



Estimation locale des paramètres d'anisotropie en milieux transversalement isotropes (TI)

Jerome Parscau Du Plessix

► To cite this version:

Jerome Parscau Du Plessix. Estimation locale des paramètres d'anisotropie en milieux transversalement isotropes (TI). Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1991. Français. NNT: . tel-00784204

HAL Id: tel-00784204

<https://theses.hal.science/tel-00784204>

Submitted on 4 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



TOME I

**OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
INSTITUT DE RECHERCHES INTERDISCIPLINAIRES
DE GÉOLOGIE ET DE MÉCANIQUE**

THÈSE

PRÉSENTÉE
A L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
DE GRENOBLE
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
Mention : PHYSIQUE
Spécialité : GÉOPHYSIQUE
PAR

Jérôme de PARSCAU du PLESSIX

Sujet de la thèse :

**ESTIMATION LOCALE
DES PARAMÈTRES D'ANISOTROPIE
EN MILIEUX TRANSVERSALEMENT ISOTROPES (TI)**

Texte

Soutenue le 15 octobre 1991 devant la Commission d'Examen

MM. G. PERRIER	<i>Président Rapporteur</i>
G. GRAU	<i>Rapporteur</i>
M. CAMPILLO	<i>Directeur de thèse</i>
Mme L. NICOLETIS	<i>Examineur</i>
M. K. HELBIG	<i>Examineur</i>

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr

01 SEP. 2003

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
INSTITUT DE RECHERCHES INTERDISCIPLINAIRES
DE GÉOLOGIE ET DE MÉCANIQUE

THÈSE

PRÉSENTÉE
A L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
DE GRENOBLE
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
Mention : PHYSIQUE
Spécialité : GÉOPHYSIQUE
PAR

Jérôme de PARSCAU du PLESSIX

Sujet de la thèse :

ESTIMATION LOCALE
DES PARAMÈTRES D'ANISOTROPIE
EN MILIEUX TRANSVERSALEMENT ISOTROPES (TI)

Texte

Soutenue le 15 octobre 1991 devant la Commission d'Examen

MM. G. PERRIER	Président Rapporteur
G. GRAU	Rapporteur
M. CAMPILLO	Directeur de thèse
Mme L. NICOLETIS	Examineur
M. K. HELBIG	Examineur

050 035857 6

1010 4789

à mes parents...

REMERCIEMENTS.

Cette thèse a été entièrement réalisée à l'Institut Français du Pétrole dans la division de recherche *Géophysique et Instrumentation*.

Je tiens tout d'abord à remercier madame L. Nicoletis qui m'a reçu au sein de son équipe de recherche pour réaliser cette thèse.

Je remercie monsieur M. Campillo d'avoir accepté d'être directeur de thèse.

Je remercie le professeur G. Perrier de l'Université Joseph Fourier de Grenoble qui m'a fait l'honneur de présider cette thèse et d'en être rapporteur.

Monsieur G. Grau, au cours de nos diverses rencontres, m'a encouragé et aidé à rédiger l'article paru dans la revue *Geophysics*. Je le remercie d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.

J'ai eu la chance de rencontrer le professeur K. Helbig de l'Université d'Utrecht. Son expérience de l'anisotropie m'a particulièrement impressionné et fait avancer dans mes travaux durant les quatre derniers mois de ma thèse. Je regrette seulement de ne pas l'avoir rencontré plus tôt, j'aurai pu ainsi gagner un temps précieux. J'ai pu aussi apprécier ses talents de marin au large de Saint-Malo... Je le remercie d'avoir accepté d'être membre de ce jury.

Je remercie monsieur M. Dubesset d'avoir relu ce rapport, c'est grâce à lui si celui-ci est rédigé en français...

Une des composantes essentielles pour bien vivre trois années de thèse est une bonne ambiance de travail. Celle-ci n'aurait sans doute pas été en l'absence de mes collègues et amis, Lionel et Florence Jannaud, Alain Sei, Roelof Versteeg, Emmanuel Piaut et Jacques Quiblier. Tous sont les acteurs de "la chaude ambiance du château", qu'ils en soient vivement remerciés. Une pensée particulière à Lionel avec qui j'ai partagé un bureau et qui m'a beaucoup aidé par nos nombreuses discussions.

RÉSUMÉ

Cette étude est motivée par le manque de mesures de paramètres d'anisotropie à l'échelle de la sismique de puits. Le but est de déterminer localement ces paramètres à partir de données de puits en trois composantes du type *walkaway*. On s'est intéressé pour cela à des milieux TI d'axe de symétrie contenu dans un plan vertical.

Les données sont constituées par les lenteurs apparentes verticales et les directions de polarisation mesurées pour différents déports de la source. Les lenteurs apparentes verticales sont définies à partir des temps de trajets verticaux entre au moins deux récepteurs ancrés dans le puits. Les directions de polarisation sont repérées par l'angle γ fait avec la direction verticale.

Nous nous sommes intéressé à la propagation des ondes P et SV dans les milieux TI. Quatre constantes élastiques sont nécessaires pour décrire la propagation des ces ondes. Les expressions de la lenteur et de l'angle de polarisation sont donc fonction de quatre constantes élastiques et de l'angle d'incidence θ . Pour des milieux anisotropes, cet angle n'est pas directement mesurable à partir de données de puits. On définit alors deux paramètres qui simplifient les expressions de la vitesse de phase et qui permettent d'écrire une relation du type $\theta = f(\gamma)$. À partir de cette relation, on obtient une expression exacte de la lenteur apparente verticale en fonction de l'angle de polarisation.

Cette expression est utilisée pour inverser, par une méthode d'optimisation, les paramètres d'anisotropie à partir des données de puits. On détermine, par une étude de sensibilité, dans quelle gamme d'incidence les paramètres seront le plus précisément estimés par cette méthode. On montre de plus comment une erreur sur les données (due aux incertitudes de mesure) se répercute sur les valeurs estimées des paramètres.

La méthode d'inversion est testée sur des données synthétiques et sur deux jeux de données réelles. Le premier est un jeu de données enregistré sur le site expérimental de la *Colorado School of mines* (White *et al.*, 1983). Le second est un *Walkaway* enregistré dans le bassin de Paris.

Enfin, on définit un modèle permettant de prendre en compte dans le problème inverse, en plus de la lenteur et de la polarisation, la pression mesurée dans le puits. Ce modèle est testé sur des données synthétiques. On montre que la précision sur l'estimation des paramètres est améliorée d'un facteur 5 à 10.

MOTS CLÉS

Isotopie transverse, estimation de paramètres, sismique de puits, inversion, moindres carrés, polarisation, lentur, pression, fissuration.

ESTIMATION LOCALE DES PARAMÈTRES D'ANISOTROPIE EN MILIEU TRANSVERSALEMENT ISOTROPE (TI).

J. de Parscau

INTRODUCTION.

1. LES MILIEUX TRANSVERSALEMENT ISOTROPES (TI).

1. Définition.
2. Propriétés des ondes élastiques en milieu TI.
 - 2.1 Les équations de Christoffel.
 - 2.2 Les expressions des vitesses de phase pour un milieu TI.
 - 2.3 L'angle de polarisation.
3. Cadre de travail.

2. LES TRAVAUX DE BERRYMAN ET DE THOMSEN : COMPARAISON DES DEUX MÉTHODES.

1. Objectifs des deux méthodes.
2. L'approche de J.G. Berryman.
 - 2.1 Présentation de l'article.
 - 2.2 Estimation de la vitesse de phase.
 - 2.3 Applications et calculs d'erreurs.
 - 2.4 Utilisation du coefficient de Poisson σ .
 - 2.5 Discussion.
3. La méthode de L. Thomsen.
 - 3.1 Présentation de la méthode.
 - 3.2 Paramétrisation des expressions exactes des vitesses de phase.
 - 3.3 Cas de faible anisotropie.
 - 3.4 Applications et calculs d'erreurs.
 - 3.4 Discussion.
4. Comparaison des deux méthodes.

3. DÉFINITION DE CLASSES D'ANISOTROPIE.

1. Introduction.
2. Les équations des surfaces de lenteurs.
3. Classification basée sur l'étude des lenteurs.
4. Classification basée sur l'étude de la polarisation.

5. Discussion : une approche proposée par Helbig.

4. APPROXIMATION DES VITESSES APPARENTES VERTICALES EN FONCTION DE L'ANGLE DE POLARISATION À PARTIR DES EXPRESSIONS DE THOMSEN.

1. Objectifs.
2. Expressions approchées des vitesses apparentes au premier ordre en ϵ et δ .
 - 2.1 Calcul de l'angle entre les directions de propagation et de polarisation.
 - 2.2 Les équations approchées des vitesses apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} .
3. Comparaison des équations des vitesses apparentes exprimées en fonction de γ avec celles exprimées en fonction de θ .
4. Erreurs d'approximations.
5. Conclusion.

5. MODÉLISATION EXACTE DE LA VITESSE DE PHASE EN FONCTION DE LA POLARISATION ET DE L'ANISOTROPIE.

1. Introduction.
2. Relation entre les vitesses de phase et la polarisation pour des milieux transversalement isotropes (en anglais).
3. Erreurs d'estimation de l'anisotropie dues à l'utilisation de modèles approchés des vitesses de phase.
 - 3.1 Objectif.
 - 3.2 Utilisation du modèle de vitesse proposé par White.
 - 3.3 Utilisation du modèle de vitesse proposé par Thomsen.
4. Conclusion.

6. ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'ANISOTROPIE PAR UNE MÉTHODE D'INVERSION.

1. Introduction.
2. Les données.
3. Les paramètres à estimer.
4. Le problème direct.
 - 4.1 Les équations du problème direct.
 - 4.2 Étude de sensibilité.
5. Le problème inverse.
 - 5.1 La formulation du problème.

5.2 La fonction coût.

5.3 Unicité et stabilité de la solution.

5.4 La matrice de covariance sur les paramètres estimés.

6. Extension de la méthode à des milieux TI d'axe de symétrie non vertical.
7. Conclusion.

7. APPLICATION À DES DONNÉES SYNTHÉTIQUES.

1. Introduction.
2. Cas de milieux synthétiques.
3. Cas de données synthétiques.
4. Conclusion.

8. APPLICATION À DES DONNÉES RÉELLES.

1. Application aux données de Pierre Shale.
 - 1.1 Introduction.
 - 1.2 Analyses des vitesses des ondes q_P et q_{SV} à partir de données de PSV (en anglais).
 - 1.3 Discussion.
 - 1.4 Résultats obtenus par une méthode graphique.
2. Application à des données de "walkaway" : Courgivaux.
 - 2.1 Introduction.
 - 2.2 L'acquisition.
 - 2.3 Le milieu étudié.
 - 2.4 Réorientation des données.
 - 2.4.1 Dans le plan horizontal.
 - 2.4.2 Dans le plan vertical.
 - 2.5 Construction du jeu de données.
 - 2.6 Estimation des paramètres d'anisotropie.

9. MODÉLISATION DE LA PRESSION MESURÉE DANS UN Puits EN TERMES DE DÉFORMATIONS : CAS DES MILIEUX TI.

1. Introduction.
2. Déplacement de la paroi du puits due à une onde élastique incidente.
3. Calcul de la pression dans un puits due au passage d'une onde élastique.
4. Étude de sensibilité.
5. Estimation des paramètres d'anisotropie à partir des lenteurs apparentes verticales et des pressions.
 - 5.1 Introduction.
 - 5.2 Les données.
 - 5.3 Le problème direct.

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr
01 SEP. 2003

- 5.4 Le problème inverse.
- 6. Application à des données synthétiques.
- 7. Conclusion.

10. INTERPRÉTATION EN TERME DE FISSURATION DE L'ANISOTROPIE MESURÉE.

- 1. Introduction.
- 2. Calcul des constantes élastiques d'un milieu isotrope fissuré.
- 3. Études des milieux TI équivalents.
- 4. Conclusion.

CONCLUSION.

BIBLIOGRAPHIE.

ANNEXE A. APPROXIMATION DE LA VITESSE APPARENTE EN FONCTION DE γ PAR DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS EN θ .

ANNEXE B. DIAGONALISATION DE LA MATRICE HESSIENNE DE LA FONCTION COÛT.

ANNEXE C. CALCUL DES PARAMÈTRES η ET τ POUR UN MILIEU FISSURÉ.

INTRODUCTION.

On entend par milieu anisotrope, des milieux pour lesquels les propriétés mécaniques varient suivant les différentes directions de l'espace. L'anisotropie se traduit sur la propagation des ondes élastiques par trois effets :

1. les fronts d'ondes ne sont pas sphériques ;
2. les directions des rais ne sont pas perpendiculaires aux fronts d'ondes ;
3. les deux ondes de cisaillement ne se propagent pas à la même vitesse.

La théorie de l'élasticité en milieux anisotropes est bien connue depuis le début du siècle. On retient essentiellement les travaux de Love (1927). Depuis, plusieurs auteurs ont défini des modèles anisotropes pour caractériser les milieux géophysiques (Postma, 1955; Krey et Helbig, 1956; Backus 1962; Keith et Crampin, 1977 a, b, c; Berryman, 1979). Le modèle le plus couramment utilisé est l'isotropie transverse présentant une symétrie hexagonale. Ces auteurs ont montré que l'empilement régulier de fines couches isotropes peut être assimilé à un milieu homogène transversalement isotrope (TI) pour de grandes longueurs d'ondes. Puis, on a assisté à un intérêt grandissant pour l'anisotropie engendrée par l'orientation préférentielle de fissures dans le sous-sol (Crampin, 1978, 1981, 1985, 1987, Alford, 1986; Lefeuvre, 1990). Plusieurs modèles théoriques ont été proposés pour simuler par des milieux TI équivalents à des milieux homogènes isotropes contenant des fissures orientées (Garbin et Knopoff, 1973, 1975; Hudson, 1981, 1986, 1988, 1990; Nishizawa, 1982).

Cela fait seulement un quinzaine d'années que l'on prend en compte l'anisotropie dans l'interprétation et les traitements en sismique pétrolière. Cela correspond en fait à l'époque à laquelle on a commencé à utiliser les ondes *S*. En effet, les ondes *S* sont beaucoup plus sensibles à l'anisotropie que les ondes *P* (Krey et Helbig; 1956, Helbig, 1984). De plus, l'apparition des techniques d'enregistrement des ondes en trois composantes ont permis de faire des mesures précises de vitesses et de polarisation dans des puits pour différentes incidences des ondes. A partir de ces données, il est devenu possible d'estimer les paramètres d'anisotropie pour des milieux TI d'axe de symétrie vertical (White et al., 1983; Gaiser, 1990; Buyn et Corrigan, 1990). Cependant, les différentes méthodes utilisées pour estimer ces paramètres n'utilisent pas l'information contenue dans la polarisation mais seulement les lenteurs.

Dans cette étude, on s'est intéressé aux milieux TI d'axe de symétrie contenu dans un plan vertical. On définit une méthode permettant d'estimer, pour de tels milieux, les paramètres d'anisotropie à partir des mesures de vitesses de phase et de la polarisation des ondes longitudinales P et transversales SV . On montre que, la vitesse de phase des ondes SH est découplée de celle des ondes P et SV et le problème de l'anisotropie des ondes SH peut se résoudre indépendamment.

Le schéma ci-après montre comment s'articulent les différents chapitres de ce rapport. Les trois premiers chapitres constituent une approche bibliographique de l'étude de la vitesse de phase et de la polarisation en milieux TI. Les chapitres 4, 5 et 6 concernent la modélisation de la vitesse de phase en fonction de la polarisation et la définition d'une méthode d'estimation des paramètres d'anisotropie à partir des données de puits. Les chapitres 7 et 8 présentent respectivement des applications de cette méthode à des données de puits synthétiques et réelles. Le chapitre 9 peut être considéré comme une extension de la méthode d'estimation des paramètres d'anisotropie du chapitre 6 prenant en compte des données de pressions mesurées dans un puits. Enfin, le chapitre 9, indépendant des précédents, concerne l'interprétation de l'anisotropie en termes de fissuration.

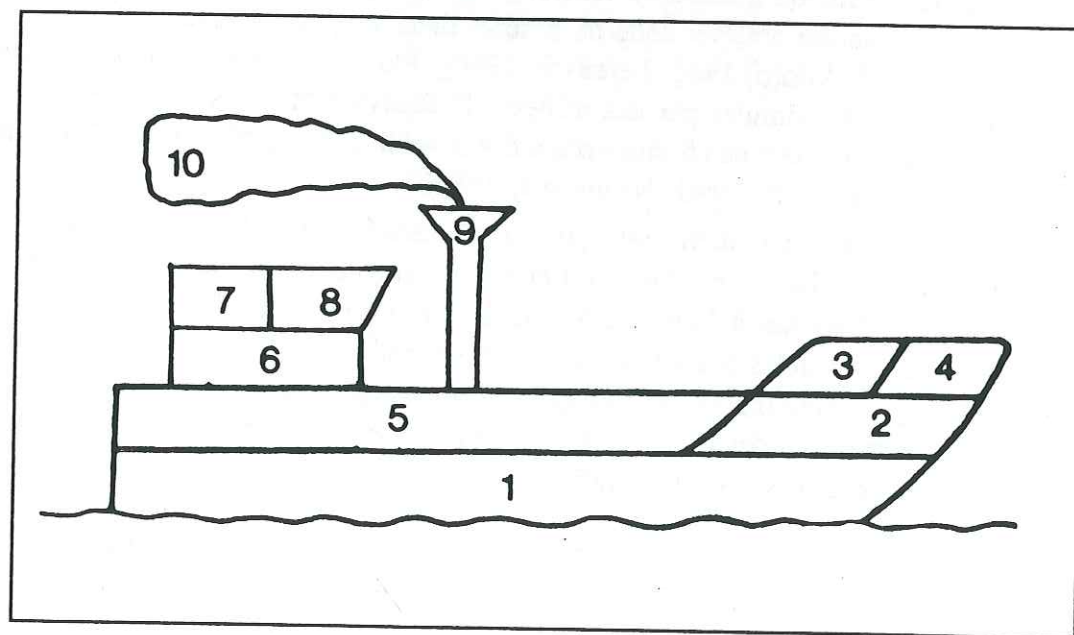


Diagramme montrant les relations de dépendance des différents chapitres.

INTRODUCTION.

Dans ce qui suit, on énonce les principaux résultats obtenus chapitre par chapitre.

Après un bref rappel de la définition de l'isotropie transverse et des équations régissant la propagation des ondes élastiques en milieux TI (chapitre 1), on compare deux méthodes pour paramétrer et approcher les équations des vitesses de phase (chapitre 2). En effet, les équations des vitesses de phase sont compliquées et il est nécessaire de les simplifier pour comprendre les paramètres importants qui expliquent l'anisotropie. Ces auteurs montrent qu'il est possible, aux prix d'approximations au premier ordre sur les paramètres d'anisotropie, de définir des équations simples de la vitesses de phase. Cependant, on montre que les erreurs d'approximations ne peuvent être négligées devant les effets de l'anisotropie sur les vitesses pour des angles d'incidence supérieurs à 30° .

On a défini ensuite des classes d'anisotropie (chapitre 3) basées sur le comportement des vitesses de phase ou des angles de polarisation en fonction de l'angle d'incidence. Classiquement, la classification de l'anisotropie est faite à partir de l'étude de la vitesse de phase (Helbig, 1956) ou de groupe (Lyakhovitskiy, 1984). On propose ici une classification basée sur l'étude de la polarisation. On montre que les classes d'anisotropie ne coïncident pas totalement suivant que l'on considère la vitesse de phase ou la polarisation. On distingue trois classes d'anisotropie en étudiant la vitesse de phase et deux classes en étudiant la polarisation (avec deux sous classes). Cette étude permet de mettre en évidence les gammes d'incidence dans lesquelles l'anisotropie a des effets significatifs sur la vitesse et la polarisation des ondes longitudinales et transversales.

L'enregistrement de données de puits en trois composantes, permet de mesurer précisément des temps de parcours (donc des vitesses ou des lenteurs) et des angles de polarisation des différents types d'ondes. Or, les équations des vitesses sont des fonctions de l'angle d'incidence qui n'est pas mesuré. On définit alors des modèles théoriques de vitesses fonction de l'angle de polarisation et des paramètres d'anisotropie. On s'est tout d'abord intéressé à des modèles approchés (chapitres 4) basés sur les équations de Thomsen. Ces modèles se sont avérés trop approximatifs même pour des angles d'incidence inférieurs à 30° . Par contre, on a pu qualifier et quantifier les termes prépondérants dans les équations des vitesses en fonction de l'angle de polarisation. On a alors défini deux paramètres originaux qui permettent d'écrire simplement et de façon exacte les équations des vitesses de phase en fonction de l'angle de polarisation (chapitre 5). Ces paramètres sont

des combinaisons particulières des constantes élastiques décrivant un milieu TI.

Ces équations sont utilisées pour estimer les paramètres d'anisotropie (qui sont au nombre de quatre) à partir des données de sismique de puits (lenteurs et polarisation) par une méthode d'optimisation (chapitre 6). La méthode a été étendue à des milieux TI d'axe de symétrie non vertical. L'intérêt de cette méthode, outre d'utiliser un modèle exact, est de calculer une erreur sur les paramètres estimés. Cette méthode a été testée sur des données synthétiques (chapitre 7) et réelles (chapitre 8). On disposait des données expérimentales de Pierre shale étudiées en 1983 par White *et al.*. L'intérêt de ces données est que les résultats obtenus par notre méthode ont pu être comparés avec ceux de White *et al.* (1983). De plus, on a testé cette méthode sur des données d'un "Walkaway" enregistré dans le bassin de Paris. Les résultats de ces différents tests montrent qu'il est nécessaire d'avoir un minimum de 15 à 20 données correspondant à des angles d'incidence compris entre 0 et 50° pour obtenir précision de l'ordre de 10% sur les paramètres estimés.

Dans le chapitre 9, on définit une méthode d'estimation des paramètres d'anisotropie prenant en compte, en plus de la lenteur et de la polarisation, la mesure de la pression dans le puits engendrée par le passage des ondes sismiques le long du puits. La modélisation est basée sur les travaux de White (1983) étendue à des milieux TI. On montre qu'il est nécessaire de définir un paramètre supplémentaire prenant en compte la vitesse horizontale des ondes *SH*. Des tests sur données synthétiques ont montré que la prise en compte de la pression permet d'augmenter la précision sur l'estimation des paramètres d'un facteur de l'ordre de 5 à 10 suivant le nombre de données pris en compte.

Enfin, dans le chapitre 10, on utilise les modèles théoriques de milieux fissurés proposés par Hudson (1981, 1986) pour interpréter l'anisotropie mesurée en termes de fissures vides, saturées de liquide ou de solide. On montre qu'il est possible de qualifier l'état (solide, liquide ou gaz) du matériel qui remplit les fissures à partir des valeurs des paramètres d'anisotropie.

Table des matières.

Chapitre 1. Les milieux transversalement isotropes.	1
1. Définition.	1
2. Propriétés des ondes élastiques en milieu TI.	6
2.1 Les équations de Cristoffel.	6
2.2 Les expressions des vitesses de phase pour un milieu TI.	7
2.3 L'angle de polarisation γ .	11
3. Cadre de travail.	12

CHAPITRE 1. Les milieux transversalement isotropes.

1. Définition.

Un milieu est transversalement isotrope (TI) si les propriétés des ondes élastiques y présentent une symétrie de révolution autour d'un axe. Nous considérons ici un milieu TI d'axe vertical : la vitesse d'une onde élastique dans un plan vertical dépend alors uniquement de son incidence.

On parle parfois de "milieux hexagonaux" par analogie avec les cristaux à symétrie hexagonale (figure I.1). En effet, un cristal à symétrie hexagonale présente les propriétés élastiques et, en particulier, le tenseur élastique d'un milieu TI.

Le système hexagonal est un des 14 réseaux de Bravais dont les éléments de symétrie (figure 1) sont décrits de la façon suivante :

a) l'axe de symétrie principal est un axe de rotation d'ordre 6 (A6). Perpendiculairement à cet axe, il existe deux groupes de trois axes binaires (A2) disposés à 30° l'un de l'autre. Ils sont notés 3A2' (au milieu des faces) et 3A2'' (au milieu des arêtes) ;

b) la présence d'un centre de symétrie (C) impose l'existence d'un miroir (M) perpendiculairement à chacun des axes de symétrie.

Ces éléments de symétrie sont notés de façon compacte : $\frac{A6}{M}$, $\frac{3A2'}{M}$, $\frac{3A2''}{M}$, C.

Ils réduisent à 5 le nombre de constantes indépendantes du tenseur élastique C_{ijkl} . Avec la convention d'écriture pour repérer les couples (ij) et (kl) par seulement deux indices α et β tel que (11)→1, (22)→2, (33)→3, (23)=(32)→5, (13)=(31)→4, (12)=(21)→6, celui-ci s'écrit :

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & (C_{11} - 2C_{66}) & C_{13} & & & \\ & C_{11} & C_{13} & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{55} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1. 1)$$

Les cinq constantes indépendantes sont : $C_{11}, C_{33}, C_{55}, C_{13}, C_{66}$.

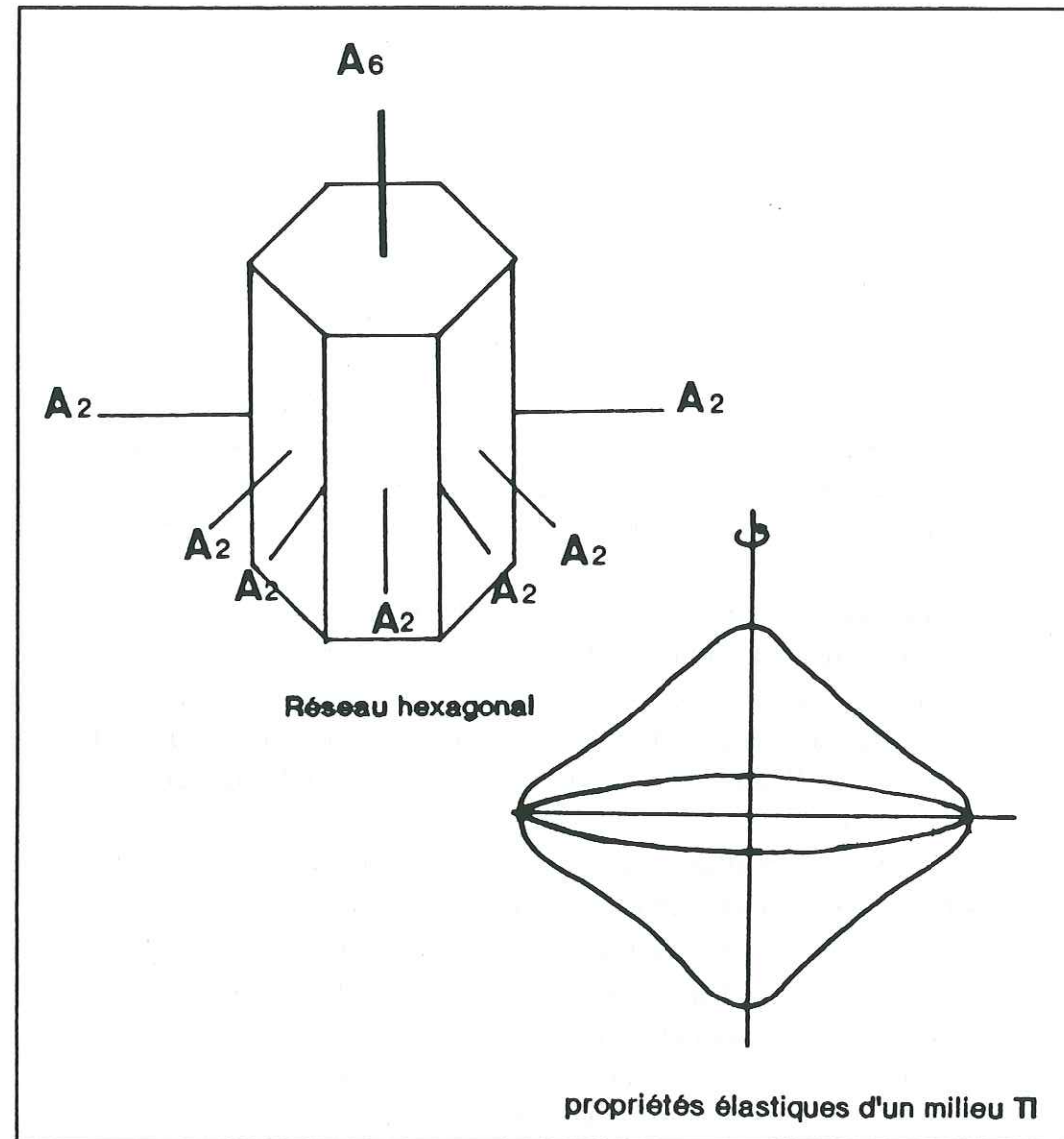


Figure I.1. Symétrie d'un réseau hexagonal.

Une propriété de ce tenseur est d'être invariant pour une rotation quelconque autour de l'axe principal (A_6) (Dieulesaint et Royer, 1974). Ceci implique deux choses :

1. le plan perpendiculaire à l'axe A_6 est isotrope ;
2. tous les plans également inclinés par rapport à A_6 sont équivalents.

Alors, la répartition des vitesses des ondes élastiques dans l'espace peut être représentée par un volume de révolution (figure I.1). Pour décrire cette répartition, on se sert de deux angles (figure I.2) :

θ , l'angle polaire (ou angle d'incidence) qui repère une direction de propagation par rapport à l'axe de révolution ;

ϕ , l'azimut ou angle entre le plan vertical de propagation et une direction fixée du plan de symétrie.

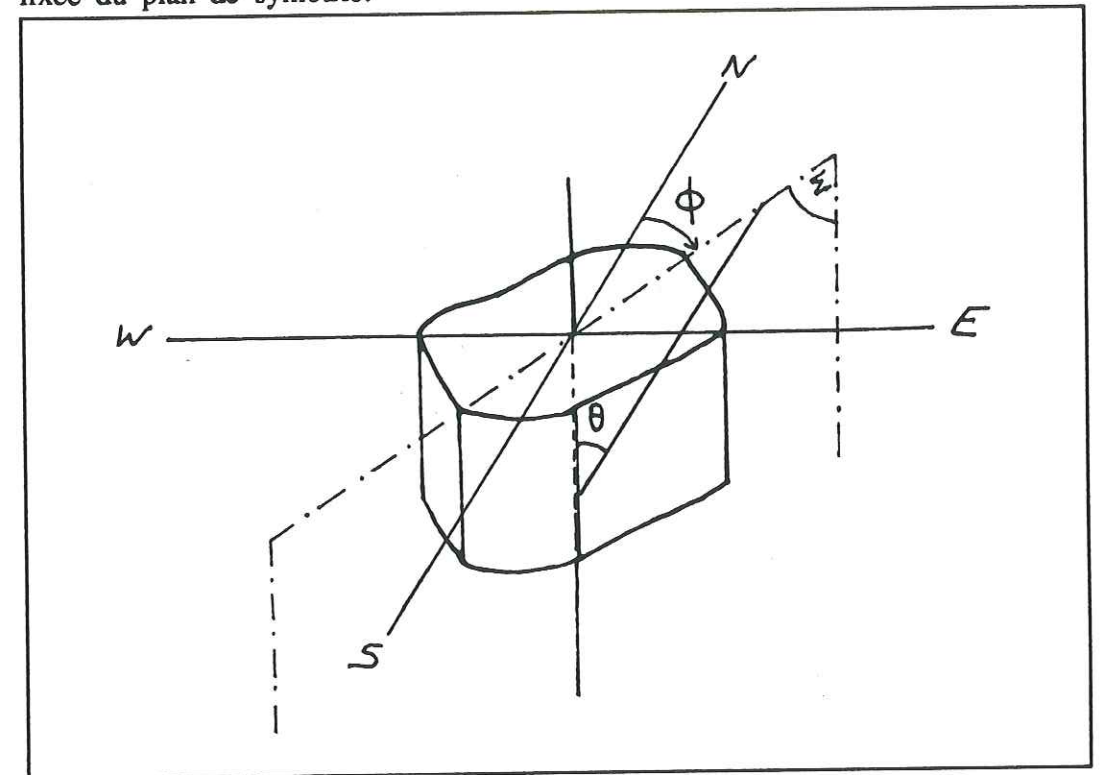


Figure I.2. Définition de l'angle polaire et de l'azimut.

Les vitesses des ondes P , SV et SH varient avec θ mais sont indépendantes de ϕ .

On distingue une direction de propagation particulière, parallèle à l'axe de révolution ($\theta=0^\circ$), où le plan de vibration des ondes de cisaillement est confondu avec le plan de symétrie (perpendiculaire à A_6). Dans ce cas, les vitesses de ces ondes sont égales et indépendantes de la direction de polarisation. Il n'en est pas de même pour une propagation parallèle au plan de symétrie ($\theta=90^\circ$) où il existe deux modes propres d'ondes S , l'une, rapide, polarisée parallèlement au

plan (l'onde SH), et l'autre plus lente polarisée perpendiculairement à l'axe de symétrie (l'onde SV). C'est le phénomène de biréfringence des ondes S .

Pour un milieu où l'axe de révolution est vertical (normal à la surface), on parle aussi "d'anisotropie polaire". Ce type de milieu peut être simulé par un empilement de fines couches isotropes traversées par des ondes élastiques de grandes périodes (de l'ordre de dix fois l'épaisseur d'une couche — Backus, 1962).

Pour un milieu où l'axe de révolution est horizontal (parallèle à la surface) on parle d'anisotropie azimutale. C'est le cas, par exemple, de milieux fissurés verticalement avec des fractures ouvertes remplies de fluides (figure I.3). Un train d'ondes S se propageant verticalement dans ce type de milieu subit alors le phénomène de biréfringence avec décomposition selon un mode $S1$ rapide polarisé parallèlement au plan des fractures, et un mode $S2$ lent polarisé parallèlement à l'axe de symétrie (Crampin, 1985).

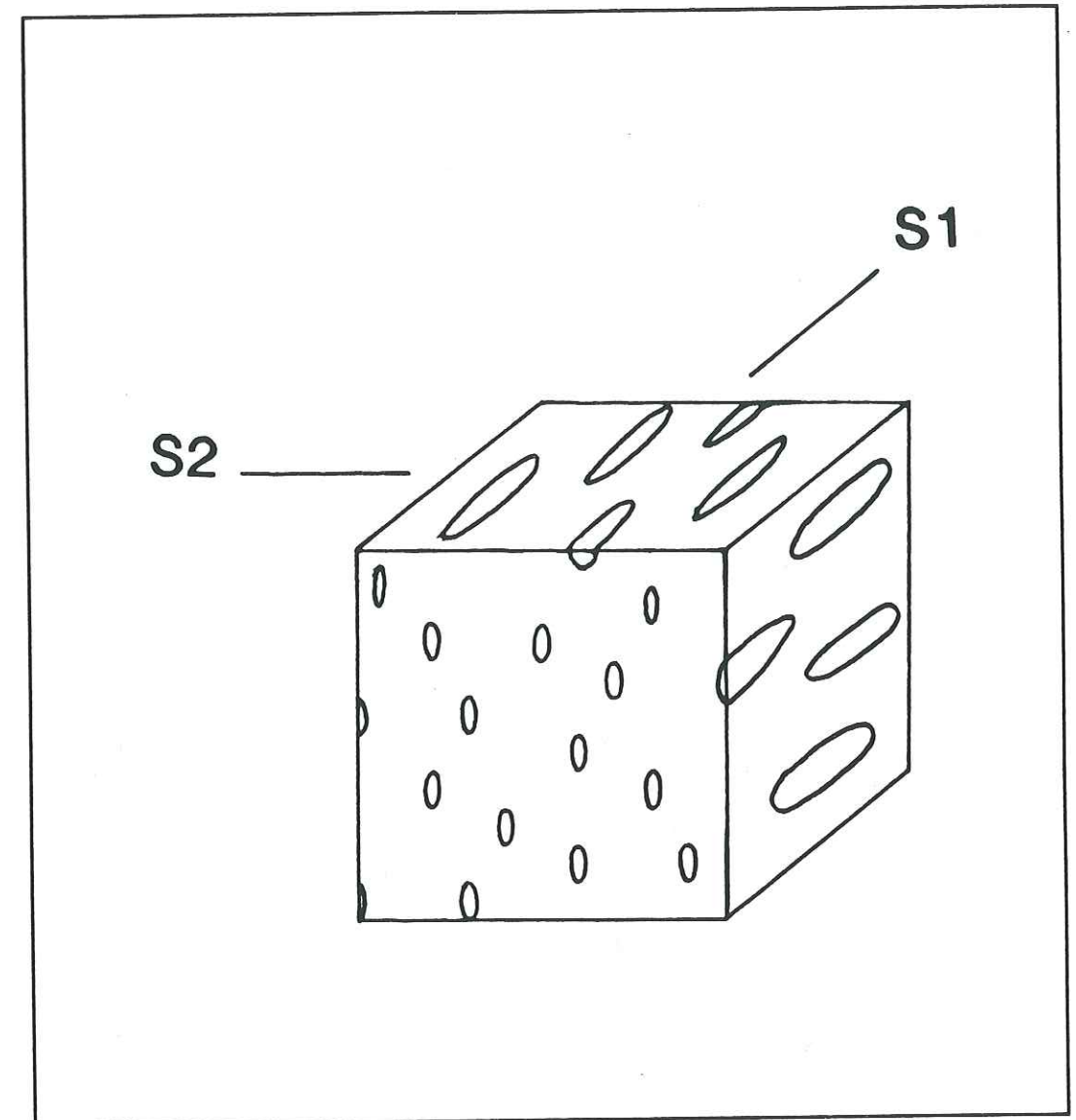


Figure I.3. Milieu verticalement fissuré présentant une direction lente ($S2$) et une direction rapide ($S1$).

Ces deux types d'anisotropie peuvent coexister dans un même milieu. On dénombre alors trois plans de symétrie perpendiculaires entre eux. Le système cristallin correspondant appartient au réseau orthorhombique, et les éléments de symétrie ramènent à neuf les constantes indépendantes du tenseur élastique.

Nous ne nous intéressons dans cette étude qu'aux milieux présentant une isotropie transverse d'axe vertical.

2. Propriétés des ondes élastiques en milieu TI.

2.1 Les équations de Cristoffel.

L'équation du mouvement dans un milieu élastique linéaire totalement anisotrope (défini par 21 constantes élastiques indépendantes) en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\rho \ddot{U}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ C_{ijkl} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right\} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

C'est un système de trois équations différentielles du second ordre. On choisit les solutions sous la forme d'une onde plane progressive se propageant dans la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{n}$:

$$\vec{U} = u_0 \vec{g} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (1.3)$$

u_0 : amplitude des déplacements,

$\vec{g}$: direction de vibration (polarisation),

$\vec{k}$: vecteur propagation $\vec{k} = k\vec{n}$,

$\vec{n}$: vecteur-unité dans la direction de propagation $|\vec{n}| = 1$,

ω : fréquence angulaire.

Avec les solutions (1.3), l'équation (1.2) devient :

$$\{C_{ijkl}(-k_j k_k g_l) - \rho(-\omega^2 g_i)\} u_0 e^{i(k_m x_m - \omega t)} = 0, \quad (1.4)$$

soit à annuler :

$$C_{ijkl}(k_j k_k g_l) - \rho(\omega^2 g_i) = 0. \quad (1.5)$$

Si on divise (1.5) par la densité ρ et par k^2 , on obtient :

$$(A_{il} - v^2 \delta_{il}) g_l = 0, \quad (1.6)$$

où :

$$A_{il} = \frac{C_{ijkl}}{\rho} n_j n_k, \quad v = \frac{\omega}{|k|}. \quad (1.7)$$

La quantité v est, par définition, la vitesse de phase. Le système d'équations (1.6) représente les "équations de Christoffel" dans la théorie des ondes planes. C'est un système de trois équations homogènes, linéaires suivant les composantes de la polarisation g_l ($|g_l| = 1$), avec v^2 comme paramètre à déterminer. Ceci revient à calculer les valeurs propres du système (5) telles que :

$$\det |A_{il} - v^2 \delta_{il}| = 0. \quad (1.8)$$

(1.8) est appelée "équation caractéristique". Les trois racines sont les modules des vitesses de phases des ondes P , SV et SH , dans la direction de propagation $\vec{n}$. Comme la matrice A_{ij} est réelle et symétrique, ces vitesses appartiennent à R^+ . Les trois vecteurs propres $\vec{g}$ correspondants sont les directions de vibration des particules, orthogonales entre elles. Pour un milieu homogène isotrope, les directions de propagation $\vec{n}$ et de vibration $\vec{g}$ sont confondues. Il en est de même pour une onde élastique se propageant suivant un axe ou dans un plan de symétrie.

2.2 Les expressions des vitesses de phase pour un milieu TI.

Dans un milieu TI, la polarisation d'une onde élastique n'est pas forcément longitudinale ($\vec{g} \parallel \vec{n}$) ou transversale ($\vec{g} \perp \vec{n}$). Il existe un angle ξ petit entre les deux directions $\vec{n}$ et $\vec{g}$ pour une onde P (entre la normale à $\vec{n}$ et $\vec{g}$ pour une onde S) variant avec l'incidence θ . Les directions de propagation parallèles au plan et à l'axe de symétrie correspondent à des ondes purement longitudinales et transversales. Ce sont les directions propres du milieu. On parlera de l'onde "quasi-longitudinale" notée q_P et des ondes "quasi-transverses" notées q_{SV} et q_{SH} .

Avec le tenseur élastique C_{ijkl} caractéristique d'un milieu de symétrie hexagonale dont seulement six coefficients élastiques sont indépendants (voir paragraphe 1), les composantes du tenseur A_{il} défini au paragraphe précédent s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{11} &= C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{55}n_3^2, \\ A_{12} &= (C_{12} + C_{66})n_1n_2, \\ A_{13} &= (C_{13} + C_{55})n_1n_3, \\ A_{22} &= C_{66}n_1^2 + C_{11}n_2^2 + C_{55}n_3^2, \\ A_{23} &= (C_{13} + C_{55})n_2n_3, \\ A_{33} &= C_{55}(n_1^2 + n_2^2) + C_{33}n_3^2, \end{aligned} \quad (1.9)$$

où l'on pose : $C_{ij} = \frac{C_{ij}}{\rho}$.

Pour simplifier les calculs, on se place dans le plan (x,z), alors $n_2=0$. Ainsi le système (1.8) devient :

$$\det \begin{bmatrix} C_{11}n_1^2 + C_{55}n_3^2 - v^2 & 0 & (C_{13} + C_{55})n_1n_3 \\ 0 & C_{66}n_1^2 + C_{55}n_3^2 - v^2 & 0 \\ (C_{13} + C_{55})n_1n_3 & 0 & C_{55}n_1^2 + C_{33}n_3^2 - v^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (1.10)$$

Les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} V_P^2 &= a + b, \\ V_{SV}^2 &= a - b, \\ V_{SH}^2 &= c, \end{aligned} \quad (1.11)$$

où :

$$\begin{aligned} a &= (C_{11} + C_{55})\frac{n_1^2}{2} + (C_{33} + C_{55})\frac{n_3^2}{2}, \\ b &= \left\{ \left[(C_{11} - C_{55})\frac{n_1^2}{2} - (C_{33} - C_{55})\frac{n_3^2}{2} \right]^2 + (C_{13} + C_{55})^2 n_1^2 n_3^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ c &= C_{66}n_1^2 + C_{55}n_3^2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

En coordonnées sphériques avec les angles (θ, ρ) , on note que $n_1^2 = \sin^2 \theta$ et $n_3^2 = \cos^2 \theta$.

La figure (I.4) montre les relations entre les constantes élastiques et la vitesse pour les milieux TI.

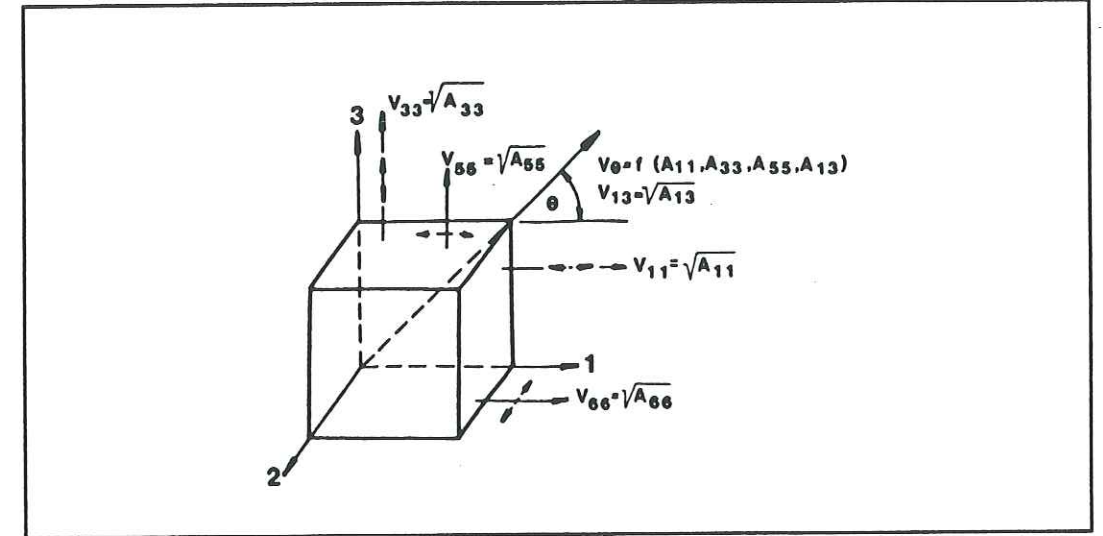


Figure I.4. Relations entre les modules élastiques et la vitesse des ondes dans un milieu transversalement isotrope (d'après J. Wright, 1987)

Suivant la direction horizontale, les vitesses de propagation sont :

$$\begin{aligned} v_P^2 &= C_{11}, \\ v_{SV}^2 &= C_{55}, \\ v_{SH}^2 &= C_{66}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Suivant la direction verticale, les vitesses de propagation sont :

$$\begin{aligned} v_P^2 &= C_{33}, \\ v_{SV}^2 &= C_{55}, \\ v_{SH}^2 &= C_{55}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Suivant une direction faisant un angle θ avec la verticale, les vitesses sont régies par les équations (1.11) et ne dépendent que de θ . La surface des vitesses est une surface de révolution autour de la verticale.

Les vecteurs propres (correspondant aux directions de vibration des ondes qp et qsv) sont (d'après Hron et Daley, 1977) :

$$\begin{aligned} \vec{g}_p &= (l \sin \theta, m \cos \theta), \\ \vec{g}_{sv} &= (m \cos \theta, l \sin \theta), \end{aligned} \quad (1.15)$$

où :

$$\begin{aligned}
 l &= \left(\frac{Q - C_{33} + C_{55}}{\sin^2 \theta} + C_{11} + C_{33} - 2C_{55} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 m &= \left(\frac{Q - C_{33} - C_{55}}{\sin^2 \theta} + C_{11} + C_{33} - 2C_{55} \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 Q &= \left\{ (C_{33} - C_{55})^{\frac{1}{2}} + 2A1 \sin^2 \theta + A2 \sin^4 \theta \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
 A1 &= 2(C_{13} + C_{55})^2 - (C_{33} - C_{55})(C_{11} + C_{33} - 2C_{55}), \\
 A2 &= (C_{11} + C_{33} - 2C_{55})^2 - (C_{13} + C_{55})^2.
 \end{aligned}
 \tag{1. 16}$$

2.3 L'angle de polarisation γ .

On appelle "angle de polarisation" l'angle γ que fait la direction de vibration $\vec{g}$ avec la verticale (figure I.5). Pour les ondes q_P ou q_{SV} , $\text{tg } \gamma_P$ ou $\text{tg } \gamma_{SV}$ est le rapport entre la composante X_1 et la composante X_3 du vecteur propre $\vec{g}_P$:

$$\text{tg } \gamma_P = \frac{(C_{13} + C_{55})n_1 n_3}{v_p^2(\theta) - C_{11}n_1^2 + C_{55}n_3^2}. \tag{1. 17}$$

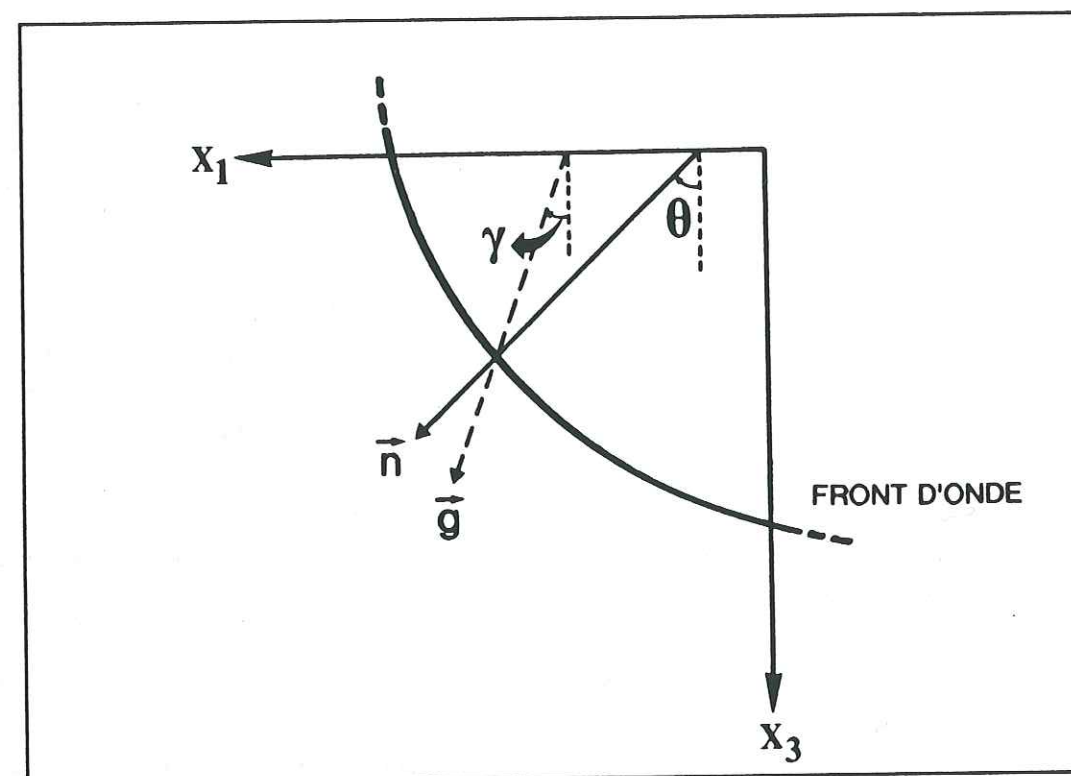


Figure I.5. Description de l'angle de phase θ et de l'angle de polarisation γ par rapport au front d'onde.

Certains auteurs (Thomsen, 1986) appellent "angle de polarisation" ξ , l'angle entre les deux directions de polarisation et de propagation. L'expression de $\cos \xi$ s'obtient par le produit scalaire $\vec{g} \cdot \vec{n}$. Pour les ondes q_P , on a :

$$\cos \xi_P = \frac{n_3^2 n_1^2 (C_{13} + C_{55}) + n_3 (v^2 - n_1^2 C_{11} - n_3^2 C_{55})}{(n_3^2 n_1^2 (C_{13} + C_{55})^2 + (v^2 - n_1^2 C_{11} - n_3^2 C_{55})^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.18)$$

Les deux angles γ et ξ sont liés par la relation :

$$\gamma = \theta + \xi. \quad (1.19)$$

3. Cadre de travail.

Comme nous l'avons mentionné en introduction, le but de cet étude est de définir une méthode permettant d'estimer les paramètres d'anisotropie en milieu TI à partir de données de puits (PSV, PSO...) enregistrées sur trois composantes. En effet, de telles données permettent :

1. de pointer les temps des premières arrivées des ondes q_P et q_{SV} à diverses incidences dans une même formation et à profondeur donnée. L'écoute se fait suivant trois directions orthogonales entre elles. On ne s'intéresse pas aux ondes q_{SH} parce qu'elles sont découplées des deux autres types d'ondes. En effet, leur vitesse ne dépend que des deux constantes élastiques C_{55} et C_{66} ;

2. de réorienter les composantes d'enregistrement dans les directions de vibration des particules (Clet et Dubesset, 1988), ce qui permet de mesurer la polarisation de l'onde par rapport à la verticale.

Les données du problème sont les vitesses apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} notées Q_P et Q_{SV} , et leur angle de polarisation associé γ_P et γ_{SV} . Les vitesses apparentes verticales sont calculées comme des vitesses de phase sur le cosinus de l'angle d'incidence θ .

Les inconnues du problème sont les paramètres d'anisotropie nécessaires pour expliquer les variations des vitesses des ondes q_P et q_{SV} en fonction de leur incidence.

Or, les équations des vitesses apparentes des ondes q_P et q_{SV} ainsi que celles des angles de polarisation sont des fonctions de l'angle d'incidence que l'on ne mesure pas. Il est alors nécessaire d'exprimer les équations des vitesses apparentes verticales en fonction de la polarisation, des vitesses verticales et des paramètres d'anisotropie.

Les différentes étapes de cette étude sont :

1. passer en revue les différentes méthodes qui permettent de simplifier les équations des vitesses (1.11) et des angles de polarisation (1.17) par différentes approximations ;

2. utiliser ces équations approchées pour définir des équations des vitesses exprimées en fonction de l'angle de polarisation et des paramètres d'anisotropie. Nous verrons qu'il est possible de définir des équations exactes de la vitesse en fonction de la polarisation à partir de la définition de deux nouveaux paramètres ;

3. définir une méthode pour estimer les paramètres d'anisotropie avec ces équations et à partir des données de puits.

Table des matières.

Chapitre 2. Les travaux de Thomsen et de Berryman : comparaison des deux méthodes.

1. Objectifs des deux méthodes.	1
2. L'approche de J.G. Berryman.	1
2.1 Présentation de l'article.	1
2.2 Estimation de la vitesse de phase.	2
2.3 Applications et calculs d'erreurs.	3
2.4 Utilisation du coefficient de Poisson σ	10
2.5 Discussion.	12
3. La méthode de L. Thomsen.	15
3.1 Présentation de la méthode.	15
3.2 Paramétrisation des expressions exactes des vitesses de phase.	15
3.3 Cas de faible anisotropie.	16
3.4 Applications et calculs d'erreurs.	17
3.5 Discussion.	20
4. Comparaison des deux méthodes.	24

CHAPITRE 2. Les travaux de Thomsen et de Berryman : comparaison des deux méthodes.

1. Objectifs des deux méthodes.

Nous comparons ici deux articles, l'un de J.G. Berryman (1979) "*Long wave elastic anisotropy in transversely isotropic media*" et l'autre de L. Thomsen (1986) "*Weak elastic anisotropy*".

Ces deux articles proposent (entre autres) une paramétrisation des expressions des vitesses de phase par des méthodes de développements limités. Ces paramètres sont des combinaisons des cinq coefficients élastiques qui caractérisent l'anisotropie du milieu TI. On se ramène ainsi à des relations simples avec lesquelles il est possible d'estimer l'anisotropie sur des données de sismique de puits.

Ces deux approches sont présentées séparément, puis comparées dans une dernière partie.

2. L'approche de J.G. Berryman.

2.1 Présentation de l'article.

Dans son article, Berryman généralise les résultats de Krey et Helbig (1956), à savoir :

1. l'inégalité $(C_{11} - C_{55})(C_{33} - C_{55}) \geq (C_{13} + C_{55})^2$, dérivée par Postma (1955) pour des milieux périodiques isotropes à deux couches, est valide pour n'importe quel milieu TI homogène ;

2. un schéma général de perturbation pour analyser la dépendance angulaire de la vitesse de phase est formulé, donnant des limites aux résultats de Krey et Helbig ;

3. une étude des propriétés du coefficient de Poisson σ est faite en vue de quantifier certains coefficients élastiques.

Nous nous intéressons dans cette étude aux objectifs 2 et 3.

2.2 Estimation de la vitesse de phase.

Les expressions des modes purs P et SV sont considérées comme les termes d'ordre 0 d'un développement limité. Les termes d'ordre supérieur, combinant les composantes q_P et q_{SV} de la vitesse de phase d'une onde élastique, quantifient l'anisotropie. Ceci revient à modéliser simplement l'expression de la quadrique b (1.12) afin d'en décrire le comportement :

$$b = \left\{ (C_{11} - C_{55})^2 \frac{n_1^2}{2} + (C_{33} - C_{55})^2 \frac{n_3^2}{2} \right\} \sqrt{1 - \epsilon}, \quad (2.1)$$

où :

$$\epsilon = \frac{4[(C_{11} - C_{55})(C_{33} - C_{55}) - (C_{13} + C_{55})^2]n_1^2 n_3^2}{[(C_{11} - C_{55})n_1^2 + (C_{33} - C_{55})n_3^2]^2}. \quad (2.2)$$

On montre que ϵ a un maximum ϵ_m si :

$$\frac{n_1^2}{n_3^2} = \frac{(C_{33} - C_{55})}{(C_{11} - C_{55})}. \quad (2.3)$$

Sous ces conditions, ϵ_m s'écrit :

$$\epsilon_m = 1 - \frac{(C_{13} + C_{55})^2}{(C_{11} - C_{55})(C_{33} - C_{55})}. \quad (2.4)$$

Pour $\epsilon = 0$, on obtient :

$$v_P^2 = C_{11}n_1^2 + C_{33}n_3^2 \text{ et } v_{SV}^2 = C_{55}. \quad (2.5)$$

Pour $|\epsilon| < 1$, on développe le terme sous la racine en série de Taylor :

$$\sqrt{1 - \epsilon} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 - \dots \quad (2.6)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} v_P^2 &= C_{11}n_1^2 + C_{33}n_3^2 - \frac{(C_{11} - C_{55})(C_{33} - C_{55})n_1^2 n_3^2}{[(C_{11} - C_{55})n_1^2 + (C_{33} - C_{55})n_3^2]} \epsilon_m + \dots, \\ v_{SV}^2 &= C_{55}n + \frac{(C_{11} - C_{55})(C_{33} - C_{55})n_1^2 n_3^2}{[(C_{11} - C_{55})n_1^2 + (C_{33} - C_{55})n_3^2]} \epsilon_m + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si $n_1^2 \rightarrow 0$, les équations (2.7) deviennent :

$$\begin{aligned} v_P^2 &= [C_{11} - (C_{11} - C_{55})\epsilon_m]n_1^2 + C_{33}n_3^2 + \dots, \\ v_{SV}^2 &= [C_{55} + (C_{11} - C_{55})\epsilon_m]n_1^2 + C_{55}n_3^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ces équations présentent la forme d'une dépendance elliptique de la vitesse de groupe comme l'a étudié Levin (1978). Elles sont valables quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence θ .

2.3 Applications et calculs d'erreurs.

Berryman a choisi trois exemples numériques à partir d'un modèle de milieu périodique à deux couches, composé de calcaire ($\mu_1 = 2,5 \cdot 10^{11}$, $\lambda_1 = 3 \cdot 10^{11}$) et de grès ($\mu_2 = 0,6 \cdot 10^{11}$, $\lambda_2 = 0,8 \cdot 10^{11}$). Dans chacun des trois exemples, on utilise trois valeurs différentes du rapport d'épaisseurs de couches $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{3}, 1, 3$.

Les figures (II.1), (II.2) et (II.3) montrent les variations des vitesses de phases des ondes q_P , q_{SV} et q_{SH} en fonction de l'angle d'incidence θ dans les trois cas.

Les figures (II.4), (II.5) et (II.6) montrent pour chaque exemple, les variations de l'angle de polarisation γ en fonction de l'angle d'incidence θ pour les ondes q_P et q_{SV} .

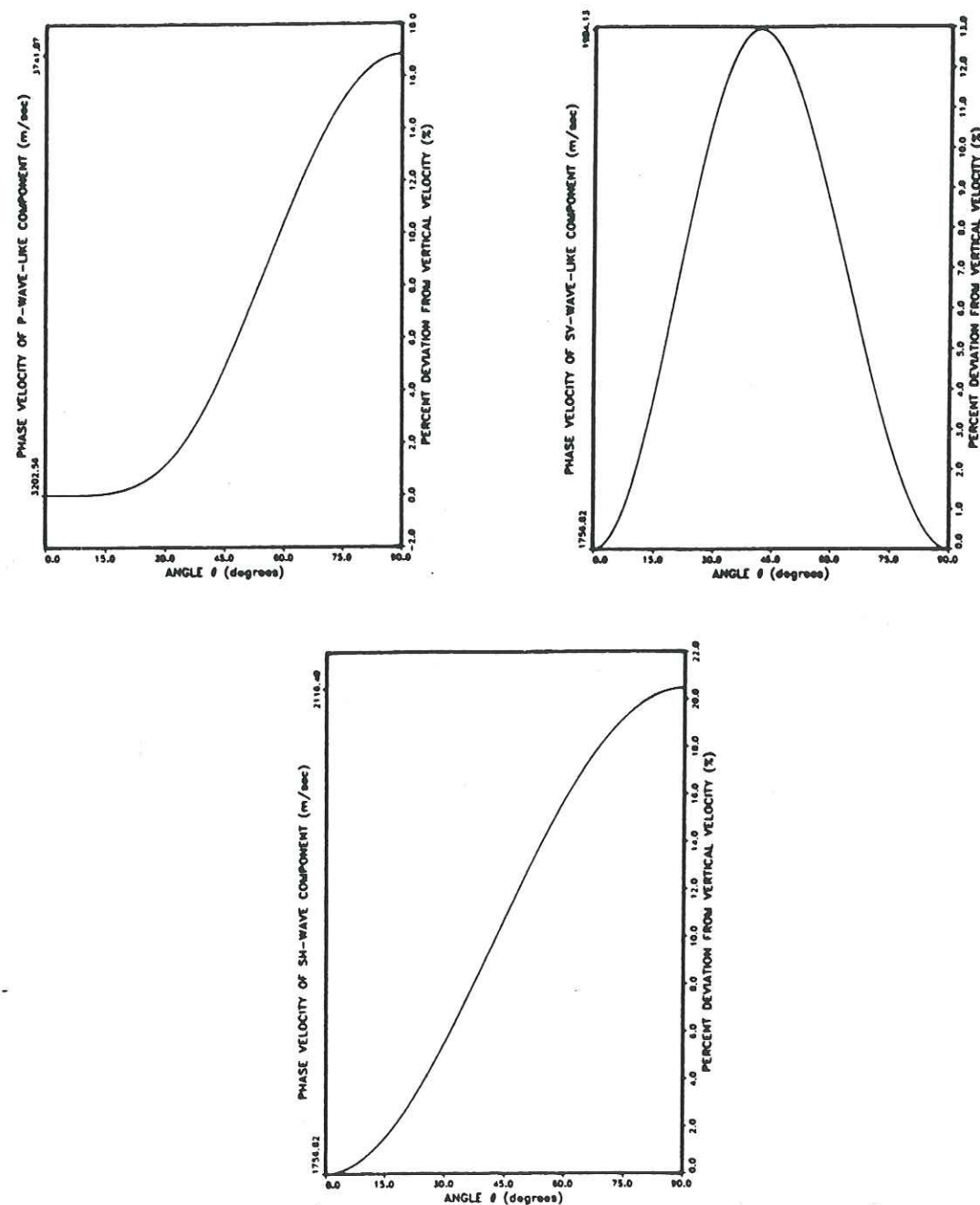


Figure II.1. Répartition des vitesses de phase des ondes q_P , q_{SV} et q_{SH} en fonction de l'angle d'incidence θ pour un milieu homogène à deux couches transversalement isotropes. Cas $d_1/d_2 = 1/3$ (Exemples traités par Berryman en 1979).

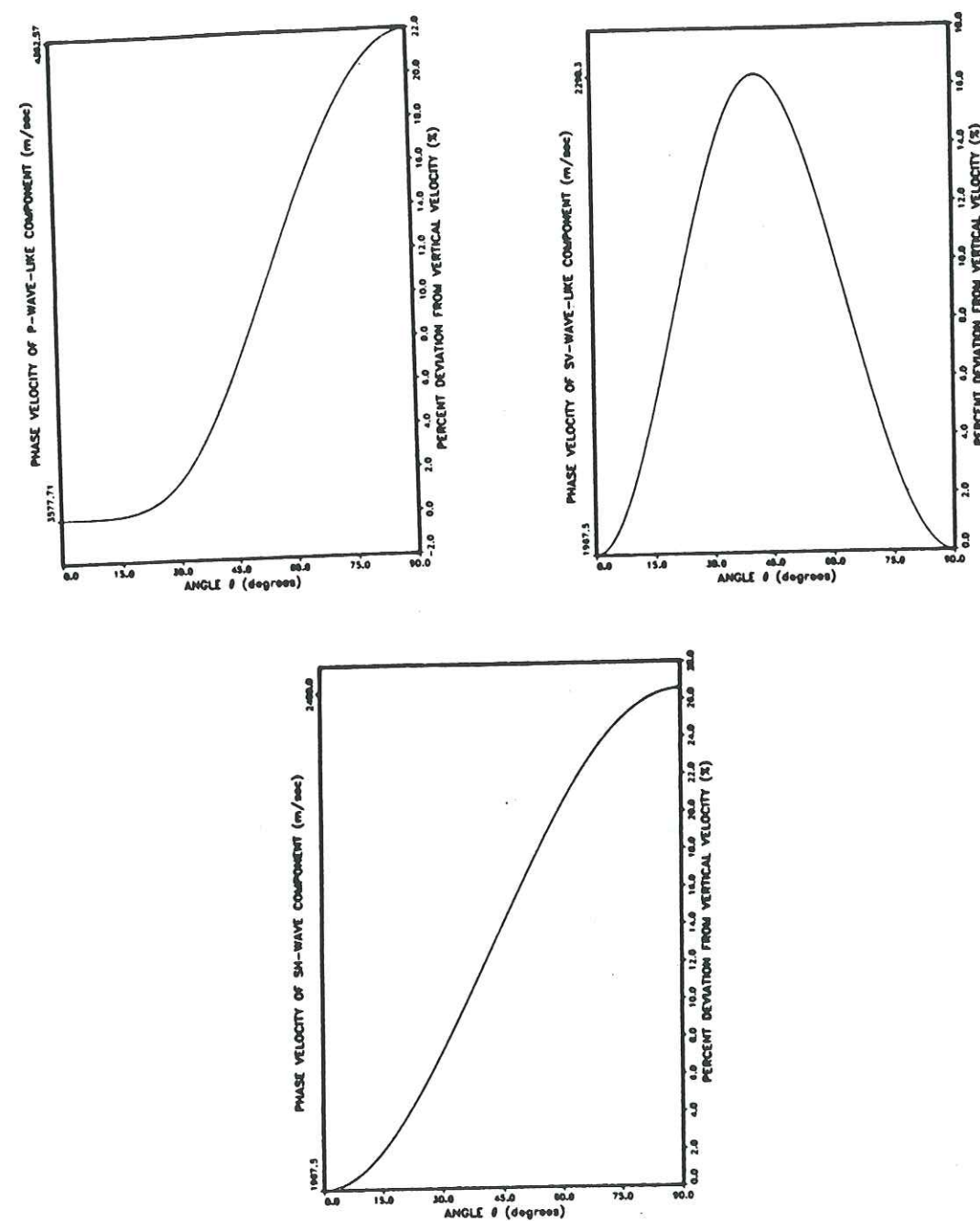


Figure II.2. Répartition des vitesses de phase des ondes q_P , q_{SV} et q_{SH} en fonction de l'angle d'incidence θ pour un milieu homogène à deux couches transversalement isotropes. Cas $d_1/d_2 = 1$ (Exemples traités par Berryman en 1979).

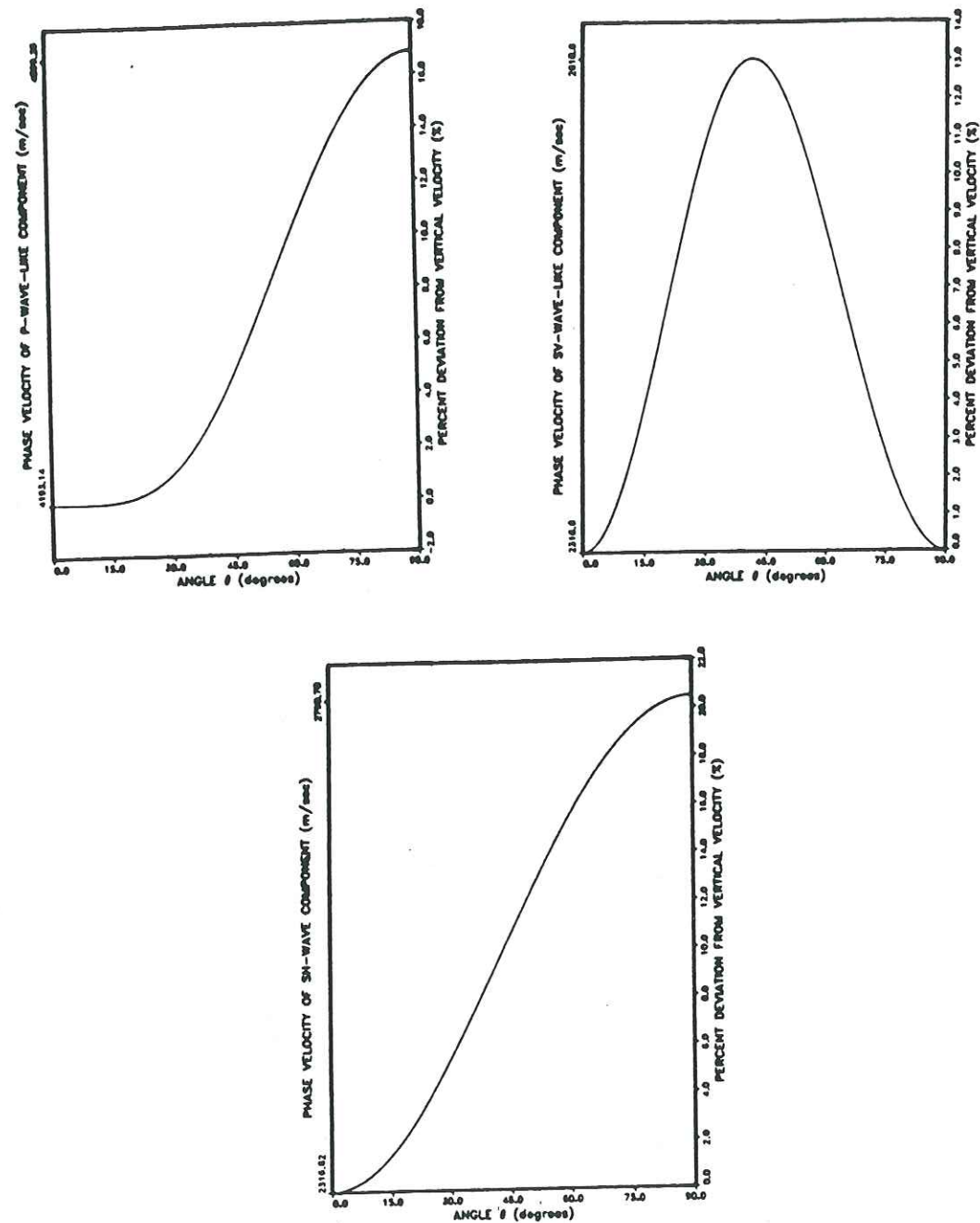


Figure II.3. Répartition des vitesses de phase des ondes q_p , q_{sv} et q_{sh} en fonction de l'angle d'incidence θ pour un milieu homogène à deux couches transversalement isotropes. Cas $d_1/d_2 = 3$ (Exemples traités par Berryman en 1979).

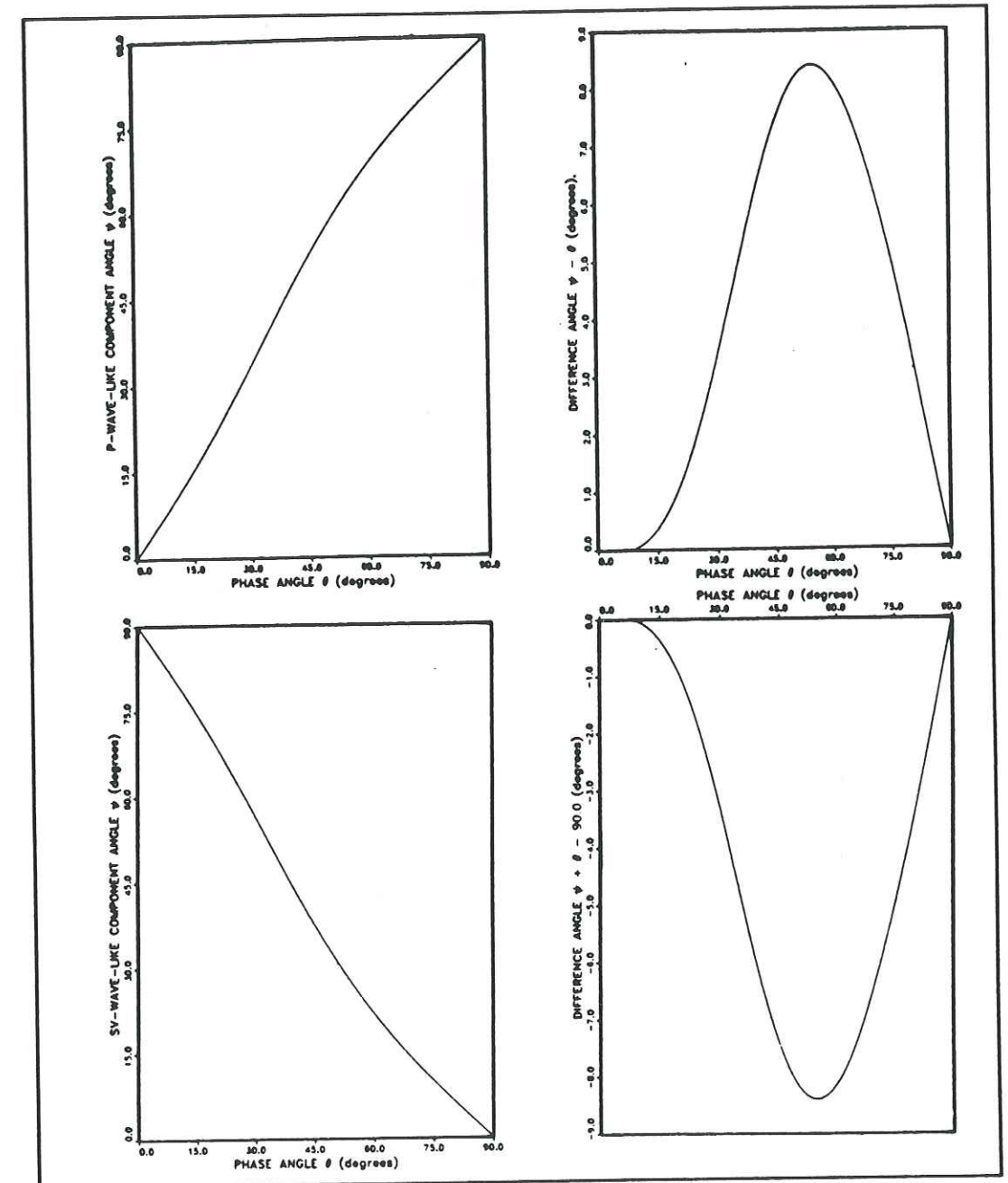


Figure II.4. Comparaison entre l'angle de polarisation (ici noté ψ) et l'angle de phase θ pour les ondes q_p (haut) et q_{sv} (bas). Les paramètres sont les mêmes que sur la figure (II.1) (d'après Berryman, 1979).

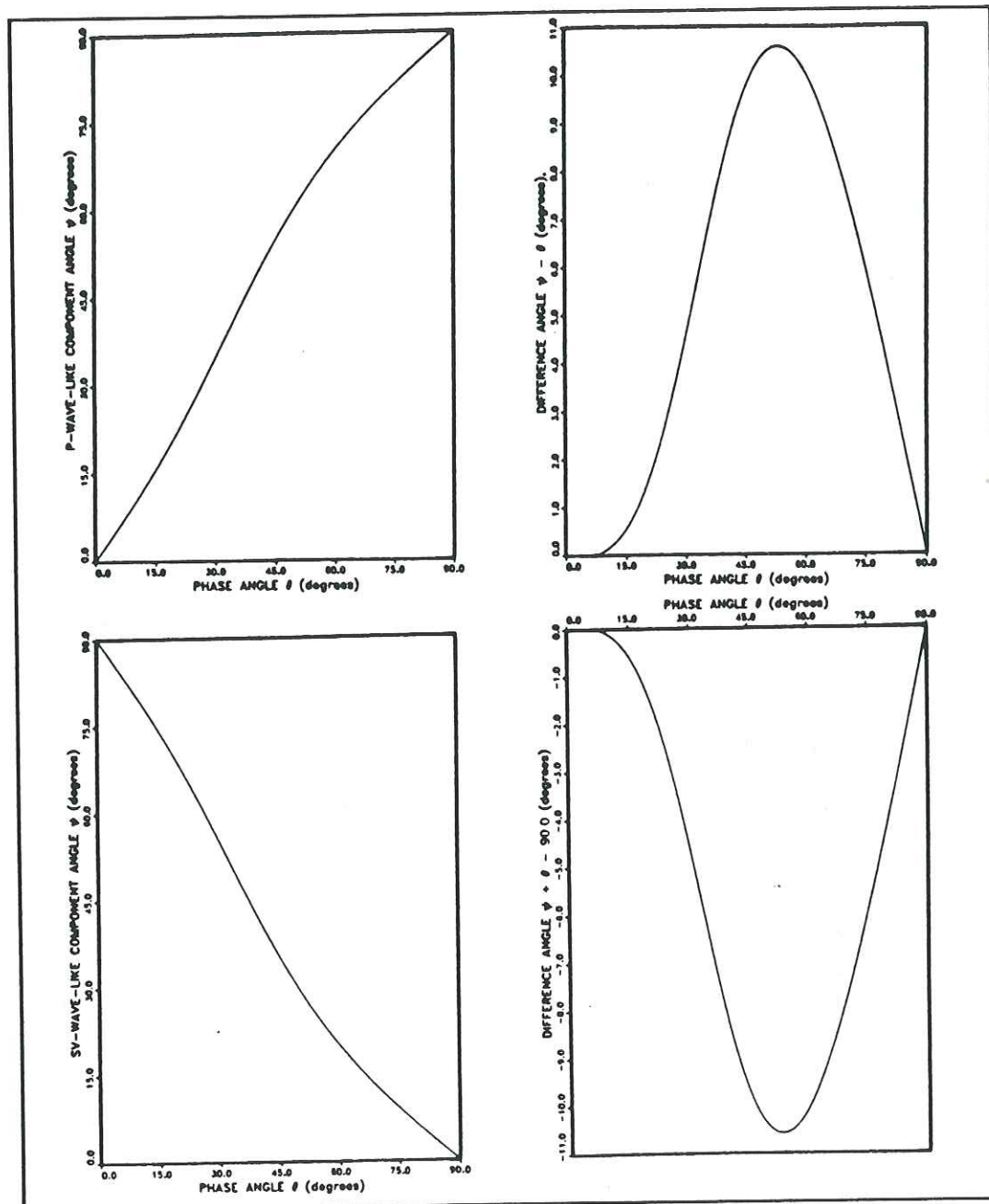


Figure II.5. Comparaison entre l'angle de polarisation (ici noté ψ) et l'angle de phase θ pour les ondes q_p (haut) et q_{sv} (bas). Les paramètres sont les mêmes que sur la figure (II.2) (d'après Berryman, 1979).

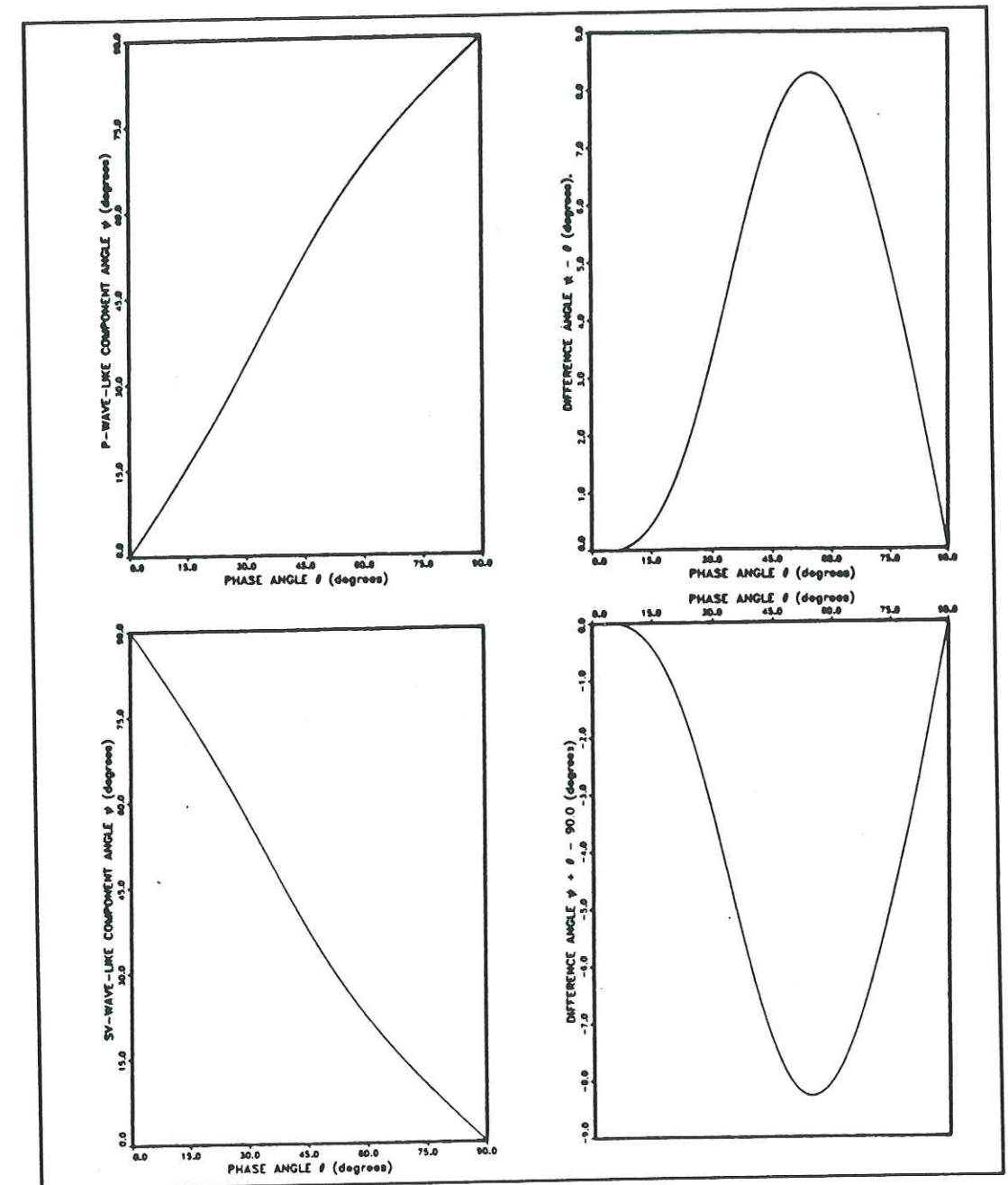


Figure II.6. Comparaison entre l'angle de polarisation (ici noté ψ) et l'angle de phase θ ; pour les ondes q_p (haut) et q_{sv} (bas). Les paramètres sont les mêmes que sur la figure (II.3) (d'après Berryman, 1979).

2.4 Utilisation du coefficient de Poisson σ .

Il n'est pas possible, à partir de données de puits, d'estimer directement le paramètre ϵ . En effet, ϵ est une combinaison linéaire des cinq coefficients élastiques que l'on doit quantifier séparément pour le calculer effectivement. On utilise pour cela les propriétés du coefficient de Poisson σ .

Le coefficient de Poisson ($\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$) ne varie que faiblement pour la plupart des roches qui nous intéressent. Krey et Helbig furent les premiers à utiliser l'hypothèse suivant laquelle le coefficient de Poisson reste constant dans un milieu anisotrope. Dire que le coefficient de Poisson est constant revient à poser :

$$\mu(x_3) = R\lambda(x_3). \quad (2.9)$$

où $R = \frac{0,5 - \sigma}{\sigma} = \text{constante}$. Alors, μ dépend linéairement de λ quel que soit le modèle considéré. Généralement, les géophysiciens préfèrent travailler avec les vitesses des ondes P et SV plutôt qu'avec les coefficients de Lamé. Pour la plupart des roches, le rapport $r = \frac{v_s}{v_p}$ est compris entre 0,45 et 0,65. On exprime alors R en fonction de r :

$$R = \frac{r^2}{1 - 2r^2}. \quad (2.10)$$

Donc, choisir un coefficient de Poisson constant revient à choisir r constant.

Backus a montré (1962) que si λ et μ sont seulement des fonctions de la profondeur, on peut faire une moyenne spatiale sur les coefficients de Lamé dans la direction verticale sur l'épaisseur totale des couches traversées. Le milieu est équivalent à un milieu quasi-homogène isotrope transverse appelé STILWE par Backus (Smoothed Transversely Isotropic Long Wave Equivalent). Les cinq coefficients élastiques correspondants sont des combinaisons linéaires moyennes

de λ et μ :

$$\begin{aligned} C_{11} &= 4 \left\langle \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right\rangle + \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^2 \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \\ C_{33} &= \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \\ C_{13} &= \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \\ C_{55} &= \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le symbole $\langle \rangle$ signifie moyenne arithmétique.

On exprime alors les 5 coefficients élastiques en fonction de R :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{4R(1+R)}{1+2R} \langle \lambda \rangle + \frac{1}{1+2R} \left\langle \frac{1}{\lambda} \right\rangle^{-1}, \\ C_{33} &= (1+2R) \left\langle \frac{1}{\lambda} \right\rangle^{-1}, \\ C_{13} &= \left\langle \frac{1}{\lambda} \right\rangle^{-1}, \\ C_{55} &= R \left\langle \frac{1}{\lambda} \right\rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En fixant le rapport r et en mesurant les vitesses des ondes q_P et q_{SV} dans les directions verticales, on détermine le coefficient de Lamé moyen λ , représentatif du milieu TI. Il est alors possible de calculer ϵ et ϵ_m .

On montre avec le système (2.12) que : $C_{33} - C_{55} = C_{13} + C_{55}$. Si on remplace cette égalité dans l'expression de ϵ_m , on trouve :

$$\epsilon_m = \frac{C_{11} - C_{33}}{C_{33} - C_{55}}. \quad (2.13)$$

Les équations (2.8) pour lesquelles $n_1 \rightarrow 0$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} v_p^2 &= C_{33}n^2 + 0n_1^2 + \dots, \\ v_{sv}^2 &= (C_{55} - C_{11} - C_{33})n_1^2 + C_{55}n_3^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les équations (2.14) sont issues d'un développement limité au premier ordre en ϵ . Ces équations montrent que la composante q_P est isotrope pour des incidences subverticales. Ce résultat est confirmé sur les figures (II.1) et (II.2) où la vitesse de phase est constante jusqu'à $\theta=15^\circ$, et l'anisotropie reste inférieure à 2% entre 15 et 30°. Par contre, la composante q_{SV} est anisotrope pour des incidences subverticales. En effet, sur les figures (II.1) et (II.2), les variations de la vitesse de phase de l'onde q_{SV} en fonction de l'incidence θ ne présentent pas de pentes nulles même pour θ tendant vers 0°. Ceci est en contradiction avec les expressions (2.5) représentant le terme d'ordre 0 d'un développement limité en ϵ . Celles-ci montrent que la composante q_P est anisotrope et la composante q_{SV} isotrope pour de faibles incidences.

Berryman conclut que, pour de faibles déports, on peut probablement observer une très faible anisotropie sur les ondes P, mais l'anisotropie des SV et SH est sûrement plus marquée. Cette conclusion dépend de la valeur du rapport $r = \frac{v_s}{v_p}$ choisi pour le modèle. Berryman montre qu'il est raisonnable de choisir une valeur de R moyen :

$$\bar{R} = \frac{\langle \mu \rangle}{\langle \lambda \rangle}. \quad (2.15)$$

Cette approximation est fautive si, d'une couche à l'autre, la valeur de r est trop différente. Berryman propose une solution dans le cas où le coefficient de Poisson n'est pas constant. Mais ce cas est rare et nous invitons le lecteur à se reporter à l'annexe C de l'article pour plus de détails.

2.5 Discussion.

Les résultats de Berryman, au travers des trois exemples traités, permettent les conclusions et observations suivantes :

1. pour de faibles incidences, les effets de l'anisotropie sont négligeables sur la vitesse de phase des ondes q_P par rapport aux ondes q_{SV} ;
2. les développements limités au premier ordre des vitesses de phases, avec l'hypothèse $|\epsilon| < 1$, permettent d'obtenir des expressions simplifiées et fiables (voir figure II.7). L'erreur ne dépasse pas 0,6% pour les ondes q_P et 1,2% pour les ondes q_{SV} .

