



HAL
open science

Modélisation micromécanique et simulation numérique du fluage des bétons avec prise en compte de l'endommagement et des effets thermo-hydriques

Minh Quan Thai

► **To cite this version:**

Minh Quan Thai. Modélisation micromécanique et simulation numérique du fluage des bétons avec prise en compte de l'endommagement et des effets thermo-hydriques. Autre. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT : 2012PEST1162 . tel-00788439

HAL Id: tel-00788439

<https://theses.hal.science/tel-00788439v1>

Submitted on 14 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE PARIS-EST
ECOLE DOCTORALE**

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST

Discipline : Génie Civil

Présentée par

Minh Quan THAI

Titre

**Modélisation micromécanique et simulation numérique du fluage des bétons
avec prise en compte de l'endommagement et des effets thermo-hydriques**

soutenue le 10 décembre 2012
devant le jury composé de

Frédéric RAGUENEAU	Rapporteur
Jian-Fu SHAO	Rapporteur
Xavier BOURBON	Examineur
Ahmed LOUKILI	Examineur
Benoît BARY	Co-directeur de thèse
Qi-Chang HE	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, Je remercie profondément Monsieur Qi-Chang HE, Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée et Monsieur Benoît BARY, HDR/Ingénieur au CEA-Saclay d'avoir encadré et assuré la direction de ce travail de recherche tout au long de ces trois années. Ils ont dirigé cette thèse avec énormément de patience et beaucoup d'enthousiasme. Pour cela, je leur en suis infiniment reconnaissant. Les mots ne peuvent exprimer toute ma gratitude. Je les remercie du fond du cœur.

Je voudrais remercier Monsieur Ahmed LOUKILI pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury. Je tiens également à remercier Monsieur Frédéric RAGUENEAU et Monsieur Jian-Fu SHAO qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je remercie également Monsieur Xavier BOURBON d'avoir accepté de participer à ce jury et pour l'ensemble de ses conseils pertinents.

Je voudrais adresser mes remerciements à toutes les personnes du laboratoire de MSME de l'UPEMLV et du laboratoire de LECBA du CEA-Saclay. Je conserverai de nos échanges amicaux et scientifiques des souvenirs inoubliables.

Je remercie tous mes amis qui m'ont offert leur soutien infaillible et qui ont toujours été disponibles dans les moments difficiles et heureux. Puissent ces remerciements faire honneur à leur dévouement.

Enfin, je tiens à remercier de tout mon cœur, mes parents, ma femme et ma grande famille pour leur soutien indéfectible tout au long de mes études.

TABLE DES MATIERES

RESUME.....	9
ABSTRACT	10
TABLE DES FIGURES.....	11
TABLE DES TABLEAUX	16
NOTATIONS.....	17
1. INTRODUCTION GENERALE	19
2. DESCRIPTION DU FLUAGE DES BETONS ET DES FACTEURS INFLUENTS	22
2.1. INTRODUCTION.....	22
2.1.1. <i>Le matériau béton</i>	22
2.1.2. <i>Généralités sur le fluage</i>	24
2.2. LE FLUAGE PROPRE ET LE FLUAGE DE DESSICCATION	27
2.2.1. <i>Fluage propre</i>	27
2.2.2. <i>Fluage de dessiccation</i>	31
2.3. COUPLAGE ENTRE FLUAGE ET FISSURATION	35
2.4. EFFET DE LA TEMPERATURE ET DE L’HUMIDITE RELATIVE.....	39
2.4.1. <i>Effet de la température</i>	39
2.4.2. <i>Effet de l’humidité relative</i>	43
2.5. CONCLUSIONS	45
3. MODELISATION MICROMECHANIQUE	47
3.1. METHODOLOGIE DE LA MICROMECHANIQUE EN ELASTICITE LINEAIRE	47
3.1.1. <i>Contraintes et déformations macroscopiques</i>	47
3.1.2. <i>Localisation</i>	49
3.1.2.1. <i>Condition aux limites homogène en contraintes</i>	49
3.1.2.2. <i>Condition aux limites homogène en déformations</i>	49
3.1.3. <i>Homogénéisation</i>	50
3.1.3.1. <i>Approche directe</i>	50
3.1.3.2. <i>Approche énergétique</i>	50

3.1.3.3.	Approche basée sur l'estimation par phase	51
3.1.3.4.	Le problème d'inclusion d'Eshelby	52
3.1.3.5.	Schéma dilué d'Eshelby	53
3.1.3.6.	Schéma auto-cohérent classique.....	54
3.1.3.7.	Schéma Mori-Tanaka	54
3.2.	MATERIAUX VISCOELASTIQUES ET PRINCIPE DE CORRESPONDANCE.....	55
3.2.1.	<i>Comportement viscoélastique linéaire</i>	55
3.2.1.1.	Fonction de fluage	55
3.2.1.2.	Fonction de relaxation	55
3.2.1.3.	Comportement viscoélastique tridimensionnel	56
3.2.1.4.	Matériau non-vieillissant.....	57
3.2.1.5.	Matériau isotrope.....	57
3.2.2.	<i>Transformée de Laplace-Carson et principe de correspondance</i>	58
3.2.2.1.	Transformée de Laplace-Carson	58
3.2.2.2.	Principe de correspondance.....	58
3.2.3.	<i>Schémas rhéologiques</i>	58
3.2.3.1.	Modèle de Maxwell.....	59
3.2.3.2.	Modèle de Kelvin-Voigt.....	59
3.2.3.3.	Modèle de Maxwell généralisé	60
3.2.3.4.	Modèle de Kelvin-Voigt généralisé	60
3.3.	PROBLEMES VISCOELASTIQUES MICROMECHANIQUES	61
3.3.1.	<i>Problèmes d'une sphère composite soumise à une sollicitation isotrope</i>	61
3.3.1.1.	Problème élastique	62
3.3.1.2.	Problème viscoélastique	65
3.3.1.3.	Module de compressibilité	67
3.3.1.4.	Module de cisaillement estimé par le schéma de Mori-Tanaka	70
3.3.2.	<i>Application de l'approche micromécanique pour les matériaux cimentaires</i>	71
3.3.2.1.	Modèle micromécanique viscoélastique	71
3.3.2.2.	Modèle macroscopique viscoélastique pour la pâte de ciment	71
3.3.2.3.	Modèle macroscopique viscoélastique pour les bétons.....	73

3.3.2.4.	Coefficient de Biot des matériaux viscoélastiques.....	74
3.3.3.	<i>Etude de la forme de l'inclusion</i>	76
3.3.3.1.	Inclusion de disque.....	76
3.3.3.2.	Inclusions sphéroïdales	79
3.4.	CONCLUSIONS	81
4.	MODELISATION PHENOMENOLOGIQUE DU VISCO-ENDOMMAGEMENT DES BETONS.....	83
4.1.	COUPLAGE VISCOELASTICITE-ENDOMMAGEMENT	83
4.1.1.	<i>Modèle de visco-endommagement</i>	83
4.1.2.	<i>Equations constitutives en 1D</i>	86
4.1.3.	<i>Equations constitutives en 3D</i>	87
4.2.	APPLICATION DU MODELE DE VISCO-ENDOMMAGEMENT AUX ESSAIS DE PARROTT [68]	89
4.2.1.	<i>Mise en œuvre du modèle de visco-endommagement</i>	91
4.2.2.	<i>Etude paramétrique</i>	98
4.2.3.	<i>Etude des évolutions de l'endommagement</i>	104
4.3.	CONCLUSIONS	111
5.	PRISE EN COMPTE DE EFFETS DES THERMO-HYDRIQUES.....	113
5.1.	PRISE EN COMPTE DE LA TEMPERATURE	113
5.1.1.	<i>Modélisation du visco-endommagement des bétons avec températures variables..</i>	113
5.1.2.	<i>Simulation des essais de Ladaoui [80]</i>	115
5.1.3.	<i>Simulation des essais de fluage à différentes températures d'Arthanari et Yu [88]</i>	120
5.1.4.	<i>Température variable dans le temps</i>	124
5.1.4.1.	Approximation constante de la température dans l'intervalle de temps	124
5.1.4.2.	Approximation linéaire de la température.....	125
5.1.4.3.	Illustration	126
5.2.	EFFET DE L'HUMIDITE RELATIVE	129

5.2.1. <i>Introduction de la méthode du temps équivalent</i>	130
5.2.2. <i>Application et validation du modèle</i>	131
5.3. CONCLUSIONS	140
6. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	142
REFERENCES	145
ANNEXES	151
ANNEXE I. INCLUSION SPHERIQUE	151
ANNEXE II. INCLUSION DE DISQUE	157
ANNEXE III. INCLUSION SPHEROÏDALE	159
ANNEXE IV. RESOLUTION DE L'EQUATION 4EME DEGRE.....	163
ANNEXE V. DECOMPOSITION EN FRACTION IRREDUCTIBLE	165
ANNEXE VI. ÉTABLISSEMENT DES FORMULES DE PSEUDO-DEFORMATION.....	167
ANNEXE VII. METHODE DE NEWTON-RAPHSON.....	170
ANNEXE VIII. SCHEMA ITERATIF DE RESOLUTION.....	171
ANNEXE IX. PARAMETRES DU BETON CEM I DE LADAoui	172

RESUME

Le béton est un matériau hétérogène complexe dont les déformations comportent une partie différée qui est affectée par un grand nombre de facteurs tels que la température, l'humidité relative et l'évolution de la microstructure. La prise en compte des déformations différées et en particulier du fluage est indispensable dans le calcul des ouvrages en béton tels que ceux destinés à stocker des déchets radioactifs. Ce travail de thèse a pour objectifs : (1) de développer un modèle de fluage simple et robuste pour le béton en faisant appel à la micromécanique et en tenant compte de l'endommagement et des effets thermiques et hydriques ; (2) d'implanter numériquement le modèle développé dans un code de calcul par éléments finis de façon à pouvoir simuler le comportement d'éléments de structure simples en béton. Pour atteindre ce double objectif, le travail est scindé en trois parties. Dans la première partie, le matériau cimentaire est à l'échelle microscopique supposé être constituée d'une matrice viscoélastique linéaire caractérisée par un modèle de Maxwell généralisé et de phases particulières représentant les granulats élastiques et les pores. Le schéma micromécanique de Mori-Tanaka, la transformée de Laplace-Carson et son inversion sont alors utilisés pour obtenir dans l'espace temporel des estimations analytiques ou numériques de ses paramètres mécaniques et hydromécaniques. Ensuite, le modèle micromécanique de fluage obtenu est couplé au modèle d'endommagement de Mazars via le concept de pseudo-déformations introduit par Schapery. Les paramètres intervenant dans le modèle viscoélastique endommageable ainsi établi sont systématiquement identifiés à l'aide de données expérimentales. Enfin, la prise en compte des effets de la température et de l'humidité relative dans le modèle viscoélastique endommageable est basée sur la méthode du temps équivalent ; l'efficacité de cette approche est démontrée et discutée dans le cas de chargements simples de fluage.

ABSTRACT

Concrete is a complex heterogeneous material whose deformations include a delayed part that is affected by a number of factors such as temperature, relative humidity and microstructure evolution. Taking into account differed deformations and in particular creep is essential in the computation of concrete structures such as those dedicated to radioactive waste storage. The present work aims: (1) at elaborating a simple and robust model of creep for concrete by using micromechanics and accounting for the effects of damage, temperature and relative humidity; (2) at numerically implementing the creep model developed in a finite element code so as to simulate the behavior of simple structural elements in concrete. To achieve this twofold objective, the present work is partitioned into three parts. In the first part the cement-based material at the microscopic scale is taken to consist of a linear viscoelastic matrix characterized by a generalized Maxwell model and of particulate phases representing elastic aggregates and pores. The Mori-Tanaka micromechanical scheme, the Laplace-Carson transform and its inversion are then used to obtain analytical or numerical estimates for the mechanical and hydromechanical parameters of the material. Next, the original micromechanical model of creep is coupled to the damage model of Mazars through the concept of pseudo-deformations introduced by Schapery. The parameters involved in the creep-damage model thus established are systematically identified using available experimental data. Finally, the effects of temperature and relative humidity are accounted for in the creep-damage model by using the equivalent time method; the efficiency of this approach is demonstrated and discussed in the case of simple creep tests.

TABLE DES FIGURES

Figure 1 : Illustration du principe d'un stockage profond de type MA-VL (www.andra.fr)... 19	19
Figure 2 : Image MEB d'une pâte de ciment CEM I 52.5, $e/c=0.43$ [2]..... 23	23
Figure 3: Essai uniaxial de fluage 25	25
Figure 4: Décomposition des déformations de fluage propre proposée par Guénot-Delahaie [29]. 28	28
Figure 5: Influence de l'âge de chargement [32]. 28	28
Figure 6: Mécanismes du fluage propre à court terme [34]. 29	29
Figure 7: Mécanismes du fluage propre à long terme [34]. 30	30
Figure 8: Déformations de fluage propre sphériques en fonction des contraintes sphériques [35]. 31	31
Figure 9: Déformations de fluage propre déviatoriques en fonction des contraintes déviatoriques [35]. 31	31
Figure 10: Identification expérimentale des composantes de fluage dans le cas d'un fluage avec dessiccation. 32	32
Figure 11: Influence de l'humidité relative sur la déformation de fluage[36]. 32	32
Figure 12: Influence de l'humidité relative sur la déformation de fluage selon [36]..... 33	33
Figure 13: Evolution de la déformation de fluage en fonction du temps, sous charge modérée (1) et sous charge intense (2) pouvant conduire à la rupture par fluage tertiaire [40]. 36	36
Figure 14: Modèle rhéologique de Burger modifié [51]. 38	38
Figure 15: Déformation de fluage d'un béton soumis à différentes températures [60]. 40	40
Figure 16: Modèle rhéologique proposé par Hauggaard et al. [60]. 42	42
Figure 17: Déformation de fluage propre en fonction du temps pour différentes conditions de pré-séchage d'un béton [68]. 43	43
Figure 18: Volume élémentaire représentatif (VER). 47	47
Figure 19: Schéma d'homogénéisation pour la condition aux limites homogène en déformation 51	51
Figure 20: Schéma d'homogénéisation pour la condition aux limites homogène en contraintes 51	51
Figure 21: Equivalence entre le problème d'une inclusion ellipsoïdale et celui d'une hétérogénéité ellipsoïdale. 53	53
Figure 22: Schéma dilué en déformation homogène au contour..... 53	53
Figure 23: Schéma auto-cohérent avec les déformations homogènes..... 54	54
Figure 24: Schéma Mori-Tanaka avec les déformations homogènes 54	54
Figure 25: Expérience de fluage uni-dimensionnel..... 55	55

Figure 26: Expérience de relaxation uni-dimensionnel.....	56
Figure 27: Modèle de Maxwell	59
Figure 28: Modèle de Kelvin-Voigt	59
Figure 30: Modèle de Kelvin-Voigt généralisé.....	60
Figure 31: Sphère composites (2D-3D).	61
Figure 32: Modèle de Maxwell généralisé à $N+1$ branches.....	65
Figure 33: VER d'un milieu poreux.	74
Figure 34: Coefficient de Biot pour les différentes valeurs de la fraction volumique c	76
Figure 35: Matériau composite; Inclusion de disque.	76
Figure 36: Influence de la forme des inclusions sur les modules de compressibilité effectif (à gauche) et de cisaillement effectif (à droite).	79
Figure 37: Matériau composite à inclusions sphéroïdales (2D et 3D).	79
Figure 38: Evolution des modules effectifs pour les différentes valeurs de β	80
Figure 39: Approximation des déformations linéaire.	86
Figure 40: Dimensions de l'éprouvette de pâte de ciment.	89
Figure 41: Evolution des déformations longitudinales et transversales d'une pâte de ciment [68].	90
Figure 42: Evolution du coefficient de Poisson obtenu à partir des résultats expérimentaux de [68].	91
Figure 43: Evolution de la variable d'endommagement (gauche) et réponse contrainte-déformation pour un chargement de compression uniaxial (droite) pour plusieurs valeurs de A_c, B_c	92
Figure 44: Représentation de la pâte de ciment (gauche) et modèle de Maxwell à 3 branches (droite).	92
Figure 45: Valeurs de l'erreur globale S pour différentes valeurs de τ_I^m en abscisse.	96
Figure 46: Résultats expérimentaux de [68] (symboles) et résultats numériques (traits pleins) correspondant aux déformations de fluage longitudinales (test 1) et transversales (test 2).	97
Figure 47: Evolution de l'endommagement.	97
Figure 48: Influence du nombre de branches du modèle de Maxwell généralisé sur les déformations de fluage longitudinales (gauche) et transversales (droite).	98
Figure 49: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.	99
Figure 50: Evolution du module de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite), en Pa.	100
Figure 51: Evolution des pseudo-déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.	100

Figure 52: Evolution de la variable d'endommagement pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.	101
Figure 53: Evolution du coefficient de Poisson pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.	101
Figure 54: Evolution du coefficient de Biot.....	102
Figure 55: Evolution de la variable d'endommagement pour différentes valeurs de A_c et B_c .	103
Figure 56: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes valeurs de A_c et B_c	103
Figure 57: Evolution de l'endommagement pour différentes configurations.....	104
Figure 58: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes configurations.....	104
Figure 59: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes contraintes de fluage.	105
Figure 60: Evolution de l'endommagement pour différentes contraintes de fluage.....	105
Figure 61: Evolution des pseudo-déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes contraintes de fluage.	105
Figure 62: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour des contraintes de fluage élevées.	107
Figure 63: Evolution de l'endommagement pour des contraintes de fluage élevées.....	107
Figure 64: Evolution des pseudo-déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour des contraintes de fluage élevées.	107
Figure 65: Déformation maximale longitudinale (gauche) et transversale (droite) en fonction de la contrainte de fluage.	108
Figure 66: Pseudo-déformation maximale longitudinale (gauche) et transversale (droite) en fonction de la contrainte de fluage.	109
Figure 67: Variable d'endommagement maximale en fonction de la contrainte de fluage. ..	109
Figure 68: Temps de chargement conduisant à la rupture de l'éprouvette en fonction de la contrainte de fluage.	109
Figure 70 : Déformations expérimentales (symboles, [80]) et numériques (courbes) longitudinales et transversales de fluage propre à 20° et à 50°C.	117
Figure 71 : Pseudo-déformations longitudinales et transversales de fluage propre à 20° et à 50°C.....	118
Figure 72 : Evolutions de la variable d'endommagement à 20° et 50°C.....	118
Figure 73 : Evolutions des modules de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) à 20° et 50°C.....	119

Figure 74: Déformations de fluage propre numériques (courbes) et expérimentales (symboles [80]) à 20°C, 50°C et 80°C.	120
Figure 75 : Déformations expérimentales (symboles, [88]) et numériques (courbes) longitudinales et transversales de fluage propre à différentes températures.	121
Figure 76 : Pseudo-déformations longitudinales (droite) et transversales (gauche) de fluage propre à différentes températures.	122
Figure 77 : Evolutions de la variable d'endommagement à différentes températures.	122
Figure 78 : Evolutions des modules de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) à différentes températures.	123
Figure 79 : Evolutions du coefficient de Poisson à différentes températures.	123
Figure 80 : Evolutions du coefficient de Biot à différentes températures.	123
Figure 81: Approximation constante de la température par morceaux.	124
Figure 82: Approximation linéaire par morceaux de la température.	125
Figure 83 : Approximation numérique du calcul intégrale par la méthode de Simpson.	126
Figure 84 : Comparaison des résultats entre les approximations constante et linéaire par paliers dans le cas d'une variation de température linéaire de 20°C à 80°C.	127
Figure 85 : Evolutions de t_e dans le cas d'une variation de température linéaire de 20°C à 80°C.	127
Figure 86 : Evolutions des déformations de fluage (gauche) et du temps équivalent t_e (droite) dans le cas d'une montée en température linéaire de 20°C à 80°C.	128
Figure 87 : Evolutions des pseudo-déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) dans le cas d'une montée en température linéaire de 20°C à 80°C.	128
Figure 88 : Evolutions de la variable d'endommagement dans le cas d'une montée en température linéaire de 20°C à 80°C.	129
Figure 89 : Evolutions du module de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) dans le cas d'une montée en température linéaire de 20°C à 80°C.	129
Figure 90: Eprouvette cylindrique utilisée pour les essais de Roelfstra [90].	131
Figure 91: Evolutions estimées du coefficient de Poisson.	132
Figure 92: Evolutions numériques (courbes) des déformations longitudinales et transversales à différentes humidités relatives ; comparaison avec les résultats expérimentaux (symboles) de Roelfstra [90].	134
Figure 93: Evolutions des pseudo-déformations longitudinales et transversales à différentes humidités relatives.	135
Figure 94: Evolutions de la variable d'endommagement à différentes humidités relatives. .	135
Figure 95: Evolution du module de compressibilité pour différents valeurs de l'humidité relative.	136

Figure 96: Evolution du coefficient de Biot pour différents valeurs de l'humidité relative...	136
Figure 97: Evolution des déformations d'une pâte de ciment pour différents valeurs de la fraction volumique des pores	137
Figure 98: Evolution des déformations longitudinales et transversales d'une pâte de ciment pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.	137
Figure 99: Evolution du module de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.	138
Figure 100: Evolution du coefficient de Biot pour différentes valeurs de la fraction volumique de pores.	138
Figure 101: Evolution des déformations d'une pâte de ciment dans le cas d'un séchage puis d'un test de fluage, pour des humidités relatives de 81 et 44%.	139
Figure 102: Evolution des déformations de retrait d'une pâte de ciment, pour des humidités relatives de 81 et 44%.	140
Figure 103: Schéma itératif de calcul.....	171

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Valeurs des propriétés mécaniques du béton CEM I à 20°C	75
Tableau 2 : Valeurs des paramètres pour le modèle de Maxwell généralisé à 3 branches.	75
Tableau 3 : Valeurs des paramètres macroscopiques.....	76
Tableau 4 : Valeurs des paramètres pour les inclusions.....	78
Tableau 5 : Valeurs des paramètres pour le modèle de Maxwell généralisé à 3 branches.	78
Tableau 6 : Caractéristiques de la pâte de ciment à 20°C [68].	91
Tableau 7 : Valeurs des paramètres A_c et B_c	92
Tableau 8 : Valeurs des paramètres microscopiques pour le modèle de Maxwell généralisé à 3 branches.....	96
Tableau 9 : Valeurs des paramètres macroscopiques pour le modèle de fluage.....	96
Tableau 10 : Caractéristiques du béton à l'âge de chargement (CEM I) [80].....	116
Tableau 11 : Caractéristiques des granulats.	116
Tableau 12 : Valeurs des paramètres microscopiques pour le modèle de Maxwell généralisé à 4 branches à 20°C.....	116
Tableau 13 : Valeurs des paramètres macroscopiques du modèle de fluage à 20°C.	117
Tableau 14 : Propriétés du béton et déformations de fluage propre à 50°C [80].....	117
Tableau 15 : Valeurs des données du béton d'Arthanari et Yu [88] à 20°C et 100% d'humidité relative.....	120
Tableau 16 : Valeurs des paramètres microscopiques pour les modèles de Maxwell généralisés à 4 branches à 20°C.	121
Tableau 17 : Valeurs des paramètres macroscopiques du modèle de fluage à 20°C.	121
Tableau 18 : Valeurs des données de la pâte de ciment à 20°C et h=100%.....	132
Tableau 19 : Valeurs des paramètres microscopiques pour le modèle de Maxwell généralisé à 5 branches.....	133
Tableau 20 : Valeurs des paramètres macroscopiques pour le modèle de Maxwell généralisé à 5 branches.....	134
Tableau 21 : Formulation des bétons non fibrés (CEM I).....	172
Tableau 22 : Masse volumique (kg/m^3).	172
Tableau 23 : Fraction volumique.	172

NOTATIONS

Notations tensorielles

a	Scalaire,	.	Produit contracté d'ordre un,
\mathbf{a}	Vecteur,	:	Produit contracté d'ordre deux,
\mathbf{A}	Tenseur d'ordres deux,	\otimes	Produit tensoriel,
\mathbf{I}	Tenseur identité d'ordre deux,	\oplus	Convolution de Stieltjes,
\mathbf{I}	Tenseur identité d'ordre quatre,	δ_{ij}	Symbole de Kronecker,

Paramètres matériels

E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson
μ	Module de cisaillement
k	Module de compressibilité
b	Coefficient de Biot
E_i	Raideur du ressort i
η_i	Viscosité de l'amortisseur visqueux i
τ_i	Temps caractéristique i
D_c	Variable d'endommagement
ε_d	Seuil d'endommagement
$\tilde{\varepsilon}$	Déformation équivalente
$A_{t,c}, B_{t,c}$	Paramètre des matériaux dans le cas de traction ou compression

Autres notations

\mathbf{u}	Champ de déplacement
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes
$\boldsymbol{\varepsilon}^R$	Tenseur des pseudo-déformations
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R$	Pseudo-déformation équivalente
Q	Energie d'activation
T	Température
h	Humidité relative
R	Constante des gaz parfaits $R = 8.32 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
M_v	Masse molaire de l'eau $M_v = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
p_c	Pression capillaire
t_e	Temps équivalent
t	Temps
s	Variable de Laplace-Carson
tr	Trace
sph	Sphérique
dev	Déviateur

1. INTRODUCTION GENERALE

Le travail présenté dans cette thèse est issu d'une collaboration entre l'ANDRA (Agence Nationale pour la gestion des Déchets Radioactifs), le CEA/LECBA (Laboratoire d'Étude du Comportement des Bétons et des Argiles) et le MSME (Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Echelle) de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée. La mission de l'ANDRA est de mettre en place des solutions de gestion à court, moyen et long terme des déchets radioactifs produits en France afin de préserver les générations actuelles et futures, et leur environnement, des nuisances potentielles de ces déchets. Afin de garantir la sécurité des installations de déchets radioactifs, l'ANDRA étudie la possibilité de réaliser des ouvrages en béton dans des sites géologiques situés à des profondeurs de l'ordre de 500 m pour stocker une partie de ces déchets. Les déchets considérés pour ce type de stockage sont dénommés de Haute Activité (HA, provenant essentiellement du traitement des combustibles utilisés dans les centrales nucléaires) et de Moyenne Activité à Vie Longue (MA-VL, constitués en grande partie de débris métalliques issus de gaines, coques et embouts de combustibles cisailés).

Pour le cas des déchets MA-VL, les ouvrages envisagés sont des alvéoles de stockage horizontales d'une longueur de l'ordre de 250 mètres et d'un diamètre extérieur d'environ 10 mètres (voir la Figure 1), dont la structure de soutènement et le revêtement sont en béton. Du fait de leur construction en site profond, ces structures seront soumises à l'action des roches de type argilite environnantes (notamment leur poids propre) et à celles des nappes phréatiques présentes dans ces roches ; elles subiront par ailleurs un échauffement dû à l'exothermie des déchets, qui diminue au cours du temps. Pour ce dernier aspect, les élévations de température seront astreintes à rester modérées, et dans tous les cas les températures maximales atteintes au début de la période de stockage ne devront pas excéder la valeur limite imposée de 80°C. Le travail présenté dans ce mémoire se place dans ce contexte.

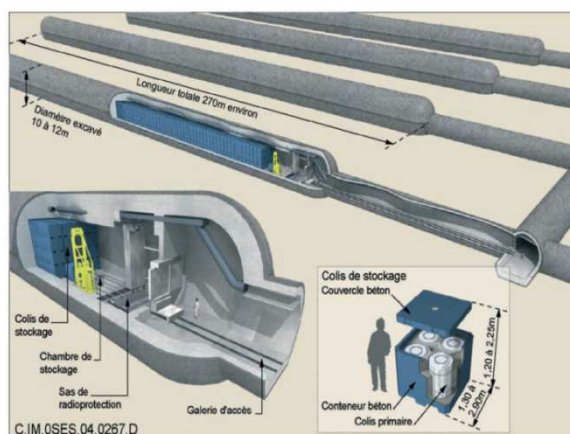


Figure 1 : Illustration du principe d'un stockage profond de type MA-VL (www.andra.fr).

La connaissance du comportement du matériau béton est donc un point essentiel pour l'évaluation de la sûreté de ces structures, qui doivent rester stables et assurer le confinement des radionucléides en fonctionnement normal et éventuellement accidentel, sous différents types de chargements et d'agressions internes et externes. En particulier, la compréhension approfondie du comportement du béton à long terme est indispensable pour une bonne estimation de leur durée de vie. Le béton est un matériau hétérogène complexe dont les déformations différées sont affectées par un grand nombre de facteurs tels que la fissuration, la température, l'humidité relative et l'évolution de sa microstructure sous l'effet notamment de dégradations physico-chimiques. Dans le calcul des structures en béton, la prise en compte des effets dus aux déformations différées du matériau, en particulier dus au fluage, est un aspect essentiel. Ces déformations différées (retrait et fluage), sous l'effet du chargement mécanique et des variations d'humidité relative (et éventuellement de température), génèrent dans le temps des évolutions et redistributions de contraintes et déformations dans le matériau. Celles-ci peuvent alors entraîner des déplacements de tout ou partie de la structure incompatibles avec son fonctionnement, et engendrer progressivement des niveaux de contraintes tels qu'ils provoquent à plus ou moins longue échéance une fissuration du matériau.

L'objectif général du travail est dans un premier temps de développer un modèle simple capable de décrire l'évolution des déformations du béton dans le temps dû au phénomène de fluage, tout en prenant en compte l'effet des microfissures ainsi que celui de la température et de l'humidité relative. Dans un second temps, il consiste à implanter numériquement le modèle développé dans un code de calcul par éléments finis de façon à pouvoir simuler le comportement d'éléments de structure simples. Les hypothèses principales retenues pour cette étude sont les suivantes. Tout d'abord, rappelons que les températures considérées sont modérées et n'excèdent pas 80°C. Ensuite, compte tenu du type de chargement mécanique dû principalement à l'action des roches environnant les structures de stockage, nous nous concentrerons sur l'effet des contraintes de compression sur les déformations de fluage, et ne considérerons pas l'effet des contraintes de traction, qui nécessite une étude spécifique du fait de leur particularité. Enfin, nous nous placerons dans le cas où le matériau est totalement hydraté et où sa microstructure n'évolue plus. Ainsi, nous tenons compte du fait d'une part qu'en pratique le chargement mécanique principal dû à l'action des roches s'applique après un temps suffisamment long pour pouvoir considérer que l'hydratation du béton est achevée. D'autre part, nous ignorons les éventuels effets de dégradations physico-chimiques dues notamment au contact des nappes phréatiques et à la migration d'espèces ioniques entre le matériau béton et les roches environnantes (carbonatation, lixiviation, attaques sulfatiques,...).

Ce mémoire comporte, outre ce premier chapitre introductif, 4 parties principales. Dans le deuxième chapitre, nous effectuons une brève étude bibliographique du phénomène de fluage des bétons et passons en revue ses principales caractéristiques. Les aspects concernant la

fissuration et les effets de la température et de l'humidité relative sont également analysés. Dans le chapitre 3, nous présentons un modèle original de fluage basé sur l'utilisation de méthodes analytiques de changement d'échelle dans l'espace transformé de Laplace-Carson. Ce modèle permet d'obtenir dans l'espace temporel des estimations en fonction du temps des paramètres mécaniques et hydromécaniques des matériaux cimentaires constitués d'une matrice viscoélastique linéaire et de phases particulières représentant les granulats élastiques et les pores, et ainsi de reproduire les déformations différées de fluage. Il est ensuite couplé dans le chapitre 4 à un modèle d'endommagement isotrope via une approche utilisant le concept de pseudo-déformations. Celui-ci permet d'écrire le problème viscoélastique initial sous la forme d'un problème élastique équivalent. Dans le chapitre 5, les effets de la température et de l'humidité relative sont par la suite introduits dans le modèle à l'aide de la méthode du temps équivalent. Enfin, le modèle final est appliqué à la simulation de cas tests simples d'éprouvettes de pâtes de ciment et de bétons soumises à un chargement de fluage sous diverses conditions de température et d'humidité relative. Les réponses obtenues sont analysées et comparées aux résultats expérimentaux disponibles. Ce mémoire se termine par les conclusions et perspectives présentées dans le chapitre 6.

2. DESCRIPTION DU FLUAGE DES BETONS ET DES FACTEURS INFLUENTS

Dans ce chapitre, nous abordons la problématique des déformations différées du matériau béton, et plus précisément du fluage. Nous rappelons que dans la mesure où on retient dans cette étude l'hypothèse que le matériau est mature (voir chapitre 1), les effets liés à l'hydratation et au comportement au jeune âge ne seront pas évoqués, bien que leur importance sur le comportement différé soit connue et qu'ils aient fait l'objet de nombreux travaux. Comme également déjà mentionné, nous nous concentrons principalement sur le fluage consécutif à des chargements de compression, et ne traitons donc pas spécifiquement le cas particulier du fluage en traction.

Dans un premier temps, les principales caractéristiques du fluage du béton sont décrites. Les différents phénomènes expliquant le comportement dépendant du temps sont ensuite passés en revue, de même que les principales approches permettant de les modéliser. Le couplage avec la fissuration est également abordé, essentiellement du point de vue de la modélisation.

Dans un second temps, dans le contexte de cette étude nous analysons plus en détail les effets de la température et de l'humidité relative sur le fluage des bétons, qui font partie des facteurs ayant le plus grand impact sur ce phénomène.

2.1. Introduction

2.1.1. Le matériau béton

Le béton est un matériau hétérogène qu'on peut représenter de manière schématique par une matrice de pâte de ciment durcie dans laquelle sont enchâssés des granulats de forme et taille diverses et du sable. Notons que la pâte de ciment est à l'origine de l'essentiel des déformations différées (fluage et retrait), les granulats ayant un comportement indépendant en général du temps. Ainsi la connaissance approfondie de la microstructure et du comportement de la pâte de ciment est primordiale pour l'étude du fluage des bétons.

Les pâtes de ciment CEM I, qu'on considérera principalement par la suite du fait de leur utilisation très importante dans les constructions de génie civil, sont composées en majeure partie (environ 50% en volume) de silicates de calcium hydratés ($x\text{CaO}$) $\text{SiO}_2(y\text{H}_2\text{O})$, notés C-S-H dans la suite, avec x et y dépendant du rapport calcium sur silicium C/S, et qui sont en général assimilés à des gels. D'autres phases hydratées sont également présentes, comme la portlandite $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ainsi que des phases sulfatées comme l'ettringite notée $\text{AFt}(6\text{CaO})\text{Al}_2\text{O}_3(3\text{SO}_3)(24\text{H}_2\text{O})$ et le monosulfo-aluminate $\text{AFm}(4\text{CaO})\text{Al}_2\text{O}_3\text{SO}_3(12\text{H}_2\text{O})$. Enfin, on trouve dans les pâtes des résidus anhydres, c'est-à-dire des inclusions constituées de fractions de grains de ciment non hydratés, et surtout des pores qui ont un rôle essentiel sur le comportement différé. Ces pores ont une taille variant de quelques nanomètres (nanopores, situés dans les C-S-H) à quelques centaines de micromètres voire quelques millimètres (pores capillaires), et sont remplis d'un mélange d'eau et d'air. Leur proportion dans la pâte est liée

essentiellement au rapport massique eau sur ciment (e/c). Ainsi, les pâtes de ciment CEM I sont également des matériaux hétérogènes, qu'on peut représenter schématiquement par une matrice de C-S-H dans laquelle sont distribuées des inclusions constituées des autres phases hydratées et des grains de ciment anhydres, et de la porosité connectée (voir par exemple Richardson [1]). A titre d'illustration, la Figure 2 montre l'image MEB d'une pâte de ciment CEM I 52.5 de rapport $e/c = 0.43$ (Béjaoui et al. [2]). Certains auteurs proposent l'existence de 2 types de C-S-H de densité différente, issus d'une hydratation en environnement libre au début du processus (C-S-H de faible densité), puis d'une hydratation en milieu confiné (C-S-H de haute densité) lorsque l'espace restant libre pour les hydrates nouvellement créés devient de plus en plus limité (voir par exemple Jennings [3] puis Tennis et Jennings [4]). Il est à noter que la structure colloïdale des C-S-H a été mise en évidence notamment par Powers dès 1947 [5]. Cependant la description précise de la microstructure et de la morphologie des C-S-H fait encore débat, et il n'existe pas de modèles consensuels. Citons pour exemple les travaux de Jennings [3] et de Nonat [6], qui se basent sur l'existence d'assemblages de globules ou de briques élémentaires.

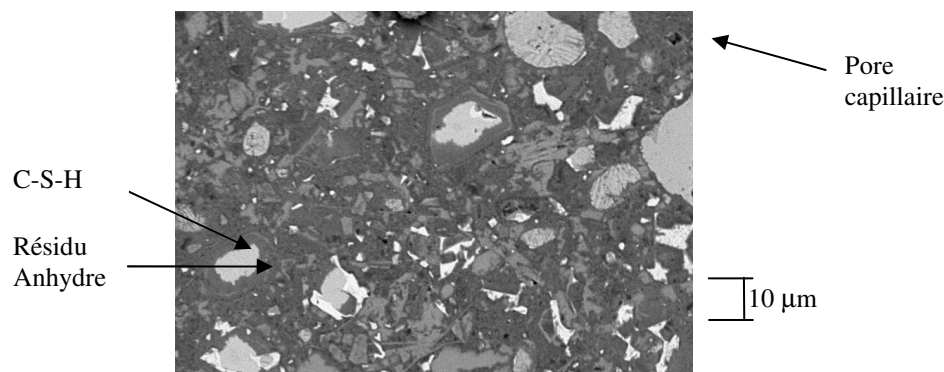


Figure 2 : Micrographie MEB d'une pâte de ciment CEM I 52.5, $e/c=0.43$ [2].

Il est néanmoins assez clairement établi que les C-S-H sont le siège des déformations différées, et que leur comportement dépend intrinsèquement de l'eau contenue dans leurs pores (voir par exemple [7]). Schématiquement, l'eau est présente dans les matériaux cimentaires sous plusieurs formes en fonction de la nature de sa liaison avec les hydrates. On distingue alors l'eau capillaire ou libre correspondant à la fraction d'eau n'ayant pas réagi chimiquement et présente dans les pores capillaires, l'eau adsorbée sur la surface des pores et notamment des C-S-H (qui ont une surface spécifique très grande), et l'eau chimiquement liée. Cette dernière fait partie intégrante des hydrates. En ce qui concerne les C-S-H, l'eau adsorbée est dite interfoliaire (adsorbée entre les feuillettes de C-S-H) ou interlamellaire (adsorbée physiquement à la surface des C-S-H), en fonction de l'énergie de liaison. Il est important de souligner que pour une humidité relative de 100%, le nombre de couches d'eau

adsorbées sur la surface des C-S-H est de 5. Ainsi l'adsorption libre d'eau dans un pore ou entre 2 plans est possible si leurs dimensions sont supérieures à environ 2.5 nm. La distance interfoliaire entre les feuillets de C-S-H étant d'environ 1.7 nm, le phénomène d'adsorption est donc empêché et génère des pressions dites de disjonction. Cette pression joue un rôle important vis-à-vis du gonflement et retrait des C-S-H consécutifs respectivement à l'adsorption (arrivée) et à la désorption (départ) d'eau dues au changement de conditions environnementales. Par extension, ces pressions influent également sur l'ensemble des déformations différées, et donc sur le fluage, bien qu'il soit très difficile de le quantifier.

Pour terminer cette brève description de la microstructure des bétons, il paraît indispensable de mentionner l'existence et le rôle des zones situées à l'interface entre la pâte de ciment et les granulats. Ces interfaces, ou auréoles de transition (Interfacial Transition Zone ou ITZ en anglais), affectent en effet l'ensemble des propriétés physiques du béton, et notamment les propriétés mécaniques (voir par exemple [8, 9]). Elles sont dues à un effet de paroi qui se manifeste par un empilement granulaire différent au voisinage des granulats. De fait, les auréoles de transition entourant les granulats, dont l'épaisseur typique est de l'ordre de 15 à 20 μm [9], ont une porosité nettement plus élevée que la pâte de ciment, et constituent donc une zone de faiblesse du matériau. Cependant leur impact sur le fluage n'a pas à notre connaissance été étudié de façon très précise, si bien qu'il est extrêmement difficile d'évaluer et quantifier leur importance sur ce phénomène. Dans la suite, on considérera donc pour simplifier que leur rôle est pris en compte via le comportement homogénéisé de la pâte de ciment.

