



HAL
open science

Simulation numérique d'écoulements turbulents en rotation, confinement et forçage à l'aide d'une méthode de pénalisation

Clément Jause Labert

► **To cite this version:**

Clément Jause Labert. Simulation numérique d'écoulements turbulents en rotation, confinement et forçage à l'aide d'une méthode de pénalisation. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2012. Français. NNT: 2012ECDL0020 . tel-00783702

HAL Id: tel-00783702

<https://theses.hal.science/tel-00783702>

Submitted on 1 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

délivrée par

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR**Spécialité Mécanique des Fluides**

École Doctorale MEGA

par

Clément JAUSE-LABERT

**Simulation numérique d'écoulements turbulents
en rotation, confinement et forçage à l'aide
d'une méthode de pénalisation**

Soutenue le 7 septembre 2012 devant la Commission d'Examen

Jury :	W.J.T. Bos	Examineur
	C. Cambon	Examineur
	F.S. Godeferd	Directeur de thèse
	E. Lévêque	Examineur
	F. Moisy	Rapporteur
	K. Schneider	Rapporteur

Remerciements

J'ai l'intime conviction que l'on ne peut avancer seul et qu'une condition nécessaire à la réalisation de belles choses est le soutien et la considération. Je sais que cette conviction est partagée par tous et elle explique la présence de la section "Remerciements" dans l'intégralité des manuscrits de thèse.

Je vais évidemment commencer par remercier mon directeur de thèse, Fabien Godeferd, pour avoir accepté de me guider et traverser avec moi ce long périple. Je le remercie vivement de la confiance qu'il a su me témoigner, de sa disponibilité et de sa patience pendant ces trois années de thèse. Il a permis de faire en sorte que ma thèse se déroule dans les meilleures conditions possibles, et j'ai largement bénéficié de ses compétences certaines en mécanique des fluides et de son "insolente" (déprimante) aisance en informatique, compétences qu'il a ardemment tentées de me transmettre durant cette période de doctorat.

Je tiens également à remercier l'ensemble du personnel du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique. Mes pensées amicales vont, entre autres, à Pascale, qui profite d'une retraite bien méritée, Wouter, Alexandre D. , Claude et Andrew pour les nombreux conseils souvent judicieux qu'ils m'ont donnés. L'équipe d'enseignement du département MFAE de l'École Centrale de Lyon a également beaucoup participé à ma bonne intégration et je pense en particulier à André, Dominique (encore deux quasi-retraités) et Julian qui ont toujours su faire preuve de bonne humeur et de motivation. Je remercie également le conseil consultatif, le conseil du département et la commission informatique pour m'avoir permis de m'impliquer dans la vie de ce laboratoire et de l'école.

Je ne peux évidemment que remercier l'ensemble des membres du jury de cette thèse pour avoir accepté d'en faire partie. Une pensée particulière va pour les rapporteurs de cette thèse, Frédéric Moisy et Kai Schneider, auxquels la tâche fastidieuse de relire ce manuscrit a été proposée et qu'ils ont amicalement acceptée. J'espère qu'ils ne le regretteront pas trop voire même qu'ils apprécieront par moments ce qu'ils y liront.

Je profite de ces quelques lignes pour remercier également la société GENCI, pour l'attribution de nombreuses heures de calcul sur la machine Jade du CINES et sur le calculateur Brodie de l'IDRIS. Merci également aux ingénieurs de ces établissements qui se sont toujours montrés très dévoués.

Ces trois années n'auraient pas été aussi appréciées si l'atmosphère n'avait pas été aussi bonne dans le bureau que j'ai partagé, avec Véronique et Benjamin au début, ce dernier m'ayant accordé plus de temps qu'il n'en avait lui-même pour m'aider notamment à faire tourner ce satané code, puis avec la *Dream Team* formé d'Alex (qui devrait soutenir en 2015 comme prévu), Jorge (dont les spaghettis issus de PARAJAM nous ont toujours impressionnés) et Shyam (qui je crois est encore en train de manger). Merci à eux pour leur amitié et parfois (assez rarement tout de même) pour leurs conseils avisés. Un grand merci surtout à Colin, qui a eu le rôle in-

dispensable de défouloir particulièrement la dernière année. Sans lui, je me serais senti bien seul par moments. Je leur souhaite bon courage à tous pour finir leurs thèses respectives, tout en n'ayant aucun doute sur l'issue de celles-ci.

J'en profite pour remercier l'ensemble des doctorants du laboratoire pour leur bonne humeur et leur détermination sur le baby-foot de la cafétéria. Une petite pensée également aux footeux du vendredi qui malgré les fréquentes querelles (dues au sport mais aussi et surtout à tous nos caractères bien trempés) m'ont permis tous les vendredis midi de me vider la tête et de pouvoir apprécier mes week-ends.

Je passe maintenant à mes amis inconditionnels, qui ont passé beaucoup de temps à m'écouter déblatérer sur mes écoulements turbulents sans jamais broncher. Ils ont même essayé de s'y intéresser. Merci, sans ordre particulier à Matthieu, Morgan et Nico (et leurs compagnes respectives bien évidemment) pour leur présence constante et leur profonde amitié. Je pense aussi à Jérémy et Julien avec qui j'ai beaucoup supporté l'OL ; nous allons malheureusement devoir décaler nos rendez-vous hebdomadaires aux jeudis pour l'année prochaine !

Enfin, *last but not least*, je remercie ma famille pour m'avoir toujours encouragé, soutenu et cru en mes qualités, même si la "mécanique physique" n'a pas toujours été leur domaine de prédilection. Je n'en serais pas là sans leur dévouement depuis le tout début.

Il ne me reste plus qu'une personne à remercier, celle qui a toujours été là et qui m'a permis de me remettre en question tout en gardant confiance en moi pendant ces trois années. Celle qui, même après ces derniers instants de rédaction où mon humeur était soit disant changeante, semble toujours partante pour me dire "oui" le 7 juillet 2012. Tu me soutiens plus que tu ne l'imagines. Un "merci" ne suffira pas . . .

RÉSUMÉ

Une méthode de pénalisation en volume est implémentée de façon implicite dans un code pseudo-spectral tri-périodique. Le schéma est étudié et la méthode numérique est testée et validée à l'aide de *benchmarks* concernant des effets linéaires anisotropes — propagation et réflexion d'ondes d'inertie et internes de gravité — ou la réflexion de structures tourbillonnaires. Cet outil numérique est alors appliqué à des écoulements turbulents en rotation confinés dans une géométrie cylindrique. Les effets globaux du confinement sont observés (anisotropie des petites échelles, *etc*) ainsi que des effets locaux de proche paroi (modification des *pdfs*, élongation verticale des grandes structures tourbillonnaires, *etc*). Enfin, la méthode de pénalisation est utilisée à des fins de forçage de la turbulence dans un contexte de type von Kármán et l'écoulement généré au cœur du domaine est étudié en détail et comparé à des approches théoriques. Différentes géométries pour les pales sont testées et les résultats obtenus révèlent des différences significatives dans la structure de l'écoulement en fonction de la forme des pales utilisées.

ABSTRACT

A volume-penalization method is implemented in a tri-periodic pseudo-spectral code. The numerical scheme is studied and the method is tested and validated thanks to benchmarks involving linear anisotropic effects (propagation and reflection of inertial waves or internal gravity waves) or the impact of vortical structures on a penalized plane. This numerical tool is then applied to rotating turbulent flows confined in a cylindrical geometry. The global effects of confinement are observed (small-scale anisotropy) as well as near-wall local effects (modification of the *pdfs*, vertical elongation of the large turbulent structures, *etc*). Finally, the penalization method is used in order to force the turbulence in a von Kármán swirling flow context. The generated flows are studied in detail and compared to previous theoretical works. Several geometries for the blades are tested and the resulting flows exhibit significantly different structures for each shape of the blades.

Sommaire

Liste des figures	4
Liste des tableaux	8
Introduction	11
1 Dynamique des écoulements turbulents	15
1.1 Équations de Navier–Stokes	15
1.2 Décomposition de Reynolds	17
1.2.1 Découplage champ moyen/champ fluctuant	18
1.2.2 Équations <i>RANS</i> (<i>Reynolds-Averaged Navier–Stokes</i>)	18
1.3 Notion de turbulence homogène isotrope (THI)	19
1.3.1 Homogénéité	20
1.3.2 Isotropie	20
1.4 Approche spectrale de la THI	22
1.5 Nature des écoulements turbulents et théorie K41	25
1.5.1 Cascade turbulente de Richardson	25
1.5.2 Théorie de Kolmogorov (1941) – K41	27
1.6 Aperçu lagrangien de la turbulence	30
1.7 Conclusions	32
2 Méthodes numériques	33
2.1 Simulations numériques directes (<i>DNS</i>)	33
2.1.1 Coût d’une simulation : ressources et temps	33
2.1.2 Méthode pseudo-spectrale	34
2.2 Méthode de pénalisation	40
2.2.1 Principe général et description	40
2.2.2 Prise en compte du mouvement du domaine solide \mathcal{S}	42
2.2.3 Lissage de la fonction masque	43
2.3 Conclusions	46
3 Implémentation et validation numérique de la méthode de pénalisation	47
3.1 Implémentation du terme de pénalisation	48
3.1.1 Schéma explicite	48
3.1.2 Traitement implicite du terme de pénalisation	49
3.1.3 Comportement du schéma implicite : développement d’un écoulement dans un cylindre tournant	50

3.1.4	Étude analytique du schéma implicite	54
3.2	Réflexion d'ondes d'inertie sur une paroi pénalisée	55
3.2.1	Rappel théorique sur les écoulements tournants	56
3.2.2	Description du code en canal	58
3.2.3	Paroi pénalisée alignée avec le maillage	59
3.2.4	Paroi pénalisée inclinée par rapport au maillage cartésien	63
3.3	Réflexion d'ondes internes sur une paroi pénalisée	68
3.3.1	Écoulement stratifié et approximation de Boussinesq	68
3.3.2	Paramètres numériques et résultats qualitatifs	69
3.3.3	Comparaison avec la théorie non-visqueuse	70
3.4	Impact d'un anneau tourbillonnaire sur une paroi solide	72
3.4.1	Conditions initiales et paramètres numériques	72
3.4.2	Résultats and comparaisons avec des travaux existants	73
3.4.3	Convergence avec le paramètre η	76
3.5	Conclusions	77
4	Déclin d'un écoulement turbulent confiné soumis à des effets de rotation	79
4.1	Contexte de l'étude	80
4.2	Initialisation d'un écoulement turbulent confiné	82
4.2.1	Écoulement initial homogène isotrope	82
4.2.2	Introduction de la pénalisation	83
4.2.3	Paramètres de rotation	85
4.2.4	Suivi de particules fluides	87
4.3	Influence de la distance à la frontière	90
4.3.1	Décomposition virtuelle du domaine fluide	90
4.3.2	Distribution du champ de vitesse	90
4.3.3	Échelles de longueur intégrales	94
4.3.4	Taux de dissipation	97
4.3.5	Distribution des accélérations lagrangiennes	99
4.4	Modifications globales de la turbulence	103
4.4.1	Déclin de l'énergie	103
4.4.2	Dynamique spectrale	105
4.4.3	Dispersion à une particule	110
4.4.4	Fonctions de structure lagrangiennes	111
4.5	Conclusions	112
5	Génération de turbulence : simulation numérique d'un écoulement de von Kármán	115
5.1	Vers un forçage "physique" de la turbulence	115
5.2	Introduction aux écoulements de von Kármán	116
5.2.1	Quelques études théoriques, expérimentales et numériques	116
5.2.2	Géométries utilisées pour les simulations	117
5.2.3	Caractéristiques du forçage	120
5.2.4	Paramètres des simulations et initialisation	122

5.2.5	Comparaison rapide des différents écoulements	123
5.3	Écoulement généré à l'aide de pales droites	127
5.3.1	État transitoire	127
5.3.2	Caractérisation de l'écoulement turbulent	132
5.4	Écoulement généré à l'aide de pales courbées (C+)	145
5.4.1	État transitoire	145
5.4.2	Caractérisation de l'écoulement turbulent	147
5.5	Conclusion	156
	Conclusion	159
A	Oscillation d'un tore dans un écoulement en rotation solide	163

Table des figures

1.1	Croquis de la célèbre expérience de Reynolds en 1883.	17
1.2	Schéma des termes de l'équation de Lin (1.32)	24
1.3	Universalité des spectres unidimensionnels	26
1.4	Expérience de jets et mise en évidence de l'influence du nombre de Reynolds	28
2.1	Schéma représentant l'aller-retour dans l'espace physique pour le calcul du terme non-linéaire des équations de Navier–Stokes.	36
2.2	Algorithme simplifié du code pseudo-spectral utilisé	38
2.3	Exemple de géométrie de domaine solide pénalisé	41
2.4	Influence du paramètre de lissage	45
2.5	Amplitude des oscillations numériques en fonction du lissage	46
3.1	Exemple de distribution de vitesse azimutale dans un cylindre en rotation	52
3.2	Convergence temporelle des schémas pénalisés	53
3.3	Convergence des schémas explicite et implicite avec η	54
3.4	Génération d'ondes d'inertie par McEwan [1970]	57
3.5	Géométrie du domaine de calcul dans un code en canal	58
3.6	Comparaison qualitative de la réflexion d'ondes d'inertie dans un canal plan	61
3.7	Évolution spatiale de la vitesse pour la réflexion d'ondes d'inertie	62
3.8	Convergence spatiale de la méthode de pénalisation pour le cas-test de la réflexion d'ondes d'inertie	63
3.9	Domaine numérique pénalisé du canal non-aligné au maillage	64
3.10	Visualisation du champ de vitesse dans les simulations de canal pénalisés non-alignés au maillage	66
3.11	Évolution spatiale des composantes de vitesses dans les simulations de réflexions d'ondes d'inertie en canal pénalisé non-aligné au maillage	67
3.12	Résultat qualitatif de la réflexion d'ondes internes sur un plan incliné	70
3.13	Rapport des longueurs d'ondes incidentes et réfléchies en fonction de la fréquence de Brunt-Väisälä	72
3.14	Schéma de la configuration utilisée pour la simulation de l'impact d'un <i>vortex ring</i>	74
3.15	Visualisation expérimentale et numérique de l'impact d'un <i>vortex ring</i>	74
3.16	Validation des résultats de l'impact d'un <i>vortex ring</i>	75
3.17	Convergence avec la perméabilité η des simulations d'impact d'anneaux de vorticité	77
4.1	Énergie, dissipation et spectre d'énergie lors de l'initialisation homogène	84

4.2	Schéma de la géométrie utilisée.	85
4.3	Visualisation du champ d'ensrophie lors de l'initialisation	86
4.4	Trajectoires des particules fluides pour les différentes simulations	88
4.5	Définition des trois régions annulaires du domaine fluide \mathcal{D}	91
4.6	<i>Pdfs</i> normalisées de la vitesse radiale pour la simulation $f0$	91
4.7	Évolution des composantes de vitesse moyennées en fonction de la position radiale.	93
4.8	Évolution temporelle des échelles de longueur radiales L_{rr}^r	95
4.9	Évolution temporelle des échelles de longueur verticales L_{zz}^z	96
4.10	Comparaison des évolutions temporelles des échelles intégrales de longueur avec les lois asymptotiques en turbulence homogène	98
4.11	Taux de dissipation en fonction du temps, dans les trois zones, pour la simulation $f0$	99
4.12	<i>Pdfs</i> d'accélération lagrangiennes radiales et verticales	101
4.13	Mise en évidence de la dissymétrie des <i>pdfs</i> d'accélération lagrangienne	102
4.14	Augmentation de la dissymétrie des <i>pdfs</i> d'accélération radiales avec le temps	103
4.15	Évolution temporelle des quantités énergétiques moyennes	104
4.16	Spectres d'énergie tri-dimensionnels	106
4.17	Spectres unidimensionnels en fonction de la position radiale	108
4.18	Comparaison des spectres E_{rr} , $E_{\theta\theta}$ et E_{zz}	109
4.19	Évolution temporelle de la dispersion à une particule	111
4.20	<i>Pdfs</i> des fonctions de structure lagrangiennes	113
5.1	Géométries utilisées pour les simulations d'écoulements de von Kármán.	119
5.2	Schéma de l'écoulement de von Kármán dans le cas contrarotatif ($\theta = 0$)	121
5.3	Initialisation de la vitesse de rotation Ω des rotors.	123
5.4	Comparaison de l'évolution de l'énergie cinétique totale, horizontale et verticale pour les différentes géométries de pales considérées.	124
5.5	Échelles de longueur de Taylor directionnelles, calculées à partir de l'équation (5.3). Les quantités ne sont tracées qu'à partir de $t = 30$ s car les gradients de vitesse sont très proches de 0 au début du calcul (pas d'écoulement initial) ce qui entraîne des valeurs pour $l_{\lambda,i}$ très grandes mais qui n'ont pas de signification.	125
5.6	Visualisation du champ stationnaire moyenné temporellement et azimuthalement pour la simulation C-	126
5.7	Nombres de Reynolds basés sur l'échelle de Taylor l_λ	128
5.8	Évolution temporelle du champ de vitesse moyenné azimuthalement dans le cas de pales droites	129
5.9	Distribution des termes de l'équation d'évolution de l'ensrophie (D)	131
5.10	Champ d'ensrophie \mathcal{Z} instantané pour la simulation D	133
5.11	Schéma de la position des "sondes" utilisées pour le calcul des spectres temporels	134
5.12	Signaux temporels obtenus pour la simulation D aux positions données par la figure 5.11.	135
5.13	Densités spectrales de puissances (DSP) des signaux de vitesse pour la simulation avec pales droites	137

5.14	Corrélation de vorticité verticale dans la zone de cœur \mathcal{D}_c de la simulation D.	138
5.15	<i>Pdfs</i> des composantes cartésiennes de vitesse dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation D.	139
5.16	<i>Pdfs</i> des composantes cartésiennes de vorticité dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation D.	139
5.17	<i>Pdfs</i> des dérivées de vitesses dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation D.	140
5.18	<i>Pdf</i> du cosinus de l'angle θ , formé par \mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$, équivalent à l'hélicité normalisée H_n définie par l'équation (5.8), pour la simulation D.	141
5.19	Triangle de Lumley modifié pour la simulation D	142
5.20	Distribution du moment angulaire σ en fonction de la fonction de courant ψ pour la simulation D	144
5.21	Évolution temporelle du champ de vitesse moyenné azimuthalement dans le cas de pales courbées (sens positif de rotation)	146
5.22	Distribution des termes de l'équation d'évolution de l'énstrophie (C+)	148
5.23	Champ d'énstrophie \mathcal{Z} instantané pour la simulation C+	149
5.24	Signaux temporels obtenus pour la simulation C+ aux positions données par la figure 5.11.	151
5.25	Densités spectrales de puissances (DSP) des signaux de vitesse pour la simulation avec pales courbées	152
5.26	Corrélation de vorticité verticale dans la zone de cœur \mathcal{D}_c de la simulation C+.	153
5.27	<i>Pdfs</i> des composantes cartésiennes de vitesse dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation C+.	153
5.28	<i>Pdfs</i> des composantes cartésiennes de vorticité dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation C+.	154
5.29	<i>Pdfs</i> des dérivées de vitesses dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation C+.	155
5.30	<i>Pdf</i> du cosinus de l'angle θ , formé par \mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$, équivalent à l'hélicité normalisée H_n définie par l'équation (5.8), pour la simulation C+.	155
5.31	Triangle de Lumley modifié pour la simulation C+	156
5.32	Distribution du moment angulaire σ en fonction de ψ , la fonction de courant pour la simulation C+	157

Liste des tableaux

3.1	Paramètres principaux des simulations de l'écoulement d'un cylindre en rotation.	51
3.2	Paramètres des simulations de la réflexion d'ondes d'inertie dans un canal.	59
3.3	Paramètres des simulations pénalisées avec une paroi non alignée au maillage cartésien.	65
3.4	Paramètres des simulations de réflexion d'ondes internes sur des parois pénalisées inclinées.	71
3.5	Principaux paramètres de la simulation de l'impact d'un <i>vortex ring</i>	73
4.1	Paramètres des calculs durant l'initialisation	83
4.2	Paramètres relatifs à la rotation	87
4.3	Nombre de particules restant dans le domaine fluide durant la totalité des calculs.	90
5.1	Paramètres des géométries de quelques dispositifs expérimentaux de von Kármán	118
5.2	Paramètres de la boîte de simulation, du fluide et du forçage appliqué.	122

Introduction

La turbulence est souvent considérée comme le dernier problème de mécanique “classique” encore non résolu. Pourtant, ce phénomène physique est omniprésent dans les fluides : de l’écoulement de gaz à la sortie d’un pot d’échappement aux écoulements géophysiques et astrophysiques — atmosphériques, océaniques, stellaires, . . . — ou du sillage dû à notre passage dans une piscine au passage des ailes d’un avion de ligne. Au premier abord, tous ces écoulements (nous ne considérons ici que les fluides dits newtoniens) semblent radicalement différents mais ils sont régis par le même système d’équations, les équations de Navier–Stokes (1822), d’après les physiciens Claude-Louis Navier (1785-1836) et George Gabriel Stokes (1819-1903) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \end{cases}$$

Bientôt deux siècles après leur découverte, ces équations conservent une part de mystère pour la communauté scientifique, qui n’arrive toujours pas à déterminer s’il existe une solution unique dans l’espace à trois dimensions.

Cependant, même si les méthodes actuelles ne nous permettent pas de résoudre les problèmes mathématiques que nous venons de citer, de nombreux physiciens ont travaillé sur ces équations afin faire avancer notre connaissance des écoulements turbulents. Nous citerons par exemple O. Reynolds (1842-1912), L. Prandtl (1875-1953), T. von Kármán (1881-1963), G.I. Taylor (1886-1975), A.N. Kolmogorov (1903-1987), G.K. Batchelor (1920-2000), R.H. Kraichnan (1928-2008), S. Corrsin (1920-1986) ou encore P.G. Saffman (1931-2008) parmi les scientifiques ayant apporté une contribution importante à l’étude de la turbulence.

Parmi tous les types d’écoulements cités ci-dessus, il existe malgré tout quelques différences génériques qui peuvent provenir de l’application d’une force extérieure \mathbf{f} , de la distribution de la masse volumique ρ dans l’écoulement et des conditions aux limites qui sont imposées (présence de paroi ou d’obstacles). La force \mathbf{f} peut en effet inclure des effets de rotation (force de Coriolis) ou l’effet d’un champ magnétique si le fluide considéré est conducteur (force de Lorentz) par exemple. Il peut également exister des effets de compressibilité, de sorte que la masse volumique n’est pas constante dans tout l’écoulement. Tous ces effets nous compliquent énormément la tâche et un réflexe naturel est de simplifier le problème en supprimant tous ces effets additionnels. Le résultat est le modèle “simplifié” de la turbulence homogène isotrope d’un fluide incompressible ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$ et $\rho = c^{\text{te}}$). Malgré les simplifications apportées, nous ne savons que peu de choses de ces écoulements, les derniers progrès considérables remontant au milieu du XX^{ème} (1941) et la théorie de Kolmogorov (théorie K41).

Dans cette thèse, nous avons choisi de prendre en compte deux effets additionnels par rap-

port au cas homogène isotrope : la force de Coriolis et le confinement physique par des parois. Parmi les nombreuses méthodes numériques existantes pour simuler des écoulements turbulents, les plus précises sont les méthodes spectrales. Cependant, elles sont souvent limitées à la caractérisation d'écoulements homogènes (c.-à-d. dans des domaines fluides infinis) ou évoluant dans des domaines fluides de géométries simples (canal, cylindre, sphère, *etc*) car la prise en compte de parois de formes plus complexes n'est pas compatible avec la décomposition spectrale qui y est effectuée. Les effets de rotation par la force de Coriolis sont très faciles à implémenter dans une formulation spectrale des équations de Navier–Stokes et la principale difficulté provient donc de la prise en compte de parois et/ou d'obstacles divers. En effet, dans les codes spectraux, les conditions aux limites sont intrinsèques à la décomposition utilisée, et en ce qui concerne notre code basé sur une décomposition de Fourier tri-périodique, les conditions aux limites sont des conditions de périodicité et aucune condition de paroi n'est directement imposable. Une solution récente pour contourner ce problème réside en l'utilisation de méthodes dites de "frontières immergées" (*Immersed Boundary Methods*). Plus précisément, nous utilisons une méthode de pénalisation en volume, dont l'énorme avantage est la simplicité de formulation et d'implémentation. De plus, elle permet, sous certaines conditions, de considérer une grande variété de géométries de domaines fluides sans avoir à redéfinir le maillage initial. Notre objectif dans ce manuscrit est alors double : (a) décrire les effets globaux du confinement sur les écoulements turbulents soumis à des effets de rotation ; (b) forcer "physiquement" un écoulement turbulent à l'aide de la méthode de pénalisation afin de caractériser les effets à temps long sur la turbulence.

Dans une première partie, nous rappelons des notions élémentaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants, traitant de la connaissance actuelle du phénomène de la turbulence. Les descriptions physique et spectrale sont présentées, ainsi que les concepts d'homogénéité, d'isotropie et de cascade énergétique. La théorie de Kolmogorov est également rapidement abordée.

Les deux chapitres suivants traitent des méthodes numériques utilisées dans ce travail de thèse, dont la validation a représenté une part importante du travail effectué. Le deuxième chapitre décrit les méthodes numériques, notamment la méthode pseudo-spectrale de collocation de Fourier tri-périodique et l'algorithme associé, mais il aborde surtout la méthode de pénalisation en présentant ses avantages et ses inconvénients. Le troisième chapitre est consacré à la validation de la méthode de pénalisation. Tout d'abord, nous introduisons la formulation implicite que nous avons développée pour la prise en compte de la méthode de pénalisation. Puis les divers cas-test choisis pour valider la méthode numérique sont présentés ; ils portent sur des effets de réflexion d'ondes planes sur des parois pénalisées, alignées ou non au maillage cartésien, et sur la réflexion d'un anneau de vorticité sur une paroi plane.

Dans les chapitres suivants, en nous appuyant sur les validations et outils numériques précédemment cités, nous abordons enfin le cadre de la turbulence, confinée et en rotation, forcée ou non. Nous commençons par une géométrie relativement simple, avant d'entamer un des objectifs initiaux de ce travail de thèse : la simulation numérique de l'écoulement de von Kármán. Le quatrième chapitre est donc consacré à l'étude d'écoulements turbulents confinés dans un cylindre périodique selon son axe, soumis à une rotation d'ensemble plus ou moins rapide. Nous montrons les modifications locales et globales qu'implique la combinaison des effets de confinement et de rotation sur la turbulence.

Le cinquième chapitre traite finalement des écoulements forcés de type von Kármán, dont la géométrie est obtenue grâce à la méthode de pénalisation introduite aux chapitres précédents. Cette configuration est intéressante car ce type d'écoulements a fait l'objet de plusieurs expériences et analyses théoriques mais de peu d'études numériques. On discute dans ce chapitre plus précisément l'influence de la géométrie sur la dynamique et la structure des écoulements turbulents ainsi observés.

1

Dynamique des écoulements turbulents

Ce chapitre introduit les concepts de base relatifs aux écoulements turbulents. Le problème de fermeture des équations de Navier–Stokes est abordé par l’introduction de la décomposition de Reynolds et le concept de turbulence statistiquement homogène et isotrope est abordé. Les équations de Navier–Stokes sont alors écrites dans l’espace de Fourier, simplifiant grandement les équations à résoudre, en permettant la suppression du terme de pression dans ce nouveau système. Enfin, la théorie de Kolmogorov (K41) est succinctement expliquée, théorie qui malgré ses 70 ans d’ancienneté reste la plus solide dans l’appréhension de la turbulence malgré les quelques aspects qui lui sont reprochés (prise en compte de l’intermittence, etc).

This chapter introduces the basics relative to turbulent flows. The closing problem of the Navier–Stokes equations is approached thanks to the introduction of the Reynolds decomposition and the concept of statistically homogeneous isotropic turbulence is presented. The Navier–Stokes equations are then written in the Fourier space, significantly simplifying the equations to solve by allowing to get rid of the pressure term in this new system. Finally, Kolmogorov theory (K41) is briefly explained and remains the most convincing one after 70 years of existence, although it does not explain some features of turbulent flows (intermittency, etc).

1.1 Équations de Navier–Stokes

L’écoulement d’un fluide newtonien homogène, qu’il soit turbulent ou non, est entièrement régi par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et éventuellement d’énergie si les effets de compressibilité du fluide considéré sont pris en compte. En ce qui concerne le travail qui a fait l’objet de ce manuscrit, le fluide sera toujours supposé incompressible, de sorte que la masse volumique ρ d’une particule du fluide considéré sera supposée constante. En effet, pour que les effets de compressibilité ne soient pas négligeables, il faut que

le nombre de Mach $Ma = U/c$ soit tel que $Ma > 0.3$, U étant la vitesse caractéristique de l'écoulement et c la vitesse de propagation du son dans ce milieu. Tous les écoulements étudiés dans cette thèse sont tels que $Ma \ll 1$.

D'une manière générale, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

avec $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ la vitesse locale instantanée du fluide. Comme dit précédemment, l'écoulement étant supposé incompressible ($\rho = c^{te}$), l'équation de conservation de la masse devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$

Notons que cette condition de divergence nulle est également valable dans le cas de fluides stratifiés tels que $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0$. La conservation de la quantité de mouvement prend la forme des équations dites de Navier–Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

où $p(\mathbf{x}, t)$ est la pression locale instantanée du fluide de viscosité cinématique ν . D'un point de vue mathématique, des conditions initiales et aux limites sont nécessaires pour que le problème soit correctement posé. On obtient le système dimensionnel suivant, avec des conditions classiques de non-glissement sur les limites du domaine fluide \mathcal{D} :

<p style="text-align: center;">Trouver $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $p(\mathbf{x}, t)$ tels que :</p> $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \forall t > 0, \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \text{C.I. : } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \\ \text{C.L. : } \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{D}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \end{cases}$
--

On obtient donc un système de quatre équations à quatre inconnues proprement posé. On note tout d'abord l'apparition d'un nombre sans dimension essentiel en mécanique des fluides, le nombre de Reynolds Re . Ce dernier est, par définition, le rapport en ordre de grandeur des effets inertiels (c.-à-d. du terme non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$) sur les effets dissipatifs (c.-à-d. du terme de diffusion $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$). Ainsi, on a :

$$\text{Re} = \frac{\mathcal{O}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})}{\mathcal{O}(\nu \nabla^2 \mathbf{u})} = \frac{U^2/l}{\nu U/l^2} = \frac{Ul}{\nu}, \quad (1.4)$$

où l est une longueur caractéristique de l'écoulement.

On remarque également qu'en calculant la divergence de l'équation (1.3), on obtient une équation de Poisson pour la pression, qui permet de la calculer connaissant le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Notons qu'aucune condition aux limites sur la pression n'est donnée explicitement dans le système précédent. Néanmoins, en appliquant la condition aux limites de non-glissement dans les équations de Navier–Stokes, on trouve, pour une paroi immobile ($\mathcal{D} \neq \mathcal{D}(t)$) de normale \mathbf{n} , une condition aux limites de type Neumann pour la pression $\nabla_{\mathbf{n}} p =$

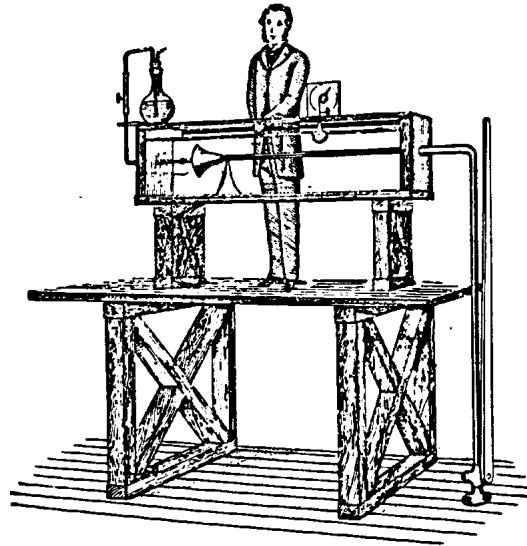


FIGURE 1.1 – Croquis de la célèbre expérience de Reynolds en 1883.

$\mu \nabla_n^2 u_n$, où $\mu = \rho \nu$ est la viscosité dynamique du fluide et $\nabla_n p$ représente la dérivée spatiale dans le direction du vecteur n . Enfin, il est intéressant de noter que la pression est obtenue à une constante additive près qui n'a aucune importance sur la dynamique de l'écoulement ; seul le gradient de pression a une influence sur l'évolution du champ de vitesse.

À ce jour, la preuve de l'unicité de la solution des équations de Navier–Stokes reste un problème ouvert et fait l'objet de l'un des 7 fameux *Millenium Problems* du Clay Mathematics Institute.

1.2 Décomposition de Reynolds

À la fin du XIX^{ème} siècle, Osborne Reynolds se pencha sur les différents régimes d'écoulements observés, notamment dans une conduite circulaire lors d'une expérience désormais célèbre (voir Reynolds [1883], ainsi que la figure 1.1). Il déduisit de cette étude l'importance du paramètre portant son nom pour la caractérisation du régime observé (voir Rott [1990] pour une description plus exhaustive).

Si le nombre de Reynolds est faible¹, les effets visqueux sont alors prépondérants et ont pour effet de préserver un caractère ordonné à l'écoulement. On dit alors que l'écoulement est laminaire. Si le nombre de Reynolds est très faible ($Re \ll 1$), on dit que l'on est dans le régime de Stokes et le terme non-linéaire peut alors être négligé.

Dans le cas contraire, si le nombre de Reynolds est grand, l'écoulement devient désordonné et très difficilement prédictible. On dit alors que l'écoulement est turbulent. Ce genre d'écoulement se caractérise principalement par le fait qu'apparaissent un très grand nombre d'échelles, tant spatiales que temporelles, et cette variété d'échelles est d'autant plus grande que le nombre

1. Le nombre de Reynolds critique, caractérisant le début d'une zone de transition entre le régime laminaire et le régime turbulent, varie suivant l'écoulement étudié. Pour l'exemple d'un écoulement en conduite circulaire, sans prendre de précaution particulière, le régime reste laminaire jusqu'à $Re \simeq 2300$.

de Reynolds est grand.

1.2.1 Découplage champ moyen/champ fluctuant

Lorsque l'on visualise n'importe quel écoulement turbulent, que ce soit un jet libre, un écoulement dans une conduite de forme quelconque ou le sillage obtenu en aval d'un obstacle, on s'aperçoit qu'il semble exister deux contributions qui se superposent, en tout point et à tout instant, si l'on répète un nombre suffisant de fois l'observation : un écoulement dominant reproductible et un écoulement aléatoire. L'ordre de grandeur des vitesses de cet écoulement aléatoire est, dans la plupart des écoulements turbulents, un ordre de grandeur inférieur à l'écoulement dit "reproductible". Ainsi, comme nous ne pouvons résoudre les équations de Navier–Stokes, une première approche consiste à étudier cet écoulement dominant, en introduisant la décomposition de Reynolds ² :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t), \quad (1.5)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \overline{P}(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t), \quad (1.6)$$

où, pour toute quantité a ,

$$\overline{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{N_{\text{obs}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{obs}}} a(\mathbf{x}, t). \quad (1.7)$$

A est alors une quantité moyenne au sens de Reynolds, c'est-à-dire moyennée sur plusieurs réalisations. On note que cette définition implique bien une moyenne d'ensemble et non une moyenne spatiale ou temporelle. Dans la suite, toute quantité munie de $\overline{}$ sera appelée quantité moyenne (au sens de la moyenne de Reynolds) et toute quantité munie de $'$ sera une quantité dite fluctuante. Par définition, la moyenne au sens de Reynolds implique, pour toute fonction f et g de la variable s , les propriétés suivantes :

- $\overline{f'} = 0$,
- $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$,
- $\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$,
- $\overline{fg} = \overline{f}\overline{g}$,
- \overline{fg} n'est pas en général égale à $\overline{f}\overline{g}$,
- $\frac{\partial \overline{f}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial f}{\partial s}}$.

1.2.2 Équations RANS (Reynolds-Averaged Navier–Stokes)

En introduisant la décomposition de Reynolds (équations (1.5) et (1.6)) dans l'équation (1.3), puis en moyennant au sens de Reynolds l'équation obtenue et en utilisant les propriétés précédentes ainsi que la condition d'incompressibilité, on obtient l'équation d'évolution du champ moyen dans la direction i :

2. Les équations que nous résolverons numériquement par la suite ne prendront pas en compte cette décomposition de Reynolds. Cette notion est simplement introduite pour une approche plus simple du problème de fermeture des équations de Navier–Stokes.

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_j \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_j u'_i}}{\partial x_j}, \quad (1.8)$$

où la convention de sommation d'Einstein est appliquée³. On remarque que l'équation (1.8) n'est autre que la notation indicielle des équations de Navier–Stokes pour le champ moyen, auxquelles est ajoutée une force caractérisant les effets du champ fluctuant sur le champ moyen. Le terme $\overline{u'_i u'_j}$ est appelé tenseur de Reynolds. En ajoutant la condition d'incompressibilité pour le champ moyen, qui n'est autre que $\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0$, on voit que le système d'équations devient un système de quatre équations avec une cinquième inconnue qui est justement le tenseur de Reynolds. Toujours en utilisant la décomposition de Reynolds dans l'équation pour le champ total (1.3), puis en retranchant l'équation (1.8), on obtient l'équation d'évolution pour le champ fluctuant u' . L'équation d'évolution du tenseur de Reynolds est alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \bar{U}_l \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} + \left(\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_l} + \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_l} \right) = \\ - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_l}}{\partial x_l} - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \overline{u'_j} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l \partial x_l} - 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_l}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Nous n'allons pas discuter ici le rôle de chaque terme mais simplement remarquer que cette équation qui donne l'évolution du tenseur de Reynolds (qui est une moyenne d'un produit de deux fluctuations) fait intervenir la moyenne d'un produit de 3 fluctuations. De même, en écrivant l'équation d'évolution de ce terme d'ordre 3, il apparaîtrait un terme d'ordre 4. De manière générale, l'équation de transport d'une quantité d'ordre n fait intervenir un terme d'ordre $n + 1$. C'est le problème de fermeture des équations de Navier–Stokes. Ainsi, si l'on souhaite résoudre les équations d'ordre n , la modélisation du terme d'ordre $n + 1$ est nécessaire. Citons par exemple des modèles en un point de type viscosité turbulente, de type $k - \varepsilon$ qui modélisent l'énergie cinétique turbulente moyenne $k = \overline{u_j u_j} / 2$ et son taux de dissipation $\varepsilon = \frac{dk}{dt}$ ou encore des fermetures en deux points de type EDQNM (Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian) qui modélisent les termes d'ordre 4 comme une somme de termes d'ordre 2 dans l'espace spectral.

1.3 Notion de turbulence homogène isotrope (THI)

Nous allons introduire ici le concept de turbulence homogène isotrope (THI ou *HIT* pour *Homogeneous Isotropic Turbulence*) qui permet, en s'affranchissant des conditions aux limites de l'écoulement, de simplifier le système d'équations à résoudre. Rappelons que ces notions sont ici statistiques, c'est-à-dire qu'un écoulement turbulent ne sera jamais homogène (resp. isotrope), mais statistiquement homogène (resp. isotrope).

3. Cette convention stipule que toute répétition d'indice dans le même terme d'un produit ou d'un quotient implique la sommation sur ce même indice dans les trois directions. Par exemple, $\frac{\partial \bar{U}_j \bar{U}_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{U}_j \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{U}_1 \bar{U}_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{U}_2 \bar{U}_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{U}_3 \bar{U}_i}{\partial x_3}$. Cette convention sera utilisée dans tout le manuscrit, sauf mention contraire explicite.

1.3.1 Homogénéité

Définition : *Un écoulement turbulent est dit homogène (ou plus justement statistiquement homogène) si la densité de probabilité est invariante par translation spatiale.*

Ceci entraîne les conséquences suivantes :

- Les moments en un point sont constants dans l'espace. Ils sont uniquement fonction de t , et si \mathbf{r} est un incrément spatial :

$$\overline{u_i u_j}(\mathbf{x}, t) = \overline{u_i u_j}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) = \overline{u_i u_j}(t). \quad (1.10)$$

- Les moments en deux points ne dépendent que de la distance séparant ces deux points et du temps. Ainsi, pour la corrélation double de vitesse, l'homogénéité implique :

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}^\dagger = \mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} = \overline{u_i u_j}^\dagger(\mathbf{r}, t). \quad (1.11)$$

L'étude des moments en deux points est indispensable afin d'obtenir une information sur les structures turbulentes. Par exemple, l'échelle dite intégrale de la turbulence se calcule en intégrant la corrélation de vitesse en deux points normalisée, notée f . En effet, on peut définir une structure comme l'ensemble des positions telles que la fonction de corrélation f , calculée pour chaque couple formé par deux de ces positions, est non nulle.

Une conséquence de la notion d'homogénéité est qu'elle ne considère que des écoulements où les effets de conditions aux limites (parois) sont absents. Or, un écoulement réaliste est forcément soumis à un confinement quelconque. On ne peut donc considérer que l'idée d'homogénéité locale, ce qui signifie que l'échelle de longueur des tourbillons est petite devant l'échelle d'inhomogénéité de l'écoulement.

L'homogénéité implique également que les dérivées spatiales des moments en un point sont nulles. Ainsi, on voit que les équations (1.8) et (1.9) peuvent être grandement simplifiées. Notamment, l'équation du champ moyen voit disparaître le terme des tensions de Reynolds et le champ moyen est régi par les équations de Navier–Stokes.

De plus, l'homogénéité a pour effet d'imposer aux gradients spatiaux du champ moyen d'être indépendants de x . Ainsi, si λ_{ij} est le gradient dans la direction j du champ moyen dans la direction i , alors on a :

$$\overline{U}_i(\mathbf{x}, t) = \lambda_{ij}(t)x_j + c_i(t). \quad (1.12)$$

1.3.2 Isotropie

Définition : *Un écoulement (statistiquement) homogène isotrope est un écoulement (statistiquement) homogène dont les propriétés statistiques sont invariantes vis-à-vis des rotations et symétries spatiales.*

Plus simplement, cela veut dire qu'aucune direction n'est privilégiée dans l'écoulement. On note par ailleurs que cette hypothèse implique nécessairement l'homogénéité statistique de l'écoulement et est donc une condition encore plus restrictive. L'isotropie statistique implique un certain nombre de conséquences. Par exemple, tous les gradients de vitesse sont nuls pour un écoulement homogène isotrope. Le champ de vitesse moyenne est donc constant, et dans notre étude, même dans le cas d'écoulements inhomogènes, nous ne considérerons que des

écoulements purement turbulents, de sorte que $\overline{\mathbf{U}} = 0$, ce qui implique $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ dans l'équation (1.5). De plus, en notant k l'énergie cinétique, une conséquence de l'isotropie est :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2k}{3} \delta_{ij}, \quad (1.13)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$. L'équation d'évolution du tenseur de Reynolds prend alors la forme très simple suivante :

$$\frac{dk}{dt} = -\varepsilon, \quad (1.14)$$

où ε est le taux de dissipation visqueuse, lequel a alors pour expression :

$$\varepsilon = 15\nu \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}. \quad (1.15)$$

Le choix du gradient de vitesse dans la définition (1.15) est arbitraire car du fait de l'isotropie, on a les égalités suivantes : $\overline{(\partial u_1 / \partial x_1)^2} = \overline{(\partial u_2 / \partial x_2)^2} = \overline{(\partial u_3 / \partial x_3)^2}$. La corrélation double de vitesse est alors un tenseur isotrope. Il peut s'écrire (voir Batchelor [1953]) sous la forme :

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = r_i r_j A(|\mathbf{r}|) + B(|\mathbf{r}|) \delta_{ij}. \quad (1.16)$$

On la réécrit souvent sous la forme suivante :

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = u_{\text{rms}}^2(t) \left(f(r, t) \frac{r_i r_j}{r^2} + g(r, t) \left[\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \right), \quad (1.17)$$

où f et g sont respectivement appelées fonctions d'auto-corrélation longitudinale et transverse et u_{rms} est la vitesse caractéristique de l'écoulement $u_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{u_i u_i} / 3}$. On peut trouver des relations simples entre f et g et en définissant la fonction K , qui est un cas particulier⁴ de la corrélation triple de vitesse, par $K(r) = \overline{u_1^2 u_1'} / u_{\text{rms}}$, on peut retrouver l'équation de Karman-Howarth, caractérisant l'évolution de la fonction d'auto-corrélation f :

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{rms}}^2 r^4 f(r, t)) = u_{\text{rms}}^3 \frac{\partial}{\partial r} (r^4 K(r)) + 2\nu u_{\text{rms}}^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (1.18)$$

Cette équation peut se réécrire en fonction de la trace du tenseur de corrélation double $Q = R_{ii}/2$:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \Gamma(r) + 2\nu \nabla^2 Q, \quad \text{avec } \Gamma(r) = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^4 u_{\text{rms}}^3 K(r)) \right). \quad (1.19)$$

Cette équation est une des plus importantes équations de turbulence isotrope et elle nous met face au problème de fermeture, car pour connaître l'évolution de f ou de Q , il faut connaître l'évolution de K , qui elle-même dépend des corrélations d'ordre 4.

4. On note que la direction utilisée est la direction 1 mais cela n'a aucune importance en turbulence isotrope.

1.4 Approche spectrale de la THI

En considérant un écoulement homogène, on étudie un écoulement qui n'est soumis à aucun confinement, de sorte que ce dernier évolue dans un espace supposé infini. De ce fait, nous pouvons réaliser l'étude de cet écoulement dans l'espace de Fourier (ou espace spectral), en calculant la transformée de Fourier \mathcal{F} du champ de vitesse considéré. Les coefficients de Fourier du champ de vitesse \mathbf{u} sont définis par l'équation (1.20), où un $\hat{\cdot}$ dénote la variable dans l'espace de Fourier :

$$\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \mathcal{F}\{\mathbf{u}\} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}, \quad (1.20)$$

où $\boldsymbol{\kappa}$ est le vecteur d'onde et i est le nombre imaginaire pur ($i^2 = -1$). La description n'est alors plus locale comme lors de l'approche dans l'espace physique mais se concentre sur la taille l des structures en utilisant les nombres d'onde $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}| = 2\pi/l$. Ainsi, les petites échelles de l'écoulement seront caractérisées par les grands nombres d'onde κ et les grandes structures par des nombres d'onde $\kappa \approx \mathcal{O}(1)$. On peut évidemment retourner dans l'espace physique grâce à une transformée de Fourier inverse \mathcal{F}^{-1} telle que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{\mathbf{u}}\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa}, t) e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}} d^3\boldsymbol{\kappa}, \quad (1.21)$$

pour ainsi retrouver $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathbf{u}\}\} = \mathbf{u}$.

Un des intérêts majeurs à utiliser l'espace spectral pour la description d'écoulements homogènes est la façon dont s'écrit la condition d'incompressibilité, car dans cet espace, cet opérateur de différentiation spatiale devient un opérateur algébrique. En effet, une dérivée spatiale dans l'espace physique, disons dans la direction j soit $\partial/\partial x_j$, est équivalente à une multiplication dans l'espace spectral par $i\kappa_j$. Ceci représente un avantage considérable de l'espace spectral, et plus particulièrement d'un point de vue numérique comme le montrera le chapitre 2 décrivant les méthodes pseudo-spectrales. Ainsi, l'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 &\iff \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ &\iff \kappa_i u_i = 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\iff \boldsymbol{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0. \quad (1.23)$$

L'équation (1.23) est donc l'expression de l'équation de conservation de la masse dans l'espace spectral. On voit que l'incompressibilité devient une condition géométrique qui force le vecteur coefficient de Fourier de vitesse à appartenir au plan normal à son vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$.

En calculant la transformée de Fourier de l'équation de Navier-Stokes (1.3), on cherche à décrire l'évolution temporelle des modes de Fourier du champ de vitesse. Prenons l'exemple de la composante dans la direction i :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \mathcal{F}\left\{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\} = -i\kappa_i \hat{p} - \nu \kappa^2 \hat{u}_i. \quad (1.24)$$

En multipliant cette équation par κ_i (la multiplication par κ_i implique la sommation sur l'indice i) et en utilisant la propriété d'incompressibilité de l'équation (1.22), on obtient l'expression de la pression dans l'espace spectral, qui est l'équivalent de l'équation de Poisson dans l'espace physique pour la pression :

$$\hat{p} = i \frac{\kappa_l}{\kappa^2} \mathcal{F} \left\{ u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right\}. \quad (1.25)$$

En injectant (1.25) dans (1.24), on obtient :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu \kappa^2 \hat{u}_i = - \left(\delta_{il} - \frac{\kappa_i \kappa_l}{\kappa^2} \right) \mathcal{F} \left\{ u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right\}. \quad (1.26)$$

En notant \mathcal{P}_{il} le tenseur tel que $\mathcal{P}_{il} = \delta_{il} - \kappa_i \kappa_l / \kappa^2$, on obtient finalement :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu \kappa^2 \hat{u}_i = - \mathcal{P}_{il} \mathcal{F} \left\{ u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right\}, \quad (1.27)$$

où l'opérateur \mathcal{P} permet la projection d'un vecteur $\hat{v}(\boldsymbol{\kappa})$ sur le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{\kappa}$. Ainsi, le champ reste tel que l'équation (1.22) est vérifiée et le rôle de la pression dans l'écoulement est désormais clair grâce à la description spectrale : la pression s'adapte au sein de l'écoulement pour permettre à ce dernier de rester incompressible, en supprimant les modes compressibles (parallèles à $\boldsymbol{\kappa}$) générés par le terme non-linéaire.

On peut également définir l'équivalent de la corrélation double dans l'espace de Fourier, appelé tenseur spectral (ou spectre tridimensionnel)⁵ :

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \overline{u_i u_j'} e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}. \quad (1.28)$$

Le tenseur spectral (ou plus exactement sa trace $\Phi_{ii} = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}$) est lié à l'énergie cinétique k par la relation suivante :

$$k(t) = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}^2} = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ii}(\boldsymbol{\kappa}, t) d^3 \boldsymbol{\kappa}. \quad (1.29)$$

En turbulence isotrope, l'écoulement n'a pas de direction privilégiée. Ainsi, on peut caractériser les contributions à l'énergie cinétique grâce à la norme κ du vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$, sans se préoccuper de son orientation. On définit alors le spectre d'énergie $E(\kappa)$, caractérisant la distribution d'énergie cinétique dans l'espace spectral :

$$E(\kappa, t) = \frac{1}{2} \oint \Phi_{ii}(\boldsymbol{\kappa}, t) d^2 \mathcal{S}(\kappa), \quad (1.30)$$

où $\oint d^2 \mathcal{S}(\kappa)$ désigne l'intégration sur une sphère de rayon κ . Cette formulation est équivalente à :

$$E(\kappa, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \Phi_{ii}(\boldsymbol{\kappa}, t) \delta(\boldsymbol{\kappa} - \kappa) d^3 \boldsymbol{\kappa}. \quad (1.31)$$

5. Comme nous ne traiterons dans la suite que d'écoulements purement turbulents (pas de champ moyen), le ' est utilisé pour dénoter une quantité en \mathbf{x}' dans la suite du manuscrit.

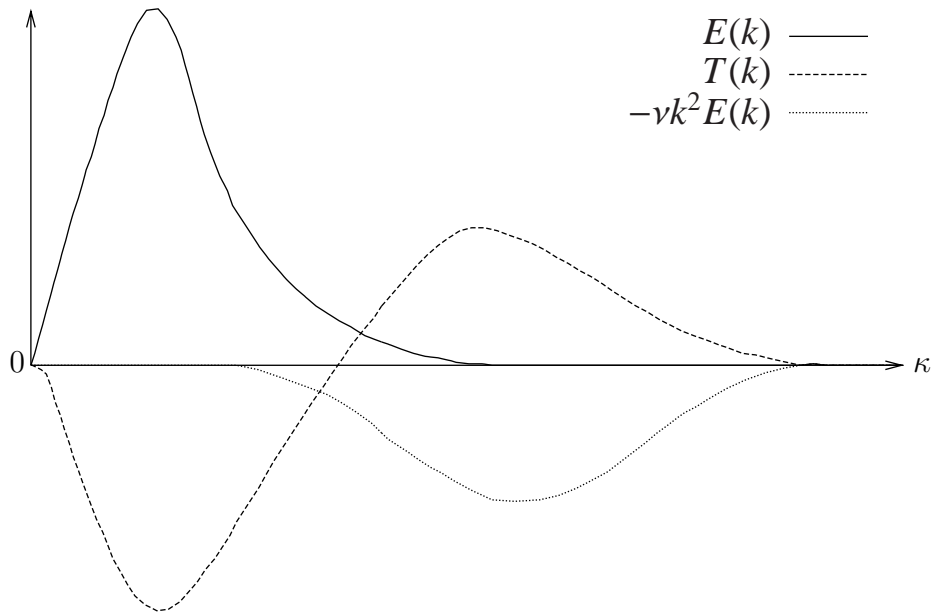


FIGURE 1.2 – Schéma qualitatif représentant les différents termes apparaissant dans l'équation de Lin (1.32).

Cette quantité est d'une importance fondamentale dans la compréhension de la dynamique des écoulements turbulents car elle permet de déterminer, en fonction de l'échelle considérée, le niveau d'énergie de l'écoulement. De plus, pour savoir comment cette énergie évolue avec le temps et entre les modes κ , on étudie l'équation (1.32) d'évolution de $E(\kappa)$. Cette dernière est obtenue en faisant la transformée de Fourier de l'équation d'évolution de la corrélation double R_{ij} , autrement dit l'équation de Karman-Howarth (1.18), puis en posant $i = j$. On obtient alors l'équation suivante, parfois appelée “équation de Lin”⁶ :

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\kappa, t) = T(\kappa, t) - 2\nu\kappa^2 E(\kappa, t). \quad (1.32)$$

Le membre de droite contient deux termes. Le premier est un terme de transfert dans lequel apparaissent des corrélations d'ordre 3. Il est appelé terme de transfert car l'intégrale de ce terme sur tous les nombres d'ondes κ est nulle, c'est-à-dire que l'on a :

$$\int_0^\infty T(\kappa) d\kappa = 0. \quad (1.33)$$

Cela signifie que ce terme ne permet qu'une redistribution d'énergie entre les différents nombres d'onde κ . Le second terme est le terme dissipatif, qui agit bien plus aux plus petites échelles (grands κ) à cause la pondération par κ^2 . L'évolution schématique de ces quantités en fonction de κ est donnée par la figure 1.2. Notons que les modèles de fermeture dans l'espace spectral ont pour but de modéliser ce terme $T(\kappa, t)$, soit grâce à une équation pour la fonction T (modèles quasi-normaux par exemple), soit en tentant de déterminer la forme du flux d'énergie $\Pi_E(\kappa)$, qui est défini par $\Pi_E(\kappa) = -\int_0^\kappa T(\kappa) d\kappa = \int_\kappa^\infty T(\kappa) d\kappa$, telle que $\Pi_E = \Pi_E(E, \kappa)$.

6. Ce résultat fit l'objet d'une présentation de C.C. Lin au *First Symposium of Applied Mathematics* en 1947 : “Remarks on the spectrum of turbulence”. Elle fait également l'objet de l'article de von Kármán & Lin [1949].

On peut noter entre autres les propositions d’Obukhov (1941), d’Heisenberg (1948) ou de Pao (1965), décrites dans Davidson [2004].

Enfin, une dernière définition, utile dans le cas où l’écoulement considéré n’est pas homogène dans les trois directions⁷, est celle du spectre unidimensionnel d’énergie, dans la direction d’homogénéité, défini par :

$$E_{ij}(\kappa_l) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(r_l \mathbf{e}_l) e^{-i\kappa_l r_l} dr_l. \quad (1.34)$$

La figure 1.3 montre la superposition de spectres unidimensionnels obtenus à partir de dispositifs et d’écoulements expérimentaux différents et qui montre l’universalité de la dynamique turbulente, discutée dans la section suivante.

1.5 Nature des écoulements turbulents et théorie K41

1.5.1 Cascade turbulente de Richardson

*“Big whirls have little whirls
Which feed on their velocity,
And little whirls have lesser whirls
And so on, to viscosity.”*

Lewis Fry Richardson, 1922

Cette citation de Richardson exprime bien la vision que les physiciens du XX^{ème} siècle (Richardson, Taylor, Kolmogorov, . . .) se font de la dynamique des écoulements turbulents (voir Frisch [1995], Pope [2000], Davidson [2004]) et qui persiste encore à l’heure actuelle, bien que très discutée. L’idée peut être résumée de la manière suivante : plus un écoulement est turbulent (plus le nombre de Reynolds est grand), plus ce dernier contient une gamme large d’échelles de temps et de longueurs. Ainsi, un écoulement turbulent est une superposition de tourbillons qui interagissent et dont l’échelle caractéristique varie de l’échelle intégrale l_0 , représentative des grandes structures, à l’échelle dite de Kolmogorov l_η qui caractérise les plus petits tourbillons. On définit également une échelle de longueur intermédiaire dite de Taylor l_λ et plus le nombre de Reynolds est grand, plus les ordres de grandeur des échelles sont séparées : $l_0 \gg l_\lambda \gg l_\eta$. En effet, on peut montrer⁸, à partir de considérations phénoménologiques, que pour des écoulements à grand nombre de Reynolds, on a les évolutions suivantes :

$$\frac{l_0}{l_\eta} \propto Re_0^{3/4} \quad \text{et} \quad \frac{l_0}{l_\lambda} \propto Re_\lambda \propto Re_0^{1/2}, \quad (1.35)$$

en définissant pour chacune des échelles de longueur l un nombre de Reynolds $Re = ul/\nu$. La figure 1.4, dont les images sont extraites de l’article de Dahm & Dimotakis [1990], montre l’existence de structures turbulentes de plus en plus petites lorsque le nombre de Reynolds

7. En réalité, il s’agit de tous les écoulements car il y a toujours, à plus ou moins grande échelle, un confinement.

8. Ces comportements se retrouvent également très bien numériquement (voir par exemple les résultats de simulations numériques directes spectrales de Kaneda & Ishihara [2006]).

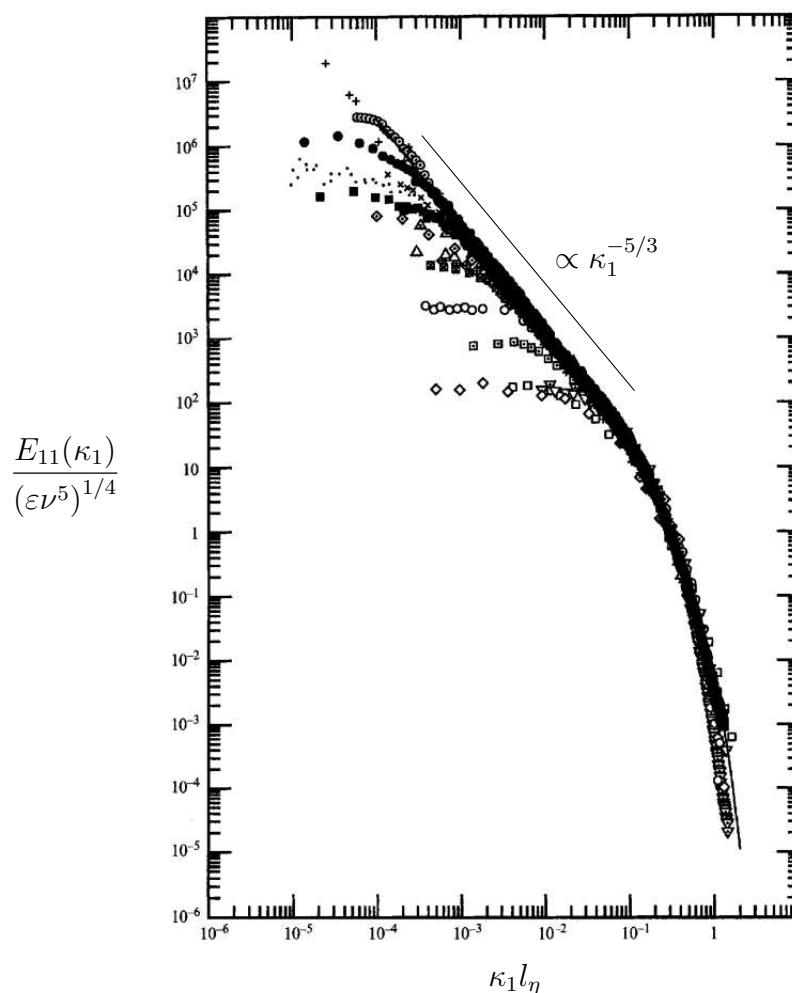


FIGURE 1.3 – Spectres unidimensionnels normalisés par les échelles de Kolmogorov (en échelles logarithmiques), obtenus à partir de différents types d'écoulements turbulents (couches limites en canal, sillages, turbulence de grille, jets, océans, etc.) pour différents nombres de Reynolds ($\text{Re}_\lambda \in [23; 3180]$). Les données ont été compilées dans Saddoughi & Veeravalli [1994], où sont répertoriés les différents dispositifs expérimentaux. La fameuse loi en $-5/3$, issue de la théorie de Kolmogorov, est clairement observée dans la zone inertielle.

augmente. La configuration expérimentale utilisée est un jet pour des nombres de Reynolds compris entre 1 500 et 20 000. La visualisation est possible grâce à l’insertion d’un colorant fluorescent, de densité équivalente au fluide considéré pour le jet, évoluant donc comme un scalaire passif (c.-à-d. n’ayant pas d’influence sur l’écoulement).

On peut également définir une échelle temporelle pour chacune des différentes tailles de structures $\tau = l/u$. L’idée de la cascade d’énergie de Richardson est que les structures d’échelles l_0 sont porteuses d’énergie et sont relativement lentes (avec un temps de retournement τ_0). Elles transfèrent l’énergie aux tourbillons d’échelles plus petites et plus rapides (τ_λ), et ainsi de suite jusqu’à ce que l’énergie atteigne les plus petites, mais aussi les plus rapides échelles l_η (de temps caractéristique τ_η). Ces dernières sont les échelles dites dissipatives. Cela s’explique par le fait que ces petites structures créent de forts gradients de vitesse, et que le terme de dissipation dans les équations de Navier-Stokes fait intervenir un produit de gradients de vitesse. Ceci concorde avec la figure 1.2 qui montre que le terme dissipatif a une importance d’autant plus grande que les structures sont petites (grands nombres d’onde κ).

1.5.2 Théorie de Kolmogorov (1941) – K41

Andreï N. Kolmogorov⁹ se pencha sur le problème pour répondre à un certain nombre de questions auxquelles les physiciens n’avaient toujours pas de réponse. Par exemple, peut-on déterminer la taille de ces plus petits tourbillons ? Comment évoluent les échelles de vitesses et de temps en fonction de l’échelle considérée ? En 1941, Kolmogorov publia deux papiers (Kolmogorov [1941a;b]) qui donnent des éléments de réponses à ces questions fondamentales. Il formule tout d’abord certaines hypothèses¹⁰ dans le cas d’écoulements à très grand nombre de Reynolds, où la séparation entre les échelles intégrales et dissipatives est grande :

- **Hypothèse d’isotropie locale** : *Pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, les petites échelles de la turbulence ($l \ll l_0$) sont statistiquement isotropes.*

Ainsi, on peut supposer une universalité des petites échelles, qui est précisée par l’hypothèse suivante.

- **1^{ère} hypothèse de similarité** : *Pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, les statistiques des petites échelles sont définies de manière universelle, uniquement par ε et ν .*

Il en découle par analyse dimensionnelle l’expression des échelles dites de Kolmogorov :

$$l_\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad (1.36)$$

$$u_\eta \equiv (\varepsilon\nu)^{1/4}, \quad (1.37)$$

$$\tau_\eta \equiv (\nu/\varepsilon)^{1/2}. \quad (1.38)$$

9. Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903 – 1987) est un mathématicien russe dont les apports en mathématiques sont nombreux et variés. Son travail concerne notamment la théorie des probabilités, la topologie, les systèmes dynamiques et l’étude du problème de la turbulence.



10. On donne ici une idée succincte de ces hypothèses sans entrer dans les détails.

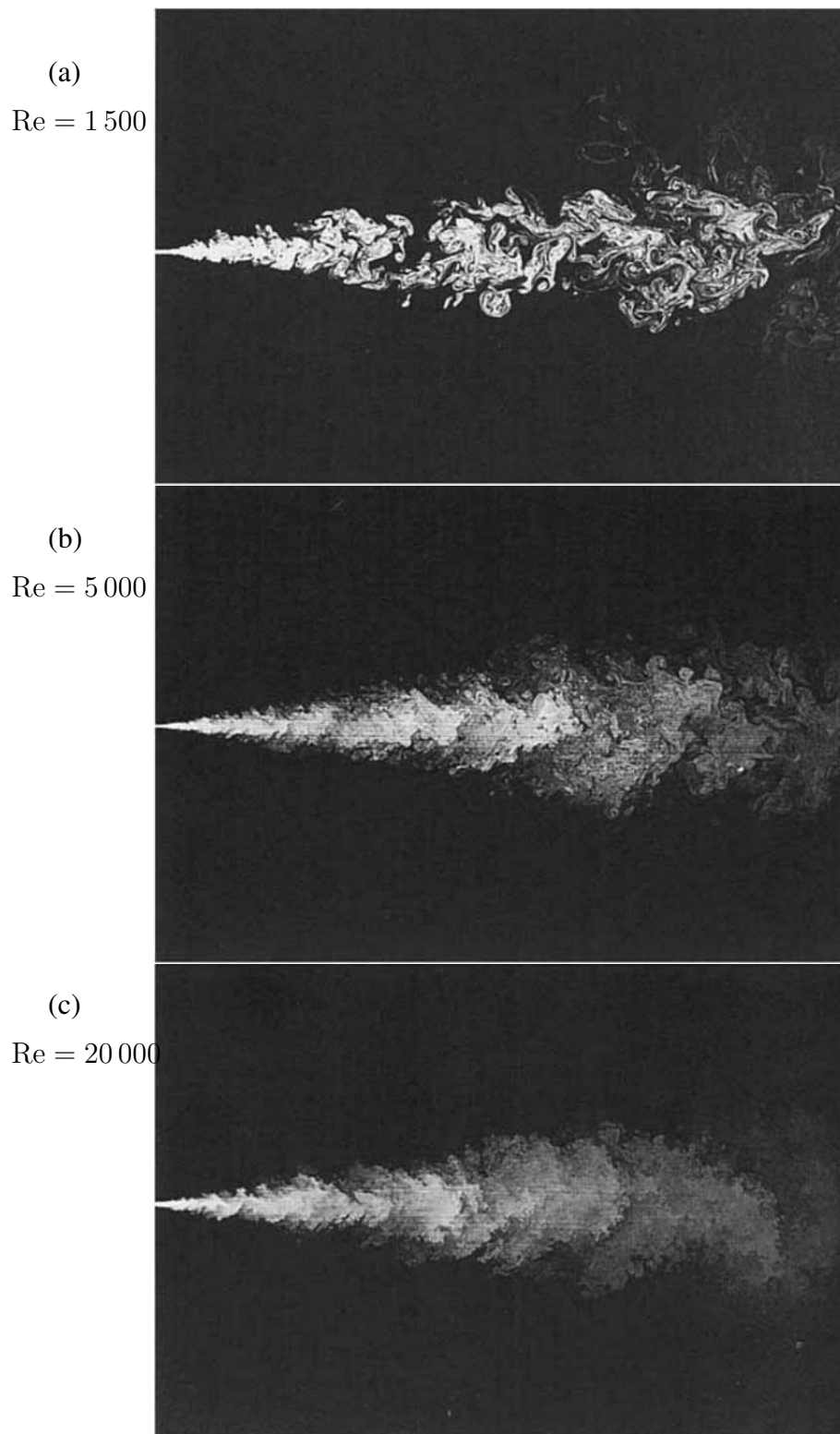


FIGURE 1.4 – Visualisation de jets expérimentaux (Dahm & Dimotakis [1990]) pour différents nombres de Reynolds : (a) $Re = 1\,500$, (b) $Re = 5\,000$ and (c) $Re = 20\,000$. Cette figure permet d’illustrer la création d’échelles de plus en plus petites lors de l’augmentation du nombre de Reynolds.

Comme le taux de dissipation ε est déterminé par les grandes échelles, on peut montrer qu'il est proportionnel à w_0^3/l_0 et ainsi retrouver par exemple l'équation (1.35). On note aussi qu'avec ces définitions, on obtient $Re_\eta = 1$, ce qui caractérise bien un régime où la viscosité et la dissipation jouent des rôles importants

- **2^{ème} hypothèse de similarité** : *Pour un nombre de Reynolds suffisamment grand, les statistiques des structures d'échelle de longueur l telle que $l_0 \gg l \gg l_\eta$, ont une forme universelle, uniquement définie par ε et indépendante de ν .*

Ainsi, ces trois hypothèses impliquent le fait que les structures de taille $l \ll l_0$ ont une forme universelle, avec essentiellement une zone de dissipation dont l'échelle de longueur caractéristique est l_η et une zone dite inertielle (car ce sont les effets d'inertie qui y sont prédominants) contenant les échelles de taille l telle que $l_0 \gg l \gg l_\eta$. Les échelles de taille l_0 appartiennent à une zone que l'on définira plutôt comme énergétique.

Une conséquence directe de la 2^{ème} hypothèse de similarité est de donner la forme, par une analyse dimensionnelle, du spectre d'énergie $E(\kappa)$ en turbulence homogène dans la zone inertielle. On obtient la fameuse loi en $-5/3$, obtenue par A. Obukhov¹¹ :

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (1.39)$$

où C_K est une constante universelle dite de Kolmogorov, telle que $C \approx 1.5$. La même évolution en fonction du nombre d'onde est attendue pour les spectres unidimensionnels et la preuve de la validité de l'hypothèse de Kolmogorov est donnée par la figure 1.3. Sur cette figure, on voit que pour des nombres de Reynolds très différents, les courbes se superposent une fois adimensionnées et une loi en puissance est clairement observée dans la zone inertielle ($\kappa_1 l_\eta > 10^{-1}$), et la pente de cette courbe tracée en échelles logarithmiques est $-5/3$. Les courbes qui suivent cette tendance sur plusieurs décades sont les expériences à hauts nombres de Reynolds, pour lesquelles la séparation des échelles est importante ($l_0 \gg l_\eta$). On note également une chute brutale dans la zone dissipative et il n'existe plus de structures telles que $\kappa_1 \ll l_\eta^{-1}$, c'est-à-dire des structures dont l'ordre de grandeur de longueur est inférieur à l'échelle de Kolmogorov l_η .

