire de s'assurer de la définition positive de la matrice  $H^k$ . Fletcher [FLE] a proposé des réinitialisations périodiques de la matrice  $H^k$  afin d'assurer son caractère défini positif.

La formule BFGS n'est pas la seule formule de réactualisation de la matrice  $H^k$ , mais elle est considérée comme la plus performante et est, par conséquent, souvent utilisée.

Les méthodes Quasi-Newton n'assurent pas un optimum global. Elles permettent seulement d'aboutir à un optimum local.

### **3.3.2.4. Conclusion**

Après avoir présenté ces différentes méthodes, nous sommes en mesure de mettre en place un algorithme d'optimisation complet, reposant sur les diverses méthodes exposées plus haut.

Les fonctions  $f$ ,  $g_i$  et  $h_j$  sont alors nécessairement continûment différentiables. Mais seul un optimum local est a priori atteint, sauf dans le cas de fonctions convexes où c'est alors un optimum global.

Dans la suite, nous allons aborder l'autre grande catégorie des méthodes d'optimisation : les méthodes stochastiques, qui convergent vers l'optimum global quelles que soient les fonctions constituant le problème d'optimisation.

### **3.3.3. Les méthodes stochastiques**

Deux algorithmes ressortent de l'ensemble des méthodes stochastiques :

- ✓ les algorithmes génétiques
- ✓ le recuit simulé [KIR] [MET]

Nous ne présenterons pas en détail le processus d'optimisation de ces deux méthodes. Dans la suite de notre travail, nous avons utilisé les algorithmes génétiques. C'est pourquoi nous exposerons les bases de cet algorithme. Pour plus de renseignements, le lecteur se reportera aux thèses de Saludjian [SAL], Sareni [SAR] et De Vasconcelos [VAS].

#### **3.3.3.1. Les algorithmes génétiques**

Les algorithmes génétiques (GA) ont été mis en place pour imiter le processus d'évolution naturelle des espèces et de la génétique. Les GA diffèrent fondamentalement des autres méthodes dans la recherche de l'optimum :

- ✓ Les paramètres sont codés (par analogie au chromosome). Le processus utilisera ce code et non le paramètre lui même.
- ✓ L'algorithme traite un ensemble de points, contrairement aux méthodes déterministes qui traitent un seul point à la fois.
- ✓ Seules les valeurs de la fonction à optimiser sont nécessaires.
- ✓ Le passage d'une itération à une autre est aléatoire : les principaux opérateurs sont le croisement et la mutation du codage des paramètres.

Comme nous venons de le dire, les GA agissent sur une population (par exemple, un ensemble de géométries réalisables pour une structure) afin que les individus d'une nouvelle génération soient meilleurs que ceux de l'ancienne. Tout comme dans la nature, la probabilité de survie d'un individu est liée à sa performance. Ses chromosomes (codage des paramètres) auront alors une probabilité plus grande d'être transmis aux descendants. Ainsi, on parlera cette fois de maximisation de la fonction objectif puisqu'il faudra améliorer la performance des individus. Le problème sera ainsi exprimé :

$$\begin{cases} \max_x f(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Nous verrons comment nous ramener à ce type de problème.

La reproduction des individus est composée de processus simples :

- Le croisement : les couples de parents sont choisis aléatoirement. Les descendants sont porteurs d'une partie des caractéristiques des parents.
- La mutation : elle est due à des perturbations génétiques aléatoires qui amèneront de nouvelles caractéristiques génétiques.

Afin d'utiliser ces opérateurs, il est nécessaire d'avoir une représentation chromosomique des diverses solutions de nos problèmes. On pourra utiliser une chaîne binaire, caractérisée par sa longueur  $l$ . Par exemple, une chaîne  $A$  de longueur  $l=4$ , peut être écrite ainsi :  $A=1001$ .

L'organigramme de la figure 3.3-1 représente l'organisation des algorithmes génétiques.

Nous allons définir plus en détail le codage des paramètres, ainsi que les opérateurs de sélection, de croisement et de mutation introduits.

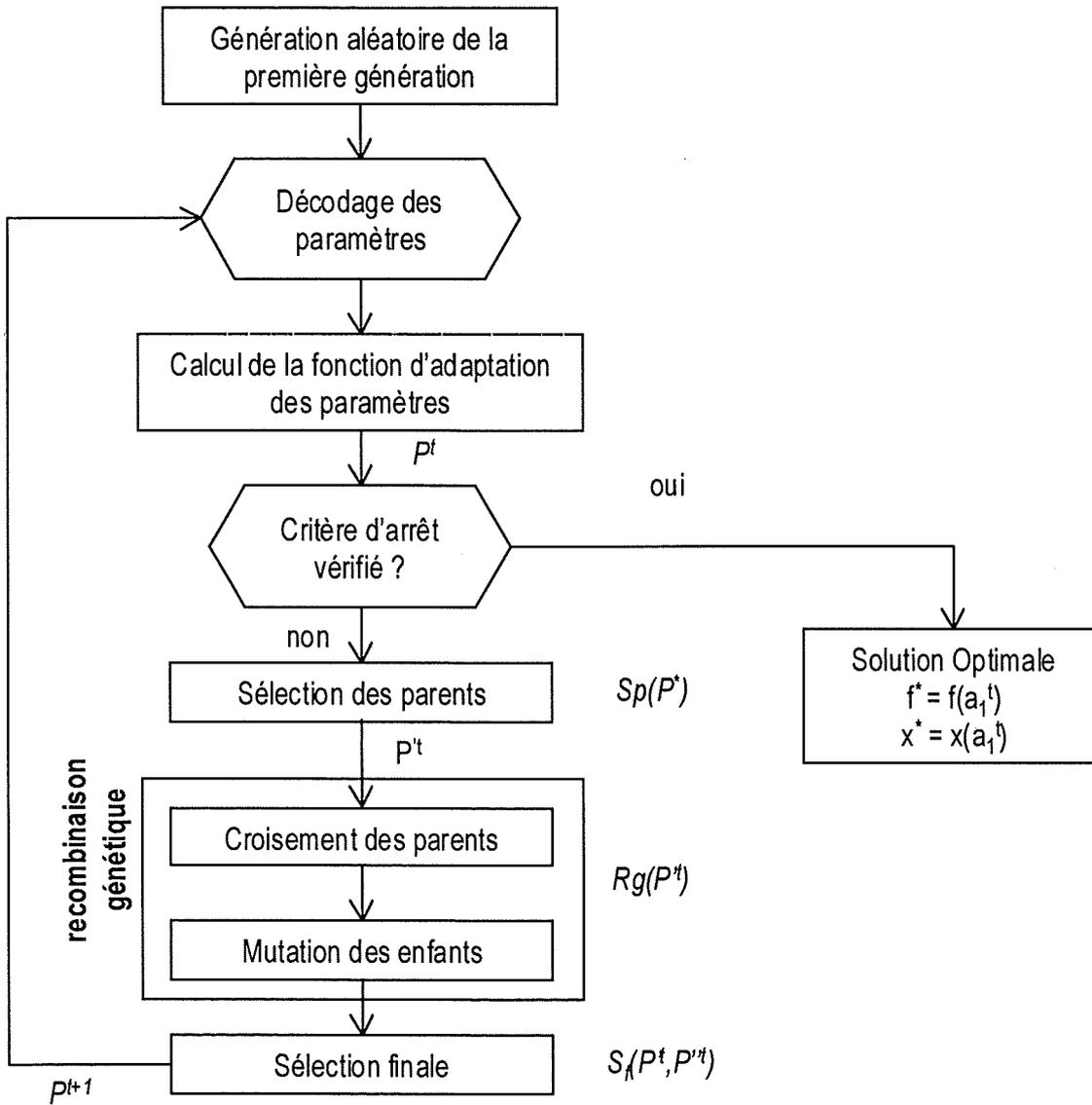


figure 3.3-1 : Synoptique des algorithmes génétiques

**Représentation des paramètres :**

Le codage binaire a été imposé en raison de sa simplicité : il n'utilise que les deux symboles 0 et 1.

Une chaîne  $x=b_1...b_l$  est décodée en une valeur entière  $\sum_{i=1}^l b_i \cdot 2^{i-1}$  avec  $b_i \in \{0,1\}$ .

Afin de déterminer un intervalle  $[x^{min}; x^{max}]$ , on applique une règle de trois pour passer de l'intervalle  $[0; 2^l-1]$  au réel  $[x^{min}; x^{max}]$ . Le Tableau 3.1 représente les correspondances de cette règle.

Tableau 3.1 : Codage binaire réel

| <u>code</u>         |   | <u>Valeur entière</u>      |   | <u>Valeur réelle</u>   |
|---------------------|---|----------------------------|---|--|
| 00...0              | ↔ | 0                          | ↔ | $x_{min}$  |
| 11...1              | ↔ | $2^l - 1$                  | ↔ | $x_{max}$  |
| $b_1 b_2 \dots b_l$ | ↔ | $\sum_{i=1}^l 2^{i-1} b_i$ | ↔ | $x_{min} + (x_{max} - x_{min}) \cdot \frac{\sum_{i=1}^l 2^{i-1} b_i}{2^l - 1}$ |

Pour les problèmes d'ordre  $n$ , on code chaque paramètre  $x_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) sous forme d'une chaîne binaire de longueur  $l_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ). Puis on concatène toutes ces chaînes pour former un individu de

longueur  $l = \sum_{i=1}^n l_i$ .

Notons que la longueur de la chaîne sera liée à la précision désirée sur les paramètres. Si  $prec$  désigne la précision voulue pour le paramètre  $x_i$ , on peut alors écrire la relation exposée à la figure 3.3-2.

$$\underbrace{2^{l_i}}_{\text{nombre de chaînes différentes de longueur } l} \leq \underbrace{(x_i^{min} - x_i^{max}) \cdot 10^{prec}}_{\text{nombre de réels compris dans l'intervalle } l \text{ pour satisfaire la précision}}$$

figure 3.3-2 : Précision du codage

Il existe d'autres types de codage, tels que le codage de Gray et le codage dynamique des paramètres qui améliorent le codage binaire standard. Cependant, nous ne considérerons dans la suite que les chromosomes binaires.

### Sélection ou Reproduction :

Cet opérateur imite la reproduction naturelle, c'est à dire que les individus les mieux adaptés ont tendance à mieux se reproduire. Ainsi, la sélection se divise généralement en deux étapes :

- ✓ attribuer à chaque individu une probabilité d'avoir un descendant dans la génération suivante,
- ✓ former une nouvelle population de même taille que la précédente.

La première étape peut être réalisée par un simple calcul de probabilité, comme étant le rapport de l'adaptation de l'individu sur la somme des adaptations de tous les individus de la population. Ainsi, pour un individu  $x$  d'évaluation  $f(x)$ , la probabilité d'avoir un descendant est :

$$p(x, t) = \frac{f(x)}{\sum_{i=1}^n f(x^i)}$$

avec :  $N$  la taille de la population

$(x^k)_{k=1, \dots, n}$  l'ensemble des individus

$t$  la génération courante.

Cette sélection est appelée « sélection proportionnelle » car la probabilité d'avoir un descendant est proportionnelle à la valeur d'adaptation de l'individu.

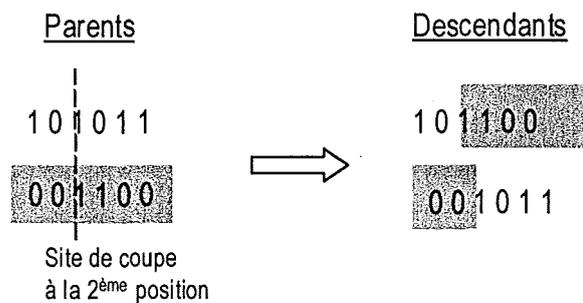
La seconde étape consiste à créer la nouvelle génération. En pratique, on utilise une roue de loterie divisée en  $N$  secteurs. Chaque secteur représente les individus à sélectionner, et sa surface est proportionnelle à la probabilité de sélection de l'individu que le secteur représente.

La roue est activée de manière aléatoire un nombre de fois égal à la taille de la population.

La sélection oriente l'exploration vers les meilleurs individus déjà identifiés mais ne fait apparaître aucune configuration nouvelle. Ce sera la tâche des opérateurs de la recombinaison génétique, que sont le croisement et la mutation.

**Le croisement :**

Le croisement est un processus aléatoire qui échange une partie du patrimoine génétique de deux chromosomes parents, pour former deux nouveaux individus (enfants) (figure 3.3-3).



**figure 3.3-3 : Croisement de deux chromosomes**

Le croisement est associé à une probabilité  $p_c$ . Après croisement, les parents peuvent être retirés de la population des reproducteurs (croisement sans remplacement) ou bien être gardés pour avoir une nouvelle chance de se reproduire (croisement avec remplacement). En général, c'est la première solution qui est adoptée.

Il existe trois types de croisement :

- Le croisement à un site.
- Le croisement multi-sites.
- Le croisement uniforme.

Aujourd'hui, il n'est pas possible de dire lequel de ces trois croisements est le plus performant [SAR].

**La mutation :**

La mutation est une modification aléatoire d'un gène d'un individu. Elle consiste à inverser un bit du chromosome avec une probabilité  $p_m$  (figure 3.3-4).

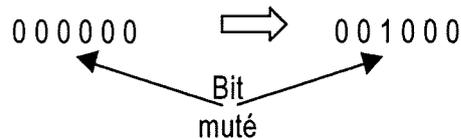


figure 3.3-4 : La mutation d'un chromosome

Ces deux opérateurs, croisement et mutation, ont pour objectif l'exploration de nouvelles zones de l'espace de recherche. Celle-ci aura d'autant plus de chances d'être réalisée que les parents choisis pour le croisement, possèdent un patrimoine génétique très différent.

Cependant, la sélection faite avant la recombinaison génétique réduit la probabilité de recombinaison d'individus génétiquement différents. En effet, cette étape tend à reproduire les meilleures structures.

Cette mutation est nécessaire car elle permet de relancer la recherche dans des directions qui n'ont pas pu être atteintes par le croisement de la population. Elle assure ainsi que la probabilité d'atteindre un point quelconque ne soit jamais nulle. Il apparaît que l'algorithme génétique est un équilibre entre l'exploration de l'espace de recherche et l'exploitation des meilleurs individus.

C'est cette caractéristique qui va le différencier d'autres algorithmes stochastiques qui ne cherchent qu'à améliorer la solution courante, ou explorent l'espace de recherche. Pour ces raisons, les algorithmes génétiques ont été utilisés dans de nombreux domaines avec succès.

### 3.3.3.2. Conclusion

Dans cette section portant sur les méthodes stochastiques, nous avons présenté l'algorithme génétique.

Il est capable de localiser l'optimum global. Mais des études précédentes [SAL], [VAS] ont montré que cette méthode nécessite de nombreux calculs dès que la précision souhaitée sur la solution est grande. En revanche, la région de l'optimum global est relativement vite localisée. Il s'en suit donc une nécessité de rechercher une méthode utilisant les avantages des méthodes stochastiques sans posséder ses défauts.

### 3.3.4. Les Méthodes Hybrides

Dans les deux chapitres précédents, nous avons exposé les deux grandes classes de méthodes d'optimisation. Nous avons pu mettre en avant les propriétés de chacune d'entre elles (Tableau 3.2).

- ✓ Pour les déterministes, la solution obtenue dépend du point de départ. En effet, pour les méthodes d'ordre 1, la recherche du minimum s'effectue à partir du gradient évalué au point courant. Si la direction est dirigée vers un optimum local, l'algorithme s'arrêtera sur celui-ci et ne convergera pas vers l'optimum global. En revanche, le temps de calcul est faible comparé à celui des algorithmes stochastiques.
- ✓ les méthodes stochastiques ont deux avantages principaux : leur capacité à trouver l'optimum global, et la non-utilité du calcul des dérivées. Cependant, le grand nombre de calculs nécessaires, pour atteindre des solutions précises, est un frein à l'utilisation de ces méthodes.

Tableau 3.2 : Comparaison des méthodes

| Méthodes<br>Déterministes  | Méthodes<br>Stochastiques                       |
|--|---|
| ☹ fonction objectif,<br>fonctions contraintes<br>et leur <b>gradient</b> | ☺ fonction objectif<br>et fonctions contraintes |
| ☺ convergence <b>rapide</b>  | ☹ convergence <b>lente</b>                      |
| ☹ optimum <b>local</b>   | ☺ optimum <b>global</b>                         |

C'est pourquoi, il peut être intéressant de coupler les deux méthodes :

- dans un premier temps, utiliser un algorithme stochastique (les algorithmes génétiques par exemple) pour localiser la région de l'optimum global,
- puis, faire appel à un algorithme déterministe pour trouver avec précision l'optimum. De plus, la méthode déterministe assurera une convergence rapide vers la solution.

Dans la suite de ce chapitre, nous mettrons en place une méthode déterministe, ainsi qu'une méthode hybride.

### 3.4. Analyse de sensibilité : dPEEC

#### 3.4.1. Présentation du problème

Nous avons vu précédemment que notre but était de dériver la méthode PEEC pour réaliser l'analyse de sensibilité de nos problèmes (dPEEC). Pour cela, il nous faut trouver les procédés de dérivation associés aux trois processus de modélisation (réduction, analyse et effort PEEC).

Afin de déterminer le travail que nous aurons à traiter, nous déroulons le principe de l'optimisation sur un exemple simple.

Reprenons l'exemple de structure de la première partie (figure 3.4-1).

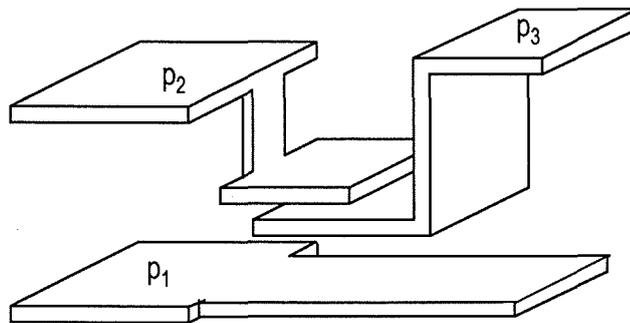


figure 3.4-1 : Convertisseur d'Electronique de Puissance

Pour simplifier le problème, nous allons raisonner sur les plaques p1 et p2 uniquement. L'objectif dans ce cas est de diminuer l'inductance  $L_{eq}$  de boucle du schéma électrique équivalent (figure 3.4-2). Nous avons choisi dans ce cas de subdiviser chaque barre rectiligne en deux éléments. On s'aperçoit dès lors que l'inductance équivalente  $L_{eq}$  du schéma n'est pas une simple combinaison linéaire des impédances associées à chaque élément.

Ainsi, il ne sera pas simple d'évaluer le gradient de la fonction objectif afin d'obtenir le calcul de sensibilité. On peut donc se demander s'il n'est pas possible d'évaluer ce gradient en exprimant autrement la fonction objectif.