2.1.2. Généralités sur le fluage

Le fluage du béton est caractérisé par l'évolution dans le temps des déformations du matériau ou de la structure due à l'application d'un chargement mécanique extérieur par définition constant (Figure 3). Lorsqu'il est soumis à l'action d'une charge modérée de longue durée, le béton se comporte alors comme un matériau viscoélastique. La déformation instantanée élastique qu'il subit au moment de l'application de la charge est en effet suivie d'une déformation dite différée évoluant lentement, et qui aurait tendance à se stabiliser à longue échéance (après quelques années voire quelques dizaines d'années).

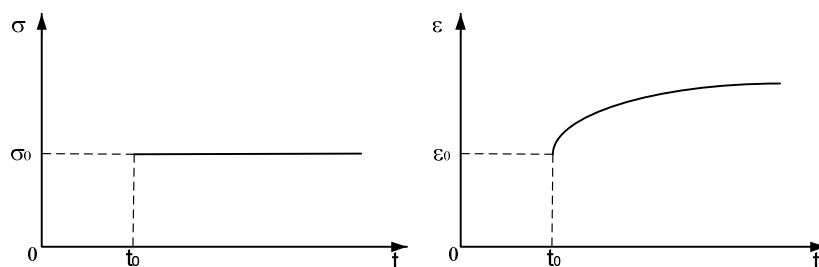


Figure 3: Représentation schématique du résultat d'un essai uniaxial de fluage

Différents mécanismes sont proposés dans la littérature pour expliquer le phénomène de fluage du béton. Ces mécanismes se basent en général sur des descriptions à l'échelle micro voire nanoscopique du comportement des C-S-H. Comme déjà indiqué plus haut, le rôle de l'eau apparaît tout à fait essentiel vis-à-vis des déformations différées. Cependant aucune théorie ne fait pleinement consensus parmi la communauté scientifique. Notamment, alors que la plupart des résultats sembleraient prouver qu'un matériau cimentaire dans lequel l'eau évaporable a été retirée ne flue pas ou très peu [10, 11], certaines études font état de déformations de fluage sensiblement équivalentes pour des pâtes de ciment avec et sans eau évaporable [12]. Il est à noter que les mécanismes de fluage et de retrait sont souvent considérés comme étant une manifestation des mêmes phénomènes se produisant à l'échelle micro-nanoscopique.

Feldman [13] considère que le fluage a pour origine une cristallisation progressive (appelée aussi vieillissement) des feuillettes de C-S-H. Quand une contrainte est appliquée ou sous l'effet du séchage, cette cristallisation a tendance à s'accélérer. Ainsi l'eau serait simplement redistribuée dans l'espace poreux, ce qui entrainerait une densification du squelette solide et donc un fluage apparent irréversible. Ruets [11] quant à lui suggère que le glissement relatif des feuillettes de C-S-H dû aux efforts de cisaillement à l'échelle nanoscopique est la cause principale du fluage. Ce mécanisme de glissement concerne ainsi les couches adsorbées d'eau interfeuillettes. Dans cette approche, l'eau joue alors un rôle essentiel de lubrification des feuillettes de C-S-H. Ruetz considère par ailleurs que cette dernière peut être affectée par le séchage, qui provoque des perturbations dans la structure des couches adsorbées. Dans ce cas la rigidité globale diminue et par conséquent le phénomène de fluage augmente. Ainsi les chargements de compression accentuent le départ de l'eau contenue dans la pâte de ciment, à l'instar de la théorie de la consolidation.

Un peu plus récemment, Bažant et al. [14] ont utilisé une approche également basée sur des mécanismes à l'échelle microscopique pour caractériser le fluage et son couplage avec la dessiccation. Ces phénomènes auraient pour origine un réarrangement progressif (rupture) des liaisons entre surfaces adjacentes de feuillettes d'hydrates lors du glissement des feuillettes de C-S-H, lié à une microdiffusion des molécules d'eau. Le fluage dépendrait alors de l'intensité du

flux d'eau généré par cette microdiffusion entre les macropores et les micro et nanopores du gel de C-S-H. Par ailleurs, la théorie de la solidification proposée par Bažant et Prasanna [15, 16] explique le vieillissement par un dépôt graduel d'hydrates nouvellement créés sur les parois des pores, qui augmentent progressivement la rigidité du matériau. Ces hydrates sont nécessairement libres de contraintes au moment de leur formation. Cette théorie a été associée à celle des micro-précontraintes dans [17, 18], dont l'objectif est de proposer un mécanisme vieillissant non basé sur l'augmentation de volume des constituants solides. Le principe des micro-précontraintes, dont l'origine serait liée aux pressions de disjonction et aux variations volumiques importantes provoquées par l'hydratation ou le séchage, est qu'elles peuvent se relaxer localement en fonction de l'état de contraintes. Elles peuvent alors se reformer dans des zones voisines de moindres surtensions du fait du glissement des feuillettes de C-S-H, et ce sont ces nouveaux sites qui peuvent par la suite devenir le siège potentiel de ruptures.

Enfin, notons que certains travaux avancent l'existence d'un lien fort entre fluage et taux de remplissage de particules élémentaires de taille nanoscopique composant les C-S-H [19]. Ces particules élémentaires formeraient 3 catégories distinctes de même composition mais de densité différente. Le fluage serait alors dû à un réarrangement spatial progressif de ces particules sous l'effet du chargement (glissements inter-particulaires), conduisant à un taux de remplissage plus important dans l'espace.

Du point de vue de la modélisation, les principaux modèles décrivant le fluage (mais aussi la plupart des autres phénomènes) peuvent être classés de manière très générale dans deux grandes catégories : les approches de type macroscopique ou phénoménologique, et les approches microscopiques basées sur une représentation de la microstructure du matériau et prenant en compte directement des mécanismes et propriétés physiques liés aux phases élémentaires le constituant. Certaines de ces approches seront développées plus en détail dans la suite de ce travail. La majorité des modèles entre dans la première catégorie, pour laquelle la ou les variables décrivant les effets du fluage (souvent les déformations) sont en général exprimées directement à l'échelle macroscopique. Il est à noter que bon nombre de modèles macroscopiques sont fondés sur l'utilisation de modèles rhéologiques représentant de manière simplifiée des mécanismes microscopiques censés être à l'origine du fluage (notamment le glissement des feuillettes de C-S-H). Cependant ils ne peuvent prétendre entrer dans la catégorie des modèles micromécaniques car aucune méthode de changement d'échelle n'est appliquée pour obtenir des estimations des propriétés mécaniques. C'est le cas par exemple des modèles développés dans [14, 17, 18, 20-23]. Un des avantages reste cependant la simplicité de leur formulation par rapport aux modèles micromécaniques.

En effet il est bien connu que les méthodes d'homogénéisation analytiques classiques ne sont pas directement applicables aux matériaux ayant un comportement non élastique. Cependant, dans le cas de la viscoélasticité linéaire, l'utilisation des transformées de Laplace-Carson permet d'écrire le problème viscoélastique sous la forme d'un problème élastique équivalent

via le principe de correspondance (voir par exemple [24, 25]). Les méthodes de changement d'échelle peuvent alors être appliquées dans l'espace transformé. Il reste ensuite à effectuer la transformation inverse, c'est à dire de l'espace de Laplace-Carson dans l'espace temps, pour obtenir les paramètres mécaniques homogénéisés opérationnels. Pour cette étape, il n'y a pas en général de solution analytique, et les propriétés recherchées sont dans la plupart des cas obtenues numériquement. Ainsi les approches de type micromécanique sont-elles assez peu développées dans le cas des matériaux visqueux, car les formulations obtenues sont souvent complexes. De plus les bétons sont des matériaux vieillissants pour lesquels le comportement viscoélastique linéaire n'est plus adapté lorsque l'hydratation doit être prise en compte. Il existe cependant des modèles basés sur ces approches donnant des résultats très intéressants, en particulier en termes d'estimation du comportement macroscopique en fonction de la composition et des caractéristiques des matériaux (fraction volumique de granulats, composition du ciment, ...) [26-28].

Dans la suite on reviendra plus en détail sur certaines des approches mentionnées ci-dessus, afin d'illustrer les propos.

2.2. Le fluage propre et le fluage de dessiccation

Par définition, la déformation de fluage est égale à la déformation différée totale sous charge constante diminuée de la déformation de retrait. Il est conventionnellement admis dans la communauté scientifique de décomposer les déformations de fluage en déformations de fluage propre et déformations de fluage de dessiccation, qui proviennent d'après certains auteurs sur des mécanismes physico-chimiques quelque peu différents.

2.2.1. Fluage propre

Les déformations de fluage peuvent se décomposer schématiquement comme indiqué sur la Figure 4, en conditions d'humidité relative homogène dans le matériau. La déformation de fluage propre est conventionnellement définie comme la déformation que l'on peut observer lors d'un essai d'une éprouvette de béton en équilibre hydrique et donc sans échange d'humidité avec le milieu extérieur (en condition endogène), à laquelle il faut retirer la déformation instantanée et la déformation de retrait endogène. Le fluage propre est aussi appelé parfois fluage endogène. Il n'existe pas d'interactions entre les différentes composantes de déformation lors de l'essai de fluage propre.

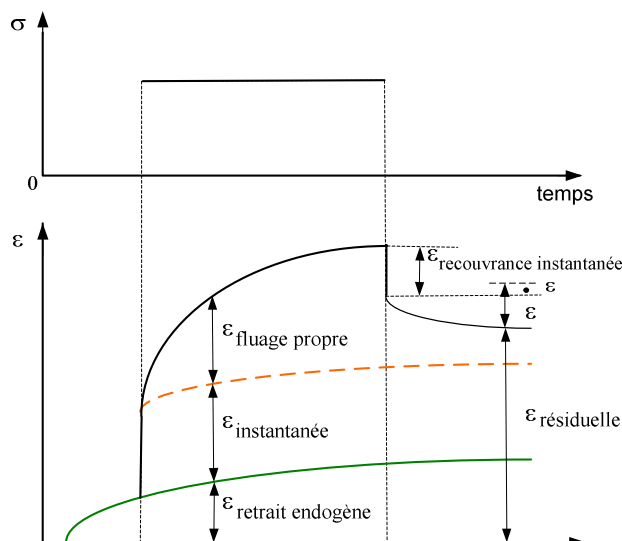


Figure 4: Décomposition des déformations de fluage propre proposée par Guénot-Delahaie [29].

Comme déjà mentionné, il a été observé expérimentalement que le béton présente un comportement viscoélastique vieillissant caractérisé par une forte dépendance vis-à-vis de l'âge du matériau lors du chargement (voir par exemple [15]). Cette dépendance au vieillissement est une caractéristique essentielle du fluage propre. En effet, les propriétés mécaniques du béton (coefficient de Poisson, module d'Young), les paramètres gouvernant le transport de l'eau et le retrait de dessiccation ne dépendent plus significativement de l'âge du matériau après environ 90 jours pour des bétons confectionnés avec du ciment CEM I [29-31].

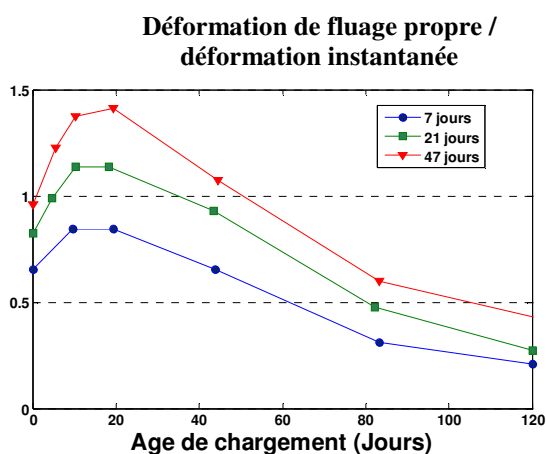


Figure 5: Influence de l'âge de chargement [32].

L'analyse de la cinétique de la déformation de fluage propre pour différents bétons [33] suggère que le fluage propre peut se décomposer en deux types : le fluage à court terme ou

primaire qui se développe rapidement pendant quelques jours après le chargement, puis le fluage à long terme ou secondaire caractérisé par une cinétique plus lente.

Le fluage à court terme est en général associé à une microdiffusion de l'eau capillaire consécutive à l'action du chargement extérieur appliqué [14, 33]. La cinétique du fluage à court terme est par conséquent affectée par le rapport e/c, et donc par la quantité d'eau présente dans les pores capillaires. D'après [33, 34], la microdiffusion est activée par les contraintes générées par les efforts extérieurs. Plus précisément, ces études supposent que les contraintes macroscopiques se transmettent à l'eau à l'échelle micro et nanoscopique par l'intermédiaire des différentes phases solides hydratées (en particulier les C-S-H) composant la pâte de ciment (voir Figure 6). Cette microdiffusion provoque alors un déséquilibre thermodynamique local entre les molécules d'eau situées dans les zones adsorbées et celles situées dans les pores capillaires. Afin de restaurer cet équilibre, les molécules d'eau migrent des couches d'eau adsorbées vers les zones de moindre contrainte, c'est-à-dire les pores capillaires, ce qui se traduit par une déformation macroscopique du squelette solide.

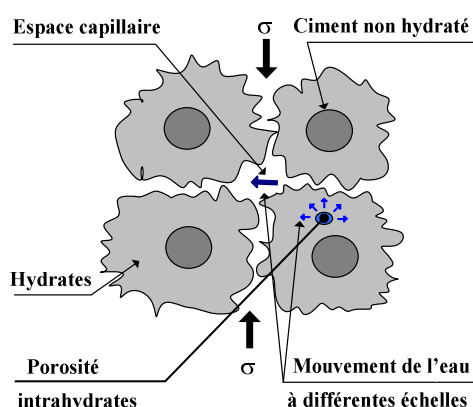


Figure 6: Représentation schématique des mécanismes du fluage propre à court terme [34].

Quant au fluage à long terme, les mécanismes précédents s'avèrent insuffisants pour expliquer pleinement l'effet significatif du vieillissement sur l'amplitude des déformations de fluage propre. D'après Bažant et al. [17] et Ulm et al. [33], dans les zones d'adsorption empêchée situées presque exclusivement dans les C-S-H, les surfaces solides proches sont liées par attraction mutuelle ou par liaisons atomiques ; l'effet du vieillissement observé serait alors une conséquence de la relaxation des micro-précontraintes telles définies au paragraphe précédent. Comme déjà indiqué, la relaxation progressive des micro-précontraintes dans les régions soumises aux plus fortes contraintes conduirait celles-ci à se développer dans des zones de moindres surtensions par suite des glissements des feuillets de C-S-H (Figure 7).

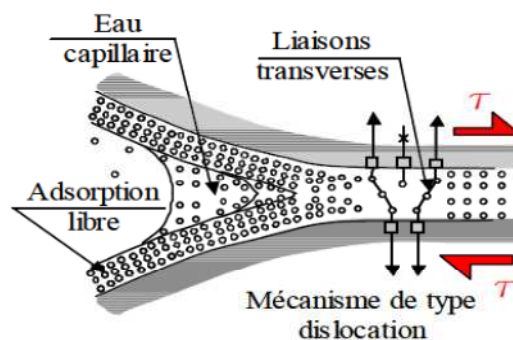


Figure 7: Représentation schématique des mécanismes du fluage propre à long terme [34].

L'approche utilisée par Benboudjema [34] pour modéliser le fluage propre se base à la fois sur les mécanismes de microdiffusion de l'eau adsorbée et de glissement des feuillets de C-S-H dans la nano-porosité. D'après cette approche, la déformation de fluage propre est la somme d'une composante de déformation sphérique et d'une composante de déformation déviatorique. Chacune de ces composantes est associée à des mécanismes différents se produisant à des échelles différentes. Plus précisément, la partie sphérique est associée au mouvement de l'eau physisorbée dans la porosité capillaire. Quant à la partie déviatorique, elle est liée directement au phénomène de glissement des feuillets de C-S-H déjà évoqué ci-dessus, et pour lequel l'eau située dans la nano-porosité joue le rôle de lubrifiant. Concernant ce dernier aspect, on peut arguer que l'application d'une méthode de changement d'échelle classique appliquée à un matériau hétérogène conduit généralement au résultat qu'une modification du module de cisaillement d'un des constituants élémentaires entraîne une modification à la fois des modules de cisaillement et de compressibilité du matériau homogénéisé. Ainsi il paraît peu probable que les glissements des feuillets de C-S-H à l'échelle nanoscopique, qui sont a priori associés exclusivement dans cette approche à une évolution dans le temps du module de cisaillement de cette même phase, ne se répercutent que sur le module de cisaillement macroscopique, et pas également sur le module de compressibilité.

Enfin, il est intéressant de noter que les résultats expérimentaux dans [35] montrent clairement que la déformation sphérique et la déformation déviatorique sont proportionnelles respectivement à la contrainte sphérique et la contrainte déviatorique (Figure 8 et Figure 9), tout au moins pour des niveaux de contraintes modérés.

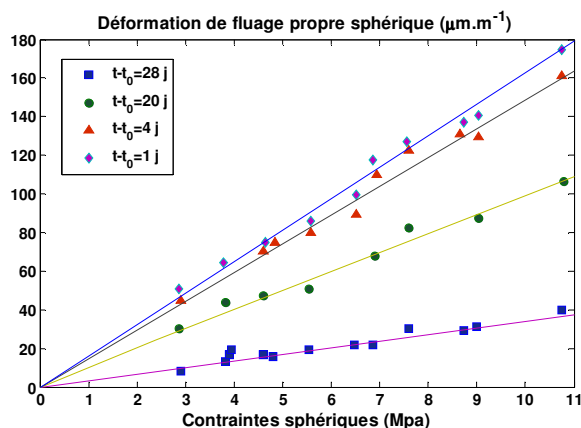


Figure 8: Résultats expérimentaux de déformations de fluage propre sphériques en fonction des contraintes sphériques [35].

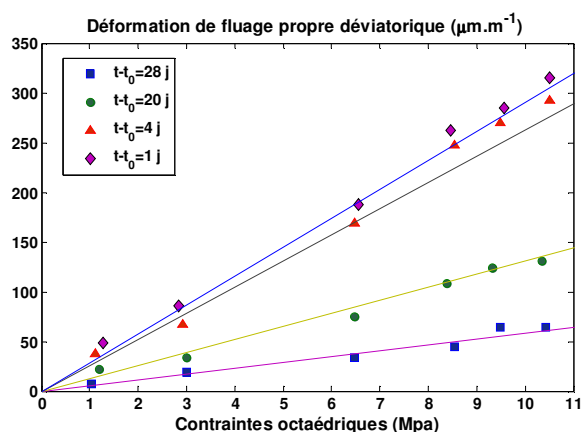


Figure 9: Résultats expérimentaux de déformations de fluage propre déviatoriques en fonction des contraintes déviatoriques [35].

2.2.2. Fluage de dessiccation

Le fluage de dessiccation peut être défini par la déformation différée mesurée sur une éprouvette lorsqu'elle est soumise en même temps à un chargement mécanique et à un séchage, à laquelle il faut retrancher la déformation de fluage propre et celle due au retrait de dessiccation (Figure 10). Ces deux dernières déformations sont alors mesurées indépendamment sur des éprouvettes de même forme et dimensions, et pour des conditions d'humidité relative initiales et environnementales analogues au spécimen testé. Le mécanisme de fluage est dans ce cas affecté par l'évolution progressive et non homogène du degré de saturation dans l'éprouvette due au séchage. Par ailleurs, le mécanisme de retrait est impacté par le chargement mécanique de compression, qui a tendance à limiter le processus de microfissuration. En effet, les déformations d'extension résultant du retrait empêché dans les zones de plus fort séchage situées près des surfaces en contact avec l'environnement, sont

2. Description du fluage des bétons et des facteurs influents

réduites voire annulées par les contraintes de compression générées par le chargement. Par conséquent la part dite structurale du retrait est également affectée.

On mesure alors une déformation différée beaucoup plus importante que celle obtenue en sommant les déformations, mesurées sur des éprouvettes identiques et soumises à des conditions hydriques analogues, de fluage propre et de retrait. Ce phénomène est généralement désigné sous le nom d'effet Pickett (nom du scientifique l'ayant mis en évidence en 1942) dans la littérature (Figure 10).

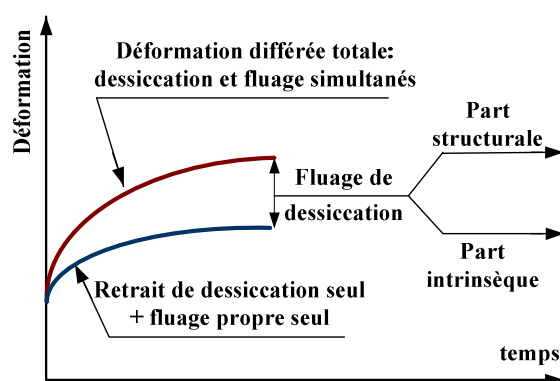


Figure 10: Identification expérimentale des composantes de fluage dans le cas d'un fluage avec dessiccation.

Ainsi l'eau, et plus précisément la quantité d'eau présente dans les pores du matériau (qui est classiquement liée à l'humidité relative via les courbes isothermes de sorption), joue un rôle tout à fait primordial dans le phénomène de fluage de dessiccation. Par ailleurs et plus généralement, les essais montrent que la déformation de fluage total varie significativement avec l'humidité relative externe (Figure 11) [36].

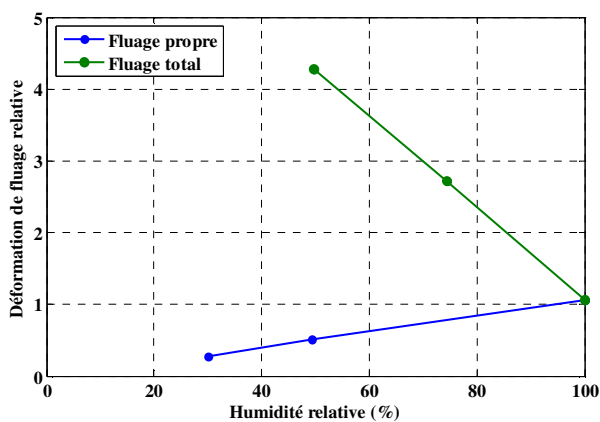


Figure 11: Influence de l'humidité relative sur la déformation de fluage[36].

D'un point de vue phénoménologique, il est communément admis de décomposer le fluage de dessiccation en fluage de dessiccation intrinsèque et fluage de dessiccation structural. Dans cette décomposition, le fluage de dessiccation intrinsèque fait par définition uniquement référence au comportement du matériau, et n'intègre donc aucun effet structural.

Parmi les théories proposées dans la littérature pour expliquer le fluage de dessiccation intrinsèque, celle de Bažant et co-auteurs [14, 17, 18] est une des plus reconnues. Elle repose sur l'hypothèse que le fluage de dessiccation intrinsèque est associé à deux processus de diffusion de l'eau dans les pores: une diffusion microscopique dans les micropores, et une diffusion macroscopique au sein des macropores du matériau (voir la Figure 12). La migration d'eau du matériau vers l'environnement lié à un séchage ou à une réhumidification a lieu essentiellement dans les macropores (macrodiffusion), qui voient donc leur teneur en eau évoluer, ce qui crée un déséquilibre thermodynamique avec les micropores. Il s'ensuit une diffusion dite microscopique entre micro et macropores pour restaurer cet équilibre. Ces mécanismes sont par ailleurs à rapprocher de ceux décrits dans la Figure 6 concernant le fluage propre.

Notons que dans [34], une comparaison entre résultats expérimentaux et simulations numériques a mis en évidence des cinétiques différentes pour les processus de séchage et de fluage de dessiccation intrinsèque. Ainsi, alors que le modèle proposé par Bažant et Chern [14] prédit une déformation identique quelle que soit la cinétique de séchage, Benboudjema [34] propose d'intégrer l'effet de la cinétique de séchage sur la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque. L'idée est de traduire le fait que la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque est plus faible dans le cas d'un séchage plus rapide car le temps de fluage est plus court.

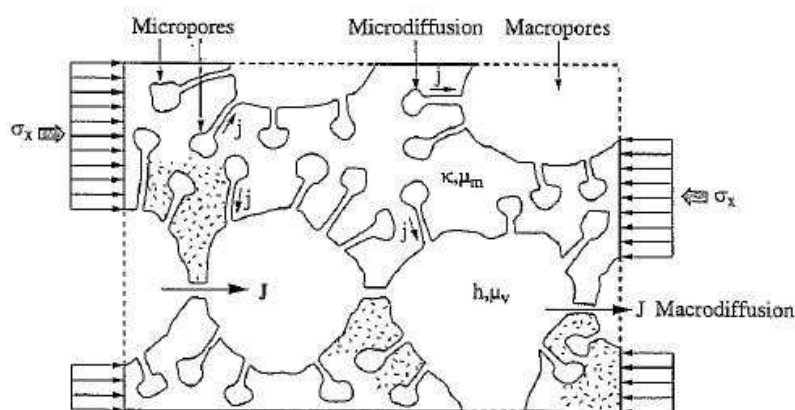


Figure 12: Représentation schématique d'influence de l'humidité relative sur la déformation de fluage selon [36].

Le fluage de dessiccation structural résulte dans une large mesure de la fissuration du béton. En effet, lorsqu'une éprouvette sèche et est soumise simultanément un chargement mécanique

de compression, la fissuration induite du fait du séchage est moins importante que dans le cas où l'éprouvette est non chargée. C'est la raison pour laquelle la déformation mesurée est supérieure à la somme des déformations dues au retrait de dessiccation et au fluage propre. La différence de ces déformations constitue le fluage de dessiccation structural.

Dans ce qui suit nous présentons brièvement quelques approches parmi les plus représentatives de modélisation du fluage de dessiccation. Concernant le fluage de dessiccation intrinsèque, le modèle phénoménologique proposé par Ali et Kesler [37] et Gamble et Parrott [38] est basé sur la loi suivante :

$$\varepsilon_{fd} = \mu_{fd} \varepsilon_{rd} \sigma \quad (1)$$

avec ε_{fd} la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque, ε_{rd} la déformation de retrait de dessiccation, σ la contrainte de compression et μ_{fd} un paramètre (en MPa^{-1}). Ce modèle fait donc l'hypothèse d'une relation de proportionnalité entre la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque et celle de retrait de dessiccation, via un coefficient dépendant des contraintes. Cette expression est étendue au cas du fluage de réhumidification par Gamble et Parrott [38] sous la forme :

$$\varepsilon_{fr} = \mu_{fr} \varepsilon_{go} \sigma \quad (2)$$

où ε_{fr} est la déformation de fluage de réhumidification, ε_{go} est la déformation de gonflement et μ_{fr} est un paramètre (en MPa^{-1}) tel que $\mu_{fr} < \mu_{fd}$.

Bažant et Chern [14] supposent que le fluage de dessiccation provient du retrait induit par des contraintes, et font directement intervenir l'humidité relative. La déformation de fluage de dessiccation est proposée sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{fd} = \lambda_{fd} |\dot{h}| \sigma \quad (3)$$

où λ_{fd} est une constante et h l'humidité relative. Cette équation peut être assimilée à un modèle rhéologique simple faisant intervenir un amortisseur de viscosité η définie comme suit :

$$1/\eta = \lambda_{fd} |\dot{h}| \quad (4)$$

La valeur absolue permet de tenir compte à la fois du fluage lors d'un séchage et d'une réhumidification. L'expression (3) est fréquemment utilisée pour le calcul des déformations de fluage de dessiccation intrinsèque. Elle permet de retrouver la linéarité observée expérimentalement entre la déformation de fluage de dessiccation et de retrait de dessiccation.

Notons que dans l'approche basée sur l'existence de micro-précontraintes [17], les évolutions de ces dernières, notées S , sont également supposées être affectées par l'humidité relative selon l'expression suivante afin de modéliser le fluage de dessiccation :

$$\dot{S} + c_0 S = -c_1 \frac{\dot{h}}{h} \quad (5)$$

où c_0 et c_1 sont 2 constantes.

Enfin, il est intéressant de mentionner une étude récente confirmant sur la base de résultats expérimentaux obtenus sur différents matériaux poreux (papier, matériaux cimentaires, bois) le fait que les mouvements hydriques lors d'un séchage ou d'une imbibition provoqueraient une diminution temporaire de la viscosité intrinsèque et donc une augmentation du 'taux de fluage' de ces matériaux [39]. La raison serait liée aux propriétés de liquéfaction ou fluidisation par cisaillement ('shear thinning') de l'eau lorsqu'elle se trouve sous la forme de couches adsorbées et confinées entre surfaces attractives. Ces explications sont en parfait accord avec les observations concernant le fluage de dessiccation mentionnées ci-dessus.

2.3. Couplage entre fluage et fissuration

Les modèles basés sur la viscoélasticité linéaire ou prenant en compte le vieillissement du matériau béton permettent en général de reproduire de façon satisfaisante le phénomène de fluage primaire observé pour des niveaux de chargement modérés ne dépassant pas environ 30% de la charge limite à rupture f_c (voir par exemple [40]). Lorsque le niveau de chargement augmente, la nature du comportement de fluage change : la vitesse de fluage qui était décroissante (fluage primaire) peut devenir constante (fluage secondaire) et même augmenter (fluage tertiaire), conduisant à terme à la rupture (voir Figure 13). Pour les cas de chargements élevés (plus précisément, dès lors que l'endommagement s'initie sous l'effet du chargement), il est donc clair que le phénomène de fissuration doit impérativement être pris en compte.

Dans la littérature, les modèles couplés fluage-endommagement sont généralement basés sur des approches simplifiées. Dans ce type d'approches, les modèles d'endommagement développés initialement dans un contexte élastique sont 'simplement' étendus au cas viscoélastique en partitionnant les déformations en une partie élastique, une partie associée au fluage (propre et de dessiccation) et éventuellement une partie plastique. L'endommagement agit alors sur la partie des déformations élastiques. C'est le cas par exemple des approches de Mazzotti et Savoia [41], Benboudjema et al. [23, 34], Sellier et al. [22].

Certains auteurs utilisent des approches micromécaniques pour estimer les paramètres mécaniques effectifs du matériau microfissuré dans le cas d'une matrice viscoélastique. Les microfissures sont alors décrites classiquement par des ellipsoïdes aplatis. Ainsi, Nguyen et al. [42] utilisent un modèle de Burger pour définir le comportement viscoélastique linéaire d'un béton, et appliquent le schéma de Mori-Tanaka dans l'espace de Laplace-Carson au matériau hétérogène constitué du béton et des microfissures distribuées aléatoirement pour

obtenir des estimations des paramètres mécaniques du matériau homogène équivalent. Shao et al. [43] quant à eux utilisent une variable d'endommagement anisotrope (tenseur du second ordre) calculée à partir d'une distribution de densité de microfissures orientées. Les effets sur les propriétés macroscopiques sont déterminés à partir de l'écriture de l'enthalpie libre du matériau microfissuré, et les évolutions de cette variable sont postulées à l'échelle macroscopique.

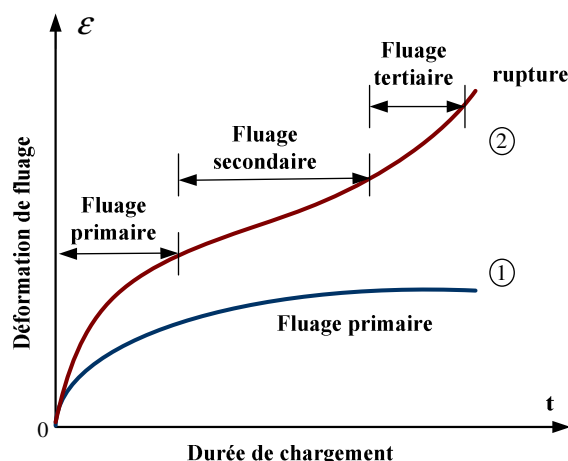


Figure 13: Evolution de la déformation de fluage en fonction du temps, sous charge modérée (1) et sous charge intense (2) pouvant conduire à la rupture par fluage tertiaire [40].

Enfin, d'autres modèles se basent sur des relations relativement simples ne faisant pas intervenir de variables d'endommagement pour reproduire les effets de chargements importants. En général les déformations de fluage sont alors exprimées en fonction des contraintes de compression, comme par exemple dans [44]. Dans cette référence, il est indiqué que pour des niveaux de contraintes en compression inférieures à 40% de la résistance f_c , les déformations de fluage évoluent linéairement en fonction de la contrainte, et que cette dépendance devient non linéaire pour des chargements plus importants. Selon ces auteurs, la contrainte limite entraînant la rupture du béton dans le cas du fluage est de l'ordre de 85% de f_c pour des bétons ordinaires et de 65-70% de f_c pour des bétons hautes performances (BHP).

Nous présentons dans la suite quelques approches basées sur l'utilisation de variables d'endommagement (approche que nous nous proposons également de développer et appliquer dans notre travail aux sections suivantes) pour décrire la fissuration. Mazzotti et Savoia [41] proposent de coupler au modèle viscoélastique de fluage un modèle isotrope d'endommagement, basé sur le concept de déformation équivalente de Mazars [45] pour caractériser l'évolution de la variable d'endommagement D . La déformation équivalente

initialement introduite par Mazars pour contrôler l'évolution de D est cependant modifiée pour prendre en compte une partie des déformations de fluage comme suit :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum \langle \varepsilon_{eff} \rangle_{ii+}^2} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^d + \beta \varepsilon^f \quad (7)$$

où ε^{el} , ε^d et ε^f sont les tenseurs respectivement des déformations élastiques, dues à l'endommagement et de fluage ; β est un coefficient constant de couplage compris entre 0.1 et 0.2. Le symbole $\langle \cdot \rangle_{ii+}$ désigne les crochets de Macaulay définissant classiquement la partie positive de l'argument, ici correspondant à la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du tenseur de déformation ε_{eff} . Les auteurs font donc intervenir les déformations de fluage dans les évolutions de D , pondérées par le coefficient β . Ce dernier est justifié par le fait que pour des niveaux de contraintes faibles l'endommagement doit être affecté de façon limitée par les déformations de fluage, car celles-ci évoluent et deviennent très importantes par rapport aux déformations élastiques. Or dans le cas de contraintes faibles à modérées, il est clairement établi que le comportement du matériau peut être décrit de manière approchée par la viscoélasticité linéaire. Ainsi au travers de β l'évolution de la variable d'endommagement devient dépendante du temps. Par la suite, Torrenti et al. [46], Reviron et al. [47], de Larrard [48] et Briffaut [49] se sont basés sur le concept de déformation équivalente proposé par Mazzotti et Savoia [41] et ont adopté les expressions (6)-(7). Baxevanis et al. [50] ont également appliqué cette idée dans une formulation légèrement différente basée sur les contraintes.

Notons que dans certaines approches les auteurs proposent d'affecter l'endommagement directement sur certains éléments (en général les ressorts) des modèles rhéologiques adoptés pour caractériser le comportement viscoélastique. A titre d'illustration, Papa & Taliercio [51] utilisent un modèle de Burger modifié dans lequel l'endommagement affecte à la fois le ressort et l'amortisseur de la chaîne de Maxwell placée en série avec une chaîne de Kelvin (Figure 14). D'après ces auteurs, la réduction du module élastique du ressort du fait de l'endommagement permet de reproduire la diminution de rigidité consécutive à une augmentation de contraintes, tandis que l'impact de l'endommagement sur le temps caractéristique τ de l'amortisseur permet de décrire le fluage tertiaire. Les évolutions de la variable d'endommagement résultent de 2 contributions : la première est activée uniquement lorsque les contraintes augmentent tandis que la seconde est non nulle lorsque les contraintes sont constantes.

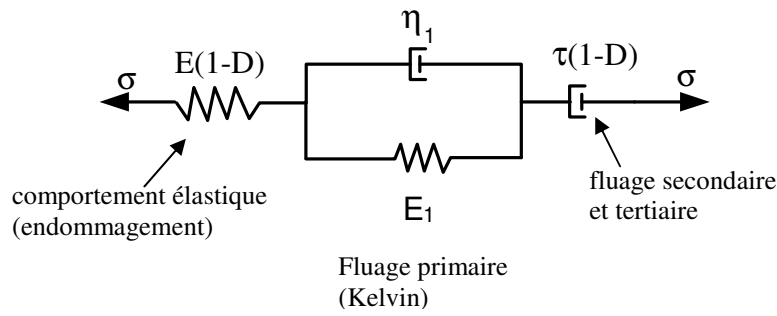


Figure 14: Modèle rhéologique de Burger modifié [51].

D'autres approches font appel à des bases thermodynamiques rigoureuses et peuvent être vues comme une extension de la mécanique de l'endommagement classique au cas d'un comportement dépendant du temps. Challamel et al. [52] s'appuient ainsi sur un potentiel d'énergie libre pour dériver les équations d'état décrivant le comportement macroscopique et sur une fonction de charge pour définir les évolutions de la variable d'endommagement. Dans le cas d'un chargement de fluage de contrainte $\bar{\sigma}$, la loi d'évolution de la variable d'endommagement isotrope D suivante est postulée [52] :

$$\frac{dD}{dt} = \left\langle \frac{\bar{\sigma}}{1-D} - \chi(D) \right\rangle^m \quad (8)$$

où χ est assimilé à une variable d'écrouissage et m est un paramètre. Cette loi permet de faire intervenir un effet dit de vitesse dans l'évolution de l'endommagement, de manière analogue au modèle développé par Dubé et al. [53] dans le contexte de la dynamique. Cet effet 'de vitesse' se traduit par une évolution de D dépendant explicitement du temps. Il est à noter qu'une approche similaire à (8) a été développée dès 1958 par Kachanov (voir la traduction de l'article original en russe dans [54]), et a par la suite été appliquée par de nombreux auteurs pour différents types de matériaux (métaux, composites, asphaltes...), voir par exemple [55, 56].

Enfin, une approche quelque peu différente de modèle de type visco-endommageable a été proposée par Schapery et co-auteurs [57]. Elle est basée sur l'utilisation de pseudo variables qui permettent d'obtenir une formulation élastique équivalente du problème viscoélastique initial, via un principe de correspondance simple reposant sur une substitution de variables [58, 59]. Ce principe de correspondance n'est pas basé sur l'utilisation des transformées de Laplace et est applicable aussi bien pour des comportements viscoélastiques linéaires que non linéaires, et pour des matériaux vieillissants. Schématiquement, dans le cas d'un chargement uniaxial la loi de comportement du matériau peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (9)$$

où σ est la contrainte, ε la déformation, $E(t)$ la fonction de relaxation et t la variable temps réel. A partir de la relation (9), Schapery [58] a introduit le concept suivant de pseudo-déformation :

$$\varepsilon^R = \frac{1}{E_R} \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (10)$$

Notons que cette pseudo-déformation ε^R englobe toute l'histoire des sollicitations à travers l'intégrale figurant dans l'équation (10). En combinant les équations (9) et (10), la loi de comportement du matériau se réécrit sous forme d'une équation formellement élastique :

$$\sigma = E_R \varepsilon^R \quad (11)$$

où E_R est un paramètre appelé module de référence. Dans [57], Schapery et al. couplent cette formulation avec un modèle d'endommagement dont les évolutions dépendent explicitement du temps, et l'appliquent avec succès au cas des bétons bitumineux. Nous reviendrons plus en détail sur cette approche et sur son application au cas des bétons dans les prochains chapitres.

Pour conclure sur cette partie, le couplage entre comportement viscoélastique et fissuration et/ou endommagement des bétons s'avère être un problème complexe qui a été abordé de diverses façons dans la littérature. La plupart des auteurs utilisent des approches simplifiées et proposent des modèles macroscopiques qui peuvent être vus comme une extension au cas de la viscoélasticité des modèles développés initialement pour des comportements indépendants du temps. Il semble par ailleurs justifié et pertinent que les évolutions de la variable ou des variables décrivant la fissuration dépendent elles aussi du temps (effet de vitesse).

2.4. Effet de la température et de l'humidité relative

Le but de cette section est de mettre en évidence les aspects essentiels concernant l'influence de la température et de l'humidité relative sur le fluage du béton. Rappelons que l'étude et la prise en compte de ces paramètres est un des objectifs de ce travail de thèse. Le rôle primordial de l'humidité relative ayant déjà été abordé à plusieurs reprises ci-dessus, on s'attachera dans cette section à développer les aspects principaux de modélisation correspondants.

2.4.1. Effet de la température

De nombreux auteurs ont étudié l'influence de la température sur les déformations différées du béton. Les expériences montrent que la déformation de fluage du béton augmente sensiblement avec la température (Figure 15). D'une manière générale, la connaissance du comportement du béton soumis à des élévations de températures même modérées constitue un aspect important pour un grand nombre d'applications du génie civil, et revêt un caractère primordial pour l'évaluation de la sécurité de certaines constructions. En effet, les élévations

de températures s'accompagnent d'une diminution des propriétés mécaniques (rigidité, résistance, ...) du fait de la fissuration générée par les effets concomitants des contraintes, de la température et des pressions de pores (ces dernières pouvant être significatives dans le cas de températures élevées). D'autre part la pâte de ciment voit sa composition évoluer (dégradation) en fonction de la température du fait des hydrates se décomposant progressivement à partir d'environ 80°C.