De manière équivalente, un résultat similaire peut-être obtenu dans l'espace physique en considérant les fonctions de structures eulériennes d'ordre 2, définies par :

$$D_{ij}^2(r, \mathbf{x}, t) = \overline{(u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{x}, t))(u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_j(\mathbf{x}, t))}. \quad (1.40)$$

Bien sûr, en turbulence homogène isotrope, la dépendance en \mathbf{x} est perdue et ce tenseur est isotrope. En considérant que dans la zone inertielle, ces fonctions ne peuvent dépendre que de r et ε , on peut montrer par analyse dimensionnelle que :

$$D_{ij}^2(r, t) = C' (\varepsilon r)^{2/3} \left(\frac{4}{3} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \frac{r_i r_j}{r^2} \right), \quad (1.41)$$

C' étant une constante universelle. Pour des fonctions de structures longitudinales (par exemple $D_{11}(r\mathbf{e}_1)$) la valeur de C' est $C' \approx 2$ (voir Saddoughi & Veeravalli [1994]), et $C' \approx 2.7$ pour des fonctions de structures transverses (par exemple $D_{22}(r\mathbf{e}_1)$). Cette loi est souvent appelée

11. Alexander M. Obukhov (1918-1989) fut un physicien russe qui effectua sa thèse sous la direction de A.N. Kolmogorov.

“loi en 2/3 de Kolmogorov”. Enfin, notons que ces hypothèses peuvent aussi donner l’évolution des fonctions de structure d’ordre 3, qui est la loi 4/5 de Kolmogorov :

$$D_{11}^3(r) = \overline{(u_1(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_1) - u_1(\mathbf{x}))^3} = -\frac{4}{5}\varepsilon r, \quad (1.42)$$

cette relation étant une nouvelle fois très bien vérifiée expérimentalement.

1.6 Aperçu lagrangien de la turbulence

Jusqu’à présent, nous n’avons considéré que la vision dite “eulérienne” d’un écoulement, ce qui implique que l’observateur regarde l’écoulement à une position fixée \mathbf{x} et voit les particules défiler à cette position au cours du temps t . Une autre approche consiste à se concentrer sur une particule fluide en particulier, située à une position initiale \mathbf{X}_0 , et suivre son évolution au cours du temps : c’est l’approche lagrangienne d’un écoulement¹². Ce type d’approche semble beaucoup plus naturel que l’approche eulérienne pour des problèmes relatifs au mélange ou encore à la dispersion de particules dans un écoulement turbulent.

On considère alors individuellement chaque particule, qui se trouve à une position \mathbf{X} telle que :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t). \quad (1.43)$$

La vitesse lagrangienne est alors, par définition :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(\mathbf{X}_0, t). \quad (1.44)$$

La relation entre le champ de vitesse lagrangien et le champ de vitesse eulérien est donnée par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}_0, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t), t). \quad (1.45)$$

Si l’on cherche à écrire les équations de Navier-Stokes (1.3) avec les variables de l’approche lagrangienne, il faut réaliser le passage entre les systèmes de coordonnées $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{X}_0, t)$. En ce qui concerne le terme de gauche, le passage en lagrangien est simple puisque ce terme représente l’accélération d’une particule fluide. Ainsi :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{X}_0, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2}(\mathbf{X}_0, t). \quad (1.46)$$

Néanmoins, si on cherche à transformer le terme de droite de l’équation (1.3) dans le jeu de variables lagrangiennes, il faut transformer les termes de gradient fonction de l’espace en gradient fonction de la position initiale \mathbf{X}_0 . Pour cela, on introduit le jacobien du changement de variable et la non-linéarité qui avait disparu du terme de gauche va réapparaître avec l’utilisation du jacobien (voir Monin & Yaglom [2007]¹³ pour une dérivation des équations plus approfondie). En utilisant la même notation que Monin & Yaglom [2007] :

$$\frac{\partial (X, Y, Z)}{\partial (X_0, Y_0, Z_0)} = [X, Y, Z], \quad (1.47)$$

12. Pour avoir une description plus globale du point de vue lagrangien d’un écoulement, on se référera à l’ouvrage de Bennett [2006] et à l’article de Yeung [2002] pour l’aspect turbulence lagrangienne.

13. Cet ouvrage est une réédition du texte russe publié en 1965 par Nauka Press, intitulé *Statisticheskaya gidromekhanika - Mekhanika Turbulentnosti*, écrit par A.S. Monin et A.M. Yaglom.

les équations dynamiques s'écrivent, pour le jeu de coordonnées lagrangiennes :

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2}(\mathbf{X}_0, t) = -\frac{1}{\rho} [X_j, X_k, p] + \nu \left\{ \left[X_2, X_3, \left[X_2, X_3, \frac{\partial X_i}{\partial t} \right] \right] + \left[X_3, X_1, \left[X_3, X_1, \frac{\partial X_i}{\partial t} \right] \right] + \left[X_1, X_2, \left[X_1, X_2, \frac{\partial X_i}{\partial t} \right] \right] \right\}, \quad (1.48)$$

où (i, j, k) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$. On voit alors clairement que les non-linéarités sont prises en compte dans le terme de droite et que les forces visqueuses, qui étaient linéaires en description eulérienne, font désormais apparaître des non-linéarités d'ordre 5. On comprend alors qu'il soit difficile d'obtenir plus de résultats analytiques issus des équations sous forme lagrangienne.

Néanmoins, la phénoménologie de Kolmogorov peut nous permettre d'obtenir quelques résultats intéressants en lagrangien. Par exemple, de la même manière que pour obtenir l'évolution des fonctions de structures eulériennes dans la zone inertielle, on peut déterminer l'évolution des fonctions de structures lagrangiennes d'ordre n , pour un écoulement à nombre de Reynolds suffisamment grand, en fonction de la dissipation ε et de l'incrément temporel τ tel que $\tau_0 \gg \tau \gg \tau_\eta$ (τ caractéristique de la zone inertielle) :

$$D_i^{L,n}(\tau) = \overline{(v_i(\mathbf{X}_0, t + \tau) - v_i(\mathbf{X}_0, t))^n} = C^{L,n} (\varepsilon \tau)^{n/2}. \quad (1.49)$$

Ainsi, on voit que les fonctions de structures lagrangiennes d'ordre 2 évoluent, dans la zone inertielle, linéairement avec l'incrément temporel τ .

Comme énoncé précédemment, une approche lagrangienne semble intuitivement être plus intéressante lors de la caractérisation de la dispersion de particules. On distingue alors deux quantités souvent étudiées :

- la dispersion à une particule (voir Taylor [1922]), c'est-à-dire la quantité :

$$\Delta_1(t) = \sqrt{\langle (\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t) - \mathbf{X}_0)^2 \rangle}, \quad (1.50)$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne sur l'ensemble des particules fluides. En THI, on observe typiquement une évolution balistique à temps court ($\Delta_1 \propto t$), jusqu'à un temps T_L dit lagrangien (voir Taylor [1922]), à partir duquel une évolution brownienne apparaît ($\Delta_1 \propto t^{1/2}$);

- la dispersion à deux particules (ou dispersion relative) permet de caractériser le mélange au sein d'un écoulement :

$$\Delta_2(t) = \sqrt{\langle (\mathbf{X}(\mathbf{X}_{01}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{X}_{02}, t))^2 \rangle}, \quad (1.51)$$

pour deux particules initialement voisines ($\Delta_2(0) = |\mathbf{X}_{01} - \mathbf{X}_{02}| \ll l_0$). Richardson [1926] introduisit cette notion de dispersion relative et montra que la quantité Δ_2^2 évolue proportionnellement à t^3 dans la zone inertielle. Obukhov [1941] précisa en donnant la loi dite de Richardson-Obukhov :

$$\Delta_2^2(t) = C'' \varepsilon t^3, \quad (1.52)$$

avec C'' une constante universelle.

1.7 Conclusions

Évidemment, l'introduction de notions faite dans ce chapitre n'est pas et ne pourrait être exhaustive. Ce chapitre a simplement pour dessein de donner un cadre très général et succinct de l'état de l'art en turbulence. L'essentiel de ce chapitre peut être approfondi par de nombreux livres dédiés à la turbulence, parmi lesquels on citera les excellents ouvrages de Batchelor [1953], Frisch [1995], Pope [2000], Davidson [2004] ou encore Sagaut & Cambon [2008] pour ne citer qu'eux.

2

Méthodes numériques

Dans ce chapitre, nous introduisons les principaux outils numériques utilisés dans le reste du manuscrit. La notion de simulation directe est abordée, entraînant les questions récurrentes de ressources informatiques et de temps de calcul. Le choix de la méthode pseudo-spectrale est expliqué et l'algorithme général est présenté. Enfin, la méthode de pénalisation volumique fait l'objet d'une dernière partie où sont discutés l'historique et les caractéristiques (physiques, numériques et techniques) de cette méthode récente.

This chapter aims at introducing the main numerical tools used throughout this report. The concept of direct simulation is presented, leading to the recurrent issues of computational resources. The choice of the pseudo-spectral method is explained and the general algorithm is presented. Finally, the volume penalization method is the subject of a last section where are discussed the history and the characteristics (physical, numerical and technical) of this recent method.

2.1 Simulations numériques directes (DNS)

2.1.1 Coût d'une simulation : ressources et temps

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, un écoulement turbulent contient une quantité d'échelles qui est d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est grand, c.-à-d. que l'écoulement est turbulent. Et c'est le principal problème auquel sont confrontés les mécaniciens des fluides lorsqu'ils cherchent à traiter le problème de la turbulence numériquement. En effet, pour que le problème physique soit bien résolu numériquement, il faut que le maillage soit suffisamment fin pour que les plus petites échelles spatiales (de longueur l_η) soient résolues (c'est-à-dire correctement décrites), ce qui implique $\Delta x < l_\eta$. De plus, la taille de la boîte de simulation doit être suffisamment grande pour que les tourbillons énergétiques soient

bien représentés : Pope [2000] propose par exemple une taille de boîte L huit fois supérieure à l'échelle intégrale l_0 pour s'affranchir d'effets de confinement numérique. Les simulations respectant ces deux conditions sont dites Simulations Numériques Directes (ou plus fréquemment *Direct Numerical Simulations* en anglais, abrégé *DNS*). Néanmoins, cela implique une très forte restriction sur le nombre de Reynolds que l'on peut atteindre à cause des limitations en ressources informatiques disponibles à l'heure actuelle. En effet, en prenant en compte les considérations énoncées ci-dessus, on peut montrer que la résolution (c'est-à-dire le nombre de points auxquels on cherchera à calculer le vecteur vitesse), pour un maillage uniforme, notée $N = L/\Delta x$, évolue avec le nombre de Reynolds suivant la loi :

$$N \propto \text{Re}_\lambda^{3/2}. \quad (2.1)$$

Enfin, il est évident que le pas de temps Δt utilisé lors d'une simulation numérique est d'autant plus petit que les structures existantes sont petites ($\tau_\eta \approx l_\eta^2 \nu^{-1}$), et donc le nombre d'itérations nécessaires augmente avec le nombre de Reynolds. Par exemple, en notant M le nombre d'itérations nécessaires pour simuler un temps de retournement de la turbulence tri-dimensionnelle, Pope [2000] estime l'évolution du nombre d'opérations avec le nombre de Reynolds par la relation :

$$N^3 M \propto \text{Re}_\lambda^6. \quad (2.2)$$

Enfin, le temps de simulation T_{CPU} est également proportionnel à $N^3 M$ et comme $M \propto N$, le temps de simulation est donc multiplié par 16 (2^4) lorsque la résolution est multipliée par 2.

$$T_{CPU} \propto N^4. \quad (2.3)$$

2.1.2 Méthode pseudo-spectrale

Outre les problèmes liés aux ressources nécessaires pour déterminer les paramètres d'un calcul en turbulence, on peut se poser la question relative à la façon de résoudre le problème numériquement. Parmi les méthodes de résolution des équations de Navier–Stokes, les plus courantes sont les suivantes :

- méthode des différences finies : on recherche une solution approchée des équations de Navier-Stokes en discrétisant les opérateurs différentiels à l'aide des séries de Taylor. La discrétisation spatiale est souvent choisie constante dans chaque direction, bien qu'un raffinement local soit faisable ;
- méthodes des volumes finis : on recherche une solution approchée en approximant des intégrales sur des volumes discrets, associée à une formulation conservative des équations sous forme de flux. Cette méthode a été développée pour garantir les lois de conservation et est bien adaptée aux maillages non-structurés ;
- méthodes des éléments finis : cette méthode consiste à rechercher la solution exacte d'une équation approchée de Navier-Stokes (formulation faible). C'est une approche variationnelle et c'est ce qui la distingue des approches précédentes. Cette méthode est particulièrement utilisée en mécanique des solides ;
- méthodes spectrales : on décompose les variables considérées sur de nouvelles bases (Fourier pour les fonctions périodiques ou polynômes orthogonaux — Chebyshev, Legendre, etc. — pour les fonctions non-périodiques) et on résout les équations associées dans ces nouveaux espaces.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le problème de la turbulence reste entier, tant dans la résolution du système d'équations (1.3) que dans la compréhension même du phénomène. Ainsi, il semble nécessaire de commencer à comprendre le cas académique de la turbulence homogène (voire de la turbulence homogène isotrope), avant de s'aventurer dans un système plus compliqué impliquant des effets de parois par exemple. C'est dans ce contexte qu'apparurent à la fin des années 1960 les simulations pseudo-spectrales en turbulence grâce notamment au travail de Steven A. Orszag (voir Orszag [1969], Patterson & Orszag [1971], Orszag & Patterson [1972]). On suppose alors un écoulement homogène (sans parois ou obstacle), avec des conditions aux limites périodiques. Ainsi, pour un domaine de calcul de taille L_i dans chaque direction i , on a :

$$\mathbf{u}(x_i + mL_i) = \mathbf{u}(x_i), \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

La fonction \mathbf{u} étant périodique, on peut alors décomposer ce champ dans la base de Fourier dans les trois directions et obtenir de manière discrète les coefficients (ou modes) de Fourier $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.5)$$

où les composantes du vecteur \mathbf{x} sont définies par, en utilisant la notation¹ $\Delta x_i = L_i/N_i$:

$$\forall j \in [1, N_i], \quad x_i = (j - 1) \Delta x_i. \quad (2.6)$$

Le vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ prend également des valeurs dépendant des dimensions de la boîte et de la discrétisation dans chaque direction N_i :

$$\forall j \in \left[-\frac{N_i}{2} + 1, \frac{N_i}{2} \right], \quad \kappa_i = \frac{2\pi}{L_i} j. \quad (2.7)$$

En turbulence homogène isotrope, la boîte est le plus souvent cubique et de taille $L = 2\pi$ afin que les nombres d'ondes soient entiers. On peut évidemment retrouver le champ de vitesse dans l'espace physique de manière discrète :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\kappa_x = -N_x/2+1}^{N_x/2} \sum_{\kappa_y = -N_y/2+1}^{N_y/2} \sum_{\kappa_z = -N_z/2+1}^{N_z/2} \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\kappa}, t) e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.8)$$

On remarque que la discrétisation spatiale est choisie homogène. Notons que le pas spatial Δx_i limite la taille des structures turbulentes que nous résolvons car nous n'utilisons pas de modèle de sous-maille. Ainsi, nous étudierons dans la suite des écoulements turbulents tels que les plus petites échelles, dont la taille est approximativement déterminée par le nombre de Reynolds et la taille des grandes échelles choisies (voir équation (1.35)), seront au moins deux fois plus grandes que le pas spatial.

Réécrivons maintenant notre système d'équations sous forme discrète. On utilise la décomposition suivante du terme non-linéaire :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.9)$$

1. Il n'y a pas de sommation sur l'indice i .

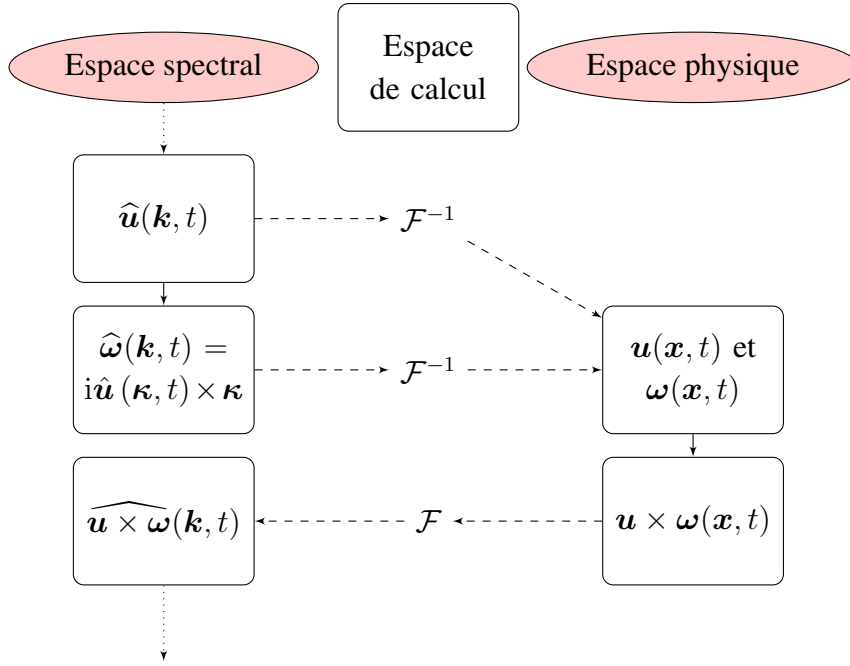


FIGURE 2.1 – Schéma représentant l’aller-retour dans l’espace physique pour le calcul du terme non-linéaire des équations de Navier–Stokes.

Cette décomposition permet de faire apparaître un terme de gradient d’énergie cinétique locale que l’on ajoutera à la pression, pour obtenir une pression modifiée $\Pi(\mathbf{x}, t) = p/\rho + \mathbf{u}^2/2$ et l’équation (1.3) se réécrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.10)$$

Ainsi, l’équation (1.26) devient :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu \kappa^2 \hat{u}_i = \mathcal{P}_{il} \epsilon_{lmn} \hat{u}_m * \hat{\omega}_n, \quad (2.11a)$$

$$= \mathcal{P}_{il} \epsilon_{lmn} \widehat{u_m \omega_n}, \quad (2.11b)$$

où ϵ est le symbole de Levi-Civita qui vaut 1 si (l, m, n) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$, -1 si elle est impaire et 0 si un indice est répété. L’équation (2.11a) montre donc que pour calculer l’évolution temporelle des modes de Fourier, il faut calculer un produit de convolution. Cela représente un coût de calcul important et Orszag [1969] proposa de retourner dans l’espace physique pour calculer le terme non-linéaire, c’est-à-dire utiliser l’équation (2.11b) plutôt que de calculer le produit de convolution de l’équation (2.11a). Cela explique que ces simulations soient dites pseudo-spectrales à cause de cet aller-retour dans l’espace physique, schématisé par la figure 2.1.

Néanmoins, cet aller-retour dans l’espace physique a un coût numérique considérable (6 transformées de Fourier discrètes (TFD) tri-dimensionnelles pour les 2 champs $(\mathbf{u}, \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})$ et 6 transformées inverses pour les vecteurs \mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$). Un algorithme classique de TFD 1D requiert $\mathcal{O}(N^2)$ opérations donc on imagine ce que peut représenter numériquement un tel aller-retour. Afin de diminuer le nombre d’opérations requises (et donc le temps de calcul), l’algorithme

constamment utilisé pour les méthodes pseudo-spectrales tri-périodiques est la transformation de Fourier rapide de Cooley & Tukey [1965] (*FFT* pour *Fast Fourier Transform*) qui permet de limiter le nombre d'opérations à $\mathcal{O}(N \log N)$ et qui est optimal pour des valeurs de $N = 2^\alpha$. Cependant, l'utilisation de cet algorithme impose un maillage régulier, défini par l'équation (2.6). L'algorithme que nous utilisons provient de la librairie JMFFT, écrite par Jean-Marie Teuler et disponible sur <http://www.idris.fr/data/publications/JMFFT/>. Il faut cependant être conscient que ce type d'algorithmes pseudo-spectraux pour le traitement du terme non-linéaire entraîne des phénomènes dits d'*aliasing*. Pour s'en affranchir, nous utilisons une méthode de troncature aux 2/3 (voir Patterson & Orszag [1971], Rogallo [1981] pour des explications détaillées).

Le terme visqueux est pour sa part traité implicitement grâce à un changement de variable $\hat{u}(\boldsymbol{\kappa}, t) \rightarrow \hat{u}(\boldsymbol{\kappa}, t) \exp(-\nu \kappa^2 t)$ ce qui permet de l'éliminer de l'équation (2.11b) lors du schéma d'avancement en temps. La prise en compte du terme visqueux revient donc à multiplier chaque mode par le facteur intégrant $\exp(-\nu \kappa^2 t)$ et l'avancement temporel revient à discrétiser temporellement l'équation suivante, en notant $\hat{S}_i = \epsilon_{imn} \widehat{u_m \omega_n}$ et $\hat{S}_i^\perp = \mathcal{P}_{il} \hat{S}_l$:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \hat{S}_i^\perp(\boldsymbol{\kappa}, t). \quad (2.12)$$

Sauf mention spécifique contraire, nous utiliserons dans ce manuscrit un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 3 avec pas de temps adaptatif. Le pas de temps est alors déterminé par l'utilisation d'un critère basé sur la plus grande valeur absolue des composantes de vitesse de notre champ à l'instant t^n . Ensuite, afin que chaque nœud respecte la condition de CFL ($u \Delta t^{n+1} / \Delta x \leq 1$), nous fixons un paramètre $C_{cfl} < 1$ et le pas de temps $\Delta t^{n+1} = t^{n+1} - t^n$ est alors donné par :

$$\Delta t^{n+1} = C_{cfl} \frac{\Delta x}{\max u_i}. \quad (2.13)$$

L'équation (2.12) devient alors, une fois discrétisée :

$$\hat{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t^{n+1}) = \hat{u}_i(\boldsymbol{\kappa}, t^n) + \beta_{22} \hat{S}_i^\perp(\boldsymbol{\kappa}, t^n) + \beta_{21} \hat{S}_i^\perp(\boldsymbol{\kappa}, t^{n-1}) + \beta_{20} \hat{S}_i^\perp(\boldsymbol{\kappa}, t^{n-2}), \quad (2.14)$$

où, n indiquant l'itération considérée, les coefficients β ont pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{22} = \frac{\Delta t^{n+1} (2(\Delta t^{n+1})^2 + 6\Delta t^{n+1} \Delta t^n + 3\Delta t^{n+1} \Delta t^{n-1} + 6(\Delta t^n)^2 + 6\Delta t^n \Delta t^{n-1})}{6\Delta t^n (\Delta t^n + \Delta t^{n-1})}, \\ \beta_{21} = \frac{-(\Delta t^{n+1})^2 (2\Delta t^{n+1} + 3\Delta t^n + 3\Delta t^{n-1})}{6\Delta t^n \Delta t^{n-1}}, \\ \beta_{20} = \frac{(\Delta t^{n+1})^2 (2\Delta t^{n+1} + 3\Delta t^n)}{6\Delta t^{n-1} (\Delta t^n + \Delta t^{n-1})}. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Si $\Delta t^{n+1} = \Delta t^n = \Delta t^{n-1} = \Delta t$, on retrouve bien les coefficients du schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 3 ($\beta_{22} = 23\Delta t/12$, $\beta_{21} = -4\Delta t/3$ et $\beta_{20} = 5\Delta t/12$).

La figure 2.2 représente de manière synthétique l'algorithme de notre code pseudo-spectral.

Les principaux atouts et inconvénients de la méthode pseudo-spectrale sont :

- ✦ le calcul de la dérivée est exacte (multiplication par $i\boldsymbol{\kappa}$) et c'est ce qui rend la méthode si précise ;

Algorithme pseudo-spectral

- Lecture des paramètres ;
- Initialisation du champ de vitesse $\hat{u}(\kappa, t = 0)$;
- Entrée dans la boucle principale ($n = 0$) ;
 1. Troncature aux 2/3 du champ $\hat{u}(\kappa, t)$;
 2. Calcul de la vorticité : $\hat{\omega}(\kappa, t) = -i\kappa \times \hat{u}$;
 3. Passage dans l'espace physique :

$$\left\{ \hat{u}(\kappa, t), \hat{\omega}(\kappa, t) \right\} \xrightarrow{FFT^{-1}} \left\{ u(x, t), \omega(x, t) \right\};$$

4. Calcul du terme non-linéaire : $S(x, t) = u \times \omega$;
5. Détermination du pas de temps : $\Delta t^{n+1} = C_{cfl} \frac{\Delta x}{\max u_i}$;
6. Retour dans l'espace spectral :

$$\left\{ u(x, t), \omega(x, t), S(x, t) \right\} \xrightarrow{FFT} \left\{ \hat{u}(\kappa, t), \hat{\omega}(\kappa, t), \hat{S}(\kappa, t) \right\};$$

7. Projection du terme non-linéaire : $\hat{S}^\perp = \mathcal{P}^\perp \hat{S}$;
8. Avancement temporel avec l'équation (2.12) ;
9. Prise en compte implicite du terme visqueux ;
10. Si $n < N_{it}$, alors :

$$\Rightarrow \begin{cases} n = n + 1 \\ t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+1}, \\ \text{Retour en 1.} \end{cases}$$

- Fin du calcul.
-
-

FIGURE 2.2 – Algorithme simplifié du code pseudo-spectral utilisé. N_{it} est le nombre d'itérations souhaitées. Les passages en bleu correspondent aux instants où les variables sont considérées dans l'espace physique.

- ✦ la précision est spectrale, ce qui signifie que l'erreur commise décroît exponentiellement avec la discrétisation N ;
- ✦ pour une précision équivalente, une simulation pseudo-spectrale requiert, la plupart du temps, moins de points de maillage (appelés points de collocation pour les méthodes spectrales) qu'une simulation utilisant une autre méthode (différences finies par exemple) ;
- les géométries que l'on peut considérer sont très limitées et dépendent des bases utilisées pour la décomposition du champ. La décomposition de Fourier que nous utilisons ne permet la prise en compte d'aucune paroi mais en utilisant des polynômes de Chebyshev, on peut considérer quelques géométries simples. Par exemple, un écoulement de type Taylor-Couette peut être traité avec une décomposition Chebyshev-Fourier-Fourier (radial-azimutal-axial) ou également un écoulement dans un canal plan ;
- un raffinement local n'est pas possible.

Notons que la quasi-majorité des simulations présentées dans ce manuscrit sont des simulations effectuées sur un ordinateur parallèle. Le code pseudo-spectral utilisé a été parallélisé par A. Delache (Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique²). La parallélisation est dite "en tranches" car le découpage du domaine numérique ne se fait que dans une seule direction et chacun des N_p processus traite indépendamment une tranche de taille $N_x \times N_y \times (N_z/N_p)$ dans l'espace spectral, et une tranche de taille $(N_x/N_p) \times N_y \times N_z$ dans l'espace physique. Ainsi, le nombre de processus est limité par la résolution suivant les directions x et z , le maximum de processus utilisables étant $N_p = \min(N_x/2; N_z/2)$. Le gain de temps est alors considérable car les transformées de Fourier uni-dimensionnelles sont traitées indépendamment par chaque processus. Le découpage "en tranches" impose malgré tout, lors des *FFT* 3D, des communications et échanges de données entre les processus. En effet, une transformée de Fourier dans une direction est calculable par un processus s'il connaît l'intégralité des données dans cette même direction. Ainsi, lorsqu'il s'agit de calculer la transformée de Fourier dans la direction du découpage, cela ne peut se faire sans échanges de données entre les différents processus. Il s'agit simplement de changer temporairement de direction pour le découpage. Cette étape est le seul inconvénient de la parallélisation, mais le coût de ces communications est suffisamment faible pour qu'il soit intéressant d'utiliser cette méthode de parallélisation. Le gain de temps est considérable et permet de rendre des simulations de résolution élevées réalisables. Nous ne détaillerons pas dans ce manuscrit les nombreux points de détails sur la parallélisation qui a été faite avec la librairie *MPI* (*Message Passing Interface*), utilisée avec le compilateur Fortran d'Intel (*ifort*).

Les calculateurs de calcul parallèle utilisés sont :

- Kepler : cluster SGI Altix UV 1000 de l'école centrale de Lyon (2 Tflops, 192 cœurs, 1 To de mémoire partagée, ...), hébergé par le LMFA ;
- Jade : cluster SGI Altix ICE 8200 du Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur (267 Tflops, 23040 cœurs, 91 To, ...).

2. LMFA, UMR CNRS 5509.

2.2 Méthode de pénalisation

2.2.1 Principe général et description

Comme précisé précédemment, la méthode pseudo-spectrale que nous utilisons ne permet pas la prise en compte de parois mais elle permet la simulation d'un écoulement périodique dans les trois directions de l'espace. D'une manière générale, même si l'imposition de conditions aux limites de parois solides dans la plupart des types de codes de simulation est possible, elle est souvent compliquée à mettre en œuvre (maillage raffiné près des parois, remaillage nécessaire si la paroi ou l'obstacle solide est en mouvement, etc). La question a ainsi été soulevée : comment peut-on prendre en compte la présence de solides dans un écoulement sans que cette présence nécessite une modification du maillage ? Peut-on imposer des conditions aux limites à l'intérieur du domaine de calcul ?

En 1972, une méthode dite de frontière immergée (*Immersed Boundary Method*³ abrégé *IBM*) a été développée par C.S. Peskin (voir Peskin [1972; 1977]) pour simuler l'écoulement sanguin dans un cœur humain. L'organe devait se comporter comme une paroi élastique se déformant en calculant les efforts de l'écoulement sur la paroi, et tout cela avec une méthode de différences finies sur un maillage cartésien ! En réalité, l'idée était simple mais très ingénieuse et consistait à déterminer l'expression d'une force $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ à ajouter aux équations de Navier–Stokes (1.3) afin que la vitesse du fluide à la paroi $\partial\mathcal{D}$ soit égale à la vitesse de la paroi (pénalisation de surface) :

$$\text{Trouver } \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \text{ tel que } \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.18)$$

Depuis, ce genre de méthode a été développé et diversifié suivant la manière dont est imposée cette force. Une expression couramment utilisée pour \mathbf{F} dans le cas de parois rigides a été proposée par Goldstein *et al.* [1993] :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \alpha \int_0^t \mathbf{u}(\tau) d\tau + \beta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (2.19)$$

où les coefficients α et β doivent être grands pour une bonne représentation de l'interface fluide/solide, ceci ayant l'inconvénient d'engendrer des problèmes numériques de stabilité.

Dans une autre méthode, qui peut être considérée comme le cas particulier $\alpha = 0$ et $\beta = -1/\eta$, développée et utilisée dans Arquis & Caltagirone [1984], Angot *et al.* [1999], on considère qu'un écoulement se développe dans un milieu poreux plutôt que solide (pénalisation en volume), et est donc ainsi gouverné par les équations dites de Navier–Stokes/Brinkmann (depuis Brinkman [1949]), dont la seule différence avec les équations de Navier–Stokes classiques est la présence d'un terme supplémentaire de la forme $\mathbf{F} = -\mathbf{u}/\eta$. η est une constante positive du matériau caractérisant sa perméabilité, et plus $\eta \rightarrow 0$ plus le milieu poreux est considéré imperméable, donc équivalent à une paroi solide. Ainsi, dans le milieu que l'on souhaite traiter comme solide, on ajoutera cette force avec une très faible valeur pour η et dans le domaine fluide on résoudra les équations de Navier–Stokes classiques de l'équation (1.3).

3. Cette classe de méthode fait l'objet d'un article de l'*Annual Review of Fluid Mechanics* : Mittal & Iaccarino [2005].

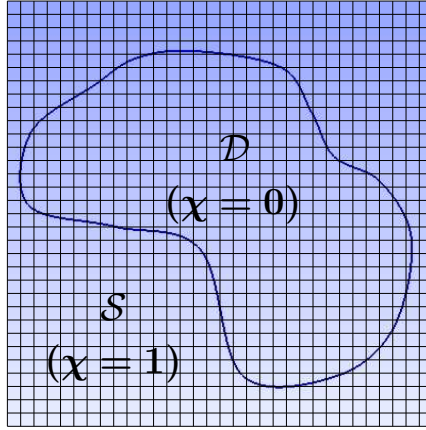


FIGURE 2.3 – Exemple de géométrie de domaine solide pénalisé.

La méthode décrite dans le paragraphe précédent est appelée méthode de pénalisation et l'expression de l'équation à résoudre dans la totalité du domaine de calcul $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$ est alors, \mathcal{D} définissant le milieu fluide et \mathcal{S} le milieu solide :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\eta} \chi(\mathbf{x}, t) \left[\mathbf{u} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) \right], \quad (2.20)$$

où $\chi(\mathbf{x}, t)$ est une fonction déterminant la géométrie du domaine solide \mathcal{S} appelée fonction masque. Elle est définie par :

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{D}(t), \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{S}(t). \end{cases} \quad (2.21)$$

La figure 2.3 donne un exemple, en 2D par soucis de clarté, de découpage du domaine numérique. Un maillage cartésien est représenté et on peut voir que l'interface $\partial \mathcal{S}$ entre le domaine fluide et le domaine pénalisé n'a pas besoin de se confondre au maillage. Ici, l'écoulement est confiné par le domaine solide \mathcal{S} , mais la création d'obstacles pénalisés est tout à fait réalisable. Outre l'ingéniosité et la simplicité de cette méthode, il faut noter qu'il a été démontré analytiquement (Angot *et al.* [1999]) que le système d'équations (2.20) converge vers les équations de Navier–Stokes avec des conditions aux limites de non-glissement, lorsque la valeur de η tend vers 0.

Dans l'espace spectral, l'équation pénalisée (2.20) devient :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nu \kappa^2 \hat{\mathbf{u}} = \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \left\{ \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\eta} \chi(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \right\}, \quad (2.22)$$

où le terme de pression $\hat{\Pi}$ a été éliminé grâce à l'équation de continuité, de manière identique à l'obtention de l'équation (1.27). L'expression de la pression totale $\hat{\Pi}$ dans l'espace spectral est alors :

$$\hat{\Pi} = -i \frac{\kappa_l}{\kappa^2} \mathcal{F} \left\{ \epsilon_{ljk} u_j \omega_k - \frac{1}{\eta} \chi(u_l - u_{s,l}) \right\}. \quad (2.23)$$

On peut donc voir que le terme de pénalisation agit sur la pression, qui doit supprimer les termes compressibles créés par le produit $\chi(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)$.

2.2.2 Prise en compte du mouvement du domaine solide \mathcal{S}

Le domaine solide est défini par $\mathcal{S}(t)$ et peut être rendu mobile en modifiant au cours de la simulation la fonction masque χ , assortie d'une vitesse locale pour les points du domaine solide \mathbf{u}_s (voir équation précédente (2.20)). Dans tout le manuscrit, nous ne considérerons que des obstacles ou parois indéformables, de sorte qu'en définissant la rotation (différentes vitesses de rotation $\Omega_s(t) = \dot{\alpha}_s(t)$ et axes de rotation associés) et la vitesse de translation $\mathbf{V}_s(t) = \dot{\mathbf{x}}_s$ d'un point du solide, on peut définir le mouvement complet du solide⁴. Les écoulements traités dans ce travail de thèse n'impliqueront que des rotations par rapport à l'axe vertical passant par le centre de gravité du solide et le point choisi pour définir la vitesse de translation sera le centre de gravité du solide. Ainsi, si $\mathbf{x}_g(t)$ est la position du centre de gravité au cours du temps, $\alpha(t)$ la position angulaire relative à la position initiale et $\Omega_s(t)$ le taux de rotation autour de l'axe vertical passant par $\mathbf{x}_g(t)$, les points du domaine solide $\mathcal{S}(t)$ ont les vitesses instantanées suivantes :

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u_{xs}(\mathbf{x}, t) = V_{xs}(t) - \Omega_s(t)(y - y_g(t)) \\ u_{ys}(\mathbf{x}, t) = V_{ys}(t) + \Omega_s(t)(x - x_g(t)) \\ u_{zs}(\mathbf{x}, t) = V_{zs}(t) \end{cases}, \quad (2.24)$$

et si \mathbf{x}_{s0} est la position initiale d'un point du domaine solide ($\mathbf{x}_{s0} \in \mathcal{S}(0)$) et en posant $\Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{s0} - \mathbf{x}_g(0)$, chacun des points du solide se déplace de sorte que :

$$\mathbf{x}_s(t) = \begin{cases} x_s(t) = x_g(t) + \Delta x_0(1 + \cos \alpha(t)) + \Delta y_0 \sin \alpha(t) \\ y_s(t) = y_g(t) - \Delta x_0 \sin \alpha(t) + \Delta y_0(1 + \cos \alpha(t)) \\ z_s(t) = z_g(t) + \Delta z_0 \end{cases}. \quad (2.25)$$

Ainsi, à partir d'une fonction masque à l'instant initial, en définissant une vitesse de rotation et de translation, on peut déterminer la distribution de cette même fonction masque à l'instant t . On distingue deux méthodes pour réaliser cette étape, une explication et une description exhaustive de ces méthodes ayant fait l'objet du travail de thèse de Dmitry Kolomenskiy (voir Kolomenskiy & Schneider [2009], Kolomenskiy [2010]) :

- en utilisant une discrétisation du masque dans l'espace physique. Ainsi, à chaque pas de temps, on décale le masque d'un certain nombre de nœuds. Pour un déplacement dans l'espace physique de δx du masque par rapport au masque initial, on a :

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \chi(\mathbf{x}, 0)(x - \delta x). \quad (2.26)$$

Néanmoins, malgré le fait que cette approche soit directe, elle entraîne la création de fortes oscillations numériques (voir Kolomenskiy & Schneider [2009]) ;

- une méthode alternative (celle que nous utilisons dans ce manuscrit) utilise la discrétisation du masque dans l'espace spectral. En effet, le même déplacement dans l'espace spectral s'écrit :

$$\hat{\chi}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \hat{\chi}(\boldsymbol{\kappa}, 0) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\delta\mathbf{x}}. \quad (2.27)$$

Ainsi, on peut déplacer le masque par un incrément δx aussi petit que souhaité car nous ne sommes plus limités par la discrétisation spatiale, ce qui a pour effet de grandement diminuer les oscillations observées lors d'une discrétisation du masque dans l'espace

4. La notation \dot{a} indique la dérivation temporelle : $\frac{\partial a}{\partial t} = \dot{a}$.

physique. Comme la rotation peut également se décomposer en trois translations (voir Unser *et al.* [1995]), elle peut donc être prise en compte avec cette méthode (voir Kolomenskiy & Schneider [2009] pour plus de détails sur l'algorithme à utiliser).

Évidemment, le déplacement dans l'espace spectral nécessite un aller-retour supplémentaire dans l'espace de Fourier pour la fonction masque car le terme de pénalisation implique le produit de la vitesse par la fonction masque. Utiliser la fonction masque directement dans l'espace spectral impliquerait donc un produit de convolution, ce que nous cherchons à éviter par l'utilisation de méthodes pseudo-spectrales.

Pour conclure, notons que la méthode décrite ci-dessus ne prend en compte qu'un seul masque, mais peut être étendue à plusieurs masques, certains étant mobiles et d'autres restant fixes, comme utilisée dans la section 5. Le terme de pénalisation deviendra alors pour N domaines solides avec N fonctions masques dénotées $\chi^{(n)}$, $n = 1 \dots N$:

$$-\frac{1}{\eta}\chi(\mathbf{x}, t)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \implies -\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^N \chi^{(j)}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s^{(j)}). \quad (2.28)$$

Comme les parois solides ici considérées sont indéformables, on définira le minimum de fonctions masques possibles ce qui impliquera $\bigcap_{j=1}^n \chi^{(j)} = \emptyset$, afin de minimiser le nombre de *FFTs* additionnelles dues aux déplacements des différentes fonctions masques.

2.2.3 Lissage de la fonction masque

La méthode de pénalisation, de par sa formulation, est intrinsèquement sujette à la création d'oscillations numériques. En effet, nous cherchons, de manière discrète et sur un nombre de modes fini, à représenter une fonction discontinue en une somme de fonctions sinusoïdales. Le phénomène alors observé, très bien connu des numériciens, est le phénomène de Gibbs. Ce phénomène consiste en l'observation d'oscillations de plus ou moins grande amplitude au voisinage de la discontinuité que l'on cherche à décrire dans la base de Fourier. Afin de limiter ces phénomènes purement numériques et altérant la qualité de la solution, deux méthodes peuvent être utilisées : la première consiste simplement en l'augmentation du nombre de modes, ce qui a pour effet non pas de supprimer les oscillations mais de diminuer leur étendue spatiale jusqu'à ce que celle-ci devienne suffisamment faible pour être acceptable. Or, comme nous l'avons dit précédemment, le nombre de modes de Fourier n'est pas vraiment une variable ajustable à la demande pour des raisons de coût et de temps de calcul. À l'heure actuelle, les plus grosses simulations pseudo-spectrales effectuées contiennent $N^3 = 4096^3$ modes de Fourier (voir Kaneda & Ishihara [2006]). Or, même pour des discrétisations de cette ampleur, les effets de Gibbs resteraient non-négligeables. La deuxième solution pour diminuer de façon suffisante ces phénomènes oscillatoires est de supprimer la cause de ces oscillations, qui est la discontinuité de la fonction. En effet, en "lissant" la fonction masque, c'est-à-dire en évitant un passage brusque de la fonction masque de 0 à 1, on diminue les oscillations numériques d'autant plus que la zone de transition est grande (en terme de points de collocation). Un moyen de lisser la fonction masque est donné par Kolomenskiy & Schneider [2009] et se résume en la convolution de cette dernière par un filtre gaussien, ce qui revient, dans l'espace spectral, à effectuer l'opération

suivante :

$$\hat{\chi}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \hat{\chi}(\boldsymbol{\kappa}, t) \exp \left[-C_s \left(\frac{\kappa_x^2}{N_x^2} + \frac{\kappa_y^2}{N_y^2} + \frac{\kappa_z^2}{N_z^2} \right) \right]. \quad (2.29)$$

Nous montrerons que cette méthode (voir section 3.2.4), bien que réduisant drastiquement les oscillations que l'on peut observer sans lissage, rend la solution physique localement moins précise, ou du moins ne représente pas à l'endroit souhaité une condition de non-glissement.

L'équation (2.29) montre qu'il existe un paramètre ajustable C_s qui déterminera la largeur de la zone de transition. Afin de valider cette méthode et d'observer l'influence de ce paramètre, nous proposons ici de regarder précisément l'impact de l'introduction d'un tel forçage sur un modèle 1D. La fonction masque que nous allons lisser est une fonction "porte" qui a pour définition initiale :

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0; 1[\cup]2; 2\pi[, \\ 1 & \text{si } x \in [1; 2] . \end{cases} \quad (2.30)$$

La figure 2.4 montre, pour différentes discrétisations de l'espace $[0; 2\pi[$, l'impact de la modification du paramètre de lissage C_s . En effet, pour trois discrétisations différentes ($N = 128; 512; 2048$), nous traçons les fonctions lissées pour des valeurs telles que le rapport C_s/N est identique entre les différentes résolutions et varie de 0 (aucun lissage appliqué) à 1 ($C_s = N$). Cela permet de voir l'importance du paramètre de lissage mais également celle du nombre de modes N utilisés. On note tout d'abord que le lissage, quand il est appliqué avec une faible résolution N , modifie considérablement l'allure de la fonction χ . Il faut donc trouver un compromis entre la diminution des oscillations obtenues avec une fonction discontinue (augmenter la valeur de C_s) et les dimensions désirées du domaine solide, la géométrie idéale étant telle que $C_s = 0$.

Cependant, un autre effet de cette méthode de lissage, qui n'avait pas été mentionné dans les différentes communications de Kolomenskiy *et al.*, est qu'une faible valeur de C_s introduit des oscillations dans l'intégralité du domaine fluide (voir l'insert inférieur de la figure 2.4). Par exemple, si nous calculons la variance de la fonction χ , une fois lissée, moyennée sur une grande partie du domaine fluide ($x \geq 3$) non voisine de la paroi, en fonction de la valeur de C_s et pour les différentes valeurs N du nombre de modes de Fourier utilisés, on observe des erreurs non-négligeables pour les faibles valeurs de C_s . La figure 2.5 montre l'évolution de ϵ , défini par :

$$\epsilon = \sqrt{\langle \chi^2 \rangle_{x \geq 3}} \quad (2.31)$$

Évidemment, un comportement correct est obtenu si la valeur de ϵ est nulle, à la précision machine près ($\approx 10^{-16}$). Tout d'abord, on peut noter que l'augmentation du nombre de modes de Fourier utilisés diminue l'ordre de grandeur de l'amplitude des oscillations numériques. Néanmoins, aucune des résolutions utilisées ne permet de voir disparaître ces oscillations pour toutes les valeurs de C_s possibles. En effet, pour s'affranchir des erreurs induites par le lissage, on observe sur la figure 2.5 qu'une valeur minimum pour C_s est requise. Cette valeur est $C_{s, \text{seuil}} \approx 128$ pour les résolutions telles que $N \leq 1024$ et semble diminuer pour de plus grandes discrétisations. Pour des lissages impliquant de grandes valeurs de C_s , on retrouve une erreur de type précision machine. Il faut donc, dans le compromis que nous avons à faire sur la valeur de C_s , prendre également en compte ce dernier argument impliquant nécessairement une valeur du paramètre de lissage telle que $C_s > 128$. Il est à noter que des résultats équivalents

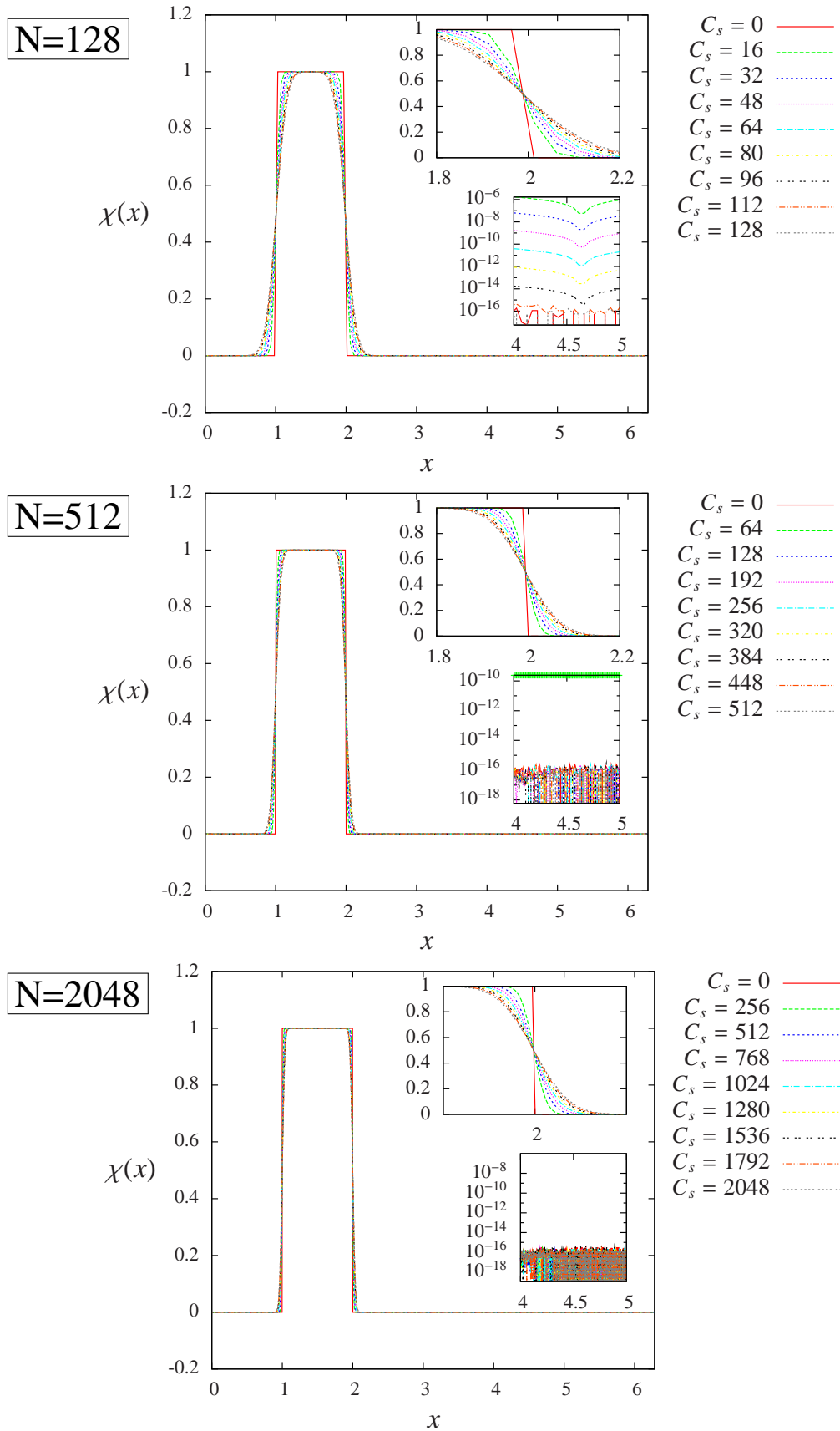


FIGURE 2.4 – Influence du paramètre de lissage sur la fonction masque, pour différentes discrétisations du domaine : (a) $N = 128$; (b) $N = 512$ et (c) $N = 2048$. L’insert supérieur montre un zoom dans la zone de transition et l’insert inférieur montre $|\chi|$ dans le domaine fluide loin de la paroi pour mettre en avant l’existence d’oscillations dans cette zone, suivant la valeur de C_s .

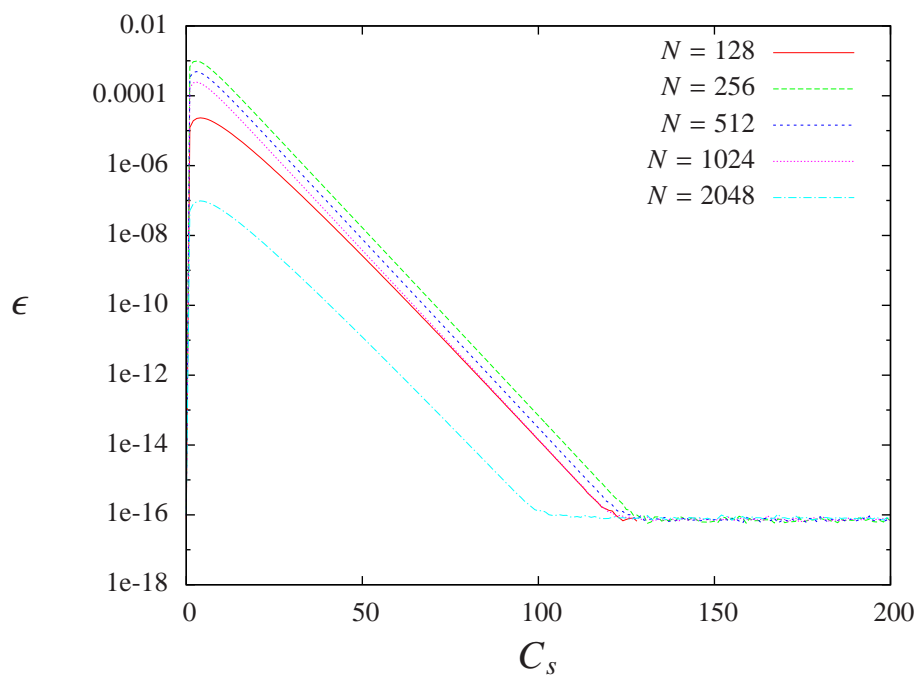


FIGURE 2.5 – Amplitude des oscillations dans le domaine fluide, loin de la discontinuité, en fonction du paramètre de lissage C_s et pour les différentes résolutions testées.

ont été obtenus en augmentant la taille du domaine solide ($\chi = 1$) ou en ajoutant une deuxième partie solide dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

2.3 Conclusions

Ce chapitre nous a permis d'introduire les différentes méthodes numériques utilisées dans le reste du manuscrit. Bien évidemment, la description faite ici du code pseudo-spectral est rapide mais permet d'expliquer clairement le principe de base de la méthode. On pourra se référer à Canuto *et al.* [1987] pour plus de détails sur les méthodes spectrales en mécanique des fluides.

La méthode de pénalisation a également été décrite ainsi que les possibilités qu'une telle technique offre pour la simulation d'écoulements à géométries complexes et variées. Quelques précautions sur l'utilisation et les limitations de cette dernière ont été données et le prochain chapitre est consacré aux tests de validation que nous avons effectués.

3

Implémentation et validation numérique de la méthode de pénalisation ¹

Ce chapitre présente les résultats de validation de la méthode numérique. Tout d'abord, une implémentation implicite du terme de pénalisation est introduite et étudiée. Cette prise en compte du terme de pénalisation permet de supprimer complètement le problème de stabilité inhérent à la méthode de pénalisation et nous montrons que cela revient à considérer un paramètre de pénalisation effectif $\eta_{\text{eff}} \lesssim \Delta t$. Cette implémentation est validée par des benchmarks de réflexion d'ondes (d'inertie dans le cas d'effets de rotation et internes de gravité quand le fluide considéré est stablement stratifié) ainsi que par le test classique de l'impact d'un anneau de vorticité sur une paroi plane.

This chapter presents the validation results of the numerical method. First, an implicit implementation of the penalization term is introduced and studied. This way to take into account the penalization term allows to get rid of the stability problem due to the penalization method itself and we show that the implementation turns out to be equivalent to considering an effective penalization parameter $\eta_{\text{eff}} \lesssim \Delta t$. The method is validated thanks to benchmarks of waves reflections (inertial waves in the case a background rotation is considered and internal gravity waves when the fluid is stably stratified) and of impacts of vortical structures (vortex rings) on flat planes.

1. Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article paru dans le journal *Computers & Fluids* :
C. JAUSE-LABERT, F.S. GODEFERD & B. FAVIER
Numerical validation of the volume penalization method in three-dimensional pseudo-spectral simulations
Computers & Fluids, **67**, 2012.

3.1 Implémentation du terme de pénalisation

3.1.1 Schéma explicite

Comme expliqué précédemment, dans un code pseudo-spectral classique, le terme non-linéaire $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ de l'équation (2.10) est calculé dans l'espace physique avant d'être transformé dans l'espace spectral et projeté sur le plan normal à $\boldsymbol{\kappa}$ pour assurer l'incompressibilité. La façon la plus simple et la plus directe d'implémenter le terme de pénalisation est de profiter de cette étape dans l'espace physique pour ajouter le terme de pénalisation au terme non-linéaire avant sa transformation dans l'espace de Fourier. En procédant ainsi, des artefacts numériques de type *aliasing* peuvent apparaître dans le terme de pénalisation, mais ils seront supprimés grâce à la troncature aux $2/3$ évoquée au chapitre précédent.

L'avancement en temps est alors explicite car le terme de pénalisation est calculé, dans le cadre d'un schéma d'ordre 3, aux instants t^n , t^{n-1} et t^{n-2} pour déterminer le champ de vitesse à l'instant t^{n+1} . Néanmoins, le prix à payer pour cette facilité d'implémentation dans le code pseudo-spectral est une condition de stabilité restrictive sur la valeur du pas de temps de l'avancement Δt^{n+1} , en plus de la condition CFL :

$$\Delta t^{n+1} \leq \frac{6}{11} \eta, \quad (3.1)$$

la facteur $6/11$ étant dû à l'utilisation d'un schéma d'ordre 3.

En pratique, la méthode est alors utilisée avec des valeurs de η raisonnablement faibles pour permettre un avancement de la simulation raisonnable (voir les utilisations dans des écoulements bi-dimensionnels Kolomenskiy & Schneider [2009], Kadoch *et al.* [2008], Schneider & Farge [2007], Kevlahan & Ghidaglia [2001], Pasquetti *et al.* [2008]). Typiquement, la valeur choisie pour la perméabilité est de l'ordre de $\eta = 10^{-3}$, imposant un pas de temps $\Delta t^{n+1} \leq 5 \times 10^{-4}$. Ainsi, le paramètre η doit être ajusté afin de prendre en compte le mieux possible les contraintes suivantes :

- la condition de non-glissement doit être correctement représentée et cela impose de choisir η le plus petit possible, car il a été analytiquement démontré que l'erreur commise dans le domaine fluide par la méthode est proportionnelle à $\eta^{1/2}$ (voir Carbou & Fabrie [2003]) ;
- cependant, pour des calculs instationnaires (les écoulements turbulents sont par définition instationnaires), le pas de temps ne doit pas être trop petit si l'on souhaite observer le développement de l'écoulement sur un temps conséquent, d'autant plus pour des simulations tri-dimensionnelles.

Enfin, on doit garder à l'esprit que la discrétisation limite également la précision de la représentation spatiale du fluide à proximité de la paroi, d'autant plus dans le contexte présent d'un maillage cartésien uniforme. Ce problème n'est pas négligeable pour des simulations tri-dimensionnelles, où le maillage ne peut être aussi fin que pour des calculs de turbulence 2D. Enfin, la représentation de géométries solides complexes requiert un minimum de points de maillage dans le domaine solide et l'épaisseur des domaines solides ne peut donc pas être négligée et implique souvent qu'une partie non négligeable du domaine de calcul soit dédiée à la résolution d'un écoulement de Stokes dans la partie solide.

La limite de stabilité donnée par l'équation (3.1) est contournée grâce à une implémentation originale implicite du terme de pénalisation, expliquée dans la section suivante. Avec ce nouveau schéma, la technique de pénalisation n'introduit plus de limite sur le pas de temps autre que celle due au terme d'advection et η peut alors être choisi aussi proche de 0 que souhaité.

3.1.2 Traitement implicite du terme de pénalisation

En turbulence 2D, comme mentionné précédemment, le problème de stabilité issu du schéma explicite a été résolu par Keetels *et al.* [2007] en utilisant une technique qui ne peut être étendue au cas tri-dimensionnel. Dans les deux cas, une implication directe du terme de pénalisation entraîne un système d'équations qui peut être traité par des méthodes dites de Krylov (Kolomenskiy & Schneider [2009]), mais leur implémentation nécessite un effort conséquent. Une autre solution en 3D a récemment été proposée par Kolomenskiy & Schneider [2009] pour l'équation de Burger, équation similaire aux équations de Navier–Stokes à la différence près que cette équation ne fait pas apparaître de terme de pression.

Par soucis de clarté, nous décrivons ci-après un traitement implicite du terme de pénalisation basé sur une discrétisation temporelle du premier ordre avec un pas de temps fixé Δt , bien qu'il puisse être aisément étendu à des ordres plus importants (dont la discrétisation d'Adams-Bashforth d'ordre 3 utilisée dans notre code). En utilisant l'exposant n pour caractériser l'instant auquel la variable est évaluée, c'est-à-dire $u^n / \text{approx}(t^n)$, le schéma implicite pour l'équation de Burger proposé par Kolomenskiy & Schneider [2009] est :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\mathbf{u}^n + \Delta t \left[\mathcal{F}^{-1} \left\{ \widehat{\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}^n} \right\} + \frac{1}{\eta} \chi^{n+1} \mathbf{u}_s^{n+1} \right]}{1 + \frac{\Delta t}{\eta} \chi^{n+1}} \right\}. \quad (3.2)$$

Comme l'équation (3.2) concerne l'équation de Burger, aucune projection assurant l'incompressibilité n'apparaît. Une première correction de ce schéma pour l'adapter aux équations de Navier–Stokes serait de projeter le terme non-linéaire sur un plan orthogonal au vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ associé pour supprimer sa partie compressible. Cependant, cela n'est pas suffisant pour prendre correctement en compte la redistribution de pression, car l'équation (2.23) montre que le terme de pénalisation agit également sur le champ de pression, le champ $\widehat{\chi \mathbf{u}}$ n'étant pas incompressible.

En prenant ces considérations en compte et en posant $\hat{\mathbf{S}}^{\perp, n} = \mathcal{P}^{\perp} \mathcal{F} \{ \mathbf{u}^n \times \boldsymbol{\omega}^n \}$, une formulation implicite directe des équations pénalisées tri-dimensionnelles peut être donnée par :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\eta} \mathcal{P}^{\perp} \left\{ \sum_{\boldsymbol{\kappa}'} \hat{\chi}^{n+1}(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') (\hat{\mathbf{u}}^{n+1}(\boldsymbol{\kappa}') - \hat{\mathbf{u}}_s^{n+1}(\boldsymbol{\kappa}')) \right\} = \hat{\mathbf{u}}^n - \Delta t \hat{\mathbf{S}}^{\perp, n} \quad (3.3)$$

et implique la résolution d'un grand système linéaire incluant un produit de convolution et dont la résolution requiert l'inversion d'une matrice de dimension N^2 pour chaque composante de vitesse. Résoudre ce système d'équations ne peut pas être envisagé étant donné le coût en ressources et en temps que cela nécessiterait.

Nous proposons alors ici une formulation originale de traitement implicite du terme de pénalisation, en décomposant le schéma d'avancement temporel en trois étapes. Tout d'abord,

on applique un premier schéma d'avancement temporel des équations de Navier–Stokes incompressibles sans pénalisation. On note \mathbf{u}_t le champ de vitesse intermédiaire à la fin de cette première étape. Ensuite, un schéma implicite du premier ordre du terme de pénalisation est appliqué à ce champ intermédiaire :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\mathcal{F}^{-1} \{ \hat{\mathbf{u}}_t \} + \frac{\Delta t}{\eta} \chi^{n+1} \mathbf{u}_s^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\eta} \chi^{n+1}} \right\}. \quad (3.4)$$

Ainsi, afin d'éviter l'inversion d'une matrice de dimension importante due au produit de convolution du terme de pénalisation de l'équation (3.3), on introduit un aller-retour additionnel dans l'espace de Fourier comme le montre l'équation (3.4). À la fin de cette étape, le champ de vitesse obtenu ne prend pas en compte les termes compressibles introduits par le terme de pénalisation. On effectue donc une dernière étape qui consiste en une projection orthogonale du champ obtenu pour assurer la condition d'incompressibilité. L'incompressibilité doit être considérée ainsi parce que l'opérateur inverse de la projection n'est pas unique.

En associant toutes ces étapes, l'équation suivante donne le schéma d'avancement temporel global :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \left\{ \frac{\mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{u}}^n - \Delta t \hat{\mathcal{S}}^{\perp, n} \right\} + \frac{\Delta t}{\eta} \chi^{n+1} \mathbf{u}_s^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\eta} \chi^{n+1}} \right\}. \quad (3.5)$$

Ce schéma est écrit ici à l'ordre 1 pour une meilleure compréhension du *splitting* de l'opérateur effectué. Cependant, l'algorithme de nos simulations utilise un schéma adaptatif d'ordre 3, l'expression complète étant :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \left\{ \frac{\mathcal{F}^{-1} \left[\hat{\mathbf{u}}^n \exp(-\nu \kappa^2 \Delta t^{n+1}) + \hat{\mathcal{Q}}^n \right] + \frac{\Delta t^{n+1}}{\eta} \chi^{n+1} \mathbf{u}_s^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t^{n+1}}{\eta} \chi^{n+1}} \right\} \quad (3.6)$$

avec les contributions des termes non-linéaires aux trois pas de temps :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}}^n \equiv \hat{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{\kappa}, t^n) &= \beta_{22} \hat{\mathcal{S}}^\perp(\boldsymbol{\kappa}, t^n) \exp(-\nu \kappa^2 \Delta t^{n+1}) \\ &+ \beta_{21} \hat{\mathcal{S}}^\perp(\boldsymbol{\kappa}, t^{n-1}) \exp(-\nu \kappa^2 (\Delta t^{n+1} + \Delta t^n)) \\ &+ \beta_{20} \hat{\mathcal{S}}^\perp(\boldsymbol{\kappa}, t^{n-2}) \exp(-\nu \kappa^2 (\Delta t^{n+1} + \Delta t^n + \Delta t^{n-1})), \end{aligned} \quad (3.7)$$

où les coefficients β_{2i} sont définis par les équations (2.15), (2.16) et (2.17) et en utilisant la notation :

$$\hat{\mathcal{S}}^\perp(\boldsymbol{\kappa}, t^n) = \mathcal{P}^\perp \hat{\mathcal{S}}^n = \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \{ \mathbf{u}^n \times \boldsymbol{\omega}^n \}. \quad (3.8)$$

Le schéma d'avancement en temps est donc une combinaison d'un schéma d'ordre 3 pour le terme non-linéaire et un schéma d'ordre 1 pour le terme de pénalisation. L'ordre en temps du schéma global reste donc à déterminer.

3.1.3 Comportement du schéma implicite : développement d'un écoulement dans un cylindre tournant

Afin de valider le comportement de notre schéma implicite, nous allons comparer les résultats obtenus avec ce dernier pour un écoulement pour lequel existe une solution analytique.

Simulation	N^2	Δt	Ω	η	Implémentation
$E2$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-2}	Explicite
$E3$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-3}	Explicite
$E4$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-4}	Explicite
$E5$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-5}	Explicite
$I2$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-2}	Implicite
$I3$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-3}	Implicite
$I4$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-4}	Implicite
$I5$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-5}	Implicite
$I6$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-6}	Implicite
$I7$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-7}	Implicite
$I8$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-8}	Implicite
$I9$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-9}	Implicite
$I10$	2048^2	5×10^{-6}	π	10^{-10}	Implicite

TABLE 3.1 – Paramètres principaux des simulations de l’écoulement d’un cylindre en rotation.

L’écoulement choisi est l’écoulement bi-dimensionnel créé à l’intérieur d’un cylindre par la rotation soudaine de la paroi de ce dernier à une vitesse angulaire Ω autour de son axe de symétrie. En effet, pour un écoulement initialement au repos dans un cylindre de rayon R mis en rotation à l’instant $t = 0$, Batchelor (voir Batchelor [1967], p.204) donne l’évolution temporelle du profil radial de vitesse azimutale u_θ de l’écoulement ainsi généré :

$$u_\theta(r, t) = \Omega r + 2\Omega R \sum_{n=1}^{N_b \rightarrow \infty} \frac{J_1\left(\lambda_n \frac{r}{R}\right)}{\lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{\nu t}{R^2}\right), \quad (3.9)$$

où les fonctions J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel de première espèce respectivement d’ordre 0 et d’ordre 1 et la valeur λ_n est la n -ième valeur positive telle que $J_1(\lambda) = 0$.

Le tableau 3.1 donne les paramètres principaux des simulations 2D effectuées, en utilisant soit une implémentation explicite “classique” (simulations EX), soit l’implémentation originale de l’équation (3.6) (simulations IX) et en faisant varier le paramètre de pénalisation η . Ainsi, le pas de temps est fixé à une valeur très faible ($\Delta t = 5 \times 10^{-6}$) et reste constant tout au long des simulations, afin de pouvoir considérer des simulations “explicites” dans une large gamme de paramètres η (car le schéma explicite est stable si et seulement si $\Delta t \leq 6\eta/11$, voir équation (3.1)). Cependant, ce choix a l’inconvénient de nous forcer à ne considérer que le début de l’établissement de l’écoulement, jusqu’à l’instant $t = 0.5 = T/4$, où T est la période de rotation $T = 2\pi/\Omega$, ce qui correspond tout de même à 10^5 itérations. Notons que le coût supplémentaire en temps de calcul du schéma implicite est de l’ordre de 65% (voir Jause-Labert *et al.* [2012]).

La figure 3.1 montre les résultats obtenus avec la simulation $I7$, qui utilise le schéma implicite avec un paramètre de pénalisation $\eta = 10^{-7}$. La solution analytique tracée pour comparaison a été calculé en utilisant un nombre $N_b = 100\,000$ modes de Bessel. On observe alors un très bon comportement qualitatif de la méthode avec l’implémentation implicite de la pénalisation, avec une évolution temporelle tendant vers la rotation solide $u_\theta = \Omega r$, comme prédit

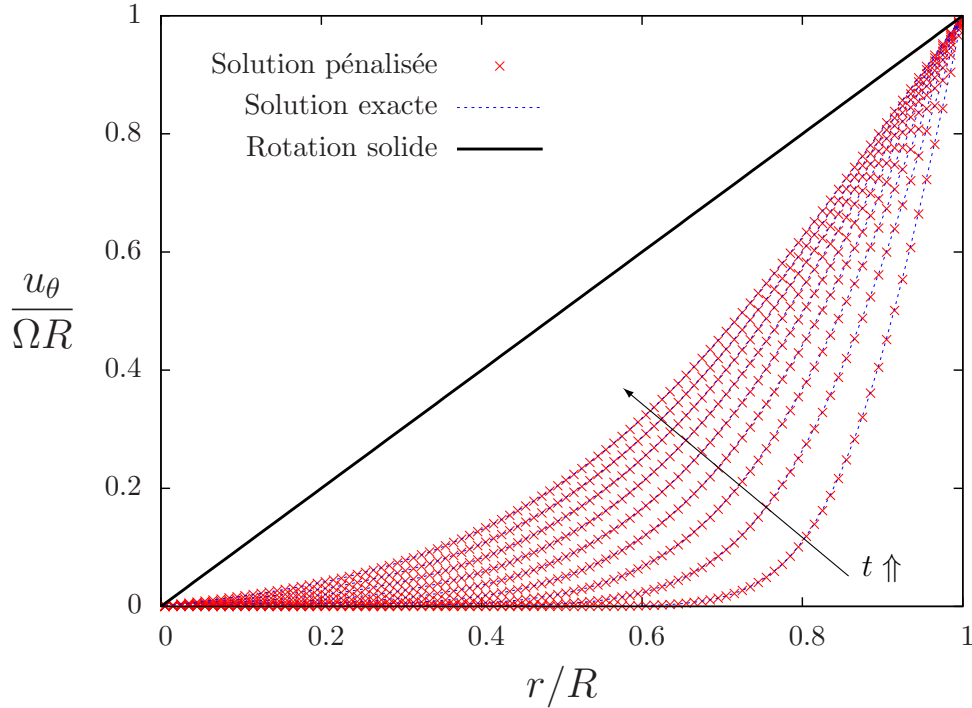


FIGURE 3.1 – Distribution radiale et temporelle de la vitesse azimutale u_θ pour la simulation *I7*. Les différentes courbes sont normalisées par le rayon R pour la position radiale, et par ΩR pour la vitesse azimutale qui est la vitesse de la paroi.

par Batchelor et l'équation (3.9). La robustesse de la méthode est telle que même l'évolution temporelle semble être identique à la solution exacte, de sorte que la méthode de pénalisation développe correctement, et à la bonne vitesse, la couche limite générée par la rotation de la paroi.

