



HAL
open science

Mécanismes de rayonnement des pulsars

Olivier Larroche

► **To cite this version:**

Olivier Larroche. Mécanismes de rayonnement des pulsars. Physique des plasmas [physics.plasm-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 1987. Français. NNT: . tel-00785857

HAL Id: tel-00785857

<https://theses.hal.science/tel-00785857>

Submitted on 7 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
n° d'ordre

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

Le Titre de Docteur en Sciences
de l'Université de PARIS XI ORSAY
Spécialité : Sciences Physiques

par

OLIVIER LARROCHE

SUJET : Mécanismes de rayonnement des pulsars.

soutenue le 21 Octobre 1987 devant la commission d'examen

Mr	FITAIRE M. Président
Mme	ASSEO E.
MM	AUDOUZE J.
	DAUTRAY R.
	PELLAT R.

Remerciements

Lorsqu'en 1981 j'avais visité le radiotélescope de Nançay sous la conduite de Jean Audouze, dans le cadre d'une option de fin d'études dont il partageait la responsabilité avec René Pellat, je n'imaginai pas que j'aurais un jour à soutenir devant eux une thèse sur le rayonnement radio des pulsars. Je leur dois sans doute, au-delà de l'intérêt qu'ils m'ont amené à porter à l'astrophysique, un enthousiasme pour la recherche suscité et renforcé par les discussions que j'ai pu avoir depuis avec eux, et tout particulièrement bien sûr avec René Pellat, puisqu'il a dirigé mon travail de doctorat; la reconnaissance que j'en conçois est bien difficile à formuler en quelques mots.

Estelle Asséo m'a accueilli au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique et initié aux mystères des pulsars; elle a accepté de partager avec Jean Audouze la charge de rapporteur de ce travail. Qu'elle soit remerciée des efforts qu'elle a mis en oeuvre pour tenter d'assouplir un esprit un peu trop buté. Que ses collègues du CPT, et particulièrement Denis Pesme avec qui j'ai eu la chance et le plaisir de pouvoir travailler depuis sur d'autres sujets, lui soient associés dans ma reconnaissance.

Depuis 1984 j'ai poursuivi ma trajectoire dans la recherche scientifique au Centre d'Etudes de Limeil du CEA, où j'ai trouvé parmi mes collègues chercheurs Michel Casanova, Jean Clérouin, Michel Busquet, et d'autres encore que je ne peux tous nommer, une ambiance à la fois chaleureuse et propice à la poursuite d'un travail où la pire difficulté est peut-être le découragement. Certains résultats numériques que j'ai obtenus n'auraient pu voir le jour sans leur aide. M^r Robert Dautray a accepté de se pencher sur mon travail en astrophysique et d'être examinateur de cette thèse, et je l'en remercie.

Je remercie également le Professeur Marc Fitaire qui a accepté en président le jury de soutenance de donner sur ce travail l'avis d'un physicien préoccupé de plasmas plus "terrestres".

La recherche scientifique ne peut guère à mon avis rester un travail solitaire; aussi, je saisis l'occasion d'évoquer tous ceux avec qui j'ai pu au cours de ces années "parler de physique", que ce soit devant un tableau noir ou un verre de bière... A tous, merci.

Table des Matières

Introduction	1
1: Revue des principaux résultats concernant le rayonnement des pulsars:	
• A: a) Données observationnelles; b) part des observations à haute énergie	
c) B: La magnétosphère; description de l'état du plasma	5
. B: Mécanismes de rayonnement dans le modèle standard:	
a: Généralités	11
b: Instabilités linéaires des plasmas d'électrons-positrons relativistes homogènes	15
c: Stade quasilinéaire des instabilités	17
d: Turbulence faible fluide; décomposition paramétrique à trois ondes	19
e: Turbulence faible cinétique; amortissement Landau non linéaire	21
f: Régime fortement non linéaire; turbulence forte, solitons	22
g: Autres travaux	26
2: Mécanismes à faisceaux limités faisant intervenir la courbure:	
A: Position du problème:	
a: L'instabilité radiative de Goldreich et Keeley	29
b: Le formalisme plasma en géométrie cylindrique	30
B: L'approximation champ infini: instabilité du mode "l"	
a: Dynamique du faisceau	35
b: Cas du faisceau infiniment mince	37
c: Validité des hypothèses et application aux conditions physiques des pulsars	42
C: Le cas champ fini: un autre régime instable:	
a: Dynamique d'un faisceau de plasma électrons-positrons	47
b: Instabilité du mode magnéto-sonore ou mode "t"	49
c: Validité des hypothèses et application aux conditions physiques des pulsars	53
3: Cas d'un faisceau de plasma étendu en champ infini:	
A: Absence d'instabilité dans l'approximation de l'optique géométrique:	
a: Singularités du problème et paramètres pertinents	59
b: Solution dans le cadre de l'approximation WKB	64

B: Solution dans le cas fortement non WKB:	
a: Principe du calcul et solution en gradient raide pour un faisceau ultrarelativiste	67
b: Effets d'un gradient de densité fini à la frontière plasma-vide et de l'énergie du faisceau	69
C: Le régime intermédiaire: simulations numériques:	
a: Généralités	73
b: Confirmation numérique des résultats du cas faisceau mince	75
c: Etude des différentes contraintes et confirmation numérique des résultats du cas fortement non WKB	79
D: Retour aux chiffres physiques	
a: Résultats en variables dimensionnelles; lois d'échelle	87
b: Optimisation du taux de croissance pour les conditions physiques de la magnétosphère des pulsars	90
E: Effet de la dispersion thermique du faisceau	95
4: Comportement du mode "t" dans le cas d'un faisceau élargi:	
A: Absence d'instabilité pour un faisceau très large:	
a: Généralités; paramètres pertinents	97
b: Solution analytique en régime fortement non WKB	100
B: Simulations numériques:	
a: Confirmation numérique des résultats du cas faisceau mince	103
b: Effet de la largeur du faisceau	106
5: Comparaison avec d'autres mécanismes:	
A: Instabilités électrostatiques en milieu homogène:	
a: Généralités	109
b: Principaux résultats	111
B: Instabilité "cyclotron" en milieu homogène	115
C: Discussion	117
Conclusion et perspectives	119
Appendices:	
1: Calcul du tenseur de conductivité d'un faisceau de plasma	121
2: Développements asymptotiques des fonctions de Bessel et de Hankel; contraintes physiques sur les solutions des relations de compatibilité	129

3: Comportement des différents paramètres physiques de la magnéto- sphère des pulsars	135
4: Raccordements WKB du mode d'Alfvén en faisceau large (densité constante)	141
5: Solution complète pour le mode d'Alfvén dans le cas fortement non WKB	145
6: Simulations numériques	151
7: Instabilités d'un plasma homogène	157
8: Comportement du système pour un profil de densité particulier	167
Bibliographie	171

Introduction

En 1967, une équipe d'astronomes de Cambridge découvrait dans les enregistrements provenant de leur radiotélescope (un réseau de dipôles accordé à 81.5 MHz) un signal constitué d'une suite de courtes impulsions d'amplitude variable séparées par une durée remarquablement constante, de l'ordre de la seconde. Il ne s'agissait pas, comme l'hypothèse en fut un moment envisagée, d'un message provenant d'une civilisation extraterrestre, mais de la première observation d'un astre d'une catégorie nouvelle, dont plusieurs centaines ont été recensés à ce jour dans notre galaxie: les pulsars (Hewish *et al.* 1968). Notons que deux pulsars ont récemment été découverts dans une autre galaxie, le Grand Nuage de Magellan (McCulloch *et al.* 1983; Seward, Harnden & Helfand 1984).

Diverses propositions quant au type d'objet en cause furent formulées: naines blanches à pulsations radiales, à la manière des Céphéïdes, systèmes doubles de naines blanches ou d'étoiles à neutrons pour la catégorie des variables à éclipses, ou encore naine ou étoile à neutrons magnétisée en rotation rapide sur elle-même. En ce qui concerne cette dernière hypothèse, l'idée que les nébuleuses gazeuses vestiges d'explosions de supernovae devaient receler de tels objets avait été proposée plusieurs dizaines d'années auparavant (Zwicky 1938) et le fait que le rayonnement émis par celles-ci pouvait être directement lié à la présence en leur sein d'une étoile à neutrons magnétisée en rotation avait été démontré (Shklovskii 1953; Pacini 1967).

Un large consensus s'établit assez rapidement sur le modèle de l'étoile à neutrons en rotation (Gold 1968), les autres étant rejetés pour des raisons fondées sur les valeurs des grandeurs observées. En effet, les périodes de ces objets sont très courtes: de l'ordre de la seconde pour les premiers pulsars, 0.033 et 0.089 s respectivement pour les pulsars du Crabe et des Voiles découverts peu après. Plus récemment des pulsars ultra-rapides dont la période se compte en millisecondes ont été observés (Backer *et al.* 1982; Boriakoff, Buccheri & Fauci 1983; Lyne *et al.* 1987); voir au sujet de cette nouvelle classe de pulsars et des conséquences à en tirer sur la théorie de l'évolution des pulsars: Alpar *et al.* 1982; van der Klis *et al.* 1985). Ces chiffres éliminent les naines blanches-Céphéïdes, ainsi que les naines blanches en rotation sur elles-mêmes pour des raisons de stabilité. On observe en outre une croissance régulière (et très lente) de la période ($1/P \, dP/dt$ de l'ordre de 10^{-17} à 10^{-11} par seconde avec une valeur typique de 10^{-15}) alors que les pertes d'énergie de systèmes doubles (par exemple par rayonnement gravitationnel; voir à ce sujet l'accélération du mouvement orbital du pulsar binaire PSR 1913 +16 (Damour 1983; Weisberg & Taylor 1984)) devraient la faire diminuer.

Par ailleurs, des considérations de conservation de flux magnétique au cours de l'effondrement d'une supernova conduisant à la formation d'une étoile à neutrons laissent prévoir l'existence de champs magnétiques atteignant 10^{12} à 10^{13} G à la surface des pulsars. Ces valeurs sont confirmées d'une part par l'estimation du taux de ralentissement de la rotation de l'étoile dû à la perte d'énergie électromagnétique par la rotation du dipôle magnétique (Ostriker & Gunn 1969), et d'autre part par quelques mesures directes de spectres X (observation du rayonnement de la source Her X-1 (Trumper *et al.* 1978; Voges *et al.* 1982) attribué à une étoile à neutrons magnétisée, des pulsars X 4U 1626 -67 (Pravdo *et al.* 1978; 1979), 4U 0115 +63 (Wheaton *et al.* 1979) et du pulsar du Crabe (Manchanda *et al.* 1982)) montrant des raies caractéristiques d'une résonance cyclotron dans un champ magnétique de cet ordre de grandeur. Cependant Blandford, Applegate & Hernquist (1983) ont proposé un mécanisme de production du champ magnétique conduisant à des valeurs beaucoup plus faibles quelques millions d'années après la formation de l'étoile à neutrons. La présence de tels champs constitue le fil conducteur principal des mécanismes proposés pour expliquer la production du rayonnement des pulsars.

Telles sont donc en première approximation les grandes lignes d'un modèle de pulsar qu'il faut essayer de décrire plus en détail, ce qui motive des travaux dans trois directions:

(1) Etude de l'étoile à neutrons proprement dite, où la coexistence de densités atteignant 10^{14} à 10^{15} g/cm³ et d'un champ magnétique de l'ordre de 10^{12} à 10^{13} G conduit à envisager des états de la matière tels que: matière neutronique superfluide, fer cristallin anisotrope (une direction privilégiée d'élongation le long des lignes de champ magnétique), fluide d'hypérons, cristaux de pions, etc... (voir par exemple pour ces questions Canuto 1974; 1975). C'est le domaine des spécialistes de physique nucléaire.

(2) Description de l'environnement de l'étoile baignée par son champ magnétique: la magnétosphère, dans laquelle des champs électriques très élevés engendrés par la rotation du champ magnétique (Goldreich & Julian 1969) injectent des particules chargées, de sorte qu'elle doit être considérée comme un plasma. C'est le lieu le plus probable de l'émission de l'essentiel du rayonnement des pulsars. Il est nécessaire de posséder au préalable un modèle suffisamment cohérent de la structure de la magnétosphère (composition et état du plasma, valeurs et géométrie des champs électrique et magnétique, présence de faisceaux de particules, etc...) pour pouvoir envisager des mécanismes de production du rayonnement.

(3) Proposition de mécanismes de rayonnement proprement dits, avec deux types de contraintes:

- d'une part des contraintes "intrinsèques":

Il faut obtenir des puissances suffisantes: 10^{25} à 10^{35} erg/s à comparer pour fixer les idées avec la puissance totale rayonnée par le soleil dans le domaine visible: $4 \cdot 10^{33}$ erg/s, ainsi qu'au taux de perte d'énergie rotationnelle de l'étoile à neutrons, qui est plus élevé de plusieurs ordres de grandeur; la luminosité totale de la nébuleuse M1, dont la seule source d'énergie semble être le pulsar du crabe, atteint 10^{38} erg/s. Il faut rendre compte des caractéristiques spectrales du rayonnement: domaine radio couvert typiquement depuis 10 MHz jusqu'à 10 GHz ou plus; quelques pulsars, tels ceux du Crabe et de Vela (il semble qu'il s'agisse des plus jeunes), rayonnent même dans le domaine visible et au-delà (X et γ) (Notons qu'on n'abordera pas le problème des pulsars X proprement dits dont le rayonnement est probablement produit par un mécanisme d'accrétion de matière à partir d'une étoile compagnon et/ou d'un disque; voir sur ce sujet Herold & Ruder 1982, Joss & Rappaport 1984; pour un modèle de pulsar avec disque rayonnant en radio: Michel & Dessler 1981; 1983). Les températures de brillance sont très élevées (10^{20} à 10^{31} K). Il faut enfin s'intéresser à la polarisation (linéaire ou circulaire) du rayonnement reçu (Radhakrishnan & Cooke 1969; Onishchenko 1981b).

- d'autre part des contraintes de type "géométrique":

Il faut expliquer la focalisation du rayonnement expliquant la formation des pulses, obtenir une localisation et un aspect de la source de rayonnement rendant compte de la forme particulière du profil moyen des pulses: pulses doubles ou triples, interpulses, sous-pulses qui sont parfois animés de mouvements propres de dérive par rapport au pulse moyen (encore appelé "pulse intégré") qu'ils construisent, etc...(cf pour référence sur les caractéristiques observationnelles des pulsars: Manchester & Taylor 1977; Taylor & Stinebring 1986; et sur la théorie du rayonnement: Ginzburg & Zheleznyakov 1975; Sutherland 1979; citons également une somme de travaux sur les questions qui se posent actuellement dans le domaine des pulsars: I.A.U. Symposium Proceedings N° 95 "Pulsars" 1981; une revue récente mais très succincte sur les mécanismes de rayonnement: Lominadze *et al.* 1986.)

En particulier, on est conduit, en prenant en compte les variations des paramètres physiques (densité, champ magnétique) avec la distance à l'étoile à neutrons centrale, à faire une distinction entre les mécanismes de rayonnement dits "de calotte polaire", fonctionnant près de celle-ci, immédiatement au-dessus des pôles magnétiques (Gold 1968; Radhakrishnan & Cooke 1969; Cordes 1978), et les mécanismes fonctionnant loin de l'étoile, au voisinage du cylindre lumière ou au-delà (le cylindre lumière étant défini comme le lieu des points dont la vitesse de corotation avec l'étoile atteint la vitesse de la lumière) (Smith 1969; 1977). (1986).

Après un bref rappel des principaux travaux dans ces deux dernières directions, présenté dans le premier chapitre, nous nous pencherons plus en détail dans les trois chapitres suivants sur la question du mécanisme intrinsèque de production du rayonnement par des faisceaux de plasma d'extension finie. Au chapitre 2 nous retrouverons les résultats de Goldreich & Keeley (1971) et d'Asséo, Pellat & Sol (1983) concernant l'instabilité de courbure d'une onde électromagnétique de type Alfvén ou mode "l" engendrée par un faisceau mince guidé par le champ magnétique, et nous examinerons le cas de l'autre polarisation électromagnétique, le mode "t" ou magnéto-sonore. Les chapitres 3 et 4 concerneront l'extension de ce mécanisme à un faisceau large, dans le cas des modes "l" et "t" respectivement. Nous montrerons que l'instabilité du mode "l" persiste dans la situation d'un faisceau de largeur quelconque, la quantité cruciale étant le gradient de densité à la frontière plasma-vide (Larroche & Pellat 1987). Le mode "t" est stable dans cette configuration. Nous comparerons dans le chapitre 5 les résultats obtenus avec ceux de travaux plus classiques concernant les mécanismes linéaires en plasma homogène et nous vérifierons que les taux de croissance obtenus sont suffisants pour faire de ce mécanisme un candidat à l'explication du rayonnement radio des pulsars; les conditions physiques dans lesquelles ils sont obtenus (rayonnement électromagnétique émis directement dans le vide, au voisinage de l'étoile) le rendent même plus convaincant que les mécanismes proposés jusqu'à présent. Le caractère à la fois utilitaire et fastidieux de certains développements a conduit à les reporter en appendice.

1: Revue des principaux résultats concernant le rayonnement des pulsars.

A: Données observationnelles

a: généralités

cf Lyne (87), Taylor & Stinebring (86), Manchester et Taylor (77)

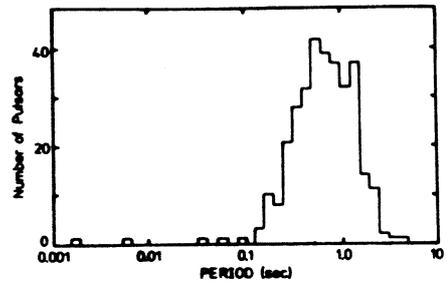
- périodes → les trois ordres de grandeur. $P_{moy} \sim 0.67s$

- dérivées des périodes: Pacini (67) donne

le couple de freinage: $\frac{2B_0^2 R_0^6 \Omega^3}{3c^3} \rightarrow \dot{P} > 0$

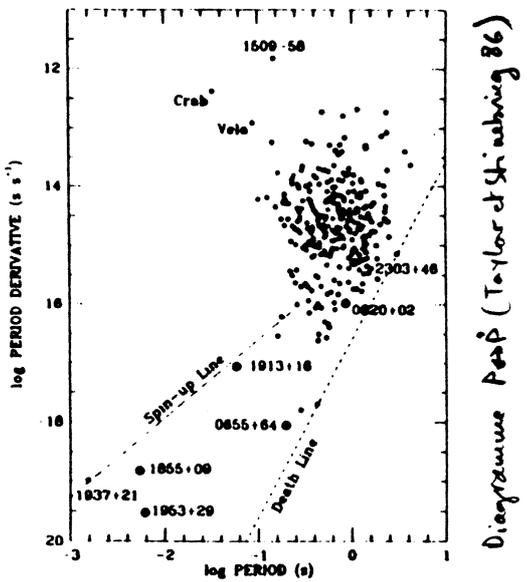
inversement si $I = 10^{45} \text{ g cm}^2$, $\dot{P} \Rightarrow B_0$

Ceci permet de faire un diagramme $P \rightarrow \dot{P}$ au équivalent (Taylor et Stinebring (86) et réts dedans).



Period	Pulsar	Comment
1.6 ms	PSR 1937+21	The Millisecond Pulsar
6 ms	PSR 1953+29	In a 120 day binary orbit
33 ms	PSR 0531+21	The Crab Pulsar. Also displays optical, X-ray and γ-ray pulses
59 ms	PSR 1913+16	In a 7.7 hour binary orbit
89 ms	PSR 0833-45	The Vela Pulsar. Also displays optical and γ-ray pulses
0.67 s		Median period
4.3 s	PSR 1845-19	Maximum period

Pulsar	P (s)	$\dot{P} \times 10^{15} (\text{s s}^{-1})$	B_0 (gauss)	τ (year)
1509-58	0.150	1540	1.5×10^{13}	1540
Crab	0.033	422	4×10^{12}	1230
Median	0.67	2.3	-10^{12}	-5×10^6
1913+16	0.059	0.009	2×10^{10}	10^8
1937+21	0.0016	0.00011	4×10^8	5×10^8



- Profils intégrés:

larger équivalente moyenne $\sim 10^\circ \pm$ beaucoup.
 → multiphasantes. Pas de variation séculaire du profil intégré. → volée du faisceau de phase (pulse double symétrique → hollow core).

- Pulses individuels:

Beaucoup de variabilité de pulso à pulso, en forme et en intensité. Sub-pulses de qqz degrés de longitude. Micropulses $\ll 90^\circ$: 10-100 μs. Conçue générale que la microstructure résulte de modulations temporelles de l'émission et non d'effet de phase. → limites sur la taille de la source et T_0 .

- aqs chiffres: en moyenne à 400 MHz, décrit le flux $S \sim 20 \text{ mJy}$ à distance $\sim 2 \text{ kpc}$, largeur intégrée du pulso $w \sim 10^\circ$. Si faisceau de section ronde L'axe de rotation alors la luminosité totale radio $L_r = \pi^3 d^3 \frac{w}{360} S \Delta\nu \sim 5 \times 10^{27} \text{ erg/s}$. ($\Delta\nu \sim 400 \text{ MHz}$)

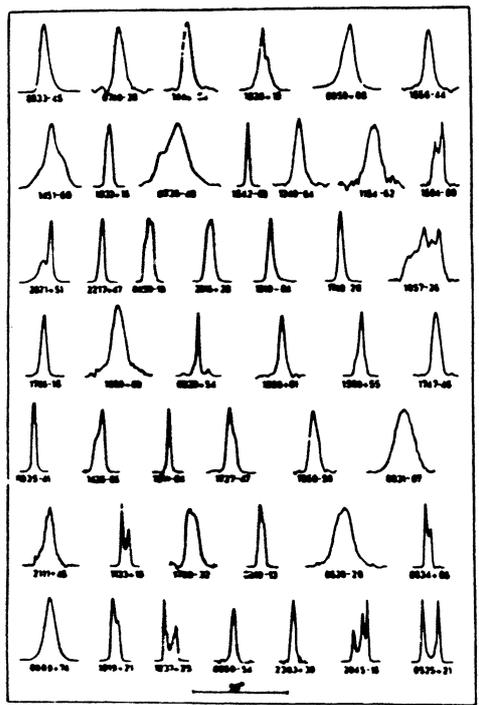


Figure 2a. The integrated profiles of 45 pulsars (Manchester and Taylor 1977)

Ceci est très inférieur au taux de perte d'énergie rotationnelle $\dot{E} = I \dot{\omega} = -4\pi \frac{I \dot{P}}{P^3}$
 $\sim 3 \times 10^{32}$. ($I = 10^{45}$). \rightarrow Énergie dans des particules au rayonnement EM à la fréquence de rotation du pulsar.

Si les micropelles sont caractéristiques de la zone d'émission élémentaire alors taille $\leq 10^6$ cm.

\rightarrow brillance 2×10^9 erg/s/cm²/Hz.ster. Rayleigh-Jeans approx $\Rightarrow T_b \sim 10^{29}$ K \Rightarrow cohérence à travers.

- Modèle du pôle magnétique.

Polarisation linéaire dans beaucoup de pulsars, parfois proche de 100%. Variation caractéristique de l'angle de polarisation avec la longitude.

Pd, circ. faible, change parfois de sens au milieu du profil.

\Rightarrow modèle du pôle magnétique (Radhakrishnan & Cooney 69) \rightarrow polarisation faisant un angle constant avec le champ magnétique local + collimation le long des lignes de champ.

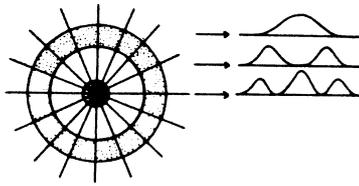


Figure 4. A schematic view of a magnetic pole, showing how different line of sight impact parameters lead to various pulse morphologies.

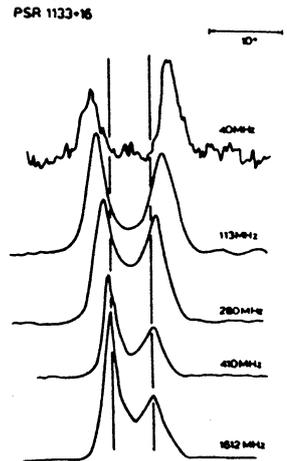
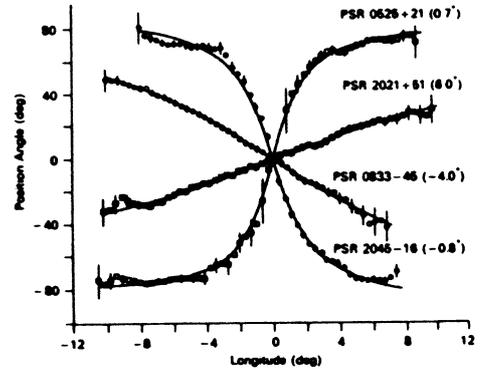


Figure 5. The flaring of the pulse profiles of PSR 1133+16 at low frequencies.

- Prémption expérimentale que le centre de symétrie du champ magnétique est aussi un émetteur pulsatif (?).

Hautes fréquences plus près de l'étoile \rightarrow cf figure (dans la plupart des pulsars).

Problème de l'élargissement du profil de faisceau en latitude plus qu'en longitude \rightarrow incidence sur le nb de pulsars observés, taux de formation, etc... (Morayan & Uivekanand 83).

- Pulse nulling, mode changing, sub-pulse drifting:

L'émission disparaît pendant n périodes ($995 \leq n \leq 99510^3$) complètement. Le profil de pulse peut subir aussi des variations abruptes et temporaires. Interactions nulling \leftrightarrow drifting.

- Chronométrie:

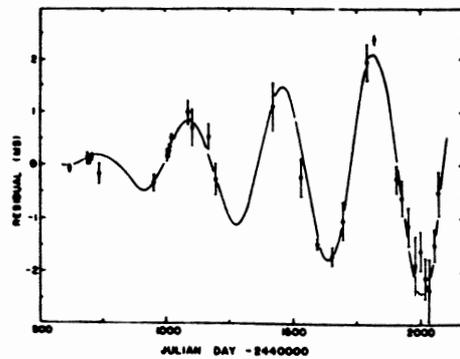
On corrige l'instant de réception d'un pulse de la parallaxe terrestre:

$$t_b = t + \frac{r_0 \cdot \vec{s}}{c} + \Delta t_c \quad \Delta t_c \leq 1.5 \text{ms}$$

contient des effets Doppler transverses, gravitationnels, etc



On compare ensuite ces temps d'arrivée avec un fit de la longitude du pulse autour d'un instant de référence t_0 : $\phi = \phi_0 + \Omega_0(t_b - t_0) + \frac{1}{2}\dot{\Omega}_0(t_b - t_0)^2$. La quantité $\frac{\phi - \phi_0}{\Omega_0}$ modulo 2π est le "residual" qui mesure divers effets. Par exemple une erreur dans la position donne un résidu sinusoidal de période 1 an ($1'' \rightarrow 2ms$) \Rightarrow détermination des positions précises des pulsars et du mouvement propre (sur plusieurs années) (cf fig).



PSR 1133+16: time residuals \Rightarrow proper motion

- dérivées de la période: $\rightarrow \dot{\Omega} = -K\Omega^n$ où l'indice $n=3$ pour du rayonnement du dipôle magnétique ou des particules qui partent dans un modèle de rotateur aligné (Goldreich et Julian 69). Observationnellement on peut envisager de mesurer $n = \frac{2\dot{\Omega}}{\Omega^2}$ mais en pratique ça a des imprécisions qui font qu'on a que deux valeurs fiables: $n=2.51$ pour le Crab (Groth 75) et $n=2.7$ pour PSR 1509-58 (Manchester et al. 85). Ça $\neq 3 \rightarrow$ champ \vec{B} déformé, vent solaire? Age caractéristique $\tau_c = \frac{-\dot{\Omega}}{(n-1)\Omega} = \frac{P}{(n-1)\dot{P}} \Rightarrow$ Crab $\tau_c = 1240$ ans (âge réel 925 ans) \rightarrow évolution du champ?

- instabilités de la période: glitches, timing noise. glitches dans peu de PSR's: perturbation instantanée de P puis relaxation de P et \dot{P} sur $\tau \sim$ jours à années.

Table 3. The parameters of the major glitches.

Pulsar	Number of events	$\Delta\Omega/\Omega$	$\Delta\dot{\Omega}/\dot{\Omega}$
Vela	7 at 2-3 year intervals	$2-3 \times 10^{-6}$	8×10^{-3}
Crab	2	$10^{-8}, 4 \times 10^{-8}$	2×10^{-3}
1641-45	1	2×10^{-7}	-
0525+21	1	10^{-9}	5×10^{-3}

\rightarrow modèle de croûte + intérieur

superfluide + événements cata-
strophiques (Ruderman 76, Baym et al. 69) Voir Pines (87).

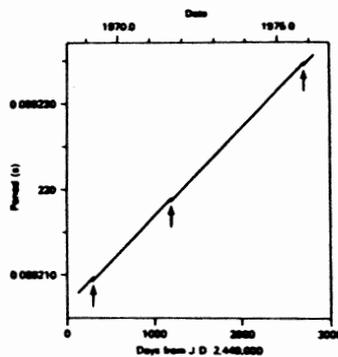


Figure 7a. The period of the Vela pulsar showing three of the glitches (Manchester and Taylor 1977)



Figure 7b. Timing residuals for the Crab pulsar

timing noise apparemment associé à \dot{P} grand: Cordes & Helfand (80) \rightarrow grande stabilité du pulsar milliseconde PSR 1937+21 ($\dot{P} \sim 10^{-19}$) c.f. Davies et al. (84).

- Pulsars binaires:

Le premier PSR 1913+16 (Hulse & Taylor 74). $\sim 10\%$ des pulsars observés.

Table 4 Binary Pulsars

Pulsar	P_b (days)	e	P pulse (msecs)
1913+16	0.32	0.617	59
0655+64	1.03	$<10^{-5}$	196
2303+46	12.34	0.66	1070
1953+29	117.0	<0.01	6.1
0820+02	1232.0	0.012	864

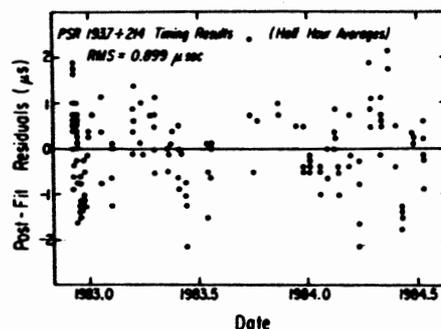
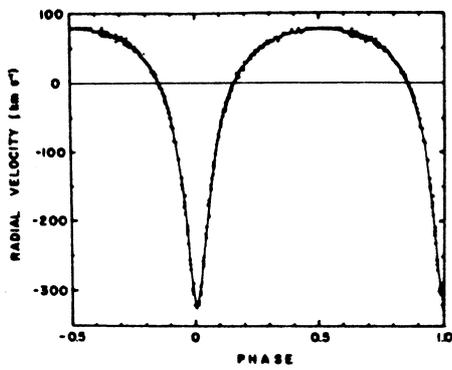
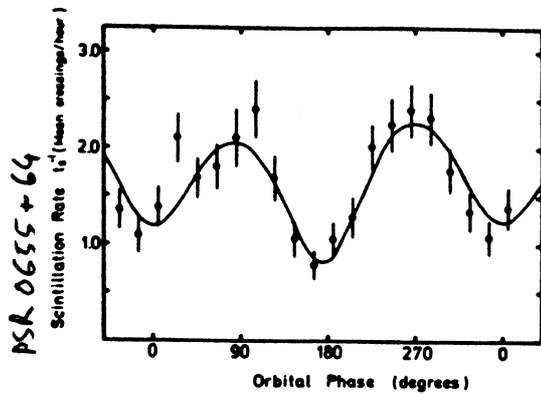


Figure 8. Timing residuals for the millisecond pulsar PSR 1937+21.



PSR 1913+16 : Courbe de vitesse
(Hulse et Taylor 75)



PSR 0655+64

PSR 1913+16 a été étudié en détail (Weisberg & Taylor 84) et on a trouvé :

$m_p = 1.53 \pm 0.07 M_\odot$, $m_c = 1.40 \pm 0.07 M_\odot$, i (angle entre le demi-grand axe et le plan du ciel) $= 47^\circ \pm 3^\circ$. Avance du périastre $4.2\%/an \Rightarrow$ masse totale. Ces chiffres font penser à un couple d'étoiles à neutres. Connaissant l'orbite on peut déterminer la diminution de la période orbitale par rayonnement gravitationnel : $\dot{P} = -2.38 \times 10^{-12}$ s/s. effectivement observé à 1% près. La grande constance de la période de pulsation donne de la précision à ces mesures. ($\dot{P}_p \sim 10^{-17}$ s/s). C'est le seul pulsar pour l'instant où la chronométrie ait permis de déterminer les masses. Voir Stokes Taylor Dewey 85, Lyne 84.

Distribution et évolution :

Voir Lyne Manchester Taylor 85 ; Lyne Anderson Saller 82 ; Clifton Lyne 85.

Gunn & Ostriker 70.

The main factors pertinent to the origin and evolution of pulsars are as follows:-

- 1) The galactic radial distribution is the same as that of massive stars and supernova remnants.
- 2) The scale height of pulsars in z is about 400pc, and most are moving away from the galactic plane.
- 3) The scale height of the progenitors is <100 pc, implying a population I origin.
- 4) The number of active pulsars in the Galaxy is about 350,000.
- 5) The magnetic fields decay on a timescale of about 9 My.
- 6) The radio luminosity is roughly proportional to B^2 and decays on a timescale of 4.6 My.
- 7) Ejection velocities from the birth event are about 200 km s^{-1} .
- 8) Only 5 pulsars out of 420 known are in binary systems.
- 9) A birthrate of 1 pulsar every 30-120 years is required to sustain the observed population.

← Lyne 87.

b: Apport des observations à haute énergie :
cf Anderson (87); Weeves (88).

1. Revue des principaux résultats concernant le rayonnement des pulsars

1.1. La magnétosphère: description de l'état du plasma

Goldreich & Julian (1969) ont été les premiers à montrer qu'une étoile à neutrons en rotation, compte tenu de la conductivité électrique très élevée de la matière nucléaire et de l'existence d'un fort champ magnétique, ne pouvait rester plongée dans le vide, mais que des particules chargées devaient s'en échapper pour former autour du pulsar un plasma occupant une région appelée magnétosphère.

En effet, l'approximation de conductivité infinie, en négligeant l'inertie des électrons, impose entre les champs magnétique B et électrique E à l'intérieur de l'étoile la relation:

$$E + \frac{1}{c}(\Omega \wedge r) \wedge B = 0$$

Ω est le vecteur rotation instantanée et r la position d'un point de l'étoile rapportée au centre de celle-ci.

On considère que le champ magnétique est dipolaire y compris à l'intérieur de l'étoile, en supposant donc qu'il est peu perturbé par les courants liés aux densités de charge que nous allons voir apparaître. Il prend donc la valeur suivante dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dont l'axe est l'axe du dipôle:

$$B = \left(B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos\theta, B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{\sin\theta}{2}, 0 \right)$$

R est le rayon de l'étoile, B_0 la valeur du champ magnétique au pôle. On en déduit la valeur du potentiel électrostatique à l'intérieur et en particulier à la surface de l'étoile:

$$\phi = - \frac{B_0 \Omega R^2}{6c} (3\cos^2\theta - 1)$$

En supposant l'étoile dans le vide, dans le cas où le moment dipolaire est aligné avec l'axe de rotation et où le champ magnétique est donc statique, à symétrie de révolution, on peut résoudre exactement l'équation de Laplace à l'extérieur et par continuité avec la valeur du potentiel à la surface, lui attribuer la valeur:

$$\phi(r, \theta) = - \frac{B_0 \Omega R^5}{6cr^3} (3\cos^2\theta - 1) \quad (1-1)$$

Evidemment, dans ce cas particulier l'étoile n'est plus à proprement parler un "pulsar", du moins dans le cadre des modèles de calotte polaire, puisque la première caractéristique attendue d'un tel objet est une certaine asymétrie.

De cette valeur du potentiel on déduit le champ électrique à l'extérieur et en particulier près de la surface de l'étoile. Ce champ électrique à la

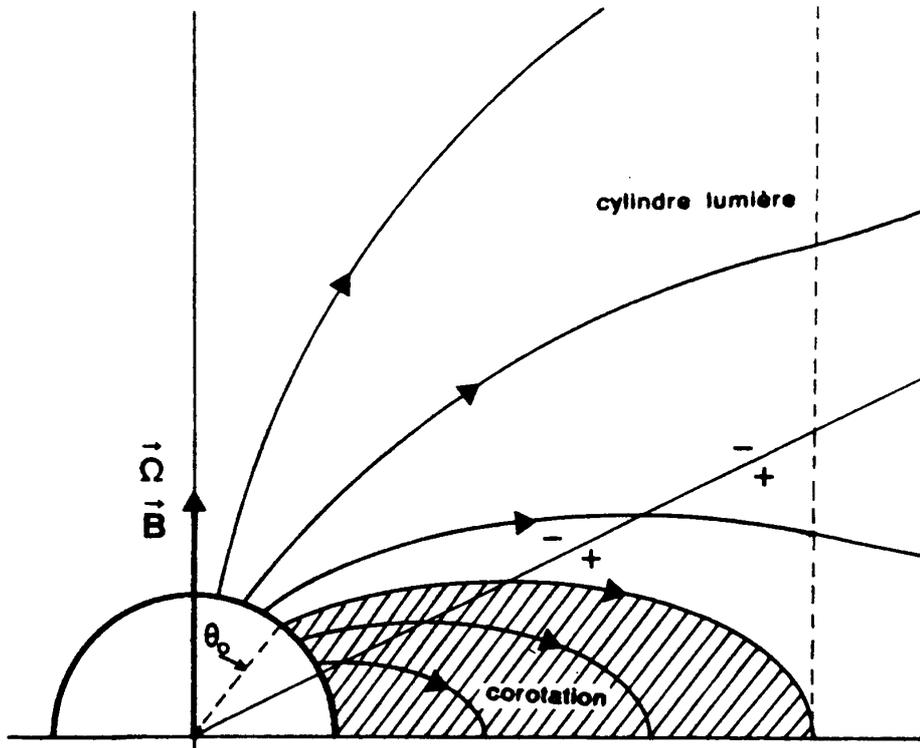


Fig. 1-1: La magnétosphère de Goldreich et Julian.

surface possède une composante parallèle au champ magnétique dipolaire de l'ordre de $6 \cdot 10^{10}$ cgs pour un pulsar de période 1 s, avec $B_0 = 10^{12}$ G. Les forces électriques résultantes sur les charges présentes à la surface de l'étoile sont alors suffisamment intenses, pourvu que les énergies de liaison ne soient pas trop grandes, pour extraire des particules chargées de l'étoile (tout au moins les électrons; les énergies de liaison des noyaux de fer de la croûte externe sont probablement trop élevées pour qu'on puisse avoir extraction d'ions (Ruderman 1971)). Les courants résultant du mouvement des charges le long des lignes de force du champ magnétique donnent sa forme spécifique à la magnétosphère. Goldreich et Julian supposaient que la condition de force électrique nulle (conductivité infinie) s'étendait aux particules de la magnétosphère, ce qui implique la corotation de celle-ci avec l'étoile jusqu'au cylindre lumière. Dans ce cas, on obtient la densité de charge suivante dans l'étoile comme dans la magnétosphère (cf fig. 1-1):

$$\rho_{GJ} = - \frac{\Omega \cdot B}{2\pi c}$$

La condition de corotation s'obtient simplement comme l'effet de la vitesse de dérive:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2}$$

La présence de ces charges et de ces courants modifie en fait la structure des champs, et on montre que la modélisation auto-consistante de ceux-ci passe par l'établissement d'une équation différentielle du second ordre non linéaire appelée par certains auteurs "équation du pulsar" (Michel 1973; Scharlemann & Wagoner 1973) dont il faut trouver et raccorder les solutions valables à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre lumière. Le problème s'avère suffisamment complexe pour qu'aucune solution complètement satisfaisante n'existe à l'heure actuelle. Les points d'achoppement sont multiples: localisation des zones d'accélération de particules et des zones "force nulle" de type Goldreich-Julian; problème de la conservation globale de la charge dans le système et de la "fermeture des lignes de courant"; rôle du rayonnement dans l'établissement de ce système de courants; discontinuités et chocs au voisinage du cylindre lumière; problème du rotateur oblique (moment magnétique incliné sur l'axe de rotation); etc... Les solutions auto-consistantes pour la magnétosphère n'étant pas l'objet de cette étude, nous nous contenterons de renvoyer aux principaux articles de revue qui résument les différents points de vue existants sur le sujet (Scharlemann, Arons & Fawley 1978; Arons & Scharlemann 1979; Arons 1979; Kennel, Fujimura & Pellat 1979; Mestel, Phillips & Wang 1979; Jackson 1981; Rylov 1981; Michel 1982; Herold & Ruder 1982; Beskin, Gurevich & Istomin 1983; 1984; Asséo, Beaufils & Pellat 1984; Mestel *et al.* 1985; Cheng, Ho & Ruderman 1986). En bref, disons que la magnétosphère statique de type Goldreich-Julian doit de toute façon être abandonnée au profit de structures dynamiques plus complexes.

En particulier, il semble nécessaire de prendre en compte l'existence de faisceaux de particules très énergétiques (Shklovskii 1970; 1977). Dans cette optique, le modèle de Sturrock (1971), considérant que la différence de potentiel totale entre le bord et le centre de la calotte polaire telle qu'on la tire de l'équation (1-1) (la calotte polaire étant l'intersection de la surface de l'étoile avec les lignes de champ magnétique "ouvertes", c'est-à-dire qui ne se referment pas sur elles-mêmes avant le cylindre lumière), de l'ordre de 10^{12} V, est utilisable pour accélérer les électrons qui s'échappent de la surface de l'étoile, attribue à ceux-ci un facteur relativiste final de l'ordre de 10^7 (en fait Sturrock considérait que des protons pouvaient aussi être émis); ces électrons, contraints de suivre les lignes de champ, émettent à cause de la courbure de celles-ci des photons γ qui produisent à leur tour, dans le champ magnétique très intense et courbé de l'étoile, des paires électron-positron. Ce processus se poursuit en cascade pratiquement jusqu'à l'épuisement de l'énergie cinétique des électrons incidents, soit un rendement certainement inférieur à $5 \cdot 10^6$ paires e^+e^- pour chaque électron injecté à $\gamma \sim 10^7$. Le résultat est un flux de plasma électrons-positrons au débit total de 10^{41} particules par seconde .

Ce modèle a été perfectionné par Ruderman & Sutherland (1975), puis par Cheng & Ruderman (1977; Ruderman 1981) qui ont pris en compte explicitement le fait que seuls les électrons, et non les ions, peuvent être extraits de la surface du pulsar (certaines estimations de l'énergie de liaison des noyaux de fer dans la croûte externe (Flowers *et al.* 1977) semblent cependant autoriser une faible extraction thermique d'ions (Cheng & Ruderman 1980)). Il se forme alors au-dessus de la surface de l'étoile un "gap", une zone vide dans laquelle règne un fort champ électrique, qui sépare l'étoile de la magnétosphère proprement dite où la condition de force électrique nulle ($E \cdot B = 0$) est satisfaite. Lorsque l'altitude du sommet du gap atteint une valeur critique (de l'ordre de $5 \cdot 10^3$ cm pour $P = 1$ s et $B_0 = 10^{12}$ G), il se forme une cascade d'électrons-positrons comme dans le modèle de Sturrock, une "étincelle" qui tend à décharger la différence de potentiel à laquelle est soumis le gap. L'effet de chaque étincelle est, d'une part de restituer à l'étoile les électrons qu'elle perd par extraction au-dessus des zones où la densité superficielle est négative, et d'autre part d'injecter dans la magnétosphère des faisceaux de positrons de haute énergie ($\gamma \sim 3 \cdot 10^6$ au début d'une décharge-type) qui donnent eux-mêmes lieu à des cascades de production de paires e^+e^- ; la région au-dessus du gap est donc alimentée en plasma électrons-positrons, avec un facteur relativiste moyen attendu de l'ordre de

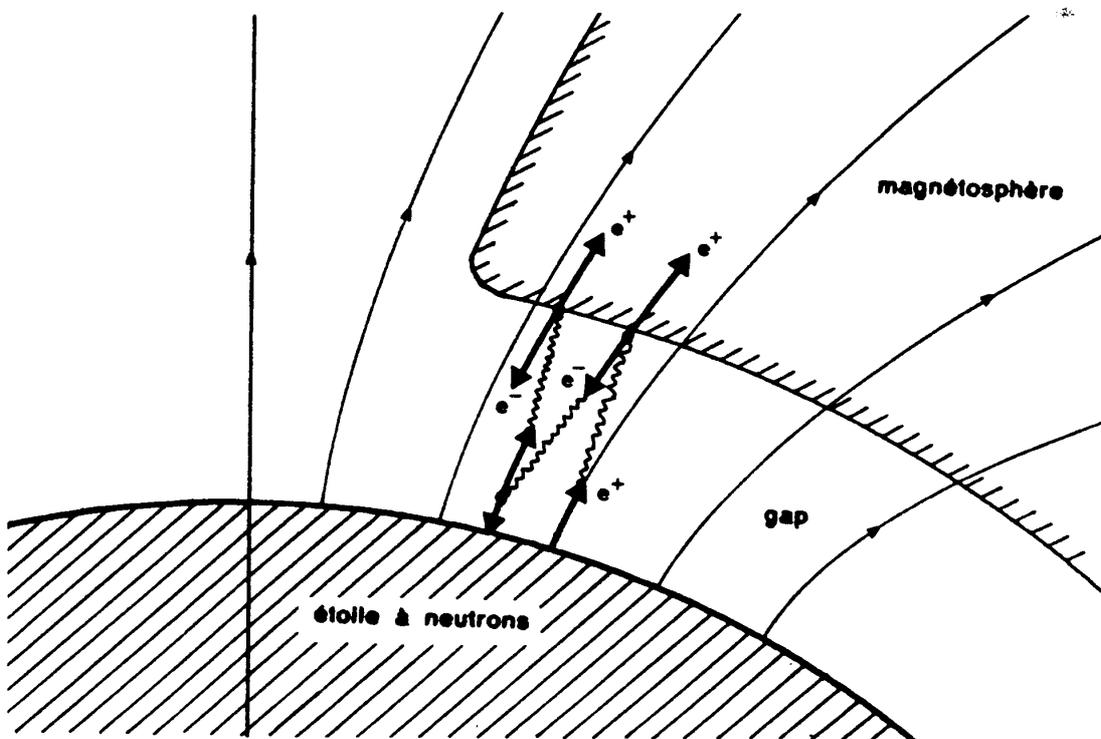


Fig. 1-2: Le "gap" de Ruderman et Sutherland.

800 (pour une période de rotation de 1 s), pénétré par des faisceaux de positrons de haute énergie. Cette configuration permet de prévoir un rayonnement cohérent dans le domaine radio (Benford & Buschauer 1977) et de rendre compte de la plupart des caractéristiques observationnelles des pulsars (cf fig. 1-2).

Tademaru (1973) a montré que le plasma d'électrons-positrons créé devait être constitué de plusieurs populations distinctes. En effet, la population primaire provenant de la décomposition des photons rayonnés par les électrons extraits de l'étoile (ou de photons γ d'origine cosmique parvenant au voisinage de la calotte polaire), en présence du champ magnétique, produit un rayonnement synchrotron qui peut à son tour se décomposer pour engendrer une population d'électrons-positrons secondaires d'énergie plus faible, et ainsi de suite. L'allure du spectre d'énergie calculé pour ces différentes composantes du plasma magnétosphérique est représenté sur la figure 1-3.

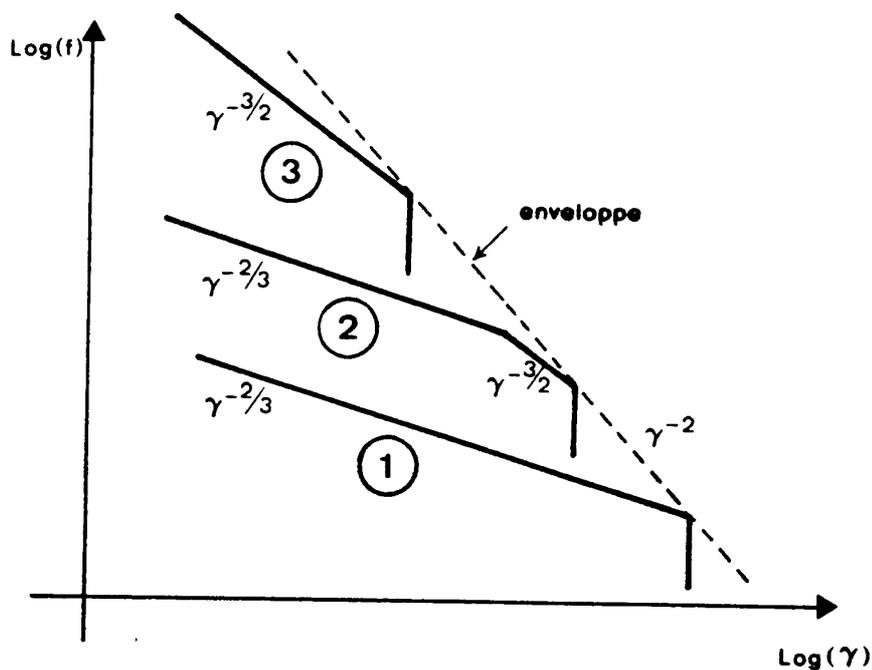


Fig. 1-3: Spectre d'énergie schématisé des trois premières générations de particules créées par production de paires (Tademaru 1973).

En outre, le rayonnement synchrotron dans le fort champ magnétique caractéristique de la zone proche des calottes polaires conduit à une relaxation très rapide de l'impulsion des particules, parallèlement (Tsyrovich, Buckee & ter Haar 1970) et surtout perpendiculairement au champ,

de sorte que la fonction de distribution du plasma d'électrons-positrons peut être considérée comme pratiquement monodimensionnelle dans l'espace des impulsions (Suvorov & Chugunov 1973). Lorsqu'on s'éloigne de l'étoile en suivant les lignes de champ, le module de celui-ci décroît et la conservation de l'invariant adiabatique correspondant à la gyration de Larmor des particules (effet "miroir") renforce encore le caractère monodimensionnel de la fonction de distribution (Machabeli & Usov 1979). Des travaux plus récents (Daugherty & Harding 1982; Gurevich & Istomin 1985) confirment la description généralement admise (cf Lominadze, Machabeli & Usov 1983) d'un plasma d'électrons-positrons formé de plusieurs composantes, avec une fonction de distribution des impulsions des particules concentrée dans la direction du champ magnétique d'équilibre, représentée schématiquement sur la figure 1-4 (cf aussi appendice 3 pour plus de détails quantitatifs).

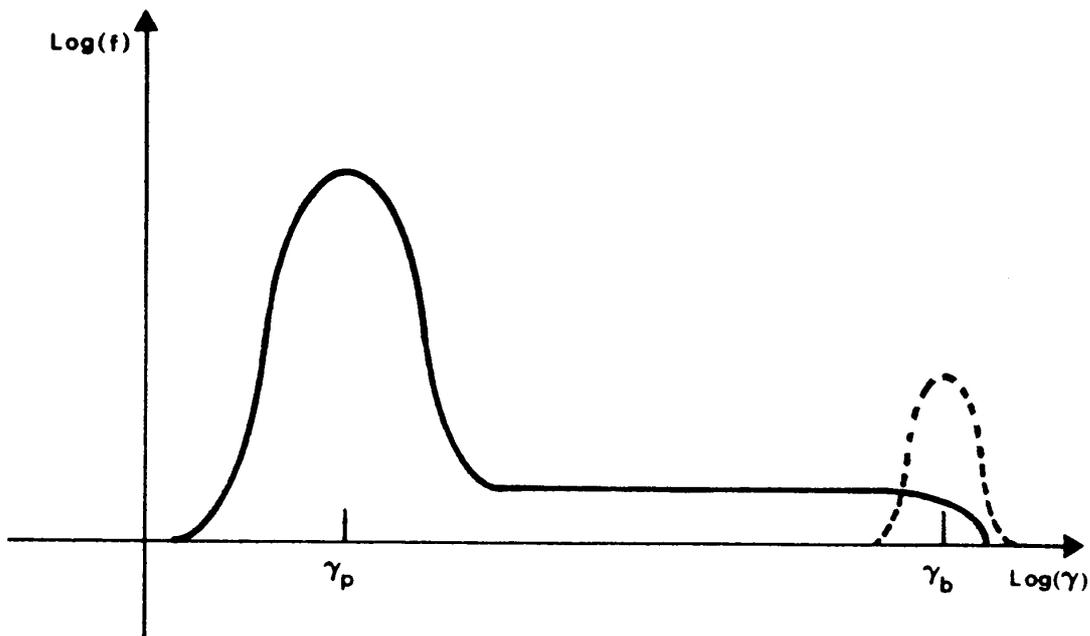


Fig. 1-4: Spectre d'énergie schématique adopté actuellement (cf Lominadze, Machabeli & Usov 1983).

radiation non stationnaire → Usov et Usov 88 → fonction de distribution à deux
 masses dans le cas du plasma.

B: Mécanismes de rayonnement dans le modèle standard

a: Généralités

On peut faire dès le départ, dans l'optique des grandes luminosités des pulsars, une distinction entre deux types de mécanismes de production du rayonnement, indépendamment des problèmes de focalisation et de profil de pulse: les mécanismes incohérents et les mécanismes cohérents (ter Haar 1972; Ginzburg & Zheleznyakov 1975).

Dans le premier cas, chaque particule de la source rayonne pour son compte, sans cohérence de phase avec les autres, de sorte que l'intensité totale du rayonnement émis est simplement $N.u$ si la source est composée de N particules rayonnant chacune une intensité u .

Dans le second, une contrainte supplémentaire oblige les particules à rayonner avec entre elles une relation de phase constante, de sorte que les amplitudes des champs engendrés par chaque particule s'ajoutent, et non les intensités; l'intensité reçue dans les zones ou directions d'interférence constructive peut donc atteindre $N^2.u$ si u est l'intensité du rayonnement qui serait émis par une particule isolée. Les contraintes qui réalisent cette mise en phase sont elles-mêmes de deux types:

- Les phénomènes d'"antenne" (Benford & Buschauer 1977); par exemple le groupement des particules en paquets de taille inférieure à la demi-longueur d'onde du rayonnement émis a pour effet d'ajouter constructivement les courants individuels correspondant à chaque particule et donc d'obtenir une intensité supérieure à $N.u$. Les mécanismes utilisant le rayonnement de courbure émis par des paquets de particules résultant d'une instabilité de plasma (voir par exemple Cheng & Ruderman 1977; 1980) sont de ce type. Cependant le problème de la coexistence de ces deux phénomènes (mise en paquets et rayonnement de courbure, qui réagit sur les charges par les forces de "freinage de rayonnement" (Landau & Lifshits 1970)) pousse à chercher des mécanismes où les deux étapes soient réalisées en même temps de façon auto-consistante (Ochelkov & Usov 1984).

- Les mécanismes de type "maser" ou à émission stimulée où un rayonnement incident provoque l'émission par les particules d'un rayonnement identique, en phase avec celui-ci (voir par exemple Kawamura & Suzuki 1977; Asséo, Pellat & Rosado 1980). Un faisceau se propageant dans un tel milieu actif peut donc se trouver amplifié par les contributions successives de chaque particule. Cette émission stimulée ne peut se produire que si un état thermodynamiquement instable est artificiellement maintenu dans le milieu, par exemple un état dans lequel subsiste une "inversion de population", c'est-à-dire un domaine de

l'échelle des énergies dans lequel la densité de particules est localement croissante avec l'énergie, ou encore une anisotropie ou une inhomogénéité de la fonction de distribution des particules du milieu. Les instabilités qui se développent dans les plasmas hors de l'équilibre thermique sont des mécanismes de ce type (Mikhailovskii 1974). On voit que du point de vue de l'amplification du rayonnement, les mécanismes d'antenne correspondront à des inhomogénéités, et les particularités de la distribution des impulsions à des mécanismes de type maser.

Le choix entre l'un et l'autre types de mécanisme selon les parties du spectre d'un pulsar dont on cherche à rendre compte sera guidé par la température de brillance dans la région considérée, définie par la température du corps noir qui aurait la même brillance (puissance émise par unité de surface émissive et d'angle solide du cône d'émission) dans l'intervalle de fréquence choisi. La valeur de la température de brillance dépend de la puissance émise par le pulsar à la fréquence considérée, mais aussi des dimensions supposées de la zone source ainsi que des effets de focalisation qui se déduisent du profil de pulse. Ainsi pour le pulsar du Crabe, si la puissance totale émise dans le domaine optique atteint 10^{33} erg/s, la température de brillance correspondante n'est que de 10^{11} K, ce qui conduit à des énergies par particule pour un rayonnement thermique équivalent de 10^7 eV; dans le domaine des rayons X et γ , ces chiffres deviennent respectivement: 10^{36} erg/s, 10^2 K, 10^{-2} eV, alors que dans le domaine radio, on trouve: 10^{31} erg/s, 10^{30} K, énergie par particule 10^{26} eV. De telles énergies par particule n'ont jamais été observées, même dans les rayons cosmiques les plus énergétiques, ce qui conduit à rechercher un mécanisme cohérent pour l'émission radio des pulsars, alors qu'un mécanisme incohérent suffit à expliquer l'émission dans le domaine optique, et a fortiori pour des fréquences plus élevées.

Du point de vue de la physique des plasmas on est donc conduit à plusieurs types d'investigations. Tout d'abord, dans le cadre de la théorie linéaire des ondes et des instabilités d'un plasma magnétisé, on examine quels sont les modes d'oscillation qui peuvent se développer compte tenu des caractéristiques du plasma magnétosphérique. Les possibilités sont à la fois nombreuses et controversées, du fait du peu de précision de notre connaissance des caractéristiques du plasma au voisinage d'un pulsar. On peut toutefois distinguer deux grands axes de recherche selon le type d'ondes étudiées:

- le cas des ondes électrostatiques ou ondes de Langmuir, qui ne peuvent se propager qu'à l'intérieur du plasma sans pouvoir se coupler directement aux ondes électromagnétiques du vide extérieur, à moins de faire intervenir explicitement un caractère électromagnétique supplémentaire introduit par une

propagation oblique liée à la courbure des lignes de champ (Asséo, Pellat & Rosado 1980) ou de considérer l'effet de l'harmonique 2 de l'onde qui possède une composante électromagnétique non nulle (Galeev & Krasnosel'skikh 1976; Mamradze, Machabeli & Melikidze 1980);

- le cas des ondes électromagnétiques, ondes d'Alfvén ou ondes "magnéto-sonores rapides", qui peuvent servir à expliquer directement le rayonnement radio mais semblent plus difficiles à exciter compte tenu des variations des paramètres physiques de la magnétosphère (les conditions ne leur deviennent favorables qu'au voisinage du cylindre lumière).

C'est dans ce cadre linéaire que nous nous placerons dans les chapitres suivants pour étudier un mécanisme d'instabilité électromagnétique de faisceaux de plasma limités spatialement, due à la courbure des lignes de champ magnétique (Notons que la grande majorité des travaux existants concernent des plasmas spatialement homogènes, c'est-à-dire invoquent des "microinstabilités" dépendant des caractéristiques de la fonction de distribution des impulsions des particules du plasma).

Dans un deuxième temps, on se penche dans le cadre de la théorie quasilineaire sur l'évolution concomitante de l'amplitude des ondes excitées et, sous l'effet de ces ondes, des paramètres caractérisant le plasma qui leur donne naissance, dans la limite où les non-linéarités restent suffisamment faibles pour qu'on puisse négliger les échanges d'énergie entre les modes d'oscillation de fréquences différentes. On obtient éventuellement un régime asymptotique à évolution temporelle relativement lente (devant les taux de croissance des instabilités linéaires) caractérisé par un spectre d'énergie des ondes et une fonction de distribution des particules du plasma qui peuvent être comparés aux résultats observationnels. Dans le cas des ondes électrostatiques, se propageant parallèlement au champ magnétique courbe, l'amplitude finie des perturbations correspond à une "mise en paquets" des charges du plasma qui conduit à un rayonnement de courbure cohérent dans le domaine radio; dans le cas des ondes électromagnétiques ou des ondes électrostatiques se propageant non parallèlement au champ magnétique d'équilibre, l'évolution quasilineaire de la fonction de distribution des particules a pour conséquence de leur communiquer une composante d'impulsion perpendiculaire au champ B_0 qui conduit à un rayonnement synchrotron incohérent dans les domaines de haute fréquence (visible, X, γ selon l'énergie des particules concernées).

Un troisième stade qui prend une importance grandissante depuis quelques années est l'exploration des régimes non-linéaires (turbulence faible (Galeev & Sagdeev 1979; Davidson 1972) et forte (Verga & Fontan 1985); voir la revue de Lominadze & Pataraya (1982)) où l'on prend en compte les couplages entre

les différents modes d'oscillation du plasma pouvant conduire d'une part à une redistribution d'énergie entre modes longitudinaux et transverses par décomposition paramétrique, d'autre part à la génération de solitons; ceux-ci permettent par exemple d'expliquer les microstructures que révèle une résolution temporelle de l'ordre de la microseconde des pulses (Hankins & Boriakoff 1978; Bartel & Hankins 1982), ou le spectre des ondes excitées dans une théorie de la turbulence forte.

Nous allons dans les paragraphes suivants reprendre ces différents domaines d'investigation et passer rapidement en revue les différents travaux les concernant. Nous essaierons d'en faire une synthèse appuyée par des résultats quantitatifs au chapitre 5, où nous comparerons ces résultats avec ceux de notre modèle d'instabilité de courbure.

b: Instabilités linéaires des plasmas d'électrons-positrons relativistes homogènes

Dans un plasma relativiste, comme celui qui est censé exister dans la magnétosphère des pulsars, la propagation d'ondes avec une vitesse de phase inférieure à la vitesse de la lumière correspond toujours à une interaction résonnante avec des particules de même vitesse, sauf dans une très petite plage $v_{\max} < v_{\phi} < c$ où v_{\max} caractérise la distribution d'impulsion des particules du plasma. Comme on a besoin de particules à $v > v_{\phi}$ pour espérer exciter ces ondes, il faut se poser pour commencer le problème de la propagation en plasma relativiste avec $v_{\phi} < c$. Les premiers travaux (Silin 1960; Silin & Rukhadze 1961) avaient conclu à l'impossibilité de la propagation de telles ondes, à cause de l'amortissement dû à l'interaction résonnante avec le plasma. Il faut attendre les résultats de Tsytovich et Kaplan (1972) pour que soit reconnue la possibilité d'exciter des ondes aussi bien longitudinales que transverses à une vitesse de phase suffisamment proche de c par des faisceaux ultrarelativistes (instabilité faisceau-plasma relativiste des ondes de Langmuir) ou des "queues" de distribution d'impulsion asymétriques s'étendant vers les hautes énergies (instabilité cyclotron des ondes d'Alfvén)(cf fig. 1-4).

Tsytovich et Kaplan sont également les premiers à utiliser des fonctions de distribution d'impulsion monodimensionnelles pour rendre compte de l'effet de relaxation de l'énergie perpendiculaire due au fort champ magnétique des pulsars (Suvorov & Chugunov 1973), mais ils se placent dans le cadre d'un plasma électrons-ions et ceci n'est pas sans conséquences sur les conclusions de l'analyse de stabilité (Mikhailovskii 1979). Notons que l'instabilité d'ondes électromagnétiques par résonance cyclotron dans un plasma classique magnétisé légèrement anisotrope ($T_{\perp} \neq T_{\parallel}$) avait déjà été mise en évidence par Sagdeev et Shafranov (1961) et dans le cas d'une "queue" monodimensionnelle asymétrique provenant de la relaxation quasilineaire d'un faisceau d'électrons par Shapiro et Shevchenko (1968).