L'inconvénient majeur de cette méthode est que le coefficient ϵ est une combinaison linéaire de quatre coefficients élastiques indépendants. Or, chacun

d'eux quantifie le comportement de l'onde dans une direction distincte par rapport aux modes purs. Il est donc impossible de donner une signification physique aux variations de ϵ . En fait, retrouver l'anisotropie d'un milieu revient à décrire une surface de vitesse, soit la répartition des vitesses suivant l'incidence (de 0 à 90°). Or, la méridienne de cette surface est une courbe du second degré qui n'est mathématiquement pas descriptible avec un seul coefficient.

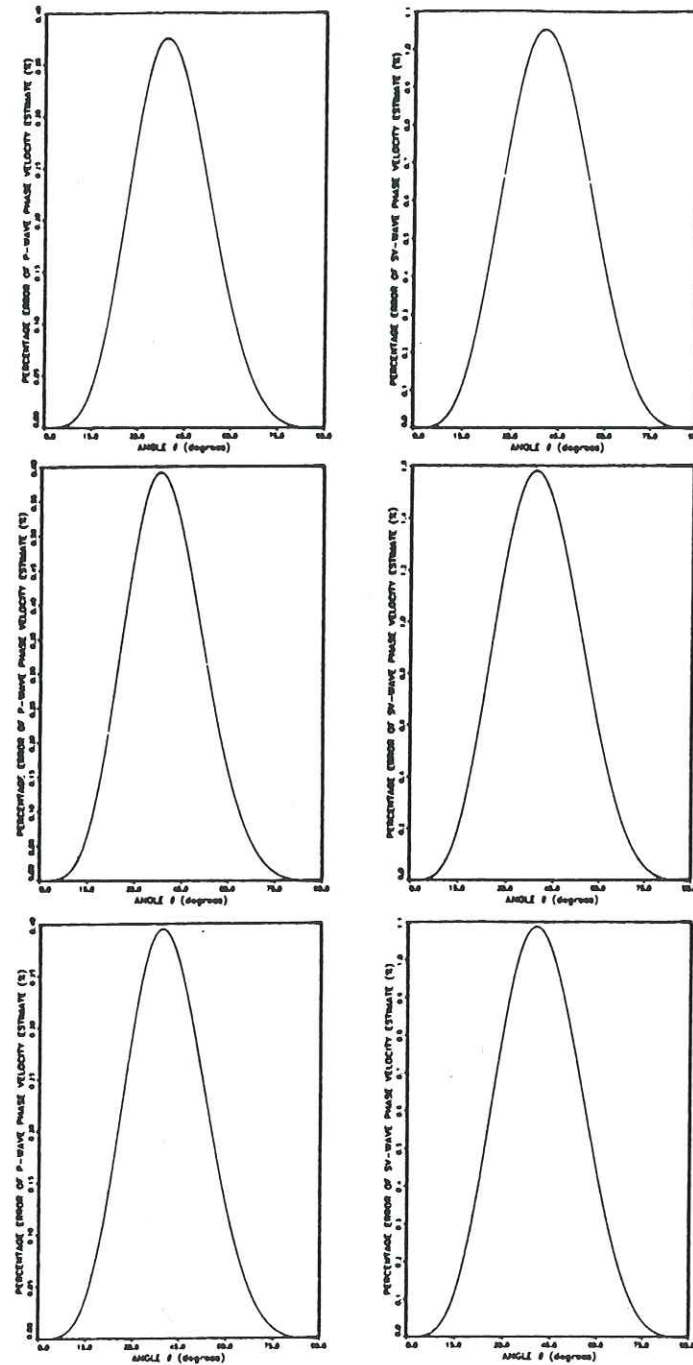


Figure II.7. Estimation de l'erreur des expressions des vitesses de phase de Berryman pour les ondes q_P et q_{SV} . De haut en bas : exemples 1 2 et 3 de Berryman (1979).

Les travaux de Thomsen et de Berryman : comparaison des deux méthodes.

3. La méthode de L. Thomsen.

3.1 Présentation de la méthode.

Dans son article, Thomsen ne s'intéresse qu'aux propriétés élastiques des milieux faiblement anisotropes (de l'ordre de 10% à 20% d'anisotropie de vitesse). Il est dans ce cas possible de simplifier considérablement les équations du module des vitesses de phase.

Thomsen définit deux paramètres d'anisotropie adimensionnels ϵ et δ . Ce sont des combinaisons des cinq coefficients élastiques indépendants. Ils permettent, sous l'hypothèse de faible anisotropie, de faire des développements en série de Taylor et de donner ainsi des expressions simplifiées des vitesses de phase des ondes q_P et q_{SV} . Ces paramètres sont nuls dans le cas d'un milieu isotrope et peuvent prendre des valeurs négatives dans certains cas.

3.2 Paramétrisation des expressions exactes des vitesses de phase.

Les équations du module des vitesses de phase sont réécrites de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v_P^2(\theta) &= \alpha_o^2 [1 + \epsilon \sin^2 \theta + b], \\ v_{SV}^2(\theta) &= \beta_o^2 \left[1 + \frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} \epsilon \sin^2 \theta - \frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} b \right], \\ v_{SH}^2(\theta) &= \beta_o^2 [1 + 2\gamma \sin^2 \theta]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La quadrique b (1.12) devient alors :

$$b = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2} \right) \left\{ \left[1 + \frac{4\delta^*}{\left(1 + \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2} \right)} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{4 \left(1 - \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2} + \epsilon \right)}{\left(1 - \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2} \right)^2} \sin^4 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}, \quad (2.17)$$

et les vitesses verticales des ondes P et SV s'écrivent :

$$\alpha_o^2 = \frac{C_{33}}{\rho}, \quad \beta_o^2 = \frac{C_{55}}{\rho}. \quad (2.18)$$

Les paramètres $\gamma, \epsilon, \delta^*$ sont des combinaisons des cinq coefficients élastiques indépendants :

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{C_{66} - C_{55}}{2C_{55}}, \\ \epsilon &= \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \\ \delta^* &= \frac{1}{2C_{33}^2} [2(C_{13} - C_{55}) - (C_{33} - C_{55})(C_{11} + C_{33} - 2C_{55})].\end{aligned}\quad (2. 19)$$

Ces équations sont valables quelles que soient l'anisotropie et l'incidence.

3.3 Cas de faible anisotropie.

La plupart des roches qui nous intéressent ne sont que faiblement anisotropes, même si les minéraux qui les composent le sont fortement. Sous cette hypothèse de faible anisotropie, il est possible de faire des développements en série de Taylor de la quadrique (2.17) pour de petites valeurs de $\gamma, \epsilon, \delta^*$. En ne retenant que les termes linéaires de la quadrique b , celle-ci devient :

$$b \sim \frac{\delta^*}{\left(1 - \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2}\right)} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \epsilon \sin^4 \theta. \quad (2. 20)$$

En remplaçant b dans les expressions des vitesses de phase on obtient :

$$\begin{aligned}v_P(\theta) &\sim \alpha_o (1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \epsilon \sin^4 \theta), \\ v_{SV}(\theta) &\sim \beta_o \left(1 + \frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} (\epsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta\right), \\ v_{SH}(\theta) &\sim \beta_o (1 + \gamma \sin^2 \theta).\end{aligned}\quad (2. 21)$$

Le paramètre δ^* devient :

$$\delta = \frac{1}{2} \left[\epsilon + \frac{\delta^*}{\left(1 - \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2}\right)} \right] = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})}. \quad (2. 22)$$

Pour des incidences subverticales on note que :

— si $\delta < \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2 + \beta_o^2} \epsilon$, on retrouve les mêmes résultats que Berryman (paragraphe 2.2). La composante q_P est pratiquement isotrope (le terme en $\sin^4 \theta$ décroissant très rapidement) et la composante q_{SV} anisotrope ;

Les travaux de Thomsen et de Berryman : comparaison des deux méthodes.

— si $\delta = \epsilon$, la composante q_{SV} devient isotrope et l'anisotropie de la composante q_P dépend de la valeur de δ .

Comme δ et ϵ sont du même ordre de grandeur, pour des θ faibles, le second terme de $v_P(\theta)$ est plus grand que le terme en $\sin^4 \theta$, et c'est δ qui explique l'anisotropie. Inversement, pour des incidences subhorizontales, c'est le terme en $\sin^4 \theta$ qui domine, et c'est ϵ qui explique l'anisotropie.

Pour des incidences subhorizontales, les vitesses de phase des ondes q_P et q_{SH} s'écrivent :

$$\begin{aligned}v_P\left(\frac{\Pi}{2}\right) &= \alpha_o(1 + \epsilon), \\ v_{SH}\left(\frac{\Pi}{2}\right) &= \beta_o(1 + \gamma),\end{aligned}\quad (2. 23)$$

donc :

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{v_P\left(\frac{\Pi}{2}\right) - \alpha_o}{\alpha_o}, \\ \gamma &= \frac{v_{SH}\left(\frac{\Pi}{2}\right) - \beta_o}{\beta_o},\end{aligned}\quad (2. 24)$$

où ϵ représente, au facteur 2 près, ce que l'on appelle classiquement l'anisotropie des roches, et γ l'anisotropie des ondes q_{SH} .

3.4 Applications et calcul d'erreurs.

On considère un milieu homogène TI dont les coefficients élastiques sont ceux du milieu équivalent de l'exemple traité par Berryman paragraphe 2.2. On obtient :

$$\begin{aligned}\alpha_o &= 3201,56 \text{ m/s} \\ \beta_o &= 1757,13 \text{ m/s} \\ \delta &= -7,23 \times 10^{-3} \\ \epsilon &= 0,1829.\end{aligned}\quad (2. 25)$$

On fait varier θ de 0 à 90°. Les figures (II.8), (II.9) et (II.10) montrent, respectivement pour les ondes q_P et q_{SV} , les variations de la vitesse de phase, de l'erreur relative sur les expressions approchées (2.21) et les variations de la polarisation par rapport à θ .

L'erreur calculée est de la forme : $\frac{v_{Thomsen} - v_{vraie}}{v_{vraie}} * 100$. Elle est globalement plus faible pour les ondes q_P que pour les ondes q_{SV} . Elle est maximale à 90° pour les ondes q_P ($-1,2\%$) et à 55° pour les q_{SV} (-3%). L'anisotropie des ondes q_{SV} est sous-estimée, l'erreur étant toujours négative. Par contre, pour les ondes q_P , l'erreur ne devient négative qu'à partir de 65° . On note enfin que l'erreur est nulle jusqu'à 20° pour les ondes q_P , et jusqu'à 10° pour les ondes q_{SV} . L'anisotropie des ondes q_P est négligeable jusqu'à une incidence de 20° environ. Cette anisotropie a un effet sur la vitesse des ondes q_{SV} même pour de faibles incidences. On retrouve ainsi les résultats de Berryman, à savoir que l'anisotropie des ondes q_P à faibles incidences est négligeable devant celle des ondes q_{SV} . On note de ce résultat qu'il sera difficile d'estimer le paramètre δ qui caractérise l'anisotropie pour de faibles incidences.

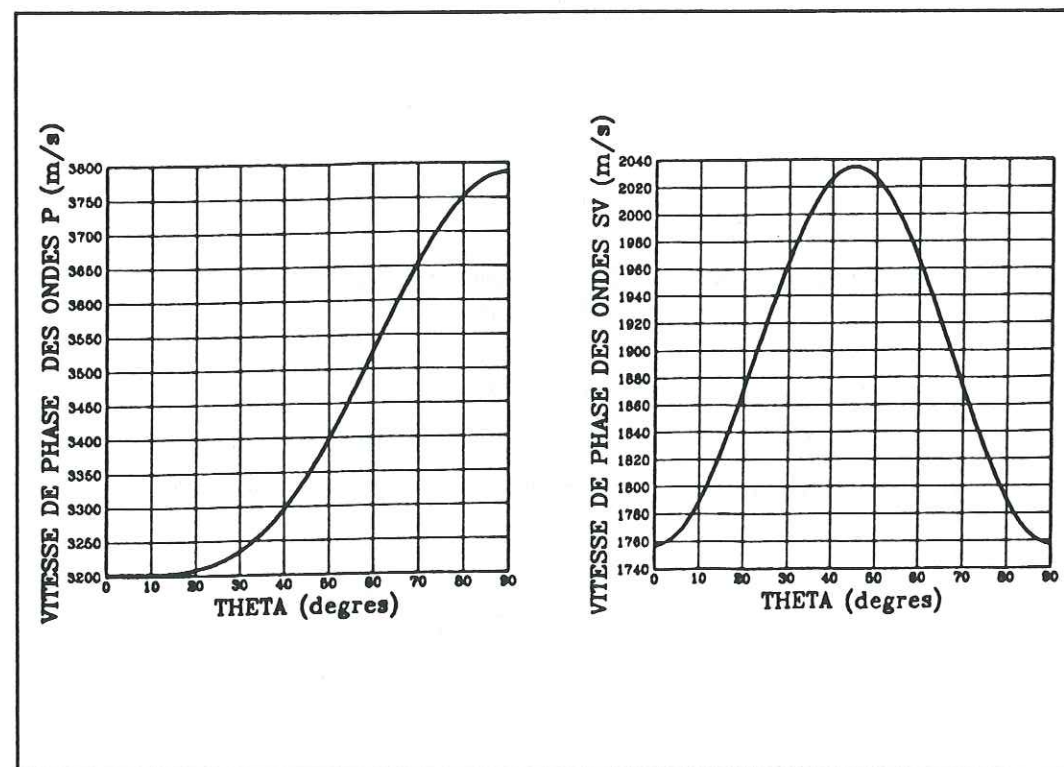


Figure II.8. La vitesse de phase des ondes q_P et q_{SV} calculée avec les expressions de Thomsen: $\alpha_0 = 3201,56$ m/s, $\beta_0 = 1757,13$ m/s, $\epsilon = 0,1829$, $\delta = -0,0073$.

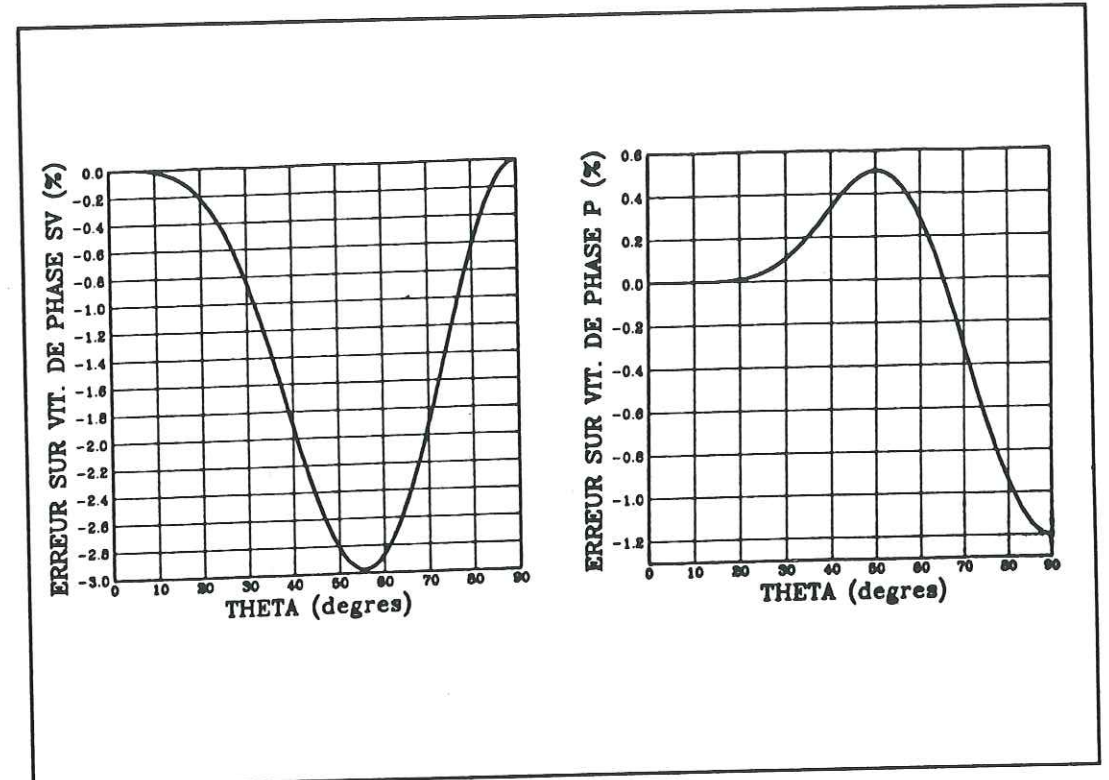


Figure II.9. Erreur des expressions approchées des vitesses de phase de Thomsen en fonction de l'angle d'incidence : $\alpha_0 = 3201,56$ m/s, $\beta_0 = 1757,13$ m/s, $\epsilon = 0,1829$, $\delta = -0,0073$.

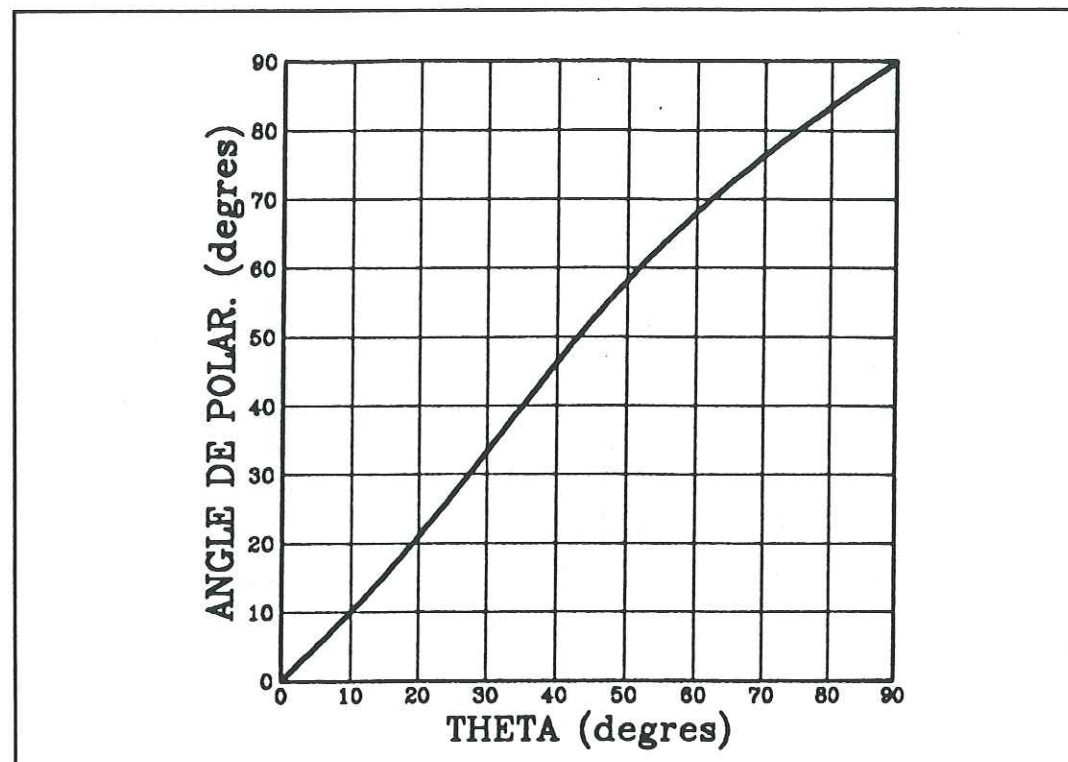


Figure II.10. L'angle de polarisation γ en fonction de l'angle d'incidence θ :
 $\alpha_0 = 3201,56$ m/s, $\beta_0 = 1757,13$ m/s, $\epsilon = 0,1829$, $\delta = -0,0073$.

3.5 Discussion.

La méthode de Thomsen présente l'avantage de caractériser l'anisotropie avec trois paramètres dont les propriétés sont différentes.

Le paramètre δ est prépondérant pour des incidences subverticales alors qu' ϵ et γ le sont pour des incidences subhorizontales.

Ces trois paramètres ne sont pas définis avec les mêmes coefficients élastiques : ϵ est une combinaison de C_{33} et C_{11} , γ de C_{66} et C_{55} et δ de C_{33} , C_{55} et C_{13} . Les variations de ces trois paramètres sont globalement décorrélées. Thomsen le montre dans un tableau comprenant la mesure de ϵ et δ pour différents échantillons de roches sédimentaires. La figure (II.11) montre la répartition de ces échantillons dans le plan (ϵ, δ) .

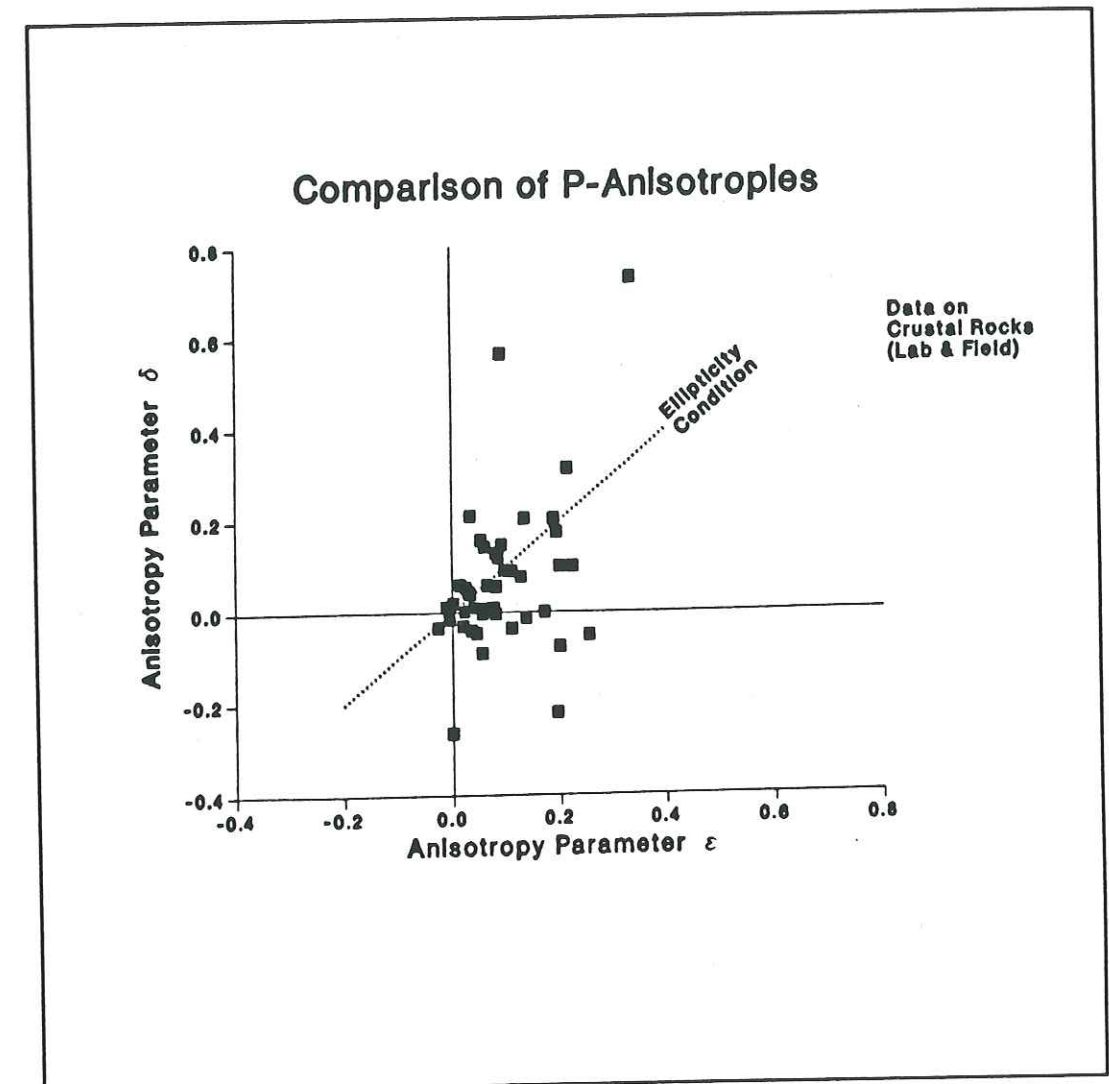


Figure II.11. Illustration de la noncorrélation des deux paramètres d'anisotropie de Thomsen ϵ et δ dans le cas d'une série d'échantillons sur lesquels l'anisotropie a été mesurée en laboratoire (Thomsen, 1986).

Il est possible d'expliquer physiquement les variations de ces paramètres.

Les paramètres γ et ϵ représentent, respectivement pour les ondes qp et qsv , l'écart relatif entre les vitesses verticale et horizontale sur la vitesse verticale.

La signification physique de δ est moins évidente. Thomsen en donne une expression plus pratique permettant de le quantifier à partir de données réelles :

$$\delta = 4 \left[\frac{v_p(\frac{\pi}{4})}{\alpha_o} - 1 \right] - \left[\frac{v_p(\frac{\pi}{2})}{\alpha_o} - 1 \right]. \quad (2. 26)$$

Banik (1987) a précisé le sens physique du paramètre δ . Il définit deux paramètres d'anisotropie :

$$\epsilon_p = \frac{\alpha_{\frac{\pi}{2}} - \alpha_o}{\alpha_o}, \quad \epsilon_s = \frac{\beta_{\frac{\pi}{4}} - \beta_o}{\beta_o}, \quad (2. 27)$$

où ϵ_p est équivalent au paramètre ϵ défini par Thomsen. ϵ_s décrit la déviation de la surface de vitesse de phase des ondes q_{SV} par rapport à un cercle de base de rayon $\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$. Si $\epsilon_s = 0$, il n'existe pas d'anisotropie des ondes q_{SV} . Par contre, $\epsilon_p = 0$ ne signifie pas qu'il n'y a pas d'anisotropie des ondes q_P . Ceci devient évident quand on linéarise la vitesse de phase de Thomsen en termes de ϵ_p et ϵ_s :

$$\begin{aligned} v_p(\theta) &\sim \alpha_o \left[1 + \left(\epsilon_p - 4\epsilon_s \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \epsilon_p \sin^4 \theta \right], \\ v_{sv}(\theta) &\sim \beta_o [1 + 4\epsilon_s \sin^2 \theta \cos^2 \theta]. \end{aligned} \quad (2. 28)$$

La figure (II.12) illustre comment ϵ_s modifie la surface de vitesse à ϵ_p fixé. Le sens physique de δ apparaît si on l'écrit avec ϵ_p et ϵ_s :

$$\delta = \epsilon_p - 4\epsilon_s \frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2}. \quad (2. 29)$$

Pour beaucoup de roches $\alpha_o \sim 2\beta_o$, alors : $\delta = \epsilon_p - \epsilon_s$. Le paramètre δ décrit donc la "concurrence" entre l'anisotropie des ondes q_P et celle des ondes q_{SV} qui affectent un milieu TI.

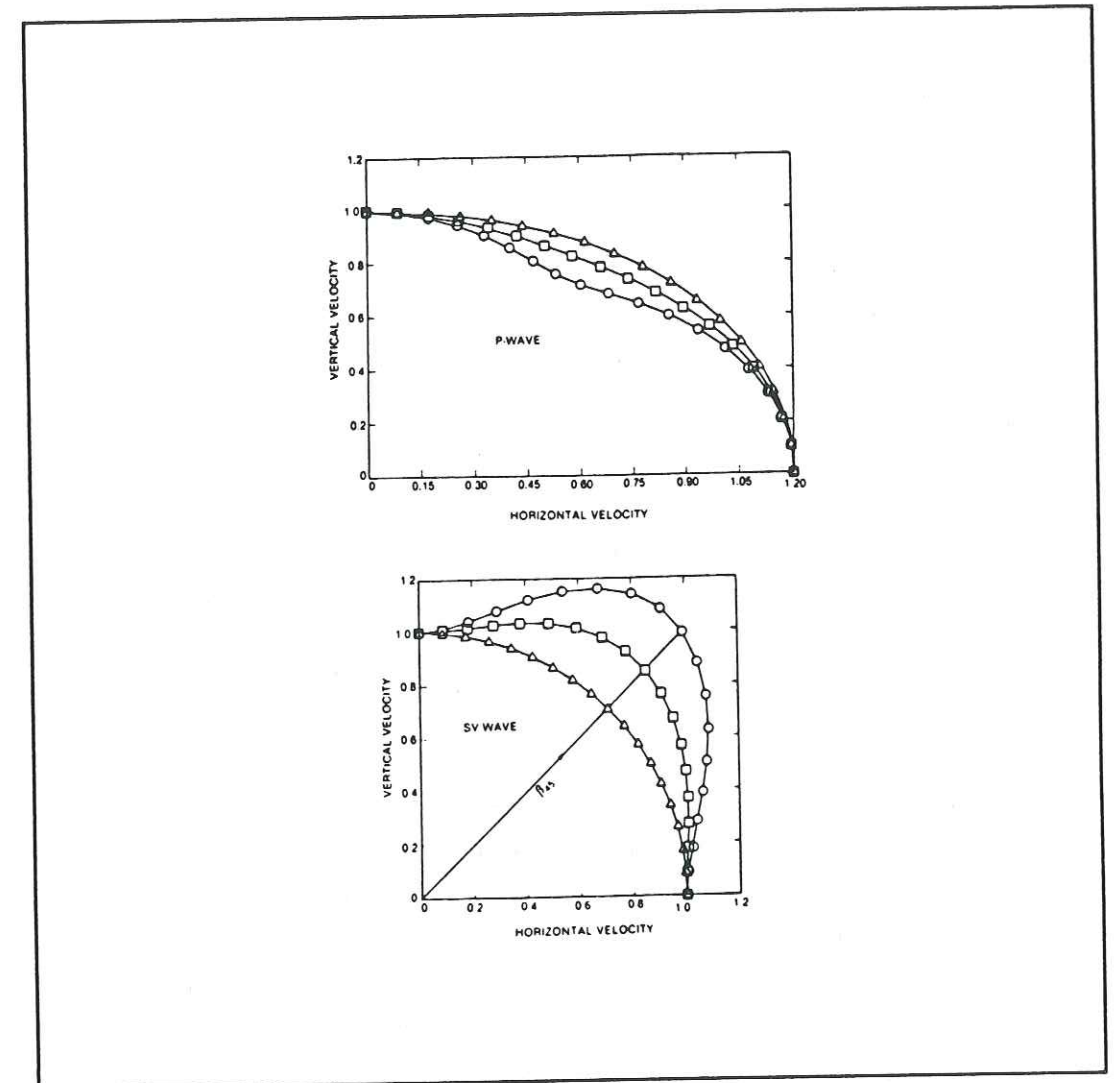


Figure II.12. Surfaces de vitesse de phase pour les ondes q_P (en haut) et q_{SV} (en bas). Le coefficient d'anisotropie P est constant (et vaut 0,2) et le coefficient d'anisotropie q_{SV} prend des valeurs différentes ; 0 (courbe avec des triangles), 0,25 (courbe avec des carrés), 0,5 (courbe avec des cercles). Ceci correspond à des valeurs de δ valant respectivement 0,2, -0,7 et -0,3. Modèle à deux couches avec $\alpha_{01} = 2896$ m/s, $\beta_{01} = 1402$ m/s, $\rho_1 = 2,25$ et $\alpha_{02} = 3322$ m/s, $\beta_{02} = 1402$ m/s, $\rho_2 = 2,25$ (Banick 1987).

4. Comparaison des deux méthodes.

Ces deux méthodes sont aussi simples à mettre en œuvre l'une que l'autre. Ce que l'on compare plutôt, c'est la fiabilité et la stabilité de l'erreur sur les expressions approchées des vitesses de phase. Enfin, on discute la représentativité physique des paramètres d'anisotropie définis dans chacune de ces approches.

Pour comparer la stabilité de l'erreur entre ces deux méthodes, on écrit les expressions approchées des vitesses de phase de Berryman (2.7) en fonction des deux paramètres de Thomsen δ et ϵ . Puis, on calcule, pour chacune de ces deux méthodes, l'erreur relative en % faite sur les expressions approchées des vitesses, à θ constant, pour δ et ϵ variant entre $-0,2$ et $0,2$. Les figures (II.13), (II.14) et (II.15) sont des cartes d'erreurs représentées dans le plan (ϵ, δ) , l'angle d'incidence θ valant successivement 20° , 45° et 70° . Une erreur négative signifie que la correction au premier ordre représentant l'anisotropie est trop faible.

Pour de faibles incidences (figure II.13), la répartition des erreurs est homogène avec de faibles amplitudes. On note toutefois que cette répartition est moins stable pour les ondes q_{SV} avec la méthode de Berryman.

Pour les angles intermédiaires (figure II.14), l'erreur est globalement plus faible pour les ondes q_P avec la méthode de Thomsen. Par contre, pour les ondes q_{SV} , la méthode Berryman est plus fiable.

Enfin, pour des incidences subhorizontales (figure II.15), l'approche de Berryman semble meilleure quel que soit le type d'ondes.

Pour des incidences extrêmes (0 et 90°), les approximations des expressions des vitesses de phase des ondes q_P de Berryman sont plus rigoureuses que celles de Thomsen. En effet, par la méthode de Berryman on a : $\frac{v_P^2(0)}{2} = C_{33}$ et $\frac{v_P^2(90)}{2} = C_{11}$, alors que par la méthode de Thomsen on a : $v_P^2(0) = C_{33}$ et $v_P(90) = \frac{C_{11} + C_{33}}{2\sqrt{C_{33}}}$.

Pour les ondes q_{SV} , les zones où $\delta > 0$ et $\epsilon < 0$ sur les figures (II.13) et (II.14) correspondent à des valeurs du paramètre de Berryman $|\epsilon| > 1$. Ceci signifie que, dans cette zone, l'approximation de Berryman n'est pas valable. Le domaine de définition des expressions de Berryman est plus restreint que celui des expressions de Thomsen.

L'erreur due à l'approximation de Thomsen ou de Berryman est nulle si $\delta = \epsilon$ (ce qui correspond à ϵ de Berryman égal à 0) quel que soit le type d'onde q_P ou q_{SV} . L'isovaleur 0 forme une diagonale.

Il existe aussi une diagonale d'isovaleur 0 si $\epsilon = -2\delta$ pour les ondes q_P avec les approximations de Thomsen.

Si δ vaut approximativement -2ϵ pour une incidence des ondes q_{SV} de l'ordre de 30° avec les expressions de Thomsen, il existe une isoligne 0 . Cette isoligne devient parallèle à l'axe δ lorsque l'incidence devient subverticale. Pour ces incidences, l'erreur due aux approximations de Thomsen est nulle si $\epsilon = 0$ quelle que soit la valeur de δ .

Ces isolignes se croisent pour $\delta = \epsilon = 0$, ce qui correspond au cas isotrope. Dans ce cas, seul le terme d'ordre 0 correspondant à l'isotropie est non nul.

Ces paramètres d'anisotropie permettent de modéliser les variations de la surface de vitesse d'une onde élastique. En cela l'approche de Thomsen apparaît comme plus naturelle. En effet, la méridienne de la surface de vitesse est une courbe du second ordre et il faut deux paramètres pour la décrire.

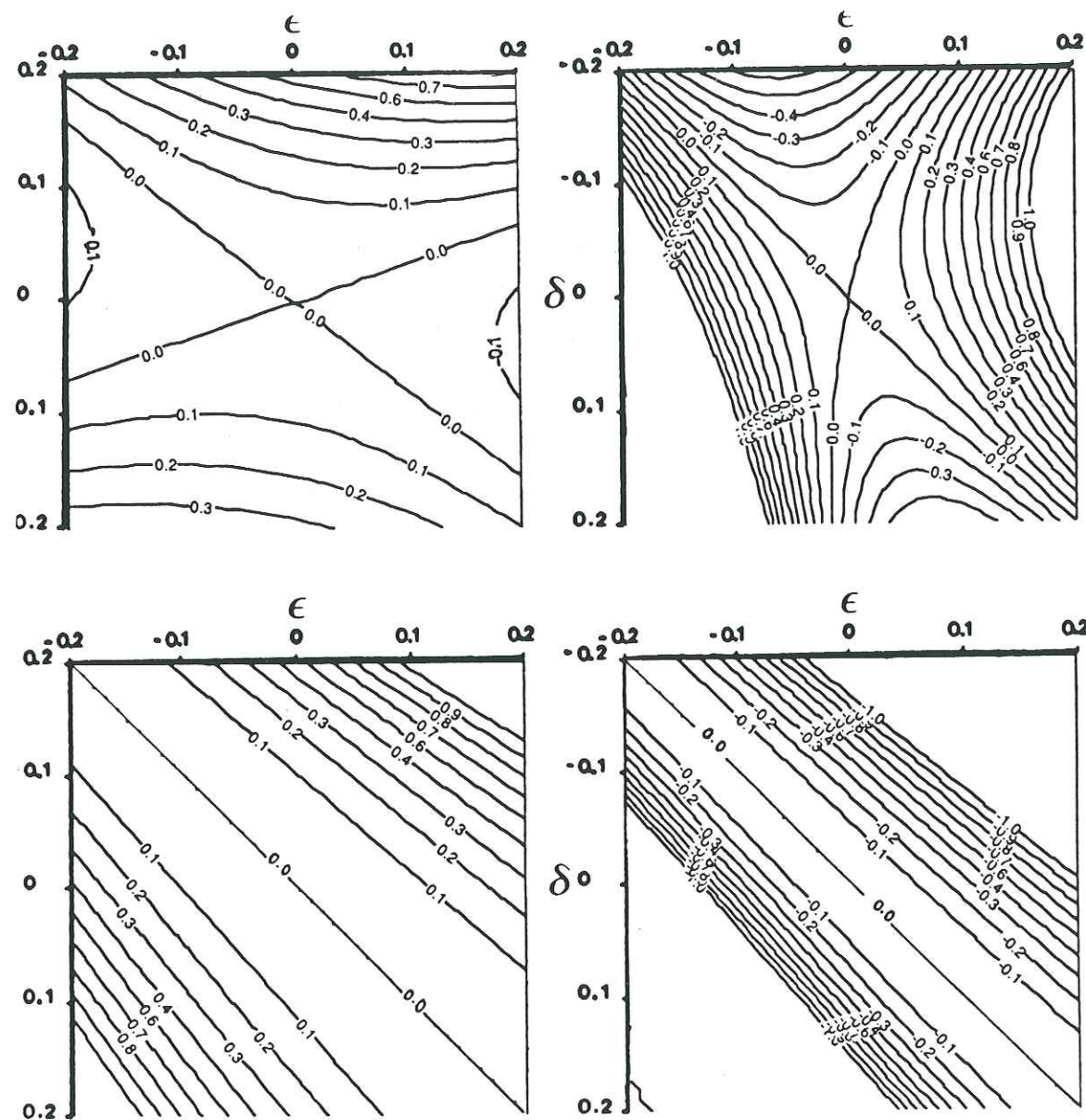


Figure II.13. Variation de l'erreur relative (en %) faite sur les expressions approchées des vitesses de phase des ondes q_P (gauche) et q_{SV} (droite) de Thomsen (haut) et de Berryman (bas) dans le plan (ϵ, δ) à incidence fixée à 30° .

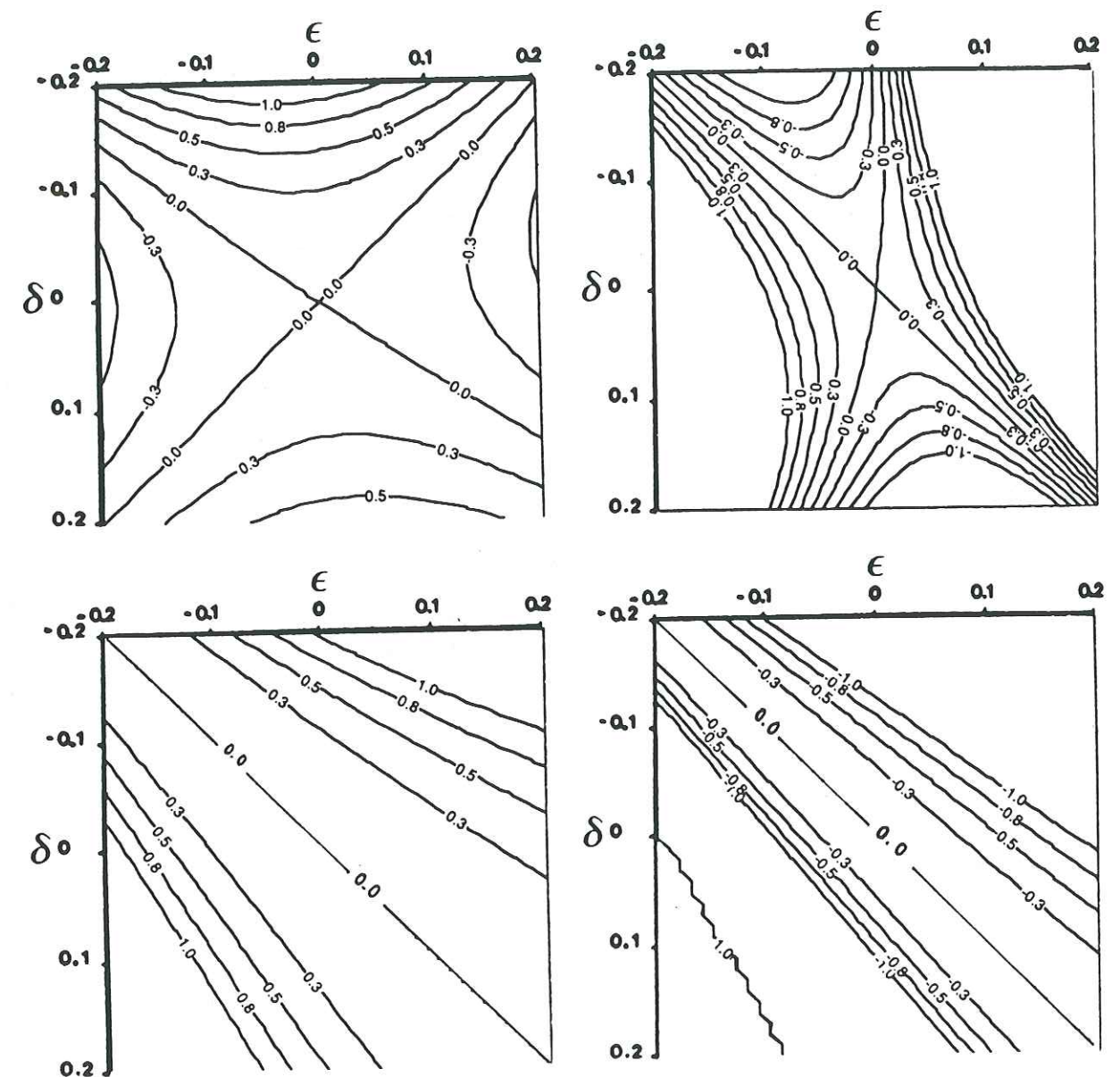


Figure II.14. Variation de l'erreur relative (en %) faite sur les expressions approchées des vitesses de phase des ondes q_P (gauche) et q_{SV} (droite) de Thomsen (haut) et de Berryman (bas) dans le plan (ϵ, δ) à incidence fixée à 45° .

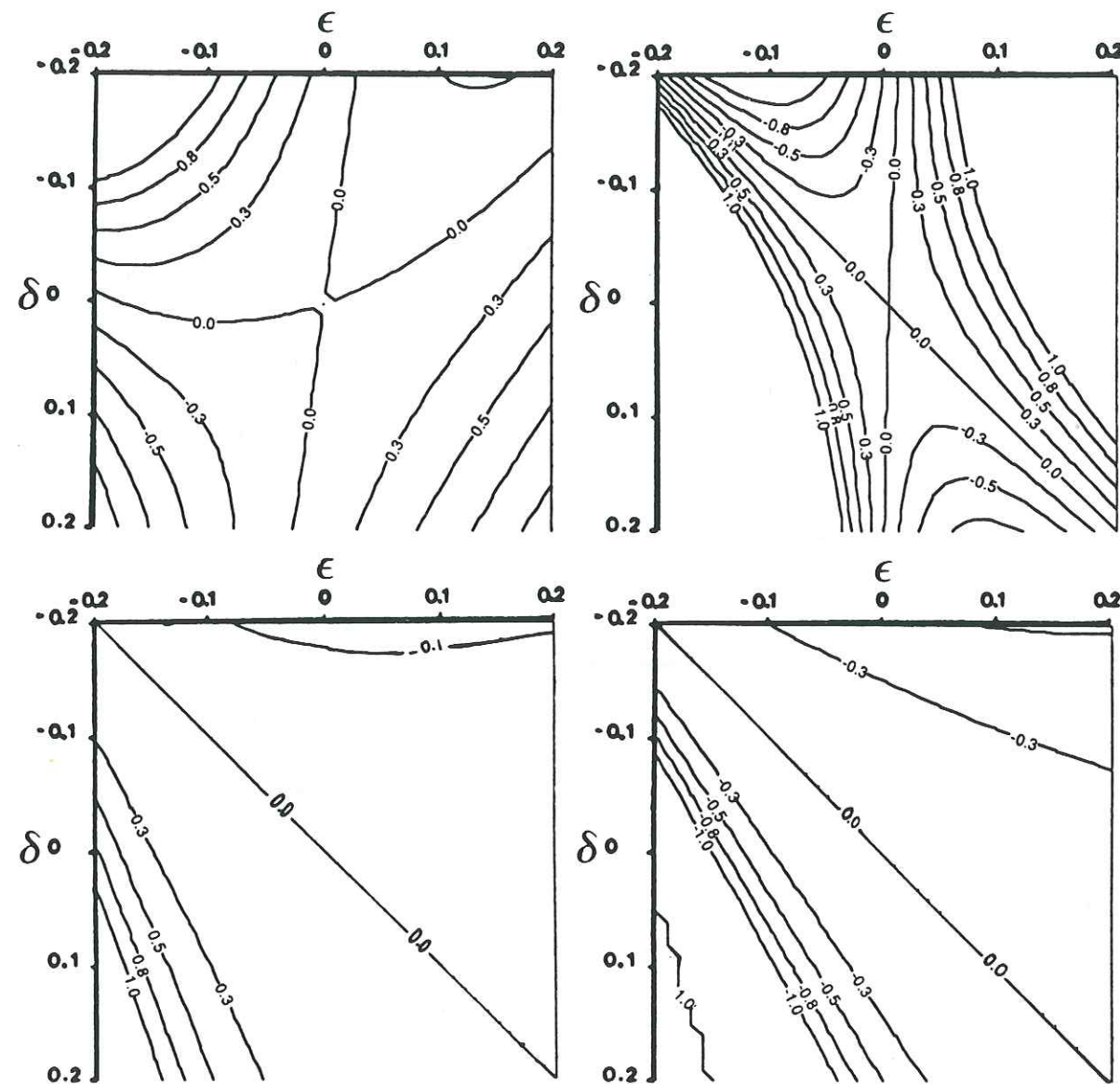


Figure II.15. Variation de l'erreur relative (en %) faite sur les expressions approchées des vitesses de phase des ondes q_P (gauche) et q_{SV} (droite) de Thomsen (haut) et de Berryman (bas) dans le plan (ϵ, δ) à incidence fixée à 70° .

En résumé on retient que :

1. la méthode de Thomsen utilise trois paramètres d'anisotropie distincts. Ceux-ci résultent de combinaisons de coefficients élastiques différents pour chaque paramètre et leur variation a une signification physique particulière ;

2. Par contre, la méthode de Berryman n'utilise qu'un seul paramètre. C'est une combinaison de quatre coefficients élastiques, et sa variation intègre tous les effets de l'anisotropie, ce qui n'a pas de signification physique particulière ;

3. L'avantage de l'approche de Berryman est d'avoir une erreur sur les approximations des vitesses de phase plus faible que celle de Thomsen, notamment pour les fortes incidences. Si on se restreint à des incidences de l'ordre de 40° , ces deux méthodes se valent ;

En conséquence, la méthode de Thomsen apparaît comme la plus intéressante pour calculer des équations des vitesses en fonction de l'angle de polarisation et des paramètres d'anisotropie.

Table des matières.

Chapitre 3. Définition de classes d'anisotropie.	1
1. Introduction.	1
2. Les équations des surfaces de lenteurs.	2
3. Classification basée sur l'étude des lenteurs.	4
3. Classification basée sur l'étude de la polarisation.	9
5. Discussion : une approche proposée par Helbig.	13

CHAPITRE 3. Définition de classes d'anisotropie.

1. Introduction.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les paramètres de Thomsen (ϵ, δ) permettent de décrire, dans un plan de symétrie, les variations de la vitesse de phase des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'incidence. ϵ et δ ont été définis de telle sorte que la sensibilité des vitesses de phase à des perturbations de ces paramètres soit découplées l'une par rapport à l'autre. Ainsi, le paramètre δ explique les variations au premier ordre de la vitesse de phase des ondes q_P pour de faibles angles d'incidence, alors que le paramètre ϵ explique ces variations pour des angles d'incidence supérieur à 60° .

Dans ce chapitre, on utilise la paramétrisation de Thomsen pour définir des classes d'anisotropie. On entend par classe d'anisotropie un comportement similaire de la vitesse de phase ou de l'angle de polarisation γ pour les ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle d'incidence. Cette classification est faite à partir de l'étude des ondes q_P et q_{SV} dans un plan de symétrie.

Différents types de classification ont déjà été proposés dans la littérature mais avec des objectifs différents. Lyakhovitskyi (1984) définit trois classes d'anisotropie en étudiant les variations de la vitesse de groupe. Ceci permet, entre autres, de prédire l'apparition de points de rebroussement sur la surface des vitesses des ondes q_{SV} . Helbig (1966) propose une dérivation astucieuse permettant de définir trois classes d'anisotropie en étudiant, dans le cas de milieux orthorhombiques, l'écart entre la surface des lenteurs par rapport à une ellipse de base pour les ondes q_P et par rapport à un cercle de base pour les ondes q_{SV} .

On utilise la dérivation de Helbig (1966) appliquée à des milieux hexagonaux, et réécrite avec les paramètres de Thomsen ϵ et δ , pour classer l'isotropie transverse à partir de la géométrie des surfaces de lenteurs.

Puis, on définit une classification, toujours en (ϵ, δ), en étudiant cette fois les variations de l'angle de polarisation γ avec l'angle d'incidence θ .

On montre que les définitions des classes d'isotropie transverse ne coïncident pas suivant que l'on étudie les lenteurs ou les polarisations.

2. Les équations des surfaces de lenteurs.

On calcule dans cette partie les équations décrivant les surfaces des lenteurs basées sur l'équation d'une ellipse de base pour les ondes q_P et d'un cercle de base pour les ondes q_{SV} (Helbig, 1966). À partir de l'équation du mouvement dans un milieu TI (1.1) on aboutit à un système d'équations différentielles du second ordre qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} (C_{11}n_1^2 + C_{55}n_3^2)g_1 + (C_{13} + C_{55})n_1n_3g_3 &= \rho g_1, \\ (C_{66}n_1^2 + C_{33}n_3^2)g_2 &= \rho g_2, \\ (C_{13} + C_{55})n_1n_3g_1 + (C_{55}n_1^2 + C_{33}n_3^2)g_3 &= \rho g_3. \end{aligned} \quad (3.1)$$

La deuxième équation de ce système (3.1) est découplée des deux autres puisqu'elle ne fait intervenir que la composante g_2 du déplacement. C'est l'équation d'une ellipse de demi axes : $\sqrt{\frac{\rho}{C_{66}}}$ et $\sqrt{\frac{\rho}{C_{33}}}$ décrivant la surface des lenteurs de l'onde SH dont la polarisation est perpendiculaire au plan de propagation. La première et la troisième équations du système (3.1) sont couplées et correspondent aux équations des surfaces des lenteurs des ondes q_P et q_{SV} . La résolution du système composé de ces deux équations donne les expressions du carré des composantes des lenteurs (Helbig, 1966). Pour les ondes q_P on obtient :

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \rho \frac{(C_{11} - C_{55})w + (C_{13} + C_{55})w^2}{D_P}, \\ n_3^2 &= \rho \frac{C_{13} + C_{55} + (C_{11} - C_{55})w}{D_P}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où :

$$D_P = (C_{13} + C_{55})C_{33} + ((C_{11} - C_{55})C_{33} + (C_{33} - C_{55})C_{11} - E^2)w + (C_{13} + C_{55})C_{11}w^2, \quad (3.3)$$

avec :

$$w = \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \gamma_P, \quad (3.4)$$

et E^2 appelé module de forme et utilisé par Postma (1955), a pour expression :

$$E^2 = (C_{11} - C_{55})(C_{33} - C_{55}) - (C_{13} + C_{55})^2. \quad (3.5)$$

E^2 a la dimension du carré des modules élastiques mais peut être négatif, positif ou nul (Helbig, 1966).

De même, pour les ondes q_{SV} , le carré des composantes des lenteurs sont :

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \rho \frac{(C_{33} - C_{55})w + (C_{13} + C_{55})w^2}{D_{SV}}, \\ n_3^2 &= \rho \frac{C_{13} + C_{55} + (C_{11} - C_{55})w}{D_{SV}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où :

$$D_{SV} = (C_{13} + C_{55})C_{55} + ((C_{11} - C_{55})C_{55} + (C_{33} - C_{55})C_{55} + E^2)w + (C_{13} + C_{55})C_{55}w^2, \quad (3.7)$$

et où :

$$w = \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \gamma_{SV}. \quad (3.8)$$

Comme la polarisation des ondes q_P est identique à celle des ondes q_{SV} à $\frac{\pi}{2}$ près, le paramètre w est identique dans les équations (3.2) et (3.6).

Helbig montre que pour les ondes q_P les expressions (3.2) peuvent s'écrire sous la forme de l'équation d'une ellipse de base plus un facteur de déviation qui varie avec l'anisotropie :

$$\frac{n_1^2}{\rho} C_{11} + \frac{n_3^2}{\rho} C_{33} = 1 + \frac{E^2 w}{D_P}. \quad (3.9)$$

Pour les ondes q_{SV} , le module carré de la lenteur permet d'écrire une équation décrivant la surface des lenteurs comme un cercle de base de rayon $\sqrt{\frac{\rho}{C_{55}}}$ moins un terme de déviation dû à l'anisotropie :

$$n^2 = n_1^2 + n_3^2 = \frac{\rho}{C_{55}} \left(1 - \frac{E^2 w}{D_{SV}} \right). \quad (3.10)$$

En partant de l'étude du signe du paramètre de forme E^2 , il est possible de définir trois classes d'anisotropie.

3. Classification basée sur l'étude des lenteurs.

L'étude des variations des lenteurs des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'incidence à partir des équations (3.9) et (3.10) permet de différencier trois classes d'anisotropie. Chacune de ces classes est définie à partir du signe du paramètre de forme E^2 . Celui-ci peut s'exprimer facilement en fonction des deux paramètres de Thomsen ϵ et δ : $E^2 = 2C_{33}(\epsilon - \delta)$.

On se restreint pour cette classification à des milieux pour lesquels la vitesse verticale est inférieure à la vitesse horizontale pour les ondes q_P ($C_{33} \leq C_{11}$). Dans ce cas, le paramètre ϵ est toujours supérieur ou égal à 0. Cette restriction est réaliste pour les milieux étudiés en sismique pétrolière. Par contre, le paramètre δ peut être positif, négatif ou nul (Thomsen, 1986). Ainsi le signe de E^2 ne dépend que du signe de $\epsilon - \delta$. Ces trois classes sont :

1. $E^2 = 0 \Leftrightarrow \epsilon = \delta$.

L'équation (3.9) montre que la surface des lenteurs des ondes q_P décrit une ellipse de base dont l'équation est :

$$\frac{n_1^2}{\rho} C_{11} + \frac{n_1^2}{\rho} C_{33} = 1. \quad (3.11)$$

On note que, dans ce cas, l'équation approchée de la vitesse de phase (2.39) décrite par Thomsen (1986) ne dépend plus que d'un paramètre et se ramène à : $\rho v_p^2 \sim C_{33}(1 + \delta \sin^2 \theta)$.

L'équation (3.10) montre que la surface des lenteurs se ramène à un cercle de base de rayon :

$$\sqrt{\frac{\rho}{C_{55}}}. \quad (3.12)$$

Dans ce cas, il n'y a pas d'anisotropie des ondes q_{SV} . La figure (III.1) montre les surfaces des lenteurs des ondes q_P et q_{SV} pour un milieu TI appartenant à la classe 1.

2. $E^2 < 0 \Leftrightarrow \epsilon > \delta$.

Le terme de correction de l'équation (3.9) est négatif, et la surface des lenteurs des ondes q_P est comprise à l'intérieur de l'ellipse de base. La vitesse de phase aura un maximum pour une incidence comprise entre 0 et 90°.

Pour les ondes q_{SV} , la surface des lenteurs est à l'extérieur du cercle de base. Cette surface sera toujours convexe. Cela signifie que la vitesse de phase a un

minimum pour une incidence comprise entre 0 et 90°. La figure (III.2) montre les surfaces de lenteurs des ondes q_P et q_{SV} pour un milieu TI appartenant à la classe 2.

3. $E^2 > 0 \Leftrightarrow \epsilon < \delta$.

Le terme correctif dans l'équation (4.9) est positif, et la surface des lenteurs des ondes q_P est située à l'extérieur de l'ellipse de base.

La surface des lenteurs des ondes q_{SV} est à l'intérieur du cercle de base. Cette surface est alors concave ce qui a pour effet l'apparition de points de rebroussements sur la surface d'ondes. La figure (III.3) montre les surfaces de lenteurs des ondes q_P et q_{SV} pour un milieu TI appartenant à la classe 3.

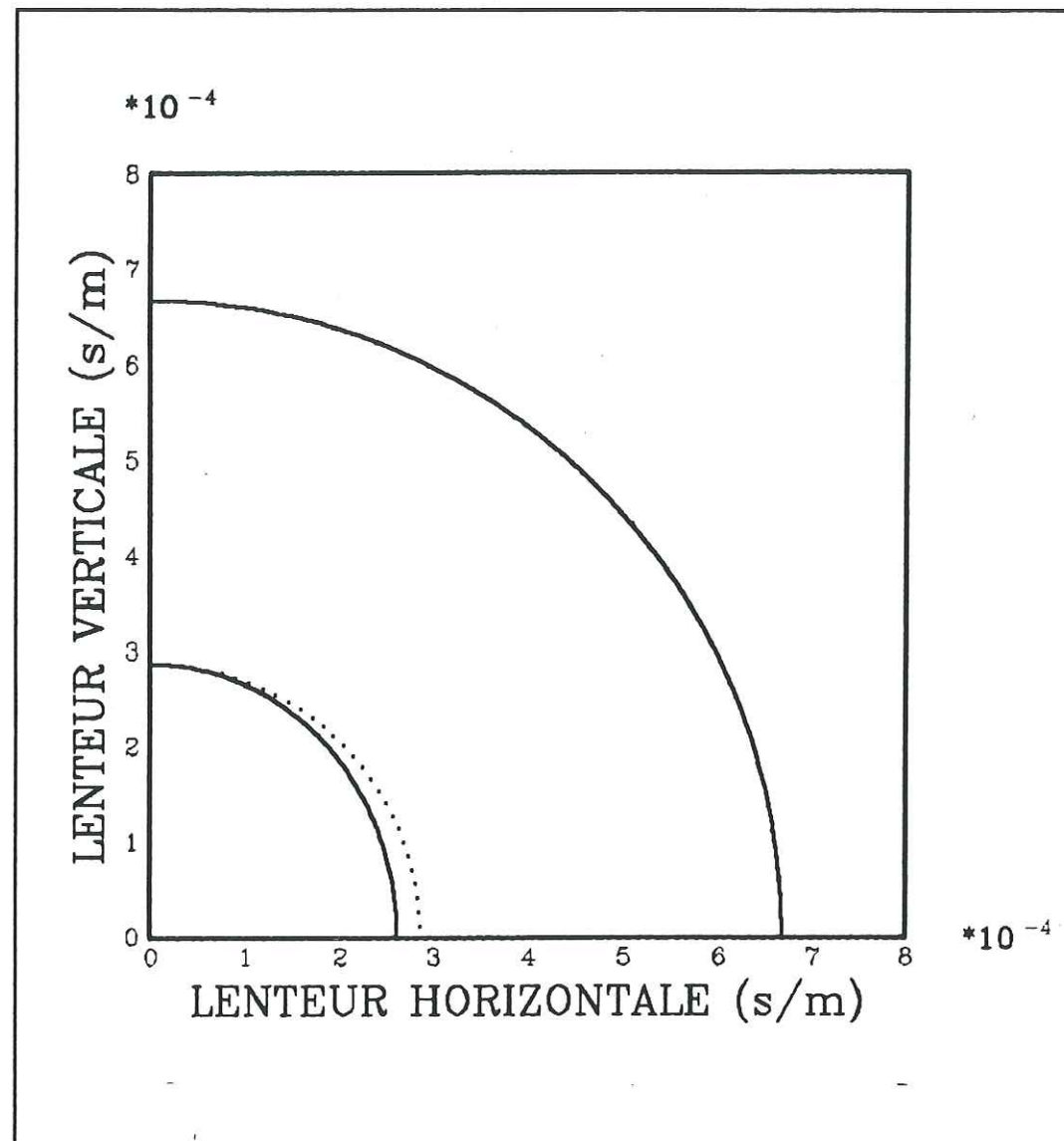


Figure III.1. Surfaces de lenteurs des ondes q_P et q_{SV} caractéristiques de la classe 1 (cas où $\epsilon = \delta$). Dans cet exemple, on a $\alpha_0 = 3500$ m/s, $\beta_0 = 1500$ m/s, $\delta = 0,1$, $\epsilon = 0,1$. Les courbes en pointillé correspondent au milieu isotrope ($\delta = \epsilon = 0$).

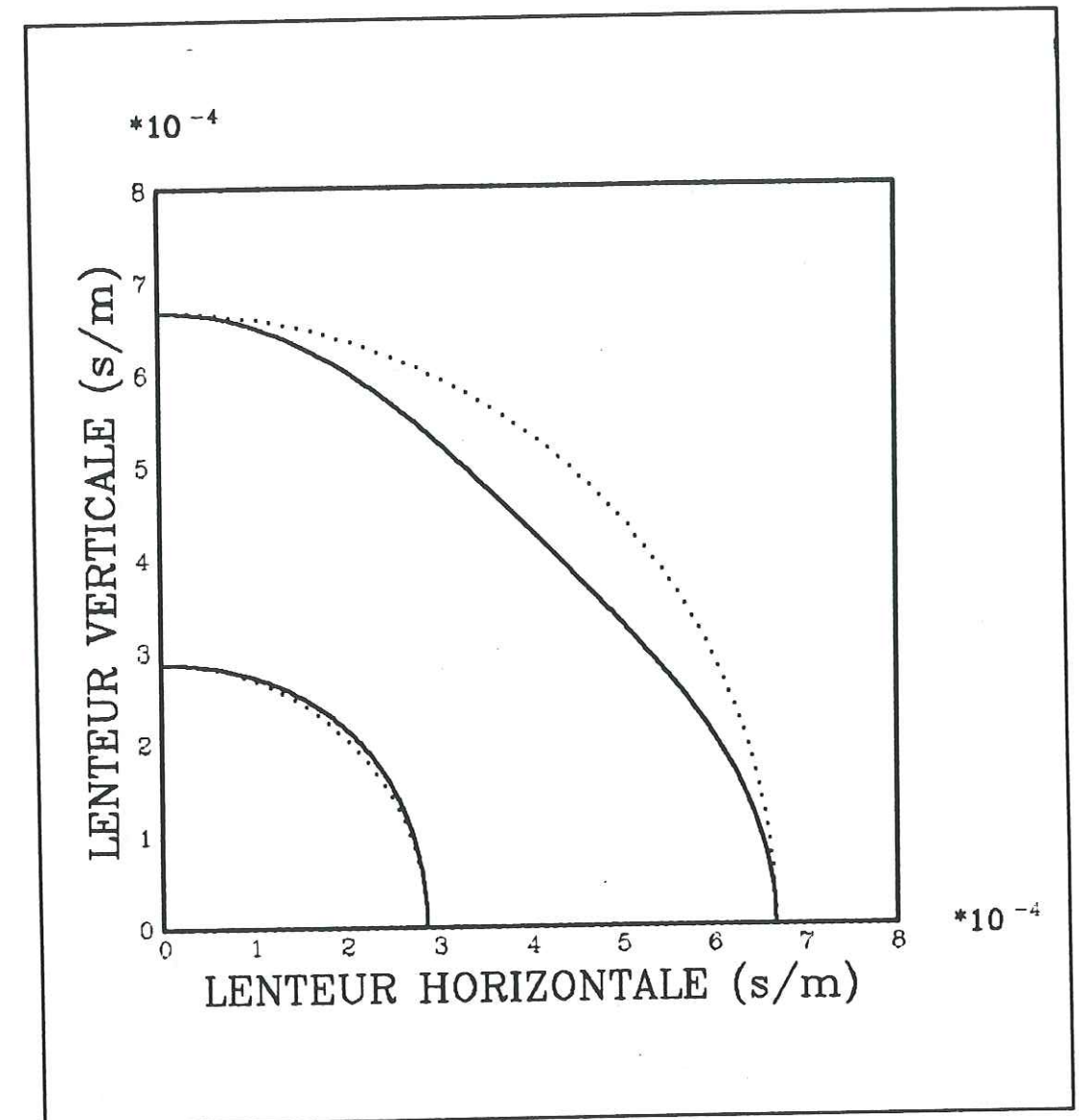


Figure III.2. Surfaces de lenteurs des ondes q_P et q_{SV} caractéristiques de la classe 2 ($\epsilon > \delta$). Dans cet exemple on a $\alpha_0 = 3500$ m/s, $\beta_0 = 1500$ m/s, $\delta = -0,1$, $\epsilon = 0$. Les courbes en pointillé correspondent au milieu isotrope ($\delta = \epsilon = 0$).

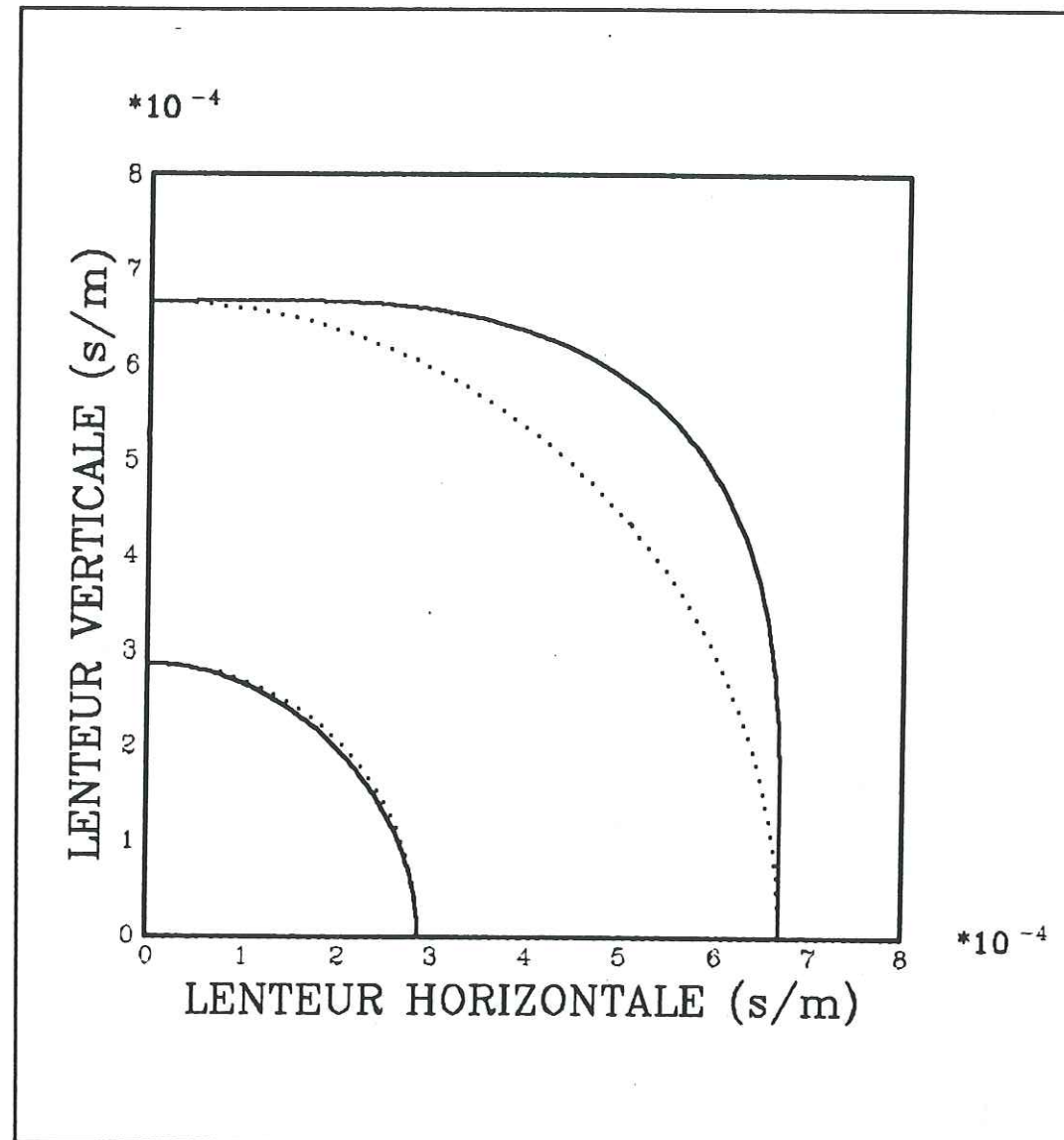


Figure III.3. Surfaces de lenteurs des ondes q_P et q_{SV} caractéristiques de la classe 3 ($\epsilon < \delta$). Dans cet exemple on a $\alpha_0 = 3500$ m/s, $\beta_0 = 1500$ m/s, $\delta = 0,1$, $\epsilon = 0$. Les courbes en pointillé correspondent au milieu isotrope ($\delta = \epsilon = 0$).

3. Classification basée sur l'étude de la polarisation.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, il existe un angle ξ entre la direction de polarisation des ondes q_P et la direction de propagation d'une onde se propageant dans un milieu transversalement isotrope. On a la relation $\gamma = \theta + \xi$ où γ est l'angle de polarisation et θ l'angle d'incidence. Pour les ondes q_{SV} qui sont polarisées perpendiculairement aux ondes q_P , cette relation est la même à $\frac{\pi}{2}$ près. La valeur de l'angle ξ varie avec l'incidence pour une anisotropie donnée. On peut définir deux grandes classes d'anisotropie discriminant un comportement particulier de cet angle en fonction de l'incidence. Pour cela, on utilise l'expression approchée au premier ordre en ϵ et δ de l'angle ξ comme on le verra dans le chapitre suivant :

$$\xi \sim \frac{\sin 2\theta}{2} [\delta + 2(\epsilon - \delta) \sin^2 \theta] \frac{C_{33}}{C_{33} - C_{55}}. \quad (3.13)$$

Le terme $\frac{\sin 2\theta}{2}$ est toujours supérieur ou égal à 0 puisque θ est compris entre 0 et 90°. De même, le rapport $\frac{C_{33}}{C_{33} - C_{55}}$ est toujours supérieur à 0 puisque $C_{33} > C_{55} > 0$. Ainsi, le signe de ξ dépend-il uniquement du signe du terme entre crochets. On définit alors deux grandes classes en étudiant le signe du paramètre δ . L'expression (3.13) montre que le signe de ξ dépend du signe de δ pour de faibles angles d'incidences et du signe de $\epsilon - \delta$ pour des angles d'incidence proches de 90°. On retrouve le même raisonnement qu'avec les expressions approchées des vitesses de phases des ondes q_P définies par Thomsen. Comme on ne considère ici que des milieux pour lesquels $\epsilon \geq 0$, on définit deux classes :

1. $\delta < 0$.

L'angle ξ est toujours négatif pour une gamme d'incidence θ allant de 0° jusqu'à une angle critique θ_c pour lequel on a $\xi = 0$. L'expression de θ_c s'obtient à partir de l'équation approchée de la tangente de l'angle γ calculée dans le chapitre suivant (équation (4.2)) :

$$\sin \theta_c = \sqrt{\frac{\delta}{2(\delta - \epsilon)}}. \quad (3.14)$$

La figure (III.4) illustre le comportement de l'angle de polarisation γ en fonction de l'angle d'incidence θ .

2. $\delta \geq 0$.

L'angle ξ est positif pour $\theta < \theta_c$. Pour $\theta > \theta_c$ il faut étudier le signe de $\epsilon - \delta$:

— si $\delta < \epsilon$ alors $\xi > 0$,

— si $\delta > \epsilon$ alors $\xi < 0$.

La figure (III.5) illustre le comportement de l'angle de polarisation γ en fonction de l'angle d'incidence θ pour cette classe.

Il est possible de définir des sous-classes de celles présentées ici, et qui permettent d'appréhender la façon dont l'angle de polarisation dévie de l'angle d'incidence dans des gammes de θ proches de 0 ou de 90°. Autrement dit, ceci permet de savoir si la pente des courbes $\gamma = f(\theta)$ est légèrement supérieure ou inférieure à 1 dans ces gammes d'incidence. Cependant, pour ce qui nous intéresse, on étudie la pente des courbes $\gamma = f(\theta)$ dans des gammes d'incidence intermédiaires.

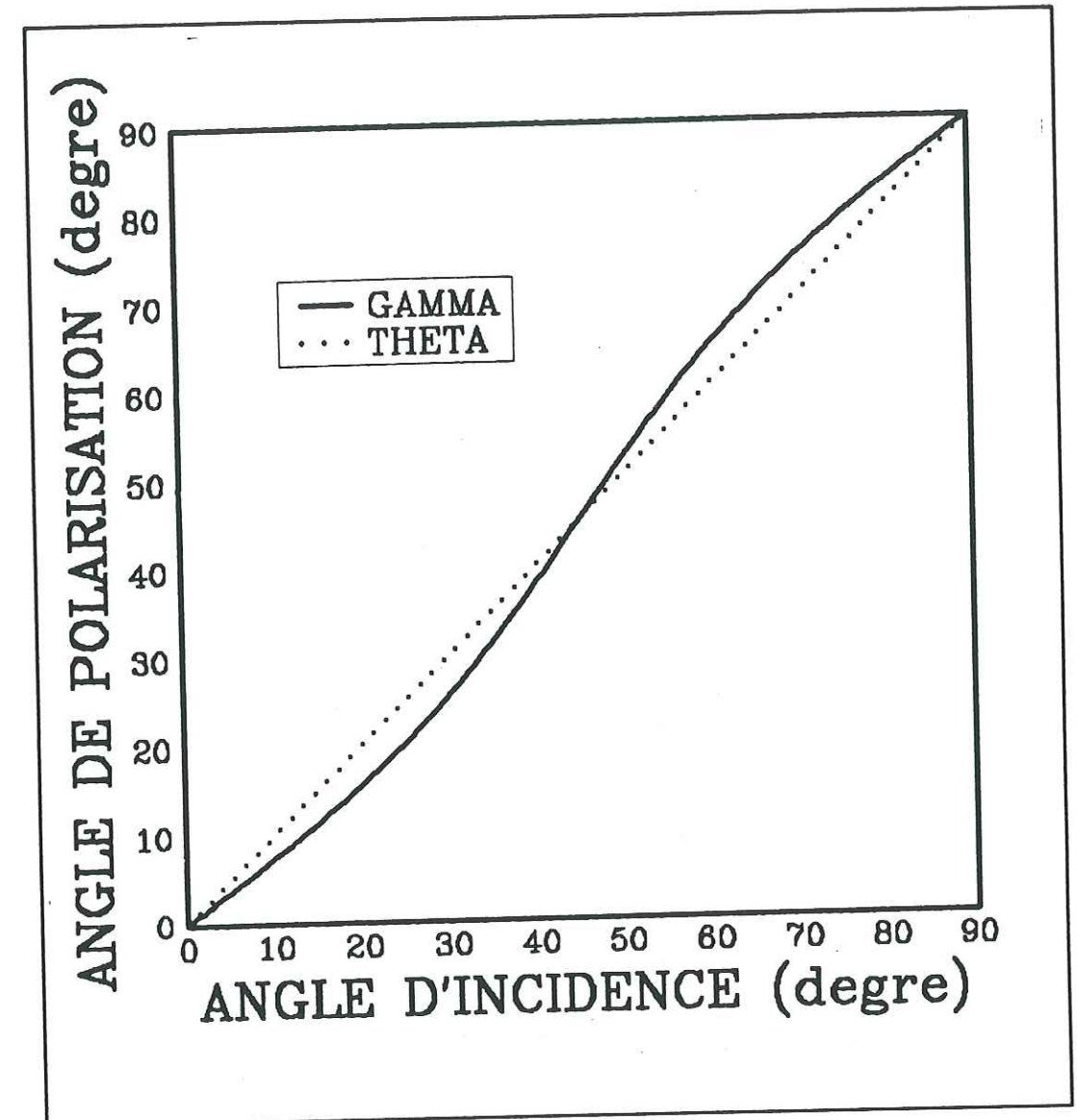


Figure III.4. Angle de polarisation γ des ondes q_p en fonction de l'angle d'incidence θ correspondant à la classe 1. L'angle γ est toujours inférieur ou égal à θ . Dans cet exemple on a : $\alpha_0 = 3500$ m/s, $\beta_0 = 1500$ m/s, $\delta = -0,2$, $\epsilon = 0$. Les courbes en pointillé correspondent au milieu isotrope ($\delta = \epsilon = 0$).

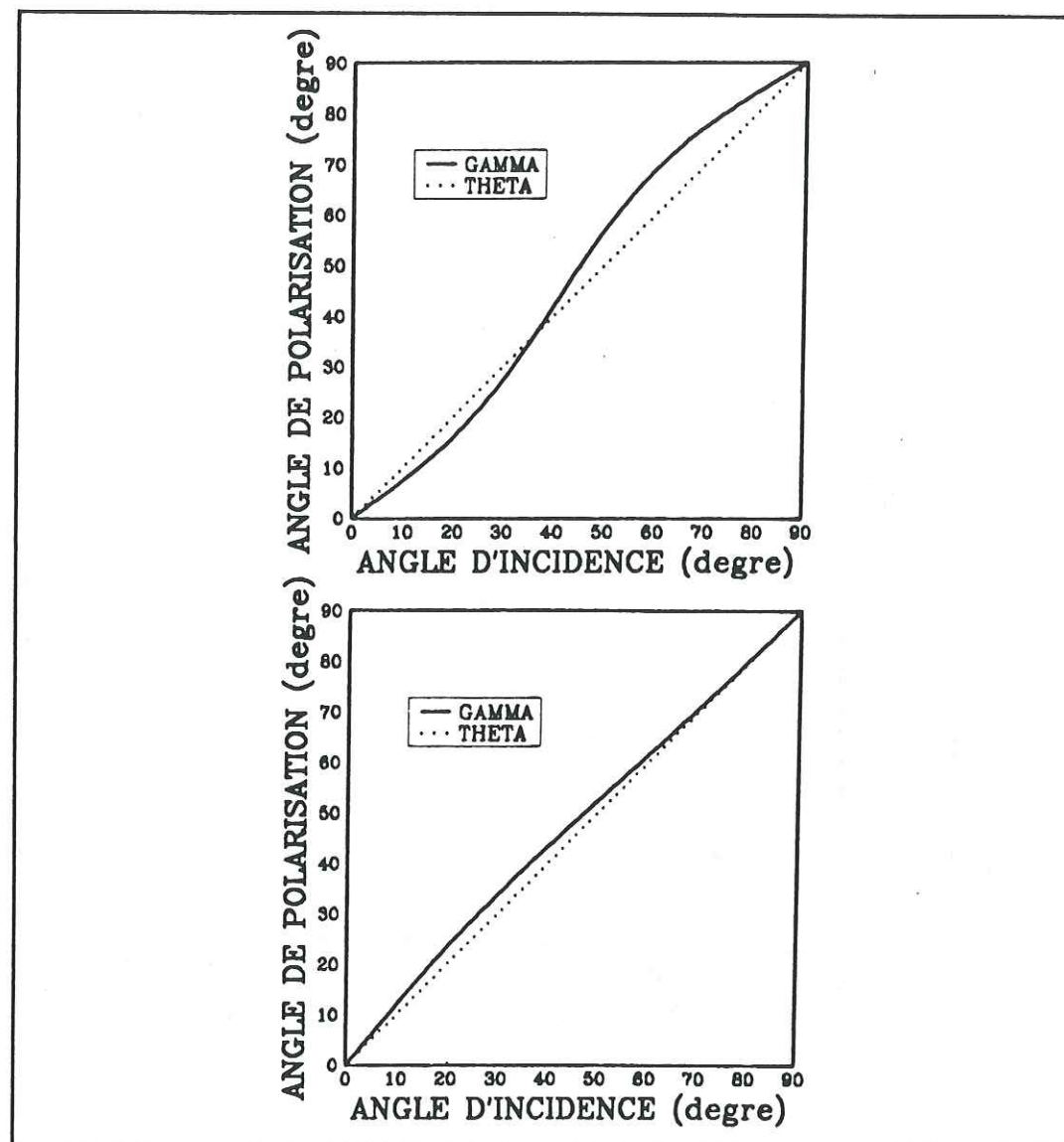


Figure III.5. Angle de polarisation γ des ondes q_P en fonction de l'angle d'incidence θ correspondant à la classe 2. On distingue deux sous-classes: $\delta < \epsilon$ (en haut) et $\delta > \epsilon$ (en bas). Dans cet exemple on a : $\alpha_0 = 3500$ m/s, $\beta_0 = 1500$ m/s, $\delta = \pm 0,2$, $\epsilon = 0,1$. Les courbes en pointillé correspondent au milieu isotrope ($\delta = \epsilon = 0$).

5. Discussion : une approche proposée par Helbig.

Cette étude a montré que la classification de l'isotropie transverse n'est pas homogène suivant que l'on considère les lenteurs ou la polarisation. Néanmoins, la connaissance des deux paramètres de Thomsen suffit pour appréhender à la fois le comportement des lenteurs et de la polarisation. Helbig (1966) a proposé une méthode graphique permettant de relier le paramètre de forme E^2 (servant à définir des classes d'isotropie transverse à partir des surfaces de lenteurs) et la polarisation. Pour cela, on exprime le carré de la tangente de l'angle d'incidence θ comme le rapport du carré des composantes de la vitesse de phase des ondes q_P calculées dans un plan de symétrie :

$$\text{tg}^2\theta = \frac{(C_{33} - C_{55})w + (C_{13} + C_{55})w^2}{(C_{13} + C_{55}) + (C_{11} - C_{55})w}. \quad (3.15)$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$w^2 + \left(\frac{\text{tg}^2\theta - \eta}{\xi} \right) w - \text{tg}^2\theta = 0, \quad (3.16)$$

où les deux paramètres η et ξ sont :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{C_{33} - C_{55}}{C_{11} - C_{55}}, \\ \xi &= -\frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11} - C_{55}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Helbig montre que cette équation peut se représenter graphiquement comme l'intersection d'une droite d'équation :

$$y = \text{tg}^2\theta - \left(\frac{\text{tg}^2\theta - \eta}{\xi} \right) w, \quad (3.18)$$

et d'une parabole "standard" (identique quel que soit le milieu) d'équation :

$$y = w^2, \quad (3.19)$$

Un milieu (TI) est représenté sur le graphe par un point P dans le plan (η, ξ) . Ainsi, pour un milieu donné, chaque angle d'incidence θ correspond à une droite passant par P et l'ordonnée à l'origine est $\text{tg}^2\theta$.

La parabole standard (3.19) dans le plan (η, ξ) aura comme équation $\eta = \xi^2$, ce qui correspond à $E^2 = 0$. Donc, cette parabole délimite deux régions : une région intérieure où $E^2 > 0$ et une région extérieure où $E^2 < 0$. La figure (III.6) synthétise ces résultats.

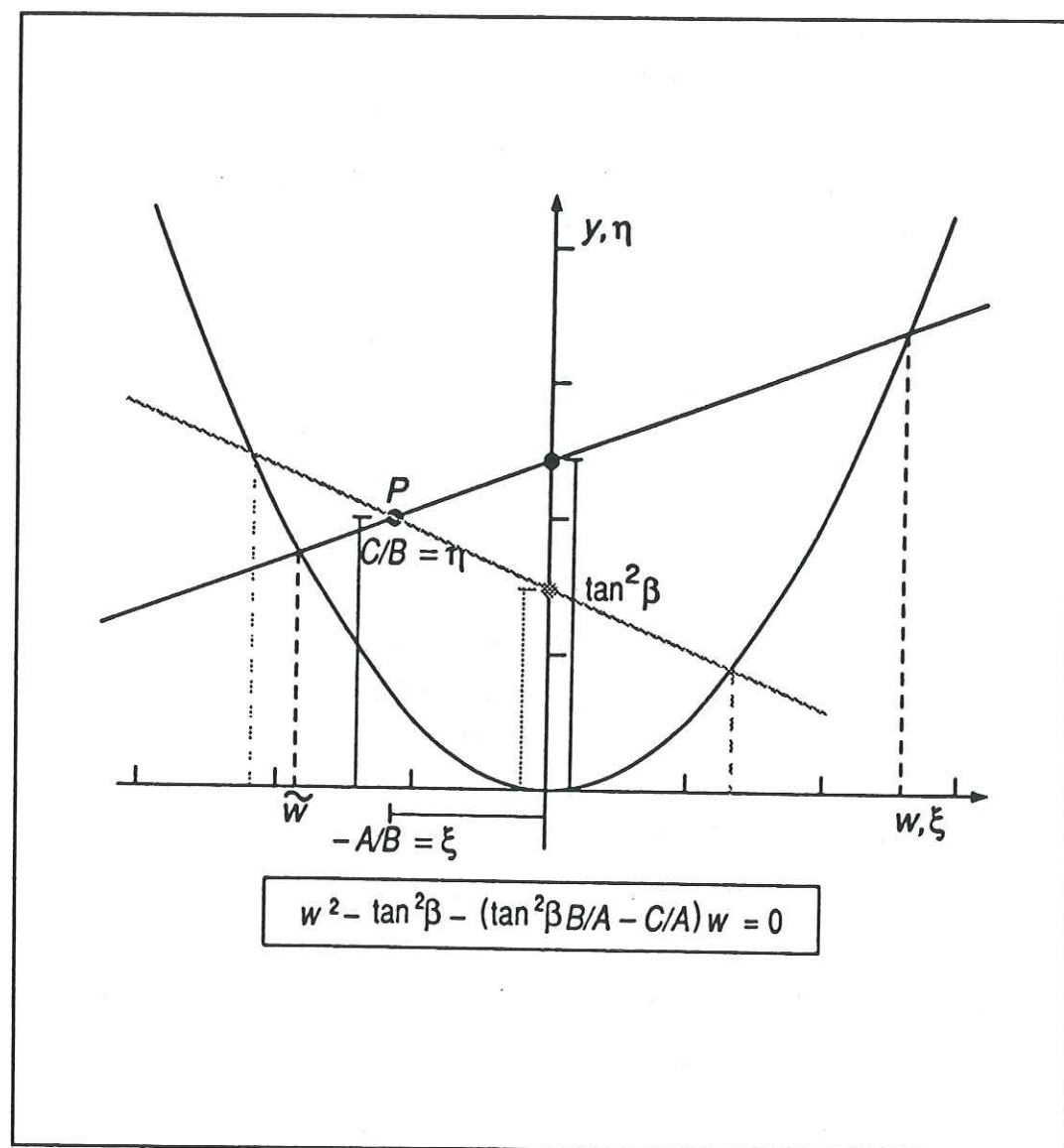


Figure III.6. Résolution graphique de l'équation (4.16) reliant les paramètres du milieu η et ξ , l'angle d'incidence par $\tan^2 \theta$ et le paramètre $w = \tan \theta \tan \gamma$ (d'après Helbig, 1966).

Ainsi, pour un milieu (TI) défini par les paramètres η et ξ , on peut construire graphiquement le vecteur polarisation $\vec{gP}$ (et $\vec{gSV}$) pour un angle d'incidence θ quelconque en utilisant la figure (III.7). La méthode est la suivante :

1. tracer une droite faisant un angle θ avec l'axe verticale à partir du point $(0, -1)$ qui coupe l'axe horizontal au point a ;
2. tracer une droite faisant un angle θ avec l'axe horizontal à partir du point a qui coupe l'axe vertical en b . Ce point correspond, d'après l'équation (4.18), à la valeur de $\tan^2 \theta$ puisque $\xi = 0$;
3. tracer la droite qui relie le point b au point $P(\eta, \xi)$;
4. cette droite coupe la parabole en deux points dont les abscisses sont w_1 pour les $\xi > 0$ et w_2 pour les $\xi < 0$;
5. tracer la droite faisant un angle $-\theta$ avec l'axe horizontal à partir du point $(-1, 0)$. Cette droite coupe l'axe vertical en c et correspond au front d'onde ;
6. tracer les deux droites reliant le point c respectivement aux points w_1 et w_2 . L'angle que fait chacune de ces droites avec l'axe vertical correspond respectivement à l'angle de polarisation de l'onde qP et qSV .

On note qu'un milieu peut aussi être représenté par les deux points w_1 et w_2 . Cette méthode graphique présente l'avantage de définir rapidement à quelle classe (classification basée sur la forme des surfaces de lenteurs) appartient un milieu représenté par un point sur le graphe. De même, il est possible de connaître le comportement de la polarisation en mesurant sur ce graphe les angles de polarisation correspondant à des incidences inférieures à θ_c . On peut alors, en comparant les valeurs des angles d'incidence par rapport aux angles de polarisation, connaître à quelle classe (classification basée sur la polarisation) le milieu appartient.

