



**HAL**  
open science

# Etude numérique d'un jet transverse dans un écoulement gazeux à grande vitesse

François-Xavier Keller

► **To cite this version:**

François-Xavier Keller. Etude numérique d'un jet transverse dans un écoulement gazeux à grande vitesse. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Rouen, 1996. Français. NNT: . tel-00783756

**HAL Id: tel-00783756**

**<https://theses.hal.science/tel-00783756v1>**

Submitted on 1 Feb 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

PRÉSENTÉE

## À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

Pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université de Rouen**

Discipline : Physique

Spécialité : Énergétique

présentée par

**François-Xavier KELLER**

Sujet de la thèse

### ÉTUDE NUMÉRIQUE D'UN JET TRANSVERSE DANS UN ÉCOULEMENT GAZEUX À GRANDE VITESSE

Soutenue le 12 juin 1996

Membres du jury :

Président :

Melle Lallemand Ingénieur de recherche à la DCN de Toulon

Rapporteurs :

Pr Besnard Chef de projet au CEA de Limeil-Valenton

Pr Vila Professeur à l'INSA de Toulouse

Examineurs :

Pr Borghi Professeur à l'Université de Rouen

Mr Larrey Chef de projet à SIMULOG Sophia-Antipolis

Pr Ledoux Professeur à l'Université de Rouen

Pr Vandromme Professeur à l'INSA de Rouen

Pr Zaleski Professeur à l'Université de Paris VI







# THÈSE

PRÉSENTÉE

## À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

Pour l'obtention du

### Doctorat de l'Université de Rouen

Discipline : Physique

Spécialité : Énergétique

présentée par

**François-Xavier KELLER**

Sujet de la thèse

### ÉTUDE NUMÉRIQUE D'UN JET TRANSVERSE DANS UN ÉCOULEMENT GAZEUX À GRANDE VITESSE

Soutenue le 12 juin 1996

Membres du jury :

Président :

Melle Lallemand Ingénieur de recherche à la DCN de Toulon

Rapporteurs :

Pr Besnard Chef de projet au CEA de Limeil-Valenton

Pr Vila Professeur à l'INSA de Toulouse

Examineurs :

Pr Borghi Professeur à l'Université de Rouen

Mr Larrey Chef de projet à SIMULOG Sophia-Antipolis

Pr Ledoux Professeur à l'Université de Rouen

Pr Vandromme Professeur à l'INSA de Rouen

Pr Zaleski Professeur à l'Université de Paris VI



“Quand je crois avoir compris, je devrais penser aussitôt que je me trompe. Où alors, ajouter l’heure, la minute, la seconde, le degré de latitude, celui de la longitude, puis faire un pas sur le côté et redemander une explication.”

Yves Simon, “Jours ordinaires”.





# Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Trinité, directeur du CORIA – URA CNRS 230, de m’avoir accueilli au sein de son laboratoire pour y réaliser ce travail.

Cette thèse de doctorat a été effectuée sous la direction de Monsieur Ledoux, Professeur à l’université de Rouen. Je tiens tout particulièrement à le remercier pour sa confiance et son soutien qu’il m’a témoignés tout au long de ce travail.

Que Monsieur Vandromme, Directeur du LMFN, soit remercié d’avoir initié ce projet de recherche et dirigé la première partie de cette thèse.

Je remercie Monsieur Zaleski, Professeur à l’université de Paris VI, qui a codirigé la première partie de ce travail sur le sujet de l’arrachage des gouttes. Je lui sais gré de m’avoir initié au travail de recherche, ainsi que de m’avoir permis d’utiliser son logiciel SURFER pendant la première partie de ce travail de thèse.

Que Monsieur Vila soit vivement remercié de m’avoir accepté à l’INSA de Toulouse lors d’une collaboration avec SIMULOG et la Direction des Constructions Navales de Toulon. Je lui sais gré, ainsi qu’à Monsieur Souillard, Directeur de la société X-RS, de m’avoir permis d’utiliser le code SPH.

Que Monsieur Besnard, Chef de projet au CEA de Limeil-Valenton, Monsieur Borghi, Professeur à l’université de Rouen et Monsieur Larrey, Chef de projet à SIMULOG, soient remerciés de l’intérêt qu’ils portent à ce travail en me faisant l’honneur de le juger.

Je tiens à remercier profondément Monsieur Talbot, Directeur de l’agence SIMULOG Sud-Est, de m’avoir accepté au sein de son entreprise et d’avoir mis à ma disposition l’environnement matériel nécessaire pour ce travail. Que les membres de l’agence de Sophia-Antipolis soient remerciés pour leur gentillesse et leur disponibilité de tous les instants.

Ce travail n’aurait pas pu se réaliser sans le soutien financier du CNRS, de la DRET, de la SEP et de la Direction des Constructions Navales de Toulon. Je remercie plus particulièrement Mademoiselle Lallemand et Monsieur Fournier, du département CTSN/MDTC, d’avoir rendu ce travail possible.

Je remercie amicalement Ariane Vallet, Bruno Lafaurie, Jie Li et Gaëtan Vich pour les collaborations que nous avons eues au cours de ce travail.

Que toutes les personnes du CORIA soient ici remerciées pour leur amabilité, leur aide et tous les moments agréables passés durant ces années de thèse.



# Table des matières

Préliminaire	8
<b>I Étude théorique du problème et travaux expérimentaux antérieurs</b>	<b>13</b>
1 Étude des instabilités	16
1.1 Les instabilités interfaciales . . . . .	16
1.2 Instabilités spatiales – temporelles . . . . .	18
1.3 Instabilités de Kelvin–Helmholtz 2D . . . . .	19
2 Résultats expérimentaux antérieurs	24
2.1 Généralités . . . . .	24
2.2 Déformation du jet . . . . .	26
2.2.1 Formation de tourbillons . . . . .	26
2.2.2 Choc amont – Couche limite à la paroi . . . . .	27
2.2.3 Ondes de surface . . . . .	29
2.3 Phénomènes interfaciaux . . . . .	31
2.3.1 Tension de surface . . . . .	31
2.3.2 Viscosité . . . . .	31
2.3.3 Perte de masse . . . . .	31
2.4 Phénomènes d’atomisation . . . . .	32
2.4.1 Atomisation primaire . . . . .	32
2.4.2 Atomisation secondaire . . . . .	33
2.4.3 Vaporisation . . . . .	34
2.5 Résultats expérimentaux du CORIA . . . . .	35
2.6 Résultats expérimentaux obtenus par Schetz . . . . .	36
2.7 Conclusion . . . . .	37
<b>II Méthodes numériques eulériennes</b>	<b>39</b>

<b>1</b>	<b>Présentation des techniques utilisées</b>	<b>43</b>
1.1	Suivi d'interface – Méthode VOF . . . . .	43
1.1.1	Idée générale du VOF incompressible . . . . .	44
1.1.2	Approximation des équations par différences finies . . . . .	47
1.1.3	Localisation de l'interface dans une cellule . . . . .	49
1.1.4	Conditions aux limites et stabilité numérique . . . . .	50
1.1.5	Cas compressible . . . . .	51
1.1.6	Conclusion . . . . .	56
1.2	Méthode de calcul de la tension de surface (CSF) . . . . .	56
1.2.1	Formulation volumique de la tension de surface . . . . .	57
1.2.2	Modélisation numérique . . . . .	61
1.2.3	Conclusion . . . . .	63
1.3	Schéma MAC (Marker And Cell) . . . . .	63
1.4	Méthode de Mac Cormack . . . . .	66
1.4.1	Présentation du schéma numérique . . . . .	66
1.4.2	Limiteur de flux – Schéma TVD (Total Variation Diminishing) . . . . .	68
1.4.3	Conclusion . . . . .	70
<b>2</b>	<b>Résultats</b>	<b>71</b>
2.1	Interface liquide/gaz incompressibles . . . . .	71
2.1.1	Rappel des hypothèses de travail . . . . .	73
2.1.2	Rupture d'interface de type Kelvin-Helmholtz . . . . .	78
2.1.3	Rupture d'interface monochromatique . . . . .	79
2.1.4	Rupture d'interface polychromatique . . . . .	80
2.1.5	Analyse des résultats polychromatiques . . . . .	82
2.2	Tests de la méthode VOF compressible . . . . .	96
2.3	Test de la méthode Mac Cormack . . . . .	97
2.4	Test du couplage compressible/incompressible . . . . .	98
2.5	Conclusion et Perspectives . . . . .	101
<b>III</b>	<b>Étude numérique d'une méthode lagrangienne</b>	<b>105</b>
<b>1</b>	<b>Méthode particulière</b>	<b>108</b>
1.1	Approximation particulière . . . . .	108
1.2	Application aux équations d'Euler . . . . .	111
1.3	Les conditions limites . . . . .	118
1.3.1	Les conditions de symétrie et de glissement . . . . .	118
1.3.2	Parois mobiles . . . . .	118
1.3.3	Conditions aux limites de type surface libre . . . . .	119
1.3.4	Les conditions d'entrée . . . . .	120

1.3.5	Les conditions de sortie . . . . .	120
1.4	Conclusion . . . . .	121
<b>2</b>	<b>Phénomènes interfaciaux</b>	<b>122</b>
2.1	Application à la tension de surface . . . . .	122
2.1.1	Calcul de la force surfacique . . . . .	124
2.1.2	Calcul de la pression . . . . .	125
2.1.3	Validation de la loi de Laplace . . . . .	128
2.1.4	Instabilités de Rayleigh–Taylor 2D . . . . .	130
2.1.5	Instabilités de Rayleigh–Taylor 3D . . . . .	138
2.2	Vaporisation . . . . .	141
2.2.1	Équations pour la phase gazeuse . . . . .	143
2.2.2	Équations pour la phase liquide . . . . .	147
2.2.3	Cas tests 2D de la perte de masse . . . . .	148
<b>3</b>	<b>Résultats sur l'étude d'un jet liquide dans un écoulement gazeux</b>	
	<b>supersonique</b>	<b>151</b>
3.1	Jet 2D . . . . .	151
3.1.1	Analyse des champs de vitesse ( $t = 200 \mu s$ ) . . . . .	152
3.1.2	Analyse de la pression . . . . .	152
3.1.3	Analyse de la masse volumique ( $t = 200$ et $600 \mu s$ ) . . . . .	153
3.2	Jet 3D derrière une marche descendante . . . . .	159
3.2.1	Calcul de la pression du liquide avec l'équation de Tait . . . . .	159
3.2.2	Pression constante dans le liquide . . . . .	162
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>173</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>
	<b>Annexe: "Direct numerical simulation of interface breakup and atomization"</b>	<b>180</b>



# Préliminaire

De nombreux phénomènes en mécanique des fluides font souvent intervenir plusieurs phases de nature et de caractéristiques diverses. Les phénomènes d'interface liquide/gaz sont importants pour étudier les interactions entre les différents milieux en présence. Leur simulation nécessite l'utilisation de méthodes numériques traitant les équations de la mécanique des fluides et tenant compte des efforts créés au niveau de ces régions de transition. Les applications industrielles sont très variées et souvent liées à la théorie des instabilités et à la pulvérisation. Du remplissage de réservoirs jusqu'au système d'injection des moteurs diesels, les études dans le milieu automobile sont prépondérantes. Les systèmes de propulsion, tels que les moteurs d'Ariane ou l'éjection d'un missile hors d'un sous-marin nécessitent aussi des recherches sur la physique des interfaces. Dans des environnements moins complexes, mais tout aussi intéressants, les recherches sur la formation des brouillards et sur les milieux poreux s'ajoutent à la liste des applications possibles.

Les travaux réalisés dans ce mémoire, sont issus de deux projets distincts. Le premier consiste à étudier le système d'injection d'oxygène liquide dans un écoulement d'hydrogène gazeux, en utilisant le développement d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz. Cette étude a été financée par la Société Européenne de Propulsion à Vernon. Le second projet concerne aussi l'injection d'un jet liquide dans un écoulement gazeux, mais dans une configuration différente. Il s'agit de l'étude d'un système de propulsion et de refroidissement d'un missile qui sort d'un sous-marin. Ce travail a été réalisé avec le soutien de la Direction des Constructions Navales de Toulon.

Bien que ces deux applications soient assez différentes dans la réalité, elles concernent toutes deux l'injection d'un liquide dans un gaz. Tout d'abord, pour répondre au premier problème, nous avons étudié la déformation d'un liquide sous l'effet d'un écoulement gazeux à faible vitesse : dans ce cas les deux fluides sont considérés comme incompressibles. Puis, pour résoudre le second problème, il nous fallu considérer deux fluides de caractéristiques très différentes : le premier incompressible, le second compressible.

Pour mener à bien ce travail, une revue bibliographique sur les travaux, expérimentaux, numériques et analytiques, existants dans ce domaine a d'abord été effectuée. Nous avons aussi recherché des expériences de référence et choisi celles effectuées au CORIA et celles réalisées par Schetz dans les années 80.



Dans la seconde partie, on a testé différentes méthodes numériques susceptibles de résoudre les deux problèmes posés. Pour l'étude de l'interaction de deux fluides incompressibles, nous avons retenu une méthode (SURFER), tout à fait appropriée. Elle est basée sur un schéma de suivi d'interface VOF (Volume Of Fluid), initialement développé par Hirt et Nichols en 1981. Son utilisation a été faite en étroite collaboration avec S.Zaleski. Nous avons obtenus des résultats sur la déformation et la cassure d'une nappe liquide, ainsi que sur la formation de gouttes.

Pour l'étude de l'interaction de deux fluides, compressible et incompressible, on a initialement couplé la méthode précédente avec un schéma de Mac Cormack. Cependant puisque nous voulions prendre en compte dans nos calculs de forts gradients de masse volumique nous avons été limité par les oscillations du schéma Mac Cormack. Nous avons donc utilisé, par la suite, une méthode particulière appelée SPH (Smooth Particle Hydrodynamics). Elle fut mise au point par Benz et Monaghan en 1990, pour faire des calculs d'astrophysique et plus particulièrement de collision de galaxies, en considérant des milieux compressibles. L'un des objectifs de ce travail est de donner les avantages et les inconvénients de ces 2 voies et de déterminer leurs domaines de validité. Finalement la seconde méthode a été retenue pour simuler la déformation d'un jet liquide incompressible dans un écoulement gazeux compressible.

Dans ce type de problème, les phénomènes physiques sont nombreux et leur influence sur la déformation du jet assez mal connue. Nous avons pris en compte la différence de vitesse entre les 2 phases, ainsi que le rapport des masses volumiques. Les effets de viscosité et les efforts de tension superficielle ont aussi été étudiés. Ces derniers sont calculés avec la méthode CSS (Continuum Surface Stresses), développée par Lafaurie et Zaleski dans le code SURFER et suivant le formalisme CSF de Brackbill, Kothe et Zemach dans les méthodes de Mac Cormack et SPH. Les effets de perte de masse par évaporation y ont aussi été incorporés dans la méthode particulière. Ces 3 paramètres physiques (viscosité, tension de surface et vaporisation) ont une importance sur le mode de rupture d'un jet et sont déterminants pour l'atomisation secondaire.

La configuration globale du problème simulé est un jet liquide injecté transversalement, derrière une marche descendante (zone de recirculation), dans un écoulement gazeux supersonique (figure 0.1).

Cette configuration a été simplifiée en 3 parties. Premièrement, nous avons commencé à étudier numériquement la déformation d'une interface plane, perturbée initialement par une instabilité de type Kelvin-Helmholtz, entre un liquide et un gaz incompressibles (figure 0.2).

Ceci est fait avec SURFER où les méthodes VOF, CSS et MAC (Marker And Cell) sont couplés. Puis, on a étudié la déformation d'une section 2D du jet liquide en considérant cette fois-ci un gaz compressible (figure 0.3). Nous avons pour cela utilisé

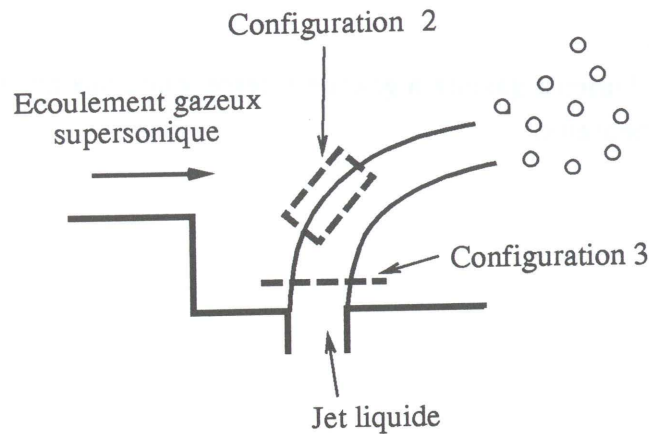


Figure 0.1 : Configuration 1 : problème global

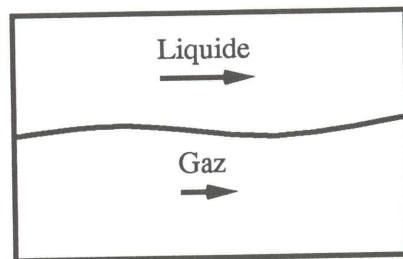


Figure 0.2 : Configuration 2 : interface plane liquide/gaz incompressibles

un schéma Mac Cormack, testé au préalable sur un cas gaz/gaz compressibles. Nous l'avons ensuite couplé aux méthodes précédentes pour traiter l'interaction d'une section 2D liquide dans un écoulement gazeux compressible.

Dans la troisième partie, le problème dans son ensemble a été traité avec une méthode particulière (SPH). Les calculs numériques 3D réalisés sont faits avec le code SPH sans, puis avec, la marche descendante située en amont du jet liquide.

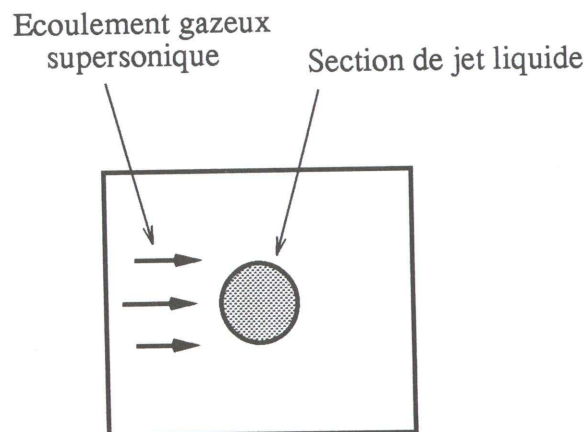


Figure 0.3 : Configuration 3 : section de jet

L'étude d'un système le plus complet possible et sa résolution numérique, dans des cas où parfois les propriétés des fluides en présence étaient très différentes, ont été réalisées. Nous avons obtenus des résultats de formation de gouttes pour des cas de nappes 2D avec des fluides incompressibles ainsi que des déformations de jets

liquides 3D, dans des écoulements gazeux à grande vitesse, que nous avons comparé avec des résultats expérimentaux.

## Partie I

Étude théorique du problème et  
travaux expérimentaux antérieurs



# Introduction

Cette première partie concerne les informations générales sur l'étude analytique et expérimentale des interfaces liquides/gaz. Dans le chapitre 1, nous développons brièvement la théorie des instabilités de Kelvin–Helmholtz, que nous avons utilisée par la suite dans différents calculs numériques, comme perturbations initiales d'interfaces de jets liquides. Nous avons aussi pris la théorie linéaire comme référence pour les cas tests effectués sur l'influence des phénomènes dus aux efforts de tension de surface (chapitre 2, partie 3). Nous présentons ici une étude 2D de ce type d'instabilité en tenant compte des effets de viscosité et de tension de surface. Le chapitre suivant regroupe des éléments bibliographiques concernant la déformation de jets liquides, sous l'influence d'un écoulement gazeux. Nous relevons les phénomènes les plus importants qui contrôlent la rupture des jets, ainsi que l'atomisation secondaire. Nous présentons aussi deux expériences dont les résultats nous permettront de valider nos calculs numériques.



# Chapitre 1

## Étude des instabilités

Dans ce premier chapitre nous allons présenter les instabilités de Kelvin–Helmholtz prises comme référence pour les études de perturbation de nappes. Nous les avons aussi utilisées pour valider les résultats numériques avec tension superficielle.

### 1.1 Les instabilités interfaciales

Les premiers travaux réalisés sur les instabilités ont été effectués par Lord Rayleigh et Kelvin à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle. Ils concernent les instabilités d'un cylindre liquide et la théorie des ondes de gravité. Il faut ensuite attendre le milieu du XX<sup>ème</sup> siècle pour que les études sur la pulvérisation regagnent un intérêt avec les recherches de Squire et Dombrowski en Angleterre et par la suite, de Martinon et Guillé, dans les années 70 en France. Le mécanisme de pulvérisation peut, de manière générale, se diviser en deux processus : les instabilités qui se développent en croissant et qui mènent à la rupture de la nappe ou du jet (figure 1.1) et les phénomènes qui interviennent après la rupture où, dans ce cas, on peut rencontrer des réarrangements (c'est-à-dire, des gouttes qui se retrouvent incorporées dans la nappe ou le jet initial), des coalescences de gouttes et aussi de nouvelles ruptures qui tendent à pulvériser un peu plus l'interface de départ (atomisation secondaire, figure 1.2).

La déformation de l'interface liquide/gaz est due à une énergie qui peut avoir différentes natures. Lorsque les deux fluides ont des vitesses parallèles différentes, l'interaction est de type aérodynamique (Kelvin–Helmholtz), par contre pour des écoulements à forte incidence, nous sommes en présence d'une interaction de type impaction (prompt atomisation–pulvérisation brutale). L'instabilité de type aérodynamique est la plus répandue et met en opposition deux forces qui “contrôlent” le processus de déformation de l'interface : des forces aérodynamiques qui ont tendance à déstabiliser l'interface et des forces de tension superficielles stabilisantes.

Nous allons nous intéresser aux instabilités de type Kelvin–Helmholtz où les



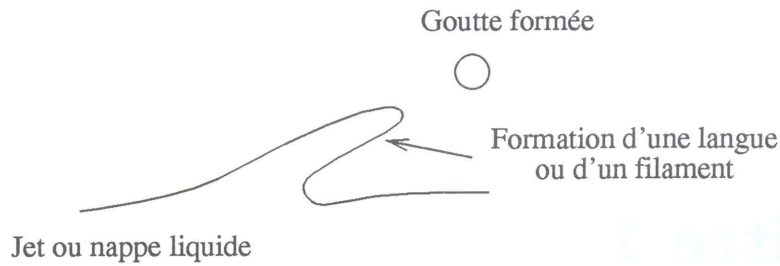


Figure 1.1 : Atomisation primaire d'une nappe ou d'un jet

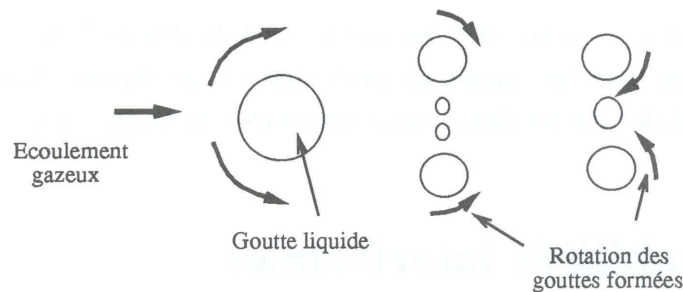


Figure 1.2 : Atomisation secondaire

deux fluides en présence ont des vitesses différentes, ce qui amènera l'interface à se déformer. Nous supposons que les perturbations  $\eta$  de l'interface sont faibles par rapport aux longueurs d'ondes. Ainsi, pour des cas de faibles perturbations initiales l'hypothèse de linéarité est tout à fait valable.

L'instabilité d'une nappe ou d'un jet naît d'une petite perturbation initiale de l'écoulement, résultant de vibrations extérieures (état de surface de l'injecteur, figure 1.3, [35]), ou du champ acoustique. Elle prend naissance en aval de l'injection, croît ensuite et crée une déformation plus ou moins importante suivant les vitesses et les masses volumiques en présence. Les instabilités d'un jet d'eau dans de l'air à pression atmosphérique sont différentes de celles qui ont lieu lorsque l'air est à haute pression par exemple. Ces déformations mènent à la rupture et à la formation de gros paquets liquides ou de fines gouttelettes, et ce suivant les forces et la nature des fluides considérés. Ainsi, nous obtenons un mécanisme de formation de langues liquides et de gouttes. Puis les phénomènes d'atomisation secondaire peuvent apparaître et les gouttes se brisent alors en gouttes de taille plus petite. Nous pouvons diviser la pulvérisation en deux parties suivant l'échelle des longueurs d'onde initiales. Si les longueurs d'onde sont grandes, le jet se déforme pour former de gros paquets. En revanche si les longueurs d'onde sont petites, nous sommes alors dans le cas d'épluchage de surface où la formation de petites gouttes a lieu en général.

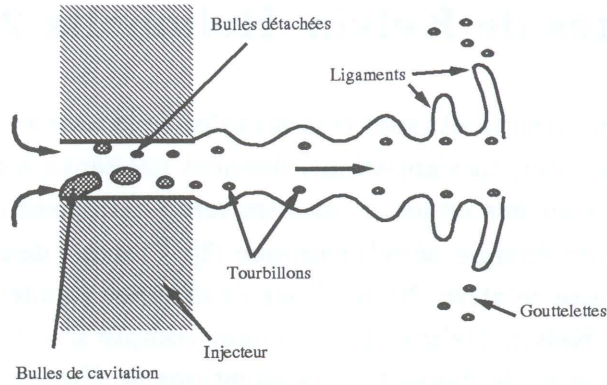


Figure 1.3 : Tourbillons dus à l'état de surface de l'injecteur

## 1.2 Instabilités spatiales – temporelles

En supposant que l'écoulement considéré soit périodique dans la direction  $x$  ainsi qu'en temps, la perturbation de l'interface s'écrit, pour un cas 2D, sous la forme suivante [4], [8] :

$$\eta(x, t) = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.1)$$

L'étude des instabilités fait appel à l'analyse en modes normaux. Avec  $k$  le nombre d'onde,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et  $\lambda$  la longueur d'onde de la perturbation. Une longueur d'onde optimale  $\lambda_{max}$  peut être déterminée et provoque la rupture de l'interface. On peut différencier 2 cas différents d'instabilités :

Le premier cas en prenant  $k \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{C}$

On pose  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  et donc  $\eta = \eta_0 e^{\omega_i t} e^{i(kx - \omega_r t)}$ .

Si  $\omega_i > 0$  il y a instabilité.  $\omega_i$  est un taux de croissance et  $\omega_r = kc$  est une pulsation où  $c$  est la célérité de l'onde. On est en présence d'instabilités temporelles (instabilités dues à la fréquence  $n = 2\pi/\omega$ ).

Le second cas est :  $k \in \mathbb{C}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$

Soit  $k = k_r + ik_i$  et donc  $\eta = \eta_0 e^{-k_i x} e^{i(k_r x - \omega t)}$ .

Si  $k_i < 0$ , il y a instabilité,  $-k_i$  est le taux de croissance,  $k_r$  est le nombre d'onde. On est en présence d'instabilités spatiales (instabilités dues à la longueur d'onde). Dans ce qui suit nous nous limitons à l'étude de la stabilité temporelle.

### 1.3 Instabilités de Kelvin–Helmholtz 2D

Les instabilités de Kelvin–Helmholtz sont responsables de la formation de structures de tailles différentes mais qui, en s'appariant, donnent naissance à des structures à grandes échelles [4]. Ce sont des ondes croissantes temporellement car elles sont en permanence alimentées en énergie aérodynamique [8]. Prenons deux fluides superposés animés d'une vitesse relative. Nous allons développer rapidement les calculs des instabilités de type Kelvin–Helmholtz en tenant compte simultanément des effets de tension de surface et de viscosité. Les équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible en 2D sont utilisées en négligeant les effets de gravité.

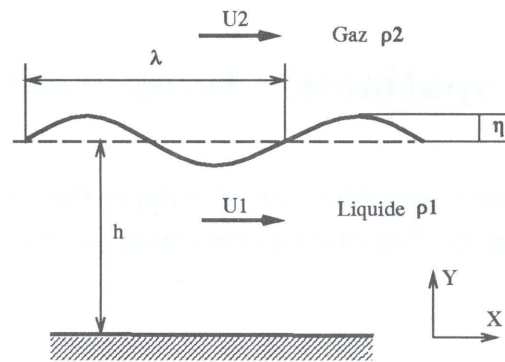


Figure 1.4 : Instabilité de Kelvin–Helmholtz

L'interface a une équation de la forme :

$$\eta = \eta_0 \exp(ikx + \omega t) \quad (1.2)$$

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité s'écrit pour la phase  $i$ , avec  $i = 1, 2$  :

$$\nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (1.3)$$

Considérons un écoulement liquide visqueux et un gaz non visqueux. Le champ de perturbation des vecteurs vitesses est rotationnel pour le fluide visqueux, soit :

$$\vec{u}_1 = \text{grad} \Phi_1 + \text{rot} \vec{B}_1 \quad (1.4)$$

où

$$\vec{B}_1 = (0, 0, \Psi_1) \quad (1.5)$$

et pour le gaz nous avons :

$$\vec{u}_2 = \text{grad} \vec{\Phi}_2 \quad (1.6)$$

Nous pouvons écrire le champ de vitesse, pour le liquide, en fonction de  $\Phi_1$  et  $\Psi_1$ , soit :

$$u_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \quad (1.7)$$

$$v_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \quad (1.8)$$

et pour le gaz :

$$u_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \quad (1.9)$$

$$v_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \quad (1.10)$$

Notons le champ de pression et les vitesses de la manière suivante :

$$p_i = \bar{p}_i + p_i' \quad (1.11)$$

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad (1.12)$$

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (1.13)$$

où  $\bar{p}_i, \bar{u}_i, \bar{v}_i$  sont les champs non perturbés et  $p_i', u_i', v_i'$ , les champs perturbés. En linéarisant, on a :

$$u_i' \frac{\partial u_i}{\partial x} \ll \bar{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \quad (1.14)$$

Écrivons maintenant l'équation de l'impulsion, à l'interface ( $y=0$ ), pour les 2 fluides (avec  $\mu_2 = 0$ ) :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial u_i'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i'}{\partial x} + \frac{\mu_i}{\rho_i} \left( \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i'}{\partial y^2} \right) \quad (1.15)$$

Les équations précédentes nous permettent d'écrire les formes des fonctions potentiels,  $\Phi_i$  et des fonctions courants  $\Psi_i$ , de la manière suivante :

$$\Phi_i = (A_i \exp(ky) + B_i \exp(-ky)) \exp(ikx + wt) \quad (1.16)$$

$$\Psi_1 = (C_1 \exp(my) + D_1 \exp(-my)) \exp(ikx + wt) \quad (1.17)$$

avec

$$m^2 = k^2 + \frac{\rho_1 w}{\mu_1} \quad (1.18)$$

Ceci représente un système à 9 inconnues, nous allons donc écrire les 9 relations permettant de le résoudre.

À l'infini, les perturbations doivent disparaître, soit :

pour le fluide 1 :  $y \rightarrow -\infty$ ,  $\Phi_1 = 0$  et  $\Psi_1 = 0$

pour le fluide 2 :  $y \rightarrow +\infty$ ,  $\Phi_2 = 0$

Ce qui nous donne :  $B_1 = 0$ ,  $D_2 = 0$  et  $A_2 = 0$ .

En écrivant les conditions limites cinématiques et dynamiques à l'interface nous avons :

On considère qu'il n'y a pas de flux de masse à l'interface  $v_i = \left. \frac{d\eta}{dt} \right|_i$ , soit :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (1.20)$$

On suppose qu'il n'y a pas de force de cisaillement à l'interface :

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.21)$$

En appliquant (1.7) et (1.8) à (1.21) nous pouvons écrire la continuité des composantes tangentielles :

$$2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} = 0 \quad (1.22)$$

et la continuité des composantes normales à l'interface, où  $\sigma$  est le coefficient de tension de surface :

$$-p_1 + 2\mu_1 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right] = -p_2 + \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (1.23)$$

Pour le fluide visqueux, la partie irrotationnelle satisfait l'équation de l'impulsion sans les termes de viscosité, nous avons donc, pour le fluide 1 :

$$\rho_1 \left[ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right] = -p_1 \quad (1.24)$$

et pour le fluide 2 :

$$\rho_2 \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right] = -p_2 \quad (1.25)$$

Il nous reste à trouver 4 inconnues :  $\eta_0$ ,  $A_1$ ,  $B_2$  et  $C_1$ . En utilisant les équations (1.20), (1.21), (1.22) et (1.23), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \eta_0 X_1 \left( \frac{m^2 + k^2}{m^2 - k^2} \right) = \eta_0 X_1 L \\ B_2 = -\eta_0 X_2 \\ C_1 = \frac{-2ik^2 \eta_0 X_1}{(m^2 + k^2)} = \eta_0 X_1 M \\ X_1 = \frac{w + iU_1 k}{k} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

De plus, avec l'équation (1.25), on a :

$$\rho_2 (w B_2 + U_2 i k B_2) - \rho_1 (w A_1 + U_1 i k A_1) = \sigma k^2 \eta_0 \quad (1.27)$$

et en couplant les équations (1.24) et (1.31) :

$$-p_1 + 2\mu_1 (A_1 k^2 - i k m^2 C_1) = -p_2 - \sigma \eta_0 k^2 \quad (1.28)$$

en utilisant les 2 équations ci-dessus, on aboutit finalement à l'équation de dispersion suivante :

$$\frac{\rho_2}{k^3} (w + U_2 i k)^2 + \frac{\rho_1}{k^3} (w + U_1 i k)^2 \left( \frac{m^2 + k^2}{m^2 - k^2} \right) + 2\mu_1 \left( \frac{w + U_1 i k}{k} \right) \left( \frac{(m - k)^2}{m^2 - k^2} \right) = -\sigma \quad (1.29)$$

Où  $w$  est complexe :  $w = w_r + iw_i$  et  $m^2 = k^2 + \frac{\mu_1 w}{\rho_1}$ . Nous constatons immédiatement que le taux de croissance  $w$  et la fréquence  $n$  dépendent de la tension de surface et de la viscosité et ce de manière couplée.

Nous pouvons remarquer que si le fluide 1 est non visqueux ( $\mu_1 = 0$ ) et si nous prenons sa vitesse  $U_1 = 0$ , alors, avec l'équation ci-dessus on retrouve bien l'équation de dispersion pour une instabilité de Kelvin-Helmholtz classique :

$$\rho_1 w^2 + \rho_2 (w + ikU_2)^2 = -\sigma k^3 \quad (1.30)$$

Nous avons développé l'équation de dispersion (1.29) car nous l'utilisons comme référence théorique pour vérifier les calculs effectués sur l'influence de la tension de surface afin de tester l'implémentation numérique de la méthode CSF avec le formalisme particulière (partie 3).

Si l'on suppose que les deux fluides sont au repos et si l'on tient compte des forces de gravité, l'équation obtenue pour des instabilités de type Rayleigh-Taylor 2D est :

$$w^2 = \frac{kg}{(\rho_1 + \rho_2)} \left( (\rho_2 - \rho_1) - \frac{k^2 \sigma}{g} \right) \quad (1.31)$$

Nous avons aussi utilisé ce type d'instabilité dans le chapitre 2, partie 3.

# Chapitre 2

## Résultats expérimentaux antérieurs

Nous avons regroupé ici des informations générales sur les différents modèles de rupture de jet et les processus d'atomisation. Nous nous axons plus particulièrement sur la déformation de jets liquides dans un environnement gazeux à grande vitesse. De plus, nous approfondissons les points concernant l'influence des deux phénomènes physiques qui nous intéressent en priorité : les efforts de tension de surface qui contrôlent en partie les mécanismes de pulvérisation et les effets dus au transfert de masse entre la phase liquide et la phase gazeuse. Nous présentons aussi les résultats expérimentaux qui nous avons choisi comme référence. Les premières études expérimentales et théoriques faites dans le domaine de l'interaction d'un jet et d'un écoulement gazeux ont eu lieu dans les années 60. Elles ont été menées par Adelberg et al [52] pour la NASA. Puis Kalpin et Catton [53] ont proposé un modèle appliqué à la déformation latérale du jet. Enfin, dans les années 70–80, Schetz [57] a fait de nombreuses études sur la longueur de pénétration du jet et sur sa fréquence de désintégration. Plus récemment, au CORIA, une soufflerie a été construite pour faire des études expérimentales dans ce domaine. Nous avons utilisé les résultats du CORIA ainsi que ceux de Schetz, comme principaux outils de comparaison pour nos cas tests numériques.

### 2.1 Généralités

L'injection d'un jet liquide dans un écoulement d'air à grande vitesse est dominée par plusieurs processus à haute fréquence qu'il est important de maîtriser. En effet, des paramètres tels que la taille et le nombre de gouttelettes ont une grande influence sur l'efficacité des phénomènes d'injection, sur la combustion des fuels et sur les sprays de refroidissement. Initialement le liquide forme une colonne cylindrique cohérente (figure 2.1). Plus le liquide pénètre dans le gaz, plus des ondes axiales se



développent à la surface du jet et se propagent le long du panache avec une amplitude et une vitesse croissantes. Le panache se courbe vers l'aval à cause de la traînée aérodynamique et se casse éventuellement au creux des ondes de grandes amplitudes. Les forces aérodynamiques cassent rapidement les fragments liquides. Cette région du panache du jet est celle de la zone de formation du spray. Le spray est alors atomisé sur une courte distance. Dans la zone d'atomisation, les gouttes se mélangent avec l'écoulement d'air turbulent. Elles sont décollées de la surface amont et aval du jet et les très petites gouttelettes forment un corps extérieur au panache du jet. Même près de l'injecteur, les ondes sont propagées à des vitesses significativement plus grandes que celle du liquide, ce qui montre la violence du processus de rupture [50]. Nous pouvons dissocier 3 régions suivant lesquelles le jet se divise :

- Le corps cohérent du jet qui correspond à la zone de déformation.
- Une région de décomposition primaire et secondaire qui est la zone de formation du spray.
- Une région de mélange de fines gouttelettes et d'air.

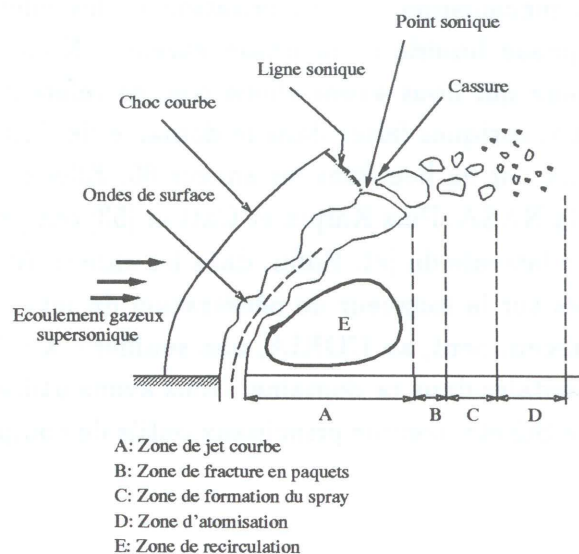


Figure 2.1 : Processus de rupture d'un jet liquide dans un écoulement gazeux supersonique transverse

Après avoir décrit globalement la déformation d'un jet liquide sous l'influence d'un écoulement gazeux supersonique, nous allons donner des informations sur la courbure, les ondes de surface, la tension de surface et l'atomisation primaire et secondaire. Tous ces résultats ont été issus d'expériences antérieures et nous les utilisons comme référence pour nos résultats.

## 2.2 Déformation du jet

Le degré de pénétration du jet dépend du rapport des pressions dynamiques [46]. On notera  $q$  ce rapport,  $U_l$  étant la vitesse du liquide,  $U_g$ , celle du gaz et  $\rho_l$ ,  $\rho_g$ , les masses volumiques :

$$q = \frac{\rho_l U_l^2}{\rho_g U_g^2} \quad (2.1)$$

Des études ont été faites et on distingue différents cas de déformation de jet suivant le rapport  $q$  :

- $q \geq 6$  : la colonne de jet est bien définie et le jet reste compact.
- $q \leq 1$  : le jet se casse immédiatement après l'injection et le liquide est projeté en aval [51].

L'angle d'inclinaison du jet, ainsi que la géométrie de l'orifice ont aussi une importance sur cette distance de pénétration [54]. On peut déterminer l'injection optimale (pénétration maximale) en fonction de  $q$  et de l'angle d'inclinaison. La taille des gouttes formées pendant la cassure est aussi fonction de l'angle d'inclinaison du jet. Les effets d'entraînement sont principalement ceux qui causent la déflexion du corps liquide et contrôlent largement sa dynamique. On montre expérimentalement qu'injecter le liquide vers l'amont de l'écoulement gazeux ne change pas vraiment la distance de pénétration du jet [46]. D'autres facteurs sont influents tels que le champ de pression autour du jet qui déforme sa section et, d'après Schetz, agit sur la prédiction des structures formées. L'écoulement externe autour de la colonne liquide est en 1<sup>ère</sup> approximation un écoulement potentiel autour d'un cylindre circulaire, avec un phénomène d'aspiration vers l'aval, causé par l'entraînement du jet. La diffusion de la vorticité dans le sillage est faible et le jet n'agit pas sur l'écoulement comme un corps solide.

### 2.2.1 Formation de tourbillons

La section du jet est composée de 2 tourbillons crées par les forces de pression et les interactions visqueuses entre le liquide et l'écoulement gazeux le long de l'interface liquide/gaz (figure 2.2). Ils ont pour effet de déformer la section du jet liquide [47]. Autour du jet, il existe plusieurs tourbillons : un tourbillon situé dans son sillage, un second sur ses côtés et un troisième en forme de fer à cheval le long de sa circonférence.

- Le 1<sup>er</sup> tourbillon est causé par le fait que le jet crée un blocage de l'écoulement gazeux (comparable à celui qui se forme autour d'un cylindre). Cependant,

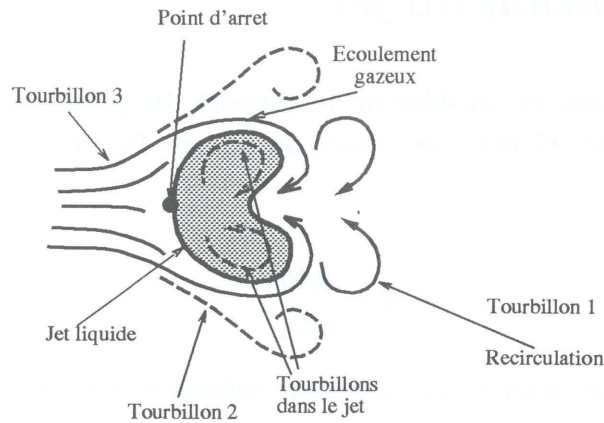


Figure 2.2 : Déformation du jet liquide – Tourbillons (Section du jet)

la nature du tourbillon est différente puisqu'il est essentiellement en forme d'hélice. Le jet est séparé en 2 parties symétriques causées par la rotation de ce tourbillon hélicoïdal.

- Le second tourbillon hélicoïdal est créé par les forces de cisaillement exercées par le jet.
- Le tourbillon en fer à cheval est formé par le gradient de pression au point d'arrêt à la base du jet [49].

### 2.2.2 Choc amont – Couche limite à la paroi

Dans le cas d'un écoulement supersonique, un choc principal s'attache à la base du jet et se courbe en fonction de sa courbure. Le nombre de Mach effectif devant la colonne liquide est donné par la formule :

$$M = M_{inf} \sin \Phi \quad (2.2)$$

où  $\Phi$  est l'angle entre la verticale et la section du jet (figure 2.3). Un choc de séparation se crée aussi entre le choc fort amont et le jet [47]. Les forces les plus grandes sont situées dans la région près de la base de ce choc amont, où la contrainte de choc est la plus élevée. Une couche limite à la paroi est située à plusieurs diamètres en amont du point d'injection, ceci crée un écoulement à faible quantité de mouvement entre le jet et la paroi [47]. C'est à cette couche limite que s'attache le choc qui entoure partiellement le corps liquide (figure 2.4).

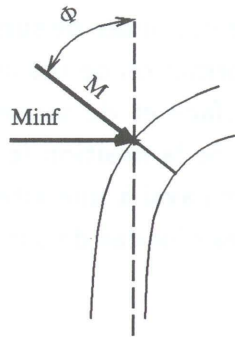


Figure 2.3 : Nombre de Mach devant le jet

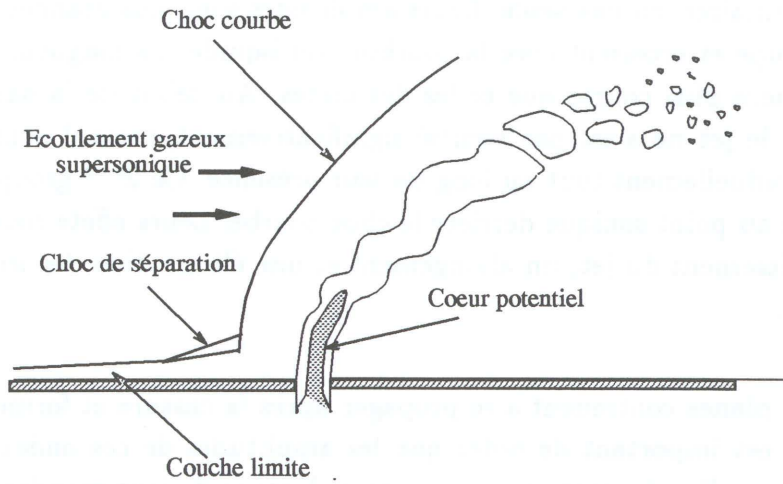


Figure 2.4 : Onde de choc devant le jet liquide

## 2.2.3 Ondes de surface

### Longueur d'onde et amplitude

Le processus de pulvérisation est causé par des ondes de surface de grande amplitude qui se forment sur la colonne du jet. La formation de ces ondes est insensible même aux grandes variations de tension de surface et de viscosité. On peut classer les ondes de surface en 3 groupes dépendant de la position le long de la trajectoire du jet. Les ondes de surface se propagent vers l'aval à une vitesse pratiquement égale à la vitesse de l'injecteur. Voici les 3 groupes d'ondes de surface.

- Les ondes de surface constituant le 1<sup>er</sup> groupe ont des longueurs d'onde courte et raide où  $\lambda/d = 0.3 - 0.5$  ( $d$  étant le diamètre du jet). Elles sont espacées régulièrement avec des creux à peu près égaux à la taille des crêtes. Leur amplitude grandit d'abord puis reste pratiquement constante. Ces ondes apparaissent toujours au même endroit du jet pour un diamètre d'injecteur donné, quelque soit le rapport  $q$ . Cette position est  $y/d = 2$  pour des diamètres de l'ordre du millimètre. C'est approximativement à l'endroit où le jet commence à se courber vers l'aval de l'écoulement.
- Le second groupe d'ondes est constitué d'onde de longueurs plus grandes  $\lambda/d = 0.5 - 0.8$ . Elles apparaissent souvent comme un regroupement de 2 ou 3 ondes primaires, en une seule. Leurs amplitudes sont plus grandes que celles du 1<sup>er</sup> groupe et croissent avec la courbure du liquide. La longueur des creux est nettement plus courte que celles des crêtes. Au début de la naissance de ces ondes, le jet ne s'est pas courbé significativement, mais il continue à se courber graduellement tout au long de leur présence. Ce 2<sup>ème</sup> groupe d'ondes se termine au point sonique derrière le choc courbe. Leurs effets courants sont un aplatissement du jet, un allongement et une élimination des irrégularités de surface.
- Des ondes planes continuent à se propager après la cassure et forment le 3<sup>ème</sup> groupe. Il est important de noter que les amplitudes de ces ondes sont plus grandes que celles du premier groupe, mais à cause de leur grandes longueurs d'ondes et l'absence de crête raide, elles apparaissent relativement plates. Près de la position du point sonique, le corps liquide s'est incurvé de  $25^\circ - 30^\circ$  par rapport à la verticale, mais la courbure est constante. La longueur de ces ondes est souvent  $\lambda/d = 1 - 1.5$ . Leur amplitude est comprise entre 0.5 et 0.3  $\lambda$ , avec quelques pics graduels le long du jet jusqu'à la cassure. Souvent des ondes de ce type sont visibles dans les paquets fraîchement détachés. Ces paquets sont souvent de 2 à 4  $\lambda$  de long.

## Vitesse des ondes

On note un accroissement de la vitesse le long du jet. Les ondes qui se déplacent en amont du jet dans ce type de système liquide/gaz sont détruites rapidement. Même très tôt sur la trajectoire du jet les mesures de vitesse d'onde sont plus grandes que les vitesses des paquets qui se détachent.

## Observations de l'écoulement à grande vitesse

On voit un nombre de mouvements cycliques qui se produisent simultanément avec différentes fréquences. Ce processus inclut le mouvement des fronts d'ondes le long du jet, la cassure de structures de taille et de forme variables, la pulvérisation des paquets après détachement et de gros mouvements variables du jet entier. Certains types de paquets semblent apparaître périodiquement comme le font les ondes le long du jet. Les gros mouvements du corps liquide ont clairement une signification majeure dans la compréhension de sa déformation. Pour des cas de faibles  $q$ , il y a une vibration continue et un mouvement de battement du jet entier. Des oscillations violentes sont visibles et ces mouvements sont liés directement au mécanisme de détachement des paquets. Il y a apparemment au moins 2 processus superposés, l'un correspondant à l'oscillation continue de la colonne liquide, l'autre lié au détachement des paquets. Le cas où  $q$  est grand peut être caractérisé par un jet principal relativement stable. Sa déformation est composée de différents mouvements cycliques à hautes fréquences ( $10^4 s^{-1}$ ). Le comportement à faible  $q$  où l'ensemble du jet oscille violemment est différent de celui à grand  $q$ . Il est difficile de dire si le jet bat avec chaque paquet ou seulement avec certains gros. On ne sait pas non plus si l'ensemble du mouvement est lié à la taille des paquets. Mais il est important de savoir si la rupture est causée, ou non, par le mouvement aléatoire du jet qui éjecte les paquets liquides lorsqu'ils atteignent une taille critique.

## Influence des ondes

Les ondes de tension de surface lors de la pulvérisation d'un jet liquide en absence d'écoulement transverse (instabilités initialement développées par Lord Rayleigh), n'ont pas un rôle primordial lorsque l'écoulement gazeux est supersonique, puisque les effets de tension de surface de l'injectant sont négligeables. Le fait que les ondes causées par l'accélération jouent un rôle important peut s'expliquer par le fait que les ondes commencent à apparaître et à croître seulement quand la colonne de jet se courbe. Pour le mécanisme de Kelvin-Helmholtz, on a besoin d'un écoulement relatif. Les ondes d'accélération engendrent principalement le mécanisme qui crée la pulvérisation d'un jet liquide dans un écoulement transverse [56]. Les ondes causées par la turbulence et les ondes capillaires n'ont qu'une petite influence sur la déformation du jet.

## 2.3 Phénomènes interfaciaux

### 2.3.1 Tension de surface

On peut établir un critère de rupture de jet qui tient compte des effets de tension de surface et des forces aérodynamiques. Les études expérimentales de Clark [60] d'un jet liquide dans un écoulement subsonique révèlent que bien que la tension de surface tend initialement à remettre le liquide dans sa forme initiale, dans les phases suivantes de la déformation, elle assiste les forces aérodynamiques dans le processus de désintégration. D'autres études explorent l'équilibre entre les effets de viscosité et de tension de surface sur la cassure du jet. La position où les forces aérodynamiques, dues aux contraintes de cisaillement et les forces de tension de surface sont du même ordre de grandeur, peut être utilisée comme point de cassure du jet [48]. En général les forces d'inertie dominent toutes les autres, comme la tension de surface et la viscosité, pour un écoulement gazeux supersonique [55].

### 2.3.2 Viscosité

Les forces de viscosité jouent normalement un rôle dans tous les cas, mais généralement elles peuvent être négligées quand on étudie la rupture du jet et sa pénétration, [49], pour des cas d'écoulements gazeux supersoniques. Par contre, dans les cas subsoniques, la viscosité influence les phénomènes de désintégration. Les résultats numériques 3D montrent que les mécanismes non visqueux seuls ne peuvent pas décrire la dynamique proche du jet [13].

### 2.3.3 Perte de masse

La perte de masse dépend de  $q$  et de  $\lambda$  uniquement et son influence est mal connue. Certains précisent [47] qu'elle n'affecte pas la distance de pénétration du jet, alors que d'autres notent l'importance de ses effets [54]. Les résultats avec perte de masse sont plus justes [47], car tous les effets évoqués précédemment augmentent le long du jet à cause de la perte de masse à l'interface [48]. C'est pour cela que nous avons tenu compte de la perte de masse dans les calculs présentés dans la partie 3.

## 2.4 Phénomènes d'atomisation

### 2.4.1 Atomisation primaire

Après la fracture du jet, un certain nombre de structures liquides de taille et de forme différentes sont obtenues. Considérons une goutte de liquide dans un écoulement gazeux. Plusieurs modes de fracture sont observables :

- rupture vibratoire
- rupture en sac
- rupture en parapluie
- rupture chaotique
- rupture par épluchage

La taille et le nombre des gouttes résiduelles dépendent du mode de rupture. De manière schématique, ces modes de fracture sont classés par nombre de Weber croissant, qui est pour une goutte de rayon  $R$ , de coefficient de tension de surface  $\sigma$  et de masse volumique  $\rho_g$  :

$$We = \frac{2R\rho_g(\Delta u)^2}{\sigma} \quad (2.3)$$

$\Delta u$  est la différence de vitesse entre le liquide et le gaz. Ce nombre adimensionnel donne le rapport entre les forces aérodynamiques et la tension de surface. La fracture des gouttes apparaît pour un nombre de Weber supérieur à 10 environ. Cela signifie que pour des nombres de Weber plus faibles, les forces de tension de surface sont suffisantes pour garder à la structure liquide sa forme quasi-sphérique. Si les nombres de Weber sont importants, le mode de fracture est soit de type chaotique, soit de type épluchage.

#### La rupture chaotique

La goutte déformée par l'écoulement gazeux présente une face convexe dans le sens de l'écoulement. De très fines gouttelettes ou de petits sacs, eux mêmes rapidement atomisés, se forment à la périphérie de la goutte. Ce phénomène est très rapide et conduit à l'atomisation complète de la goutte.

#### La rupture par épluchage

Dans la couche limite de gaz formée autour de la goutte, de très petites gouttelettes sont formées et arrachées de la surface. C'est un phénomène analogue à celui de l'atomisation primaire. Il est également très rapide et conduit à l'atomisation



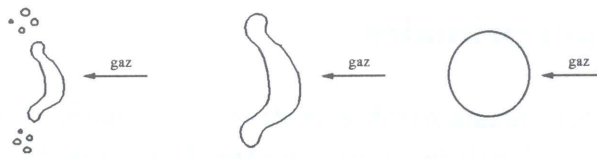


Figure 2.5 : Fracture chaotique

complète de la goutte. Ces deux phénomènes sont difficiles à modéliser numériquement, si l'on veut tenir compte de la cassure du jet dans son ensemble car ils font intervenir des échelles de longueur d'un autre ordre que celles rencontrées à l'échelle du jet global.