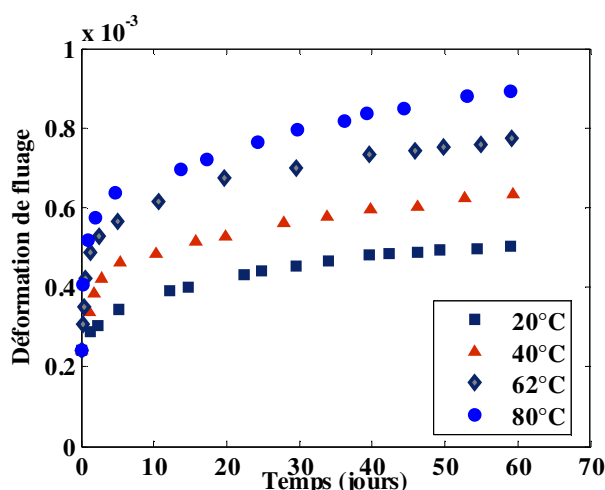


Figure 15: Déformation de fluage d'un béton soumis à différentes températures [60].

Vis-à-vis de la problématique du fluage, on constate qu'une augmentation de température a deux effets principaux antagonistes, faisant intervenir des mécanismes différents [61, 62]. En effet selon ces auteurs l'élévation de température accélère les ruptures entre hydrates et par conséquent le fluage. D'autre part elle active les processus chimiques d'hydratation et donc accélère le vieillissement du matériau. Dans la majorité des cas le premier effet est largement prépondérant. Cependant dans le cas des bétons jeunes pour lesquels les réactions d'hydratation sont d'autant plus rapides que les températures sont élevées, l'effet d'une augmentation de température peut se traduire par une diminution du fluage. Dans notre étude, le béton étant considéré mature, nous supposons que les températures 'élevées' (inférieures à 80°C) ont pour seule conséquence un accroissement des déformations de fluage.

Notons que Bažant et al. [61, 62] ont développé un modèle prenant en compte les deux phénomènes mentionnés ci-dessus ainsi que l'évolution de l'humidité relative dans les pores partiellement saturés. En effet, il est bien connu que l'humidité relative est fortement dépendante de la température ainsi que du taux d'hydratation du matériau. Ces effets sont décrits par deux variables: la première est le temps équivalent t_e et caractérisée degré d'hydratation, et la seconde est le temps réduit t_r reproduisant les effets des changements des taux de rupture et de restauration des C-S-H sur la microstructure. Ces variables sont définies par les expressions suivantes [61, 63] :

$$t_e(t) = \int_0^t \beta(\tau) d\tau, \quad t_r(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau, \quad (12)$$

avec :

$$\beta(t) = \beta_T(t) \beta_h(t), \quad \beta_T(t) = \exp\left\{\frac{Q_h}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T(t)}\right)\right\}, \quad \beta_h(t) = \left\{1 + [a_h - a_h h(t)]^d\right\}^{-1} \quad (13)$$

$$\psi(t) = \psi_T(t) \psi_h(t), \quad \psi_T(t) = \exp\left\{\frac{Q_v}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T(t)}\right)\right\}, \quad \psi_h(t) = \alpha_h + (1 - \alpha_h) h(t)^2 \quad (14)$$

où T est la température, T_0 est la température de référence, h est l'humidité relative, R est la constante des gaz parfaits, Q_h et Q_v sont respectivement l'énergie d'activation pour le processus d'hydratation et celle pour le processus visqueux. Notons que les expressions de $t_e(t)$ et $t_r(t)$ sont semblables et font intervenir un terme de thermo-activation et un terme lié à l'humidité relative. Ces variables temporelles agissent ensuite directement dans les relations définissant le comportement viscoélastique du modèle, c'est-à-dire ici les déformations de fluage, en se substituant au temps. Ainsi toute l'histoire des températures et humidités relatives est englobée dans ces 2 quantités $t_e(t)$ et $t_r(t)$, et la méthode correspondante est appelée méthode du temps équivalent.

Notons que dans le cas de la théorie des micro-précontraintes déjà évoquée ci-dessus, Bažant et al. [61] intègrent également un effet de l'humidité relative interne et de la température sur ces micro-précontraintes S agissant dans les zones d'adsorption empêchée. La loi d'évolution suivante est en effet proposée :

$$\dot{S} + \psi_s c_0 S^2 = -k_l \left(\dot{T} \ln h + T \frac{\dot{h}}{h} \right) \quad (15)$$

avec c_0 , k_l deux constantes et ψ_s un temps réduit. Cette relation est en fait une extension de l'équation (5), et est basée sur l'utilisation de la relation de Kelvin pour décrire les évolutions thermodynamiques des micro-précontraintes.

Certains auteurs ont également abordé la problématique des effets de la température sur le fluage des bétons dans le cas du comportement au jeune âge. En effet on sait que dans ce cas la température joue un rôle essentiel concernant les risques de fissuration pouvant survenir pendant les premières semaines consécutives au coulage, en particulier pour des structures massives [49, 64]. Ainsi Hauggaard et al. [60] ont mis en place un modèle mathématique pour décrire le fluage du béton prenant en compte les effets thermiques transitoires lors de l'hydratation. Les propriétés des matériaux dans le modèle sont supposées dépendre du processus d'hydratation et de l'activation thermique de l'eau dans la microstructure. L'activation thermique est elle-même supposée être régie par le principe d'Arrhenius. D'après ces auteurs et de manière analogue à l'approche précédente de Bažant et al. [61], les changements de températures créent un déséquilibre dans la microstructure et l'état de l'eau, ce qui entraîne une l'évolution des micro-précontraintes. Cette évolution se traduit par une

2. Description du fluage des bétons et des facteurs influents

réduction de la rigidité du béton et une augmentation de la vitesse de fluage. Le modèle est établi avec une température de référence T_0 et est basé sur l'utilisation d'un modèle rhéologique représenté sur la Figure 16. Celui-ci est composé d'un ressort en série avec un modèle de Kelvin et un amortisseur, où E_0, E_1 sont les raideurs, η_1, η_2 sont les viscosités. L'incrément de déformation totale s'exprime sous la forme :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 + \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 \quad (16)$$

où ϵ_0, ϵ_1 et ϵ_2 sont respectivement les déformations du ressort 1, du ressort de Kelvin et de l'amortisseur 2 :

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{\sigma}{E_0(t)}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1^e + \dot{\sigma}_1^v, \quad \dot{\epsilon}_1 = \frac{\sigma_1^v}{\eta_1(t)} = \frac{\sigma_1^e}{E_1(t)} \quad (17)$$

Dans les expressions ci-dessus, σ_1^e et σ_1^v sont les contraintes dans le ressort et l'amortisseur situés dans la branche de Kelvin. Celles-ci peuvent être éliminées du problème simplement et classiquement. L'incrément de contrainte dans l'amortisseur peut en effet s'écrire :

$$\dot{\sigma}_1^e = \frac{\partial[\eta_1 \dot{\epsilon}_1]}{\partial t} = \eta_1 \ddot{\epsilon}_1 + \dot{\eta}_1 \dot{\epsilon}_1. \quad (18)$$

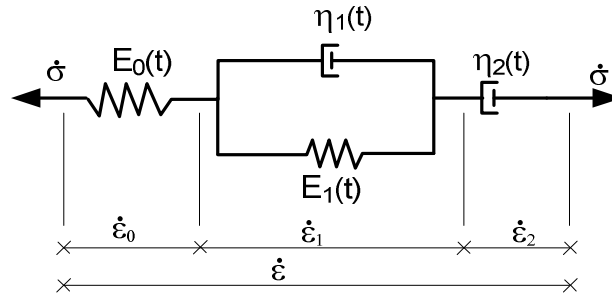


Figure 16: Modèle rhéologique proposé par Hauggaard et al. [60].

A partir des 2 relations précédentes, on peut ainsi établir l'équation suivante dans la branche de Kelvin, permettant de déterminer les évolutions de la déformation ϵ_1 et donc caractériser la réponse macroscopique du modèle :

$$\ddot{\epsilon}_1 + \frac{E_1(t) + \dot{\eta}_1(t)}{\eta_1(t)} \dot{\epsilon}_1 = \frac{\dot{\sigma}}{\eta_1(t)}. \quad (19)$$

L'effet de la température est introduit dans le modèle via l'expression classique d'Arrhenius sous la forme :

$$f = A e^{-U/RT} \quad (20)$$

où A est une constante et U l'énergie d'activation. Cet effet agit à la fois sur l'avancement de la réaction d'hydratation du ciment, et sur la viscosité du béton. A la température courante,

la viscosité des 2 amortisseurs du modèle (Figure 16) est ainsi calculée à partir de la viscosité à la température T_0 suivant la formule :

$$\eta_i(T) = \eta_i(T_0) \frac{f(T_0)}{f(T)} = \eta_i(T_0) e^{-U/R(1/T_0 - 1/T)}. \quad (21)$$

Cette relation décrivant de manière générale les effets liés à une thermo-activation (qu'on retrouve par ailleurs aux équations (13)-(14) s'avère être assez classiquement utilisée pour modéliser avec succès l'influence d'une température modérée sur le phénomène de fluage, comme l'attestent par exemple les travaux de Ladaoui et al. [65].

2.4.2. Effet de l'humidité relative

L'importance de l'humidité relative sur le comportement différé et notamment le fluage des bétons a déjà été mise en évidence ci-dessus à plusieurs reprises. Nous nous concentrons donc dans cette section sur les aspects modélisation et proposons de passer brièvement en revue quelques approches parmi les plus représentatives développées dans la littérature.

Comme déjà indiqué, l'humidité relative est l'un des paramètres externes qui a le plus d'influence sur le fluage [66, 67]. Pour un béton donné, le fluage est d'autant plus important que l'humidité relative est élevée [13, 66] (Figure 17). Rappelons que pour Bažant et Chern [14], deux processus différents de diffusion de l'humidité existent dans le béton : une diffusion macroscopique au sein des macropores du matériau et une diffusion microscopique dans les micropores (voir §2.2.2). La migration d'eau entre les zones d'adsorption empêchée et les pores capillaires dans la pâte de ciment favorise la rupture des liaisons atomiques entre les C-S-H, processus qui est à l'origine de la déformation de fluage de dessiccation. Bažant et Chern [14] considèrent également que l'humidité relative, qui est un des paramètres essentiels contrôlant la pression de disjonction, affecte donc significativement l'amplitude des micro-précontraintes.

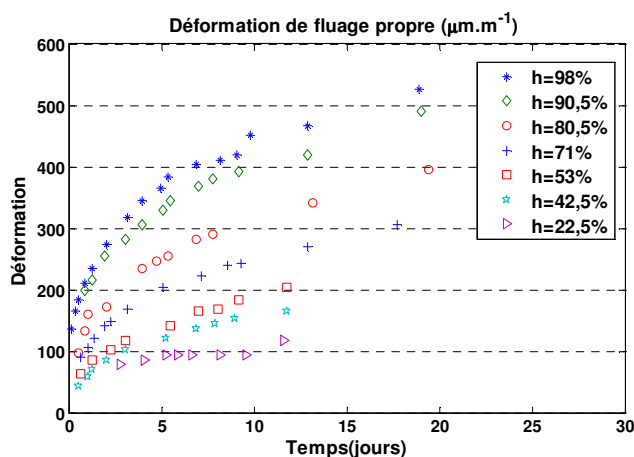


Figure 17: Déformation de fluage propre en fonction du temps pour différentes conditions de pré-séchage d'un béton [68].

Dans la littérature, on peut citer quelques modèles de fluage propre avec prise en compte de l'effet de l'humidité relative. Ainsi, de manière analogue aux expressions (12), l'approche de Granger [69] consiste à remplacer le temps réel par un temps équivalent dans les équations constitutives de son modèle :

$$dt_{eq} = f[h(t)]dt \quad (22)$$

Le temps équivalent t_{eq} est défini par l'intermédiaire d'une fonction f du temps réel t et de l'humidité relative h , de la même façon que dans les expressions (13)-(14) concernant $\beta_h(t)$ et $\psi_h(t)$ introduites par Bažant et al. [61, 62]. Ainsi la méthode du temps équivalent, relativement simple à mettre en œuvre, s'avère assez couramment utilisée dans la littérature. Notons que d'autres approches consistent à faire intervenir l'humidité relative directement dans l'évolution des paramètres mécaniques, comme dans [70] où la complaisance de fluage propre J est multipliée par une fonction isotrope $g(h)$ sous la forme :

$$J(t,h) = g(h)J(t). \quad (23)$$

Concernant le fluage de dessiccation, les modèles proposés dans la littérature font en général intervenir directement l'humidité relative ou ses évolutions dans le calcul des déformations de fluage correspondantes. Ainsi un des modèles les plus cités et qui a inspiré de nombreuses autres approches est celui proposé par Bažant et Chern [14]. Ce modèle a été brièvement décrit au paragraphe 2.2.2 et notamment aux équations (3)- (4). Il stipule que la déformation de fluage de dessiccation évolue simplement en fonction de la contrainte et de l'humidité relative. Par ailleurs il fait l'hypothèse que la réponse à une modification d'humidité relative est purement visqueuse, et que les interactions entre le squelette solide et les mécanismes de microdiffusion d'eau générant des ruptures de liaisons intra et interfeuillet dans les C-S-H sont négligeables.

Benboudjema et al. [23] ont proposé de modifier cette approche en introduisant un modèle rhéologique de Kelvin-Voigt pour spécifier la loi constitutive de la déformation de fluage de dessiccation intrinsèque sous la forme suivante [23] :

$$\eta_{fd} \dot{\epsilon}_{fd} + \theta | \dot{h} | k_{fd} \epsilon_{fd} = \theta | \dot{h} | \sigma \quad (24)$$

où θ est un paramètre du matériau, η_{fd} est la viscosité associée au processus de microdiffusion d'eau, k_{fd} est la rigidité des couches d'eau adsorbées. Ce modèle fait l'hypothèse que le squelette solide interagit avec les couches d'eau adsorbées. Il permet par ailleurs de contrôler à la fois la cinétique et l'amplitude des déformations de fluage de dessiccation en jouant respectivement sur le rapport η_{fd} / k_{fd} et le paramètre k_{fd} . D'autre part, les contraintes et l'humidité relative interviennent explicitement dans la relation (24) et, du fait qu'elles varient en fonction du temps, l'expression de la déformation ϵ_{fd} est obtenue numériquement.

2.5. Conclusions

Le fluage des bétons fait intervenir des mécanismes complexes à l'échelle nanoscopique dans les C-S-H qui ne sont pas encore totalement compris. Le rôle de l'eau apparaît tout à fait primordial, et la température affecte également considérablement le phénomène de fluage. Notons également que l'influence de la microfissuration semble significative à partir de niveaux de contraintes de l'ordre de 30 à 40% de la résistance en compression.

La modélisation de ces phénomènes fortement couplés est extrêmement complexe, et les modèles proposés tentent de les décrire le plus souvent en adoptant des hypothèses simplificatrices permettant de s'affranchir d'un certain nombre de difficultés. La majorité des modèles sont basés sur une approche phénoménologique, et intègrent à l'échelle macroscopique des mécanismes se produisant à des échelles inférieures via des variables internes ou des paramètres dont la signification physique n'est pas toujours clairement ni précisément définie (comme par exemple les micro-précontraintes introduites par Bažant et co-auteurs). De ce point de vue il apparaît intéressant et voire nécessaire de développer un modèle basé sur des méthodes de changement d'échelle, qui soit capable de fournir des estimations des propriétés mécaniques en fonction du temps à partir d'informations caractérisant sans ambiguïté les phases élémentaires constituant le matériau (fractions volumiques, propriétés mécaniques, ...). On a vu cependant que ce type d'approche se heurte à des difficultés importantes dès lors que le comportement de certaines de ces phases dépend du temps car les méthodes classiques d'homogénéisation analytiques ne sont plus directement applicables. Dans le chapitre suivant on propose une méthodologie basée sur l'utilisation des transformées de Laplace-Carson et l'application du schéma de Mori-Tanaka pour obtenir des estimations des paramètres mécaniques et hydromécaniques dans le cas d'un matériau constitué d'une matrice ayant un comportement viscoélastique linéaire et de phases particulières élastiques. Dans les cas les plus simples, des expressions analytiques de ces paramètres sont fournies, ce qui facilite l'implantation numérique du modèle.

Concernant la fissuration et son couplage avec le fluage, les travaux de la littérature montrent l'existence d'interactions d'autant plus fortes que les contraintes sont importantes. D'un point de vue théorique, le couplage fluage - fissuration est difficile à appréhender. Notamment, il semble que les évolutions des variables décrivant la fissuration doivent également intégrer une composante dépendant du temps. Alors que certains modèles ne prennent pas en compte cet aspect, d'autres intègrent de manière simplifiée un effet de vitesse dans l'évolution de ces variables. Cette dépendance permet a priori de décrire plus précisément les phases de fluage secondaire et tertiaire, ainsi que l'influence du taux de chargement. Nous proposons dans la suite d'adopter l'approche de Schapery et co-auteurs [57-59] basée sur le concept de pseudo-déformations et sur l'utilisation d'un principe d'équivalence élastique-viscoélastique associée

2. Description du fluage des bétons et des facteurs influents

au modèle d'endommagement de Mazars pour modéliser le couplage fluage - endommagement. Outre sa simplicité, cette approche permet d'introduire implicitement un effet de vitesse dans la loi d'évolution de la variable scalaire d'endommagement telle que proposée par Mazars, en remplaçant les déformations par les pseudo-déformations. Par ailleurs, elle s'adapte très simplement au modèle de fluage développé dans ce travail et basé sur l'application de méthodes d'homogénéisation.

Une extension de l'approche initiale de Schapery et co-auteurs au cas de chargements couplés thermo-hydro-mécaniques est également proposée et développée. Par analogie aux pseudo-déformations, une pseudo-pression capillaire et une pseudo-température seront alors introduites dans le modèle afin de considérer des variations de degrés de saturation (ou de manière équivalente d'humidité relative) et de températures.

3. MODELISATION MICROMECHANIQUE

Dans ce chapitre, les éléments de base de la micromécanique seront d’abord rappelés dans le cadre de l’élasticité linéaire. Le principe qui établit la correspondance univoque entre l’élasticité linéaire et la viscoélasticité linéaire via la transformée de Laplace-Carson y sera ensuite détaillé. En exploitant ce principe et en utilisant certains résultats simples et bien connus sur les propriétés effectives des matériaux élastiques hétérogènes, nous obtiendrons de nouveaux résultats analytiques sur les propriétés effectives des matériaux viscoélastiques hétérogènes dans l’espace temporel. Ces résultats sont non seulement d’une importance théorique mais aussi d’une importance pratique. En effet, ils peuvent servir de benchmarks pour des méthodes numériques. En même temps, étant suffisamment flexibles du fait qu’un bon nombre de paramètres matériels y interviennent, ils peuvent être utilisés pour modéliser le comportement effectif de certains matériaux viscoélastiques hétérogènes.

3.1. Méthodologie de la micromécanique en élasticité linéaire

La micromécanique a pour objectif principal de prédire ou estimer le comportement mécanique macroscopique d’un matériau hétérogène à partir des connaissances disponibles sur les propriétés de ses constituants et sa microstructure. Nous supposons que le matériau élastique hétérogène en question admet un volume élémentaire représentatif (VER).

3.1.1. Contraintes et déformations macroscopiques

Soit V le domaine d’un espace Euclidien tridimensionnel qu’occupe un VER du matériau hétérogène en question. Ce VER est soumis à des sollicitations sur sa frontière ∂V qui sont en équilibre en absence de forces de volume. Le tenseur des contraintes internes induites doit vérifier les équations d’équilibre :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{25}$$

Nous considérons la moyenne volumique du champ des contraintes internes :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(x) dV. \tag{26}$$

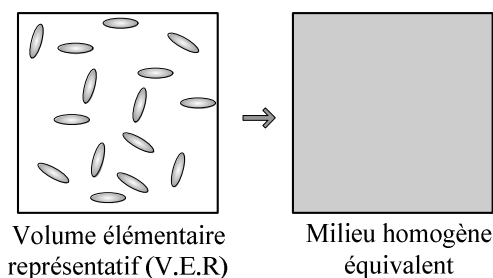


Figure 18: Volume élémentaire représentatif (VER).

La moyenne volumique des contraintes internes vérifiant les équations d'équilibre (25) est reliée au vecteur des contraintes agissant sur la frontière ∂V :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}) \otimes^{\text{sym}} x \, dS = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \langle \boldsymbol{t}^0 \otimes^{\text{sym}} x \rangle \, dS \quad (27)$$

où \boldsymbol{n} est le vecteur unitaire normal à la frontière, \boldsymbol{t}^0 le vecteur des contraintes donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}^0 \quad (28)$$

et \otimes^{sym} le produit tensoriel symétrisé défini par :

$$x \otimes^{\text{sym}} y = \frac{1}{2} (x \otimes y + y \otimes x) \quad (29)$$

pour deux vecteurs x and y quelconques.

Le tenseur des déformations internes $\boldsymbol{\varepsilon}$ induites dans V est lié au vecteur des déplacements induits \boldsymbol{u} par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \otimes \nabla). \quad (30)$$

La moyenne volumique des déformations internes vérifiant cette équation est entièrement déterminée par le vecteur des déplacements agissant sur la frontière ∂V :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \boldsymbol{u} \otimes^{\text{sym}} x \, dS. \quad (31)$$

Par définition, le tenseur des contraintes macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ et le tenseur des déformations macroscopique \boldsymbol{E} sont donnés par

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\Sigma}, \quad (32)$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{E}. \quad (33)$$

Pour un champ des contraintes vérifiant l'équation (25) et un champ des déformations satisfaisant à l'équation (30), nous avons la relation de Hill-Mandel :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (34)$$

Si les conditions aux limites vérifient l'équation :

$$\int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \cdot \boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{u} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \cdot \boldsymbol{x}) \, dS = 0 \quad (35)$$

En tenant compte des définitions (32) et (33), la relation (34) devient

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}(x) \rangle = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E}. \quad (36)$$

3.1.2. Localisation

Pour obtenir les propriétés élastiques effectives d'un matériau hétérogène, il est nécessaire de connaître certaines informations sur les champs des contraintes et des déformations locales associés à des problèmes aux limites. Cette étape correspondant au processus de "Localisation" est fondamentale dans l'obtention des propriétés effectives. En particulier, deux types de conditions aux limites particuliers et simples sont importants.

3.1.2.1. Condition aux limites homogène en contraintes

Sur le bord ∂V du VER V , on prescrit la condition aux limites suivantes :

$$\sigma(x).n(x) = \Sigma.n(x) \quad (37)$$

où Σ est un tenseur symétrique du second ordre constant. Comme le problème aux limites correspondant est linéaire, il existe une relation linéaire entre le tenseur des contraintes microscopique et le tenseur des contraintes macroscopique. Cette relation linéaire peut être caractérisée par le *tenseur de localisation* $B(x)$:

$$\sigma(x) = B(x) : \Sigma \quad (38)$$

où $B(x)$ est un tenseur du quatrième ordre ayant les symétries indicielles suivantes :

$$B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk}. \quad (39)$$

En particulier, la définition (32) implique que B a la propriété

$$\langle B \rangle = \mathbf{1}. \quad (40)$$

Dans cette expression, $\mathbf{1}$ est le tenseur d'identité du quatrième ordre défini par

$$\mathbf{1} = \frac{1}{2}(I \bar{\otimes} I + I \underline{\otimes} I) \quad (41)$$

où I est le tenseur d'identité d'ordre 2 et $\bar{\otimes}$ et $\underline{\otimes}$ sont deux produits tensoriels du type Kronecker (He et Curnier [71]).

3.1.2.2. Condition aux limites homogène en déformations

On utilise également souvent la condition aux limites suivante :

$$u(x) = E.x \quad (42)$$

où $x \in \partial V$ et E est un tenseur symétrique du second ordre constant. La linéarité du problème de localisation nous permet d'écrire

$$\varepsilon(x) = A(x) : E \quad (43)$$

où A est le tenseur de localisation des déformations ayant les symétries indicielles

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}. \quad (44)$$

De même, il est immédiat de la définition (33) que

$$\langle A \rangle = \mathbf{1}. \quad (45)$$

3.1.3. Homogénéisation

L'homogénéisation d'un matériau hétérogène à l'échelle microscopique est le processus de le remplacer par un matériau homogène à l'échelle macroscopique et doté des propriétés dites "effectives". Toutes les difficultés de ce processus se situent dans la phase de localisation où nous devons résoudre des problèmes avec des conditions aux limites.

3.1.3.1. Approche directe

Nous considérons un matériau hétérogène dont la loi de comportement locale est donnée par celle de Hooke :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = c(x) : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = s(x) : \boldsymbol{\sigma} \end{cases} \quad (46)$$

où c est le tenseur de rigidité local et s le tenseur de souplesse local. En introduisant les relations (38) et (43) dans (46), nous obtenons :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = c(x) : \boldsymbol{\varepsilon} = c(x) : A(x) : E, \\ \boldsymbol{\varepsilon} = s(x) : \boldsymbol{\sigma} = s(x) : B(x) : \Sigma. \end{cases} \quad (47)$$

Utilisant (32) et (33), le tenseur de rigidité homogénéisé et le tenseur de souplesse homogénéisé sont fournis par

$$\begin{cases} C^{\text{hom}} = \langle c : A \rangle, \\ S^{\text{hom}} = \langle s : B \rangle. \end{cases} \quad (48)$$

3.1.3.2. Approche énergétique

Quand la relation de Hill-Mandel (34) est satisfaite, on peut montrer que les potentiels élastiques macroscopiques sont égaux aux moyennes respectives des potentiels élastiques microscopiques :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : s(x) : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \Sigma : S^{\text{hom}} : \Sigma, \\ \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : c(x) : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} E : C^{\text{hom}} : E. \end{cases} \quad (49)$$

En particulier, ces relations sont valables quand la condition aux limites homogène en déformations ou contraintes est imposée. En tenant compte des relations (38) et (43), on déduit de (49) que :

$$\begin{cases} S^{\text{hom}} = \langle B^T : s : B \rangle, \\ C^{\text{hom}} = \langle A^T : c : A \rangle. \end{cases} \quad (50)$$

En comparant ces expressions avec celles dans (48), nous avons

$$\begin{cases} \langle B^T : s : B \rangle = \langle s : B \rangle, \\ \langle A^T : c : A \rangle = \langle c : A \rangle. \end{cases} \quad (51)$$

Dans les figures (Figure 19 et Figure 20), nous synthétisons le processus d'homogénéisation suivant que la condition aux limites homogènes en contraintes ou déformations est imposée, notons que :

$$S^{\text{hom}} = (C^{\text{hom}})^{-1}. \quad (52)$$

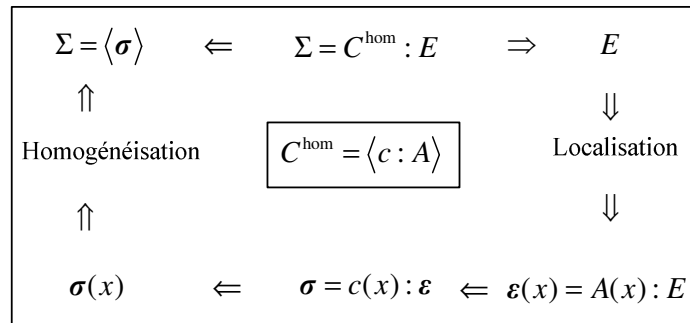


Figure 19: Schéma d'homogénéisation pour la condition aux limites homogène en déformation

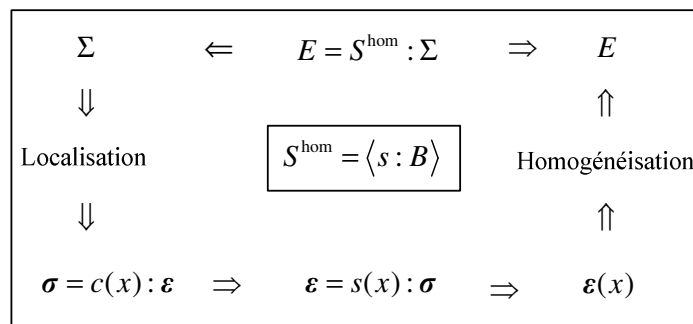


Figure 20: Schéma d'homogénéisation pour la condition aux limites homogène en contraintes

3.1.3.3. Approche basée sur l'estimation par phase

Si un matériau hétérogène est constitué de n phases individuellement homogènes, les formules dans (48) peuvent s'écrire comme suit :

$$S^{\text{hom}} = \sum_{r=1}^n f_r s_r : \langle B(x) \rangle_r$$

$$C^{\text{hom}} = \sum_{r=1}^n f_r c_r : \langle A(x) \rangle_r$$
(53)

où f_r est la fraction volumique de la phase r alors que c_r et s_r sont les tenseurs de rigidité et souplesse de la phase r . Dans ce cas, en tenant compte de (40) et (45), un schéma d'homogénéisation consiste à construire une estimation des moyennes des tenseurs de localisation pour $n-1$ phase :

$$\langle B(x) \rangle_r \approx B_r^{\text{est}},$$

$$\langle A(x) \rangle_r \approx A_r^{\text{est}},$$
(54)

où, par exemple, $r = 2, 3, \dots, n$

Dans certaines situations, un schéma revient finalement à ramener un problème d'hétérogénéité à un problème d'inclusion noyée dans un milieu de référence de propriétés élastiques (C^0, S^0) . L'estimation des moyennes des tenseurs de localisation par phase consiste alors à calculer ces moyennes dans l'inclusion. Les schémas diffèrent souvent par la façon dont le modèle d'inclusion équivalent est construit, par exemple, par le choix du milieu de référence des conditions aux limites équivalentes. Le problème d'inclusions est celui d'un milieu de référence soumis à un champ de polarisation \mathbf{p} agissant dans la partie Ω_I du milieu correspondant à l'inclusion. Le champ de polarisation est calculé par :

$$\mathbf{p} = (C^I - C^0) : \boldsymbol{\varepsilon}.$$

3.1.3.4. Le problème d'inclusion d'Eshelby

Soit une inclusion Ω_I , caractérisée par le tenseur de rigidité C^I , noyée dans un milieu infini de domaine Ω de rigidité C^0 . Pour déterminer le champ des déformations dans Ω (condition de déformation homogène E^0), on remplace ce problème par le problème équivalent correspondant à Ω rendu homogène, de même rigidité que le milieu de référence et soumis à un champ de précontrainte (champs de polarisation) agissant sur Ω_I : $\mathbf{p} = -C^0 : \boldsymbol{\varepsilon}$. Ce problème est appelé celui d'inclusion d'Eshelby [72]. Le champ des déformations d'inclusion est relié au champs des déformations du milieu de référence :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = S^E : E^0$$
(55)

où S^E est le tenseur d'Eshelby d'ordre quatre. Il dépend de la forme de l'inclusion. On peut réécrire la solution d'Eshelby comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = E^0 - P^0 : \mathbf{p}$$
(56)

où P^0 est le tenseur de Hill d'ordre quatre, avec $P^0 = S^E : (C^0)^{-1}$.

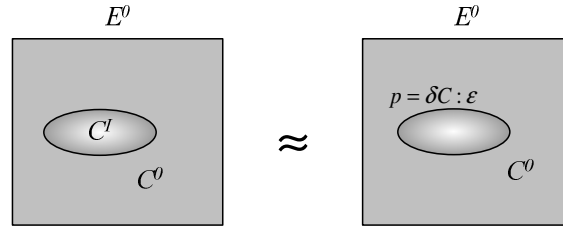


Figure 21: Equivalence entre le problème d'une inclusion ellipsoïdale et celui d'une hétérogénéité ellipsoïdale.

3.1.3.5. Schéma dilué d'Eshelby

On considère un matériau de n familles d'inclusions, de rigidités C^r , dispersées dans une matrice de rigidité $C^m = C^0$. La fraction volumique de chaque phase d'inclusion est suffisamment faible et telle que

$$\sum_{i=1}^n f_i = 1 - f_0 \ll 1 \quad (57)$$

On fait l'hypothèse que la matrice est la phase dominante et qu'il n'y a pas d'interaction entre les inclusions.

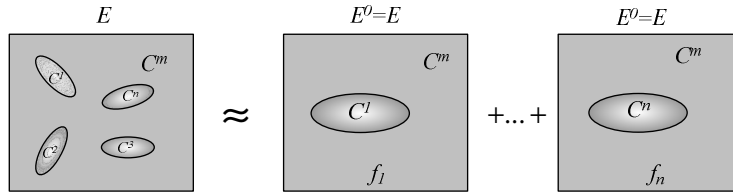


Figure 22: Schéma dilué en déformation homogène au contour

Ainsi, on peut utiliser la méthode de superposition pour obtenir les estimations

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{est}(x) = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^{est} \rangle_i = [I + P^m : (C^i - C^m)]^{-1} : E. \quad (58)$$

On en déduit que :

$$A_i^{est} = [I + P^m : (C^i - C^m)]^{-1} \quad (59)$$

Finalement, le tenseur de rigidité homogénéisé s'obtient sous la forme

$$C^{hom} = C^m + \sum_{i=1}^n f_i (C^i - C^m) : [I + P^m : (C^i - C^m)]^{-1}. \quad (60)$$

3.1.3.6. Schéma auto-cohérent classique

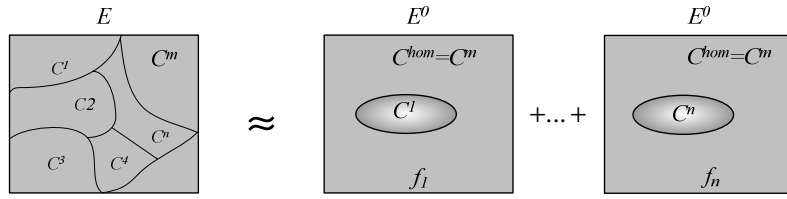


Figure 23: Schéma auto-cohérent avec les déformations homogènes

Dans ce cas, le milieu de référence est identifié au milieu homogénéisé recherché, c'est-à-dire que

$$C^0 = C^{\text{hom}}. \quad (61)$$

Le tenseur de rigidité homogénéisé est caractérisé par une équation non linéaire :

$$C^{\text{hom}} = C^i : \left[I + P^m : (C^i - C^{\text{hom}}) \right]^{-1}. \quad (62)$$

3.1.3.7. Schéma Mori-Tanaka

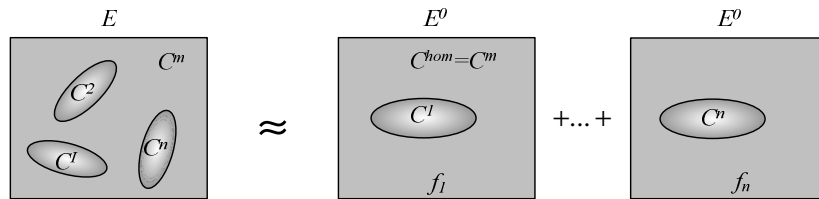


Figure 24: Schéma Mori-Tanaka avec les déformations homogènes

Dans ce cas, le milieu de référence est identifié à la matrice et la phase dominante, c'est-à-dire que :

$$C^0 = C^m. \quad (63)$$

Le tenseur de rigidité homogénéisé est alors donné par :

$$C^{\text{hom}} = \left\langle C^i : \left[I + P^m : (C^i - C^m) \right]^{-1} \right\rangle : \left\langle \left[I + P^m : (C^i - C^m) \right]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (64)$$

Les propriétés effectives sont déterminées :

$$\begin{cases} k_{MT}^{\text{hom}} = \left(k^m + \frac{4}{3} \mu^m \sum_{i=1}^n c_i \frac{k^i - k^m}{k^i + 4/3 \mu^m} \right) \left(I - \sum_{j=1}^n c_j \frac{k^j - k^m}{k^j + 4/3 \mu^m} \right)^{-1} \\ \mu_{MT}^{\text{hom}} = \left(\mu^m + f^m \sum_{i=1}^n c_i \frac{\mu^i - \mu^m}{\mu^i + f^m} \right) \left(I - \sum_{i=1}^n c_i \frac{\mu^i - \mu^m}{\mu^i + f^m} \right)^{-1} \end{cases} \quad (65)$$

$$\text{avec } f^m = \frac{\mu^m (9k^m + 8\mu^m)}{6(k^m + 2\mu^m)}$$

L'indice i indique la phase i . où n est le nombre de phase d'inclusion. c_i sont les fractions volumiques de phase i .

3.2. Matériaux viscoélastiques et principe de correspondance

3.2.1. Comportement viscoélastique linéaire

3.2.1.1. Fonction de fluage

L'essai de fluage est un essai fondamental pour caractériser le comportement d'un matériau viscoélastique. Il correspond à l'application d'un champ des contraintes, qui est illustré dans le cas unidimensionnel par la Figure 25.

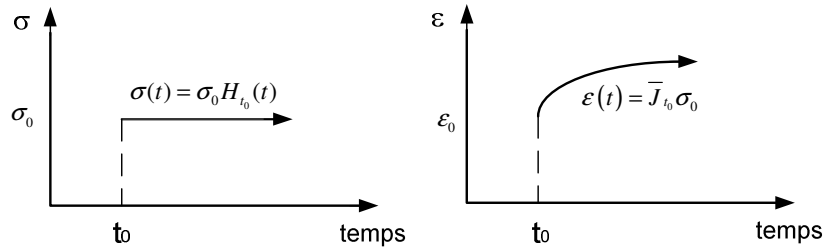


Figure 25: Expérience de fluage uni-dimensionnel

La contrainte uniaxiale varie en fonction du temps comme suit :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) = \sigma_0 H_{t_0}(t) \quad (66)$$

où $H_{t_0}(t)$ est la fonction de Heaviside avec un saut unitaire à l'instant t_0 . La réponse en déformation est décrite par la relation :

$$\varepsilon(t) = J(t_0, t) \sigma_0 = \bar{J}_{t_0} \sigma_0 \quad (67)$$

où \bar{J}_{t_0} est la fonction de fluage.

3.2.1.2. Fonction de relaxation

Dans le cas unidimensionnel, l'expérience de relaxation consiste à imposer une histoire de déformation montrée par la Figure 26 et décrite par :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_0) = \varepsilon_0 H_{t_0}(t) \quad (68)$$

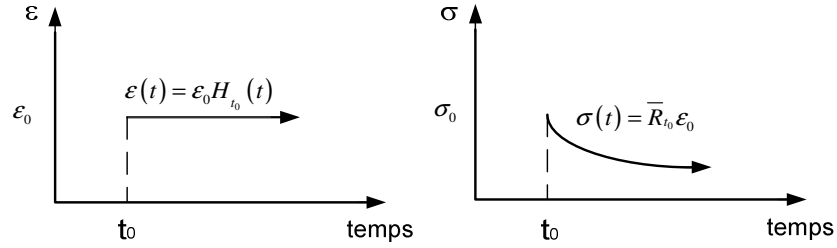


Figure 26: Expérience de relaxation uni-dimensionnel

La réponse en contrainte s'exprime par :

$$\sigma(t) = R(t_0, t)\varepsilon_0 = \bar{R}_{t_0}\varepsilon_0 \quad (69)$$

où $\bar{R}(t_0, t)$ est la fonction de relaxation.

3.2.1.3. Comportement viscoélastique tridimensionnel

On suppose que le matériau en question est Boltzmannien, c'est-à-dire que son comportement mécanique est compatible avec le principe de superposition. La loi de comportement permet de déterminer à chaque instant les déformations en fonction de l'histoire des contraintes

$$\varepsilon(t) = F_t \left[\sigma(\tau)_{-\infty}^t \right] \quad (70)$$

ou les contraintes en fonction de celle des déformations

$$\sigma(t) = R_t \left[\varepsilon(\tau)_{-\infty}^t \right]. \quad (71)$$

En utilisant le principe de superposition de Boltzmann (voir [73]), une histoire de sollicitation multidimensionnelle peut être considérée comme la superposition d'un certain nombre d'histoires de sollicitations unidimensionnelles :

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_0 H_{t_0}(t) \\ \varepsilon(t) = \bar{J}_{t_0} : \sigma_0 \end{cases} \quad (72)$$

où \bar{J}_{t_0} est le tenseur d'ordre quatre, fonction de fluage tensorielle de t , nulle pour $t < t_0$. D'une façon similaire, dans le cas de relaxation, nous avons :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_0 H_{t_0}(t) \\ \sigma(t) = \bar{R}_{t_0} : \varepsilon_0 \end{cases} \quad (73)$$

où \bar{R}_{t_0} est la fonction tensorielle d'ordre quatre de relaxation. Les fonctions de fluage et de relaxation doivent vérifier la relation suivante :

$$\bar{R}_{t_0} : \bar{J}_{t_0} = \mathbf{1} \quad (74)$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur d'identité d'ordre 4.