Comparons maintenant les résultats obtenus avec les différentes implémentations et les différentes valeurs de η . La figure 3.2 montre l'évolution temporelle de l'erreur globale pour chaque simulation, en utilisant soit l'implémentation explicite (figure (a)), soit la méthode implicite (figure (b)). Cette erreur est normalisée de sorte que la quantité tracée est définie par :

$$\epsilon_t(t) = \sqrt{\frac{\langle (u(t) - u_{\text{ex}}(t))^2 \rangle_{\mathcal{D}}}{\langle u_{\text{ex}}^2(t) \rangle_{\mathcal{D}}}}. \quad (3.10)$$

Tout d'abord, on voit que l'erreur décroît bien en diminuant le paramètre de pénalisation η , que ce soit avec la méthode explicite ou avec la méthode implicite. L'erreur décroît également avec le temps car la distribution azimutale devient de moins en moins discontinue près de la paroi. Néanmoins, on observe avec la méthode implicite une saturation de la diminution de l'erreur de sorte que les courbes telles que $10^{-10} \leq \eta \leq 10^{-7}$ semblent confondues. À partir d'une certaine valeur seuil de η , la diminution de ce paramètre n'a pas d'influence sur la représentation de la paroi. Afin de confirmer cette hypothèse, nous traçons sur la figure 3.3 l'erreur normalisée ϵ à l'instant $t_c = 0.375$ en fonction de la valeur de η , pour les deux implémentations étudiées et à

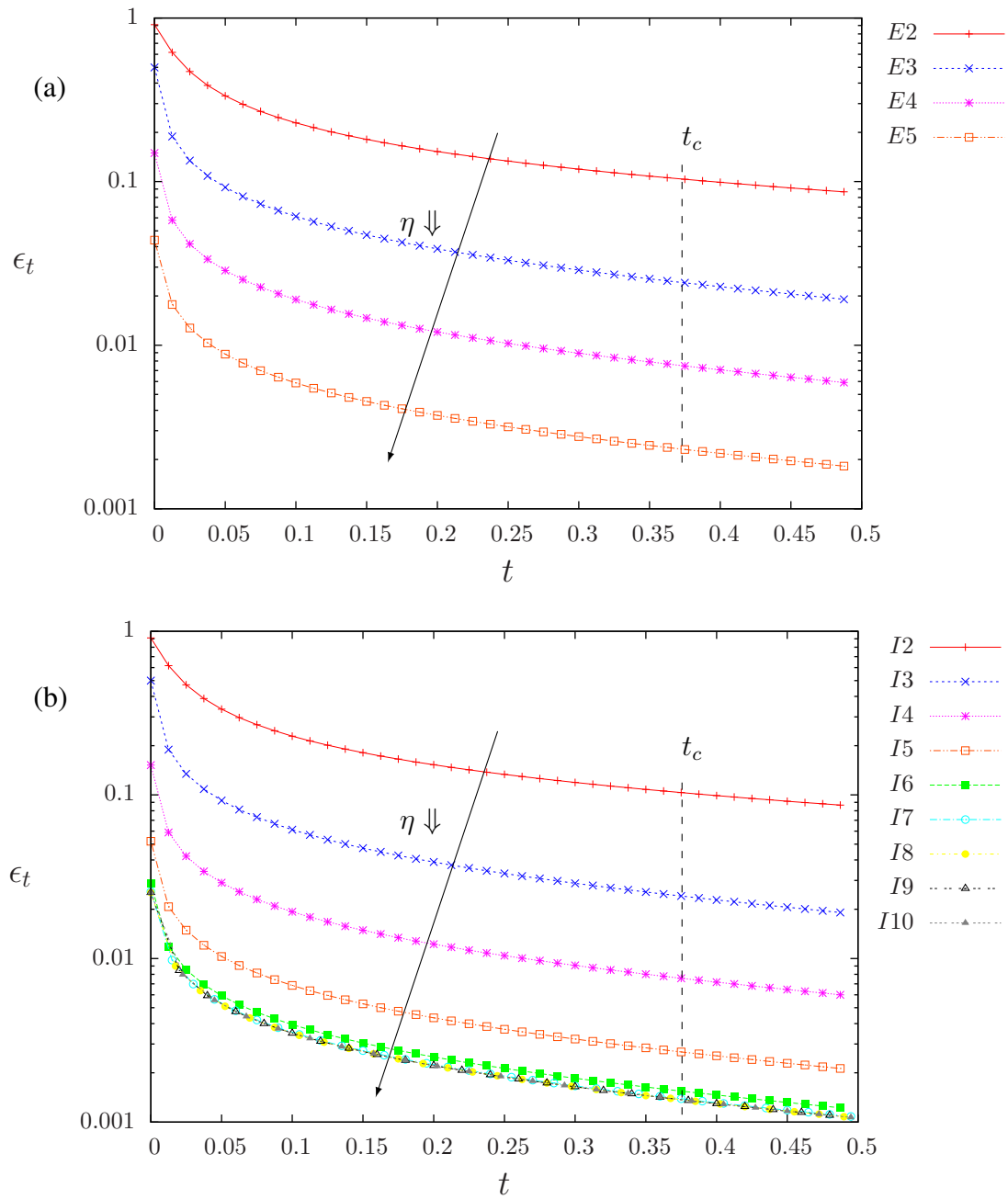


FIGURE 3.2 – Évolution temporelle de l'erreur normalisée ϵ_t commise sur la composante de vitesse azimutale ($u \equiv u_\theta$) pour les simulations avec prise en compte du terme de pénalisation de manière explicite (a) ou implicite (b). Les traits verticaux en pointillés indiquent l'instant t_c auquel est déterminée la courbe de convergence de la figure 3.3.

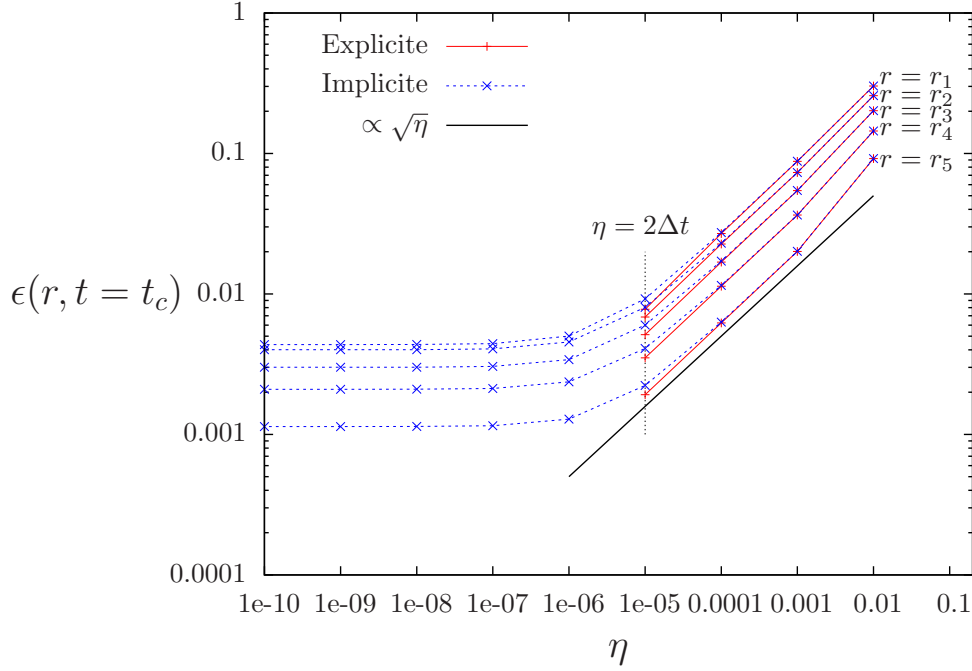


FIGURE 3.3 – Convergence des schémas explicite et implicite en fonction du paramètre de pénalisation η . Ces courbes sont tracées pour les champs obtenus à $t_c = 0.375$ et pour différentes positions radiales r_1, \dots, r_5 valant respectivement $r = (0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9)R$.

différentes positions radiales. La valeur tracée est définie par :

$$\epsilon(r, t = t_c) = \sqrt{\frac{(u(r, t_c) - u_{\text{ex}}(r, t_c))^2}{u_{\text{ex}}^2(r, t_c)}}. \quad (3.11)$$

Nous observons que comme pressenti, l'erreur sature à partir d'une certaine valeur de η pour la version implicite et il semble que l'erreur alors obtenue à partir de cette valeur seuil (ici $\eta < 10^{-7}$) semble être légèrement inférieure à l'erreur obtenue avec la méthode explicite dans le cas marginalement stable $\eta \approx 2\Delta t$. Ainsi, même si le schéma implicite ne nous permet pas d'augmenter de manière très significative la précision que nous obtenons avec l'implémentation explicite, elle a tout de même l'intérêt majeur de rendre le schéma numérique stable et d'optimiser la valeur de la perméabilité pour une certaine valeur de Δt .

3.1.4 Étude analytique du schéma implicite

Les résultats de convergence du schéma implicite avec η peuvent également être retrouvés au premier ordre par une approche mathématique. La démonstration présentée ci-dessous est un résultat proposé par Wouter Bos.

Reprenons l'équation (3.5) et pour simplifier, considérons un masque immobile de sorte que $\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$ et $\chi^n = \chi^{n+1} = \chi$. Ainsi, le schéma implicite présenté précédemment s'écrit :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \left\{ \left(1 + \frac{\Delta t}{\eta} \chi \right)^{-1} \left(\mathbf{u}^n - \Delta t \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{S}}^{\perp, n} \right\} \right) \right\}. \quad (3.12)$$

Nous considérons ici que le masque ne sera pas lissé et χ ne pourra donc que valoir 0 ou 1. Ainsi, en ne traitant que les cas $\chi = 0$ ou $\chi = 1$, on peut écrire :

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\eta} \chi\right)^{-1} \equiv (1 - \chi) + \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\eta}} \chi = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t + \eta} \chi\right). \quad (3.13)$$

Ainsi, l'équation (3.12) devient :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t + \eta} \chi\right) \left(\mathbf{u}^n - \Delta t \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{\mathbf{S}}^{\perp, n} \right\}\right) \right\}. \quad (3.14)$$

Après développement et en notant que $\mathcal{P}^\perp \{\hat{\mathbf{u}}^n\} = \hat{\mathbf{u}}^n$, l'équation (3.14) devient :

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^n - \Delta t \left(\hat{\mathbf{S}}^{\perp, n} - \frac{1}{\Delta t + \eta} \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \{\chi \mathbf{u}^n\} + \frac{\Delta t}{\Delta t + \eta} \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \{\chi \mathbf{S}^{\perp, n}\} \right), \quad (3.15)$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} = \hat{\mathbf{S}}^{\perp, n} - \frac{1}{\Delta t + \eta} \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \{\chi \mathbf{u}^n\} + \frac{\Delta t}{\Delta t + \eta} \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \{\chi \mathbf{S}^{\perp, n}\}. \quad (3.16)$$

Ceci est la version discrétisée (avec un schéma d'Euler d'ordre 1) de l'équation

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} = \hat{\mathbf{S}}^\perp - \frac{1}{\Delta t + \eta} \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \{\chi \mathbf{u}\} + \frac{\Delta t}{\Delta t + \eta} \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \{\chi \mathbf{S}^\perp\}. \quad (3.17)$$

Comme le paramètre de pénalisation choisi est souvent très faible devant le pas de temps ($\eta \ll \Delta t$), on peut approximer l'équation précédente par :

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} \approx \mathcal{P}^\perp \left\{ \hat{\mathbf{S}} - \frac{1}{\Delta t} \mathcal{F} \{\chi \mathbf{u}\} \right\} + \mathcal{P}^\perp \mathcal{F} \{\chi \mathbf{S}^\perp\}. \quad (3.18)$$

On voit donc que si $\eta \ll \Delta t$, le schéma implicite utilisé revient à résoudre les équations pénalisées (2.22) avec un paramètre de pénalisation équivalent $\eta_{eff} = \Delta t$, et le terme non-linéaire solénoïdal est lui aussi "pénalisé" avec un paramètre de pénalisation équivalent $\eta = 1$. Ce schéma est très semblable à celui utilisé par Homann *et al.* [2010], largement inspiré des méthodes de *pseudo-penalization* (cf Fadlun *et al.* [2000], Pasquetti *et al.* [2008]).

3.2 Réflexion d'ondes d'inertie sur une paroi pénalisée

Les écoulements réels sont souvent soumis à des forces extérieures anisotropes telles que la force de Coriolis quand une rotation d'ensemble est considérée, la force de flottaison dans des contextes stratifiés ou encore la force de Lorentz pour des écoulements des fluides conducteurs soumis à un champ magnétique (contexte MHD). Ainsi, il est important de vérifier si certains mécanismes fondamentaux dus à ces forces à distance sont correctement reproduits en utilisant la méthode de pénalisation. Nous allons considérer par la suite la propagation et la réflexion d'ondes d'inertie et d'ondes internes de gravité, en tentant de vérifier si ces phénomènes linéaires sont correctement pris en compte avec notre méthode de frontière immergée. Ainsi, cela nous permettrait d'affirmer que les effets (linéaires) ondulatoires anisotropes de la turbulence

en rotation, stratifiée ou MHD seront correctement simulés dans nos simulations de turbulence où une force extérieure créant de l'anisotropie sera prise en compte. L'élément essentiel pour la propagation des ondes d'inertie (resp. internes de gravité) est le rôle que joue la pression (voir Lighthill [1978]). Sans elle, la force de Coriolis (resp. la force de flottaison) n'induirait qu'un mouvement oscillatoire. Le couplage des composantes horizontales et verticale de vitesse par la pression, au travers de l'équation de continuité (1.2) pour les fluides incompressibles, permet la propagation de ces paquets d'onde (voir Batchelor [1953], Greenspan [1968]).

La méthode de pénalisation est testée dans les sections suivantes en considérant successivement la propagation et la réflexion d'ondes d'inertie et d'ondes internes de gravité, en comparant avec les résultats obtenus avec des résultats théoriques, numériques ou expérimentaux existants.

3.2.1 Rappel théorique sur les écoulements tournants

Lorsque les effets de rotation sont pris en compte, la force de Coriolis est ajoutée aux équations de conservation du moment (voir Phillips [1963] et Greenspan [1968] pour les résultats analytiques de cette partie).

Les équations de Navier–Stokes, écrites dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω , sont :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (3.19)$$

Le gradient de pression ∇p^* ne contient pas seulement le terme $\nabla \Pi$ de l'équation (2.10), mais également la contribution de la force centrifuge $\nabla ((\Omega \times \mathbf{r})^2 / 2)$, \mathbf{r} étant la distance à l'axe de rotation.

En linéarisant l'équation (3.19) et en négligeant le terme visqueux, on obtient un système d'équations pour lequel on peut déterminer une solution en ondes planes de la forme $A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \sigma t))$ pour les composantes de vitesse et pour la pression, à condition que la relation de dispersion suivante soit vérifiée :

$$\sigma(\boldsymbol{\kappa}) = \pm \frac{2\Omega \cdot \boldsymbol{\kappa}}{\kappa} = \pm 2\Omega \cos \theta, \quad (3.20)$$

où σ est la pulsation des ondes, qui, avec le taux de rotation, définit l'angle θ entre le vecteur d'onde et l'axe de rotation. On définit le vecteur unitaire $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ tel que $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \tilde{\boldsymbol{\kappa}}$. Les ondes sont dispersives et sont caractérisées par leur vitesse de groupe \mathbf{c}_g et leur vitesse de phase \mathbf{c}_ϕ définies par :

$$\mathbf{c}_\phi = 2 \frac{\Omega \cdot \tilde{\boldsymbol{\kappa}}}{\kappa} \tilde{\boldsymbol{\kappa}}, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\boldsymbol{\kappa}} \sigma(\boldsymbol{\kappa}) = 2 \frac{\tilde{\boldsymbol{\kappa}} \times (\Omega \times \tilde{\boldsymbol{\kappa}})}{\kappa}. \quad (3.22)$$

Ces deux vecteurs caractérisant les ondes d'inertie sont représentés sur la figure 3.4 et on peut voir que les vitesses de phase et de groupe sont orthogonales.

La génération d'ondes d'inertie a été premièrement étudiée par McEwan [1970] (voir figure 3.4) et la réflexion de ces dernières sur des parois planes — et plus particulièrement les transferts d'énergie mis en jeu — sont exhaustivement discutés par Phillips [1963].

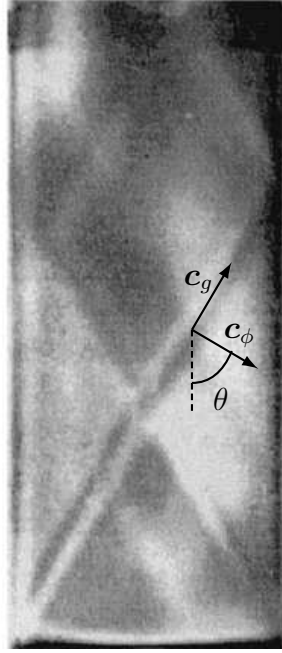


FIGURE 3.4 – Génération d’ondes d’inertie par McEwan [1970] par la rotation d’un disque légèrement incliné à la vitesse de rotation Ω_1 , entraînant un forçage d’ondes de fréquence $\sigma = \Omega - \Omega_1$ dans un cylindre rempli d’eau posé sur une plaque tournante à la vitesse Ω .

Les ondes d’inertie respectent une relation de dispersion qui dépend de l’angle de propagation par rapport à l’axe de rotation, de sorte que les lois de réflexion sur une paroi plane de normale \mathbf{n} n’impliquent pas nécessairement la symétrie par rapport à \mathbf{n} , contrairement aux réflexions en optique classique. Considérons une onde plane incidente définie par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\alpha} \cos(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\kappa}}t) + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \times \boldsymbol{\alpha} \sin(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\kappa}}t) \quad (3.23)$$

et en ajoutant un prime aux valeurs correspondant à l’onde réfléchie, Phillips [1963] a montré que les lois de réflexion imposées aux ondes sont :

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}' = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\kappa}}' \times \boldsymbol{\alpha}' = \pm \mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \times \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.24b)$$

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\kappa}}' = \pm \boldsymbol{\Omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\kappa}}, \quad (3.24c)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa}' = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\kappa}. \quad (3.24d)$$

Le comportement particulier des ondes d’inertie lorsqu’elles se réfléchissent sur une paroi solide en fait un test intéressant et nous nous proposons de confronter les résultats obtenus avec la méthode de pénalisation avec ceux d’un code en “canal” décrit dans la section suivante (voir Buffat *et al.* [2011]), en reproduisant les mêmes simulations que Godefert & Lollini [1999]. Notons que la méthode de pénalisation a déjà été utilisée dans le cas de l’équation d’onde uni-dimensionnelle (voir Paccou *et al.* [2005]).

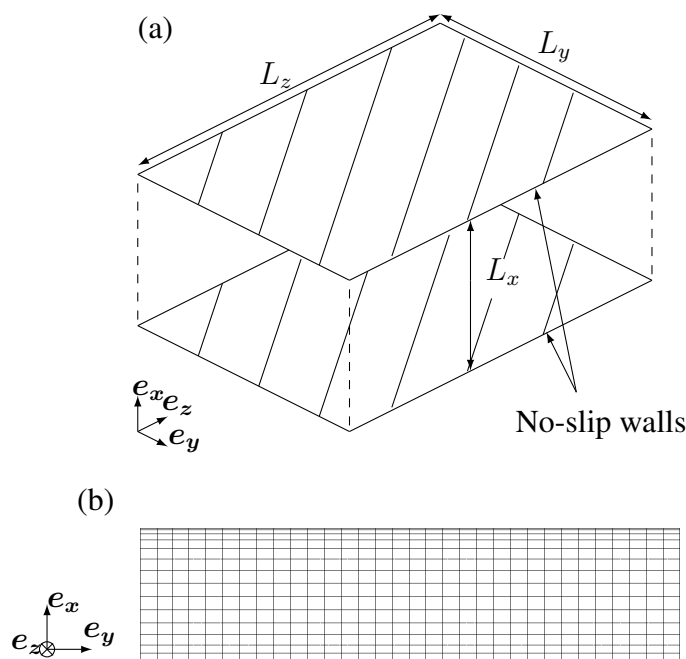


FIGURE 3.5 – Géométrie du domaine de calcul dans un code en canal. (a) Schéma du canal. (b) Visualisation du maillage dans un plan $z = c^{\text{te}}$ pour la résolution utilisée ci-après ($128 \times 256 \times 256$). La raffinement du maillage est important proche des frontières supérieure et inférieure. Par soucis de clarté, un nœud de collocation sur huit est représenté.

3.2.2 Description du code en canal

Ce code pseudo-spectral résout les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible dans un canal périodique avec des conditions de non-glissement aux parois (voir figure 3.5(a)) en utilisant une approximation spectrale de Galerkin (Fourier–Chebyshev) et une méthode de projection variationnelle sur une base solénoïdale, comme décrit dans Vinkovic *et al.* [2011], Buffat *et al.* [2011]. Cette méthode numérique implique deux directions d’homogénéité (y et z) et les conditions aux limites sont périodiques dans ces directions.

Contrairement au code pseudo-spectral de Fourier tri-périodique, dans lequel le maillage est homogène, le maillage est raffiné près des parois dans la direction inhomogène e_x , comme le montre la figure 3.5(b). Cela permet de représenter de manière beaucoup plus précise les petites structures et les forts gradients présents dans les couches limites de l’écoulement considéré. De plus, la décomposition de la vitesse spectrale sur une base de Chebyshev – les polynômes de Chebyshev sont utilisés pour la génération du maillage, la position des nœuds de collocation correspondant aux zéros de Gauss-Lobatto dans la direction inhomogène — force les composantes de vitesse à être exactement nulles sur les parois (la précision numérique est $\approx 10^{-19}$), vérifiant alors la condition de non-glissement désirée. Ce code est utilisé pour analyser le comportement de la méthode de pénalisation où la condition de non-glissement n’est pas intrinsèque à la base de décomposition utilisée.

Simulation	N_x	$N_y \times N_z$	L_x	$L_y = L_z$	η	Δt	2Ω
Canal	129	256^2	2π	8π	–	2×10^{-3}	13.3
S1		128^3	4π	8π	10^{-6}	2×10^{-3}	13.3
S2		256^3	4π	8π	10^{-6}	2×10^{-3}	13.3
S3		384^3	4π	8π	10^{-6}	2×10^{-3}	13.3
S4		512^3	4π	8π	10^{-6}	2×10^{-3}	13.3
S5		640^3	4π	8π	10^{-6}	2×10^{-3}	13.3

TABLE 3.2 – Paramètres des simulations de la réflexion d’ondes d’inertie dans un canal.

3.2.3 Paroi pénalisée alignée avec le maillage

Le premier test consiste en la génération d’ondes d’inertie à partir d’une source ponctuelle harmonique dans un fluide au repos dans un référentiel tournant à la vitesse angulaire $\Omega = \Omega e_x$. Cela correspond exactement aux simulations numériques de Godefert & Lollini [1999] réalisées avec le code en canal (issu de Buffat *et al.* [2011]) mentionné ci-dessus. La source est modélisée par un forçage sinusoïdal quasi-ponctuel. Le phénomène physique observé est une propagation conique des ondes et une réflexion sur les parois solides. Nous comparons alors les résultats obtenus avec les deux méthodes numériques.

Nous réalisons une simulation de référence avec le code en canal et également des simulations dans notre code pénalisé tri-périodique pour différentes résolutions spatiales N^3 , dans des domaines de calcul où la longueur dans la direction inhomogène est le double de celle du code en canal ; ainsi, la moitié du domaine numérique correspond au domaine solide \mathcal{S} . La fonction masque correspondante est :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, L_x/4] \cup [3L_x/4, L_x], \\ 0 & \text{si } x \in [L_x/4, 3L_x/4], \end{cases} \quad (3.25)$$

aucun lissage n’étant appliqué ici pour le traitement de l’interface fluide/solide. Les dimensions du domaine fluide \mathcal{D} sont identiques à celles de la simulation en canal de référence. Cela implique également que le nombre de nœuds dans la direction inhomogène est la moitié du total des points de collocation N_x . Les paramètres des simulations sont donnés par le tableau 3.2.

Les ondes d’inertie sont générées au centre \mathbf{x}_m du domaine fluide en ajoutant le forçage numérique harmonique suivant :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = A_0 \sin(\sigma_f t) \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)^2}{c_l}\right) \mathbf{e}_y, \quad (3.26)$$

où σ_f est la pulsation du forçage. Dans Godefert & Lollini [1999], le forçage était une source discrète en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m$ et ne respectait donc pas localement la condition d’incompressibilité, bien que l’étape de projection du terme non-linéaire assurait que le champ de vitesse soit à divergence nulle. Comme la condition d’incompressibilité est prise en compte différemment dans les deux méthodes numériques, la réponse de chacun des codes à un tel forçage sera certainement différente. Nous utilisons alors un forçage légèrement différent où la discontinuité du forçage est lissée analytiquement par une fonction à support compact. Nous choisissons un lissage gaussien (voir l’équation (3.26)), ce qui a pour effet de rendre le forçage moins ponctuel

et et donc moins sujet aux oscillations numériques dues aux transformations de Fourier. L'amplitude A_0 et la largeur c_l sont fixées à $A_0 = 10^{-4}$ et $c_l = 10$. La fréquence du forçage est telle que $\sigma_f = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, de sorte que l'angle de propagation théorique des ondes d'inertie est $\theta = \arccos(2\Omega/\sigma_f) \approx 41^\circ$. Enfin, la viscosité cinématique est choisie extrêmement faible ($\nu = 10^{-12}$) afin de minimiser l'amortissement des ondes par dissipation visqueuse.

La figure 3.6 montre les trois composantes du champ de vitesse \mathbf{u} , dans la simulation de référence réalisée avec le code en canal (figures de gauche) et dans une simulation "pénalisée" (figures de droite) avec une discrétisation comparable du domaine fluide. Comme le paramètre de pénalisation est choisi tel que $\eta = 10^{-6}$, le terme de pénalisation est implicitement pris en compte comme expliqué précédemment. Nous observons un très bon accord qualitatif entre les résultats des deux simulations et aucune différence notable n'apparaît, que ce soit en observant la propagation des ondes ou leurs réflexions. De plus, nous voyons que pour la simulation utilisant la méthode de pénalisation, les domaines solides, délimités par les traits pointillés sur les figures 3.6(d), (e) and (f), sont correctement représentés car l'ordre de grandeur de la vitesse à l'intérieur des domaines solides \mathcal{S} est négligeable. Les différences que l'on observe entre les distributions de vitesse u_y et u_z sont dues au fait que le forçage est oscillant dans la direction y . Il n'y a donc pas de symétrie totale du problème autour de l'axe x .

Afin d'obtenir une estimation quantitative de la précision de la méthode de pénalisation, nous traçons sur la figure 3.7 les composantes de vitesse sur les lignes $z = z_1 = L_z/2 + 3\pi/4$ et $z = z_2 = L_z/2 + 7\pi/4$ de la figure 3.6. La première ligne est choisie avant la réflexion de l'onde sur la paroi et la deuxième ($z = z_2$) se situe après l'impact, ce qui nous permettra d'estimer l'erreur introduite par la réflexion sur le domaine pénalisé. Premièrement, nous pouvons remarquer que la vitesse normale u_x calculée avec la méthode de pénalisation correspond remarquablement bien aux résultats du code en canal, avant et après la réflexion du paquet d'ondes. Plus particulièrement, u_x tend correctement vers 0 à la paroi. Un léger écart à la valeur nulle est cependant observé pour les vitesses tangentielles u_y et u_z . Cela est dû au fait que les gradients des vitesses tangentielles sont plus raides que ceux de la vitesse normale, d'autant plus que la viscosité cinématique a été choisie très faible ($\nu = 10^{-12}$). Cela implique que, très proche de la paroi, on peut observer des oscillations de faible amplitude de la solution dans la simulation pénalisée, car les forts gradients se situent dans une couche limite dont l'épaisseur est de l'ordre de grandeur de la distance entre deux points de maillage Δx . L'amplitude de ces petites oscillations décroît en augmentant la résolution mais le comportement de l'écoulement, malgré l'existence de ces phénomènes de Gibbs, est cependant très bien représenté. Nous pouvons également remarquer quelques différences loin de la paroi (plus particulièrement sur la figure 3.7(c)) mais celles-ci proviennent de la manière dont est prise en compte l'incompressibilité dans chacun des deux codes, c.-à-d. la réponse d'un forçage légèrement compressible, couplé avec le fait que le maillage soit bien plus grossier loin des parois dans le code en canal. En effet, bien que le nombre total de points de collocation soit équivalent dans les deux domaines fluides, le maillage est raffiné près des parois dans le code Fourier-Chebyshev, ce qui implique des cellules bien plus larges et donc une précision plus faible au centre du domaine, où est effectué le forçage.

La figure 3.8 montre la norme L_2 de la différence entre la simulation avec le code en canal (dénotée par l'indice c) et les simulations pénalisées en fonction du nombre de points de maillage N utilisés dans chaque direction des simulations tri-périodiques. Pour chaque point de

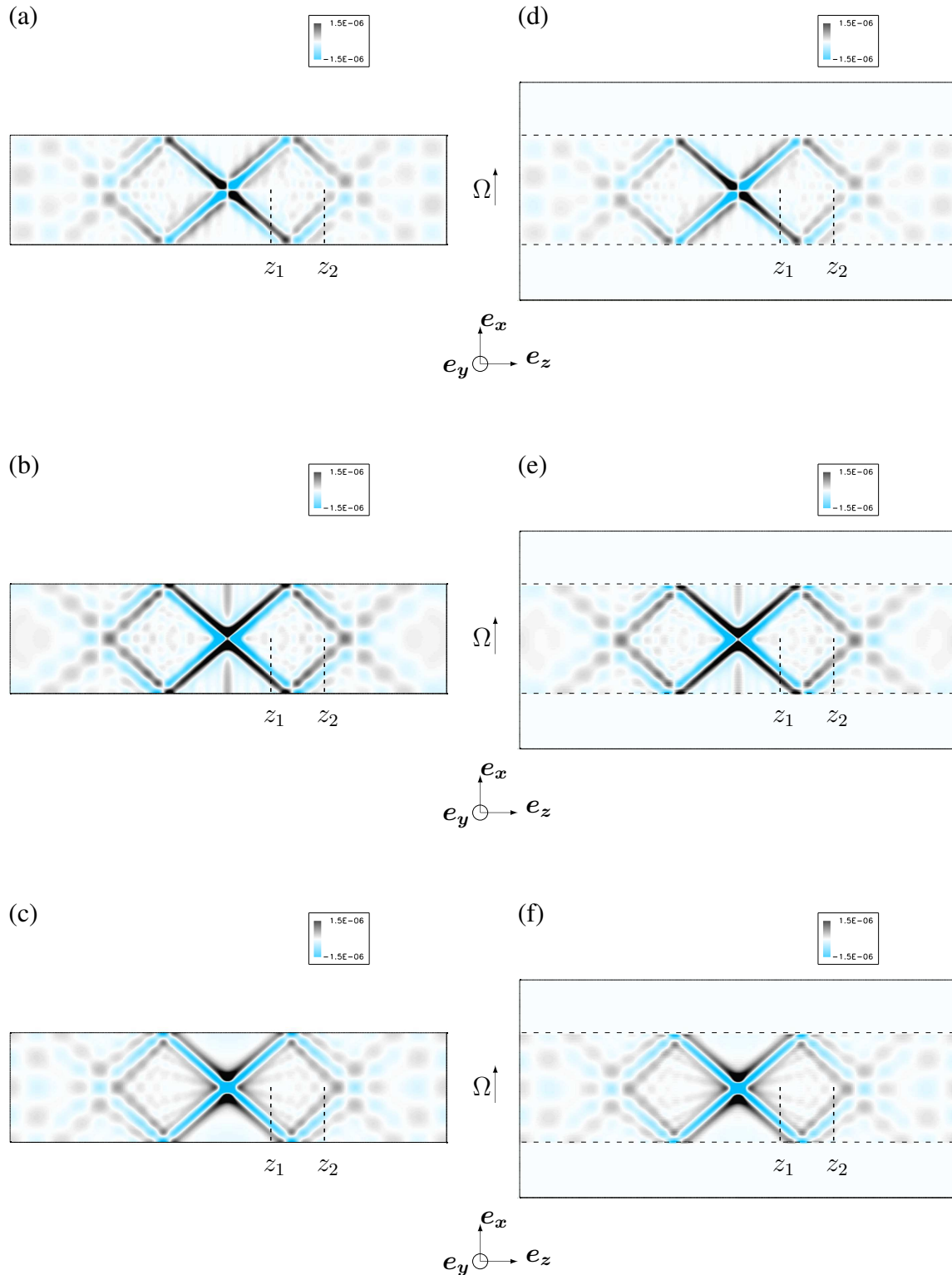


FIGURE 3.6 – Comparaison qualitative entre la réflexion des ondes d’inertie dans le code Fourier–Chebyshev (gauche) avec $N_x = 129$ et $N_y = N_z = 256$; et dans le code tri-périodique (droite) avec la méthode de pénalisation ($N^3 = 256^3$ et $\eta = 10^{-6}$). Les trois composantes de vitesse (u_x : (a) et (d); u_y : (b) et (e); u_z : (c) et (f)) sont tracées dans le plan $y = L_y/2$ à l’instant $t = 6$ (3000 itérations). Les lignes horizontales pointillées correspondent à la position de la discontinuité de la fonction masque, donc de l’interface $\partial D = \mathcal{D} \cap \mathcal{S}$.

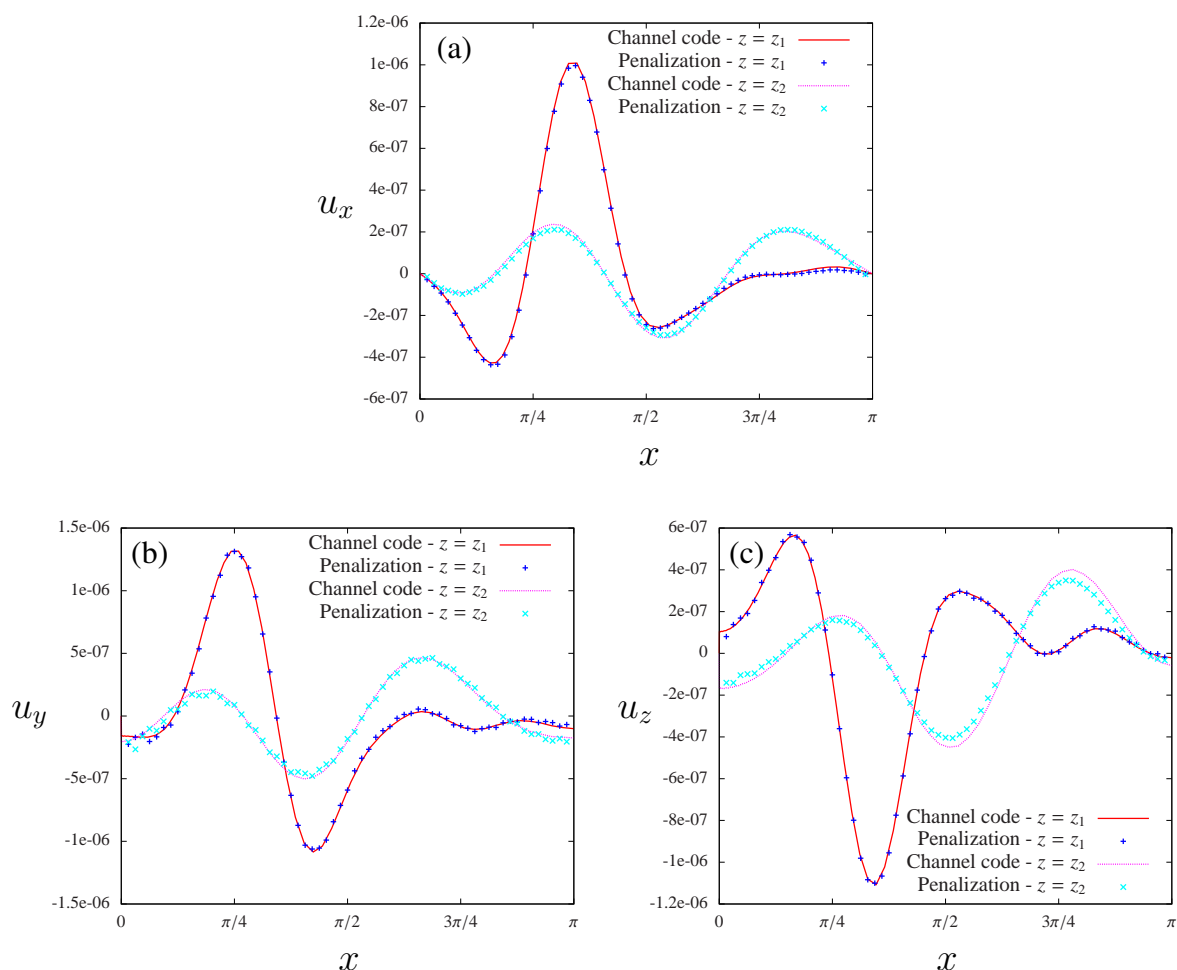


FIGURE 3.7 – Évolution de : (a) la composante de vitesse u_x orthogonale à la paroi, les composantes tangentes, (b) u_y , et (c) u_z , le long de lignes $z = z_1$ et $z = z_2$, par rapport à la distance x à la paroi inférieure à l'instant $t = 6$. La simulation pénalisée utilisée pour le tracé de cette figure correspond à une discrétisation telle que $N^3 = 256^3$ et le paramètre de pénalisation vaut $\eta = 10^{-6}$.

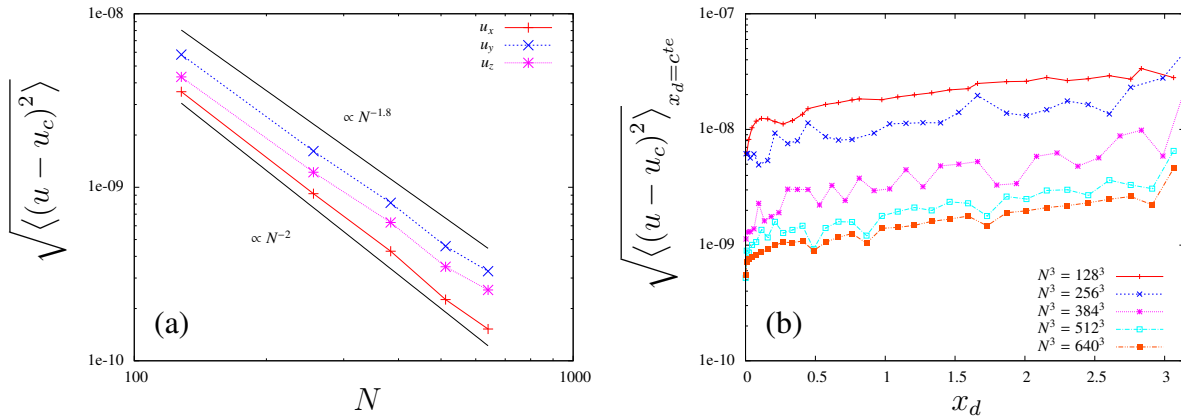


FIGURE 3.8 – Convergence avec la discrétisation N de la différence entre le code tri-périodique avec la méthode de pénalisation et le code en canal. (a) Norme L_2 de l’erreur pour les trois composantes de vitesse calculée dans le domaine fluide entier pour les différentes discrétisations utilisées. La figure (b) représente la même norme L_2 en fonction de la distance du forçage ($x_d = \pi$ définit la paroi) pour les différentes simulations en utilisant la composante de vitesse u_x .

collocation du code pénalisé, on interpole le champ de vitesse obtenu avec le code en canal aux noeuds du code tri-périodique (interpolation polynomiale 3D basées sur 6 points dans chaque direction) et nous calculons la valeur *rms* de la différence obtenue pour chaque composante.

La figure 3.8(a) donne le taux de convergence de la méthode de pénalisation, en prenant comme référence la simulation avec le code en canal où des conditions exactes de non-glissement sont imposées aux parois. La convergence est proportionnelle à N^{-2} pour la composante de vitesse normale u_x et légèrement plus faible ($\sim N^{-1.8}$) pour les composantes tangentielles car la très faible viscosité impose des couches limites très fines. Ces taux de convergence sont pertinents et corroborent les résultats de Fadlun *et al.* [2000], Kevlahan & Ghidaglia [2001], Griffith & Peskin [2005], Keetels *et al.* [2007], Laizet & Lamballais [2009], Kolomenskiy & Schneider [2009], Schneider *et al.* [2011], tous ces travaux montrant des taux de convergence situés entre N^{-1} et $N^{-2.5}$. On peut aussi noter sur la figure 3.8(b) que, près de la paroi, l’erreur est supérieure d’un ordre de grandeur que loin des frontières. On peut alors penser que la précision spectrale peut être retrouvée localement, dans des régions loin des frontières pénalisées ; cette question est toujours ouverte et plus particulièrement la question de la distance à partir de laquelle la précision est améliorée, et ce en fonction du type d’écoulement. Il faut également noter que le fait que la paroi numérique soit alignée au maillage améliore sensiblement la convergence des résultats. Dans le cas d’un maillage non aligné, l’ordre de convergence tendrait plutôt vers N^{-1} (voir Fadlun *et al.* [2000]).

3.2.4 Paroi pénalisée inclinée par rapport au maillage cartésien

Un des principaux avantages de la méthode de pénalisation est qu’elle permet de prendre en compte des obstacles ou des parois de géométrie “quelconque”, sans avoir à adapter le maillage.

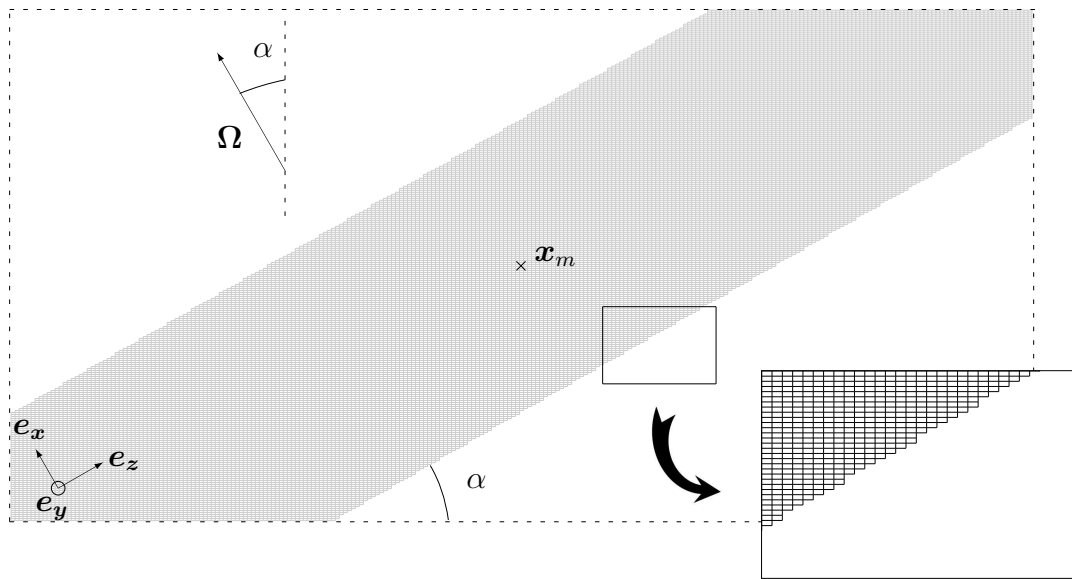


FIGURE 3.9 – Géométrie des simulations avec un canal pénalisé incliné ($\alpha = \pi/6$). Un zoom permet d’observer plus précisément l’allure de la définition de l’interface numérique fluide/solide.

Cependant, cet aspect doit être étudié attentivement. Comme la géométrie est entièrement définie par la spécification d’une fonction masque sur un maillage cartésien, l’interface numérique entre les régions fluide et solide suit le maillage. La discrétisation cartésienne impose donc que la définition de la fonction masque est une succession d’arêtes verticales et horizontales.

Dans cette section, nous étudions et quantifions les différences entre les résultats précédents et une configuration similaire, qui consiste en un canal incliné d’un angle $\alpha = \pi/6$ autour de l’axe y , de sorte que la géométrie n’est plus alignée avec les directions principales du maillage cartésien. La figure 3.9 montre une coupe de la géométrie dans le plan $y = L_y/2$, où seulement les nœuds de collocation pour lesquels $\chi = 0$ sont indiqués. Clairement, l’écoulement n’est plus périodique, mais nous faisons en sorte que cela ne pose pas de problème en limitant temporellement les simulations afin de n’observer qu’une courte propagation et la première réflexion des ondes d’inertie, générées à la position $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m$, sur les parois pénalisées. Nous arrêtons donc les calculs avant que les paquets d’onde n’atteignent les limites du domaine de calcul.

En regardant précisément le maillage (voir la figure 3.9), on voit que la paroi plane est représentée par une succession discrète d’arêtes verticales et horizontales, mais l’écoulement reste calculé avec une interpolation en séries de Fourier dans les directions principales du maillage. Ainsi, la frontière de non-glissement peut être imaginée comme une paroi interpolée de la fonction masque. Cette représentation particulière doit cependant reproduire les phénomènes fondamentaux concernant la propagation d’ondes et, parmi eux, la réflexion des ondes d’inertie, qui dépendent de l’orientation de la paroi par rapport à l’axe de rotation, comme spécifiés par les équations (3.24). Le cas-test que nous proposons est ainsi nécessaire pour vérifier et es-

Simulation	N^3	L_x	$L_y = L_z$	Δt	η	C_s
Tilt	256^3	4π	8π	2×10^{-3}	10^{-6}	0
Tilt8	256^3	4π	8π	2×10^{-3}	10^{-6}	8
Tilt32	256^3	4π	8π	2×10^{-3}	10^{-6}	32
Tilt128	256^3	4π	8π	2×10^{-3}	10^{-6}	128

TABLE 3.3 – Paramètres des simulations pénalisées avec une paroi non alignée au maillage cartésien.

timer l'efficacité de la méthode de pénalisation pour une grande variété de formes d'obstacles et ou de parois. Évidemment, il faut garder à l'esprit que des géométries très complexes vont forcément nécessiter des discrétisations importantes.

De plus, afin de lisser les frontières pénalisées, nous allons tester ici la méthode décrite par Kolomenskiy & Schneider [2009] et introduite à la section 2.2.3. Cette procédure consiste à convoluer la fonction masque avec une fonction gaussienne (voir l'équation (2.29)). Cette méthode a été utilisée pour réduire l'amplitude des phénomènes de Gibbs, amplitude dépendant de la résolution, introduite intrinsèquement par la discontinuité de la fonction masque. Cette technique crée alors une zone de transition plus ou moins fine (en fonction de la valeur de C_s et de la discrétisation N) pour le passage de la valeur 0 à la valeur 1 de la fonction masque. Ainsi, une attention particulière est nécessaire sur la taille du domaine fluide en terme de points de maillage : il faut un nombre de points de maillage suffisant dans le domaine solide afin que la fonction masque puisse effectivement passer de la valeur 0 à la valeur 1. D'une manière générale, une bonne représentation de la paroi solide implique une discrétisation suffisante du domaine de calcul.

Les paramètres des simulations de cette section sont donnés par le tableau 3.3. La résolution est choisie globalement équivalente à celle utilisée pour la simulation de référence dans le code en canal. Les dimensions du domaine numérique sont similaires aux simulations de la section précédente, tout comme l'est la valeur du paramètre de pénalisation η . Le seul paramètre distinguant ces calculs est le paramètre de lissage C_s . La simulation 'Tilt' n'est pas lissée ($C_s = 0$) et la fonction masque vaut exactement 1 ou 0 aux nœuds de collocation. Les simulations 'TiltX' utilisent un lissage tel que $C_s = X$.

La figure 3.10 présente les différentes composantes de vitesse pour la simulation non lissée 'Tilt'. Ces graphiques permettent une comparaison qualitative avec les simulations où la géométrie est alignée avec le maillage (figure 3.6) car les champs représentés ici sont ceux à l'instant $t = 6$ correspondant encore à 3000 itérations. Une première observation des résultats atteste qualitativement d'une bonne représentation de la physique sous-jacente, la propagation et la réflexion des ondes semblant identiques aux simulations précédentes. Une comparaison plus quantitative est présentée par la figure 3.11, qui compare les distributions obtenues sur les lignes $z = z_1$ et $z = z_2$ pour ces simulations avec celle de la simulation de référence du code en canal de la section précédente.

Tout d'abord, on montre que même à faible résolution ($256^2 \times 128$ dans le domaine fluide), les résultats avec parois pénalisées inclinées, sans lissage, sont plutôt satisfaisants avant ($z = z_1$) et après ($z = z_2$) la réflexion des ondes d'inertie. De plus, il semble que lisser la fonction

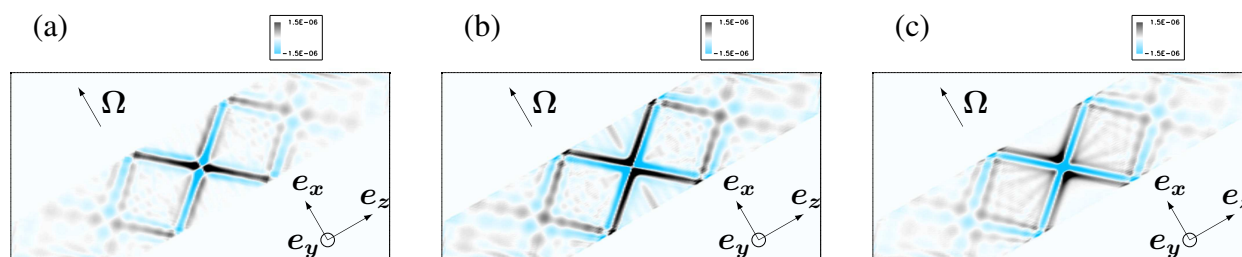


FIGURE 3.10 – Visualisation des trois composantes de vitesse pour la simulation pénalisée ‘Tilt’, qui n’utilise aucune méthode de lissage pour la fonction masque. (a) : composante u_x et (b) : composante u_y , (c) : composante u_z à l’instant $t = 6$.

masque en la convoluant par une gaussienne modifie clairement l’écoulement car les ondes d’inertie après la réflexion ($z = z_2$) sont significativement déplacées si l’épaisseur de la zone de transition est large (simulation Tilt128). Le paramètre de lissage C_s ne peut alors pas être augmenté sans conséquence. Cette technique de lissage, bien qu’elle diminue l’amplitude des oscillations de Gibbs, a tendance à élargir le domaine solide et à modifier l’aspect de la géométrie. Quand la fonction masque est lissée, une zone intermédiaire, dont la largeur dépend de la valeur de C_s , apparaît où le masque ne vaut ni zéro ni un et le terme de pénalisation agit donc plutôt comme une zone “grise” où l’écoulement est atténué. Par exemple, si $\chi \approx O(10^{-3})$ à un endroit de cette zone de transition et que le paramètre de pénalisation effectif, en utilisant l’implémentation implicite précédemment expliquée, vaut $\eta_{\text{eff}} \approx \Delta t = 10^{-3}$, les nœuds inclus dans cette région vont être complètement équivalents à une région poreuse où le paramètre de pénalisation vaudrait $\eta = 1$, car il est clair que la quantité importante pour caractériser l’importance du terme de pénalisation est le rapport χ/η_{eff} . Cela est très bien observé par exemple pour la simulation ‘Tilt128’ où on peut voir sur la figure 3.11 que les composantes de vitesse restent proches de 0 au voisinage de la paroi solide, bien que censées appartenir au domaine fluide à cet endroit. On observe alors un léger déphasage des ondes dû à la réduction de la taille du domaine fluide équivalent par la création d’une zone “poreuse” intermédiaire.

Dans cette section, nous avons montré que la réflexion des ondes d’inertie sur un plan pénalisé donne des résultats très satisfaisants, grâce à une comparaison avec une simulation dans un canal plan avec une discrétisation de type Chebyshev afin d’imposer des conditions de non-glissement aux parois intrinsèques à la formulation. De plus, nous avons prouvé que la précision de la réflexion peut également être obtenue pour une configuration où la géométrie est inclinée par rapport au maillage cartésien. Enfin, nous avons montré que lisser la fonction masque en la convoluant à une fonction gaussienne, comme effectué dans Kolomenskiy & Schneider [2009], modifie clairement la solution locale si la zone de lissage est trop large. La solution est d’autant plus affectée localement par cette technique que le paramètre de lissage est important, malgré le fait qu’elle permette de réduire l’amplitude des phénomènes de Gibbs qui sont inhérents à la méthode et que le comportement des valeurs globales soit correct.

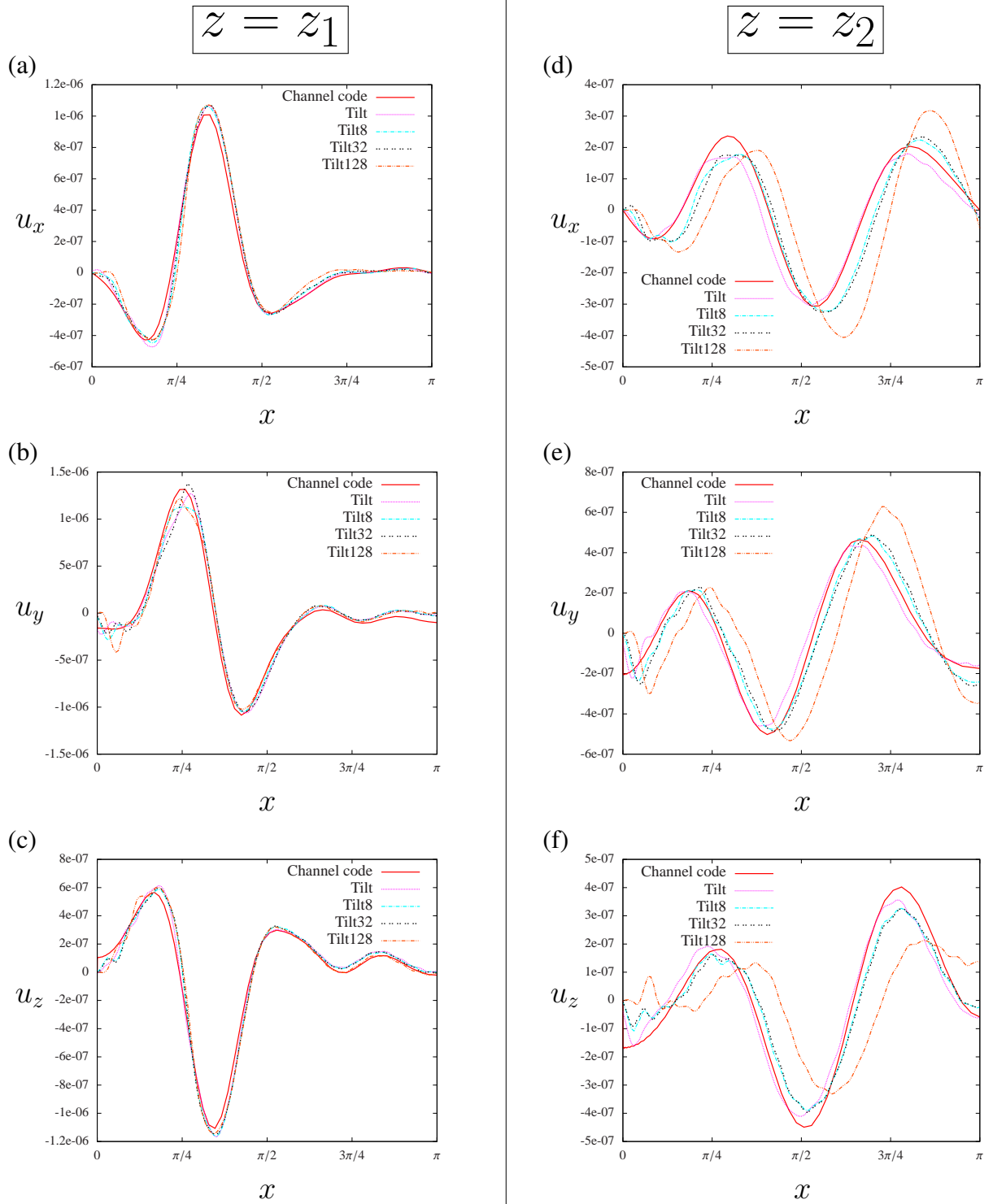


FIGURE 3.11 – Évolution des composantes de vitesse en fonction de la distance à la paroi sur les lignes $z = z_1$ et $z = z_2$. Nous comparons les simulations pénalisées inclinées avec les résultats précédemment présentés figure 3.6 du code Fourier–Chebyshev. À gauche, les figures en $z = z_1$: (a) : u_x ; (b) : u_y ; (c) : u_z . À droite, les figures en $z = z_2$ (après la réflexion) : (d) : u_x ; (e) : u_y ; (f) : u_z .

3.3 Réflexion d'ondes internes sur une paroi pénalisée

La similarité entre les ondes d'inertie et les ondes internes de gravité est telle que nous proposons également un autre test de validation de la méthode de pénalisation dans le cas de la propagation d'ondes internes, en utilisant une procédure équivalente à celle présentée section 3.2. Il y a cependant deux différences : (a) l'orientation de la paroi par rapport à la direction d'anisotropie (caractérisée par l'angle β) pour reproduire numériquement la physique mise en jeu par le dispositif expérimental de Gostiaux [2006], consistant en un cylindre oscillant dans une cuve contenant un fluide stablement stratifié, générant des ondes internes qui se réfléchissent sur un plan incliné ; (b) le champ de vitesse est couplé à un champ de densité, de sorte que la nature de la propagation et de la réflexion de ces ondes est différente de celle des ondes d'inertie. De plus, nous posons la question des conditions aux limites à imposer pour la densité. Nous choisissons de n'en imposer aucune, comme dans Mercier *et al.* [2010] où est considérée la génération numérique d'ondes internes.

3.3.1 Écoulement stratifié et approximation de Boussinesq

La force de flottaison apparaît lorsque la densité n'est plus constante au sein du domaine fluide, à cause d'effets de variations de température ou de salinité par exemple. Dans le cas d'une stratification stable, elle apparaît comme une force de rappel (cette force est déstabilisante dans les cas de convection avec stratification instable), de sorte que les particules fluides sont soumises à un gradient stabilisant vertical de densité $\Gamma = \partial\rho/\partial z < 0$. Sous l'approximation de Boussinesq, les équations de Navier–Stokes deviennent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g}, \quad (3.27)$$

où ρ est la champ de densité fluctuant autour d'une valeur moyenne qui tient compte du gradient moyen de densité et d'une densité de référence ρ_0 , \mathbf{g} est l'accélération de la pesanteur et on pose $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_z$. L'équation d'évolution de ρ est alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = -N_{BV}^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} + D \nabla^2 \rho, \quad (3.28)$$

où D est la diffusivité de la densité et N_{BV} est la fréquence de Brunt-Väisälä définie par $N_{BV} = \sqrt{g\Gamma/\rho_0}$. Elle représente la fréquence naturelle d'oscillation d'une particule fluide autour de sa position verticale d'équilibre. Le problème à résoudre consiste donc en la résolution des équations (3.27) et (3.28) ainsi que l'équation de continuité (1.2) dans le domaine fluide \mathcal{D} avec des conditions de non-glisement sur la frontière $\partial\mathcal{D}$. Nous n'imposons explicitement aucune condition aux limites sur le densité comme précédemment indiqué.

Comme pour les ondes d'inertie, la relation de dispersion des ondes internes est obtenue en considérant la linéarisation du système d'équations (3.27) et (3.28) dans la limite non-visqueuse. En définissant θ comme l'angle entre le vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ et l'axe de stratification (ici vertical), la relation de dispersion a pour expression :

$$\sigma(\boldsymbol{\kappa}) = \pm N_{BV} \frac{\kappa_{\perp}}{|\boldsymbol{\kappa}|} = \pm N_{BV} \sin \theta, \quad (3.29)$$

où $\kappa_{\perp} = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}$ est la norme de la composante dans le plan horizontal (perpendiculaire à l'axe de la gravité) du vecteur d'onde. Comme pour les ondes inertielles, les solutions en ondes planes obtenues ont des propriétés spécifiques de réflexion sur des parois solides. Nous rappelons que la discussion complète de la réflexion des ondes internes de Greenspan [1968] peut facilement être transposée au cas des ondes internes grâce à la similarité de ces phénomènes ondulatoires et des lois de dispersion (3.20) et (3.29).

3.3.2 Paramètres numériques et résultats qualitatifs

Dans le but de reproduire la physique du dispositif expérimental de Gostiaux [2006], nous simulons la réflexion d'ondes internes de gravité sur une paroi solide inclinée. Suivant l'angle de l'onde incidente θ et l'angle β que fait le plan incliné avec l'horizontale, deux types de réflexion sont observés : l'onde réfléchie peut se propager vers le haut ($\theta > \beta$) ou vers le bas ($\theta < \beta$). Une explication complète est donnée par Gostiaux [2006]. Contrairement aux ondes d'inertie, les paquets d'ondes peuvent être rendus bi-dimensionnels. Si les ondes sont générées par un forçage uniforme dans une direction transverse à l'axe de gravité, les paquets d'onde sont alors plans et invariants dans cette direction (bien que les simulations restent tri-dimensionnelles).

Les paramètres des simulations sont équivalents aux paramètres expérimentaux : la fréquence du forçage harmonique \mathbf{f} est $\sigma_f = 0.4\pi \text{ rad.s}^{-1}$. La fréquence de Brunt-Väisälä est $N_{BV} = 3.1 \text{ rad.s}^{-1}$, impliquant un angle théorique de propagation des ondes $\alpha \simeq 24$ degrés. Le forçage est défini par l'expression :

$$\mathbf{f}(x, z, t) = A_0 \sin(\sigma_f t) \exp\left(-\frac{(x - x_f)^2 + (z - z_f)^2}{c_l}\right) \mathbf{e}_z. \quad (3.30)$$

Le forçage est donc centré sur la ligne (x_f, z_f) , homogène dans la direction y , et l'oscillation est suivant la direction z . Les paramètres du forçage sont tels que $A_0 = 10^{-4}$ et $c_l = 4 \times 10^{-3}$. L'inclinaison de la paroi est fixée à $\beta = 48$ degrés. Le pas de temps est fixé à $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$, le paramètre de pénalisation vaut $\eta = 10^{-10}$ — avec évidemment une prise en compte implicite du terme de pénalisation dans le schéma numérique d'avancement temporel — et la discrétisation spatiale est telle que $N_x = N_z = 2048$ et $N_y = 4$. La très faible résolution dans la direction y provient de la bi-dimensionnalisation de l'écoulement par un forçage uniforme dans la direction y . Ainsi, l'écoulement étant invariant dans cette direction, une très faible discrétisation se justifie. Enfin, le nombre de Prandtl $\text{Pr} = \nu/D = 1$ de sorte que la dissipation de quantité de mouvement est identique à celle de la densité, c'est-à-dire très faible voire négligeable ($\nu = D = 10^{-15}$). La dissipation est choisie aussi faible afin de ne pas dissiper les faisceaux d'ondes et permettre de s'approcher ses résultats théoriques non-visqueux. Néanmoins, cela a pour inconvénient de s'éloigner de la réalité du dispositif expérimental.

La propagation résultante est tracée dans un plan vertical x - z sur la figure 3.12, qui confirme qualitativement le comportement correct de la méthode de pénalisation dans le cas d'écoulements à densité variable en comparaison avec des résultats expérimentaux, et ce sans prise en compte particulière de conditions aux limites sur la densité. Il semble donc que la seule pénalisation des équations de conservation du moment soit suffisante pour reproduire une réflexion d'ondes internes valable, l'angle de propagation des ondes réfléchies étant similaire entre cette

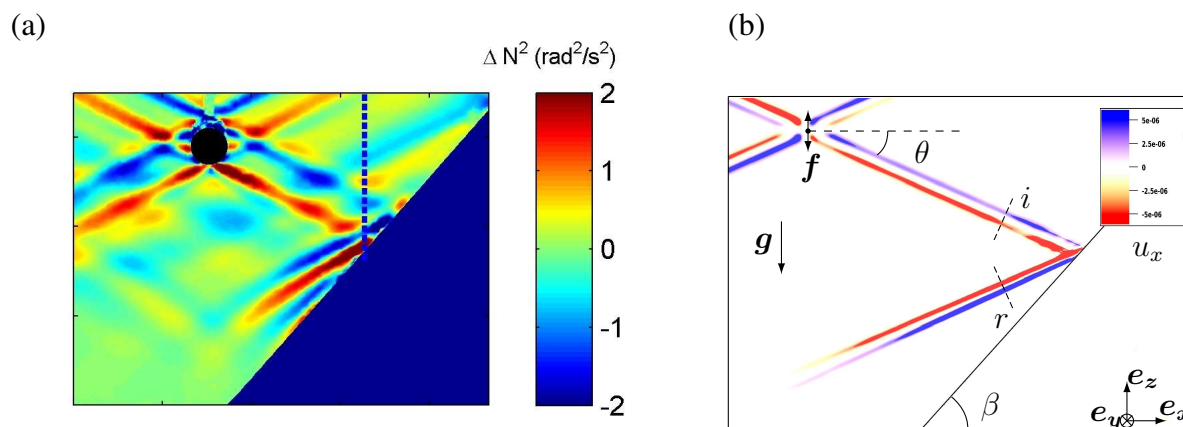


FIGURE 3.12 – Visualisation de la réflexion d’ondes internes de gravité sur un plan incliné. (a) Résultats expérimentaux de Gostiaux [2006] : le gradient vertical de densité est observé par strioscopie synthétique ; (b) Résultats numériques obtenus avec la méthode de pénalisation : visualisation de la composante de vitesse u_x .

simulation et l’expérience. Cependant, des différences sont tout de même observées principalement pour deux raisons : (a) le forçage expérimental est bien plus large en espace que notre forçage numérique harmonique, ce qui implique un paquet d’ondes bien plus large dans l’expérience que dans notre simulation ; (b) le fluide utilisé expérimentalement (eau salée) est bien plus visqueux que le fluide considéré dans notre simulation ($\nu = 10^{-15}$), ce qui entraîne une défocalisation plus importante (*i.e.* un élargissement du faisceau) dans l’expérience. Malgré tout, la méthode de pénalisation semble qualitativement reproduire correctement la physique de la réflexion d’ondes internes.

3.3.3 Comparaison avec la théorie non-visqueuse

La vision qualitative précédente est complétée dans cette section par une confrontation avec la théorie dans le but de confirmer la validité de la méthode de pénalisation pour des écoulements à densité variable. Nous proposons ici de tester nos simulations avec une relation analytique entre les longueurs d’ondes des faisceaux incident et réfléchi, qui peut directement être obtenue à partir de considérations géométriques pour une réflexion focalisante ($\theta < \beta$) :

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \left| \frac{\sin(\theta + \beta)}{\sin(\theta - \beta)} \right|, \quad (3.31)$$

où les indices i et r correspondent respectivement aux ondes incidentes et réfléchies. À partir de relations trigonométriques et de la loi de dispersion (3.29), on peut déterminer une relation

$N_x \times N_z$	N_y	σ_f	N_{BV}	θ (en degrés)	β (en degrés)	η	Δt
2048×2048	4	0.4π	6.04	12	48	10^{-10}	5×10^{-3}
2048×2048	4	0.4π	4.56	16	48	10^{-10}	5×10^{-3}
2048×2048	4	0.4π	3.67	20	48	10^{-10}	5×10^{-3}
2048×2048	4	0.4π	3.10	24	48	10^{-10}	5×10^{-3}
2048×2048	4	0.4π	2.68	28	48	10^{-10}	5×10^{-3}
2048×2048	4	0.4π	2.37	32	48	10^{-10}	5×10^{-3}
2048×2048	4	0.4π	2.14	36	48	10^{-10}	5×10^{-3}

TABLE 3.4 – Paramètres des simulations de réflexion d’ondes internes sur des parois pénalisées inclinées.

entre le rapport des longueurs d’ondes et la fréquence de Brunt-Väisälä N_{BV} :

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{1 + \sin \beta \sqrt{\left(\frac{N_{BV}}{\sigma_f}\right)^2 - 1}}{1 - \sin \beta \sqrt{\left(\frac{N_{BV}}{\sigma_f}\right)^2 - 1}}. \quad (3.32)$$

Une série de simulations (dont les paramètres principaux sont donnés par le tableau 3.4) avec différentes fréquences de Brunt-Väisälä a été menée pour obtenir différents angles de propagation des ondes internes. Pendant les simulations, la longueur d’onde du faisceau incident (resp. réfléchi) est calculée en analysant la transformée de Fourier du signal de vitesse sur la ligne pointillée de la figure 3.12 située avant (resp. après) l’impact du paquet d’ondes sur la paroi pénalisée. Pour chaque simulation, le rapport de l’équation (3.32) oscille autour d’une valeur moyenne une fois l’onde suffisamment établie. Cette valeur moyenne est tracée sur la figure 3.13 pour les différentes fréquences de Brunt-Väisälä, ainsi que la courbe théorique donnée par l’équation (3.32) pour comparaison.

Les résultats de la figure 3.13 démontrent clairement que, avec une résolution suffisante — par exemple, une telle qualité de focalisation ne peut pas être obtenue avec une discrétisation $N^3 = 256^3$ —, la réflexion sur une paroi pénalisée est phénoménologiquement et quantitativement correcte. Notons que ces résultats pourraient encore être améliorés en agrandissant le domaine de calcul ou en imaginant une autre configuration. En effet, le calcul de la valeur moyenne du rapport est limité dans le temps à cause de la périodicité du domaine numérique. Avec une “boîte” plus grande, l’estimation de ce rapport serait plus précise, mais cela impliquerait également une augmentation de la résolution afin de garder constante la discrétisation spatiale.