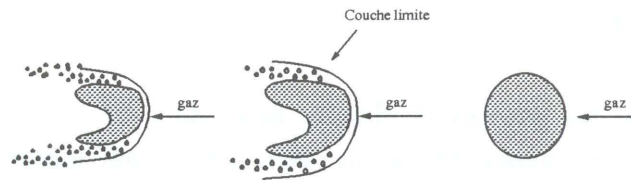


Figure 2.6 : Fracture par épluchage

## 2.4.2 Atomisation secondaire

Dès que le spray a été atomisé en un certain nombre de gouttes d'un certain diamètre, les forces aérodynamiques sont opposées aux forces de tension de surface forçant le liquide à garder une forme sphérique. Ceci est représenté par le nombre de Weber. Cependant un second nombre sans dimension a son importance sur les phénomènes d'atomisation. En effet, le nombre de Reynolds d'un film liquide représente les forces qui empêchent la cassure du liquide et les développements d'ondes sur la surface liquide. Avec les nombres de Weber et de Reynolds, on peut évaluer le diamètre des gouttes formées. Dans la formation du spray et la zone d'atomisation de nombreux processus influencent le jet. La distribution de la taille des gouttes est périodiquement perturbée par le passage de grosses gouttes créées par la rupture du corps liquide [56]. La formation des gouttes est l'aspect le moins satisfaisant pour la modélisation (au point de vue de la physique introduite et des performances) car il est parfois difficile de connaître l'origine des processus de rupture et nous ne savons pas forcément les modéliser correctement [8].

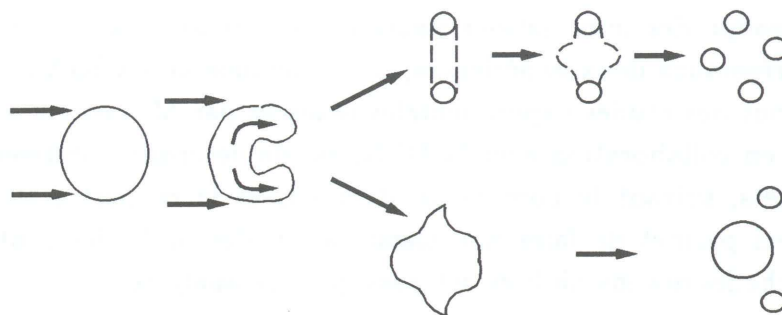


Figure 2.7 : Atomisation secondaire (R.Borghgi)

### 2.4.3 Vaporisation

Pour une goutte liquide dans un écoulement gazeux, deux phénomènes sont en concurrence, la vaporisation et l'atomisation. La vaporisation d'une goutte sphérique est correctement simulée par une loi en "D2":

$$d_0^2 - d^2 = K(t - t_0) \quad (2.4)$$

Cette loi signifie que le carré du diamètre de la goutte diminue linéairement par rapport au temps. Elle permet de donner un temps caractéristique de la vaporisation qui correspond à une perte de masse donnée. Parallèlement à cette vaporisation, le phénomène de fracture de la goutte la déforme. Si l'échelle de temps de la fracture est inférieure à l'échelle de temps de la vaporisation, cette dernière ne sera à prendre en compte que sur le résidu de la fracture, qui aura un temps de vaporisation plus court. Le processus est décrit sur la figure 2.8.

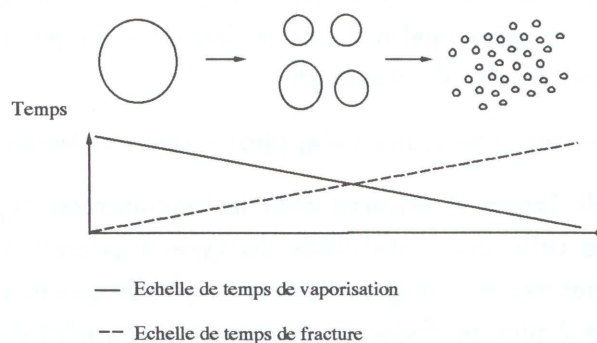


Figure 2.8 : Processus d'atomisation et vaporisation

## 2.5 Résultats expérimentaux du CORIA

Après avoir regroupé des informations issues de la littérature sur la déformation d'un jet nous présentons deux expériences, celle effectuée au CORIA et celle faite par Schetz. Le but des études expérimentales réalisées par M. Ledoux et G. Vich, pour une étude en collaboration avec la DCN, est de déterminer différents modes de rupture de jets, suivant le nombre de Reynolds et le rapport  $q$  de pressions dynamiques. Ceci permet de faire une classification des multiples configurations possibles. Les échelles des instabilités ont aussi pu être analysées.

La soufflerie comprend deux veines d'essai. Elle permet de mener une étude quantitative et qualitative de la désintégration d'un jet liquide dans un écoulement gazeux transverse. On s'intéresse au spray résultant, à sa granulométrie, à l'atomisation secondaire et au transport des gouttes dans l'écoulement gazeux. Les sections respectives de ces 2 veines sont de  $20 \times 20 \text{ cm}^2$  et de  $7 \times 5 \text{ cm}^2$ . L'air est aspiré dans un convergent avec un nid d'abeille. On obtient ainsi une distribution de vitesse uniforme dans la veine. Les vitesses maximales étant de  $100 \text{ m.s}^{-1}$  pour la petite section et de  $45 \text{ m.s}^{-1}$  pour la grande. Le système d'injection a une longueur de 20 cm, et on utilise des buses de diamètre variant de 0.5 à 6 mm. On peut injecter un jet plus ou moins développé dans la veine et observer les comportements différents de déformation de jet. La visualisation se fait à l'aide d'un banc vidéo composé d'un stroboscope de fréquence  $10 \mu\text{s}$  couplé à une caméra CCD. Les principales mesures qui ont été faites par M. Ledoux et G. Vich concernent la longueur de pénétration du jet et les échelles de longueur caractéristique (distance entre 2 pics consécutifs sur la face amont du jet). De ces mesures, 4 types de jets ont été répertoriés en fonction du nombre de Reynolds et de  $q$ .

- Type I : Caractérisé par une simple courbure du jet due à l'écoulement gazeux. Ce mode de rupture est comparable à celui observé en l'absence d'écoulement gazeux. On peut noter l'apparition d'ondes axisymétriques de longueur d'onde de l'ordre de 4.5 diamètre. Le jet se divise en grosses gouttes de taille à peu près uniforme, issues de la contraction du jet entre 2 longueurs d'onde. Leur diamètre est à peu près égal à 2 fois le diamètre du jet. Ce mécanisme s'apparente clairement à celui de Rayleigh.
- Type I-bis : Identique au type I, mais s'applique aux jets turbulents.
- Type II : Présente de larges structures dont la longueur est typiquement 1.2 fois plus grande que celle des instabilités du type Rayleigh pour un jet de même diamètre. Le jet est encore grossièrement cylindrique et chacune de ses portions située entre 2 pics se divise en gouttes. Le chapelet de gouttes ainsi formé conserve la forme générale du jet, c'est-à-dire de larges structures.
- Type III : Caractérisé par un aplatissement du jet. Ce plat est perpendiculaire à l'écoulement d'air. On observe également la formation de bulles. De chaque

côté du jet, les parties non déformées par l'apparition des bulles forment des ligaments dont la rupture génère de grosses gouttes. L'explosion des bulles donne naissance à des gouttes beaucoup plus petites. On peut donc s'attendre à une bimodalité des distributions granulométriques.

## 2.6 Résultats expérimentaux obtenus par Schetz

Ces résultats portent sur le comportement d'un jet transverse dans un écoulement gazeux supersonique. Ces expériences, commencées vers la fin des années 60, ont été faites pour diverses applications telles que l'injection de fuel transverse dans la chambre de combustion des avions à grande vitesse, le système de contrôle de propulsion des fusées ou encore l'injection dans des turbines pour le refroidissement des pales [13]. Le but de ces études porte sur la mesure de la vitesse des ondes de surface du jet, ainsi que sur l'influence de grandeurs physiques telles que la viscosité ou la tension de surface, sur les phénomènes de déformation de jet et d'atomisation. L'influence du diamètre du jet et du rapport des pressions dynamiques a aussi été déterminée.

Les mesures ont été réalisées dans une soufflerie à l'Institut Polytechnique de Virginie dans un tunnel supersonique de  $23 \times 23 \text{ cm}^2$ . La pression est fixée constante à 4.2 atm et la température à  $20^\circ$ . Le Mach incident varie de 0.4 à 4. L'écoulement se fait sur une plaque plane et le jet sort perpendiculairement à cette plaque de  $25.4 \text{ cm} \times 15.2 \text{ cm}$ . Le jet, de diamètre 0.96 mm, se trouve à 5.1 cm du bord d'attaque.

### Visualisation

3 types de photos ont été prises :

- exposition longue ( $10^{-3} \text{ s}$ ), pour étudier le comportement général du jet et mesurer sa pénétration.
- exposition courte ( $9.10^{-9} \text{ s}$ ), pour avoir des photos instantanées des structures du jet.
- technique avec 100000 images/s ( $8.10^{-7} \text{ s}$ ), pour mesurer la vitesse des ondes de surface et des paquets liquides formés.

### Fluides utilisés

Afin de regarder l'influence de la viscosité et de la tension de surface sur les phénomènes de courbure de jet, 3 fluides aux propriétés différentes ont été choisis :

- eau :  $\sigma = 0.073 \text{ kg.s}^{-2}$  et  $\mu = 1.10^{-2} \text{ Pl}$ , soit  $\nu = 1.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ .
- alcool éthylique + eau :  $\sigma = 0.0335 \text{ kg.s}^{-2}$  et  $\mu = 1.10^{-2} \text{ Pl}$ .
- glycérine + eau :  $\sigma = 0.073 \text{ kg.s}^{-2}$  et  $\mu$  plus élevé ( $10.5.10^{-2}$ ,  $18.4.10^{-2}$ ,  $27.6.10^{-2}$ ,  $40.5.10^{-2}$  et  $59.8.10^{-2} \text{ Pl}$ ).

## Régimes testés

Les expériences ont été faites pour 3 valeurs de  $q$  différentes. Puisque  $q$  est un paramètre lié à la forme d'ensemble du jet, ses variations modifient le taux de masse injectée et les vitesses. Les principaux résultats sont les suivants :

- Si  $q \leq 2$  : faible pénétration du jet, ce cas peut s'appliquer pour du refroidissement de surface.
- Si  $q \in [4, 12]$  : le jet pénètre suffisamment dans l'écoulement d'air et correspond au cas de l'injection de fuel.
- Si  $q \in [12, 20]$  : grande pénétration du jet.
  1. à basses viscosité et tension de surface, l'atomisation du jet est due à la formation d'ondes de surface qui croissent et mènent à la rupture.
  2. à grande viscosité, c'est la formation de ligaments qui provoque la rupture.
  3. augmenter la viscosité réduit la croissance des ondes.
  4. la pénétration du jet augmente d'abord, quand la viscosité augmente, puis diminue, alors que la viscosité continue à croître.
  5. la pénétration est indépendante de la tension de surface du liquide.
  6. la tension de surface n'a presque pas d'effet sur la vitesse des ondes et sur la vitesse des paquets liquides formés.
  7. quand la viscosité augmente, la vitesse des ondes diminue.
  8. la vitesse des paquets liquides est indépendante de la viscosité et de la tension de surface.
  9. la vitesse des ondes est indépendante de  $q$ .

## 2.7 Conclusion

Les phénomènes qui contrôlent la déformation puis la rupture d'un jet sont nombreux et ont parfois lieu simultanément, ce qui complique la compréhension des processus. Il est finalement important de noter que les processus de rupture et de

déformation du jet ne sont pas de simples fonctions des propriétés des fluides mis en œuvre, d'où la complexité des phénomènes. Après avoir recensé des indications générales sur les mécanismes de pulvérisation et aidé de 2 expériences différentes, nous allons essayer de retrouver, pour des cas numériques les plus proches possibles des conditions de manipulation, la courbure principale du jet, la formation d'ondes à sa surface, la formation d'un choc amont et les mécanismes d'atomisation primaire et secondaire. Cependant, vu l'importance des conditions initiales sur les phénomènes d'instabilités, on ne pourra pas reproduire exactement les configurations expérimentales de manière numérique. Les résultats des calculs sont présentés et discutés dans le chapitre 3 de la troisième partie.



## **Partie II**

# **Méthodes numériques eulériennes**





# Introduction

Cette seconde partie porte sur la description de plusieurs méthodes numériques eulériennes utilisées pour résoudre le problème d'interface liquide/gaz. Le premier des outils est une méthode de suivi d'interface (VOF) nécessaire pour localiser la frontière entre la phase liquide et la phase gazeuse. Elle permet de déterminer l'endroit où sont appliquées les forces de tension de surface et de suivre l'évolution des différents fluides en mouvement sur un maillage cartésien. La deuxième méthode nous sert à déterminer les efforts de tension de surface entre plusieurs phases. Le formalisme présenté (appelé CSF) utilise l'information de la méthode VOF précédente pour calculer un rayon de courbure à l'interface, ainsi que les forces volumiques de tension superficielle. Nous avons programmé et couplé cette méthode avec celle de suivi d'interface.

Ensuite nous avons besoin de connaître le champ de vitesse obtenu en résolvant les équations de Navier–Stokes incompressibles. Pour cela la méthode retenue est de type Marker and Cell, dont nous donnons les grandes lignes. Enfin, pour traiter des fluides compressibles, nous avons choisi une méthode de type Mac Cormack. Le travail effectué dans cette seconde partie se décompose en 4 étapes.

En premier lieu, des calculs ont été faits, en considérant uniquement deux fluides incompressibles, avec le logiciel SURFER développé par S. Zaleski. Ceci a été réalisé pour une étude d'un système d'injection pour la SEP où l'on a supposé que les deux fluides en présence sont incompressibles. La procédure consiste à utiliser les méthodes VOF et CSS, en résolvant les équations de Navier–Stokes avec un schéma de type Marker and Cell. La méthode VOF permet de localiser l'interface et la méthode CSS prend en compte les efforts de tension superficielle. Nous donnons des résultats numériques et nous en dégageons les principaux processus de rupture d'interfaces.

Puis, dans l'optique de résoudre simultanément un fluide incompressible et un fluide compressible, nous avons développé un algorithme VOF compressible dont nous présentons quelques cas tests.

Pour résoudre les équations de Navier–Stokes d'un fluide compressible, on a ensuite utilisé une méthode de type Mac Cormack. Avant d'effectuer le couplage compressible/incompressible, cette méthode a été testée au préalable sur l'interaction de

deux fluides compressibles. Ce schéma Mac Cormack avec un limiteur de flux TVD nous a permis de prendre en compte des chocs forts et des gradients importants entre les différents fluides.

Enfin, nous couplons les quatres méthodes précédemment citées (VOF, CSF, Marker and Cell et Mac Cormack) pour obtenir un algorithme capable de traiter un milieu incompressible et un milieu compressible. Le calcul numérique qui a motivé notre étude concerne la déformation d'une phase liquide (eau) sous l'influence d'un écoulement d'air supersonique. Ce travail a été fait en collaboration avec la DCN de Toulon et SIMULOG. Le premier chapitre de cette partie présente les différentes méthodes citées ci-dessus et les résultats obtenus sont discutés dans le chapitre 2.

# Chapitre 1

## Présentation des techniques utilisées

Dans ce premier chapitre nous présentons la méthode de suivi d'interface VOF, incompressible et compressible (§1.1), la méthode CSF qui permet de calculer les efforts de tension de surface (§1.2), le schéma Marker And Cell (§1.3) pour traiter les fluides incompressibles et la méthode de Mac Cormack (§1.4) que nous utilisons pour résoudre les équations de Navier–Stokes compressibles.

### 1.1 Suivi d'interface – Méthode VOF

Notre objectif étant d'étudier les interfaces liquides/gaz, il nous a fallu utiliser une méthode permettant de les localiser. Pour cela, nous avons choisi la méthode VOF (Volume Of Fluid) qui permet de suivre et de représenter l'interface entre deux fluides incompressibles. Nous introduisons le formalisme de cette méthode, en explicitant sa démarche générale, ainsi que l'approximation de ses équations par différences finies. Nous nous intéressons aussi à son développement pour prendre en compte des fluides compressibles, afin de traiter des écoulements gazeux à grande vitesse, pour lesquels les phénomènes de compressibilité sont importants. Quelques résultats obtenus avec le schéma VOF incompressible concernant la déformation d'interface liquide/gaz et des exemples de cas de validation pour le schéma compressible sont présentés dans le chapitre 2 de cette partie.

Dans le but de mieux appréhender les phénomènes physiques régissant l'atomisation de jets liquides dans des écoulements gazeux, le développement de programmes de calculs permettant de suivre l'évolution d'interfaces entre une phase gazeuse et une phase liquide est primordial. La méthode VOF a été développée à l'origine pour des milieux incompressibles par Hirt et Nichols [1], puis par S.Zaleski [5], [9], [30], [31] et [32]. Jusqu'à présent, cette approche était limitée à l'étude d'écoulements

incompressibles. L'un des objectifs de ce travail est de mettre au point un algorithme VOF compressible utilisant la masse volumique comme variable de l'écoulement et de le coupler à un code résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles, basé sur un schéma numérique prédicteur-correcteur de type Mac Cormack. Nous allons d'abord introduire la méthodologie du schéma VOF incompressible puis nous passerons au cas compressible.

### 1.1.1 Idée générale du VOF incompressible

Les méthodes de suivi d'interface sont basées sur le concept de fonction couleur (ou fraction volumique) de fluide. Cette fonction définit le taux de remplissage d'une cellule du domaine de calcul. Dans chaque cellule une valeur est attribuée à chaque fonction couleur  $C(x, y)$  qui définit l'état du fluide (figure 1.1). Nous pouvons schématiser la représentation d'une interface sur un maillage :

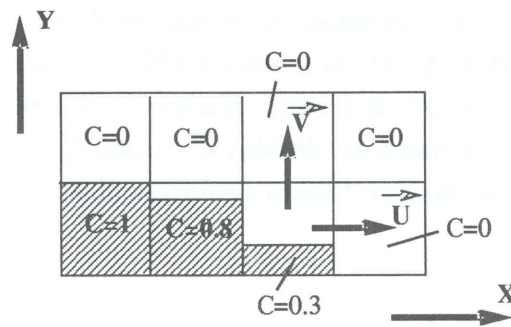


Figure 1.1 : Fonction Couleur  $C$

Pour repérer les mailles où se trouve l'interface nous procédons de la manière suivante :

- Si  $C(x, y) \in [0, 1]$  et si  $C(x \pm 1, y) = 0$  ou  $C(x, y \pm 1) = 0$  alors la cellule de centre  $(x, y)$  contient l'interface.
- Si  $C(x, y) = 0$  alors la cellule est vide.
- Si  $C(x, y) = 1$  la cellule est pleine.

Pratiquement, une cellule est considérée vide si  $C < \varepsilon_f$  et pleine si  $C > (1 - \varepsilon_f)$  avec  $\varepsilon_f = 1.10^{-6}$  [1]. Ceci n'entraîne que de très faibles erreurs ( $10^{-4}\%$ ) sur le calcul de la conservation de la masse. L'interface a une représentation discrète, en "marche d'escalier". Malgré cette approximation, la masse totale de fluide dans le domaine entier est conservée exactement. Pour construire une ligne qui représente l'interface nous avons besoin de connaître l'orientation de cette ligne et la valeur de  $C$  dans la cellule. Pour cela, il est nécessaire de déterminer la direction normale à la frontière.

C'est la direction dans laquelle la valeur de  $C$  change le plus rapidement, car la normale est dirigée dans le sens de la vitesse la plus importante. Nous avons donc besoin de connaître l'équation d'évolution de  $C$  :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C u}{\partial x} + \frac{\partial C v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Lorsque l'on connaît la valeur de la fonction couleur  $C$  et le champ de vitesse  $(u, v)$ , on peut alors calculer le flux de  $C$  à travers une cellule. En connaissant le flux de  $C$  dans chaque cellule, on peut déterminer la variation de  $C$  en chaque point et donc connaître son évolution au cours du temps. Nous utilisons pour cette méthode de suivi d'interface un maillage eulérien, de cellules rectangulaires ayant des tailles variables (figure 1.2). Les équations physiques pour le fluide à résoudre sont les équations de Navier-Stokes (1.2). Pour cela on applique une méthode de type Marker And Cell, dont nous rappelons brièvement la formulation dans la section 1.3 :

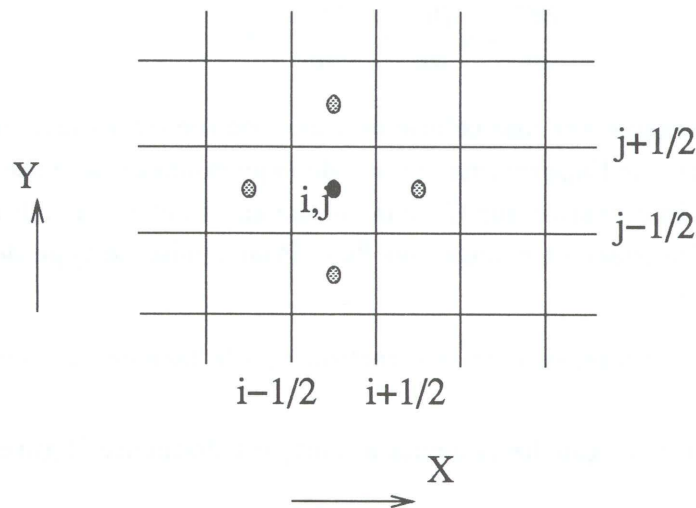


Figure 1.2 : Maillage utilisé pour le schéma VOF

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + g_x + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + g_y + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \end{cases} \quad (1.2)$$

où la pression est  $p = p/\rho$ ,  $\rho$  est la masse volumique,  $(u, v)$  sont les composantes des vitesses,  $\nu$ , le coefficient de viscosité cinématique et  $g_x, g_y$ , les accélérations dues à la gravité. Pour un fluide incompressible les équations ci-dessus sont couplées à la condition d'incompressibilité qui s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Notons que si on prend en compte les effets de faible compressibilité [1], on utilise l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

en prenant toujours  $p = p/\rho$  et  $c$  étant la vitesse du son dans le milieu considéré.

### Évolution de $C$

La fonction  $C(x, y)$  est gouvernée par l'équation (1.1) en incompressible. Avec (1.1) et (1.4) on obtient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad (1.5)$$

Cette équation intégrée sur une cellule de calcul donne les variations de  $C$  dans chaque cellule. On dit que l'approximation est de type donneur/accepteur. C'est-à-dire que l'on utilise l'information sur  $C$  de la cellule amont et de la cellule aval, pour établir une forme d'interface et calculer les flux. Pour choisir le type de schéma on procède comme suit :

Soit  $u$  la vitesse normale, suivant la direction  $x$ , à la face de la cellule.

- si  $u > 0$  la cellule de gauche (schéma amont) est donneuse (figure 1.3)
- si  $u < 0$  la cellule de gauche (schéma aval) est accepteuse (figure 1.4)

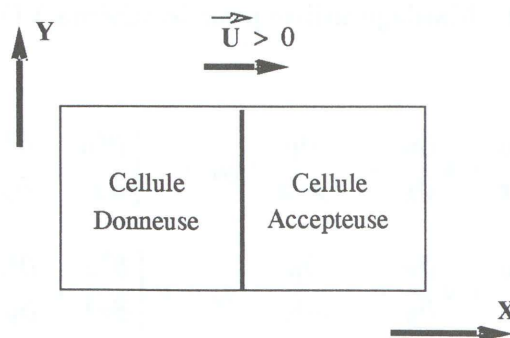


Figure 1.3 : Schéma amont

La méthode aval (accepteuse) est numériquement instable et crée de la diffusion négative de  $C$ .

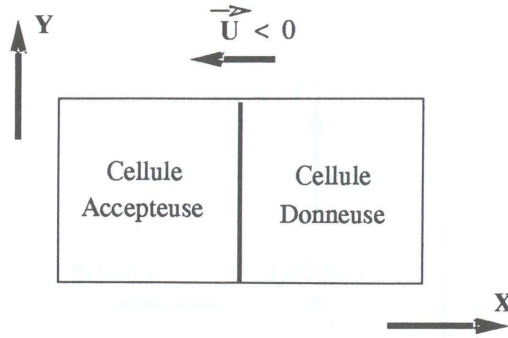


Figure 1.4 : Schéma aval

## Description du calcul

Nous donnons la méthodologie numérique générale qui peut se décomposer en 3 étapes effectuées pendant un pas de temps :

1/ On approche par différences finies les équations de Navier–Stokes (1.2) pour calculer la première série de vitesse en utilisant les valeurs de pression, d'accélération visqueuse et de flux données par les conditions initiales (si on est au 1<sup>er</sup> pas de temps) ou par les valeurs du pas de temps précédent.

2/ On calcule la pression avec le champ de vitesse de l'étape précédente en utilisant l'équation de continuité (1.4), puis on ajuste le champ de vitesse suivant les changements de la pression. On obtient ainsi les nouvelles valeurs des vitesses.

3/ On calcule la valeur de la fonction couleur  $C(x, y)$  dans chacune des cellules pour obtenir la nouvelle configuration du fluide, en fixant les conditions aux limites et en utilisant l'équation d'évolution (1.5).

### 1.1.2 Approximation des équations par différences finies

Nous présentons la discrétisation des équations de Navier–Stokes sur un maillage 2D décrit sur la figure 1.5. Posons  $u_{i,j}^n$ , la valeur de la vitesse  $u(x, y, t)$  au temps  $n\Delta t$ . Elle est positionnée au centre de la  $(i, j)$ <sup>ème</sup> cellule.  $u_{i,j+1/2}^n$  est la valeur de  $u$  à la frontière entre la cellule  $(i, j)$  et  $(i, j + 1)$ .

Les équations discrétisées à résoudre sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_{i+1/2,j}^{n+1} = u_{i+1/2,j}^n + \Delta t \left[ -\frac{(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1})}{\Delta x_{i+1/2}} + g_x - \Phi_x + VISX \right] \\ v_{i,j+1/2}^{n+1} = v_{i,j+1/2}^n + \Delta t \left[ -\frac{(p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1})}{\Delta y_{j+1/2}} + g_y - \Phi_y + VISY \right] \end{cases} \quad (1.6)$$

avec



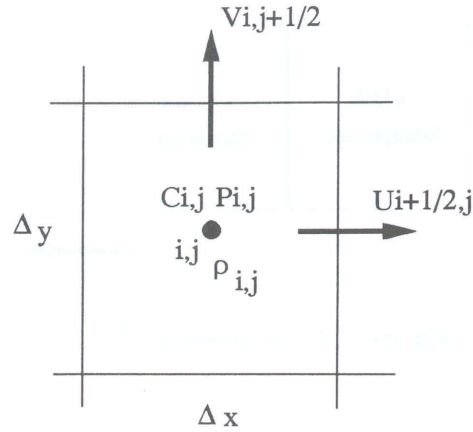


Figure 1.5 : Cellule VOF

$$\begin{cases} \Delta x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) \\ \Delta y_{j+1/2} = \frac{1}{2}(\Delta y_j + \Delta y_{j+1}) \end{cases} \quad (1.7)$$

VISX et VISY sont les termes de viscosité.  $\Phi_x$  est le flux de  $u$  dans la direction  $x$ ,  $\Phi_y$ , celui de  $v$  dans la direction  $y$ . Ces flux sont calculés au temps  $n\Delta t$  et au point  $(i + 1/2, j)$ . Nous donnons la forme de  $\Phi_x$  ( $\Phi_y$  a une forme similaire) :

$$\Phi_x = \left( \frac{u_{i+1/2,j}}{\Delta x_\alpha} \right) (\Delta x_{i+1}L + \Delta x_i R + \alpha \text{sgn}(u)(\Delta x_{i+1}L - \Delta x_i R)) \quad (1.8)$$

avec

$$\begin{cases} L = \frac{(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})}{\Delta x_i} \\ R = \frac{(u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j})}{\Delta x_{i+1}} \end{cases} \quad (1.9)$$

et

$$\Delta x_\alpha = \Delta x_{i+1} + \Delta x_i + \alpha \text{sgn}(u)(\Delta x_{i+1} - \Delta x_i) \quad (1.10)$$

où  $\text{sgn}(u)$  est le signe de la vitesse  $u$  prise au point  $i + 1/2, j$ . Nous avons donc différents schémas suivant la valeur de  $\alpha$ . Si  $\alpha = 0$ , alors le schéma est centré et sa précision est du 2<sup>ème</sup> ordre en espace. Par contre, si  $\alpha = 1$ , le schéma est décentré

arrière et de 1<sup>er</sup> ordre en espace. L'équation (1.8) permet d'augmenter la dérivée "arrière" ( $L$ ) de la quantité qui est fluée par rapport à la valeur "avant" ( $R$ ). Le facteur d'augmentation est  $(1 + \alpha)$  et  $(1 - \alpha)$  pour les dérivées respectivement amont et aval.

### 1.1.3 Localisation de l'interface dans une cellule

Dans la méthode VOF, la frontière est approchée par une interface rectiligne coupant la cellule. Pour déterminer cette surface nous avons besoin de calculer sa pente : il faut savoir si elle est représentée par  $Y(x)$  (interface plutôt verticale) ou  $X(y)$  (interface plutôt horizontale), ceci dépendant de son orientation. Si la surface est une fonction  $Y(x)$ , la pente est  $dY/dx$ . Une approximation de  $Y(x)$  est déterminée de la manière suivante :

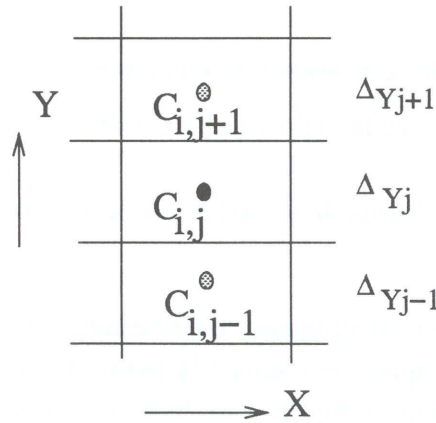


Figure 1.6 : Détermination de la pente avec  $Y(x)$

$$Y_i = Y_{x_i} = C(i, j - 1)\Delta y_{j-1} + C(i, j)\Delta y_j + C(i, j + 1)\Delta y_{j+1} \quad (1.11)$$

où  $Y = 0$  est pris en bas de la  $(j - 1)$ <sup>ème</sup> ligne et

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = 2 \left( \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right) \quad (1.12)$$

Si les pas du maillage sont égaux on a :

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = \left( \frac{C(i + 1, j - 1) + C(i + 1, j) + C(i + 1, j + 1) - C(i, j - 1) - C(i, j) - C(i, j + 1)}{2} \right) \quad (1.13)$$

Un calcul similaire pour  $dX/dy$  est fait (figure 1.7). Les tests appliqués à la pente de l'interface afin de localiser la frontière sont les suivants :

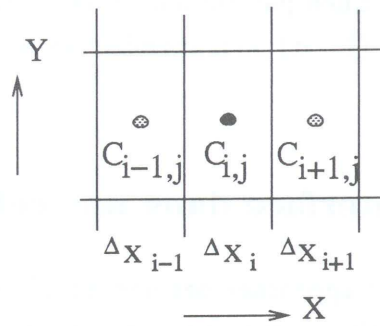


Figure 1.7 : Détermination de la pente avec  $X(y)$

- Si  $\left| \frac{dY}{dx} \right| < \left| \frac{dX}{dy} \right|$  la surface est plus horizontale que verticale.
- Si de plus  $\frac{dX}{dy} < 0$ , le fluide se place sous la surface et la cellule  $(i, j - 1)$  est utilisée pour l'interpolation de la cellule  $(i, j)$  contenant la surface.
- Si  $\frac{dX}{dy} > 0$ , le fluide est au-dessus de la surface et la cellule  $(i, j + 1)$  est utilisée.

La pente de l'interface est donc simplement déterminée avec la fonction couleur  $C$  et le pas du maillage. Une fois que l'on connaît la pente de la surface (horizontale ou verticale) et le côté occupé par le fluide, une ligne qui approche la surface est déterminée. Cette ligne est utilisée comme approximation de la surface réelle et donne les informations nécessaires pour appliquer la condition de pression à la surface libre.

### 1.1.4 Conditions aux limites et stabilité numérique

#### Condition de surface libre

Dans les cellules contenant la surface libre, la pression de surface  $p_{i,j}$  est posée égale à :  $p_{i,j} = (1 - \eta)p_F + p_S$ .  $p_F$  est la pression dans le fluide,  $p_S$ , la pression de surface et  $\eta = dc/d$  est la distance entre le centre de la cellule et l'interface (figure 1.8).

#### Conditions limites

On doit fixer des conditions aux limites à la surface libre et aussi aux frontières. Nous avons surtout utilisé, soit des parois fixes, soit des frontières périodiques. Nous présentons ces conditions limites plus en détails dans le chapitre 2.

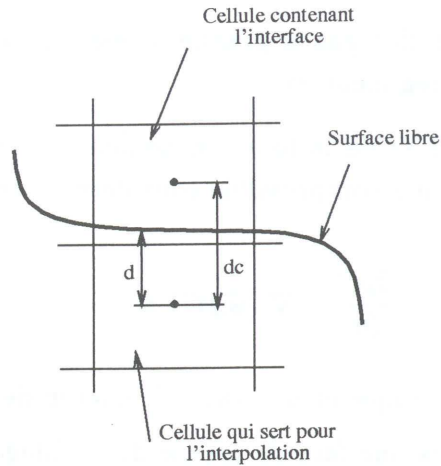


Figure 1.8 : Conditions de surface libre

### Stabilité numérique

Il existe des restrictions sur les pas du maillage,  $\Delta x_i$  et  $\Delta y_i$ , sur le pas de temps,  $\Delta t$  et sur  $\alpha$ . Pour  $\Delta t$ , on ne peut pas se déplacer à travers plus d'une cellule par pas de temps. Nous avons donc la limitation suivante :

$$\Delta t < MIN \left( \frac{\Delta x_i}{|u_{i,j}|}, \frac{\Delta y_j}{|v_{i,j}|} \right) \quad (1.14)$$

La seconde condition concerne la diffusion de l'impulsion quand on fait le calcul en tenant compte de la viscosité. Cette diffusion doit être limitée à une seule cellule par pas de temps, soit :

$$\nu \Delta t < \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x_i^2 \Delta y_j^2}{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2} \right) \quad (1.15)$$

et pour  $\alpha$ , on flue la quantité maximale qui peut être fluée par pas de temps, d'où la limitation suivante :

$$1 \geq \alpha > MAX \left( \left| \frac{u_{i,j} \Delta t}{\Delta x_i} \right|, \left| \frac{v_{i,j} \Delta t}{\Delta y_j} \right| \right) \quad (1.16)$$

### 1.1.5 Cas compressible

Après avoir explicité la méthodologie du VOF incompressible, nous allons détailler le calcul des flux pour le cas compressible sur lequel nous avons principalement travaillé avec B.Lafaurie, J.Li et S.Zaleski [2]. Ce développement a été fait dans le but de pouvoir utiliser la méthode VOF compressible couplée à un schéma de

Mac Cormack, pour étudier des gaz à grande vitesse, pour lesquels les effets de compressibilité ne sont pas négligeables.

L'équation d'évolution (1.2) de la fonction couleur correspondant à la fraction de volume occupée par le fluide compressible considéré, s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \rho C) = 0 \quad (1.17)$$

où  $\rho C$  est la fraction volumique et  $\vec{u} = (u, v)$  le champ de vitesse où nous posons  $u = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ .  $\Phi$ , le flux à travers une face de cellule du maillage s'écrit :

$$\vec{\Phi} = \vec{u} \cdot \rho C \quad (1.18)$$

On obtient donc la forme discrétisée de l'équation (1.17) :

$$\rho C^{n+1}(x) = \rho C^n(x) + \sum_{k=1}^2 (\Phi_k(x - \varepsilon/2) - \Phi_k(x + \varepsilon/2)) \quad (1.19)$$

où  $x$  est la position de la cellule et  $\varepsilon$  la signature ( $\pm 1$ ) du champ de vitesse  $\vec{u}$ . Nous avons deux modes de calcul possibles : le cas amont et le cas aval, que nous présentons.

### Cas amont

$$\Phi^-(x') = u \cdot \rho C(x) \quad (1.20)$$

Dans ce cas, le flux  $\Phi^-(x')$  ne dépend que de la cellule amont par rapport à l'interface entre les deux cellules (figure 1.9). La cellule de gauche est considérée comme donneuse. C'est un cas stable et diffusif qu'on applique en général quand on se trouve loin de l'interface.

### Cas aval

Le flux  $\Phi^+(x')$  ne dépend que de la cellule aval. C'est un mode antidiffusif qui a tendance à rigidifier l'interface (figure 1.10).

$$\Phi^+(x') = \bar{\rho} \cdot u \quad (1.21)$$

Ceci avec les deux changements de variables suivants :

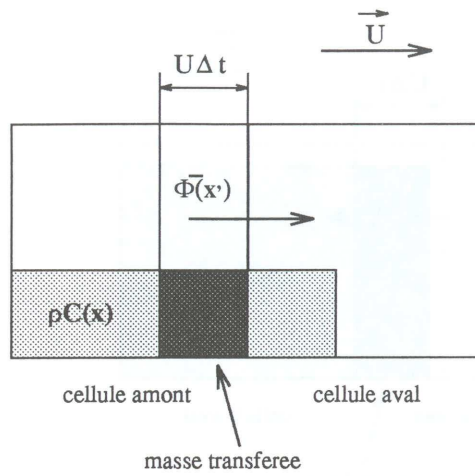


Figure 1.9 : Cas amont

$$\begin{cases} x' = x + \varepsilon/2 \\ \bar{\rho} = \min(\rho C(x), \rho(1 - C(x + \varepsilon))) \end{cases} \quad (1.22)$$

La fonction  $\bar{\rho}$  a pour rôle d'éviter de trop vider la cellule donneuse, donc d'empêcher que  $C$  devienne négatif. Elle permet aussi d'éviter de trop remplir la cellule accepteuse de manière à avoir en permanence  $C \leq 1$ . Nous avons représenté les 2 cas possibles sur les figures 1.10 et 1.11.

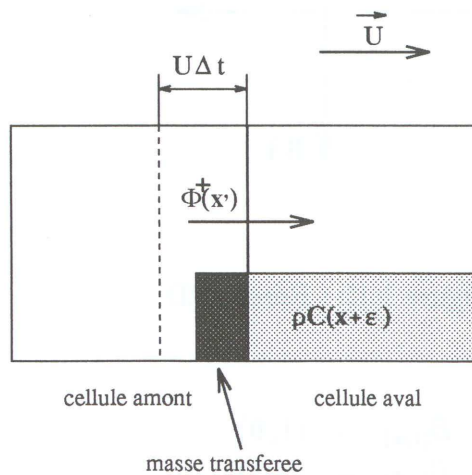


Figure 1.10 : Cas aval – Évite de trop vider la cellule amont

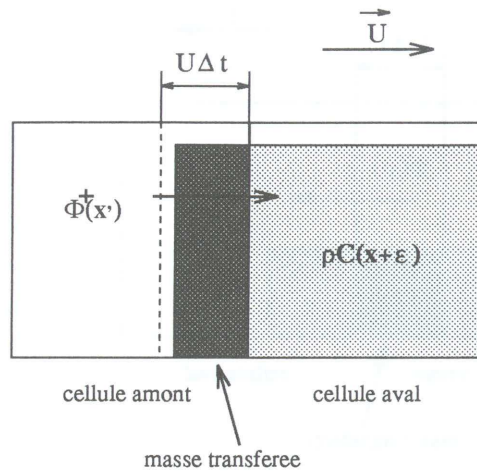


Figure 1.11 : Cas aval – Évite de trop remplir la cellule aval

### Calcul des flux

Nous projetons le calcul de flux sur les axes du maillage de calcul. On peut prévoir qu'il y aura autant de calculs de flux qu'il y a d'axes qui sous-tendent le réseau, soit deux pour un réseau carré qui est notre configuration de calcul.

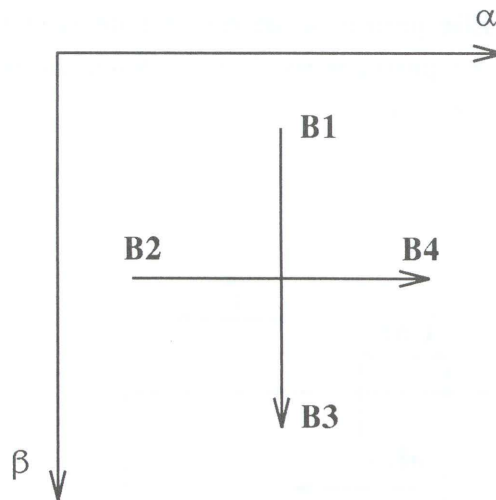


Figure 1.12 : Réseau 2D

$$\begin{cases} B_{(i,\alpha)} = (1, 0) \\ B_{(i,\beta)} = (0, 1) \end{cases} \quad (1.23)$$

L'indice  $i$  des cosinus directeurs peut ainsi prendre, par exemple, les valeurs (3,4). D'où le facteur de normalisation :

$$\sum_{k=3}^4 B_{i,\alpha} \cdot B_{i,\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.24)$$

De façon plus pratique, si l'on considère un milieu composé de deux phases, on les propagera simultanément. Il est donc nécessaire de normaliser le flux. Ce que nous allons faire de deux manières. Dans un premier temps, la normalisation dépend du flux total,  $\vec{\Phi}$ , d'une cellule vers ses voisines. Ce facteur est donc fonction de la nature du réseau, comme nous allons le voir :

$$\vec{\Phi}_{(1,i)} = \vec{u} \cdot \vec{B}_i \cdot \rho_1 C_1 \quad (1.25)$$

où  $\vec{\Phi}_{(1,i)}$  est le flux de la phase 1 dans la direction  $i$ . En sommant sur les deux axes, dans le cas d'un réseau carré nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_1 &= \sum_{k=3}^4 \vec{\Phi}_{(1,i)} \cdot \vec{B}_i \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{k=3}^4 u_{\alpha} \cdot \vec{B}_{i,\alpha} \cdot \vec{B}_{i,\beta} \cdot \rho_1 C_1 \\ &= \sum_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \cdot \rho_1 C_1 \cdot u_{\alpha} \\ &= \rho_1 C_1 \cdot \vec{u} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ce qui correspond bien aux calculs de flux amont et aval précédents. Puis après avoir calculé le flux pour chacune des phases, on normalise par rapport au flux global, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Phi}_{(1,i)}^{calculé} = \text{flux de la phase 1 dans la direction } i. \\ \vec{\Phi}_{(2,i)}^{calculé} = \text{flux de la phase 2 dans la direction } i. \\ \vec{\Phi}_{\rho}^{calculé} = u(\rho_1 + \rho_2) = \text{flux global dans la direction } i. \end{array} \right. \quad (1.27)$$

D'où le flux vrai :

$$\vec{\Phi}_{(i,1)}^{vrai} = \frac{\vec{\Phi}_{(i,1)}^{calculé}}{\vec{\Phi}_{(i,1)}^{calculé} + \vec{\Phi}_{(i,2)}^{calculé}} \vec{\Phi}_{\rho}^{calculé} \quad (1.28)$$

Nous tenons ainsi compte de l'évolution de la masse volumique des différentes phases et nous calculons un flux en utilisant  $\vec{\Phi}_{\rho}^{calculé}$  obtenu à l'instant  $(n-1)\Delta t$ . On opère de même pour la phase 2. Après quoi il ne nous reste plus qu'à appliquer l'équation d'évolution.

avec :



$$\rho C_{i,1}^{n+1} = \rho C_{i,1}^n + \nabla \vec{\Phi}_{i,1}^{vrai} \quad (1.29)$$

et

$$\rho C_{i,2}^{n+1} = \rho C_{i,2}^n + \nabla \vec{\Phi}_{i,2}^{vrai} \quad (1.30)$$

on obtient :

$$\rho C_i^{n+1} = \rho C_i^n + \nabla (\vec{\Phi}_{i,1}^{vrai} + \vec{\Phi}_{i,2}^{vrai}) \quad (1.31)$$

### 1.1.6 Conclusion

La méthode VOF compressible prend en compte l'évolution de chacune des deux phases de l'écoulement et fait intervenir le couplage qui existe entre les flux. Par rapport au cas incompressible, nous avons donc à résoudre une équation d'état supplémentaire pour  $\rho C$  et à considérer le calcul des flux pour chacune des différentes phases de manière à ce que la conservation de la masse soit vérifiée à chaque instant. L'algorithme incompressible ne résolvait que l'équation d'advection de la fonction couleur  $C$  pour une seule phase. On déduisait le calcul des flux de la seconde phase en utilisant la valeur complémentaire  $1 - C$ . Nous présentons des cas de validation de la méthode VOF compressible : on a réalisé une translation et une rotation d'un fluide de couleur 1 dans un fluide de couleur 2, de masses volumiques différentes. Puis, nous avons couplé cette méthode avec un schéma Mac Cormack afin de traiter des écoulements compressibles. Ces résultats sont regroupés dans le chapitre suivant.

## 1.2 Méthode de calcul de la tension de surface (CSF)

Après avoir développé une technique de suivi d'interface, nous introduisons la méthode CSF, développée par Brackbill, Kothe et Zemach [17], [18]. Nous l'avons utilisée pour prendre en compte la tension de surface agissant à l'interface entre deux ou plusieurs fluides. Cette méthode est couplée au schéma VOF. Dans le chapitre suivant nous présentons des calculs sur la déformation de nappe plane entre un liquide et un gaz, où les efforts de tension de surface ont un rôle significatif. Nous avons aussi introduit le formalisme CSF dans la méthode particulière SPH (chapitre 2, partie 3), pour étudier le développement d'instabilités de type Rayleigh-Taylor.

La tension de surface est créée par les forces intermoléculaires du fluide considéré [6]. Puisque les changements brutaux des forces moléculaires surviennent

quand les propriétés des fluides changent de manière discontinue, la tension de surface est une caractéristique liée aux interfaces. Elle résulte d'une "force de surface" microscopique localisée, qui s'exerce sur les éléments du fluide à l'interface dans les directions normale et tangentielle. Le mouvement interfacial de fluide dû à la tension de surface joue un rôle fondamental dans de nombreux phénomènes industriels. Des exemples peuvent se trouver dans les problèmes d'écoulements de fluides incompressibles et compressibles, pour les études sur la capillarité, dans les problèmes de cavitation et de dynamique des gouttes. Afin de faire des analyses détaillées de ces processus, l'utilisation de méthodes numériques permet d'étudier les écoulements non linéaires et donc de mieux comprendre les phénomènes de tension de surface.

Au début les méthodes ont souffert de difficultés liées à la topologie modélisant les interfaces complexes avec tension de surface. On pouvait rencontrer des problèmes de reconnexion ou de rupture d'interface. La méthode numérique présentée pour modéliser la tension de surface évite ces contraintes de topologie d'interface. On considère la tension de surface comme un effet continu "à travers" l'interface plutôt qu'une condition aux limites à l'interface. Avec ce formalisme on obtient une précision correcte sur le calcul de la loi de Laplace (1.32) pour une interface de forme arbitraire et évoluant en temps.

Afin de programmer le calcul de la tension de surface en utilisant les informations liées à la méthode VOF, et plus tard à la méthode SPH, le formalisme CSF est tout à fait approprié. L'idée générale est d'étudier et de calculer les effets de tension superficielle entre plusieurs fluides de propriétés différentes auxquels est associée une fonction  $C$ , (fonction couleur), qui varie continument sur tout le domaine de calcul. À chaque point de la région de transition, (zone interfaciale entre les fluides), une force est définie de manière proportionnelle à la courbure de la surface décrite par  $C$  (assimilée à l'interface). La fonction couleur est normalisée afin de retrouver la description classique de la tension de surface sur l'interface quand le rapport de l'épaisseur de l'interface sur le rayon de courbure local tend vers 0. Cette méthode ne nécessite pas de reconstruction d'interface et ne fait pas intervenir de modèle.

### 1.2.1 Formulation volumique de la tension de surface

Si nous considérons une interface de forme quelconque entre 2 fluides, la déformation de cette interface, en statique, va générer un effort. Cette surface déformée induit donc des forces de rappel. Pour la maintenir en équilibre, il faut lui appliquer continument des forces, en maintenant, par exemple, une différence de pression entre les 2 côtés de l'interface. La plus forte des 2 pressions sera nécessairement du côté de la concavité. Il est équivalent de parler de forces de tension superficielle ou de différence de pression induite par la présence de forces de tension de surface [8]. Notons que l'effet de tension de surface est indépendant de l'allongement de celle-ci. La formule de Laplace qui lie la différence de pression aux rayons de courbure est la

suivante :

$$p_1 - p_2 = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.32)$$

### Force de surface

Considérons une interface  $S$  entre deux fluides. La force surfacique totale est :

$$F_S = F_S^{(n)} + F_S^{(t)} \quad (1.33)$$

$F_S^{(n)}$  est la composante normale à  $S$  et  $F_S^{(t)}$  la composante tangentielle. Puisque nous considérons une interface entre 2 fluides non visqueux avec un coefficient de tension de surface constant, la composante tangentielle de la force surfacique est nulle, soit :

$$F_S^{(t)} = 0 \quad (1.34)$$

La tension superficielle crée une pression de surface qui est la force normale par unité d'aire interfaciale  $S$  au point  $x$  sur  $S$ ,

$$p(x) = |F_S(x)| = |F_S^{(n)}(x)| \quad (1.35)$$

donc :

$$F_S^{(n)}(x) = F_S(x) = \frac{\sigma}{R(x)} \hat{n}(x) \quad (1.36)$$

Où  $1/R(x)$  est la courbure et  $\hat{n}(x)$  est le vecteur unitaire normal à  $S$ .

### Force de volume

L'équation de quantité de mouvement pour un fluide non visqueux avec tension de surface s'écrit :

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla p + F_V \quad (1.37)$$

où  $\rho$  est la densité,  $u$ , la vitesse,  $p$ , la pression et  $F_V$ , une force de volume. Cette force de volume  $F_V(x)$  est égale à la force de tension de surface par unité d'aire interfaciale,  $F_S(x_s)$ , où  $x_s$  est un point de l'interface, quand  $h$  tend vers 0.  $h$  est

l'épaisseur de l'interface qui est du même ordre de grandeur que le pas du maillage  $\Delta x$  (figure 1.13). Nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V F_V(x) d^3x = \int_S F_S(x_s) dS \quad (1.38)$$

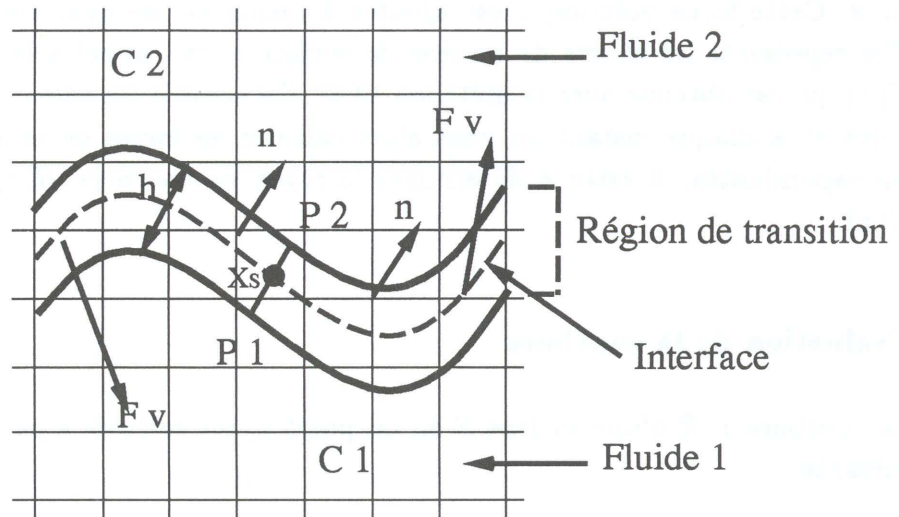


Figure 1.13 : Représentation de l'interface

Le but de la méthode est de déterminer la force de volume  $F_V$  en utilisant l'information issue de la méthode VOF. Pour cela, on utilise la fonction couleur  $C(x)$ . Nous avons vu dans le chapitre précédent que les deux fluides sont distingués par une fonction couleur qui change de manière discontinue à l'interface.

$$C(x) = \begin{cases} C_1 & \text{dans le fluide 1} \\ C_2 & \text{dans le fluide 2} \\ \langle C \rangle = \frac{C_1 + C_2}{2} & \text{à l'interface} \end{cases} \quad (1.39)$$

Nous remplaçons cette fonction discontinue par une fonction lissée  $\tilde{C}(x)$  de  $C_1$  à  $C_2$  sur une petite distance  $\Theta(h)$ . De cette manière le problème des valeurs de  $C$  à l'interface est transformé en un modèle continu approché. On élimine ainsi le saut de fonction couleur à l'interface. La surface séparant les deux fluides est remplacée par une région de transition où l'on a des valeurs  $\tilde{C}(x)$  telles que  $C_1 \leq \tilde{C} \leq C_2$ . La force  $F_V(x)$  est localisée sur la région interfaciale et est nulle à l'extérieur. Ce qui correspond bien aux efforts de tension de surface qui ne s'appliquent qu'à l'interface.

La force volumique sur une interface dont l'épaisseur tend vers 0 peut s'identifier à une force de surface localisée en un point de cette interface. On convertit l'intégrale

de  $F_V(x)$  sur un volume  $V$  en une intégrale sur  $S$  de  $F_S(x_s)$ . Nous obtenons alors la force de volume  $F_V(x)$  pour  $h$  fini :

$$F_V(x) = \frac{\sigma}{R(x)} \frac{\nabla \tilde{C}(x)}{[C]} \quad (1.40)$$

Où  $\sigma$  est le coefficient de tension de superficielle et  $R(x)$  le rayon de courbure en  $x$ . Cette force volumique est ajoutée à l'équation de quantité de mouvement. Elle représente les efforts de tension de surface et fait appel à la fonction couleur  $C(x)$  qui est obtenue avec la méthode VOF. On connaît les valeurs de  $C$  en chaque point et à chaque instant on peut alors calculer les forces de tension superficielle correspondantes. Il reste à déterminer le rayon de courbure  $R(x)$  en fonction de  $C(x)$ .