Par la suite, les principaux travaux de modélisation des pulsars font appel à une instabilité faisceau-plasma ou deux-faisceaux (Ruderman & Sutherland 1975; Hinata 1976b; Benford & Buschauer 1977; Cheng & Ruderman 1977; 1980; Hardee & Rose 1978; Hardee & Morrison 1979) dans un plasma électrons-positrons avec une fonction de distribution monodimensionnelle. Ces travaux sont repris et synthétisés par Lominadze et Mikhailovskii (1979) qui montrent qu'on peut toujours avoir propagation d'ondes de Langmuir parallèlement au champ magnétique d'équilibre ($k \neq E_0$) pour une fonction de distribution monodimensionnelle décroissant suffisamment vite à haute énergie, et que ces ondes peuvent être excitées par des faisceaux de haute énergie. C'est la

situation qui prévaut dans la magnétosphère des pulsars (cf 1-A).

Les travaux mentionnés jusqu'ici concernent le cas de la propagation parallèle ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}_0$). C'est le seul cas où la distinction entre ondes longitudinales et transverses (électromagnétiques) soit strictement valable. Par ailleurs, il apparaît (Hardee & Rose 1978; Arons & Barnard 1986) que c'est dans cette limite que le taux de croissance du mode "1" (dans celle des deux polarisations possibles qui devient l'onde de Langmuir en propagation parallèle) est le plus grand. Ce n'est qu'en vue d'une utilisation quasilineaire ou non-linéaire, c'est-à-dire dans des mécanismes de rayonnement impliquant des modifications irréversibles de la fonction de distribution du plasma induites par les ondes, que l'on se penche sur le comportement des ondes obliques (Lominadze & Pataraya 1982; Volokitin, Krasnosel'skikh & Machabeli 1985).

Pour ce qui est des modes électromagnétiques (mode "t" ou magnéto-sonore rapide et seconde polarisation du mode "1" ou mode d'Alfvén) la première utilisation dans le cadre d'une théorie des pulsars après l'article de Tsytovich et Kaplan est celle de Kawamura et Suzuki (1977) dans l'hypothèse (conforme au modèle de Sturrock) d'un plasma électrons-ions avec faisceaux d'électrons et de positrons. Puis le modèle plus moderne du plasma électrons-positrons est employé par Lominadze, Machabeli & Mikhailovskii (1979) ainsi que Machabeli et Usov (1979), qui se basent sur un calcul de Mikhailovskii (1979) qui se proposait pourtant de montrer que l'instabilité cyclotron d'ondes transverses ne pouvait avoir lieu. En fait la conclusion de Mikhailovskii n'est valable que dans le cas où la fonction de distribution du plasma est symétrique dans le repère propre du plasma; avec les fonctions de distribution asymétriques communément admises, on peut avoir excitation d'ondes transverses.

Le domaine de paramètres où la condition de résonance onde-queue de haute énergie est vérifiée est cependant assez critique, comme le suggère Smith (1981), qui montre que l'instabilité ne peut se développer que pour un rapport ω_B/ω_p suffisamment faible correspondant au voisinage du cylindre lumière, ou peut-être même pas du tout avec les chiffres des modèles de Ruderman et Sutherland ou d'Arons et Scharlemann. C'est pourtant ce mécanisme qu'exploitent Lominadze, Machabeli & Usov (1983) dans leur théorie du rayonnement du pulsar et de la nébuleuse du Crabe, qui reprend et intègre les résultats partiels déjà obtenus dans cette voie par différents auteurs soviétiques. Quoi qu'il en soit, la condition ne peut être vérifiée que pour les pulsars les plus rapides (Crabe et Vela), et donc aussi les plus jeunes (âge $< 10^4$ ans; il ne s'agit pas ici de la classe de pulsars ultra-rapides récemment découverte) à cause du scaling en Ω^{-2} de la distance à la zone d'instabilité (Smith 1981; Lominadze, Machabeli & Usov 1983; Davila, Wright & Benford 1980).

c: Stade quasilinéaire des instabilités

Il s'agit dans l'approximation quasilinéaire d'étudier le premier stade de la réaction des ondes produites à la suite du développement d'une instabilité linéaire sur les particules du plasma; d'une façon générale, cette rétroaction tend à produire des caractéristiques de la fonction de distribution moins favorables à la croissance des ondes, jusqu'à éventuellement l'interrompre complètement, ce qui correspond à une saturation de l'instabilité (voir par exemple Buschauer & Benford 1977).

Depuis les travaux originaux de Hinata (1976b) pour les ondes de Langmuir et de Kawamura et Suzuki (1977) pour les ondes transverses, le formalisme s'est simplifié. Dans le cas des ondes de Langmuir en propagation parallèle, on s'est généralement contenté d'évoquer (Lominadze & Mikhailovskii 1979) le résultat classique (voir par exemple Krall & Trivelpiece 1973) de la relaxation d'une distribution instable de type faisceau-plasma avec formation d'un plateau et annulation du taux de croissance de l'instabilité. Notons que c'est ce mécanisme qui est invoqué pour expliquer la formation à partir des faisceaux primaires de la queue de haute énergie nécessaire à l'excitation linéaire d'un spectre relativement large d'ondes cyclotron (Lominadze, Machabeli & Usov 1983).

C'est dans le cas des ondes transverses que des résultats originaux et pertinents dans le cadre de la théorie du rayonnement des pulsars ont été obtenus. Kawamura et Suzuki, généralisant au cas d'un plasma relativiste le formalisme de Kennel et Engelmann (1966) et Shapiro et shevchenko (1968), obtiennent un régime asymptotique d'ondes d'Alfvén en bon accord avec les spectres et les luminosités observés en radio pour quelques pulsars pris comme référence (PSR 0833, PSR 2016, PSR 0329).

Mais l'idée la plus nouvelle est celle d'utiliser la diffusion quasilinéaire des particules dans l'espace des impulsions perpendiculairement au champ magnétique pour expliquer la partie haute fréquence du spectre (optique, X , γ) par du rayonnement synchrotron (Notons que l'idée d'avoir recours au rayonnement synchrotron n'est pas neuve, c'est l'idée de ce mécanisme particulier, fournie par la physique des plasmas, qui l'est). Ceci est fait en prenant en compte de façon auto-consistante les forces de freinage de rayonnement dans l'équation de diffusion par Lominadze, Machabeli & Mikhailovskii (1979) et en considérant en outre les "forces" de rappel liées à l'invariance adiabatique du moment magnétique au cours du déplacement vers des zones à champ magnétique plus faible par Machabeli et Usov (1979). On obtient un régime asymptotique où l'énergie des particules dans la direction perpendiculaire au champ magnétique est fixée par l'équilibre entre les pertes

par rayonnement synchrotron et la décroissance adiabatique d'une part, et la diffusion résonnante par le spectre d'ondes cyclotron d'autre part. On rend compte ainsi du rayonnement X et γ du pulsar du Crabe. Il ne semble pas, contrairement à ce qu'affirme Onishchenko (1981a), que la présence d'une impulsion perpendiculaire moyenne finie nuise au développement de l'instabilité cyclotron, en tout cas tant que le "pitch angle" effectif $\psi = \langle p_{\perp} \rangle / \langle p_{\parallel} \rangle$ reste petit devant 1.

Dans la direction du champ magnétique, on observe une accélération de particules qui, injectées dans la nébuleuse, peuvent contribuer à en expliquer le spectre synchrotron (Shklovskii 1977; Machabeli 1983). Cependant, la difficulté d'obtenir une diffusion quasilineaire par les ondes excitées par l'instabilité cyclotron sur les particules du gros du plasma d'énergie plus basse ($\gamma \sim 10^2 - 10^3$) conduit à s'intéresser aux ondes de Langmuir en propagation oblique (Voloitin, Krasnosel'skikh & Machabeli (1985) montrent que la diffusion quasilineaire par celles-ci peut également permettre d'accélérer des particules) ou à des processus non-linéaires.

d: Turbulence faible fluide: décomposition paramétrique à trois ondes

Dans le cadre de l'approximation fluide de la théorie des ondes dans les plasmas, c'est-à-dire lorsqu'on néglige les échanges d'énergie résonnants ondes-particules du type de l'effet Landau, la prise en compte des non-linéarités des équations sous forme d'un développement perturbatif en puissances du champ de l'onde (ou ce qui revient au même en puissances de la charge élémentaire e) conduit à l'ordre non-linéaire le plus bas (2 en champ, ou e^3 en puissances de la charge) à tous les mécanismes de couplage à trois ondes (voir Davidson 1972; Galeev & Sagdeev 1979; Nicholson 1983; Mima & Nishikawa 1984; ces mécanismes ayant été particulièrement étudiés dans le contexte des recherches sur la fusion par laser, citons par exemple dans le cours de l'école d'été de St Andrews: Kruer 1986). Ces mécanismes peuvent être examinés d'un point de vue "cohérent" où on s'intéresse à l'évolution de trois modes d'oscillation singularisés en supposant que les conditions initiales sont telles que seuls ceux-ci joueront un rôle, ou d'un point de vue statistique dans l'approximation dite "de phase aléatoire" lorsqu'on considère l'évolution de spectres larges. Dans tous les cas on retiendra la relation de conservation que satisfont les ondes: $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $k_3 = k_1 + k_2$.

En vue d'expliquer l'émission d'ondes électromagnétiques par les pulsars, on s'intéresse aux processus de décomposition dont les produits sont des ondes électromagnétiques, à partir des deux types d'ondes excitées au niveau linéaire, à savoir ondes "l" parallèles ou ondes de Langmuir, et ondes "t" et "l" perpendiculaires déjà électromagnétiques. Notons (Tsytovich & Wharton 1978; Lominadze, Mikhailovskii & Sagdeev 1979) que dans un plasma électrons-positrons avec une fonction de distribution monodimensionnelle identique pour les deux espèces, les processus à trois ondes ne mettant en jeu que des ondes longitudinales, résonnants ou fluides, sont interdits par la compensation des contributions des électrons et des positrons aux courants proportionnels à e^3 . Cette compensation disparaît si on autorise un petit pitch-angle ψ , on a alors un courant résultant d'ordre deux non nul $j^{(2)} \sim \psi$ (Mamradze, Machabeli & Melikidze 1980).

- Décomposition d'ondes de plasma:

Mikhailovskii (1980) a étudié le cas $l - t + t'$ de la décomposition en deux ondes transverses se propageant parallèlement à l'onde mère, et a trouvé, aussi bien dans le cas de trois ondes cohérentes que dans l'approximation de la turbulence faible des taux de croissance significatifs à distance intermédiaire de l'étoile (on reste dans le domaine où $\omega_p \ll \omega_B$). Notons que Lominadze, Machabeli & Usov (1983) mentionnent le mécanisme inverse pour régénérer des ondes l avec $k_l \neq 0$ et obtenir un rayonnement synchrotron en optique par diffusion quasilineaire des particules du gros du plasma.

Le cas de la décomposition en une onde longitudinale et une onde transverse $l - l' + t$ a été examiné par Gedalin & Machabeli (1983) qui obtiennent des taux de croissance importants ainsi que l'allure générale du spectre des ondes électromagnétiques obtenues.

- Décomposition d'ondes transverses:

Gedalin & Machabeli (1982) ont présenté l'hypothèse que la décomposition en deux autres ondes transverses $t - t' + t''$ permettrait d'expliquer le rayonnement basse fréquence (radio) du pulsar du Crabe à partir des ondes de fréquence plus élevée excitées linéairement par l'instabilité cyclotron (cf Lominadze, Machabeli & Usov 1983). Les caractéristiques de polarisation obtenues dans ce mécanisme semblent correspondre à ce qui est observé dans les pulsés radio (polarisation linéaire).

Enfin Machabeli (1983) examine le cas de la décomposition $t - t' + l$. Le spectre d'ondes cyclotron obtenu semble pouvoir rendre compte de l'accélération de particules par diffusion quasilineaire et fournir les énergies attendues ($\gamma \sim 10^8$) pour les particules injectées dans la nébuleuse du Crabe et qui peuvent permettre d'expliquer le rayonnement synchrotron de celle-ci (Shklovskii 1977; Machabeli & Usov 1979).

Dans les deux mécanismes cités ci-dessus qui produisent des ondes longitudinales, la conservation des vecteurs d'onde (ω, k) implique que celles-ci tendent à s'accumuler dans un "condensat" de petites valeurs de k correspondant à une vitesse de phase supérieure à c , libérant ainsi les modes concernés des mécanismes d'amortissement linéaires. Le sort ultime de ce condensat dépend de sa stabilité par rapport à l'instabilité modulationnelle (cf ter Haar & Tsytovich 1981; Gedalin & Machabeli 1983).

e: Turbulence faible cinétique; amortissement Landau non-linéaire

La prise en compte des résonances entre les particules et les battements résultant de la superposition non-linéaire des différents modes du plasma, caractérisées par la réalisation, pour une population de particules de vitesse v , de la condition $\omega - \omega' = (k - k') \cdot v$ conduit à des échanges d'énergie résonnants entre ondes et particules (d'où l'appellation "effet Landau non-linéaire" par analogie avec la condition de résonance onde-particule de l'effet Landau $\omega = k \cdot v$; cf Galeev & Sagdeev 1979). Dans le cas de la propagation d'ondes de plasma parallèlement à B_0 Lominadze, Mikhailovskii & Sagdeev (1979) ont ainsi montré l'existence dans un plasma électrons-positrons relativiste caractérisé par un facteur relativiste moyen γ_0 d'une diffusion des ondes vers les petites valeurs de k , une fraction $1/\gamma_0$ (donc plus faible que dans le cas classique) de l'énergie se retrouvant dans le condensat et le restant servant à chauffer les particules. Cette phase d'amortissement non-linéaire est caractérisée par des échelles de temps comparables à celles du stade de saturation quasilineaire des instabilités donnant naissance aux ondes de plasma. Une extension de ces résultats au cas d'une propagation légèrement oblique par rapport à B_0 (Machabeli & Sakhokiya 1982) montre que l'effet de l'amortissement Landau non-linéaire des ondes du condensat (caractérisées par une vitesse de groupe faible) est également de restituer un petit pitch angle aux particules du gros du plasma et du même coup permet d'expliquer le rayonnement synchrotron en basse fréquence du pulsar du Crabe.

Un autre type de mécanisme résonnant mettant en jeu d'autres types d'ondes a été étudié dans lequel on obtient une excitation d'ondes d'Alfvén basse fréquence à partir d'ondes longitudinales (Tsytovich 1980; Lominadze *et al.* 1982) ou d'ondes d'Alfvén haute fréquence (Gedalin *et al.* 1985), avec toujours absorption de la majeure partie de l'énergie par les particules résonnantes du plasma.

En fin de compte, les processus fluides, à cause de leur meilleur rendement de conversion en ondes transverses, semblent mieux adaptés à l'explication du rayonnement du pulsar lui-même, les processus cinétiques fournissant quant à eux les queues de particules énergétiques qui peuvent d'une part être prises en compte dans l'investigation des instabilités linéaires (cyclotron), d'autre part contribuer à expliquer le rayonnement de la nébuleuse dans laquelle elles sont injectées.

f: Régime fortement non-linéaire: turbulence forte, solitons

Une première approche du régime pleinement non-linéaire consiste à essayer de trouver directement à partir des équations de base des solutions particulières exactes d'amplitude finie. Cette démarche est adoptée par exemple lorsqu'on s'intéresse à la propagation dans le plasma interstellaire de faible densité de l'onde de grande amplitude à la fréquence de rotation de l'étoile engendrée par la rotation de son moment magnétique (Asséo, Llobet & Pellat 1984). De telles solutions dans le cas des ondes électromagnétiques ou de Langmuir en haute fréquence dans le plasma relativiste caractéristique de la magnétosphère ont été obtenues, dans le cadre des équations fluides (cf par exemple Kennel & Pellat 1976; Bodo, Ferrari & Massaglia 1981).

Il faut se placer dans un contexte plus large pour examiner les phénomènes physiques qui vont déterminer la stabilité de ces solutions (compétition entre raidissement non-linéaire et dispersivité du milieu) et pour modéliser de façon plus générale le comportement du plasma dans ce domaine d'amplitudes. On trouve grossièrement dans la limite d'évolutions monodimensionnelles et suffisamment lentes deux types de modélisation de la compétition non-linéarité-dispersivité selon l'allure générale de la relation de dispersion linéaire ($\omega = \omega_0 + ak + bk^2 + ck^3 \dots$) des ondes concernées (cf Whitham 1974).

En régime peu dispersif, c'est-à-dire lorsque la vitesse de phase ω/k des ondes peut être considérée comme constante (ce qui est caractérisé par la condition $|\omega_0/k^2 - b + O(k)|$ petit, c'est-à-dire par une relation de dispersion de la forme $\omega \sim ak + O(k^3)$) on obtiendra des équations du type de l'équation de Korteweg-de-Vries décrivant par exemple la propagation des ondes acoustiques dans un plasma électrons-ions classique ou celle des vagues à la surface d'une eau peu profonde, qui s'écrit dans les unités appropriées:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

En régime fortement dispersif, on peut toujours trouver un repère dans lequel la relation de dispersion linéaire se met sous la forme $\omega' - \omega_0 = bk^2 + O(k^3)$, l'évolution de trains d'ondes de fréquence proche de ω_0 , de la forme $u(x,t) = \psi(x,t)e^{-i\omega_0 t} + c.c.$ obéit alors à une équation dont le prototype est l'équation de Schrodinger non-linéaire (NLS):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(|\psi|^2)\psi = 0$$

Il existe pour ces deux types d'équations de nombreux résultats concernant non seulement l'existence de solutions particulières (en particulier solitons, ondes cn-oidales, etc... cf Ablowitz & Segur 1981), mais également la stabilité de ces solutions par rapport à des perturbations (Zakharov,

Kuznetsov & Rubenchik 1983; Kusmartsev 1984; Kuznetsov 1984; Kuznetsov, Spector & Fal'kovich 1984, 1985). Dans le cadre des ondes qui peuvent se propager dans la magnétosphère des pulsars, on rencontre deux types de modélisations:

- Dans le cas des ondes d'Alfvén transverses, dont l'examen de la relation de dispersion linéaire montre qu'elles sont peu dispersives, on trouve (Sakai & Kawata 1980a, 1980b; Mikhailovskii, Onishchenko & Smolyakov 1985a, 1985b) que leur propagation peut être décrite au niveau non-linéaire dans un repère convenablement choisi par une équation de KdV modifiée:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(B^3)}{\partial x} + \frac{\partial^3 B}{\partial x^3} = 0$$

Lorsqu'on considère des trains d'ondes centrés sur une fréquence et un vecteur d'onde donnés (ω_0, k_0) , l'évolution lente de l'enveloppe ou amplitude lentement variable du train est gouvernée par une équation de Schrodinger cubique ($V(|\psi|^2) \sim |\psi|^2$) (Mikhailovskii, Onishchenko & Smolyakov 1985b; Mikhailovskii, Onishchenko & Tatarinov 1985a, 1985b). On peut inclure dans ces équations des termes supplémentaires tenant compte des effets résonnants ondes-particules (terme d'amortissement Landau non linéaire dans NLS: Pataraya & Melikidze 1980).

- Dans le cas des ondes longitudinales, leur caractère fortement dispersif conduit à un comportement non-linéaire modélisé par une équation de Schrodinger cubique (Melikidze & Pataraya 1980, 1984) avec éventuellement des termes supplémentaires tenant compte d'effets cinétiques (Pataraya & Melikidze 1980).

Ces solutions particulières localisées sont invoquées dans la théorie du rayonnement des pulsars sur la base d'observations à haute résolution temporelle montrant une microstructure rapide (sur des échelles de temps caractéristiques de l'ordre de la microseconde) (Hankins & Boriakoff 1978; Bartel & Hankins 1982; Boriakoff 1983) qui pourrait être attribuée à une émission de rayonnement individuelle par des solitons (Mikhailovskii, Onishchenko & Smolyakov 1985a). Notons que cette interprétation par des modulations temporelles du rayonnement s'oppose à des modèles où les microstructures sont attribuées à un effet de phare lié à des structures spatiales en forme de filaments apparaissant dans la magnétosphère (Benford 1977; Stinebring & Cordes 1981).

Les mécanismes précis invoqués pour justifier l'émission de rayonnement par des solitons sont variés: rayonnement incohérent lié à l'accélération subie par les particules soumises au champ électrique localisé du soliton (Karpman *et al.* 1975), couplage direct aux modes du vide de solitons d'ondes d'Alfvén (Mikhailovskii, Onishchenko & Smolyakov 1985b), rayonnement de courbure

cohérent des solitons considérés comme des dipôles ou des éléments de courant accélérés dans leur mouvement le long du champ magnétique courbe de l'étoile (Karpman *et al.* 1975; Melikidze & Pataraya 1984) ou simplement génération d'harmoniques à composante électromagnétique du champ électrostatique fort de solitons d'ondes de Langmuir (Mamradze, Machabeli & Melikidze 1980; Daugherty & Harding 1982; Melikidze & Pataraya 1984).

Lorsqu'on ne se limite pas à des situations monodimensionnelles à évolution relativement lente, les ondes non-linéaires sont décrites par des équations plus générales que celles que nous avons rencontrées jusqu'ici, et pour lesquelles il n'existe généralement pas de propriétés d'intégrabilité conduisant à des solutions stables. Ceci conduit entre autres au fait que même s'il existe toujours des solutions localisées de type soliton, celles-ci perdent les propriétés qui les caractérisent comme modes propres de systèmes intégrables (au sens de la réduction à un formalisme hamiltonien en variables action-angle $H(s, \theta)$ avec $ds/dt = 0$, $d\theta/dt = \omega(s)$ dans un système de coordonnées approprié). En particulier, deux solutions localisées vont pouvoir interagir entre elles (alors que deux solitons "vrais" qui se croisent ne sont pas modifiés à l'issue de la rencontre) et avec les autres modes du système, et des comportements nouveaux vont apparaître. Le prototype de ces évolutions se rencontre dans le système des équations de Zakharov (Hasegawa 1970; Zakharov 1972) décrivant l'évolution simultanée dans un plasma électrons-ions classique d'ondes de Langmuir et d'ondes sonores:

$$\begin{cases} i \frac{\partial E}{\partial t} + \gamma(E)E + \Delta E = nE \\ \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \Delta n = \Delta |E|^2 \end{cases}$$

Notons qu'on retrouve NLS à la limite d'évolutions suffisamment lentes pour pouvoir poser $n \sim -|E|^2$.

Ce système admet des solutions localisées de type soliton capables d'un comportement instable particulier: le "collapse" (Zakharov 1972) où l'énergie tend à se concentrer en un seul point, phénomène limité par l'amortissement Landau qui transforme finalement celle-ci en énergie thermique du plasma. En régime permanent, ceci conduit à un état dit de "turbulence forte" avec transfert de l'énergie des grandes longueurs d'onde (où elle est injectée par suite des mécanismes d'instabilité linéaires et par la condensation liée à l'effet Landau non-linéaire) vers les courtes longueurs d'onde où se produit l'amortissement Landau ($\lambda \sim \lambda_{De}$), avec établissement dans l'intervalle d'un spectre d'énergie déduit de l'évolution temporelle au cours du collapse (cf pour ces notions Galeev *et al.* 1975; Goldman 1984).

Dans le cas du plasma d'électrons-positrons caractéristique de la magnétosphère des pulsars, on ne peut appliquer ce modèle tel quel du fait de

l'absence d'ondes lentes du type des ondes sonores interagissant non-linéairement avec les ondes de Langmuir. Cependant, Verga et Fontan (1984a; 1984b; 1985) ont montré que ce rôle peut être tenu par les ondes d'Alfvén et ont obtenu un système d'équations très similaire aux équations de Zakharov qui permet de construire une théorie de la turbulence forte du plasma magnétosphérique magnétisé des pulsars.

g: Autres travaux

Différents types d'instabilités linéaires mettant en jeu des faisceaux de plasma dans des situations autres que celles déjà citées ont été étudiés. En particulier les effets d'une inhomogénéité spatiale dans la limite hydrodynamique (faisceaux froids) ont fait l'objet de plusieurs travaux:

- Arons & Smith (1979) étudient l'instabilité d'un faisceau non-neutre se propageant le long d'un fort champ magnétique (tel que $\omega_B^2 \gg \omega_p^2 \gamma_0$) lorsque les dimensions de celui-ci perpendiculairement au champ sont limitées, avec une variation du profil de vitesse dans cette direction. Ils montrent que des perturbations purement électrostatiques se développent dans ces conditions lorsque l'inhomogénéité de vitesse est suffisante (l'analogie non-relativiste de ce mécanisme avait été étudié précédemment par Rome & Briggs (1972)).

- Toujours dans la limite d'un champ magnétique fort, Goldreich & Keeley (1971) étudient le couplage entre un faisceau de particules filiforme se déplaçant le long d'une ligne de champ et le rayonnement de courbure cohérent produit par une modulation de la densité linéique de charge le long du faisceau; ils montrent que ce couplage peut conduire à une instabilité, fournissant ainsi une source de rayonnement de courbure cohérent. C'est ce type de mécanisme que nous essaierons de généraliser dans la suite.

- Dans la limite opposée (faible champ magnétique vérifiant $\omega_p^2 \gamma_0 \gg \omega_B^2$), Kaladze & Mamradze (1984) montrent en s'appuyant sur les travaux plus anciens de Mikhailovskii & Rukhadze (1965) que les ondes électromagnétiques d'Alfvén en propagation non parallèle au champ magnétique (et au faisceau) sont à leur tour hydrodynamiquement instables lorsqu'un gradient de vitesse du faisceau perpendiculairement à celui-ci est réalisé. En particulier, ils étudient le cas limite de deux faisceaux juxtaposés possédant un mouvement relatif à une vitesse relativiste.

- Lorsque les deux faisceaux s'interpénètrent au lieu de se croiser, Hardee (1979; cf également Hardee & Rose 1974; Benford 1975), reprenant les travaux de Lee & Lampe (1973), montre l'apparition d'une instabilité deux-faisceaux électromagnétique correspondant à un vecteur d'onde perpendiculaire au champ magnétique (et à la vitesse des faisceaux), qu'il invoque au niveau quasilineaire pour restituer aux particules du faisceau un pitch angle moyen non nul conduisant à un rayonnement synchrotron incohérent en infra-rouge et au-delà. La condition de validité est la même que dans le cas de deux faisceaux juxtaposés ci-dessus ($\omega_p^2 \gamma_0 > \omega_B^2$ dans le repère propre du système des deux faisceaux).

- Dans le cadre des mécanismes d'instabilités classiques, la prise en compte

de dimensions transverses et/ou longitudinales finies et de l'inhomogénéité des paramètres du plasma (ω_p , ω_B) le long des lignes de champ lorsqu'on s'éloigne de l'étoile conduit à des modélisations plus réalistes des mécanismes d'émission. En particulier, Benford (1977) invoque la structure en filaments des zones d'instabilité faisceau-plasma électrostatique pour rendre compte des microstructures des pulses (cf Rickett, Hankins & Cordes 1975). Cox (1979), quant à lui, étudie le problème de la propagation dans le plasma magnétosphérique d'un faisceau aux dimensions limitées aussi bien en longueur que radialement et trouve qu'elle n'est possible sans destruction du faisceau que pour une longueur inférieure à une longueur critique, ce qui remet en cause les mécanismes mettant en jeu des faisceaux homogènes et infinis.

La variation du champ magnétique dipolaire du pulsar lorsqu'on s'éloigne de l'étoile pose le problème de la sortie des ondes électromagnétiques émises hors de la magnétosphère, la résonance cyclotron atteinte au cours de la propagation risquant de les amortir dans le plasma (Blandford & Scharlemann 1976; Mikhailovskii *et al.* 1982). De même, la variation de la densité du plasma au cours de la propagation des ondes de Langmuir impose de se limiter à un domaine intérieur au rayon critique pour lequel la densité est suffisamment basse pour que l'amortissement Landau devienne important (Benford & Buschauer 1977; Mikhailovskii 1982).

— Citons enfin un type d'instabilité particulier étudié par Melrose (1978); il s'agit d'une instabilité du rayonnement émis par les particules d'un faisceau au cours de son accélération par le champ électrique parallèle présent dans les "gaps" et supposé rapidement variable au cours du temps. Les paramètres optimaux pour ce mécanisme ($\gamma_0 \sim 10$, $n_e \sim 10^6$, $\omega \sim \omega_r/\gamma_0^{1/2}$) semblent cependant trop éloignés des valeurs communément admises à l'heure actuelle pour que ce travail puisse être exploité dans le cadre du rayonnement des pulsars.

2: Mécanismes à faisceaux limités faisant intervenir la courbure

A: Position du problème

a: L'instabilité radiative de Goldreich et Keeley

Goldreich & Keeley (1971), puis d'une façon légèrement différente Buschauer & Benford (1978), ont montré en faisant intervenir explicitement le rayonnement de courbure émis par les particules d'un anneau en rotation qu'un tel système était instable. Le calcul de Goldreich et Keeley suppose que les particules sont a priori astreintes à se déplacer sur un cercle donné, et ne prend pas en compte la dynamique éventuelle du système dans les directions perpendiculaires au faisceau ainsi formé. La seule composante de champ électromagnétique capable d'agir sur les particules est donc la composante tangentielle du champ électrique, qui est calculée explicitement à partir des expressions de Liénard-Wiechert pour le champ créé par une charge en mouvement. On se rend compte alors qu'une perturbation initiale de la densité linéique de charge le long du cercle se trouve amplifiée sous l'effet de la partie du champ électrique correspondant au rayonnement de courbure des particules: on a donc ainsi démontré l'instabilité du système.

Les hypothèses de ce calcul sont supposées représenter un faisceau de particules confinées par un champ magnétique toroïdal ou à symétrie cylindrique, d'intensité infinie. Les degrés de liberté correspondant aux mouvements perpendiculaires au champ sont alors "gelés", comme le montre un calcul quantique (Johnson & Lippmann 1949; Asséo, Pellat & Rosado 1980): les niveaux de Landau, qui sont les niveaux d'énergie correspondant aux mouvements perpendiculaires aux lignes de champ sont de plus en plus espacés lorsque l'intensité du champ magnétique augmente, et le seul état peuplé à la limite champ infini est le niveau fondamental.

Les résultats de Goldreich et Keeley peuvent être retrouvés dans le cadre de la physique des plasmas, en étudiant le comportement d'un faisceau de plasma plongé dans un champ magnétique à symétrie cylindrique, d'intensité tendant vers l'infini. C'est l'objet du calcul d'Asséo, Pellat & Sol (1981; 1983), dont nous allons donner une version simplifiée. Notons qu'il s'agit d'une instabilité d'ondes électromagnétiques de type "1" ou ondes d'Alfvén dans la limite d'un champ magnétique infini (voir par exemple Volokitin, Krasnosel'skikh & Machabeli 1985), ce qui permet le couplage direct aux ondes électromagnétiques du vide, bien que le mécanisme fasse intervenir des perturbations de densité et une composante longitudinale du champ électrique liée à une propagation légèrement oblique introduite par la courbure des lignes de champ (Asséo, Pellat & Rosado 1980).

b: Le formalisme plasma en géométrie cylindrique

On se place dans un champ magnétique tel que celui que crée un fil rectiligne infini parcouru par un courant, dont les lignes de force sont donc des cercles concentriques. Dans un système de coordonnées cylindriques dont le fil matérialise l'axe Oz, ce champ magnétique de confinement est azimutal (cf fig. 2-1). On considère une lame de plasma de forme cylindrique d'épaisseur a et de rayon moyen r_0 , placée dans ce champ magnétique, et animée d'une vitesse de rotation également azimutale $v_0(r)$. En fait si le champ $B_0(r)$ a une valeur finie, il faut également prendre en compte des vitesses de dérive pour les différentes espèces composant le plasma, verticales, produisant des forces magnétiques centripètes qui assurent l'équilibre du système. Cette vitesse de dérive pour une particule de charge q et de masse M a pour expression:

$$v_d = \frac{v_0^2}{r_0} \frac{\gamma_0 M c}{q B_0}$$

γ_0 est le facteur relativiste: $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$.

Cette dérive sera négligée en première approximation dans le calcul des propriétés du plasma (tenseur de conductivité), si le champ magnétique est suffisamment intense; elle s'annule dans la limite $B_0 \rightarrow \infty$.

On se propose d'étudier la propagation dans ce système d'ondes électromagnétiques de fréquence $\omega/2\pi$ (éventuellement complexe); les symétries de révolution et de translation le long de Oz permettent de se ramener pour les variables θ et z à une décomposition en modes propres de Fourier, de sorte que les grandeurs intervenant dans le problème peuvent se mettre sous la forme:

$$A = (A_r(r), A_\theta(r), A_z(r)) \exp -i(\omega t - m\theta - k_z z)$$

En anticipant sur les résultats, et conformément aux calculs d'Asséo, Pellat & Sol (1983), notons que la grandeur déterminante du problème est le rapport entre les variations azimutale et radiale des champs au voisinage du faisceau et que la valeur de k_z n'apporte pas de modifications qualitatives aux phénomènes mis en évidence; par conséquent, pour alléger le formalisme, nous prendrons a priori $k_z = 0$.

Le champ électromagnétique est gouverné par les équations de Maxwell, qui s'écrivent en coordonnées cylindriques (et dans le système cgs):

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{soit } \left[\begin{array}{l} \frac{im}{r} E_z \\ - \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{im}{r} E_r \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} - \frac{i\omega}{c} B_r \\ - \frac{i\omega}{c} B_\theta \\ - \frac{i\omega}{c} B_z \end{array} \right] \quad (2-1)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \frac{im}{r} B_z & = -\frac{i\omega}{c} E_r + \frac{4\pi}{c} j_r \\ -\frac{\partial B_z}{\partial r} & = -\frac{i\omega}{c} E_\theta + \frac{4\pi}{c} j_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{im}{r} B_r & = -\frac{i\omega}{c} E_z + \frac{4\pi}{c} j_z \end{cases} \quad (2-2)$$

c est la vitesse de la lumière, \mathbf{j} la densité de courant oscillant existant dans le faisceau, E_r , E_θ , E_z et B_r , B_θ , B_z les amplitudes complexes des composantes du champ électromagnétique oscillant. Seules les quantités oscillant à la pulsation ω , de valeur moyenne nulle, apparaissent dans ces équations. Les quantités moyennes (champs et courants) sont supposées a priori vérifier les conditions d'équilibre (équations de Maxwell pour les quantités ne dépendant pas du temps).

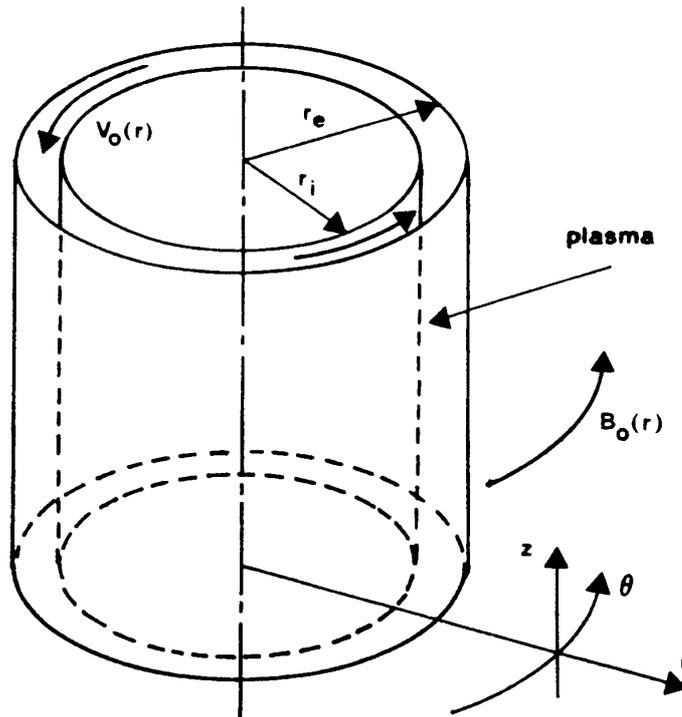


Fig. 2-1: La géométrie du système.

La densité de courant s'exprime en fonction du champ électrique:

$$\mathbf{j}_i = \sigma_{ij} \mathbf{E}_j + \tau_i(\mathbf{E}) \quad (2-3)$$

où τ est un opérateur différentiel faisant intervenir les dérivées successives de E par rapport à r . La présence de tels termes est due au fait qu'on n'a pas effectué de transformation de Fourier dans la direction radiale pour tenir compte des éventuelles inhomogénéités du plasma dans cette direction. Les résultats de l'appendice 1 montrent que ces termes s'annulent dans tous les cas dans la limite $B_0 \rightarrow \infty$, ceux qui sont dus à l'inhomogénéité s'annulant déjà si $\langle v_1^2 \rangle = 0$. Par ailleurs les forts gradients de densité que modélisent les frontières faisceau-vide peuvent être à l'origine de l'apparition de densités superficielles de charge et de courant sur ces frontières.

En fin de compte le système se divise d'une part en zones où les gradients des paramètres caractérisant le plasma sont faibles (c'est en particulier le cas dans le vide...) et où il faut résoudre le système suivant gouvernant l'évolution du champ électrique:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{m} E_r \right) + i E_\theta = \frac{4\pi}{\omega} j_\theta - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{m} \frac{4\pi i}{\omega} j_r \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{m} E_\theta \right) + i \left(\frac{\omega^2 r^2}{m^2 c^2} - 1 \right) E_r = \frac{\omega^2 r^2}{m^2 c^2} \frac{4\pi}{\omega} j_r \\ \frac{c^2}{\omega^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \left(1 - \frac{m^2 c^2}{\omega^2 r^2} \right) E_z = - \frac{4\pi i}{\omega} j_z \end{array} \right. \quad (2-4)$$

et d'autre part en zones où les gradients sont forts, que nous modéliserons par des frontières supportant des densités de charge et de courant à travers lesquelles il faudra connecter les solutions du système (2-4).

On voit que selon les expressions prises par les densités de courant au second membre, différents modes d'oscillation du système sont mis en jeu. En particulier, dans le vide, $j = 0$ et on voit apparaître deux modes découplés, les deux polarisations linéaires possibles pour une onde électromagnétique du vide, avec le champ électrique vertical ($E_r = E_\theta = 0$) ou horizontal ($E_z = 0$). Ces modes se raccordent dans le plasma respectivement aux modes "t" et "l" de la littérature soviétique (cf Lominadze & Pataraya 1982; Volokitin, Krasnosel'skikh & Machabeli 1985). Dans les deux cas les solutions en géométrie cylindrique s'expriment à partir de fonctions de Bessel ou de Hankel d'ordre m :

- polarisation verticale (mode "t"):

$$\left[\begin{array}{l} E_z (\text{vide}) = \alpha_1 H_m^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) + \alpha_2 H_m^{(2)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) \\ E_r = E_\theta = 0 \end{array} \right. \quad (2-5)$$

- polarisation horizontale (mode "l"):

$$\left[\begin{array}{l} E_r \text{ (vide)} = \frac{mC}{\omega r} (\alpha_1 H_m^{(1)}(\frac{\omega r}{c}) + \alpha_2 H_m^{(2)}(\frac{\omega r}{c})) \\ E_\theta \text{ (vide)} = i (\alpha_1 H_m^{(1)}(\frac{\omega r}{c}) + \alpha_2 H_m^{(2)}(\frac{\omega r}{c})) \\ E_z = 0 \end{array} \right. \quad (2-6)$$

Notons tout de suite que dans le vide extérieur au cylindre de plasma, l'expression à adopter est celle qui représente une propagation unidirectionnelle vers $+\infty$, c'est-à-dire proportionnelle à la fonction de Hankel $H_m^{(1)}(\omega r/c)$. En effet, on vérifie sur les développements asymptotiques des fonctions de Hankel $H_m^{(1)}$ et $H_m^{(2)}$ à l'extérieur de la zone de transition définie par $|\omega r/c - m| \leq m^{1/3}$ (Abramowitz & Stegun 1970) qu'elles font intervenir des exponentielles de la forme $e^{i\omega r/c}$ et $e^{-i\omega r/c}$ respectivement. C'est donc la fonction $H_m^{(1)}$ qui va nous permettre d'assurer qu'on traite bien le problème de l'émission de rayonnement par le système, et non un simple problème de réflexion d'une onde incidente sur un cylindre de plasma.

Dans le vide intérieur au cylindre, en revanche, plusieurs choix sont possibles. On peut adopter comme à l'extérieur l'expression représentant une propagation pure s'éloignant du plasma, c'est-à-dire proportionnelle à la fonction de Hankel $H_m^{(2)}$. Cependant, ceci conduit à une singularité pour $r \rightarrow 0$ si on ne suppose pas qu'un mécanisme quelconque va jouer le rôle de "puits" destiné à absorber l'énergie émise par le faisceau dans cette direction. Il est peut-être plus réaliste de choisir une superposition exacte d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, c'est-à-dire une fonction de Bessel:

$$J_m(\omega r/c) = 1/2 (H_m^{(1)}(\omega r/c) + H_m^{(2)}(\omega r/c))$$

assurant la convergence de la solution en 0. Cette solution a cependant le défaut de ne pas se transposer aussi facilement que la première à la limite d'un rayon de courbure infini.

Lorsqu'un faisceau de plasma est présent, on peut s'attendre à obtenir un couplage entre ces deux polarisations; en fait nous étudierons deux cas simples où malgré l'existence de zones où la densité de courant est non nulle, les deux polarisations du vide restent découplées.

Nous aurons à poser le problème du raccord des solutions du vide aux solutions dans le plasma à travers des frontières (elles aussi à symétrie cylindrique bien sûr) supportant des densités superficielles de charge Σ et de courant K . Les relations générales de continuité des différentes composantes du champ électromagnétique sont bien connues:

$$[E_r] = 4\pi \Sigma \quad ; \quad [E_\theta] = [E_z] = 0$$

$$[B_r] = 0 \quad ; \quad [B_\theta] = 4\pi/c K_z \quad ; \quad [B_z] = -4\pi/c K_\theta$$

où les crochets désignent la valeur algébrique du saut de la composante

considérée à la traversée de la surface chargée:

$$[A]_{r_0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (A(r_0 + \epsilon) - A(r_0 - \epsilon))$$

Un examen des équations de Maxwell (2-1)-(2-2) montre que les discontinuités des composantes du champ magnétique B_r , B_θ , B_z sont reliées à celles de E_z , dE_z/dr , E_r respectivement. Il suffit donc pour rendre compte de la présence d'une densité superficielle d'écrire explicitement les relations suivantes:

$$[E_r] = 4\pi \Sigma ; [E_\theta] = [E_z] = 0 ; \left[\frac{\partial E_z}{\partial r} \right] = - \frac{4\pi i \omega}{c^2} K_z \quad (2-7)$$

Nous pouvons maintenant passer à l'étude spécifique de deux cas particuliers qui présentent un intérêt du point de vue des mécanismes de rayonnement des pulsars.

B: L'approximation "champ infini": instabilité du mode "1"

a: Dynamique du faisceau

Dans le cas où le champ magnétique de confinement peut être considéré comme d'intensité infinie, l'exclusion de mouvements perpendiculaires des particules permet d'écrire (cf (2-3)):

$$j_r = j_z = 0 ; \tau = 0 .$$

Il reste à calculer j_θ . Par ailleurs en champ infini, le mouvement perpendiculaire des particules étant gelé, les densités superficielles de charge et de courant aux frontières du faisceau sont nulles. Le mécanisme de l'instabilité que nous cherchons à mettre en évidence est du type non-résonnant, et un calcul fluide froid suffit à l'obtenir. Nous adopterons donc dans un premier temps une distribution monocinétique de vitesse $v_0(r)$ pour les particules du faisceau, dont on ne considérera qu'une seule espèce.

Supposons que les quantités qui décrivent l'état du plasma soient perturbées par rapport à leurs valeurs d'équilibre, proportionnellement à l'amplitude du champ appliqué:

$$N = n_0(r) + n(r) e^{-i(\omega t - m\theta)}$$

$$V_\theta = v_0(r) + v(r) e^{-i(\omega t - m\theta)}$$

$$\Gamma = \gamma_0(r) + \gamma(r) e^{-i(\omega t - m\theta)}$$

$$j_\theta = j_0(r) + j(r) e^{-i(\omega t - m\theta)}$$

N , V_θ , Γ sont respectivement la densité, la vitesse azimutale, le facteur relativiste d'un élément de plasma, exprimés comme somme d'une valeur moyenne et d'une perturbation supposée petite.

Ces grandeurs sont reliées entre elles par l'équation de conservation de la masse, et au champ électromagnétique par l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à une particule:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div}(NV) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla P = e(E + \frac{1}{c} \mathbf{V} \wedge \mathbf{B})$$

$P = M\Gamma v$ est la quantité de mouvement d'une particule et e sa charge.

Ces équations, compte tenu de la forme adoptée pour les variations des grandeurs considérées et en négligeant tous les termes d'ordre supérieur à un en quantités perturbées (supposées petites), s'écrivent:

$$-i \left(\omega - \frac{mv_0}{r} \right) n + \frac{im}{r} n_0 v = 0$$

$$-i \left(\omega - \frac{mv_0}{r} \right) M (\gamma_0 v + \gamma v_0) = eE_\theta .$$

(2-8)

On n'a conservé que la composante azimutale de l'équation de la dynamique, qui gouverne l'évolution de v et γ . Par ailleurs la définition du facteur relativiste permet d'écrire pour sa perturbation:

$$\gamma = \gamma_0^3 \frac{v_0 v}{c^2}$$

On peut donc, en reportant cette expression dans (2-8), calculer la densité de courant perturbée:

$$j = e (n v_0 + n_0 v) = i \frac{e^2 n_0}{M} \frac{\omega}{\gamma_0^3 (\omega - \frac{m v_0}{r})^2} E_\theta \quad (2-9)$$

Nous sommes maintenant munis de la réponse du plasma aux sollicitations d'un champ électromagnétique, ce qui permet de fermer le système (2-4).

b: Cas du faisceau infiniment mince:

Les expressions ci-dessus ne sont pas modifiées si on considère que dans la limite d'un faisceau infiniment mince situé au rayon $r = r_0$, N et j_0 désignent des densités superficielles et non plus volumiques de particules et de courant. Le problème se ramène alors au raccordement à travers une frontière chargée des solutions du système (2-4) pour le vide extérieur et le vide intérieur, c'est-à-dire dans des régions où on a posé $j = 0$. Les conditions de raccordement (2-7) s'écrivent ici:

$$[E_r] = 4\pi ne = i \frac{4\pi n_0 e^2}{M} \frac{m}{r_0} \frac{E_\theta}{\gamma_0^3 (\omega - \frac{mv_0}{r_0})^2}$$

$$[E_\theta] = [E_z] = [\frac{dE_z}{dr}] = 0$$

Les deux parties du système (2-4) qui gouvernent les deux polarisations du vide sont donc découplées; le comportement de E_z est une pure propagation dans le vide sans interaction avec le faisceau. Nous choisirons d'ignorer ce mode en posant $E_z = 0$.

Il reste à raccorder les solutions de la forme (2-6) convenablement choisies, au moyen des valeurs trouvées pour les discontinuités $[E_r]$ et $[E_\theta]$. Les prescriptions du paragraphe A ci-dessus fournissent les expressions suivantes pour les champs dans le vide:

$$E_{re}(r) = \alpha_e \frac{mc}{\omega r} H_m^{(1)}(\frac{\omega r}{c})$$

$$E_{\theta e}(r) = i \alpha_e H_m'^{(1)}(\frac{\omega r}{c})$$

$$E_{ri}(r) = \alpha_i \frac{mc}{\omega r} J_m(\frac{\omega r}{c})$$

$$E_{\theta i}(r) = i \alpha_i J_m'(\frac{\omega r}{c})$$

L'indice e (i) désigne les champs dans le vide extérieur (intérieur) au cylindre de plasma.

Le raccordement à travers le faisceau s'obtient donc en imposant les conditions suivantes:

$$\alpha_e H_m'^{(1)}(\frac{\omega r_0}{c}) = \alpha_i J_m'(\frac{\omega r_0}{c})$$

$$\alpha_e H_m^{(1)}(\frac{\omega r_0}{c}) = \alpha_i J_m(\frac{\omega r_0}{c}) - 4\pi \frac{n_0 e^2}{M} \frac{\omega}{c \gamma_0^3 (\omega - \frac{mv_0}{r_0})^2} \alpha_e H_m'^{(1)}(\frac{\omega r_0}{c})$$

Le déterminant de ce système d'équations en α_e , α_i doit s'annuler pour que la solution ne soit pas trivialement nulle. Ceci s'écrit:

$$H_m'(1)\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) J_m\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - H_m(1)\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) J_m'\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - \frac{4\pi n_0 e^2}{M} \frac{\omega}{c \gamma_0^3 \left(\omega - \frac{m v_0}{r_0}\right)^2} H_m'(1)\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) J_m'\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) = 0$$

soit en tenant compte de la valeur du Wronskien de $H_m^{(1)}$ et J_m (qui est $2ic/\pi \omega r_0$) et en traduisant la densité superficielle n_0 sous la forme $a N_0$ où a est l'épaisseur (petite) du faisceau et N_0 la densité volumique de particules:

$$1 - \frac{\pi \omega^2 r_0}{2c^2} \frac{a \omega_p^2}{\gamma_0^3 \left(\omega - \frac{m v_0}{r_0}\right)^2} H_m'(1)\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) J_m'\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) = 0 \quad (2-10)$$

$\omega_p = (4\pi N_0 e^2 / M)^{1/2}$ est la fréquence plasma du faisceau.

La résolution de cette équation de compatibilité pour obtenir ω en fonction de m nous mènera aux différents modes possibles du système et à leurs relations de dispersion respectives.

Quel est le sens physique des différents facteurs de cette relation ? r_0 étant le rayon de courbure du faisceau, m/r_0 est le nombre d'onde azimuthal de l'onde électromagnétique au voisinage du faisceau. Le comportement des fonctions de Hankel et de Bessel est différent de part et d'autre du point critique $r_c = mc/\omega$; pour ω proche d'un réel positif, on a un comportement oscillant dans la zone de propagation $r > r_c$ et exponentiel (évanescence dans le cas de J_m) dans la zone $r < r_c$. La position de r_0 par rapport à r_c , c'est-à-dire la valeur du nombre $\omega r_0 / mc - 1$ détermine la position du faisceau par rapport à la zone critique $r = r_c$. On voit que pour obtenir la résonance entre l'onde électromagnétique, les perturbations de densité correspondantes et les particules du faisceau, il faut réaliser l'égalité des vitesses: $v_0 = \omega r_0 / m$, ce qui n'est possible que si le faisceau se trouve dans la zone exponentielle $r_0 = m v_0 / \omega < r_c$. Cependant pour des particules très relativistes (ce qui est censé être le cas), on devra s'attendre à trouver la résonance dans la zone critique (de largeur $\approx m^{1/3}$) juste en-dessous de r_c .

Par ailleurs notons que le voisinage du rayon critique correspond à une vitesse de phase parallèle dans le vide proche de la vitesse de la lumière, donc à une propagation quasi-azimutale. Lorsqu'on s'éloigne dans la zone de propagation à partir du rayon critique, le vecteur d'onde devient de plus en plus radial et la vitesse de phase azimuthale $\omega r / m$ devient grande devant la vitesse de la lumière, ce qui élimine la possibilité de résonance avec le faisceau dans cette zone. Nous vérifierons, en effet, qu'on n'obtient pas d'instabilité dans la zone de propagation. De même ceci justifie a posteriori

qu'on se soit placé dans le cas $k_z = 0$ puisqu'on s'attend à ce qu'une valeur non nulle de k_z conduise à s'éloigner de la résonance.

m est une mesure du rayon de courbure du faisceau en termes de la longueur d'onde azimutale des perturbations; on a donc une courbure faible, toutes choses égales par ailleurs, pour de grandes valeurs de m .

Ceci suggère (ainsi que le confirment les chiffres utilisés par Asséo, Pellat & Sol pour caractériser les conditions physiques à la surface d'un pulsar: $r_0 \approx 2 \cdot 10^7$, $a \approx 10^2$, $m \approx 10^6$, $\gamma_0 \approx 2 \cdot 10^4$, $\omega_p \approx 6 \cdot 10^{12}$; cf Asséo, Pellat & Sol 1983) les approximations suivantes:

- propagation quasi-parallèle (ou voisinage du rayon critique) :

$$\frac{\omega r_0}{mc} = 1 + \frac{r_0 \delta \omega}{mc} \quad \text{avec} \quad \left| \frac{r_0 \delta \omega}{mc} \right| \ll 1 .$$

- faisceau très relativiste :

$$1 - \frac{v_0}{c} \approx \frac{1}{2\gamma_0^2} \ll \frac{r_0 \delta \omega}{mc} \quad \text{soit} \quad \omega - \frac{mv_0}{r_0} \approx \delta \omega .$$

- rayon de courbure grand devant l'échelle caractéristique des perturbations le long du faisceau :

$$m \gg 1 .$$

Munis de ces prescriptions, nous pouvons donner une autre expression de l'équation (2-10) en utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Hankel et de Bessel en termes de fonctions d'Airy pour m grand :

$$1 + 2^{4/3} \pi \frac{m^{2/3}}{r_0} \frac{a \omega_p^2}{\gamma_0^3 \delta \omega^2} e^{-2i\pi/3} \text{Ai}'((2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta \omega}{mc} e^{-i\pi/3}) \\ \times \text{Ai}'(-(2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta \omega}{mc}) = 0$$

(cf appendice 2) .

On peut aller plus loin dans la détermination de $\delta \omega$ en se plaçant dans deux cas limites selon la valeur supposée de l'argument des fonctions d'Airy. Ceci revient à faire des hypothèses sur la position du faisceau par rapport à la zone de transition des fonctions de Bessel.

- premier cas : $|(2m^2)^{1/3} r_0 \delta \omega / mc| \ll 1$: le faisceau est dans la zone de transition. On peut alors remplacer les dérivées des fonctions d'Airy par leur valeur en 0:

$$\text{Ai}'(0) = \frac{-1}{3^{1/3} \Gamma(1/3)} .$$

La relation de compatibilité s'écrit alors:

$$1 + \frac{2^{4/3} \pi}{3^{2/3} \Gamma(-\frac{2}{3})} \frac{m^{2/3} a \omega_p^2}{r_0 \gamma_0^3 \delta \omega^2} e^{-2i\pi/3} = 0 .$$

La solution s'obtient immédiatement (cf appendice 2 pour les problèmes de branche dans le choix de la bonne solution) :

$$\delta\omega = \frac{2^{2/3} m^{1/3}}{3^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{\pi a \omega_p^2}{r_0 \gamma_0^3} \right)^{1/2} e^{i\pi/12} \quad (2-11)$$

Les approximations faites plus haut s'écrivent alors :

- voisinage du rayon critique :

$$|(2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta\omega}{mc}| = \frac{2\sqrt{\pi}}{3^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{a \omega_p^2 r_0}{\gamma_0^3 c^2} \right)^{1/2} \ll 1$$

- faisceau très relativiste et rayon de courbure grand :

$$\frac{2^{5/3} \sqrt{\pi}}{3^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{r_0 a \omega_p^2 \gamma_0}{c^2} \right)^{1/2} \gg m^{2/3} \gg 1 .$$

Elles sont vérifiées pour des chiffres proches des chiffres cités ci-dessus. Nous reportons au paragraphe suivant une discussion plus complète de ces conditions de validité.

- deuxième cas : $|(2m^2)^{1/3} r_0 \delta\omega/mc| \gg 1$: le faisceau n'est pas dans la zone de transition. On peut alors remplacer les dérivées de fonctions d'Airy par le premier terme de leur développement asymptotique pour des arguments grands. Mais ces développements utilisent des fonctions de $\delta\omega$ qui ne sont pas monovalués et il faut prendre quelques précautions dans la définition du domaine dans lequel on cherche une solution (cf appendice 2). Dans le domaine $0 < \text{Arg}(\delta\omega) < 4\pi/3$ on peut utiliser le développement :

$$\text{Ai}'(z) \sim \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} z^{1/4} \exp - \frac{2}{3} z^{3/2} ,$$

pour les deux fonctions d'Airy, et la relation de compatibilité prend la forme :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r_0 a \omega_p^2}{mc^2 \gamma_0^3} \left(\frac{r_0 \delta\omega}{mc} \right)^{-3/2} = 0$$

Les solutions de cette équation sont a priori :

$$\frac{r_0 \delta\omega_n}{mc} = \left(\frac{r_0 a \omega_p^2}{\sqrt{2} mc^2 \gamma_0^3} \right)^{2/3} e^{-i\pi/3} e^{4n\pi/3} \quad \text{avec } n \text{ entier quelconque.}$$

La seule qui vérifie $0 < \text{Arg}(\delta\omega) < 4\pi/3$ est :

$$\delta\omega_1 = - \frac{mc}{r_0} \left(\frac{r_0 a \omega_p^2}{\sqrt{2} mc^2 \gamma_0^3} \right)^{2/3} .$$

Cette solution correspond à un équilibre marginal des ondes dans le système. Notons que la partie réelle de $\delta\omega$ est négative, de sorte que le faisceau se trouve dans la zone exponentielle, à l'intérieur du rayon critique. Le taux

d'émission d'énergie par les particules compense exactement les pertes de rayonnement par propagation et le système est en équilibre.

Le domaine exploré ($0 < \text{Arg}(\delta\omega) < 4\pi/3$) contient la zone où peut apparaître une instabilité; on peut donc conclure que dans ce second cas le système est stable.

Vérifions tout de même que les approximations faites sont satisfaites:

- on est loin du rayon critique :

$$|(2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta\omega}{mc}| = \left(\frac{a\omega_p^2 r_0}{\gamma_0^3 c^2}\right)^{2/3} \gg 1 .$$

C'est exactement l'inverse de la condition du premier cas ci-dessus. La quantité $A = a\omega_p^2 r_0 / \gamma_0^3 c^2$, dépendant uniquement des paramètres caractérisant le faisceau, permet donc de déterminer a priori dans quel régime on va se trouver, indépendamment des caractéristiques des ondes éventuellement émises.

- faisceau très relativiste et grand rayon de courbure:

$$\frac{2r_0 a\omega_p^2}{c^2} \gg m \gg 1 .$$

Ces conditions sont vérifiées pour des chiffres proches des chiffres déjà utilisés ci-dessus.

c: Validité des hypothèses et application aux conditions physiques des pulsars:

Le résultat ci-dessus a été obtenu au prix d'un certain nombre d'approximations et d'hypothèses dont il convient de tester la validité pour les valeurs des différents paramètres dans la magnétosphère des pulsars (cf appendice 3). On pourra alors tenter d'optimiser les valeurs du taux de croissance dans les limites ainsi fixées.

L'hypothèse de départ a été de considérer le faisceau comme une lame de plasma réagissant de façon homogène à l'action d'un champ électrique azimuthal lui-même homogène dans toute son épaisseur, ce qui nous a permis de le modéliser par des densités superficielles de charge et de courant proportionnelles à E_θ . Cette hypothèse pourrait être mise en défaut si les variations de E_θ à travers le faisceau devenaient grandes, ou si la réaction du plasma, c'est-à-dire la valeur de j_θ à E_θ donné (ou encore la valeur de la composante $\sigma_{\theta\theta}$ du tenseur de conductivité) variait trop d'un bord à l'autre du faisceau.

Essayons d'estimer ces variations pour leur imposer des limites. L'expression (2-9) de la densité de courant perturbée reportée dans le système (2-4) gouvernant le champ électrique conduit aux équations suivantes pour la polarisation concernée à l'intérieur du plasma (mode "1"):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{m} E_r \right) + iW E_\theta = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{m} E_\theta \right) + i \left(\frac{\omega^2 r^2}{m^2 c^2} - 1 \right) E_r = 0 \end{cases} \quad (2-12)$$

On a fait apparaître la "constante diélectrique" du plasma:

$$W = 1 - \frac{\omega_p^2(r)}{\gamma_0^3 \left(\omega - \frac{mv_0}{r} \right)^2}$$

Cette constante prend des valeurs grandes devant 1 en module puisque la limite épaisseur nulle correspond à une fréquence plasma tendant vers l'infini ($a\omega_p^2 - \text{cte}$ quand $a \rightarrow 0$).