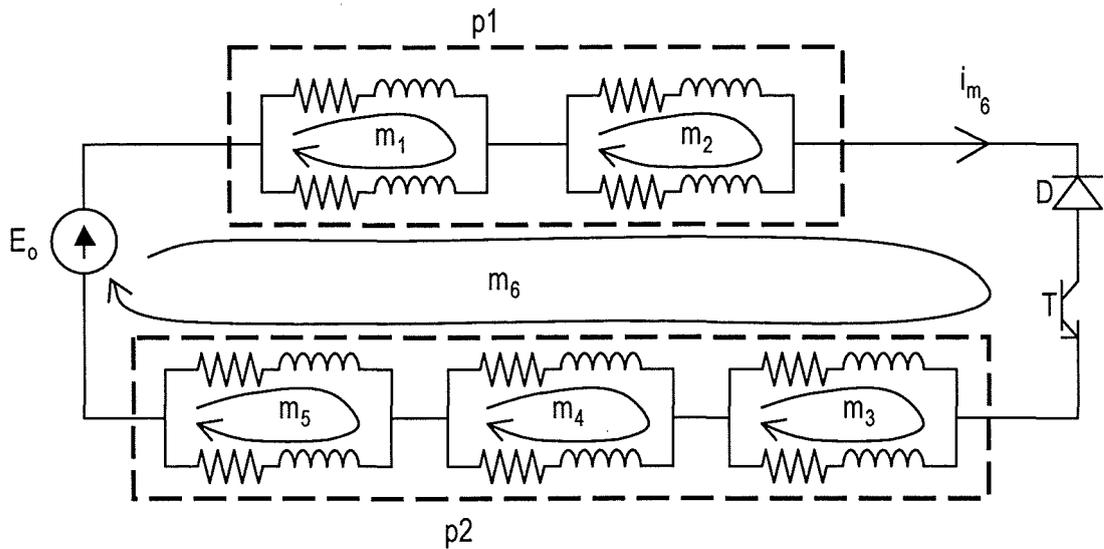


figure 3.4-2 : Schéma électrique de la structure

Nous représentons sur la figure 3.4-2 les courants de mailles sur lesquels reposent la modélisation électrique. Il apparaît alors l'égalité suivante :

$$E = Z_{eq} \cdot i_{m6} \quad (3.4-1)$$

avec  $Z_{eq}$  : l'impédance équivalente de la structure,  $Z_{eq} = R_{eq} + j \cdot \omega \cdot L_{eq}$

De ( 3.4-1 ), nous pouvons exprimer  $L_{eq}$ .

$$L_{eq} = \frac{1}{\omega} \cdot \text{Im} \left( \frac{E}{i_{m6}} \right) \quad (3.4-2)$$

Ainsi, nous avons réussi à exprimer la fonction objectif  $L_{eq}$  de notre problème, sans passer par l'association des impédances équivalentes à chaque subdivision.

L'expression de gradient  $\frac{dL_{eq}}{dp}$  est alors la suivante :

$$\frac{dL_{eq}}{dp} = \frac{1}{\omega} \cdot \text{Im} \left( \frac{d}{dp} \left( \frac{E}{i_{m6}} \right) \right) \quad (3.4-3)$$

avec  $p$  : le vecteur des paramètres du problème à optimiser

Or, la source E est imposée par l'extérieur, donc  $\frac{dE}{dp} = 0$  et ( 3.4-3 ) devient

$$\frac{dL_{eq}}{dp} = \frac{1}{\omega} \cdot \operatorname{Im} \left( \frac{-E}{i_{m_6}^2} \cdot \frac{di_{m_6}}{dp} \right) \quad (3.4-4)$$

Pour calculer  $\frac{dL_{eq}}{dp}$ , il faudra donc exprimer  $\frac{di_{m_6}}{dp}$ . Ce calcul sera développé dans la section suivante.

Si nous généralisons l'exemple précédent, nous arrivons à une fonction objectif du type suivant :  $f(I_m(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ .

Il apparaît alors que l'analyse de sensibilité dans le cas d'un problème de réduction peut se résoudre à exprimer le gradient des courants par rapport aux paramètres géométriques.

Nous aurions pu traiter également un problème d'effort électrodynamique. Le résultat serait le même – Annexe II -, nous aboutirions à évaluer le gradient des courants.

Il apparaît évident que dans le cas d'un problème d'analyse, la connaissance du gradient des courants suffit à effectuer l'analyse de sensibilité.

En résumé, il est donc nécessaire de pouvoir évaluer le gradient de nos fonctions objectifs. Cependant, en les exprimant sous la forme  $f(I_m(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ , l'expression du gradient de  $I_m$  est suffisant.

La section suivante est consacrée à l'expression du gradient de la fonction objectif  $f(I_m(\mathbf{p}), \mathbf{p})$  par rapport aux paramètres d'optimisation  $\mathbf{p}$ . Nous cherchons à faire apparaître le gradient de  $I_m$ .

### 3.4.2. Expression du gradient de la fonction objectif

#### 3.4.2.1. Rappel

Le but est ici, d'exprimer de manière analytique le gradient de la fonction objectif  $f(\mathbf{I}_m(\mathbf{p}), \mathbf{p})$ . Pour cela, nous rappelons les informations développées dans le chapitre concernant la modélisation de la connectique qui seront utilisées ici .

- la **matrice maille-branche M**, décrit la loi des mailles au sein de la structure considérée.

D'où la loi :

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.4-5)$$

avec  $\mathbf{U}$  : le vecteur des tensions de branche.

- la loi d'Ohm :

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{I} + \mathbf{E}_g \quad (3.4-6)$$

avec  $\mathbf{Z}_e$  : la matrice des impédances associées à chaque élément issu de la subdivision

$\mathbf{I}$  : le vecteur des courants de branche

$\mathbf{E}_g$  : le vecteur des sources de tension présentes dans la structure

- la relation entre les courants de branche  $\mathbf{I}$  et les courants de mailles  $\mathbf{I}_m$  :

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{I}_m \quad (3.4-7)$$

avec  $\mathbf{I}_m$  : le vecteur des courants de mailles

#### 3.4.2.2. Hypothèses

Dans la suite, les transformations effectuées seront des modifications de forme. En aucun cas, le circuit électrique issu de la subdivision sera modifié : le nombre de subdivisions de chaque barre restera constant.

Aussi, la topologie du système est inchangée, ce qui se traduit par :

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (3.4-8)$$

De plus, les sources de tension présentes dans la structure ne sont pas modifiées suite à l'optimisation.

Ainsi,

$$\frac{dE_g}{dp} = 0 \quad (3.4-9)$$

### 3.4.2.3. Développement

Maintenant, exprimons le gradient de la fonction objectif en utilisant la notion de dérivées partielles :

$$\frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial l_m^t} \cdot \frac{dl_m}{dp} \quad (3.4-10)$$

Dans ( 3.4-10 ), les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial p}$  et  $\frac{\partial f}{\partial l_m^t}$  seront exprimées directement soit par l'utilisateur,

soit par une dérivation symbolique, à l'aide d'un logiciel adapté. En revanche, nous ne pouvons pas exprimer  $\frac{dl_m}{dp}$  simplement. Pour obtenir une expression de  $\frac{dl_m}{dp}$ , ( 3.4-5 ), ( 3.4-6 ) et ( 3.4-7 ) sont

dérivées par rapport au vecteur  $p$  des paramètres :

$$\frac{d(M \cdot U)}{dp} = M \cdot \frac{dU}{dp} + \frac{dM}{dp} \cdot U = 0 \quad (3.4-11)$$

$$\frac{dU}{dp} = \frac{dZ_e}{dp} \cdot l + Z_e \cdot \frac{dl}{dp} + \frac{dE_g}{dp} \quad (3.4-12)$$

$$\frac{dl}{dp} = M^t \cdot \frac{dl_m}{dp} + \frac{dM^t}{dp} \cdot l_m \quad (3.4-13)$$

L'introduction de ( 3.4-8 ) et ( 3.4-9 ) dans ( 3.4-11 ), ( 3.4-12 ) et ( 3.4-13 ) donne les équations suivantes :

$$M \cdot \frac{dU}{dp} = 0 \quad (3.4-14)$$

$$\frac{dU}{dp} = \frac{dZ_e}{dp} \cdot l + Z_e \cdot \frac{dl}{dp} \quad (3.4-15)$$

$$\frac{dl}{dp} = M^t \cdot \frac{dl_m}{dp} \quad (3.4-16)$$

La combinaison des équations ( 3.4-14 ), ( 3.4-15 ) et ( 3.4-16 ) amène l'expression suivante :

$$M \cdot \frac{dZ_e}{dp} \cdot M^t \cdot I_m + M \cdot Z_e \cdot M^t \cdot \frac{dl_m}{dp} = 0 \quad (3.4-17)$$

$\frac{dl_m}{dp}$  peut alors être isolé :

$$\frac{dl_m}{dp} = -\left(M \cdot Z_e \cdot M^t\right)^{-1} \cdot M \cdot \frac{dZ_e}{dp} \cdot M^t \cdot I_m \quad (3.4-18)$$

Sommes-nous parvenus à l'objectif fixé : obtenir une expression de  $\frac{dl_m}{dp}$  sans devoir faire appel aux

différences finies ?

Pour répondre à cette interrogation, analysons les différents termes du membre de droite de ( 3.4-18 ) :

- $\left(M \cdot Z_e \cdot M^t\right)^{-1}$  : les matrices M et Z sont issues de l'analyse électrique. Ce terme nécessite une inversion de matrice. Rappelons que  $M \cdot Z_e \cdot M^t$  est la matrice impédance-maille  $Z_m$  du chapitre précédent et que  $Z_m$  est symétrique.
- $I_m$  : c'est le vecteur des courants de mailles. Il est obtenu par résolution du système :

$$\left(M \cdot Z_e \cdot M^t\right) \cdot I_m = -M \cdot E_g \quad (3.4-19)$$

Pour rappel, ce système provient de la combinaison des équations ( 3.4-5 ), ( 3.4-6 ) et ( 3.4-7 )

- $M \cdot \frac{dZ_e}{dp} \cdot M^t$  : le terme essentiel est ici  $\frac{dZ_e}{dp}$ . Rappelons que  $Z_e$  est la matrice impédance issue de la modélisation PEEC de chaque barre élémentaire. Cette matrice a donc été obtenue avec les formules analytiques de la résistance, de l'inductance et de la mutuelle inductance établie par C.Hoer et C.Love [HOE], formules dépendant uniquement des paramètres géométriques. Il est

possible de calculer analytiquement les dérivées de la résistance, de l'inductance et de la mutuelle inductance en fonction du vecteur  $\mathbf{p}$ . La matrice  $\frac{d\mathbf{Z}_e}{d\mathbf{p}}$  sera donc obtenue de manière analytique.

Les trois termes étant directement obtenus par calcul, nous avons atteint notre objectif, à savoir dériver un processus de modélisation. En introduisant ( 3.4-18 ) dans ( 3.4-10 ), nous sommes maintenant en mesure de calculer le gradient de la fonction objectif  $f(\mathbf{l}_m(\mathbf{p}), \mathbf{p})$  ( 3.4-20 ).

$$\frac{df}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_m^t} \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{M}^t)^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_e}{d\mathbf{p}} \cdot \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{l}_m \quad (3.4-20)$$

#### 3.4.2.4. Etat-adjoint

Dans le but de diminuer le coût des calculs, nous allons introduire un vecteur  $\lambda$  tel que :

$$\lambda^t = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_m^t} \cdot (\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{M}^t)^{-1} \quad (3.4-21)$$

L'équation ( 3.4-20 ) devient :

$$\frac{df}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - \lambda^t \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_e}{d\mathbf{p}} \cdot \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{l}_m \quad (3.4-22)$$

Qu'apporte ce vecteur ?

L'observation de ( 3.4-21 ) définit le vecteur  $\lambda$  comme la multiplication du vecteur  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_m^t}$  par l'inverse de

la matrice  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{M}^t)$ . Soit  $\lambda$  solution du système matriciel :

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{M}^t) \cdot \lambda = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_m^t} \quad (3.4-23)$$

On s'aperçoit qu'il est moins coûteux de résoudre ( 3.4-23 ) que d'inverser la matrice

$\mathbf{Z}_m = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z}_e \cdot \mathbf{M}^t)$  avant de multiplier le résultat par le vecteur  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_m^t}$ . Le vecteur  $\lambda$  est appelé état

adjoint [GIT].

Quant à  $\mathbf{l}_m$ , il est obtenu par résolution du système ( 3.4-19 ).

En résumé, le gradient de la fonction objectif s'exprime ainsi :

$$\frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} - \lambda^t \cdot M \cdot \frac{dZ}{dp} \cdot M^t \cdot I_m \quad (3.4-24)$$

avec  $\lambda$  : solution du système  $Z_m \cdot \lambda = \frac{\partial f}{\partial I_m}$

$I_m$  : solution du système  $Z_m \cdot I_m = -M \cdot E_g$

### 3.4.2.5. Exemple

Afin de montrer la facilité d'application de cette méthode, nous l'appliquons à un exemple simple.

Nous voulons augmenter l'impédance équivalente de la structure, présentée figure 3.4-3, en modifiant la pulsation électrique  $\omega$ .

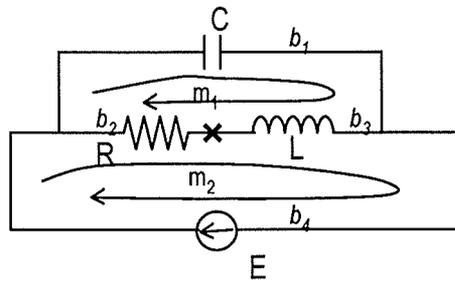


figure 3.4-3 : Schéma électrique

La fonction objectif est dans ce cas :

$$f(I_m(\omega), \omega) = \frac{1}{Z_{eq}^2} \quad (3.4-25)$$

Nous avons également exprimé la fonction objectif directement en fonction de R, L, C et  $\omega$ . Cette expression est présentée dans l'équation ( 3.4-26 ).

$$f(I_m(\omega), \omega) = \left( j \cdot C \cdot \omega + \frac{1}{R + j \cdot L \cdot \omega} \right)^2 \quad (3.4-26)$$

Dans notre cas, nous avons :

- deux mailles  $m_1$  et  $m_2$ ,
- quatre branches  $b_1, b_2, b_3$  et  $b_4$ .

On transforme  $f$  afin de l'exprimer en fonction de  $I_m$  et  $\omega$  :

$$f(I_m(\omega), \omega) = \frac{i_{m_2}^2}{E^2} \quad (3.4-27)$$

Les éléments issus de la modélisation électrique sont les suivants :

- $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{Z}_e = \begin{bmatrix} \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j \cdot L \cdot \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{E}_g = [0 \ 0 \ 0 \ E]^t$

On reprend l'équation ( 3.4-24 ) pour exprimer le gradient de la fonction objectif. Le paramètre est ici la pulsation  $\omega$ .

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{\partial f}{\partial \omega} - \lambda^t \cdot \mathbf{M} \cdot \frac{d\mathbf{Z}_e}{d\omega} \cdot \mathbf{M}^t \cdot \mathbf{I}_m \quad (3.4-28)$$

$$\text{Avec : } \lambda : \text{ solution du système } \mathbf{Z}_m \cdot \lambda = \frac{\partial f}{\partial I_m} \quad (3.4-29)$$

$$I_m : \text{ solution du système } \mathbf{Z}_m \cdot I_m = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_g \quad (3.4-30)$$

De ( 3.4-28 ), nous devons exprimer les données suivantes :  $\frac{\partial f}{\partial \omega}$ ,  $\lambda$ ,  $\frac{dZ_e}{d\omega}$  et  $I_m$ .

$\frac{\partial f}{\partial \omega}$  et  $\frac{\partial Z_e}{\partial \omega}$  sont obtenues directement :

- $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$

- $\frac{\partial Z_e}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{j \cdot C \cdot \omega^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j \cdot L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pour  $\lambda$  et  $I_m$ , nous devons résoudre les systèmes ( 3.4-29 ) et ( 3.4-30 ), et auparavant exprimer  $\frac{\partial f}{\partial I_m}$ .

Nous avons :  $\frac{\partial f}{\partial I_m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cdot I_{m2} \\ \frac{1}{E^2} \end{bmatrix}$  ( 3.4-31 )

La résolution du système ( 3.4-30 ) donne le vecteur  $I_m$  :

$$I_m = \begin{bmatrix} -j \cdot C \cdot E \cdot \omega \\ -j \cdot C \cdot E \cdot \omega - \frac{E}{R + j \cdot L \cdot \omega} \end{bmatrix}$$
 ( 3.4-32 )

Celle de ( 3.4-29 ) a abouti au vecteur  $\lambda$  :

$$\lambda = -\frac{2}{E} \left( j \cdot C \cdot \omega + \frac{1}{R + j \cdot L \cdot \omega} \right) \left[ j \cdot C \cdot \omega + \frac{1}{R + j \cdot L \cdot \omega} \right]$$
 ( 3.4-33 )

En combinant les équations ( 3.4-31 ), ( 3.4-32 ) et ( 3.4-33 ), nous arrivons assez facilement à l'expression du gradient :

$$\frac{df}{d\omega} = 2 \cdot \left( j \cdot C \cdot \omega + \frac{1}{R + j \cdot L \cdot \omega} \right) \cdot \left( j \cdot C - \frac{j \cdot L}{(R + j \cdot L \cdot \omega)^2} \right)$$
 ( 3.4-34 )

Afin de minimiser notre fonction objectif, il faut chercher  $\omega$  afin d'annuler la dérivée  $\frac{df}{d\omega}$  présentée par l'équation ( 3.4-34 ).

Il est possible de vérifier cette valeur ( 3.4-34 ) en dérivant ( 3.4-26 ) par rapport à  $\omega$ .

Avec cet exemple simple, où le gradient pouvait être calculé directement, nous avons montré la faisabilité de notre méthode.

### 3.4.2.6. Récapitulatif

Dans cette section, nous avons mis au point un processus qui permet de calculer le gradient de la fonction objectif de nos problèmes sans passer par l'utilisation de différences finies. Cette méthode repose sur l'utilisation des dérivées partielles et des équations de circuit de la structure étudiée. L'expression du gradient ainsi obtenue peut être ensuite calculée de manière plus rapide, si on applique la méthode de l'état-adjoint.

Le calcul du gradient  $\frac{df}{dp}$  est ainsi fini. En revanche, il nécessite la connaissance de certaines données :

- la dérivée partielle de  $f$  par rapport au vecteur  $\mathbf{p}$  des paramètres :  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$ ,
- la dérivée partielle de  $f$  par rapport au vecteur des courants de mailles  $\mathbf{I}_m$  :  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{I}_m}$
- la dérivée de la matrice impédance par rapport au vecteur  $\mathbf{p}$  des paramètres :  $\frac{d\mathbf{Z}_e}{d\mathbf{p}}$

En ce qui concerne les deux premières, elles seront exprimées par le concepteur (elles pourront éventuellement être générées automatiquement) par calcul formel.

Quant à la dérivée  $\frac{d\mathbf{Z}_e}{d\mathbf{p}}$ , nous pouvons l'exprimer analytiquement.

### 3.4.3. Expression analytique du gradient de $Z_e$

Nous n'allons pas dans ce paragraphe détailler le calcul analytique du gradient, cela serait trop fastidieux. Nous nous contenterons d'exposer les grandes lignes de la mise en œuvre de ce calcul.

$Z_e$  est la matrice impédance issue de la modélisation PEEC. L'élément  $z_{ij}$  correspond à :

- l'impédance propre de l'élément  $i$  : si  $i = j$  , alors  $z_{ij} = R_i + j \cdot L_i \cdot \omega$
- la mutuelle inductance entre les éléments  $i$  et  $j$  : si  $i \neq j$  , alors  $z_{ij} = j \cdot M_{ij} \cdot \omega$

Rappelons que les éléments sont des parallélépipèdes et que :

- $R = \rho \cdot \frac{L}{l \cdot h}$  avec  $L$  : la longueur de l'élément  
 $l$  : la largeur de l'élément  
 $h$  : la hauteur de l'élément

- $M = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{j+k+1} \cdot f(x_i, y_j, z_k)$

avec :  $x, y$  et  $z$  des vecteurs de 4 éléments,  
 $f$  une fonction analytique de trois variables.