### Évaluation de la courbure

La courbure  $1/R$  d'une surface  $S$  en un point  $x$ , est calculée à partir de la formule suivante :

$$\frac{1}{R} = -(\nabla \cdot \hat{n}) \quad (1.41)$$

où  $\hat{n}$  la normale unitaire à la surface. Dans le modèle CSF l'interface est remplacée par des surfaces de "couleur" constante où les normales sont des gradients de la fonction couleur approximée.

$$n(x) = \nabla \tilde{C}(x) \quad (1.42)$$

Le vecteur normal est :

$$\hat{n}(x) = \frac{\nabla \tilde{C}(x)}{|\nabla \tilde{C}(x)|} \quad (1.43)$$

On obtient l'expression  $\nabla \tilde{C}/R$  (en utilisant (1.41) et (1.42)), nécessaire pour évaluer la force de tension de surface donnée par :

$$\frac{1}{R} \nabla \tilde{C} = -n(\nabla \cdot \hat{n}) \quad (1.44)$$

Puisque  $\nabla \tilde{C}$  est non nul uniquement sur la zone de transition, la force surfacique de volume  $y$  est aussi différente de zéro. Finalement, la force volumique s'écrit :

$$F_V(x) = \frac{\sigma}{R(x)} \frac{\nabla \tilde{C}(x)}{[C]} = -\frac{\sigma}{[C]} n \nabla \hat{n} \quad (1.45)$$

### 1.2.2 Modélisation numérique

Nous allons présenter rapidement la manière dont sont calculés le rayon de courbure  $R$ , la normale unitaire et la force de volume  $F_V$ . Pour modéliser la tension de surface avec la méthode CSF, la fonction couleur  $C(x, y)$  est choisie de manière à être centrée dans la cellule de calcul, tout comme la masse volumique  $\rho$  ( $\rho_{i,j}$  en  $(x_{i,j}, y_{i,j})$ ). Le rayon de courbure  $R$  et la force de volume  $F_V$  sont aussi centrés. Les vecteurs normaux nécessaires pour le calcul du rayon de courbure et de la force volumique de tension de surface doivent être interpolés aux faces des cellules. Le maillage que nous avons utilisé est similaire à celui de la méthode VOF. Il est 2D, cartésien, régulier et orthogonal. Le centre de chaque cellule a pour coordonnées  $x_{i,j}$  et  $y_{i,j}$  tels que :

$$\begin{cases} x_{i,j} = i\Delta x & \text{et } i \in [1, N] \\ y_{i,j} = j\Delta y & \text{et } j \in [1, M] \end{cases} \quad (1.46)$$

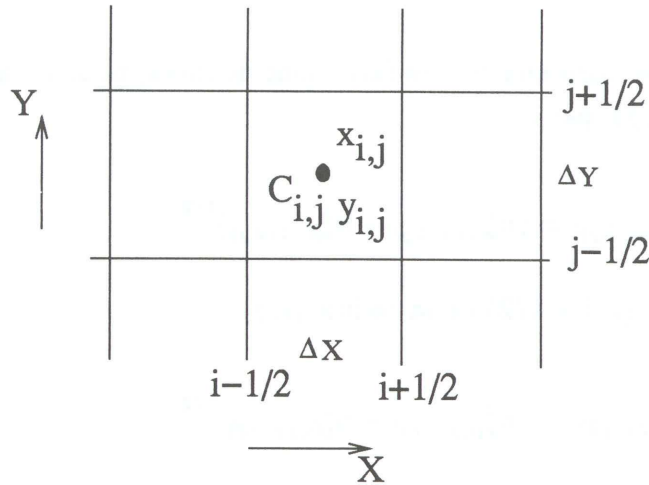


Figure 1.14 : Maillage cartésien

Nous avons besoin de calculer la force  $F_V$  au centre des cellules :

$$(F_V)_{ij} = -\frac{\sigma}{[C]} n_{ij} (\nabla \hat{n})_{ij} \quad (1.47)$$

Il nous faut donc déterminer la normale  $n_{ij}$  et le gradient  $(\nabla \hat{n})_{ij}$ . Les faces sont localisées aux points  $x_{i+1/2, j+1/2}$  et  $y_{i+1/2, j+1/2}$  avec :

$$\begin{cases} x_{i+1/2,j} = x_{i,j} + \frac{\Delta x}{2} \\ y_{i,j+1/2} = y_{i,j} + \frac{\Delta y}{2} \end{cases} \quad (1.48)$$

Calculons d'abord les composantes du vecteur normal au point  $(i, j)$ . Les composantes des normales sont localisées aux faces des cellules sur les lignes  $i$  et  $j$ . Les composantes  $x$  de la face droite sont  $(x_{i+1/2,j}, y_{i,j})$  et les composantes  $y$  de la face du haut sont  $(x_{i,j}, y_{i,j+1/2})$ . Le vecteur normal centré  $n_{ij}$  est donc obtenu par interpolation linéaire :

$$n_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ n_{x(i+1/2,j)} + n_{x(i-1/2,j)} \right\} \hat{x} + \frac{1}{2} \left\{ n_{y(i,j+1/2)} + n_{y(i,j-1/2)} \right\} \hat{y} \quad (1.49)$$

La courbure centrée  $(\nabla \cdot \hat{n})_{ij}$  est donnée par la divergence des normales unitaires calculées sur les faces des cellules, soit :

$$(\nabla \cdot \hat{n})_{ij} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{n_{x(i+1/2,j)}}{|n_{(i+1/2,j)}|} - \frac{n_{x(i-1/2,j)}}{|n_{(i-1/2,j)}|} \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{n_{y(i,j+1/2)}}{|n_{(i,j+1/2)}|} - \frac{n_{y(i,j-1/2)}}{|n_{(i,j-1/2)}|} \right] \quad (1.50)$$

Les normes des vecteurs normaux sur les faces sont données, pour la face droite  $(i + 1/2, j)$  de la cellule  $(i, j)$ , par :

$$|n_{(i+1/2,j)}| = (n_{x(i+1/2,j)}^2 + n_{y(i+1/2,j)}^2)^{1/2} \quad (1.51)$$

et pour la face du haut  $(i, j + 1/2)$  de la cellule  $(i, j)$  :

$$|n_{(i,j+1/2)}| = (n_{x(i,j+1/2)}^2 + n_{y(i,j+1/2)}^2)^{1/2} \quad (1.52)$$

Les composantes du vecteur normal sont :

$$\begin{cases} n_{x(i+1/2,j)} = \frac{\tilde{C}_{i+1,j} - \tilde{C}_{i,j}}{\Delta x} \\ n_{y(i,j+1/2)} = \frac{\tilde{C}_{i,j+1} - \tilde{C}_{i,j}}{\Delta y} \end{cases} \quad (1.53)$$

Où  $n_x$  est la composante pour la face de droite  $(i + 1/2, j)$  de la cellule  $(i, j)$  et  $n_y$  est la composante pour la face du haut  $(i, j + 1/2)$  de la cellule  $(i, j)$ . Les autres composantes doivent être obtenues par interpolation. La composante  $n_x$  pour la face du haut  $(i, j + 1/2)$  de la cellule  $(i, j)$  est donnée par :

$$n_{x(i,j+1/2)} = \frac{1}{4} \left( n_{x(i+1/2,j)} + n_{x(i+1/2,j+1)} + n_{x(i-1/2,j)} + n_{x(i-1/2,j+1)} \right) \quad (1.54)$$

De manière similaire, la composante  $n_y$  de la face droite  $(i + 1/2, j)$  de la cellule  $(i, j)$  est :

$$n_{y(i+1/2,j)} = \frac{1}{4} \left( n_{y(i,j+1/2)} + n_{y(i+1,j+1/2)} + n_{y(i,j-1/2)} + n_{y(i+1,j-1/2)} \right) \quad (1.55)$$

### 1.2.3 Conclusion

Dans la méthode CSF une force de volume est formulée pour modéliser numériquement les efforts de tension de surface aux interfaces. Le rayon de courbure, nécessaire pour calculer les forces de tension superficielle, est calculé à partir des normales à l'interface directement obtenues de la fonction couleur  $C$ . Notons que nous n'avons pas besoin de tracer l'interface. Cette méthode permet assez simplement d'inclure les forces de tension de surface dans les équations d'Euler ou de Navier–Stokes. Elle est couplée avec la méthode VOF et des résultats sont présentés dans le chapitre suivant. Nous l'avons aussi utilisée avec la méthode particulière SPH. La manière dont est fait le couplage ainsi que des cas tests sur l'influence de la tension de surface pour des instabilités de type Rayleigh–Taylor sont regroupés dans la partie 3.

## 1.3 Schéma MAC (Marker And Cell)

Nous avons tout d'abord étudié des interfaces entre 2 fluides considérés incompressibles. Pour cela on a besoin d'une méthode numérique capable de calculer le champ de vitesse  $(u, v)$  et la pression  $p$ . Nous avons choisi la méthode MAC, développée par Harlow et Welch [10] en 1965 qui, à l'origine, était utilisée pour traiter des fluides incompressibles avec une surface libre. Nous l'avons appliquée aux équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible, discrétisées par la technique des différences finies en espace et en temps sur un maillage cartésien 2D. Voici les équations traitées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x \quad (1.57)$$



$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y \quad (1.58)$$

Nous avons posé  $p = p/\rho$  ( $\rho$  étant une constante). L'approximation des équations aux différences finies est basée sur un maillage eulérien. La pression est définie au centre de la cellule alors que les vitesses sont définies sur les frontières.  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les dimensions de la cellule et  $\Delta t$  le pas de temps. Avec ces définitions, les équations (1.57) et (1.58) peuvent s'écrire de manière discrétisée (1.59) et (1.60) :

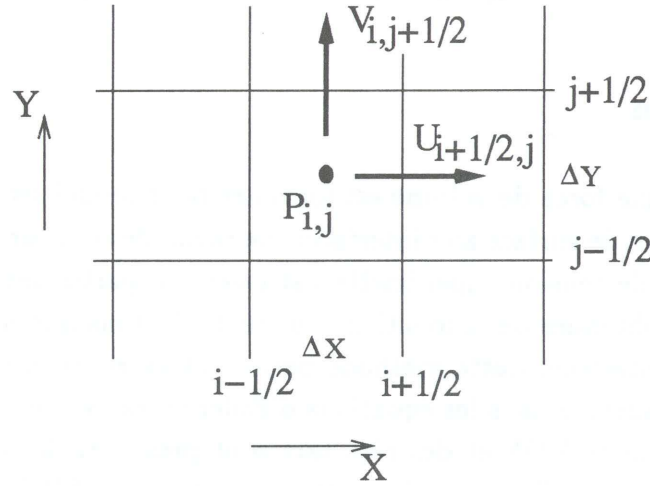


Figure 1.15 : Maillage MAC

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n}{\partial t} &= \frac{(u_{i,j})^2 - (u_{i+1,j})^2}{\partial x} \\ &+ \frac{(u_{i+1/2,j-1/2})(v_{i+1/2,j-1/2}) - (u_{i+1/2,j+1/2})(v_{i+1/2,j+1/2})}{\partial y} \\ &+ \nu \left( \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j} - 2u_{i+1/2,j}}{\partial x^2} \right) \\ &+ \nu \left( \frac{u_{i+1/2,j+1} + u_{i+1/2,j-1} - 2u_{i+1/2,j}}{\partial y^2} \right) \\ &+ \left( \frac{p_{i,j} - p_{i+1,j}}{\partial x} \right) + g_x \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^n}{\partial t} &= \frac{(u_{i-1/2,j+1/2})(v_{i-1/2,j+1/2}) - (u_{i+1/2,j+1/2})(v_{i+1/2,j+1/2})}{\partial x} \\ &+ \frac{(v_{i,j})^2 - (v_{i+1,j})^2}{\partial y} \\ &+ \nu \left( \frac{v_{i+1,j+1/2} + v_{i-1,j+1/2} - 2v_{i,j+1/2}}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\nu \left( \frac{v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2} - 2v_{i,j+1/2}}{\partial y^2} \right) \\
& + \left( \frac{p_{i,j} - p_{i,j+1}}{\partial x} \right) + g_y
\end{aligned} \tag{1.60}$$

La moyenne des vitesses est faite de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_{i+1/2,j+1/2} = 1/2(u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j+1}) \\ v_{i+1/2,j+1/2} = 1/2(v_{i,j+1/2} + v_{i+1,j+1/2}) \end{cases} \tag{1.61}$$

$$\begin{cases} u_{i,j} = 1/2(u_{i-1/2,j} + u_{i+1/2,j}) \\ v_{i,j} = 1/2(v_{i,j-1/2} + v_{i,j+1/2}) \end{cases} \tag{1.62}$$

Nous posons,

$$D_{i,j} = \left[ \frac{(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})}{\Delta x} \right] + \left[ \frac{(v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})}{\Delta y} \right] \tag{1.63}$$

Alors, l'équation aux différences finies analogues à l'équation (1.56) est  $D_{i,j} = 0$ . Des équations (1.59) et (1.60), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
D_{i,j}^{n+1} - D_{i,j}^n &= -Q_{i,j} - \frac{p_{i+1,j} + p_{i-1,j} - 2p_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - 2p_{i,j}}{\Delta y^2} \\
& +\nu \left( \frac{D_{i+1,j} + D_{i-1,j} - 2D_{i,j}}{\Delta x^2} \right) \\
& +\nu \left( \frac{D_{i,j+1} + D_{i,j-1} - 2D_{i,j}}{\Delta y^2} \right)
\end{aligned} \tag{1.64}$$

où  $Q_{i,j}$  est :

$$\begin{aligned}
Q_{i,j} &= \frac{(u_{i+1,j})^2 + (u_{i-1,j})^2 - 2(u_{i,j})^2}{\Delta x^2} + \frac{(v_{i,j+1})^2 + (v_{i,j-1})^2 - 2(v_{i,j})^2}{\Delta y^2} \\
& + \frac{2}{\Delta x \Delta y} \left[ (u_{i+1/2,j+1/2})(v_{i+1/2,j+1/2}) + (u_{i-1/2,j-1/2})(v_{i-1/2,j-1/2}) \right] \\
& - \frac{2}{\Delta x \Delta y} \left[ (u_{i+1/2,j-1/2})(v_{i+1/2,j-1/2}) + (u_{i-1/2,j+1/2})(v_{i-1/2,j+1/2}) \right]
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Dès que  $D_{i,j}^{n+1}$  est calculé à la fin du cycle de temps, on peut obtenir une équation pour la pression :

$$\frac{p_{i+1,j} + p_{i-1,j} - 2p_{i,j}}{\delta x^2} + \frac{p_{i,j+1} + p_{i,j-1} - 2p_{i,j}}{\delta y^2} = -R_{i,j} \quad (1.66)$$

où

$$R_{i,j} = Q_{i,j} - \frac{D_{i,j}}{\Delta t} - \nu \left( \frac{D_{i+1,j} + D_{i-1,j} - 2D_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{D_{i,j+1} + D_{i,j-1} - 2D_{i,j}}{\Delta y^2} \right) \quad (1.67)$$

Les équations (1.59), (1.60), (1.66) et (1.67) sont celles utilisées principalement pour le calcul. En premier lieu, les valeurs de  $R_{i,j}$  sont calculées pour chaque cellule, en utilisant les équations (1.65), (1.67) et les vitesses connues au début de chaque cycle. Puis, l'équation (1.66) est résolue pour obtenir la pression  $p_{i,j}$  de chaque cellule. Enfin, les pressions ainsi déduites sont introduites dans les équations (1.59) et (1.60) et les nouvelles vitesses sont calculées. Les fonctions couleurs  $C$ , obtenues avec la méthode VOF, sont déplacées suivant les vitesses calculées dans l'écoulement. La condition de stabilité à appliquer à ce schéma est, lorsque  $\Delta x = \Delta y$  (ce qui est notre cas) :

$$\frac{4\nu\Delta t}{\Delta x^2} < 1$$

Où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide considéré.

## 1.4 Méthode de Mac Cormack

Nous avons utilisé ensuite un second schéma numérique pour pouvoir étudier l'interaction entre un liquide incompressible et un écoulement gazeux à grande vitesse où les effets de compressibilité ont une importance sur les phénomènes qui interviennent lors de la pulvérisation des jets. Cette étude constitue la seconde étape de ce travail. Le but est de coupler ce schéma avec la méthode VOF compressible de suivi d'interface et la méthode CSF pour prendre en compte la tension de surface. Nous avons utilisé une version explicite de la méthode de Mac Cormack [3], [7], d'ordre 2 en espace et en temps.

### 1.4.1 Présentation du schéma numérique

Nous pouvons écrire les équations de Navier–Stokes sous forme conservative, où le vecteur  $U$  contient  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$  et  $E$ , où  $\rho$  est la masse volumique,  $(u, v)$ , les composantes des vitesses et  $E$ , l'énergie totale égale à  $e + p/\rho$ . Le vecteur  $F$  regroupe les termes

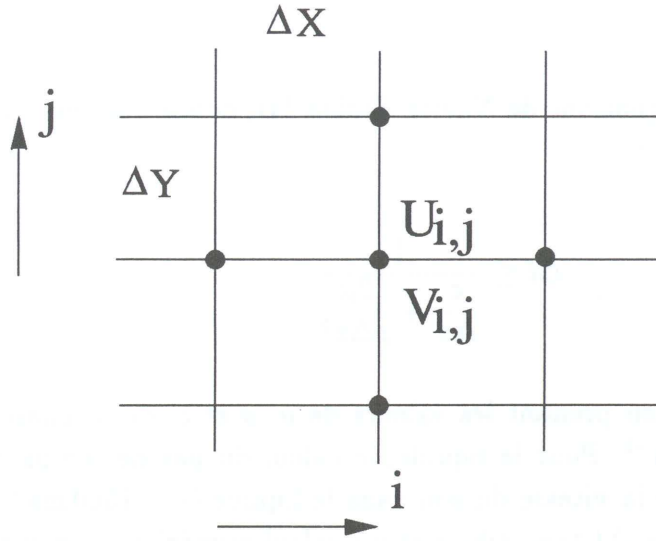


Figure 1.16 : Maillage pour le schéma Mac Cormack

suivant la direction  $x$  et  $G$  ceux de la direction  $y$ . Nous considérons donc le système suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (1.68)$$

Le terme prédicteur est :

$$\begin{cases} \Delta U_{i,j}^n = -\Delta t \left( \frac{\Delta_+ F_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta_+ G_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \\ U_{i,j}^{\overline{n+1}} = U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^n \end{cases} \quad (1.69)$$

et le terme correcteur :

$$\begin{cases} \Delta U_{i,j}^{\overline{n+1}} = -\Delta t \left( \frac{\Delta_- F_{i,j}^{\overline{n+1}}}{\Delta x} + \frac{\Delta_- G_{i,j}^{\overline{n+1}}}{\Delta y} \right) \\ U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^{\overline{n+1}} + U_{i,j}^{\overline{n+1}} \right) \end{cases} \quad (1.70)$$

avec

$$\Delta U_{i,j}^n = U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n \quad (1.71)$$

$$\Delta_+ F_{i,j}^n = F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n \quad (1.72)$$

$$\Delta_- F_{i,j}^n = F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n \quad (1.73)$$

$$\Delta_+ G_{i,j}^n = G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n \quad (1.74)$$

$$\Delta_- G_{i,j}^n = G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n \quad (1.75)$$

## Stabilité

Mac Cormack, pour les équations de Navier–Stokes 1D, donne comme condition de stabilité le critère suivant :

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{c}{\Delta x} + \frac{2\mu}{\rho\Delta x^2}} \quad (1.76)$$

Ce critère est calculé en prenant les valeurs de  $\mu$ ,  $\rho$  et  $c$ , de la phase gazeuse.  $c$  est de l'ordre de  $300 \text{ ms}^{-1}$ . Pour le liquide, le calcul du pas de temps devrait se faire en tenant compte de la vitesse du son dans le liquide ( $c = 1500 \text{ ms}^{-1}$ ). Ce qui entrainerait des valeurs de  $\Delta t$  très faibles et un calcul numérique non viable (coût calcul trop élevé). Nous avons donc utilisé le pas de temps du gaz dans la phase liquide, soit :

$$\Delta t_{liq} = \Delta t_{gaz} \quad (1.77)$$

Notons que si on annule la viscosité, la condition de stabilité est la condition de CFL classique.

## Conditions limites

La détermination des conditions limites est nécessaire pour résoudre correctement le système des équations de Navier–Stokes. Pour l'étude réalisée nous sommes dans un cas supersonique (écoulement gazeux supersonique), les caractéristiques sont toutes positives, ce qui implique que l'information se propage uniquement de l'amont vers l'aval [4]. Dans un tel cas, il suffit d'imposer des conditions d'entrée figées et de gradient nul à la sortie du domaine. Nous les avons détaillées dans le chapitre suivant, où sont présentés les résultats numériques.

### 1.4.2 Limiteur de flux – Schéma TVD (Total Variation Diminishing)

Nous avons rencontré des problèmes d'instabilités numériques en utilisant le schéma Mac Cormack dans nos configurations de calcul. Notamment dans les cas de forts gradients de vitesse et de masse volumique. Afin de pallier ces problèmes, on a décidé de lui ajouter une correction TVD symétrique du 2<sup>ème</sup> ordre non-MUSCL développée par Yee [15].

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i,j}^{(1)} = -\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) + S_{i,j}^n \Delta t \\ U_{i,j}^{(2)} = -\frac{1}{2}[U_{i,j}^n + U_{i,j}^{(1)} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1,j}^{(1)} - F_{i,j}^{(1)}) - \frac{\Delta t}{\Delta y}(G_{i,j}^{(1)} - G_{i,j-1}^{(1)}) + S_{i,j}^{(1)} \Delta t] \\ U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^{(2)} + \frac{1}{2}(R_{i+\frac{1}{2},j} \Phi_{i+\frac{1}{2},j} - R_{i-\frac{1}{2},j} \Phi_{i-\frac{1}{2},j}) + \frac{1}{2}(R_{i,j+\frac{1}{2}} \Phi_{i,j+\frac{1}{2}} - R_{i,j-\frac{1}{2}} \Phi_{i,j-\frac{1}{2}}) \end{array} \right. \quad (1.78)$$

où  $R_i$  est la matrice des vecteurs propres de la matrice des flux jacobiens  $\left( A = \frac{\partial F}{\partial U} \right)$   
et  $R_j$  est la matrice des vecteurs propres de la matrice  $\left( B = \frac{\partial G}{\partial U} \right)$ .  $R_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $R_{j+\frac{1}{2}}$  sont déterminés par la moyenne de Roe [70].

$$\Phi_{i+\frac{1}{2},j} = [\Psi(\nu_{i+\frac{1}{2},j}) - \nu_{i+\frac{1}{2},j}^2](\alpha_{i+\frac{1}{2},j} - Q_{i+\frac{1}{2},j}) \quad (1.79)$$

$$\nu_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{i+\frac{1}{2},j} \quad (1.80)$$

Où  $\nu_{i+\frac{1}{2},j}$  est le vecteur des valeurs propres  $\lambda_{i+\frac{1}{2},j}$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j} = R_{i+\frac{1}{2},j}^{-1}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) \quad (1.81)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(z) = |z| \text{ si } |z| \geq \delta \\ \Psi(z) = \frac{(z^2 + \delta^2)}{2\delta} \text{ sinon} \end{array} \right. \quad (1.82)$$

Nous avons pris le limiteur suivant :

$$Q_{i+\frac{1}{2},j} = \minmod(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}, \alpha_{i-\frac{1}{2},j}) + \minmod(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}, \alpha_{i+\frac{3}{2},j}) - \alpha_{i+\frac{1}{2},j} \quad (1.83)$$

avec :

$$\minmod(x, y) = \text{sign}(x) \text{MAX}[0, \text{MIN}(|x|, y \text{sign}(x))] \quad (1.84)$$

### 1.4.3 Conclusion

Cette méthode de Mac Cormack est d'abord testée sur un cas d'interaction entre 2 gaz supersoniques. Puis nous avons couplé ce schéma avec les méthodes développées dans les sections précédentes : VOF, CSF et Marker And Cell. Le but étant de traiter un gaz compressible et un liquide incompressible. Différents cas tests ont été réalisés. Afin de limiter les problèmes d'oscillations numériques rencontrés lors du couplage compressible/incompressible et situés à l'interface entre les 2 fluides en présence, nous avons ajouté un schéma TVD au schéma de Mac Cormack. Tous les résultats sont discutés à la fin du chapitre 2.

# Chapitre 2

## Résultats

L'étude des écoulements liquide/gaz incompressibles s'applique à de nombreux processus industriels. Celui qui a motivé l'utilisation d'une méthode de suivi d'interface incompressible (VOF), d'une méthode de calcul des efforts de tension de surface (CSF) et d'un schéma Marker And Cell concerne le système d'injection des moteurs fusées. Le but de ce travail est de mieux comprendre les mécanismes de pulvérisation de la phase liquide en sortie d'injecteur coaxial. Nous avons donc réalisé plusieurs séries de calculs, en utilisant le logiciel SURFER développé par S.Zaleski, afin de mettre en évidence les phénomènes qui contrôlent la déformation de jets liquides et qui mènent à la rupture. Nous avons pu voir la formation de gouttes et mesurer leur taille. Ceci correspond à la première partie de ce chapitre.

Puis, après avoir considéré deux fluides incompressibles, nous avons décidé de travailler sur le couplage mettant en présence un milieu incompressible et un milieu compressible. Pour traiter l'écoulement compressible nous avons développé une méthode VOF qui tient compte des effets de compressibilité. Des résultats sur ce développement sont présentés dans la section 2.2. Il nous faut aussi résoudre les équations de l'écoulement compressible, ceci est fait avec une méthode Mac Cormack. Nous la testons sur une interaction entre deux fluides compressibles dans la section 2.3. Enfin, le couplage de la méthode VOF compressible, des schémas de Mac Cormack et Marker And Cell, et de l'algorithme CSF est testé sur un écoulement gazeux supersonique autour d'une goutte liquide. Ce résultat est commenté dans la dernière section de ce chapitre.

### 2.1 Interface liquide/gaz incompressibles

Le problème de l'arrachage de gouttelettes dans un écoulement cisailé liquide/gaz possède plusieurs applications notamment pour les études de moteurs fusée. Ce problème a motivé l'approche numérique décrite ici, faite dans le cadre d'un contrat



pour le Société Européenne de Propulsion. La simulation complète tridimensionnelle d'une région de production de gouttelettes, autour d'un jet ou d'une nappe liquide, est encore relativement compliquée à mettre en œuvre avec les capacités numériques actuelles. Cependant il est possible d'étudier plus en détail des configurations simplifiées. L'écoulement de Kelvin-Helmholtz plan constitue une telle configuration. Nous avons simulé les perturbations d'interfaces planes liquide/gaz en considérant des fluides incompressibles visqueux, ce qui dans les hypothèses fournies par la SEP, est tout à fait réaliste. Afin d'initier les perturbations de l'interface, de tension superficielle donnée, nous avons en premier lieu imposé une petite perturbation de type Kelvin-Helmholtz pour déformer la surface. Ainsi nous traitons des instabilités à une seule longueur d'onde. Cependant nous avons remarqué que les résultats obtenus dépendent de l'amplitude initiale fixée, bien que nous l'ayons choisie la plus petite possible pour rester dans le cadre de la théorie linéaire. Nous avons alors décidé de placer un puis plusieurs petits tourbillons dans la phase liquide pour initialiser le calcul.

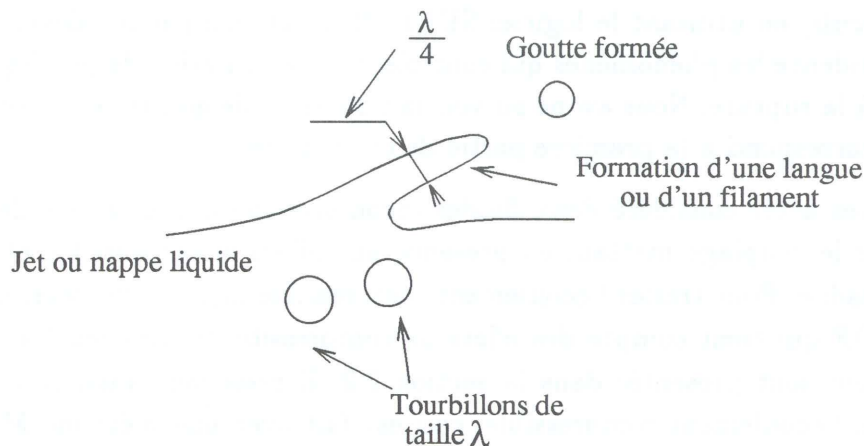


Figure 2.1 : Induction d'instabilités par des tourbillons.

Nous rappelons tout d'abord les hypothèses de travail, puis nous présentons les résultats obtenus avec des perturbations monochromatiques et polychromatiques. On s'intéresse plus particulièrement à l'influence des nombres adimensionnés importants caractérisant l'écoulement : le nombre de Weber, le nombre de Reynolds, le nombre d'Ohnesorge, le nombre de Taylor, le rapport de masse volumique et le rapport de la vitesse tourbillonnaire sur la vitesse de translation relative entre le liquide et le gaz.

### 2.1.1 Rappel des hypothèses de travail

On considère deux fluides de propriétés différentes, une phase liquide (*LOX*) et une phase gazeuse ( $H_2$ ). On rappelle que la gravité est négligée et que l'on travaille en deux dimensions. À l'instant initial, l'interface et la vitesse dans les deux fluides sont horizontales. Un saut de vitesse  $\Delta u$  est présent sur l'interface. Les vitesses et la pression dans les deux phases incompressibles sont déterminées avec un schéma Marker And Cell. La configuration d'écoulement est représentée sur la figure 2.2.

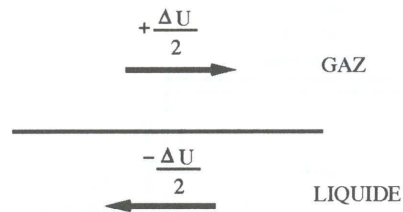


Figure 2.2 : Configuration de l'instabilité.

Il faut noter que dans une telle configuration, la taille du domaine de calcul est arbitraire par rapport aux paramètres physiques du problème de départ (figure 2.3). Il faut alors s'assurer que les résultats obtenus ne dépendent pas de la taille de la boîte.

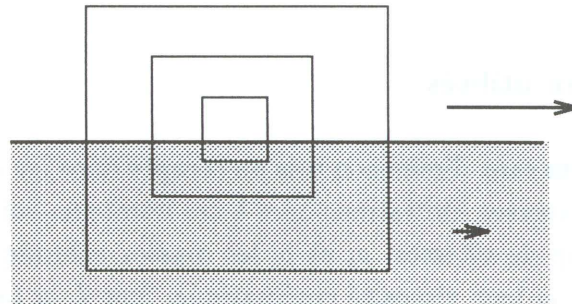


Figure 2.3 : Dans la configuration des simulations temporelles de l'instabilité d'un jet cisailé, la taille de la boîte de simulation est un paramètre arbitraire. Les résultats sont significatifs dans la mesure où une série de domaines de calcul emboîtés donneraient le même résultat

La théorie de la formation du nuage de gouttelettes décrit la stabilité des couches de vorticités dans les phases liquide et gaz, avec présence de tension capillaire [33]. Cette théorie permet de mettre en évidence le nombre de Weber proportionnel à la longueur d'onde  $\lambda$  de l'instabilité. L'hypothèse que l'on doit faire dans le cadre de la théorie linéaire est que de petites perturbations de taille  $\lambda$  de l'interface liquide/gaz provoquent l'apparition de gouttes, à la suite de mécanismes non linéaires. Les études

expérimentales montrent une bonne corrélation entre la taille des gouttes prédites par la méthode SURFER et les observations. Les équations résolues sont celles de Navier–Stokes en deux dimensions d’espace.

L’interface oxygène liquide/hydrogène gazeux est située à la hauteur  $y = L/3$ . À cet écoulement on superpose un certain nombre de tourbillons de faible amplitude dans la phase liquide (figures 2.7 et 2.4). À chaque instant, la surface fluide considérée est soumise aux conditions limites définies ci-dessous :

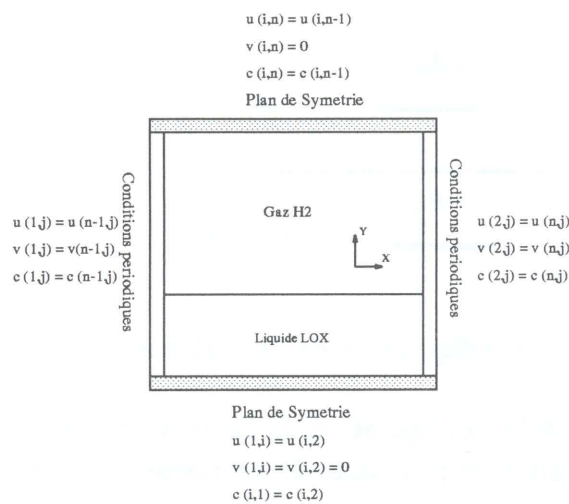


Figure 2.4 : Conditions aux limites du problème

### Nombres sans dimension utilisés

Nous présentons les nombres sans dimension pris en compte dans les calculs numériques et nous donnons les diverses limitations liées à ces nombres. Soient  $p$  le champ de pression,  $(u, v)$  le champ de vitesses,  $\rho_g$  et  $\rho_l$  les masses volumiques respectives du gaz et du liquide,  $\nu_g$  et  $\nu_l$  leur viscosité cinématique. Soit  $L$  la taille de la boîte considérée,  $\Delta u$  la vitesse de translation relative entre les deux fluides,  $\sigma$  la tension superficielle,  $\Gamma$  la circulation de chaque tourbillon et  $\lambda$  la longueur d’onde. Les paramètres adimensionnés, dont l’influence sur l’écoulement a été étudiée, sont les suivants :

### Nombre de Weber

Le nombre de Weber est le rapport des forces aérodynamiques sur les forces capillaires, pour une perturbation de longueur d’onde  $\lambda$ , on a :

$$We = \frac{\rho_g \lambda (\Delta u)^2}{\sigma} \quad (2.1)$$

La théorie linéaire [26] prédit que l'instabilité survient pour  $We > 2\pi$  avec un taux de croissance maximum pour  $We = 10$ . Aux faibles nombres de Weber, la tension capillaire l'emporte sur les phénomènes inertiels et on observe sans difficulté des ondes capillaires périodiques comme observé dans [5]. Pour de grands nombres de Weber, l'interface se pulvérise en un certain nombre de gouttes de nombre de Weber plus petit. Et si ces structures formées sont de taille plus petite que la maille, on aura une perte de précision de la méthode. La méthode VOF, de premier ordre, est sujette à l'instabilité numérique. L'interface se désagrège progressivement, et ce n'est que la présence de tension capillaire qui permet, à Weber modéré, de conserver la cohérence de l'interface [5].

### Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds  $Re_g$  du gaz est le rapport des termes de convection sur les termes visqueux :

$$Re_g = \frac{\Delta u \lambda}{\nu_g}$$

avec  $\nu_g = \frac{\mu_g}{\rho_g}$ . Il s'agit ici des limitations classiques inhérentes à un code Navier-Stokes. Lorsque le nombre de Reynolds, calculé sur une maille de pas  $h$ , devient trop grand, on peut former des structures de taille plus petite que  $h$ , et donc aboutir à une perte de précision. Dans la pratique, on atteint sans difficulté des nombres de Reynolds de 10000 dans le gaz pour des domaines de taille  $256 \times 256$ .

### Nombre de Taylor

Ce nombre est intéressant car il caractérise les écoulements sans être lié à la taille de la boîte de simulation. On a :

$$Ta = \mu \Delta U / \sigma \quad (2.2)$$

Il est relié aux nombres de Weber et de Reynolds par

$$Ta = We / Re \quad (2.3)$$

Aux faibles nombres de Taylor, on voit apparaître clairement les courants parasites dont la vitesse  $u_p$  [2] est donnée d'après (2.9) et (2.3) par

$$u_p \simeq 0.01 \Delta U / Ta \quad (2.4)$$

Aux grands nombres de Taylor, il n'apparaît pas de difficultés intrinsèques si ce n'est que les nombres de Weber minimum auxquels on observe l'instabilité croissent (figure 2.5).

## Nombre de Ohnesorge

Le nombre d'Ohnesorge est défini par le rapport du temps capillaire sur le temps d'amortissement. La fréquence des ondes capillaires est  $\omega_c = 2\pi f = [\sigma/(\rho\ell^3)]^{1/2}$ . La loi de diffusion est du type :  $x^2 = 2\nu t$ , donc le temps d'amortissement peut s'écrire :  $t \approx \frac{\ell^2}{\nu}$ . On construit le nombre d'Ohnesorge :

$$Oh = \frac{t_{\text{capillaire}}}{t_{\text{amortissement}}} \quad (2.5)$$

$$Oh = \frac{\mu}{\sqrt{\rho\sigma\ell}} \quad (2.6)$$

et pour une goutte de rayon  $R$  :

$$Oh = \mu/(\rho\sigma R)^{1/2} \quad (2.7)$$

Ce nombre est relié aux nombres de Weber et de Taylor par

$$Oh = We^{1/2}/Re = (Ta/Re)^{1/2} \quad (2.8)$$

Dans le cas d'expériences de pulvérisation de mélanges eau/air, le nombre de Ohnesorge de l'eau est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Ce nombre est par contre beaucoup plus élevé, de l'ordre de 1 à  $10^{-1}$  pour les moteurs fusée. Avec la représentation utilisée pour la tension capillaire, il est difficile de traiter des situations où on aurait  $Oh \leq 10^{-2}$  [5]. Il apparaît alors des fluctuations spontanées de l'interface et du champ  $C_{i,j}$  dues à des "courants parasites", d'origine numérique et caractérisés par leur vitesse [5]

$$u_p \simeq 0.01 \sigma/\mu \quad (2.9)$$

La méthode semble donc bien adaptée au cas de moteurs fusées mais ne peut pas traiter des mélanges eau/air réels. Pour pouvoir passer des cas tests eau/air il semblerait possible d'augmenter le nombre d'Ohnesorge en baissant le rayon de goutte  $R$ . Cependant ceci nécessiterait une augmentation de la précision du maillage, donc un coût calcul plus élevé.

## Rapport des masses volumiques :

Le rapport  $\beta$  des masses volumiques liquide et gazeuse est :

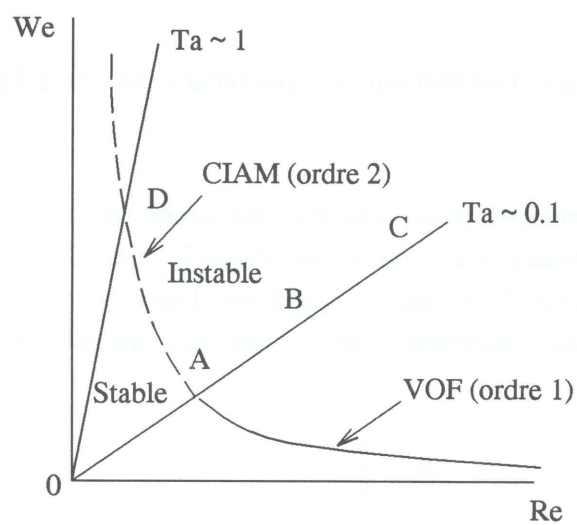


Figure 2.5 : Diagramme de stabilité de l'écoulement en fonction des nombres de Weber et de Reynolds. Ces nombres sont calculés en fonction de la taille de la boîte de calcul. Une succession de boîtes de calcul de taille croissante telles que celles de la figure 2.3 correspondrait aux points successifs  $A$ ,  $B$ ,  $C$  etc.. tous situés sur une même droite  $Ta = Cte$ . Les ordres de grandeur du nombre de Taylor sont tirés des calculs pour  $\beta = 20$ . Lorsque le nombre de Taylor est de l'ordre de l'unité le nombre de Weber est nécessairement grand au seuil d'apparition des gouttes, comme par exemple au point  $D$ .

$$\beta = \frac{\rho_l}{\rho_g}$$

### Rapport de la vitesse tourbillonnaire sur la vitesse relative :

Le rapport  $A$  des vitesses tourbillonnaires et de translation est :

$$A = \frac{U_{tourb}}{\Delta u} = \frac{\Gamma}{\lambda \Delta u}$$

### Rapport de la distance du tourbillon à l'interface et de l'épaisseur de l'interface

Un dernier nombre sans dimension peut avoir une influence sur la perturbation de l'interface initiale : c'est la distance à laquelle est placée le tourbillon dans la phase liquide par rapport à l'épaisseur de la nappe considérée. Dans notre étude nous n'en avons pas tenu compte, il serait intéressant de le faire dans les calculs futurs.

$$d = \frac{x}{h} \tag{2.10}$$

où  $h$  est l'épaisseur de la nappe égale à  $\frac{2L}{3}$  et  $x$  la distance du centre du tourbillon à l'interface :  $\frac{L}{6}$ . La distance  $d$  caractéristique dans notre configuration de calcul est  $1/4$ , ce qui reste dans les ordres de grandeurs donnés par Faeth [37] qui préconise un rapport de  $1/8$ .

#### 2.1.2 Rupture d'interface de type Kelvin-Helmholtz

Nous avons fixé, en premier lieu, une petite perturbation initiale de type Kelvin-Helmholtz. Cette initialisation est linéaire et dépend de l'amplitude initiale donnée aux instabilités. On l'a choisie la plus faible possible de manière à rester dans le cadre de la théorie linéaire et générer une instabilité qui mène à la rupture de l'interface et à la formation de gouttes. Nous présentons un exemple de calcul sur la figure 5. Les deux fluides considérés sont de l'oxygène liquide et de l'hydrogène gazeux ( $\beta = 30$ ). Le maillage est de  $128 \times 128$  et la taille de boîte est  $2.10^{-6}m$ . La différence de vitesse entre les deux milieux est de  $100 m.s^{-1}$  et  $We = 10$ . Nous voyons une langue de LOX se former et une goutte de taille  $0.4L$  est créée. La taille des gouttes est mesurées directement sur les images de fichiers résultats.

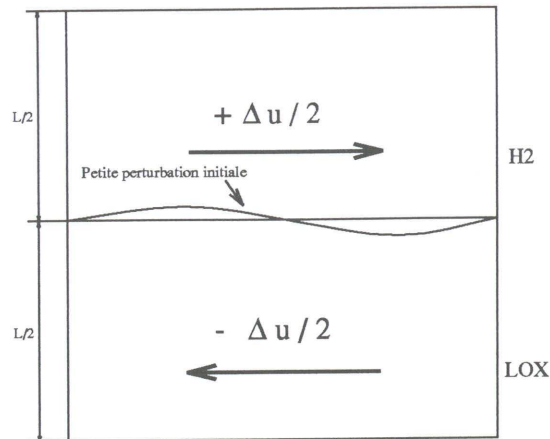


Figure 2.6 : Initialisation de type Kelvin-Helmholtz

### 2.1.3 Rupture d'interface monochromatique

Afin de limiter la dépendance du calcul vis-à-vis des conditions initiales et de la taille du maillage nous avons placé, au centre de la phase liquide, un petit tourbillon (Mayer et Krulle [34], [42]) pour perturber initialement l'interface (figure 2.7).

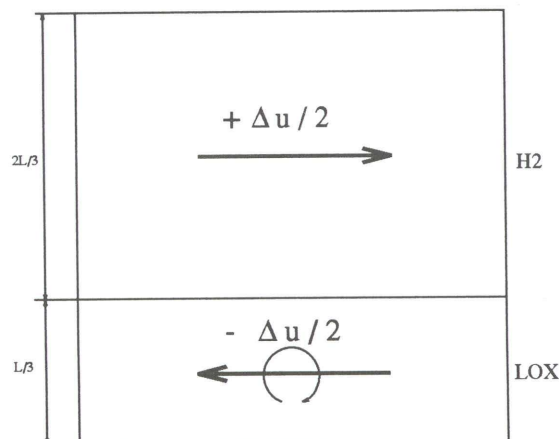


Figure 2.7 : Initialisation avec un tourbillon

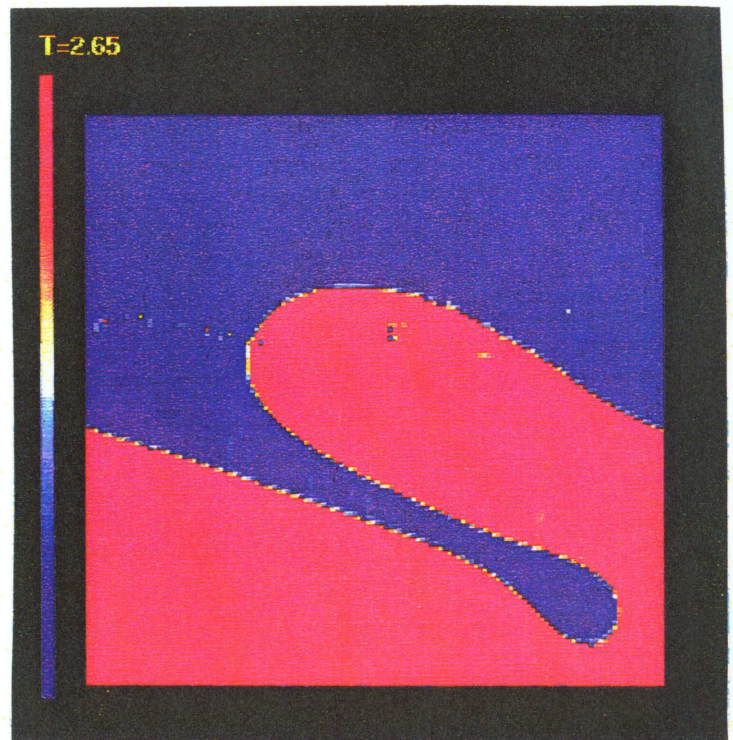
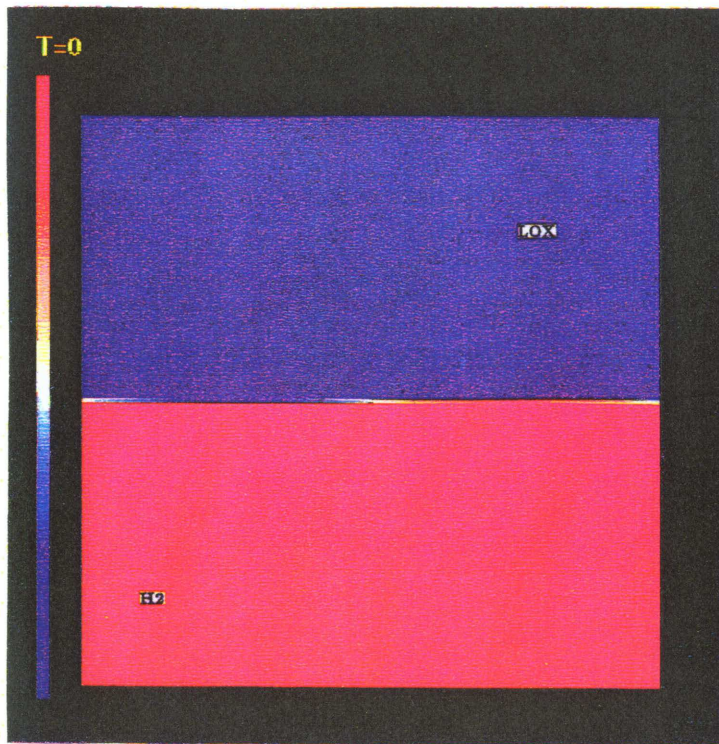
#### Description du calcul

Nous présentons le cas  $We = 200$ ,  $Re = 10^4$ ,  $\beta = 10$ ,  $A = 0.01$  pendant 40000 itérations (figure 2.8). Chaque seconde représente 10000 itérations, le pas de temps est de l'ordre de  $10^{-4}$ s. Le maillage est de  $128 \times 128$  points et la taille de boîte est  $2.10^{-6}$  m. Le tourbillon initial a une taille de  $0.2 \mu m$  (10 mailles). La partie grise correspond à la phase liquide. Nous avons tracé la vorticité qui se crée à l'interface par des traits fins. Nous remarquons qu'une langue liquide se forme au bout d'une seconde. Le développement d'un tourbillon au niveau de l'interface crée l'étirement



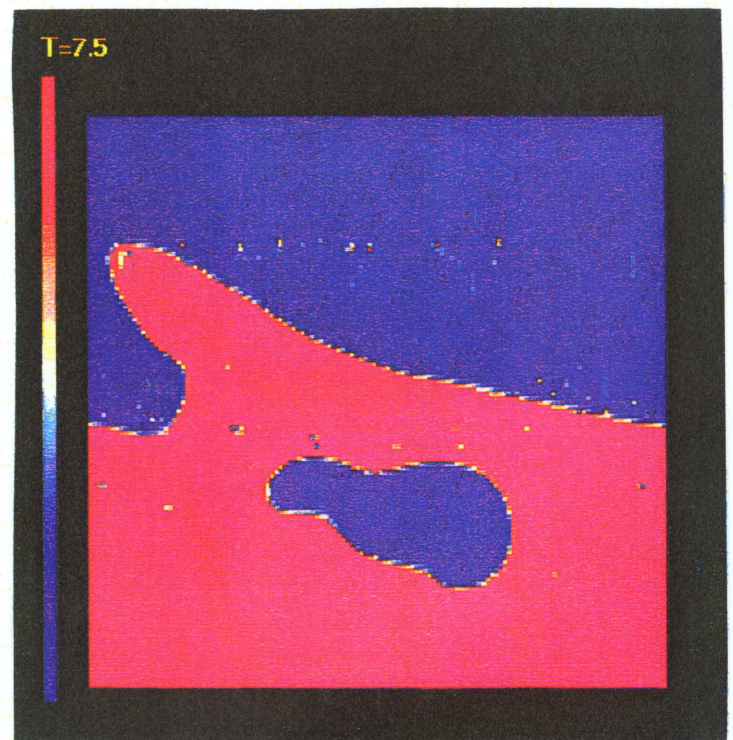


DEFORMATION D'UNE INTERFACE PLANE



MAILLAGE 128\*128

FIGURE 5





puis la rupture de la langue liquide initiale après 2 secondes de temps. Il y a donc formation d'une goutte d'une taille de  $0.12 \mu\text{m}$  ( $L/17$ ) qui se détache nettement de l'interface, alors que d'autres gouttes restent à proximité de la surface ( $t = 3\text{s}$ ). Au bout de 4 secondes, la langue liquide se pulvérise totalement en formant 2 nouvelles gouttes de tailles différentes ( $0.12 \mu\text{m}$  ( $L/17$ ) et  $0.5 \mu\text{m}$  ( $L/4$ )). Nous obtenons donc des gouttes dont la taille est approximativement du même ordre que celle du tourbillon initial.

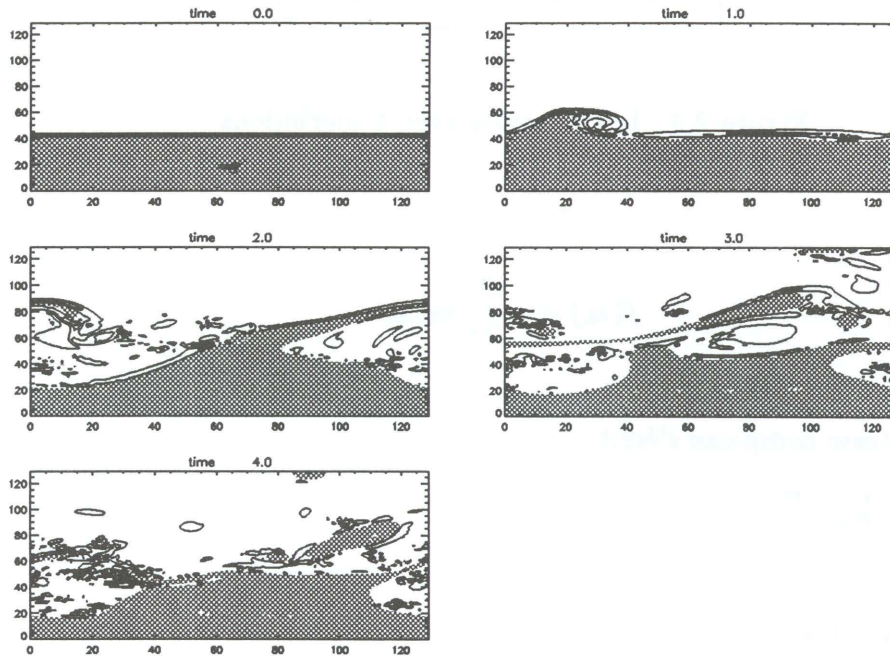


Figure 2.8 :  $We = 200 - Re = 10^4 - \beta = 10 - A = 0.01$

### 2.1.4 Rupture d'interface polychromatique

L'expérience montre que la turbulence à l'intérieur du liquide est responsable de l'initiation de la rupture d'interface [37]. Effectivement la formation de très petits tourbillons dans la phase liquide causés dans la pratique, par l'état de surface de l'injecteur ou par des phénomènes de cavitation, prennent naissance et croissent pour perturber l'interface initiale. C'est pourquoi, nous avons décidé de mettre plusieurs tourbillons dans la phase liquide. Le maillage et la taille initiale des tourbillons sont identiques à celles du cas monochromatique. Le liquide est donc soumis d'une part à une vitesse de translation  $\frac{-\Delta u}{2}$ , d'autre part à la vitesse due à 4 tourbillons. Le gaz est soumis à la vitesse de translation  $\frac{+\Delta u}{2}$  et à la vitesse engendrée par les tourbillons du gaz (figure 2.9).

Soit  $\Gamma$  la circulation de chaque tourbillon  $k$ . Le potentiel de vitesse complexe

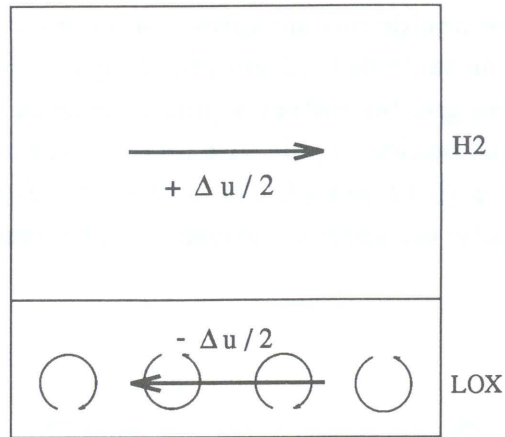


Figure 2.9 : Initialisation avec 4 tourbillons

s'écrit :

$$f(z_k) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log z_k$$

avec  $z_k = r_k e^{i\theta}$

Donc la vitesse complexe s'écrit :

$$f'(z_k) = -\frac{i\Gamma}{2\pi r_k} e^{-i\theta}$$

et

$$f'(z_k) = u_k - iv_k$$

Les composantes de la vitesse due à chaque tourbillon  $k$ , centré en  $(x_{ck}, y_{ck})$ , sont de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = -\frac{\Gamma}{2\pi r_k} \sin \theta \\ v_k = +\frac{\Gamma}{2\pi r_k} \cos \theta \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_k = -\frac{\Gamma(y - y_{ck})}{2\pi r_k^2} \\ v_k = +\frac{\Gamma(x - x_{ck})}{2\pi r_k^2} \end{array} \right.$$

En chaque point, le vecteur vitesse tourbillonnaire  $U_{tourb}$  a pour composantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sum_{k=1}^4 u_k \\ v = \sum_{k=1}^4 v_k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sum_{k=1}^4 -\frac{\Gamma(y - y_{ck})}{2\pi r_k^2} \\ v = \sum_{k=1}^4 \frac{\Gamma(x - x_{ck})}{2\pi r_k^2} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, les particules liquides sont soumises à une vitesse de translation égale à  $-\frac{\Delta u}{2}$ .