Dans son article, Helbig (1966) montre les limites de stabilité en utilisant de telles constructions géométriques. On entend par milieu stable un milieu pour lequel une déformation nécessite un énergie. Cela impose des contraintes sur les valeurs relatives des constantes élastiques.

Pour un milieu TI, les limites de stabilité sont :

$$C_{11} > C_{66}, \quad -\sqrt{C_{33}(C_{11} - C_{66})} < C_{13} < \sqrt{C_{33}(C_{11} - C_{66})}. \quad (3.20)$$

Pour les milieux qui nous intéressent, ces limites ne sont jamais atteintes.

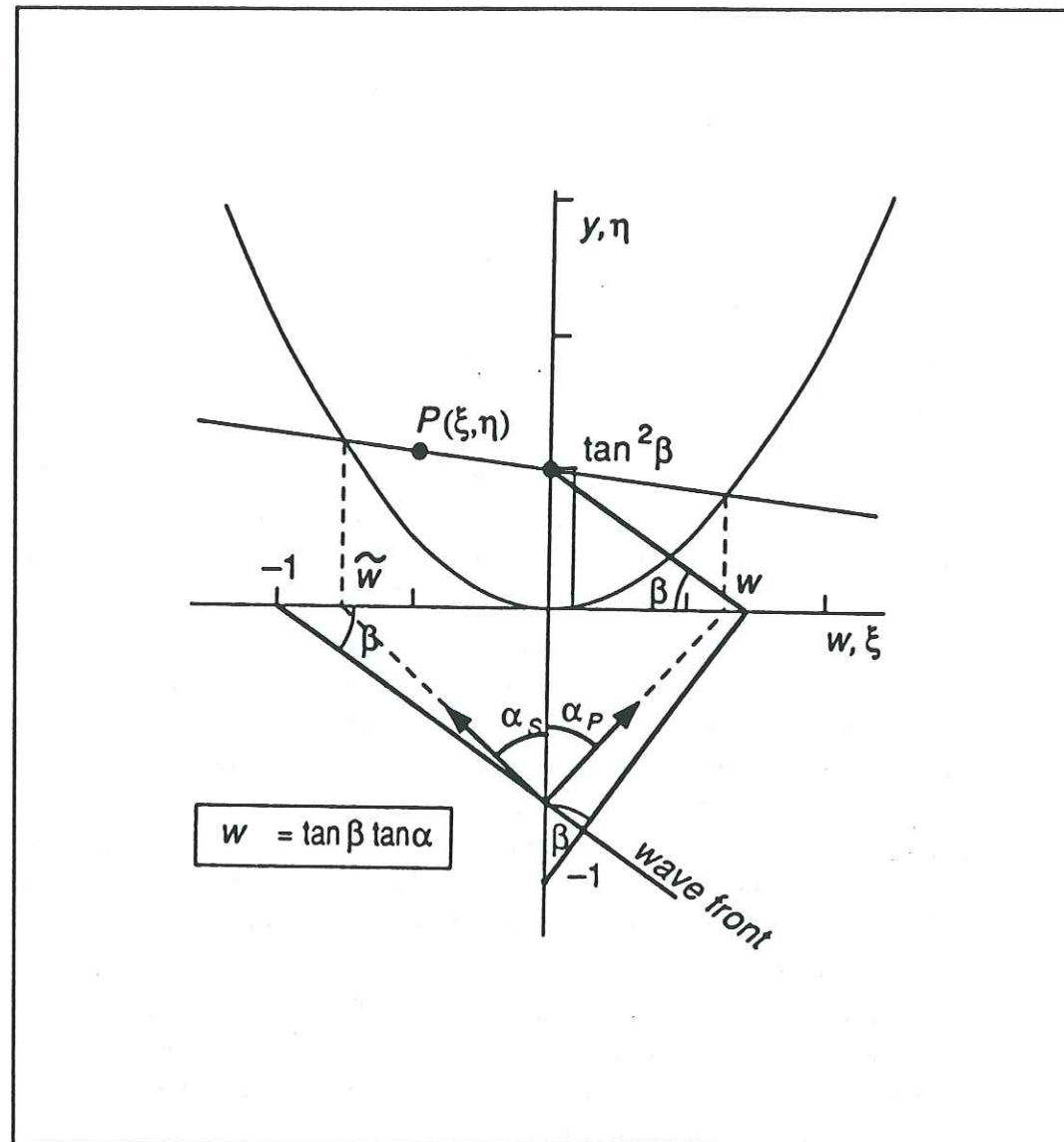


Figure III.7. Construction des angles de polarisation γ_P et γ_{SV} pour un angle d'incidence θ donné correspondant à un milieu défini par les paramètres η et ξ au point P (d'après Helbig, 1966).

Table des matières.

Chapitre 4. Approximation des équations de la vitesse apparente verticale des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation γ.	1
1. Objectifs.	1
2. Expressions approchées des vitesses apparentes verticales au premier ordre en ϵ et δ .	2
2.1 Calcul de l'angle entre les directions de propagation et de polarisation.	2
2.2 Les équations approchées des vitesses apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} .	4
3. Comparaison des équations des vitesses apparentes exprimées en fonction de γ avec celles exprimées en fonction de θ .	5
4. Erreurs d'approximations.	7
5. Conclusion.	14

CHAPITRE 4. Approximation des équations de la vitesse apparente verticale des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation γ .

1. Objectifs.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le modèle approché proposé par Thomsen (1986) permettait d'expliquer les variations de la vitesse de phase des ondes q_P et q_{SV} à partir de deux paramètres δ et ϵ . Les équations des vitesses de phase décrites par Thomsen sont des fonctions de l'angle d'incidence θ . Or, dans le cas de milieux TI, nous verrons que l'angle d'incidence n'est pas directement mesurable à partir de données de sismique de puits. Seul l'angle de polarisation peut être mesuré si on considère des données en trois composantes. De plus, les vitesses mesurées sur des données de puits sont des vitesses apparentes verticales de phase (sous certaines hypothèses que nous évoquerons au chapitre 7).

Dans ce chapitre, on calcule une expression approchée au premier ordre en ϵ et δ de la vitesse apparente verticale des ondes q_P (et q_{SV}) en fonction de l'angle de polarisation γ_P (et γ_{SV}), et des vitesses verticales P et SV . Ce calcul est fait à partir des équations des vitesses de phase approchées au premier ordre en δ et ϵ définies par Thomsen (1986). Les expressions des vitesses apparentes verticales résultantes ne seront donc applicables que pour de faibles anisotropies (δ et ϵ proche de 0). Ceci permet de ne pas faire d'approximations sur l'angle d'incidence θ . On espère ainsi obtenir des expressions raisonnablement valables dans une gamme d'incidences comprises entre 0 et 90°. En effet, nous avons montré dans le chapitre précédent, que les vitesses des ondes q_P sont sensibles au paramètre ϵ pour des incidences subverticales ($\theta \rightarrow 90^\circ$). Il faut alors définir des expressions approchées restant valables quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence (un calcul similaire a été effectué avec des développements limités au quatrième ordre sur l'angle d'incidence, les équations se sont avérées inapplicables pour $\theta > 30^\circ$ (annexe A)).

On obtient par cette approche des expressions analytiques simples permettant de définir les termes prépondérants qui expliquent l'anisotropie pour des incidences comprises entre 0 et 90°.

Les étapes du calcul sont les suivantes :

1. calculer une expression approchée au premier ordre en δ et ϵ de la tangente de l'angle γ (1.16) sous la forme $\text{tg}\gamma = f(\delta, \epsilon, \alpha_0, \beta_0, \theta)$;
2. calculer une expression approchée au premier ordre en δ et ϵ de l'angle ξ (angle entre la direction de propagation et de polarisation de l'onde q_P) qui soit fonction de δ , ϵ , α_0 , β_0 et γ ;
3. utiliser la relation $\theta = \gamma_P - \xi = \gamma_{SV} - \frac{\pi}{2} - \xi$ pour avoir une expression de l'angle d'incidence θ fonction de δ , ϵ , α , β et γ ;
4. injecter l'expression de θ dans celle de la vitesse apparente (calculée à partir des expressions des vitesses de phase de Thomsen) qui devient ainsi fonction de δ , ϵ , α_0 , β_0 et γ .

Des cartes d'erreurs (données en pourcents) dues à l'approximation au premier ordre en δ et ϵ sont dressées dans le plan des paramètres de Thomsen (δ, ϵ) pour des vitesses verticales q_P et q_{SV} et une incidence fixée. Ces erreurs sont calculées par rapport aux expressions exactes des vitesses apparentes verticales. D'autre part, des cartes montrent comment ces erreurs évoluent avec le rapport de la vitesse verticale des ondes SV sur la vitesse verticale des ondes P ($\frac{\beta_0}{\alpha_0}$). Enfin, on compare les différents termes des expressions des vitesses apparentes verticales calculées en fonction de γ avec celles calculées en fonction de θ .

2. Expressions approchées des vitesses apparentes verticales au premier ordre en ϵ et δ .

2.1 Calcul de l'angle entre les directions de propagation et de polarisation.

Nous avons vu dans le chapitre 1 qu'il existe un angle ξ entre les directions de propagation et de polarisation des ondes q_P . Comme la polarisation des ondes q_P est rigoureusement perpendiculaire à celle des ondes q_{SV} , on a la relation suivante entre l'angle d'incidence et l'angle de polarisation des ondes q_P et q_{SV} :

$$\theta = \gamma_P - \xi = \gamma_{SV} - \frac{\pi}{2} - \xi. \quad (4.1)$$

Les expressions de la tangente de l'angle de polarisation (1.16) des ondes q_P et q_{SV} écrites avec le carré des équations des vitesses de phase définies par Thomsen

Approximation des équations de la vitesse apparente verticale des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation γ .

(2.39) sont :

$$\begin{aligned} \text{tg}\gamma_P &\sim \text{tg}\theta \left(1 + \frac{2\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2\delta\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2} \sin^2 \theta (\delta - \epsilon)\right)^{-1}, \\ \text{tg}\gamma_{SV} &\sim \frac{-1}{\text{tg}\theta} \left(1 + \frac{2\delta\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2} (\delta + (\epsilon - \delta) \sin^2 \theta)\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

En ne conservant que les termes au premier ordre en ϵ et δ dans (4.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \text{tg}\gamma_P &\sim \text{tg}\theta \left(1 - \frac{2\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2} \sin^2 \theta (\delta - \epsilon) + \frac{\delta\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2}\right), \\ \text{tg}\gamma_{SV} &\sim \frac{-1}{\text{tg}\theta} \left(1 - \frac{2\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2} \left(\frac{\delta}{2} + (\epsilon - \delta) \sin^2 \theta\right)\right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Avec l'hypothèse de faible anisotropie (δ et ϵ proche de 0), l'angle ξ peut être considéré comme petit (inférieur à 10°). Il est alors possible de faire les approximations suivantes si on considère les ondes q_P :

$$\begin{aligned} \text{tg}\theta &= \text{tg}(\gamma_P - \xi) \sim \frac{\text{tg}\gamma_P - \xi}{1 + \xi \text{tg}\gamma_P}, \\ \sin^2 \theta &= \sin^2(\gamma_P - \xi) \sim \sin^2 \gamma_P - \xi \sin 2\gamma_P, \end{aligned} \quad (4.4)$$

et si on considère les ondes q_{SV} :

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\text{tg}\theta} &= \text{tg}(\gamma_{SV} - \xi) \sim \frac{\text{tg}\gamma_{SV} - \xi}{1 + \xi \text{tg}\gamma_{SV}}, \\ \sin^2 \theta &= \cos^2(\gamma_{SV} - \xi) \sim \cos^2 \gamma_{SV} + \xi \sin 2\gamma_{SV}, \\ \cos^2 \theta &= \sin^2(\gamma_{SV} - \xi) \sim \sin^2 \gamma_{SV} - \xi \sin 2\gamma_{SV}, \\ \cos \theta &= \sin(\gamma_{SV} - \xi) \sim \sin \gamma_{SV} (1 - \xi \cot \gamma_{SV}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour les ondes q_P , l'équation (4.3) et les approximations (4.4), permettent d'approcher l'angle ξ par :

$$\hat{\xi} \sim \frac{\sin 2\gamma_P}{2} \frac{\alpha_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2} (\delta \cos 2\gamma_P + 2\epsilon \sin^2 \gamma_P). \quad (4.6)$$

De même, pour les ondes q_{SV} on obtient :

$$\hat{\xi} \sim \frac{\alpha_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} \sin 2\gamma_{SV} \left((\delta - \epsilon) \cos^2 \gamma_{SV} - \frac{\delta}{2} \right). \quad (4.7)$$

2.2 Les équations approchées des vitesses apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} .

Les équations des vitesses apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} s'écrivent à partir des équations de Thomsen (1.39) :

$$\begin{aligned} Q_P(\theta, \alpha_o, \beta_o, \epsilon, \delta) &\sim \frac{\alpha_o}{\cos \theta} (1 + \delta \sin^2 \theta + (\epsilon - \delta) \sin^4 \theta), \\ Q_{SV}(\theta, \alpha_o, \beta_o, \epsilon, \delta) &\sim \frac{\beta_o}{\cos \theta} \left(1 + \frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} (\epsilon - \delta) \sin^2 \theta - \frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} (\epsilon - \delta) \sin^4 \theta \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

En remplaçant l'angle ξ par les équations approchées (4.6) et (4.7) dans l'équation reliant les angles de polarisation γ et d'incidence θ (4.1), on obtient une expression de θ fonction de ϵ , δ , α_o , β_o et de γ . Ainsi, les expressions approchées des vitesses apparentes des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation s'écrivent :

$$\begin{aligned} Q_P(\gamma_P, \alpha_o, \beta_o, \epsilon, \delta) &\sim \frac{\alpha_o}{\cos \gamma_P} \left(\frac{1 + \delta \cos^2 \gamma_P \sin^2 \gamma_P + \epsilon \sin^4 \gamma_P}{1 + \sin^2 \gamma_P \frac{\alpha_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} (\delta \cos 2\gamma_P + 2\epsilon \sin^2 \gamma_P)} \right), \\ Q_{SV}(\gamma_{SV}, \alpha_o, \beta_o, \epsilon, \delta) &\sim \frac{\beta_o}{\sin \gamma_{SV}} \left(\frac{1 + \frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} (\epsilon - \delta) \cos^2 \gamma_{SV} \sin^2 \gamma_{SV}}{1 + \cos^2 \gamma_{SV} \frac{\alpha_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} (\delta + 2(\epsilon - \delta) \cos^2 \gamma_{SV})} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Finalement, en ne conservant que les termes au premier ordre en ϵ et δ dans les équations (4.9) et en négligeant les termes en $\xi\delta$ dans les équations correspondant aux ondes q_P et en $\xi(\epsilon - \delta)$ dans les équations correspondant aux ondes q_{SV} , on aboutit aux expressions approchées des vitesses apparentes verticales qui sont des fonctions de ϵ , δ , α_o , β_o et de l'angle de polarisation :

Approximation des équations de la vitesse apparente verticale des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation γ .

$$\begin{aligned} Q_P(\gamma_P, \alpha_o, \beta_o, \epsilon, \delta) &\sim \frac{\alpha_o}{\cos \gamma_P} \left(1 - \left[\delta \left(\frac{\beta_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} \right) \right] \sin^2 \gamma_P \right. \\ &\quad \left. + \left[(\delta - \epsilon) \left(\frac{\alpha_o^2 + \beta_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} \right) \right] \sin^4 \gamma_P \right), \\ Q_{SV}(\gamma_{SV}, \alpha_o, \beta_o, \epsilon, \delta) &\sim \frac{\beta_o}{\sin \gamma_{SV}} \left(1 - \left[\left(\frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2 (\alpha_o^2 - \beta_o^2)} \right) (\alpha_o^2 (\epsilon - \delta) - \beta_o^2 \epsilon) \right] \cos^2 \gamma_{SV} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} \left(\frac{\epsilon - \delta}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} \right) (\alpha_o^2 + \beta_o^2) \right] \cos^4 \gamma_{SV} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

3. Comparaison des équations des vitesses apparentes exprimées en fonction de γ avec celles exprimées en fonction de θ .

Il y a un angle de $\frac{\pi}{2}$ entre les angles de polarisation des ondes q_P et q_{SV} (γ_P et γ_{SV}). on peut donc exprimer l'équation approchée de la vitesse apparente verticales des ondes q_{SV} (4.10) en fonction de γ_P . Ainsi, les termes correctifs prenant en compte l'anisotropie dans les équations (4.10) sont en $\sin^2$ et $\sin^4$. Le tableau (1) permet de comparer les termes en $\sin^2$ et en $\sin^4$ dans les expressions des vitesses apparentes verticales calculées en fonction de l'angle de polarisation γ (4.10) avec celles calculées en fonction de l'angle d'incidence θ (4.8). Ce tableau montre que les termes correctifs n'ont pas le même poids que l'on considère les angles de polarisation γ ou d'incidence θ dans les équations des vitesses apparentes verticales. Si on considère un rapport 2 entre la vitesse verticale des ondes P par rapport à la vitesse verticale des ondes S , le tableau (2) donne les ordres de grandeurs de ces différents termes. Ce qui ressort de ces résultats est que les termes en $\sin^2$ ont un poids plus faible quand on compare les équations fonctions de γ avec celles fonctions de θ . Par contre, les termes en $\sin^4$ ont un poids plus important pour les équations fonctions de γ . Ceci signifie que pour les équations fonctions de γ , il n'est pas possible de négliger les termes en $\sin^4$. De plus, le signe des termes correctifs est inversé suivant que l'on considère les expressions fonctions de γ ou fonctions de θ . En effet, la définition des classes d'anisotropie (chapitre 3) montre que si δ est négatif l'angle γ est inférieur à θ . Si on considère maintenant δ positif, pour un angle d'incidence inférieur à l'angle

critique θ_c (voir chapitre 3), l'angle γ est inférieur à θ . Puisque les vitesses apparentes fonctions de γ ou fonctions de θ sont égales, les termes correctifs doivent agir en sens opposé.

TERMES CORRECTIFS DES ÉQUATIONS DES VITESSES APPARENTES VERTICALES		
ONDES q_P		
	γ	θ
$\sin^2$	$-\left(\frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2}\right)\delta$	δ
$\sin^4$	$-\left(\frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2}\right)(\epsilon - \delta)$	$(\epsilon - \delta)$
ONDES q_{SV}		
	γ	θ
$\sin^2$	$-\delta\left(\frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2(\alpha_0^2 - \beta_0^2)}\right)(\alpha_0^2(\epsilon - \delta) - \beta_0^2\epsilon)$	$\frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2}(\epsilon - \delta)$
$\sin^4$	$-\frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2}\left(\frac{\alpha_0^2 + \beta_0^2}{\alpha_0^2 - \beta_0^2}\right)(\epsilon - \delta)$	$-\frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2}(\epsilon - \delta)$

Tableau 1. Tableau montrant les termes en $\sin^2$ et en $\sin^4$ dans les expressions approchées des vitesses apparentes des ondes q_P et q_{SV} calculées en fonction de l'angle de polarisation γ ou en fonction de l'angle d'incidence θ .

Approximation des équations de la vitesse apparente verticale des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation γ .

TERMES CORRECTIFS DES ÉQUATIONS DES VITESSES APPARENTES VERTICALES		
ONDES q_P		
	γ	θ
$\sin^2$	$-\frac{\delta}{3}$	δ
$\sin^4$	$-\frac{5}{3}(\epsilon - \delta)$	$(\epsilon - \delta)$
ONDES q_{SV}		
	γ	θ
$\sin^2$	$-4\delta(\epsilon - \frac{4}{3}\delta)$	$4(\epsilon - \delta)$
$\sin^4$	$-\frac{20}{3}(\epsilon - \delta)$	$-4(\epsilon - \delta)$

Tableau 2. Tableau montrant l'ordre de grandeur des termes correctifs présentés dans le tableau (1) en prenant un rapport 2 entre la vitesse verticale des ondes P et la vitesse verticale des ondes S .

4. Erreurs d'approximations.

Dans cette partie, on cherche à répondre à trois questions :

1. à partir de quelle incidence les expressions approchées des vitesses apparentes verticales des ondes q_P et q_P (4.10) ne sont-elles plus valables ?
2. pour une perturbation des paramètres ϵ et δ , l'erreur d'approximation faite sur les équations (4.10) est-elle stable ?
3. pour une perturbation des vitesses verticales des ondes q_P et q_{SV} , l'erreur d'approximation faite sur les équations (4.10) est-elle stable ?

Pour répondre à ces questions, on se place dans le plan (ϵ, δ) afin de calculer à angle d'incidence et vitesses verticales P et SV fixés, l'erreur d'approximation faite sur les expressions des vitesses apparentes verticales (4.10) par comparaison avec

les expressions classiques des vitesses apparentes verticales exprimées en fonction de l'angle d'incidence θ . Les cartes d'erreurs sont représentées en pourcents. L'erreur est calculée de la façon suivante :

$$\Delta q(\epsilon, \delta) = \frac{\hat{q} - q_{\text{vrai}}}{q_{\text{vrai}}} \times 100. \quad (4.11)$$

où $\hat{q}$ est l'approximation de la vitesse apparente calculée en fonction de γ pour les ondes q_P et q_{SV} . Les figures (IV.1) et (IV.2) représentent respectivement pour les ondes q_P et q_P les cartes d'erreurs faites sur les équations approchées (4.10) dans le plan (δ, ϵ) avec ϵ et δ variant entre $-0,2$ et $0,2$. Dans ces exemples, les vitesses verticales des ondes q_P et q_{SV} sont respectivement égales à 4000 m/s et 2000 m/s. On note que des valeurs négatives de ϵ se rencontrent rarement dans la nature, mais cela permet de mieux visualiser l'évolution des erreurs d'approximation. Sur ces figures, une erreur négative signifie que les termes correctifs ne sont pas assez forts et sous-estiment la vitesse réelle. Ces cartes montrent que les erreurs dues aux approximations linéaires en ϵ et δ sont nettement plus importantes pour les ondes q_{SV} que pour les ondes q_P . Pour les ondes q_P , ces erreurs dépendent de la valeur du paramètre δ puisque les isolignes sont pratiquement verticales. Par contre, pour les ondes q_{SV} , l'évolution des erreurs est aussi liée à la valeur du paramètre ϵ . Les isolignes 0 correspondent à l'annulation des termes d'ordre supérieur en ϵ et δ . Ces isolignes se croisent pour $\epsilon=\delta=0$ ce qui correspond au cas isotrope.

Approximation des équations de la vitesse apparente verticale des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation γ .

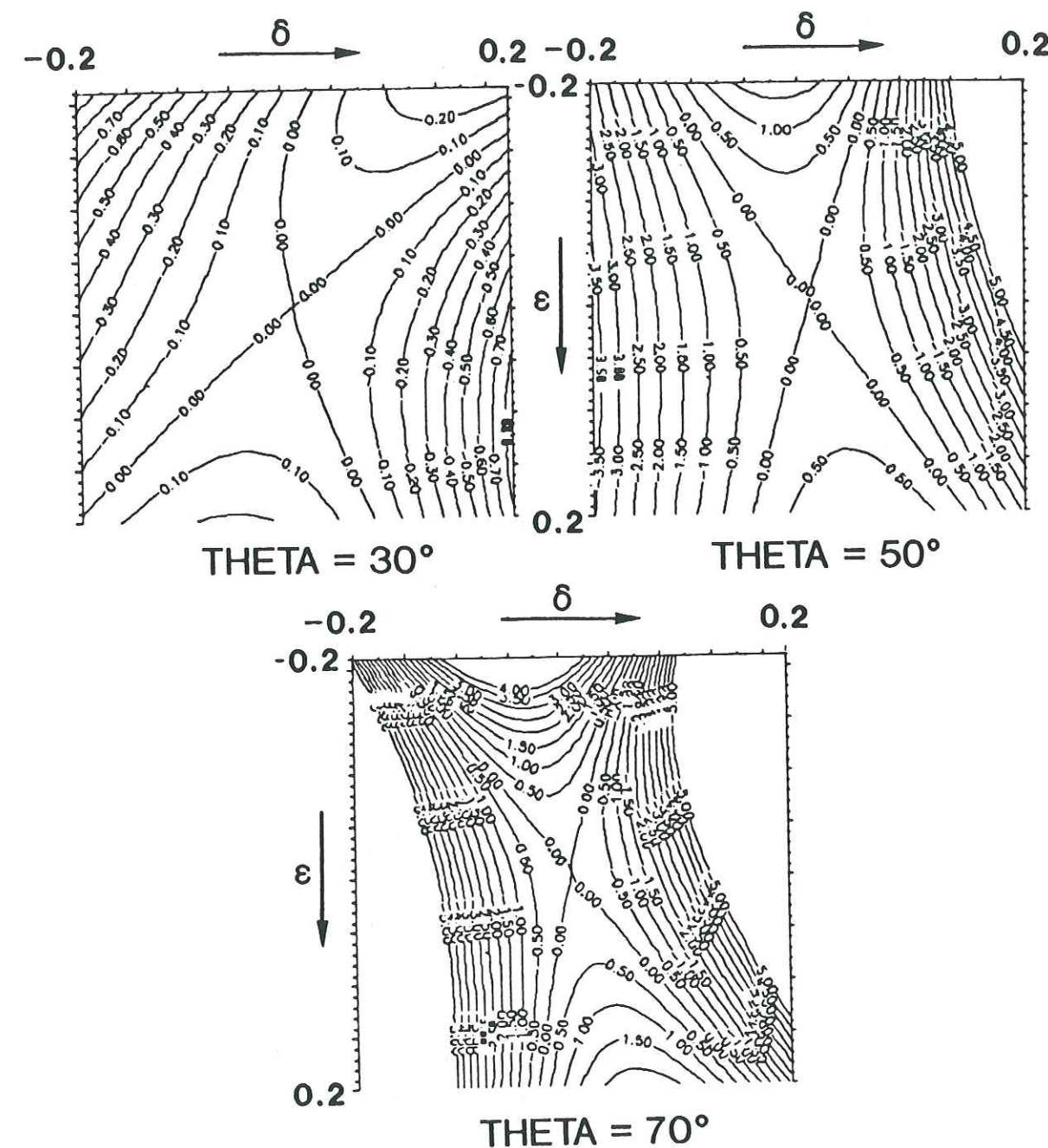


Figure IV.1. Cartes d'erreurs relatives (en %) de l'équation approchée des vitesses apparentes verticales des ondes q_P calculées en fonction de γ et représentées dans le plan des paramètres d'anisotropie de Thomsen (δ, ϵ) pour l'angle d'incidence θ et les vitesses verticales P et SV (α_0, β_0) fixées. Dans cet exemple, $\alpha_0 = 4000$ m/s et $\beta_0 = 2000$ m/s et θ vaut respectivement 30° , 50° et 70° .

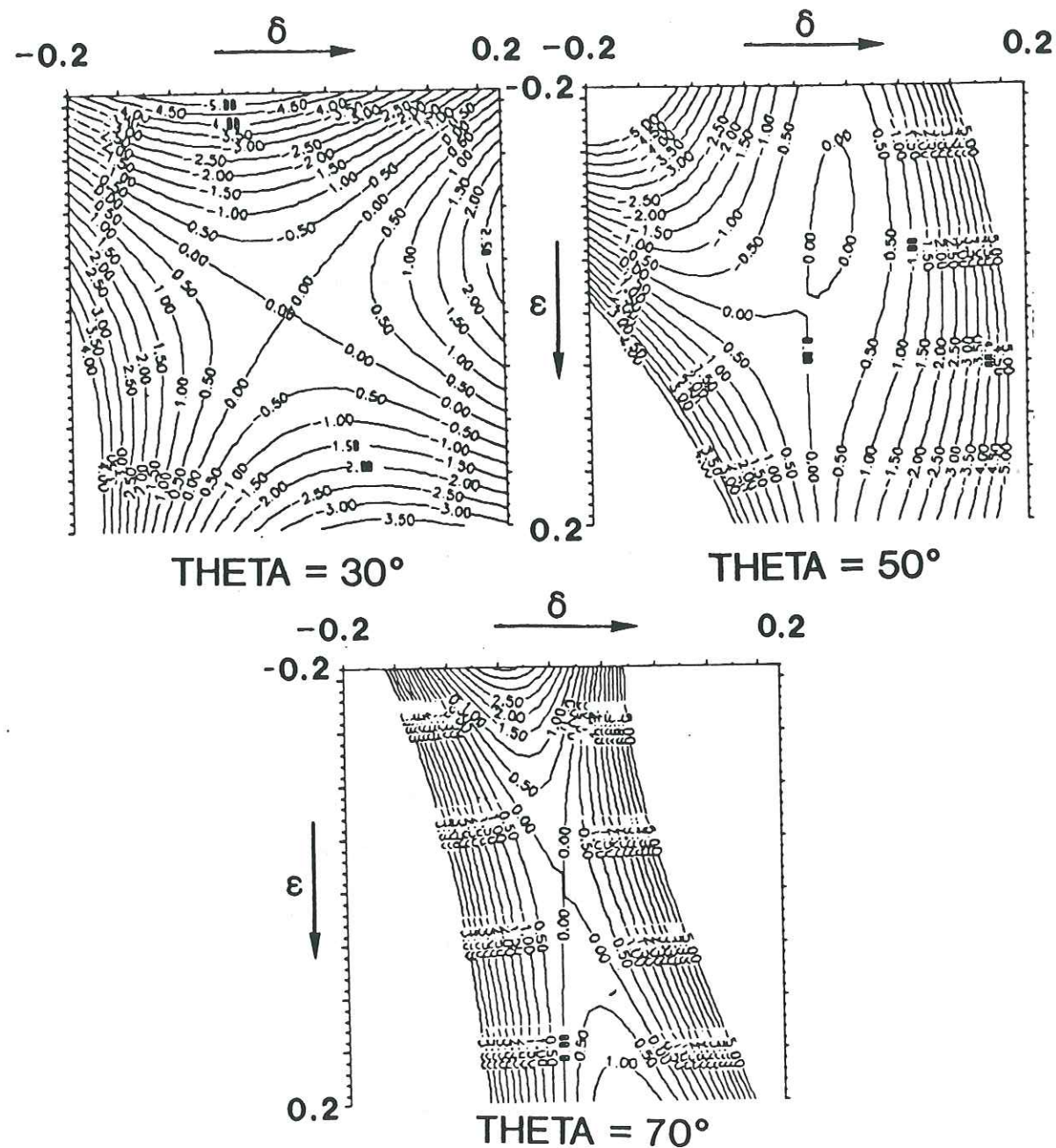


Figure IV.2. Cartes d'erreurs relatives (en %) de l'équation approchée des vitesses apparentes verticales des ondes q_{SV} calculées en fonction de γ et représentées dans le plan des paramètres d'anisotropie de Thomsen (δ, ϵ) pour l'angle d'incidence θ et les vitesses verticales P et SV (α_0, β_0) fixées. Dans cet exemple, $\alpha_0 = 4000$ m/s et $\beta_0 = 2000$ m/s et θ vaut respectivement 30° , 50° et 70° .

Approximation des équations de la vitesse apparente verticale des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation γ .

Les figures (IV.3) et (IV.4) représentent respectivement pour les ondes q_P et q_{SV} les mêmes cartes d'erreurs que les figures (IV.1) et (IV.2) mais pour différentes valeurs du rapport de la vitesse verticale des ondes SV sur la vitesse verticale des ondes P . Ces cartes sont calculées pour un angle d'incidence θ fixé à 30° . Si la valeur du rapport $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ change, la répartition de l'erreur s'en trouve largement perturbée. Cela signifie que l'erreur faite sur les expressions (4.10) va aussi dépendre de l'estimation des vitesses verticales et q_P et q_{SV} .

Globalement, lorsque θ est supérieur à 40° , les expressions (4.10) ne peuvent plus être utilisées comme modèle théorique pour estimer les paramètres d'anisotropie à partir des mesures sur données de puits de vitesses apparentes et d'angles de polarisation. En effet, les erreurs dues aux approximations au premier ordre en ϵ et δ sur les vitesses apparentes dépassent 1% dans un large gamme de valeurs de ces paramètres. Or, les effets de l'anisotropie que l'on a mesurer sur les vitesses sont de l'ordre de 5%.

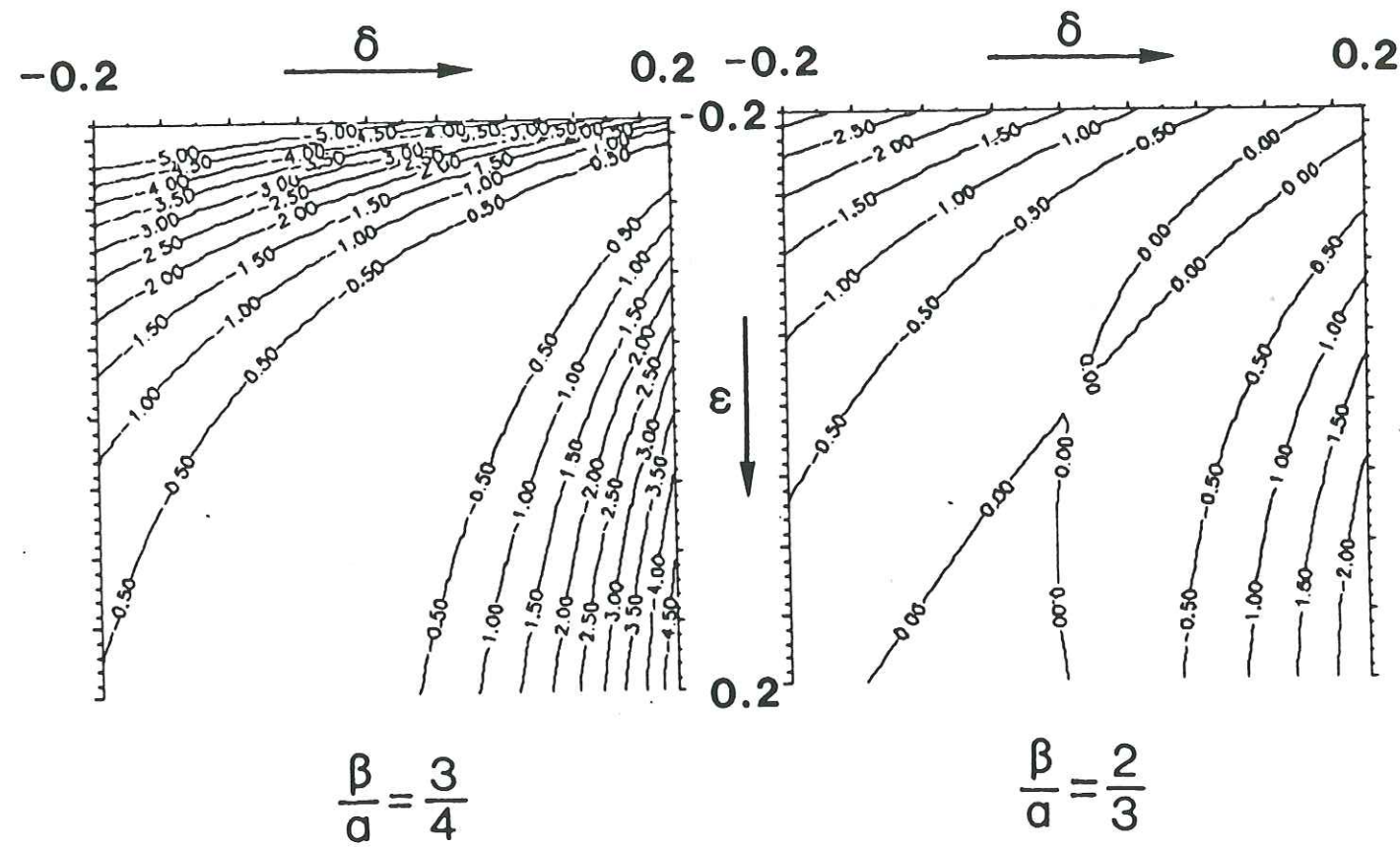


Figure IV.3. Cartes d'erreurs relatives (en %) sur l'équation approchée des vitesses apparentes verticales des ondes q_P calculées de la même façon que sur la figure (IV.1) mais avec différentes valeurs du rapport $\frac{\beta}{a_0}$. Dans ces exemples, l'angle d'incidence θ est fixé à 30° .

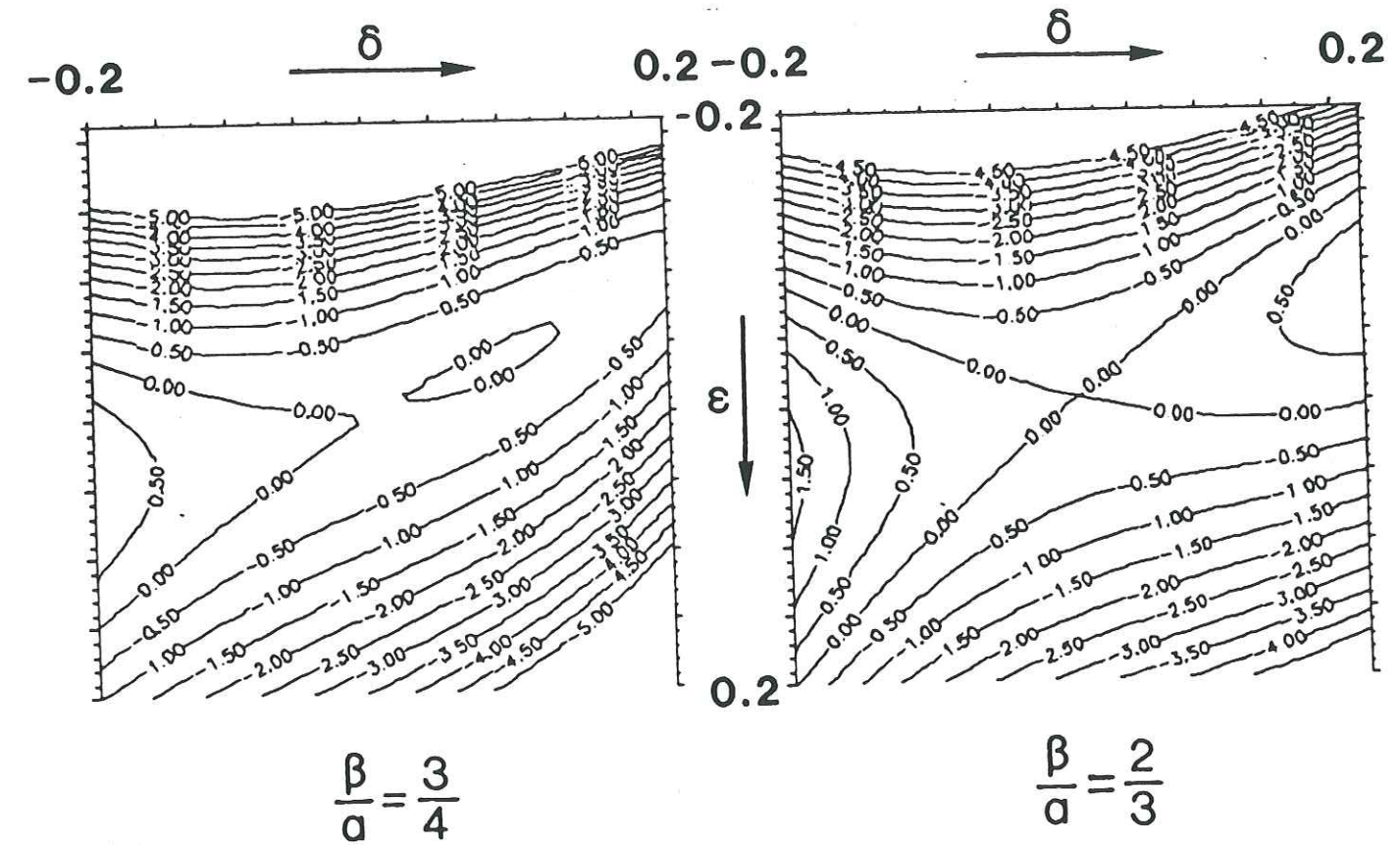


Figure IV.4. Cartes d'erreurs relatives (en %) sur l'équation approchée des vitesses apparentes verticales des ondes q_{SV} calculées de la même façon que sur la figure (IV.2) mais avec différentes valeurs du rapport $\frac{\beta}{a_0}$. Dans ces exemples, l'angle d'incidence θ est fixé à 30° .

5. Conclusion.

Les équations approchées de la vitesse de phase des ondes q_P et q_{SV} définies par Thomsen ont permis de calculer des équations simples de la vitesse apparente verticale en fonction de l'angle de polarisation γ . L'étude de ces équations a montré que :

1. On ne peut pas considérer dans les équations des vitesses l'angle d'incidence comme étant égal à l'angle de polarisation. La comparaison des équations des vitesses apparentes verticales exprimées avec l'angle d'incidence θ avec celles exprimées avec l'angle de polarisation γ montre que les termes correctifs en $\sin^2$ et $\sin^4$ dus à l'anisotropie sont très différents (table 1).

2. L'erreur due aux approximations linéaires en ϵ et δ est supérieure à 1% dans une large gamme de valeur des ces paramètres pour des incidences supérieures à 40° . Or, Thomsen (1986) a montré que les vitesses des ondes q_{SV} sont sensibles à des perturbations des paramètres ϵ et δ pour des incidences comprises entre 20 et 70° . De ce fait, il n'est pas possible d'utiliser ces équations pour estimer les paramètres d'anisotropie à partir de données de puits sachant que les effets que l'on cherche à mesurer sont de l'ordre de 5%.

Néanmoins, ces équations approchées permettent de comprendre quels sont les termes prépondérants qui expliquent l'anisotropie de vitesses en fonction de la polarisation.

Table des matières.

Chapitre 5. Modélisation exacte de la vitesse de phase en fonction de la polarisation et de l'anisotropie.	1
1. Introduction.	1
2. Relation entre les vitesses de phase et la polarisation pour des milieux transversalement isotropes.	1
3. Erreurs d'estimation de l'anisotropie dues à l'utilisation de modèles approchés des vitesses de phase.	20
3.1 Objectif.	20
3.2 Utilisation du modèle de vitesse proposé par White.	20
3.3 Utilisation du modèle de vitesse proposé par Thomsen.	24
4. Conclusion.	27

CHAPITRE 5. Modélisation exacte de la vitesse de phase en fonction de la polarisation et de l'anisotropie.

1. Introduction.

Nous avons montré dans le chapitre 4 que les modèles approchés de la vitesse apparente verticale des ondes q_p et q_{sv} exprimée en fonction de l'angle de polarisation et des paramètres d'anisotropie entraînent une erreur sur les vitesses supérieure à 1% dans une large gamme des valeurs des paramètres d'anisotropie.

Dans ce chapitre, on définit deux nouveaux paramètres d'anisotropie qui permettent d'écrire une équation simple et exacte de la vitesse de phase fonction de l'angle de polarisation et des paramètres d'anisotropie.

L'intérêt de ce modèle pour estimer les paramètres d'anisotropie est discuté en quantifiant les erreurs d'estimation de l'anisotropie faites à partir de l'utilisation des modèles approchés de White *et al.* (1983) et de Thomsen (1986).

2. Relation entre les vitesses de phase et la polarisation pour des milieux transversalement isotropes.

Cette partie est rédigée en anglais et constitue un article publié dans le numéro d'octobre 1991 de la revue *Geophysics*.

J. de Parscau

RELATIONSHIP BETWEEN PHASE VELOCITIES AND POLARIZATION IN TRANSVERSELY ISOTROPIC MEDIA

J. de Parscau ¹

ABSTRACT

Most techniques used to estimate anisotropy from multiple-source offset VSP data assume angles measured from particle motions as an incidence angle. However, the difference between P-wave polarization and the propagation direction for an anisotropic medium can be higher than 8° . This difference provides a nonnegligible error on the estimation of anisotropy parameters from phase velocities.

This paper proposes an exact model to describe P- and SV-phase velocity variations for a transversely isotropic medium (TIM) which takes into account the polarization angles. This model is a function of two anisotropy parameters (η and τ), of the vertical P- and SV-wave phase velocities and of the polarization angle γ . The two parameters are related to those defined by Thomsen (1986). However, η and τ can be used to express the polarization angle equation in a much simpler way.

In order to quantify the error in estimated anisotropy parameters due to the assumption that the polarization angle is equal to the incidence angle, I study five TIMs. Each medium has an anisotropy that is representative of those observed in seismic surveying. The anisotropy parameters are recovered by inverting the P- and SV-wave phase velocities for different incidence angles, and these incidence angles are assumed to be equal to the corresponding polarization angles. The mean error in estimated parameters is about 10%. This error is about the same as the one that would be obtained for velocities with uncertainties in their measurements. Unfortunately, the inversion of phase velocities measured from a real multiple-source offset VSP to estimate anisotropy parameters needs, for calculating the misfit function, to add both errors in velocities due to hypothesis for angles and errors in velocities

¹Institut Français du Pétrole, B.P. 311, 92506 Rueil-Malmaison, France

Modélisation exacte de la vitesse de phase en fonction de la polarisation et de l'anisotropie.

measurements due to uncertainties in data. In this case an exact model eliminates errors due to the assumption for the model and provides a more accurate estimation of anisotropy parameters.

INTRODUCTION

To measure seismic anisotropy from multiple-source offset VSPs we need models to describe velocity variations as a function of incidence. In seismic surveys the most commonly occurring type of anisotropy is transverse isotropy (TI). Unfortunately the equations governing elastic wave propagation in a transversely isotropic medium (TIM) are nonlinear for anisotropy parameters. So many authors (Berryman, 1979; Thomsen, 1986) have proposed linearized models that provide simple equations that are valid for weak anisotropy. However, these equations are given as a function of incidence angle, which is not measurable from three-component recordings. In fact, the direction computed from particle motion is a polarization direction defined by the angle γ , and for an anisotropic medium γ is quite different from the incidence angle θ . Some authors (White and al., 1983; Gaiser, 1990) measure the incidence angle from multiple-source offset VSP data by using the vertical and the horizontal components of phase velocities. By this way it is easy to estimate the anisotropy parameters from phase velocities only. However, this method implies the assumption of lateral homogeneity of the medium if we use data from only one well (Gaiser, 1990) which is the case for borehole survey. Therefore, γ is usually assumed to be the incidence angle θ and is input into the model used for computing anisotropy. This paper, attempts to show that the difference between P-wave polarization and the propagation direction induces a nonnegligible error in estimated anisotropy parameters. So, I propose an exact model which describes P- and SV-wave phase velocity variations as a function of two parameters, η and τ , and the P- and SV-wave vertical phase velocities.

A TRANSVERSELY ISOTROPIC MEDIUM (TIM).

A TIM is characterized by a symmetry of revolution axis and is described by five independent elastic moduli, $C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{44}$ and C_{66} . The elastic tensor is (Crampin, 1981)

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{66} & C_{13} & & & \\ & C_{11} & C_{13} & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1)$$

P- and SV-wave propagation can be fully described by the use of only four moduli: C_{11}, C_{13}, C_{33} and C_{44} .

The equations for phase velocities and polarization directions are computed as eigenvalues and eigenvectors of Christoffel's tensor (see, for example, Aki and Richards, 1980). The well-known phase velocity equation is:

$$\begin{aligned} \rho V_{P,SV}^2(\theta) = & \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})\sin^2\theta + (C_{33} + C_{44})\cos^2\theta \\ & + (-1)^i \left[\{(C_{11} - C_{44})\sin^2\theta - (C_{33} - C_{44})\cos^2\theta\}^2 \right. \\ & \left. + 4(C_{13} + C_{44})^2 \cos^2\theta \sin^2\theta \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $i=1$ for SV-waves and $i=2$ for P-waves. θ is the incidence angle (Figure 1) and ρ the density.

The vertical P- and SV-wave velocities ($\theta=0$) are

$$V_P(0) = \left(\frac{C_{33}}{\rho}\right)^{1/2}, \quad (3)$$

and

$$V_S(0) = \left(\frac{C_{44}}{\rho}\right)^{1/2}. \quad (4)$$

The polarization angle γ defines the angle between the polarization directions and the axis of symmetry. It differs from the incidence angle θ because the P-wave

Modélisation exacte de la vitesse de phase en fonction de la polarisation et de l'anisotropie.

polarization and propagation directions are not colinear for a TIM (Figure 1). The polarization of the P-wave makes an acute angle with the propagation direction; this wave is called "quasi longitudinal". The SV-wave, which is polarized perpendicularly to the P-waves is called "quasi transversal". Knowing the polarization direction enables $\tan\gamma$ to be expressed as the ratio of the horizontal component to the vertical component (Figure 1) of the corresponding eigenvector (White, 1983)

$$\tan \gamma_{P,SV} = \frac{\cos \theta \sin \theta (C_{13} + C_{44})}{\rho V_{P,SV}^2(\theta) - (-1)^i (C_{11} \sin^2 \theta + C_{44} \cos^2 \theta)}, \quad (5)$$

where $i=1$ for SV-waves and $i=2$ for P-waves.

The practical use of Equation (2) is difficult because θ cannot be measured directly from three-component VSP data. This problem can be solved by deriving an exact equation for the incidence angle θ as a function of the polarization angle γ . Using this, a new equation for velocity as a function of γ can be derived.

DEFINITION OF TWO ANISOTROPY PARAMETERS

To express the P- and SV-wave phase velocities as a function of the polarization angle γ , I define two parameters (η and τ) which, together with the vertical velocities given by Equations (3) and (4), describe the behaviour of P- and SV-waves. The purpose of these parameters is to simplify the writing of the equations for phase velocities. Moreover, these parameters have a physical meaning and they enable a shorter equation to be obtained. η and τ are given by

$$\eta = \frac{C_{13} + C_{44}}{C_{33} - C_{44}}, \quad (6)$$

and

$$\tau = \frac{C_{11} - C_{44}}{C_{33} - C_{44}}. \quad (7)$$

Rewriting Equation (2) using Equations (6) and (7) gives

$$\begin{aligned} \rho V_{P,SV}^2(\theta) = & \frac{(C_{33} - C_{44})}{2} \left[\frac{(C_{33} + C_{44})}{(C_{33} - C_{44})} + (\tau - 1) \sin^2 \theta \right. \\ & \left. + (-1)^i \{(1 - (1 + \tau) \sin^2 \theta)^2 + (\eta \sin 2\theta)^2\}^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

where $i=1$ for SV-waves and $i=2$ for P-waves. Equation (8) shows that the P-velocity is sensitive to τ variations for θ higher than 45° because of the $\sin^2 \theta$ term, and to η variations for θ lower than 45° because of the $\sin 2\theta$ term. The physical meaning of η and τ is not readily clear. However, I show that η and τ have the same characteristics as Thomsen's parameters (1986) δ and ϵ , with η being comparable to δ and τ comparable to ϵ . δ and ϵ are given by

$$\epsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}, \quad (9)$$

and

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})}. \quad (10)$$

If $V_P = 2V_S$, then η and τ expressed as a function of δ and ϵ become $\eta = \sqrt{1 + 4\delta} \sim 1 + 2\delta$ (because $|\delta| < 1$) and $\tau = 1 + 4\epsilon$. Therefore, the functional dependence of velocity changes in the same way for both parameter sets (Figure 2).

In the isotropic case, η and τ parameters are equal to one whereas Thomsen's parameters are equal to zero.

ϵ is the fractional difference between vertical and horizontal P-wave velocities, usually referred to as "the anisotropy of the rock". δ is the effective P-wave anisotropy parameter at small incidence angles. The physical meaning of δ has been discussed by Banik (1987), who approximated δ as

$$\delta \simeq \epsilon_P - 4\epsilon_S \frac{C_{44}}{C_{33}}. \quad (11)$$

where

$$\epsilon_P = \frac{V_P(90) - V_P(0)}{V_P(0)}, \quad (12)$$

$$\epsilon_S = \frac{V_{SV}(45) - V_{SV}(0)}{V_{SV}(0)}, \quad (13)$$

Parameter ϵ_P is approximately equal to Thomsen's parameter ϵ . Parameter ϵ_S describes the deviation of the phase velocity surface from an ellipse (there is no SV-wave anisotropy in elliptically anisotropic media with $\epsilon_S=0$). The velocity surface is the envelope of velocity vectors described in the P- and SV-propagation plane. So, δ describes the "relative competitiveness between P- and SV-wave anisotropies in affecting the properties of a TIM".

Because the sensitivity curves in Figure 2 are similar, the physical meaning of δ and ϵ can be applied to η and τ .

EQUATIONS FOR P- AND SV-POLARIZATION ANGLE

Equation (5) rewritten using the two parameters η and τ gives

$$\tan \gamma_{P,SV} = \frac{\eta \sin 2\theta}{1 - (1 + \tau) \sin^2 \theta + (-1)^i \{(1 - (1 + \tau) \sin^2 \theta) + (\eta \sin 2\theta)^2\}^{1/2}} \quad (14)$$

where $i=1$ for SV-waves and $i=2$ for P-waves. Using $A = \eta \sin 2\theta$ and $B = 1 - (1 + \tau) \sin^2 \theta$, Equation (14) can be rewritten as

$$\tan \gamma_{P,SV} = \frac{A}{B + (-1)^i \sqrt{B^2 + A^2}}. \quad (15)$$

After some algebra it is easily found that

$$\frac{A}{B} = \frac{2 \tan \gamma_{P,SV}}{1 - \tan^2 \gamma_{P,SV}} = \tan 2\gamma_{P,SV}, \quad (16)$$

and a simple relation is obtained

$$\tan 2\gamma_{P,SV} = \frac{\eta \sin 2\theta}{1 - (1 + \tau) \sin^2 \theta}. \quad (17)$$

The above equation is valid for P- and SV-wave polarizations (orthogonal to one another) due to the periodicity of the tangent. An interesting point is that the polarization angle depends only on the two parameters η and τ and not on the two elastic moduli C_{33} and C_{44} (which are related to the vertical P- and SV-wave velocities given by Equations (3) and (4)). Figure 3 shows that the polarization is sensitive to η for θ lower than 40° and to τ for θ higher than 40° .

PROPAGATION ANGLE IN TERMS OF POLARIZATION ANGLE

In this part, I analytically invert Equation (17) to get the incidence angle θ as a function of γ and the two anisotropy parameters η and τ . Squaring Equation (17) yields a second order equation in $\sin^2 \theta$

$$[(1 + \tau)^2 \tan^2 2\gamma + 4\eta^2] \sin^4 \theta - [2(1 + \tau) \tan^2 2\gamma + 4\eta^2] \sin^2 \theta + \tan^2 2\gamma = 0. \quad (18)$$

The discriminant of Equation (18) is

$$\Delta = 16\eta^2(\eta^2 + \tau \tan^2 2\gamma). \quad (19)$$

From Postma's inequality (1955) $(C_{11} - C_{44})(C_{33} - C_{44}) \geq (C_{13} + C_{44})^2$, it is clear that $(C_{11} - C_{44})$ and $(C_{33} - C_{44})$ have the same sign, thus $\tau > 0$. Therefore, $\Delta > 0$ and there are two independent roots for Equation (18) which express $\sin^2 \theta$ as a function of γ

$$\sin^2 \theta_{\pm} = \frac{(1 + \tau) \tan^2 2\gamma + 2\eta^2 \pm 2\eta\sqrt{\eta^2 + \tau \tan^2 2\gamma}}{(1 + \tau)^2 \tan^2 2\gamma + 4\eta^2}. \quad (20)$$

Both roots lie in the interval $[0;1]$ and are mathematically meaningful. However, only one of the two roots has a physical meaning, and a criterion has to be defined for identifying the physically meaningful root. The isotropic case help in finding it. The two roots given by the Equation (20) becomes in this case

$$\sin^2 \theta_{\pm} = \frac{1 \pm |\cos 2\gamma|}{2}. \quad (21)$$

For an isotropic medium, since the polarization of the P-wave and the propagation direction are parallel, $\sin^2 \theta = \sin^2 \gamma$ and this leads to the following rule.

If $\gamma \leq 45^\circ$, then $\cos 2\gamma \geq 0$ and it is the root with the minus sign that is meaningful.

If $\gamma \geq 45^\circ$, then $\cos 2\gamma \leq 0$ and it is the root with the plus sign that is meaningful.

A similar result is found for SV-waves with $\gamma < 135^\circ$ and $\gamma > 135^\circ$. For transversely isotropic cases, at $\gamma=45^\circ$, $\tan 2\gamma$ is equal to infinity and the square root of Δ is negligible compared to the coefficients of Equation (18). Then, Equation (20) become

$$\sin^2 \theta \rightarrow \frac{1}{1 + \tau}. \quad (22)$$

Therefore, the two roots must be equal for $\gamma=45^\circ$. This rule has been numerically verified for different transverse isotropy values as shown in Figure 4. Knowing that θ and γ must be quite close, the slope of curve $\theta=f(\gamma)$ must thus be near one. Therefore, for all cases of weak anisotropy, the change between branches occurs at $\gamma=45^\circ$.

RESULTS

To show the significance of estimating anisotropy parameters from phase velocities with a model using polarization information, I study five examples of TIMs. Each TIM is defined by the P- and SV-wave vertical velocities and the anisotropy parameters η and τ (Table 1). These examples were chosen to be representative of media investigated by seismic surveying. Figure 5 shows, for each medium, the difference in angles $\gamma - \theta$ calculated for θ going from 0° to 90° . This difference can exceed 8° even for weak anisotropies. The P- and SV-phase velocity are calculated with the assumption that polarization angles for P-waves are equal to incidence angles. Figure 6 shows, for each medium, the absolute error in phase velocities due to this assumption compared to phase velocity deviations from the isotropic case. For example, for the medium 5, the error in P-wave phase velocity is about 100 m/s at $\theta=60^\circ$, whereas the anisotropy provide a deviation about 150 m/s at the same incidence. From these curves, it appears that errors in phase velocities due to the assumption on incidence angles is not negligible by comparison with those that are due to anisotropy.

An interesting point lies in calculating the error made in parameter estimation by inverting approximated phase velocities with a least squares method. For this purpose, I consider a data set defined by 40 pairs of P- and SV-wave phase velocities and incidence angles approximated by polarization angles. The data go from 0° to 80° by steps of 2° . The results given in Table 2 show that the error in estimated η and τ parameters can exceed 10%. Note that all absolute errors in estimated parameters are negative. This error can be much the same as the error in estimated parameters induced by uncertainties for velocity measurements from VSP data. However, in an inverse problem the misfit function has to be weighted by a covariance matrix. The variance terms of this matrix are defined as the sum of the square of the inverse of both errors due to uncertainties about data and errors due to assumptions for model equations (Tarantola, 1987). Therefore, these two errors do not compensate each other and will provide a significant error in parameter estimation. These results make it attractive to use a model taking into account polarization information for

estimating TI from multiple-source offset VSPs.

CONCLUSION

This study shows that TI estimation from phase velocity, assuming that incidence and polarization angles are equal, induces an error of about 10% in recovered parameters. This fact shows the importance of using polarization information in model equations. The exact model proposed, which takes into account polarization information, is easy to implement because the use of two parameters η and τ enables the equation for the incidence angle to be written as a function of polarization (20) in a simple way. Moreover, linearized equations for phase velocities (Berryman, 1979; Thomsen, 1986) are accurate enough to be used in the model. The two anisotropy parameters η and τ can be adjusted by a least squares method. An important obstacle to making such methods successful could be the accuracy of velocity measurements from VSP data. However, the vertical P- and SV-wave velocities are generally measured with accuracy. If uncertainties in velocity measurements are lower than 5%, estimated anisotropy parameters will be meaningful. *A priori* values for η and τ can be chosen, for example, by using the table given by Thomsen (1986) where anisotropy values are calculated for sedimentary rocks. The choice of parameters such as those defined by Berryman (1979) or Thomsen (1986) does not significantly change the values recovered. But η and τ enable exact expressions to be derived for the incidence angle and for phase velocities, which are easy to handle.

ACKNOWLEDGMENTS

This paper was written with the permission of the Geophysical Research Department of the Institut Français du Pétrole. I thank G. Grau and L. Nicoletis from the Institut Français du Pétrole for their suggestions and comments.

LIST OF CAPTIONS

Fig. 1. Definition of polarization ($\vec{g}$) and propagation ($\vec{k}$) directions for P-waves. These two directions are shown in the P- and SV-waves vibration plane. Vector $\vec{k}$ is perpendicular to the wave front and makes an angle θ with the axis of symmetry (here the vertical). $\vec{k}$ represents the wave vector. $\vec{g}$ represents the direction of particle motion and makes an angle γ with the axis of symmetry.

Fig. 2. Comparison of the sensitivity of P- (above) and SV-wave (below) velocities to η and τ and to δ and ϵ as a function of the polarization angle. The sensitivity is computed as partial derivatives of velocities with regard to anisotropy parameters multiplied by a perturbation of about 10 percent in the parameters' value. This sensitivity is nearly constant with parameter variations and, in this example, a usual values of transverse isotropy have been chosen: $\eta=1.125$ and $\tau=1.266$ which correspond to $\delta=\epsilon=0.1$. It appears that P- and SV-wave velocities are more sensitive to variations of η and τ than to variations of Thomsen's parameters.

Fig. 3. Sensitivity curves of the polarization angle to a perturbation of η (solid line) and of τ (dashed line) equal to 10% compared to isotropy.

Fig. 4. Considering two extreme cases of weak transverse isotropy (case 1: $\eta=0.819$, $\tau=1.266$; and case 2: $\eta=1.125$, $\tau=1.266$). For each case, the two corresponding roots given by Equation (20) have been calculated. Boldface symbols represent values of roots for case 1 and thin symbols represent values of roots for case 2. For these two cases, + sign corresponds to the root with the plus sign and - sign corresponds to the root with the minus sign.

Fig. 5. Difference between polarization angle γ and propagation angle θ for θ going from 0° to 90° . Each curve corresponds to one of the TIMs defined in Table 1.

Fig. 6. Absolute errors (above) in P- (left) and SV-wave (right) phase velocity estimations due to the assumption that the incidence angle θ is equal to the P-polarization angle γ . Each curve corresponds to one of the TIM defined in Table 1. These curves can be compared to the P- (left) and SV-wave (right) phase velocity deviations (below) due to anisotropy.

Table 1. Five examples of TIMs defined by the P- and SV-wave phase velocities and two anisotropy parameters η and τ . Each medium is numbered from 1 to 5.

Table 2. Values recovered for η and τ by inverting phase velocities with the assumption that $\theta=\gamma$ for each TIM defined in Table 1.

Fig. 1

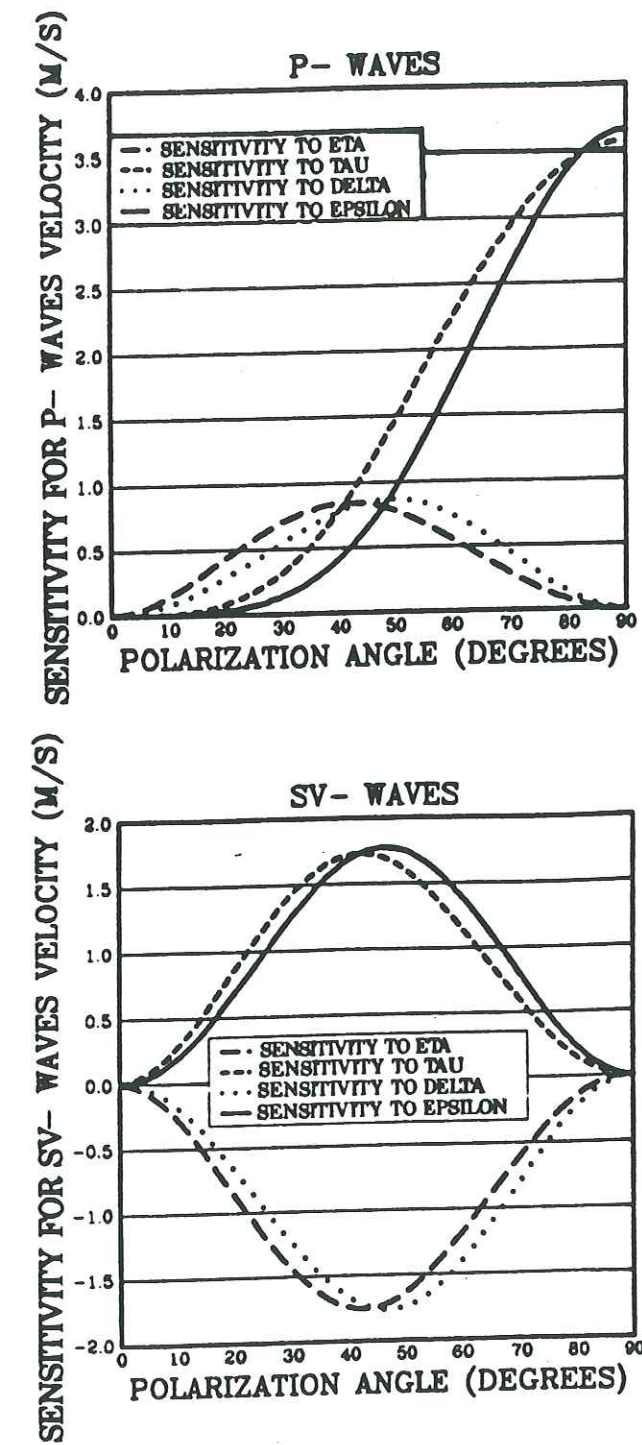
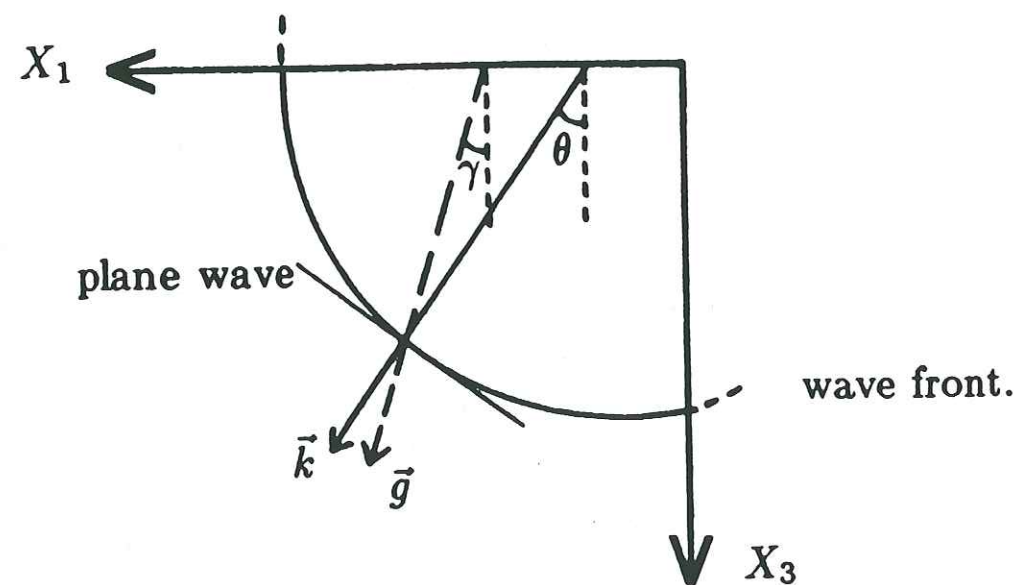


Fig. 2

Fig. 3

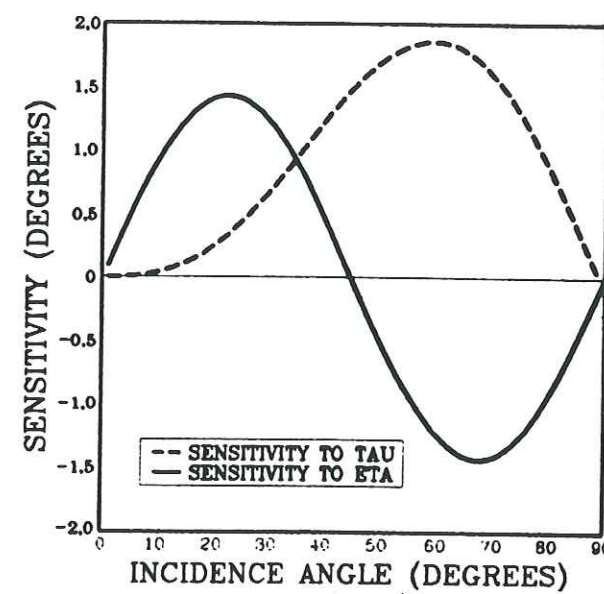


Fig. 4

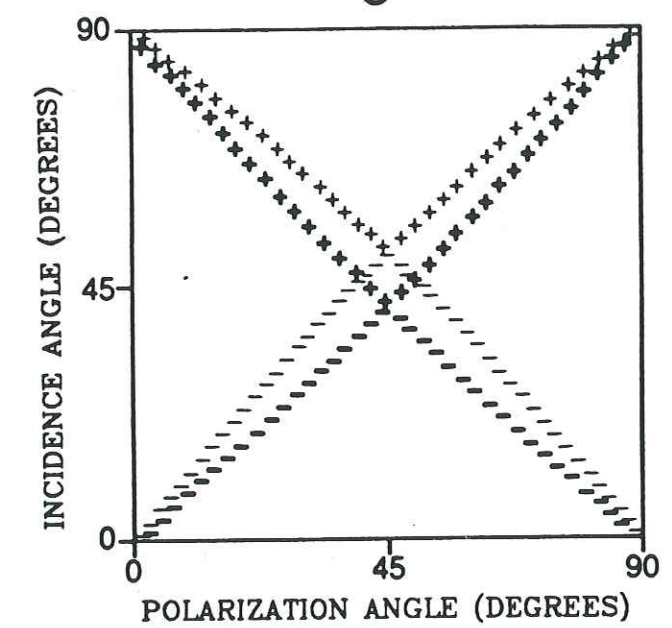


Fig. 5

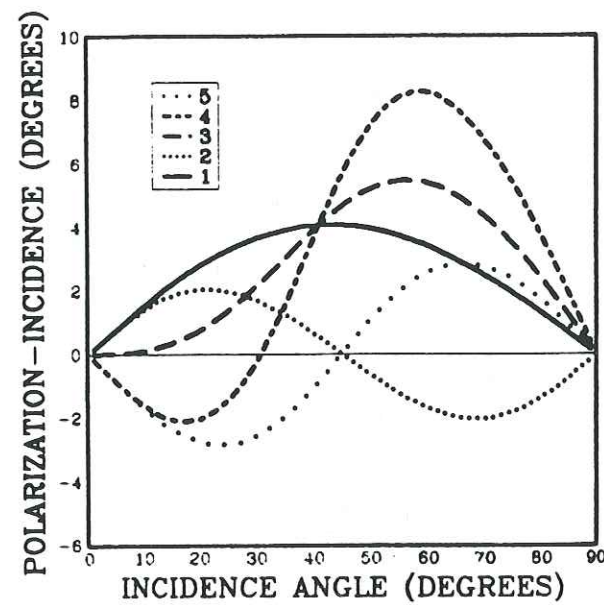


Fig. 6

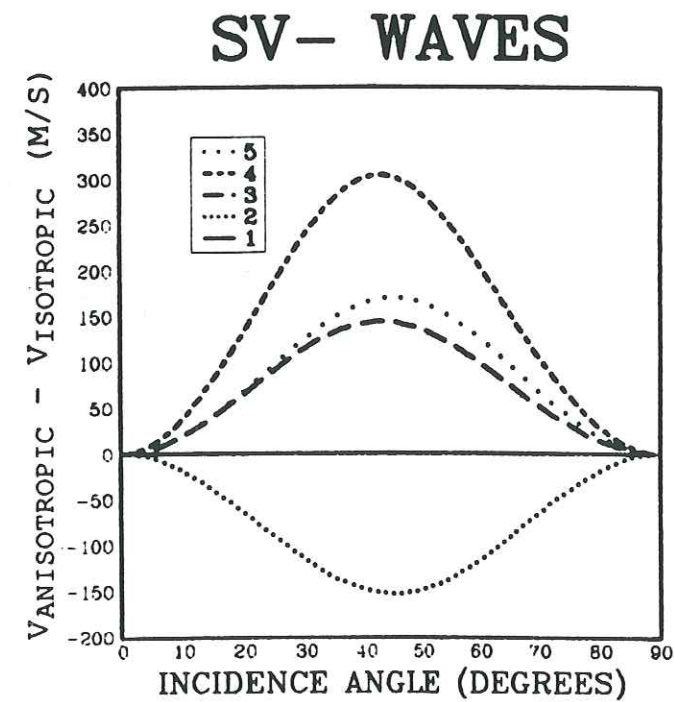
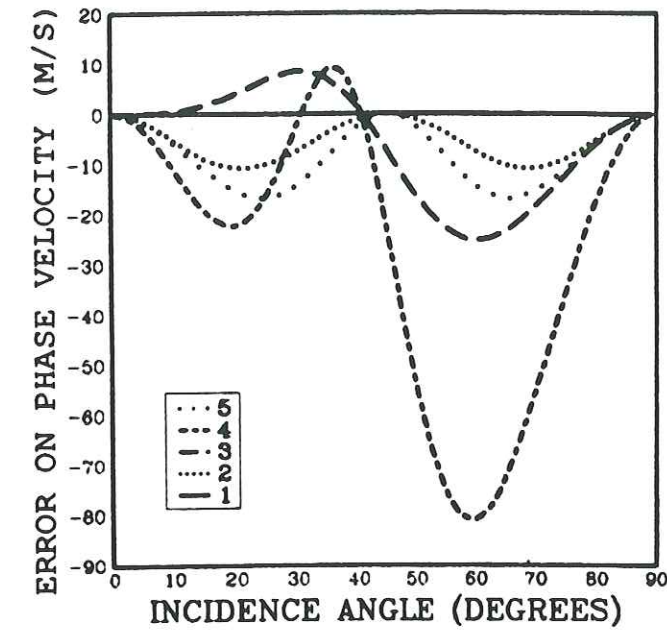
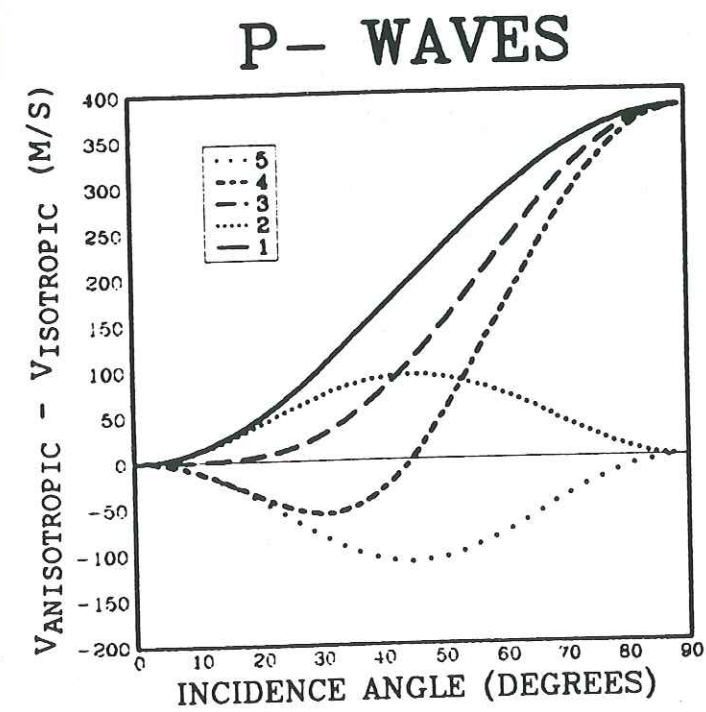
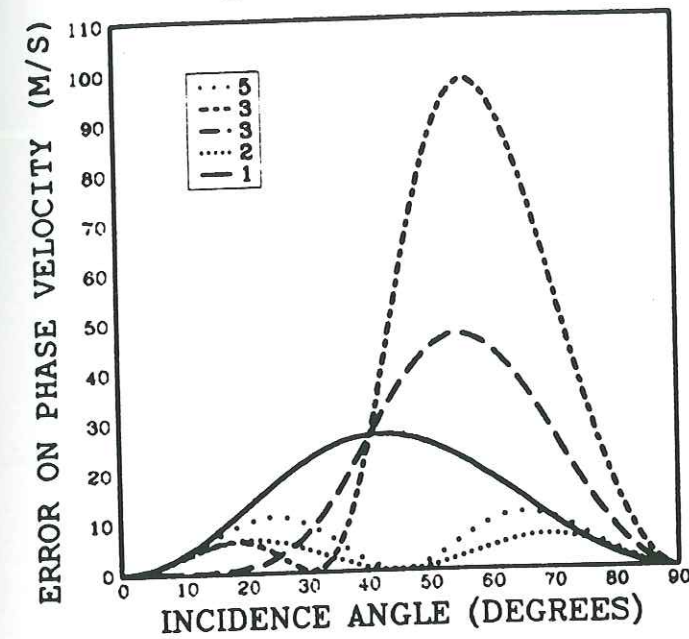


Table 1

	DEFINITION OF TIM			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
MEDIUM 1	1.152	1.328	4000	2500
MEDIUM 2	1.152	1.000	4000	2500
MEDIUM 3	1.000	1.328	4000	2500
MEDIUM 4	0.819	1.328	4000	2500
MEDIUM 5	0.819	1.000	4000	2500

Table 2

	RECOVERED TIM			
	η	$\Delta \eta$ (%)	τ	$\Delta \tau$ (%)
MEDIUM 1	1.138	09.23	1.309	05.85
MEDIUM 2	1.145	04.63	0.998	-
MEDIUM 3	0.977	-	1.295	09.93
MEDIUM 4	0.764	30.42	1.270	17.73
MEDIUM 5	0.807	06.79	0.997	-

3. Erreurs d'estimation de l'anisotropie dues à l'utilisation de modèles approchés des vitesses de phase.

3.1 Objectif.

L'objectif de cette étude est de quantifier l'erreur faite sur l'estimation des paramètres d'anisotropie définis dans le paragraphe 1 (η et τ) due à l'utilisation de modèles approchés de vitesses de phases. On étudie ici les modèles proposés par White *et al.* (1983) et Thomsen (1986). Pour ces deux approches, on utilise l'expression (20) du sinus carré de l'angle d'incidence qui est une fonction des deux paramètres (η, τ) et de l'angle de polarisation γ . Ceci permet de ne pas confondre l'angle de polarisation avec l'angle d'incidence. Ainsi, on peut calculer une erreur sur les paramètres estimés qui n'est due qu'aux approximations faites sur les équations des vitesses.

Cette erreur d'estimation sur les deux paramètres (η, τ) est quantifiée à partir des cinq exemples de milieux TI étudiés dans le paragraphe précédent. On montre que cette erreur est loin d'être négligeable.

3.2 Utilisation du modèle de vitesse proposé par White.

White *et al.* (1983) ont proposé un modèle approché pour les vitesses de phase des ondes q_P et q_{SV} . Dans ce but deux paramètres d'anisotropie sont définis. Ce sont des combinaisons des 4 modules élastiques décrivant la propagation des ondes q_P et q_{SV} dans un milieu TI : $C_{11}, C_{33}, C_{13}, C_{55}$. L'expression de ces deux paramètres est :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{C_{11} - C_{33}}{C_{33}}, \\ \epsilon_2 &= \frac{C_{11} + C_{33} - 2(C_{13} + 2C_{55})}{(C_{11} + C_{33})}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Le paramètre ϵ_1 correspond au paramètre ϵ de Thomsen à un facteur 2 près. Le paramètre ϵ_2 mesure de combien la vitesse des ondes q_P diffère de l'équation :

$$\rho V_P^2 = C_{33} \cos^2 \theta + C_{11} \sin^2 \theta, \quad (5.2)$$

ce qui correspond à une dépendance elliptique de la vitesse de groupe. Le paramètre ϵ_2 est toujours positif pour un milieu (TI) (White *et al.*, 1983). Dans un milieu isotrope, ces paramètres sont tous les deux nuls. Si on considère ϵ_1 et ϵ_2

Modélisation exacte de la vitesse de phase en fonction de la polarisation et de l'anisotropie.

petits, il est possible d'approcher au premier ordre les équations des vitesses de phases :

$$\begin{aligned} \rho V_P^2 &= C_{33} + \epsilon_1 C_{33} \sin^2 \theta - \epsilon_2 (C_{11} + C_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\ \rho V_{SV}^2 &= C_{55} + \epsilon_2 (C_{11} + C_{33}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (5.3)$$

La figure (V.1) montre l'erreur commise sur les vitesses de phase des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'incidence pour les 5 milieux TI définis dans le tableau (1) du paragraphe 1. Pour certaines valeurs d'anisotropies (milieux 3 et 4), les différences de vitesses ne sont pas négligeables devant les effets de l'anisotropie elle-même sur les vitesses de phases (figure 6). Globalement, les erreurs sont plus importantes pour les ondes q_{SV} que pour les ondes q_P .

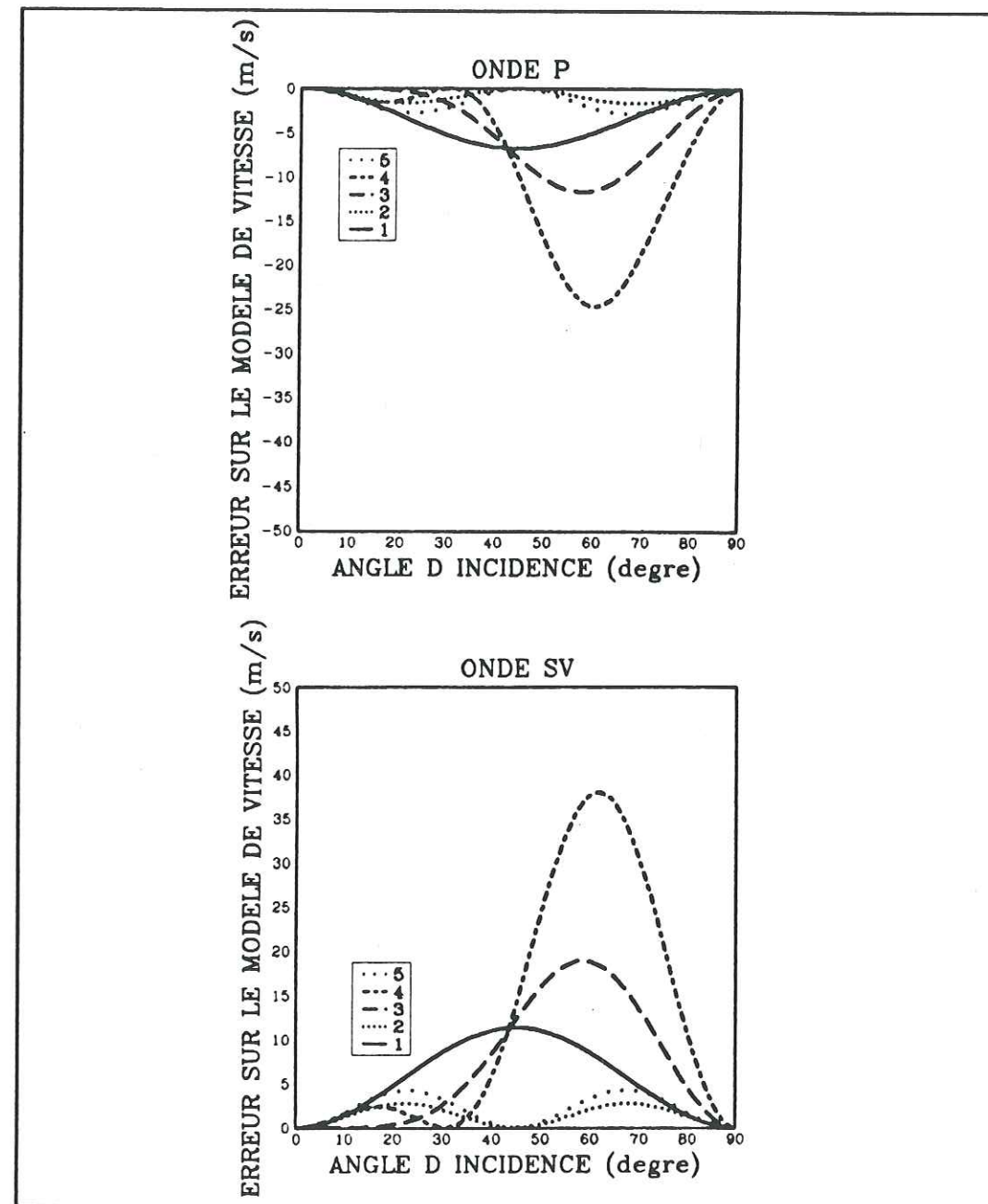


Figure V.1. Différence entre les vitesses de phase des ondes q_P (en haut) et q_{SV} (en bas) calculées avec les équations approchées de White (5.1) et les équations exactes. Chaque courbe correspond à l'un des cinq milieux définis dans le tableau 1 du paragraphe 2.

Un problème intéressant est de quantifier l'erreur commise sur l'estimation des paramètres d'anisotropie η et τ due à l'utilisation des équations approchées des vitesses de phase (5.1). De façon similaire à ce qui a été présenté dans le paragraphe 1, on considère pour chacun des milieux définis dans la tableau 1 un jeu de données constitué de 40 observations de vitesses de phases q_{SV} et q_P ainsi que les angles de polarisation γ_P et γ_{SV} associés. Ces différentes observations correspondent à des incidences comprises entre 0 et 80° par pas de 2°. De manière à calculer uniquement l'erreur d'estimation des paramètres induite par l'utilisation des équations approchées (5.1), on ne fait aucune hypothèse sur les angles. Cela revient à calculer l'angle d'incidence θ à partir de l'angle de polarisation γ avec l'équation (20) du paragraphe 2. Les paramètres η et τ sont estimés par une méthode de moindres carrés. Les résultats sont donnés dans le tableau (3.1). Le paramètre η est globalement moins bien retrouvé que le paramètre τ . Pour certaines anisotropies (milieux 1 et 4) l'erreur d'estimation des paramètres dépassent 5% ce qui n'est pas négligeable en comparaison avec les effets sur les vitesses que l'on cherche à mesurer (figure 6).

	PARAMETRES ESTIMES			
	η	$\Delta \eta$ (%)	τ	$\Delta \tau$ (%)
MILIEU 1	1.164	07.89	1.329	00.30
MILIEU 2	1.151	00.66	1.000	00.00
MILIEU 3	1.016	-	1.333	01.52
MILIEU 4	0.842	12.71	1.339	03.35
MILIEU 5	0.820	00.55	1.000	00.00

Tableau 5.1. Valeurs des paramètres d'anisotropie η et τ estimés à partir des équations approchées de White avec 5 jeux de données composés chacun de 40 valeurs de vitesses de phase q_{SV} et q_P et des angles de polarisation γ_P et γ_{SV} correspondant à des incidences comprises entre 0 et 80° par pas de 2°. Chaque milieu est défini dans le tableau 1 du paragraphe 2.