Pour obtenir un ordre de grandeur des erreurs commises en supposant $E_\theta = \text{cte}$ à travers le faisceau, examinons quelle serait sa variation si l'on pouvait prendre $W = W_0 = \text{cte}$ où W_0 est la valeur obtenue pour W lorsqu'on y reporte l'expression du décalage de fréquence $\delta\omega \sim \omega - mv_0/r$ calculée au paragraphe précédent:

$$W_0 \sim \frac{3^{2/3} \Gamma(1/3)^2}{2^{4/3} \pi} \frac{r_0}{am^{2/3}} e^{-51\pi/6}$$

En posant $m/r \sim m/r_0 = k_\theta$ et $\partial/\partial r \sim ik_r$ en première approximation, on obtient:

$$\begin{cases} k_r E_\theta + k_\theta \left(\frac{\omega^2}{k_\theta^2 c^2} - 1 \right) E_r = 0 \\ k_r E_r + k_\theta W_0 E_\theta = 0 \end{cases}$$

ce qui conduit à la relation de dispersion:

$$k_\theta^2 + \frac{k_r^2}{W_0} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Les variations radiales des champs sont représentées dans cette approximation par des exponentielles de la forme $\exp(\pm ik_r(r-r_0))$ avec:

$$k_r = \left[W_0 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r_0^2} \right) \right]^{1/2} \sim \left(2W_0 \frac{m\delta\omega}{r_0 c} \right)^{1/2}$$

On a donc à un facteur près:

$$\begin{aligned} E_\theta &\sim e^{\pm i \left(2W_0 \frac{m\delta\omega}{r_0 c} \right)^{1/2} (r-r_0)} \\ E_r &\sim \left(\frac{m c W_0}{2 r_0 \delta\omega} \right)^{1/2} e^{\pm i \left(2W_0 \frac{m\delta\omega}{r_0 c} \right)^{1/2} (r-r_0)} \end{aligned}$$

Les variations de E_θ à travers le faisceau restent donc petites si on impose:

$$\left(2W_0 \frac{m\delta\omega}{r_0 c} \right)^{1/2} a = \sqrt{2} \frac{a \omega_p}{\gamma_0^{3/2} c} \left(\frac{m c}{r_0 \delta\omega} \right)^{1/2} \ll 1$$

ce qui s'écrit compte tenu des résultats du paragraphe précédent:

$$\left(\frac{6^{1/3} \Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi}} \frac{m^{2/3} \omega_p a^{3/2}}{\gamma_0^{3/2} r_0^{1/2} c} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (2-13)$$

Il reste à imposer que la réponse du plasma soit elle-même aussi constante que possible dans le faisceau. Ceci revient à vérifier que les variations de W induites par la proximité du pôle en $r = \omega/mv_0$ restent faibles en valeur relative, de façon à pouvoir écrire comme on l'a supposé:

$$\int_{r_0-a/2}^{r_0+a/2} W(r) dr \sim - \frac{1}{\gamma_0^3 \left(\omega - \frac{m v_0}{r_0} \right)^2} \int_{r_0-a/2}^{r_0+a/2} \omega_p^2(r) dr = \frac{- \langle a \omega_p^2 \rangle}{\gamma_0^3 \left(\omega - \frac{m v_0}{r_0} \right)^2}$$

La variation relative de W due à la présence du pôle s'écrit:

$$\left| \frac{\Delta W}{W_0} \right| = \left| \left(\omega - \frac{m v_0}{r_0} \right)^2 \Delta \left(\frac{1}{\left(\omega - \frac{m v_0}{r} \right)^2} \right) \right| = \left| - \frac{2 m c}{r_0 \delta\omega} \frac{a}{r_0} \right| \ll 1$$

ou encore en reportant la valeur de $\delta\omega$:

$$\frac{6^{1/3} \Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi}} m^{2/3} c \left(\frac{\gamma_0^3 a}{r_0^3 \omega_p^2} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (2-14)$$

Par ailleurs au cours de la résolution on s'est restreint au domaine suivant:

- Rayon de courbure grand devant l'échelle caractéristique des perturbations azimutales et faisceau très relativiste:

$$\frac{2^{5/3}}{3^{1/3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{\pi r_0 a \omega_p^2 \gamma_0}{c^2} \right)^{1/2} \gg m^{2/3} \quad (2-15)$$

$$m \gg 1 \quad (2-16)$$

et on a vu qu'on n'obtenait une instabilité que lorsque le faisceau était dans le voisinage du rayon critique:

$$\frac{2}{3^{1/3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{\pi a \omega_p^2 r_0}{\gamma_0^3 c^2} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (2-17)$$

On se trouve donc devant un problème d'optimisation avec contraintes, linéaire (en prenant le logarithme des relations (2-13)-(2-17)), mettant en jeu plusieurs degrés de liberté. En effet, les valeurs des différents paramètres des conditions de validité dépendent (cf appendice 3) de la distance à l'étoile r/r_* , de la fréquence du rayonnement considéré ω , de l'angle d'observation ψ par rapport à l'axe magnétique du pulsar, de l'épaisseur a_* du faisceau au voisinage de l'étoile et de son facteur relativiste γ_0 , ce qui permet de récrire les conditions de validité sous la forme:

$$\frac{11}{24} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{12} \log \psi + \frac{1}{3} \log \omega - \frac{3}{4} \log \gamma_0 + \frac{3}{4} \log a_* \ll 0.62 \quad (2-18)$$

$$\frac{17}{12} \log \frac{r}{r_*} + \frac{5}{6} \log \psi + \frac{2}{3} \log \omega + \frac{3}{2} \log \gamma_0 + \frac{1}{2} \log a_* \ll 16.04 \quad (2-19)$$

$$- \log \frac{r}{r_*} + \log \psi - \log \omega \ll -4.17 \quad (2-20)$$

$$\frac{11}{12} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{6} \log \psi + \frac{2}{3} \log \omega - \frac{1}{2} \log \gamma_0 - \frac{1}{2} \log a_* \ll 10.34 \quad (2-21)$$

$$- \frac{1}{4} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{2} \log \psi - \frac{3}{2} \log \gamma_0 + \frac{1}{2} \log a_* \ll -7.36 \quad (2-22)$$

Le problème est donc de trouver la plus grande valeur possible du taux de croissance:

$$\log \delta \omega_1 = 9.46 - \frac{11}{12} \log \frac{r}{r_*} + \frac{1}{6} \log \psi + \frac{1}{3} \log \omega - \frac{3}{2} \log \gamma_0 + \frac{1}{2} \log a_*$$

en satisfaisant les contraintes (2-18)-(2-22) ainsi que des contraintes qui proviennent de façon naturelle de la nature des grandeurs mises en jeu; ainsi on doit évidemment imposer (cf appendice 3):

$$\frac{r}{r_*} > 1 \quad - \quad \log \frac{r}{r_*} > 0 \quad (2-23)$$

$$1 \leq \gamma_0 \leq 3 \cdot 10^6 \quad - \quad 0 \leq \log \gamma_0 \leq 6.48 \quad (2-24)$$

$$\psi \ll 1 \quad - \quad \log \psi \ll 0. \quad (2-25)$$

On a donc en tout neuf contraintes à satisfaire. Numériquement on

considèrera les inégalités fortes (\ll) comme satisfaites lorsqu'un demi-ordre de grandeur sépare les deux membres. Après avoir trouvé par tâtonnements un point de départ intérieur à toutes les contraintes, on se déplace dans l'espace à cinq dimensions ($\log(r/r_*)$, $\log\psi$, $\log\omega$, $\log\gamma_0$, $\log a_*$) dans une direction tendant à augmenter la valeur de $\delta\omega_1$ jusqu'à un point optimal où cinq contraintes indépendantes se trouvent saturées. Ce point se trouve être l'intersection des hyperplans définissant les contraintes (2-19), (2-21), (2-22), (2-23) et (2-25), dont la valeur est:

$$\text{point optimal} = (0, -0.5, 15.91, 4.49, -2.78)$$

On obtient donc une valeur optimale du taux de croissance:

$$\delta\omega_1 \sim 3.6 \cdot 10^6$$

pour les valeurs suivantes des paramètres:

$$r \sim r_* \quad (\text{on est à la surface de l'étoile})$$

$$\omega \sim 8.1 \cdot 10^{15} \quad (\text{longueur d'onde } \lambda \sim 0.23 \mu\text{m})$$

$$\gamma_0 \sim 3.1 \cdot 10^4 \quad (\text{relativement faible})$$

$$a_* \sim 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

On voit que l'épaisseur de faisceau à laquelle conduit cette optimisation est très faible, que l'instabilité se développe au voisinage de la surface du pulsar pour des fréquences qui peuvent être assez élevées (jusqu'au visible et au-delà). La principale limitation de ce calcul (sinon du mécanisme physique lui-même) réside dans cette nécessité d'avoir des largeurs de faisceau très faibles. Nous essaierons de la lever au chapitre suivant.

C: Le cas champ fini: un autre régime instable

a: Dynamique d'un faisceau de plasma électrons-positrons

Dans le cas où le champ magnétique $B_0(r)$ est fini, les mouvements des particules perpendiculairement à B_0 sont possibles, et on doit s'attendre à obtenir des composantes correspondantes de la densité de courant perturbée non nulles. Ceci se traduit sur les composantes du tenseur de conductivité σ_{ij} et par l'apparition de termes en $\tau_1(E)$ non nuls. Par ailleurs on voit apparaître des densités superficielles de charge et de courant azimuthal aux frontières du faisceau. Les expressions des coefficients correspondants sont calculées dans l'appendice 1.

Lorsqu'on ne considère qu'une espèce de particules, comme au paragraphe précédent, ou un plasma électrons-ions lourds, les composantes E_r , E_θ d'une part et E_z d'autre part ne sont plus indépendantes; les mouvements gyromagnétiques des particules ont pour effet de coupler E_r et E_z . Un cas intéressant est celui du faisceau de plasma électrons-positrons dans lequel les courants perpendiculaires au champ électrique appliqué (E_r ou E_z) pour les deux espèces de particules se compensent exactement, de sorte qu'on obtient de nouveau un découplage entre ces deux composantes. Cette compensation est celle qui conduit aux ondes d'Alfvén dans la limite basse fréquence pour un plasma électrons-ions ($\omega \ll \omega_{pe}, \omega_{pi}$; cf Krall & Trivelpiece 1973) mais dans le cas du plasma électrons-positrons, elle se produit quelle que soit la fréquence.

Le système d'équations décrivant les variations radiales du champ électrique dans tout le système s'écrit alors, à des termes de correction de courbure près dans l'expression des termes faisant intervenir les composantes du tenseur diélectrique:

$$\left[\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{m^2 c^2}{\omega^2 r^2} + \epsilon_r(r) \right) E_r - \frac{ic}{\omega} \left(\frac{mc}{\omega r} + \frac{\omega \beta_0 \epsilon_r(r)}{\omega - \frac{mv_0}{r}} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) = 0 \\
 & - \frac{ic}{\omega} \left(\frac{mc}{\omega r} + \frac{\omega \beta_0 \epsilon_r(r)}{\omega - \frac{mv_0}{r}} \right) r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E_r}{r} \right) + (1 + \epsilon_\theta(r)) E_\theta \\
 & \quad + \frac{c^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\beta_0^2 \omega^2 \epsilon_r(r)}{(\omega - \frac{mv_0}{r})^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right) = 0 \\
 & \left(1 - \frac{m^2 c^2}{\omega^2 r^2} + \epsilon_r(r) \right) E_z + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = 0
 \end{aligned} \right. \quad (2-26)$$

Les polarisations correspondent à celles des deux modes propres du vide en

géométrie cylindrique avec $k_z = 0$. On obtiendra les relations de compatibilité qui gouvernent ces modes en écrivant les conditions de raccordement des champs aux frontières plasma-vide, en tenant compte éventuellement, si on se trouve en présence de gradients raides, de densités superficielles de charge et de courant.

b: Instabilité du mode magnéto-sonore ou mode "t"

Ce mode représente une polarisation que n'avaient pas étudié Goldreich et Keeley. Dans ce cas, les densités superficielles de charge et de courant sont nulles et il suffit d'écrire les conditions de continuité:

$$[E_z] = 0 \quad , \quad \left[\frac{\partial E_z}{\partial r} \right] = 0$$

aux frontières plasma-vide.

On se place dans le cas d'un faisceau suffisamment dense pour qu'on puisse poser:

$$|\epsilon_{\neq}| \gg \left| 1 - \frac{m^2 c^2}{\omega^2 r^2} \right|$$

au voisinage du faisceau. Ceci sera d'autant mieux réalisé qu'on sera plus proche d'un pôle de ϵ_{\neq} : $\omega - mv_0/r_0 \sim \pm \omega_D$.

Comme dans le cas champ infini, on va tout d'abord se placer dans la limite où l'épaisseur du faisceau tend vers zéro afin d'obtenir une première approche suffisamment simple et parlante des phénomènes.

Intégrons l'équation (2-26-c) à travers le faisceau, de $r_0 - a/2$ à $r_0 + a/2$ et faisons tendre a vers zéro; E_z étant continu à la traversée on obtient la valeur de la discontinuité de la dérivée $\partial E_z / \partial r$ entre un bord et l'autre du faisceau:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial r} \right)_{r_0+a/2} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} \right)_{r_0-a/2} \sim - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{r_0-a/2}^{r_0+a/2} \epsilon_{\neq}(r) dr \cdot E_z(r_0)$$

Ceci permet de raccorder les solutions dans les vides intérieur et extérieur. Dans le vide, $\epsilon_{\neq} = 0$ et le champ obéit à une équation de Bessel. La solution qui décrit une propagation unidirectionnelle vers $r = +\infty$ dans le vide extérieur est (cf § 2-A-b):

$$E_z(r) = \alpha_e H_m^{(1)}(\omega r/c)$$

Celle qui représente une onde stationnaire sans divergence en $r = 0$ dans le vide intérieur est:

$$E_z(r) = \alpha_1 J_m(\omega r/c)$$

Les conditions de raccordement s'écrivent donc:

$$\begin{aligned} \alpha_e H_m^{(1)}\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) &= \alpha_1 J_m\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) \\ \alpha_e H_m^{(1)'}\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) &= \alpha_1 J_m'\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - \alpha_1 \frac{\omega}{c} J_m\left(\frac{\omega r_0}{c}\right) \int_{r_0-a/2}^{r_0+a/2} \epsilon_{\neq}(r) dr \end{aligned} \quad (2-27)$$

Comme on suppose le faisceau de largeur infinitésimale (hypothèse dont la validité devra être évaluée comme pour le cas champ infini), l'intégrale se

réduit à :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{r_0 - a/2}^{r_0 + a/2} \epsilon(r) dr = - \frac{a \omega_p^2}{\gamma_0 \omega^2} \frac{(\omega - mv_0/r_0)^2}{(\omega - mv_0/r_0)^2 - \omega_p^2}$$

où à la limite $a \omega_p^2 = \text{cte}$ quand $a \rightarrow 0$.

Pour que le système (2-27) admette une solution (α_e, α_i) non trivialement nulle, on impose que son déterminant soit nul, ce qui conduit à la relation de compatibilité :

$$H_m'(1) \left(\frac{\omega r_0}{c}\right) J_m \left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - H_m(1) \left(\frac{\omega r_0}{c}\right) J_m' \left(\frac{\omega r_0}{c}\right) - \frac{a \omega_p^2}{\gamma_0 \omega c} \frac{\delta \omega^2}{\delta \omega^2 - \omega_p^2} J_m \left(\frac{\omega r_0}{c}\right) H_m(1) \left(\frac{\omega r_0}{c}\right) = 0$$

où on a posé $\delta \omega = \omega - \frac{mv_0}{r_0} \sim \omega - \frac{mc}{r_0}$ pour un faisceau très relativiste .

soit en tenant compte de la valeur du Wronskien de $H_m(1)$ et J_m :

$$1 - \frac{\pi r_0 a \omega_p^2}{2 \gamma_0 c^2} \frac{\delta \omega^2}{\delta \omega^2 - \omega_p^2} J_m \left(\frac{\omega r_0}{c}\right) H_m(1) \left(\frac{\omega r_0}{c}\right) = 0$$

Ici comme au paragraphe précédent, on cherche des solutions pour des valeurs de m a priori élevées, et on va remplacer les fonctions de Bessel et de Hankel par le premier terme de leur développement asymptotique en termes de fonctions d'Airy (cf appendice 2), ce qui conduit à :

$$1 - \frac{2}{m} \left(-\right)^{2/3} \frac{\pi r_0 a \omega_p^2}{\gamma_0 c^2} \frac{e^{-i\pi/3}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\delta \omega^2}} \text{Ai} \left(- (2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta \omega}{mc} \right) \times \text{Ai} \left(e^{-i\pi/3} (2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta \omega}{mc} \right) = 0 \quad (2-28)$$

On peut aller plus loin dans la détermination de $\delta \omega$ en se plaçant dans deux cas limites selon la valeur supposée de l'argument des fonctions d'Airy. Ceci revient à faire des hypothèses sur la position du faisceau par rapport à la zone de transition des fonctions de Bessel.

- premier cas : $| (2m^2)^{1/3} r_0 \delta \omega / mc | \ll 1$: le faisceau est dans la zone de transition. On peut alors remplacer les fonctions d'Airy par :

$$\text{Ai}(z) \sim \text{Ai}(0) + z \text{Ai}'(0)$$

$$\text{avec: } \text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})} \quad \text{et} \quad \text{Ai}'(0) = \frac{-1}{3^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})}$$

On conserve le premier ordre du développement de Taylor pour rendre compte du fait qu'on s'attend à trouver $|\delta \omega| \sim |\omega_p|$ et non $|\delta \omega| \sim 0$ comme dans le cas précédent.

La relation (2-28) s'écrit alors:

$$1 + \frac{2^{2/3} \pi r_0 a \omega_p^2}{3^{4/3} \Gamma(\frac{2}{3})^2 \gamma_0 c^2 m^{2/3}} \frac{e^{i\pi/6}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\delta \omega^2}} \left(1 + \frac{3^{1/3} \Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} e^{i\pi/3} (2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta \omega}{mc} \right) = 0$$

La solution s'obtient immédiatement (cf appendice 2 pour les problèmes de branche dans le choix de la bonne solution) si on suppose le terme correctif dans la parenthèse petit (c'est le cas puisqu'on a explicitement supposé que $|(2m^2)^{1/3} r_0 \delta \omega / mc| \ll 1$):

$$\delta \omega = -\omega_p (1 + \eta e^{i\pi/6})^{-1/2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \frac{a r_0^2 \omega_p^2 \omega_b^2}{\gamma_0 m c^3} (1 + \eta e^{i\pi/6})^{-2} \quad (2-29)$$

où la détermination de la racine carrée est celle de partie réelle positive et le second terme est une petite correction au premier. On a posé:

$$\eta = \frac{2^{2/3} \pi r_0 a \omega_p^2}{3^{4/3} \Gamma(\frac{2}{3})^2 \gamma_0 c^2 m^{2/3}}$$

On obtient donc deux expressions limites de $\delta \omega$ selon la valeur du paramètre η par rapport à 1:

$$\begin{aligned} - \text{pour } \eta \ll 1 : \delta \omega &\sim -\omega_p \left(1 - \frac{\eta}{2} e^{i\pi/6} + \frac{i}{2\sqrt{3}} \frac{a r_0^2 \omega_p^2 \omega_b^2}{\gamma_0 m c^3} \right) \\ - \text{pour } \eta \gg 1 : \delta \omega &\sim -\frac{\omega_p}{\sqrt{\eta}} \left(e^{-i\pi/12} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{a r_0^2 \omega_p^2 \omega_b^2}{\gamma_0 m c^3} \frac{e^{i\pi/6}}{\eta^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

et dans ces deux expressions il faut vérifier que le terme contenant ω_b dans la parenthèse est petit; en fait cette condition découle dans chaque cas de l'hypothèse $|(2m^2)^{1/3} r_0 \delta \omega / mc| \ll 1$ et de l'hypothèse faite sur η ($\eta \ll 1$ ou $\eta \gg 1$), et il ne s'agit donc pas d'une contrainte indépendante supplémentaire.

Il reste à examiner les conditions de validité de ce résultat.

- deuxième cas : $|(2m^2)^{1/3} r_0 \delta \omega / mc| \gg 1$: le faisceau n'est pas dans la zone de transition. On peut alors remplacer les fonctions d'Airy de l'équation (2-28) par le premier terme de leur développement asymptotique pour des arguments grands. Dans le domaine $0 < \text{Arg}(\delta \omega) < 4\pi/3$ (cf appendice 2), on peut utiliser le développement:

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp -\frac{2}{3} z^{3/2},$$

pour les deux fonctions d'Airy, et la relation (2-28) prend la forme:

$$i - \frac{r_0 a \omega_p^2}{2\sqrt{2} m c^2 \gamma_0} \frac{\left(\frac{r_0 \delta \omega}{mc}\right)^{-1/2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\delta \omega^2}} = 0$$

Cette équation ne dépend plus de la courbure indépendamment du nombre d'onde parallèle $k_{\theta} = m/r_0$ et on peut donc s'attendre à ne trouver que des solutions stables. En effet, récrivons cette équation sous la forme:

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega_D}\right)^2 + iB \left(\frac{\delta\omega}{\omega_D}\right)^{3/2} - 1 = 0 \text{ avec } B = \frac{a\omega_p^2}{2\sqrt{2}\gamma_0 c^{3/2}\omega_D^{1/2}} \left(\frac{r_0}{m}\right)^{1/2}$$

Si $B \ll 1$, les solutions sont à peu près:

$$\left(\frac{\delta\omega_n}{\omega_D}\right)^{1/2} = e^{n1\pi/2} - i \frac{B}{4} + O(B^2) \quad , \quad n \text{ entier quelconque}$$

La seule solution acceptable est celle qui vérifie $0 < \text{Arg}(\delta\omega_n^{1/2}) < 2\pi/3$, c'est-à-dire:

$$\delta\omega_1 \sim -\omega_D (1 - B/2 \dots) \text{ qui est réel.}$$

Si $B \gg 1$, il y a une solution proche de $-iB$ et trois proches de $(iB)^{-1/3}$,

$$\left(\frac{\delta\omega_n}{\omega_D}\right)^{1/2} = \frac{e^{2n1\pi/3 - i\pi/6}}{B^{1/3}} \left(1 + \frac{e^{2n1\pi/3 + i\pi/3}}{3B^{4/3}} + \dots\right) \quad , \quad n \text{ entier}$$

$$\left(\frac{\delta\omega'}{\omega_D}\right)^{1/2} = -iB \left(1 + \frac{1}{B^4} + \dots\right)$$

La seule qui satisfasse la condition $0 < \text{Arg}(\delta\omega^{1/2}) < 2\pi/3$ est:

$$\delta\omega_1 \sim -\omega_D/B^{1/3} (1 - 2/3 B^{4/3} \dots) \text{ qui est réel.}$$

Dans les deux cas on ne trouve donc pas d'instabilité dans le domaine de valeurs de $\text{Arg}(\delta\omega)$ où il est a priori possible d'en trouver. On n'a donc finalement pas d'instabilité dans ce deuxième cas où les paramètres sont tels que le faisceau n'est pas dans la zone de transition des fonctions d'Airy.

c: Validité des hypothèses et application aux conditions physiques des pulsars

Le résultat ci-dessus (expression (2-29)) a été obtenu au prix d'un certain nombre d'approximations et d'hypothèses dont il convient de tester la validité pour les valeurs des différents paramètres dans la magnétosphère des pulsars (cf appendice 3). On pourra alors tenter d'optimiser les valeurs du taux de croissance dans les limites ainsi fixées.

L'hypothèse de départ est, comme dans le cas de la polarisation horizontale en champ infini, de considérer le faisceau de plasma comme étant d'épaisseur nulle, c'est-à-dire réagissant de façon homogène à l'action d'un champ électrique vertical lui-même homogène. Il faut vérifier que ces deux hypothèses sont bien satisfaites, en cherchant un ordre de grandeur des variations que nous avons négligées. L'équation (2-26-c) qui gouverne l'évolution du champ E_z à l'intérieur du plasma peut s'écrire (en négligeant des termes de correction de courbure pour ce faisceau d'épaisseur petite):

$$\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} = - \epsilon_{\parallel}(r) E_z$$

On a supposé:

$$|\epsilon_{\parallel}| \gg \left| 1 - \frac{m^2 c^2}{\omega^2 r_0^2} \right| \quad (2-30)$$

dans la limite d'un faisceau mince.

Pour obtenir un ordre de grandeur des erreurs commises en supposant $E_z = \text{cte}$ sur toute la largeur du faisceau, examinons quelle serait sa variation si l'on pouvait prendre $\epsilon_{\parallel} = \epsilon_0 = \text{cte}$ où ϵ_0 est la valeur obtenue pour ϵ_{\parallel} lorsqu'on y reporte l'expression du décalage de fréquence $\delta\omega \sim \omega - mv_0/r_0$ calculée au paragraphe précédent:

$$\epsilon_0 \sim \frac{3^{4/3} \Gamma(2/3)^2}{2^{2/3} \pi} \frac{r_0}{am^{4/3}}$$

L'évolution de E_z dans le faisceau est alors approximativement:

$$E_z \sim e^{\pm i\omega/c} \epsilon_0^{1/2} (r-r_0)$$

$$\partial E_z / \partial r \sim \pm i\omega/c \epsilon_0^{1/2} E_z$$

Les variations de E_z restent faibles tant que:

$$\omega/c \epsilon_0^{1/2} a \ll 1$$

ce qui s'écrit en fonction des paramètres du problème:

$$\frac{3^{2/3} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi} \left(\frac{a}{r_0} \right)^{1/2} m^{1/3} \ll 1 \quad (2-31)$$

Dans toutes ces expressions on utilise le fait que $\omega r_0 / mc \sim 1$.

La condition (2-30) se réécrit en tenant compte de la valeur de $\delta\omega$ selon les

valeurs du paramètre η défini ci-dessus :

$$- \text{ pour } \eta \ll 1 : \frac{3^{4/3} \Gamma(\frac{2}{3})^2}{2^{5/3} \pi} \frac{\omega r_0}{a m^{4/3} \omega_p} \gg 1 \quad (2-32a)$$

$$- \text{ pour } \eta \gg 1 : \frac{3^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})}{2^{4/3} \sqrt{\pi}} \gg \frac{\omega_p \gamma_0^{1/2}}{\omega_p} m^{2/3} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/2} \quad (2-32b)$$

Il faut maintenant vérifier que la réponse du plasma reste à peu près homogène, ce qui revient à vérifier que les variations de la partie de ϵ_{\parallel} qui contient le pôle restent faibles en valeur relative de sorte qu'on puisse écrire comme on l'a supposé :

$$\int_{r_0-a/2}^{r_0+a/2} \epsilon_{\parallel}(r) dr \sim \frac{-1}{\gamma_0 \omega^2} \frac{(\omega - m v_0 / r_0)^2}{(\omega - m v_0 / r_0)^2 - \omega_p^2} \int_{r_0-a/2}^{r_0+a/2} \omega_p^2(r) dr$$

$$= - \frac{\langle a \omega_p^2 \rangle}{\gamma_0 \omega^2} \frac{\delta \omega^2}{\delta \omega^2 - \omega_p^2}$$

La variation relative de ϵ_{\parallel} liée à la proximité du pôle s'écrit :

$$\left| \frac{\Delta \epsilon_{\parallel}}{\epsilon_0} \right| \sim \left| \left(\omega - \frac{m v_0}{r_0} + \omega_p \right) \Delta \left(\frac{1}{\omega - \frac{m v_0}{r_0} + \omega_p} \right) \right| = \left| - \frac{1}{\delta \omega + \omega_p} \frac{m c a}{r_0^2} \right| \ll 1$$

soit en tenant compte de la valeur de $\delta \omega$:

$$- \text{ pour } \eta \ll 1 : \frac{2^{1/3} 3^{4/3} \Gamma(\frac{2}{3})^2}{\pi} \frac{\gamma_0 c^3 m^{5/3}}{r_0^3 \omega_p^2 \omega_p} \ll 1 \quad (2-33a)$$

$$- \text{ pour } \eta \gg 1 : \frac{m c a}{\omega_p r_0^2} \ll 1 \quad (2-33b)$$

Par ailleurs au cours du calcul on s'est restreint au domaine suivant :

- rayon de courbure grand devant l'échelle caractéristique des perturbations azimutales :

$$m \gg 1 \quad (2-34)$$

- faisceau très relativiste :

$$- \text{ pour } \eta \ll 1 : \frac{\omega_p r_0}{m c} \gg \frac{1}{2 \gamma_0^2} \quad (2-35a)$$

$$- \text{ pour } \eta \gg 1 : \frac{\sqrt{\pi}}{6^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})} \frac{a^{1/2} \omega_p m^{2/3}}{\gamma_0^{5/2} \omega_p r_0^{1/2}} \ll 1 \quad (2-35b)$$

et on a vu qu'on n'obtient une instabilité que lorsque le faisceau est dans le voisinage du rayon critique :

$$- \text{ pour } \eta \ll 1 : \frac{2^{1/3} r_0 \omega_p}{m^{1/3} c} \ll 1 \quad (2-36a)$$

$$- \text{ pour } \eta \gg 1 : \frac{3^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt{\pi}} \frac{r_0^{1/2} \omega_p \gamma_0^{1/2}}{a^{1/2} \omega_p} \ll 1 \quad (2-36b)$$

On se trouve comme dans le cas précédent devant un problème d'optimisation avec contraintes, avec deux cas à distinguer selon la valeur du paramètre η défini ci-dessus. En introduisant dans les relations (2-31) à (2-36) les expressions des différents paramètres en fonction des conditions physiques dans l'environnement du pulsar (distance à l'étoile r/r_* , angle d'observation ψ , fréquence du rayonnement considéré ω , épaisseur du faisceau au voisinage de l'étoile a_* et facteur relativiste γ_0) et en incluant les contraintes naturelles qui limitent ces grandeurs (cf § 2-B-C), on aboutit finalement aux deux problèmes suivants selon la valeur de η :

- Pour $\eta \ll 1$:

$$- \frac{7}{6} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{3} \log \psi - \frac{2}{3} \log \gamma_0 + \log a_* \ll - 17.38 \quad (2-37a)$$

$$\frac{7}{12} \log \frac{r}{r_*} + \frac{1}{6} \log \psi + \frac{1}{3} \log \omega + \frac{1}{2} \log a_* \ll 4.44 \quad (2-38)$$

$$- \frac{7}{6} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{3} \log \psi + \frac{1}{3} \log \omega - \log \gamma_0 + \log a_* \ll - 7.46 \quad (2-39a)$$

$$\frac{14}{3} \log \frac{r}{r_*} + \frac{4}{3} \log \psi + \frac{5}{3} \log \omega + 2 \log \gamma_0 \ll 42.61 \quad (2-40a)$$

$$- \log \frac{r}{r_*} + \log \psi - \log \omega \ll - 4.18 \quad (2-41)$$

$$3 \log \frac{r}{r_*} + \log \omega - \log \gamma_0 \ll 19.53 \quad (2-42a)$$

$$- \frac{7}{3} \log \frac{r}{r_*} - \frac{2}{3} \log \psi - \frac{1}{3} \log \omega - \log \gamma_0 \ll - 16.55 \quad (2-43a)$$

$$\log \frac{r}{r_*} \geq 0 \quad (2-23)$$

$$0 \leq \log \gamma_0 \leq 6.48 \quad (2-24)$$

$$\log \psi \ll 0 \quad (2-25)$$

$$\text{avec } \log 8\omega_1 = 36.01 - \frac{25}{6} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{3} \log \psi - \frac{2}{3} \log \omega - 2 \log \gamma_0 + \log a_* .$$

- Pour $\eta \gg 1$:

$$\frac{7}{6} \log \frac{r}{r_*} + \frac{1}{3} \log \psi + \frac{2}{3} \log \omega + \log \gamma_0 - \log a_* \ll 17.38 \quad (2-37b)$$

$$\frac{7}{12} \log \frac{r}{r_*} + \frac{1}{6} \log \psi + \frac{1}{3} \log \omega + \frac{1}{2} \log a_* \ll 4.44 \quad (2-38)$$

$$- \frac{7}{12} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{6} \log \psi + \frac{2}{3} \log \omega - \frac{1}{2} \log \gamma_0 + \frac{1}{2} \log a_* \ll 1.23 \quad (2-39b)$$

$$\frac{7}{2} \log \frac{r}{r_*} + \log \psi + \log \omega + \log \gamma_0 + \log a_* \ll 25.53 \quad (2-40b)$$

$$- \log \frac{r}{r_*} + \log \psi - \log \omega \ll -4.18 \quad (2-41)$$

$$\frac{29}{12} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{6} \log \psi + \frac{2}{3} \log \omega - \frac{3}{2} \log \gamma_0 + \frac{1}{2} \log a_* \ll 10.84 \quad (2-42b)$$

$$- \frac{7}{4} \log \frac{r}{r_*} - \frac{1}{2} \log \psi - \frac{1}{2} \log \gamma_0 - \frac{1}{2} \log a_* \ll -7.86 \quad (2-43b)$$

$$\log \frac{r}{r_*} \geq 0 \quad (2-23)$$

$$0 \leq \log \gamma_0 \leq 6.48 \quad (2-24)$$

$$\log \psi \ll 0 \quad (2-25)$$

$$\text{avec } \log \delta \omega_1 = 9.96 - \frac{29}{12} \log \frac{r}{r_*} + \frac{1}{6} \log \psi + \frac{1}{3} \log \omega - \frac{1}{2} \log \gamma_0 - \frac{1}{2} \log a_* .$$

En considérant comme au § 2-B-c que les contraintes mettant en jeu des inégalités fortes (\ll) sont satisfaites lorsqu'un demi-ordre de grandeur sépare les deux membres, on trouve dans chaque cas un point optimal:

- Pour $\eta \ll 1$:

point optimal = (3.52, - 0.5, 15.5, 6.5, - 2.1) pour $\log \delta \omega_1 = - 3.92$.

Les contraintes saturées sont celles qui correspondent aux inégalités (2-37a), (2-40a), (2-43a), (2-24-a) et (2-25). Le point trouvé correspond aux valeurs suivantes des paramètres physiques:

$$\delta \omega_1 \sim 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ rd/s}$$

$$r/r_* \sim 3.3 \cdot 10^3 ; \omega \sim 3.2 \cdot 10^{15} \text{ rd/s (soit } \lambda \sim 0.6 \mu\text{m) ;}$$

$$\gamma_0 \sim 3 \cdot 10^6 ; a_* \sim 8 \cdot 10^{-3} \text{ cm soit } a_{\text{local}} \sim 1.5 \cdot 10^3 \text{ cm .}$$

- Pour $\eta \gg 1$:

point optimal = (3.42, - 0.5, 7.96, 6.5, - 1.25) pour $\log \delta \omega_1 = 1.64$.

Les contraintes saturées sont celles qui correspondent aux inégalités (2-37b), (2-38), (2-43b), (2-24-a) et (2-25). Le point trouvé correspond aux valeurs suivantes des paramètres physiques:

$$\delta \omega_1 \sim 44 \text{ rd/s}$$

$$r/r_* \sim 2.6 \cdot 10^3 ; \omega \sim 9.1 \cdot 10^7 \text{ (soit } 15 \text{ MHz) ;}$$

$$\gamma_0 \sim 3 \cdot 10^6 ; a_* \sim 5.6 \cdot 10^{-2} \text{ cm soit } a_{\text{local}} \sim 7.4 \cdot 10^3 \text{ cm .}$$

Le cas le plus réaliste du point de vue de l'épaisseur du faisceau et de la distance à l'étoile et le plus favorable du point de vue du taux de croissance semble donc être le second. Cependant le fait que dans les deux cas la contrainte (2-37) (qui correspond justement au choix entre les deux cas $\eta \ll 1$ ou $\eta \gg 1$) soit saturée suggère de rechercher la solution optimale dans un domaine intermédiaire. D'autre part dans les deux cas la contrainte (2-43)

(qui impose qu'on soit dans la zone de transition des fonctions d'Airy, ou encore que le terme correctif de l'expression (2-29) du décalage de fréquence soit petit) est saturée. Ceci justifie d'avoir conservé ce terme correctif.

Pour explorer le domaine intermédiaire, supposons $\eta = 1$; ceci impose :

$$\frac{2^{2/3}\pi}{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2} \frac{r_0 a \omega_p^2}{\gamma_0 c^2 m^{2/3}} = 1 \quad (2-44)$$

et la solution devient :

$$\delta\omega = - \frac{\omega_p e^{-i\pi/24}}{(2+\sqrt{3})^{1/4}} - \frac{3^{1/3}\Gamma(2/3)}{2^{2/3}\Gamma(1/3)(2+\sqrt{3})} \frac{r_0 \omega_p^2}{m^{1/3}c} e^{5i\pi/12}$$

Les contraintes à satisfaire sont maintenant l'égalité (2-44) et les diverses conditions déjà rencontrées :

- $E_z \sim c^{te}$ dans le faisceau - relation (2-31) ;

$$- \epsilon_{\parallel} \text{ grand} - \frac{2^{5/3}\pi}{(2+\sqrt{3})^{1/4} 3^{4/3}\Gamma(2/3)^2} \frac{a m^{1/3} \omega_p}{c} \ll 1 \quad (2-45)$$

$$- \epsilon_{\perp} \sim c^{te} \text{ dans le faisceau} - \frac{mca}{\omega_p r_0^2} \ll 1 - \frac{e^{-i\pi/24}}{(2+\sqrt{3})^{1/4}} \sim 0.3 \quad (2-46)$$

$$- \text{rayon de courbure grand} - m \gg 1 \quad (2-34)$$

$$- \text{faisceau très relativiste} - \frac{(2+\sqrt{3})^{1/4}}{2} \frac{mc}{\omega_p r_0 \gamma_0^2} \ll 1 \quad (2-47)$$

$$- \text{voisinage du rayon critique} - \frac{2^{1/3}}{(2+\sqrt{3})^{1/4}} \frac{r_0 \omega_p}{m^{1/3}c} \ll 1 \quad (2-48)$$

Compte tenu des relations (2-23)-(2-25) qui limitent les valeurs possibles des paramètres physiques, ceci conduit au problème d'optimisation suivant :

$$\frac{7}{6} \log \frac{r}{r_*} + \frac{1}{3} \log \psi + \frac{2}{3} \log \omega + \frac{1}{2} \log \gamma_0 \ll 13.13 \quad (2-49)$$

$$\log \omega \ll 10.06 \quad (2-50)$$

$$\frac{14}{3} \log \frac{r}{r_*} + \frac{4}{3} \log \psi + \frac{5}{3} \log \omega + 2 \log \gamma_0 \ll 42.39 \quad (2-51)$$

$$- \log \frac{r}{r_*} + \log \psi - \log \omega \ll -4.18 \quad (2-41)$$

$$3 \log \frac{r}{r_*} + \log \omega - \log \gamma_0 \ll 19.39 \quad (2-52)$$

$$- \frac{7}{3} \log \frac{r}{r_*} - \frac{2}{3} \log \psi - \frac{1}{3} \log \omega - \log \gamma_0 \ll -16.4 \quad (2-53)$$

$$- \log \frac{r}{r_*} \ll 0 \quad (2-23)$$

$$0 \ll \log \gamma_0 \ll 6.48 \quad (2-24)$$

$$\log \psi \ll 0$$

(2-25)

On a posé compte tenu de l'équation (2-44):

$$\log a_* = \frac{7}{6} \log \frac{r}{r_*} + \frac{1}{3} \log \psi + \frac{2}{3} \log \omega + \log \gamma_0 - 17.38$$

et le taux de croissance est donné par: $\log \delta \omega_1 = 18.2 - 3 \log \frac{r}{r_*} - \log \gamma_0$.

Compte tenu du demi-ordre de grandeur à ajouter au premier membre des inégalités fortes (\ll) on trouve un point optimal:

$$\text{point optimal} = (3.45, -0.5, 8.08, 6.5)$$

Les contraintes saturées sont celles qui correspondent aux inégalités (2-51), (2-53), (2-24) et (2-25), c'est-à-dire $\epsilon_{\neq} \sim c^{te}$ dans le faisceau, voisinage du rayon critique, γ_0 grand et ψ grand. On obtient donc les valeurs suivantes des paramètres physiques: taux de croissance $\delta \omega_1 \sim 22$ rd/s pour:

$$r/r_* \sim 2.8 \cdot 10^3 ; \omega \sim 1.2 \cdot 10^8 \text{ rd/s (19 MHz) ;}$$

$$\gamma_0 \sim 3 \cdot 10^6 ; a_* \sim 2.3 \cdot 10^{-2} \text{ cm} - a_{\text{local}} \sim 3.4 \cdot 10^3 \text{ cm.}$$

En fin de compte on peut donc dire que ce mécanisme concerne plutôt le domaine radio dans la partie basse fréquence, pour des distances à l'étoile grandes, des énergies de faisceau fortes; la contrainte sur la largeur du faisceau est moins gênante que pour le mode d'Alfvén dans la mesure où dans la zone où se produit effectivement l'instabilité ($r/r_* \sim$ quelques 10^3 - au voisinage du cylindre lumière pour un pulsar de période 1 s) cette largeur prend localement des valeurs plus réalistes.

3: Cas d'un faisceau de plasma étendu en champ infini

A: Absence d'instabilité dans l'approximation de l'optique géométrique

a: Singularités du problème et paramètres pertinents

Les résultats du chapitre précédent s'appliquent au cas d'un faisceau mince et on a vu que les conditions de validité du calcul liées à l'épaisseur de ce faisceau dans la direction radiale sont assez contraignantes. Par ailleurs on a supposé dans tout ce qui a été fait jusqu'ici que le faisceau était à bords raides, c'est-à-dire qu'on n'a pas évalué l'effet d'un gradient de densité fini aux frontières plasma-vide. Pour s'intéresser à des configurations plus réalistes, il faut essayer de sortir du cadre de ces contraintes.

En particulier un cas limite opposé à la situation du faisceau mince est celui où les échelles de variation des grandeurs qui contrôlent la propagation des ondes dans le système sont suffisamment grandes devant les longueurs d'onde pour pouvoir utiliser l'approximation dite de l'optique géométrique ou "WKB" (Heading 1962; Nayfeh 1973) pour résoudre la partie du système (2-4) qui gouverne la polarisation qui nous intéresse ici:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{m} E_r \right) + iW E_\theta = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{m} E_\theta \right) + i \left(\frac{\omega^2 r^2}{m^2 c^2} - 1 \right) E_r = 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

On a posé $E_z = 0$, l'autre polarisation n'étant pas affectée par la présence du plasma dans la limite champ infini.

La constante diélectrique W du plasma s'écrit (cf § 2-B-c):

$$W = 1 - \frac{\omega_p^2(r)}{\gamma_0^3 \left(\omega - \frac{mv_0}{r} \right)^2}$$

où la fréquence plasma est supposée dépendre de r de façon lente, de sorte que W présente plusieurs zéros et un pôle double en $r = mv_0/\omega$. On voit donc que le fait que la densité varie lentement n'implique pas qu'il en soit de même pour W . Cependant, si les distances qui séparent chacun des zéros et des pôles sont suffisamment grandes devant la longueur d'onde, on peut utiliser des solutions approchées du système (3-1) au voisinage de ces points singuliers pour raccorder entre elles les solutions WKB valables entre ces points, de façon à satisfaire les conditions aux limites qui caractérisent le comportement radiatif instable recherché pour le système.

Commençons par localiser les points singuliers du système (3-1): outre le pôle double de W en $\omega r/mc = v_0/c$ et le zéro dans la seconde équation:

$\omega r/mc = 1$, il faut trouver les zéros de W . C'est facile dans le cas limite d'une densité constante:

$$\text{Si } \omega_p(r) = \text{cte, on a deux zéros: } \frac{\omega r_{\pm}}{mc} = \frac{v_0/c}{1 \mp \omega_p/\gamma_0^{3/2}\omega} \quad (3-2)$$

Selon la valeur de $\omega_p/\gamma_0^{3/2}$ par rapport à $|\omega|$, les zéros sont situés différemment dans le plan complexe des valeurs de $\omega r/mc$ (cf figure 3-1):

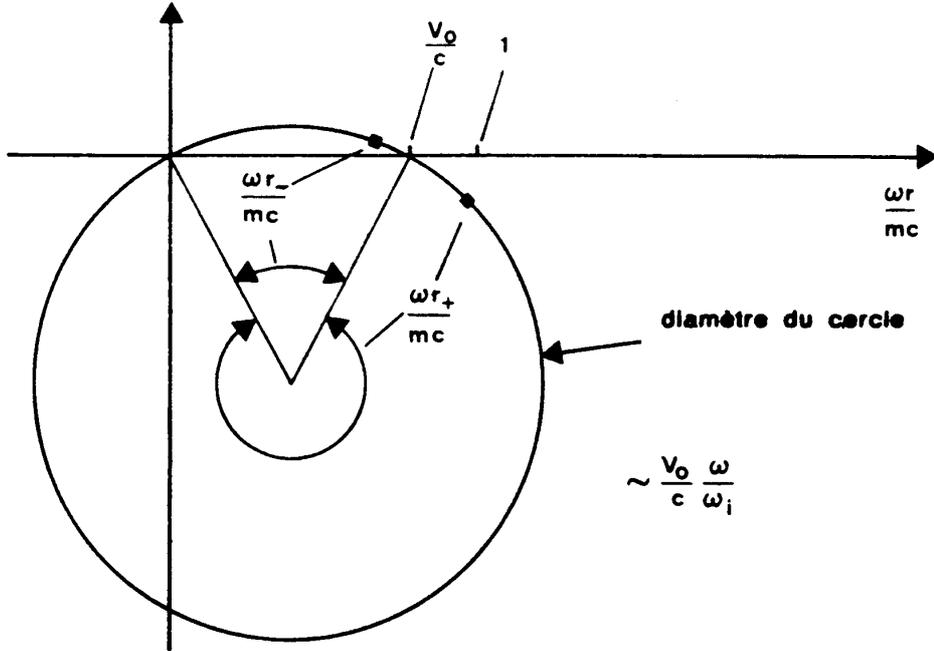


Fig. 3-1: Position des zéros et de la singularité de la constante diélectrique dans le cas homogène.

On voit que si $\omega_p/\gamma_0^{3/2}\omega \ll 1$, les zéros sont proches de v_0/c et on les approxime bien en développant l'expression (3-2) au premier ordre. Dans le cas où la densité n'est pas constante, en particulier quand $\omega_p^2(r)$ représente un faisceau mince, la situation est plus compliquée; il peut y avoir plus de deux zéros. On a recours à une résolution graphique de l'équation:

$$\frac{\omega r_{\pm}}{mc} = \frac{v_0/c}{1 \mp \omega_p(r_{\pm})/\gamma_0^{3/2}\omega}$$

pour obtenir la position approximative de ces zéros (cf figure 3-2).

Nous allons maintenant transformer et simplifier le système (3-1) de façon à faire apparaître les variables significatives du problème et à ne conserver dans la structure des équations que les caractères essentiels, c'est-à-dire les singularités et les différents comportements asymptotiques; posons:

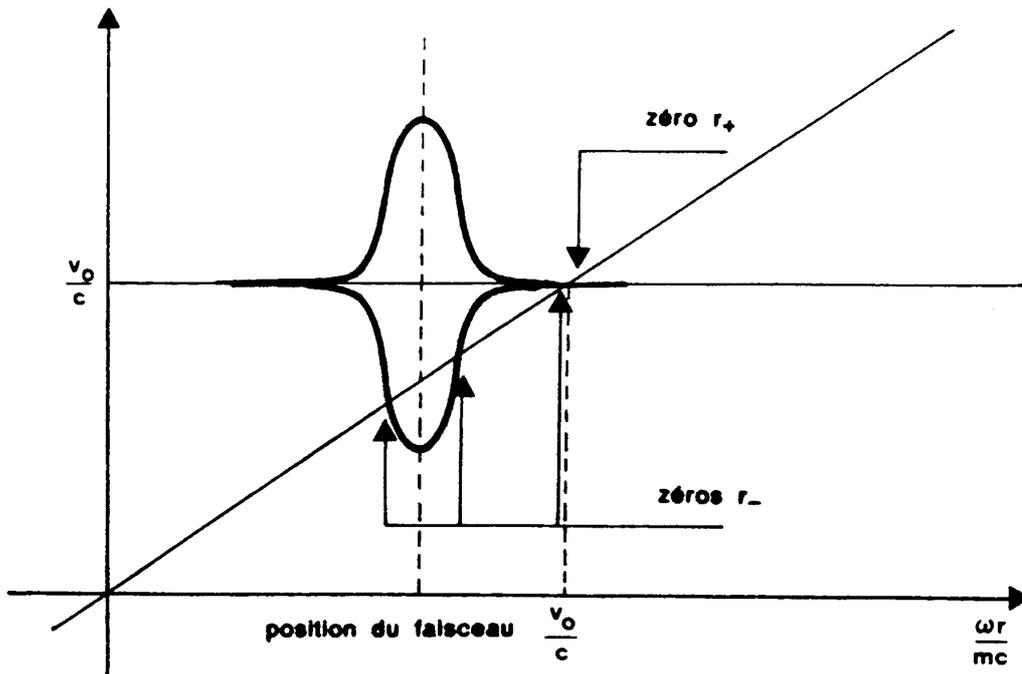


Fig. 3-2a: Position des zéros de W pour $\omega_p < \gamma_0^{3/2}\omega$.

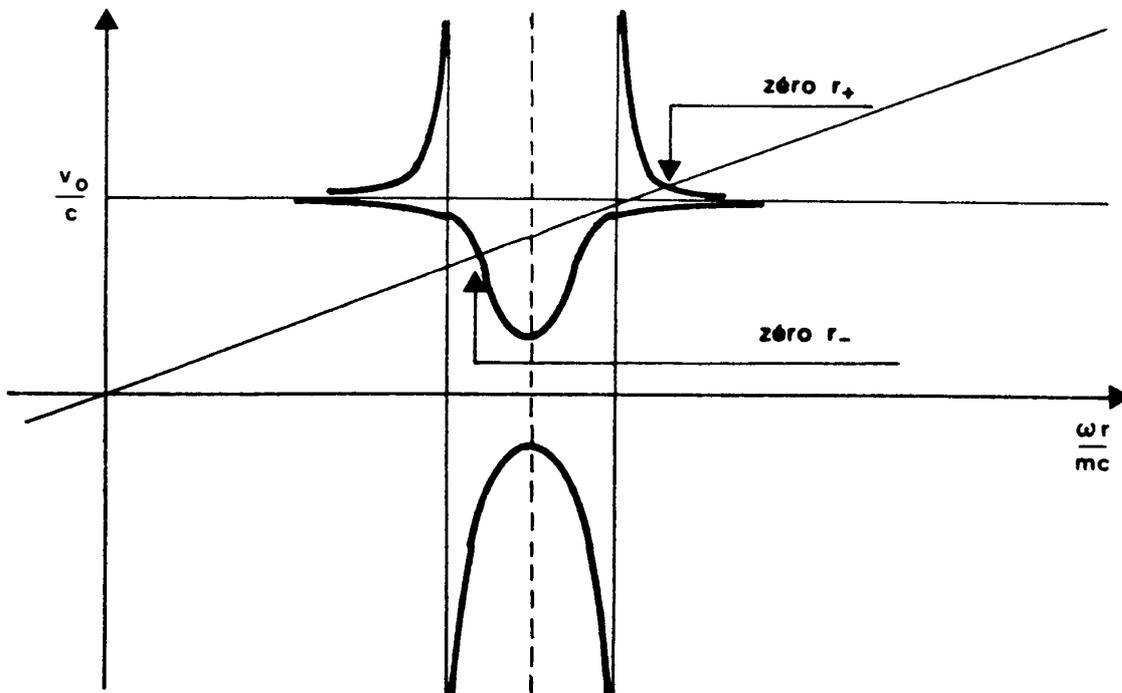


Fig. 3-2b: Position des zéros de W pour $\omega_p > \gamma_0^{3/2}\omega$.

$$X = \frac{r}{m} E_r ; Y = \frac{r}{m} E_\theta ; r = \frac{mc}{\omega_r} e^x \quad (\text{avec } \omega = \omega_r + i\omega_i)$$

$$\omega_p^2(x) = \omega_p^2 \cdot \phi(x) ; \text{ on obtient:}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dX}{dx} + im \left(1 - \frac{\omega_p^2 \phi(x)}{\gamma_0^3 (\omega - \frac{v_0}{c} \omega_r e^{-x})^2} \right) Y = 0 \\ \frac{dY}{dx} + im \left(\frac{\omega^2}{\omega_r^2} e^{2x} - 1 \right) X = 0 \end{array} \right.$$

Dans le cas où $\omega_p^2(r)$ est une constante, on prend $\phi(x) = 1$ et ω_p représente alors bien la fréquence plasma; dans le cas contraire, ω_p représente une valeur de référence à choisir.

On va plus loin en se restreignant, dans le cas où $\omega_p/\gamma_0^{3/2} \ll \omega$, au domaine (contenant les singularités) $x \ll 1$ et $\omega_i/\omega_r \ll 1$, et en linéarisant en termes des petites quantités ainsi définies:

$$e^x \sim 1 + x \dots ; \quad \omega^2/\omega_r^2 \sim 1 + 2i \omega_i/\omega_r \dots$$

Ceci permet de définir le changement de variables:

$$u = \frac{\omega_r \gamma_0^{3/2}}{\omega_p} x ; \quad \alpha = \left(\frac{\omega_p}{\omega_r \gamma_0^{3/2}} \right)^{1/2} x ; \quad \beta = Y ; \quad \delta = \frac{\omega_i \gamma_0^{3/2}}{\omega_p} ;$$

$$\lambda = m \left(\frac{\omega_p}{\omega_r \gamma_0^{3/2}} \right)^{3/2} ; \quad \phi(u) = \phi \left(\frac{\omega_p}{\omega_r \gamma_0^{3/2}} u \right) ; \quad b = \frac{\omega_r}{2\gamma_0^{1/2} \omega_p} ;$$

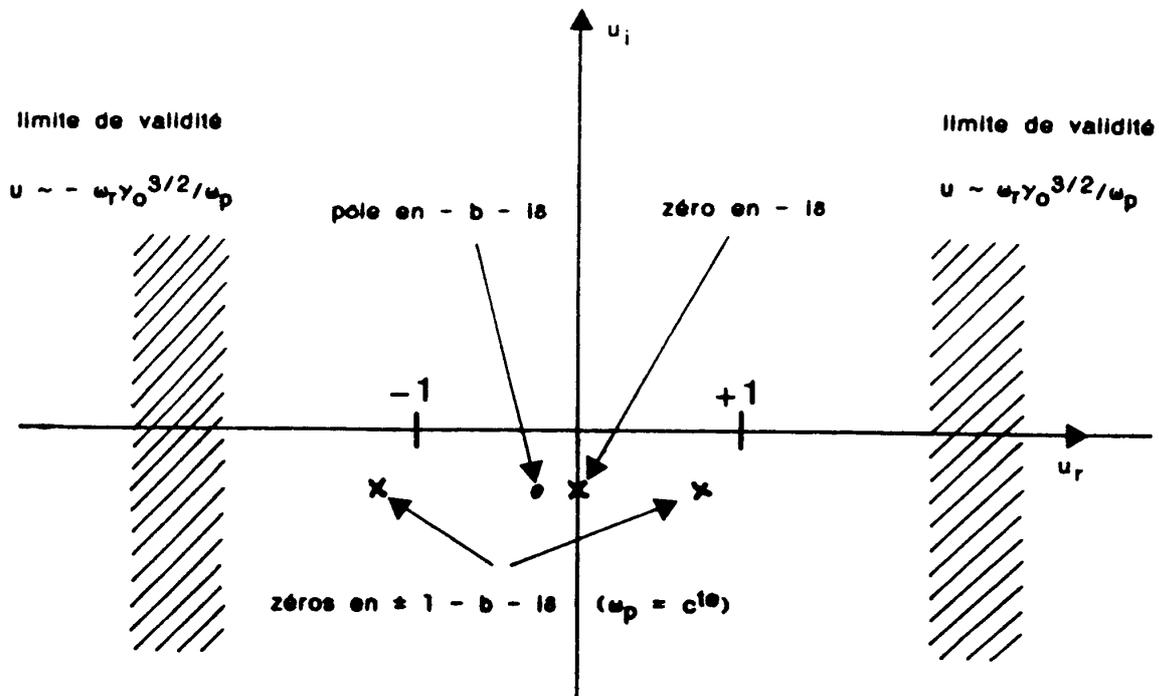


Fig. 3-3: Position des singularités en variables réduites ($\delta > 0$).

On obtient finalement:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} + i\lambda \left(1 - \frac{\phi(u)}{(18 + b + u)^2}\right) \beta = 0 \\ \frac{d\beta}{du} + 2i\lambda (18 + u) \alpha = 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

On a posé $1 - v_0/c \sim 1/2\gamma_0^2$.

Ces équations sont applicables dans le domaine: $x \ll 1$ et $\omega_1/\omega_r \ll 1$, c'est-à-dire $u \ll \omega_r \gamma_0^{3/2}/\omega_p$. En particulier dans le cas $\omega_p = \text{cte}$, pour que les zéros de W se trouvent dans la zone de validité il faut imposer la condition $|1 - b - 18| \ll \omega_r \gamma_0^{3/2}/\omega_p$, ce qui implique $\omega_p/\omega_r \gamma_0^{3/2} \ll 1$ et on retrouve ainsi la condition ci-dessus. On résume la situation sur la figure 3-3.

b: Solution dans le cadre de l'approximation WKB

On suppose pour simplifier que le faisceau est très relativiste ($b = 0$) et que la densité du plasma est constante dans la zone contenant les singularités ($\omega_p = \text{cte}$). Le système (3-3) s'écrit donc:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} + i\lambda \left(1 - \frac{1}{(1\delta + u)^2}\right) \beta = 0 \\ \frac{d\beta}{du} + 2i\lambda (1\delta + u) \alpha = 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

Pour des valeurs de λ grandes devant 1, on est dans une situation où les solutions WKB sont valables entre les points particuliers ($-1-i\delta$, $-i\delta$, $1-i\delta$). On connaît par ailleurs le comportement de la solution au voisinage de chacun de ces points en se ramenant à une équation-modèle correspondante, et on va essayer de raccorder ces différents tronçons de solution de façon à satisfaire les comportements requis pour lui grand, à savoir une solution évanescence vers la gauche (vers $r \rightarrow 0$) et une onde sortante pure vers la droite ($r \rightarrow \infty$) avec $\delta > 0$ (on recherche un taux de croissance positif). Les détails de ce raccordement sont reportés à l'appendice 4. Le résultat est illustré sur la figure 3-4.

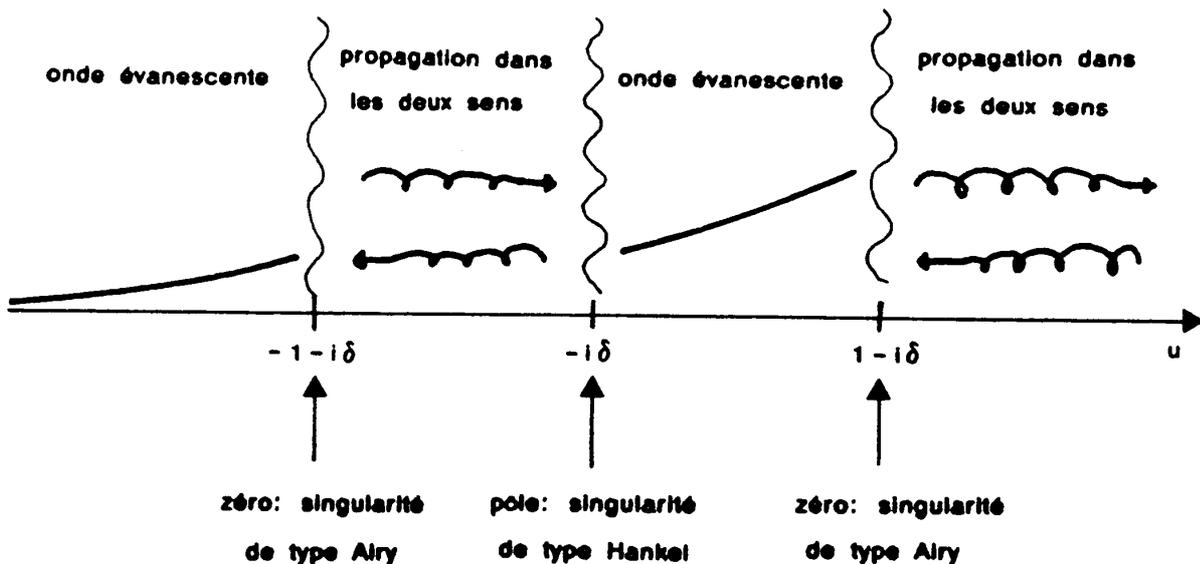


Fig. 3-4: Allure de la solution WKB dans le cas densité constante.

On voit que pour $\delta \gg 0$, c'est-à-dire lorsqu'on recherche une instabilité, on ne peut satisfaire à la fois les deux comportements asymptotiques nécessaires lorsque $u \rightarrow \pm \infty$. Si on impose une onde évanescgente à gauche, c'est l'onde rentrante qui domine à droite, ce qui signifie qu'il faut fournir de l'énergie au système. En fait, lorsque $\delta \rightarrow 0$, le comportement global du système se ramène à une simple réflexion d'une onde incidente provenant de $+\infty$.

On ne s'attend pas à ce que ces comportements soient modifiés significativement lorsqu'on considère un profil de densité non plus strictement constant, mais dont les variations soient encore suffisamment lentes pour que l'approximation de l'optique géométrique s'applique entre les points singuliers; tout au plus cela changera-t-il les amplitudes des différents tronçons de solutions obtenus dans l'appendice 4.

En conclusion, il n'est donc pas possible d'obtenir une onde sortante pure à droite dans le cadre de la théorie WKB, du moins avec les hypothèses faites jusqu'ici, c'est-à-dire en particulier l'approximation de faible densité $\omega_p \ll \gamma_0^{3/2} \omega$ qui fixe une disposition particulière des singularités du problème (c'est la situation représentée sur la figure 3-2a). Ce n'est donc que dans une situation non WKB, impliquant des longueurs caractéristiques de variation de la densité inférieures à la longueur d'onde, que l'on doit s'attendre à retrouver l'instabilité de courbure. Le domaine non WKB se sépare lui-même en deux sous-domaines: d'une part une région fortement non WKB pour $\lambda \ll 1$ dans laquelle on peut obtenir par développement en puissances de λ une description analytique du comportement du système (cf § 3-B) et d'autre part un régime intermédiaire pour $\lambda \sim 1$ dans lequel on ne dispose pas de techniques permettant de décrire analytiquement la situation, ce qui nous conduira à nous tourner vers une résolution numérique du système 3-3 (cf § 3-C). Cette approche numérique permettra au passage de vérifier les résultats des cas traités analytiquement, le cas faisceau mince, le cas WKB et le cas fortement non WKB.

B: Solution dans le cas fortement non WKB

a: Principe du calcul et solution en gradient raide pour un faisceau ultrarelativiste

On obtient une solution approximative du système (3-3) pour λ petit en faisant la remarque suivante: la région de l'axe réel des valeurs de u dans laquelle le terme contenant le pôle dans la première équation du système prend des valeurs non négligeables devant 1 est un voisinage de $-b$ (0 dans le cas ultrarelativiste) de largeur indépendante de λ . Pour λ suffisamment petit, la deuxième équation se réduit à $\beta \sim C^{te}$ dans cette région et la première équation s'intègre alors facilement. En dehors de cette région, le système se réduit à une équation d'Airy et il ne reste plus qu'à raccorder ces différentes parties de la solution.

Rentrons un peu plus dans les détails du calcul. Le calcul WKB ayant montré la nécessité d'avoir des gradients de densité importants, on se place tout d'abord dans le cas le plus simple d'un faisceau de plasma cylindrique à bord raide décrit par le profil de densité suivant:

$$\phi(u) = 1 \text{ pour } u \leq u_0 \text{ et } \phi(u) = 0 \text{ pour } u > u_0$$

et on prend $b = 0$ (faisceau très relativiste).

Il faut déterminer de façon optimale la région ($u_1 \leq u \leq u_0$) évoquée ci-dessus où seules les variations de α vont être prises en compte; il reste pour cela à fixer sa borne gauche u_1 de la façon suivante: u_1 doit être telle que le système se ramène à une équation d'Airy pour $u < u_1$, c'est-à-dire qu'on impose $|i\delta + u|^2 \gg 1$ pour $u < u_1$, soit:

$$|i\delta + u_1|^2 \gg 1$$

u_1 doit également être choisie de façon à ce que β soit à peu près constant entre u_1 et u_0 , ou encore entre u_1 et 0 car on s'attend à trouver $u_0 \sim 0$. On impose donc l'inégalité suivante à la variation relative de β entre u_1 et 0:

$$1/\alpha \Delta[\lambda^{1/3}\beta] \sim \lambda^{4/3}(i\delta + u_1)^2 \ll 1$$

Ces deux conditions sont simultanément bien vérifiées pour $u_1 \sim -\lambda^{-1/3}$ (on suppose, et on vérifiera, que $\delta \ll u_1$) et ceci n'est évidemment possible que si $\lambda \ll 1$, ce qui nous conduit à un développement en puissances de λ . On a choisi d'exprimer la variation de $\lambda^{1/3}\beta$ car c'est cette quantité qui est du même ordre que α en puissances de λ .