Finalement, les composantes de la vitesse totale dans le liquide sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{\Delta u}{2} + \sum_{k=1}^4 -\frac{\Gamma(y - y_{ck})}{2\pi r_k^2} \\ v = \sum_{k=1}^4 \frac{\Gamma(x - x_{ck})}{2\pi r_k^2} \end{array} \right.$$

Les composantes de la vitesse totale dans le gaz sont :

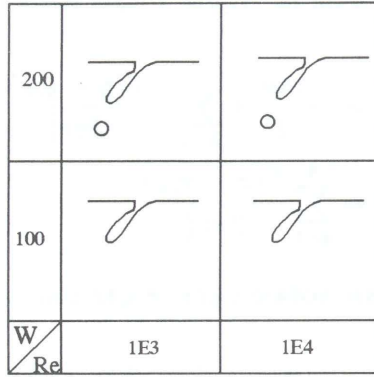
$$\left\{ \begin{array}{l} u = +\frac{\Delta u}{2} + \sum_{k=1}^4 -\frac{\Gamma(y - y_{ck})}{2\pi r_k^2} \\ v = \sum_{k=1}^4 \frac{\Gamma(x - x_{ck})}{2\pi r_k^2} \end{array} \right.$$

Le champ de vitesse dans les phases liquide et gazeuse est composé de la contribution de vitesse de translation ajoutée à la vitesse de rotation du tourbillon.

### 2.1.5 Analyse des résultats polychromatiques

Nous avons étudié 3 cas correspondant à 3 rapports de masses volumiques  $\beta$  différents. Dans chaque cas, nous avons pris 2 valeurs pour  $Re$ ,  $We$  et  $A$ . Afin de pouvoir comparer nos résultats, nous avons utilisé le même maillage ( $128 \times 128$ ), ainsi que le même pas de temps ( $2 \cdot 10^{-4}$  s), pendant un même nombre d'itérations (40 000). Les résultats obtenus sont synthétisés sur les tableaux suivants (figures 2.10, 2.11 et 2.12). Les images des résultats graphiques ont été réalisées avec le logiciel IDL.

$A = 0.01$        $\beta = 10$



$A = 0.1$        $\beta = 10$

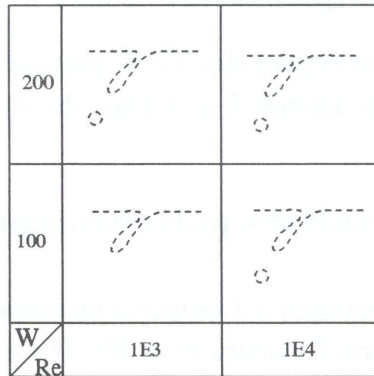


Figure 2.10 :  $\beta = 10$

Cas  $\beta = 20$

Pour le cas où  $\beta = 20$ , nous détaillons le mécanisme de déformation de l'interface liquide/gaz :

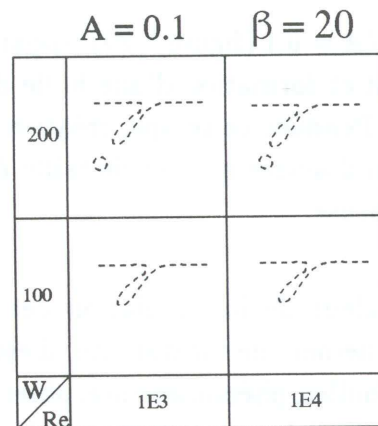
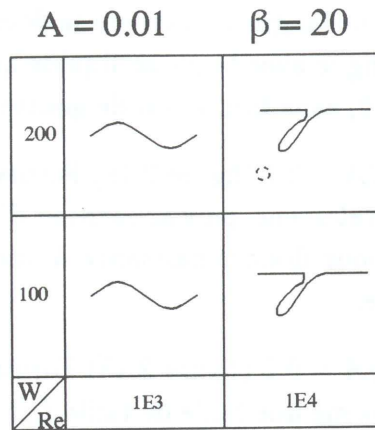


Figure 2.11 :  $\beta = 20$

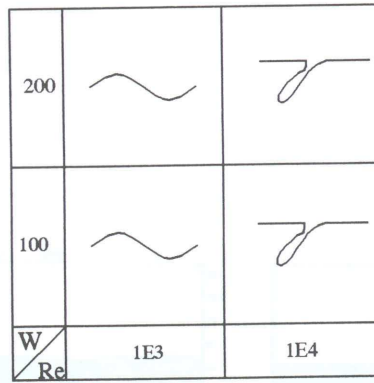
- Cas  $We = 100/Re = 10^3/A = 0.01$  (figure 2.13) Apparition d'une ondulation très légère uniquement, avec vorticité négative dans le gaz, près de la surface.
- Cas  $We = 100/Re = 10^4/A = 0.01$  (figure 2.14) Vorticité positive et négative dans le gaz. Formation d'une langue liquide. Croissance importante de cette langue liquide, puis pincement à sa base qui provoque le détachement d'une grosse bulle (de diamètre  $L/2$ ). Pas de goutte.
- Cas  $We = 200/Re = 10^3/A = 0.01$  (figure 2.15) Identique au cas  $We = 100/Re = 10^3/A = 0.01$ .



- Cas  $We = 200/Re = 10^4/A = 0.01$  (figure 2.16) Vorticité dans le gaz. Formation d'une langue de liquide dont l'angle s'amenuise pour finalement être horizontale. Pas de goutte.
- Cas  $We = 100/Re = 10^3/A = 0.1$  (figure 2.17) La vorticité dans le gaz provoque la formation d'une langue liquide qui se développe. Nous remarquons le recollement de cette langue avec la phase liquide qui donne naissance à une bulle de gaz de taille  $L/10$ , sans formation de goutte.
- Cas  $We = 100/Re = 10^4/A = 0.1$  (figure 2.18) Formation d'une fine langue de liquide qui s'étire horizontalement, puis apparition d'une poche épaisse de gaz qui s'étrangle à sa base pour donner naissance à une bulle ovale de longueur  $L/2$ . Pas encore de goutte.
- Cas  $We = 200/Re = 10^3/A = 0.1$  (figure 2.19) Formation d'une poche de gaz qui se pince à sa base et forme une bulle de taille  $L/5$  qui reste près du plan de symétrie. Pendant ce temps, formation d'une fine langue horizontale de liquide puis d'une petite goutte de taille  $L/10$  à la fin des 40 000 itérations.
- Cas  $We = 200/Re = 10^4/A = 0.1$  (figure 2.20) Apparition d'une zone verticale de gaz, puis étranglement et formation d'une bulle de taille  $L/7$  qui remonte vers le plan de symétrie. Pendant ce temps, création d'une goutte happée par la surface, puis apparition d'autres gouttes de taille  $L/13$  qui s'arrondissent et restent dans la partie gazeuse.

On observe donc que la valeur de la circulation des tourbillons joue un rôle prépondérant quant au déclenchement de l'instabilité. Il est à remarquer que dans le cas  $A = 0.1$  il y a formation de bulles, phénomène non observé lorsque  $A$  est inférieur. De plus, ces bulles ont tendance à mieux entrer dans le liquide que les gouttes dans le gaz. Par ailleurs, afin d'obtenir des gouttes, il est nécessaire de prendre des valeurs de  $We$  et de  $Re$  assez importantes.

$A = 0.01 \quad \beta = 30$



$A = 0.1 \quad \beta = 30$

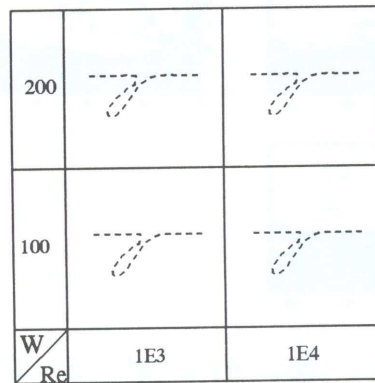


Figure 2.12 :  $\beta = 30$

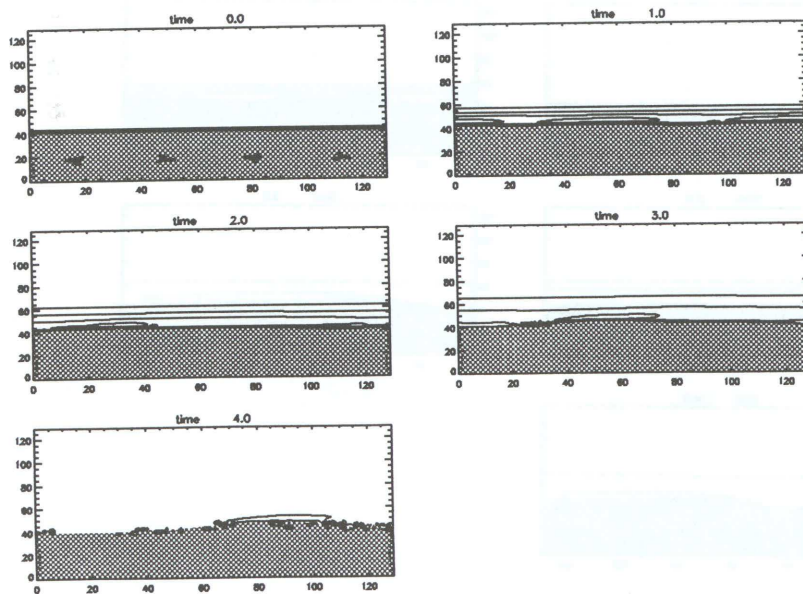


Figure 2.13 :  $We = 100 - Re = 10^3 - \beta = 20 - A = 0.01$

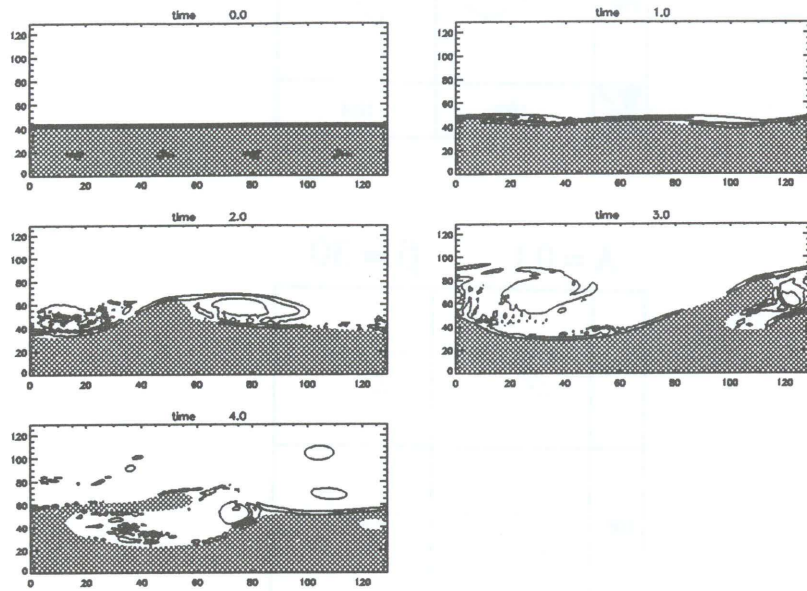


Figure 2.14 :  $We = 100 - Re = 10^4 - \beta = 20 - A = 0.01$

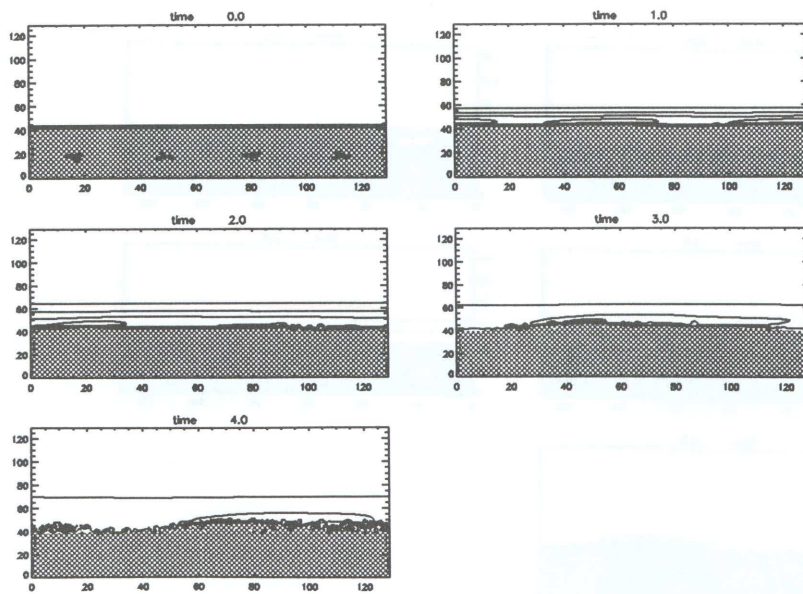


Figure 2.15 :  $We = 200 - Re = 10^3 - \beta = 20 - A = 0.01$

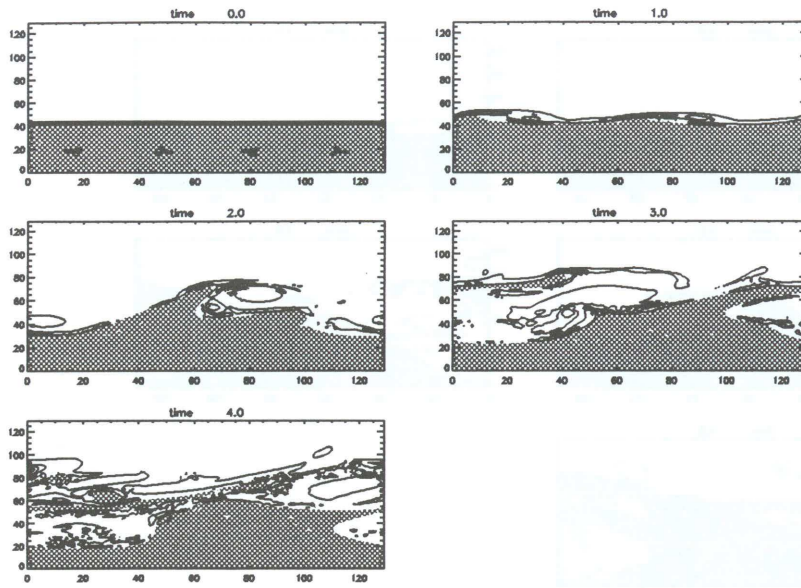


Figure 2.16 :  $We = 200 - Re = 10^4 - \beta = 20 - A = 0.01$

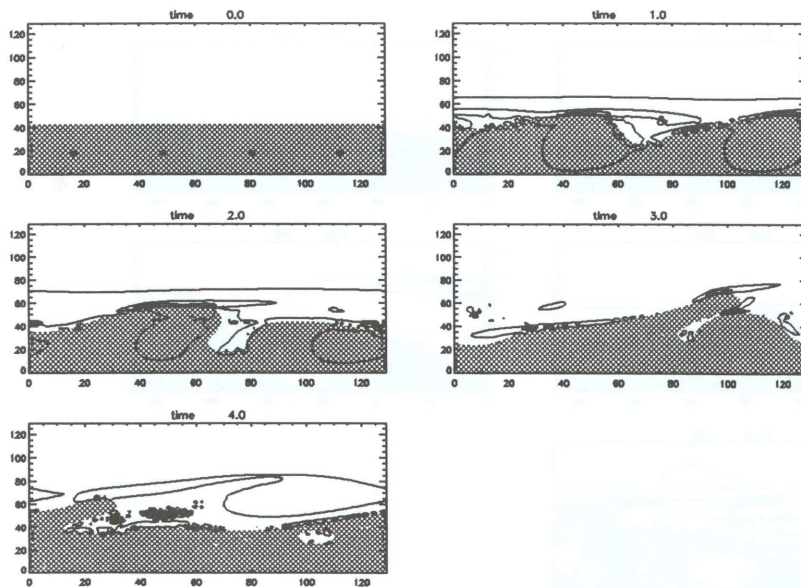


Figure 2.17 :  $We = 100 - Re = 10^3 - \beta = 20 - A = 0.1$

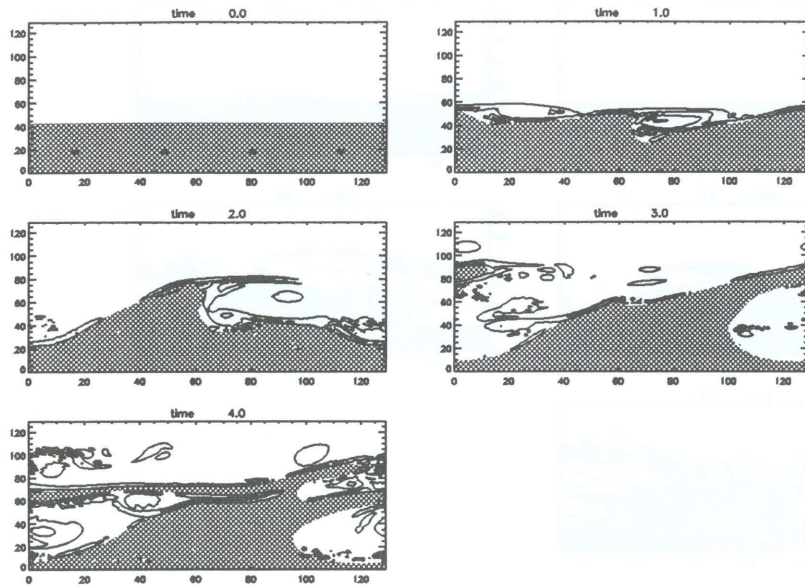


Figure 2.18 :  $We = 100 - Re = 10^4 - \beta = 20 - A = 0.1$

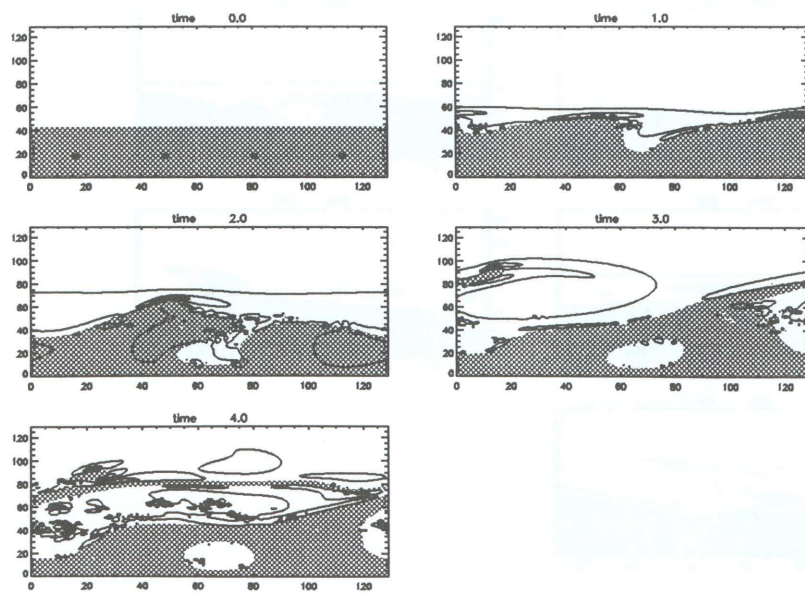


Figure 2.19 :  $We = 200 - Re = 10^3 - \beta = 20 - A = 0.1$

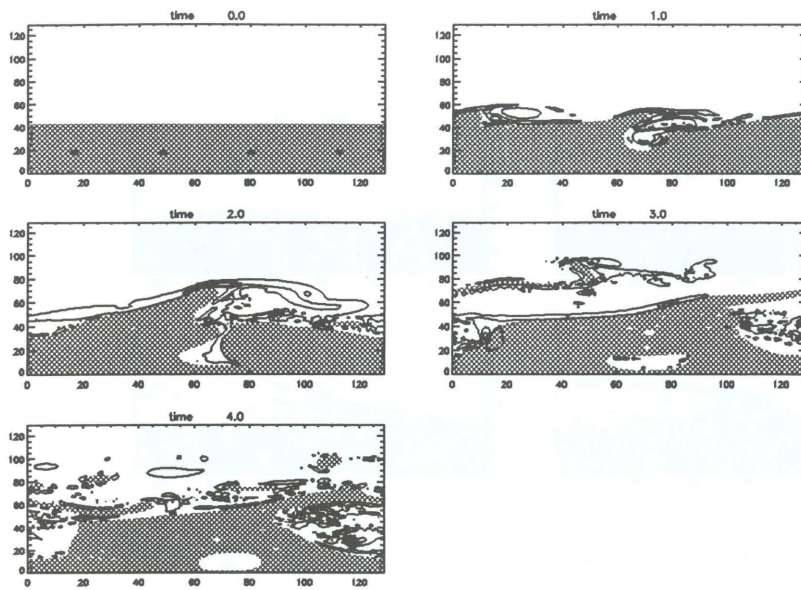


Figure 2.20 :  $We = 200 - Re = 10^4 - \beta = 20 - A = 0.1$

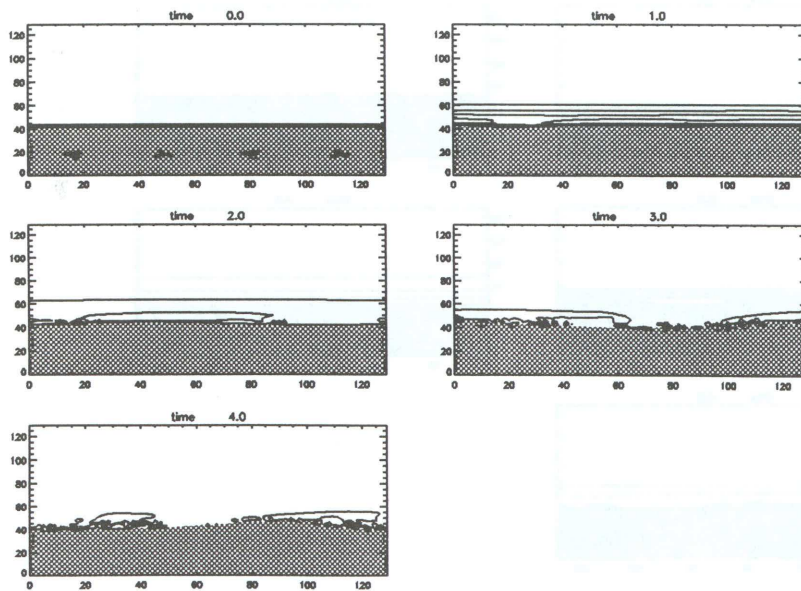


Figure 2.21 :  $We = 100 - Re = 10^3 - \beta = 30 - A = 0.01$

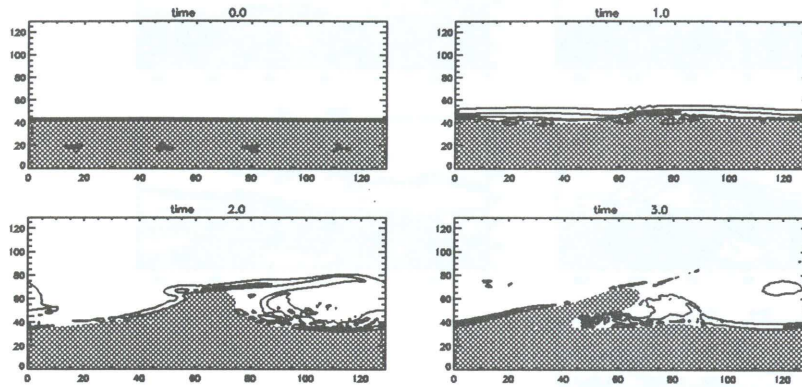


Figure 2.22 :  $We = 100 - Re = 10^4 - \beta = 30 - A = 0.01$

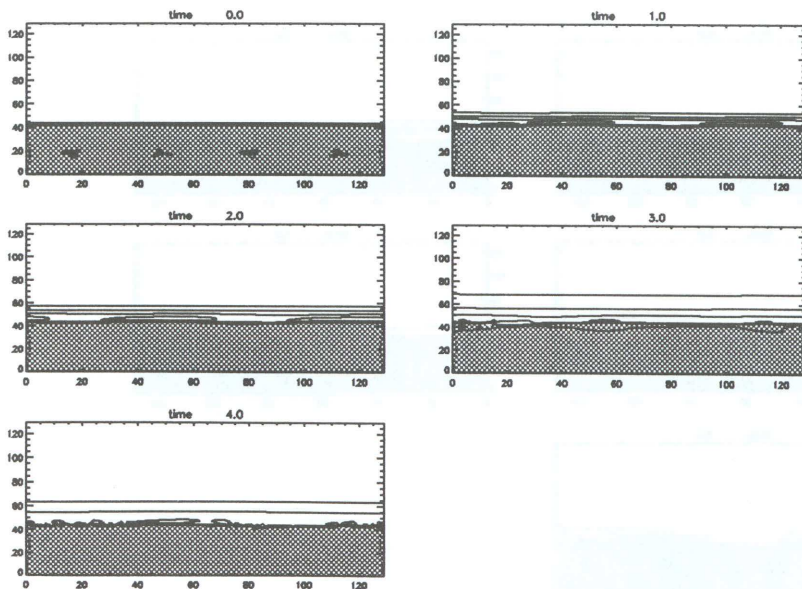


Figure 2.23 :  $We = 200 - Re = 10^3 - \beta = 30 - A = 0.01$

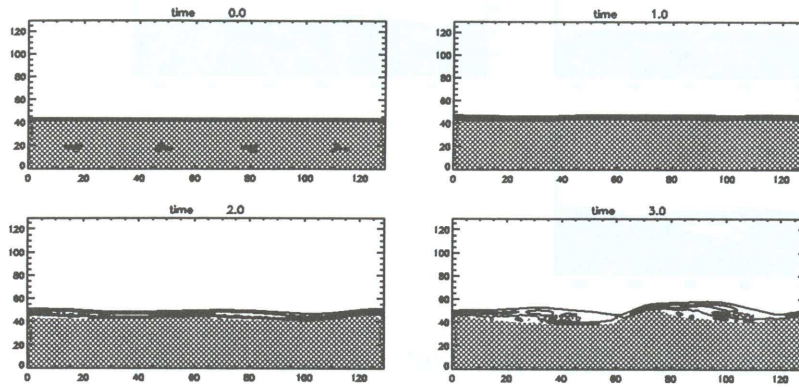


Figure 2.24 :  $We = 200 - Re = 10^4 - \beta = 30 - A = 0.01$

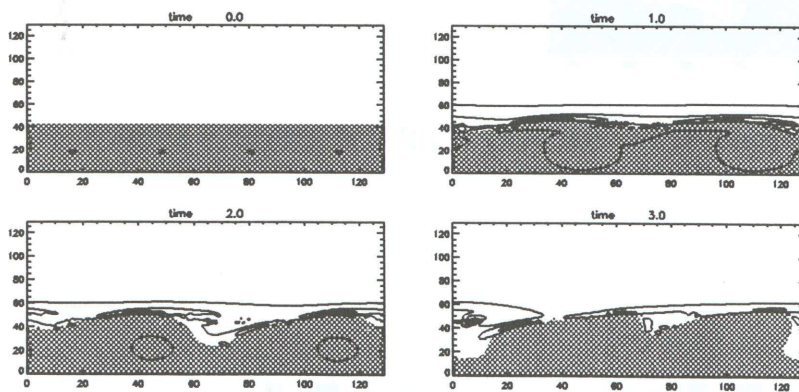


Figure 2.25 :  $We = 100 - Re = 10^3 - \beta = 30 - A = 0.1$



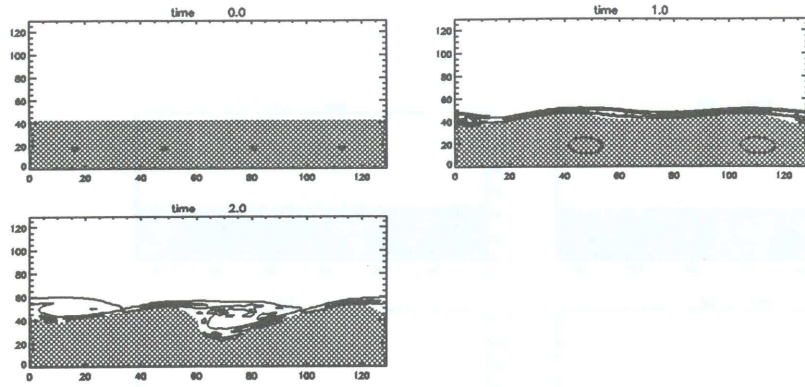


Figure 2.26 :  $We = 100 - Re = 10^4 - \beta = 30 - A = 0.1$

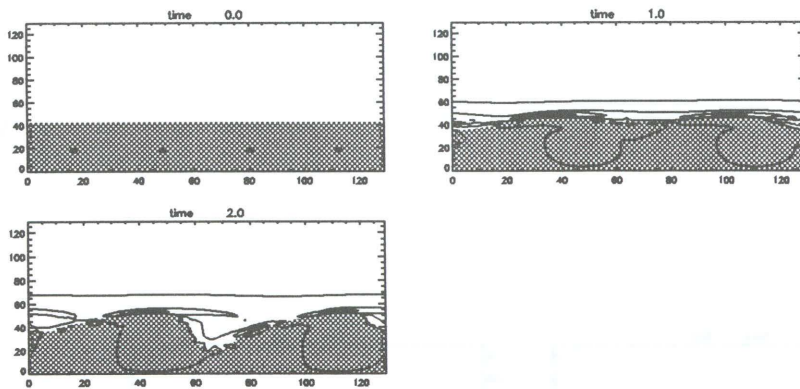


Figure 2.27 :  $We = 200 - Re = 10^3 - \beta = 30 - A = 0.1$

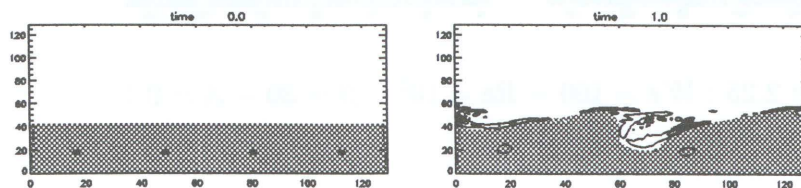


Figure 2.28 :  $We = 200 - Re = 10^4 - \beta = 30 - A = 0.1$

Nous présentons un exemple d'une série de paramètres pour traiter le cas  $We = 200 - Re = 10^4 - \beta = 20 - A = 0.1$  (figure 2.20):

Le maillage est de  $128 \times 128$ , le pas de temps initial est égal à  $2.10^{-4}$ s, le nombre d'itérations est 40000. Nous avons pris les valeurs physiques suivantes pour l'oxygène liquide et l'hydrogène gazeux :

$\sigma = 13.2.10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$ ,  $\mu_l = 16.3.10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ,  $\mu_g = 0.97.10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  et  $\Delta u = 150 \text{ m.s}^{-1}$  et un rapport de masses volumiques  $\frac{\rho_g}{\rho_l} = 1/20$ . Sur la figure (2.20) nous pouvons mesurer la taille de goutte formée : taille =  $L/13$ , soit  $0.15 \mu\text{m}$ , avec pour taille de boîte  $L = 2.10^{-6} \text{ m}$ .

### Scénario qualitatif de l'arrachage

Les simulations effectuées pour de nombreuses valeurs de paramètres mettent en évidence un scénario qualitatif bien défini. Les résultats obtenus de l'étude systématique sont regroupés dans le tableau 2.1. Ce scénario se produit près de la courbe de stabilité marginale de la figure (2.5) et donc dans un certain domaine de valeurs de paramètres que nous décrivons quantitativement ci-dessous. La séquence d'arrachage peut être schématisée par un petit nombre d'étapes.

#### 1. Formation de langue

Cette étape est atteinte lorsque  $We$  et  $Re_G$  sont assez grands. La couche limite décollée s'enroule pour former un tourbillon qui tire une ou deux langues de liquide. On observe assez souvent une langue unique dans la mesure où les deux modulations initiales et les tourbillons correspondants s'apparient assez rapidement.

#### 2. Arrachage de goutte

Cette étape n'est pas toujours atteinte. Si  $We$  et  $Re$  sont grands, on observe la cassure de la langue en plusieurs gouttes. Il semble que ce processus soit aléatoire. En effet, des conditions initiales proches les unes des autres peuvent donner soit un arrachement de goutte, soit le recollement de la langue avec l'interface.

#### 3. Éjection de la goutte

Une goutte séparée du filament peut cependant se recoller à l'interface. Les vitesses de gouttes mesurées paraissent distribuées aléatoirement, avec des composantes verticales positives ou négatives en nombre égal.

L'ensemble de ce scénario qualitatif est bien visible aux faibles nombres de Taylor. Lorsque ce nombre augmente, on observe la formation de filaments de plus en plus allongés qui se rompent plus difficilement. Cette transformation de l'écoulement en

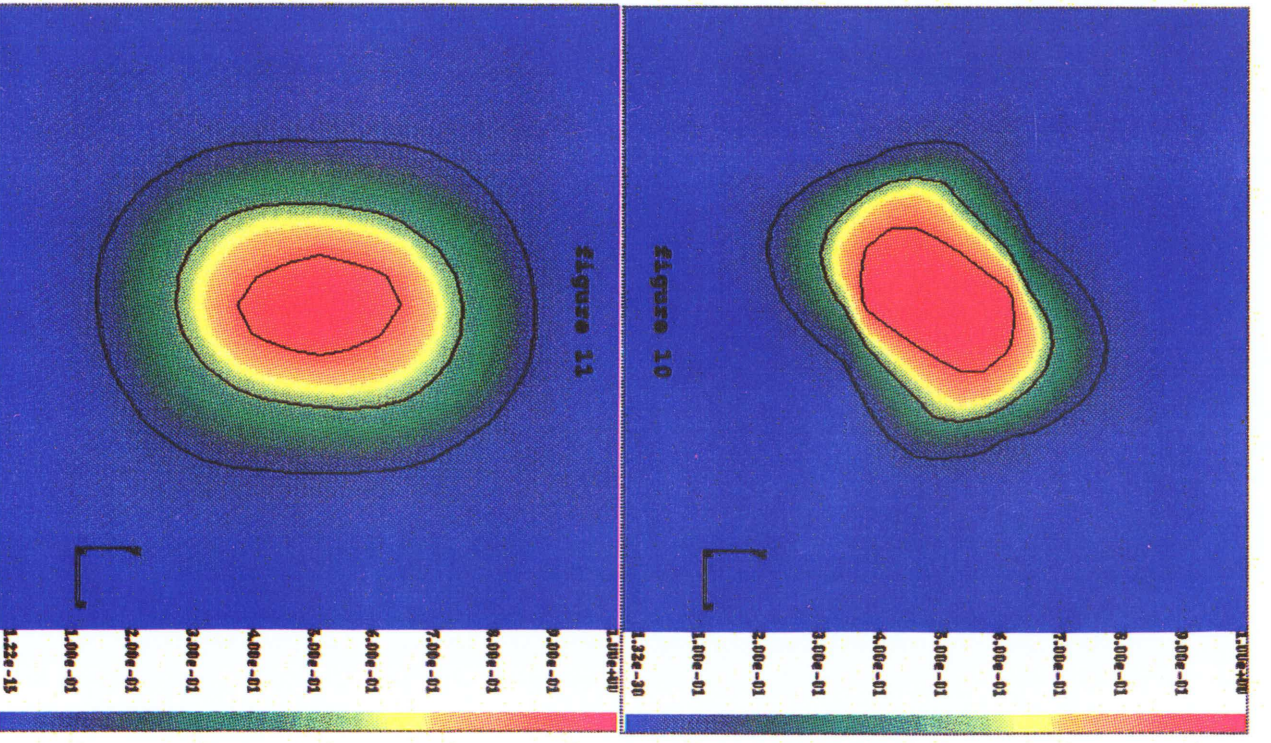
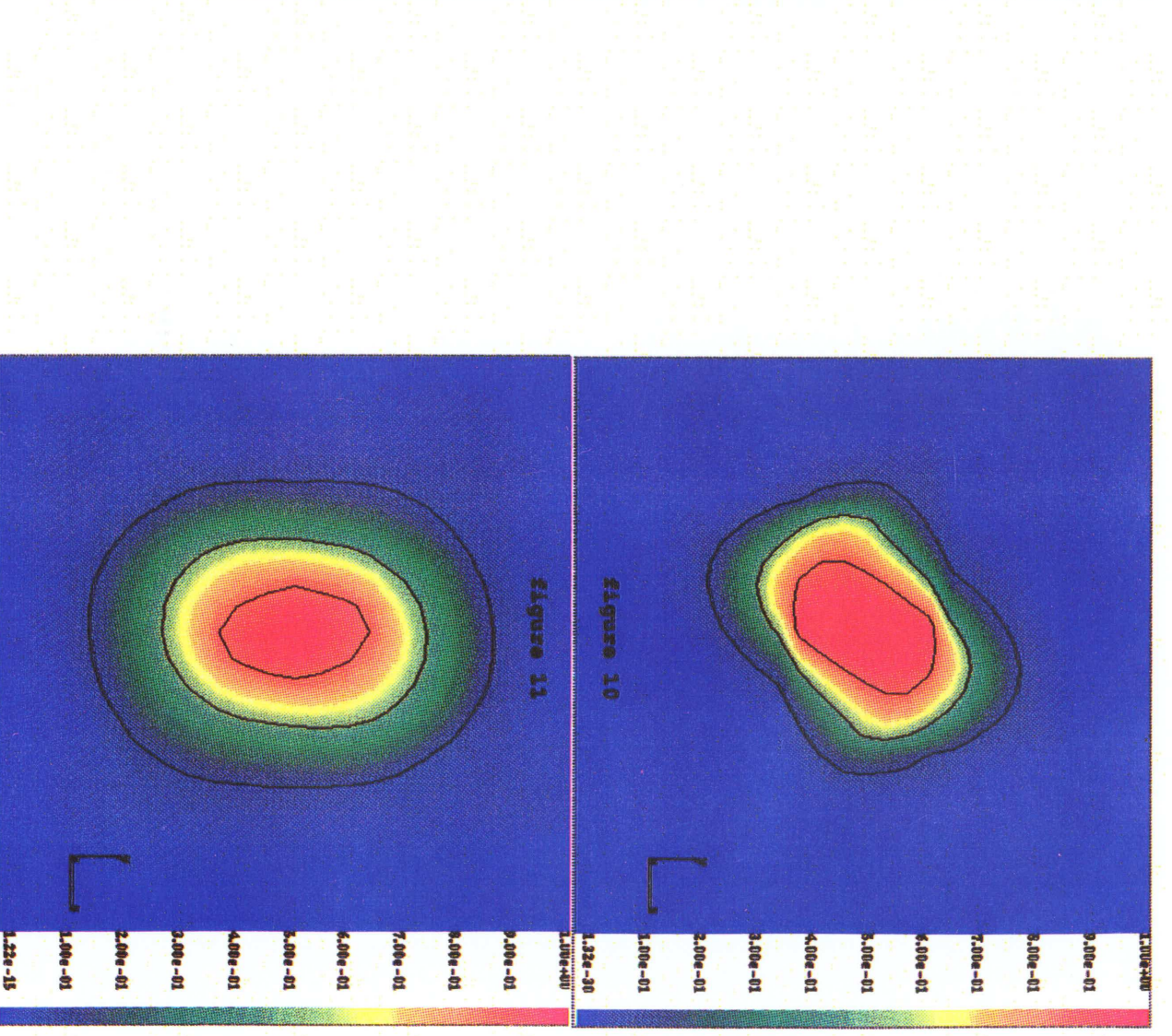
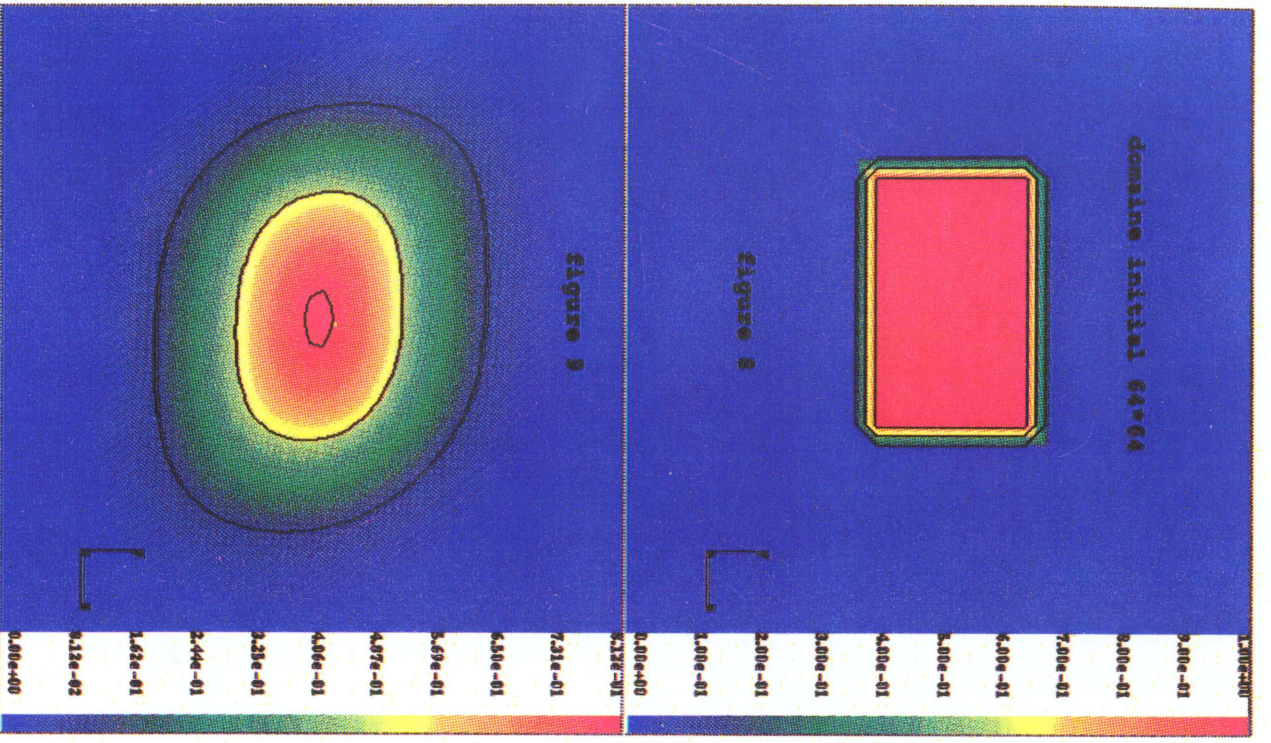
une sorte d'écheveau de filaments a été remarquée expérimentalement par Yule [66]. Notons que la description de ce scénario d'épluchage a été approfondie par la suite par S.Zaleski. Nous avons fait des calculs en prenant deux dimensions de maillages ( $128 \times 128$  et  $256 \times 256$ ), mais la convergence de la méthode VOF, qui n'est pas évidente à mettre en œuvre, n'a pas été faite complètement.

### Analyse de la région de stabilité

Pour chaque simulation nous avons déterminé visuellement si la formation de filaments menait à un arrachage de goutte. Même lorsque les filaments se forment et sont très étirés, ce phénomène n'est pas systématique. Si le nombre de Reynolds n'est pas assez élevé, la turbulence s'amortit progressivement et les filaments se recollent à la couche liquide. Les résultats des calculs sont présentés sur les figures de l'article (voir annexe) :

$\rho_l/\rho_g$	Reg	We	Ta	A	N	Langues fines	gouttes formées	gouttes ejectées
10	$10^3$	200	0.2	0.01	128	?	oui	non
10	$10^4$	10	0.001	0.01	128	non	non	non
10	$10^4$	30	0.003	0.01	128	non	non	non
10	$10^4$	100	0.01	0.01	128	oui	non	non
10	$10^4$	200	0.02	0.01	128	oui	oui	oui
10	$10^3$	200	0.2	$10^{-4}$	256	non	non	non
10	$10^4$	200	0.02	$10^{-4}$	256	oui	oui	oui
10	$10^3$	200	0.2	0.01	256	oui	non	non
10	$10^4$	200	0.02	0.01	256	oui	oui	non
10	$10^4$	200	0.02	0.02	256	oui	oui	oui
20	$10^3$	100	0.1	0.01	128	non	non	non
20	$10^4$	100	0.01	0.01	128	oui	non	non
20	$10^3$	200	0.2	0.01	128	non	non	non
20	$10^4$	200	0.02	0.01	128	oui	oui	oui
20	$10^3$	100	0.1	0.1	128	oui	non	non
20	$10^4$	100	0.01	0.1	128	oui	non	non
20	$10^3$	200	0.2	0.1	128	oui	oui	oui
20	$10^4$	200	0.02	0.1	128	oui	oui	oui
30	$10^4$	1000	0.1	$10^{-4}$	128	oui	oui	non

Tableau 2.1 : Étude systématique de la formation de gouttes





## 2.2 Tests de la méthode VOF compressible

Après avoir effectué des simulations numériques sur la déformation de nappes liquides, afin de définir un scénario d'arrachage de goutte, en utilisant comme technique de suivi d'interface la méthode VOF pour des fluides incompressibles, nous avons développé une méthode VOF compressible. Nous l'avons validée en faisant deux calculs différents de transport de la quantité  $\rho C$ . Ceci nous a permis de vérifier l'efficacité des schémas amont et aval présentés dans le chapitre précédent. Nous avons choisi de suivre un petit domaine de fluide 1 dans un écoulement (fluide 2) de vitesse de translation uniforme, puis de rotation uniforme. Nous avons fixé des conditions de périodicité aux limites du domaine (figure 2.29) :

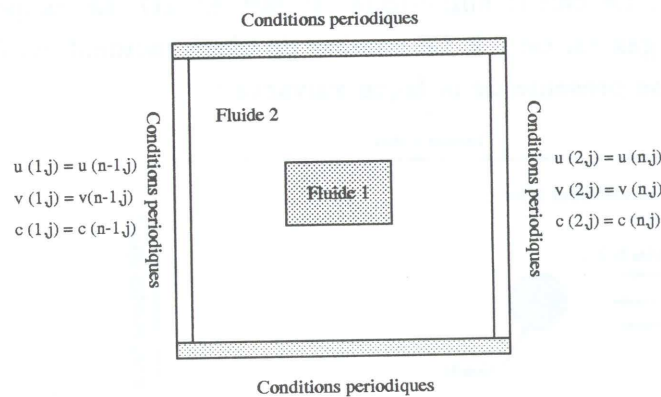


Figure 2.29 : Conditions aux limites du problème

La taille du domaine est de  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  et le maillage est  $64 \times 64$  points ( $\Delta x = \Delta y = 0.016$ ). Le rectangle initial a pour longueur 2 cm et pour largeur 1 cm (figure 8). On a fixé  $\rho C = 1$  dans le fluide 1 et  $\rho C = 0$  dans le fluide 2. Pour le premier test, l'écoulement a pour champ de vitesse  $(u, v) = (1, -1)$ . Nous avons effectué une translation suivant la diagonale du domaine de calcul pendant 700 itérations (diagonale complète). Le pas de temps est de  $2 \cdot 10^{-4}$  s. Sur la figure 9, nous remarquons que le domaine de fluide 1 se déplace suivant la vitesse de l'écoulement. On note une diffusion du domaine initial, mais la conservation de la masse est totalement respectée. Pour le second cas test nous avons effectué une rotation du pavé initial (sur une demi-tour, soit 400 itérations). Le champ de vitesse utilisé est du type  $(u, v) = (-y, x)$ . La rotation du domaine initial s'effectue bien, malgré une diffusion de l'interface (figures 10 et 11). La diffusion des résultats est due au schéma utilisé et l'on peut limiter ce problème en faisant varier le coefficient  $\alpha$  de la méthode VOF qui permet de rendre le schéma plus anti-diffusif. Cependant malgré cette limitation nous avons une perte d'information et une diffusion excessive du domaine initial. Ce genre de problème a aussi été rencontré par B.Lafaurie [65]. Cependant la conservation de la masse est tout à fait correcte, puisque la fonction couleur varie de  $[0 + \varepsilon, 1]$ , avec  $\varepsilon = 1.22 \cdot 10^{-15}$ . L'erreur est négligeable. Ce schéma VOF compressible est couplé par la suite avec une méthode de Mac Cormack permettant de traiter des

écoulements compressibles. Ceci est fait pour localiser et suivre une frontière entre deux fluides compressibles de manière à y appliquer les forces interfaciales avec le formalisme CSF.

## 2.3 Test de la méthode Mac Cormack

Avant d'intégrer la méthode VOF compressible au schéma de Mac Cormack, nous présentons quelques résultats obtenus avec la méthode de Mac Cormack seule. Afin de tester cette méthode, couplée avec un schéma TVD, nous avons effectué un cas de validation sur une interaction entre deux gaz. Une goutte de gaz lourd est placée dans un tube à choc. Le calcul numérique est fait en 2D. Le rapport de masse volumique entre les 2 gaz est de 1.2. Le nombre de Mach incident est égal à 2.1. La configuration initiale se présente de la façon suivante :

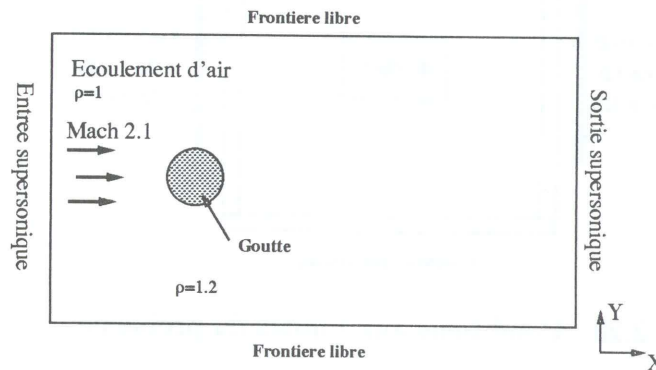


Figure 2.30 : Interaction gaz/gaz – Configuration initiale

Le domaine initial de calcul a pour dimension  $10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  et le nombre de points est de  $100 \times 50$ . La pression dans les deux gaz est de  $1.10^5 \text{ Pa}$ , la température est de  $350 \text{ K}$ . La goutte de gaz a une vitesse initiale nulle, alors que l'écoulement d'air a une vitesse initiale horizontale de  $780 \text{ m.s}^{-1}$ . Le calcul est fait sur 1000 itérations avec un pas de temps de l'ordre de  $10^{-7} \text{ s}$ .

Sur la figure (14), nous voyons une onde de pression courbe se former en amont de la goutte, avec un point d'arrêt juste devant la phase de gaz lourd et une zone de dépression à l'arrière. Le champ de vitesse  $v$  est parfaitement symétrique autour de la goutte. On remarque aussi que les champs scalaires  $C_1$  et  $C_2$  sont complémentaires : la conservation de la masse est totalement respectée ( $C_1 + C_2 = 1$ ). Au passage de l'onde de choc, la goutte initiale se sépare en 2 lobes symétriques animés d'un mouvement de rotation centripète (figure 15). Nous avons schématisé le processus de rupture de la goutte sur la figure 2.31. Ces résultats sont comparables à ceux issus des expériences faites par J.F. Haas [20], [41] et J.W. Jacobs [69]. La méthode de Mac Cormack, avec un limiteur de flux TVD est tout à fait appropriée pour étudier des écoulements compressibles, nous allons donc la coupler aux méthodes

VOF compressible et Marker And Cell décrites précédemment en y ajoutant la technique CSF pour prendre en compte les efforts de tension de surface.

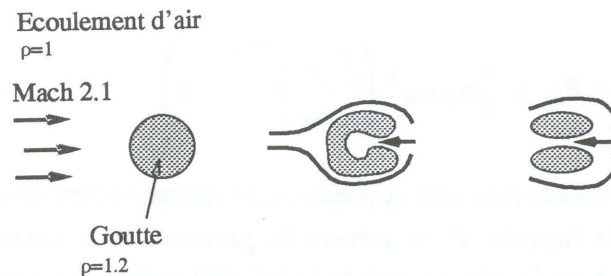


Figure 2.31 : Processus de rupture

## 2.4 Test du couplage compressible/incompressible

Dans cette section nous couplons les différentes méthodes étudiées et validées précédemment. Ce couplage a été réalisé pour analyser les phénomènes qui régissent la pulvérisation d'un jet liquide se trouvant dans une zone de recirculation, en aval d'une marche descendante. Le jet est injecté dans un écoulement gazeux supersonique. Ce calcul est fait dans le cadre d'un contrat avec la Direction des Constructions Navales de Toulon et SIMULOG.

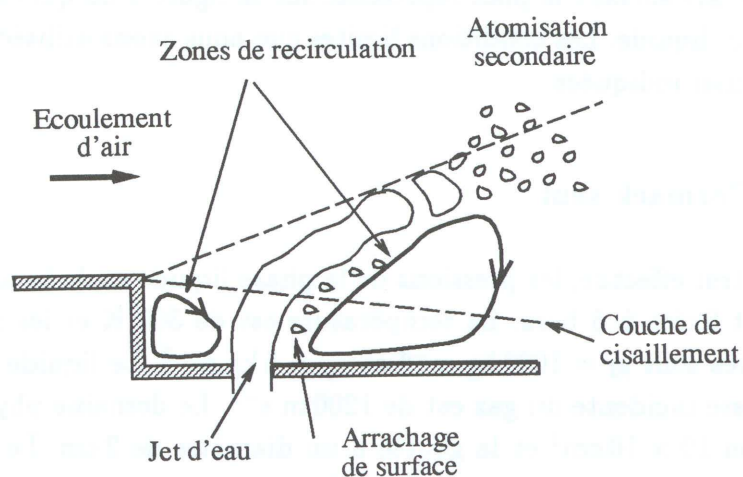


Figure 2.32 : Jet derrière une marche descendante – Problème global

Afin de suivre la déformation du jet liquide, nous avons choisi d'utiliser la méthode de suivi d'interface VOF compressible. La tension de surface est calculée à



l'aide de la méthode CSF. Le calcul du champ de vitesse dans le liquide est fait avec un schéma de type Marker And Cell et la pression est soit calculée avec l'équation de Tait 2.11, soit prise constante dans la phase liquide. L'équation de Tait est la suivante :

$$P - P_{\infty} = \frac{1}{7} \rho_{\infty} c_{\infty}^2 \left( \left( \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \right)^{7.15} - 1 \right) \quad (2.11)$$

Où  $P_{\infty}$ ,  $\rho_{\infty}$  et  $c_{\infty}$  sont respectivement la pression, la masse volumique et la vitesse du son de référence pour le liquide.  $P$  et  $\rho$  étant la pression et la masse volumique calculées dans le liquide. Dans le gaz on utilise la loi d'état des gaz parfaits :

$$P = \rho r T \quad (2.12)$$

Pour traiter les mailles mixtes nous faisons un test sur le fraction volumique  $C$ . Si  $C < 0.5$  nous supposons que la maille contient du liquide, l'équation de Tait est alors utilisée pour calculer la pression. Dans le cas contraire, si  $C > 0.5$ , nous considérons que la maille est gazeuse et l'on calcule la pression avec l'équation des gaz parfaits. Pour déterminer les vitesses et la pression dans l'écoulement gazeux nous avons choisi un schéma Mac Cormack, seul d'abord, puis couplé à un limiteur de flux de type TVD ensuite. Les vitesses obtenues avec le schéma incompressible sont interpolées pour obtenir les valeurs de  $u$  et  $v$  sur les noeuds du maillage de manière à correspondre à la configuration compressible. On a simplifié le problème global de la manière suivante : en premier lieu, nous n'avons pas tenu compte des effets tridimensionnels, qui peuvent être négligés en première approximation. Les calculs sont donc 2D suivant le plan représenté sur la figure 2.33 qui est une coupe transversale du jet liquide. Les conditions limites que nous avons utilisées pour notre cas test y sont aussi indiquées.