3.2.1.4. Matériau non-vieillissant

En utilisant le principe de superposition de Boltzmann, la réponse à une histoire de déformation quelconque est donnée par [73]

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = R(t, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \tau}(\tau, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (75)$$

De façon similaire, on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = J(t, t) : \boldsymbol{\sigma}(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial J}{\partial \tau}(\tau, t) : \boldsymbol{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (76)$$

Les expériences montrent que les propriétés physiques du matériau étudié peuvent évoluer indépendamment des sollicitations mécaniques auxquelles il est soumis. Cette évolution peut résulter de phénomènes divers : température, hygrométrie, cristallisation, etc. Ce phénomène est appelé de façon générale « Vieillesse ». Contrairement à ce type de situation, le matériau viscoélastique est considéré comme non-vieillissant si ses propriétés mécaniques ne varient pas avec le temps. Dans ce cas, les fonctions de fluage et de relaxation ne dépendent que d'une seule variable temporelle correspondant au temps passé depuis le moment d'application de la sollicitation :

$$\begin{cases} R(\tau, t) = R(t - \tau), \\ J(\tau, t) = J(t - \tau). \end{cases} \quad (77)$$

3.2.1.5. Matériau isotrope

Par la suite, on suppose que le matériau viscoélastique linéaire étudié est isotrope. Dans ce cas, la fonction de fluage prend la forme :

$$R(t) = k(t)(I \otimes I) + 2\mu(t)\left(\mathbf{1} - \frac{1}{3}I \otimes I\right) \quad (78)$$

où $\mu(t)$ est la fonction de relaxation en cisaillement simple et $k(t)$ apparaît comme la fonction de relaxation en compression isotrope. Quand l'équation (78) s'applique, la loi de comportement viscoélastique s'écrit sous la forme du produit de convolution :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = k(t) \oplus \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(t)]I + 2\mu(t) \oplus \boldsymbol{\varepsilon}^{dev}(t) \quad (79)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}(t)$ est le tenseur déviatorique des déformations et \oplus est la convolution de Stieltjes définie par l'équation (108).

3.2.2. Transformée de Laplace-Carson et principe de correspondance

3.2.2.1. Transformée de Laplace-Carson

Pour résoudre le problème de mécanique relatif à un matériau viscoélastique linéaire non-vieillissant, on utilise la méthode classique basée sur la transformée de Laplace-Carson (LC). Soit une fonction $f(t)$. Sa transformée de LC, noté $\tilde{f}(s)$, est obtenue à partir de sa transformée de Laplace, notée $f^*(s)$, par :

$$\tilde{f}(s) = sf^*(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (80)$$

où s est la variable dans l'espace de LC qui est supposée réelle. Cette transformée présente des propriétés intéressantes et en particulier, on a les théorèmes liés à la valeur initial et à la valeur finale :

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{f}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{f}(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \end{cases} \quad (81)$$

Alors, la loi de comportement viscoélastique isotrope (79) est réécrite dans l'espace de LC par

$$\tilde{\sigma} = \tilde{k} \operatorname{tr}(\tilde{\epsilon}) I + 2\tilde{\mu} \tilde{\epsilon}^{dev} \quad (82)$$

On constate que, formellement, cette relation est strictement identique à la relation correspondante de l'élasticité.

3.2.2.2. Principe de correspondance

Dans l'espace de LC, la loi de comportement du matériau viscoélastique linéaire isotrope non-vieillissant est mathématiquement identique à celle du matériau élastique linéaire isotrope. Ceci conduit au principe exposé par Mandel [24] suivant lequel, sous l'hypothèse de changements de géométrie négligeables, la résolution d'un problème relatif à un système constitué d'un matériau viscoélastique linéaire non-vieillissant se ramène à la résolution du problème homologue relatif au même système constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope. Ce principe a déjà été utilisé par Hashin (1965) [74] pour traiter les problèmes d'homogénéisation en viscoélasticité. La suite du chapitre présent se repose sur cette méthodologie. Si un problème est déjà résolu par la théorie de l'élasticité dans l'espace de LC, la solution dans l'espace temporel peut être formellement obtenue en inversant la transformée de LC.

3.2.3. Schémas rhéologiques

Le comportement viscoélastique linéaire d'un matériau isotrope non vieillissant peut être représenté par un modèle rhéologique constitué d'un certain nombre d'éléments élastiques et

visqueux. Dans cette partie, on présente les modèles les plus simples couramment utilisés et permettant de formuler les lois de comportement pour de nombreux matériaux viscoélastiques.

3.2.3.1. Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est obtenu par l'assemblage en série d'un ressort et d'un amortisseur (Figure 27).

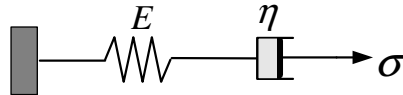


Figure 27: Modèle de Maxwell

La fonction de relaxation dans l'espace de LC, est donnée

$$\tilde{R}(s) = \frac{Es\eta}{s\eta + E}, \quad (83)$$

où E est le module d'élasticité et η le coefficient de viscosité. De cette relation on déduit dans l'espace réel (ou temporel) que

$$R(t) = Ee^{-t/\tau} \quad (84)$$

où τ est le temps caractéristique de relaxation défini par :

$$\tau = \frac{\eta}{E}. \quad (85)$$

3.2.3.2. Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt est construit en mettant un ressort et un amortisseur en parallèle (Figure 28).

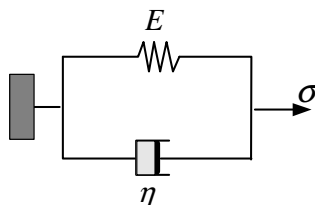


Figure 28: Modèle de Kelvin-Voigt

La fonction de relaxation dans l'espace de LC est fournie par

$$\tilde{R}(s) = E + s\eta. \quad (86)$$

On obtient la fonction de fluage par

$$\tilde{J}(s) = \frac{1}{E + s\eta}. \quad (87)$$

L'inverse de LC nous donne la fonction de fluage dans l'espace réel :

$$J(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-t/\tau}). \quad (88)$$

3.2.3.3. Modèle de Maxwell généralisé

Le modèle de Maxwell généralisé est constitué d'un ressort et de N modèles de Maxwell assemblés en parallèle (Figure 29). Les modules d'élasticité sont dénotés par $E_\infty, E_1, E_2, \dots, E_N$ alors que les coefficients de viscosité sont désignés par $\eta_\infty, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$.

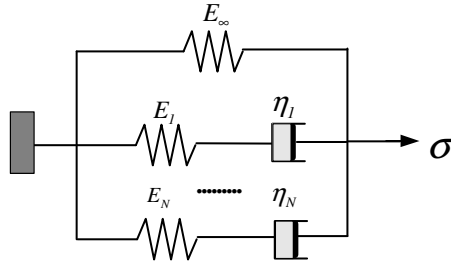


Figure 29: Modèle de Maxwell généralisé

La fonction de relaxation est donnée dans l'espace de LC par

$$\tilde{R}(s) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i \frac{s}{s + 1/\tau_i}. \quad (89)$$

où $\tau_i = \eta_i / E_i$. Dans l'espace temporel, on a :

$$R(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\tau_i}. \quad (90)$$

3.2.3.4. Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Le modèle de Kelvin généralisé est constitué d'un ressort et de N modèles de Kelvin-Voigt assemblés en série (Figure 30).

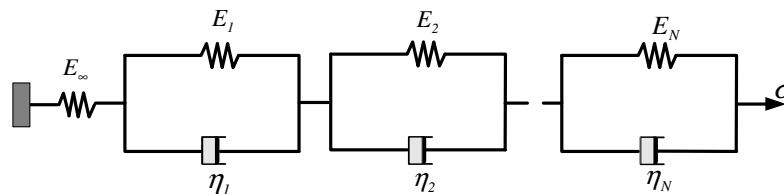


Figure 30: Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

La fonction de fluage est donnée dans l'espace de LC par

$$\tilde{J}(s) = \frac{1}{E_\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{s\eta_i + E_i}. \quad (91)$$

Dans l'espace réel, on a

$$J(t) = \frac{1}{E_\infty} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} (1 - e^{-t/\tau_i}). \quad (92)$$

3.3. Problèmes viscoélastiques micromécaniques

En mécanique des matériaux composites, les solutions élastiques pour les problèmes d'une sphère composite avec des conditions aux limites homogènes sont d'une importance à la fois théorique et pratique. En particulier, l'assemblage de sphères composites (CSA) de Hashin [75] et Hashin et Shtrikman [76] constitue une microstructure isotrope pour lequel le module de compressibilité effectif peut être déterminé de manière exacte. Cependant, lorsque les phases formant une sphère composite sont linéairement viscoélastiques, les solutions ne semblent pas avoir été rapportées dans la littérature. Le présent travail consiste à rechercher des solutions exactes pour une sphère composite viscoélastique soumise à des conditions aux limites homogènes, ce qui permettra d'étendre le modèle de CSA de Hashin et Hashin et Shtrikman au cas viscoélastique. Les résultats obtenus seront ensuite appliqués pour évaluer les propriétés de fluage du béton.

3.3.1. Problèmes d'une sphère composite soumise à une sollicitation isotrope

Dans cette partie, on se propose de résoudre le problème d'une sphère composite soumise à des déformations ou contraintes homogènes sur sa frontière. Cette sphère composite est constituée d'un matériau viscoélastique qui entoure un matériau élastique (Figure 31). Essentiellement, on déterminera les champs des contraintes et des déplacements dans la sphère composite ainsi que le module de compressibilité effectif.

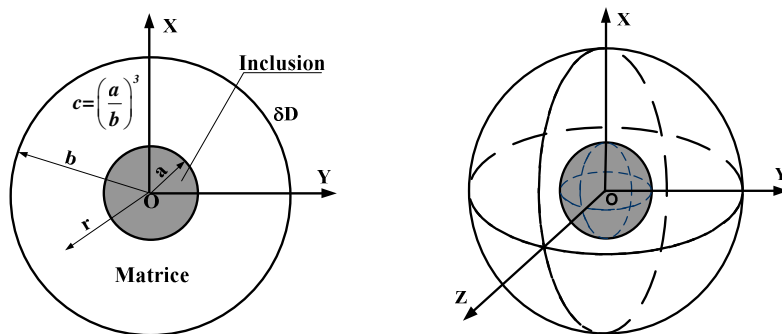


Figure 31: Sphère composites (2D-3D).

On considère une sphère composite élémentaire occupant un domaine fini D de volume $|D|$, dont la frontière est ∂D et de rayon b . L'inclusion est de rayon a . La fraction volumique de l'inclusion est donc $c=(a/b)^3$ (Figure 31). La matrice est viscoélastique linéaire isotrope. Les propriétés élastiques de la matrice se caractérisent par le module de rigidité à la compression k^m et le module de rigidité au cisaillement μ^m . Cette matrice contient une inclusion élastique linéaire isotrope et les propriétés de cette dernière ne dépendent que de deux modules (k^i, μ^i). On suppose de plus que l'adhérence entre la matrice et l'inclusion est parfaite.

3.3.1.1. Problème élastique

On impose sur la frontière ∂D un déplacement $u = E x$ avec E étant un scalaire constant ou une contrainte isotrope $\sigma.n = pn$ avec p un scalaire constant. On s'intéresse dans un premier temps à la solution élastique du problème dans lequel la matrice est considérée comme élastique, qui servira par la suite à la résolution du problème viscoélastique. Cette solution élastique est bien connue. La loi de comportement locale s'écrit :

$$\sigma^\alpha = 3k^\alpha \epsilon_{sph}^\alpha + 2\mu^\alpha \epsilon_{dev}^\alpha \quad (93)$$

où α désigne l'inclusion i ou la matrice m . On se propose de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } D; \\ \sigma^\alpha = 3k^\alpha \epsilon_{sph}^\alpha + 2\mu^\alpha \epsilon_{dev}^\alpha & \text{dans } D; \\ \epsilon = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u + \operatorname{grad}^T u) & \text{dans } D; \\ u = E.x \text{ ou } \sigma.n = pn & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (94)$$

Le problème possédant la symétrie sphérique, on utilise le système des coordonnées sphériques $(e_r, e_\varphi, e_\theta)$, dont l'origine coïncide avec le centre de la sphère composite. Les formules de transformation des coordonnées sont :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (95)$$

Le déplacement induit par la condition aux limites sur la frontière ∂D est purement radial et ne dépend que de r :

$$u^\alpha = u_r^\alpha e_r \quad (96)$$

d'où

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^\alpha = \frac{du_r^\alpha}{dr} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^\alpha = \varepsilon_{\phi\phi}^\alpha = \frac{u_r^\alpha}{r} \end{cases} \quad (97)$$

A partir de la loi de comportement élastique de chaque phase, on peut écrire

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^\alpha = (k^\alpha + \frac{4}{3}\mu^\alpha) \frac{du_r^\alpha}{dr} + (2k^\alpha - \frac{4}{3}\mu^\alpha) \frac{du_r^\alpha}{dr}, \\ \sigma_{\theta\theta}^\alpha = \sigma_{\phi\phi}^\alpha = (k^\alpha - \frac{2}{3}\mu^\alpha) \frac{du_r^\alpha}{dr} + (2k^\alpha + \frac{2}{3}\mu^\alpha) \frac{du_r^\alpha}{dr}, \\ \sigma_{r\theta}^\alpha = \sigma_{r\phi}^\alpha = \sigma_{\theta\phi}^\alpha = 0. \end{cases} \quad (98)$$

L'équation d'équilibre $\text{div}\sigma = 0$ se réduit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 u_r^\alpha}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r^\alpha}{dr} - \frac{2}{r^2} u_r^\alpha = 0 \quad (99)$$

La résolution de cette équation nous donne : $u_r^\alpha = A^\alpha r + \frac{B^\alpha}{r^2}$.

Les champs solutions sont :

pour l'inclusion

$$\begin{cases} u_r^i = A^i r, \\ \sigma_{rr}^i = \sigma_{\theta\theta}^i = \sigma_{\phi\phi}^i = 3k^i A^i; \end{cases} \quad (100)$$

pour la matrice

$$\begin{cases} u_r^m = A^m r + \frac{B^m}{r^2}, \\ \sigma_{rr}^m = 3k^m A^m - 4\mu^m \frac{B^m}{r^3}, \\ \sigma_{\theta\theta}^m = \sigma_{\phi\phi}^m = 3k^m A^m + 2\mu^m \frac{B^m}{r^3}. \end{cases} \quad (101)$$

Le module de compressibilité effectif est déterminé de manière analytique par la formule :

$$k^{hom} = k^m - \frac{c (k^m - k^i)(4\mu^m + 3k^m)}{(3k^i + 4\mu^m) + 3c(k^m - k^i)}. \quad (102)$$

Pour le module de cisaillement effectif, on n'a pas de solution analytique. Cependant, il peut être évalué par le schéma de Mori-Tanaka (MT) [77] :

$$\mu^{hom} = \mu^m + c(\mu^i - \mu^m) \left[1 + (1-c) \frac{\mu^i - \mu^m}{f^m + \mu^m} \right]^{-1} \quad (103)$$

où

$$f^m = \frac{\mu^m (9k^m + 8\mu^m)}{6(k^m + 2\mu^m)} \quad (104)$$

Cas où une déformation isotrope est prescrite sur la surface

Dans les équations (100) et (101), les 3 constantes A^i, A^m et B^m peuvent être calculées à l'aide des conditions de continuité à l'interface entre l'inclusion et la matrice et de la condition aux limites sur la surface ∂D :

$$\begin{aligned} A^i &= \frac{3k^m + 4\mu^m}{3k^i + 4\mu^m + 3c(k^m - k^i)} E, \\ A^m &= \frac{3k^i + 4\mu^m}{3k^i + 4\mu^m + 3c(k^m - k^i)} E, \\ B^m &= \frac{3(k^m - k^i)}{3k^i + 4\mu^m + 3c(k^m - k^i)} a^3 E. \end{aligned} \quad (105)$$

Cas où une contrainte isotrope est prescrite sur la surface

Dans ce cas les déplacements sont déterminés à un mouvement rigide près. Quand l'inclusion se réduit à un trou, on a

$$\begin{aligned} A^m &= \frac{p}{3k^m} \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right)^{-1} \\ B^m &= \frac{p}{4\mu^m} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (106)$$

Dans le cas général, on obtient

$$\begin{aligned} A^i &= A^m + \frac{B^m}{a^3}, \\ A^m &= p \left[\frac{4\mu_m + 3k_i}{k_m - k_i} k_m \frac{1}{a^3} - 4\mu_m \frac{1}{b^3} \right]^{-1} \left(\frac{4\mu_m + 3k_i}{3(k_m - k_i)} k_m \frac{1}{a^3} \right), \\ B^m &= p \left[\frac{4\mu_m + 3k_i}{k_m - k_i} k_m \frac{1}{a^3} - 4\mu_m \frac{1}{b^3} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (107)$$

On vient de rappeler la solution du problème élastique d'une sphère composite soumise à une déformation ou une contrainte isotrope sur sa frontière. On utilisera ce résultat et le principe de correspondance pour résoudre le problème viscoélastique dans la partie suivante.

3.3.1.2. Problème viscoélastique

On revient à notre problème initial où le comportement de la matrice est viscoélastique linéaire isotrope sans vieillissement. En utilisant la transformée de LC, ce problème viscoélastique se ramène au problème élastique équivalent dans l'espace de LC. Ensuite, après avoir obtenu la solution de ce dernier, on inverse la transformée de LC pour trouver la solution du problème viscoélastique initial.

D'abord, on rappelle la transformée de LC et son inversion dans un cadre plus général que précédent. La loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire sans vieillissement peut s'exprimer par l'expression suivante [78] :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{J}(0) : \boldsymbol{\sigma}(t) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial \boldsymbol{J}(t-\tau)}{\partial t} : \boldsymbol{\sigma}(\tau) d\tau = \boldsymbol{J}(t) \oplus \boldsymbol{\sigma}(t) \quad (108)$$

où \boldsymbol{J} est un tenseur d'ordre quatre de fonction de fluage et \oplus est la convolution de Stieltjes. La transformée de LC d'une fonction $f(t)$ est définie par

$$\tilde{f}(s) = s \int_0^{\infty} \exp^{-st} f(t) dt. \quad (109)$$

L'inverse de LC est fournie par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s} \tilde{f}(s) \exp^{-st} ds. \quad (110)$$

L'application de la transformée de LC à l'équation (108) conduit à :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(s) = \tilde{\boldsymbol{J}}(s) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s) \quad (111)$$

On appliquera la méthode décrite ci-dessus à notre problème. Le comportement viscoélastique de la matrice est représenté par le modèle de Maxwell à $N+1$ éléments (Figure 32).

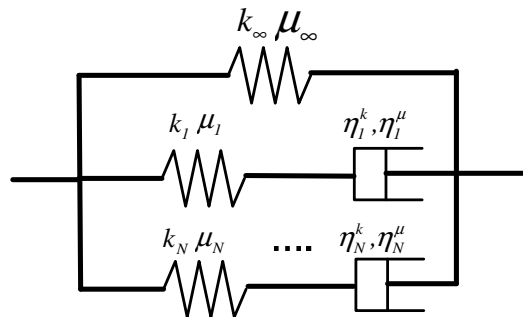


Figure 32: Modèle de Maxwell généralisé à $N+1$ branches.

On construit maintenant la fonction de relaxation pour le modèle de Maxwell à $N+1$ branches. Les modules de compressibilité et de cisaillement des $N+1$ éléments élastiques

correspondants sont (k_∞, μ_∞) et (k_i, μ_i) avec $i=1, 2, \dots, N$. Les coefficients de viscosité des éléments visqueux sont (η_i^k, η_i^μ) . On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_\infty + \sum_{i=1}^N \sigma_i \\ \varepsilon = \varepsilon_\infty = \varepsilon_i \end{cases} \quad (112)$$

Dans l'expression (112), σ et ε sont respectivement les tenseurs des contraintes et déformations totales alors que σ_i et ε_i (avec $i = 1-N$) sont les contraintes et déformations totales dans la branche i . Chacun de $\sigma, \varepsilon, \sigma_i$ et ε_i peut se décomposer en une partie sphérique et une partie déviatorique.

La loi de comportement de chaque branche est précisée par

$$\begin{cases} \sigma^{dev} = 2\mu \varepsilon^{dev} \\ \dot{\sigma}^{dev} = 2\eta^\mu \dot{\varepsilon}^{dev} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma^{sph} = 3k \varepsilon^{sph} \\ \dot{\sigma}^{sph} = 3\eta^k \dot{\varepsilon}^{sph} \end{cases} \quad (113)$$

où $i = \infty, 1, 2, \dots, N$. D'après les expressions (112) et (113), on peut écrire

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{sph} = \frac{\dot{\sigma}_\infty^{sph}}{3k_\infty} = \frac{\dot{\sigma}_i^{sph}}{3k_i} + \frac{\dot{\sigma}_i^{sph}}{3\eta_i^k}, \\ \dot{\varepsilon}^{dev} = \frac{\dot{\sigma}_\infty^{dev}}{2\mu_\infty} = \frac{\dot{\sigma}_i^{dev}}{2\mu_i} + \frac{\dot{\sigma}_i^{dev}}{2\eta_i^\mu}. \end{cases} \quad (114)$$

En appliquant la transformée de LC à (114) et en tenant compte de (112), on peut obtenir

$$\begin{cases} \sigma^{sph}(t) = 3k_\infty \varepsilon^{sph}(t) + \sum_{i=1}^N 3k_i \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_{ki}}(t-\tau)} \left(\frac{d\varepsilon^{sph}}{d\tau} \right) d\tau \\ \sigma^{dev}(t) = 2\mu_\infty \varepsilon^{dev}(t) + \sum_{i=1}^N 2\mu_i \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_{\mu i}}(t-\tau)} \left(\frac{d\varepsilon^{dev}}{d\tau} \right) d\tau \end{cases} \quad (115)$$

Les temps caractéristiques τ_i^k et τ_i^μ sont définis par :

$$\tau_i^k = \frac{\eta_i^k}{k_i} \quad \text{et} \quad \tau_i^\mu = \frac{\eta_i^\mu}{\mu_i}$$

On peut récrire ces relations sous la forme compacte

$$\begin{cases} \sigma^{sph}(t) = 3R_k(t) \oplus \varepsilon^{sph}(t), \\ \sigma^{dev}(t) = 2R_\mu(t) \oplus \varepsilon^{dev}(t). \end{cases} \quad (116)$$

où les fonctions de relaxation sont données par

$$\begin{cases} R_k(t) = k_\infty + \sum_{i=1}^N k_i e^{-\frac{t}{\tau_i^k}}, \\ R_\mu(t) = \mu_\infty + \sum_{i=1}^N \mu_i e^{-\frac{t}{\tau_i^\mu}}. \end{cases} \quad (117)$$

3.3.1.3. Module de compressibilité

Le module de compressibilité d'une sphère composite est précisé par (102). A partir de cette dernière expression et à l'aide du principe de correspondance, on peut déduire que le module de compressibilité d'une sphère composite constitué d'une coquille viscoélastique enrobant un noyau élastique est donné dans l'espace de LC par

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \tilde{k}^m - \frac{c (\tilde{k}^m - k^i) (4\tilde{\mu}^m + 3\tilde{k}^m)}{(3k^i + 4\tilde{\mu}^m) + 3c (\tilde{k}^m - k^i)}. \quad (118)$$

On démontre ci-après que, quand le modèle de Maxwell généralisé à 3 branche (avec $N = 2$) est utilisé, on peut obtenir l'expression exacte du k^{hom} de la sphère composite viscoélastique. Cela veut dire que l'expression (118) peut être inversée de façon analytique et exacte.

La relation entre les paramètres du modèle de Maxwell nous donne :

$$\begin{cases} k^m(t) = k_\infty^m + \sum_{i=1}^2 k_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{km}}}, \\ \mu^m(t) = \mu_\infty^m + \sum_{i=1}^2 \mu_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{\mu m}}}. \end{cases} \quad (119)$$

Ces relations s'écrivent dans l'espace de LC :

$$\begin{cases} \tilde{k}^m(s) = k_\infty^m + \sum_{i=1}^2 k_i^m \frac{s}{s + 1/\tau_i^{km}} \\ \tilde{\mu}^m(s) = \mu_\infty^m + \sum_{i=1}^2 \mu_i^m \frac{s}{s + 1/\tau_i^{\mu m}} \end{cases} \quad (120)$$

En introduisant (120) dans (118) et après simplification, on trouve :

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \frac{(A_2^k s^2 + A_1^k s + A_0^k)(B_2^k s^2 + B_1^k s + C_0^k)}{(C_2^k s^2 + C_1^k s + C_0^k)(s\tau_1^m + 1)(s\tau_2^m + 1)} \quad (121)$$

Où les coefficients A_i^k , B_i^k et C_i^k ($i=0, 1, 2$) dépendent de la fraction volumique $c = (a/b)^3$ de l'inclusion et des propriétés des matériaux et sont précisés par l'Annexe I.

La condition nécessaire pour que l'inversion de la transformée de LC puisse être effectuée pour $\tilde{k}^{hom}(s)$ est que le dénominateur de $\tilde{k}^{hom}(s)$ puisse être factorisé sous forme du produit d'un certain nombre de polynômes du premier degré. Ainsi, on considère l'équation

$$C_2^k s^2 + C_1^k s + C_0^k = 0. \quad (122)$$

On peut montrer que le discriminant de cette équation est toujours positif et qu'elle a 2 solutions s_1^k et s_2^k négatives distinctes.

On va démontrer que l'équation (122) avec

$$\begin{aligned}
 C_2^k &= -\tau_1^m \tau_2^m (3ck^i - 3k^i - 3ck_0 - 4\mu_0 - 3ck_1 - 4\mu_1 - 3ck_2 - 4\mu_2) \\
 C_1^k &= \tau_1^m (-3ck^i + 3k^i + 3ck_0 + 4\mu_0 + 3ck_1 + 4\mu_1) \\
 &\quad + \tau_2^m (+3ck_2 + 4\mu_2 - 3ck^i + 3k^i + 3ck_0 + 4\mu_0) \\
 C_0^k &= -(3ck^i - 3k^i - 3ck_0 - 4\mu_0)
 \end{aligned} \tag{123}$$

a 2 solutions différentes. Le discriminant est calculé par

$$\Delta^k = (C_1^k)^2 - 4C_0^k C_2^k \tag{124}$$

On va démontrer que le déterminant $\Delta^k > 0$

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy $(x + y)^2 \geq 4xy$, on trouve :

$$(C_1^k)^2 \geq 4\tau_1^m \tau_2^m C_{11}^k C_{12}^k \tag{125}$$

où

$$\begin{cases}
 C_1^k = C_{11}^k + C_{12}^k \\
 C_{11}^k = -\tau_1^m (3ck^i - 3k^i - 3ck_0 - 4\mu_0 - 3ck_1 - 4\mu_1) \\
 C_{12}^k = -\tau_2^m (-3ck_2 - 4\mu_2 + 3ck^i - 3k^i - 3ck_0 - 4\mu_0)
 \end{cases} \tag{126}$$

Alors, il est évident que :

$$\begin{aligned}
 \Delta^k &= (C_1^k)^2 - 4C_0^k C_2^k \\
 &\geq 4\tau_1^m \tau_2^m C_{11}^k C_{12}^k - 4C_0^k C_2^k \\
 &\geq 4\tau_1^m \tau_2^m (4\mu_1 + 3ck_1)(4\mu_2 + 3ck_2) \\
 &> 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{127}$$

L'équation (122) a toujours 2 solutions distinctes s_1^k, s_2^k . On démontre ensuite que ces solutions sont toujours négatives. En effet, avec $C_1^k > 0$ et $C_2^k > 0$ on a :

$$\begin{cases}
 s_1^k = \frac{-C_1^k - \sqrt{\Delta^k}}{2C_2^k} < 0 \quad (\text{car } C_1^k > 0 \text{ et } C_2^k > 0) \\
 s_2^k = \frac{-C_1^k + \sqrt{\Delta^k}}{2C_2^k} < 0 \quad (\text{car } -C_1^k + \sqrt{\Delta^k} < 0 \text{ et } C_2^k > 0)
 \end{cases}$$

En utilisant la technique de décomposition en fractions partielles (Annexe V), on peut écrire l'expression (121) sous forme de la somme des fractions rationnelles :

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \frac{x_1^k}{(s - s_1^k)} + \frac{x_2^k}{(s - s_2^k)} + \frac{x_3^k}{(s\tau_1^m + 1)} + \frac{x_4^k}{(s\tau_2^m + 1)} + x_5^k \tag{128}$$

où x_i^k avec ($i=1-5$) sont des constantes qui dépendent les coefficients A_i^k, B_i^k et C_i^k ($i=1-3$). Ils sont donnés en détaille dans l'Annexe I).

Analytiquement, l'inverse de LC de (128), $k^{hom}(t)$ conduit à

$$k^{hom}(t) = k_\infty + \sum_{i=1}^4 k_i e^{-t/\tau_i^k} \quad (129)$$

où k_i avec ($i = \infty, 1-4$) sont les modules de compressibilité macroscopique (voir l'Annexe I)

On trouve qu'il y a finalement 4 temps caractéristiques du modèle macroscopique et l'ensemble des temps caractéristiques microscopiques τ_1^m et τ_2^m est un sous-ensembles de celui des temps caractéristiques macroscopiques ($\tau_1^m, \tau_2^m, -1/s_1^k, -1/s_2^k$).

On s'intéresse ci-après aux valeurs extrêmes du module de compressibilité. A l'instant initial, le comportement du matériau est élastique. Sans perte de généralité, on suppose que $k^i \leq k_0^m$ où k_0^m est le module élastique de la matrice :

$$k_0^m = k_\infty^m + k_1^m + k_2^m \quad (130)$$

A l'infini, le module de l'inclusion est toujours k^i , tandis que celui de la matrice atteint la valeur minimale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k^m(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{k}^m(s) = k_\infty^m \quad (131)$$

Alors, à partir de (118), on peut calculer aussi les valeurs instantanées et minimales du module de compressibilité effectif :

$$\begin{cases} k_0^{hom} = \lim_{t \rightarrow 0} k^{hom}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{k}^{hom}(s) = k_0^m + \frac{c(k_0^m - k^i)(3k_0^m + 4\mu_0^m)}{3k^i + 4\mu_0^m + 3c(k_0^m - k^i)} \\ k_\infty^{hom} = \lim_{t \rightarrow \infty} k^{hom}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{k}^{hom}(s) = k_\infty^m + \frac{c(k_\infty^m - k^i)(3k_\infty^m + 4\mu_\infty^m)}{3k^i + 4\mu_\infty^m + 3c(k_\infty^m - k^i)} \end{cases} \quad (132)$$

Au temps initial, la valeur de k_0^{hom} se trouve dans l'intervalle $[k_0^{min}, k_0^{max}]$:

$$\begin{cases} k_0^{min} = k_0^{hom}(c=0) = k^i \\ k_0^{max} = k_0^{hom}(c=1) = k_0^m \end{cases} \quad (133)$$

A l'infini, la valeur de k_∞^{hom} se trouve dans l'intervalle $[k_\infty^{min}, k_\infty^{max}]$:

$$\begin{cases} k_\infty^{min} = k_\infty^{hom}(c=0) = k_\infty^m \\ k_\infty^{max} = k_\infty^{hom}(c=1) = k^i \end{cases} \quad (134)$$

3.3.1.4. Module de cisaillement estimé par le schéma de Mori-Tanaka

Dans l'espace de LC, le module de cisaillement (103) du matériau composite viscoélastique s'écrit :

$$\tilde{\mu}^{hom}(s) = \tilde{\mu}^m + c(\mu^i - \tilde{\mu}^m) \left[1 + (1-c) \frac{\mu^i - \tilde{\mu}^m}{\tilde{f}^m + \tilde{\mu}^m} \right]^{-1} \quad (135)$$

où

$$\tilde{f}^m = \frac{\tilde{\mu}^m (9\tilde{k}^m + 8\tilde{\mu}^m)}{6(\tilde{k}^m + 2\tilde{\mu}^m)} \quad (136)$$

On considère ci-après le cas où les inclusions sont des phases poreuses. En utilisant le modèle de Maxwell généralisé à trois branches, en introduisant les formules (119) dans (135), on a

$$\tilde{\mu}^{hom}(s) = \frac{(A_2^\mu s^2 + A_1^\mu s + A_0^\mu)(B_2^\mu s^2 + B_1^\mu s + B_0^\mu)}{(C_2^\mu s^2 + C_1^\mu s + C_0^\mu)(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \quad (137)$$

où les coefficients A_i^μ , B_i^μ et C_i^μ (avec $i=0, 1, 2$) sont fonctions des propriétés viscoélastiques des phases et de la fraction volumique (voir l'Annexe D).

On considère l'équation du second degré :

$$C_2^\mu s^2 + C_1^\mu s + C_0^\mu = 0 \quad (138)$$

On peut démontrer que cette équation a 2 solutions différentes et négatives s_1^μ et s_2^μ (Annexe I). L'expression (137) devient

$$\tilde{\mu}^{hom} = \frac{x_1^\mu}{s - s_1^\mu} + \frac{x_2^\mu}{s - s_2^\mu} + \frac{x_3^\mu}{s\tau_1 + 1} + \frac{x_4^\mu}{s\tau_2 + 1} + x_5^\mu \quad (139)$$

où les valeurs de x_i^μ (avec $i=1-5$) sont données dans l'Annexe I.

En effectuant l'inversion de LC de l'expression (139) de manière analytique, on obtient finalement le module de cisaillement effectif dans l'espace de temps :

$$\mu^{hom}(t) = \mu_\infty + \sum_{i=1}^4 \mu_i e^{-t/\tau_i} \quad (140)$$

On a alors 4 temps caractéristiques macroscopiques et l'ensemble des temps caractéristiques microscopiques est un sous-ensemble de celui des temps caractéristiques macroscopiques.

3.3.2. Application de l'approche micromécanique pour les matériaux cimentaires

3.3.2.1. Modèle micromécanique viscoélastique

Dans cette partie, on considère que les matériaux cimentaires sont des matériaux multiphasiques constitués d'une phase matrice viscoélastique, renforcée par des inclusions élastiques et affaiblie par des phases poreuses. D'abord, on construit un modèle micromécanique afin de déterminer les propriétés viscoélastiques de la matrice.

Le comportement viscoélastique de la matrice est représenté par le modèle de Maxwell généralisé à $N+1$ branches (Figure 32), les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice s'écrivent :

$$\begin{cases} k^m(t) = k_\infty^m + \sum_{i=1}^N k_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{km}}}, \\ \mu^m(t) = \mu_\infty^m + \sum_{i=1}^N \mu_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{\mu m}}}. \end{cases} \quad (141)$$

Ces expressions deviennent dans l'espace de LC :

$$\begin{cases} \tilde{k}^m(s) = k_\infty^m + \sum_{i=1}^N k_i^m \frac{s}{s + 1/\tau_i^{km}}, \\ \tilde{\mu}^m(s) = \mu_\infty^m + \sum_{i=1}^N \mu_i^m \frac{s}{s + 1/\tau_i^{\mu m}}. \end{cases} \quad (142)$$

où τ_i^{km} et $\tau_i^{\mu m}$ sont les temps caractéristiques microscopiques associés à la compression isotrope et au cisaillement. Dans la suite, on suppose que $\tau_i^{km} = \tau_i^{\mu m} = \tau_i^m$. Il y a donc N temps caractéristiques microscopiques. $k_\infty^m, k_i^m, \tau_i^m, \mu_\infty^m$ et μ_i^m sont ceux du modèle microscopique. Ensuite, l'objectif est d'établir le modèle macroscopique par une approche micromécanique. On procède en deux étapes. Dans un premier temps, on considère une pâte de ciment ayant deux phases, une phase matrice qui a le comportement viscoélastique défini par (141) ou (142), et une phase poreuse. Dans un deuxième temps, on considère un béton ayant 3 phases, une phase matrice viscoélastique, une phase d'inclusion élastique représentant les granulats et une phase poreuse.

3.3.2.2. Modèle macroscopique viscoélastique pour la pâte de ciment

Pour la pâte de ciment décrite ci-dessus, on utilise le schéma de MT. Les propriétés macroscopiques dans l'espace de LC sont identiques à celles définies par les équations (118) et (135) :

$$\begin{cases} \tilde{k}^{hom}(s) = \tilde{k}^m - \frac{c(\tilde{k}^m - k^i)(4\tilde{\mu}^m + 3\tilde{k}^m)}{(3k^i + 4\tilde{\mu}^m) + 3c(\tilde{k}^m - k^i)}, \\ \tilde{\mu}^{hom}(s) = \tilde{\mu}^m + c(\mu^i - \tilde{\mu}^m) \left[1 + (1-c) \frac{\mu^i - \tilde{\mu}^m}{f^m + \tilde{\mu}^m} \right]^{-1} \end{cases} \quad (143)$$

En insérant (142) dans (143) et après avoir effectué des manipulations algébriques, on peut montrer que $\tilde{k}^{hom}(s)$ et $\tilde{\mu}^{hom}(s)$ peuvent être généralement et formellement écrits sous la forme :

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \frac{\left(\sum_{i=0}^N A_i^k s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^k} B_i^k s^i \right)}{\left(\sum_{i=0}^N C_i^k s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^k} D_i^k s^i \right)}, \quad \tilde{\mu}^{hom}(s) = \frac{\left(\sum_{i=0}^N A_i^\mu s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^\mu} B_i^\mu s^i \right)}{\left(\sum_{i=0}^N C_i^\mu s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^\mu} D_i^\mu s^i \right)} \quad (144)$$

où $A_i^k, B_i^k, A_i^\mu, B_i^\mu, C_i^k, D_i^k, C_i^\mu$ et D_i^μ sont les coefficients en fonction des paramètres $k_\infty^m, k_i^m, \tau_i^m, \mu_\infty^m, \mu_i^m$ et de la fraction volumique des pores. Ayant obtenu alors les propriétés macroscopiques dans l'espace de LC, l'étape suivante d'effectuer leur transformée de LC inverse pour obtenir les propriétés effectives dans l'espace temporel. L'objectif est maintenant d'inverser analytiquement les expressions (144). A cette fin, il faut les décomposer en fractions irréductibles. La résolution du problème d'inversion des fonctions $\tilde{k}^{hom}(s)$ et

$\tilde{\mu}^{hom}(s)$ revient à rechercher les racines des dénominateurs $\left(\sum_{i=0}^N C_i^k s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^k} D_i^k s^i \right)$ et

$$\left(\sum_{i=0}^N C_i^\mu s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^\mu} D_i^\mu s^i \right) :$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^N C_i^k s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^k} D_i^k s^i \right) = 0 \\ \left(\sum_{i=0}^N C_i^\mu s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^\mu} D_i^\mu s^i \right) = 0 \end{cases} \quad (145)$$

On rappelle qu'une équation polynomiale ne peut être analytiquement résolue que, quand son degré est inférieur à 5. Cette condition se traduit pour les équations (145) par :

$$\begin{cases} N < 5, \\ M^k < 5, \\ M^\mu < 5. \end{cases} \quad (146)$$

On peut montrer que: (i) $M^k = M^\mu = 2$ quand $N = 2$; (ii) $M^k = M^\mu = 3$ quand $N = 3$; (iii) $M^k = M^\mu = 4$ quand $N = 4$. Donc, on conduit que quand le nombre $N+1$ de branche du modèle de Maxwell généralisé est inférieur ou égal à 5 ($N \leq 4$), on peut inverser analytiquement les expressions (144).

3.3.2.3. Modèle macroscopique viscoélastique pour les bétons

On considère que les bétons sont les matériaux de 3 phases. En utilisant le schéma de MT, Les propriétés macroscopiques (65) dans l'espace de LC sont écrites :

$$\begin{cases} \tilde{k}_{MT}^{hom}(s) = \left(\tilde{k}^m + \frac{4}{3} \tilde{\mu}^m \sum_{j=1}^M c_j \frac{k^j - \tilde{k}^m}{k^j + 4/3 \tilde{\mu}^m} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^M c_j \frac{k^j - \tilde{k}^m}{k^j + 4/3 \tilde{\mu}^m} \right)^{-1} \\ \tilde{\mu}_{MT}^{hom}(s) = \left(\tilde{\mu}^m + \tilde{f}^m \sum_{j=1}^M c_j \frac{\mu^j - \tilde{\mu}^m}{\mu^j + \tilde{f}^m} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^M c_j \frac{\mu^j - \tilde{\mu}^m}{\mu^j + \tilde{f}^m} \right)^{-1} \end{cases} \quad (147)$$

avec \tilde{f}^m est défini comme (136), et où c_j est la fraction volumique de la phase particulière.