Compte tenu de ce choix pour u_1 , le système prend les expressions suivantes dans les trois régions ainsi définies:

- Pour $u < u_1$: le système se ramène à des termes en $1/u_1^2$ près à une équation d'Airy dont la solution évanescence vers $u \rightarrow -\infty$ est:

$$\begin{cases} \alpha_-(u) = \alpha_- (Ai(-(2\lambda^2)^{1/3}(18+u)) + O(\lambda^{2/3})) \\ i(\lambda/2)^{1/3}\beta_-(u) = \alpha_- (Ai'(-(2\lambda^2)^{1/3}(18+u)) + O(\lambda^{2/3})) \end{cases}$$

On obtient donc le champ en u_1 à l'ordre le plus bas :

$$\begin{cases} \alpha_-(u_1) = \alpha_- (Ai(0) + O(\lambda^{1/3})) \\ i(\lambda/2)^{1/3}\beta_-(u_1) = \alpha_- (Ai'(0) + O(\lambda^{2/3})) \end{cases} \quad (3-5)$$

- Pour $u_1 < u < u_0$: on a $\beta \sim c^{te}$ et on obtient pour α :

$$\begin{aligned} \alpha(u_0) &= \alpha_-(u_1) - (2\lambda^2)^{1/3} \int_{u_1}^{u_0} \left(1 - \frac{1}{(18+z)^2}\right) dz \left(i\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/3}\beta_-(u_1) + O(\lambda^{2/3})\right) \\ &= \alpha_-(u_1) \\ &\quad - (2\lambda^2)^{1/3} \left[u_0 + \frac{1}{\lambda^{1/3}} + \frac{1}{18+u_0} - \frac{1}{18-\lambda^{-1/3}}\right] \left(i\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/3}\beta_-(u_1) + O(\lambda^{2/3})\right) \end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs des différentes quantités entre les crochets, ceci s'écrit à l'ordre le plus bas en puissances de λ :

$$\alpha(u_0) = \alpha_-(u_1) - \frac{(2\lambda^2)^{1/3}}{18+u_0} i\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/3}\beta_-(u_1) + O(\lambda^{1/3}) \quad (3-6)$$

- Pour $u > u_0$: le système est strictement équivalent à une équation d'Airy et la solution propagative sortante pour $u \rightarrow +\infty$ est :

$$\begin{cases} \alpha_+(u) = \alpha_+ Ai(e^{-i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}(18+u)) \\ i(\lambda/2)^{1/3}\beta_+(u) = \alpha_+ e^{2i\pi/3} Ai'(e^{-i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}(18+u)) \end{cases}$$

On obtient donc la valeur du champ en u_0 à l'ordre le plus bas :

$$\begin{cases} \alpha(u_0) \sim \alpha_+ Ai(0) \\ i(\lambda/2)^{1/3}\beta(u_0) \sim \alpha_+ e^{2i\pi/3} Ai'(0) \end{cases} \quad (3-7)$$

On peut maintenant raccorder les trois régions au moyen des relations (3-5)-(3-7); ceci fournit l'équation de dispersion suivante à l'ordre le plus bas en puissances de $\lambda^{1/3}$:

$$18 + u_0 = - e^{-i\pi/6} \frac{3^{1/3}\Gamma(2/3)^2}{2^{2/3}\pi} \lambda^{2/3} \quad (3-8)$$

On obtient donc une instabilité dans la limite λ petit pour un cylindre de plasma ultrarelativiste à bord raide. Nous reportons au paragraphe suivant et à l'appendice 5 la généralisation de ce résultat au cas d'une longueur de gradient finie et d'un faisceau moins énergétique.

b: Effets d'un gradient de densité fini à la frontière plasma-vide et de l'énergie du faisceau

Dans le cas général où on veut autoriser une longueur de gradient de densité au bord du plasma finie et un faisceau plus ou moins énergétique, on reprend le raisonnement ci-dessus en conservant $b \neq 0$ dans le système (3-3) et en adoptant un profil de densité de la forme:

$$\phi(u) = 1 \text{ pour } u \leq u_0 - \sigma ;$$

$$\phi(u) = (u_0 + \sigma - u)/2\sigma \text{ pour } u_0 - \sigma < u \leq u_0 + \sigma ;$$

$$\phi(u) = 0 \text{ pour } u > u_0 + \sigma .$$

On va de nouveau découper le domaine de variation de u en trois parties: deux régions extrêmes où le système est équivalent à une équation d'Airy et une région centrale de largeur $u_0 + \sigma - u_1 \sim \lambda^{-1/3}$ comme précédemment, mais située cette fois-ci au voisinage de $u_0 \sim -b$ et non plus 0; en effet on s'attend à ce que le faisceau reste globalement juste en-deçà du rayon de résonance avec les ondes électromagnétiques situé en $u = -b$. La situation est représentée sur la figure 3-5.

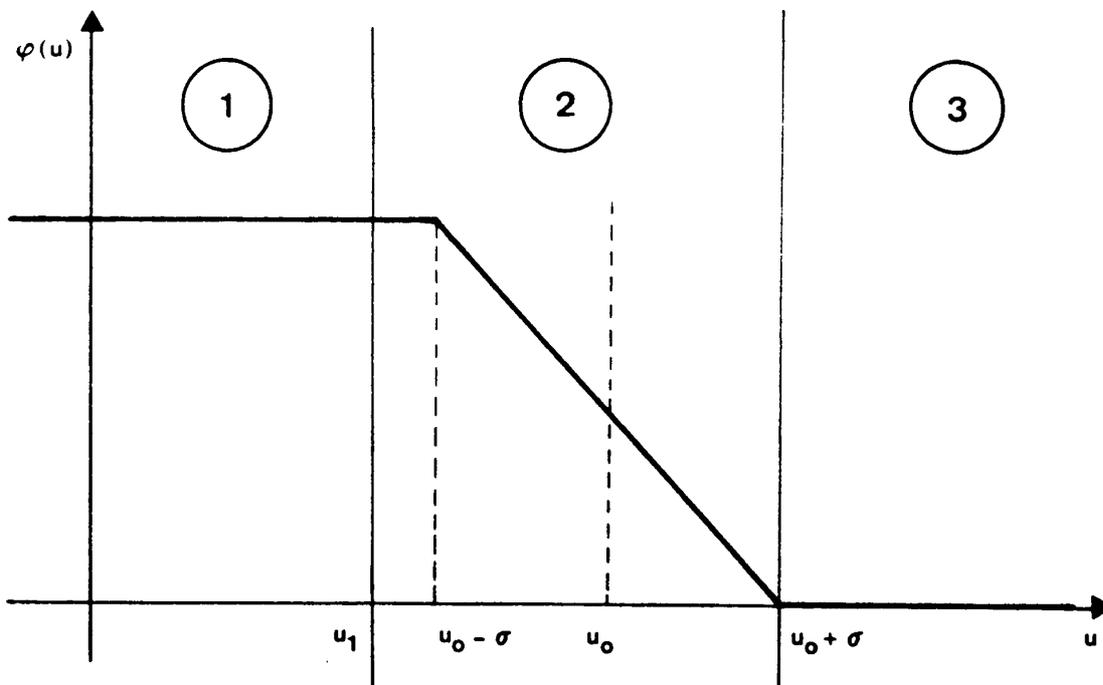


Fig. 3-5: Profil de densité du faisceau avec longueur de gradient finie.

Le fait de limiter la largeur de la région centrale à $\lambda^{-1/3}$ impose une limitation semblable à la longueur de gradient σ . On verra que cette

limitation est inconsistante dans la mesure où le taux de croissance s'annule déjà pour une valeur de σ très inférieure.

Le détail du calcul, qui reprend et généralise le raisonnement du § 3-B-a ci-dessus, est reporté à l'appendice 5. On obtient pour le décalage de fréquence complexe une expression dont la relation (3-8) constitue la limite pour $\sigma, b \rightarrow 0$:

$$u_0 + b + i\sigma = A\lambda^{2/3} g(\lambda^{2/3}b) F\left(\frac{\lambda^{-2/3}\sigma}{Ag(\lambda^{2/3}b)}\right) \quad (3-9)$$

On a posé $A = \frac{6^{1/3}\Gamma(2/3)^2}{\pi} \sim 1.06$ et les fonctions F et g sont définies par :

$F: C \rightarrow C$

$$z = \frac{-z}{\text{th}(2ze^{i\pi/6})}$$

et $g: R \rightarrow C$

$$x = \frac{\text{Ai}'(2^{1/3}x)\text{Ai}'(e^{2i\pi/3}2^{1/3}x)}{\text{Ai}'(0)^2}$$

De ces expressions on peut déduire deux effets :

- Effet du gradient de densité à $\lambda^{2/3}b \ll 1$ (faisceau très relativiste) : le

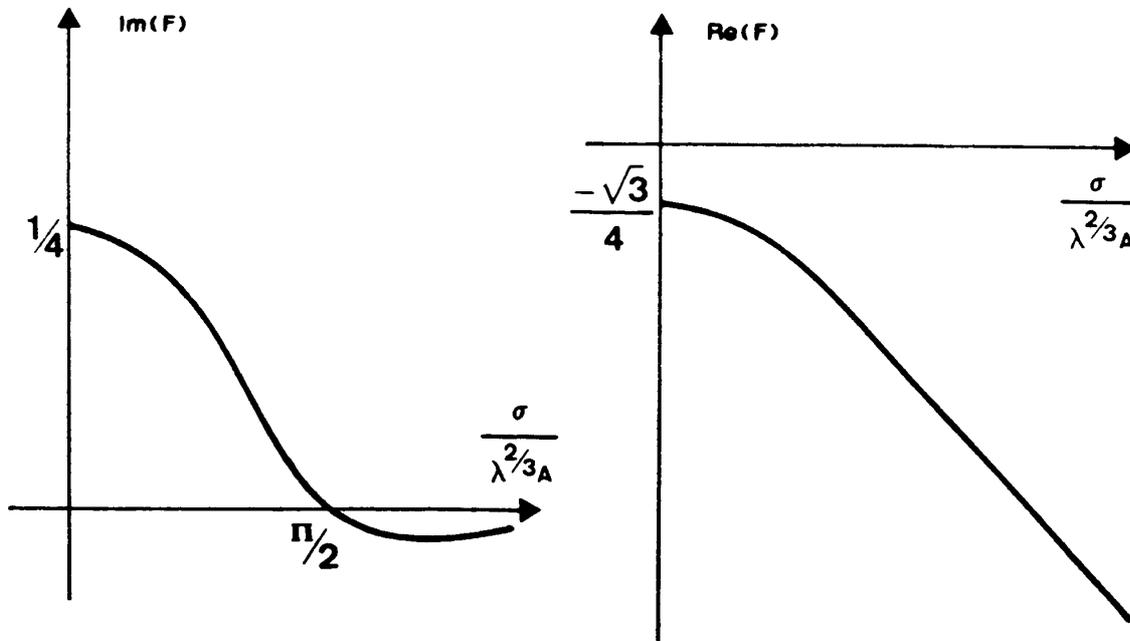


Fig. 3-6: Décalage complexe de fréquence en fonction de la longueur de gradient dans le cas ultrarelativiste.

facteur correctif $g(\lambda^{2/3}b)$ est alors proche de 1 et on déduit du comportement de F pour un argument réel (cf figure 3-6) l'effet d'une longueur de gradient finie: pour $\lambda^{2/3}b \rightarrow 0$ le taux de croissance s'annule pour une longueur de gradient maximale:

$$\sigma_{\max} = \frac{\pi}{2} A \lambda^{2/3}$$

Le décalage réel de fréquence correspond alors à:

$$u_0(\sigma_{\max}, b = 0) \sim -1.65 \lambda^{2/3} \sim -\sigma_{\max}$$

Le taux de croissance maximal lorsque $\lambda^{-2/3}\sigma \rightarrow 0$ est donné par la formule (3-8). Le taux de croissance redevient positif pour $k\pi < \sigma/A\lambda^{2/3} < k\pi + \pi/2$ mais il reste alors exponentiellement petit, de sorte que l'intervalle $k = 0$ est le seul pratiquement intéressant.

- Effet du terme relativiste pour σ quelconque: compte tenu de l'allure de la fonction g , on voit (cf appendice 5) que le taux de croissance δ ne s'annule qu'asymptotiquement pour $\lambda^{2/3}b \rightarrow \infty$, et ce quelle que soit la valeur de σ . On peut cependant estimer un ordre de grandeur de la valeur de b qui produit une diminution significative de δ en utilisant le développement de $g(x)$ au voisinage de zéro. Ceci fournit la valeur caractéristique suivante:

$$b_{\max} \sim \frac{A^{1/2} \lambda^{1/4}}{2\lambda^{2/3}}$$

Le comportement du facteur correctif ($g(x) \sim 1 + O(x^2)$) montre que l'expression limite (3-8) reste valable sur une fraction importante de l'intervalle autorisé pour les valeurs de $\lambda^{2/3}b$.

C: Le régime intermédiaire: simulations numériques

a: Généralités

Le but fixé est toujours d'examiner le comportement à la fois radiatif et instable du système (3-3), c'est-à-dire de chercher s'il existe des valeurs de δ , λ , b pour un profil de densité $\phi(u)$ donné avec $\delta > 0$, telles que la solution ait un comportement évanescents à gauche ($-u \gg 1$) et propagatif sortant à droite ($u \gg 1$). Remarquons que ces pseudo-conditions aux limites sont équivalentes, compte tenu de $\delta > 0$, à la condition mathématiquement plus orthodoxe d'une solution qui ne diverge pas à l'infini; l'infini n'est pas accessible numériquement, mais on peut identifier à partir de leur comportement pour $|u| \gg 1$ des solutions dont on peut affirmer qu'elles convergent. Les détails de la mise en oeuvre de la résolution numérique du système (3-3) sont reportés à l'appendice 6.

On fixe les conditions aux limites à gauche en utilisant les fonctions WKB qui ont le comportement requis dans cette région; pour $|u| \gg 1$, le système s'écrit approximativement:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} + i\lambda \beta = 0 \\ \frac{d\beta}{du} + 2i\lambda u \alpha = 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

On se retrouve avec une simple équation d'Airy:

$$\frac{d^2\alpha}{du^2} = -2\lambda^2 u \alpha \quad (3-11)$$

On a bien des solutions à variation exponentielle pour $u < 0$, on choisit celle des deux solutions indépendantes qui est évanescence vers la gauche (l'autre solution est alors exponentiellement croissante):

$$\begin{cases} \alpha \sim \alpha_0 (-u)^{-1/4} \lambda^{-1/6} \exp - (\lambda/3 (-2u)^{3/2}) \\ \beta \sim i (-2u)^{1/2} \alpha \end{cases}$$

Ceci permet de choisir les conditions initiales en $u = u_0 < 0$:

$$\alpha = \alpha_0 ; \beta = i (-2u_0)^{1/2} \alpha_0 .$$

On résoud alors le système et on examine le comportement de α ou β pour u grand et positif; α et β étant complexes, il suffit de tracer $\text{Im}(\alpha)$ en fonction de $\text{Re}(\alpha)$ dans un plan et de chercher à obtenir une courbe asymptotiquement équivalente à une exponentielle de la forme $r(u)e^{+il(u)}$ où $l(u)$ est une fonction croissante de u , c'est-à-dire une spirale qui s'enroule dans le sens direct (cf figure 3-7). On teste différentes valeurs des paramètres (δ, λ) jusqu'à obtenir une allure circulaire caractéristique d'une onde sortante pure (une allure elliptique indiquant la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie d'amplitudes différentes). Ce critère

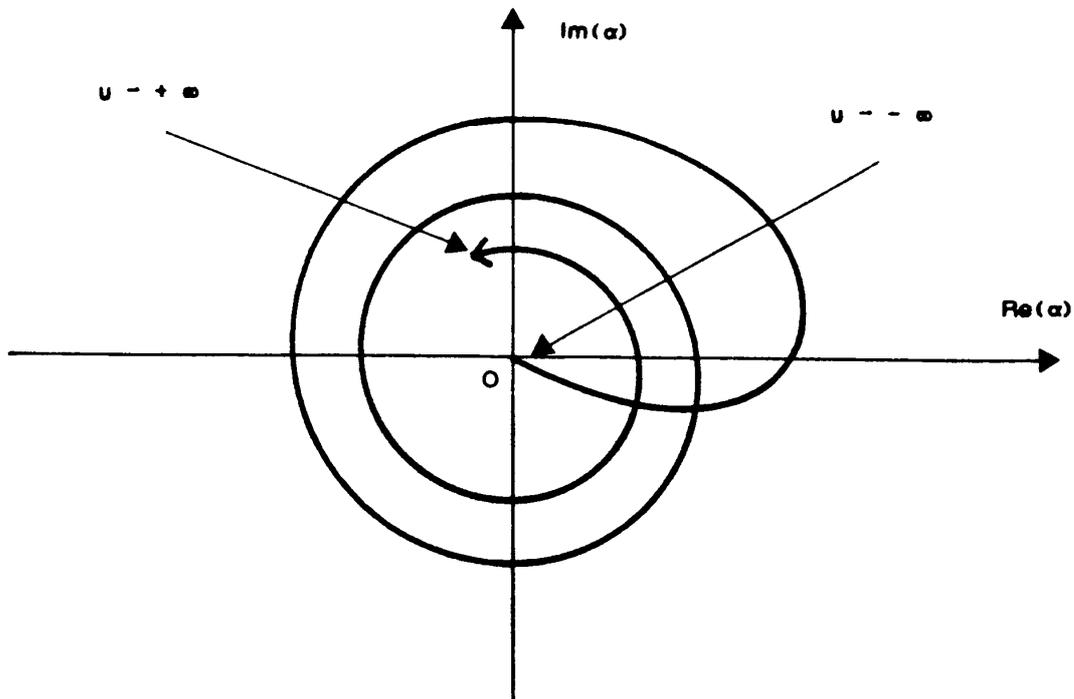


Fig. 3-7: Allure de la solution recherchée pour $u \gg 1$.

peut être quantifié en examinant le rapport β/α pour $u \gg 1$; en effet, on cherche à obtenir dans cette région la solution qui se propage vers l'extérieur, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \alpha \sim \alpha_1 u^{-1/4} \lambda^{-1/6} \exp +i(\lambda/3 (2u)^{3/2}) \\ \beta \sim - (2u)^{1/2} \alpha \end{cases}$$

On cherchera donc à annuler dans cette région la quantité $\beta + (2u)^{1/2}\alpha$. Ce critère permet d'ajuster les paramètres du système de façon mécanique par une procédure numérique itérative de "contrôle optimal" (cf appendice 6).

b: Confirmation numérique des résultats du cas faisceau mince

Afin de tester le programme défini dans le paragraphe précédent, on va tout d'abord essayer de retrouver les résultats analytiques du cas faisceau mince. Pour avoir une meilleure précision numérique on prendra un profil de densité gaussien très piqué et non rectangulaire; ceci ne devrait avoir aucune influence sur le résultat puisque seule l'intégrale de la densité à travers le faisceau est significative dans la limite faisceau mince (cf § 2-B-c). On a donc:

$$\phi(u) = \exp - \frac{(u - u_0)^2}{\sigma^2}$$

et pour la valeur de l'intégrale de ϕ à travers le faisceau:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) du = \sigma\sqrt{\pi}$$

Ceci est donc équivalent à un faisceau de largeur réduite $\Delta u = \sigma\sqrt{\pi}$, de fréquence plasma réduite unité. La correspondance des largeurs est donc:

$$\frac{a}{r_0} = \frac{\omega_p}{\omega_r \gamma_0^{3/2}} \sigma\sqrt{\pi}$$

Le calcul du chapitre 2-B donne une valeur du décalage de fréquence:

$$\delta\omega = \frac{2^{2/3}}{3^{1/3} \Gamma(1/3)} m^{1/3} \left(\frac{\pi a \omega_p^2}{r_0 \gamma_0^3} \right)^{1/2} e^{i11\pi/12}$$

En reportant les unités réduites définies plus haut, ceci correspond à:

$$\begin{aligned} i\delta + u_0 &= \frac{2^{2/3} \pi^{3/4}}{3^{1/3} \Gamma(1/3)} \lambda^{1/3} \sigma^{1/2} e^{i11\pi/12} & (3-12) \\ &\sim (-0.936 + 0.251 i) \lambda^{1/3} \sigma^{1/2} \end{aligned}$$

Mais cette valeur n'est utilisable que si on satisfait aux approximations du calcul (cf § 2-B-c) qui s'écrivent dans les deux systèmes respectivement:

$$\frac{2a^2 \omega_p^2}{\gamma_0^3 c^2} \frac{mc}{r_0 \delta\omega} \ll 1 \quad - \quad |i\delta + u_0| \gg 2\pi\sigma^2 \lambda^2 \quad (3-13)$$

$$m \gg 1 \quad - \quad \lambda \gg \left(\frac{\omega_p}{\omega_r \gamma_0^{3/2}} \right)^{3/2} \quad (3-14)$$

$$\frac{1}{2\gamma_0^2} \ll \frac{r_0 \delta\omega}{mc} \quad - \quad |i\delta + u_0| \gg \frac{\omega_r}{2\omega_p \gamma_0^{1/2}} \quad (3-15)$$

$$(2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta\omega}{mc} \ll 1 \quad - \quad (2\lambda^2)^{1/3} |i\delta + u_0| \quad (3-16)$$

$$\frac{2a}{r_0} \ll \frac{r_0 \delta\omega}{mc} \quad - \quad 2\sqrt{\pi}\sigma \ll |i\delta + u_0| \quad (3-17)$$

Ces conditions se divisent en conditions "intrinsèques": (3-13), (3-16), (3-17) et en conditions sur les grandeurs physiques à vérifier a posteriori:

(3-14), (3-15). Pour ce qui concerne les simulations en unités réduites, il suffit de vérifier les conditions intrinsèques pour une valeur de λ qu'on suppose proche de l'unité puisque c'est le domaine non WKB qui nous intéressera dans la suite. On impose donc: $2\sqrt{\pi}\sigma, 2\pi\sigma^2 \ll |i\delta + u_0| \ll 2^{-1/3}$. Ceci nous conduit compte tenu de l'expression de $i\delta + u_0$ à une borne supérieure pour la largeur du faisceau:

$$\sigma \ll 0.07 \text{ pour } \lambda \sim 1$$

Numériquement, on trouve en tâtonnant une solution à onde sortante pure à droite pour les valeurs suivantes:

$$\sigma = 0.02 \text{ et } \lambda = 0.8$$

La valeur du décalage de fréquence calculée comme ci-dessus est:

$$i\delta + u_0 = -0.123 + i 0.033$$

La valeur trouvée par simulation numérique est:

$$i\delta + u_0 = -0.125 + i 0.0315$$

L'accord entre calcul et simulation est très raisonnable compte tenu de la façon dont sont satisfaites les conditions de validité (à un demi-ordre de grandeur près). Un résultat typique de simulation numérique montrant l'aspect satisfaisant (au sens de ce qui est décrit au paragraphe précédent et figure 3-7) de la solution avec les chiffres ci-dessus est donné sur la figure 3-8.

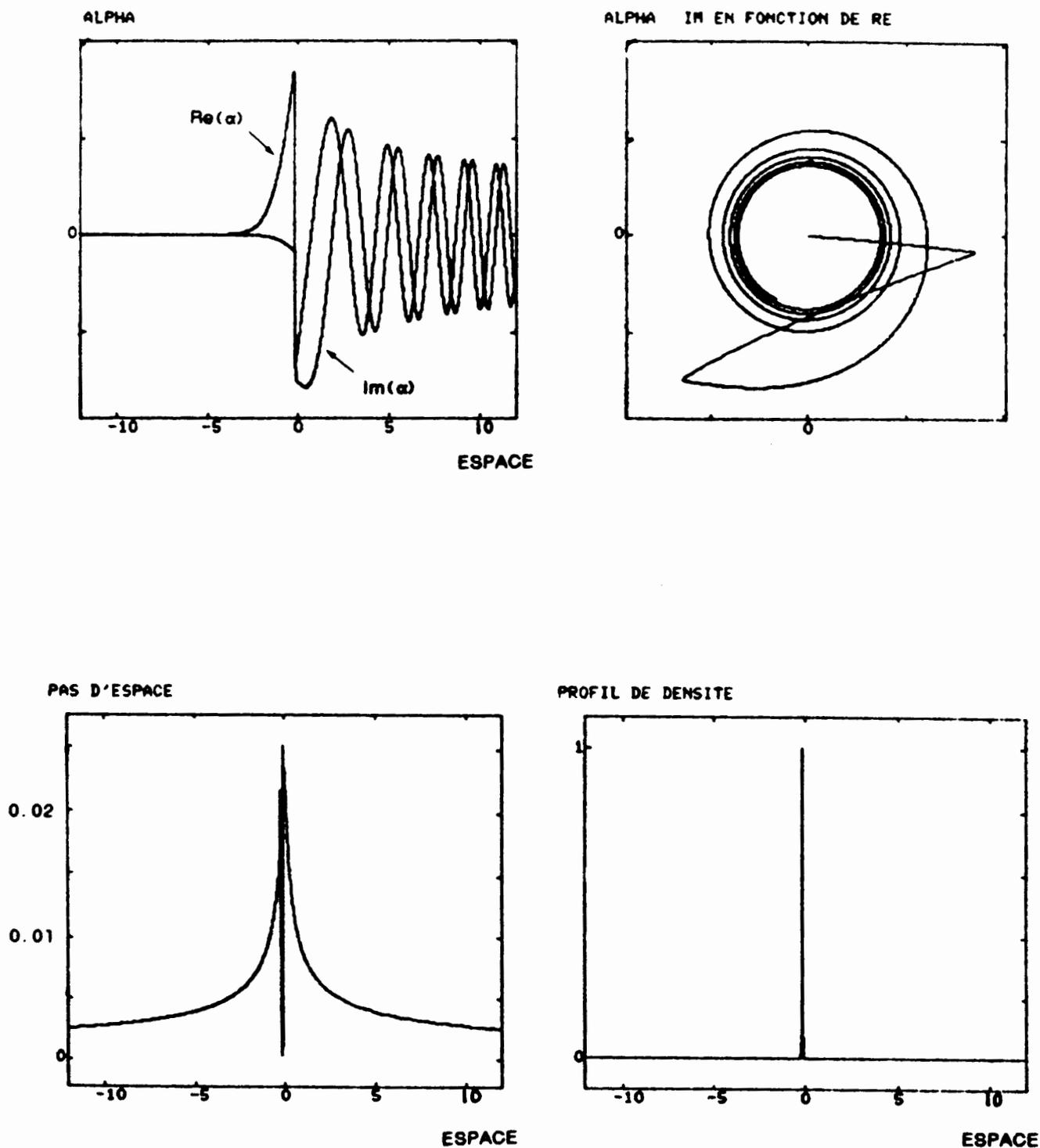


Fig. 3-8: Simulation numérique du cas faisceau mince.

$$\lambda = 0.8 ; \sigma = 0.02 ; \delta = 0.0315 ; u_0 = -0.125$$

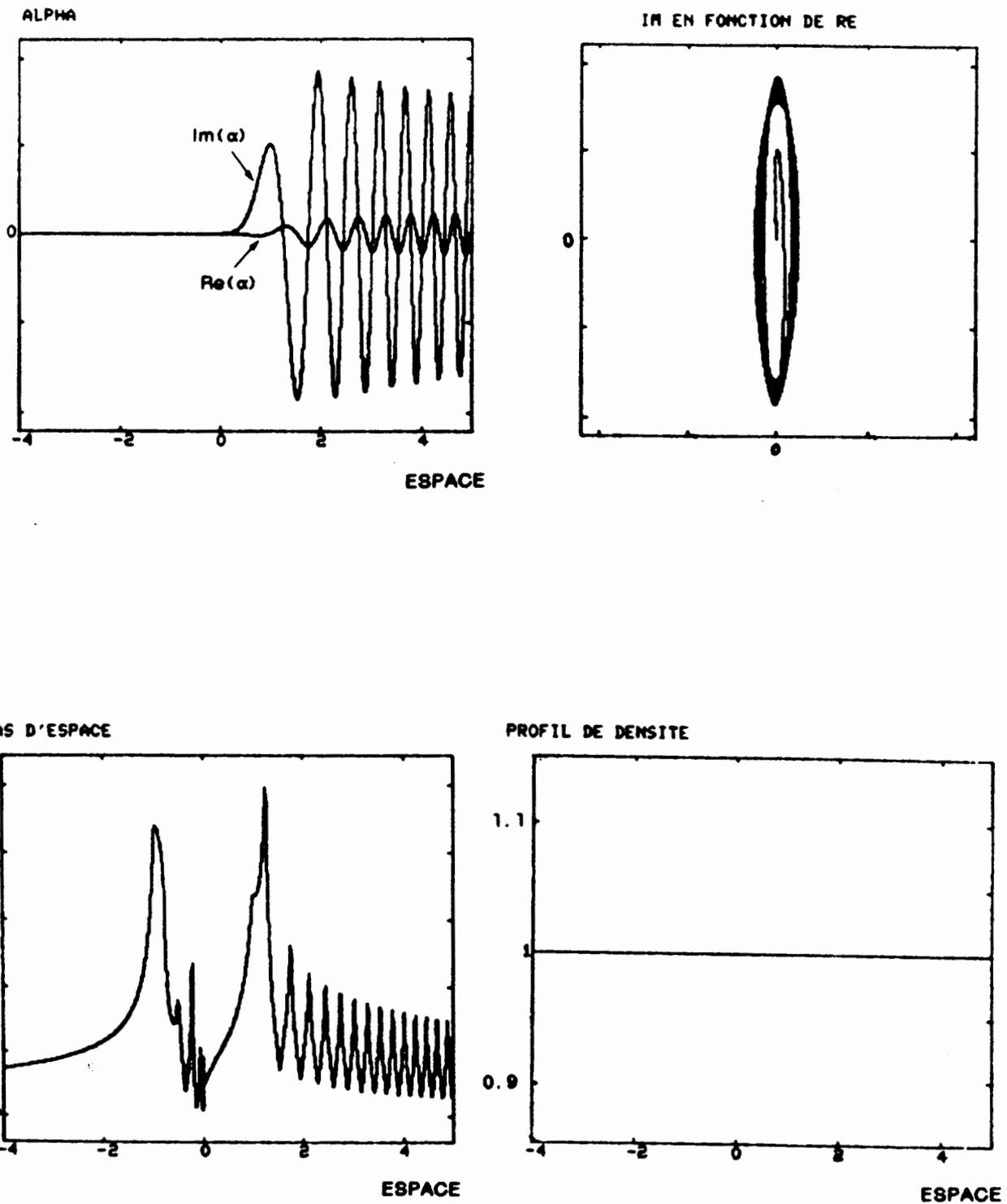


Fig. 3-9: Simulation numérique du cas faisceau large (WKB).
 $\lambda = 5$; $\delta = 0.01$; densité constante

c: Etude des différentes contraintes et confirmation numérique des résultats du cas fortement non WKB

- Effet de l'élargissement du faisceau

Dans le cas d'un faisceau très large ($\phi(u) = 1 = \text{cte}$), les tâtonnements numériques directs ne donnent pas de solution satisfaisant les conditions imposées (onde sortante pure à droite), et ce quelles que soient les valeurs utilisées pour λ , c'est-à-dire que l'on soit ou non dans le cadre de l'approximation WKB. Ceci permet tout de même d'illustrer numériquement la solution WKB obtenue au § 3-A-b (cf figure 3-9).

Dans le cas non-WKB, on se rabat donc sur une autre méthode, à savoir l'élargissement progressif du faisceau à partir de la limite mince du paragraphe précédent tout en suivant la valeur de $i\delta + u_0$ correspondante.

On fixe $\lambda = 0.8$, $b = 0$, $\phi(u_0) = 1$ avec le profil de densité défini au § 3-C-b et on augmente la largeur σ en ajustant par itérations les valeurs de u_0 et δ pour retrouver la condition onde sortante à droite, c'est-à-dire reproduire l'allure de la figure 3-7. Comme on garde $\phi(u_0) = 1$, l'intégrale de ϕ à travers le faisceau croît proportionnellement à σ et on s'attend dans un premier temps à voir δ et u_0 croître comme $\sigma^{1/2}$ (cf équation (3-12)). Les

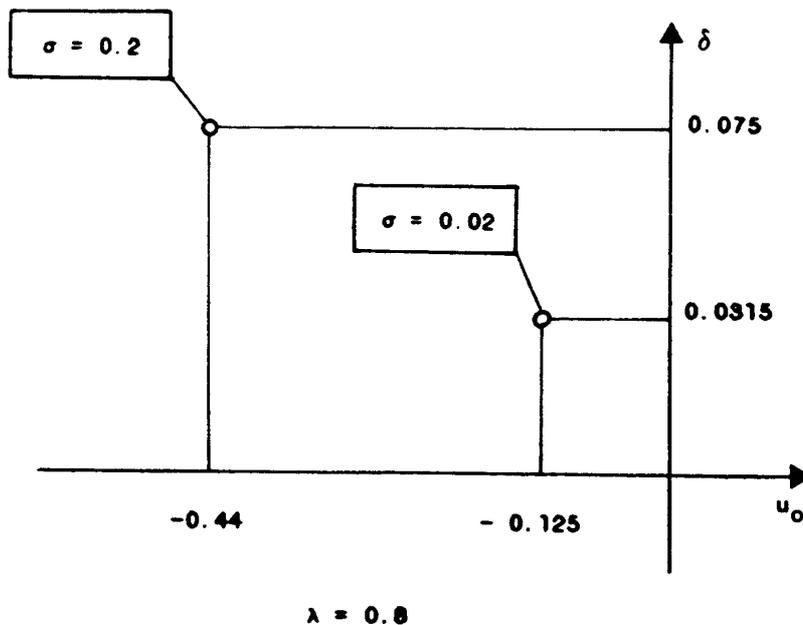


Fig. 3-10: Elargissement du faisceau; évolution du point solution pour un profil gaussien.

points de simulation obtenus pour $b = 0$, $\lambda = 0.8$ sont rassemblés sur la figure 3-10. On trace des petits cercles et non des points pour indiquer (sans la quantifier) l'imprécision liée au procédé itératif, à l'utilisation des approximations WKB dans les zones où $|\lambda^{2/3}u| \gg 1$ et aux incertitudes du calcul numérique.

Mais cette façon d'élargir le faisceau implique en fait deux effets différents qui ne jouent pas le même rôle, comme nous allons le vérifier: l'élargissement proprement dit et l'adoucissement des gradients de densité aux frontières du faisceau. Essayons de découpler ces deux effets.

Pour garder des gradients fixes sur les bords lorsqu'on élargit le faisceau, on adopte une autre forme pour le profil de densité:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= 0 \text{ pour } u < u_0 - L - \sigma \\ \phi(u) &= (u - u_0 + L + \sigma)/2\sigma \text{ pour } u_0 - L - \sigma < u < u_0 - L + \sigma \\ \phi(u) &= 1 \text{ pour } u_0 - L + \sigma < u < u_0 - \sigma \\ \phi(u) &= (u_0 + \sigma - u)/2\sigma \text{ pour } u_0 - \sigma < u < u_0 + \sigma \\ \phi(u) &= 0 \text{ pour } u > u_0 + \sigma . \end{aligned} \quad (3-18a)$$

On a pour ce profil "trapézoïdal": $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u) du = L$.

u_0 représente donc la position du bord extérieur d'un faisceau de plasma de largeur réduite L .

Cette forme du profil de densité est la plus simple possible qui permette de rendre compte d'une longueur de gradient fixe sur les frontières plasma-vide. Cependant, les discontinuités de la pente, en particulier au point $u = u_0 + \sigma$, donnent lieu pour σ et λ grands à un comportement particulier (que nous examinons indépendamment à l'appendice 8) qui n'est plus directement lié à la valeur de la longueur de gradient. Afin de rester dans le cadre de profils de densité plus "physiques", nous utiliserons la forme suivante:

$$\phi(u) = \frac{1}{2} \left(\text{th} \frac{u - u_0 + L}{\sigma} - \text{th} \frac{u - u_0}{\sigma} \right) \quad (3-18b)$$

Le profil (3-18b) présente les mêmes caractéristiques générales que (3-18a) puisque son intégrale vaut encore L , avec une longueur de gradient caractéristique σ , mais les "angles" ont été adoucis de façon à éliminer les effets autres que ceux de la longueur de gradient. Notons que les deux profils deviennent de toute façon équivalents pour $\sigma \ll 1$.

Les résultats de simulation obtenus pour $\sigma = 0.02$ (gradient fort à la frontière), $b = 0$, $\lambda = 0.8$ en fonction de L sont rassemblés sur la figure 3-12. On donne dans la figure 3-11 l'allure d'un résultat typique dans le cas d'un faisceau élargi ($L = 1$ avec le profil de densité (3-18)).

On obtient donc le maximum du taux de croissance avec bords raides ($\sigma = 0.02 \ll u_0 \sim 0.3$) pour un cylindre de plasma plein, dont la frontière se situe plus

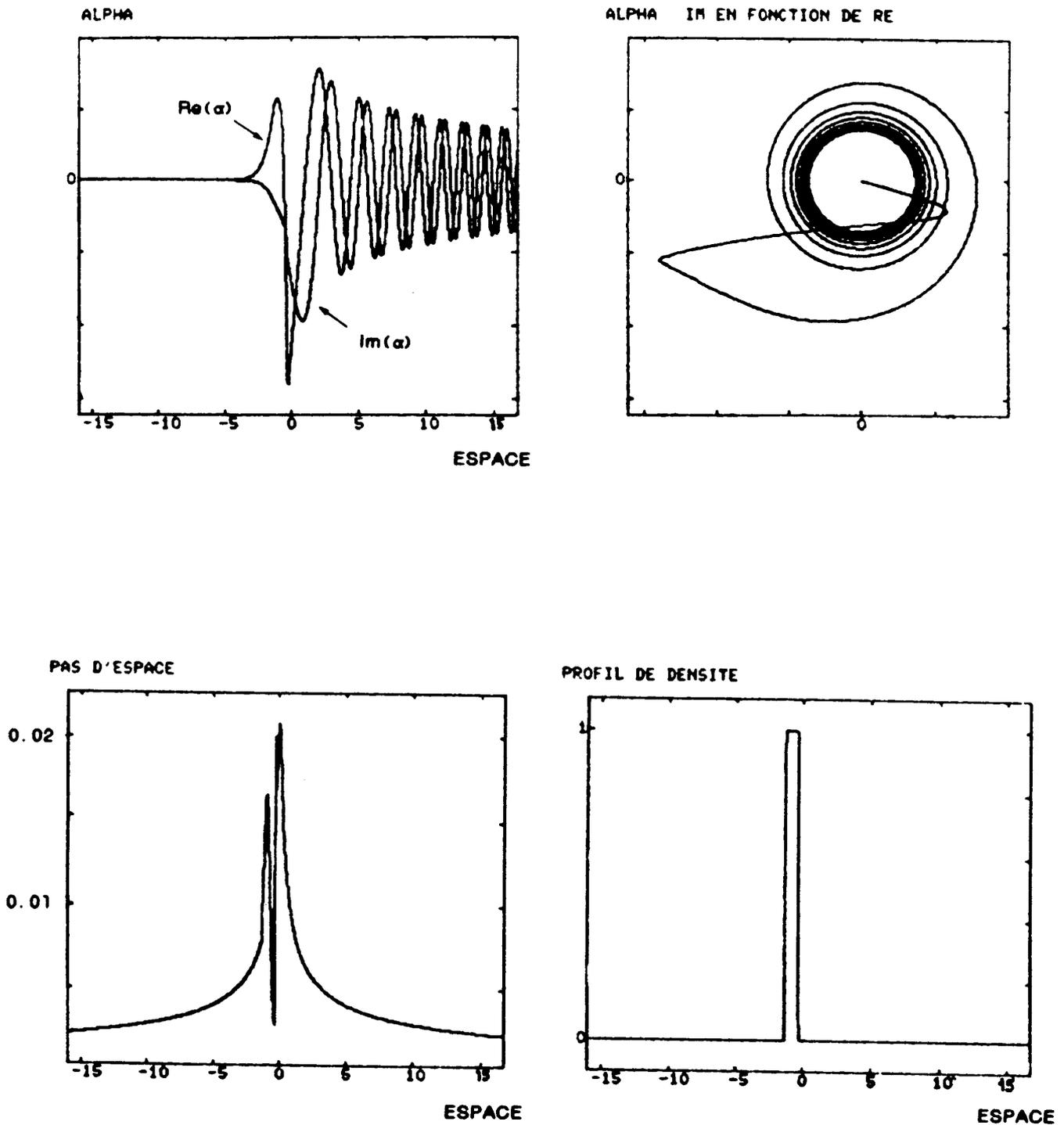


Fig. 3-11: Simulation numérique du cas faisceau large (non WKB).

$$\lambda = 0.8 ; \sigma = 0.02 ; L = 1. ; \delta = 0.094 ; u_{\lambda} = -0.296$$

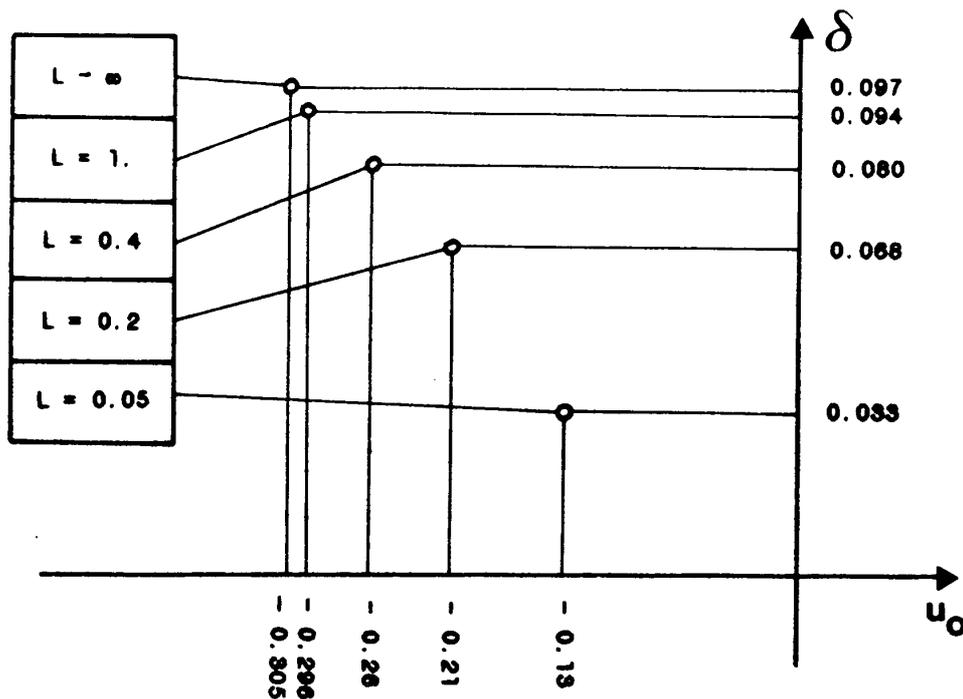


Fig. 3-12: Elargissement du faisceau avec bords raides.

en retrait du rayon de résonance avec les ondes électromagnétiques que pour un faisceau plus mince avec la même valeur de λ .

- Effet du gradient de densité et de la longueur d'onde

On a relâché la contrainte portant sur la largeur du faisceau proprement dite; on va maintenant s'intéresser au gradient de densité à la frontière dans le cas du cylindre de plasma plein, pour lequel on a le plus fort taux de croissance en gradient raide. On reprend donc les itérations en augmentant la valeur de σ dans l'expression du profil de densité (3-18b) avec $L = \infty$. Les résultats obtenus sont rassemblés sur la figure 3-13 pour différentes valeurs de λ . On voit donc que la raideur du gradient au bord du cylindre de plasma est un paramètre critique pour ce profil (plus physique que le profil "anguleux" (3-18a)). On ne peut dépasser une longueur caractéristique réduite σ de l'ordre de 0.25 quelle que soit la valeur de λ . Ceci implique, en particulier, qu'il ne peut y avoir instabilité pour une frontière très large ($\phi \sim \text{cte}$), même en régime non WKB (c'est-à-dire pour des valeurs de λ de l'ordre de 1).

Par ailleurs, les résultats du § 3-B concernant l'existence d'une longueur de gradient limite $\sigma_{\max} = \pi\lambda^2/3/2$ en régime fortement non WKB suggèrent

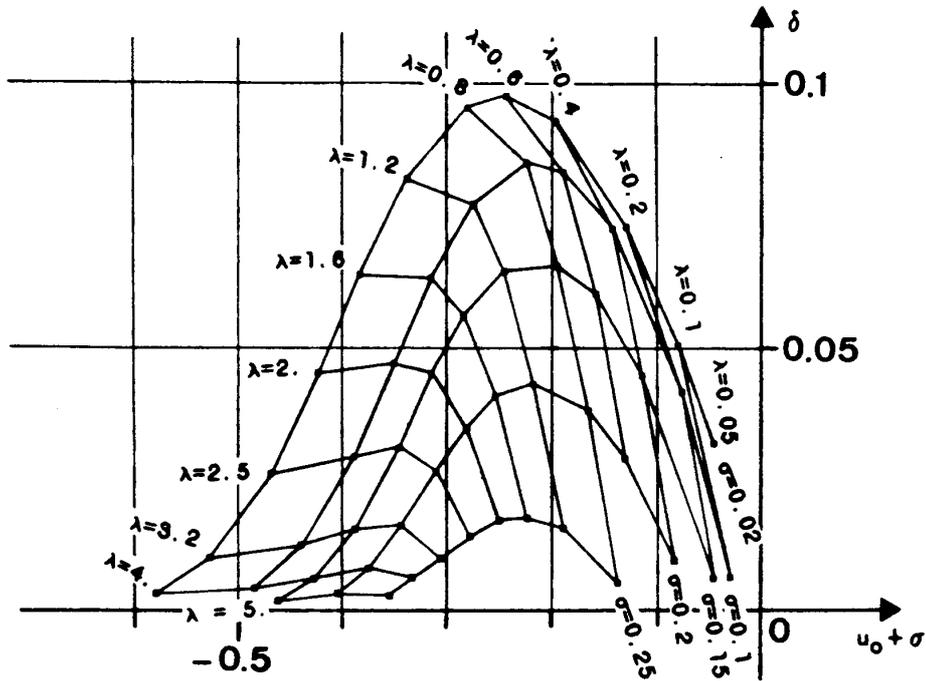


Fig. 3-13: Effet du gradient au bord et de λ pour un cylindre plein avec le profil adouci (3-18b).

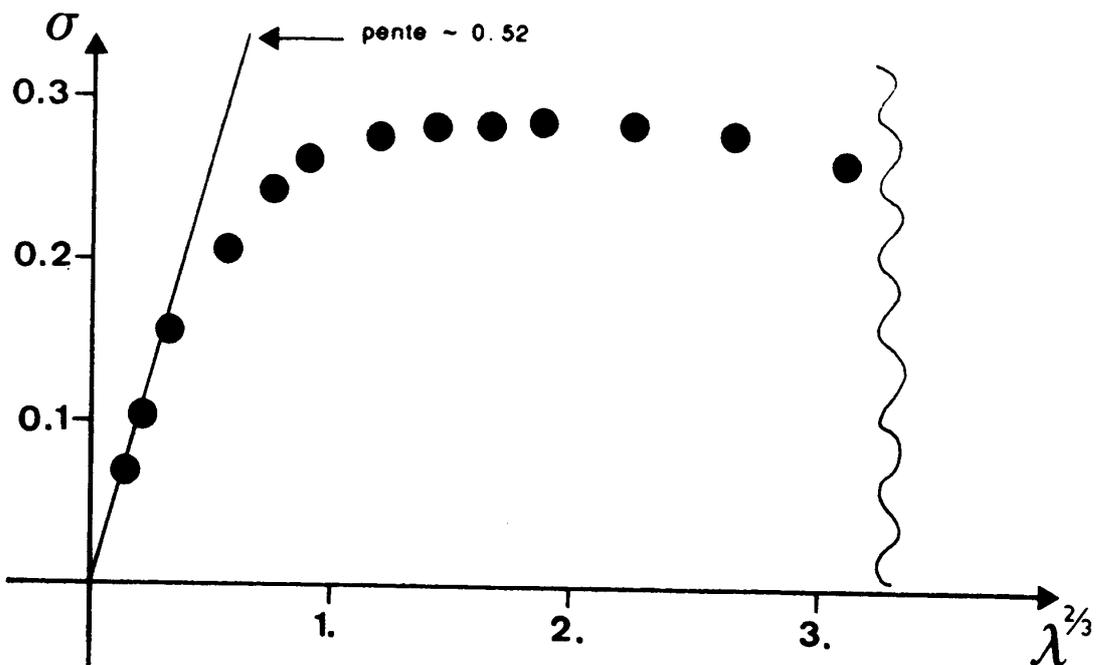


Fig. 3-14: Longueur de gradient maximale en fonction de λ .

d'étudier numériquement la dépendance de σ_{\max} en fonction de λ quelconque pour $b = 0$. Ceci peut se déduire des résultats de la figure 3-13 et de quelques points de simulation supplémentaires. On obtient la courbe de la figure 3-14.

On observe bien une croissance initiale de σ_{\max} en $\lambda^{2/3}$ pour λ petit, mais le facteur de proportionnalité est plus petit que celui qu'on obtenait analytiquement avec le profil anguleux (3-18a). Il faut voir là un effet des détails du profil. Au-delà du plateau observé pour $1 < \lambda < 3$, σ_{\max} décroît très rapidement, et le manque de précision des simulations numériques fait qu'on ne peut tracer le comportement dans cette région.

Pour de grandes valeurs de $\lambda^{2/3}$, les deux profils (3-18a) et (3-18b) ont des comportements très différents: si le taux de croissance s'annule rapidement dans le cas du profil "doux" 3-18b, dans l'autre cas on observe la persistance de l'instabilité dans une zone où les paramètres ont le comportement suivant:

$$u_0, \sigma \sim O(\lambda^{2/3}), \delta \sim O(\lambda^{-2/3}).$$

Ceci correspond à un effet particulier lié à la décroissance linéaire de la densité au voisinage du bord extérieur $u = u_0 + \sigma$, que nous étudions séparément dans l'appendice 8. Les profils de densité que l'on s'attend à rencontrer dans la nature étant plus probablement du type de (3-18b), nous nous en tiendrons aux résultats de la figure 3-13 pour ce qui est de l'investigation des mécanismes de rayonnement des pulsars.

On a vu analytiquement que le système était stable dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique, c'est-à-dire pour des longueurs d'onde dans le vide petites devant les échelles caractéristiques du système, ou en unités réduites pour des valeurs de $\lambda^{2/3}\sigma$ grandes devant 1 (pour le profil doux (3-18b)). On trouve numériquement que l'instabilité disparaît dès que λ devient supérieur à une valeur de l'ordre de quelques unités ($\lambda = 5$ sur la figure 3-13 pour le profil (3-18b), mais la valeur précise dépend du détail du profil de densité; cf appendice 8). Ceci nous montre que le régime WKB est stable même dans le cas d'un système constitué de deux parties à variation lente séparées par un bord raide (le calcul analytique du § 3-A concernait le cas où les gradients de densité étaient faibles dans tout le système).

- Influence de l'énergie des particules du faisceau

Les résultats analytiques dans le cas faisceau mince avaient été obtenus dans la limite d'un faisceau suffisamment énergétique (condition (2-15) sur γ_0 du § 2-B-c). Testons cette hypothèse dans le cas du cylindre de plasma plein en faisant varier le paramètre b du système (3-3). On rassemble sur la figure 3-15 les résultats de cette étude, pour les valeurs suivantes des autres paramètres: $\lambda = 0.8$, $\sigma = 0.1$, $L = \infty$ dans le profil "physique" 3-18b.

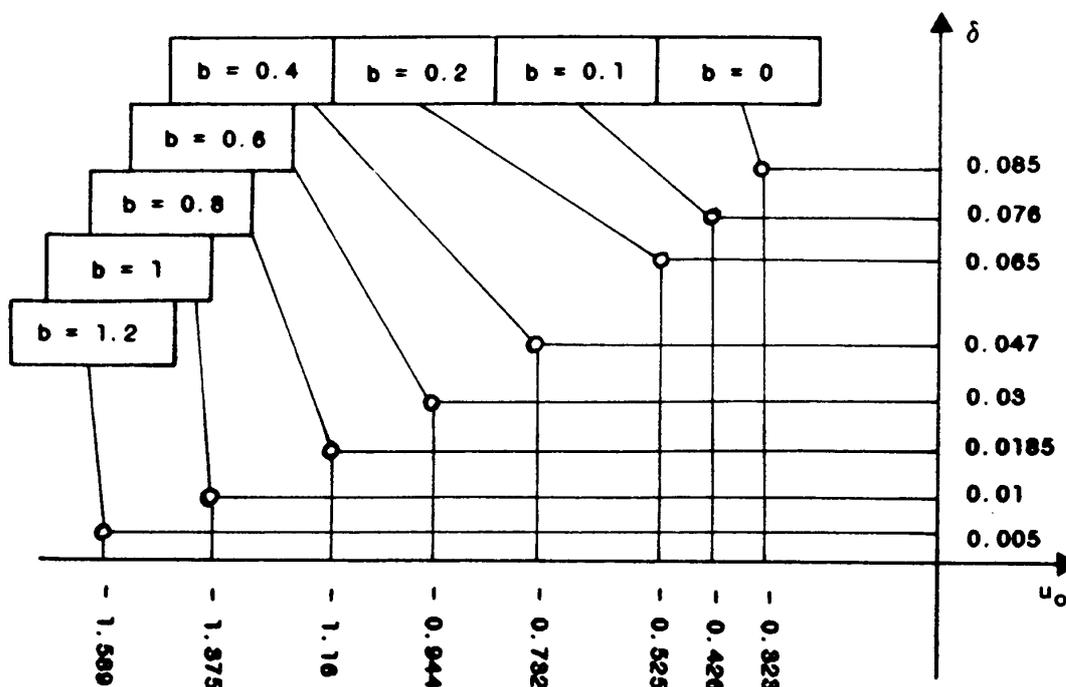


Fig. 3-15: Effet du facteur relativiste pour un cylindre plein.

On voit donc que l'énergie du faisceau n'est pas à première vue un paramètre très critique en régime intermédiaire puisque le taux de croissance reste positif quelle que soit la valeur de b ; elle sera limitée par d'autres contraintes, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

D: Retour aux chiffres physiques

a: Résultats en variables dimensionnelles; lois d'échelle

Nous sommes sortis du cadre contraignant des conditions de validité du cas faisceau mince, et nous avons même découvert que cette hypothèse n'était pas nécessaire, puisqu'un cylindre de plasma s'étendant jusqu'à un rayon proche du rayon de résonance $r_c = mc/\omega_r$ est instable. La véritable limitation du domaine d'existence de l'instabilité de courbure s'avère être son caractère fondamentalement non WKB, qui se traduit par une limitation nette (cf figures 3-13 et 3-14, et § 3-B dans le régime fortement non WKB) sur la raideur du gradient de densité à la frontière du plasma ($\sigma \leq \sigma_{\max}(\lambda)$) et sur le nombre d'onde azimutal réduit, c'est-à-dire en définitive sur la fréquence à rayon de résonance donné ($\lambda \leq 5$ approximativement).

Supposons donnés le rayon de courbure $r_0 \sim mc/\omega_r$ et la fréquence plasma corrigée des effets de variation de masse relativiste $\omega_p/\gamma_0^{3/2}$, et explicitons ces deux limitations en revenant aux variables physiques:

- Régime intermédiaire ($\lambda = 0.8$):

$$\sigma \leq 0.25 \quad - \quad \frac{L_g}{r_0} \leq \frac{\omega_p}{4\gamma_0^{3/2}\omega_r} \quad (3-19a)$$

- Régime fortement non WKB ($\lambda \ll 1$):

$$\sigma \leq \frac{\pi}{2} \lambda^{2/3} \quad - \quad \frac{L_g}{r_0} \leq 1.7 \left(\frac{r_0}{\omega_r^2 c} \right)^{2/3} \frac{\omega_p^2}{\gamma_0^3} \quad (3-19b)$$

où L_g est la longueur caractéristique de gradient correspondant au profil de densité (3-18).

$$\lambda \leq 5 \quad - \quad \omega_r \geq \frac{r_0^2}{25c^2} \frac{\omega_p^3}{\gamma_0^{9/2}} = \omega_{r\min}$$

Pour des valeurs de $\lambda \ll 5$, un gradient de densité au bord suffisamment raide et un faisceau suffisamment énergétique, le taux de croissance est alors de l'ordre de (cf § 3-B):

$$\omega_1 \sim 0.25 \left(\frac{r_0^2}{c^2 \omega_r} \right)^{1/3} \frac{\omega_p^2}{\gamma_0^3}$$

Il admet par ailleurs une valeur maximale:

$$\omega_{i\max} \sim 0.1 \frac{\omega_p}{\gamma_0^{3/2}} \quad (3-20)$$

pour une fréquence:

$$\omega_{r0} \sim 1.6 \frac{r_0^2}{c^2} \frac{\omega_p^3}{\gamma_0^{9/2}} \sim 40 \omega_{r\min}$$

On peut alors représenter approximativement l'allure du taux de croissance

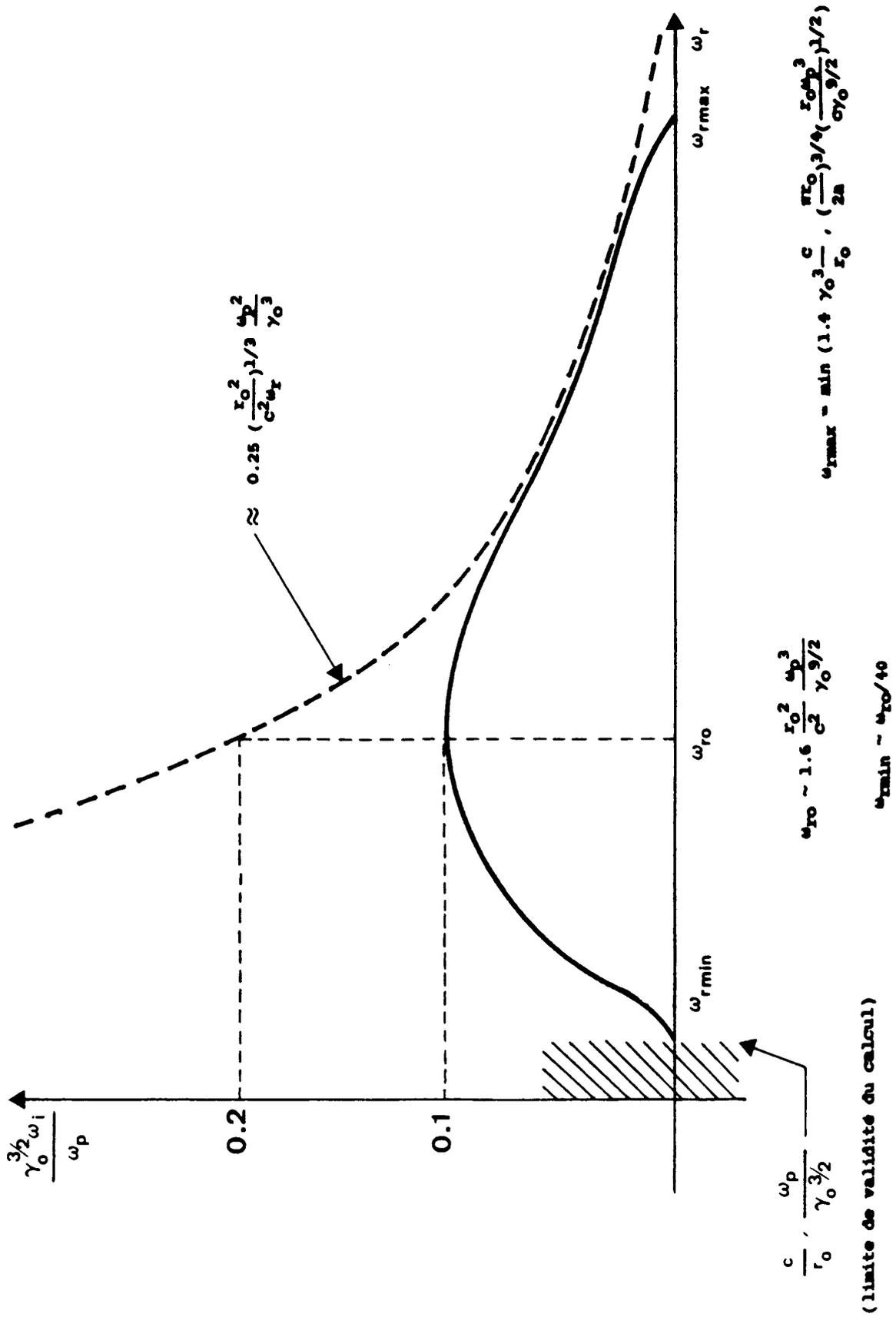


Fig. 3-16: Taux de croissance en fonction de la fréquence.

en fonction de la fréquence pour des paramètres physiques (r_0 , ω_p , γ_0) fixés (cf figure 3-16).

Encore faut-il s'assurer que les approximations qui permettent d'effectuer les linéarisations qui conduisent au système (3-3) sont bien vérifiées:

$$\omega_1 \ll \omega_r \quad \text{et} \quad \omega_r \gg \omega_p / \gamma_0^{3/2}$$

Compte tenu de la valeur maximale possible du taux de croissance (3-20) ces deux conditions se réduisent à la seconde:

$$\omega_r \gg \omega_p / \gamma_0^{3/2}$$

On voit donc que pour observer tout le spectre instable décrit sur la figure 3-16 compte tenu de la valeur minimale de la fréquence réelle $\omega_{r\min}$ et de la limitation sur le paramètre relativiste b , il faut être dans une situation où:

$$\frac{r_0}{2c} \frac{\omega_p}{\gamma_0^{3/2}} \gg 5 \quad (3-21)$$

et compte tenu de la valeur de la fréquence qui caractérise le régime intermédiaire ω_{r0} , l'inégalité (3-19a) se met sous la forme:

$$\frac{L_g}{r_0} \ll \frac{c^2 \gamma_0^3}{6.4 r_0^2 \omega_p^2} \quad (3-22)$$

La condition (3-21) peut être interprétée comme une limitation supérieure pour le facteur relativiste γ_0 , si les autres paramètres physiques du problème sont donnés. L'étude de l'influence de l'énergie des particules sur le taux de croissance (figure 3-15 et limitation sur le paramètre relativiste b du § 3-B-b) conduit par ailleurs à une borne inférieure:

$$\gamma_0 \geq 0.9 \left(\frac{\omega_r r_0}{c} \right)^{1/3} \quad (3-23)$$

de sorte que pour pouvoir observer le maximum du spectre de la figure 3-16 on doit imposer compte tenu de l'expression de ω_{r0} et de la relation (3-21):

$$10 \gamma_0^{3/2} \ll \frac{r_0 \omega_p}{c} \ll 0.95 \gamma_0^{5/2} \quad (3-24)$$

On a par ailleurs en combinant les relations (3-21) et (3-23) une limitation supérieure absolue sur la fréquence indépendamment de la valeur de γ_0 :

$$\omega_r \ll \frac{r_0 \omega_p^2}{73c}$$

Par ailleurs la condition de départ $m \gg 1$ s'écrit:

$$\omega_r \gg \frac{c}{r_0}$$

Les contraintes indépendantes à satisfaire simultanément pour pouvoir observer le spectre de la figure 3-16 (dans le cadre de ce calcul, c'est-à-dire en particulier de l'hypothèse de départ $\omega_r \gg \omega_p / \gamma_0^{3/2}$) sont donc les conditions ((3-19) ou (3-22)) et (3-24). La figure 3-16 présente tous ces résultats (taux de croissance et conditions de validité) sous une forme synthétique.

b: Optimisation du taux de croissance pour les conditions physiques de la magnétosphère des pulsars

Les différentes contraintes représentées sur la figure 3-16 s'expriment en fonction des paramètres caractéristiques de la magnétosphère des pulsars: distance à l'étoile rapportée à son rayon r/r_* , fréquence des ondes considérées ω , angle d'observation par rapport à l'axe magnétique du pulsar ψ , longueur caractéristique de gradient à la frontière du plasma ramenée à la surface de l'étoile L_* , facteur relativiste du faisceau γ_0 (cf §§ 2-B-c, 2-C-c et appendice 3). Nous allons tenter d'optimiser le taux de croissance en fonction de ces contraintes compte tenu des différentes expressions obtenues dans les régions fortement non WKB ($\lambda \ll 1$) et intermédiaire ($\lambda \sim 0.8$).