Pour conclure, soulignons que le non-alignement entre les axes cartésiens et une paroi pénalisée ne détériore pas la qualité de la solution et l’évaluation de l’angle de propagation et de réflexion est bonne à condition que le maillage soit suffisamment fin. De plus, les longueurs d’ondes réfléchies sont en accord avec la relation analytique dans laquelle l’inclinaison de la paroi joue un rôle. Nous pouvons donc être plutôt confiants quant à l’utilisation de la méthode pour des écoulements à densité variable, ou du moins dans l’approximation de Boussinesq pour des domaines fluides stablement stratifiés. Cependant, la question de la condition aux limites à

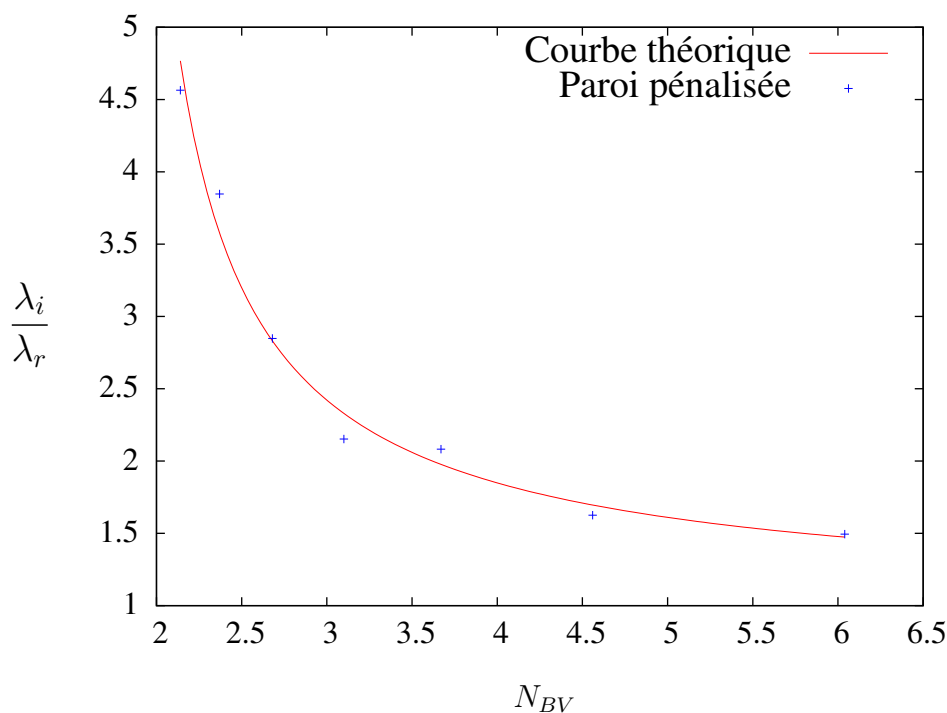


FIGURE 3.13 – Valeur moyenne du rapport des longueurs d’ondes incidentes et réfléchies en fonction de la fréquence de Brunt-Väisälä. La solution analytique non-visqueuse de l’équation (3.32) est indiquée par la ligne continue.

imposer sur la densité reste ouverte. Des conditions de type Neumann ($\partial\rho/\partial\mathbf{n} = 0$) semblent appropriées pour imposer un flux nul de densité à la paroi et une approche équivalente à celle de Kadoch [2009] pour les scalaires passifs reste à étudier.

3.4 Impact d’un anneau tourbillonnaire sur une paroi solide

Après avoir confirmé le comportement correct de la méthode de pénalisation avec des phénomènes ondulatoires, et donc dans un régime régi principalement par une équation d’onde, nous testons maintenant la méthode en étudiant l’impact d’un anneau tourbillonnaire² sur une paroi plane pénalisée, ce qui implique désormais le transport de vorticité. Le sujet est bien document , que ce soit expérimentalement (voir Walker *et al.* [1987], Lim [1989]) ou à l’aide de simulations numériques (voir par exemple Orlandi & Verzicco [1993]). De plus, cet écoulement a déjà fait l’objet de cas-tests pour valider la méthode de pénalisation en 2D (Keetels *et al.* [2007]).

3.4.1 Conditions initiales et paramètres numériques

La géométrie considérée ici est une boîte cubique de côté L et où la discrétisation est équivalente dans les trois directions $N_x = N_y = N_z = N$. La condition initiale est celle d’un

2. L’anneau tourbillonnaire est dit *vortex ring* en anglais et nous utiliserons dans cette section cette expression.

Taille L	Discrétisation N^3	Γ_0	ν	Re_Γ	η	Δt
2π	512^3	13.06	10^{-2}	1306	10^{-8}	5×10^{-4}

 TABLE 3.5 – Principaux paramètres de la simulation de l’impact d’un *vortex ring*.

anneau de vorticité à distribution gaussienne, identique à celle d’Orlandi & Verzicco [1993], décrit par sa distribution de vorticité en coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{\omega}(r, \theta, x, t = 0) = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Gamma_0}{\pi a^2} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + (r - r_0)^2}{a^2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

où Γ_0 est la circulation, a l’épaisseur de l’anneau, r_0 le rayon du *vortex ring* et x_0 est la position initiale dans la direction normale à la paroi e_x . Cette distribution conduit à générer un *vortex ring* avec une vitesse verticale, induite par sa cinétique, dans la direction des x négatifs.    partir de cette distribution de vorticité, on détermine la condition initiale du champ de vitesse en résolvant une équation de Poisson³ $\boldsymbol{\omega} = -\nabla^2 \mathbf{A}$ où \mathbf{A} est un potentiel vecteur tel que $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$. Dans le but de confronter nos résultats avec ceux de Walker *et al.* [1987] et d’Orlandi & Verzicco [1993], nous posons $\Gamma_0 = 13.06$, $r_0 = L_y/8$, $a = 0.4131 \times r_0$ et la viscosité cinématique telle que $\nu = 1.0 \times 10^{-2}$, ce qui implique un nombre de Reynolds basé sur la circulation $\text{Re}_\Gamma = \Gamma_0/\nu = 1306$. Cette valeur correspond au *vortex ring* le plus lent produit numériquement par Orlandi & Verzicco [1993] et la dynamique de l’impact de ce anneau avec la paroi est étudiée de manière approfondie dans cet article.

La fonction masque imposée est :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [5L_x/6, L_x], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.34)$$

Le domaine solide correspond alors à la partie supérieure du domaine dans la direction x et grâce à la périodicité du code pseudo-spectral, cela définit aussi une paroi solide à $x = 0$. Ensuite, en posant $x_0 = 3L_x/8 = 3\pi/4$, la distance initiale entre le centre du vortex ring et le mur est $3r_0$, ce qui est équivalent aux conditions initiales adimensionnées d’Orlandi & Verzicco [1993]. La figure 3.14 montre un schéma de la configuration initiale et les principaux paramètres sont résumés dans le tableau 3.5.

3.4.2 Résultats and comparaisons avec des travaux existants

La figure 3.15 montre d’une part la visualisation expérimentale obtenue par Walker *et al.* [1987] grâce à l’insertion de colorant dans le *vortex ring* et d’autre part une visualisation en volume du champ d’ensrophie ($Z = \omega_i \omega_i / 2$) obtenue par simulation pénalisée. On peut clairement observer dans la simulation pénalisée la dynamique de l’impact décrite par Walker *et al.*

3. Dans l’espace spectral, cela donne : $\hat{\omega}_i = \kappa_j \kappa_j \hat{A}_i$ et $\hat{u}_i = i\epsilon_{ijk} \kappa_j \hat{A}_k$

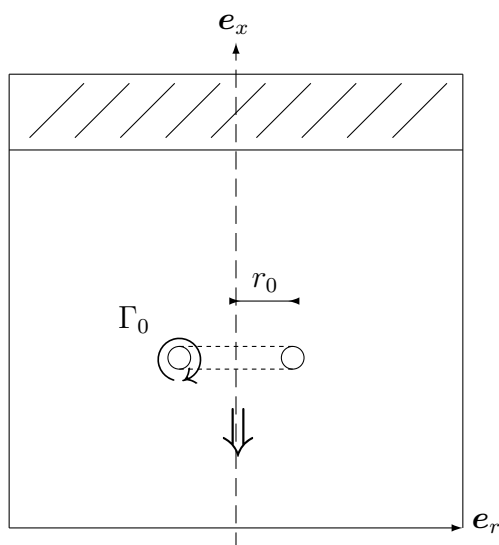


FIGURE 3.14 – Schéma de la configuration utilisée pour la simulation de l'impact d'un *vortex ring*.

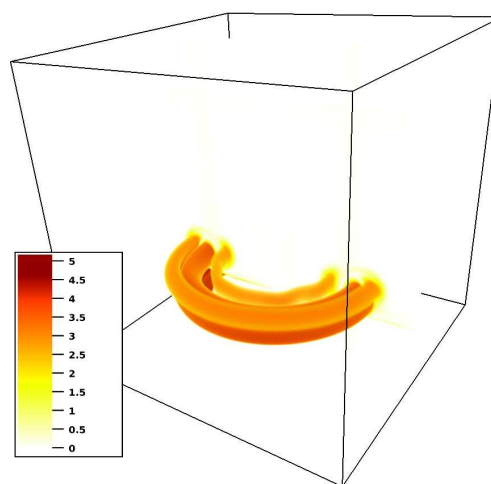


FIGURE 3.15 – Visualisation comparative de l'impact d'un *vortex ring*. À gauche : Visualisation expérimentale de Walker *et al.* [1987] avec $Re_0 = 564$ (quasiment équivalent à $Re_\Gamma = 1306$), obtenu avec l'insertion d'un colorant dans le *vortex ring*. À droite : Visualisation du champ d'entrophie $Z = \omega_i \omega_i / 2$ pour la simulation avec une paroi pénalisée. La création d'anneaux tourbillonnaires secondaires est bien visible sur les deux visualisations.

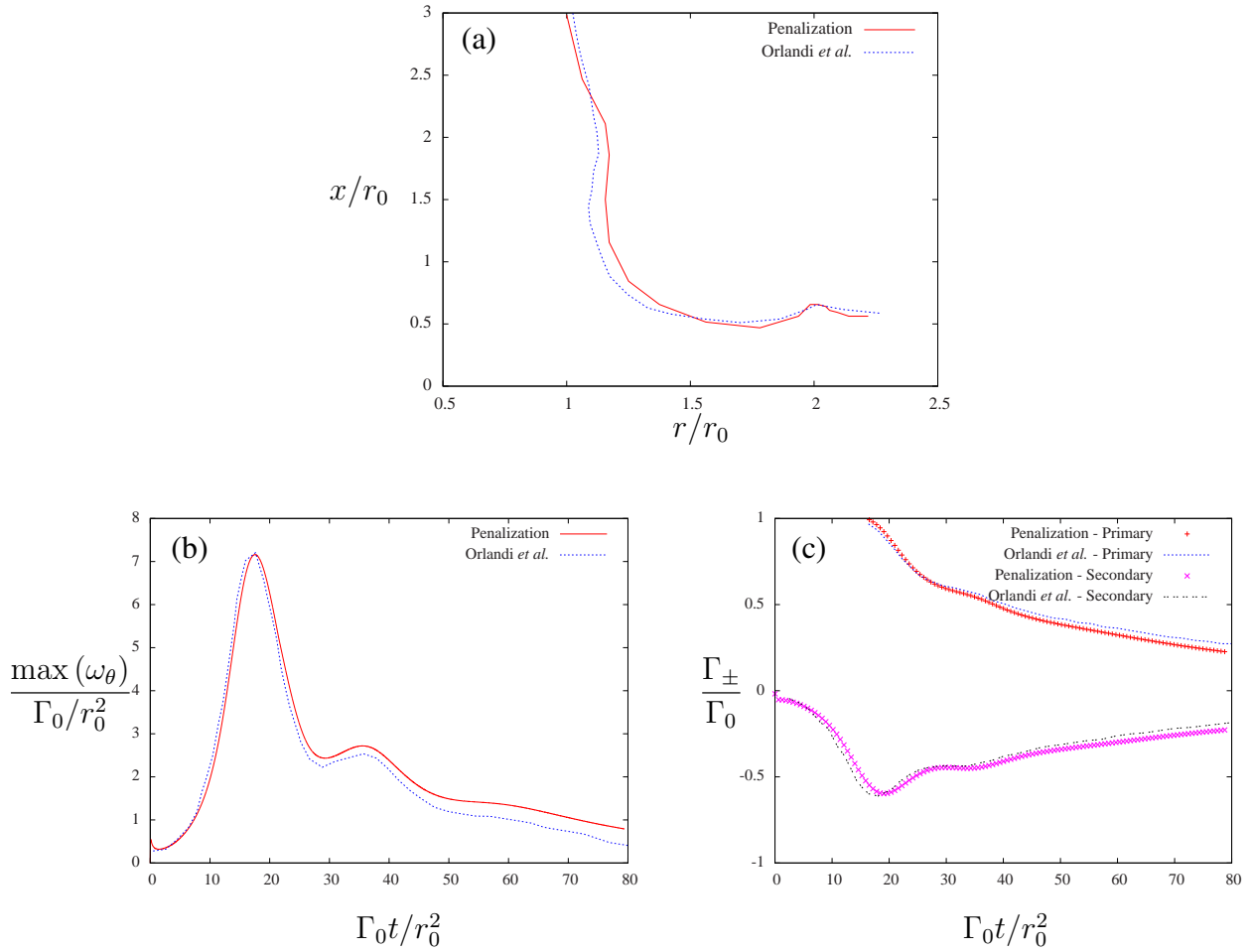


FIGURE 3.16 – Comparaison quantitative avec les simulations présentées dans Orlandi & Verzicco [1993] où $\text{Re}_\Gamma = 1306$. (a) Trajectoire du premier anneau. Évolution du maximum de vorticité azimutale (b) et de la circulation (c) des anneaux primaires et secondaires.

[1987] et plus particulièrement la formation d’anneaux secondaires de vorticité azimutale de signe opposé à l’anneau primaire lorsque l’impact se produit.

Pour une comparaison plus quantitative, nous nous proposons également de suivre la trajectoire du centre de l’anneau primaire et de comparer notre résultat, sur la figure 3.16, à celui obtenu par Orlandi & Verzicco [1993] pour leur simulation où $\text{Re}_\Gamma = 1306$. Nous tracons également l’évolution temporelle du maximum de vorticité azimutale du *vortex ring* primaire et de la circulation des anneaux primaire et secondaire pour un élément supplémentaire de comparaison. Les simulations effectuées par Orlandi & Verzicco [1993] proviennent d’un code différences finies écrit en coordonnées cylindriques. Les simulations présentées datant d’environ 20 ans, les résolutions considérées par Orlandi & Verzicco [1993] sont modérées, $96 \times 96 \times 128$ étant un ordre de grandeur des différentes discrétisations utilisées dans cet article.

La figure 3.16 prouve que la dynamique de l’impact du vortex est très bien reproduite par la méthode de pénalisation et la comparaison avec de précédents résultats numériques — Orlandi & Verzicco [1993] dans lequel est utilisé un code de différences finies en coordonnées cylin-

driques avec des conditions aux limites explicites — est remarquable. En particulier, la figure 3.16(a) montre clairement que l’impact est spatialement très bien reproduit par nos simulations. Le mouvement descendant de l’anneau est quasiment similaire et le pic à $r/r_0 \approx 2$ apparaît avec une amplitude verticale équivalente. De plus, la figure 3.16(b) démontre que la production de vorticité à la paroi durant l’impact est en accord complet avec les résultats précédemment obtenus avec des conditions aux limites imposées explicitement. Enfin, la figure 3.16(c) donne un dernier élément de validation en regardant l’évolution temporelle d’une quantité globale : la circulation du *vortex ring* primaire (circulation positive) et celle de l’anneau secondaire (circulation négative car ce dernier tourne dans le sens opposé comme expliqué dans Walker *et al.* [1987]). Cette circulation est calculée en utilisant sa définition $\Gamma = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\Sigma} \omega_{\theta} d\Sigma$ où $\partial\Sigma$ représente un contour dans un plan vertical $\theta = c^{\text{te}}$, contour à l’intérieur duquel se trouve une section complète du *vortex ring*. Tout d’abord, on voit clairement que l’évolution de cette quantité est en complet accord avec les résultats d’Orlandi & Verzicco [1993]. De plus, l’évolution temporelle de la circulation de l’anneau secondaire est très bien déterminée temporellement et en amplitude, ce qui indique que les effets de pression sont précisément pris en compte par notre implémentation implicite, le paramètre de pénalisation η étant tel que $\eta = 10^{-8}$.

3.4.3 Convergence avec le paramètre η

Dans ce nouveau cadre, nous allons confirmer (voir figure 3.3) la prédiction de convergence de la méthode avec le paramètre de pénalisation η . Pour cela, nous effectuons une série de simulations avec les paramètres du tableau 3.5, en ne faisant varier que la valeur du paramètre η , de $\eta = 10^{-2}$ à $\eta = 10^{-7}$. Cela est effectivement possible grâce à l’utilisation de notre implémentation implicite avec le pas de temps utilisé ($\Delta t = 5 \times 10^{-4}$).

Nous calculons ensuite la norme L_2 de l’écart normalisé sur le champ d’ensrophie entre la simulation $\eta = 10^{-8}$ de référence (correspondant à la simulation présentée à la section 3.4.2, l’indice ‘ref’ étant utilisé pour indiquer cette simulation) et les simulations avec des perméabilités plus importantes ($\eta > 10^{-8}$) :

$$\epsilon(\eta) = \sqrt{\frac{\langle (Z_{\eta} - Z_{\text{ref}})^2 \rangle_{\mathcal{D}}}{\langle Z_{\text{ref}}^2 \rangle_{\mathcal{D}}}}. \quad (3.35)$$

La figure 3.17 montre la dépendance de ϵ en fonction de η , calculé à l’instant $t = 1.5$ (ou de manière équivalente $t^* = \Gamma_0 t / r_0^2 \approx 32$ correspondant à 1500 itérations), immédiatement après le pic de vorticité qui indique la collision. Cette courbe confirme la prédiction analytique de Carbou & Fabrie [2003] qui donne une erreur sur le champ de vitesse proportionnelle à $\sqrt{\eta}$, car on trouve une convergence proportionnelle à η pour l’ensrophie. Or, comme l’ensrophie a pour dimension celle d’une vitesse au carré divisée par une longueur au carré, on peut affirmer que l’erreur sur la vitesse est bien proportionnelle à $\sqrt{\eta}$. Notons que nous n’observons pas la saturation de l’erreur comme sur la figure 3.3 car l’erreur est calculée en prenant comme référence un calcul aussi pénalisé, et non une solution exacte, ce qui nous empêche d’observer une saturation du déclin de l’erreur vers $\eta \lesssim \Delta t$.

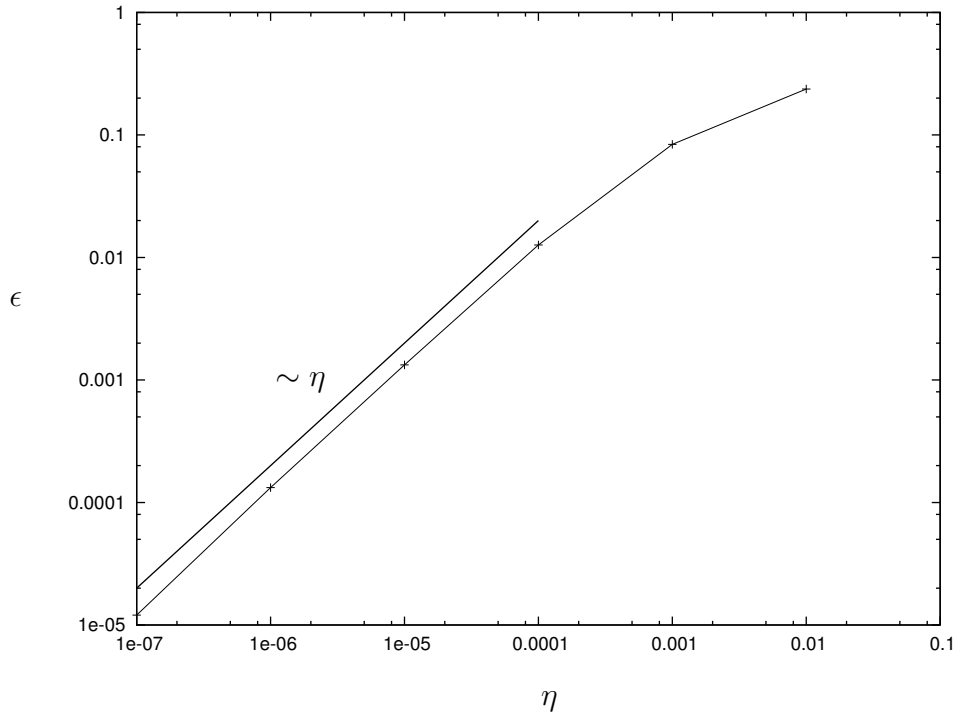


FIGURE 3.17 – Convergence des simulations pénalisées avec le valeur de la perméabilité η . Le champ d’ensrophie est utilisé pour calculé l’erreur ϵ pour les différentes valeurs de η . Le temps adimensionné auquel ϵ est calculé est $\Gamma_0 t / r_0^2 \approx 32$.

3.5 Conclusions

La validation de la méthode de pénalisation a été traitée dans ce chapitre, que ce soit pour la prise en compte de phénomènes ondulatoires (ondes d’inertie et internes de gravité), où la pression joue un rôle fondamental, ou pour la prise en compte de phénomènes tourbillonnaires.

Nous avons montré que l’implémentation implicite du terme de pénalisation nous permet de nous affranchir de la condition de stabilité restrictive reliant le paramètre η et le pas de temps Δt tout en optimisant la précision de la condition de non-glissement à la paroi. De plus, nous avons vu que, pourvu que la discrétisation spatiale soit suffisante, la méthode de pénalisation permet de simuler des parois dont la géométrie n’est pas alignée au maillage cartésien du code pseudo-spectral utilisé. Enfin, nous retrouvons l’estimation analytique de Carbou & Fabrie [2003] de l’évolution de l’erreur commise par la méthode en fonction du paramètre de pénalisation utilisé.

4

Déclin d'un écoulement turbulent confiné soumis à des effets de rotation

Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode de pénalisation décrite et validée dans les chapitres précédents afin d'obtenir une description statistique, eulérienne et lagrangienne, des écoulements confinés soumis à des effets de rotation. La configuration choisie est un cylindre périodique et un paragraphe est consacré à l'initialisation de l'écoulement turbulent confiné. Ensuite, nous cherchons à mettre en avant l'influence de la position radiale sur les échelles de longueur intégrales, sur les distributions de vitesse et d'accélération lagrangienne, etc. Une comparaison avec la turbulence homogène est effectuée, relative aux quantités énergétiques (spectres uni-dimensionnels, énergie cinétique moyenne, ...). Parmi les résultats présentés, l'effet "gaussianisant" de la rotation ainsi que l'anisotropie des petites échelles de l'écoulement dû au confinement sont à retenir.

In this chapter, we use the penalization method described and validated in the previous chapters in order to obtain a precise description, Eulerian and Lagrangian, of confined turbulent flows submitted to the effects of a background rotation. The chosen geometry is a periodic cylinder and a section is dedicated to the initialization of a confined turbulent flow. Then, we show the influence of the radial position on length scales, on velocity and Lagrangian accelerations distributions, etc. A comparison with homogeneous turbulence is achieved, related essentially to energetic quantities (one dimensional spectra, mean kinetic energy, ...). Among the presented results, the "Gaussianizing" effect of rotation and the anisotropy of the small dissipative structures of the flow due to confinement are important ones.

4.1 Contexte de l'étude

Comme introduit dans le chapitre 1, le phénomène de la turbulence reste encore assez mal compris, même dans le cadre simplifié de la turbulence homogène (voir Batchelor [1953], Sagaut & Cambon [2008]). Depuis l'approche phénoménologique de Kolmogorov pour des écoulements à très haut nombre de Reynolds, on ne note que peu d'avancées vraiment significatives dans la compréhension même du phénomène physique, malgré la masse des efforts consentis par les chercheurs de la deuxième moitié du XX^{ème} siècle.

Bien que notre connaissance des écoulements homogènes isotropes soit loin d'être complète, on peut tout de même se poser la question du rôle des forces à distance sur la dynamique des écoulements. En effet, la structure des écoulements turbulents que nous observons quotidiennement est grandement modifiée par des effets de rotation par exemple, les écoulements géophysiques à grandes échelles (océaniques, atmosphériques, ...) étant très clairement affectés par les effets de rotation de la Terre par exemple. Toujours en restant dans le cadre de la turbulence homogène (on considère que les effets de parois sont négligeables), on peut citer l'effet de la force de flottaison pour des écoulements à densité variable avec le cas particulier d'écoulements dits stratifiés¹, ou encore les effets de la force de Lorentz pour l'étude des écoulements de fluides conducteurs soumis à un champ magnétique (MagnétoHydroDynamique).

Toutes ces forces à distance ont un effet commun : elles brisent l'isotropie de l'écoulement en créant une direction particulière à l'écoulement. On dit alors que les écoulements sont homogènes mais anisotropes. Les réponses des écoulements à ces forces sont variées et concernent autant la dynamique et les cascades d'énergie que l'évolution des différentes échelles de longueurs (voir Sagaut & Cambon [2008] pour une description plus exhaustive de la turbulence homogène anisotrope) : les structures des écoulements en rotation ou soumis à un champ électromagnétique s'étirent dans la direction de l'axe de rotation ou dans la direction du champ magnétique moyen imposé (structures en "cigares") et les écoulements stablement stratifiés ont une signature particulière avec des structures en "pancakes", c'est-à-dire une diminution des échelles de longueurs dans la direction de l'axe de la gravité.

Dans le cadre de ce travail, nous allons nous concentrer sur l'une des ces forces à distance, la force de Coriolis, qui apparaît dans les équations de conservation de la quantité de mouvement lorsqu'une rotation d'ensemble est considérée. Les équations qui régissent ce type d'écoulements, écrites dans le repère tournant, sont décrites par l'équation (3.19) et l'équation de continuité (1.2). Les effets de la rotation sur la turbulence ont fait l'objet de nombreux travaux, que ce soit expérimentaux ou numériques. En 1975, Ibbetson & Tritton [1975] montrent expérimentalement qu'un des effets de la rotation est l'augmentation des échelles intégrales de longueurs dans la direction de l'axe de rotation. Ce phénomène s'explique par la propagation de l'énergie par les ondes d'inertie (voir Jacquin *et al.* [1990] par exemple), introduites dans le chapitre 3. Ces observations sont également présentes dans les simulations de Bardina *et al.* [1985] qui montrent également que la rotation diminue le taux de dissipation. En effet, au-delà des effets linéaires qui favorisent la direction verticale² en transportant de l'énergie à la vitesse de groupe c_g (voir équation (3.21)) selon la relation de dispersion anisotrope (3.20) pour $\sigma(\kappa)$,

1. Les écoulements stratifiés sont tels qu'il existe un gradient de densité moyenne, autour de laquelle on observe des fluctuations de densité.

2. La direction verticale sera toujours la direction choisie pour l'axe de rotation.

il existe également des effets non-linéaires, qui favorisent les composantes horizontales pour les termes de transfert d'énergie (voir Cambon & Jacquin [1989], Cambon *et al.* [1997]). De manière globale, le déclin d'énergie cinétique d'un écoulement turbulent non forcé est ralenti par la rotation (Jacquin *et al.* [1990]), malgré les observations de Ibbetson & Tritton [1975] où est observée une augmentation du déclin de l'énergie avec la rotation, la dissipation supplémentaire dans les couches d'Ekman étant supposée responsable.

La bi-dimensionnalisation des écoulements en rotation, dans la limite d'une forte rotation, est un phénomène connu donnant l'apparition des fameuses colonnes de Taylor (Hopfinger *et al.* [1982], Cambon *et al.* [1997], Teitelbaum & Mininni [2011], Moisy *et al.* [2011]). L'écoulement est alors 2D, mais contient 3 composantes (écoulement 2D/3C), la vitesse verticale agissant comme un scalaire passif, insensible à la force de Coriolis et transporté par l'écoulement horizontal (théorème de Taylor–Proudman). Cependant, pour des taux de rotation finis, on observe malgré tout une tendance à une bi-dimensionnalisation lorsque la rotation est présente, mais la nature du phénomène linéaire ou non-linéaire fait débat (voir Cambon & Jacquin [1989], Davidson *et al.* [2006], Staplehurst *et al.* [2008], Lamriben *et al.* [2011a]) et il semblerait que cette tendance à rendre l'écoulement 2D/3C soit complexe et nécessite les deux effets, linéaire et non-linéaire.

Les écoulements turbulents en rotation sont assez bien documentés et leurs dynamiques de mieux en mieux comprises. Nous souhaitons ajouter un degré de complexité supplémentaire en imposant des effets de confinement. Alors, la turbulence n'est plus homogène et toutes les quantités statistiques dépendent de la position spatiale à laquelle elles sont calculées.

Parmi les méthodes numériques permettant de prendre en compte facilement ces deux contraintes (rotation et confinement), nous avons opté pour un code existant pseudo-spectral dont l'utilisation est étendue à des écoulements inhomogènes grâce à l'implémentation de la méthode de pénalisation décrite (chapitre 2) et validée (chapitre 3) précédemment. En effet, à ce jour, les méthodes spectrales sont limitées par le faible nombre de géométries possibles pour les domaines fluides. Il existe des méthodes qui utilisent une discrétisation en polynômes de Chebyshev dans une base cartésienne (géométrie du canal plan) ou dans une base cylindrique (écoulement dans un cylindre, écoulement de Taylor–Couette avec excentricité ou non). Nous souhaitons dans ce travail profiter de la souplesse de la méthode de pénalisation afin d'approfondir notre connaissance des écoulements inhomogènes tournants. Nous allons donc considérer uniquement les effets de la force de Coriolis sur un écoulement confiné par une géométrie assez simple où l'homogénéité est conservée dans deux directions. Il s'agit d'une géométrie cylindrique et les deux directions d'homogénéité sont alors la direction axiale (du fait de la périodicité du domaine de calcul dans la direction axiale) et la direction azimutale.

Le problème de la génération des conditions initiales se pose encore plus ici qu'en turbulence homogène et une première partie de ce chapitre traite donc de l'initialisation d'un champ turbulent confiné et décrit la méthode utilisée. Les paramètres des simulations présentées seront ensuite indiqués, ainsi qu'une description du suivi lagrangien de particules fluides effectué. Nous verrons ensuite l'influence de la rotation et du confinement sur des quantités locales (en déterminant l'influence de la distance de la paroi) et sur des quantités globales.

4.2 Initialisation d'un écoulement turbulent confiné

4.2.1 Écoulement initial homogène isotrope

Une méthode classique pour l'initialisation d'un champ homogène isotrope dans un code spectral consiste en la détermination aléatoire d'un champ de vitesse sous la forme d'une distribution de modes de Fourier dont l'amplitude suit le spectre suivant, fonction de la norme κ du vecteur d'onde, $E(\kappa, t = 0) \simeq \kappa^4 \exp(-2(\kappa/\kappa_i)^2)$. κ_i est le nombre d'onde contenant le maximum d'énergie et il définit également la taille des structures porteuses d'énergie. Ce nombre d'onde ne doit pas être trop grand si nous voulons observer, sur une gamme d'échelles la plus grande possible, la cascade énergétique de Richardson imposée par la dynamique des équations de Navier–Stokes. Il ne doit pas non plus, dans notre cas, être trop petit afin d'éviter la destruction de structures turbulentes trop grandes suite à l'insertion du confinement. Une valeur empirique acceptable est $\kappa_i = 3$ pour la discrétisation spatiale de nos simulations ($N^3 = 512^3$) dans un domaine cubique de côté $L = 2\pi$. Cependant, ce spectre initial ne représente pas du tout un spectre tridimensionnel classique de turbulence. L'intérêt de ce spectre est que nous n'imposons pas de dynamique *a priori* et que c'est la dynamique elle-même des équations de Navier–Stokes qui va transformer cet état initial en un état caractéristique de la turbulence. Ce spectre initial fournit simplement un champ aléatoire où l'énergie est stockée aux faibles nombres d'ondes, caractéristiques des grandes structures, bien qu'il soit difficile de parler de structures sachant que la distribution initiale de vitesse n'est pas corrélée spatialement. Ensuite, nous laissons évoluer le champ (création de plus petites structures) jusqu'à l'obtention d'un écoulement turbulent (spectre en $-5/3$ notamment).

Alors, les questions suivantes se posent : comment et quand doit-on introduire le terme de pénalisation ? Doit-on appliquer la méthode de pénalisation à l'initialisation, dès le premier pas de temps ou une fois que l'écoulement a atteint un état de turbulence développée ? Plusieurs tests non présentés ici ont confirmé que ces méthodes convergent vers le même état statistique de turbulence pour une durée de développement de la turbulence équivalente. Cependant, pendant cette période de développement de la turbulence, il n'est possible de forcer l'écoulement que lorsque celui-ci est homogène. En effet, autant nous connaissons un certain nombre de méthodes pour forcer les écoulements homogènes dans l'espace spectral, autant de telles méthodes pour des écoulements confinés dans des géométries diverses, sans modifier la nature de l'écoulement, sont peu connues. C'est donc pour cette raison que nous développons l'écoulement lorsqu'il est homogène et que nous appliquons *a posteriori* le confinement. Le forçage utilisé ici (voir Favier [2009]) consiste en la réinjection aux grandes échelles ($\kappa \in [2; 4]$), à chaque pas de temps, de l'énergie perdue $\Delta k = k(t) - k(t + \Delta t)$ à cause du terme de diffusion, dans le but de générer un écoulement turbulent tel que le forçage influe au minimum sur la cascade énergétique. Ainsi, il suffit de modifier le module des modes de Fourier $\hat{u}(\boldsymbol{\kappa}, t)$ considérés, en les multipliant par le coefficient β défini par :

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{\Delta k}{\sum_{\kappa \in [2;4]} |\hat{u}(\boldsymbol{\kappa}, t)|^2}} & \text{si } \kappa \in [2; 4], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Ce forçage arbitraire est appliqué jusqu'à ce qu'un état statistiquement stationnaire soit obtenu.

Initialisation	t_i	Re_0	Re_λ	k	l_0	l_λ	$\kappa_{\max} l_\eta$
THI	T_0	655	143	5.37	0.69	0.15	1.1
Turbulence confinée	$T_0 + \tau_{\text{iso}}$ ($t = 0$)	448	96	3.14	0.62	0.13	1.2

TABLE 4.1 – Paramètres de l'écoulement turbulent à la fin du pré-calcul homogène isotrope et à la fin de l'insertion progressive du terme de pénalisation. l_0 et l_λ sont respectivement l'échelle de longueur dite intégrale et l'échelle de Taylor, correspondant respectivement aux nombres de Reynolds $Re_0 = u'l_0/\nu$ et $Re_\lambda = u'l_\lambda/\nu$, où u' est la vitesse caractéristique relative à l'énergie cinétique turbulente moyenne $k = 3u'^2/2$. La valeur de $\kappa_{\max} l_\eta$ indique que toutes les échelles de l'écoulement sont bien résolues, le critère étant $\kappa_{\max} l_\eta > 1$ (voir Jiménez *et al.* [1993]), où κ_{\max} est le plus grand nombre d'onde résolu (c'est-à-dire ne subissant pas la troncature) et l_η est l'échelle de Kolmogorov.

La stationnarité est validée par l'observation simultanée de trois éléments : le spectre d'énergie tridimensionnel, l'énergie cinétique et le taux de dissipation. Une fois ces trois quantités statistiquement stationnaires, nous pouvons alors prendre en compte le confinement. La figure 4.1 montre leur évolution au cours de l'initialisation homogène. Certaines caractéristiques globales de l'écoulement obtenu sont données dans le tableau 4.1 et une visualisation des structures turbulentes à cet instant est montrée par la figure 4.3(a), qui confirme la présence de tourbillons à petite échelle classiquement observés, ainsi que d'une certaine "intermittence" de la turbulence, avec une répartition spatiale inhomogène des tourbillons.

4.2.2 Introduction de la pénalisation

Une autre question à se poser est relative à la façon d'introduire la technique de pénalisation. En effet, nous observons que quelques précautions sont à prendre. On pourrait soudainement introduire le terme de pénalisation dans le schéma numérique, mais une si brusque apparition de la pénalisation introduit nécessairement des oscillations numériques pour le champ de vitesse à proximité de la paroi. Un temps de relaxation est alors requis pour que ces effets disparaissent. Ce problème peut cependant être évité grâce à une introduction progressive du terme de pénalisation :

$$\eta_s(t_i) = \eta^{(t_i - T_0)/\tau_{\text{iso}}} \quad (4.2)$$

où η_s est un paramètre de pénalisation de transition qui évolue exponentiellement de 1 à la valeur désirée de η et t_i est la variable temporelle durant l'initialisation. τ_{iso} est le temps de retournement à l'instant $t_i = T_0$, correspondant à l'état statistiquement stationnaire de la fin du pré-calcul homogène isotrope. À l'instant $t_s = T_0 + \tau_{\text{iso}}$, on peut observer le déclin d'un écoulement turbulent développé confiné par un domaine solide ($\eta_s = \eta$). Dans la suite de ce chapitre, la variable temporelle t est telle qu'à cet instant précis, $t = 0$ (ce qui correspond également à $t_i = t_s$).

Le domaine solide pénalisé est une enceinte cylindrique (voir figure 4.2) de diamètre $D = 2R = 0.9L$, avec des conditions aux limites périodiques dans la direction axiale z et le paramètre de pénalisation vaut $\eta = 10^{-8}$. La fonction masque correspondante est :

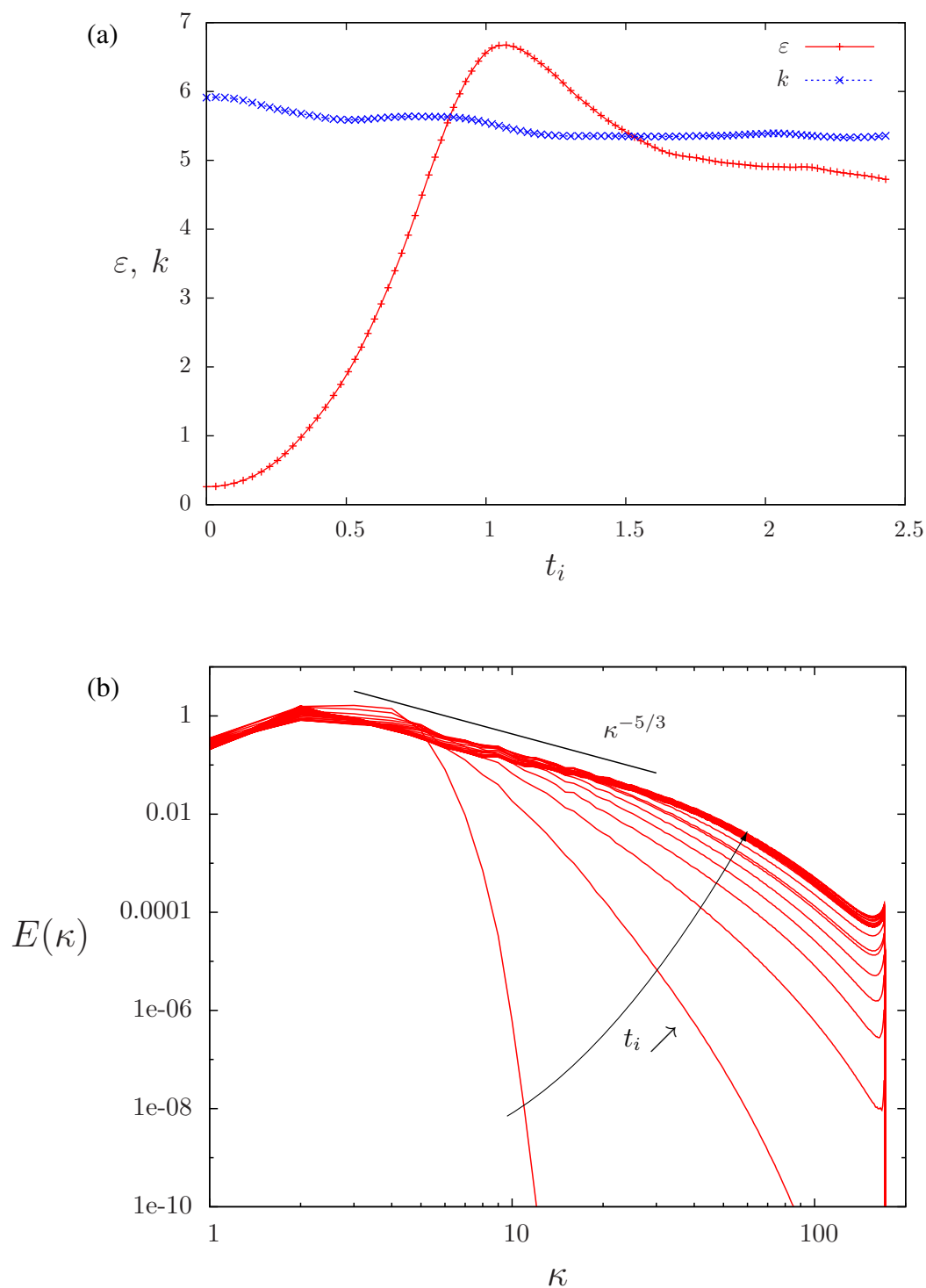


FIGURE 4.1 – Statistiques globales durant l’initialisation homogène du calcul : évolution temporelle (a) de l’énergie cinétique turbulente moyenne k , de la dissipation moyenne ε et (b) du spectre tri-dimensionnel $E(\kappa)$.

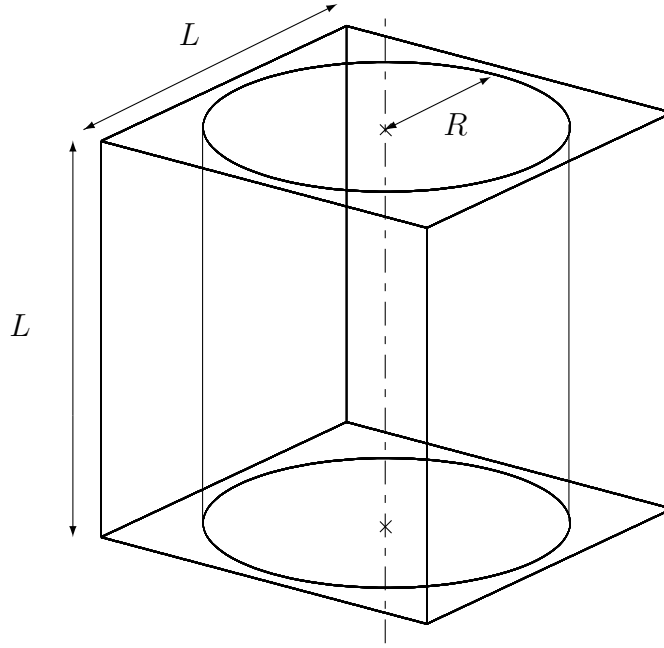


FIGURE 4.2 – Schéma de la géométrie utilisée.

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x - L/2)^2 + (y - L/2)^2 < R^2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Le tableau 4.1 donne également les paramètres principaux de l'écoulement confiné à la fin du processus d'introduction de la pénalisation ($t = 0$). La figure 4.3 montre le champ d'entropie $Z = \omega_i \omega_i / 2$ permettant la visualisation des structures tourbillonnaires de l'écoulement aux instants $t_i = T_0$ et $t_s = T_0 + \tau_{\text{iso}}$. À première vue, il semble que la pénalisation représente correctement la condition d'imperméabilité de la frontière étant donné que l'écoulement semble bien confiné à l'intérieur de la géométrie souhaitée. Ceci est également confirmé en confrontant l'ordre de grandeur des vitesses dans les deux domaines ($\mathcal{O}(\sqrt{\langle u^2 \rangle_S}) \approx 10^{-4} \times \mathcal{O}(\sqrt{\langle u^2 \rangle_D})$). Ainsi, on peut donc considérer que le fluide dans la partie solide est au repos, relativement à l'écoulement observé dans le domaine fluide \mathcal{D} , agissant donc comme une paroi solide.

4.2.3 Paramètres de rotation

À partir de l'état initial décrit par la figure 4.3(b) et des paramètres du tableau 4.1, nous réalisons quatre simulations avec des taux de rotations différents, décrites par le tableau 4.2. Pour toutes les simulations, l'axe de rotation est choisi vertical, aligné avec l'axe du cylindre.

Une des questions que nous nous posons concerne l'excitation de modes d'inertie comme il a été reporté dans de récents dispositifs expérimentaux par Bewley *et al.* [2007] et par Lamriben *et al.* [2011b]. En effet, lors de la translation d'une grille dans une cuve en rotation, l'écoulement turbulent généré est affecté par un écoulement reproductible composé d'ondes d'inertie résonantes, à cause du confinement qui permet la réflexion des ondes d'inertie sur les parois. Ces structures oscillantes spatio-temporelles agissent sur l'écoulement qui ne peut alors plus être rapproché d'un simple écoulement de turbulence homogène en déclin. Typiquement, la signature de ces modes est une oscillation des statistiques temporelles à la fréquence de rota-

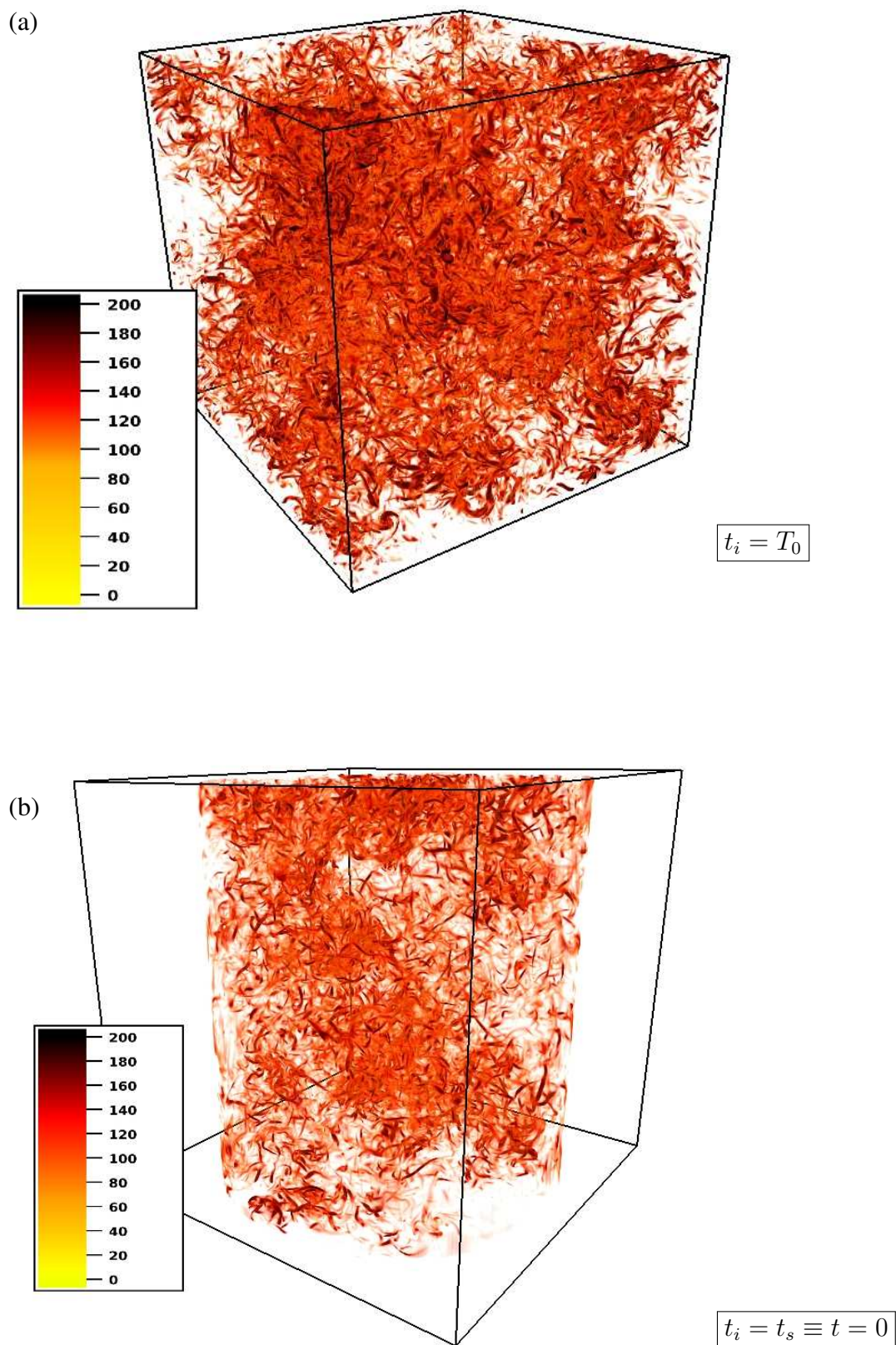


FIGURE 4.3 – Visualisation en volume du champ d’entrophie. (a) : fin du pré-calcul isotrope ($t_i = T_0$). (b) : fin de l’initialisation de l’écoulement confiné ($t_i = t_s$).

Simulation	$f = 2\Omega$	Ro_0	Ro_λ	t_f/τ_0	$\Omega t_f/2\pi$
$f0$	0	∞	∞	76.7	—
$f1$	1	2.33	10.93	76.3	2.61
$f10$	10	0.23	1.09	71.8	24.5
$f100$	100	0.02	0.11	73.6	251.1

TABLE 4.2 – Paramètres relatifs à la rotation. Le paramètre de Coriolis f est défini comme étant le double du taux de rotation. Les nombres de Rossby initiaux sont donnés à l’instant $t = 0$ et caractérisent l’importance des effets d’inertie sur les effets de rotation, de sorte que $\text{Ro}_0 = u'/fl_0$ et $\text{Ro}_\lambda = u'/fl_\lambda$. Nous donnons également le temps physique des simulations, adimensionné par le temps de retournement τ_0 des grandes échelles l_0 à l’instant $t = 0$ ou par la période de rotation $2\pi/\Omega$.

tion $\Omega/2\pi$. Il semblerait que, si cet effet est bien présent dans nos simulations, ce dernier n’est pas d’une amplitude remarquable étant donnés les résultats présentés dans la suite de ce chapitre. Néanmoins, nous ne pouvons ignorer les oscillations des figures 4.10 et surtout 4.15(d). Sur cette dernière figure, représentant le rapport de la contribution verticale sur la contribution horizontale de l’énergie, on observe clairement l’effet d’une structure cohérente dans l’écoulement. Précisons que dans la suite de ce chapitre, aucun filtrage n’a été effectué pour extraire un quelconque champ dû à ces modes d’inertie, qui ne nous semblent donc pas aussi prévalents que dans les expériences. Ceci pourrait s’expliquer par l’absence d’un confinement vertical dans nos simulations.

4.2.4 Suivi de particules fluides

Les statistiques lagrangiennes des simulations présentées dans ce chapitre sont obtenues en suivant des particules fluides, leurs trajectoires étant définies par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(\mathbf{X}_p, t), t) = \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} \quad (4.4)$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse eulérien qui dépend de la position de la particule \mathbf{x}_p à l’instant t . La particule a pour unique paramètre sa position $\mathbf{X}_p = (x_p, y_p, z_p)$ à l’instant $t = 0$. La vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(\mathbf{X}_p, t), t)$ à la position de la particule est obtenue en interpolant le champ de vitesse eulérien avec une méthode spatiale d’ordre 6 dans les trois directions (voir Balachandrar & Maxey [1989]). Au début des simulations ($t = 0$), nous déterminons de manière aléatoire dans le domaine fluide la position initiale de 80 000 particules à suivre, pour lesquelles nous résolvons l’équation (4.4) à chaque pas de temps, avec un schéma temporel adaptatif d’Adams-Bashforth d’ordre 3. Les statistiques lagrangiennes sont obtenues en post-traitant les trajectoires stockées pendant le calcul.

Tout d’abord, nous confirmons à nouveau le comportement qualitatif correct de la paroi pénalisées. La figure 4.4 montre des exemples de trajectoires et le tableau 4.3 donne, sur le nombre total de particules fluides suivies (ou traceurs), le nombre de particules qui restent dans le domaine fluide tout au long du calcul.

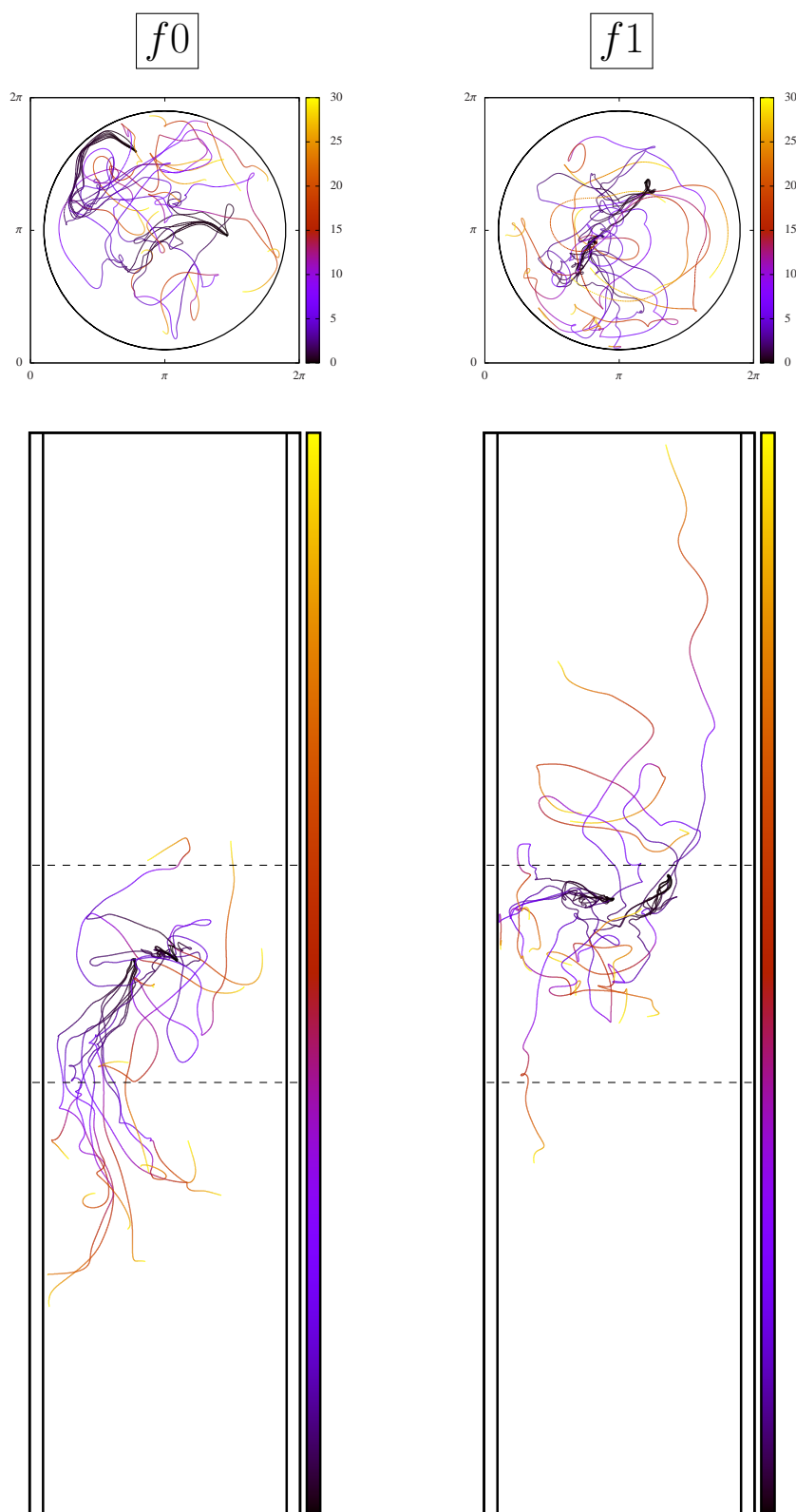


FIGURE 4.4 – Trajectoires des particules fluides (gauche : sans rotation, droite : avec faible rotation). Les figures supérieures montrent une vue de dessus, dans l'axe du cylindre et les images inférieures représentent une coupe dans un plan vertical contenant l'axe du cylindre avec les mêmes particules. Deux groupes de 8 trajectoires de traceurs initialement voisins sont tracés pour chaque simulation et la couleur représente la variable temporelle. Enfin, les lignes pointillées horizontales représentent le domaine de calcul de base de taille 2π .

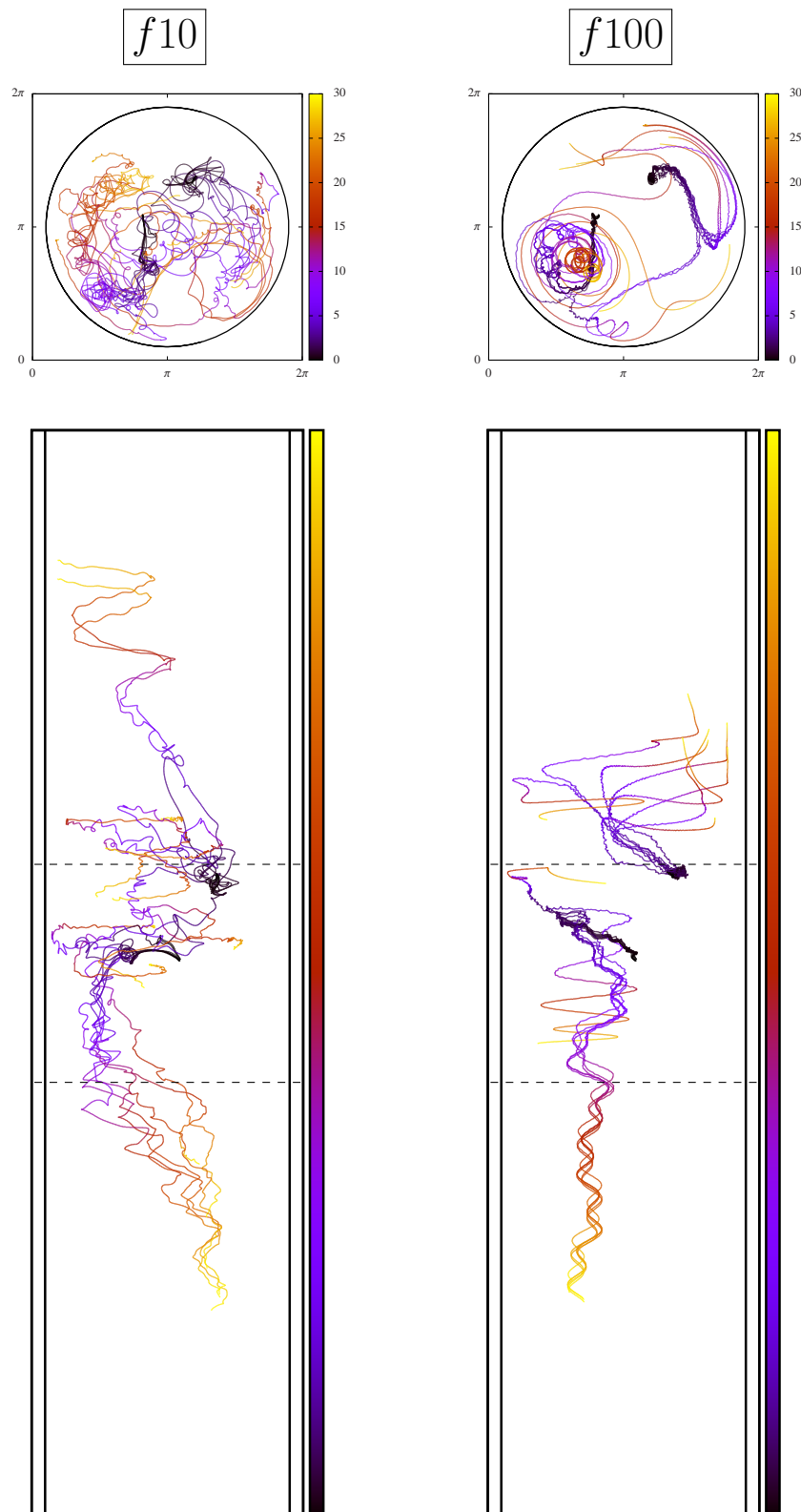


FIGURE 4.4 – Trajectoires obtenues pour les différentes simulations (gauche : $f10$, droite : $f100$). Voir détails des graphiques page précédente.

Simulation	Nombre de particules valables n_p (%)
$f0$	79,335 (99.17%)
$f1$	79,397 (99.25%)
$f10$	79,600 (99.50%)
$f100$	79,679 (99.60%)

TABLE 4.3 – Nombre de particules restant dans le domaine fluide durant la totalité des calculs.

Dans les quatre simulations, plus de 99% des traceurs restent strictement dans le domaine cylindrique durant la totalité du déclin. Nous excluons cependant du calcul des statistiques les particules qui apparaissent dans la région solide à un instant quelconque du calcul pour que les résultats soient valables. L'explication de l'apparition de quelques traceurs dans la zone solide à un certain instant peut être double. Tout d'abord, la définition de l'interface fluide/solide numérique ne suit pas le maillage comme expliqué précédemment de sorte qu'une particule peut avoir une position radiale plus grande que R sans avoir franchi une arête reliant deux nœuds de collocation appartenant au domaine solide ($\chi = 1$). Une autre raison est que la méthode de pénalisation, telle qu'utilisée dans nos simulations, agit comme une paroi poreuse, avec une porosité effective très faible $\eta_{\text{eff}} \approx \Delta t$, mais n'exclut pas strictement un écoulement très lent dans la zone solide, comme le ferait une paroi vraiment imperméable. Cela explique l'apparition de quelques particules égarées dans le domaine solide dans une région évidemment très proche de la frontière.

4.3 Influence de la distance à la frontière

4.3.1 Décomposition virtuelle du domaine fluide

Afin de caractériser l'influence de la position radiale, et donc la distance à la paroi, nous définissons plusieurs régions dans lesquelles les statistiques seront calculées séparément, de manière équivalente à Jause-Labert & Godefert [2011]. Ce découpage arbitraire est montré sur la figure 4.5 et est tel que trois zones sont définies : une zone centrale (de cœur) où la distance à la paroi est maximum ($0 \leq r < R/3$) et où les effets de parois seront *a priori* les moins importants ; une zone intermédiaire ($R/3 \leq r < 2R/3$) ; une zone de paroi définie par $2R/3 \leq r < R$, contenant la couche limite et où une forte modification de la cinématique, voire de la dynamique de la turbulence est attendue.

4.3.2 Distribution du champ de vitesse

Afin d'observer les effets locaux du confinement sur le champ de vitesse, nous traçons sur la figure 4.6 la densité de probabilité (*pdf*) de la vitesse radiale u_r normalisée par la valeur de sa variance σ_{u_r} (valeur *rms* pour *root-mean-square* : $\sigma \equiv \sqrt{\langle \cdot \rangle^2}$) dans les trois régions précédemment définies, moyennée sur toute la durée du déclin.

Comme déjà observé en turbulence 2D (voir Kadoch *et al.* [2008]), la présence de la paroi introduit, dans la zone ③ proche de l'interface un pic autour de la valeur $u_r = 0$, qui représente

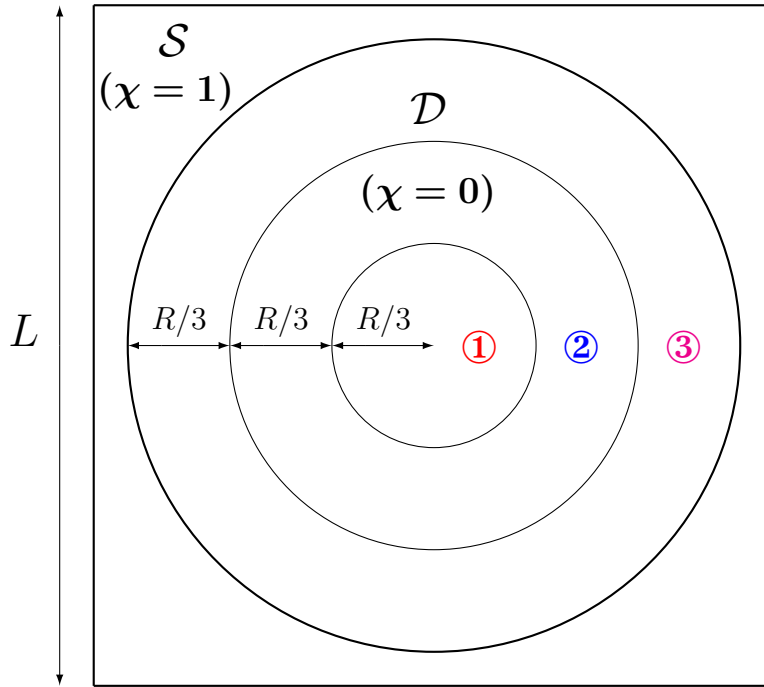


FIGURE 4.5 – Définition des trois régions annulaires du domaine fluide \mathcal{D} . ① est la zone de cœur telle que $r \in [0; R/3[$. ② est la région intermédiaire avec $r \in [R/3; 2R/3[$. ③ est la région de proche paroi qui contient la couche limite ($r \in [2R/3; R[$.)

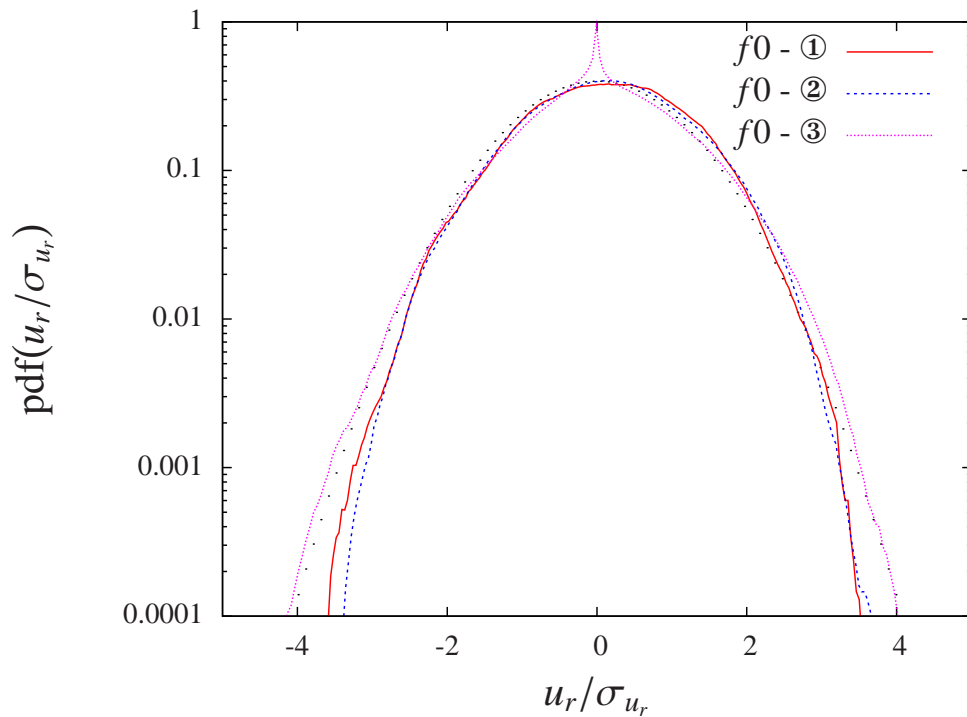


FIGURE 4.6 – Pdfs normalisées de la vitesse radiale pour la simulation $f0$ (pas de rotation) dans les différentes zones, moyennées temporellement sur la durée de la simulation. La fine ligne pointillée indique une distribution gaussienne.

la trace de la couche limite et de la condition de non-glissement imposée par la méthode de pénalisation. Nous observons également que dans cette région, la *pdf* est dissymétrique comme le montre la comparaison avec la distribution gaussienne, qui est par définition symétrique. En effet, la contrainte directionnelle qu'impose la présence de la paroi diminue le nombre d'occurrences de valeurs positives (vecteur vitesse dirigé vers la paroi) par rapport aux valeurs négatives (vecteur vitesse orienté dans le sens opposé à la paroi). Dans la région centrale (①) et dans la région intermédiaire (②), nous vérifions que la symétrie de la distribution de vitesse est retrouvée, de sorte qu'aucun effet de paroi dans ces régions ne peut être déduit de cette figure. Nous n'avons tracé que les *pdfs* du cas sans rotation pour isoler les effets de confinement. Cependant, les mêmes tendances (pic et dissymétrie des distributions) sont observées lorsque la rotation est prise en compte. Enfin, lorsque nous regardons les *pdfs* des composantes de vitesse azimutales et verticales dans les différentes zones (non tracées), nous ne retrouvons pas de tendance aussi marquée pour d'éventuels pics à $u_\theta = 0$ et $u_z = 0$ et aucune dissymétrie n'apparaît. En effet, la distance à la paroi sur laquelle est observée une évolution des composantes tangentielles (azimutale et verticale) moyennes dans la couche limite est beaucoup plus faible et le pic dû à la condition de non-glissement n'est donc pas observable, du fait de la petitesse de la zone impliquée.

Un autre effet connu du confinement cylindrique sur la vitesse est l'augmentation de la composante verticale sur la composante azimutale dans la couche limite. Pour mettre en avant cet effet, Jause-Labert & Godeferd [2011] ont observé l'évolution radiale de la valeur *rms* des différentes composantes du vecteur vitesse, moyennée azimutalement et verticalement. Sur la figure 4.7, nous traçons la même quantité, notée \tilde{u}_\bullet , pour chaque composante, normalisée par la vitesse *rms* globale dans tout le domaine fluide, donnée par $\langle u_\bullet^2 \rangle_{\mathcal{D}} = 2k/3$. Cette normalisation permet de moyennner les résultats sur une plus grande durée de simulations pour éviter tout effet ponctuel non représentatif. La quantité considérée est alors :

$$\tilde{u}_\bullet(r) = \left\langle \sqrt{\frac{\langle u_\bullet^2 \rangle_{\theta,z}}{\langle u_\bullet^2 \rangle_{\mathcal{D}}}} \right\rangle_t, \quad (4.5)$$

où l'indice \bullet dénote soit la composante de vitesse radiale, azimutale ou verticale et la moyenne temporelle étant réalisée sur la totalité de la simulation. En commençant par la simulation sans rotation $f0$, on observe une tendance claire dans la couche limite. En effet, cette couche limite est délimitée par le début du déclin de $\tilde{u}_\bullet(r)$, caractéristique de l'évolution d'une composante normale à la paroi. Ce déclin est observé à $r/R \approx 0.7$. Quant aux composantes tangentielles, leurs valeurs commencent à décroître à partir de $r/R \approx 0.9$. Il est important de noter que dans cette simulation sans rotation, la différence entre la composante verticale et la composante azimutale augmente en approchant de la paroi jusqu'à $r/R \approx 0.9$. Cela semble donc confirmer la préférence accordée à la direction verticale dans les cas sans rotation proche de la paroi, le rapport $\tilde{u}_z/\tilde{u}_\theta$ y étant maximum (≈ 1.4 à $r/R = 0.85$).

En appliquant un faible taux de rotation (simulation $f1$), la tendance est équivalente et ce rapport est toujours plus grand que 1 dans la couche limite. La délimitation de la couche limite est toujours bien visible à $r/R \approx 0.7$. Cependant, la composante azimutale est désormais plus grande vers le centre du domaine fluide \mathcal{D} , la force de Coriolis agissant explicitement sur les composantes du plan normal à la rotation (voir équation (3.19)).

