



**HAL**  
open science

# Trajectoires rugueuses, processus gaussiens et applications

Nicolas Marie

► **To cite this version:**

Nicolas Marie. Trajectoires rugueuses, processus gaussiens et applications. Probabilités [math.PR]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2012. Français. NNT: . tel-00783931v1

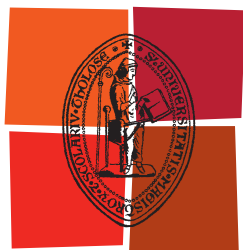
**HAL Id: tel-00783931**

**<https://theses.hal.science/tel-00783931v1>**

Submitted on 4 Feb 2013 (v1), last revised 6 Jan 2014 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier) ▼

---

**Présentée et soutenue par :**

**Nicolas MARIE**

le 10 décembre 2012

**Titre :**

Trajectoires rugueuses, processus gaussiens et applications

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées ▼

**Unité de recherche :**

Institut de Mathématiques de Toulouse

**Directeur(s) de Thèse :**

Laure COUTIN

**Jury :**

Pr. DECREUSEFOND Laurent, Rapporteur

Pr. LEJAY Antoine, Rapporteur

Pr. COHEN Serge, Examineur

Pr. RUSSO Francesco, Examineur

Pr. COUTIN Laure, Directeur de thèse

# Trajectoires rugueuses, processus gaussiens et applications

Nicolas MARIE

*e*Mail : [nicolas.marie@math.univ-toulouse.fr](mailto:nicolas.marie@math.univ-toulouse.fr)

Thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier,  
sous la direction de Mme Laure COUTIN



## Table des matières

Remerciements	5
Introduction générale	7
Chapitre 1. Equations différentielles au sens des trajectoires rugueuses	13
1. Plan du chapitre	13
2. Equations différentielles ordinaires	13
3. Trajectoires géométriques	27
4. Equations différentielles dirigées par une trajectoire géométrique	35
5. Applications à l'analyse stochastique	57
Chapitre 2. Calcul de Malliavin, application d'Itô et calcul de sensibilités	67
1. Introduction	67
2. Calcul de Malliavin et régularité de l'application d'Itô	69
3. Calcul de sensibilités	76
4. Application et simulations	84
Chapitre 3. Sur une généralisation de l'équation Mean-Reverting	91
1. Introduction	91
2. Résultats déterministes	92
3. Résultats probabilistes	103
4. Application en PK/PD	110
Bibliographie	117



## Remerciements

Avant tout, je remercie ma directrice de thèse Laure Coutin qui fut la première à supporter inconditionnellement mon projet de faire une thèse, alors que je terminais tout juste ma première année de Master. Si j'en suis aujourd'hui au stade des remerciements, c'est en partie grâce à son soutien et pour cela, je lui témoigne toute ma gratitude.

Je remercie Francis Lavergne, médecin psychiatre, pour les nombreuses discussions que nous avons eut à propos de la psycho-pharmacologie, me permettant ainsi d'envisager d'intéressantes perspectives d'applications des résultats théoriques du Chapitre 3 de cet exposé. Je le remercie également de m'avoir confié l'étude statistique d'un article de psychologie médicale que nous avons co-écrit au cours de l'année passée [55].

Enfin, je tiens à remercier Laurent Decreusefond pour ses conseils sur le calcul de sensibilités développé au Chapitre 2, ainsi qu'Anne Estrade pour les quelques échanges que nous avons eut sur mon travail de recherche.

Sur le plan personnel, et parce que si le travail de thèse nécessite un soutien scientifique, il nécessite avant tout un soutien moral ; je remercie ma soeur Harriet, mes parents et mes amis les plus fidèles Anthony et Bruce.





## Introduction générale

Dans son article *An Inequality of Hölder-Type Connected with Stieljès Integral* [89] publié en 1936, L.C. Young donna un sens aux intégrales de la forme

$$(1) \quad \int_s^t y_u dw_u,$$

pour deux fonctions  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $y : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})$  höldériennes, d'exposants respectifs  $\alpha, \beta \in ]0, 1]$  satisfaisant  $1/\alpha + 1/\beta > 1$ , avec  $d, e \in \mathbb{N}^*$  et  $T > 0$ . C'est une extension de l'intégrale de Riemann, introduite par ce dernier au milieu de 19e siècle et correspondant au cas  $w = \text{Id}_{[0,T]}$ .

Entre le milieu des années 1930 et la fin des années 1990, il fallut développer une approche *non trajectorielle* pour étudier les équations différentielles stochastiques (EDS) dirigées par un mouvement brownien (standard). En effet, par le lemme de continuité de Kolmogorov, ce dernier a seulement des trajectoires höldériennes d'exposant  $\alpha < 1/2$ . Entre 1942 et 1944, K. Itô répondit à la question par un argument probabiliste, usant essentiellement de la propriété de martingale du mouvement brownien (cf. K. Itô [43] et [44]). Les travaux successifs de J.L. Doob, H. Kunita et J. Watanabe, et de l'*Ecole Française* entre 1960 et 1980 (cf. J. Jacod [45]), ont permis d'aboutir à la forme actuelle de l'intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale. C'est à la fois ce qui limite le choix du signal en calcul stochastique, par exemple un mouvement brownien fractionnaire (mBf) d'indice de Hurst  $H \neq 1/2$  est exclu, mais c'est aussi sa force; notamment en finance, c'est la propriété de (semi-)martingale du processus de diffusion modélisant le cours d'un actif qui garantit l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Durant les années 1970, H. Doss [30] et H.J. Sussman [83] proposèrent une méthode trajectorielle de résolution des EDSs unidimensionnelles dirigées par une semi-martingale. Ce résultat fut ensuite étendu au cas multidimensionnel, pour un champ de vecteurs nilpotent (i.e. dont les crochets de Lie sont nuls à partir d'un certain rang) (cf. Y. Yamato [88], M. Fliess et D. Normand-Cyrot [33], A. Kohatsu-Higa et J.A. León [50], ainsi que P. Friz et N. Victoir [35]).

Considérons une équation différentielle ordinaire (EDO) du type

$$(2) \quad x_t = x_0 + \int_0^t V(x_s) dw_s$$

avec  $\alpha > 1/2$ , où  $V = (V_1, \dots, V_d)$  désigne un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^e$  suffisamment régulier.

En 1994, T. Lyons utilisa l'intégrale de Young pour définir, puis résoudre les équations de type (2) via un argument de point fixe (cf. T. Lyons [59]). M. Zähle [90],

puis Y. Hu et D. Nualart [42] ont ensuite obtenus des résultats analogues via le calcul fractionnaire.

Enfin, dans son article *Differential Equations Driven by Rough Signals* [60] publié en 1998, T. Lyons introduit la théorie de trajectoires rugueuses en se basant notamment sur les travaux de K.T. Chen [8], [9] et [10]. Via son *universal limit theorem*, T. Lyons donna un sens à l'équation (2) pour  $\alpha \in ]0, 1]$ , correspondant au sens de Young pour  $\alpha \in ]1/2, 1]$ , et sans restriction sur la dimension  $d$  de l'espace d'arrivée du signal  $w$ .

Une  $1/\alpha$ -trajectoire rugueuse  $d$ -dimensionnelle  $\mathbb{W}$  est une fonctionnelle  $\alpha$ -höldérienne de  $[0, T]$  dans l'algèbre tensorielle tronquée  $T^{[1/\alpha]}(\mathbb{R}^d)$  satisfaisant l'identité de Chen :

$$\mathbb{W}_{s,t} = \mathbb{W}_{s,u} \otimes \mathbb{W}_{u,t}$$

pour tous  $s, t, u \in [0, T]$  tels que  $s \leq u \leq t$ . En particulier,  $\mathbb{W}$  est une  $1/\alpha$ -trajectoire rugueuse au-dessus de  $w$  si et seulement si,  $\mathbb{W}^1 = w$ .

C'est via cet *enrichissement algébrique* et le choix de la topologie höldérienne que T. Lyons contourna le manque de régularité du signal  $w$  pour établir le *universal limit theorem*. Comme dans le *cas Young*, après avoir construit l'intégrale des trajectoires rugueuses

$$\int \varphi(\mathbb{W}) d\mathbb{W},$$

T. Lyons établit l'existence et l'unicité de la solution de (2) au sens des trajectoires rugueuses (RDE) en montrant la convergence de la suite des itérations de Picard associées, pour la distance  $\alpha$ -höldérienne.

Les trajectoires géométriques constituent une catégorie particulière de trajectoires rugueuses, plus simples à manipuler en pratique. Une trajectoire géométrique est la limite, pour la distance  $\alpha$ -höldérienne, d'une suite de fonctionnelles de la forme

$$\left( 1, z, \int_{0 < r_1 < r_2 < \dots} dz_{r_1} \otimes dz_{r_2}, \dots, \int_{0 < r_1 < \dots < r_{[1/\alpha]} < \dots} dz_{r_1} \otimes \dots \otimes dz_{r_{[1/\alpha]}} \right)$$

où,  $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction lipschitzienne.

Récemment, plusieurs variantes de la théorie de T. Lyons furent développées afin résoudre et d'étudier les équations différentielles dirigées par une trajectoire géométrique. La théorie des  $k$ -incrément proposée par M. Gubinelli dans son article *Controlling Rough Paths* [40], ainsi que l'approche de P. Friz et N. Victoir usant de la géométrie de Carnot-Carathéodory et de multiples déclinaisons du lemme de Davie [22]. Cette dernière est développée dans l'ouvrage très complet *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths* [38], et c'est le point de vue adopté dans cet exposé.

Si établir l'existence et l'unicité de la solution est essentiel, le contrôle en norme(s) de cette dernière l'est tout autant, notamment dans les applications en analyse stochastique. Dans le cas  $\alpha \in ]1/2, 1]$ , se référer à l'article de Y. Hu et D. Nualart [42], puis dans le cas  $\alpha \in ]1/3, 1/2]$ , se référer à l'article de M. Besalu et D. Nualart [5].

Citons également les auteurs ayant travaillé sur l'existence d'une densité pour la solution d'une EDO prise au sens de Young ou d'une RDE : F. Baudoin et M. Hairer [2] dans le cas  $\alpha \in ]1/2, 1]$ , puis F. Baudoin, O. Ouyang et S. Tindel [3].

Durant les années 2000, de nombreux probabilistes, dont (dans l'ordre alphabétique) T. Cass, L. Coutin, A.M. Davie, M. Gubinelli, P. Friz, M. Hairer, A. Lejay, T. Lyons lui-même, S. Tindel et N. Victoir, ont considérablement fait progresser la théorie des trajectoires rugueuses et surtout ses applications en analyse stochastique. Ceux-ci ont développé l'interaction avec des thèmes classiques en probabilités tels que : les processus gaussiens, le calcul de Malliavin, les grandes déviations, l'ergodicité etc.

En utilisant les résultats de L.C. Young [89] et T. Lyons [59], il est possible d'étudier des équations différentielles stochastiques de la forme :

$$(3) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$$

sur un espace probabilisé d'univers  $\Omega$ , en supposant que pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , la trajectoire  $W(\omega)$  du processus  $W$  est  $\alpha$ -höldérienne avec  $\alpha \in ]1/2, 1]$ . Une solution  $X$  de (3) est alors une famille  $(X(\omega), \omega \in \Omega)$  de solutions d'équations différentielles ordinaires prisent au sens de Young :

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \mu[X_s(\omega)] ds + \int_0^t \sigma[X_s(\omega)] dW_s(\omega); \omega \in \Omega.$$

Cette approche trajectorielle permet notamment d'étudier des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H \in ]1/2, 1]$ . Citons par exemple P. Cheridito et al. [12] sur l'équation de Langevin fractionnaire, ainsi que M. Hairer et A. Ohashi [41] sur l'ergodicité des EDSs dirigées par un mBf d'indice de Hurst  $H > 1/2$ .

Désormais, l'approche trajectorielle s'étend au cas  $\alpha \leq 1/2$  en considérant une  $1/\alpha$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W}(\omega)$  au-dessus de  $W(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Toutefois, si les propriétés probabilistes du processus  $W$  suffisaient à étudier celles de la solution  $X$  dans le cas  $\alpha > 1/2$ ; pour traiter le cas  $\alpha \leq 1/2$ , il fallut prolonger une partie des propriétés probabilistes de  $W$  à  $\mathbb{W}$  en un certain sens. Dans le cas gaussien, retenons l'article de P. Friz et N. Victoir *Differential Equations Driven by Gaussian Signals* [36] dans lequel, les auteurs ont construit une trajectoire géométrique *naturelle* au-dessus d'un processus gaussien  $d$ -dimensionnel centré à trajectoires  $\alpha$ -höldériennes avec  $\alpha \in ]1/4, 1]$ , sous une condition de régularité sur sa fonction de covariance, et conservant la plupart des propriétés probabilistes du processus gaussien sous-jacent. Ce travail s'inscrivait dans la continuité d'autres articles publiés par L. Coutin, Z. Qian [20], ainsi que P. Friz et N. Victoir eux-mêmes. Le terme exact employé par P. Friz et N. Victoir pour désigner cette trajectoire géométrique particulière est *Enhanced Gaussian Process*.

Cependant, la norme uniforme sur  $[0, T]$  de la solution d'une RDE linéaire est *naturellement* majorée par une borne de la forme

$$C e^{C \|\mathbb{W}\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{1/\alpha}}$$

où,  $C > 0$  désigne une constante déterministe. Dans le cas gaussien, les résultats de P. Friz et N. Victoir garantissaient l'intégrabilité de cette borne seulement pour

$\alpha \in ]1/2, 1]$ . En affinant sensiblement cette dernière, T. Cass, C. Litterer et T. Lyons ont étendu l'intégrabilité au cas  $\alpha > 1/4$  dans l'article *Integrability Estimates for Gaussian Rough Differential Equations* [7] paru en 2011. Cela permet désormais d'étudier l'intégrabilité de la différentielle de la solution d'une RDE dirigée par une trajectoire géométrique gaussienne par rapport à la condition initiale, au signal et au champ de vecteurs. Pour une réflexion en profondeur sur les RDEs linéaires, citons l'article récent de L. Coutin et A. Lejay [19].

Nous concluons ce bref *Etat de l'Art* par le lien existant entre le calcul stochastique et l'approche trajectorielle des EDSs (cf. L. Coutin et A. Lejay [18], puis P. Friz et N. Victoir [37]). Pour une (semi-)martingale  $d$ -dimensionnelle  $M$ , il existe une trajectoire géométrique *naturelle*  $\mathbb{M}$  au-dessus de  $M$ , conservant la plupart de ses propriétés probabilistes et appelée *Enhanced Martingale*. Pour un champ de vecteurs  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$  sur  $\mathbb{R}^e$  suffisamment régulier :

$$\begin{aligned} \left[ \int \varphi(\mathbb{M}) d\mathbb{M} \right]_{0,t}^1 &= \int_0^t \varphi(M_s) \circ dM_s \\ &= \int_0^t \varphi(M_s) dM_s + \frac{1}{2} \langle \varphi(M), M \rangle_t. \end{aligned}$$

Les développements les plus récents de la théorie des trajectoires rugueuses concernent notamment les équations aux dérivées partielles (cf. A. Deya, M. Gubinelli et S. Tindel [26] sur l'Equation de la Chaleur rugueuse), les équations de Volterra rugueuses (cf. A. Deya et S. Tindel [27] et [28]), ainsi que l'estimation de paramètres d'équations différentielles dirigées par une trajectoire géométrique gaussienne (cf. A. Neuenkirch et S. Tindel [69] dans le cas d'un bruit additif, ainsi que A. Chronopoulos et S. Tindel [13]).

Ce travail de thèse revêt deux aspects :

Concernant la théorie des RDEs elle-même, nous proposons quelques compléments sur l'étude de la régularité de l'application d'Itô (i.e. qui à  $(x_0, V, \mathbb{W})$  associe la solution de l'EDO ou de la RDE) et le contrôle en norme(s) de la différentielle de cette dernière par rapport à la condition initiale, au signal et au champ de vecteurs. Le second aspect de ce travail de thèse est l'application de la théorie des RDEs à l'analyse stochastique et son implication dans d'autres sciences telles que la finance et la pharmacologie. En particulier, le lien avec le calcul de Malliavin est développé pour le calcul de sensibilités.

Le premier chapitre présente l'approche de P. Friz et N. Victoir de la théorie des RDEs, et tente d'y contribuer via certains compléments sur la régularité de l'application d'Itô mentionnés ci-avant. Après quelques éléments d'analyse fonctionnelle et une construction de l'intégrale de Young, nous énonçons les résultats connus sur les EDOs et montrons la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport au champ de vecteurs en usant des idées employées par P. Friz et N. Victoir pour la condition initiale et le signal. Bien qu'elle n'ait pas été présentée en introduction par soucis de simplicité, nous travaillons avec la topologie en  $p$ -variation ( $p \geq 1$ ). Ensuite, nous présentons de façon synthétique les bases de la géométrie de Carnot-Carathéodory, ainsi que la notion de trajectoire géométrique. Nous énonçons les principaux résultats concernant ces dernières en insistant sur la notion de *couplage*, permettant de

considérer des RDEs ayant un terme de drift et surtout, d'introduire une notion de différentiabilité par rapport au signal des fonctions définies sur l'espace métrique (non vectoriel) des trajectoires géométriques. Enfin, la théorie des RDEs elle-même est introduite à la façon de P. Friz et N. Victoir, et ses applications en analyse stochastique (gaussienne) sont détaillées.

Le descriptif suivant des chapitres 2 et 3 est complété, notamment sur le plan bibliographique dans la section d'introduction de chacun d'eux.

Au Chapitre 2, motivés par une problématique issue des mathématiques financières et, sur la base de [38], Chapter 20, nous étudions le rôle du calcul de Malliavin dans *l'exploitation* de la régularité de la solution d'une équation différentielle dirigée par une trajectoire géométrique gaussienne, ainsi que de ses dérivées par rapport à la condition initiale et au champ de vecteurs, vues comme des variables aléatoires définies sur l'espace de Cameron-Martin du processus gaussien sous-jacent. Il s'agit d'établir l'existence, puis de calculer les sensibilités de  $\mathbb{E}[F(X_T)]$  aux variations de la condition initiale et du champ de vecteurs de la solution  $X$  d'une RDE dirigée par une trajectoire géométrique gaussienne. Le cas du mBf est particulièrement développé.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude des équations Mean-Reverting, généralisées au cas d'un signal  $W$  gaussien unidimensionnel et à trajectoires  $\alpha$ -höldériennes avec  $\alpha \in ]0, 1[$  :

$$X_t = x_0 + \int_0^t (\mu - \theta X_s) ds + \sigma \int_0^t X_s^\beta dW_s.$$

Qu'elle soit prise au sens des trajectoires rugueuses, comme nous nous y employons, ou au sens d'Itô pour un signal brownien, cette équation est un *cas pathologique* d'équation différentielle stochastique, car son champ de vecteurs n'est pas lipschitzien sur les intervalles de  $\mathbb{R}$  contenant 0 lorsque  $\beta \neq 1$ . Ainsi, a priori, l'existence d'une solution globale n'est assurée par aucune des deux approches ; seules l'existence et l'unicité locales semblent garanties. Au-delà de cette difficulté qui peut être contournée en démontrant que la solution locale n'atteint jamais 0, l'étude des propriétés déterministes et probabilistes de la solution use d'arguments spécifiques, souvent assez concis, pour lesquels la forme du champ de vecteurs est déterminante. Si l'essentiel du Chapitre 3 porte sur l'étude de ces propriétés, nous consacrons également une section à l'application d'un cas particulier d'équation Mean-Reverting généralisée en pharmacocinétique/pharmacodynamique.



## Equations différentielles au sens des trajectoires rugueuses

### 1. Plan du chapitre

La seconde section est consacrée aux espaces en variation, à l'intégrale de Young et aux équations différentielles ordinaires dirigées par un signal de 1-variation finie. En particulier, nous y rappelons les résultats de P. Friz et N. Victoir sur la différentiabilité de la solution par rapport à la condition initiale et au signal, puis nous démontrons la différentiabilité de la solution par rapport au champ de vecteurs. La troisième section présente de façon synthétique la théorie des trajectoires géométriques telle qu'elle est exposée aux chapitres 7, 8 et 9 de [38]. La section centrale de tout l'exposé, la quatrième, présente la théorie des équations différentielles dirigées par une trajectoire géométrique. En particulier, en complément des résultats portant sur la régularité de la solution d'une RDE du Chapitre 11 de [38], nous démontrons la différentiabilité de cette dernière par rapport au champ de vecteurs, puis construisons des bornes *compatibles* avec les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7] présentés à la Section 5. Nous traitons systématiquement le cas des RDEs ayant un terme de drift en vue d'applications. Enfin, la cinquième section établit le lien entre les résultats déterministes des sections 2 à 4 et l'analyse stochastique (principalement gaussienne).

### 2. Equations différentielles ordinaires

Nous présentons les résultats qui nous sont utiles sur les équations différentielles ordinaires ; c'est-à-dire, dirigées par une fonction de 1-variation finie.

A la première sous-section, nous introduisons les deux grandes classes d'espaces fonctionnels utilisés dans la suite, ainsi que les relations qu'il existe entre eux. A la seconde sous-section, nous présentons l'intégrale de Young. Finalement, à la troisième sous-section, nous énonçons les principaux résultats de la théorie des EDOs. En particulier, la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport au champ de vecteurs sera traitée en détails, car ce résultat joue un rôle essentiel au Chapitre 2 et n'est que mentionné au Chapitre 4 de [38].

Notez qu'à la seconde sous-section, il serait suffisant de présenter l'intégrale de Riemann-Stieljès. Cependant, bien que l'on puisse voir l'intégrale de Young comme un cas particulier de l'intégrale des trajectoires rugueuses présentée plus loin, certaines propriétés spécifiques de l'intégrale de Young sont utiles aux chapitres 2 et 3. De plus, c'est l'occasion de construire cette dernière via le lemme de la couturière, à la manière de D. Feyel et A. De La Pradelle [31] et L. Coutin [16], mais pour les espaces en variation.

Enfin, nous ne prétendons à aucune originalité dans cette section. Certaines démonstrations sont traitées par soucis de complétude ou parce qu'elles aident à la

compréhension. Pour les autres, nous renvoyons aux deux sources ayant inspiré cette partie de l'exposé : P. Friz et N. Victoir [38], ainsi que D. Feyel et A. De La Pradelle [31].

**Notations et conventions.** Dans tout l'exposé :

- On considère  $\mathbb{R}^e$  et  $\mathbb{R}^d$  ( $e, d \in \mathbb{N}^*$ ) munis de leur norme euclidienne indifféremment notée  $\|\cdot\|$ .
- La base canonique de  $\mathbb{R}^i$  ( $i = e, d$ ) est notée  $(e_1, \dots, e_i)$ . Relativement à cette dernière, pour  $k = 1, \dots, i$ ; la  $k$ -ème composante d'un vecteur  $u \in \mathbb{R}^i$  est notée  $u^k$ .
- La boule fermée de  $\mathbb{R}^i$  ( $i = e, d$ ) pour la norme  $\|\cdot\|$ , de centre  $a \in \mathbb{R}^i$  et de rayon  $r > 0$ , est notée  $B(a, r)$ .
- La norme matricielle (resp. d'opérateur) usuelle sur  $\mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$ ) est notée  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$  (resp.  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ ).
- On considère  $T > 0$ .
- Soient  $0 \leq s < t \leq T$ . L'ensemble des subdivisions de  $[s, t]$  est noté  $D_{s,t}$ .
- Soient  $0 \leq s < t \leq T$ . L'ensemble des fonctions continues (resp. continûment différentiables) de  $[s, t]$  dans  $\mathbb{R}^d$  est noté  $C^0([s, t]; \mathbb{R}^d)$  (resp.  $C^1([s, t]; \mathbb{R}^d)$ ), et muni de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_{\infty; s, t}$ .
- En l'absence de précisions, le terme de *différentiabilité* fait référence à la différentiabilité au sens de Fréchet.

**2.1. Contrôles et espaces fonctionnels.** Pour tous  $0 \leq s < t \leq T$ , soit

$$\Delta_{s,t} = \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : s \leq u < v \leq t\}.$$

En particulier, on note  $\Delta_T = \Delta_{0,T}$ , ainsi que :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_T &= \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq u \leq v \leq T\} \text{ et} \\ \Delta_\infty &= \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq u < v\}. \end{aligned}$$

La notion suivante de contrôle est essentielle :

**DÉFINITION 1.1.** Une fonction  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un contrôle si et seulement si,  $\omega$  est continue,  $\omega(s, s) = 0$  pour tout  $s \in [0, T]$  et  $\omega$  est sur-additive :

$$\forall 0 \leq s \leq u \leq t \leq T, \omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t).$$

**PROPOSITION 1.2.** Soit  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  un contrôle :

- (1) Si  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne une fonction continue, croissante, convexe et telle que  $\varphi(0) = 0$ , alors  $\varphi \circ \omega$  est un contrôle.
- (2) Si  $\tilde{\omega} : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne un autre contrôle, alors  $a\omega + b\tilde{\omega}$  ( $a, b \geq 0$ ) et  $\omega^\alpha \tilde{\omega}^\beta$  ( $\alpha, \beta > 0$  avec  $\alpha + \beta \geq 1$ ) sont des contrôles.

**DÉMONSTRATION.** Il est immédiat que toute combinaison linéaire positive de contrôles est un contrôle. La seconde partie du second point est une conséquence du premier et de l'inégalité de Hölder.

Il est évident que  $\varphi \circ \omega$  est continue et que  $(\varphi \circ \omega)(s, s) = 0$  pour tout  $s \in [0, T]$ . Montrons que la fonction  $\varphi \circ \omega$  est sur-additive :

Soient  $b > a > 0$ . Puisque la fonction  $\varphi$  est convexe :

$$\frac{\varphi(a+b) - \varphi(b)}{a} \geq \frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a},$$



soit encore :

$$(4) \quad \varphi(a + b) \geq \varphi(a) + \varphi(b).$$

Les réels  $a$  et  $b$  sont interchangeables, donc l'inégalité (4) est vraie pour tous  $a, b \geq 0$ . En particulier, pour tous  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ ,

$$(\varphi \circ \omega)(s, u) + (\varphi \circ \omega)(u, t) \leq \varphi[\omega(s, u) + \omega(u, t)].$$

Or,  $\omega$  étant un contrôle,  $\omega(s, u) + \omega(u, t) \leq \omega(s, t)$ . Puisque  $\varphi$  est une fonction croissante :

$$\varphi[\omega(s, u) + \omega(u, t)] \leq (\varphi \circ \omega)(s, t).$$

Ceci achève la démonstration.  $\square$

### Applications :

- (1) Pour  $p \geq 1$ , la fonction  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T \mapsto (t - s)^p$  est un contrôle par le premier point de la Proposition 1.2 appliqué à la fonction convexe  $a \in \mathbb{R}_+ \mapsto a^p$  et au contrôle  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T \mapsto t - s$ .
- (2) Soient  $p \geq 1$  et  $\omega$  un contrôle. La fonction  $\tilde{\omega} = \omega \vee \omega^p$  est un contrôle par le premier point de la Proposition 1.2 appliqué à la fonction convexe  $a \in \mathbb{R}_+ \mapsto a \vee a^p$  et au contrôle  $\omega$ . De plus,  $\omega$  et  $\tilde{\omega}$  coïncident sur l'ensemble des  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$  tels que  $\tilde{\omega}(s, t) \leq 1$ . Cette application est importante.

En identifiant les éléments de  $\bar{\Delta}_T^2$  aux rectangles de  $[0, T]^2$ , la notion de contrôle s'étend à  $\bar{\Delta}_T^2$  de la façon suivante :

**DÉFINITION 1.3.** *Une fonction  $\omega : \bar{\Delta}_T^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un contrôle 2D si et seulement si,  $\omega$  est continue,  $\omega(R) = 0$  pour tout rectangle  $R$  de  $[0, T]^2$  d'aire nulle et  $\omega$  est sur-additive au sens où, pour tous rectangles  $R_1, R_2$  et  $R$  de  $[0, T]^2$ ,*

$$R_1 \cup R_2 \subset R \text{ et } R_1 \cap R_2 = \emptyset \implies \omega(R_1) + \omega(R_2) \leq \omega(R).$$

Deux espaces fonctionnels jouent un rôle fondamental : l'espace des fonctions continues et de  $p$ -variation finie ( $p \geq 1$ ), et l'espace des fonctions  $\alpha$ -höldériennes ( $\alpha \in [0, 1]$ ).

**DÉFINITION 1.4.** *Soient  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$  et  $y : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue :*

- (1) *La fonction  $y$  est de  $p$ -variation finie si et seulement si,*

$$\|y\|_{p\text{-var};s,t} = \sup_{D=\{r_k\} \in D_{s,t}} \left( \sum_{k=1}^{|D|-1} \|y_{r_{k+1}} - y_{r_k}\|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

*L'application  $\|\cdot\|_{p\text{-var};s,t}$  est une semi-norme sur l'e.v.  $C^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$  des fonctions continues et de  $p$ -variation finie.*

- (2) *La fonction  $y$  est  $\alpha$ -höldérienne si et seulement si,*

$$\|y\|_{\alpha\text{-höl};s,t} = \sup_{(u,v) \in \Delta_{s,t}} \frac{\|y_v - y_u\|}{|v - u|^\alpha} < \infty.$$

*L'application  $\|\cdot\|_{\alpha\text{-höl};s,t}$  est une semi-norme sur l'e.v.  $C^{\alpha\text{-höl}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$  des fonctions  $\alpha$ -höldériennes.*

### Remarques et notations :

- (1) Pour toute fonction constante  $c : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\|c\|_{p\text{-var};s,t} = \|c\|_{\alpha\text{-höl};s,t} = 0$ . C'est pourquoi,  $\|\cdot\|_{p\text{-var};s,t}$  et  $\|\cdot\|_{\alpha\text{-höl};s,t}$  sont des semi-normes et non des normes.

- (2) La boule fermée de  $C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  pour la semi-norme  $\|\cdot\|_{p\text{-var}; T}$ , de centre  $y \in C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  et de rayon  $r > 0$ , est notée  $B_{p\text{-var}}(y, r)$  dans la suite.
- (3) Pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ , l'écart *naturel* associé à la semi-norme  $\|\cdot\|_{p\text{-var}; s, t}$  (resp.  $\|\cdot\|_{\alpha\text{-höl}; s, t}$ ) est noté  $d_{p\text{-var}; s, t}$  (resp.  $d_{\alpha\text{-höl}; s, t}$ ).

Etudions les relations qu'il existe entre ces espaces fonctionnels :

PROPOSITION 1.5. *Soit  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$  :*

- (1) *Si  $p > q \geq 1$ , alors :*

$$C^{q\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d) \subset C^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d).$$

- (2) *Si  $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$ , alors :*

$$C^{\alpha\text{-höl}}([s, t]; \mathbb{R}^d) \subset C^{\beta\text{-höl}}([s, t]; \mathbb{R}^d).$$

- (3) *Pour tout  $p \geq 1$ ,*

$$C^{1/p\text{-höl}}([s, t]; \mathbb{R}^d) \subset C^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $y : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue :

- (1) Soient  $p > q \geq 1$  et  $D = \{r_k\} \in D_{s, t}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{|D|-1} \|y_{r_{k+1}} - y_{r_k}\|^p &= \sum_{k=1}^{|D|-1} \|y_{r_{k+1}} - y_{r_k}\|^q \|y_{r_{k+1}} - y_{r_k}\|^{p-q} \\ &\leq 2 \|y\|_{\infty; s, t}^{p-q} \sum_{k=1}^{|D|-1} \|y_{r_{k+1}} - y_{r_k}\|^q \end{aligned}$$

avec  $\|y\|_{\infty; s, t} < \infty$ , car  $y$  est continue sur  $[s, t]$ . La subdivision  $D$  ayant été choisie arbitrairement :

$$\|y\|_{p\text{-var}; s, t}^p \leq 2 \|y\|_{\infty; s, t}^{p-q} \|y\|_{q\text{-var}; s, t}^q.$$

- (2) Soient  $1 \geq \alpha > \beta \geq 0$  et  $(u, v) \in \Delta_{s, t}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{\|y_v - y_u\|}{|v - u|^\beta} &= \frac{\|y_v - y_u\|}{|v - u|^\alpha} |v - u|^{\alpha-\beta} \\ &\leq |t - s|^{\alpha-\beta} \frac{\|y_v - y_u\|}{|v - u|^\alpha}. \end{aligned}$$

Le couple  $(u, v)$  ayant été choisi arbitrairement :

$$\|y\|_{\beta\text{-höl}; s, t} \leq |t - s|^{\alpha-\beta} \|y\|_{\alpha\text{-höl}; s, t}.$$

- (3) Soient  $p \geq 1$  et  $D = \{r_k\} \in D_{s, t}$ . Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{|D|-1} \|y_{r_{k+1}} - y_{r_k}\|^p &\leq \|y\|_{1/p\text{-höl}; s, t}^p \sum_{k=1}^{|D|-1} (r_{k+1} - r_k) \\ &\leq \|y\|_{1/p\text{-höl}; s, t}^p (t - s). \end{aligned}$$

La subdivision  $D$  ayant été choisie arbitrairement :

$$\|y\|_{p\text{-var}; s, t}^p \leq \|y\|_{1/p\text{-höl}; s, t}^p (t - s).$$

□

PROPOSITION 1.6. *Soit  $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie. Alors,*

$$\omega_{y,p} : (s, t) \in \bar{\Delta}_T \longmapsto \|y\|_{p\text{-var};s,t}^p$$

*est un contrôle.*

PROPOSITION 1.7. *Les espaces vectoriels*

$$C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \text{ et } C^{\alpha\text{-höl}}([0, T]; \mathbb{R}^d),$$

*respectivement munis des normes*

$$y \longmapsto \|y_0\| + \|y\|_{p\text{-var};T} \text{ et } y \longmapsto \|y_0\| + \|y\|_{\alpha\text{-höl};T},$$

*sont des espaces de Banach non séparables.*

Pour une preuve de ces deux propositions, se référer respectivement à [38], Proposition 5.8 et Theorem 5.25.

**Remarques :**

(1) Puisque  $\mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{e \times d}$ , les résultats précédents s'étendent à :

$$C^{p\text{-var}}([s, t]; \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})); (s, t) \in \bar{\Delta}_T.$$

(2) Dans tout l'exposé, sauf mention du contraire, les espaces fonctionnels

$$C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \text{ et } C^{\alpha\text{-höl}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$$

sont respectivement munis de  $\|\cdot\|_{p\text{-var};T}$  et  $\|\cdot\|_{\alpha\text{-höl};T}$ .

La Définition 1.4 s'étend aux fonctions de  $[0, T]^2$  dans  $\mathbb{R}^d$  (cf. N. Toghiani [86]). Elle intervient notamment dans la construction de la trajectoire géométrique au-dessus d'un processus gaussien dans l'article de P. Friz et N. Victoir [36] :

DÉFINITION 1.8. *Soient  $(s, t), (u, v) \in \bar{\Delta}_T$  et  $y : [s, t] \times [u, v] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue. La fonction  $y$  est de  $p$ -variation 2D finie si et seulement si,*

$$\|y\|_{p\text{-var};[s,t] \times [u,v]} = \sup_{\substack{D_1 = \{r_k^1\} \in D_{s,t} \\ D_2 = \{r_l^2\} \in D_{u,v}}} \left[ \sum_{k=1}^{|D_1|-1} \sum_{l=1}^{|D_2|-1} \left\| y \begin{pmatrix} r_k^1 & r_{k+1}^1 \\ r_l^2 & r_{l+1}^2 \end{pmatrix} \right\|^p \right]^{1/p} < \infty$$

où,

$$\forall [a, b] \subset [s, t], \forall [c, d] \subset [u, v], y \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = y(a, c) + y(b, d) - y(a, d) - y(b, c).$$

PROPOSITION 1.9. *Soit  $y : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation 2D finie. Alors, la fonction qui à tout rectangle  $R$  de  $[0, T]^2$  associe  $\|y\|_{p\text{-var};R}^p$  est un contrôle 2D.*

Pour une preuve, se référer à [38], Lemma 5.52.

**2.2. Intégrale de Young.** Il existe plusieurs façons de construire l'intégrale de Young. Nous utilisons le lemme de la couturière, à la manière de D. Feyel et A. De La Pradelle [31] et L. Coutin [16], mais pour les espaces en variation.

LEMME 1.10. Soient  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  un contrôle,  $\varphi : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et  $\varepsilon > 0$  tels que :

$$\forall 0 \leq s \leq u \leq t \leq T, \|\varphi(s, t) - \varphi(u, t) - \varphi(s, u)\| \leq \omega^{1+\varepsilon}(s, t).$$

Alors, à une constante additive près, il existe une unique fonction continue  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \|\psi(t) - \psi(s) - \varphi(s, t)\| \leq \theta(\varepsilon)\omega^{1+\varepsilon}(s, t)$$

avec,  $\theta(\varepsilon) = (1 - 2^{-\varepsilon})^{-1}$ .

Pour une preuve du lemme de la couturière, se référer à [31], Lemma 2.1 et Corollary 2.3.

Pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ , toute fonction  $\varphi : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  et toute subdivision  $D = \{r_k\} \in D_{s,t}$ , la somme de Riemann généralisée est :

$$J_{s,t}(\varphi, D) = \sum_{k=1}^{|D|-1} \varphi(r_k, r_{k+1}).$$

Pour tout contrôle  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$ , le  $\omega$ -pas de  $D$  est :

$$\delta(\omega, D) = \max_{k=1, \dots, |D|-1} \omega(r_k, r_{k+1}).$$

PROPOSITION 1.11. Soient  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  un contrôle,  $\varphi : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et  $\varepsilon > 0$  tels que :

$$\forall 0 \leq s \leq u \leq t \leq T, \|\varphi(s, t) - \varphi(u, t) - \varphi(s, u)\| \leq \omega^{1+\varepsilon}(s, t).$$

Alors, la fonction  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  obtenue au Lemme 1.10 vérifie :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \lim_{\substack{\delta(\omega, D) \rightarrow 0 \\ D \in D_{s,t}}} \|\psi(t) - \psi(s) - J_{s,t}(\varphi, D)\| = 0.$$

DÉMONSTRATION. Par le lemme de la couturière (Lemme 1.10), à une constante additive près, il existe une unique fonction continue  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \|\psi(t) - \psi(s) - \varphi(s, t)\| \leq \theta(\varepsilon)\omega^{1+\varepsilon}(s, t).$$

En particulier, pour tous  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,  $D = \{r_k\} \in D_{s,t}$  et  $k = 1, \dots, |D| - 1$ ,

$$\|\psi(r_{k+1}) - \psi(r_k) - \varphi(r_k, r_{k+1})\| \leq \theta(\varepsilon)\omega^{1+\varepsilon}(r_k, r_{k+1}).$$

La sur-additivité de contrôle  $\omega$  entraîne alors :

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - \psi(s) - J_{s,t}(\varphi, D)\| &\leq \sum_{k=1}^{|D|-1} \|\psi(r_{k+1}) - \psi(r_k) - \varphi(r_k, r_{k+1})\| \\ &\leq \theta(\varepsilon) \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega^{1+\varepsilon}(r_k, r_{k+1}) \leq \theta(\varepsilon)\omega(s, t)\delta^\varepsilon(\omega, D). \end{aligned}$$

La subdivision  $D$  ayant été choisie arbitrairement,

$$\lim_{\substack{\delta(\omega, D) \rightarrow 0 \\ D \in D_{s,t}}} \|\psi(t) - \psi(s) - J_{s,t}(\varphi, D)\| = 0.$$

□

THÉORÈME 1.12. Soient  $p, q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q > 1$ ,  $y : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})$  une fonction continue de  $p$ -variation finie,  $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue de  $q$ -variation finie et  $\varphi : [0, T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  la fonction définie par :

$$\forall (s, t) \in [0, T]^2, \varphi(s, t) = y_s(z_t - z_s).$$

Alors,

- (1) Il existe un contrôle  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  et une unique fonction continue notée  $J(y, z) : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \lim_{\substack{\delta(\omega, D) \rightarrow 0 \\ D \in D_{s,t}}} \|J_{s,t}(y, z) - J_{s,t}(\varphi, D)\| = 0.$$

Pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,  $J_{s,t}(y, z)$  est l'intégrale de Young de  $y$  par rapport à  $z$  sur  $[s, t]$  et

$$J_{s,t}(y, z) = \int_s^t y_u dz_u.$$

- (2) Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant seulement de  $p$  et  $q$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|J(y, z)\|_{q\text{-var};s,t} \leq C \|z\|_{q\text{-var};s,t} (\|y\|_{p\text{-var};s,t} + \|y\|_{\infty;s,t}).$$

- (3) L'application  $(y, z) \mapsto J(y, z)$  est continue de

$$C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})) \times C^{q\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{q\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d).$$

En particulier, elle est lipschitzienne sur toutes les parties bornées.

DÉMONSTRATION. Afin d'établir le premier point, il suffit de montrer que  $\varphi$  satisfait les hypothèses du lemme de la couturière, puis d'appliquer la Proposition 1.11. Le second point découle du premier, de l'inégalité triangulaire et de la sur-additivité des contrôles.

- (1) D'une part, la fonction  $\varphi$  est continue par construction.

D'autre part, soient  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$  :

$$\begin{aligned} \|\varphi(s, t) - \varphi(u, t) - \varphi(s, u)\| &= \|(y_s - y_u)(z_t - z_u)\| \\ &\leq \|y\|_{p\text{-var};s,t} \|z\|_{q\text{-var};s,t} = \omega^{1/p+1/q}(s, t) \end{aligned}$$

avec,

$$\omega = \omega_{y,p}^{q/(p+q)} \omega_{z,q}^{p/(p+q)}.$$

Par la Proposition 1.9,  $\omega_{y,p}$  et  $\omega_{z,q}$  sont des contrôles. Donc, par le second point de la Proposition 1.2,  $\omega$  est un contrôle.

Puisque  $1/p + 1/q > 1$  par hypothèse, la Proposition 1.11 s'applique à  $\varphi$  pour le contrôle  $\omega$ . Alors, à une constante additive près, il existe une unique fonction continue  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \lim_{\substack{\delta(\omega, D) \rightarrow 0 \\ D \in D_{s,t}}} \|\psi(t) - \psi(s) - J_{s,t}(\varphi, D)\| = 0.$$

On conclut en posant  $J_{s,t}(y, z) = \psi(t) - \psi(s)$ .

(2) Par construction, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|J_{s,t}(y, z) - \varphi(s, t)\| \leq \theta(\varepsilon)\omega^{1+\varepsilon}(s, t)$$

avec,  $\varepsilon = 1/p + 1/q - 1 > 0$ .

Donc, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|J_{s,t}(y, z)\| &\leq \|J_{s,t}(y, z) - \varphi(s, t)\| + \|\varphi(s, t)\| \\ &\leq \theta(\varepsilon)\omega^{1+\varepsilon}(s, t) + \|y\|_{\infty; s, t} \|z\|_{q\text{-var}; s, t}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\|J_{s,t}(y, z)\|^q \leq 2^{q-1} [\theta^q(\varepsilon)\omega^{q(1+\varepsilon)}(s, t) + \|y\|_{\infty; s, t}^q \|z\|_{q\text{-var}; s, t}^q].$$

Puisque le membre droit de cette inégalité définit une fonction sur-additive :

$$\begin{aligned} \|J(y, z)\|_{q\text{-var}; s, t}^q &\leq 2^{q-1} [\theta^q(\varepsilon)\omega^{q(1+\varepsilon)}(s, t) + \|y\|_{\infty; s, t}^q \|z\|_{q\text{-var}; s, t}^q] \\ (5) \quad &\leq C^q \|z\|_{q\text{-var}; s, t}^q (\|y\|_{p\text{-var}; s, t}^q + \|y\|_{\infty; s, t}^q) \end{aligned}$$

où,  $C$  ne dépend que de  $p$  et  $q$ .

(3) L'application  $(y, z) \mapsto J(y, z)$  est bilinéaire. Donc, l'inégalité (5) suffit à assurer la continuité énoncée. □

**Remarque.** Lorsque  $y$  et  $z$  sont continues et de 1-variation finie sur  $[0, T]$ ,  $J(y, z)$  coïncide avec l'intégrale de Riemann-Stieljès telle qu'elle est définie par P. Friz et N. Victoir au Chapitre 2 de [38]. En particulier, si  $z$  est continûment dérivable sur  $[0, T]$  :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \int_s^t y_u dz_u = \int_s^t y_u \dot{z}_u du.$$

Il est donc légitime de poser :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \int_s^t \|y_u\|_{\mathcal{M}} \|dz_u\| = \int_s^t \|y_u \dot{z}_u\| du.$$

Or, d'après P. Friz et N. Victoir [38], Proposition 1.24 :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \|\varphi\|_{1\text{-var}; s, t} = \int_s^t \|\dot{\varphi}(u)\| du$$

pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  sur  $[0, T]$ . En particulier,

$$\|\varphi\|_{1\text{-var}; s, t} = \int_s^t \|y_u \dot{z}_u\| du \text{ lorsque } \varphi = \int_s^t y_u \dot{z}_u du.$$

Ainsi, pour toutes fonctions  $y$  et  $z$  continues et de 1-variation finie sur  $[0, T]$ , on note par extension :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \int_s^t \|y_u\|_{\mathcal{M}} \|dz_u\| = \left\| \int_s^t y_u dz_u \right\|_{1\text{-var}; s, t}.$$

Cette définition entraîne notamment que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\left\| \int_s^t y_u dz_u \right\| \leq \int_s^t \|y_u\|_{\mathcal{M}} \|dz_u\|.$$

Nous concluons cette sous-section par l'énoncé du Lemme de Gronwall :

LEMME 1.13. Soient  $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de 1-variation finie, et  $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction borélienne bornée. S'il existe  $K, L \geq 0$  tels que

$$\forall t \in [0, T], \varphi(t) \leq K + L \int_0^t \varphi(s) \|dy_s\|$$

alors,

$$\forall t \in [0, T], \varphi(t) \leq K e^{L\|y\|_{1-var;t}}.$$

Pour une preuve sous cette forme, se référer à [38], Lemma 3.2.

**2.3. Equations différentielles ordinaires.** Cette sous-section présente des résultats clefs sur les EDOs et s'inspire principalement des chapitres 3 et 4 de P. Friz et N. Victoir [38].

DÉFINITION 1.14. Un champ de vecteurs  $V = (V_1, \dots, V_d)$  sur  $\mathbb{R}^e$  est une application qui à tout  $a \in \mathbb{R}^e$  associe une matrice  $V(a) \in \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall b \in \mathbb{R}^e, V(a)b = \sum_{i=1}^d V_i(a)b^i.$$

**Remarque.** Il existe une unique 1-forme  $V : \mathbb{R}^e \rightarrow L(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^e)$  associée à  $V$  telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^e, \forall b \in \mathbb{R}^d, V(a).b = V(a)b.$$

Dans la suite, nous ne distinguerons plus les deux notions : le terme *champ de vecteurs* désignera à la fois  $V$  et la 1-forme  $V$ .

Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue de 1-variation finie et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^e$ . On considère l'équation :

$$(6) \quad x_t = x_0 + \int_0^t V(x_s) dw_s; \quad x_0 \in \mathbb{R}^e$$

où, l'intégrale est prise au sens de Young (ici Riemann-Stieljès).