#### Remarques :

- $x_i, y_j$  et  $z_k$  sont des combinaisons linéaires des paramètres  $p_i$ ,
- l'inductance  $L_i$  s'obtient avec la formule de la mutuelle, entre deux barres confondues.

Dès lors, on s'aperçoit que le gradient de la résistance, par rapport aux paramètres  $p$ , s'exprime ainsi :

$$\frac{dR}{dp} = \frac{\partial R}{\partial L} \cdot \frac{dL}{dp} + \frac{\partial R}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dp} + \frac{\partial R}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dp} \quad (3.4-35)$$

avec  $\frac{\partial R}{\partial L} = \frac{\rho}{l \cdot h}$

$$\frac{\partial R}{\partial l} = \frac{-\rho \cdot L}{l^2 \cdot h}$$

$$\frac{\partial R}{\partial h} = \frac{-\rho \cdot L}{l \cdot h^2}$$

Les dérivées géométriques  $\frac{dL}{dp}$ ,  $\frac{dl}{dp}$ ,  $\frac{dh}{dp}$  seront générées automatiquement, à partir du paramétrage de la géométrie, de la structure donnée par le concepteur.

Quant au gradient de la mutuelle inductance M, nous appliquons la même méthode :

$$\frac{dM}{dp} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (-1)^{i+j+k+1} \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dp} + \frac{\partial f}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_j}{dp} + \frac{\partial f}{\partial z_k} \cdot \frac{dz_k}{dp} \right]$$

Les termes  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y_j}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z_k}$  ont été exprimés analytiquement – Annexe I – à partir de la formule analytique de la mutuelle M (formule (2.2-42) de la partie sur la modélisation électrique). Les trois autres termes  $\frac{\partial x_i}{dp}$ ,  $\frac{\partial y_j}{dp}$  et  $\frac{\partial z_k}{dp}$  sont exprimés automatiquement par programme.

Moyennant une mise en œuvre longue de toutes les différentes formules analytiques, nous sommes en mesure d'exprimer  $\frac{dZ_e}{dp}$  à l'aide des termes  $\frac{dR}{dp}$  et  $\frac{dM}{dp}$ . Toutes les informations permettant le calcul du gradient de la fonction objectif f sont maintenant réunies et nous pouvons donc implanter notre méthode déterministe, sur un système informatique.

#### 3.4.4. Implantation de la méthode

L'objectif de ses travaux était de réaliser une optimisation des structures d'Electronique de Puissance. La figure 3.4-4 illustre l'organisation de notre optimisation.

Nous ne voulions pas développer une méthode déterministe, mais utiliser une méthode déjà existante. C'est pourquoi nous avons choisi de travailler avec une fonction de la boîte à outils du logiciel Matlab 5.0 [MATLAB]. Cette fonction – constr- est basée sur une méthode Quasi-Newton qui calcule le hessien de la fonction objectif avec la formule BFGS. Elle permet de résoudre des problèmes avec ou sans contrainte. Lorsque le problème est sous contraintes, il est transformé en un problème sans contrainte. Cependant, la documentation fournie par Matlab software n'est pas assez précise pour connaître la méthode de transformation employée.

Cette fonction a été utilisée sur stations de travail HP.

La programmation a été réalisée en partie sous un langage FORTRAN 77 et pour l'autre partie sous le langage propre à MATLAB. Toutes les expressions analytiques (résistance, mutuelle inductance et dérivées partielles de la résistance et de la mutuelle) ont été programmées en FORTRAN 77, puis grâce à des fonctions de passage, elles sont appelées par le logiciel MATLAB.

Toute l'organisation du processus d'optimisation a été réalisée avec le langage objet de MATLAB. Ceci nous a permis une modularité de notre processus et donc des modifications au fur et à mesure.

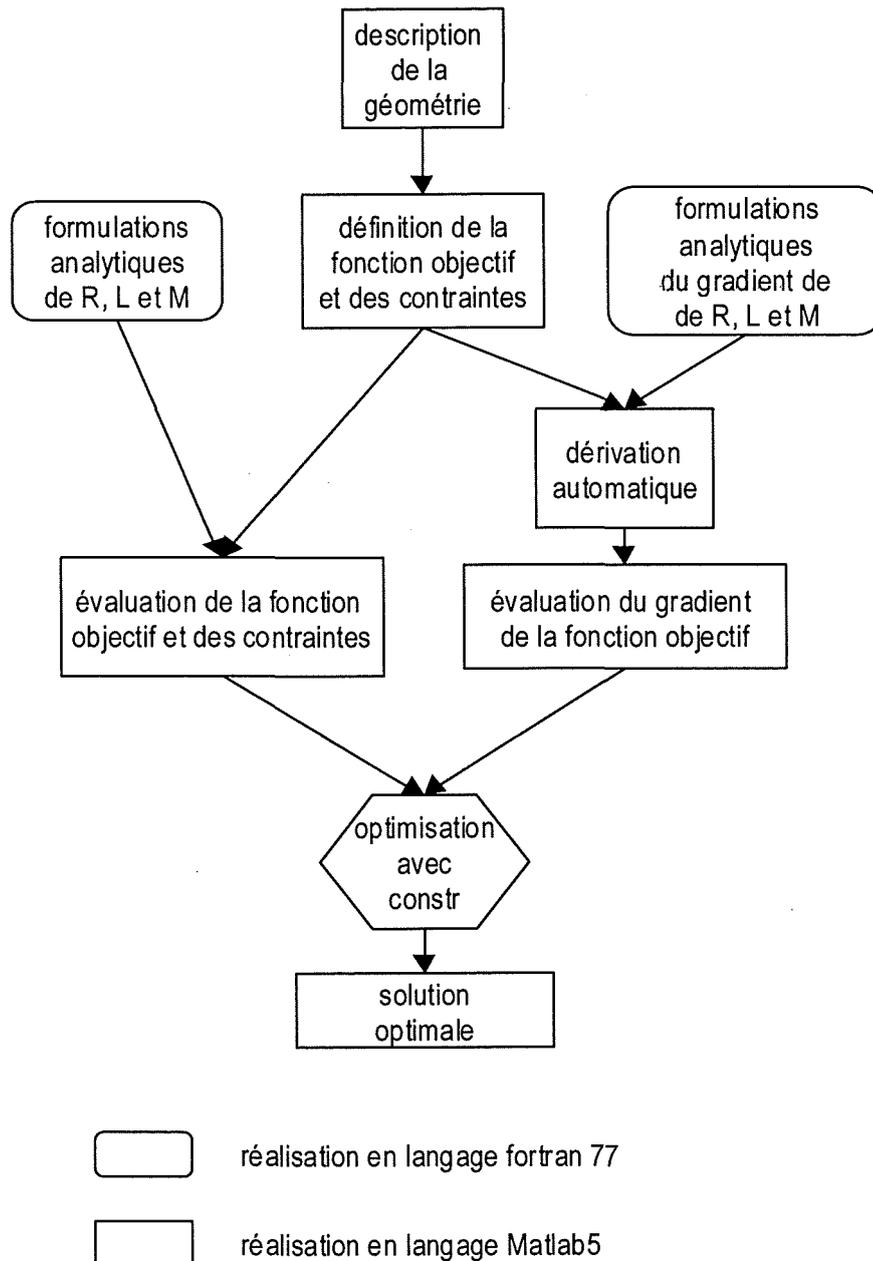


figure 3.4-4 : Synoptique de notre optimisation

### **3.4.5. Conclusion**

Un processus déterministe d'optimisation a été développé avec les moyens informatiques dont nous disposons au laboratoire. La méthode d'optimisation employée nécessite de fournir le gradient de la fonction objectif. C'est pourquoi une génération automatique de ce gradient a été développée, puis programmée avec les langages FORTRAN 77 et MATLAB. Différents cas ont été traités durant mes travaux de thèse; ils sont exposés, pour les plus représentatifs dans le quatrième chapitre.

Nous verrons avec les applications que nous nous sommes heurtés aux problèmes liés aux méthodes déterministes : convergence vers un optimum local, non-convergence si le point initial n'est pas correct. Ainsi, nous nous sommes intéressés à une méthode hybride qui en théorie nous permet de converger vers l'optimum global quel que soit le point de départ initial.

## **3.5. Une méthode hybride**

### **3.5.1. Introduction**

A priori, l'optimum obtenu par une méthode déterministe est local, sauf, si le point initial est proche de l'optimum global. Mais en général, ceci est le résultat d'un heureux concours de circonstances. En fait, les méthodes déterministes sont utilisées pour leur faible nombre d'évaluations afin d'atteindre l'optimum.

En revanche, nous avons vu que les algorithmes stochastiques sont capables de localiser la région de l'optimum global. Mais une utilisation seule de ces algorithmes, entraîne un nombre d'évaluations important si nous souhaitons une solution précise.

C'est pourquoi nous envisageons de coupler un algorithme stochastique avec notre méthode déterministe mise en place. De nombreux travaux ont été déjà réalisés [VAS] [ALO] et ont montré l'apport de ces méthodes. Elles ont pu trouver la région de l'optimum global puis définir avec précision celui-ci. Ainsi, il y a un gain d'évaluations par rapport à une méthode purement stochastique.

Cependant, le coût des calculs reste élevé, notamment pour optimiser une structure en fonction de caractéristiques géométriques, à l'aide de logiciel de simulation. Il faut calculer en effet la solution pour chaque pas de l'algorithme stochastique, ce qui rend la procédure lourde et coûteuse.

C'est pourquoi, pour palier ce problème, nous nous sommes tournés vers une approximation de la fonction objectif. L'optimisation sera alors réalisée sur l'approximation. La figure 3.5-1 représente le synoptique de la méthode hybride.

La méthode stochastique que nous utilisons est un algorithme génétique développé au cours de la thèse de Lucas Saludjian [SAL]. De nombreuses validations ont été effectuées, ce qui nous autorise à considérer son implémentation comme une boîte noire.

Quant à la méthode déterministe, elle a été présentée précédemment.

Le processus d'approximation de la fonction objectif a été réalisé avec la contribution de C. Hérault [HER-1].

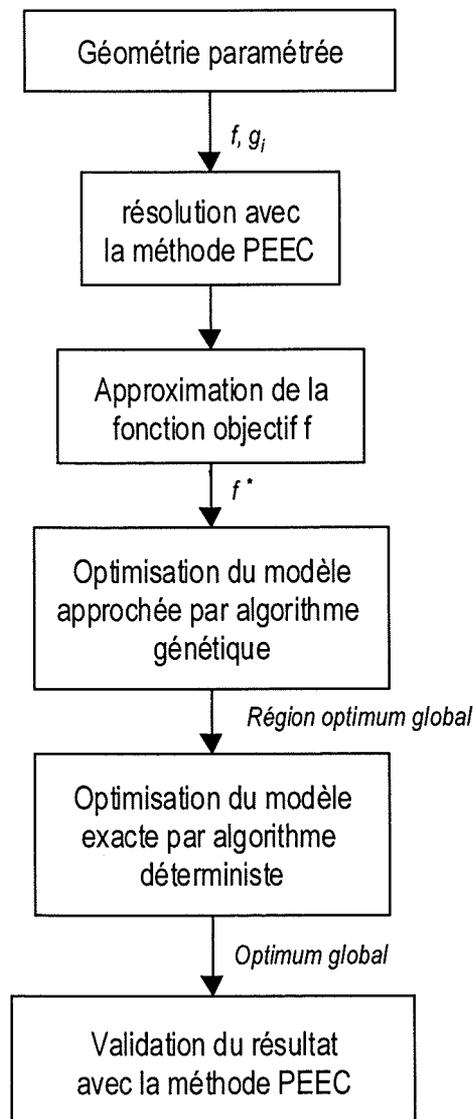


figure 3.5-1 : Synoptique d'une méthode hybride

### 3.5.2. Le processus d'approximation

#### 3.5.2.1. Le principe

Le principe de la méthode d'approximation consiste à pré calculer sur un nuage de points pour construire une approximation de la fonction  $f$ .

A priori, une approximation type « éléments finis » est envisageable, mais elle semble limitée à trois dimensions en pratique, même si l'extension aux dimensions supérieures est théoriquement possible.

Nous avons donc introduit une méthode d'approximation généralisant les éléments finis [MAR].

Soit  $(P_i)_{1 \leq i \leq K}$  l'ensemble des paramètres calculés en  $k$  points.  $P_i$  est le vecteur des paramètres de l'optimisation (de dimension  $n$ ) :

$$P_i = [p_1^i \quad p_2^i \quad \dots \quad p_n^i]$$

Soit  $E_K$  un espace de fonctions de dimension  $K$  tel que :

$$E_K = \{\Phi_i(P), 1 \leq i \leq K\}$$

avec  $\Phi_i(P)$  qui sont des fonctions, appelées fonctions de formes.

La fonction approximation  $F^*(P)$  de  $f(P)$  est obtenue par projection de  $f(P)$  sur l'espace  $E_K$  :

$$F^*(P) = \sum_{i=1}^K f_i \cdot \Phi_i(P)$$

avec  $(f_i)_{i=1 \dots K}$  des coefficients explicités par la suite.

l'identification de  $f_i$  peut se faire :

- par collocation par point (paragraphe 3.5.2.3) :  $F^*(P) = \sum_{i=1}^K f_i \cdot \Phi_i(P)$
- par minimisation d'une fonctionnelle suivant une approche de résidus pondérés :  $\iiint W_j \left( F^*(P_j) - \sum_k f_k \Phi_k(P_j) \right) = 0, \forall W_j$
- par une méthode de moindre carrés

### 3.5.2.2. Le calcul des fonctions de formes

Ces fonctions de forme vont permettre de faire de l'approximation une approximation locale. Avant d'introduire la fonction de forme, il est nécessaire de signaler que l'ensemble des fonctions de formes doit constituer une partition de l'unité :

$$P \in \Omega \Leftrightarrow \sum_{i=1}^K \Phi_i(P) = 1$$

avec  $\Omega$  l'ensemble sur lequel est faite l'approximation.

Cette propriété est nécessaire si on veut une approximation exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à  $K$  (ordre 0).

La fonction de forme peut alors être définie ainsi :

$$\Phi_i(P) = \frac{W_i \left( \frac{\|X - X_i\|_2}{R_i} \right)}{\sum_{j=1}^K W_j \left( \frac{\|X - X_j\|_2}{R_j} \right)}$$

avec  $W_i$  une fonction de pondération de type gaussienne par exemple

$\|X\|_2$  la norme euclidienne

$R_i$  est l'envergure de la fonction de pondération  $W_i$  ramenée à une boule

### 3.5.2.3. Le calcul des coefficients $f_i$

On pose :  $F^*(X_i) = F(X_i)$  pour  $1 \leq i \leq K$

Or,  $F^*(P) = \sum_{i=1}^K f_i \cdot \Phi_i(P)$  pour  $1 \leq i \leq K$

Donc, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(X_1) & \Phi_2(X_1) & \dots & \Phi_K(X_1) \\ \Phi_1(X_2) & \Phi_2(X_2) & \dots & \Phi_K(X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(X_K) & \Phi_2(X_K) & \dots & \Phi_K(X_K) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(X_1) \\ F(X_2) \\ \vdots \\ F(X_K) \end{bmatrix} \quad (3.5-1)$$

Le vecteur  $(f_i)_{i=1 \dots K}$  est obtenu par résolution du système précédent (3.5-1).

### 3.5.3. Exemple

Afin de montrer l'efficacité de cette méthode hybride, nous présentons les résultats obtenus sur un problème simple à trois paramètres [HER-2].

Nous décrivons dans un premier temps notre problème d'optimisation à trois paramètres. Soit  $f(\mathbf{p})$  la fonction objectif :

$$f(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^3 \sin(2 \cdot \pi \cdot p_i) \quad (3.5-2)$$

avec  $\mathbf{p}$  le vecteur des paramètres.

Une approximation  $F^*$  de la fonction  $f(\mathbf{p})$  a été effectuée. Les trois points paramètres peuvent varier entre 0 et 1. Sept points ont été pris sur chaque direction, ce qui entraîne le calcul en 343 points.

La figure 3.5-2 présente les résultats de l'approximation de cette fonction. L'approximation est tracée en trait continu, la fonction en trait pointillé.

Les résultats de cette approximation sont satisfaisants, nous pouvons réaliser ensuite une optimisation avec un algorithme génétique [MAG].

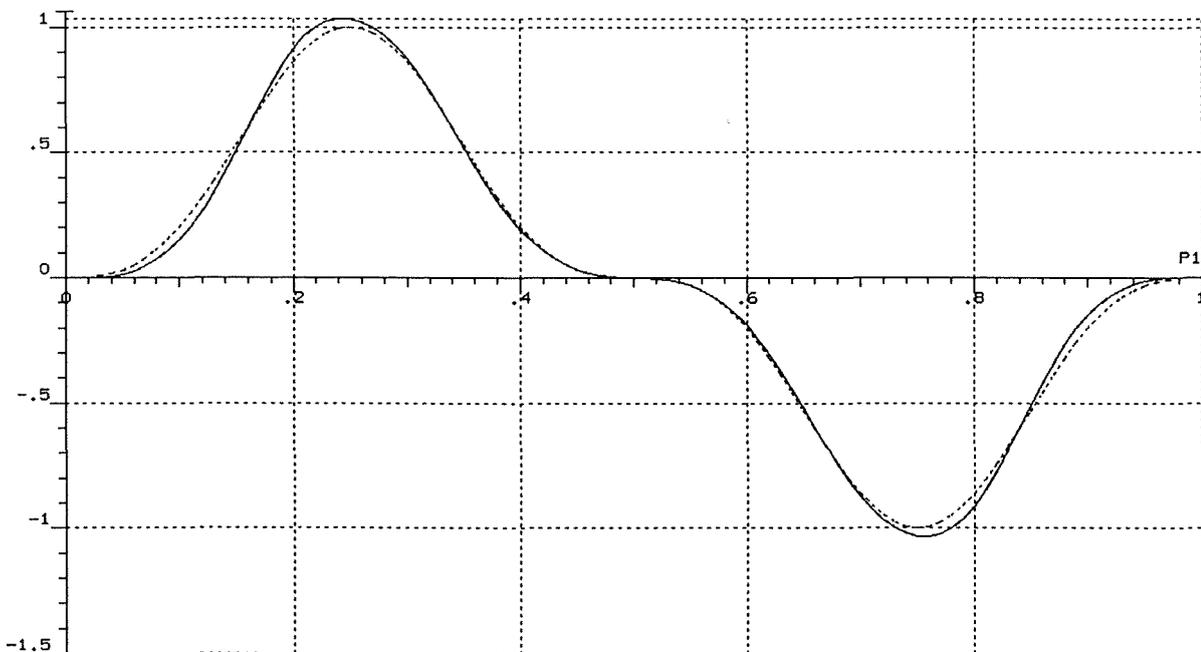


figure 3.5-2 : Approximation d'une fonction à trois paramètres selon la diagonale du cube

Le but de cette optimisation était de trouver le minimum de la fonction ( 3.5-2 ) sur le cube de côté 1. La réalisation de celle-ci a nécessité 16000 évaluations de la fonction objectif et a donné les résultats présentés dans le Tableau 3.3 :

**Tableau 3.3 : Résultat après l'optimisation avec l'algorithme génétique**

| f        | p <sub>1</sub> | p <sub>2</sub> | p <sub>3</sub> |
|----------|----------------|----------------|----------------|
| - 0.9976 | 0.243598       | 0.756415       | 0.243609       |

Après cette première optimisation, il est possible d'effectuer un optimisation de type déterministe en prenant comme point de départ le point trouvé par l'algorithme génétique.