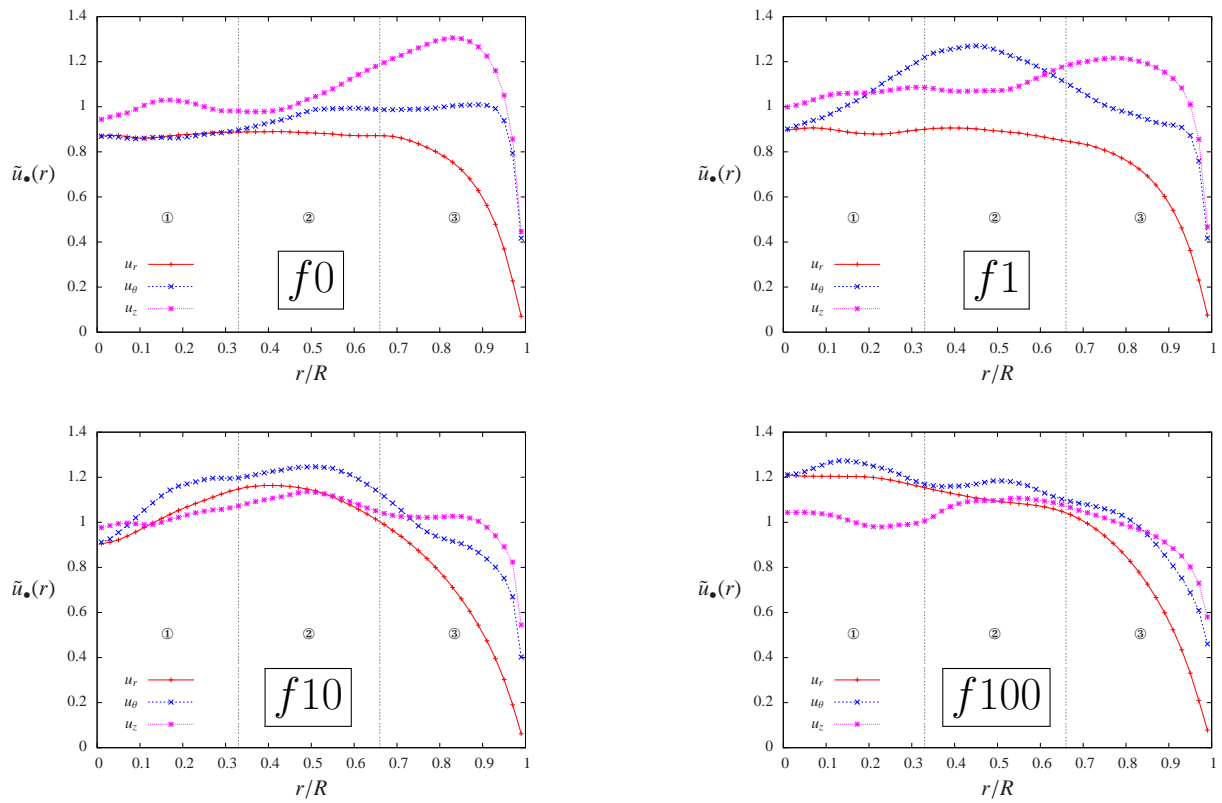


FIGURE 4.7 – Évolution des composantes de vitesse moyennées en fonction de la position radiale.

Pour les cas à forts taux de rotation ($f10$ et $f100$), le scénario est légèrement différent. Tout d'abord, la délimitation de la couche limite n'est plus aussi évidente. On observe un déclin de \tilde{u}_r à partir de $r/R \approx 0.5$ pour la simulation $f10$ et à partir de $r/R \approx 0.6$ pour le calcul $f100$. De plus, la composante verticale n'est plus si importante dans la zone de paroi. Comme la rotation tend à redistribuer l'énergie aux composantes horizontales, cela tend à créer un écoulement invariant dans la direction de l'axe de rotation (dans la limite d'un taux de rotation infini), entraînant un déclin plus rapide de la contribution verticale à l'énergie que la contribution horizontale (voir les courbes suivantes 4.15(c) et 4.15(d)). Cet effet est évident en regardant la figure correspondant à la simulation $f100$, où $\tilde{u}_z/\tilde{u}_\theta \approx 0.85$ si $r/R < 0.9$. Cependant, un point similaire à toutes les simulations est que le déclin des composantes tangentielles se produit dans une zone étroite telle que $r/R \geq 0.9$.

L'évolution radiale de \tilde{u}_\bullet semble donc confirmer que le confinement introduit une direction préférentielle (verticale) entre les directions tangentielles (azimutale et verticale). Mais cette tendance ne peut être observée pour des écoulements turbulents à faibles nombres de Rossby (forts taux de rotation) car dans ces cas-là, la composante azimutale est explicitement soumise à la force de Coriolis, contrairement à la composante verticale. Précisons enfin que $\tilde{u}_\bullet(r = R) \approx 0$, le dernier point montré sur les figures 4.7 correspondant à $r = 0.99R$.

4.3.3 Échelles de longueur intégrales

Dans ce paragraphe, nous montrons l'évolution temporelle des échelles de longueur intégrales dans les différentes zones. Dans ces différentes régions, nous calculons les échelles de longueur radiale (L_{rr}^r) et verticale (L_{zz}^z) :

$$L_{rr}^r = \int_0^{R/3} \frac{\langle u_r(\mathbf{r})u_r(\mathbf{r} + l\mathbf{e}_r) \rangle_\odot}{\sqrt{\langle u_r^2(\mathbf{r}) \rangle_\odot} \sqrt{\langle u_r^2(\mathbf{r} + l\mathbf{e}_r) \rangle_\odot}} dl, \quad (4.6a)$$

$$L_{zz}^z = \frac{1}{2} \int_0^{L_z} \frac{\langle u_z(\mathbf{r})u_z(\mathbf{r} + l\mathbf{e}_z) \rangle_\odot}{\sqrt{\langle u_z^2(\mathbf{r}) \rangle_\odot} \sqrt{\langle u_z^2(\mathbf{r} + l\mathbf{e}_z) \rangle_\odot}} dl, \quad (4.6b)$$

où $\langle \rangle_\odot$ indique une moyenne spatiale dans une des trois régions définies plus haut. Notons que, pour le calcul des échelles de longueur radiales ou des échelles de longueur verticales, les valeurs déterminées sont limitées par les bornes de l'intégration des équations (4.6). Ainsi, les valeurs de L_{rr}^r sont bornées à $\max(L_{rr}^r) = R/3 \approx 0.94$ et $\max(L_{zz}^z) = L/2 = \pi$.

Afin de déterminer des lois asymptotiques sur l'évolution des échelles de longueur, on utilise les lois sur le déclin de l'énergie cinétique. Pour des écoulements isotropes, on a, suivant la distribution du spectre d'énergie aux grandes échelles :

- pour un spectre en κ^2 aux grandes échelles (petits κ , Saffman [1967]) : $k \propto t^{-6/5}$;
- pour un spectre en κ^4 aux grandes échelles (Kolmogorov [1941c], Ishida *et al.* [2006]) : $k \propto t^{-10/7}$.

Ensuite, à partir d'arguments sur le taux de transfert d'énergie, Squires *et al.* [1994] ont montré qu'en présence de rotation, il était possible de déterminer des lois asymptotiques du déclin d'énergie cinétique telles que :

- pour un spectre en κ^2 aux grandes échelles (petits κ) : $k \propto t^{-3/5}$;
- pour un spectre en κ^4 aux grandes échelles : $k \propto t^{-5/7}$.

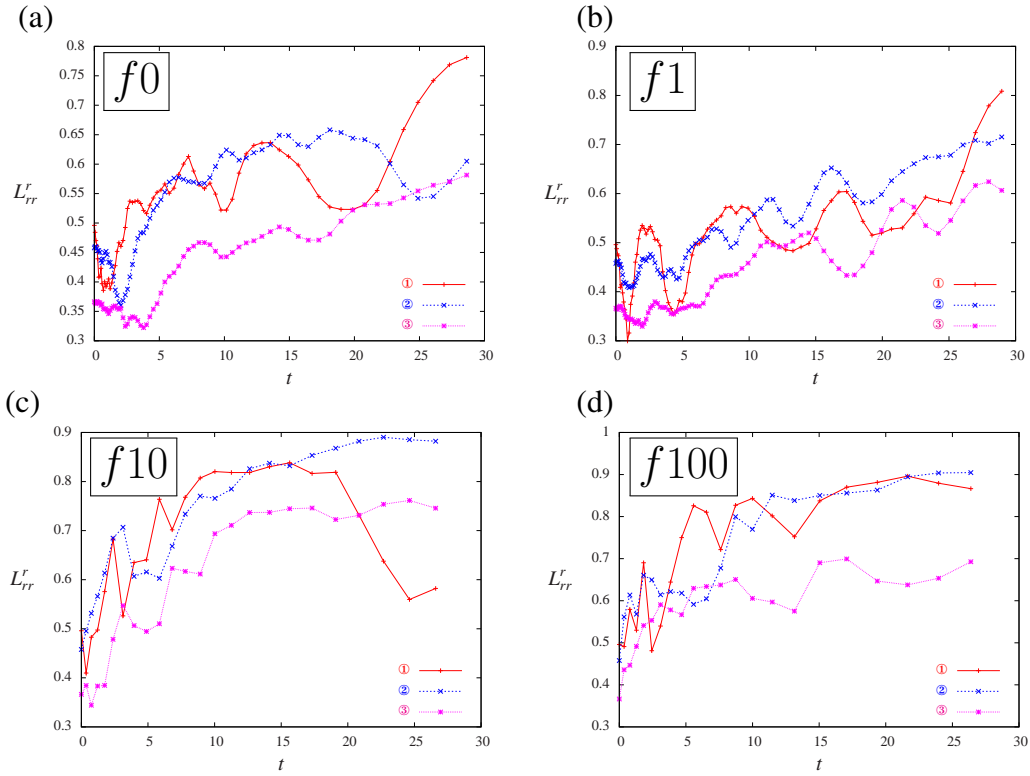


FIGURE 4.8 – Évolution temporelle des échelles de longueurs radiales L_{rr}^r , calculées dans les trois régions de la figure 4.5, pour les différentes simulations effectuées. (a) : $f0$, (b) : $f1$, (c) : $f10$ et (d) : $f100$.

Une conséquence immédiate de ces lois sur le déclin de l'énergie porte sur l'évolution des échelles intégrales de longueur³. Ainsi, Squires *et al.* [1994] proposent également des lois d'évolution pour les échelles intégrales de longueur dans le plan horizontal, avec un spectre initial en κ^2 aux grandes échelles :

- Cas isotrope : $k \propto t^{-6/5} \Rightarrow L^{iso} \propto t^{2/5}$;
- En rotation : $k \propto t^{-3/5} \Rightarrow \begin{cases} \text{échelles horizontales : } L_{xx}^{x,y} \propto L_{yy}^{x,y} \propto L_{zz}^{x,y} \propto t^{1/4} ; \\ \text{échelles verticales : } L_{xx}^z \propto L_{yy}^z \propto t \text{ et } L_{zz}^z \propto t^{1/4} . \end{cases}$

Une analyse dimensionnelle équivalente pour les lois des spectres aux grandes échelles en κ^4 est également donnée en parallèle (Squires *et al.* [1994]) :

- Cas isotrope : $k \propto t^{-10/7} \Rightarrow L^{iso} \propto t^{2/7}$;
- En rotation : $k \propto t^{-5/7} \Rightarrow \begin{cases} \text{échelles horizontales : } L_{xx}^{x,y} \propto L_{yy}^{x,y} \propto L_{zz}^{x,y} \propto t^{1/5} ; \\ \text{échelles verticales : } L_{xx}^z \propto L_{yy}^z \propto t^{6/5} \text{ et } L_{zz}^z \propto t^{1/5} . \end{cases}$

La première conclusion que nous pouvons tirer de la figure 4.8 est que l'effet principal du confinement est de réduire l'échelle de longueur radiale des structures turbulentes près de la paroi. En effet, avec ou sans rotation, la courbe violette, indiquant la zone de paroi ③, est toujours en-dessous des courbes caractérisant les zones centrales.

3. Les lois indiquées ici ont été déterminées pour des écoulements homogènes avec les notations de directions classiques (x, y, z) , la direction z dénotant la verticale et l'axe de rotation. Dans notre configuration cylindrique, nous supposons équivalentes les utilisations des vitesses radiales ou azimutales en lieu et place des vitesses suivant les axes x ou y , ces quatre directions étant toutes horizontales et normales à la direction de rotation. La séparation, quant à elle, sera radiale lorsque nous souhaiterons une séparation horizontale pour le calcul des échelles intégrales.

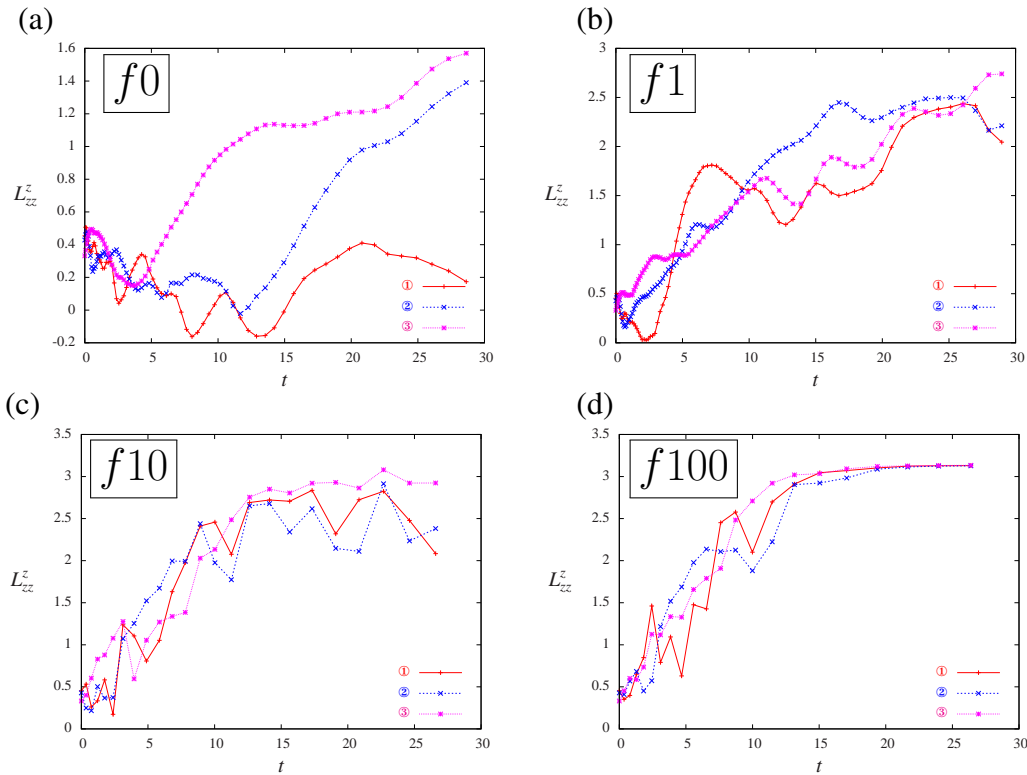


FIGURE 4.9 – Évolution temporelle des échelles de longueurs verticales L_{zz}^z , calculées dans les trois régions de la figure 4.5, pour les différentes simulations effectuées. (a) : $f0$, (b) : $f1$, (c) : $f10$ et (d) : $f100$.

Cependant, en regardant les échelles verticales L_{zz}^z du cas sans rotation sur la figure 4.9(a), il semble que la contrepartie de l'effet cité ci-dessus est d'étirer les structures turbulentes près de la paroi dans la direction périodique verticale. Cette tendance n'est pas aussi visible pour les écoulements tournants car la rotation seule entraîne déjà la formation de structures allongées dans la direction de l'axe de rotation (voir Ibbetson & Tritton [1975], Bardina *et al.* [1985], Moisy *et al.* [2011]). On peut donc supposer que l'effet de la paroi est négligeable devant l'effet de la rotation pour des taux de rotation non négligeables et que l'élongation verticale des tourbillons dans les simulations prenant en compte la rotation est principalement due à cette dernière. Cela explique que lorsque l'on augmente le taux de rotation, les courbes des différentes zones tendent à ne faire qu'une. En réalité, les structures deviennent de plus en plus grandes à cause de la rotation et également du déclin. Plus le taux de rotation est important, plus les structures s'allongent vite, jusqu'à atteindre la taille de la boîte de calcul, la périodicité agissant alors comme un confinement numérique pour le calcul des échelles intégrales.

Ces résultats montrent que le confinement radial inhibe l'expansion radiale des structures turbulentes. Cela implique une élongation dans la direction verticale, élongation d'autant plus rapide que le taux de rotation est élevé, jusqu'à ce que le calcul des échelles de longueur intégrales soient limitées par la taille du domaine numérique périodique.

Il faut également faire attention, lors de la comparaison des évolutions temporelles des échelles de longueur avec les lois asymptotiques données par Squires *et al.* [1994] à ne considérer que les instants tels que $t < 10$ dans les simulations à forts taux de rotation ($f10$ et $f100$) car la saturation des valeurs des échelles de longueur du au confinement numérique est

observée pour ces simulations aux instants suivants.

Les figures 4.10 (a), (b) et (c) montrent, en échelles logarithmiques, l'évolution temporelle, dans la zone de paroi, des échelles de longueurs L_{rr}^r , L_{rr}^z et L_{zz}^z . Les lois asymptotiques des cas homogènes sont indiquées par des traits pleins. En ce qui concerne les échelles horizontales (L_{rr}^r), nous observons que les évolutions obtenues dans notre contexte inhomogène correspondent assez bien aux lois obtenues par analyse dimensionnelle pour la turbulence homogène, à l'exception des instants supérieurs à $t > 10$ pour les cas $f10$ et $f100$ comme dit précédemment. La même observation peut être faite pour la quantité L_{rr}^z représentant une des échelles intégrales verticales et on note sur les figures 4.10(a) et (b) qu'un faible taux de rotation ($Ro_0(t=0) = 0.02$ pour la simulation $f1$) a peu d'effets sur les échelles intégrales, les courbes représentatives des simulations $f0$ et $f1$ étant très similaires. La similarité des simulations $f0$ et $f1$ s'explique par le fait qu'un taux de rotation si faible n'influe pas sur la dynamique de l'écoulement ; l'échelle de Zeman κ_Ω associée (voir Zeman [1994] et la section 4.4.2) est comprise entre 0 et 1 pour la simulation $f1$. Pour l'échelle verticale L_{zz}^z , il est assez difficile de déterminer, à partir de l'allure de la courbe obtenue, une loi satisfaisante pour le cas sans rotation (la loi asymptotique homogène est cependant indiquée : $t^{2/7}$). Pour les simulations en rotation, les tendances sont plus nettes et l'on peut imaginer une évolution telle que $L_{zz}^z \propto t^{2/5}$, ce qui est en désaccord avec le cas homogène d'un spectre initial en κ^4 aux grandes échelles ($L_{zz}^z \propto t^{1/5}$). Il semblerait alors que le confinement radial, associé aux effets de la force de Coriolis, favorise l'élongation des structures porteuses d'énergie dans la direction verticale, d'où une loi d'évolution de l'échelle intégrale verticale L_{zz}^z plus rapide que dans le cas homogène.

4.3.4 Taux de dissipation

Dans le cas de dispositifs expérimentaux avec des parois normales à la direction de rotation, les couches d'Ekman favorisent la dissipation de l'énergie cinétique turbulente de sorte que le déclin de cette dernière soit même plus rapide qu'en turbulence homogène (Ibbetson & Tritton [1975]). Dans notre configuration, existe-t-il une région, celle de proche paroi par exemple, qui contribue significativement plus à la dissipation globale ?

Du fait de la présence de la paroi, une couche limite, plus ou moins épaisse en fonction du taux de rotation (voir figure 4.7), est générée sur la paroi, impliquant l'augmentation de la valeur des gradients de vitesse par rapport à ceux présents dans le cœur de l'écoulement. On peut supposer que le taux de dissipation local est plus grand dans cette zone, la dissipation ayant pour expression :

$$\varepsilon = \nu \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \nu (\nabla \times \mathbf{u})^2 \quad (4.7)$$

Cependant, en regardant l'évolution temporelle de ε dans chacune des régions et pour chaque simulation, nous n'observons aucune différence significative entre les trois zones. La figure 4.11 donne les courbes des différentes régions pour le cas sans rotation. Plusieurs explications peuvent être données pour interpréter les résultats de la figure 4.11. Tout d'abord, il est possible que le nombre de Reynolds considéré dans ces simulations soit trop faible, ce qui a pour effet d'avoir une couche limite très large avec des gradients de vitesse beaucoup moins marqués près de la paroi. Une seconde explication provient du découpage opéré en trois zones. En effet, un découpage plus fin (10 zones par exemple) aurait permis de mieux isoler les effets locaux de couche limite. Dans le cas présent, il est possible que les forts gradients de la zone ③ (à partir

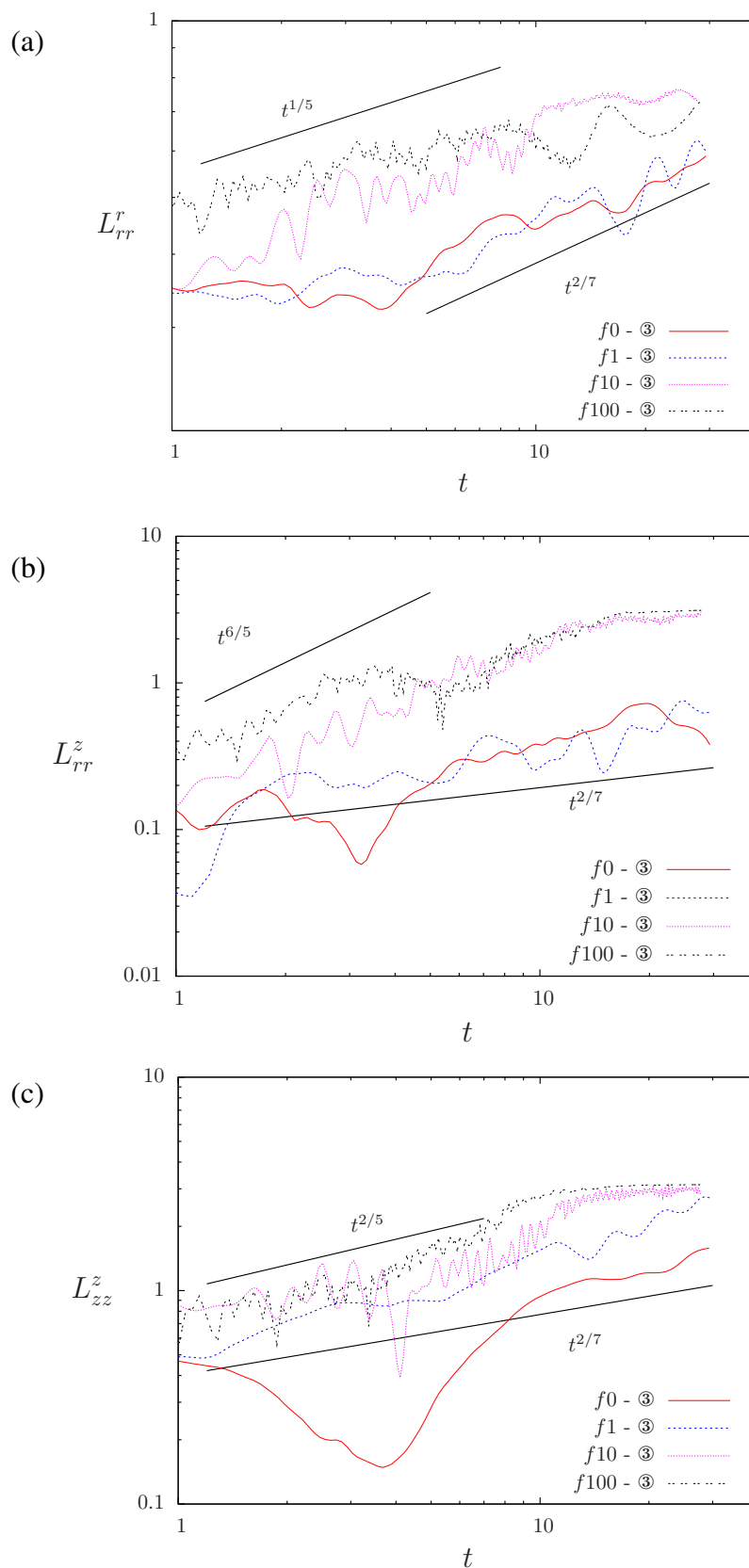


FIGURE 4.10 – Comparaison des évolutions temporelles des échelles intégrales de longueur avec les lois asymptotiques en turbulence homogène. (a) L_{rr}^r , (b) L_{rr}^z et (c) L_{zz}^z . Ces quantités sont calculées dans la zone de paroi ③.

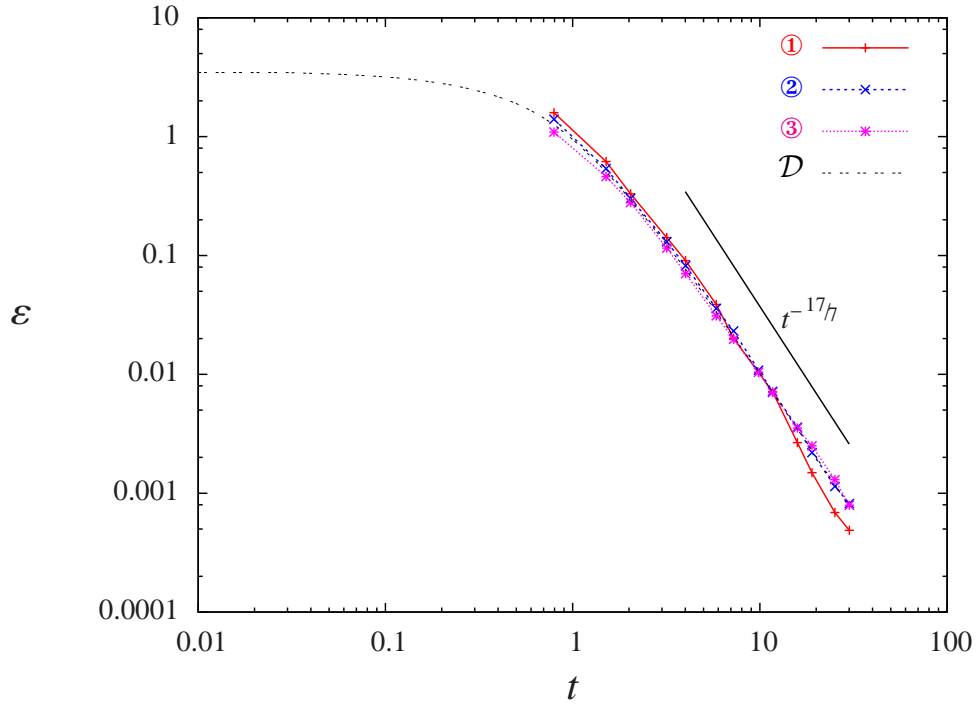


FIGURE 4.11 – Évolution du taux de dissipation ε pour la simulation $f0$, tracé dans les trois différentes zones radiales en échelles logarithmiques. Le taux de dissipation moyen du domaine fluide \mathcal{D} est indiqué par une ligne grise pour comparaison.

de $r/R \approx 0.9$) soient noyés dans une zone trop grande où une dissipation “raisonnable” est observée dans la majeure partie de cette région. Enfin, nous ne pouvons oublier l’hypothèse (malgré tout peu probable) des effets de la condition initiale : cette observation n’est peut-être qu’unique ou arrive dans de très rares simulations et une moyenne d’ensemble serait alors intéressante (bien qu’inimaginable en DNS en raison des coûts et temps de calcul).

De par cette observation, nous ne pouvons conclure quant à la taille des structures dissipatives proches de la paroi. Cependant, en moyenne, il semble que les structures dissipatives soient, en moyenne, de la même taille dans les trois régions, l’échelle de Kolmogorov ayant pour définition $l_\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. On note également que la pente du cas homogène sans rotation ($\varepsilon \propto t^{-17/7}$) est bien retrouvée⁴.

Bien que le résultat montré par la figure 4.11 représente la simulation sans rotation, les mêmes observations sont faites pour les simulations tournantes et le caractère anisotrope des structures dissipatives en turbulence en rotation (voir Lamriben *et al.* [2011a]) n’a pas été traité.

4.3.5 Distribution des accélérations lagrangiennes

D’un point de vue lagrangien, l’accélération se définit ainsi :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_p(\mathbf{X}_p, t), t) = \frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} \quad (4.8)$$

4. En effet, $\varepsilon = \frac{dk}{dt}$ et la tendance et comme en turbulence homogène, l’évolution temporelle de l’énergie cinétique est $k \propto t^{-10/7}$, la tendance observée est bien en accord avec la dissipation en THI

Comme les vitesses des particules fluides suivies (vitesses lagrangiennes) sont stockées tout au long des simulations, on peut calculer à partir de ces dernières les accélérations lagrangiennes pour chacune des 80 000 particules et à chaque itération. Le schéma temporel utilisé pour la discrétisation de l'équation (4.8) est identique à celui de l'avancement temporel de la solution du champ de vitesse (Adams–Bashforth d'ordre 3 adaptatif).

La figure 4.12 montre, pour les différentes simulations traitées, la *pdf* des accélérations radiales (figure (a)) et verticales (figure (b)) en fonction de la position de la particule x_p (en utilisant les zones définies par la figure 4.5). Les accélérations sont normalisées par la valeur $rms \sigma_{a_\bullet}(t) = \sqrt{\langle a_\bullet^2 \rangle_{\mathcal{D}}}$.

Nous observons la signature typique de l'intermittence (voir Mordant *et al.* [2001], Biferale *et al.* [2004]) pour les simulations à faible nombre de Rossby, car les distributions d'accélération sont loin de la gaussianité observée des *pdfs* de vitesse. On voit ici l'existence de très larges ailes signifiant la présence régulière d'évènements très violents. En effet, la gamme⁵ de valeur pour $a_\bullet/\sigma_{a_\bullet}$ est telle que, pour le cas $f = 0$, $-60\sigma_{a_r} \leq a_r < 30\sigma_{a_r}$. Cependant, on observe clairement un des effets de la rotation qui tend à réduire l'intermittence du signal de sorte que les *pdfs* pour la simulation $f100$ ont une distribution proche d'une distribution gaussienne, sauf pour la distribution de la composante radiale évaluée dans la zone de paroi ③. Cette tendance à la distribution gaussienne apparaît pour les faibles valeurs du rapport $a_\bullet/\sigma_{a_\bullet}$ dans le cas de faibles taux de rotation et s'étend à la totalité de la distribution pour les écoulements dominés par la rotation.

Du fait de ce comportement intermittent, surtout pour les simulations $f0$ et $f1$, un pic à $a_r = 0$ n'est que très peu (voire pas) visible dans la région de paroi. Cependant, l'asymétrie est toujours présente dans la zone ③ pour la composante radiale, normale à la paroi, comme précédemment observé pour la distribution de vitesse radiale (figure 4.6). La figure 4.13 met en avant l'asymétrie de ces *pdfs* en traçant les mêmes données avec, pour abscisse, la valeur absolue $|a_\bullet/\sigma_{a_\bullet}|$. Ainsi, la dissymétrie est rendue évidente par la non-superposition de la branche des accélérations positives avec la branche des accélérations négatives. La figure 4.13 nous montre que pour la majorité des simulations, il existe une dissymétrie de la *pdf* de la composante normale d'accélération dans la zone de proche paroi ③ — seule la simulation $f100$ à très fort taux de rotation ne montre pas cet effet. Le retour à une distribution gaussienne lorsque l'on augmente le taux de rotation est très bien observée, le maximum d'accélération radiale valant environ $60\sigma_{a_r}$ pour la simulation sans rotation et $7\sigma_{a_r}$ pour la simulation $f100$. On remarque également que pour la simulation $f100$, même si la symétrie semble respectée dans la zone de paroi pour la *pdf* de l'accélération radiale et verticale, la distribution s'écarte de la gaussianité dans le cas de la composante radiale.

Nous remarquons également que cette asymétrie augmente avec le temps, la distribution des valeurs positives décroissant plus vite que celle des valeurs négatives. La figure 4.14 montre la *pdf* de l'accélération radiale dans le domaine fluide total à différents instants du déclin pour la simulation sans rotation.

5. Pour des raisons de clarté, les extrémités des *pdfs* ne sont pas montrées.

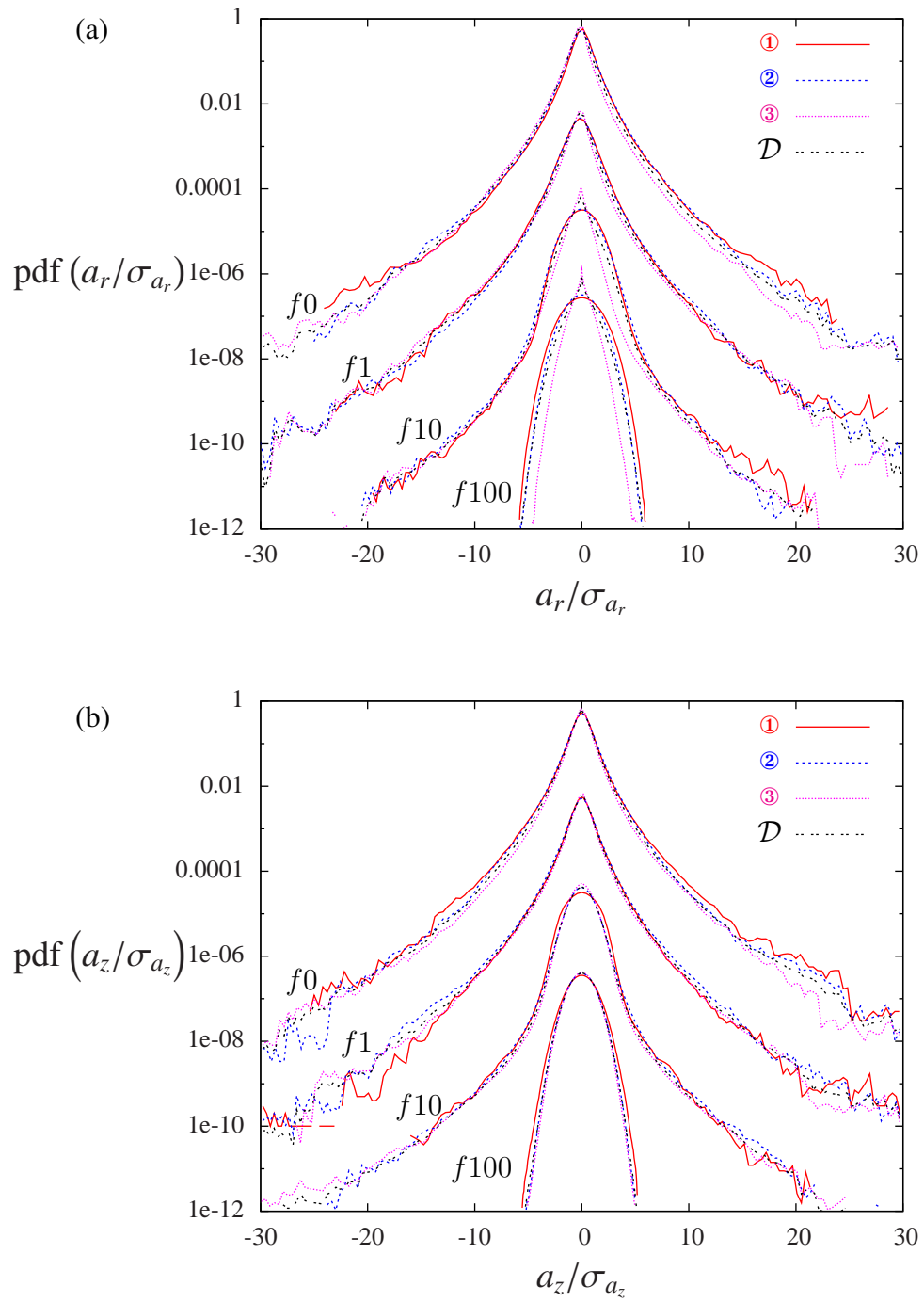


FIGURE 4.12 – Pdfs normalisées des composantes d'accélération radiales (a) et verticales (b), calculées dans les trois zones ①, ②, ③ et dans le domaine fluide entier. Les courbes sont volontairement décalées verticalement par souci de clarté.

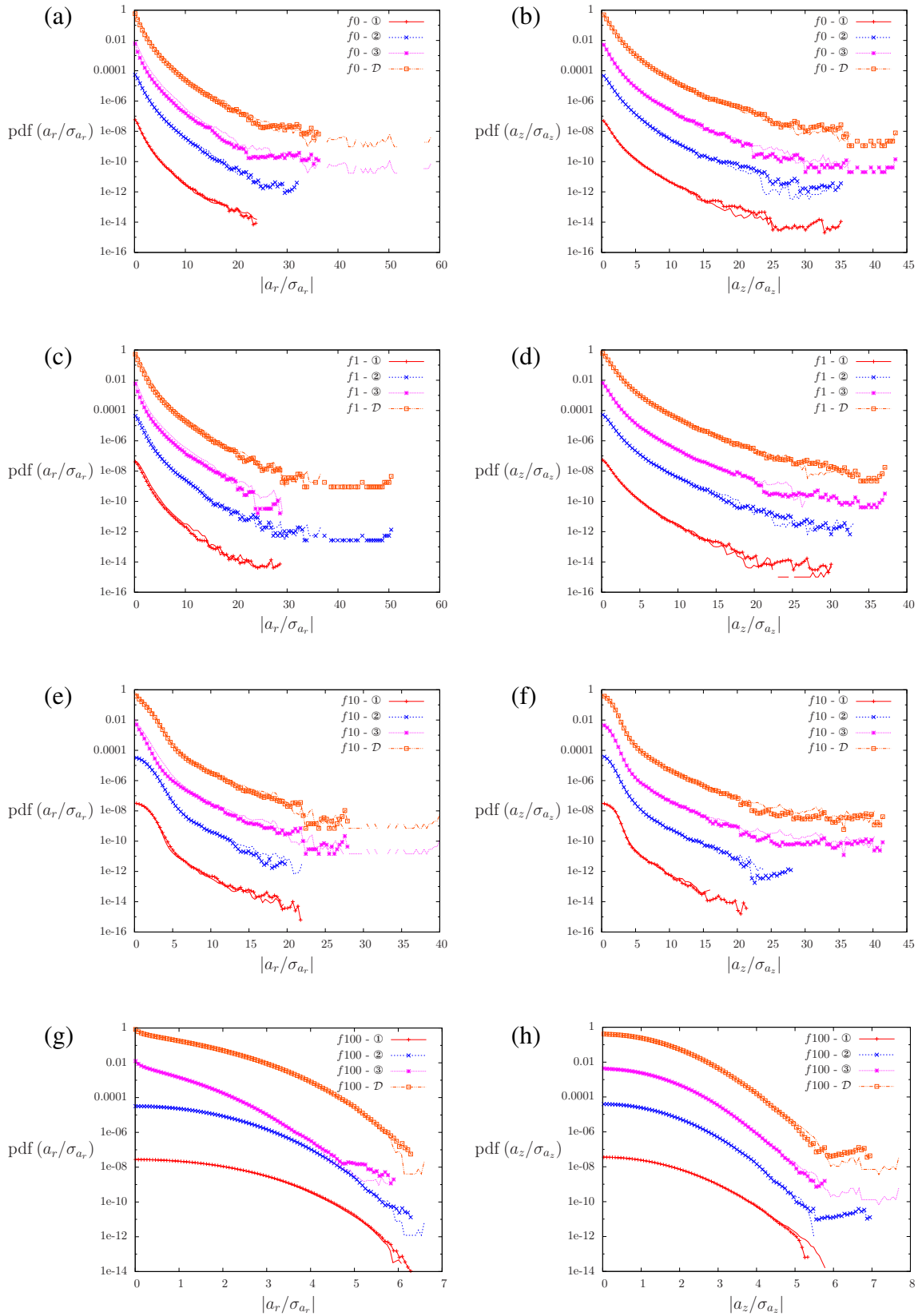


FIGURE 4.13 – Mise en évidence de la dissymétrie des *pdfs* d'accélération lagrangienne. Les *pdfs* des composantes d'accélération radiale sont à gauche et celle d'accélération verticale sont à droite. f_0 : (a) et (b), f_1 : (c) et (d), f_{10} : (e) et (f), f_{100} : (g) et (h). La ligne sans symbole correspond à la branche négative ($a_{\bullet} < 0$) et la ligne avec les symboles est la branche positive ($a_{\bullet} > 0$) de la *pdf*. On applique, pour des raisons de clarté, un décalage vertical arbitraire de deux décades.

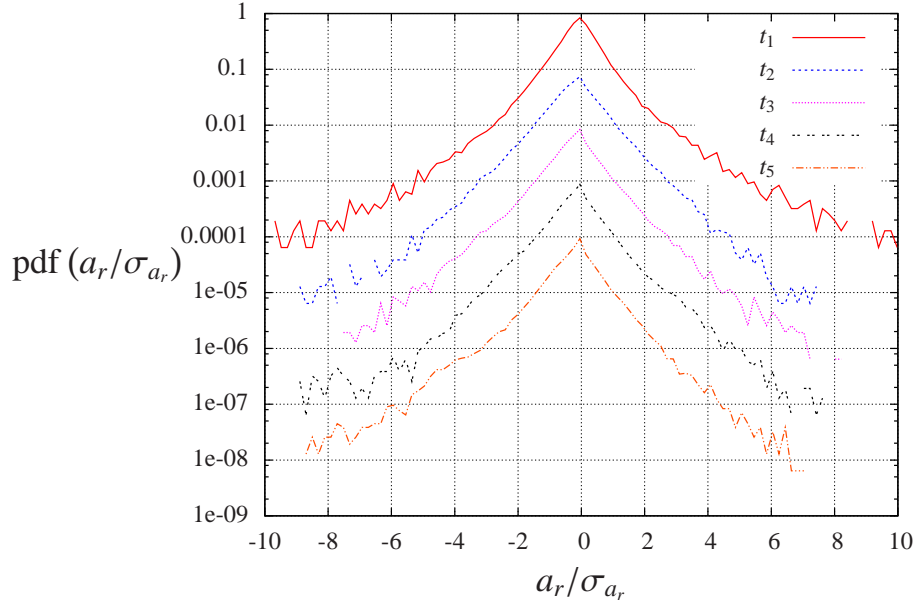


FIGURE 4.14 – Pdfs normalisées de la composante radiale de l'accélération lagrangienne à différents instants ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$) pour la simulation $f0$. Un décalage vertical est appliqué pour des raisons de clarté et la grille permet de mieux visualiser la dissymétrie.

4.4 Modifications globales de la turbulence

Après avoir traité les effets locaux de la rotation et du confinement sur les écoulements turbulents, en considérant les statistiques dans différentes zones radiales, nous souhaitons désormais regarder les modifications globales non localisées.

4.4.1 Déclin de l'énergie

La figure 4.15 donne le déclin des quantités énergétiques moyennes au cours du temps, telles que l'énergie cinétique moyenne $k = \langle u_i u_i \rangle / 2$, l'énergie cinétique moyenne horizontale $k_h = \langle u_x^2 + u_y^2 \rangle / 2$ ou verticale $k_v = \langle u_z^2 \rangle / 2$ et le rapport de ces deux contributions $2k_v/k_h$.

La première chose que nous remarquons est que les pentes du déclin de l'énergie cinétique (figure 4.15(a)) sont similaires à ce que l'on observe en turbulence homogène⁶ (Kolmogorov [1941c], Squires *et al.* [1994], Morize & Moisy [2006], Moisy *et al.* [2011], Teitelbaum & Mininni [2011]) avec ou sans les effets de rotation (les lignes continues noires indiquent les pentes obtenues en turbulence homogène sans rotation $k(t) \propto t^{-10/7}$ et avec de faibles nombres de Rossby $k(t) \propto t^{-5/7}$). Nous confirmons encore avec ces courbes que la présence de la paroi n'augmente pas la dissipation et le déclin de l'énergie est équivalent aux cas homogènes, ce qui avait déjà été suggéré en 2D par Schneider & Farge [2005]. Cependant, avec le plus grand paramètre de Coriolis ($f = 100$), le taux de rotation est si grand que l'échelle de longueur verticale intégrale atteint rapidement la taille de la boîte périodique (comme observé sur la figure 4.9 de la section précédente) avant que le comportement du déclin atteigne une loi en $-5/3$.

6. Les comportements sont équivalents à des cas homogènes avec des spectres initiaux en κ^4 aux grandes échelles.

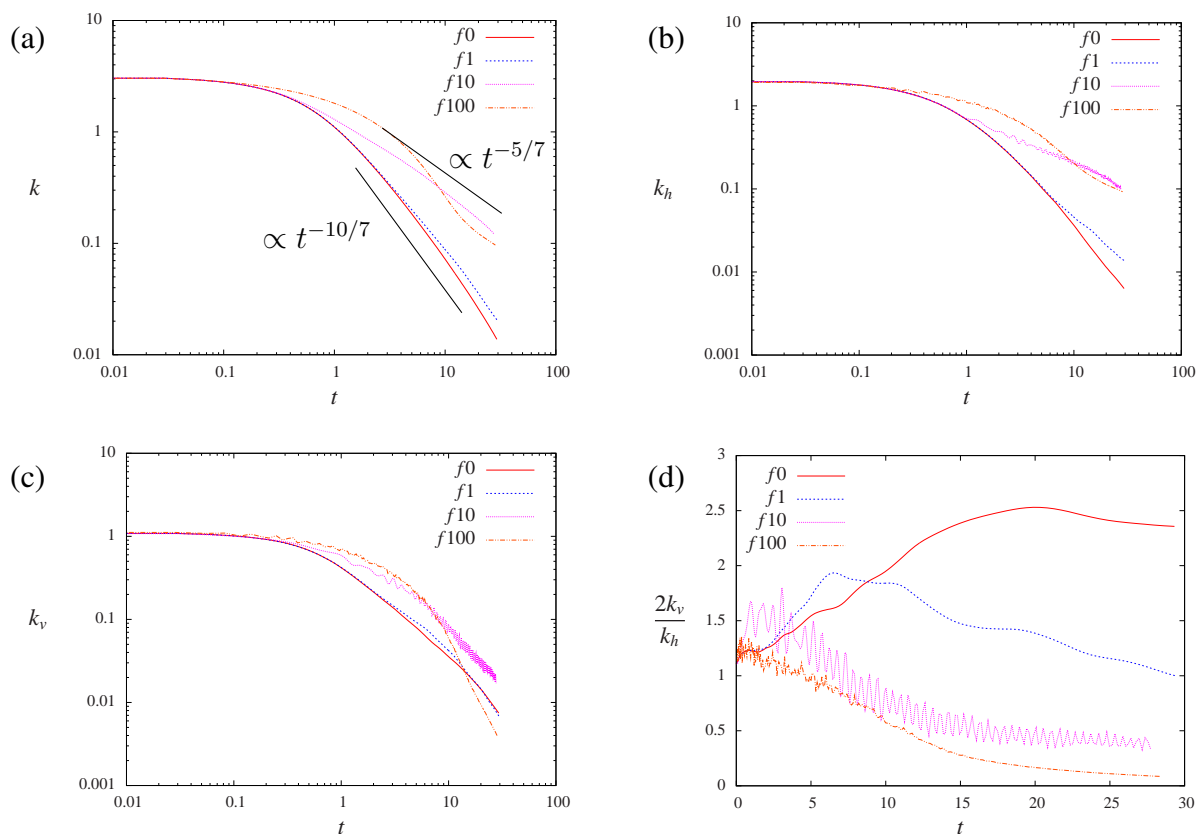


FIGURE 4.15 – Évolution temporelle des quantités énergétiques moyennes. (a) : énergie cinétique moyenne k . (b) : énergie cinétique moyenne horizontale k_h . (c) : énergie cinétique moyenne verticale k_v . (d) : rapport des contributions verticale et horizontale $2k_v/k_h$.

Cela explique le comportement particulier de la courbe de l'énergie cinétique pour la simulation $f100$, à cause du "confinement" vertical numérique impliqué par la périodicité du domaine de calcul. On remarque que le déclin d'énergie cinétique est ralenti avec la rotation (Jacquin *et al.* [1990]) et le confinement radial n'a pas le même effet que le confinement vertical du dispositif expérimental de Ibbetson & Tritton [1975], où la dissipation additionnelle présente dans les couches d'Ekman faisait qu'au final, la rotation avait pour effet d'accélérer le déclin de l'énergie cinétique. Les figures 4.15(b) et 4.15(c) confirment le comportement énergétique similaire à la turbulence homogène : avec ou sans rotation, le déclin de la contribution verticale à l'énergie cinétique est équivalent ; la contribution horizontale est quant à elle affectée par la rotation et son déclin est d'autant plus ralenti que le taux de rotation est important. Cela s'explique par le fait que la force de Coriolis agit explicitement sur les composantes horizontales du champ de vitesse, l'axe de la rotation étant vertical (voir équation (3.19)).

Un effet du confinement sur les caractéristiques énergétiques de l'écoulement est révélé par la figure 4.15(d), représentant le rapport de l'énergie verticale sur l'énergie horizontale $2k_v/k_h$, le facteur 2 étant ajouté de sorte que la valeur 1 de ce rapport caractérise une distribution isotrope d'énergie. Cet effet est d'autant plus flagrant sur la courbe représentant la simulation sans rotation ($f0$). En effet, bien que l'énergie cinétique totale décroisse comme pour une turbulence homogène, la distribution de la simulation $f0$ dévie du cas isotrope (*i.e.* $2k_v/k_h = 1$). En effet, ce rapport augmente durant les 50 premiers temps de retournement τ_0 avant de saturer à $2k_v/k_h \approx 2.5$, ce qui implique que le confinement radial seul favorise la contribution verticale pour l'énergie cinétique. Comme la rotation tends à l'effet inverse ($Ro \rightarrow 0 \Rightarrow 2k_v/k_h \rightarrow 0$), les résultats des simulations avec rotation dépendent de la valeur du paramètre de Coriolis f . Nous voyons tout d'abord une augmentation du rapport $2k_v/k_h$ pendant une durée équivalente à une période de rotation $4\pi f^{-1}$, suivie d'une décroissance d'autant plus grande que le taux de rotation est grand. En effet, l'écoulement ne peut ressentir les effets de la rotation qu'après un temps de l'ordre de grandeur de la période de rotation. Une quantité équivalente est tracée par Moisy *et al.* [2011] (leur figure 10(b)) et on observe également un déclin du rapport des *rms* (verticale sur horizontale) après une période de rotation environ ($\Omega t/2\pi = 1$).

4.4.2 Dynamique spectrale

Un des objectifs de notre travail est de quantifier les effets du confinement sur la turbulence, ce qui signifie comparer nos résultats avec ceux de la turbulence homogène. Comme les spectres d'énergie sont constamment étudiés du fait que l'approche spectrale permette d'obtenir de nombreux renseignements sur la dynamique (voir Jacquin *et al.* [1990], Zeman [1994], Cambon *et al.* [1997] pour l'étude spectrale des écoulements en rotation), nous traçons sur la figure 4.16 le spectre d'énergie tri-dimensionnel, défini par l'équation (4.9) de l'état isotrope de l'initialisation ($t_i = T_0$), où la loi en $-5/3$ attendue par la théorie de Kolmogorov (voir Kolmogorov [1941a], Frisch [1995]) est clairement observée. Ce spectre a pour définition :

$$E(\kappa) = \oint \frac{1}{2} \mathcal{F} \left\{ \langle u_i(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_{\mathcal{D}} \right\} d\mathcal{B}(\kappa) \quad (4.9)$$

où l'intégration est faite sur une sphère \mathcal{B} de rayon κ . Sur la même figure, nous traçons exactement le même spectre mais à la fin de l'initialisation, quand l'écoulement est confiné ($t = 0$).

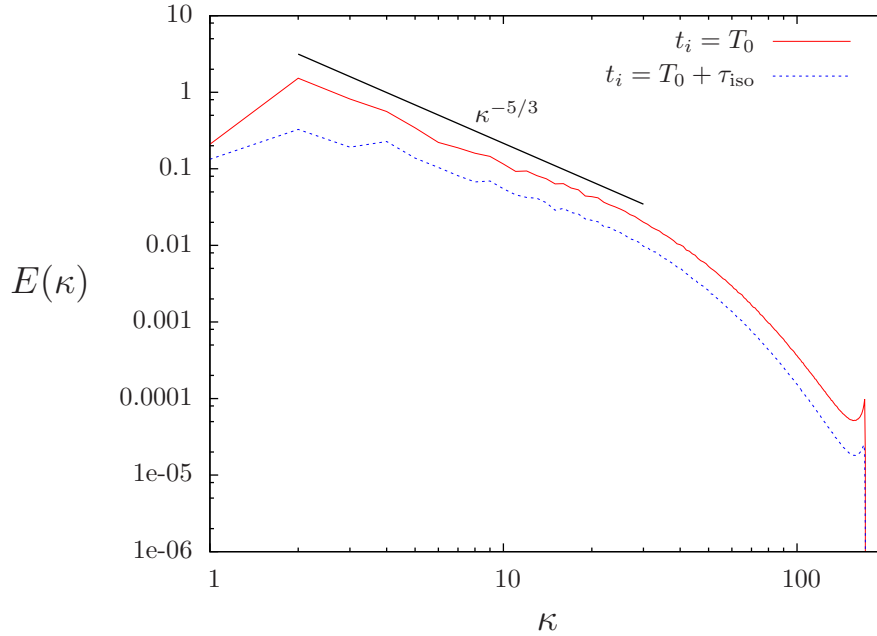


FIGURE 4.16 – Comparaison des spectres d'énergie entre le cas homogène et le cas confiné. La courbe rouge montre le spectre isotrope de l'instant $t = T_i$ et la courbe bleue indique le spectre à la fin de l'introduction de la pénalisation, correspondant à l'instant $t_i = T_0 + \tau_{iso} \equiv t = 0$. Une pente en $-5/3$ est tracée pour comparer à la théorie de Kolmogorov.

Malgré la suppression du pic aux petits nombres d'ondes, due à l'arrêt du forçage isotrope aux grandes échelles de l'équation (4.1), il n'existe pas de modification flagrante de l'aspect du spectre d'énergie du fait de l'insertion du confinement et on retrouve la pente classique en $-5/3$. Bien évidemment, la courbe du cas confiné montre un écoulement moins énergétique que le cas isotrope pour les raisons suivantes : il n'y a plus de forçage et l'écoulement est en déclin dans la deuxième partie de l'initialisation ($T_0 \leq t_i \leq T_0 + \tau_{iso}$). De plus, la définition (4.9) ne peut plus être rigoureusement appliquée aux cas confinés. En effet, à cause de la perte de l'homogénéité et de la présence d'un domaine solide dans notre boîte périodique, le spectre tri-dimensionnel calculé prend en compte des modes calculés à partir du domaine de calcul entier $\mathcal{D} \cup \mathcal{S}$ et ne peut se limiter au domaine fluide⁷. Ainsi, il est nécessaire de remettre en question les outils statistiques spectraux et considérer avec attention les résultats obtenus. Une possibilité pour obtenir une description spectrale de l'écoulement est de calculer les différents spectres uni-dimensionnels dans la direction verticale (voir Pope [2000], Davidson [2004]) pour le détail des liens entre spectres uni-dimensionnels et spectres tri-dimensionnels), qui est la seule direction cartésienne encore homogène :

$$E_{ij}(\kappa_z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \langle u_i(\mathbf{x} + l\mathbf{e}_z)u_j(\mathbf{x}) \rangle e^{-i\kappa_z l} dl. \quad (4.10)$$

De plus, l'avantage de considérer la direction verticale est que nous pouvons calculer des

7. Des courbes non présentées ici montrent que l'allure de ce même spectre, calculé tout au long du déclin, décrit un comportement de plus en plus irréaliste. En effet, il semblerait que la diminution de l'énergie dans le domaine fluide rende la contribution du domaine solide au calcul du spectre de moins en moins négligeable.

spectres moyennés dans les différentes régions ①, ② et ③. Nous comparons alors les aspects de ces différents spectres et déterminons l'impact de la proximité de la paroi sur la dynamique de l'écoulement. La figure 4.17 montre les spectres basés sur les vitesses radiales (à gauche) ou verticales (à droite), normalisés par la quantité $(\varepsilon\nu^5)^{1/4}$ calculée dans chaque région. La grandeur sur l'axe des abscisses, représentant la valeur du nombre d'onde, est normalisée aux petites échelles (grands κ), de sorte que les spectres sont tracés en fonction de $\kappa_z l_\eta$, l_η étant l'échelle de longueur de Kolmogorov calculée dans chaque région. Cette normalisation est classique (voir Saddoughi & Veeravalli [1994]).

La première chose à remarquer est que nous ne voyons aucune influence du confinement pour les échelles de longueur inférieures aux grandes échelles de l'écoulement ($2\pi/\kappa_z \ll l_0$). En effet, les courbes des trois zones forment alors une courbe unique et nous observons que le confinement n'a qu'un effet aux grandes échelles (faibles κ_z) qui est plus marqué pour les spectres basés sur les composantes radiales de vitesse, composantes normales à la paroi.

De plus, nous retrouvons à nouveau sur la figure 4.17 une pente en $-5/3$ sur environ une décade de nombres d'onde pour les simulations à grands nombres de Rossby ($f0$ et $f1$). On note également que cette pente se raidit d'autant plus que le taux de rotation imposé est élevé.

Comme nous n'observons pas de différence majeure sur la figure 4.17 entre les zones de proches parois et les zones centrales de l'écoulement, nous traçons sur la figure 4.18, dans une même zone⁸, les spectres uni-dimensionnels obtenus avec les différentes composantes de vitesse, soit E_{rr} , $E_{\theta\theta}$ et E_{zz} . Nous observons une caractérisation surprenante qui décrit un effet "anisotropisant" du confinement sur les petites échelles, que ce soit avec ou sans rotation⁹. En effet, ce sont les petites structures dissipatives de l'écoulement, supposées isotropes d'après la théorie de Kolmogorov, qui mettent en avant une distinction entre les spectres calculés avec la vitesse verticale et ceux calculés avec une des composantes horizontales, et ce avec ou sans rotation. En regardant séparément les spectres aux différentes échelles de l'écoulement, on note que :

- Aux grandes échelles ($\kappa \approx \mathcal{O}(l_0^{-1})$), les courbes montrent des tendances corroborant la description des écoulements faite jusqu'ici : une direction verticale privilégiée devant la direction azimutale, le spectre E_{zz} étant au-dessus de $E_{\theta\theta}$; un effet limitant sur la composante radiale (normale à la paroi) du champ de vitesse, de sorte que le spectre E_{rr} soit presque un ordre de grandeur inférieur aux autres spectres dans la gamme des faibles nombres d'onde κ_z .
- Dans la gamme inertielle ($\mathcal{O}(l_0^{-1}) \ll \kappa_z \ll \mathcal{O}(l_\eta^{-1})$), les spectres semblent se superposer, quelle que soit la simulation considérée. Ainsi, on peut observer des spectres avec des pentes en $-5/3$ si les échelles ne sont pas affectées par la rotation, c'est-à-dire si $\kappa_z > \kappa_\Omega$, κ_Ω étant l'échelle de Zeman (voir Zeman [1994]) définie par $\kappa_\Omega = (\Omega^3/\varepsilon)^{1/2}$. Pour les nombres d'onde tels que $\kappa_z < \kappa_\Omega$, les effets de la force de Coriolis modifient la dynamique et l'on observe une pente en $-5/7$ ou en $-11/5$ (exposant quasi-équivalent obtenu Zeman [1994]).

Cette observation est claire en regardant les spectres de la figure 4.18(c) représentant la

8. La zone choisie est la zone de paroi ③ car c'est celle qui contient le plus de points de collocation et permet donc une meilleure définition des spectres.

9. Une anisotropie aux petites échelles a déjà été mise en avant par Lamriben *et al.* [2011a] en considérant le flux d'énergie d'écoulements turbulents soumis aux effets de la force de Coriolis.

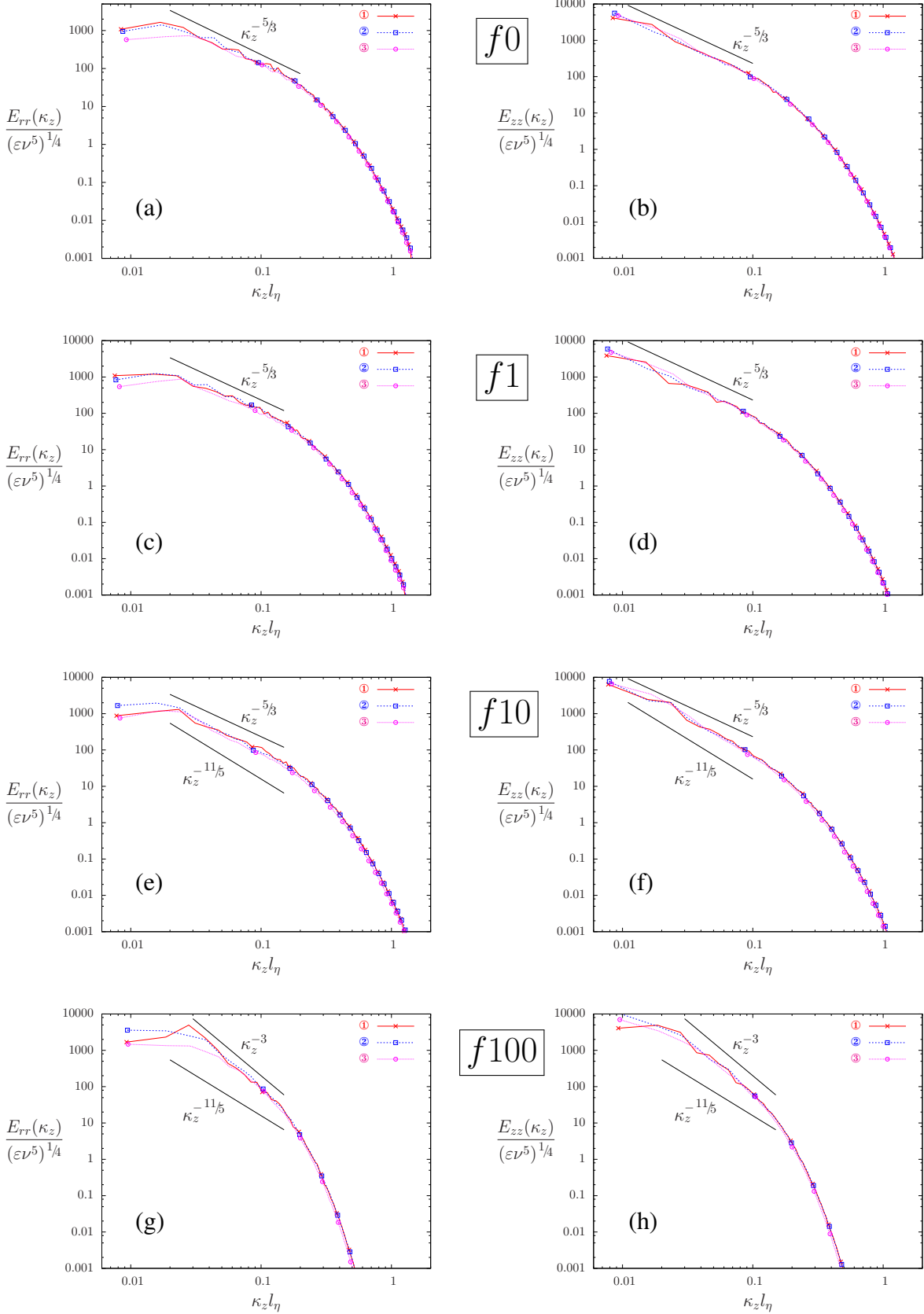


FIGURE 4.17 – Spectres unidimensionnels normalisés, calculés à partir des vitesses radiales (gauche) et verticales (droite), pour les 4 simulations dans chaque région. (a) et (b) : simulation f_0 à $t \approx 1.8\tau_0$, où τ_0 est le temps de retournement à $t = 0$ des structures de taille l_0 . (c) et (d) : simulation f_1 à $t \approx 1.8\tau_0 \approx 0.06\tau_\Omega$, où $\tau_\Omega = 2\pi/\Omega$ est la période de rotation. (e) et (f) : simulation f_{10} à $t \approx 1.59\tau_0 \approx 0.54\tau_\Omega$. (g) et (h) : simulation f_{100} à $t \approx 1.66\tau_0 \approx 5.65\tau_\Omega$.

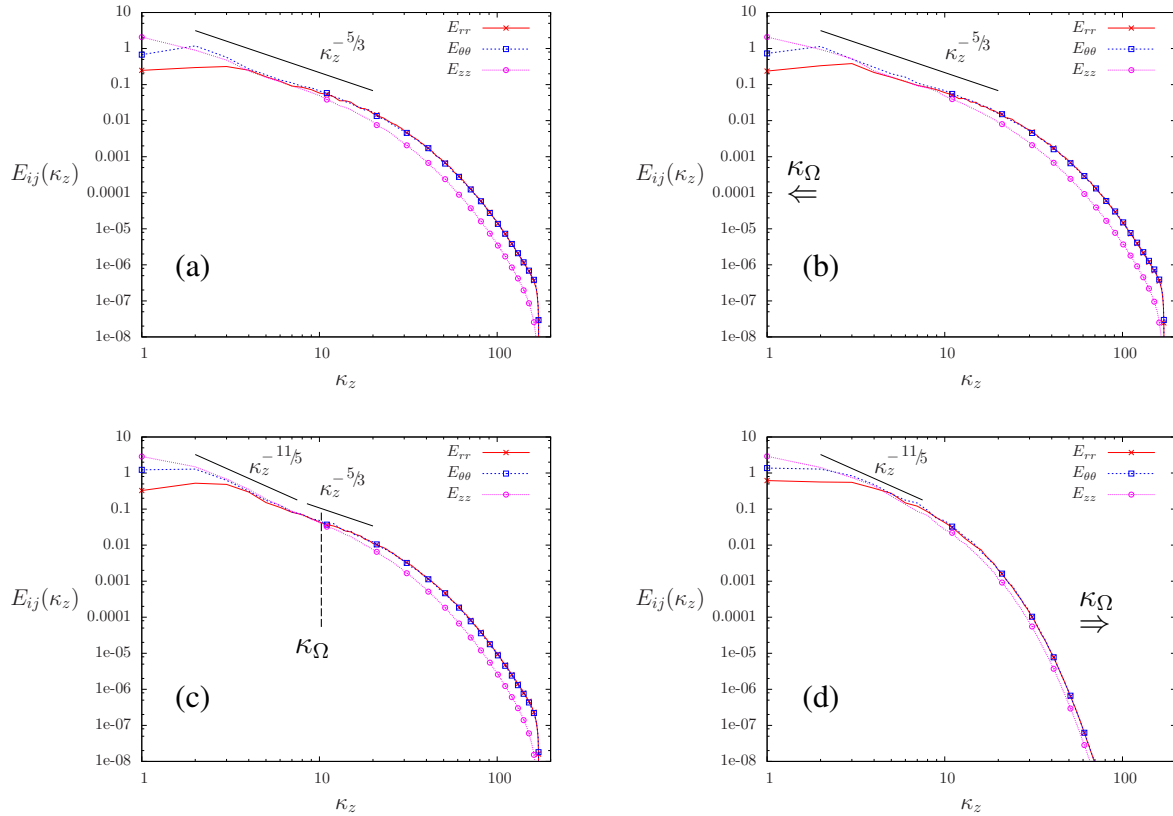


FIGURE 4.18 – Spectres uni-dimensionnels d'énergie dans la zone de proche paroi ③ basés sur différentes composantes de vitesse ((a) : f_0 , (b) : f_1 , (c) : f_{10} et (d) : f_{100}). Les instants correspondant à ces courbes sont les mêmes que ceux de la figure 4.17, et les échelles de Zeman correspondantes $\kappa_\Omega = (\Omega^3/\varepsilon)^{1/2}$ pour les simulations f_0 , f_1 , f_{10} et f_{100} sont respectivement $\kappa_\Omega = 0$, $\kappa_\Omega \approx 0.3$, $\kappa_\Omega \approx 10$ et $\kappa_\Omega \approx 430$.

simulation où $f = 10$, l'échelle de Zeman κ_Ω se situant dans la zone inertielle à cet instant ($\kappa_\Omega \approx 10$). On note alors le passage d'une gamme d'échelles affectées par la rotation ($E(\kappa_z) \propto \kappa_z^{-11/5}$) à une gamme d'échelles montrant un comportement équivalent à une turbulence isotrope ($E(\kappa_z) \propto \kappa_z^{-5/3}$). Ce changement de comportement n'est pas visible pour les autres simulations, l'échelle de Zeman étant alors en dehors des échelles de l'écoulement ($\kappa_\Omega \approx 0.3$ pour la simulation $f1$ et $\kappa_\Omega \approx 430$ pour la simulation $f100$).

- Dans la gamme des échelles dites dissipatives ($\kappa_z \approx \mathcal{O}(l_\eta^{-1})$), où l'on pourrait s'attendre à observer un comportement isotrope des structures turbulentes, nous notons un écart systématique entre les spectres calculés à partir des composantes horizontales et les spectres basés sur la composante verticale du champ de vitesse. En effet, quelle que soit la simulation considérée (avec ou sans rotation), on voit que E_{zz} est inférieur à E_{rr} et $E_{\theta\theta}$ pour tout nombre d'onde tel que $\kappa_z > \mathcal{O}(l_\lambda^{-1})$, ce qui signifie que cet effet est dû uniquement au confinement. Ceci peut soit montrer que le confinement a tendance, pour des échelles de longueur verticales équivalentes, à conférer aux composantes horizontales une plus forte corrélation, soit simplement impliquer que les échelles dissipatives, contrairement aux grandes structures de l'écoulement, favorisent les composantes horizontales alors plus énergétiques que la composante verticale.

Ces résultats montrent les différentes conséquences des effets de confinement, combinés ou non aux effets de rotation, sur la dynamique spectrale des écoulements en géométrie cylindrique. Ils permettent de mettre en avant une "anisotropisation" des petites structures dissipatives due au confinement.

4.4.3 Dispersion à une particule

Les trajectoires stockées au long des différentes simulations sont utilisées pour calculer les statistiques de dispersion à une particule, c'est-à-dire la séparation entre la position d'une particule fluide à l'instant t et sa position initiale. On rappelle que ces traceurs sont positionnés aléatoirement à l'instant $t = 0$ dans le domaine fluide \mathcal{D} . Du fait de la géométrie cylindrique utilisée, nous considérons deux composantes du vecteur "séparation" : la composante horizontale et la composante verticale. Nous calculons alors :

$$\begin{aligned}\Delta X_h^2(t) &= \langle (x_p(t) - x_p(0))^2 + (y_p(t) - y_p(0))^2 \rangle_{n_p}, \\ \Delta X_v^2(t) &= \langle (z_p(t) - z_p(0))^2 \rangle_{n_p},\end{aligned}\tag{4.11}$$

où $\langle \rangle_{n_p}$ indique la sommation sur l'ensemble des particules valables. La figure 4.19 montre la dispersion horizontale ΔX_h^2 et la dispersion verticale ΔX_v^2 pour les quatre simulations. Nous retrouvons le comportement de dispersion à temps court avec un régime balistique, caractérisé par le fait que ΔX_h^2 et ΔX_v^2 soient proportionnels à t^2 . S'ensuit alors un régime brownien où la loi de puissance devient alors du type $\Delta X^2 \propto t$ (cf Taylor [1922]). L'échelle lagrangienne intégrale est définie comme l'instant du passage du premier au deuxième régime.