**Remarques :**

- (1) Comme mentionné en introduction, au sens de Young, l'équation (6) peut être étudiée pour  $w$  continue et de  $p$ -variation finie avec  $p \in [1, 2[$  (par exemple, cf. A. Lejay [57]).
- (2) En pratique, l'équation considérée a souvent un terme de drift :

$$x_t = x_0 + \int_0^t \mu(x_s) ds + \int_0^t \sigma(x_s) dw_s; \quad x_0 \in \mathbb{R}^e$$

avec,  $\mu : \mathbb{R}^e \rightarrow \mathbb{R}^e$  et  $\sigma : \mathbb{R}^e \rightarrow \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})$ .

On se ramène à l'équation (6) en posant :

$$x_t = x_0 + \int_0^t V(x_s) d\tilde{w}_s; \quad x_0 \in \mathbb{R}^e$$

où,  $\tilde{w} = (\text{Id}_{[0,T]}, w)$  et  $V$  désigne le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^e$  tel que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^e, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}^d, V(a)(b, c) = \mu(a)b + \sigma(a)c.$$

THÉORÈME 1.15. *Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de 1-variation finie, et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs lipschitzien sur  $\mathbb{R}^e$  :*

$$\|V\|_{lip} = \sup_{a, b \in \mathbb{R}^e: a \neq b} \frac{\|V(b) - V(a)\|_{\mathcal{M}}}{\|b - a\|} < \infty.$$

Alors,

- (1) *Pour une condition initiale donnée  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ , l'équation  $dx = V(x)dw$  admet une unique solution (globale) notée  $\pi_V(0, x_0; w)$  telle que :*

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \|\pi_V(0, x_0; w)\|_{1-var; s, t} \leq (1 + \|x_0\|)C e^{2C\|w\|_{1-var; s, t}} \int_s^t \|dw_u\|$$

$$\text{avec, } C = \|V\|_{lip} \vee \|V(0)\|_{\mathcal{M}}.$$

- (2) *Si de plus  $V$  est borné :*

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \|\pi_V(0, x_0; w)\|_{1-var; s, t} \leq \|V\|_{\infty} \|w\|_{1-var; s, t}$$

avec,

$$\|V\|_{\infty} = \sup_{a \in \mathbb{R}^e} \|V(a)\|_{\mathcal{M}}.$$

Pour une preuve, se référer à [38], théorèmes 3.4, 3.7 et 3.8.

**Remarque.** Notez qu'il existe une solution (globale) dès que  $V$  est un champ de vecteurs continu et à croissance au plus linéaire :

$$\exists C > 0 : \forall a \in \mathbb{R}^e, \|V(a)\|_{\mathcal{M}} \leq C(1 + \|a\|).$$

En effet, au Théorème 3.6 de [38], P. Friz et N. Victoir montrent que s'il y a existence d'une solution, cette dernière est à valeurs dans la boule  $B(0; R(x_0, w))$  de  $\mathbb{R}^e$  où,

$$R(x_0, w) = (1 + \|x_0\|)C e^{2C\|w\|_{1-var; T}} \int_0^T \|dw_t\|.$$

Ainsi, si l'on considère un champ de vecteurs  $\hat{V} = (\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_d)$ , continu et borné sur  $\mathbb{R}^e$  tel que  $\hat{V} \equiv V$  sur la boule  $B(0; R(x_0, w))$ , alors l'existence locale assurée par [38], Theorem 3.4 est en réalité globale.

En particulier, si  $V$  est lipschitzien, pour tout  $a \in \mathbb{R}^e$ ,

$$\begin{aligned} \|V(a)\|_{\mathcal{M}} &\leq \|V(a) - V(0)\|_{\mathcal{M}} + \|V(0)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq C(\|a\| + 1) \end{aligned}$$

avec,  $C = \|V\|_{lip} \vee \|V(0)\|_{\mathcal{M}}$ .

L'argument de localisation précédent assure l'existence d'une solution, et le caractère lipschitzien de  $V$  l'unicité de cette dernière.

La notion de champ de vecteurs Lipschitz au sens de Stein est essentielle dans la suite de l'exposé :

DÉFINITION 1.16. *Soient  $\gamma > 0$  et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^e$ . Ce dernier est  $\gamma$ -Lipschitz (au sens de Stein) si et seulement s'il est de classe  $C^{[\gamma]}$  sur  $\mathbb{R}^e$ , borné, de différentielles successives bornées et de  $[\gamma]$ -ème différentielle  $\{\gamma\}$ -höldérienne ( $[\gamma]$  est le plus grand entier strictement plus petit que  $\gamma$  et  $\{\gamma\} = \gamma - [\gamma]$  désigne la partie fractionnaire de  $\gamma$ ).*



De plus, la notation suivante est adoptée :

$$\|V\|_{lip^\gamma} = \max \{ \|V\|_\infty, \|DV\|_\infty, \dots, \|D^{[\gamma]}V\|_\infty, \|D^{[\gamma]}V\|_{\{\gamma\}\text{-h\acute{o}l}} \}.$$

L'application  $\|\cdot\|_{lip^\gamma}$  est une norme sur l'espace vectoriel  $Lip^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  des champs de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ .

**Remarques et notations :**

- (1) La boule fermée de  $Lip^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  pour la norme  $\|\cdot\|_{lip^\gamma}$ , de centre  $V \in Lip^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  et de rayon  $r > 0$ , est notée  $B_{Lip^\gamma}(V, r)$  dans la suite.
- (2) Notez que  $[\gamma] = 0$  et  $\{\gamma\} = 1$  lorsque  $\gamma = 1$ . Dans ce cas,  $V \in Lip^1(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  si et seulement si,

$$\|V\|_{lip^1} = \|V\|_\infty \vee \|V\|_{lip} < \infty.$$

Ainsi, tout champ de vecteurs 1-Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$  est lipschitzien, mais la réciproque est fautive en général. Un champ de vecteurs affine sur  $\mathbb{R}^e$  est lipschitzien et non borné.

Cependant, pour tout champ de vecteurs  $V = (V_1, \dots, V_d)$  lipschitzien sur  $\mathbb{R}^e$ , étant donné une boule fermée  $B$  de  $\mathbb{R}^e$ , on peut construire un champ de vecteurs  $\hat{V} \in Lip^1(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  tel que  $V \equiv \hat{V}$  sur  $B$ .

- (3) De façon générale, on dit qu'un champ de vecteurs  $V = (V_1, \dots, V_d)$  sur  $\mathbb{R}^e$  est localement  $\gamma$ -Lipschitz si et seulement si, pour toute boule fermée  $B$  de  $\mathbb{R}^e$ , la restriction de  $V$  à  $B$  est  $\gamma$ -Lipschitz.

Ces champs de vecteurs forment un espace vectoriel noté  $Lip_{loc}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$ .

Tout champ de vecteurs affine sur  $\mathbb{R}^e$  est localement 1-Lipschitz.

- (4) On observe que :

$$\forall \gamma_1 \geq \gamma_2 > 0, Lip^{\gamma_1}(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \subset Lip^{\gamma_2}(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d).$$

La fonction  $(x_0, w, V) \mapsto \pi_V(0, x_0; w)$  s'appelle l'application d'Itô. Les résultats suivants étudient sa régularité : continuité et différentiabilité.

**THÉORÈME 1.17.** *Pour  $i = 1, 2$ , soient  $x_0^i \in \mathbb{R}^e$ ,  $w^i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de 1-variation finie,  $V^i \in Lip^1(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  et  $x^i = \pi_{V^i}(0, x_0^i; w^i)$ . Alors,*

$$\|x^1 - x^2\|_{1\text{-var}; T} \leq 2e^{3M_1M_2} \times \left( M_1M_2 \|x_0^1 - x_0^2\| + M_1 \|w^1 - w^2\|_{1\text{-var}; T} + M_2 \|V^1 - V^2\|_\infty \right)$$

où,  $M_1 > 0$  et  $M_2 > 0$  désignent deux constantes satisfaisant :

$$M_1 \geq \|V^1\|_{lip^1} \vee \|V^2\|_{lip^1} \quad \text{et} \quad M_2 \geq \|w^1\|_{1\text{-var}; T} \vee \|w^2\|_{1\text{-var}; T}.$$

En particulier, l'application d'Itô  $(x_0, w, V) \mapsto \pi_V(0, x_0; w)$  est uniformément continue de

$$\mathbb{R}^e \times C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \times Lip^1(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \quad \text{dans} \quad C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

Pour une preuve, se référer à [38], Theorem 3.18.

**Remarque.** Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de 1-variation finie, et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs lipschitzien sur  $\mathbb{R}^e$ . Nous avons vu

qu'alors,  $\pi_V(0, x_0; w)$  est une fonction à valeurs dans la boule  $B(0; R(x_0, w))$  de  $\mathbb{R}^e$  (avec les notations de la remarque du Théorème 1.15).

De plus, pour tout  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^e$  et toute fonction  $\tilde{w} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue de 1-variation finie,

$$\|\tilde{x}_0\| \leq \|x_0\| \text{ et } \|\tilde{w}\|_{1\text{-var};T} \leq \|w\|_{1\text{-var};T} \implies R(\tilde{x}_0, \tilde{w}) \leq R(x_0, w).$$

Donc, si l'on considère un champ de vecteurs  $\hat{V} \in \text{Lip}^1(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  tel que  $\hat{V} \equiv V$  sur la boule  $B(0; R(x_0, w))$ , alors :

$$\pi_V(0, \cdot) \equiv \pi_{\hat{V}}(0, \cdot) \text{ sur l'ensemble } B(0, \|x_0\|) \times B_{1\text{-var}}(0, \|w\|_{1\text{-var};T}).$$

En conséquence, par le Théorème 1.17, l'application  $\pi_V(0, \cdot)$  est uniformément continue de

$$B(0, \|x_0\|) \times B_{1\text{-var}}(0, \|w\|_{1\text{-var};T}) \text{ dans } C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

En particulier, lorsque  $V$  est un champ de vecteurs affine, cette remarque assure l'uniforme continuité de l'application d'Itô par rapport à la condition initiale et au signal, sur les parties bornées de  $\mathbb{R}^e \times C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ .

Afin d'étudier la différentiabilité de l'application d'Itô, nous avons besoin des lemmes *techniques* suivants :

LEMME 1.18. *Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $E$  et,  $\varphi : E \rightarrow F$  une application continue et dérivable en tout point de  $U$ , dans toutes les directions de  $E$ . Si*

$$(a, h) \in U \times E \mapsto D_h\varphi(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(a + \varepsilon h) - \varphi(a)}{\varepsilon}$$

*est uniformément continue sur toutes les parties bornées de  $U \times E$ , alors  $\varphi$  est continûment différentiable de  $U$  dans  $F$ .*

Pour une preuve, se référer à [38], Proposition B.5.

LEMME 1.19. *Soit  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^e$ . Pour tout  $\eta > 0$  et toute partie bornée  $B$  de  $\mathbb{R}^e$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :*

$$\forall a, b \in B, \|b - a\| < \delta \implies \|V(b) - V(a) - DV(a).(b - a)\| \leq \eta \|b - a\|.$$

Pour une preuve, se référer à [38], Lemma 4.2.

THÉORÈME 1.20. *Soit  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs différentiable sur  $\mathbb{R}^e$  tel que, pour tout  $R > 0$ , il existe un réel  $M > 0$  satisfaisant :*

$$\forall (x_0, w) \in \mathbb{R}^e \times C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d), \|x_0\| + \|w\|_{1\text{-var};T} \leq R \implies \|\pi_V(0, x_0; w)\|_{\infty;T} < M.$$

*Alors, l'application  $(x_0, w) \mapsto \pi_V(0, x_0; w)$  est continûment différentiable de*

$$\mathbb{R}^e \times C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

Pour une preuve, se référer à [38], théorèmes 4.4 et 4.7.

Au Chapitre 4 de [38], P. Friz et N. Victoir ont laissé de côté la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport au champ de vecteurs, car les arguments de la preuve sont similaires à ceux employés pour établir le Théorème 1.20. Dans un souci de complétude et parce que nous en faisons usage au Chapitre 2 de l'exposé, la question est traitée en détails :

PROPOSITION 1.21. Soient  $\gamma \geq 1$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^e$  et  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue de 1-variation finie. Alors, l'application  $V \mapsto \pi_V(0, x_0; w)$  est continûment différentiable de

$$\text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

DÉMONSTRATION. Dans une première étape, nous montrons que l'application d'Itô est dérivable, par rapport au champ de vecteurs, dans toutes les directions. Dans une seconde étape, via le Lemme 1.18, on établit que l'application partielle en question est continûment différentiable.

**Étape 1.** Soient  $V, \tilde{V} \in \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^e)$ ,  $\varepsilon \in ]0, 1]$ ,  $x^V = \pi_V(0, x_0; w)$  et  $y^{V, \tilde{V}}$  la solution de l'EDO suivante :

$$(7) \quad y_t^{V, \tilde{V}} = \int_0^t \langle DV(x_s^V), y_s^{V, \tilde{V}} \rangle dw_s + \int_0^t \tilde{V}(x_s^V) dw_s.$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \frac{x_t^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x_t^V}{\varepsilon} - y_t^{V, \tilde{V}} &= \int_0^t \left[ \frac{V(x_s^{V+\varepsilon\tilde{V}}) - V(x_s^V)}{\varepsilon} - \langle DV(x_s^V), y_s^{V, \tilde{V}} \rangle \right] dw_s + \\ &\quad \int_0^t [\tilde{V}(x_s^{V+\varepsilon\tilde{V}}) - \tilde{V}(x_s^V)] dw_s \\ &= P_t(\varepsilon) + Q_t(\varepsilon) + R_t(\varepsilon) \end{aligned}$$

où,

$$\begin{aligned} P_t(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} \int_0^t [V(x_s^{V+\varepsilon\tilde{V}}) - V(x_s^V) - \langle DV(x_s^V), x_s^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x_s^V \rangle] dw_s, \\ Q_t(\varepsilon) &= \int_0^t [\tilde{V}(x_s^{V+\varepsilon\tilde{V}}) - \tilde{V}(x_s^V)] dw_s \text{ et} \\ R_t(\varepsilon) &= \int_0^t \langle DV(x_s^V), \varepsilon^{-1}(x_s^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x_s^V) - y_s^{V, \tilde{V}} \rangle dw_s. \end{aligned}$$

En premier lieu, puisque  $V$  est une fois continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^e$ , par le Lemme 1.19 :

$$\begin{aligned} \|P_t(\varepsilon)\| &\leq \varepsilon^{-1} \|w\|_{1\text{-var}; T} \sup_{t \in [0, T]} \|V(x_t^{V+\varepsilon\tilde{V}}) - V(x_t^V) - \langle DV(x_t^V), x_t^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x_t^V \rangle\| \\ &\leq \eta(\varepsilon) \varepsilon^{-1} \|w\|_{1\text{-var}; T} \|x^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x^V\|_{\infty; T} \end{aligned}$$

où,  $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Par le Théorème 1.17 :

$$(8) \quad \|P(\varepsilon)\|_{\infty; T} \leq M_3(\varepsilon) = 2\eta(\varepsilon) e^{3M_1 M_2} M_2 \|\tilde{V}\|_{\infty} \|w\|_{1\text{-var}; T}$$

avec,

$$M_1 = \|V\|_{\text{lip}^\gamma} + \|\tilde{V}\|_{\text{lip}^\gamma} \geq \|V + \varepsilon\tilde{V}\|_{\text{lip}^1} \vee \|V\|_{\text{lip}^1}$$

et  $M_2 = \|w\|_{1\text{-var}; T}$ .

En second lieu, puisque  $\tilde{V}$  est continûment différentiable et de différentielle bornée sur  $\mathbb{R}^e$ , c'est un champ de vecteurs lipschitzien. D'où, par le Théorème 1.17 :

$$(9) \quad \|Q(\varepsilon)\|_{\infty; T} \leq M_4(\varepsilon) = 2\varepsilon e^{3M_1 M_2} M_2 \|\tilde{V}\|_{\text{lip}^\gamma}^2 \|w\|_{1\text{-var}; T}.$$

En troisième lieu,

$$(10) \quad \|R_t(\varepsilon)\| \leq \|V\|_{\text{lip}^\gamma} \int_0^t \left\| \frac{x_s^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x_s^V}{\varepsilon} - y_s^{V,\tilde{V}} \right\| \|dw_s\|.$$

Les inégalités (8), (9) et (10) entraînent donc :

$$\left\| \frac{x_t^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x_t^V}{\varepsilon} - y_t^{V,\tilde{V}} \right\| \leq M_3(\varepsilon) + M_4(\varepsilon) + \|V\|_{\text{lip}^\gamma} \int_0^t \left\| \frac{x_s^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x_s^V}{\varepsilon} - y_s^{V,\tilde{V}} \right\| \|dw_s\|.$$

En conclusion, par le lemme de Gronwall (Lemme 1.13) :

$$\left\| \frac{x^{V+\varepsilon\tilde{V}} - x^V}{\varepsilon} - y^{V,\tilde{V}} \right\|_{\infty;T} \leq [M_3(\varepsilon) + M_4(\varepsilon)] e^{\|V\|_{\text{lip}^\gamma} \|w\|_{1\text{-var};T}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

**Étape 2.** Avec la notation  $J$  de l'intégrale de Young introduite au Théorème 1.12, la solution de l'équation (7) peut s'écrire :

$$D_{\tilde{V}}x^V = \pi_A(0, 0; \cdot) \circ J[F_{V,\tilde{V}}(\cdot), \cdot] \circ (\pi_V(0, x_0; \cdot), \cdot)(w)$$

où,  $A : \mathbb{R}^e \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e; \mathbb{R}^e)$  et  $F_{V,\tilde{V}} : \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e)$  sont deux champs de vecteurs, respectivement définis par :

$$\begin{aligned} A(a).(L, b) &= L.a + b \text{ et} \\ F_{V,\tilde{V}}(a, a').(b, b') &= (\langle DV(a), \cdot \rangle b'; \tilde{V}(a)b') \end{aligned}$$

pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^e$ ,  $a', b' \in \mathbb{R}^d$  et  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^e)$ .

En premier lieu, par le point 3 du Théorème 1.12, l'application  $J$  est uniformément continue sur toutes les parties bornées de

$$C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d) \times C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d).$$

En second lieu, l'application  $(V, \tilde{V}, a) \mapsto F_{V,\tilde{V}}(a)$  est uniformément continue sur toutes les parties bornées de

$$\text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \times \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d$$

par construction.

En troisième lieu, les applications  $\pi_A(0, 0; \cdot)$  et  $V \mapsto \pi_V(0, x_0; w)$  sont respectivement uniformément continues sur toutes les parties bornées de

$$C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e) \text{ et } \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$$

d'après le Théorème 1.17 et la remarque qui s'ensuit.

Ainsi, par composition, l'application  $(V, \tilde{V}) \mapsto D_{\tilde{V}}x^V$  est uniformément continue sur toutes les parties bornées de

$$\text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \times \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d).$$

En conclusion, par le Lemme 1.18, l'application  $V \mapsto \pi_V(0, x_0; w)$  est continûment différentiable de

$$\text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

□

### 3. Trajectoires géométriques

Nous présentons les résultats qui nous sont utiles sur les trajectoires rugueuses, en développant essentiellement le cas des trajectoires géométriques. Nous nous conformons à l'approche de P. Friz et N. Victoir, développée dans [38] aux chapitres 7, 8 et 9. En d'autres termes, nous travaillons avec *l'extension homogène* de la norme en  $p$ -variation des fonctions continues de  $[0, T]$  dans le groupe libre d'ordre  $[p]$  sur  $\mathbb{R}^d$  ( $p \geq 1$ ).

A la première sous-section, nous présentons l'algèbre tensorielle  $(T^N(\mathbb{R}^d), +, \cdot, \otimes)$  d'ordre  $N \in \mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{R}^d$ , ainsi que la notion fondamentale de signature des fonctions continues et de 1-variation finie. Nous concluons avec la définition et les principaux résultats concernant le groupe libre d'ordre  $N$  sur  $\mathbb{R}^d$ , équipé de la norme de Carnot-Carathéodory. La seconde sous-section est consacrée aux trajectoires géométriques et à deux opérations jouant un rôle essentiel dans les applications : le *couplage* et la *translation* des trajectoires géométriques.

Notez qu'à la première sous-section, nous abordons brièvement les notions de fonctionnelles multiplicatives et de trajectoires rugueuses, telles qu'elles sont développées dans T. Lyons [60]. Ces définitions n'auront guère d'utilité dans la suite de l'exposé.

Certaines démonstrations sont traitées par soucis de complétude ou parce qu'elles aident à la compréhension. Pour les autres, nous renvoyons aux deux sources ayant inspiré cette partie de l'exposé : P. Friz et N. Victoir [38], ainsi que T. Lyons et Z. Qian [62].

**3.1. Signature, groupe libre et norme de Carnot-Carathéodory.** Commençons par introduire la notion d'algèbre tensorielle d'ordre  $N$  sur  $\mathbb{R}^d$  :

DÉFINITION 1.22. *Le produit tensoriel d'ordre  $k \in \mathbb{N}^*$  sur  $\mathbb{R}^d$  est l'application qui à tous  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$  associe*

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_k = (a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k}; i_1, \dots, i_k = 1, \dots, d).$$

*L'image de  $\mathbb{R}^d$  par le produit tensoriel d'ordre  $k$  est notée :*

$$(\mathbb{R}^d)^{\otimes k} = \{a_1 \otimes \cdots \otimes a_k; a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d\}.$$

**Remarques et propriétés élémentaires :**

- (1) Par convention,  $(\mathbb{R}^d)^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ . Le produit tensoriel sur  $\mathbb{R}^d$  n'est pas commutatif, sauf lorsque  $d = 1$ . Dans ce cas, il coïncide avec le produit usuel des réels.
- (2) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $+$  (resp.  $\cdot$ ) l'addition (resp. le produit externe par un réel) *naturel(le)* sur  $(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ . Ces opérations confèrent à  $(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$  une structure d'espace vectoriel isomorphe à  $\mathbb{R}^{d^k}$ .

Sur le plan topologique,  $(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$  est muni de la norme euclidienne  $\|\cdot\|_k$  :

$$\forall a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d, \|a_1 \otimes \cdots \otimes a_k\|_k^2 = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^d (a_1^{i_1} \cdots a_k^{i_k})^2.$$

On construit de façon analogue une structure d'espace vectoriel normé sur

$$\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^e = \{a \otimes b; a \in \mathbb{R}^d \text{ et } b \in \mathbb{R}^e\}$$

où,

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall b \in \mathbb{R}^e, a \otimes b = (a^{i_1} b^{i_2}; i_1 = 1, \dots, d \text{ et } i_2 = 1, \dots, e).$$

Cet espace est isomorphe à  $\mathbb{R}^{d \times e}$ .

- (3) Il est connu que l'espace vectoriel des applications bilinéaires de  $\mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^e$  est isomorphe à  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^e; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^e))$  (cf. H. Cartan [6], Section 1.I.1.9). Or,

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^e) \cong \mathbb{R}^{d \times e} \cong \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^e.$$

L'espace vectoriel des applications bilinéaires de  $\mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^e$  est donc isomorphe à  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^e)$ .

Par conséquent, pour tous  $a \in \mathbb{R}^e$  et  $b \in \mathbb{R}^d$ , l'image de  $(a, b)$  par une application bilinéaire  $\varphi : \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$  est indifféremment notée :

$$\varphi(a, b), \langle \varphi.a, b \rangle \text{ ou } \varphi.(a \otimes b).$$

Typiquement, soit  $V : \mathbb{R}^e \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^e) \cong \mathbb{R}^{d \times e}$  une 1-forme différentiable. Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^e$  et  $c \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\langle DV(a).b, c \rangle = DV(a).(b \otimes c).$$

Nous faisons usage de cette notation au Chapitre 2.

- (4) Soient  $N + 1$  sous-espaces vectoriels  $E_0, \dots, E_N$  d'un e.v.  $E$ , d'élément neutre 0 pour la loi de composition interne  $+$ , et  $S = E_0 \oplus \dots \oplus E_N$ . Pour  $k = 0, \dots, N$ , l'espace  $\tilde{E}_k$  est isomorphe à

$$\tilde{E}_k = \begin{cases} E_0 \times \{0\}^N & \text{si } k = 0 \\ \{0\}^k \times E_k \times \{0\}^{N-k} & \text{si } 1 \leq k \leq N - 1 \\ \{0\}^N \times E_N & \text{si } k = N \end{cases}.$$

Donc,

$$S \cong \bigoplus_{k=0}^N \tilde{E}_k = \prod_{k=0}^N E_k.$$

Par conséquent, les éléments de  $S$  sont notés  $(a^0, \dots, a^N)$ ;  $a^k \in E_k$  pour  $k = 0, \dots, N$ .

**DÉFINITION 1.23.** *L'algèbre tensorielle (tronquée) d'ordre  $N$  sur  $\mathbb{R}^d$  désigne l'ensemble*

$$T^N(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{k=0}^N (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$$

*muni des lois de composition  $+$ ,  $.$  et  $\otimes$  telles que, pour tous  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $a, b \in T^N(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$(a + \lambda b)^k = a^k + \lambda b^k \text{ et } (a \otimes b)^k = \sum_{i=0}^k a^i \otimes b^{k-i}; k = 0, \dots, N.$$

*L'élément neutre de  $T^N(\mathbb{R}^d)$  pour le produit tensoriel  $\otimes$  est noté  $\mathbf{1}$  :*

$$\forall k = 1, \dots, N, \mathbf{1}^k = 0 \text{ et } \mathbf{1}^0 = \mathbf{1}.$$

*La norme (produit) naturelle sur  $T^N(\mathbb{R}^d)$  est notée  $\|\cdot\|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$ .*

DÉFINITION 1.24. Une fonctionnelle  $Y : \bar{\Delta}_T \rightarrow T^N(\mathbb{R}^d)$  est multiplicative si et seulement si, elle satisfait l'identité de Chen :

$$\forall k = 0, \dots, N, \forall 0 \leq s \leq u \leq t \leq T, Y_{s,t}^k = (Y_{s,u} \otimes Y_{u,t})^k.$$

Si de plus  $N = [p]$  et

$$\sup_{D=\{r_k\} \in D_T} \sum_{k=1}^{|D|-1} \|Y_{r_k, r_{k+1}}\|_{T^{[p]}(\mathbb{R}^d)}^p < \infty,$$

alors  $Y$  est une  $p$ -trajectoire rugueuse.

DÉFINITION 1.25. Soit  $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de 1-variation finie. La signature d'ordre  $N$  de  $y$  est l'application  $S_N(y) : \bar{\Delta}_T \rightarrow T^N(\mathbb{R}^d)$  définie par  $S_N^0(y) = 1$  et,

$$\forall k = 1, \dots, N, \forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, S_N^k(y)_{s,t} = \int_{s < r_1 < \dots < r_k < t} dy_{r_1} \otimes \dots \otimes dy_{r_k}.$$

PROPOSITION 1.26. Soit  $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de 1-variation finie :

- (1) L'application  $S_N(y)$  est une fonctionnelle multiplicative d'ordre  $N$ .
- (2) En dimension  $d = 1$ ,

$$\forall k = 0, \dots, N, \forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, S_N^k(y)_{s,t} = \frac{(y_t - y_s)^k}{k!}.$$

- (3) Par rapport à  $\mathbf{1}$ ,  $S_N(y)_{0,T}$  admet un symétrique dans  $T^N(\mathbb{R}^d)$  pour le produit tensoriel  $\otimes$  :

$$S_N(y)_{0,T} \otimes S_N(y_{T-})_{0,T} = S_N(y_{T-})_{0,T} \otimes S_N(y)_{0,T} = \mathbf{1}$$

où,  $y_{T-}$  désigne la fonction de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$  qui à tout  $t \in [0, T]$  associe  $y_{T-t}$ .

- (4) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $\delta_\lambda : T^N(\mathbb{R}^d) \rightarrow T^N(\mathbb{R}^d)$ , l'opérateur de dilatation défini par :

$$\forall a \in T^N(\mathbb{R}^d), \forall k = 0, \dots, N, \delta_\lambda^k(a) = \lambda^k a^k.$$

La signature d'ordre  $N$  de  $y$  satisfait :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, S_N(\lambda y)_{s,t} = \delta_\lambda S_N(y)_{s,t}.$$

DÉMONSTRATION. Les deux premiers points se démontrent par récurrence sur l'entier  $k = 0, \dots, N$  :

- (1) Soient  $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$ .

Il est immédiat que la première assertion est vraie au rang initial  $k = 0$ .

Supposons qu'elle est vraie au rang  $k$ , entier compris entre 1 et  $N - 1$  :

$$\begin{aligned} S_N^{k+1}(y)_{s,t} &= \int_{s < r_1 < \dots < r_k < r_{k+1} < t} dy_{r_1} \otimes \dots \otimes dy_{r_k} \otimes dy_{r_{k+1}} \\ &= \int_s^t S_N^k(y)_{s, r_{k+1}} \otimes dy_{r_{k+1}} \\ (11) \quad &= S_N^{k+1}(y)_{s,u} + \int_u^t S_N^k(y)_{s, r_{k+1}} \otimes dy_{r_{k+1}}. \end{aligned}$$

Par hypothèse (de récurrence) :

$$\begin{aligned} \int_u^t S_N^k(y)_{s,r_{k+1}} \otimes dy_{r_{k+1}} &= \int_u^t [S_N(y)_{s,u} \otimes S_N(y)_{u,r_{k+1}}]^k \otimes dy_{r_{k+1}} \\ &= \sum_{i=0}^k S_N^i(y)_{s,u} \otimes \int_u^t S_N^{k-i}(y)_{u,r_{k+1}} \otimes dy_{r_{k+1}} \\ &= \sum_{i=0}^k S_N^i(y)_{s,u} \otimes S_N^{k+1-i}(y)_{u,t}. \end{aligned}$$

Par report dans l'égalité (11) :

$$\begin{aligned} S_N^{k+1}(y)_{s,t} &= S_N^{k+1}(y)_{s,u} \otimes S_N^0(y)_{u,t} + \sum_{i=0}^k S_N^i(y)_{s,u} \otimes S_N^{k+1-i}(y)_{u,t} \\ &= [S_N(y)_{s,u} \otimes S_N(y)_{u,t}]^{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, le point 1 est vrai pour  $k = 0, \dots, N$ .

(2) Il est immédiat que la seconde assertion est vraie au rang initial  $k = 0$ .

Supposons qu'elle est vraie au rang  $k$ , entier compris entre 1 et  $N - 1$  :

$$\begin{aligned} S_N^{k+1}(y)_{s,t} &= \int_{s < r_1 < \dots < r_k < r_{k+1} < t} dy_{r_1} \dots dy_{r_k} dy_{r_{k+1}} \\ &= \int_s^t S_N^k(y)_{s,r_{k+1}} dy_{r_{k+1}} \\ &= \frac{1}{k!} \int_s^t (y_{r_{k+1}} - y_s)^k dy_{r_{k+1}} \end{aligned}$$

par hypothèse (de récurrence), pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ .

La fonction  $y$  pouvant être approchée, pour la norme en 1-variation sur  $[0, T]$ , par une suite de fonctions de classe  $C^1$  sur  $[0, T]$  (par exemple la suite des régularisées par convolution de  $y$  via un noyau donné) :

$$S_N^{k+1}(y)_{s,t} = \frac{1}{k!} \left[ \frac{(y_{r_{k+1}} - y_s)^{k+1}}{k+1} \right]_s^t = \frac{(y_t - y_s)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Ainsi, le point 2 est vrai pour  $k = 0, \dots, N$ .

(3) Se référer à [38], Proposition 7.12.

(4) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$  et  $k$ , un entier compris entre 1 et  $N$  :

$$\begin{aligned} S_N^k(\lambda y)_{s,t} &= \int_{s < r_1 < \dots < r_k < t} d(\lambda y_{r_1}) \otimes \dots \otimes d(\lambda y_{r_k}) \\ &= \lambda^k S_N^k(y)_{s,t} = \delta_\lambda^k S_N(y)_{s,t}, \end{aligned}$$

par définition de l'opérateur de dilatation  $\delta_\lambda$ .

□

La fin de cette sous-section est consacrée au groupe libre d'ordre  $N$  sur  $\mathbb{R}^d$ , et comprend deux théorèmes résumant les résultats de [38], Section 7.5 qui nous sont utiles dans la suite de l'exposé. Le premier théorème présente les résultats algébriques, tandis que le second présente les résultats topologiques :



THÉORÈME 1.27. *L'ensemble*

$$G^N(\mathbb{R}^d) = \{S_N(y)_{0,1}; y \in C^{1-var}([0, 1]; \mathbb{R}^d)\} \subset T^N(\mathbb{R}^d)$$

*muni du produit tensoriel  $\otimes$  est un groupe de Lie appelé groupe libre d'ordre  $N$  sur  $\mathbb{R}^d$ .*

Pour une preuve, se référer à [38], sections 7.3-4 et Theorem 7.30.

**Remarques :**

- (1) Soient  $a, b \in G^N(\mathbb{R}^d)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'élément  $a + \lambda b$  est bien défini et appartient à  $T^N(\mathbb{R}^d)$ . Cependant, en général,  $a + \lambda b \notin G^N(\mathbb{R}^d)$ . En d'autres termes, il est important de noter que  $G^N(\mathbb{R}^d)$  (muni des lois  $+$  et  $\cdot$ ) n'est pas un sous-espace vectoriel de  $(T^N(\mathbb{R}^d), +, \cdot)$ .
- (2) Dans tout l'exposé, sauf mention du contraire, l'ensemble  $G^N(\mathbb{R}^d)$  sera muni de la structure de groupe que lui confère le produit tensoriel  $\otimes$ .

DÉFINITION 1.28. *Dans un espace métrique  $(E, d)$ , une (trajectoire) géodésique joignant  $a, b \in E$ , est une application  $\Gamma_{a,b} : [0, 1] \rightarrow E$  telle que  $\Gamma_{a,b}(0) = a$ ,  $\Gamma_{a,b}(1) = b$  et,*

$$\forall (s, t) \in \Delta_1, d[\Gamma_{a,b}(s), \Gamma_{a,b}(t)] = |t - s|d(a, b).$$

*L'espace  $(E, d)$  est géodésique si et seulement si, pour tous couples de points de  $E$ , il existe au moins une géodésique joignant ces derniers.*

**Remarques et exemples :**

- (1) D'après la Définition 1.28, une géodésique joignant  $a, b \in E$  est le chemin le plus court entre  $a$  et  $b$ .

Typiquement,  $\mathbb{R}^d$  muni de la distance euclidienne est un espace géodésique, dans lequel les géodésiques sont les segments liant chaque couple de points  $(a, b) \in (\mathbb{R}^d)^2$  :

- (2) Un espace complet et connexe n'est pas toujours géodésique.

En revanche, une variété Riemannienne complète et connexe est un espace géodésique par le théorème de Hopf-Rinow.

Sur la géométrie Riemannienne, se référer à [4].

THÉORÈME 1.29. *Soit  $\|\cdot\|_C : G^N(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}_+$  l'application définie par :*

$$\forall a \in G^N(\mathbb{R}^d), \|a\|_C = \inf \left\{ \int_0^1 \|dy_t\|; y \in C^{1-var}([0, 1]; \mathbb{R}^d) \text{ et } S_N(y)_{0,1} = a \right\}.$$

*Il existe une unique fonction  $y^* \in C^{1-var}([0, 1]; \mathbb{R}^d)$  solution de ce problème de minimisation. De plus :*

- (1) *L'application  $\|\cdot\|_C$  est une norme sur le groupe  $G^N(\mathbb{R}^d)$  dans le sens suivant :*
  - (a)  $\|a\|_C = 0$  si et seulement si,  $a = \mathbf{1}$ .
  - (b)  $\|\cdot\|_C$  est homogène par rapport à l'opérateur de dilatation :
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\delta_\lambda a\|_C = |\lambda| \|a\|_C.$$
  - (c) Pour tout  $a \in G^N(\mathbb{R}^d)$ ,  $\|a\|_C = \|a^{-1}\|_C$  (symétrie).
  - (d) Pour tous  $a, b \in G^N(\mathbb{R}^d)$ ,  $\|a \otimes b\|_C \leq \|a\|_C + \|b\|_C$  (sous-additivité).

(e)  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$  est continue sur  $(G^N(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ .

L'application  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$  s'appelle la norme de Carnot-Carathéodory.

- (2) Le groupe  $G^N(\mathbb{R}^d)$  équipé de la distance de Carnot-Carathéodory  $d_{\mathcal{C}}$  est un espace géodésique :

$$\forall a, b \in G^N(\mathbb{R}^d), d_{\mathcal{C}}(a, b) = \|a^{-1} \otimes b\|_{\mathcal{C}}.$$

C'est également un espace polonais (i.e. métrisable, séparable et complet) dont les parties fermées et bornées sont compactes.

Pour une preuve, se référer à [38], sous-sections 7.5.2-5.

### Remarques :

- (1) Le terme de *norme* pour désigner  $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$  est abusif, car  $G^N(\mathbb{R}^d)$  est seulement un groupe non-commutatif.

Cependant, grâce à l'opérateur de dilatation et aux propriétés de la signature, les points (1.a) à (1.e) de la Définition 1.29 justifient l'abus de langage par analogie.

- (2) Notez que la restriction de  $\|\cdot\|_{T^N(\mathbb{R}^d)}$  à  $G^N(\mathbb{R}^d)$  n'est pas homogène par rapport à l'opérateur de dilatation.
- (3) Dans tout l'exposé, sauf mention du contraire, le groupe  $G^N(\mathbb{R}^d)$  est muni de la distance de Carnot-Carathéodory  $d_{\mathcal{C}}$ .

**3.2. Trajectoires géométriques : définition et propriétés.** Commençons par étendre l'écart en  $p$ -variation aux applications continues de  $[0, T]$  dans  $G^N(\mathbb{R}^d)$ .

**Notation.** Soit  $Y : [0, T] \rightarrow G^N(\mathbb{R}^d)$ . Pour tous  $s, t \in [0, T]$ , l'élément  $Y_s^{-1} \otimes Y_t$  de  $G^N(\mathbb{R}^d)$  est noté  $Y_{s,t}$ .

**DÉFINITION 1.30.** Soit  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ . Une application continue  $Y : [s, t] \rightarrow G^N(\mathbb{R}^d)$  est de  $p$ -variation finie si et seulement si,

$$\begin{aligned} \|Y\|_{p\text{-var};s,t} &= \sup_{D=\{r_k\} \in D_{s,t}} \left( \sum_{k=1}^{|D|-1} \|Y_{r_k, r_{k+1}}\|_{\mathcal{C}}^p \right)^{1/p} \\ &= \sup_{D=\{r_k\} \in D_{s,t}} \left[ \sum_{k=1}^{|D|-1} d_{\mathcal{C}}^p(Y_{r_k}, Y_{r_{k+1}}) \right]^{1/p} < \infty. \end{aligned}$$

Ces applications forment un ensemble noté  $C_N^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$ .

Pour tous  $Y, Z \in C_N^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$ , soit

$$d_{p\text{-var};s,t}(Y, Z) = \sup_{D=\{r_k\} \in D_{s,t}} \left[ \sum_{k=1}^{|D|-1} d_{\mathcal{C}}^p(Y_{r_k, r_{k+1}}, Z_{r_k, r_{k+1}}) \right]^{1/p}.$$

L'application  $d_{p\text{-var};s,t}$  ainsi définie est l'écart en  $p$ -variation sur  $C_N^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$ .

**Remarques.** Soit  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$  :

- (1) Lorsque  $N = 1$ ,  $C_1^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$  coïncide avec l'espace  $C^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$  introduit à la Définition 1.4.

- (2) L'application  $\|\cdot\|_{p\text{-var};s,t}$  n'est pas une semi-norme sur  $C_N^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$ , car  $\|\cdot\|_C$  n'est pas une norme sur  $G^N(\mathbb{R}^d)$  comme expliqué à la sous-section 3.1.

Notez que :

$$\forall Y \in C_N^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d), \|Y\|_{p\text{-var};s,t} = d_{p\text{-var};s,t}(\mathbf{1}, Y).$$

- (3) Dans tout l'exposé, sauf mention du contraire,  $C_N^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d)$  est muni de l'écart  $d_{p\text{-var};s,t}$ .

PROPOSITION 1.31. Soit  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$  :

- (1) Pour tous  $q > p \geq 1$ ,

$$C_N^{p\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d) \subset C_N^{q\text{-var}}([s, t]; \mathbb{R}^d).$$

- (2) Soient  $Y, Z \in C_N^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ . Alors,

$$(s, t) \in \bar{\Delta}_T \longmapsto d_{p\text{-var};s,t}^p(Y, Z)$$

définit un contrôle.

En particulier,

$$\omega_{Y,p} : (s, t) \in \bar{\Delta}_T \longmapsto \|Y\|_{p\text{-var};s,t}^p = d_{p\text{-var};s,t}^p(\mathbf{1}, Y)$$

est un contrôle.

- (3) L'ensemble  $C_N^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  muni de la distance

$$(Y, Z) \longmapsto d_C(Y_0, Z_0) + d_{p\text{-var};T}(Y, Z)$$

est un espace métrique complet et non-séparable.

Pour une démonstration, se référer à [38], Theorem 8.13 et Corollary 8.24.

Les éléments de l'espace pseudo-métrique  $C_{[p]}^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  sont les  $p$ -trajectoires géométriques faibles. Nous nous bornerons à travailler sur l'espace (métrique) un peu plus restreint des  $p$ -trajectoires géométriques :

DÉFINITION 1.32. Les applications  $Y : [0, T] \rightarrow G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$  telles qu'il existe une suite  $(y^n, n \in \mathbb{N})$  de fonctions de  $C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{p\text{-var};T} \left[ S_{[p]}(y^n)_{0,\cdot}, Y \right] = 0,$$

forment l'ensemble des  $p$ -trajectoires géométriques  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ .

**Remarques et notations :**

- (1) Par construction :

$$G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d) \subset C_{[p]}^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d).$$

- (2) Dans tout l'exposé, sauf mention du contraire,  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  est muni de l'écart  $d_{p\text{-var};T}$ . Parfois,  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  sera muni de la distance  $d_{\infty;T}$ , qui à tous  $Y, Z \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  associe :

$$d_{\infty;T}(Y, Z) = \sup_{t \in [0, T]} d_C(Y_t, Z_t).$$

Dans ce cas, le changement de topologie sera clairement spécifié.

La boule fermée de  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  pour l'écart  $d_{p\text{-var};T}$ , de centre  $Y \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et de rayon  $r > 0$ , est notée  $B_{p,T}(Y, r)$ .

- (3) Soient  $Y \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et  $y \in C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ . On dit que  $Y$  est une  $p$ -trajectoire géométrique au-dessus de  $y$  si et seulement si,  $Y_t^1 = y_t$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Notez que lorsque  $d = 1$ , d'après la Proposition 1.26, une  $p$ -trajectoire géométrique naturelle au-dessus de  $y$  est donnée par :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, Y_{s,t} = \left( 1, y_t - y_s, \dots, \frac{(y_t - y_s)^{[p]}}{[p]!} \right).$$

La fin de cette sous-section est consacrée aux opérations de *couplage* et de *translation* des trajectoires géométriques :

Soit  $\pi_{G^N(\mathbb{R}^d)} : G^N(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^e) \rightarrow G^N(\mathbb{R}^d)$  (resp.  $\pi_{G^N(\mathbb{R}^e)} : G^N(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^e) \rightarrow G^N(\mathbb{R}^e)$ ) l'*extension naturelle* du projecteur canonique de  $\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^e$  dans  $\mathbb{R}^d$  (resp.  $\mathbb{R}^e$ ).

**THÉORÈME 1.33.** *Soient  $p > q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q > 1$ ,  $Y \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et  $h \in G\Omega_{q,T}(\mathbb{R}^e)$ . Il existe une  $p$ -trajectoire géométrique  $S_{[p]}(Y \oplus h) \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^e)$  telle que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$(12) \quad \pi_{G^{[p]}(\mathbb{R}^d)} S_{[p]}(Y \oplus h)_t = Y_t \text{ et } \pi_{G^{[q]}(\mathbb{R}^e)} S_{[p]}(Y \oplus h)_t = h_t.$$

*De plus, il existe une constante  $C > 0$ , dépendant seulement de  $p$  et  $q$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,*

$$\|Y\|_{p\text{-var};s,t} \leq \|S_{[p]}(Y \oplus h)\|_{p\text{-var};s,t} \leq C (\|Y\|_{p\text{-var};s,t} + \|h\|_{q\text{-var};s,t}).$$

**Remarques :**

- (1) La terme d'*extension naturelle* désigne l'unique homomorphisme de  $G^N(\mathbb{R}^d)$  dans  $G^N(\mathbb{R}^e)$  associé à une application linéaire donnée de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^e$  à la Proposition 7.52 de [38].
- (2) Le Théorème 1.33 est une version simplifiée de [38], Theorem 9.26, adaptée aux besoins de l'exposé. P. Friz et N. Victoir établissent l'existence et l'unicité d'une trajectoire géométrique faible satisfaisant (12), pour la topologie en  $(p, q)$ -variation mixte. Se référer à [38], Section 9.4.
- (3) Notez que la condition  $1/p + 1/q > 1$  sur  $p > q \geq 1$  est cruciale. En effet, en général on ne sait pas construire une trajectoire géométrique satisfaisant (12).

**Notation.** Elle provient de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7] :

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $I$  un segment de  $[0, T]$  et  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  un contrôle. On considère :

$$M_{\varepsilon, I, \omega} = \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega(r_k, r_{k+1}) \leq \varepsilon}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega(r_k, r_{k+1}).$$

En particulier, pour toute  $p$ -trajectoire géométrique  $Y$ ,  $M_{\varepsilon, I, p}(Y) = M_{\varepsilon, I, \omega_{Y,p}}$ .

Dans la suite,  $I = [0, T]$ .

Afin d'appliquer les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7] aux équations différentielles dirigées par une trajectoire géométrique gaussienne centrée ayant un terme de drift, nous proposons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.34. Soient  $p > q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q > 1$ ,  $Y \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ ,  $h \in G\Omega_{q,T}(\mathbb{R}^e)$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant seulement de  $p$  et  $q$ , telle que :

$$M_{\varepsilon,I,p}[S_{[p]}(Y \oplus h)] \leq C[\|h\|_{q\text{-var};T}^p + M_{\varepsilon,I,p}(Y)].$$

DÉMONSTRATION. D'une part, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\omega_{Y,p}(s, t) = \|Y\|_{p\text{-var};s,t} \leq \|S_{[p]}(Y \oplus h)\|_{p\text{-var};s,t}.$$

D'autre part, puisque  $p/q \geq 1$  et,  $\omega_{Y,p}$  et  $\omega_{h,q}$  sont deux contrôles :

$$\omega = \|Y\|_{p\text{-var}}^p + \|h\|_{q\text{-var}}^p = \omega_{Y,p} + \omega_{h,q}^{p/q}$$

est également un contrôle.