Nous donnons à l'algorithme déterministe la fonction objectif et son gradient par rapport aux trois paramètres. La solution optimale est trouvée en 2 évaluations. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

**Tableau 3.4 : Résultat après l'optimisation avec la méthode déterministe**

| f   | p <sub>1</sub> | p <sub>2</sub> | p <sub>3</sub> |
|-----|----------------|----------------|----------------|
| - 1 | 0.25           | 0.75           | 0.25           |

Les résultats obtenus sont alors plus précis que ceux obtenus à la suite de la seule optimisation stochastique.

En conclusion de cet exemple simple, nous pouvons dire que l'algorithme stochastique a permis la localisation de la région de l'optimum global, puis nous avons pu approcher la solution exacte avec précision en utilisant une méthode déterministe.

### 3.5.4. Résumé

Cette méthode est implantée sur la plate-forme de stations HP du LEG. Elle n'est actuellement qu'au niveau de test. Cependant elle nous a donné de bons résultats sur des cas simples. Les perspectives offertes par la méthode hybride sont très grandes.

### 3.6. Conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons présenté les caractéristiques des deux grandes classes de méthodes d'optimisation : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

En ce qui concerne les premières, nous avons vu qu'elles convergent, a priori, vers un optimum local. Toutefois la convergence est rapide, moyennant une connaissance du gradient de la fonction objectif et des contraintes.

A l'opposé les méthodes stochastiques convergent vers l'optimum global sans nécessité d'évaluer le gradient. En revanche, la convergence de ces méthodes, vers la solution avec précision, entraîne un coût élevé.

Dans un premier temps, nous avons mis en place une méthode déterministe : elle se base sur une fonction du logiciel MATLAB à laquelle on doit fournir le gradient de la fonction objectif et des contraintes. C'est pourquoi, nous avons développé un processus de calcul du gradient des fonctions objectifs, associées à nos problèmes. Cela nous permet de ne pas avoir recours aux différences finies. Ensuite, nous avons réfléchi à une méthode hybride qui tire profit de chaque type de méthodes d'optimisation : la convergence vers la région de l'optimum global pour les méthodes stochastiques, et la convergence rapide vers une solution précise, pour les processus déterministes.

Afin de diminuer le nombre d'évaluations, nous mettons en place une interpolation de la fonction objectif, pour réduire le coût de chaque pas de l'algorithme génétique. Cette méthode semble être une voie très prometteuse pour l'optimisation des structures d'Electronique de Puissance.

# 4. APPLICATIONS

UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Dans cette partie, nous avons voulu valider la méthode d'optimisation, ainsi que la partie d'analyse non pas sur des problèmes dits d'école, mais essentiellement sur des problèmes industriels qui se posent lors de la conception de câblage pour des dispositifs électriques.

Il n'y a aucune suite logique entre les exemples traités. Au contraire, nous avons abordé à travers chacun d'entre eux une spécificité propre à notre méthode.

Les exemples couvrent divers domaines de l'Electronique de Puissance. Pour le premier, nous nous sommes attachés à modéliser une géométrie de câblage assez complexe. Ensuite nous traitons deux types d'optimisation qui couvrent en partie les problèmes liés aux structures d'Electronique de Puissance.

## **4.1. Modélisation électrique 2D**

### **4.1.1. Introduction**

Les convertisseurs d'Electronique de Puissance sont de plus en plus puissants, tant au niveau de la puissance commutée qu'en ce qui concerne la rapidité de la commutation. C'est pourquoi il est nécessaire que les connexions reliant les différents composants soient les moins inductives possible.

Aujourd'hui, la technologie de connectique la plus employée est celle des busbars car elle est la moins inductive pour de forts courants. Au chapitre 2, nous avons vu la méthodologie de modélisation de tout type de connectique. Une application que nous avons réalisée est la modélisation d'un busbar au sein d'un convertisseur développé par la société Alstom, département Module de Puissance.

### **4.1.2. Présentation de la structure**

Le busbar étudié fait partie d'un onduleur de puissance du projet de propulsion marine J31. Cet onduleur est composé de condensateurs mis en parallèle, de trois bras d'onduleurs et du busbar. Ce dernier sert de liaison entre les condensateurs et les bras de l'onduleur (figure 4.1-1) : on l'appelle busbar de reprise.

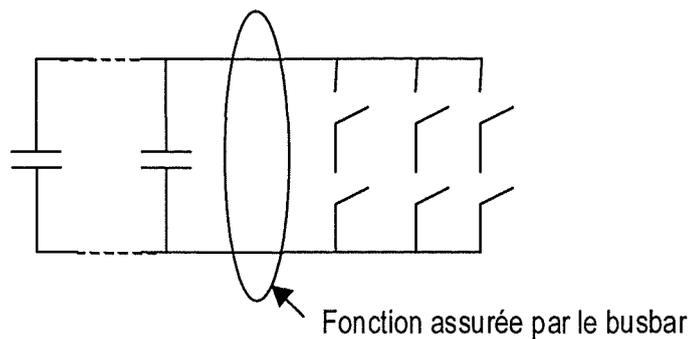


figure 4.1-1 : Fonction électrique du busbar

Dans cette structure, l'inconvénient majeur est la présence d'inductances parasites qui engendrent des oscillations lors de la commutation des interrupteurs. Ces oscillations sont liées au circuit LC ainsi créé. Il apparaît donc nécessaire de modéliser ce busbar, afin de connaître l'inductance qu'il ajoute au montage.

La figure 4.1-2 présente la géométrie de ce busbar. Il est composé de deux plaques de cuivre isolées entre elle par une couche d'isolant.

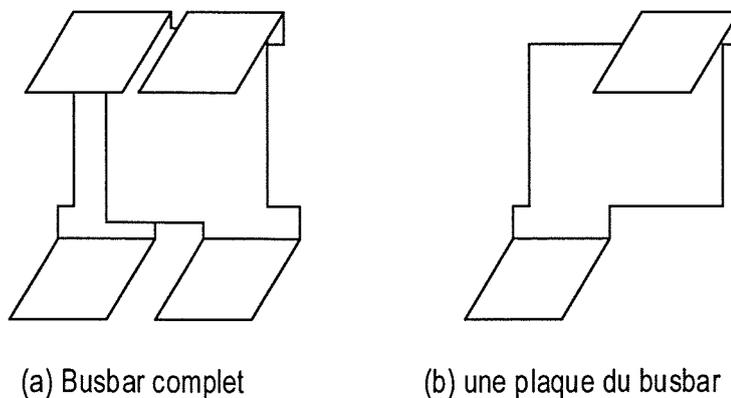


figure 4.1-2 : Géométrie du busbar

Chaque plaque assure la liaison d'une polarité du continu (une plaque pour le bus positif, une pour le négatif). Dans le but d'étudier ce busbar seul, nous allons connecter ces deux plaques figure 4.1-3.

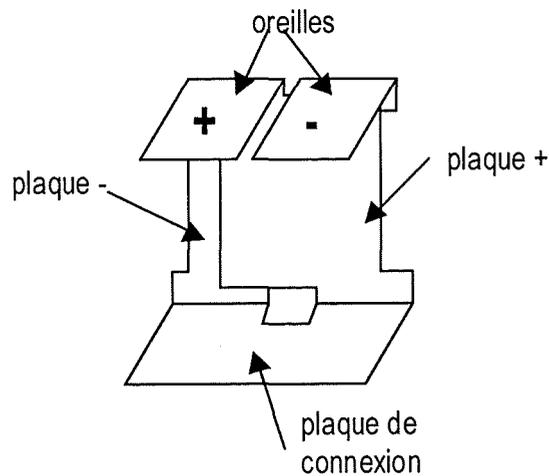


figure 4.1-3 : Connexion des deux plaques

### 4.1.3. Modélisation

La forme des oreilles plus et moins est longitudinale; nous avons adopté pour ces deux plaques une modélisation 1D. Par contre, pour les trois composants – plaque moins, plaque plus et plaque de connexion -, nous devons appliquer un maillage 2D afin de prendre en compte le véritable chemin du courant. Sur la figure 4.1-4, nous avons représenté la ligne moyenne du courant.

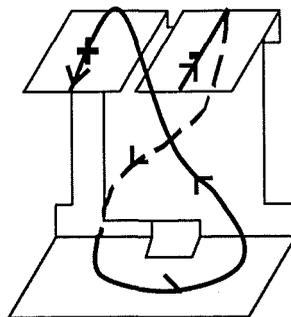


figure 4.1-4 : Ligne moyenne du courant

#### Oreilles plus et moins :

Afin de pouvoir connecter les différentes plaques entre elles, le nombre de subdivisions des oreilles doit correspondre au nombre de subdivisions des plaques plus et moins. C'est pourquoi nous avons adopté une subdivision en 14 éléments. Nous expliquerons dans le paragraphe suivant la subdivision des plaques plus et moins. Suite à la modélisation PEEC, les circuits LR série seront mis en parallèle.

**Plaques plus et moins :**

Ces plaques ont été subdivisées pour chacune d'entre elles en 30 x 28 subdivisions (figure 4.1-5). Ce qui nous donne un treillis d'environ 700 L, R série couplées.

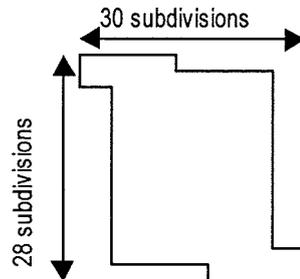


figure 4.1-5 : Maillage d'une plaque

**Plaque de connexion :**

Vu la forme de cette plaque, une modélisation 1D pouvait convenir à condition de mailler assez finement de telle sorte à prendre en compte le trajet particulier des lignes de courant (figure 4.1-6). En effet, l'entrée et la sortie se font sur le même côté de la plaque.

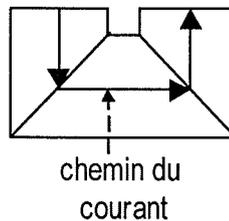


figure 4.1-6 : Chemin du courant dans la plaque de connexion

Pour s'affranchir de ce problème, nous avons plutôt décidé une modélisation 2D qui limite de ce fait les hypothèses sur le trajet du courant (figure 4.1-7). En contre partie, il faut être conscient que le nombre de mailles sera augmenté. Pour notre géométrie, il n'est pour l'instant pas critique. Nous avons abouti à un treillis de 400 L, R séries coulées.

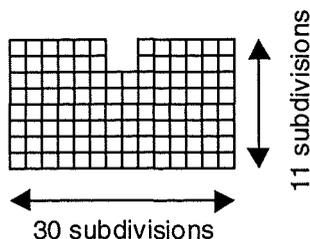


figure 4.1-7 : Maillage de la plaque de connexion

Les schémas équivalents de ces cinq plaques ont été connectés entre eux, et leurs couplages électriques ont été également calculés. Ce maillage fin, effectué dans l'objectif d'une bonne précision, a conduit à générer une matrice impédance carrée de dimension 1800 x 1800. Le remplissage de cette matrice a pris environ 6 heures sur une station HP bi-processeur.

Ensuite, nous avons appliqué la méthode de réduction de schéma, développée dans la première partie, pour différentes fréquences. Le calcul propre à chaque fréquence a pris environ 15 min sur la même machine que précédemment.

#### 4.1.4. Mesures

Parallèlement à la modélisation, des mesures ont été effectuées pour valider la méthode de modélisation. Elles ont été réalisées sur un pont d'impédance HP4194A, qui est disponible au laboratoire. Ceci nous permet d'obtenir des mesures d'impédance sur une plage de fréquences comprises entre 100 Hz et 40 MHz.

#### 4.1.5. Comparaison et Conclusion

Les résultats obtenus par la simulation et par les mesures sont présentés sur la figure 4.1-8 et la figure 4.1-9.

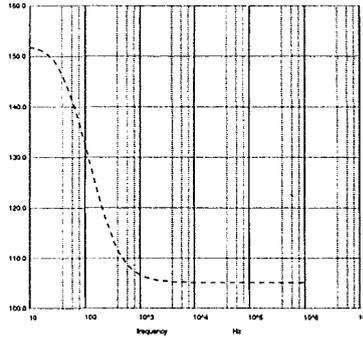


figure 4.1-8 : Résultat de la simulation

échelle verticale L : 100-160 nH

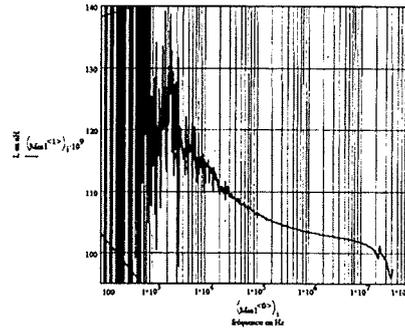


figure 4.1-9 : Résultat de la mesure

échelle verticale L : 90-140 nH

En ce qui concerne les mesures, il faut noter du bruit pour les faibles fréquences. Cependant, il est possible d'extrapoler l'allure de la courbe de mesure. La comparaison des deux courbes montre une bonne corrélation jusque 500 kHz. Après on s'aperçoit de la présence d'un plateau pour la simulation. Celui-ci peut-être expliqué par un maillage régulier, qui n'est pas suffisamment dense pour prendre en compte l'effet de peau.

Il faudrait envisager un maillage adapté pour les hautes fréquences, géométrique par exemple.

En conclusion, la modélisation avec la méthode PEEC de cette structure donne des résultats satisfaisants. Nous avons utilisé pour ce faire un maillage 2D et la méthode de réduction de schémas. Celle-ci a nécessité peu de temps de calcul (environ 15 minutes par fréquence). En revanche, il s'avère nécessaire de mettre en place un maillage plus adapté aux structures aux hautes fréquences.

## 4.2. Exemple de minimisation de l'inductance de boucle [PIEa] [PIEb]

### 4.2.1. Introduction

Les composants, utilisés dans les structures d'électronique de puissance, commutent de plus en plus rapidement de forts courants et de fortes tensions, de sorte qu'il apparaît des surtensions lors des commutations, ainsi que des pointes de courant. Ces phénomènes sont en partie imputables à la connectique des convertisseurs.

De plus, ils peuvent être la source de détérioration au sein de la structure, voire d'une destruction totale des composants.

C'est pourquoi il est nécessaire de réduire au maximum la part inductive de la connectique. Nous nous sommes intéressés à un busbar au sein d'une structure hacheur afin de minimiser son inductance de boucle.

La figure 4.2-1 présente ce convertisseur statique constitué de deux modules hybrides de puissance TOSHIBA, de huit condensateurs de filtrage en parallèle et d'un busbar composé de trois plaques de cuivre séparées par un diélectrique.

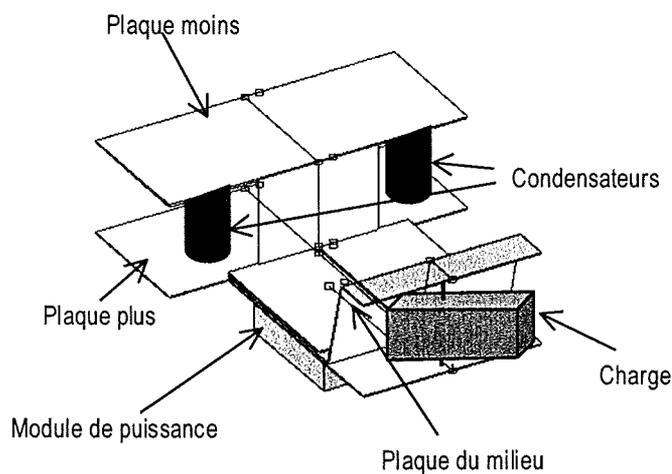


figure 4.2-1 : La structure hacheur

#### 4.2.2. Etude électrique

Cette structure a été modélisée électriquement lors de la commutation afin de connaître l'influence de la connectique dans le comportement du hacheur [SCH-2]. La maille de commutation est présentée figure 4.2-2.

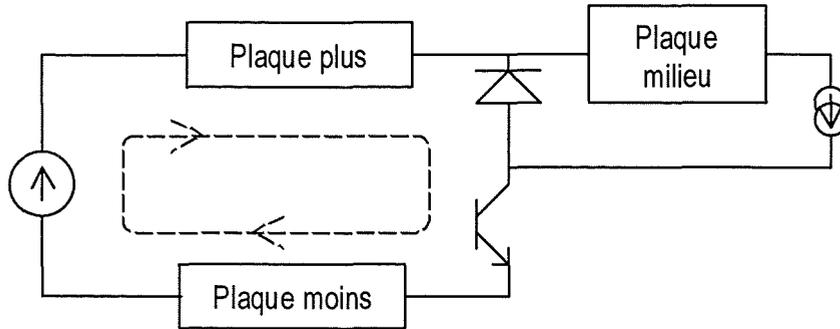


figure 4.2-2 : Schéma électrique de la structure hacheur

L'étude électrique a montré que lors de la commutation, la plaque du milieu n'intervient pas. Elle est parcourue par le courant de charge constant. Ainsi, elle ne prend pas part à l'inductance de la maille de puissance.

Le Tableau 4-1 montre, en effet, l'influence de la plaque du milieu sur les caractéristiques de la maille de puissance lors de la commutation. Ces résultats sont issus de la modélisation de la structure, mais ont été validés par des mesures.

Tableau 4-1 : Influence de la plaque du milieu sur l'inductance et la résistance de la maille de puissance

|                          |        | f = 100 kHz | f = 100 kHz | f = 1 MHz |
|--------------------------|--------|-------------|-------------|-----------|
| Sans plaque<br>du milieu | L (nH) | 44.05       | 43.30       | 43.10     |
|                          | R (mΩ) | 0.08        | 0.02        | 0.5       |
| Avec plaque<br>du milieu | L (nH) | 43.88       | 42.64       | 42.08     |
|                          | R (mΩ) | 0.09        | 0.34        | 0.87      |

Au vu des résultats précédents, on peut conclure que l'effet de cette plaque intermédiaire est négligeable sur l'inductance totale de la maille de puissance.

Aussi avons nous simplifié la structure, en omettant la présence de la plaque du milieu (figure 4.2-2).

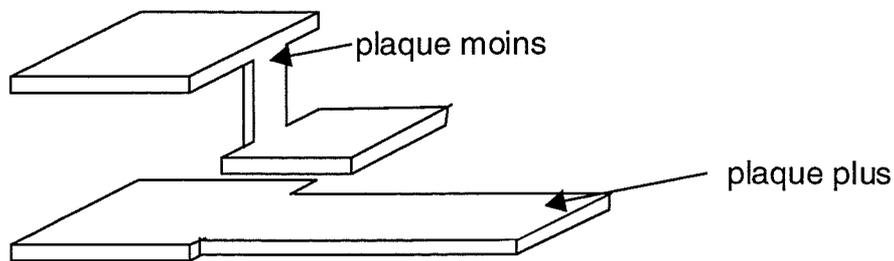


figure 4.2-3 : Structure simplifiée

### 4.2.3. Minimisation de l'inductance de boucle

Après cette phase d'analyse, nous passons à l'étape de modification géométrique de la structure afin de diminuer l'inductance de la maille de puissance.

La première étape consiste à décrire notre problème pour déterminer les paramètres de l'optimisation, ainsi que les contraintes à imposer pour obtenir une solution réalisable.