### Schéma Mac Cormack seul

Pour le premier test effectué, les pressions de la phase liquide et de la phase gazeuse sont initialement fixées à 5 bars. La température est de 300 K et les masses volumiques respectives sont  $\rho_l = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_g = 5 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le liquide est au repos alors que la vitesse incidente du gaz est de  $1200 \text{ m.s}^{-1}$ . Le domaine physique étudié a pour dimension  $10 \times 10 \text{ cm}^2$  et la goutte a un diamètre de 2 cm. Le maillage est de  $100 \times 100$  et le pas de temps  $1.10^{-7} \text{ s}$ . Nous avons choisi de fixer la pression constante dans le liquide. Cependant la pression au point d'arrêt, devant le jet, peut atteindre plusieurs dizaines de bars. Le nombre de Mach de l'écoulement est de 3.2.

Ce premier calcul présente des problèmes d'instabilités au niveau de l'interface liquide/gaz. Sur les figures (12) et (13) sont représentés le champ de pression et le

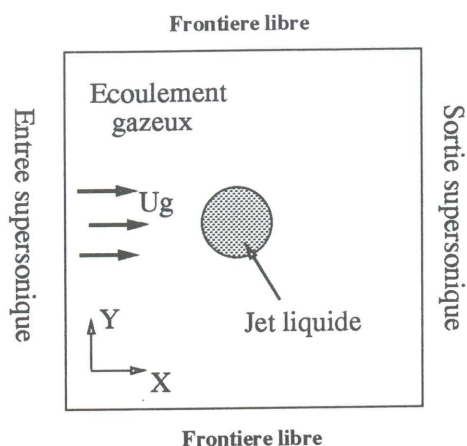


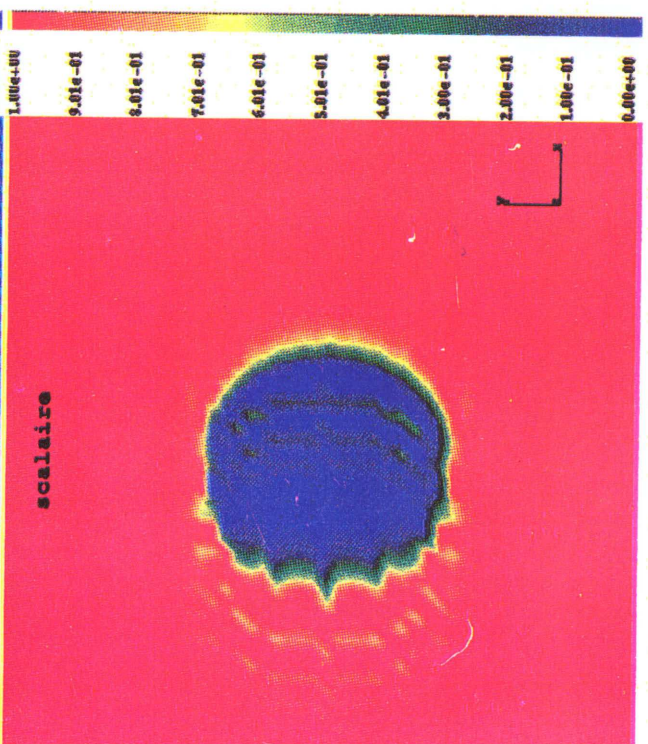
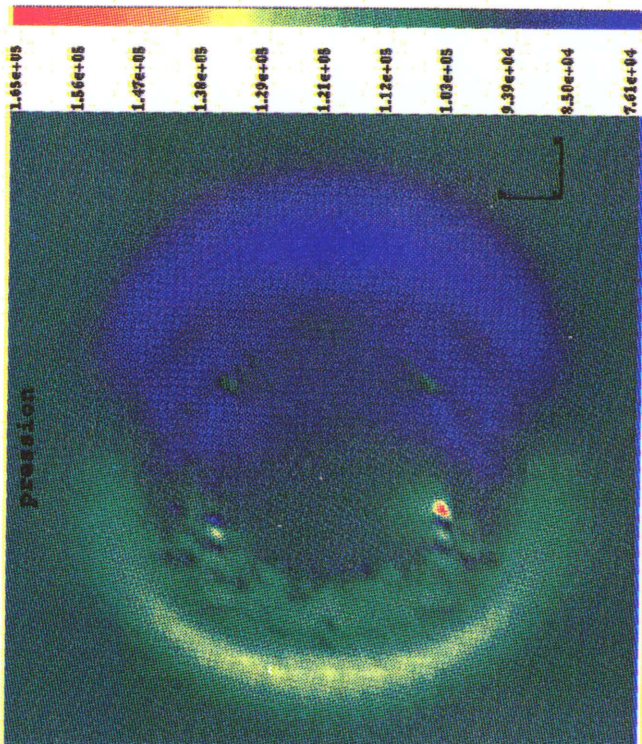
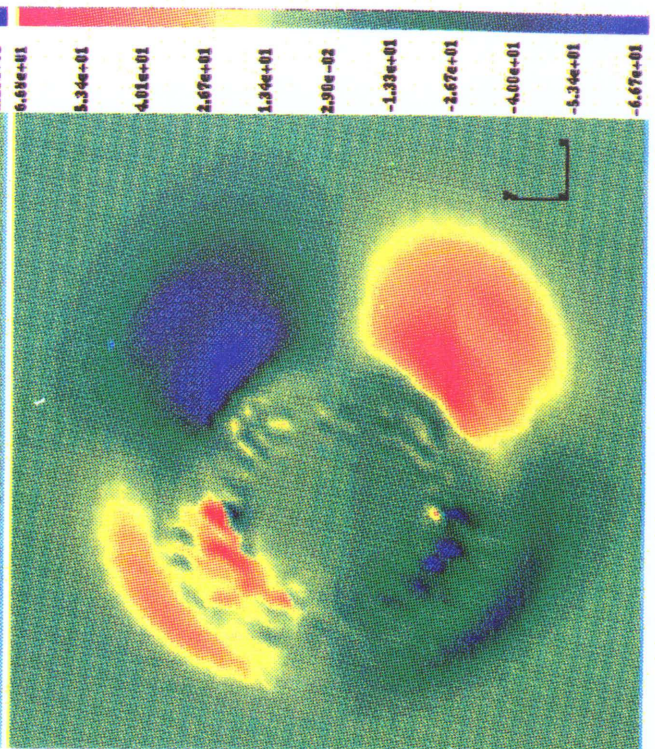
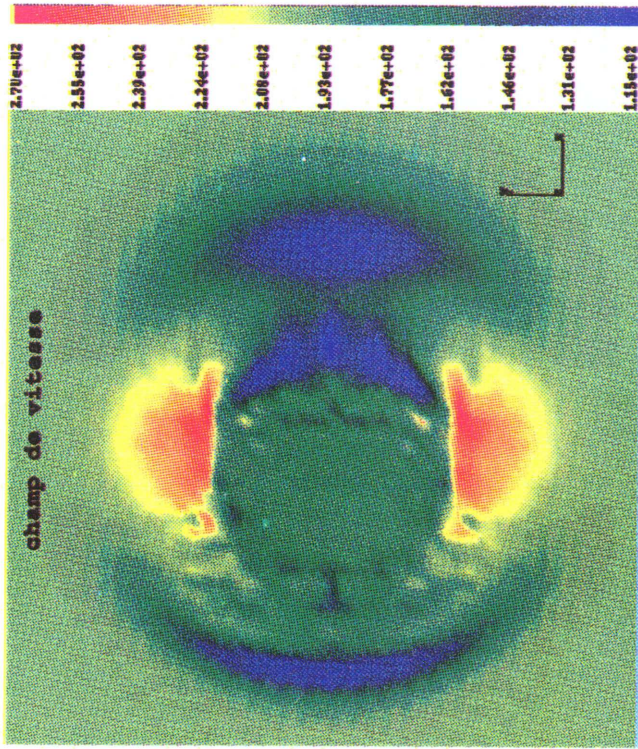
Figure 2.33 : Coupe transversale du jet – Configuration de calcul

champ de vitesse. Nous voyons la formation d'une zone de surpression à l'avant de la goutte et une zone de dépression à l'arrière. Cependant des problèmes de pression négative sont rencontrés. Ils sont causés par l'instabilité du schéma Mac Cormack en présence de forts gradients, comme c'est le cas dans notre configuration, notamment au niveau des masses volumiques et des vitesses. Pour tenter d'éviter ces problèmes, nous avons couplé la méthode Mac Cormack avec un limiteur de flux TVD.

### Schéma Mac Cormack avec TVD

Pour ce second cas test les pressions du liquide et du gaz sont initialisées à 1 bar, la vitesse de l'écoulement gazeux est de  $200 \text{ m.s}^{-1}$ , la goutte est au repos et la température de  $300 \text{ K}$ . Le rapport des masses volumiques est fixé à 10 et le domaine de calcul est identique à celui du calcul précédent. Sur la figure (16), on a représenté la fonction couleur qui donne la déformation de l'interface sous l'effet de l'écoulement incident. La goutte étant initialement ronde, nous voyons un aplatissement du front amont du liquide. La conservation de la masse est exacte :  $C \in [0, 1]$ . Sur les figures des champs de vitesse  $u$  et  $v$ , on constate que la goutte s'est accélérée sous l'effet de l'écoulement gazeux et que l'écoulement ressemble fortement à celui autour d'un cylindre. Une onde de pression apparaît à l'avant de la goutte, mais la pression augmente fortement à différents points de l'interface liquide/gaz. En fait avec les valeurs de pression, température et vitesse que nous avons prises, seuls les cas où le rapport des masses volumiques est au maximum égal à 10 donnent un résultat satisfaisant. Les calculs que nous avons passés avec des gradients de masses volumiques supérieurs à 10 présentent des instabilités interfaciales fortes malgré l'utilisation d'un limiteur de flux de type TVD.







## 2.5 Conclusion et Perspectives

Nous avons étudié la déformation d'interfaces planes entre deux fluides incompressibles à l'aide du logiciel SURFER, développé par S. Zaleski. Ce logiciel met en œuvre un schéma de suivi d'interface entre deux fluides incompressibles, une méthode de calcul des efforts de tension de surface (CSS) s'appuyant sur l'information issue du VOF et un algorithme aux différences finies pour résoudre le système des équations de Navier–Stokes incompressibles dans chacun des deux milieux. Il nous a permis de dégager les grandes lignes de la formation de gouttes dans une configuration de calcul particulière : interface séparant un gaz ( $H_2$ ) et un liquide (LOX). Nous avons initié la déformation de la surface par une perturbation linéaire puis par un ou plusieurs petits tourbillons et regardé l'influence des paramètres caractérisant l'écoulement, exprimés à travers des nombres sans dimensions, tels que le nombre de Reynolds, de Weber, de Taylor ou encore le rapport des masses volumiques du gaz et du liquide. Une application pratique de ces calculs réside dans les mécanismes de pulvérisation du LOX en sortie d'injecteur.

L'analyse des résultats pour des perturbations monochromatiques et polychromatiques met en évidence des plages de valeurs de ces paramètres caractéristiques pour lesquelles il y a formation de gouttes. Conformément à ce qui était attendu, la pulvérisation se produit lorsque les nombres de Reynolds et de Weber sont suffisamment grands. En effet, pour  $\beta = 10$  nous obtenons des gouttes à  $We = 200$  pour des  $Re$  de  $10^3$  et  $10^4$ , ceci pour les deux amplitudes  $A$  considérées. Dans le cas  $\beta = 20$ , il y a pulvérisation à  $We = 200$  pour les deux valeurs de  $Re$ , lorsque l'amplitude est de 0.1. Par contre, lorsque  $A = 0.01$ , des gouttes sont obtenues uniquement pour  $Re = 10^4$ . Pour  $\beta = 30$ , on ne constate pas de pulvérisation. Il est donc nécessaire que les tourbillons à l'instant initial aient une amplitude assez grande pour que l'instabilité se développe. Enfin, on observe que lorsque les masses volumiques respectives du liquide et du gaz sont trop différentes, l'instabilité ne se développe pas suffisamment pour aboutir à la pulvérisation.

L'étude confirme que la théorie de stabilité linéaire ne permet de prédire que partiellement les longueurs d'ondes pour lesquelles l'instabilité se développe le plus rapidement. Les nombres de Reynolds et de Taylor jouent un rôle important. Nous avons remarqué au cours de cette étude que lorsque  $Re$  est faible, les prédictions de calcul sont limitées par les conditions initiales à imposer sur l'écoulement. C'est-à-dire que, dans un tel cas, pour que des instabilités apparaissent, il faut augmenter l'amplitude  $A$  des tourbillons, ce qui tend à éloigner les calculs des hypothèses de la théorie linéaire.

L'étude présentée est encore incomplète puisque nous avons travaillé avec l'hypothèse que les résultats ne dépendent pas de la taille de la boîte de simulation. Cependant, cette conjecture n'a pas été complètement explorée. En particulier, les conditions initiales n'ont pas été modifiées avec l'accroissement des Weber et Reynolds

de boîte. Dans une prochaine étape il serait intéressant de superposer un plus grand nombre de longueurs d'ondes initiales et d'observer leur développement.

Un nombre sans dimension n'a pas été pris en compte dans nos calculs, le rapport de la distance entre le centre du tourbillon et l'interface sur l'épaisseur de l'interface qui semble avoir pourtant une influence sur la formation des instabilités. Nous pouvons aussi noter que pour ce type de simulations 2D, la turbulence possède une cascade inverse : les tourbillons ont tendance à s'apparier pour en former de plus gros. Ceci tend à la formation, au moins dans une première étape, de très grosses structures. Il serait intéressant de voir si les simulations 3D permettent d'éviter cet écueil et de donner des résultats plus précis.

Nous avons pu réaliser des calculs de développement et de rupture d'interface. Ils nous ont permis d'analyser les mécanismes de formation de langues liquides et de gouttes, de mesurer la taille et le nombre des structures formées. Ces résultats concernent des fluides incompressibles et restent réalistes pour des rapports de masse volumique de l'ordre de 30.

Un de nos apports a été de modifier le formalisme de la méthode VOF pour traiter les fluides compressibles sur des maillages cartésiens. Les tests montrent que lors des calculs la conservation de la masse est correctement conservée. Cependant le déplacement de l'interface crée de la diffusion qu'il est difficile à gérer. Ceci ne semble pas être un handicap majeur pour envisager le couplage avec une méthode telle que celle de Mac Cormack, en y ajoutant un limiteur de flux de type TVD pour éliminer la diffusion numérique existante.

La méthode de Mac Cormack a été choisie pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans un fluide compressible, car elle est bien adaptée à ce type de calcul. Nous l'avons testée sur l'interaction d'un écoulement d'air supersonique avec une phase gazeuse plus dense. Les résultats permettent d'étudier les différents phénomènes qui interviennent : formation d'un choc localisé en amont de la goutte, rupture de cette dernière en deux lobes symétriques. Le seul inconvénient réside dans la limitation sur le rapport de masse volumique entre les deux fluides. En effet les résultats restent viables uniquement pour  $\beta$  ne dépassant pas 10.

Nous avons couplé par la suite le schéma VOF compressible, la méthode CSF pour le calcul de tension superficielle qui a été reprogrammée pour s'appliquer à la méthode compressible Mac Cormack avec ou sans TVD. Un schéma de type Marker And Cell est utilisé pour traiter le fluide incompressible. Dans la configuration numérique qui nous intéresse : écoulement gazeux supersonique déformant une goutte liquide au repos en tenant compte des efforts de tension de surface, nous avons rencontrés de nombreux problèmes. En effet, lors du couplage d'un écoulement compressible et d'un écoulement incompressible, que l'on utilise un schéma Mac Cormack seul ou couplé avec un limiteur TVD, que l'on calcule la pression du liquide avec l'équation de Tait ou qu'on la fixe constante dans la goutte, les instabilités

numériques créent des problèmes à l'interface liquide/gaz. Elles sont causées par les forts gradients en présence, par le problème de la détermination de la pression dans le liquide et aussi par le couplage de deux schémas différents : Mac Cormack et Marker And Cell.

Le premier des problèmes rencontré est lié au calcul de la pression dans la phase liquide. Initialement nous avons utilisé l'équation de Tait qui nous permet d'obtenir une valeur de pression en fonction de la masse volumique et de la vitesse du son. Cependant cette loi est surtout applicable pour des liquides soumis à de très fortes pressions, de l'ordre de plusieurs centaines de bars, et donc pas adaptée parfaitement à notre configuration, même si la pression et les efforts appliqués à la phase liquide sont importants. Nous avons par la suite considéré la pression constante dans l'écoulement liquide. Ceci n'a pas amélioré de manière significative les résultats. La pression dans le gaz est obtenue à partir de l'équation d'état des gaz parfaits.

Un second problème est causé par les forts gradients en présence : gradient de masse volumique ( $\beta = 1000$ ), gradient de vitesse (écoulement à Mach 2 rencontrant une goutte liquide au repos). Les méthodes numériques deviennent instables et malgré l'utilisation d'un schéma TVD nécessaire pour limiter les instabilités numériques, les calculs n'ont pu aboutir correctement. Seuls les résultats jusqu'à  $\beta = 10$  sont satisfaisants.

Enfin, lors du couplage de ces méthodes numériques, pour pouvoir effectuer un calcul dans la phase gazeuse et un calcul dans la phase liquide, nous avons rencontré des difficultés dans la détermination du pas de temps dans chacune des deux phases. Comme il dépend de la vitesse du son dans le milieu considéré et que nous étudions deux milieux aux vitesses du son très différentes :  $c = 360 \text{ m.s}^{-1}$  pour la phase gazeuse et  $c = 1500 \text{ m.s}^{-1}$  pour la phase liquide, les pas de temps sont très différents. Cette différence de pas de temps est problématique et nous avons choisi celui de la phase gazeuse. Si on tient compte du pas de temps dans le liquide, le temps de calcul devient très élevé et donc non viable pour obtenir des résultats 2D et 3D. Ceci nous a conduit à faire les calculs dans la phase liquide avec le pas de temps obtenu dans le gaz.

L'accumulation de ces problèmes ne nous a pas permis d'étudier la formation d'instabilités dans les conditions de calculs que nous voulions passer. Nous avons alors envisagé d'utiliser une autre méthode pour traiter cette interaction liquide/gaz. On a recherché un schéma numérique permettant de faire le calcul dans les phases liquide et gazeuse simultanément, sans changer de schéma. Nous voulions aussi pouvoir y incorporer la méthode CSF de calcul des efforts de tension superficielle, qui s'est révélée tout à fait adaptée. Une méthode lagrangienne basée sur un formalisme particulière a pu être étudiée. Les résultats sont nettement plus concluants. Cette seconde méthode, ainsi que les calculs réalisés, sont présentés dans la partie suivante de ce mémoire.



Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

Second block of faint, illegible text, appearing to be the start of a main body paragraph.

Third block of faint, illegible text, continuing the main body of the document.

Fourth block of faint, illegible text, possibly a transition or a new section.

Fifth block of faint, illegible text, likely the concluding part of the page's content.

## Partie III

# Étude numérique d'une méthode lagrangienne



# Introduction

Après les essais numériques faits sur le couplage liquide/gaz dans la partie précédente, en utilisant des méthodes eulériennes différentes pour les deux phases traitées, air/eau, et les difficultés rencontrées lors de ce couplage, nous avons choisi une autre voie. L'objectif est toujours d'étudier la fragmentation de jets liquides dans un écoulement supersonique transverse. Pour cela nous introduisons dans le premier chapitre de cette dernière partie une méthode particulière appelée SPH. Ce formalisme est appliqué aux deux milieux en présence. Nous donnons les principes de base de cette méthode et l'appliquons aux équations d'Euler. La tension de surface est aussi prise en compte, nous avons utilisé les idées générales de la méthode de Brackbill afin de les introduire dans la méthode SPH.

Dans le chapitre 2 des cas de validation du calcul des efforts de tension superficielle sont faits et nous montrons que les résultats sont tout à fait concluants. Puisque nous nous intéressons aux phénomènes interfaciaux, nous avons ajouté à la méthode particulière des termes de transfert de masse. Ainsi nous pouvons tenir compte dans nos calculs de la vaporisation qui se produit à la surface des jets liquides et donc de la perte de masse du jet. Enfin nous avons réalisé une série de calculs numériques 2D et 3D sur la déformation d'un jet d'eau injecté dans un écoulement d'air à grande vitesse. L'injection du liquide se fait dans une zone de recirculation, derrière une marche descendante. Nous pouvons observer les différents mécanismes de déformation et de rupture de jet, la formation des ondes de surface, l'onde de choc qui se courbe en amont du jet et la formation de gouttes. Ces résultats sont regroupés dans le chapitre 3.



# Chapitre 1

## Méthode particulaire

À la fin des années 70, Lucy présente la méthode particulaire pour la première fois et l'utilise pour traiter de nombreux problèmes d'astrophysique. Par la suite d'autres applications physiques telles que la modélisation de champs magnétiques (Gingold et Monaghan 1977) et des études sur des équations d'état de solides (Benz 1987) ont été testées. Puis la méthode SPH (Smooth Particle Hydrodynamic) est développée par Benz et Monaghan dans les années 80 dans le but d'effectuer des études numériques sur les collisions de galaxie [43], [44], [45] [63] et [64]. J.P. Vila et B. Benmoussa travaillent actuellement sur cette méthode à l'INSA de Toulouse. Cette méthode est donc robuste pour résoudre les équations de l'hydrodynamique et ne nécessite pas de maillage comme pour les schémas aux différences finies. Nous allons détailler la formulation de la méthode SPH que nous utilisons pour résoudre les équations d'Euler. D'abord, nous appliquerons l'approximation particulaire à des fonctions, puis à des dérivées et des intégrales. Nous donnerons aussi des précisions sur le calcul du pas de temps et sur l'application des conditions limites que l'on a utilisées.

### 1.1 Approximation particulaire

Le principe de la méthode SPH est basée sur l'interpolation de fonctions. Pour mettre en œuvre ce formalisme nous prenons une répartition de particules dans un domaine choisi. Initialement nous pouvons les répartir de manière équidistante. Chaque particule est repérée par sa position au point  $(i,j)$  à laquelle on associe une distance  $h$  qui est une constante liée à l'interpolation (figure 1.1).

Nous avons  $N$  particules dont les positions sont des fonctions  $x_i(t)$  qui peuvent varier au cours du temps. L'approximation particulaire d'une fonction  $f(x)$  repose sur l'identité suivante :

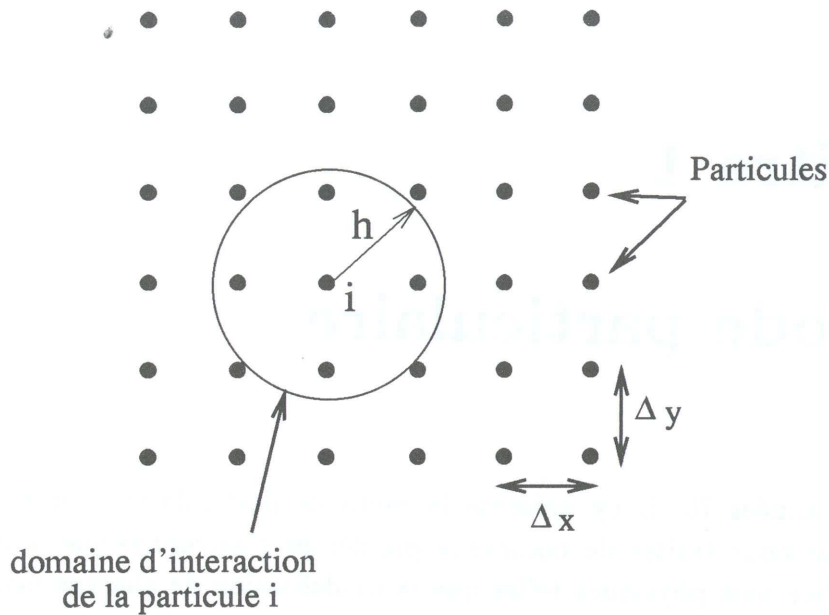


Figure 1.1 : Principe de la méthode particulaire

$$f(x) \approx \int f(x')W(x - x', h)dx' \quad (1.1)$$

où  $x$  et  $x'$  appartiennent à  $\mathbb{R}^2$  pour un cas 2D. Nous interpolons donc une fonction  $f(x)$  par l'intégrale d'une fonction  $f(x')$ . Pour cela nous utilisons  $W(x, h)$  qui est un "noyau régularisant" tel que :

$$\int W(x, h)dx = 1 \quad (1.2)$$

où le paramètre  $h$  caractérise l'échelle de régularisation. Le noyau doit vérifier certaines propriétés et est le plus souvent une fonction positive à support compact. Différents types de noyau se trouvent dans la littérature. Dans notre cas, nous avons choisi une fonction spline introduite par Monaghan et Lattanzio, 1985 [63]. La dimension de l'espace est notée  $d$  et  $a = x/h$ .

$$W(x, h) = \frac{C}{h^d} \times \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a^3 & \text{si } 0 \leq a \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2 - a)^3 & \text{si } 1 \leq a \leq 2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.3)$$

Le fait d'avoir un support compact permet de limiter le nombre de particules voisines. Dans notre cas si  $\frac{x}{h} > 2$ , les particules se trouvent dans un "rayon d'action" hors du domaine du noyau et les interactions entre ces particules et la particule

considérée sont nulles. Le coefficient  $C$  vaut  $2/3$ ,  $10/7\pi$ ,  $1/\pi$  suivant la dimension de l'espace (1,2 ou 3). De plus si l'on choisit d'augmenter l'ordre du noyau  $W$ , on diminue la diffusion spatiale ce qui permet d'augmenter la précision au niveau des interfaces par exemple. De la formule (1.1), nous pouvons passer d'une intégrale continue à une somme discrète sur  $N$  particules, soit :

$$f(x) \approx \int f(x')W(x-x',h)dx' \approx \sum_j \omega_j f_j W(x-x_j, h) \quad (1.4)$$

où  $w_j$  sont les poids des particules (coefficients de la formule de quadrature) :  $w_j = \frac{m_j}{\rho_j}$ . Ils dépendent de la position des particules. Nous introduisons ainsi le concept de masse de particules  $m_j$ . Si on prend par exemple  $f(x) = \rho(x)$ , on obtient :

$$\rho(x) \approx \sum_j \omega_j \rho_j W(x-x_j, h) = \sum_j m_j W(x-x_j, h) \quad (1.5)$$

Chaque particule de masse  $m_j$  est "diffusée" dans le domaine suivant le noyau  $W$ . La densité en chaque point est obtenue en sommant toutes les contributions de toutes les particules considérées à ce point. Remarquons que lorsqu'une particule est proche d'une frontière, le calcul est fait en appliquant des particules fictives au-delà du domaine étudié, afin de faire une sommation correcte. Après avoir introduit rapidement le formalisme particulaire des fonctions nous l'appliquons maintenant à des dérivées et à des intégrales. Utilisons la notation suivante :

$$\Pi^h(f)_i = \sum_j \omega_j f_j W_{ij} \quad (1.6)$$

où

$$W_{ij} \equiv W(x_i - x_j, h) \quad (1.7)$$

Pour obtenir l'approximation particulaire d'une dérivée, on dérive l'équation (1.6), soit :

$$\Pi^h \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) \approx \frac{\partial}{\partial x} \left( \Pi^h f(x) \right) = \sum_j \omega_j f_j \frac{\partial}{\partial x} [W(x-x_j, h)] \quad (1.8)$$

Ce qui donne au point  $x_i$  :

$$\vec{\nabla} \Pi^h(f)_i = \sum_j \omega_j f_j \vec{\nabla} W_{ij} \quad (1.9)$$

On a donc besoin de calculer le gradient du noyau régularisant (1.3) :



$$\vec{\nabla}_i W_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial x} [W(x_i - x_j, h)] \quad (1.10)$$

L'approximation des intégrales se fait de manière analogue. Il suffit de considérer que  $w_j$  est le poids de la mesure discrète associé à l'intégrale de volume  $V$  :

$$\int_V f(x) dx \approx \sum_j \omega_j f_j \quad (1.11)$$

et en utilisant le formalisme particulaire on a :

$$\int_V \int f(x') W(x - x', h) dx' dx \approx \sum_{i,j} \omega_i \omega_j f_j W_{ij} \quad (1.12)$$

Contrairement aux méthodes Différences Finies, Volumes Finis et Éléments Finis, pour lesquelles on dispose d'un seul paramètre de discrétisation, le pas  $\Delta x$  du maillage, on dispose ici d'un paramètre supplémentaire  $h$  qui est la taille du support du noyau régularisant. L'effet de ces deux paramètres ( $h$  et  $\Delta x$ ) sur la précision des approximations peut être quantifié de manière précise [61] et [62]. En pratique, on ajuste localement  $h$  afin de conserver un nombre suffisant de voisins.

## 1.2 Application aux équations d'Euler

Nous appliquons maintenant cette méthodologie aux équations d'Euler compressibles qui s'écrivent de la manière suivante en 2D :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(\vec{u}(E + p)) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$\rho$  est la masse volumique du fluide,

$$\phi = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u^1 \\ \rho u^2 \\ E \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Le système peut se mettre sous la forme [64] :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1,d} \frac{\partial}{\partial x_i} (u^i \Phi) + \sum_{i=1,d} \frac{\partial}{\partial x_i} (B^i \Phi) = 0 \quad (1.15)$$

où les matrices  $B^i$  sont données par :

$$(i) \quad B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{p} & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{p} & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (ii) \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{p} & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & \underline{p} & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

En passant à l'approximation particulaire l'équation (1.15) s'écrit :

$$\Pi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \Pi \sum_{i=1,d} \frac{\partial u^i \Phi}{\partial x_i} + \Pi \sum_{i=1,d} \frac{\partial B^i \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad (1.17)$$

soit :

$$\Pi \left( \frac{d\Phi_i}{dt} \right) + \Pi \left( \sum_{l=1,d} \left( B^l \frac{\partial \Pi^h(\Phi)}{\partial x^l} + \frac{\partial \Pi^h(B^l)}{\partial x^l} \Phi \right) \right) = 0 \quad (1.18)$$

Nous obtenons le schéma suivant :

$$\frac{d}{dt} (w_i(t) \Phi_i(t)) + w_i(t) \sum_{j \in J} w_j(t) \left( \sum_{l=1,d} (B_j^l(t) \Phi_i(t) + B_i^l(t) \Phi_j(t)) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^l} \right) = 0 \quad (1.19)$$

Et le nouveau système des équations d'Euler est :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{u}_i \\ \frac{dw_i \rho_i}{dt} = 0 \\ \frac{dw_i \rho_i \vec{u}_i}{dt} + w_i \sum_j \omega_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j + \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \right) \vec{\nabla}_i W_{ij} = 0 \\ \frac{dw_i E_i}{dt} + w_i \sum_j \omega_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j \vec{u}_j + \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \vec{u}_i \right) \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij} = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

La première de ces équations donne :

$$w_i(t) \rho_i(t) = cste \equiv m_i \quad (1.21)$$

La quantité  $m_i$  est constante au cours du temps, c'est la masse de la particule  $i$ . Nous obtenons les équations pour le champ de vitesse et l'énergie interne suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \vec{\nabla}_i W_{ij} \\ \frac{de}{dt} = -\frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij} \end{cases} \quad (1.22)$$

Ces dernières équations sont une discrétisation des équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = -\vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} \right) - \frac{p}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \\ \frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho} \text{div}(\vec{u}) = -\frac{p}{\rho^2} (\text{div}(\rho \vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho) \end{cases} \quad (1.23)$$

La méthode SPH a, de par son formalisme, d'intéressantes propriétés de conservation des quantités physiques globales, masse et quantité de mouvement. En effet la force de la particule  $i$  sur la particule  $j$  est :

$$m_i \left( \frac{d\vec{u}_i}{dt} \right)_i = m_i m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \vec{\nabla}_i W_{ij} \quad (1.24)$$

et l'on a par définition  $\vec{\nabla}_i W_{ij} = -\vec{\nabla}_j W_{ij}$ , soit :

$$m_i \left( \frac{d\vec{u}_i}{dt} \right)_i = -m_j m_i \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \vec{\nabla}_j W_{ij} = -m_j \left( \frac{d\vec{u}_j}{dt} \right)_j \quad (1.25)$$

Ce qui assure la conservation de la quantité de mouvement. Notons que l'on peut utiliser des variantes du terme  $\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2}$  si l'on conserve la symétrie des termes  $i$  et  $j$ , par exemple  $\frac{\sqrt{p_i p_j}}{\rho_i \rho_j}$  choisi par Hernquist et Katz, 1989.

### Loi d'évolution de $\rho$

Il nous faut déterminer une manière de calculer la masse volumique. Deux cas se présentent : soit nous utilisons l'approximation particulière de  $\rho(x)$  qui s'écrit :

$$\rho(x) \approx \sum_j \omega_j \rho_j W(x - x_j) \quad (1.26)$$

ce qui donne avec  $\omega_j \rho_j = m_j$  :

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij} \quad (1.27)$$

Le second choix possible est d'utiliser la formule d'évolution du poids de la particule écrite avec le formalisme particulaire :

$$\frac{d}{dt}(\omega_j) = \omega_j \operatorname{div} \vec{u} \quad (1.28)$$

comme  $m_j = \text{cste}$ , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}(\rho_j) = -\rho_j \operatorname{div} \vec{u} \quad (1.29)$$

Sous forme particulaire cette équation devient :

$$\frac{d}{dt}(\rho_j) = - \sum_i m_i (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij} \quad (1.30)$$

Pour traiter des écoulements gazeux nous prenons en général la première écriture de loi d'évolution, par contre pour des liquides, le second choix est plus satisfaisant puisque la formulation (1.29) est directement l'équation d'évolution d'un fluide incompressible.

### Viscosité artificielle

Les formules (1.20) sont analogues aux formules de différences finies centrées utilisées généralement. Il est nécessaire d'adjoindre un terme de viscosité artificielle pour supprimer les oscillations qui apparaissent inévitablement autour des discontinuités de la solution et pour dissiper l'énergie cinétique lors d'un choc. Cela permet aussi d'ajouter de la viscosité dans les équations que nous traitons. L'approche généralement choisie pour les méthodes SPH est d'adjoindre aux équations une pseudo-viscosité proposée par Von Neumann et Richtmyer : la pression  $p$  est transformée en  $p + \Pi_u$  avec :

$$\Pi_u = \begin{cases} \beta \rho l^2 (\operatorname{div} \vec{u})^2 - \alpha \rho l c \operatorname{div} \vec{u} & \text{si } \operatorname{div} \vec{u} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.31)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients adimensionnels dont la valeur optimale est autour de l'unité,  $c$  la vitesse du son et  $l$  la dimension caractéristique de l'échelle de régularisation souhaitée ( $\Delta x$  où  $h$  à défaut) [63]. La mise en œuvre de cette viscosité artificielle est réalisée en modifiant les équations (1.22) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \vec{\nabla}_i W_{ij} \\ \frac{de_i}{dt} = - \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij} - \frac{1}{2} \sum_j m_j \Pi_{ij} (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij} \end{cases} \quad (1.32)$$

Dans ces équations  $\Pi_{ij}$  est le terme de viscosité artificielle. Il ne doit pas y avoir de fluctuations visqueuses sur des échelles plus petites que  $h$  ainsi  $\Pi_{ij}$  est limité par la formulation :

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu_{ij}(\beta\mu_{ij} - \alpha c_{ij})}{\rho_{ij}} & \text{si } (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j) < 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.33)$$

où  $c_{ij} = 0.5(c_i + c_j)$  est la moyenne de la vitesse du son,  $\rho_{ij} = 0.5(\rho_i + \rho_j)$  et  $\mu_{ij}$  une approximation de  $l \operatorname{div} \vec{u}$  donnée par :

$$\mu_{ij} = \frac{h(\vec{u}_i - \vec{u}_j) \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2 + \varepsilon h^2}$$

avec  $\varepsilon \ll 1$ . L'ensemble est en fait une approximation des deux termes de la formule (1.31). En pratique nous prenons  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$ . De nombreux cas tests sur des ondes de choc ont été fait et montrent que les résultats sont corrects (Monaghan et Gingold 1983, Kidman et Benz 1986). Remarquons que le terme de viscosité artificielle dépend de la vitesse du son dans les milieux considérés. Nous présentons des tests, dans les chapitres suivants, en faisant varier la valeur de la vitesse du son dans la phase liquide.

## Schéma en temps

L'intégration en temps du système d'équations différentielles ordinaires est réalisée par un algorithme de Runge-Kutta-Fehlberg (pas de temps variable). Ce schéma permet l'obtention de solutions d'ordre 2 en temps et est soumis à une contrainte de stabilité de type CFL. Cependant, il présente l'avantage d'autoriser des pas de temps supérieurs à ceux imposés par une loi de CFL. Dans le fichier des conditions numériques, l'utilisateur impose un pas de temps maximal à ne pas dépasser  $\Delta t_{max}$ . Cette valeur sert donc de majorant au pas de temps évalué dans la résolution Runge-Kutta. Nous avons à résoudre le système :

$$\frac{du}{dt} = F(u) \quad (1.34)$$

La procédure utilisée est la suivante :

- On calcule  $F(u^n)$
- Puis le terme prédicteur est :  

$$u^{n+1/2} = u^n + \alpha_1 \Delta t F(u^n)$$
- On calcule  $F(u^{n+1/2})$
- Le terme correcteur :  

$$u^{n+1} = u^n + \alpha_2 \Delta t F(u^n) + \alpha_3 \Delta t F(u^{n+1/2})$$
- Enfin on calcule  $F(u^{n+1})$

où  $\alpha_1 = \frac{128}{255}$ ,  $\alpha_2 = \frac{255}{256}$ ,  $\alpha_3 = \frac{1}{256}$

Nous obtenons ainsi les valeurs du champ de vitesse à l'instant  $n + 1$ . Les tests montrent dans de nombreux cas que le pas de temps utilisé par cette méthode est environ, 3 ou 4 fois le CFL. Dans d'autres cas cependant (lors d'un problème d'impact par exemple), le temps utilisé par le schéma de Runge-Kutta peut être plus petit que celui déterminé par la condition de CFL. Ce type d'intégration permet d'utiliser une forme du contrôle d'erreur, calculée de la manière suivante :

$$E = \frac{\|F(u^n) - F(u^{n+1})\|}{\|u^n\| + \varepsilon} \quad (1.35)$$

Le pas de temps est ensuite corrigé pour l'itération suivante. Un premier coefficient est déterminé :

$$\text{Coef} = \frac{\Delta t \text{ Ermax}}{512 \text{ Tol}} \quad \text{avec Tol} = 1.10^{-3} \quad (1.36)$$

Puis en introduisant la fonction  $\text{MOD} = \text{MIN} \left( 2, \frac{1}{\sqrt{\text{Coef}}} \right)$  on obtient :

$$\Delta t = \text{MIN}(\text{MOD} \Delta t, \Delta t_{\text{max}}) \quad (1.37)$$

Toutefois,  $\Delta t$  est limité par le pas de temps maximal admissible, fixé au préalable ( $\Delta t_{\text{max}}$ ). Une autre étape de calcul est nécessaire aux cours d'un pas de temps : celui de la recherche des particules voisines d'une particule donnée. Elle est réalisée à l'aide d'un algorithme de tri classique dans les méthodes particulières, connu sous le nom de "linked list". Nous utilisons le paramètre  $h$  (dépendant de la particule et du temps) qui caractérise l'échelle du noyau  $W$  pour sélectionner le nombre de voisins correspondant. Les modifications dans les formules particulières sont minimales. Il suffit de retenir le principe suivant lequel  $h$  est ajusté de manière à ce que le nombre de voisins d'une particule reste approximativement constant au cours d'un calcul

(ce nombre dépend en pratique de la dimension de l'espace, 20 en 2D et 50 en 3D sont des valeurs convenables).

L'évolution de  $h$  se fait de la manière suivante. Puisque  $\rho h^3 = \text{cste}$  on a :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{h}{3} \frac{d\rho}{\rho dt} = \frac{h \operatorname{div} \vec{u}}{3} \quad (1.38)$$

qui est résolue à chaque pas de temps.

### Déplacement des particules

On déplace les particules une fois leur vitesse calculée, en utilisant la définition de la vitesse de la particule fluide :

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \langle \vec{u}_i \rangle \quad (1.39)$$

où  $\vec{x}_i$  est la distance parcourue par la particule  $i$  pendant un pas de temps. L'intégration de cette équation fournit la nouvelle position de la particule. Des études précédentes ont montré que cette expression conduit à des interpénétrations de particules dans les chocs forts ou les zones de haute vitesse. Celles-ci peuvent être évitées en utilisant la vitesse de la particule corrigée par sa différence avec la vitesse de l'écoulement moyen (Benz et Monaghan 1986, Monaghan 1989).

Cet écart de vitesse est exprimé par :

$$\Delta \langle \vec{u}_i \rangle = \sum_j \frac{m_i}{\rho_i \rho_j} (\vec{u}_i - \vec{u}_j) W(\|\vec{x} - \vec{x}_j\|, h) \quad (1.40)$$

Et le déplacement de la particule est calculé avec l'expression :

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \langle \vec{u}_i \rangle + \varepsilon \Delta \langle \vec{u}_i \rangle \quad (1.41)$$

Le coefficient  $\varepsilon$  a une valeur comprise entre 0 et 1. Pour  $\varepsilon$  valant 0, le problème est purement lagrangien. Dans la pratique, la valeur de la correction est mise à 0.05.

### Convergence de la méthode SPH

Des tests de convergence ont été fait sur des tubes à choc et la convergence des calculs a été validée ultérieurement [44]. Pour la méthode SPH il faut simplement raffiner le maillage suivant toutes les directions simultanément. Lorsque l'on augmente le nombre de particules suivant  $x$ , il faut aussi le faire proportionnellement suivant  $y$  et  $z$ . De plus il faut garder le rapport  $\frac{\Delta x}{h} \rightarrow 0$ .

## 1.3 Les conditions limites

### 1.3.1 Les conditions de symétrie et de glissement

La condition de symétrie ou de glissement à une paroi plane fixe est:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.42)$$

Dans le cas de la méthode particulaire, cette condition ne peut pas être appliquée directement, car il n'y a aucune particule sur la paroi. Pour pallier à cela, nous introduisons une particule fantôme (figure 1.2) non pas identique à la particule qui se trouve dans le domaine proche de la limite (de distance inférieure à  $2h_i$ ), mais une particule symétrique, ayant les mêmes propriétés thermodynamiques et animée d'une vitesse  $u'$  telle que :

$$(\vec{u} - \vec{u}') \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.43)$$

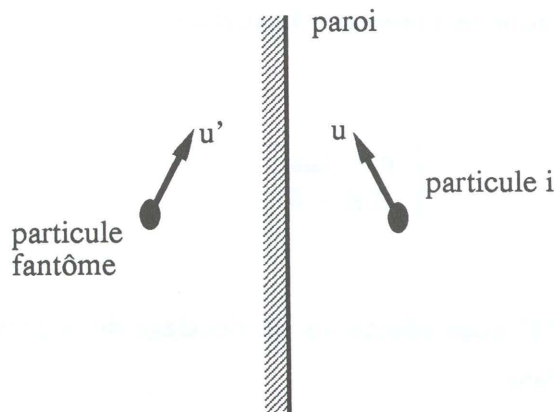


Figure 1.2 : Conditions limites de type paroi

### 1.3.2 Parois mobiles

Dans ce cas (figure 1.3) nous supposons que la frontière a une vitesse normale imposée  $u_{paroi}^n$  et nous imposons la vitesse normale de la particule fantôme telle que :

$$u_{ghost}^n = 2u_{paroi}^n - u_i^n \quad (1.44)$$

La vitesse tangentielle est conservée et dans le cas d'une paroi fixe,  $u_{paroi}^n = 0$ , on retrouve la condition de la section précédente.



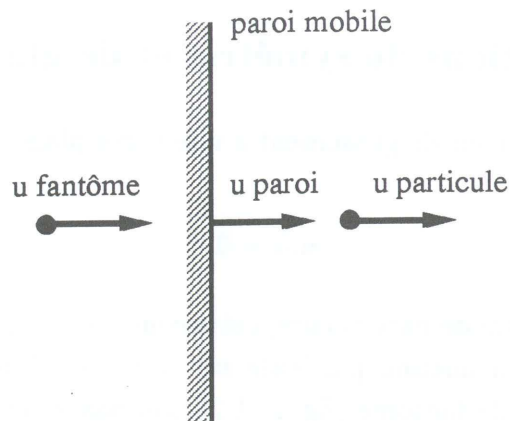


Figure 1.3 : Conditions limites pour des parois mobiles

### 1.3.3 Conditions aux limites de type surface libre

Pour imposer une condition de surface libre (figure 1.4) dans le traitement des équations d'Euler, nous fixons la pression à la surface :

$$\begin{cases} p = p_{atm} \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

Dans le formalisme SPH nous effectuons un décalage de la pression dans tout le fluide. Soit  $p = p_{fluide} - p_{atm}$ .

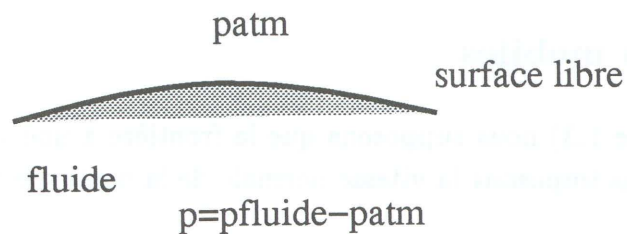


Figure 1.4 : Conditions limites de type surface libre

### 1.3.4 Les conditions d'entrée

#### Le cas des entrées subsoniques

Si le nombre de Mach local est subsonique, il est nécessaire d'imposer 4 conditions aux limites (en 3 dimensions d'espace). Nous avons ainsi fixé la température  $T$  et les vitesses  $u_x$ ,  $u_y$  et  $u_z$  de la particule fantôme. Nous imposons sa pression égale à celle de la particule réelle dont elle est symétrique.

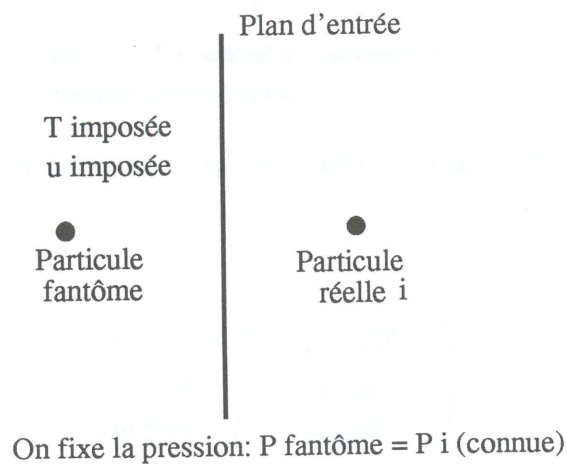


Figure 1.5 : Conditions limites pour une entrée subsonique

#### Le cas des entrées supersoniques

Si le nombre de Mach local est supersonique, l'écoulement est entièrement défini par les données amont. On impose donc 5 conditions limites, les particules fantômes sont ainsi entièrement définies.

### 1.3.5 Les conditions de sortie

#### Cas d'une sortie subsonique

Une seule condition est imposée, c'est la condition de pression. Nous fixons la température et les vitesses de la particule fantôme égales à celles de sa particule symétrique réelle.

#### Cas d'une sortie supersonique

Aucune condition n'est imposée. On fixe les caractéristiques physiques des particules égales à celles de leurs particules symétriques qui se trouvent dans le domaine de

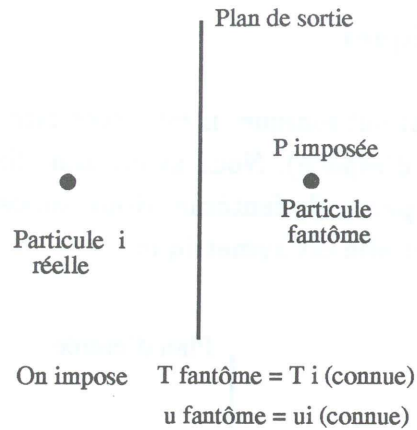


Figure 1.6 : Conditions limites pour une sortie subsonique

calcul :

$$\begin{cases} T_{\text{fantôme}} = T_i \text{ (connue)} \\ u_{\text{fantôme}} = u_i \text{ (connue)} \\ P_{\text{fantôme}} = P_i \text{ (connue)} \end{cases} \quad (1.46)$$

## 1.4 Conclusion

Nous avons vu comment appliquer la méthode particulaire au système des équations d'Euler. Ce formalisme conserve exactement la masse et la quantité de mouvement. Puisque nous nous intéressons aux interfaces liquides/gaz, où la tension de surface joue un rôle prépondérant, nous allons dans le chapitre suivant appliquer le schéma CSF à la méthode particulaire.

# Chapitre 2

## Phénomènes interfaciaux

Après avoir introduit le formalisme général de la méthode particulaire que nous avons retenue, nous nous intéressons à deux phénomènes qui interviennent aux interfaces liquide/gaz. Le premier est la tension de surface qui joue un rôle important sur la déformation et la coalescence des gouttes. Le second est le transfert de masse entre le liquide et le gaz, dû à la vaporisation de gouttelettes d'eau. Pour ajouter le calcul de tension superficielle à la méthode SPH, nous avons repris la méthode CSF. On présente les modifications à apporter aux équations pour en tenir compte. Nous introduisons aussi le problème du traitement de la pression dans les liquides et les gaz et nous présentons quelques cas tests. Pour valider l'algorithme de tension de surface on a en premier lieu vérifié la loi de Laplace. Puis nous avons traité des cas dynamiques en étudiant le comportement d'instabilités de type Rayleigh-Taylor. Nous avons pu ainsi valider les résultats numériques 2D et 3D. Le transfert de masse est aussi modélisé avec la méthode SPH en ajoutant des termes sources dans les équations de conservations. Les modifications à apporter aux équations d'Euler sont présentées et un cas test est décrit à la fin de ce chapitre.

### 2.1 Application à la tension de surface

Pour prendre en compte les effets de tension de surface, nous devons modifier les équations d'Euler en ajoutant aux équations de conservation de la quantité de mouvement les forces de tension superficielle. Elles s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} p + \vec{F}_V = 0 \quad (2.1)$$

Les équations de continuité et de conservation de l'énergie restent inchangées. Dans l'équation (2.1),  $\vec{F}_V$  est le vecteur des forces de tension superficielle volumiques. Nous allons écrire les forces de tension de surface sous forme volumique pour les

incorporer dans les équations de Navier–Stokes. Ces forces, nulles loin de l’interface, seront calculées uniquement dans la zone interfaciale. Pour cela la méthode CSF est tout à fait appropriée. Nous avons vu que les forces de tension superficielle volumiques s’écrivent :

$$\vec{F}_V = \sigma R \frac{\vec{\text{grad}}C}{[C]} \quad (2.2)$$

où  $\sigma$  est le coefficient de tension de surface,  $C$ , la fonction couleur (voir VOF),  $[C]$ , le saut à l’interface et  $R$ , le rayon de courbure. Ce dernier peut se calculer uniquement en fonction de la normale à l’interface, de la manière suivante :

$$R = -\text{div}\hat{n} = \frac{1}{|\vec{n}|} \left( \left( \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{\text{grad}} \right) |\vec{n}| - (\text{div}\vec{n}) \right) \quad (2.3)$$

où

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad (2.4)$$

$\hat{n}$  est le vecteur normal unitaire à l’interface. Une chose intéressante est que le vecteur normal  $\vec{n}$  s’écrit uniquement en fonction de la fonction couleur  $C$  :  $\vec{n} = \vec{\text{grad}}C$ . Ceci nous permet de calculer le rayon de courbure  $R$  uniquement en connaissant  $C$ . Le but est d’obtenir le rayon de courbure  $R$  avec le formalisme SPH. Pour cela nous avons tout d’abord besoin de déterminer le gradient de  $C$  qui s’écrit avec la méthode particulière :

$$\vec{\nabla}C = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} C_j \vec{\nabla}W_{ij} = \vec{\nabla}(\Pi^h C) \quad (2.5)$$

Nous pouvons alors calculer

$$\hat{n}_i = \frac{\vec{\text{grad}}C}{\|\vec{\text{grad}}C\|} \quad (2.6)$$

et finalement le rayon de courbure est :

$$R = -\text{div}\hat{n}_i = \frac{1}{\rho} \sum_j m_j (\hat{n}_i - \hat{n}_j) \vec{\nabla}W_{ij} \quad (2.7)$$

Ceci est une première écriture possible. Benz et Monaghan utilisent pour calculer une divergence la relation suivante :

$$\text{div} \left( \frac{1}{\|\nabla C\|} \nabla C \right)_i = \sum \frac{m_j}{\rho_j} \left( \frac{1}{\|\nabla C_i\|} + \frac{1}{\|\nabla C_j\|} \right) (C_j - C_i) \frac{\nabla W_{ij} \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2 + \epsilon h^2} \quad (2.8)$$

Nous avons testé les deux formules ci-dessus afin de comparer les résultats obtenus sur le calcul du rayon de courbure. La première méthode donne une meilleure précision de résultat sur le calcul d'instabilité de Rayleigh-Taylor, malgré un coût calcul plus important (de l'ordre de 10%). Nous avons choisi l'écriture (2.7) pour la suite de nos calculs.

### 2.1.1 Calcul de la force surfacique

Nous explicitons la méthode utilisée pour calculer la force de tension de surface avec le formalisme particulaire. Prenons une configuration 1D. Une interface entre deux types de particules dont la fonction couleur diffère, se représente de la façon suivante :

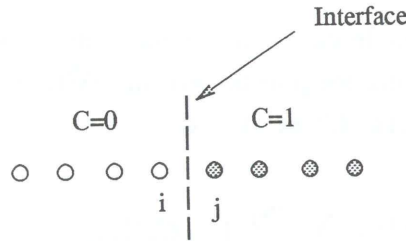


Figure 2.1 : Représentation 1D d'une répartition de particules

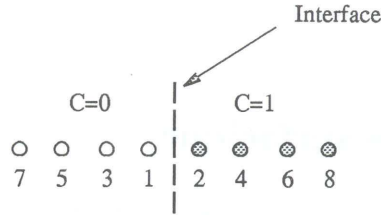
Avant de calculer la force  $F_V$ , il faut déterminer le gradient de  $C$  pour déterminer la normale normée  $\hat{n}$ , puis la divergence de cette normale et enfin le rayon de courbure. La méthode CSF utilise la moyenne de  $C$  à l'interface, pour cela nous calculons  $\langle C(x) \rangle$  entre les particules  $i$  et  $j$  qui s'écrit suivant le formalisme SPH comme suit :

$$\langle C(x) \rangle = \sum \frac{m_j}{\rho_j} C_j W(x - x_j) = \Pi^h C \quad (2.9)$$

Comme la méthode CSF se sert d'une interpolation de la fonction couleur moyennée, nous allons déterminer la moyenne de la moyenne de  $C$  ( $\langle \tilde{C}(x) \rangle$ ) afin d'obtenir, avec la méthode SPH, une forme d'interpolation :

$$\langle \tilde{C}(x) \rangle = \sum \frac{m_j}{\rho_j} \langle \tilde{C}(x_j) \rangle W(x - x_j) = \Pi^h (\Pi^h C) \quad (2.10)$$

Puis nous calculons le gradient de  $C$  ( $\vec{\nabla}\langle\tilde{C}(x)\rangle$ ), la normale  $\hat{n}$  et sa divergence. De manière à obtenir la divergence du gradient, nécessaire pour calculer la force de tension superficielle uniquement à l'interface, nous avons besoin de connaître la valeur de la moyenne de  $C$  seulement sur 8 particules de part et d'autre de l'interface. On procède de la sorte pour éviter le calcul de  $F_V$  sur le nombre total de particules. On se limite uniquement aux particules voisines de l'interface.