Donc, d'après le Théorème 1.33, il existe une constante  $C \geq 1$ , dépendant seulement de  $p$  et  $q$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|S_{[p]}(Y \oplus h)\|_{p\text{-var};s,t}^p \leq C\omega(s, t).$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon,I,p}[S_{[p]}(Y \oplus h)] &\leq C \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega(r_k, r_{k+1}) \leq \varepsilon}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega(r_k, r_{k+1}) \\ &\leq C [\|h\|_{q\text{-var};T}^p + M_{\varepsilon,I,p}(Y)] \end{aligned}$$

par sur-additivité du contrôle  $\omega_{h,q}^{p/q}$ .  $\square$

Soit **plus** :  $G^N(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d) \rightarrow G^N(\mathbb{R}^d)$  l'extension naturelle de l'application linéaire  $\text{plus} : \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^d, \text{plus}(a, b) = a + b.$$

THÉORÈME 1.35. Soient  $p > q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q > 1$ ,  $Y \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et  $h \in G\Omega_{q,T}(\mathbb{R}^d)$ . La translation de  $Y$  par  $h$  est la  $p$ -trajectoire géométrique  $T_h Y \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  telle que :

$$\forall t \in [0, T], (T_h Y)_t = \text{plus}[S_{[p]}(Y \oplus h)_t].$$

De plus, il existe une constante  $C > 0$ , dépendant seulement de  $p$  et  $q$ , telle que :

$$\|T_h Y\|_{p\text{-var};T} \leq C(\|Y\|_{p\text{-var};T} + \|h\|_{q\text{-var};T}).$$

Pour une preuve (sous une forme plus générale), se référer à P. Friz et N. Victoir [38], Theorem 9.34.

**Remarque.** Lorsque  $h, y \in C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ , naturellement  $T_h S_{[p]}(y) = S_{[p]}(y + h)$ .

#### 4. Equations différentielles dirigées par une trajectoire géométrique

Cette section est consacrée aux équations différentielles dirigées par une trajectoire géométrique. Nous nous conformons à l'approche de P. Friz et N. Victoir développée dans [38] aux chapitres 10 et 11, dont la pierre angulaire est le lemme de Davie et ses déclinaisons.

A la première sous-section, nous énonçons le lemme de Davie, le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une RDE (dirigée par une  $p$ -trajectoire géométrique) de

champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz ( $\gamma > p \geq 1$ ), le théorème d'existence et d'unicité de l'intégrale des trajectoires rugueuses, ainsi que le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une RDE de champ de vecteurs affine. Ces résultats proviennent de P. Friz et N. Victoir [38], Chapter 10. Plutôt que de traiter toutes les démonstrations, nous proposons un schéma de preuve du premier résultat d'existence, afin de mettre en évidence le rôle central que joue le lemme de Davie dans cette approche. Tous les résultats énoncés dans cette sous-section se démontrent de façon analogue.

La seconde sous-section est consacrée à l'étude de la régularité de l'application d'Itô associée à une RDE. D'une part, nous rappelons les résultats de continuité et de différentiabilité de l'application d'Itô par rapport à la condition initiale et au signal de P. Friz et N. Victoir [38], Chapter 11. Nous complétons ces derniers par la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport au champ de vecteurs. D'autre part, pour chaque différentielle étudiée, nous construisons une borne *compatible* avec les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7].

Excepté au Chapitre 3, dans tout l'exposé,  $\gamma$  désigne un réel satisfaisant  $\gamma > p$ .

**4.1. Existence et unicité de la solution.** Il existe deux notions de solution d'équation différentielle dirigée par une trajectoire géométrique. Dans le premier cas, la solution est une fonction de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^e$ , continue et de  $p$ -variation finie. Dans le second cas, la solution est elle-même une  $p$ -trajectoire géométrique que nous appelons *solution au sens de Lyons* dans la suite de l'exposé.

Commençons par étudier la première notion de solution :

Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue de  $p$ -variation finie et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^e$ . A l'aide du lemme de Davie énoncé plus loin (Lemme 1.37), P. Friz et N. Victoir étendent les résultats de la sous-section 2.3 à l'équation :

$$(13) \quad x_t = x_0 + \int_0^t V(x_s) dw_s; \quad x_0 \in \mathbb{R}^e.$$

Lorsque  $p \geq 2$ , l'intégrale ne peut être prise au sens de Young. Dans l'approche de P. Friz et N. Victoir, le manque de régularité du signal  $w$  est *compensé* par l'existence d'une  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W}$  au-dessus de  $w$ , ainsi que des hypothèses de régularité plus fortes sur le champ de vecteurs  $V$ .

On introduit la première notion de solution pour (13), rigoureusement notée  $dx = V(x)d\mathbb{W}$  :

**DÉFINITION 1.36.** Soient  $\mathbb{W} : [0, T] \rightarrow G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$  une application telle qu'il existe une suite  $(w^n, n \in \mathbb{N})$  de fonctions de  $C^{1-var}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{p-var; T} [S_{[p]}(w^n)_{0, \cdot}, \mathbb{W}] = 0,$$

et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $(\gamma - 1)$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ .

Pour une condition initiale donnée  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ , la fonction continue  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^e$  est une solution de l'équation  $dx = V(x)d\mathbb{W}$  si et seulement si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\pi_V(0, x_0; w^n) - x\|_{\infty; T} = 0.$$

*S'il y a unicité, cette solution est notée  $\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})$ .*

Le raisonnement suivant mène à l'existence de telles solutions (les numéros des propositions et théorèmes sont ceux de [38]) :

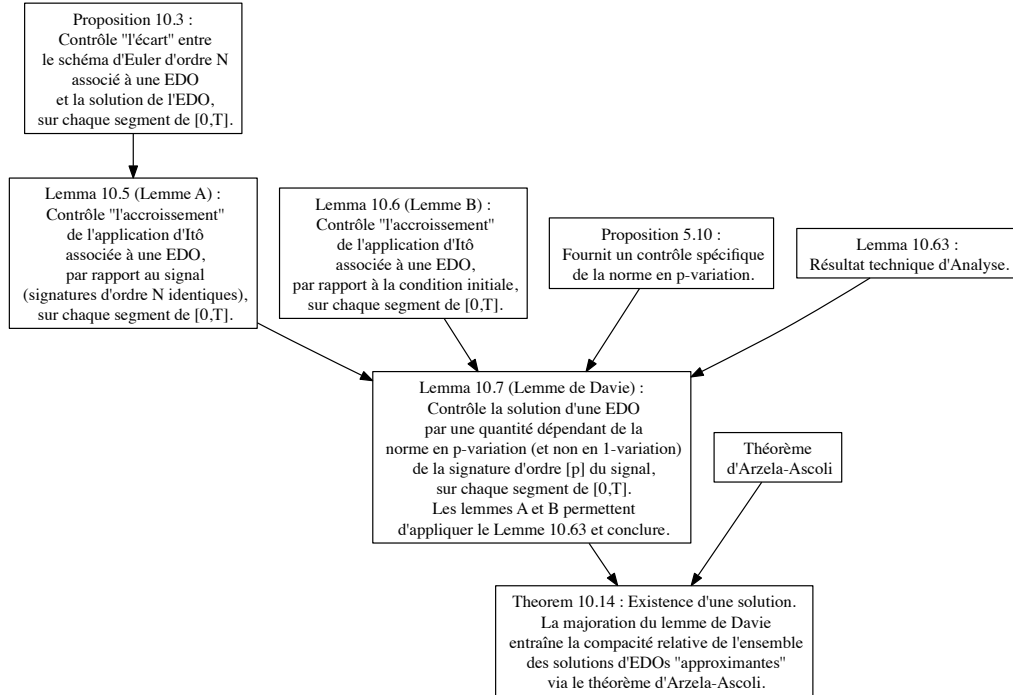


FIGURE 1. Schéma de preuve d'existence d'une solution de RDE,  $N = \lfloor \gamma \rfloor$

LEMME 1.37. *Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de 1-variation finie, et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $(\gamma - 1)$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant pas de  $x_0$ ,  $V$  et  $S_{[p]}(w)$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,*

$$\|\pi_V(0, x_0; w)\|_{p\text{-var}; s, t} \leq C \left[ \|V\|_{lip^{\gamma-1}} \|S_{[p]}(w)_{s, \cdot}\|_{p\text{-var}; s, t} \vee \|V\|_{lip^{\gamma-1}}^p \|S_{[p]}(w)_{s, \cdot}\|_{p\text{-var}; s, t}^p \right].$$

Pour une preuve, se référer à [38], Lemma 10.7.

Nous rappelons un corollaire bien connu du théorème d'Arzela-Ascoli :

LEMME 1.38. *Une partie  $A$  de l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$  est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) si et seulement si,  $A$  est bornée et équicontinue.*

Pour une preuve, se référer à G. Skandalis [81], Corollaire 6.3.2.

Le théorème suivant est démontré dans [38], mais nous en donnons une preuve par soucis de complétude, et parce que le raisonnement employé est caractéristique de l'approche de P. Friz et N. Victoir des RDEs (cf. [38], Theorem 10.14) :

THÉORÈME 1.39. *Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie au-dessus de laquelle il existe une  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p, T}(\mathbb{R}^d)$ , et*

$V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $(\gamma - 1)$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ . Pour une condition initiale donnée  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ , l'équation  $dx = V(x)d\mathbb{W}$  admet une solution  $x$  au sens de la Définition 1.36. De plus, il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant pas de  $x_0$ ,  $V$  et  $\mathbb{W}$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|x\|_{p\text{-var};s,t} \leq C \left( \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}} \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t} \vee \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}}^p \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t}^p \right).$$

Si  $V$  est un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ , il y a alors unicité de la solution au sens de la Définition 1.36.

DÉMONSTRATION. D'une part, puisque  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ , il existe une suite  $(w^n, n \in \mathbb{N})$  de fonctions de  $C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  satisfaisant :

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_{p\text{-var};T} \left[ S_{[p]}(w^n)_{0,\cdot}, \mathbb{W} \right] = 0.$$

Le lemme de Davie (cf. Lemme 1.37) s'applique donc à  $\pi_V(0, x_0; w^n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En particulier, il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant pas de  $n$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$(15) \quad \begin{aligned} \|\pi_V(0, x_0; w^n)_{s,t}\| &\leq C \left[ \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}} \|S_{[p]}(w^n)_{s,\cdot}\|_{p\text{-var};s,t} \vee \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}}^p \|S_{[p]}(w^n)_{s,\cdot}\|_{p\text{-var};s,t}^p \right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} C \left( \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}} \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t} \vee \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}}^p \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t}^p \right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\{\pi_V(0, x_0; w^n); n \in \mathbb{N}\}$  est une partie bornée et équicontinue de l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^e$ . Par le Lemme 1.38 et le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe au moins une extraction  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et une fonction continue  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^e$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x\|_{\infty;T} = 0$$

avec,  $x^n = \pi_V(0, x_0; w^{\varphi(n)})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En d'autres termes, l'équation

$$dx = V(x)d\mathbb{W}$$

admet au moins une solution au sens de la Définition 1.36.

D'autre part, (14) entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{p\text{-var};T} \left[ S_{[p]}(w^{\varphi(n)})_{0,\cdot}, \mathbb{W} \right] = 0.$$

Ainsi, en remplaçant  $n$  par  $\varphi(n)$  dans l'inégalité (15), pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|x_t - x_s\| \leq \omega^{1/p}(s, t) = C \left( \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}} \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t} \vee \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}}^p \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t}^p \right).$$

D'après la seconde remarque de la Proposition 1.2, la fonction  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un contrôle. En particulier,  $\omega$  est sur-additif et, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|x\|_{p\text{-var};s,t} \leq C \left( \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}} \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t} \vee \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}}^p \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t}^p \right).$$

Pour l'unicité, se référer à [38], Theorem 10.26. Le raisonnement est analogue.  $\square$

On introduit maintenant la seconde notion de solution d'équation différentielle dirigée par une trajectoire géométrique :



DÉFINITION 1.40. Soient  $\mathbb{W} : [0, T] \rightarrow G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$  une application telle qu'il existe une suite  $(w^n, n \in \mathbb{N})$  de fonctions de  $C^{1-var}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{p-var; T} \left[ S_{[p]}(w^n)_{0,\cdot}, \mathbb{W} \right] = 0,$$

et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $(\gamma - 1)$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ .

Pour une condition initiale donnée  $X_0 \in G^{[p]}(\mathbb{R}^e)$ , l'application continue  $X : [0, T] \rightarrow G^{[p]}(\mathbb{R}^e)$  est une solution au sens de Lyons de l'équation  $dX = V(X)d\mathbb{W}$  si et seulement si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\infty; T} \left[ X_0 \otimes S_{[p]} \left[ \pi_V(0, X_0^1; w^n) \right]_{0,\cdot}; X \right] = 0.$$

S'il y a unicité, cette solution est notée  $\pi_V(0, X_0; \mathbb{W})$ .

**Remarques :**

- (1) Notez que la solution  $\pi_V(0, X_0; \mathbb{W})$  est une  $p$ -trajectoire géométrique par construction.
- (2) Avec les notations des définitions 1.36 et 1.40, notez le lien entre les deux notions de solution :

$$\pi_V^1(0, X_0; \mathbb{W}) = \pi_V(0, X_0^1; \mathbb{W}).$$

Nous disposons d'un résultat analogue au Théorème 1.39 :

THÉORÈME 1.41. Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie au-dessus de laquelle il existe une  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p, T}(\mathbb{R}^d)$ , et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $(\gamma - 1)$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ . Pour une condition initiale donnée  $X_0 \in G^{[p]}(\mathbb{R}^e)$ , l'équation  $dX = V(X)d\mathbb{W}$  admet une solution  $X$  au sens de Lyons. De plus, il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant pas de  $X_0, V$  et  $\mathbb{W}$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|X\|_{p-var; s, t} \leq C \left( \|V\|_{lip^{\gamma-1}} \|\mathbb{W}\|_{p-var; s, t} \vee \|V\|_{lip^{\gamma-1}}^p \|\mathbb{W}\|_{p-var; s, t}^p \right).$$

Si  $V$  est un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ , il y a alors unicité de la solution au sens de Lyons.

Pour une preuve, se référer à [38], Theorem 10.36. Même raisonnement qu'au Théorème 1.39.

P. Friz et N. Victoir définissent l'intégrale des trajectoires rugueuses comme une projection de la solution au sens de Lyons d'une RDE particulière. Commençons par examiner le cas de l'intégrale de Riemann-Stieljès :

Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de 1-variation finie telle que  $w_0 = 0$  (pour simplifier), et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs lipschitzien sur  $\mathbb{R}^d$ . Pour tout  $t \in [0, T]$ , on désigne par  $x_t$  l'intégrale de Riemann-Stieljès de  $V(w)$  par rapport à  $w$  sur  $[0, t]$ . Ainsi,  $x$  satisfait :

$$\begin{cases} y = w \\ x = \int_0^\cdot V(y_s) dw_s \end{cases},$$

soit encore :

$$(y, x) = \int_0^\cdot \tilde{V}(y_s, x_s) dw_s$$

où,  $\tilde{V}$  désigne le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$  défini par :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^d, \tilde{V}(a, b)c = (c, V(a)c).$$

En d'autres termes,  $x$  correspond aux  $d$  dernières composantes de la solution de l'équation différentielle ordinaire  $dz = \tilde{V}(z)dw$  avec la condition initiale  $z_0 = (0, 0)$ .

Par extension, pour toute  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et tout champ de vecteurs  $V \in \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ ,

$$(16) \quad \int V(\mathbb{W})d\mathbb{W} = \pi_{G^{[p]}(\mathbb{R}^{d_2})}(Z)$$

où,  $Z = \pi_{\tilde{V}}(0, \mathbf{1}; \mathbb{W}) \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{R}^{d_2})$  et  $d_1 = d_2 = d$ .

En particulier, puisque  $\mathbf{1}$  est l'élément neutre de  $G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$  pour le produit tensoriel  $\otimes$ , d'après la Définition 1.40, cette  $p$ -trajectoire géométrique vérifie la définition suivante :

**DÉFINITION 1.42.** Soient  $\mathbb{W} : [0, T] \rightarrow G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$  une application telle qu'il existe une suite  $(w^n, n \in \mathbb{N})$  de fonctions de  $C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{p\text{-var};T} \left[ S_{[p]}(w^n)_{0,\cdot}, \mathbb{W} \right] = 0,$$

et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs continu sur  $\mathbb{R}^d$ .

L'application continue  $X : [0, T] \rightarrow G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$  est une intégrale de  $V(\mathbb{W})$  par rapport à  $\mathbb{W}$  si et seulement si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\infty;T} \left[ S_{[p]} \left[ \int_0^\cdot V(w_s^n) dw_s^n \right]_{0,\cdot}; X \right] = 0.$$

**Remarque.** La construction naturelle (16) de l'intégrale des trajectoires rugueuses nécessite le choix d'un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^d$  (cf. [62], Theorem 5.2.2 sous la Condition 5.2.1). P. Friz et N. Victoir montrent qu'il existe une unique  $p$ -trajectoire géométrique vérifiant la Définition 1.42 lorsque le champ de vecteurs  $V \in \text{Lip}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  :

**THÉORÈME 1.43.** Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie au-dessus de laquelle il existe une  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ , et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $(\gamma - 1)$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^d$ . Il existe un unique élément de  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  satisfaisant la Définition 1.42 et noté :

$$\int V(\mathbb{W})d\mathbb{W}.$$

De plus, il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant pas de  $V$  et  $\mathbb{W}$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\left\| \int V(\mathbb{W})d\mathbb{W} \right\|_{p\text{-var};s,t} \leq C \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}} \left( \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t} \vee \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t}^p \right).$$

Pour une preuve, se référer à [38], Theorem 10.47. Même raisonnement qu'au Théorème 1.39.

THÉORÈME 1.44. Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie au-dessus de laquelle il existe une  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ , et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^d$  :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, V(w_t) - V(w_s) = \left[ \int_{s,t} DV(\mathbb{W}) d\mathbb{W} \right]^1.$$

Pour une preuve, se référer à [62], Theorem 5.4.1.

### Remarques :

- (1) Lorsque  $p \in [1, 2]$ , l'intégrale des trajectoires rugueuses du Théorème 1.43 coïncide avec l'intégrale de Young construite au Théorème 1.12. Ainsi, dans ce cas, la théorie des RDEs présentée dans cette sous-section coïncide avec la théorie de EDOs présent au sens de Young (cf. A. Lejay [57]).

Toutefois, notez qu'aux théorèmes 1.39 et 1.43, les conditions imposées au champ de vecteurs  $V$  sont plus restrictives que dans l'étude directe des EDOs présent au sens de Young.

- (2) L'approche de T. Lyons est différente. Comme pour les EDOs, il construit l'intégrale des trajectoires rugueuses en premier, puis établit l'existence et l'unicité de la solution d'une RDE en montrant que la suite des itérations de Picard associées à l'équation converge pour la distance en  $p$ -variation inhomogène (pour le produit tensoriel  $\otimes$ ). P. Malliavin a appelé ce résultat de T. Lyons : *The universal limit theorem* (cf. [62], Chapter 6 et [61], Theorem 5.3).

T. Lyons utilise la notion de fonctionnelle presque multiplicative, satisfaisant une condition plus *souple* que l'identité de Chen présentée à la Définition 1.24. Que ce soit pour construire l'intégrale des trajectoires rugueuses ou la solution d'une RDE, il travaille successivement sur chaque *niveau* des fonctionnelles considérées. La méthode générale consiste à exhiber une fonctionnelle presque multiplicative simple à manipuler, puis à contrôler l'écart entre cette dernière et la fonctionnelle multiplicative que l'on construit. Par exemple, le lemme de la couturière est un outil fort élégant pour construire la fonctionnelle multiplicative et contrôler l'écart en question (cf. D. Feyel et A. De La Pradelle [31] et L. Coutin [16]).

L'atout majeur de cette approche par rapport aux résultats présentés dans cette sous-section est qu'elle reste valable lorsque  $\mathbb{W}$  est une trajectoire rugueuse non-géométrique. En revanche, le fait de travailler *niveaux par niveaux* avec la distance en  $p$ -variation inhomogène rend l'investigation délicate au-delà de  $p > 4$ . Le lemme de Davie et la distance en  $p$ -variation homogène permettent de considérer les trajectoires géométriques mises en jeu dans leur ensemble, sans restrictions sur  $p$ .

La fin de cette sous-section est consacrée aux RDEs de champ de vecteurs affine :

THÉORÈME 1.45. Soient  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie au-dessus de laquelle il existe une  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ ,  $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{M}_e(\mathbb{R})$ ,  $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^e$ ,  $V = (V_1, \dots, V_d)$  le champ de vecteurs affine sur  $\mathbb{R}^e$  défini par  $V_i(a) = A_i a + b_i$  pour tous  $a \in \mathbb{R}^e$  et  $i = 1, \dots, d$ , et  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$

un contrôle satisfaisant :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, M \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};s,t} \leq \omega^{1/p}(s, t)$$

où,

$$\max_{i=1,\dots,d} \|A_i\|_{\mathcal{M}} + \|b_i\| \leq M.$$

Pour toute condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ , l'équation  $dx = V(x)d\mathbb{W}$  admet une unique solution au sens de la Définition 1.36. De plus :

- (1) Il existe une constante  $C_1 > 0$ , dépendant de  $M$  et non de  $x_0$  et  $\mathbb{W}$ , telle que :

$$\|\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})\|_{\infty;T} \leq C_1(1 + \|x_0\|)e^{C_1 M_{1,I,\omega}}.$$

- (2) Il existe une constante  $C_2 > 0$ , ne dépendant pas de  $\mathbb{W}$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})_{s,t}\| \leq C_2(1 + \|x_0\|)\omega^{1/p}(s, t)e^{C_2\omega(0,T)}.$$

Pour une preuve, se référer à [38], Theorem 10.53 et Exercice 10.55. Même raisonnement qu'au Théorème 1.39.

### Remarques :

- (1) A l'Exercice 10.56 de [38], en suivant la même démarche qu'à la preuve de [38], Theorem 10.53, P. Friz et N. Victoir montrent que si  $V \in \text{Lip}_{loc}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  avec  $\gamma \in ]p, [p] + 1[$ ,  $V$  est globalement lipschitzien sur  $\mathbb{R}^e$  et  $D^{[p]}V$  est  $(\gamma - [p])$ -höldérienne sur  $\mathbb{R}^e$ , alors pour toute condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ , l'équation  $dy = V(y)d\mathbb{W}$  admet une unique solution  $\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})$ .
- (2) L'inégalité énoncée au point 1 du Théorème 1.45 fournit une borne *compatible* avec les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7].

En revanche, notez que par sur-additivité du contrôle  $\omega$  :

$$\|\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})\|_{\infty;T} \leq C_1(1 + \|x_0\|)e^{C_1\omega(0,T)}.$$

Puisque  $\omega(0, T) \geq \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};T}^p$  par définition, lorsque  $p \geq 2$  et  $\mathbb{W}$  est une trajectoire géométrique gaussienne, l'intégrabilité de  $e^{C_1\omega(0,T)}$  n'est en général pas garantie (cf. Section 5).

Cela justifie pleinement la construction de bornes de la forme  $Ce^{CM_{\varepsilon,I,\omega}}$  chaque fois que cela sera possible ( $\varepsilon, C > 0$  ne dépendant pas de  $\mathbb{W}$ ).

Malheureusement, en suivant la démarche de la preuve de [38], Theorem 10.53, il semble délicat d'obtenir une borne de cette forme au point 2 du Théorème 1.45 en raison de l'utilisation du lemme technique d'Analyse [38], Lemma 10.63. C'est pourquoi, nous ne disposons pas en général d'une borne *compatible* avec les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7] pour  $\|\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})\|_{p\text{-var};T}$  lorsque  $V \notin \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$ .

**4.2. Régularité de l'application d'Itô.** La fonction  $(X_0, \mathbb{W}, V) \mapsto \pi_V(0, X_0; \mathbb{W})$  s'appelle l'application d'Itô. Les résultats de cette sous-section étudient sa régularité : continuité et différentiabilité.

THÉORÈME 1.46. *Soit  $R > 0$  :*

(1) *L'application d'Itô*  $(X_0, \mathbb{W}, V) \mapsto \pi_V(0, X_0; \mathbb{W})$  *est uniformément continue de*

$$G^{[p]}(\mathbb{R}^e) \times B_{p,T}(\mathbf{1}, R) \times \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \text{ dans } G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d).$$

(2) *L'application*

$$\mathbb{J} : (\mathbb{W}, V) \mapsto \int V(\mathbb{W}) d\mathbb{W}$$

*est uniformément continue de*

$$B_{p,T}(\mathbf{1}, R) \times \text{Lip}^{\gamma-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \text{ dans } G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d).$$

*Dans les deux cas, l'uniforme continuité est conservée lorsque*  $B_{p,T}(\mathbf{1}, R)$  *et*  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  *sont équipés de la distance*  $d_{\infty;T}$ .

Pour une preuve, se référer à [38], corollaires 10.39-40-48.

**Remarque.** Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs affine sur  $\mathbb{R}^e$ . Nous avons vu au Théorème 1.45 qu'alors,  $\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})$  est une fonction à valeurs dans la boule  $B(0; R(x_0, \mathbb{W}))$  de  $\mathbb{R}^e$  où,

$$R(x_0, \mathbb{W}) = C(1 + \|x_0\|)e^{C\|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};T}^p}$$

et  $C > 0$  désigne une constante ne dépendant pas de  $x_0$  et  $\mathbb{W}$ .

De plus, pour tout  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^e$  et toute  $p$ -trajectoire géométrique  $\widetilde{\mathbb{W}} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|\tilde{x}_0\| \leq \|x_0\| \text{ et } \|\widetilde{\mathbb{W}}\|_{p\text{-var};T} \leq \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};T} \implies R(\tilde{x}_0, \widetilde{\mathbb{W}}) \leq R(x_0, \mathbb{W}).$$

Donc, si l'on considère un champ de vecteurs  $\hat{V} \in \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$  tel que  $\hat{V} \equiv V$  sur la boule  $B(0; R(x_0, \mathbb{W}))$ , alors :

$$\pi_{\hat{V}}(0, \cdot) \equiv \pi_V(0, \cdot) \text{ sur l'ensemble } B(0, \|x_0\|) \times B_{p,T}(\mathbf{1}, \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};T}).$$

En conséquence, par le Théorème 1.46, l'application  $\pi_V(0, \cdot)$  est uniformément continue de

$$B(0, \|x_0\|) \times B_{p,T}(\mathbf{1}, \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};T}) \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

L'uniforme continuité est conservée lorsque  $B_{p,T}(\mathbf{1}, \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};T})$  et  $C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e)$  sont équipés de la distance  $d_{\infty;T}$ .

Afin d'étudier la différentiabilité de l'application d'Itô, en plus des lemmes 1.18 et 1.19, nous avons besoin du lemme *technique* suivant :

LEMME 1.47. *Soient*  $(E, \|\cdot\|_E)$  *et*  $(F, \|\cdot\|_F)$  *deux espaces de Banach tels que*  $E \hookrightarrow F$ ,  $(s, t) \in \Delta_\infty$  *et*  $\varphi : [s, t] \rightarrow F$  *une application continûment dérivable de*  $]s, t[$  *dans*  $(F, \|\cdot\|_F)$ . *Si*  $\dot{\varphi}(]s, t[) \subset E$ ,  $\varphi(s) \in E$  *et qu'il existe un prolongement de*  $\dot{\varphi}$  *continu de*  $]s, t[$  *dans*  $(E, \|\cdot\|_E)$ ; *alors*  $\varphi$  *est continûment dérivable de*  $]s, t[$  *dans*  $(E, \|\cdot\|_E)$ , *de dérivée*  $\dot{\varphi}$ .

Pour une preuve, se référer à [38], Proposition B.1.

Au Chapitre 11 de [38], P. Friz et N. Victoir ont laissé de côté la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport au champ de vecteurs, car les arguments de la preuve sont similaires à ceux employés pour établir la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport à la condition initiale. Dans un souci de complétude et parce que nous en faisons usage au Chapitre 2 de l'exposé, la question est traitée en

détails au théorème suivant. De plus, nous construisons une borne *compatible* avec les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7] :

THÉORÈME 1.48. Soit  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  :

- (1) Soit  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ . L'application  $x_0 \mapsto \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})$  est continûment différentiable de

$$\mathbb{R}^e \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , la matrice jacobienne de  $\pi_V(0, \cdot; \mathbb{W})_t$  au point  $x_0 \in \mathbb{R}^e$  est notée  $J_{t \leftarrow 0}^{x_0, \mathbb{W}}$ .

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_1 > 0$  dépendant seulement de  $p, \gamma, \varepsilon$  et  $\|V\|_{\text{lip}^\gamma}$ , telle que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,

$$\|J_{\cdot \leftarrow 0}^{x_0, \mathbb{W}}\|_{\infty; T} \leq C_1 e^{C_1 M_{\varepsilon, I, p}(\mathbb{W})}.$$

- (2) Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $J_{t \leftarrow 0}^{x_0, \mathbb{W}}$  est une matrice inversible. De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_2 > 0$  dépendant seulement de  $p, \gamma, \varepsilon$  et  $\|V\|_{\text{lip}^\gamma}$ , telle que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,

$$\|(J_{\cdot \leftarrow 0}^{x_0, \mathbb{W}})^{-1}\|_{\infty; T} \leq C_2 e^{C_2 M_{\varepsilon, I, p}(\mathbb{W})}.$$

- (3) Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ . L'application  $V \mapsto \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})$  est continûment différentiable de

$$\text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

De plus, pour tous  $R > 0$  et  $V, \tilde{V} \in B_{\text{Lip}^\gamma}(0, R)$ , il existe deux constantes  $\eta > 0$  et  $C_3 > 0$ , dépendant de  $R$  (continûment) et non de  $\mathbb{W}$ , telles que :

$$\|\partial_V \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}) \cdot \tilde{V}\|_{\infty; T} \leq C_3 e^{C_3 M_{\eta, I, p}(\mathbb{W})}.$$

DÉMONSTRATION. Pour une preuve du point 1, se référer à [38], théorèmes 11.3-6 pour la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport à la condition initiale, puis à [7], Corollary 3.4 pour la majoration de  $\|J_{\cdot \leftarrow 0}^{x_0, \mathbb{W}}\|_{\infty; T}$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ .

La preuve du second point est identique à celle du premier, car si  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  désigne une fonction continue et de 1-variation finie, alors :

$$\begin{aligned} J_{t \leftarrow 0}^{x_0, w} &= I + \int_0^t \langle DV[\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})_s], J_{s \leftarrow 0}^{x_0, w} \rangle dw_s \text{ et} \\ (J_{t \leftarrow 0}^{x_0, w})^{-1} &= I - \int_0^t \langle DV[\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})_s], (J_{s \leftarrow 0}^{x_0, w})^{-1} \rangle dw_s \end{aligned}$$

d'après [38], preuve de la Proposition 4.11 où,  $I$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_e(\mathbb{R})$ .

La preuve du troisième point est traitée en détails. Dans une première étape, nous montrons que l'application d'Itô est continûment différentiable par rapport au champ de vecteurs. Dans une seconde étape, nous construisons une borne *compatible* avec les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7] pour la différentielle de l'application d'Itô par rapport au champ de vecteurs  $V$ .

**Étape 1.** Puisque  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ , il existe une suite  $(w^n, n \in \mathbb{N})$  de fonctions de  $C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  satisfaisant :

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_{p\text{-var}; T} [S_{[p]}(w^n)_{0,\cdot}, \mathbb{W}] = 0.$$

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{W}^n = S_{[p]}(w^n)_{0,\cdot}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,  $a = (x_0, 0)$ ,

$$X_0 = \left( 1, a, \dots, \frac{a^{\otimes [p]}}{[p]!} \right) \in T^{[p]}(\mathbb{R}^{e+1})$$

et enfin  $V, \tilde{V} \in \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$ .

D'après la Proposition 1.21, l'application  $\pi.(0, x_0; w^n)$  est continûment différentiable de

$$\text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

En particulier,  $\partial_V \pi_V(0, x_0; w^n). \tilde{V} = \varphi(\mathbb{W}^n, V, \tilde{V})$  avec,

$$\varphi(\cdot, V, \tilde{V}) = \pi_A(0, 0; \cdot) \circ \mathbb{J}(\cdot; F_{V, \tilde{V}}) \circ \pi_{F_V}(0, X_0; \cdot)$$

où,

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^e &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e; \mathbb{R}^e), \\ F_{V, \tilde{V}} : \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e) \text{ et} \\ F_V : \mathbb{R}^e &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

sont trois champs de vecteurs, respectivement définis par :

$$\begin{aligned} A(a).(L, b) &= L.a + b, \\ F_{V, \tilde{V}}(a, a').(b, b') &= (\langle DV(a), \cdot \rangle b'; \tilde{V}(a)b') \text{ et} \\ F_V(a).b' &= (V(a)b', b') \end{aligned}$$

pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^e$ ,  $a', b' \in \mathbb{R}^d$  et  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^e)$ .

Soit  $\varepsilon \in ]0, 1]$ . Par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à  $\pi.(0, x_0; \mathbb{W}^n)$  entre  $V$  et  $V + \varepsilon \tilde{V}$ , puis la Définition 1.36 nous obtenons :

$$(18) \quad \pi_{V+\varepsilon \tilde{V}}(0, x_0; \mathbb{W}) - \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\varepsilon \varphi(\mathbb{W}^n, V + \theta \tilde{V}, \tilde{V}) d\theta$$

où, la limite du membre de droite est prise en norme  $\|\cdot\|_{\infty; T}$ .

Par un argument de convergence dominée, puis le Lemme 1.47, montrons que la dérivée de  $\pi.(0, x_0; \mathbb{W})$  au point  $V$ , dans la direction  $\tilde{V}$ , existe dans  $C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{p\text{-var}; T}$  et coïncide avec  $\varphi(\mathbb{W}, V, \tilde{V})$ .

D'une part, les résultats de continuité du Théorème 1.46 entraînent que :

$$\forall \theta \in ]0, 1], \varphi(\mathbb{W}^n, V + \theta \tilde{V}, \tilde{V}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(\mathbb{W}, V + \theta \tilde{V}, \tilde{V})$$

dans  $C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e)$  muni de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_{\infty; T}$ .

D'autre part, en appliquant successivement les théorèmes 1.43 et 1.41, pour tout  $\theta \in ]0, 1]$  et tout  $(s, t) \in \tilde{\Delta}_T$ ,

$$\begin{aligned} \omega_1^{1/p}(s, t; n; \theta) &= \left\| \int F_{V+\theta\tilde{V}, \tilde{V}} \left[ \pi_{F_{V+\theta\tilde{V}}} (0, X_0; \mathbb{W}^n) \right] d\pi_{F_{V+\theta\tilde{V}}} (0, X_0; \mathbb{W}^n) \right\|_{p\text{-var}; s, t} \\ &\leq \omega_2^{1/p}(s, t; n) \end{aligned}$$

avec,

$$\omega_2^{1/p}(s, t; n) = \omega_3^{1/p}(s, t; n) \vee \omega_3(s, t; n) \vee \omega_3^p(s, t; n)$$

et

$$\omega_3(s, t; n) = \eta_1 \|\mathbb{W}^n\|_{p\text{-var}; s, t}^p$$

où,  $\eta_1 > 0$  dépend de  $V$  et  $\tilde{V}$ , et non de  $\mathbb{W}^n$  et  $\theta$ .

D'après le premier point du Théorème 1.45, il existe une constante  $C_4 > 0$ , ne dépendant pas de  $\mathbb{W}^n$  et  $\theta$ , telle que :

$$\begin{aligned} \left\| \varphi(\mathbb{W}^n, V + \theta\tilde{V}, \tilde{V}) \right\|_{\infty; T} &\leq C_4 \exp \left[ C_4 \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega_2(r_k, r_{k+1}; n) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega_2(r_k, r_{k+1}; n) \right] \\ &= C_4 \exp \left[ C_4 \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega_3(r_k, r_{k+1}; n) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega_3(r_k, r_{k+1}; n) \right], \end{aligned}$$

car :

$$\omega_2(\cdot; n) \equiv \omega_3(\cdot; n) \text{ lorsque } \omega_2(\cdot; n) \leq 1.$$

Par sur-additivité du contrôle  $\omega_3(\cdot; n)$  :

$$\left\| \varphi(\mathbb{W}^n, V + \theta\tilde{V}, \tilde{V}) \right\|_{\infty; T} \leq C_4 e^{\eta_1 C_4 \|\mathbb{W}^n\|_{p\text{-var}; T}^p}.$$

Dans le membre de droite de cette inégalité, puisque  $\eta_1$  et  $C_4$  ne dépendent pas de  $\mathbb{W}^n$  et  $\theta$ , et que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|\mathbb{W}^n\|_{p\text{-var}; T}^p < \infty$$

d'après (17) ;

$$\sup_{\theta \in [0, 1]} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \varphi(\mathbb{W}^n, V + \theta\tilde{V}, \tilde{V}) \right\|_{\infty; T} < \infty$$

dans  $C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e)$  muni de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_{\infty; T}$ .

Donc, par le théorème de convergence dominée et l'égalité (18) :

$$\pi_{V+\varepsilon\tilde{V}}(0, x_0; \mathbb{W}) - \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}) = \int_0^\varepsilon \varphi(\mathbb{W}, V + \theta\tilde{V}, \tilde{V}) d\theta.$$

Puisque  $\theta \mapsto \varphi(\mathbb{W}, V + \theta\tilde{V}, \tilde{V})$  est continue de

$$[0, 1] \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e) \text{ (muni de } \|\cdot\|_{p\text{-var}; T})$$

d'après le Théorème 1.46 ; par le Lemme 1.47, la dérivée de  $\pi(\cdot, x_0; \mathbb{W})$  au point  $V$ , dans la direction  $\tilde{V}$ , existe dans  $C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{p\text{-var}; T}$  et coïncide avec  $\varphi(\mathbb{W}, V, \tilde{V})$ .



Enfin, par un raisonnement analogue à celui de l'étape 2 de la preuve de la Proposition 1.21, via les lemmes 1.18 et 1.19 ; l'application  $\pi.(0, x_0; \mathbb{W})$  est continûment différentiable de

$$\text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

**Étape 2.** Soient  $R > 0$  et  $V, \tilde{V} \in B_{\text{Lip}^\gamma}(0, R)$ .

En appliquant successivement les théorèmes 1.43 et 1.41, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\begin{aligned} \omega_4^{1/p}(s, t) &= \left\| \int F_{V, \tilde{V}} [\pi_{F_V}(0, X_0; \mathbb{W})] d\pi_{F_V}(0, X_0; \mathbb{W}) \right\|_{p\text{-var}; s, t} \\ &\leq \omega_5^{1/p}(s, t) \end{aligned}$$

avec,

$$\omega_5^{1/p}(s, t) = \omega_6^{1/p}(s, t) \vee \omega_6(s, t) \vee \omega_6^p(s, t)$$

et

$$\omega_6(s, t) = \eta_2 \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var}; s, t}^p$$

où,  $\eta_2 > 0$  dépend de  $R$  (continûment) et non de  $\mathbb{W}$ .

D'après le premier point du Théorème 1.45, il existe une constante  $C_5 > 0$ , ne dépendant pas de  $R$  et  $\mathbb{W}$ , telle que :

$$\begin{aligned} \left\| \partial_V \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}).\tilde{V} \right\|_{\infty; T} &\leq C_5 \exp \left[ C_5 \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega_5(r_k, r_{k+1}) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega_5(r_k, r_{k+1}) \right] \\ &= C_5 \exp \left[ C_5 \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega_6(r_k, r_{k+1}) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega_6(r_k, r_{k+1}) \right], \end{aligned}$$

car :

$$\omega_5 \equiv \omega_6 \text{ lorsque } \omega_5 \leq 1.$$

Or,

$$\sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega_6(r_k, r_{k+1}) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega_6(r_k, r_{k+1}) = \eta_2 M_{\eta_2^{-1}, I, p}(\mathbb{W}).$$

Donc,

$$\left\| \partial_V \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}).\tilde{V} \right\|_{\infty; T} \leq C_3 e^{C_3 M_{\eta, I, p}(\mathbb{W})}$$

avec  $C_3 = C_5(1 \vee \eta_2)$  et  $\eta = \eta_2^{-1}$ . □

**Notations.** Dans la suite, les matrices  $J_{t \leftarrow 0}^{x_0, \mathbb{W}}$  et  $(J_{t \leftarrow 0}^{x_0, \mathbb{W}})^{-1}$  seront respectivement notées  $J_{0 \leftarrow t}^{\mathbb{W}}$  et  $J_{t \leftarrow 0}^{\mathbb{W}}$  pour simplifier. De plus, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ , nous posons :

$$J_{s \leftarrow t}^{\mathbb{W}} = J_{s \leftarrow 0}^{\mathbb{W}} J_{0 \leftarrow t}^{\mathbb{W}} \text{ et } J_{t \leftarrow s}^{\mathbb{W}} = J_{t \leftarrow 0}^{\mathbb{W}} J_{0 \leftarrow s}^{\mathbb{W}}.$$

Il en découle :

$$J_{s \leftarrow t}^{\mathbb{W}} J_{t \leftarrow s}^{\mathbb{W}} = J_{t \leftarrow s}^{\mathbb{W}} J_{s \leftarrow t}^{\mathbb{W}} = I.$$

Au corollaire suivant, nous étendons les majorations du théorème précédent aux RDEs ayant un terme de drift :

**COROLLAIRE 1.49.** Soient  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $p > q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q > 1$ ,  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction continue et de  $q$ -variation finie,  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et  $\mathbb{W}^h = S_{[p]}(\mathbb{W} \oplus h)$  :

- (1) Soit  $V = (V_1, \dots, V_{d+m})$  un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_1 > 0$  dépendant seulement de  $p, q, \gamma, \varepsilon$  et  $\|V\|_{\text{lip}^\gamma}$ , telle que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,

$$\|J_{\cdot \leftarrow 0}^{\mathbb{W}^h}\|_{\infty;T} \leq C_1 \exp \left[ C_1 \left[ \|h\|_{q\text{-var};T}^p + M_{\varepsilon,I,p}(\mathbb{W}) \right] \right].$$

- (2) Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ . Pour tous  $R > 0$  et  $V, \tilde{V} \in B_{\text{Lip}^\gamma}(0, R)$ , il existe deux constantes  $\varepsilon > 0$  et  $C_2 > 0$ , dépendant de  $R$  et non de  $h$  et  $\mathbb{W}$ , telles que :

$$\|\partial_V \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^h) \cdot \tilde{V}\|_{\infty;T} \leq C_2 \exp \left[ C_2 \left[ \|h\|_{q\text{-var};T}^p + M_{\varepsilon,I,p}(\mathbb{W}) \right] \right].$$

**DÉMONSTRATION.** D'après le Corollaire 1.34, il existe une constante  $C_3 > 0$ , dépendant seulement de  $p$  et  $q$ , telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$M_{\varepsilon,I,p}(\mathbb{W}^h) \leq C_3 \left[ \|h\|_{q\text{-var};T}^p + M_{\varepsilon,I,p}(\mathbb{W}) \right].$$

Donc, par le Théorème 1.48 :

- (1) Pour un champ de vecteurs  $V \in \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^{d+m})$  donné; pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_4 > 0$  dépendant seulement de  $p, \gamma, \varepsilon$  et  $\|V\|_{\text{lip}^\gamma}$ , telle que pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,

$$\begin{aligned} \|J_{\cdot \leftarrow 0}^{\mathbb{W}^h}\|_{\infty;T} &\leq C_4 e^{C_4 M_{\varepsilon,I,p}(\mathbb{W}^h)} \\ &\leq C_1 \exp \left[ C_1 \left[ \|h\|_{q\text{-var};T}^p + M_{\varepsilon,I,p}(\mathbb{W}) \right] \right] \end{aligned}$$

avec,  $C_1 = C_4(1 \vee C_3)$ .

- (2) Pour une condition initiale donnée  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ; pour tous  $R > 0$  et  $V, \tilde{V} \in B_{\text{Lip}^\gamma}(0, R)$ , il existe deux constantes  $\varepsilon > 0$  et  $C_5 > 0$ , dépendant de  $R$  et non de  $\mathbb{W}^h$ , telles que :

$$\begin{aligned} \|\partial_V \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^h) \cdot \tilde{V}\|_{\infty;T} &\leq C_5 e^{C_5 M_{\varepsilon,I,p}(\mathbb{W}^h)} \\ &\leq C_2 \exp \left[ C_2 \left[ \|h\|_{q\text{-var};T}^p + M_{\varepsilon,I,p}(\mathbb{W}) \right] \right] \end{aligned}$$

avec,  $C_2 = C_5(1 \vee C_3)$ .

□

**Remarque.** En pratique, le Corollaire 1.49 sera particulièrement utile pour étudier une RDE ayant un terme de drift :

$$x_t = x_0 + \int_0^t \mu(x_s) ds + \int_0^t \sigma(x_s) dw_s; x_0 \in \mathbb{R}^e$$

avec,  $\mu \in C^{[p]+1}(\mathbb{R}^e)$  et  $\sigma \in C^{[p]+1}(\mathbb{R}^e; \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R}))$ .

Rigoureusement,

$$x = \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^{\text{Id}})$$

où,  $\mathbb{W}^{\text{Id}} = S_{[p]}(\mathbb{W} \oplus \text{Id}_{[0,T]})$  et  $V$  désigne le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^e$  tel que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^e, \forall b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}^d, V(a)(b, c) = \mu(a)b + \sigma(a)c.$$

La suite de cette sous-section est consacrée à l'étude de la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport au signal :

Lorsque  $p \geq 2$ , puisque  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  muni des opérations  $+$  et  $\cdot$  n'a pas une structure d'espace vectoriel, il n'est pas possible de dériver une application définie sur cet espace aux sens classiques de Gâteaux ou Fréchet (cf. H. Cartan [6], Section 1.I.2.1). P. Friz et N. Victoir ont proposé une notion de différentiabilité des applications définies sur  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ , coïncidant avec la différentiabilité au sens de Fréchet dans le cas  $p \in [1, 2[$ . La *translation* des trajectoires géométriques introduite au Théorème 1.35 en est la clef.

Soient  $F$  un espace de Banach,  $U$  un ouvert de  $E = C^{1\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  tel que  $y_0 = 0$  pour tout  $y \in U$  (pour simplifier), et  $\varphi$  une application de  $E$  dans  $F$ . Pour tous  $y \in U$ ,  $h \in E$  et  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y + \varepsilon h) - \varphi(y)}{\varepsilon} &= \frac{\varphi[S_1^1(y + \varepsilon h)_{0,\cdot}] - \varphi[S_1^1(y)_{0,\cdot}]}{\varepsilon} \\ &= \frac{\varphi[T_{\varepsilon h}^1 S_1(y)_{0,\cdot}] - \varphi[T_0^1 S_1(y)_{0,\cdot}]}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dans ce contexte, on utilise le plus souvent le Lemme 1.18 pour établir que  $\varphi$  est continûment différentiable de  $U$  dans  $F$  :

Si  $\varphi$  est continue et dérivable en tout point de  $U$ , dans toutes les directions de  $E$ , et que l'application

$$(y, h) \in U \times E \longmapsto D_h \varphi(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi[T_{\varepsilon h}^1 S_1(y)_{0,\cdot}] - \varphi[T_0^1 S_1(y)_{0,\cdot}]}{\varepsilon}$$

est uniformément continue sur toutes les parties bornées de  $U \times E$ , alors  $\varphi$  est continûment différentiable de  $U$  dans  $F$ .

Il en découle la notion suivante de différentiabilité :

**DÉFINITION 1.50.** *Soient  $F$  un espace de Banach,  $p > q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q > 1$ , et  $U$  un ouvert de  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$ . L'application  $\varphi : G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d) \rightarrow F$  est continûment différentiable au sens de Friz-Victoir sur  $U$  si et seulement si, pour tout  $Y \in U$ ,*

$$h \in C^{q\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \longmapsto \varphi(T_h Y) \in F$$

*est continûment différentiable.*

Avec les notations de la Définition 1.50, si  $\varphi$  est continûment différentiable de  $U$  dans  $F$  au sens de Friz-Victoir, en particulier :

$$\forall Y \in U, \psi^Y : h \in C^{q\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \longmapsto \psi^Y(h) = \varphi(T_h Y)$$

est continue et dérivable au sens de Gâteaux en tout point de  $C^{q\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ . Les dérivées directionnelles de  $\psi^Y$  au point 0 jouent un rôle particulier dans la suite de l'exposé :

**Notation.** Pour toute fonction  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue et de  $q$ -variation finie,

$$\begin{aligned} D_h^{\text{FV}} \varphi(Y) &= D_h \psi^Y(0) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(T_{\varepsilon h} Y) - \varphi(T_0 Y)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

C'est la dérivée (directionnelle) de Friz-Victoir.