Après quelques manipulations algébriques, on obtient les expressions de (147) sous forme des polynômes de degré N , M^k et M^μ :

$$\tilde{k}_{MT}^{hom}(s) = \frac{\left(\sum_{i=0}^N A_i^k s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^k} B_i^k s^i \right)}{\left(\sum_{i=0}^N C_i^k s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^k} D_i^k s^i \right)}, \quad \tilde{\mu}_{MT}^{hom}(s) = \frac{\left(\sum_{i=0}^N A_i^\mu s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^\mu} B_i^\mu s^i \right)}{\left(\sum_{i=0}^N C_i^\mu s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^\mu} D_i^\mu s^i \right)} \quad (148)$$

où $A_i^k, B_i^k, A_i^\mu, B_i^\mu, C_i^k, D_i^k, C_i^\mu$ et D_i^μ sont les coefficients en fonction de $k_\infty^m, k_i^m, \tau_i^m, \mu_\infty^m, \mu_i^m$ et des fractions volumiques des pores et des granulats. Pour obtenir temporel, on effectue la transformée inverse de LC de (148).

De manière similaire, on cherche les racines des dénominateur dans les expressions (148) :

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^N C_i^k s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^k} D_i^k s^i \right) = 0 \\ \left(\sum_{i=0}^N C_i^\mu s^i \right) \left(\sum_{i=0}^{M^\mu} D_i^\mu s^i \right) = 0 \end{cases} \quad (149)$$

Dans le cas d'un béton constitué d'une phase viscoélastique, d'une phase poreuse et d'une phase élastique, on peut montrer que: (i) $M^k = 2$ et $M^\mu = 3$ quand $N = 1$; (ii) $M^k = 4$ et $M^\mu = 6$ quand $N = 2$; (iii) $M^k = 6$ et $M^\mu = 9$ quand $N = 3$. Par conséquent, dans le cas du béton de 3 phases, l'inversion de (147) ne peut se faire analytiquement que si $N = 1$ ou un modèle de Maxwell généralisé à deux branches est adopté.

3.3.2.4. Coefficient de Biot des matériaux viscoélastiques

On étudie dans cette partie les matériaux poreux viscoélastiques. D'abord on rappelle la loi de comportement élastique linéaire isotrope des matériaux poreux :

$$\Sigma = C^{hom} : E - b p_c \mathbf{I} \quad (150)$$

où p_c est la pression du fluide dans les pores et b est le coefficient de Biot. Ce dernier prend en compte la contrainte macroscopique induite par la pression dans les pores. Le coefficient de Biot dans le cas d'un matériau élastique est défini par :

$$b = 1 - \frac{k^{hom}}{k^m} \quad (151)$$

où k^m est le module de compressibilité de la matrice et k^{hom} est le module de compressibilité effectif du milieu poreux

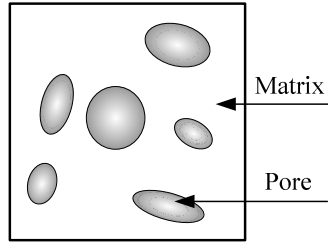


Figure 33: VER d'un milieu poreux.

Dans le cas d'un milieu viscoélastique poreux, sa loi de comportement dans l'espace de LC a la même forme que (150) (voir Coussy [79]) :

$$\tilde{\Sigma} = \tilde{C}^{hom} : \tilde{E} - \tilde{b} p_c \mathbf{I} \quad (152)$$

L'expression (151) devient dans l'espace de LC :

$$\tilde{b}(s) = 1 - \frac{\tilde{k}^{hom}(s)}{\tilde{k}^m(s)} \quad (153)$$

où $\tilde{k}^{hom}(s)$ et $\tilde{k}^m(s)$ sont déterminés par la formule de (118) et (142).

En particulier, quand il s'agit d'une matrice poreuse viscoélastique décrite par un modèle de Maxwell généralisé à 3 branches (ou avec $N = 2$), l'équation (153) prend la forme :

$$\tilde{b}(s) = \frac{A_2^b s^2 + A_1^b s + A_0^b}{B_2^b s^2 + B_1^b s + B_0^b} \quad (154)$$

On peut montrer que l'équation

$$A_2^b s^2 + A_1^b s + A_0^b = 0 \quad (155)$$

3. Modélisation micromécanique

a deux racines s_1^b et s_2^b négatives et distinctes (voir l'Annexe I). Donc, l'expression du coefficient de Biot (154) admet la décomposition :

$$\tilde{b}(s) = \frac{x_1^b}{s - s_1^b} + \frac{x_2^b}{s - s_2^b} + x_3^b \quad (156)$$

L'inverse de LC de cette expression donne

$$b(t) = b_\infty + \sum_{i=1}^2 b_i e^{-t/\tau_i^b} \quad (157)$$

où b_i avec $i = \infty, 1, 2$ sont des paramètres dépendant de deux racines s_1^b, s_2^b et des paramètres x_i^b avec $i = 1-5$ (voir l'Annexe I).

Exemple numérique

On présente ici le résultat numérique du coefficient de Biot pour le béton CEM I à 20°C ([80]). Par simplicité, le béton est supposé être constitué de 2 phases: une matrice et des pores. Les propriétés élastiques effectives expérimentalement identifiées et la porosité du béton sont données dans le Tableau 1

Tableau 1 : Valeurs des propriétés mécaniques du béton CEM I à 20°C

E (GPa)	ν	k (GPa)	μ (GPa)	c
44.7	0.27	42	24	0.119

En utilisant le modèle de Maxwell généralisé à 3 branches, on peut calculer le module de compressibilité effective suivant la formule (143) et le coefficient de Biot selon la formule (156) dans l'espace de LC. A partir des résultats expérimentaux de Ladaoui [80], on détermine les paramètres matériels comme dans le Tableau 2

Tableau 2 : Valeurs des paramètres pour le modèle de Maxwell généralisé à 3 branches.

Branch	∞	1	2
k_i^m (GPa)	22.90	7.71	12.5
μ_i^m (GPa)	11.99	4.17	6.04
τ_i^m (Jours)		5	150

Tableau 3 : Valeurs des paramètres macroscopiques.

Branche	∞	1	2	3	4
k_i (GPa)	17.23	5.83	0.18	9.32	0.5
μ_i (GPa)	9.50	3.29	0.1	4.80	0.3
τ_i^k (Jours)		5	6.12	150	230
τ_i^μ (Jours)		5	6.09	150	227

La Figure 34 présente les résultats numériques sur l'évolutions du coefficient de Biot par rapport au temps pour différentes valeurs de la fraction volumique des pores.

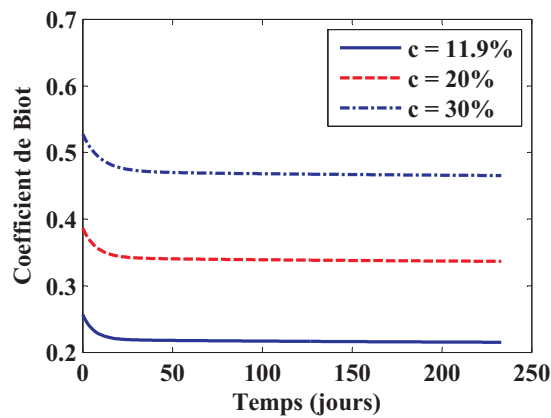


Figure 34: Coefficient de Biot pour les différentes valeurs de la fraction volumique c .

3.3.3. Etude de la forme de l'inclusion

3.3.3.1. Inclusion de disque

Dans cette partie, on étudie l'influence de la forme des inclusions dans une matrice. Les inclusions sphériques ont été étudiées ci-dessus (voir les équations (143)). On étudie ci-dessous le cas où des inclusions élastiques ayant la forme d'un disque sont distribuées aléatoirement dans une matrice viscoélastique (Figure 35).

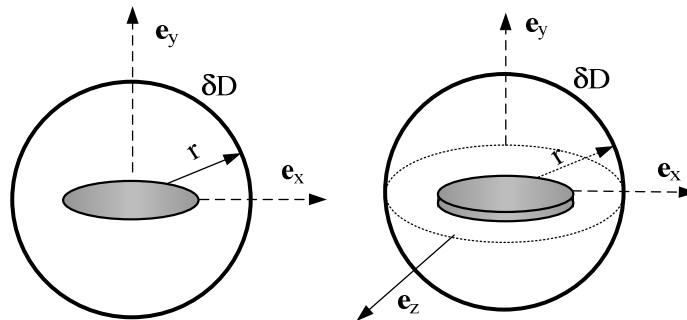


Figure 35: Matériau composite; Inclusion de disque.

L'estimation par le schéma MT du module de compressibilité est donnée d'après Benveniste [81] par

$$k_d^{hom} = k^m + c(k^i - k^m) \left[1 + (1-c) \frac{k^i - k^m}{k^m + 4/3\mu^i} \right]^{-1} \quad (158)$$

Celle du module de cisaillement est fourni par :

$$\mu_d^{hom} = \mu^m + c(\mu^i - \mu^m) \left[1 + (1-c) \frac{\mu^i - \mu^m}{\mu^m + f^i} \right]^{-1} \quad (159)$$

où:

$$f^i = \frac{\mu^i (9k^i + 8\mu^i)}{6(k^i + 2\mu^i)} \quad (160)$$

La différence entre l'équations (103) et l'équation (159) est celle entre f^m et f^i .

Dans l'espace de LC, (158) et (159) deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{k}_d^{hom}(s) = \tilde{k}^m + c(k^i - \tilde{k}^m) \left[1 + (1-c) \frac{k^i - \tilde{k}^m}{\tilde{k}^m + 4/3\mu^i} \right]^{-1}, \\ \tilde{\mu}_d^{hom}(s) = \tilde{\mu}^m + c(\mu^i - \tilde{\mu}^m) \left[1 + (1-c) \frac{\mu^i - \tilde{\mu}^m}{\tilde{\mu}^m + f^i} \right]^{-1}. \end{cases} \quad (161)$$

En introduisant (142) dans (161) avec $N = 2$, on obtient

$$\begin{cases} \tilde{k}_d^{hom}(s) = \frac{A_2^k s^2 + A_1^k s + A_0^k}{B_2^k s^2 + B_1^k s + B_0^k} \\ \tilde{\mu}_d^{hom}(s) = \frac{A_2^\mu s^2 + A_1^\mu s + A_0^\mu}{B_2^\mu s^2 + B_1^\mu s + B_0^\mu} \end{cases} \quad (162)$$

où A_i^k, B_i^k, A_i^μ et B_i^μ (avec $i = 0, 1, 2$) sont des paramètres dépendant des propriétés matérielles et de la fraction volumique des inclusions (voir l'Annexe II).

On considère les équations quadratiques :

$$\begin{cases} B_2^k s^2 + B_1^k s + B_0^k = 0, \\ B_2^\mu s^2 + B_1^\mu s + B_0^\mu = 0. \end{cases} \quad (163)$$

Encore une fois, on peut démontrer que chaque équation dans (163) a 2 solutions négatives distinctes. On peut décomposer (162) en fractions simples d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \tilde{k}_d^{hom}(s) = \frac{x_1^{dk}}{s - s_1^{dk}} + \frac{x_2^{dk}}{s - s_2^{dk}} + x_3^{dk} \\ \tilde{\mu}_d^{hom}(s) = \frac{x_1^{d\mu}}{s - s_1^{d\mu}} + \frac{x_2^{d\mu}}{s - s_2^{d\mu}} + x_3^{d\mu} \end{cases} \quad (164)$$

L'inverse de LC de (164), conduit aux expressions finales des modules effectifs dans l'espace de temporel :

$$\begin{cases} k_d^{hom}(t) = k_\infty^d + \sum_{i=1}^2 k_i^d e^{-t/\tau_i^{dk}}, \\ \mu_d^{hom}(t) = \mu_\infty^d + \sum_{i=1}^2 \mu_i^d e^{-t/\tau_i^{d\mu}}. \end{cases} \quad (165)$$

où k_i^d et μ_i^d (avec $i = \infty, 1, 2$) sont des modules de compressibilité et de cisaillement macroscopique et τ_i^{dk} et $\tau_i^{d\mu}$ (avec $i = 1, 2$) sont des temps caractéristiques macroscopiques (voir l'Annexe II)

On voit que dans ce cas, il y a seulement 2 temps caractéristiques macroscopiques et que l'ensemble des temps caractéristiques microscopiques est différent de celui des temps caractéristiques macroscopiques.

On présente ci-après les résultats numériques de l'influence de la forme de l'inclusion. Les propriétés mécaniques du béton CEM I à 20°C sont celles dans la thèse de Ladaoui [80]. On suppose que le béton a 2 phases, une matrice viscoélastique et une phase élastique associée aux granulats. Les propriétés mécaniques des granulats sont présentées dans le Tableau 4.

Tableau 4 : Valeurs des paramètres pour les inclusions

k^i (GPa)	μ^i (GPa)	c
42	24	0.679

A partir des résultats expérimentaux de Ladaoui, on obtient les paramètres microscopiques du modèle de Maxwell comme dans le Tableau 5.

Tableau 5 : Valeurs des paramètres pour le modèle de Maxwell généralisé à 3 branches.

Branche	∞	1	2
k_i^m (GPa)	7.50	6.97	6.72
μ_i^m (GPa)	2.32	2.05	3.17
τ_i^m (Jours)		5	150

La Figure 36 présente les évolutions des modules de compressibilité (à gauche) et de cisaillement (à droite) dans les 2 cas où les inclusions ont la forme sphérique et la forme d'un disque.

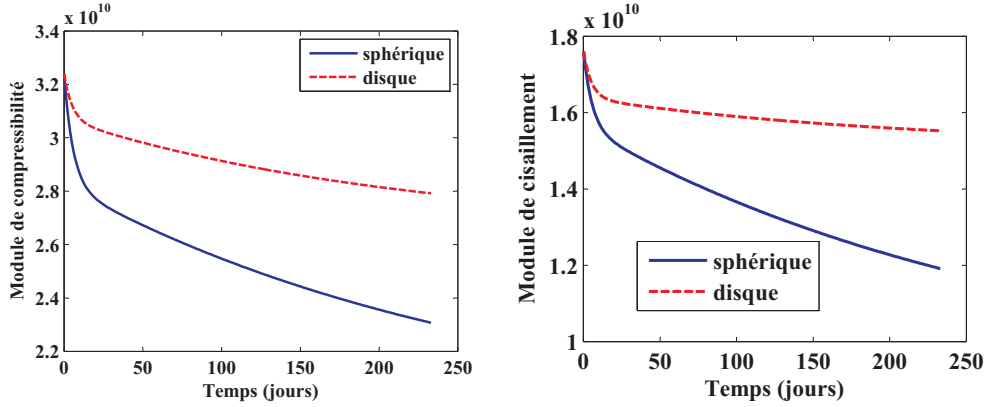


Figure 36: Influence de la forme des inclusions sur les modules de compressibilité effectif (à gauche) et de cisaillement effectif (à droite).

3.3.3.2. Inclusions sphéroïdales

On s'intéresse dans cette partie aux propriétés effectives d'un matériau composite ayant deux phases, une phase viscoélastique et des pores de la forme sphéroïdale orientées aléatoirement (Figure 37). On désigne par d et h sont les longueurs des demi-axes avec $h \ll d$.

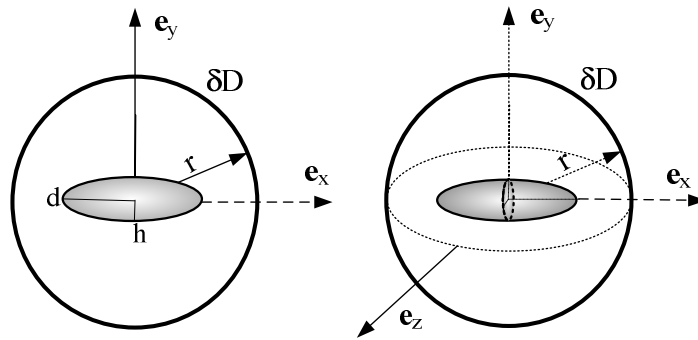


Figure 37: Matériau composite à inclusions sphéroïdales (2D et 3D).

Dans le cas $h/d \rightarrow 0$ où une inclusion devient une fissure, le module de compressibilité estimé par le schéma de MT est donné par Benveniste [81] :

$$k_{el}^{hom} = k^m \left\{ 1 + \beta \frac{16 \left[1 - (v^m)^2 \right]}{9(1 - 2v^m)} \right\}^{-1} \quad (166)$$

et le module de cisaillement par

$$\mu_{el}^{hom} = \mu^m \left\{ 1 + \beta \frac{(1-v^m)(5-v^m)}{45(2-v^m)} \right\}^{-1} \quad (167)$$

où v^m est le coefficient de Poisson de la matrice : $v^m = (3k^m - 2\mu^m) / (6k^m + 2\mu^m)$ et $\beta = \omega d^3 / V$ est le paramètre de la densité des fissures avec ω étant le nombre des pores plats (fissures) dans un volume V .

Quand la matrice est décrite par un modèle de Maxwell généralisé à trois branches ou avec $N = 2$, l'application du principe de correspondance à (166) et (167) donne

$$\begin{cases} \tilde{k}_{sp}^{hom}(s) = \frac{(A_4^k s^4 + A_3^k s^3 + A_2^k s^2 + A_1^k s + A_0^k)(B_2^k s^2 + B_1^k s + B_0^k)}{(C_4^k s^4 + C_3^k s^3 + C_2^k s^2 + C_1^k s + C_0^k)(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \\ \tilde{\mu}_{sp}^{hom}(s) = \frac{(A_4^\mu s^4 + A_3^\mu s^3 + A_2^\mu s^2 + A_1^\mu s + A_0^\mu)(B_2^\mu s^2 + B_1^\mu s + B_0^\mu)}{(C_4^\mu s^4 + C_3^\mu s^3 + C_2^\mu s^2 + C_1^\mu s + C_0^\mu)(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)} \end{cases} \quad (168)$$

les expressions des paramètres A_i^k, C_i^k, A_i^μ et C_i^μ (avec $i = 0, 1-4$), B_i^k et B_i^μ (avec $i = 0, 1, 2$) sont présentées dans l'Annexe III.

L'inverse de LC de (168) fournit

$$\begin{cases} k_{sp}^{hom}(t) = k_\infty^{sp} + \sum_{i=1}^6 k_i^{sp} e^{-t/\tau_i^k}, \\ \mu_{sp}^{hom}(t) = \mu_\infty^{sp} + \sum_{i=1}^6 \mu_i^{sp} e^{-t/\tau_i^\mu}. \end{cases} \quad (169)$$

où k_i^{sp} et μ_i^{sp} (avec $i = \infty, 1-6$) sont des modules de compressibilité et de cisaillement macroscopique et τ_i^k et τ_i^μ (avec $i = 1-6$) sont des temps caractéristiques macroscopiques (voir l'Annexe III).

En utilisant les formules (169) et les résultats expérimentaux de Ladaoui [80], on peut identifier les paramètres intervenant dans le modèle de Maxwell. La Figure 38 montre les évolutions des modules effectifs pour les différentes valeurs de la densité des fissures.

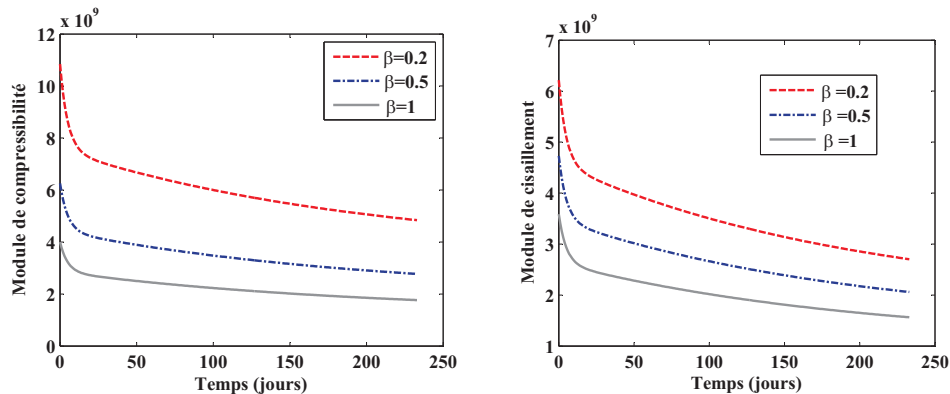


Figure 38: Evolution des modules effectifs pour les différentes valeurs de β .

Ces figures mettent en évidence que les modules effectifs diminuent rapidement quand β augmente.

3.4. Conclusions

En micromécanique des matériaux hétérogènes élastiques linéaires, un nombre important de résultats analytiques ont été obtenus pour calculer exactement, estimer d'une façon approchée ou encadrer de manière minorée et majorée leurs propriétés élastiques effectives. Par exemple, nous pouvons citer les résultats analytiques exacts de Hashin pour une sphère composite et un cylindre composite, les estimations analytiques obtenues à l'aide de la théorie de Mori-Tanaka, du modèle auto-cohérent généralisé et du schéma différentiel, et les bornes de Hashin-Shtrikman. Quand les matériaux hétérogènes ne sont plus élastiques linéaires mais viscoélastiques linéaires (sans vieillissement), il existe actuellement très peu de résultats analytiques concernant leurs propriétés effectives. En effet, même si la linéarité est préservée, le fait que la réponse d'une phase viscoélastique linéaire à un instant donné dépend de l'histoire entière du chargement antérieur rend plus complexe le problème de prédire la loi comportement d'un matériau hétérogène viscoélastique linéaire en fonction des propriétés de ses phases et de sa microstructure.

Cependant, depuis plus d'un demi siècle, le principe de correspondance a été établi entre l'élasticité linéaire et la viscoélasticité linéaire moyennant la transformée de LC. La difficulté principale rencontrée dans l'exploitation de ce principe pour obtenir des résultats viscoélastiques analytiques dans l'espace temporel à partir des résultats élastiques correspondants réside dans l'inversion de la transformée de LC. Noter également que la transformée de LC ou son inverse ne peut en général pas conserver l'ordre (ou une inégalité). Ceci a pour conséquence particulière que les bornes bien connues de Hashin-Shtrikman pour les matériaux hétérogènes élastiques linéaires n'ont pas leurs contreparties pour les matériaux hétérogènes viscoélastiques linéaires.

En micromécanique, l'application du principe de correspondance entre l'élasticité linéaire et la viscoélasticité linéaire remonte aux travaux de Hashin (1965) . Mais, jusqu'à présent, très peu de résultats analytiques ont été obtenus pour les propriétés effectives des matériaux hétérogènes viscoélastiques linéaires. Dans ce chapitre, en vue d'élaborer une modélisation micromécanique de la pâte de ciment durcie et des bétons, nous avons considéré une matrice viscoélastique linéaire isotrope qui est renforcée par des granulats supposés élastiques linéaires isotropes ou affaiblie par des microcavités ou microfissures. La matrice étant décrite par un modèle de Maxwell généralisé, nous avons appliqué le principe de correspondance pour exploiter le modèle des sphères composites de Hashin et Hashin-Shtrikman et la théorie de Mori-Tanaka. Nous avons obtenu un bon nombre de résultats analytiques nouveaux dans l'espace temporel pour les propriétés viscoélastiques effectives des matériaux hétérogènes en question. Techniquement parlant, les clés qui nous ont permis de déduire ces résultats

analytiques sont les suivantes : (i) le module de compressibilité effectif calculé d'après le modèle des sphères composites ou la théorie de Mori-Tanaka est une fonction rationnelle (ou un rapport de deux fonctions polynomiales) dans l'espace de LC ; (ii) le module de cisaillement effectif estimé d'après la théorie de Mori-Tanaka est également une fonction rationnelle dans l'espace de LC ; (iii) si le nombre des éléments viscoélastiques dans le modèle de Maxwell généralisé adopté est adéquatement choisi, la fonction rationnelle caractérisant le module de compressibilité effectif, le module de cisaillement effectif ou le coefficient de Biot effectif peut être analytiquement décomposé en un certain nombre de fonctions rationnelles simples irréductibles, ce qui nous permet d'effectuer l'inversion de la transformée de LC qui fournit analytiquement les fonctions de relaxation ou fluage effectives pour une sollicitation isotrope et une sollicitation déviatrice.

Les résultats analytiques que nous avons obtenus pour la loi de comportement des matériaux hétérogènes viscoélastiques linéaires en question confirment la conclusion générale bien connue que les hétérogénéités enrichissent le spectre des temps caractéristiques. En particulier, nous constatons que, même si un modèle de Maxwell généralisé très simple est utilisé pour décrire la matrice, les propriétés viscoélastiques effectives obtenues sont suffisamment riches et flexibles pour décrire la loi de comportement viscoélastique de la pâte de ciment ou des bétons identifiée expérimentalement si certaines conditions précisées dans le chapitre 2 sont respectées. Dans ce sens, nous pouvons dire que ce chapitre a réussi à établir une modélisation micromécanique du comportement viscoélastique des bétons.

4. MODELISATION PHENOMENOLOGIQUE DU VISCO-ENDOMMAGEMENT DES BETONS

Le phénomène de fluage du béton avec prise en compte de l'endommagement a été abordé dans la section 2.3. C'est un problème qui reste actuellement difficile à appréhender. Rappelons que dans la littérature, la plupart des auteurs supposent que lorsque les contraintes sont élevées (supérieures à environ 70 à 80% de la contrainte limite en compression), une partie importante des déformations totales est due à la fissuration, le reste découlant des effets de viscosité (voir par exemple [41, 82]). Nous avons vu également que certains auteurs proposent de prendre en compte le couplage fluage-fissuration en modifiant la déformation équivalente pilotant la variable d'endommagement du modèle de Mazars [45]. Notons que mis à part quelques approches (voir par exemple [83, 84]), ces modèles couplés font généralement l'hypothèse que le coefficient de Poisson reste constant.

Le modèle proposé dans ce travail est basé sur le concept des pseudo-déformations introduit par Schapery [57], qui permet via un principe d'équivalence élastique-viscoélastique relativement simple d'exprimer le modèle viscoélastique de fluage sous la forme d'une loi de comportement élastique linéaire. Cette approche est par ailleurs compatible avec l'utilisation du modèle de fluage analytique développé dans le chapitre précédent. Le modèle de fluage est ensuite couplé avec le modèle d'endommagement de Mazars, la variable d'endommagement étant pilotée par les pseudo-déformations. Après avoir décrit le schéma d'intégration numérique du modèle couplé, celui-ci est alors mis en œuvre et confronté à des résultats expérimentaux issus de la littérature. Les effets de la température et de l'humidité relative sont par la suite introduits dans le modèle via la méthode du temps équivalent. L'approche résultante est comparée à des résultats expérimentaux de fluage obtenus sur des bétons et des pâtes de ciment, à différentes températures et humidités relatives.

4.1. Couplage viscoélasticité-endommagement

4.1.1. Modèle de visco-endommagement

On considère ici que le béton, et plus généralement les matériaux cimentaires, ont un comportement viscoélastique pouvant être modélisé par une loi viscoélastique linéaire telle que celle développée au chapitre précédent. L'approche proposée par Schapery et co-auteurs [57] fondée sur le concept de pseudo-déformations permet de transformer le problème viscoélastique ainsi défini en un problème élastique équivalent de formulation nettement plus simple (voir la section 2.3). Ainsi, dans le cas d'un chargement uniaxial, la loi de comportement du béton peut s'écrire avec les équations (9)-(11). Notons que dans le cas particulier où $E(t) = E_R$ est constant, on obtient de l'équation (10) $\varepsilon^R = \varepsilon$ et on retrouve ainsi le comportement élastique linéaire défini par $\sigma = E\varepsilon$. On constate alors que le module de référence E_R doit être égal au module d'Young du matériau, soit $E_R = E$. En effet, à $t = 0$ le comportement du matériau est élastique (la pseudo-déformation est dans ce cas égale à la

déformation élastique instantanée), et on doit donc retrouver le comportement du matériau élastique endommageable classique, sans prise en compte de la viscosité.

L'extension de l'équation (11) au cas 3D isotrope peut naturellement prendre la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = 3k_R \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}^R + 2\mu_R \mathbf{J} : \boldsymbol{\varepsilon}^R \quad (170)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\varepsilon}^R$ est le tenseur des pseudos-déformations, k_R et μ_R sont, par analogie à E_R , respectivement les modules de référence de compressibilité et de cisaillement. De la même manière, on constate que ces modules de référence doivent être égaux aux modules élastiques du matériau. Dans l'équation précédente, \mathbf{L} et \mathbf{J} sont les opérateurs de projection classiques définis par $\mathbf{L} = 1/3 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ et $\mathbf{J} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{L}$, \mathbf{I} étant le tenseur d'identité d'ordre 2.

A partir de la décomposition du tenseur des contraintes en la somme des contraintes sphériques et déviatoriques :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{1}{3} \text{tr} [\boldsymbol{\sigma}(t)] \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) \quad (171)$$

déterminées à partir des déformations viscoélastiques correspondantes :

$$\begin{cases} \text{tr} [\boldsymbol{\sigma}(t)] = 3 \int_0^t k(t-\tau) \text{tr} \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau} \right) d\tau \\ \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) = 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}}{d\tau} \right) d\tau \end{cases} \quad (172)$$

avec $k(t)$ et $\mu(t)$ les modules de relaxation de compressibilité et de cisaillement du béton, on établit facilement les expressions des pseudo-déformations sphériques et déviatoriques (voir l'Annexe VI) :

$$\begin{cases} \text{tr} [\boldsymbol{\varepsilon}^R(t)] = \frac{1}{3k_R} \int_0^t 3k(t-\tau) \text{tr} \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau} \right) d\tau \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^R(t) = \frac{1}{2\mu_R} \int_0^t 2\mu(t-\tau) \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}}{d\tau} \right) d\tau \end{cases} \quad (173)$$

Le modèle viscoélastique 3D du béton est donc défini par la loi de comportement (170) et les équations constitutives (173).

Rappelons que les propriétés macroscopiques $k(t)$ et $\mu(t)$ sont déterminées dans le modèle développé dans le chapitre précédent à partir des propriétés des phases élémentaires constituant le matériau. Elles peuvent être obtenues analytiquement ou numériquement, en fonction du schéma d'homogénéisation et du nombre de phases.

Nous souhaitons introduire dans la loi de comportement de fluage une variable d'endommagement représentant les dommages subis par le matériau. Notre choix s'est porté

sur une variable isotrope pour des raisons de simplicité, le comportement résultant étant ainsi isotrope. Comme indiqué précédemment, nous nous sommes naturellement tournés vers le modèle d'endommagement de Mazars [45], qui a été et reste encore largement utilisé pour caractériser la fissuration des matériaux cimentaires ayant un comportement de type fragile. Initialement ce modèle a été développé en considérant un comportement non dépendant du temps pour le matériau sain, cependant nous avons vu que certains auteurs avaient proposé des extensions au cas viscoélastique. Dans ce travail nous proposons de coupler le modèle de Mazars au modèle de fluage viscoélastique linéaire via l'approche de Schapery et co-auteurs [57] et l'utilisation de pseudo-déformations. L'intérêt principal réside dans le fait que la formulation obtenue est particulièrement simple, les pseudo-déformations jouant le rôle des déformations élastiques dans la loi de comportement du modèle de Mazars.

Le modèle couplé fluage-endommagement (ou visco-endommagement) est ainsi défini par la relation entre le tenseur des pseudo-déformations et le tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = [1 - D_c(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R)] \{ k_R \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^R) \mathbf{I} + 2\mu_R \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}^R) \} \quad (174)$$

où l'endommagement du matériau est caractérisé par la loi d'évolution de la variable d'endommagement $D_c(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R)$ fonction de la pseudo-déformation équivalente $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R$:

$$D_c(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R) = 1 - \frac{\varepsilon_d(1 - A_{t,c})}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R} - A_{t,c} \exp[-B_{t,c}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R - \varepsilon_d)] \quad (175)$$

avec $A_{t,c}$, $B_{t,c}$ des paramètres du modèle en traction ou en compression, ε_d le seuil initial d'endommagement. La loi d'évolution de l'endommagement ci-dessus est similaire à celle introduite par Mazars dans le contexte des matériaux élastiques-endommageables. Cependant elle fait explicitement intervenir ici les pseudo-déformations via la pseudo-déformation équivalente $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R$, et dépend par conséquent du temps. La pseudo-déformation équivalente est calculée par l'expression introduite par Mazars en remplaçant les déformations par les pseudo-déformations [45] (voir l'équation (6)) :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R = \sqrt{\sum \langle \boldsymbol{\varepsilon}_I^R \rangle_+^2} \quad (176)$$

où les $\boldsymbol{\varepsilon}_I^R$ sont les déformations principales du tenseur $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R$ et $\langle \cdot \rangle_{ii+}$ désigne la partie positive de l'argument tel que :

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_I^R \rangle_+ = \boldsymbol{\varepsilon}_I^R & \text{si } \boldsymbol{\varepsilon}_I^R \geq 0, \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}_I^R \rangle_+ = 0 & \text{si } \boldsymbol{\varepsilon}_I^R < 0. \end{cases} \quad (177)$$

L'évolution de l'endommagement est déterminée à partir de la fonction seuil :

$$f(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R, D_c) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^R - \kappa(D_c) \quad (178)$$

où κ est un paramètre d'endommagement. La valeur $\kappa(D_c = 0) = \varepsilon_d$ est le seuil initial d'endommagement.

4.1.2. Equations constitutives en 1D

On présente dans cette sous-section la méthode d'approximation numérique permettant de déterminer l'expression explicite du modèle établi dans le cas unidimensionnel dans un premier temps. En effet il est clair que le modèle n'a dans le cas général pas de solution analytique. Nous nous proposons tout d'abord de regarder en détail le développement de l'équation (9) en la discrétisant de la façon suivante :

$$\sigma = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \approx \int_{t_0=0}^{t_1} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta t_2} d\tau + \dots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{\Delta t_{i+1}} d\tau \quad (179)$$

On considère ainsi implicitement une linéarisation dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$; autrement dit, le rapport $\Delta\varepsilon_{i+1} / \Delta t_{i+1}$ est constant (cf Figure 39). Cette hypothèse est très classique.

Le modèle de fluage développé au chapitre précédent permet d'écrire explicitement les expressions des modules sous une forme identique à celle d'un modèle de Maxwell généralisé. Nous allons ainsi détailler l'expression précédente dans le cas d'un modèle de Maxwell généralisé comportant $N+1$ branches dont une branche avec un ressort (voir la Figure 29). La fonction de relaxation est alors définie par (90) :

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (180)$$

La déformation totale à chaque pas de temps est calculée à partir de ses valeurs aux pas précédents, et l'équation (179) peut se réécrire, en introduisant la relation définissant le comportement du matériau ci-dessus, sous la forme suivante exprimant ε_{i+1} :

$$\varepsilon_{i+1} = \begin{bmatrix} \sigma + E_\infty \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_i}{\Delta t_{i+1}} E_k \tau_k (1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\tau_k}}) - \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} \sum_{k=1}^N E_k \tau_k e^{-\frac{t_{i+1}}{\tau_k}} (e^{\frac{t_i}{\tau_k}} - e^{\frac{t_{i-1}}{\tau_k}}) \\ \dots \\ - \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} E_k \tau_k e^{-\frac{t_i}{\tau_k}} (e^{\frac{t_i}{\tau_k}} - 1) \end{bmatrix} \left(E_\infty + \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \sum_{k=1}^N E_k \tau_k (1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\tau_k}}) \right)^{-1} \quad (181)$$

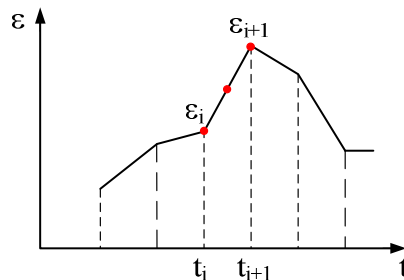


Figure 39: Approximation des déformations linéaires.

L'effet de l'endommagement n'apparaît pas dans les expressions (179) et (181). Pour le prendre en compte, réécrivons la loi de comportement (174) dans le cas unidimensionnel et pour le temps t_{i+1} :

$$\sigma_{i+1} = E_R \left[1 - D_c(\tilde{\varepsilon}_{i+1}^R) \right] \varepsilon_{i+1}^R \quad (182)$$

Ainsi l'expression de la contrainte dans le cas du couplage avec l'endommagement est déterminée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1} &= \left[1 - D_c(\tilde{\varepsilon}_{i+1}^R) \right] \int_0^{t_{i+1}} E(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \\ \Rightarrow \sigma_{i+1} &\simeq \left[1 - D_c(\tilde{\varepsilon}_{i+1}^R) \right] \left(\int_{t_0=0}^{t_1} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta t_2} d\tau + \dots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{\Delta t_{i+1}} d\tau \right) \end{aligned} \quad (183)$$

L'expression de la déformation (181) devient alors en prenant en compte l'endommagement :

$$\varepsilon_{i+1} \simeq \left[\begin{array}{l} \frac{\sigma_{i+1}}{1 - D_c(\tilde{\varepsilon}_{i+1}^R)} + E_\infty \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_i}{\Delta t_{i+1}} E_k \tau_k (1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\tau_k}}) - \frac{\Delta\varepsilon_i}{\Delta t_i} \sum_{k=1}^N E_k \tau_k e^{-\frac{t_{i+1}}{\tau_k}} (e^{\frac{t_i}{\tau_k}} - e^{\frac{t_{i-1}}{\tau_k}}) \\ - \dots - \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta t_1} E_k \tau_k e^{-\frac{t_i}{\tau_k}} (e^{\frac{t_i}{\tau_k}} - 1) \end{array} \right] \left(E_\infty + \frac{1}{\Delta t_{i+1}} \sum_{k=1}^N E_k \tau_k (1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\tau_k}}) \right)^{-1} \quad (184)$$

A partir de l'équation (10), on obtient l'expression discrétisée suivante permettant de calculer les pseudo-déformations :

$$\varepsilon_{i+1}^R \simeq \frac{1}{E_R} \left[\int_0^{t_1} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta t_2} d\tau + \dots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} E(t-\tau) \frac{\Delta\varepsilon_{i+1}}{\Delta t_{i+1}} d\tau \right] \quad (185)$$

On constate logiquement que ces pseudo-déformations sont calculées à chaque pas de temps à partir des déformations des pas précédents et du pas de temps actuel. On rappelle que la valeur du module de référence E_R est égale à celle de la rigidité instantanée (à $t=0$). L'équation (185) permet ainsi de calculer les évolutions de la variable d'endommagement à chaque pas de temps via les formules (175) et (176).

4.1.3. Equations constitutives en 3D

On étend ci-dessous la formulation précédente au cas 3D. Ces développements sont destinés à établir les équations nécessaires à l'implantation numérique du modèle dans le code de calcul par éléments finis Cast3M développé au CEA [85].

Dans notre cas, les modules de compressibilité et de cisaillement du modèle de fluage sont obtenus de manière explicite via le modèle développé au chapitre 3.3, et peuvent prendre la forme simplifiée suivante :

$$\begin{cases} k(t) = k_\infty + \sum_{i=1}^M k_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \\ \mu(t) = \mu_\infty + \sum_{i=1}^M \mu_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \end{cases} \quad (186)$$

où M est le nombre de temps caractéristiques macroscopiques. Rappelons que celui-ci est supérieur à celui des temps caractéristiques définissant le comportement des matériaux (en particulier de la matrice) à l'échelle microscopique, et dépend du nombre de phases et du schéma d'homogénéisation. Notons que M peut être différent pour le module de compressibilité et celui de cisaillement, mais cela n'a pas de conséquence pour les développements qui suivent.