3.3 Utilisation du modèle de vitesse proposé par Thomsen.

On étudie dans cette partie l'erreur sur le calcul des vitesses de phases des ondes q_{SV} q_P due aux approximations linéaires en ϵ et δ faites sur les équations des vitesses proposées par Thomsen (1986) (chapitre 2). Les paramètres ϵ et δ sont définis par les relations (II.37) et (II.40). La figure (V.2) montre l'erreur commise sur les vitesses de phase due aux approximations linéaires en ϵ et δ en fonction de l'angle d'incidence. On retrouve des résultats similaires à ceux

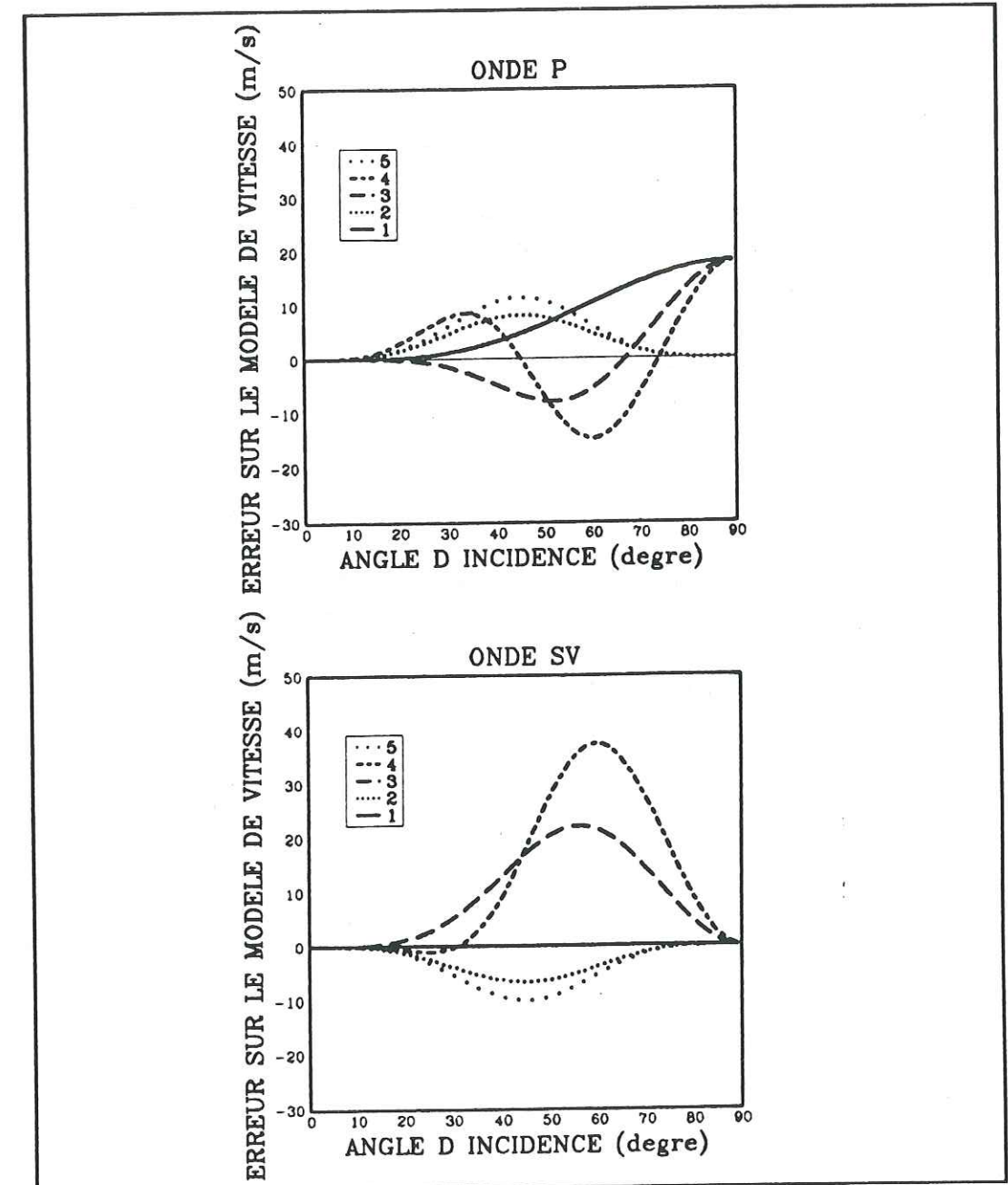


Figure V.2. Différence entre les vitesses de phase des ondes q_P (en haut) et q_{SV} (en bas) calculées avec les équations approchées de Thomsen (II.39) et les équations exactes. Chaque courbe correspond à l'un des cinq milieux définis dans le tableau 1 du paragraphe 2.

obtenus avec le modèle de White *et al.* (1983) : les erreurs sont globalement supérieures pour les vitesses q_{SV} par rapport aux vitesses q_P notamment pour les milieux 3 et 4. Les paramètres η et τ sont estimés avec les mêmes conditions que celles présentées dans le paragraphe précédant. On quantifie ainsi l'erreur sur les paramètres estimés due à l'utilisation des équations approchées de Thomsen. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.2). Les erreurs observées sont plus importantes que celles obtenues avec les équations de White. De même, le paramètre η est globalement moins bien estimé que le paramètre τ .

	PARAMETRES ESTIMES			
	η	$\Delta \eta$ (%)	τ	$\Delta \tau$ (%)
MILIEU 1	1.147	03.28	1.313	04.57
MILIEU 2	1.143	05.92	1.001	00.00
MILIEU 3	1.014	-	1.320	02.44
MILIEU 4	0.840	11.60	1.326	00.61
MILIEU 5	0.805	07.73	1.001	00.00

Tableau 5.2. Valeurs des paramètres d'anisotropie η et τ estimés à partir des équations approchées de Thomsen (II.39) avec 5 jeux de données composés chacun de 40 valeurs de vitesses de phase q_{SV} et q_P et des angles de polarisation γ_P et γ_{SV} correspondant à des incidences comprises entre 0 et 80° par pas de 2°. Chaque milieu est défini dans le tableau 1 du paragraphe 2.

Table des matières.

Chapitre 6. Estimation des paramètres d'anisotropie par une méthode d'inversion.	1
1. Introduction.	1
2. Les données.	2
3. Les paramètres à estimer.	2
4. Le problème direct.	3
4.1 Les équations du problème direct.	3
4.2 Étude de sensibilité.	4
5. Le problème inverse.	9
5.1 La formulation du problème.	9
5.2 La fonction coût.	9
5.3 Unicité et stabilité de la solution.	13
5.4 La matrice de covariance sur les paramètres estimés.	17
6. Extension de la méthode à des milieux TI d'axe de symétrie non vertical.	24
7. Conclusion.	28

CHAPITRE 6. Estimation des paramètres d'anisotropie par une méthode d'inversion.

1. Introduction.

Dans ce chapitre, on définit une méthode d'inversion permettant d'estimer les paramètres d'anisotropie à partir de données de sismique de puits en trois composantes. Cette méthode utilise les équations exactes de la vitesse de phase présentées dans le chapitre 5.

L'inversion, en géophysique, consiste à estimer les NP paramètres définissant un milieu qui expliquent au mieux les ND données mesurées sur des arrivées de sismique.

Les paramètres que l'on cherche à calculer sont au nombre de quatre (α_0 , β_0 , η et τ). Ils permettent de décrire les propriétés élastiques d'un milieu isotrope transverse dans le plan de vibration des ondes q_P et q_{SV} .

Le modèle théorique est constitué par le système d'équations reliant des termes de vitesse aux angles de polarisation associés pour les ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle d'incidence.

Les observations sont de deux types :

1. les angles de polarisation γ des ondes q_P et q_{SV} obtenus à partir des arrivées directes enregistrées en trois composantes, pour différentes incidences (ceci revient à avoir plusieurs positions de sources) ;
2. les temps de parcours de ces arrivées directes q_P et q_{SV} associées aux polarisations précédentes.

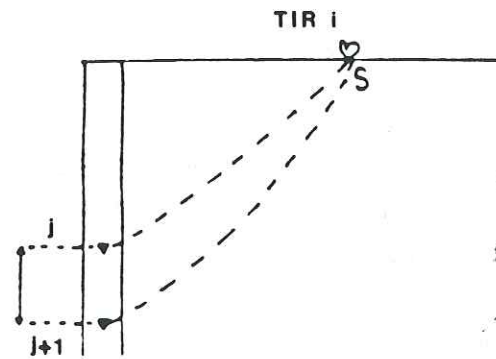
On considère de plus les incertitudes sur les mesures des temps de parcours et sur l'estimation des angles de polarisation. On suppose ces incertitudes gaussiennes, ce qui est admis classiquement et permet de simplifier les calculs (Tarantola, 1988).

On distingue le problème direct qui consiste en une réalisation particulière du modèle pour un jeu de paramètres donné, et le problème inverse qui définit un critère permettant d'ajuster une réalisation du modèle à une série d'observations. Cet ajustement se fait de façon itérative et aboutit à un jeu de NP paramètres solutions du problème inverse. Il est possible de calculer une incertitude sur les paramètres estimés.

2. Les données.

Les observations proviennent d'un dispositif de puits en trois composantes. Elles consistent en des mesures de temps de parcours d'ondes directes q_P et q_{SV} . Connaissant la distance entre deux géophones, on calcule aisément des vitesses Q (ou des lenteurs L) apparentes verticales considérées comme le rapport de la vitesse (ou de la lenteur) de phase sur le cosinus de l'angle d'incidence (voir figure ci-dessous). Ceci est vrai si les récepteurs restent suffisamment proches (de Parscau, 1991, chapitre 7, paragraphe 2).

$$\delta t_{P_i} = t_{P_{j+1}} - t_{P_j} \text{ et } \delta t_{SV_i} = t_{SV_{j+1}} - t_{SV_j}.$$



D'autre part, l'enregistrement en trois composantes permet pour chaque tir i de calculer l'angle de polarisation γ_i sur une fenêtre de temps par la méthode de l'ellipsoïde de covariance (Clet et Dubesset, 1988). Sauf pour les premières arrivées, il est nécessaire de séparer les différents types d'ondes avant de mesurer leur polarisation. Les observations sont donc constituées de quatre valeurs δt_P , δt_{SV} , γ_P et γ_{SV} .

3. Les paramètres à estimer.

Les paramètres décrivant le milieu sont les deux vitesses verticales α_0 et β_0 et les deux paramètres d'anisotropie η et τ (chapitre 5).

Il est préférable, pour un problème inverse, que les paramètres à estimer soient du même ordre de grandeur et de même dimension. Nous avons donc

choisi d'inverser quatre paramètres adimensionnels valant l'unité pour le modèle initial. Ces paramètres sont :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{C_{13} + C_{44}}{C_{33} - C_{44}}, \\ \tau &= \frac{C_{11} - C_{44}}{C_{33} - C_{44}}, \\ \alpha &= \frac{\alpha_{0 \text{ estime}}}{\alpha_{0 \text{ priori}}}, \\ \beta &= \frac{\beta_{0 \text{ estime}}}{\beta_{0 \text{ priori}}}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

où $\alpha_{0 \text{ estime}}$ et $\beta_{0 \text{ estime}}$ sont les vitesses verticales des ondes P et SV retrouvées par le processus d'inversion et, $\alpha_{0 \text{ priori}}$ et $\beta_{0 \text{ priori}}$ sont les mesures des vitesses (ou lenteurs) apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} .

Les deux paramètres η et τ décrivent la variation des vitesses de phases des ondes P et SV pour des incidences comprises entre 0 et 90° (chapitre 5). Les paramètres α et β permettent d'estimer les variations des valeurs des vitesses verticales des ondes P et SV au cours du processus d'inversion. Mais, si on estime précises les vitesses verticales *a priori*, et si les résultats de l'inversion montrent que les paramètres α et β sont très différents de l'unité, alors ceci peut être considéré comme un critère de fiabilité du résultat.

4. Le problème direct.

4.1 Les équations du problème direct.

Le problème direct se formule de la façon suivante :

— à partir de la mesure d'angles de polarisation pour chacune des ND expériences (différentes positions de la source),

— et à partir d'un jeu des NP paramètres définis en (6.1) α , β , η et τ ,

calculer les vitesses (ou lenteurs) apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} associées aux angles de polarisation. Ce calcul se fait en deux étapes :

1. calcul des angles d'incidence θ_P et θ_S associés aux polarisations γ_P et γ_S . On calcule en fait $\sin^2 \theta$ donné par l'expression (20) du chapitre 5 ;

2. calcul des vitesses apparentes Q (ou des lenteurs apparentes L) des ondes q_P et q_{SV} à partir des expressions des vitesses de phase (8) du chapitre 5 en fonction des quatre paramètres α , β , η et τ et des vitesses verticales *a priori*.

Pour un jeu de paramètres (6.1) donné, les expressions des modules des vitesses apparentes des ondes P et SV s'écrivent :

$$Q_{P,SV}^2(\theta) = \frac{(\alpha^2\alpha_o^2 - \beta^2\beta_o^2)}{1 - \sin^2\theta} \left[\frac{\alpha^2\alpha_o^2 + \beta^2\beta_o^2}{(\alpha^2\alpha_o^2 - \beta^2\beta_o^2)} - (1 - \tau) \sin^2\theta \right. \\ \left. \pm (-1)^i \left\{ (1 - (1 + \tau) \sin^2\theta)^2 + (\eta \sin 2\theta)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] , \quad (6. 2)$$

où $i=1$ pour les ondes q_{SV} et $i=2$ pour les ondes q_P . Le terme $\sin^2\theta$ exprimé en fonction de l'angle de polarisation γ et des deux paramètres η et τ est donné par l'équation (20) du paragraphe 2 du chapitre 5.

Le module des lenteurs noté L^2 s'écrit :

$$L_{P,SV}^2(\theta) = \frac{1}{Q_{P,SV}^2(\theta)} . \quad (6. 3)$$

Pour des incidences verticales, les vitesses apparentes verticales tendent vers l'infini. Inversement, les lenteurs apparentes verticales tendent vers 0. Une solution est de considérer par exemple les lenteurs apparentes verticales pondérées par l'inverse du cosinus de l'angle de polarisation. Pour un milieu isotrope, ceci permet de calculer directement la lenteur de phase alors que, pour un milieu TI, ceci permet seulement de l'approcher puisque les directions de polarisation et de propagation ne sont pas confondues.

4.2 Étude de sensibilité.

On s'intéresse à l'étude de la sensibilité de la lenteur apparente verticale à des perturbations des paramètres η et τ . Ceci permet de déterminer en fonction de l'angle de polarisation dans quelle gamme d'angles d'incidence les paramètres d'anisotropie seront le mieux retrouvés.

On tient compte pour les calculs de sensibilité des termes d'erreurs faites sur les lenteurs apparentes verticales dues aux incertitudes de mesures de temps de parcours et d'angles de polarisation. En effet, les équations modélisant ces erreurs dépendent des deux paramètres η et τ . Comme les différentes erreurs prises en compte sont supposées indépendantes, l'erreur globale est la racine de la somme des carrés des erreurs calculées à partir des incertitudes sur les temps et les angles. Ces erreurs sont donc de deux types :

Estimation des paramètres d'anisotropie par une méthode d'inversion.

1. le carré des erreurs dues aux incertitudes sur les angles de polarisation $\gamma_{P,SV}$ des ondes q_P ou q_{SV} définies comme suit :

$$D_{\gamma_{P,SV}}(\vec{p}) = \left[\frac{\partial X_{P,SV}(\vec{p})}{\partial \gamma_{P,SV}(\vec{p})} \cdot \frac{\partial F_{P,SV}(\vec{p})}{\partial X_{P,SV}(\vec{p})} \cdot d\gamma_{P,SV} \right]^2 , \quad (6. 4)$$

où :

F désigne soit des lenteurs L (ou des vitesses Q) apparentes verticales, soit des lenteurs apparentes verticales pondérées par l'inverse du cosinus de l'angle de polarisation ;

$X(\vec{p})_{P,SV}$ représente la racine double (20) du chapitre 5 permettant d'exprimer l'incidence θ en fonction de l'angle de polarisation des ondes q_P ou q_{SV} et des deux paramètres d'anisotropie η et τ ;

$d\gamma_{P,SV}$ représente l'incertitude de mesure des angles de polarisation des ondes q_P ou q_{SV} .

2. le carré des erreurs dues aux incertitudes sur les temps de parcours des ondes q_P ou q_{SV} :

$$D_{Q_{P,SV}}(\vec{p}) = \left[\frac{\delta t}{h} \right]^2 , \quad (6. 5)$$

où δt est l'incertitude sur les temps de pointés et h la distance entre deux géophones.

L'erreur globale est :

$$D_{P,SV} = \sqrt{D_{\gamma_{P,SV}}(\vec{p}) + D_{Q_{P,SV}}(\vec{p})} . \quad (6. 6)$$

Ainsi, les termes de sensibilité pondérés par l'inverse de l'erreur globale s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial F_{P,SV}}{\partial \eta} d\eta \right) \frac{1}{D_{P,SV}} , \\ \left(\frac{\partial F_{P,SV}}{\partial \tau} d\tau \right) \frac{1}{D_{P,SV}} . \quad (6. 7)$$

Ces termes de sensibilité sont adimensionnels. Les figures (VI.1) et (VI.2) montrent respectivement pour les ondes q_P et q_{SV} les courbes de sensibilité aux

paramètres η et τ des lenteurs apparentes verticales en fonction de l'angle de polarisation. Ces sensibilités sont calculées pour les cinq milieux TI définis dans la table 1 du chapitre 5. Pour chacun de ces exemples, on a choisi une incertitude constante de 1° pour les polarisations et de 1 ms pour les temps de parcours d'une onde entre deux géophones séparés de 100 m. Ces courbes montrent que :

1. Quel que soit le milieu TI étudié, les courbes de sensibilité ont le même comportement. Les seules différences concernent l'amplitude de cette sensibilité.

2. La sensibilité des lenteurs apparentes verticales des ondes q_{SV} est très supérieure à celle des ondes q_P pour des incidences inférieures à 45° . Cependant pour des incidences supérieures à 45° , ces sensibilités sont du même ordre de grandeur. Cela signifie que pour estimer précisément les paramètres η et τ à partir des lenteurs apparentes verticales et des angles de polarisation correspondant à des incidences supérieures à 45° , il est nécessaire de prendre en compte l'information contenue dans les ondes q_P . Cela est d'autant plus important que les ondes incidentes q_P sont les plus finement pointées et les incertitudes de mesure sur les temps et les angles sont inférieures à celles des ondes q_{SV} .

3. Les lenteurs apparentes verticales sont plus sensibles au paramètre η qu'au paramètre τ (excepté pour les ondes q_P quand $\eta = 1,125$ et $\tau = 1,266$). Cela signifie que le paramètre τ sera toujours moins bien estimé que le paramètre η . Il existe un rapport moyen égal à 2 entre les deux sensibilités à η et à τ .

4. Ces courbes de sensibilité diffèrent des courbes de sensibilité des vitesses de phase (figure 2 du chapitre 5) du fait du terme en $1/\cos\gamma$. En définitive, les figures (VI.1) et (VI.2) montrent dans quelle gamme d'incidence les deux paramètres η et τ seront le mieux retrouvés : ces deux paramètres η et τ seront bien estimés pour des données correspondant à une gamme d'incidences au moins comprise entre 0 et 60° .

On note que, quel que soit le type de fonctions étudiées (lenteurs, vitesses ou lenteurs pondérées par $1/\cos\gamma$), les courbes de sensibilité montrent un comportement similaire à celui observé sur les figures (VI.1) et (VI.2). Ceci est dû au fait que l'on pondère les dérivées partielles par l'erreur globale (6.6).

Estimation des paramètres d'anisotropie par une méthode d'inversion.

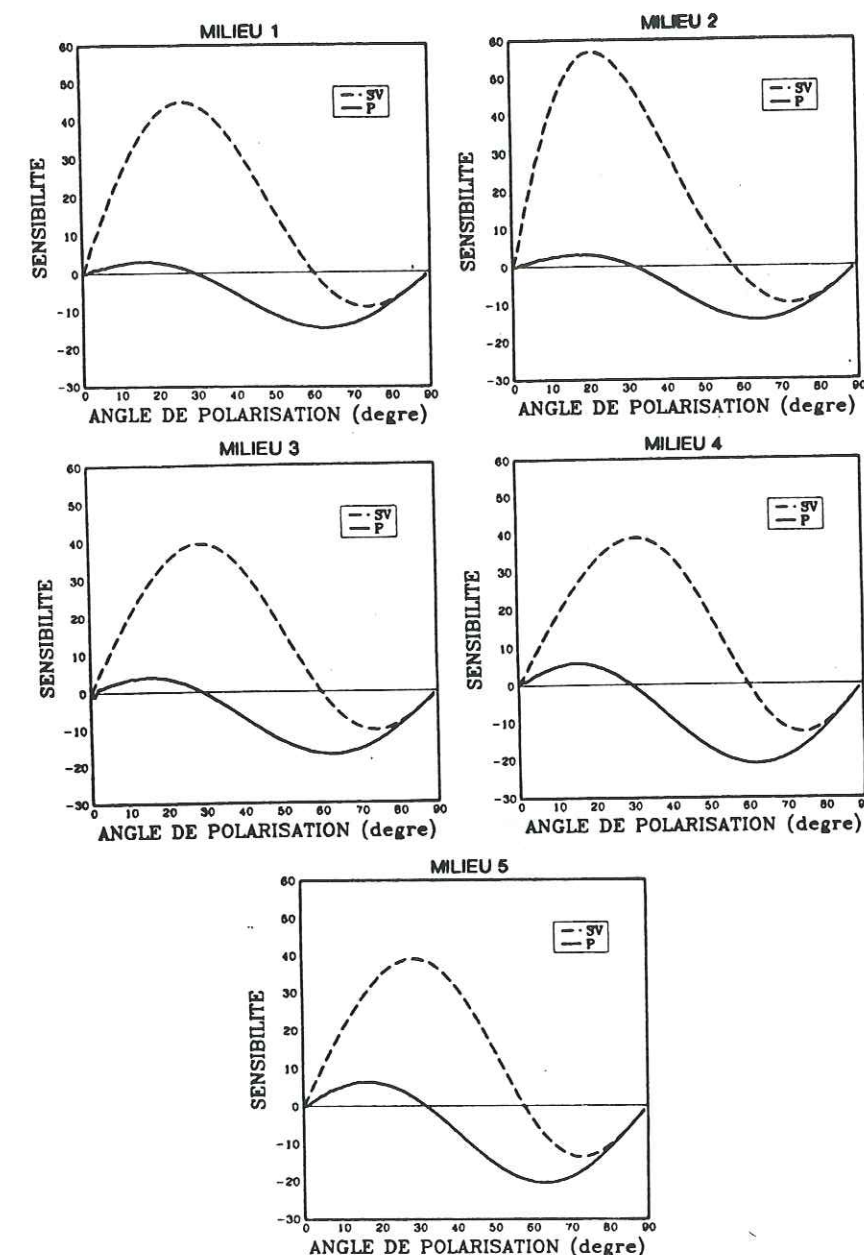


Figure VI.1. Sensibilité des lenteurs apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} au paramètre η pondérée par l'erreur globale due aux incertitudes sur les temps de pointé et les angles de polarisation. On a considéré 5 exemples de milieux (TI) définis par la table 1 du chapitre 5. Pour ces 5 milieux, les vitesses verticales P et SV sont fixées respectivement à 4000 m/s et 2500 m/s.

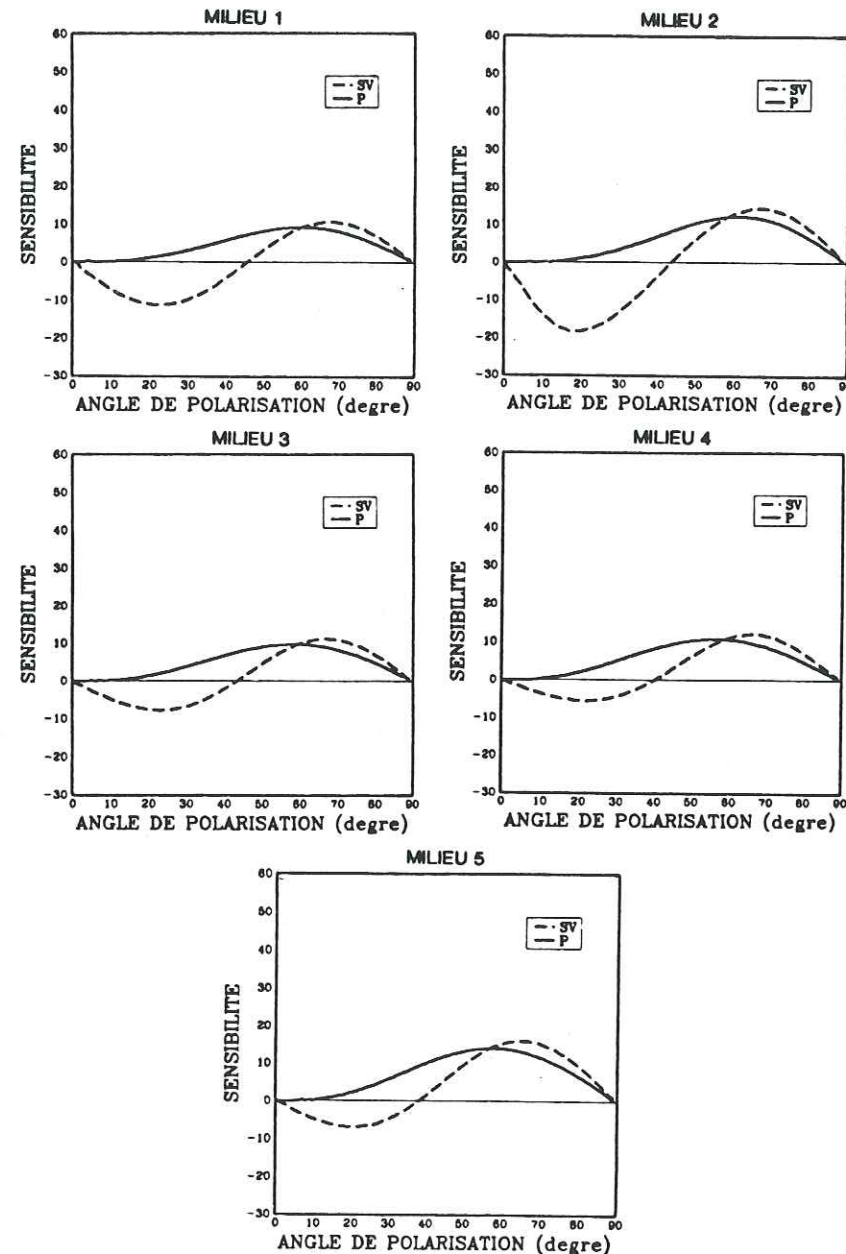


Figure VI.2. Sensibilité des lenteurs apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} au paramètre τ pondérée par l'erreur globale due aux incertitudes sur les temps de pointé et les angles de polarisation. On a considéré 5 exemples de milieux (TI) définis par la table 1 du chapitre 5. Pour ces 5 milieux, les vitesses verticales P et SV sont fixées respectivement à 4000 m/s et 2500 m/s.

5. Le problème inverse.

5.1 La formulation du problème.

Le problème inverse peut se formuler de la façon suivante :

— soit un jeu de ND données mesurées (lenteurs apparentes verticales et angles de polarisation) à partir d'un dispositif de puits avec différents déports de la source, formant un vecteur $\vec{D} \in \mathbb{R}^{ND}$

— soit un jeu de données obtenues par une réalisation du problème direct avec un jeu de paramètres imposés $\vec{p}$, formant un vecteur $\in \mathbb{R}^{ND}$,

trouver les paramètres $\vec{p}_0$ du modèle formant un vecteur $\in \mathbb{R}^4$ qui ajustent au mieux au sens des moindres carrés les données calculées aux données observées. On minimise la norme euclidienne $C(\vec{p})$ de l'écart (le coût) entre un jeu de données observées et un jeu de données calculées avec un jeu de paramètres $\vec{p}$. C'est un problème d'optimisation.

Les données du problème inverse étant les lenteurs apparentes verticales des ondes q_P ou q_{SV} et les erreurs *a priori* sur les données, on cherche les solutions dans l'ensemble des paramètres et l'erreur sur le jeu de paramètres retenu.

5.2 La fonction coût.

Si $\vec{p}$ est le vecteur représentant le jeu de paramètres à inverser, on choisit de minimiser une fonction coût de la forme :

$$C(\vec{p}) = \delta \vec{F}_P^T \cdot C_{D_P}^{-1} \cdot \delta \vec{F}_P + \delta \vec{F}_{SV}^T \cdot C_{D_{SV}}^{-1} \cdot \delta \vec{F}_{SV}, \quad (6.8)$$

où :

$$\begin{aligned} \delta \vec{F}_P &= (\vec{F}_{\text{estime}}(\vec{p}) - \vec{F}_{\text{observe}}(\vec{p})), \\ \delta \vec{F}_{SV} &= (\vec{F}_{\text{estime}}(\vec{p}) - \vec{F}_{\text{observe}}(\vec{p})). \end{aligned} \quad (6.9)$$

$(\vec{p} \in \mathbb{R}^4)$

Les termes C_{D_P} et $C_{D_{SV}}$ sont les matrices de covariance sur les données (de dimension $ND \times ND$) liées aux incertitudes sur les temps de parcours et les angles de polarisation. On considère que cette incertitude n'est pas constante et est décorrélée d'un tir à l'autre. Alors, les termes qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls et les termes diagonaux sont des variances. Ces termes de variance sont

décrits comme la somme du carré des erreurs globales définies par l'expression (6.6). Ainsi, les termes diagonaux de ces matrices de covariances correspondant aux ondes q_P ou q_{SV} s'écrivent :

$$C_{D_{P,SV}}(\vec{p})_{i,j} = [D_{F_{P,SV}}^i(\vec{p}) + D_{\gamma_{P,SV}}^i(\vec{p})]\delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, ND), \quad (6.10)$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

La figure (VI.3) montre la forme de la fonction coût dans le plan des paramètres (η, τ) calculée avec les expressions des lenteurs apparentes verticales L_P et L_{SV} (6.3). Dans cet exemple, on a considéré un jeu de données constitué de 40 valeurs de vitesses et d'angles de polarisation correspondant à trois gammes d'incidences différentes qui sont : 0 à 80°, 0 à 50° et 50 à 90°. La figure (7) du chapitre 7 montre pour le même exemple la forme de la fonction coût dans le plan des paramètres (η, τ) calculée avec les expressions des vitesses apparentes verticales Q_P et Q_{SV} (6.2). On note que, dans les deux cas, les courbes d'isovaleurs de la fonction coût sont des ellipses. On retrouve sur ces figures les résultats obtenus par l'étude de sensibilités des lenteurs apparentes verticales à des perturbations des paramètres η et τ (paragraphe 5.2) : le paramètre η sera bien retrouvé si on considère des données dans une gamme d'incidences comprise entre 0 et 60° puisque les courbes d'isovaleurs sont très rapprochées suivant l'axe des abscisses. Le paramètre τ sera retrouvé avec une précision moindre que le paramètre η , les courbes d'isovaleurs étant plus espacées suivant l'axe des ordonnées. Enfin, la forme de la fonction montre que c'est dans la gamme d'incidence 50 à 90° que les paramètres seront estimés le moins précisément, les courbes d'isovaleurs étant plus espacées.

Nous avons vu au chapitre 5 qu'il était envisageable d'estimer l'isotropie transverse à partir d'applications du type lenteur apparente verticale divisée par le cosinus de l'angle de polarisation. La figure (VI.4) montre pour le même exemple que précédemment la forme de la fonction coût dans le plan des paramètres (η, τ) calculée en utilisant des lenteurs apparentes verticales divisées par le cosinus de l'angle de polarisation. La fonction coût, dans ce cas, n'est pas convexe mais on a montré sur différents exemples qu'il n'y a pas de minimum secondaire. Pour ce type de fonctions, l'optimiseur met pour arriver à la solution, un temps en moyenne 10 fois supérieur à celui nécessaire quand on utilise des lenteurs apparentes verticales dans le processus d'inversion. Cependant, pour tous les exemples étudiés, le minimum de la fonction coût correspond bien à la solution du problème.

Estimation des paramètres d'anisotropie par une méthode d'inversion.

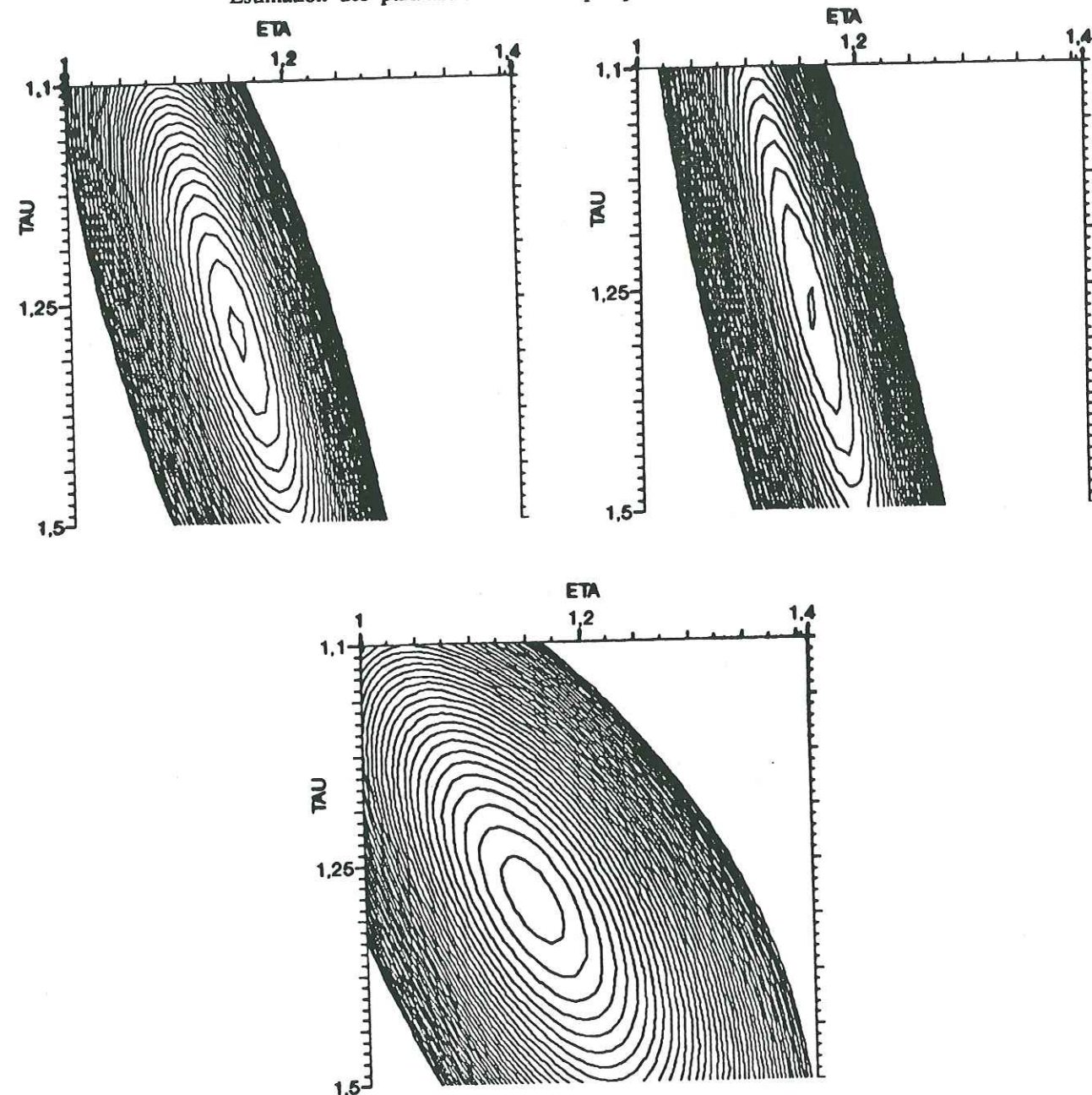


Figure VI.3. Représentation dans le plan (η, τ) de la fonction coût calculée avec les équations des lenteurs (6.3). Les vitesses verticales P et SV sont fixées à 4000 m/s et 2500 m/s. Dans cet exemple, le jeu de données à 40 valeurs de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation correspondant à trois gammes d'incidences différentes : 0 à 50° (gauche), 0 à 80° (droite) et 50 à 90° (bas). Les paramètres d'anisotropie valent : $\eta = 1,152$, $\tau = 1,328$, $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

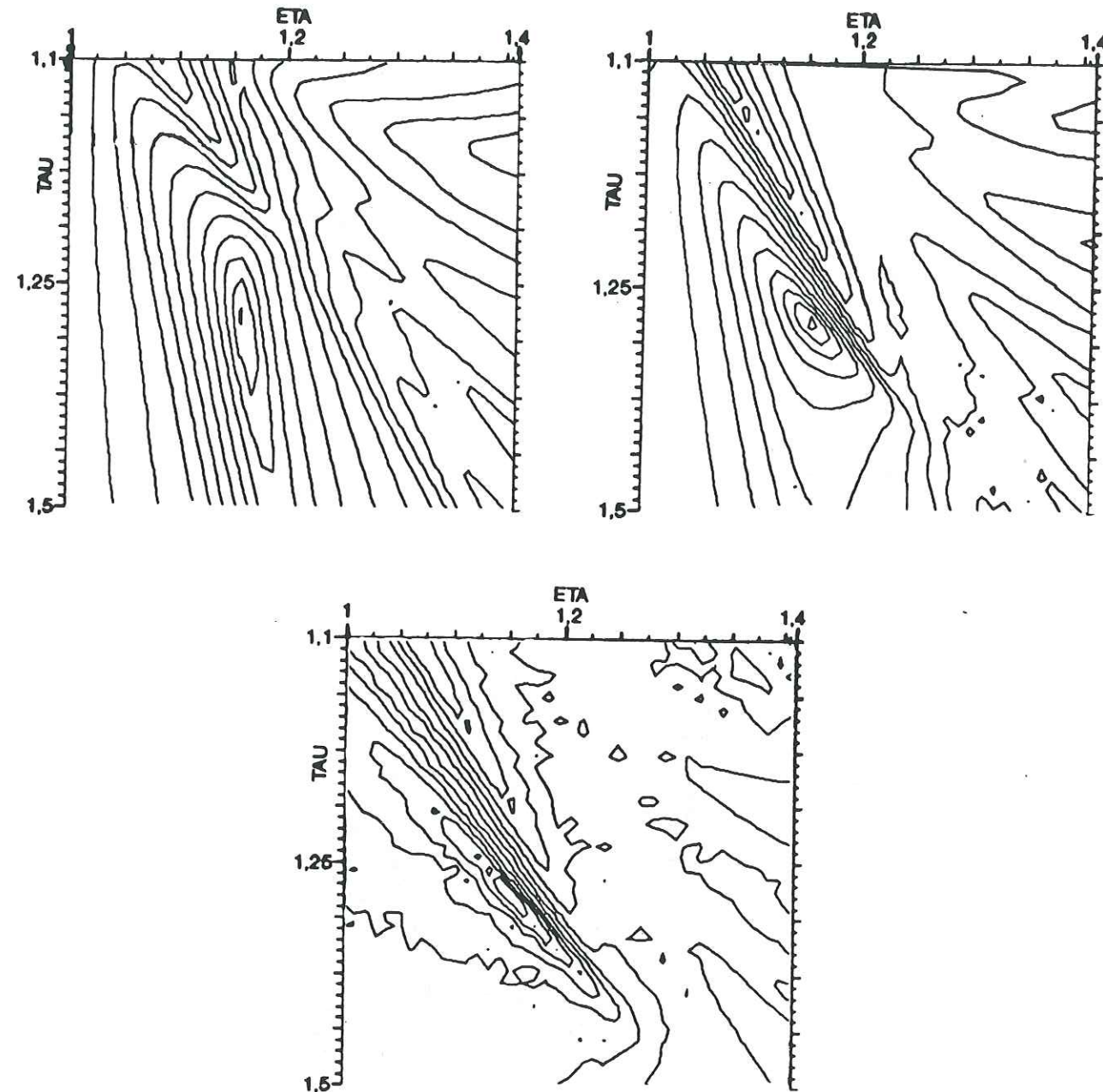


Figure VI.4. Représentation dans le plan (η, τ) de la fonction coût calculée avec les équations des lenteurs apparentes verticales divisées par le cosinus de l'angle de polarisation. Les vitesses verticales P et SV sont fixées à 4000 m/s et 2500 m/s. Dans cet exemple le jeu de données à 40 valeurs de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation correspondant à trois gammes d'incidences différentes : 0 à 50° (gauche), 0 à 80° (droite) et 50 à 90° (bas). Les paramètres d'anisotropie valent : $\eta = 1,152$, $\tau = 1,328$, $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

5.3 Unicité et stabilité de la solution.

L'unicité de la solution revient à montrer qu'il n'existe qu'un jeu de paramètres possible de l'espace des paramètres qui minimise $C(\vec{p})$. C'est un problème difficile à résoudre analytiquement. Néanmoins, il est possible de montrer numériquement que l'on obtient une solution unique quel que soit le jeu de paramètres initial pris dans le domaine d'isotropie transverse qui nous concerne. La figure (VI.5) montre l'histogramme des solutions trouvées pour les deux paramètres η et τ pour un jeu de paramètres initial pris dans un large intervalle de l'espace des paramètres. Cette figure montre un pic au niveau de la solution. Les deux paramètres α et β étant toujours égaux à l'unité, les histogrammes correspondant ne sont pas représentés. On note que le pic s'élargit ou présente des pics secondaires si on utilise des données bruitées avec des erreurs mal modélisées et/ou un nombre insuffisant de données. En fait, on montre que, dans ces cas, les termes de la la matrice Jacobienne sont proches de zéro dans un domaine important autour de la solution du problème.

La stabilité de la solution signifie qu'une petite variation des valeurs des données engendrent une petite variation des valeurs des paramètres. La figure (VI.6) illustre numériquement et sur un exemple précis la stabilité du problème inverse. Dans le plan (η, τ) , on a considéré en chaque point un jeu de données $\vec{D}_1$ constitué de 40 valeurs de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation correspondant à des angles d'incidences allant de 0 à 88° par pas de 2,2°. Le vecteur paramètre $\vec{p}_1$ a pour composantes : $\eta = 1,152$, $\tau = 1,328$, $\alpha = 1$, et $\beta = 1$. Les vitesses verticales P et SV sont fixées respectivement à 4000 m/s et 2500 m/s. De plus, on a choisi une incertitude sur les vitesses de 10 m/s et de 1° sur les angles de polarisation. Puis, on a défini en chaque point (η, τ) une perturbation sur les données $\vec{D}_1$ correspondant à la perturbation suivante sur les paramètres d'anisotropie : $\eta = \eta + 0,01$ et $\tau = \tau + 0,01$. On définit ainsi un second jeu de données noté $\vec{D}_2$ correspondant au vecteur paramètre $\vec{p}_2$. La figure (VI.6) représente dans le plan (η, τ) la valeur du rapport :

$$r(\eta, \tau) = \frac{\|\vec{D}_2 - \vec{D}_1\|}{\|\vec{D}_1\|} \cdot \frac{\|\vec{p}_1\|}{\|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\|}. \quad (6.11)$$

Cet exemple montre que le problème est stable pour une perturbation des paramètres η et τ égal à 0,01 puisque le rapport $r(\eta, \tau)$ varie entre 2,2 et 2,7. On note de plus que ce rapport varie de façon *quasilinéaire* dans le plan (η, τ) .

Une approche plus générale consiste à étudier la stabilité du problème inverse en calculant le rapport de la plus grande sur la plus petite valeur propre de la matrice Hessienne de la fonction coût (voir paragraphe ci-dessous). On montre que ce rapport est la limite supérieure de $r(\eta, \tau)$. Pour l'exemple étudié ci-dessus, ce rapport est de l'ordre de 1000, ce qui est une valeur raisonnable.

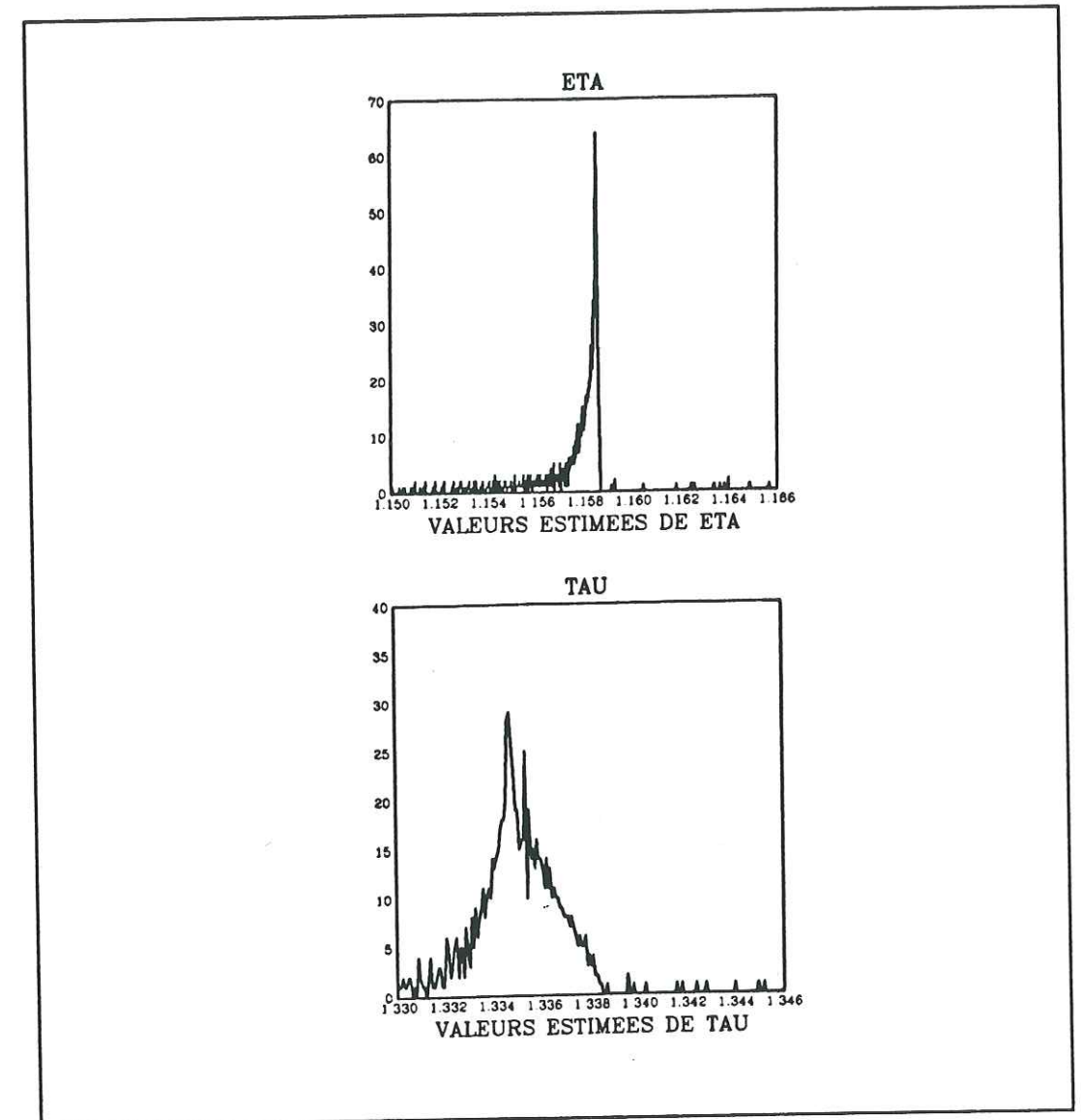


Figure VI.5. Histogramme des valeurs estimées de η (en haut) et de τ (en bas) pour tout modèle initial pris dans l'intervalle $[0,5-1,5]$ pour η et $[1-2]$ pour τ . Dans cet exemple, on a considéré 10 tirs correspondant à des incidences variant de 0 à 80° par pas de 8° . Les vitesses verticales des ondes P et SV valent respectivement 4000 m/s et 2500 m/s. Les deux paramètres η et τ valent respectivement $1,152$ et $1,328$.

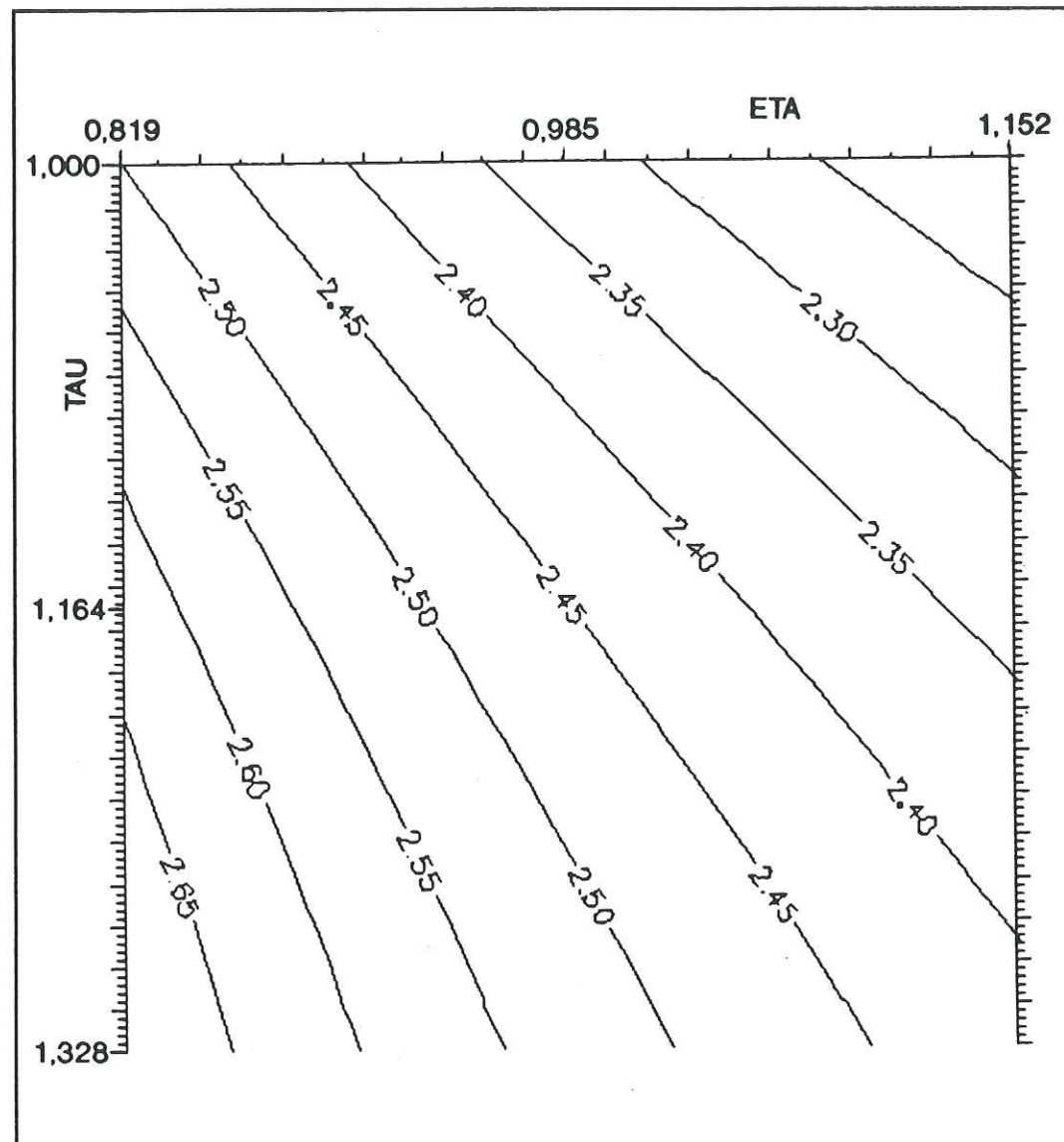


Figure VI.6. Cartes des isovalues du rapport $r(\eta, \tau)$. Dans cet exemple, on a considéré en chaque point (η, τ) 40 tirs correspondant à des incidences variant de 0 à 88° par pas de 2,2°. Les valeurs des paramètres sont : $\eta = 1,152$, $\tau = 1,328$, $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Les vitesses verticales des ondes q_P et q_{SV} valent respectivement 4000 m/s et 2500 m/s.

5.4 La matrice de covariance sur les paramètres estimés.

Il est intéressant de déterminer quelle est la confiance à accorder aux paramètres ajustés (solution du problème inverse). Sous certaines conditions, il est possible de calculer une matrice de covariance donnant une information *a posteriori* sur ces paramètres. En effet, si on suppose gaussienne l'incertitude admise sur les données, et linéaire la fonction coût autour de la solution, on peut alors approcher la matrice Hessienne de la fonction coût à partir de la matrice Jacobienne de la fonction application (6.3). On obtient une matrice 4x4 dont l'inverse est interprétée comme une matrice de covariance sur les paramètres estimés tenant compte de l'erreur sur les données. Cette matrice s'écrit (Tarantola 1988) :

$$A_{k,l} = \left[\nabla_k^i F_{P,SV}(\vec{p}) \cdot C_{D,i,j}^{-1}(\vec{p}) \cdot \nabla_l^j F_{P,SV}(\vec{p}) \right]^{-1}, \quad (6.12)$$

($i, j = 1, \dots, ND$) et ($k, l = 1, \dots, 4$).

Les termes non diagonaux de la matrice sont des covariances qui indiquent la corrélation des paramètres. Les termes de la diagonale sont les variances des paramètres ajustés.

Il est intéressant de connaître quels sont les paramètres prépondérants dans la matrice Hessienne (6.12). Ceci est possible numériquement sur différents exemples d'inversion. En effet, les courbes d'isovaleurs de la fonction coût calculée autour de la solution sont des ellipses concentriques (figure VI.3). Les directions des axes de ces ellipses sont par définition confondues avec les vecteurs propres de la matrice Hessienne (6.12). Il existe un angle α entre ces directions et les axes de référence (η, τ) comme l'illustre la figure (VI.7). On peut valider sur des exemples numériques les paramètres qui font varier la valeur de cet angle.

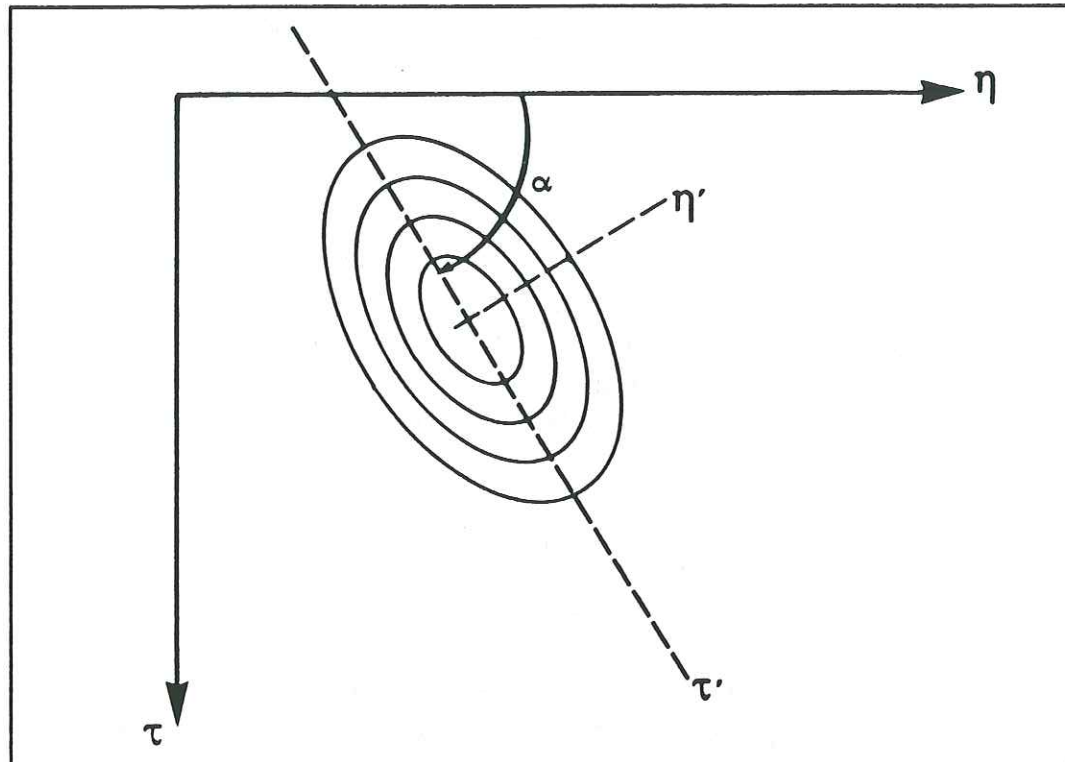


Figure VI.7. Schéma montrant l'angle α existant entre le repère propre de la matrice Hessienne noté (η', τ') et les axes de références (η, τ) .

On présente ici les résultats obtenus avec un jeu de données constitué de 40 valeurs de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation correspondant à des angles d'incidences allant de 0 à 80° par pas de 2°. Les figures (VI.8) et (VI.9) montrent la fonction coût calculée autour de la solution du problème inverse pour deux milieux (1) et (2) définis respectivement par : (1) $\eta=1,125$ et $\tau=1,266$ puis (2) $\eta=1,183$ et $\tau=1,133$. Pour ces deux milieux, le rapport du carré des vitesses verticales P sur les vitesses verticales SV ou encore le rapport $\frac{C_{33}}{C_{55}}$ vaut 4. Dans les deux cas, l'angle entre le grand axe de ces ellipses et l'axe horizontal vaut 71°. Cet angle ne dépend donc pas des valeurs des paramètres d'anisotropie η et τ . Si on considère le milieu (1) avec un rapport des constantes élastiques $\frac{C_{33}}{C_{55}}$ valant 2,25 (figure VI.10) puis 2,78 (figure VI.11) la valeur de cet angle change et vaut respectivement 61° et 66°. On note que plus le rapport $\frac{C_{33}}{C_{55}}$ est grand plus l'angle est grand. De même, la valeur de cet angle est constante quelle que soit la gamme d'incidence utilisée pour construire le jeu de données.

Ceci est visible sur l'exemple de la figure VI.3 pour lequel l'angle mesuré dans les trois cas vaut 74°. On a donc montré numériquement sur différents exemples que l'angle entre les vecteurs propres de la matrice Hessienne et les axes (η, τ) varie uniquement avec le rapport des constantes élastiques $\frac{C_{33}}{C_{55}}$. Il est possible de le montrer analytiquement si on utilise les équations approchées des vitesses apparentes verticales (3.11) exprimées en fonction des paramètres de Thomsen (annexe B). Les résultats ne sont pas directement comparables puisque dans ce cas on change de paramétrisation. Cependant, les courbes de sensibilité des vitesses de phase aux paramètres de Thomsen sont très proches de celles correspondant aux paramètres η et τ . On arrive aux mêmes conclusions quant aux variations des termes des vecteurs propres de la matrice Hessienne (6.12).

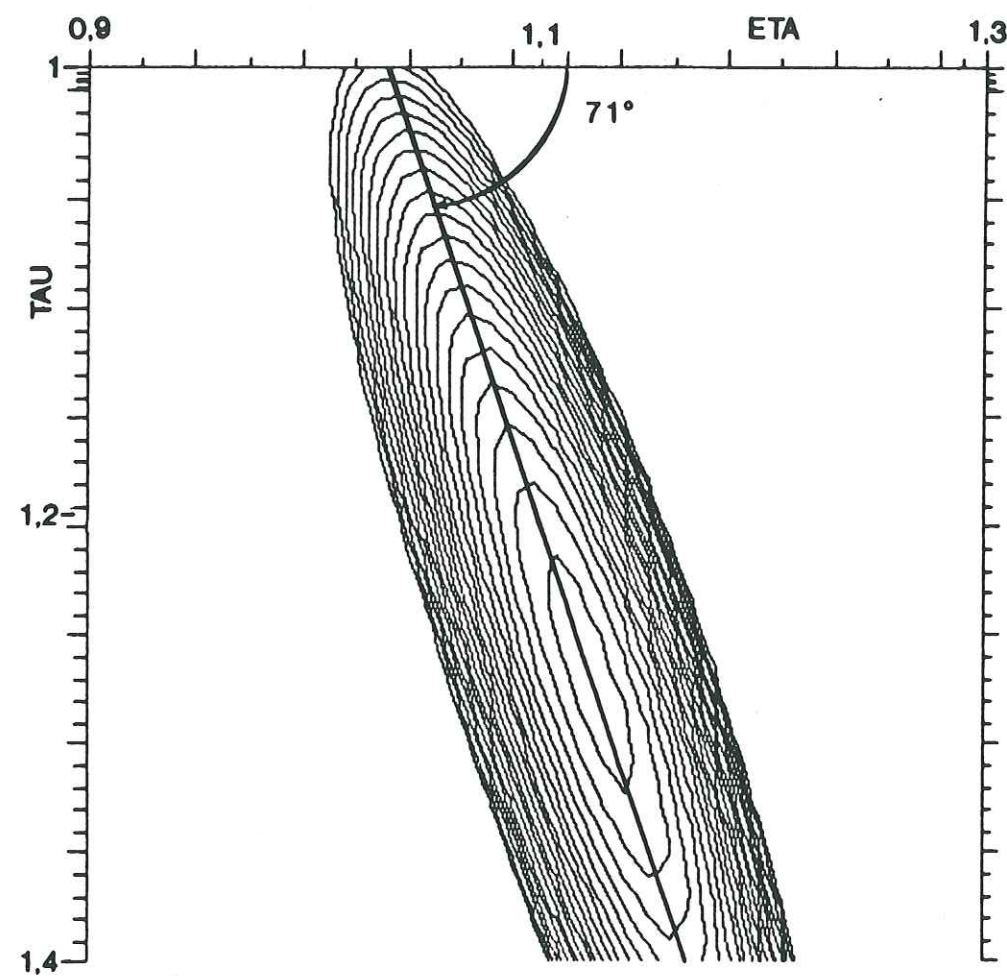


Figure VI.8. Représentation dans le plan (η, τ) de la fonction coût calculée avec les équations des vitesses apparentes verticales (6.2). Le rapport de la vitesse verticale P sur la vitesse verticale SV vaut 4. Dans cet exemple, on a considéré un jeu de données de 40 valeurs de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation correspondant à une gamme d'angles d'incidence allant de 0 à 80°. Les paramètres d'anisotropie valent : $\eta = 1,125$, $\tau = 1,266$, $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

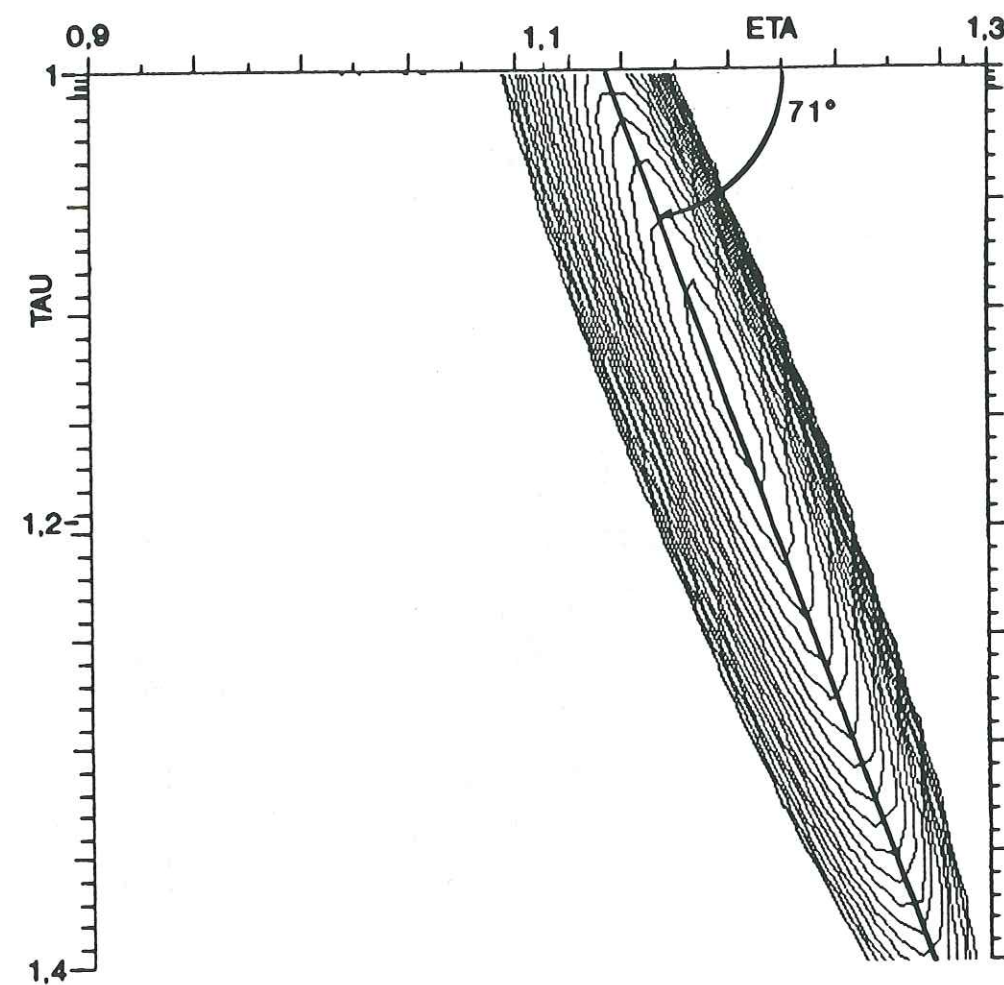


Figure VI.9. Même figure que la figure (VI.8) mais avec les deux paramètres η et τ valant respectivement 1,183 et 1,133.

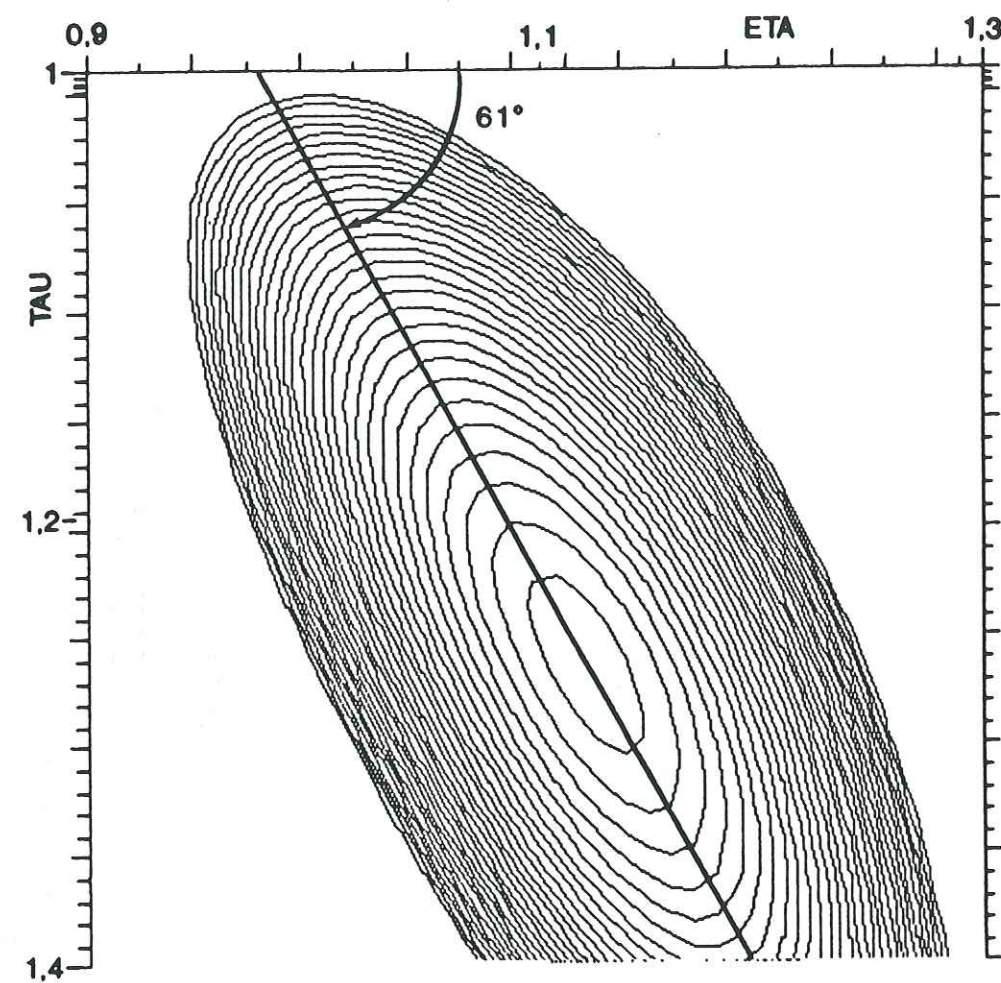


Figure VI.10. Même figure que la figure (VI.8) mais avec un rapport de la vitesse verticale P sur la vitesse verticale SV valant 2,25.

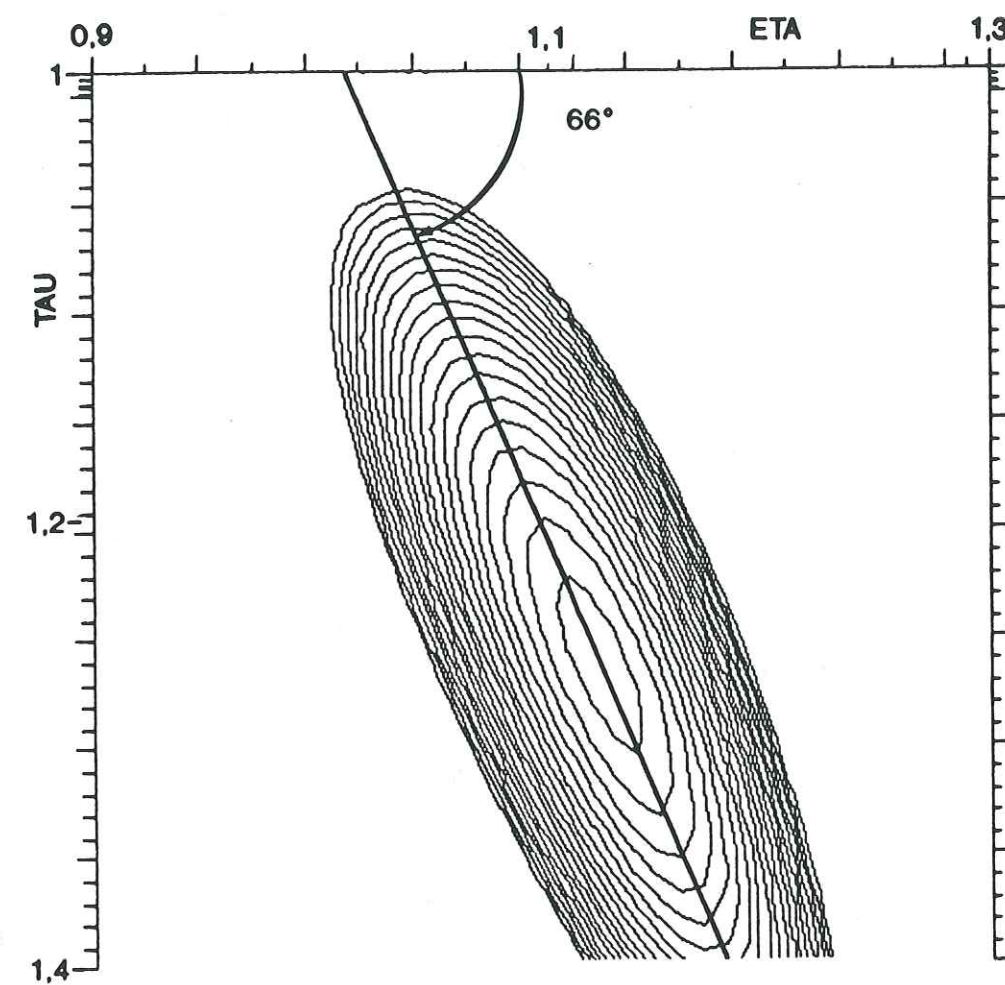


Figure VI.11. Même figure que la figure (VI.8) mais avec le rapport des vitesses verticales P sur les vitesses verticales SV valant 2,78.

6. Extension de la méthode à des milieux TI d'axe de symétrie non vertical.

On considère dans ce qui suit des milieux TI dont l'axe de symétrie n'est pas confondu avec la verticale. Inversement, la méthode proposée est applicable à des milieux TI d'axe vertical mais un puits d'enregistrement incliné dans le plan source récepteurs. On étudie le problème en deux dimensions. Cela revient à considérer dans le problème inverse une inconnue en plus qui est l'angle Ω entre l'axe du milieu étudié et l'axe vertical. Afin de ne pas inverser à la fois des paramètres d'anisotropie et des angles dans un même processus, on résout le problème de la façon suivante :

1. on se fixe une valeur d'angle entre l'axe de symétrie et l'axe vertical ;
2. on inverse les paramètres d'anisotropie à partir d'un jeu de données constitué de lenteurs (ou de vitesses) apparentes verticales et d'angles de polarisation ;
3. on note la valeur du minimum de la fonction coût puis on recommence le processus (point 1) avec une autre valeur d'angle ;
4. la solution retenue correspondra à la valeur de l'angle pour laquelle la fonction coût est minimale.

La fonction coût s'écrit alors :

$$C_{\Omega}(\vec{p}) = \delta \vec{F}_{P_{\Omega}}^T \cdot C_{D_P}^{-1} \cdot \delta \vec{F}_{P_{\Omega}} + \delta \vec{F}_{SV_{\Omega}}^T \cdot C_{D_{SV}}^{-1} \cdot \delta \vec{F}_{SV_{\Omega}}, \quad (6.13)$$

où :

$$\begin{aligned} \delta \vec{F}_{P_{\Omega}} &= (F_{P_{\Omega \text{ estime}}}(\vec{p}) - F_{P_{\text{observe}}}(\vec{p})), \\ \delta \vec{F}_{SV_{\Omega}} &= (F_{SV_{\Omega \text{ estime}}}(\vec{p}) - F_{SV_{\text{observe}}}(\vec{p})). \end{aligned} \quad (6.14)$$

(et $\vec{p} \in \mathbb{R}^4$)

Les termes $C_{D_P}^{-1}$ et $C_{D_{SV}}^{-1}$ sont les inverses des matrices de covariance sur les données de dimension $ND \times ND$ liées aux incertitudes sur les temps de parcours et les angles de polarisation (6.10.)

Cette méthode a été testée numériquement en simulant différents types d'acquisition de données de puits et différentes valeurs de l'angle Ω . On considère un jeu de données correspondant à 30 valeurs de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation. La figure (VI.12) montre les valeurs de la fonction coût (6.13) pour un dispositif de sources passant par le puits récepteur. On a considéré

trois milieux TI ayant la même anisotropie mais un axe de symétrie faisant un angle de 0° , 5° et -5° avec l'axe vertical. On note que la fonction coût n'est pas convexe. Les courbes apparaissent discontinues du fait du pas de 1° pour Ω . La même expérience a été faite en considérant un dispositif de sources de type PSO (figure VI.13). Dans tous les cas, on trouve la bonne valeur pour Ω mais la courbure de la fonction coût est beaucoup plus faible par rapport à l'exemple précédent. On montre que quelles que soient les valeurs des paramètres η et τ qui intéressent la sismique pétrolière (Thomsen, 1986), on obtient des résultats similaires. Par contre, la précision avec laquelle est estimé l'angle Ω dépend du nombre de données considérées dans le problème inverse. Il faut un minimum de 20 données correspondant à des angles d'incidences compris entre 0 et 60° pour obtenir un résultat à 2° près. D'autre part, le résultat dépend de façon significative de l'incertitude sur les données.

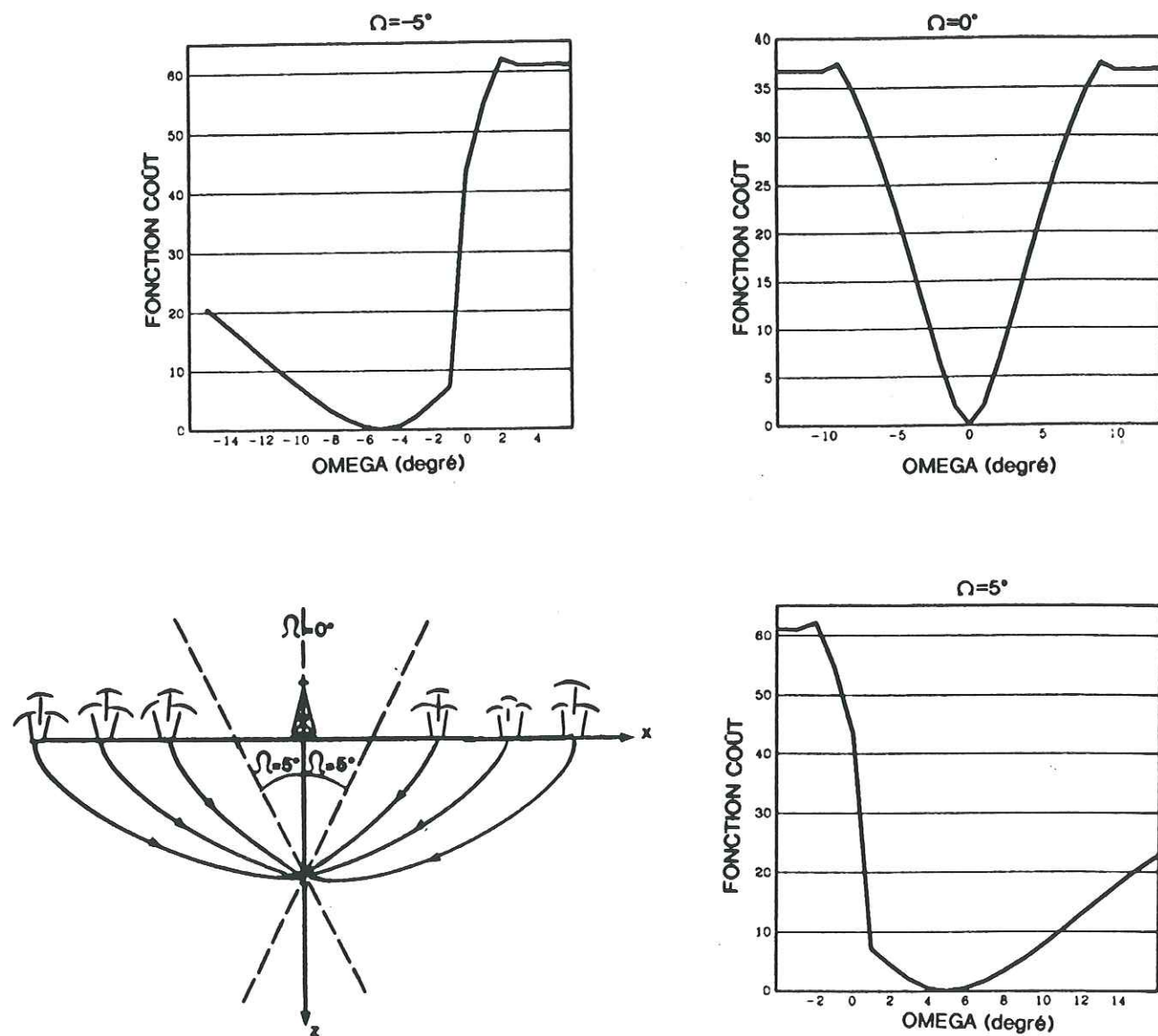


Figure VI.12. Forme de la fonction coût pour trois exemples de milieux TI ayant la même anisotropie ($\eta = 1,125$, $\tau = 1,266$, $\alpha_0 = 4000$ m/s et $\beta_0 = 2000$ m/s) avec un angle Ω valant -5° (gauche), 0° (droite) et 5° (bas). Pour ces exemples, on a considéré un jeu de données correspondant à 30 valeurs d'angles d'incidence comprises entre -75 et 75° .

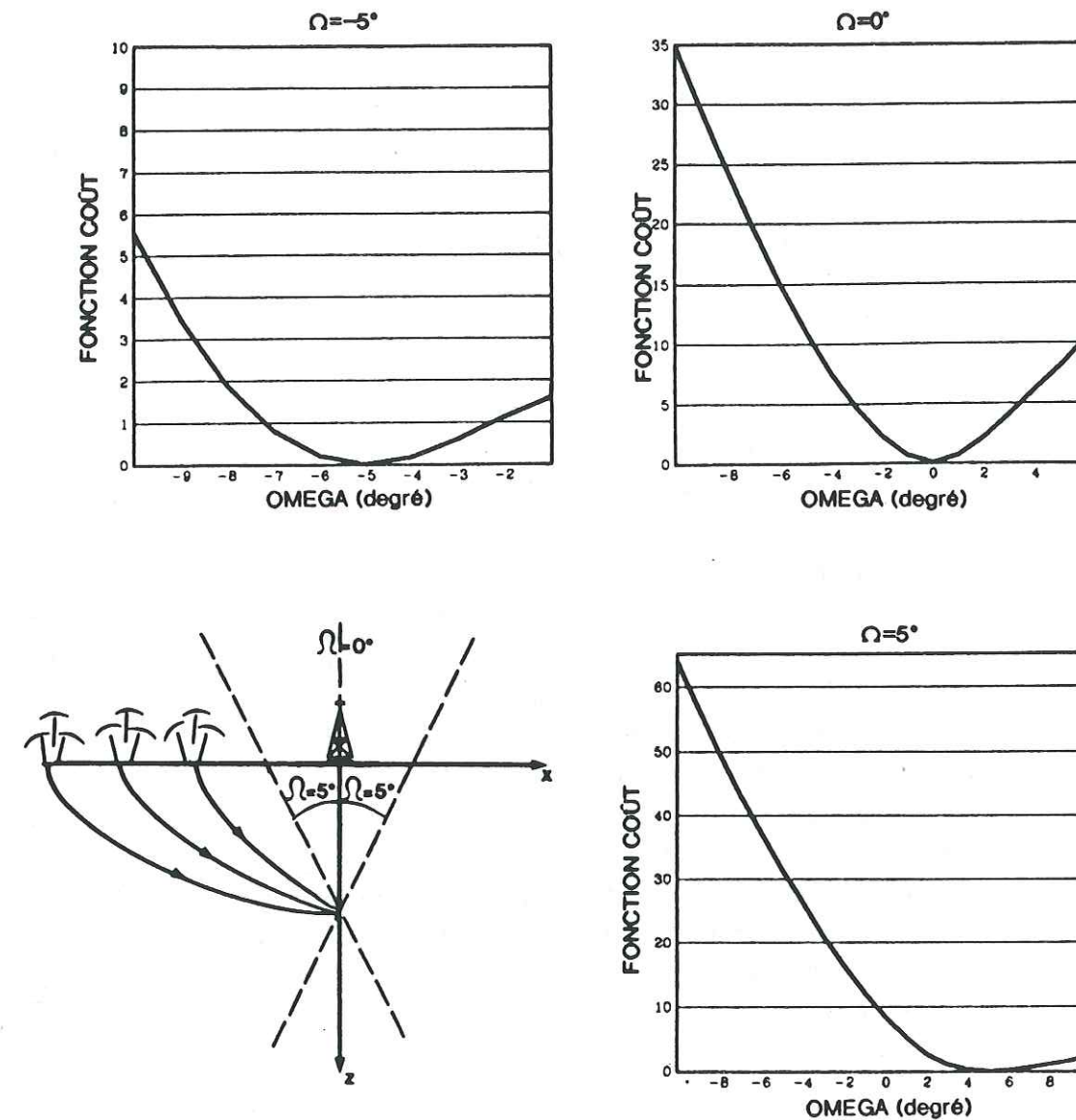


Figure VI.13. Expérience identique à la figure (VI.12) mais avec un jeu de 30 données correspondant à des angles d'incidence compris entre 0 et 80° .

7. Conclusion.

Nous avons montré dans ce chapitre que :

1. Pour estimer localement les paramètres d'anisotropie à partir de données de sismique de puits, il est préférable d'utiliser des modèles de lenteurs (ou de vitesses) apparentes verticales plutôt que des modèles du type lenteurs divisées par le cosinus de l'angle de polarisation. En effet, pour ces modèles, la fonction coût n'a pas une forme simple dans le plan des paramètres (η, τ) . Ceci augmente d'un facteur 10 le temps d'optimisation et les erreurs *a posteriori* sur la solution.

2. Il est nécessaire de prendre en compte dans le processus d'inversion les vitesses apparentes et les angles de polarisation des ondes qP . La sensibilité de ces vitesses à des perturbations des paramètres η et τ est du même ordre que celle des ondes qSV pour des angles d'incidence supérieurs à 50° .

3. Le paramètre η est estimé plus précisément que le paramètre τ . Les deux paramètres η et τ seront bien estimés si on considère seulement des données correspondant à des angles d'incidence inférieurs à 60° .

4. Les termes de la matrice Hessienne de la fonction coût calculée autour de la solution du problème inverse sont sensibles au rapport de la vitesse verticale P sur la vitesse verticale SV . Par contre, ces termes ne sont pas sensibles aux paramètres η et τ ni à la gamme d'incidences considérée pour calculer le jeu de données.

5. La méthode proposée est étendue à des milieux TI d'axe de symétrie non vertical. On montre qu'il est possible d'estimer, en plus des paramètres d'anisotropie, l'angle entre l'axe de symétrie du milieu et la verticale. Cependant, la méthode proposée ne permet pas de calculer directement une erreur sur l'angle estimé. La précision de l'estimation peut être visuellement appréciée par la courbure de la fonction coût.

Table des matières.

Chapitre 7. Application à des données synthétiques.	1
1. Introduction.	1
2. Cas de milieux synthétiques.	2
3. Cas de données synthétiques.	14
4. Conclusion.	20

CHAPITRE 7. Application à des données synthétiques.

1. Introduction.

La méthode d'inversion présentée dans le chapitre 6 est testée sur des données synthétiques.

Les paramètres $(\eta, \tau, \alpha, \beta)$ sont inversés à partir d'exemples de données synthétiques définis pour répondre aux questions suivantes :

1. À quelle gamme d'incidence les données (vitesses apparentes verticales et angles de polarisation) doivent-elles appartenir pour estimer avec précision les paramètres d'anisotropie ?
2. Est-il nécessaire d'utiliser les vitesses et les angles de polarisation des ondes q_P pour estimer les paramètres d'anisotropie, sachant que les ondes q_{SV} sont beaucoup plus sensibles à l'anisotropie que les ondes q_P (chapitre 6) ?
3. Quelle est l'influence des incertitudes de mesure de temps d'arrivées et d'angles de polarisation sur la précision des paramètres d'anisotropie estimés ?
4. À partir de combien de mesures de vitesses et d'angles de polarisation peut-on estimer avec une précision suffisante les paramètres d'anisotropie ?
5. Vaut-il mieux travailler avec des lenteurs plutôt qu'avec des modèles du type lenteurs pondérées par l'inverse du cosinus de l'angle de polarisation ?

Pour répondre à ces questions on utilise deux types de données :

1. **Des données calculées à partir de milieux synthétiques.** On considère un milieu TI défini dans le plan vertical par les 4 paramètres $(\eta, \tau, \alpha, \beta)$. On calcule pour différentes valeurs de l'angle d'incidence les temps de parcours apparents d'une onde plane q_P et q_{SV} sur une distance d simulant l'écart entre deux géophones. De plus, on calcule les angles de polarisation correspondants. Puis, ces valeurs de temps de parcours et d'angles sont bruitées par une incertitude gaussienne générée par tirages aléatoires ;

2. **Des données mesurées sur des films synthétiques.** On présente ici les résultats obtenus avec les données d'un "walkaway" calculées avec le code de H. Schmit (Schmit et Tango, 1986) et présentés par Hsu, Schoenberg et Walsh (1990).

2. Cas de milieux synthétiques.

On présente ici les résultats de 4 expériences d'inversion. Pour toutes ces expériences, on a considéré un milieu TI dont les paramètres d'anisotropie valent $\eta = 0,819$, $\tau = 1,328$ et les vitesses verticales des ondes P et SV valent $\alpha_0 = 4000\text{m/s}$ et $\beta_0 = 2500\text{m/s}$. On a calculé pour ce milieu 40 valeurs de temps de parcours verticaux et d'angles de polarisation pour les ondes q_P et q_{SV} . Ces 40 valeurs correspondent à deux intervalles d'angles d'incidences : 0 à 80° et 0 à 50°. On a calculé un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart-type 1° pour les angles de polarisation et 1 ms pour une distance entre deux géophones égale à 100 m. Pour chaque expérience, le bruitage des vitesses et des angles est fait à partir du même tirage aléatoire. Ainsi, les résultats d'inversion sont directement comparables.

Les figures (VII.1) et (VII.2) montrent les courbes de lenteurs apparentes verticales en fonction de la polarisation et les surfaces de vitesse estimées pour un jeu de données correspondant respectivement aux intervalles d'angles d'incidence 0 à 80° (jeu de données n°1) et 0 à 50° (jeu de données n°2). Les valeurs des paramètres estimés à partir des temps de parcours verticaux et des angles de polarisation sont données avec leur incertitude dans le tableau 1. De plus, le tableau 1 présente les résultats d'inversion obtenus en utilisant comme application des lenteurs apparentes verticales divisées par le cosinus de l'angle de polarisation.

	MILIEU ESTIMÉ			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
	LENTEURS APPARENTES			
JEU N°1	0,849 ± 0,04	1,354 ± 0,08	4005 ± 38	2508 ± 26
JEU N°2	0,809 ± 0,03	1,269 ± 0,11	3996 ± 33	2496 ± 66
	LENTEURS APPARENTES/COS(γ)			
JEU N°1	0,877 ± 0,10	1,402 ± 0,19	3990 ± 38	2510 ± 26
JEU N°2	0,773 ± 0,10	1,243 ± 0,16	3985 ± 33	2492 ± 66

Tableau 1. Valeurs des paramètres estimés avec leur intervalle de confiance à partir de 40 valeurs de vitesses (ou de lenteurs) apparentes verticales et de polarisation correspondant aux gammes d'angles d'incidence : 0 à 80° (jeu n°1) et 0 à 50° (jeu n°2).

Ces résultats montrent que :

1. Il est préférable d'inverser les paramètres d'anisotropie à partir des lenteurs apparentes verticales plutôt qu'à partir des lenteurs divisées par le cosinus de l'angle de polarisation. En effet, l'erreur sur les valeurs estimées pour les paramètres η et τ est de l'ordre de 50% si on considère comme modèles des lenteurs divisées par $\cos\gamma$. Par contre, les valeurs estimées pour les deux vitesses verticales P et SV sont proches des valeurs vraies quel que soit le modèle considéré. Cela signifie que, dans les deux cas, les deux paramètres α et β ne sont pas sensibles au bruit donné sur les temps et sur les angles. En effet, α et β s'écartent très peu de leur valeur initiale d'une itération à l'autre dans le processus d'inversion.

2. C'est dans la gamme d'incidence 0 à 50° (jeu n°2) que le paramètre d'anisotropie η est estimé avec le plus de précision quand on considère les lenteurs apparentes verticales dans le processus d'inversion. Par contre, c'est dans la gamme 0 à 80° (jeu n°1) pour le paramètre d'anisotropie τ . On retrouve ici les résultats de l'étude de sensibilité des lenteurs en fonction de l'angle de polarisation

(chapitre 6). La gamme d'incidence 0 à 50° étant généralement celle dans laquelle se situent les données de "walkaway", on montre par ces exemples que l'on pourra estimer avec une précision suffisante les paramètres d'anisotropie.