En présence d'effets de rotation, nous retrouvons également un régime linéaire dû aux ondes d'inertie qui s'insère dans le régime balistique. Ce dernier se caractérise par une réduction de la dispersion dans les directions verticale et horizontale avec une perte temporaire de la pente en t^2 . L'étendue et l'amplitude de ce régime d'ondes dépendent des paramètres des simulations et principalement du nombre de Rossby. Elles peuvent être larges dans des écoulements contenant

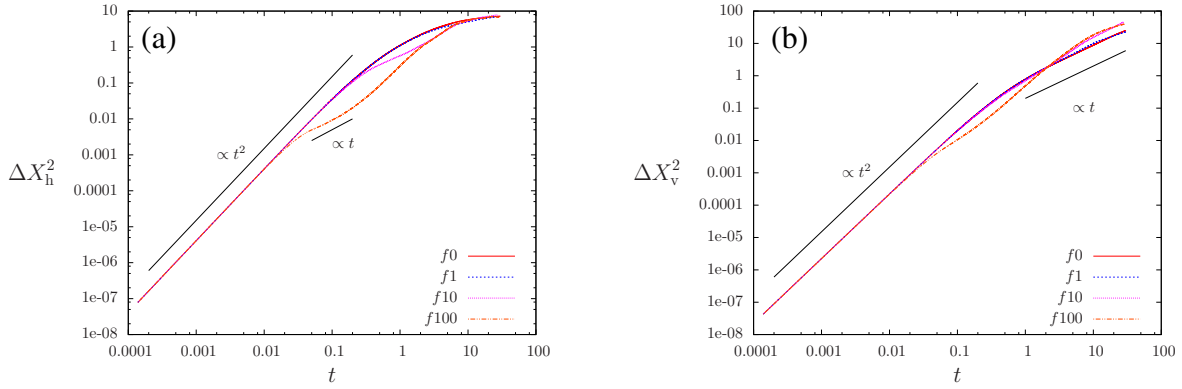


FIGURE 4.19 – Évolution temporelle de la dispersion à une particule. (a) Dispersion horizontale. (b) Dispersion verticale. Les tendances classiques en t^2 et en t de la dispersion sont validées par les courbes noires.

différentes relations de dispersions, en considérant par exemple une superposition d'ondes internes de gravité dans des écoulements turbulents stablement stratifiés (*e.g.* Liechtenstein *et al.* [2006]).

Contrairement aux statistiques de dispersion verticale, qui semblent similaires aux résultats de turbulence homogène, les courbes de dispersion horizontale (figure 4.19(a)) montrent un effet fort du confinement qui commence à $t \simeq 1$. La dispersion est alors réduite dans le plan horizontal de par la présence de la paroi cylindrique et devrait logiquement saturer à une valeur de l'ordre de R^2 aux temps longs. Afin d'observer ce plateau, les calculs devraient être conduits pour des temps physiques plus longs, qui introduisent un temps de calcul bien plus important, dans l'hypothèse où les nombres de Reynolds initiaux que nous pouvons atteindre permettent un déclin sur un temps suffisant. En effet, les calculs peuvent être plus longs mais s'il n'y a plus d'énergie dans l'écoulement, cela n'a évidemment aucun intérêt. Notons cependant qu'en turbulence 2D, ce plateau est clairement observé suite au calcul de plus de 400 temps de retournement (voir Kadoch *et al.* [2008]). Nous pouvons donc difficilement confronter nos résultats de simulations tri-dimensionnelles non forcées, pour lesquelles nous avons tout de même calculé plus de 70 temps de retournement des grandes échelles (voir tableau 4.2). Nous notons malgré tout que le début de plateau observé est bien dû au confinement et non à un déclin trop important de l'énergie à temps long car la dispersion verticale continue d'augmenter après $t = 1$. Enfin, rappelons que les figures 4.4 donnent un bon aperçu de l'effet du confinement sur les particules fluides et que la saturation à une valeur de l'ordre de R^2 est logique vu que les statistiques sont calculées à partir de particules fluides restant dans le domaine fluide tout au long du trajet.

4.4.4 Fonctions de structure lagrangiennes

Enfin, nous considérons les fonctions de structure lagrangiennes définies par :

$$\Delta u_{\bullet}(\tau) = \frac{\langle u_{\bullet}(t_0 + \delta t) - u_{\bullet}(t_0) \rangle_{n_p}}{\sigma_{u_{\bullet}}(t_0)} \quad (4.12)$$

La figure 4.20 montre les *pdfs* des fonctions de structure, basées sur les composantes de vitesse radiale ou verticale. L'instant de référence est $t_0 = 0$ et les *pdfs* sont tracées pour différentes

valeurs de l'incrément temporel τ : $\tau_1 = 0.5\tau_\eta$, $\tau_2 = 2\tau_\eta$, $\tau_3 = 4\tau_\eta$, $\tau_4 = 8\tau_\eta$ et $\tau_5 = 32\tau_\eta$, où τ_η est l'échelle temporelle de Kolmogorov à l'instant $t = 0$. Naturellement, lorsque l'incrément temporel τ est très faible, la distribution de probabilité des fonctions de structure tend vers la distribution des accélérations lagrangiennes car $\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta u(\tau) = a$. En augmentant τ , les composantes de vitesse sont de moins en moins corrélées et la distribution de probabilité de la fonction de structure tend vers la distribution de probabilité des vitesses. On retrouve bien le passage d'une distribution fortement non-gaussienne (accélération) à une distribution quasi-normale (*pdf* de vitesse) pour les simulations où la rotation est suffisamment faible pour ne pas inhiber les événements rares et violents observés pour les simulations $f0$, $f1$ et $f10$.

Les *pdfs* de ces fonctions de structures montrent une nouvelle fois l'effet "gaussianisant" de la rotation, mais également que les événements violents caractérisant l'intermittence sont des événements très haute fréquence. En effet, les larges queues des *pdfs* sont observées pour de très faibles incréments temporels et une distribution gaussienne des *pdfs* d'incrément de vitesse est retrouvée dès lors qu'est considéré un incrément temporel tel que $\tau > 10\tau_\eta$.

4.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons pu caractériser l'influence du confinement associé ou non à des effets de rotation par la force de Coriolis. Après avoir pris les précautions nécessaires lors de l'initialisation du champ turbulent confiné, nous avons tenté de séparer les effets locaux, où la position radiale est un paramètre déterminant, des effets globaux, observés quelle que soit la position considérée.

Parmi les conséquences les plus notables du confinement, nous retiendrons la dissymétrie des distributions de probabilité de vitesse ainsi que le fait que la direction verticale soit la direction tangentielle privilégiée. Nous avons également remarqué que les lois d'évolution des échelles intégrales en déclin de turbulence homogène sont pour la plupart applicables dans notre géométrie cylindrique, sauf pour l'échelle L_{zz}^z qui croît sensiblement plus vite avec le confinement. Des résultats très intéressants concernent les *pdfs* d'accélération lagrangienne pour lesquelles une distribution quasi-gaussienne est obtenue à très fort taux de rotation, tout comme la dissymétrie déjà observée pour les distributions de vitesse.

Le déclin global de l'énergie cinétique turbulente ne semble pas être modifié par le confinement mais le rapport k_v/k_h (figure 4.15(d)) prouve que l'isotropie énergétique est brisée par le confinement. Enfin, les spectres uni-dimensionnels (et donc la dynamique) ne sont pas modifiés par la présence de la paroi, les spectres étant complètement identiques sauf aux grandes échelles. Le résultat remarquable de cette section porte sur l'anisotropie observée aux plus petites échelles de l'écoulement ($\kappa_z > 20$), une différenciation étant évidente (voir figure 4.18) entre le spectre calculé à l'aide des vitesses verticales ($E_{zz}(\kappa_z)$) et ceux calculé à l'aide des vitesses horizontales ($E_{rr}(\kappa_z)$ et $E_{\theta\theta}(\kappa_z)$).

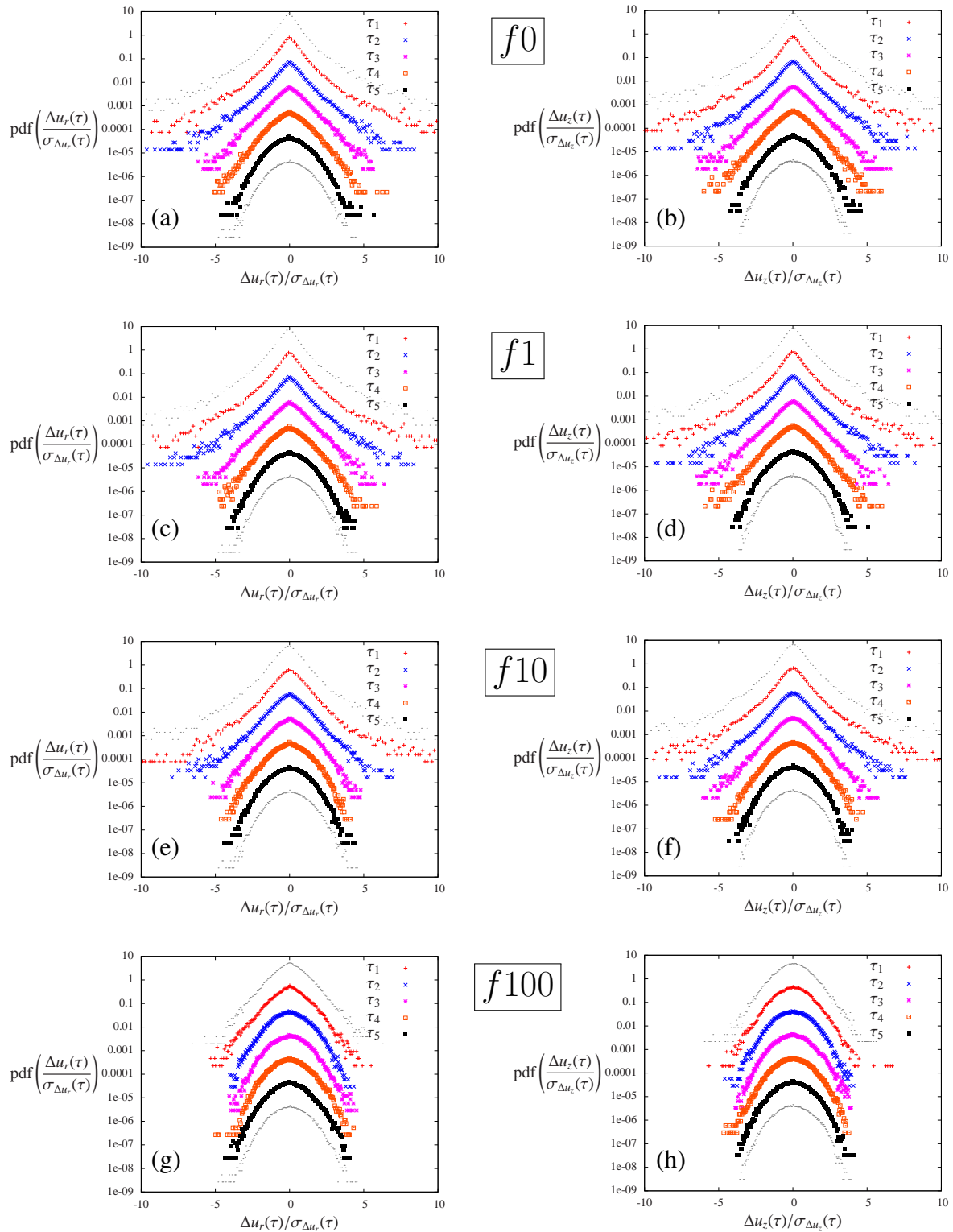


FIGURE 4.20 – Pdfs des fonctions de structure lagrangiennes pour différents incréments temporels $\tau_{1..5} = 0.5, 2, 4, 8, 32\tau_\eta$, calculées à partir des composantes de vitesse radiales ((a), (c), (e) et (g)) et des composantes de vitesse verticales ((b), (d), (f) et (h)). Les courbes pointillées grises indiquent les pdfs de vitesse (en bas) et d'accélération (en haut) à titre de comparaison. Un décalage vertical est effectué pour une meilleure lisibilité.

5

Génération de turbulence : simulation numérique d'un écoulement de von Kármán

Dans ce chapitre, nous utilisons la versatilité de la méthode de pénalisation et la capacité qu'a cette dernière de prendre en compte des parois mobiles, en considérant une configuration de type von Kármán. Plusieurs géométries pour les pales de rotors sont utilisées et génèrent des écoulements par nature très différents. Ces simulations se veulent complémentaires aux nombreuses études théoriques et expérimentales sur ce sujet et la turbulence au cœur de l'écoulement est décrite.

In this chapter, we use the versatility of the volume penalization method and its capability to take into account moving boundaries, considering a von Kármán like flow. Several geometries for the blades of the impellers are used and generate very different kinds of flows. These simulations hope to be complementary to the large amount of theoretical and experimental studies on that subject and the turbulence in the core of the fluid cell is described.

5.1 Vers un forçage “physique” de la turbulence

Nous avons vu dans les chapitres précédents la facilité de mise en application de la méthode de pénalisation pour des parois solides fixes et de géométrie quelconque. Cependant, un intérêt réel de cette méthode réside dans la possibilité de rendre les parois mobiles, tout aussi simplement, en tout cas dans la formulation. Dans la quasi-majorité des autres méthodes numériques, une mobilité de paroi implique nécessairement un remaillage du domaine fluide à chaque itération. Or, la création d'un maillage prend un temps considérable dans des codes

de type éléments finis par exemple. En utilisant la méthode de pénalisation, aucun remaillage n'est nécessaire mais simplement une redéfinition de la fonction masque χ et des vitesses dans le domaine solide \mathbf{u}_s à chaque itération.

Cela explique notre intérêt initial pour cette méthode numérique. En effet, comme nous l'avons montré dans le chapitre 4, le déclin d'énergie pose un réel problème pour l'étude numérique de la turbulence homogène, car l'énergie initiale que nous injectons doit être compatible avec la discrétisation utilisée (voir équation (2.1)). Nous cherchons donc à trouver un moyen de forcer la turbulence sans utiliser les méthodes spectrales de forçage "arbitraires" qui réinjectent l'énergie dissipée par viscosité dans les grandes échelles à chaque itération. Dans la nature, les écoulements sont naturellement forcés, que ce soit par des instabilités ou par des conditions aux limites. Nous cherchons alors à limiter le déclin de l'énergie cinétique grâce à la méthode de pénalisation, par des conditions aux limites diverses, dans le but d'obtenir une description des écoulements turbulents à temps long sans effets de déclin impliquant nécessairement une forte décroissance du nombre de Reynolds.

5.2 Introduction aux écoulements de von Kármán

La configuration choisie dans ce chapitre pour générer un écoulement turbulent forcé par la méthode de pénalisation est proche de celle dite de von Kármán. En réalité, elle tente de s'approcher d'un dispositif expérimental particulier, souvent appelé *french washing machine*, et qui se distingue de la configuration "classique" de von Kármán par les pales qui sont montées sur ses disques tournants.

Après un historique non exhaustif des différentes études menées sur le sujet, nous présenterons en détail la géométrie, les différents types de pales utilisés et une brève comparaison des différents écoulements obtenus.

5.2.1 Quelques études théoriques, expérimentales et numériques

L'écoulement produit par la rotation de deux disques dans une enceinte cylindrique a été et est toujours le sujet de nombreuses études théoriques, expérimentales et numériques. Ces écoulements ont été initialement étudiés par Batchelor [1951]. Zandbergen & Dijkstra [1987] leur ont donné le nom d'écoulements de von Kármán suite à l'étude de ce dernier qui montra que les équations décrivant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible au voisinage d'un disque infini en rotation se réduisent à un système d'équations différentielles ordinaires¹ (voir von Kármán [1921]). Le problème a ensuite évolué vers une géométrie avec des disques de taille finie et des comparaisons ont été faites entre résultats expérimentaux et numériques (p. ex. Dijkstra & van Heijst [1983]). Cependant, la quasi-majorité des études menées à ce sujet considèrent un rapport d'aspect (rapport de la distance séparant les disques sur leur rayon) très faible, dans le but d'approcher la configuration avec des disques infinis. Or, lorsque le rapport d'aspect est de l'ordre de grandeur de l'unité, on observe expérimentalement, en fonction évidemment du nombre de Reynolds, la création d'un écoulement turbulent développé au centre du cylindre. Quelques expériences à ce sujet sont énumérées dans le tableau 5.1, pour lesquelles

1. La solution numérique du problème a été donnée par Cochran [1934].

le forçage est accentué par la présence de pales sur les disques tournants, ce qui correspond à la configuration adaptée pour le forçage numérique que nous souhaitons mettre en place.

D'un point de vue numérique, il n'existe, à notre connaissance, que très peu de travaux simulant des écoulements de type de von Kármán munis de pales, la modélisation de ces dernières étant la principale difficulté à résoudre. Ainsi, des simulations ont été menées en considérant de simples disques (voir Nore *et al.* [2003]); l'entraînement est dit visqueux, contrairement à un entraînement dit inertiel lors de la présence de pales. Notons que le taux de rotation à imposer aux disques pour obtenir un écoulement turbulent est bien plus important sans les pales, ce qui explique notre choix. L'étude citée s'intéresse à l'effet de l'augmentation du nombre de Reynolds sur l'écoulement et la rupture de l'axisymétrie alors observée. Afin de prendre en compte les effets des pales sur l'écoulement, des techniques de forçage localisé près des pales ont été implémentées ; dans des codes pseudo-spectraux — avec des discrétisations de Chebyshev dans la direction axiale, de Fourier dans la direction azimutale et de Legendre dans la direction radiale — (voir Boronski & Tuckerman [2007a;b]) ou dans des codes de type volumes finis (voir Poncet *et al.* [2008]) avec des modèles de type *RSM* (*Reynolds Stress Model*) lorsque l'écoulement devient turbulent. Dans ce dernier travail, une comparaison est effectuée avec les résultats expérimentaux obtenus avec le dispositif expérimental du CEA Saclay (Ravelet *et al.* [2004], Monchaux *et al.* [2006]) mais également une extension des résultats à des rapports d'aspect différents. Néanmoins, mis à part les travaux très récents de Ravelet *et al.* [2012] où le logiciel commercial *Fluent* est utilisé, aucun des travaux précédemment cités ne simule réellement des pales tournantes mais ils tentent plutôt d'approcher l'effet qu'ont celles-ci sur l'écoulement. Grâce à la méthode de pénalisation, nous considérons la présence de pales "réelles" pour générer l'écoulement ce qui est, à notre connaissance, un travail original.

5.2.2 Géométries utilisées pour les simulations

La géométrie d'un écoulement de von Kármán est définie par plusieurs paramètres :

- le rayon R_c du cylindre contenant l'écoulement ;
- le rapport d'aspect de la cellule turbulente $\Gamma = H/R_c$, où H est la distance entre les faces internes des deux disques sur lesquels sont montées les pales ;
- le rayon R_d des disques tournants ;
- le nombre de pales n montées sur les disques ;
- la courbure des pales R_{courb} et leur hauteur H_p .

Le tableau 5.1 donne un aperçu des paramètres des géométries utilisées dans quelques-uns des dispositifs expérimentaux utilisés pour étudier les écoulements de von Kármán.

Du fait de la production importante de résultats de l'équipe du CEA Saclay (Chiffaudel, Ravelet, Daviaud, Monchaux, Cortet, Marié, . . .), nous choisissons de nous approcher de leur configuration expérimentale en fixant le rapport d'aspect de notre cavité à $\Gamma = 1.8$ et le rayon de nos disques à $R_d = 0.925R_c$, identiques aux rotors TM60. Une autre raison ayant motivé notre choix de disques dont le rayon R_d est très proche du rayon du cylindre R_c est qu'ainsi, la turbulence générée par les pales est plus fortement contrainte à rester dans la cellule qu'à s'échapper au-dessus du disque supérieur ou en-dessous du disque inférieur. Cela représente deux avantages : d'une part, l'énergie apportée par la rotation des disques ne sert pas à alimenter l'écoulement à l'extérieur de la cellule et est donc plus fortement confinée à l'intérieur de cette

Équipe (publications)	$\Gamma = H/R_c$	R_d/R_c	n	R_{courb}/R_c
Labbé <i>et al.</i> [1996], Pinton <i>et al.</i> [1999], ...	$\simeq 2.4; 3.4$	$\simeq 0.86$	4; 8	∞
Cadot <i>et al.</i> [2003], Titon & Cadot [2003a;b], Cadot & Le Maître [2007], ...	$\simeq 3.4$	$\simeq 0.92$	6; 8	∞
de la Torre & Burguete [2007], ...	2	0.875	10	0.5
Ravelet <i>et al.</i> [2004], Leprovost <i>et al.</i> [2006], Monchaux <i>et al.</i> [2006; 2008], Ravelet <i>et al.</i> [2008], Cortet <i>et al.</i> [2010], ...	1.8	0.925 0.75	16	0.5 0.925

TABLE 5.1 – Paramètres des géométries de quelques dispositifs expérimentaux de von Kármán. Les différentes longueurs sont normalisées par le rayon du cylindre R_c . Pour les travaux du groupe du CEA Saclay (Ravelet, Monchaux, etc), on distingue deux géométries différentes pour les rotors : TM60 (valeurs supérieures) et TM73 (valeurs inférieures). On distingue deux genres de pales, droites ($R_{courb} \rightarrow \infty$) ou courbées.

dernière. D'autre part, comme l'enceinte cylindrique a pour conditions aux limites verticales la condition de périodicité du domaine de calcul, les deux faces externes des disques sont donc, par périodicité, les faces internes d'une cellule de von Kármán avec des disques non munis de pales. On essaie donc de réduire au maximum les effets d'un écoulement sur l'autre en optant pour une valeur de R_d/R_c proche de 1.

Cependant, il existe un paramètre géométrique que nous ne pouvons respecter et qui a une influence sur la nature de l'écoulement généré. Il s'agit de l'épaisseur des pales (ce qui limite alors le nombre de pales que l'on peut simuler) du fait de l'épaisseur numérique minimum de ces dernières avec la méthode de pénalisation. En effet, une des contraintes de la méthode de pénalisation réside dans la nécessité d'avoir une épaisseur suffisante du domaine solide pour que ce dernier soit correctement représenté. Dans les dispositifs expérimentaux existants, le nombre de pales sur chaque disque varie entre 4 et 16 et nous optons pour la limite inférieure de quatre pales. Nous conservons néanmoins une hauteur de pale H_p similaire aux expériences de Ravelet *et al.* [2004], soit $H_p = 0.2R_c$.

En ce qui concerne la forme des pales, la facilité de leur implémentation nous permet de comparer très facilement différentes géométries. Nous générerons donc des pales droites ainsi que des pales courbées avec un rayon de courbure similaire à celui des rotors TM60 de Ravelet *et al.* [2004], c.-à-d. $R_{courb} = 0.5R_c$. La figure 5.1 montre des coupes des deux géométries utilisées.

On peut remarquer que, contrairement à l'enceinte cylindrique où la fonction masque passe de 0 à 1, la fonction masque relative aux pales est lissée (voir section 2.2.3). En effet, comme expliqué par Kolomenskiy & Schneider [2009], la prise en compte du mouvement de la paroi solide a pour effet d'augmenter les effets de Gibbs au sein de la solution, même lorsque ce mouvement est pris en compte dans l'espace spectral (voir section 2.2.2). Une solution pour limiter cet effet néfaste sur la solution est de lisser la fonction masque, d'où l'apparition de

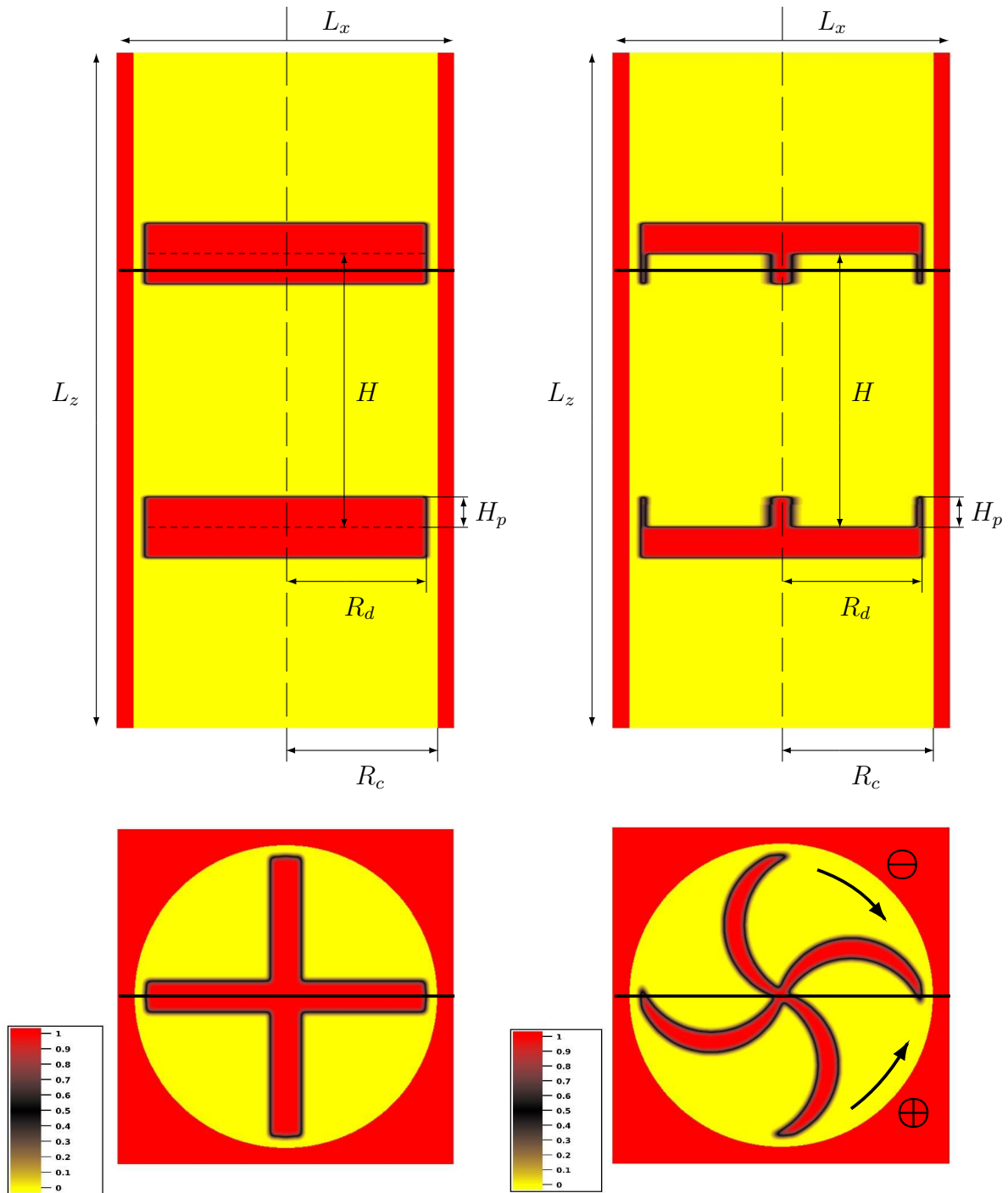


FIGURE 5.1 – Géométries utilisées pour les simulations d'écoulements de von Kármán. La géométrie à pales droites se trouve à gauche et celle à pales courbées à droite. La figure supérieure est une coupe dans un plan vertical contenant le trait gras de la figure inférieure, qui elle-même est une coupe dans un plan horizontal contenant les pales (suivant le trait gras de la figure supérieure). Pour la coupe verticale de la géométrie à pales droites, les traits horizontaux pointillés délimitent les disques des pales qui sont montées dessus. Les deux sens de rotation possibles des pales courbées sont indiquées sur la figure en bas à droite, et notés conventionnellement positif (sens trigonométrique) ou négatif (sens inverse).

zones noires à l'interface fluide/solide au niveau des pales sur la figure 5.1. Le paramètre de lissage de l'équation (2.29), choisi pour nos simulations est $C_s = 256$.

5.2.3 Caractéristiques du forçage

Chacun des rotors peut être mis en rotation à une fréquence indépendante. Nous optons pour des sens de rotation opposés et on notera f_1 la fréquence de rotation du disque supérieur et f_2 celle du disque inférieur. Il est alors courant de définir deux paramètres permettant de quantifier l'intensité et la dissymétrie du forçage par les pales :

$$f_K = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{2}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{f_2 - f_1}{f_1 + f_2}. \quad (5.1)$$

Cela permet également de définir un nombre de Reynolds basé sur la rotation des pales, noté ici Re_K tel que :

$$Re_K = \frac{2\pi R_c^2 f_K}{\nu}. \quad (5.2)$$

On note les trois cas particuliers suivants :

- $\theta = 0$: les deux rotors tournent à la même vitesse ($f_K = f_1 = f_2$);
- $\theta = -1$: seul le disque supérieur est en rotation ($f_1 = f_K$ et $f_2 = 0$);
- $\theta = 1$: seul le disque inférieur est en rotation ($f_1 = 0$ et $f_2 = f_K$).

La topologie des écoulements générés varie fortement en fonction de la forme des pales, leur sens de rotation (dans le cas de pales courbées), le nombre de Reynolds Re_K et le paramètre θ de dissymétrie. En faisant varier θ , on observe principalement deux types d'écoulements moyens : un écoulement moyen avec deux cellules aux sens de rotation opposés pour les cas où θ est proche de zéro (symétrie ou faible dissymétrie du forçage) et un écoulement moyen avec une seule cellule lorsqu'un des deux disques domine le forçage (θ proche de -1 ou 1). La figure 5.2 donne un schéma de l'état avec deux cellules.

Le passage d'un état à une cellule à un état à deux cellules en faisant varier θ a fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux, que ce soit avec un dispositif expérimental muni de pales droites ou de pales courbées. Une quantité facilement mesurable expérimentalement est le couple exercé par le fluide sur le rotor. Il a été observé que la différence du couple du disque supérieur avec celui du disque inférieur peut s'avérer être un bon indicateur de l'état de l'écoulement, plus particulièrement à grand nombre de Reynolds ($Re_K > 10^4$). En effet, Ravelet *et al.* [2004] ont montré que dans le cas de pales courbées tournant dans le sens dit négatif (voir figure 5.1), il existait une multistabilité et un effet mémoire de l'écoulement tel que l'écoulement moyen pouvait être différent pour une même valeur de θ . Cette coexistence de plusieurs écoulements moyens à un θ fixé n'existe cependant pas pour des pales identiques tournant dans le sens positif ou encore des pales droites (voir Cadot & Le Maître [2007]).

Une étude intéressante que nous aurions pu mener aurait été de confirmer numériquement cette multistabilité et d'utiliser la simulation pour arriver à mieux comprendre ce phénomène. Cependant, comme nous allons le voir, la simulation de tels écoulements est très coûteuse (en ressources et en temps) et dépend évidemment de Re_K . Or, simuler, sur un nombre suffisant de périodes de rotation et pour différentes valeurs de θ , un écoulement où le nombre de Reynolds est supérieur à 10^4 est pour l'heure actuelle impossible avec les moyens de calcul dont

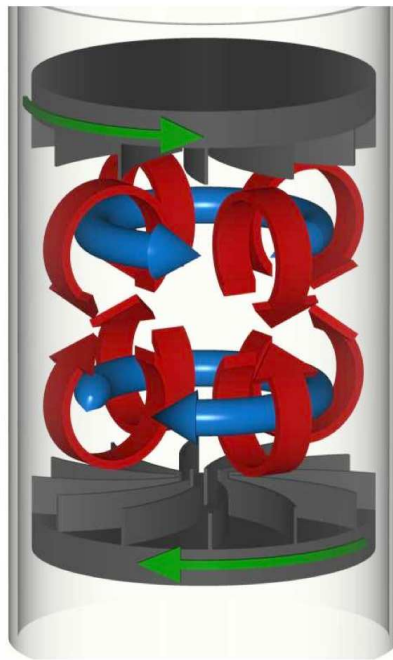


FIGURE 5.2 – Schéma de l'écoulement avec deux cellules dans le cas exactement contra-rotatif ($\theta = 0$), le sens de rotation des rotors étant négatif (voir figure 5.1). L'image est extraite de Monchaux *et al.* [2006] et montre bien la superposition d'un écoulement toroïdal avec un écoulement poloïdal.

$N_x = N_y$	N_z	$L_x = L_y$	L_z	ν	R_c	f_K	θ	Re_K
512	1024	2π	4π	2×10^{-4}	$0.9L_x$	0.1	0	2.5×10^4

TABLE 5.2 – Paramètres de la boîte de simulation, du fluide et du forçage appliqué.

nous disposons. En effet, l'ordre de grandeur des ressources numériques utilisées pour les différentes simulations est d'environ 50 000 heures chacune, réparties sur 128 cœurs, représentant une mémoire totale instantanée de 480 Go. Une étude sur la stabilité demanderait les mêmes besoins pour autant d'états désirés. Ces calculs ont été effectués sur le cluster Jade du Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur (CINES), qui est un ordinateur à mémoire partagée d'une puissance de 267 Tflops/s correspondant à plus de 23 000 cœurs (informations sur le cluster à : <http://www.cines.fr/spip.php?rubrique291&lang=fr>).

Dans cette étude, nous allons plutôt nous concentrer sur la génération et la description des écoulements turbulents produits par des pales droites ou courbées et sur l'étude des écoulements (moyens et turbulents) une fois l'état quasi-stationnaire obtenu (équilibre statistique entre production d'énergie et dissipation visqueuse).

5.2.4 Paramètres des simulations et initialisation

Les principaux paramètres communs des simulations effectuées sont reportés dans le tableau 5.2. Notons que la géométrie a été entièrement définie par la section précédente et ne dépend que de la valeur de R_c donnée par le tableau 5.2, tous les autres paramètres géométriques en étant fonction. Les coupes de la figure 5.1 représentent cette géométrie, avec des pales droites à gauche et courbées à droite.

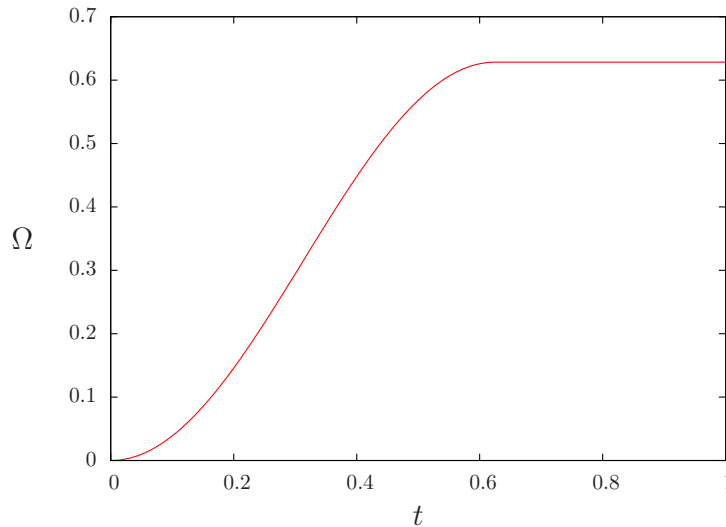
Le forçage est choisi symétrique ($\theta = 0$) ce qui implique $f_1 = f_2 = f_K$. Les pales sont donc exactement contra-rotatives.

À partir de ces paramètres, trois simulations seront effectuées :

- une simulation notée D avec des pales droites ($R_c = \infty$) ;
- une simulation notée $C+$ avec des pales courbées tournant dans le sens positif ;
- une simulation notée $C-$ avec des pales courbées tournant dans le sens négatif.

Nous observerons alors un état transitoire pendant lequel l'écoulement turbulent va envahir la cellule puis un état stationnaire où l'énergie cinétique deviendra presque constante, signe d'un équilibre entre l'énergie apportée au fluide par le forçage et la dissipation visqueuse.

Dans le but d'éviter une discontinuité du forçage, nous introduisons une vitesse de rotation progressive de 0 à la valeur $\Omega_K (= 2\pi f_K)$ désirée. L'évolution initiale de la vitesse de rotation est définie par une fonction sinusoïdale ayant une dérivée nulle à l'instant initial (accélération progressive) et lorsque cette vitesse atteint la valeur Ω_K désirée. L'instant où la vitesse souhaitée est atteinte correspond à $1/16$ de la période de rotation ($T_K = f_K^{-1}$). La figure 5.3 montre l'évolution initiale de Ω .

FIGURE 5.3 – Initialisation de la vitesse de rotation Ω des rotors.

5.2.5 Comparaison rapide des différents écoulements

Les premières quantités dont nous regardons l'évolution sont les quantités énergétiques moyennes ; totale, horizontale et verticale. En effet, nous considérerons que l'écoulement moyen est statistiquement stationnaire à partir de l'instant où l'énergie cinétique est quasi-constante. La première observation que nous pouvons faire après observation de la figure 5.4 est que la géométrie a une influence forte sur les propriétés de l'écoulement généré, ou en tout cas sur son niveau d'énergie.

En effet, on peut remarquer que le niveau d'énergie cinétique totale avec les pales droites (D) est le plus élevé ; l'écoulement est trois fois plus énergétique que celui généré avec des pales courbées tournant dans le sens négatif (C-) et presque deux fois plus que la même géométrie avec le sens opposé de rotation (C+). On peut également noter que l'obtention de l'état stationnaire pour la simulation C- est bien plus rapide que les autres cas, une demi-période² suffisant à l'obtenir, alors que trois périodes T_K sont nécessaires dans le cas de pales droites. On peut donc s'attendre à avoir des écoulements bien différents dans les trois cas, étant donné l'écart obtenu entre ces grandeurs globales. Dans les sections suivantes, nous détaillerons donc les écoulements générés en fonction de la géométrie et du sens de rotation des pales utilisé.

En regardant séparément sur la figure 5.4 les contributions horizontale et verticale, on peut déjà remarquer que l'énergie cinétique verticale est d'un ordre de grandeur plus petite que l'énergie cinétique horizontale. En effet, le forçage étant effectué par des pales tournant autour de l'axe vertical (vitesse de rotation du forçage horizontale), ce constat n'est pas surprenant.

On note que la stationnarité énergétique apparaît à $t \approx 30$ s pour la simulation D, à $t \approx 7$ s pour la simulation C- et $t \approx 60$ s pour la simulation C+. Les statistiques que nous montrerons pour décrire les écoulements stationnaires obtenus seront donc calculées à partir de ces instants.

La figure 5.5 montre l'évolution, durant l'initialisation puis une fois un régime quasi-

2. La période T_K de rotation vaut $T_K = f_K^{-1} = 10$ s.

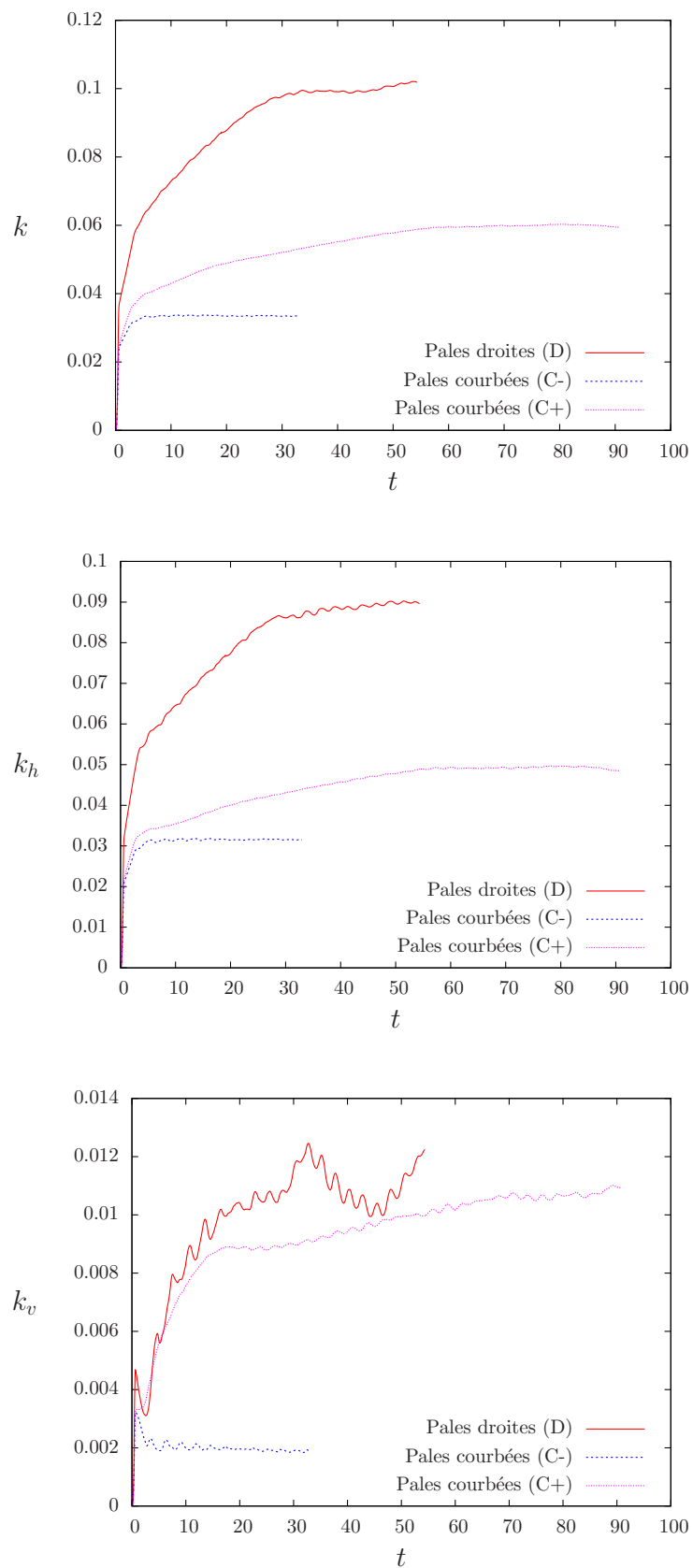


FIGURE 5.4 – Comparaison de l'évolution de l'énergie cinétique totale, horizontale et verticale pour les différentes géométries de pales considérées.

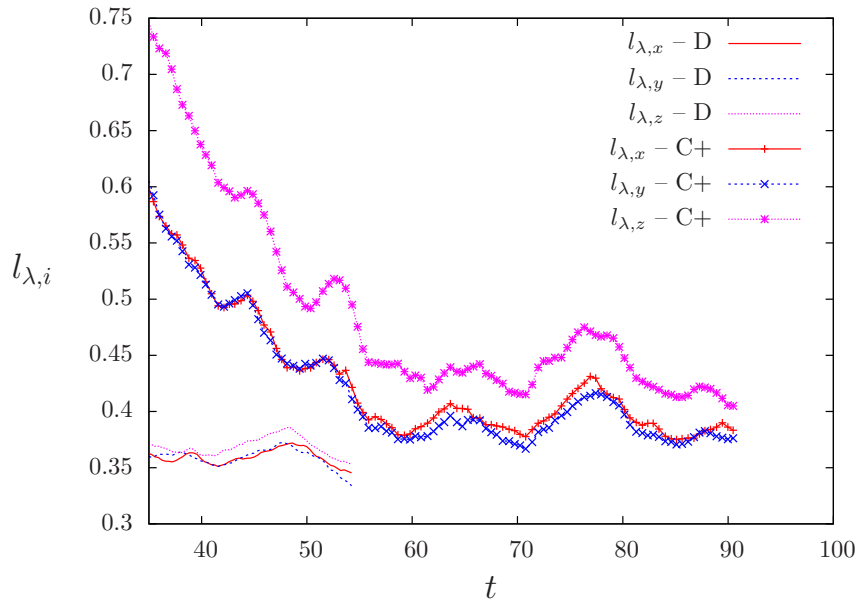


FIGURE 5.5 – Échelles de longueur de Taylor directionnelles, calculées à partir de l'équation (5.3). Les quantités ne sont tracées qu'à partir de $t = 30$ s car les gradients de vitesse sont très proches de 0 au début du calcul (pas d'écoulement initial) ce qui entraîne des valeurs pour $l_{\lambda,i}$ très grandes mais qui n'ont pas de signification.

stationnaire atteint, des différentes échelles de longueur de Taylor définies par :

$$l_{\lambda,i} = \sqrt{\frac{4k}{3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2}} \quad \text{sans sommation sur l'indice } i. \quad (5.3)$$

Nous remarquons que la stationnarité énergétique concorde avec la stationnarité des échelles de longueur des structures turbulentes et que dans les deux simulations D et C+, il semble que les structures aient une longueur verticale caractéristique plus importante que les échelles dans les directions x et y , de manière plus évidente pour la simulation C+. On peut également noter que la figure présentée n'inclue pas les échelles de longueur calculées pour la simulation C-. La raison à cela est que nous avons observé que la turbulence obtenue dans cette simulation n'envahit pas le domaine fluide et reste très localisée vers les pales. Par suite, dans ce calcul, aucune structure tourbillonnaire n'existe dans le cœur de la cellule, l'écoulement y est alors au repos et le calcul d'une échelle de Taylor donne une valeur qui n'est pas cohérente ($l_\lambda \gg 1$) du fait de l'absence de structure turbulente. La figure 5.6 donne un aperçu du champ de vitesse obtenu, moyenné azimutalement et atteste le fait qu'aucun écoulement n'est produit par cette géométrie dans le cœur de la cellule fluide.

Ceci constitue une première observation à retenir qui est que la configuration avec pales courbées, comme définies par la figure 5.1, tournant dans le sens négatif, produit un écoulement dont les structures se dissipent avant même de parvenir au centre de la cellule. Nous n'avons évidemment pas de doute sur le fait que ce type de géométrie puisse produire des écoulements turbulents, mais pas pour le nombre de Reynolds Re_K considéré ici. En conséquent, la suite de l'étude portera essentiellement sur les deux autres simulations (D et C+) où des écoulements

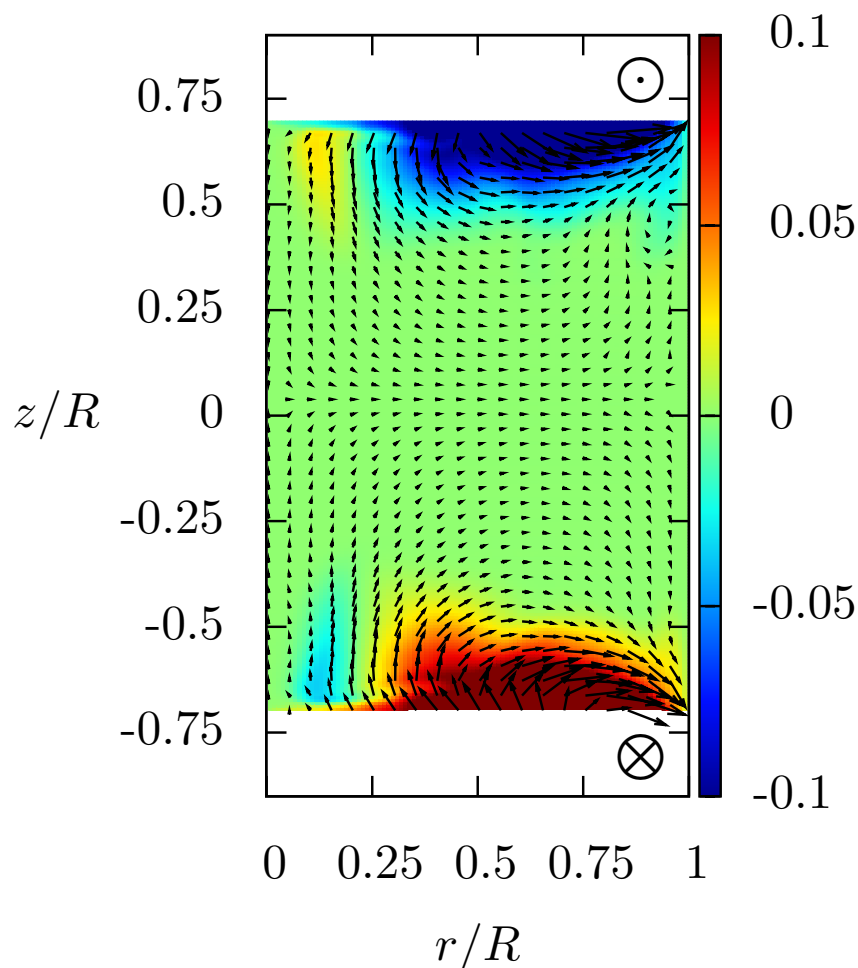


FIGURE 5.6 – Visualisation du champ stationnaire moyenné temporellement et azimutalement pour la simulation C-. Dans un demi-plan rz , les vecteurs représentent la projection de la vitesse moyennée dans le plan et l'échelle de couleur représente la valeur de la composante azimutale. Les parties supérieures et inférieures blanches localisent les pales tournantes et les symboles \otimes et \odot donnent le sens de rotation des pales.

turbulents sont alors bien observés (voir sections 5.3 et 5.4).

Enfin, à partir des échelles de Taylor calculées précédemment, nous pouvons déterminer un nombre de Reynolds moyen, basé sur l'échelle $l_\lambda = \sum_{i=1,2,3} l_{\lambda,i}/3$, tel que

$$\text{Re}_\lambda = u_{\text{rms}} l_\lambda / \nu \quad (5.4)$$

et ainsi établir un lien d'ordre de grandeur entre Re_K et Re_λ . La figure 5.7 donne l'évolution des nombres de Reynolds ainsi définis, Re_K étant fixé et dépendant de la géométrie et de la fréquence du forçage. Ainsi, pour un nombre de Reynolds de pales $\text{Re}_K = 2.5 \times 10^4$, nos simulations numériques produisent des écoulements turbulents tels que $\text{Re}_\lambda \approx 120$ pour la simulation avec des pales droites et $\text{Re}_\lambda \approx 80$ pour la simulation avec des pales courbées tournant dans le sens positif. On confirme également que la simulation C- ne crée pas un écoulement turbulent, le nombre $\text{Re}_\lambda \approx 600$ étant dû à la grande valeur de l_λ expliquée précédemment. De la même manière, lors de l'initialisation de l'écoulement, on observe de très grandes valeurs du nombre de Reynolds uniquement parce que l'écoulement n'est pas encore développé et que cela donne des valeurs plus grandes que la taille de la boîte de simulation pour l_λ . Sur la figure 5.7 inférieure, nous traçons la valeur de $\kappa_{\text{max}} l_\eta$ pour chacune des simulations, l_η étant définie par l'équation (1.36), afin de vérifier que nos simulations ne soient pas sous-résolues et que toutes les structures turbulentes, aussi petites soient-elles, soient bien prises en compte dans la résolution numérique de l'écoulement. Pour cela, la condition à respecter est $\kappa_{\text{max}} l_\eta > 1$ (voir p. ex. Jiménez *et al.* [1993], Kaneda & Ishihara [2006]), ce qui est le cas pour les deux configurations qui nous intéressent (D et C+).

5.3 Écoulement généré à l'aide de pales droites

Dans cette section, nous analysons les résultats de la simulation impliquant des pales droites pénalisées (simulation D).

5.3.1 État transitoire

Initialisation du champ de vitesse

Comme le montre la figure 5.2, le dispositif de von Kármán, dans le cas de pales exactement contrarotative ($\theta = 0$), génère un champ moyen qui se décompose en deux cellules³. L'écoulement moyen (au sens de la moyenne azimuthale) est axisymétrique et la figure 5.8 montre le champ de vitesse moyenné suivant la direction azimuthale, dans un demi-plan rz . On observe clairement l'émergence de deux tourbillons contrarotatifs (u_θ de signes opposés) qui créent deux zones de recirculation. Le mouvement est généré aux extrémités de pales ($r/R \approx 1$) où la vitesse azimuthale est très importante et la quantité de mouvement est advectée le long de la paroi jusqu'à ce que les deux structures se rencontrent en $z = 0$. On peut voir qu'avant la rencontre des deux tourbillons, les fortes vitesses sont bien localisées à proximité de l'enceinte cylindrique (jusqu'à $t = 19.7$ s). Ensuite, les signes des composantes verticales des deux tourbillons moyens étant opposés, ces deux structures tourbillonnaires s'élargissent vers le cœur

3. Cela n'est plus vrai à très haut nombre de Reynolds ($\text{Re}_K > 10^5$) où une multistabilité existe entre deux états à une cellule et un état à deux cellules (voir Ravelet *et al.* [2004]).

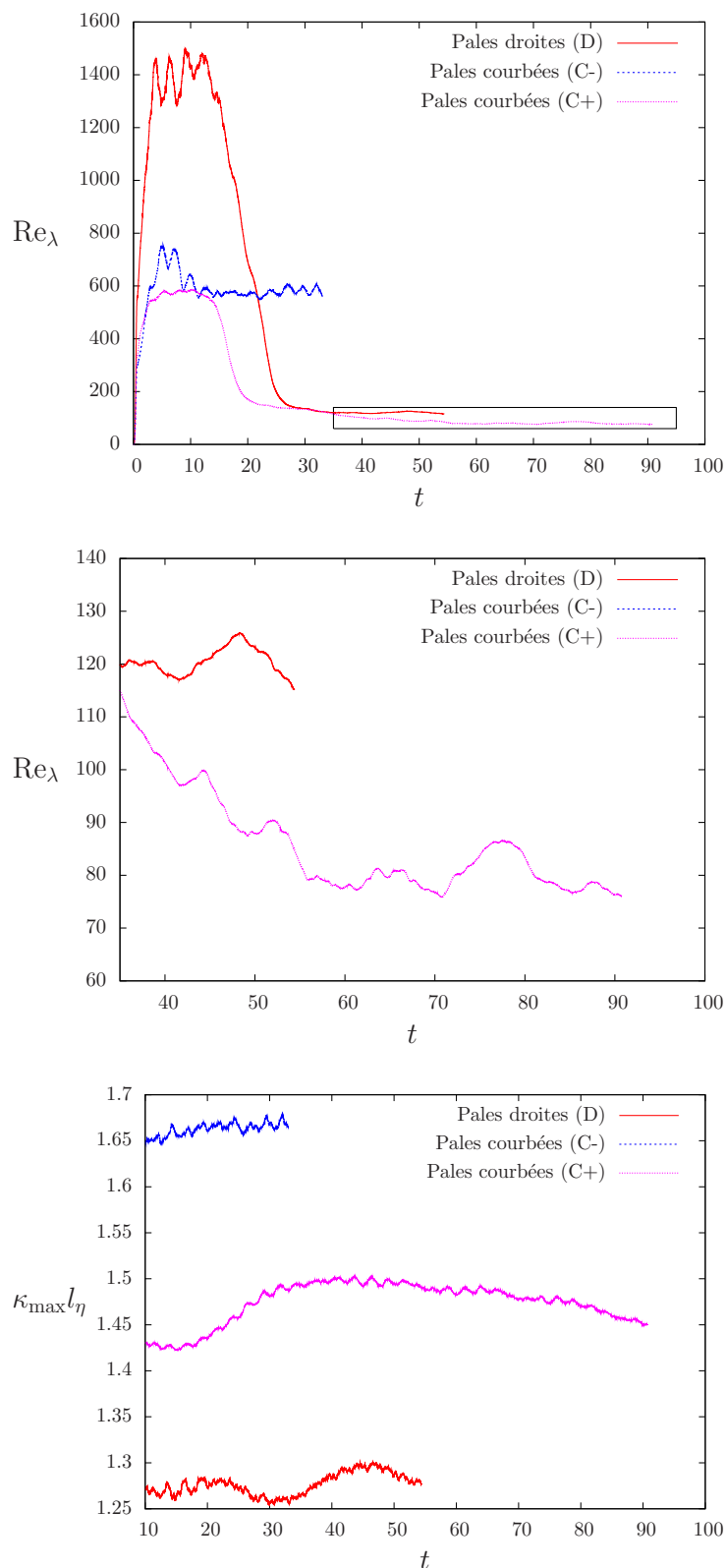


FIGURE 5.7 – Nombres de Reynolds basés sur l'échelle de Taylor l_λ pour les différentes configurations. La figure supérieure montre l'évolution à partir de l'initialisation et la figure centrale zoome à partir de $t = 30$ s pour les configurations D et C+. La figure inférieure donne l'évolution de la valeur de $\kappa_{\max} l_\eta$ nous permettant de valider la bonne résolution de l'ensemble des échelles de longueur des structures. Les valeurs pour la simulation C- sont tracées à titre indicatif, bien qu'elles ne soient pas pertinentes comme indiqué dans le texte.

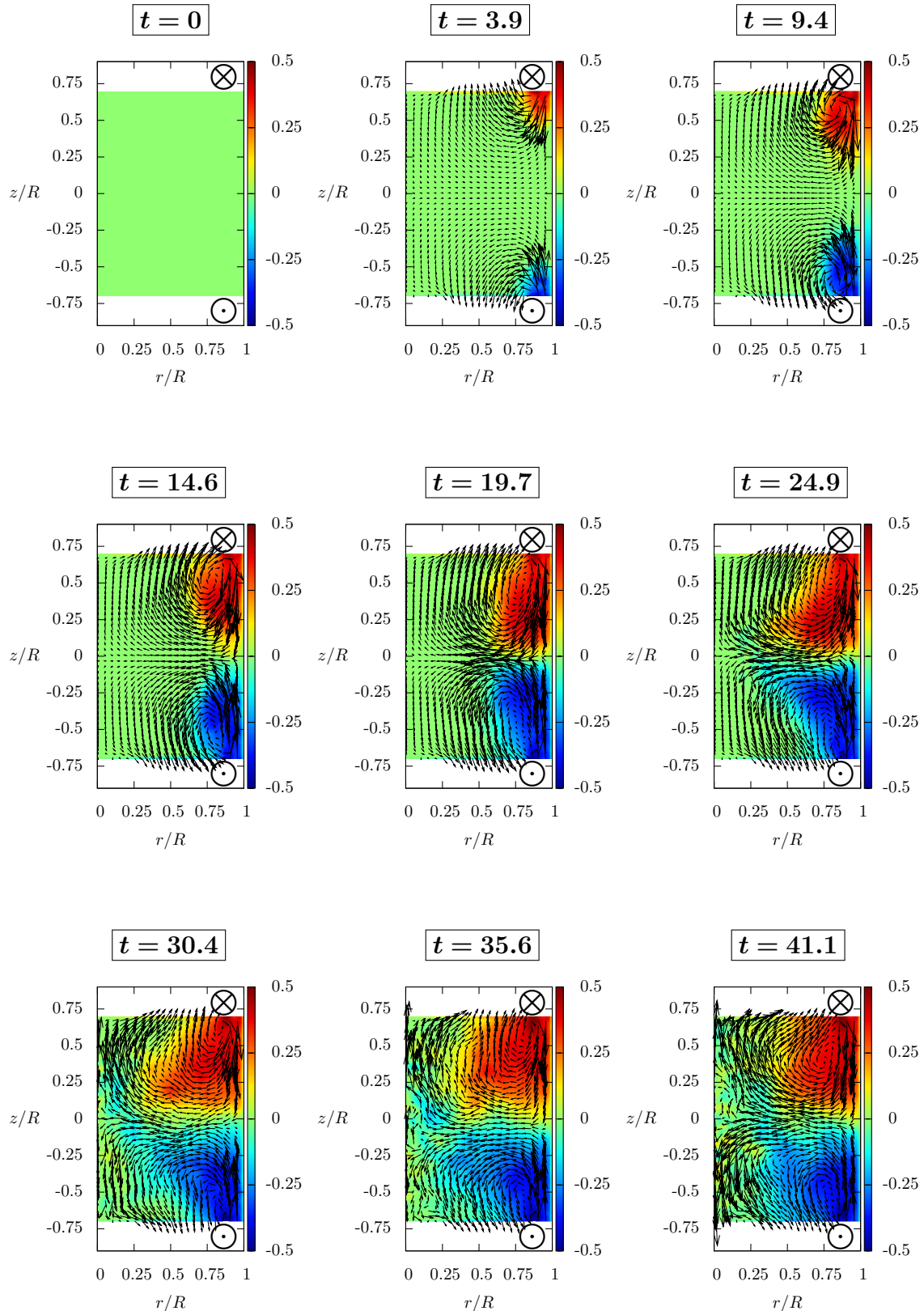


FIGURE 5.8 – Évolution temporelle du champ de vitesse moyenné azimutalement dans le cas de pales droites. Les vecteurs représentent la projection du vecteur vitesse moyen sur le plan rz et la couleur indique la valeur de la composante azimutale du même vecteur.

de la cellule et comme les deux cellules ont également des composantes azimutales de signes opposés, cela génère un cisaillement autour du plan $z = 0$ qui génère, par le biais d'instabilités, des structures turbulentes tourbillonnaires au cœur du domaine fluide. À partir de $t \approx 35$ s, l'intensité des vitesses des tourbillons moyens est maintenue par le forçage, donc la couche de cisaillement est maintenue également, et la dissipation visqueuse est compensée par l'apport d'énergie dû à la rotation des pales.

Génération de vorticité :  tude de l'équation d'évolution de l'ensrophie

Comme nous le verrons dans la section 5.3.2, l'écoulement généré au cœur de la géométrie est turbulent et la figure 5.10, où est tracée en volume l'ensrophie $\mathcal{Z} = \omega^2/2$, montre les structures tourbillonnaires cr ees par le cisaillement autour du plan $z = 0$. Cette visualisation est obtenue une fois l'état stationnaire atteint. Afin de confirmer que la présence de structures tourbillonnaires turbulentes au cœur de l'écoulement est bien due au cisaillement horizontal, et non au transport de tourbillons crées par la forçage, nous considérons l'équation d'évolution de l'ensrophie :

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t} = -u_i \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x_i} + \omega_i \omega_j S_{ij} + \nu \omega_i \nabla^2 \omega_i, \quad (5.5)$$

où S_{ij} est le tenseur des déformations $S_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) / 2$. Nous tentons alors d'observer l'évolution de chacun des termes de droite de l'équation (5.5), pendant la phase de développement de l'écoulement turbulent, afin de déterminer où et comment est produite la turbulence. Le premier terme, noté $T_{adv}^{\mathcal{Z}}$ dans la suite, est le terme d'advection de l'ensrophie par l'écoulement et ne peut donc pas représenter la création d'ensrophie mais simplement son transport. Le deuxième terme, noté $T_{stretch}^{\mathcal{Z}}$ est le terme dit de *vortex stretching* et est le principal responsable de la création de \mathcal{Z} . En effet, un argument courant, issu de la conservation de la circulation autour d'un tube tourbillonnaire (théorème de Helmholtz) en écoulement non-visqueux, dit que l'étirement d'un tube tourbillonnaire, donc la réduction de sa section, entraîne une augmentation de la vorticité normale à cette section : l'étirement des structures tourbillonnaires augmente la rotation de ces dernières (donc l'ensrophie) et à l'inverse, la compression diminue le taux de rotation. Ce phénomène apparaissant aux petites échelles est appelé *vortex stretching* et le terme $T_{stretch}^{\mathcal{Z}}$ de l'équation (5.5) en est la trace. Enfin, le dernier terme est le terme visqueux $T_{\nu}^{\mathcal{Z}}$ et son effet n'est pas seulement limité à la destruction d'ensrophie. En effet, la viscosité peut incliner la vorticité et est responsable du phénomène de *vortex reconnection* (voir Kida & Takaoka [1994]), ces deux effets pouvant localement être producteurs d'ensrophie (Holzner *et al.* [2010]). La figure 5.9 montre la distribution de ces trois quantités à différents instants.

On observe qu'au début de la simulation, le mouvement des pales génère une intense vorticité du fait du passage d'un écoulement au repos à un forçage soudain, comme le montre la forte valeur positive de $T_{stretch}^{\mathcal{Z}}$   proximité des extrémités des pales. En effet, le forçage est plus intense aux extrémités des pales car la vitesse azimutale y est la plus grande (et donc la différence de vitesse fluide/solide également, le fluide étant alors au repos) et la force centrifuge, favorisée par la géométrie droite des pales, tend à concentrer les structures tourbillonnaires cr ees   proximité de l'enceinte cylindrique. La dissipation d'ensrophie est localement très importante, le terme $T_{\nu}^{\mathcal{Z}}$ étant uniquement négatif.   $t = 19.7$, la vitesse des particules fluides proches des pales tend à être équivalente à la vitesse des pales, ce qui implique des gradients de vitesse

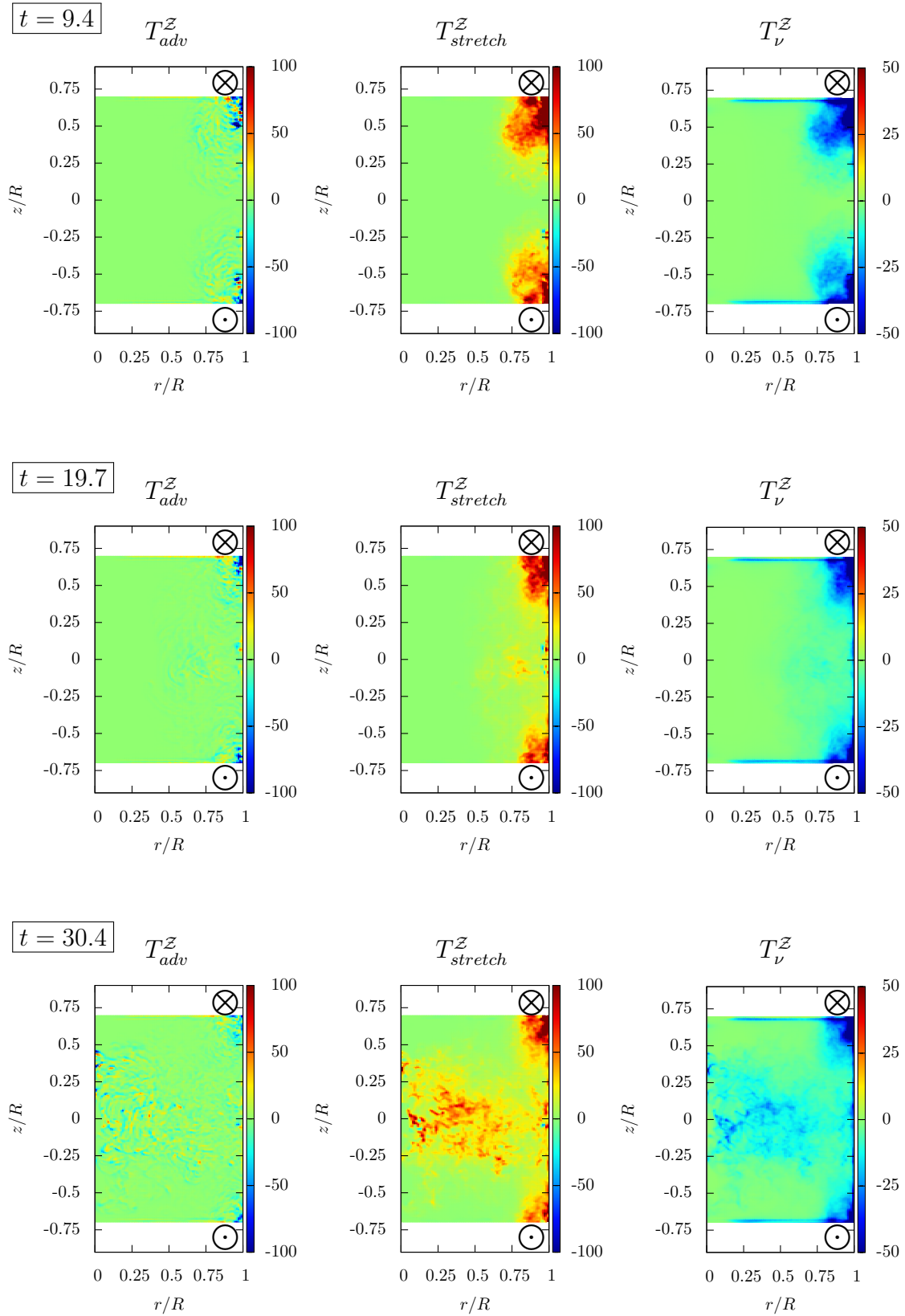


FIGURE 5.9 – Distribution des termes de l'équation d'évolution de l'ensrophie, à différents instants de l'état transitoire, pour la géométrie avec des pales droites (D).

moins forts et par conséquent une diminution de l'intensité du terme $T_{stretch}^Z$. Néanmoins, cet instant est également celui où les deux tourbillons contrarotatifs se rencontrent (voir la figure 5.8) et on observe la présence de *vortex stretching* au niveau de la couche de cisaillement créée. Enfin, une fois l'écoulement établi et statistiquement stationnaire, on voit que la création d'ensrophie est forte autour du plan $z = 0$, et est uniquement due au terme $T_{stretch}^Z$, qui s'avère être positif dans tout l'écoulement et donc ne participe qu'à la création de Z . De plus, nous pouvons également conclure sur le terme visqueux T_ν^Z qui lui n'est quasiment que négatif et a donc un simple rôle de dissipation d'ensrophie.

Nous avons donc localisé et tenté de comprendre le mécanisme de production de turbulence au sein de l'écoulement généré à l'aide de pales droites (instabilités générant du *vortex stretching* dans la couche de cisaillement azimutal) et nous allons maintenant tenter de décrire l'écoulement turbulent résultant.

5.3.2 Caractérisation de l'écoulement turbulent

Visualisation de l'écoulement turbulent

Une première impression de l'écoulement turbulent est donnée par la figure 5.10 qui montre une image instantanée du champ d'ensrophie entre les deux rotors, le domaine complet de calcul étant délimité par les arêtes noires. Comme montré précédemment, les structures turbulentes sont localisées autour du plan $z = 0$ et les effets des signes opposés des vitesses verticales des tourbillons contrarotatifs associés à la présence de la paroi cylindrique tendent à pousser les structures créées vers l'axe de rotation. On obtient alors une turbulence intense au centre de la cellule que nous allons tenter de caractériser.