- Calcul de  $\langle C \rangle$  sur les 8 points.
- Calcul de la moyenne de  $\langle C \rangle$  pour les particules 1,2,3,4,5,6.
- Calcul du gradient sur 1,2,3,4.
- Calcul de  $F_V$  aux particules 1 et 2.

Figure 2.2 : Particules utiles pour le calcul de la force superficielle volumique

Pour déterminer les points où le calcul de la force de tension superficielle doit être fait, nous avons recherché tous les points tels que :  $\vec{\nabla}C \neq 0$ . Partout ailleurs la force  $F_V$  est nulle. On calcule alors  $\langle C \rangle$  et  $\langle 1 - C \rangle$  :

$$\langle 1 - C \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (1 - C_j) W_{ij} \quad (2.11)$$

Ainsi que  $\langle \tilde{C} \rangle$  et  $\langle 1 - \tilde{C} \rangle$ , avec :

$$\langle 1 - \tilde{C} \rangle = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (1 - \tilde{C}_j) W_{ij} \quad (2.12)$$

Lorsque  $\vec{\nabla}\langle\tilde{C}\rangle$  et  $\vec{\nabla}\langle 1 - \tilde{C} \rangle$  sont nuls alors la force  $F_V$  l'est aussi. Ce test permet d'éviter les erreurs sur le calcul numérique du gradient d'une constante dont le résultat ne vaut pas toujours 0.

## 2.1.2 Calcul de la pression

Après avoir introduit le calcul de la force de tension de surface dans la méthode SPH, nous présentons le traitement de la pression dans la phase liquide et dans la phase gazeuse. On a besoin de connaître la valeur de la pression pour résoudre notre système d'équations. Pour cela on utilise des équations d'état suivant le fluide

considéré. Ceci ne pose pas de problème pour des gaz mais pour les liquides, nous discutons des différentes possibilités envisagées.

### Loi d'état du gaz parfait

Pour un gaz parfait, la pression dépend de l'énergie interne, de la masse volumique et de  $\gamma$  :

$$p = \frac{E}{(\gamma - 1)\rho} \quad (2.13)$$

et la vitesse du son est :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (2.14)$$

### Loi d'état d'un gaz en évolution isentropique

Dans ce cas, la pression dépend de la masse volumique seule :

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma-1}} \rho^{\gamma-1} \quad (2.15)$$

La vitesse du son est alors déduite comme précédemment.

### Traitement de la pression pour l'eau

C'est un problème délicat qui a une importance prépondérante sur le calcul dans une phase liquide. Il est souvent difficile de traiter des interfaces liquides/gaz si on prend en compte des rapports de masse volumique réalistes de l'ordre de 100, 200 ou 1000. Deux phénomènes interviennent :

- L'interaction de particules de masse volumique élevée et de masse volumique beaucoup plus faible crée des instabilités numériques lors du déplacement des particules.

- La valeur de la masse volumique est difficilement calculable exactement aux interfaces liquides/gaz. En effet l'approximation particulaire a tendance à lisser les valeurs de  $\rho$  et il est tout à fait possible de trouver, du seul fait de cette approximation, une valeur de masse volumique 10% en-dessous de sa valeur usuelle.

Le premier de ces phénomènes ne peut être résolu qu'en prenant une définition suffisante au niveau du calcul, ce qui revient à prendre un nombre parfois important



de particules et donc d'augmenter son coût. Le second peut mener à des pressions négatives dans l'eau par le biais de la loi d'état. Batchelor (1967) donne une équation pour l'eau qui décrit précisément les ondes acoustiques. Cette équation d'état modifiée en utilisant une vitesse du son dans l'eau plus petite que la vitesse du son réelle permet de simuler le fluide incompressible. Cette équation est similaire à l'équation de Tait [59] :

$$p = k \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (2.16)$$

où  $\gamma = 7$  et les coefficients  $k$  et  $\rho_0$  sont donnés de manière à respecter les valeurs de  $\rho \equiv \rho_{atm}$  et de la vitesse du son  $c \equiv c_{atm}$  à la pression atmosphérique  $p_{atm}$  et à la température ordinaire. On a ainsi :

$$\begin{cases} \frac{\rho_0}{\rho_{atm}} = \left[ 1 - \frac{\gamma p_{atm}}{c_{atm}^2 \rho_{atm}} \right]^{1/\gamma}, \\ k = \frac{p_{atm}}{\left( \frac{\rho_{atm}}{\rho_0} \right)^\gamma - 1} \end{cases} \quad (2.17)$$

Cette loi d'état n'est pas définie pour les valeurs de  $\rho$  inférieures à  $\rho_0$ . Afin de résoudre ces problèmes d'ordre numérique, la loi a été modifiée pour les pressions inférieures à la pression atmosphérique :

$$\begin{cases} p = k \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] & \text{si } p \geq p_{atm}, \\ p = 10^4 + \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\gamma'} & \text{si } p \leq p_{atm}, \\ \text{avec } \gamma' = \frac{\rho_{atm} c_{atm}^2}{p_{atm} - 10^4} \end{cases} \quad (2.18)$$

Notons que les variations de masses volumiques sont correctes avec cette estimation et que l'on peut "adapter" l'équation d'état pour chaque situation. Cependant cette loi d'état n'est valable que pour de fortes variations de pression (de l'ordre de plusieurs centaines de bar), ce qui n'est pas toujours le cas dans nos calculs. Une première alternative est de considérer une vitesse du son "fictive" dans le liquide avec l'équation de Tait. Différentes valeurs de  $c_{atm}$  ont été utilisées, cela est précisé par la suite. Pour les pressions que nous rencontrons, la véritable célérité du son est d'environ  $1500 \text{ ms}^{-1}$ . Physiquement, nous sommes également dans des conditions où nous pouvons considérer l'eau comme incompressible. En toute rigueur, si l'on considère l'eau comme faiblement compressible, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement de l'eau montre que les variations de  $\rho$  sont d'un ordre de grandeur défini par :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{uL}{c^2t} \quad (2.19)$$

où  $L$  est l'échelle caractéristique des longueurs dans l'eau,  $t$  l'échelle caractéristique du temps et  $u$  celle des vitesses. Pour notre problème nous pouvons considéré que :

$$u = \frac{L}{t} \quad (2.20)$$

Dans ces conditions, nous avons :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = M^2 \quad (2.21)$$

où  $M$  est le nombre de Mach. Le nombre de Mach réel (dans l'eau) pour nos simulations ne doit pas dépasser  $10^{-2}$ , ce qui nous assure ainsi une variation relative de densité ne dépassant pas  $10^{-4}$  et justifie l'hypothèse classique d'incompressibilité. On peut baisser la vitesse du son numérique dans le liquide en substituant au fluide réel un fluide plus compressible (mieux adapté aux calculs SPH). Si nous nous autorisons d'emblée une variation relative de  $\rho$  de l'ordre du % ( $10^{-2}$ ), nous en déduisons un nombre de Mach autorisé de 0.1 (pour une vitesse  $u$  de  $10\text{m.s}^{-1}$ ). Ceci permet d'avoir une vitesse du son  $c_{atm}$  "fictive" de l'ordre de  $150\text{m.s}^{-1}$ . Ce principe rend possible les calculs "pseudo-incompressible" avec le code de calcul. Nous avons donc, pour les tests sur les instabilités interfaciales, effectué le calcul dans le liquide en utilisant l'équation d'état avec une vitesse du son fictive. Dans le chapitre suivant nous regardons l'influence de cette vitesse du son sur les résultats de pulvérisation de jets.

La seconde alternative est de fixer la pression constante dans la phase liquide. Pour des vitesses pas trop élevées ou pour des pressions dans le gaz de l'ordre de 5 ou 10 bars, cette hypothèse est tout à fait réaliste (voir chapitre 3, partie 3). Nous passons maintenant aux cas tests effectués sur le calcul de la tension de surface. On a d'abord déterminé numériquement les efforts appliqués sur une goutte au repos et les résultats obtenus sont comparés avec la loi de Laplace. Puis nous avons validé nos calculs en prenant comme référence les instabilités de Rayleigh-Taylor en 2D et 3D.

### 2.1.3 Validation de la loi de Laplace

On a en premier lieu comparé le calcul des forces de tension de surface obtenues numériquement avec la méthode SPH et le calcul des forces théoriques issues de la loi de Laplace. Pour cela, nous considérons une goutte isolée dans un écoulement au repos. Les deux fluides sont initialement à l'équilibre et seules les forces de tension

superficielle agissent sur la goutte. Le calcul a été fait pour différentes valeurs de rayon de goutte et de coefficient de tension de surface. D'après le formalisme CSF, nous calculons les forces volumiques de la manière suivante :

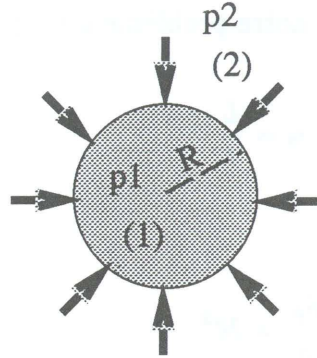


Figure 2.3 : Vérification de la loi de Laplace

$$F_V = \frac{\sigma \text{grad}C}{R [C]} \quad (2.22)$$

Nous considérons une goutte sphérique, de rayon  $R$ , de fluide (1) immergée dans un fluide (2). La loi de Laplace s'écrit :

$$p_1 - p_2 = 2 \frac{\sigma}{R} \quad (2.23)$$

en intégrant sur le volume considéré, on obtient :

$$\int |F_V| \Delta V = pS \quad (2.24)$$

et nous pouvons comparer les forces  $F_V$  numériques avec la théorie :

$$|F_V| = 2 \frac{\sigma}{R} \Delta R \quad (2.25)$$

Les résultats varient suivant la formule de divergence utilisée pour calculer la courbure  $1/R$ . Avec la formule (2.7), l'erreur  $E$  donnée ci-dessous est de l'ordre de 3%, alors qu'en utilisant la seconde formulation (2.8), on obtient 1% d'erreur. Cependant le calcul avec la seconde approche est plus coûteux.

$$E = \sqrt{\frac{(|F| - |F_{th}|)^2}{|F_{th}|^2}} \quad (2.26)$$

On peut considérer que l'erreur sur le calcul de la force 2D appliquée à une goutte au repos est faible. Nous passons maintenant à l'étude des instabilités de Rayleigh-Taylor 2D.

### 2.1.4 Instabilités de Rayleigh–Taylor 2D

Afin de valider la méthode de calcul de tension de surface en dynamique, nous avons simulé des instabilités de type Rayleigh–Taylor dans le but d’observer la déformation de l’interface entre deux fluides de propriétés différentes et de retrouver les taux de croissance de la théorie linéaire. Nous avons donc superposé un fluide lourd sur un fluide léger en tenant compte de la gravité. La configuration initiale est décrite sur la figure (2.4),  $\eta_{init}$  est l’épaisseur initiale du fluide 2 et  $\eta_{0init}$  est la petite amplitude initiale de la perturbation qui permet de générer le développement des instabilités de Rayleigh–Taylor. Ces instabilités se développent au cours du temps en  $e^{wt}$ . Lorsque l’on tient compte de la tension de surface, le taux de croissance  $w$  est donné par la formule suivante [26] :

$$w^2 = kg \left( A - \frac{k^2 \sigma}{g(\rho_1 + \rho_2)} \right) \quad (2.27)$$

où  $k$  est le nombre d’onde de la perturbation,  $w$ , la pulsation,  $g$  est l’accélération due à la gravité perpendiculaire à l’interface et  $A$ , le nombre d’Atwood :

$$A = \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_1 + \rho_2)} \quad (2.28)$$

On peut calculer un sigma critique  $\sigma_c$  pour  $w = 0$ , soit :

$$\sigma_c = Ag \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{k^2} \right) \quad (2.29)$$

et si  $\frac{\sigma}{\sigma_c} < 1$ , l’instabilité se développe.

Les calculs ont été effectués dans un domaine de 0.1 m de largeur et 0.4 m de hauteur. Les conditions limites de type paroi ont été fixées aux frontières et nous avons perturbé l’interface par un champ de vitesse vertical de faible amplitude de type  $v(z) = a \cos(kx)$ . L’instabilité se développe au cours du temps et on regarde l’évolution de la perturbation en fonction de différents coefficients de tension de surface. On a pris  $\rho_1 = 920 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_2 = 1380 \text{ kg.m}^{-3}$ , soit  $A = 0.2$ . Les valeurs de  $\sigma$  choisies sont : 0, 0.04, 0.4 et 0.7. Les configurations initiales sont différentes pour chacun des 3 cas présentés. Pour le cas 1 (figure 2.5), le domaine initial de fluide lourd est de 0.1 m et la perturbation de l’interface  $\eta_0$  est de 0.02 m. Le nombre de particules initial est de  $33 \times 20$  soit 660 particules. La zone de fluide lourd initialisée dans le cas de la figure (2.5) (cas 2) est de 0.2 m et  $\eta_0 = 0.02$  m. Pour le cas 3, l’interface initiale est aussi de 0.2 m mais  $\eta_0 = 0.01$  m. Le nombre initial de particules pour les cas 2 et 3 est  $33 \times 40$  soit 1320 particules. Le nombre de voisins est fixé entre 20 et 30.

Les figures de résultat (2.6, 2.7 et 2.8) représentent au même instant ( $t = 20000\mu s$ ) le développement de l'instabilité de Rayleigh–Taylor pour les quatre coefficients de tension de surface choisis :  $\sigma = 0$  (figure en haut à gauche),  $\sigma = 0.04$  (en haut à droite),  $\sigma = 0.4$  (en bas à gauche) et  $\sigma = 0.7$  (en bas à droite). Il apparaît de manière qualitative, que la plus forte perturbation se produit pour  $\sigma = 0$ , comme le prédit la théorie linéaire, et que l'interface se déforme de moins en moins (pour un même instant), en fonction de l'augmentation de la valeur de  $\sigma$  et ce jusqu'à un sigma critique  $\sigma_c$  [26]. Dans l'exemple de configuration physique présentée,  $\sigma_c = 0.73$ . Nous remarquons qu'avec  $\sigma = 0.7$ , dans chacun des 3 cas, l'interface ne se déforme que faiblement. Ce qui est tout à fait cohérent avec le sigma critique. Lorsque l'instabilité se développe, le fluide lourd pénètre dans le fluide léger suivant la forme caractéristique des instabilités de Rayleigh–Taylor.

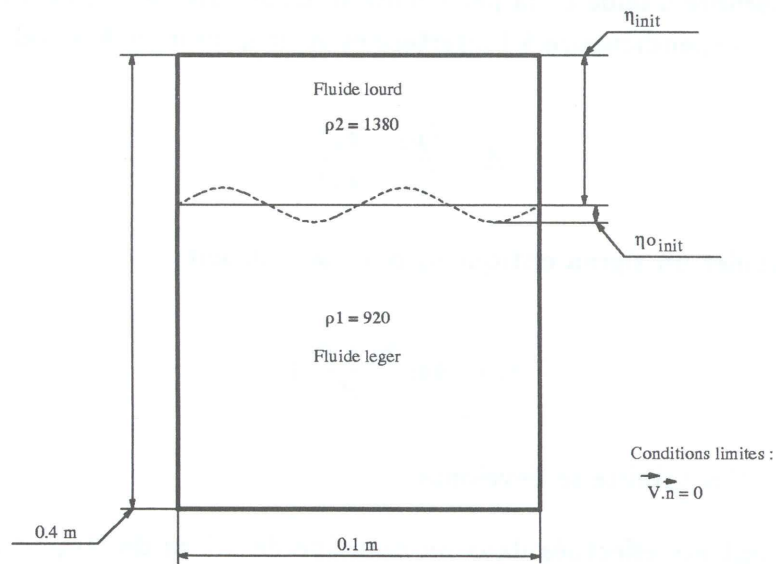


Figure 2.4 : Configuration de calcul 2D

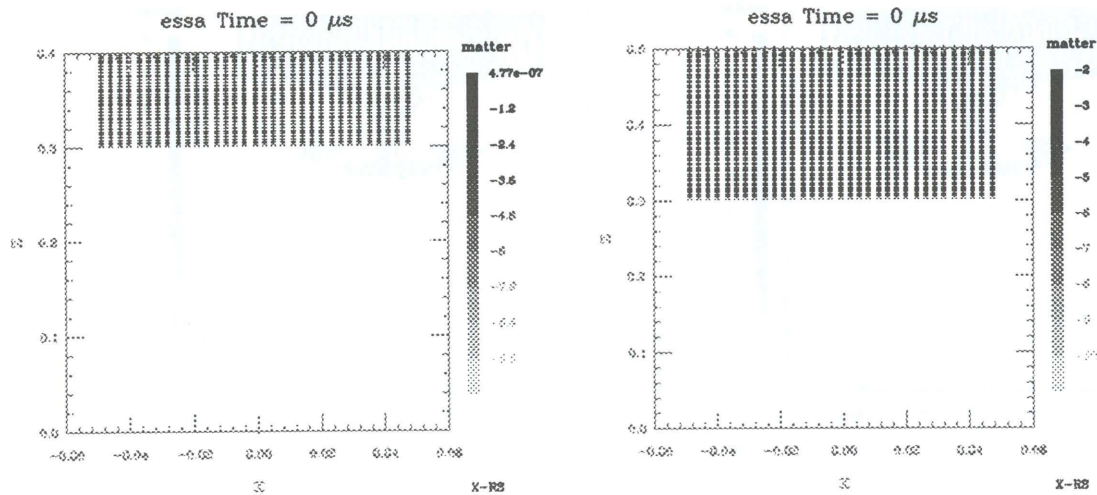


Figure 2.5 : Configurations initiales, cas 1 (à gauche), cas 2 et 3 (à droite)

Nous présentons sous forme de tableaux la comparaison des résultats numériques que nous avons obtenus avec ceux de la théorie des instabilités de Rayleigh–Taylor. Nous avons regardé l'évolution du taux de croissance de l'instabilité en fonction de la valeur de la tension superficielle  $\sigma$ . Nous connaissons la déformation théorique de l'interface, elle est du type :

$$\eta = \eta_{init} + \eta_{0init} \exp(wt) \quad (2.30)$$

Nous connaissons la valeur du taux de croissance  $w$  (2.27) ainsi que le temps de propagation,  $t = 20000 \mu s$ . Il est donc possible de calculer théoriquement la position de l'interface  $\eta$  pour un temps fixé et de la comparer avec celle des résultats

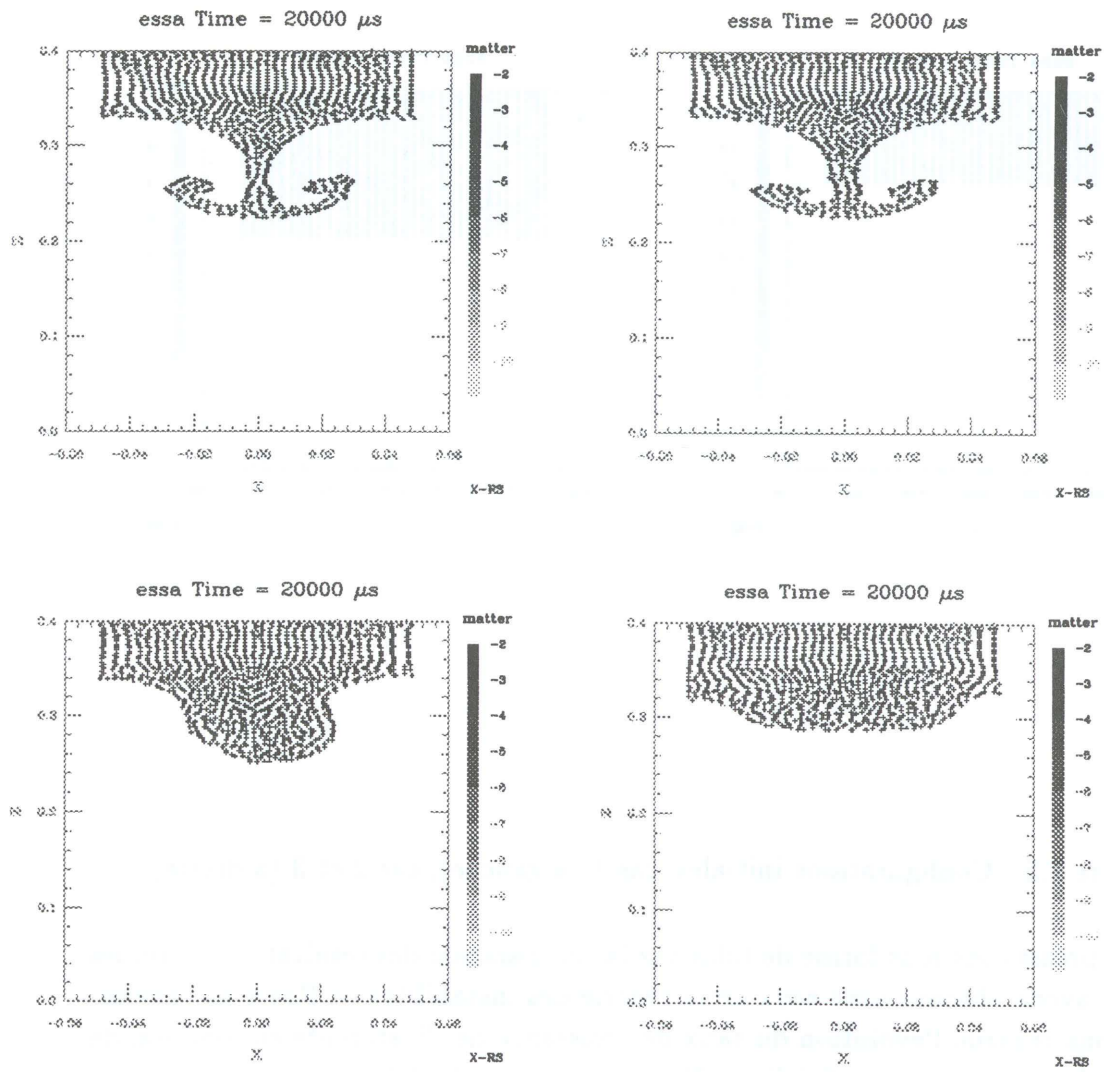


Figure 2.6 : Instabilités de Rayleigh-Taylor – Cas 1

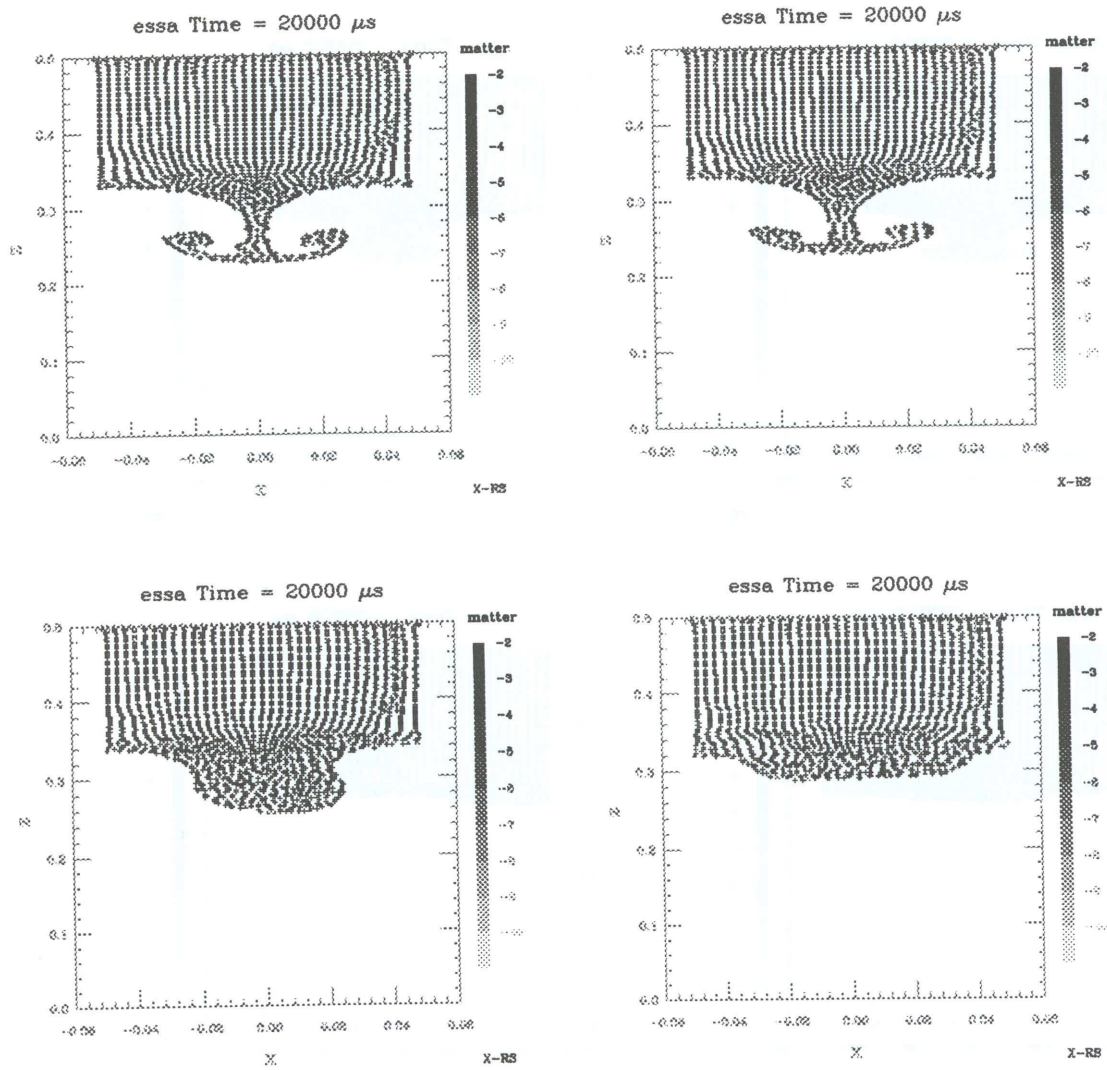


Figure 2.7 : Instabilités de Rayleigh-Taylor – Cas 2



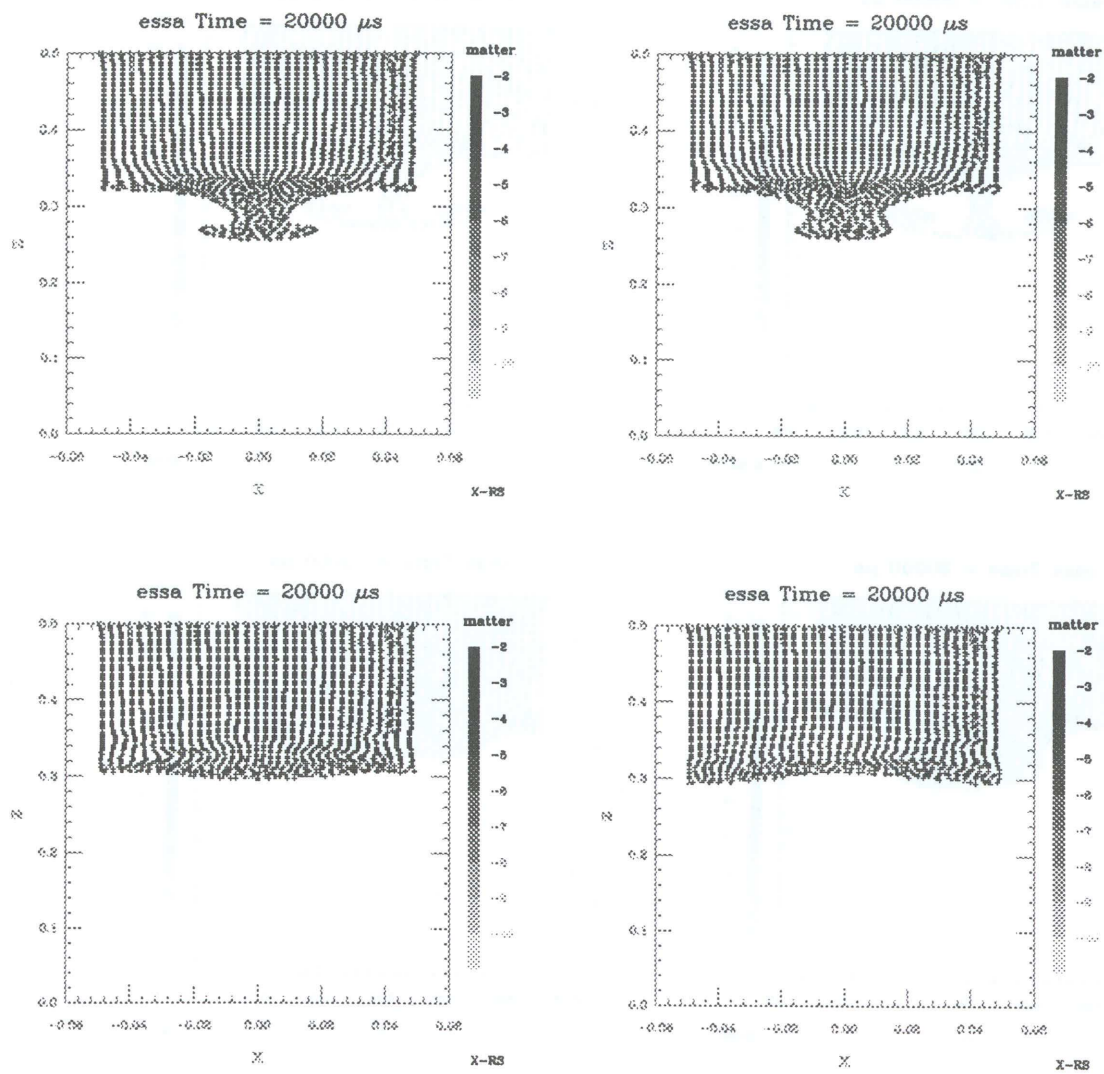


Figure 2.8 : Instabilités de Rayleigh-Taylor – Cas 3

numériques.

$n^{\circ} \text{ cas}$	interface	perturbation initiale	$w = 12.41$ $\sigma = 0$			$w = 12.07$ $\sigma = 0.04$		
	$\eta_{init}$	$\eta_{oinit}$	$\eta_{th}$	$\eta_{num}$	<i>Erreur</i>	$\eta_{th}$	$\eta_{num}$	<i>Erreur</i>
cas 1	0.1	0.02	0.154	0.18	17 %	0.153	0.17	11 %
cas 2	0.2	0.02	0.282	0.28	1 %	0.28	0.27	3 %
cas 3	0.2	0.01	0.270	0.255	6 %	0.27	0.255	6 %

Tableau 2.1 : Comparaison des résultats numériques avec la théorie des instabilités de Rayleigh–Taylor pour  $\sigma = 0$  et  $\sigma = 0.04$

$n^{\circ} \text{ cas}$	interface	perturbation initiale	$w = 8.35$ $\sigma = 0.4$			$w = 2.61$ $\sigma = 0.7$		
	$\eta_{init}$	$\eta_{oinit}$	$\eta_{th}$	$\eta_{num}$	<i>Erreur</i>	$\eta_{th}$	$\eta_{num}$	<i>Erreur</i>
cas 1	0.1	0.02	0.142	0.15	5 %	0.126	0.1	20 %
cas 2	0.2	0.02	0.26	0.24	8 %	0.23	0.21	9 %
cas 3	0.2	0.01	0.25	0.21	16 %	0.2	0.23	13 %

Tableau 2.2 : Comparaison des résultats numériques avec la théorie des instabilités de Rayleigh–Taylor pour  $\sigma = 0.4$  et  $\sigma = 0.7$

La précision des résultats obtenus est intéressante (10 % d’erreur en moyenne) et nous pouvons conclure que les tests de validation du calcul des forces de tension de surface avec le formalisme CSF, couplé à la méthode SPH, donnent des résultats corrects (sachant que l’hypothèse d’interface de longueur infinie n’est pas numériquement vérifiée puisque nous avons fixé des conditions limites de type “paroi” sur les bords du domaine). Notons que les cas tests précédents ont été effectués sans tenir compte de la viscosité physique des fluides en présence. Mais il ne faut pas oublier que le code contient de la viscosité artificielle bien plus importante que la viscosité physique. En effet, la viscosité de l’air est  $\nu_{air} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et le coefficient de viscosité numérique est  $\alpha hc$ , avec  $\alpha = 1$ ,  $c = 1500 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il faut donc prendre  $h = 6 \cdot 10^{-9}$  pour avoir  $\nu_{air} = \nu_{num}$ . Il faudrait donc prendre un très grand nombre de particules pour avoir  $h$  aussi petit et dans un tel cas le calcul serait non viable. Dans les cas numériques traités  $h$  ( $h = 1.2 \times (\Delta x + \Delta y)$ ) est, en général, nettement supérieur à  $6 \cdot 10^{-9}$ , donc la viscosité numérique est toujours plus importante que la viscosité physique réelle. Le même raisonnement peut se tenir si l’on prend de l’eau puisque  $\nu_{eau} = 1 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . En développant les calculs théoriques de ces instabilités avec les effets de viscosité et de tension superficielle il apparaît clairement que le taux de croissance  $w$  dépend simultanément de la viscosité et la tension superficielle. Donc, lorsque sont traitées des instabilités de type Rayleigh–Taylor (ou Kelvin–Helmholtz), même si le code ne prend pas en compte les effets de viscosité

physique, il faut savoir que la viscosité numérique modifie les résultats pour ce type de cas tests. Nous pouvons supposer que les erreurs rencontrées entre la théorie et les calculs numériques avec le code SPH sont aussi dues aux effets de viscosité. Ces derniers dépendent des coefficients :  $\alpha hc$ . Que l'un de ces coefficients change, la viscosité numérique sera modifiée et des instabilités différentes se développeront. Cependant, pour le bon fonctionnement du code, la valeur de  $\alpha$  est de l'ordre de 1, celle de  $c$  (vitesse du son dans le milieu) est connue. Reste la valeur du pas de maillage qui peut varier et qui influera sur les valeurs de la viscosité artificielle. L'importance des variations causées, sur la viscosité artificielle, par le changement de  $h$  est difficile à connaître car ce paramètre sert aussi à calculer le nombre de voisins. Augmenter  $h$  revient à augmenter la précision du calcul mais avec une viscosité plus forte. Il est donc utile de savoir que  $h$  a une influence sur des calculs qui dépendent de la viscosité. Dans les cas par contre, où les effets de viscosité n'ont pas d'influence sur le comportement des phénomènes physiques, les résultats sont tout à fait corrects (cas du calcul des forces de Laplace).

### Comparaison avec la théorie linéaire

Nous avons effectué une comparaison sur l'influence de la viscosité pour les instabilités de Rayleigh–Taylor 2D. On a considéré deux fluides incompressibles visqueux avec un coefficient de tension de surface. Nous avons repris des masses volumiques identiques aux calculs numériques précédents :  $\rho_1 = 920 \text{ kg.m}^3$  et  $\rho_2 = 1380 \text{ kg.m}^3$ . Le coefficient de surface est :  $\sigma = 0.7$  et les quatre valeurs de viscosité choisies sont :  $\nu = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ,  $1.1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ,  $1.2 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  et  $0.1 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . En utilisant le logiciel Maple on a déterminé différentes courbes théoriques de l'évolution du taux de croissance  $w$  en fonction du nombre d'onde  $k$ . L'équation de dispersion est la suivante [26] :

$$\begin{aligned} \frac{4k^3\nu^2}{w^2}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(q - k)^2 - 4k\alpha_1\alpha_2 - \left( \frac{gk}{w^2} \left[ (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{k^2\sigma}{g(\rho_1 + \rho_2)} \right] + 1 \right) (q - k) \\ - \frac{4k^2\nu}{w}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(q - k) = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\text{où } \alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \text{ et } q = k\sqrt{1 + \frac{w}{k^2\nu}}$$

Sur la figure (2.9) on remarque l'influence de la viscosité sur le développement des instabilités. Pour un rapport 10 de  $\nu$  on obtient une variation de 30% environ sur le taux de croissance. Ceci peut justifier les erreurs obtenues lors de la comparaison des résultats numériques 2D "non visqueux", car la viscosité numérique est approximativement 100 fois supérieure à celle des fluides réels.

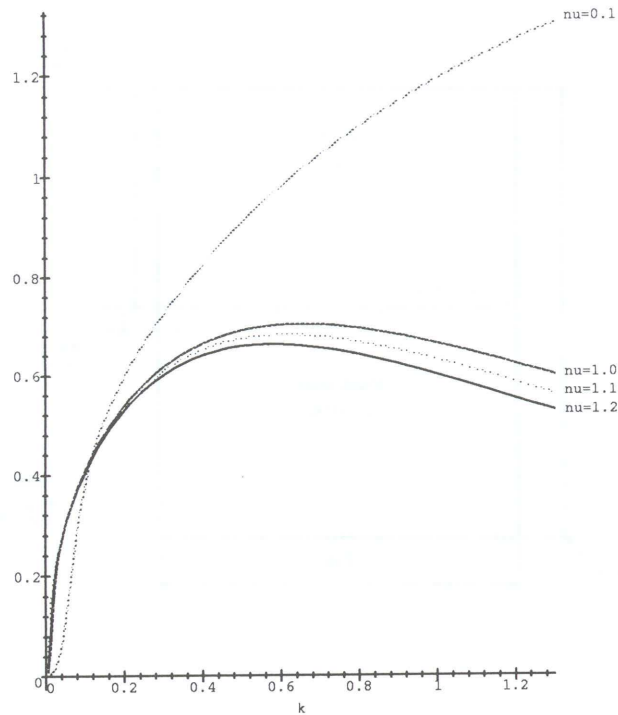


Figure 2.9 : Influence de la viscosité sur les instabilités de Rayleigh–Taylor

### 2.1.5 Instabilités de Rayleigh–Taylor 3D

Après avoir testé les calculs d’instabilité de Rayleigh–Taylor en 2 dimensions d’espace, nous passons maintenant aux vérifications des calculs 3D. Afin de varier les cas tests, nous avons fait dans cette section des calculs avec deux gaz parfaits superposés. Le gaz lourd a pour masse volumique  $\rho_2 = 150 \text{ kg.m}^{-3}$  et le gaz léger  $\rho_1 = 100 \text{ kg.m}^{-3}$ . Les calculs ont été faits avec 4 valeurs de coefficient de tension de surface :  $\sigma = 0, 1, 2, 3$  et nous comparons la croissance de l’instabilité formée avec celle prédite par la théorie linéaire. Le nombre initial de particules est  $33 \times 17 \times 33$  soit 18513 particules et le nombre de voisins fixé entre 40 et 50. L’interface initiale est perturbée par un champ de vitesse vertical de type  $v(z) = a(\cos(kx) + \cos(ky))$  sur deux rangées de particules au niveau de l’interface. La configuration de calcul est présentée sur la figure 2.10.

Sur les figures 2.11, 2.12 et 2.13 nous donnons respectivement l’évolution de l’instabilité pour les quatre coefficients de tension de surface et au même instant.

De la même manière qu’en 2D, nous comparons le déplacement de l’interface avec les prédictions de la théorie linéaire. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 2.3

Ces résultats sont corrects et comparables à ceux obtenus en 2D, nous pouvons considérer que le calcul de la tension de surface avec la méthode SPH est satisfaisant.

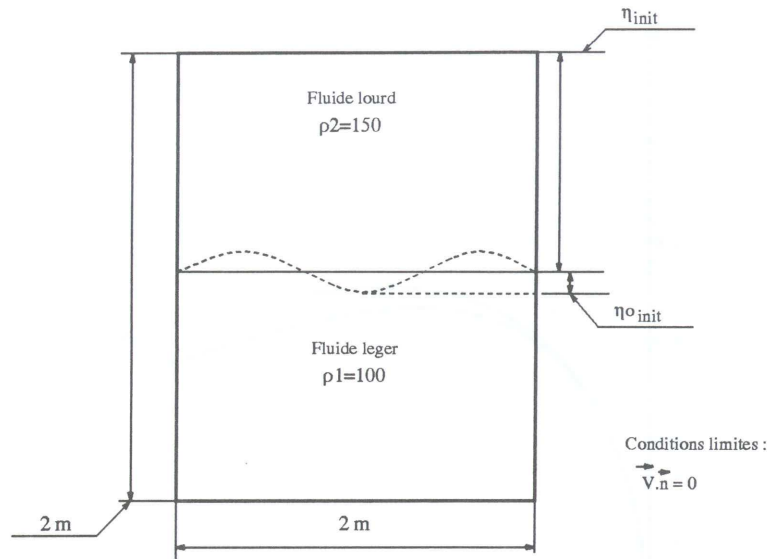


Figure 2.10 : Configuration de calcul 3D

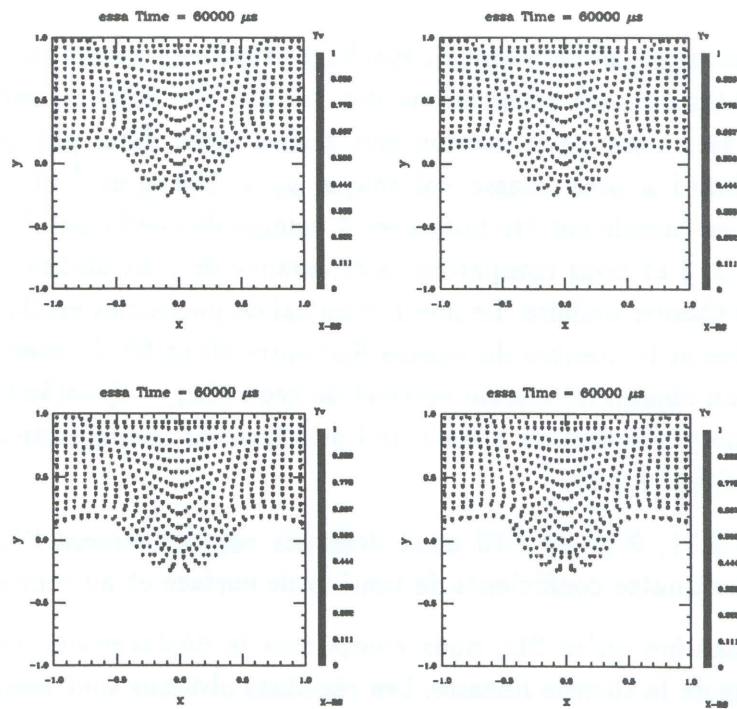


Figure 2.11 : Instabilités de Rayleigh–Taylor 3D à l’instant  $t = 0.06$  s

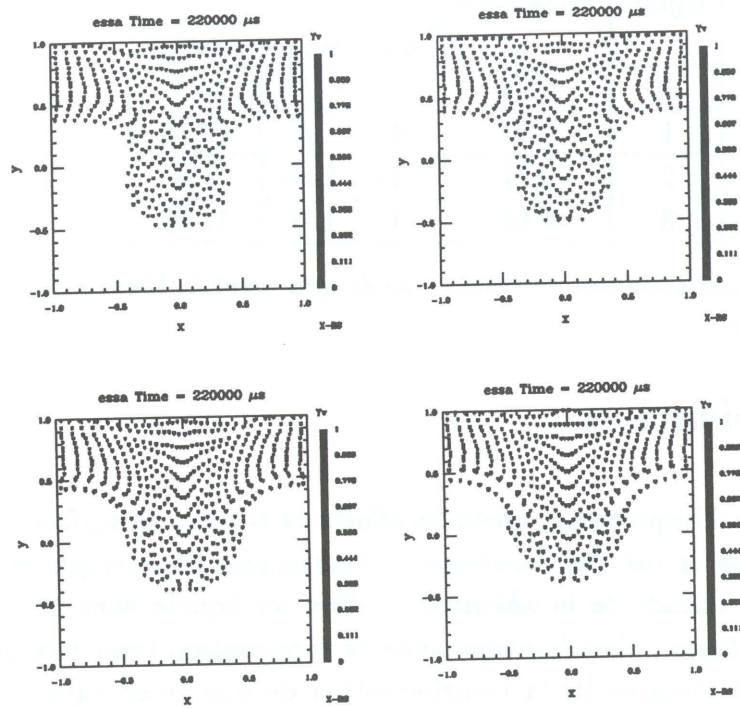


Figure 2.12 : Instabilités de Rayleigh–Taylor 3D à l’instant  $t = 0.22$  s

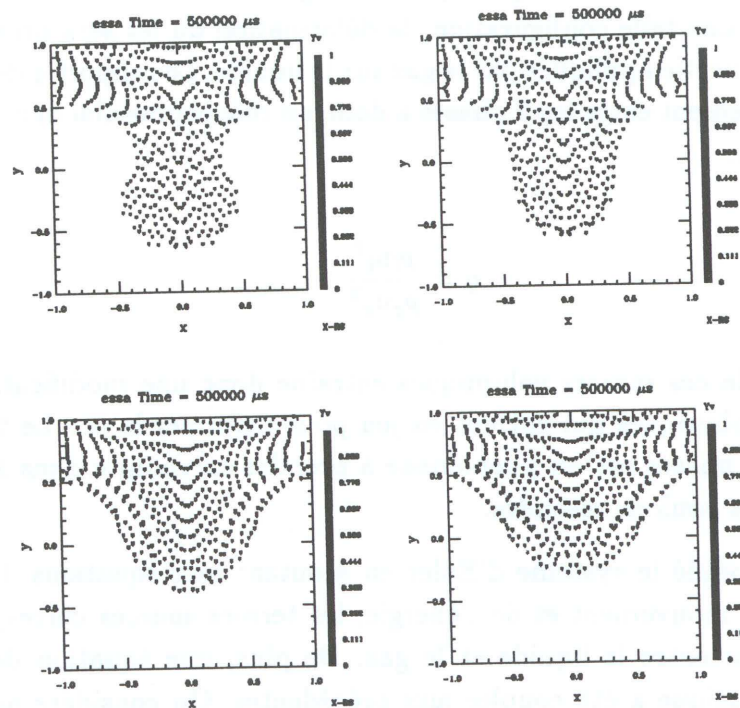


Figure 2.13 : Instabilités de Rayleigh–Taylor 3D à l’instant  $t = 0.5$  s

sigma	taux de croissance	$T = 500000\mu s$		
		$\eta_{th}$	$\eta_{num}$	<i>Erreur</i>
0	0.73	1.44	1.64	14 %
1	0.72	1.43	1.61	12 %
2	0.71	1.42	1.36	4 %
3	0.69	1.41	1.25	11 %

Tableau 2.3 : Comparaison des résultats numériques avec la théorie des instabilités de Rayleigh–Taylor

## 2.2 Vaporisation

Un autre problème d'importance, après les efforts de tension de surface, est à prendre en compte dans le cas des écoulements diphasiques liquide/gaz, et plus particulièrement pour l'étude de la déformation d'un jet liquide dans un écoulement gazeux à grande vitesse : c'est le phénomène de vaporisation (voir rapports SIMULOG [67]). Il est à l'origine de la transformation de liquide en vapeur, qui passe dans la phase gazeuse. Dans ce chapitre, nous donnons les modifications à apporter aux équations d'Euler pour y ajouter les termes de transfert de masse dus à la vaporisation et nous présentons quelques cas de validation de calculs effectués avec la méthode SPH. Ce travail a été fait avec l'aide d'Eric Larrey. À l'origine, nous voulons étudier la courbure d'un jet liquide plongé dans un écoulement gazeux supersonique. Dans une telle configuration, la déformation du jet sera principalement due aux efforts d'inertie appliqués par le gaz sur le liquide. Le rapport  $q$  des efforts de quantité de mouvement entre les 2 phases a donc un rôle primordial dans l'évolution de la forme du jet.

$$q = \frac{\rho_l u_l^2}{\rho_g u_g^2} \quad (2.32)$$

La variation de ces masses volumiques entraîne donc une modification de  $q$  et des phénomènes physiques qui entrent en jeu pour déformer le jet. Le transfert de masse entre les 2 phases est un phénomène à prendre en compte dans le problème physique que nous voulons résoudre.

On a donc modifié le système d'Euler en ajoutant aux équations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, les termes sources correspondant au transfert de masse entre le liquide et le gaz. De plus, une équation de transport de la fraction massique a été couplée aux précédentes. On considère que la phase gazeuse est multi-espèce, c'est-à-dire qu'une particule de gaz peut être composée de gaz et de vapeur d'eau, alors que le liquide reste mono-espèce. Cette composition des particules est donnée par la valeur de la fraction massique. Deux sources

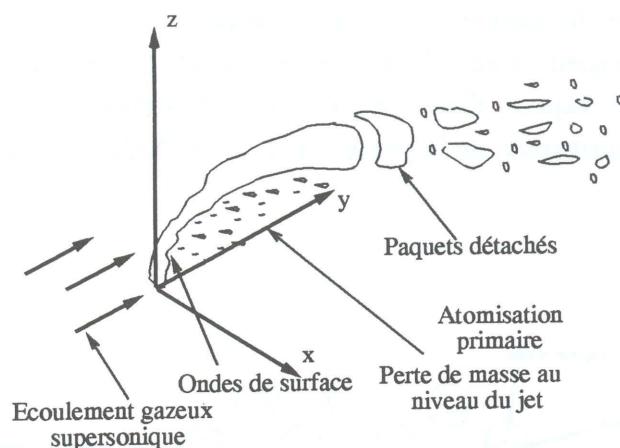


Figure 2.14 : Perte de masse à la surface d'un jet liquide

principales de production de vapeur d'eau sont l'échauffement du liquide en contact de gaz plus chaud, échauffement par conduction ou vaporisation, et la vaporisation de gouttelettes d'eau arrachées au liquide, par l'écoulement gazeux (phénomène d'atomisation primaire ou épluchage de surface). Nous faisons l'hypothèse que la masse liquide perdue par l'épluchage est aussitôt vaporisée. Cette hypothèse est valide étant donné les très faibles rayons de gouttes formées par ce mécanisme et la rapidité des phénomènes de vaporisation.

Dans ces deux cas, une certaine masse d'eau est transformée en vapeur d'eau, ce qui s'accompagne d'un transfert d'énergie nécessaire à la vaporisation du liquide. Nous nous intéressons dans cette partie à la gestion de ces transferts dans les équations de conservation des différentes phases. Nous pouvons représenter l'interface de la manière suivante (configuration dans laquelle nous nous plaçons) : figure (2.15).

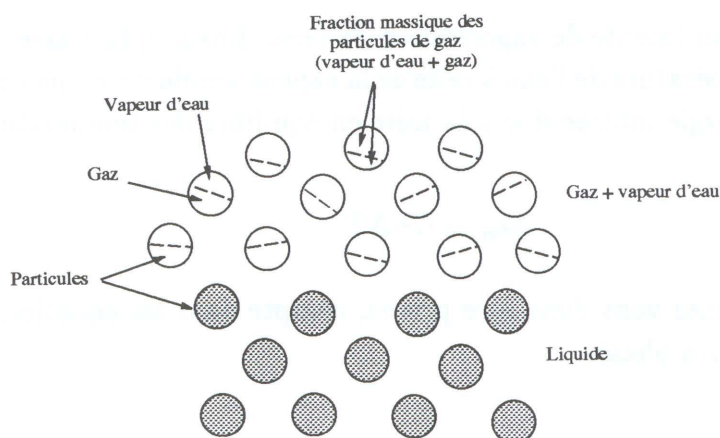


Figure 2.15 : Interface liquide/gaz

Chacune de ces particules gazeuses possède une fraction massique de gaz et



une fraction massique de vapeur d'eau. Une certaine quantité de matière liquide  $m_l$  se transforme en vapeur d'eau durant le temps  $\Delta t$ . Cette masse liquide devient une masse gazeuse de vapeur d'eau  $m_v$  à la même température que l'eau. Cette transformation est responsable de la perte d'enthalpie  $\Delta H_{lv}$  de la phase gazeuse par évaporation :

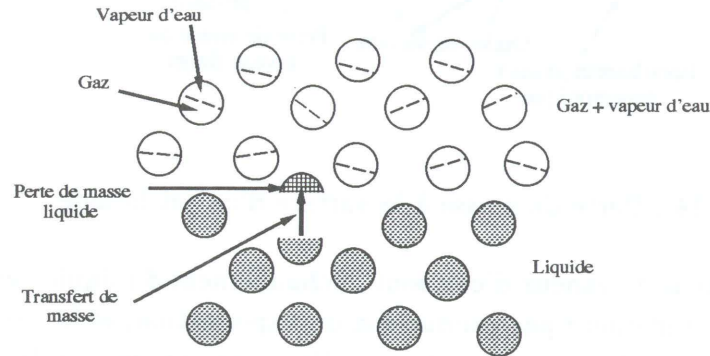


Figure 2.16 : Vaporisation partielle d'une particule

$$\Delta H_{lv} = m_l L_{lv} \quad (2.33)$$

Puisque l'on suppose que la transformation est isotherme :

$$\Delta H_{lv} = \Delta e_{lv} \quad (2.34)$$

où  $L_{lv}$  est la chaleur latente de vaporisation de l'eau. Ensuite, la masse de vapeur d'eau passe de la température de l'eau à celle de la vapeur ambiante ce qui correspond à une évolution d'énergie interne due à la mise en équilibre des températures :

$$\Delta e_{lv} = C_v \Delta T \quad (2.35)$$

Ces différents termes vont donc être pris en compte dans les équations de conservation des différentes phases.

### 2.2.1 Équations pour la phase gazeuse

La phase gazeuse voit un terme source de masse, de fraction massique et d'énergie, localisé sur chaque particule liquide qui subit une perte de masse (par vaporisation directe ou par épluchage).