3. Les surfaces de vitesse montrent que le jeu de paramètres estimés explique mieux les vitesses des ondes q_{SV} que celles des ondes q_P . En effet, nous avons montré dans le chapitre 6 que la sensibilité de la lenteur apparente verticale des ondes q_{SV} aux paramètres η et τ est plus importante que celle des ondes q_P .

Ce même type d'expérience a permis de montrer que, pour l'ordre de grandeur des incertitudes utilisées ici, il est nécessaire d'avoir au moins 10 points de mesure de lenteurs pour estimer avec une précision de l'ordre du centième le paramètre η . Pour le paramètre τ , ce nombre doit être au moins égal à 20 pour une précision de l'ordre du dixième.

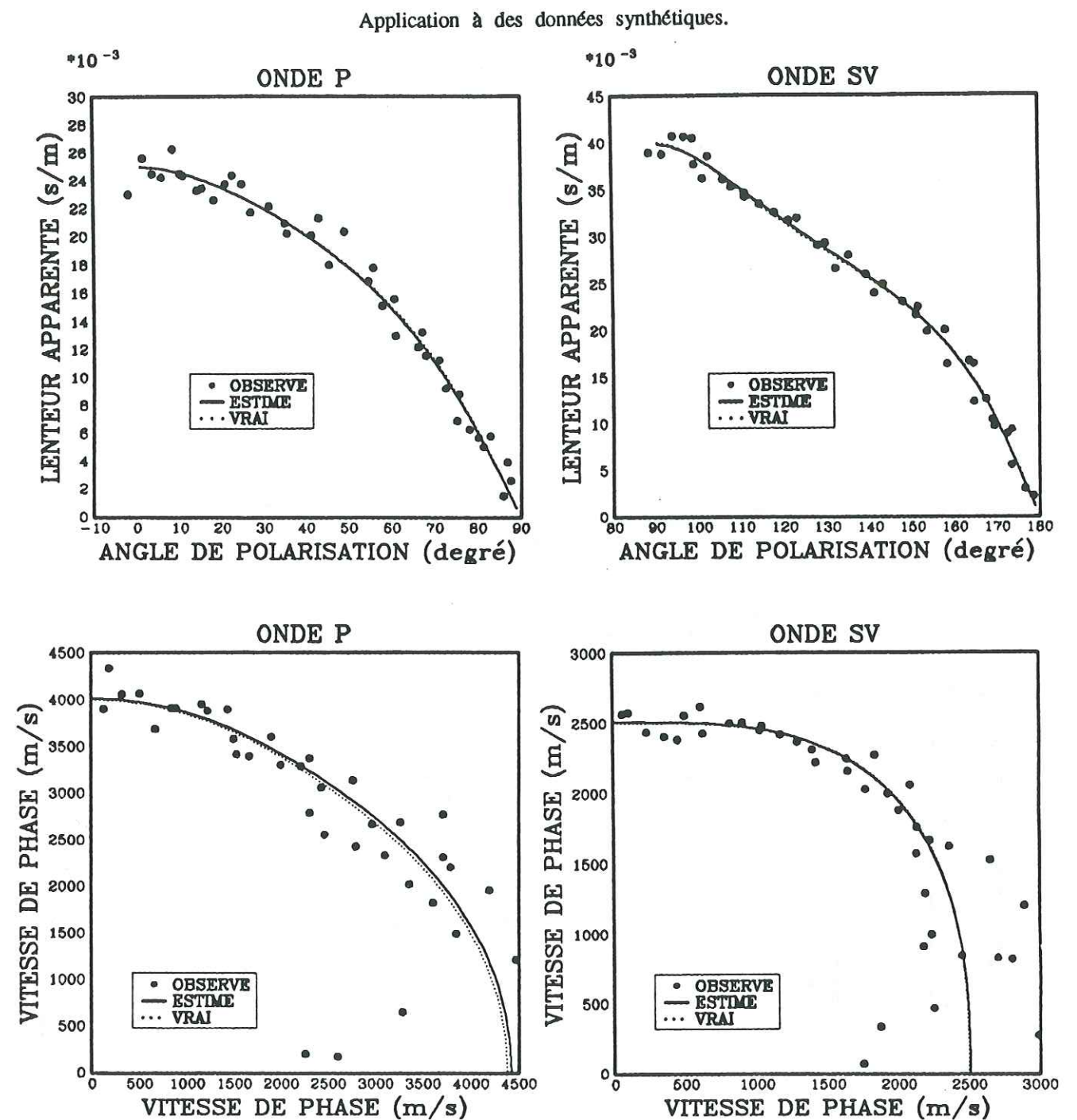


Figure VII.1. Représentation pour le jeu de données n°1 des surfaces de vitesse (bas) et des lenteurs apparentes verticales en fonction de la polarisation (haut) des ondes q_P (gauche) et q_{SV} (droite).

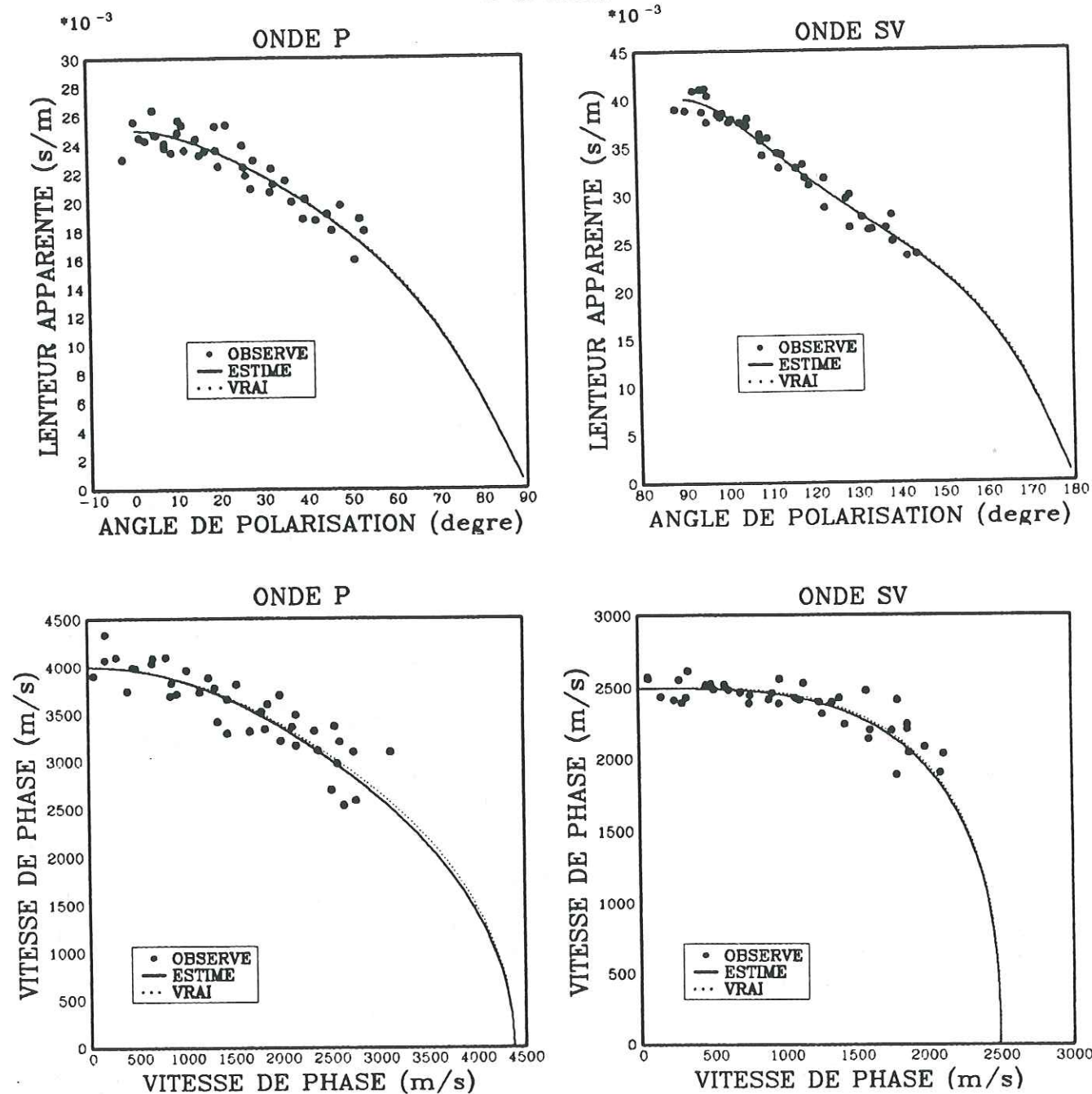


Figure VII.2. Représentation pour le jeu de données n°2 des surfaces de vitesse (bas) et des lenteurs apparentes verticales en fonction de la polarisation (haut) des ondes q_P (gauche) et q_{SV} (droite). Les modèles vrai et estimé donnent des courbes confondues pour les lenteurs apparentes et pour les surfaces de vitesse.

Dans l'exemple suivant, on considère le jeu de données n°2 avec des incertitudes différentes pour les ondes q_P et q_{SV} . En effet, sur des données réelles, on considère que les données P sont deux fois plus précises que les données S . Pour cette expérience, on a considéré une incertitude sur les temps de 0,5ms pour les ondes q_P et de 1ms pour les ondes q_{SV} et une incertitude sur les angles de polarisation de 2° pour les ondes q_P et de 4° pour les ondes q_{SV} . Ces valeurs sont réalistes vis-à-vis de mesures sur données réelles. Le tableau 2 présente les valeurs des paramètres d'anisotropie estimés avec ce jeu de données.

	MILIEU ESTIMÉ			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
	LENTEURS APPARENTES			
JEU N°1	$0,814 \pm 0,05$	$1,520 \pm 0,12$	4005 ± 18	2496 ± 27
	LENTEURS APPARENTES/COS(γ)			
JEU N°1	$1,01 \pm 0,14$	$1,616 \pm 0,3$	4003 ± 89	2523 ± 163

Tableau 2. Valeurs des paramètres estimés avec leur intervalle de confiance à partir de 40 valeurs de lenteurs apparentes verticales et d'angles de polarisation du jeu de données n°1. Pour cette expérience, les incertitudes sur les temps et les angles correspondant aux ondes q_P sont deux fois supérieures à celles correspondant aux ondes q_{SV} .

La figure (VII.3) montrent les courbes des lenteurs apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} en fonction de la polarisation pour les milieux exacts et estimés ainsi que les surfaces de vitesses.

Ces résultats montrent que :

1. Les paramètres ne sont absolument pas retrouvés quand on considère des lenteurs apparentes verticales divisées par le cosinus de l'angle de polarisation dans le processus d'inversion. Ce type d'application n'est utilisable que pour des données non bruitées. En effet, dans le cas de données bruitées, les erreurs de mesure sur les temps et sur les angles se multiplient et les termes de la matrice

Jacobienne sont très inférieurs à 1. Ceci a pour conséquence des erreurs sur les paramètres estimés proches de 100% ;

2. Le fait de considérer une incertitude deux fois plus importante sur les données P par rapport des données S permet de donner un poids plus fort aux termes de la fonction coût correspondant aux lenteurs des ondes q_P . Ceci se vérifie sur les surfaces de vitesses. En effet, les courbes correspondant au modèle exact et estimé sont quasiment confondues que l'on considère les lenteurs des ondes q_{SV} ou q_P .

Application à des données synthétiques.

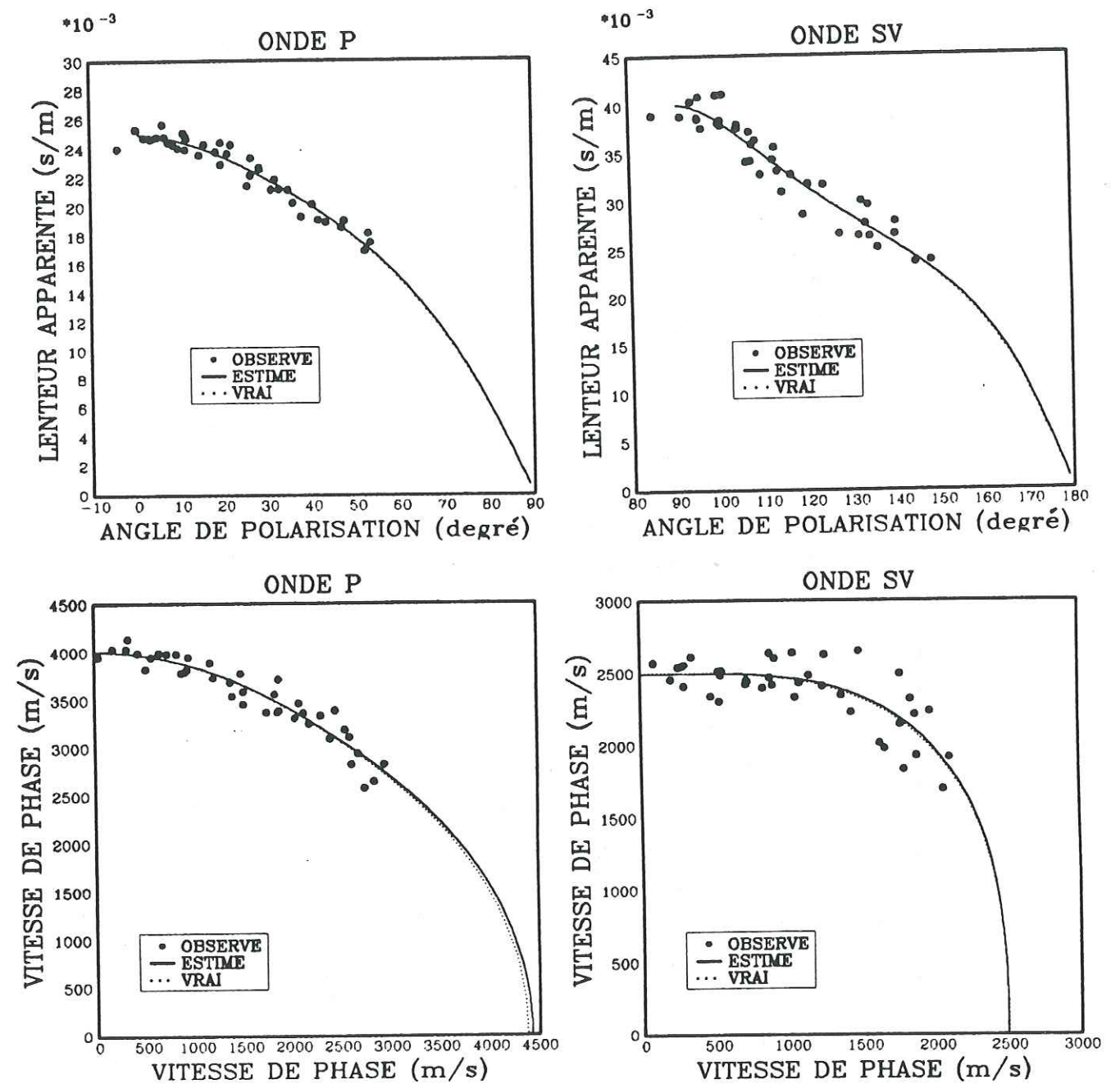


Figure VII.3. Même représentation que la figure (VII.2) mais en considérant des incertitudes sur les données SV deux fois supérieures à celles des données P .

Enfin, dans une dernière expérience, on a considéré uniquement les lenteurs apparentes verticales et les angles de polarisation des ondes q_{SV} du jeu de données n°1. La lenteur apparente verticale des ondes q_{SV} est plus sensible que les ondes q_P à des perturbations des paramètres η et τ (chapitre 6). De ce fait, il est intéressant de comparer les résultats d'inversion obtenus en utilisant à la fois l'information des ondes q_P et q_{SV} avec ceux obtenus en ne considérant que l'information des ondes q_{SV} . Pour cette expérience, on a inversé d'abord les 4 paramètres (jeu n°1a) puis on a refait l'expérience en fixant le paramètre α à 1 (jeu n°1b). Le tableau 3 présente les valeurs des paramètres estimés. Ces résultats montrent que :

1. On ne peut pas estimer le paramètre α si on ne considère que des données issues des arrivées q_{SV} dans le processus d'inversion.

2. Les valeurs trouvées pour les paramètres η et τ sont proches des valeurs exactes. Cependant l'erreur sur ces paramètres est supérieure à 100%. On montre qu'avec des données bruitées, même les valeurs estimées de η et τ sont fausses.

Il apparaît alors clairement qu'il est nécessaire d'utiliser l'information des deux types d'ondes dans le processus d'inversion pour avoir une précision maximale

	MILIEU ESTIMÉ			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
	LENTEURS APPARENTES			
JEU N°1 a	$0,773 \pm 0,51$	$1,075 \pm 0,83$	3678 ± 2100	2502 ± 35
JEU N°1 b	$0,834 \pm 0,50$	$1,321 \pm 0,84$	$4000 \pm -$	2505 ± 35

Tableau 3. Valeurs des paramètres estimés avec leur intervalle de confiance à partir de 40 valeurs de lenteurs apparentes verticales et d'angles de polarisation des ondes q_{SV} du jeu de données n°1.

Les figures (VII.4) et (IV.5) montrent, respectivement pour les jeux de données n°1a et n°1b, les courbes des lenteurs apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} en fonction de la polarisation pour les milieux exacts et estimés ainsi que les surfaces

de vitesses correspondantes. La figure (VII.4) montre que les vitesses obtenues sont sous-estimées par rapport à celles correspondant au milieu exact. En comparant ces résultats avec ceux de la figure (VII.1), on voit que l'information donnée par les ondes q_P permet de mieux approcher la solution.

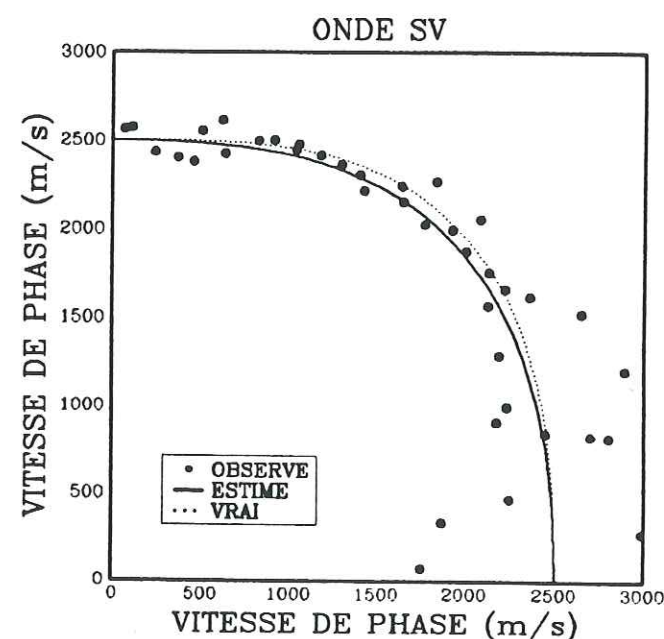
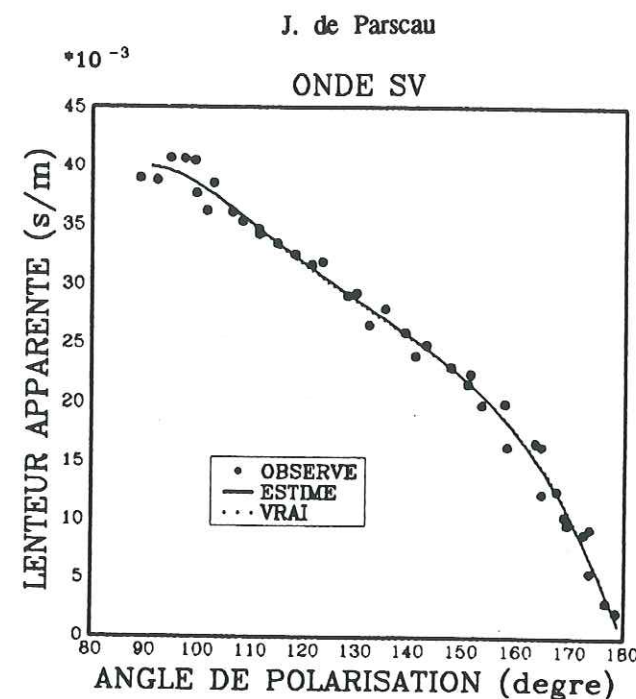


Figure VII.4. Représentation pour le jeu de données n°1a des lenteurs apparentes verticales en fonction de la polarisation (haut) pour les ondes q_{SV} ainsi que les surfaces de vitesses correspondantes (bas). Dans cette expérience seules les lenteurs apparentes verticales et les angles de polarisation des ondes q_{SV} ont été utilisés pour estimer les paramètres du milieu.

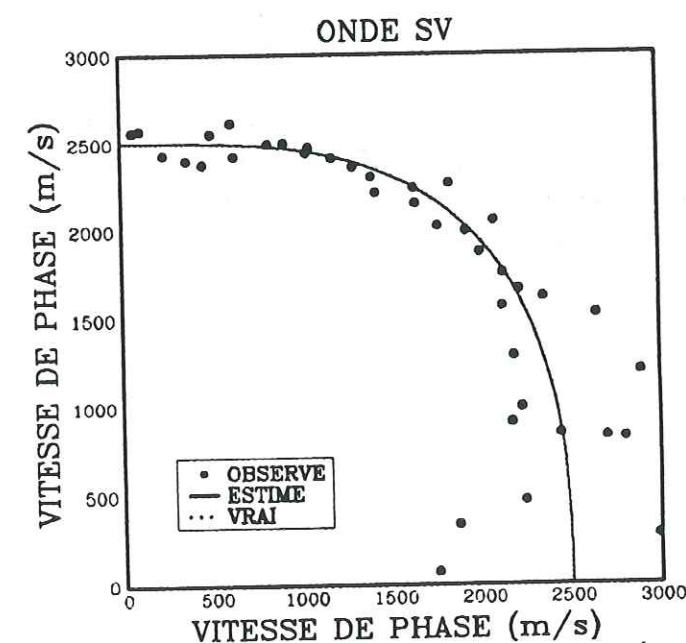
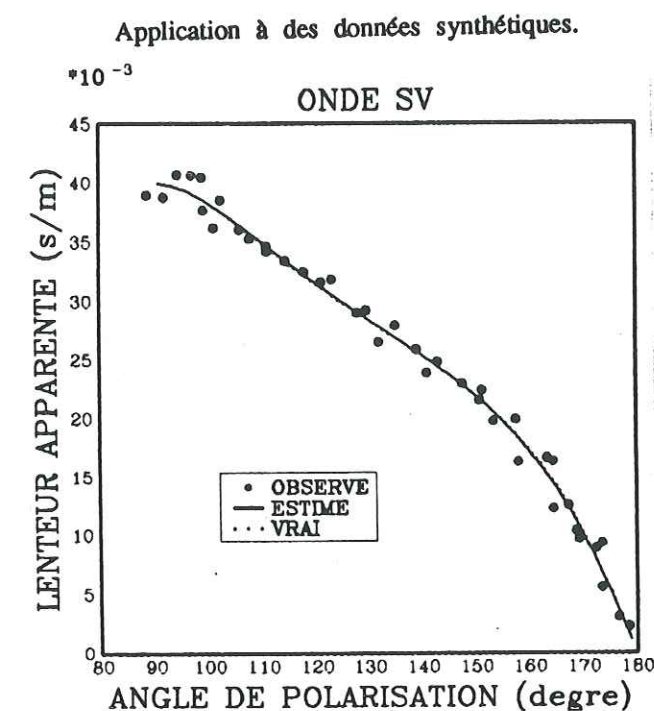


Figure VII.5. Représentation pour le jeu de données n°1b des lenteurs apparentes verticales en fonction de la polarisation (haut) pour les ondes q_{SV} ainsi que les surfaces de vitesses correspondantes (bas). Pour cette expérience on a inversé seulement trois paramètres (η, τ, β), le paramètre α est fixé à 1 à partir des lenteurs apparentes verticales et des angles de polarisation des ondes q_{SV} du jeu de données n°1.

3. Cas de données synthétiques.

On présente dans cette partie les résultats de l'inversion des paramètres d'anisotropie ($\eta, \tau, \alpha, \beta$) obtenus à partir d'un jeu de données synthétiques de "walkaway". Ces données ont été utilisées par Hsu, Schoenberg et Walsh (1990) pour tester une méthode d'inversion basée sur les équations (19) du chapitre 5. Cette méthode considère comme inconnues les 4 modules élastiques décrivant la propagation des ondes q_P et q_{SV} et les angles d'incidences. Ainsi, pour N couples de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation, on aura $N+4$ paramètres à estimer. On compare les résultats obtenus par cette méthode avec ceux obtenus avec la méthode proposée dans cette étude (chapitre 6).

Le modèle de terrain consiste en une couche transversalement isotrope comprise entre deux couches isotropes, la couche supérieure ayant des vitesses P et SV inférieures à celles de la couche inférieure (figure VII.6). La couche isotrope profonde a des vitesses telles qu'elle constitue un réflecteur, ce qui permettra de considérer le champ d'ondes montantes.

Les données synthétiques générées utilisent cinq dépôts pour une source explosive placée à la surface et cinq géophones placés dans le milieu TI comme le montre la figure (VII.6). Pour chaque dépôt, on a considéré les champs d'ondes descendant et montant ; puis les lenteurs apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} et les angles de polarisation correspondant ont été calculés en moyennant les valeurs mesurées sur les 5 géophones (tableau 4).

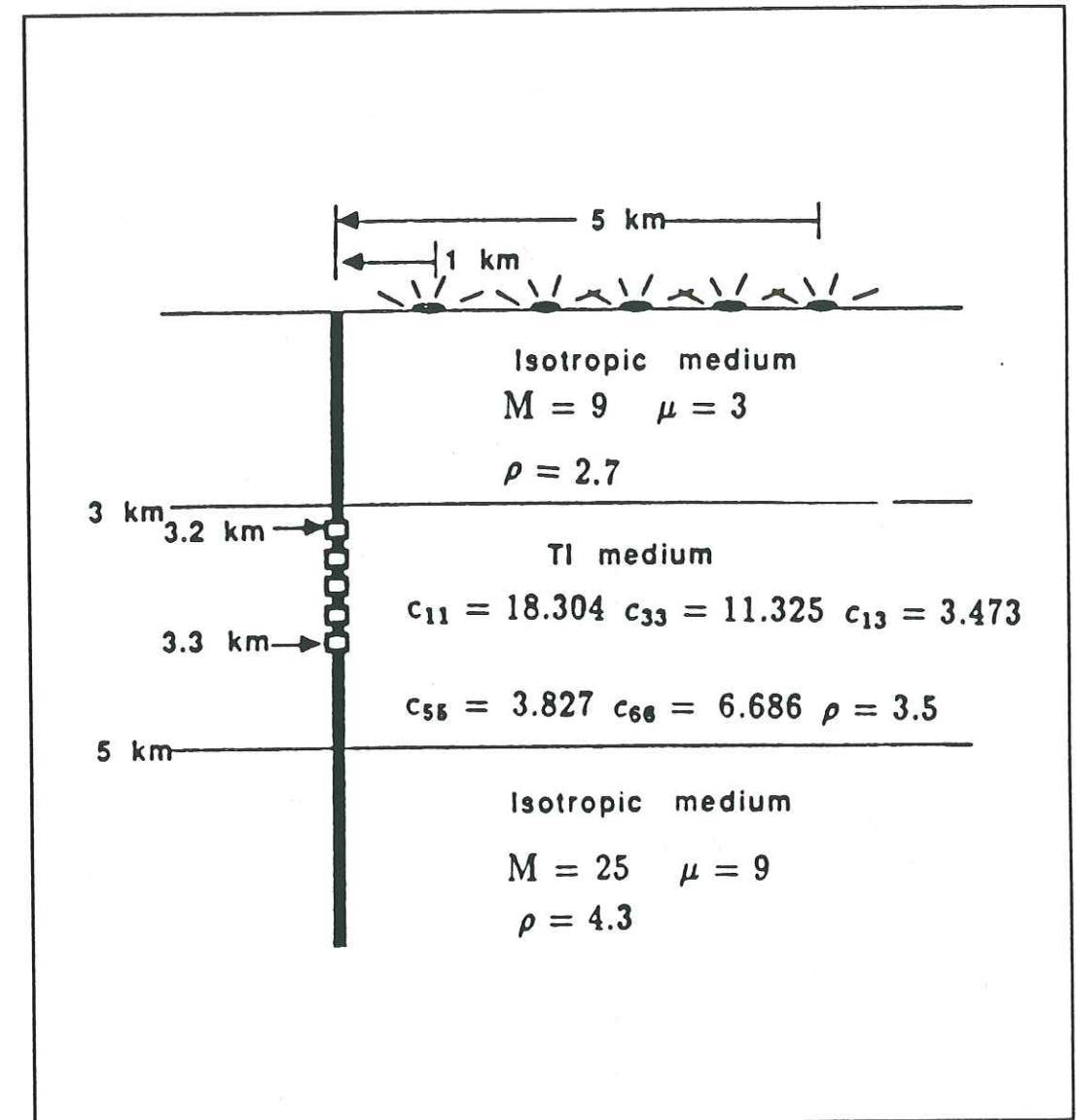


Figure VII.6. Le modèle de terrain et le dispositif d'acquisition (Hsu *et al.*, 1990).

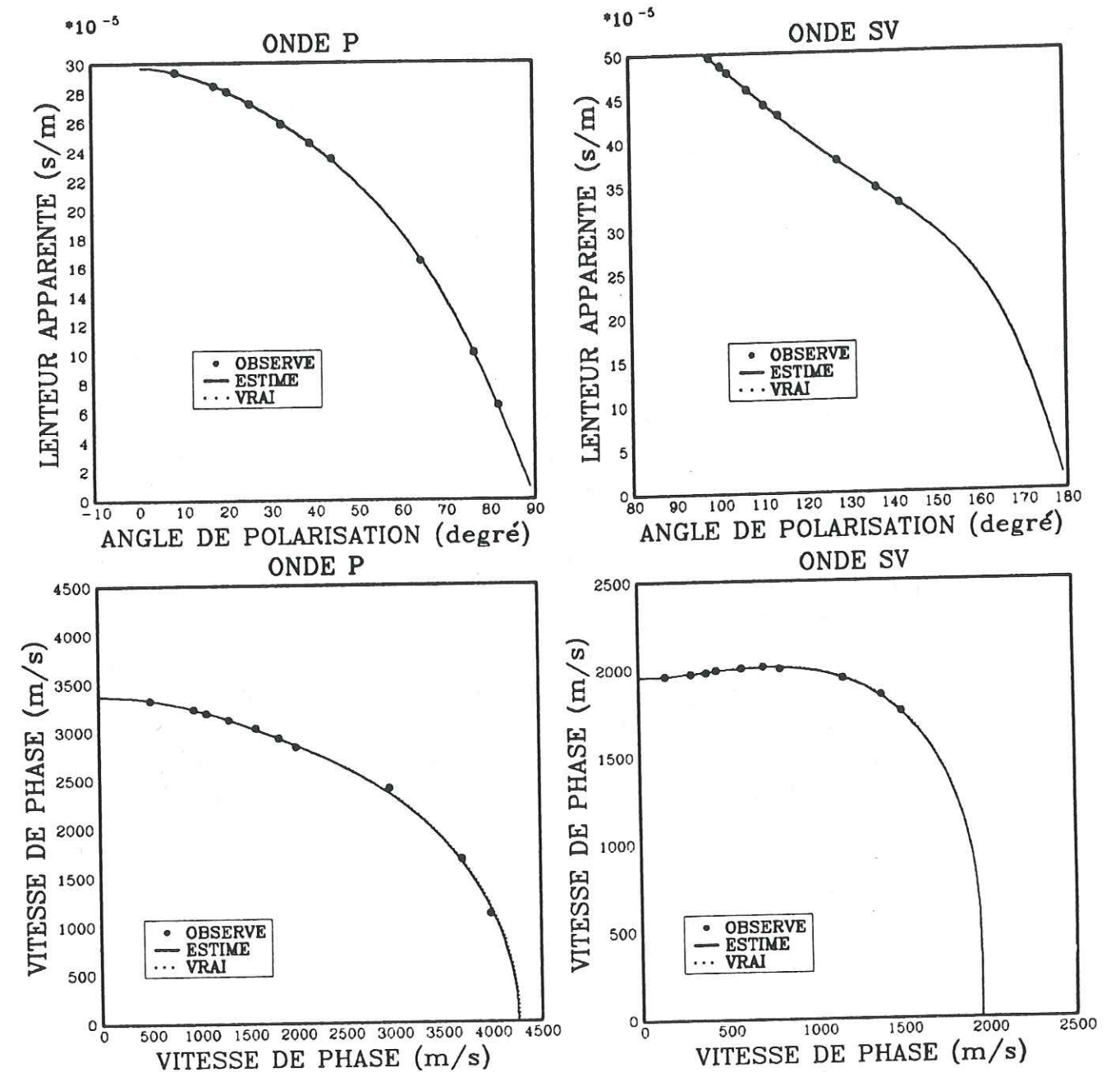
	ONDES P DESCENDANTES		ONDES SV DESCENDANTES	
déport (m)	lenteur apparente (s/km)	angle de polarisation (degré)	lenteur apparente (s/km)	angle de polarisation (degré)
1000	0,28084	20,4	0,48622	101,2
2000	0,23496	44,4	0,43012	114,4
3000	0,16437	64,6	0,37763	127,8
4000	0,10072	76,6	0,34580	136,8
5000	0,06431	81,9	0,32208	142,1

	ONDES P MONTANTES		ONDES SV MONTANTES	
déport (m)	lenteur apparente (s/km)	angle de polarisation (degré)	lenteur apparente (s/km)	angle de polarisation (degré)
1000	-0,29396	171,2	-0,50689	85,7
2000	-0,8461	162,5	-0,49588	81,4
3000	-0,27231	154,3	-0,47867	77,2
4000	-0,25853	147,2	-0,45932	72,7
5000	-0,24541	140,6	-0,44193	68,9

Tableau 4. Valeurs expérimentales des lenteurs apparentes verticales et des angles de polarisation des ondes descendantes et montantes q_P et q_{SV} .

L'étude de ces données montrent que les incertitudes sur les temps et les angles sont très faibles (conversation avec M. Schoenberg). Les résultats montrés ici ont été obtenus en prenant une incertitude de 0,1 ms pour les ondes q_P et de 0,2 ms pour les ondes q_{SV} , puis de 1° pour les angles de polarisation des ondes q_P et de 2° pour les ondes q_{SV} . Le jeu de paramètres initial choisi est $\eta = \tau = \alpha = \beta = 1$ et les vitesses verticales P et SV données en entrée de l'optimiseur sont respectivement égales à 3360 m/s et 1950 m/s. Le tableau 5 compare les valeurs des paramètres estimés avec les valeurs données par Hsu *et al.* Les résultats obtenus sont très comparables à ceux de Hsu *et al.* que l'on considère les lenteurs apparentes verticales ou les lenteurs divisées par le cosinus de l'angle de polarisation dans le processus d'inversion. Le paramètre η est retrouvé au millième près, le paramètre τ au centième près et les vitesses verticales P et SV sont retrouvées au mètre par seconde près. Seule l'erreur d'estimation sur le paramètre τ est importante. Ceci est dû au fait que le nombre de données vaut seulement 10. On montre qu'il est nécessaire d'avoir un nombre de données au moins égal à 20 pour avoir une résolution du paramètre τ de l'ordre du centième. La figure (VII.7) montre les courbes de vitesses apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation et les surfaces de vitesse.

	MILIEU ESTIMÉ			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
	LENTEURS APPARENTES			
de Parscau	$0,974 \pm 0,015$	$1,919 \pm 0,057$	$3363 \pm 5,82$	$1956 \pm 5,85$
Hsu <i>et al.</i>	0,973	1,906	3362	1956
	LENTEURS APPARENTES/COS γ			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
	MILIEU VRAI			
de Parscau	$0,973 \pm 0,015$	$1,912 \pm 0,056$	$3361 \pm 5,82$	$1955 \pm 5,16$
	MILIEU VRAI			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
	0,973	1,931	3365	1956

Tableau 5. Valeurs des paramètres estimés par inversion comparées avec les résultats de Hsu *et al.* (1990).Figure VII.7. Représentation pour le jeu de données synthétiques de Hsu *et al.* (1990) des lenteurs apparentes verticales en fonction de la polarisation (haut) pour les ondes q_P (gauche) et q_{SV} (droites) ainsi que les surfaces de vitesse correspondant (bas).

4. Conclusion.

L'estimation des paramètres $(\eta, \tau, \alpha, \beta)$ par optimisation des lenteurs apparentes verticales et des angles de polarisation pour les ondes q_P et q_{SV} confirme les conclusions de l'étude de sensibilité des vitesses apparentes en fonction de la polarisation (chapitre 6) à savoir :

1. Il est préférable d'utiliser les lenteurs plutôt que des applications du type lenteurs divisées par le cosinus de l'angle de polarisation dans le processus d'inversion quand les données sont bruitées.

2. C'est dans la gamme d'incidences 0 à 50° que le paramètre d'anisotropie η est estimé avec le plus de précision. Pour le paramètre τ , on obtient le maximum de précision dans la gamme d'incidences 0 à 80°. Néanmoins la précision obtenue dans la gamme 0 à 50° reste satisfaisante.

3. Il est nécessaire de prendre en compte l'information des ondes q_P dans le processus d'inversion pour estimer précisément les paramètres d'anisotropie.

4. Pour un même jeu de données, l'augmentation du bruit sur les valeurs de lenteurs apparentes verticales et d'angles de polarisation donnent des valeurs similaires pour les paramètres estimés η et τ . Seules les erreurs sur ces paramètres augmentent de façon significative.

5. Il faut un nombre de données au moins égal à 10 pour retrouver le paramètre η avec une précision de l'ordre du centième. Ce nombre doit être supérieur à 20 pour retrouver le paramètre τ avec une précision de l'ordre du dixième. Ces ordres de grandeur sont valables pour des incertitudes sur les temps de l'ordre de la milliseconde et de 1° sur les angles de polarisation.

Table des matières.

Chapitre 8. Application à des données réelles.	1
1. Application aux données de Pierre Shale.	1
1.1 Introduction.	1
1.2 Analyse des vitesses des ondes q_p et q_{sv} à partir de données de PSV.	3
1.3 Discussion.	30
1.4 Résultats obtenus par une méthode graphique.	34
2. Application à des données de "walkaway" : Courgivaux.	38
2.1 Introduction.	38
2.2 L'acquisition.	38
2.3 Le milieu étudié.	41
2.4 Réorientation des données.	43
2.4.1 Dans le plan horizontal.	43
2.4.2 Dans le plan vertical.	45
2.5 Construction du jeu de données.	46
2.6 Estimation des paramètres d'anisotropie.	52

CHAPITRE 8. Application à des données réelles.

1. Application aux données de Pierre Shale.

1.1 Introduction.

Les données de Pierre Shale (Brush, Colorado, USA) ont été enregistrées sur le site expérimental de la Colorado School of Mines. L'objectif était de mesurer les 5 coefficients élastiques caractérisant un milieu TI. Les résultats ont été publiés par White, Martineau-Nicoletis et Monash (1983). L'originalité de cette étude est que les données ont été acquises dans deux puits très rapprochés l'un de l'autre. Les sources étaient régulièrement espacées à la surface (figure VIII.1). Les vitesses de phase des ondes q_P , q_{SV} et SH ont pu être ainsi mesurées directement pour différentes incidences. D'autre part, l'homogénéité quasiment parfaite des Pierre Shale vis-à-vis des vitesses des ondes P rend ce site particulièrement bien adapté pour ce type de mesures.

Nous avons utilisé dans notre étude les données issus d'un seul de ces puits pour inverser les paramètres d'anisotropie à partir des mesures de lenteurs apparentes verticales et d'angles de polarisation. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de White *et al.* (1983).

Ces résultats ont fait l'objet d'un article en anglais publié dans Geophysical Journal International (décembre 1991).

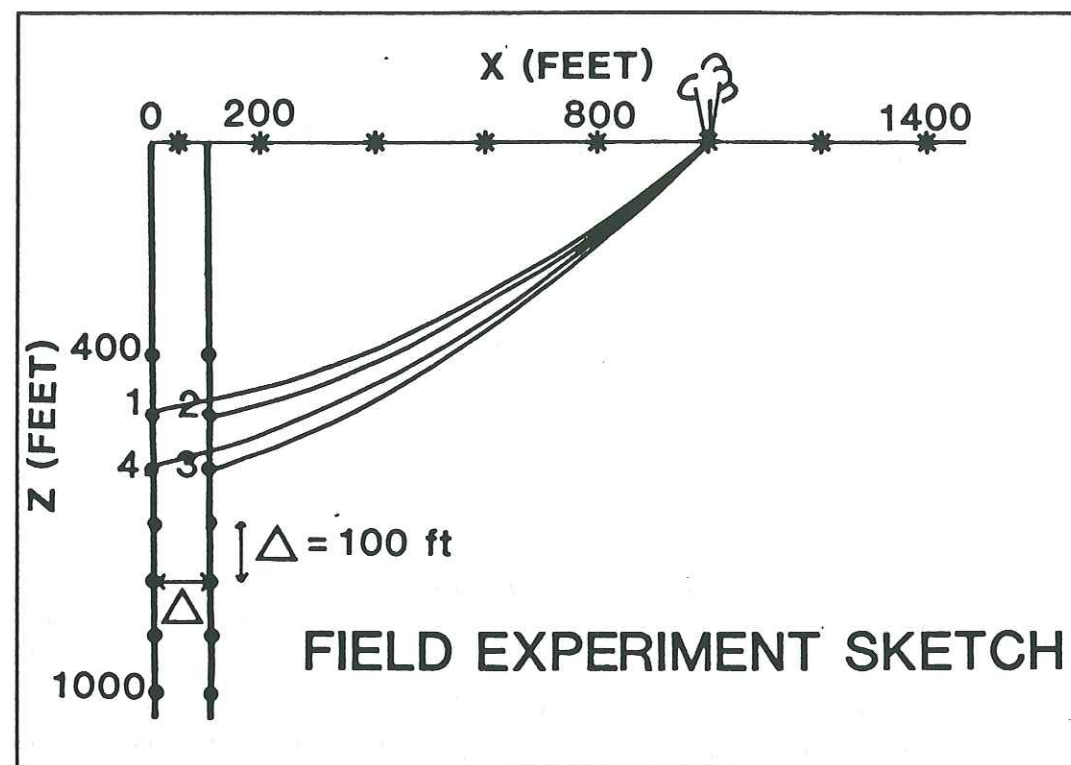


Figure VIII.1. Dispositif d'acquisition des données de Pierre Shale (d'après White *et al.*, 1983)

1.2 Analyse des vitesses des ondes q_P et q_{SV} à partir de données de PSV.

Cette partie est rédigée en anglais et constitue un article publié dans le numéro de décembre 1991 de la revue *Geophysical Journal International*.

P- and *SV*-wave transversely isotropic phase velocities analysis from VSP data.

J. de Parscau

Institut Français du Pétrole, P.O. BOX 311, 92506 Rueil-Malmaison, FRANCE

SUMMARY

The purpose of this paper is to obtain some measurements of the seismic anisotropy from VSP data independently of the complexity of the medium between source and receiver locations. The anisotropy at receiver locations is studied by analyzing *P*- and *SV*-wave phase velocities as well as polarization directions under the hypothesis of a transversely isotropic (TI) medium with a vertical axis of symmetry. Multiple-source offset VSPs provide generally direct *P*- and *SV*-waves for different incident angles. In this study, the data pairs used are the interval apparent vertical velocities and the polarization directions related to both *P*- and *SV*-waves. These directions are given, in the vertical plane, by the angle γ from the vertical axis. Apparent vertical velocities are computed from the delays for a constant phase which travels in the interval between two receivers. This interval has to be smaller than the seismic wavelength in order to consider these velocities as *P*- and *SV*-wave phase velocities. The forward problem is defined by the exact equations of *P*- and *SV*-wave velocities as a function of four parameters (α , β , η , τ) and of the polarization angle γ . Parameters α and β are tied to the *P*- and *SV*-wave vertical velocities, and parameters η and τ explain phase velocity variations with incidence. With this model, these four parameters can be inverted by a least squares method.

This method has been applied to the Pierre Shale data (White *et al.* 1983). Inverted parameters have been compared to results obtained by White *et al.* (1983). The parameter η (which explains velocity variations for small incidences) is accurately recovered because data (in particular phase velocities) are reliable at incident angles lower than 45° . The parameter τ (which explains velocity variations for high incidence) is less accurately recovered because there are not enough reliable data for incident angles higher than 45° . The lack of data (only 8 *P*-shots and 8 *S*-shots) and uncertainties in data provide a large *a posteriori* error in inverted parameters. However, it is hoped that this method can provide accurate recovery of anisotropy parameters if there is a large number of shot locations (case of a walkaway).

Key words: transverse isotropy, phase velocity, polarization, inversion.

1 INTRODUCTION

An interesting point of elastic wave propagation in anisotropic media is the fact that the three coordinate systems determined by polarization directions (particle displacements), phase velocity directions (slowness surface) and group velocity directions (energy flux directions) do not coincide (Musgrave 1970). The anisotropy parameters can be determined *in situ* from VSP data if these coordinate systems are identified. Polarization directions are determined from three-component recordings by analyzing particle motions (Cllet & Dubesset 1988). Group velocity directions correspond to the ray velocity from a source point to a receiver. This velocity cannot be directly measured from recordings but can be estimated by inverting the total traveltimes between sources and receivers (Stewart 1984; Byun & Corrigan 1990); the determination of group velocities requires the inversion of the properties of the entire subsurface located between sources and receivers. On the other hand, the apparent vertical slowness is estimated from VSP data by the difference in traveltimes of a constant phase between two consecutive receivers in the well (this is valid if the interval between two receivers is smaller than the seismic wavelength).

The purpose of this paper is to study the information contained in polarization directions and apparent vertical velocities in terms of anisotropy. The main interest of this approach lies in the fact that the data set (polarization directions and vertical apparent velocities) characterizes the properties of a layer considered locally as homogeneous in the interval between two receivers. Therefore, this approach is valid whatever the complexity of the subsurface between sources and receivers. This study has been restricted to transversely isotropic (TI) media with a vertical axis of symmetry because such anisotropy can be analyzed in 2D geometry. This limits the application of the method to layers in which there is no evidence of azimuthal anisotropy. As shown by different experimental studies of *S*-wave birefringence in VSPs (Johnston 1986; Lefeuvre *et al.* 1989) only few particular layers are affected by birefringence and it is hoped that a TI medium with a vertical axis of symmetry may be an acceptable model at some depth intervals. An ideal case for our approach would be to know the propagation directions for phase velocities. This was the case for the study by White *et al.* (1983) in the Pierre Shale where two neighbouring wells were available to estimate both the apparent horizontal and vertical slowness. Gaiser (1990) estimated the apparent horizontal slowness with recordings from only one hole by assuming a lateral homogeneity of subsurface properties between sources and receivers.

This paper presents a method to estimate the TI parameters which describe P - and SV -wave phase velocity variations from data recorded in a single well and without any assumptions on the complexity of the medium. This method uses only P - and SV -wave apparent vertical velocities and polarizations. After a review of plane wave propagation in TI media and a definition of data obtained from offset VSPs (polarization directions and apparent vertical slowness), the forward problem is defined by the exact equations of P - and SV -wave velocities as a function of four parameters (α , β , η , τ) and of the polarization angle γ . With this model, these four parameters can be inverted by a least squares method. Errors in estimated parameters are discussed with regard to the experimental pattern and to the data measurement accuracy. An application to a real data set (Pierre Shale) is shown.

2 HOMOGENEOUS TRANSVERSE ISOTROPY

In transversely isotropic media with a vertical axis of symmetry, elastic properties depend only on the incident angle θ of the plane wave and not on its azimuth. Thus, all vertical and horizontal planes are planes of symmetry. A TI medium is fully described by five independent elastic moduli of the elastic tensor C_{ijkl} . Its associated matrix may be written with the Voigt convention

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{66} & C_{13} & & & \\ & C_{11} & C_{13} & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1)$$

where α and β are two indices which represent in a more compact way the double indices (ij) and (kl) of the elastic tensor C_{ijkl} such that: $1 \rightarrow (11)$, $2 \rightarrow (22)$, $3 \rightarrow (33)$, $4 \rightarrow (23)$ and (32) , $5 \rightarrow (13)$ and (31) , $6 \rightarrow (12)$ and (21) .

This elastic modulus matrix makes it possible to write the wave equation (or characteristic equation) (Keith & Crampin 1977) as follows

$$\det(A_{il} - \rho v^2 \delta_{il}) = 0, \quad (2)$$

where ρ is the density and A_{il} is the second-order Christoffel tensor

$$A_{il} = C_{ijkl} n_j n_k, \quad (3)$$

$\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ is the unit size vector perpendicular to a plane wave (in the direction of propagation $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$) for which the equation is $\vec{n} \cdot \vec{x} = C^{st}$. $\vec{x}$ is the coordinate vector of a wave front at time t . The propagation direction is given by the incident angle θ between the propagation vector $\vec{k}$ and the vertical (Fig. 1). The characteristic equation is linear for the polarization described by vector $\vec{g}$. There are three independent solutions for each direction of propagation: one quasi-longitudinal qP , one quasi-transversal qSV (both qP - and qSV -waves have respectively a transverse and a longitudinal component) and one transverse SH . These three waves are respectively polarized in three mutually orthogonal directions.

Daley & Hron (1977) have expressed the phase velocity of these three waves as follows

$$2\rho v_{qP}^2 = C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta + Q, \quad (4)$$

$$2\rho v_{qSV}^2 = C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta - Q, \quad (5)$$

$$2\rho v_{SH}^2 = C_{66} \sin^2 \theta + C_{44} \cos^2 \theta, \quad (6)$$

where ρ is the density and where Q is the quadric

$$Q = \left\{ (C_{33} - C_{44})^2 + 2 \left[2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - C_{44}) \right] \sin^2 \theta + \left[(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2 \right] \sin^4 \theta \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

The P - and SV -phase velocity equations are function of the four elastic constants C_{33} , C_{11} , C_{44} and C_{13} and SH -phase velocity equation is function of the two C_{44} and C_{66} .

The polarization angle is given by the angle γ measured from the vertical axis of symmetry (Fig. 1). γ is given by its tangent which is defined as the ratio of the components of two eigenvectors (corresponding to P - or to SV -wave polarization directions) of the characteristic equation (2). The equation for $\tan \gamma$ is a function of the incident angle θ and of elastic moduli

$$\tan \gamma_{P,SV} = \frac{\cos \theta \sin \theta (C_{13} + C_{44})}{\left(\rho V_{qP,qSV}^2(\theta) - (-1)^i (C_{11} \sin^2 \theta - C_{44} \cos^2 \theta) \right)}, \quad (8)$$

where $i=1$ for SV -waves and $i=2$ for P -waves.

The SH -wave polarization is independent of the propagation direction because it is contained in the symmetry plane (the perpendicular to the symmetry axis). So, this polarization does not contain any information to estimate TI parameters. Therefore, in the following, only qP - and qSV -waves are considered in order to obtain an estimation of TI parameters related to the four elastic constants C_{33}, C_{44}, C_{11} and C_{13} .

3 VSP PATTERNS AND HYPOTHESIS ON DATA

To estimate TI parameters, we need velocity and polarization measurements for different incidences. These measurements can be obtained for direct or reflected waves observed on a walkaway or a cross-hole seismic data. Waves are recorded in a well with three-component recording tools and sources are located on the surface with different offsets or in another well at different depths (Fig. 2).

Particle motion generally describes an ellipse for which principal axes are computed. The polarization directions are given by the angle γ between the major axis and the vertical one (Fig. 3). The polarization angle value at a particular receiver interval is calculated by the mean value of polarization at the two consecutive receivers. Time delays measured between two receivers enable the calculation of the apparent vertical velocity at the same interval (Fig. 3). In order to specify exactly what these velocities are, let us recall some theory for group and phase velocities (Gaiser 1990). For a source located at the origine of the coordinate system, the envelope of plane waves propagating in a homogeneous medium defines a wavefront belonging to a family of surfaces $\Phi(\vec{x}, t)$. The equation for $\Phi(\vec{x}, t)$ is

$$\Phi(\vec{x}, t) = \vec{s} \cdot \vec{x} - t = 0, \quad (9)$$

where $\vec{x}$ is the coordinate vector of the wavefront at time t , and $\vec{s}$ is the slowness vector for a plane wave propagating in the direction $\vec{n}$ at the velocity v . $\vec{n}$ is the unit vector normal to a plane wave tangent to the wavefront at $\vec{x}$ (Fig. 4). Differentiating equation (9) with respect to time for a homogeneous medium gives

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \vec{s} \cdot \vec{V} = 1, \quad (10)$$

where $\vec{V}$ is the group velocity vector (Musgrave 1970). The group velocity is defined

from the traveltimes of the energy (the ray) between the source and a receiver. Differentiating equation (9) with respect to the spatial coordinate x_i for a homogeneous medium gives the component i of the phase velocity v

$$\frac{d\Phi}{dx_i} = \frac{1}{v_i} - \frac{\partial t}{\partial x_i} = 0. \quad (11)$$

So, the vertical differential of traveltimes defines the vertical apparent slowness. Practically, we can consider velocities measured between two receivers as phase velocities if the distance between sources and receivers is large enough and if the distance between two neighbouring geophones is short enough compared to the wavelength. Interval velocity measurements are interpreted as the projection of phase velocities on the vertical (Fig. 3). In other terms, the apparent vertical velocity can be interpreted as the ratio of a phase velocity to the incident angle θ cosine.

Finally, the data set is given by both the apparent vertical velocities and the associated polarization angles. Each data pair is dedicated at the intermediate distance between two consecutive receivers. In the following, uncertainty on delay measurements is about 1/4 the sampling interval and uncertainty on polarization measurements is the difference of polarization values calculated for two consecutive receivers. For a given interval between two receivers, we measure the apparent vertical velocities q_P and q_{SV} and the associated polarization angles γ_P and γ_{SV} corresponding respectively to P - and SV -waves.

4 PARAMETRIZATION OF VELOCITIES AND POLARIZATION EQUATIONS

Velocity equations (4) and (5) and polarization equation (8) cannot be used in this form for easily estimating transverse isotropy. Two original parameters η and τ (de Parscau 1991) are used

$$\eta = (C_{13} + C_{44}) / (C_{33} - C_{44}) \quad \text{and} \quad \tau = (C_{11} - C_{44}) / (C_{33} - C_{44}). \quad (12)$$

These parameters are physically close to those defined by Thomsen (1986) but they lead to more simple expression for polarization. Fig. 5 shows P - and SV -wave phase velocity sensitivity variations to η and τ parameters with the polarization angle γ . Parameter τ explains P -wave velocity variations for incident angle θ higher than 45° , whereas η explains these variations for θ lower than 45° . For SV -waves, the sensitivity to η and τ is significant in the incident angle interval $[25^\circ, 70^\circ]$. With

these two parameters, velocity equations (4) and (5) become

$$\rho V_{qP,qSV}^2(\theta) = \frac{1}{2}(C_{33} - C_{44}) \left[(C_{33} + C_{44})^2 / (C_{33} - C_{44})^2 + (\tau - 1) \sin^2 \theta + (-1)^i \{ (1 - (1 + \tau) \sin^2 \theta)^2 + (\eta \sin 2\theta)^2 \}^{1/2} \right], \quad (13)$$

where $i=1$ for qSV -waves and $i=2$ for qP -waves.

Therefore, polarization equation (8) for qP - and qSV -waves may be written (de Parscau 1991)

$$\tan 2\gamma = \eta \sin 2\theta / (1 - (1 + \tau) \sin^2 \theta). \quad (14)$$

The above equation is valid for P - and SV -wave polarizations (orthogonal to one another) due to the periodicity of the tangent. The polarization depends only on the two parameters η and τ . For $\theta=45^\circ$, equation (14) gives

$$\tan 2\gamma = 2\eta / (1 - \tau). \quad (15)$$

The P - and SV -wave vertical velocities are measured from a VSP with some uncertainties. Two other parameters (α and β) enable the re-estimation of the vertical velocities in the inverse problem

$$\alpha = \hat{\alpha} / \alpha_0 \quad \text{and} \quad \beta = \hat{\beta} / \beta_0, \quad (16)$$

where $\alpha_0 = \sqrt{C_{33}/\rho}$ and $\beta_0 = \sqrt{C_{44}/\rho}$ are the exact P - and for SV -wave vertical velocity values. $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$ are the *a priori* values measured for these velocities from a VSP.

Finally, the parameters η, τ, α and β are the components of a vector $\vec{p}$ relating to the parameter space and used in the forward problem: all these parameters are close to one

$$\vec{p} = [\eta, \tau, \alpha, \beta]. \quad (17)$$

5 EQUATIONS OF THE MODEL: THE FORWARD PROBLEM

Both equations for velocities and for polarizations depend on incident angle θ which is not measurable with offset VSP data. The purpose is to define an exact model

to describe apparent vertical velocity variations as a function of polarization angle γ and the four TI parameters η, τ, α and β . This is performed by resolving the polynomial equation in $\sin^2 \theta$ obtained with the square of equation (14). Let $g(\gamma)$ be the application which relates $\sin^2 \theta$ to the polarization angle γ

$$\sin^2 \theta_{\pm} = g(\gamma) = \frac{((1 + \tau) \tan^2 2\gamma + 2\eta^2 + (-1)^i 2\eta \sqrt{\eta^2 + \tau \tan^2 2\gamma})}{(\tan^2 2\gamma (1 + \tau)^2 + 4\eta^2)}, \quad (18)$$

where $i=1$ for γ smaller than 45° and $i=2$ for γ greater than 45° . For $\gamma = 45^\circ$, the equation (18) tends to the limit $(1 + \tau)^{-1}$. From equation (13) written with equation (18), we infer the non-linear equation relative to polarization and TI parameters for apparent vertical velocities (defined as the ratio of phase velocity to incident angle cosine)

$$q_{qP,qSV}^2 = \frac{1}{2} A / (1 - g(\gamma)) \left[\frac{B}{A} + (\tau - 1) g(\gamma) + (-1)^i \left\{ 1 + 2 [2\eta^2 - (1 + \tau)] g(\gamma) + [(\tau + 1)^2 - 4\eta^2] g(\gamma)^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (19)$$

with $i=1$ for qSV -waves and $i=2$ for qP -waves and where

$$A = \alpha^2 \hat{\alpha}^2 - \beta^2 \hat{\beta}^2 \quad \text{and} \quad B = \alpha^2 \hat{\alpha}^2 + \beta^2 \hat{\beta}^2. \quad (20)$$

Equation (19) allows us to compute the apparent vertical phase velocities qP and qSV for a given anisotropy parameter set $\vec{p}$ (17) as function of the polarization angle γ . For a given P - (or SV -) wave arrival, direct observation are γ and apparent vertical slowness but the data set used in the inverse problem is defined by γ and qP and qSV which are the inverse of slowness. This has a particular importance when we want to take into account uncertainties in measurement. For a constant traveltimes uncertainty, the error on the apparent vertical velocity tends to infinity for a horizontal propagation. Let dq_t be the error in apparent vertical velocities due to the uncertainty δt on delays between two receivers spaced by the depth h

$$dq_t = \frac{\delta t}{h} q^2, \quad (21)$$

and dq_γ be the error in apparent vertical velocities due to the uncertainty in polarization angle measurements

$$dq_\gamma = \frac{\partial q}{\partial \gamma} d\gamma. \quad (22)$$

The total error in q_P or q_{SV} is

$$dq = \sqrt{dq_t^2 + dq_\gamma^2}. \quad (23)$$

In the following sensitivity analysis, we have considered a constant uncertainty in polarization and apparent vertical slowness measurements for both P - and SV -waves. The sensitivity is the partial derivative of q_P (or q_{SV}) with respect to η and τ weighted by the total uncertainty given by equation (23). Fig. 6 shows the sensitivity curves of q_P and q_{SV} to anisotropy parameter (η and τ) perturbation as a function of γ . These curves show that SV -waves are more sensitive than P -waves. The reason is that a constant uncertainty has been considered in P - and SV -vertical slowness. However, the P - apparent vertical velocity becomes sensitive to η and τ for incident angles higher than 50° . On the other hand, SV -apparent vertical velocity is sensitive for incident angles lower than 50° . Both P - and SV -wave velocities are more sensitive to η than to τ . Consequently, the parameter η will always be recovered more accurately than parameter τ from an inverse problem.

6 THE INVERSE PROBLEM

The inverse problem consists in estimating the vector $\vec{p}$ defined by equation (17) which explains (in a least squares sense) the apparent vertical velocities (q_P and q_{SV}) and polarization angles γ observed at a particular receiver interval for a set of ND P - and ND SV -wave arrivals (direct or reflected). The inverse problem is formulated as follows (Lines & Treitel 1984):

(i) let $\vec{p}$ be the parameter vector belonging to the parameter space the dimension of which is 4;

(ii) let $\vec{d}(\vec{p})$ be a vector, the components of which are apparent vertical velocities calculated with equation (19) for a given parameter set $\vec{p}$ and for observed polarization angle γ . This vector $\vec{d}(\vec{p})$ belongs to the data space of dimension $2 \times ND$ (the number of P - and SV -wave apparent vertical velocity measurements); and

(iii) let $\vec{d}_{OBS}$ be the vector containing the observed apparent vertical velocities for P - and SV -waves. Its dimension is $2 \times ND$.

The vector $\vec{p}$ must minimize the misfit function which measures in a least squares sense the difference between observed data and modeled data

$$C(\vec{p}) = ((\vec{d}_{OBS} - \vec{d}(\vec{p})), CD^{-1}(\vec{d}_{OBS} - \vec{d}(\vec{p}))), \quad (24)$$

where CD is a covariance matrix on data. It is a non-linear inverse problem which is solved with a *quasi*-Newton iterative algorithm.

The data covariance matrix dimension is $2ND \times 2ND$. As data are independent from one shot to another, only diagonal variance terms are non-zero. These variance terms are computed from uncertainties on traveltime and polarization measurements. If uncertainties are assumed to be Gaussian and each data pair to be independent, then the variance terms are computed as the sum of the square of relative errors on apparent vertical velocities due to these uncertainties

$$CD = dq_t^2 + dq_\gamma^2, \quad (25)$$

where dq_t and dq_γ are the errors defined by equations (21) and (22). Fig. 7 shows the misfit function near its minimum calculated from a synthetic data set for a particular weakly anisotropic medium. In this figure, the misfit function is plotted in the plane (η, τ) for fixed values of P - and SV -vertical velocities ($\alpha_0 = 3500m/s$ and $\beta_0 = 1500m/s$). The misfit function has been calculated for synthetic data corresponding to different ranges of incident angles: 0° to 50° , 50° to 90° and 0 to 80° . For each range, 20 data pairs ($ND=20$) have been considered to compute the misfit function. The isolines are very close to each other in the horizontal direction (corresponding to η variations) and very widely spaced in the vertical direction (corresponding to τ variations). This fact confirms the sensitivity analysis (Fig. 6): parameter η is recovered more accurately than parameter τ because the curvature of the misfit function is higher in the η direction than in the τ direction. For the range 50° to 90° , the parameter η is less accurately recovered than in the previous case while the parameter τ is better determined. By using the whole range of incidence (0° to 90°), we observe that the parameter η is determined with an accuracy about 5 times greater than this obtained for τ parameter. However, the three cases converge toward the exact values for η and τ .

An important point is to check the convergence of the solution, in others words, to check that there are no local minima in the misfit function. It is difficult to analytically resolve this problem but it can be checked by the following experiment. For a particular medium and its corresponding synthetic data set, we solve the inverse problem several times by taking different initial values $\vec{p}_0$ belonging to the parameter space. So for each $\vec{p}_0$ the corresponding solution vector $\vec{p}$ is computed. Recovered solutions are plotted on a histogram. For uncorrupted data, this histogram is a Dirac function. We have studied the inversion of corrupted synthetic data corresponding to a slowness uncertainty equal to 2ms and polarization uncertainty equal to 2° . In this case, we have shown the existence of local minima.

However, an *a posteriori* validation of the solution can be performed by checking that the recovered values for the two parameters α and β are close to one. Indeed, it is usually possible to accurately measure the vertical P - and SV -wave velocities and to introduce into the model (equation (19)) values for $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$ which are close to the exact values (α_0 and β_0). The reason is that uncertainties on vertical P - and SV -wave velocity measurements are small. If α and/or β values are very different from one in the solution then the inversion process has failed. Finally, we have found that data corrupted with errors consistent with VSP data analysis allow us to accurately recover the parameters η and τ if the number of data pairs (q, γ) is about 40 (for P - and SV -waves) and if data pairs are regularly spaced between 0° to 80° . If we consider a lower number of data pairs for P - and SV -waves, only η parameter will be accurately recovered.

7 THE A POSTERIORI ERROR ON THE SOLUTION

If uncertainties on data are Gaussian and if the application (equation (19)) is linear near the solution, an *a posteriori* covariance matrix can be computed (Tarantola 1987). In fact, this 4×4 matrix is defined by the inverse of the Hessian of the misfit function. This matrix is approximated from the Jacobian of the application (equation (19)) by

$$A_{k,l} = \left[\nabla_k^i q_{P/SV}(\vec{p}) CD_{i,j}^{-1}(\vec{p}) \nabla_l^j q_{P/SV}(\vec{p}) \right]^{-1}, \quad (26)$$

where $\nabla q_{P/SV}(\vec{p})$ is the Jacobian of the application (equation (19)) and $CD_{i,j}(\vec{p})$ is the data covariance matrix given by equation (25). The diagonal terms are variances on estimated parameters and non-diagonal terms are covariances between parameters, i.e., correlation terms between parameters. The variance terms of $A_{k,l}$ provide confidence levels in terms of probability in inverted parameters and not deterministic errors. If the application is linear near the solution and if *a priori* errors in data follow a Gaussian distribution, then the variance terms of $A_{k,l}$ are interpreted as statistical moments of a Gaussian distribution law in the domain where the linearization is valid. This interpretation is not valid if one of these conditions is not fulfilled. In the latter case, the diagonal terms of $A_{k,l}$ are difficult to interpret.

8 TI PARAMETER ESTIMATION ON PIERRE SHALE DATA

White *et al.* (1983) have measured anisotropy in Pierre Shale data by analyzing phase velocity variations with propagation direction. For this purpose they used two wells 100ft (30.48m) apart. The first one was filled with cement and the second one with peagravel. Receivers were located in these two wells every 100ft (30.48m) from the depth 400ft (121.92m) to 1000ft (304.80m). Eight sources were located every 100ft (30.48m) from 100ft (30.48m) to 1400ft (426.72m) of the cement well. These sources were hole shots for P -waves and vibrators for S -waves.

In this study only data from the cement hole with the 8 P -shots and the 6 first S -shots have been used. The last two S -shots correspond to a horizontal propagation. Only data which are correctly explained by models obtained with two holes by White *et al.* have been used for the inversion process. Therefore, inverted parameters can be compared with corresponding models given by White *et al.* This concerns data at depths 450, 650, 750ft.

Uncertainties used are : 0.5ms on traveltimes and 4° on polarization measurements. Fig. 8, 9 and 10 show the models recovered by inversion by using both P - and SV -waves respectively for the depths 450, 650, 750ft. These models are compared with those obtained by White *et al.* in terms of velocity surface. Recovered values for $\vec{p}$ are given in Table 1.

These results give rise to different remarks. Recovered values for parameters η and τ at depth 450 and 650ft are similar to those given by White *et al.* but are different at depth 750ft. The *a posteriori* errors in estimated parameters are higher for parameter τ in comparison to parameter η and are negligible for parameters α and β . The error in parameter τ interpreted in a deterministic way indicates that this parameter is poorly recovered. One reason is the lack of data especially for large incident angles. In this way, the parameters are poorly determined. Under the hypothesis that errors in data are submitted to a Gaussian distribution law, and that the application (equation (19)) is linear near the solution, a larger number of independent data pairs (P - and SV -wave velocities, polarization angle) would yield smaller *a posteriori* errors.

9 CONCLUSIONS

This paper presents a method to obtain a measurement of local seismic anisotropy from multi-offset VSP data at the interval between two neighbouring receivers. The data used are both the vertical apparent velocities and the polarization angles measured at receiver locations. This method enables us to determine the local properties between two neighbouring receivers whatever the complexity of the subsurface between sources and receivers. The anisotropy is studied by analyzing P - and SV -wave arrivals with the hypothesis of a TI medium with a vertical axis of symmetry. Therefore, the transverse isotropy is characterized by only four parameters ($\alpha, \beta, \eta, \tau$) which can be inverted by a least squares method from apparent vertical velocities and polarization angles. The parameters α and β are tied to the vertical P - and SV -phase velocities and the parameters η and τ explain P - and SV -phase velocity variations with the incident angle θ . As the incident angle is not measured, we have expressed the variation of P - and SV -waves apparent vertical phase velocities as function of the four parameters ($\alpha, \beta, \eta, \tau$) and of the polarization angle γ . An important point is to verify if the anisotropy effects are large enough to be detected with the usual accuracy of traveltimes and polarization measurements from VSP data. This has been studied by introducing in the inverse problem the uncertainties in data measurements. A study using synthetic corrupted data has shown that anisotropy parameters can be accurately determined if the number of data pairs (P - and SV -apparent vertical velocities and polarization angles) is about 40 for a range of incident angles going from 0° to 80° . But, whatever the number of data pairs or the range of incident angles is, the parameter η will always be more accurately recovered than the parameter τ . The reason is that the misfit function is more sensitive to the parameter η than to the parameter τ . The parameter η is related to the parameter δ defined by Thomsen (1986) which describes at small incident angles both the moveout velocity and the reflection amplitude variation for P -waves (Banik 1987). Thus the knowledge of η can provide important information for P -wave reflection prospecting in presence of transverse isotropy.

Concerning the application of our method to Pierre Shale data, the number of offset sources was only equal to 8: the lack of data pairs do not provide accurate estimation of parameters η and τ . However, mean values for the four parameters which minimizes the misfit function coincide with those given by White *et al.* (1983). From the study on synthetic data, this approach appears attractive if a larger number of data pairs (case of a walkaway) is considered in the inverse problem. This would make possible to accurately determine the anisotropy parameters at the seismic scale if the hypothesis of a TI medium with a vertical axis of symmetry is acceptable.

FIGURE CAPTIONS

Table 1. Recovered TI parameters (η and τ), and P - and SV -wave vertical phase velocities (α_0 and β_0) at depths 450, 650 and 750ft for Pierre Shale by the White *et al.* (1983) method and by inversion of qP - and qSV -wave apparent vertical velocities and corresponding polarization angles. A standard deviation (std. dev.) is given for results obtained by inversion.

Figure 1. Definition of polarization ($\vec{g}$) and propagation ($\vec{k}$) directions for P -waves. These two directions are shown in the P - and SV -waves vibration plane. Vector ($\vec{k}$) is normal at the plane wave tangent to the wave front and defines an angle θ with the axis of symmetry (the vertical). Vector $\vec{g}$ represents the direction of particle motion and defines an angle γ with the vertical.

Figure 2. Two examples of patterns in well survey: the walkaway (left) and the cross-hole (right). These two offset VSP patterns provide recordings for a range of incident angles from the vertical (walkaway) and from the horizontal (cross-hole).

Figure 3. Data processing. Events are recorded in the trihedron (X_1, X_2, X_3) at each receiver location. The apparent vertical velocity is calculated from delays measured between two receivers. The polarization angle γ is calculated from the particle motion. The vibration directions provide a trihedron (R, RP, RT). The polarization angle γ is the angle between the vertical (X_3) and the main direction R .

Figure 4. The wave front (solid line) travels at the group velocity $\vec{V}$. The plane wave (dashed line) tangent to the wave front at $\vec{x}$ at time t travels in the direction $\vec{n}$ at the phase velocity v .

Figure 5. Sensitivity of P - (above) and SV - (below) wave phase velocity to η (solid line) and τ (dashed line) as a function of the polarization angle γ for fixed values of η and τ . This sensitivity is computed as the partial derivatives with respect to η (or τ) of phase velocity expressions multiplied by a perturbation equal to 10% of $\eta - 1$ (or $\tau - 1$). P -waves are sensitive to η parameter for incident angles lower than 45° and to τ parameter for incident angles higher than 45° . SV -waves are sensitive to both η and τ parameters near 45° . In this example TI parameters are: $\eta = 1.125$ and $\tau = 1.266$, and vertical P - and SV -wave velocities are: $\alpha_0 = 4000\text{m/s}$

and $\beta_0 = 2000\text{m/s}$.

Figure 6. Sensitivity of P - (above) and SV - (below) wave apparent vertical velocities to η (solid line) and τ (dashed line), as a function of the polarization angle γ for fixed values of η (or τ). This sensitivity is computed as the partial derivative with respect to η (or τ) of equation (19) weighted by the total errors due to uncertainties in polarization and velocity measurements (equation (23)). In this example TI parameters are: $\eta = 0.937$ and $\tau = 1.122$, and the vertical P - and SV -wave velocities are: $\alpha_0 = 3500\text{m/s}$ and $\beta_0 = 1500\text{m/s}$.

Figure 7. Misfit function values plotted in the plane (η, τ) for fixed P - and SV -vertical phase velocity. The dataset used corresponds to three intervals of incident angles going from 0° to 50° (above), from 50° to 90° (middle) and from 0° to 80° (below). Parameters values have been taken near the solution. In this example TI parameters are: $\eta = 0.937$ $\tau = 1.122$ and the vertical P - and SV -wave velocities are: $\alpha_0 = 3500\text{m/s}$ and $\beta_0 = 1500\text{m/s}$.

Figure 8. Recovered TI model in Pierre Shale at depth 450ft (137.16m) for P - (left) and SV - (right) wave velocities. The recovered model obtained by inversion is plotted in the plane (apparent velocity q , polarization γ) (above) and is compared with the model obtained by White *et al.* (1983) on the velocity surfaces (below).

Figure 9. Recovered TI model in Pierre Shale at depth 650ft (198.12m) for P - (left) and SV - (right) wave velocities. The recovered model obtained by inversion is plotted in the plane (apparent velocity q , polarization γ) (above) and is compared with the model obtained by White *et al.* (1983) on the velocity surfaces (below).

Figure 10. Recovered TI model in Pierre Shale at depth 750ft (228.6m) for P - (left) and SV - (right) wave velocities. The recovered model obtained by inversion is plotted in the plane (apparent velocity q , polarization γ) (above) and is compared with the model obtained by White *et al.* (1983) on the velocity surfaces (below).