**Remarques :**

- (1) Les dénominations précédentes constituent une initiative propre à cet exposé. Nous apportons trois justifications à cette dernière :

En premier lieu, éviter toute confusion avec les notions classiques de différentiabilité sur les espaces de Banach rappelées ci-avant. En second lieu, rappeler que P. Friz et N. Victoir sont les premiers à avoir proposé cette réponse à la question de la différentiabilité des applications définies sur  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  lorsque  $p \geq 2$ . En troisième lieu, insister sur le fait qu'a priori cette notion n'est pas universelle et qu'il n'est pas exclu de voir émerger d'autres notions de différentiabilité des applications définies sur  $G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  à l'avenir.

- (2) Malheureusement, par construction de la *translation* des trajectoires géométriques (cf. Théorème 1.35) ; la notion de différentiabilité présentée à la Définition 1.50 ne permet pas de considérer  $\mathbb{W}, h \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  lorsque  $p \geq 2$ .

C'est possible lorsque  $p \in [1, 2[$  et nous en ferons usage dans la suite de l'exposé. Dans ce cas, pour tout ouvert  $U$  de  $C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ , l'application  $\varphi$  est continûment différentiable de  $U$  dans  $F$  si et seulement si, elle est continûment différentiable de  $U$  dans  $F$  au sens de Friz-Victoir.

De plus, si  $y \in C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  avec  $y_0 = 0$  et  $h \in C^{q\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  :

$$D_h^{\text{FV}} \varphi(y) = D\varphi(y).h.$$

La première partie du théorème suivant sur la différentiabilité de l'application d'Itô par rapport au signal, est due à P. Friz et N. Victoir (cf. [38], théorèmes 11.3-6 et Exercice 11.9). Dans la seconde partie, nous construisons une borne *compatible* avec les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7] :

**THÉORÈME 1.51.** *Soient  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ . L'application  $\mathbb{W} \mapsto \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})$  est continûment différentiable de*

$$G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e)$$

*au sens de Friz-Victoir.*

*De plus, pour toute  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et toute fonction  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue et de  $q$ -variation finie,*

$$D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}) = \int_0^\cdot J_{\leftarrow s}^{\mathbb{W}} V[\pi_V(0, x_0; \mathbb{W})_s] dh_s.$$

*(Principe de Duhamel).*

*Enfin, soient  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p,T}(\mathbb{R}^d)$  et  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  un contrôle satisfaisant :*

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \|\mathbb{W}\|_{p\text{-var}; s, t} \leq \omega^{1/p}(s, t).$$

*Alors,*

- (1) *Il existe une constante  $C_1 > 0$ , ne dépendant pas de  $\mathbb{W}$  et  $\omega$ , telle que pour toute fonction  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue et de  $q$ -variation finie,*

$$\|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})\|_{\infty; T} \leq C_1 \exp [C_1 (\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + M_{1, I, \omega})]$$

(2) *Il existe une constante  $C_2 > 0$ , ne dépendant pas de  $\mathbb{W}$  et  $\omega$ , telle que pour toute fonction  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue et de  $q$ -variation finie,*

$$\|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})\|_{p\text{-var}; T} \leq C_2 \exp [C_2 [\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + \omega(0, T)]] .$$

DÉMONSTRATION. Pour une preuve de la première partie, se référer à [38], théorèmes 11.3-6 et Exercice 11.9.

Soient  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue de  $q$ -variation finie,  $\mathbb{W}^h = S_{[p]}(\mathbb{W} \oplus h)$ ,  $a = (x_0, 0, 0)$  et

$$X_0 = \left( 1, a, \dots, \frac{a^{\otimes [p]}}{[p]!} \right) \in T^{[p]}(\mathbb{R}^{e+2}) .$$

D'après P. Friz et N. Victoir [38], Theorem 11.3 :

$$D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}) = \pi_A(0, 0; \cdot) \circ \mathbb{J}(\cdot, F) \circ \pi_G(0, X_0; \cdot)(\mathbb{W}^h)$$

où,

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^e &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e; \mathbb{R}^e), \\ F : \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e) \text{ et} \\ G : \mathbb{R}^e &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

sont trois champs de vecteurs, respectivement définis par :

$$\begin{aligned} A(a).(L, b) &= L.a + b, \\ F(a, a', a'').(b, b', b'') &= (\langle DV(a), \cdot \rangle b'; V(a)b'') \text{ et} \\ G(a).(b', b'') &= (V(a)b', b', b'') \end{aligned}$$

pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^e$ ,  $a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}^d$  et  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^e)$ .

En appliquant successivement les théorèmes 1.43 et 1.41, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\begin{aligned} \omega_1^{1/p}(s, t) &= \left\| \int F [\pi_G(0, X_0; \mathbb{W}^h)] d\pi_G(0, X_0; \mathbb{W}^h) \right\|_{p\text{-var}; s, t} \\ &\leq \omega_2^{1/p}(s, t) \end{aligned}$$

avec,

$$\omega_2^{1/p}(s, t) = \omega_3^{1/p}(s, t) \vee \omega_3(s, t) \vee \omega_3^p(s, t)$$

et, d'après le Théorème 1.33 :

$$\omega_3(s, t) = \varepsilon_1 [\|h\|_{q\text{-var}; s, t}^p + \omega(s, t)] \geq \varepsilon_2 \|\mathbb{W}^h\|_{p\text{-var}; s, t}^p$$

où,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 1$  sont deux constantes ne dépendant pas de  $\mathbb{W}$ ,  $\omega$  et  $h$ .

D'une part, d'après le premier point du Théorème 1.45, il existe une constante

$C_3 > 0$ , ne dépendant pas de  $\mathbb{W}$ ,  $\omega$  et  $h$ , telle que :

$$\begin{aligned} \|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})\|_{\infty; T} &\leq C_3 \exp \left[ C_3 \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega_2(r_k, r_{k+1}) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega_2(r_k, r_{k+1}) \right] \\ &= C_3 \exp \left[ C_3 \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega_3(r_k, r_{k+1}) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega_3(r_k, r_{k+1}) \right] \\ &\leq C_1 \exp \left[ C_1 \left[ \|h\|_{q\text{-var}; T}^p + \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega(r_k, r_{k+1}) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega(r_k, r_{k+1}) \right] \right] \end{aligned}$$

avec  $C_1 = C_3 \varepsilon_1$ , car respectivement :

$$(19) \quad \omega_2 \equiv \omega_3 \text{ lorsque } \omega_2 \leq 1$$

et

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \omega(s, t) \leq \omega_3(s, t).$$

D'autre part, en suivant le même raisonnement que P. Friz et N. Victoir à l'Exercice 10.55 de [38]; d'après le second point du Théorème 1.45, il existe une constante  $C_4 > 0$ , ne dépendant pas de  $\mathbb{W}$ ,  $\omega$  et  $h$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$  satisfaisant  $\omega_2(s, t) \leq 1$  :

$$\begin{aligned} \|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})_{s,t}\| &\leq C_4 [1 + \|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})_s\|] \omega_2^{1/p}(s, t) e^{C_4 \omega_2(s, t)} \\ &\leq C_4 [1 + \|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})\|_{\infty; T}] \omega_3^{1/p}(s, t) e^{C_4 \omega_3(0, T)}, \end{aligned}$$

d'après (19).

Ainsi, par sur-additivité du contrôle  $\omega_3$ , il existe une constante  $C_2 > 0$ , ne dépendant pas de  $\mathbb{W}$ ,  $\omega$  et  $h$ , telle que :

$$\|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W})\|_{p\text{-var}; T} \leq C_2 \exp [C_2 [\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + \omega(0, T)]] .$$

□

Au corollaire suivant, nous étendons les majorations du théorème précédent aux RDEs ayant un terme de drift :

**COROLLAIRE 1.52.** *Soient  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $p > q \geq 1$  tels que  $1/p + 1/q > 1$ ,  $r \in [1, p[$  tel que  $1/p + 1/r > 1$ ,  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction continue et de  $r$ -variation finie,  $\mathbb{W} \in G\Omega_{p, T}(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbb{W}^g = S_{[p]}(\mathbb{W} \oplus g)$ ,  $V = (V_1, \dots, V_{d+m})$  un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ . Alors, il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant pas de  $g$  et  $\mathbb{W}$ , telle que pour toute fonction  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d+m}$  continue et de  $q$ -variation finie,*

$$\|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)\|_{\infty; T} \leq C \exp [C [\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + \|g\|_{r\text{-var}; T}^p + M_{1, I, p}(\mathbb{W})]] .$$

**DÉMONSTRATION.** Soit  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d+m}$  une fonction continue et de  $q$ -variation finie. D'après le Corollaire 1.34, il existe une constante  $C_1 > 0$ , dépendant seulement de  $p$  et  $r$ , telle que :

$$M_{1, I, p}(\mathbb{W}^g) \leq C_1 [\|g\|_{r\text{-var}; T}^p + M_{1, I, p}(\mathbb{W})] .$$

Donc, par le Théorème 1.51, il existe une constante  $C_2 > 0$ , ne dépendant pas de  $\mathbb{W}^g$  et  $h$ , telle que :

$$\begin{aligned} \|D_h^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)\|_{\infty; T} &\leq C_2 \exp [C_2 [\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + M_{1, I, p}(\mathbb{W}^g)]] \\ &\leq C \exp [C [\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + \|g\|_{r\text{-var}; T}^p + M_{1, I, p}(\mathbb{W})]] \end{aligned}$$

avec,  $C = C_2(1 \vee C_1)$ .  $\square$

Finalement, étudions la différentiabilité à l'ordre 2 de l'application d'Itô, par rapport au signal. Nous construisons trois bornes *compatibles* avec le théorème de Fernique, en vue d'applications probabilistes au Chapitre 2.

Pour les raisons *techniques* mentionnées à la seconde remarque du Théorème 1.45, ainsi qu'à la seconde remarque de la Définition 1.50, nous nous limitons au cas  $p \in [1, 2]$  :

LEMME 1.53. *Soient  $p \in [1, 2]$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^e$  et  $A = (A_1, \dots, A_d)$  le champ de vecteurs affine sur  $\mathbb{R}^e$  défini par :*

$$\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^e), \forall a, b \in \mathbb{R}^e, A(a).(L, b) = L.a + b.$$

*L'application  $(L, w) \mapsto \pi_A[0, x_0; (L, w)]$  est continûment différentiable de*

$$C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e) \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

*De plus, soient  $(L, w) : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e$  une application continue et de  $p$ -variation finie, et  $\omega : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  un contrôle satisfaisant :*

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \|(L, w)\|_{p\text{-var}; s, t}^p \leq \omega(s, t).$$

*Alors,*

- (1) *Il existe une constante  $C_1 > 0$ , ne dépendant pas de  $w^L = (L, w)$  et  $\omega$ , telle que pour toute fonction  $h^H = (H, h) : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e$  continue et de  $p$ -variation finie,*

$$\|\partial_{w^L} \pi_A(0, x_0; w^L).h^H\|_{\infty; T} \leq C_1(1 + \|x_0\|) \exp [C_1(\|h^H\|_{p\text{-var}; T}^p + M_{1, I, \omega})].$$

- (2) *Il existe une constante  $C_2 > 0$ , ne dépendant pas de  $w^L = (L, w)$  et  $\omega$ , telle que pour toute fonction  $h^H = (H, h) : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e$  continue et de  $q$ -variation finie,*

$$\|\partial_{w^L} \pi_A(0, x_0; w^L).h^H\|_{p\text{-var}; T} \leq C_2(1 + \|x_0\|) \exp [C_2 [\|h^H\|_{p\text{-var}; T}^p + \omega(0, T)]] .$$

DÉMONSTRATION. Puisque  $A$  est un champ de vecteurs affine sur  $\mathbb{R}^e$ , il est localement  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ . Ainsi, d'après [38], Theorem 10.3,  $\pi_A(0, x_0; \cdot)$  est dérivable en tout point et dans toutes les directions de  $C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e)$ .

Soit  $h^H = (H, h) : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e$  une application continue et de  $p$ -variation finie.

En premier lieu,

$$\begin{aligned} D_{h^H} \pi_A(0, x_0; w^L) &= \int_0^\cdot dL_s . D_{h^H} \pi_A(0, x_0; w^L)_s + \int_0^\cdot dH_s . \pi_A(0, x_0; w^L)_s + h \\ &= \int_0^\cdot A_1 [\pi_A(0, x_0; w^L)_s; D_{h^H} \pi_A(0, x_0; w^L)_s] (dw_s^L, dh_s^H) \end{aligned}$$

où,  $A_1 : \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^e \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e; \mathbb{R}^e)$  désigne le champ de vecteurs affine défini par :

$$A_1(a, b).(c, d) = c^1.b + d^1.a + d^2$$

pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^e$  et  $c, d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e$ .

En posant  $Q(w^L, h^H) = (\pi_A(0, x_0; w^L); D_{h^H}\pi_A(0, x_0; w^L))$ , on obtient :

$$Q(w^L, h^H) = (x_0, 0) + \int_0^\cdot A_2 [Q_s(w^L, h^H)] (dw_s^L, dh_s^H)$$

où,  $A_2 : \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^e \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e; \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^e)$  désigne le champ de vecteurs affine défini par :

$$\begin{aligned} A_2(a, b).(c, d) &= \begin{bmatrix} A(a).c \\ A_1(a, b).(c, d) \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ c^1.b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^1.a \\ d^1.a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^2 \\ d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^e$  et  $c, d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e$ .

Ainsi,  $Q(w^L, h^H) = \pi_{A_2}[0, (x_0, 0); (w^L, h^H)]$ .

En second lieu, il existe une constante  $C_3 \geq 1$ , dépendant seulement de  $p$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|(w^L, h^H)\|_{p\text{-var};s,t}^p \leq \omega_1(s, t) = C_3 [\|h^H\|_{p\text{-var};s,t}^p + \omega(s, t)].$$

Par construction,  $\omega_1 : \bar{\Delta}_T \rightarrow \mathbb{R}_+$  est un contrôle.

D'après le premier point du Théorème 1.45, il existe une constante  $C_4 > 0$ , ne dépendant pas de  $w^L$ ,  $\omega$  et  $h^H$ , telle que :

$$\begin{aligned} \|D_{h^H}\pi_A(0, x_0; w^L)\|_{\infty;T} &\leq \|Q(w^L, h^H)\|_{\infty;T} \\ &\leq C_4(1 + \|x_0\|) \exp \left[ C_4 \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega_1(r_k, r_{k+1}) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega_1(r_k, r_{k+1}) \right] \\ &\leq C_1(1 + \|x_0\|) \times \\ &\exp \left[ C_1 \left[ \|h^H\|_{p\text{-var};T}^p + \sup_{\substack{D = \{r_k\} \in D_I \\ \omega(r_k, r_{k+1}) \leq 1}} \sum_{k=1}^{|D|-1} \omega(r_k, r_{k+1}) \right] \right] \end{aligned}$$

avec  $C_1 = C_3 C_4$ , car :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \omega(s, t) \leq \omega_1(s, t).$$

En troisième lieu, d'après le second point du Théorème 1.45, il existe une constante  $C_5 > 0$ , ne dépendant pas de  $w^L$ ,  $\omega$  et  $h^H$ , telle que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|D_{h^H}\pi_A(0, x_0; w^L)_{s,t}\| \leq C_5(1 + \|x_0\|)\omega_1^{1/p}(s, t)e^{C_5\omega_1(0,T)},$$

Ainsi, par sur-additivité du contrôle  $\omega_1$ , il existe une constante  $C_2 > 0$ , ne dépendant pas de  $w^L$ ,  $\omega$  et  $h^H$ , telle que :

$$\|D_{h^H}\pi_A(0, x_0; w^L)\|_{p\text{-var};T} \leq C_2(1 + \|x_0\|) \exp [C_2 [\|h^H\|_{p\text{-var};T}^p + \omega(0, T)]] .$$



Enfin, par la remarque consécutive au Théorème 1.46, puisque  $Q = \pi_{A_2}[0, (x_0, 0); \cdot]$  et  $A_2$  est un champ de vecteurs affine sur  $\mathbb{R}^e$ ,  $Q$  et (donc)  $(w^L, h^H) \mapsto D_{h^H} \pi_A(0, x_0; w^L)$  sont uniformément continues sur les parties bornées de

$$C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e) \times C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e).$$

En conclusion, d'après le Lemme 1.19,  $\pi_A(0, x_0; \cdot)$  est continûment différentiable comme énoncé.  $\square$

PROPOSITION 1.54. Soient  $2 > p \geq q \geq 1$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^e$  et  $V, \tilde{V} \in Lip^{\gamma+1}(\mathbb{R}^e; \mathbb{R}^d)$ . Les applications

$$\begin{aligned} D^1 &: \begin{cases} C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \longrightarrow C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e) \\ w \longmapsto D^1(w) = J_{\cdot \leftarrow 0}^w \end{cases}, \\ D^2 &: \begin{cases} C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \longrightarrow C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e) \\ w \longmapsto D^2(w) = J_{0 \leftarrow \cdot}^w \end{cases} \text{ et} \\ D^3 &: \begin{cases} C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \longrightarrow C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e) \\ w \longmapsto D^3(w) = \partial_V \pi_V(0, x_0; w) \cdot \tilde{V} \end{cases} \end{aligned}$$

sont continûment différentiables.

De plus, soit  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie. Il existe trois constantes strictement positives  $C_1, C_2$  et  $C_3$ , ne dépendant pas de  $w$ , telles que pour toute fonction  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  continue et de  $q$ -variation finie,

$$\begin{aligned} \|\partial_w D^1(w) \cdot h\|_{p\text{-var}; T} &\leq C_1 \exp [C_1 (\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + \|w\|_{p\text{-var}; T}^p)], \\ \|\partial_w D^2(w) \cdot h\|_{p\text{-var}; T} &\leq C_2 \exp [C_2 (\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + \|w\|_{p\text{-var}; T}^p)] \text{ et} \\ \|\partial_w D^3(w) \cdot h\|_{p\text{-var}; T} &\leq C_3 \exp [C_3 (\|h\|_{q\text{-var}; T}^p + \|w\|_{p\text{-var}; T}^p)]. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Nous traitons le cas de  $D^3$ . Les résultats portant sur  $D^1$  et  $D^2$  s'obtiennent de façon analogue.

A la preuve du Théorème 1.48, en conservant les mêmes notations, nous avons établi que :

$$D^3(w) = (I \circ J \circ K)(w)$$

où,

$$I = \pi_A(0, 0; \cdot), J = \mathbb{J}(\cdot; F_{V, \tilde{V}}) \text{ et } K = \pi_{F_V}[0, (x_0, 0); \cdot].$$

Lorsque  $p \in [1, 2]$ , puisque  $F_V$  et  $F_{V, \tilde{V}}$  sont respectivement deux champs de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$  et  $\mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d$  par construction, d'après le Théorème 1.51 :

$$\begin{aligned} J &: C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d) \longrightarrow C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e) \text{ et} \\ K &: C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \longrightarrow C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

sont continûment différentiables.

De plus, par la Proposition 1.53,  $I$  est continûment différentiable de

$$C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e) \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

Donc, par composition,  $D^3$  est elle-même une application continûment différentiable de

$$C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e).$$

Soit  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $q$ -variation finie :

$$\partial_w D^3(w).h = \langle DI[(J \circ K)(w)]; \langle DJ[K(w)], \partial_w K(w).h \rangle \rangle.$$

Ainsi,

$$(20) \quad \|\partial_w D^3(w).h\|_{p\text{-var};T} \leq \|DI[(J \circ K)(w)]\|_{\mathcal{L};p} \times \\ \|DJ[K(w)]\|_{\mathcal{L};p} \times \\ \|\partial_w K(w).h\|_{p\text{-var};T}$$

où,  $\|\cdot\|_{\mathcal{L};p}$  désigne aussi bien la norme d'opérateur usuelle sur

$$\mathcal{L}(C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e); C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e)),$$

que sur

$$\mathcal{L}(C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d); C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e)).$$

Majorons chaque terme du produit du membre de droite de l'inégalité (20) :

- (1) Puisque  $K(w) = \pi_{F_V}(0, x_0; w)$ , d'après le second point du Théorème 1.51 pour le contrôle  $\omega_{w,p}$ , il existe une constante  $C_4 > 0$ , ne dépendant pas de  $w$  et  $h$ , telle que :

$$(21) \quad \|\partial_w K(w).h\|_{p\text{-var};T} \leq C_4 \exp [C_4(\|h\|_{q\text{-var};T}^p + \|w\|_{p\text{-var};T}^p)].$$

- (2) Soit  $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie telle que  $\|g\|_{p\text{-var};T} \leq 1$ .

D'une part, par construction de l'intégrale des trajectoires rugueuses :

$$(J \circ K)(w) = \pi_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e} [\pi_{G_{V,\tilde{V}}}[0, (x_0, 0); K(w)]]$$

où,

$$G_{V,\tilde{V}} : (\mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d)^2 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^e \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e)$$

est le champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz (comme  $F_{V,\tilde{V}}$ ) défini par :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}^d, G_{V,\tilde{V}}(a, b)c = (c, F_{V,\tilde{V}}(a).c).$$

D'autre part, d'après le Théorème 1.41, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|K(w)\|_{p\text{-var};s,t} \leq \omega_1^{1/p}(s, t) = \omega_2^{1/p}(s, t) \vee \omega_2(s, t)$$

avec,

$$\omega_2(s, t) = \varepsilon_1 \|w\|_{p\text{-var};s,t}^p$$

où,  $\varepsilon_1 \geq 1$  est une constante ne dépendant pas de  $w$ . Or, pour tout  $\varepsilon \geq 1$ ,

$$(22) \quad \omega_3(\cdot; \varepsilon) \equiv \varepsilon(\|g\|_{p\text{-var}}^p + \omega_2) \text{ lorsque } \omega_3(\cdot; \varepsilon) \leq 1$$

où, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\omega_3^{1/p}(s, t; \varepsilon) = \omega_4^{1/p}(s, t; \varepsilon) \vee \omega_4(s, t; \varepsilon) \vee \omega_4^p(s, t; \varepsilon)$$

et

$$\omega_4(s, t; \varepsilon) = \varepsilon [\|g\|_{p\text{-var};s,t}^p + \omega_1(s, t)].$$

Donc, par le même raisonnement qu'au second point de la preuve du Théorème 1.51, en utilisant (22); il existe une constante  $C_5 > 0$ , ne dépendant pas de  $w$  et  $g$ , telle que :

$$\|DJ[K(w)].g\|_{p\text{-var};T} \leq C_5 \exp [C_5(\|g\|_{p\text{-var};T}^p + \|w\|_{p\text{-var};T}^p)].$$

Ainsi,

$$(23) \quad \|DJ[K(w)]\|_{\mathcal{L};p} \leq C_5 \exp[C_5(1 + \|w\|_{p\text{-var};T}^p)].$$

- (3) Soit  $g^H = (H, g) : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^e) \times \mathbb{R}^e$  une fonction continue et de  $p$ -variation finie telle que  $\|g\|_{p\text{-var};T} \leq 1$ .

D'une part, il a été établi à la Proposition 1.53 qu'il existe un champ de vecteurs affine  $A_1$  sur  $\mathbb{R}^{e_1} \times \mathbb{R}^{e_2}$  ( $e_1 = e_2 = e$ ) tel que :

$$DI[(J \circ K)(w)].g^H = \pi_{\mathbb{R}^{e_2}}[\pi_{A_1}[0, (0, 0); ((J \circ K)(w), g^H)]].$$

D'autre part, en appliquant successivement les théorèmes 1.41 et 1.43, pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$\|(J \circ K)(w)\|_{p\text{-var};s,t} \leq \omega_5^{1/p}(s, t) = \omega_6^{1/p}(s, t) \vee \omega_6(s, t) \vee \omega_6^p(s, t)$$

avec,

$$\omega_6(s, t) = \varepsilon_2 \|w\|_{p\text{-var};s,t}^p$$

où,  $\varepsilon_2 \geq 1$  est une constante ne dépendant pas de  $w$ .

Donc, par un raisonnement analogue à celui du point précédent pour la Proposition 1.53, Point 2; il existe une constante  $C_6 > 0$ , ne dépendant pas de  $w$  et  $g^H$ , telle que :

$$\|DI[(J \circ K)(w)].g^H\|_{p\text{-var};T} \leq C_6 \exp[C_6(\|g^H\|_{p\text{-var};T}^p + \|w\|_{p\text{-var};T}^p)].$$

Ainsi,

$$(24) \quad \|DI[(J \circ K)(w)]\|_{\mathcal{L};p} \leq C_6 \exp[C_6(1 + \|w\|_{p\text{-var};T}^p)].$$

En conclusion, les inégalités (21), (23), (24) et (20) entraînent qu'il existe une constante  $C_3 > 0$ , ne dépendant pas de  $w$  et  $h$ , telle que :

$$\|\partial_w D^3(w).h\|_{p\text{-var};T} \leq C_3 \exp[C_3(\|h\|_{q\text{-var};T}^p + \|w\|_{p\text{-var};T}^p)].$$

□

## 5. Applications à l'analyse stochastique

L'approche trajectorielle des EDSs se distingue de l'analyse stochastique classique par l'introduction tardive de l'espace probabilisé sous-jacent, ainsi que des contraintes pouvant s'y associer : restrictions portant sur la loi du signal, problèmes d'intégrabilité, conflits entre les modes de convergences déterministes et probabilistes, etc. Cependant, si l'atout de l'approche trajectorielle réside dans ses moindres exigences quant au choix du signal, c'est aussi sa faiblesse. En effet, en certaines occasions les propriétés probabilistes imposées d'emblée au signal sont *voulues*, et non *subies* lors de la modélisation. Typiquement, en finance, les propriétés probabilistes du signal passent au premier plan; elles sont *voulues*. C'est par exemple la propriété de martingale du signal qui assure l'absence d'opportunités d'arbitrage. Inversement, les propriétés probabilistes classiquement imposées au signal sont *subies* en pharmacocinétique/pharmacodynamique (PK/PD). En effet, la modélisation des quatre phases (absorption, distribution, métabolisme et, excrétion du principe actif et de ses métabolites) perd en réalisme de par le manque de régularité du signal engendré par les propriétés probabilistes qui lui sont imposées d'emblée. Ces questions sont respectivement abordées aux chapitres 2 et 3 dans le cadre d'applications des résultats théoriques obtenus.

Soient  $\Omega$  un ensemble,  $E$  un ensemble de trajectoires continues de  $[0, T]$  dans un espace topologique, et  $X$  une application de  $\Omega$  dans  $E$ . On considère un *problème*, souvent associé à une EDS, portant sur l'application  $X$ . Schématiquement :

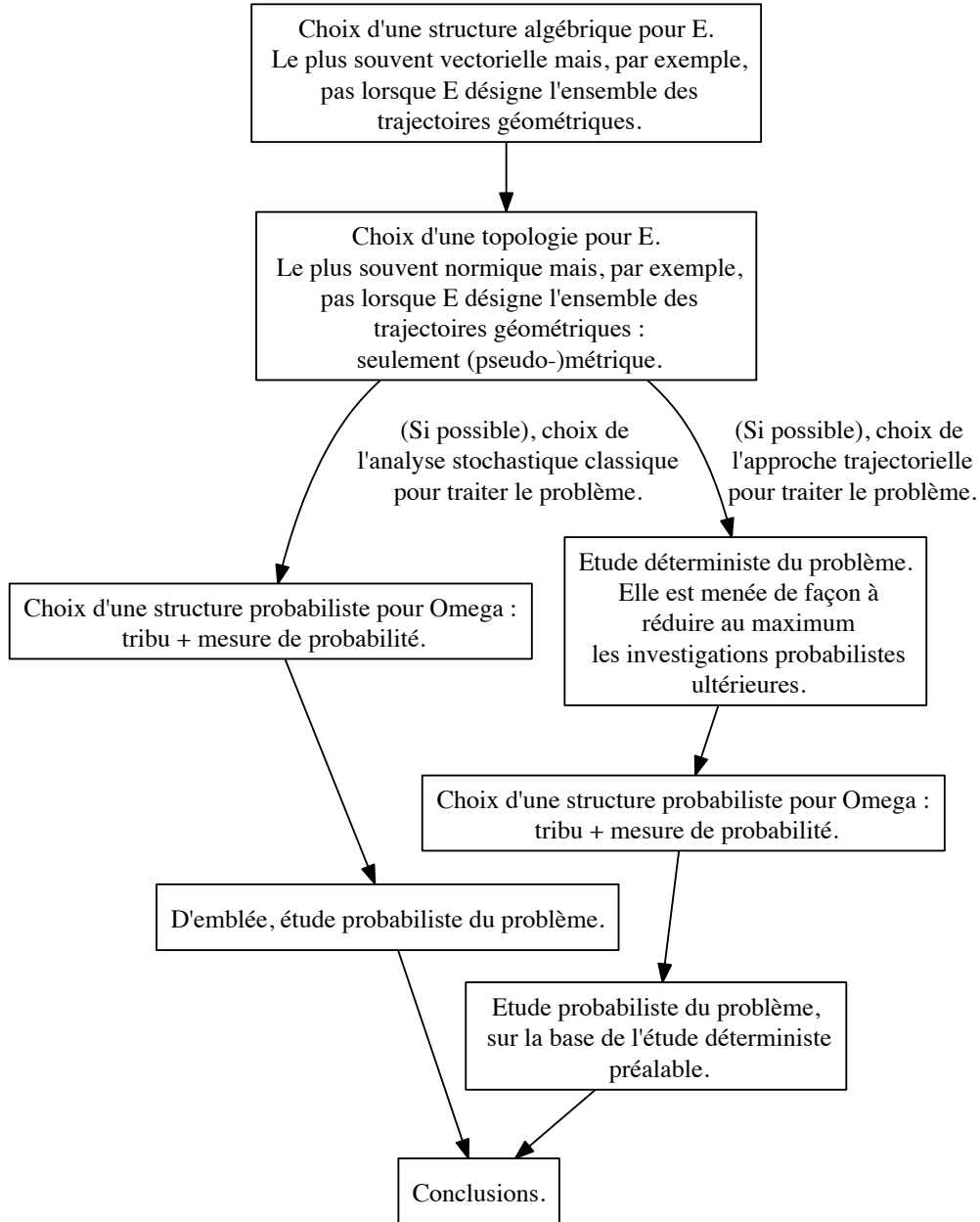


FIGURE 2. Analyse stochastique classique v.s. approche trajectorielle

A la sous-section suivante, après quelques rappels sur les processus stochastiques en général et les processus gaussiens en particulier, nous énonçons la condition suffisante proposée par P. Friz et N. Victoir [36] assurant l'existence d'une trajectoire géométrique *naturelle* au-dessus d'un processus gaussien, ainsi que les propriétés probabilistes de cette dernière. Enfin, nous présentons les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7].

### 5.1. Processus stochastiques et trajectoires géométriques gaussiennes.

Dans cette sous-section, il s'agit d'une part de présenter les résultats fondamentaux bien connus sur les processus stochastiques et d'autre part, d'énoncer la condition suffisante garantissant l'existence d'une trajectoire géométrique *naturelle* au-dessus d'un processus gaussien, ainsi que les résultats d'intégrabilité de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7]. Le lien avec le calcul de Malliavin sera présenté au Chapitre 2, tandis que les principes de grandes déviations seront énoncés au Chapitre 3. Nous insistons notamment sur le cas du mouvement brownien fractionnaire.

Dans la première partie de cette sous-section, nous renvoyons à J-Y. Oувrard [74] pour les résultats de théorie de la mesure appliqués aux probabilités, à J. Neveu [71] et D. Revuz et M. Yor [76] pour les processus en général et le mouvement brownien en particulier, à J. Neveu [70] pour les processus gaussiens et les espaces gaussiens, et enfin à D. Nualart [73], Chapter 5 pour les généralités sur le mouvement brownien fractionnaire.

**Notations et conventions.** Dans tout l'exposé, sauf mention du contraire :

- Pour tout  $t \in [0, T]$ , l'intervalle  $[0, t]$  est muni de la tribu borélienne  $\mathcal{B}_t$  pour sa topologie métrique usuelle.
- L'ensemble  $\mathbb{R}^d$  est muni de la tribu borélienne pour sa topologie métrique euclidienne, et  $G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$  est muni de la tribu borélienne pour la topologie associée à la distance de Carnot-Carathéodory. Ces deux tribus seront indifféremment notées  $\mathcal{B}$ .
- Sauf mention du contraire, on se place sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On désigne par  $L^r(\Omega)$  l'espace des variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$ , et de puissance  $r \geq 1$  intégrable. L'espérance mathématique de toute variable aléatoire  $X \in L^1(\Omega)$  est notée  $\mathbb{E}(X)$ .

**DÉFINITION 1.55.** *Toute famille  $X = (X_t; t \in [0, T])$  de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$ , est un processus (stochastique).*

*Les applications*

$$t \in [0, T] \mapsto X_t(\omega); \omega \in \Omega$$

*forment l'ensemble (déterministe) des trajectoires du processus  $X$ .*

*La loi de probabilité du processus  $X$  est la probabilité image de  $\mathbb{P}$ , par la variable aléatoire  $\omega \in \Omega \mapsto X(\omega)$ , sur la tribu produit*

$$\mathcal{B}^{\otimes [0, T]} = \sigma(\mathcal{C})$$

*où,  $\mathcal{C}$  désigne la classe des cylindres mesurables et de dimension finie de l'ensemble des fonctions de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$  ou  $G^{[p]}(\mathbb{R}^d)$ .*

**Définitions et propriétés élémentaires.** Soient  $X$  et  $Y$  deux processus stochastiques :

- (1) Lorsque le processus  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , il est de *puissance*  $r \geq 1$  intégrable si et seulement si,  $\mathbb{E}(\|X_t\|^r) < \infty$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

Si  $r = 1$ , la fonction de moyenne  $m_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  du processus  $X$  est définie par :

$$\forall t \in [0, T], m_X(t) = (\mathbb{E}(X_t^1), \dots, \mathbb{E}(X_t^d)).$$

Si  $r = 2$ , la fonction de covariance  $c_X : [0, T]^2 \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  du processus  $X$  est définie par :

$$\forall s, t \in [0, T], c_X(s, t) = \begin{bmatrix} \text{cov}(X_s^1, X_t^1) & \dots & \text{cov}(X_s^1, X_t^d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_s^d, X_t^1) & \dots & \text{cov}(X_s^d, X_t^d) \end{bmatrix}.$$

En particulier, lorsque les composantes du processus  $X$  sont indépendantes, pour tous  $s, t \in [0, T]$ ,

$$c_X(s, t) \equiv (\text{cov}(X_s^1, X_t^1), \dots, \text{cov}(X_s^d, X_t^d)).$$

Pour  $r \geq 1$  donné, le processus  $X$  est borné dans  $L^r(\Omega)$  si et seulement s'il existe une constante  $M > 0$  telle que  $\mathbb{E}(\|X_t\|^r) \leq M$  pour tout  $t \in [0, T]$ . En d'autres termes,  $X$  est borné dans  $L^r(\Omega)$  si et seulement si,

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}(\|X_t\|^r) < \infty.$$

- (2) Soit  $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_t; t \in [0, T])$  une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  (i.e. une famille croissante de sous-tribus de  $\mathcal{A}$ ) :

Le processus  $X$  est ( $\mathbb{F}$ -)adapté si et seulement si, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable.

Le processus  $X$  est ( $\mathbb{F}$ -)progressivement mesurable si et seulement si, pour tout  $t \in [0, T]$ , l'application

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \longmapsto X_s(\omega)$$

est  $\mathcal{B}_t \otimes \mathcal{A}_t$ -mesurable.

Un processus progressivement mesurable est adapté, mais la réciproque est fausse. Cependant, tout processus adapté et à trajectoires continues est progressivement mesurable.

En pratique, on considère souvent la filtration naturelle  $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_t; t \in [0, T])$  du processus  $X$  où,

$$\forall t \in [0, T], \mathcal{A}_t = \sigma(X_s; s \in [0, t]).$$

Dans ce cas,  $X$  est adapté par construction. Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathcal{A}_t$  s'interprète comme l'*information* disponible sur le processus  $X$  à la date  $t$ .

- (3) Le processus  $X$  est une ( $\mathbb{P}$ -)modification du processus  $Y$  si et seulement si,

$$\forall t \in [0, T], \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

Les processus  $X$  et  $Y$  sont ( $\mathbb{P}$ -)indistinguables si et seulement si,

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, T], X_t = Y_t) = 1.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indistinguables, alors  $X$  est une modification de  $Y$  et inversement. La réciproque est fautive. Cependant, si  $X$  est une modification de  $Y$  et que leurs trajectoires sont presque sûrement continues, alors  $X$  et  $Y$  sont indistinguables.

PROPOSITION 1.56. *Soient  $X$  et  $Y$  deux processus stochastiques :*

- (1) *Les processus  $X$  et  $Y$  suivent la même loi de probabilité si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous  $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ , les vecteurs  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  et  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$  suivent la même loi de probabilité.*
- (2) *Les processus  $X$  et  $Y$  sont indépendants si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous  $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ , les vecteurs  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  et  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$  sont indépendants.*

C'est une conséquence (presque) immédiate du théorème *d'unicité des mesures* (cf. [74], Théorème 8.4), lui-même conséquence du lemme des *classes monotones* (cf. [74], Lemme 8.3).

**Remarque.** En particulier, il découle de la Proposition 1.56 que la loi de probabilité d'un processus stochastique est entièrement caractérisée par ses marginales fini-dimensionnelles.

Nous concluons ce bref rappel sur les processus stochastiques par deux résultats fondamentaux de Kolmogorov. Le théorème de *prolongement* et le *critère de continuité* :

THÉORÈME 1.57. *Pour toute partie finie  $I$  de  $[0, T]$ , soit  $\mu_I$  une probabilité définie sur  $\mathcal{B}^{\otimes I}$ . Il existe une unique probabilité  $\mu$ , définie sur  $\mathcal{B}^{\otimes [0, T]}$ , telle que  $\mu|_I = \mu_I$  pour toute partie finie  $I$  de  $[0, T]$ , dès que la famille  $(\mu_I; I \subset [0, T] \text{ fini})$  est compatible au sens suivant :*

$$\forall I \subset J \subset [0, T] \text{ finies, } (\mu_J)|_I = \mu_I.$$

LEMME 1.58. *Soit  $X$  un processus stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Supposons qu'il existe trois constantes strictement positives  $r, \varepsilon$  et  $C$ , telles que pour tous  $s, t \in [0, T]$ ,*

$$\mathbb{E}(\|X_s - X_t\|^r) \leq C|t - s|^{1+\varepsilon}.$$

*Alors, il existe une modification  $Y$  de  $X$  dont les trajectoires sont  $\alpha$ -höldériennes pour tout  $\alpha \in ]0, \varepsilon/r[$ . En particulier,  $Y$  est une modification continue de  $X$  (unique à l'indistinguabilité près).*

Pour une preuve de ces deux résultats, se référer respectivement à [71] p. 79 et [76], Theorem I.1.8.

L'existence de processus satisfaisant la définition suivante (processus gaussiens) est une conséquence (presque) immédiate du Théorème 1.57 :

DÉFINITION 1.59. *Un processus réel  $W = (W_t; t \in [0, T])$  est gaussien si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tous  $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$ , le vecteur  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$  est gaussien (i.e. toute combinaison linéaire des  $W_{t_1}, \dots, W_{t_n}$  suit une loi normale unidimensionnelle).*

Soient  $d$  processus gaussiens  $W^1, \dots, W^d$  indépendants. Alors,

$$\begin{aligned} W &= (W^1, \dots, W^d) \\ &= ((W_t^1, \dots, W_t^d); t \in [0, T]). \end{aligned}$$

est un processus gaussien  $d$ -dimensionnel.

**Remarque.** Notez que par définition, la loi d'un processus gaussien est entièrement caractérisée par sa fonction de moyenne et sa fonction de covariance. Les processus gaussiens intervenant dans la suite sont centrés (i.e.  $\mathbb{E}(W_t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ ). La loi d'un tel processus est donc entièrement caractérisée par sa fonction de covariance.

**DÉFINITION 1.60.** Un espace gaussien est un sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\Omega)$ , composé de variables aléatoires gaussiennes unidimensionnelles centrées.

Soit  $W$  un processus gaussien unidimensionnel centré. Alors,

$$\overline{\text{Vect}(W_t; t \in [0, T])}^{L^2(\Omega)}$$

est l'espace gaussien engendré par le processus  $W$ .

Jusqu'à la fin de cette sous-section, tout processus gaussien  $d$ -dimensionnel, centré et à trajectoires continues  $W$  est considéré sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  où,  $\Omega$  désigne l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{A}$  la tribu engendrée par la classe des cylindres mesurables et de dimension finie de  $\Omega$ , et  $\mathbb{P}$  la probabilité induite par le processus  $W$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

**DÉFINITION 1.61.** Soient  $W = (W^1, \dots, W^d)$  un processus gaussien  $d$ -dimensionnel, centré et à trajectoires continues, ainsi que  $H_i$  l'espace gaussien engendré par  $W^i$  pour  $i = 1, \dots, d$ . Alors,

$$H^1 = \bigoplus_{i=1}^d H_i^1 \subset C^0([0, T]; \mathbb{R}^d)$$

avec

$$\forall i = 1, \dots, d, H_i^1 = \{\mathbb{E}(W^i Z) ; Z \in H_i\}$$

est l'espace de Cameron-Martin du processus  $W$ .

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$  l'application de  $H^1 \times H^1$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tous  $g, h \in H^1$  telles que

$$\forall i = 1, \dots, d, h^i = \mathbb{E}(W^i Z^{h^i}) \text{ et } g^i = \mathbb{E}(W^i Z^{g^i}) \text{ avec } Z^{h^i}, Z^{g^i} \in H_i$$

associe

$$\langle h, g \rangle_{H^1} = \sum_{i=1}^d \mathbb{E}(Z^{h^i} Z^{g^i}).$$

C'est un produit scalaire conférant à  $H^1$  une structure d'espace de Hilbert.

**Exemple.** Si  $B = (B_t; t \in [0, T])$  désigne un mouvement Brownien  $d$ -dimensionnel :

$$H^1 = \left\{ \int_0^{\cdot} \dot{h}_s ds ; \dot{h} \in L^2([0, 1]) \right\}.$$



PROPOSITION 1.62. *Soit  $W$  un processus gaussien unidimensionnel, centré et à trajectoires continues. Si la fonction de covariance  $c_W$  de  $W$  est de  $\rho$ -variation  $2D$  finie avec  $\rho \geq 1$ , alors  $H^1 \hookrightarrow C^{\rho\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R})$  :*

$$\forall h \in H^1, \forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \|h\|_{\rho\text{-var}; s, t}^2 \leq \|h\|_{H^1}^2 \|c_W\|_{\rho\text{-var}; [s, t]^2}$$

où,  $\|\cdot\|_{H^1}$  désigne la norme associée au produit scalaire sur  $H^1$ .

Pour une preuve, se référer à [38], Proposition 15.7.

Depuis une cinquantaine d'années, un processus gaussien retient particulièrement l'attention des mathématiciens; le mouvement brownien fractionnaire (se référer notamment à B.B. Mandelbrot et J.W. Van Ness [64]). Outre son intérêt dans les applications concrètes, sa définition relativement simple et ses nombreuses propriétés en font un *toy model* dans plusieurs domaines des probabilités :

DÉFINITION 1.63. *Un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H \in ]0, 1[$  est un processus gaussien unidimensionnel centré  $B^H$  tel que :*

$$\forall s, t \in [0, T], c_H(s, t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

**Remarques et propriétés élémentaires.** Soit  $B^H$  un mBf d'indice de Hurst  $H \in ]0, 1[$ . La structure de covariance du mBf entraîne (preque) immédiatement :

(1) Pour tous  $s, t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} c_{1/2}(s, t) &= \frac{1}{2}(s + t - |t - s|) \\ &= s \mathbf{1}_{t \geq s} + t \mathbf{1}_{s > t} = s \wedge t. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque la loi d'un processus gaussien centré est entièrement caractérisée par sa fonction de covariance;  $B^{1/2}$  est un mouvement brownien standard (MB).

Il s'ensuit que les accroissements de  $B^H$  sont indépendants si et seulement si,  $B^H$  est un mouvement brownien standard.

(2) Les accroissements de  $B^H$  forment un processus (fortement) stationnaire :

$$\forall \varepsilon > 0, (B_{t+\varepsilon}^H - B_\varepsilon^H; t \in [\varepsilon, \varepsilon + T]) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B^H.$$

Le processus  $B^H$  est également  $H$ -auto-similaire :

$$\forall \varepsilon > 0, (B_{\varepsilon t}^H; t \in [0, T]) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\varepsilon^H B_t^H; t \in [0, T]).$$

(3) Pour tous  $s, t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(B_t^H - B_s^H)^2] &= c_H(s, s) + c_H(t, t) - 2c_H(s, t) \\ &= |t - s|^{2H}. \end{aligned}$$

Donc, par le Lemme 1.58, le processus  $B^H$  admet une modification dont les trajectoires sont presque sûrement  $\alpha$ -höldériennes pour tout  $\alpha \in ]0, H[$ .

Deux autres résultats très importants sur le mBf sont énoncés à la sous-section suivante et au Chapitre 2.

Désormais, on considère un processus  $W$  satisfaisant l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 1.64.** *Le processus  $W$  est  $d$ -dimensionnel, gaussien, centré et à trajectoires continues. De plus, la fonction de covariance  $c_W$  de  $W$  est de  $\rho$ -variation 2D finie avec  $\rho \in [1, 2[$  (cf. Définition 1.8).*

**THÉORÈME 1.65.** *Soient  $W$  un processus satisfaisant l'hypothèse 1.64, et  $p > 2\rho$ . Pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe une  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W}(\omega)$  au-dessus de  $W(\omega)$  satisfaisant :*

- (1) *Il existe une constante déterministe  $C > 0$ , dépendant seulement de  $\rho$ ,  $p$  et  $\|c_W\|_{\rho\text{-var};[0,T]^2}$ , telle que :*

$$\mathbb{E} \left( e^{C\|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};T}^2} \right) < \infty.$$

*(Théorème de Fernique généralisé).*

- (2) *Soit  $(W^n, n \in \mathbb{N})$  une suite d'approximations linéaires, ou de régularisées par convolution, du processus  $W$ . Alors,  $\mathbb{W}$  est la limite en  $p$ -variation, dans  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r \geq 1$ , de la suite  $(S_3(W^n), n \in \mathbb{N})$  (universalité).*

Pour une preuve, se référer à [38], Theorem 15.33.

**Remarque.** Par abus de langage, on dit que le processus  $\mathbb{W}$  est une  $p$ -trajectoire géométrique au-dessus du processus  $W$ .

### Exemples :

- (1) Soit  $B^H$  un mBf d'indice de Hurst  $H \in ]0, 1/2[$ . D'après [38], Proposition 15.5, la fonction de covariance  $c_H$  de  $B^H$  est de  $1/(2H)$ -variation 2D finie. Ainsi,  $B^H$  satisfait l'Hypothèse 1.64 lorsque  $H \in ]1/4, 1/2[$ , car :

$$\rho = \frac{1}{2H} \in [1, 2[ \iff H \in \left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right[.$$

De plus, d'après la Proposition 1.62,  $H^1 \hookrightarrow C^{1/(2H)\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R})$ .