L'implantation numérique du modèle dans le code de calcul par éléments finis Cast3M requiert l'expression du tenseur de contrainte σ_{i+1} au temps t_{i+1} , connaissant les déformations (et leur histoire) au même instant. Il convient alors dans un premier temps de calculer les pseudo-déformations. En adoptant l'hypothèse de linéarisation des déformations dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, la partie sphérique des pseudo-déformations définies à l'équation (173) s'écrit :

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R) &\approx \frac{1}{k_R} \left[\int_0^{t_1} k(t-\tau) \frac{tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1)}{\Delta t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} k(t-\tau) \frac{tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_2)}{\Delta t_2} d\tau + \dots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(t-\tau) \frac{tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})}{\Delta t_{i+1}} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{k_R} \left\{ k_\infty \sum_{l=1}^{i+1} tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1}) + \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{i+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \left[\frac{tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1})}{\Delta t_{l+1}} k_j \tau_j \left(\exp\left(\frac{t_{i+1}}{\tau_j}\right) - \exp\left(\frac{t_l}{\tau_j}\right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (187)$$

La partie déviatorique de la pseudo-déformation (173) se développe de la même manière en :

$$\begin{aligned} dev(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R) &\approx \frac{1}{\mu_R} \left[\int_0^{t_1} \mu(t-\tau) \frac{dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1)}{\Delta t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \mu(t-\tau) \frac{dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_2)}{\Delta t_2} d\tau + \dots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(t-\tau) \frac{dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})}{\Delta t_{i+1}} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\mu_R} \left\{ \mu_\infty \sum_{l=1}^{i+1} dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1}) + \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{i+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \left[\frac{dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1})}{\Delta t_{l+1}} \mu_j \tau_j \left(\exp\left(\frac{t_{i+1}}{\tau_j}\right) - \exp\left(\frac{t_l}{\tau_j}\right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (188)$$

Le tenseur des pseudo-déformations prend alors la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R) \mathbf{I} + dev(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R) \quad (189)$$

ce qui permet de calculer la pseudo-déformation équivalente définie à l'équation (176), qui se réécrit :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i+1}^R = \sqrt{\sum \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{l,i+1}^R \rangle_+^2} \quad (190)$$

Finale­ment la loi d'évolution de l'endommagement et la loi de comportement recherchée sont données par :

$$D_c(\tilde{\epsilon}_{i+1}^R) = 1 - \frac{\epsilon_d(1 - A_c)}{\tilde{\epsilon}_{i+1}^R} - A_c \exp[-B_c(\tilde{\epsilon}_{i+1}^R - \epsilon_d)] \quad (191)$$

$$\sigma_{i+1} = [1 - D_c(\tilde{\epsilon}_{i+1}^R)] \{k_R tr(\epsilon_{i+1}^R) \mathbf{I} + 2\mu_R dev(\epsilon_{i+1}^R)\}.$$

Ces dernières équations permettent ainsi de déterminer en fonction du tenseur de déformations le tenseur de contrainte σ_{i+1} au temps t_{i+1} . Cette formulation étant explicite, son implantation numérique ne pose pas de difficultés particulières.

Dans la section suivante nous appliquons le modèle à la simulation d'un essai de fluage sur une pâte de ciment. La réponse du modèle sera ensuite analysée au travers d'une étude paramétrique, puis elle sera comparée à d'autres approches de visco-endommagement.

4.2. Application du modèle de visco-endommagement aux essais de Parrott [68]

L'objectif de cette partie est d'appliquer le modèle de visco-endommagement à un essai de fluage sur matériau cimentaire afin d'une part d'identifier ses paramètres et d'autre part d'étudier sa réponse. Il existe de nombreux essais de fluage propre sur des matériaux cimentaires dans la littérature. Cependant très peu d'entre eux présentent simultanément les résultats des déformations longitudinales et transversales, ces dernières étant nécessaires pour caractériser les évolutions des deux modules viscoélastiques. Après avoir analysé plusieurs résultats expérimentaux d'essais de fluage, nous nous sommes tournés vers les résultats de l'essai de fluage sur pâte de ciment réalisé par Parrott [68], qui fournit à la fois les évolutions des déformations longitudinales et transversales. Cet essai de fluage en compression est effectué sur des éprouvettes de dimensions 150 x 150 x 20 mm (Figure 40). La direction de mesure des déformations transversales est celle correspondant à la plus grande dimension notée L. La Figure 41 présente les résultats expérimentaux d'évolution des déformations longitudinales et transversales obtenus par Parrott [68].

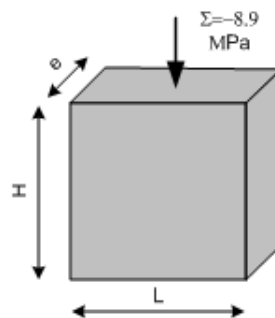


Figure 40: Dimensions de l'éprouvette de pâte de ciment.

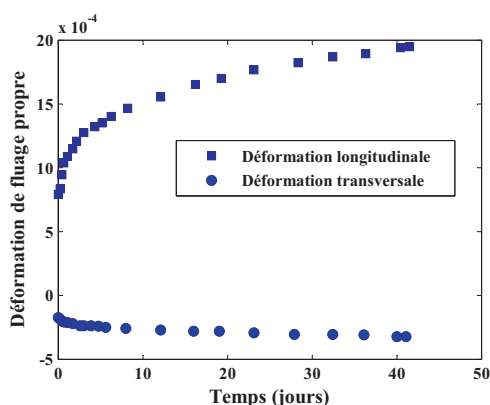


Figure 41: Evolution des déformations longitudinales et transversales d'une pâte de ciment [68].

Avant de mettre en place le modèle et de réaliser les simulations, il est intéressant d'examiner les évolutions du coefficient de Poisson dans le cas de ce test. Ce coefficient est déterminé à partir des déformations longitudinales et transversales par la formule :

$$\nu(t) = -\frac{\varepsilon_{tr}(t)}{\varepsilon_l(t)} \quad (192)$$

où les indices tr et l désignent respectivement les directions transversales et longitudinales. Il est à noter que cette relation correspond à une définition physique du coefficient de Poisson, différente de celle qui serait obtenue dans l'espace de LC [86]. D'autre part on constate que ν est constant si et seulement si les modules de compressibilité et de cisaillement ont la même fonction d'évolution dans le temps, autrement dit si leur rapport est constant [86]. Dans notre cas nous considérons des évolutions a priori indépendantes pour ces deux modules. La Figure 42 montre que le coefficient de Poisson obtenu à partir des déformations expérimentales de Parrott [68] et de la relation (192) diminue de façon tout à fait significative au cours du temps, d'abord très vite jusqu'à environ 5 jours puis plus modérément par la suite. Cela signifie que la pâte de ciment flue suivant la direction longitudinale plus que suivant la direction transversale. Ainsi pour modéliser correctement ce comportement il est nécessaire que les modules de compressibilité et de cisaillement aient des fonctions d'évolution différentes dans le temps.

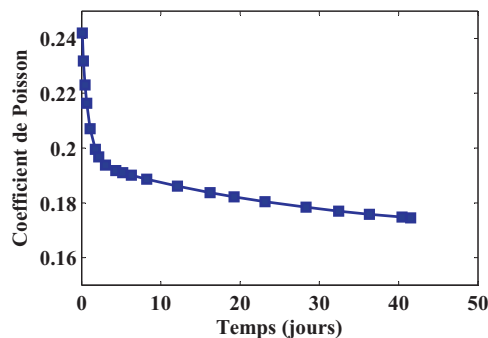


Figure 42: Evolution du coefficient de Poisson obtenu à partir des résultats expérimentaux de [68].

Le Tableau 6 ci-dessous donne les caractéristiques principales (les modules indiqués sont les modules élastiques) de la pâte de ciment utilisée par Parrott [68] : module d'Young E , coefficient de Poisson ν , rapport eau/ciment e/c , fraction volumique de porosité $frac$. La contrainte appliquée σ dans le cas du chargement de fluage est égale 30% de la résistance en compression de la pâte de ciment.

Tableau 6 : Caractéristiques de la pâte de ciment à 20°C [68].

E	ν	e/c	$frac$	σ
14.1 (GPa)	0.242	0.47	0.42	8.9 (MPa)

4.2.1. Mise en œuvre du modèle de visco-endommagement

Dans cette partie le modèle de visco-endommagement est caractérisé, identifié puis appliqué à la simulation des essais de Parrott. La première phase consiste à identifier les paramètres du modèle. Tout d'abord, nous proposons de fixer les paramètres du modèle d'endommagement de Mazars A_c, B_c , à partir des propriétés mécaniques et du chargement (30% de la résistance à la compression f_c). Cette opération est effectuée sur le matériau supposé élastique-endommageable, afin de pouvoir comparer les résultats à ceux issus de la littérature. La Figure 43 présente les résultats numériques d'évolution de la variable d'endommagement (gauche) et de la réponse contrainte-déformation dans le cas d'un chargement uniaxial de compression (droite) pour plusieurs jeux de valeurs listés dans le Tableau 7. Les valeurs choisies pour les paramètres sont $A_c = 0.8$ et $B_c = 439$ (cas 5), correspondant à une forme de courbe sur la Figure 43 droite considérée acceptable.

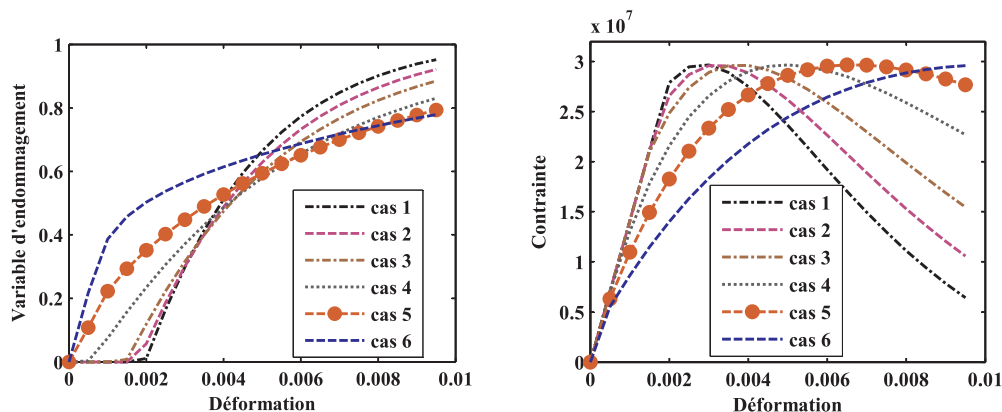


Figure 43: Evolution de la variable d'endommagement (gauche) et réponse contrainte-déformation pour un chargement de compression uniaxial (droite) pour plusieurs valeurs de A_c, B_c .

Tableau 7 : Valeurs des paramètres A_c et B_c .

Cas	1	2	3	4	5	6
A_c	2.1	1.8	1.5	1.1	0.8	0.5
B_c	1030	906	774	588	439	282

Nous allons maintenant développer le modèle de fluage viscoélastique qui sera appliqué dans cet exemple. Rappelons que celui-ci est établi à partir du modèle micromécanique développé dans le chapitre 3, et nécessite donc une description de la microstructure du matériau étudié. Nous faisons l'hypothèse simplificatrice que la pâte de ciment peut être représentée par une matrice homogène dans laquelle sont distribués des trous sphériques de fraction volumique $frac$ et correspondant à la porosité (Figure 44 gauche). Il est clair qu'en réalité, la matrice est elle-même composée d'un assemblage de divers hydrates ayant des comportements différents (C-S-H viscoélastiques, portlandite et autres cristaux élastiques). Cependant cette représentation conduirait à mettre en place un modèle complexe, qui dans le cadre d'une illustration des capacités du modèle telle qu'envisagée ici n'est pas primordiale. Nous supposons également pour simplifier que la matrice a un comportement viscoélastique linéaire représenté par le modèle de Maxwell à 3 branches, dont une branche purement élastique (Figure 44 droite). Nous verrons par la suite les résultats obtenus avec respectivement 2 et 4 branches, qui permettront de justifier ce choix.

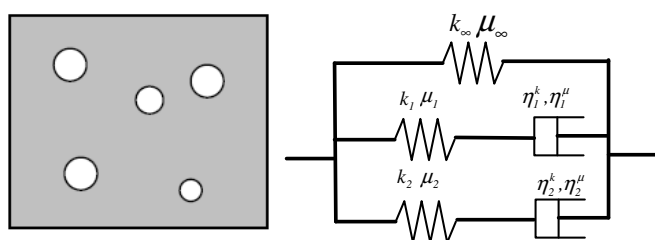


Figure 44: Représentation de la pâte de ciment (gauche) et modèle de Maxwell à 3 branches (droite).

Dans ce cas, les modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice sont donnés par (119) :

$$\begin{cases} k^m(t) = k_\infty^m + \sum_{i=1}^2 k_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{km}}}, \\ \mu^m(t) = \mu_\infty^m + \sum_{i=1}^2 \mu_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{\mu m}}}. \end{cases} \quad (193)$$

où τ_i^{km} et $\tau_i^{\mu m}$ sont les temps caractéristiques microscopiques correspondant aux modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice. Dans la suite, on supposera que $\tau_i^{km} = \tau_i^{\mu m} = \tau_i^m$, c'est-à-dire que les temps caractéristiques sont identiques pour les 2 modules. Il y a ainsi 2 temps caractéristiques microscopiques. Le problème posé revient donc à identifier les 8 coefficients inconnus de l'équation (193), soit : $k_\infty^m, k_1^m, k_2^m, \mu_\infty^m, \mu_1^m, \mu_2^m, \tau_1^m$ et τ_2^m . En faisant appel aux résultats établis dans le chapitre précédent, les expressions des modules de compressibilité et de cisaillement de la matrice peuvent s'écrire dans l'espace de LC comme (120) :

$$\begin{aligned} \tilde{k}^{hom}(s) &= \tilde{k}^m - \frac{frac(\tilde{k}^m - k^i)(4\tilde{\mu}^m + 3\tilde{k}^m)}{(3k^i + 4\tilde{\mu}^m) + 3frac(\tilde{k}^m - k^i)} \\ \tilde{\mu}^{hom}(s) &= \tilde{\mu}^m + frac(\mu^i - \tilde{\mu}^m) \left[1 + (1 - frac)\frac{\mu^i - \tilde{\mu}^m}{\tilde{f}^m + \tilde{\mu}^m} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (194)$$

Après quelques manipulations algébriques, les expressions de $\tilde{k}^{hom}(s)$ et $\tilde{\mu}^{hom}(s)$ peuvent être écrites à l'aide de polynômes :

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 A_i^k s^i}{\sum_{i=0}^4 B_i^k s^i} \quad et \quad \tilde{\mu}^{hom}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 A_i^\mu s^i}{\sum_{i=0}^4 B_i^\mu s^i} \quad (195)$$

où A_i^k, B_i^k, A_i^μ et B_i^μ sont des coefficients fonction de $k_\infty^m, k_i^m, \tau_i^m, \mu_\infty^m, \mu_i^m$ et de la fraction volumique des pores. L'étape suivante consiste alors à inverser ces expressions pour obtenir les formules finales des propriétés effectives dans l'espace temps. Comme indiqué dans le chapitre précédent, le problème de l'inversion des fonctions $\tilde{k}^{hom}(s), \tilde{\mu}^{hom}(s)$ de l'espace de LC dans l'espace temps revient à rechercher les racines des dénominateurs

$$\sum_{i=0}^4 B_i^k s^i \quad et \quad \sum_{i=0}^4 B_i^\mu s^i.$$

En appliquant la méthode analytique de résolution des équations du quatrième degré (voir l'Annexe IV), on obtient les 4 solutions correspondant à chacun des ces dénominateurs. On peut prouver que ces solutions sont réelles, négatives et distinctes. Les expressions (195) sont alors réécrites sous la forme :

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 A_i^k s^i}{B_4^k (s - s_1^k)(s - s_2^k)(s\tau_1^m + 1)(s\tau_2^m + 1)}, \quad (196)$$

$$\tilde{\mu}^{hom}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 A_i^\mu s^i}{B_4^\mu (s - s_1^\mu)(s - s_2^\mu)(s\tau_1^m + 1)(s\tau_2^m + 1)}$$

où les racines s_1^k, s_2^k, s_1^μ et s_2^μ , fonction des coefficients B_i^k, B_i^μ ($i=0-4$), sont données dans l'Annexe I. Après quelques manipulations algébriques, les expressions (196) s'écrivent finalement comme (128) et (139) :

$$\tilde{k}^{hom}(s) = x_5^k + \frac{x_1^k}{s - s_1^k} + \frac{x_2^k}{s - s_2^k} + \frac{x_3^k}{s\tau_1^m + 1} + \frac{x_4^k}{s\tau_2^m + 1} \quad (197)$$

$$\tilde{\mu}^{hom}(s) = x_5^\mu + \frac{x_1^\mu}{s - s_1^\mu} + \frac{x_2^\mu}{s - s_2^\mu} + \frac{x_3^\mu}{s\tau_1^m + 1} + \frac{x_4^\mu}{s\tau_2^m + 1}$$

où les coefficients x_i^k et x_i^μ ($i=1-5$) sont fonction des coefficients $A_i^k, A_i^\mu, B_i^k, B_i^\mu$ ($i=0-4$) et des racines $s_1^k, s_2^k, s_1^\mu, s_2^\mu$. Ils sont donnés explicitement dans l'Annexe I. L'inversion des expressions (197) permet d'obtenir les expressions des modules de compressibilité et de cisaillement effectifs (ou macroscopiques) de la pâte de ciment dans l'espace réel sous la forme :

$$k^{hom}(t) = k_\infty + \sum_{i=1}^4 k_i e^{-\frac{t}{\tau_i^k}} \quad (198)$$

$$\mu^{hom}(t) = \mu_\infty + \sum_{i=1}^4 \mu_i e^{-\frac{t}{\tau_i^\mu}}$$

où les coefficients $k_\infty, k_i, \tau_i^k, \tau_i^\mu, \mu_\infty$ et μ_i sont calculés à partir des coefficients x_i^k, x_i^μ ($i=1-5$) et des solutions $s_1^k, s_2^k, s_1^\mu, s_2^\mu$. Les temps caractéristiques macroscopiques sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \tau_1^k = \tau_1^m \\ \tau_2^k = \tau_2^m \\ \tau_3^k = -1 / s_1^k \\ \tau_4^k = -1 / s_2^k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tau_1^\mu = \tau_1^m \\ \tau_2^\mu = \tau_2^m \\ \tau_3^\mu = -1 / s_1^\mu \\ \tau_4^\mu = -1 / s_2^\mu \end{cases} \quad (199)$$

Rappelons que τ_1^m et τ_2^m sont les temps caractéristiques microscopiques. Cela montre que l'ensemble des temps caractéristiques microscopiques est un sous ensemble de celui des temps caractéristiques macroscopiques. D'une manière générale, on peut encore montrer qu'il existe un ordre dans les valeurs des temps caractéristiques macroscopiques :

$$\begin{cases} \tau_1^k < \tau_3^k < \tau_2^k < \tau_4^k \\ \tau_1^\mu < \tau_3^\mu < \tau_2^\mu < \tau_4^\mu \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \tau_1^m < -1 / s_1^k < \tau_2^m < -1 / s_2^k \\ \tau_1^m < -1 / s_1^\mu < \tau_2^m < -1 / s_2^\mu \end{cases} \quad (200)$$

Le modèle de fluage viscoélastique étant ainsi formulé, il est maintenant couplé au modèle d'endommagement selon l'approche développée dans la section précédente, qui peut être résumée par le système d'équations discrétisées (191). Il y a ainsi 8 paramètres microscopiques du modèle de Maxwell généralisé ($k_\infty^m, k_1^m, k_2^m, \mu_\infty^m, \mu_1^m, \mu_2^m, \tau_1^m, \tau_2^m$) à identifier, les 2 paramètres du modèle de Mazars (A_c, B_c) ayant par ailleurs été fixés. L'identification est réalisée à partir des résultats expérimentaux de déformations de fluage de Parrott [68] (voir Figure 41), en utilisant la méthode des moindres carrés. Cette méthode très classique permet de quantifier les différences (ou 'erreurs') entre les données expérimentales et les résultats numériques obtenus avec une famille de paramètres. La procédure d'identification mise en place est la suivante. On considère comme données de base les valeurs expérimentales connues $\{xdata_i, ydata_i\}$ correspondant aux valeurs d'abscisse et d'ordonnée des points expérimentaux de la Figure 41. On suppose que le modèle théorique est une fonction notée $F(p, xdata)$, où p est une famille de valeurs correspondant aux 8 paramètres microscopiques ($k_\infty^m, k_1^m, k_2^m, \mu_\infty^m, \mu_1^m, \mu_2^m, \tau_1^m, \tau_2^m$). La méthode consiste alors à trouver les valeurs de la famille p minimisant la quantité S suivante :

$$S = \sum_i R_i^2(p) = \sum_i [F(p, xdata_i) - ydata_i]^2 \quad (201)$$

où $R_i(p)$ sont les résidus du modèle caractérisant l'écart entre la mesure $ydata_i$ et la réponse $F(p, xdata_i)$ donnée par le modèle. S fournit donc une mesure de la distance globale ou erreur globale entre les données expérimentales et la réponse du modèle théorique. Le temps de l'essai de fluage de Parrott est d'environ 40 jours ; afin de limiter le domaine de recherche nous choisissons les valeurs des temps caractéristiques (τ_1^m, τ_2^m) dans l'intervalle $\{0, 40\}$ jours. Sans perte de généralité, nous proposons de plus de fixer la valeur de τ_1^m puis de minimiser l'erreur globale S pour les 7 autres paramètres de la famille p . Cette opération est ensuite répétée pour différentes valeurs de τ_1^m ; pour des raisons de simplicité τ_1^m est d'abord fixé à 1 jour, puis incrémenté de 1 jour à chaque nouveau calcul. La Figure 45 présente l'évolution de S en fonction du temps caractéristique τ_1^m . On constate que quand $\tau_1^m = 1$ jour, l'erreur globale est minimale. Donc on choisit cette valeur de τ_1^m , les autres valeurs des paramètres microscopiques sont présentées dans le Tableau 8.

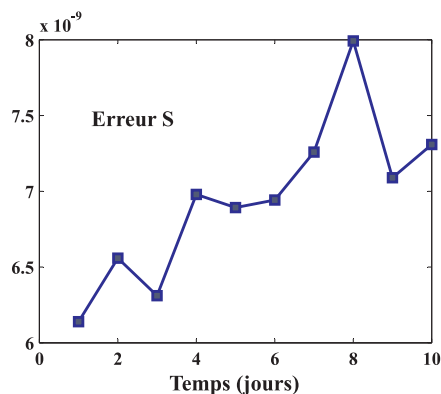


Figure 45: Valeurs de l'erreur globale S pour différentes valeurs de τ_l^m en abscisse.

Tableau 8 : Valeurs des paramètres microscopiques pour le modèle de Maxwell généralisé à 3 branches.

Branches	∞	1	2
k_i^m (GPa)	5.78	14.78	4.06
μ_i^m (GPa)	5.81	5.50	2.34
τ_i^m (Jours)		1	18

Les valeurs correspondantes des paramètres macroscopiques sont présentées dans le Tableau 9. On constate que les temps caractéristiques complémentaires τ_3^j et τ_4^j , $j \in \{k, \mu\}$ (c'est-à-dire ceux n'existant qu'à l'échelle macroscopique) sont proches pour les 2 modules. Ceci est probablement dû en partie au fait que les 2 temps caractéristiques microscopiques ont été choisis comme identiques. D'autre part les valeurs obtenues pour τ_3^j et τ_4^j sont proches respectivement de τ_1^m et τ_2^m , ce qui indique une répartition non optimale de l'ensemble des temps caractéristiques macroscopiques. Enfin, on note que les valeurs des modules k_i et μ_i sont systématiquement inférieures aux valeurs de k_i^m et μ_i^m .

Tableau 9 : Valeurs des paramètres macroscopiques pour le modèle de fluage.

Branches	∞	1	2	3	4
k_i (GPa)	2.56	4.64	0.32	1.52	0.07
μ_i (GPa)	2.33	2.32	0.03	0.97	0.008
τ_i^k (Jours)		1	1.87	18	26.9
τ_i^μ (Jours)		1	2.05	18	28.4

Les évolutions simulées des déformations longitudinales et transversales obtenues avec le modèle sont comparées sur la Figure 46 avec les données expérimentales de [68]. Comme les paramètres ont été identifiés sur ces mêmes données, on constate une très bonne concordance

entre simulations et expériences. Ainsi le modèle est capable de reproduire correctement les évolutions des déformations de fluage.

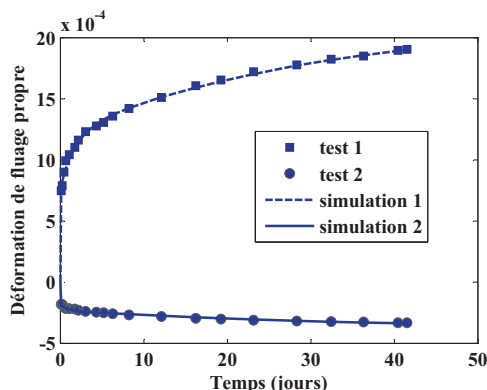


Figure 46: Résultats expérimentaux de [68] (symboles) et résultats numériques (traits pleins) correspondant aux déformations de fluage longitudinales (test 1) et transversales (test 2).

La courbe d'évolution de la variable d'endommagement obtenue lors du test de fluage est reportée sur la Figure 47. On constate qu'un endommagement non négligeable d'environ 0.18 apparaît à l'instant de la mise en charge (contrainte de 8.9 MPa). Puis la variable évolue relativement lentement en fonction du temps, un peu plus rapidement les 5 premiers jours, pour atteindre environ 0.22 à 40 jours. Ainsi le modèle tel qu'identifié prédit une augmentation modérée de l'endommagement au cours du temps. Il est difficile de prévoir avec précision ces évolutions pour des temps très longs car les résultats expérimentaux ainsi que les temps caractéristiques macroscopiques identifiés ne couvrent que des temps limités.

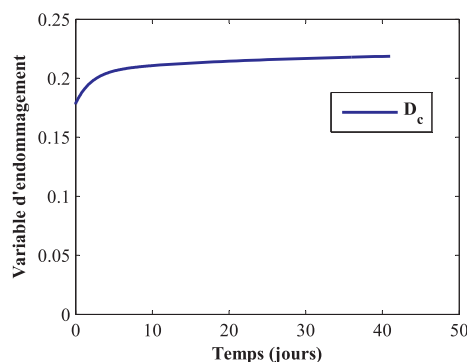


Figure 47: Evolution de l'endommagement.

Enfin, la Figure 48 présente l'influence du nombre de branches du modèle de Maxwell généralisé décrivant le comportement de la matrice de la pâte de ciment sur l'évolution des déformations de fluage longitudinales et transversales. En plus du cas à 3 branches étudié ci-dessus, 2 autres cas sont considérés, comportant respectivement 2 et 4 branches (dont une branche purement élastique). Il est à noter que la procédure d'identification des paramètres du

modèle est la même dans tous les cas. Afin de ne pas alourdir la présentation, les développements nécessaires à la formulation des modèles de fluage découlant des cas à 2 et 4 branches ne sont pas détaillés ici. On constate sur la Figure 48 que le cas à 2 branches ne permet pas de reproduire correctement les données expérimentales. En revanche les déformations des cas à 3 et 4 branches sont très proches et par ailleurs en très bon accord avec les résultats du test. Ceci justifie donc le recours au modèle de Maxwell à 3 branches conduisant à une formulation macroscopique nettement plus simple que celui comportant 4 branches.

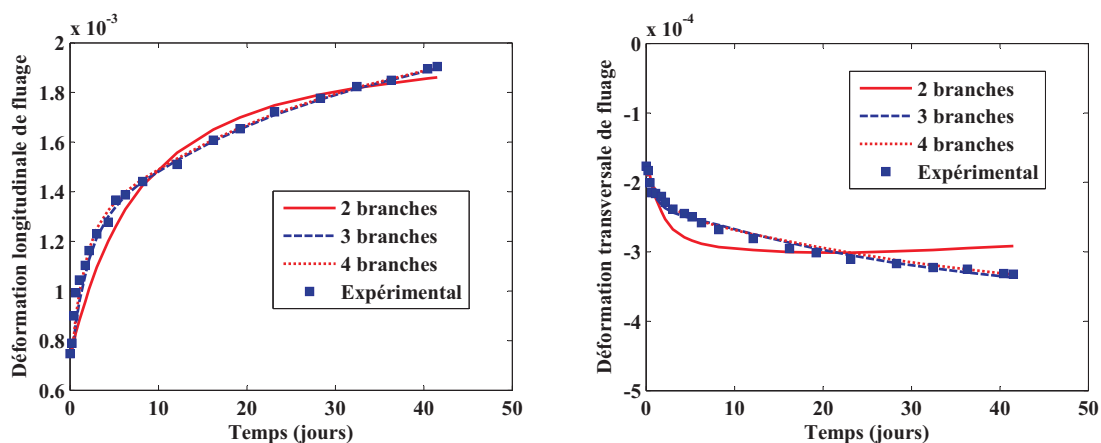


Figure 48: Influence du nombre de branches du modèle de Maxwell généralisé sur les déformations de fluage longitudinales (gauche) et transversales (droite).

On présente dans la suite de ce travail une étude paramétrique visant à examiner les effets de certains paramètres sur le comportement du matériau.

4.2.2. Etude paramétrique

L'objectif de cette partie est d'analyser l'influence de certains paramètres sur la réponse du modèle en termes de déformations de fluage et d'évolutions des propriétés mécaniques dans le temps. Les simulations considérées correspondent à l'essai de fluage défini ci-dessus. Dans un premier temps nous proposons de tirer avantage de l'approche micromécanique basée sur une description de la microstructure du matériau retenue pour le modèle de fluage. Nous avons considéré que la pâte de ciment était simplement constituée d'une matrice homogène dans laquelle étaient distribués des vides représentant les pores. Nous proposons alors de faire varier la fraction volumique de pores afin d'étudier son influence sur le comportement macroscopique. Ainsi 2 autres fractions volumiques sont considérées : $frac= 60\%$ et $frac= 20\%$, correspondant à 2 matériaux de caractéristiques très différentes. Ainsi $frac= 20\%$ est typiquement la porosité d'une pâte de ciment de type haute performance, tandis que $frac= 60\%$ correspond à un matériau de forte porosité, par exemple ayant subi une dégradation par

lixiviation [87]. Les autres paramètres identifiés précédemment restent inchangés. Notons que la nature du modèle de fluage permet directement de prendre en compte d'autres valeurs de $frac$ puisque ce coefficient apparaît explicitement dans l'estimation des propriétés mécaniques.

La Figure 49 présente les courbes d'évolution des déformation longitudinales et transversales de fluage pour les 3 valeurs de fraction volumique des pores étudiées, soit $frac=60\%$, $frac=42\%$ (valeur mesurée par Parrott [68]) et $frac=20\%$. On constate que l'amplitude des déformations est largement influencée par la valeur de $frac$: plus la fraction volumique de pores est importante, plus cette amplitude est grande ou autrement dit plus le matériau flue. Cela se comprend intuitivement car une fraction volumique de pores plus importante implique une résistance moindre du matériau, à propriétés mécaniques de la matrice équivalentes.

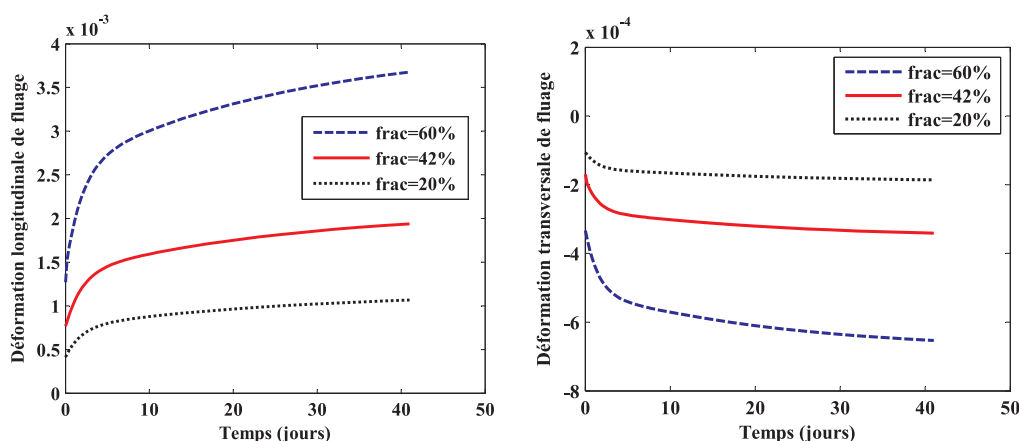


Figure 49: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.

On retrouve ce résultat sur la Figure 50 montrant les évolutions dans le temps des modules de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) pour les différentes valeurs de $frac$. En effet on constate que ces modules sont d'autant plus faibles que la porosité est élevée. Cependant ces conclusions doivent être considérées avec précaution du fait que l'endommagement, qui est pris en compte dans ces simulations, n'est pas représenté sur ces figures. Or les paramètres du modèle d'endommagement sont les mêmes pour les 3 cas étudiés faute de données expérimentales pour les caractériser plus précisément, ce qui est sans doute très discutable. Nous verrons d'ailleurs dans la suite que l'endommagement calculé est très différent pour ces 3 cas.

La Figure 51 présente les évolutions des pseudo-déformations longitudinales et transversales pour les 3 valeurs de $frac$. On constate une grande différence d'amplitude des pseudo-déformations entre les différents cas, ce qui paraît logique puisque celles-ci sont calculées directement à partir des déformations totales (voir Figure 49). En fait les différences les plus

marquées apparaissent dès la mise sous charge, puis les pseudo-déformations évoluent au cours du temps de façon relativement modérée et identique pour tous les cas.

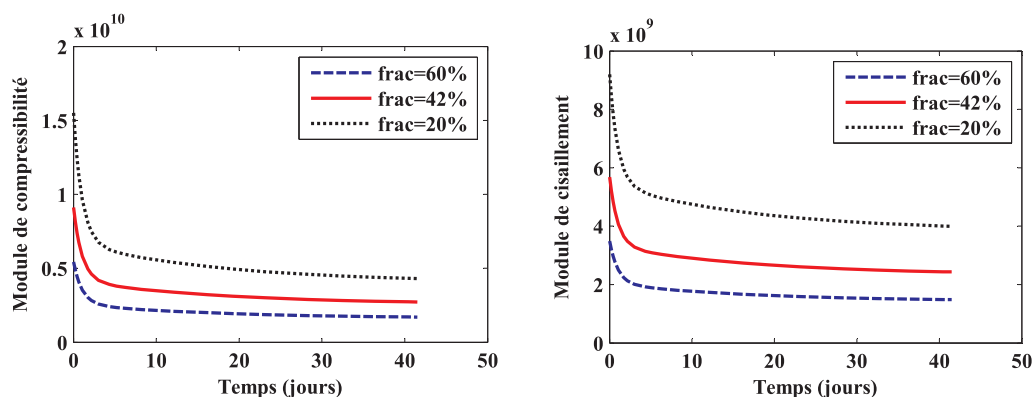


Figure 50: Evolution du module de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite), en Pa.

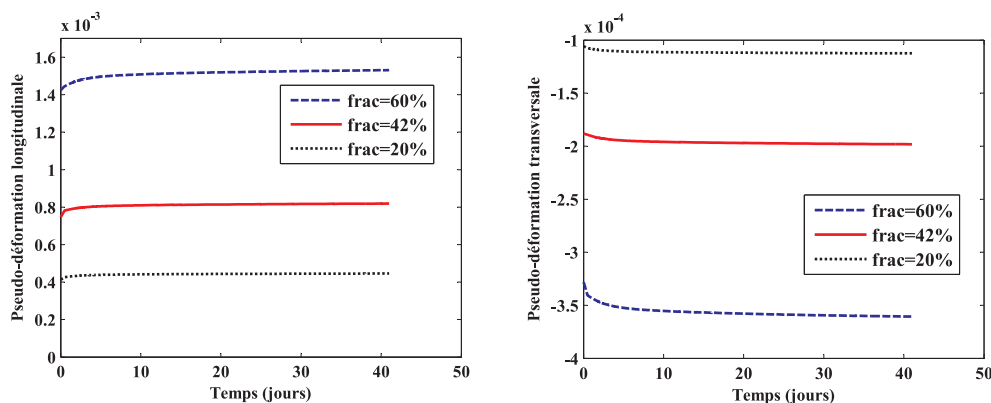


Figure 51: Evolution des pseudo-déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.

On retrouve ces résultats sur la Figure 55 qui présente les évolutions de la variable d'endommagement pour les 3 valeurs de *frac*. Rappelons en effet que les évolutions de cette variable s'expriment explicitement en fonction des pseudo-déformations principales positives, correspondant dans le cas de l'essai de fluage aux pseudo-déformations transversales. On observe alors des valeurs d'endommagement très différentes à $t = 0$, de 0.08 à 0.28 pour *frac* variant de 20% à 60%, puis l'endommagement progresse lentement (un peu plus rapidement sur les 5 premiers jours) jusqu'à augmenter d'environ 0.05 pour tous les cas à 40 jours. Les valeurs d'endommagement les plus grandes correspondent aux matériaux dont la fraction volumique de pores est la plus importante, et donc dont les propriétés mécaniques sont les plus faibles. Rappelons toutefois que ces résultats ont été obtenus avec les mêmes paramètres du modèle d'endommagement pour les différentes valeurs de *frac*.

La Figure 53 donne l'évolution numérique du coefficient de Poisson (à l'exception du cas *frac* = 42%, pour lequel le coefficient de Poisson découle des résultats expérimentaux) en fonction du temps pour les différentes valeurs considérées de fraction volumique de pores. Ces valeurs

ont été calculées à partir des déformations longitudinales et transversales simulées et en appliquant la formule (192). On observe que le coefficient de Poisson n'est affecté que modérément par la fraction volumique des pores, ce qui signifie que le rapport des déformations transversales sur les déformations longitudinales est peu différent pour les 3 cas.

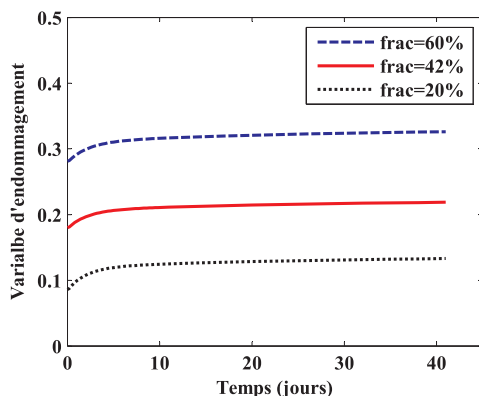


Figure 52: Evolution de la variable d'endommagement pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.

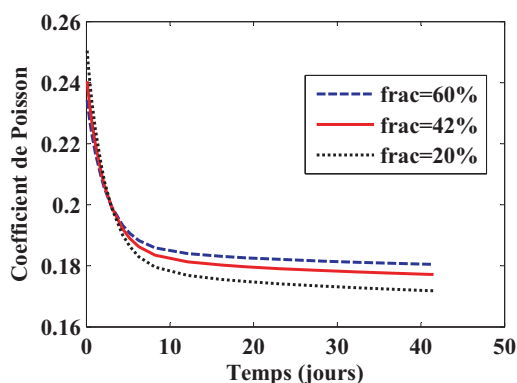


Figure 53: Evolution du coefficient de Poisson pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.

Nous nous intéressons maintenant à l'évolution du coefficient de Biot en conditions saturées pour les 3 valeurs de $frac$. Il existe très peu de données expérimentales concernant ce paramètre, y compris dans le cas élastique. C'est pourquoi dans la littérature ce coefficient de Biot est souvent considéré constant et égal à la valeur estimée en élasticité dans les modèles prenant en compte la viscoélasticité du matériau. Dans notre étude, le coefficient de Biot n'est a priori pas constant et est estimé à partir des propriétés mécaniques du matériau effectif et de la matrice (dépendant du temps) par l'expression (157).

Les évolutions simulées de ce coefficient sont présentées sur la Figure 54. On constate d'une part que les valeurs à $t = 0$ (i.e. élastiques) sont très différentes pour les 3 cas considérés et s'échelonnent d'environ 0.37 pour le matériau le moins poreux à 0.78 pour le plus poreux.

D'autre part, on observe dans tous les cas une diminution du coefficient de Biot, rapide sur les 5 premiers jours, puis très lente par la suite. La diminution totale à 40 jours est d'environ 0.05, ce qui est relativement peu pour le cas $frac = 60\%$ mais représente de l'ordre de 15% pour le cas $frac = 20\%$. Notons que cette décroissance indique a priori que la contrainte macroscopique liée aux pressions de pore tend à diminuer au cours du temps, et suit donc la même évolution que les modules effectifs. Intuitivement on aurait pu s'attendre à un résultat opposé car en poroélasticité un matériau de plus faible coefficient de Biot correspond en général à un matériau de plus faible porosité, et donc de propriétés mécaniques effectives plus grandes.

Par ailleurs, on remarque que d'après les estimations de la Figure 54 le coefficient de Biot n'évolue presque plus après les premiers jours, à l'instar des modules de compressibilité et de cisaillement (Figure 50). Ainsi dans ces conditions, considérer un coefficient de Biot constant ne paraît pas a priori être une hypothèse très forte, du moins après les quelques premiers jours pendant lesquels les propriétés mécaniques évoluent rapidement.