Fig. 1

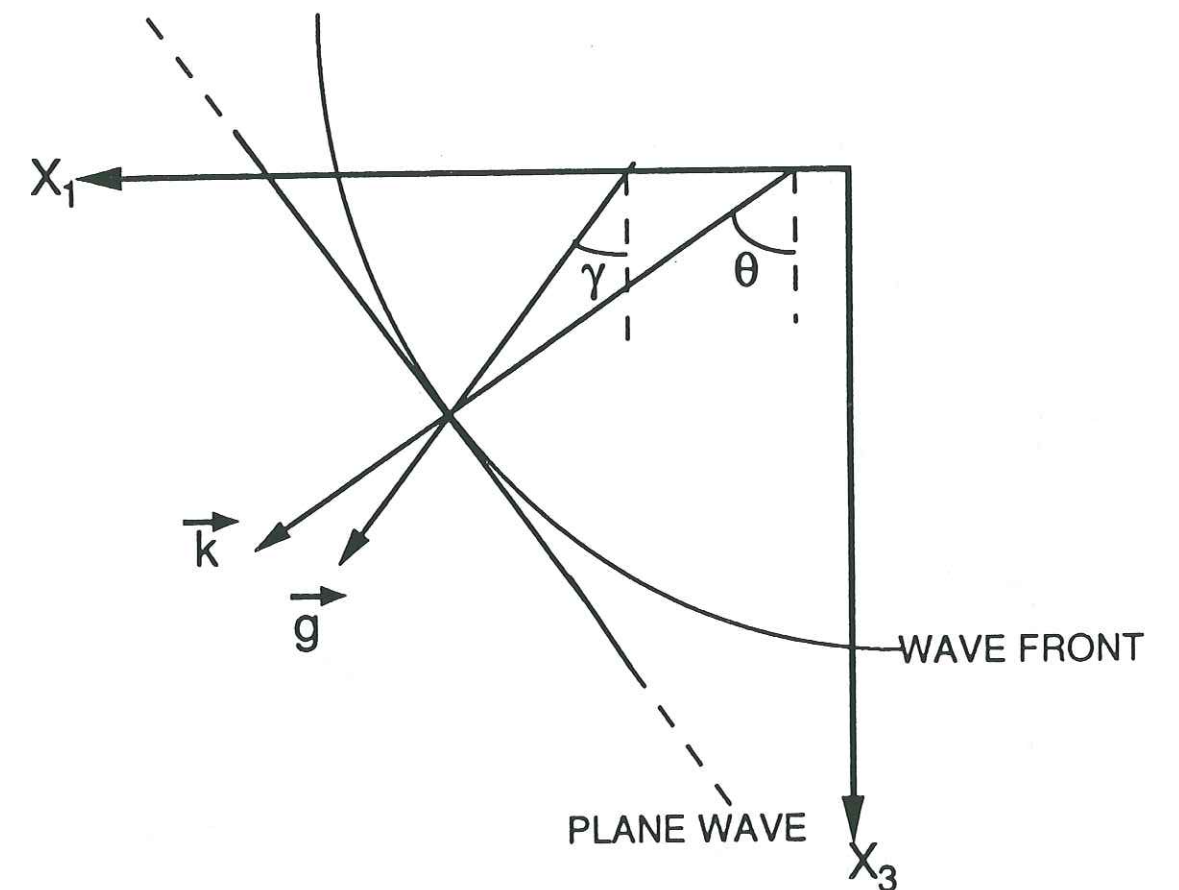


Fig. 2

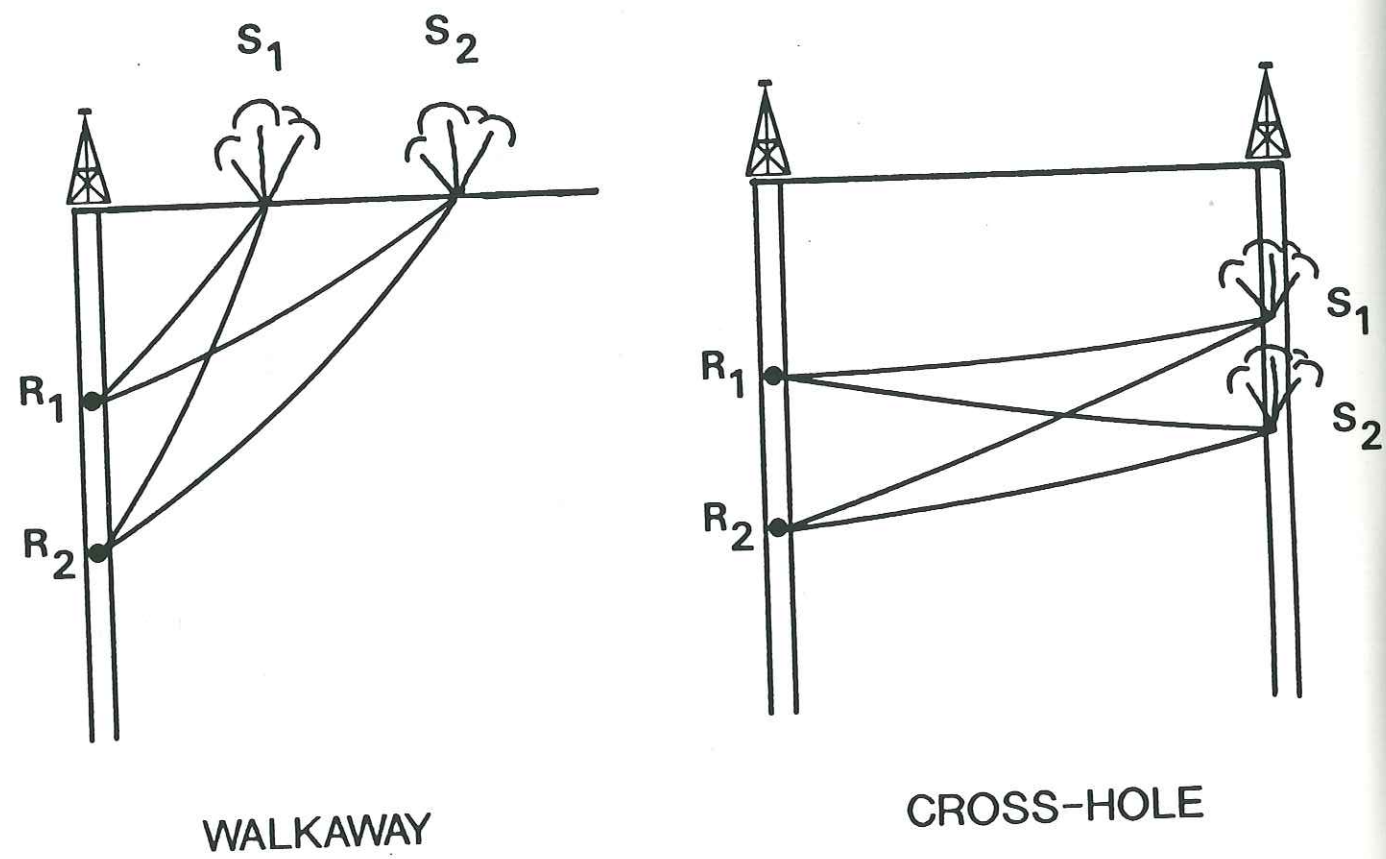


Fig. 3

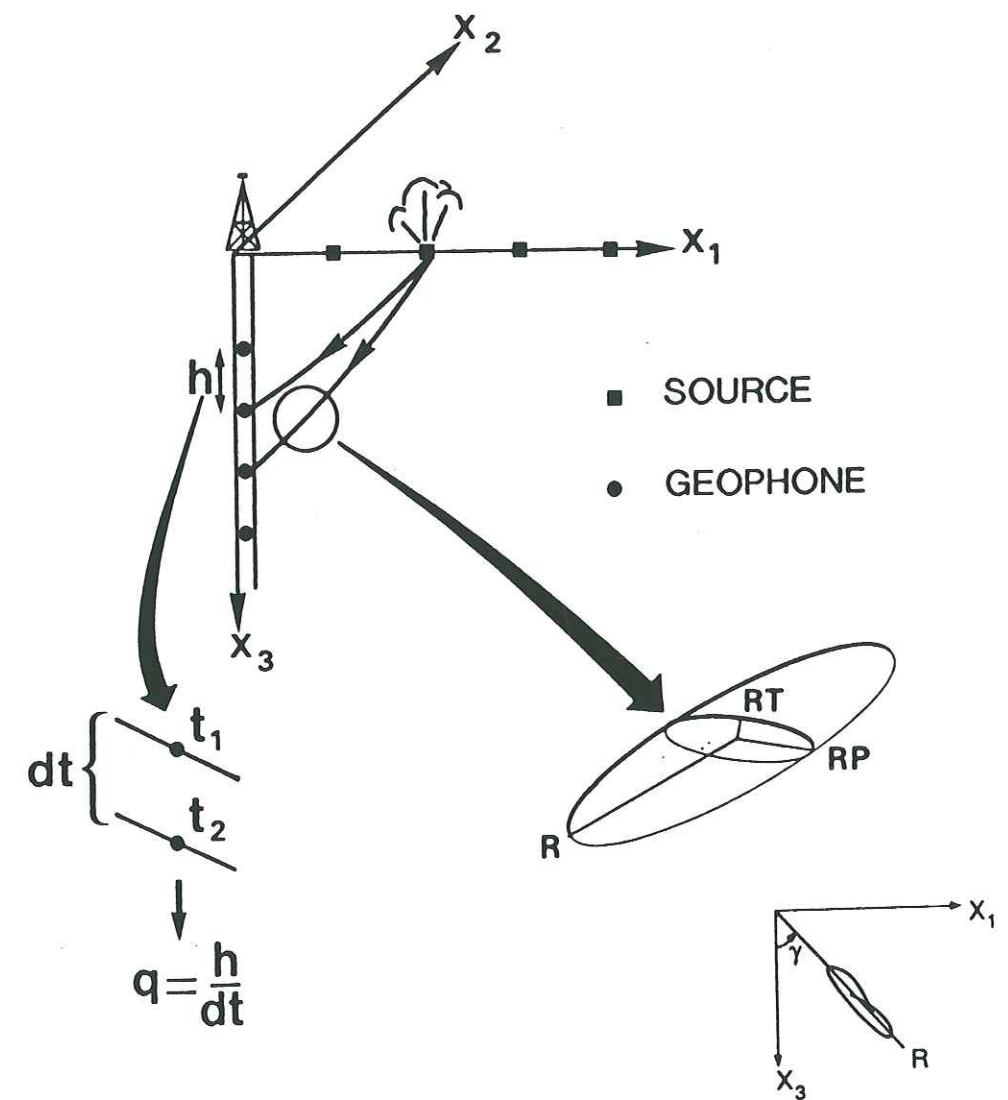


Fig. 4

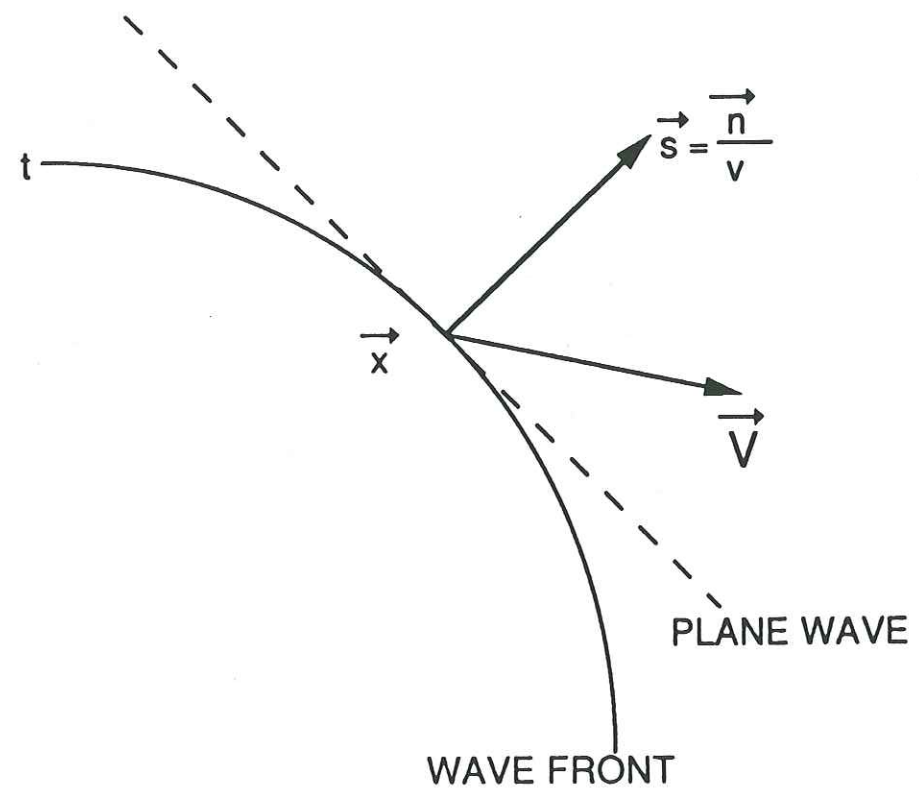


Fig. 5

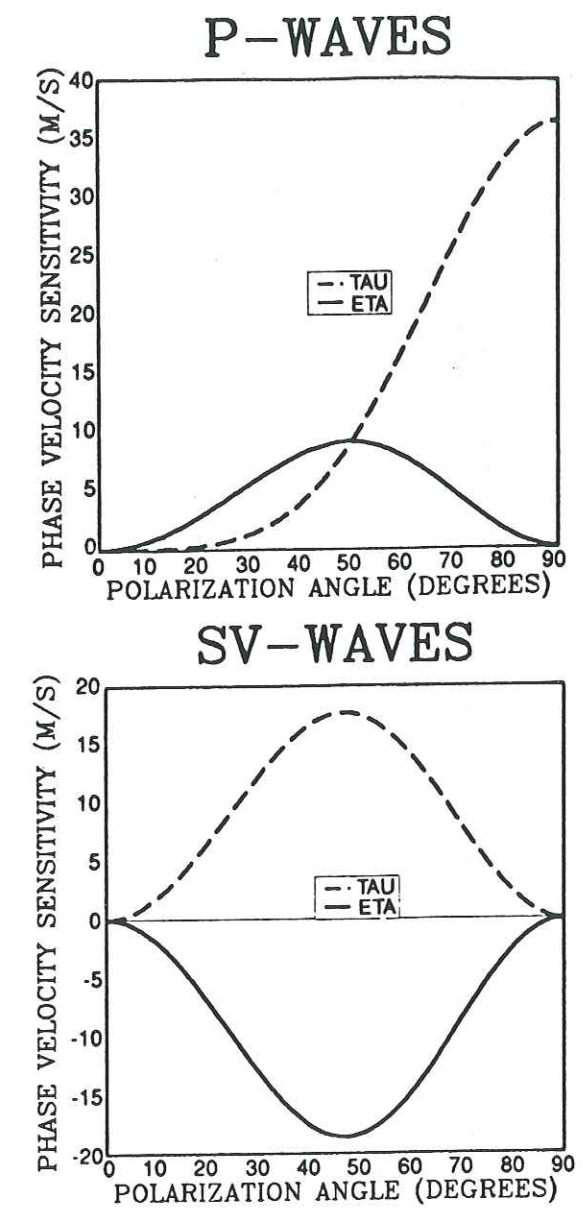


Fig. 6

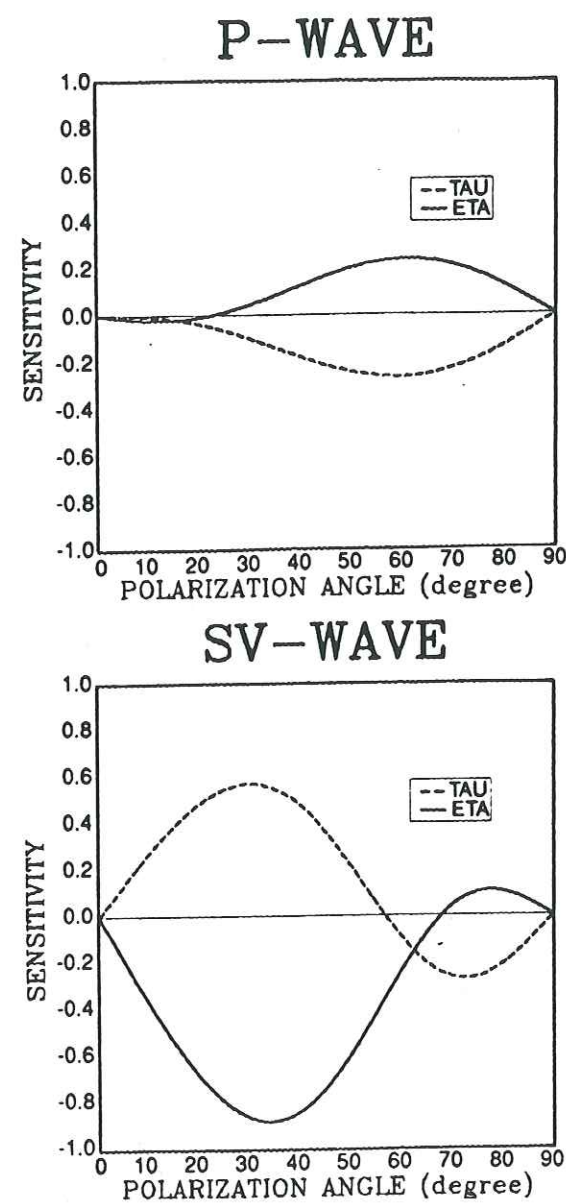


Fig. 7

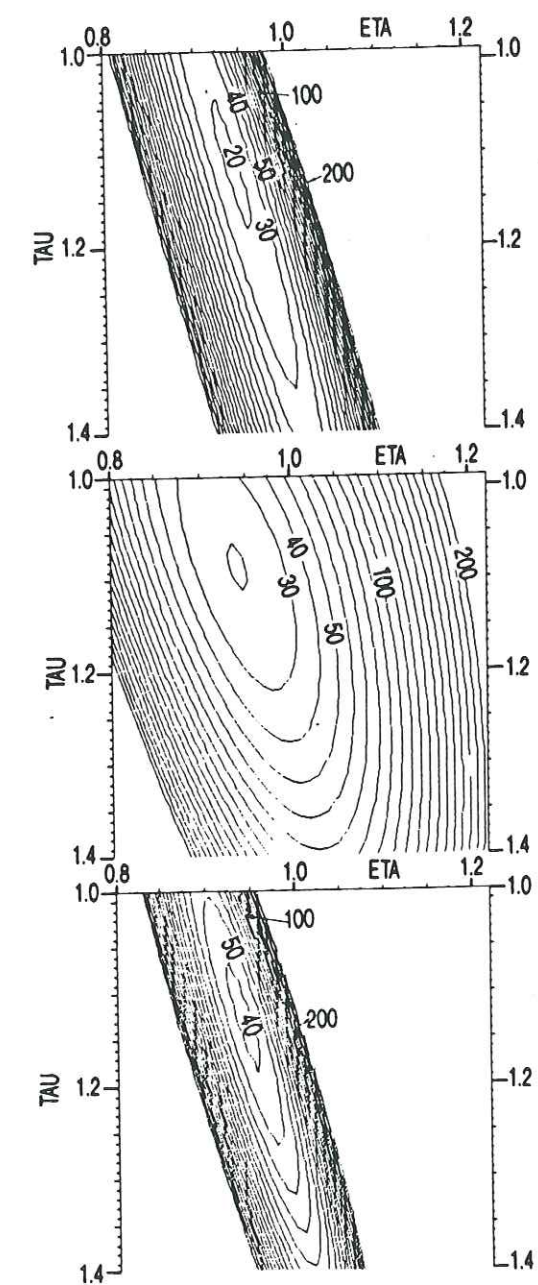


Fig. 8

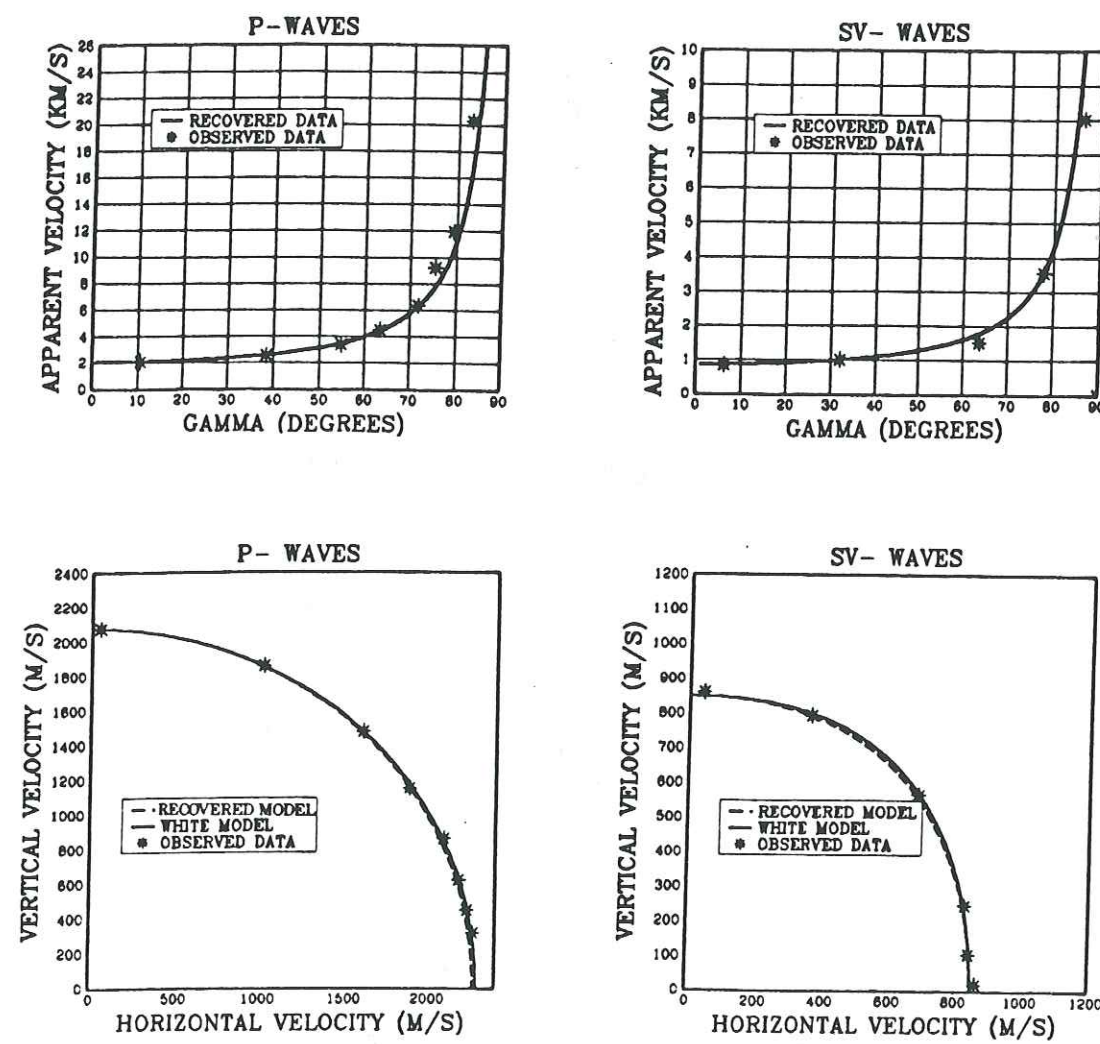


Fig. 9

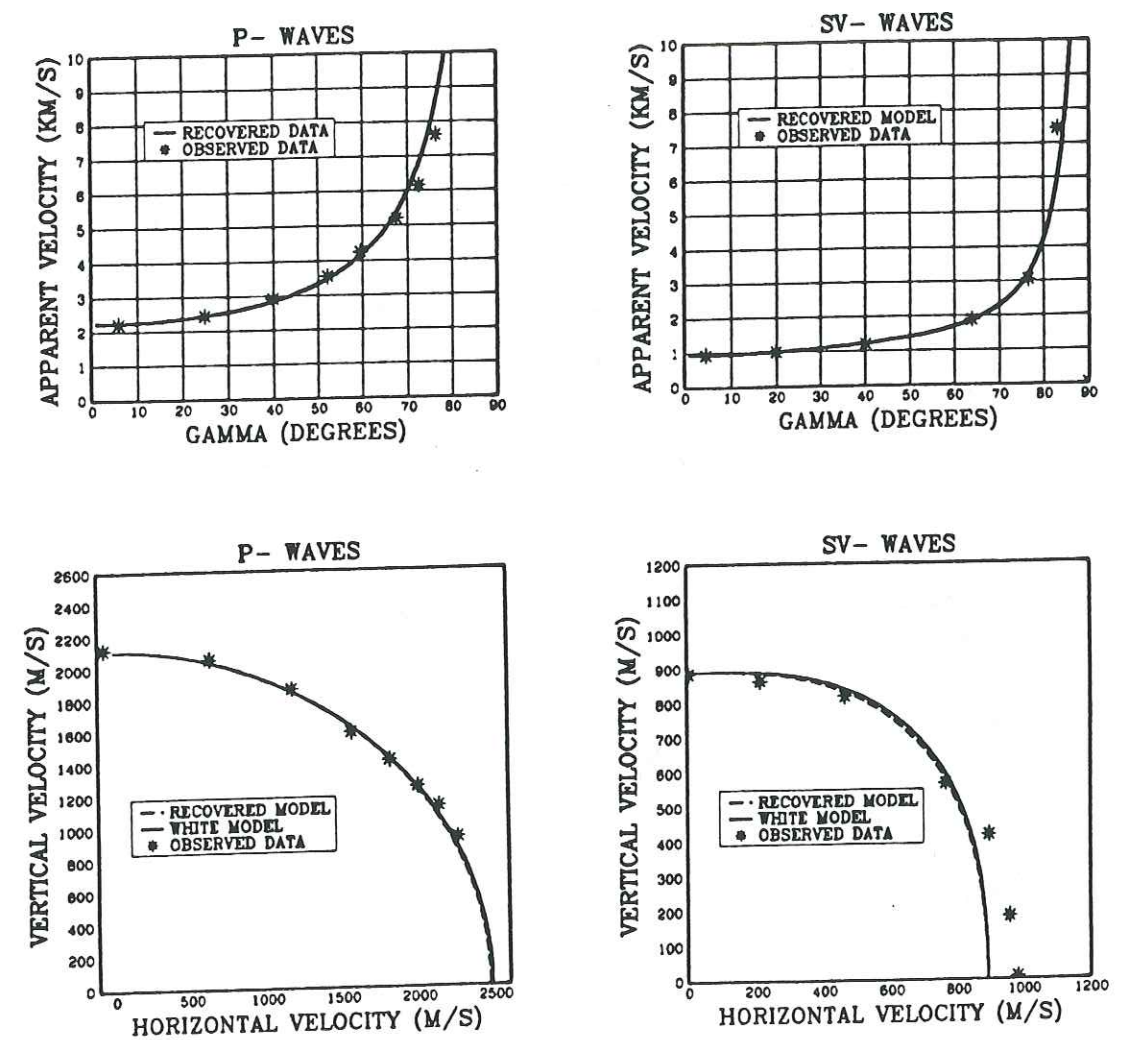


Fig. 10

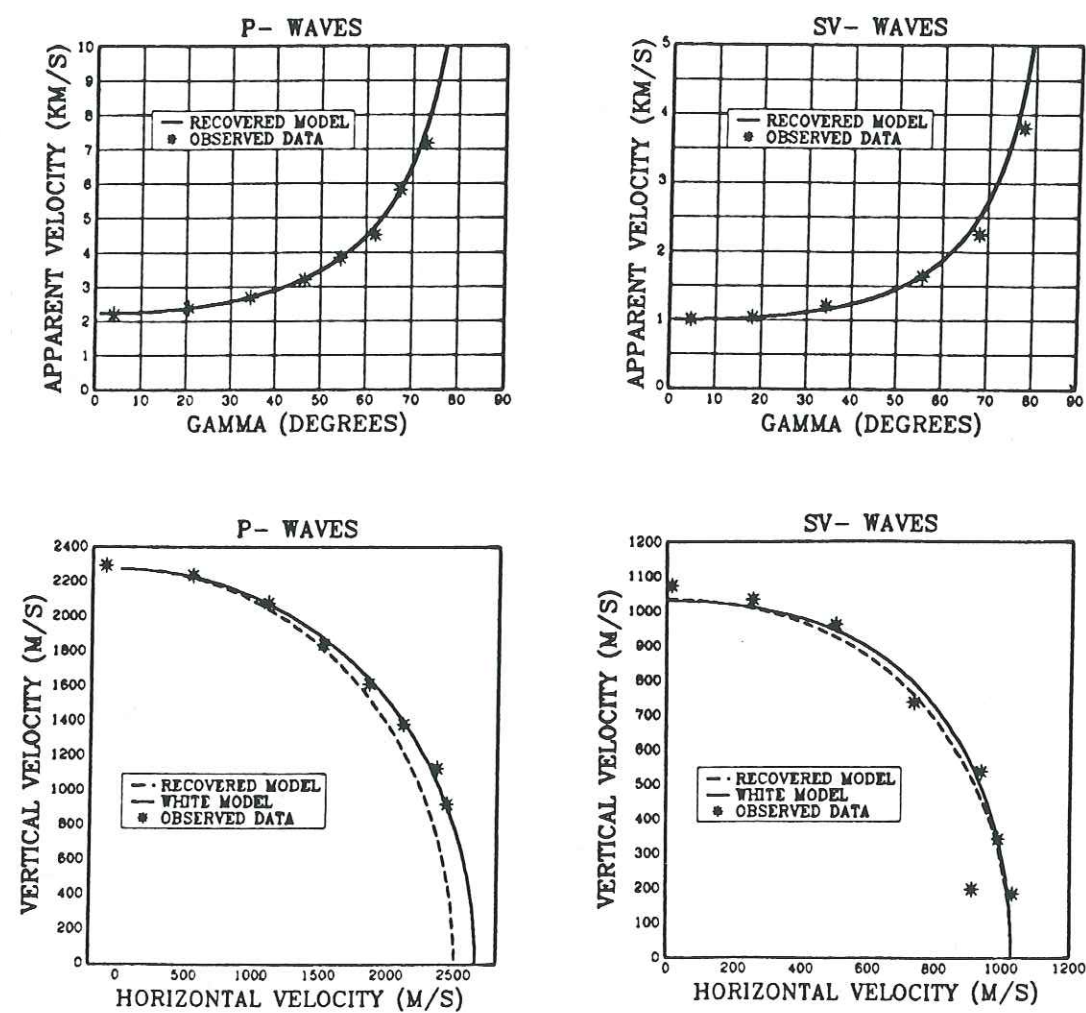


TABLE 1.

	TI MODEL AT 450FT			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
White	1.081	1.265	2073.6	848.5
inversion	1.085	1.239	2053.0	848.5
std. dev.	± 0.05	± 0.25	± 20.7	± 18.5

	TI MODEL AT 650FT			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
White	1.123	1.471	2107.0	889.0
inversion	1.138	1.478	2107.0	889.5
std. dev.	± 0.03	± 0.15	± 35.5	± 28.5

	TI MODEL AT 750FT			
	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
White	1.156	1.029	2273.0	1029.
inversion	1.102	1.262	2237.0	1000.
std. dev.	± 0.06	± 0.20	± 55.7	± 34.1

1.3 Discussion.

Les résultats présentés dans le paragraphe précédent ont été obtenus à partir des vitesses apparentes verticales et des angles de polarisation des ondes q_P et q_{SV} . Nous présentons ici pour les trois cotes étudiées (450, 650 et 750 ft) la forme de la fonction coût dans le plan des paramètres (η, τ) pour des valeurs de vitesses verticales des ondes P et SV fixées (figure VIII.2).

Dans les trois cas, on note la présence de minima locaux autour de la solution. Ceci est dû au nombre insuffisant de points de mesure. Ces minima influent surtout sur la valeur estimée du paramètre τ , la pente de la fonction coût étant minimale suivant un axe faisant un angle de l'ordre de 30° avec l'axe τ . La figure (VIII.3) montre les histogrammes des valeurs estimées pour les paramètres η et τ en considérant comme modèle initial un jeu de paramètres compris entre 0,8 et 1,2 (les valeurs initiales des paramètres α et β sont fixées à 1). Ces histogrammes montrent la présence d'un pic principal correspondant au minimum de la fonction coût et de valeurs non nulles autour de ce pic. Un pic très étroit (cote 650 ft) signifie qu'il y a peu de minima locaux. Un pic plus large (cote 750 ft) est lié au fait que la forme de la fonction coût est quasiment plane autour de la solution (les termes de la matrice Jacobienne sont proches de 0). Dans ce cas, l'optimiseur s'arrête avant la solution globale, les valeurs calculées pour le gradient étant quasiment nulles. D'autre part, la forme de ce pic n'est pas forcément symétrique par rapport au maximum (cote 450 ft). Ceci est dû au fait que la valeur du gradient de la fonction coût est plus petite pour des valeurs de η et de τ supérieures à la solution globale que pour des valeurs inférieures. Ceci se voit sur la figure (figure VIII.2) : par exemple pour la cote 750ft les courbes d'isovaleurs sont plus espacées autour de $\eta=1$ et $\tau=1,1$ qu' autour de $\eta=1,2$ et $\tau=1,5$.

Application à des données réelles.

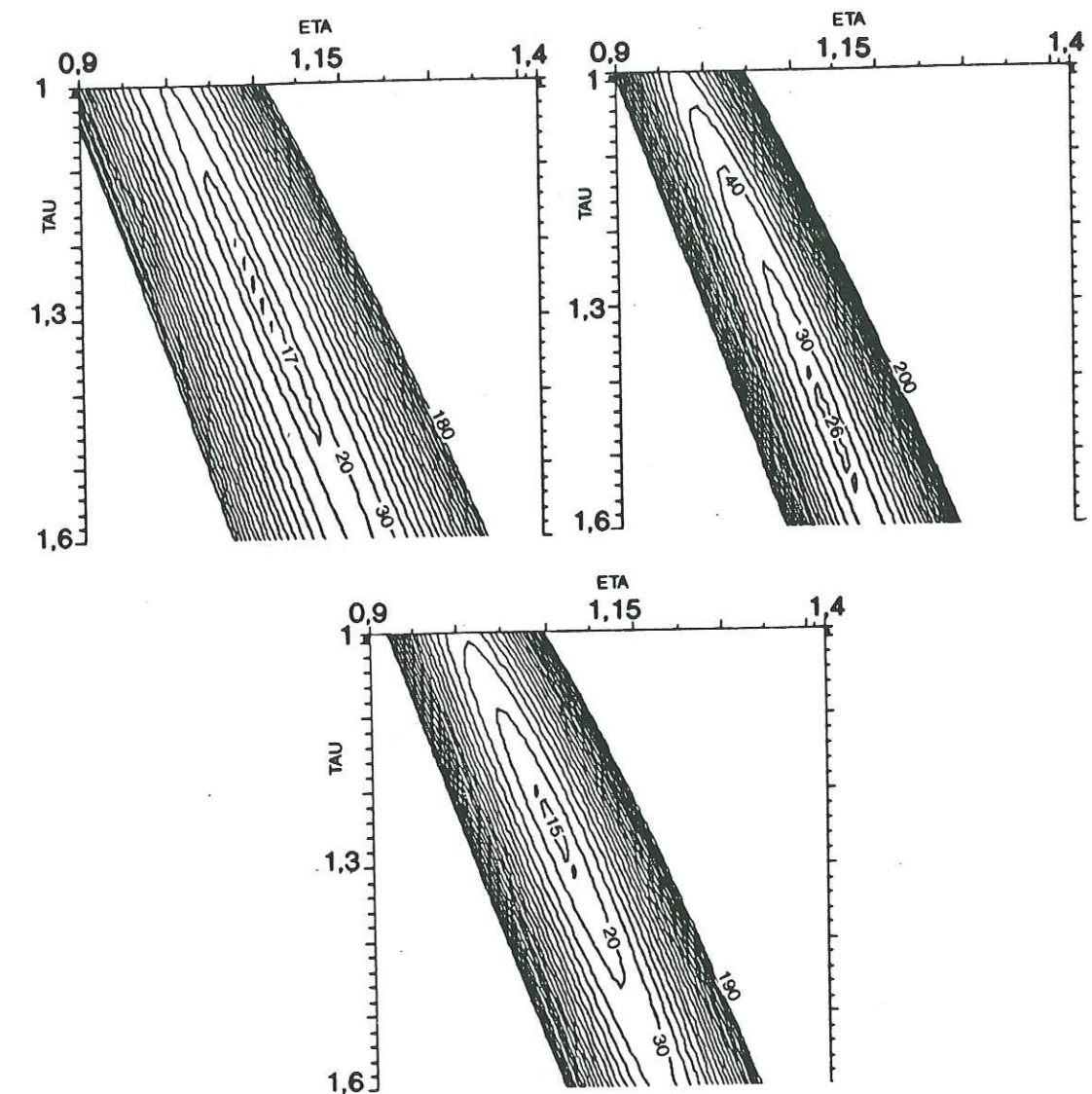


Figure VIII.2. Forme de la fonction coût pour les cotes 450 ft (gauche), 650 ft (droite) et 750 ft (bas) représentée dans le plan des paramètres (η, τ) pour les valeurs de vitesses verticales des ondes P et SV fixées à la solution trouvée par inversion.

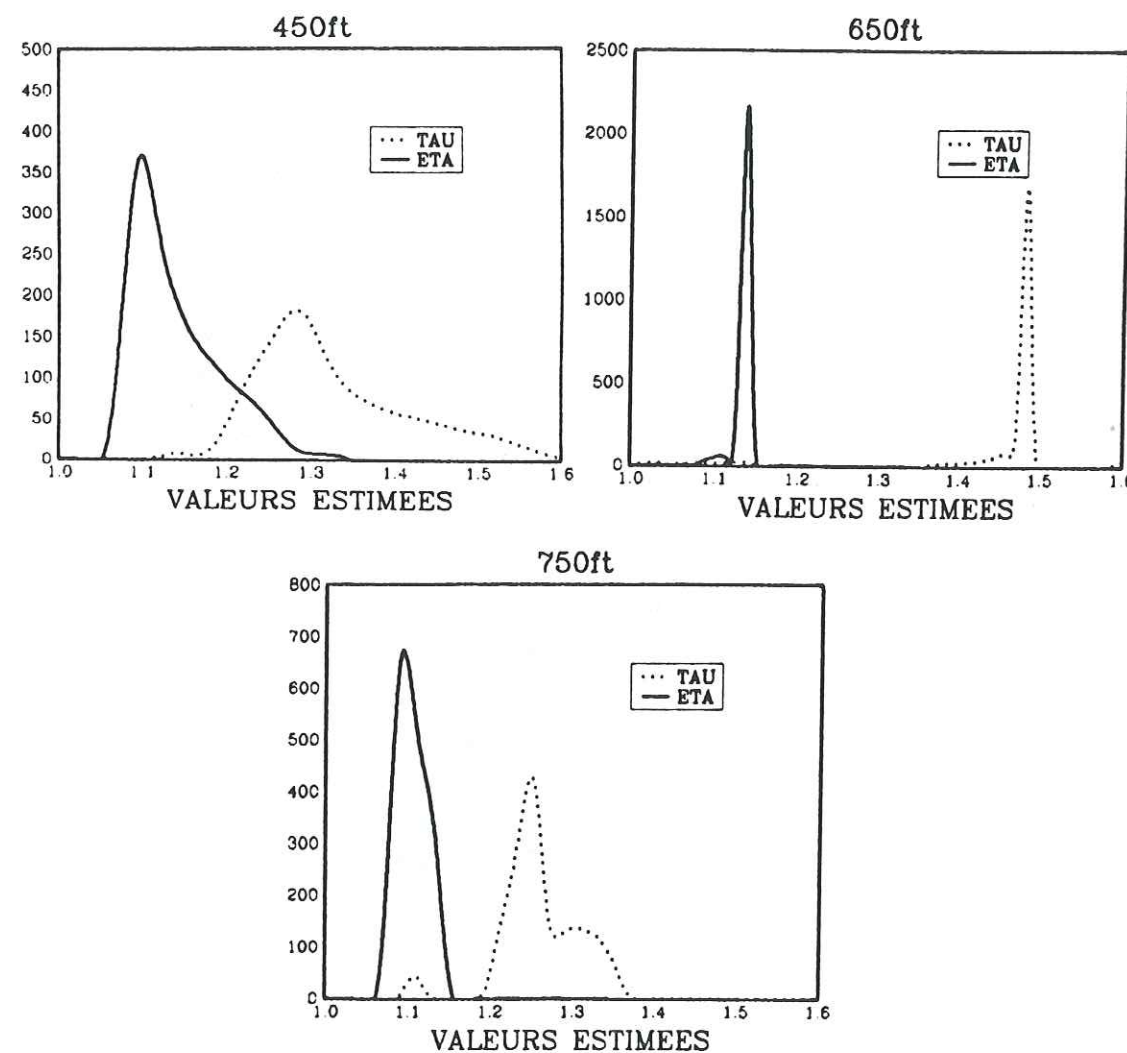


Figure VIII.3. Histogramme des valeurs des paramètres η et τ estimées par inversion pour les cotes 450 ft (gauche), 650 ft (droite) et 750 ft (bas) en considérant comme jeu de paramètres initial des valeurs pour η et τ comprises entre 0,8 et 1,2. Dans les trois cas, les valeurs initiales des paramètres α et β sont fixées à 1.

Pour illustrer l'effet des incertitudes sur les mesures de temps, on a inversé les données pour les trois cotes (450, 659 et 750 ft) à partir des mesures de lenteurs. En effet, nous avons vu au chapitre 6 que les courbes de sensibilité des lenteurs ou des vitesses apparentes verticales pondérées par l'erreur globale sont les mêmes si les incertitudes sur les données sont correctement modélisées. Les erreurs sur les lenteurs dues aux incertitudes sur les temps sont constantes et valent $\frac{\delta t}{h}$ (h est la distance entre deux récepteurs) pour les lenteurs. Les erreurs sur les vitesses valent $\frac{\delta t}{h} v^2$. Or, nous ne disposons pas pour cette étude des incertitudes correspondant à chaque position de la source puisque les mesures ont été faites entre deux géophones seulement. Nous avons donc supposées constantes ces incertitudes d'un tir à l'autre. Le tableau 1 montre les résultats obtenus en utilisant les lenteurs apparentes verticales pour inverser les paramètres d'anisotropie.

COTE (feet)	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
450	$1,084 \pm 0,06$	$1,216 \pm 0,29$	$2071 \pm 32,26$	$0849 \pm 29,40$
650	$1,130 \pm 0,03$	$1,477 \pm 0,17$	$2108 \pm 36,45$	$0889 \pm 27,84$
750	$1,131 \pm 0,08$	$1,332 \pm 0,31$	$2232 \pm 66,96$	$1002 \pm 35,23$

Tableau 1. Valeurs estimées des paramètres d'anisotropie inversés à partir des données lenteurs apparentes verticales pour les trois cotes 450, 650 et 750 ft.

Ces résultats sont très comparables à ceux obtenus en utilisant les vitesses verticales apparentes dans le processus d'inversion. Cela signifie que les vitesses et les erreurs de mesure sont estimées de façon suffisamment précises pour que le gradient de la fonction coût ait la même valeur que l'on considère les vitesses ou les lenteurs apparentes verticales.

1.4 Résultats obtenus par une méthode graphique.

On présente ici les résultats obtenus par une méthode développée par le professeur Helbig (1991). Cette méthode permet d'estimer graphiquement les deux modules élastiques C_{11} et C_{13} , les deux constantes élastiques C_{33} et C_{55} étant supposées connues. Le principe de cette méthode est le suivant :

— on construit un graphe ayant en abscisse les lenteurs apparentes verticales des ondes q_P ou q_{SV} normalisées par la vitesse verticale des ondes P ou SV et en ordonnée, les angles de polarisation des ondes q_P ou q_{SV} ;

— connaissant la valeur des constantes C_{33} et C_{55} , on obtient une courbe pour chaque couple (C_{11}, C_{13}) particulière ;

— connaissant les vitesses verticales des ondes P et SV , chaque couple de données (lenteur apparente verticale, angle de polarisation) correspond à un point sur ce graphe.

Il suffit de trouver les valeurs du couple (C_{11}, C_{13}) pour lesquelles la courbe résultante passe par le maximum de points expérimentaux. Les figures (VIII.4), (VIII.5) et (VIII.6) présentent les résultats obtenus respectivement pour les cotes 450, 650 et 750 ft. Les courbes correspondent à des valeurs de C_{11} et de C_{13} calculées à partir de celles de η et de τ estimées par inversion. On note que la correspondance entre les points expérimentaux et la courbe est particulièrement satisfaisante pour les grandes valeurs d'angles de polarisation.

Cette méthode présente l'avantage de procurer rapidement des résultats. Cependant, il est nécessaire de supposer connues les valeurs des vitesses verticales P et SV . De plus, il n'y a pas de critère autre que visuel pour choisir les constantes C_{11} et C_{13} . Cette méthode est un outil idéal pour calculer un jeu de paramètres initial donné en entrée de l'algorithme d'inversion.

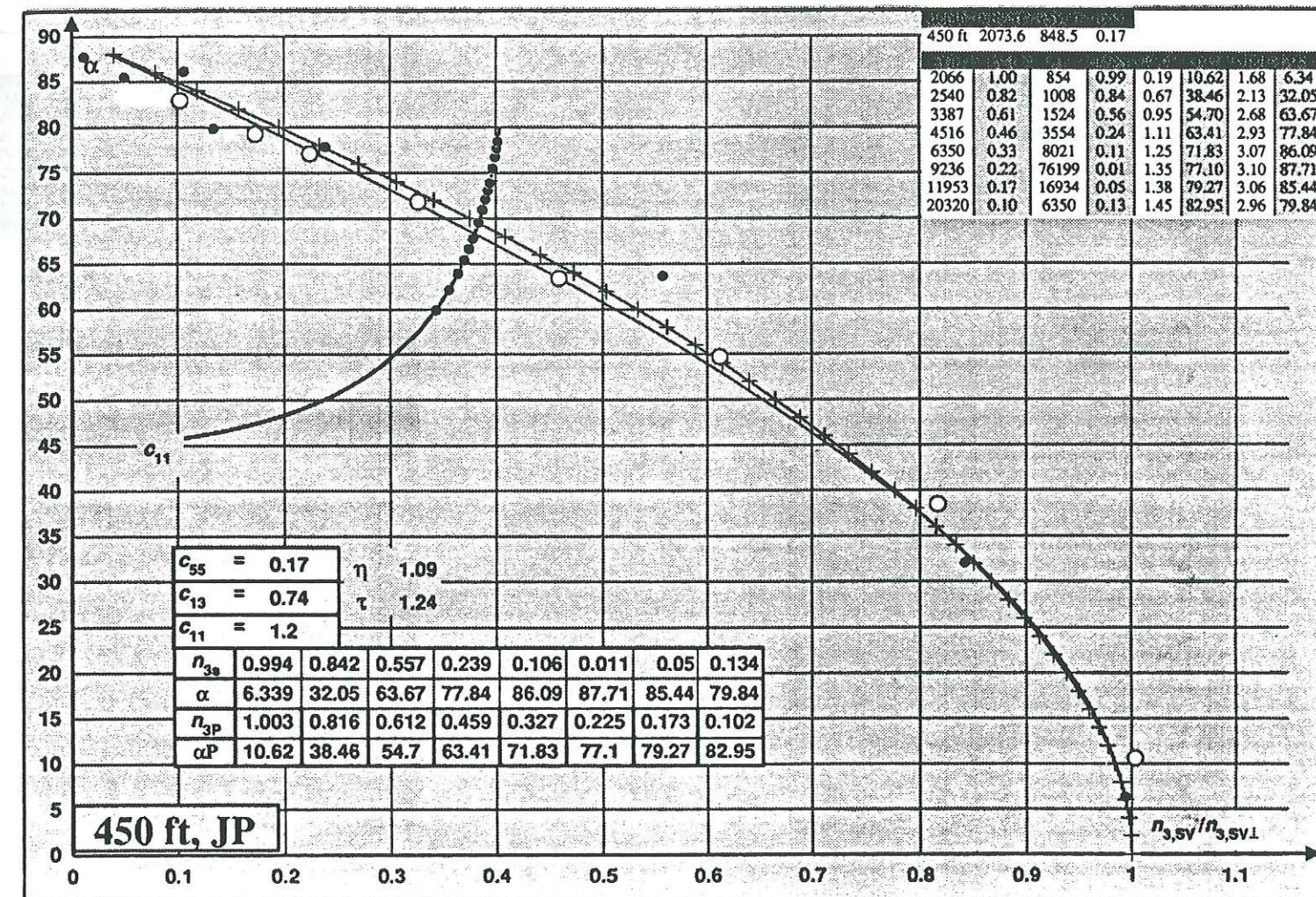


Figure VIII.4. Résultats obtenus par la méthode de Helbig (1991) pour la cote 450 ft.

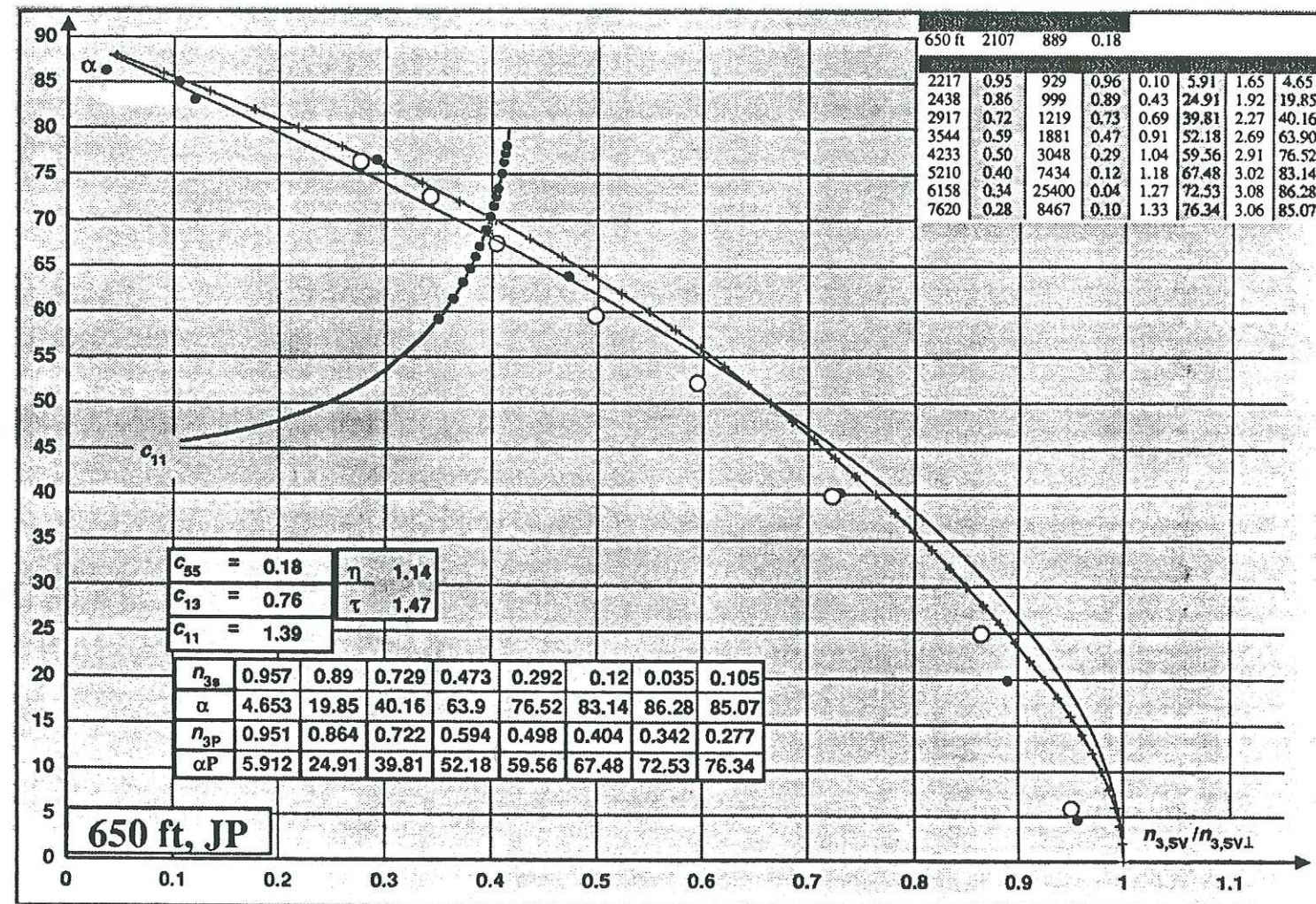


Figure VIII.5. Résultats obtenus par la méthode de Helbig (1991) pour la cote 650 ft.

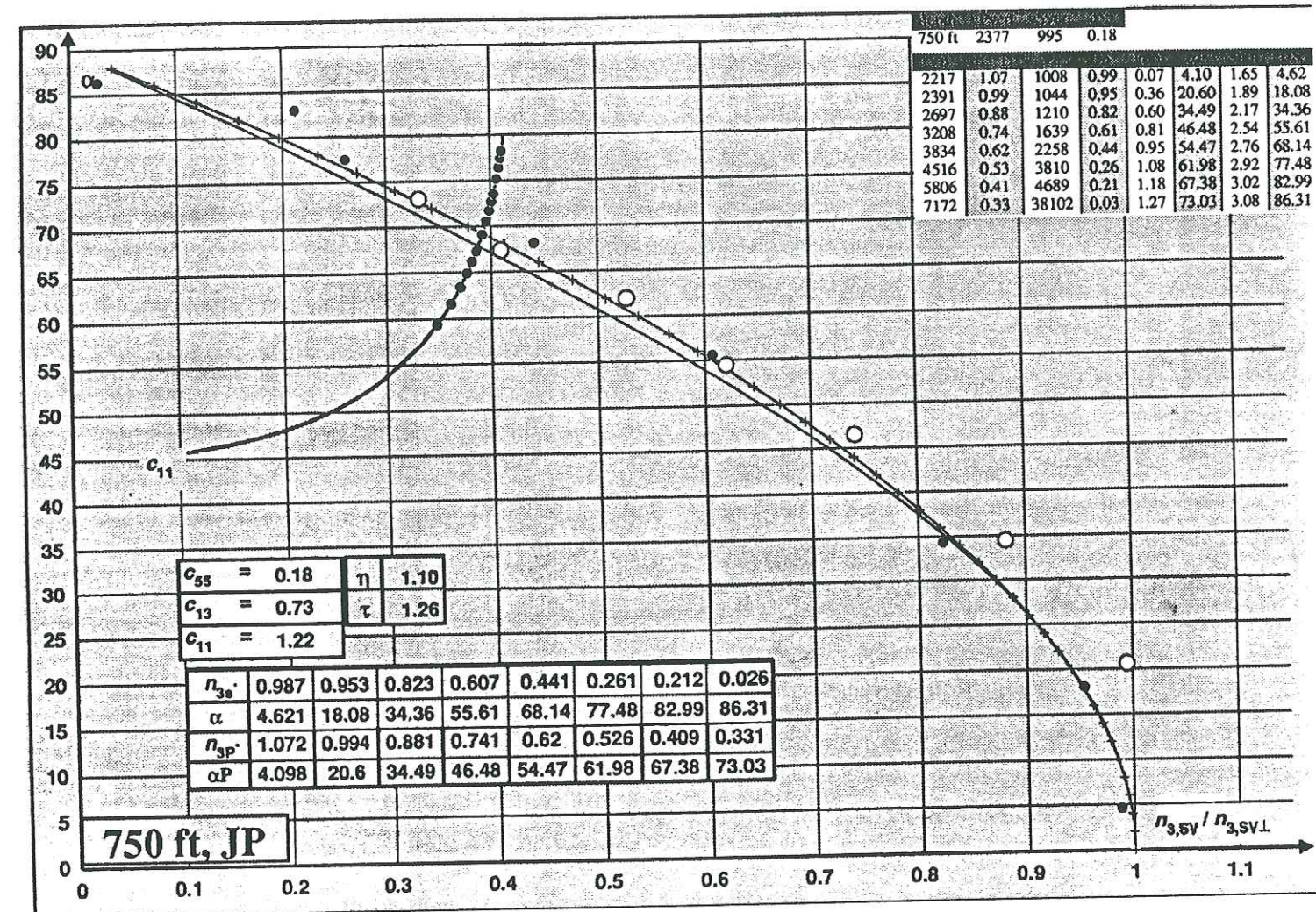


Figure VIII.6. Résultats obtenus par la méthode de Helbig (1991) pour la cote 750 ft.

2. Application à des données de "walkaway" : Courgivaux.

2.1 Introduction.

La méthode d'inversion des paramètres d'anisotropie à partir des mesures de lenteurs verticales apparentes a été appliquée à des données réelles de "walkaway". Les données ont été enregistrées dans le bassin de Paris sur le site de Courgivaux (puits CGX-1) par la CGG à la demande de l'IFP le 25 juin 1986. On dispose de 100 tirs enregistrés sur 4 cotes. La ligne de sources ne passait pas à l'aplomb du puits. Ces données ont été traitées en partie à la CGG.

Les données ont tout d'abord été réorientées dans le plan horizontal de manière à vérifier qu'il n'y avait pas de variations latérales de vitesses. Ainsi, l'hypothèse d'un milieu TI est vérifiée. Les mesures de lenteurs et d'angles de polarisation ont été faites dans le plan vertical après réorientation.

Les paramètres d'anisotropie ont été estimés en considérant les données issues de tous les tirs et enfin les tirs localisés d'un côté puis de l'autre du puits.

2.2 L'acquisition.

Les données ont été enregistrées avec un outil Multilock composé de quatre sondes espacées de 10m l'une de l'autre. Chaque sonde enregistre trois composantes selon des directions formant un trièdre direct (Z, H1, H2). Il y a deux composantes horizontales (H1 et H2) et une composante verticale (Z).

La source était un vibreur vertical type M10. Le balayage en fréquences était de 12 à 80Hz sur une durée de 12 secondes.

Il y a eu 100 positions de la source (espacées de 25 m) alignées suivant un azimuth N54°. Cette ligne ne passait pas par le puits d'enregistrements (CGX1) localisé à 3350m au SE de celle-ci (voir plan d'acquisition figure VIII.7). La sonde était ancrée à une profondeur de 1630 m par rapport au niveau de la gueule du puits. La figure (VIII.8) présente un rejeu brut en collection récepteurs pour les trois composantes Z, H1 et H2. On distingue très nettement l'arrivée directe P ainsi que l'onde convertie S à la base de la couche altérée, notée S1. Ces données d'une qualité exceptionnelle ont permis de faire des mesures précises de lenteurs apparentes verticales et d'angles de polarisation.

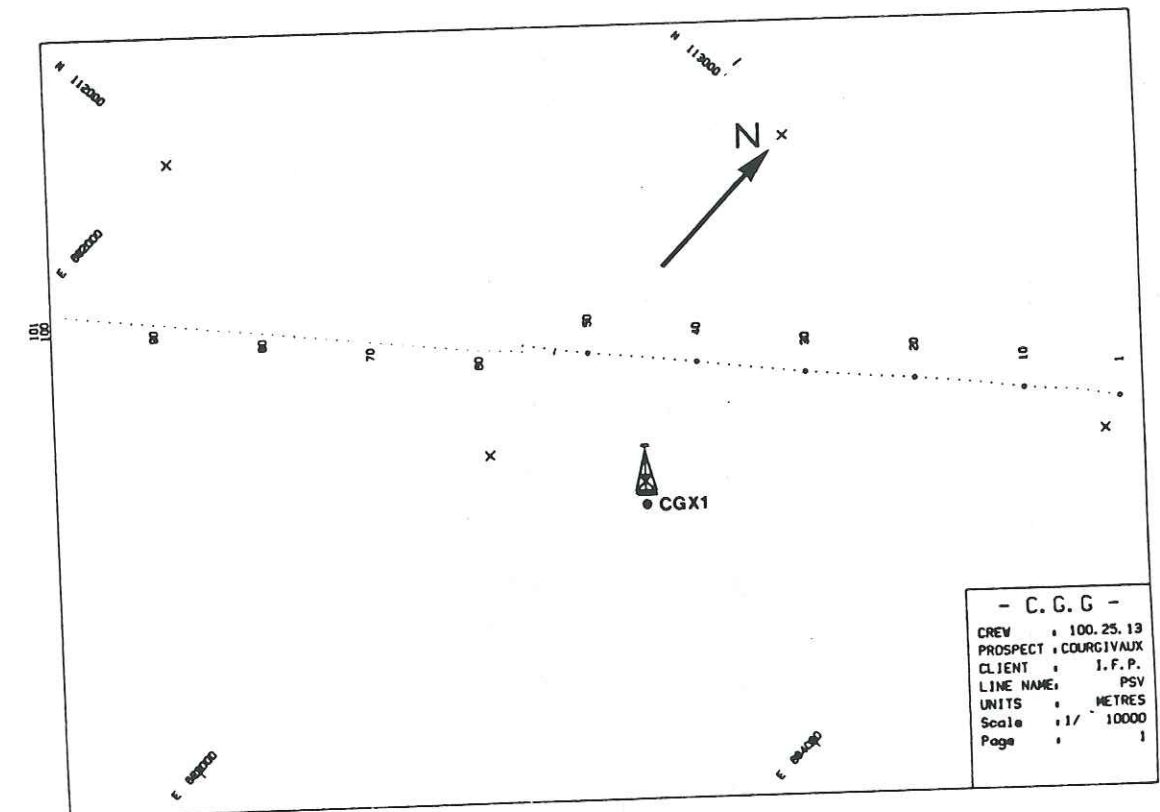


Figure VIII.7. Plan d'acquisition des données de Courgivaux.

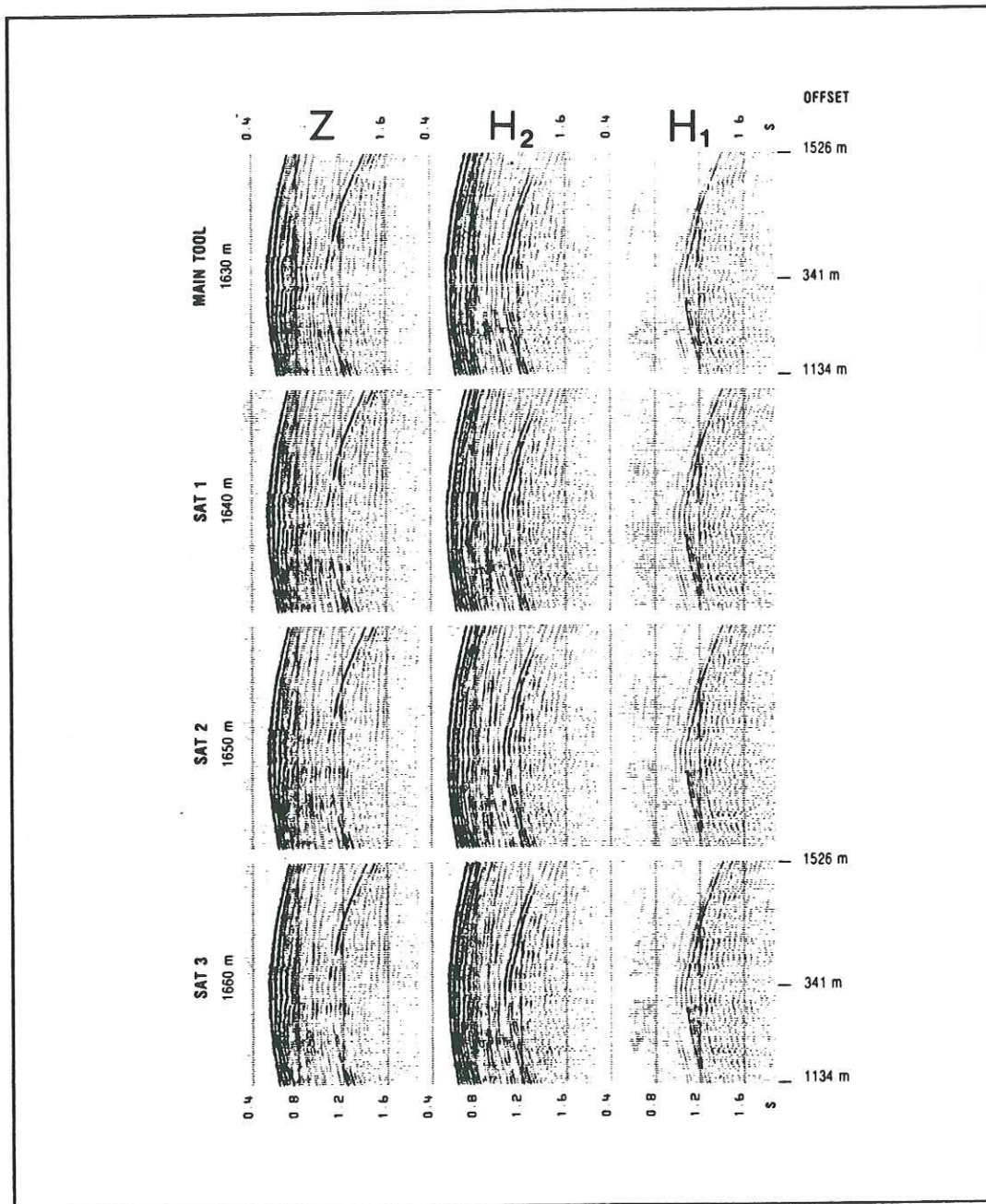


Figure VIII.8. Rejeu brut des composantes Z (haut), H1 (milieu) et H2 (bas) des données de Courgivaux représentées en collection récepteurs.

2.3 Le milieu étudié.

La sonde est placée dans les couches du Lusitanien, décrit entre 1536 m et 1743 m comme un ensemble de calcaire gris à gris beige, à pâte fine, avec quelques niveaux marneux, le Lusitanien a une épaisseur de 179 m et se situe entre les cotes 1636 m et 1815 m. Un carottage sismique effectué le 6 juin 1954 donne des vitesses par tranche de 5100m/s pour les ondes *P* et comprise entre 3120 m/s et 3140 m/s pour les ondes *S* descendantes. La vitesse moyenne des ondes *P* entre 1600 m et 1700 m est 4762 m/s (figure VIII.9).

RESULTATS			
Epaisseur W 2	Vitesse Vitesse	Vitesse Vitesse	Vitesse Vitesse
Prof. point de mesure	HR	HT	HT
0	→	→	2650
510	2660	2500	→
796	2740	→	3975
1292	2935	2955	3505
→	→	→	4640
1308	3035	3035	3680
1536	3140	3120	5100
1740	3270	→	3590
→	→	→	5100
1923	3310	3290	→
2219	3470	→	3240
→	→	→	3500
2410	3490	→	4360
→	→	→	4185
2676	3470	3455	5015
2981	3510	→	→
→	→	→	→
3015	3493	3330	→
3185,5	3385	3590	→
→	→	→	→
Vitesse double	3940	3990	→

Figure VIII.9. Vitesses par tranches des ondes P et S obtenues par carottage sismique.

2.4 Réorientation des données.

2.4.1 Dans le plan horizontal.

Les données sont réorientées dans le plan horizontal suivant la direction de la polarisation des arrivées directes P . On passe ainsi du repère $(Z, H1, H2)$ au repère (Z, HR, HT) . La composante HR est orientée suivant la direction des arrivées P et la composante HT , perpendiculaire à HR , est supposée orientée suivant la direction des arrivées SH . Cette réorientation a pu être faite avec une grande précision car les polarisations des ondes P dans le plan horizontal sont linéaires. La planche 1 montre les mouvements de particules dû au passage de l'onde P . A partir de ces données ainsi réorientées dans la direction de la source, on montre qu'il n'y a pas ou peu de variations latérales de vitesses. La figure (VIII.10) donne la valeur de l'angle de polarisation des ondes P en fonction de l'azimut des positions de la source mesurées à partir du puits pour les 4 cotes (1630 m, 1640 m, 1650 m, 1660 m). On note sur cette figure un décrochement entre les tirs 48 et 53. Ce décrochement peut être dû à l'effet d'une fracture ou d'un pendage légèrement différent dans les couches supérieures. Cependant, ces tirs étant proches du puits, l'influence d'une discontinuité ou d'un pendage des couches supérieures sera plus importante que pour des tirs éloignés. En effet, sur la figure (VIII.10), le décrochement observé pour les tirs 48 à 53 est accentué par rapport à des tirs plus éloignés du puits pour lesquels les points sont beaucoup plus concentrés. Il faut donc considérer une pente moyenne sur l'ensemble des points pour calculer l'azimut des composantes $H1$ et $H2$ de l'outil. On admet donc le milieu latéralement homogène pour les ondes P .

Ces conclusions n'impliquent pas l'absence d'anisotropie azimutale. Pour le vérifier, on considère les arrivées directes S dans le plan (HR, HT) . Les composantes HR et HT ont été réorientées dans le repère géographique de telle façon que la composante HT soit orientée vers le Sud et la composante HR vers l'Est. La planche 2 montre, en collection récepteurs, les mouvements de particules au passage de l'arrivée directe S . On note que d'un tir à l'autre les polarisations sont linéaires ou légèrement elliptiques. Cependant, pour quelques tirs, on observe un début de découplage en 2 modes qui peut être interprété comme étant dû à de l'anisotropie azimutale. Globalement, on peut considérer le milieu comme isotrope dans le plan horizontal au niveau des récepteurs.

Cette étude rend plausible l'hypothèse d'un milieu TI d'axe vertical.

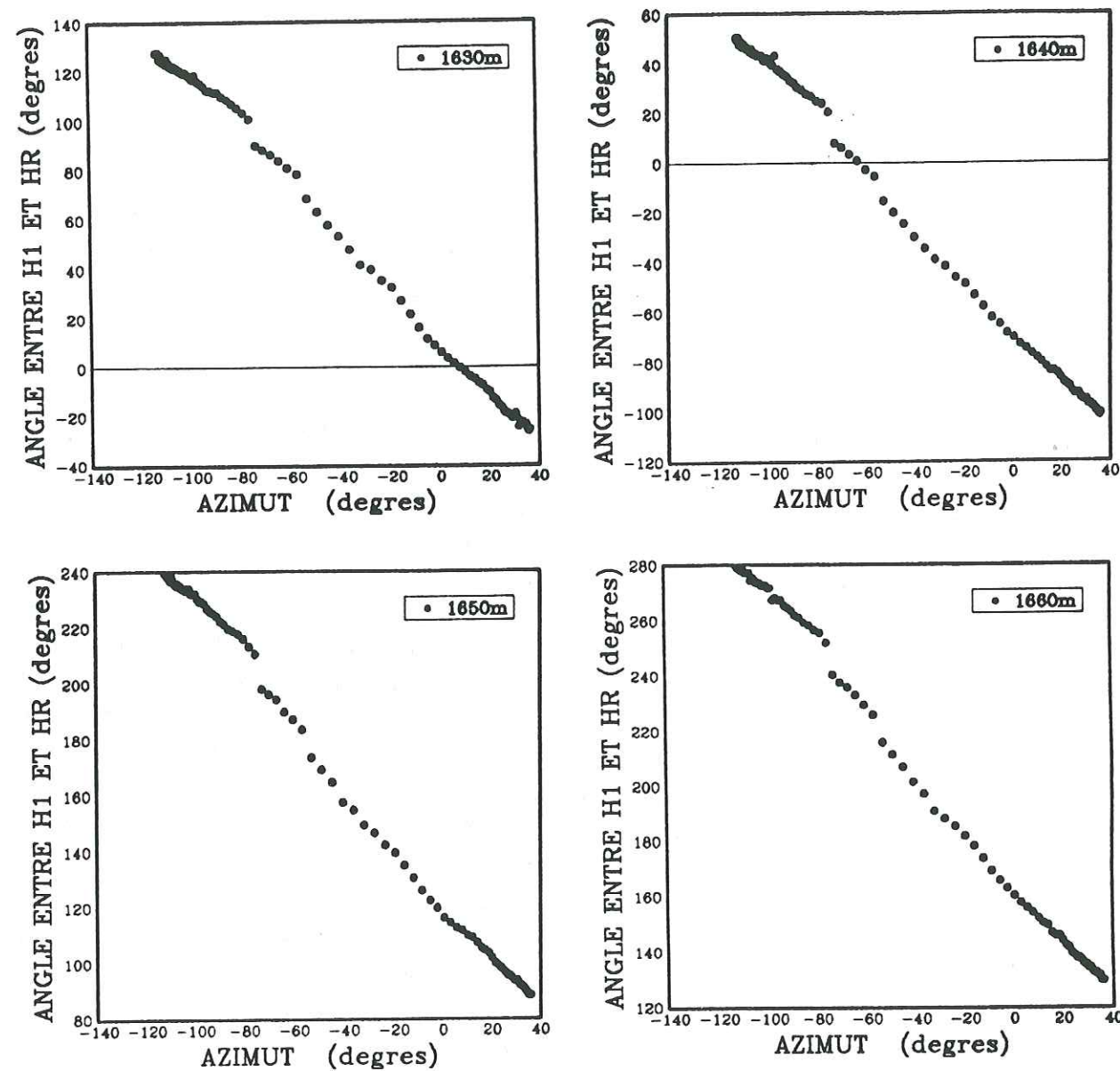


Figure VIII.10. Valeur de l'azimut de la position des sources mesuré à partir de la position du puits en fonction de l'angle de polarisation mesuré sur les arrivées directes P aux cotes 1630 m, 1640 m, 1650 m, 1660 m.

2.4.2 Dans le plan vertical.

À partir des données réorientées dans le plan (Z,HR,HT) , la polarisation des arrivées directes P et SV est étudiée dans le plan vertical (Z,HR) . Sous l'hypothèse d'un milieu latéralement homogène, on admet que le plan (Z,HT) contient les arrivées SH .

Une réorientation dans le plan vertical a été effectuée à partir des polarisations des ondes estimées P . On passe ainsi du repère (Z,HR,HT) au repère (R,RP,HT) . La composante R , dirigée dans la direction de la source, contient l'énergie des ondes P et la composante RP , perpendiculaire à R , contient celle des ondes SV . Les mouvements de particules montrent que les polarisations des ondes P sont quasiment linéaires (planche 3).

Une même réorientation dans le plan vertical a été effectuée à partir de la polarisation des ondes SV . Les mouvements de particules montrent que les polarisations sont elliptiques (planche 4). Ceci est dû au fait qu'il y a interférence avec des événements montants et/ou des réflexions multiples.

La figure (VIII.11) récapitule les deux rotations successives opérées sur les données.

01 SEP. 2003
Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : plalour@ujf-grenoble.fr

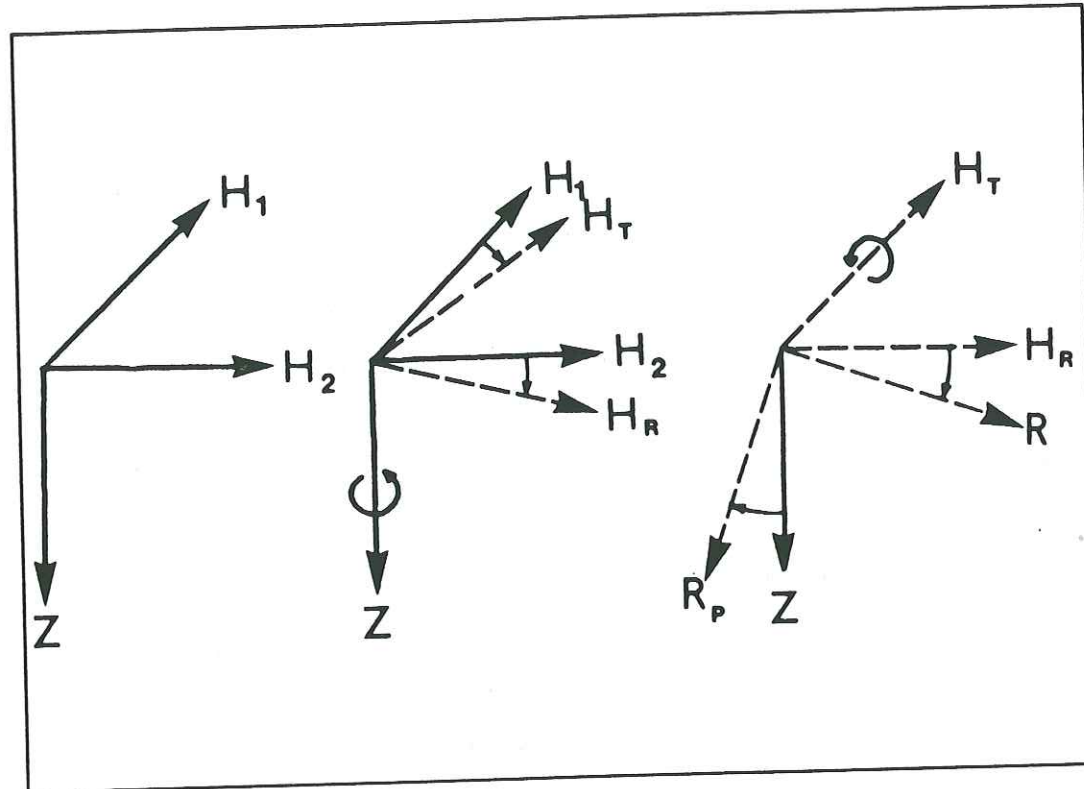


Figure VIII.11. Schéma illustrant les deux rotations permettant de passer du repère (Z, H1, H2) au repère (Z, R, RP).

2.5 Construction du jeu de données.

La figure (VIII.12) montre respectivement pour les ondes q_P et q_{SV} les valeurs des temps d'arrivée en collection récepteurs. Il y a une dépendance linéaire entre les temps d'arrivée et les cotes des récepteurs. Cela permet de considérer le milieu comme homogène entre 1630 m et 1660 m. On calcule alors une lenteur apparente verticale par régression linéaire sur les quatre cotes. On peut de même calculer une incertitude sur les lenteurs qui intervient dans la matrice de pondération de la fonction coût (6.10). La figure (VIII.13) montre respectivement pour les ondes q_P et q_{SV} les valeurs de vitesses apparentes avec leur incertitude en collection récepteurs. L'incertitude est beaucoup plus importante sur les vitesses apparentes verticales des ondes q_{SV} que sur celle des ondes q_P . D'autre part, cette incertitude augmente régulièrement avec le déport pour les ondes q_P et reste à peu près constante pour les ondes q_{SV} .

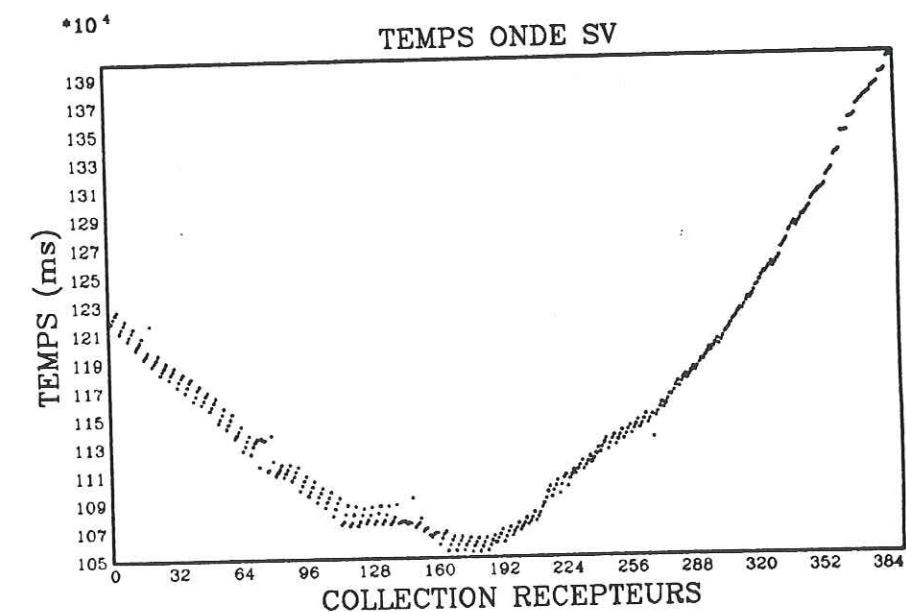
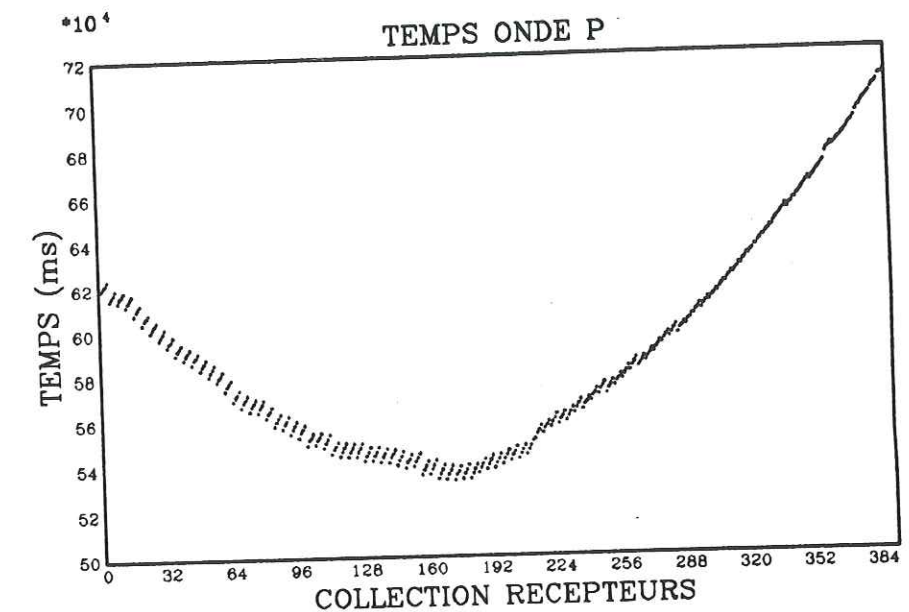


Figure VIII.12. Représentation des temps de parcours des ondes q_P (haut) et q_{SV} (bas) mesurés à chaque récepteur et pour chaque position de la source.

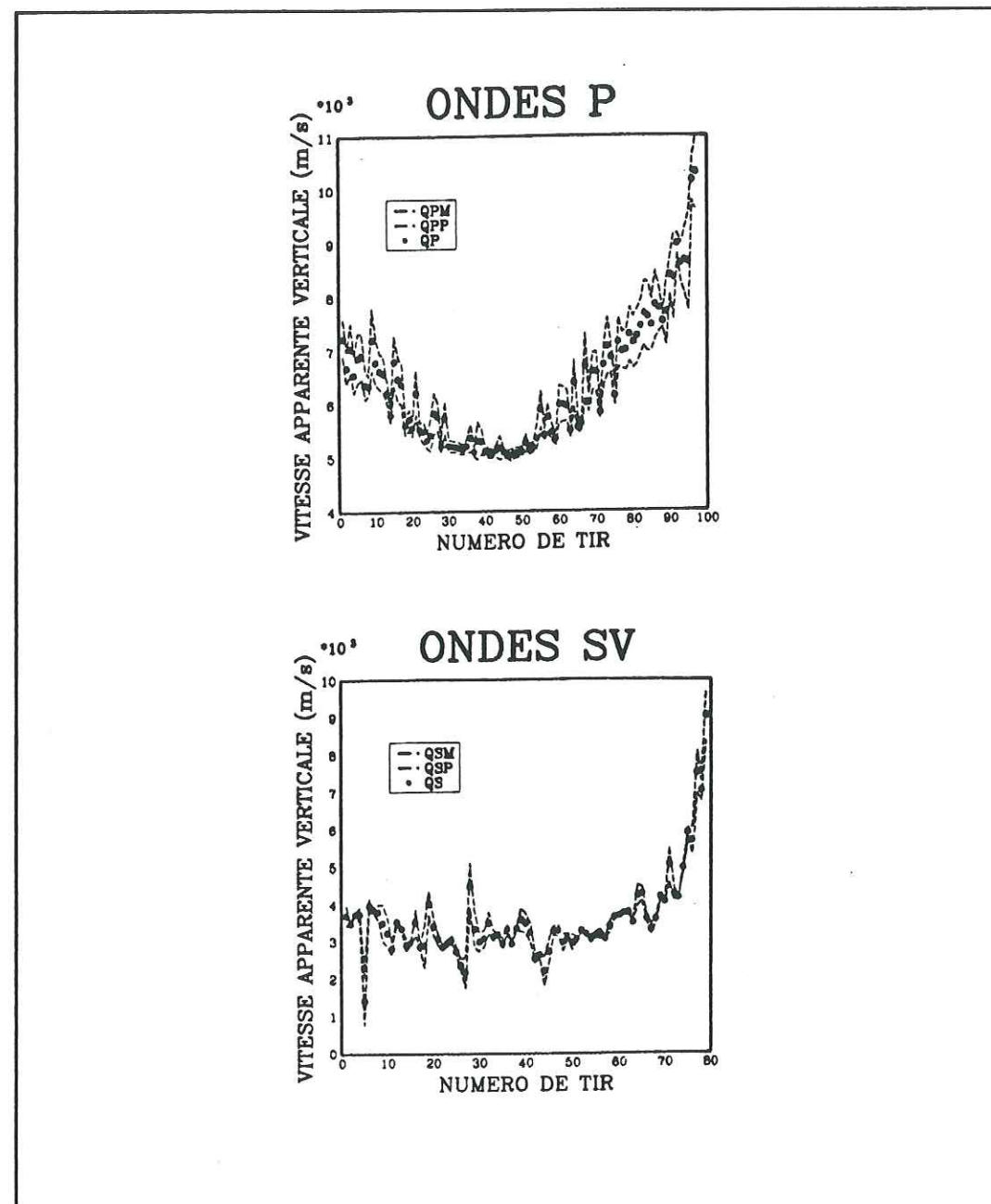


Figure VIII.13. Représentation des vitesses apparentes verticales des ondes q_P (haut) et q_{SV} (bas) avec leur incertitude. Ces vitesses sont calculées avec les temps de parcours mesurés avec chacun des 4 récepteurs et représentées en fonction de la position de la source.

La figure (VIII.14) montre respectivement pour les ondes q_P et q_{SV} les valeurs des angles de polarisation en collection récepteurs. Ces angles sont mesurés par rapport à la verticale. Il y a des variations de l'ordre du degré entre les cotes 1630 m à 1660 m pour les ondes q_P et de l'ordre de 6° pour les ondes q_{SV} . On peut alors faire l'hypothèse d'une onde plane entre ces cotes. Pour ces deux type d'ondes, on calcule l'angle de polarisation moyen sur les quatre cotes par régression linéaire. La figure (VIII.15) montre pour chaque tir les valeurs des angles de polarisation des ondes q_P et q_{SV} ainsi calculés avec leur incertitude.

On obtient donc 98 valeurs de vitesses (ou de lenteurs) apparentes verticales et d'angles de polarisation pour les ondes q_P et q_{SV} . Nous avons éliminé les points aberrants pour inverser les paramètres d'anisotropie. On utilise, en définitive, 97 données P et 78 données SV .

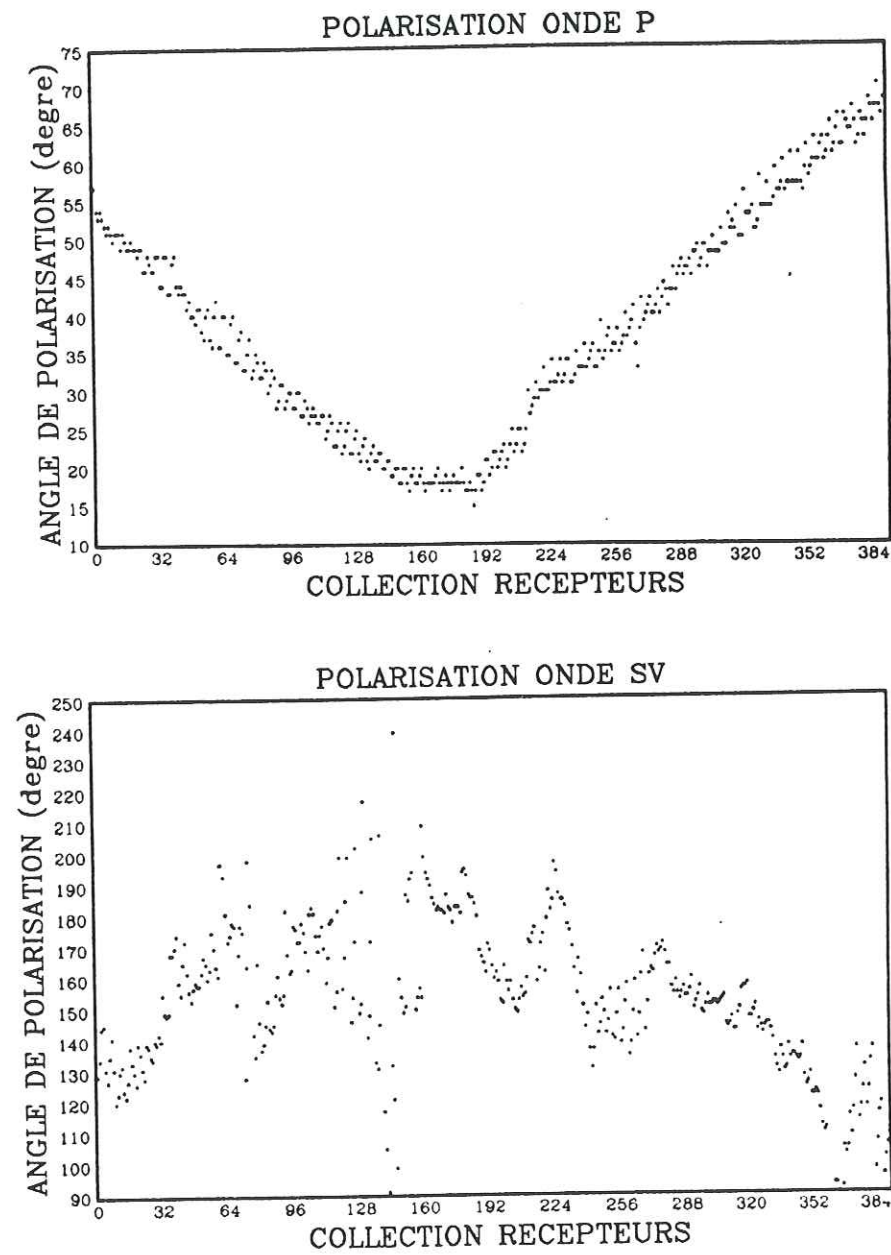


Figure VIII.14. Représentation des angles de polarisation des ondes q_P (haut) et q_{SV} (bas) mesurés à chaque récepteur et pour chaque position de la source.

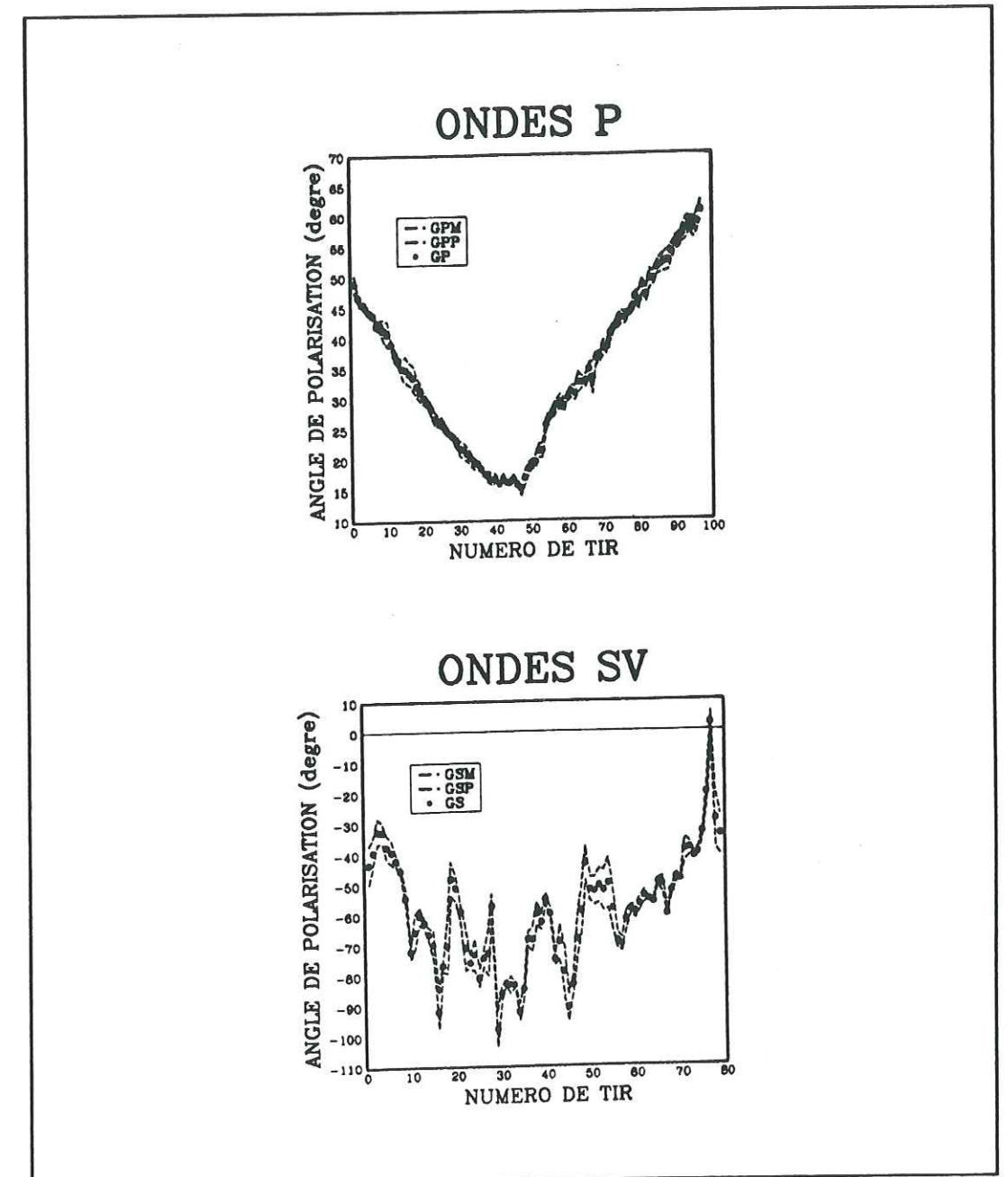


Figure VIII.15. Représentation des angles de polarisation moyens des ondes q_P (haut) et q_{SV} (bas) avec leur incertitude. Ces angles moyens sont calculés avec les angles de polarisation mesurés avec chacun des 4 récepteurs et représentés en fonction de la position de la source.

2.6 Estimation des paramètres d'anisotropie.

Le tableau ci-dessous montre les valeurs estimées des paramètres d'anisotropie en utilisant les données de vitesses apparentes verticale et d'angles de polarisation des ondes q_P et q_{SV} . On a considéré dans un premier temps le jeu de données complet puis, dans un second temps, les données correspondant aux tirs situés à l'ouest puis à l'est du puits.

	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
VITESSES APPARENTES				
JEU DE DONNÉES COMPLET	$1,071 \pm 0,03$	$1,182 \pm 0,06$	$4884 \pm 17,60$	$3002 \pm 26,34$
DONNÉES OUEST	$1,203 \pm 0,06$	$1,683 \pm 0,22$	$4935 \pm 22,07$	$3027 \pm 34,51$
DONNÉES EST	$0,885 \pm 0,04$	$0,882 \pm 0,06$	$4795 \pm 29,94$	$2835 \pm 56,84$
LENTEURS APPARENTES				
JEU DE DONNÉES COMPLET	$1,030 \pm 0,03$	$1,135 \pm 0,06$	$4885 \pm 18,28$	$2967 \pm 27,03$
DONNÉES OUEST	$1,218 \pm 0,06$	$1,441 \pm 0,17$	$4930 \pm 22,05$	$2993,5 \pm 31,39$
DONNÉES EST	$0,914 \pm 0,04$	$0,920 \pm 0,06$	$4815 \pm 29,68$	$2877 \pm 54,51$

Les résultats obtenus sont comparables que l'on utilise les vitesses ou les lenteurs verticales apparentes dans le processus d'inversion. Par contre, la différence entre les valeurs de paramètres estimés en utilisant les tirs situés à l'ouest puis les tirs situés à l'est du puits sont difficilement explicables. La figure (VIII.16) montre que cette différence ne peut pas être expliquée par un axe de symétrie non vertical. Ces résultats indiquent seulement que le milieu est localement hétérogène au niveau des récepteurs ou que la symétrie du milieu n'est pas hexagonale mais appartiendrait à un système plus compliqué. Cependant, il y a moins de tirs situés à l'est qu'à l'ouest. D'autre part, les angles de polarisation mesurés valent au maximum 50° pour les tirs situés à l'est et 60° pour les tirs situés à l'ouest du puits. Cette asymétrie des données peut aussi expliquer ces différences et il semble plus raisonnable de considérer les résultats obtenus avec le jeu de données complet. Les figures (VIII.17) et (VII.18) montrent respectivement les courbes de vitesses et de lenteurs apparentes verticales pour les ondes q_P et q_{SV} en fonction de l'angle de polarisation. Ces courbes sont calculées avec les paramètres estimés à partir du jeu de données complet. Ces figures montrent aussi la surface de vitesse obtenue avec ce jeu de paramètres comparée à celle obtenue avec un milieu isotrope ($\eta=\tau=1$).

La figure (VIII.19) montre la forme de la fonction coût dans le plan de paramètres (η, τ) (les paramètres α et β fixées à leurs valeurs estimées) calculées avec les vitesses puis les lenteurs apparentes verticales. Les courbes d'isovaleurs sont légèrement plus rapprochées quand on considère les lenteurs plutôt que les vitesses pour calculer la fonction coût.

Ces résultats montrent que le milieu est isotrope. En effet, les figures (VIII.17) et (VIII.18) montrent que les courbes de vitesses ou de lenteurs obtenues en tenant compte des erreurs sur les paramètres estimés sont très peu différentes de celles correspondant au milieu isotrope. Cependant ces résultats montrent aussi qu'il est possible de mesurer avec précision les paramètres d'anisotropie à partir de données de sismique de puits par la méthode d'inversion proposée.

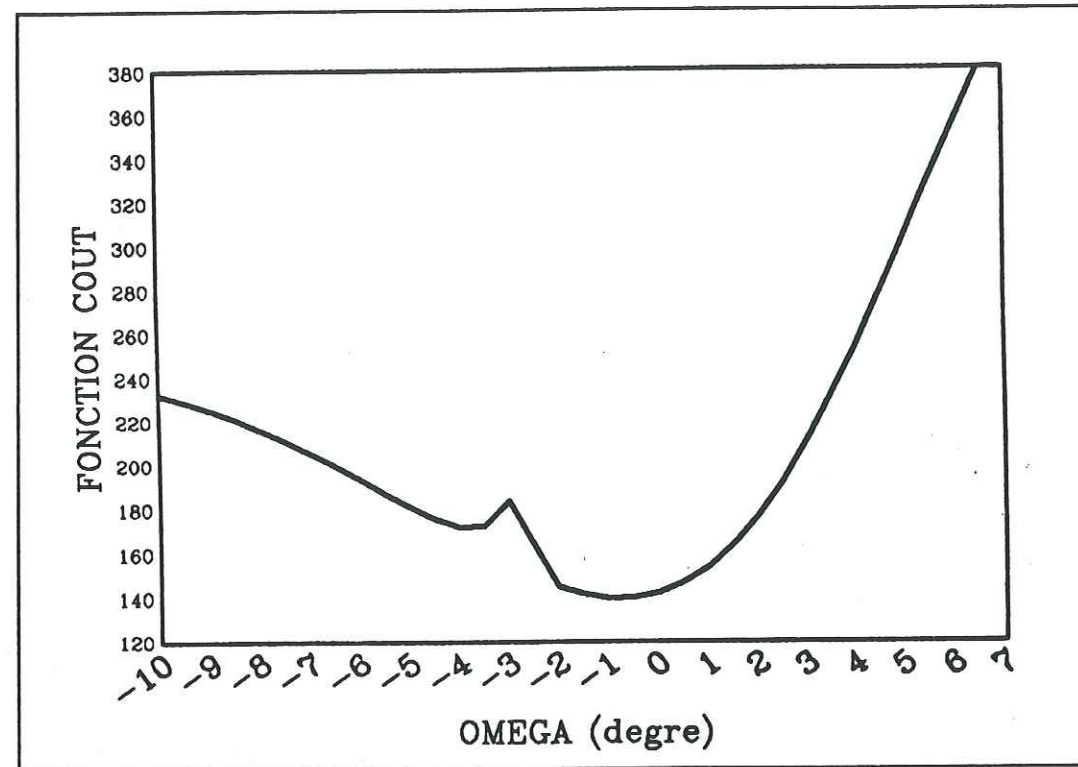


Figure VIII.16. Valeurs de la fonction coût obtenues en considérant différentes valeurs pour l'angle Ω entre l'axe de symétrie du milieu TI et l'axe vertical Z.

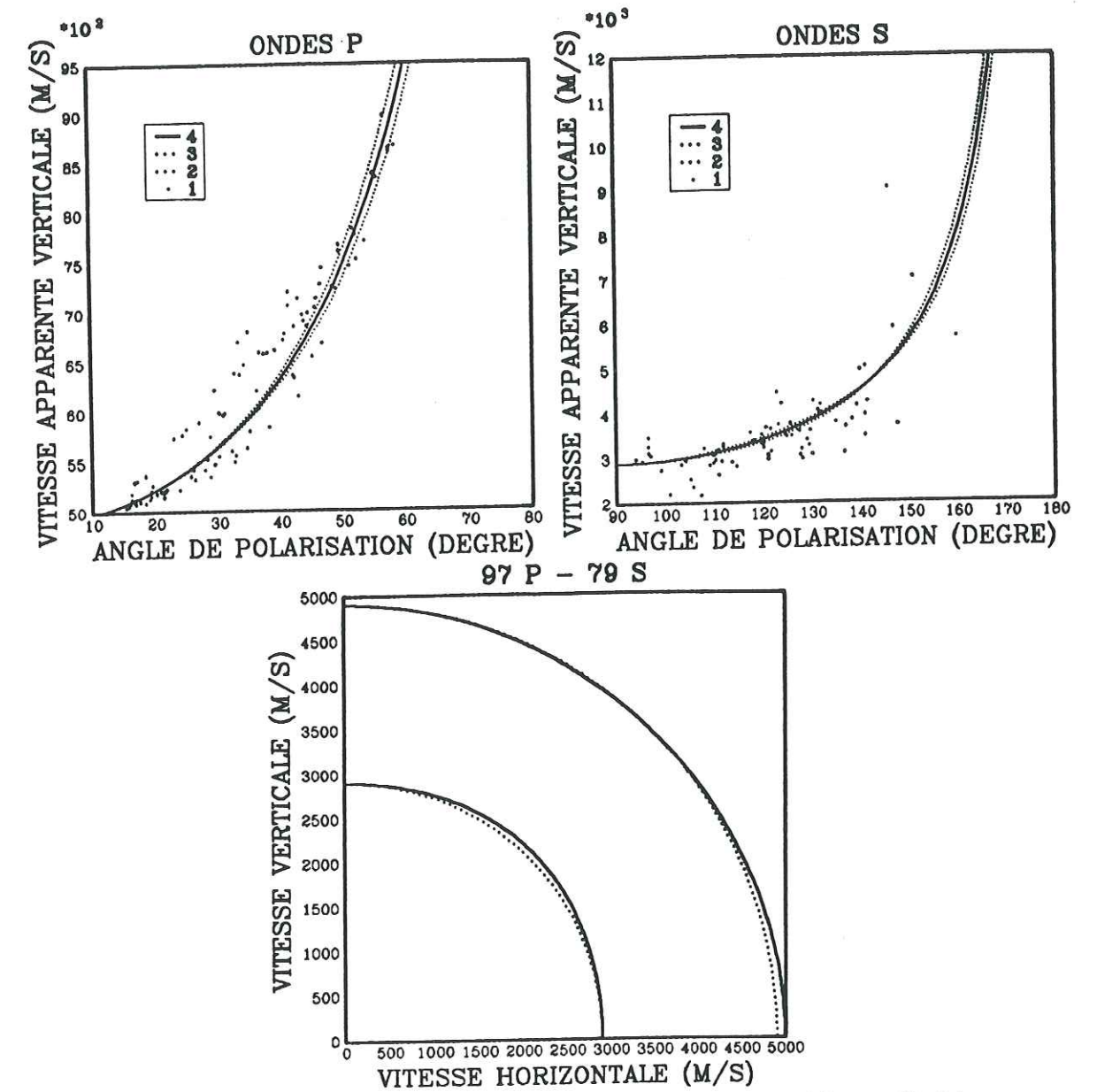


Figure VIII.17. Courbes des vitesses apparentes verticales (haut) des ondes q_P (gauche) et q_{SV} (droite) en fonction de l'angle de polarisation obtenues avec le jeu de paramètres estimé par inversion en utilisant le jeu de données complet. Les courbes en pointillé représentent les bornes inférieures et supérieures de l'erreur faite sur l'estimation des paramètres. La courbe représentée avec des croix correspond au milieu isotrope ($\eta=\tau=1$). Les surfaces de vitesses (bas) calculées avec le jeu de paramètres estimés (traits pleins) sont comparées avec celles correspondant au milieu isotrope (pointillé).