## Équation de conservation de la masse

Reprenons la base de l'équation de conservation de la masse. Soit un volume fixe  $V$ . Soit  $\tau_m$  le taux de production de masse par unité de temps. La variation de masse dans ce volume au cours du temps s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \tau_m \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS + \int_V \tau_v dV \quad (2.37)$$

où  $\tau_v$  est le taux de production volumique de vapeur.

$$\tau_m = \int_V \tau_v dV \quad (2.38)$$

L'équation locale de conservation de la masse s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \text{div}(\rho \vec{u}) + \tau_v \quad (2.39)$$

Une estimation particulière de la production de vapeur s'écrit naturellement :

$$\Pi^h \tau_v = \sum_j w_j \tau_j W_{ij} \quad (2.40)$$

Son écriture dans le formalisme particulière est la suivante :

$$\frac{dw_i \rho_i}{dt} = \sum_j w_j \tau_j W_{ij} \quad (2.41)$$

## Équation de transport de la fraction massique

La démarche est identique à la précédente puisque l'équation de transport de la fraction massique traduit uniquement la conservation de la masse de vapeur dans un volume élémentaire. Donc l'équation de transport de la fraction massique a la forme suivante :

$$\frac{dw_i \rho_i Y}{dt} = \sum_j w_j \tau_j W_{ij} \quad (2.42)$$

## Équation de conservation de la quantité de mouvement

La masse de vapeur produite possède la vitesse de la particule liquide dont elle est issue. Le bilan de quantité de mouvement est donc :

$$\frac{\partial \rho \vec{u}_g}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}_g \otimes \vec{u}_g) + \vec{\nabla} p = \tau_v \vec{u}_l \quad (2.43)$$

Pour simplifier les équations, nous poserons  $\Delta \vec{u}$  l'écart de vitesse entre la phase liquide et la phase gazeuse. L'approximation particulière de cette équation donne :

$$\frac{d}{dt}(w_i \rho_i \vec{u}_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j + \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{i,j} = \sum_j w_j \tau_j \vec{u}_j W_{i,j} \quad (2.44)$$

En notant que l'approximation particulière d'une fonction  $f$  est :

$$\Pi^h f = \sum_j w_j f_j W_{i,j} \quad (2.45)$$

On peut écrire que :

$$\Pi^h 1 = 1 = \sum_j w_j W_{i,j} \quad (2.46)$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement devient :

$$w_i \rho_i \frac{d}{dt}(\vec{u}_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j + \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{i,j} = \sum_j w_j \tau_j \vec{u}_j W_{i,j} - \sum_j w_j \tau_j \vec{u} W_{i,j} \quad (2.47)$$

Soit :

$$w_i \rho_i \frac{d}{dt}(\vec{u}_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j + \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{i,j} = \sum_j w_j \tau_j \Delta \vec{u}_j W_{i,j} \quad (2.48)$$

## Équation de conservation de l'énergie

En fonction des hypothèses de départ, l'équation de conservation de l'énergie devient :

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla}((\rho E + p)\vec{u}) = \Delta e + \frac{1}{2} \tau \vec{u} \cdot \vec{u} + \tau e_l \quad (2.49)$$

Avec la relation :

$$\frac{d}{dt}(w_i \rho_i E_i) = \frac{d}{dt}(w_i \rho_i e_i) + \frac{1}{2} \left( \vec{u}_i \cdot \frac{d}{dt}(w_i \rho_i \vec{u}_i) + w_i \rho_i \vec{u}_i \cdot \frac{d}{dt}(\vec{u}_i) \right) \quad (2.50)$$

En utilisant les expressions (2.44) et (2.48), l'approximation particulière de cette équation donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(w_i \rho_i e_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j \vec{u}_j - \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \vec{u}_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} &= \sum_j w_j (\Delta e + \tau e_j) W_{ij} \\ &- \frac{1}{2} \vec{u}_i \cdot \sum_j w_j \tau_v \vec{u}_j W_{ij} \\ &- \frac{1}{2} \vec{u}_i \cdot \sum_j w_j \tau_v \Delta \vec{u} W_{ij} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_j w_j \tau_j \vec{u}_j \cdot \vec{u}_j W_{ij} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Soit :

$$\frac{d}{dt}(w_i \rho_i e_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j \vec{u}_j - \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \vec{u}_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} = \sum_j w_j (\Delta e + \tau e_j) W_{ij} + \frac{1}{2} \sum_j w_j \tau_v (\vec{u}_j - \vec{u}_i)^2 W_{ij} \quad (2.52)$$

On obtient de même :

$$w_i \rho_i \frac{d}{dt}(e_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j \vec{u}_j - \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \vec{u}_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} = \sum_{j \in J} w_j (\Delta e + \tau(e_j - e_i)) W_{ij} + \frac{1}{2} \sum_j w_j \tau_v (\vec{u}_j - \vec{u}_i)^2 W_{ij} \quad (2.53)$$

Nous retrouvons la variation d'énergie cinétique due à l'apport de matière, la variation d'énergie interne due au transfert de masse et la chaleur latente de vaporisation.

### Système complet avec perte de masse

Le nouveau système s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw_i \rho_i}{dt} = \sum_j w_j \tau_j W_{ij} = S_m \\ w_i \rho_i \frac{d}{dt}(\vec{u}_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j + \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} = \sum_j w_j \tau_j \Delta \vec{u} W_{ij} = S_f \\ w_i \rho_i \frac{d}{dt}(e_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j \vec{u}_j - \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \vec{u}_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} = \sum_{j \in J} w_j (\Delta e + \tau(e_j - e_i) + \frac{1}{2} \tau_j \Delta \vec{u}^2) W_{ij} = S_e \\ \frac{dw_i \rho_i Y}{dt} = \sum_j w_j \tau_j W_{ij} = S_m \end{array} \right. \quad (2.54)$$

## 2.2.2 Équations pour la phase liquide

La phase liquide voit elle aussi un terme source dans l'équation de continuité. Le système obtenu est donc équivalent à celui de la phase gazeuse. Bien évidemment, le taux de production de masse change de signe. Lorsqu'aucun terme source n'est introduit au niveau de l'équation de continuité, celle-ci se traduit par une relation simple entre la masse volumique et les poids de la formule de quadrature. La masse de la particule est :

$$m_i = w_i \rho_i = cste \quad (2.55)$$

Dans le cas présent, l'introduction de cette notion conduit à écrire une équation d'évolution de la masse de la particule :

$$\frac{dm_i}{dt} = S_m \quad (2.56)$$

La masse des particules n'est donc plus constante mais devient une fonction du temps. L'introduction de cette notion permet de réécrire le système sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm_i}{dt} = S_m \\ m_i \frac{d}{dt}(\vec{u}_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j + \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} = S_f \\ m_i \frac{d}{dt}(e_i) + w_i \sum_j w_j \left( \frac{p_i}{\rho_i} \rho_j \vec{u}_j - \frac{p_j}{\rho_j} \rho_i \vec{u}_i \right) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} = S_e \\ m_i \frac{dY}{dt} + Y S_m = S_m \end{array} \right. \quad (2.57)$$

Soit après simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm_i}{dt} = S_m \\ \frac{d}{dt}(\vec{u}_i) + \sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} = \frac{S_f}{m_i} \\ \frac{d}{dt}(e_i) + \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j (\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{\nabla} W_{ij} = \frac{S_e}{m_i} \\ \frac{dY}{dt} = (1 - Y) \frac{S_m}{m_i} \end{array} \right. \quad (2.58)$$

On retrouve le système déjà obtenu, complété par un ensemble de termes sources et d'une équation de variation de la masse de la particule. La masse volumique est alors estimée au sens particulaire ou en gardant l'équation de continuité avec perte de masse.

### 2.2.3 Cas tests 2D de la perte de masse

Nous avons réalisé plusieurs séries de cas tests pour valider les calculs sur la perte de masse. On a utilisé la version 3D du code en faisant un calcul sur une "lame" 2D de fluide. Ainsi on considère un domaine dans lequel sont placées deux zones superposées de deux fluides différents. Le domaine de calcul est une boîte de 2m de coté. La surface d'eau et la surface d'air sont de 2m<sup>2</sup> à l'instant initial. La vitesse des deux phases est de 10 m.s<sup>-1</sup>. Pour le premier cas test le nombre de particules total est de 512 (256 part d'eau/256 part d'air). Pour valider le calcul de la perte de masse nous déterminons la masse de chaque particule d'air (p<sub>mass</sub>) à chaque instant. Soit p<sub>mass</sub> =  $\frac{\rho S}{N}$ . Au cours du temps nous connaissons l'évolution de cette masse :

$$p_{mass}(t) = p_{mass}(0) + \tau_m \text{ gain } t \quad (2.59)$$

Avec *gain* = ±1 qui représente soit un gain soit une perte de masse. Ainsi nous pouvons comparer les valeurs de cette masse théorique avec les résultats numériques. Puis nous avons repris le même calcul en augmentant le nombre de particules dans le domaine (4096 au total) et nous remarquons que la précision des résultats numériques est nettement meilleure. Nous avons placé un gaz sur un liquide, avec un taux de masse  $\tau_m = 100 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$  et un gain de -1 (soit une perte de masse) pour le liquide. Un taux de masse nul et un gain de 1 pour le gaz.

Le liquide doit donc transférer au gaz une partie de sa masse, ce qui correspond à un cas de vaporisation. La première série de calculs est faite avec 16 × 16 particules en prenant 40 à 50 voisins. Nous présentons les résultats dans le tableau 2.4

Puis nous avons augmenté le nombre de points, en prenant 4096 (64 × 64) particules, les calculs sont évidemment plus longs et nous avons limité le calcul en temps.

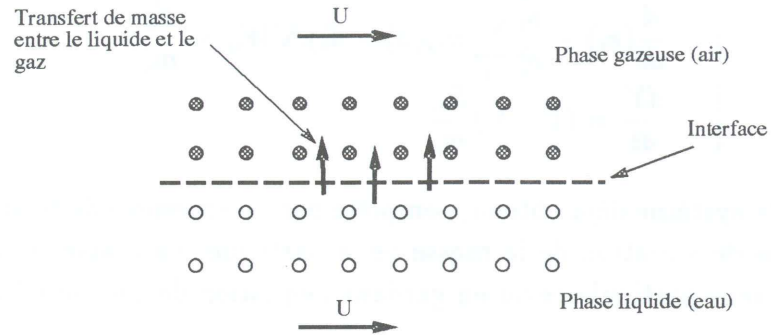


Figure 2.17 : Domaine initial de calcul

temps (s)	nb part d'air	p <sub>mass</sub> numérique	p <sub>mass</sub> théorique	erreur
0	256	0.0156	0.0156	1 %
$2.10^{-4}$	256	0.0157	0.0157	1 %
$8.10^{-4}$	248	0.0158	0.0159	1 %
$1.5.10^{-3}$	256	0.0159	0.0162	1 %
$2.2.10^{-3}$	252	0.016	0.0165	3 %
$2.8.10^{-3}$	249	0.0161	0.0167	3 %
$3.8.10^{-3}$	266	0.0162	0.0170	4 %
$4.5.10^{-3}$	272	0.0163	0.0173	5 %
$5.5.10^{-3}$	280	0.0164	0.0176	7 %
$6.10^{-3}$	299	0.0165	0.0176	6 %
$6.5.10^{-3}$	299	0.0166	0.0178	6 %
$7.10^{-3}$	309	0.0167	0.0179	6 %
$7.5.10^{-3}$	316	0.0168	0.018	6 %
$8.5.10^{-3}$	339	0.0169	0.018	6 %
$9.5.10^{-3}$	350	0.017	0.0183	7 %
$1.10^{-2}$	356	0.017	0.0184	7 %

Tableau 2.4 : Test de la perte de masse avec 512 particules

Les résultats sont regroupés dans le tableau 2.5

temps (s)	nb part d'air	pmass numérique	pmass théorique	erreur
0	2048	0.00196	0.00196	1 %
$1.10^{-5}$	2048	0.00196	0.00195	1 %
$8.10^{-5}$	2048	0.00197	0.00196	1 %
$2.10^{-4}$	2048	0.00199	0.00196	2 %
$3.10^{-4}$	2048	0.002	0.00197	2 %
$4.10^{-4}$	2048	0.00201	0.00197	2 %
$6.10^{-4}$	2048	0.00202	0.00198	2 %

Tableau 2.5 : Test de la perte de masse avec 4096 particules

Les résultats sont comparables dans les 2 cas. On a 8% d'erreur maximum sur le calcul de la perte de masse avec 512 particules et 2% d'erreur dans le cas avec 4096 particules. Les calculs faits avec la méthode SPH peuvent maintenant intégrer complètement les algorithmes prenant en compte la perte de masse entre les milieux en présence, ainsi que la méthode de résolution de la tension superficielle. Les phénomènes surfaciques importants qui interviennent lors de la pulvérisation d'interface liquide/gaz peuvent être incorporés dans les équations d'Euler 3D.





# Chapitre 3

## Résultats sur l'étude d'un jet liquide dans un écoulement gazeux supersonique

Nous avons réalisé différents calculs 2D et 3D sur l'interaction d'un jet liquide avec un écoulement gazeux supersonique. Les premiers tests concernent l'injection d'un liquide sur une plaque plane en 2D. Les calculs suivants portent sur un jet 3D derrière une marche descendante. Deux manières de prendre en compte la pression dans le liquide sont discutées. Les phénomènes qui mènent à la rupture du jet liquide sont observés et on peut décrire les mécanismes de pulvérisation qui interviennent. La tension de surface et la vaporisation ne sont pas incorporés dans les calculs présentés. Deux raisons ont motivé notre choix: le petit rôle de ces phénomènes par rapport à l'influence du rapport des pressions dynamiques et des conditions d'écoulement, et le coût calcul qui devient important en 3D.

### 3.1 Jet 2D

Les calculs que nous présentons dans cette section sont faits en 2D. La configuration initiale est un jet liquide injecté dans une veine de gaz. Les différents paramètres géométriques sont les suivants :

- Diamètre du jet : 0.01 m                      Longueur du jet : 0.04m
- Longueur de la veine : 0.35 m              Hauteur de la veine : 0.1 m
- Nombre de particules d'air : 9000      Nombre de particules d'eau : 1120

Le nombre de voisins pour ces calculs est fixé entre 40 et 50. Sur les résultats présentés nous pouvons voir l'évolution de la vitesse (figure 3.2, 3.3 et 3.4), de la

masse volumique (figure 3.8, 3.9 et 3.10) et de la pression (figure 3.5, 3.6 et 3.7) à l'instant  $t_1 = 200\mu s$  ainsi que de la masse volumique à l'instant  $t_2 = 600\mu s$  (figure 3.11, 3.12 et 3.13). Ceci est fait pour 3 configurations dynamiques différentes que nous présentons dans le tableau suivant :

Cas 1	Cas 2	Cas 3
$V_x = 250 \text{ m.s}^{-1}$	$V_x = 400 \text{ m.s}^{-1}$	$V_x = 600 \text{ m.s}^{-1}$
$V_z = 100 \text{ m.s}^{-1}$	$V_z = 160 \text{ m.s}^{-1}$	$V_z = 100 \text{ m.s}^{-1}$
$p_{\text{gaz}} = 1.67 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	$p_{\text{gaz}} = 1.67 \cdot 10^5 \text{ Pa}$	$p_{\text{gaz}} = 2.89 \cdot 10^6 \text{ Pa}$
$p_{\text{liq}} = 1.10^5 \text{ Pa}$	$p_{\text{liq}} = 1.10^5 \text{ Pa}$	$p_{\text{liq}} = 1.10^5 \text{ Pa}$
$q = 32$	$q = 32$	$q = 1.85$
$c_{\text{son}} = 216 \text{ m.s}^{-1}$	$c_{\text{son}} = 216 \text{ m.s}^{-1}$	$c_{\text{son}} = 519 \text{ m.s}^{-1}$
$M = 1.16$	$M = 1.85$	$M = 1.16$
$\rho_{\text{gaz}} = 5 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_{\text{gaz}} = 5 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_{\text{gaz}} = 15 \text{ kg.m}^{-3}$
$\rho_{\text{liq}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_{\text{liq}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_{\text{liq}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$

Tableau 3.1 : Paramètres physiques

Notons que les cas 1 et 2 sont quasi-identiques, seules les vitesses du gaz et du liquide varient. Les rapports de pression dynamique  $q$  sont égaux, ainsi que les pressions et les masses volumiques. Cependant les résultats numériques montrent que l'injection des jets et leur déformation sont différentes.

### 3.1.1 Analyse des champs de vitesse ( $t = 200 \mu s$ )

Nous voyons clairement une onde se former en amont du jet. Elle se courbe progressivement suivant la courbure de la colonne liquide. Une zone de recirculation apparaît à l'arrière du jet. On remarque une zone tourbillonnaire où les vitesses remontent l'écoulement. La vitesse du gaz devant le jet est pratiquement égale à celle du jet. Puis en fonction de la distance de pénétration du jet, la vitesse du gaz augmente et une zone d'accélération est visible au niveau de la tête du jet.

### 3.1.2 Analyse de la pression

Un de nos objectifs est d'étudier la variation de pression dans l'écoulement gazeux afin de voir son influence sur la déformation du jet. Pour calculer la pression dans le liquide on a utilisé l'équation de Tait qui est surtout applicable pour de très fortes variations de pression. Cependant il est difficile de déterminer le rôle de la pression dans le liquide sur le mécanisme de courbure du jet. L'influence des vitesses incidentes du gaz et d'injection du liquide ainsi que les masses volumiques est nettement plus importante d'après les résultats expérimentaux. Sur nos résultats nous pouvons remarquer la formation d'une onde de pression dans le tube d'injection du liquide.

Cette onde pourrait être causée par le passage de l'onde de choc dans l'écoulement gazeux. La zone de pression maximale est située à la base de la colonne d'eau. Les pressions sont très fortes et atteignent 80 bars dans le cas 3. L'onde de pression se courbe en fonction de la courbure du liquide et une zone de dépression se crée à l'arrière du jet.

### 3.1.3 Analyse de la masse volumique ( $t = 200$ et $600 \mu s$ )

À l'instant  $t = 200 \mu s$ , nous visualisons les variations de la masse volumique en amont du jet. Dans le liquide, la masse volumique est de  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Nous avons limité la valeur de  $\rho$  sur les figures de résultats pour nous focaliser uniquement sur l'évolution de la masse volumique du gaz. À la base du jet,  $\rho_{\text{gaz}}$  est très forte, puis le long de la colonne de liquide, elle diminue jusqu'à la valeur de l'écoulement ambiant. Derrière le jet, dans la zone de recirculation, la masse volumique baisse, ce qui est tout à fait normal. Le corps liquide est parfaitement visible. Nous pouvons notamment mesurer les longueurs de pénétration pour chacun des 3 cas :

- $L_1 = 0.025 \text{ m}$ ,  $L_2 = 0.035 \text{ m}$ ,  $L_3 = 0.022 \text{ m}$

Le jet reste quasi-vertical dans les 2 premiers cas où  $q = 32$ , ce qui est parfaitement conforme aux résultats expérimentaux obtenus par Schetz qui prévoit que lorsque  $q > 12$  on observe une grande pénétration du jet. Dans le cas 3, le jet se courbe nettement,  $q = 1.85$  et nos résultats sont encore cohérents puisqu'à  $q < 2$  nous avons une faible pénétration du jet (voir Schetz). En effet sur la figure (3.13) le jet se pulvérise et a tendance à rester plaqué à la surface. Les premières ondes de surface sont visibles sur la colonne liquide. Une zone de faible épaisseur (figure (3.10)) est à l'origine de la rupture qui a lieu sur la figure (3.13).

Sur la figure (3.10), on a déterminé le coefficient  $\alpha$  à l'aide de la courbe (3.1).  $\alpha = 0.02$  et nous pouvons en déduire  $C_D$  avec la formule suivante :

$$C_D = \frac{\pi}{2\alpha} Dq \quad (3.1)$$

Où  $D$  est le diamètre du jet soit  $0.01 \text{ m}$  et  $q$  est le rapport des pressions dynamiques qui a pour valeur  $1.85$  dans notre calcul. Nous obtenons une valeur de  $C_D = 1.45$ . Ce résultat peut être comparé avec le  $C_D$  issu des courbes de Lamb [68] à partir de la valeur du nombre de Reynolds. Dans notre cas on a :

$$Re_D = \frac{\Delta U D}{\nu_{\text{gaz}}} \quad (3.2)$$

Où  $\Delta U$  est la vitesse relative entre l'écoulement gazeux et le jet liquide,  $\Delta U = 600 \text{ m.s}^{-1}$ .  $\nu_{\text{gaz}} = 1.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  et nous avons  $Re_D = 6.10^5$ . En utilisant une courbe

qui donne  $C_D = f(Re_D)$  pour un cylindre [68], on trouve comme valeur de  $C_D \in [0.5, 1]$ , qui est du même ordre de grandeur que le résultat obtenu numériquement. La courbure du jet issue de ce calcul correspond à la courbure prédite par les abaques.

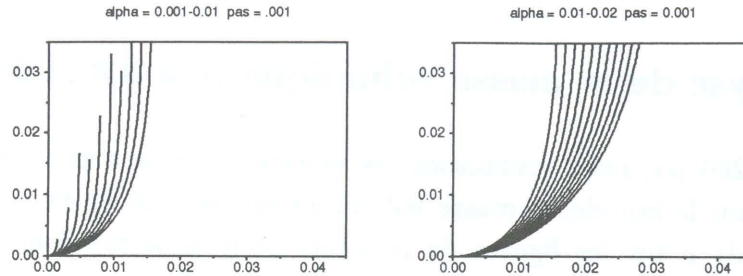


Figure 3.1 : Abaque du coefficient  $\alpha$  permettant de caractériser la courbure du jet. Courbe issue des résultats expérimentaux obtenus par Gaëtan Vich.

Pour  $t = 600 \mu s$ , nous remarquons que la masse volumique augmente au niveau de la paroi supérieure, puisque la colonne de liquide “bloque” l’écoulement gazeux en 2D. La zone de recirculation croît à l’arrière du jet. Sur le cas 1 (figure 3.11), de petites ondes de surfaces apparaissent, la distance entre deux crêtes est environ de 0.013 m. Une courbure du jet à  $L = 0.06$  m est provoquée par la zone de compression située à la paroi supérieure. Pour le cas 2 (figure 3.12), des ondes surfaciques plus courtes sont visibles à la périphérie du jet, ceci est dû à l’augmentation des vitesses d’injection. Nous voyons aussi la formation d’instabilités à partir de la distance de pénétration  $L = 0.07$  m. Le troisième cas (figure 3.13) fait apparaître la rupture du jet liquide en gouttes et en paquets. Le jet se courbe fortement dès sa sortie dans l’écoulement gazeux, ceci est causé par les fortes vitesses incidentes ( $600 \text{ m.s}^{-1}$ ). Puis de petites instabilités naissent et perturbent la surface du liquide. Des zones de striction où a lieu la cassure sont visibles. Plusieurs gouttes sont formées et leur diamètre est de l’ordre de  $d/2$  soit 5 mm.

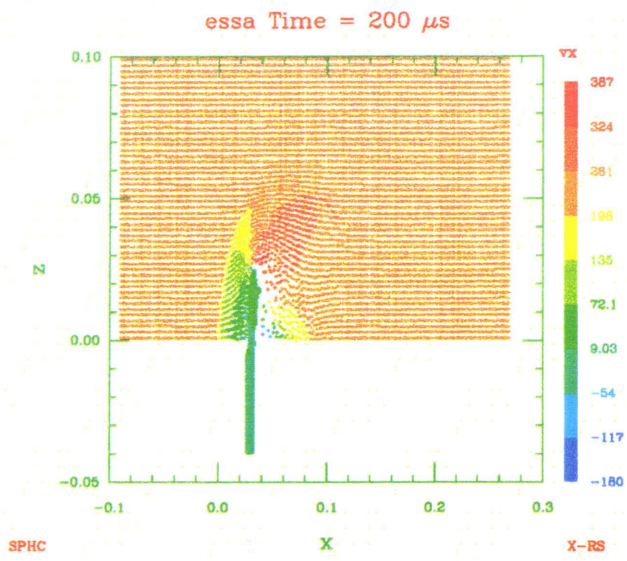


Figure 3.1 : cas1 – champ de vitesse

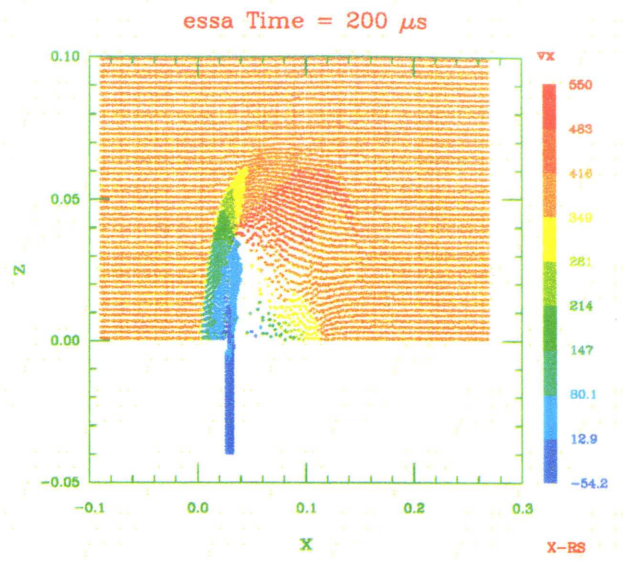


Figure 3.2 : cas2 – champ de vitesse

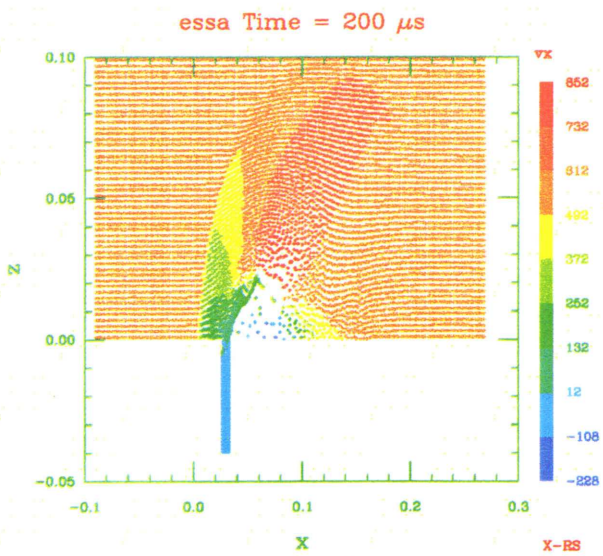


Figure 3.3 : cas3 – champ de vitesse



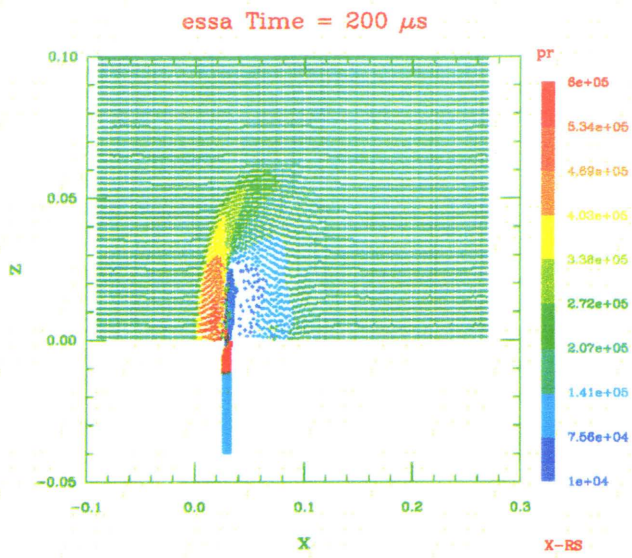


Figure 3.4 : cas1 – pression

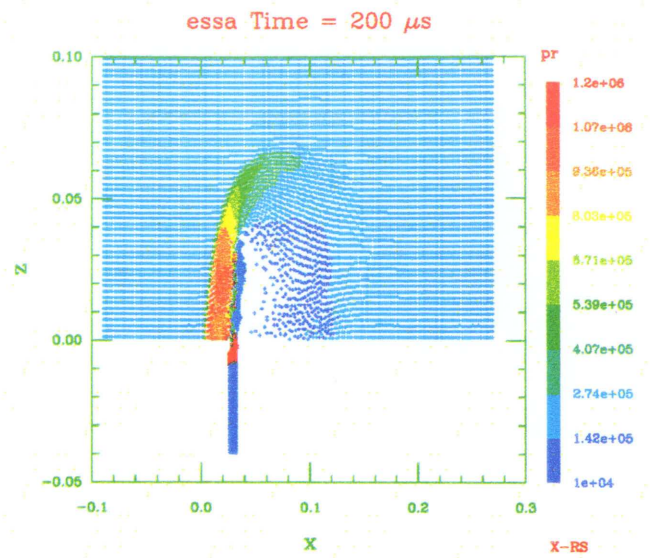


Figure 3.5 : cas2 – pression

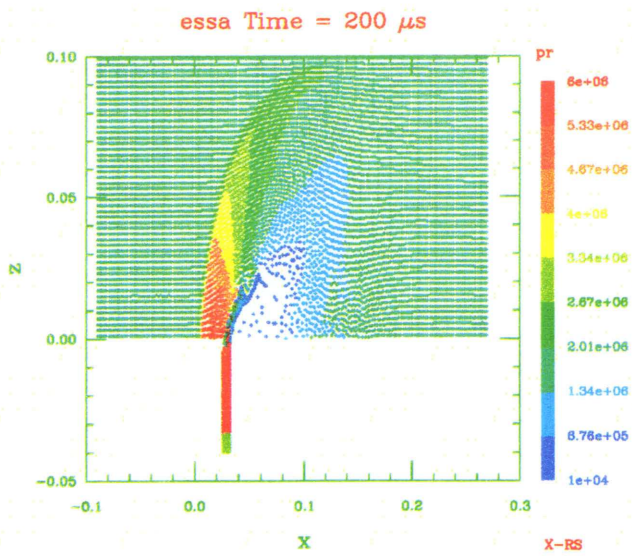


Figure 3.6 : cas3 – pression





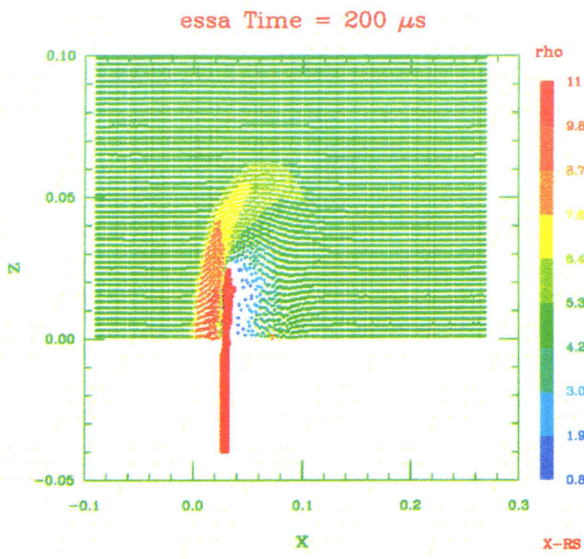


Figure 3.7 : cas1 – masse volumique

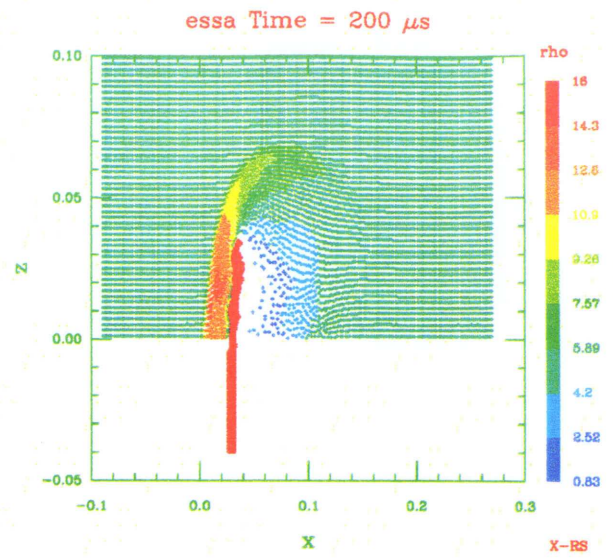


Figure 3.8 : cas2 – masse volumique

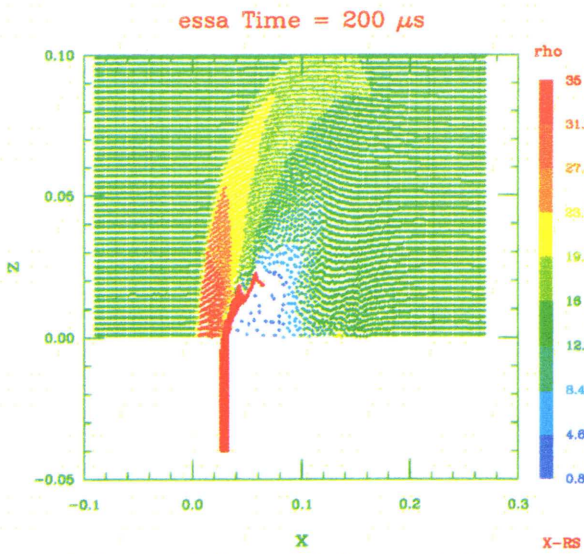


Figure 3.9 : cas3 – masse volumique



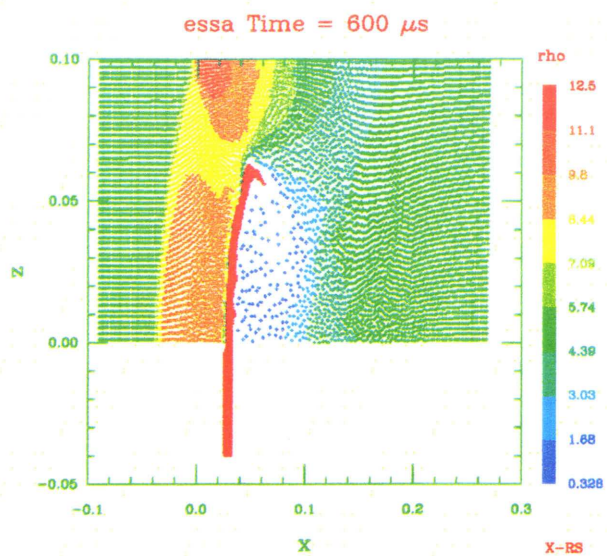


Figure 3.10 : cas1 – masse volumique

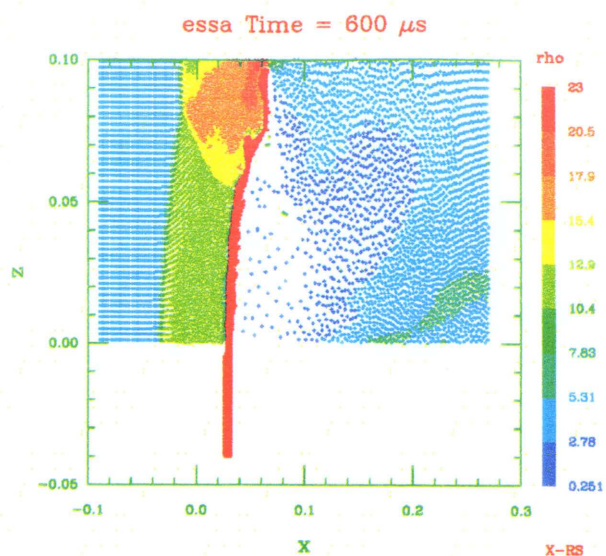


Figure 3.11 : cas2 – masse volumique

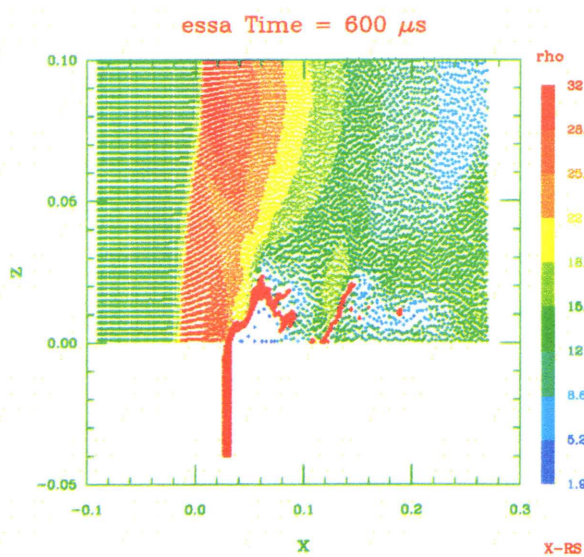


Figure 3.12 : cas3 – masse volumique



## 3.2 Jet 3D derrière une marche descendante

Nous avons choisi de placer la zone d'injection du liquide derrière une marche descendante, pour obtenir une configuration correspondante à celle demandée par la DCN. Le jet se trouve donc dans une zone de recirculation, où les tourbillons dans le gaz vont être destabilisateurs pour le jet liquide, mais où l'écoulement a une vitesse réduite par rapport à la vitesse initiale. L'écoulement gazeux incident est supersonique, nous résumons les différents paramètres sous forme de tableau :

masses volumiques	vitesses	pressions	Mach et q
$\rho_{gaz} = 4 \text{ kg.m}^{-3}$	$V_{gaz} = 1000 \text{ m.s}^{-1}$	$p_{gaz} = 4.e^5 \text{ Pa}$	$M = 2.7$
$\rho_{liq} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$	$V_{liq} = 150 \text{ m.s}^{-1}$	$p_{liq} = 4.e^5 \text{ Pa}$	$q = 5.6$

Tableau 3.2 : Paramètres physiques

La veine a une longueur de 2 m pour les premiers calculs, puis de 4 m par la suite, une hauteur et une largeur de 1 m. La marche descendante a une hauteur et une longueur de 50 cm. La longueur du tube d'injection est de 10 cm. Le diamètre du jet liquide est fixé à 5 cm. Pour la veine de 2 m de long on a pris initialement 2714 particules d'air et 70 particules d'eau. Pour la veine de 4 m de long le calcul est initialisé avec 5134 particules d'air et toujours 70 particules pour l'eau. Le nombre de voisins est fixé entre 40 et 50. Nous présentons la géométrie du domaine de calcul sur la figure 3.14 :

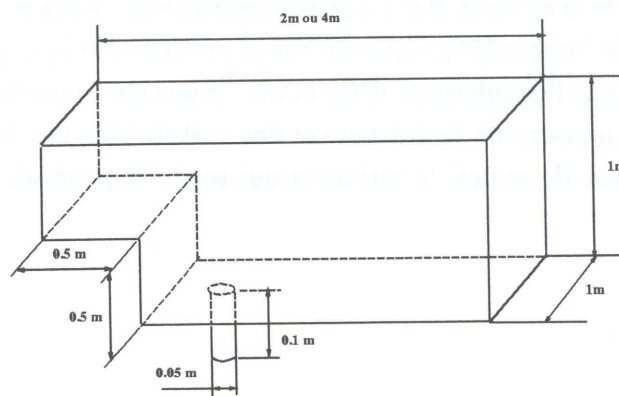


Figure 3.14 : Marche descendante

### 3.2.1 Calcul de la pression du liquide avec l'équation de Tait

Nous considérons le gaz comme un gaz parfait. Dans le liquide pour calculer la pression nous avons utilisé l'équation de Tait. Cette équation dépend de la vitesse du son du liquide et nous avons voulu voir l'influence de cette vitesse du son sur

le comportement du jet. Elle est d'environ  $1500 \text{ m.s}^{-1}$  dans le liquide à pression et température ambiantes. Nous présentons 5 calculs effectués avec 5 vitesses du son différentes (100, 500, 800, 1000 et  $1500 \text{ m.s}^{-1}$ ). Avec la méthode SPH, nous pouvons traiter la phase liquide avec une vitesse du son de  $100 \text{ m.s}^{-1}$  (l'incompressibilité du liquide est vérifiée, voir § 2.1.2). Nous avons donc fait varier la valeur de la vitesse du son dans le liquide de  $100 \text{ m.s}^{-1}$  jusqu'à  $1500 \text{ m.s}^{-1}$  qui est la vitesse du son réelle dans l'eau. Pour les cas  $c = 100$  et  $500 \text{ m.s}^{-1}$  la longueur de la veine d'essai est de 2 m. Pour les 3 autres cas, la longueur est fixée à 4 m, ceci nous permet de suivre la déformation du jet liquide sur une plus longue distance. Les résultats présentés donnent la valeur de la fonction couleur qui caractérise chacun des 2 écoulements et qui nous permet de suivre la déformation du jet au cours du temps. Les configurations initiales sont données sur les figures (3.15 et 3.16).

### Description générale de la pulvérisation du jet

Le jet liquide dans la zone de recirculation reste compact et sort perpendiculairement à l'écoulement gazeux, ceci est dû au faible champ de vitesse qui se trouve derrière la marche. Nous pouvons remarquer la formation d'ondes de surface qui commencent à naître à la périphérie de l'écoulement liquide. Le jet se courbe dès qu'il arrive à la hauteur de la marche et des instabilités de plus grandes amplitudes commencent à destabiliser la surface du liquide. Elles sont causées par l'écoulement gazeux incident dont les vitesses sont de l'ordre de  $1000 \text{ m.s}^{-1}$  et le rapport des pressions dynamiques est de 6 environ dans nos configurations. Nous sommes donc, d'après les visualisations de Schetz [55], dans un cas intermédiaire ( $q \in [4, 12]$ ) où le jet pénètre suffisamment dans l'écoulement d'air et où l'injection se produit sans être d'une violence extrême. Au cours de la formation des instabilités sur la surface du jet nous notons la succession de zones de striction qui sont, en général, les endroits où la rupture se produit.

#### Vitesse du son $100 \text{ m.s}^{-1}$

Dans ce cas la longueur de la veine d'essai est fixée à 2 m. À l'instant  $t = 7000 \mu\text{s}$ , nous remarquons l'apparition d'ondes longitudinales à la surface du jet. Sur la partie verticale du jet les ondes ont une longueur de  $3d$ . Puis une zone d'amincissement est visible après la courbure. À ce niveau une amorce de rupture apparaît. Cette zone de faible épaisseur représente une poche liquide très fréquemment observée dans les études expérimentales (voir figure 3.38). Une goutte se forme, sa taille est d'environ  $3d$ , ce qui correspond à la longueur d'onde des instabilités visibles à la surface du jet. La figure (3.18) montre, sur la partie horizontale du jet, deux longueurs d'ondes assez grandes (de l'ordre de  $12d$ ), qui donnent naissance, successivement, à des paquets liquides.

### Vitesse du son $500 \text{ m.s}^{-1}$

Nous avons augmenté la vitesse du son dans le liquide en prenant  $500 \text{ m.s}^{-1}$ . Nous remarquons que le jet est plus rapidement développé que dans le cas précédent. On visualise correctement la présence d'onde de surface, ainsi que la formation de plusieurs structures liquides. Une petite goutte est de l'ordre du diamètre, une seconde, plus grosse, de l'ordre de  $4d$  environ.

### Vitesse du son $800 \text{ m.s}^{-1}$

Nous avons, pour ces calculs, augmenté la longueur de la veine d'essai ( $4m$ ) de manière à suivre non seulement la formation des paquets liquides mais aussi leur déformation et leur atomisation en gouttes plus petites. La rupture du jet se produit à l'instant  $t = 8400 \mu\text{s}$ , la taille de la goutte formée est de l'ordre du diamètre du jet. Puis la longueur d'onde des instabilités augmente et d'autres points de rupture commencent à apparaître dans les zones de forte striction.

### Vitesse du son $1000 \text{ m.s}^{-1}$

Pour ce cas la rupture du jet est plus rapide. Elle intervient à  $t = 4400 \mu\text{s}$ , dès que le jet arrive à la hauteur de la marche. La taille de la goutte formée est de l'ordre de 2 diamètres environ. Puis de plus gros paquets liquides se forment et sont détachés rapidement du jet. Leur taille est de 2 à 6 diamètres. On remarque que l'allongement du jet dans l'écoulement gazeux est moins important que dans le cas précédent.

### Vitesse du son $1500 \text{ m.s}^{-1}$

Nous avons testé un dernier cas, les résultats sont comparables au cas où  $c = 1000 \text{ m.s}^{-1}$ . L'allure générale du jet ainsi que la formation rapide de gouttes (taille  $2d$ ) s'apparentent à celles du cas précédent. À  $t = 12400 \mu\text{s}$  il y a formation de plusieurs structures de formes aléatoires et l'une d'entre elle est plaquée à la paroi.

## Conclusion

La vitesse du son dans le liquide influence les résultats obtenus lorsque la pression est calculée dans le jet avec l'équation de Tait. La déformation générale du jet se fait de manière comparable mais les instants de cassure et la taille des structures formées en sont fortement dépendants. Ceci semble prouver l'importance des ondes soniques dans le liquide pour la rupture du jet. Pour être dans une configuration "physique" réaliste si l'on veut considérer un cas d'injection d'eau, il faut donc prendre  $c_{\text{son}} = 1500 \text{ m.s}^{-1}$ . La valeur de la pression dans le jet atteint parfois une



centaine de bars. Puisque d'après les études expérimentales, les forces d'inertie pour des cas supersoniques ont une influence plus importante sur la déformation du jet que les ondes de pression, nous avons donc testé dans la section suivante, des cas où la masse volumique et la pression dans le liquide sont fixées constantes au cours du temps.

### 3.2.2 Pression constante dans le liquide

Nous avons effectué des cas tests en utilisant pour le calcul de la pression l'équation de Tait, qui s'applique surtout pour de très fortes variations de pression dans l'eau. Nous avons dans cette section choisi de fixer la masse volumique constante ( $\rho_{\text{liq}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ) et la pression constante dans le liquide, ce qui n'est pas une hypothèse irréaliste, puisque la pression dans le liquide devrait peu influencer les mécanismes de rupture du jet (voir chapitre Bibliographie). Pour un cas test donné nous présentons les champs de vitesses de l'écoulement gazeux ainsi que la déformation du jet liquide. Par rapport aux cas précédents seule la vitesse incidente de l'écoulement gazeux change et est de  $2000 \text{ m.s}^{-1}$ . Ceci modifie la configuration "dynamique" de l'écoulement. On a maintenant un nombre de Mach de 5.3 et le rapport des pressions dynamiques  $q$  est égal à 1.4.

#### Description de la déformation du jet liquide

Dans une première étape, le jet sort dans la zone de recirculation et ne "voit" pas pleinement les effets de l'écoulement gazeux supersonique. Des ondes de surface se développent. Puis au niveau de la marche, les efforts du gaz courbent le jet ( $t = 6400 \mu\text{s}$ ). Sur la figure (3.29), nous remarquons la forme d'une perturbation correspondant aux instabilités de jet classique, dont la longueur d'onde est approximativement égale à 7 diamètres. Ensuite sous l'influence de l'écoulement gazeux incident, les ondes deviennent plus courtes ( $t = 12400 \mu\text{s}$ ) et une poche liquide caractéristique se forme (voit figure 3.38). Son épaisseur est plus petite que le diamètre du jet. L'amincissement de cette zone va causer la rupture du jet et donner naissance à une goutte de taille 3d environ. On peut remarquer que la partie horizontale du jet à une vitesse de  $600 \text{ m.s}^{-1}$ . La goutte est entraînée par le gaz et s'allonge en s'épluchant en d'autres gouttes de taille plus petite (atomisation secondaire). À l'instant  $t = 20000 \mu\text{s}$ , de nombreuses structures liquides sont formées, de taille et de forme variées.

#### Zone de recirculation

Nous avons choisi l'instant  $t = 10400 \mu\text{s}$ , où le jet commence à se déformer fortement, pour visualiser le champ de vitesse juste derrière la marche descendante, dans la zone



où l'injection a lieu. Nous voyons correctement sur la figure (3.34) représentant les vecteurs vitesses, la zone de recirculation qui s'étend de  $x = 0$  (endroit où s'arrête la marche) à  $x = 1.5\text{m}$ . Le jet liquide est injecté à 1 m du bord de la marche. La structure du jet liquide est aussi présentée au même instant (figure (3.33)). La longueur d'onde des ondes surfaciques longitudinales est approximativement de 3 diamètres. Une onde horizontale apparaît de longueur d'onde  $\lambda \approx 10d$ .

### Vue de côté et vue de dessus

À l'instant  $t = 19400 \mu\text{s}$ , alors que le jet liquide se pulvérise, nous présentons une vue de côté (figure 3.35) et une vue de dessus (figure 3.36) de la veine d'essai. Sur la vue de dessus nous voyons que l'écoulement n'est pas symétrique. On peut décrire la forme 3D des gouttes formées. La première goutte est composée de 3 lobes et la seconde se trouve aplatie par la vitesse de l'écoulement gazeux. La structure cohérente du liquide bat suivant un mouvement périodique et alternatif déjà aperçu par de nombreux expérimentateurs (Schetz [55]).

### Conclusion

Nous avons réalisé des calculs 3D de déformation de jets liquides sous l'influence d'un écoulement gazeux supersonique. Les cas tests effectués avec l'équation de Tait pour calculer la pression dans le jet montrent que la vitesse du son dans la colonne liquide joue un rôle important sur les mécanismes de rupture et sur la formation des gouttes. Ces résultats n'ont pas pu être validés par des résultats expérimentaux, cependant des mesures sont en prévision au CORIA dans une chambre Haute Pression. On a choisi de tester une seconde voie en fixant la masse volumique et la pression constantes dans le jet. Dans ce cas le rapport des pressions dynamiques contrôle principalement la déformation du jet liquide.