- (2) Soit  $(W_t; t \in [0, 1])$  un processus gaussien unidimensionnel dont la fonction de covariance  $c_W$  est de  $\rho$ -variation 2D finie avec  $\rho \in [1, 2[$ . Le *pont gaussien*  $B^W$  associé à  $W$  est le processus gaussien défini par :

$$\forall t \in [0, 1], B_t^W = W_t - tW_1.$$

Pour tous  $(s, t), (u, v) \in \bar{\Delta}_1$ ,

$$\begin{aligned} B_{s,t}^W B_{u,v}^W &= [W_t - W_s - (t-s)W_1] [W_v - W_u - (v-u)W_1] \\ &= W_{s,t}W_{u,v} - (t-s)W_{0,1}W_{u,v} - (v-u)W_{0,1}W_{s,t} + (t-s)(v-u)W_1^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} c_{B^W} \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} &= c_W \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} + (t-s)(v-u)c_W \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad (v-u)c_W \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (t-s)c_W \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $c_{B^W}$  est de  $\rho$ -variation 2D finie, et le processus  $B^W$  satisfait l'Hypothèse 1.64 dès que  $W$  la satisfait.

Cet exemple met en évidence que pour établir qu'un processus satisfait l'Hypothèse 1.64, la forme de sa fonction de covariance est déterminante.

En certaines occasions, nous supposerons également que le processus  $W$  satisfait l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 1.66.** *Il existe  $p > q \geq 1$  tels que :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1 \text{ et } H^1 \hookrightarrow C^{q\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d).$$

**Exemples :**

- (1) En pratique, cette hypothèse n'a d'intérêt que si  $p \geq 1$  est tel que  $\|\mathbb{W}\|_{p\text{-var};T} < \infty$  où,  $\mathbb{W}$  désigne une trajectoire géométrique au-dessus de  $W$ . D'après le Théorème 1.65, c'est le cas si  $W$  satisfait l'Hypothèse 1.64; il existe une  $p$ -trajectoire géométrique au-dessus de  $W$  avec  $p > 2\rho$  et  $\rho \in [1, 2[$ . En particulier, si  $\rho < 3/2$ ,  $p \in [3, 4[$  convient et :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{p} > \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

De plus, d'après la Proposition 1.62 :

$$H^1 \hookrightarrow C^{\rho\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d).$$

Ainsi, si  $W$  satisfait l'Hypothèse 1.64 avec  $\rho \in [1, 3/2[$ , alors  $W$  satisfait l'Hypothèse 1.66 avec  $q = \rho$ .

- (2) Si  $W$  est un mBf d'indice de Hurst  $H \in ]1/3, 1/2]$ , le point précédent assure qu'il satisfait l'Hypothèse 1.66. Toutefois, dans ce cas particulier, P. Friz et N. Victoir ont établi à l'Exercice 20.2 de [38] qu'un mBf d'indice de Hurst  $H \in ]1/4, 1/3]$  satisfait également l'Hypothèse 1.66.

**PROPOSITION 1.67.** *Soient  $W$  un processus satisfaisant les hypothèses 1.64 et 1.66,  $\mathbb{W}$  la  $p$ -trajectoire géométrique associée à  $W$  au Théorème 1.65, ainsi que l'espace de Cameron-Martin  $H^1 \subset \Omega$  du processus  $W$ . Alors,*

$$\forall \omega \in \Omega, \forall h \in H^1, \mathbb{W}(\omega + h) = T_h \mathbb{W}(\omega).$$

Pour une preuve, se référer à [38], Lemma 15.58.

**Notation.** Elle provient de T. Cass, C. Litterer et T. Lyons [7] :

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $I = [0, T]$  et  $Y$  une  $p$ -trajectoire géométrique. On considère :

$$N_{\varepsilon, I, p}(Y) = \sup \{n \in \mathbb{N} : \tau_n \leq \sup(I)\}$$

où,  $\tau_0 = \inf(I)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\tau_{n+1} = \inf \{t \in I : \|Y\|_{p\text{-var}; \tau_n, t}^p \geq \varepsilon \text{ et } t > \tau_n\} \wedge \sup(I).$$

**PROPOSITION 1.68.** *Pour toute  $p$ -trajectoire géométrique  $Y$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$M_{\varepsilon, I, p}(Y) \leq \varepsilon [2N_{\varepsilon, I, p}(Y) + 1].$$

Pour une preuve, se référer à [7], Proposition 4.6.

**THÉORÈME 1.69.** *Soient  $W$  un processus satisfaisant les hypothèses 1.64 et 1.66, ainsi que  $\mathbb{W}$  la  $p$ -trajectoire géométrique associée à  $W$  au Théorème 1.65. Alors,*

$$\forall C, \varepsilon, r > 0, Ce^{CN_{\varepsilon, I, p}(\mathbb{W})} \in L^r(\Omega).$$

Pour une preuve, se référer à [7], Theorem 6.4 et Remark 6.5.

COROLLAIRE 1.70. Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^e$ ,  $V = (V_1, \dots, V_d)$  et  $\tilde{V} = (\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_d)$  deux champs de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ ,  $W$  un processus satisfaisant les hypothèses 1.64 et 1.66,  $\mathbb{W}$  la  $p$ -trajectoire géométrique associée à  $W$  au Théorème 1.65,  $\mathbb{W}^g = S_{[p]}(\mathbb{W} \oplus g)$  avec  $g = Id_{[0,T]}$ , et  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  une fonction continue et de  $q$ -variation finie. Alors,

$$\|J_{\cdot \leftarrow 0}^{\mathbb{W}^g}\|_{\infty;T}, \|\partial_V \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g) \cdot \tilde{V}\|_{\infty;T} \text{ et } \|D_h^{FV} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)\|_{\infty;T}$$

appartiennent à  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r > 0$ .

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate des corollaires 1.49 et 1.52, de la Proposition 1.68 (résultats déterministes), ainsi que du Théorème 1.69 (résultat probabiliste).  $\square$

## Calcul de Malliavin, application d'Itô et calcul de sensibilités

### 1. Introduction

Motivés par une problématique issue des mathématiques financières et, sur la base de [38], Chapter 20, nous étudions le rôle du calcul de Malliavin dans *l'exploitation* de la régularité de la solution d'une équation différentielle dirigée par une trajectoire géométrique gaussienne, ainsi que de ses dérivées par rapport à la condition initiale et au champ de vecteurs, vues comme des variables aléatoires définies sur l'espace de Cameron-Martin du processus gaussien sous-jacent.

Afin d'énoncer la problématique dont il est question, rappelons quelques notions de mathématiques financières. Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $B$  un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel et  $\mathbb{F} = (\mathcal{A}_t; t \in [0, T])$  la filtration naturelle associée à  $B$ .

Considérons un marché financier à  $d + 1$  actifs (un actif sans risque et  $d$  actifs risqués) sur l'espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ . A l'instant  $t \in [0, T]$ , le cours de l'actif sans risque est déterministe et noté  $S_t^0$ , tandis que les cours des  $d$  actifs risqués forment un vecteur aléatoire  $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)$ .

En pratique, le processus  $S$  est souvent la solution d'une équation différentielle stochastique (prise au sens d'Itô) :

$$S_t = x + \int_0^t \mu(S_u) du + \int_0^t \sigma(S_u) dB_u; x \in \mathbb{R}$$

où,  $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  sont deux fonctions (globalement) lipschitziennes.

Afin d'assurer la complétude et la viabilité du marché, il est suffisant d'établir qu'il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}^*$ , équivalente à  $\mathbb{P}$ , sous-laquelle le processus des cours actualisés  $S^* = S/S^0$  est une martingale. C'est la probabilité risque-neutre du marché et, lorsque  $S$  est la solution d'une EDS, le Théorème de Girsanov permet de la construire (cf. [53], Théorème 4.2.2 pour un énoncé *adapté* en finance).

**Notation.** Soit  $M$  une martingale locale,  $L_{\text{loc}}^2(M)$  (resp.  $L^2(M)$ ) désigne l'espace vectoriel des processus réels progressivement mesurables  $H$  satisfaisant :

$$\int_0^T H_t^2 d\langle M \rangle_t < \infty \text{ } \mathbb{P}\text{-p.s. (resp. } \|H\|_M = \mathbb{E} \left( \int_0^T H_t^2 d\langle M \rangle_t \right) < \infty).$$

**DÉFINITION 2.1.** Une stratégie de gestion est un processus  $(d + 1)$ -dimensionnel et progressivement mesurable  $\varphi = (H^0, H)$  tel que,  $H_t^0$  (resp.  $H_t \in \mathbb{R}^d$ ) désigne la quantité (resp. le vecteur des quantités) d'actif sans risque (resp. d'actifs risqués) détenue(s) à la date  $t \in [0, T]$ . Pour cette stratégie,  $V_t(\varphi) = H_t^0 S_t^0 + \langle H_t, S_t \rangle$  est la

valeur du porte-feuille à la date  $t \in [0, T]$ .

La stratégie  $\varphi$  est admissible si et seulement si,  $H^0 \in L^1([0, T])$ ,  $H \in L^2_{loc}(B)$  et, le processus  $V(\varphi)$  est positif, borné dans  $L^2(\Omega, \mathbb{P}^*)$  et satisfait :

$$\forall t \in [0, T], V_t(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \langle H_u, dS_u \rangle \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

**THÉORÈME 2.2.** *Soit une option d'échéance  $T$  et de payoff  $h$  positif,  $\mathcal{A}_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ . Alors, il existe une stratégie admissible  $\varphi$  telle que :*

$$\forall t \in [0, T], V_t(\varphi) = \mathbb{E}^* \left( \frac{S_t^0}{S_0^0} h \middle| \mathcal{A}_t \right) \mathbb{P}^*\text{-p.s.}$$

Pour une preuve, se référer à [53], Théorème 4.3.2.

Avec les notations du Théorème 2.2,  $V_T(\varphi) = \mathbb{E}^*(h)$ . C'est le prix de l'option considérée et, lorsque  $h = F(S_T)$  où  $F$  est une fonction de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}_+$ , il est utile pour les praticiens d'établir l'existence et de savoir calculer les sensibilités de  $V_T(\varphi)$  aux variations de la condition initiale et de la fonction de volatilité  $\sigma$  notamment :

$$\Delta = \partial_x \mathbb{E}^* [F(S_T^x)] \text{ et } \mathcal{V} = \partial_\sigma \mathbb{E}^* [F(S_T^\sigma)].$$

En finance, les sensibilités  $\Delta$  et  $\mathcal{V}$  (prononcé *véga*) s'appellent des *grecques*. Comme application, citons le  $\Delta$ -hedging permettant d'explicitier la stratégie admissible du Théorème 2.2 dans le modèle de Black-Scholes. Il n'y a toutefois aucune raison de limiter l'utilisation de ces quantités à la finance, elles auraient notamment un sens en PK/PD comme nous l'expliquons au Chapitre 3 dans un cas particulier. La question de l'existence et du calcul des *grecques* a été traitée par de nombreux auteurs :

Dans [34], E. Fournié et al. ont établi l'existence des principales *grecques* et proposé une expression de ces dernières usant du calcul de Malliavin à condition que  $\sigma$  soit uniformément elliptique (cf. Théorème 2.3). Plus tard, dans [39], E. Gobet et R. Müños ont étendu les résultats de [34] en se plaçant seulement sous la condition plus *réaliste* d'hypo-ellipticité. Sur le calcul des *grecques* dans le modèle de Black-Scholes, se référer à P. Malliavin et A. Thalmaier [63], Chapter 2. Sur le calcul de sensibilités dans les modèles avec sauts, se référer à N. Privault et al. [49] et [75]. Enfin, J. Teichmann a proposé un estimateur des *poids de Malliavin* du calcul des *grecques* via la formule de cubature pour le mouvement brownien (cf. J. Teichmann [84]). Par ailleurs, notez que la question de la différentiabilité de la solution d'une équation différentielle stochastique (prise au sens d'Itô) par rapport à la condition initiale et au champ de vecteurs est largement traitée dans H. Kunita [51].

Au théorème suivant,  $\delta$  désigne la divergence associée au mouvement brownien  $B$ . Cet opérateur est défini à la Section 2.

**THÉORÈME 2.3.** *Lorsque les fonctions  $b$  et  $\sigma$  sont différentiables, de différentielles bornées et lipschitziennes, et que  $F \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}_+)$  :*

- (1) *Si la fonction  $\sigma$  satisfait la condition d'uniforme ellipticité (i.e. il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^d$ ,  $b^T \sigma^T(a) \sigma(a) b \geq \varepsilon \|b\|^2$ ), alors  $\Delta$  est bien définie et il existe un processus  $d$ -dimensionnel adapté  $h^\Delta$  tel que :*

$$\Delta = \mathbb{E}^* [F(S_T) \delta(h^\Delta)].$$

- (2) Soit  $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  une fonction telle que, pour tout  $\varepsilon$  d'un voisinage fermé de 0,  $\sigma + \varepsilon\tilde{\sigma}$  satisfait la condition d'uniforme ellipticité. Alors,  $\mathcal{V}$  est bien définie et il existe un processus  $d$ -dimensionnel (anticipatif)  $h^\mathcal{V}$  tel que :

$$\mathcal{V} = \mathbb{E}^* [F(S_T)\delta(h^\mathcal{V})].$$

Pour une preuve, se référer à [34], propositions 3.2 et 3.3.

Désormais, dans tout le chapitre, sauf mention du contraire, tout processus gaussien  $d$ -dimensionnel, centré et à trajectoires continues  $W$  est considéré sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  où,  $\Omega$  désigne l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{A}$  la tribu engendrée par la classe des cylindres mesurables et de dimension finie de  $\Omega$ , et  $\mathbb{P}$  la probabilité induite par le processus  $W$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

L'objectif de ce chapitre est d'étendre le Théorème 2.3 dans le sens suivant :

Soient  $W$  un processus satisfaisant les hypothèses 1.64 et 1.66,  $\mathbb{W}$  la  $p$ -trajectoire géométrique associée à  $W$  au Théorème 1.65, ainsi que  $V = (V_1, \dots, V_d)$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^d$  défini par :

$$\forall a, c \in \mathbb{R}^d, \forall b \in \mathbb{R}, V(a)(b, c) = \mu(a)b + \sigma(a)c.$$

Supposons que les fonctions  $\mu$  et  $\sigma$  satisfont l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 2.4.** *Il existe un réel  $p \geq 1$  tel que  $\mu$  et  $\sigma$  soient  $[p] + 1$  fois différentiables, bornées et de différentielles successives bornées.*

Alors, l'équation différentielle stochastique suivante admet une unique solution au sens des trajectoires rugueuses :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s; x \in \mathbb{R}^d.$$

Rigoureusement,  $X = \pi_V(0, x; \mathbb{W}^g)$  où,  $\mathbb{W}^g = S_{[p]}(\mathbb{W} \oplus g)$  et  $g = \text{Id}_{[0, T]}$ .

Après avoir rappelé les bases du calcul de Malliavin et établi son rôle dans l'exploitation de la régularité de la variable aléatoire  $\omega \mapsto X(\omega)$  à la Section 2, nous montrons l'existence, puis calculons les quantités suivantes sous certaines conditions à la Section 3 :

$$\partial_x \mathbb{E} [F(X_T^x)] \text{ et } \partial_\sigma \mathbb{E} [F(X_T^\sigma)].$$

Finalement, la Section 4 est consacrée à une application en finance des résultats de la Section 3, ainsi qu'aux simulations des sensibilités étudiées.

## 2. Calcul de Malliavin et régularité de l'application d'Itô

Au chapitre 20 de [38], P. Friz et N. Victoir ont établi que pour tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $h \mapsto \pi_V[0, x_0; \mathbb{W}(\omega + h)]$  est continûment différentiable sur l'espace de Cameron-Martin  $H^1 \subset \Omega$  du processus gaussien  $W$ , lorsque  $x_0 \in \mathbb{R}^e$  et  $V = (V_1, \dots, V_d)$  est un champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^e$ . Dans cette section, afin de répondre à la problématique posée en introduction, nous construisons un processus gaussien isonormal  $d$ -dimensionnel à partir de  $W$  sur un espace de Hilbert  $H$  bien choisi, puis une isométrie  $I$  de  $H$  dans  $H^1$  et enfin, nous exprimons la dérivée de Malliavin de  $\pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)$ , telle qu'elle est définie dans [73], en fonction de sa dérivée de Friz-Victoir et de l'isométrie  $I$ .

Considérons  $W = (W^1, \dots, W^d)$ , le processus gaussien  $d$ -dimensionnel défini en introduction de ce chapitre.

Soient  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions en escalier définies sur  $[0, T]$  de la forme

$$\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{[0, s_k]}; \quad n \in \mathbb{N}^*, (s_1, \dots, s_n) \in [0, T]^n, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

et  $H_i$  l'adhérence de  $\mathcal{E}$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_i}$  défini comme suit pour  $i = 1, \dots, d$ :

$$\left\langle \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{[0, s_k]}, \sum_{l=1}^m b_l \mathbf{1}_{[0, t_l]} \right\rangle_{H_i} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_k b_l \mathbb{E} (W_{s_k}^i W_{t_l}^i)$$

pour tous  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $(s_1, \dots, s_n) \in [0, T]^n$ ,  $(t_1, \dots, t_m) \in [0, T]^m$ ,  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ . Le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_i}$  confère à  $H_i$  une structure d'espace de Hilbert réel séparable appelé espace auto-reproduisant du processus gaussien  $W^i$ .

Pour  $i = 1, \dots, d$ , soit  $\mathbf{W}^i$  l'application définie sur  $\mathcal{E}$  par :

$$\mathbf{W}^i \left( \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{[0, s_k]} \right) = \sum_{k=1}^n a_k W_{s_k}^i$$

pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(s_1, \dots, s_n) \in [0, T]^n$  et  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Elle se prolonge (par un argument de *continuité/densité*) à  $H^i$  en une application appelée intégrale de Wiener par rapport à  $\mathbf{W}^i$ , et  $(\mathbf{W}^i(h), h \in H_i)$  est un processus gaussien iso-normal.

Dans la suite, sauf mention du contraire, nous considérons le processus gaussien iso-normal  $d$ -dimensionnel  $\mathbf{W} = (\mathbf{W}^1, \dots, \mathbf{W}^d)$  sur  $H = H_1 \oplus \dots \oplus H_d$  muni de son produit scalaire naturel  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ . Par extension,  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  est l'espace auto-reproduisant du processus gaussien  $d$ -dimensionnel  $W$ .

**Remarque.** Afin de simplifier la rédaction,  $\langle h, g \rangle_H$  ( $h, g \in H$ ) sera parfois identifié au vecteur

$$(\langle h^1, g^1 \rangle_{H_1}, \dots, \langle h^d, g^d \rangle_{H_d}).$$

PROPOSITION 2.5. Soit  $I = (I^1, \dots, I^d)$  l'application de  $H$  dans  $H^1$  telle que :

$$I^i(h) = \mathbb{E} [\mathbf{W}^i(h^i) W^i] \in H^1$$

pour tous  $h \in H = H_1 \oplus \dots \oplus H_d$  et  $i = 1, \dots, d$ . Alors,  $I$  est une isométrie de  $H$  dans  $H^1$ .

DÉMONSTRATION. D'une part, la linéarité de  $I$  comme application de  $H$  dans  $H^1$  découle directement de celle de  $\mathbf{W}$  comme application de  $\mathcal{E}$  dans  $L^2(\Omega)$  et d'un argument de *continuité/densité*.

D'autre part, par construction de  $\mathbf{W}$  et des produits scalaires sur  $H$  et  $H^1$  :

$$\begin{aligned} \langle I(h), I(g) \rangle_{H^1} &= \sum_{i=1}^d \langle \mathbb{E} [\mathbf{W}^i(h^i) W^i]; \mathbb{E} [\mathbf{W}^i(g^i) W^i] \rangle_{H_i^1} \\ &= \sum_{i=1}^d \mathbb{E} [\mathbf{W}^i(h^i) \mathbf{W}^i(g^i)] = \langle h, g \rangle_H \end{aligned}$$



pour toutes fonctions  $h, g \in H$ .  $\square$

Présentons les bases du calcul de Malliavin, tel qu'il est exposé par D. Nualart dans [73] pour le processus gaussien iso-normal  $\mathbf{W}$  défini ci-dessus. Les définitions et résultats suivants sont énoncés dans le cas  $d = 1$  pour simplifier :

**DÉFINITION 2.6.** *La dérivée de Malliavin d'une fonctionnelle régulière*

$$F = f[\mathbf{W}(h_1), \dots, \mathbf{W}(h_n)]$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in C_P^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  et  $h_1, \dots, h_n \in H$  est la variable aléatoire à valeurs dans  $H$  suivante :

$$\mathbf{D}F = \sum_{k=1}^n \partial_k f[\mathbf{W}(h_1), \dots, \mathbf{W}(h_n)] h_k.$$

**Remarque.** L'application  $\mathbf{D}$  associe un processus stochastique, dont les trajectoires sont des éléments de  $H$ , à la variable aléatoire de carré intégrable  $F$ .

**PROPOSITION 2.7.** *L'application  $\mathbf{D}$  est fermable de  $L^r(\Omega)$  dans  $L^r(\Omega; H)$  pour tout  $r \geq 1$ . Le domaine de  $\mathbf{D}$  dans  $L^r(\Omega)$  est noté  $\mathbb{D}^{1,r}$ . C'est l'adhérence de l'espace des fonctionnelles régulières pour la norme  $\|\cdot\|_{1,r}$  telle que :*

$$\|F\|_{1,r}^r = \mathbb{E}(|F|^r) + \mathbb{E}(\|\mathbf{D}F\|_H^r) < \infty; F \in L^r(\Omega).$$

Pour une preuve, se référer à [73], Proposition 1.2.1.

**PROPOSITION 2.8.** *Soient  $r \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable et de dérivées partielles bornées, et  $F = (F^1, \dots, F^n)$  un vecteur aléatoire dont les composantes appartiennent à  $\mathbb{D}^{1,r}$ . Alors,  $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,r}$  et*

$$\mathbf{D}[\varphi(F)] = \sum_{k=1}^n \partial_k \varphi(F) \mathbf{D}F^k.$$

Pour une preuve, se référer à [73], Proposition 1.2.3.

**Remarque.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  fonctionnelles régulières  $F_1, \dots, F_n$ ,  $h_1, \dots, h_n \in H$ , ainsi que la  $H$ -fonctionnelle régulière

$$F = \sum_{k=1}^n F_k h_k.$$

La dérivée de Malliavin de  $F$  est la variable aléatoire à valeurs dans  $H^{\otimes 2}$  définie par :

$$\mathbf{D}F = \sum_{k=1}^n \mathbf{D}F_k \otimes h_k.$$

Comme à la Proposition 2.7, l'application  $\mathbf{D}$  est fermable de  $L^r(\Omega; H)$  dans  $L^r(\Omega; H^{\otimes 2})$  pour tout  $r \geq 1$ . Le domaine de  $\mathbf{D}$  dans  $L^r(\Omega; H)$  est noté  $\mathbb{D}^{1,r}(H)$ . C'est l'adhérence de l'espace des  $H$ -fonctionnelles régulières pour la norme, toujours notée  $\|\cdot\|_{1,r}$ , telle que :

$$\|F\|_{1,r}^r = \mathbb{E}(\|F\|_H^r) + \mathbb{E}(\|\mathbf{D}F\|_{H^{\otimes 2}}^r) < \infty; F \in L^r(\Omega; H).$$

**DÉFINITION 2.9.** *La divergence  $\delta$  est l'adjoint de l'application  $\mathbf{D}$  :*

- (1) Le domaine de  $\delta$ , noté  $\text{dom}(\delta)$  est formé des variables aléatoires  $X$ , à valeurs dans  $H$ , telles que  $\mathbb{E}(\|X\|_H^2) < \infty$ , et satisfaisant :

$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \quad |\mathbb{E}(\langle \mathbf{D}F, X \rangle_H)| \leq C\mathbb{E}(F^2)$$

où,  $C > 0$  désigne une constante ne dépendant pas de  $F$ .

- (2) Pour tout  $X \in \text{dom}(\delta)$ ,  $\delta(X)$  est une variable aléatoire de carré intégrable telle que :

$$\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}, \quad \mathbb{E}(\langle \mathbf{D}F, X \rangle_H) = \mathbb{E}[F\delta(X)].$$

PROPOSITION 2.10. *L'espace  $\mathbb{D}^{1,2}(H)$  est inclus dans  $\text{dom}(\delta)$ .*

Pour une preuve, se référer à [73], Proposition 1.3.1.

DÉFINITION 2.11. *Une variable aléatoire  $F$  est localement dérivable au sens de Malliavin si et seulement si il existe une suite  $((\Omega_n, F_n); n \in \mathbb{N}^*)$  d'éléments de  $\mathcal{A} \times \mathbb{D}^{1,2}$  telle que  $\Omega_n \uparrow \Omega$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et,  $F = F_n$  sur  $\Omega_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . De telles variables aléatoires forment un espace vectoriel noté  $\mathbb{D}_{\text{loc}}^{1,2}$  contenant  $\mathbb{D}^{1,2}$ .*

**Remarques :**

- (1) Les espaces  $\mathbb{D}_{\text{loc}}^{1,2}(H)$  et  $\text{dom}_{\text{loc}}(\delta)$  se définissent de façon analogue.  
(2) Les définitions et résultats de calcul de Malliavin présentés ci-dessus se généralisent intuitivement au cas  $d$ -dimensionnel :

D'une part, si  $F = (F^1, \dots, F^d)$  avec  $F^i \in \mathbb{D}_i^{1,r}$  et  $\mathbb{D}_i^{1,r}$  le domaine de l'application  $\mathbf{D}_i$  associée à  $\mathbf{W}^i$  pour  $i = 1, \dots, d$ , alors  $\mathbf{D}F = (\mathbf{D}_1 F^1, \dots, \mathbf{D}_d F^d)$ .

D'autre part, si  $X = (X^1, \dots, X^d)$  avec  $X^i \in \text{dom}(\delta_i)$  et  $\text{dom}(\delta_i)$  le domaine de la divergence  $\delta_i$  associée à  $\mathbf{W}^i$  pour  $i = 1, \dots, d$ , alors  $\delta X = \delta_1 X^1 + \dots + \delta_d X^d$ .

DÉFINITION 2.12. *Soit  $E = \mathbb{R}^d$  ou  $E = H$ . Une variable aléatoire  $F : \Omega \rightarrow E$  est continûment  $H^1$ -différentiable si et seulement si, pour presque tout  $\omega \in \Omega$ ,  $h \mapsto F(\omega + h)$  est continûment différentiable de  $H^1$  dans  $E$ .*

PROPOSITION 2.13. *Toute variable aléatoire  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  continûment  $H^1$ -différentiable est localement dérivable au sens de Malliavin. Si de plus  $\mathbb{E}(\|F\|_H^2) < \infty$  et  $\mathbb{E}(\|\mathbf{D}F\|_H^2) < \infty$ , alors  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  et, pour presque tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $h \in H^1$ ,*

$$\langle \mathbf{D}F(\omega), I^{-1}(h) \rangle_H = D_h F^\omega(0)$$

avec  $F^\omega = F(\omega + \cdot)$ .

Pour une preuve, se référer à [73], Proposition 4.1.3 puis Lemma 4.1.2.

**Remarque.** La Proposition 2.13 s'étend au cas d'une variable aléatoire  $F : \Omega \rightarrow H$ . En d'autres termes, si  $F$  est continûment  $H^1$ -différentiable,  $\mathbb{E}(\|F\|_H^2) < \infty$  et  $\mathbb{E}(\|\mathbf{D}F\|_{H^{\otimes 2}}^2) < \infty$ , alors  $F \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$ .

De plus, soient  $d = 1$  et  $F$  une  $H$ -fonctionnelle régulière :

$$F = \sum_{k=1}^n F_k h_k$$

où,  $F_1, \dots, F_n$  désignent  $n \in \mathbb{N}^*$  fonctionnelles régulières et  $h_1, \dots, h_n \in H$ .

Si  $F_1, \dots, F_n$  sont continûment  $H^1$ -différentiables, avec les notations de la Proposition 2.13, pour presque tout  $\omega \in \Omega$  et tous  $a, b \in H$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{D}F(\omega), a \otimes b \rangle_{H^{\otimes 2}} &= \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{D}F_k(\omega) \otimes h_k, a \otimes b \rangle_{H^{\otimes 2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{D}F_k(\omega), a \rangle_H \langle h_k, b \rangle_H \\ &= \sum_{k=1}^n \langle D_{I(a)}F_k^\omega(0)h_k, b \rangle_H = \langle D_{I(a)}F^\omega(0), b \rangle_H. \end{aligned}$$

Cette égalité est valable lorsque  $d \geq 1$ , puis se prolonge aux fonctions de  $\mathbb{D}^{1,2}(H)$  continûment  $H^1$ -différentiables par un argument de *continuité/densité*.

A la proposition suivante,  $\mathbb{W}$  et  $\mathbb{W}^g$  ( $g = \text{Id}_{[0,T]}$ ) désignent les  $p$ -trajectoires géométriques définies en introduction de ce chapitre. Il en va de même pour le champ de vecteurs  $V = (V_1, \dots, V_d)$  :

PROPOSITION 2.14. *Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  et presque tout  $\omega \in \Omega$ , l'application  $h \mapsto \pi_V[0, x_0; \mathbb{W}^g(\omega + h)]$  est continûment différentiable de*

$$H^1 \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d).$$

En particulier, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_t \in \mathbb{D}_{loc}^{1,2}$  et pour tout  $h \in H^1$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{D}\pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_t, I^{-1}(h) \rangle_H &= D_{(h,0)}^{FV} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_t \\ &= \int_0^t J_{t \leftarrow s}^{\mathbb{W}^g} \sigma[\pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_s] dh_s. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 1.67, pour presque tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $h \in H^1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{W}^g(\omega + h) &= S_{[p]}[\mathbb{W}(\omega + h) \oplus g] \\ &= S_{[p]}[T_h \mathbb{W}(\omega) \oplus g] \\ &= T_{(h,0)} S_{[p]}[\mathbb{W}(\omega) \oplus g] \\ &= T_{(h,0)} \mathbb{W}^g(\omega). \end{aligned}$$

Donc, presque sûrement :

$$(25) \quad \pi_V[0, x_0; \mathbb{W}^g(\cdot + h)] = \pi_V[0, x_0; T_{(h,0)} \mathbb{W}^g].$$

De plus, l'Hypothèse 1.66 et le Corollaire 1.52 entraînent que l'application  $h \mapsto \pi_V[0, x_0; T_{(h,0)} \mathbb{W}^g]$  est continûment différentiable de

$$H^1 \subset C^{q\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d) \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d).$$

Ainsi, par l'égalité (25), l'application  $h \mapsto \pi_V[0, x_0; \mathbb{W}^g(\cdot + h)]$  est également continûment différentiable de

$$H^1 \text{ dans } C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d),$$

et pour presque tout  $\omega \in \Omega$  et tout  $h \in H^1$ ,

$$D_{(h,0)}^{FV} \pi_V[0, x_0; \mathbb{W}^g(\omega)] = D_h F^\omega(0)$$

avec  $F^\omega = \pi_V[0, x_0; \mathbb{W}^g(\omega + \cdot)]$ .

De plus, par le principe de Duhamel (cf. Théorème 1.51), pour tous  $t \in [0, T]$  et  $h \in H^1$ ,

$$\begin{aligned} D_{(h,0)}^{\text{FV}} \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_t &= \int_0^t J_{t \leftarrow s}^{\mathbb{W}^g} V[\pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_s](dh_s, 0) \\ &= \int_0^t J_{t \leftarrow s}^{\mathbb{W}^g} \sigma[\pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_s] dh_s. \end{aligned}$$

En conclusion,  $\pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_t$  est continûment  $H^1$ -différentiable et donc localement dérivable au sens de Malliavin par la Proposition 2.13, avec :

$$\langle \mathbf{D}\pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g)_t, I^{-1}(h) \rangle_H = D_h F^\omega(0).$$

□

L'isométrie  $I$  et son inverse peuvent être explicitées lorsque  $W$  est un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H \in ]0, 1[$  (noté  $B^H$ ). La fin de cette section y est consacrée. Pour éviter toute confusion, le processus gaussien iso-normal  $\mathbf{W}$  est noté  $\mathbf{B}^H$ , l'espace de Hilbert sur lequel il est défini est noté  $\mathcal{H}$  au lieu de  $H$ , et l'isométrie  $I$  de la Proposition 2.5 est notée  $I_H$ . Dans un premier temps, supposons que  $d = 1$ .

Rappelons d'abord que le mBf est un processus de Volterra (cf. L. Decreasefond et S. Ustunel [23]) :

DÉFINITION 2.15. Soient  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\alpha \in ]0, 1]$  :

(1) Si

$$l^\alpha(\varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds$$

existe pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $l^\alpha(\varphi)$  est l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de  $\varphi$ .

(2) Si

$$D^\alpha(\varphi)(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \varphi(s) ds & \text{si } \alpha \in ]0, 1[ \\ \dot{\varphi}(t) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

existe pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $D^\alpha(\varphi)$  est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de  $\varphi$ .

(3) Si elles sont toutes deux définies :

$$(l^\alpha \circ D^\alpha)(\varphi) = (D^\alpha \circ l^\alpha)(\varphi) = \varphi.$$

Sur les opérateurs fractionnaires, se référer à S. Samko et al. [78].

THÉORÈME 2.16. Soit  $K_H^*$  l'opérateur sur  $\mathcal{E}$  défini par :

$$\forall (s, t) \in \Delta_T, K_H^*(\mathbf{1}_{[0,t]})(s) = K_H(t, s) \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$$

où,

$$K_H(t, s) = \frac{(t-s)^{H-1/2}}{\Gamma(H+1/2)} \mathbf{F} \left( \frac{1}{2} - H, H - \frac{1}{2}, H + \frac{1}{2}, 1 - \frac{t}{s} \right) \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$$

et  $\mathbf{F}$  désigne la fonction hyper-géométrique de Gauss. Alors,

(1) Soit  $J_H : L^2([0, T]) \rightarrow H^1$  l'application définie par :

$$\forall h \in L^2([0, T]), J_H(h) = \int_0^\cdot h(s)K_H(\cdot, s)ds.$$

Pour tout  $h \in \mathcal{H}$ ,

$$J_H(h) = \begin{cases} l^{2H} \circ (\varphi_H^{-1}l^{1/2-H}) \circ (\varphi_H h) & \text{si } H \leq 1/2 \\ l^1 \circ (\varphi_H l^{H-1/2}) \circ (\varphi_H^{-1}h) & \text{si } H \geq 1/2 \end{cases}$$

où,  $\varphi_H$  désigne la fonction qui à tout  $a \in \mathbb{R}$  associe  $\varphi_H(a) = a^{H-1/2}\mathbf{1}_{a \geq 0}$ .

(2) L'opérateur  $K_H^*$  se prolonge (par un argument de continuité/densité) en une isométrie de  $\mathcal{H}$  dans le sous-espace vectoriel fermé  $\mathcal{G} = K_H^*(\mathcal{H})$  de  $L^2([0, T])$ .

(3) Le processus  $B = \mathbf{B}^H[(K_H^*)^{-1}(\mathbf{1}_{[0,\cdot]})]$  est un mouvement brownien standard et,

$$\forall t \in [0, T], B_t^H = \int_0^t K_H(t, s)dB_s.$$

(4) La divergence  $\delta_H$  associée au mBf iso-normal  $\mathbf{B}^H$  satisfait  $\delta_H = \delta_{1/2} \circ K_H^*$ .

Pour une preuve, se référer à [23], Theorem 2.1 et Corollary 3.1, ainsi qu'à [73], Proposition 5.2.2.

**Remarque.** Au Théorème 3.3 de [23], L. Decreusefond et S. Ustunel établissent que l'espace de Cameron-Martin  $H^1$  du mouvement Brownien fractionnaire  $B^H$  satisfait :

$$H^1 = \left\{ J_H(\dot{h}); \dot{h} \in L^2([0, T]) \right\}.$$

A partir des points 1, 2 et 3 du Théorème 2.16, nous fournissons une expression de l'isométrie  $I_H$  au corollaire suivant :

**COROLLAIRE 2.17.** *L'isométrie  $I_H$  satisfait  $I_H = J_H \circ K_H^*$ . En particulier,*

$$I_H^{-1} = \begin{cases} (K_H^*)^{-1} \circ (\varphi_H^{-1}D^{1/2-H}) \circ (\varphi_H D^{2H}) & \text{si } H \leq 1/2 \\ (K_H^*)^{-1} \circ (\varphi_H D^{H-1/2}) \circ (\varphi_H^{-1}D^1) & \text{si } H \geq 1/2 \end{cases}.$$

**DÉMONSTRATION.** D'une part, la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique d'Itô et le point 3 du Théorème 2.16 entraînent que pour tous  $s, t \in [0, T]$ ,

$$\int_0^{s \wedge t} K_H(t, u)K_H(s, u)du = \mathbb{E}(B_t^H B_s^H).$$

Soit encore, par définition de  $\mathbf{B}^H$  et  $I_H$  :

$$\int_0^{s \wedge t} K_H^*(\mathbf{1}_{[0,t]})(u)K_H(s, u)du = \mathbb{E}[\mathbf{B}^H(\mathbf{1}_{[0,t]})B_s^H].$$

Ainsi, la construction de  $I_H$  à la Proposition 2.5 entraîne que :

$$I_H(\mathbf{1}_{[0,t]}) = (J_H \circ K_H^*)(\mathbf{1}_{[0,t]}).$$

Cette égalité se prolonge aux fonctions de  $\mathcal{H}$  par un argument de *continuité/densité*.

D'autre part, puisque  $K_H^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$  et  $I_H : \mathcal{H} \rightarrow H^1$  sont deux applications inversibles, la restriction  $(J_H)|_{\mathcal{G}} = I_H \circ (K_H^*)^{-1}$  est elle-même inversible. Ainsi, par le point 1 du Théorème 2.16 :

$$I_H^{-1} = \begin{cases} (K_H^*)^{-1} \circ (\varphi_H^{-1}D^{1/2-H}) \circ (\varphi_H D^{2H}) & \text{si } H \leq 1/2 \\ (K_H^*)^{-1} \circ (\varphi_H D^{H-1/2}) \circ (\varphi_H^{-1}D^1) & \text{si } H \geq 1/2 \end{cases}.$$

□

**Remarque.** D'après le point 4 du Théorème 2.16 et le Corollaire 2.17 :

$$\delta_H \circ I_H = \delta_{1/2} \circ (J_H)_{|\mathcal{G}}^{-1}.$$

### 3. Calcul de sensibilités

Cette section répond à la problématique posée en introduction de ce chapitre en mobilisant les résultats déterministes sur les RDEs établis à la Section 4 du Chapitre 1, ainsi que les résultats probabilistes sur les RDEs dirigées par une trajectoire géométrique gaussienne établis à la Section 5 du Chapitre 1 et à la Section 2 de ce chapitre.

Dans toute cette section,  $\mathbb{W}$  et  $\mathbb{W}^g$  ( $g = \text{Id}_{[0,T]}$ ) désignent les  $p$ -trajectoires géométriques définies en introduction de ce chapitre. Il en va de même pour le champ de vecteurs  $V$ .

Supposons que les *objets*  $W$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  définis en introduction satisfont l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 2.18.** *Le processus  $W$  satisfait les hypothèses 1.64 et 1.66. Son espace de Cameron-Martin  $H^1$  satisfait :*

$$C_0^1([0, T]; \mathbb{R}^d) \subset H^1.$$

De plus, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall h \in C_0^1([0, T]; \mathbb{R}^d), \|h\|_{H^1} \leq C \|\dot{h}\|_{\infty; T}.$$

Les fonctions  $\mu$  et  $\sigma$  satisfont l'Hypothèse 2.4 et, pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma(a)$  est une matrice inversible. De plus, l'application  $\sigma^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est bornée.

**Remarque.** Les notations introduites à la section précédente sont conservées pour le processus gaussien iso-normal naturellement associé à  $W$ .

**Exemple.** Un mouvement Brownien fractionnaire  $B^H$  d'indice de Hurst  $H \in ]1/4, 1[$  satisfait l'Hypothèse 2.18. En effet, il a été établi à la Section 5 du Chapitre 1 que  $B^H$  satisfait les hypothèses 1.64 et 1.66. Par le point 1 de [23], Theorem 3.3 :

$$C_0^1([0, T]; \mathbb{R}^d) \subset H^1.$$

Soit  $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continûment différentiable telle que  $h_0 = 0$ . D'après le point 2 de [23], Theorem 3.3 :

$$\begin{aligned} \|h\|_{H^1} &= \|J_H^{-1}(h)\|_{L^2([0, T])} \\ &= \|(J_H^{-1} \circ I_{1/2})(\dot{h})\|_{L^2([0, T])} \leq C \|\dot{h}\|_{\infty; T} \end{aligned}$$

où,  $C$  désigne la norme de l'application linéaire  $J_H^{-1} \circ I_{1/2}$ , continue de

$$C^0([0, T]; \mathbb{R}^d) \subset L^2([0, T]) \text{ dans } L^2([0, T]).$$

Supposons également que la fonction  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait l'une des deux hypothèses suivantes :

**HYPOTHÈSE 2.19.** *La fonction  $F$  est continûment différentiable de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ . De plus, il existe deux constantes  $C > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  telles que, pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$|F(a)| \leq C(1 + \|a\|)^N \text{ et } \|DF(a)\|_{\mathcal{L}} \leq C(1 + \|a\|)^N.$$

HYPOTHÈSE 2.20. *Il existe deux constantes  $C > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  telles que, pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$|F(a)| \leq C(1 + \|a\|)^N.$$

Alors, les résultats suivants répondent, au moins partiellement, à la problématique posée en introduction de ce chapitre :

**Notations :**

- Soit  $\mathbb{S}_p \subset \text{Lip}^\gamma(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$  l'espace des fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ,  $[p] + 1$  fois différentiables, bornées et de différentielles successives bornées.
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , la quantité  $\mathbb{E}[F(X_T)]$  est notée  $f_T(x, \sigma)$ .