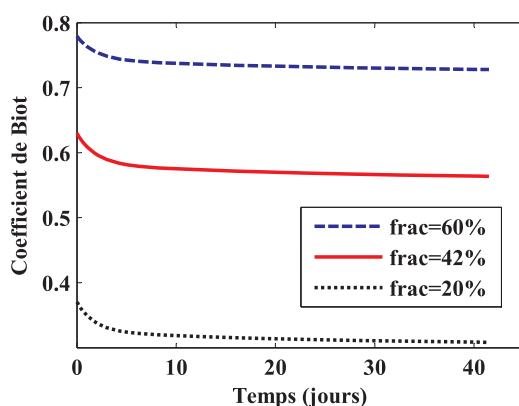


Figure 54: Evolution du coefficient de Biot.

On étudie dans ce qui suit l'influence des paramètres A_c et B_c du modèle d'endommagement sur le comportement macroscopique du matériau subissant un essai de fluage. Les autres propriétés mécaniques de la pâte de ciment restent inchangées pour simplifier. Nous choisissons parmi les valeurs de ces paramètres indiquées dans le Tableau 7 d'étudier les cas 4 et 6, sachant que le cas retenu jusqu'à présent est le cas 5.

Les Figure 55 et Figure 56 présentent respectivement les évolutions de la variable d'endommagement et des déformations obtenues pour les 3 couples de paramètres. On constate que le choix de ces paramètres affecte significativement la valeur initiale de l'endommagement à $t=0$. En revanche les évolutions de cette variable au cours du temps sont comparativement moins impactées. Elles sont cependant un peu plus marquées dans le cas où l'endommagement initial est plus grand (augmentation d'environ 0.05 contre 0.025 pour le

cas de plus faible endommagement initial). Les déformations sont logiquement également très affectées par les valeurs de A_c et B_c , et leur amplitude est plus grande quand l'endommagement initial est plus élevé.

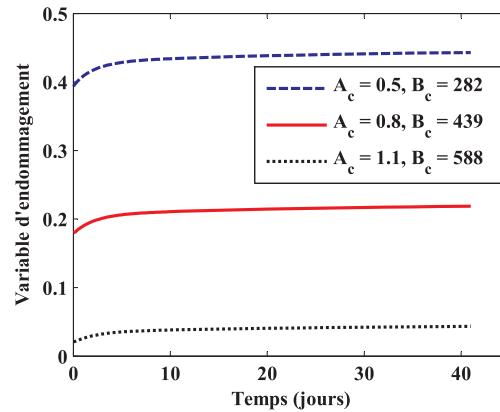


Figure 55: Evolution de la variable d'endommagement pour différentes valeurs de A_c et B_c .

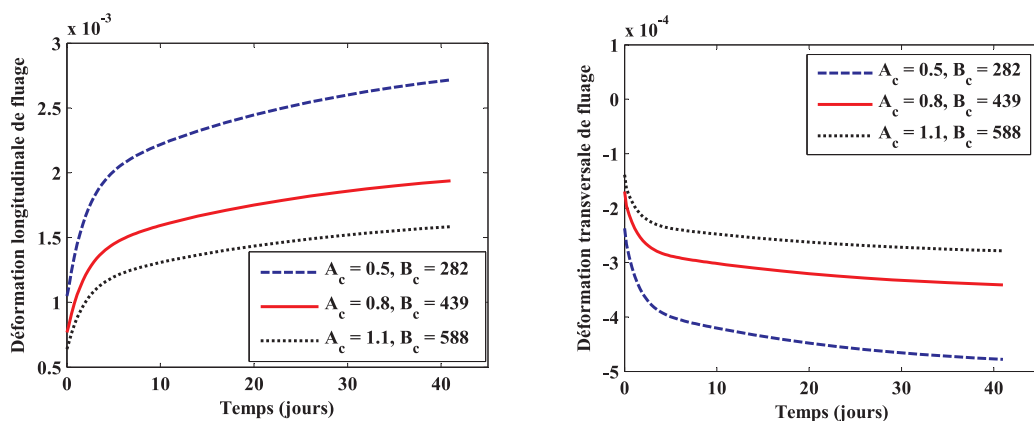


Figure 56: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes valeurs de A_c et B_c .

Afin d'examiner plus en détail la contribution de l'endommagement sur la réponse macroscopique du matériau dans le cas du chargement de fluage, nous proposons de comparer les déformations correspondant aux 3 configurations d'endommagement représentées sur la Figure 57. Les paramètres du modèle d'endommagement sont de nouveau ceux du cas 5 du Tableau 7. La première de ces configurations est celle correspondant à la Figure 46, notée D_c et tracée en trait rouge. Nous allons par ailleurs considérer le cas où l'endommagement est nul ($D_c = 0$) et celui où il est calculé uniquement avec les déformations instantanées ($D_c = D_c(t=0)$). Enfin, les évolutions des déformations dans la situation où les modules sont supposés indépendants du temps et égaux à leur valeur élastique (cas désigné par k, μ constants) sont également calculées. La Figure 58 présente l'ensemble des résultats de déformations longitudinales (à gauche) et transversales (à droite) correspondant à ces 4 configurations. On constate en confrontant les courbes rouge et verte que l'effet de l'évolution

dans le temps de la variable d'endommagement sur les déformations est peu marqué. Ce résultat est logique puisque D_c n'augmente que modérément de 0.18 à 0.22 dans l'intervalle de temps 0 - 40 jours. En revanche, la non prise en compte de l'endommagement dans le modèle conduit à des écarts nettement plus marqués, comme l'attestent les courbes en pointillés noirs. Ces écarts résultent donc en grande partie de l'endommagement initial $D_c = D_c(t=0)$. Enfin, les déformations obtenues dans la configuration où les propriétés mécaniques effectives sont indépendantes du temps (courbes en trait pointillé bleu) restent presque constantes et sont donc très éloignées des valeurs expérimentales pour des temps longs. Ainsi on peut conclure que dans ce cas de simulation l'évolution des déformations provient pour l'essentiel du caractère viscoélastique du matériau, et dans une bien moindre mesure de l'évolution de la variable d'endommagement.

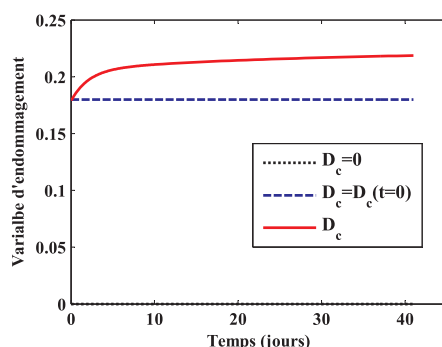


Figure 57: Evolution de l'endommagement pour différentes configurations.

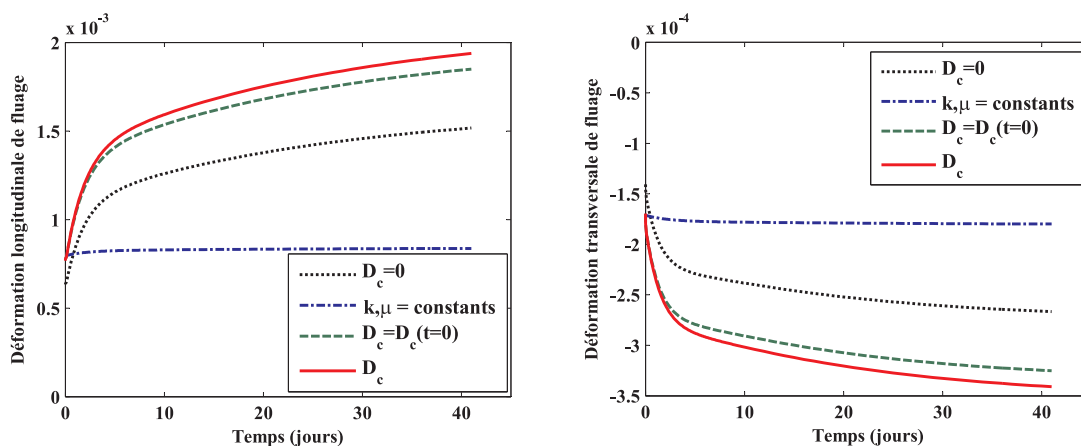


Figure 58: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes configurations.

4.2.3. Etude des évolutions de l'endommagement

On se propose maintenant d'analyser les résultats de simulation de fluage obtenus avec différentes valeurs de contraintes appliquées, afin de quantifier l'impact de l'endommagement sur la réponse du modèle. Nous considérons dans un premier temps les niveaux de chargement modérés de 20%, 30% (cas correspondant aux conditions expérimentales étudié

ci-dessus) et 50% de la résistance à la compression f_c . Mis à part les contraintes de chargement, tous les autres paramètres identifiés ou fixés ci-dessus restent inchangés. Signalons en outre que ces contraintes ne conduisent pas à la rupture de l'éprouvette sur la période de temps étudiée. Les Figure 59, Figure 60 et Figure 61 présentent les évolutions respectivement des déformations longitudinales et transversales, de la variable d'endommagement et des pseudo-déformations longitudinales et transversales pour les 3 cas de chargement.

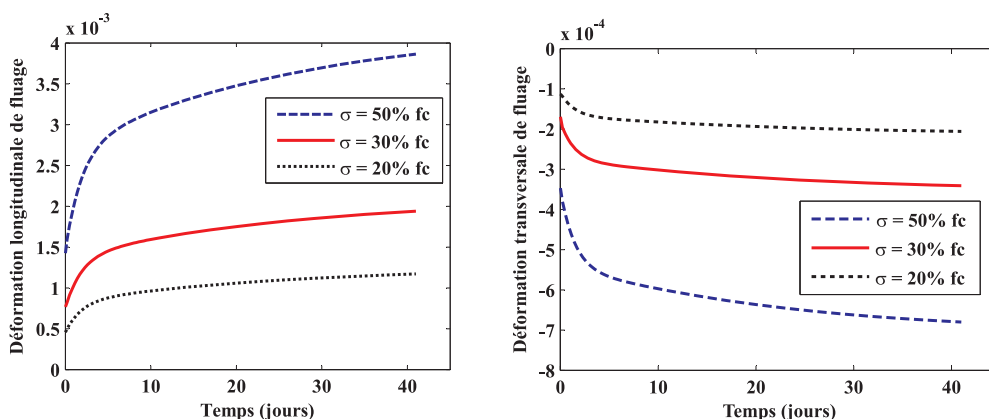


Figure 59: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes contraintes de fluage.

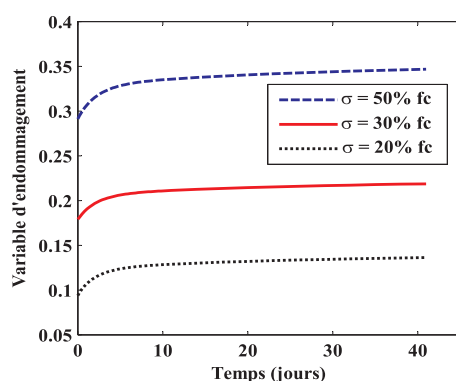


Figure 60: Evolution de l'endommagement pour différentes contraintes de fluage.

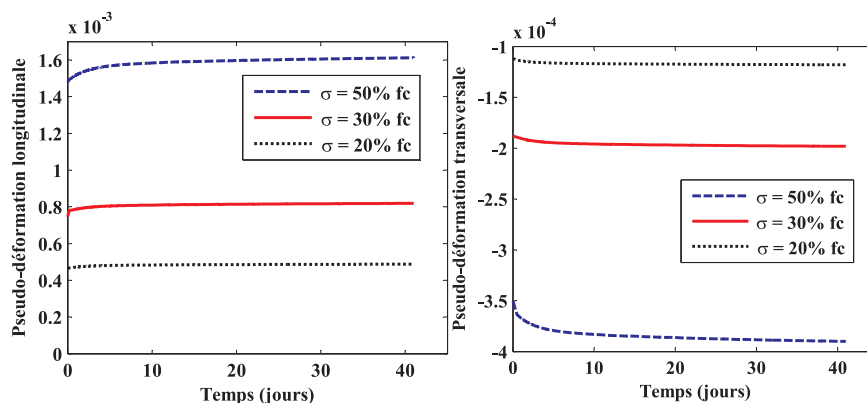


Figure 61: Evolution des pseudo-déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour différentes contraintes de fluage.

On observe logiquement une dépendance très forte des résultats par rapport au niveau de contraintes. Concernant la variable d'endommagement, il est intéressant de constater que ses évolutions à partir d'une valeur initiale s'échelonnant d'environ 0.09 à 0.29 pour des contraintes variant de 20 à 50% de f_c sont similaires pour les 3 cas. On note en effet une augmentation d'environ 0.05 à 40 jours sur chacune des courbes. Cet aspect est cohérent avec les évolutions des pseudo-déformations reportées sur la Figure 61, qui sont elles aussi très faibles comparativement aux valeurs initiales à $t = 0$. Ainsi les résultats de ces simulations de fluage jusqu'à une contrainte modérée de 50% de la résistance à la compression corroborent la conclusion précédente : les déformations de fluage calculées par le modèle résultent pour une grande part de la viscoélasticité du matériau, l'effet de l'endommagement restant secondaire.

Nous considérons dans un second temps des contraintes de fluage plus importantes, conduisant à la rupture du spécimen sur la période de temps étudiée. Des niveaux de chargement de 83 à 85% de la résistance à la compression f_c sont appliqués. Les Figure 62, Figure 63 et Figure 64 rassemblent les résultats en termes respectivement d'évolutions des déformations, de la variable d'endommagement et des pseudo-déformations. On observe pour ces valeurs de contraintes des évolutions nettement plus marquées des différentes grandeurs que dans les cas précédents. Par ailleurs l'allure des courbes obtenues est sensiblement modifiée à partir d'environ 29 et 17 jours pour les chargements respectivement de 83 et 85% de f_c . En effet on constate à ces échéances un point d'inflexion, suivi d'une augmentation très rapide de l'amplitude des déformations et de l'endommagement conduisant à la rupture des spécimens à environ 40 et 17 jours pour les cas de chargement respectivement de 83 et 85% de f_c .

Notons que la valeur d'endommagement initial est approximativement 0.48 dans les 2 cas et que la rupture survient pour une valeur d'environ 0.72-0.73. Il est clair que pour ces conditions de simulations les effets de l'endommagement deviennent prépondérants, et permettent de plus de décrire la ruine d'un élément de structure. L'allure des courbes de déformations longitudinales (Figure 62 gauche) est par ailleurs assez proche de celle observée expérimentalement (voir Figure 13).

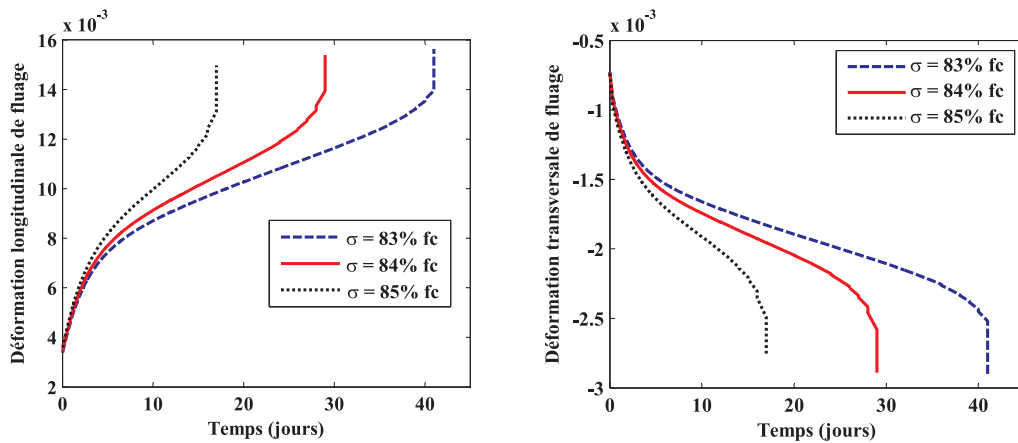


Figure 62: Evolution des déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour des contraintes de fluage élevées.

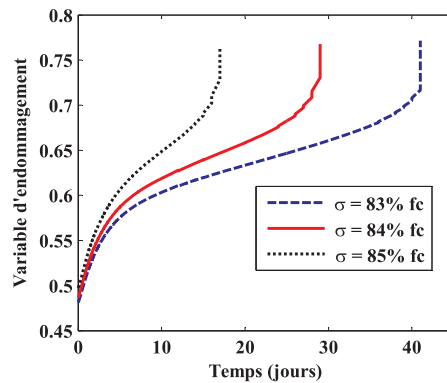


Figure 63: Evolution de l'endommagement pour des contraintes de fluage élevées.

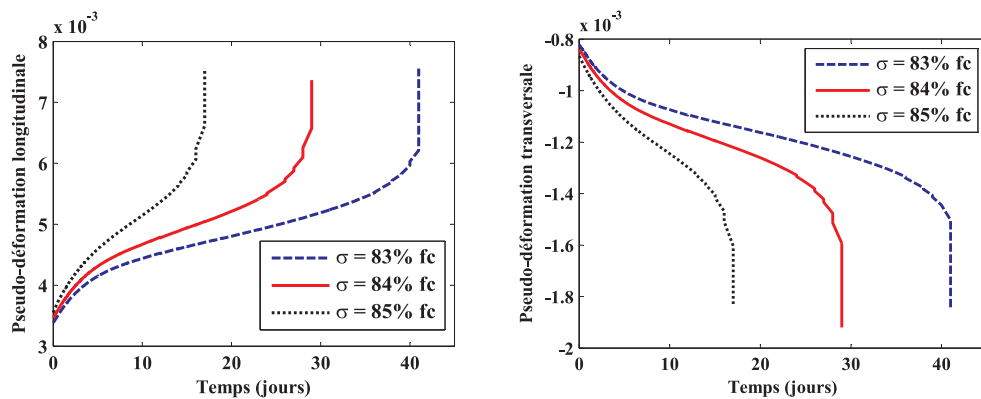


Figure 64: Evolution des pseudo-déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) pour des contraintes de fluage élevées.

Pour compléter cette étude, on présente sur les Figures suivantes les évolutions des déformations (Figure 65) et pseudo-déformations (Figure 66) maximales longitudinales et transversales, ainsi que de l'endommagement maximal (Figure 67) en fonction de la contrainte de fluage exercée. Ces valeurs maximales correspondent aux valeurs obtenues soit

quand t tend vers l'infini, soit au moment de la rupture. On constate que l'amplitude des déformations et de l'endommagement croît logiquement avec le chargement, et que cette croissance s'accélère quand la contrainte de compression se rapproche d'environ 24.8 MPa. A partir de cette valeur de chargement et jusqu'à celle de la résistance en compression du matériau (29.7 MPa), la rupture de l'éprouvette survient de manière systématique, et pour des valeurs de déformations et pseudo-déformations longitudinales, et d'endommagement approximativement égales à respectivement 1.39×10^{-2} , 6.15×10^{-3} et 0.71. La contrainte de compression de 24.8 MPa apparaît donc comme le chargement de fluage limite à partir duquel le matériau évolue vers un état totalement endommagé à plus ou moins long terme. Pour des contraintes plus faibles, la réponse du modèle ne prédit pas de rupture du spécimen et les déformations tout comme l'endommagement tendent vers les valeurs limites indiquées sur les Figures précédentes.

La Figure 68 présente la courbe du temps 'critique' pendant lequel le spécimen subit le chargement de fluage avant sa ruine, en fonction de la contrainte. On constate que ce temps critique diminue considérablement pour des valeurs de contraintes variant approximativement de 24.8 à 28 MPa. A partir de ce niveau de chargement correspondant à un temps critique d'environ 1 jour, la rupture de l'éprouvette se produit rapidement et le temps critique évolue beaucoup plus lentement.

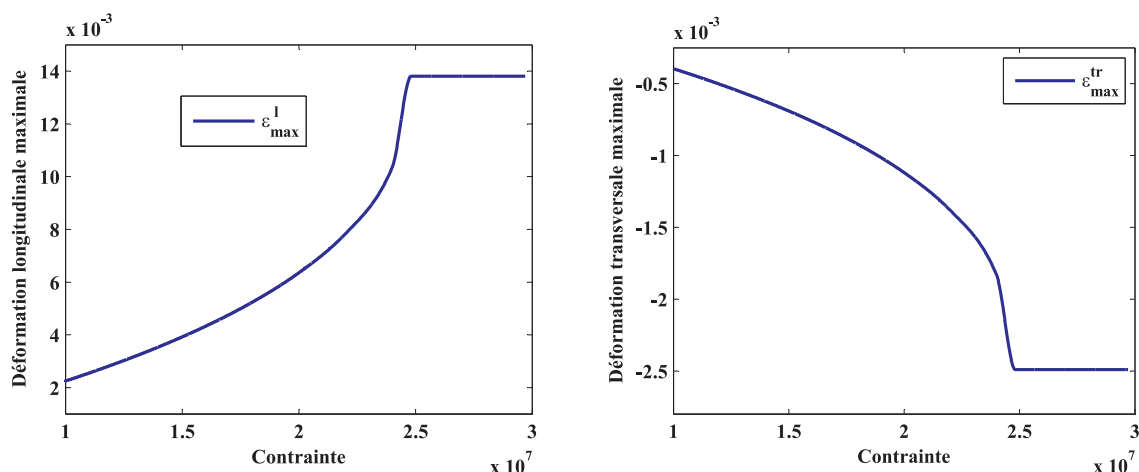


Figure 65: Déformation maximale longitudinale (gauche) et transversale (droite) en fonction de la contrainte de fluage.

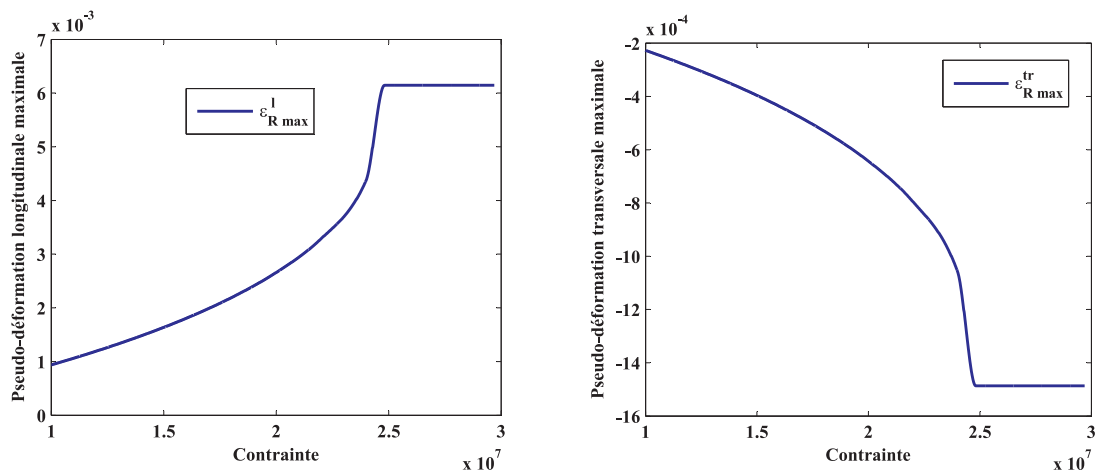


Figure 66: Pseudo-déformation maximale longitudinale (gauche) et transversale (droite) en fonction de la contrainte de fluage.

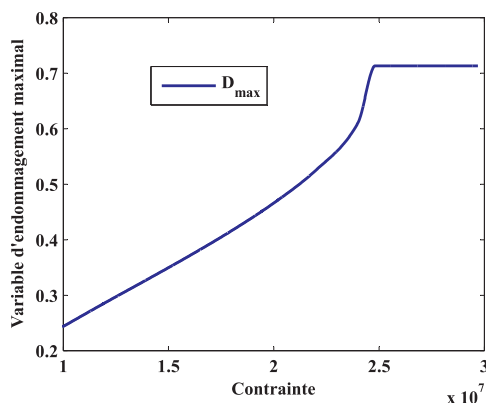


Figure 67: Variable d'endommagement maximale en fonction de la contrainte de fluage.

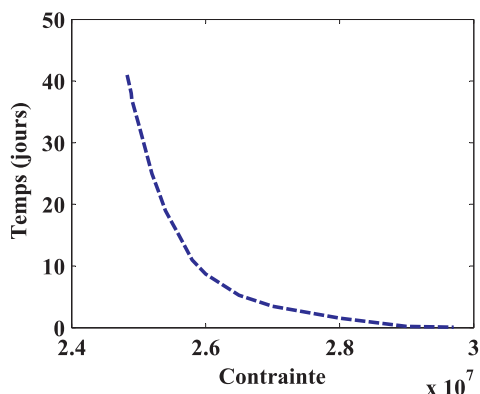


Figure 68: Temps de chargement conduisant à la rupture de l'éprouvette en fonction de la contrainte de fluage.

Pour terminer cette section, on s'intéresse à la comparaison de la réponse du modèle de visco-endommagement proposé dans cette étude avec celle issue d'approches similaires développées dans la littérature. En particulier, il est instructif de confronter notre modèles aux approches mentionnées dans la section 2.3 et basées également sur l'utilisation du modèle de

Mazars (voir les références [41, 46-49]). Rappelons que la différence principale entre ces modèles réside dans la méthode de calcul de la déformation équivalente pilotant les évolutions de la variable d'endommagement. Ainsi Mazzotti et Savoia [41] proposent d'introduire un coefficient de couplage β compris entre 0.1 et 0.4 dans le calcul de la déformation équivalente au sens de Mazars $\tilde{\varepsilon}$ comme suit :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \tilde{\varepsilon}_i \rangle_+^2}, \text{ avec } \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^e + \beta \varepsilon_i^{fl} \quad (202)$$

où ε_i^e est la déformation élastique. En se basant sur cette approche, Torrenti et al. [46] prennent la valeur $\beta = 0.1$ pour le cas du fluage en compression, et Reviron et al. [47] ainsi que Briffaut et al. [49] proposent $\beta = 0.24$, $\beta = 0.4$ pour le cas respectivement du fluage en traction et du béton au jeune âge. Rappelons que les évolutions de la variable d'endommagement D_c sont calculées dans notre modèle en fonction des pseudo-déformations via les équations (175) - (176).

La Figure 69 montre les évolutions de D_c obtenues pour le cas du fluage de la pâte de ciment sous une contrainte de 30% de f_c , avec les paramètres de la configuration de référence, et pour différentes méthodes de calcul. Signalons que la comparaison de ces différentes évolutions a été jugée plus pertinente et réaliste en ré-identifiant les paramètres du modèle afin que les déformations simulées soient en accord avec les données expérimentales pour tous les cas. On constate alors que les évolutions de D_c sont largement impactées par la méthode retenue. L'approche proposée dans cette étude et dénotée 'Schapery-Mazars' se rapproche du résultat obtenu avec $\beta = 0.24$ tel que calculé avec l'équation (202) pour les 10 premiers jours, puis tend progressivement vers le cas $\beta = 0.1$. La courbe référencée 'Mazars' consiste en l'utilisation directe du modèle de Mazars, c'est-à-dire que les évolutions de D_c sont déterminées à partir des déformations totales. On observe alors que l'endommagement résultant est nettement supérieur à celui estimé par les autres approches. Par ailleurs, de manière générale l'endommagement est d'autant plus grand que le coefficient β est lui-même grand, en accord avec l'équation (202). Pour conclure, les évolutions de la variable d'endommagement calculées par le modèle 'Schapery-Mazars' apparaissent proches des autres modèles considérés incluant un paramètre de calage, pour le cas test de fluage étudié. Cependant faute de résultats expérimentaux permettant de déterminer les niveaux de fissuration avec précision, il est difficile de conclure quant à la pertinence de ces approches.

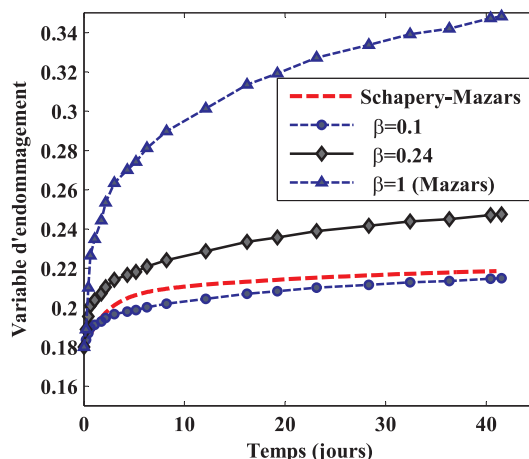


Figure 69: Evolutions de la variable d'endommagement pour différents modèles.

4.3. Conclusions

Dans ce chapitre, on a présenté un modèle appliqué au béton couplant les phénomènes de fluage et d'endommagement. Le modèle de fluage est basé sur le concept de pseudo-déformations introduit par Schapery [57], qui permet de transformer la formulation viscoélastique en une formulation élastique équivalente. L'histoire des sollicitations est alors stockée dans les pseudo-déformations. Le modèle d'endommagement adopté est le modèle simple de Mazars à une seule variable scalaire [45]. La formulation couplée prend alors la forme d'un modèle élastique-endommageable faisant intervenir les pseudo-déformations à la place des déformations. Une fois discrétisée dans l'espace temps, cette formulation peut se mettre sous la forme d'un système d'équations approchées explicites. Un avantage certain de ce modèle est qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser la transformation de Laplace pour résoudre le problème viscoélastique. D'autre part, il permet d'utiliser a priori tout modèle viscoélastique linéaire, et s'adapte donc très facilement à l'approche développée au chapitre précédent et basée sur l'application de méthodes d'homogénéisation.

L'implantation du modèle dans le code de calcul Cast3M est relativement simple car la formulation est explicite. L'identification de ses paramètres et la validation de son implantation ont été effectuées via une confrontation entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux des essais de fluage sur pâte de ciment réalisés par Parrott [68]. Dans le cadre de l'application du modèle de fluage micromécanique proposé au chapitre 3, la pâte de ciment est décrite simplement comme une matrice homogène de comportement viscoélastique linéaire dans laquelle sont dispersés des vides représentant les pores. Une étude visant à quantifier les effets de certains paramètres et du chargement sur la réponse du modèle est ensuite effectuée. En particulier, l'impact de la fraction volumique de pores sur le comportement macroscopique et l'évolution des paramètres mécaniques sont analysés au travers de résultats de simulations obtenus avec différentes valeurs de porosité. Les évolutions

4. Modélisation phénoménologique du visco-endommagement des bétons

de l'endommagement et ses effets sur la réponse du modèle sont également étudiés, notamment via des simulations avec diverses contraintes de fluage. Les conditions d'apparition de la rupture de l'éprouvette sont également investiguées en fonction du chargement et des paramètres du modèle d'endommagement.

En conclusion, le modèle développé se révèle à la fois simple et bien adapté aux problèmes de couplage entre les phénomènes de fluage et d'endommagement appliqués aux matériaux cimentaires. Dans le chapitre suivant il est étendu à la prise en compte des effets thermiques modérés et hydriques.

5. PRISE EN COMPTE DES EFFETS DES THERMO-HYDRIQUES

Dans le contexte général de l'étude du comportement à long terme des structures de stockage de déchets radioactifs, on s'intéresse dans ce chapitre aux effets de températures modérées et de l'humidité relative sur le phénomène de fluage. Le modèle développé dans les 2 chapitres précédents est ainsi modifié de façon à prendre en compte ces effets. On suppose que la température affecte les viscosités des amortisseurs apparaissant dans le modèle rhéologique décrivant le comportement viscoélastique linéaire de la matrice des bétons et pâtes de ciment via une approche du type loi d'Arrhenius et l'introduction d'une énergie d'activation. On fait également l'hypothèse que l'humidité relative influence les viscosités de ces amortisseurs, et qu'en outre elle affecte le comportement macroscopique au travers de la pression capillaire.

5.1. Prise en compte de la température

On présente dans cette section une extension du modèle de visco-endommagement présenté au chapitre 4 au cas d'élévations de températures modérées (inférieures à 80°C). Les effets de cette température sont pris en compte par la méthode du temps équivalent, qui a le mérite d'être relativement simple à mettre en œuvre et de n'introduire que peu de paramètres de calage (voir section 2.4.1). Le modèle sera ensuite appliqué à la simulation d'essais de fluage propre en compression sur béton à diverses températures comprises entre 20 et 80°C.

5.1.1. Modélisation du visco-endommagement des bétons avec températures variables

Rappelons que la méthode du temps équivalent peut formellement se mettre sous la forme (cf. équations (13)-(14)) :

$$t_e(t) = \int_0^t \exp \left[-\frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T(\tau)} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right] d\tau \quad (203)$$

où $t_e(t)$ est le temps équivalent, Q (J/mol) est l'énergie d'activation du processus visqueux, $R = 8.31$ (J/mol.°K) est la constante du gaz parfait, T_{ref} et T sont respectivement la température de référence et la température actuelle en degré Kelvin. La loi de comportement viscoélastique du béton (173) est alors réécrite en remplaçant t par t_e et devient :

$$\begin{cases} tr[\boldsymbol{\varepsilon}^R(t)] = \frac{1}{3k_R} \int_0^{t_e} 3k(t_e - \tau) tr\left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau}\right) d\tau \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^R(t) = \frac{1}{2\mu_R} \int_0^{t_e} 2\mu(t_e - \tau) \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}}{d\tau}\right) d\tau \end{cases} \quad (204)$$

Ainsi les effets de la température sont pris en compte via les expressions (174)-(175) et (203)-(204). Par ailleurs, le modèle de fluage développé au chapitre 3 nécessite une description de la

microstructure du matériau étudié afin d'appliquer la procédure d'homogénéisation basée sur le schéma de Mori-Tanaka. De façon analogue au cas de la pâte de ciment, nous choisissons une représentation simplifiée du béton et considérons que celui-ci est composé de 3 phases, une matrice homogène (la pâte de ciment), des inclusions sphériques élastiques (les granulats) et des pores également sphériques. Pour les applications présentées dans cette partie, les propriétés viscoélastiques linéaires de la matrice sont représentées par un modèle de Maxwell généralisé à 4 branches, dont une branche ne comporte qu'un ressort. Ce nombre de branches est adopté pour une description optimale des phénomènes de fluage dans la plage de temps considérée (voir §4.2.2). Nous verrons qu'il y a dans ces conditions 11 inconnues à identifier : $(k_\infty^m, k_1^m, k_2^m, k_3^m, \mu_\infty^m, \mu_1^m, \mu_2^m, \mu_3^m, \tau_1^m, \tau_2^m, \tau_3^m)$. Dans ce qui suit nous détaillons la formulation du modèle de fluage pour le cas d'une microstructure composée de 3 phases dont une matrice de comportement décrit par 2 modèles de Maxwell généralisé à 4 branches. Cette formulation est notablement plus complexe que celle développée dans la section 4.2.1. Les expressions des modules de compressibilité et de cisaillement microscopiques écrites dans l'espace de temps sont :

$$k^m(t) = k_\infty^m + \sum_{i=1}^3 k_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{km}}} \quad \text{et} \quad \mu^m(t) = \mu_\infty^m + \sum_{i=1}^3 \mu_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{\mu m}}} \quad (205)$$

où τ_i^{km} et $\tau_i^{\mu m}$ sont les temps caractéristiques microscopiques correspondant respectivement aux modules de compressibilité et de cisaillement. Dans notre calcul, on suppose pour simplifier que $\tau_i^{km} = \tau_i^{\mu m} = \tau_i^m$. Il y a donc 3 temps caractéristiques microscopiques. Les formules des modules de compressibilité et de cisaillement écrites dans l'espace de LC sont :

$$\tilde{k}^m(s) = k_\infty^m + \sum_{i=1}^3 k_i^m \frac{s}{s + 1/\tau_i^m} \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}^m(s) = \mu_\infty^m + \sum_{i=1}^3 \mu_i^m \frac{s}{s + 1/\tau_i^m} \quad (206)$$

En appliquant le schéma de MT à la microstructure définie ci-dessus dans l'espace de LC, on obtient les expressions effectives des propriétés macroscopiques comme (147) avec $M = 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{k}^{hom}(s) &= \left(\tilde{k}^m + \frac{4}{3} \tilde{\mu}^m \sum_{i=1}^2 c_i \frac{k^i - \tilde{k}^m}{k^i + 4/3 \tilde{\mu}^m} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^2 c_i \frac{k^i - \tilde{k}^m}{k^i + 4/3 \tilde{\mu}^m} \right)^{-1} \\ \tilde{\mu}^{hom}(s) &= \left(\tilde{\mu}^m + \tilde{f}^m \sum_{i=1}^2 c_i \frac{\mu^i - \tilde{\mu}^m}{\mu^i + \tilde{f}^m} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^2 c_i \frac{\mu^i - \tilde{\mu}^m}{\mu^i + \tilde{f}^m} \right) \end{aligned} \quad (207)$$

avec \tilde{f}^m est défini comme (136).

où c_i est la fraction volumique de la phase particulière i (granulats et pores). On applique à présent la procédure permettant d'établir des expressions analytiques de ces propriétés macroscopiques dans l'espace temps. Cette procédure repose sur l'écriture de $\tilde{k}^{hom}(s)$ et $\tilde{\mu}^{hom}(s)$ sous la forme de fraction rationnelle. Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons :

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \frac{\left(\sum_{i=0}^3 A_i^k s^i\right)\left(\sum_{i=0}^6 C_i^k s^i\right)}{\left(\sum_{i=0}^3 B_i^k s^i\right)\left(\sum_{i=0}^6 D_i^k s^i\right)} \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}^{hom}(s) = \frac{\left(\sum_{i=0}^3 A_i^\mu s^i\right)\left(\sum_{i=0}^9 C_i^\mu s^i\right)}{\left(\sum_{i=0}^3 B_i^\mu s^i\right)\left(\sum_{i=0}^9 D_i^\mu s^i\right)} \quad (208)$$

où les coefficients $A_i^k, B_i^k, C_i^k, D_i^k, A_i^\mu, B_i^\mu, C_i^\mu$ et D_i^μ sont exprimés en fonction des paramètres $k_\infty^m, k_i^m, \tau_i^m, \mu_\infty^m, \mu_i^m$ et de la fraction volumique c_i des inclusions et des pores. Le second aspect de la procédure réside dans la recherche des racines des dénominateurs apparaissant dans les expressions des fonctions $\tilde{k}^{hom}(s)$ et $\tilde{\mu}^{hom}(s)$ afin de pouvoir les inverser facilement. Ainsi, il s'agit de résoudre les deux équations suivantes :

$$\left(\sum_{i=0}^3 B_i^k s^i\right)\left(\sum_{i=0}^6 D_i^k s^i\right) = 0 \quad (209)$$

$$\left(\sum_{i=0}^3 B_i^\mu s^i\right)\left(\sum_{i=0}^9 D_i^\mu s^i\right) = 0 \quad (210)$$

Analytiquement, il n'existe pas de méthode pour déterminer les racines de polynômes d'ordre supérieur à 4. Or les équations (209) et (210) font intervenir des polynômes d'ordre 6 et 9. On se propose alors d'utiliser une méthode numérique pour calculer ces racines. On choisit ainsi la méthode très connue de Newton-Raphson pour résoudre les équations d'ordre 6 et 9 suivantes (voir l'Annexe VII) :

$$\sum_{i=0}^6 D_i^k s^i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^9 D_i^\mu s^i = 0 \quad (211)$$

On trouve finalement 9 solutions négatives distinctes pour l'équation (209) et 12 pour l'équation (210), si bien que les modules macroscopiques effectifs de compressibilité et de cisaillement dans l'espace réel s'écrivent sous la forme :

$$k^{hom}(t) = k_\infty + \sum_{i=1}^9 k_i e^{-\frac{t}{\tau_i^k}} \quad \text{et} \quad \mu^{hom}(t) = \mu_\infty + \sum_{i=1}^{12} \mu_i e^{-\frac{t}{\tau_i^\mu}} \quad (212)$$

Dans les sections suivantes sont présentées des applications de ce modèle au cas de bétons soumis à des élévations de températures dans la plage de 20 à 80°C.