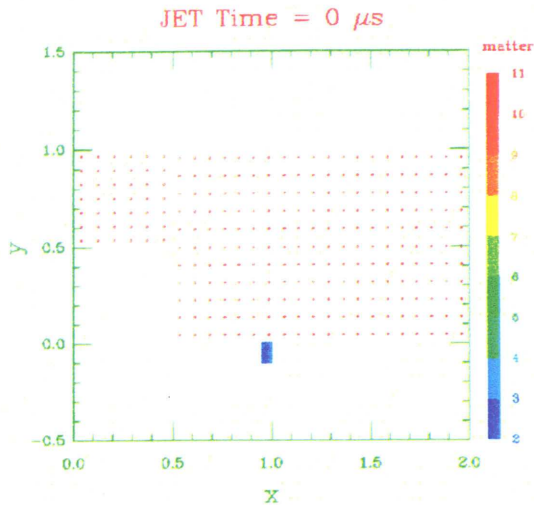


Figure 3.14 : Veine de 2 m de long

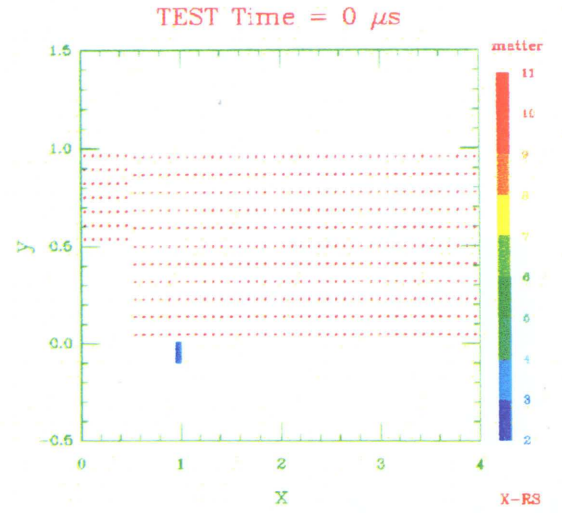


Figure 3.15 : Veine de 4 m de long

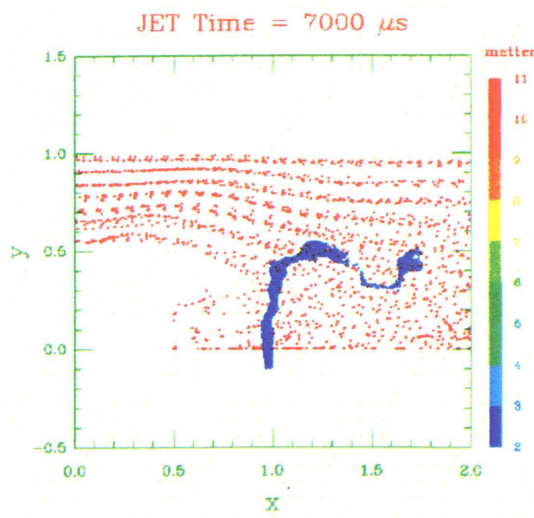


Figure 3.16 : vitesse du son :  $100 \text{ m.s}^{-1}$

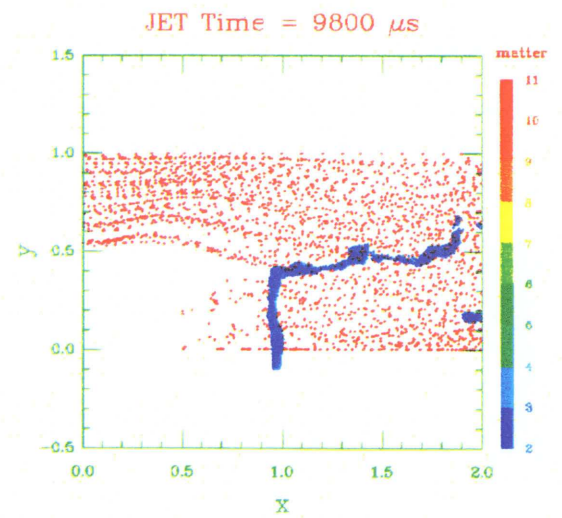


Figure 3.17 : vitesse du son :  $100 \text{ m.s}^{-1}$



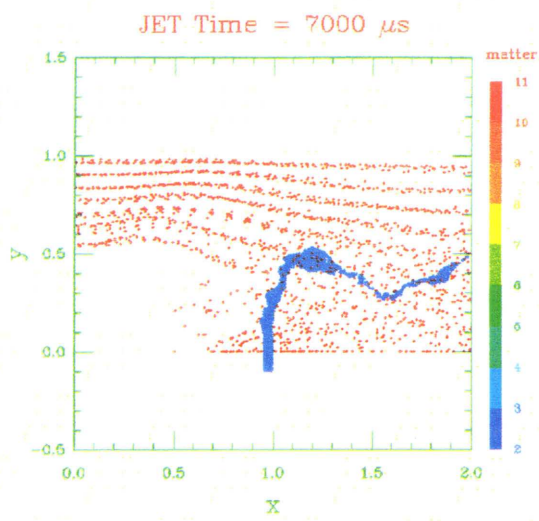


Figure 3.18 : vitesse du son :  $500 \text{ m.s}^{-1}$

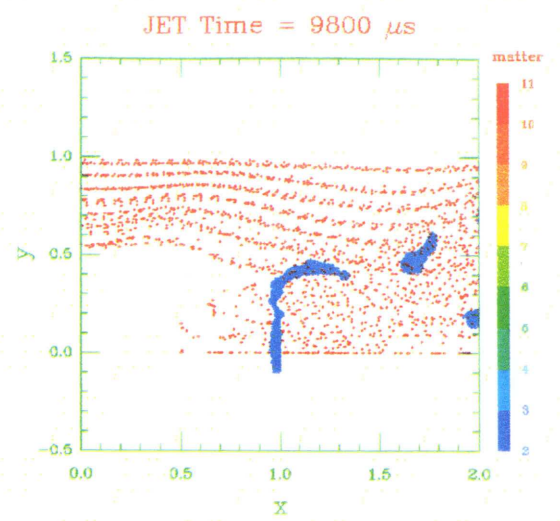


Figure 3.19 : vitesse du son :  $500 \text{ m.s}^{-1}$

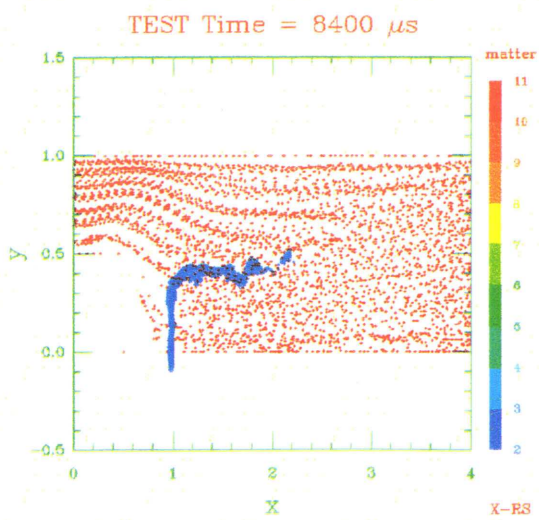


Figure 3.20 : vitesse du son :  $800 \text{ m.s}^{-1}$

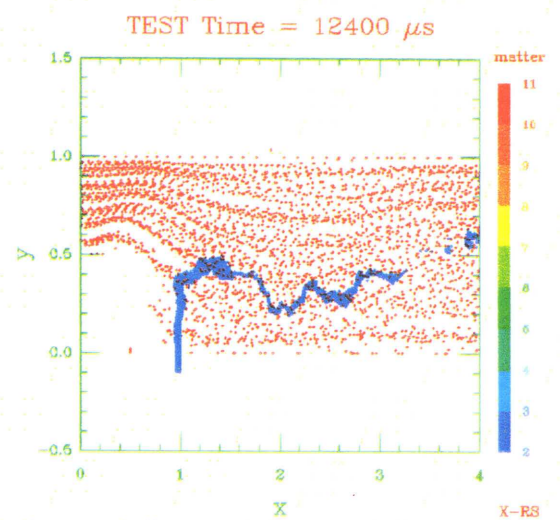


Figure 3.21 : vitesse du son :  $800 \text{ m.s}^{-1}$



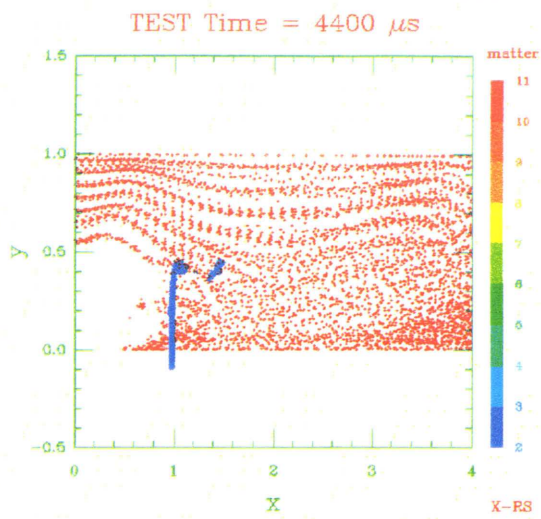


Figure 3.22 : vitesse du son :  $1000 \text{ m.s}^{-1}$

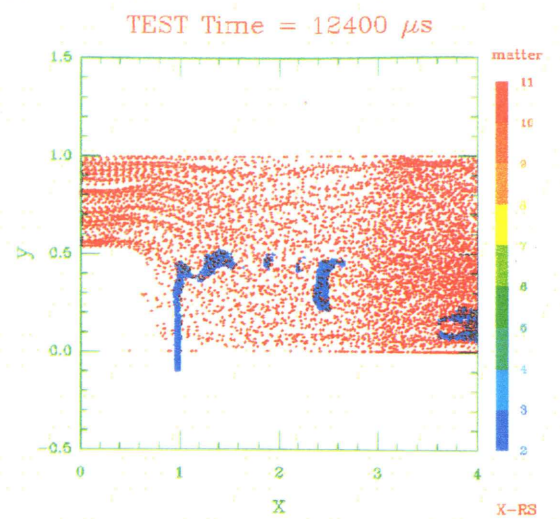


Figure 3.23 : vitesse du son :  $1000 \text{ m.s}^{-1}$

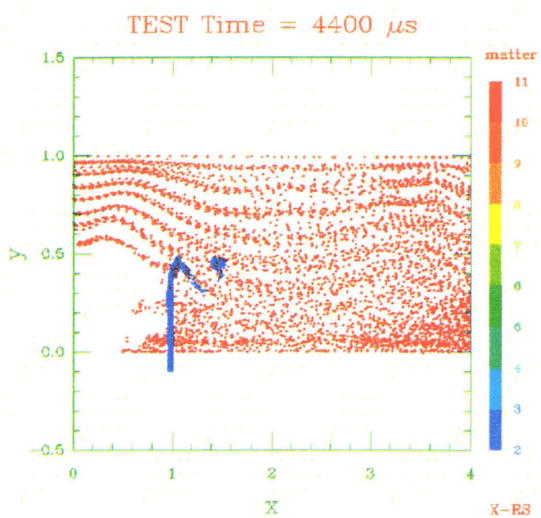


Figure 3.24 : vitesse du son :  $1500 \text{ m.s}^{-1}$

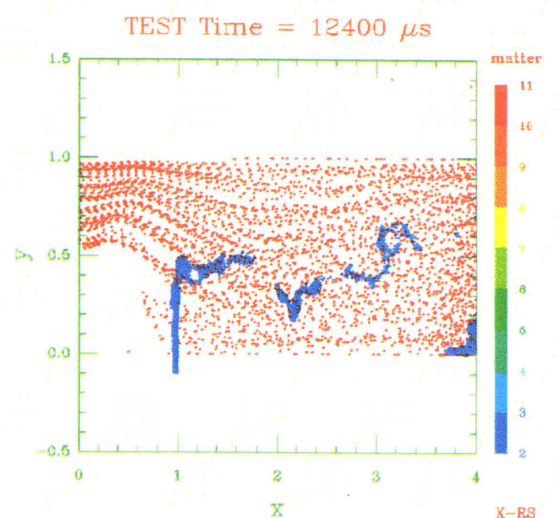


Figure 3.25 : vitesse du son :  $1500 \text{ m.s}^{-1}$





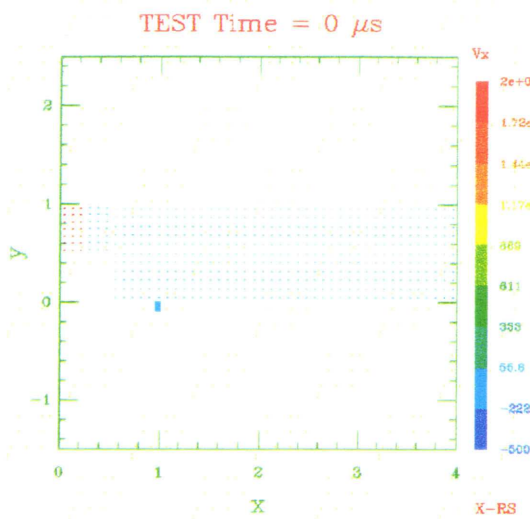


Figure 3.26 : Représentation de la vitesse,  $c_{son}=1500 \text{ m.s}^{-1}$

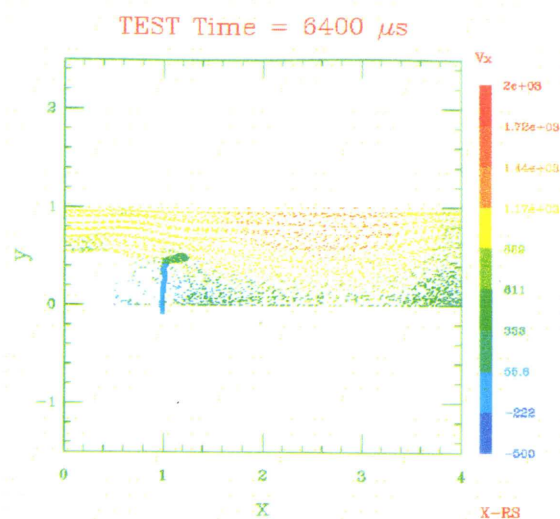


Figure 3.27 : Courbure du jet

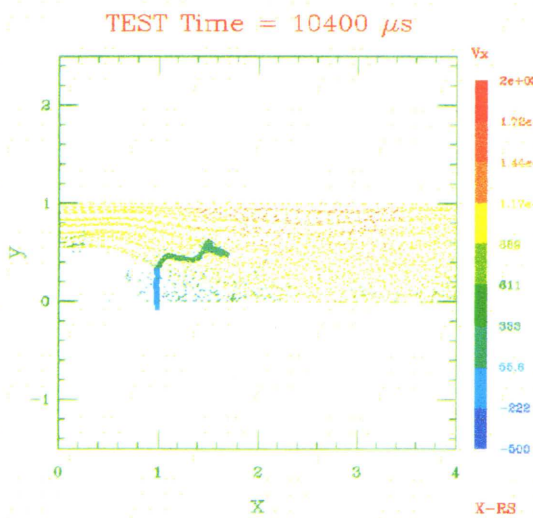


Figure 3.28 : Formation d'une onde

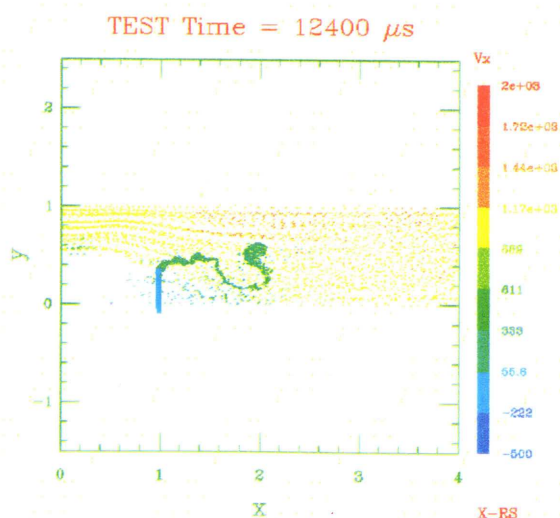


Figure 3.29 : 2 longueurs d'onde et apparition d'une poche liquide



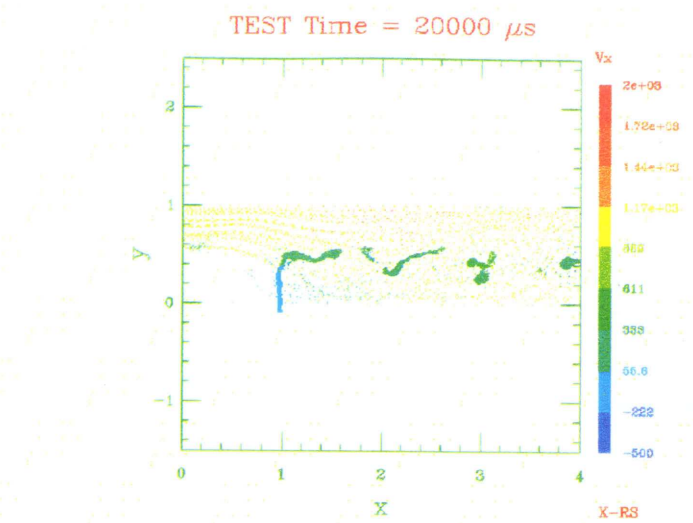
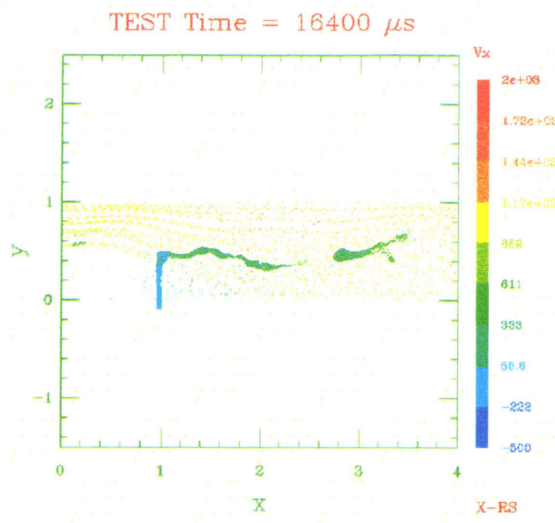


Figure 3.30 : Rupture d'un paquet liquide      Figure 3.31 : Formation de plusieurs gouttes



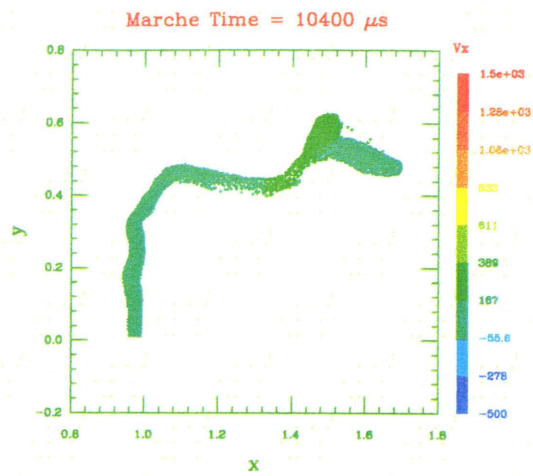


Figure 3.32 : Structure du jet liquide

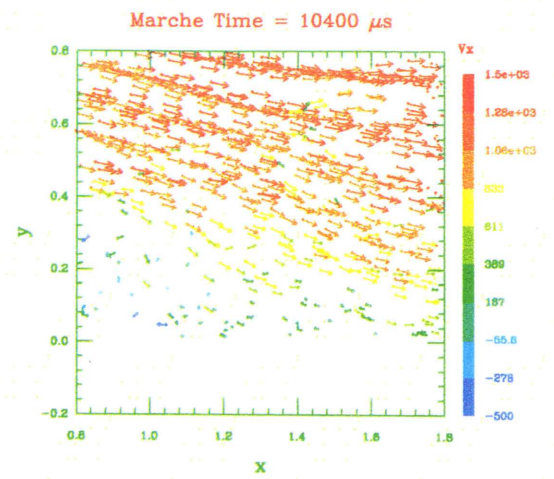


Figure 3.33 : Structure de l'écoulement gazeux

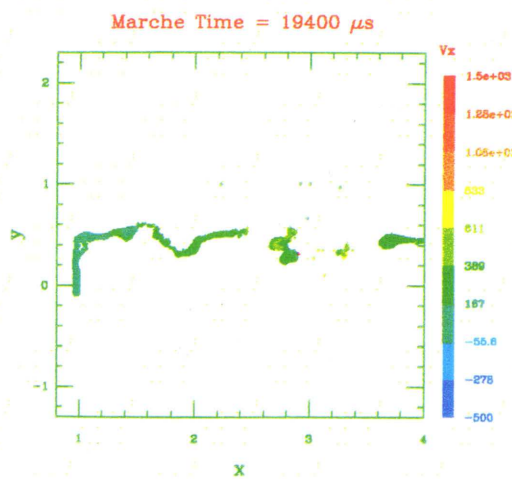


Figure 3.34 : Vue de côté

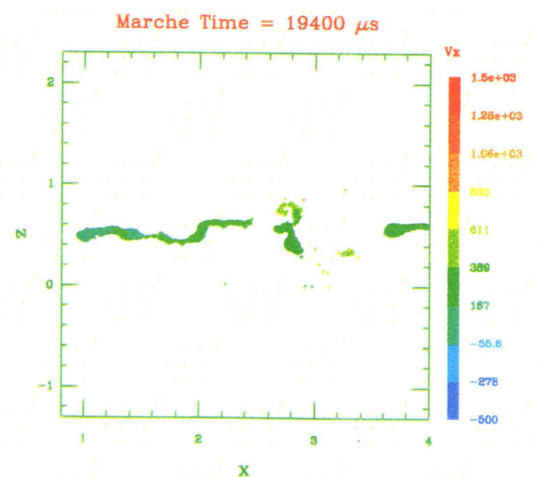


Figure 3.35 : Vue de dessus



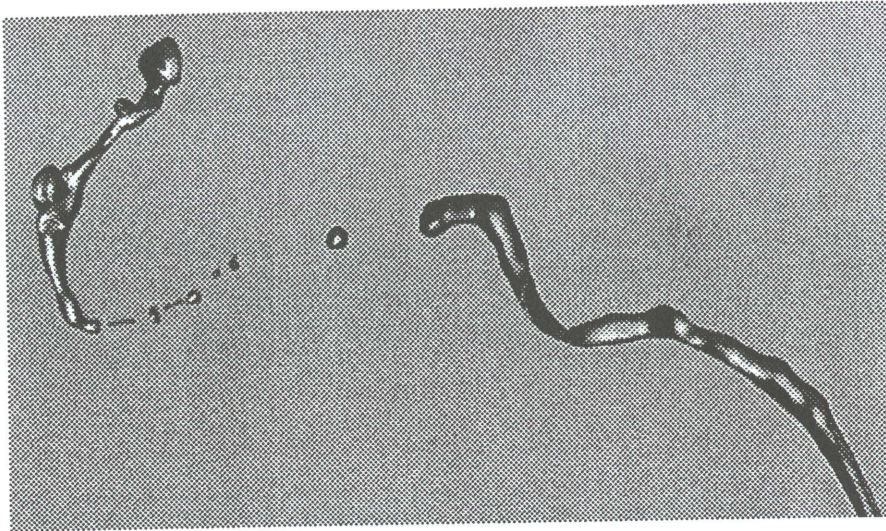


Figure 3.37 : Pulvérisation d'un jet liquide de vitesse  $2m.s^{-1}$  sous l'influence d'un écoulement gazeux à  $25m.s^{-1}$ . Diamètre 1 mm.  $q=6.4$ . Visualisation d'une onde de longueur  $10d$ . Photo réalisée au CORIA par Gaëtan Vich.

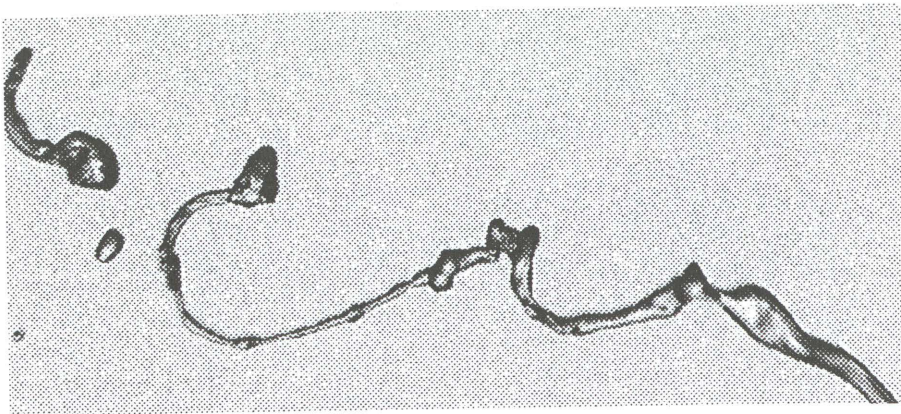


Figure 3.38 : Pulvérisation d'un jet liquide de vitesse  $2m.s^{-1}$  sous l'influence d'un écoulement gazeux à  $20m.s^{-1}$ . Diamètre 1 mm.  $q=10$ . Visualisation de deux ondes de longueur  $6d$  puis  $10d$ . Photo réalisée au CORIA par Gaëtan Vich.





## Conclusion et Perspectives



On s'était fixé pour but la simulation numérique de l'interaction d'un jet liquide dans un écoulement gazeux supersonique. Nous avons principalement étudié les instabilités de type Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor qui contrôlent activement le processus de rupture d'un jet liquide. Une étude bibliographique a été effectuée sur les mécanismes de fragmentation de jets et sur l'influence de paramètres tels que le rapport de pression dynamique, la viscosité, la tension de surface et la perte de masse intervenant aux interfaces. De plus nous avons pris deux expériences comme référence, celle mise en place au CORIA et celle réalisée par Schetz à l'Institut Polytechnique de Virginie. Les résultats numériques obtenus ont été comparés avec ces résultats expérimentaux.

Plusieurs méthodes numériques ont été retenues pour simuler l'interaction liquide/gaz. Tout d'abord nous avons utilisé une méthode VOF de suivi d'interface entre deux phases de propriétés différentes. Cette méthode était à l'origine incompressible. Nous avons développé une version compressible de cet algorithme. Les résultats obtenus n'ont pas été aussi concluants que nous l'attendions. Cependant pour des cas incompressibles les résultats sont tout à fait satisfaisants et nous présentons des calculs 2D de déformation de nappes.

Afin de prendre en compte les efforts de tension de surface une méthode numérique (Continuum Surface Forces CSF) a été choisie. Pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans le liquide on a pris un schéma de type Marker and Cell et dans le gaz les équations sont résolues avec une méthode de Mac Cormack auquel a été ajoutée un limiteur de flux TVD.

Des calculs de déformation 2D de goutte liquide sous l'effet d'un écoulement gazeux supersonique sont présentés. Des problèmes d'instabilités sont présents à l'interface liquide/gaz et ne permettent pas de traiter les cas à forts gradients de vitesse et de masse volumique qui nous intéressent en premier lieu.

Une deuxième voie a donc été envisagée et est fondée sur une méthode lagrangienne particulière (SPH). Nous y avons ajouté la méthode CSF pour calculer les efforts de tension superficielle qui a été testée en 2D et 3D sur le développement d'instabilités de Rayleigh-Taylor. Les calculs numériques obtenus ont été comparés avec les prédictions de la théorie linéaire et les résultats sont tout à fait cohérents. De plus nous avons tenu compte du phénomène de perte de masse qui se produit à la surface du jet liquide. Un cas de validation 3D montre que la précision des calculs sur la conservation de la masse est satisfaisante.

Cette seconde méthodologie a donc été retenue pour effectuer les calculs de pulvérisation de jets liquides dans des écoulements gazeux supersoniques. Des calculs 3D sont présentés et comparés qualitativement avec les expériences précédemment citées. Nous remarquons une bonne corrélation entre les différents résultats. Cependant la tension de surface et la perte de masse n'ont pas été incorporées dans ces calculs 3D pour des raisons de coûts de calcul.

Des travaux sont en cours sur l'amélioration des calculs effectués aux interfaces liquide/gaz et notamment sur la prise en compte des conditions limites interfaciales. Nous pouvons penser que de nombreux autres phénomènes physiques pourraient être traités avec ce formalisme. Des calculs de collision de gouttelettes, par exemple, ne nécessiteraient pas de modifications importantes du code. Les phénomènes de cavitation pourraient aussi être étudiés et la prise en compte de la turbulence est envisageable. Cependant faire des calculs numériques 3D en résolvant les équations de la mécanique des fluides et en y ajoutant les effets de tension superficielle, la vaporisation et la turbulence demande des temps de calculs parfois très importants si l'on veut une précision suffisante.

# Bibliographie

- [1] C.W.Hirt et B.D.Nichols, "Volume Of Fluid, Method for the Dynamics of Free Boundaries", *J. of Computational Physics* 39, p.201-225, 1981
- [2] B.Lafaurie, B.Nadiga, S.Zaleski et F.X.Keller, "Ebauche d'un algorithme VOF compressible", 1993
- [3] R.W.Mac-Cormack, "A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow", *AIAA 81-0110*, 1981
- [4] Y.Lebret, "Etude numérique de la couche de mélange turbulente compressible", *Thèse de doctorat*, 1993
- [5] B.Lafaurie, C.Nardone, R.Scardovelli, S.Zaleski et G.Zanetti, "Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with Surfer", *Submitted to Journal of Computational Physics*, 1993
- [6] J.Rowlinson et B.Widom, "Molecular theory of capillarity", *Clarendon press, Oxford*, 1982
- [7] D.Vandromme, "Introduction à la résolution numérique des equations aux dérivées partielles", *Cours INSA*, 1993
- [8] M.Ledoux, "Modélisation des sprays", *Cours de DEA (CORIA)*, 1993
- [9] S.Zaleski, "Etude numérique de la pulvérisation des jets liquide-gaz", *Rapport au PRC CNRS/SEP/CNES*, 1992
- [10] F.H.Harlow et J.E.Welch, "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface", *The physics of fluids, vol.8, No.12*, 1965
- [11] J.Eggers et T.F.Dupont, "Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier-Stokes equation", *Report*, 1990
- [12] A.Menchaca-Rocha, A.Cuevas, M.Chapa et M.Silva, "Rotating-liquid-drop model limit tested on macroscopic drops", *Physical Review E, vol.47, No.2*, 1993

- [13] A.S.Nejad et J.A.Schetz, "The effects of viscosity and surface tension of liquid injectants on the structural characteristics of the plume in a supersonic airstream", *AIAA-82-0253*, 1982
- [14] R.Peyret et T.D.Taylor, "Computational methods for fluid flow", *Springer-Verlag*, 1983
- [15] H.C.Yee, "A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods", *NASA Technical Memorandum*, 1989
- [16] A.J.Chorin, "Numerical solution of the Navier-Stokes equations", *J. of Computational Physics*, 1968
- [17] J.U.Brackbill, D.B.Kothe et C.Zemach, "A continuum method for modelling surface tension", *J. of Computational Physics* 100, p.335-354, 1992
- [18] D.B.Kothe et R.C.Mjølness, "Ripple: a new model for incompressible flows with free surfaces", *AIAA/NASA Conferences*, 1991
- [19] A.J.Chorin, "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems", *J. of Computational Physics* 2, p.12-26, 1967
- [20] T.J.Anderson, M.Winter et M.Haas, "Observation of droplet/shock interactions in a supercritical environment", *AIAA 94-0557*, 1994
- [21] S.L.V.Coelho et J.C.Hunt, "The dynamics of the near field of strong jets in crossflows", *J.Fluid.Mech*, vol.200, p.95-120, 1989
- [22] S.D.Heister, T.T.Nguyen et A.R.Karagozian, "Modelling of liquid jets injected transversely into a supersonic crossflow", *AIAA Journal*, vol.27, No.12, 1988
- [23] F.J.Higuera et M.Martinez, "An incompressible jet in a weak crossflow", *J.Fluid.-Mech.*, vol.249, p.73-97, 1993
- [24] F.X.Keller et D.Vandromme, "Etude numérique de la pulvérisation des jets liquides-gaz", *Rapport au PRC CNRS/SEP/CNES*, 1993
- [25] F.X.Keller, J.Li, A.Vallet, D.Vandromme et S.Zaleski, "Simulation de la déformation et de la rupture de l'interface de couches cisailées", *Rapport au PRC CNRS/SEP/CNES*, 1994
- [26] S.Chandrasekhar, "Hydrodynamics and hydromagnetic stability", *Oxford Univ. Press, Oxford*, 1961
- [27] G.I.Taylor, "The shape and acceleration of a drop in a high speed air stream", *Cambridge University Press*, 1963
- [28] F.X.Keller, A.Vallet, D.Vandromme et S.Zaleski, "Rupture d'interface cisailée par fluctuations turbulentes", *Rapport au PRC CNRS/SEP/CNES*, 1993

- [29] F.X.Keller et D.Vandromme, "Etude numérique de la pulvérisation des jets liquide-gaz", *Rapport au PRC CNRS/SEP/CNES*, 1992
- [30] F.X.Keller, J.Li, A.Vallet, D.Vandromme et S.Zaleski, "Direct numerical simulation of interface breakup and atomisation", *ICLASS*, 1994
- [31] S.Zaleski, "Simulation par capture d'interface de la formation d'intrusions liquides dans les jets cisailés", *Rapport au PRC CNRS/SEP/CNES*, 1992
- [32] B.Lafaurie et S.Zaleski, "Front capturing for flows with surface tension: Volume of fluid revisited", *preprint*, 1992
- [33] Reitz et Bracco, "Mechanism of atomisation of a liquid jet", *Physics of fluids*, vol.25, p.1730-1742, 1982
- [34] W.Mayer et G.Krulle, "Rocket engine coaxial injector liquid/gaz interface", *AIAA 92-3389*, 1992
- [35] Z.Farago et N.Chigier, "Morphological classification of disintegration of round liquid jets in a coaxial air stream", *Atomization and Sprays*, vol.2, p.137-153, 1992
- [36] H.S.Li et A.R.Karagozian, "Breakup of a liquid jet in supersonic crossflow", *AIAA Journal*, vol.39, No.7, 1992
- [37] G.M.Faeth, "Structure, breakup and turbulence interactions in sprays", *Report, University of Michigan*, 1990
- [38] I.Care, "Etude d'un injecteur coaxial assisté", *Thèse de doctorat*, 1990
- [39] P.Camatte, "Etude des instabilités d'une nappe liquide de géométrie annulaire en pulverisation assistée", *Thèse de doctorat*, 1992
- [40] C.Appert, "Transition de phase dynamique de type liquide-gaz et création d'interfaces dans un gaz sur réseau", *Thèse de doctorat*, 1993
- [41] C.Cavailler, H.Croso, P.Gandebœuf, J.F.Haas et G.Rodriguez, "Results from the Vaujourn vertical shock tube", *3rd international workshop on the physics of compressible turbulent mixing*, 1991
- [42] W.Mayer et G.Krulle, "Injection, atomization and mixing of propellants in liquid rocket engines using coaxial injectors", *ICLASS*, 1994
- [43] J.J.Monaghan, "Simulating free surface flows with SPH", *Department of Mathematics*, 1990
- [44] W.Benz, "Smooth particle hydrodynamics: a review", *The Numerical Modelling of Nonlinear Stellar Pulsations*, 269-288, 1990



- [45] G.V. Bicknell, "The equations of motion of particles in smoothed particle hydrodynamics", *SIAM J.Sci.Stat.Comput.*, Vol.12, No5, pp.1198-1206, 1991
- [46] S.D. Heister, T.T. Nguyen et A.R. Karagozian, "Modeling of liquid jets injected transversely into a supersonic crossflow", *AIAA Journal*, Vol.27, No12, pp.1727-1734, 1988
- [47] H.S. Li et A.R. Karagozian, "Breakup of a liquid jet in supersonic crossflow", *AIAA Journal*, Vol.30, No7, pp.1919-1921, 1992
- [48] S.W. Kim et T.J. Benson, "Fluid flow of a row of jets in crossflow—A numerical study", *AIAA Journal*, Vol.31, No5, pp.806-811, 1993
- [49] F.J. Higuera et M. Martinez, "An incompressible jet in a weak crossflow", *J.Fluid Mech.*, Vol.249, pp.73-97, 1993
- [50] S.L.V. Coelho et J.C.R. Hunt, "The dynamics of the near field of strong jets in crossflows", *J.Fluid Mech.*, Vol.200, pp.95-120, 1989
- [51] K.P. Horn et R.E. Reichenbach, "Further experiments on spreading of liquids injected into a supersonic flow", *AIAA Journal*, Vol.7, No2, pp.358-359, 1968
- [52] M. Adelberg, "Breakup rate and penetration of a liquid jet in a gas stream", *AIAA Journal*, Vol.5, No8, pp.1408-1415, 1966
- [53] M.A. Kolpin, K.P. Horn et R.E. Reichenbach, "Study of penetration of a liquid injectant into a supersonic flow", *AIAA Journal*, Vol.6, No5, pp.853-858, 1968
- [54] I. Catton, D.E. Hill et R.P. McRae, "Study of liquid jet penetration in a hypersonic stream", *AIAA Journal*, Vol.6, No11, pp.2084-2089, 1968
- [55] J.A. Schetz, E.A. Kush Jr. et P.B. Joshi, "Wave phenomena in liquid jet breakup in a supersonic crossflow", *AIAA Journal*, Vol.18, No7, pp.774-778, 1979
- [56] A. Sherman et J. Schetz, "Breakup of liquid sheets and jets in a supersonic gas stream", *AIAA Journal*, Vol.9, No4, pp.666-673, 1973
- [57] D.M. Less et J.A. Schetz, "Transient behavior of liquid jets injected normal to a high-velocity gas stream", *AIAA Journal*, Vol.24, No12, pp.1979-1986, 1986
- [58] C.W. Hirt et B.D. Nichols, "", *Journal Of Comput. Phys.* 34, 390, 1980
- [59] Bridgeman, "Physics of high pressure", 1952
- [60] B. Clark, "Breakup of a liquid jet in a transverse flow of gas", NASA TN-D 2424, 1964.
- [61] P.A. Raviart, "Particle approximation of first order systems", *Journal of Comp. Mathematics*, Vol 4, 1, 1986

- [62] S.Mas-Gallic et P.A. Raviart, "A Particle Method for First-order Symmetric Systems" Numer. Math. 51, 323-352 (1987)
- [63] J.C. Lattanzio, J.J. Monaghan, H. Pongracic, M.P. Schwarz, "Controlling penetration" SIAM J. Sci. Stat. Comput.,7,2, 1986
- [64] J.P. Vila, "Méthodes Particulières pour l'approximation des lois de conservation" Cours de DEA UPS-ENSAE 1994-1995
- [65] B. Lafaurie, "Modélisation de la convection par une méthode de gaz sur réseau et technique de suivi d'interface." Thèse de Doctorat 1995.
- [66] A.J. Yule et D.G. Salters, "The structure and dimensions of the time dependent break-up zone of diesels sprays" Iclass 94, Rouen.
- [67] E. Larrey et A. Merlo, "Fragmentation de jets liquides dans un écoulement gazeux", 3<sup>ème</sup> note trimestrielle 1995.
- [68] O. Wright "Essential of engineering fluid mechanics", p.426, Marper et Row
- [69] J.W. Jacobs "Plif flow visualization of shock accelerated light and heavy gas cylinders" 3rd International Workshop, Abbey of Royaumont, France 1991.
- [70] P.L. Roe "Approximate riemann solvers, parameters vectors and difference scheme." Journal of computational physics, 43:357-372, 1981.



## **Annexe**

**Article: "Direct numerical simulation of interface breakup and atomization"**



## DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF INTERFACE BREAKUP AND ATOMIZATION

François-Xavier KELLER (\*\*), Jie LI (\*), Ariane VALLET (\*\*),  
Dany VANDROMME (\*\*) and Stéphane ZALESKI (\*)

(\*) Laboratoire de Modélisation en Mécanique, CNRS URA 229  
Université Pierre et Marie Curie, Tour 66, case 162  
4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

(\*\*) Laboratoire de Mécanique des Fluides Numérique,  
CORIA, CNRS URA 230, INSA de Rouen,  
BP 8, 76131 Mont-Saint-Aignan, France.

### ABSTRACT

Numerical studies of the breakup of sheared liquid-gas interfaces subject to the Kelvin-Helmholtz instability are described. The incompressible Navier-Stokes equations are solved by a Marker And Cell (MAC) method together with a projection algorithm for the pressure. For the kinematics of the interface a second order scheme is used. Surface tension is modeled by a scheme that conserves momentum exactly in the discretized equations. This enables to follow droplet formation and ejection away from the liquid layer. Droplet ejection occurs at much higher Weber and Reynolds numbers than predicted by linear theory. The precise mechanism involves formation and detachment of a boundary layer.

## INTRODUCTION

Free interfaces are present in many problems: e.g. breakup of fluid droplets, atomization of jets, etc... For applications to combustion it would be of great interest to understand how the breakup of liquid-gas interfaces produces the observed distribution of droplet sizes and, if feasible, a prediction of this distribution would be very helpful. This motivated our attempt at direct numerical simulation.

We consider a plane (2D) incompressible flow of two viscous fluids, a gas and a liquid separated by an interface with surface tension. We solve the Navier-Stokes equations for plane flow in a square box with a free-slip condition on the top and bottom of the box. On the sides of the box we assume periodicity of the flow in the horizontal direction. The simulation is initialized with a flow  $U_0(x_3, 0, 0)$  where  $U_0$  is a step function  $U_0 = \pm \Delta U/2$ . An interface between the liquid and the gas is located at  $x_3 = L/3$  and small vortices are superposed in the liquid phase (figure 1). Linear theory [1] predicts that the instability occurs for an initial perturbation of length  $\lambda$  when  $We_G > 2\pi$  with a maximum growth rate for  $We_G = 3\pi$ . There is little theoretical work beyond this linear theory. In reference [2] an inviscid, nonlinear, two dimensional calculation is performed. In the inviscid limit the vorticity sheet present on the interface at  $t = 0$  remains attached to the interface. Thus a nonlinear evolution can be obtained by the integration of classical equations for a vortex sheet, but with the addition of surface tension. In what follows we present calculations that include the effect of viscosity. One may wonder whether the effect of viscosity will be important at high Reynold numbers. In what follows we show that even a small viscosity produces results that are dramatically different from the vortex sheet solution [2].

## METHOD

We used the "Surfer" method [3], except for some improvements which we discuss below. In "Surfer" a first order in time explicit integration is performed using the MAC staggered finite difference grid for the momentum balance equation. The incompressibility condition is accurately satisfied by a projection method [4] with the help of a multigrid algorithm. This yields a velocity field  $\mathbf{u}$  which is used to propagate the interface (this is the so-called kinematic problem). In ref. [3] the kinematic problem is solved using a variant of the Volume of Fluid (VOF) method [5]. Surface tension is implemented in a new, momentum conserving

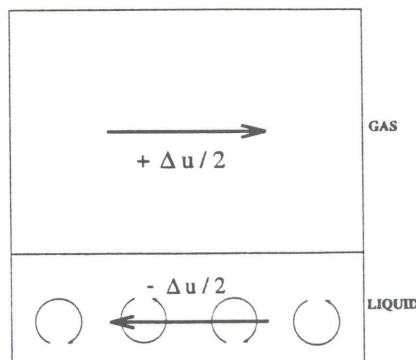


Figure 1: Initial conditions for the numerical simulations. The simulation domain represents a fraction of the liquid-gas interface.

way, via the introduction of a non-isotropic stress tensor concentrated near the interface. This representation of surface tension stresses is especially interesting for the simulation of breakup, since it allows one to avoid the singularity which would occur in the continuum limit when interfaces change topology and the curvature becomes locally infinite. Detailed examples of such reconnections of interfaces in 2D and 3D are shown in ref. [3].

Since we used a different method in the work reported in this paper to solve the kinematic problem a short discussion of VOF and related methods is warranted. The location of the interface is approximately represented by the volume fraction  $C_{ij}$  of fluid 1 in cell  $i, j$  (figure 2). We have  $0 < C_{ij} < 1$  in cells cut by the interface and  $C_{ij} = 0$  or 1 away from it. To reconstruct the interface from the  $C_{ij}$ , a simple choice is to use only vertical and horizontal line segments [6], as in figure 2a.

A difficulty with this approach is its low accuracy: errors at each time step may be as large as  $\mathcal{O}(h)$ . Although the method used in VOF and in ref. [3] is somewhat more complex, it still yields  $\mathcal{O}(h)$  accuracy. Unfortunately this leads to a finite,  $\mathcal{O}(1)$  error after  $L/h$  time steps, which is precisely the number of time steps required to cover a typical distance. When the surface tension  $\sigma$  is large, such errors are masked by the tendency of droplets to become round objects, but it has catastrophic consequences when  $\sigma$  is small. For our calculations of the Kelvin-Helmholtz instability, we thus used a more accurate method, which yields errors of order  $\mathcal{O}(h^2)$  [7], [8]. In this new method, linear segments of slope approaching that of the interface are constructed as on figure 2b. The interface slope is estimated by inspecting the volume fraction of neighboring cells. The interface motion is then calculated in a Lagrangian manner with velocities obtained by linear interpolation. Finally the volume fractions are recalculated.

## RESULTS

Simulations were done with  $Re_L = 10^3$  and several values of  $Re_G$ ,  $We_G$  and  $\rho_L/\rho_G$ . They have shown a well-defined mechanism. We distinguish five distinct steps, which in the appropriate region of parameter space, all occur in a sequence and result in the ejection of a droplet away from the bulk of the liquid.

In the first step the profile of the horizontal momentum distribution  $u_1(x_3)$  is quickly modified. The flow becomes uniform and without vorticity in the liquid phase while the totality of the velocity step is transferred to the gas phase. This phenomenon occurs when

$$\frac{\nu_G}{\nu_L} \left( \frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^2 \ll 1 \quad (1)$$

This inequality is indeed verified for liquid-gas viscosities and densities. On times of the order of  $L/\Delta U$ , the instability begins to modulate the interface. Our observations show that the height  $A(t)$  of this modulation grows at first exponentially in time. The region of vorticity in the gas phase is analogous to a boundary layer on a wavy elastic surface: the inertia of the liquid makes it slow to move. The second step which then occurs is similar to boundary layer detachment over a curved surface. The vorticity layer rolls up in the gas phase and does not follow any more the liquid-gas interface. This phenomenon is seen most



clearly when  $Re_G$  is large. Then the vorticity layer is thin and detaches while the amplitude  $A(t)$  of the modulation is still small. This second step and the following ones may be seen on figure 3.

When  $We_G$  and  $Re_G$  are too small, the vorticity sheet diffuses quickly either before or after step 2 and the amplitude of the interface decays. On the other hand, when  $We_G$  and  $Re_G$  are large enough step 3 occurs. The vortices formed from the roll-up in step 2 pull out one or several liquid sheets. These sheets are probably the 2D analogue of the filaments observed in ref. [9] [10]. One often sees a single sheet (figure 3b) as initial perturbations and corresponding waves pair quickly.

In step 4 one sees the liquid sheets rupture into one or several droplets. To reach this stage, even larger  $We_G$  and  $Re_G$  are required. Figure 4 shows the region in  $We_G$ ,  $Re_G$  parameter space where this phenomenon occurs, as approximately determined by our simulations. Since this process occurs at relatively large  $Re_G$ , one observes 2D turbulence and sensitivity to initial conditions in the dynamics leading to rupture. This means that in some parameter range almost identical initial conditions can give either a droplet separation or a rejoining of the liquid sheet with the interface.

The change of topology leading to the separation of a droplet is not the end of the story. Our measurements show that the velocities of the separated droplets are distributed randomly, with about as many droplets travelling away from the interface as towards the interface. This ejection of about 50% of the separated droplets, also sensitively dependent on initial conditions, constitutes step 5.

Systematic measurements of separated droplet sizes are in progress. Figure 5 shows some preliminary results. The Weber numbers  $We$  of the separated droplets from all the simulations of figure 4 are plotted together with the ratio  $T = \Delta U \mu_G / \sigma$ .

## CONCLUSIONS

On the methodological side, the method was shown to treat correctly the motion and reconnection of interfaces in parameter ranges appropriate for some spray systems. Our principal physical result is that linear theory does not adequately predict wavelengths for which instabilities fully develop. The linear theory criterion should be replaced by a condition on both  $Re_G$  and  $We_G$  fitting the results of figure 4.

*The authors acknowledge support from Société Européenne de Propulsion, from "Programme de Recherche Coordonnées sur la Combustion dans les Moteurs Fusées", from Groupement de Recherche Coordonnées 138 "Mécanique des Fluides Numérique", and from Direction des Recherches, Études et Techniques.*

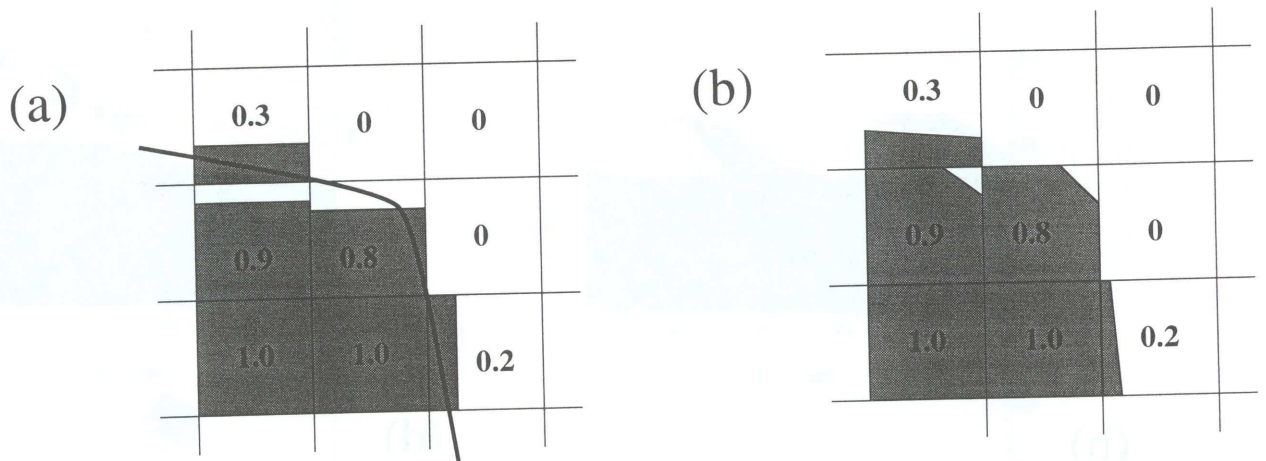


Figure 2: (a) First order interface reconstruction. The interface position is approximately represented by the volume fraction  $C$ . At first order, the interface in each cell may be seen as a straight line parallel to one of the cartesian axes (b) Second order reconstruction. In a first step the volume fraction field  $C$  is used to estimate the local slope of the interface. The interface is reconstructed as a line segment enclosing the given volume  $C$ . The line segments need not join at their ends, although the errors are exaggerated in the figure. In a second step, the reconstructed interface is advected in a Lagrangian manner

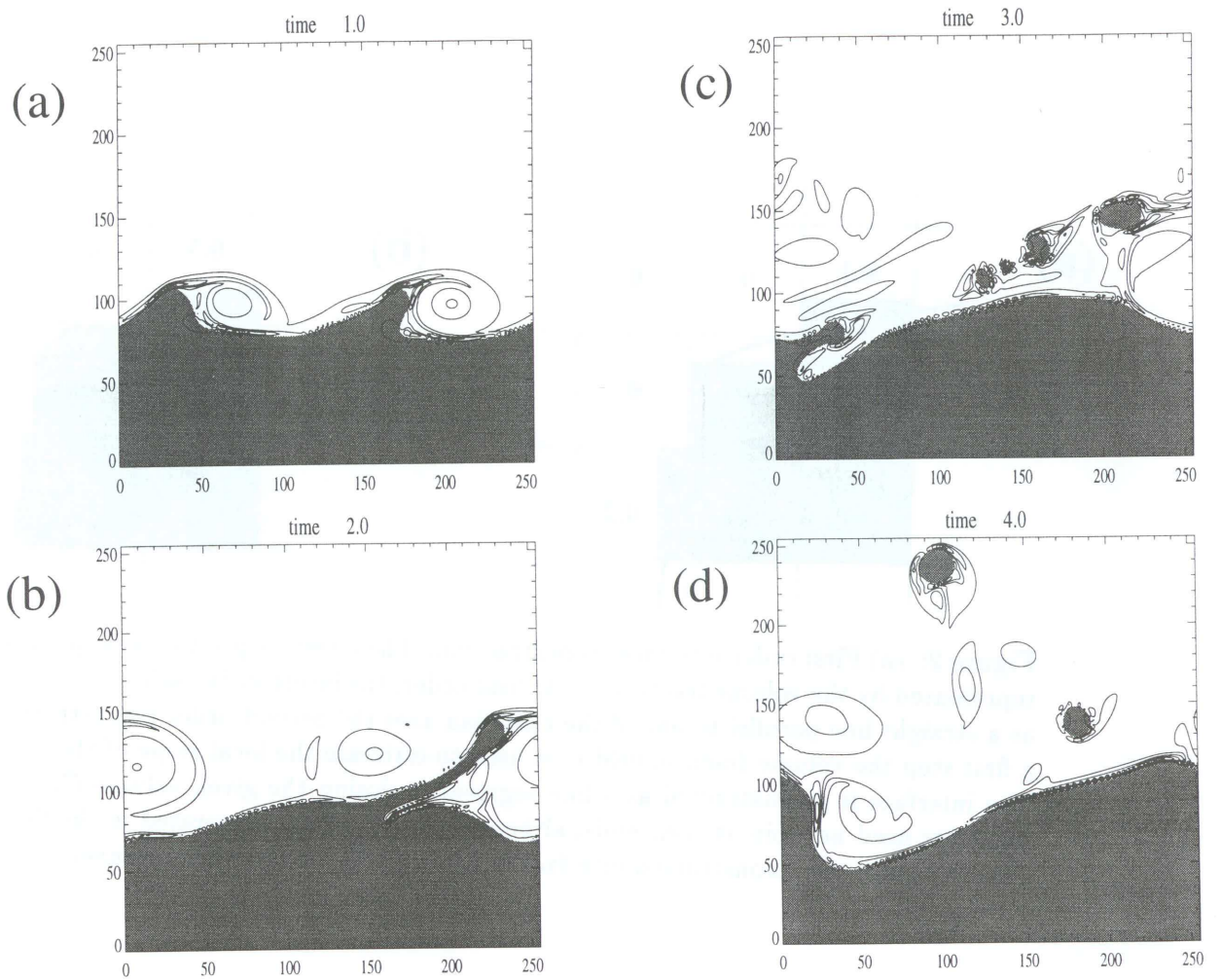


Figure 3: Simulations of interface breakup for  $\rho_L/\rho_G = 10$ ,  $Re_G = 7500$  and  $We_G = 150$ . Grey areas indicate the liquid, and thin lines are isovorticity levels.

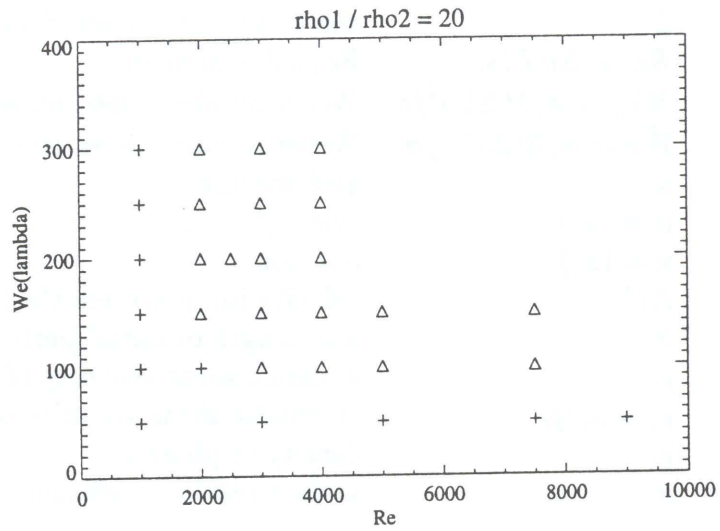


Figure 4: Results of interface breakup simulations for  $\rho_L/\rho_G = 20$ . Crosses indicate cases where no droplet separation occurred. Triangles indicate cases where droplet separations did occur. Both ejected and non-ejected droplets were taken into account.

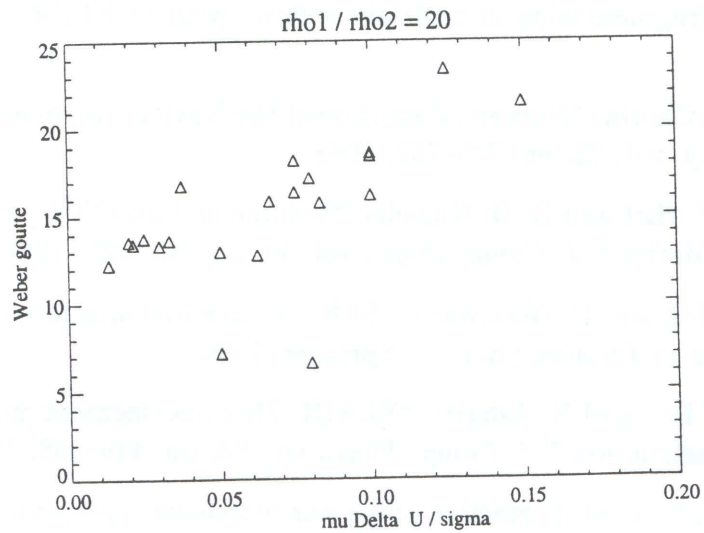


Figure 5: Correlation between the Weber numbers based on the droplet sizes and the ratio  $\Delta U \mu_G / \sigma$ .

## NOMENCLATURE

$L$	size of the simulation domain
$Re_i = \Delta U L / \nu_i$	Reynolds number
$We_G = \rho_G \lambda (\Delta U)^2 / \sigma$	Weber number based on wavelength $\lambda$
$\tilde{We} = \rho_G R (\Delta U)^2 / \sigma$	Weber number based on droplet radius $R$
$h$	grid spacing
$\mathbf{u} = (u_j)$	velocity
$\mathbf{x} = (x_j)$	position
$\Delta U$	velocity jump across the interface
$\lambda$	wavelength of initial perturbation
$\mu_i$	dynamic shear viscosity of phase $i$
$\nu_i = \mu_i / \rho_i$	kinematic shear viscosity of phase $i$
$\rho_i$	density of phase $i$
$\sigma$	surface tension coefficient

\*

## REFERENCES

- [1] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1961.
- [2] R. Rangel and W. Sirignano, "Nonlinear growth of Kelvin–Helmholtz instability: effect of surface tension and density ratio," *Phys. Fluids*, vol. 31, pp. 1845–1855, 1988.
- [3] B. Lafaurie, C. Nardone, R. Scardovelli, S. Zaleski, and G. Zanetti, "Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER." to appear in *J. Comp. Phys.*, 1994.
- [4] A. J. Chorin, "Numerical solution of the Navier–Stokes equation," *Mathematics of Computing*, vol. 22, pp. 745–762, 1968.
- [5] C. W. Hirt and B. D. Nicholls, "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries," *J. Comp. Phys.*, vol. 39, pp. 201–225, 1981.
- [6] W. Noh and P. Woodward, "SLIC (simple line interface calculation)," vol. 59 of *Lecture Notes in Physics*, (Berlin), Springer, 1976.
- [7] J. Y. Poo and N. Ashgriz, "FLAIR: Flux line-segment model for advection and interface reconstruction," *J. Comp. Phys.*, vol. 93, pp. 449–468, 1991.
- [8] J. Li, "Calcul d'interface affine par morceaux." preprint, 1994.
- [9] A. J. Yule, "On the break up process in high speed liquid jets." Journée d'étude du 1er décembre 1993 sur la pulvérisation des liquides, Société Française des Thermiciens, Paris, 1993.
- [10] J. W. Hoyt and J. Taylor, "Waves on water jets," *J. Fluid Mech.*, vol. 83, pp. 119–127, 1977.



# ÉTUDE NUMÉRIQUE D'UN JET TRANSVERSE DANS UN ÉCOULEMENT GAZEUX À GRANDE VITESSE

## Résumé

On étudie la pulvérisation numérique de jets et de nappes liquides. Dans la première partie on présente une revue bibliographique du problème où sont présentés, la théorie des instabilités de Kelvin-Helmholtz et différents résultats expérimentaux antérieurs. Dans la seconde partie on présente différentes méthodes numériques : technique de suivi d'interface (Volume Of Fluid), de calcul des efforts de tension de surface (CSF) et de résolution des équations de Navier-Stokes (Mac Cormack). La dernière partie présente une méthode particulière (SPH) permettant de traiter des interactions d'écoulements liquides et gazeux. Les principaux phénomènes interfaciaux, tels que la tension de surface et la vaporisation sont pris en compte. Des calculs 2D et 3D de déformation de jets liquides dans des écoulements gazeux supersoniques sont analysés et comparés avec des résultats expérimentaux.

**Mots clés :** Mécanique des fluides, suivi d'interfaces liquide/gaz, méthodes particulières, écoulements diphasiques, tension de surface, méthodes numériques, pulvérisation.

# NUMERICAL STUDY OF LIQUID JETS BREAK-UP IN SUPERSONIC AIRFLOW

## Abstract

This work deals with numerical atomisation of liquid jets. In the first part a bibliographic review concerning liquid jets break-up is done. We present Kelvin-Helmholtz instabilities and previous experimental results. Numerical approaches are developed in the second part. We used an interface tracking method (Volume Of Fluid), a Continuum Surface Force method (CSF) in order to introduce surface tension efforts and a Mac Cormack scheme to compute Navier-Stokes equations. In the last part, a particle method called Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) is applied to liquid and gaz flow interactions. The mean interfacial phenomenoms, such as surface tension and vaporisation are taken into account. 2D and 3D simulations of liquid jets deformation in supersonic air flows are analysed and compared with experimental results.

**Key words :** Fluid mechanics, interfaces tracking, particle method, multi-phase flows, surface tension, numerical simulations, liquid jet atomisation.