THÉORÈME 2.21. *Sous les hypothèses 2.18 et 2.19 :*

- (1) *La fonction  $f_T(\cdot, \sigma)$  est différentiable de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$  et, pour tous  $x, v \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$\partial_x f_T(x, \sigma) \cdot v = \mathbb{E} [\langle \mathbf{D}(F \circ X_T^x), I^{-1}(h^{x,v}) \rangle_H ]$$

où,

$$h^{x,v} = \frac{1}{T} \int_0^\cdot \sigma^{-1}(X_s^x) J_{s \leftarrow 0}^{\mathbb{W}^g} v ds.$$

- (2) *Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , la fonction  $f_T(x, \cdot)$  est différentiable de  $\mathbb{S}_p$  dans  $\mathbb{R}$  et, pour tous  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{S}_p$  satisfaisant l'Hypothèse 2.18,*

$$\partial_\sigma f_T(x, \sigma) \cdot \tilde{\sigma} = \mathbb{E} [\langle \mathbf{D}(F \circ X_T^\sigma), I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}}) \rangle_H ]$$

où,

$$h^{\sigma, \tilde{\sigma}} = \frac{1}{T} \int_0^\cdot \sigma^{-1}(X_s^\sigma) J_{s \leftarrow T}^{\mathbb{W}^g} \partial_\sigma X_T^\sigma \cdot \tilde{\sigma} ds.$$

DÉMONSTRATION. Les points 1 et 2 se démontrent de façon analogue :

- (1) D'une part, pour tous  $\varepsilon \in ]0, 1]$ ,  $\eta > 0$  et  $x, v \in \mathbb{R}^d$ , par la formule de Taylor avec reste intégral, puis le premier point du Corollaire 1.49 ; il existe une constante  $C_1 > 0$  dépendant seulement de  $p, \gamma, \eta$  et  $\|V\|_{\text{lip}^\gamma}$  telle que :

$$\begin{aligned} \frac{|F(X_T^{x+\varepsilon v}) - F(X_T^x)|}{\varepsilon} &= \left| \int_0^1 \langle DF(X_T^{x+\theta\varepsilon v}), DX_T^{x+\theta\varepsilon v} \cdot v \rangle d\theta \right| \\ &\leq C_1 \|v\| e^{C_1 M_{\eta, I, p}(\mathbb{W})} \int_0^1 \|DF(X_T^{x+\theta\varepsilon v})\|_{\mathcal{L}} d\theta. \end{aligned}$$

De plus, puisque  $F$  satisfait l'Hypothèse 2.19, il existe deux constantes  $C_2 > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ , dépendant seulement de  $F$ , telles que pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\|DF(X_T^{x+\theta\varepsilon v})\|_{\mathcal{L}} \leq C_2 (1 + \|X_T^{x+\theta\varepsilon v}\|)^N.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire et le Théorème 1.39, il existe une constante  $C_3 > 0$ , ne dépendant pas de  $x, v, \theta, \varepsilon, V$  et  $\mathbb{W}$ , telle que :

$$\begin{aligned} \|DF(X_T^{x+\theta\varepsilon v})\|_{\mathcal{L}} &\leq C_2 [1 + \|x\| + \|v\| + \\ &C_3 [\|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}} \|\mathbb{W}^g\|_{p\text{-var}; T} \vee \|V\|_{\text{lip}^{\gamma-1}}^p \|\mathbb{W}^g\|_{p\text{-var}; T}^p]]^N. \end{aligned}$$

Puisque  $W$  satisfait les hypothèses 1.64 et 1.66, par le Corollaire 1.70, la généralisation du théorème de Fernique au Théorème 1.65 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\varepsilon \in ]0, 1] \longmapsto \frac{|F(X_T^{x+\varepsilon v}) - F(X_T^x)|}{\varepsilon}$$

est bornée par une variable aléatoire intégrable ne dépendant pas  $\varepsilon$ . Ainsi, par le théorème de convergence dominée,  $f_T(\cdot, \sigma)$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^d$  et

$$(26) \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^d, \partial_x f_T(x, \sigma) \cdot v = \mathbb{E} [\langle DF(X_T^x), \partial_x X_T^x \cdot v \rangle].$$

D'autre part, soient  $x, v \in \mathbb{R}^d$ . Par construction, les trajectoires du processus  $h^{x,v}$  s'annulent en 0 et sont continûment différentiables de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Donc, puisque  $W$  satisfait l'Hypothèse 2.18,  $h^{x,v}$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $H^1$ . Par le principe de Duhamel (cf. Théorème 1.51) :

$$\begin{aligned} D_{(h^{x,v}, 0)}^{\text{FV}} X_T^x &= \int_0^T J_{T \leftarrow s}^{\mathbb{W}^g} \sigma(X_s^x) dh_s^{x,v} \\ &= \partial_x X_T^x \cdot v. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'égalité (26), puis les propositions 2.14 et 2.8 :

$$\begin{aligned} \partial_x f_T(x, \sigma) \cdot v &= \mathbb{E} [DF(X_T^x) \cdot D_{(h^{x,v}, 0)}^{\text{FV}} X_T^x] \\ &= \mathbb{E} [DF(X_T^x) \cdot \langle \mathbf{D} X_T^x, I^{-1}(h^{x,v}) \rangle_H] \\ &= \mathbb{E} [\langle \mathbf{D}(F \circ X_T^x), I^{-1}(h^{x,v}) \rangle_H]. \end{aligned}$$

(2) Soit  $x \in \mathbb{R}^d$  fixé. D'une part, pour tous  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{S}_p$ , par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} \frac{|F(X_T^{\sigma+\varepsilon\tilde{\sigma}}) - F(X_T^\sigma)|}{\varepsilon} &= \left| \int_0^1 \langle DF(X_T^{\sigma+\theta\varepsilon\tilde{\sigma}}), DX_T^{\sigma+\theta\varepsilon\tilde{\sigma}} \cdot \tilde{\sigma} \rangle d\theta \right| \\ &\leq C_2 \int_0^1 (1 + \|X_T^{\sigma+\theta\varepsilon\tilde{\sigma}}\|)^N \|DX_T^{\sigma+\theta\varepsilon\tilde{\sigma}} \cdot \tilde{\sigma}\|_{\infty; T} d\theta. \end{aligned}$$

Au Théorème 1.39, la constante intervenant dans la majoration ne dépend ni du signal, ni du champ de vecteurs. Au second point du Corollaire 1.49, les deux constantes intervenant dans la majoration dépendent continûment de la norme  $\gamma$ -Lipschitz du champ de vecteurs. Donc, il existe une constante  $C_4 > 0$ , dépendant de  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  et non de  $\varepsilon$  et  $\mathbb{W}$ , telle que pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$\|DX_T^{\sigma+\theta\varepsilon\tilde{\sigma}} \cdot \tilde{\sigma}\|_{\infty; T} \leq C_4 e^{C_4 M_{C_4, I, p}(\mathbb{W})}$$

et

$$\begin{aligned} \|X^{\sigma+\theta\varepsilon\tilde{\sigma}}\|_{p\text{-var}; T} &\leq \|X^{\sigma+\theta\varepsilon\tilde{\sigma}}\|_{\infty; T} \\ &\leq C_4 (\|\mathbb{W}^g\|_{p\text{-var}; T} \vee \|\mathbb{W}^g\|_{p\text{-var}; T}^p). \end{aligned}$$

Puisque  $W$  satisfait les hypothèses 1.64 et 1.66, par la Proposition 1.68, le Théorème 1.69, la généralisation du théorème de Fernique au Théorème 1.65 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\varepsilon \in ]0, 1] \longmapsto \frac{|F(X_T^{\sigma+\varepsilon\tilde{\sigma}}) - F(X_T^\sigma)|}{\varepsilon}$$

est bornée par une variable aléatoire intégrable ne dépendant pas  $\varepsilon$ . Ainsi, par le théorème de convergence dominée,  $f_T(x, \cdot)$  est différentiable sur  $\mathbb{S}_p$  et

$$(27) \quad \forall \sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{S}_p, \partial_\sigma f_T(x, \sigma) \cdot \tilde{\sigma} = \mathbb{E} [\langle DF(X_T^\sigma), \partial_\sigma X_T^\sigma \cdot \tilde{\sigma} \rangle].$$

D'autre part, soient  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{S}_p$  satisfaisant l'Hypothèse 2.18. Par construction, les trajectoires du processus  $h^{\sigma, \tilde{\sigma}}$  s'annulent en 0 et sont continûment



différentiables de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Donc,  $h^{\sigma, \tilde{\sigma}}$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $H^1$ . Par le principe de Duhamel (cf. Théorème 1.51) :

$$\begin{aligned} D_{(h^{\sigma, \tilde{\sigma}}, 0)}^{\text{FV}} X_T^\sigma &= \int_0^T J_{T \leftarrow s}^{\mathbb{W}^g} \sigma(X_s^\sigma) dh_s^{\sigma, \tilde{\sigma}} \\ &= \partial_\sigma X_T^\sigma \cdot \tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'égalité (27), puis les propositions 2.14 et 2.8 :

$$\begin{aligned} \partial_\sigma f_T(x, \sigma) \cdot \tilde{\sigma} &= \mathbb{E}[DF(X_T^\sigma) \cdot D_{(h^{\sigma, \tilde{\sigma}}, 0)}^{\text{FV}} X_T^\sigma] \\ &= \mathbb{E}[DF(X_T^\sigma) \cdot \langle \mathbf{D}X_T^\sigma, I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}}) \rangle_H] \\ &= \mathbb{E}[\langle \mathbf{D}(F \circ X_T^\sigma), I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}}) \rangle_H]. \end{aligned}$$

□

### Remarques :

- (1) Notez que la différentiabilité des applications partielles de  $f_T$  nécessite seulement les hypothèses 1.64, 1.66, 2.4 et 2.19.
- (2) L'Hypothèse 1.64 ne sert qu'à garantir l'existence de la  $p$ -trajectoire géométrique  $\mathbb{W}$ , au-dessus du processus gaussien  $W$ , au Théorème 1.65. De plus, en supposant  $c_W$  de  $p$ -variation finie avec  $p \in [1, 2[$ , la Proposition 1.62 entraîne que  $W$  satisfait l'Hypothèse 1.66 pour  $q = p$ . Ainsi, lorsque  $p \in [1, 2[$ , le Théorème 2.21 reste vrai sous l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 2.22.** *Le processus  $W$  est  $d$ -dimensionnel, gaussien, centré et à trajectoires continues de  $p$ -variation finie ( $p \in [1, 2[$ ). De plus, la fonction de covariance  $c_W$  de  $W$  est de  $p$ -variation  $2D$  finie, son espace de Cameron-Martin  $H^1$  satisfait*

$$C_0^1([0, T]; \mathbb{R}^d) \subset H^1,$$

et il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\forall h \in C_0^1([0, T]; \mathbb{R}^d), \quad \|h\|_{H^1} \leq C \|h\|_{\infty; T}.$$

Les fonctions  $\mu$  et  $\sigma$  sont  $[p] + 2$  fois différentiables, bornées et de différentielles successives bornées et, pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma(a)$  est une matrice inversible. De plus, l'application  $\sigma^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  est bornée.

**Exemple.** Un mouvement Brownien fractionnaire  $B^H$  d'indice de Hurst  $H \in ]1/2, 1[$  satisfait l'Hypothèse 2.22. En effet, par le critère de continuité de Kolmogorov (cf. Lemme 1.58), il existe au moins un réel  $\varepsilon > 0$  et  $C_T \in L^1(\Omega; \mathbb{R}_+^*)$  tels que pour tout  $(s, t) \in \bar{\Delta}_T$ ,

$$(28) \quad \|B_t^H - B_s^H\| \leq C_T |t - s|^{1/p} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

où,  $p = 1/(H - \varepsilon) \in [1, 2[$ .

De plus, lorsque  $d = 1$  (pour simplifier), l'inégalité (28) entraîne :

$$\begin{aligned}
\|c_H\|_{p\text{-var};[0,T]^2}^p &= \sup_{\substack{D_1 = \{r_k^1\} \in D_T \\ D_2 = \{r_l^2\} \in D_T}} \sum_{k=1}^{|D_1|-1} \sum_{l=1}^{|D_2|-1} \left| c_H \begin{pmatrix} r_k^1 & r_{k+1}^1 \\ r_l^2 & r_{l+1}^2 \end{pmatrix} \right|^p \\
&\leq \sup_{\substack{D_1 = \{r_k^1\} \in D_T \\ D_2 = \{r_l^2\} \in D_T}} \sum_{k=1}^{|D_1|-1} \sum_{l=1}^{|D_2|-1} \mathbb{E}^{p/2} \left( \left| B_{r_{k+1}^1}^H - B_{r_k^1}^H \right|^2 \right) \mathbb{E}^{p/2} \left( \left| B_{r_{l+1}^2}^H - B_{r_l^2}^H \right|^2 \right) \\
&\leq \mathbb{E}^p (C_T^2) \sup_{\substack{D_1 = \{r_k^1\} \in D_T \\ D_2 = \{r_l^2\} \in D_T}} \sum_{k=1}^{|D_1|-1} \sum_{l=1}^{|D_2|-1} |r_{k+1}^1 - r_k^1| |r_{l+1}^2 - r_l^2| \\
&\leq \mathbb{E}^p (C_T^2) T^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Donc,  $c_H$  est de  $p$ -variation 2D finie.

Afin d'introduire la divergence  $\delta$  par dualité (cf. Définition 2.9) dans les expressions obtenues au Théorème 2.21, en conservant les mêmes notations, il faut établir que les processus  $I^{-1}(h^{x,v})$  et  $I^{-1}(h^{\sigma,\tilde{\sigma}})$  appartiennent à  $\text{dom}(\delta)$ . Pour cela, via la Proposition 1.54, nous montrons au corollaire suivant qu'ils appartiennent à  $\mathbb{D}^{1,2}(H)$ , au moins lorsque  $p \in [1, 2[$  :

COROLLAIRE 2.23. *Sous les hypothèses 2.22 et 2.19 ou 2.20 :*

(1) *Pour tous  $x, v \in \mathbb{R}^d$ ,  $I^{-1}(h^{x,v}) \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$  et*

$$\partial_x f_T(x, \sigma) \cdot v = \mathbb{E} [F(X_T^x) \delta [I^{-1}(h^{x,v})]] .$$

(2) *Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et tous  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{S}_{p+1}$  satisfaisant l'Hypothèse 2.22,  $I^{-1}(h^{\sigma,\tilde{\sigma}}) \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$  et*

$$\partial_\sigma f_T(x, \sigma) \cdot \tilde{\sigma} = \mathbb{E} [F(X_T^\sigma) \delta [I^{-1}(h^{\sigma,\tilde{\sigma}})]] .$$

DÉMONSTRATION. Soient  $x, v \in \mathbb{R}^d$  et  $\sigma, \tilde{\sigma} \in \mathbb{S}_{p+1}$  satisfaisant l'Hypothèse 2.22. Chaque fois qu'il y aura ambiguïté, les processus  $h^{x,v}$  et  $h^{\sigma,\tilde{\sigma}}$  introduits au Théorème 2.21 seront respectivement notés  $h^{x,v}(W)$  et  $h^{\sigma,\tilde{\sigma}}(W)$ .

Avec les notations de la Proposition 1.54 :

$$h^{x,v} = \frac{1}{T} \int_0^\cdot R_s^1(W, g) ds \text{ et } h^{\sigma,\tilde{\sigma}} = \frac{1}{T} \int_0^\cdot R_s^2(W, g) ds$$

où,

$$R^1(W, g) = \sigma^{-1} [\pi_V [0, x; (W, g)]] D^1(W, g)v$$

et

$$R^2(W, g) = \sigma^{-1} [\pi_V [0, x; (W, g)]] D^1(W, g) D_T^2(W, g) D_T^3(W, g).$$

Les différentielles premières de  $R^1(w, g)$  et  $R^2(w, g)$  par rapport à la fonction  $w \in C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$ , dans la direction  $\eta \in H^1 \hookrightarrow C^{p\text{-var}}([0, T]; \mathbb{R}^d)$  (par la Proposition 1.62), s'expriment comme une somme de produits faisant seulement intervenir  $D^1(w, g)$ ,  $D^2(w, g)$  et  $D^3(w, g)$ , ainsi que leurs différentielles premières par rapport à  $w$ , dans la direction  $\eta$ .

Donc, par la Proposition 1.54, il existe deux constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$ , ne dépendant pas de  $w$  et  $g$ , telles que :

$$(29) \quad \|\partial_w R^1(w, g) \cdot \eta\|_{\infty; T} \leq C_1 \exp [C_1 (\|\eta\|_{H^1}^p + \|w\|_{p\text{-var}; T}^p)]$$

et

$$(30) \quad \|\partial_w R^2(w, g) \cdot \eta\|_{\infty; T} \leq C_2 \exp [C_2 (\|\eta\|_{H^1}^p + \|w\|_{p\text{-var}; T}^p)],$$

car :

$$\begin{aligned} \partial_w R^1(w, g) \cdot \eta &= \partial_{(w, g)} R^1(w, g) \cdot (\eta, 0) \text{ et} \\ \partial_w R^2(w, g) \cdot \eta &= \partial_{(w, g)} R^2(w, g) \cdot (\eta, 0). \end{aligned}$$

D'une part, montrons que  $I^{-1}(h^{x, v})$  et  $I^{-1}(h^{\sigma, \bar{\sigma}})$  appartiennent à  $\mathbb{D}^{1,2}(H)$  :

- (1) En premier lieu, pour tous  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et  $t \in [0, T]$ , par le formule de Taylor avec reste intégral, puis l'inégalité (29) :

$$\begin{aligned} \frac{\|R_t^1[(W, g) + \varepsilon(\eta, 0)] - R_t^1(W, g)\|}{\varepsilon} &= \left\| \int_0^1 DR_t^1 [(W, g) + \varepsilon\theta(\eta, 0)] \cdot (\eta, 0) d\theta \right\| \\ &\leq C_3 \exp [C_3 (\|\eta\|_{H^1}^p + \|W\|_{p\text{-var}; T}^p)] \end{aligned}$$

où,  $C_3 > 0$  est une constante déterministe, ne dépendant pas de  $\varepsilon$ ,  $t$ ,  $\eta$  et  $W$ . Donc, par le théorème de convergence dominée :

$$(31) \quad D_\eta h^{x, v}(W) = \frac{1}{T} \int_0^T \partial_W R_s^1(W, g) \cdot \eta ds$$

et  $I^{-1}(h^{x, v})$  est localement dérivable au sens de Malliavin.

En second lieu, puisque  $I$  est une isométrie de  $H$  dans  $H^1$ , et que  $\sigma$  et  $W$  satisfont l'Hypothèse 2.22, il existe deux constantes déterministes  $C_4 > 0$  et  $C_5 > 0$  telles que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|I^{-1}(h^{x, v})\|_H^2] &= \mathbb{E} (\|h^{x, v}\|_{H^1}^2) \\ &\leq C_4 \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\dot{h}_t^{x, v}\|^2 \right) \\ &\leq C_5 \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|J_{t \leftarrow 0}^{W, g}\|_{\mathcal{M}}^2 \right). \end{aligned}$$

Donc, par le Corollaire 1.70,  $\mathbb{E} [\|I^{-1}(h^{x, v})\|_H^2] < \infty$ .

En troisième lieu, puisque  $I : H \rightarrow H^1$  est une isométrie, en particulier

$I^{-1}$  est une application linéaire et continûment différentiable, et par la remarque consécutive à la Proposition 2.13 :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{D}[I^{-1}(h^{x,v})]\|_{H^{\otimes 2}}^2 &\leq \sup_{\substack{a,b \in H \\ \|a \otimes b\|_{H^{\otimes 2}} \leq 1}} |\langle \mathbf{D}[I^{-1}(h^{x,v})], a \otimes b \rangle_{H^{\otimes 2}}| \\
&= \sup_{\substack{a,b \in H \\ \|a \otimes b\|_{H^{\otimes 2}} \leq 1}} |\langle D_{I(a)}[I^{-1}(h^{x,v})](W), b \rangle_H| \\
&= \sup_{\substack{a,b \in H \\ \|a \otimes b\|_{H^{\otimes 2}} \leq 1}} |\langle I^{-1}[D_{I(a)}h^{x,v}(W)], b \rangle_H| \\
&= \sup_{\substack{a,b \in H \\ \|a \otimes b\|_{H^{\otimes 2}} \leq 1}} |\langle D_{I(a)}h^{x,v}(W), I(b) \rangle_{H^1}| \\
&\leq \sup_{\substack{a \in H^1 \\ \|a\|_{H^1} \leq 1}} \|D_a h^{x,v}(W)\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après l'égalité (31), et puisque  $\sigma$  et  $W$  satisfont l'Hypothèse 2.22 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\|\mathbf{D}[I^{-1}(h^{x,v})]\|_{H^{\otimes 2}}^2] &\leq \frac{C_4}{T} \mathbb{E} \left( \sup_{\substack{a \in H^1 \\ \|a\|_{H^1} \leq 1}} \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_W R_t^1(W, g).a\| \right) \\
&\leq \frac{C_1 C_4}{T} \mathbb{E} [\exp [C_1 (1 + \|W\|_{p\text{-var}; T}^p)]] < \infty
\end{aligned}$$

par le théorème de Fernique.

(2) En premier lieu, pour tous  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et  $t \in [0, T]$ , par la formule de Taylor avec reste intégral, puis l'inégalité (30) :

$$\begin{aligned}
\frac{\|R_t^2[(W, g) + \varepsilon(\eta, 0)] - R_t^2(W, g)\|}{\varepsilon} &= \left\| \int_0^1 DR_t^2 [(W, g) + \varepsilon\theta(\eta, 0)].(\eta, 0) d\theta \right\| \\
&\leq C_6 \exp [C_6 (\|\eta\|_{H^1}^p + \|W\|_{p\text{-var}; T}^p)]
\end{aligned}$$

où,  $C_6 > 0$  est une constante déterministe, ne dépendant pas de  $\varepsilon$ ,  $t$ ,  $\eta$  et  $W$ . Donc, par le théorème de convergence dominée :

$$(32) \quad D_\eta h^{\sigma, \tilde{\sigma}}(W) = \frac{1}{T} \int_0^1 \partial_W R_s^2(W, g). \eta ds$$

et  $I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}})$  est localement dérivable au sens de Malliavin.

En second lieu, puisque  $I$  est une isométrie de  $H$  dans  $H^1$ , et que  $\sigma$  et  $W$  satisfont l'Hypothèse 2.22, il existe une constante déterministe  $C_7 > 0$  telle que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\|I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}})\|_H^2] &= \mathbb{E} (\|h^{\sigma, \tilde{\sigma}}\|_{H^1}^2) \\
&\leq C_4 \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|\dot{h}_t^{\sigma, \tilde{\sigma}}\|^2 \right) \\
&\leq C_7 \mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|D_t^1(W, g)\|_{\mathcal{M}}^2 \|D_T^2(W, g)\|_{\mathcal{M}}^2 \|D_T^3(W, g)\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Donc, par le Corollaire 1.70,  $\mathbb{E}[\|I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}})\|_H^2] < \infty$ .

En troisième lieu, en procédant exactement comme au point 1, d'après l'égalité (32), et puisque  $\sigma$  et  $W$  satisfont l'Hypothèse 2.22 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\mathbf{D}[I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}})]\|_{H^{\otimes 2}}^2] &\leq \frac{C_4}{T} \mathbb{E} \left( \sup_{\substack{a \in H^1 \\ \|a\|_{H^1} \leq 1}} \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_W R_t^2(W, g).a\| \right) \\ &\leq \frac{C_2 C_4}{T} \mathbb{E} [\exp [C_2 (1 + \|W\|_{p\text{-var}; T}^p)]] < \infty \end{aligned}$$

par le théorème de Fernique.

Ainsi,  $I^{-1}(h^{x, v})$  et  $I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}})$  appartiennent à  $\text{dom}(\delta)$  et, si  $F$  satisfait l'Hypothèse 2.19, d'après le Théorème 2.21 :

$$\partial_x f_T(x, \sigma).v = \mathbb{E} [F(X_T^x) \delta [I^{-1}(h^{x, v})]]$$

et

$$\partial_\sigma f_T(x, \sigma).\tilde{\sigma} = \mathbb{E} [F(X_T^\sigma) \delta [I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}})]] .$$

D'autre part, soient  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction satisfaisant l'Hypothèse 2.20,  $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$  une suite régularisante de fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}_+$  à support compact,  $K_n$  le support de  $\varphi_n$ ,  $F_n = \varphi_n * F$  et  $f_T^n(x, \sigma) = \mathbb{E}[F_n(X_T)]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Puisque  $F$  satisfait l'Hypothèse 2.20, il existe deux constantes  $C_8 > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ , telles que pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ ,

$$(33) \quad |F(a)| \leq C_8 (1 + \|a\|)^N .$$

Par conséquent,  $F \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$  et la suite de fonctions  $(F_n, n \in \mathbb{N})$  converge presque partout vers  $F$ . En particulier,

$$F_n(X_T) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} F(X_T) .$$

Par construction, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  satisfait l'Hypothèse 2.19. Donc,

$$\partial_x f_T^n(x, \sigma).v = \mathbb{E} [F_n(X_T^x) \delta [I^{-1}(h^{x, v})]]$$

et

$$\partial_\sigma f_T^n(x, \sigma).\tilde{\sigma} = \mathbb{E} [F_n(X_T^\sigma) \delta [I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}})]] .$$

D'après l'inégalité (33), pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |F_n(X_T)| &\leq \int_{K_n} \varphi_n(a) |F(X_T - a)| da \\ &\leq \sup_{a \in K_n} (1 + \|X_T\| + \|a\|)^N \int_{K_n} \varphi_n(a) da \\ &\leq (1 + \|X_T\| + M)^N \in L^2(\Omega) \text{ avec } M = \sup_{a \in K_n} \|a\|. \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée :

$$f_T^n(x, \sigma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f_T(x, \sigma) .$$

De plus, puisque les variables aléatoires  $\delta[I^{-1}(h^{x, v})]$  et  $\delta[I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}})]$  sont de carré intégrable, par le théorème de convergence dominée :

$$\partial_x f_T(x, \sigma).v = \mathbb{E} [F(X_T^x) \delta [I^{-1}(h^{x, v})]]$$

et

$$\partial_\sigma f_T(x, \sigma) \cdot \tilde{\sigma} = \mathbb{E} \left[ F(X_T^\sigma) \delta \left[ I^{-1}(h^{\sigma, \tilde{\sigma}}) \right] \right].$$

□

**Remarque.** Le raisonnement employé pour obtenir la majoration (20) à la Proposition 1.54 ne s'étend pas au cas  $p \geq 2$ , car la dérivation au sens de Friz-Victoir d'une fonction de  $\mathbb{W}$  impose de *perturber*  $\mathbb{W}$  dans une direction de  $q$ -variation finie avec  $1/p + 1/q > 1$ . Ainsi, une autre approche doit être employée pour étendre le Corollaire 2.23 au cas  $p \geq 2$ .

#### 4. Application et simulations

Dans la dernière section de ce chapitre, nous proposons d'appliquer le Théorème 2.21 et le Corollaire 2.23 au calcul de sensibilités dans un modèle de marché financier à volatilité stochastique, dont chaque équation est dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire d'indice de Hurst strictement compris entre  $1/4$  et  $1$ . Toujours avec un signal Brownien fractionnaire, nous effectuons quelques simulations des sensibilités aux variations de la condition initiale et du champ de vecteurs, lorsque l'indice de Hurst du mBf est strictement compris entre  $1/2$  et  $1$ .

##### 4.1. Calcul de sensibilités dans un modèle à volatilité stochastique.

Depuis les travaux de B.B. Mandelbrot et J.W. Van Ness (notamment [64]), le mBf est étudié comme généralisation du MB dans la modélisation des cours d'actifs financiers. L'impact du choix de l'indice de Hurst, tant trajectorien que probabiliste (par exemple sur la mémoire du processus), font du mBf un outil riche d'applications dans ce contexte. Cependant, une difficulté notable se pose ; pour un indice de Hurst différent de  $1/2$ , le mBf n'est pas une semi-martingale (cf. [73], Proposition 5.1.1). Dans [77], L.C.G. Rogers en a déduit l'existence d'arbitrages lorsque le prix d'un actif est modélisé par un mBf, ce qui remet en cause l'hypothèse de viabilité du marché habituellement vérifiée en mathématiques financières. Pour palier à cette difficulté, plusieurs approches ont été envisagées. Citons par exemple les travaux de P. Cheridito [11] qui propose le *mixed fractional Brownian motion* (i.e. la somme d'un MB et d'un mBf multiplié par une constante non nulle), une semi-martingale, en remplacement du mBf lui-même. Malgré ces difficultés, dans cette sous-section, les cours de l'actif financier suivent un modèle à volatilité stochastique fractionnaire (pris au sens des trajectoires rugueuses), puis la sensibilité du prix d'une option aux variations de la volatilité est calculée en utilisant le Théorème 2.21 et le Corollaire 2.23.

Soient  $W$  un processus stochastique, ainsi que  $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\kappa : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ ,  $\sigma, \vartheta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  et  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  quatre fonctions satisfaisant l'une des hypothèses suivantes :

**HYPOTHÈSE 2.24.** *Il existe deux mBf  $d$ -dimensionnels indépendants  $B^{H_1}$  et  $B^{H_2}$ , d'indices de Hurst respectifs  $H_1 \in ]1/4, 1[$  et  $H_2 \in ]1/4, 1[$ , tels que  $W = (B^{H_1}, B^{H_2})$ .*

*Les fonctions  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\vartheta$  satisfont l'Hypothèse 2.18 pour  $p = 1/(H_1 - \varepsilon) \vee 1/(H_2 - \varepsilon) < 4$  et  $\varepsilon > 0$  aussi proche de 0 que possible. Les fonctions  $\kappa$  et  $F$  sont telles que  $F \circ \kappa$  satisfait l'Hypothèse 2.19.*

**HYPOTHÈSE 2.25.** *Il existe deux mBf  $d$ -dimensionnels indépendants  $B^{H_1}$  et  $B^{H_2}$ , d'indices de Hurst respectifs  $H_1 \in ]1/2, 1[$  et  $H_2 \in ]1/2, 1[$ , tels que  $W = (B^{H_1}, B^{H_2})$ .*

Les fonctions  $\mu$ ,  $\sigma$  et  $\vartheta$  satisfont l'Hypothèse 2.22 pour  $p = 1/(H_1 - \varepsilon) \vee 1/(H_2 - \varepsilon) < 2$  et  $\varepsilon > 0$  aussi proche de 0 que possible. Les fonctions  $\kappa$  et  $F$  sont telles que  $F \circ \kappa$  satisfait l'Hypothèse 2.20.

**Remarque.** Les notations introduites à la Section 2 de ce chapitre sont conservées pour le processus gaussien iso-normal naturellement associé à  $W$ .

Considérons le modèle de marché financier à  $d$  actifs risqués, de cours  $S_t$  à l'instant  $t \in [0, T]$  tel que

$$\begin{cases} S_t = \kappa(Y_t) \\ dY_t = \mu(Y_t) dt + \sigma(Z_t) dB_t^{H_1}; Y_0 \in \mathbb{R}^d, \\ dZ_t = \vartheta(Z_t) dB_t^{H_2}; Z_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

ainsi qu'une option de payoff  $F(S_T) = (F \circ \kappa)(Y_T)$  sur ces actifs.

Soient  $X = (Y, Z)$ ,  $\mathbb{W}$  la  $p$ -trajectoire géométrique associée à  $W$  au Théorème 1.65, ainsi que  $V = (V_1, \dots, V_d)$  le champ de vecteurs  $\gamma$ -Lipschitz sur  $\mathbb{R}^d$  ( $\gamma > p$ ) défini par :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_1^d \oplus \mathbb{R}_2^d, \forall c \in \mathbb{R}, V(a)(b, c) = V_1(a)c + V_2(a)b$$

où,

$$V_1 = \begin{pmatrix} \mu \circ \pi_{\mathbb{R}_1^d} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} \sigma \circ \pi_{\mathbb{R}_2^d} & 0 \\ 0 & \vartheta \circ \pi_{\mathbb{R}_2^d} \end{pmatrix},$$

et  $\pi_{\mathbb{R}_i^d}$  désigne le projecteur canonique de  $\mathbb{R}_1^d \oplus \mathbb{R}_2^d$  dans  $\mathbb{R}_i^d$  pour  $i = 1, 2$ .

Rigoureusement,  $X = \pi_V(0, X_0; \mathbb{W}^g)$  avec,  $\mathbb{W}^g = S_{[p]}(\mathbb{W} \oplus g)$  et  $g = \text{Id}_{[0, T]}$ .

En usant du Théorème 2.21 et du Corollaire 2.23, le corollaire suivant établit l'existence et l'expression de la sensibilité de  $f_T(\vartheta) = \mathbb{E}[F(S_T)]$  aux variations de la fonction  $\vartheta$ . C'est une question classique en finance dans les modèles à volatilité stochastique :

**COROLLAIRE 2.26.** Avec les notations du Théorème 2.21 et du Corollaire 2.23 :

- (1) Sous l'Hypothèse 2.24,  $f_T$  est différentiable de  $\mathbb{S}_p$  dans  $\mathbb{R}_+$  et, pour tous  $\vartheta, \tilde{\vartheta} \in \mathbb{S}_p$  satisfaisant l'Hypothèse 2.18,

$$\partial_\vartheta f_T(\vartheta) \cdot \tilde{\vartheta} = \mathbb{E} \left[ \langle \mathbf{D}(F \circ S_T^\vartheta); ((I_{H_1}^{-1} \circ \pi_{H_1^1})(h^{\vartheta, \tilde{\vartheta}}), (I_{H_2}^{-1} \circ \pi_{H_2^1})(h^{\vartheta, \tilde{\vartheta}})) \rangle_H \right]$$

où, pour  $i = 1, 2$ ,  $H_i^1$  désigne l'espace de Cameron-Martin de  $B^{H_i}$ ,  $\pi_{H_i^1}$  le projecteur canonique de  $H_1^1 \oplus H_2^1$  dans  $H_i^1$ , et

$$h^{\vartheta, \tilde{\vartheta}} = \frac{1}{T} \int_0^\cdot V_2^{-1}(X_s^\vartheta) J_{s \leftarrow T}^{\mathbb{W}^g} \partial_\vartheta X_T^\vartheta \cdot \tilde{\vartheta} ds.$$

- (2) Sous l'Hypothèse 2.25, pour tous  $\vartheta, \tilde{\vartheta} \in \mathbb{S}_{p+1}$  satisfaisant l'Hypothèse 2.22,  $I^{-1}(h^{\vartheta, \tilde{\vartheta}}) \in \mathbb{D}^{1,2}(H)$  et

$$\partial_\vartheta f_T(\vartheta) \cdot \tilde{\vartheta} = \mathbb{E} \left[ F(S_T^\vartheta) \left[ \delta_{H_1} \left[ (I_{H_1}^{-1} \circ \pi_{H_1^1})(h^{\vartheta, \tilde{\vartheta}}) \right] + \delta_{H_2} \left[ (I_{H_2}^{-1} \circ \pi_{H_2^1})(h^{\vartheta, \tilde{\vartheta}}) \right] \right] \right].$$

**DÉMONSTRATION.** C'est une application directe du Théorème 2.21 et du Corollaire 2.23.  $\square$

**Remarques :**

- (1) Grâce au Corollaire 2.17 et à la remarque qui s'ensuit, il est possible d'expliciter la sensibilité de  $f_T(\vartheta)$  aux variations de la fonction  $\vartheta$ .
- (2) Malgré les atouts de l'approche trajectorielle, rappelons qu'il n'y a pas absence d'opportunité d'arbitrage dans modèle de marché financier modélisé par une EDS dirigée par un mBf (cf. L.C.G. Rogers [77]).

**4.2. Simulations.** Afin d'effectuer des simulations des sensibilités calculées dans ce chapitre, la première étape consiste à construire une approximation convergente, en un certain sens, de la solution de l'équation différentielle stochastique sous-jacente. Pour cela, rappelons un résultat de A. Lejay [57] sur la convergence de la suite des schémas d'Euler explicites d'une équation différentielle dirigée par une fonction höldérienne d'indice  $\alpha \in ]1/2, 1[$  prise au sens de Young :

PROPOSITION 2.27. *Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction höldérienne d'indice  $\alpha \in ]1/2, 1[$ , ainsi que  $V = (V_1, \dots, V_d)$  un champ de vecteurs différentiable sur  $\mathbb{R}^d$ , de différentielle  $\gamma$ -höldérienne de  $\mathbb{R}^d$  dans lui-même ( $\gamma \in ]0, 1[$  et  $\gamma + 1 > p$ ). Alors, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$\|x^n - \pi_V(0, x_0; w)\|_{\infty; T} \leq Cn^{1-2/p}$$

où,  $x^n$  désigne le schéma d'Euler explicite d'ordre  $n$  associé à  $\pi_V(0, x_0; w)$  pour la subdivision  $D^n = \{r_k^n\} \in D_T$  :

$$\forall t \in [0, T], x_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ x_k^n + \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{r_{k+1}^n - r_k^n} (t - r_k^n) \right] \mathbf{1}_{[r_k^n, r_{k+1}^n[}(t)$$

et, pour  $k = 0, \dots, n-1$ ,

$$\begin{cases} x_0^n = x_0 \\ x_{k+1}^n = x_k^n + V(x_k^n)(w_{r_{k+1}^n} - w_{r_k^n}) \end{cases}.$$

Pour une preuve, se référer à A. Lejay [57], Proposition 5.

COROLLAIRE 2.28. *Soient  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $B^H$  un mouvement brownien fractionnaire unidimensionnel d'indice de Hurst  $H \in ]1/2, 1[$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant l'Hypothèse 2.4 pour  $p = 1/(H - \varepsilon) < 2$  avec  $\varepsilon > 0$  aussi proche de 0 que possible,  $V$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}$  tel que  $V(a)(b, c) = \mu(a)c + \sigma(a)b$  pour tous  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $X = \pi_V(0, x_0; B^H)$ ,  $Y = \partial_x X^x \cdot 1$  et  $Z = \partial_\sigma X^\sigma \cdot \tilde{\sigma}$  pour une fonction  $\tilde{\sigma} \in \mathbb{S}_p$  donnée. Alors, pour tout  $r \geq 1$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \|X^n - X\|_{\infty; T}^r \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \|Y^n - Y\|_{\infty; T}^r \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \|Z^n - Z\|_{\infty; T}^r \right) = 0$$

où, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X^n$ ,  $Y^n$  et  $Z^n$  désignent respectivement les schémas d'Euler explicites d'ordre  $n$  associés à  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  pour la subdivision  $D^n = \{r_k^n\} \in D_T$ . De plus, la vitesse de convergence de chaque suite est en  $n^{r(1-2/p)}$ .

DÉMONSTRATION. Les processus  $Y$  et  $Z$  satisfont respectivement :

$$Y = \pi_{A_1}(0, 1; W^{\mu, \sigma}) \text{ et } Z = \pi_{A_2}[0, 0; (W^{\mu, \sigma}, W^{\tilde{\sigma}})]$$

où,

$$W^{\mu, \sigma} = \int_0^\cdot \dot{\mu}(X_s) ds + \int_0^\cdot \dot{\sigma}(X_s) dB_s^H \text{ et } W^{\tilde{\sigma}} = \int_0^\cdot \tilde{\sigma}(X_t) dB_t^H$$

et,  $A_1$  et  $A_2$  désignent deux champs de vecteurs affines sur  $\mathbb{R}$  tels que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, A_1(a)b = ab \text{ et } A_2(a)(b, c) = ab + c.$$



Puisque les trajectoires de  $B^H$  sont presque sûrement  $1/p$ -höldériennes par le critère de continuité de Kolmogorov (cf. Lemme 1.58), le Théorème 1.12 entraîne qu'il en va de même des trajectoires de  $W^{\mu,\sigma}$  et  $W^{\tilde{\sigma}}$ . Donc,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  satisfont les conditions de la Proposition 2.27 et, il existe une variable aléatoire  $C > 0$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\|X^n - X\|_{\infty;T}, \|Y^n - Y\|_{\infty;T} \text{ et } \|Z^n - Z\|_{\infty;T}$$

sont majorées par  $Cn^{1-2/p}$ .

Enfin, il apparaît dans la démonstration de [57], Proposition 5, que les puissances positives de  $C$  ont un majorant intégrable par le théorème de Fernique. Ainsi, pour tout  $r \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|X^n - X\|_{\infty;T}^r) &\leq \mathbb{E}(C^r)n^{r(1-2/p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \\ \mathbb{E}(\|Y^n - Y\|_{\infty;T}^r) &\leq \mathbb{E}(C^r)n^{r(1-2/p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ et} \\ \mathbb{E}(\|Z^n - Z\|_{\infty;T}^r) &\leq \mathbb{E}(C^r)n^{r(1-2/p)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

car  $p < 2$ . □

**Remarque.** Sur l'approximation de la solution d'une EDS dirigée par un mBf, se référer également à I. Nourdin et A. Neuenkirch [72].

Il existe deux types de méthodes permettant de simuler un mouvement brownien fractionnaire : les méthodes *exactes* et les méthodes *approximatives*. Par exemple, la *méthode des ondelettes* est *approximative* et particulièrement rapide ; le nombre d'opérations pour une discrétisation à  $n \in \mathbb{N}^*$  point(s) est de l'ordre de  $n \log(n)$ . L'algorithme (*des matrices circulantes*) de Wood-Chang est une méthode *exacte*, ayant un nombre d'opérations du même ordre. Cette dernière est particulièrement simple à implémenter, c'est ce que nous avons fait en *Scilab* afin de simuler les sensibilités étudiées à la Section 3. Sur la simulation du mBf, se référer (par exemple) à T. Dieker [29].

Avec les hypothèses et notations du Corollaire 2.28, à chaque itération du schéma d'Euler explicite d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé, la valeur de l'accroissement  $B_{r_{n+1}}^H - B_{r_n}^H$  est obtenue via l'algorithme de Wood-Chang exécuté au préalable.

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction satisfaisant l'Hypothèse 2.19. Avec les notations de la Section 3, afin d'*approcher*  $\partial_x f_T(x, \sigma).1$  (resp.  $\partial_\sigma f_T(x, \sigma).\tilde{\sigma}$ ), nous estimons

$$\mathbb{E} \left[ \dot{F}(X_T^n) Y_T^n \right] \quad (\text{resp. } \mathbb{E} \left[ \dot{F}(X_T^n) Z_T^n \right])$$

par la moyenne empirique  $\Theta_m^n(Y)$  (resp.  $\Theta_m^n(Z)$ ) du  $m$ -échantillon dont la loi parente est celle de  $F^Y = \dot{F}(X_T^n) Y_T^n$  (resp.  $F^Z = \dot{F}(X_T^n) Z_T^n$ ). D'après le Corollaire 2.28, les variables aléatoires  $F^Y$  et  $F^Z$  sont de carré intégrable. Donc,

(1) Par la loi forte des grands nombres :

$$\begin{aligned} \Theta_m^n(Y) &\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \theta^n(Y) = \mathbb{E} \left[ \dot{F}(X_T^n) Y_T^n \right] \text{ et} \\ \Theta_m^n(Z) &\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \theta^n(Z) = \mathbb{E} \left[ \dot{F}(X_T^n) Z_T^n \right]. \end{aligned}$$

(2) Par le théorème central limit et le lemme de Slutsky :

$$\sqrt{n} \frac{\Theta_m^n(Y) - \theta^n(Y)}{s_m^n(Y)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \text{ et}$$

$$\sqrt{n} \frac{\Theta_m^n(Z) - \theta^n(Z)}{s_m^n(Z)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

où,  $s_m^n(Y)$  (resp.  $s_m^n(Z)$ ) désigne l'écart-type empirique du  $m$ -échantillon dont la loi parente est celle de  $F^Y$  (resp.  $F^Z$ ).

Au seuil  $\alpha \in ]0, 1[$ , le point 2 ci-dessus fournit les intervalles de confiance suivants :

$$\mathbb{P} \left[ \Theta_m^n(Y) - \frac{t_\alpha}{\sqrt{m}} s_m^n(Y) \leq \theta^n(Y) \leq \Theta_m^n(Y) + \frac{t_\alpha}{\sqrt{m}} s_m^n(Y) \right] \simeq 1 - \alpha$$

et

$$\mathbb{P} \left[ \Theta_m^n(Z) - \frac{t_\alpha}{\sqrt{m}} s_m^n(Z) \leq \theta^n(Z) \leq \Theta_m^n(Z) + \frac{t_\alpha}{\sqrt{m}} s_m^n(Z) \right] \simeq 1 - \alpha$$

où,  $\Phi(t_\alpha) = 1 - \alpha/2$  et  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

**Exemple.** Supposons que  $T = 1$ ,  $H = 0.6$ ,  $n = 2^{15}$ ,  $m = 500$ ,  $\mu \equiv 0$ ,  $\sigma : a \mapsto 1 + e^{-a^2}$ ,  $\tilde{\sigma} : a \mapsto 1 + \pi/2 + \arctan(a)$ ,  $F : a \mapsto a^2$  et  $x = 1$  :

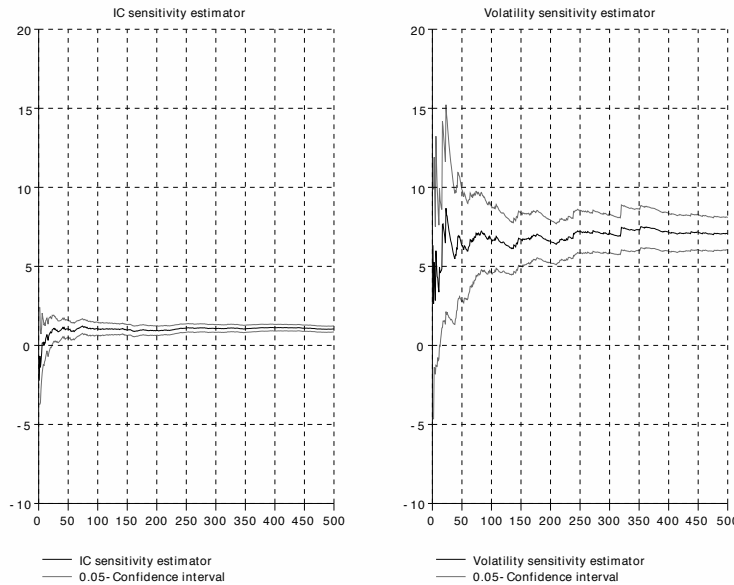


FIGURE 1. Convergence des estimateurs

Statistiques	Valeurs
$\Theta_m^n(Y)$	1.042
Intervalle de confiance de niveau 0.05	[0.851; 1.232]
Longueur de l'intervalle de confiance	0.381
$\Theta_m^n(Z)$	7.112
Intervalle de confiance de niveau 0.05	[6.071; 8.154]
Longueur de l'intervalle de confiance	2.083

## Sur une généralisation de l'équation Mean-Reverting

### 1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des équations Mean-Reverting, généralisées au cas d'un signal  $W$  gaussien unidimensionnel et à trajectoires  $\alpha$ -höldériennes avec  $\alpha \in ]0, 1[$  :

$$(34) \quad X_t = x_0 + \int_0^t (\mu - \theta X_s) ds + \sigma \int_0^t X_s^\beta dW_s; \quad x_0 > 0$$

où,  $\mu, \theta, \sigma > 0$  et  $\beta \in ]1 - \alpha, 1]$  sont des paramètres déterministes.

Qu'elle soit prise au sens des trajectoires rugueuses, comme nous nous y employons dans ce chapitre, ou au sens d'Itô pour un signal brownien, l'équation (34) est un *cas pathologique* d'équation différentielle stochastique, car son champ de vecteurs n'est pas lipschitzien sur les intervalles de  $\mathbb{R}$  contenant 0 lorsque  $\beta \neq 1$ . Ainsi, a priori, l'existence d'une solution globale n'est assurée par aucune des deux approches ; seules l'existence et l'unicité locales semblent garanties. Au-delà de cette difficulté qui peut être contournée en démontrant que la solution locale de l'équation (34) n'atteint jamais 0, l'étude des propriétés déterministes et probabilistes de la solution use d'arguments spécifiques, souvent assez concis, pour lesquels la forme du champ de vecteurs est déterminante.

Dans les applications, l'équation (34) est utilisée pour modéliser de nombreux phénomènes, notamment en finance (par exemple, cf. J-P. Fouque et al. [32]) et en PK/PD (par exemple, cf. K. Kalogeropoulos et al. [47] ou M. Delattre [24]).

Dans le cas d'un signal brownien, via l'analyse stochastique classique, l'équation (34) a largement été étudiée depuis les années 1980. Par exemple, elle est étudiée et appliquée en finance par J.C. Cox, J.E. Ingersoll et S.A. Ross dans [21] pour  $\beta = 1/2$ , ainsi que par J-P. Fouque et al. dans [32] pour  $\beta \in [1/2, 1]$ . Dans le cas d'un signal brownien, c'est la propriété de Markov des processus de diffusions qui se trouve au centre des démarches de preuves. En particulier, pour établir l'existence et l'unicité globales de la solution, dans [32], Appendix A, J-P. Fouque et al. basent leur argumentation sur S. Karlin et H.M. Taylor [48], Lemma 6.1(ii). Toujours pour  $\beta \in [1/2, 1]$ , dans [65], X. Mao et al. ont établi la convergence en probabilité de la suite des schémas d'Euler explicites associés à l'équation (34). Pour  $\beta \geq 1$ , F. Wu et al. ont étudié l'équation (34) dans [87]. Enfin, plus récemment, N. Tien Dung a démontré l'existence et calculé la dérivée de Malliavin d'une classe de processus Mean-Reverting géométriques fractionnaires dans [85].

A la Section 2, l'équation (34) est étudiée sous l'angle déterministe : existence et unicité de la solution (à  $\omega \in \Omega$  fixé), majoration de la solution en norme uniforme sur  $[0, T]$ , continuité de l'application d'Itô et construction d'une suite uniformément

convergente d'approximations sur  $[0, T]$  de la solution (avec vitesse de convergence). A la Section 3, l'équation (34) est étudiée sous l'angle probabiliste : propriétés en loi héritées de celle du signal, intégrabilité de la solution de (34) et des approximations associées, ainsi qu'un principe de grandes déviations. Enfin, la Section 4 est consacrée à un modèle Mean-Reverting généralisé pour la PK/PD. Nous proposons une perspective d'application en psycho-pharmacologie de ce modèle.

**Remarque.** Notez que le signal étant unidimensionnel, nous pourrions également utiliser la méthode de Doss-Sussman pour étudier l'équation (34). Se référer à H. Doss [30] et H.J. Sussman [83].

## 2. Résultats déterministes

Soient  $\mu, \theta, \sigma > 0$ ,  $\beta \in ]0, 1]$  et  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction satisfaisant l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 3.1. *La fonction  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\alpha$ -höldérienne avec  $\beta \in ]1 - \alpha, 1]$ .*

Puisque  $w$  est une fonction à valeurs réelles, une  $1/\alpha$ -trajectoire géométrique naturelle au-dessus de  $w$  (cf. Proposition 1.26) est donnée par :

$$\forall (s, t) \in \bar{\Delta}_T, \mathbb{W}_{s,t} = \left( 1, w_t - w_s, \dots, \frac{(w_t - w_s)^{[1/\alpha]}}{[1/\alpha]!} \right).$$

Soient  $\mathbb{W}^g = S_{[1/\alpha]}(\mathbb{W} \oplus g)$  avec  $g = \text{Id}_{[0,T]}$ , et  $V$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b, c \in \mathbb{R}, V(a)(b, c) = (\mu - \theta a)c + \sigma a^\beta b.$$

Considérons les équations différentielles suivantes :

$$(35) \quad dx = V(x)d\mathbb{W}^g; x_0 > 0$$

et

$$(36) \quad y_t = y_0 + \mu(1 - \beta) \int_0^t y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds + w_t(\vartheta); y_0 > 0$$

avec  $\gamma = \beta/(1 - \beta)$ ,  $\vartheta_t = \sigma(1 - \beta)e^{\theta(1-\beta)t}$  et

$$w_t(\vartheta) = \int_0^t \vartheta_s dw_s$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . L'intégrale définissant  $w(\vartheta)$  est prise au sens de Young.

L'application  $a \mapsto a^{-\gamma}$  est de classe  $C^\infty$  de  $[\varepsilon, \infty[$  dans  $\mathbb{R}$ , bornée, et de dérivées successives bornées sur  $[\varepsilon, \infty[$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Ainsi, l'équation (36) admet une unique solution au sens de la Définition 1.36 jusqu'au temps

$$\tau_\varepsilon^1 = \inf \{t \in [0, T] : y_t = \varepsilon\}; \varepsilon \in ]0, y_0],$$

en adoptant la convention  $\inf(\emptyset) = \infty$ .