Huit paramètres géométriques ont été utilisés (figure 4.2-4) :

- $L_1, L_2$  et  $L_3$  : largeur des plaques
- $l_1$  et  $l_2$  : longueur des plaques horizontales
- $h_1$  et  $h_2$  : écart entre les plaques plus et moins
- $e$  : épaisseur des plaques

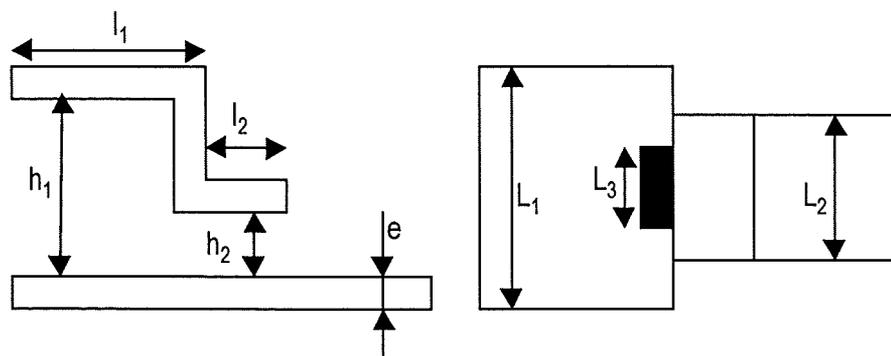


figure 4.2-4 : Géométrie paramétrée

Les contraintes liées à notre problème sont de diverses origines :

- **Isolation électrique** : l'écart  $h_2$  ne peut pas passer en dessous d'une valeur limite, sans risquer un court-circuit :  $h_2 \geq 3 \text{ cm}$ .
- **Hauteur des condensateurs** : la hauteur des condensateurs est fixée par la nature de ces derniers. De fait, la valeur  $h_1$  devrait rester fixe. Afin de laisser un peu de liberté, nous imposons uniquement une valeur minimale. L'écart supplémentaire pourra être comblé à l'aide de pastilles de cuivre :  $h_1 \geq 5.6 \text{ cm}$ .
- **Diamètre des condensateurs** : quatre condensateurs sont alignés sur la largeur  $L_1$  des plaques. En tenant compte d'une distance minimum entre chaque condensateur, il apparaît une valeur minimale pour  $L_1$  :  $L_1 \geq 9 \text{ cm}$ .
- **Tenue mécanique** : afin que la structure soit résistante au niveau mécanique, il est nécessaire d'imposer une limite inférieure pour les paramètres  $L_3$ ,  $L_2$  et  $e$  :  $L_3 \geq 3 \text{ cm}$ ,  $L_2 \geq 3 \text{ cm}$  et  $e \geq 100 \mu\text{m}$ .

En résumé, nous pouvons exprimer sept fonctions contraintes.

D'autres contraintes, liées à l'encombrement, n'ont pas été volontairement mises en place, afin d'observer l'évolution de la géométrie de la structure sans que celle-ci ne soit trop contrainte.

Rappelons que l'objectif  $f$  de notre problème est de réduire l'inductance de la maille de puissance :

$$f = (L - L_{\text{obj}})^2 \quad (4.2-1)$$

Avec  $L$  : inductance de boucle évaluée avec la méthode PEEC

$L_{\text{obj}}$  : valeur objectif qu'on souhaite atteindre

Afin d'étudier cette structure, nous devons relier les deux plaques entre elles. D'un côté, nous effectuons un court-circuit, de l'autre une source de tension  $E$  sera ajoutée (figure 4.2-5).

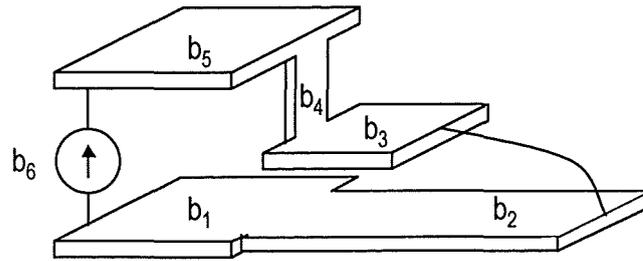


figure 4.2-5 : Connexion des plaques pour leur modélisation

Il nous faut exprimer l'objectif avec les courants de maille de la structure et les paramètres géométriques. Pour ce faire, nous allons présenter sur la figure 4.2-6 le schéma électrique issu de la modélisation PEEC. Nous avons choisi dans ce cas de ne pas subdiviser les busbars. Cependant, les résultats sont similaires si on subdivise le busbar.

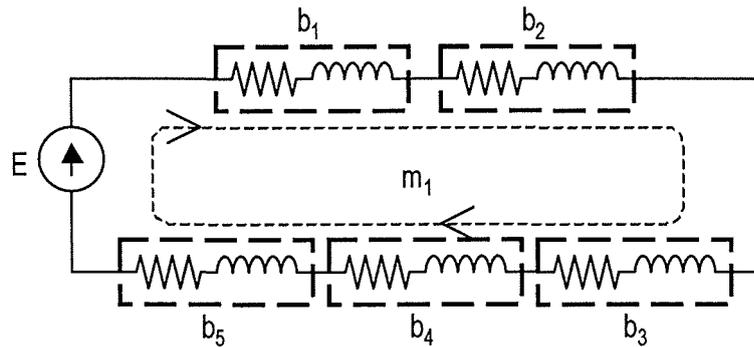


figure 4.2-6 : Schéma électrique issu de la modélisation

Nous avons donc défini six branches et une maille.

L'analyse du schéma électrique donne :

$$Z = \frac{E}{i_{m_1}} \quad (4.2-2)$$

$$E = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \text{Im} \left( \frac{E}{i_{m_1}} \right) \quad (4.2-3)$$

La fonction objectif peut alors être écrite ainsi :

$$f = \left( \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \operatorname{Im} \left( \frac{E}{i_{m_1}} \right) - L_{\text{obj}} \right)^2 \quad (4.2-4)$$

La dernière étape consiste à fournir à l'ordinateur quelques données :

- La matrice maille-branche :  $\mathbf{M} = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]$
- le vecteur des sources de tension :  $\mathbf{E}_g = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad E]$
- la dérivée partielle de  $f$  par rapport aux paramètres :  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t$
- la dérivée partielle de  $f$  par rapport au vecteur des courants de maille :
- $\frac{\partial f}{\partial i_{m_1}^t} = \left[ \frac{1}{\pi \cdot f} \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \operatorname{Im} \left( \frac{E}{i_{m_1}} \right) - L_{\text{obj}} \right) \cdot \operatorname{Im} \left( \frac{-E}{i_{m_1}^2} \right) \right]$
- les valeurs de la fréquence  $f$  et de la source  $E$  :  $f = 100 \text{ kHz}$   
 $E = 2 \text{ V}$

Nous avons effectué des optimisations pour des valeurs différentes de  $E$ , les résultats ne variaient pas. Dans ce cas, la valeur de la source n'influence pas le processus d'optimisation.

#### 4.2.4. Résultats

Après ces trois étapes réalisées par le concepteur, le reste du calcul est effectué automatiquement par le programme développé dans l'environnement MATLAB. Le processus d'optimisation est déterministe.

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 4-2 :

Tableau 4-2 : Evolution des paramètres géométriques

|       | L <sub>1</sub><br>cm | L <sub>2</sub><br>cm | L <sub>3</sub><br>cm | l <sub>1</sub><br>cm | l <sub>2</sub><br>cm | h <sub>1</sub><br>cm | h <sub>2</sub><br>mm | e<br>μm |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------|
| 43 nH | 20                   | 12                   | 8.5                  | 8.5                  | 10.5                 | 5.99                 | 4.4                  | 1000    |
| 30 nH | 24.7                 | 14.1                 | 9                    | 5.2                  | 9.7                  | 5.59                 | 3.5                  | 990     |
| 25 nH | 27                   | 15.3                 | 9.6                  | 3.3                  | 9.1                  | 5.59                 | 3.43                 | 985     |
| 20 nH | 31.7                 | 12.5                 | 11.8                 | 3                    | 6                    | 5.61                 | 3.26                 | 955     |

Nous avons donné dans la deuxième ligne du tableau les caractéristiques initiales de la structure. La case foncée correspond à une contrainte active. Au vu des résultats présentés, plusieurs constatations sont à faire :

- ✓ Tous les paramètres ne jouent pas un rôle équitable. Si on observe par exemple les valeurs prises par L<sub>1</sub> et h<sub>1</sub>, la variation de L<sub>1</sub> est très importante par rapport à celle de h<sub>1</sub>. Aussi apparaît-il que la phase de description du problème est très critique puisqu'il faut trouver les paramètres les plus importants de la structure.
- ✓ L'évolution des paramètres L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> et L<sub>3</sub> est croissante. Ainsi plus on veut diminuer l'inductance de boucle, plus certaines dimensions de la structure augmentent. Il y a un compromis à réaliser entre l'encombrement du convertisseur et son inductance de boucle. Peut-être aurait-il été intéressant d'introduire comme deuxième objectif un encombrement minimum ?
- ✓ Nous avons limité notre objectif d'inductance à 20 nH car déjà à ce stade une contrainte est devenue active (celle associée à la largeur l<sub>1</sub>).

Ces résultats ont été obtenus avec une méthode déterministe avec un nombre d'évaluations faible (Tableau 4-3).

Tableau 4-3 : Nombre d'évaluations

| Inductance objectif | Avec le gradient | Sans le Gradient |
|---------------------|------------------|------------------|
| 30 nH               | 18               | 416              |
| 25 nH               | 19               | 421              |
| 20 nH               | 30               | 457              |

Pour montrer l'importance du gradient, nous avons réalisé les différentes optimisations avec une méthode sans gradient et une avec gradient (ces deux méthodes font partie du logiciel MATLAB). Le rapport d'évaluations entre ces deux méthodes est supérieur à 15.

#### 4.2.5. Conclusion

Les améliorations croissantes des composants d'électronique de puissance amènent les concepteurs à limiter l'inductance de la maille de puissance des convertisseurs afin de limiter les surtensions, induites par les forts  $\frac{di}{dt}$  lors des commutations.

Nous nous sommes attachés à optimiser la géométrie des structures afin de limiter leur inductance.

Pour cela, nous avons défini une fonction objectif, ainsi que des contraintes liées à l'isolation électrique, à l'encombrement des condensateurs et à la tenue mécanique.

La fonction objectif, continue et dérivable, a permis d'utiliser une méthode déterministe d'ordre 1. Les résultats sont satisfaisants et ont permis la diminution de l'inductance de boucle. De plus, l'utilisation du gradient s'est avérée nécessaire pour réduire le nombre d'évaluations par rapport à une méthode déterministe d'ordre 0.

### 4.3. Mise en parallèle des composants

#### 4.3.1. Introduction

L'association parallèle de plusieurs interrupteurs est devenue inévitable dans les structures actuelles d'électronique de puissance afin de commuter des niveaux de courants de plus en plus élevés. On peut

citer, par exemple, la mise en parallèle de plusieurs puces de silicium au sein d'un même boîtier pour atteindre des courants de 1200 A. Mais ce niveau peut ne pas suffire, et en particulier dans le domaine de la traction ferroviaire. Il faut alors mettre en parallèle plusieurs composants. Dans ce genre de problèmes, il faut s'assurer d'une répartition équilibrée du courant entre tous les composants.

Il est évident que pour un bon équilibre du courant entre les différents interrupteurs, ces derniers doivent être le plus identiques possible tant sur l'aspect statique que dynamique. Ils doivent être appairés.

Mais si l'appairage est nécessaire, il n'est pas suffisant lorsqu'on prend en compte le câblage. Aussi est-il important d'étudier l'emplacement des composants au sein de la structure [CLA-3].

Afin de prendre en compte ce problème, nous allons dans la suite trouver une structure permettant un équilibre du courant entre ces deux interrupteurs. Le travail qui suit a été fait en collaboration avec J.L. Schanen et P.O. Jeanin qui travaillent sur la mise en parallèle des semi-conducteurs.

#### 4.3.2. Contraintes pour la mise en parallèle

Pour définir les contraintes d'une mise en parallèle, nous allons raisonner sur une structure simple : le hacheur série (figure 4.3-1).

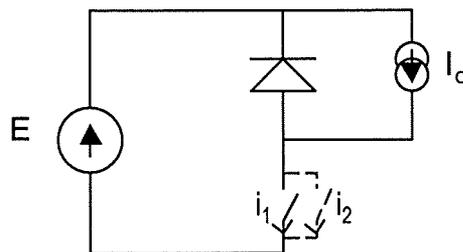


figure 4.3-1 : Le hacheur série

Dans le cas général, le hacheur série est composé d'une diode, d'un interrupteur, d'une source et d'une charge. Ici, nous avons ajouté un deuxième interrupteur, mis en parallèle sur le premier interrupteur. C'est le bras dessiné en trait pointillé sur la figure 4.3-1.

Le but est ici d'aboutir, quand les interrupteurs conduisent, à une structure réalisant :

$$i_1 = i_2 \quad (4.3-1)$$

Afin de concevoir une telle structure, nous devons commencer par chercher les conditions sur la connectique à satisfaire. Ainsi, la mise en parallèle de deux composants a été représentée par le schéma électrique de la figure 4.3-2. Seule la connectique a été modélisée, toutes les inductances sont couplées entre elles.

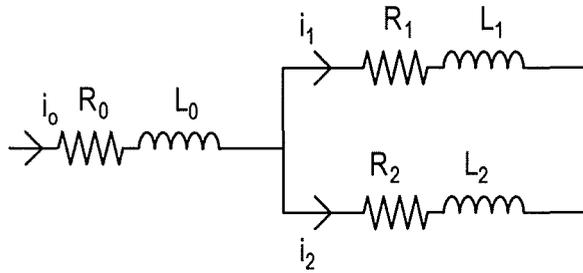


figure 4.3-2 : Schéma électrique d'une mise en parallèle

Les composants  $R_0$  et  $L_0$  correspondent à la partie commune du câblage, alors que les couples  $(R_1, L_1)$  et  $(R_2, L_2)$  représentent la connectique due à chacun des interrupteurs.

Dans [JEA-1], la fonction de transfert  $\frac{i_1}{i_0}$  a été établie :

$$\frac{i_1}{i_0} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot (R_2 - R_1) + \frac{1}{2} \cdot (L_2 - L_1 + 2 \cdot M_{20} - 2 \cdot M_{10}) \cdot s}{R_1 + R_2 + (L_1 + L_2 - 2 \cdot M_{12}) \cdot s} \quad (4.3-2)$$

Pour réaliser ( 4.3-1 ), il faut que le rapport  $\frac{i_1}{i_0}$  soit égal à  $\frac{1}{2}$ . Deux conditions sont alors définies :

- Pour les basses fréquences, ( 4.3-2 ) peut-être approchée par :

$$\frac{i_1}{i_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.3-3)$$

On aboutit alors à la condition suivante :

$$R_1 = R_2 \quad (4.3-4)$$

- Pour les hautes fréquences, ( 4.3-2 ) est approchée ainsi :

$$\frac{i_1}{i_0} = \frac{L_1 - M_{20} - M_{10} - M_{12}}{L_1 + L_2 - 2 \cdot M_{12}} \quad (4.3-5)$$

Ce qui amène l'égalité suivante

$$\frac{L_1 - L_2}{2} = M_{20} - M_{10} \quad (4.3-6)$$

Ces conditions sont réalisées dans le cas d'une géométrie complètement symétrique ( $R_1 = R_2$ ,  $L_1 = L_2$ ,  $M_{10} = M_{20}$ ). Cependant, nous allons montrer qu'une structure symétrique n'est pas forcément nécessaire.

Nous n'allons pas nous occuper de la condition ( 4.3-4 ). En effet, la résistance équivalente de la connectique est négligeable devant celle des composants (quelques  $\mu\Omega$  devant  $0.2\Omega$ ). Notre attention sera focalisée sur la condition ( 4.3-6 ).

Dans le cas de la figure 4.3-1, où nous avons un interrupteur intégré au circuit de puissance et un ajouté en parallèle, nous pouvons faire l'hypothèse suivante (figure 4.3-3) :

- $L_1 = 0$
- $M_{10} = 0$

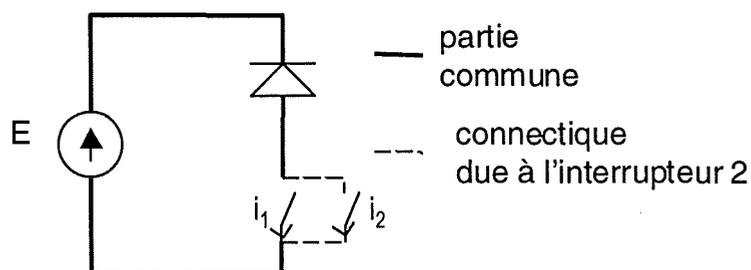


figure 4.3-3 : répartition de la connectique

( 4.3-6 ) devient alors :

$$\frac{L_2}{2} = -M_{02} \quad (4.3-7)$$

( 4.3-7 ) se traduit par la nécessité d'une mutuelle négative entre le "bras ajouté" et le reste du circuit.

### 4.3.3. Conception de la structure

Afin de satisfaire ( 4.3-7 ), deux solutions sont envisageables. Elles ont illustrées par la figure 4.3-4. Dans les deux cas, le flux lié au bras ajouté s'oppose à celui du circuit commun.

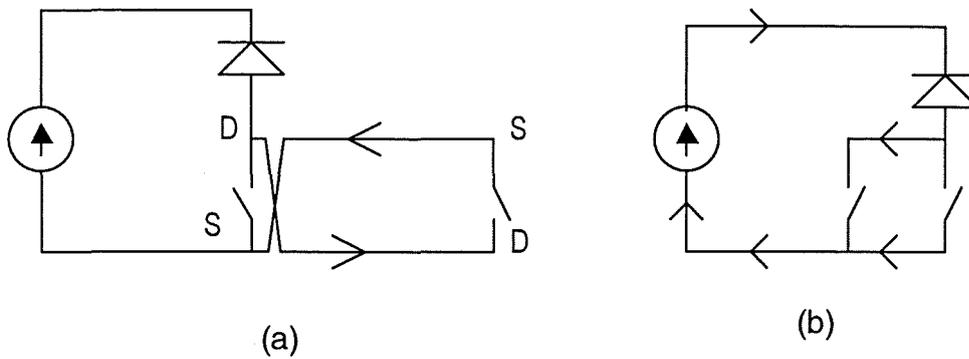


figure 4.3-4 : Solutions envisageables pour la mise en parallèle

Cependant la structure (a) ne peut pas vérifiée le critère ( 4.3-7 ). P.O. Jeanin et J.L. Schanen ont montré que quel que soit la position du bras ajouté [JEA-2], nous avons :

$$\frac{L_2}{2} > -M_{20} \quad (4.3-8)$$

En effet, l'éloignement du bras ajouté augmente à la fois  $L_2$  et  $M_{20}$ . Cependant la croissance de  $L_2$  est plus rapide que celle de  $M_{20}$ , et ainsi nous ne satisfaisons pas l'égalité ( 4.3-7 ).

C'est pourquoi nous avons retenu la solution (b).

Dans [JEA b], la géométrie suivante a été proposée (figure 4.3-5).