- Dans le régime fortement non WKB, les contraintes à satisfaire prennent la forme suivante en variables logarithmiques (compte tenu du demi-ordre de grandeur séparant les deux membres des inégalités fortes et du domaine de variation naturel des grandeurs considérées):

$$-\frac{5}{2} \log \frac{r}{r_*} - 2 \log \psi - \log \omega - \frac{9}{2} \log \gamma_0 < -36.52 \quad (3-25)$$

$$-\log \frac{r}{r_*} + \log \psi - \log \omega < -4.68 \quad (3-26)$$

$$-\frac{3}{2} \log \frac{r}{r_*} - \log \omega - \frac{3}{2} \log \gamma_0 < -15.22 \quad (3-27)$$

$$\log \frac{r}{r_*} - \log \psi + \log \omega - 3 \log \gamma_0 < 3.88 \quad (3-28)$$

$$\frac{17}{6} \log \frac{r}{r_*} + \frac{5}{3} \log \psi + \frac{4}{3} \log \omega + 3 \log \gamma_0 + \log L_* < 32.70 \quad (3-29)$$

$$-\log \frac{r}{r_*} \leq 0 \quad (2-23)$$

$$0 \leq \log \gamma_0 \leq 6.5 \quad (2-24)$$

$$\log \psi < -0.5 \quad (2-25)$$

Il faut maximiser le taux de croissance:

$$\log \omega_1 = 26.06 - \frac{7}{3} \log \frac{r}{r_*} - \frac{2}{3} \log \psi - \frac{1}{3} \log \omega - 3 \log \gamma_0 .$$

On obtient le point optimal suivant:

$$\text{point optimal} = (0., -0.5, 12.38, 5.59, 0.27).$$

Ceci correspond aux valeurs suivantes des paramètres physiques:

$$\text{taux de croissance: } \omega_1 \sim 3.2 \cdot 10^5 \text{ rd/s pour:}$$

$$r/r_* = 1; \omega \sim 2.4 \cdot 10^{12} \text{ rd/s (soit 380 GHz);}$$

$$\gamma_0 \sim 3.9 \cdot 10^5; L_* \sim 1.9 \text{ cm .}$$

Les contraintes saturées au point optimal sont celles qui correspondent aux

inégalités (3-25), (3-28), (3-29), (2-23) et (2-25), c'est-à-dire aux conditions physiques suivantes:

- $\omega \gg \omega_{r0}$, ce qui suggère de rechercher un optimum dans le régime intermédiaire ($\lambda \sim 1$); cf figure 3-16);
- $\omega \ll 1.6 \gamma_0^3 c/r_0$ qui est la condition portant sur le terme relativiste: ceci traduit la compétition entre deux effets antagonistes: d'une part la diminution de la fréquence plasma effective $\omega_p/\gamma_0^{3/2}$ (et donc du taux de croissance), et d'autre part la diminution du désaccord de fréquence (terme b du système (3-3)) lorsque γ_0 croit;
- la borne supérieure sur la longueur de gradient.

En conséquence, il semble qu'on doive rechercher l'optimum plutôt dans la région intermédiaire et tenir compte dans cette recherche d'une valeur éventuellement plus grande de la longueur de gradient de densité à la frontière du plasma.

- Dans le régime intermédiaire, on choisit de se placer au maximum de la courbe de la figure 3-16, c'est-à-dire de poser $\lambda \sim 0.8$, ce qui impose la relation suivante entre la fréquence et les autres paramètres du problème:

$$\omega \sim 1.6 \frac{r_0^2}{c^2} \frac{\omega_p^3}{\gamma_0^{9/2}} .$$

Ceci a pour effet de réduire le nombre de paramètres libres de l'optimisation et permet de tenter d'y procéder de manière moins mécanique que jusqu'à présent. On va raisonner en terme des quantités suivantes: la fréquence plasma relativiste $\omega_p/\gamma_0^{3/2}$, la fréquence de rotation des particules autour du centre de courbure de leur trajectoire c/r_0 , le facteur relativiste γ_0 et la longueur de gradient rapportée au rayon de courbure L_g/r_0 . Plusieurs objectifs peuvent alors être choisis compte tenu des contraintes suivantes (cf figure 3-16):

$$0.86 \left(\frac{c}{r_0}\right)^3 \ll \left(\frac{\omega_p}{\gamma_0^{3/2}}\right)^3 \ll \gamma_0^3 \left(\frac{c}{r_0}\right)^3 \quad (3-30)$$

$$\frac{L_g}{r_0} < 0.16 \left(\frac{c}{r_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_p}{\gamma_0^{3/2}}\right)^{-2} \quad (3-31)$$

- La maximisation du taux de croissance sans autre considération:

En maximisant $\omega_p/\gamma_0^{3/2}$ on est arrêté par la condition sur l'énergie (3-24b) ou (3-30-b) ou par les limitations du domaine de variation possible des paramètres; en l'occurrence on a en tenant compte comme d'habitude du demi-ordre de grandeur séparant les deux membres d'inégalités fortes un maximum pour:

$$\frac{\omega_p}{\gamma_0^{3/2}} \sim \frac{\gamma_0}{10^{1/6}} \frac{c}{r_0}$$

On maximise alors le taux de croissance en prenant $r/r_* \sim 1$, $\psi \sim 0.5$, ce qui impose $\gamma_0 \sim 1.9 \cdot 10^4$. On a alors $\omega_1 \sim 2 \cdot 10^7$ pour $\omega_r \sim 2.5 \cdot 10^{17}$ et on vérifie que les conditions (cf figure 3-16) $\omega_r \gg \omega_p/\gamma_0^{3/2}$ et $\omega_r \gg c/r_0$ (résumées dans (3-30-a)) sont vérifiées.

Il reste à examiner la longueur caractéristique de gradient; celle-ci vaut au maximum: $L_g < 8.5 \cdot 10^{-4}$ cm .

L'optimisation conduit donc dans ces conditions à des valeurs importantes du taux de croissance mais impose une longueur de gradient trop faible pour être réaliste.

- Inversement, cherchons jusqu'où on peut augmenter cette longueur de gradient:

Dans l'inégalité (3-31), il faut augmenter c/r_0 qui est maximal à la surface du pulsar, et diminuer $\omega_p/\gamma_0^{3/2}$, c'est-à-dire le taux de croissance; ce faisant on rencontre (3-30-a) qui impose une limitation absolue: $L_g/r_0 < 0.09$. Pour avoir un maximum du taux de croissance on se placera le plus près possible de l'étoile de façon à maximiser à la fois c/r_0 et $\omega_p/\gamma_0^{3/2}$, leur rapport étant fixé par l'optimisation de L_g/r_0 compte tenu de (3-30-a). En adoptant la plus grande valeur possible de $\gamma_0 \sim 3 \cdot 10^6$, on obtient alors:

$$r/r_* \sim 98, \omega_1 \sim 10.5, \omega_r \sim 320, L_g \sim 3.3 \cdot 10^7.$$

Il est donc possible d'obtenir une instabilité pour une longueur de gradient très grande, au détriment du taux de croissance et de la fréquence des ondes.

- Un compromis sera trouvé pour une fréquence pas trop élevée (domaine radio - $\omega \sim 10^9$ par exemple) avec une longueur de gradient de l'ordre du mètre pour fixer les idées (bien qu'en fait ce paramètre ne puisse être fixé sans un mécanisme spécifique à déterminer). On trouve alors un taux de croissance maximal pour cette fréquence:

$$\omega_1 \sim 3.2 \cdot 10^4 \text{ pour } \omega_r \sim 10^9$$

avec: $\gamma_0 \sim 1.4 \cdot 10^6$, $r/r_* \sim 1$, $L_g < 3.5$ m .

Notons que ces chiffres supposent de toute façon un facteur relativiste assez élevé. Si on utilise des chiffres plus proches de ceux qui caractérisent le plasma secondaire électrons-positrons dans le modèle de Ruderman & Sutherland (1975; cf appendice 3):

$$\gamma_0 \sim 10^3, \omega_p \sim 5.6 \cdot 10^{11} (r_*/r)^{3/2} \text{ pour un pulsar de période } 1 \text{ s}$$

l'optimisation dans le régime $\lambda \ll 1$ conduit à chercher à satisfaire les contraintes suivantes:

$$- \frac{5}{2} \log \frac{r}{r_*} - 2 \log \psi - \log \omega < - 14.10 \quad (3-32)$$

$$- \log \frac{r}{r_*} + \log \psi - \log \omega < - 4.68 \quad (3-26)$$

$$-\frac{3}{2} \log \frac{r}{r_*} - \log \omega < -7.75 \quad (3-33)$$

$$\log \frac{r}{r_*} - \log \psi + \log \omega < 12.88 \quad (3-34)$$

$$\frac{17}{6} \log \frac{r}{r_*} + \frac{5}{3} \log \psi + \frac{4}{3} \log \omega + \log L_* < 18.24 \quad (3-35)$$

$$-\log \frac{r}{r_*} < 0 \quad (2-23)$$

$$\log \psi < -0.5 \quad (2-25)$$

et le taux de croissance fournit la quantité à optimiser:

$$\log \omega_1 = 11.11 - \frac{7}{3} \log \frac{r}{r_*} - \frac{2}{3} \log \psi - \frac{1}{3} \log \omega .$$

On obtient le point optimal suivant:

$$\text{point optimal} = (1.81, -0.5, 10.57, -0.15)$$

Les contraintes saturées sont celles qui correspondent aux inégalités (3-32), (3-34), (3-35) et (2-25), c'est-à-dire $\omega \gg \omega_{r0}$ (cf figure 3-16); $b = b_{\max}$ (cf §3-B-b); longueur de gradient maximale et ψ maximal. On obtient donc les valeurs suivantes des paramètres physiques:

taux de croissance $\omega_1 \sim 5 \cdot 10^3$ rd/s pour:

$$\omega_r \sim 3.7 \cdot 10^{10}; r/r_* \sim 65;$$

$$L_* \sim 0.71 \text{ cm} - L_g \text{ local} \sim 3.7 \text{ m} .$$

Le fait que la contrainte (3-32) soit saturée suggère de rechercher un optimum dans le régime intermédiaire. Posons $\omega_r \sim \omega_{r0}$; la contrainte qui limite le taux de croissance est celle qui porte sur le terme relativiste (b dans le système (3-3)); elle impose:

$$r/r_* \sim 50 .$$

On a alors: $\omega_1 \sim 5 \cdot 10^3$ rd/s pour:

$$\omega_r \sim 8.9 \cdot 10^9; L_g \sim 2.8 \text{ m} .$$

On obtient donc avec les chiffres de Ruderman & Sutherland une instabilité de courbure pour des valeurs de la longueur de gradient raisonnables, de l'ordre de quelques mètres, dans le domaine radio, à une distance de l'étoile intermédiaire (quelques dizaines de rayons stellaires).

En fait, dans une situation réaliste, il est plus pertinent d'essayer d'évaluer comment une perturbation initiale de densité peut se trouver amplifiée au cours de sa propagation avec le faisceau le long d'une ligne de champ. Cette amplification sera-t-elle suffisante, compte tenu de la longueur finie dont on dispose, pour que le mécanisme reste crédible?

Considérons donc un paquet d'ondes initial qu'on modélise sous la forme suivante:

$$g(s) \sim \exp(-(s-s_0)^2/2a^2 + ik_0(s-s_0))$$

où s représente l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ. On a $s = r_0\theta$ où r_0 est le rayon de courbure de cette ligne. Alors on peut considérer que ce paquet d'ondes va se propager à la vitesse de groupe (dans notre cas $\sim c$) tout en étant amplifié de façon homogène avec le taux de croissance maximal correspondant aux différentes composantes de sa décomposition de Fourier si la condition suivante est vérifiée (cf Mikhailovskii 1974, Vol. 1, p. 83):

$$a^2 > t \max\left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial k^2}, \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2}\right)$$

où t est le temps maximal pendant lequel l'amplification peut se développer de la façon décrite. On aura alors amplification d'un facteur $\sim \exp \omega_1 t$.

Examinons cette contrainte: les dérivées secondes nécessaires peuvent se déduire des résultats numériques obtenus précédemment grâce aux transformations suivantes:

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial k^2} = \frac{r_0^2}{4\omega_r^3} \left(\frac{\omega_p}{\gamma_0^{3/2}}\right)^4 \delta''(\lambda)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} = \frac{r_0^2}{4\omega_r^3} \left(\frac{\omega_p}{\gamma_0^{3/2}}\right)^4 u_0''(\lambda) + \frac{3r_0 c}{4\omega_r} \left(\frac{\omega_p}{\gamma_0^{3/2} \omega_r}\right)^{3/2} u_0'(\lambda)$$

On s'est placé au voisinage d'un maximum du taux de croissance: $\delta'(\lambda) = 0$. Les valeurs de $u_0'(\lambda)$, $u_0''(\lambda)$, $\delta''(\lambda)$ estimées d'après les résultats numériques (cf figure 3-13), et toutes de l'ordre de 0.1, permettent d'affirmer que la condition ci-dessus est bien vérifiée, lorsqu'on utilise les chiffres limites suivants: $a \leq r_0$, $t \leq r_0/c$. On obtient alors un facteur d'exponentiation maximal avec les chiffres ci-dessus: $\omega_1 r_0/c \sim 17$, ce qui confirme la validité du mécanisme.

Notons que la condition ci-dessus est encore vérifiée pour des longueurs de paquet d'ondes a beaucoup plus petites que r_0 , qui correspondent à des "bouffées" de particules d'une durée qui peut être aussi courte que la ns.

E: Effet de la dispersion thermique du faisceau

Jusqu'ici, on ne s'est intéressé, pour mettre en évidence les caractéristiques principales de l'instabilité de courbure, qu'au cas limite où le faisceau de plasma est strictement monocinétique. Pour nous rapprocher d'une situation plus réaliste, il nous faut examiner l'effet d'une dispersion des vitesses des particules du plasma. Nous reprendrons pour modéliser cette dispersion le travail de Buschauer & Benford (1978). Pour faciliter les calculs, on adopte donc la fonction de distribution d'impulsions suivante:

$$f_0(p) = \frac{\Delta}{\pi} \frac{1}{(p - p_0)^2 + \Delta^2}$$

où Δ , qui a les dimensions d'une impulsion, représente la largeur de la distribution dans le repère de l'étoile, le faisceau étant animé par rapport à ce repère d'un mouvement d'ensemble correspondant à l'impulsion p_0 pour une particule.

On peut alors calculer la constante diélectrique (cf appendice 1 et § 3-A):

$$\begin{aligned} W(r) &= 1 + \frac{\omega_p^2(r) M r}{m} \int \frac{1}{\omega - m v / r} \frac{\partial f_0}{\partial p} dp \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2(r) M r^2}{m^2} \frac{2}{\pi \Delta} \int \frac{1}{v(x) - \omega r / m} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \end{aligned}$$

où on a posé $x = (p - p_0) / \Delta$.

Quelques approximations sont nécessaires pour pouvoir continuer. Tout d'abord on suppose évidemment la vitesse de phase locale $\omega r / m$ inférieure à c . On suppose la fonction de distribution suffisamment piquée pour pouvoir se contenter d'un développement limité de la vitesse:

$$v(x) \sim v_0 + \Delta / M \gamma_0^3 x + O(x^2) .$$

Le calcul de W se ramène alors à l'intégration d'une fraction rationnelle:

$$W(r) \sim 1 + \frac{2\omega_p^2 M^2 r^2 \gamma_0^3}{m^2 \pi \Delta^2} \int \frac{x}{(x - x_{rés})(x - i)^2(x + i)^2} dx$$

où on a posé $x_{rés} = M \gamma_0^3 / \Delta (\omega r / m - v_0)$; la partie imaginaire de $x_{rés}$ étant supposée a priori positive, une intégration par la méthode des résidus en fermant le contour par en bas fournit en fin de compte le résultat suivant:

$$W(r) \sim 1 - \frac{\omega_p^2(r)}{\gamma_0^3} \frac{1}{\left(\omega - \frac{m}{r} \left(v_0 - i \frac{\Delta}{M \gamma_0^3}\right)\right)^2}$$

On vérifie qu'on retrouve bien l'expression utilisée jusqu'ici dans la limite d'un faisceau monocinétique en faisant tendre Δ vers zéro.

La question qui se pose dans notre cas est de savoir de quelle façon ce

terme supplémentaire va se combiner avec les dépendances radiales du système. En utilisant les variables définies au § 3-A-a, le système d'équations gouvernant les champs (3-3) comporte maintenant un terme supplémentaire:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} + 1\lambda \left(1 - \frac{\phi(u)}{(1\delta + u + b + 1\psi)^2}\right) \beta = 0 \\ \frac{d\beta}{du} + 21\lambda(1\delta + u)\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{où } \psi = \frac{\Delta\omega_r}{Mc\gamma_0^{3/2}\omega_p}$$

La conclusion est donc la même que dans le cas examiné par Buschauer & Benford: le taux de croissance obtenu est simplement à diminuer d'une quantité ψ proportionnelle à la dispersion thermique, sans effet particulier de la dépendance radiale des diverses grandeurs mises en jeu. Compte tenu des valeurs maximales obtenues pour le taux de croissance ($\delta \sim 0.1$), on obtient la valeur de la dispersion thermique nécessaire pour éliminer complètement l'instabilité de courbure, quel que soit le profil de densité utilisé:

$$\frac{\Delta}{Mc} \sim 0.1 \frac{\gamma_0^{3/2}\omega_p}{\omega_r}$$

Il nous reste à vérifier que les approximations nécessaires à l'obtention de ce résultat sont bien satisfaites. En particulier la valeur de $x_{rés}$ déduite du développement de $v(x)$ ci-dessus n'est bien définie que si les termes négligés sont petits. La relation qui définit $x_{rés}$ est la suivante:

$$0 = v(x_{rés}) - \frac{r}{m}\omega_r \sim v_0 + \frac{\Delta}{M\gamma_0^3}x_{rés} - \frac{3\Delta^2 x_{rés}^2}{2M^2 c \gamma_0^4} + O(x_{rés}^3) - \frac{r}{m}\omega_r$$

Le terme correctif en $x_{rés}^2$ doit être petit devant le terme d'ordre $x_{rés}$, ce qui implique:

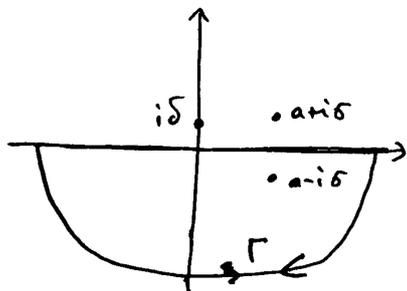
$$\frac{3}{2}\gamma_0^2 \left| \frac{\omega_r r}{mc} - \frac{v_0}{c} \right| \ll 1$$

Plaçons-nous au point où le taux de croissance est le plus favorable:

$\delta \sim 0.1$ pour $u_0 \sim -0.3$ avec $\lambda \sim 0.8$ et $b = 0$, la condition ci-dessus s'écrit compte tenu de la valeur de Δ qui détruit l'instabilité:

$$\Delta/Mc\gamma_0 \sim \Delta/p_0 \ll 0.2$$

$$I = \int \frac{1}{x-i\delta} \frac{\partial f}{\partial x} dx \text{ lorsque } f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{(x-a)^2 + \delta^2} : \text{ On a alors } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



$$\text{C'est } I = \int_{\Gamma} -\frac{2\delta}{\pi} \frac{z-a}{(z-i\delta)(z-a-i\delta)^2(z-a+i\delta)^2} dz$$

car le module de l'intégrande en $\sim \frac{1}{|z|^4}$ pour $|z|$ grand annule la contribution des demi-cercle à l'infini.
 → il ne reste que le résidu en $a-i\delta$:

$$I = \frac{2\delta}{\pi} 2i\pi \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{z-a}{(z-i\delta)(z-a-i\delta)^2} \right) \right|_{z=a-i\delta}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{(a-i\delta-i\delta)^2}}$$

on vérifie évidemment qu'on trouve pareil si on ferme par le haut.

Donc à la limite $\delta \rightarrow 0$ ça fait $\frac{1}{(a-i\delta)^2}$ à mettre dans l'équation: ça veut dire que pour une faisceau monocinétique il n'y a pas de contribution de type cinétique même lorsqu'on balaye la résonance à $\delta \rightarrow 0^+$, cette expression étant la même que celle que l'on obtient en écrivant $I = \int \frac{f}{(x-i\delta)^2} dx = \frac{1}{(a-i\delta)^2}$ pour $f = \delta(x-a)$.

Si f_n est pas monocinétique ma contribution liée à $\delta \rightarrow$ cette valeur doit intervenir dans le résultat final (taux de croissance).

$$\text{Ceci est donc dans le calcul de } \epsilon_{\theta} = - \int \frac{w_p^2}{\gamma^3 (\omega - v_{ph}(r)v)^2} f(p) dp = \int \frac{w_p^2}{\omega} \frac{mv}{\omega - v_{ph}v} \frac{\partial f}{\partial p} dp.$$

4: Comportement du mode "t" dans le cas d'un faisceau élargi

A: Absence d'instabilité pour un faisceau très large

a: Généralités; paramètres pertinents

Comme pour la polarisation horizontale on veut tenter de s'affranchir pour la polarisation verticale des contraintes sur la géométrie du faisceau qui nous ont permis d'obtenir les résultats analytiques du § 2-C, pour explorer des situations plus réalistes.

La partie du système (2-4) qui gouverne le champ E_z est l'équation:

$$\frac{c^2}{\omega^2 r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) + \left(1 - \frac{m^2 c^2}{\omega^2 r^2} + \epsilon_p(r) \right) E_z = 0 \quad (4-1)$$

Nous allons comme au § 3-A ci-dessus transformer et simplifier cette équation de façon à faire apparaître les variables significatives du problème et à ne conserver dans la structure de l'équation que les caractères essentiels, c'est-à-dire les singularités et les comportements asymptotiques. Posons comme au § 3-A:

$$r = \frac{mc}{\omega_r} e^x \text{ et } \omega_p^2(x) = \omega_p^2 \phi(x) .$$

On obtient:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} + m^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega_r^2} e^{2x} - 1 - \frac{\omega_p^2 \phi(x)}{\gamma_0 \omega_r^2} e^{2x} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{v_0}{c} e^{-x} \right)^2}{\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{v_0}{c} e^{-x} \right)^2 - \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2}} \right) E_z = 0$$

Restreignons-nous au domaine $x \ll 1$, $\omega_1/\omega_r \ll 1$ et linéarisons en terme des petites quantités ainsi définies:

$$e^x \sim 1 + x \dots ; \omega^2/\omega_r^2 \sim 1 + 2i\omega_1/\omega_r \dots$$

Ceci permet d'utiliser le changement de variables:

$$u = \frac{2\gamma_0 \omega_r^2}{\omega_p^2} x ; \alpha = \frac{\omega_p^2}{2\gamma_0 \omega_r^2} E_z ; \lambda = m \left(\frac{\omega_p^2}{2\gamma_0 \omega_r^2} \right)^{3/2} ; \delta = 2\gamma_0 \frac{\omega_1 \omega_r}{\omega_p^2} ,$$

$$B = 2\gamma_0 \frac{\omega_p \omega_r}{\omega_p^2} ; b = \frac{\omega_r^2}{\gamma_0 \omega_p^2} ; \phi(u) = \phi \left(\frac{\omega_p^2 u}{2\gamma_0 \omega_r^2} \right) .$$

On obtient finalement l'équation suivante:

$$\frac{d^2 \alpha}{du^2} + 2\lambda^2 F(u) \alpha = 0 \quad (4-2)$$

$$\text{avec: } F(u) = i\delta + u - \phi(u) \frac{(i\delta + u + b)^2}{(i\delta + u + b)^2 - B^2}$$

On a supposé le faisceau suffisamment relativiste pour pouvoir poser:

$$1 - v_0/c \sim 1/2\gamma_0^2$$

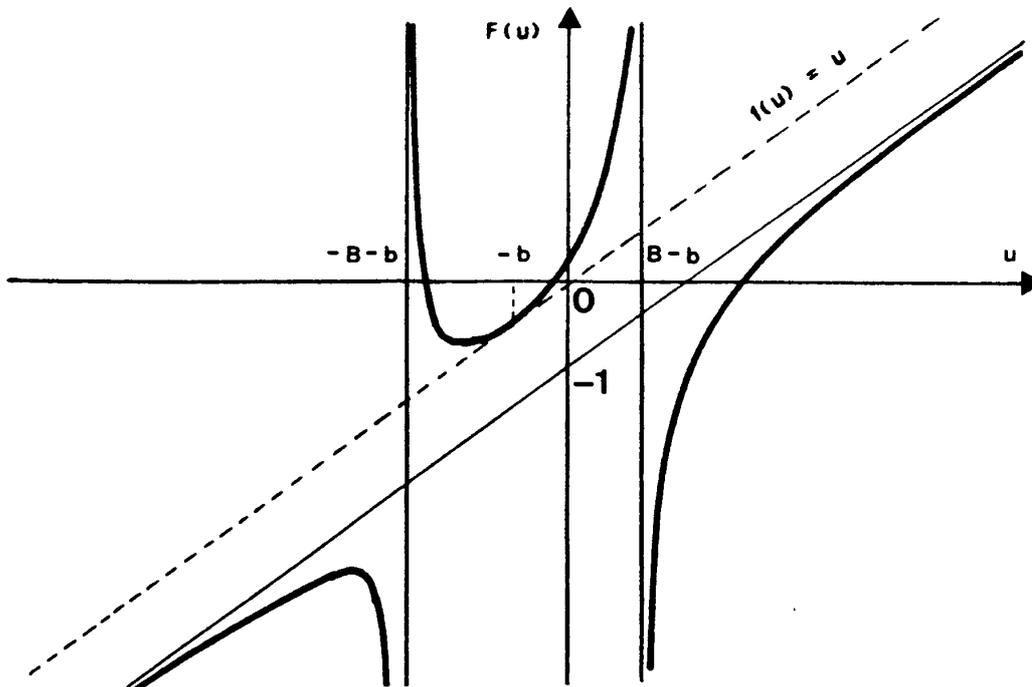


Fig. 4-1: Allure de la fonction $F(u)$ pour $\phi = 1$, $\delta = 0$.

Dans le cas faisceau large où $\phi(u) = c^{te} = 1$, les points particuliers de la fonction $F(u)$ sont au nombre de cinq: deux pôles simples en $u = b + i\delta \pm B$ et trois zéros. On représente l'allure de la fonction F dans le cas $\phi(u) = 1$, $\delta = 0$ dans la figure 4-1. L'équation (4-2) est applicable dans le domaine $x \ll 1$ et $\omega_i/\omega_r \ll 1$, c'est-à-dire:

$$u \ll \frac{2\gamma_0\omega_r^2}{\omega_p^2}$$

Dans le cas $\omega_p = c^{te}$, pour que les points particuliers (zéros et pôles de F) se trouvent dans la zone de validité, il faut imposer:

$$1 \text{ et } B \ll \frac{\gamma_0\omega_r^2}{\omega_p^2}$$

Du point de vue numérique, on se placera dans le cadre du programme déjà écrit pour l'autre mode en champ infini (cf § 3-C) en écrivant l'équation (4-2) sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{du} + 2i\lambda F(u)\alpha = 0 \\ \frac{d\alpha}{du} + i\lambda\beta = 0 \end{cases} \quad (4-3)$$

Loin de la zone contenant les singularités, c'est-à-dire pour $|u| \gg 1, B$, on

a $F(u) \sim u$ et ce système est équivalent au système (3-10) du cas champ infini, ce qui montre que les solutions asymptotiques sont les mêmes. On adoptera donc à gauche ($u - u_- \ll 1$, B) les mêmes conditions initiales:

$$\alpha = \alpha_0 ; \beta = i (-2u_-)^{1/2} \alpha_0 .$$

On s'est placé dans les mêmes conditions que précédemment, à savoir qu'on a choisi un comportement asymptotique évanescent à gauche, et pour manifester le comportement radiatif instable éventuel du système on cherche à obtenir une onde sortante pure à droite pour $\delta > 0$.

b: Solution analytique en régime fortement non WKB

On va tester le comportement du système dans le cas qui s'était avéré le plus favorable pour la polarisation horizontale, à savoir la situation d'un cylindre de plasma caractérisé par le profil de densité suivant:

$$\phi(u) = 1 \text{ pour } u \leq u_0 ; \phi(u) = 0 \text{ pour } u > u_0 .$$

On avait obtenu pour le mode d'Alfvén un taux de croissance optimal pour un nombre d'onde réduit λ de l'ordre de 1, et cette situation constituait l'extrapolation d'une zone d'instabilité pour λ petit dans laquelle on parvenait à des résultats analytiques. La méthode consistait à découper l'axe réel des valeurs de u en trois domaines $((-\infty, u_1], [u_1, u_0], [u_0, +\infty))$ avec u_1 à déterminer en fonction de λ pour délimiter de façon optimale deux zones où le comportement du système soit suffisamment simple) dans lesquels il était possible de trouver des solutions analytiques (même approximatives, mais valables au sens d'un développement en puissances de λ petit) du système (3-3) que l'on raccordait ensuite pour trouver la relation de dispersion des ondes considérées.

Dans le cas du mode magnéto-sonore pour $\lambda \ll 1$, on peut appliquer le même raisonnement si la quantité:

$$\int_u^{u_0} \lambda \beta(u) du$$

tend vers zéro pour tout u appartenant à l'intervalle $[u_1, u_0]$ lorsque λ tend vers 0. La deuxième équation du système (4-3) montre alors que α (considéré comme d'ordre zéro en puissances de λ) reste constant à des termes d'ordre supérieur en λ près sur l'intervalle $[u_1, u_0]$. On peut alors intégrer facilement la première équation, ce qui donne:

$$\beta(u_0) - \beta(u) = -2i\lambda \int_u^{u_0} F(u) du \alpha(u_0) + \text{termes d'ordre plus élevé en } \lambda .$$

Prenons $b = 0$ pour simplifier (ceci ne change rien au raisonnement); on a:

$$\beta(u_0) - \beta(u) = \lambda \left[(i\delta + u)^2 - u - B \text{Log} \frac{i\delta + u - B}{i\delta + u + B} \right] \frac{u_0}{u} \quad (4-4)$$

L'intégrale dont nous sommes partis vaut alors:

$$\int_u^{u_0} \lambda \beta(u) du \sim (u_0 - u) \lambda \beta(u_0) - \lambda^2 \int_u^{u_0} [\text{crochet ci-dessus}] du$$

Ceci tend vers zéro quand $\lambda \rightarrow 0$ si:

$$|u_1| < 1/\lambda \text{ et } \lambda^2 |u_1| \text{Max}[\text{crochet ci-dessus}] \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow 0 .$$

(On suppose que u_0 est une quantité d'ordre zéro en λ ; en fait les résultats du cas faisceau mince (cf § 2-C-b) nous laissent penser que $u_0 \sim -B$ qui est donné). Examinons ce crochet:

$$\text{Max}[\text{ " }] < \text{Max}(u_1^2, u_1, \text{Max}(B \text{Log} \frac{i\delta + u - B}{i\delta + u + B})) \text{ pour } u_1 < u < u_0 .$$

On a :

$$\operatorname{Log} \frac{18 + u - B}{18 + u + B} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{(u-B)^2 + \delta^2}{(u+B)^2 + \delta^2} + i \operatorname{Arg} \left(\frac{18 + u - B}{18 + u + B} \right).$$

L'argument reste d'ordre zéro et la partie réelle est bornée par :

$$\operatorname{Log} \frac{2B}{\delta} \sim \operatorname{Log} \delta \text{ si } \delta \ll B.$$

En définitive δ étant supposée s'exprimer en termes de puissances de λ , l'intégrale de $\lambda\beta$ dont nous sommes partis tend bien vers zéro quand $\lambda \rightarrow 0$ à condition de choisir $|u_1| < O(\lambda^{-2/3})$ (on prendra comme dans le cas de l'autre mode $u_1 \sim -\lambda^{-1/3}$) et à condition que $|\beta| < O(\lambda^{-2/3})$; il est donc licite d'utiliser la méthode approximative que nous venons de décrire pour résoudre le système (4-3) dans l'intervalle $[u_1, u_0]$. En dehors de cet intervalle, le système se ramène à une équation d'Airy, de façon exacte dans l'intervalle $[u_0, +\infty)$ et à des termes d'ordre supérieur à zéro en λ près dans l'intervalle $(-\infty, u_1]$; les solutions sont respectivement (cf § 3-B-a) :

- pour $u < u_1$ (solution évanescence pour $u \rightarrow -\infty$) :

$$\begin{cases} \alpha_-(u) = \alpha_- \operatorname{Ai}(- (2\lambda^2)^{1/3} (18+u)) + O(\lambda^{2/3}) \\ i(\lambda/2)^{1/3} \beta_-(u) = \alpha_- \operatorname{Ai}'(- (2\lambda^2)^{1/3} (18+u)) + O(\lambda^{2/3}) \end{cases}$$

- Pour $u > u_0$ (solution propagative sortante pour $u \rightarrow +\infty$) :

$$\begin{cases} \alpha_+(u) = \alpha_+ \operatorname{Ai}(e^{-i\pi/3} (2\lambda^2)^{1/3} (18+u)) \\ i(\lambda/2)^{1/3} \beta_+(u) = \alpha_+ e^{2i\pi/3} \operatorname{Ai}'(e^{-i\pi/3} (2\lambda^2)^{1/3} (18+u)) \end{cases}$$

Ceci permet de vérifier que β est bien d'un ordre convenable en puissances de λ ($|\beta| \sim O(\lambda^{-1/3})$) pour que les estimations ci-dessus soient valables.

On peut maintenant tenter de procéder au raccordement des trois tronçons de solution définis ci-dessus. A l'ordre le plus bas, α est constant entre u_1 et u_0 ; ceci impose $\alpha_- = \alpha_+$ compte tenu de l'ordre de u_1 (et en supposant que δ est d'ordre supérieur à $-2/3$ en puissances de λ); il est donc nécessaire d'obtenir une différence non nulle entre les valeurs de $i(\lambda/2)^{1/3} \beta$ en ces points pour pouvoir raccorder les solutions β_- et β_+ qui sont de nature différente. Un examen de l'équation (4-4) nous montre que le seul terme de cette différence qui puisse éventuellement être d'ordre zéro en λ est le suivant :

$$i \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/3} (\beta(u_0) - \beta(u_1)) \sim \frac{\lambda^{4/3} B}{2^{1/3}} \operatorname{Log} \frac{18 + u_0 + B}{18 + u_0 - B}$$

Or ce terme est au maximum de l'ordre de $\lambda^{4/3} \operatorname{Log} \delta$, qui tend vers zéro quand λ tend vers zéro pour δ sous forme d'un développement quelconque en puissances de λ . Il n'est donc pas possible de satisfaire les conditions aux limites asymptotiques imposées pour représenter le comportement radiatif du système, ce qui montre que l'instabilité de courbure du mode "t" est limitée au cas du faisceau mince situé au voisinage de la résonance gyromagnétique $u_0 \sim -B$.

B: Simulations numériques

a: Confirmation numérique du cas faisceau mince

Afin de tester le programme défini au § 4-A-a, on va tout d'abord vérifier qu'on retrouve bien les résultats analytiques du cas faisceau mince. On adopte pour commencer le profil de densité à variation douce du § 3-C-b:

$$\phi(u) = \exp - \frac{(u - u_0)^2}{\sigma^2}$$

Ce profil représente un faisceau de fréquence plasma réduite unité, de largeur réduite $\Delta u = \sigma\pi^{1/2}$. La correspondance des expressions mettant en jeu la largeur du faisceau se fait donc en posant:

$$\frac{a}{r_0} = \frac{\omega_p^2}{2\gamma_0\omega_r^2} \sigma\sqrt{\pi}.$$

Le calcul du § 2-C-b donne les valeurs suivantes du décalage de fréquence:

$$\text{-- pour } \eta = \frac{2^{2/3}\pi}{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2} \frac{r_0 a \omega_p^2}{\gamma_0 c^2 m^{2/3}} \ll 1 :$$

$$\delta\omega = -\omega_p \left(1 - \frac{\eta}{2} e^{i\pi/6} + \frac{i 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{2^{2/3} \Gamma(1/3)} m^{2/3} \frac{\omega_p \eta}{\omega_r} \right)$$

$$\text{-- pour } \eta \gg 1 : \quad \delta\omega = -\frac{\omega_p}{\sqrt{\eta}} \left(e^{-i\pi/12} + \frac{3^{1/3} \Gamma(2/3)}{2^{2/3} \Gamma(1/3)} m^{2/3} \frac{\omega_p}{\omega_r \sqrt{\eta}} e^{i\pi/6} \right)$$

En reportant les unités réduites définies plus haut, ceci correspond à:

$$\text{-- pour } \eta = \frac{2^{5/3}\pi^{3/2}}{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2} \sigma\lambda^{4/3} \ll 1 :$$

$$i\delta + u_0 = -B \left(1 - \frac{\eta}{2} e^{i\pi/6} + \frac{i 3^{1/3} \Gamma(2/3)}{2^{2/3} \Gamma(1/3)} \eta B \lambda^{2/3} \right) \quad (4-5a)$$

$$\sim -B \left(1 - \frac{\eta}{2} e^{i\pi/6} + i 0.459 \eta B \lambda^{2/3} \right)$$

$$\text{-- pour } \eta \gg 1 : \quad i\delta + u_0 = -\frac{B}{\sqrt{\eta}} \left(e^{-i\pi/12} + \frac{3^{1/3} \Gamma(2/3)}{2^{2/3} \Gamma(1/3)} \frac{B}{\lambda^{2/3}} e^{i\pi/6} \right) \quad (4-5b)$$

$$\sim -\frac{B}{\sqrt{\eta}} \left(e^{-i\pi/12} + 0.459 \frac{B \lambda^{2/3}}{\lambda^{2/3}} e^{i\pi/6} \right)$$

Mais ces valeurs ne sont utilisables que si on satisfait aux approximations du calcul (cf § 2-C-c) qui s'écrivent dans les deux systèmes respectivement:

-- pour $\eta \ll 1$:

$$\frac{2^{2/3}\pi}{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2} \frac{r_0 a \omega_p^2}{\gamma_0 c^2 m^{2/3}} \ll 1 \quad - \quad \sigma\lambda^{4/3} \ll \frac{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2}{2^{5/3}\pi^{3/2}} \sim 0.45 \quad (4-6a)$$

$$\frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{2^{1/3}\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/2} m^{1/3} \ll 1 \quad - \quad \sigma^{1/2} \lambda^{1/3} \ll \frac{2^{1/3}\pi^{1/4}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} \sim 0.60 \quad (4-7)$$

$$\frac{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2}{2^{5/3}\pi} \frac{\omega r_0}{a m^{4/3} \omega_p} \gg 1 \quad - \quad B \lambda^{4/3} \sigma \ll \frac{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2}{2^{5/3}\pi^{3/2}} \sim 0.45 \quad (4-8a)$$

$$\frac{2^{1/3} 3^{4/3} \Gamma(2/3)^2}{\pi} \frac{\gamma_0 c^3 m^{5/3}}{r_0^3 \omega_p^2 \omega_b} \ll 1 \quad - \quad B \lambda^{4/3} \gg \frac{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2}{2^{2/3}\pi} \sim 1.59 \quad (4-9a)$$

$$m \gg 1 \quad - \quad \lambda \gg \left(\frac{\omega_p^2}{2\gamma_0 \omega_r^2}\right)^{3/2} \quad (4-10)$$

$$\frac{\omega_b r_0}{mc} \gg \frac{1}{2\gamma_0^2} \quad - \quad B \gg \frac{\omega^2}{\gamma_0 \omega_p^2} \quad (4-11a)$$

$$\frac{2^{1/3} r_0 \omega_b}{m^{1/3} c} \ll 1 \quad - \quad (2\lambda^2)^{1/3} B \ll 1 \quad (4-12a)$$

- pour $\eta \gg 1$:

$$\frac{2^{2/3}\pi}{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2} \frac{r_0 a \omega_p^2}{\gamma_0 c^2 m^{2/3}} \gg 1 \quad - \quad \sigma \lambda^{4/3} \gg \frac{3^{4/3}\Gamma(2/3)^2}{2^{5/3}\pi^{3/2}} \sim 0.45 \quad (4-6b)$$

$$\frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{2^{1/3}\sqrt{\pi}} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/2} m^{1/3} \ll 1 \quad - \quad \sigma^{1/2} \lambda^{1/3} \ll \frac{2^{1/3}\pi^{1/4}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} \sim 0.60 \quad (4-7)$$

$$\frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{2^{4/3}\sqrt{\pi}} \gg \frac{\omega_b \gamma_0^{1/2} m^{2/3}}{\omega_p} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/2} \quad - \quad B \lambda^{2/3} \sigma^{1/2} \ll \frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{2^{5/6}\pi^{3/4}} \sim 0.67 \quad (4-8b)$$

$$\frac{mca}{\omega_b r_0^2} \ll 1 \quad - \quad \sigma \sqrt{\pi} \ll B \quad (4-9b)$$

$$m \gg 1 \quad - \quad \lambda \gg \left(\frac{\omega_p^2}{2\gamma_0 \omega_r^2}\right)^{3/2} \quad (4-10)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{6^{2/3}\Gamma(2/3)} \frac{\omega_p m^{2/3}}{\omega_b \gamma_0^{5/2}} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{1/2} \ll 1 \quad - \quad \frac{\sigma^{1/2} \lambda^{2/3}}{B} \ll \frac{3^{2/2}\Gamma(2/3)}{2^{5/6}\pi^{3/4}} \frac{\gamma_0 \omega_p^2}{\omega^2} \quad (4-11b)$$

$$\frac{3^{2/3}\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_b \gamma_0^{1/2}}{\omega_p} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{1/2} \ll 1 \quad - \quad \frac{B}{\sigma^{1/2}} \ll \frac{2^{1/2}\pi^{3/4}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} \sim 1.19 \quad (4-12b)$$

Ces conditions se divisent en contraintes "intrinsèques": (4-6), (4-7), (4-8), (4-9), (4-12) et en conditions sur les grandeurs en unités dimensionnelles à vérifier a posteriori: (4-10), (4-11). Pour ce qui concerne les simulations en unités réduites, il suffit de satisfaire les conditions intrinsèques. On voit que contrairement au cas de l'autre polarisation, les contraintes intrinsèques impliquent une borne inférieure de λ , tirée de (4-9) et (4-12) dans le cas $\eta \ll 1$ et de (4-6) et (4-7) dans le cas $\eta \gg 1$. On n'est donc pas libre de choisir un point de départ en faisceau mince avec une valeur de λ arbitraire; ceci vient renforcer les conclusions du § 4-A-b quant à la stabilité du système dans la limite $\lambda \ll 1$.

Ceci conduit aux points solution suivants:

- pour $\eta \ll 1$:

Pour les paramètres suivants: $\sigma = 3.7 \cdot 10^{-4}$, $B = 0.0126$, $\lambda = 90$

on obtient analytiquement en reportant dans (4-5a) le point solution:

$$i\delta + u_0 = - 0.011 + 5.6 \cdot 10^{-4} i$$

Pour les mêmes valeurs de σ , B , λ , on trouve par simulation numérique une solution à onde sortante pure à droite pour:

$$i\delta + u_0 = - 0.01113 + 4.2 \cdot 10^{-4} i$$

- pour $\eta \gg 1$:

Pour les paramètres suivants: $\sigma = 0.005$, $B = 0.025$; $\lambda = 64$

on obtient analytiquement en reportant dans (4-5b) le point solution:

$$i\delta + u_0 = - 0.0157 + 3. \cdot 10^{-3} i$$

Pour les mêmes valeurs de σ , B , λ , on trouve par simulation numérique une solution à onde sortante pure à droite pour:

$$i\delta + u_0 = - 0.01245 + 1.6 \cdot 10^{-3} i$$

L'accord est moins bon que pour la polarisation horizontale en champ infini, particulièrement dans le cas $\eta \gg 1$, mais encore suffisant pour trouver numériquement l'instabilité sans trop de tâtonnements.

b: Effet de la largeur du faisceau

Pour rester dans le cadre des conditions de validité du calcul analytique, on a été contraint de choisir des valeurs des paramètres particulières: largeur σ et champ magnétique B réduits très petits, nombre d'onde azimutal réduit λ grand devant 1. Voyons si l'étude numérique du système permet de s'affranchir de ces limitations.

Dans les expressions analytiques qui donnent le décalage complexe de fréquence dans les deux cas $\eta \ll 1$ et $\eta \gg 1$, le taux de croissance augmente lorsque λ diminue à η donné, car le module du terme correctif diminue. Ceci suggère d'élargir le faisceau en faisant croître σ à $\sigma\lambda^{4/3}$ fixé. Les résultats du § 2-C-c concernant les valeurs optimales du taux de croissance suggèrent de se placer au voisinage de $\eta = 1$. On donne dans la figure 4-2 les valeurs de $i\delta + u_0$ obtenues pour différentes valeurs de σ et λ à $\eta = 1$, c'est-à-dire pour $\sigma\lambda^{4/3} = 0.45$ et $B = 0.02$.

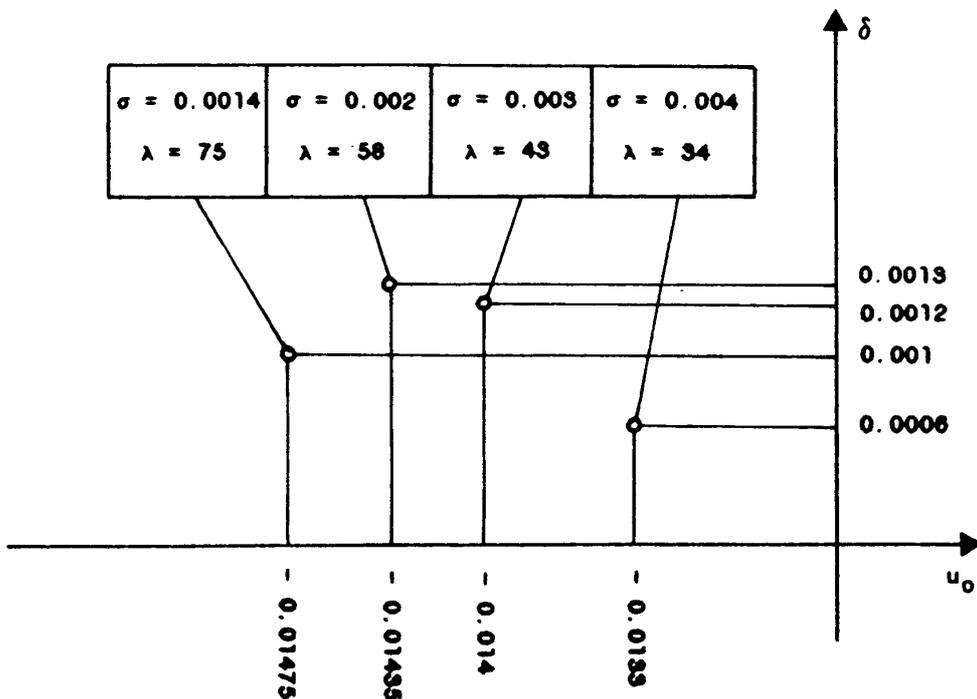


Fig. 4-2: Effet de la largeur du faisceau à η donné pour un profil de densité gaussien.

On observe une diminution du taux de croissance lorsque σ augmente au-delà d'une certaine valeur (de l'ordre de $2 \cdot 10^{-3}$), mais cette façon d'élargir le faisceau met en jeu deux paramètres qui n'ont pas le même rôle: la largeur proprement dite et la valeur du gradient de densité au bord. Afin de découpler

ces deux paramètres, on se tourne vers le profil de densité (3-18b) à gradient fixe sur les bords. On choisit une valeur de la longueur de gradient petite devant $|B - u_0|$ (de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$ pour les points calculés de la figure 4-2) de façon à se trouver en situation de gradient raide et à isoler dans un premier temps l'effet de la largeur du faisceau. Les points solutions pour $\sigma = 5 \cdot 10^{-4}$ et différentes valeurs de L à $\eta = 1 = c^{te}$ sont rassemblés sur la figure 4-3.

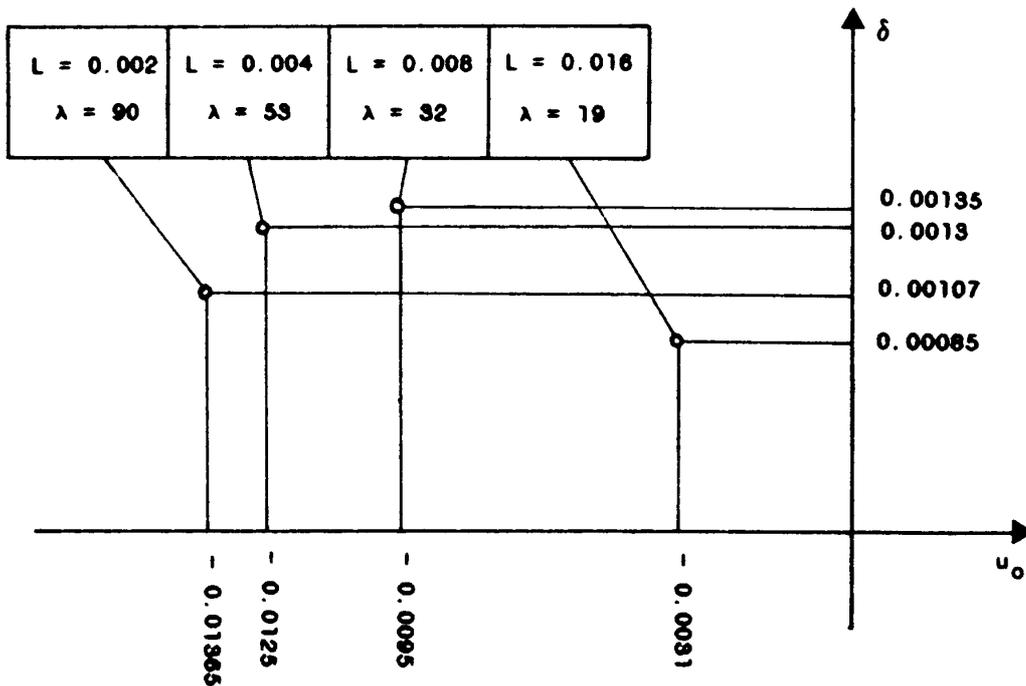


Fig. 4-3: Effet de la largeur du faisceau à η donné pour un profil de densité rectangulaire.

On vérifie en faisant varier λ à L fixé, autour de la valeur qui correspond à $\eta = 1$, que cette condition fournit bien l'optimum du taux de croissance.

5: Comparaison avec d'autres mécanismes

A: Instabilités électrostatiques en milieu homogène

a: Généralités

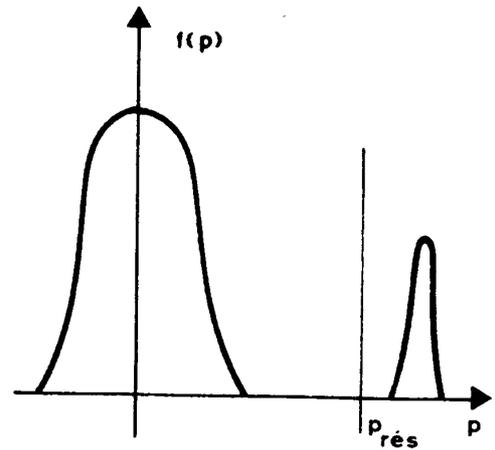
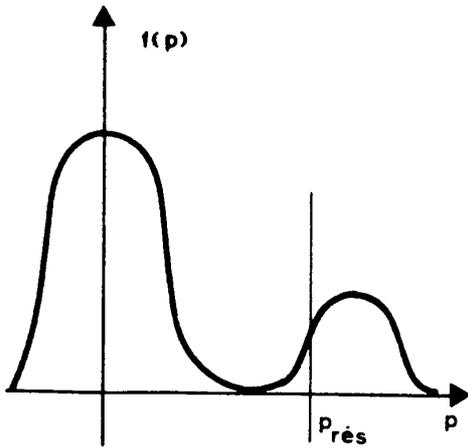
Les propriétés de propagation des ondes de Langmuir dans un plasma homogène sont déterminées par la relation de dispersion générale suivante:

$$1 - \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \left\langle \frac{1}{\gamma^3 (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2} \right\rangle = 0 \quad (5-1)$$

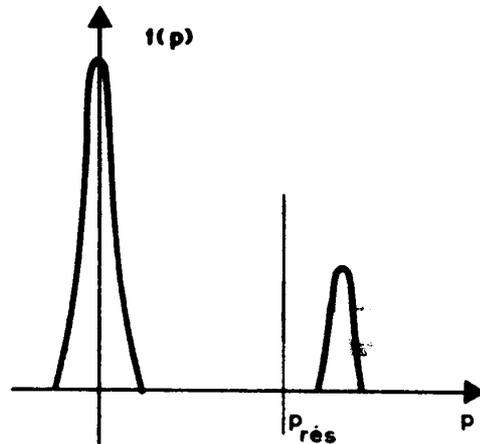
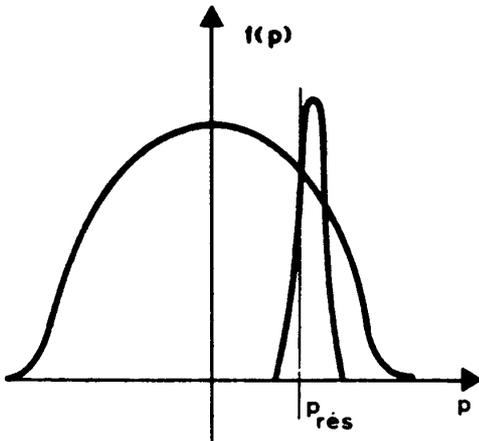
dans laquelle α identifie les différentes espèces de particules présentes et les crochets désignent la moyenne sur les trois composantes de la vitesse pondérée par la fonction de distribution de l'espèce α .

Dans la cadre du plasma électrons-positrons de la magnétosphère des pulsars, le caractère monodimensionnel (dans l'espace des vitesses) de la fonction de distribution dû au fort champ magnétique présent conduit à s'intéresser principalement à la propagation parallèle à cette direction; on montre d'ailleurs (Hardee & Rose 1978; Arons & Barnard 1986) que c'est dans cette direction que les taux de croissance sont les plus grands.

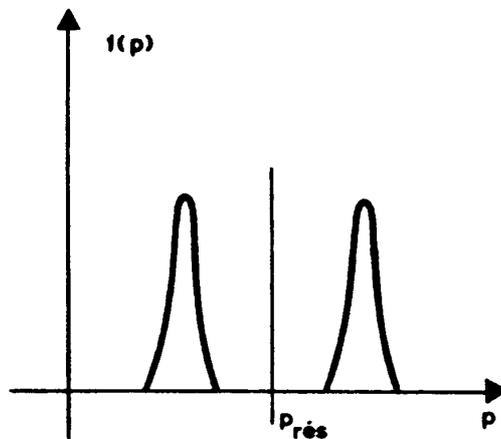
Le mécanisme de l'apparition d'une instabilité se ramène grossièrement à l'interaction de deux termes représentant soit le plasma e^+e^- et un faisceau de positrons (Ruderman & Sutherland 1975) ou d'ions (Cheng & Ruderman 1980) ou encore d'électrons et de positrons (Lominadze & Mikhailovskii 1979), soit dans les modèles de type deux-faisceaux la population d'électrons et celle de positrons constituant le plasma magnétosphérique, avec une différence de vitesse entre elles (Hinata 1976; Cheng & Ruderman 1977). Deux types de couplage peuvent exister dans le cadre de l'équation de dispersion ci-dessus: d'une part des ondes dont les caractéristiques de propagation sont principalement déterminées par le "gros" du plasma avec une perturbation apportée par le faisceau qui peut avoir pour effet de les rendre instables: c'est le type de mécanisme étudié par Lominadze & Mikhailovskii (instabilité cinétique par un faisceau chaud de haute énergie)(cf figure 5-1a et b); d'autre part des "modes de faisceau" sans équivalent dans un plasma à l'équilibre thermodynamique: en particulier tous les modes propagatifs mettant en jeu des populations monocinétiques (instabilité deux-faisceaux hydrodynamique; cf figure 5-1c, d et e).



(a) faisceau-plasma chauds; mode propre du plasma excité cinétiquement. (b) faisceau froid-plasma chaud: mode propre du plasma, inst. hydro.



(c) faisceau froid de basse énergie-plasma chaud: inst. hydro. (d) faisceau-plasma froids: instabilité hydrodynamique.



(e) instabilité deux-faisceaux hydrodynamique.

Fig. 5-1: Différents types de distributions d'impulsions instables vis-à-vis de la génération d'ondes de Langmuir.

b: principaux résultats

Nous allons nous pencher tout d'abord sur les résultats qui exploitent le deuxième type d'ondes défini au paragraphe précédent, car ce sont les plus simples du point de vue du calcul. On se place dans le repère de l'espèce la plus lente (et en général la plus nombreuse) et on revient au repère du pulsar par la transformation de Lorentz appropriée.

Dans le cas de deux espèces froides, l'équation de dispersion générale (5-1) se ramène à:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{\gamma_b^3 (\omega - kv_b)^2} = 0$$

Lorsque ceci correspond à un faisceau de positrons ou d'ions, on peut utiliser le fait que $\omega_b^2/\gamma_b^3 \ll \omega_p^2$, le taux de croissance maximal (cf Bludman, Watson & Rosenbluth 1960 et appendice 7) est obtenu pour $kc \sim \omega \sim \omega_p$ et vaut:

$$\omega_i \sim \frac{3^{1/2}}{2^{4/3}} (\omega_p \frac{\omega_b^2}{\gamma_b^3})^{1/3}$$

En repassant dans le repère lié à l'étoile, on obtient:

$$\omega_i = \frac{3^{1/2}}{2^{5/3}} \frac{(\omega_p \omega_b^2)^{1/3}}{\gamma_b \gamma_p^{3/2}} \text{ pour } \omega \sim kc \sim 2\gamma_p^{1/2} \omega_p .$$

où tout est maintenant exprimé dans le repère du pulsar; γ_p est le facteur relativiste du plasma dans ce repère.

- Dans le cadre du modèle de Ruderman & Sutherland (1975), on a un faisceau de positrons pénétrant un plasma d'électrons-positrons avec les chiffres suivants:

$$n_b \sim \frac{\Omega B}{2\pi ec} \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 ; n_p \sim \frac{\gamma_{\max}}{\gamma_p} n_b$$

où n_b et n_p sont mesurées dans le repère fixe, Ω est la fréquence de rotation et B le champ magnétique au pôle, r_* le rayon du pulsar et γ_{\max} le facteur relativiste maximal des positrons primaires accélérés dans la magnétosphère par le potentiel du gap. Ceci conduit à l'expression suivante du taux de croissance:

$$\omega_i \sim \frac{3^{1/2}}{2^{7/6}} \left(\frac{e\Omega B}{mc}\right)^{1/2} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2} \frac{\gamma_{\max}^{1/6}}{\gamma_b \gamma_p^{5/3}}$$

$$\text{pour } \omega \sim 2^{3/2} \left(\frac{e\Omega b}{mc}\right)^{1/2} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2} \gamma_{\max}^{1/2}$$

(L'expression du taux de croissance diffère de celle que donnaient Ruderman & Sutherland d'un facteur $1/\gamma_p^{3/2}$ par suite d'une erreur de calcul).

Le taux de croissance maximal, obtenu au voisinage de l'étoile ($r = r_*$), pour les chiffres standard de Ruderman & Sutherland ($P = 1$ s, $B = 10^{12}$ G, $\gamma_{\max} = 3 \cdot 10^6$, $\gamma_b \sim 10^6$, $\gamma_p \sim 800$) est de l'ordre de:

$$\omega_1 \sim 1.3 \left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2} \text{ pour } \omega \sim 5 \cdot 10^{13} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2} .$$

C'est donc un taux de croissance assez faible, surtout compte tenu du fait que d'après Ruderman & Sutherland le couplage au rayonnement de courbure ne sera optimal que pour $r/r_* \sim 100$ (ou encore pour $\omega < \omega_c = 1.5 \gamma_p^3 c/\rho$ où ρ est le rayon de courbure local de la ligne de champ). Notons qu'avec les données couramment admises à l'heure actuelle (en particulier une densité nettement plus grande de l'ordre de $n_p \sim 10^{20} (r/r_*)^3$ et $n_b \sim 10^{-3} n_p$, cf appendice 3), les chiffres ci-dessus sont à majorer d'un facteur ~ 30 . Retenons donc, pour fixer les idées, dans le cas du modèle de Ruderman & Sutherland, les chiffres suivants:

$$\omega_1 \sim (1 \text{ à } 30) \left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2} \text{ pour } \omega \sim 4 \cdot 10^{13} \omega_1 .$$

- Dans le cas du modèle de Cheng & Ruderman (1980), un faisceau d'ions représentant une densité de courant $J_1 \sim n_1 Z e c$ s'ajoute au faisceau de positrons primaires de courant $J_0 - J_1 = n_e c$ de telle sorte que le courant total:

$$J_0 = \frac{\Omega B}{2\pi} \left(\frac{r_*}{r}\right)^3$$

soit le même. La fraction $1 - J_1/J_0$ n'est pas connue exactement et dépend des mécanismes d'émission des ions par la surface du pulsar (par exemple une émission thermique dépendant de la température de l'étoile); des hypothèses supplémentaires sont donc nécessaires dans ce modèle.

En reportant ces valeurs de densité dans la formule du taux de croissance maximal déjà utilisée, on obtient, compte tenu de l'hypothèse maintenue que les positrons engendrent le plasma magnétosphérique avec un rapport numérique de l'ordre de γ_{\max}/γ_p :

$$\omega_1 = \frac{3^{1/2}}{2^{8/3}} \frac{\omega}{\gamma_b \gamma_p^2} \left(\frac{n_1 Z^2 m}{n_p M}\right)^{1/3}$$

$$\text{avec } \omega = 2 \left(\frac{2e\Omega B}{mc} \frac{r_*^3}{r^3} \gamma_{\max} \left(1 - \frac{J_1}{J_0}\right)\right)^{1/2}$$

où Ze est la charge, M la masse des ions, m la masse des positrons. La valeur utilisée par Cheng & Ruderman de la fraction $1 - J_1/J_0$ est de l'ordre de 10^{-3} , avec les chiffres standard ($\gamma_{\max} \sim 2 \cdot 10^6$, $\gamma_b \sim 500$, $\gamma_p \sim 100$, n_1 donné par $J_1 \sim J_0$, et $n_p \sim n_e + \gamma_{\max}/\gamma_p$, $P \sim 1$ s, $B \sim 10^{12}$ G), pour des noyaux de fer ionisés 20 fois on obtient l'ordre de grandeur suivant du taux de croissance optimal:

$$\omega_1 \sim 1.5 \cdot 10^{-10} \omega \text{ avec } \omega \sim 1.3 \cdot 10^{12} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2}$$

soit des taux de croissance maximaux au voisinage de l'étoile:

$$\omega_1 \sim 200 \text{ pour } \omega \sim 1.3 \cdot 10^{12} .$$

- Dans le cas de l'instabilité deux-faisceaux hydrodynamique entretenue par une différence de vitesse entre les électrons et les positrons du plasma secondaire (Hinata 1976b; Cheng & Ruderman 1977), on obtient le taux de croissance en se plaçant dans le repère où le plasma est au repos dans son ensemble. La relation de dispersion prend alors la forme:

$$1 = \frac{\omega_p'^2}{\Gamma^3} \left(\frac{1}{(\omega - kv)^2} + \frac{1}{(\omega + kv)^2} \right)$$

où $\Gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, la prime dénote le repère en mouvement.

On trouve facilement une fréquence purement imaginaire maximale:

$$\omega_1' = \frac{\omega_p'}{2\Gamma^{3/2}} \text{ pour } k' \sim \frac{3^{1/2}\omega_p'}{2c\Gamma^{3/2}} \text{ (on suppose } \Gamma \gg 1).$$

En effectuant la transformation de Lorentz qui ramène au repère de l'étoile, on obtient une onde à la fréquence: $\omega = kv_0 + i \omega_1$, le taux de croissance étant maximal pour:

$$\omega = \frac{\gamma_0^{1/2}\omega_p}{2\Gamma^{3/2}} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\gamma_0^2} \right) .$$

En utilisant les chiffres du modèle de Ruderman & Sutherland: $\gamma_0 \sim 800$, $\Gamma \sim 10$ pour obtenir le taux de croissance maximal, $n_p \sim 3 \cdot 10^{14} (r_*/r)^3$, on trouve au voisinage de l'étoile:

$$\omega_1 \sim 7 \cdot 10^5 \text{ pour } \omega/\omega_1 \sim 10^6 .$$

Les taux de croissance sont donc a priori plus élevés que dans le cas de l'excitation par un faisceau dilué. Cependant la dispersion thermique des vitesses des deux espèces constituant le plasma ne peut plus alors être négligée devant leur différence de vitesse d'ensemble, et la recherche d'un modèle plus détaillé de plasma relativiste s'impose.