Spectres temporels

La nature d'un écoulement, ou en tout cas la distribution de l'énergie parmi les différentes échelles, est décrite par les spectres de vitesse ou d'énergie, qu'ils soient spatiaux (la décomposition se fait suivant les nombres d'ondes), ou temporels (décomposition du signal en fréquences). Du fait de l'inhomogénéité de l'écoulement, le calcul de spectres tri-dimensionnels s'avère moins direct que lors de l'étude d'écoulements homogènes. Notre étude porte sur l'étude de spectres temporels. Pour cela, tout au long du calcul, nous avons sauvegardé le signal de vitesse à 7 positions différentes qui sont décrites par la figure 5.11. Les 5 premières sondes sont localisées au cœur de la cellule de von Kármán pour tenter de décrire la turbulence au cœur de la géométrie, la sonde 6 se trouve au centre d'un des deux tourbillons moyens et la sonde 7 est située à proximité de l'axe de rotation, à une distance du rotor inférieur équivalente à celle de la sonde 6 avec le rotor supérieur. La figure 5.12 montre les signaux temporels de vitesse à partir desquels sont obtenus les spectres temporels de la figure 5.13. On observe clairement la période de transition jusqu'à l'apparition de la stationnarité statistique à $t \approx 35$, pour les positions centrales (sondes 1 à 5) mais également pour la sonde 7, qui est située à proximité de la paroi et à proximité de l'axe du cylindre. En effet, contrairement à la sonde 6 où dès le début de la simulation, la sonde perçoit l'effet de la rotation des pales avec une oscillation du signal de vitesse à une fréquence 4 fois plus grande que la fréquence f_K du fait de la présence de 4 pales, la sonde 7 ne perçoit qu'une vitesse verticale dont l'intensité semble évoluer linéairement

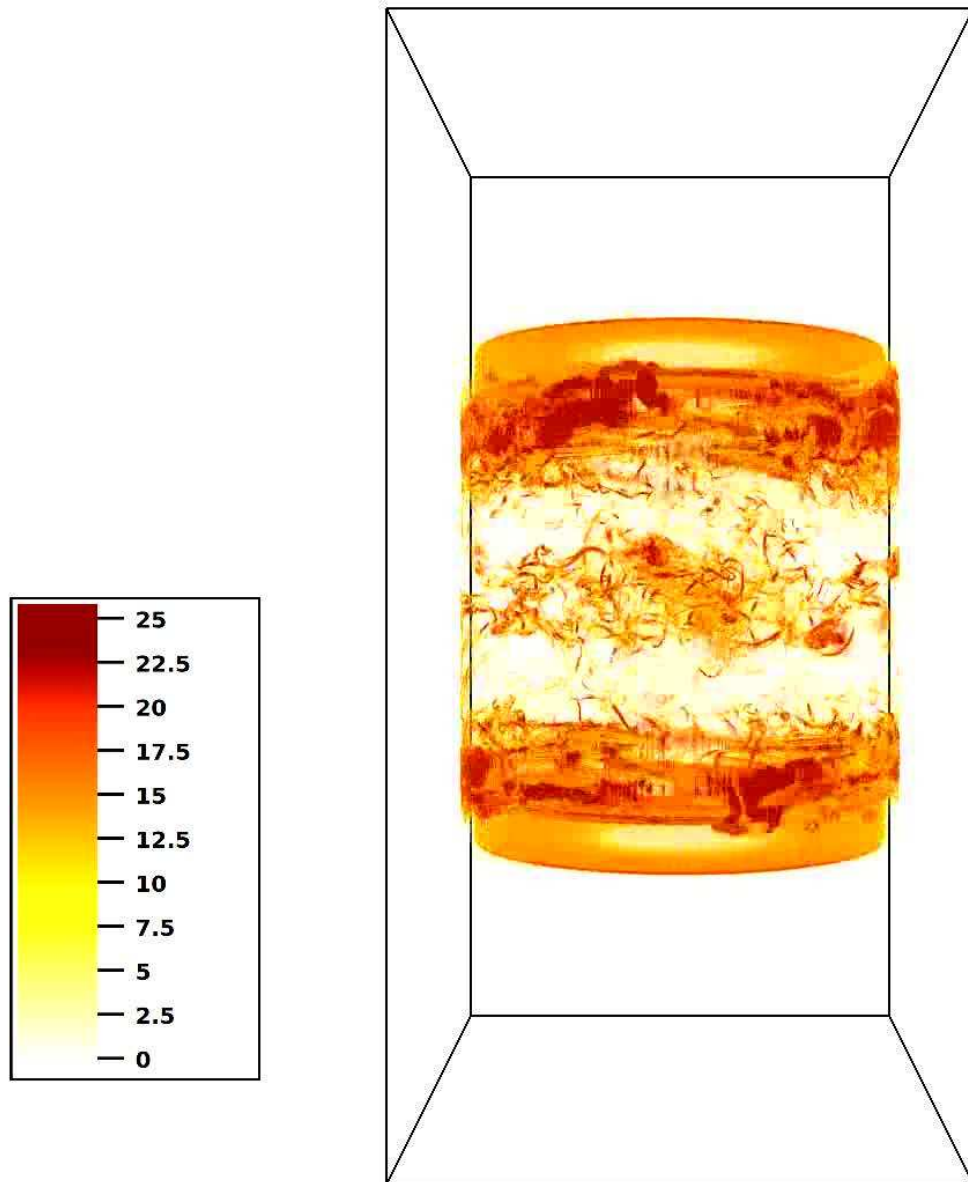


FIGURE 5.10 – Champ d’entrophie \mathcal{Z} instantané pour la simulation D. On observe la création de tourbillons au centre du domaine, générés par le cisaillement des vitesses azimutales à proximité du plan $z = 0$.

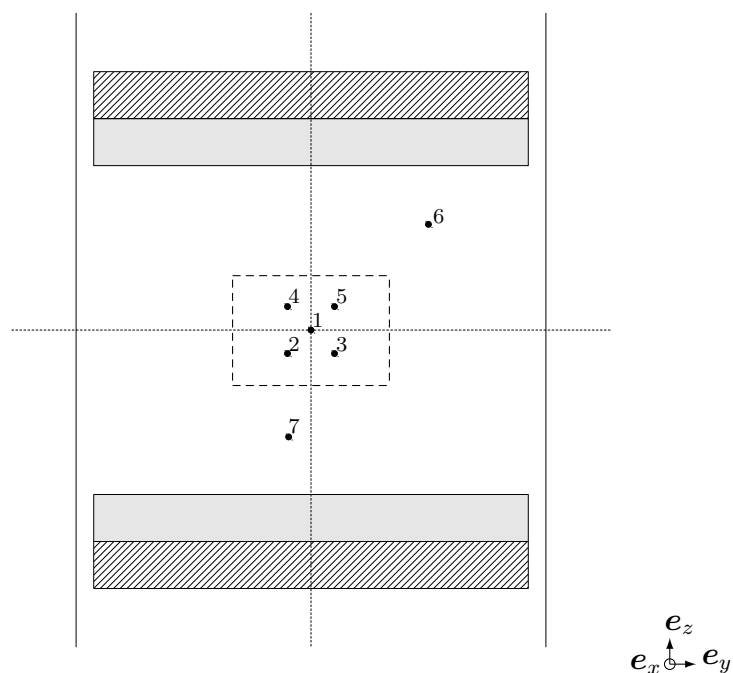


FIGURE 5.11 – Schéma de la position des “sondes” utilisées pour le calcul des spectres temporels. La partie hachurée correspond aux disques tournants et les parties grises à la position des pales. La coupe présentée est normale à la direction e_x et passe par le centre du domaine fluide qui correspond à la sonde 1. La zone délimitée par les traits pointillés correspond à la zone centrale (\mathcal{D}_c) dans laquelle sont calculées les statistiques de l'écoulement.

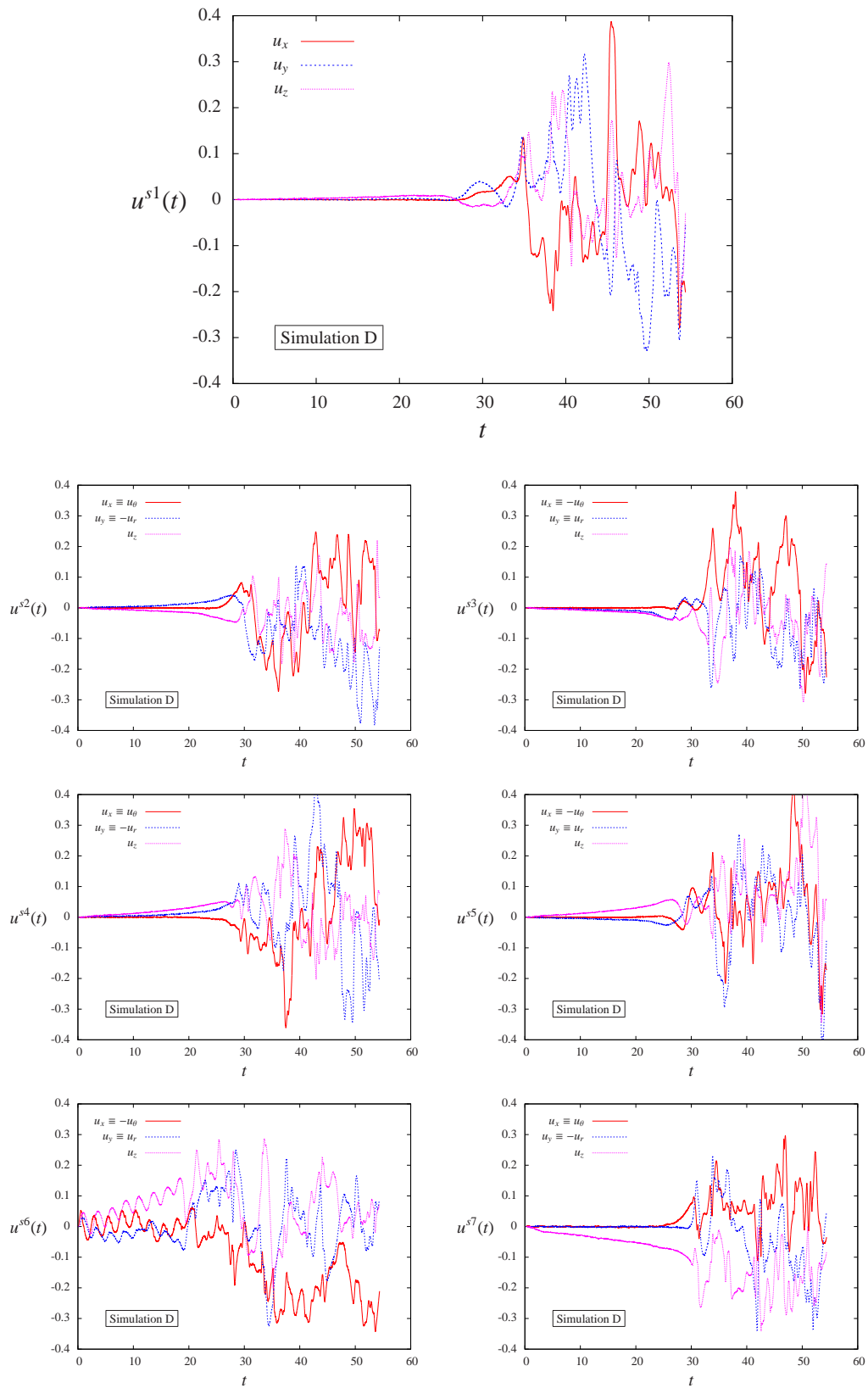


FIGURE 5.12 – Signaux temporels obtenus pour la simulation D aux positions données par la figure 5.11.

avec le temps, semblant correspondre à la mise en route du pompage d'Ekman. Remarquons enfin qu'à partir de $t = 35$, les signaux ont des comportements très complexes autour d'une vitesse moyenne, dépendant évidemment de la position et de la composante considérée comme le montre la figure 5.8, et des traces de la fréquence f_K ne sont alors plus visibles.

Nous traçons alors la densité spectrale de puissance (DSP) des différents signaux temporels de la figure 5.12 en réalisant la transformée de Fourier de ces signaux, après les avoir multipliés par une fenêtre de Hann pour atténuer les effets de non-périodicité. Nous remarquons qu'il semble apparaître une pente clairement définie pour les fréquences supérieures à la fréquence de rotation f_K . En ce qui concerne ces échelles rapides ($f > f_K$), retrouvons-nous une loi d'échelle en $-5/3$ similaire aux prédictions de Kolmogorov ? Une rapide observation de la figure 5.13 semble valider cette loi d'échelle, avec des tendances plus ou moins évidentes suivant la position considérée. Évidemment, du fait du nombre de Reynolds Re_λ des écoulements observés, ces tendances ne sont observées que sur environ une décade, avec l'apparition d'une chute du spectre du fait de la dissipation.

Notons qu'il a été observé expérimentalement qu'aux grandes échelles temporelles ($f < f_K$), avec un signal suffisamment long, une tendance à une évolution $\propto f^{-1}$ apparaît (voir Ravelet *et al.* [2008]). Dans notre cas, cela est difficilement observable du fait de la fenêtre temporelle relativement courte ($t_{spectre} \approx 20$) qui empêche une description aux très faibles fréquences ($f_{min}/f_K = T_K t_{spectre}^{-1} \approx 0.5$) et donc l'observation d'une évolution à la puissance -1 . L'existence d'une PSD en $1/f$ est discutée en détail par Ravelet *et al.* [2008] et ces auteurs semblent attribuer ce comportement à la dynamique lente de la couche de cisaillement, une telle observation n'étant pas faite pour des écoulements à une seule cellule (p. ex. dans Marié [2003] ou Ravelet *et al.* [2004]) alors que son existence a déjà été prouvée pour des écoulements à deux cellules (voir Zocchi *et al.* [1994]).

Notons pour conclure que cette étude est grandement limitée par la fenêtre d'observation à partir de laquelle sont calculés ces spectres. En effet, la qualité des spectres n'est pas très bonne et de fortes oscillations sont présentes du fait d'un manque de statistiques. Enfin, le bruit aux grandes fréquences est important mais se situe dans la zone des échelles dissipatives et ne nous empêche pas de caractériser la dynamique des échelles turbulentes.

Corrélation de vorticité en deux points

Lorsque nous cherchons à caractériser les échelles de longueurs, une technique courante est d'intégrer la fonction de corrélation d'une composante de vitesse en deux points (voir l'exemple des équations (4.6) du chapitre précédent). Cependant, comme l'écoulement que nous considérons ici est dominé par un champ moyen, donné par la figure 5.8, constitué de deux tourbillons à l'échelle de la cellule, la corrélation basée sur les vitesses n'est pas une information pertinente pour l'étude du champ turbulent mais plutôt pour l'étude du champ moyen. La caractérisation de la longueur des structures tourbillonnaires se fait ici par le calcul de la corrélation en deux points de la vorticité. La composante choisie est la composante verticale de la vorticité qui caractérise donc la rotation des structures autour de l'axe de rotation des pales. La quantité calculée est donc :

$$R_i^\omega(l) = \frac{\langle \omega_z(\mathbf{x}) \omega_z(\mathbf{x} + l \mathbf{e}_i) \rangle_{\mathcal{D}_c}}{\sqrt{\langle \omega_z^2(\mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{D}_c} \langle \omega_z^2(\mathbf{x} + l \mathbf{e}_i) \rangle_{\mathcal{D}_c}}}. \quad (5.6)$$

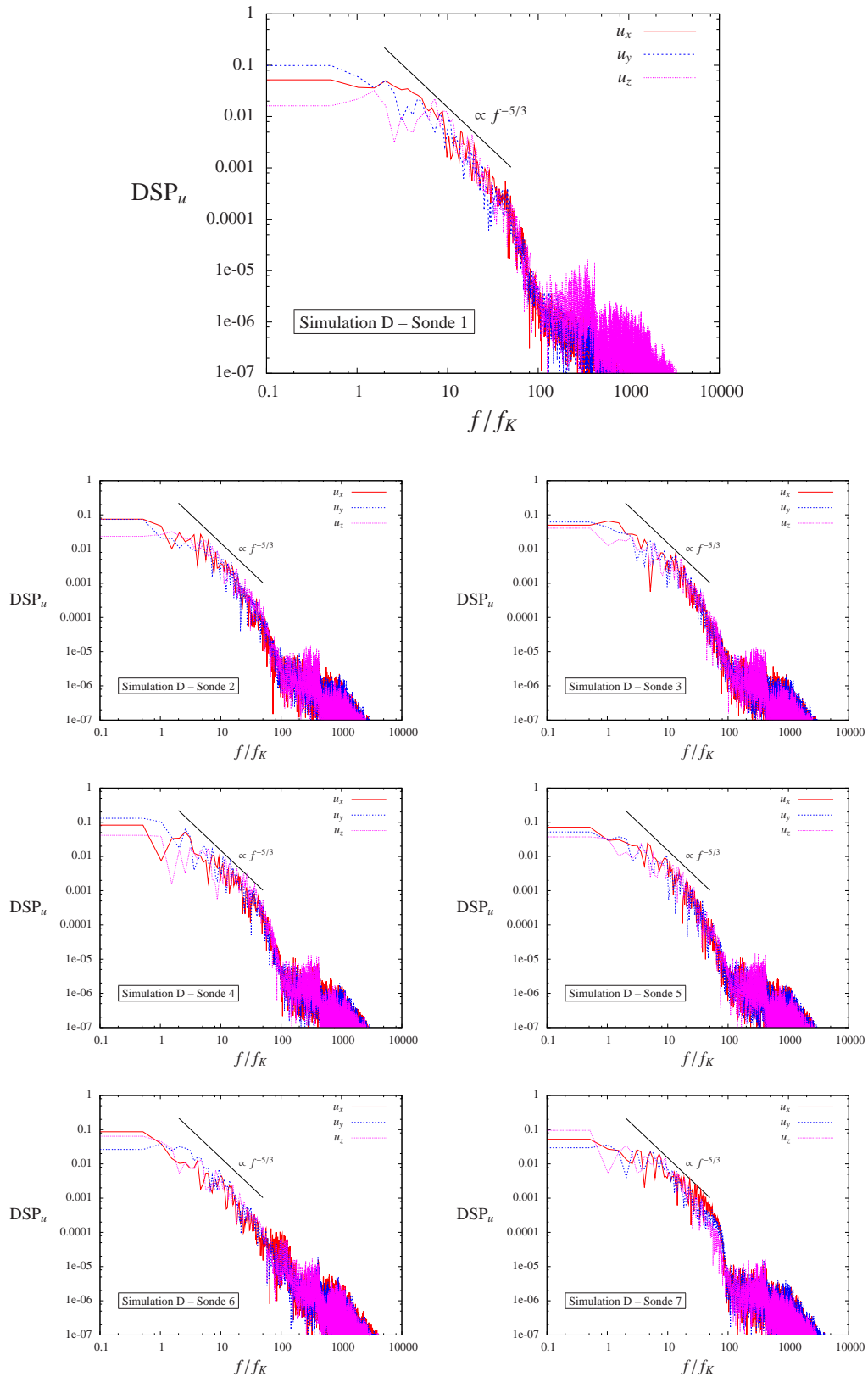


FIGURE 5.13 – Densités spectrales de puissances (DSP) des signaux de vitesse de la figure 5.12, calculées à partir de $t = 35$, pour la simulation utilisant une géométrie de pales droites.

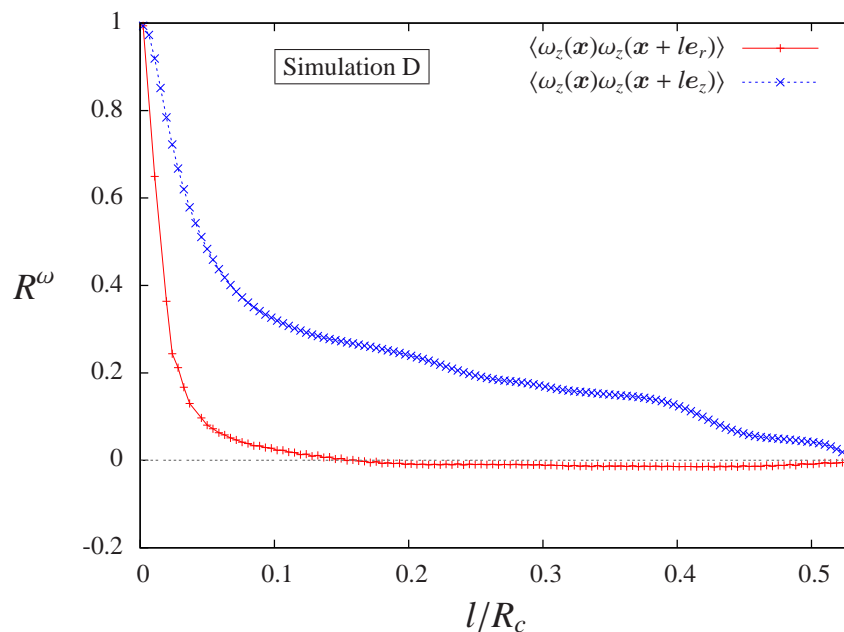


FIGURE 5.14 – Corrélation de vorticité verticale dans la zone de cœur \mathcal{D}_c de la simulation D.

où $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{D}_c}$ dénote la moyenne dans la zone centrale \mathcal{D}_c . La figure 5.14 montre l'évolution de cette quantité en fonction de la distance l entre les deux points séparés horizontalement ou verticalement, pour la simulation avec les pales droites. Alors que la corrélation décline très vite dans le plan horizontal, ce qui implique une faible épaisseur horizontale des tourbillons turbulents, la corrélation de vorticité entre deux points séparés verticalement n'atteint la valeur nulle qu'à partir d'une longueur correspondant à environ la moitié du rayon de l'enceinte cylindrique, ce qui est à peu près équivalent à un quart de la hauteur H de la cellule. Les structures tourbillonnaires sont donc très fortement corrélées verticalement ce qui implique une longueur verticale des tourbillons bien supérieure à leur épaisseur dans le plan horizontal. Cela montre que l'écoulement est loin d'être isotrope dans sa zone de cœur.

Vitesse et vorticité au cœur de l'écoulement

Nous nous intéressons désormais aux distributions des *pdfs* de vitesse et de vorticité dans le but de caractériser la cinématique au cœur de l'écoulement, ces distributions étant calculées dans la zone centrale \mathcal{D}_c . Nous considérons tout d'abord les *pdfs* des composantes de vitesse sur la figure 5.15. Nous notons des allures plutôt gaussiennes pour ces distributions, avec une symétrie assez bien respectée pour la *pdf* de la composante verticale. De manière assez surprenante du fait de l'axisymétrie statistique, nous observons une dissymétrie des *pdfs* pour les composantes du plan horizontal pour laquelle nous n'avons pas d'explication convaincante.

En ce qui concerne les *pdfs* de vorticité de la figure 5.16, on observe une superposition des trois distributions, qui semblent symétriques. Cette superposition indique qu'au centre de l'écoulement, la *rms* de la vorticité est identique pour les trois composantes, impliquant donc un taux de rotation des tourbillons équivalent autour des trois directions.

La dynamique de la turbulence, comme les transferts d'énergie entre les différentes échelles ou la création d'enstrophie, peut être caractérisée par l'étude des dérivées de vitesse. Par

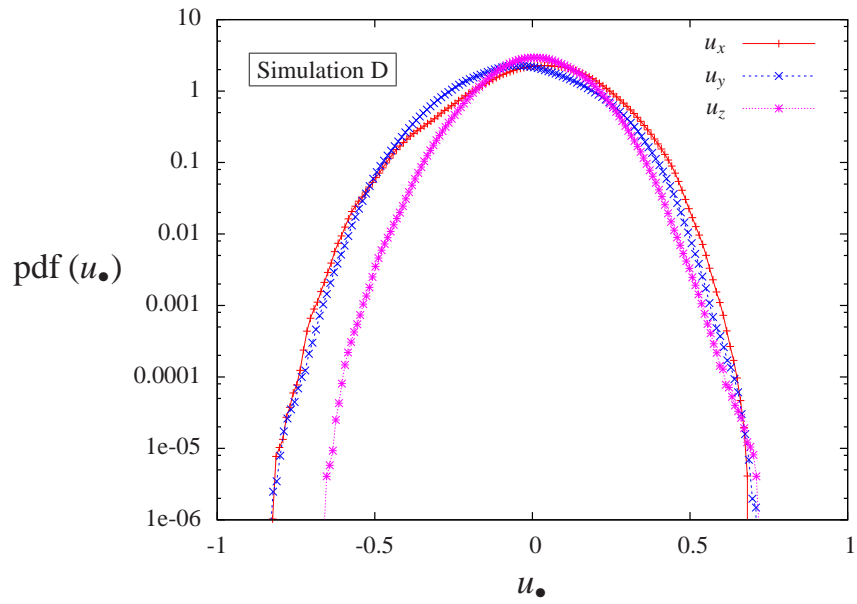


FIGURE 5.15 – Pdfs des composantes cartésiennes de vitesse dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation D.

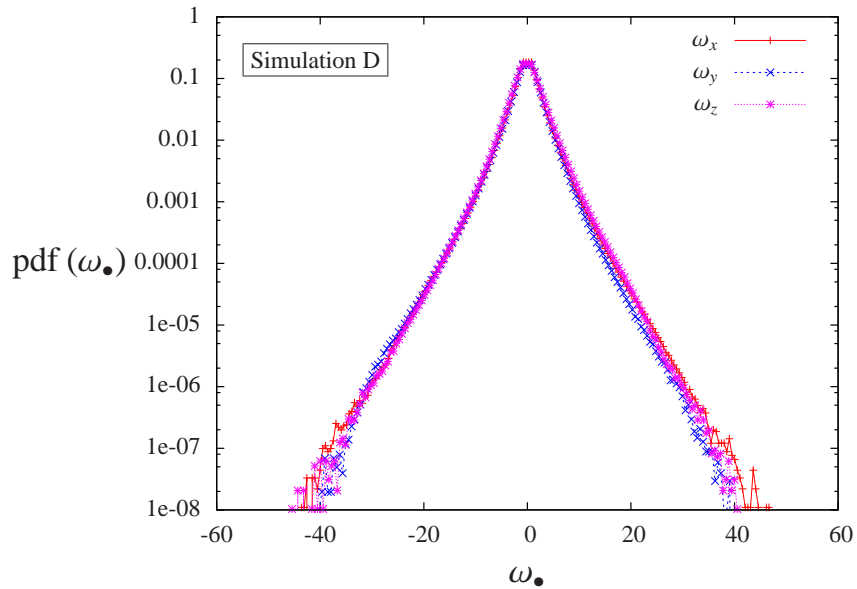


FIGURE 5.16 – Pdfs des composantes cartésiennes de vorticité dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation D.

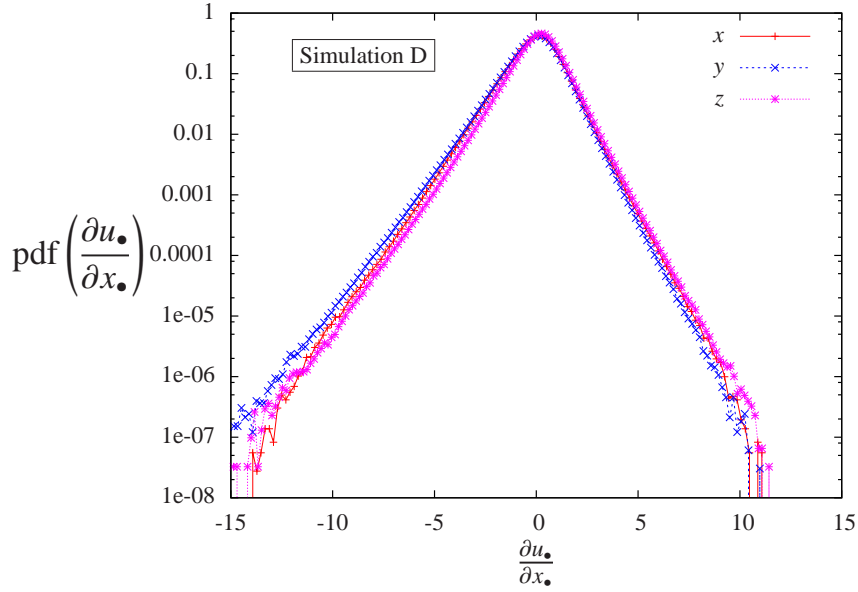


FIGURE 5.17 – Pdfs des dérivées de vitesses dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation D.

exemple, le moment d'ordre 3 normalisé des dérivées de vitesse $\partial u_x/\partial x$ est directement lié aux corrélations triples de vitesse et par conséquent au terme de *vortex stretching* de l'équation (5.5) (voir Pope [2000] ou Davidson [2004] pour plus d'explications). Si ce terme était nul, il n'y aurait pas de cascade d'énergie et donc de turbulence. On comprend alors que la distribution des dérivées de vitesse est indispensable à la caractérisation des écoulements turbulents. La figure 5.17 donne les pdfs des dérivées de vitesse $\partial u_x/\partial x$, $\partial u_y/\partial y$ et $\partial u_z/\partial z$. On observe une forte dissymétrie des distributions. Si nous calculons par exemple la valeur du *skewness* S_x définie par :

$$S_x = \frac{\left\langle \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^3 \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right\rangle^{3/2}}, \quad (5.7)$$

la valeur que nous obtenons est $S_x = -0.59$, ce qui est en plutôt bon accord avec les résultats obtenus en DNS de turbulence isotrope. En effet, Kerr [1985] donne des valeurs telles que $S_x \approx -0.5$ pour des nombres de Reynolds $\text{Re}_\lambda < 70$, Vincent & Meneguzzi [1991] trouvent $S_x = -0.5$ avec $\text{Re}_\lambda = 150$ et Jiménez *et al.* [1993] obtiennent des valeurs telles que $0.49 < -S_x < 0.525$ pour des nombres de Reynolds $35 < \text{Re}_\lambda < 168$. On peut donc conclure sur le fait que l'écoulement produit par la rotation de nos deux rotors avec des pales droites implique une cascade d'énergie "équivalente" à ce qui est observé en turbulence isotrope.

Une quantité également importante pour l'étude de la turbulence est l'alignement entre la vitesse et la vorticité en un point. Elle est caractérisée par l'hélicité $H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ et nous définissons l'hélicité normalisée H_n :

$$H_n = \frac{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{u}| |\boldsymbol{\omega}|} = \cos \theta, \quad (5.8)$$

où θ est l'angle formé entre les deux vecteurs \mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$. La figure 5.18 donne la distribution de probabilité de H_n dans la zone centrale de l'écoulement. On observe une distribution plutôt plate ($\text{pdf}(\cos \theta) = 0.5 \pm 0.02$) avec malgré tout une légère tendance à une orthogonalité de

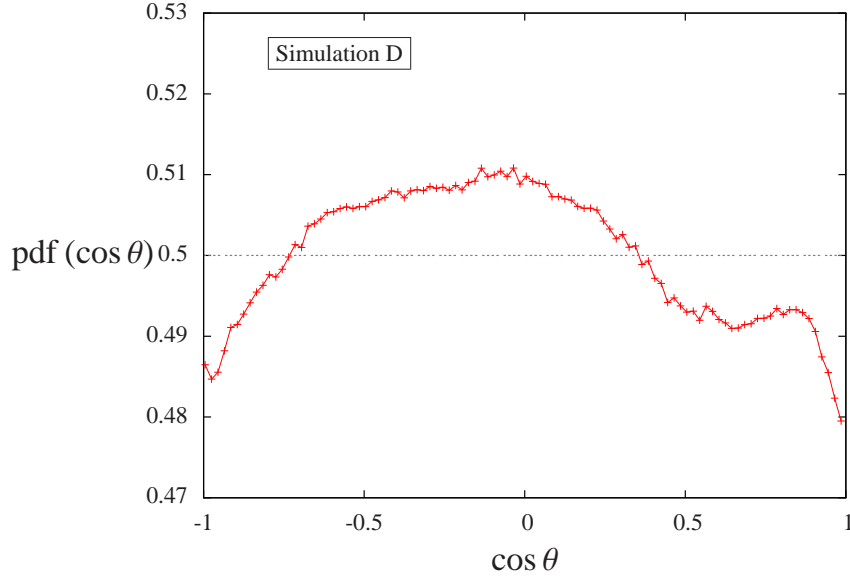


FIGURE 5.18 – Pdf du cosinus de l'angle θ , formé par \mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$, équivalent à l'hélicité normalisée H_n définie par l'équation (5.8), pour la simulation D.

\mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$ (pic à $\cos \theta = 0$), ce qui implique un terme non-linéaire localement plus intense, car $S = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$. Notons que l'étude de l'alignement de la vitesse et de la vorticité fait l'objet de nombreux travaux (voir Lesieur [1977] pour la turbulence isotrope ou Teitelbaum & Mininni [2011] et Jacobitz *et al.* [2010] pour le rôle de l'hélicité dans des écoulement turbulents anisotropes). Notons que l'on appelle un écoulement de Beltrami un écoulement tel que $\mathbf{u} = \alpha \boldsymbol{\omega}$.

Écart à l'isotropie : triangle de Lumley

Comme nous l'avons caractérisé précédemment, l'écoulement au cœur de la cellule de von Kármán n'est ni isotrope ni homogène. Un moyen de caractériser l'écart à l'isotropie d'un écoulement nécessite l'étude des tensions de Reynolds, qui sont en réalité la corrélation double R_{ij} de l'équation (1.17) pour une séparation \mathbf{r} nulle. À partir du tenseur de Reynolds, on peut définir le tenseur d'anisotropie suivant :

$$b_{ij} = \frac{\langle u_i u_j \rangle}{\langle u_k u_k \rangle} - \frac{1}{3} \delta_{ij}. \quad (5.9)$$

On cherche alors à déterminer des quantités pratiques permettant de caractériser l'anisotropie à partir de b_{ij} . Lumley [1978] proposa alors de considérer les invariants de ce tenseur, c'est-à-dire :

$$I_1 = b_{ii}, \quad I_2 = b_{ij} b_{ji} \quad \text{et} \quad I_3 = b_{ij} b_{jk} b_{ki}. \quad (5.10)$$

Comme, par définition, la trace du tenseur b est nulle, Lumley [1978] construisit le diagramme $-I_2 = f(I_3)$ qui définit un triangle si on trace les valeurs de toutes les configurations existantes et permet, suivant la position à l'intérieur de ce triangle, de caractériser la structure anisotrope de la turbulence (Simonsen & Krogstad [2005], Sagaut & Cambon [2008]). Une version légèrement différente (triangle de Lumley modifié), mais qui permet d'avoir deux côtés du triangle

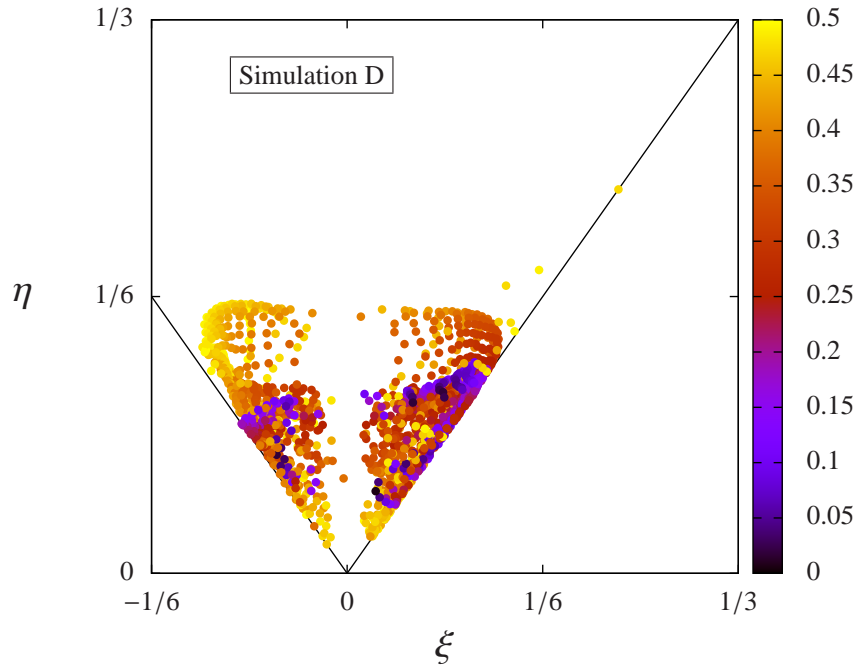


FIGURE 5.19 – Triangle de Lumley modifié pour la simulation D. La distance au centre de l'écoulement, dénotée par la carte de couleur, est adimensionnée par le rayon de sorte que les points considérés sont à l'intérieur d'une sphère de rayon $R_c/2$.

qui sont des droites, est de considérer les quantités ξ et η définies par :

$$6\eta^2 = -2I_2, \quad 6\xi^3 = 3I_3. \quad (5.11)$$

La figure 5.19 montre la distribution sur le diagramme de Lumley modifié des valeurs de η en fonction de ξ , conditionnées par la distance au centre de l'écoulement. On observe que les points sont proches des branches $\eta = \xi$ et $\eta = -\xi$, ce qui caractérise un écoulement axisymétrique. On note également que si l'écoulement était isotrope, les points seraient centrés autour de $(0, 0)$ et on peut donc conclure que l'écoulement n'est vraiment pas isotrope. Notons enfin que la branche de gauche définit des structures avec une forme de *pancake* (que l'on retrouve surtout en turbulent stablement stratifiée) et la branche de droite des structures en forme de "cigare" qui sont plus caractéristiques des écoulements en rotation.

Confrontation aux approches de physique statistique des équations d'Euler axisymétriques

Si l'on considère les équations d'Euler sans forçage écrites dans le repère cylindrique, en considérant l'axisymétrie ($\partial/\partial\theta = 0$) et en effectuant les changements de variables décrits ci-dessous, Leprovost *et al.* [2006] ont montré que le système d'équations peut se réduire à :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \{\psi, \sigma\} = 0, \quad (5.12a)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \{\psi, \xi\} = \frac{\partial(\sigma^2/4Y^2)}{\partial z}, \quad (5.12b)$$

$$\frac{1}{2Y} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2} = -\xi. \quad (5.12c)$$

σ est le moment angulaire tel que $\sigma = ru_\theta$, ψ est la fonction de courant telle que $u_r = -r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ et $u_z = r^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial r}$. ξ est lié à la vorticité azimutale de sorte que $\xi = r^{-1} \omega_\theta$ et la variable Y est définie par $Y = r^2/2$, le système d'équations (5.12) étant un système de trois équations à trois inconnues (σ , ψ et ξ) de variables r et Y . Notons enfin que $\{A, B\}$ est le jacobien dans notre système de variables tel que $\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial Y} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial Y}$. En recherchant les solutions stationnaires de ce système d'équations, Leprovost *et al.* [2006] ont montré qu'il fallait satisfaire les relations suivantes :

$$\sigma = f(\psi), \quad (5.13a)$$

$$\xi = \frac{f(\psi)}{2Y} \frac{df}{d\psi} + g(\psi), \quad (5.13b)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires liées aux lois de conservation du système. Par exemple, un état stationnaire correspondant à la conservation de l'énergie et de l'hélicité est tel que f est linéaire et $g \equiv 0$, ce qui définit un écoulement de Beltrami, où la vitesse et la vorticité sont colinéaires ($\mathbf{u} = \lambda \boldsymbol{\omega}$). Enfin, Leprovost *et al.* [2006] ont postulé que ces résultats non-visqueux et sans forçage peuvent être étendus à des états stationnaires d'écoulements visqueux et forcés, et les fonctions f et g dépendent alors des conditions aux limites et du forçage.

Dans l'analyse de leurs résultats expérimentaux, Monchaux *et al.* [2006] tracent σ en fonction de ψ à plusieurs positions dans le but d'extraire l'allure de la fonction f . La figure 5 de leur article donne cette distribution dans le cas d'un écoulement où le nombre de Reynolds est $Re_K = 2100$, en utilisant l'intégralité des positions du domaine fluide ou seulement les positions situées dans un volume correspondant à 50% du volume total, au centre du domaine. En effet, ils expliquent ce choix de par le fait que dans les régions proches de la paroi cylindrique, les effets visqueux sont importants et dans les régions proches des pales, les effets de forçage sont importants. Or, ce sont ces effets qui sont négligés dans l'approche qui a conduit à l'obtention des équations (5.13). On observe alors, dans la zone centrale de la cellule de von Kármán, une tendance claire de la fonction f vers une fonction cubique impaire de la forme $f(\psi) = p_1\psi + p_3\psi^3$.

Afin de comparer cette tendance de la fonction f au cœur de l'écoulement, nous traçons sur la figure 5.20 la distribution de σ en fonction de ψ pour l'écoulement moyenné temporellement à partir de $t = 35$. Nous définissons alors plusieurs volumes fluides de forme cylindrique et de rapport d'aspect $\Gamma = 1.8$, centrés dans le domaine fluide, et traçons la distribution en fonction du volume auquel la position appartient pour la première figure. La deuxième figure décompose le domaine fluide en fonction de la position verticale et une dernière figure montre encore une fois cette même distribution en fonction de la position radiale.

La première chose que nous notons est une remarquable correspondance entre les comportements obtenus avec les résultats expérimentaux et ceux obtenus par notre simulation. On observe bien au cœur de l'écoulement une tendance à une fonction cubique et nous avons tracé sur la figure 5.20(a) une interpolation de la forme $\sigma = f(\psi) = p_1\psi + p_3\psi^3$ dans un volume $\mathcal{V} = 0.1 \times \mathcal{V}_{tot}$, avec comme valeurs obtenues $p_1 = 1.81$ et $p_3 = 151.8$. On observe également qu'en augmentant le volume considéré, il n'y a pas de tendance remarquable et une fonction f n'est pas définissable. Afin de déterminer si ce non-alignement provient d'un effet du confinement cylindrique ou bien d'un effet imputable à la proximité des pales, nous traçons sur les figures 5.20(b) et 5.20(c) les mêmes distributions, mais conditionnées par l'étendue ver-

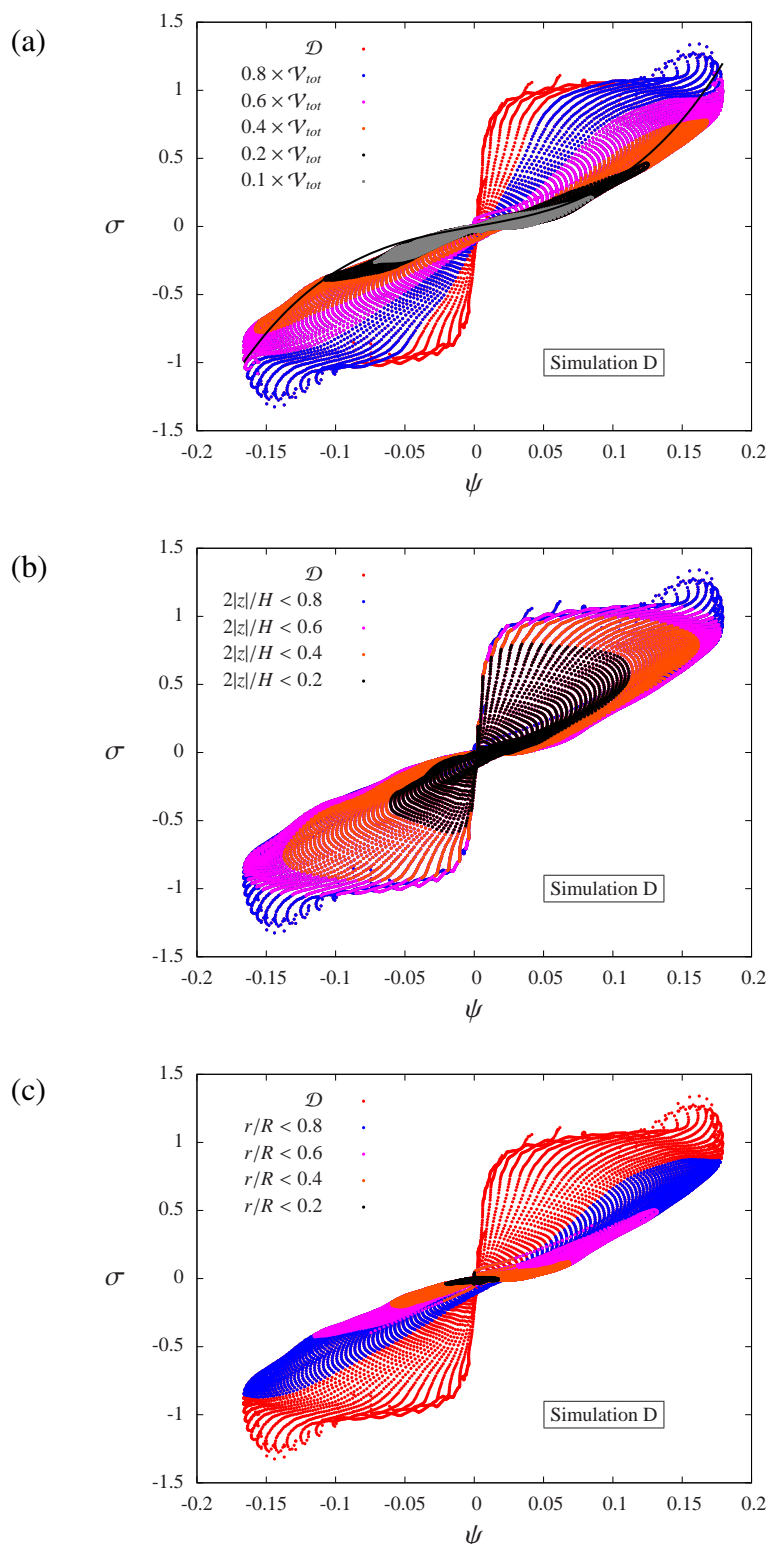


FIGURE 5.20 – Distribution du moment angulaire σ en fonction de la fonction de courant ψ pour la simulation D. La figure (a) donne les distributions conditionnées par le volume fluide centré considéré, la figure (b) celles conditionnées par la hauteur des volumes considérés ($r = R$) et la figure (c) celles conditionnées par le rayon des volumes considérés ($z = \pm H/2$). Sur la figure (a), une interpolation par une fonction de la forme $f(\psi) = p_1\psi + p_3\psi^3$ est tracée en ligne continue noire ($p_1 = 1.81$ et $p_3 = 151.8$).

ticale (figure (b)) ou radiale (figure (c)) du volume considéré. Nous observons alors que même en ne considérant qu'un volume avec une faible étendue verticale ($2|z|/H < 0.2$) mais dans toute l'étendue verticale, cet effet de dispersion est déjà présent. Ainsi, la présence de la paroi cylindrique ne permet pas un alignement des valeurs de σ en fonction de ψ . En faisant la considération inverse et en traçant la même distribution mais cette fois en ne déterminant les différents volumes fluides qu'en fonction de l'étendue radiale (donc sur toute la hauteur H de la cellule), on observe qu'une tendance est toujours observée, même pour des points situés près des pales. Ainsi, on peut donc conclure en supposant que dans le cas d'un écoulement produit avec des pales droites, l'écart statistique de l'écoulement obtenu par rapport aux états stationnaires des équations d'Euler axisymétriques est essentiellement un effet visqueux et moins un effet de forçage, la dispersion des points dans le diagramme (ψ, σ) étant essentiellement due à la position radiale des points considérés.

5.4 Écoulement généré à l'aide de pales courbées (C+)

Après avoir décrit l'écoulement produit par la rotation de deux rotors contrarotatifs munis de pales droites, nous étudions les caractéristiques de l'écoulement généré par des pales courbées, tournant dans le sens positif défini par la figure 5.1, cet écoulement semblant par nature différent comme on l'a montré dans la section 5.2.5.

5.4.1 État transitoire

Initialisation du champ de vitesse

Tout d'abord, nous regardons sur la figure 5.21 l'allure du champ de vitesse généré et comparons le processus de génération des deux tourbillons moyens avec la géométrie à pales droites. La première remarque que nous pouvons faire est que la vitesse azimutale des deux tourbillons est bien plus faible alors que la fréquence de rotation est inchangée ($f_K = 0.1$). Cependant, les vitesses dans le plan rz — et plus particulièrement les vitesses verticales (voir la figure 5.4 inférieure, où l'énergie verticale est équivalente au cas de la simulation D, malgré une énergie totale deux fois moins importante) — semblent plus importantes comme le prouve la longueur des vecteurs tracés. Ce que nous remarquons également, et qui était déjà montré par la figure 5.4, est que l'écoulement met plus de temps à atteindre l'état stationnaire.

Une autre différence majeure provient de la forme des tourbillons : la figure 5.8 représentant la simulation D montre que la vitesse azimutale est très forte à proximité de la paroi et de manière très localisée. Cela entraîne la formation de tourbillons moyens peu étendus (entre $r/R \approx 0.5$ et $r/R \approx 1$). Dans le cas présents des pales courbées, le maximum de vitesse azimutale est localisé autour de $r/R \approx 0.8$ et son intensité diminue en se rapprochant de la paroi. De plus, l'intensité plus forte des vitesses verticales et plus faible des vitesses azimutales permet aux deux tourbillons moyens d'avoir une couche de cisaillement plus fine et d'augmenter leurs étendues dans la direction de l'axe de rotation. En bref, les tourbillons sont moins énergétiques azimutalement, mais plus verticalement (relativement), et en ajoutant à cela le fait que la génération de vitesse soit plus localisée autour de $r/R \approx 0.8$, cela permet un plus grand envahissement de la cellule fluide par les tourbillons toroïdaux moyens. Cela entraîne un ci-

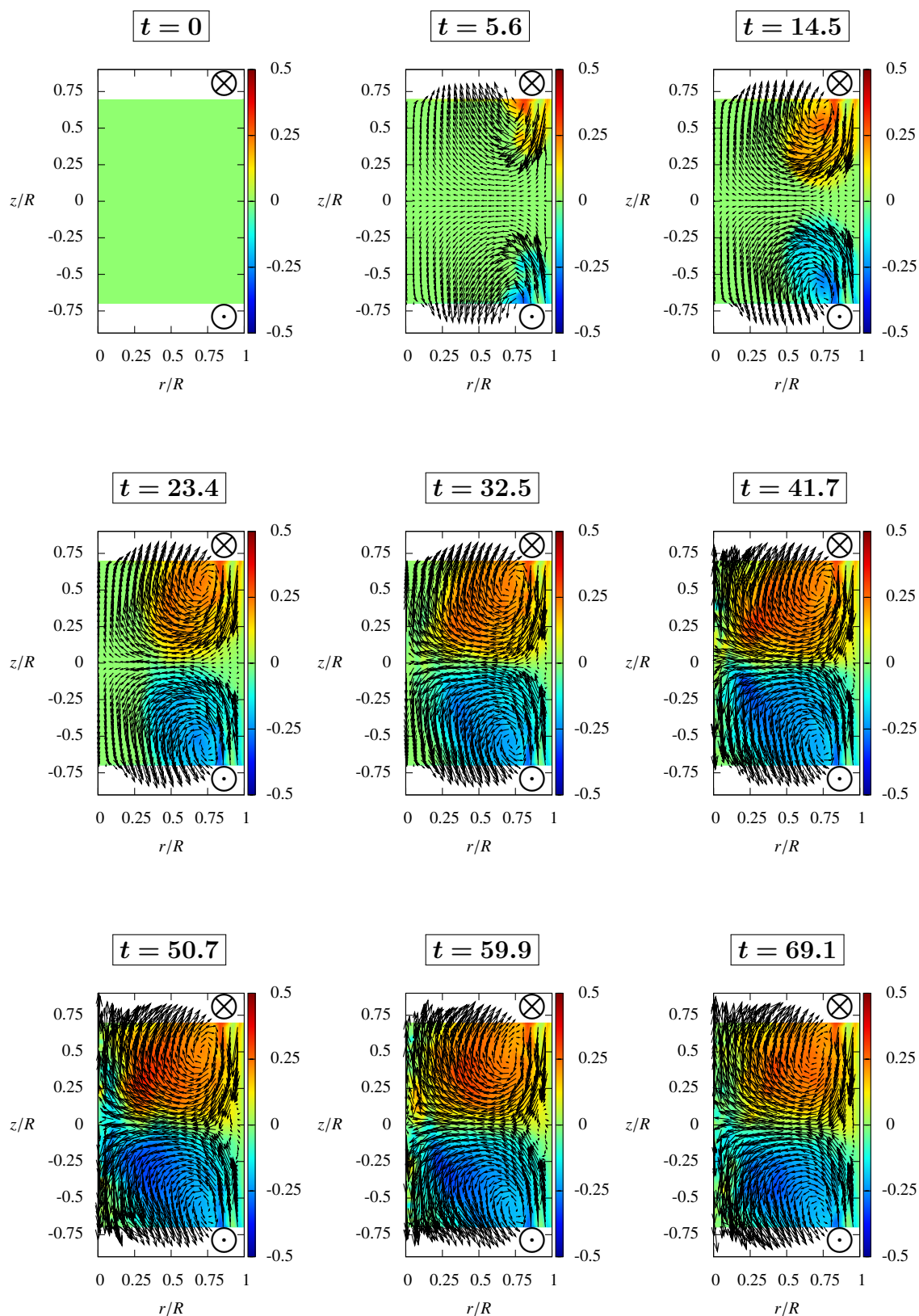


FIGURE 5.21 – Évolution temporelle du champ de vitesse moyenné azimutalement dans le cas de pales courbées tournant dans le sens positif. Les vecteurs représentent la projection du vecteur vitesse moyen sur le plan rz et la couleur indique la valeur de la composante azimutale du même vecteur.

saillement moins fort (différence des vitesses azimutales des tourbillons moins grande) et donc une génération de turbulence moindre autour du plan $z = 0$.

Génération de vorticité : étude de l'équation d'évolution de l'énstrophie

D'après les constats effectués lors de l'étude de la topologie de l'écoulement dans le cas de pales courbées, la question de la génération de vorticité, et donc de turbulence se pose. Quel est le mécanisme de création d'énstrophie dans cette configuration et où agit-il ?

Reprenons alors l'équation d'évolution de l'énstrophie (5.5) et traçons les termes en question à trois instants de l'initialisation de l'écoulement sur la figure 5.22. On observe alors que la génération de fines structures tourbillonnaires dans l'écoulement est bien différente. L'énstrophie générée à proximité de la paroi au début du calcul est très faible et à un instant intermédiaire ($t = 32.5$), les tourbillons turbulents sont très peu intenses, bien que l'écoulement soit déjà bien établi (voir figure 5.21). Ce n'est qu'une fois que les tourbillons moyens atteignent l'axe de rotation qu'un cisaillement intense vertical se produit à l'intérieur d'un même tourbillon toroïdal autour de l'axe $r = 0$. Cela explique les fortes valeurs positives du terme de vortex stretching $T_{stretch}^Z$ à partir de $t = 50.7$ qui localisent la génération d'énstrophie. Cela entraîne l'apparition d'un écoulement turbulent autour de l'axe de rotation qui advecte ces structures tourbillonnaires principalement autour de cet axe (voir le graphique de la quantité T_{adv}^Z). La dissipation, quant à elle, est encore essentiellement négative et ne participe donc pas à la création de structures mais seulement à la destruction d'énstrophie. Remarquons également qu'il semble exister une région très fine au niveau des pales où le terme d'advection ainsi que le terme visqueux sont plutôt importants. Cela s'explique par le fait que contrairement au cas avec des pales droites où la force centrifuge tend à déplacer les particules fluides loin de l'axe de rotation, la forme courbées des pales de la simulation C+ et surtout le sens de rotation positif tend à produire une force de contact qui agit en sens opposé et permet aux particules fluides de rester dans cette région telle que la position radiale est inférieure à $R_d/2$. Si la position radiale est supérieure à $R_d/2$, la force de contact et la force centrifuge agissent dans le même sens et on se retrouve dans la situation que la simulation D avec les pales droites. Cela explique que cette zone très proche des pales dissipe l'énstrophie de façon beaucoup plus importante que dans la simulation D.

5.4.2 Caractérisation de l'écoulement turbulent

Visualisation de l'écoulement turbulent

Comme introduit dans la section précédente, les structures turbulentes sont créées et advectées autour de l'axe de rotation, ce qui entraîne la création d'une colonne centrale turbulente comme le montre la figure 5.23. Cela explique alors les fortes différences observées sur les micro-échelles de Taylor l_λ de la figure 5.5 définies par l'équation (5.3), les échelles verticales calculées étant bien plus grandes que celles horizontales. Nous allons tenter dans la suite de cette section de caractériser plus précisément la turbulence obtenue dans cette colonne, en utilisant les mêmes outils de description que lors de l'étude du cas avec les rotors à pales droites. Notons que l'observation de longs filaments verticaux a déjà été observée par La Porta *et al.* [2000].

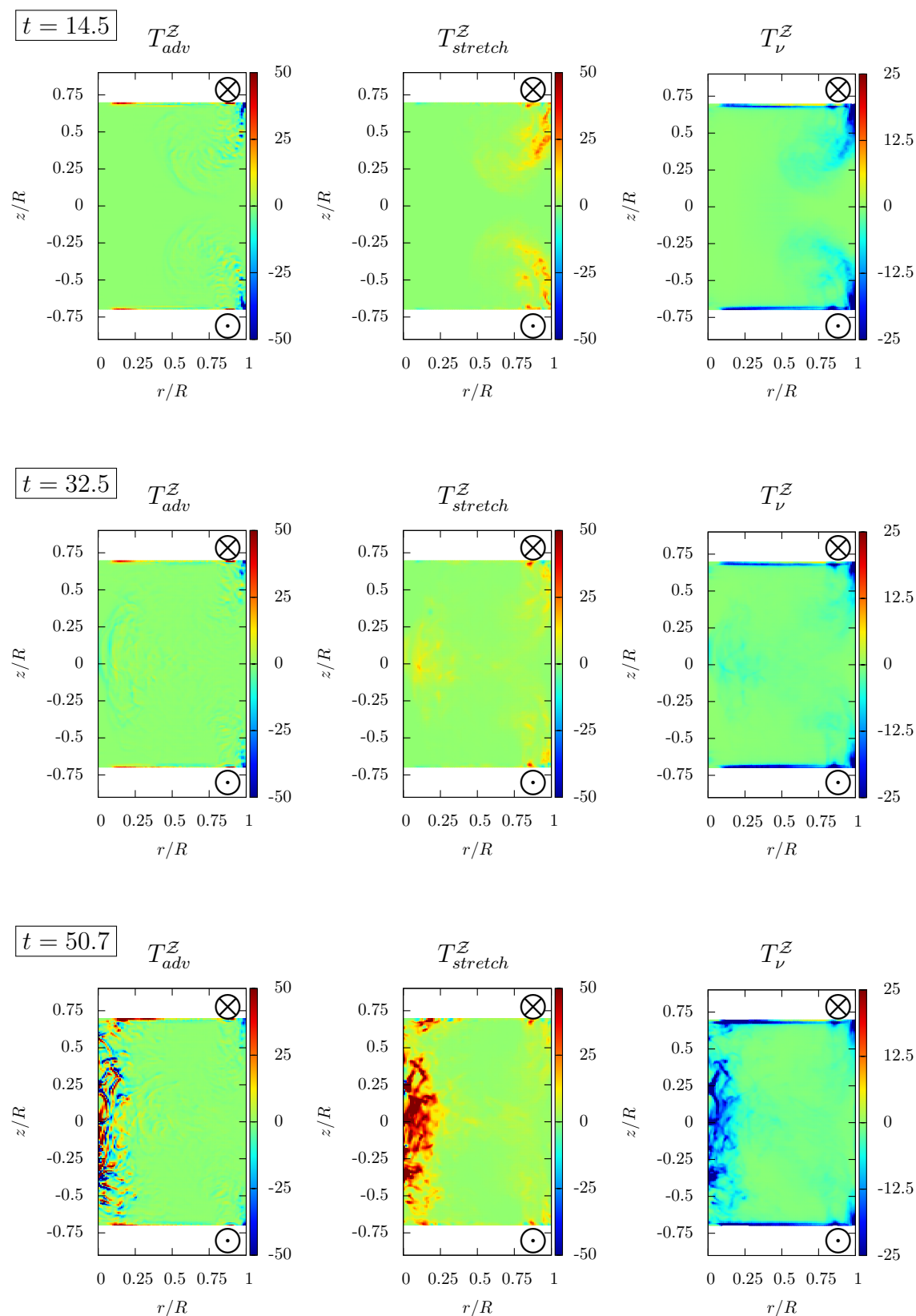


FIGURE 5.22 – Distribution des termes de l'équation d'évolution de l'ensthropie, à différents instants de l'état transitoire, pour la géométrie avec des pales courbées et tournant dans le sens positif (C+).

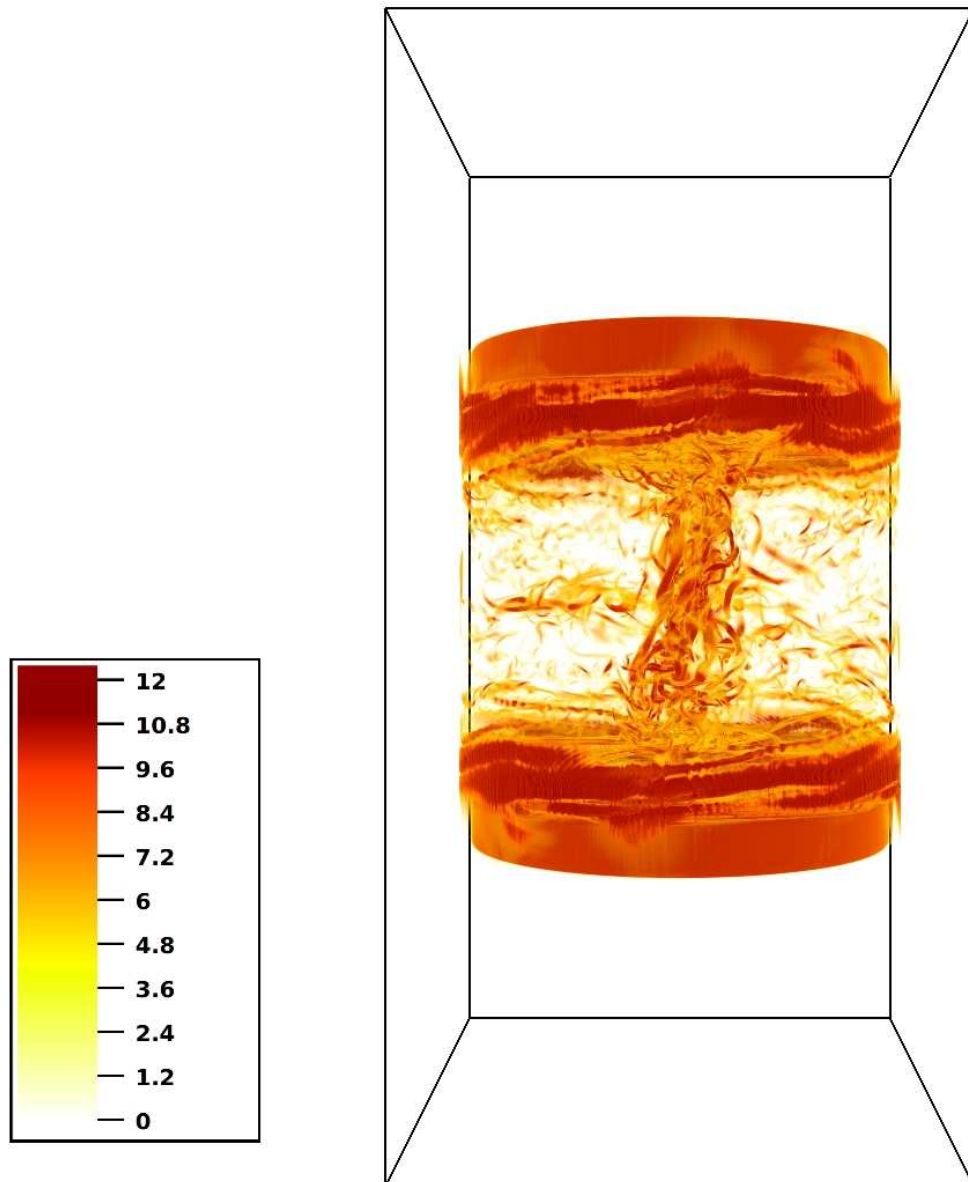


FIGURE 5.23 – Champ d’ensrophie \mathcal{Z} instantané pour la simulation C+. On observe la création de tourbillons verticaux intenses dans l’axe de la cellule.

Spectres temporels

La figure 5.24 montre les signaux de vitesse, pour la simulation C+ avec pales courbées, aux localisations données par la figure 5.11. Contrairement à la simulation précédente, les sondes enregistrent un signal d'amplitude forte bien avant que la stationnarité statistique ne soit atteinte. De plus, pour certains signaux (par exemple la sonde 3), on voit très clairement une anisotropie avec une vitesse moyenne azimutale négative et une vitesse moyenne verticale négative. L'inhomogénéité est quant à elle flagrante, même très proche du centre de la cellule, lorsque l'on compare les signaux des sondes 1 à 5. Par exemple, on distingue une vitesse moyenne verticale pour la sonde 3 qui vaut environ -0.2 , alors que pour la sonde 1 par exemple, la vitesse verticale oscille clairement autour de 0. Cela signifie que même à une distance dont l'ordre de grandeur est comparable à la micro-échelle de Taylor, l'homogénéité n'est pas observable. Par exemple, les sondes 1 et 3 sont distantes d'environ $l_\lambda \approx 0.4$ et n'ont pas des vitesses moyennes égales. Notons enfin que cette inhomogénéité, déduite de l'observation des signaux temporels, n'est pas visible pour la simulation D.

Nous traçons à nouveau la densité spectrale de puissance (DSP) des différents signaux temporels de la figure 5.24, de manière identique à la procédure expliquée précédemment pour les pales droites. L'étude des spectres ne nous montre aucune différence majeure avec les spectres observés lors de la simulations à pales droites. De ce point de vue, la dynamique et les transferts d'énergie ne semblent donc pas modifiés en fonction de la géométrie, contrairement à la structure de l'écoulement.

Corrélation de vorticité en deux points

Si nous considérons à nouveau la corrélation spatiale basée sur la vorticité verticale, nous observons également une corrélation verticale bien plus importante que la corrélation horizontale. Encore une fois, les structures turbulents sont étirées suivant l'axe de rotation, ce qui est flagrant en regardant la visualisation 5.23. Cependant, nous pouvons noter également que la corrélation horizontale est plus importante que celle obtenue avec les pales droites, ce qui implique des structures tourbillonnaires statistiquement plus larges dans le plan horizontal, ce qui semble expliquer la présence d'une large colonne autour de l'axe vertical du cylindre (voir figure 5.23).

Vitesse et vorticité au cœur de l'écoulement

Les *pdfs* des composantes de vitesse présentent, pour cet écoulement, une allure particulière avec un plateau autour de la valeur nulle. La symétrie est plutôt bien observée et on note malgré tout des différences importantes au niveau des valeurs positives. En effet, l'intensité des composantes de vitesses horizontales positives est plus grande que pour la composante verticale.

En ce qui concerne les *pdfs* de vorticité, l'alignement n'est plus respecté entre composantes horizontales et verticale. En effet, on observe une forte dissymétrie entre les valeurs positives et négatives de ω_z , alors que la symétrie autour de l'axe vertical est intrinsèque au dispositif utilisé (fréquence de rotation des deux rotors identiques, géométries des rotors identiques, *etc*).

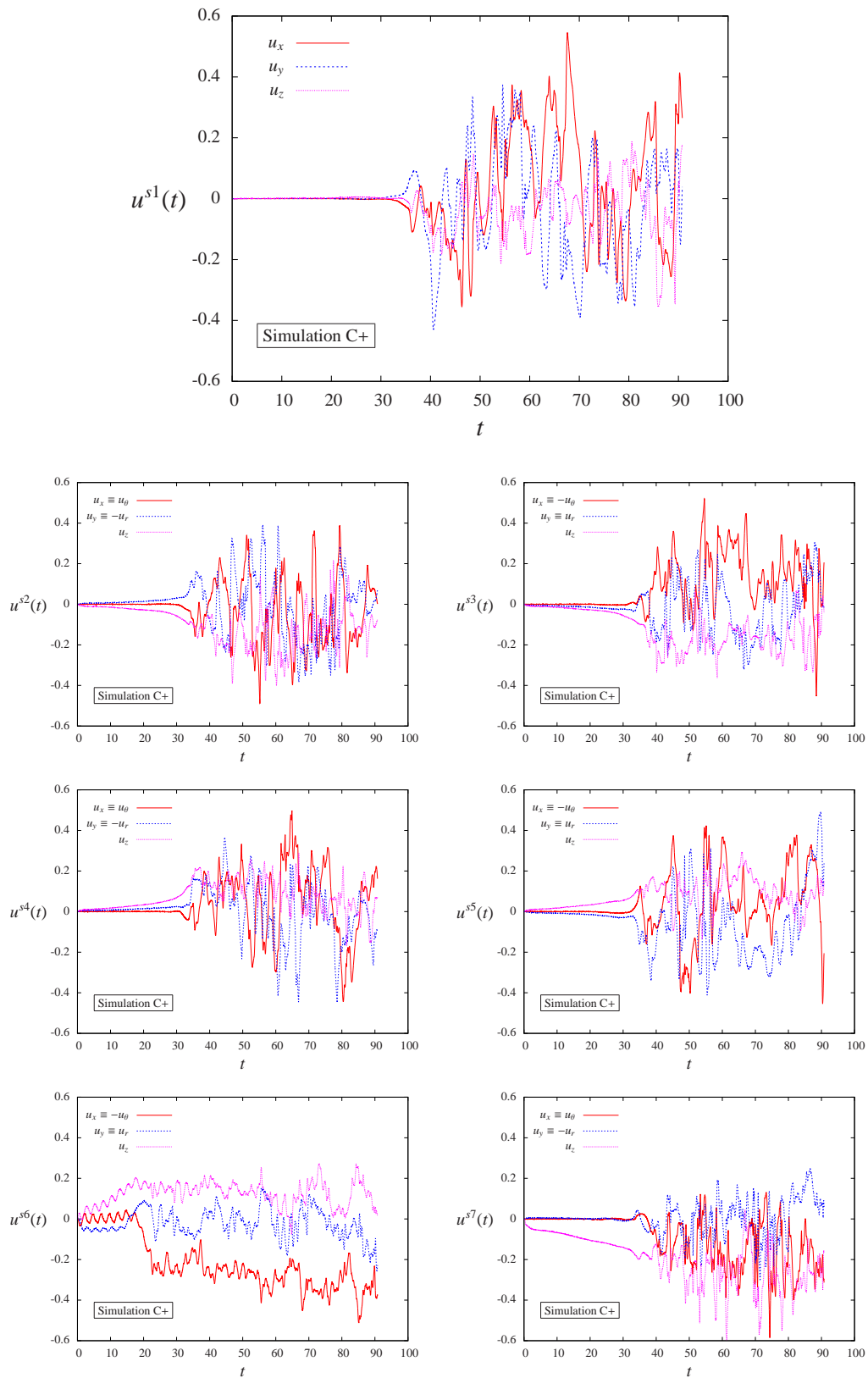


FIGURE 5.24 – Signaux temporels obtenus pour la simulation C+ aux positions données par la figure 5.11.