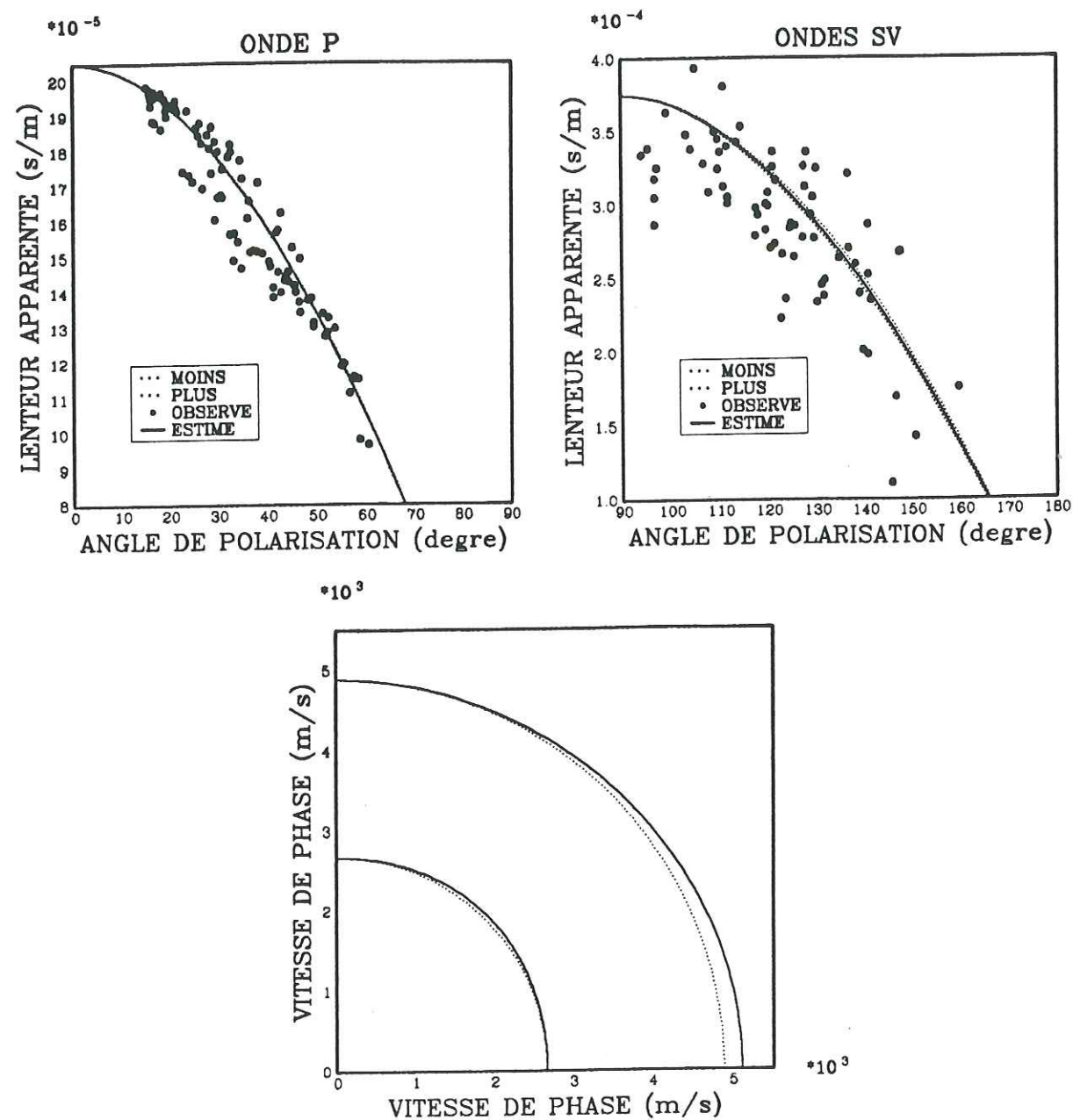


Figure VIII.18. Représentation similaire à celle de la figure (VIII.17) mais obtenue avec les lenteurs apparentes verticales.

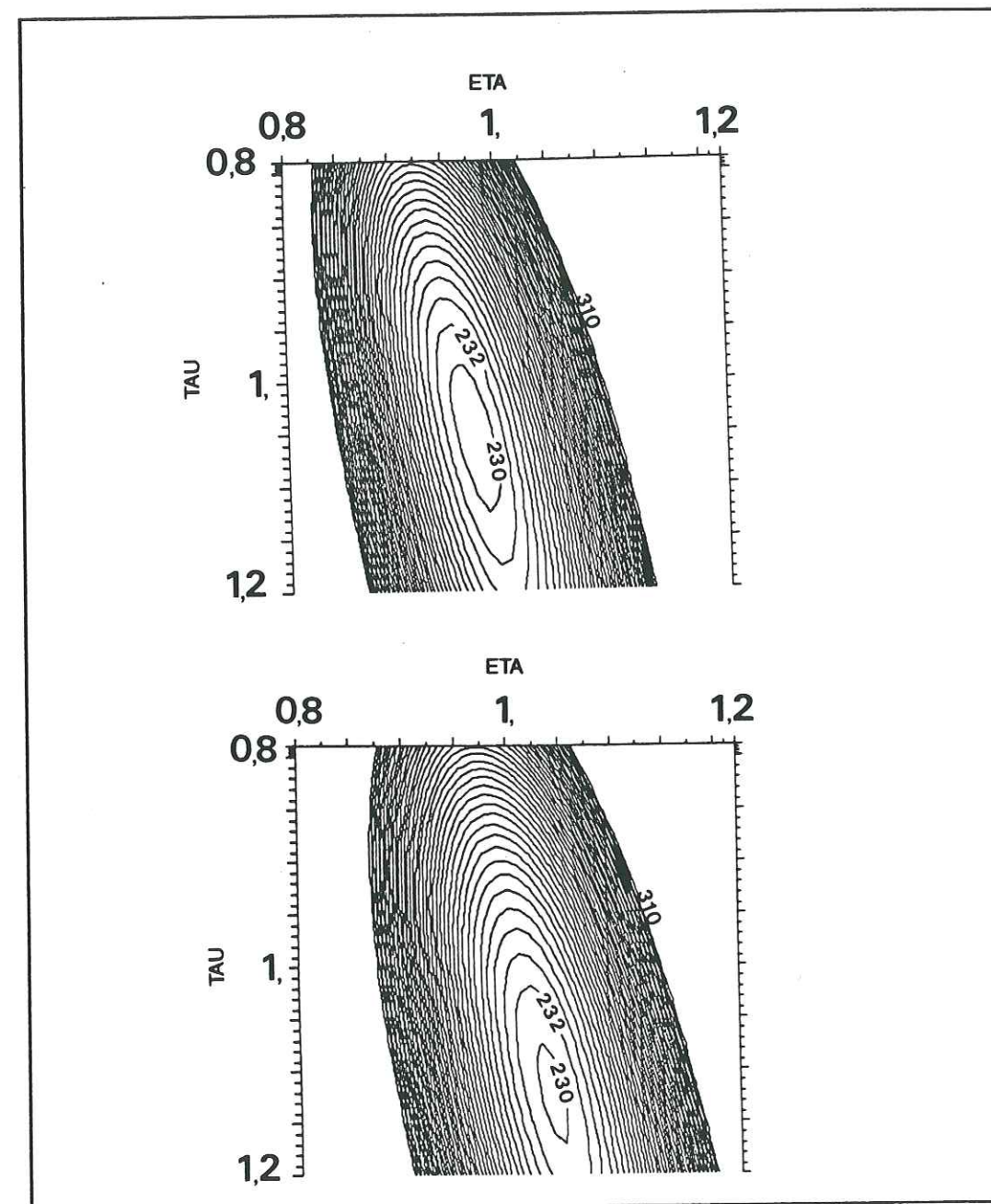


Figure VIII.19. Forme de la fonction coût dans le plan de paramètres (η, τ) calculée à partir des vitesses (haut) ou des lenteurs (bas) apparentes verticales. Les deux paramètres α et β sont fixés à la valeur données par la méthode d'inversion.

Table des matières.

Chapitre 9. Modélisation de la pression mesurée dans un puits en termes de déformations : cas des milieux TI.	1
1. Introduction.	1
2. Déplacement de la paroi du puits due à une onde élastique incidente.	2
3. Calcul de la pression dans un puits due au passage d'une onde élastique.	6
4. Étude de sensibilité.	9
5. Estimation des paramètres d'anisotropie à partir des lenteurs apparentes verticales et des pressions.	14
5.1 Introduction.	14
5.2 Les données.	14
5.3 Le problème direct.	14
5.4 Le problème inverse.	16
6. Application à des données synthétiques.	20
7. Conclusion.	21

CHAPITRE 9. Modélisation de la pression mesurée dans un puits en termes de déformations : cas des milieux TI.

1. Introduction.

Dans le chapitre 6, nous avons présenté une méthode d'optimisation qui permet d'estimer les paramètres d'anisotropie à partir de la mesure des temps d'arrivées des ondes q_P et q_{SV} ainsi que des angles de polarisation associés γ_P et γ_{SV} .

Dans ce chapitre, on propose d'utiliser l'information contenue dans la pression hydrostatique mesurée dans le puits, en plus des temps d'arrivées et des angles de polarisation, pour estimer les paramètres d'anisotropie.

Généralement, un puits est rempli d'eau et le trajet d'une onde incidente le long du puits crée une petite déformation de la paroi. Cette déformation provoque une petite perturbation de la pression du fluide dans le puits. Enfin, cette petite perturbation de pression engendre une onde acoustique appelée "onde de tube" qui se propage verticalement dans le puits. Dans les traitements classiques en sismique de gisements, cette onde est considérée comme du bruit que l'on cherche à éliminer (Hardage, 1983). Cependant, plusieurs auteurs (White et Sengbush, 1953 ; Barykin, 1961 ; White, 1983) ont montré qu'il est possible de relier les propriétés mécaniques des couches traversées et les variations de pression dues au trajet d'une onde élastique le long du puits. Cette approche n'est valable que pour des longueurs d'ondes très supérieures au diamètre du puits (White, 1983). Nicoletis *et al.* (1990) ont étudié les effets de l'anisotropie et de la géométrie du puits sur la propagation des ondes de tubes. Ces auteurs ont montré, entre autres, que la forme de la section du puits influe très peu sur les propriétés des ondes de tube.

Dans cette étude, on considère un puits cylindrique, rempli d'eau, traversant un milieu homogène transversalement isotrope d'axe de symétrie vertical. On modélise, en fonction de l'angle d'incidence, la pression totale due à une onde q_P ou q_{SV} incidente se propageant le long du puits. Ce modèle est introduit dans le problème direct défini dans le chapitre 6.

Comme il est possible de mesurer de façon précise la pression hydrostatique dans un puits (Summers et Broding, 1952), cette mesure constitue une donnée supplémentaire pour le problème inverse.

2. Déplacement de la paroi du puits due à une onde élastique incidente.

On calcule le déplacement radial du puits dû à une onde incidente q_P ou q_{SV} . White (1983) a calculé, pour un milieu homogène isotrope, ce déplacement radial en termes de distributions de contraintes. On se propose ici de calculer le déplacement radial, pour un milieu TI, en termes de déplacement dans le plan (x, z) .

Soit le vecteur déplacement, solution de l'équation du mouvement, correspondant à une onde q_P défini comme suit :

$$\vec{U}_P = U_0 \vec{g}_P f\left(t - \frac{x \sin \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)}\right), \quad (9.1)$$

où :

U_0 est l'amplitude du déplacement de particules ;

$\vec{g}_P$ est le vecteur de polarisation des particules tel que $|\vec{g}_P| = 1$;

$V_P(\theta)$ est la vitesse de phase des ondes q_P ;

θ est l'angle d'incidence.

Les termes du tenseur des déformations caractérisant un changement de volume sont les termes diagonaux. Pour un milieu TI, ceux-ci s'écrivent :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial x} = -\sin \gamma_P \frac{\sin \theta}{V_P(\theta)} f' \left(t - \frac{x \sin \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right), \\ \epsilon_{yy} &= 0, \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\cos \gamma_P \frac{\sin \theta}{V_P(\theta)} f' \left(t - \frac{x \sin \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right), \end{aligned} \quad (9.2)$$

où γ_P est l'angle de polarisation de l'onde incidente q_P .

Les termes diagonaux du tenseur des contraintes sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{11} - 2C_{66} & C_{13} \\ C_{11} - 2C_{66} & C_{11} & C_{13} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

En développant (9.3) avec (9.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \left(-C_{11} \frac{\sin \gamma_P \sin \theta}{V_P(\theta)} - C_{13} \frac{\cos \gamma_P \cos \theta}{V_P(\theta)} \right) f' \left(t - \frac{x \sin \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right), \\ \sigma_{yy} &= \left((2C_{66} - C_{11}) \frac{\sin \gamma_P \sin \theta}{V_P(\theta)} - C_{13} \frac{\cos \gamma_P \cos \theta}{V_P(\theta)} \right) f' \left(t - \frac{x \sin \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right), \\ \sigma_{zz} &= \left(-C_{13} \frac{\sin \gamma_P \sin \theta}{V_P(\theta)} - C_{33} \frac{\cos \gamma_P \cos \theta}{V_P(\theta)} \right) f' \left(t - \frac{x \sin \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right). \end{aligned} \quad (9.4)$$

White (1983) a montré que le déplacement radial moyen du puits dû à une onde élastique incidente peut s'écrire :

$$\frac{U_r}{b} = \frac{\sigma_{xx}}{E_{xx}} + \frac{\sigma_{yy}}{E_{yy}} - \frac{\nu_{xz} \sigma_{zz}}{E_{zz}}, \quad (9.5)$$

où :

b est le rayon du puits.

Les termes $\frac{1}{E_{xx}}$, $\frac{1}{E_{yy}}$ et $\frac{\nu_{xz}}{E_{zz}}$, dans le cas de milieux TI, sont des termes diagonaux du tenseur des flexibilités S_{ijkl} défini comme l'inverse du tenseur des rigidités élastiques C_{ijkl} . Comme on considère un milieu TI d'axe de symétrie vertical, le plan (x, y) est un plan de symétrie, alors $E_{xx} = E_{yy}$. Ces termes diagonaux s'expriment en fonction des constantes élastiques comme suit :

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{1}{E_{xx}} = \frac{1}{E_{yy}} = \frac{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}{A}, \\ S_{zz} &= \frac{-\nu_{xz}}{E_{zz}} = \frac{-2C_{13}C_{66}}{A}, \end{aligned} \quad (9.6)$$

avec :

$$A = 4C_{66}(C_{33}(C_{11} - C_{66}) - C_{13}^2). \quad (9.7)$$

Ainsi, le déplacement radial (9.5) avec (9.6) s'écrit :

$$\frac{U_r}{b} = \frac{2}{A} \left(B \sin \gamma_P \frac{\sin \theta}{V_P(\theta)} + C \cos \gamma_P \frac{\sin \theta}{V_P(\theta)} \right) f' \left(t - \frac{x \sin \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right), \quad (9.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} B &= (C_{66} - C_{11})(C_{11}C_{33} - C_{66}C_{13}^2), \\ C &= C_{13}(C_{33}(C_{66} - C_{11}) + C_{13}^2). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Pour une onde incidente q_{SV} , le déplacement radial correspondant s'écrit :

$$\frac{U_r}{b} = \frac{2}{A} \left(B \sin \gamma_{SV} \frac{\sin \theta}{V_P(\theta)} + C \cos \gamma_{SV} \frac{\sin \theta}{V_P(\theta)} \right) f' \left(t - \frac{x \sin \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right). \quad (9, 10)$$

La figure (IX.1) montre, pour les 5 exemples utilisés dans le chapitre 5 (table 1), le déplacement radial $\frac{U_r}{b}$ en fonction de l'angle de polarisation d'une onde incidente q_P et q_{SV} . On représente ces déplacements en fonction de l'angle de polarisation car c'est ce que l'on mesure sur des données de puits. Comme on considère des milieux TI faiblement anisotropes (au sens de Thomsen (1986)), la différence entre l'angle de polarisation des ondes q_P et l'angle d'incidence n'excédant pas 10° , les résultats restent peu différents de ceux représentés en fonction de l'angle d'incidence. Sur cette figure, un signe positif correspond à une augmentation de la section du puits, un signe négatif à une diminution. Pour les ondes q_P , le déplacement radial est minimum pour une incidence verticale ($\theta = \gamma = 0^\circ$) et maximum pour une incidence horizontale ($\theta = \gamma = 90^\circ$). Pour les ondes q_{SV} , le déplacement est maximum pour un angle de polarisation γ_{SV} compris entre 130 et 155° et nul 0 et 90° . On note qu'une onde q_P ou q_{SV} incidente provoque une diminution de section du puits.

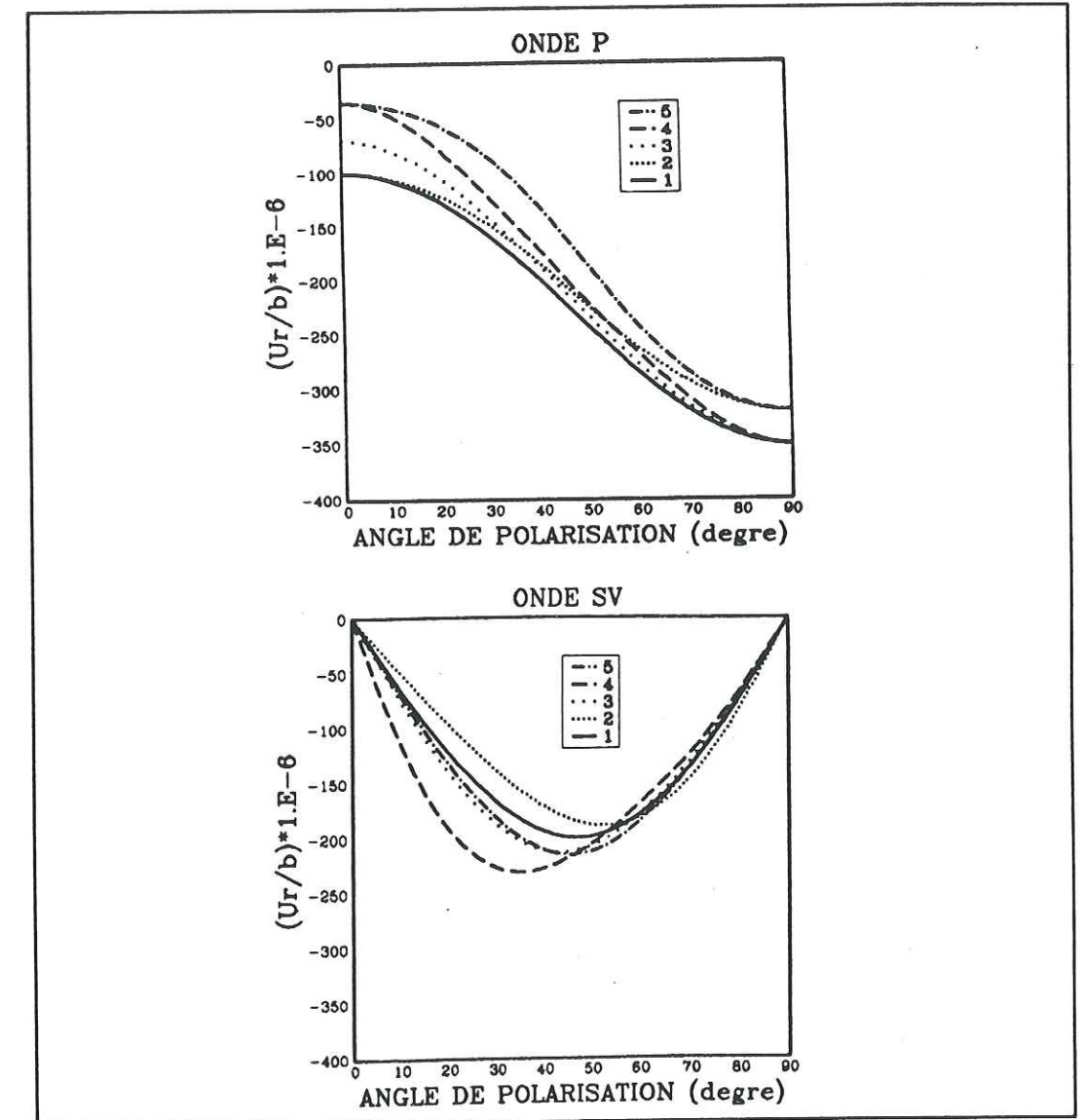


Figure IX.1. Représentation du déplacement radial du puits calculé à partir des 5 exemples de milieux TI définis dans la table 1 du chapitre 5, pour les ondes q_P (haut) et q_{SV} (bas).

3. Calcul de la pression dans un puits due au passage d'une onde élastique.

À la cote $z = 0$ m, une onde q_p incidente crée une variation de la section du puits $\frac{U_r}{b}$. Cette variation engendre deux ondes de tube d'amplitudes égales, l'une se propageant vers le haut et l'autre vers le bas comme le schématise la figure (IX.2). Dans ce qui suit, on appelle respectivement U_- et U_+ les mouvements verticaux des particules correspondant aux ondes de tube descendante et montante qui sont de la forme :

$$\begin{aligned} U_- &= u\left(t - \frac{z}{C_T}\right), \\ U_+ &= u\left(t + \frac{z}{C_T}\right), \end{aligned} \quad (9.11)$$

où C_T est la vitesse de l'onde de tube. Pour un milieu TI, l'expression de C_T est (White et Sengbush, 1953) :

$$C_T = \left[\rho \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{C_{66}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (9.12)$$

où k est le module d'incompressibilité du fluide remplissant le puits et ρ sa masse volumique. On remarque que seule la constante élastique C_{66} affecte la vitesse des ondes de tubes.

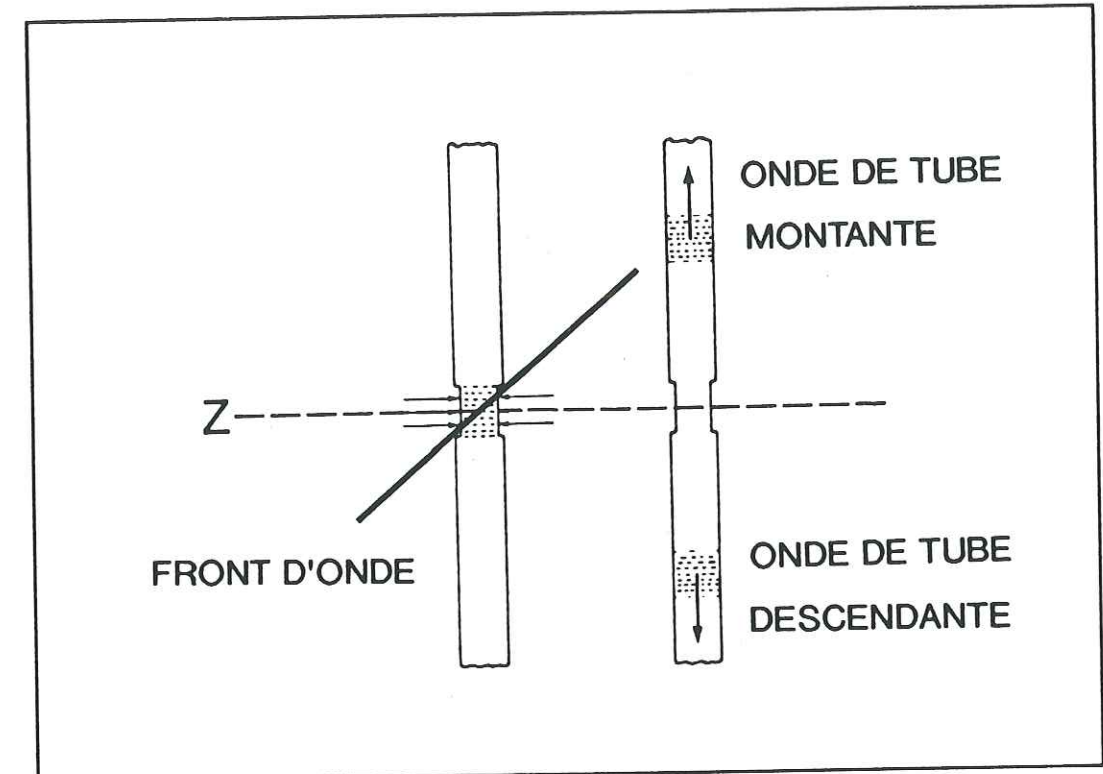


Figure IX.2. Ondes de tube descendantes et montantes engendrées par le déplacement de la paroi du puits en un point Z dues à un onde élastique incidente.

Il est possible de relier l'expression du mouvement vertical de particules à celle du déplacement radial du puits $\frac{U_r}{b}$. Pour cela, on pose que la variation de volume due au déplacement radial du puits au point z , est égale au taux d'écoulement de fluide engendré par les ondes de tube montante et descendante. Pour l'onde de tube descendante, on écrit :

$$\pi b^2 U_- = -\frac{1}{2} (2\pi b dz U_r). \quad (9.13)$$

On obtient ainsi :

$$U_- = -\frac{U_r \left(t - \frac{z}{C_T}\right)}{b} dz. \quad (9.14)$$

La vitesse de particule associée est alors :

$$v = -\dot{U}_r \left(t - \frac{z}{C_T}\right) \frac{dz}{b}. \quad (9.15)$$

White (1983) relie la pression à la vitesse de particule par l'impédance acoustique telle que :

$$p = \rho C_T v = -\rho C_T \frac{dz}{b} \dot{U}_r \left(t - \frac{z}{C_T} \right). \quad (9.16)$$

En utilisant l'expression du déplacement radial du puits (9.8), la relation (9.16) s'écrit pour une onde q_P incidente (en $x = 0$) :

$$p = -2\rho C_T D_P \dot{f} \left(t - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} - \frac{z}{C_T} \right), \quad (9.17)$$

où :

$$D_P = \frac{1}{A} \left(B \sin \gamma_P \frac{\sin \theta}{V_P(\theta)} + C \cos \gamma_P \frac{\cos \theta}{V_P(\theta)} \right). \quad (9.18)$$

De même, pour l'onde de tube montante on obtient :

$$p = -2\rho C_T D_P \dot{f} \left(t - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} + \frac{z}{C_T} \right). \quad (9.19)$$

La pression observée au point Z et au temps T est la somme de toutes les contributions des sources élémentaires d'ondes de tube générées par une onde q_P incidente au-dessus ($z < Z$) ou au-dessous ($z > Z$) du point Z . On exprime alors la pression totale $P_P(Z, T)$ comme suit :

$$P_P(Z, T) = -2\rho C_T D_P \left[\int_{-\infty}^Z \dot{f} \left(t - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} - \frac{Z - z}{C_T} \right) dz + \int_Z^{+\infty} \dot{f} \left(t - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} + \frac{Z - z}{C_T} \right) dz \right]. \quad (9.20)$$

Finalement, on obtient :

$$P_P(Z, T) = -4\rho C_T^2 D_P \left[\frac{1}{1 - C_T^2 \frac{\cos^2 \theta}{V_P^2(\theta)}} \right] \dot{f} \left(t - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right). \quad (9.21)$$

De même, la somme des sources élémentaires d'ondes de tube générées par une onde q_{SV} incidente conduit à la pression totale $P_{SV}(Z, T)$ observée au point Z et au temps T . Celle-ci s'exprime par :

$$P_{SV}(Z, T) = -4\rho C_T^2 D_{SV} \left[\frac{1}{1 - C_T^2 \frac{\cos^2 \theta}{V_{SV}^2(\theta)}} \right] \dot{f} \left(t - \frac{z \cos \theta}{V_{SV}(\theta)} \right), \quad (9.22)$$

où :

$$D_{SV} = \frac{1}{A} \left(B \sin \gamma_{SV} \frac{\sin \theta}{V_{SV}(\theta)} + C \cos \gamma_{SV} \frac{\cos \theta}{V_{SV}(\theta)} \right). \quad (9.23)$$

On note que les expressions de la pression totale $P_P(Z, T)$ et $P_{SV}(Z, T)$ dépendent des cinq constantes élastiques décrivant un milieu TI.

4. Étude de sensibilité.

Dans cette partie, on étudie la sensibilité de la pression totale à des perturbations des paramètres d'anisotropie en fonction de l'angle de polarisation. Nous avons mentionné précédemment que la pression totale dépend des cinq constantes élastiques C_{11} , C_{13} , C_{33} , C_{55} et C_{66} . Dans les chapitres 5 et 6, nous nous sommes intéressés à la propagation des ondes q_P et q_{SV} dans un plan vertical. La vitesse de phase de ces ondes ne dépendent que des quatre constantes élastiques C_{11} , C_{13} , C_{33} et C_{55} . À partir de ces quatre constantes élastiques, nous avons défini deux paramètres d'anisotropie (chapitre 5) qui sont η , τ . On définit alors un troisième paramètre, noté χ , qui prend en compte la constante élastique C_{66} :

$$\chi = \frac{C_{66} + C_{44}}{2C_{44}}. \quad (9.24)$$

Comme les deux précédents, le paramètre χ vaut 1 pour un milieu isotrope.

Les expressions de la pression totale (9.21) et (9.22) s'écrivent facilement en fonction des trois paramètres η , τ et χ . En fait, il suffit de réécrire les expressions (9.7) et (9.9) de A , B et C . À partir des cinq exemples de milieux TI décrits dans le chapitre 5, on étudie la sensibilité des expressions de la pression totale (9.21) et (9.22) à des perturbations des trois paramètres η , τ et χ , en fonction de l'angle de polarisation. Pour ces cinq exemples, on a fixé le paramètre χ à 1. On montre en effet que les courbes de sensibilité changent très peu avec la valeur de χ .

Cela signifie que ce paramètre est décorrélé des paramètres η et τ . Les figures (IX.3) et (IX.4) représentent les courbes de sensibilité de la pression dans le puits due respectivement au trajet d'une onde q_P et q_{SV} le long du puits. Cette étude montre que la sensibilité de la pression varie peu avec la valeur des paramètres d'anisotropie. On note cependant une sensibilité plus importante pour les milieux 2 et 5 correspondant à τ égal à 1. Par contre, la sensibilité de la pression dépend essentiellement de la valeur de l'angle de polarisation.

Les figures (IX.3) et (IX.4) montrent que la pression est très sensible au paramètre χ , notamment pour une onde q_P incidente. Cela signifie qu'une incertitude importante sur la pression va provoquer une forte erreur sur l'estimation de ce paramètre par une méthode d'optimisation.

La comparaison des courbes de sensibilité de la pression aux paramètres η et τ avec les figures (VI.1) et (VI.2) illustrant la sensibilité des lenteurs apparentes verticales à ces mêmes paramètres montrent que :

1. Pour une onde q_P incidente, la pression est sensible au paramètre η pour des angles de polarisation inférieurs à 50° , ce qui n'est pas le cas des lenteurs apparentes verticales. Ceci présente un intérêt important pour estimer les paramètres d'anisotropie à partir de données réelles car on a difficilement des données pour des incidences supérieures à 50° . Concernant le paramètre τ , la sensibilité de la pression est maximale pour des angles de polarisation proches de la verticale. Par contre, pour les lenteurs apparentes verticales, la sensibilité est maximale pour des angles de polarisation proches de 50 à 60° . Cependant, la sensibilité de la pression au paramètre τ devient significative pour des angles de polarisation supérieurs à 30° ce qui n'est pas le cas pour les lenteurs apparentes verticales. Ainsi, que l'on considère le paramètre η ou le paramètre τ , les intervalles d'angles de polarisation pour lesquels la sensibilité de la pression et de la lenteur apparente verticale est significative ne sont pas confondus. L'estimation de ces paramètres à partir de l'information des ondes q_P sera donc plus précise en utilisant à la fois, dans le processus d'inversion, la pression et la lenteur apparente verticale.

2. L'amplitude de la sensibilité de la pression au paramètre η est du même ordre que l'on considère une onde q_{SV} ou une onde q_P incidente. Pour les lenteurs verticales apparentes, la sensibilité au paramètre η est supérieure pour une onde q_{SV} incidente. Néanmoins, pour une onde q_{SV} incidente, les courbes de sensibilité au paramètre η sont semblables que l'on considère les lenteurs

verticales apparentes ou les pressions. Concernant le paramètre τ , l'intervalle d'angles de polarisation pour lequel la sensibilité de la pression est maximale est compris entre 140 et 170° . Cet intervalle est compris entre 100 et 150° pour les lenteurs apparentes verticales. Par conséquent, il apparaît intéressant d'estimer le paramètre τ en prenant en compte à la fois les lenteurs apparentes verticales et la pression dans le processus d'inversion.

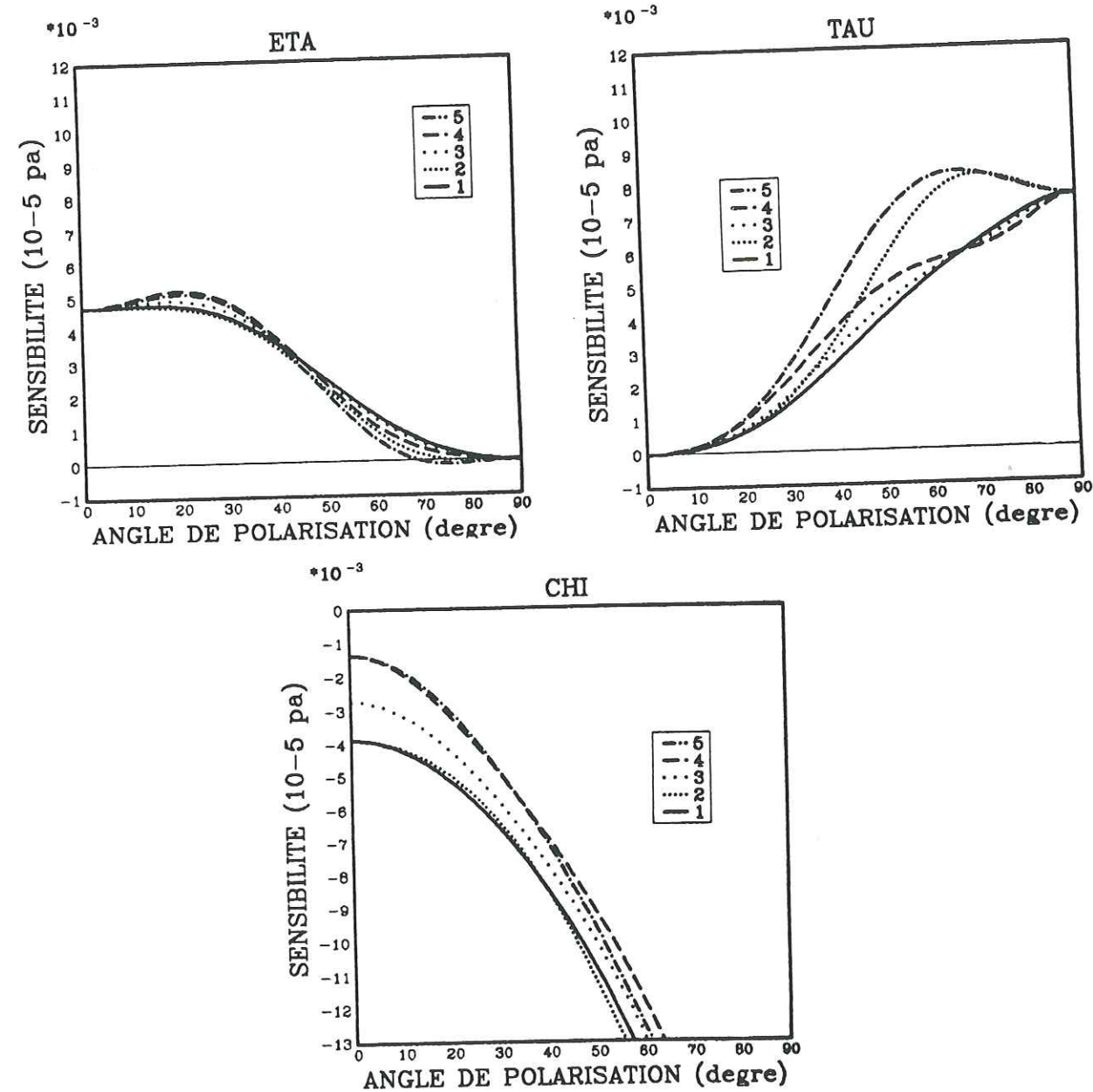


Figure IX.3. Courbes de sensibilité de la pression du fluide dans le puits aux paramètres η (gauche), τ (droite) et χ (bas) pour les cinq exemples de milieux TI définis dans le chapitre 5. Ces courbes sont calculées pour une onde incidente q_p .

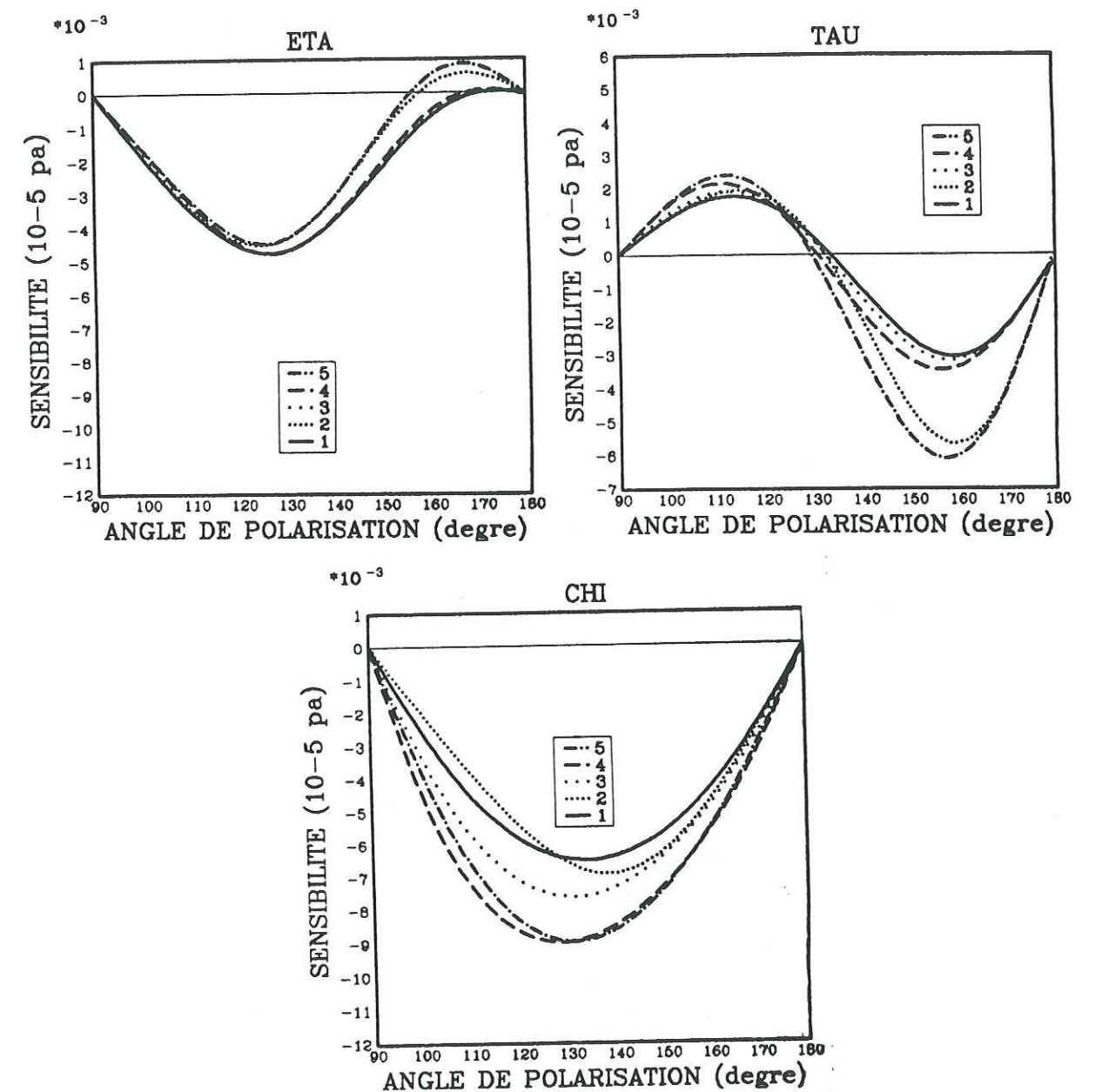


Figure IX.4. Courbes de sensibilité de la pression du fluide dans le puits aux paramètres η (gauche), τ (droite) et χ (bas) pour les cinq exemples de milieux TI définis dans le chapitre 5. Ces courbes sont calculées pour une onde incidente q_{sv} .

5. Estimation des paramètres d'anisotropie à partir des lenteurs apparentes verticales et des pressions.

5.1 Introduction.

Dans le chapitre 6, nous avons défini une méthode d'optimisation permettant d'estimer les paramètres d'anisotropie à partir de données composées de lenteurs apparentes verticales et d'angles de polarisation pour les ondes q_P et q_{SV} . Dans cette partie, on complète cette méthode en prenant en compte la mesure de la pression de fluide dans le puits. Comme nous l'avons vu précédemment, la pression dépend des paramètres η , τ et χ alors que la lenteur apparente ne dépend que des paramètres η et τ . On propose alors de fixer le paramètre χ et d'inverser les quatre paramètres définis dans le chapitre 6 qui sont α , β , η et τ (6.1). On rappelle que les paramètres α et β permettent de réestimer les vitesses verticales des ondes P et SV dont dépendent à la fois les lenteurs apparentes verticales et les pressions. Pour estimer le paramètre χ , il suffit de lancer plusieurs fois le processus d'inversion avec différentes valeurs de ce paramètre. La valeur retenue pour χ sera celle correspondant au minimum de la fonction coût (nous avons appliqué cette méthode pour des milieux TI d'axe de symétrie non vertical).

5.2 Les données.

Pour un déport i et à une cote z , on considère les données suivantes :

1. les lenteurs apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} , notées L_P et L_{SV} ;
2. les angles de polarisation correspondant notés, γ_P et γ_{SV} ;
3. les pressions associées, notées $P_P(z,t)$ et $P_{SV}(z,t)$.

La mesure de la pression dépend de la sensibilité F de l'appareil d'enregistrement. Pour s'affranchir de ce facteur de sensibilité que l'on ne connaît pas, on normalise la pression pour une onde q_P ou q_{SV} correspondant à un déport i par la pression mesurée à déport nul pour une onde P incidente.

5.3 Le problème direct.

Comme nous l'avons vu précédemment, les équations de la pression (9.21) et (9.22) doivent être normalisées par la pression à incidence verticale. Les équations

Modélisation de la pression mesurée dans un puits en termes de déformations : cas des milieux TI.

de la pression à incidence verticale ($\gamma = \theta = 0^\circ$) sont :

$$P_{P_0}(Z, T) = F \frac{\rho C_T^2 C_{13} \sqrt{C_{33}}}{C_{66}} \left[\frac{1}{C_{33} - C_T^2} \right] \dot{f} \left(t - \frac{z \cos \theta}{V_P(\theta)} \right), \quad (9.25)$$

où F est le facteur de sensibilité de l'appareil d'enregistrement.

Les équations de la pression totale (9.21) et (9.23) normalisées par (9.25) s'écrivent en fonction des paramètres à estimer comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{P}_P(Z, T) &= \frac{P_P(Z, T)}{P_{P_0}(Z, T)} = \frac{-4\hat{D}_P}{\alpha\alpha_0(\eta(\alpha^2\alpha_0^2 - \beta^2\beta_0^2) - \beta^2\beta_0^2)} \left[\frac{\alpha^2\alpha_0^2 - C_T^2}{1 - \frac{C_T^2}{V_P^2(\theta)} \cos^2 \theta} \right], \\ \hat{P}_{SV}(Z, T) &= \frac{P_{SV}(Z, T)}{P_{SV_0}(Z, T)} = \frac{-4\hat{D}_{SV}}{\alpha\alpha_0(\eta(\alpha^2\alpha_0^2 - \beta^2\beta_0^2) - \beta^2\beta_0^2)} \left[\frac{\alpha^2\alpha_0^2 - C_T^2}{1 - \frac{C_T^2}{V_{SV}^2(\theta)} \cos^2 \theta} \right], \end{aligned} \quad (9.26)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{D}_P &= \left(\hat{B} \sin \gamma_P \frac{\sin \theta}{V_P(\theta)} - \cos \gamma_P \frac{\cos \theta}{V_P(\theta)} \right), \\ \hat{D}_{SV} &= \left(\hat{B} \sin \gamma_{SV} \frac{\sin \theta}{V_{SV}(\theta)} - \cos \gamma_{SV} \frac{\cos \theta}{V_{SV}(\theta)} \right), \end{aligned} \quad (9.27)$$

où :

$$\hat{B} = \frac{\left(\tau + \frac{\beta^2\beta_0^2}{\alpha^2\alpha_0^2} (2 - 2\chi - \tau) \right) \left[\tau - \frac{\beta^2\beta_0^2}{\alpha^2\alpha_0^2} (1 - \tau) - \beta^2\beta_0^2 (2\chi - 1) \left(\eta - \frac{\beta^2\beta_0^2}{\alpha^2\alpha_0^2} (\eta + 1) \right)^2 \right]}{\alpha^2\alpha_0^2 \left[\tau + \frac{\beta^2\beta_0^2}{\alpha^2\alpha_0^2} 2 - 2\chi - \tau (2 - 2\chi - \tau) - \left(\eta - \frac{\beta^2\beta_0^2}{\alpha^2\alpha_0^2} (\eta + 1) \right)^2 \right]}, \quad (9.28)$$

et où α_0 et β_0 sont respectivement les vitesses verticales des ondes P et SV mesurées à partir des données.

Nous avons vu dans le chapitre 5 qu'il est possible d'exprimer l'angle d'incidence en fonction de l'angle de polarisation en fonction de l'angle d'incidence (qu'on ne mesure pas). On définit le problème direct avec les équations des lenteurs verticales apparentes (6.2) et des pressions (9.26) correspondant aux ondes q_P et q_{SV} et exprimées en fonction de γ et des quatre paramètres α , β , η et τ .

5.4 Le problème inverse.

Les cinq inconnues du problème sont les paramètres η , τ , α , β et χ . Les équations des lenteurs apparentes verticales des ondes q_P et q_{SV} dépendent de η , τ , α et β alors que les pressions associées dépendent des cinq paramètres. On découple alors le problème inverse : dans un premier temps, on fixe la valeur de χ et on inverse sur les quatre autres paramètres par la même méthode de moindres carrés présentée dans le chapitre 6. Puis, on renouvelle cette opération pour différentes valeurs de χ . La solution retenue est celle correspondant à un minimum de la fonction coût. Le seul inconvénient de cette approche est de ne pas donner d'erreur sur le paramètre χ estimé. Néanmoins, il est très facile de tracer la fonction coût en fonction de la valeur de χ . On peut facilement se faire une idée de la précision de l'estimation en étudiant la courbure de cette fonction. On définit alors la fonction coût comme suit :

$$C(\vec{p}) = \delta \vec{L}_P^T \cdot C_{D_P}^{-1} \cdot \delta \vec{L}_P + \delta \vec{L}_{SV}^T \cdot C_{D_{SV}}^{-1} \cdot \delta \vec{L}_{SV} + \delta \vec{P}_P^T \cdot C_{P_P}^{-1} \cdot \delta \vec{P}_P + \delta \vec{P}_{SV}^T \cdot C_{P_{SV}}^{-1} \cdot \delta \vec{P}_{SV}, \quad (9.29)$$

où :

$$\begin{aligned} \delta \vec{L}_P &= (\vec{L}_{P_{\text{estime}}}(\vec{p}) - \vec{L}_{P_{\text{observe}}}(\vec{p})), \\ \delta \vec{L}_{SV} &= (\vec{L}_{SV_{\text{estime}}}(\vec{p}) - \vec{L}_{SV_{\text{observe}}}(\vec{p})), \\ \delta \vec{P}_P &= (\vec{P}_{P_{\text{estime}}}(\vec{p}) - \vec{P}_{P_{\text{observe}}}(\vec{p}))|_{\chi=\text{constant}}, \\ \delta \vec{P}_{SV} &= (\vec{P}_{SV_{\text{estime}}}(\vec{p}) - \vec{P}_{SV_{\text{observe}}}(\vec{p}))|_{\chi=\text{constant}}; \end{aligned} \quad (9.30)$$

les termes C_{D_P} et $C_{D_{SV}}$ sont les matrices de covariance sur les lenteurs liées aux incertitudes sur les temps de parcours et les angles de polarisation (voir équation 6.6) ;

les termes C_{P_P} et $C_{P_{SV}}$ sont les matrices de covariance sur les pressions liées aux incertitudes sur la mesure de la pression (dP) et des angles de polarisation ($d\gamma$). C'est une matrice diagonale dont les termes pour les ondes q_P ou q_{SV} sont de la forme :

$$C_{P_P,SV} = \left[\frac{\partial \hat{P}(Z,T)}{\partial \gamma} \cdot d\gamma_{P,SV} \right]_{\chi=\text{constant}}^2 + [dP_{P,SV}]^2. \quad (9.31)$$

On rappelle que le vecteur $\vec{p}$ a pour composantes les quatre paramètres η , τ , α et β .

Dans le but de déterminer dans quel intervalle d'angles de polarisation les paramètres d'anisotropie sont estimés avec le plus de précision, nous avons repris l'exemple du chapitre 6. On considère un jeu de 40 données de lenteurs apparentes verticales, de pressions associées et d'angles de polarisation pour des ondes q_P et q_{SV} . L'incertitude est de 0,01 ms pour 100 m sur les temps, de 1° sur les angles de polarisation et de 0,01 sur les pressions normalisées (voir paragraphe précédent). On rappelle que le milieu est défini par $\eta = 1,152$, $\tau = 1,328$, $\alpha_0 = 4000$ m/s et $\beta_0 = 2500$ m/s. On a choisi de prendre $\chi = 1$. La figure (IX.5) représente la forme de la fonction coût dans le plan des paramètres (η, τ) pour $\chi = 1$ et pour le jeu de données pris dans les intervalles d'angles de polarisation 0 à 80°, 0 à 50° et 50 à 90°. On note la présence de minima locaux pour le jeu de données pris entre 50 et 90°. C'est dans la gamme de polarisation 0 à 80° que les paramètres seront estimés avec le maximum de précision. Cependant, dans la gamme 0 à 50°, la précision reste significative. En comparant cette figure avec la figure (VI.3), on remarque que l'utilisation de la pression dans le processus d'inversion, permet d'obtenir une plus grande précision sur le paramètre η les courbes d'isovaleurs étant plus resserrées suivant l'axe η . Par contre, ceci est moins évident pour le paramètre τ . Enfin, les deux paramètres η et τ apparaissent mieux décorrélés en utilisant la pression.

La figure (IX.6) représente, pour les intervalles 0 à 80° et 0 à 50°, la valeur du minimum de la fonction coût pour différentes valeurs du paramètre χ . Nous n'avons pas donné les résultats pour la gamme 50 à 90°, la fonction coût n'étant pas convexe. Cela signifie que le paramètre χ ne pourra pas être estimé dans cette gamme de polarisation. L'étude de la figure (IX.6) montre que ce paramètre est correctement retrouvé même dans la gamme d'angles de polarisation 0 à 50°, la courbure de la fonction coût étant approximativement la même dans les deux cas. Ceci est dû au fait que nous avons donné une incertitude très petite sur les pressions normalisées.

En conclusion, cette étude montre que l'utilisation de la pression dans le processus d'inversion doit permettre d'estimer les paramètres d'anisotropie avec une meilleure précision.

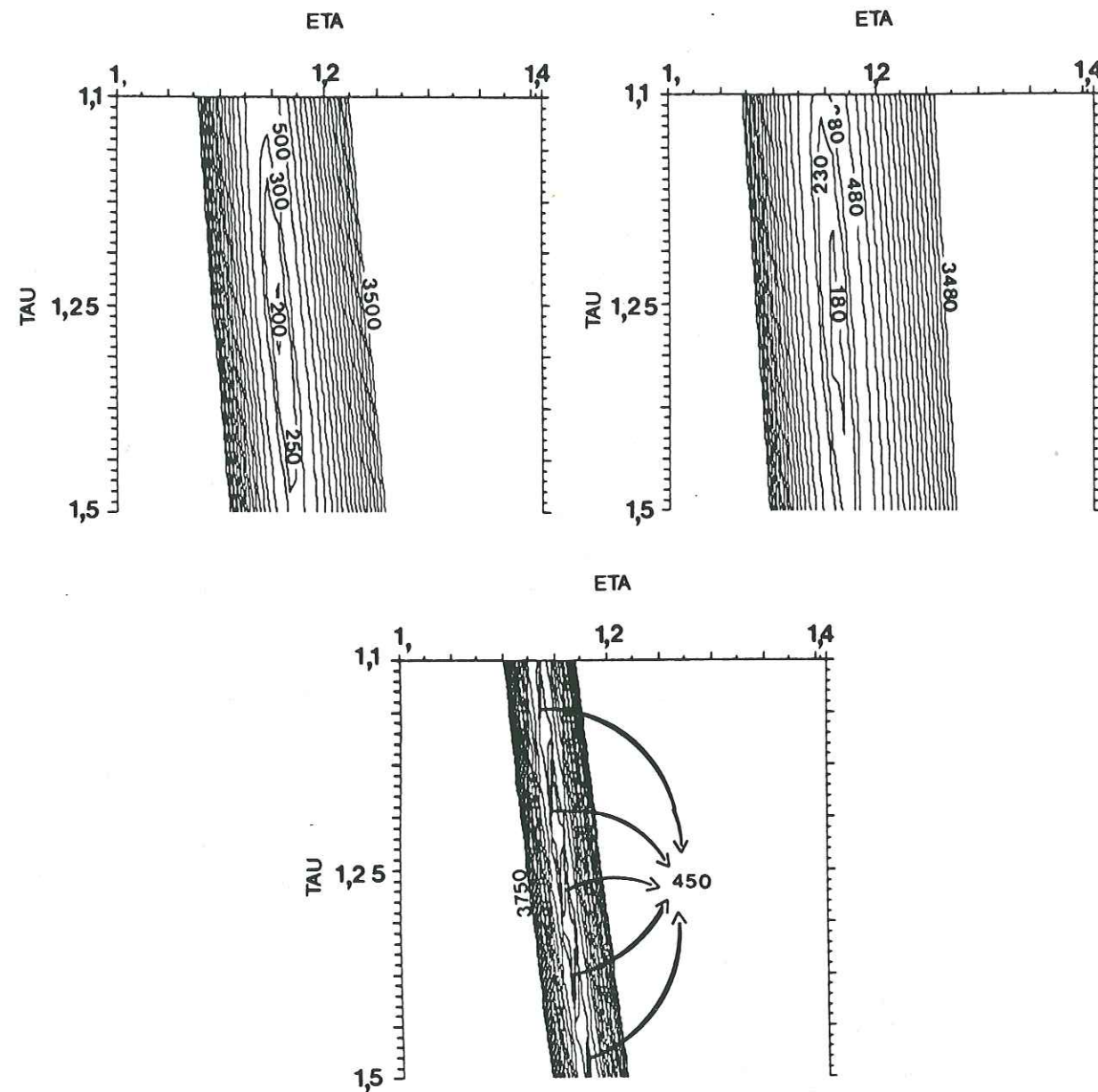


Figure IX.5. Représentation de la fonction coût dans le plan des paramètres (η, τ) calculée à partir d'un jeu de 40 données pris dans les intervalles 0 à 80° (gauche), 0 à 50° (droite) et 50 à 90° (bas).

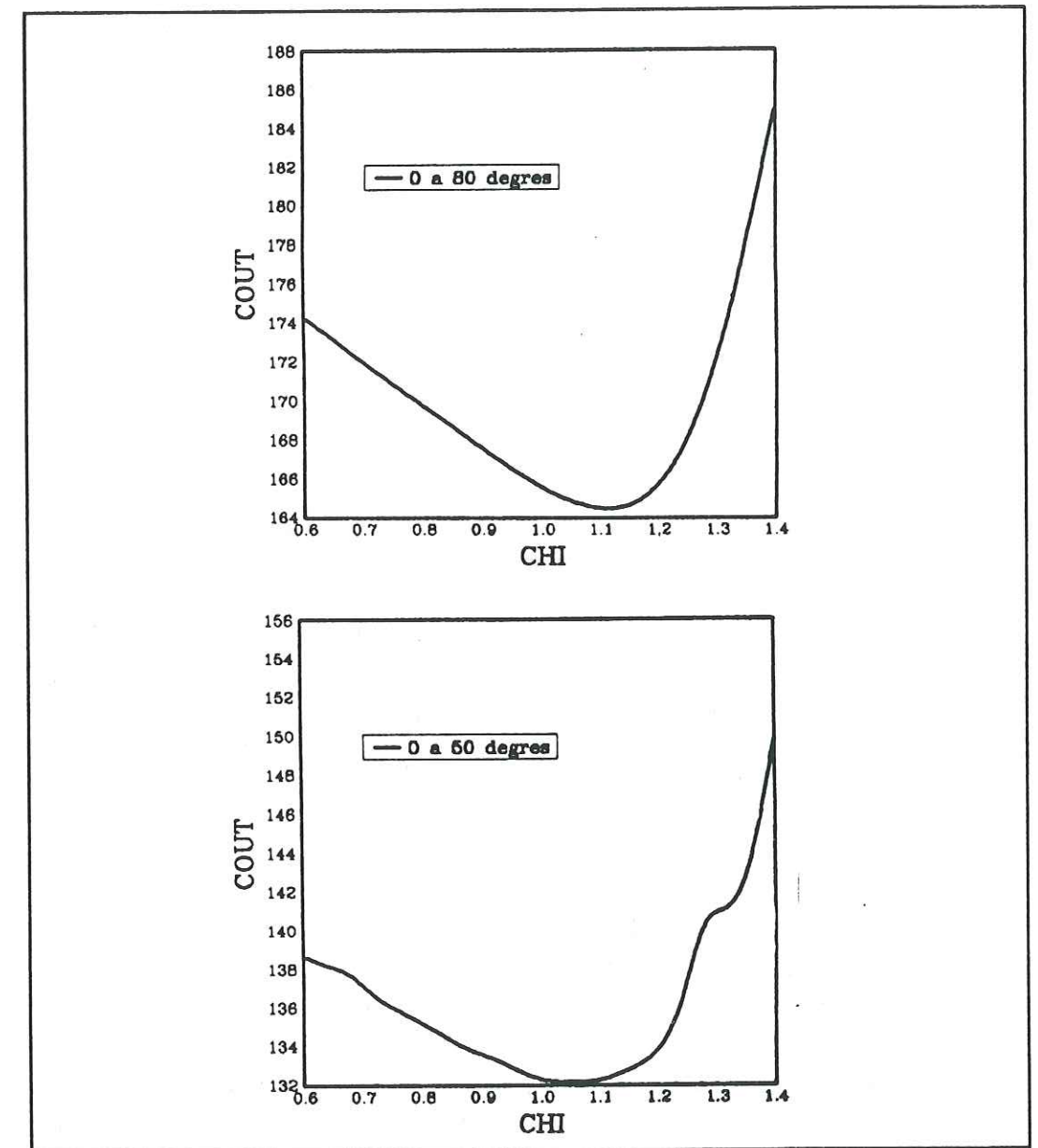


Figure IX.6. Représentation du minimum de la fonction coût calculé pour différentes valeurs du paramètre χ à partir d'un jeu de 40 données pris dans les intervalles 0 à 80° (haut) et 0 à 50° (bas).

6. Application à des données synthétiques.

Nous ne disposons pas de données synthétiques de puits comprenant des mesures de pression dans le puits. On considère alors le milieu synthétique défini dans le chapitre 5 pour lequel on a calculé les pressions associées aux lenteurs apparentes verticales et aux angles de polarisation. On rappelle que l'intervalle d'angles de polarisation est compris entre 0 et 80° pour le jeu de données N°1 et entre 0 et 50° pour le jeu de données N°2. Nous avons pris pour ces deux exemples $\chi = 1$. De plus, nous avons calculé un bruit gaussien sur les pressions normalisées d'écart-type 0,1 et de moyenne nulle. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	η	τ	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)
	MILIEU RECHERCHÉ			
	0,819	1,328	4000	2500
	MILIEU ESTIMÉ			
JEU N°1	$0,825 \pm 0,009$	$1,323 \pm 0,042$	$3996 \pm 15,2$	$2507 \pm 14,5$
JEU N°2	$0,821 \pm 0,012$	$1,306 \pm 0,064$	$3996 \pm 16,1$	$2508 \pm 14,3$

Tableau 1. Résultats de l'inversion des paramètres η , τ , α et β avec les jeux de données définis dans le chapitre 6.

Dans les deux cas, le paramètre χ n'est absolument pas retrouvé. Ceci peut être expliqué par l'erreur non négligeable sur la pression. Néanmoins, le paramètre χ étant décorrélié des quatre autres, cela n'empêche nullement d'estimer avec précision l'anisotropie dans le plan verticale.

Ces résultats confirment l'étude de la forme de la fonction coût du paragraphe précédent à savoir que l'utilisation de la pression dans le processus d'inversion donne une plus grande précision sur les paramètres estimés.

7. Conclusion.

L'utilisation de la pression dans le processus d'inversion pour estimer l'anisotropie nécessite un paramètre supplémentaire χ qui prend en compte la constante élastique C_{66} . En effet, les expressions de la pression sont fonction de cette constante. De plus, la vitesse des ondes de tube ne dépendent que de C_{66} . De ce fait, la pression est très sensible aux variations du paramètre χ . On montre cependant que ce paramètre est décorrélié de η , τ , α et β . Il n'est donc pas nécessaire de le connaître avec précision pour estimer correctement l'anisotropie.

Il résulte de l'étude de la forme de la fonction coût dans le plan des paramètres (η, τ) que l'estimation des paramètres η , τ , α et β est beaucoup plus précise en utilisant dans le processus d'inversion la pression en plus des lenteurs apparentes verticales. L'inversion à partir de milieux synthétiques a montré que la précision est augmentée d'un facteur 10 pour le paramètre η et 4 pour le paramètre τ .

Il serait intéressant d'appliquer cette méthode à des données réelles de puits. Le problème majeur est que nous avons fait l'hypothèse d'un milieu TI homogène, ce qui n'est pas le cas dans la nature. Une suite de cette étude pourrait être la modélisation de la pression dans un puits traversant des couches de propriétés mécaniques différentes.

Table des matières.

Chapitre 10. Interprétation en terme de fissuration de l'anisotropie	
mesurée.	1
1. Introduction.	1
2. Calcul des constantes élastiques d'un milieu isotrope fissuré. . .	3
3. Étude des milieux TI équivalents.	5
4. Conclusion.	16

CHAPITRE 10. Interprétation en terme de fissuration de l'anisotropie mesurée.

1. Introduction.

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté une méthode permettant de mesurer les paramètres d'anisotropie d'un milieu TI d'axe de symétrie vertical à partir d'enregistrements de sismique de puits. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux causes de l'anisotropie mesurée.

On distingue deux causes principales :

1. L'empilement horizontal de fines couches isotropes (Postma, 1955; Helbig, 1956, 1958; Backus, 1962). Dans ce cas, le milieu apparaît TI d'axe de symétrie vertical pour des longueurs d'ondes au moins 10 fois supérieures à l'épaisseur d'une couche élémentaire. La mesure de l'anisotropie générée par de tels milieux a été étudiée et décrite par de nombreux auteurs (Levin, 1979; Lyakhovitskiy, 1984).

2. La formation d'un réseau de fissures orientées préférentiellement sous l'action d'un champ de contraintes. C'est la cause d'anisotropie la plus fréquemment observée à l'échelle de la croûte terrestre comme à l'échelle de la sismique pétrolière. En effet, les réservoirs d'hydrocarbures présentent souvent des réseaux de fissuration, et la quantification et l'orientation de ces fissures constitue une information primordiale pour le géophysicien (Crampin, 1977). Plusieurs études sur des données réelles (Crampin, 1985, 1987; Lefeuvre, Cllet et Nicoletis, 1989) ont mis en évidence l'existence d'anisotropie due à la présence de réseaux de fissures alignées verticalement suivant une direction préférentielle.

Dans cette étude, nous nous intéressons à l'anisotropie due à la présence de fissures alignées dans un plan horizontal.

Plusieurs méthodes ont été développées pour calculer les constantes élastiques effectives d'un milieu fissuré équivalent à un milieu homogène TI (Le Nur, 1971; Garbin et Knopoff, 1973, 1975; Hudson, 1979, 1981, 1982; Nishizawa, 1982). Toutes sont basées sur la diffraction des ondes par des fissures réparties aléatoirement dans un milieu homogène isotrope. De plus, ces théories supposent

la taille des fissures petite devant la longueur d'onde utilisée. Une fissure est modélisée par un ellipsoïde ayant deux demi-axes de longueur égale a et un demi-axe, perpendiculaire au deux autres, de longueur b (figure X.1). On définit le coefficient d'ouverture par le rapport $\alpha = b/a$ (le terme anglo-saxon est *aspect ratio*). Certaines de ces méthodes (Garbin et Knopoff, 1973; Hudson, 1981, 1982) considèrent des fissures circulaires planes pour lesquelles le coefficient d'ouverture est proche de 0. Nishizawa (1982) a développé une méthode valable pour n'importe quel coefficient d'ouverture α . Douma (1988) a montré, par comparaison avec la méthode de Nishizawa, que l'approche de Hudson (1981) peut être utilisée pour une large gamme de milieux fissurés pour lesquels la densité de fractures et le coefficient d'ouverture ne sont pas forcément proche de 0.

Dans cette étude, nous utilisons la méthode proposée par Hudson (1981, 1982). Plus précisément, on étudie en fonction du type de matériaux remplissant les fissures (fluide, solide ou vide) les valeurs possibles pour les paramètres η et τ caractérisant le milieu TI équivalent. On montre, que la nature du matériau remplissant les fissures peut être prédite par les valeurs prises par les paramètres η et τ .

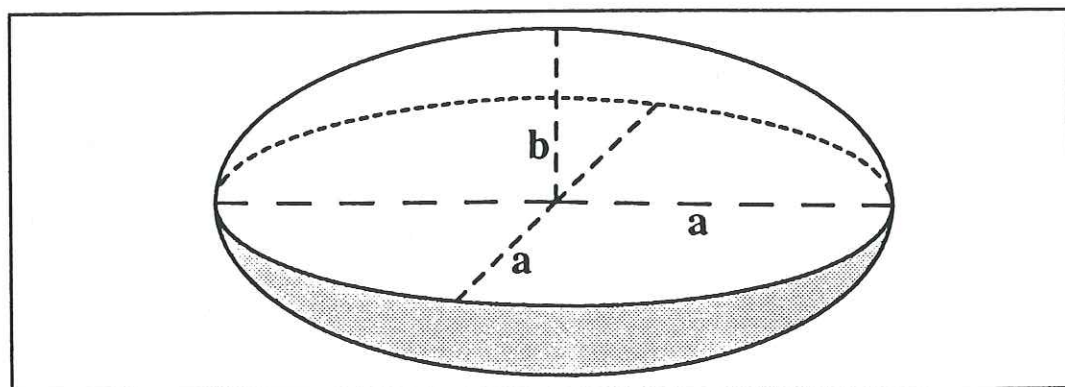


Figure X.1. Description de la forme d'une fissure de symétrie circulaire par deux demi-axes de rayon a et un demi-axe de rayon b . On définit le coefficient d'ouverture comme étant $\alpha = \frac{b}{a}$.

2. Calcul des constantes élastiques d'un milieu isotrope fissuré.

La méthode utilisée pour calculer les constantes élastiques effectives d'un milieu homogène isotrope fissuré est celle proposée par Hudson (1981, 1982). Ces constantes élastiques décrivent le milieu TI équivalent.

On considère un milieu homogène isotrope défini par le tenseur élastique C_{ij}^0 dans lequel il existe une distribution aléatoire de fissures circulaires planes ou ellipsoïdales. Pour des fissures circulaires planes (le coefficient d'ouverture est proche de 0), de rayon a et de densité par unité de volume v défini par :

$$d = \frac{Na^3}{v}, \quad (10.1)$$

où N est le nombre de fissures par unité de volume v . Pour des fissures ellipsoïdales (le coefficient d'ouverture α est différent de 0), la densité par unité de volume est défini par :

$$d = \frac{3V}{4\pi\alpha}, \quad (10.2)$$

où V est le volume total des fissures.

On considère ici des fissures réparties dans le plan horizontal. Hudson a montré qu'un tel milieu peut être décrit par un milieu TI homogène équivalent défini par un tenseur élastique moyen :

$$C_{ij} = C_{ij}^0 + C_{ij}^1 + C_{ij}^2, \quad (10.3)$$

où C_{ij}^1 et C_{ij}^2 sont les corrections respectivement au premier et au second ordre sur la quantité d dues à la présence de fissures.

Les constantes du milieu homogène isotrope sont :

$$\begin{aligned} C_{11}^0 &= C_{22}^0 = C_{33}^0 = \lambda + 2\mu, \\ C_{12}^0 &= C_{13}^0 = C_{23}^0 = \lambda, \\ C_{44}^0 &= C_{55}^0 = C_{66}^0 = \mu, \end{aligned} \quad (10.4)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Les corrections au premier ordre en d dues à la présence de fissures réparties aléatoirement dans le plan horizontal sont (Hudson, 1981) :

$$\begin{aligned} C_{11}^1 &= C_{12}^1 = C_{22}^1 = -\frac{d}{\mu} \lambda^2 U_{11}, \\ C_{13}^1 &= C_{23}^1 = -\frac{d}{\mu} \lambda (\lambda + 2\mu) U_{11}, \\ C_{33}^1 &= -\frac{d}{\mu} (\lambda + 2\mu)^2 U_{11}, \\ C_{44}^1 &= C_{55}^1 = -2d\mu U_{33}, \\ C_{66}^1 &= 0, \end{aligned} \quad (10.5)$$

où U_{11} et U_{33} sont les composantes des déplacements après diffraction sur les fissures qui dépendent des conditions imposées aux faces de ces fissures et donc à la nature du matériau les remplissant.

Les corrections au second ordre en d dues à la présence de fissures réparties aléatoirement dans le plan horizontal sont (Hudson, 1982) :

$$\begin{aligned} C_{11}^2 &= C_{12}^2 = C_{22}^2 = \frac{d^2}{15} \frac{\lambda^2 q}{\lambda + 2\mu} U_{11}^2, \\ C_{13}^2 &= C_{23}^2 = \frac{d^2}{15} \lambda q U_{11}^2, \\ C_{33}^2 &= \frac{d^2}{15} (\lambda + 2\mu) q U_{11}^2, \\ C_{44}^2 &= C_{55}^2 = \frac{d^2}{15} \frac{2\mu(3\lambda + 8\mu)}{\lambda + 2\mu} U_{33}^2, \end{aligned} \quad (10.6)$$

où :

$$q = 15 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + 28 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) + 28. \quad (10.7)$$

Si on considère des fissures circulaires planes ayant les caractéristiques d'un fluide (module de cisaillement nul), les composantes du déplacement sont :

$$\begin{aligned} U_{11} &= 0, \\ U_{33} &= \frac{16(\lambda + 2\mu)}{3(\lambda + 4\mu)}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Si on considère des fissures circulaires vides (coefficients de Lamé nuls), les composantes du déplacement sont :

$$\begin{aligned} U_{11} &= \frac{4(\lambda + 2\mu)}{3(\lambda + \mu)}, \\ U_{33} &= \frac{16(\lambda + 2\mu)}{3(3\lambda + 4\mu)}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Si on considère maintenant des inclusions ellipsoïdales, Hudson (1981) montre que les composantes du déplacement sont :

$$\begin{aligned} U_{11} &= \frac{4}{3} \frac{\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right)}{(1 + K)}, \\ U_{33} &= \frac{16}{3} \frac{\left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right)}{(1 + M)}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

où :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\pi} \frac{\lambda' + 2\mu'}{\alpha\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right), \\ M &= \frac{4}{\pi} \frac{\mu'}{\alpha\mu} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right), \end{aligned} \quad (10.11)$$

où λ' et μ' sont les coefficients de Lamé du matériau remplissant les fissures. Pour des inclusions fluides, $\mu' = 0$ donc $M = 0$. Néanmoins, cette approche n'est valable que pour des coefficients d'ouverture α inférieurs à 0,01.

3. Étude des milieux TI équivalents.

Pour les milieux fissurés décrit par les modèles de Hudson, on calcule les paramètres η et τ du milieu TI homogène équivalent. On cherche à savoir par cette étude si, en fonction du matériau remplissant les fissures, il existe des valeurs caractéristiques des deux paramètres η et τ .

Pour un milieu homogène isotrope contenant des fissures planes ayant les caractéristiques d'un fluide, la figure (X.2) montre les valeurs prises par les deux

paramètres η et τ en fonction de la densité d de fissures. Le paramètre τ vaut toujours 1 quelle que soit la densité d . Cela signifie que pour les incidences verticale et horizontale, la vitesse de phase des ondes P est la même. Le paramètre η est toujours inférieur à 1 et décroît de façon *quasilinéaire* avec la densité de fissures par unité de volume d . La figure (X.3) illustre en fonction de l'angle d'incidence et de la densité de fissure d les variations de la vitesse de phase des ondes q_P et q_{SV} se propageant dans le milieu TI équivalent. Ces variations sont calculées par rapport aux vitesses de phase des ondes P et SV dans le milieu isotrope. Cette figure montre que de telles fissures orientées dans le plan horizontal influe sur la vitesse de phase des ondes q_P pour des angles d'incidence proches de 45° . Par contre, la vitesse de phase des ondes q_{SV} est influencée par ces fissures pour des angles d'incidences sub-verticaux ($\theta=0^\circ$) et sub-horizontaux ($\theta=90^\circ$). La figure (X.4) montre en fonction de l'angle d'incidence et de la densité de fissures d la variation de l'angle ξ entre les directions de propagation et de polarisation de l'onde q_P .

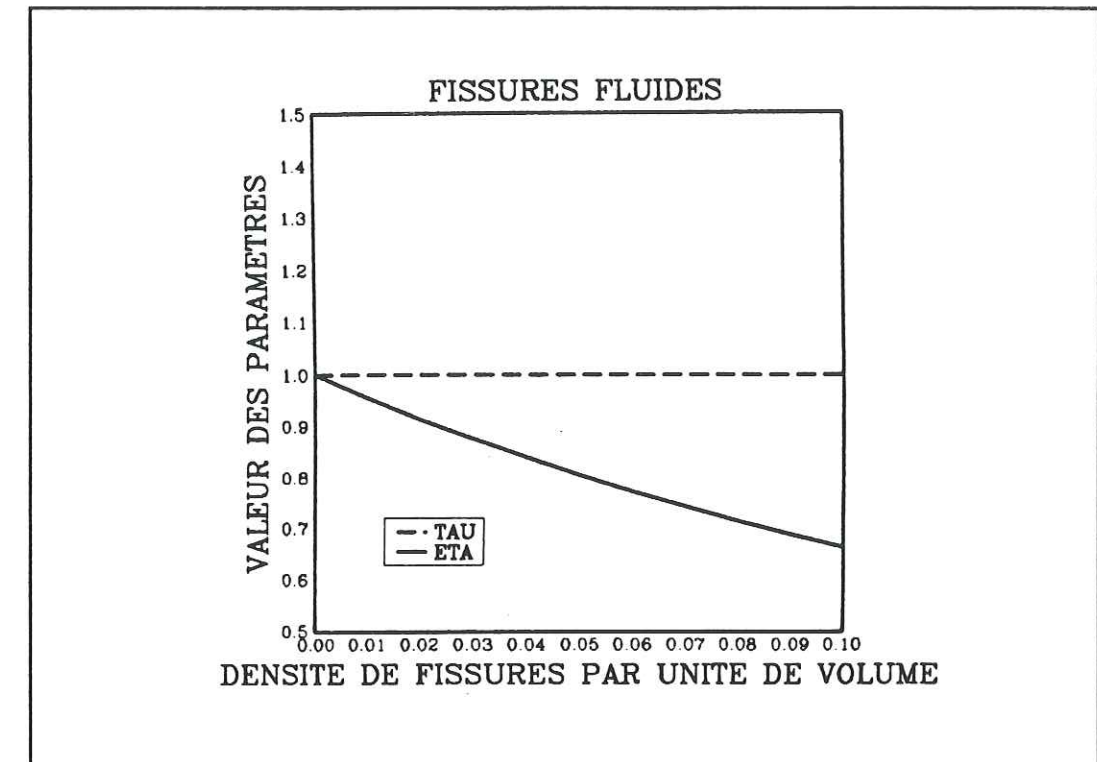


Figure X.2. Représentation des valeurs des paramètres η et τ du milieu TI équivalent en fonction de la densité de fissures par unité de volume d pour un milieu homogène isotrope contenant des fissures saturées de fluide.

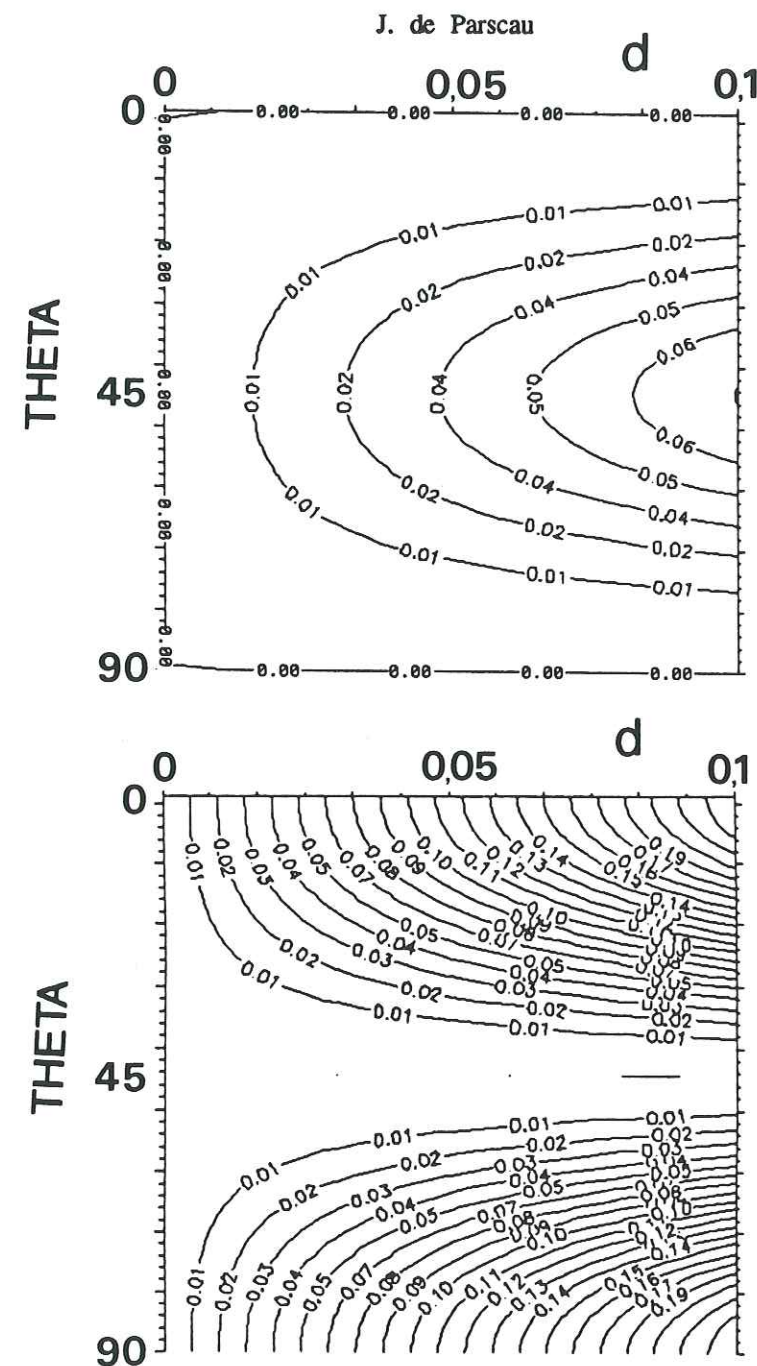


Figure X.3. Représentation des courbes d'isovaleurs de la variation de la vitesse de phase des ondes q_P (haut) et q_{SV} (bas) en fonction de l'angle d'incidence θ et de la densité de fissure par unité de volume d . Cette variation est calculée pour un milieu homogène isotrope contenant des fissures circulaires planes ayant les caractéristiques d'un fluide. On a normalisé cette variation par rapport aux vitesses des ondes P et SV dans le milieu homogène isotrope.

Interprétation en terme de fissuration de l'anisotropie mesurée.

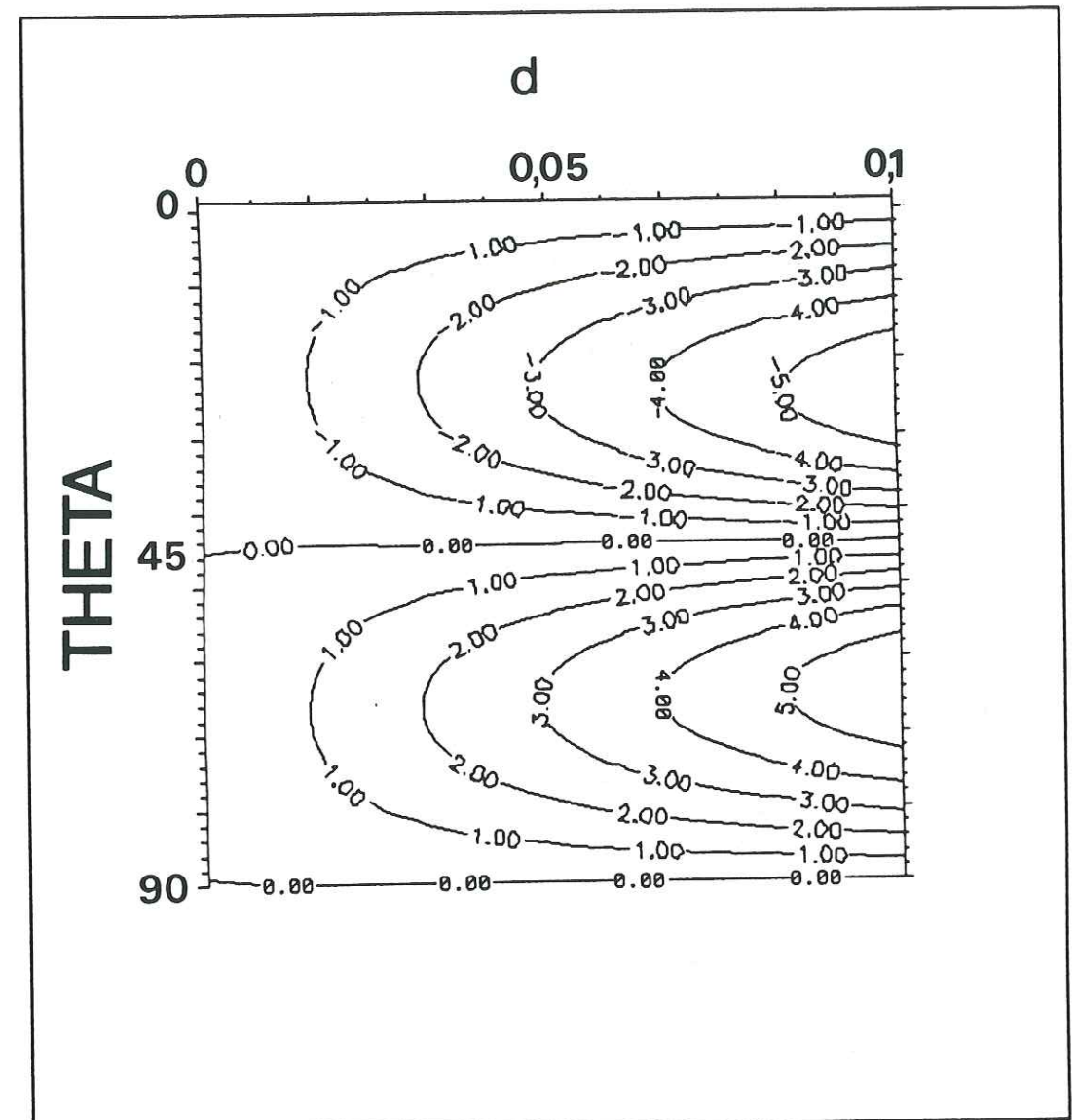


Figure X.4. Représentation de l'angle ξ entre les directions de polarisation et de propagation des ondes q_P se propageant dans le milieu TI équivalent en fonction de l'angle d'incidence θ et de la densité de fissure par unité de volume d . Cas de milieux homogènes isotropes contenant des fissures circulaires planes ayant les caractéristiques d'un fluide.

La figure (X.5) est la même représentation que la figure (X.2) mais pour un milieu homogène isotrope contenant des fissures planes vides (comprendre $\lambda=\mu=0$). Dans ce cas, le paramètre τ croît de façon *quasilinéaire* avec la densité de fissures par unité de volume d . Ceci signifie que la vitesse verticale des ondes P est inférieure à la vitesse horizontale. Par contre, la valeur du paramètre η reste proche de l'unité. La figure (X.6) montre, pour le milieu TI équivalent, la variation de la vitesse de phase des ondes q_P et q_{SV} par rapport aux vitesses isotropes calculée en fonction de la densité de fissure d et de l'angle d'incidence. La vitesse des ondes q_P diffère de l'isotropie pour des incidences sub-verticales et pour de fortes densités de fissure. Concernant les ondes q_{SV} , la vitesse de phase apparaît isotrope pour de faibles densité de fissure. La figure (X.7) représente la valeur de l'angle entre les direction de propagation et de polarisation pour une onde q_P .

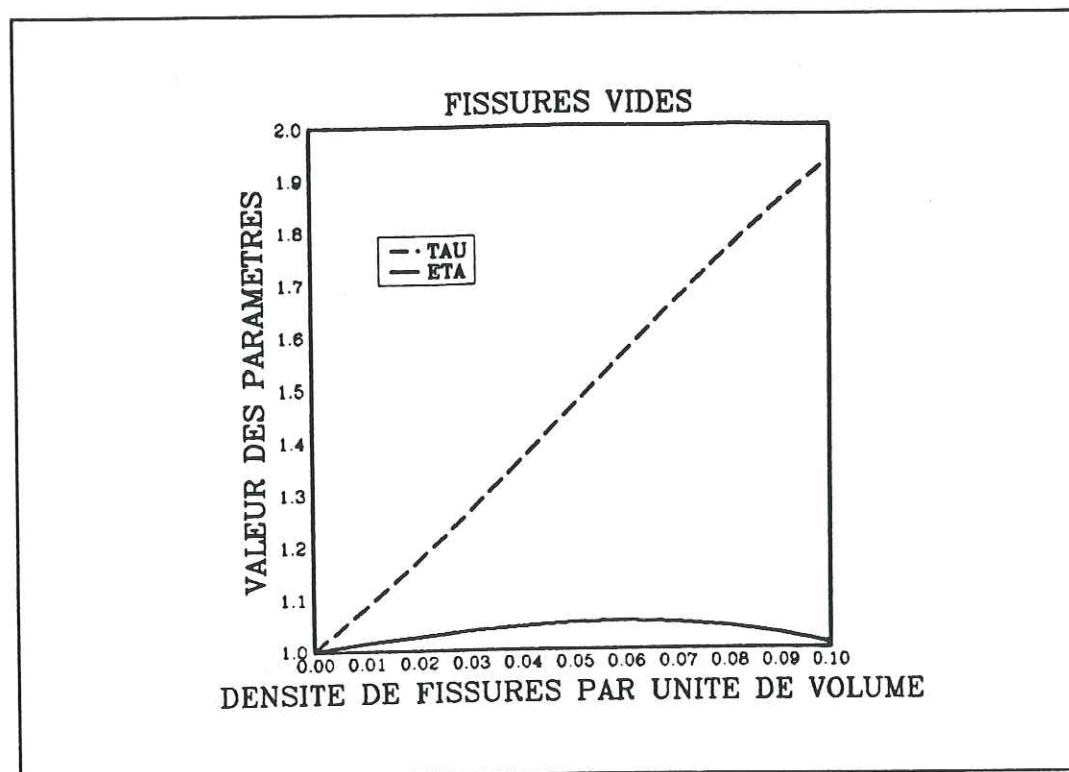


Figure X.5. Représentation des valeurs des paramètres η et τ du milieu TI équivalent en fonction de la densité de fissures par unité de volume d pour un milieu homogène isotrope contenant des fissures circulaires planes vides.