- Lominadze & Mikhailovskii (1979) ont examiné le comportement des ondes électrostatiques en plasma relativiste, c'est-à-dire en prenant explicitement en compte la dispersion thermique des deux composantes: plasma et faisceau. Le cas qui nous intéresse dans le cadre du rayonnement des pulsars est celui d'un faisceau très énergétique vérifiant $p_D > p_{TD}$, $\langle p \rangle \gg mc$, où la distribution du plasma relativiste est caractérisée par une impulsion moyenne $\langle p \rangle \gg mc$, et celle du faisceau est de la forme:

$$f_D(p) = \frac{n_D}{\sqrt{\pi} p_{TD}} \exp - \frac{(p - p_D)^2}{p_{TD}^2}$$

La relation de dispersion générale (5-1) peut prendre deux formes différentes (correspondant à une instabilité hydrodynamique ou cinétique) selon la valeur de la dispersion d'énergie du faisceau (cf appendice 7). La condition pour se trouver dans le régime hydrodynamique s'écrit dans le repère du pulsar:

$$\frac{\gamma_{Tb}}{\gamma_b} < \frac{\gamma_b}{8 \langle \gamma \rangle \gamma_p} \left(\frac{n_b}{2n_p} \right)^{1/3} \quad (5-2)$$

où la seule quantité qui n'est pas mesurée dans le repère du pulsar est $\langle \gamma \rangle$, qui est le facteur relativiste moyen du gros du plasma mesuré dans son repère propre. Les taux de croissance maximaux dans les deux cas s'écrivent :

- régime hydrodynamique :

$$\Gamma_h \sim \frac{3^{1/2}}{2^{1/3}} \frac{\omega_p}{(2 \langle \gamma \rangle \gamma_p)^{1/2} \gamma_b} \left(\frac{n_b}{n_p} \right)^{1/3} \quad \text{pour } \omega \sim kc \sim 2\omega_p (2\gamma_p \langle \gamma \rangle)^{1/2}$$

- régime cinétique :

$$\Gamma_{cin} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2e} \right)^{1/2} \frac{\omega_p \gamma_b^3}{\gamma_{Tb}^2 (2\gamma_p \langle \gamma \rangle)^{5/2}} \frac{n_b}{n_p} \quad \text{pour la même fréquence.}$$

En supposant l'inégalité (5-2) marginalement satisfaite pour les chiffres actuellement admis ($\langle \gamma \rangle \sim \gamma_p \sim 10^3$, $\gamma_b \sim 10^6$, $n_b/n_p \sim 3 \cdot 10^{-4}$) on obtient une dispersion thermique du faisceau $\gamma_{Tb} \sim 7 \cdot 10^3$. Ceci permet de calculer les taux de croissance correspondants compte tenu de la valeur élevée de la fréquence plasma: $\omega_p \sim 5.3 \cdot 10^{-4} (r_*/r)^{3/2}$;

$$\Gamma_h \sim 3.5 \cdot 10^4 \left(\frac{r_*}{r} \right)^{3/2}$$

$$\Gamma_{cin} \sim 2.2 \cdot 10^5 \left(\frac{r_*}{r} \right)^{3/2}$$

pour $\omega \sim 1.518 \left(\frac{r_*}{r} \right)^{3/2}$

Les taux de croissance sont intéressants, mais la fréquence très élevée pour laquelle ils sont obtenus (liée à la nature particulière de la dispersion des ondes électrostatiques en plasma relativiste: cf appendice 7) conduit à s'interroger sur l'intérêt de tels résultats en ce qui concerne le rayonnement radio des pulsars. Le domaine d'énergies considéré (de l'ordre du keV) correspond plutôt aux rayons X.

B: Instabilité "cyclotron" en milieu homogène

Dans le cadre des travaux récents qui tentent d'expliquer le rayonnement du pulsar du Crabe et de la nébuleuse associée, synthétisés par Lominadze, Machabeli & Usov (1983), le mécanisme linéaire initial invoqué est l'instabilité d'ondes transverses (électromagnétiques) se propageant parallèlement au champ magnétique d'équilibre dans un plasma d'électrons-positrons chaud dont la fonction de distribution des impulsions est monodimensionnelle (le long de la direction du champ magnétique) et comporte une composante très étirée vers les hautes énergies (Tsytovich & Kaplan 1972; Lominadze, Machabeli & Mikhailovskii 1979; Machabeli & Usov 1979). Les conditions d'existence de cette instabilité pourraient être assez critiques compte tenu des valeurs supposées des paramètres physiques de la magnétosphère des pulsars (Mikhailovskii 1979). En particulier (Smith 1981) il est probable que ce mécanisme ne peut fonctionner, au mieux, qu'au voisinage du cylindre lumière.

Le mécanisme de l'instabilité cyclotron (Mikhailovskii 1979; cf appendice 7) est de type cinétique (résonance onde-particules avec la "queue" de distribution de haute énergie) si le paramètre suivant:

$$\Delta = \frac{\omega_p^2 \langle \gamma \rangle}{\omega_B^2 \gamma_0}$$

est inférieur à 1 (ω_B est la fréquence gyromagnétique non relativiste eB_0/Mc). Dans cette expression tout est mesuré dans le repère fixe, sauf la dispersion thermique d'énergie de la composante principale du plasma $\langle \gamma \rangle$ mesurée dans son repère propre (de facteur relativiste γ_0 par rapport au repère de l'étoile). En supposant $\langle \gamma \rangle \ll \gamma_0$, avec les chiffres communément admis ($n_p \sim 10^{20} (r_*/r)^3$, $B_0 \sim 10^{12} (r_*/r)^3$) on obtient la valeur suivante:

$$\Delta \sim 10^{-9} \left(\frac{r}{r_*}\right)^3$$

de sorte qu'on se trouve dans le régime cinétique jusqu'au cylindre lumière pour la majorité des pulsars (de période ≤ 1 s typiquement) et en particulier pour le pulsar du Crabe ($P \sim 0.033$ s). Ceci est encore mieux vérifié avec les chiffres du modèle de Ruderman & Sutherland (1975) qui conduisent à une densité plus faible ($n_{RS} \sim 2 \cdot 10^{14} B_{12}/P (r_*/r)^3$; cf appendice 3).

On obtient alors avec la fonction de distribution décrite ci-dessus (voir figure 5-2) un taux de croissance maximal (cf appendice 7):

$$\Gamma \sim \frac{\pi \langle \gamma \rangle \omega_p^2 \omega_D^2}{8 \gamma_0^3 \omega_B^3} \quad \text{pour} \quad \omega \sim kc \sim \frac{4\gamma_0^3 \omega_B^3}{\langle \gamma \rangle \gamma_D \omega_p^2}.$$

La condition de validité de ce mécanisme (qui signifie en substance que la résonance avec la queue de haute énergie responsable du taux de croissance ne

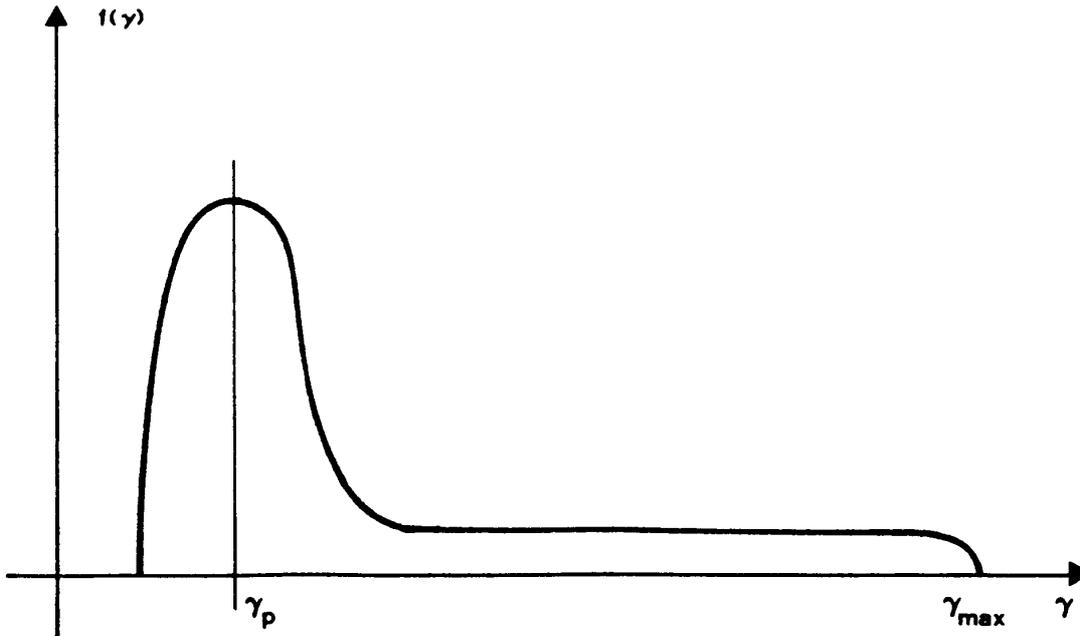


Fig. 5-2: Fonction de distribution responsable de l'instabilité cyclotron.

doit pas s'accompagner d'un amortissement par résonance sur le gros du plasma, Smith 1981) s'écrit:

$$\frac{4\gamma_0^2}{\gamma_b} < \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \quad (5-3)$$

En reportant les chiffres communément admis ($\gamma_0 \sim 10^3$, $\gamma_b \sim 10^6$, $n_p \sim 10^{20}$ (r_*/r)³, $n_b \sim 10^{-3} n_p$), cette condition devient: $r/r_* > 1.6 \cdot 10^3$, ce qui conduit à une distance à l'étoile plus grande que le rayon du cylindre lumière pour le pulsar du Crabe ($R_c \sim 1.6 \cdot 10^8$ cm pour NP 0532); dans la région extérieure au cylindre lumière, les quantités varient de la façon suivante: $n_p \sim r^{-2}$, $B_0 \sim r^{-1}$, de sorte que la quantité ω_p^2/ω_B^2 reste constante; si l'inégalité (5-3) n'est pas satisfaite avant le cylindre lumière, elle ne le sera donc pas non plus après. Lominadze, Machabeli & Usov (1983) contournent cependant la difficulté, d'une part en utilisant des chiffres légèrement différents (il suffit de moins d'un ordre de grandeur de différence sur chaque paramètre pour satisfaire la condition (5-3) avant le cylindre lumière), d'autre part en examinant de façon plus précise la dépendance des paramètres de la magnétosphère en fonction du rayon de courbure des lignes de champ magnétique, ce qui conduit également à satisfaire la condition.

Estimons donc le taux de croissance en nous plaçant à la limite de validité pour les chiffres suivants: $\langle \gamma \rangle \sim \gamma_0 \sim 800$, $\omega_p \sim \omega_B \sim 1.7 \cdot 10^{10}$, $r/r_* \sim 10^3$, $\gamma_b \sim 2.5 \cdot 10^6$, $(\omega_p/\omega_B)^2 \sim 10^{-3}$, on obtient:

$$\Gamma_{\max} \sim 10 \text{ pour } \omega \sim kc \sim 1.7 \cdot 10^{10} .$$

C: Discussion

Nous sommes maintenant en mesure de comparer les performances de l'instabilité de courbure à celles des mécanismes classiques de rayonnement radio des pulsars. L'optimisation du § 3-D-b conduisait aux chiffres suivants dans le cas de la polarisation de type onde d'Alfvén:

- avec les données du modèle de Ruderman & Sutherland pour un pulsar de période typique 1 s:

$$\omega_1 \sim 5 \cdot 10^3 \text{ pour } \omega \sim 10^{10},$$

$$\gamma_0 \sim 10^3, r/r_* \sim 50, L_g \sim 3 \text{ m.}$$

- avec les données plus récentes de la littérature soviétique:

$$\omega_1 \sim 3.2 \cdot 10^4 \text{ pour } \omega \sim 10^9,$$

$$\gamma_0 \sim 1.4 \cdot 10^6, r/r_* \sim 1, L_g \sim 3.5 \text{ m.}$$

Les taux de croissance obtenus sont comparables à ceux des différents types d'instabilités électrostatiques que nous avons examinés au paragraphe précédent, avec l'avantage dans le cas de l'instabilité de courbure que constitue le fait d'obtenir directement des ondes électromagnétiques sans avoir à faire appel à un second mécanisme de transformation des perturbations électrostatiques en rayonnement. Certains auteurs (Hinata 1976a) ont même posé (sans y répondre de façon satisfaisante) la question de savoir si l'effet du rayonnement n'était pas de détruire l'instabilité électrostatique.

Quant à l'instabilité cyclotron, son taux de croissance calculé au paragraphe précédent est beaucoup plus faible; par ailleurs, dans le meilleur des cas, la zone favorable au développement de cette instabilité se trouve au voisinage du cylindre lumière (on a vu que des chiffres légèrement différents pouvaient même conduire à éliminer ce mécanisme), alors que l'instabilité de courbure se produit, selon les valeurs des paramètres physiques dont on dispose, entre la surface de l'étoile et quelques dizaines de rayons stellaires.

En contrepartie, nous avons introduit un nouveau paramètre qui est fort mal connu: la longueur caractéristique de gradient au bord du faisceau L_g ; le domaine de fréquence et les taux de croissance présentés ici correspondent à une valeur supposée "raisonnable" de l'ordre de quelques mètres. Par contre, le fait de disposer d'un mécanisme fonctionnant à la frontière plasma-vide permet de résoudre de facto le problème de la "sortie" des ondes hors de la magnétosphère qui commence à être pris en considération dans quelques travaux (cf § 1-B-g).

Pour un plasma large, nous avons vu (cf chapitre 4) que l'autre polarisation (ondes de type magnéto-sonore) était stable. L'instabilité de courbure engendre

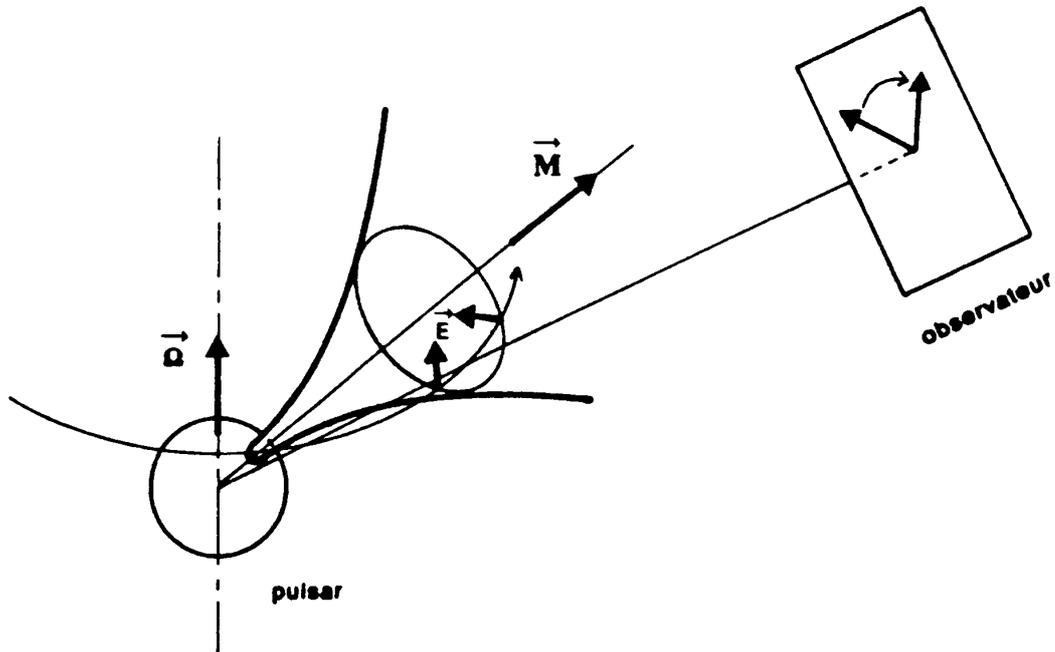


Fig. 5-3: Effet de la polarisation linéaire du rayonnement parallèlement à la normale des lignes de champ.

donc un rayonnement électromagnétique polarisé linéairement, le plan de polarisation étant défini par le champ magnétique et la normale principale à la ligne de champ d'où provient le rayonnement; ceci permet de rendre compte de la variation de la direction de polarisation linéaire à travers le profil de pulse (cf figure 5-3) par des arguments purement géométriques plus simples que les arguments de biréfringence invoqués par Onishchenko (1981b).

Mentionnons enfin notre désaccord avec Beskin, Gurevich & Istomin (1986) qui tentent de retrouver l'effet de la courbure des lignes de champ magnétique sur le rayonnement électromagnétique dans la magnétosphère dans une situation de plasma quasi-homogène par un calcul particulier du tenseur de conductivité; en fait, ils obtiennent une condition nécessaire au développement d'une instabilité qui correspond exactement au régime WKB (leur équation (16) s'écrit dans nos unités $\lambda \gg 1$; cf § 3-A) dans lequel nous avons montré que le système était stable pour des profils de densité suffisamment réguliers.

Conclusion et perspectives

L'instabilité de courbure de faisceaux annulaires de particules chargées relativistes, exhibée par Goldreich & Keeley au prix de calculs longs et ardu, avait été retrouvée d'une façon beaucoup plus simple par Asséo, Pellat & Sol dans le cadre d'un formalisme emprunté à la physique des plasmas. La simplification provient, d'une part, de ce qu'on élimine alors le caractère discret des particules (traitées individuellement par Goldreich & Keeley) pour ne conserver que la partie cohérente du rayonnement du système, et d'autre part de l'adoption d'une géométrie cylindrique plutôt que circulaire, ce qui permet de se ramener en fin de compte à un problème monodimensionnel tout en conservant la caractéristique principale du système: la courbure des lignes du champ magnétique fort qui guide les particules.

A ce point du problème, on sait donc décrire de façon simple le comportement d'une "feuille" mince chargée (ou du moins polarisable: par exemple un plasma électrons-positrons) de forme cylindrique, en rotation à vitesse relativiste autour de son axe: des perturbations de densité (et donc de vitesse) azimutales engendrent un champ électromagnétique qui réagit sur la matière de telle sorte qu'on obtient une instabilité qui constitue donc un processus de génération de rayonnement. Cependant, plusieurs contraintes subsistent qui limitent l'applicabilité du mécanisme: le calcul n'est strictement valable que pour une feuille d'épaisseur très faible, monocinétique (dans son état d'équilibre où la densité est uniforme sur le pourtour du cylindre), dans la limite d'un champ magnétique de guidage infini, ce qui exclut a priori toute interaction de la feuille de plasma avec celle des deux polarisations possibles des ondes électromagnétiques dans laquelle le champ électrique est perpendiculaire au champ magnétique statique, parallèle à l'axe de rotation.

Nous avons levé la première limitation en montrant que dans le cas de la polarisation déjà étudiée, un cylindre de plasma plein (dont la frontière extérieure occupe à peu près l'ancien emplacement de la feuille) conduisait à l'instabilité, la véritable contrainte s'avérant être une limitation inférieure de la valeur du gradient de densité à la frontière du plasma. Nous avons précisé les différentes conditions de validité du mécanisme ainsi généralisé, et en particulier montré qu'il est gouverné, entre autres, par un paramètre sans dimension (le paramètre " λ " = $(\omega_p/\gamma_0^{3/2})^{3/2}/(\omega^{1/2}\Omega_r)$) dépendant des fréquences caractéristiques du problème: $\omega_p/\gamma_0^{3/2}$ la fréquence plasma corrigée des effets de variation de masse relativiste; Ω_r la fréquence de rotation des particules autour du centre de courbure de leur trajectoire, et ω la fréquence des ondes considérées; l'instabilité ne se produit que pour λ inférieur à 5, donne des taux de croissance optimaux pour $\lambda \sim 1$, puis devient

progressivement moins efficace lorsque λ décroît encore.

Les valeurs de taux de croissance obtenues dans le domaine radio se comparent très favorablement avec celles des mécanismes classiques de génération d'ondes (électrostatiques ou directement électromagnétiques) en plasma homogène.

Nous avons levé la contrainte de champ magnétique infini pour examiner l'interaction du plasma avec l'autre polarisation des ondes électromagnétiques, et montré qu'on obtenait également une instabilité pour ce mode de rayonnement. Cependant, la nature différente des résonances onde-particules mises en jeu fait qu'on n'obtient pas d'instabilité en dehors de la configuration "feuille mince" pour ce mode, ce qui conduit à penser que seule la première polarisation intervient dans une situation réaliste telle qu'on s'attend à en rencontrer dans la magnétosphère des pulsars. Ceci a donc des conséquences sur la polarisation linéaire des ondes reçues de ces objets.

La contrainte sur la dispersion thermique maximale admissible sans détruire l'instabilité n'est pas modifiée par l'élargissement du faisceau.

Par ailleurs, si nous avons réussi à "élargir" le faisceau jusqu'à la forme d'un cylindre plein, une nouvelle contrainte est apparue: la raideur de la frontière du cylindre, l'épaisseur caractéristique de la zone de transition plasma-vide étant limitée typiquement à quelques mètres dans les conditions physiques de la magnétosphère pour un rayonnement de courbure cohérent dans le domaine radio. Il reste à trouver un mécanisme permettant de rendre compte de ces valeurs de gradient de densité relativement fortes.

Appendice 1

Calcul du tenseur de conductivité d'un faisceau de plasma:

On se propose de calculer la réponse linéaire d'un faisceau de plasma électrons-positrons plongé dans un champ magnétique d'équilibre définissant une direction longitudinale à un champ électromagnétique. On négligera les effets liés spécifiquement à la courbure des lignes de champ (et du faisceau): dérives de courbure, etc..., les principaux effets liés à la présence d'un champ magnétique fini et à l'inhomogénéité radiale du milieu (polarisations différentes, apparition de densités superficielles de charge et de courant perturbés) étant obtenus déjà dans la limite d'une géométrie droite. Par ailleurs on s'intéresse à la limite d'un faisceau représenté par une distribution d'impulsions des particules strictement monodimensionnelle, avec un profil de densité radial tendant vers un "trapèze" (cf figure A1-1).

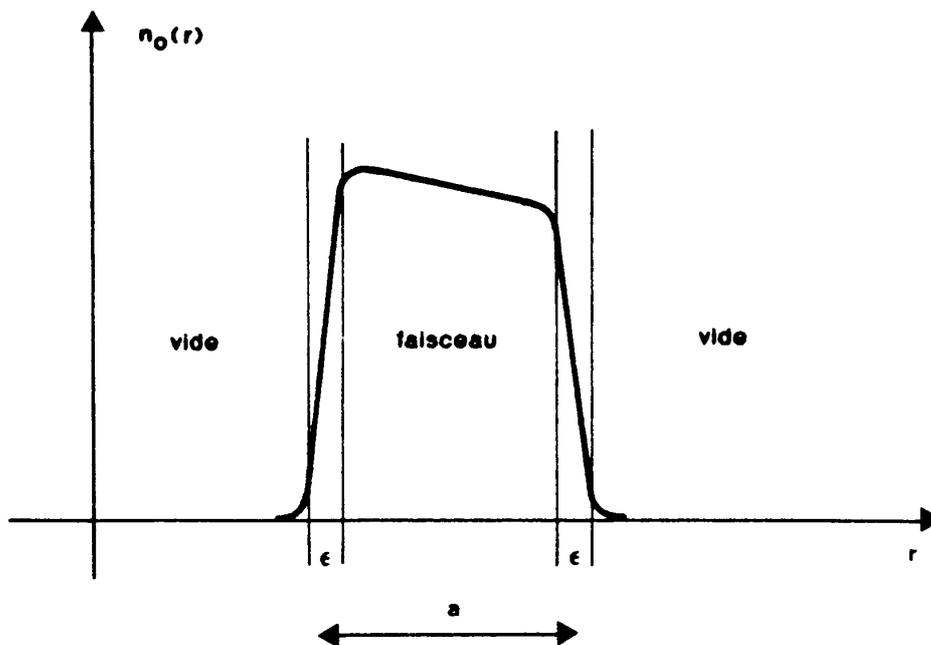


Fig. A1-1: Profil de densité du faisceau de plasma.

D'une façon générale, la fonction de distribution d'équilibre de chaque espèce de particules composant le plasma en présence du champ magnétique B_0 peut se représenter comme fonction des trois constantes du mouvement des particules dans ce champ d'équilibre: l'énergie, l'impulsion longitudinale (parallèle au champ) et la composante verticale de l'impulsion canonique:

$$f_{0s} = f_{0s}(P^2, P_\theta, P_z - \frac{q_s B_0}{c} x)$$

$x = r - r_0$ est la coordonnée "radiale" selon laquelle existe une inhomogénéité

généité du plasma, localisée en fin de compte aux frontières faisceau-vide. L'indice s identifie l'espèce de particules à laquelle se rapportent les quantités indicées.

Une autre forme possible, qu'on adoptera, est la suivante:

$$f_{0s} = f_{0s}(p_1, p_\theta, p_z - \frac{q_s B_0}{c} x)$$

$$\text{où } p_1 = (p_r^2 + p_z^2)^{1/2} .$$

On obtient la fonction de distribution perturbée f_{1s} , liée à la présence d'un champ électromagnétique de perturbation, par la "méthode des caractéristiques" (cf par exemple Krall & Trivelpiece 1973), consistant à intégrer l'équation de Vlasov linéarisée, qui utilise la dérivée totale par rapport au temps de la fonction de distribution perturbée, le long de l'orbite d'une particule soumise au champ d'équilibre B_0 et passant à l'instant t par le point de l'espace des phases en lequel on veut calculer f_{1s} . Le résultat de cette intégration prend la forme:

$$f_{1s}(t) = - \int_{-\infty}^t (F_{1sr} p_r + F_{1sz} p_z)(\tau) d\tau \left[\frac{1}{p_r} \frac{\partial f_{0s}}{\partial p_r} \right] \\ - \int_{-\infty}^t F_{1s\theta}(\tau) d\tau \left[\frac{\partial f_{0s}}{\partial p_\theta} \right] - \int_{-\infty}^t F_{1sz}(\tau) d\tau \left[\frac{\partial f_{0s}}{\partial p_z} - \frac{p_z}{p_r} \frac{\partial f_{0s}}{\partial p_r} \right]$$

f_{1s} et f_{0s} sont les fonctions de distribution perturbée et non perturbée, F_{1s} la force due au champ électromagnétique perturbé. Les quantités entre crochets sont des constantes du mouvement des particules dans le champ non perturbé et peuvent donc sortir des intégrales. τ est une variable de temps indexant le mouvement le long de la caractéristique.

La force électrique F_{1s} s'écrit, compte tenu des équations de Maxwell reliant B_1 à E_1 :

$$\left[\begin{array}{l} F_{1sr} = q_s \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_\theta}{\omega}\right) E_r - i \frac{v_\theta}{\omega} \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - i \frac{v_z}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \\ F_{1s\theta} = q_s \left[\frac{k_{\parallel}}{\omega} (E_r v_r + E_z v_z) + E_\theta + i \frac{v_r}{\omega} \frac{\partial E_\theta}{\partial r} \right] \\ F_{1sz} = q_s \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel} v_\theta}{\omega}\right) E_z + i \frac{v_r}{\omega} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \end{array} \right.$$

où on a posé $k_{\parallel} = m/r_0 \approx m/r$ à la limite droite.

Les intégrales à calculer sont donc les suivantes:

$$\int_{-\infty}^t (E_r p_r + E_z p_z)(\tau) d\tau \quad ; \quad \int_{-\infty}^t p_r(\tau) \frac{\partial E_\theta}{\partial r}(\tau) d\tau \quad . \\ \int_{-\infty}^t p_r(\tau) \frac{\partial E_z}{\partial r}(\tau) d\tau \quad ; \quad \int_{-\infty}^t E_\theta(\tau) d\tau \quad ; \quad \int_{-\infty}^t E_z(\tau) d\tau \quad .$$

Les grandeurs intervenant dans les intégrandes sont à évaluer, à l'instant τ , au point de l'espace des phases (dépendant de τ) correspondant à la particule en mouvement dans le champ magnétique d'équilibre. En particulier, le champ électrique s'écrit:

$$E(\tau) = [E(r) + (r(\tau) - r) \frac{\partial E}{\partial r}(r) + \frac{1}{2} (r(\tau) - r)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial r^2}(r) + \dots] e^{-i(\omega\tau - m\theta(\tau))} .$$

Ce développement limité suffit dans la mesure où on va se cantonner dans la suite à la limite où le rayon de Larmor tend vers zéro.

Les autres grandeurs peuvent être mises sous la forme:

$$p_r(\tau) = -p_1 \sin(\omega_{DS}\tau + \phi)$$

$$p_z(\tau) = p_1 \cos(\omega_{DS}\tau + \phi)$$

$$r(\tau) - r = \frac{v_1}{\omega_{DS}} (\cos(\omega_{DS}\tau + \phi) - \cos(\omega_{DS}t + \phi))$$

La dernière égalité peut se déduire, soit de l'intégration par rapport au temps de la première, soit de la conservation de l'impulsion canonique .

Les constantes ϕ et p_1 sont choisies de telle sorte que pour $\tau = t$, les différentes grandeurs correspondent au point (r, θ, p) de l'espace des phases en lequel on veut calculer f_{1S} . On a posé $\omega_{DS} = q_S B_0 / \gamma M_S c$.

La forme de la fonction de distribution d'équilibre permet d'écrire:

$$\frac{\partial f_{OS}}{\partial p_z} - \frac{p_z}{p_r} \frac{\partial f_{OS}}{\partial p_r} = - \frac{c}{q_S B_0} \frac{\partial f_{OS}}{\partial x}$$

Par ailleurs, si $\langle p_1^2 \rangle$ représente la moyenne quadratique de l'impulsion perpendiculaire à B_0 , on a (comme on peut le vérifier par exemple pour une dépendance de f_{OS} gaussienne par rapport à p_1) les ordres de grandeur suivants:

$$\frac{1}{p_r} \frac{\partial f_{OS}}{\partial p_r} \sim \frac{f_{OS}}{\langle p_1^2 \rangle} , \quad \frac{\partial f_{OS}}{\partial p_\theta} , \quad \frac{\partial f_{OS}}{\partial x} \sim f_{OS} .$$

Comme on veut en fin de compte se ramener au cas $\langle p_1^2 \rangle \rightarrow 0$, il suffit de développer le champ électromagnétique jusqu'à l'ordre deux en puissances de $r(\tau) - r$, et de calculer les intégrales ci-dessus jusqu'à l'ordre deux pour les deux premières, et à l'ordre zéro pour les trois dernières; on obtient ainsi tous les termes qui ne s'annulent pas dans $f_{1S}(t)$ à la limite $\langle p_1^2 \rangle \rightarrow 0$.

Les résultats sont les suivants:

$$\int_{-\infty}^t (E_r p_r + E_z p_z)(\tau) d\tau =$$

$$\frac{i}{2} \left(E_z - \frac{v_z}{\omega_{DS}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \left(\frac{p_z - ip_r}{\omega - k_{\parallel} v_\theta - \omega_{DS}} + \frac{p_z + ip_r}{\omega - k_{\parallel} v_\theta + \omega_{DS}} \right) - \frac{1}{2} \left(E_r - \frac{v_z}{\omega_{DS}} \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) \times$$

$$\left(\frac{p_z - ip_r}{\omega - k_{\parallel} v_\theta - \omega_{DS}} - \frac{p_z + ip_r}{\omega - k_{\parallel} v_\theta + \omega_{DS}} \right) + \frac{1}{2M_S \gamma \omega_{DS}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \left(\frac{p_1^2}{\omega - k_{\parallel} v_\theta} + \frac{1}{2} \frac{(p_z - ip_r)^2}{\omega - k_{\parallel} v_\theta - 2\omega_{DS}} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(p_z + ip_r)^2}{\omega - k_{\parallel} v_\theta + 2\omega_{DS}} - \frac{1}{4M_S \gamma \omega_{DS}} \frac{\partial E_r}{\partial r} \left(\frac{(p_z - ip_r)^2}{\omega - k_{\parallel} v_\theta - 2\omega_{DS}} - \frac{(p_z + ip_r)^2}{\omega - k_{\parallel} v_\theta + 2\omega_{DS}} \right) .$$

$$\int_{-\infty}^t p_r(\tau) \frac{\partial E_\theta}{\partial r}(\tau) d\tau =$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{v_z}{\omega_{DS}} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} \right) \left(\frac{p_z - ip_r}{\omega - k_{\parallel} v_\theta - \omega_{DS}} - \frac{p_z + ip_r}{\omega - k_{\parallel} v_\theta + \omega_{DS}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4M_S \gamma \omega_{DS}} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} \left(\frac{(p_z - ip_r)^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta} - 2\omega_{DS}} - \frac{(p_z + ip_r)^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta} + 2\omega_{DS}} \right) . \\
& \int_{-\infty}^t E_\theta(\tau) d\tau = \frac{iE_\theta}{\omega - k \sqrt{v_\theta}} ; \quad \int_{-\infty}^t E_z(\tau) d\tau = \frac{iE_z}{\omega - k \sqrt{v_\theta}} ; \\
& \int_{-\infty}^t p_r(\tau) \frac{\partial E_z}{\partial r}(\tau) d\tau = 0 .
\end{aligned}$$

On a omis dans ces expressions le facteur $e^{-i(\omega t - m\theta)}$.

On suppose pour que les intégrales aient un sens que ω comporte une partie imaginaire positive, de sorte que les termes tout intégrés s'annulent pour $\tau \rightarrow -\infty$. Les résultats sont ensuite éventuellement prolongés analytiquement dans le domaine $\text{Im}(\omega) < 0$.

En reportant dans l'expression de f_{1s} , on obtient finalement:

$$\begin{aligned}
f_{1s} = & - \frac{q_s}{P_r} \frac{\partial f_{0s}}{\partial P_r} \left[\left(1 - \frac{k \sqrt{v_\theta}}{\omega}\right) \left[\frac{1}{2} \left(E_z - \frac{v_z}{\omega_{DS}} \frac{\partial E_z}{\partial r}\right) \left(\frac{p_z - ip_r}{\omega - k \sqrt{v_\theta} - \omega_{DS}} + \frac{p_z + ip_r}{\omega - k \sqrt{v_\theta} + \omega_{DS}} \right) \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} \left(E_r - \frac{v_z}{\omega_{DS}} \frac{\partial E_r}{\partial r}\right) \left(\frac{p_z - ip_r}{\omega - k \sqrt{v_\theta} - \omega_{DS}} - \frac{p_z + ip_r}{\omega - k \sqrt{v_\theta} + \omega_{DS}} \right) + \frac{i}{2M_S \gamma \omega_{DS}} \frac{\partial E_z}{\partial r} \left[\frac{p_l^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta}} \right. \\
& + \frac{1}{2} \frac{(p_z - ip_r)^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta} - 2\omega_{DS}} + \left. \frac{1}{2} \frac{(p_z + ip_r)^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta} + 2\omega_{DS}} \right] - \frac{1}{4M_S \gamma \omega_{DS}} \frac{\partial E_r}{\partial r} \left(\frac{(p_z - ip_r)^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta} - 2\omega_{DS}} \right. \\
& - \left. \frac{(p_z + ip_r)^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta} + 2\omega_{DS}} \right) \left. \right] + \frac{iv_\theta}{2\omega} \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{v_z}{\omega_{DS}} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} \right) \left(\frac{p_z - ip_r}{\omega - k \sqrt{v_\theta} - \omega_{DS}} - \frac{p_z + ip_r}{\omega - k \sqrt{v_\theta} + \omega_{DS}} \right) \\
& + \frac{iv_\theta}{4M_S \gamma \omega_{DS}} \frac{\partial^2 E_\theta}{\partial r^2} \left(\frac{(p_z - ip_r)^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta} - 2\omega_{DS}} - \frac{(p_z + ip_r)^2}{\omega - k \sqrt{v_\theta} + 2\omega_{DS}} \right) \\
& - iq_s \frac{E_\theta}{\omega - k \sqrt{v_\theta}} \frac{\partial f_{0s}}{\partial p_\theta} + \frac{ic}{\omega B_0} E_z \frac{\partial f_{0s}}{\partial x} \tag{A1-1}
\end{aligned}$$

On peut ensuite calculer les densités volumiques de charge et de courant perturbées:

$$\rho = \int (q_+ f_{1+} + q_- f_{1-}) d^3p ; \quad j = \int v (q_+ f_{1+} + q_- f_{1-}) d^3p .$$

où $s = +$ ou $-$ selon qu'il s'agit des positrons ou des électrons.

Nous allons effectuer ce calcul dans deux situations différentes qui présentent un intérêt pour la théorie du rayonnement des pulsars.

- Calcul classique en milieu homogène:

Dans ce cas-là, la situation, largement utilisée dans la littérature, est celle d'un plasma électrons-positrons homogène, où le champ magnétique a pour effet d'induire une distribution d'impulsions des particules monodimensionnelle, identique pour les deux espèces, de la forme:

$$f_0(p) = \frac{n_0}{2} \delta(p_r) \delta(p_z) f(p_\theta)$$

La forme de $f(p_\theta)$ sera choisie de façon à rendre compte de la structure du plasma magnétosphérique communément admise (cf figure A3-2). Le milieu étant supposé homogène, les dérivées spatiales qui apparaissent dans l'expression

$A_{\perp 1}$ représentent une composante du vecteur d'onde perpendiculaire au champ magnétique d'équilibre $\partial/\partial r \sim ik_{\perp}$ et les dérivées spatiales successives de la fonction de distribution d'équilibre s'annulent. On obtient alors les expressions suivantes pour chaque espèce:

$$\rho_{\pm} = \frac{e^2 k_{\perp}}{M\omega} \int \frac{i(\omega - k_{\parallel} v_{\theta}) E_r + ik_{\perp} v_{\theta} E_{\theta} \pm \omega_D E_z}{(\omega - k_{\parallel} v_{\theta})^2 - \omega_D^2} \frac{f(p_{\theta})}{\gamma} dp_{\theta} - e^2 \int \frac{i E_{\theta}}{\omega - k_{\parallel} v_{\theta}} \frac{\partial f}{\partial p_{\theta}} dp_{\theta} .$$

$$j_{r\pm} = \frac{e^2}{M\omega} \int \frac{i(\omega - k_{\parallel} v_{\theta}) E_r + ik_{\perp} v_{\theta} E_{\theta} \pm \omega_D E_z}{(\omega - k_{\parallel} v_{\theta})^2 - \omega_D^2} (\omega - k_{\parallel} v_{\theta}) \frac{f(p_{\theta})}{\gamma} dp_{\theta} .$$

$$j_{\theta\pm} = \frac{e^2 k_{\perp}}{M\omega} \int \frac{i(\omega - k_{\parallel} v_{\theta}) E_r + ik_{\perp} v_{\theta} E_{\theta} \pm \omega_D E_z}{(\omega - k_{\parallel} v_{\theta})^2 - \omega_D^2} \frac{v_{\theta} f(p_{\theta})}{\gamma} dp_{\theta} - e^2 \int \frac{iv_{\theta} E_{\theta}}{\omega - k_{\parallel} v_{\theta}} \frac{\partial f}{\partial p_{\theta}} dp_{\theta}$$

$$j_{z\pm} = - \frac{e^2}{M\omega} \int \frac{\pm \omega_D (\omega - k_{\parallel} v_{\theta}) E_r \pm \omega_D k_{\perp} v_{\theta} E_{\theta} - i(\omega - k_{\parallel} v_{\theta})^2 E_z}{(\omega - k_{\parallel} v_{\theta})^2 - \omega_D^2} \frac{f(p_{\theta})}{\gamma} dp_{\theta} .$$

où on a posé: $\omega_D = \omega_{D\pm} = \frac{eB_0}{\gamma mc}$.

Ces expressions sont de la forme:

$$j_i = \frac{\omega}{4\pi i} \epsilon_{ij} E_j$$

où ϵ_{ij} est le tenseur diélectrique; dans le cas du plasma électrons-positrons défini ci-dessus, par suite de l'égalité des masses des particules et de la neutralité électrique du plasma, les composantes non nulles de ce tenseur sont les suivantes:

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel} = - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int \frac{(\omega - k_{\parallel} v)^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2 - \omega_D^2} \frac{f(p)}{\gamma} dp$$

$$\epsilon_{r\theta} = \epsilon_{\theta r} = - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int \frac{k_{\perp} v (\omega - k_{\parallel} v)}{(\omega - k_{\parallel} v)^2 - \omega_D^2} \frac{f(p)}{\gamma} dp$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int \frac{k_{\perp}^2 v^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2 - \omega_D^2} \frac{f(p)}{\gamma} dp - \int \frac{\omega_p^2}{\gamma^3 (\omega - k_{\parallel} v)^2} f(p) dp$$

où $\omega_p^2 = 4\pi m_0 e^2 / M = \omega_{p+}^2 + \omega_{p-}^2$ est la fréquence plasma globale du faisceau. On vérifie que ces expressions ne contredisent pas les résultats de Mikhailovskii (1975, p.153) obtenus pour une fonction de distribution quelconque.

- Calcul en milieu inhomogène:

Dans le cas où le plasma est inhomogène dans la direction radiale (perpendiculaire au champ magnétique d'équilibre) on choisit de conserver les expressions explicites des dérivées radiales de toutes les quantités pour ne pas se restreindre ab initio à une approximation "WKB" ou de gradient faible. C'est cette situation qui est intéressante pour le mécanisme de l'instabilité de courbure, et il suffit dans ce cas-là d'adopter la fonction de distribution la plus simple possible:

$$f_0(r, p) = \frac{n_0(r)}{2} \delta(p_r) \delta(p_z) \delta(p_{\theta} - p_0)$$

pour les deux espèces de particules.

Les intégrations dans l'espace des impulsions sont effectuées en développant au préalable les fonctions de distribution d'équilibre pour tenir compte correctement des effets de gradient de densité:

$$f_{0S}(p_{\perp}, p_{\theta}, p_z - \frac{q_S B_0}{c} x) = f_{0S}(p_{\perp}, p_{\theta}, - \frac{q_S B_0}{c} x) - \frac{c p_z}{q_S B_0} \frac{\partial f_{0S}}{\partial x}(p_{\perp}, p_{\theta}, - \frac{q_S B_0}{c} x) + \frac{c^2 p_z^2}{2 q_S^2 B_0^2} \frac{\partial^2 f_{0S}}{\partial x^2}(p_{\perp}, p_{\theta}, - \frac{q_S B_0}{c} x) + \dots$$

où $x = r - r_0$.

Il suffit de conserver ces trois termes, car à la limite $\langle p_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$, toute puissance de p_x ou p_z supérieure à deux (compte tenu de l'ordre des dérivées partielles de f_{0S} par rapport aux différentes composantes de l'impulsion) donnera un résultat nul. On peut maintenant effectuer les intégrales en tenant compte de ce que les coefficients de p_z^n dans le développement ci-dessus sont isotropes dans le plan (p_x, p_z) , et passer à la limite $\langle p_{\perp}^2 \rangle \rightarrow 0$, $p_{\theta} = p_{0S}$ pour les deux espèces. Dans le cas du plasma électrons-positrons, compte tenu de la neutralité électrique globale du plasma ($q_+ = -q_- = e$, $n_{0+} = n_{0-} = n_0/2$) et de l'égalité des masses des particules ($M_+ = M_- = M$), on a:

$$\rho = -i \frac{e^2}{M \gamma_0 \omega} \frac{1}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_D^2} [i (\omega - k_{\parallel} v_0) \frac{\partial}{\partial r} (n_0 E_r) + v_0 \frac{\partial}{\partial r} (n_0 \frac{\partial E_{\theta}}{\partial r})] + i \frac{e^2 n_0 k_{\parallel}}{M \gamma_0^3} \frac{E_{\theta}}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2} \quad (A1-2)$$

$$j_{\theta} = v_0 \rho + i \frac{e^2 n_0}{M \gamma_0^3} \frac{E_{\theta}}{\omega - k_{\parallel} v_0} \quad (A1-3)$$

$$j_r = \frac{e^2 n_0}{M \gamma_0 \omega} \frac{\omega - k_{\parallel} v_0}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_D^2} [i (\omega - k_{\parallel} v_0) E_r + v_0 \frac{\partial E_{\theta}}{\partial r}] \quad (A1-4)$$

$$j_z = i \frac{e^2 n_0}{M \gamma_0 \omega} \frac{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_D^2} E_z \quad (A1-5)$$

où $n_0 = \int (f_{0+} + f_{0-}) d^3p$ est la densité numérique d'équilibre totale.

On vérifie au passage que la relation de conservation de la charge, qui s'écrit pour les grandeurs perturbées:

$$-i\omega \rho + i k_{\parallel} j_{\theta} + \frac{\partial j_r}{\partial r} = 0$$

est bien satisfaite (à des termes d'ordre $1/m$ près si on tient compte de la variation radiale de k_{\parallel}).

En intégrant ces quantités sur un petit intervalle de largeur ϵ autour des zones de transition plasma-vide où les gradients sont forts, et en faisant tendre ϵ vers 0, on voit apparaître des densités superficielles de charge et de courant, liées aux termes en $\partial/\partial r$ des expressions ci-dessus: toute dérivée radiale d'une quantité subissant, à la limite d'un gradient infiniment raide, une discontinuité à la traversée d'une frontière faisceau-vide, contribuera à

un terme de densité superficielle. En l'occurrence :

- densité superficielle de charge Σ :

$$\Sigma_{i,e} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{r_{i,e}^{-\epsilon}}^{r_{i,e}^{+\epsilon}} \rho(r) dr =$$

$$\pm i \frac{e^2 n_0}{\gamma_0 \omega (\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_p^2} [i (\omega - k_{\parallel} v_0) E_{r_{i,e}} + v_0 \frac{\partial E_{\theta}}{\partial r}]_{i,e}$$

- densité superficielle de courant K :

$$K_{\theta i,e} = v_0 \Sigma_{i,e} ; K_{z i,e} = 0 .$$

L'indice i (e) désigne les quantités évaluées à la frontière intérieure (extérieure) du faisceau, dans le plasma. Dans les différentes expressions, le signe supérieur correspond à l'indice i . On peut ici encore vérifier que la relation de conservation de la charge superficielle est satisfaite :

$$-i\omega \Sigma_{i,e} + ik_{\parallel} K_{i,e} \pm j_{r_{i,e}} = 0 .$$

En fait, cette relation résulte simplement de l'intégration sur ϵ de la relation de conservation des charges volumiques, et ne constitue donc pas un "détecteur d'erreurs" autonome.

On va maintenant rassembler ces résultats, pour utilisation dans les calculs du corps du texte, sous forme d'un "tenseur de conductivité" :

$$j_i = \sigma_{ij} E_j + \tau_{ij}^{(1)} \frac{\partial E_j}{\partial r} + \tau_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 E_j}{\partial r^2} + \dots$$

$$4\pi \Sigma_{i,e} = \pm (\eta_r E_{r_{i,e}} + \eta^{(1)} \frac{\partial E_{\theta}}{\partial r}]_{i,e} .$$

$$K_{i,e} = v_0 \Sigma_{i,e} .$$

Par ailleurs on suppose à partir de maintenant que le profil de densité du faisceau est bien rectangulaire, c'est-à-dire que la densité d'équilibre n_0 est constante à l'intérieur du plasma. Les composantes non nulles du tenseur de conductivité sont alors :

$$\epsilon_{\parallel} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{rr} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{zz} = - \frac{\omega_p^2}{\gamma_0 \omega^2} \frac{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_p^2}$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\theta\theta} = - \frac{\omega_p^2}{\gamma_0^3 (\omega - k_{\parallel} v_0)^2}$$

$$\tau_r = \frac{4\pi i}{\omega} \tau_{r\theta}^{(1)} = \frac{4\pi i}{\omega} \tau_{\theta r}^{(1)} = i \frac{\omega_p^2 v_0}{\gamma_0 \omega^2} \frac{\omega - k_{\parallel} v_0}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_p^2}$$

$$\tau_{\theta} = \frac{4\pi i}{\omega} \tau_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{\omega_p^2 v_0^2}{\gamma_0 \omega^2} \frac{1}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_p^2}$$

$$\eta_r = -i \frac{\omega}{v_0} \tau_r = \frac{\omega_p^2}{\gamma_0 \omega} \frac{\omega - k_{\parallel} v_0}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_p^2}$$

$$\eta^{(1)} = -i \frac{\omega}{v_0} \tau_{\theta} = -i \frac{\omega_p^2 v_0}{\gamma_0 \omega} \frac{1}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2 - \omega_p^2}$$

Ces expressions ne sont donc valables que dans la limite de gradients de densité faibles dans le plasma. Cependant, dans le cas du mode magnéto-sonore

(polarisation verticale $E_r = E_\theta = 0$) on peut utiliser l'expression de ϵ_{\parallel} telle quelle, quelle que soit la valeur du gradient de densité, sans avoir à se préoccuper d'éventuelles densités superficielles, car l'expression complète A1-5 du courant perturbé ne comporte aucun terme de gradient. Ceci est dû à la compensation des courants perpendiculaires (d'origine gyromagnétique) qui a lieu dans un plasma électrons-positrons avec la même fonction de distribution pour les deux espèces.

Notons les relations suivantes entre ces différentes composantes:

$$\eta_r - \eta^{(1)} \epsilon_{\parallel} / \tau_r = 0 \quad .$$

$$\epsilon_{\parallel} \tau_\theta - \tau_r^2 = 0 \quad .$$

$$\epsilon_{\parallel} = i (\omega / v_0 - k_{\parallel}) \tau_r \quad .$$

Appendice 2

- Développements asymptotiques des fonctions de Bessel et de Hankel :

Les relations qui décrivent le comportement de notre système à symétrie cylindrique mettent en jeu les fonctions : $H_m^{(1)}(\omega r/c)$, $H_m^{(2)}(\omega r/c)$ et leurs dérivées. Lorsque m est grand, on peut leur substituer le premier terme de leur développement asymptotique en termes de fonctions d'Airy (Abramowitz & Stegun 1970) :

$$H_m^{(1),(2)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sim \frac{2}{m^{1/3}} e^{-\pm i\pi/3} \left(\frac{4 \eta\left(\frac{\omega r}{mc}\right)}{\omega^2 r^2}\right)^{1/4} Ai\left(e^{\pm 2i\pi/3} m^{2/3} \eta\left(\frac{\omega r}{mc}\right)\right) \quad (A2-1)$$

$$H_m^{(1),(2)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sim \frac{4m^{1/3}c}{\omega r} e^{\pm 4i\pi/3} \left(\frac{1 - \frac{\omega^2 r^2}{m^2 c^2}}{4 \eta\left(\frac{\omega r}{mc}\right)}\right)^{1/4} Ai'\left(e^{\pm 2i\pi/3} m^{2/3} \eta\left(\frac{\omega r}{mc}\right)\right)$$

où la fonction $\eta(z)$ est définie par :

$$\frac{2}{3} (-\eta)^{3/2} = \int_1^z \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt$$

Le domaine qui nous concerne est le voisinage de la zone de transition :

$$\omega r/mc = r\delta\omega/mc + 1 \sim 1$$

La fonction η est analytique et monovaluée dans un voisinage de $z = 1$ et y admet le développement suivant :

$$\eta(z) \sim 2^{-2/3} (1 - z^2) (1 + 2/5 (1 - z^2) + \dots)$$

Les expressions (A2-1) sont donc définies sans ambiguïté dans un voisinage de $\omega r/mc = 1$. On obtient l'ordre le plus bas des développements (A2-1) en tenant compte de :

$$|z - 1| = |\delta z| \ll 1$$

Ceci permet de développer $\eta(z)$ au voisinage de $\delta z = 0$:

$$\eta(1 + \delta z) \sim -2^{1/3} \delta z + O(\delta z^2)$$

On a donc :

$$H_m^{(1),(2)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sim 2 \left(\frac{2}{m}\right)^{1/3} e^{-\pm i\pi/3} Ai\left(e^{-\pm i\pi/3} (2m^2)^{1/3} \delta z\right) \quad (A2-2)$$

$$H_m^{(1),(2)}\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sim \frac{4}{(2m^2)^{1/3}} e^{-\pm 2i\pi/3} Ai'\left(e^{-\pm i\pi/3} (2m^2)^{1/3} \delta z\right)$$

où $\delta z = \omega r/mc - 1$.

Ces expressions permettent de définir le comportement dominant de la fonction de Bessel $J_m(\omega r/c) = (H_m^{(1)}(\omega r/c) + H_m^{(2)}(\omega r/c))/2$ pour $\omega r/mc \gg 1$ mais pour $\omega r/mc < 1$ on trouve en utilisant les expressions ci-dessus une somme nulle à l'ordre le plus bas. Il ne reste dans l'expression asymptotique de J_m que les termes sous-dominants de $H_m^{(1)}$ et $H_m^{(2)}$ et il faut donc une autre expression

pour J_m . On trouve (Abramowitz & Stegun 1970):

$$J_m\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sim \left(\frac{2}{m}\right)^{1/3} \text{Ai}\left(-\left(2m^2\right)^{1/3}\delta z\right)$$

$$J_m'\left(\frac{\omega r}{c}\right) \sim -\left(\frac{2}{m}\right)^{2/3} \text{Ai}'\left(-\left(2m^2\right)^{1/3}\delta z\right)$$
(A2-3)

Ces expressions permettent de transformer sans ambiguïté les expressions 2-10 du § 2-B-b et 2-28 du § 2-C-b, car on n'a utilisé jusqu'à présent que des fonctions analytiques et monovaluées dans un voisinage de $\delta z = 0$.

Pour aller plus loin lorsque $|(2m^2)^{1/3}\delta z| \gg 1$, on veut pouvoir utiliser des développements asymptotiques des fonctions d'Airy qui ne sont pas monovalués; il faut donc prêter attention à l'expression de $\delta\omega = |\delta\omega|e^{i\theta}$ où θ n'est plus défini modulo 2π , mais dans un intervalle borné unique. Le comportement asymptotique de la fonction $\text{Ai}(z)$ dans les différentes régions du plan complexe est illustré dans la figure A2-1.

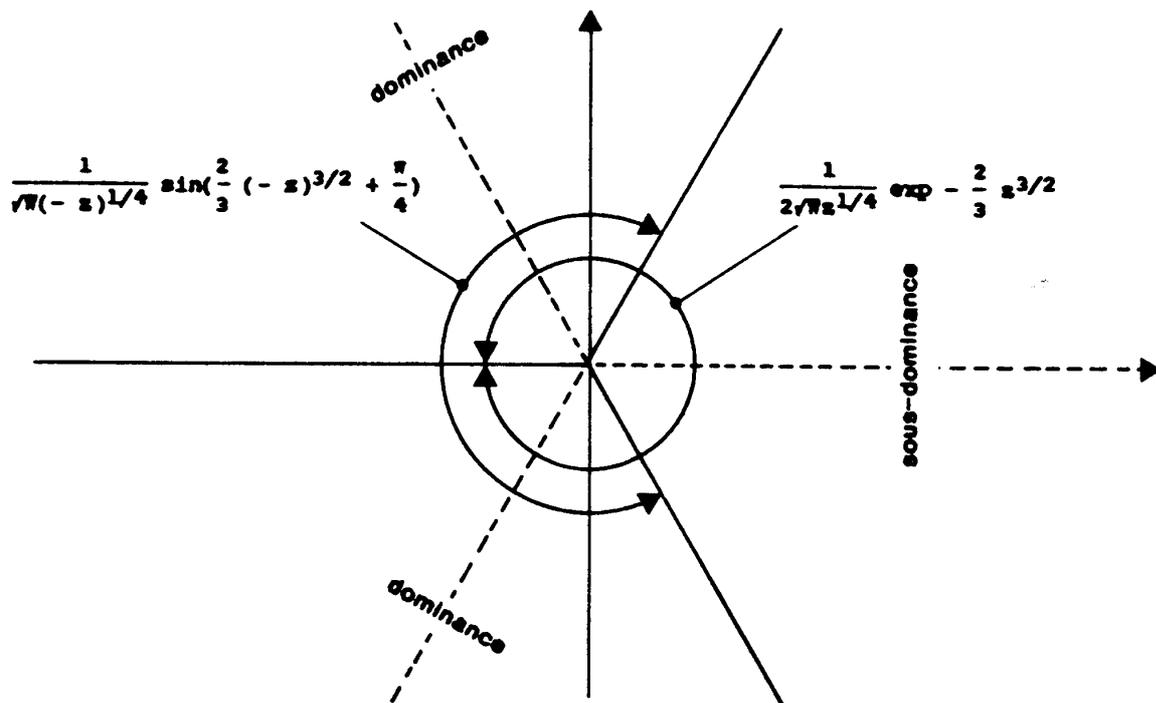


Fig. A2-1: Comportement asymptotique de la fonction d'Airy $\text{Ai}(z)$.

On dispose (cf Abramowitz & Stegun 1970) des deux développements suivants valables selon la valeur de l'argument de z :

- pour $|\text{Arg}(z)| < \pi$:

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp - \frac{2}{3} z^{3/2} (1 + O(z^{-3/2}))$$

$$\text{Ai}'(z) \sim - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{1/4} \exp - \frac{2}{3} z^{3/2} (1 + O(z^{-3/2}))$$

- pour $|\text{Arg}(z)| < 2\pi/3$:

$$\text{Ai}(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \dots$$

$$\text{Ai}'(-z) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{1/4} \cos\left(\frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \dots$$

Ces deux développements permettent de couvrir tous les domaines de $\text{Arg}(z)$.

La résolution des équations (2-10) et (2-28) se fait donc par l'intermédiaire d'expressions différentes selon la valeur supposée de l'argument des fonctions d'Airy :

$$z = (2m^2)^{1/3} r_0 \delta\omega / mc e^{i\pi/3} .$$

Lorsque $|z| \ll 1$, il n'y a pas de problème de branche puisqu'on pose $\text{Ai}(z) \sim \text{Ai}(0)$.

Lorsque $|z| \gg 1$, avec $|\text{Arg}(z)| < \pi$, c'est-à-dire $|\text{Arg}(\delta\omega e^{i\pi/3})| < \pi$ on utilise le premier développement ci-dessus pour les deux fonctions d'Airy en se restreignant au domaine de solutions possibles : $0 < \text{Arg}(\delta\omega) < 4\pi/3$.

Nous vérifierons plus bas qu'on n'a besoin que de ce domaine.

On obtient donc :

- pour $0 < \text{Arg}(\delta\omega) < 4\pi/3$:

$$\begin{aligned} \text{Ai}\left(e^{-i\pi/3} (2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta\omega}{mc}\right) \text{Ai}\left(e^{-i\pi} (2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta\omega}{mc}\right) &\sim \\ &\frac{1}{4\pi} (2m^2)^{-1/6} \left(\frac{r_0 \delta\omega}{mc}\right)^{-1/2} e^{i\pi/3} \\ \text{Ai}'\left(e^{-i\pi/3} (2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta\omega}{mc}\right) \text{Ai}'\left(e^{-i\pi} (2m^2)^{1/3} \frac{r_0 \delta\omega}{mc}\right) &\sim \\ &\frac{1}{4\pi} (2m^2)^{1/6} \left(\frac{r_0 \delta\omega}{mc}\right)^{1/2} e^{-i\pi/3} \end{aligned}$$

Notons également quelques valeurs utiles:

$$\text{Ai}(0) = \frac{1}{3^{2/3} \Gamma(2/3)} ; \text{Ai}'(0) = \frac{-1}{3^{1/3} \Gamma(1/3)}$$

On utilise la propriété suivante de la fonction Γ : $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$

pour obtenir: $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ et $\text{Ai}(0)\text{Ai}'(0) = \frac{-1}{2\pi\sqrt{3}}$

- Contraintes physiques sur les solutions de la relation de compatibilité

On cherche à mettre en évidence une instabilité d'un système qui rayonne de l'énergie électromagnétique sans en recevoir de l'extérieur. Cette énergie doit donc être prélevée sur l'énergie cinétique des particules du faisceau. Le taux instantané d'émission d'énergie sous forme de rayonnement s'écrit:

$$\frac{dW_{\text{part.}}}{dt} = -j \cdot E$$

Dans le cas particulier où seuls les mouvements azimutaux des particules sont possibles, on a:

$$\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle j_{\theta}(t) E_{\theta}(t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(j_{\theta} E_{\theta}^*)$$

Les crochets désignent la valeur moyenne de la densité de transfert d'énergie sur une période du champ, exprimée en fonction des amplitudes complexes de j et E . On a donc :

$$\left\langle \frac{dW_{\text{part.}}}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(i \frac{e^2 n_0}{M} \frac{\omega}{\gamma_0^3 \left(\omega - \frac{mv_0}{r} \right)^2} |E_{\theta}|^2 \right)$$

Dans la limite $\delta\omega = \omega - mv_0/r \ll \omega$, on obtient approximativement :

$$\left\langle \frac{dW_{\text{part.}}}{dt} \right\rangle = +\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{e^2 n_0}{M} \frac{mc}{\gamma_0^3 r_0 \delta\omega^2} |E_{\theta}|^2 \right)$$

On ne peut espérer obtenir une instabilité que si :

$$\left\langle \frac{dW_{\text{part.}}}{dt} \right\rangle > 0$$

ce qui impose la contrainte suivante sur les valeurs possibles de $\delta\omega$:

$$\operatorname{Im}(\delta\omega^2) < 0$$

$\delta\omega$ doit donc se trouver dans le domaine du plan complexe suivant (représenté dans la figure A2-2) :

$$\operatorname{Arg}(\delta\omega) \in]-\pi/2, 0[\cup]\pi/2, \pi[\text{ modulo } 2\pi.$$

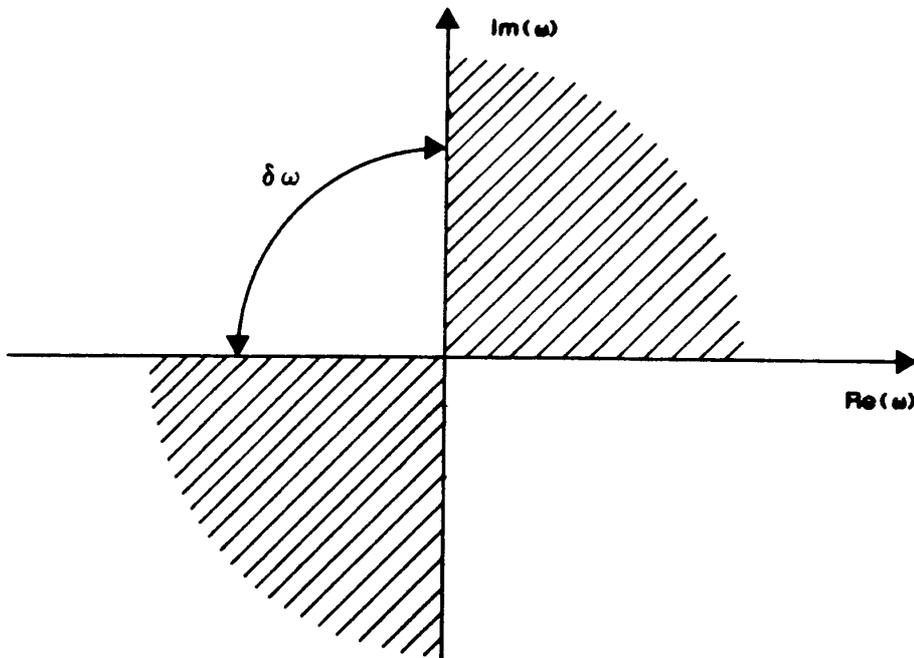


Fig. A2-2: valeurs possibles du décalage de fréquence complexe.

Notons que cette contrainte est une condition nécessaire, mais pas suffisante pour obtenir un comportement instable; en effet, l'émission d'énergie par les particules doit être non seulement positive, mais aussi

suffisante pour compenser les pertes par rayonnement, "pertes" en lesquelles réside tout l'intérêt du phénomène ...

La condition obtenue est locale, et reste vraie sur l'ensemble d'un faisceau large tant que celui-ci peut être considéré comme étant dans un état de résonance homogène, c'est-à-dire tant que $a/r_0 \ll \delta\omega/\omega$. Dans cette limite, le bilan du transfert d'énergie des particules vers les ondes est positif sur toute la largeur du faisceau et on peut s'attendre à obtenir encore une instabilité dans le cas d'un faisceau élargi.