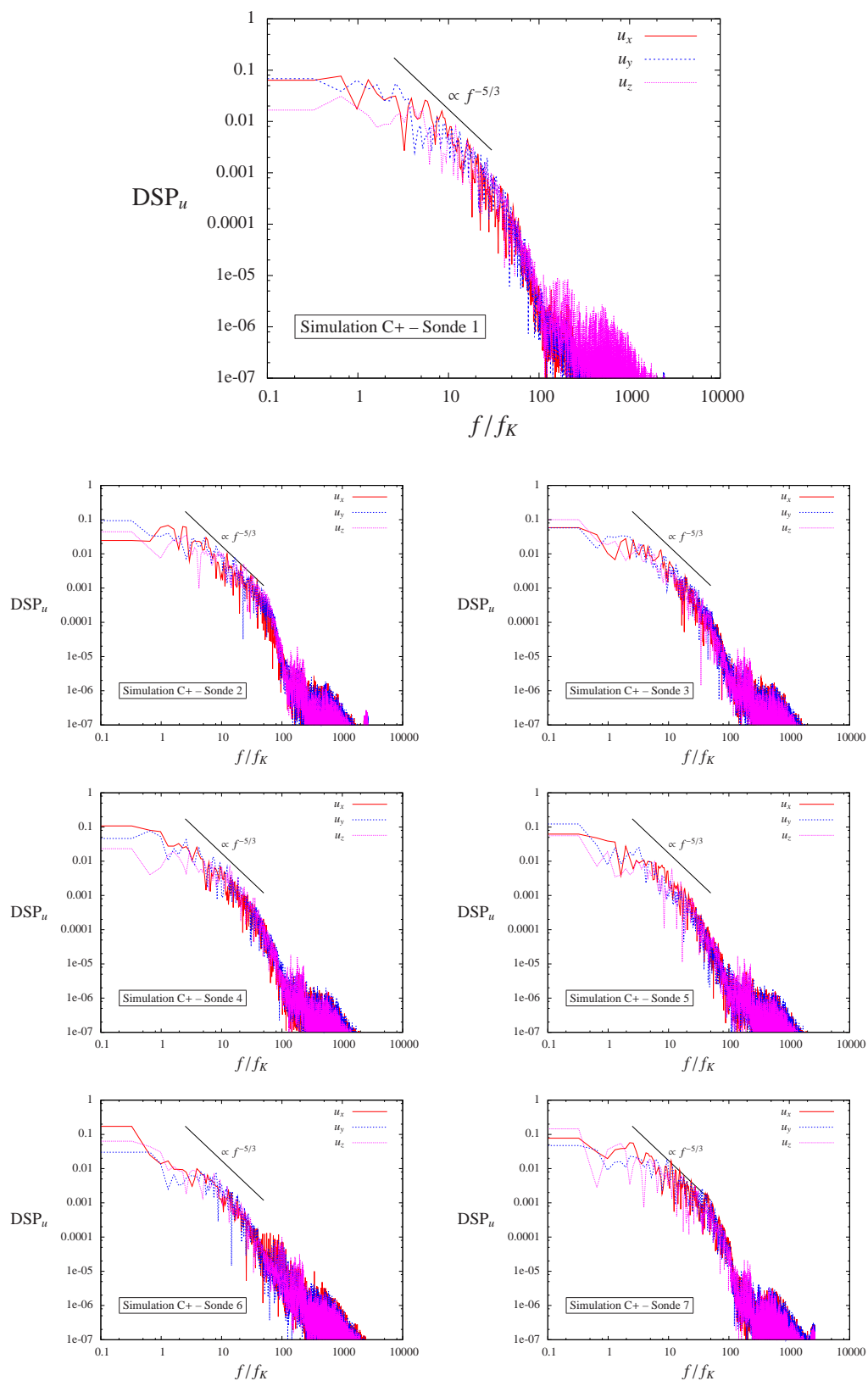
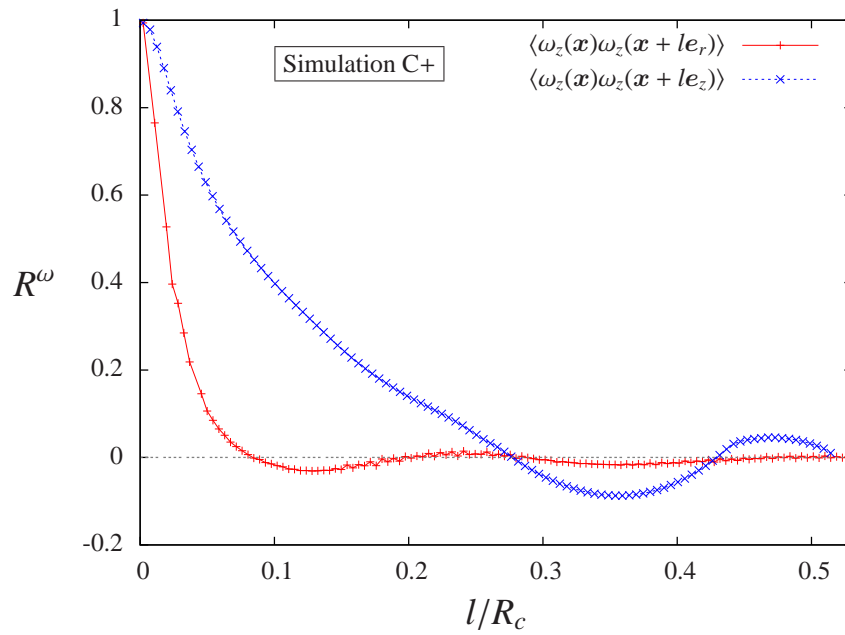
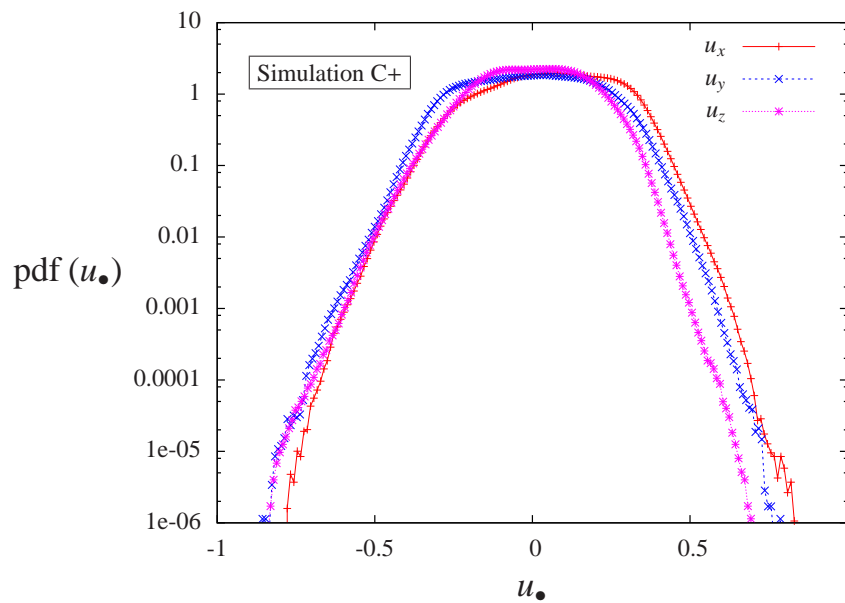


FIGURE 5.25 – Densités spectrales de puissances (DSP) des signaux de vitesse de la figure 5.12, calculées à partir de $t = 60$, pour la simulation utilisant une géométrie de pales courbées (C+).


 FIGURE 5.26 – Corrélation de vorticité verticale dans la zone de cœur \mathcal{D}_c de la simulation C+.

 FIGURE 5.27 – Pdfs des composantes cartésiennes de vitesse dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation C+.

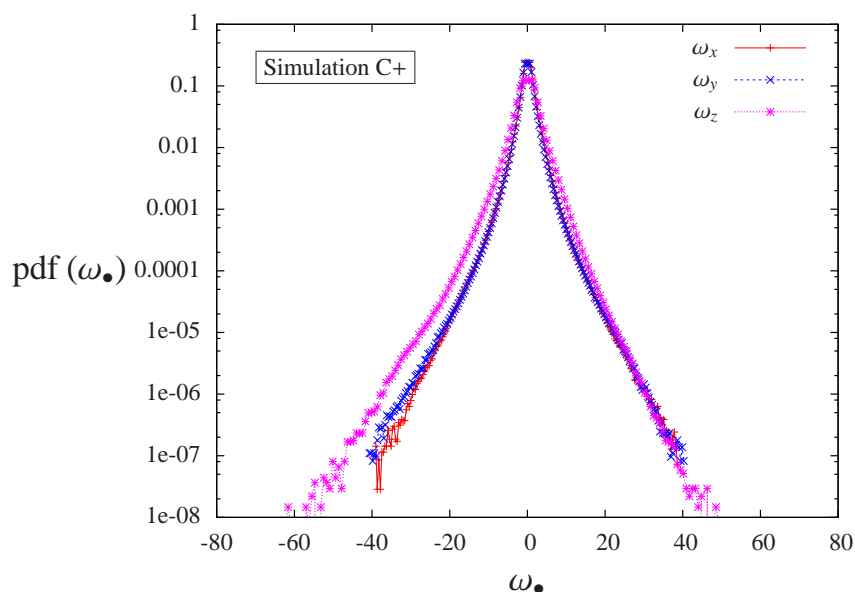


FIGURE 5.28 – Pdfs des composantes cartésiennes de vorticité dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation C+.

Le non-alignement entre composantes horizontales et verticales est également fortement observé sur la branche négative des pdfs de dérivée de vitesse. En effet, la dissymétrie semble plus grande pour les composantes horizontales. Les valeurs de *skewness* calculées sont désormais bien différentes de celles déterminées en turbulence isotrope car on a $S_x = -0.88$, $S_y = -0.97$ et $S_z = 0.69$. On obtient une valeur globale positive de S_z qui semble indiquer une cascade inverse d'énergie verticale, des petites vers les grandes structures turbulentes. Cette valeur positive provient de la dissymétrie de la pdf au niveau des faibles valeurs absolues de $\partial u_z / \partial z$. Aux petites échelles (grandes valeurs de $\partial u_z / \partial z$ et donc aux extrémités de la courbe de la composante suivant z , la dissymétrie observée sur la figure 5.29) est à nouveau en faveur d'une valeur négative de S_z avec $\text{pdf}(\partial u_z / \partial z < -10) > \text{pdf}(\partial u_z / \partial z < 10)$.

Une observation surprenante est faite en regardant la pdf de l'hélicité normalisée (ce qui est équivalent à la pdf de $\cos \theta$, θ étant l'angle formé par \mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$) sur la figure 5.30. En effet, le forçage avec des pales courbées tend à favoriser fortement, au cœur de l'écoulement, un alignement de la vitesse et de la vorticité dans le même sens. Cela est dû à un effet de "pompage" car les particules fluides, en évoluant du centre de l'écoulement vers l'une des pales, ont une vorticité locale qui tourne dans le même sens que celui de rotation de la pale. Il est malgré tout intéressant de noter que cette observation n'est pas faite avec les pales droites.

Écart à l'isotropie : triangle de Lumley

L'anisotropie de l'écoulement est caractérisée par la figure 5.31 qui représente dans le triangle de Lumley modifié la distribution de $\eta = f(\xi)$ en fonction de la distance au cœur de l'écoulement. On observe alors une tendance plus forte à une structuration en cigare à proximité du centre de la cellule de von Kármán avec une distribution des points proches du centre plus alignée avec la droite $\eta = \xi$. Cette caractérisation par les invariants du tenseur d'anisotropie corrobore les résultats précédents et la visualisation de la figure 5.23.

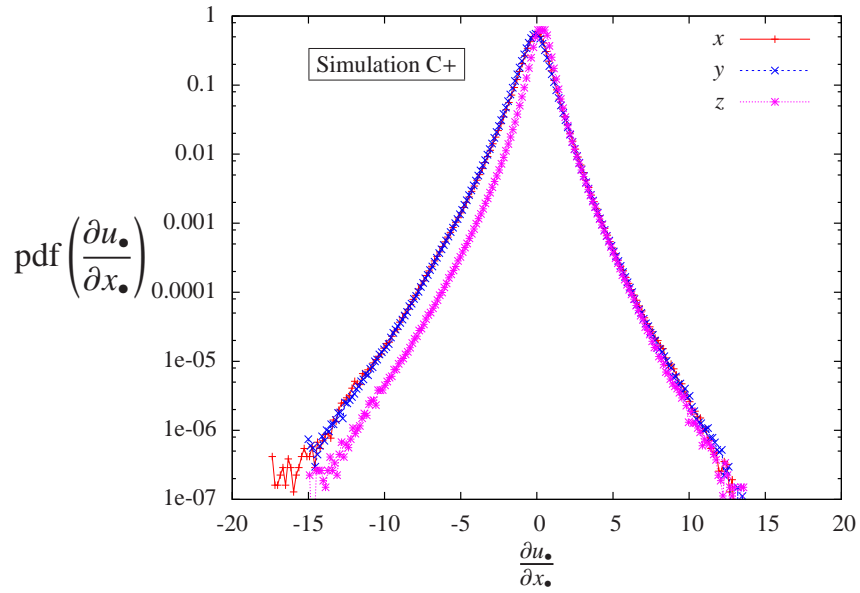


FIGURE 5.29 – Pdfs des dérivées de vitesses dans la zone centrale \mathcal{D}_c pour la simulation C+.

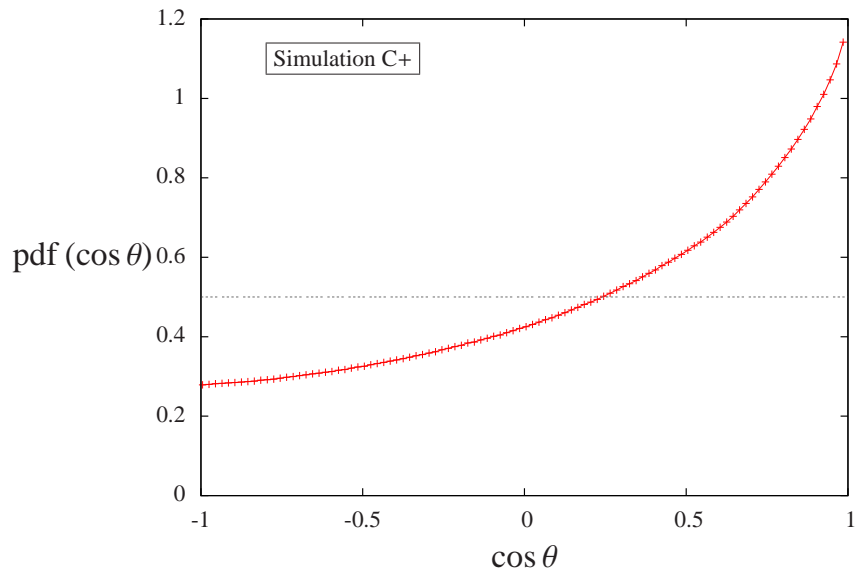


FIGURE 5.30 – Pdf du cosinus de l'angle θ , formé par \mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$, équivalent à l'hélicité normalisée H_n définie par l'équation (5.8), pour la simulation C+.

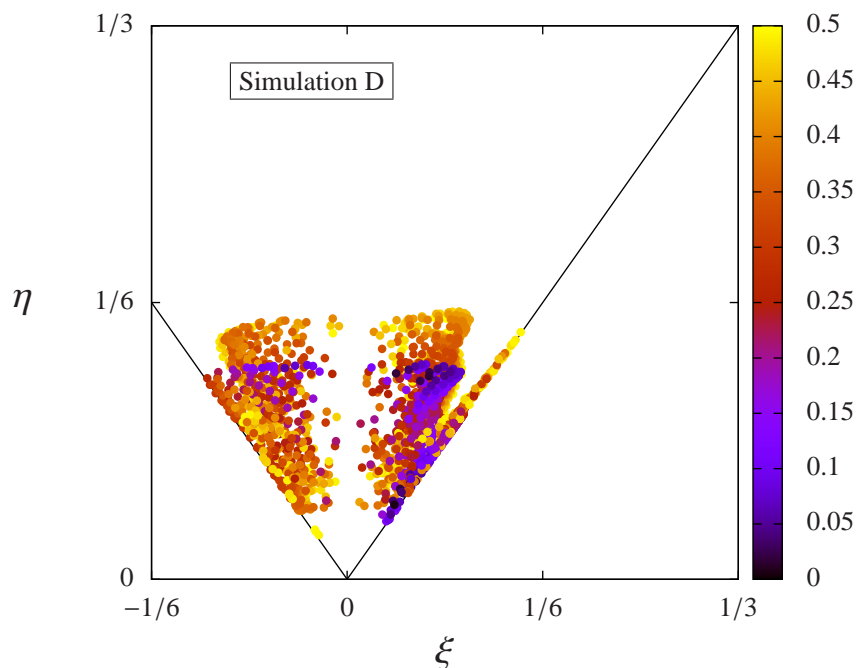


FIGURE 5.31 – Triangle de Lumley modifié pour la simulation C+. La distance, dénotée par la carte de couleur, est adimensionnée par le rayon de sorte que les points considérés sont à l'intérieur d'une sphère de rayon $R_c/2$.

Confrontation aux approches de physique statistique des équations d'Euler axisymétriques

Étudions à nouveau, pour différentes positions dans le plan rz , la distribution du moment angulaire en fonction de la fonction de courant donnée par la figure 5.32. Le résultat est assez remarquable car nous observons qu'une tendance générale se dégage pour la quasi-intégralité des points du domaine fluide. Il semblerait donc que les effets visqueux, de confinement et de forçage agissent de manière très localisée, de sorte que la théorie non-visqueuse sans forçage s'applique plutôt bien dans plus de 60% du domaine fluide. Comme pour le cas précédent avec des pales droites, une interpolation est effectuée sur les nœuds appartenant à un volume fluide centré de taille $\mathcal{V} = 0.2\mathcal{V}_{tot}$ et on obtient, pour les valeurs de p_1 et p_3 telle que $\sigma = f(\psi) = p_3\psi^3 + p_1\psi$, $p_3 = -10.8232$ et $p_1 = 2.39142$. On observe un très bon accord avec cette loi d'évolution dans une grande majorité du volume fluide, beaucoup plus que dans le cas D avec des pales droites.

5.5 Conclusion

Nous avons montré que la méthode de pénalisation, si elle est utilisée avec les précautions nécessaires, permet de considérer une géométrie de type von Kármán et ainsi de générer un écoulement turbulent statistiquement stationnaire. Il faut également noter que ces simulations sont assez longues et demandent des ressources informatiques conséquentes.

Un élément majeur de ce chapitre est la mise en évidence des fortes différences observées sur la topologie des écoulements en fonction des pales utilisées. Pour un même nombre de Reynolds Re_K mais avec des géométries différentes, les écoulements peuvent être plus ou moins

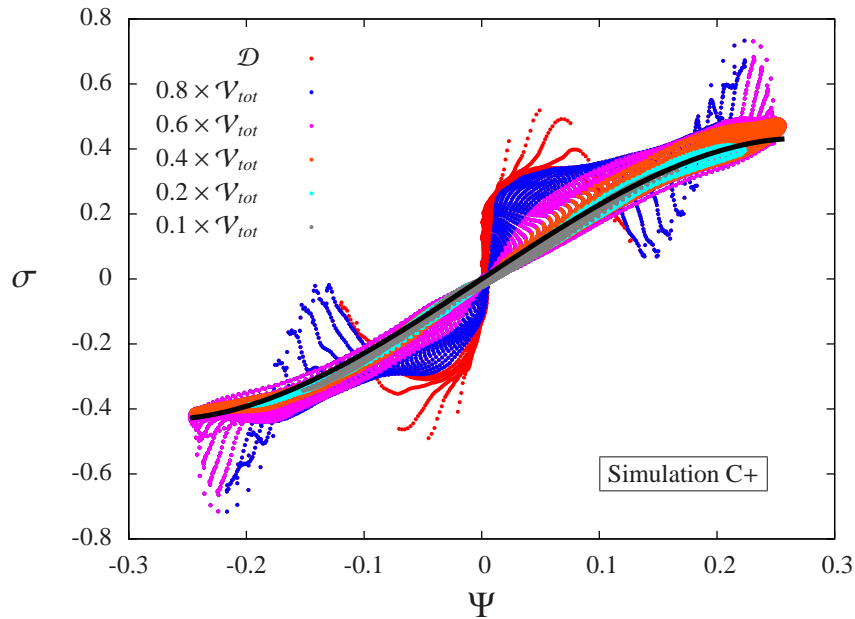


FIGURE 5.32 – Distribution, en fonction de la position considérée dans le domaine fluide, du moment angulaire σ en fonction de ψ , la fonction de courant. La couleur définit, en pourcentage du volume total, le volume restreint auquel la position considérée appartient.

turbulents, voire pas turbulent du tout dans le cas de la simulation C-. Le fait que les écoulements soient différents est un constat déjà fait par les approches expérimentales existantes et les simulations présentes permettent de comprendre les raisons de ces différences. On note surtout les différents mécanismes de production de la turbulence observés (cisaillement horizontal dans le cas de la simulation D et vertical pour la simulation C+).

Outre les aspects de caractérisation d'un écoulement turbulent à temps long, ces simulations peuvent également servir d'outils de validation des modèles de mécanique statistique (équations d'Euler axisymétriques) de Leprovost *et al.* [2006]. Un travail futur sera également consacré au dépouillement des trajectoires fluides calculées tout au long de ces simulations afin d'obtenir une description lagrangienne de la turbulence générée. Enfin, le passage sur des ordinateurs plus puissants, en optimisant la parallélisation du code, peut permettre d'anticiper le calcul de ce type d'écoulements à temps très long pour différentes valeurs de la dissymétrie du forçage $\theta = (f_1 - f_2)/(f_1 + f_2)$ et ainsi aider à mieux comprendre les effets de multistabilité observés expérimentalement (Ravelet *et al.* [2004]).

Conclusion

L'étude numérique de la turbulence homogène a permis dans les dernières décennies des avancées significatives dans la compréhension et la modélisation de la turbulence homogène. Pour autant, les simulations numériques par des codes spectraux restent limitées par un problème important : le déclin de l'énergie cinétique, et donc du nombre de Reynolds de l'écoulement turbulent. On ne se situe donc plus dans le cadre d'une turbulence à grand nombre de Reynolds, qui est notamment la base de l'approche de Kolmogorov, afin d'assurer une séparation entre les grandes échelles énergétiques et les petites échelles dissipatives.

Dans ce travail de thèse, nous avons proposé une façon d'aborder l'étude d'écoulements turbulents à temps long, en modélisant le forçage par des rotors, déjà utilisé dans des réalisations expérimentales, mais, à notre connaissance, peu ou pas abordée par la simulation. De cette manière, nous évitons l'écueil des forçages synthétiques classiquement réalisés en simulation pseudo-spectrale en maintenant l'énergie aux grandes échelles. Bien que très utiles, ces forçages introduisent inévitablement des biais concernant l'isotropie, dans le cas de turbulence anisotrope notamment, et des échelles de temps ou d'espace externes non "naturelles". Nous avons donc choisi une solution qui passe par l'introduction de parois ou d'obstacles, sensés représenter une réalité physique, mais évidemment au prix de la perte de l'homogénéité de l'écoulement turbulent.

Un des objectifs de ce travail de thèse est donc d'arriver à insérer des conditions aux limites dans un code pseudo-spectral existant, initialement prévu pour l'étude d'écoulements homogènes, qui pourrait alors permettre de produire un écoulement turbulent statistiquement stationnaire. L'objectif ambitieux que nous nous sommes fixés au début de l'étude, est de simuler un écoulement de von Kármán avec un certain degré de réalisme et de confiance dans les résultats de la simulation. Bien que confrontés à des difficultés d'ordre technique, liées à l'algorithme numérique et aux limitations des calculateurs scientifiques, nous avons pu en grande partie remplir l'objectif initial, comme le montrent les résultats obtenus dans le chapitre 5 sur l'écoulement de von Kármán. La réalisation de telles simulations dans un contexte extrêmement proche d'un écoulement réel, a bien entendu requis de procéder par étapes, afin de s'assurer de la validité des différents éléments de l'approche numérique globale.

Une première partie de ce travail de thèse a porté sur l'étude et l'implémentation de la méthode de pénalisation dans le code pseudo-spectral tri-dimensionnel existant. Un résultat original de cette thèse provient de l'implication du terme de pénalisation, qui optimise le schéma numérique tout en le rendant plus stable, la condition de stabilité inhérente à la méthode de pénalisation étant alors supprimée. Ce nouveau schéma numérique, décrit par l'équation (3.6), est alors testé et validé par un cas-test consistant en la génération d'une couche limite par la rotation d'une paroi cylindrique. Une solution analytique existe (voir Batchelor [1967]) et permet ainsi de procéder à une étude de convergence de notre schéma en fonction de la

valeur du paramètre de pénalisation. Nous confirmons une erreur telle que $\epsilon \propto \sqrt{\eta}$, proposée dans l'étude analytique de Carbou & Fabrie [2003], et nous montrons que notre schéma permet de gagner en précision pour un paramètre η équivalent dans un schéma explicite. Le schéma s'adapte et permet de simuler des effets de paroi avec un paramètre de pénalisation effectif $\eta_{eff} \approx \Delta t$, tout en assurant la stabilité du schéma.

Dans un second temps, nous avons vérifié les résultats des simulations pénalisées en étudiant un certain nombre de configurations, qui correspondent à des phénomènes dont la combinaison permet l'étude de la turbulence en rotation en présence de parois solides. Ces phénomènes élémentaires sont soit de nature ondulatoires, soit tourbillonnaires, correspondant à des régimes différents de l'écoulement, associés à des équations de natures différentes (hyperbolique, par exemple, pour le cas de la propagation d'ondes). Nous proposons donc dans ce manuscrit de tester la méthode de pénalisation en 3D pour des effets ondulatoires et pour des effets tourbillonnaires. La réflexion d'ondes d'inertie, générées par une source ponctuelle oscillante dans un écoulement en rotation en bloc, sur une paroi pénalisée, est simulée. Nous effectuons ainsi une comparaison originale avec un code pseudo-spectral en canal (discrétisation en polynômes de Chebyshev dans la direction normale à la paroi), où des conditions aux limites de non-glissement sont, par la formulation, intrinsèquement imposées sur deux parois planes parallèles. Cette comparaison permet de confirmer que la méthode de pénalisation converge spatialement approximativement à l'ordre 2. La question de l'influence de l'alignement de la frontière pénalisée avec le maillage cartésien est également posée dans ce contexte et il s'avère qu'une condition nécessaire pour une bonne prise en compte des effets de parois lorsque l'interface n'est pas confondue avec le maillage est une discrétisation "suffisante". Cette observation est validée par la simulation de la réflexion d'ondes internes de gravité (dans le cas d'un écoulement stablement stratifié) sur une paroi inclinée. Une comparaison avec la théorie non-visqueuse est développée. Enfin, l'interaction entre les phénomènes tourbillonnaires et la paroi de pénalisation est testée avec le *benchmark* classique de l'impact d'un anneau de vorticité (vortex ring), mais pour la première fois sur une paroi pénalisée en 3D. Une comparaison avec des résultats numériques (Orlandi & Verzicco [1993]) est faite et donne des résultats très satisfaisants.

En nous appuyant sur les bons résultats obtenus sur les cas académiques testés, nous pouvons alors utiliser la méthode de simulation dans le cadre de l'étude de la turbulence confinée. La géométrie simple d'une enceinte cylindrique (pour anticiper la géométrie du dispositif de von K rman), périodique sur son axe, est considérée. Il nous a semblé dans un premier temps important d'insister sur la façon d'initialiser l'écoulement turbulent, puisque les conditions initiales dans un problème de type Navier–Stokes sont importantes, au même titre que les conditions aux limites. Nous ajoutons alors au système d'équations la force de Coriolis, conséquence de la prise en compte d'une rotation d'ensemble dans la direction de l'axe du cylindre. On étudie alors le déclin d'écoulements confinés et soumis à des effets de rotation. Les résultats montrent que le confinement modifie les distributions de probabilité des vitesses et des accélérations lagrangiennes radiales en produisant un pic à la valeur nulle ainsi qu'une dissymétrie de la distribution dans une région de proche paroi. De plus, un résultat important est l'effet qu'a la rotation sur les distributions des accélérations lagrangiennes : plus la rotation est forte, plus la distribution se rapproche d'une distribution gaussienne et donc moins l'écoulement est intermittent (au sens classique dans le contexte turbulent). L'étude de l'évolution

des échelles de longueur intégrales, en fonction de la position radiale, montre que le confinement et la rotation ont la même conséquence : l'étirement des structures turbulentes dans la direction verticale. On note également que les lois asymptotiques sur l'évolution temporelle des échelles de longueur, déterminées dans le cadre homogène (Squires *et al.* [1994]), sont applicables, sauf pour la composante L_{zz}^z en présence d'une forte rotation. Concernant le déclin de l'énergie cinétique, celle-ci n'est pas modifiée (lois en puissance similaires aux cas homogènes) et nous n'observons pas de dissipation additionnelle dans la zone de paroi. Enfin, une étude de la dynamique spectrale indique que la paroi n'a pas d'effet notable sur la dynamique, mis à part aux grandes échelles de l'écoulement. Les lois classiques de la turbulence homogène ($\kappa^{-5/3}$ et $\kappa^{-11/5}$ en-dessous de l'échelle de Zeman [1994]) sont retrouvées. Nous observons cependant un effet surprenant sur l'anisotropie des petites échelles comme le montre la figure 4.18, qui ne semble pas être de nature numérique, et qui questionne le retour à l'isotropie des petites échelles dans une turbulence confinée. Ce résultat reste cependant à confirmer avec des simulations encore mieux résolues à plus grand nombre de Reynolds.

Nous abordons enfin le cadre de la turbulence forcée, dans un contexte proche d'un écoulement réel (tout en soulignant la complexité d'une telle simulation, même forts des approches précédentes). Afin de générer un écoulement statistiquement stationnaire pour l'étude de la turbulence à temps long, nous simulons l'effet de deux disques contrarotatifs munis de pales, générant un écoulement à l'intérieur d'une enceinte cylindrique. La capacité de la méthode de pénalisation à simuler des parois mobiles est donc finalement utilisée pour réaliser une simulation numérique d'un écoulement de von Kármán. Notre étude consiste tout d'abord à mettre en avant l'effet de la géométrie des pales : des écoulements turbulents très différents (anisotropie plus ou moins forte) sont observés au cœur de la cellule en fonction de l'utilisation de pales droites ou courbées. Le sens de rotation, dans le cas de pales courbées, est également un paramètre prépondérant. Les niveaux d'énergie cinétique sont également très variables suivant la configuration géométrique considérée. La turbulence est étudiée dans ces contextes et des comparaisons avec des études analytiques basées sur la mécanique statistique sur les équations d'Euler axisymétriques sont également reportées, montrant un bon accord, et surtout une bonne complémentarité des études analytiques, expérimentales et numériques. Un apport du présent travail est clairement de permettre une analyse bien plus poussée de la dynamique et des propriétés de transport de l'écoulement de von Kármán, puisque nous disposons de la majorité des quantités statistiques eulériennes et lagrangiennes souhaitables.

Les perspectives de ce travail sont évidemment nombreuses et portent sur les différents aspects développés.

Tout d'abord, la versatilité de la méthode de pénalisation ouvre des perspectives intéressantes pour élargir le cadre de l'étude à d'autres dynamiques turbulentes anisotropes dans des géométries différentes. Par exemple, l'introduction de conditions aux limites plus générales peut être proposée. C'est l'objet du travail actuel de thèse de Jorge Morales (voir Morales *et al.* [2012]), dont la soutenance est prévue en 2013, qui a pour but d'étendre la méthode au contexte des fluides conducteurs (MHD) en "pénalisant" l'équation du champ magnétique fluctuant sur le même modèle. L'extension de la méthode de pénalisation à d'autres types de conditions aux limites (problème déjà abordé par Kolomenskiy [2010] et Kadoch *et al.* [2012]) est également une ouverture possible, même si la pénalisation en volume pour des conditions de type Dirichlet ne s'étend pas trivialement à des conditions de type Neumann ou Robin (conditions aux

limites mixtes : $au + b\frac{\partial u}{\partial n} = c$ sur la frontière).

D'autre part, nous prévoyons que notre étude de turbulence en rotation peut être transposée au cas de simulations de turbulence avec des effets de stratification stable (avec la présence des ondes internes de gravité étudiée dans ce travail de thèse) ou instable, pour se situer dans un contexte convectif confiné. Les effets de rotation ou de stratification, et leur combinaison, situent le contexte de l'étude dans le cadre de la dynamique des écoulements géophysiques, pour laquelle on peut envisager d'introduire des obstacles ou parois à topographie complexe.

Finalement, et en anticipant l'utilisation de moyens de calculs puissants avec une allocation généreuse d'heures de calcul, on peut également envisager d'introduire des parois supplémentaires annulant la périodicité verticale de l'écoulement ("couvercles"). Il s'agira cependant de vérifier si l'algorithme pseudo-spectral pénalisé reste encore un outil pertinent en terme de performance au regard d'autres méthodes (éléments finis) pour ces écoulements confinés dans les trois directions de l'espace. Enfin, bien que très avancée, notre étude de l'écoulement de von Kármán a été limitée par le temps (de thèse) et les moyens de calcul disponibles ; elle pourra s'enrichir en poursuivant les simulations sur des temps très longs, notamment pour pouvoir reproduire, comprendre, et caractériser la multistabilité montrée par Ravelet *et al.* [2004].



Oscillation d'un tore dans un écoulement en rotation solide

Ce travail est issu d'une collaboration avec M. Duran-Matute (LEGI-CNRS, actuellement au Royal NIOZ) & J.-B. Flór (LEGI-CNRS), qui ont assuré la partie expérimentale de ce travail. Ces résultats seront présentés au *European Fluid Mechanics Conference 9* à Rome en septembre 2012 sous la présentation intitulée : *The formation of a large scale columnar vortex from a turbulent blob in rotating fluid*, M. Duran-Matute, J.-B. Flór, F.S. Godeferd & C. Jause-Labert.

La présente annexe contient l'article soumis au journal *Physical Review Letters* en août 2012.

Turbulence and columnar vortex formation through inertial-wave focusing

Matias Duran-Matute,^{1,*} Jan-Bert Flór,¹ Fabien S. Godeferd,² and Clément Jause-Labert²

¹*Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels,
CNRS-Université de Grenoble, Grenoble, France*

²*Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique,
UMR 5509, École Centrale de Lyon, France*

In this experimental/numerical study, we consider the role of inertial waves in the inverse energy cascade and the transfer of momentum in a rotating fluid. An oscillating torus generates two inertial waves cones with their energy focusing at their apex. For high wave amplitudes, turbulence is generated locally around the focal point resulting in angular momentum mixing and the generation of a columnar cyclonic vortex. These results suggest that nonlinear dynamics is essential for the wave induced momentum transport towards columnar vortices in rotating turbulence.

In rotating turbulence, the Coriolis acceleration is responsible for the presence of inertial waves (also known as gyroscopic or Kelvin waves) and the formation of large columnar vortices [1]. The formation of columnar structures is an ever-present feature in rotating turbulent flows that has been observed in flows forced by a continuously oscillating a grid [1, 2], electromagnetic forcing [3, 4], and a translating grid (for decaying flows) [5].

Previously, the formation of these columnar structures was attributed to the Taylor-Proudman theorem, but this theorem is strictly valid only for infinite rotation rates and not for turbulent flows. More recent studies have pointed out the importance of inertial waves for this process. Depending on the value of the Rossby number Ro , which represents the ratio between convective and Coriolis acceleration, different regimes have been observed. For strong rotation rates, the columnar structures are seen as zero-frequency inertial waves [2]. For intermediate Ro -values, weakly non-linear triad interactions are responsible for the formation of the columnar vortices [6]. Because of their relevance to momentum transport, inertial waves are at the base of the inverse energy cascade observed in rotating flows, where energy transfers from large to small wave number, which is opposite to the direct energy cascade occurring in three-dimensional turbulence in the absence of background rotation [5].

The aim of the present investigation is to consider the simplest configuration that allows us

to study the origin of the vortex-column formation as a function of the Rossby number for sufficiently high Reynolds number Re . With this aim in mind, we present results from a new experimental setup, which differs from previous work in that the turbulent flow is confined to a finite volume within the fluid and originates only from linear inertial waves. Previously, the study of localized turbulence was only possible through numerical simulations.

The well defined turbulent blob was created by the focusing of energy onto the apex of two inertial wave cones which results in wave breaking for large Re -values while the Ro -value is kept low. Only the recent advances in Particle Image Velocimetry (PIV) [7], and particularly stereo-PIV (S-PIV), allow for the observation and quantitative study of both inertial wave beams and the columnar vortex. The experimental results are supported by results from numerical simulations that, in addition, allow us to have further insight into the flow dynamics.

In the current letter, we attribute the vortex formation to angular momentum mixing due to the turbulence generated by the inertial-wave breaking. Some applications of this process that have been considered previously are the generations of tornadoes in the atmosphere [8], columnar vortex formation in accretion disks (see Ref. [9] and references there in), and the generation of mean flows in ocean basins by focusing of inertial waves into attractors [10]. The principle of this process is that the horizontal exchange of fluid rings in a rotating fluid implies

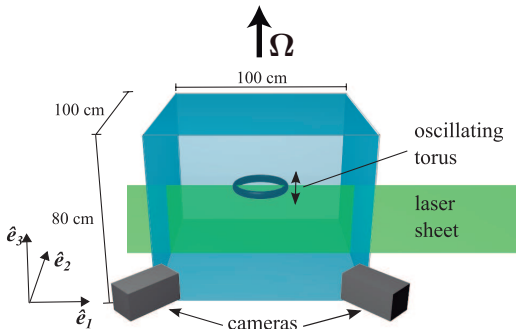


FIG. 1. (Color online) Schematic representation of the experimental setup.

the generation of a cyclonic flow, and at larger radii, anticyclonic flow (see Refs. 8, 10, and 11).

Experiments were conducted in a cubic tank with sides 100 cm long. The tank was filled to a depth $H = 80$ cm with salt water ($\rho = 1.02$ kg m $^{-3}$) and placed on top of a rotating table, which rotated at a constant rate Ω . In the center at 40 cm height above the bottom, a solid Plexiglas torus with a small radius $R = 1.5$ cm and a large radius $R_L = 13.5$ cm oscillated vertically generating inertial waves. The oscillation was driven by an electric motor, and the forcing frequency was controlled through an electric feedback system.

The torus oscillated as $K \cos(\sigma t)$ with $0 < \sigma < 2\Omega$, generating two inertial-wave cones. According to linear theory, the waves are characterized by the dispersion relation:

$$\cos \alpha = \frac{\sigma}{2\Omega}, \quad (1)$$

i.e., the angle of propagation of the waves, with respect to the horizontal α , is determined by the ratio of the forcing frequency to the rotation frequency. This is similar to the case of internal waves in a uniformly stratified fluid. In a vertical section, the energy propagates along rays away from the oscillating torus and forms a pattern similar to the St. Andrew's Cross for planar internal waves. The phase velocity is perpendicular to these rays.

The three velocity components were measured on a vertical plane crossing the center of the torus using S-PIV. For this, the water was seeded with 60 μ m polymer particles with

a density matching that of the water. A vertical laser sheet, with a 5 mm thickness and passing through the center of the ring, illuminated the particles. On one side of the tank, two cameras were positioned observing the laser plane at angles of $+30^\circ$ and -30° . Images of the illuminated particles were taken at a time interval that is determined by the flow velocities. For each camera, the particle displacement was obtained by cross correlating two successive images using standard PIV techniques. Later, the in-plane velocity component was obtained through a geometrical reconstruction using the velocity fields from both cameras. Finally, a reconstructed velocity field of about 30×30 cm 2 below the torus was obtained. The S-PIV calculations were done using the *uvmat/civ* software packages developed at the Coriolis Rotating Platform at the LEGI, Grenoble, France.

For fixed ratio R/R_L , there are three nondimensional parameters governing the problem: the Reynolds number,

$$Re = \frac{\sigma K(2R)}{\nu}, \quad (2)$$

which represents a ratio of convective acceleration to viscous momentum diffusion; the Rossby number

$$Ro = \frac{\sigma K}{2R\Omega}; \quad (3)$$

and the angle of propagation α obtained from the dispersion relation (1). Note that the ratio $\sigma/2\Omega$ is sometimes referred to as the Rossby number. However, we find that, for the flow studied, (3) is a better definition for relative magnitude of convective acceleration with respect to that of the Coriolis acceleration.

To explore the parameter space, nine different experiments were performed for various values of the frequency σ , the amplitude K of the oscillation, and the rotation rate of the table Ω . In the current letter, we focus on the results of two of these experiments (see Table I) and their corresponding numerical simulations. These experiments are extreme cases within the parameter space explored. Exp. 1 has the lowest Ro -value and Exp. 2 has the highest Re -value achieved for $Ro < 0.5$.

Exp.	Ω (rad/s)	σ (rad/s)	K (cm)	Re	α	Ro
1	0.889	1.26	0.25	94	$\pi/4$	0.12
2	1.110	1.56	1.00	470	$\pi/4$	0.47

TABLE I. Parameter values for the experiments and numerical simulations presented

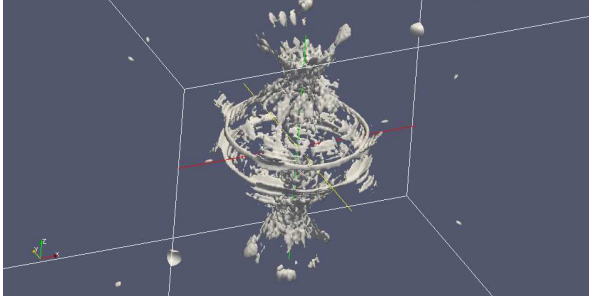


FIG. 2. (Color online) Inertial-wave cones excited by the oscillating torus as depicted by iso-surfaces of u_3 from a numerical simulation equivalent to Exp. 1.

The numerical simulations were performed using a pseudospectral code based on Fourier polynomials with a resolution of 576^3 and volume penalization for the moving torus and the upper and lower boundaries (see Ref. [12] for more details). The side boundaries are periodic. However, the lateral boundary conditions do not have a large effect on the flow due to symmetry and due to the fact that the energy of the waves is very weak at those boundaries.

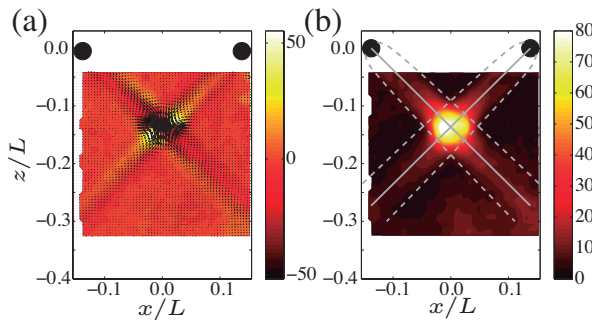


FIG. 3. (Color online) (a) Phase averaged velocity (at phase π) for Exp. 1. The color denotes the nondimensional in-plane velocity $2u_2 R_s / \nu$. (b) Nondimensional velocity magnitude averaged over 60 periods for the same experiment. The continuous line represents the center of the wave beam. The dashed line denotes the envelope of the wave beams given by (4). The black circles denote the position of the torus.

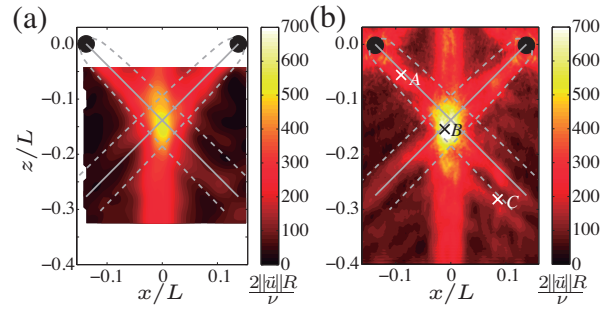


FIG. 4. (Color online) (a) Velocity magnitude averaged over 60 periods for Exp. 2. (b) Velocity magnitude averaged over 3 periods for the numerical simulation equivalent to Exp. 2. The crosses denote the points at which the temporal spectra is calculated for Fig. 5. Only a part of the numerical domain is shown. The rest is as in Fig. 3.

Figure 2 shows iso-surfaces of the vertical component of the velocity u_3 for the simulation equivalent to Exp. 1. In this figure, the inertial wave cone excited by the oscillating torus can be clearly observed. Figure 3 (a) shows the phase averaged velocity taken at phase π where the wave beams are clearly visible. Figure 3 (b) shows the velocity magnitude averaged over 60 periods. It can be seen that the wave energy grows from the torus towards the apex of the cones, and it decreases afterwards due to the radial spreading. However, the energy does not increase monotonically towards the apex but it is concentrated within a close to spherical region. The diameter of this region is given by the thickness of the wave beams at this location

$$\delta = 2R + 6.84l \left(\frac{r}{l}\right)^{1/3}, \quad (4)$$

where

$$l = \left(\frac{\nu}{\sigma \tan \alpha}\right)^{1/2}, \quad \text{and} \quad r = R_L \sin \alpha \quad (5)$$

is the distance from center of the tube to the apex of the cone [13]. For this experiment, the average velocity at the apex of the cones is about eight times larger than the velocity along the wave beam closer to the torus.

Figure 4 shows the nondimensional time-averaged magnitude of the velocity obtained both experimentally (a) and numerically (b) for the parameters of Exp. 2. For these parameter

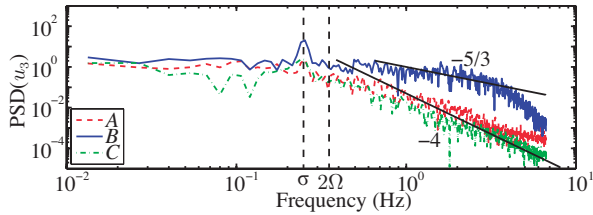


FIG. 5. (Color online) Power spectral density (PSD) of the vertical velocity component u_3 at points A, B, and C of Fig. 4 along the wave beam for the simulation corresponding to Exp. 2. The lines represent $-5/3$ and -4 power laws, which are typical for turbulence and wave turbulence respectively.

values, we observe again the energy concentration at the apex of the inertial wave cones. In addition, we observe a long vertical cyclonic vortical structure emanating from this high-energy region. The formation of the vortex is explained by the breaking of the inertial waves around the apex of the cone, that generates turbulence which mixes the angular momentum irreversibly [8]. This explanation is supported by the temporal spectra of the flow. Figure 5 shows the spectra of u_3 at three different points along the inertial wave beam [their locations are shown in Fig. 4(b)]. Outside the high-energy region, the spectra decay quickly with a -4 power-law scaling (associated with wave turbulence[14]) for frequencies larger than 2Ω . On the other hand, the spectrum is much broader and decays with a $-5/3$ power-law scaling (associated with three-dimensional turbulence) within the high energy region for frequencies larger than 2Ω . This is a clear indication that turbulence is confined within this finite volume.

It is shown in Fig. 4 for Exp. 2 that the wave beams are much weaker after the apex of the cone since part of their energy is transferred to the vortex. By calculating the energy of the mean flow from integration of the velocity field over an integer number of periods, we can quantify the efficiency of angular momentum mixing in transferring energy towards the columnar vortex. For Exp. 2, the mean flow possesses 45% of the total energy in the flow within the measurement area as calculated from both numerical and experimental results and 30% within the whole domain as calculated from the numerical results.

On the other hand, the mean flow only accounts for 13% of the energy in the whole domain for Exp. 2.

Concluding, we have developed a novel experiment allowing for the local generation of turbulence from breaking inertial waves. As a consequence of the mixing of angular momentum in the turbulent region, a columnar vortex forms. Quantification of the energy of this vortex shows that angular momentum mixing is a highly efficient process to transfer energy from the wave beams towards columnar vortex structures.

We thank Pierre-Alain Barraud for technical support and Leo Maas for fruitful discussions. FG acknowledges the CINES for the use of its computing facilities. This collaborative work was financed by the ANR “ANISO”.

* Current address: Dept. of Physical Oceanography, Royal NIOZ, Den Burg (Texel), The Netherlands

- [1] E. J. Hopfinger, F. K. Browand, and Y. Gagne, *J. Fluid Mech.* **125**, 505 (1982).
- [2] P. J. Staplehurst, P. A. Davidson, and S. B. Dalziel, *J. Fluid Mech.* **598**, 81 (2008).
- [3] L. Del Castello and H. J. H. Clercx, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 214502 (2011).
- [4] L. J. A. van Bokhoven, H. J. H. Clercx, G. J. F. van Heijst, and R. R. Trieling, *Phys. Fluids* **21**, 096601 (2009).
- [5] C. Lamriben, P.-P. Cortet, and F. Moisy, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 024503 (2011).
- [6] L. M. Smith, J. R. Chasnov, and F. Waleffe, *PRL* **77**, 2467 (1996).
- [7] L. Messio, C. Morize, M. Rabaud, and F. Moisy, *Exp. Fluids* **44**, 519 (2007).
- [8] R. O. R. Y. Thompson, *Geo. Astro. Fluid Dyn.* **12**, 221 (1979).
- [9] S. A. Balbus, *Annu. Rev. Anstron. Astr.* **41**, 555 (2003).
- [10] L. R. M. Maas, *J. Fluid Mech.* **437**, 13 (2001).
- [11] A. D. McEwan, *Geo. Astro. Fluid Dyn.* **5**, 283 (1973).
- [12] C. Jause-Labert, F. Godefert, and B. Favier, *Comput. Fluids* **67**, 41 (2012).
- [13] P.-P. Cortet, C. Lamriben, and F. Moisy, *Phys. Fluids* **22**, 086603 (2010).
- [14] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, 2011) p. 295.

Références

- ANGOT, P., BRUNEAU, C.-H. & FABRIE, P. 1999 A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Num. Math.* **81**, 497–520.
- ARQUIS, E. & CALTAGIRONE, J.P. 1984 Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide - milieu poreux : application à la convection naturelle. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* **299** (1), 1–4.
- BALACHANDAR, S. & MAXEY, M.R. 1989 Methods for evaluating fluid velocities in spectral simulations of turbulence. *J. Comput. Phys.* **83**, 96–125.
- BARDINA, J., FERZIGER, J.H. & ROGALLO, R.S. 1985 Effect of rotation on isotropic turbulence : computation and modelling. *J. Fluid Mech.* **154**, 321–336.
- BATCHELOR, G.K. 1951 Note on a class of solutions of the Navier–Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow. *Quart. J. Mech. and App. Math.* **4** (1), 29–41.
- BATCHELOR, G.K. 1953 *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press.
- BATCHELOR, G.K. 1967 *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- BENNETT, A. 2006 *Lagrangian fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- BEWLEY, G.P., LATHROP, D.P., MAAS, L.R.M. & SREENIVASAN, K.R. 2007 Inertial waves in rotating grid turbulence. *Phys. Fluids* **19**, 071701.
- BIFERALE, L., BOFFETTA, G., CELANI, A., DEVENISH, B. J., LANOTTE, A. & TOSCHI, F. 2004 Multifractal statistics of Lagrangian velocity and acceleration in turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 064502.
- BORONSKI, P. & TUCKERMAN, L.S. 2007a Poloidal–toroidal decomposition in a finite cylinder. i : Influence matrices for the magnetohydrodynamic equations. *J. Comput. Phys.* **227** (2), 1523 – 1543.
- BORONSKI, P. & TUCKERMAN, L.S. 2007b Poloidal–toroidal decomposition in a finite cylinder : ii. discretization, regularization and validation. *J. Comput. Phys.* **227** (2), 1544–1566.
- BRINKMAN, H. 1949 A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *App. Sci. Res.* **1**, 27–34, 10.1007/BF02120313.
- BUFFAT, M., LE PENVEN, L. & CADIOU, A. 2011 An efficient spectral method based on an orthogonal decomposition of the velocity for transition analysis in wall bounded flow. *Comput. & Fluids* **42** (1), 62–72.

- CADOT, O. & LE MAÎTRE, O. 2007 The turbulent flow between two rotating stirrers : similarity laws and transitions for the driving torques fluctuations. *Eur. J. Mech. - B/Fluids* **26** (2), 258–270.
- CADOT, O., TITON, J.-H. & BONN, D. 2003 Experimental observation of resonances in modulated turbulence. *J. Fluid Mech.* **485**, 161–170.
- CAMBON, C. & JACQUIN, L. 1989 Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation. *J. Fluid Mech.* **202** (1), 295–317.
- CAMBON, C., MANSOUR, N.N. & GODEFERD, F.S. 1997 Energy transfer in rotating turbulence. *J. Fluid Mech.* **337**, 303–332.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M.Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T.A. 1987 *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag.
- CARBOU, G. & FABRIE, P. 2003 Boundary layers for a penalization method for incompressible flow. *Adv. Diff. Eq.* **8** (12), 1453–1480.
- COCHRAN, W.G. 1934 The flow due to a rotating disk. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **30** (365).
- COOLEY, J.W. & TUKEY, J.W. 1965 An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Comp.* **19** (297-301).
- CORTET, P.-P., CHIFFAUDEL, A., DAVIAUD, F. & DUBRULLE, B. 2010 Experimental evidence of a phase transition in a closed turbulent flow. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 214501.
- DAHM, W.J.A. & DIMOTAKIS, P.E. 1990 Mixing at large Schmidt number in the self-similar far field of turbulent jets. *J. Fluid Mech.* **217**, 299–330.
- DAVIDSON, P.A. 2004 *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press.
- DAVIDSON, P.A., STAPLEHURST, P.J. & DALZIEL, S.B. 2006 On the evolution of eddies in a rapidly rotating system. *J. Fluid Mech.* **557** (1), 135–144.
- DIJKSTRA, D. & VAN HEIJST, G.J.F. 1983 Flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder. *J. Fluid Mech.* **128**, 123–154.
- FADLUN, E.A., VERZICCO, R., ORLANDI, P. & MOHD-YUSOF, J. 2000 Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *J. of Comput. Phys.* **161** (1), 35–60.
- FAVIER, B. 2009 Modélisation et simulation en turbulence homogène anisotrope : effets de rotation et magnétohydrodynamique. PhD thesis, École centrale de Lyon.
- FRISCH, U. 1995 *The legacy of A.N. Kolomogorov*. Cambridge University Press.
- GODEFERD, F.S. & LOLLINI, L. 1999 Direct numerical simulations of turbulence with confinement and rotation. *J. Fluid Mech.* **393**, 257–308.

- GOLDSTEIN, D., HANDLER, R. & SIROVICH, L. 1993 Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *J. Comp. Phys.* **105** (2), 354–366.
- GOSTIAUX, L. 2006 Étude expérimentale des ondes de gravité internes en présence de topographie. Émission, propagation, réflexion. Phd thesis, École Normale Supérieure de Lyon.
- GREENSPAN, H.P. 1968 *The theory of rotating fluids*. Breukelen Press.
- GRIFFITH, B.E. & PESKIN, C.S. 2005 On the order of accuracy of the immersed boundary method : Higher order convergence rates for sufficiently smooth problems. *J. Comput. Phys.* **208** (1), 75–105.
- HOLZNER, M., GUALA, M., LÜTHI, B., LIBERZON, A., NIKITIN, N., KINZELBACH, W. & TSINOBER, A. 2010 Viscous tilting and production of vorticity in homogeneous turbulence. *Phys. Fluids* **22**, 061701.
- HOMANN, H., BEC, J. & GRAUER, R. 2010 Immersed boundaries with a Fourier-spectral method. *arXiv : 1012.5205v1* .
- HOPFINGER, E.J., BROWAND, K.F. & GAGNE, Y. 1982 Turbulence and waves in a rotating tank. *J. Fluid Mech.* **125**, 505–534.
- IBBETSON, A. & TRITTON, D.J. 1975 Experiments on turbulence in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **68** (04), 639–672.
- ISHIDA, T., DAVIDSON, P.A. & KANEDA, Y. 2006 On the decay of isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **564**, 455–475.
- JACOBITZ, F.G., SCHNEIDER, K., BOS, W.J.T. & FARGE, M. 2010 On the structure and dynamics of sheared and rotating turbulence : Anisotropy properties and geometrical scale-dependent statistics. *Phys. Fluids* **22**, 085101.
- JACQUIN, L., LEUCHTER, O., CAMBON, C. & MATHIEU, J. 1990 Homogeneous turbulence in the presence of rotation. *J. Fluid Mech.* **220**, 1–52.
- JAUSE-LABERT, C. & GODEFERD, F.S. 2011 Statistics of confined turbulent flows with and without rotation effects. *J. Phys. : Conf. Ser.* **318** (8).
- JAUSE-LABERT, C., GODEFERD, F.S. & FAVIER, B. 2012 Numerical validation of the volume penalization method in three-dimensionnal pseudo-spectral simulations. *Comput. & Fluids* **67**, 41–56.
- JIMÉNEZ, J., WRAY, A.A., SAFFMAN, P.G. & RO GALLO, R.S. 1993 The structure of intense vorticity in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.* **255**, 65–90.
- KADOCH, B. 2009 Transport and mixing in homogeneous and confined flows. PhD thesis, Université de Provence.
- KADOCH, B., BOS, W.J.T. & SCHNEIDER, K. 2008 Extreme Lagrangian acceleration in confined turbulent flow. *Phys. Rev. Lett.* **100** (18).

- KADOCH, B., KOLOMENSKIY, D., ANGOT, P. & SCHNEIDER, K. 2012 A volume penalization method for incompressible flows and scalar advection–diffusion with moving obstacles. *J. Comput. Phys.* **231** (12), 4365.
- KANEDA, Y. & ISHIHARA, T. 2006 High-resolution direct numerical simulation of turbulence. *J. Turb.* p. N20.
- VON KÁRMÁN, T. 1921 Über laminare und turbulente reibung. *ZAMM - J. App. Math. Mech.* **1** (4), 233–252.
- VON KÁRMÁN, T. & LIN, C.C. 1949 On the concept of similiarity in the theory of isotropic turbulence. *Rev. Mod. Phys.* **21**, 516–519.
- KEETELS, G.H., D’ORTONA, U., KRAMER, W., CLERCX, H.J.H., SCHNEIDER, K. & VAN HEIJST, G.J.F. 2007 Fourier spectral and wavelet solvers for the incompressible Navier–Stokes equations with volume-penalization : Convergence of a dipole-wall collision. *J. Comput. Phys.* **227**, 919–945.
- KERR, R.M. 1985 Higher-order derivative correlations and the alignment of small-scale structures in isotropic numerical turbulence. *J. Fluid Mech.* **153** (31-58), 4.
- KEVLAHAN, N.K.-R. & GHIDAGLIA, J.-M. 2001 Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with Brinkman penalization. *Eur. J. Mech. - B/Fluids* **20**, 333–350.
- KIDA, S. & TAKAOKA, M. 1994 Vortex reconnection. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **26** (1), 169–177.
- KOLMOGOROV, A.N. 1941a Dissipation of energy in locally isotropic turbulence [In Russian]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32**, 19–21.
- KOLMOGOROV, A.N. 1941b The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers [In Russian]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 301–305.
- KOLMOGOROV, A.N. 1941c On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. In *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, , vol. 31, pp. 2–1.
- KOLOMENSKIY, D. 2010 Numerical modelling of flows past moving obstacles. application to the aerodynamics of insect flights. PhD thesis, Université de Provence – Aix-Marseille I.
- KOLOMENSKIY, D. & SCHNEIDER, K. 2009 A Fourier spectral method for the Navier–Stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles. *J. Comput. Phys.* **228** (16), 5687–5709.
- LA PORTA, A., VOTH, G.A., MOISY, F. & BODENSCHATZ, E. 2000 Using cavitation to measure statistics of low-pressure events in large-reynolds-number turbulence. *Phys. Fluids* **12** (6), 1485–1496.
- LABBÉ, R., PINTON, J.-F. & FAUVE, S. 1996 Power fluctuations in turbulent swirling flows. *J. Phys. II France* **6** (7), 1099–1110.

- LAIZET, S. & LAMBALLAIS, E. 2009 High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *J. Comput. Phys.* **228** (16), 5989–6015.
- LAMRIBEN, C., CORTET, P.P. & MOISY, F. 2011a Direct measurements of anisotropic energy transfers in a rotating turbulence experiment. *Phys. Rev. Lett.* **107** (2), 24503.
- LAMRIBEN, C., CORTET, P.-P., MOISY, F. & MAAS, L.R.M. 2011b Excitation of inertial modes in a closed grid turbulence experiment under rotation. *Phys. Fluids* **23**, 015102.
- LEPROVOST, N., DUBRULLE, B. & CHAVANIS, P.-H. 2006 Dynamics and thermodynamics of axisymmetric flows : Theory. *Phys. Rev. E* **73**, 046308.
- LESIEUR, M. 1977 Influence of helicity on the evolution of isotropic turbulence at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **81**, 187–207.
- LIECHTENSTEIN, L., GODEFERD, F.S. & CAMBON, C. 2006 The role of nonlinearity in turbulent diffusion models for stably stratified and rotating turbulence. *Int. J. Heat Fluid Flow* **27**, 644–652, Special Issue of the Fourth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena - 2005.
- LIGHTHILL, J. 1978 *Waves in fluids*. Cambridge University Press.
- LIM, T.T. 1989 An experimental study of a vortex ring interacting with an inclined wall. *Exp. Fluids* **7**, 453–463.
- LUMLEY, J.L. 1978 Computational modeling of turbulent flows. *Adv. Appl. Mech.* **18** (123), 76.
- MARIÉ, L. 2003 Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent : influence de la rotation. PhD thesis, Université Paris 7 – Denis Diderot.
- MCEWAN, A.D. 1970 Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. *J. Fluid Mech.* **40** (3), 603–640.
- MERCIER, M. J., MARTINAND, D., MATHUR, M., GOSTIAUX, L., PEACOCK, T. & DAUXOIS, T. 2010 New wave generation. *J. Fluid Mech.* **667**, 308–334.
- MITTAL, R. & IACCARINO, G. 2005 Immersed boundary methods. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **37**, 239–261.
- MOISY, F., MORIZE, C., RABAUD, M. & SOMMERIA, J. 2011 Decay laws, anisotropy and cyclone-anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence. *J. Fluid Mech.* **666**, 5–35.
- MONCHAUX, R., CORTET, P.-P., CHAVANIS, P.-H., CHIFFAUDEL, A., DAVIAUD, F., DIRIBARNE, P. & DUBRULLE, B. 2008 Fluctuation-dissipation relations and statistical temperatures in a turbulent von kármán flow. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 174502.

- MONCHAUX, R., RAVELET, F., DUBRULLE, B., CHIFFAUDEL, A. & DAVIAUD, F. 2006 Properties of steady states in turbulent axisymmetric flows. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 124502.
- MONIN, A.S. & YAGLOM, A.M. 2007 *Statistical fluid mechanics. Mechanics of turbulence. Volume I*. Dover Publications.
- MORALES, J.A., LEROY, M., BOS, W.J.T. & SCHNEIDER, K. 2012 Simulation of confined magnetohydrodynamic flows using a pseudo-spectral method with volume penalization. *En préparation*.
- MORDANT, N., METZ, P., MICHEL, O. & PINTON, J.-F. 2001 Measurement of Lagrangian velocity in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **87** (21), 214501.
- MORIZE, C. & MOISY, F. 2006 Energy decay of rotating turbulence with confinement effects. *Phys. Fluids* **18** (065107).
- NORE, C., TUCKERMAN, L.S., DAUBE, O. & XIN, S. 2003 The 1 :2 mode interaction in exactly counter-rotating von kármaán swirling flow. *J. Fluid Mech.* **477**, 51–88.
- OBUKHOV, A.M. 1941 Spectral energy distribution in turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR* **5**, 453–566.
- ORLANDI, P. & VERZICCO, R. 1993 Vortex rings impinging on walls : axisymmetric and three-dimensionnal simulations. *J. Fluid Mech.* **256**, 615–646.
- ORSZAG, S.A. 1969 Numerical methods for the simulation of turbulence. *Phys. Fluids* **12** (12), II–250–II–257.
- ORSZAG, S.A. & PATTERSON, G. 1972 Numerical simulation of turbulence. In *Statistical Models and Turbulence* (ed. M. Rosenblatt & C. Van Atta), *Lecture Notes in Physics*, vol. 12, pp. 127–147. Springer Berlin / Heidelberg, 10.1007/3-540-05716-1_8.
- PACCOU, A., CHIAVASSA, G., LIANDRAT, J. & SCHNEIDER, K. 2005 A penalization method applied to the wave equation. *Comptes Rendus Mécanique* **333** (1), 79 – 85, <ce :title>High-order methods for the numerical simulation of vortical and turbulent flows </ce :title>.
- PASQUETTI, R., BWEMBA, R. & COUSIN, L. 2008 A pseudo-penalization method for high Reynolds unsteady flows. *App. Num. Math.* **58** (7), 946–954.
- PATTERSON, G.S. & ORSZAG, S.A. 1971 Spectral calculations of isotropic turbulence : Efficient removal of aliasing interactions. *Phys. Fluids* **14**, 2538–2541.
- PESKIN, C.S. 1972 Flow patterns around heart valves : A numerical method. *J. Comput. Phys.* **10** (2), 252–271.
- PESKIN, C.S. 1977 Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comput. Phys.* **25** (3), 220–252.
- PHILLIPS, O.M. 1963 Energy transfer in rotating fluids by reflection of inertial waves. *Phys. Fluids* **6** (4), 513–520.

- PINTON, J.-F., HOLDSWORTH, P.C.W. & LABBÉ, R. 1999 Power fluctuations in a closed turbulent shear flow. *Phys. Rev. E* **60**, R2452–R2455.
- PONCET, S., SCHIESTEL, R. & MONCHAUX, R. 2008 Turbulence modeling of the von kármán flow : Viscous and inertial stirrings. *Int. J. Heat Fluid Flow* **29** (1), 62–74.
- POPE, S.B. 2000 *Turbulent flows*. Cambridge University Press.
- RAVELET, F., CHIFFAUDEL, A. & DAVIAUD, F. 2008 Supercritical transition to turbulence in an inertially driven von kármán closed flow. *J. Fluid Mech.* **601**, 339–364.
- RAVELET, F., DUBRULLE, B., DAVIAUD, F. & RATIÉ, P.-A. 2012 Kinematic α tensors and dynamo mechanisms in a von kármán swirling flow. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 024503.
- RAVELET, F., MARIÉ, L., CHIFFAUDEL, A. & DAVIAUD, F. 2004 Multistability and memory effect in a highly turbulent flow : Experimental evidence for a global bifurcation. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 164501.
- REYNOLDS, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proc. Royal Soc. London* **35** (224-226), 84–99.
- RICHARDSON, L.F. 1926 Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proc. Royal Soc. London, Ser. A* **110** (709).
- ROGALLO, R.S. 1981 Numerical experiments in homogeneous turbulence. *NASA Tech. Mem.* **81315**.
- ROTT, N. 1990 Note on the history of the Reynolds number. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22** (1), 1–12.
- SADDOUGHI, S.G. & VEERAVALLI, S.V. 1994 Local isotropy in turbulent boundary layers at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **268**, 333–372.
- SAFFMAN, P.G. 1967 The large-scale structure of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **27** (3), 581–593.
- SAGAUT, P. & CAMBON, C. 2008 *Homogeneous turbulence dynamics*. Cambridge University Press.
- SCHNEIDER, K. & FARGE, M. 2005 Decaying two-dimensional turbulence in a circular container. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 244502.
- SCHNEIDER, K. & FARGE, M. 2007 Decaying 2D turbulence in bounded domains : Influence of the geometry. *Comput. Phys. & New Persp. Turb.* pp. 241–246.
- SCHNEIDER, K., NEFFAA, S. & BOS, W.J.T. 2011 A pseudo-spectral method with volume penalisation for magnetohydrodynamic turbulence in confined domains. *Comput. Phys. Comm.* **182** (1), 2–7.

- SIMONSEN, A.J. & KROGSTAD, P.Å. 2005 Turbulent stress invariant analysis : clarification of existing terminology. *Phys. Fluids* **17**, 088103.
- SQUIRES, K.D., CHASNOV, J.R., MANSOUR, N.N. & CAMBON, C. 1994 The asymptotic state of rotating homogeneous turbulence at high Reynolds numbers. In *AGARD, Application of Direct and Large Eddy Simulation to Transition and Turbulence 9 p (SEE N95-21061 06-34)*, , vol. 1.
- STAPLEHURST, P.J., DAVIDSON, P.A. & DALZIEL, S.B. 2008 Structure formation in homogeneous freely decaying rotating turbulence. *J. Fluid Mech.* **598** (1), 81–105.
- TAYLOR, G.I. 1922 Diffusion by continuous movements. *Proc. London Math. Soc.* **s2-20** (1), 196–212.
- TEITELBAUM, T. & MININNI, P.D. 2011 The decay of turbulence in rotating flows. *Phys. Fluids* **23** (6), 065105.
- TITON, J.-H. & CADOT, O. 2003a Direct measurements of the energy of intense vorticity filaments in turbulence. *Phys. Rev. E* **67**, 027301.
- TITON, J.-H. & CADOT, O. 2003b The statistics of power injected in a closed turbulent flow : Constant torque forcing versus constant velocity forcing. *Phys. Fluids* **15**, 625–640.
- DE LA TORRE, A. & BURGUETE, J. 2007 Slow dynamics in a turbulent von kármán swirling flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 054101.
- UNSER, M., THÉVENAZ, P. & YAROSLAVSKY, L. 1995 Convolution-based interpolation for fast, high-quality rotation of images. In *IEEE Transactions on Image Processing*, , vol. 10, pp. 1371–1381.
- VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. 1991 The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **225** (1), 1–20.
- VINKOVIC, I., DOPPLER, D., LELOUVETEL, J. & BUFFAT, M. 2011 Direct numerical simulation of particle interaction with ejections in turbulent channel flows. *Int. J. Multi. Flow* **37** (2), 187–197.
- WALKER, J.D.A., SMITH, C.R., CERRA, A.W. & DOLIGALSKI, T.L. 1987 The impact of a vortex ring on a wall. *J. Fluid Mech.* **181**, 99–140.
- YEUNG, P.K. 2002 Lagrangian investigations of turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **34** (1), 115–142.
- ZANDBERGEN, P.J. & DIJKSTRA, D. 1987 Von kármán swirling flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19** (1), 465–491.
- ZEMAN, O. 1994 A note on the spectra and decay of rotating homogeneous turbulence. *Phys. Fluids* **6** (10), 3221–3223.
- ZOCCHI, G., TABELING, P., MAURER, J. & WILLAIME, H. 1994 Measurement of the scaling of the dissipation at high Reynolds numbers. *Phys. Rev. E* **50** (5), 3693.