Dans la suite, nous considérons également le temps  $\tau_0^1$  tel que  $\tau_\varepsilon^1 \uparrow \tau_0^1$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**2.1. Existence et unicité de la solution.** Le Lemme 3.2 joue un rôle essentiel dans tout ce chapitre, car il permet de *transposer* les résultats portant sur (36) à l'équation Mean-Reverting (35). En particulier, dans cette sous-section, il permet d'établir que l'existence d'une unique solutions globale  $y$  de (36) entraîne l'existence et l'unicité d'une solution globale  $x = y^{\gamma+1}e^{-\theta t}$  de l'équation (35) à la Proposition 3.3.

LEMME 3.2. *Soient  $y_0 > 0$  et  $\varepsilon \in ]0, y_0]$ . Si la fonction  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est höldérienne d'exposant  $\alpha \in ]0, 1[$ , et si jusqu'au temps  $\tau_\varepsilon^1$ ,  $y$  désigne la solution de (36) avec la condition initiale  $y_0$ , alors*

$$x : t \in [0, \tau_\varepsilon^1] \mapsto x_t = y_t^{\gamma+1} e^{-\theta t}$$

est la solution de (35) sur  $[0, \tau_\varepsilon^1]$ , avec la condition initiale  $x_0 = y_0^{\gamma+1}$ .

DÉMONSTRATION. Considérons la solution  $y$  de (36) sur  $[0, \tau_\varepsilon^1]$ , avec la condition initiale  $y_0 > 0$ .

La fonction continue  $z = ye^{-\theta(1-\beta)t}$  est minorée par  $m_\varepsilon > 0$  et majorée par  $M_\varepsilon > 0$  sur  $[0, \tau_\varepsilon^1]$ .

L'application  $\Phi : a \in [m_\varepsilon, M_\varepsilon] \mapsto a^{\gamma+1}$  est indéfiniment dérivable, bornée et de dérivées successives bornées.

Donc, en appliquant la formule de changement de variable (cf. Théorème 1.44) à  $z$  et à l'application  $\Phi$  entre 0 et  $t \in [0, \tau_\varepsilon^1]$  :

$$\begin{aligned} x_t &= z_0^{\gamma+1} + (\gamma + 1) \int_0^t z_s^\gamma dz_s \\ &= y_0^{\gamma+1} + \int_0^t (\mu - \theta x_s) ds + \sigma \int_0^t y_s^\gamma e^{-\theta\beta s} dw_s. \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma = \beta(\gamma + 1)$ , au sens de la Définition 1.36,  $x$  est la solution de l'équation (35) sur  $[0, \tau_\varepsilon^1]$  avec la condition initiale  $x_0 = y_0^{\gamma+1}$ .  $\square$

PROPOSITION 3.3. *Sous l'Hypothèse 3.1, avec la condition initiale  $x_0 > 0$ ,  $\tau_0^1 > T$  et donc, l'équation (35) admet une unique solution  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; w)$  sur  $[0, T]$ , satisfaisant :*

$$\tilde{\pi}_V(0, x_0; w) = \pi_V(0, x_0; \mathbb{W}^g).$$

DÉMONSTRATION. Supposons que  $\tau_0^1 \leq T$ , posons  $y_0 = x_0^{1-\beta}$  et considérons la solution  $y$  de (36) sur  $[0, \tau_\varepsilon^1]$  ( $\varepsilon \in ]0, y_0]$ ), avec la condition initiale  $y_0$ .

D'une part, par définition de  $\tau_\varepsilon^1$  :

$$\begin{aligned} y_{\tau_\varepsilon^1} - y_t &= \varepsilon - y_t \text{ et} \\ y_{\tau_\varepsilon^1} - y_t &= \mu(1 - \beta) \int_t^{\tau_\varepsilon^1} y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds + w_{\tau_\varepsilon^1}(\vartheta) - w_t(\vartheta) \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, \tau_\varepsilon^1]$ . Alors, puisque  $\tau_\varepsilon^1 \uparrow \tau_0^1$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$(37) \quad y_t + \mu(1 - \beta) \int_t^{\tau_0^1} y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds = w_t(\vartheta) - w_{\tau_0^1}(\vartheta)$$

pour tout  $t \in [0, \tau_0^1[$ .

De plus, puisque  $w(\vartheta)$  est l'intégrale de Young de  $\vartheta \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}_+)$  par rapport à  $w$ , et que  $w$  est  $\alpha$ -höldérienne,  $w(\vartheta)$  est aussi  $\alpha$ -höldérienne (cf. Théorème 1.12).

Donc, l'égalité (37) entraîne :

$$-\|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T}(\tau_0^1 - t)^\alpha \leq y_t + \mu(1 - \beta) \int_t^{\tau_0^1} y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds \leq \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T}(\tau_0^1 - t)^\alpha.$$

D'autre part, les deux termes de cette somme étant positifs :

$$(38) \quad y_t \leq \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T}(\tau_0^1 - t)^\alpha \text{ et}$$

$$(39) \quad \mu(1 - \beta) \int_t^{\tau_0^1} y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds \leq \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T}(\tau_0^1 - t)^\alpha.$$

L'instant  $t \in [0, \tau_0^1[$  ayant été arbitrairement choisi, l'inégalité (38) est vraie pour tout  $s \in [t, \tau_0^1[$  et

$$y_s^{-\gamma} \geq \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T}^{-\gamma}(\tau_0^1 - s)^{-\alpha\gamma}.$$

Par l'inégalité (39), nécessairement :

$$\begin{aligned} \mu(1 - \beta) \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T}^{-\gamma} \int_t^{\tau_0^1} (\tau_0^1 - s)^{-\alpha\gamma} ds &\leq \mu(1 - \beta) \int_t^{\tau_0^1} y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds \\ &\leq \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T}(\tau_0^1 - t)^\alpha \end{aligned}$$

et  $1 - \alpha\gamma \leq \alpha$ .

Donc, si  $\beta > 1 - \alpha$ , alors  $\tau_0^1 \notin [0, T]$  et

$$\bigcup_{\varepsilon \in ]0, y_0]} [0, \tau_\varepsilon^1] \cap [0, T] = [0, T].$$

Ainsi, (36) admet une unique solution  $y$  sur  $[0, T]$  telle que :

$$y = y^\varepsilon \text{ sur } [0, \tau_\varepsilon^1] \cap [0, T]$$

où,  $y^\varepsilon$  désigne la solution de (36) sur  $[0, \tau_\varepsilon^1] \cap [0, T]$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, y_0]$ .

En conclusion, par le Lemme 3.2, l'équation (35) admet une unique solution  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; w)$  sur  $[0, T]$ , correspondant à  $y^{\gamma+1} e^{-\theta \cdot}$ .  $\square$

### Remarques et extensions partielles :

- (1) Notez que l'énoncé du Lemme 3.2 reste vrai lorsque  $\mu = 0$ , et jusqu'au temps  $\tau_0^1$ , l'équation (35) admet une unique solution explicite  $x$  telle que :

$$\forall t \in [0, \tau_0^1], x_t = \left[ x_0^{1-\beta} + w_t(\vartheta) \right]^{\gamma+1} e^{-\theta t}.$$

Cependant, dans ce cas,  $\tau_0^1$  peut être compris entre 0 et  $T$ . Donc,  $x$  correspond à la solution de l'équation (35) seulement localement. C'est suffisant pour l'application en PK/PD de la Section 4.

- (2) Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , l'équation (36) admet une unique solution  $y$  sur  $[0, T]$  dès que :

$$(40) \quad \inf_{s \in [0, T]} w_s(\vartheta) > -y_0.$$

En effet, pour tout  $t \in [0, T]$ , formellement :

$$y_t - \mu(1 - \beta) \int_0^t y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds = y_0 + w_t(\vartheta).$$

D'où,

$$\inf_{s \in [0, T]} y_s - \mu(1 - \beta) \sup_{s \in [0, T]} \int_0^s y_u^{-\gamma} e^{\theta u} du \geq y_0 + \inf_{s \in [0, T]} w_s(\vartheta).$$

La fonction  $y$  étant continue de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$  avec  $y_0 > 0$ , par le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\sup_{s \in [0, T]} \int_0^s y_u^{-\gamma} e^{\theta u} du > 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_t &\geq \inf_{s \in [0, T]} y_s \\ &\geq y_0 + \inf_{s \in [0, T]} w_s(\vartheta) > 0 \end{aligned}$$

si l'inégalité (40) est vraie.

Par le Lemme 3.2, l'équation (36) admet également une unique solution sur  $[0, T]$  dès que (40) est vraie.

(3) Si  $\tau_0^1 \in [0, T]$ , nécessairement :

$$\mu(1 - \beta) \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{-\gamma} \int_t^{\tau_0^1} (\tau_0^1 - s)^{-\alpha\gamma} ds \leq \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl}; T} (\tau_0^1 - t)^\alpha$$

pour tout  $t \in [0, \tau_0^1[$ .

Donc, lorsque  $\beta = 1 - \alpha$ ,  $1 - \alpha\gamma = \alpha$  et par le second point du Théorème 1.12 :

$$\begin{aligned} \mu &\leq \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{1/\alpha} \\ &\leq C(\sigma, \alpha, \theta) \|w\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{1/\alpha} \end{aligned}$$

avec  $C(\sigma, \alpha, \theta) = (\sigma\theta\alpha^2)^{1/\alpha} e^{\theta T}$ .

Ainsi,  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; w)$  est définie sur  $[0, T]$  dès que  $\mu > C(\sigma, \alpha, \theta) \|w\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{1/\alpha}$ .

## 2.2. Majoration uniforme en temps et continuité de l'application d'Itô.

La forme particulière du champ de vecteurs  $V$  nécessite une argumentation spécifique, usant d'instantanés bien choisis dans l'intervalle  $[0, T]$  :

PROPOSITION 3.4. *Sous l'Hypothèse 3.1, pour toute condition initiale  $x_0 > 0$ ,*

$$\begin{aligned} \|\tilde{\pi}_V(0, x_0; w)\|_{\infty; T} &\leq [x_0^{1-\beta} + \mu(1 - \beta)e^{\theta T} x_0^{-\beta} T + \\ &\quad \sigma(\theta \vee 2)(1 - \beta)(1 + T)e^{\theta(1-\beta)T} \|w\|_{\infty; T}^{\gamma+1}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soient  $y_0 = x_0^{1-\beta}$ ,  $y$  la solution de (36) avec la condition initiale  $y_0$  et

$$\tau_{y_0}^2 = \sup \{t \in [0, T] : y_t \leq y_0\}.$$

D'une part, distinguons les deux cas suivants :

(1) Si  $t < \tau_{y_0}^2$ , alors

$$y_{\tau_{y_0}^2} - y_t = \mu(1 - \beta) \int_t^{\tau_{y_0}^2} y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds + w_{\tau_{y_0}^2}(\vartheta) - w_t(\vartheta).$$

Donc, par définition de  $\tau_{y_0}^2$  :

$$(41) \quad y_t + \mu(1 - \beta) \int_t^{\tau_{y_0}^2} y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds = y_0 + w_t(\vartheta) - w_{\tau_{y_0}^2}(\vartheta).$$

Or, chaque terme de la somme du membre de gauche de l'égalité (41) est positif d'après la Proposition 3.3. Ainsi,

$$0 < y_t \leq y_0 + |w_t(\vartheta) - w_{\tau_{y_0}^2}(\vartheta)|.$$

(2) Si  $t \geq \tau_{y_0}^2$ ; alors par définition de  $\tau_{y_0}^2$ ,  $y_t \geq y_0$  et donc  $y_t^{-\gamma} \leq y_0^{-\gamma}$ . Ainsi,

$$y_0 \leq y_t \leq y_0 + \mu(1 - \beta)e^{\theta T} y_0^{-\gamma} T + |w_t(\vartheta) - w_{\tau_{y_0}^2}(\vartheta)|.$$

D'autre part, en intégrant par parties, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} |w_t(\vartheta) - w_{\tau_{y_0}^2}(\vartheta)| &= \sigma(1 - \beta) \left| \int_{\tau_{y_0}^2}^t e^{\theta(1-\beta)s} dw_s \right| \\ &\leq \sigma(\theta \vee 2)(1 - \beta)(1 + T)e^{\theta(1-\beta)T} \|w\|_{\infty; T}. \end{aligned}$$

Ainsi, en réunissant les cas 1 et 2, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(42) \quad 0 < y_t \leq y_0 + \mu(1 - \beta)e^{\theta T} y_0^{-\gamma} T + \sigma(\theta \vee 2)(1 - \beta)(1 + T)e^{\theta(1-\beta)T} \|w\|_{\infty; T}.$$

Ceci achève la preuve, car  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; w) = y^{\gamma+1}e^{-\theta}$ , et le membre de droite de l'inégalité (42) ne dépend pas de  $t$ .  $\square$

**Remarque.** En particulier, d'après la Proposition 3.4,  $\|\tilde{\pi}_V(0, x_0; w)\|_{\infty; T}$  n'explose pas lorsque  $\mu \rightarrow 0$  et/ou  $\theta \rightarrow 0$ .

PROPOSITION 3.5. *Sous l'Hypothèse 3.1,  $\tilde{\pi}_V(0, \cdot)$  est une application continue de*

$$\mathbb{R}_+^* \times C^{\alpha\text{-höl}}([0, T]; \mathbb{R}) \text{ dans } C^0([0, T]; \mathbb{R}).$$

DÉMONSTRATION. Soient  $x_0^1, x_0^2 > 0$  et  $w^1, w^2 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions satisfaisant l'Hypothèse 3.1.

Pour  $i = 1, 2$ , considérons  $y_0^i = (x_0^i)^{1-\beta}$  et  $y^i = \Theta[y_0^i, w^i(\vartheta)]$  où,

$$\forall t \in [0, T], w_t^i(\vartheta) = \int_0^t \vartheta_s dw_s^i$$

et, avec les notations de l'équation (36),  $\Theta$  désigne l'application de

$$\mathbb{R}_+^* \times C^{\alpha\text{-höl}}([0, T]; \mathbb{R}) \text{ dans } C^0([0, T]; \mathbb{R})$$

définie par :

$$\Theta[y_0, w(\vartheta)] = y_0 + \mu(1 - \beta) \int_0^{\cdot} \Theta_s^{-\gamma}[y_0, w(\vartheta)] e^{\theta s} ds + w(\vartheta).$$

Posons également :

$$\tau^3 = \inf \{s \in [0, T] : y_s^1 = y_s^2\}.$$

D'une part, distinguons les deux cas suivants :



(1) Considérons  $t \in [0, \tau^3]$  et supposons que  $y_0^1 \geq y_0^2$ .

Puisque  $y^1$  et  $y^2$  sont continues sur  $[0, T]$  par construction, pour tout  $s \in [0, \tau^3]$ ,  $y_s^1 \geq y_s^2$  et donc,

$$(y_s^1)^{-\gamma} - (y_s^2)^{-\gamma} \leq 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |y_t^1 - y_t^2| &= y_t^1 - y_t^2 \\ &= y_0^1 - y_0^2 + \mu(1 - \beta) \int_0^t e^{\theta s} [(y_s^1)^{-\gamma} - (y_s^2)^{-\gamma}] ds + w_t^1(\vartheta) - w_t^2(\vartheta) \\ &\leq |y_0^1 - y_0^2| + \|w^1(\vartheta) - w^2(\vartheta)\|_{\infty; T}. \end{aligned}$$

Par *symétrie*, cette inégalité est vraie lorsque  $y_0^1 \leq y_0^2$ .

(2) Considérons  $t \in [\tau^3, T]$ , introduisons

$$\tau^3(t) = \sup \{s \in [\tau^3, t] : y_s^1 = y_s^2\}$$

et supposons que  $y_t^1 \geq y_t^2$ .

Puisque  $y^1$  et  $y^2$  sont continues sur  $[0, T]$  par construction, pour tout  $s \in [\tau^3(t), t]$ ,  $y_s^1 \geq y_s^2$  et donc,

$$(y_s^1)^{-\gamma} - (y_s^2)^{-\gamma} \leq 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |y_t^1 - y_t^2| &= y_t^1 - y_t^2 \\ &= \mu(1 - \beta) \int_{\tau^3(t)}^t e^{\theta s} [(y_s^1)^{-\gamma} - (y_s^2)^{-\gamma}] ds + \\ &\quad w_t^1(\vartheta) - w_t^2(\vartheta) - [w_{\tau^3(t)}^1(\vartheta) - w_{\tau^3(t)}^2(\vartheta)] \\ &\leq 2\|w^1(\vartheta) - w^2(\vartheta)\|_{\infty; T}. \end{aligned}$$

Par *symétrie*, cette inégalité est vraie lorsque  $y_t^1 \leq y_t^2$ .

D'autre part, en réunissant les cas 1 et 2, puisque la majoration obtenue ne dépend pas de  $t$  :

$$\|y^1 - y^2\|_{\infty; T} \leq |y_0^1 - y_0^2| + 2T^\alpha \|w^1(\vartheta) - w^2(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl}; T}.$$

Donc, l'application  $\Theta$  est continue de

$$\mathbb{R}_+^* \times C^{\alpha\text{-höl}}([0, T]; \mathbb{R}) \text{ dans } C^0([0, T]; \mathbb{R}).$$

Pour toute fonction  $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant l'Hypothèse 3.1, d'après le Lemme 3.2 et la Proposition 3.3 :

$$\tilde{\pi}_V(0, x_0; w) = e^{-\theta} \Theta^{\gamma+1} \left[ x_0^{1-\beta}, J(\vartheta, w) \right].$$

De plus, par le Théorème 1.12,  $J(\vartheta, \cdot)$  est continue de  $C^{\alpha\text{-höl}}([0, T]; \mathbb{R})$  dans lui-même.

Par composition, ceci achève la preuve.  $\square$

Nous terminons cette sous-section par l'étude de la monotonie et de la continuité de la solution de (35) par rapport aux paramètres  $\theta, \mu \geq 0$  du champ de vecteurs  $V$  :

Jusqu'à la fin de cette sous-section, les paramètres  $x_0, w, \sigma$  et  $\beta$  sont fixés. Pour tous

$\theta, \mu \geq 0$ , la solution de l'équation (35) (resp. (36)) est notée  $x(\theta, \mu)$  (resp.  $y(\theta, \mu)$ ) jusqu'au temps  $\tau_0^1 \wedge T$ .

PROPOSITION 3.6. *Sous l'Hypothèse 3.1, pour tous  $\theta, \mu \geq 0$ ,*

$$x(\theta, 0) \leq x(\theta, \mu) \leq x(0, \mu).$$

DÉMONSTRATION. D'une part, soient  $\theta > 0, \mu \geq 0$  et  $t \in [0, \tau_0^1 \wedge T]$  :

$$y_t(\theta, \mu) - y_t(\theta, 0) = \mu(1 - \beta) \int_0^t y_s^{-\gamma}(\theta, \mu) e^{\theta s} ds \geq 0,$$

car  $y_s(\theta, \mu) \geq 0$  pour tout  $s \in [0, t]$  d'après la Proposition 3.3.

Donc, d'après le Lemme 3.2 :

$$x(\theta, 0) \leq x(\theta, \mu).$$

D'autre part, soient  $\theta \geq 0, \mu > 0, z(\theta, \mu) = x^{1-\beta}(\theta, \mu)$  et  $t_1, t_2 \in [0, \tau_0^1 \wedge T]$  tels que :  $t_1 < t_2, x_{t_1}(0, \mu) = x_{t_1}(\theta, \mu)$  et  $x_s(0, \mu) < x_s(\theta, \mu)$  pour tout  $s \in [t_1, t_2]$ . En procédant comme au Lemme 3.2, par la formule de changement de variable (cf. Théorème 1.44), pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$\begin{aligned} z_t(0, \mu) - z_t(\theta, \mu) &= z_t(0, \mu) - z_{t_1}(0, \mu) - [z_t(\theta, \mu) - z_{t_1}(\theta, \mu)] \\ &= \mu(1 - \beta) \int_{t_1}^t [x_s^{-\beta}(0, \mu) - x_s^{-\beta}(\theta, \mu)] ds + \\ &\quad \theta(1 - \beta) \int_{t_1}^t x_s^{1-\beta}(\theta, \mu) ds \\ &\geq \mu(1 - \beta) \int_{t_1}^t [x_s^{-\beta}(0, \mu) - x_s^{-\beta}(\theta, \mu)] ds, \end{aligned}$$

car  $x_s(\theta, \mu) \geq 0$  pour tout  $s \in [t_1, t]$  d'après la Proposition 3.3.

Or, ayant  $x_s(0, \mu) < x_s(\theta, \mu)$  pour tout  $s \in [t_1, t_2]$  par hypothèse, nécessairement :

$$z_t(0, \mu) - z_t(\theta, \mu) < 0$$

et

$$\int_{t_1}^t [x_s^{-\beta}(0, \mu) - x_s^{-\beta}(\theta, \mu)] ds \geq 0.$$

Ainsi, il y a contradiction, et pour tout  $t \in [0, \tau_0^1 \wedge T]$ ,  $x_t(0, \mu) \geq x_t(\theta, \mu)$ .  $\square$

PROPOSITION 3.7. *Sous l'Hypothèse 3.1, la fonction  $(\theta, \mu) \mapsto x(\theta, \mu)$  est continue de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  dans  $C^0([0, T]; \mathbb{R})$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $\theta^0, \theta, \mu^0, \mu > 0$  et  $\vartheta^0, \vartheta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  deux fonctions définies par :

$$\forall t \in [0, T], \vartheta_t^0 = \sigma(1 - \beta)e^{\theta^0(1-\beta)t} \text{ et } \vartheta_t = \sigma(1 - \beta)e^{\theta(1-\beta)t}.$$

Soit  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} y_t(\theta, \mu) - y_t(\theta^0, \mu^0) &= \mu(1 - \beta) \int_0^t y_s^{-\gamma}(\theta, \mu) e^{\theta s} ds - \\ &\quad \mu^0(1 - \beta) \int_0^t y_s^{-\gamma}(\theta^0, \mu^0) e^{\theta^0 s} ds + w_t(\vartheta) - w_t(\vartheta^0) \\ &= \mu(1 - \beta) \int_0^t [y_s^{-\gamma}(\theta, \mu) - y_s^{-\gamma}(\theta^0, \mu^0)] e^{\theta s} ds + \\ &\quad (1 - \beta) \int_0^t (\mu e^{\theta s} - \mu^0 e^{\theta^0 s}) y_s^{-\gamma}(\theta^0, \mu^0) ds + w_t(\vartheta) - w_t(\vartheta^0). \end{aligned}$$

En procédant comme à la Proposition 3.5 :

$$\begin{aligned} \|y(\theta, \mu) - y(\theta^0, \mu^0)\|_{\infty; T} &\leq (1 - \beta) T \|\mu e^{\theta \cdot} - \mu^0 e^{\theta^0 \cdot}\|_{\infty; T} \|y^{-\gamma}(\theta^0, \mu^0)\|_{\infty; T} + \\ &\quad 2T^\alpha \|w(\vartheta) - w(\vartheta^0)\|_{\alpha\text{-höl}; T} \\ &\quad \xrightarrow{(\theta, \mu) \rightarrow (\theta^0, \mu^0)} 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(\theta, \mu) \mapsto x(\theta, \mu) = e^{-\theta} y^{\gamma+1}(\theta, \mu)$  est continue de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  dans  $C^0([0, T]; \mathbb{R})$ .  $\square$

**2.3. Suite convergente d'approximations.** Afin de construire une suite convergente d'approximations de la solution de l'équation (35), nous établissons la convergence de la suite des schémas d'Euler implicites  $(y^n, n \in \mathbb{N}^*)$  associée à l'équation (36) :

$$(43) \quad \begin{cases} y_0^n = y_0 > 0 \\ y_{k+1}^n = y_k^n + \frac{\mu(1 - \beta)T}{n} (y_{k+1}^n)^{-\gamma} e^{\theta r_{k+1}^n} + w_{r_{k+1}^n}(\vartheta) - w_{r_k^n}(\vartheta) \end{cases}$$

où, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $r_k^n = kT/n$  et  $k \leq n$  tant que  $y_{k+1}^n > 0$ .

PROPOSITION 3.8. *Sous l'Hypothèse 3.1, l'équation de récurrence (43) admet une unique solution  $(y^n, n \in \mathbb{N}^*)$ . De plus,*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k = 0, \dots, n, y_k^n > 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x, b > 0, f(x, a, b) = x - bx^{-\gamma} - a.$$

D'une part, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et  $b > 0$ ,  $f(\cdot, a, b) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*; \mathbb{R})$  et pour tout  $x > 0$ ,

$$\partial_x f(x, a, b) = 1 + b\gamma x^{-(\gamma+1)} > 0.$$

Donc,  $f(\cdot, a, b)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, a, b) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, a, b) = \infty.$$

Ainsi, puisque  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , par le théorème des valeurs intermédiaires :

$$(44) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0, \exists ! x > 0 : f(x, a, b) = 0.$$

D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation (43) se réécrit comme suit :

$$(45) \quad f \left[ y_{k+1}^n, y_k^n + w_{r_{k+1}^n}(\vartheta) - w_{r_k^n}(\vartheta), \frac{\mu(1 - \beta)T}{n} e^{\theta r_{k+1}^n} \right] = 0.$$

En conclusion, sous l'Hypothèse 3.1, nous montrons par récurrence sur  $k$ , que l'équation (45) admet une unique solution strictement positive  $y_{k+1}^n$ .  $\square$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit la fonction  $y^n : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que :

$$y_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ y_k^n + \frac{y_{k+1}^n - y_k^n}{r_{k+1}^n - r_k^n} (t - r_k^n) \right] \mathbf{1}_{[r_k^n, r_{k+1}^n]}(t)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

LEMME 3.9. *Sous l'Hypothèse 3.1 :*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|y^n\|_{\infty; T} \leq y_0 + \mu(1 - \beta)e^{\theta T} y_0^{-\gamma} T + \sigma(\theta \vee 2)(1 - \beta)(1 + T)e^{\theta(1-\beta)T} \|w\|_{\infty; T}.$$

DÉMONSTRATION. La démarche employée est similaire à celle de la preuve de la Proposition 3.4.

En appliquant (43) de l'entier  $l + 1$  à l'entier  $k$  ( $0 \leq l < k \leq n$ ) :

$$(46) \quad y_k^n - y_l^n = \frac{\mu(1 - \beta)T}{n} \sum_{i=l+1}^k (y_i^n)^{-\gamma} e^{\theta r_i^n} + w_{r_k^n}(\vartheta) - w_{r_l^n}(\vartheta).$$

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$k_{y_0} = \max \{k = 0, \dots, n : y_k^n \leq y_0\}.$$

Pour  $k = 1, \dots, n$ , nous distinguons les deux cas suivants :

(1) Si  $k < k_{y_0}$ , alors par l'égalité (46) :

$$y_{k_{y_0}}^n - y_k^n = \frac{\mu(1 - \beta)T}{n} \sum_{i=k+1}^{k_{y_0}} (y_i^n)^{-\gamma} e^{\theta r_i^n} + w_{r_{k_{y_0}}^n}(\vartheta) - w_{r_k^n}(\vartheta).$$

Donc,

$$(47) \quad y_k^n + \frac{\mu(1 - \beta)T}{n} \sum_{i=k+1}^{k_{y_0}} (y_i^n)^{-\gamma} e^{\theta r_i^n} = y_{k_{y_0}}^n + w_{r_k^n}(\vartheta) - w_{r_{k_{y_0}}^n}(\vartheta).$$

Or, chaque terme de la somme du membre de gauche de l'égalité (47) est positif d'après la Proposition 3.8. Ainsi, par définition de  $k_{y_0}$  :

$$\begin{aligned} 0 < y_k^n &\leq y_k^n + \frac{\mu(1 - \beta)T}{n} \sum_{i=k+1}^{k_{y_0}} (y_i^n)^{-\gamma} e^{\theta r_i^n} \\ &\leq y_0 + |w_{r_k^n}(\vartheta) - w_{r_{k_{y_0}}^n}(\vartheta)|. \end{aligned}$$

(2) Si  $k > k_{y_0}$ ; alors par définition de  $k_{y_0}$ ,  $y_i^n > y_0$  pour  $i = k_{y_0} + 1, \dots, k$  et donc,  $(y_i^n)^{-\gamma} \leq y_0^{-\gamma}$ . Ainsi, par l'égalité (46) :

$$\begin{aligned} y_0 &\leq y_k^n = y_{k_{y_0}}^n + \frac{\mu(1 - \beta)T}{n} \sum_{i=k_{y_0}+1}^k (y_i^n)^{-\gamma} e^{\theta r_i^n} + w_{r_k^n}(\vartheta) - w_{r_{k_{y_0}}^n}(\vartheta) \\ &\leq y_0 + \mu(1 - \beta)e^{\theta T} y_0^{-\gamma} T + |w_{r_k^n}(\vartheta) - w_{r_{k_{y_0}}^n}(\vartheta)|. \end{aligned}$$

Nous majorons les accroissements de  $w(\vartheta)$  comme à la Proposition 3.4 :

$$(48) \quad \begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} y_t^n &\leq \max_{k=0, \dots, n} y_k^n \\ &\leq y_0 + \mu(1 - \beta)e^{\theta T} y_0^{-\gamma} T + \sigma(\theta \vee 2)(1 - \beta)(1 + T)e^{\theta(1-\beta)T} \|w\|_{\infty; T}. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve, car le membre de droite de l'inégalité (48) ne dépend ni de  $n$  et ni  $t$ .  $\square$

Par une démarche analogue à celle de A. Lejay [57], Proposition 5, le théorème suivant établit la convergence de la suite  $(y^n, n \in \mathbb{N}^*)$  :

**THÉORÈME 3.10.** *Sous l'Hypothèse 3.1, à condition initiale fixée, soit  $y$  la solution de l'équation (36). La suite  $(y^n, n \in \mathbb{N}^*)$  des schémas d'Euler implicites associée est uniformément convergente de limite  $y$ , avec une vitesse en  $n^{-\alpha \min(1, \gamma)}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t \in [0, T]$  et  $y$  la solution de l'équation (36) avec la condition initiale  $y_0 > 0$ . Puisque  $(r_k^n; k = 0, \dots, n)$  est une subdivision de  $[0, T]$ , il existe un entier  $k$  compris entre 0 et  $n - 1$  tel que  $t \in [r_k^n, r_{k+1}^n[$ .

Remarquons que :

$$(49) \quad |y_t^n - y_t| \leq |y_t^n - y_k^n| + |y_k^n - z_k^n| + |z_k^n - y_t|$$

où,  $z_i^n = y_{t_i^n}$  pour  $i = 0, \dots, n$ . Puisque  $y$  est la solution de l'équation (36),  $z_k^n$  et  $z_{k+1}^n$  satisfont :

$$z_{k+1}^n = z_k^n + \frac{\mu(1 - \beta)T}{n} (z_{k+1}^n)^{-\gamma} e^{\theta r_{k+1}^n} + w_{r_{k+1}^n}(\vartheta) - w_{r_k^n}(\vartheta) + \varepsilon_k^n$$

où,

$$\varepsilon_k^n = \mu(1 - \beta) \int_{r_k^n}^{r_{k+1}^n} (y_s^{-\gamma} e^{\theta s} - y_{r_{k+1}^n}^{-\gamma} e^{\theta r_{k+1}^n}) ds.$$

Afin de conclure, il faut établir que  $|y_k^n - z_k^n|$  est borné par une quantité ne dépendant pas de  $k$  et convergeant vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

D'une part, pour tout  $(u, v) \in \Delta_T$ ,

$$\begin{aligned} |e^{\theta v} y_v^{-\gamma} - e^{\theta u} y_u^{-\gamma}| &= \left| \frac{e^{\theta v} y_u^\gamma - e^{\theta u} y_v^\gamma}{y_v^\gamma y_u^\gamma} \right| \\ &\leq \frac{1}{|y_u y_v|^\gamma} (e^{\theta v} |y_u^\gamma - y_v^\gamma| + |y_v|^\gamma |e^{\theta u} - e^{\theta v}|) \\ &\leq e^{\theta T} \|y^{-\gamma}\|_{\infty; T}^2 \left( \|y\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{\min(1, \gamma)} |v - u|^{\alpha \min(1, \gamma)} + \theta \|y\|_{\infty; T}^\gamma |v - u| \right), \end{aligned}$$

car  $s \in \mathbb{R}_+ \mapsto s^\gamma$  est  $\gamma$ -höldérienne de constante 1 si  $\gamma \in ]0, 1]$  et localement lipschitzienne sinon,  $y$  est  $\alpha$ -höldérienne et admet un minimum strictement positif sur  $[0, T]$ , et  $s \in [0, T] \mapsto e^{\theta s}$  est lipschitzienne de constante  $\theta e^{\theta T}$ . En particulier, si  $|v - u| \leq 1$ ,

$$|e^{\theta v} y_v^{-\gamma} - e^{\theta u} y_u^{-\gamma}| \leq e^{\theta T} \|y^{-\gamma}\|_{\infty; T}^2 (\|y\|_{\alpha\text{-höl}; T}^\kappa + \theta \|y\|_{\infty; T}^\gamma) |v - u|^{\alpha \kappa}$$

où,  $\kappa = \min(1, \gamma)$ .

Donc, pour  $i = 0, \dots, k$ ,

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i^n| &\leq \mu(1-\beta) \int_{r_i^n}^{r_{i+1}^n} |y_s^{-\gamma} e^{\theta s} - y_{r_{i+1}^n}^{-\gamma} e^{\theta r_{i+1}^n}| ds \\
&\leq \mu(1-\beta) \|e^{\theta \cdot} y^{-\gamma}\|_{\alpha\kappa\text{-höl};T} \int_{r_i^n}^{r_{i+1}^n} (r_{i+1}^n - s)^{\alpha\kappa} ds \\
(50) \quad &\leq \frac{\mu(1-\beta)}{\alpha\kappa+1} T^{\alpha\kappa+1} \|e^{\theta \cdot} y^{-\gamma}\|_{\alpha\kappa\text{-höl};T} \frac{1}{n^{\alpha\kappa+1}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque entier  $i$  compris entre 0 et  $k-1$ , nous distinguons les deux cas suivants (*presque symétriques*) :

(1) Supposons que  $y_{i+1}^n \geq z_{i+1}^n$ . Alors,

$$(y_{i+1}^n)^{-\gamma} - (z_{i+1}^n)^{-\gamma} \leq 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|y_{i+1}^n - z_{i+1}^n| &= y_{i+1}^n - z_{i+1}^n \\
&= y_i^n - z_i^n + \frac{\mu(1-\beta)T}{n} e^{\theta r_{i+1}^n} [(y_{i+1}^n)^{-\gamma} - (z_{i+1}^n)^{-\gamma}] - \varepsilon_i^n \\
&\leq |y_i^n - z_i^n| + |\varepsilon_i^n|.
\end{aligned}$$

(2) Supposons que  $z_{i+1}^n > y_{i+1}^n$ . Alors,

$$(z_{i+1}^n)^{-\gamma} - (y_{i+1}^n)^{-\gamma} < 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|z_{i+1}^n - y_{i+1}^n| &= z_{i+1}^n - y_{i+1}^n \\
&= z_i^n - y_i^n + \frac{\mu(1-\beta)T}{n} e^{\theta r_{i+1}^n} [(z_{i+1}^n)^{-\gamma} - (y_{i+1}^n)^{-\gamma}] + \varepsilon_i^n \\
&\leq |y_i^n - z_i^n| + |\varepsilon_i^n|.
\end{aligned}$$

En réunissant les cas 1 et 2 :

$$(51) \quad \forall i = 0, \dots, k-1, |z_{i+1}^n - y_{i+1}^n| \leq |z_i^n - y_i^n| + |\varepsilon_i^n|.$$

Puis, en appliquant (51) par récurrence descendante depuis  $k-1$  jusqu'à 0 :

$$\begin{aligned}
|y_k^n - z_k^n| &\leq |y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{k-1} |\varepsilon_i^n| \\
(52) \quad &\leq \frac{\mu(1-\beta)}{\alpha\kappa+1} T^{\alpha\kappa+1} \|e^{\theta \cdot} y^{-\gamma}\|_{\alpha\kappa\text{-höl};T} \frac{1}{n^{\alpha\kappa}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

car  $y_0 = z_0$  et par l'inégalité (50).

De plus, d'après l'inégalité (52), il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout entier  $n > N$ ,

$$|y_{k+1}^n - z_{k+1}^n| \leq \max_{i=1, \dots, n} |y_i^n - z_i^n| \leq m_y$$

où,

$$m_y = \frac{1}{2} \min_{s \in [0, T]} y_s.$$

En particulier,

$$y_{k+1}^n \geq z_{k+1}^n - m_y \geq m_y.$$

Donc  $(y_{k+1}^n)^{-\gamma} \leq m_y^{-\gamma}$ , et

$$\begin{aligned} |y_t^n - y_k^n| &= |y_{k+1}^n - y_k^n| \frac{t - r_k^n}{r_{k+1}^n - r_k^n} \\ &\leq [\mu(1 - \beta)T e^{\theta T} m_y^{-\gamma} + \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T}] \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

En conclusion, d'après l'inégalité (49) :

$$(53) \quad |y_t^n - y_t| \leq [\mu(1 - \beta)T e^{\theta T} m_y^{-\gamma} + \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T} + \|y\|_{\alpha\text{-höl};T}] \frac{1}{n^\alpha} + \frac{\mu(1 - \beta)}{\alpha\kappa + 1} T^{\alpha\kappa+1} \|e^{\theta \cdot} y^{-\gamma}\|_{\alpha\kappa\text{-höl};T} \frac{1}{n^{\alpha\kappa}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci achève la preuve, car le membre de droite de l'inégalité (53) ne dépend pas de  $n$  et  $t$ .  $\square$

Enfin, pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, T]$ , soit  $x_t^n = e^{-\theta t} (y_t^n)^{\gamma+1}$ .

Le corollaire suivant établit que la suite  $(x^n, n \in \mathbb{N}^*)$  est convergente et de limite  $x = \tilde{\pi}_V(0, x_0; w)$  avec  $x_0 > 0$ . Comme pour la suite des schémas d'Euler, il est suffisant de connaître  $x_0$  et  $w$ , ainsi que les paramètres  $\mu, \theta, \sigma > 0$  et  $\beta > 1 - \alpha$ , pour *approcher* toute la trajectoire  $x$  par  $x^n$  :

**COROLLAIRE 3.11.** *Sous l'Hypothèse 3.1, la suite  $(x^n, n \in \mathbb{N}^*)$  est uniformément convergente de limite  $x$ , avec une vitesse en  $n^{-\alpha \min(1, \gamma)}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Pour une condition initiale  $x_0 > 0$  donnée, il a été établi à la Proposition 3.3 que  $x = e^{-\theta \cdot} y^{\gamma+1}$  est la solution de l'équation (35) en posant  $y_0 = x_0^{1-\beta}$ , où  $y$  est la solution de l'équation (36) avec la condition initiale  $y_0$ .

Par le Théorème 3.10 :

$$\begin{aligned} \|x - x^n\|_{\infty;T} &\leq C \|y - y^n\|_{\infty;T} \\ &\leq C [\mu(1 - \beta)T e^{\theta T} m_y^{-\gamma} + \|w(\vartheta)\|_{\alpha\text{-höl};T} + \|y\|_{\alpha\text{-höl};T}] \frac{1}{n^\alpha} + \\ &\quad C \frac{\mu(1 - \beta)}{\alpha\kappa + 1} T^{\alpha\kappa+1} \|e^{\theta \cdot} y^{-\gamma}\|_{\alpha\kappa\text{-höl};T} \frac{1}{n^{\alpha\kappa}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

où,  $C$  désigne la constante de Lipschitz de la fonction  $a \mapsto a^{\gamma+1}$  sur l'intervalle

$$\left[0, \|y\|_{\infty;T} + \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|y^n\|_{\infty;T}\right].$$

Ainsi, la suite  $(x^n, n \in \mathbb{N}^*)$  est uniformément convergente de limite  $x$ , avec une vitesse en  $n^{-\alpha \min(1, \gamma)}$ .  $\square$

### 3. Résultats probabilistes

Dans cette section, tout processus gaussien unidimensionnel, centré et à trajectoires continues  $W$  est considéré sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  où,  $\Omega$  désigne l'espace des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  la tribu engendrée par la classe des cylindres mesurables et de dimension finie de  $\Omega$ , et  $\mathbb{P}$  la probabilité induite par le processus  $W$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Jusqu'à la fin de ce chapitre, excepté aux propositions 3.13 et 3.14, nous considérons un processus  $W$  satisfaisant l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 3.12.** *Le processus  $W$  est unidimensionnel, gaussien, centré et ses trajectoires satisfont l'Hypothèse 3.1.*

Alors, pour toute condition initiale déterministe  $x_0 > 0$ , les trajectoires du processus  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)$  vérifient les résultats de la Section 2.

Essentiellement, cette section complète ces résultats sur le plan probabiliste. En particulier, nous montrons que  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)$  appartient à  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r \geq 1$ . Nous prouvons également que les approximations introduites au Corollaire 3.11 convergent uniformément vers  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)$  dans tous les  $L^r(\Omega)$ ;  $r \geq 1$ .

### 3.1. Compléments sur l'existence et propriétés en loi de la solution.

D'une part, lorsque  $\beta \notin ]1 - \alpha, 1]$ , nous abordons les remarques 2 et 3 consécutives à la Proposition 3.3 sous l'angle probabiliste aux propositions 3.13 et 3.14 respectivement. D'autre part, nous étudions les propriétés en loi satisfaites par  $X = \tilde{\pi}_V(0, x_0; W)$  lorsque le processus  $W$  est à accroissements stationnaires, puis lorsqu'il est auto-similaire.

**PROPOSITION 3.13.** *Soient  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $W$  un processus gaussien unidimensionnel centré et à trajectoires  $\alpha$ -höldériennes,  $x_0 > 0$ ,  $y_0 = x_0^{1-\beta}$ ,*

$$\sigma^2 = \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [W_t^2(\vartheta)],$$

*ainsi que l'événement  $A = \{\tilde{\pi}_V(0, x_0; W) \text{ est définie sur } [0, T]\}$ . Si  $2\sigma^2 \ln(2) < y_0^2$ , alors  $\mathbb{P}(A) > 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** D'une part, d'après la remarque 2 consécutive à la Proposition 3.3 :

$$\begin{aligned} A &\supset \left\{ \inf_{t \in [0, T]} W_t(\vartheta) > -y_0 \right\} \\ &= \left\{ \sup_{t \in [0, T]} -W_t(\vartheta) < y_0 \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $-W(\vartheta)$  est un processus gaussien unidimensionnel, centré et à trajectoires continues par construction, d'après l'inégalité de Borell (cf. [1], Theorem 2.1) :

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{t \in [0, T]} -W_t(\vartheta) > y_0 \right] \leq 2 \exp \left( -\frac{y_0^2}{2\sigma^2} \right)$$

où,

$$\sigma^2 = \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} [W_t^2(\vartheta)] < \infty.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &\geq 1 - \mathbb{P} \left[ \sup_{t \in [0, T]} -W_t(\vartheta) > y_0 \right] \\ &\geq 1 - 2 \exp \left( -\frac{y_0^2}{2\sigma^2} \right) > 0. \end{aligned}$$

□



PROPOSITION 3.14. Soient  $x_0 > 0$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\beta = 1 - \alpha$  et,  $W$  un processus gaussien unidimensionnel centré et à trajectoires  $\alpha$ -höldériennes tel qu'il existe  $H > \alpha$  satisfaisant :

$$\forall \varepsilon > 0, W_\varepsilon \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varepsilon^H W \text{ et } W_{+\varepsilon} - W_\varepsilon \stackrel{\mathcal{L}}{=} W.$$

Si

$$\mu > C(\sigma, \alpha, \theta) \frac{1}{T} \mathbb{E}(|W_T|^{1/\alpha}) \text{ avec } C(\sigma, \alpha, \theta) = (\sigma \theta \alpha^2)^{1/\alpha} e^{\theta T},$$

alors  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)$  est définie sur  $[0, T]$ .

DÉMONSTRATION. D'une part, d'après la remarque 3 consécutive à la Proposition 3.3, si  $\tau_0^1 \in [0, T]$  nécessairement :

$$\mu \leq C(\sigma, \alpha, \theta) \|W\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{1/\alpha}.$$

D'où, par monotonie de l'espérance :

$$\mu \leq C(\sigma, \alpha, \theta) \mathbb{E}(\|W\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{1/\alpha}).$$

Donc, par contraposition,  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)$  est définie sur  $[0, T]$  dès que :

$$\mu > C(\sigma, \alpha, \theta) \mathbb{E}(\|W\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{1/\alpha}).$$

D'autre part, les hypothèses en loi du processus  $W$  entraînent que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \|W\|_{\alpha\text{-höl}; T}^{1/\alpha} \right) &= \mathbb{E} \left[ \left| \sup_{(s,t) \in \Delta_T} \frac{|W_{t-s}|}{|t-s|^\alpha} \right|^{1/\alpha} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left| \frac{|W_T|}{T^H} \sup_{(s,t) \in \Delta_T} |t-s|^{H-\alpha} \right|^{1/\alpha} \right] = \frac{1}{T} \mathbb{E}(|W_T|^{1/\alpha}). \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

**Exemple.** Soit  $B$  un mouvement brownien :

$$\mathbb{E}(B_T^4) = T^2 \mathbb{E}(\xi^4) \text{ avec } \xi \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Or,  $\mathbb{E}(\xi^4) = 4!/(2^2 2!) = 3$ . Donc, les trajectoires de  $B$  étant höldériennes d'exposant  $\alpha \in [1/4, 1/2[$  (en particulier),

$$\mathbb{E}(|B_T|^{1/\alpha}) \leq \mathbb{E}(B_T^4) = 3T^2.$$

Ainsi,  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; B)$  est définie sur  $[0, T]$  lorsque  $\beta = 1 - \alpha$  et  $\mu > 3T$ .

PROPOSITION 3.15. Sous l'Hypothèse 3.12, s'il existe un réel  $h > 0$  tel que

$$W_{+h} - W_h \stackrel{\mathcal{L}}{=} W$$

alors, pour toute condition initiale déterministe  $x_0 > 0$ ,

$$\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)_{+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tilde{\pi}_V(0, X_h; W).$$

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 3.3, les trajectoires du processus  $X$  sont presque sûrement continues et à valeurs strictement positives sur  $[0, T]$ . Donc, par le Théorème 1.44 appliqué à  $X$  et à fonction  $a \mapsto a^{1-\beta}$  entre 0 et  $t \in [0, T]$  :

$$X_t^{1-\beta} = x_0^{1-\beta} + (1-\beta) \int_0^t X_u^{-\beta} (\mu - \theta X_u) du + \sigma(1-\beta) W_t.$$

Ainsi,  $X_{.+h}^{1-\beta} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z(h)$  où,

$$Z(h) = X_h^{1-\beta} + (1-\beta) \int_0^{\cdot} Z_u^{-\gamma}(h) [\mu - \theta Z_u^{\gamma+1}(h)] du + \sigma(1-\beta)W,$$

car  $W_{.+h} - W_h \stackrel{\mathcal{L}}{=} W$ . □

PROPOSITION 3.16. *Sous l'Hypothèse 3.12, s'il existe  $h > 0$  tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, W_{\varepsilon} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varepsilon^h W$$

alors, pour toute condition initiale déterministe  $x_0 > 0$ ,

$$\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)_{\varepsilon} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \tilde{\pi}_{V_{\varepsilon, h}}(0, x_0; W)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ , avec :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b, c \in \mathbb{R}, V_{\varepsilon, h}(a).(b, c) = \varepsilon(\mu - \theta a)c + \sigma \varepsilon^h a^\beta b.$$

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 3.3, les trajectoires du processus  $X$  sont presque sûrement continues et à valeurs strictement positives sur  $[0, T]$ . Donc, par le Théorème 1.44 appliqué à  $X$  et à fonction  $a \mapsto a^{1-\beta}$  entre 0 et  $t \in [0, T]$  :

$$X_t^{1-\beta} = x_0^{1-\beta} + (1-\beta) \int_0^t X_u^{-\beta} (\mu - \theta X_u) du + \sigma(1-\beta)W_t.$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $X_{\varepsilon}^{1-\beta} \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z(\varepsilon)$  où,

$$Z(\varepsilon) = x_0^{1-\beta} + \varepsilon(1-\beta) \int_0^{\cdot} Z_u^{-\gamma}(\varepsilon) [\mu - \theta Z_u^{\gamma+1}(\varepsilon)] du + \varepsilon^h \sigma(1-\beta)W,$$

car  $W_{\varepsilon} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varepsilon^h W$ . □

**Remarque.** Les équations Mean-Reverting dirigées par un mouvement brownien fractionnaire sont typiquement concernées par ces propriétés en loi.