Dans le cas des ondes magnétosonores dans un faisceau de plasma électrons-positrons, le taux d'émission d'énergie par les particules s'écrit:

$$\left\langle \frac{dW_{\text{part.}}}{dt} \right\rangle = - \langle j_z E_z \rangle = - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{ie^2 n_0}{My_0 \omega} \frac{\delta\omega^2}{\delta\omega^2 - \omega_B^2} |E_z|^2 \right)$$

Dans la limite $\delta\omega = \omega - mv_0/r_0 \ll \omega$, on obtient approximativement:

$$\left\langle \frac{dW_{\text{part.}}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\frac{e^2 n_0 r_0}{My_0 mc} \frac{\delta\omega^2}{\delta\omega^2 - \omega_B^2} |E_z|^2 \right)$$

On n'a donc transfert d'énergie du faisceau vers les ondes que si:

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - \delta\omega^2/\omega_B^2} \right) > 0$$

soit encore $\operatorname{Im}(\delta\omega^2) < 0$; on retrouve le même domaine de solutions acceptables que dans le cas du mode d'Alfvén.

Appendice 3

Comportement des différents paramètres physiques de la magnétosphère des pulsars:

On va chercher à estimer les valeurs de quelques paramètres importants et la façon dont elles sont reliées entre elles à travers la géométrie de la magnétosphère dans un modèle très rudimentaire. On a supposé que le champ magnétique de l'étoile était approximativement dipolaire, au moins pour des distances ni trop faibles (pour lesquelles une composante quadrupolaire devrait être prise en compte) ni trop grandes (on devrait alors considérer la torsion des lignes de champ due à la rotation du pulsar). On peut déduire de cette hypothèse la valeur du rayon de courbure des lignes de champ, grandeur cruciale pour le mécanisme étudié, selon l'endroit où l'on se place.

Le champ a pour expression en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (cf figure A3-1): $\mathbf{B}_0 = (B_{0r}, B_{0\theta}, 0)$ avec:

$$\begin{cases} B_{0r} = B_* \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 \cos\theta \\ B_{0\theta} = \frac{1}{2} B_* \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 \sin\theta \end{cases}$$

où r_* est le rayon de l'étoile, B_* la valeur du champ magnétique au pôle. On peut assigner à ces deux grandeurs des valeurs typiques relativement précises (Michel 1982): $r_* \approx 10^6$ cm et $B_* \approx 10^{12}$ G.

Si $\mathbf{u} = \mathbf{B}_0/B_0$ est le vecteur unitaire tangent au champ magnétique, le module du taux de variation de \mathbf{u} le long de la ligne de champ n'est autre que la courbure de celle-ci:

$$1/r_0 = |\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|$$

où r_0 est le rayon de courbure de la ligne de champ passant au point (r, θ) ; ceci s'écrit en coordonnées sphériques:

$$r_0 = \left[\left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right)^2 + \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

soit compte tenu de $u_r^2 + u_\theta^2 = 1$:

$$r_0 = \frac{r}{\left| \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) \right|}$$

On a: $u_r = 2 \cos\theta (1 + 3 \cos^2\theta)^{-1/2}$, $u_\theta = \sin\theta (1 + 3 \cos^2\theta)^{-1/2}$,

$$\text{d'où: } r_0 = \frac{4r}{3 \sin\theta} \frac{(1 - \frac{3}{4} \sin^2\theta)^{3/2}}{1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta} \quad \text{o.k. avec Donaghy et Harding (82) equ. (1).}$$

Pour des angles petits ($\theta \approx \sin\theta \ll 1$) on peut développer cette expression:

$$r_0 \approx \frac{4r}{3\theta} \left(1 - \frac{11}{24} \theta^2 \dots \right)$$

Elle n'est certainement plus valable au-delà du cylindre lumière, dans la zone où le champ engendré par l'étoile devient radiatif, c'est-à-dire qu'il faut se restreindre au domaine:

$$r \sin \theta \sim r \theta (1 - \theta^2/6 \dots) < c/\Omega$$

où Ω est la vitesse de rotation de l'étoile. Cette expression n'est strictement valable que dans le cas du rotateur parallèle ($\Omega \parallel M$ où M est le moment dipolaire magnétique de l'étoile).

Un autre paramètre important est l'intensité locale du champ magnétique B_0 , elle vaut:

$$B_0 = B_* \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 (1 - \frac{3}{4} \sin^2 \theta)^{1/2}$$

soit pour $\theta \ll 1$:

$$B_0 \sim B_* \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 (1 - \frac{3}{8} \theta^2 \dots)$$

En fait, il est intéressant physiquement d'exprimer les dépendances angulaires en fonction de l'angle d'observation ψ , angle que fait la direction du champ magnétique supposée correspondre à peu près à la direction d'émission du rayonnement avec l'axe de rotation de l'étoile. On peut ainsi espérer obtenir la répartition des fréquences dans le cône d'émission.

Relation d'une ligne de champ: $r = r_* \sin^2 \theta$

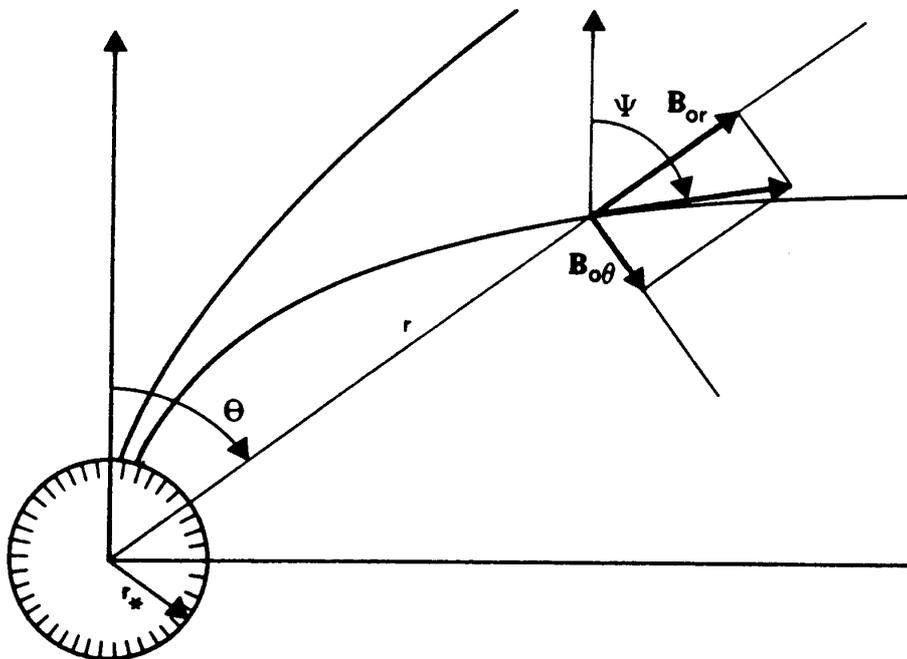


Fig. A3-1: Géométrie des lignes de champ.

ψ est défini par la relation:

$$\begin{aligned}\sin\psi &= \frac{B_{0r}\sin\theta + B_{0\theta}\cos\theta}{|B_0|} \\ &= \frac{3}{4} \frac{\sin 2\theta}{(1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta)^{1/2}}\end{aligned}$$

Cette équation permet d'exprimer θ en fonction de ψ dans la limite de petits angles:

$$\theta \sim \frac{2\psi}{3} \left(1 - \frac{\psi^2}{27} \dots\right)$$

et les quantités dépendant de θ s'écrivent en fonction de ψ :

$$r_0 \sim \frac{2r}{\psi} \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \dots\right)$$

$$B_0 \sim B_* \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \dots\right)$$

Ceci permet de calculer la fréquence cyclotron (avec correction relativiste de la masse) :

$$\omega_D = \frac{eB_0}{\gamma_0 Mc} \sim \frac{eB_*}{\gamma_0 Mc} \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \dots\right)$$

Munis de la valeur du rayon de courbure, en tenant compte du fait que le rayonnement émis se propage à peu près parallèlement au faisceau, nous pouvons estimer le nombre d'onde azimuthal en fonction de la fréquence des ondes:

$$m \sim \frac{\omega r_0}{c} \sim \frac{2r\omega}{c\psi} \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \dots\right)$$

Les particules étant supposées suivre les lignes de champ magnétique, un faisceau de diamètre a se confond avec un tube de champ et la conservation du flux magnétique dans ce tube s'écrit:

$$B_0 a^2 = \text{cte}$$

ce qui conduit à l'évolution de l'épaisseur du faisceau:

$$a \sim a_* \left(\frac{r}{r_*}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{\psi^2}{12} \dots\right)$$

La conservation du nombre de particules s'écrit simplement:

$$n_0 a^2 = \text{cte}$$

d'où le comportement de la densité:

$$n_0 = n_* \left(\frac{r_*}{r}\right)^3 \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \dots\right)$$

La densité au voisinage de l'étoile n_* semble devoir prendre des valeurs entre 10^{11} et 10^{20} particules par cm^3 selon les auteurs. Une forte densité étant souhaitable pour obtenir de forts taux de croissance, nous adopterons la valeur la plus favorable (et la plus communément admise à l'heure actuelle; cf Lominadze, Machabeli & Usov 1983): $n_* = 10^{20}$, ce qui conduit à l'expression suivante pour la fréquence plasma dans le repère fixe:

$$\omega_p \sim 5.3 \cdot 10^{14} \left(\frac{r_*}{r}\right)^{3/2}$$

Un autre paramètre important de notre modèle est le facteur relativiste du faisceau γ_0 qui reçoit des valeurs entre 10^3 et $3 \cdot 10^6$ selon les composantes du plasma magnétosphérique considérées (Lominadze, Machabeli & Usov 1983). Le facteur relativiste intervient dans les équations de compatibilité donnant les taux de croissance de deux façons: d'une part pour réduire la densité efficace du plasma (facteur ω_p^2/γ_0^3) dans le cas du mode polarisé parallèlement à la courbure ou la fréquence cyclotron dans l'autre cas, ce qui suggère de rechercher de faibles valeurs, d'autre part pour écarter le faisceau de la résonance avec les ondes qui le baignent ($v_0 < c \leq v_\phi$), ce qui conduit, au contraire, à adopter des valeurs de γ_0 fortes. On conservera donc dans le processus d'optimisation des taux de croissance la possibilité de faire varier γ_0 dans cet intervalle.

Cependant, ω_p et γ_0 ne peuvent pas en réalité être fixés de façon complètement indépendante; la structure des différentes populations du plasma magnétosphérique (cf figure A3-2) montre que les fortes densités sont associées à des énergies plus faibles. Dans cet ordre d'idées, on sera amené à prendre en considération les chiffres du modèle de Ruderman & Sutherland (1975) qui prévoit des densités plus faibles:

- population primaire: $\gamma_1 \sim 10^6$, $n_1 \sim 7.4 \cdot 10^{10} (r_*/r)^3 \text{ P}^{-1}$

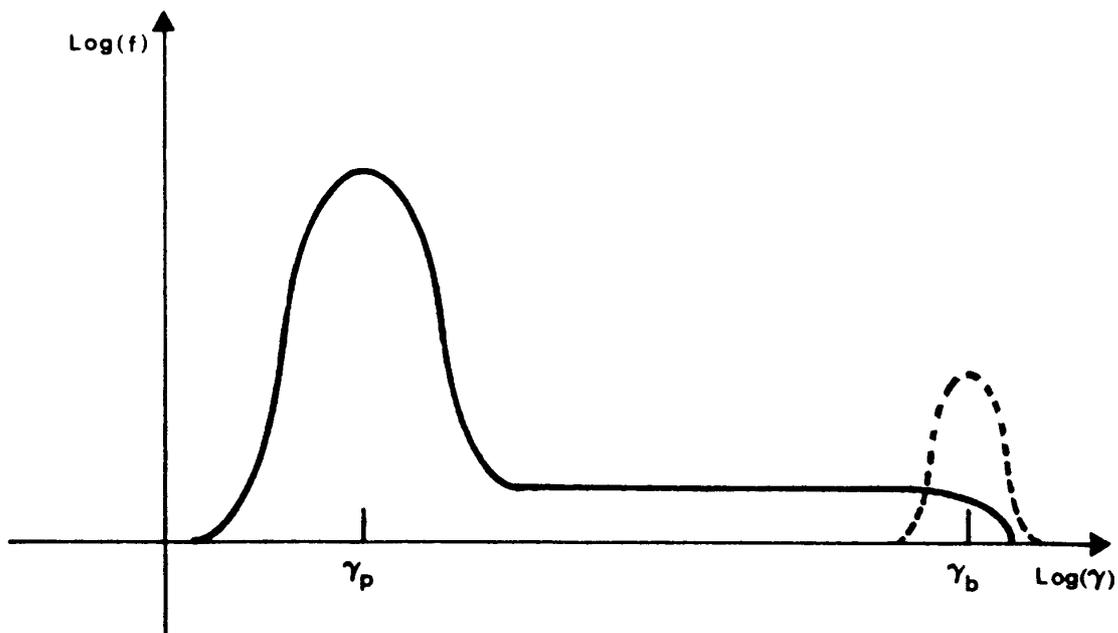


Fig. A3-2: Allure de la distribution d'énergie des particules du plasma magnétosphérique.

- population secondaire: $\gamma_2 \sim 10^3$, $n_2 \sim 1500 n_1$
pour un pulsar de période de rotation P en secondes.

Les fréquences plasma correspondantes sont:

$$\omega_{p1} \sim 1.4 \cdot 10^{10} (r_*/r)^{3/2} P^{-1/2} ,$$

$$\omega_{p2} \sim 5.6 \cdot 10^{11} (r_*/r)^{3/2} P^{-1/2} .$$

Il reste un paramètre complètement inconnu, c'est l'épaisseur du faisceau au voisinage de l'étoile a_* (dans le cadre du modèle de faisceau mince) ou la longueur caractéristique de gradient dans la zone de transition plasma-vide L_g (ou sa valeur ramenée à la surface de l'étoile L_*).

Rassemblons les expressions obtenues pour les différents paramètres en fonction du rapport r/r_* ($r_* \sim 10^6$ cm), de l'angle d'observation ψ et de la fréquence du rayonnement émis ω :

- facteur relativiste: $\gamma_0 = 10^3 \text{ à } 3 \cdot 10^6$

- épaisseur du faisceau: $a = a_* \left(\frac{r}{r_*}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{\psi^2}{12} \dots\right)$

- longueur de gradient: $L_g = L_* \left(\frac{r}{r_*}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{\psi^2}{12} \dots\right)$

- fréquence plasma: $\omega_p = 5.3 \cdot 10^{14} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{-3/2}$ (Lominadze Machabeli'Usov)

- fréquence cyclotron: $\omega_D = 1.7 \cdot 10^{19} \frac{1}{\gamma_0} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{-3} \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \dots\right)$

- rayon de courbure: $r_0 = 2 \cdot 10^6 \frac{r}{r_*} \frac{1}{\psi} \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \dots\right)$

- nombre d'onde: $m = 6.7 \cdot 10^{-5} \frac{r}{r_*} \frac{\omega}{\psi} \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \dots\right)$

Ces expressions permettent de tester la validité des résultats obtenus en fonction de la distance à l'étoile et du domaine de fréquence considéré, pour différentes valeurs de l'angle d'observation ψ , du diamètre du faisceau à la surface de l'étoile a_* (ou de la longueur de gradient L_*) et de son facteur relativiste γ_0 .

- Rudoman Sutherland: $\omega_p = 6 \cdot 10^{11} \left(\frac{r}{r_*}\right)^{-3/2}$

Appendice 4

Raccordements WKB du mode d'Alfvén en faisceau large (densité constante)

Le problème est de trouver par une méthode de raccordement de développements asymptotiques (cf par exemple Nayfeh 1973) une solution approximative (au sens WKB ou de l'approximation de l'optique géométrique) du système:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} + i\lambda\left(1 - \frac{1}{(i\delta + u)^2}\right)\beta = 0 \\ \frac{d\beta}{du} + 2i\lambda(i\delta + u)\alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{A4-1})$$

qui satisfasse les conditions aux limites asymptotiques suivantes:

- pour $u \rightarrow -\infty$ on cherche une solution évanescence de la forme:

$$\alpha, \beta \sim r(u)e^{l(u)} \text{ avec } dl/du > 0$$

- pour $u \rightarrow +\infty$ on veut obtenir une onde sortante pure, c'est-à-dire un comportement de la forme:

$$\alpha, \beta \sim r(u)e^{il(u)} \text{ avec } dl/du > 0$$

On va franchir les différents points singuliers rencontrés dans le domaine de variation de u en raccordant les développements asymptotiques pour λ grand de solutions d'équations plus simples qui modélisent le système A4-1 au voisinage de chacun de ces points singuliers.

Au voisinage de $-1 - i\delta$, le système se ramène à l'équation suivante:

$$\frac{1}{i\delta + u} \frac{d}{du} \left(\frac{1}{i\delta + u} \frac{d\beta}{du} \right) + 2\lambda^2(u + 1 + i\delta) \frac{u - 1 + i\delta}{(u + i\delta)^3} \beta = 0 \quad (\text{A4-2})$$

On cherche une nouvelle variable indépendante z telle que:

$$\frac{1}{i\delta + u} \frac{d}{du} \sim \frac{d}{dz}, \text{ soit } \frac{dz}{du} = i\delta + u. \text{ On obtient donc:}$$

$$z = \int_{-1-i\delta}^u (i\delta + u) du = \frac{1}{2} (u + i\delta + 1)(u + i\delta - 1); \text{ l'équation s'écrit:}$$

$$\frac{d^2\beta}{dz^2} + 4\lambda^2 \frac{z}{(1 + 2z)^{3/2}} \beta = 0 \quad (\text{A4-3})$$

Cette dernière équation est du type équation d'Airy dans un voisinage de zéro; lorsque λ est grand, on obtient un développement de la solution au voisinage de $z = 0$ en posant:

$$\beta(z) = \psi(z) F(- (2\lambda)^{2/3} \phi(z))$$

où on suppose que $\phi(z) \sim z$ quand $z \sim 0$ et F est solution de $F'' - zF = 0$.

En reportant cette forme dans l'équation A4-3 on obtient:

$$\begin{cases} 2 \frac{\psi'}{\psi} + \frac{\phi''}{\phi'} = 0 \\ \phi\phi'^2 = \frac{z}{(1 + 2z)^{3/2}} + \frac{1}{4\lambda^2} \frac{\psi''}{\psi} \end{cases}$$

A l'ordre le plus bas en $1/\lambda^2$ on prend donc:

$$\left[\begin{array}{l} \psi = \frac{cte}{\phi^{1/2}} \\ \phi^{1/2} d\phi = \frac{z^{1/2} dz}{(1+2z)^{3/4}} \end{array} \right.$$

ce qui donne pour $\beta(u)$ compte tenu du changement de variable ci-dessus:

$$\beta(u) = cte \frac{(u+i8)^{3/4}}{((u+i8)^2-1)^{1/4}} C_-(u)^{1/6} F(-(2\lambda C_-(u))^{2/3})$$

où F est une fonction d'Airy de la forme $aAi + bBi$ et on a posé:

$$C_-(u) = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{-1-i8}^u \frac{((u+i8)^2-1)^{1/2}}{(u+i8)^{1/2}} du .$$

$C_-(u)^{2/3}$ est analytique au voisinage de $u = -1 - i8$ avec le développement:

$$C_-(u)^{2/3} \sim 2^{2/3} (u+1+i8) .$$

Pour satisfaire la condition de raccordement à gauche il faut donc choisir $F(z) = Ai(z)$ et on a finalement au voisinage de $-1 - i8$ (premier zéro du système A4-1):

$$\beta(u) \sim C \frac{(u+i8)^{3/4}}{((u+i8)^2-1)^{1/4}} C_-(u)^{1/6} Ai(-(2\lambda C_-(u))^{2/3})$$

De l'autre côté, dans l'intervalle $[-1-i8, -i8]$ et suffisamment loin de chacun de ces deux points β admet un développement asymptotique dont le premier terme est:

$$\beta(u) \sim \frac{C}{\sqrt{\pi\lambda}^{1/6}} \frac{(u+i8)^{3/4}}{((u+i8)^2-1)^{1/4}} \sin\left(\frac{2\lambda}{3} C_-(u) + \frac{\pi}{4}\right)$$

Au voisinage de $u = -i8$ (le pôle du système A4-1), on fait un développement analogue à partir de la solution exacte d'un système plus simple mais possédant le même type de singularité:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d\alpha}{du} - i\lambda \frac{\beta}{u^2} = 0 \\ \frac{d\beta}{du} + 2i\lambda u\alpha = 0 \end{array} \right.$$

qui admet pour solution: $\beta(u) = C_2(\pm 2^{3/2} i\lambda u^{1/2})$ où C_2 est une fonction de Bessel d'ordre 2. On injecte donc dans l'équation gouvernant β déduite du système ci-dessus une fonction solution d'essai de la forme:

$\beta(u) = \psi(u+i8) C_2(\pm 2^{3/2} i\lambda \phi(u+i8))$ avec les comportements suivants au voisinage de zéro: $\psi(z) \sim z$; $\phi(z) \sim z^{1/2}$. Ceci conduit à imposer:

$$\left[\begin{array}{l} 2 \frac{\psi'}{\psi} + \frac{\phi''}{\phi'} - \frac{\phi'}{\phi} = \frac{1}{i8+u} \\ 1 - \frac{1}{(i8+u)^2} + \frac{4\phi'^2}{i8+u} \left(1 + \frac{1}{2\lambda^2 \phi^2}\right) + \frac{1}{2\lambda^2} \frac{1}{i8+u} \frac{\psi''}{\psi} - \frac{1}{2\lambda^2} \frac{1}{(i8+u)^2} \frac{\psi'}{\psi} = 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne à l'ordre le plus bas en $1/\lambda^2$:

$$\left[\begin{array}{l} \phi(u) = \frac{1}{3\sqrt{2}} C_0(u) \\ \psi(u) = cte \frac{(i8+u)^{3/4}}{(1-(i8+u)^2)^{1/4}} C_0(u)^{1/2} \end{array} \right.$$

$$\text{où on a posé } C_0(u) = \int_{-18}^u \frac{3(1 - (18 + u)^2)^{1/2}}{\sqrt{2}(18 + u)^{1/2}} du .$$

avec au voisinage de $u = -18$: $C_0(u) \sim 3 \cdot 2^{1/2} (18 + u)^{1/2}$, de sorte que les fonctions ψ et ϕ ont bien les comportements annoncés au voisinage de -18 . On a donc la forme de la solution au voisinage de -18 :

$$\beta(u) \sim \text{cte} \frac{(18 + u)^{3/4}}{(1 - (18 + u)^2)^{1/4}} C_0(u)^{1/2} C_2\left(\pm \frac{2}{3} i \lambda C_0(u)\right)$$

$$\text{On a : } C_-(u) = \Delta^- + i C_0(u) \text{ où } \Delta^- = \int_{-1-18}^{-18} \frac{3((u + 18)^2 - 1)^{1/2}}{\sqrt{2}(u + 18)^{1/2}} du$$

Pour raccorder cette solution au développement dont on dispose dans la zone $] -1 - 18, -18[$, il faut choisir la fonction $C_2 = a_1 H_2^{(1)} + a_2 H_2^{(2)}$ qui a le bon développement asymptotique:

$$C_2(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left(a_1 \exp i\left(z - \frac{5\pi}{4}\right) + a_2 \exp -i\left(z - \frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

On reporte dans l'expression de $\beta(u)$:

$$\beta(u) \sim i \left(\frac{3}{\pi \lambda}\right)^{1/2} \frac{(18 + u)^{3/4}}{((u + 18)^2 - 1)^{1/4}} \times$$

$$\left[\left(a_1 \exp -i\frac{2}{3} \lambda \Delta^- - a_2 \exp i\frac{2}{3} \lambda \Delta^-\right) \cos\left(\frac{2}{3} \lambda C_-(u) + \frac{\pi}{4}\right) \right.$$

$$\left. + i \left(a_1 \exp -i\frac{2}{3} \lambda \Delta^- + a_2 \exp i\frac{2}{3} \lambda \Delta^-\right) \sin\left(\frac{2}{3} \lambda C_-(u) + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{A4-4})$$

La superposition $a_1 H_2^{(1)} + a_2 H_2^{(2)}$ a un sens WKB car Δ^- est réel si $\delta = 0$; aucune des deux fonctions de Hankel ne domine sur l'autre dans l'intervalle limité dont on a besoin si δ est suffisamment petit. Ce développement est identique à celui qu'on a déjà obtenu si:

$$a_1 = -\frac{C \lambda^{1/3}}{2\sqrt{3}} \exp i\frac{2}{3} \lambda \Delta^- \text{ et } a_2 = -\frac{C \lambda^{1/3}}{2\sqrt{3}} \exp -i\frac{2}{3} \lambda \Delta^- .$$

On a donc pour expression finale de β au voisinage de -18 :

$$\beta(u) \sim -\frac{C \lambda^{1/3}}{2\sqrt{3}} \frac{(u + 18)^{3/4} C_0(u)^{1/2}}{(1 - (18 + u)^2)^{1/4}} \left[\exp i\frac{2}{3} \lambda \Delta^- H_2^{(1)}\left(\frac{2}{3} i \lambda C_0(u)\right) \right. \\ \left. + \exp -i\frac{2}{3} \lambda \Delta^- H_2^{(2)}\left(\frac{2}{3} i \lambda C_0(u)\right) \right]$$

β admet dans l'intervalle $] -18, 1 - 18[$ un développement asymptotique dont le premier terme est le terme dominant de l'expression A4-4; on note que $C_0(u)$ est proche d'un réel positif pour $\delta \ll 1$; on a donc dans cette zone:

$$\beta(u) \sim \frac{C}{2\sqrt{\pi} \lambda^{1/6}} \exp -i\frac{2}{3} \lambda \Delta^- \frac{(18 + u)^{3/4}}{(1 - (18 + u)^2)^{1/4}} \exp \frac{2}{3} \lambda C_0(u) \quad (\text{A4-5})$$

Au voisinage de $1 - 18$, on reprend le système écrit comme en A4-2 et on fait le même changement de variable; on obtient de la même façon:

$$\beta(u) \sim \text{cte} \frac{(u + 18)^{3/4}}{(1 - (u + 18)^2)^{1/4}} C_+(u)^{1/6} F\left(- (2 \lambda C_+(u))^{2/3}\right)$$

où on a posé: $C_+(u) = \int_{1-i\delta}^u \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{((u+i\delta)^2 - 1)^{1/2}}{(u+i\delta)^{1/2}} du$.

$C_+(u)^{2/3}$ est analytique au voisinage de $1 - i\delta$ avec le développement:

$C_+(u)^{2/3} \sim 2^{2/3} (u + i\delta - 1)$. On a: $C_+(u) = i C_0(u) - \Delta^+$ avec:

$$\Delta^+ = \int_{-i\delta}^{1-i\delta} \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{(1 - (i\delta + u)^2)^{1/2}}{(i\delta + u)^{1/2}} du.$$

La fonction F de type fonction d'Airy qui admet le bon développement asymptotique à raccorder à l'expression A4-5 est $Ai(z)$; on a donc au voisinage de $1 - i\delta$:

$$\beta(u) = \text{cte} \frac{(u + i\delta)^{3/4}}{(1 - (u + i\delta)^2)^{1/4}} C_+(u)^{1/6} Ai(- (2\lambda C_+(u))^{2/3})$$

Cette expression admet dans l'intervalle $] - i\delta, 1 - i\delta[$ et suffisamment loin de chacun de ces points un développement asymptotique dont le premier terme est:

$$\beta(u) \sim \text{cte} \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}\lambda^{1/6}} \frac{(u + i\delta)^{3/4}}{(1 - (u + i\delta)^2)^{1/4}} \exp \frac{2\lambda}{3} (i\Delta^+ + C_0(u))$$

On choisit la constante pour que cette expression soit identique à l'expression A4-5 et $\beta(u)$ s'écrit finalement au voisinage de $1 - i\delta$:

$$\beta(u) \sim C \exp -i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\lambda}{3}(\Delta^+ + \Delta^-)\right) \frac{(u + i\delta)^{3/4} C_+(u)^{1/6}}{(1 - (u + i\delta)^2)^{1/4}} Ai(- (2\lambda C_+(u))^{2/3})$$

Dans la zone $u > 1 - i\delta$, β admet donc le développement asymptotique:

$$\beta(u) \sim \frac{C e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}\lambda^{1/6}} \exp - \frac{2i\lambda}{3} (\Delta^+ + \Delta^-) \frac{(u + i\delta)^{3/4}}{(1 - (u + i\delta)^2)^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3} \lambda C_+(u) + \frac{\pi}{4}\right)$$

On note que $C_+(u)$ est alors proche d'un réel positif si $\delta \ll 1$, et possède une partie imaginaire > 0 si $\delta > 0$, de sorte que lorsque u tend vers $+\infty$ c'est l'onde rentrante qui domine, ce qui est le contraire de ce qu'on recherchait.

Appendice 5

Solution complète pour le mode d'Alfvén dans le cas fortement non WKB

On découpe, conformément à l'idée du § 3-B-a, le domaine d'intégration du système 3-3 en trois régions dans lesquelles on obtient des solutions approximatives pour un cylindre de plasma à bord plus ou moins raide, caractérisé par le profil de densité suivant (cf figure A5-1):

$$\phi(u) = 1 \text{ pour } u < u_0 - \sigma ; \quad \phi(u) = \frac{u_0 + \sigma - u}{2\sigma} \text{ pour } u_0 - \sigma \leq u < u_0 + \sigma ;$$

$$\phi(u) = 0 \text{ pour } u > u_0 + \sigma .$$

On conserve une valeur du terme relativiste b non nulle.

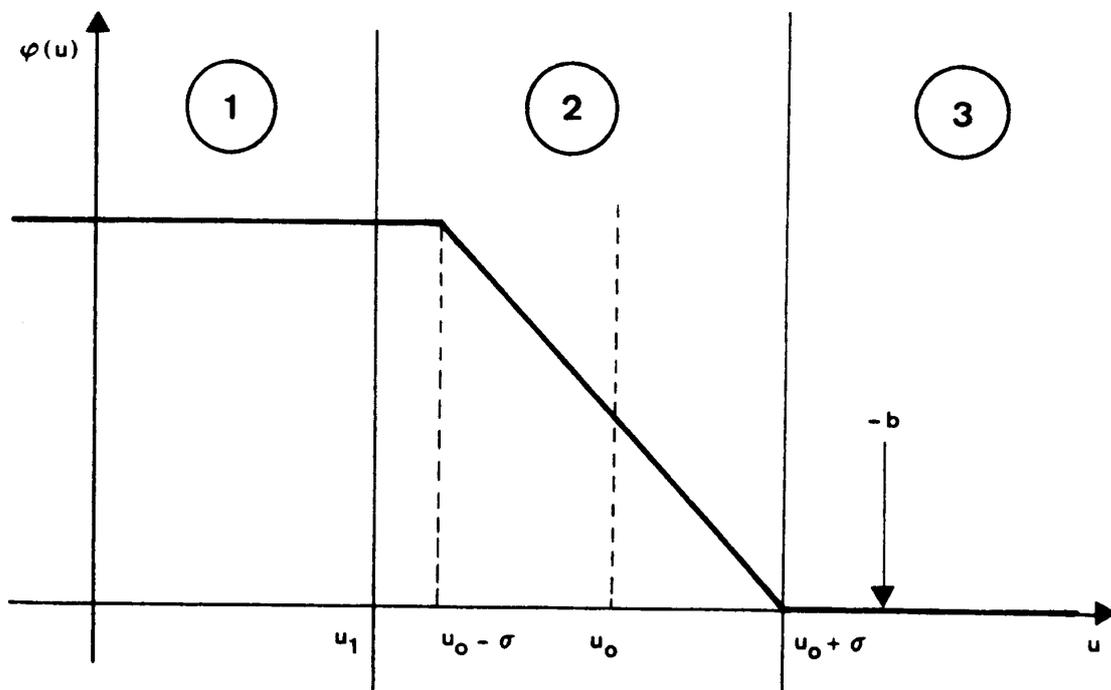


Fig. A5-1: Profil de densité et découpage du domaine d'intégration.

On raccorde ensuite ces différentes portions de solution pour obtenir une relation de dispersion du type de 3-8, incluant les effets de gradient et d'énergie du faisceau finis. On a donc:

- à gauche (région -1- de la figure A5-1): pour $-\infty < u \leq u_1$:

Il faut définir u_1 de façon à pouvoir faire dans cette région l'approximation suivante: $(i\delta + u + b)^2 \gg 1$ pour $u \leq u_1$, c'est-à-dire: $(i\delta + u_1 + b)^2 \gg 1$. On a alors dans cette région approximativement une équation d'Airy et la solution qui a un comportement évanescant pour $u \rightarrow -\infty$ est:

$$\begin{cases} \alpha(u) = \alpha_- (Ai(-(2\lambda^2)^{1/3}(i\delta + u)) + O(1/u_1^2)) \\ i(\lambda/2)^{1/3} \beta(u) = \alpha_- (Ai'(-(2\lambda^2)^{1/3}(i\delta + u)) + O(1/u_1^2)) \end{cases} \quad (\text{A5-1})$$

On choisit de s'intéresser à $i(\lambda/2)^{1/3} \beta$ plutôt qu'à β directement car cette expression est du même ordre de grandeur que α en puissances de λ , comme on peut le vérifier sur les expressions A5-1. Le terme correctif en $O(1/u_1^2)$ provient du terme contenant le pôle qu'on a négligé dans l'expression de la constante diélectrique réduite du système 3-3 et dans lequel on suppose pour rester dans le cadre de notre hypothèse que $\delta, b < u_1$.

- au milieu (région -2- de la figure A5-1): pour $u_1 \leq u \leq u_0' = u_0 + \sigma$;
Il faut définir u_1 de façon à pouvoir faire dans cette région l'approximation $i(\lambda/2)^{1/3} \beta \sim c^{te}$ en valeur relative, afin d'intégrer α par simple quadrature entre u_1 et u_0' . Il faut donc imposer:

$$\Delta(i(\lambda/2)^{1/3} \beta) \leq (2\lambda^2)^{2/3} (i\delta + u_1)(u_0' - u_1) \alpha_- \ll \alpha_- .$$

On s'attend (et on le vérifiera) à trouver $u_0' \sim -b$, $u_0' - u_1 \sim -b - u_1$ et $\delta < |u_1 + b| \ll |u_1|$, qui implique $(u_1 + b)^2 \gg 1$ et $|(2\lambda^2)^{2/3} u_1(u_1 + b)| \ll 1$. On peut donc choisir u_1 proportionnel à λ^n avec $-2/3 \leq n \leq 0$, et il faudra de toute façon imposer $\lambda \ll 2^{-1/2}$ pour que les deux approximations définies ci-dessus (valables respectivement dans les régions -1- et -2-) puissent être vérifiées simultanément. Dans le cas où $b = 0$, ceci conduit pour que les approximations soient vérifiées de façon optimale à choisir $u_1 \sim \lambda^{-1/3}$.

Lorsque $b \neq 0$, et pour pouvoir de plus prendre éventuellement de grandes valeurs de b (d'ordre $\lambda^{-2/3}$), on prend la plus grande valeur possible pour $|u_1|$: $b = -\epsilon_0 \lambda^{-2/3}$; $u_1 = -b - \epsilon_1 \lambda^{-1/3}$ de façon à garder la largeur de la région -2- d'ordre $\lambda^{-1/3}$ comme dans le cas $b = 0$.

Les expressions A5-1 sont alors exactes à un terme $O(1/u_1^2) \sim O(\lambda^{4/3})$ près, et l'erreur commise en considérant $(\lambda/2)^{1/3} \beta \sim c^{te}$ dans la région -2- est de l'ordre de:

$$i(\lambda/2)^{1/3} (\beta(u_0') - \beta(u_1)) \sim O(\lambda^{1/3}) \text{ par rapport à } (\lambda/2)^{1/3} \beta \sim O(1).$$

On peut donc maintenant obtenir α en intégrant de u_1 à u_0' en tenant compte d'un gradient de densité au bord de largeur σ modélisé par le profil de densité $\phi(u)$ défini ci-dessus. On suppose évidemment $2\sigma < -b - u_1$, c'est-à-dire la largeur de la zone de variation de la densité plus petite que celle de la région -2- de la figure A5-1; on vérifiera que $\sigma_{\max} \sim O(\lambda^{2/3})$, σ_{\max} étant la valeur maximale de σ pour laquelle le taux de croissance reste positif. Le résultat de cette intégration est le suivant:

$$\begin{aligned} \alpha(u_0') - \alpha(u_1) = & - (2\lambda^2)^{1/3} [u_0' - u_1 - \frac{1}{i\delta + u_1 + b} \\ & + \frac{1}{2\sigma} \log(1 + \frac{2\sigma}{u_0' - 2\sigma + i\delta + b})] (i(\frac{\lambda}{2})^{1/3} \beta(u_1) + O(\lambda^{1/3})) \end{aligned} \quad (A5-2)$$

Les ordres de grandeur des différents termes du crochet dans l'expression ci-dessus en puissances de λ sont tels, en tenant compte des hypothèses faites jusqu'ici, que seul le dernier subsiste à l'ordre le plus bas.

- à droite (région -3- de la figure A5-1): pour $u > u_0' = u_0 + \sigma$;

Le système 3-3 est strictement équivalent à une équation d'Airy; la solution

qui a un comportement propagatif sortant pour $u \rightarrow +\infty$ est:

$$\begin{cases} \alpha(u) = \alpha_+ \text{Ai}(e^{-i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}(i\delta + u)) \\ i(\lambda/2)^{1/3} \beta(u) = \alpha_+ e^{2i\pi/3} \text{Ai}'(e^{-i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}(i\delta + u)) \end{cases}$$

Compte tenu de l'ordre de grandeur de u_0' ($u_0' \sim -b + O(\lambda^{-1/3})$), on obtient les expressions suivantes pour les champs en u_0' :

$$\begin{cases} \alpha(u_0') \sim \alpha_+ (\text{Ai}(e^{2i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}b) + O(\lambda^{1/3})) \\ i(\lambda/2)^{1/3} \beta(u_0') \sim \alpha_+ e^{2i\pi/3} (\text{Ai}'(e^{2i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}b) + O(\lambda^{1/3})) \end{cases} \quad (\text{A5-3})$$

Par ailleurs les expressions A5-1 valables dans la région -1- peuvent également se développer, et on obtient les valeurs des champs en u_1 ($u_1 \sim -b + O(\lambda^{-1/3})$) sous la forme:

$$\begin{cases} \alpha(u_1) \sim \alpha_- (\text{Ai}((2\lambda^2)^{1/3}b) + O(\lambda^{1/3})) \\ i(\lambda/2)^{1/3} \beta(u_1) \sim \alpha_- (\text{Ai}'((2\lambda^2)^{1/3}b) + O(\lambda^{1/3})) \end{cases} \quad (\text{A5-4})$$

En combinant les trois expressions A5-2 à A5-4 on peut écrire le raccordement des champs à l'ordre le plus bas en puissances de λ :

$$\begin{aligned} & e^{2i\pi/3} \text{Ai}'(e^{2i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}b) \text{Ai}((2\lambda^2)^{1/3}b) - \text{Ai}(e^{2i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}b) \text{Ai}'((2\lambda^2)^{1/3}b) = \\ & = e^{2i\pi/3} \frac{(2\lambda^2)^{1/3}}{2\sigma} \text{Log}\left(1 + \frac{2\sigma}{u_0' - 2\sigma + i\delta + b}\right) \text{Ai}'((2\lambda^2)^{1/3}b) \text{Ai}'(e^{2i\pi/3}(2\lambda^2)^{1/3}b) \end{aligned}$$

En tenant compte de la valeur du Wronskien des fonction $\text{Ai}(e^{2i\pi/3}z)$ et $\text{Ai}(z)$ (qui est $1/2\pi e^{-i\pi/6}$), on obtient finalement l'expression générale suivante du décalage de fréquence complexe:

$$u_0 + b + i\delta = \lambda^{2/3} A g(\lambda^{2/3}b) F\left(\frac{\lambda^{-2/3}\sigma}{Ag(\lambda^{2/3}b)}\right)$$

$$\text{où on a posé } A = \frac{6^{1/3}\Gamma(2/3)^2}{\pi} \sim 1.06$$

et les fonctions F et g sont définies de la façon suivante:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{C} - \mathbb{C} & \quad \text{et} \quad g: \mathbb{R} - \mathbb{C} \\ z = \frac{-z}{\text{th}(2ze^{i\pi/6})} & \quad x = \frac{\text{Ai}'(2^{1/3}x)\text{Ai}'(e^{2i\pi/3}2^{1/3}x)}{\text{Ai}'(0)^2} \end{aligned}$$

Ces fonctions admettent au voisinage de zéro les développements suivants:

$$g(x) \sim 1 + \frac{2e^{2i\pi/3}}{A\sqrt{3}} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + O(x^5)$$

$$F(z) \sim -\frac{1}{2} e^{-i\pi/6} \left(1 + \frac{4z^2}{3} e^{i\pi/3} + O(z^4)\right)$$

Le comportement de F pour z réel est représenté sur la figure A5-2. On voit que $\text{Im}(F)$ s'annule pour $z = \pi/2$, ce qui montre qu'à $\lambda^{2/3}b \rightarrow 0$ (c'est-à-dire pour un faisceau suffisamment relativiste), le taux de croissance s'annule pour une valeur de la longueur de gradient de densité $\sigma_{\max} = \pi A \lambda^{2/3}/2$. On vérifie au passage la validité de l'hypothèse faite au début du calcul ci-dessus: $2\sigma < u_0' - u_1$. Le taux de croissance maximal pour $\sigma \ll \sigma_{\max}$ est en unités réduites: $\delta_{\max} = A \lambda^{2/3}/4$. On vérifie que le décalage de fréquence réel par rapport à la résonance $u_0 + b$ reste d'ordre $\lambda^{2/3}$ donc petit devant l'ordre

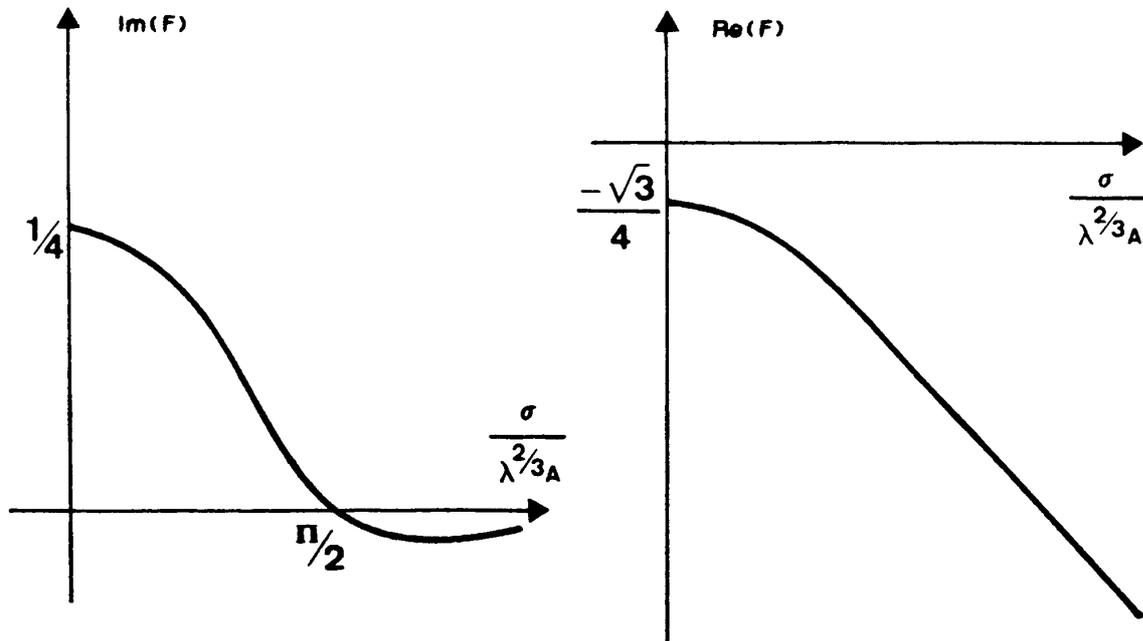


Fig. A5-2: Décalage de fréquence complexe en fonction du gradient au bord pour un faisceau suffisamment relativiste.

de grandeur de u_1 et de b ($\sim \lambda^{-1/3}$).

Inversement on trouve l'effet de l'énergie du faisceau (terme b) en réécrivant $u_0 + b + i\delta$ sous la forme:

$$u_0 + b + i\delta = \frac{-\sigma}{\text{th}\left(\frac{(\sqrt{3} + 1)\sigma}{\lambda^{2/3A}g(\lambda^{2/3b})}\right)} \quad (\text{A5-5})$$

On utilise le programme de résolution de système différentiel déjà écrit pour calculer les fonctions $\text{Ai}'(2^{1/3}x)$ et $\text{Ai}'(e^{2i\pi/3}2^{1/3}x)$, puis la fonction g utilisée dans l'expression (A5-5). Le résultat est représenté sur la figure A5-3. On voit que lorsque x croît à partir de 0, l'argument de g croît de 0 à sa valeur asymptotique:

$$g(x) \sim \frac{2^{1/6}x^{1/2}}{4\pi\text{Ai}'(0)^2} e^{i\pi/6}$$

de sorte que l'argument de l'antécédent de la fonction th de (A5-5) décroît asymptotiquement vers 0 lorsque b croît. On a à la limite pour b grand:

$$u_0 + b + i\delta \sim -\frac{2^{1/6}\lambda}{8\pi\text{Ai}'(0)^2} \lambda b^{1/2}$$

Comme la condition sur l'onde sortante est satisfaite, on est dans le cas de la stabilité marginale: rayonnement mais taux de croissance nul à la limite

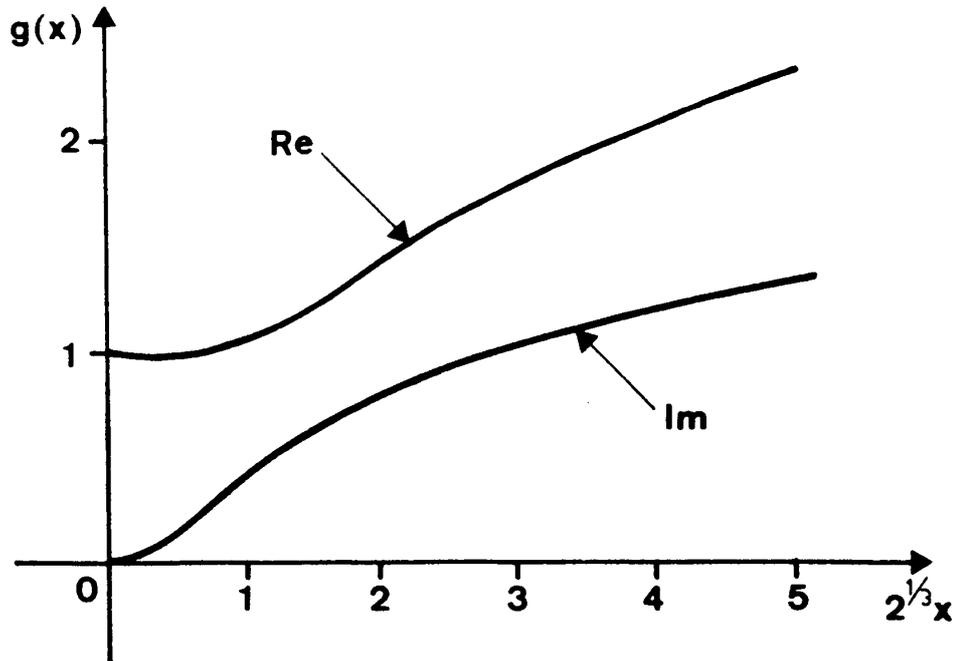


Fig. A5-3: Effet de l'énergie du faisceau: comportement de l'argument de la fonction $g(\lambda^{2/3}b)$.

$\lambda^{2/3}b \rightarrow \infty$. Afin d'obtenir une valeur caractéristique de b pour laquelle la diminution du taux de croissance devient appréciable, on utilise le développement limité de g pour x petit et on écrit la condition: $g(\lambda^{2/3}b)$ proportionnel à $3^{1/2} + i$ avec ce développement; on obtient approximativement:

$$1 + \frac{2e^{2i\pi/3}}{\lambda\sqrt{3}} \lambda^{4/3}b^2 \text{ proportionnel à } \sqrt{3} + i$$

$$\text{soit } \lambda^{2/3}b_{\max} \sim \lambda^{1/2}3^{1/4}/2 .$$

Appendice 6Simulations numériques

Rappelons le système d'équations à résoudre: (3-3) et (4-3) peuvent se mettre sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} = -i\lambda F(u) \beta \\ \frac{d\beta}{du} = -2i\lambda G(u) \alpha \end{cases} \quad (\text{A6-1})$$

Il s'agit donc d'un système d'équations différentielles ordinaires où les fonctions complexes F et G ont les comportements asymptotiques suivants:

$$F(u) \sim 1 \quad \text{et} \quad G(u) \sim u \quad \text{pour} \quad |u| \rightarrow \infty.$$

Le système est donc asymptotiquement équivalent à une équation d'Airy, ce qui fournit un moyen de déterminer des conditions aux limites ayant un sens physique précis: ondes évanescentes ou exponentiellement croissantes pour u grand et négatif, propagation dans l'un ou l'autre sens pour u grand et positif. On se reporte pour cela aux solutions "WKB" correspondantes de l'équation d'Airy, qui ne sont autres que les développements asymptotiques donnés dans l'appendice 2:

- pour $u < 0$:

$$\alpha(u) \sim a(u) \exp \pm \frac{\lambda}{3} (-2u)^{3/2}$$

$$\text{et} \quad \beta(u) = \frac{1}{\lambda} \frac{d\alpha}{du} \sim \mp i (-2u)^{1/2} \alpha(u) \quad (\text{A6-2})$$

- pour $u > 0$:

$$\alpha(u) \sim b(u) \exp \pm i \frac{\lambda}{3} (2u)^{3/2}$$

$$\text{et} \quad \beta(u) \sim \mp (2u)^{1/2} \alpha(u) \quad (\text{A6-3})$$

où $a(u)$ et $b(u)$ sont des amplitudes (complexes) variant comme des fonctions algébriques de u , donc lentement devant les exponentielles, ce qui conduit à les considérer comme constantes dans la dérivation qui donne β en fonction de α (c'est l'approximation WKB).

Les expressions ci-dessus permettent de choisir les conditions initiales en u_0 : α_0 et β_0 dans un rapport correspondant au type de solution recherché (le système étant linéaire, seul le rapport α_0/β_0 doit être fixé de façon non arbitraire).

Notons qu'en fait, comme c'est la solution qui croit exponentiellement pour $u > u_0$ qu'on veut conserver à gauche, un choix différent des conditions initiales α_0/β_0 conduit simplement à une différence par rapport au

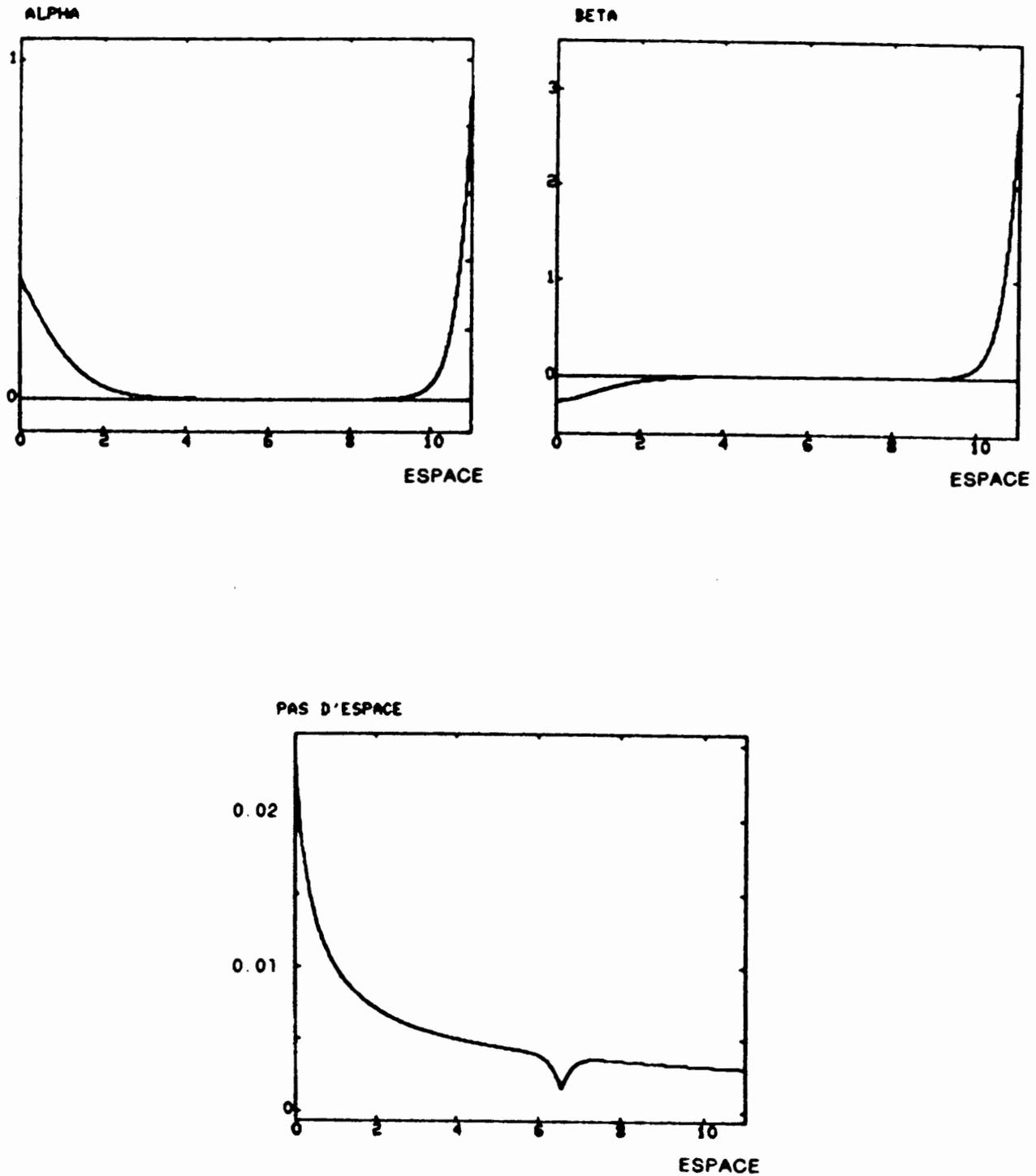


Fig. A6-1: Réapparition de la solution dominante dans le calcul numérique d'un comportement sous-dominant.
(fonction $Ai(x)$)

comportement cherché qui est proportionnelle à la solution exponentiellement décroissante (cf (A6-2)). En d'autres termes, une erreur sur les conditions initiales à gauche n'aura pas une incidence importante sur la suite du calcul, car la solution dominante s'impose de toute façon très rapidement par rapport à la solution sous-dominante. La situation serait plus délicate si on avait à sélectionner la solution décroissante; il faudrait alors prêter attention aux erreurs numériques, qui auraient en effet tendance à reconstituer une composante dominante indésirable. Pour illustrer ce phénomène, on a représenté sur la figure A6-1 la solution du système (A6-1) avec $\lambda = 1$, $F(u) = 1$, $G(u) = u/2$ et les conditions initiales: $\alpha(0) = Ai(0)$, $\beta(0) = Ai'(0)$. La solution théorique est alors la fonction d'Airy: $\alpha(u) = Ai(u)$, exponentiellement décroissante pour $u > 0$. Or, les conditions initiales n'étant connues qu'à 10^{-15} près (valeurs d'Abramowitz & Stegun 1970) et compte tenu des erreurs qui s'accroissent au cours de la résolution numérique, on voit réapparaître au bout d'un certain temps la solution dominante. Ceci se produit en particulier dans le calcul numérique de la fonction g de l'appendice 5, mais on n'a représenté que la partie exploitable du calcul.

Le point délicat du problème est le fait que pour des valeurs de u intermédiaires, F ou G peuvent subir de fortes variations sur des intervalles très petits ($\Delta u/u_{\max} \ll 1$) à cause de la présence de pôles à proximité de l'axe réel ou de formes de profil de densité très piquées. Pour pouvoir décrire au cours de la résolution l'évolution complète des fonctions α et β aussi bien dans les zones où les dérivées sont de module $\sim \alpha$, β que dans la zone centrale où on s'attend à des valeurs fortes (par exemple dans le cas champ infini de l'ordre de 100 fois $|\alpha|$ ou $|\beta|$ pour $\Delta u \sim 0.01$ et λ de l'ordre de 1) on est conduit à adopter un schéma numérique précis (algorithme de Runge-Kutta à quatre approximations successives) ainsi qu'un procédé d'adaptation du pas d'incrément à la valeur attendue des dérivées à l'itération suivante. Ceci est obtenu en calculant les modules des dérivées en plusieurs points en avant du point courant de façon à "sentir" la présence éventuelle d'une zone où le second membre prend de grandes valeurs et à réduire préventivement en conséquence le pas d'incrément. L'évolution du pas d'incrément pour différents cas de simulation est donnée dans les figures 3-8, 3-9, 3-11, A6-1; on voit que celui-ci peut varier sur plusieurs ordres de grandeur.

Par ailleurs le fait d'observer une décroissance régulière et non oscillante du pas d'incrément dans la zone $0 < u < u_{\max}$ constitue un test de la pureté de l'onde sortante recherchée à droite plus objectif que la simple inspection visuelle de l'évolution de α et β . Afin de vérifier le bon ajustement du pas aux accidents rencontrés, on trace pour chaque cas de résolution le profil de densité aux points de discrétisation. Un aspect lisse du profil indique une bonne adaptation du pas à la traversée du faisceau.

En fait, il est possible de quantifier ce critère de façon à automatiser la recherche de l'onde sortante pure à droite par une méthode dite de "contrôle optimal" ou "commande optimale". Ceci se fait de la façon suivante:

Pour $\lambda^{2/3}u \gg 1$, la forme asymptotique (A6-3) de la solution permet de caractériser l'onde sortante par la condition: $\beta(u) + (2u)^{1/2}\alpha(u) \sim 0$, soit deux relations réelles à vérifier. Choisissons alors deux paramètres réels de contrôle du problème, par exemple le taux de croissance δ et la position de la frontière du plasma u_f . Le système (A6-1) se met sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} = f(u_f, \delta, u)\beta \\ \frac{d\beta}{du} = g(u_f, \delta, u)\alpha \end{cases} \quad (\text{A6-4})$$

On définit un produit scalaire entre deux fonctions solutions de systèmes de la forme (A6-4) par:

$$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = \int_{u_0}^{u_M} (\alpha_1^*(u)\alpha_2(u) + \beta_1^*(u)\beta_2(u)) du$$

Envisageons une petite variation des paramètres $u_f - u_f + \delta u_f$, $\delta - \delta + \delta\delta$. Le problème (A6-4) est alors modifié: $(\alpha, \beta) - (\alpha, \beta) + (\delta\alpha, \delta\beta)$ et dans la limite de petites variations, on a la relation linéaire:

$$\begin{cases} \frac{d\delta\alpha}{du} = \delta f \beta + f \delta\beta \\ \frac{d\delta\beta}{du} = \delta g \alpha + g \delta\alpha \end{cases}$$

Formons alors le produit scalaire avec une fonction quelconque (α_v, β_v) :

$$\begin{aligned} (\alpha_v, \beta_v) \cdot \left(\frac{d\delta\alpha}{du}, \frac{d\delta\beta}{du} \right) &= \int_{u_0}^{u_M} (\alpha_v^* \frac{d\delta\alpha}{du} + \beta_v^* \frac{d\delta\beta}{du})(u) du \\ &= \int_{u_0}^{u_M} (\alpha_v^* \delta f \beta + \beta_v^* \delta g \alpha) du + \int_{u_0}^{u_M} (\alpha_v^* f \delta\beta + \beta_v^* g \delta\alpha) du \end{aligned}$$

Si (α_v, β_v) est solution du système adjoint de (A6-4):

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_v}{du} = -g^* \beta_v \\ \frac{d\beta_v}{du} = -f^* \alpha_v \end{cases} \quad (\text{A6-5})$$

alors le produit scalaire ci-dessus s'écrit:

$$\int_{u_0}^{u_M} (\alpha_v^* \frac{d\delta\alpha}{du} + \beta_v^* \frac{d\delta\beta}{du}) du = \int_{u_0}^{u_M} (\alpha_v^* \delta f \beta + \beta_v^* \delta g \alpha) du - \int_{u_0}^{u_M} \left(\frac{d\beta_v^*}{du} \delta\beta + \frac{d\alpha_v^*}{du} \delta\alpha \right) du$$

ou encore:

$$\left[\alpha_v^* \delta\alpha + \beta_v^* \delta\beta \right]_{u_0}^{u_M} = \int_{u_0}^{u_M} (\alpha_v^* \delta f \beta + \beta_v^* \delta g \alpha) du$$

Dans notre cas, on conserve des conditions initiales à gauche (en $u = u_0$) fixes, et on fait varier les paramètres de contrôle δ et u_f ; on a donc:

$$\alpha_V^*(u_M)\delta\alpha(u_M) + \beta_V^*(u_M)\delta\beta(u_M) = I_\delta\delta + I_u\delta u_f \quad (A6-6)$$

$$\text{avec } I_x = \int_{u_0}^{u_M} \left(\alpha_V^* \frac{\partial F}{\partial x} \beta + \beta_V^* \frac{\partial G}{\partial x} \alpha \right) du \quad \text{où } x = \delta, u_f.$$

Or le critère pour une onde sortante pure à droite s'écrit: $\alpha_V^*(u_M)\alpha(u_M) + \beta_V^*(u_M)\beta(u_M) = 0$ avec $\alpha_V(u_M) = (2u_M)^{1/2}$; $\beta_V(u_M) = 1$. La procédure itérative de contrôle optimal est donc la suivante:

a) résolution du système (A6-4) dans le sens $u_0 - u_M$ avec $\alpha(u_0) = \alpha_0$, $\beta(u_0) = \beta_0$; on obtient $\alpha(u_M)$ et $\beta(u_M)$, et on conserve les valeurs de α , β pour $u_0 \leq u \leq u_M$.

b) résolution du système (A6-5) dans le sens $u_M - u_0$ avec $\alpha_V(u_M) = (2u_M)^{1/2}$, $\beta_V(u_M) = 1$; on est alors en mesure de calculer les quantités I_δ et I_u ci-dessus.

c) en général les paramètres δ et u_f ont reçu des valeurs de départ telles que la condition d'onde sortante n'est pas remplie: $\alpha_V^*(u_M)\alpha(u_M) + \beta_V^*(u_M)\beta(u_M) = C \neq 0$; on cherche alors à faire varier (α , β) d'une quantité ($\delta\alpha$, $\delta\beta$) qui annule C , ce qui s'écrit d'après (A6-6):

$$I_\delta\delta + I_u\delta u_f = -C$$

On en déduit les variations à imposer à δ et u_f :

$$\delta\delta = - \frac{\text{Im}[I_u^*((2u_M)^{1/2}\alpha(u_M) + \beta(u_M))]}{\text{Im}(I_u^*I_\delta)}$$

$$\delta u_f = + \frac{\text{Im}[I_\delta^*((2u_M)^{1/2}\alpha(u_M) + \beta(u_M))]}{\text{Im}(I_u^*I_\delta)}$$

On repart alors en a) avec les nouvelles valeurs de δ et u_f et on itère jusqu'à obtenir C inférieur à une valeur donnée suffisamment petite pour qu'on considère la condition d'onde sortante comme remplie.