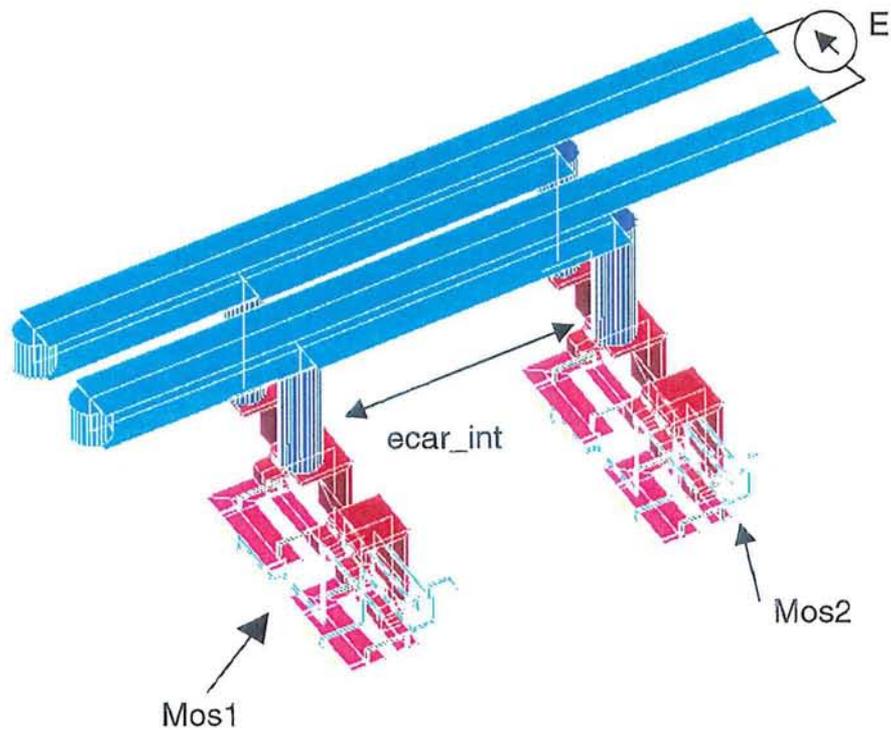


figure 4.3-5 : Câblage de la structure

#### 4.3.4. Optimisation de la structure

Une fois la géométrie de la structure définie, il faut maintenant trouver les paramètres géométriques corrects afin d'obtenir une répartition équilibrée du courant dans les deux interrupteurs. Les techniques d'optimisation seront utilisées.

La première étape consiste à paramétrer la structure (figure 4.3-6)

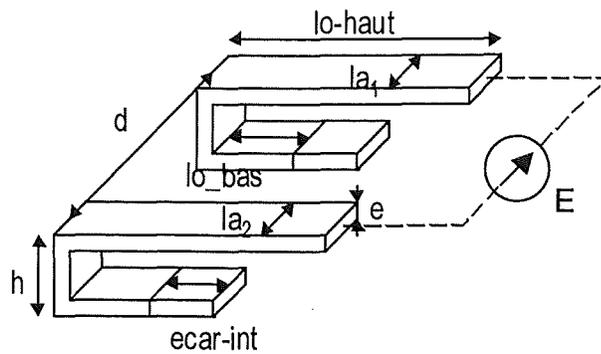


figure 4.3-6 : Paramétrage de la structure

Sept paramètres sont définis :

- h : la distance entre les niveaux haut et bas
- la<sub>1</sub>, la<sub>2</sub> : largeur des pistes des deux amenées de courant.
- d : l'écart entre les deux amenées
- lo\_haut : longueur des barres supérieures
- lo\_bas : positionnement du premier interrupteur
- ecar\_int : écart entre les deux modules

Du fait de ces paramétrages, il se crée plusieurs contraintes :

- **isolation électrique :**

- les deux amenées de courant doivent être séparées par une certaine distance :  $d \geq 3$  cm
- l'écart entre les deux bornes de l'interrupteur est fixe. Aussi vient-il l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \cdot la_1 + d + \frac{1}{2} \cdot la_2 = 1.8 \text{ cm}$$

- les barres horizontales doivent être séparées d'une distance minimum :  $h \geq 3$  cm

- **encombrement des modules :**

les deux modules de MOSfets ont une certaine largeur (1 cm). Afin que les deux modules ne se touchent pas, il faut assurer la condition suivante :  $ecar\_int \geq 1.2$  cm

- **encombrement des condensateurs :**

le diamètre des condensateurs est 5 cm. Afin de connecter les condensateurs, les barres inférieures doivent être plus courtes que les supérieures :  $lo\_haut \geq lo\_bas + ecar\_int + \frac{1}{2} \cdot 5\text{ cm}$

Nous devons résoudre un problème d'ordre 7, soumis à 5 contraintes.

Durant la deuxième phase du processus, nous allons définir notre fonction objectif. Il faut donc définir le schéma électrique de la structure afin de décrire correctement le système et ainsi la fonction objectif (figure 4.3-7).

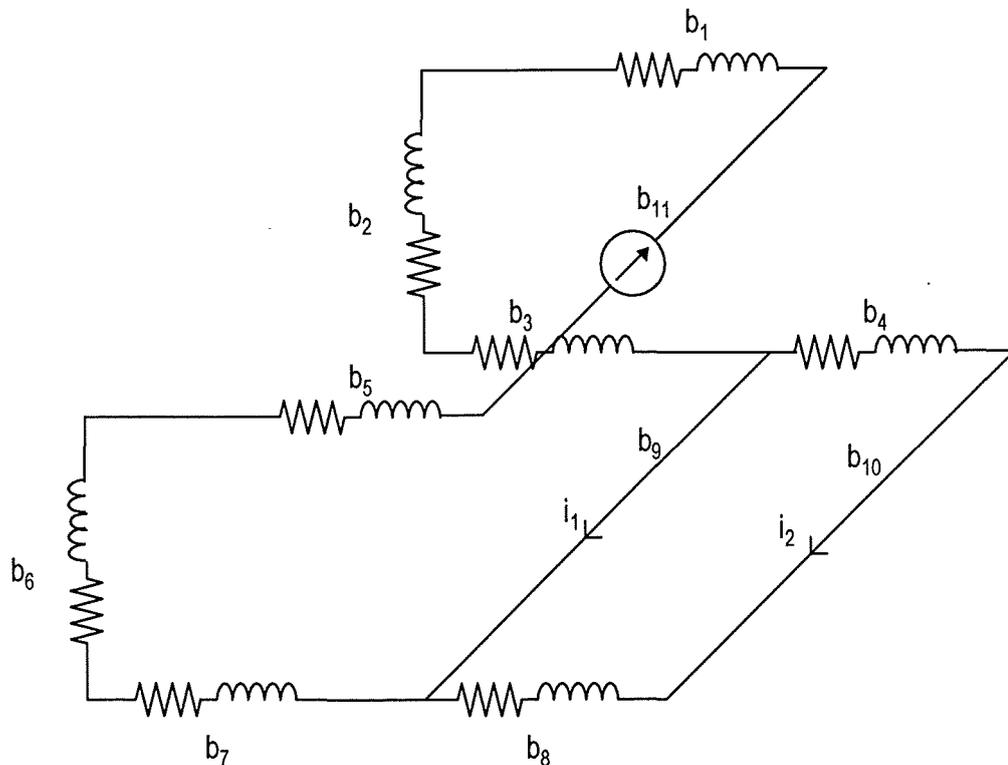


figure 4.3-7 : Schéma électrique de la structure

De ce schéma, il existe 9 branches. Nous définissons deux mailles :

- la maille  $m_1$  est composée des barres  $b_1, b_2, b_3, b_5, b_6, b_7, b_9$  et  $b_{11}$ ,
- la maille  $m_2$  est composée des barres  $b_4, b_8, b_9$  et  $b_{10}$ .

Nous pouvons alors définir la matrice **M** maille-branche associée à la structure :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rappelons que notre objectif est :

$$i_1 = i_2 \quad (4.3-9)$$

Il peut être exprimé en fonction des courants de mailles. Nous avons :

$$i_{b_9} = i_{m_1} - i_{m_2} \quad (4.3-10)$$

$$i_{b_{10}} = i_{m_2} \quad (4.3-11)$$

La fonction objectif sera :

$$f(\mathbf{l}_m(\mathbf{p}), \mathbf{p}) = (i_{m_1} - 2 \cdot i_{m_2})^2 \quad (4.3-12)$$

Avec **p** : le vecteur des paramètres

**l<sub>m</sub>** : le vecteur des courants de maille.

Notons que nous pouvons travailler sur le critère ( 4.3-7 ). Mais nous avons préféré nous détacher des différentes hypothèses réalisées. En revanche, nous vérifierons à la fin du processus d'optimisation, que ( 4.3-7 ) est vérifié.

Le concepteur doit aussi définir les dérivées partielles de f par rapport à **l<sub>m</sub>** et **p** :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_m} = 2 \cdot (i_{m_1} - 2 \cdot i_{m_2}) \cdot [1 \quad -2] \quad (4.3-13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4.3-14)$$

La dernière étape du processus peut maintenant être abordée : il s'agit de la résolution informatique du problème. La méthode déterministe développée dans l'environnement MATLAB a été utilisée.

Nous avons réalisé plusieurs optimisations en posant des points de départ différents. Toutes les solutions ont convergé vers la même région. La différence entre ces optimisations réside essentiellement dans la précision obtenue sur la solution.

Nous présentons dans le Tableau 4-4 la solution la plus précise. Les dimensions sont données en millimètre, les courants en ampère.

Tableau 4-4 : Solution optimale

| $la_1$ | $la_2$ | $h$ | $lo\_haut$ | $lo\_bas$ | $d$ | $i_{m1}$             | $i_{m2}$           |
|--------|--------|-----|------------|-----------|-----|----------------------|--------------------|
| 15     | 15     | 7   | 135        | 40        | 18  | $7.5 + j \cdot 15.7$ | $-10 + j \cdot 37$ |

Les parties imaginaires des courants  $i_{m1}$  et  $i_{m2}$  minimisent le critère ( 4.3-12 ). En revanche, les parties réelles sont elles assez éloignées de ce critère. Mais cela s'explique par notre hypothèse initiale. Nous avons pris en compte uniquement la condition ( 4.3-6 ) sur les hautes fréquences. Celle portant sur les basses fréquences ( 4.3-4 ) est réalisée lorsque nous prenons en compte la résistance de chacun des boîtiers des MOSfets qui, rappelons le, est bien supérieure à celle de la connectique.

#### 4.3.5. Validations

La première validation est la modélisation électrique de la structure afin de vérifier le critère ( 4.3-7 ). Nous avons obtenu :  $L_2 = 34,6$  nH et  $M_{20} = 15,6$  nH.

Cette première vérification est satisfaisante. L'écart entre  $\frac{L_2}{2}$  et  $M_{20}$  est 9.8%. Nous allons passer à une vérification expérimentale.

Deux structures (figure 4.3-8 et figure 4.3-9) ont été réalisées :

- ✓ La structure correspondant à la structure optimale trouvée,
- ✓ Une structure qui ne respecte pas le critère ( 4.3-7 ).

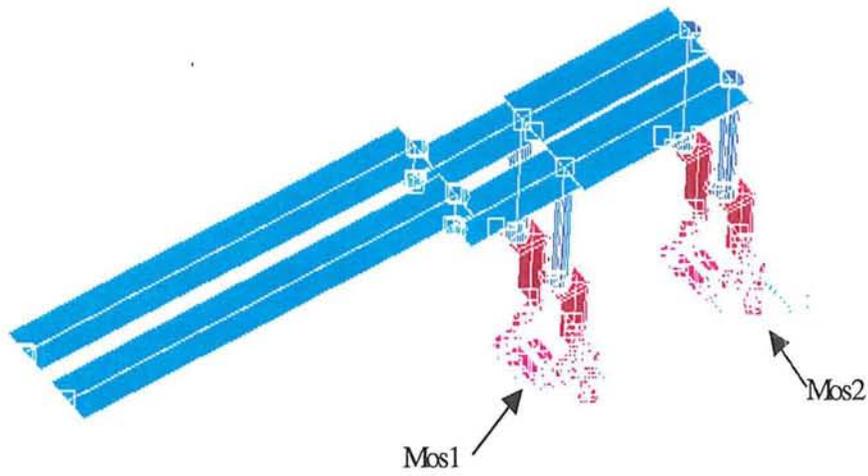


figure 4.3-8 : Câblage non-optimal

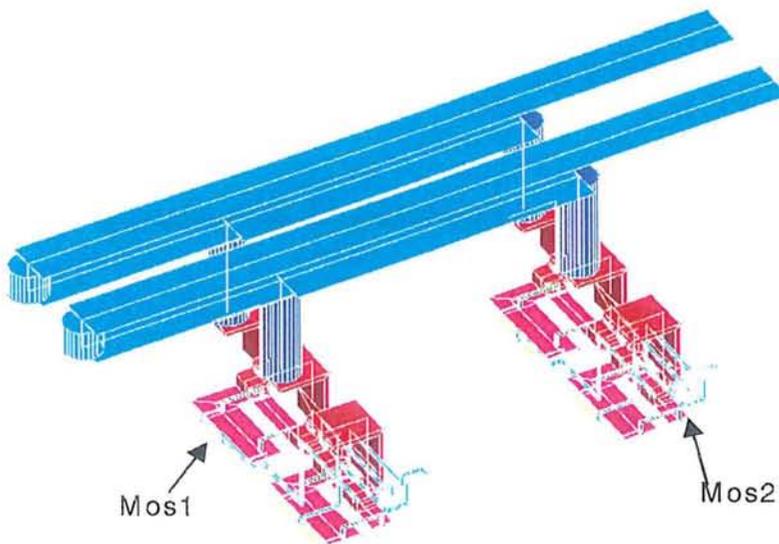


figure 4.3-9 : Câblage optimal

Ces deux structures ont été simulées. Nous présentons sur la figure 4.3-10 et la figure 4.3-11 les résultats expérimentaux et simulés pendant la fermeture des interrupteurs.

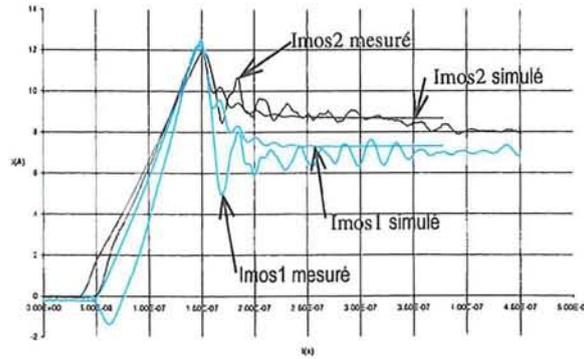


figure 4.3-10 : Courbes mesurées et simulées du courant dans les interrupteurs lors de la fermeture dans une géométrie non-optimale

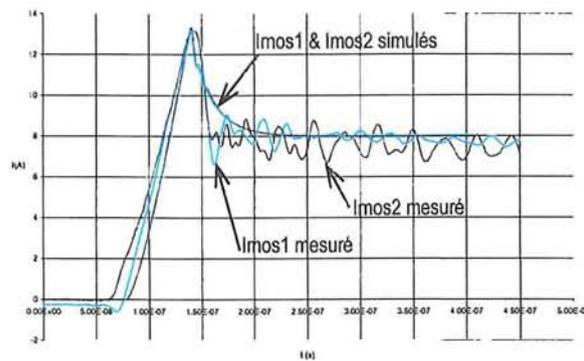


figure 4.3-11 : Courbes mesurées et simulées du courant dans les interrupteurs lors de la fermeture dans la géométrie optimale

La figure 4.3-11 montre des courants égaux dans les deux MOSfets avec la structure asymétrique définie suite au processus d'optimisation. En revanche, les courants, dans la structure non-optimale, sont inégaux et créent un déséquilibre entre les interrupteurs.

La comparaison de la figure 4.3-10 et de la figure 4.3-11 montre l'importance de la géométrie du câblage dans la répartition du courant.

#### 4.3.6. Conclusion

Cette application a montré la faisabilité du problème qui nous intéressait : une répartition équitable du courant entre différents interrupteurs en parallèle. Les résultats obtenus sont satisfaisants puisque nous avons réalisé une structure permettant l'équilibre du courant.

Des validations expérimentales et simulées ont été mises en place.

Cependant, il reste une grande partie du travail non automatisée : la réflexion pour créer la forme générale de la structure. Il est important de préciser que cette étape sera difficilement informatisable. Elle inclut le savoir faire des concepteurs.

A travers ces applications, nous avons pu mettre en évidence les problèmes liés à la conception de structures en Electronique de Puissance.

Nous avons réussi à résoudre certains d'entre eux comme celui de diminuer l'inductance propre au câblage ou de réaliser une structure qui permet l'équilibre du courant entre des interrupteurs en parallèle.

Dans les deux optimisations, notre objectif a été réalisé.

La modélisation du busbar de Alstom a montré l'utilité de la modélisation 2D, ainsi que la facilité de mise en œuvre de notre méthode de réduction de schémas électriques. Cependant, tous les problèmes n'ont pas été traités. Il reste à résoudre des problèmes thermiques en particulier.

# **5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES**

CONSTITUTIONAL  
REVISIONS

Dans la première partie de ce mémoire, nous avons décrit une méthode de modélisation électrique et électrodynamique de la connectique des structures d'Electronique de Puissance.

La modélisation électrique repose sur une méthode analytique : la méthode PEEC. Cette méthode, parfaitement adaptée aux géométries de la connectique, a été étendue afin de prendre en compte les différents trajets de courants dans les connexions. Ceci a été réalisée en couplant la méthode PEEC avec les méthodes d'analyse des circuits électriques. Les résultats obtenus ont montré que cette méthode est très performante et permet la modélisation de géométries complexes.

L'analyse électrodynamique a été développée sur le même principe. A partir des formules de base, nous avons mis en place les expressions des efforts électrodynamiques entre les plaques composant la connexion. Celles-ci ont été validées sur des exemples simples et permettent d'envisager des résultats significatifs dans ce domaine.

D'ores et déjà, des exemples industriels ont été traités dans ces domaines. Aujourd'hui, le couplage de ces deux aspects n'est pas encore réalisé. Nous réfléchissons dans la suite de ces travaux à une automatisation de ce couplage. En outre, il serait intéressant de mettre en place une analyse thermique de la connectique en partant des résultats acquis après les analyses électriques et électrodynamiques. Cette étude pourrait être obtenue en réalisant un couplage avec une méthode éléments finis

Notons que ces développements futurs permettront une modélisation complète de la connectique des convertisseurs d'Electronique de Puissance, et donc entraîneront une réduction du coût de conception.

Dans la deuxième partie, nous avons voulu tirer profit du formalisme de nos méthodes d'analyse afin d'améliorer les structures existantes selon des critères électriques ou électrodynamiques.

Le choix des techniques d'optimisation est important et nécessite alors une connaissance de l'ensemble des techniques. Deux grandes familles se distinguent : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

Les méthodes déterministes sont très performantes lorsque la solution initiale est proche de l'optimum global. Moyennant une analyse de sensibilité, elles permettent d'aboutir rapidement au résultat. Un algorithme déjà existant a été utilisé. Il se base sur la méthode du *Lagragien Augmenté* associé à la

méthode *BFGS*. En contrepartie, il a fallu mettre en place le calcul de sensibilité adapté à la méthode PEEC que nous avons appelé la méthode dPEEC (pour dérivée PEEC).

La méthode déterministe s'est avérée rapide et efficace sur les différents problèmes que nous avons traités. En revanche, il est apparu un problème de convergence lorsque la solution initiale était loin de l'optimum recherché. Il fallait alors passer par une recherche manuelle d'une solution initiale proche de notre objectif.