**3.2. Intégrabilité et résultats de convergence probabiliste.** Considérons la suite des schémas d'Euler implicites  $(Y^n, n \in \mathbb{N}^*)$  associée à l'EDS suivante :

$$Y_t = y_0 + \mu(1-\beta) \int_0^t Y_s^{-\gamma} e^{\theta s} ds + W_t(\vartheta); y_0 > 0$$

avec,

$$W_t(\vartheta) = \int_0^t \vartheta_s dW_s \text{ et } \vartheta_t = \sigma(1-\beta)e^{\theta(1-\beta)t}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . L'intégrale est prise au sens de Young.

PROPOSITION 3.17. *Sous l'Hypothèse 3.12, pour toute condition initiale déterministe  $x_0 > 0$ ,*

- (1)  $\|\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)\|_{\infty; T}$  appartient à  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r \geq 1$ .
- (2) Pour tout  $r \geq 1$ ,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|X^n\|_{\infty; T} \in L^r(\Omega)$$

où, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X^n = e^{-\theta \cdot} (Y^n)^{\gamma+1}$  avec  $y_0 = x_0^{1-\beta}$ .

DÉMONSTRATION. D'une part, d'après la Proposition 3.4 et le théorème de Fernique :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\pi}_V(0, x_0; W)\|_{\infty; T} &\leq [x_0^{1-\beta} + \mu(1-\beta)e^{\theta T}x_0^{-\beta}T + \\ &\quad \sigma(\theta \vee 2)(1-\beta)(1+T)e^{\theta(1-\beta)T}\|W\|_{\infty; T}]^{\gamma+1} \in L^r(\Omega) \end{aligned}$$

pour tout  $r \geq 1$ .

D'autre part, d'après le Lemme 3.9 et le théorème de Fernique :

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|Y^n\|_{\infty; T} &\leq y_0 + \mu(1-\beta)e^{\theta T}y_0^{-\gamma}T + \\ &\quad \sigma(\theta \vee 2)(1-\beta)(1+T)e^{\theta(1-\beta)T}\|W\|_{\infty; T} \in L^a(\Omega) \end{aligned}$$

pour tout  $a \geq 1$ . Donc, en posant  $a = (\gamma + 1)r$  pour tout  $r \geq 1$ ,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|X^n\|_{\infty; T} \in L^r(\Omega).$$

□

**COROLLAIRE 3.18.** *Sous l'Hypothèse 3.12, pour toute condition initiale déterministe  $x_0 > 0$ , la suite  $(X^n, n \in \mathbb{N}^*)$  est uniformément convergente de limite  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; w)$  dans  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r \geq 1$ .*

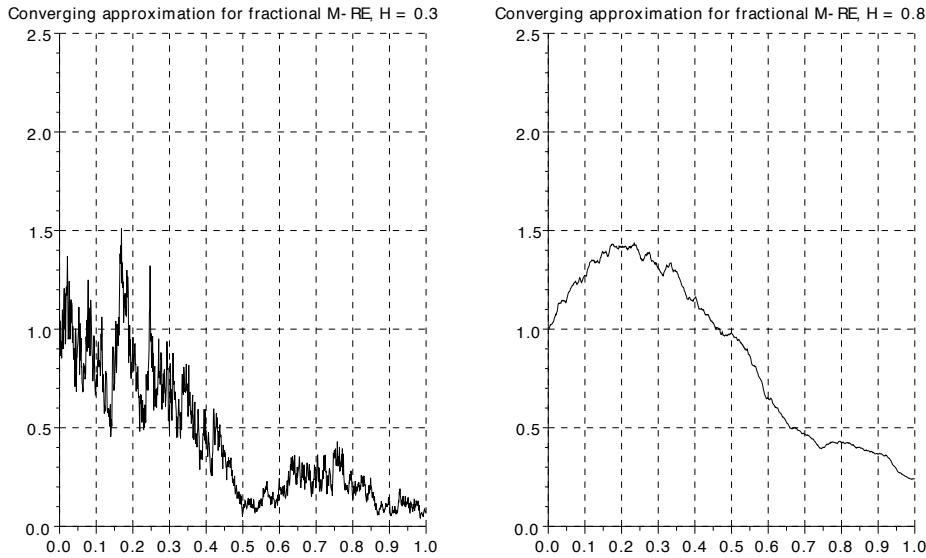
DÉMONSTRATION. D'après le Corollaire 3.11 :

$$\|X^n - \tilde{\pi}_V(0, x_0; W)\|_{\infty; T} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Donc, par la Proposition 3.17 et le théorème de convergence de Vitali, la suite  $(X^n, n \in \mathbb{N}^*)$  est uniformément convergente de limite  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; w)$  dans  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r \geq 1$ . □

**Remarque.** Notez qu'afin d'assurer la convergence dans  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r \geq 1$ , la Proposition 3.17 joue un rôle essentiel. En effet, l'inégalité (53) ne permet pas de conclure, car il n'est pas garanti que  $\|e^{\theta \cdot} Y^{-\gamma}\|_{\alpha\kappa\text{-höl}; T} \in L^1(\Omega)$ .

En usant de l'algorithme de Wood-Chang pour le mBf comme au Chapitre 2, nous avons simulé  $X^n$  avec  $n = 500$ ,  $T = 1$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\mu = 6$ ,  $\theta = 4$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\beta = 0.8$  et le mBf  $B^H$  d'indice de Hurst  $H \in \{0.3, 0.8\}$  :

FIGURE 1. Simulations de  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; B^H)$ 

**3.3. Principe de grandes déviations.** Avant d'établir un principe de grandes déviations (LDP) pour l'équation (34), quelques définitions et résultats connus (se référer à A. Dembo et O. Zeitouni [25]) :

**Convention.** Dans toute cette sous-section, nous admettons que  $\inf(\emptyset) = \infty$ .

**DÉFINITION 3.19.** Soient  $E$  un espace topologique et  $I : E \rightarrow [0, \infty]$  une bonne fonction de taux (i.e. une application semi-continue inférieurement telle que  $\{a \in E : I(a) \leq \lambda\}$  soit un sous-ensemble compact de  $E$  pour tout  $\lambda \geq 0$ ).

Une famille  $(\mu_\varepsilon, \varepsilon > 0)$  de probabilités sur  $(E, \mathcal{B}(E))$  satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonction de taux  $I$  si et seulement si, pour tout  $A \in \mathcal{B}(E)$ ,

$$-I(A^\circ) \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log [\mu_\varepsilon(A)] \leq \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log [\mu_\varepsilon(A)] \leq -I(\bar{A})$$

où,

$$\forall A \in \mathcal{B}(E), I(A) = \inf_{x \in A} I(x).$$

**PROPOSITION 3.20.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hausdorff, une application continue  $f : E \rightarrow F$  et une famille  $(\mu_\varepsilon, \varepsilon > 0)$  de probabilités sur  $(E, \mathcal{B}(E))$ .

Si  $(\mu_\varepsilon, \varepsilon > 0)$  satisfait un principe de grandes déviations de bonne fonction de taux  $I : E \rightarrow [0, \infty]$ , alors  $(\mu_\varepsilon \circ f^{-1}, \varepsilon > 0)$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $(F, \mathcal{B}(F))$  de bonne fonction de taux  $J : F \rightarrow [0, \infty]$  telle que :

$$J(b) = \inf \{I(a); a \in E \text{ et } f(a) = b\}$$

pour tout  $b \in F$ .

Ce résultat s'appelle le *principe de contraction*. Pour une preuve, se référer à [25], Lemma 4.1.6.

Considérons l'espace  $C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R})$  des fonctions  $y \in C^{\alpha\text{-höl}}([0, T]; \mathbb{R})$  telles que :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_y(\delta) = 0 \text{ avec } \omega_y(\delta) = \sup_{\substack{(s,t) \in \Delta_T \\ |t-s| \leq \delta}} \frac{|y_t - y_s|}{|t-s|^\alpha}$$

pour tout  $\delta > 0$ .

**Remarque.** Dans la suite,  $C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R})$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{\alpha\text{-höl};T}$  et de la tribu borélienne associée. De même,  $C^0([0, T]; \mathbb{R})$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty;T}$  et de la tribu borélienne associée.

Supposons que le processus  $W$  introduit à la sous-section précédente satisfait l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 3.21. *Il existe  $h > 0$  tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0, W_{\varepsilon} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \varepsilon^h W.$$

*De plus, l'espace de Cameron-Martin  $H^1$  du processus  $W$  est contenu dans  $C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R})$ , et  $(C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R}), H^1, \mathbb{P})$  est un espace de Wiener abstrait.*

**Remarques :**

- (1) La notion d'espace de Wiener abstrait est détaillée dans M. Ledoux [56].
- (2) Typiquement, un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H > 1/4$  satisfait l'Hypothèse 3.21 (cf. [79], Proposition 4.1).

Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$(54) \quad X_t = x_0 + \frac{1}{\delta} \int_0^t (\mu - \theta X_s) ds + \frac{\sigma}{\delta^{h-1}} \int_0^t X_s^\beta dW_s$$

où,  $x_0 > 0$  est une condition initiale déterministe et  $\mu, \theta, \sigma, \delta > 0$ .

Sous l'Hypothèse 3.12, par les propositions 3.3 et 3.17, l'équation (54) admet une unique solution appartenant à  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r \geq 1$ .

De plus, sous l'Hypothèse 3.21, par la Proposition 3.16 :

$$(55) \quad X_{\varepsilon t} = x_0 + \frac{\varepsilon}{\delta} \int_0^t (\mu - \theta X_{\varepsilon s}) ds + \frac{\sigma \varepsilon^h}{\delta^{h-1}} \int_0^t X_{\varepsilon s}^\beta dW_s$$

pour tous  $t \in [0, T]$  et  $\varepsilon > 0$ .

Désormais, supposons que  $\delta = \varepsilon$ . Alors,  $X_{\varepsilon} = \tilde{\pi}_V(0, x_0; \varepsilon W)$ .

La proposition suivante établit que la famille  $(X_{\varepsilon}, \varepsilon > 0)$  satisfait un principe de grandes déviations :

**PROPOSITION 3.22.** *Sous les hypothèses 3.12 et 3.21, pour toute condition initiale déterministe  $x_0 > 0$ , la famille  $(X_{\varepsilon}, \varepsilon > 0)$  satisfait un principe de grandes déviations sur  $C^0([0, T]; \mathbb{R})$  de bonne fonction de taux  $J : C^0([0, T]; \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  définie par :*

$$\forall y \in C^0([0, T]; \mathbb{R}), J(y) = \inf \{ I(h); h \in C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R}) \text{ et } y = \tilde{\pi}_V(0, x_0; h) \}$$

où,

$$I(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|h\|_{H^1} & \text{si } h \in H^1 \\ \infty & \text{si } h \notin H^1 \end{cases}$$

pour tout  $h \in C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R})$ .

DÉMONSTRATION. Puisque  $C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R}) \subset C^{\alpha\text{-höl}}([0, T]; \mathbb{R})$  par construction, la Proposition 3.5 entraîne que  $\tilde{\pi}_V(0, x_0; \cdot)$  est continue de

$$C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R}) \text{ dans } C^0([0, T]; \mathbb{R}).$$

De plus, sous l'Hypothèse 3.21, d'après M. Ledoux [56], Theorem 4.5; la famille  $(\varepsilon W, \varepsilon > 0)$  satisfait un LDP sur  $C^{0,\alpha}([0, T]; \mathbb{R})$  de *bonne* fonction de taux  $I$ .

Donc, puisque  $X_\varepsilon = \tilde{\pi}_V(0, x_0; \varepsilon W)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , par le *principe de contraction* (cf. Proposition 3.20), la famille  $(X_\varepsilon, \varepsilon > 0)$  satisfait un LDP sur  $C^0([0, T]; \mathbb{R})$  de *bonne* fonction de taux  $J$ .  $\square$

## 4. Application en PK/PD

**4.1. Les modèles mono-compartmentaux en pharmacocinétique.** En pharmacocinétique, l'organisme est considéré comme une succession de compartiments entre lesquels le médicament est transféré. Un compartiment est un ensemble homogène de molécules sur le plan cinétique, qui a ou non une réalité biologique (il peut s'agir d'un espace virtuel défini par les données).

En pratique, les modèles comprennent un à trois compartiments. Dans cette section, nous nous restreignons aux modèles mono-compartmentaux :

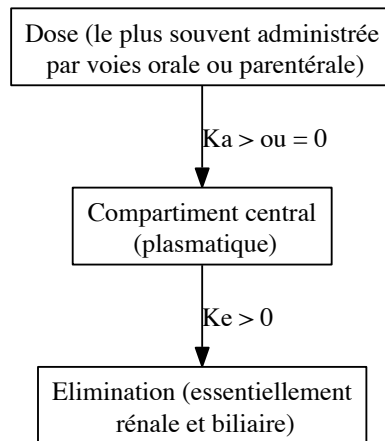


FIGURE 2. Modèle mono-compartmental

$K_a$  et  $K_e$  sont les constantes de transfert du modèle.

La constante  $K_a$  est le taux d'absorption du médicament depuis le site d'administration vers le compartiment central. Lorsque le médicament est administré par voie intra-veineuse (parentérale),  $K_a = 0$ .

La constante  $Ke$  est le taux d'élimination du médicament au niveau du compartiment central de volume  $v > 0$ .

Après administration d'une dose  $D > 0$ , la concentration  $C_t$  du médicament dans le compartiment central à l'instant  $t \in [0, T]$  est classiquement modélisée par une EDO linéaire :

$$(56) \quad C_t = \int_0^t \left( \frac{DKa}{v} e^{-Kas} - KeC_s \right) ds.$$

Cette EDO rend bien compte d'une première phase au cours de laquelle la dose administrée passe progressivement du site d'administration au compartiment central jusqu'à un temps  $t_{\max} > 0$ , puis d'une seconde phase généralement plus longue au cours de laquelle le médicament est distribué/métabolisé/éliminé au niveau du compartiment central. Au cours de la première phase, la fonction  $t \mapsto C_t$  est croissante (sur  $[0, t_{\max}]$ ), puis au cours de la seconde phase, la fonction  $t \mapsto C_t$  est décroissante (sur  $[t_{\max}, T]$ ).

Sur les modèles pharmacocinétiques déterministes, se référer à Y. Jacomet [46]. Sur la pharmacocinétique de population, se référer à N. Simon [80].

Afin de tenir compte des nombreux phénomènes non quantifiables pouvant perturber les transferts entre compartiments, certains auteurs ont ajouté un bruit à l'équation (56) :

$$C_t = \int_0^t \left( \frac{DKa}{v} e^{-Kas} - KeC_s \right) ds + \int_0^t \sigma(s, C_s) dB_s$$

où,  $B$  est un mouvement brownien et l'équation est prise au sens d'Itô.

Citons notamment K. Kalogeropoulos et al. [47] et M. Delattre [24] qui ont étudié le cas particulier suivant :

$$(57) \quad C_t = \int_0^t \left( \frac{DKa}{v} e^{-Kas} - KeC_s \right) ds + \sigma \int_0^t C_s^\beta dB_s$$

avec  $\sigma > 0$  et  $\beta \in [1/2, 1]$ .

**4.2. Un modèle Mean-Reverting généralisé en PK/PD.** Comme le fait remarquer M. Delattre dans [24], le modèle (57) n'est pas réaliste. En effet, les trajectoires du processus  $C$ , seulement  $\alpha$ -höldériennes avec  $\alpha < 1/2$ , sont trop irrégulières pour rendre convenablement compte des perturbations intervenant au cours des transferts entre compartiments.

En pharmacocinétique, la propriété de martingale de l'intégrale stochastique d'Itô ne semble guère indispensable. Ainsi, pour un médicament injecté en intra-veineuse (IV), supposons que

$$(58) \quad C_t = \frac{D}{v} - Ke \int_0^t C_s ds + \sigma \int_0^t C_s^\beta dW_s$$

où,  $W$  désigne un processus satisfaisant l'Hypothèse 3.12.

D'après le Lemme 3.2 et la remarque consécutive à la Proposition 3.3, l'équation

(58) admet une unique solution  $C$  jusqu'au temps  $\tau_0^1$  (temps d'élimination complète), telle que  $C = X \mathbf{1}_{[0, \tau_0^1 \wedge T]}$  où, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$X_t = \left| \left( \frac{D}{v} \right)^{1-\beta} + W_t(\vartheta) \right|^{\gamma+1} e^{-Ket}$$

avec  $\vartheta_t = \sigma(1 - \beta)e^{Ke(1-\beta)t}$ .

Afin de contourner le problème de réalisme mentionné ci-dessus, nous proposons de choisir un coefficient  $\alpha$  *suffisamment* proche de 1. Illustrons ce propos sur un exemple :

**Exemple.** Soient  $D = v$ ,  $Ke = 4$ ,  $\sigma = 1$  et  $\beta = 0.8$ . Le processus  $W$  est un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H \in \{0.6, 0.9\}$  simulé par l'algorithme de Wood-Chang :

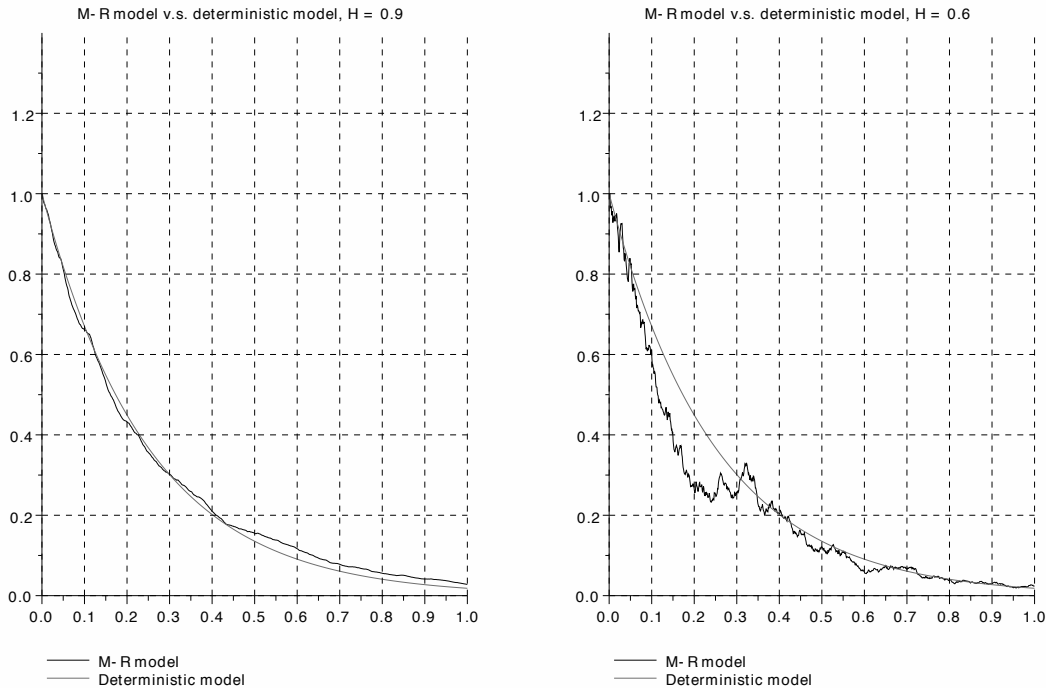


FIGURE 3. Modèle Mean-Reverting v.s. modèle déterministe

D'une part, remarquons que le modèle aléatoire (en noir) conserve la tendance du modèle déterministe ayant les mêmes paramètres (en rouge). D'autre part, remarquons qu'avec un indice de Hurst relativement proche de 1 ( $H = 0.9$ ), la trajectoire du processus  $C$  rend compte d'éventuelles perturbations durant les transferts, mais de façon plus réaliste que si  $H = 0.6$ .

Puisque  $C$  coïncide avec le processus  $X$  sur l'intervalle  $[0, \tau_0^1 \wedge T]$ , l'estimation des paramètres du modèle depuis les données de concentrations aux temps  $0 < r_1 < \dots < r_n < T$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) peut se faire par maximisation numérique de la fonction de vraisemblance de  $(X_1, \dots, X_n)$  où,  $X_i = X_{r_i}$  pour  $i = 1, \dots, n$  :



PROPOSITION 3.23. *Sous l'Hypothèse 3.12, la fonction de vraisemblance  $L_n$  de  $(X_1, \dots, X_n)$  satisfait :*

$$L_n(\theta; X_1, \dots, X_n) = \frac{2^n(1-\beta)^n \mathbf{1}_{X_1>0, \dots, X_n>0}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det[\Gamma(\theta)]}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle \Gamma^{-1}(\theta) U_n^X, U_n^X \rangle \right] \prod_{i=1}^n X_i^{-\beta}$$

où,  $\theta = (Ke, \sigma, \beta)$ ,  $Z = X^{1-\beta}$ ,  $\sigma^2(\theta) = \text{var}(Z_1, \dots, Z_n)$  avec  $Z_i = Z_{r_i}$  pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\Gamma(\theta) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2(\theta) & \dots & c_Z(r_1, r_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_Z(r_n, r_1) & \dots & \sigma_n^2(\theta) \end{bmatrix} \text{ et } U_n^X = \begin{pmatrix} X_1^{1-\beta} - C_0^{1-\beta} e^{-Ke(1-\beta)r_1} \\ \vdots \\ X_n^{1-\beta} - C_0^{1-\beta} e^{-Ke(1-\beta)r_n} \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. Puisque  $W(\vartheta)$  est l'intégrale de Wiener de  $\vartheta$  par rapport au processus gaussien centré  $W$ ,  $W(\vartheta)$  est lui-même un processus gaussien centré et donc,  $(Z_1, \dots, Z_n)$  est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance  $\Gamma(\theta)$ . La densité (naturelle) du vecteur aléatoire  $(Z_1, \dots, Z_n)$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  est notée  $f(\theta; \cdot)$ .

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne bornée. Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X_1, \dots, X_n)] &= \mathbb{E}[\varphi(|Z_1|^{\gamma+1}, \dots, |Z_n|^{\gamma+1})] \\ &= 2^n \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(a_1^{\gamma+1}, \dots, a_n^{\gamma+1}) f(\theta; a_1, \dots, a_n) da_1 \dots da_n \end{aligned}$$

par décomposition en carrés des formes quadratiques.

Posons  $b_i = a_i^{\gamma+1}$  pour  $a_i \in \mathbb{R}_+^*$  et  $i = 1, \dots, n$ . Alors,

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1^{\frac{1}{\gamma+1}}, \dots, b_n^{\frac{1}{\gamma+1}}) \text{ et } |J(b_1, \dots, b_n)| = \frac{1}{(\gamma+1)^n} \prod_{i=1}^n b_i^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}$$

où,  $J(b_1, \dots, b_n)$  désigne le Jacobien de l'application

$$(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mapsto (b_1^{\frac{1}{\gamma+1}}, \dots, b_n^{\frac{1}{\gamma+1}}).$$

En appliquant ce changement de variable :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(X_1, \dots, X_n)] &= \frac{2^n}{(\gamma+1)^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} db_1 \dots db_n \varphi(b_1, \dots, b_n) \times \\ & f(\theta; b_1^{\frac{1}{\gamma+1}}, \dots, b_n^{\frac{1}{\gamma+1}}) \prod_{i=1}^n b_i^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(\theta; db_1, \dots, db_n) = L_n(\theta; b_1, \dots, b_n) db_1 \dots db_n$  avec :

$$\begin{aligned} L_n(\theta; b_1, \dots, b_n) &= \frac{2^n}{(\gamma+1)^n} f(\theta; b_1^{\frac{1}{\gamma+1}}, \dots, b_n^{\frac{1}{\gamma+1}}) \prod_{i=1}^n b_i^{-\frac{\gamma}{\gamma+1}} \mathbf{1}_{b_1>0, \dots, b_n>0} \\ &= \frac{2^n(1-\beta)^n \mathbf{1}_{b_1>0, \dots, b_n>0}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det[\Gamma(\theta)]}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle \Gamma^{-1}(\theta) U_n^b, U_n^b \rangle \right] \prod_{i=1}^n b_i^{-\beta}. \end{aligned}$$

□

Sur l'estimation ponctuelle, se référer à A. Monfort [68]. Sur l'estimation des paramètres des processus, se référer à Yu. A. Kutoyants [52].

Nous concluons cette sous-section par un calcul de sensibilité par rapport à la dose administrée  $D$  :

PROPOSITION 3.24. *Sous l'Hypothèse 3.12, soient  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \tau_0^1 \wedge T]$  un temps aléatoire,  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction satisfaisant l'Hypothèse 2.19 en dimension 1, et  $f(\tau, D) = \mathbb{E}[F(C_\tau^D)]$  pour toute dose administrée  $D > 0$ . La fonction  $f(\tau, \cdot)$  est dérivable de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  et,*

$$\partial_D f(\tau, D) = D^{-\beta} \mathbb{E} \left[ e^{-K\epsilon\tau} \dot{F}(C_\tau^D) [D^{1-\beta} + W_\tau(\vartheta)]^\gamma \right].$$

DÉMONSTRATION. La fonction  $D \in \mathbb{R}_+^* \mapsto C_\tau^D$  est presque sûrement de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  et,

$$\forall D > 0, \partial_D C_\tau^D = D^{-\beta} [D^{1-\beta} + W_\tau(\vartheta)]^\gamma e^{-K\epsilon\tau}.$$

Soient  $D > 0$  et  $\varepsilon \in ]0, 1]$ .

D'une part, la fonction  $F$  étant de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans lui-même, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, puis l'Hypothèse 2.19, il existe deux constantes  $K > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  telles que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(C_\tau^{D+\varepsilon}) - F(C_\tau^D)}{\varepsilon} \right| &= \left| \int_0^1 \dot{F}(C_\tau^{D+\theta\varepsilon}) \partial_D C_\tau^{D+\theta\varepsilon} d\theta \right| \\ &\leq \sup_{\theta \in [0,1]} K (1 + \|C_\tau^{D+\theta\varepsilon}\|_{\infty;T})^N |\partial_D C_\tau^{D+\theta\varepsilon}|. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $\theta, \varepsilon \in [0, 1]$  :

$$(59) \quad \|C_\tau^{D+\theta\varepsilon}\|_{\infty;T} \leq [(D+1)^{1-\beta} + \|W(\vartheta)\|_{\infty;T}]^{\gamma+1}$$

et

$$(60) \quad |\partial_D C_\tau^{D+\theta\varepsilon}| \leq D^{-\beta} [(D+1)^{1-\beta} + \|W(\vartheta)\|_{\infty;T}]^\gamma.$$

Par le théorème de Fernique, les membres droits des inégalités (59) et (60) appartiennent à  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r > 0$ . De plus, ces majorants ne dépendent pas de  $\theta$  et  $\varepsilon$ .

Ainsi, par le théorème de convergence dominée,  $f(\tau, \cdot)$  est dérivable au point  $D$  et,

$$\partial_D f(\tau, D) = D^{-\beta} \mathbb{E} \left[ e^{-K\epsilon\tau} \dot{F}(C_\tau^D) [D^{1-\beta} + W_\tau(\vartheta)]^\gamma \right].$$

□

**4.3. Perspective d'application en psycho-pharmacologie.** *Ce travail de synthèse a été validé par le psychiatre Francis Lavergne.*

Nous décrivons d'abord brièvement la synthèse et le mécanisme d'action du glutamate. Ensuite, nous énonçons l'hypothèse récemment étudiée sur l'implication de l'activité des récepteurs au glutamate dans les symptômes de la dépression. Enfin, après avoir énoncé et rapidement expliqué l'hypothèse retenue sur l'action antidépresseur de la kétamine, nous proposons une piste pour optimiser la dose thérapeutique en usant du modèle PK/PD développé à la sous-section précédente.

Le glutamate est un neurotransmetteur synthétisé dans le neurone à partir de la glutamine, un acide aminé converti en glutamate par une enzyme, la glutaminase. La glutamine peut être synthétisée à partir du glutamate par une autre enzyme, la glutamine synthetase, au niveau des cellules gliales (les cellules structurales du cerveau) adjacentes à la synapse. Une fois libéré dans la fente synaptique, au niveau du neurone post-synaptique, le glutamate se fixe sur un site spécifique présent à la surface de quatre types de récepteurs, dont les récepteurs NMDA (N-Méthyl-D-Aspartate) et AMPA (Alpha-amino-3-hydroxy-5-Méthyl-4-isoxazole-Propionic Acid). Une partie du glutamate libéré est recapturé soit par le neurone pré-synaptique, soit par une cellule gliale adjacente impliquée dans la synthèse de la glutamine.

En se fixant à la surface des récepteurs AMPA, le glutamate permet l'ouverture du canal ionique de ces derniers, laissant ainsi entrer des ions sodium dans le neurone post-synaptique. Les ions sodium entraînent la dépolarisation des ions magnésium fixés sur un site spécifique à l'intérieur des récepteurs NMDA.

En se fixant à la surface des récepteurs NMDA, le glutamate permet l'ouverture du canal ionique de ces derniers, laissant ainsi entrer des ions calcium dans le neurone post-synaptique après dépolarisation des ions magnésium fixés à l'intérieur du récepteur NMDA. Les ions calcium excitent le neurone, favorisant ainsi la neuro-transmission.

La potentialisation *long term* du neurone entraîne la synthèse de nouveaux récepteurs AMPA favorisant ainsi la synapto-genèse. Cependant, un excès d'ions calcium entraîne une altération du fonctionnement neuronal pouvant aller jusqu'à la mort cellulaire. Il a notamment été établi que la dépression s'associe à une activité excessive des récepteurs NMDA (cf. G.E. Correll et G.E. Futter [15]). La kétamine est un antagoniste de ces récepteurs NMDA.

La synthèse du glutamate et le fonctionnement des récepteurs NMDA et AMPA est décrite en détails dans [82], Chapter 10, p. 387 à 411. S. Stahl y développe également les hypothèses discutées sur l'effet délétère d'une activité excessive des récepteurs NMDA, notamment dans la schizophrénie et les maladies neuro-dégénératives.

Les antidépresseurs (AD) actuellement utilisés, augmentent la concentration en monoamines (Dopamine, Noradrénaline et Sérotonine) dans la fente synaptique par des mécanismes variant d'une classe d'AD à une autre. Par exemple les IMAO inhibent des enzymes, les monoamine-oxydases. Ces enzymes dégradent une partie des monoamines libérées dans la fente synaptique. D'autres mécanismes, comme l'inhibition de la recapture des monoamines par le neurone pré-synaptique aboutissent encore à une augmentation des neurotransmetteurs dans la fente synaptique. Cependant, quel que soit leur mécanisme d'action, les AD augmentent tous la stimulation des récepteurs dopaminergiques D1, comme le montrent F. Lavergne et T. Jay au niveau du cortex frontal (cf. F. Lavergne et T. Jay [54]). Cette augmentation est plus ou moins importante (jusqu'à 600% pour la miansérine (Athymil)). Par ce biais, ils régulent l'activité des récepteurs NMDA et AMPA.

Après une injection IV de 0.5 mg/kg de kétamine chez un sujet dépressif (cf. G.E. Correll et G.E. Futter [15]), une amélioration est constatée au bout de 2 heures,

alors qu'il est généralement admis que les AD actuellement utilisés présentent un délais d'action de 2 semaines.

Au niveau du neurone post-synaptique, la kétamine se fixe sur un site spécifique (PCP site) présent à l'intérieur de plusieurs types de récepteurs, dont les récepteurs AMPA et les récepteurs NMDA. De cette façon, la kétamine inhibe l'action du glutamate en bloquant le canal ionique des récepteurs NMDA, et donc l'entrée des ions calcium dans le neurone post-synaptique. Ainsi, en diminuant une activité excessive des récepteurs NMDA ou en augmentant l'activité des récepteurs AMPA, la kétamine agirait sur les symptômes de la dépression.

Il n'est cependant pas exclu que la kétamine soit neuro-toxique, même à dose antidépresseur. En modélisant la concentration  $C$  en kétamine après injection IV au cours du temps par une équation Mean-Reverting généralisée dirigée par un processus gaussien bien choisi, ainsi que l'effet thérapeutique (par ex. via les échelles BDI et HAMD-17) et l'effet neuro-toxique (par ex. via le seuil hallucinatoire) à l'instant  $t$ , en fonction de  $C_t$ , nous pourrions déterminer la dose (ou l'intervalle de doses) initiale(s)  $D$  entraînant simultanément un effet antidépresseur observable maximal et un effet neuro-toxique observable minimal. C'est un résultat similaire à la Proposition 3.24, prenant en compte les mécanismes décrit ci-dessus, qui permettrait cela.

Le modèle aléatoire présenté à la sous-section précédente semble tout indiqué de par sa précision, essentielle compte-tenu de la neuro-toxicité éventuelle du produit. Pour des raisons analogues, son utilisation en cancérologie est envisageable.

## Bibliographie

- [1] R.J. Adler. *An Introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes*. Institute of Mathematical Statistics, Lecture Notes-Monograph Series, Vol. 12, 1990.
- [2] F. Baudoin et M. Hairer. *A Version of Hörmander's Theorem for the Fractional Brownian Motion*. Probab. Theory Relat. Fields 139, 373-395, 2007.
- [3] F. Baudoin, C. Ouyang et S. Tindel. *Upper Bounds for the Density of Solutions of Stochastic Differential Equations driven by Fractional Brownian Motions*. A paraître dans les Annales de l'IHP Proba-Stats, 2012.
- [4] R.L. Bishop et R.J. Crittenden. *Geometry of Manifolds*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.
- [5] M. Besalu et D. Nualart. *Estimates for the Solution to Stochastic Differential Equations driven by a Fractional Brownian Motion with Hurst Parameter  $H \in (1/3, 1/2)$* . Stochastics and Dynamics, Vol. 11, Nos 2 et 3, 243-263, 2011.
- [6] H. Cartan. *Cours de calcul différentiel*. Méthodes, Hermann, 2007.
- [7] T. Cass, C. Litterer et T. Lyons. *Integrability Estimates for Gaussian Rough Differential Equations*. arXiv :1104.1813v4, 2011.
- [8] K.T. Chen. *Iterated Integrals and Exponential Homomorphisms*. Proc. London Math. Soc. (3), 4 :502-512, 1954.
- [9] K.T. Chen. *Algebraization of Iterated Integration along Paths*. Bull. Amer. Math. Soc., 73 :975-978, 1967.
- [10] K.T. Chen. *Iterated Path Integrals and Generalized Paths*. Bull. Amer. Math. Soc., 73 :935-938, 1967.
- [11] P. Cheridito. *Regularizing Fractional Brownian Motion with a View towards Stock Price Modeling*. Thèse de doctorat de l'université de Zürich, 2001.
- [12] P. Cheridito, H. Kawaguchi et M. Maejima. *Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*. Electronic Journal of Probability, 8(3), p. 1-14, 2003.
- [13] A. Chronopoulou et S. Tindel. *On Inference for Fractional Differential Equations*. arXiv :1104.3966v1, 2011.
- [14] S. Cohen et F. Panloup. *Approximation of Stationary Solutions of Gaussian Driven Stochastic Differential Equations*. Stochastic Processes and their Applications, 121, no. 12, 2776-2801, 2011.
- [15] G.E. Correll et G.E. Futter. *Two Case Studies of Patients with Major Depressive Disorder Given Low-Dose (Subanesthetic) Ketamine Infusions*. Pain Medicine, vol. 7, 2006.
- [16] L. Coutin. *Rough Paths via Sewing Lemma*. ESAIM : Probability and Statistics, doi :10.1051/ps/2011108.
- [17] L. Coutin, P. Friz et N. Victoir. *Good Rough Paths Sequences and Applications to Anticipating and Fractional Stochastic Calculus*. Ann. Probab., 35(3) :1172-1193, 2007.
- [18] L. Coutin et A. Lejay. *Semi-Martingales and Rough Paths Theory*. Electron. J. Probab., 10(23) :761-785 (electronic), 2005.
- [19] L. Coutin et A. Lejay. *Perturbed Linear Rough Differential Equations*. INRIA :hal-00722900v1, 2012.
- [20] L. Coutin et Z. Qian. *Stochastic Analysis, Rough Path Analysis and Fractional Brownian Motions*. Probab. Theory Related Fields, 122(1) :108-140, 2002.

- [21] J.C. Cox, J.E. Ingersoll et S.A. Ross. *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. *Econometrica*, 53, pp. 385-407, 1985.
- [22] A.M. Davie. *Differential Equations Driven by Rough Paths : An Approach via Discrete Approximation*. *Appl. Math. Res. Express AMRX*, (2) :Art. ID abm009, 40, 2007.
- [23] L. Decreusefond et S. Ustunel. *Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion*. *Potential Anal.* 10(2) :177-214, 1999.
- [24] M. Delattre. *Pharmacokinetics and Stochastic Differential Equations : Model and Methodology*. 20th Meeting of the Population Approach Group in Europe, Athènes, 2011.
- [25] A. Dembo et O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications*. *Applications of Mathematics*, Vol. 38, New-York. Springer-Verlag, 1998.
- [26] A. Deya, M. Gubinelli et S. Tindel. *Non-Linear Rough Heat Equations*. A paraître dans PTRF, 2012.
- [27] A. Deya et S. Tindel. *Rough Volterra Equations 1 : The Algebraic Integration Setting*. *Stoch. Dyn.*, 9(3) :437-477, 2009.
- [28] A. Deya et S. Tindel. *Rough Volterra Equations 2 : Convolutional Generalized Integrals*. *Stoch. Process. Appl.*, 121(8) :1864-1899, 2011.
- [29] T. Dieker. *Simulation of Fractional Brownian Motion*. University of Twente, 2004.
- [30] H. Doss. *Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires*. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B*, 283(13) :Ai, A939-A942, 1976.
- [31] D. Feyel et A. De La Pradelle. *Curvilinear Integrals Along Enriched Paths*. *Electron J. Probab.*, 11 :860-892, 2006.
- [32] J. Feng, J-P. Fouque et R. Kumar. *Small-Time Asymptotics for Fast Mean-Reverting Stochastic Volatility Models*. *Ann. Appl. Probab.* Volume 22, Number 4, 1541-1575, 2012.
- [33] M. Fliess et D. Normand-Cyrot. *Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Baker-Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen*. *Séminaire de Probabilités XVI*, vol. 920, 257-267, Springer, Berlin, 1982.
- [34] E. Fournié, J-M. Lasry, J. Lebuchoux, P-L. Lions et N. Touzi. *Applications of Malliavin Calculus to Monte-Carlo Methods in Finance*. *Finance Stochast.* 3, 391-412, 1999.
- [35] P. Friz et N. Victoir. *A Note on the Notion of Geometric Rough Paths*. *Probab. Theory Related Fields*, 136(3) :395-416, 2006.
- [36] P. Friz et N. Victoir. *Differential Equations Driven by Gaussian Signals*. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 46, no. 2, 369-41, 2010.
- [37] P. Friz et N. Victoir. *The Burkholder-Davis-Gundy Inequality for Enhanced Martingales*. *Séminaire de Probabilités XLI*, Volume 1934 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, 2008.
- [38] P. Friz et N. Victoir. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths : Theory and Applications*. *Cambridge Studies in Applied Mathematics*, 120. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [39] E. Gobet et R. Müños. *Sensitivity Analysis using Itô-Malliavin Calculus and Martingales, and Application to Stochastic Optimal Control*. *Siam J. Control Optim.* Vol. 43, No. 5, pp. 1676-1713, 2005.
- [40] M. Gubinelli. *Controlling Rough Paths*. *J. Funct. Anal.* 216, 86-140, 2004.
- [41] M. Hairer et A. Ohashi. *Ergodic Theory for SDEs with Extrinsic Memory*. *The Annals of Probability*, Vol. 35, No. 5, 1950-1977, 2007.
- [42] Y. Hu et D. Nualart. *Differential Equations driven by Holder Continuous Functions of Order Greater than 1/2*. *Stochast. Anal. Appl.*, 2 :399-413, 2007.
- [43] K. Itô. *Stochastic Integral*. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20, 519-524, 1944.
- [44] K. Itô. *Stochastic Differential Equations*. *Memoirs AMS* 4, 1951.
- [45] J. Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. *Lecture Notes in Mathematics* 714, Springer, 1979.

- [46] Y. Jacomet. *Pharmacocinétique. Cours et Exercices*. Université de Nice, U.E.R. de Médecine, Service de pharmacologie expérimentale et clinique, Ellipses, 1989.
- [47] K. Kalogeropoulos, N. Demiris et O. Papaspiliopoulos. *Diffusion-driven Models for Physiological Processes*. International Workshop on Applied Probability (IWAP), 2008.
- [48] S. Karlin et H.M. Taylor. *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press Inc., Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1981.
- [49] Y. El Khatib and N. Privault. *Computations of Greeks in Markets with Jumps via the Malliavin Calculus*. Finance and Stochastics 8, 161-179, 2004.
- [50] A. Kohatsu-Higa et J.A. León. *Anticipating Stochastic Differential Equations of Stratonovich Type*. Appl. Math. Optim. 36, no. 3, 263-289, 1997.
- [51] H. Kunita. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge Studies in Applied Mathematics, 24. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [52] Yu. A. Kutoyants. *Estimation de paramètres pour des processus stochastiques*. Heldermann, Berlin, 1984.
- [53] D. Lamberton et B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipse, 1997.
- [54] F. Lavergne et T.M. Jay. *A new Strategy for Antidepressant Prescription*. Frontiers in Neuroscience, 2010.
- [55] F. Lavergne, N. Marie et F. Mehran. *Les 5 modalités de la souffrance psychique : Analyses statistiques du questionnaire des schémas (QSY-s3)*. Soumis à la revue de psychiatrie biologique l'Encéphale, 2012.
- [56] M. Ledoux. *Isoperimetry and Gaussian Analysis*. Ecole d'été de probabilité de Stain-Flour, 1994.
- [57] A. Lejay. *Controlled Differential Equations as Young Integrals : A Simple Approach*. Journal of Differential Equations 248, 1777-1798, 2010.
- [58] A. Lejay. *Global Solutions to Rough Differential Equations with Unbounded Vector Fields*. Séminaire de probabilités XLIV, Lecture Notes in Mathematics 2046, Springer-Verlag, 215-246, 2012.
- [59] T. Lyons. *Differential Equations Driven by Rough Signals. I. An Extension of and Inequality of L.C. Young*. Math. Res. Lett. 1, no. 4, 451-464, 1994.
- [60] T. Lyons. *Differential Equations Driven by Rough Signals*. Rev. Mat. Iberoamericana, 14(2) :215-310, 1998.
- [61] T. Lyons. *Differential Equations Driven by Rough Paths*. Ecole d'Été de Probabilités de St-Flour XXXIV, Lecture Notes in Mathematics 1908, Springer, 2004.
- [62] T. Lyons et Z. Qian. *System Control and Rough Paths*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [63] P. Malliavin et A. Thalmaier. *Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance*. Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [64] B.B. Mandelbrot et J.W. Van Ness. *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*. SIAM Rev., 10, 422-437, 1968.
- [65] X. Mao, A. Truman et C. Yuan. *Euler-Maruyama Approximations in Mean-Reverting Stochastic Volatility Model under Regime-Switching*. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2006.
- [66] N. Marie. *Sensitivities via Rough Paths*. arXiv :1108.0852v8, 2011.
- [67] N. Marie. *A Generalized Mean-Reverting Equation and Applications*. arXiv :1208.1165v1, 2012.
- [68] A. Monfort. *Cours de statistique mathématique. 3e édition*. Collection ESA, Economica, 1997.
- [69] A. Neuenkirch et S. Tindel. *A Least Square-Type Procedure for Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations with Additive Fractional Noises*. arXiv :1111.1816v1, 2011.
- [70] J. Neveu. *Processus aléatoires gaussiens*. Presses de l'Université de Montréal, 1968.
- [71] J. Neveu. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Deuxième édition, Masson et Cie, Paris, 1970.

- [72] I. Nourdin et A. Neuenkirch. *Exact Rate of Convergence of some Approximation Schemes Associated to SDEs Driven by a Fractional Brownian Motion*. Journal of Theoretical Probability, 20(4), pp. 871-899, 2007.
- [73] D. Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2006.
- [74] J-Y. Ouvrard. *Probabilités 2, master agrégation*. Collection enseignement des mathématiques, Cassini, 2004.
- [75] N. Privault et X. Wei. *A Malliavin Calculus Approach to Sensitivity in Insurance*. Insurance : Mathematics and Economics 35, 679-690, 2004.
- [76] D. Revuz et M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Volume 293 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1999.
- [77] L.C.G. Rogers. *Arbitrage with Fractional Brownian Motion*. Mathematical Finance, vol. 7, No. 1, 95-105, 1997.
- [78] S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach Science, 1993.
- [79] M. Sanz-Solé et I. Torrecilla-Tarantino. *A Large Deviation Principle in Hölder Norm for Multiple Fractional Integrals*. arXiv (0702049), 2007.
- [80] N. Simon. *Pharmacocinétique de population*. Collection Pharmacologie médicale, Solal, 2006.
- [81] G. Skandalis. *Topologie et Analyse, 3e année*. Sciences sup, Dunod, 2004.
- [82] S. Stahl. *Essential Psychopharmacology : Neuroscientific Basis and Applications. Second Edition*. Cambridge University Press, 2000.
- [83] H.J. Sussman. *On the Gap between Deterministic and Stochastic Ordinary Differential Equations*. Ann. Probability, 6(1) :19-41, 1978.
- [84] J. Teichmann. *Calculating the Greeks by Cubature Formulas*. Proceedings of the Royal Society London A 462, 647-670, 2006.
- [85] N. Tien Dung. *Fractional Geometric Mean Reversion Processes*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 330, pp. 396-402, 2011.
- [86] N. Towghi. *Multidimensional Extension of L.C. Young's Inequality*. JIPAM J. Inequal. Pure Appl. Math., 3(2) :Article 22, 13 pp. (electronic), 2002.
- [87] F. Wu, X. Mao et K. Chen. *A Highly Sensitive Mean-Reverting Process in Finance and the Euler-Maruyama Approximations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 348(1), pp. 540-554, 2008.
- [88] Y. Yamato. *Stochastic Differential Equations and Nilpotent Lie Algebras*. Z. Wahr. und verw. Gebiete, 47, 213-29, 1979.
- [89] L.C. Young. *An Inequality of Hölder Type Connected with Stieljès Integration*. Acta Math. (67) :251-282, 1936.
- [90] M. Zähle. *Integration with Respect to Fractal Functions and Stochastic Calculus I*. Probab. Theory Relat. Fields 111, 333-374, 1998.