Interprétation en terme de fissuration de l'anisotropie mesurée.

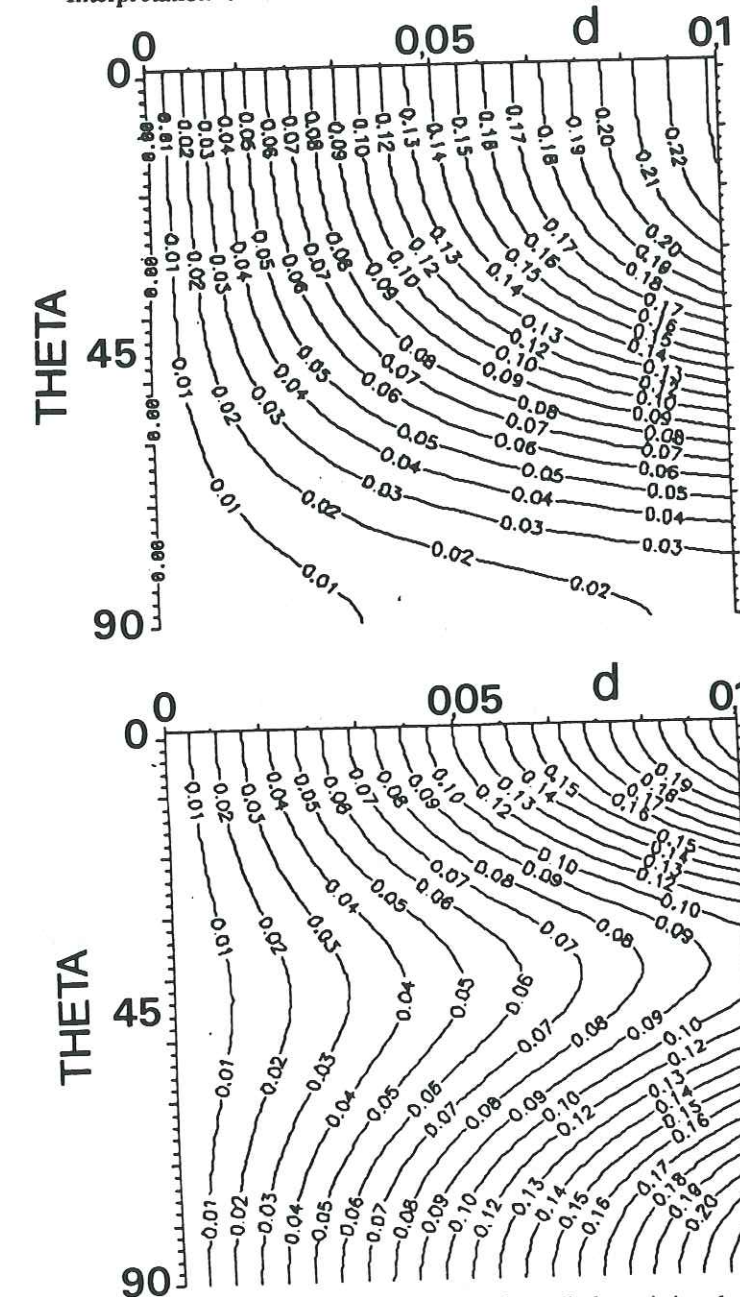


Figure X.6. Représentation des courbes d'isovaleurs de la variation de la vitesse de phase des ondes q_P (haut) et q_{SV} (bas) dans le milieu TI équivalent au milieu homogène isotrope contenant un réseau de fissures planes horizontales vides, en fonction de l'angle d'incidence θ et de la densité de fissure par unité de volume d . Cette variation est calculée et normalisée par rapport aux vitesses des ondes P et SV dans le milieu homogène isotrope.

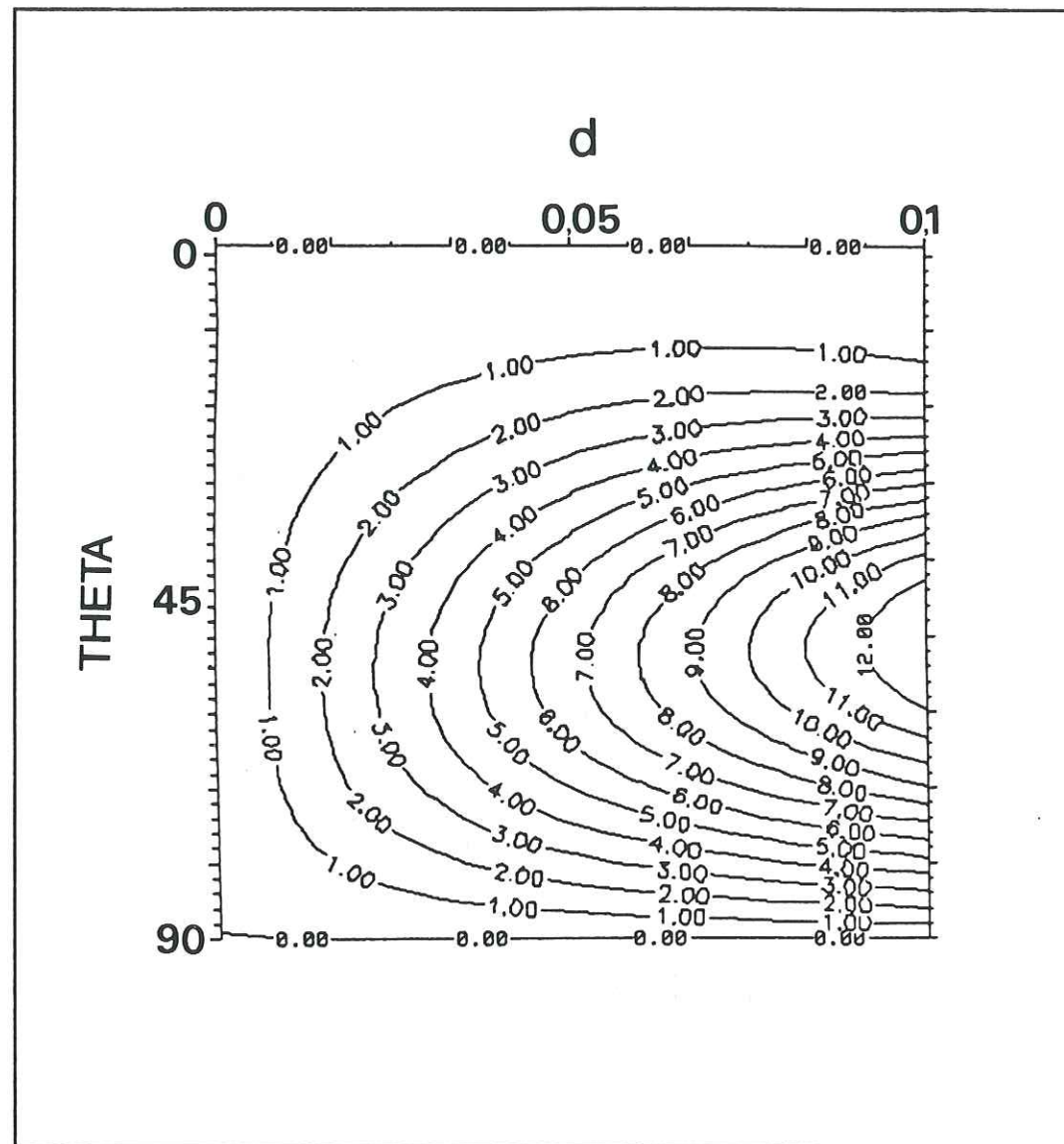


Figure X.7. Représentation de l'angle ξ entre les directions de polarisation et de propagation des ondes q_p se propageant dans le milieu TI équivalent au milieu homogène isotrope contenant un réseau de fissures circulaires planes horizontales vides, en fonction de l'angle d'incidence θ et de la densité de fissure par unité de volume d .

Ces résultats montrent que les variations des valeurs des paramètres η et τ avec la densité de fissure sont caractéristiques du matériau dont sont remplies ces fissures. En effet, les expressions de η et τ écrites avec les constantes élastiques équivalentes (10.3) ne dépendent que du carré du rapport k de la vitesse P sur la vitesse S du milieu isotrope (annexe C). Pour un rapport k de l'ordre de 3 ($\sigma=0,25$) on aura toujours le même comportement des paramètres η et τ avec la densité de fissure.

On considère maintenant des fissures ellipsoïdales. Pour des fissures dont le coefficient d'ouverture α vaut 1, les fissures sont alors sphériques et le milieu est isotrope. Or, pour $\alpha=1$, le modèle d'Hudson (1981) ne donne pas $\eta=\tau=1$ (cas isotrope). Douma (1988) a montré que la méthode de Hudson (1981) est valide pour des fissures dont le coefficient d'ouverture est inférieur 0,3 pour une densité de fissures inférieure à 0,05 quel que soit le matériau remplissant les fissures. On s'intéresse aux valeurs des paramètres η et τ du milieu TI équivalent pour des densités de fissure comprises entre 0,001 et 0,01 et pour des coefficients d'ouverture compris entre 0 (cas de fissures planes) et 0,1. On considère des inclusions pouvant être solides ou fluides.

Les figures (X.8) et (X.9) représentent respectivement pour des inclusions solides et fluides, à partir d'un exemple réel (Crampin, 1984), les valeurs des paramètres η et τ en fonction du coefficient d'ouverture α pour trois valeurs de densité de fissures d . Les fissures influent sur la valeur du paramètre τ si leur densité par unité de volume d et le coefficient d'ouverture α sont supérieures à 0,001. Concernant le paramètre η , si les inclusions sont solides, ce paramètre reste quasiment constant et égal à 1 quelles que soient les valeurs de d et α . Pour des inclusions fluides, η est surtout sensible à la densité de fissures. Ces résultats montrent que le comportement des paramètres η et τ est identique que l'on considère des fissures circulaires planes ayant les caractéristiques d'un fluide ou du vide, ou faiblement ellipsoïdales avec un remplissage de fluides ou de solides. Ceci s'explique par le fait que l'on est obligé de considérer des inclusions de caractéristiques proches de celles d'un fluide. En effet, la méthode de Hudson (1981) appliquée à des fissures ellipsoïdales n'est valide que pour des inclusions ayant un petit coefficient d'incompressibilité, ce qui n'est pas forcément le cas dans la nature. Enfin, on note que pour ce type de milieux fissurés, les valeurs des paramètres η et τ du milieu TI équivalent restent proche de 1 (cas isotrope) si la densité de fissure par unité de volume n'est pas supérieure à 2%.

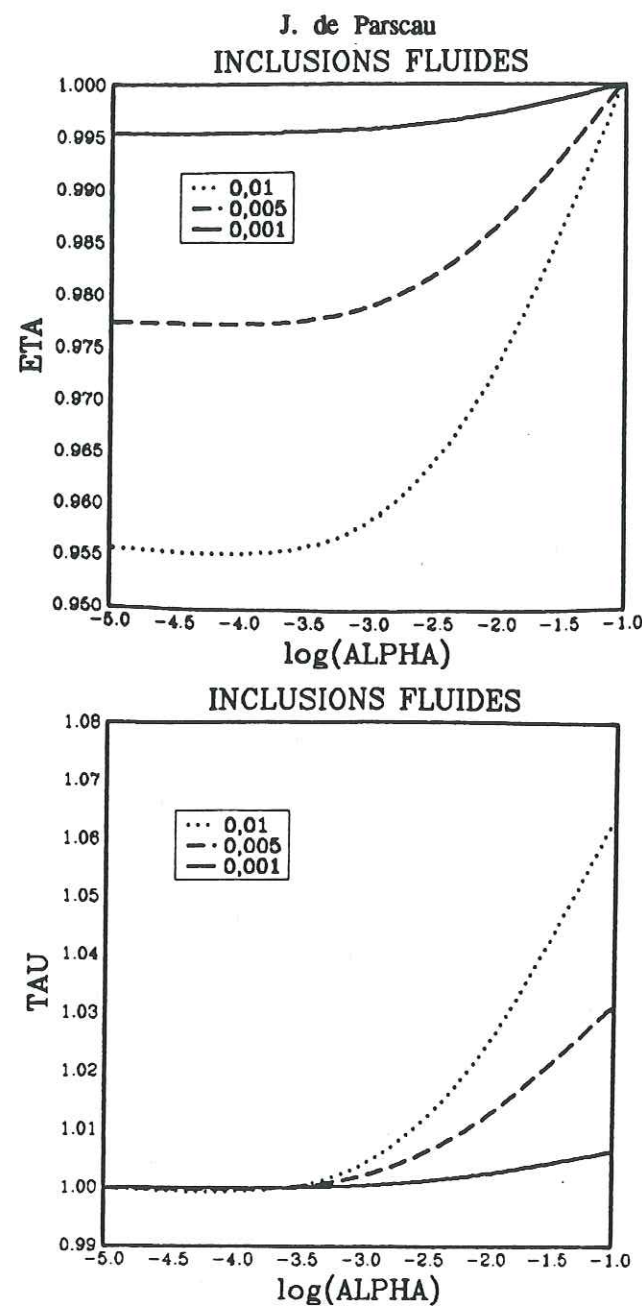


Figure X.8. Représentation des valeurs des paramètres η (haut) et τ (bas) du milieu TI équivalent en fonction du logarithme du coefficient d'ouverture des fissures pour un milieu homogène isotrope contenant des fissures ellipsoïdales saturées de fluide. Les résultats sont montrés pour trois valeurs de la densité de fissure par unité de volume d : (—) $d=0,001$, (- -) $d=0,005$, (...) $d=0,01$. On a utilisé le modèle expérimental présenté par Crampin (1984). Les constantes de Lamé du milieu isotrope homogène valent $\lambda=291,4$ kbar et $\mu=291,6$ kbar pour une densité $\rho=2600$ kg/m³. Les constantes de Lamé du fluide contenu dans les fissures valent $\lambda'=15$ kbar et $\mu'=0$ kbar.

Interprétation en terme de fissuration de l'anisotropie mesurée.

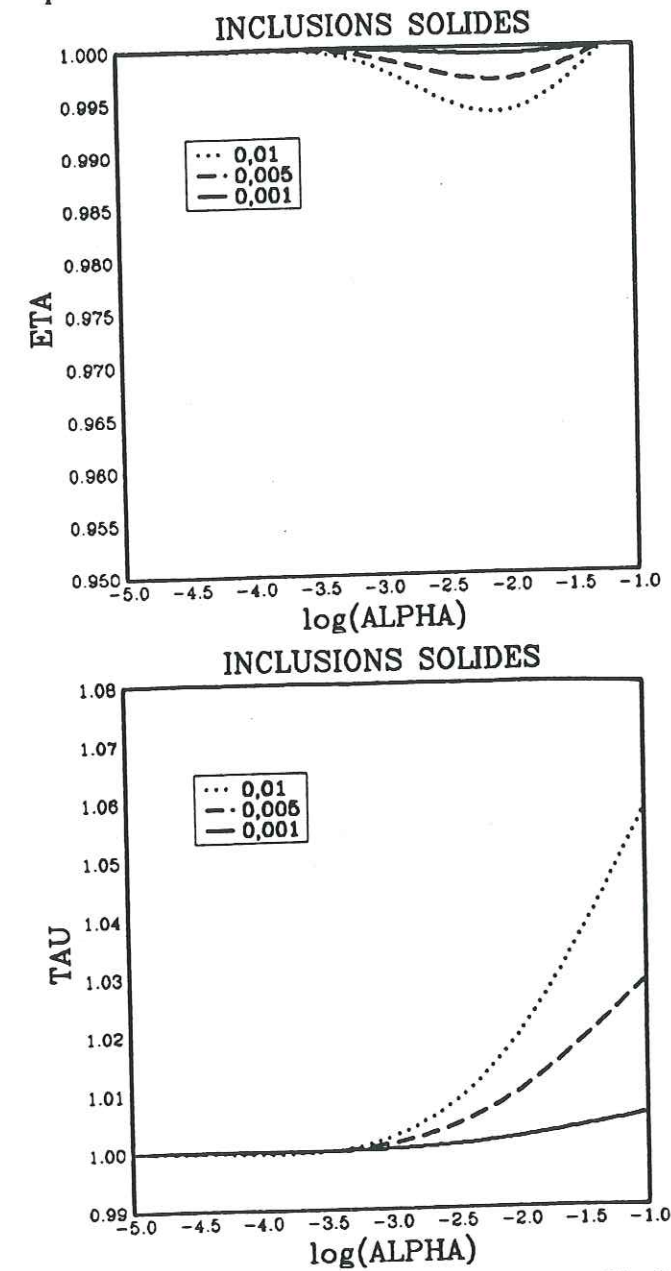


Figure X.9. Même représentation que la figure (X.8) mais pour un milieu homogène isotrope contenant des fissures ellipsoïdales saturées de solide. Les résultats sont montrés pour trois valeurs de la densité de fissure par unité de volume d : (—) $d=0,001$, (- -) $d=0,005$, (...) $d=0,01$. On a utilisé le modèle expérimental présenté par Crampin (1984). Les constantes de Lamé du milieu isotrope homogène valent $\lambda=291,4$ kbar et $\mu=291,6$ kbar pour une densité $\rho=2600$ kg/m³. On a considéré pour les constantes de Lamé du solide contenu dans les fissures : $\lambda'=15$ kbar et $\mu'=15$ kbar.

4. Conclusion.

Si on admet que l'anisotropie mesurée à partir de données sismiques de puits est une anisotropie induite par l'existence de fissures orientées horizontalement dans les couches étudiées, il est alors possible de donner certaines caractéristiques sur le matériau remplissant les fissures et sur la densité de fissure par unité de volume. En effet, l'étude des valeurs des paramètres η et τ montre que :

1. $\eta < 1$ et $\tau = 1$ sont des valeurs caractéristiques de milieux contenant des fissures saturées de fluides ;

2. $\eta = 1$ et $\tau > 1$ sont des valeurs caractéristiques de milieux contenant des fissures saturées de solides ou vides ;

3. il est possible de quantifier à 1% près la densité volumique des fissures pour une erreur absolue sur les paramètres η et τ de l'ordre de 0,1 ;

4. ces paramètres sont plus sensibles à la densité de fissure par unité de volume qu'au coefficient d'ouverture.

Par contre, il ne semble pas possible de déterminer quantitativement le coefficient d'ouverture des fissures.

Ces résultats sont représentatifs de milieux homogènes isotropes fissurés dont les inclusions sont caractérisées par un coefficient d'incompressibilité proche de celui d'un fluide. Il est probable que ces résultats seraient différents en considérant des inclusions pour lesquelles les vitesses des ondes P et S sont très supérieures à celles de la matrice.

CONCLUSIONS.

Ce travail avait comme objectif la mise au point d'une méthode d'estimation des paramètres d'anisotropie d'un milieu TI d'axe de symétrie contenu dans un plan vertical, à partir de données de sismique de puits. Plus précisément, cette méthode permet d'estimer localement, au niveau des récepteurs, les paramètres d'anisotropie décrivant la propagation des ondes q_P et q_{SV} dans le plan vertical. On ne travaille donc pas avec les ondes SH , celles-ci étant contenues dans le plan horizontal.

Généralement, les terrains étudiés en sismique pétrolière sont faiblement anisotropes. Les effets de cette anisotropie sur la vitesse de phase des ondes q_P et q_{SV} sont de l'ordre de 10 à 100 m/s. Il était donc primordial, vue la petitesse des effets que l'on cherche à mesurer, de développer une méthode utilisant des équations exactes pour estimer l'anisotropie.

L'estimation des paramètres d'anisotropie se fait par une méthode d'optimisation à partir des données de lenteurs apparentes et de polarisation.

L'originalité de cette méthode porte essentiellement sur trois points :

1. **L'utilisation de la polarisation des ondes comme une donnée.** Certaines méthodes nécessitent l'estimation de l'angle d'incidence que l'on ne mesure pas directement à partir de données de puits. Ceci implique des hypothèses d'homogénéité latérale du milieu étudié. D'autres méthodes considèrent l'angle de polarisation comme un angle d'incidence considérant que la différence entre polarisation et incidence est de l'ordre du pouvoir de résolution des outils d'enregistrement. Or, il existe sur le marché des sondes de puits trois composantes qui permettent une mesure précise de la direction de vibration des particules.

2. **L'utilisation d'équations exactes de la lenteur en fonction de la polarisation et des paramètres d'anisotropie.** Ceci permet de ne pas faire d'hypothèses *a priori* sur la valeur des paramètres d'anisotropie et de ne pas restreindre le domaine de validité de la méthode à un faible intervalle d'incidence.

3. **La définition de deux paramètres d'anisotropie.** Ces paramètres présentent l'intérêt de simplifier les équations des vitesses de phase et de l'angle d'incidence en fonction de la polarisation. De plus, la variation de ces paramètres peut s'interpréter physiquement en termes de vitesse de phase.

Avantages de la méthode.

Les avantages de la méthode d'estimation des paramètres définie dans cette étude sont :

1. de ne pas faire d'hypothèses sur la structure du milieu. Puisque le calcul de la lenteur se fait par différences de temps de parcours entre plusieurs récepteurs, on s'affranchit des effets dus aux hétérogénéités des formations traversées par les ondes. Ceci est vrai si la distance entre récepteurs est petite devant les hétérogénéités du terrain ;
2. de ne pas avoir à connaître l'angle d'incidence pour estimer les paramètres d'anisotropie puisque celui-ci est calculé à partir de l'angle de polarisation ;
3. de prendre en compte les incertitudes de mesure sur les données dans le processus d'optimisation. De plus, cette méthode permet de calculer une erreur sur les paramètres estimés ;
4. de donner une estimation précise des paramètres d'anisotropie dans une gamme d'incidence comprise entre 0 et 50°. C'est généralement la gamme couverte avec un dispositif de *walkaway*.

Conditions sur les données.

Le plus important pour l'estimation des paramètres d'anisotropie est la qualité des données utilisées du fait de la petitesse des effets que l'on cherche à mesurer. Nous nous sommes particulièrement attaché, avant de traiter des données réelles, à montrer les limites d'application de la méthode par des calculs de sensibilité et par de nombreux tests sur des exemples synthétiques. Ceci a permis, entre autre, de préciser les qualités optimales que doivent avoir les données :

1. il faut un minimum de quatre cotes d'enregistrement de façon à limiter au maximum les erreurs sur les mesures de lenteurs et d'angles de polarisation ;
2. il faut que la distance entre récepteurs soit suffisamment petite pour pouvoir considérer le terrain étudié comme homogène ;
3. Il faut réorienter les données de façon très précise dans le plan horizontal (à partir des arrivées *P*) puis dans le plan vertical ;
4. il faut des outils permettant de séparer les événements montant et descendant. Ceci est important pour un pointé précis des ondes *SV*. En effet, les ondes *SV* étant plus lente que les ondes *P*, celles-ci interfèrent avec des événements montant et descendant *P*. Il apparaît alors intéressant de développer des outils de

CONCLUSIONS.

traitement pour isoler les arrivées *SV* sans détériorer la polarisation. De plus, il faut un outil qui, après séparation, ne réduise pas le nombre de traces. Ce n'est pas le cas de méthodes qui, à partir de leur gradient de vitesse, séparent les ondes en résolvant un système linéaire par moindres carrés.

Limites de la méthode.

les limites d'applications de la méthode portent sur deux aspects :

1. **Le nombre et la qualité des données.** Les études sur synthétiques ont montré qu'il est nécessaire d'utiliser au moins une vingtaine de points de mesures pour estimer les paramètres d'anisotropie avec une précision de l'ordre du dixième pour une incertitude de l'ordre de la milliseconde sur les temps et de l'ordre du degré sur les angles de polarisation.
2. **La gamme d'incidence dans laquelle doivent se trouver les données.** On montre que dans la gamme d'incidence 50 à 90°, les paramètres ne sont pas ou mal retrouvés. Ceci limite les applications de la méthode à des données issues d'une acquisition entre-puits pour laquelle les récepteurs sont aux mêmes cotes que les sources.

Interprétation de l'anisotropie mesurée.

L'anisotropie mesurée dans les couches sédimentaires qui intéressent la sismique pétrolière est essentiellement due à l'empilement régulier de fines couches isotropes et/ou à la mise en place d'un réseau de fissures dans une direction privilégiée. On a montré que, dans le cas de milieux fissurés, les valeurs des paramètres d'anisotropie donnent des indications sur la nature du matériau remplissant les fissures ainsi que sur la densité de fissures. Ces résultats ont été obtenus à partir de modèles théoriques décrivant des milieux homogènes et isotropes contenant fissures par des milieux TI équivalents.

Évolutions possibles de cette étude.

Les évolutions immédiates qui ressortent de cette étude sont au nombre de quatre :

1. **Prendre en compte des données supplémentaires pour estimer les paramètres d'anisotropie.** Nous avons montré dans le chapitre 9 que, la prise

en compte de la pression hydrostatique mesurée dans le puits, en parallèle avec une écoute sismique, permet d'augmenter d'un facteur variant entre 5 et 10 la précision sur les paramètres d'anisotropie. Ces chiffres sont le résultats d'études faites à partir de données calculées puis bruitées. Il faudrait procéder à des essais avec des données synthétiques puis réelles. D'autre part, le modèle théorique de pression que nous avons calculé correspond à un puits traversant un milieu TI homogène. Il serait intéressant de modéliser la pression dans un puits traversant des couches de propriétés mécaniques différentes.

2. Développer des outils permettant de faire de la séparation d'ondes sans détruire la polarisation. Ceci est important pour les arrivées *SV*, beaucoup plus sensibles à l'anisotropie que les ondes *P*, qui interfèrent avec des événements montants et descendants.

3. Appliquer la méthode sur des données synthétiques complexes. On peut imaginer des données correspondant à des milieux formés d'une superposition de couches d'anisotropie différente. Le problème est alors de savoir si l'anisotropie mesurée dans une couche inférieure n'est pas altérée par l'anisotropie des couches supérieures. Un autre point intéressant serait de connaître l'effet du pendage des couches sur la précision des paramètres estimés.

4. Étendre ce type de méthode à des milieux de plus faibles degrés de symétrie. Dans un premier temps, il faudrait appliquer la méthode à des milieux TI d'axe de symétrie quelconque, puis, à des milieux de symétrie orthorhombique. De ces deux cas, il semble nécessaire d'utiliser l'information des ondes *SH* voire d'utiliser des données issues d'une acquisition en trois dimensions.

Bibliographie

Alford, R.M., 1986. Shear-data in the presence of azimuthal anisotropy. Dilley, Texas: 56th Ann. Internat. Mtg., Soc., Explor. Geophys., Expanded abstracts, 476-479.

Aki, K. & Richard, P., 1980. Quantitative seismology. W. H. Freeman and Co.

Backus, G. E., 1962. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *J. geophys. res.*, **11**, 4427-4440.

Banick, N.C., 1987. An effective anisotropy parameter in transversely isotropic media. *Geophysics*, **52**, 1654-1664.

Berryman, J. G., 1979. Long-wave elastic anisotropy in transversely isotropic media. *Geophysics*, **44**, 896-917.

Buyn, B.S. & Corrigan, D., 1990. Seismic traveltime inversion for transverse isotropy, *Geophysics*, **55**, 192-200.

Cliet, C. & Dubesset, M., 1988. Polarization analysis in three-components. *Geophysical Transactions*, **34**, 101-119.

Crampin, S., 1978. Seismic wave propagation through a cracked solid: polarization as a dilatancy diagnostic. *Geophys. J. of the Royal Astronomical Society*, **53**, 467-496.

Crampin, S., 1981. A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic-media. *Wave Motion*, **3**, 343-391.

Crampin, S., 1984. Effective anisotropic elastic constants for wave propagation through cracked solids. *Geophys. J. of the Royal Astronomical Society*, **76**, 135-145.

Crampin, S., 1985. Evaluation of anisotropy by shear-wave splitting. *Geophysics*, **50**, 142-152.

Crampin, S., 1986. Anisotropy and transverse isotropy. *Geophysical prospecting*, **34**, 94-99.

Crampin, S., 1987. Geological and industrial implications of extensive dilatancy anisotropy. *Nature*, **328**, 491-496.

Daley, P.F. & Hron, F., 1977. Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media. *Bulletin of Seismological Society of America*, **67**, 661-675.

Dieulesaint, E. & Royer, D., 1974. Ondes élastiques dans les solides Application au traitement du signal. Masson et Cie Editeurs.

Douma, J., 1988. The effect of the aspect ratio on cracked-induced anisotropy. *Geophysical Prospecting*, **36**, 614-632.

Gaiser, J.E., 1990. Transversely isotropic phase velocity analysis from slowness estimates. *J. geophys. res.*, **95**, 241-254.

Garbin, H.D. & Knopoff, L., 1973. The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of free circular cracks. *quarterly of applied mathematics*, **30**, 453-464.

Garbin, H.D. & Knopoff, L., 1975a. The shear modulus of a material permeated by a random distribution of free circular cracks. *quarterly of applied mathematics*, **33**, 296-300.

Garbin, H.D. & Knopoff, L., 1975b. Elastic moduli of a medium with liquid-filled cracks. *quarterly of applied mathematics*, **33**, 301-303.

Hardouin, L., 1986. Estimation de l'isotropie transverse en sismique de puits. Rapport interne N°36494.

Helbig, K., 1966. A graphical method for the construction of rays and travel times in spherically layered media, part 2: anisotropic case, theoretical considerations. *Bulletin of Seismological Society of America*, **56**, 527-559.

Helbig, K., 1984. Transverse isotropy in exploration seismics. *Geophys. J. of the Royal Astronomical Society*, **76**, 79-88.

Helbig, K., 1991. Determination of elastic constants pertaining to a symmetry plane of an orthorhombic medium under arbitrary overburden from three-component offset VSP measurements. 53rd EAEG meeting, Florence.

Hsu, K., Schoenberg, M. & Walsh, J., 1991. Anisotropy from polarization and moveout. Research note, Schlumberger Cambridge Research.

Hudson, J.A., 1975. Overall properties of cracked solid. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **88**, 371-384.

Hudson, J.A., 1981. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophys. J. of the Royal Astronomical Society*, **64**, 133-150.

Hudson, J.A., 1986. A higher order approximation to the wave propagation constants for a cracked solid. *Geophys. J. of the Royal Astronomical Society*, **87**, 265-274.

Hudson, J.A., 1988. Seismic wave propagation through material containing partially saturated cracks. *Geophysical Journal*, **92**, 33-37.

Hudson, J.A., 1990. Overall elastic properties of isotropic materials with arbitrary distribution of circular cracks. *Geophys. J. Int.*, **102**, 465-469.

Johnston, D.H., 1986. VSP detection of fracture-induced velocity anisotropy, Houston, Texas: 56th Ann. Internat. Mtg., Soc., Explor. Geophys., Expanded abstracts, 464-468.

Keith, C.M. & Crampin, S., 1977. Seismic body waves in anisotropic media: reflection and refraction at a plane interface, *Geophys. J. of the Royal Astronomical Society*, **49**, 181-208.

Khalevin, N.I. & Barykin, D.D., 1961. An instrument for acoustical investigations in boreholes. *Bull. Acad. Sci., USSR, geophysics series (english transl.)*, 41-46.

Krey, Th., & Helbig, K., 1956. A theorem concerning anisotropy of stratified media and its significance for reflection seismics. *Geophysical Prospecting*, **4**, 294-302.

Lefevre, F., Cllet, CH. & Nicoletis, L., 1989. Shear-wave birefringence measurements and detection in the Paris basin. Dallas: 59th Ann. Internat. Mtg., Soc., Explor. Geophys., Expanded abstracts, 786-789.

Lefevre, F., 1990. Détection et mesure de la biréfringence des ondes S à partir des profils sismiques de puits verticaux. Thèse,

Le Nur, A., 1971. Effects of stress on velocity anisotropy in rocks with cracks. *J. Geophys. Res.*, **76**, 2022.

Levin, F.K., 1978. The reflection, refraction, and diffraction of wave in media with elliptical velocity dependence. *Geophysics*, **43**, 528-537.

Levin, F.K., 1979. Seismic velocities in transversely isotropic media. *Geophysics*, **44**, 918-936.

Lines, L.R. & Treitel S., 1984. Tutorial: a review of least-squares inversion and its application to geophysical problems. *Geophysical Prospecting*, **32**, 159-186.

Love, A.E.H., 1927. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover Publications. New-York.

Lyakhovitskyi, F.M., 1984. Transverse isotropy of thinly layered media. *Geophys. J. of the Royal Astronomical Society*, **76**, 71-77.

Musgrave, M.J.P., 1970. Crystal acoustics, Holden-Day, San Francisco.

Nicoletis, L.M.A., Bamberg, A., Quiblier, J.A., Joly, P. & Kern, M., 1990. Hole geometry and anisotropic effects on tube-wave propagation: A quasi-static study. *Geophysics*, **55**, 167-175.

Nishizawa, O., 1982. Seismic velocity anisotropy in a medium containing oriented cracks-transversely isotropic case. *Journal of Physics of the earth*, **30**, 331-347

Schmidt, H. & Tango, G., 1986. Efficient global matrix approach to the computation of synthetic seismograms. *Geophys. J. of the Royal Astronomical Society*, **87**, 331-359.

de Parscau, J. & Nicoletis, L., 1990. Transverse isotropy from multi-offset VSPs. 60th Ann. Internat. Mtg., Soc., Explor. Geophys., Expanded abstracts, 476-479.

de Parscau, J., 1991. Relationship between phase velocities and polarization in transversely isotropic media. *Geophysics*, **10**, (in press).

de Parscau, J., 1991. P- and SV-wave transversely isotropic phase velocities analysis from VSP data. *Geophys. J. Int.*, **107**, (in press).

Postma, G.W., 1955. Wave propagation in a stratified medium. *Geophysics*, **20**, 780-806.

Stewart, R.P., 1984. VSP interval velocities from traveltimes inversion. *Geophysical Prospecting*, **32**, 608-628.

Tarantola, A., 1987. Inverse problem theory: Method for data fitting theory and model parameter estimation. Elsevier.

Thomsen, L., 1986. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, **51**, 1954-1966.

White, J.E. & Sengbush, R.L., 1953. Velocity measurements in near-surface formations. *Geophysics*, **18**, 54-69.

White J.E., Martineau-Nicoletis L., Monash C., 1983. Measured anisotropy in Pierre shale. *Geophysical Prospecting*, **31**, 709-725.

White, J.E., 1983. Underground sound. Elsevier Science Publ. Co., Inc.

Wright, J., 1987. The effects of transverse isotropy on reflection amplitude versus offset. *Geophysics*, **52**, 564-567.

ANNEXE A. Approximation de la vitesse apparente en fonction de γ par développements limités en θ .

1. Introduction.

Cette méthode consiste à faire des développements en série de Taylor sur les expressions des vitesses de phase de Thomsen et de l'angle de polarisation γ pour θ , l'angle d'incidence, proche de 0. Pour que cette méthode reste valable à des incidences d'environ 30° , on développe ces expressions jusqu'au quatrième ordre. Les étapes sont les suivantes :

1. développement en série de Taylor au quatrième ordre en θ du carré des expressions des vitesses de phase de Thomsen (2.21) ;
2. développement en série de Taylor au quatrième ordre en θ de l'expression de l'angle de polarisation γ (1.17). On obtient une relation du type $\gamma = f(\theta)$;
3. en utilisant la propriété $\gamma = \theta + \xi$ (voir le paragraphe 2.3 du chapitre 1), on arrive à une relation du type $\theta = f(\gamma)$;
4. on obtient ainsi l'opérateur permettant d'exprimer la vitesse apparente en fonction de γ , des paramètres d'anisotropie δ et ϵ , et des vitesses verticales P et SV .

2. Expression des vitesses apparentes des ondes q_P et q_{SV} en fonction de γ .

Pour de faibles anisotropies, on néglige les termes croisés en δ et ϵ , ainsi que leur carré respectif, dans les expressions du module des vitesses de phase. Alors, le développement limité au quatrième ordre des expressions des vitesses de phase des ondes q_P et q_{SV} (2.21) définies par Thomsen (1986) donne :

$$\begin{aligned} v_p^2(\theta) &\sim \alpha_o^2 \left[1 + 2\delta\theta^2 - 2\left(\frac{4}{3}\delta - \epsilon\right)\theta^4 \right], \\ v_{sv}^2(\theta) &\sim \beta_o^2 \left[1 + 2\frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2}(\epsilon - \delta)\theta^2 - \frac{8}{3}\frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2}(\epsilon - \delta)\theta^4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A. 1})$$

On procède ensuite à un développement limité au quatrième ordre en θ de l'expression de la tangente de l'angle de polarisation γ (1.17) pour les ondes q_P et q_{SV} , et l'on obtient une relation du type $\gamma = f(\theta)$:

$$\begin{aligned} \text{tg } \gamma_P &\sim \sqrt{1 + \frac{2\delta\alpha_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2}} \left[\theta - \left(\frac{\alpha_o^2(6\epsilon - 6\delta + 1) + \beta_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} \right) \frac{\theta^3}{3} \right], \\ \text{tg } \gamma_{SV} &\sim \frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{\alpha_o^2 - \beta_o^2}{\alpha_o^2(2\delta + 1) - \beta_o^2}} \left[1 + \left(\frac{2\alpha_o^2(3\epsilon - 4\delta - 1) + \beta_o^2}{\alpha_o^2(2\delta + 1) - \beta_o^2} - 2 \right) \theta^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha_o^2(2\epsilon - 4\delta - 1) + \beta_o^2}{\alpha_o^2(2\delta + 1) - \beta_o^2} \right) \left(\frac{\alpha_o^2(6\epsilon - 8\delta - 1) + \beta_o^2}{\alpha_o^2(2\delta + 1) - \beta_o^2} \right) \frac{\theta^4}{3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A. 2})$$

Avec l'hypothèse $\text{tg } \gamma_P < 1$ et $\text{tg } \gamma_{SV} > 1$, ce qui est raisonnable avec une incidence inférieure à 45° , on obtient une relation du type $\gamma = f(\theta)$:

$$\begin{aligned} \gamma_P &\sim \sqrt{\frac{\alpha_o^2(2\delta + 1) - \beta_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2}} \left(\theta + \left(\frac{2\alpha_o^2(3\epsilon - 4\delta)}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} \right) \frac{\theta^3}{3} \right), \\ \gamma_{SV} &\sim \pm \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_o^2(2\delta + 1) - \beta_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2}} \left[\theta - \left(\frac{2\alpha_o^2(3\epsilon - 4\delta - 1) + \beta_o^2}{\alpha_o^2(2\delta + 1) - \beta_o^2} \right) \frac{2\theta^3}{3} \right], \end{aligned} \quad (\text{A. 3})$$

Sachant que $\gamma = \theta + \xi$ (chapitre 1), et en utilisant le fait que ξ est petit, on arrive à une relation du type $\xi = f(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \xi_P &\sim \left(1 - \frac{1}{A} \right) \gamma_P + \left(\frac{2\alpha_o^2(4\delta - 3\epsilon)}{3(\alpha_o^2 - \beta_o^2)A} (2A - 3) \right) \gamma_P^3, \\ \xi_{SV} &\sim A \left[\frac{\pi}{2} + (1 + A)\gamma_{SV} + \frac{3\pi}{2} B \gamma_{SV}^2 + B(2A + 3)\gamma_{SV}^3 + \frac{9\pi}{2} C \gamma_{SV}^4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A. 4})$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\alpha_o^2(2\delta + 1) - \beta_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2}} \sim 1 + \left(\frac{\alpha_o^2}{\alpha_o^2 - \beta_o^2} \right) \delta, \\ B &= -\frac{1}{3A} (\alpha_o^2(3\epsilon - 4\delta - 0,5) + \beta_o^2). \end{aligned} \quad (\text{A. 5})$$

Comme l'angle $\xi < 5^\circ$ pour une faible anisotropie, on néglige les termes en ξ^2 . En posant $\theta = \gamma - \xi$, on obtient une relation du type $\theta = f(\gamma)$ calculée à partir des ondes q_P et q_{SV} :

$$\begin{aligned} \theta_P &\sim \frac{1}{A} \gamma_P - \left(\frac{2\alpha_o^2(4\delta - 3\epsilon)}{(\alpha_o^2 - \beta_o^2)A} \right) \frac{(2A - 3)}{3} \gamma_P^3, \\ \theta_{SV} &\sim \frac{1}{A} \left[\frac{\pi}{2} + \gamma_{SV} - \frac{3\pi}{2} B \gamma_{SV}^2 - (2A - 3)\gamma_{SV}^3 - \frac{9\pi}{2} B \gamma_{SV}^4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A. 6})$$

La vitesse apparente des ondes q_P approchée par un développement en série de Taylor en $\theta \rightarrow 0$ s'écrit :

$$\begin{aligned} q_P &\sim \alpha_o \left[1 + (1 + 2\delta) \frac{\theta^2}{2} + (6\epsilon - 5\delta + 1.25) \frac{\theta^4}{6} \right], \\ q_{SV} &\sim \beta_o \left[1 + \left(\frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} (\epsilon - \delta) + 0.5 \right) \theta^2 + \left(0.25 - \frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} (\epsilon - \delta) \right) \frac{5\theta^4}{6} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A. 7})$$

En remplaçant θ par (A.6), on arrive à :

$$\begin{aligned} q_P &\sim \alpha_o \left[1 + \left(\frac{1 + 2\delta}{A^2} \right) \frac{\gamma_P^2}{2} + \left(\frac{6\epsilon - 5\delta + 1.25}{2A^4} - \frac{2\alpha_o^2(4\delta - 3\epsilon)}{A^2(\alpha_o^2 - \beta_o^2)} (2A - 3) \right) \frac{\gamma_P^4}{3} \right], \\ q_{SV} &\sim \beta_o \left[1 - F \frac{\pi^2}{4} + G \frac{\pi^4}{16} + \left(-\pi F + \frac{\pi^3}{2} G \right) \gamma_{SV} + \left(-FH + \pi^2 G \left(\frac{H}{2} + 1 \right) \right) \gamma_{SV}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(-FI + G \left(\frac{I\pi^2}{2} + 2\pi H \right) \right) \gamma_{SV}^3 - \left(FJ - G \left(2I\pi - J \frac{\pi^2}{2} + H^2 \right) \right) \gamma_{SV}^4 \right], \end{aligned} \quad (\text{A. 8})$$

avec :

$$\begin{aligned} F &= \left[\frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} (\epsilon - \delta) + 0,5 \right] \frac{1}{A^2}, \\ G &= \frac{5}{6} \left(0,25 - \frac{\alpha_o^2}{\beta_o^2} (\epsilon - \delta) \right) \frac{1}{A^4}, \\ H &= \frac{3}{2} B \pi^2 + 1, \\ I &= \frac{3}{2} B \pi - \pi B (2A - 3), \\ J &= \frac{9}{4} \pi^2 B - 2B (2A - 3). \end{aligned} \quad (\text{A. 9})$$

Ces expressions compliquées des vitesses apparentes sont des fonctions des angles de polarisation, des deux paramètres d'anisotropie de Thomsen ainsi que des vitesses verticales des ondes P et SV . Les deux inconnues sont les deux paramètres d'anisotropie δ et ϵ .

3. Erreurs sur les expressions des vitesses apparentes.

On cherche à répondre à trois questions :

1. à partir de quelle incidence les expressions approchées (A.8) ne sont-elles plus valables ?
2. pour une perturbation des paramètres ϵ et δ , l'erreur faite sur (A.8) est-elle stable ?
3. pour une perturbation des vitesses verticales des ondes P et SV , l'erreur faite sur (A.8) est-elle stable ?

Pour répondre à ces questions, on se place dans le plan (ϵ, δ) afin de calculer pour différentes incidences et différentes valeurs de vitesses verticales des ondes P et SV , des erreurs sur les expressions approchées (A.8) du type :

$$\Delta q_{\epsilon, \delta} = 100 \frac{\hat{q} - q_{\text{vrai}}}{q_{\text{vrai}}}. \quad (\text{A. 10})$$

Les approximations des vitesses de phase des ondes q_{SV} sont plus importantes que celles des ondes q_P . On ne s'est donc intéressé dans ce qui suit qu'aux ondes q_P . La figure (1) représente des cartes d'erreurs sur l'expression approchée de la vitesse apparente pour les ondes q_P , θ valant respectivement 20, 30 et 40°. Pour une incidence $< 30^\circ$ et le couple (ϵ, δ) inclus dans l'intervalle $\{-0,1; 0,1\}$. Les courbes d'isovaleurs sont tracées pour une erreur inférieure à 1%.

La figure (2) représente les mêmes cartes d'erreurs pour différentes valeurs des vitesses verticales des ondes P et SV et pour $\theta=30^\circ$. Si le rapport $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ reste constant, la répartition de l'erreur dans le plan (ϵ, δ) ne bouge pratiquement pas. Si la valeur de ce rapport change, la répartition de l'erreur s'en trouve largement perturbée. Cela signifie que l'erreur faite sur l'expression (A.8) va aussi dépendre de l'estimation des vitesses verticales P et SV .

Sur ces figures, une erreur négative signifie que le terme correctif estimé au quatrième ordre n'est pas assez fort. Globalement, lorsque θ est supérieur à 45° , l'expression sous-estime l'anisotropie sauf si $\delta < -0,15$.

Il résulte de cette étude que cette méthode est applicable pour des incidences allant jusqu'à 30° avec un rapport $\frac{\beta_0}{\alpha_0} \sim 0,5$.

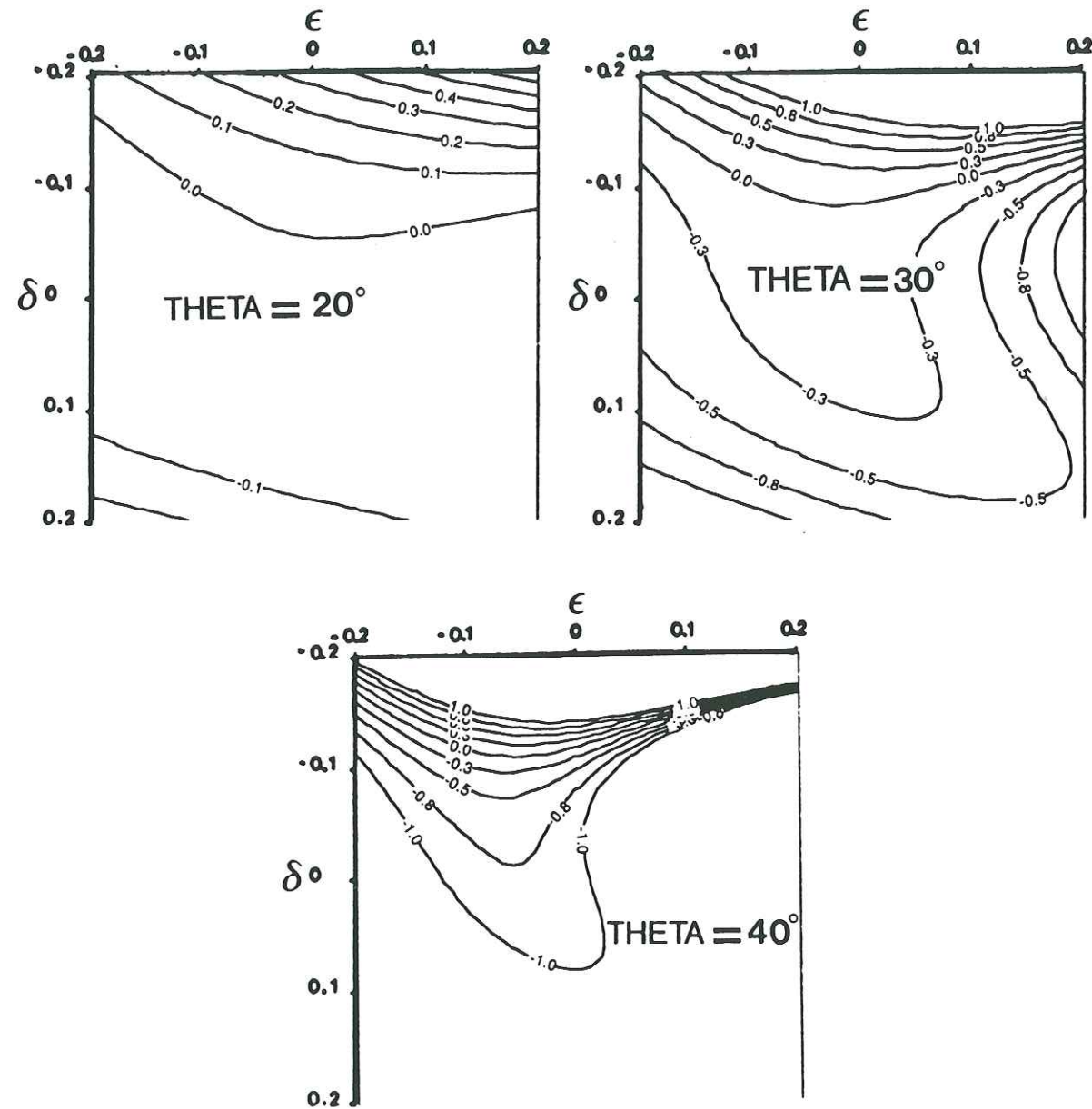


Figure 1. Cartes d'erreurs relatives (en %) des vitesses apparentes des ondes q_P approchées par développements limités en θ , calculées dans le plan des paramètres d'anisotropie de Thomsen et pour θ valant 20, 30 et 40°.

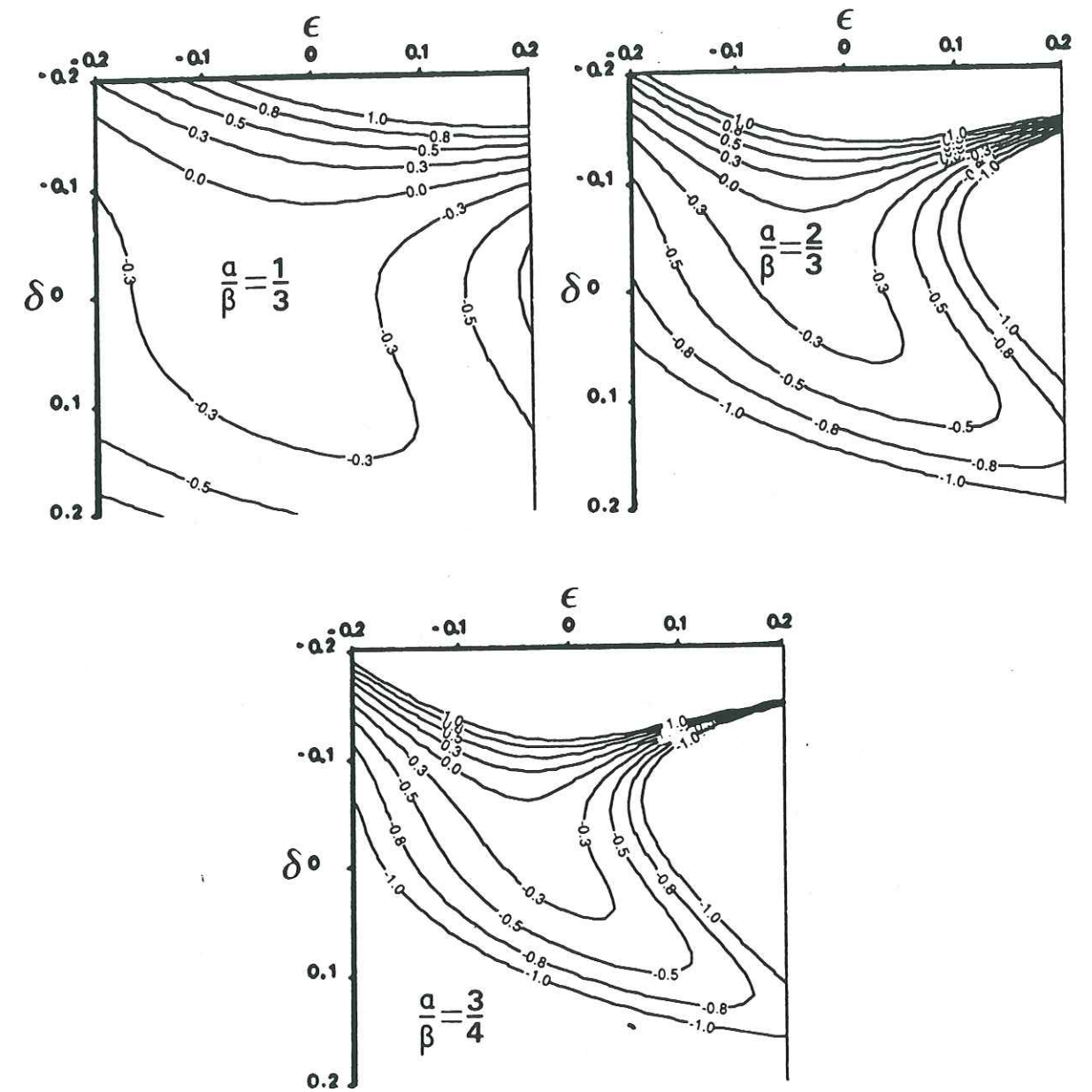


Figure 2. Cartes d'erreurs relatives (en %) calculées de la même façon que sur la figure (1) mais avec différentes valeurs du rapport β/α et avec fixé à 30°.

ANNEXE B. Calcul de deux paramètres indépendants à partir des équations approchées des vitesses apparentes verticales.

1. Calcul d'une matrice de rotation dans le plan (δ, ϵ) .

Nous avons vu dans le chapitre 6 que la fonction coût dans le plan des paramètres (η, τ) présente des courbes d'isovaleurs elliptiques. Les axes de ces ellipses sont confondus avec les vecteurs propres de la matrice Hessienne donnée par l'expression (6.26). Il existe un angle entre ces vecteurs propres et les axes η et τ . Ceci est dû au fait que les termes non diagonaux de la matrice Hessienne ne sont pas nuls. Nous avons montré numériquement sur des exemples que cet angle dépend essentiellement du rapport du carré de la vitesse verticale P sur la vitesse verticale S . Il est difficile de montrer analytiquement cette dépendance à partir des équations exactes de la vitesse apparente verticale (6.2) exprimée en fonction de l'angle de polarisation et des paramètres η et τ . Par contre, cela devient envisageable à partir des équations approchées des vitesses apparentes (3.11), linéaires pour les paramètres de Thomsen δ et ϵ et fonctions de l'angle de polarisation. Nous avons montré (chapitre 5) que la sensibilité des vitesses de phase des ondes q_P et q_{SV} à des perturbations des paramètres η et τ ou δ et ϵ est sensiblement la même. Il est donc possible d'étendre les résultats de l'étude analytique des vecteurs propres de la matrice Hessienne dans le plan (δ, ϵ) à l'étude numérique de ces vecteurs propres dans le plan (η, τ) .

Pour une incidence θ et des vitesses verticales α_0 et β_0 fixées, on considère le vecteur $\vec{Q}$ dont les deux composantes sont respectivement les vitesses apparentes des ondes q_P et q_{SV} , notées $Q_P(\delta, \epsilon)$ et $Q_{SV}(\delta, \epsilon)$ et décrites par les équations (3.11). La matrice Jacobienne J associée au vecteur $\vec{Q}$ est définie comme suit :

$$J_{\theta, \alpha_0, \beta_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_P}{\partial \delta} |_{\theta, \alpha_0, \beta_0} & \frac{\partial Q_P}{\partial \epsilon} |_{\theta, \alpha_0, \beta_0} \\ \frac{\partial Q_{SV}}{\partial \delta} |_{\theta, \alpha_0, \beta_0} & \frac{\partial Q_{SV}}{\partial \epsilon} |_{\theta, \alpha_0, \beta_0} \end{bmatrix}. \quad (\text{B. 1})$$

Pour une application ainsi linéarisée, la matrice Hessienne peut s'écrire :

$$H = J^T J = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}. \quad (\text{B. 2})$$

La matrice H est réelle et symétrique. Les termes de la diagonale sont des variances des paramètres ϵ et δ et les termes non diagonaux sont des covariances qui ne sont pas nuls. Le problème est alors de calculer la matrice de rotation qui permet de passer du repère (δ, ϵ) au repère propre (δ', ϵ') . Pour les paramètres δ' et ϵ' , la matrice H est diagonale, ces deux paramètres sont donc décorrélés. Pour diagonaliser la matrice Hessienne H , on calcule ses deux vecteurs propres.

On exprime dans ce qui suit les termes de la matrice Jacobienne (B.1) en réécrivant l'expression de la vitesse apparente des ondes q_{SV} en fonction de γ_P noté ultérieurement γ . Les termes de la matrice Jacobienne se restreignent à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_P}{\partial \delta} &= \frac{1}{\cos \gamma} \left(\frac{\alpha_0}{(\alpha_0^2 - \beta_0^2)} \right) (-\beta_0^2 \sin^2 \gamma + (\alpha_0^2 + \beta_0^2) \sin^4 \gamma), \\ \frac{\partial q_P}{\partial \epsilon} &= \frac{-1}{\cos \gamma} \left(\frac{\alpha_0}{(\alpha_0^2 - \beta_0^2)} \right) (\alpha_0^2 + \beta_0^2) \sin^4 \gamma, \\ \frac{\partial q_{SV}}{\partial \delta} &= \frac{1}{\cos \gamma} \left(\frac{\alpha_0^2}{\beta_0(\alpha_0^2 - \beta_0^2)} \right) (-\alpha_0^2 \sin^2 \gamma + (\alpha_0^2 + \beta_0^2) \sin^4 \gamma), \\ \frac{\partial q_{SV}}{\partial \epsilon} &= \frac{1}{\cos \gamma} \left(\frac{\alpha_0^2}{\beta_0} \right) \left(\sin^2 \gamma - \frac{(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}{(\alpha_0^2 - \beta_0^2)} \sin^4 \gamma \right). \end{aligned} \quad (\text{B. 3})$$

Les termes de la matrice Hessienne (B.2) sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\partial q_P}{\partial \delta} \right)^2 \left(\frac{\partial q_{SV}}{\partial \delta} \right)^2, \\ b &= \left(\frac{\partial q_P}{\partial \delta} \right) \left(\frac{\partial q_P}{\partial \epsilon} \right) + \left(\frac{\partial q_{SV}}{\partial \delta} \right) \left(\frac{\partial q_{SV}}{\partial \epsilon} \right), \\ c &= \left(\frac{\partial q_P}{\partial \epsilon} \right)^2 \left(\frac{\partial q_{SV}}{\partial \epsilon} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B. 4})$$

Les deux valeurs propres de la matrice (B.2) s'écrivent :

$$\lambda_{\pm} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}. \quad (\text{B. 5})$$

On ne s'intéresse dans cette étude qu'à l'angle de rotation qui permet de passer du repère (δ, ϵ) au repère (δ', ϵ') . Par conséquent, il n'est pas nécessaire de normer

Annexe B

les vecteurs propres. La tangente de l'angle de rotation entre les axes δ et δ' noté α est obtenue en faisant le rapport des deux composantes du premier vecteur propre (associé à la valeur propre λ_-). On obtient ainsi :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c - a - \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2b}. \quad (\text{B. 6})$$

Les expressions des termes intervenant dans l'expression de $\operatorname{tg} \alpha$ sont :

$$\begin{aligned} a &= [(\beta_0^6 + \alpha_0^6) - 2(\alpha_0^2 + \beta_0^2)(\alpha_0^4 + \beta_0^4) \sin^2 \gamma \\ &\quad + (\alpha_0^2 + \beta_0^2)^3 \sin^4 \gamma], \\ b &= [-\alpha_0^4(\alpha_0^2 - \beta_0^2) + (\alpha_0^2 + \beta_0^2)(2\alpha_0^4 - \beta_0^2\alpha_0^2 + \beta_0^4) \sin^2 \gamma \\ &\quad - (\alpha_0^2 + \beta_0^2)^3 \sin^4 \gamma], \\ c &= [\alpha_0^2(\alpha_0^2 - \beta_0^2)^2 - 2\alpha_0^2(\alpha_0^4 - \beta_0^4) \sin^2 \gamma \\ &\quad + (\alpha_0^2 + \beta_0^2)^3 \sin^4 \gamma]. \end{aligned} \quad (\text{B. 7})$$

Puisque l'on a utilisé les expressions des vitesses apparentes (3.11) linéarisées en δ et ϵ , les termes de la matrice Hessienne sont indépendants de δ et ϵ , et ne dépendent que des vitesses verticales P et SV et de l'angle de polarisation. La figure (1) montre la valeur de l'angle de rotation en fonction de l'angle d'incidence pour quatre milieux TI différents définis dans le tableau (1). Cet angle est calculé à partir des équations exactes des vitesses apparentes verticales. Cette figure montre que l'angle de rotation permettant de passer d'un repère à l'autre peut varier de plus de 20° en fonction de l'angle de polarisation. Cela signifie que les termes en $\sin^2$ et $\sin^4$ des vecteurs propres ne sont pas négligeables. D'autre part, cette figure montre que l'angle de rotation dépend de la valeur des paramètres d'anisotropie puisque les courbes ne sont pas confondues. En conséquence, les expressions approchées de la vitesse apparente verticale ne sont utilisables pour calculer l'angle de rotation entre les deux repères que sous certaines conditions sur les valeurs des paramètres δ et ϵ . On montre que, pour une anisotropie proche d'une anisotropie elliptique ($\delta = \epsilon$), les courbes sont quasiment identiques.

J. de Parscau

N° du milieu	δ	ϵ
1	0	0
2	0,1	0
3	0	0,1
4	0,1	0,1

Tableau 1. Définition de quatre milieux TI avec les paramètres δ et ϵ . Pour tous ces milieux, les vitesses verticales des ondes P et SV valent respectivement 4000 m/s et 2000 m/s.

La figure (2) montre, pour une anisotropie constante, comment varie cet angle pour différentes valeurs du rapport k de la vitesse verticale des ondes P sur la vitesse verticale des ondes S (tableau 2). Cette figure montre que plus le rapport k est grand, moins l'angle de rotation entre les deux repères varie avec l'angle de polarisation.

N° du milieu	α_0 (m/s)	β_0 (m/s)	k
1	4000	2000	4
2	3000	1000	9
3	3000	2000	2,25
4	1000	600	1,66

Tableau 2. Définition de quatre milieux TI ayant des vitesses verticales différentes pour les ondes P et SV . Pour tous ces milieux, les paramètres δ et ϵ valent 0,1.

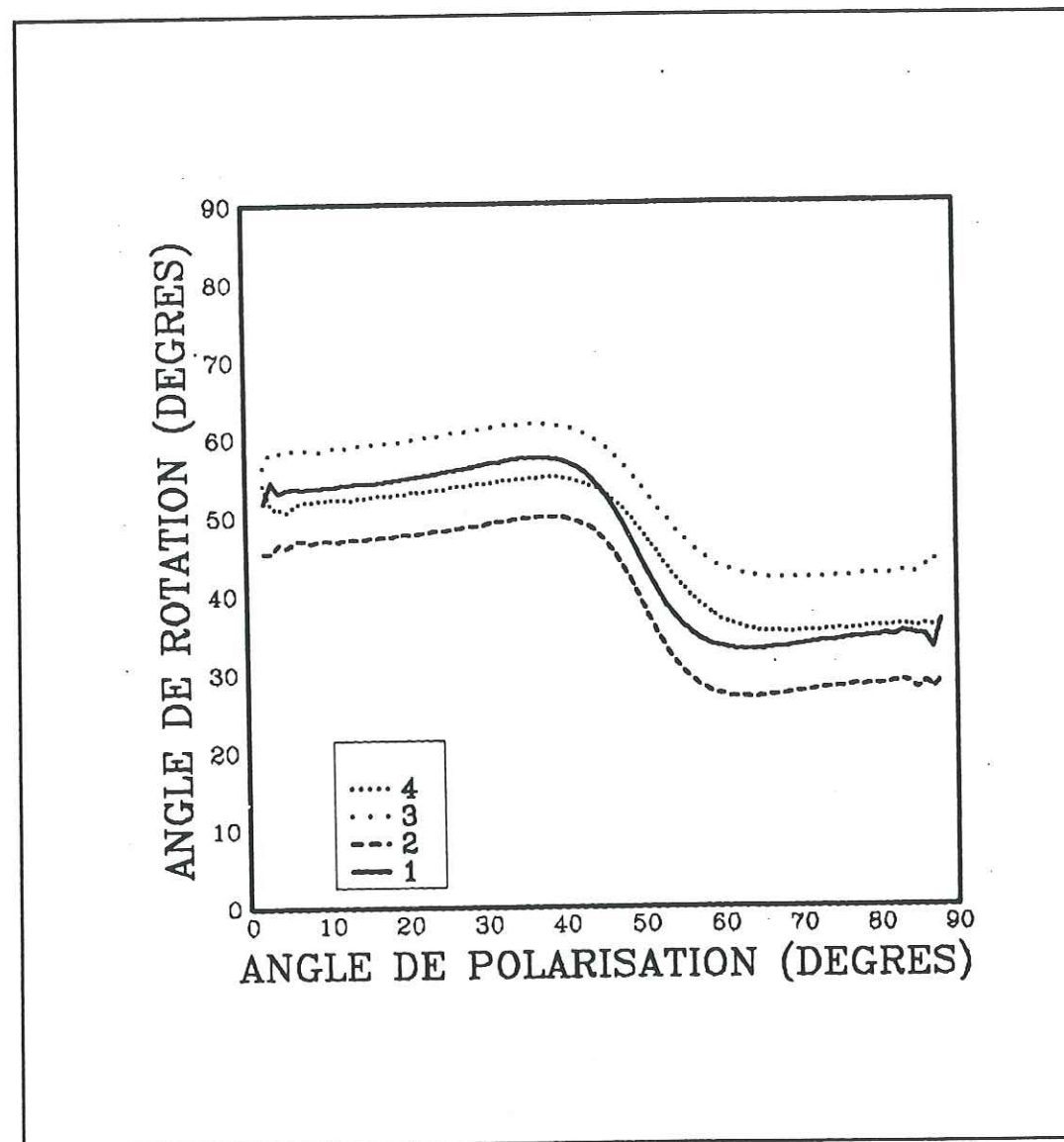


Figure 1. Calcul de l'angle de rotation entre les deux repères (δ, ϵ) et (δ', ϵ') pour une incidence θ variant entre 0 et 90°. Quatre anisotropies sont considérées et la valeur du rapport k du carré de la vitesse verticale des ondes P sur la vitesse verticale des ondes S est fixée à 4.

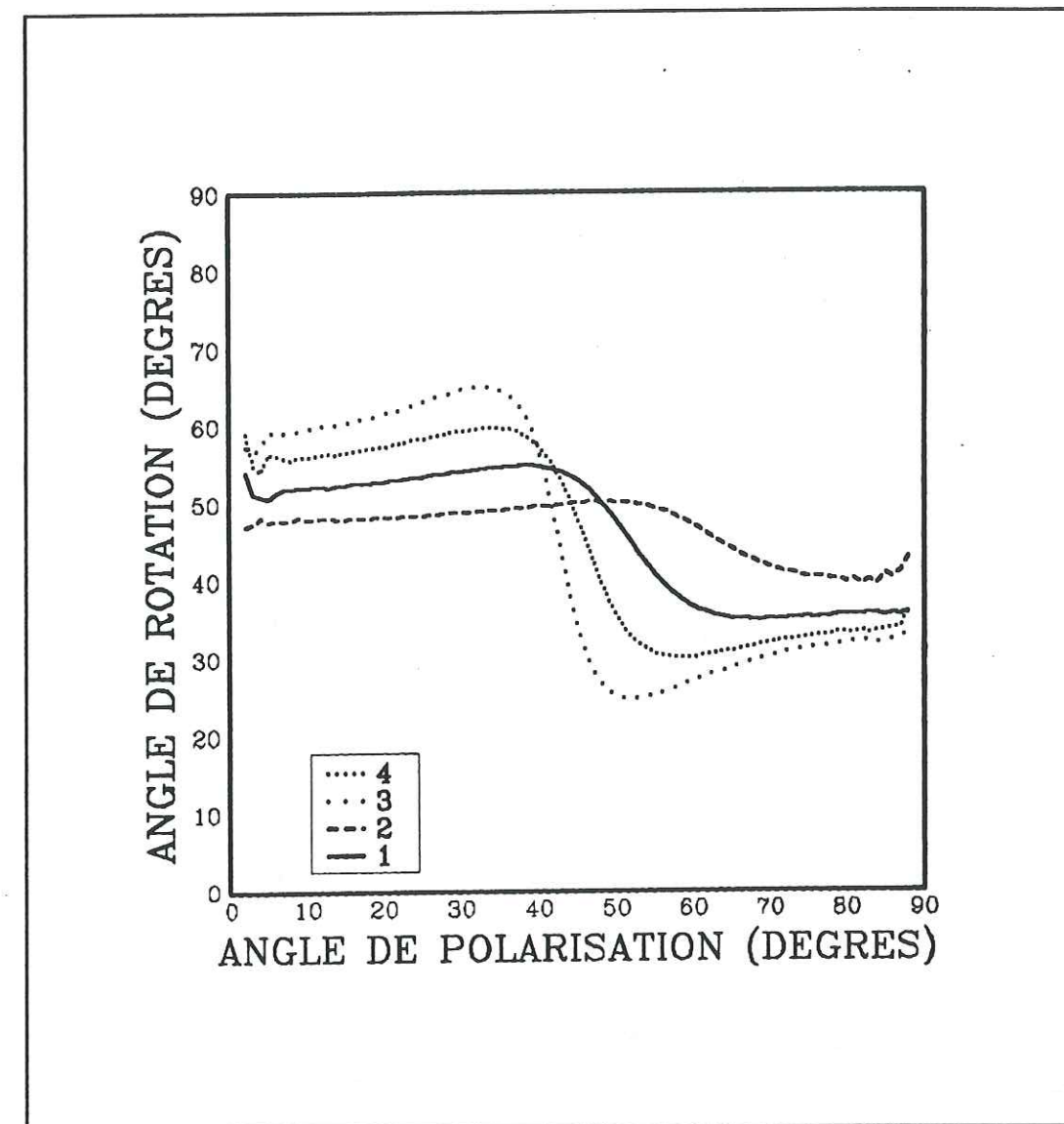


Figure 2. Calcul de l'angle de rotation entre les deux repères (δ, ϵ) et (δ', ϵ') pour une incidence θ variant entre 0 et 90°. Quatre valeurs du rapport k sont considérées pour des valeurs des paramètres d'anisotropie constantes ($\delta = \epsilon = 0,1$).

On note sur les figures (1) et (2) que la variation de l'angle de rotation est plus sensible à la valeur du rapport k qu'à la variation des valeurs des paramètres δ et ϵ . En effet, si on néglige les termes en sinus dans l'expression $\det g\alpha$, les deux valeurs propres de la matrice Hessienne (B.2) se réduisent à :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= \frac{\sin^4 \gamma}{\cos^2 \gamma} \left(\frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} \right) \left(\alpha_0^2 + \frac{\alpha_0^6 + \beta_0^6}{(\alpha_0^2 - \beta_0^2)^2} \right).\end{aligned}\quad (\text{B. 8})$$

Les vecteurs propres associés aux deux valeurs propres (B.5) peuvent facilement être calculés de telle sorte que leur norme soit égale à 1. Ceci complique légèrement leur expression mais permet de calculer pour des paramètres (δ', ϵ') ayant le même ordre de grandeur. Les composantes des deux vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres sont :

$$\begin{aligned}\vec{g}_{\lambda_1} &= \left[\frac{\alpha_0^4(\alpha_0^2 - \beta_0^2)}{d_1}, \frac{\alpha_0^6 + \beta_0^6}{d_1} \right], \\ \vec{g}_{\lambda_2} &= \left[\frac{\alpha_0^2}{d_2}, \frac{-(\alpha_0^2 - \beta_0^2)}{d_2} \right],\end{aligned}\quad (\text{B. 9})$$

où d_1 et d_2 ont pour expression :

$$\begin{aligned}d_1 &= \sqrt{(\alpha_0^6 + \beta_0^6)^2 + (\alpha_0^4(\alpha_0^2 - \beta_0^2))^2}, \\ d_2 &= \sqrt{\alpha_0^4 + (\alpha_0^2 - \beta_0^2)^2}.\end{aligned}\quad (\text{B. 10})$$

Ces deux vecteurs propres forment une base orthonormée puisque la matrice Hessienne est réelle et symétrique. Leurs coordonnées ne dépendent que des vitesses verticales des ondes P et S (α_0 et β_0). Ainsi, les deux paramètres δ' et ϵ' ont pour expression :

$$\begin{aligned}\delta' &= \frac{\alpha_0^4(\alpha_0^2 - \beta_0^2)}{d_1} \delta + \frac{\alpha_0^2}{d_2} \epsilon, \\ \epsilon' &= \frac{\alpha_0^6 + \beta_0^6}{d_1} \delta - \frac{\alpha_0^2 - \beta_0^2}{d_2} \epsilon.\end{aligned}\quad (\text{B. 11})$$

Ces deux paramètres sont décorrélés et restent adimensionnels. Si on exprime ces paramètres en fonction du rapport k du carré de la vitesse verticale des ondes P

sur la vitesse verticale des ondes S , les deux paramètres δ' et ϵ' deviennent :

$$\begin{aligned}\delta' &= \left(\frac{k^2(k-1)}{\sqrt{(k^3+1)^2 + k^4(k-1)^2}} \right) \delta + \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + (k-1)^2}} \right) \epsilon, \\ \epsilon' &= \left(\frac{k^3+1}{\sqrt{(k^3+1)^2 + k^4(k-1)^2}} \right) \delta + \left(\frac{1-k}{\sqrt{k^2 + (k-1)^2}} \right) \epsilon.\end{aligned}\quad (\text{B. 12})$$

Si l'on considère que la vitesse verticale des ondes P est égale à deux fois la vitesse verticale des ondes S on obtient :

$$\begin{aligned}\delta' &= 0,6\delta + 0,8\epsilon, \\ \epsilon' &= 0,8\delta - 0,6\epsilon.\end{aligned}\quad (\text{B. 13})$$

On passe du repère (δ, ϵ) au repère propre (δ', ϵ') en opérant une rotation de 53° . La figure (1) montre que pour $\delta = \epsilon = 1$, l'angle de rotation est très peu différent de 53° pour un angle de polarisation compris entre 0 et 40° .

Il est possible de s'affranchir de la variation de l'angle de rotation avec l'angle de polarisation si on considère, pour calculer l'angle de rotation, plusieurs valeurs de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation correspondant à des valeurs de l'angle d'incidence comprises entre 0 et 90° . On obtient dans ce cas un angle de rotation moyen.

2. Calcul d'un angle de rotation moyen.

Nous avons vu (chapitre 6) que l'anisotropie est estimée en utilisant des jeux de données constitué de différentes valeurs de vitesses et d'angles de polarisation pour les ondes q_P et q_{SV} correspondant à des incidences comprises entre 0 et 90° . Ainsi, la matrice Jacobienne définie par l'expression (B.1) comprendra $2n$ lignes si on considère n incidences. Il est alors possible de calculer un angle de rotation moyen à partir de l'expression approchée (B.6). L'idée étant que si on somme les valeurs des angles de rotation calculées pour chaque valeur de l'angle de polarisation, on se ramène à un angle de rotation moyen qui ne dépend plus que de la valeur du rapport k . De plus, les courbes de variation de l'angle de rotation en fonction de l'angle de polarisation étant antisymétriques par rapport à 45° , il suffit de prendre autant de valeurs de données de part et d'autre de cette limite pour que la valeur de l'angle de polarisation moyen ne dépende pas des données.

Annexe B

Dans ce but, on considère un milieu TI pour lequel δ et ϵ valent 0,1 et le rapport k pouvant valoir 2,25 ou 4. On calcule un jeu de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation correspondant à des angles d'incidence θ régulièrement répartis entre 0 et 90°. Puis on calcule à partir de ce jeu de données un angle de rotation moyen en utilisant l'expression (B.6). Pour les deux exemples considérés, l'angle de rotation obtenu vaut respectivement 37 et 40°.

Pour vérifier la validité de cette expérience, on calcule la fonction coût en utilisant respectivement les deux jeux de données correspondant à $k = 2,25$ et $k = 4$ autour des paramètres $\delta = \epsilon = 1$. Les figures (3) et (4) représentent pour ces deux jeux de données la forme de la fonction coût dans le plan des paramètres (δ, ϵ) . Sur ces figures, l'angle moyen mesuré entre l'axe de plus grande pente et l'axe δ est respectivement d'environ 35 et 38°. Ces valeurs correspondent à ce que l'on calcule avec l'expression (3.13) à 2° près. La même expérience faite avec des valeurs différentes des paramètres d'anisotropie δ et ϵ (mais tel que δ soit peu différent de ϵ) a donné les mêmes résultats.

De cette étude on en déduit que :

1. les expressions approchées de la vitesse apparente verticale des ondes q_P et q_{SV} (3.11) ne peuvent être utilisées que dans le cas où δ est peu différent de ϵ ;
2. dans ces conditions, l'angle de rotation permettant de passer du repère (δ, ϵ) au repère (δ', ϵ') dépend essentiellement du rapport k du carré de la vitesse verticale P sur la vitesse verticale S .

J. de Parscau

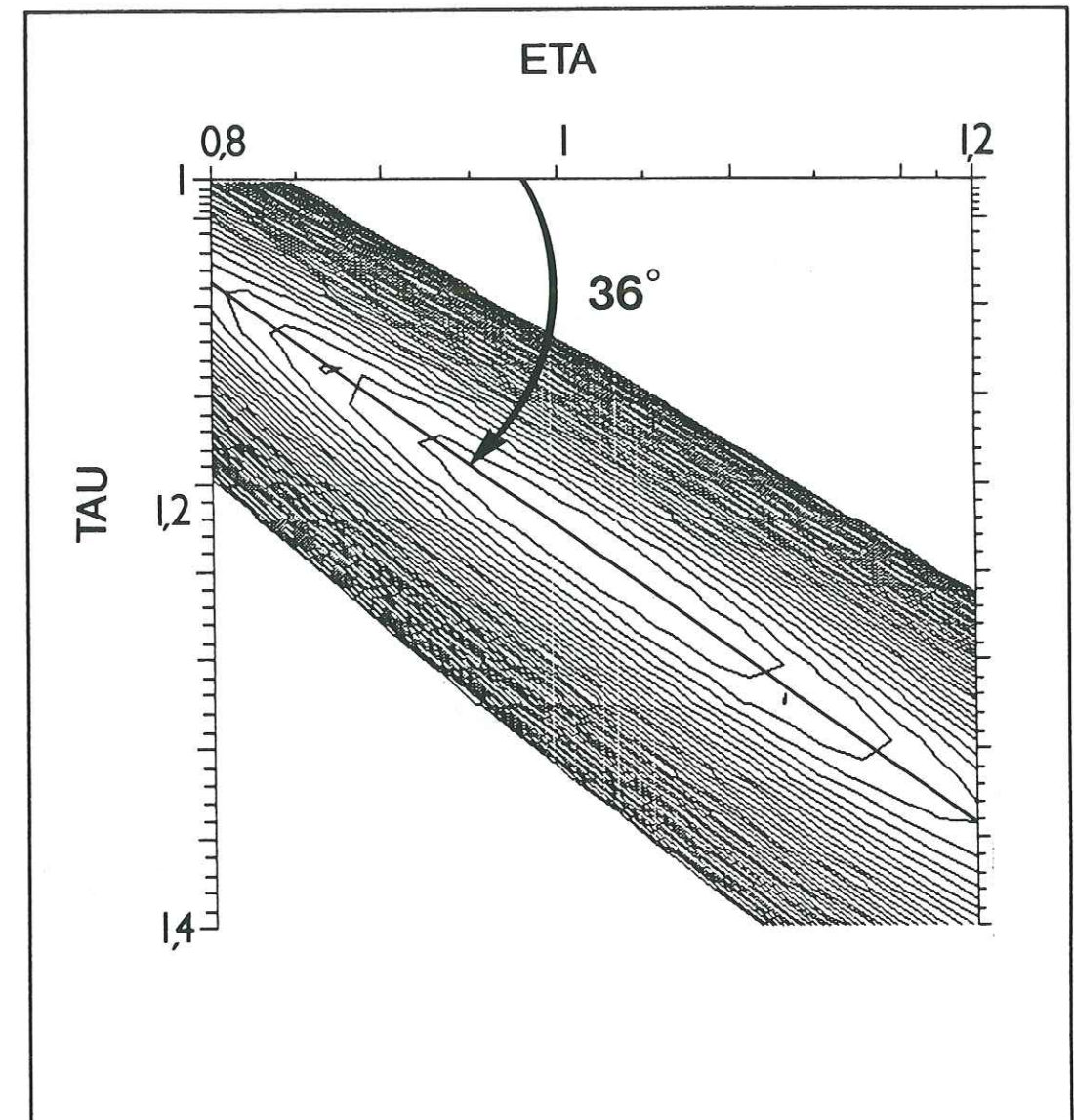


Figure 3. Forme de la fonction coût représentée dans le plan des paramètres (δ, ϵ) pour un jeu de données défini par 40 valeurs de vitesses apparentes verticales et d'angles de polarisation pour les ondes q_P et q_{SV} . Le milieu TI est défini par : $\delta = \epsilon = 1$ et $k = 2,25$. Les courbes d'isovaleurs forment des ellipses dont le grand axe fait un angle d'environ 38° avec l'axe δ .

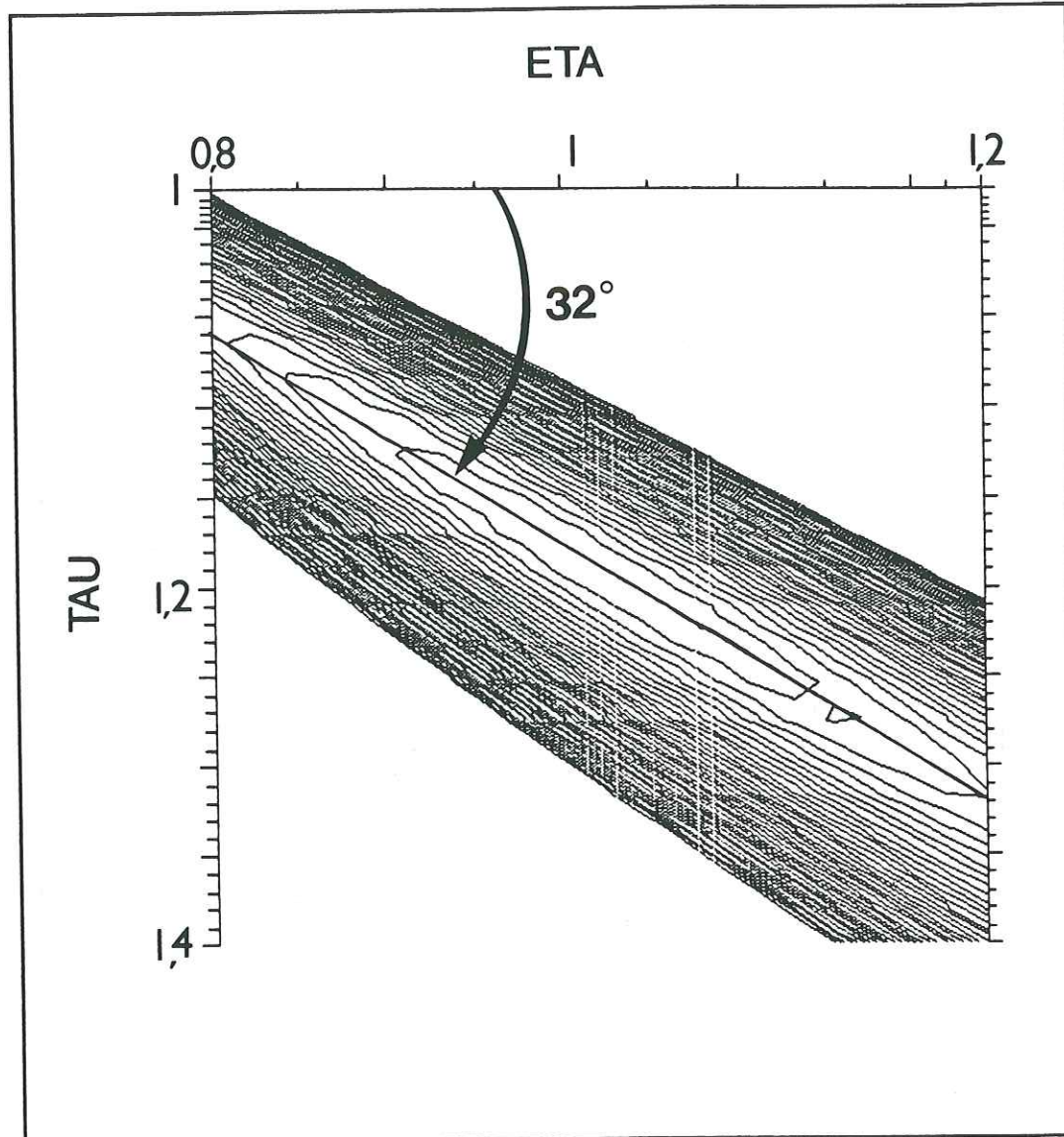


Figure 4. Même représentation que la figure (3) mais avec un milieu TI pour lequel $k = 4$. Les courbes d'isovaleurs forment des ellipses dont le grand axe fait un angle d'environ 35° avec l'axe δ .

ANNEXE C. Calcul des paramètres η et τ pour un milieu fissuré.

À partir des expressions des constantes élastiques (9.3) du milieu TI équivalent, on montre que les paramètres η et τ ne dépendent que de k , le carré du rapport de la vitesse verticale des ondes P sur la vitesse verticale des ondes SV . Ceci est vrai pour la modélisation de fissures planes. Ainsi, on obtient :

$$\tau = \frac{C_{11} - C_{44}}{C_{33} - C_{44}} = \frac{(1 - \frac{1}{k}) - dA + \frac{d^2}{15}B}{1 - \frac{1}{k} - dC + d^2D},$$

$$\eta = \frac{C_{13} + C_{44}}{C_{33} - C_{44}} = \frac{(1 - \frac{1}{k}) - dE + \frac{d^2}{15}F}{1 - \frac{1}{k} - dC + d^2D},$$

où :

$$A = \left(k - 4 + \frac{4}{k}\right)U_{11} - \frac{2}{k}U_{33},$$

$$B = \left(1 - \frac{4}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)qU_{11}^2 - \frac{4}{k^2}(3k + 2)U_{33}^2,$$

$$C = kU_{11} - \frac{2}{k}U_{33},$$

$$D = qU_{11}^2 - \frac{4}{k^2}(3k + 2)U_{33}^2,$$

$$E = (k - 2)U_{11} - \frac{2}{k}U_{33},$$

$$F = \left(1 - \frac{2}{k}\right)qU_{11}^2 - \frac{(3k + 2)}{k^2}U_{33}^2,$$

et où :

$$q = 15(k^2 - 2)^2 + 28(k - 2) + 28.$$

Pour des fissures planes ayant les caractéristiques d'un fluide ($\lambda=0$), les composantes du déplacement sont :

$$U_{11} = 0,$$

$$U_{33} = \frac{16k}{3(3k - 1)}.$$

Pour des fissures planes ayant les caractéristiques du vide ($\lambda=\mu=0$), les composantes du déplacement sont :

$$U_{11} = \frac{4k}{3(k-1)},$$

$$U_{33} = \frac{16k}{3(3k-1)}.$$

ABSTRACT

This study is motivated by the lack of measurements of effective transverse isotropy (TI) at the seismic scale. Then, the purpose is to determine the TI parameters at the receivers locations from three component offset VSPs recordings.

The data set consists of both polarization directions and vertical apparent slowness corresponding to different offsets. These velocities are measured from the vertical travel times between at least two receivers in the well. The polarization directions are measured by the angle γ from the vertical direction.

In order to estimate the TI parameters, we study P- and SV- waves propagation in transversely isotropic (TI) media. A TI medium is described by five independent elastic moduli but only four of them are needed for describing the propagation of P- and SV- waves and then SH- waves correspond to an uncoupled problem.

Velocities and polarization expressions are functions on these four elastic moduli and on the incidence angle θ which is not directly approachable from the data set. Then, we define two TI parameters which simplify these expressions and correctly describe velocity variations with θ . These two parameters are combinations of the four elastic moduli and are slightly different from classical TI parameters. Hence, we propose an exact expression of θ as a function of γ which allows us to express velocities as a function of γ without any approximations.

A method is proposed to apply this model for solving the inverse problem of estimating TI parameters from the data set. We settle, from the sensitivity of this model to parameters variations, the range of incidence for which the TI parameters are accurately estimated. Furthermore, we show how a *priori* error on data (due to uncertainties on measurements) is transmitted on parameters values.

This method is checked on synthetic data and on two real VSPs. The first one was recorded on the test site of the *Colorado School of Mines* (White *et al.*, 1983). The second one is a walkaway recorded in the Paris Basin.

In a last part, a model is defined for taking into account, in the inverse problem, the pressure measured in a fluid-filled borehole embedded in a TI medium as an additional datum. This model is checked on synthetic data.

KEY WORDS

Transverse isotropy, parameters estimation, well survey, inversion, least squares, polarization, slowness, pressure, cracks.