Les méthodes stochastiques sont une réponse à ce problème. Elles convergent en effet vers l'optimum global quel que soit le point de départ. En outre, une analyse de sensibilité n'est alors pas nécessaire puisque le mécanisme de recherche est aléatoire. En contrepartie, le nombre d'évaluations de la fonction est important voir très important et la précision sur la solution n'est pas très bonne.

C'est pourquoi il nous semblait intéressant de mettre au point une méthode hybride : il s'agit du couplage d'une méthode stochastique (*Algorithme Génétique*) avec une méthode déterministe (*Lagragien augmenté* associé à *BFGS*). Ainsi, l'optimum global pourra être localisé de manière grossière avec l'algorithme génétique, puis sa recherche est affinée avec la méthode déterministe.

Cette technique est actuellement à l'étude. Les premiers résultats obtenus sur des cas simples ont été concluants. Il reste maintenant à coupler ces deux algorithmes et à valider cette méthode sur des problèmes industriels plus volumineux.

La troisième partie de ce mémoire est consacrée aux applications de nos méthodes. Trois applications ont été traitées, caractérisant chacune un aspect différent de la conception en Electronique de Puissance.

La première traite la modélisation de câblage à géométrie complexe. Elle a permis de valider notre analyse électrique. Les résultats de modélisation ont été comparés à des résultats de mesure et les corrélations sont bonnes.

Dans la deuxième application, le but était d'améliorer une structure de convertisseur en diminuant les parasites électriques dus au câblage. Après une phase d'analyse de la connectique, nous avons appliqué la méthode déterministe, qui nous a permis de réduire sensiblement l'inductance parasite. En revanche, cette optimisation a mis en avant le lien entre les composantes électriques du câblage et les dimensions de celui-ci. Il est donc nécessaire dans la suite des travaux de chercher à coupler différents

aspects dans la fonction objectif tels que électrique, électrodynamique, mais aussi l'encombrement, le coût,...

Enfin la troisième application traite d'un problème de plus en plus fréquent en Electronique de Puissance : la mise en parallèle de plusieurs composants. Cet aspect a demandé une contribution très importante du concepteur afin de définir une géométrie, qui puisse réaliser une répartition équilibrée des courants. Ensuite, l'algorithme d'optimisation a permis de trouver les paramètres correspondant à la structure optimale.

Ce travail permet une aide à la conception des structures d'Electronique de puissance. Des pistes d'amélioration sont ouvertes et nous pensons que les développements effectués dans la suite feront de cet outil un élément nécessaire dans la conception.

## Conclusion

---

# 6. BIBLIOGRAPHIE

# 圖書集成醫部全錄

- [ALO] P. Alotto, P. Girdinio, G. Molinari, M. Nervi  
Hybrid Deterministic/Stochastic fuzzy methods for the optimization of electromagnetic devices  
IEEE - CEFC '98, Tucson, Arizona, USA, juin 1998, p 280
- [BAD] R. Badoual, C. Martin, S. jacquet  
Les micro-ondes, Tome II : composants, antennes, fonctions mesures,  
Masson 1995
- [BRO] C.G. Broyden  
The convergence of a class of double rank minimization algorithms 2 : The new algorithms  
Journal of Institute of Mathematics and its Applications, 6, pp. 222-231, 1970.
- [CAR] C.W. Carrol,  
The Created Response Surface Technique for Optimizing Non Linear Restrained Systems  
Operational Research  
9, pp.169-184, 1961.
- [CLA-1] E. Clavel  
Vers un Outil de Conception de Câblage : le logiciel InCa  
Thèse de doctorat INPG, septembre 1996, Grenoble, France
- [CLA-2] E. Clavel, J.L. Schanen, J. Roudet  
Case Impedance determination fo Power Electronics Components  
IEEE – ICEAA '95, Turin, Italie, 12 - 15 septembre 1995, pp121 – 124
- [CLA-3] E. Clavel, J. Roudet, J.L. Schanen, A. Fontanet  
Influence of the Cabling Geometry on Paralleled Diodes in a High Power Rectifier  
IEEE – IAS '96, San Diego, Etats Unis, 6 – 10 octobre 1996, pp 993 - 998
- [COR] G.P. Mc Cormick, K. Ritter  
Alternative Proofs of convergence Properties of the conjugate Gradient Method  
Journal of optimisation Theory and applications, 13, pp.497-515, 1972

- [DRE] T. Dreher  
Couplage de la Méthode des Elements Finis Tridimensionnels avec une Méthode d'Analyse du Circuit Electrique : Application à la Modélisation des Machines Electriques Tournantes  
Thèse de doctorat INPG, octobre 1994, Grenoble, France
- [FLE] R. Fletcher  
A New Approach to Variable Metric Algorithms  
The Computer Journal, vol. 13, 3, pp. 317-322, 1970.
- [FIA] A.V. Fiacco, G.P. Mc Cormick  
Non Linear Programming :Sequential Unconstrained Minimisation Techniques  
Wiley, New York, 1968.
- [FOX] R.L. Fox  
Optimization Methods for Engineering Design  
Addison-Wesley Publishing Company, 1971
- [GIT] M.S. Gitosusastro  
Analyse de Sensibilité et Optimisation par rapport aux Paramètres de Construction dans des Systèmes Electromagnétiques  
Thèse de doctorat de l'INPG, juillet 1988, Grenoble, France
- [GOL] D. Goldfarb  
A Family of Variable metric methods derived by variational means  
Mathematics of Computation, vol. 24, pp. 23-26, 1970.
- [GRA] J.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik  
Table of Integrals, Series, and Products  
Alan Jeffrey, Editor, University of Newcastle upon Tyne, Angleterre  
Academic Press, ISBN 0-12-294755-X

- [GUE] C. Guérin  
Détermination des pertes par Courants de Foucault dans la cuves de transformateurs.  
Modélisation des minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en  
régime harmonique ;  
Thèse de Doctorat INPG, Septembre 1994, Grenoble, France
- [HAR] R.F. Harrington  
Field Computation by Moment Methods  
IEEE Press, reprint of 1968
- [HER-1] C. Herault, Y. Maréchal  
Boundary And Interface Conditions In Meshless Methods  
CEFC '98, Tucson, Arizona, USA, juin 1998, p255
- [HER-2] C. Herault, Y. Maréchal  
A Meshless Approximation for the Acceleration of Stochastic Algorithm in Optimization  
Procedure  
IEEE - Compumag '99, Sapporo, Japon, 25-28 octobre 1999
- [HES] M.R. Hestenes,  
Multipliers and Gradient Methods  
Journal of optimization theory and applications, 4, pp.303-320, 1969.
- [HOE] C.Hoer, C.Love  
Exact inductance equations for rectangular conductors with application to more complicated  
geometries  
J.Research of the National Bureau of Standarts, vol 69C, n°2, Aug. 1965
- [INC] InCa (Inductance Calculation)  
Prédétermination des inductances de câblage par la méthode PEEC  
Notice d'utilisation,  
Cedrat SA, 10 Chemin du Pré Carré, ZIRST 4301, 38943 Meylan Cedex France

- [JEA-1] P.O. Jeanin, M. Akhbari, J.L. Schanen  
Influence of Stray Inductances on Current Sharing during Switching Transitions in Paralleled semiconductors  
EPE '99, Lausanne, Suisse, septembre 1999, à paraître
- [JEA-2] P.O. Jeanin, J.L. Schanen, E. Clavel  
Original cabling conditions to insure balanced current during Switching Transitions between Paralleled Semiconductors  
IAS '99, octobre 1999, à paraître
- [KAD] K. Kaded  
Optimisation de Forme de Machines Electriques à l'aide d'un Logiciel Eléments Finis et de la Méthode des Pénalités Intérieures Etendues  
Thèse de doctorat INPG, février 1993, Grenoble, France
- [KHA] R. Khazaka, E. Chiptout, M.Nakhla, Q.J. Zhang  
Analysis of high speed interconnects with frequency dependent parameters  
EMC Zurich, 1995, p.185-190
- [KIR] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi  
Optimization by simulated annealing  
Science, 220, pp. 671-680, 1983.
- [KRA] L. Krähenbühl, D. Muller  
A theory of thin layer in electrical engineering. Example of shell models in analysing eddy-current by boundary and finite element methods  
IEEE Trans. Magn., vol 29, n°2, pp 1450 - 1455, mars 1993
- [LUE] D.G. Luenberger  
Introduction to linear and non linear Programming  
Addison-Wesley, 1973.

- [MAG] Ch. Magele and Al.  
self Adaptive Fuzzy sets in Multi Objective Optimization using Genetic Algorithms  
Proc. 7<sup>th</sup> IGTE Symp. on Numerical Field Calculation in El. Eng., Graz, Autiche, 23 – 25  
septembre 1996, pp. 141 – 146
- [MAR] Y. Maréchal, C. Herault  
Méthode de Galerkin sous maillage pour la simulation en électromagnétisme  
RIGE n°1, 1998, pp 99 - 140
- [MAT] Optimization Toolbox  
For Use with Matlab, User's Guide  
The mathWorks, Inc.
- [MET] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.W. Rosenbluth, A.H. Teller, E. Teller  
Equation of state calculations by fast computing machines  
Journal of Chemical Physics, vol.21, pp. 1087-92, 1953.
- [MIN] M. Minoux  
Programmation Mathématique, Théorie et algorithmes Tome1  
Bordas et CNET-ENST, ISBN 2-04-015487-6, 1983
- [PAU] C.R. Paul  
Modeling electromagnetic interference properties of printed circuit boards  
IBM J. Res. & D., vol.33, n°1, Jan. 1989, p.259-266
- [PET] P. Petin  
Etude de sensibilité à l'aide des dérivées d'ordre élevé dans la méthode des éléments finis.  
Applications à l'électromagnétisme  
Thèse de doctorat de l'INPG, juillet 1996, Grenoble, France

- [PIE-1] N. Piette, E. Clavel, Y. Maréchal  
Optimization of Cabling in Power Electronics Structure using Inductance Criterion  
IAS '98, St-Louis, Missouri, USA, octobre 1998, pp 925-928
- [PIE-2] N. Piette, Y. Maréchal, E. Clavel  
Optimization of Interconnection Inductances with Coupled PEEC-Quasi-Newton Method  
CEFC '98, Tucson, Arizona, USA, juin 1998, p
- [POW] M.J.D. Powell,  
A method for non Linear Constraints in minimization problems  
Optimization, R. Fletcher editions, Academic Press, New York, pp.283-298, 1969.
- [REZ] R. Rezende Saldanha  
Optimisation en Electromagnétisme par application conjointe des Méthodes de Programmation  
Non Linéaire et de la Méthode des Eléments Finis  
Thèse de doctorat INPG, mai 1992, Grenoble, France
- [ROC] R.T. Rockafellar  
A Dual approach to solving non linear programming problems by unconstrained optimization  
Mathematical Programming, 6, pp.555-562, 1973.
- [RUE-1] A.E. Ruehli, H. Heeb  
Three dimensionnal interconnect analysis using partial element equivalent circuits  
IEEE Transactions on circuits & systems, vol. 39, n°11, nov. 199299.
- [RUE-2] A.E. Ruehli  
Inductance Calculations in a Complex Integrated Circuit Environnement  
IBM Journal of Research and Development, Sept. 72
- [RUE-3] A.E. Ruehli, P.A. Brennan  
Capacitance Models for Integrated Circuit Metallization Wires  
IEEE Journal of Solid State Circuits, Vol. SC – 10, n°6, décembre 1975

- [RUE-4] A.E. Ruehli, P.A. Brennan  
Efficient Capacitance Calculations for three dimensionnal multiconductor Systems  
IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol. 21, n°2, février 1973
- [RYA] D.M. Ryan  
Penalty and barrier functions  
P.E. Gill and Murray, Academic Press, 1974.
- [SAL] L. Saludjian  
Optimisations en Electrotechnique par Algorithmes Génétiques  
Thèse de doctorat INPG, juin 1997, Grenoble, France
- [SAR] B. Sareni  
Méthodes d'Optimisation Multimodales Associées à la Modélisation Numérique en  
Electromagnétisme  
Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, janvier 1999
- [SCH-1] J.L. Schanen  
Intégration de la Compatibilité Electromagnétique dans la conception de convertisseurs en  
Electronique de Puissance  
Thèse de doctorat INPG, janvier 1994, Grenoble, France
- [SCH-2] J.L. Schanen, E. Clavel, J. Roudet  
Modeling of Low Inductive Busbar Connections  
IEEE Industry Applications Magazine, SEPT-Oct 1996
- [SCHA] D.F. Schanno  
Conditionning of Quasi-Newton Methods for function minimization  
Mathematics of Computation, Vol. 24, pp. 641-656, 1970.

- [TEU]           W. Teulings  
Prise en Compte du Câblage dans la Conception et la Simulation des Convertisseurs de  
Puissance : Performances CEM  
Thèse de doctorat INPG, avril 1997
- [VAS-1]         J.A. De Vasconcelos  
Optimisation de forme des structures électromagnétiques  
Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 04 Juillet 1994, France
- [VAS-2]         J.A. De Vasconcelos, R.R. Saldanha  
Genetic Algorithm Coupled with a Deterministic Method for Optimization in electromagnetics  
IEEE Transactions on Magnetics, vol 33, n°2, Mars 1997, pp1860-1863
- [YOU]           M. Youssef  
Rayonnement dans les Convertisseurs d'Electronique de Puissance  
Thèse de doctorat INPG, décembre 1998, Grenoble, France

# 7. ANNEXES

# 2020年11月

## ANNEXE I

### Détails sur les dérivées partielles de la fonction mutuelle

Dans la partie portant sur la modélisation de la connectique, la formule de la mutuelle partielle  $M_{p12}$  entre deux barres a été présentée.

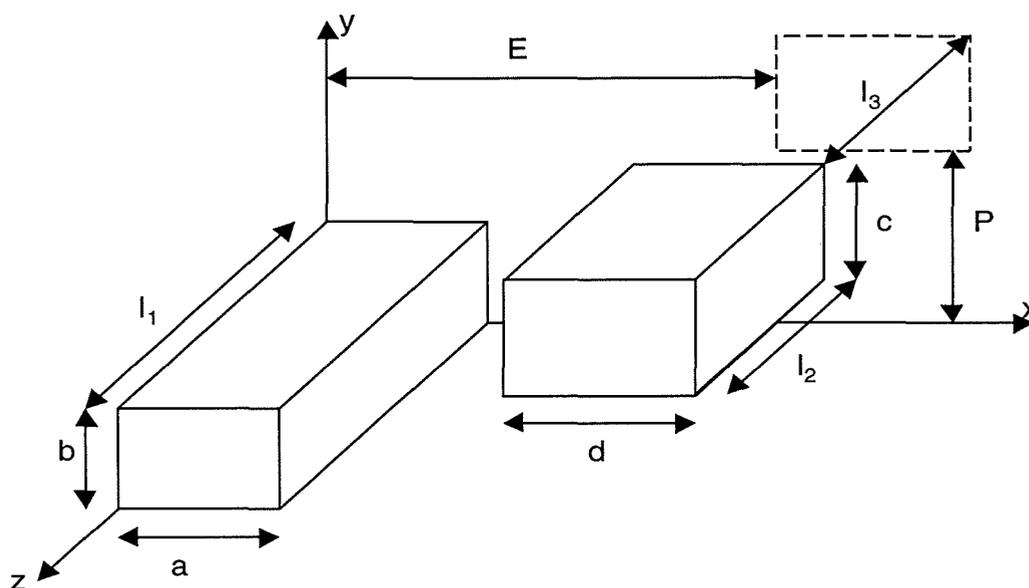


figure 1 : Mutuelle entre deux barres

$$M_{pb12} = \frac{0,001}{abcd} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{y^2 z^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) \cdot x \cdot \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) + \\ \left( \frac{x^2 z^2}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) \cdot y \cdot \ln \left( y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) + \\ \left( \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{y^4}{24} \right) \cdot z \cdot \ln \left( z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) + \\ \frac{1}{60} \cdot (x^4 + y^4 + z^4 - 3x^2 y^2 - 3y^2 z^2 - 3x^2 z^2) - \\ \frac{xyz^3}{6} \cdot \text{Arctg} \frac{xy}{z \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{xy^3 z}{6} \cdot \text{Arctg} \frac{xz}{y \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \\ \frac{x^3 yz}{6} \cdot \text{Arctg} \frac{yz}{x \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{array} \right] \begin{array}{l} E-a, E+d \\ P-b, P+c \\ 3^{-1} l_3 \\ (x) \\ (y) \\ E+d-a, E \\ P+c-b, P \\ l_3 + l_2 - l_1 \end{array} \quad (1)$$

## I – Réécriture de la Fonction Mpb12

Afin de déterminer les dérivées de  $M_{pb12}$  en fonction des 9 paramètres géométriques, nous allons exprimer cette fonction d'une autre manière.

Soient les 3 fonctions suivantes  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  :

$$f_1(x, y, z) := \left( \frac{y^2 \cdot z^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) \cdot x \cdot \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \quad (2)$$

$$f_2(x, y, z) := \frac{x^4 - 3 \cdot y^2 \cdot z^2}{60} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3)$$

$$f_3(x, y, z) := \frac{-x^3 \cdot y \cdot z}{6} \cdot \arctan \left( \frac{y \cdot z}{x \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \quad (4)$$

Soient les trois vecteurs  $l$ ,  $h$  et  $p$  dépendant des 9 paramètres  $E$ ,  $d$ ,  $a$ ,  $P$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  :

$$l(E, d, a) := \begin{bmatrix} E + d \\ E + d - a \\ E - a \\ E \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$h(P, c, b) := \begin{bmatrix} P + c \\ P + c - b \\ P - b \\ P \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$p(l_1, l_2, l_3) := \begin{bmatrix} l_3 + l_2 \\ l_3 + l_2 - l_1 \\ l_3 - l_1 \\ l_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Nous pouvons alors exprimer la mutuelle  $M_{p12}$  comme suit :

$$M_{pb12}(E, P, a, b, c, d, l1, l2, l3) := \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{a \cdot b \cdot c \cdot d} \cdot m_{pb12}(E, P, a, b, c, d, l1, l2, l3) \quad (8)$$

avec 
$$m_{pb12}(E, P, a, b, c, d, l1, l2, l3) := \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \text{sg} \cdot f(l(E, d, a)_i, h(P, c, b)_j, p(l1, l2, l3)_k) \quad (9)$$

$$f(x, y, z) := f1(x, y, z) + f1(y, z, x) + f1(z, x, y) \dots \\ + f2(x, y, z) + f2(y, z, x) + f2(z, x, y) \dots \\ + f3(x, y, z) + f3(y, z, x) + f3(z, x, y) \quad (10)$$

et 
$$\text{sg} := (-1)^{i+j+k+1} \quad (11)$$

Cette expression analytique plus simple de la mutuelle va faciliter la lisibilité de l'explication qui suivra.

## II – Calcul des Dérivées Partielles

Nous n'allons pas expliciter les dérivées par rapport aux 9 paramètres. Seule celle par rapport au paramètre  $a$  sera présentée.

Pour dériver notre fonction, nous appliquons une règle classique de dérivation des fonctions de plusieurs variables :

$$\boxed{\frac{\partial f(l(a), h(a), p(a))}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \frac{\partial l}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial a}} \quad (12)$$

### A – Expression des dérivées de $f$ par rapport à ses 3 variables directes

Comme le montre la formule ( 10 ), la fonction  $f$  qui nous intéresse est la somme de neuf termes. Il nous faut donc d'abord exprimer les dérivées des trois fonctions  $f1$ ,  $f2$  et  $f3$  par rapport à chacune de leurs variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Ce sont les expressions que nous donnons ici.