S'agissant d'une méthode de Newton (progression dans la direction du gradient de la quantité à annuler), on observe une convergence rapide: quelques itérations dans la plupart des cas que nous avons rencontrés dans les explorations numériques de cette thèse.

Notons que les problèmes de divergence numérique évoqués plus haut ne se posent pas dans cette méthode, car la résolution des équations a toujours lieu dans le sens où les fonctions de type exponentiel sont croissantes.

Appendice 7

Instabilités d'un plasma homogène

1: Instabilités d'ondes électrostatiques:

A: Instabilité hydrodynamique d'un plasma froid:

La relation de dispersion générale des ondes de plasma:

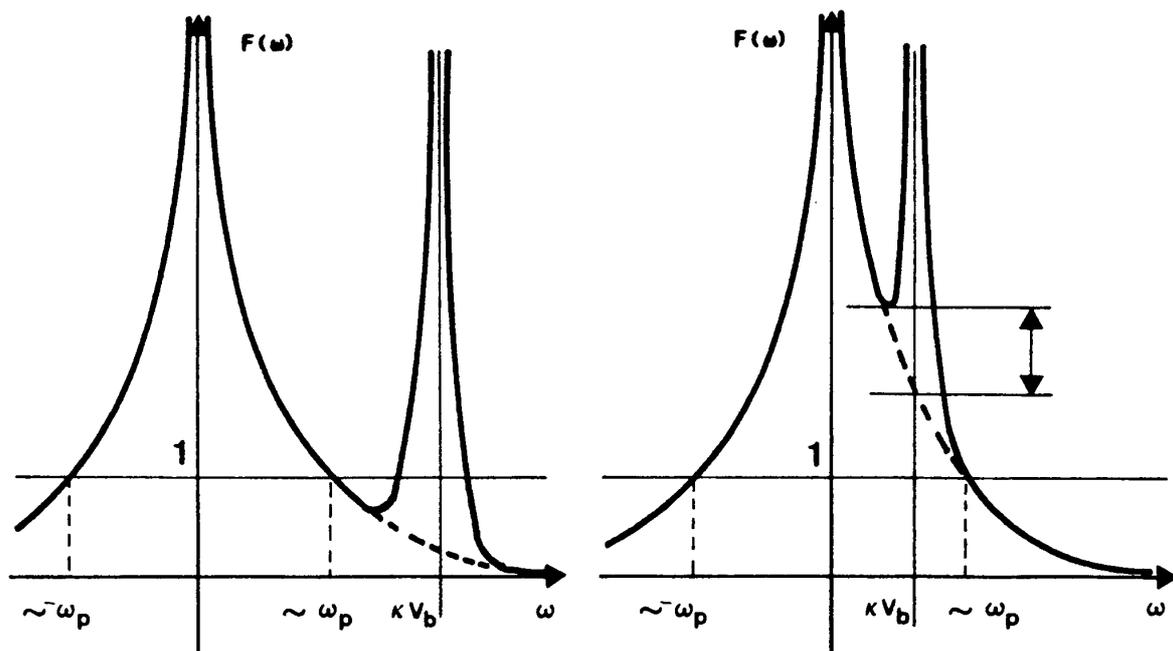
$$1 = \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \left\langle \frac{1}{\gamma^3 (\omega - kv)^2} \right\rangle_{\alpha} \quad (\text{A7-1})$$

prend dans le cas d'un plasma froid excité par un faisceau froid peu dense la forme suivante, dans le repère du plasma:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{\gamma_b^3 (\omega - kv_b)^2} \quad (\text{A7-2})$$

où v_b (proche de c) est la vitesse du faisceau, $\omega_b^2/\gamma_b^3 \ll \omega_p^2$.

La relation A7-2 est illustrée sur la figure A7-1 sous la forme de la résolution graphique d'une équation de la forme $F(\omega) = 1$ à k donné.



(a) $kv_b > \omega_p$ - 4 racines réelles. (b) $kv_b < \omega_p$ - 1 mode instable.

Fig. A7-1: Résolution graphique de l'équation de dispersion des ondes électrostatiques.

On voit qu'on obtient une instabilité (deux solutions complexes conjuguées - une solution correspondant à un mode croissant) pour $kv_b < \omega^*$ où la fréquence critique ω^* est peu différente de ω_p si le faisceau est suffisamment tenu

$(\omega_D/\gamma_D^{3/2} \ll \omega_p)$. Dans ce cas l'ordonnée du minimum local de $F(\omega)$ est peu différente de $\omega_p^2/k^2v_D^2$ dans l'intervalle: $\omega_D/\gamma_D^{3/2} \ll kv_D < \omega_p$. La solution (cherchée sous la forme $\omega = kv_D + \delta\omega$) est approximativement donnée par un développement de l'équation A7-2 en puissances de $\delta\omega/kv_D \ll 1$. On obtient:

$$\delta\omega \sim \frac{\omega_D}{\gamma_D^{3/2}} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{k^2v_D^2}\right)^{-1/2}.$$

Le taux de croissance augmente donc lorsque kv_D se rapproche de ω_p . Plaçons-nous donc dans la limite $kv_D \sim \omega_p$; l'équation A7-2 prend alors la forme approchée:

$$\frac{2\delta\omega}{\omega_p} \sim \frac{\omega_D^2}{\gamma_D^3 \delta\omega^2}$$

d'où le taux de croissance maximal:

$$\delta\omega_i \sim \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_p \omega_D^2}{2\gamma_D^3}\right)^{1/3} \text{ pour } \omega \sim kv_D \sim \omega_p \quad (\text{A7-3})$$

Le résultat A7-3 correspond à l'expression obtenue par Bludman, Watson & Rosenbluth (1960) et utilisée par Ruderman & Sutherland (1975). Dans le cadre des conditions physiques de la magnétosphère des pulsars, où le plasma est lui-même animé d'un mouvement relativiste par rapport à l'étoile, il nous reste à effectuer le changement de repère correspondant. L'onde ayant une vitesse de phase proche de c se transforme approximativement comme un photon:

$\omega_* \sim 2\gamma_0\omega \sim k_*c$ et $\omega_{i*} \sim \omega_i/\gamma_0$ où l'étoile en indice désigne les quantités mesurées dans le repère de l'étoile.

Les densités se transforment de la façon suivante:

$$n_{p*} = \gamma_0 n_p, \quad n_{D*} \sim 2\gamma_0 n_D.$$

Le facteur relativiste du faisceau mesuré dans le repère fixe devient:

$$\gamma_{D*} \sim 2\gamma_0 \gamma_D.$$

On a en fin de compte dans le repère fixe:

$$\omega_i \sim \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}} \frac{(\omega_p \omega_D^2)^{1/3}}{\gamma_p^{1/2} \gamma_D} \text{ pour } \omega \sim kc \sim 2\gamma_p^{1/2} \omega_p \quad (\text{A7-4})$$

B: Instabilité hydrodynamique d'un plasma chaud

On se place maintenant dans le cas où le faisceau peut être considéré comme monocinétique mais où la dispersion thermique du plasma devient importante. La relation de dispersion générale A7-1 prend alors la forme suivante dans le repère du plasma:

$$1 = \omega_p^2 \left\langle \frac{1}{\gamma^3 (\omega - kv)^2} \right\rangle + \frac{\omega_b^2}{\gamma_b^3 (\omega - kv_b)^2} \quad (\text{A7-5})$$

On suppose qu'il existe un repère (le "repère du plasma") où la fonction de distribution du plasma (sans le faisceau) est paire, et que le plasma est relativiste ($\langle \gamma^3 \rangle^{1/3} \gg 1$). Avant d'étudier l'instabilité proprement dite, il n'est pas inutile de rappeler les propriétés de dispersion du plasma seul ($\omega_b^2 = 0$ dans l'équation A7-5).

On cherche s'il existe des ondes à vitesse de phase suffisamment proche de c pour ne pas subir d'amortissement Landau par les particules relativistes du plasma. On voit que $\omega_0 = k_0 c$ est solution de A7-5 (sans faisceau) pour:

$$k_0 = \frac{\omega_p}{c} \langle \gamma (1 + \frac{v}{c})^2 \rangle^{1/2} \sim \sqrt{2} \frac{\omega_p}{c} \langle \gamma \rangle^{1/2} .$$

Rappelons qu'on a utilisé le fait que $\langle p \rangle = 0$ dans le repère du plasma et $\langle \gamma \rangle \gg 1$. Au voisinage de ce point ($\omega = k_0 c + \Delta\omega$, $k = k_0 + \Delta k$), on obtient en développant au premier ordre:

$$\Delta\omega = - \left(\frac{\partial \epsilon / \partial k}{\partial \epsilon / \partial \omega} \right)_0 \Delta k$$

$$\text{avec } \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)_0 = \frac{2\omega_p^2}{k_0^3 c^3} \langle \gamma^3 (1 + \frac{v}{c})^3 \rangle \sim \frac{2^{3/2}}{\omega_p} \frac{\langle \gamma^3 \rangle}{\langle \gamma \rangle^{3/2}}$$

$$\text{et } \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial k} \right)_0 = -c(1 - \alpha) \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)_0 \quad \text{avec } \alpha = \frac{\langle \gamma (1 + v/c)^2 \rangle}{\langle \gamma^3 (1 + v/c)^3 \rangle} \sim \frac{\langle \gamma \rangle}{2 \langle \gamma^3 \rangle} \ll 1$$

où $\epsilon = 1 - \omega_p^2 \left\langle \frac{1}{\gamma^3 (\omega - kv)^2} \right\rangle$ est la constante diélectrique du plasma seul.

Dans la zone où la vitesse de phase est supérieure à c ($k < k_0$), on obtient l'allure de la relation de dispersion $\omega(k)$ en développant en puissances de k/k_0 :

$$\omega^2 \sim \omega_p^2 \langle \gamma^{-3} \rangle + 3k^2 c^2 (1 - \langle \gamma^{-5} \rangle / \langle \gamma^{-3} \rangle) \dots$$

Ces résultats (classiques: cf par exemple Lominadze & Mikhailovskii 1979; Lominadze & Pataraya 1982; Volokitin, Krasnosel'skikh & Machabeli 1985) sont résumés sur la figure A7-2.

Nous pouvons maintenant nous pencher sur le problème de l'excitation de ces ondes par un faisceau ultrarelativiste (tel que $v_b > \omega/k$). Si la dispersion thermique du faisceau est assez faible (ceci sera précisé plus loin) pour qu'on puisse le considérer comme monocinétique, la relation A7-5 s'écrit avec les variables définies ci-dessus:

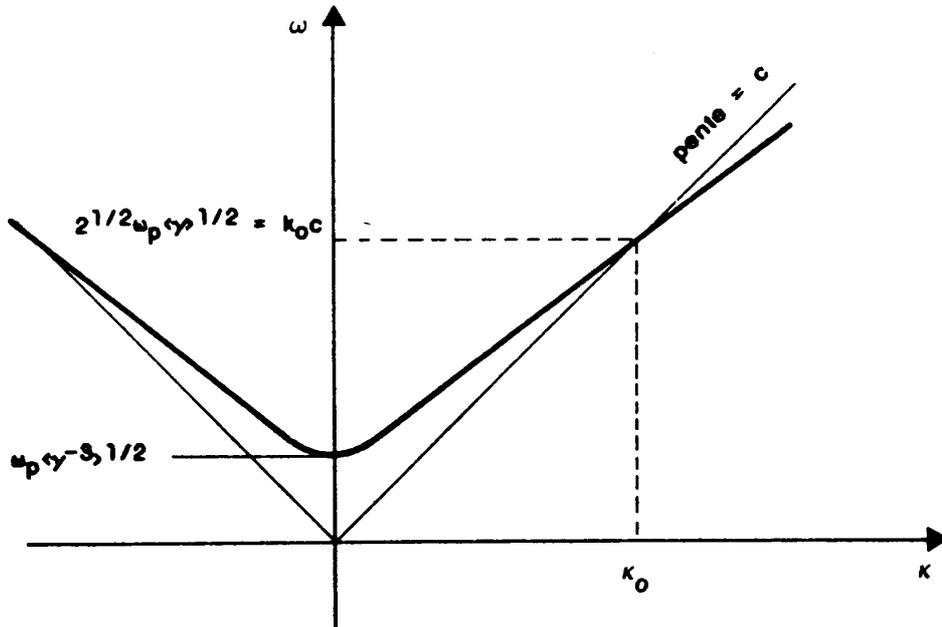


Fig. A7-2: Relation de dispersion des ondes électrostatiques dans un plasma relativiste.

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega}\right)_0 (\Delta \omega - c(1 - \alpha)\Delta k) \sim \frac{\omega_D^2}{\gamma_D^3 (\omega - kv_D)^2} \quad (\text{A7-6})$$

Plaçons-nous en Δk_m tel que:

$$\begin{aligned} \Delta \omega - c(1 - \alpha)\Delta k_m &= \omega - v_D(k_0 + \Delta k_m) \\ &= \Delta \omega - v_D \Delta k_m + \frac{k_0 c}{2\gamma_D^2} \end{aligned}$$

On a à peu près en tenant compte de $\alpha \sim 1/2 \langle \gamma \rangle^2$ et $v_D \sim c(1 - 1/2\gamma_D^2)$:

$$\frac{\Delta k_m}{k_0} \sim \frac{\langle \gamma \rangle^2}{\gamma_D^2} \quad (\text{A7-7})$$

Pour cette valeur de Δk on résoud facilement l'équation A7-6 qui devient:

$$(\Delta \omega - c(1 - \alpha)\Delta k_m)^3 \sim \frac{n_D}{n_P} \left(\frac{k_0 c}{2\gamma_D \langle \gamma \rangle}\right)^3$$

On trouve donc une racine complexe à partie imaginaire positive, le taux de croissance hydrodynamique correspondant est:

$$\Gamma_h \sim \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{k_0 c}{\gamma_D \langle \gamma \rangle} \left(\frac{n_D}{n_P}\right)^{1/3} \quad (\text{A7-8})$$

Montrons qu'en fait ceci correspond au taux de croissance maximal. L'équation A7-6 est de la forme: $(x - a + \epsilon)(x - a)^2 = 1$ où ϵ représente l'effet de $\Delta k \neq \Delta k_m$. En développant en puissances de ϵ autour de la solution $x_0 = e^{2i\pi/3}$ à partie imaginaire positive, on trouve: $\text{Im}(x) \sim 3^{1/2}/2 (1 - \epsilon^2/9...)$; autrement dit la valeur de Δk_m qui correspond à $\epsilon = 0$ est bien celle pour laquelle on

obtient le taux de croissance maximal.

Revenons maintenant sur la question du caractère monocinétique du faisceau. Supposons qu'il soit représenté par une fonction de distribution centrée sur $P_D = \gamma_D m v_D \sim \gamma_D m c$ avec un écart quadratique moyen $P_{TD} = \gamma_{TD} m c$. Les particules les plus lentes sont donc caractérisées par $(v - v_D)/c \sim -\gamma_{TD}/\gamma_D^3$. Pour éliminer la possibilité d'une interaction onde-particules on doit poser:

$v_D - \omega/k > v_D - v$. Or pour $\Delta k = \Delta k_m$, on a:

$$\operatorname{Re}(\omega) - kv_D = - \left(\frac{n_D}{n_p}\right)^{1/3} \frac{k_0 c}{4\gamma_D \langle \gamma \rangle}$$

L'inégalité ci-dessus s'écrit en fin de compte:

$$\frac{\gamma_{TD}}{\gamma_D} < \frac{\gamma_D}{4\langle \gamma \rangle} \left(\frac{n_D}{n_p}\right)^{1/3} \quad (\text{A7-9})$$

Ici encore, on doit prendre en compte le mouvement d'ensemble (correspondant à un facteur relativiste γ_0) du système plasma-faisceau par rapport à l'étoile.

Dans le repère de celle-ci, les résultats ci-dessus s'écrivent:

- taux de croissance hydrodynamique:

$$\Gamma_h \sim \frac{3^{1/2}}{2^{5/6}} \frac{\omega_p}{\gamma_0^{1/2} \gamma_D \langle \gamma \rangle^{1/2}} \left(\frac{n_D}{n_p}\right)^{1/3} \quad (\text{A7-10})$$

- condition pour se trouver dans le régime hydrodynamique:

$$\frac{\gamma_{TD}}{\gamma_D} < \frac{\gamma_D}{8\langle \gamma \rangle \gamma_0} \left(\frac{n_D}{2n_p}\right)^{1/3} \quad (\text{A7-11})$$

Dans ces deux relations $\langle \gamma \rangle$ représente la dispersion d'énergie du plasma dans son repère propre; on n'a pas cherché à la transformer dans le repère de l'étoile car on peut avoir $\langle \gamma \rangle \sim \gamma_0$.

C: Instabilité cinétique d'un plasma chaud

Si l'inégalité A7-9 (ou A7-11) n'est pas vérifiée, on doit prendre en compte une interaction résonnante onde-particules. L'expression de la constante diélectrique du faisceau:

$$\epsilon_b = -\omega_b^2 \left\langle \frac{1}{\gamma^3(\omega - kv)^2} \right\rangle = \frac{m}{k} \omega_b^2 \int \frac{1}{\omega - kv} \frac{\partial f_b}{\partial p} dp$$

comporte une partie imaginaire due aux particules résonnantes:

$$\text{Im}(\epsilon_b) = -i\pi \frac{m^2}{k^2} \omega_b^2 \gamma_{\text{rés}}^3 \left(\frac{\partial f_b}{\partial p} \right)_{\text{rés}}$$

où l'indice "rés" désigne des quantités évaluées en $v = \omega/k$. Pour une fonction de distribution centrée sur p_b avec une dispersion p_{Tb} , par exemple la fonction suivante:

$$f_b \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} p_{Tb}} \exp - \frac{(p - p_b)^2}{p_{Tb}^2}, \quad \text{on a } \left(\frac{\partial f_b}{\partial p} \right)_{\text{max}} \sim \left(\frac{2}{\pi e} \right)^{1/2} \frac{1}{p_{Tb}^2}$$

La relation de dispersion A7-5 s'écrit alors à la résonance:

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} \right)_0 (\Delta\omega - c(1 - \alpha)\Delta k) \sim \frac{-\omega_b^2}{\gamma_b^3 \omega_1^2} + i\pi \frac{\omega_b^2 \gamma_b^3}{k_0^2 c^2} \left(\frac{2}{\pi e} \right)^{1/2} \frac{1}{\gamma_{Tb}^2} \quad (\text{A7-12})$$

où on a posé comme au paragraphe précédent $\gamma_{Tb} mc = p_{Tb}$.

La partie imaginaire de la relation A7-12 fournit le taux de croissance cinétique maximal dans le repère du plasma:

$$\Gamma_{\text{cin}} \sim \left(\frac{2\pi}{e} \right)^{1/2} \frac{n_b}{\gamma_{Tb}^2 n_p} \left(\frac{\gamma_b}{2\langle \gamma \rangle} \right)^3 k_0 c$$

Dans le repère de l'étoile ceci devient:

$$\Gamma_{\text{cin}} \sim \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{e} \right)^{1/2} \frac{\omega_p \gamma_b^3}{\gamma_0^{5/2} \gamma_{Tb}^2 \langle \gamma \rangle^{5/2}} \left(\frac{n_b}{n_p} \right) \quad (\text{A7-13})$$

Ici encore $\langle \gamma \rangle$ représente la dispersion d'énergie du plasma dans son repère propre. Les autres quantités sont exprimées dans le repère de l'étoile.

2: Instabilités d'ondes électromagnétiques:

On étudie le comportement d'ondes transverses en propagation parallèle au champ magnétique d'équilibre dans un plasma électrons-positrons homogène, les deux espèces étant caractérisées par la même fonction de distribution (en particulier on suppose que leur vitesse relative est nulle). La relation de dispersion de telles ondes s'écrit (cf appendice 1):

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left\langle \frac{\gamma(\omega - kv)^2}{\gamma^2(\omega - kv)^2 - \omega_B^2} \right\rangle = 0 \quad (\text{A7-14})$$

où $\omega_B = + eB_0/mc$ et les crochets $\langle \dots \rangle$ représentent l'intégrale sur la fonction de distribution normalisée à 1. On se place dans le cadre de l'hypothèse: $\gamma(\omega - kv) \ll \omega_B$ pour la majorité des particules du plasma et on développe en puissances de $\gamma(\omega - kv)/\omega_B$. On obtient:

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \left\langle \gamma \left(1 + \frac{k^2 v^2}{\omega^2} \right) \right\rangle + O\left(\frac{1}{\omega_B^2}\right) = 0 \quad (\text{A7-15})$$

Pour parvenir à cette expression, on a supposé que $\langle p \rangle = 0$, c'est-à-dire qu'on s'est placé dans le repère du plasma. Si $\langle \gamma \rangle \gg 1$, on obtient finalement:

$$\omega^2 = k^2 c^2 \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta} \quad \text{où} \quad \Delta = \frac{\omega_p^2 \langle \gamma \rangle}{\omega_B^2}.$$

Avec les chiffres correspondant à la magnétosphère des pulsars, Δ reste très inférieur à 1 pratiquement jusqu'au cylindre lumière pour des pulsars de période inférieure à 1 s typiquement. Les ondes sont alors hydrodynamiquement stables en l'absence d'un faisceau de grande énergie, avec cependant une relation de dispersion telle que leur vitesse de phase laisse ouverte la possibilité d'une éventuelle interaction avec un faisceau.

En présence d'un tel faisceau, la relation de dispersion A7-14 comporte un terme supplémentaire:

$$1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \Delta \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left\langle \frac{\gamma(\omega - kv)^2}{\gamma^2(\omega - kv)^2 - \omega_B^2} \right\rangle_b = 0 \quad (\text{A7-16})$$

Si on considère que les effets hydrodynamiques sont pris en compte dans la première partie, ce terme introduit une correction cinétique imaginaire:

$$\text{Im}(\epsilon) = -i\pi \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int_{\epsilon=+,-} \frac{\omega - kv_\epsilon}{2} mc \frac{f(p_\epsilon)}{\beta_\epsilon \omega - kc}$$

où les résonances sont définies par:

$$\omega - kv_\epsilon = -\epsilon \omega_B / \gamma_\epsilon \quad \text{pour} \quad \epsilon = +, - \quad (\text{A7-17})$$

La résolution graphique de cette équation est représentée sur la figure A7-3. On voit que dans le cas $kc - \omega \ll \omega \ll \omega_B$, qui est celui qui nous concerne pour ce qui est du rayonnement des pulsars, les deux solutions vérifient

$v_- < 0 < v_+$ avec $1 \ll \gamma_- \ll \gamma_+$, de sorte que la relation A7-16 s'écrit:

$$\omega^2(1 + \Delta) - k^2 c^2(1 - \Delta) \sim \frac{i\pi \omega_p^2 mc}{2} (f(p_+) - f(p_-))$$

La partie imaginaire de la fréquence liée aux effets de résonance onde-

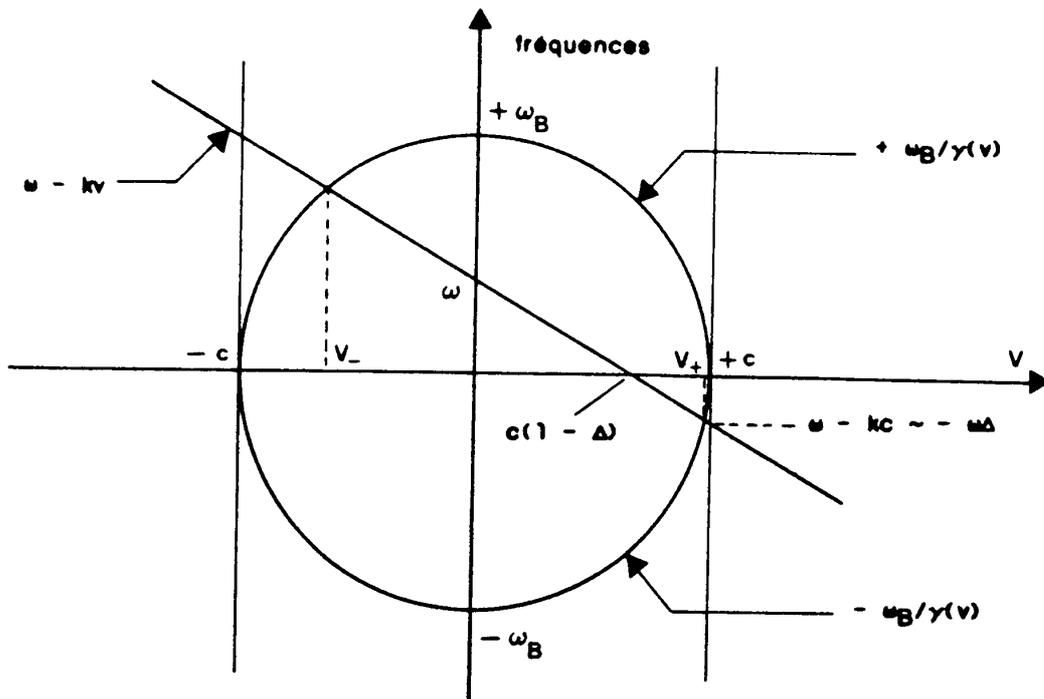


Fig. A7-3: Vitesses de résonance gyromagnétique pour $kc - \omega \ll \omega \ll \omega_B$.

particules vaut donc:

$$\text{Im}(\omega) \sim \frac{\pi \omega_D^2 m}{4k} \left(f\left(\frac{m\omega_B}{k\Delta}\right) - f\left(-\frac{m\omega_B}{2k}\right) \right)$$

où on a utilisé les approximations suivantes:

$$p_+ \sim \gamma_+ mc \sim \frac{-\omega_B mc}{\omega - kv_+} \sim \frac{-\omega_B mc}{\omega - kc} \sim \frac{m\omega_B}{k\Delta} \quad \text{et} \quad p_- \sim -\gamma_- mc \sim \frac{-\omega_B mc}{\omega - kv_-} \sim \frac{-\omega_B mc}{\omega + kc} \sim \frac{-\omega_B m}{2k}$$

Pour une distribution asymétrique du type de celle qui est représentée sur la figure A7-4, telle que p_- soit en dessous de l'impulsion du gros du plasma et p_+ dans la "queue" de haute énergie, on peut avoir amplification cinétique des ondes transverses. Si la queue peut être représentée par un plateau entre 0 et P_{\max} ($f(p) \sim 1/P_{\max}$ pour $p < P_{\max}$; cf figure A7-4), on peut donner une estimation du taux de croissance maximal correspondant (obtenu pour $p_+ = P_{\max}$):

$$\Gamma \sim \frac{\pi \omega_D^2}{4\omega_B} \Delta$$

Smith (1981) a fait remarquer que les conditions à vérifier pour obtenir ce taux de croissance sont plus restrictives qu'il n'y paraît; en effet l'amortissement des ondes par la résonance p_- sur le plasma (cf figure A7-4) n'est négligeable que si $|p_-| > p_0$ où $p_0 \sim \langle \gamma \rangle mc$ est la dispersion d'énergie des particules du plasma. Ceci s'écrit encore: $k < \omega_B / 2 \langle \gamma \rangle c$. Par ailleurs la condition de résonance A7-17 avec la queue de haute énergie s'écrit en reportant la valeur de la fréquence réelle ω : $kc(1 - \Delta) - kv_+ \sim -\omega_R / \gamma_h$ ou

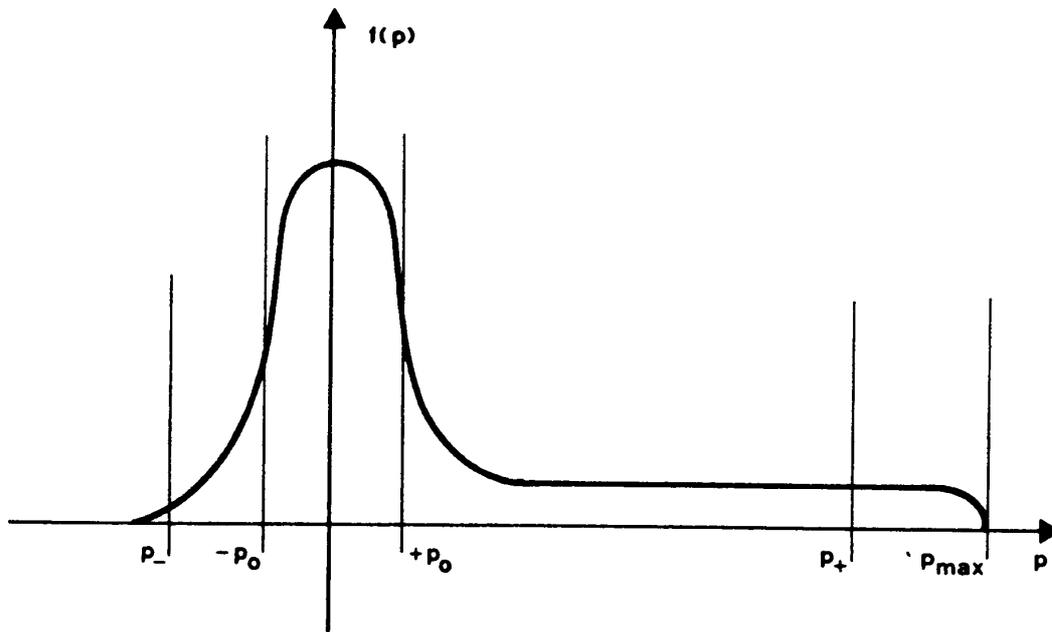


Fig. A7-4: Distribution des impulsions des particules dans le repère propre du plasma.

encore (cf figure A7-4): $kc\Delta \sim \omega_B/\gamma_b$ (cette approximation étant d'autant meilleure que Δ est plus petit). Compte tenu de la valeur de Δ , on arrive finalement à la condition:

$$\frac{1}{\gamma_b} < \frac{\omega_p^2}{2\omega_B^2}$$

L'intérêt de cette relation est qu'elle ne dépend plus de la dispersion thermique $\langle \gamma \rangle$ du plasma, mais de grandeurs plus facilement accessibles dans les modèles de pulsar disponibles actuellement.

Revenons au repère fixe par une transformation de Lorentz de facteur relativiste γ_0 ; les résultats précédents s'écrivent:

- Taux de croissance maximal:

$$\Gamma \sim \frac{\pi \langle \gamma \rangle \omega_p^2 \omega_b^2}{8 \gamma_0^3 \omega_B^3} \quad \text{pour} \quad \omega \sim kc \sim \frac{4\gamma_0^3 \omega_B^3}{\langle \gamma \rangle \gamma_b \omega_p^2}$$

- Condition de validité (pas d'amortissement sur le gros du plasma):

$$\frac{4\gamma_0^2}{\gamma_b} < \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2}$$

Dans ces relations la seule quantité qui ne soit pas évaluée dans le repère fixe est $\langle \gamma \rangle$, la dispersion d'énergie du plasma dans son repère propre.

Appendice 8

Comportement du système pour un profil de densité particulier

Rappelons qu'on cherche à résoudre le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} = -i\lambda \left(1 - \frac{\phi(u)}{(1\delta + u)^2}\right)\beta \\ \frac{d\beta}{du} = -2i\lambda(1\delta + u)\alpha \end{cases} \quad (\text{A6-1})$$

La fonction ϕ caractérise le profil de densité à la frontière du plasma: elle vaut 1 pour $u \ll -1$, à l'intérieur du plasma, et 0 pour $u \gg 1$, dans le vide, la transition entre ces deux régions s'effectuant avec une longueur de décroissance caractéristique σ . Les résultats numériques du corps du texte sont obtenus pour un profil où cette transition se fait de façon "douce". Dans le cas où on utilise le profil "anguleux", simplifié à l'extrême, représenté sur la figure A8-1, on voit apparaître pour de grandes valeurs de λ et σ un comportement particulier que nous allons essayer de caractériser.

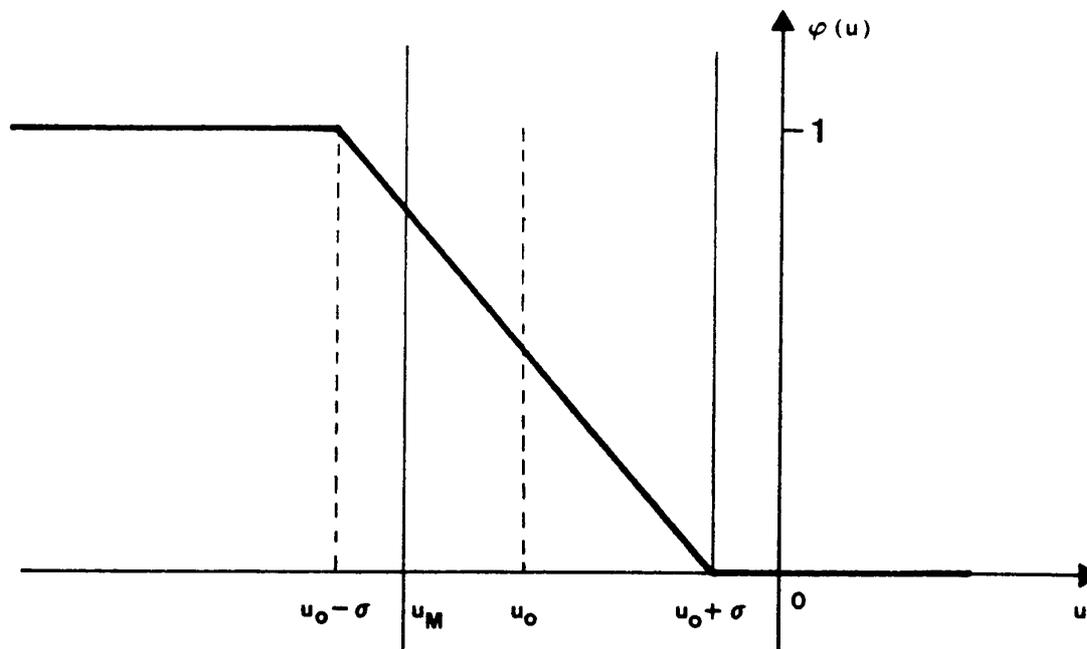


Fig. A8-1: Le profil de densité "anguleux".

Pour incorporer l'information " λ grand", on pose:

$$x = (2\lambda^2)^{1/3}(u + \sigma) ; B = i(\lambda/2)^{1/3}\beta ; A = \alpha ; D = (2\lambda^2)^{1/3}\delta .$$

Le système à résoudre prend alors la forme:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dx} = - \left(1 - \frac{(2\lambda^2)^{2/3} \phi(x/(2\lambda^2)^{1/3})}{(x + iD)^2} \right) B \\ \frac{dB}{dx} = (x + iD)A \end{cases}$$

La dépendance en λ est maintenant confinée dans l'expression du profil de densité. Selon la forme analytique précise adoptée pour celui-ci, on peut avoir différents comportements. En particulier, le profil représenté sur la figure A8-1 suggère d'utiliser pour λ grand la dépendance suivante:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= - (u - u_0 - \sigma)/2\sigma \text{ pour } u < u_0 + \sigma; \\ \phi(u) &= 0 \text{ pour } u > u_0 + \sigma. \end{aligned} \quad (\text{A8-1})$$

Ceci se confond avec le profil précédemment utilisé pour $u_M \ll u$ (cf figure A8-1) si $u_M > u_0 - \sigma$. Le système s'écrit alors:

- pour $x < x_0$:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dx} = - \left(1 + G \frac{x - x_0}{(x + iD)^2} \right) B \\ \frac{dB}{dx} = (x + iD)A \end{cases} \quad (\text{A8-2a})$$

- pour $x > x_0$:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dx} = - B \\ \frac{dB}{dx} = (x + iD)A \end{cases} \quad (\text{A8-2b})$$

$$\text{on a posé } G = \frac{(2\lambda^2)^{1/3}}{2\sigma}.$$

S'il existe des valeurs de G , x_0 pour lesquelles il est possible de trouver un comportement radiatif instable (solution évanescence à gauche, propagative sortante à droite pour $D > 0$) de ce système, alors on aura mis en évidence l'instabilité annoncée au § 3-C-c avec $\delta \sim O(\lambda^{-2/3})$, $\sigma \sim O(\lambda^{2/3})$. Dans quel domaine de λ ceci est-il possible? Sachant qu'en fait $\phi(u) \leq 1$ à gauche, il faut que $\phi(u_M) \leq 1$, c'est-à-dire $|u_M - u_0 + \sigma| < 2\sigma$. Par ailleurs, u_M doit être tel que $|G(x_M - x_0)/(x_M + iD)^2| \ll 1$ pour se trouver dans la zone où la valeur de la densité devient indifférente quant au comportement de $A(x)$, $B(x)$, c'est-à-dire pour que les deux profils (A8-1) et (3-18a) conduisent à la même solution du système. Si $x_0 \sim D \ll x_M$, ceci s'écrit: $|x_M| \gg G$, c'est-à-dire: $1/2\sigma \ll |u_M| \ll 2\sigma$, ce qui impose $\sigma \gg 1/2$.

En résumé, on peut alors dire que pour un profil de densité de la forme (3-18a) avec $2\sigma \gg 1$, il existe une solution instable pour λ grand avec $\sigma \sim \lambda^{2/3}$, $\delta \sim \lambda^{-2/3}$, c'est ce qui est observé numériquement.

Pour $G \ll 1$, on peut essayer de donner une description analytique du système (A8-2) (le raisonnement est le même que celui de l'appendice 5):

- à droite de x_0 , la solution est strictement une fonction d'Airy:

$$A(x) = \alpha_+ \text{Ai}(e^{-i\pi/3}(iD+x))$$

$$B(x) = e^{2i\pi/3} \alpha_+ \text{Ai}'(e^{-i\pi/3}(iD+x))$$

En supposant $D, x_0 \ll 1$, on a donc à peu près:

$$A(x_0) \sim \alpha_+ \text{Ai}(0)$$

$$B(x_0) \sim e^{2i\pi/3} \alpha_+ \text{Ai}'(0)$$

On cherche ensuite x_1 tel que $|(x_1 + iD)^2| \ll 1$ et $|G(x_1 - x_0)/(x_1 + iD)^2| \ll 1$.

Ceci permet de définir une zone $[x_1, x_0]$ dans laquelle B est à peu près constant en valeur relative, et où on peut donc intégrer la première équation de (A8-2a). Dans la zone $(-\infty, x_1]$ la deuxième condition ci-dessus montre qu'on se ramène approximativement à une équation d'Airy. En supposant $|x_0|, D \ll |x_1|$, les deux conditions ci-dessus sont vérifiées pour $x_1 \sim -G^{1/3}$ (il faudra vérifier que $x_0, D \ll G^{1/3}$). On a approximativement à gauche de x_1 :

$$A(x) \sim \alpha_- \text{Ai}(-(x+iD))$$

$$B(x) \sim \alpha_- \text{Ai}'(-(x+iD))$$

La valeur des champs en $x_1 = -G^{1/3}$ est alors approximativement:

$$A(-G^{1/3}) \sim \alpha_- \text{Ai}(0)$$

$$B(-G^{1/3}) \sim \alpha_- \text{Ai}'(0)$$

Dans la région $-G^{1/3} < x < x_0$, B est approximativement constant et la variation de A s'obtient alors facilement:

$$A(x_0) - A(-G^{1/3}) \sim -B \left[x_0 + G^{1/3} + G \left(\text{Log} \frac{x_0 + iD}{-G^{1/3} + iD} + 1 - \frac{x_0 + iD}{-G^{1/3} + iD} \right) \right]$$

Comme par hypothèse $x_0, D \ll G^{1/3}$, alors $x_0, D \ll O(G^{1/3} \text{Log} G)$. En conservant les termes d'ordres les plus élevés dans l'expression ci-dessus, on parvient finalement à l'expression du décalage de fréquence:

$$x_0 + iD \sim \frac{-G^{1/3}}{e} \exp \frac{\text{Ai}(0) 3^{1/2}}{\text{Ai}'(0) G} e^{i\pi/6}$$

Le fait que la solution dépende du choix de x_1 (facteur $G^{1/3}$) suggère que cette méthode n'est pas vraiment adaptée à cette forme du profil de densité. De toute façon la forme de l'argument de l'exponentielle ci-dessus suggère une décroissance très rapide du taux de croissance pour $G \ll 1$. On a donc recours à des simulations numériques pour étudier le système (A8-2). Les résultats de cette étude sont rassemblés sur la figure A8-2.

On vérifie que le taux de croissance s'annule rapidement pour $G < 0.6$, ce que laissait supposer (sans le démontrer rigoureusement) le calcul ci-dessus.

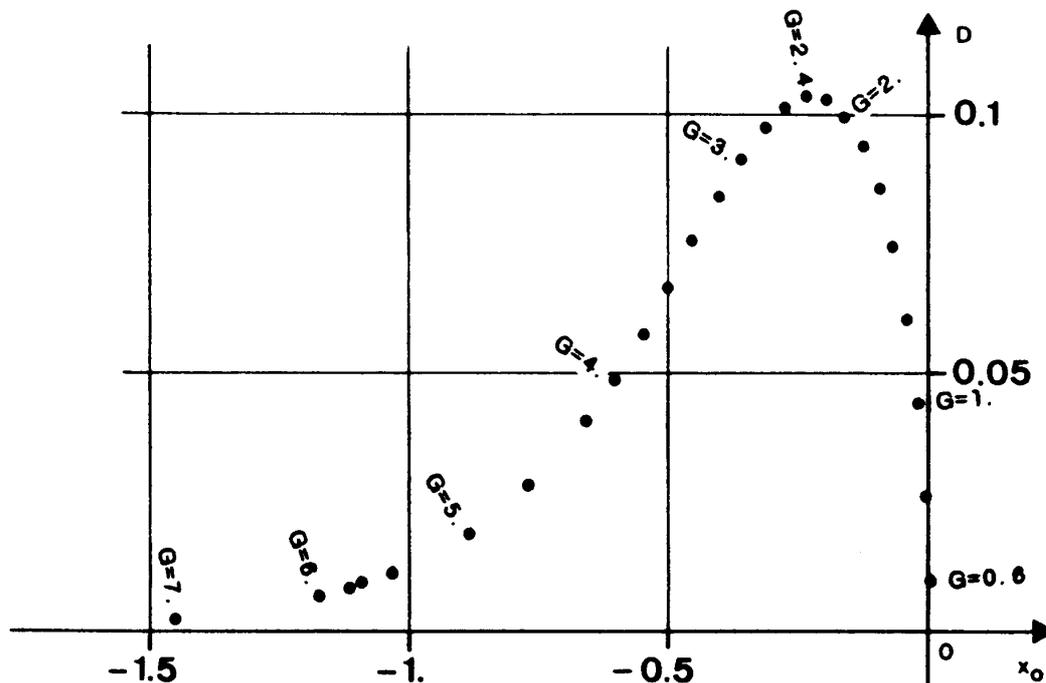


Fig. A8-2: Décalage de fréquence complexe dans la limite $\sigma, \lambda \gg 1$ pour un profil de densité "anguleux".

Au point où D est maximal ($G = 2.4, D = 0.1035, x_0 = -0.235$), on déduit la persistance de l'instabilité de courbure (avec ce profil de densité particulier) pour $\sigma \gg 0.5$ et de grandes valeurs de λ satisfaisant $\lambda^{2/3} \sim 3.91\sigma$ avec $\delta \sim 0.082 \lambda^{-2/3}, u_0 + \sigma \sim -0.187 \lambda^{-2/3}$.

Bibliographie

- Ablowitz M. J. & Segur H.: "Solitons and the inverse scattering transform",
S.I.A.M. (1981)
- Abramowitz M. & Stegun I. A. (eds.): "Handbook of mathematical functions",
Dover Publ. (1970)
- Alpar M. A., Cheng A. F., Ruderman M. A. & Shaham J.: Nature 300-728 (1982)
- Arons J.: Sp. Sci. Rev. 24-437 (1979)
- Arons J. & Barnard J. J.: Ap. J. 302-120 (1986)
- Arons J. & Scharlemann E. T.: Ap. J. 231-854 (1979)
- Arons J. & Smith D. F.: Ap. J. 229-728 (1979)
- Asséo E., Beaufils D. & Pellat R.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 209-285 (1984)
- Asséo E., Llobet X. & Pellat R.: Astr. Ap. 139-417 (1984)
- Asséo E., Pellat R. & Rosado M.: Ap. J. 239-661 (1980)
- Asséo E., Pellat R. & Sol H.: Phys. Rev. A 24-1063 (1981)
- Asséo E., Pellat R. & Sol H.: Ap. J. 266-201 (1983)
- Backer D. C., Kulkarni S. R., Heiles C., Davis M. M. & Goss W. M.: Nature
300-615 (1982)
- Bartel N. & Hankins T. H.: Ap. J. (Letters) 254-L35 (1982)
- Benford G.: Ap. J. 201-419 (1975)
- Benford G.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 179-311 (1977)
- Benford G. & Buschauer R.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 179-189 (1977)
- Beskin V. S., Gurevich A. V. & Istomin Ya. N.: J.E.T.P. 85-401 (1983) (Sov.
Phys. J.E.T.P. 58-235 (1983))
- Beskin V. S., Gurevich A. V. & Istomin Ya. N.: Ap. Sp. Sci. 102-301 (1984)
- Beskin V. S., Gurevich A. V. & Istomin Ya. N.: Proc. Joint Varenna-Abastumani
Int. School & Workshop on "Plasma Astrophysics", Sukhumi, E.S.
A. Publ., p. 411 (1986)
- Blandford R. D., Applegate J. H. & Hernquist L.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 204-
1025 (1983)
- Blandford R. D. & Scharlemann E. T.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 174-59 (1976)
- Bludman S. A., Watson K. M. & Rosenbluth M. N.: Phys. Fluids 3-747 (1960)
- Bodo G., Ferrari A. & Massaglia S.: Ap. Sp. Sci. 80-261 (1981)
- Boriakoff V.: Ap. J. 272-687 (1983)
- Boriakoff V., Buccheri R. & Fauci F.: Nature 304-417 (1983)
- Buschauer R. & Benford G.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 179-99 (1977)
- Buschauer R. & Benford G.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 185-493 (1978)
- Canuto V.: Ann. Rev. Astr. Ap. 12-167 (1974) et 13-335 (1975)
- Cheng K. S., Ho C. & Ruderman M. A.: Ap. J. 300-500 et 522 (1986)
- Cheng A. F. & Ruderman M. A.: Ap. J. 212-800 (1977)
- Cheng A. F. & Ruderman M. A.: Ap. J. 235-576 (1980)

Boym G.C., Petrucci D., Pines D., Ruderman M.A.: Nature 224-872 (69).
CITE - 1

- Cordes J. M., Helfand D. J.: *Ap J* 239-640 (80).
- Cordes J. M.: *Ap. J.* 222-1006 (1978)
- Cox Jr J. L.: *Ap. J.* 229-734 (1979)
- Damour T.: *Phys. Rev. Lett.* 51-1019 (1983)
- Daugherty J. K. & Harding A. K.: *Ap. J.* 252-337 (1982)
- Davila J., Wright C. & Benford G.: *Ap. Sp. Sci.* 71-51 (1980)
- Flowers E. G., Lee J. F., Ruderman M. A., Sutherland P. G., Hillebrandt W. & Muller E.: *Ap. J.* 215-291 (1977)
- Galeev A. A. & Krasnosel'skikh V. V.: *Pis'ma J.E.T.P.* 24-558 (1976) (*Sov. Phys. J.E.T.P. Letters* 24-515 (1976))
- Galeev A. A. & Sagdeev R. Z.: "Nonlinear plasma theory", in "Reviews of plasma physics" (Vol. 7), ed. Leontovich M. A., Consultants Bureau, Plenum Publ. (1979)
- Galeev A. A., Sagdeev R. Z., Sigov Yu. S., Shapiro V. D. & Shevchenko V. I.: *Fiz. Plazmy* 1-10 (1975) (*Sov. J. Plasma Phys.* 1-5 (1975))
- Gedalin M. E., Lominadze J. G., Stenflo L. & Tsytovich V. N.: *Ap. Sp. Sci.* 108-393 (1985)
- Gedalin M. E. & Machabeli G. Z.: *Pis'ma Astr. J.* 8-153 (1982) (*Sov. Astr. Lett.* 8-80 (1982))
- Gedalin M. E. & Machabeli G. Z.: *Fiz. Plazmy* 9-1015 (1983) (*Sov. J. Plasma Phys.* 9-592 (1983))
- Ginzburg V. L. & Zheleznyakov V. V.: *Ann. Rev. Astr. Ap.* 13-511 (1975)
- Gold T.: *Nature* 218-731 (1968)
- Goldman M. V.: *Rev. Mod. Phys.* 56-709 (1984)
- Goldreich P. & Julian W. H.: *Ap. J.* 157-869 (1969)
- Goldreich P. & Keeley D. A.: *Ap. J.* 170-463 (1971)
- Gurevich A. V. & Istomin Ya. N.: *J.E.T.P.* 89-3 (1985) (*Sov. Phys. J.E.T.P.* 62-1 (1985))
- Hankins T. H. & Boriakoff V.: *Nature* 276-45 (1978)
- Hardee P. E.: *Ap. J.* 227-958 (1979)
- Hardee P. E. & Rose W. K.: *Ap. J. (Letters)* 194-L35 (1974)
- Hardee P. E. & Rose W. K.: *Ap. J.* 219-274 (1978)
- Hardee P. E. & Morrison P. J.: *Ap. J.* 227-252 (1979)
- Hasegawa A.: *Phys. Rev. A* 1-1746 (1970)
- Heading J.: "An introduction to phase-integral methods", Methuen & Co (1962)
- Herold H. & Ruder H.: *Physica Scripta* T2-206 (1982)
- Hewish A., Bell S. J., Pilkington J. D. H., Scott P. F. & Collins R.A.: *Nature* 217-709 (1968)
- Hinata S.: *Ap. J.* 203-223 (1976a)
- Hinata S.: *Ap. J.* 206-282 (1976b)
- Jackson E. A.: *Ap. J.* 247-650 (1981)
- Johnson M. H. & Lippman B. A.: *Phys. Rev.* 76-828 (1949)
- Joss P. C. & Rappaport S. A.: *Ann. Rev. Astr. Ap.* 22-537 (1984)

Grath E.I.: *Ap. J. Suppl.* 29-431 (75).

Daines I.G., Tarter J.H., Weidner J.M., Rogers A.C., Durr N.D., ...

- Kaladze T. D. & Mamradze P. G.: *Astrofizika* 20-289 (1984) (*Astrophysics* 20-153 (1984))
- Karpman V. I., Norman C. A., ter Haar D. & Tsytovich V. N.: *Physica Scripta* 11-271 (1975)
- Kawamura K. & Suzuki I.: *Ap. J.* 217-832 (1977)
- Kennel C. F. & Engelmann F.: *Phys. Fluids* 9-2377 (1966)
- Kennel C. F., Fujimura F. S. & Pellat R.: *Sp. Sci. Rev.* 24-407 (1979)
- Kennel C. F. & Pellat R.: *J. Plasma Phys.* 15-335 (1976)
- Krall N. A. & Trivelpiece A. W.: "Principles of plasma physics", McGraw Hill (1973)
- Kruer W. L.: in "Laser-plasma interactions 3", ed. Hooper M. B., SUSSP (1986)
- Kusmartsev P. V.: *Physica Scripta* 29-7 (1984)
- Kuznetsov E.A.: *Phys. Lett.* 101 A-314 (1984)
- Kuznetsov E.A., Spector M. D. & Pal'kovich G. E.: *Physica* 10 D-379 (1984)
- Landau L. D. & Lifshits E. M.: "Théorie des champs", Mir (1970)
- Larroche O. & Pellat R.: *Phys. Rev. Lett.* 59-1104 (1987)
- Lee R. & Lampe M.: *Phys. Rev. Lett.* 31-1390 (1973)
- Lominadze J. G., Machabeli G. Z., Melikidze G. I., Pataraya A. D.: *Fiz. Plazmy* 12-1233 (1986) (*Sov. J. Plasma Phys.* 12-712 (1986))
- Lominadze J. G., Machabeli G. Z. & Mikhailovskii A. B.: *Fiz. Plazmy* 5-1337 (1979) (*Sov. J. Plasma Phys.* 5-748 (1979))
- Lominadze J. G., Machabeli G. Z. & Usov V. V.: *Ap. Sp. Sci.* 90-19 (1983)
- Lominadze J. G. & Mikhailovskii A. B.: *J.E.T.P.* 76-959 (1979) (*Sov. Phys. J.E.T.P.* 49-483 (1979))
- Lominadze J. G., Mikhailovskii A. B. & Sagdeev R. Z.: *J.E.T.P.* 77-1951 (1979) (*Sov. Phys. JETP* 50-927 (1979))
- Lominadze J. G. & Pataraya A. D.: *Physica Scripta* T2-215 (1982)
- Lominadze J. G., Stenflo L., Tsytovich V. N. & Wilhelmsson H.: *Physica Scripta* 26-455 (1982)
- Lyne A. G., Brinklow A., Middleditch J., Kulkarni S. R., Backer D. C. & Clifton T. R.: *Nature* 328-399 (1987)
- Machabeli G. Z.: *Fiz. Plazmy* 9-1177 (1983) (*Sov. J. Plasma Phys.* 9-678 (1983))
- Machabeli G. Z. & Sakhokiya D. M.: *Pis'ma Astr. J.* 8-78 (1982) (*Sov. Astr. Lett.* 8-39 (1982))
- Machabeli G. Z. & Usov V. V.: *Pis'ma Astr. J.* 5-445 (1979) (*Sov. Astr. Lett.* 5-238 (1979))
- Mamradze P. G., Machabeli G. Z. & Melikidze G. I.: *Fiz. Plazmy* 6-1293 (1980) (*Sov. J. Plasma Phys.* 6-707 (1980))
- Manchanda R. K., Bazzano A., La Padula C. D., Polcaro V. F. & Ubertini P.: *Ap. J.* 252-172 (1982)
- Manchester R. N. & Taylor J. H.: "Pulsars", Freeman & Co (1977)

Lyne A.G.: "High energy phenomena around collapsed stars", ed. Pacini F., p. 121 (87).

Lyne A.G.: *Nature* 310-300 (84).

Lyne A.G., Anderson B., Salter M.J.: *MNRAS* ...

- McCulloch P. M., Hamilton P. A., Ables J. G. & Hunt A. J.: Nature 303-307 (1983)
- Melikidze G. I. & Pataraya A. D.: Astrofizika 16-161 (1980) (Astrophysics 16-104 (1980))
- Melikidze G. I. & Pataraya A. D.: Astrofizika 20-157 (1984) (Astrophysics 20-100 (1984))
- Melrose D. B.: Ap. J. 225-557 (1978)
- Mestel L., Phillips P. & Wang Y. M.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 188-385 (1979)
- Mestel L., Robertson J. A., Wang Y. M. & Westfold K. C.: Mon. Not. R. Astr. Soc. 217-443 (1985)
- Michel F. C.: Ap. J. (Letters) 180-L133 (1973)
- Michel F. C.: Rev. Mod. Phys. 54-1 (1982)
- Michel F. C. & Dessler A. J.: Ap. J. 251-654 (1981)
- Michel F. C. & Dessler A. J.: Nature 303-48 (1983)
- Mikhailovskii A. B.: "Theory of plasma instabilities" (2 Vol.), Consultants Bureau, Plenum Publ. (1974)
- Mikhailovskii A. B.: "Electromagnetic instabilities in a non-maxwellian plasma", in "Reviews of plasma physics" (Vol. 6), ed. Leontovich M. A., Consultants Bureau, Plenum Publ. (1975)
- Mikhailovskii A. B.: Pis'ma Astr. J. 5-604 (1979) (Sov. Astr. Lett. 5-323 (1979))
- Mikhailovskii A. B.: Fiz. Plazmy 6-613 (1980) (Sov. J. Plasma Phys. 6-336 (1980))
- Mikhailovskii A. B.: Plasma Phys. 24-1 (1982)
- Mikhailovskii A. B., Onishchenko O. G. & Smolyakov A. I.: Pis'ma Astr. J. 11-190 (1985a) (Sov. Astr. Lett. 11-78 (1985a))
- Mikhailovskii A. B., Onishchenko O. G. & Smolyakov A. I.: Fiz. Plazmy 11-369 (1985b) (Sov. J. Plasma Phys. 11-215 (1985b))
- Mikhailovskii A. B., Onishchenko O. G., Suramlishvili G. I. & Sharapov S. E.: Pis'ma Astr. J. 8-685 (1982) (Sov. Astr. Lett. 8-369 (1982))
- Mikhailovskii A. B., Onishchenko O. G. & Tatarinov E. G.: Plasma Phys. Contr. Fus. 27-527 (1985a) et 539 (1985b)
- Mikhailovskii A. B. & Rukhadze A. A.: J.T.P. 35-2143 (1965) (Sov. Phys. Tech. Phys. 10-1644 (1966))
- Mima K. & Nishikawa K.: in "Handbook of Plasma Physics" Vol. 2, ed. Rosenbluth M. N. & Sagdeev R. Z., North Holland Publ. (1984)
- Nayfeh A. H.: "Perturbation methods", Wiley (1973)
- Nicholson D. R.: "Introduction to plasma theory", Wiley (1983)
- Ochelkov Yu. P. & Usov V. V.: Nature 309-332 (1984)
- Onishchenko O. G.: Pis'ma Astr. J. 7-49 (1981a) (Sov. Astr. Lett. 7-28 (1981a))

Narayan R., Vivekanand M. = Astr. Ap. (22-45 (83)).

- Pines D.: "High energy phenomena around collapsed stars", Pacini F. ed. p. 193 (87)
- Onishchenko O. G.: Pis'ma Astr. J. 7-731 (1981b) (Sov. Astr. Lett. 7-404 (1981b))
- Ostriker J. P. & Gunn J. E.: Ap. J. 157-1395 (1969)
- Pacini F.: Nature 216-567 (1967)
- Pataraya A. D. & Melikidze G. I.: Ap. Sp. Sci. 68-61 (1980)
- Pravdo S. H., Bussard R. W., Becker R. H., Boldt E. A., Holt S. S. & Serlemitsos P. J.: Ap. J. 225-988 (1978)
- Pravdo S. H., White N. E., Boldt E. A., Holt S. S., Serlemitsos P. J., Swank J. H., Szymkowiak A. E., Tuohy I. & Garmire G.: Ap. J. 231-912 (1979)
- Radhakrishnan V. & Cooke D. J.: Ap. Lett. 3-225 (1969)
- Rickett B. J., Hankins T. H. & Cordes J. M.: Ap. J. 201-425 (1975)
- Rome J. A. & Briggs R. J.: Phys. Fluids 15-796 (1972)
- Ruderman M. A.: Phys. Rev. Lett. 27-1306 (1971) - Ap. J. 203-213 (76) - *High energy phenomena around collapsed stars* Pacini F. ed., p. 115 (87)
- Ruderman M. A.: Proceedings of the I.A.U. Symposium N° 95 "Pulsars", ed. Sieber W. et Wielebinski R., D. Reidel Publ. (1981)
- Ruderman M. A. & Sutherland P. G.: Ap. J. 196-51 (1975)
- Rylov Yu. A.: Ap. Sp. Sci. 75-423 (1981)
- Sagdeev R. Z. & Shafranov V. D.: J.E.T.P. 39-181 (1960) (Sov. Phys. J.E.T.P. 12-130 (1961))
- Sakai J. & Kawata T.: J. Phys. Soc. Jpn 49-747 (1980a) et 753 (1980b)
- Scharlemann E. T., Arons J. & Fawley W. M.: Ap. J. 222-297 (1978)
- Scharlemann E. T. & Wagoner R. V.: Ap. J. 182-951 (1973)
- Seward F. D., Harnden Jr F. R. & Helfand D. J.: Ap. J. (Letters) 287-L19 (1984)
- Shapiro V. D. & Shevchenko V. J.: J.E.T.P. 54-1187 (1968) (Sov. Phys. JETP 27-635 (1968))
- Shklovskii I. S.: Astron. Zh. 30-15 (1953)
- Shklovskii I. S.: Ap. J. (Letters) 159-L77 (1970)
- Shklovskii I. S.: Astron. Zh. 54-655 (1977) (Sov. Astr. 21-371 (1977))
- Silin V. P.: J.E.T.P. 38-1577 (1960) (Sov. Phys. J.E.T.P. 11-1136 (1960))
- Silin V. P. & Rukhadze A. A.: "Elektromagnitnye svoistva plazmy i plazmapodobnykh sred", Atomizdat (1961)
- Smith D. F.: Ap. J. 247-279 (1981)
- Smith F. G.: Nature 223-934 (1969)
- Smith F. G.: "Pulsars", Cambridge Univ. Press (1977) at MNRAS 219-723 (86).
- Stinebring D. & Cordes J. M.: Ap. J. 249-704 (1981)
- Sturrock P. A.: Ap. J. 164-529 (1971)
- Sutherland P. G.: Fund. Cosmic Phys. 4-95 (1979)
- Suvorov E. V. & Chugunov Yu. V.: Ap. Sp. Sci. 23-189 (1973)
- Tademaru E.: Ap. J. 183-625 (1973)
- Taylor J. H. & Stinebring D. R.: Ann. Rev. Astr. Ap. 24-285 (1986)
- Stoxes G. H., Taylor J. H., Lowrey R. J.: Ap. J. 204-L21 (85).

- ter Haar D.: Phys. Rep. 3C N^o 2 "Pulsars" (1972)
- ter Haar D. & Tsytovich V. N.: Phys. Rep. 73-175 (1981)
- Trumper J., Pietsch W., Reppin C., Voges W., Staubert R. & Kendziorra E.: Ap. J. (Letters) 219-L105 (1978)
- Tsytovich V. N.: Fiz. Plazmy 6-1105 (1980) (Sov. J. Plasma Phys. 6-608 (1980))
- Tsytovich V. N., Buckee J. W. & ter Haar D.: Phys. Lett. 32 A-471 (1970)
- Tsytovich V. N. & Kaplan S. A.: Astrofizika 8-441 (1972) (Astrophysics 8-260 (1974))
- Tsytovich V. N. & Wharton C. B.: Comm. Plasma Phys. Contr. Fus. 4-91 (1978)
- van der Klis M., Jansen F., van Paradijs J., Lewin W. H. G., van der Heuvel E. P. J., Trumper J. E. & Sztajno M.: Nature 316-225 (1985)
- Verga A. D. & Fontan C. F.: Phys. Lett. 101 A-494 (1984a)
- Verga A. D. & Fontan C. F.: Phys. Lett. 106 A-281 (1984b)
- Verga A. D. & Fontan C. F.: Plasma Phys. Contr. Fus. 27-19 (1985)
- Voges W., Pietsch W., Reppin C., Trumper J., Kendziorra E. & Staubert R.: Ap. J. 263-803 (1982)
- Volokitin A. S., Krasnosel'skikh V. V. & Machabeli G. Z.: Fiz. Plazmy 11-531 (1985) (Sov. J. Plasma Phys. 11-310 (1985))
- Weisberg J. M. & Taylor J. H.: Phys. Rev. Lett. 52-1348 (1984)
- Wheaton W. A., Doty J. P., Primini E. A., Cooke B. A., Dobson C. A., Goldman A., Hecht M., Hoffman J. A., Howe S. K., Sheepmaker A., Tsiang E. Y., Lewin W. H. G., Matteson J. L., Gruber D. E., Baity W. A., Rothschild R., Knight F. K., Nolan P. & Peterson L. E.: Nature 282-240 (1979)
- Whitham G. B.: "Linear and nonlinear waves", Wiley (1974)
- Zakharov V. E.: J.E.T.P. 62-1745 (1972) (Sov. Phys. J.E.T.P. 35-908 (1972))
- Zakharov V. E., Kuznetsov E. A. & Rubenchik A. M.: Preprint Inst. Avt. Elec. Novosibirsk (1983)
- Zwicky F.: Ap. J. 88-522 (1938)
- Weckes T.C.: Phys. Rep. 160-1 (88)