**Rappel de l'expression de la fonction f1 :**

$$f1(x, y, z) := \left( \frac{y^2 \cdot z^2}{4} - \frac{y^4}{24} - \frac{z^4}{24} \right) \cdot x \cdot \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \quad (13)$$

**On note ainsi les dérivées de f1 (Cf. Equation ( 2 )) :**

$$D_x f1(x, y, z) := \frac{d}{dx} f1(x, y, z) \quad (14)$$

$$D_y f1(x, y, z) := \frac{d}{dy} f1(x, y, z) \quad (15)$$

$$D_z f1(x, y, z) := \frac{d}{dz} f1(x, y, z) \quad (16)$$

**Les expressions exactes de ces trois fonctions sont les suivantes :**

$$\begin{aligned} D_x f1(x, y, z) := & \left( \frac{1}{4} \cdot y^2 \cdot z^2 - \frac{1}{24} \cdot y^4 - \frac{1}{24} \cdot z^4 \right) \cdot \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \dots \\ & + \left( \frac{1}{4} \cdot y^2 \cdot z^2 - \frac{1}{24} \cdot y^4 - \frac{1}{24} \cdot z^4 \right) \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D_y f1(x, y, z) := & \left( \frac{1}{2} \cdot y \cdot z^2 - \frac{1}{6} \cdot y^3 \right) \cdot x \cdot \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \dots \\ & + \left( \frac{1}{4} \cdot y^2 \cdot z^2 - \frac{1}{24} \cdot y^4 - \frac{1}{24} \cdot z^4 \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{y}{\left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_z f1(x, y, z) := & \left( \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot z - \frac{1}{6} \cdot z^3 \right) \cdot x \cdot \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \dots \\ & + \left( \frac{1}{4} \cdot y^2 \cdot z^2 - \frac{1}{24} \cdot y^4 - \frac{1}{24} \cdot z^4 \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{z}{\left( x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)} \end{aligned} \quad (19)$$

**Rappel de l'expression de la fonction f2 :**

$$f_2(x, y, z) := \frac{x^4 - 3 \cdot y^2 \cdot z^2}{60} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (20)$$

**On note ainsi les dérivées de f2 (Cf. Equation (3)) :**

$$D_x f_2(x, y, z) := \frac{d}{dx} f_2(x, y, z) \quad (21)$$

$$D_y f_2(x, y, z) := \frac{d}{dy} f_2(x, y, z) \quad (22)$$

$$D_z f_2(x, y, z) := \frac{d}{dz} f_2(x, y, z) \quad (23)$$

**Les expressions exactes de ces trois fonctions sont les suivantes :**

$$D_x f_2(x, y, z) := \frac{1}{15} \cdot x^3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\left( \frac{1}{60} \cdot x^4 - \frac{1}{20} \cdot y^2 \cdot z^2 \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot x \quad (24)$$

$$D_y f_2(x, y, z) := \frac{-1}{10} \cdot y \cdot z^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\left( \frac{1}{60} \cdot x^4 - \frac{1}{20} \cdot y^2 \cdot z^2 \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot y \quad (25)$$

$$D_z f_2(x, y, z) := \frac{-1}{10} \cdot y^2 \cdot z \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\left( \frac{1}{60} \cdot x^4 - \frac{1}{20} \cdot y^2 \cdot z^2 \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot z \quad (26)$$

Rappel de l'expression de la fonction f3 :

$$f_3(x, y, z) := \frac{-x^3 \cdot y \cdot z}{6} \cdot \arctan\left(\frac{y \cdot z}{x \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \quad (27)$$

On note ainsi les dérivées de f3 (Cf. Equation ( 4 )) :

$$D_x f_3(x, y, z) := \frac{d}{dx} f_3(x, y, z) \quad (28)$$

$$D_y f_3(x, y, z) := \frac{d}{dy} f_3(x, y, z) \quad (29)$$

$$D_z f_3(x, y, z) := \frac{d}{dz} f_3(x, y, z) \quad (30)$$

Les expressions exactes de ces trois fonctions sont les suivantes :

$$D_x f_3(x, y, z) := \frac{-1}{2} \cdot x^2 \cdot y \cdot z \cdot \arctan\left[ y \cdot \frac{z}{\left( x \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)} \right] \dots \quad (31)$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot \frac{(2 \cdot x^2 + y^2 + z^2)}{\left[ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (x^4 + x^2 \cdot y^2 + x^2 \cdot z^2 + y^2 \cdot z^2) \right]}$$

$$D_y f_3(x, y, z) := \frac{-1}{6} \cdot x^3 \cdot z \cdot \arctan\left[ y \cdot \frac{z}{\left( x \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)} \right] - \frac{1}{6} \cdot z^2 \cdot y \cdot \frac{x^4}{\left[ (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right]} \quad (32)$$

$$D_z f_3(x, y, z) := \frac{-1}{6} \cdot x^3 \cdot y \cdot \arctan\left[ y \cdot \frac{z}{\left( x \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)} \right] - \frac{1}{6} \cdot z \cdot y^2 \cdot \frac{x^4}{\left[ (x^2 + z^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right]} \quad (33)$$

En dérivant l'expression ( 10 ), nous pouvons écrire les dérivées de f par rapport à x, y et z :

$$\frac{df(x,y,z)}{dx} = Dxf(x,y,z) \quad \text{et} \quad Dxf(x,y,z) := Dxf1(x,y,z) + Dzf1(y,z,x) + Dyf1(z,x,y) \dots \\ + Dxf2(x,y,z) + Dzf2(y,z,x) + Dyf2(z,x,y) \dots \\ + Dxf3(x,y,z) + Dzf3(y,z,x) + Dyf3(z,x,y) \quad (34)$$

$$\frac{df(x,y,z)}{dy} = Dyf(x,y,z) \quad \text{et} \quad Dyf(x,y,z) := Dyf1(x,y,z) + Dxf1(y,z,x) + Dzf1(z,x,y) \dots \\ + Dyf2(x,y,z) + Dxf2(y,z,x) + Dzf2(z,x,y) \dots \\ + Dyf3(x,y,z) + Dxf3(y,z,x) + Dzf3(z,x,y) \quad (35)$$

$$\frac{df(x,y,z)}{dz} = Dzf(x,y,z) \quad \text{et} \quad Dzf(x,y,z) := Dzf1(x,y,z) + Dyf1(y,z,x) + Dxf1(z,x,y) \dots \\ + Dzf2(x,y,z) + Dyf2(y,z,x) + Dxf2(z,x,y) \dots \\ + Dzf3(x,y,z) + Dyf3(y,z,x) + Dxf3(z,x,y) \quad (36)$$

Si on assemble les équations ( 14 ) à ( 36 ), nous pouvons obtenir les expressions des dérivées de f par rapport à x, y et z. Dans un souci de clarté, nous ne n'exposerons pas ces formules.

## B – Expressions des Dérivées par rapport à la variable a.

Nous avons éclairci dans le paragraphe précédent le calcul des trois dérivées  $\frac{df}{dx}$ ,  $\frac{df}{dy}$  et  $\frac{df}{dz}$  de

l'équation ( 12 ). Il nous reste à exprimer les 3 autres que sont  $\frac{\partial l}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial a}$  et  $\frac{\partial p}{\partial a}$  et nous aurons terminé

notre calcul.

Il nous suffit pour cela de dériver les équations ( 5 ), ( 6 ) et ( 7 ) par rapport à la variable a.

On obtient :

$$\frac{\partial l}{\partial a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial h}{\partial a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

**C – Calcul de la dérivée de f par rapport à a**

En insérant ( 37 ) dans l'équation ( 12 ), on obtient alors :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial l} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ( 38 )$$

Notons que nous sommes ici dans le cas où les dérivées de h et de p sont nulles par rapport à a.

Nous pouvons donc déduire de toutes ces équations l'expression de la dérivée de  $M_{pb12}$  en fonction de a.

Soit  $Da$  la dérivée de  $M_{pb12}$  par rapport à a. En tenant compte de toutes les expressions précédentes, nous pouvons écrire l'expression suivante :

$$Da(E, P, a, b, c, d, l1, l2, l3) := K \cdot \left[ \sum_{j=1}^4 \left[ \sum_{k=1}^4 (-1)^{j+k} \cdot Dxf(l(E, d, a)_2, h(P, c, b)_j, p(l1, l2, l3)_k) \dots \right] \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{a} \cdot mpb12(E, P, a, b, c, d, l1, l2, l3) \right] \quad ( 39 )$$

Nous sommes arrivés à notre objectif. Le calcul des autres dérivées se fait sur le même principe.

## ANNEXE II

## Dérivation du processus de modélisation électrodynamique

Dans la partie concernant l'optimisation, nous avons établi la méthode dPEEC. Celle-ci permet une analyse de sensibilité des différents courants de la structure étudiée. Nous avons montré que celle-ci suffisait pour mettre en place une optimisation sur les caractéristiques électriques telles que l'inductance et la résistance.

Nous allons ici montrer que cette méthode permet aussi une optimisation électrodynamique.

Nous rappelons la formule établie pour le calcul des efforts électrodynamiques :

$$F = \frac{\mu_0 \cdot i_1 \cdot i_2}{4 \cdot \pi \cdot \text{dist}} \left[ \sqrt{\text{dist}^2 + z^2} \right]_{l_3 - l_1, l_3}^{l_3 + l_2, l_3 + l_2 - l_1} \quad (1)$$

avec  $[f(z)]_{z_2, z_4}^{z_1, z_3} = f(z_1) - f(z_2) + f(z_3) - f(z_4)$

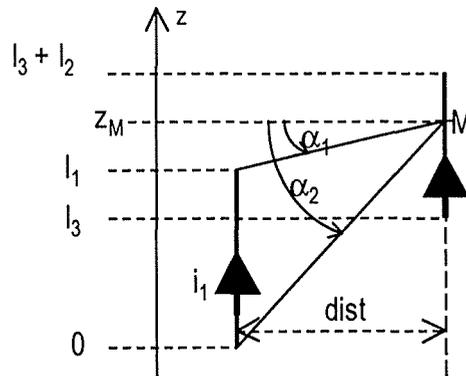


figure 1 : Effort entre deux conducteurs minces et rectilignes

Cette formule exprime l'effort entre deux fils finis rectilignes (figure 1). Dans cette expression, deux types de composants apparaissent :

- ceux dépendant de la géométrie :  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  et  $\text{dist}$
- les courants  $i_1$  et  $i_2$ .

Nous pouvons donc écrire la formule de l'effort  $F$  comme une fonction qui dépend à la fois du vecteur  $\mathbf{p}$ , qui regroupent les paramètres géométriques de la structure ( $i_1, i_2, i_3$  et  $\text{dist}$ ) et du vecteur  $\mathbf{I}$  qui représente les courants au sein de la structure ( $i_1$  et  $i_2$ ).

De plus, nous avons vu lors de la modélisation électrique que les courants au sein de la structure dépendent des paramètres géométriques et donc du vecteur  $\mathbf{p}$ . Il s'en suit donc que le vecteur  $\mathbf{I}$  est lui aussi une fonction de  $\mathbf{p}$ .

L'expression de l'effort  $F$  entre deux fils s'exprime alors ainsi :

$$F = F(\mathbf{I}(\mathbf{p}), \mathbf{p}) \quad (3)$$

Si on applique la règle classique de dérivation des fonctions de plusieurs variables, l'expression du gradient par rapport aux paramètres géométriques de ( 1 ) va donc s'exprimer comme suit :

$$\frac{dF}{d\mathbf{p}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{I}^t} \cdot \frac{d\mathbf{I}}{d\mathbf{p}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \quad (2)$$

En appliquant la même démarche que pour le gradient de la fonction mutuelle – Annexe I - , nous pouvons exprimer assez facilement le terme  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}$ .

Dans la partie sur l'optimisation, nous avons montré comment obtenir le terme  $\frac{d\mathbf{I}}{d\mathbf{p}}$ . Il reste donc à

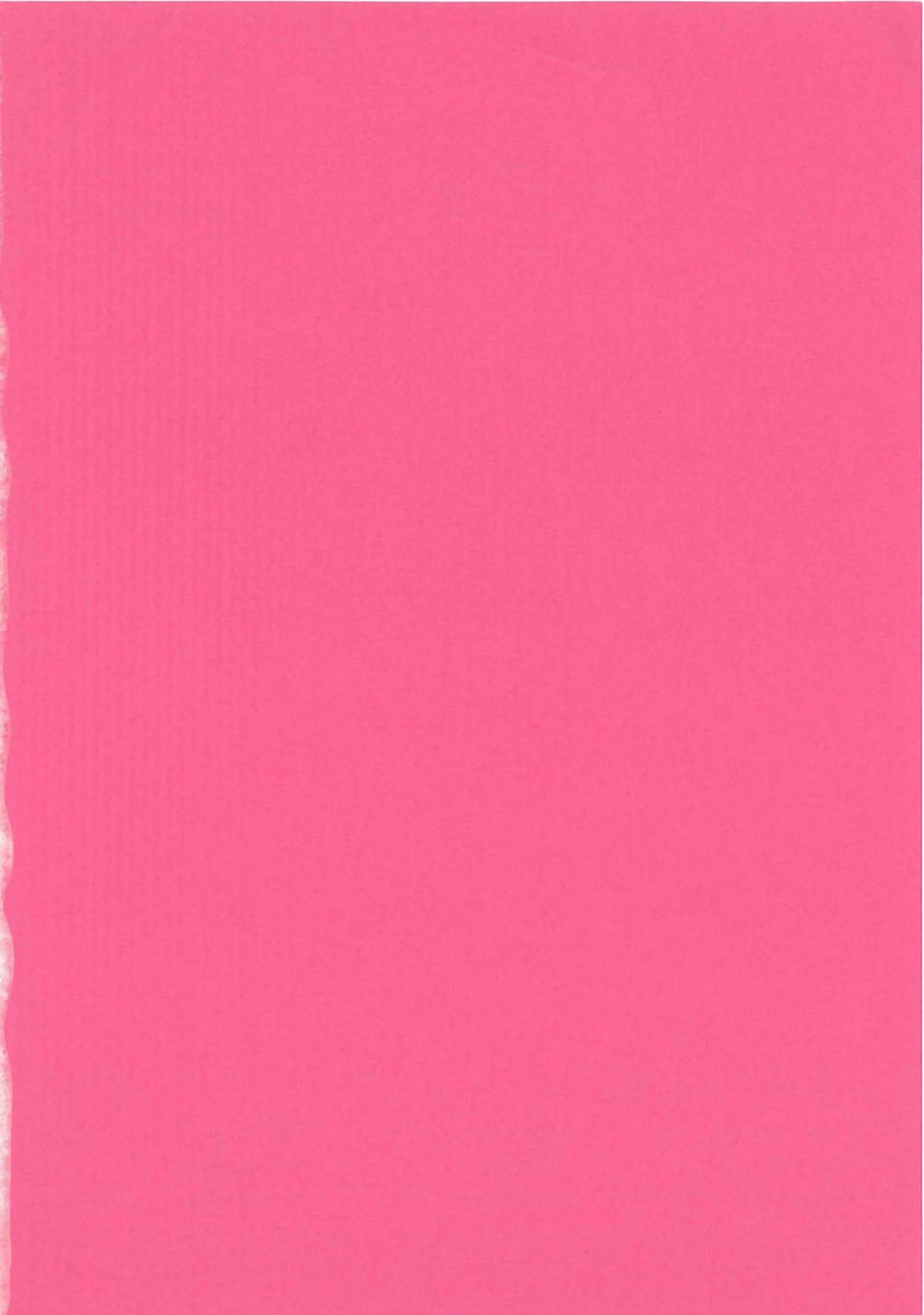
exprimer la dérivée par rapport aux courants :

$$\frac{dF}{di_1} = \frac{\mu_0 \cdot i_2}{4 \cdot \pi \cdot \text{dist}} \left[ \sqrt{\text{dist}^2 + z^2} \right]_{|_3 - i_1, i_3}^{i_3 + i_2, i_3 + i_2 - i_1} \quad (4)$$

$$\frac{dF}{di_2} = \frac{\mu_0 \cdot i_1}{4 \cdot \pi \cdot \text{dist}} \left[ \sqrt{\text{dist}^2 + z^2} \right]_{|_3 - i_1, i_3}^{i_3 + i_2, i_3 + i_2 - i_1} \quad (5)$$

Les expressions ( 2 ), ( 3 ) et ( 4 ) permettent donc d'exprimer le gradient de l'effort électrodynamique entre deux fils.

Pour aboutir à celui entre deux barres pleines, nous sommerons tous les différents gradients relatifs à chaque couple de fils issus du maillage des barres.



## RESUME

---

Ce mémoire apporte une aide à la conception de la connectique des structures d'Electronique de Puissance. Une méthode d'optimisation des structures a été mise en place.

La première partie présente une méthode de modélisation du câblage. Celle-ci repose sur une méthode analytique : la méthode PEEC, qui calcule un schéma électrique équivalent de tout type de connectique. Cette méthode, couplée à une technique d'analyse des circuits électriques, permet une étude indépendante des solveurs de circuits. Sur le même principe, une modélisation électrodynamique de la structure a été développée.

Dans une deuxième partie, une méthode déterministe d'optimisation a été utilisée pour améliorer les structures. Elle a nécessité le développement de l'analyse de sensibilité associée à notre méthode PEEC. Les résultats obtenus se sont avérés satisfaisants si la solution initiale était proche de l'optimum recherché. Dans le cas contraire, une nouvelle méthode a été développée, un algorithme stochastique a été associé à un algorithme déterministe. Ainsi, le premier algorithme permet de localiser la région de l'optimum global, puis une recherche plus fine est effectuée avec la méthode déterministe. Les premiers résultats sont encourageants.

Les techniques développées ont été validées tout d'abord sur la modélisation 2D d'un busbar industriel. Ensuite, deux optimisations ont été réalisées : une minimisation de l'inductance parasite d'une structure hacheur et une optimisation de la répartition du courant entre deux interrupteurs.

---

Electronique de Puissance  
Modélisation  
PEEC

Effort Electrodyamique  
Calcul de Sensibilité  
Méthode déterministe

Répartition du courant  
Inductance parasite  
Optimisation

## SUMMARY

---

This document helps to design connections in Power Electronic devices. A device's optimisation method has been developed.

The first part presents a cabling analytic modelling method : the PEEC method calculates an equivalent electric circuit of each connection type. This method, coupled with an accurate electrical circuit analysis, allows a circuit-solver-free study. In the same time, an electrodynamic modelling of the device has been developed.

In the second part, a deterministic optimisation method has been performed on the devices. This needed the development of a sensibility analysis program adapted to our PEEC method. The obtained results are satisfying whether the initial solution is not too far from the optimum. In the other case, a new method has been developed which consists in coupling a deterministic algorithm with a stochastic algorithm. The stochastic algorithm localises the global optimum area, and the more accurate research is done with the deterministic algorithm.

The first results are encouraging.

The developed techniques have been validated firstly on the 2D modelling of an industrial bus bar. Then, the optimisation of the parasitic inductance of a buck converter has been performed and the current repartition between two switches has been optimised.

---

Power Electronics  
Modelling  
PEEC

Electrodynamic efforts  
Sensibility anlysis  
Optimisation

Deterministic method  
Current repartition  
Parasitic inductance