5.1.2. Simulation des essais de Ladaoui [80]

On applique le modèle défini en section précédente à la simulation des essais de fluage propre en compression à 100% d'humidité relative réalisés par W. Ladaoui au Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions de Toulouse [80] durant sa thèse financée par l'ANDRA. Plusieurs températures ont été étudiées : 20, 50 et 80°C. L'identification des paramètres du modèle de Maxwell est conduite à partir des résultats expérimentaux en adoptant une

procédure simplifiée. Celle-ci consiste à fixer a priori les valeurs des temps caractéristiques de façon à couvrir une plage de temps en adéquation avec les expériences. Par ailleurs, l'hypothèse selon laquelle les évolutions du coefficient de Poisson sont similaires à celles des essais de Parrott présentés en section 4.2.1 a été adoptée. Les caractéristiques mécaniques principales instantanées du béton à 20 °C sont données dans le Tableau 10. Nous supposons que ces caractéristiques restent constantes dans la gamme de températures de 20 à 80°C. Les propriétés élastiques retenues pour les granulats sont reportées dans le Tableau 11, leur fraction volumique étant estimée à 0.679 et celle de la porosité à 0.112 (voir l'annexe IX pour plus de détails concernant la formulation du béton utilisé pour les essais de Ladaoui). Les paramètres microscopiques du modèle de Maxwell représentant le comportement de la matrice du béton identifiés à partir des résultats expérimentaux de déformations longitudinales à 20 °C sont listés dans le Tableau 12 (voir la Figure 70 pour la comparaison expériences-simulations). Notons que le chargement de fluage retenu correspond classiquement à 30% de la résistance en compression f_c . Enfin, les paramètres macroscopiques du modèle de fluage définis dans l'équation (212) et calculés à partir des valeurs des paramètres microscopiques du Tableau 12 et des autres données matérielles sont indiqués dans le Tableau 13.

Tableau 10 : Caractéristiques du béton à l'âge de chargement (CEM I) [80].

f_c	ν	E_{cm}
86 (MPa)	0.27	45.50 (GPa)

Tableau 11 : Caractéristiques des granulats.

E_i	ν_i	k_i	μ_i
60 (GPa)	0.25	40 (GPa)	24 (GPa)

Tableau 12 : Valeurs des paramètres microscopiques pour le modèle de Maxwell généralisé à 4 branches à 20°C.

Branche	∞	1	2	3
k_i^m (GPa)	10.16	5.99	11.32	4.92
μ_i^m (GPa)	8.58	6.42	3.62	2.29
τ_i^m (Jours)		1	20	100

En utilisant le modèle de fluage ainsi identifié à 20°C et à l'aide de l'expression (204), on peut maintenant ajuster la valeur de l'énergie d'activation Q à partir des résultats expérimentaux obtenus à une autre température que 20°C. Nous retenons pour cela les essais réalisés à 50°C. Les propriétés mécaniques du béton et les déformations instantanées expérimentales longitudinales et transversales à 50°C sont présentées dans le Tableau 14. La valeur identifiée de Q/R est 6989°K, et on en déduit celle de l'énergie d'activation

5. Prise en compte des effets des thermo-hydriques

$Q \approx 58079 (J/mol)$. Les résultats numériques obtenus sont reportés sur la Figure 70 et comparés aux résultats expérimentaux. Notons que cette figure ne présente que les déformations instantanées et de fluage propre, les déformations d'origine thermique dues à la dilatation du matériau étant omises afin de faciliter la comparaison. D'autre part les déformations transversales à 50°C n'ont pas été mesurées expérimentalement. On constate alors un très bon accord entre les simulations et les essais, ce qui indique que la méthode particulièrement simple du temps équivalent adoptée pour prendre en compte les effets de la température semble bien adaptée.

Tableau 13 : Valeurs des paramètres macroscopiques du modèle de fluage à 20°C.

Branche	∞	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
k_i (GPa)	2.38	3.15	0.14	6.36	0.56	0.97	0.69	0.68	0.68	0.35			
μ_i (GPa)	1.58	1.30	0.11	5.02	0.34	0.59	0.54	0.14	0.645	0.14	0.66	0.46	0.56
τ_i^k (Jours)		1	1.18	1.3	20	24.14	27.7	100	132	188			
τ_i^μ (Jours)		1	1.29	1.40	1.70	20	25.2	27.2	28	100	142	173	242

Tableau 14 : Propriétés du béton et déformations de fluage propre à 50°C [80].

σ (MPa)	ε_{inst} longi ($\mu m/m$)	E_{cm} (GPa)	ε_{inst}^{tr} trans ($\mu m/m$)	ν
25.8	620	45.5	-203	0.27

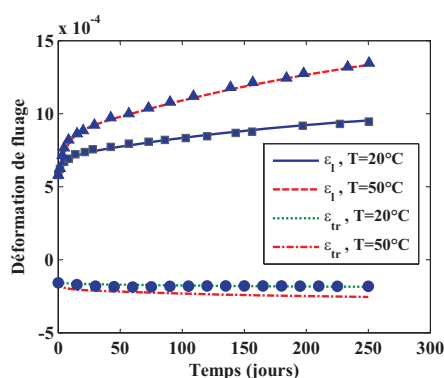


Figure 70 : Déformations expérimentales (symboles, [80]) et numériques (courbes) longitudinales et transversales de fluage propre à 20° et à 50°C.

Les Figure 71 et Figure 72 montrent les évolutions respectivement des pseudo-déformations et de la variable d'endommagement obtenues à 20 et 50°C et correspondant à la Figure 70. On observe que l'endommagement augmente légèrement en fonction de la température : la valeur obtenue à 250 jours passe ainsi d'environ 0.18 à 0.2 lorsque la température croît de 20 à 50°C. On retrouve ce résultat sur la Figure 71 où il apparaît que les pseudo-déformations sont très

proches pour les cas 20 et 50°C. Enfin, la Figure 73 montre les évolutions des modules de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) obtenues à 20 et 50°C. On constate que la température affecte considérablement les valeurs de ces modules. De fait, d'après l'équation (203) le temps équivalent peut être facilement calculé dans le cas où la température est constante et vaut $t_e(t) \approx 9.146t$ en prenant T_{ref} et T égaux respectivement à 20 et 50°C. Ainsi les effets de la température à 50°C peuvent être assimilés à une diminution de la viscosité des amortisseurs d'un facteur proche de 9.146 par rapport à leur viscosité à 20°C. On peut conclure d'après les résultats du modèle que l'essentiel de l'augmentation des déformations de fluage du fait d'un accroissement de température modéré résulte de l'évolution des propriétés viscoélastiques du matériau, et dans une moindre mesure à l'évolution de l'endommagement.

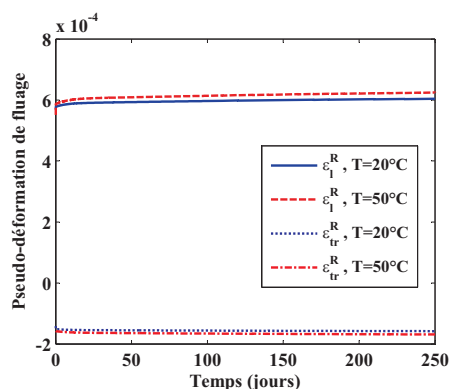


Figure 71 : Pseudo-déformations longitudinales et transversales de fluage propre à 20° et à 50°C.

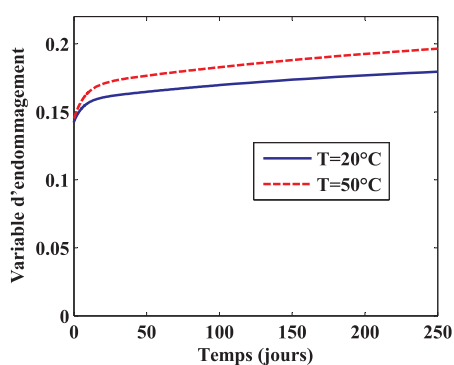


Figure 72 : Evolutions de la variable d'endommagement à 20° et 50°C.

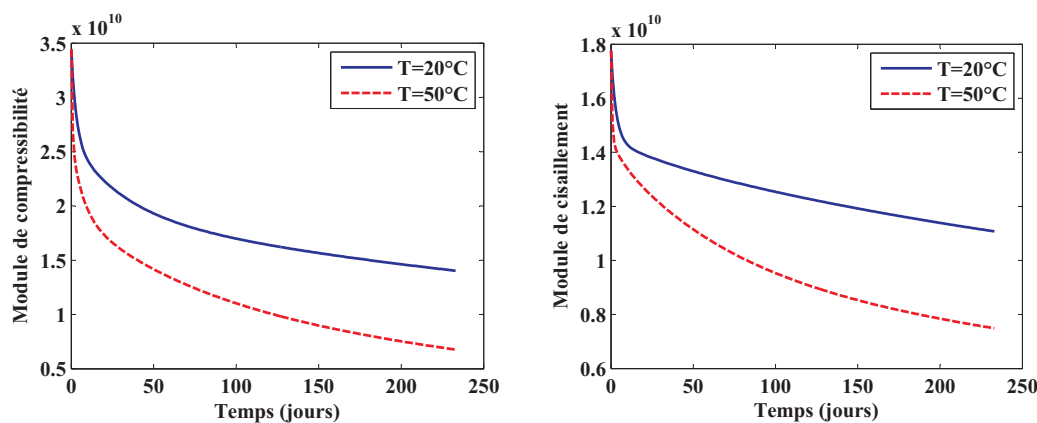


Figure 73 : Evolutions des modules de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) à 20° et 50°C.

On présente par la suite les résultats des déformations de fluage propre du béton obtenus à 80°C. Les symboles de la Figure 74 montrent les déformations longitudinales de fluage propre à 20°, 50° et à 80°C obtenues expérimentalement par Ladaoui [80]. On observe une augmentation importante de l'amplitude de celles-ci entre 50 et 80°C. Ce résultat à 80°C met a priori en évidence un comportement singulier par rapport à ceux obtenus à 20°C et 50°C. Il pourrait être expliqué selon Ladaoui [80] par l'apparition de microfissures lors des essais, en partie générées par les surpressions d'eau (l'éprouvette a été maintenue dans l'eau avant essai pendant plusieurs semaines) consécutives à l'augmentation de la température. En conservant la valeur de l'énergie d'activation $Q/R = 6989(^{\circ}K)$ identifiée précédemment, on peut alors simuler la déformation longitudinale de fluage à 80°C. Notons qu'à cette température le temps équivalent vaut $t_e(t) \approx 57.43t$ par rapport à la référence de 20°C. Les résultats numériques sont présentés sur la Figure 74 en traits continus. Alors qu'à 20°C et 50°C on a constaté que le modèle reproduisait bien les résultats expérimentaux, on observe qu'à 80° la déformation numérique est assez largement inférieure à celle de l'essai. On note que la valeur de la variable d'endommagement maximale obtenue dans ce cas ($D_c = 0,35$), bien qu'assez élevée, ne suffit pas à expliquer l'écart constaté.

Dans la suite, on se propose de simuler d'autres expériences de fluage sur béton effectuées à différentes températures comprises dans la plage 20-80°C. On souhaite en effet vérifier si les écarts constatés entre les simulations et les essais de Ladaoui pour des températures supérieures à 50°C se retrouvent de manière systématique, auquel cas l'approche utilisée devrait être modifiée.

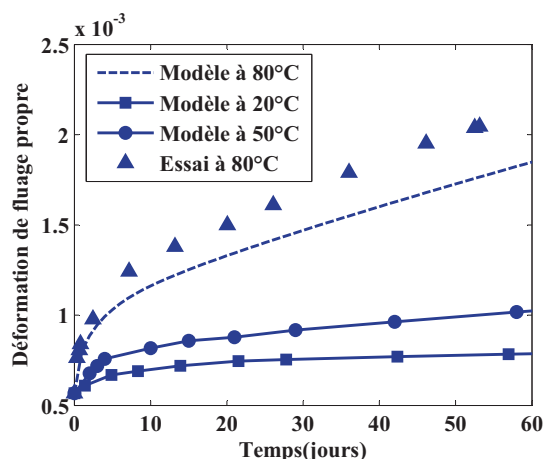


Figure 74: Déformations de fluage propre numériques (courbes) et expérimentales (symboles [80]) à 20°C, 50°C et 80°C.

5.1.3. Simulation des essais de fluage à différentes températures d'Arthanari et Yu [88]

On présente dans cette section les simulations des essais de fluage propre à 100% d'humidité relative réalisés sur béton par Arthanari et Yu [88] aux différentes températures suivantes : 20°, 40°, 62° et 80°C. Le but est de valider la méthode du temps équivalent introduite dans le modèle en §5.1.1, et en particulier de vérifier sa pertinence pour des températures proches de 80°C, au regard des différences constatées avec les résultats obtenus par Ladaoui dans ces conditions (voir section précédent). Les principales caractéristiques du matériau sont indiquées dans le Tableau 15. Le chargement de 6.9 MPa correspond à 30% de la résistance en compression, les fractions volumiques des pores et des granulats ont été estimées respectivement à 0.12 et 0.62. On utilise également 2 modèles de Maxwell généralisé à 4 branches pour décrire le comportement viscoélastique de la matrice, si bien que les développements du §5.1.1 sont utilisés pour ce cas test. Par ailleurs, la procédure d'identification des paramètres mécaniques et de l'énergie d'activation est identique au cas précédent. En conséquence, les paramètres microscopiques du modèle sont identifiés sur les résultats expérimentaux à 20°C et sont reportés dans le Tableau 16; les paramètres macroscopiques qui en découlent sont listés dans le Tableau 17. Les formules (203) et (204) permettent de quantifier l'énergie d'activation pour le passage de 20°C à 40°C à partir des résultats d'Arthanari et Yu et nous donnent $Q/R = 6113(^{\circ}K)$. On constate que la valeur d'énergie d'activation trouvée est du même ordre de grandeur que celle obtenue au §5.1.2.

Tableau 15 : Valeurs des données du béton d'Arthanari et Yu [88] à 20°C et 100% d'humidité relative.

E	ν	e/c	porosité	frac. granulats	σ	A_c	B_c	ε_d
28 (GPa)	0.25	0.564	0.12	0.62	6.9 (MPa)	0.8	1289	10^{-4}

5. Prise en compte des effets des thermo-hydriques

Tableau 16 : Valeurs des paramètres microscopiques pour les modèles de Maxwell généralisés à 4 branches à 20°C.

Branches	∞	1	2	3
k_i^m (GPa)	4.885	5.598	3.975	2.939
μ_i^m (GPa)	3.089	4.497	2.241	1.496
τ_i^m (Jours)		1	5	20

Tableau 17 : Valeurs des paramètres macroscopiques du modèle de fluage à 20°C.

Branches	∞	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
k_i (GPa)	6.68	3.60	1.02	1.11	3.63	1.02	0.937	3.70	0.566	0.399			
μ_i (GPa)	4.79	1.60	0.11	0.051	0.011	1.86	0.54	0.65	0.173	2.00	0.599	0.963	0.251
τ_i^k (Jours)		1	1.24	1.52	5.0	5.79	7.33	20.	22.5	32.5			
τ_i^h (Jours)		1.0	1.29	1.47	1.50	5.0	6.01	7.31	7.33	20.	23.3	33.03	33.4

La Figure 75 présente la comparaison entre les résultats expérimentaux (symboles) d'Arthanari et Yu [88] et les résultats numériques (courbes) du modèle utilisant la méthode du temps équivalent en termes de déformations longitudinales de fluage et pour les différentes températures de 20°C à 80°C. On observe un très bon accord entre essais et simulations, y compris pour les températures de 62°C et 80°C, ce qui indique que la méthode du temps équivalent permet de reproduire de manière satisfaisante pour ce cas test les déformations expérimentales. D'autre part, les effets de la température apparaissent clairement, et à 60 jours les valeurs atteintes sont presque 2 fois plus importantes dans le cas à 80°C que dans le cas à 20°C. Sur la Figure 75 sont également reportées les déformations transversales de fluage obtenues numériquement (à noter que ces déformations transversales n'ont pas été mesurées pendant les essais).

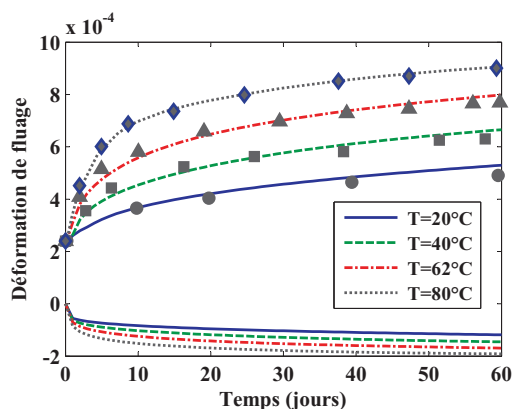


Figure 75 : Déformations expérimentales (symboles, [88]) et numériques (courbes) longitudinales et transversales de fluage propre à différentes températures.

Les Figure 76 et Figure 77 présentent les évolutions respectivement des pseudo-déformations longitudinales et transversales et de la variable d'endommagement aux différentes températures considérées dans les essais. On constate que les pseudo-déformations sont, comme dans le cas des tests de Ladaoui, assez peu impactées par les élévations modérées de température. En effet à 60 jours l'augmentation d'amplitude n'excède pas 5% entre 20 et 80°C. On retrouve ce résultat sur les évolutions de la variable d'endommagement, qui croît modérément de 0.175 à 0.195 à 60 jours entre 20 et 80°C. On remarque par ailleurs, en accord avec l'ensemble des résultats précédents, que cette variable évolue assez peu à 20°C, puisqu'elle augmente de 0.15 à 0.175 à 60 jours.

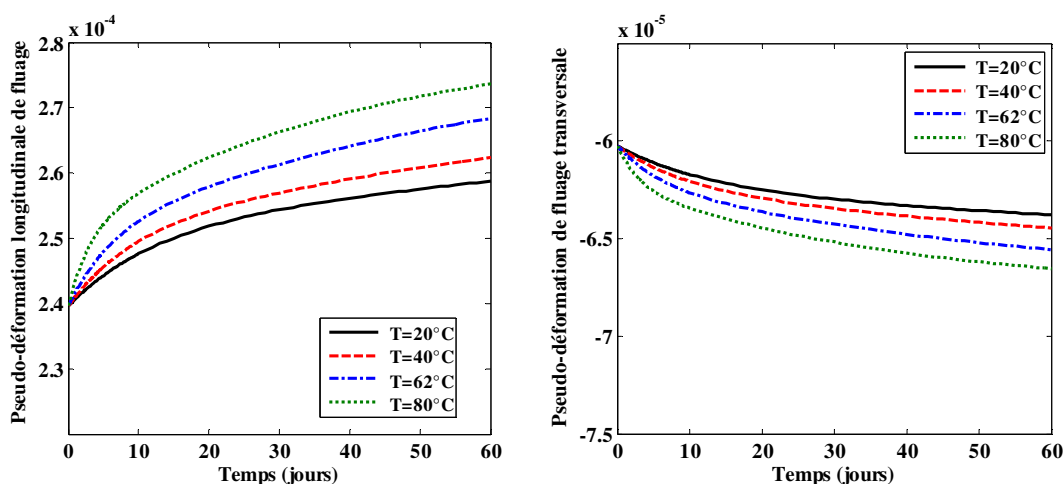


Figure 76 : Pseudo-déformations longitudinales (droite) et transversales (gauche) de fluage propre à différentes températures.

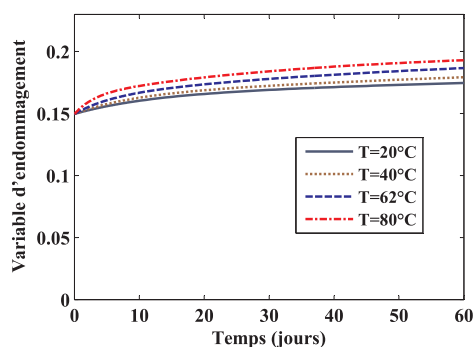


Figure 77 : Evolutions de la variable d'endommagement à différentes températures.

Les Figure 78, Figure 79 et Figure 80 reportent les évolutions respectivement des modules de compressibilité et de cisaillement, du coefficient de Poisson et du coefficient de Biot obtenues numériquement aux différentes températures s'échelonnant de 20 à 80°C. Globalement on retrouve les résultats obtenus précédemment dans le cas des simulations des essais de Ladaoui, notamment que les paramètres mécaniques sont significativement affectés par la température. Par ailleurs on observe que les modules de compressibilité et de cisaillement

5. Prise en compte des effets des thermo-hydriques

diminuent rapidement les 10-20 premiers jours, et plus lentement par la suite. A 60 jours, la valeur du coefficient de Biot chute d'environ 10% entre 20 et 80°C, passant de 0.219 à 0.2.

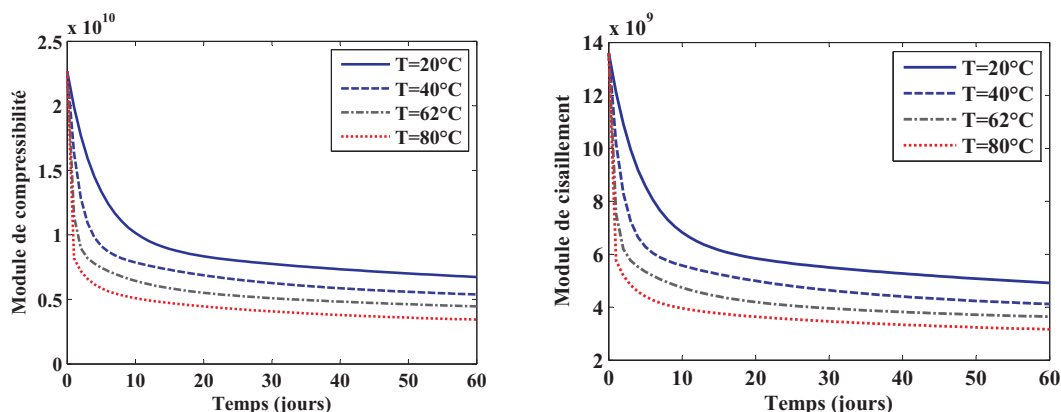


Figure 78 : Evolutions des modules de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) à différentes températures.

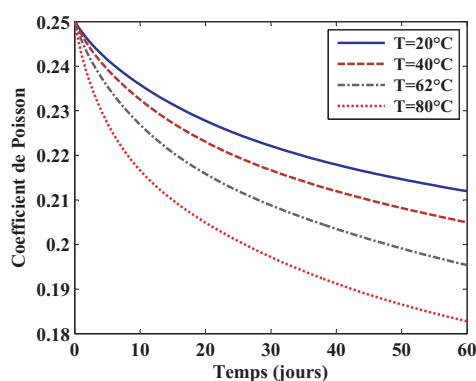


Figure 79 : Evolutions du coefficient de Poisson à différentes températures.

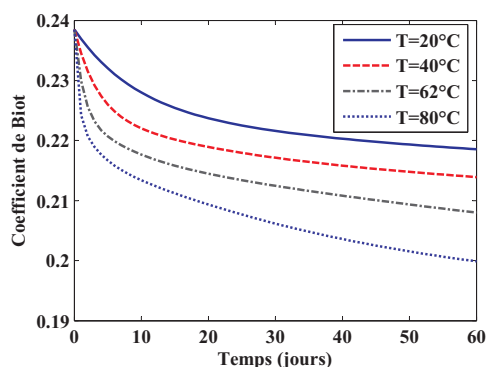


Figure 80 : Evolutions du coefficient de Biot à différentes températures.

Dans la suite, on étudie le cas des températures variables dans le temps, qui présente un intérêt pratique certain. On propose alors une méthode simplifiée permettant d'introduire ces effets dans les calculs numériques.

5.1.4. Température variable dans le temps

On a présenté ci-dessus l'effet de la température sur la déformation de fluage du béton en considérant cette température constante et uniforme. Cependant dans le cas général la température varie au cours du temps, ce qui complique l'intégration des équations. On propose de prendre en compte ces variations de manière approchée en discrétisant la variable température avant de résoudre numériquement le problème. On développe dans cette section deux méthodes classiques de discrétisation.

5.1.4.1. Approximation constante de la température dans l'intervalle de temps

La forme la plus simple de discrétisation consiste à approcher la température par une fonction affine par morceaux dans chaque pas de temps $t \in [t_i, t_{i+1}]$ (voir la Figure 81). On pose :

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + \Delta t_{i+1} \\ T_{i+1} = T_i + \Delta T_{i+1} \end{cases} \quad (213)$$

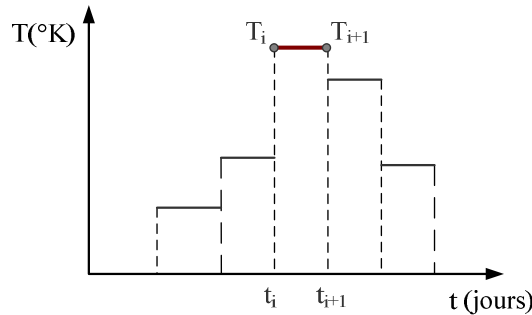


Figure 81: Approximation constante de la température par morceaux.

L'expression discrétisée du temps équivalent t_e défini par l'équation (203) peut se mettre sous la forme simple :

$$\begin{aligned} t_e(t_{i+1}) &= \int_0^{t_{i+1}} \exp \left[-\frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T(\tau)} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right] d\tau \\ &\simeq \sum_k \exp \left[-\frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right] [\Delta t_k] \end{aligned} \quad (214)$$

Les effets de la température sur le fluage sont décrits par la loi de comportement (204). En utilisant cette expression, on peut calculer toutes les valeurs des déformations à chaque pas de temps à l'aide des formules (181), en remplaçant t_i par $t_e(t_i)$.

5.1.4.2. Approximation linéaire de la température

On considère ici que la température est approchée par une fonction continue linéaire dans chaque pas de temps $t \in [t_i, t_{i+1}]$ (voir la Figure 82). Dans l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on a alors la relation :

$$T(t) = T_i + \frac{T_{i+1} - T_i}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i) \quad (215)$$

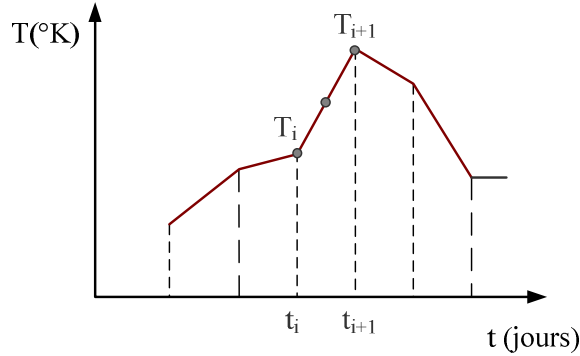


Figure 82: Approximation linéaire par morceaux de la température.

En utilisant l'équation (215), l'expression du temps équivalent (203) devient :

$$t_e(t_{i+1}) \approx \int_0^{t_{i+1}} \exp \left[-\frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T_i + \frac{T_{i+1} - T_i}{t_{i+1} - t_i} (\tau - t_i)} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right] d\tau \quad (216)$$

L'expression (216) a la forme d'une intégrale d'une fonction exponentielle :

$$I = \int e^{\frac{b}{\tau+a}} d\tau. \quad (217)$$

Cette intégrale peut être écrite en utilisant une série :

$$I = -b \left[-\frac{e^x}{x^2} + \ln|x| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i \cdot i!} \right] \text{ avec } x = \frac{b}{\tau+a}.$$

L'expression $t_e(t_{i+1})$ n'est pas donc explicite. On propose d'utiliser la méthode de Simpson pour calculer numériquement cette intégrale. Considérons l'intégrale définie par :

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (218)$$

La méthode de Simpson est une technique de calcul numérique d'une intégrale basée sur un polynôme quadratique prenant les mêmes valeurs que f aux points d'abscisse a, b et

$c = (a + b) / 2$ (voir la Figure 83). Elle nous donne alors une estimation simple de l'intégrale (218) sur l'intervalle $[a, b]$:

$$I \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (219)$$

Pour obtenir un meilleur résultat, on subdivise chaque intervalle $[a, c]$ et $[c, b]$ en sous intervalles et on additionne les valeurs obtenues sur tous les intervalles.

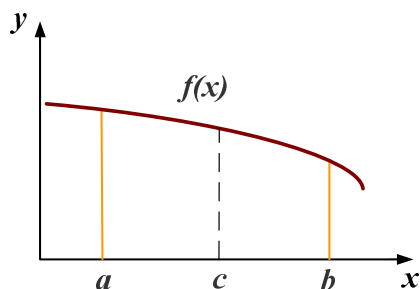


Figure 83 : Approximation numérique du calcul intégrale par la méthode de Simpson.

5.1.4.3. Illustration

On présente dans cette sous-section une application des formules précédentes permettant de calculer les valeurs du temps équivalent t_e pour des températures variables, au cas du matériau identifié au §5.1.3 à partir des essais d'Arthanari et Yu [88]. On propose alors de simuler les essais de fluage en faisant varier la température linéairement de 20 à 80°C avec une vitesse de montée en température de 1°C/jour. Dans la Figure 84, les évolutions des déformations de fluage longitudinales et transversales obtenues numériquement sont comparées dans le cas d'une approximation linéaire et constante par palier, et avec le pas de temps $\Delta t = 10^4$ s. Sont également reportées sur cette Figure les déformations de fluage à 20 et 80°C (voir §5.1.3). Notons que seules les déformations de fluage sont représentées, les déformations liées aux variations de température étant exclues afin de rendre la comparaison plus pertinente, notamment avec les cas à 20 et 80°C. Cependant il est clair que cette simplification conduit à des imprécisions et est donc critiquable puisqu'en réalité les contraintes associées à ces variations de température évoluent elles aussi en fonction du temps. En effet, le coefficient de dilatation thermique est, au même titre que le coefficient de Biot, dépendant du temps (cet aspect ne sera cependant pas abordé dans la thèse), et d'autre part les contraintes d'origine thermique sont liées au module de compressibilité du matériau. On constate sur la Figure 84 que l'approximation linéaire par palier permettant en principe d'augmenter la précision des calculs par rapport à l'approximation constante par palier ne conduit pas à des différences significatives dès lors que la taille des pas de temps est suffisamment faible, comme ici avec $\Delta t = 10^4$ s. On peut donc utiliser l'approximation

constante par palier pour simplifier les calculs. La Figure 85 présente les évolutions de t_e correspondant aux courbes de la Figure 84, et confirme que l'écart entre les 2 méthodes de discrétisation est très faible.

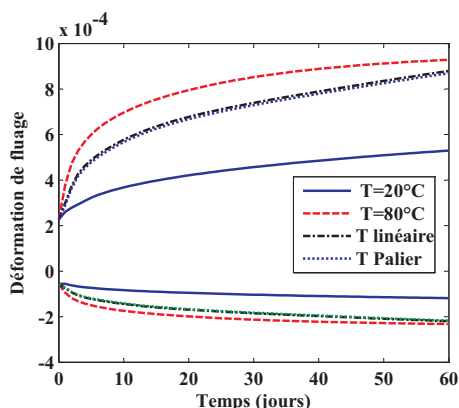


Figure 84 : Comparaison des résultats entre les approximations constante et linéaire par paliers dans le cas d'une variation de température linéaire de 20°C à 80°C.

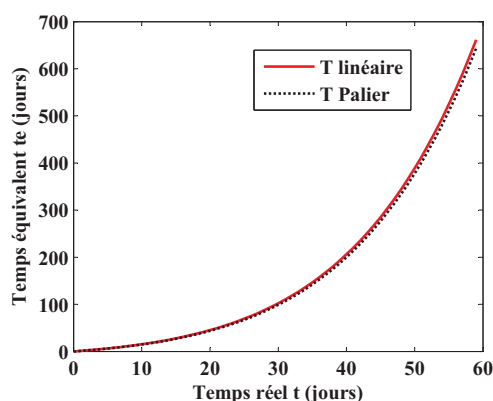


Figure 85 : Evolutions de t_e dans le cas d'une variation de température linéaire de 20°C à 80°C.

Les Figure 86 à Figure 89 présentent les résultats de simulation pour 2 vitesses de montée en température : 1°C/jour et 2°C/jour, toujours dans la situation où la température varie linéairement de 20 à 80°C, et en utilisant l'approximation constante par palier. Sont également reportés pour comparaison les résultats obtenus avec les températures constantes de 20 et 80°C. La Figure 86 droite présente les évolutions de $t_e(t)$ dans les différents cas considérés. La Figure 86 gauche montre les évolutions des déformations de fluage, et on observe que les variations de température et la vitesse de chauffage influent significativement sur les résultats. L'effet de l'histoire du chargement est également visible puisque les courbes obtenues avec les 2 vitesses de montée en température sont différentes, et ne coïncident pas avec la courbe correspondant à une température constante de 80°C à 60 jours. Ainsi l'amplitude des déformations maximales dépend à la fois de la température maximale mais aussi de ses variations au cours du temps.

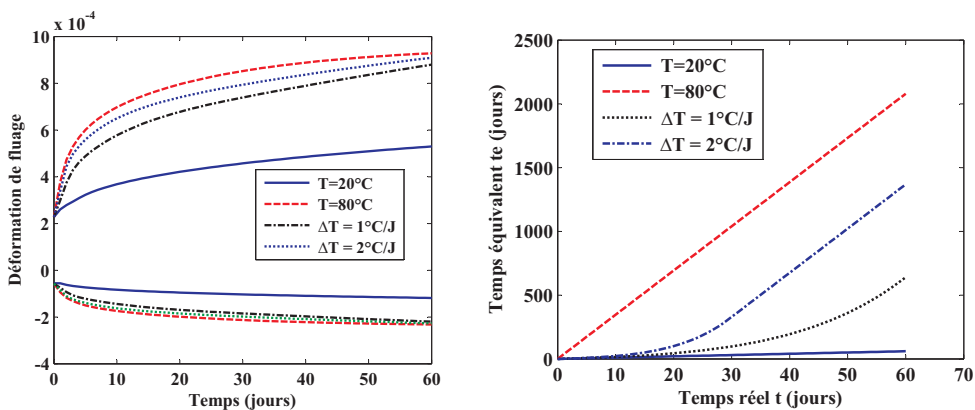


Figure 86 : Evolutions des déformations de fluage (gauche) et du temps équivalent t_e (droite) dans le cas d'une montée en température linéaire de 20°C à 80°C.

La Figure 87 présente les évolutions des pseudo-déformations longitudinales et transversales associées aux déformations de fluage de la Figure 86. Globalement les mêmes remarques que ci-dessus concernant l'effet des variations de températures peuvent être formulées, avec cependant des différences nettement moins marquées entre les courbes que dans le cas des déformations de fluage. De même, la Figure 88 présentant les évolutions de la variable d'endommagement pour les cas considérés fait apparaître une tendance similaire : l'influence des variations de température se révèle relativement limitée et en accord avec les conclusions précédentes selon lesquelles l'impact des températures modérées sur l'endommagement est faible.

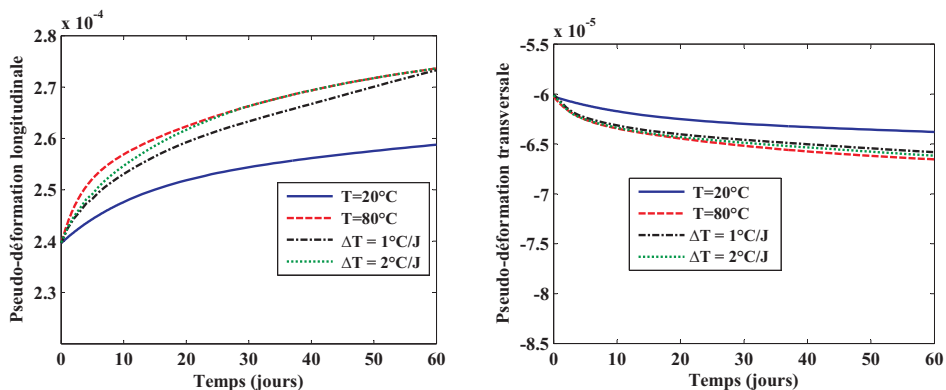


Figure 87 : Evolutions des pseudo-déformations longitudinales (gauche) et transversales (droite) dans le cas d'une montée en température linéaire de 20°C à 80°C.

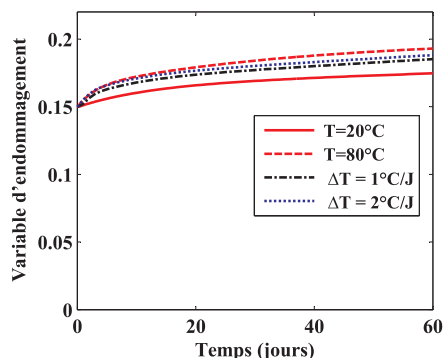


Figure 88 : Evolutions de la variable d'endommagement dans le cas d'une montée en température linéaire de 20°C à 80°C .

Enfin, la Figure 89 montre les évolutions des modules de compressibilité et de cisaillement dans les 2 cas de températures variant linéairement, et dans les cas des températures constantes à 20°C et 80°C . Les effets des variations de température sont très nettement visibles, et on constate que les valeurs des modules se rapprochent progressivement de celles obtenues à $T = 80^{\circ}\text{C}$, et ce d'autant plus vite que la vitesse de montée en température est grande.

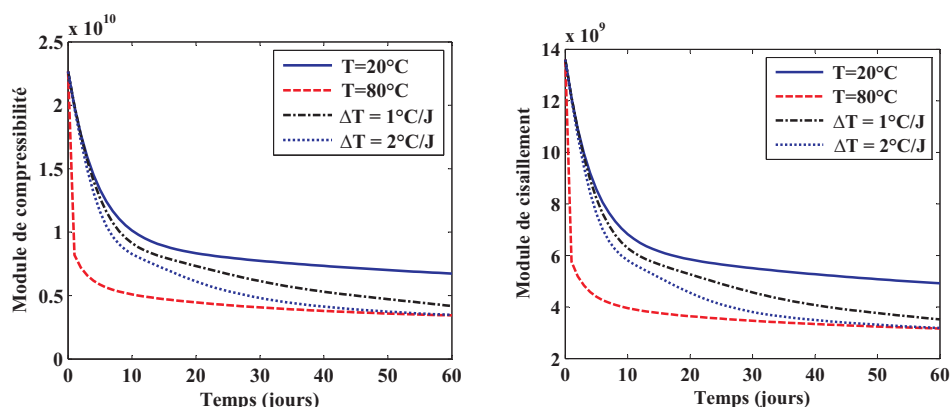


Figure 89 : Evolutions du module de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) dans le cas d'une montée en température linéaire de 20°C à 80°C .

5.2. Effet de l'humidité relative

On s'intéresse dans cette section aux effets de l'humidité relative sur le comportement différé à long terme et plus particulièrement le fluage des bétons. On a vu dans l'introduction (voir §2.4.2) que ce paramètre affecte considérablement les déformations différées, mais aussi plus généralement la durabilité de ces matériaux. On a également montré qu'une méthode régulièrement utilisée dans la littérature pour reproduire les effets de l'humidité relative sur le comportement viscoélastique des matériaux cimentaires est celle du temps équivalent. Un de ses avantages évidents est sa simplicité. On propose alors d'appliquer l'approche de Bažant [89] basée sur cette méthode en y apportant quelques modifications pour obtenir une réponse du modèle plus proche des résultats expérimentaux.

5.2.1. Introduction de la méthode du temps équivalent

On rappelle que cette méthode consiste à remplacer dans le modèle viscoélastique le temps réel t par un temps équivalent t_e intégrant les effets dans le temps des phénomènes à prendre en compte (voir l'équation (203) concernant les effets de la température). Pour reproduire les conséquences à la fois de la température et de l'humidité relative, Bažant [89] propose l'expression suivante du temps équivalent :

$$t_{eh} = \int_0^t \beta_T(\tau) \beta_h(\tau) d\tau \quad (220)$$

avec β_T et β_h des fonctions dépendant de la température et de l'humidité relative prenant la forme (voir aussi les équations (12) et (13)) :

$$\beta_T(t) = \exp \left\{ -\frac{Q}{R} \left[\frac{1}{T(t)} - \frac{1}{T_{ref}} \right] \right\} \quad (221)$$

$$\beta_h(t) = \alpha_h + (1 - \alpha_h) h^2(t) \quad (222)$$

où α_h est un paramètre de calage variant dans l'intervalle [0,1]. L'expression (220) étend donc l'équation (203) aux effets de l'humidité relative en plus de ceux de la température. Dans les applications suivantes, on se limitera à une température constante pour simplifier, les effets de la température ayant été abordés dans la section précédente.

On présente alors quelques modifications de cette approche permettant d'obtenir des résultats numériques en meilleur accord avec les résultats expérimentaux disponibles. La fonction dépendant de l'humidité relative (222) est ainsi modifiée comme suit :

$$\beta_h(t) = \left[\alpha_h + (1 - \alpha_h) h^3(t) \right] \quad (223)$$

La loi de comportement viscoélastique du béton (173) est réécrite en remplaçant t par t_{eh} :

$$\begin{cases} \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^R(t)] = \frac{1}{3k_R} \int_0^{t_{eh}} 3k(t_{eh} - \tau) \text{tr}\left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau}\right) d\tau \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^R(t) = \frac{1}{2\mu_R} \int_0^{t_{eh}} 2\mu(t_{eh} - \tau) \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}}{d\tau}\right) d\tau \end{cases} \quad (224)$$

Il est clair que la relation (224) prend en compte les effets de l'humidité relative via les paramètres viscoélastiques du matériau, au même titre que la relation (204) prend en compte ceux de la température. On souhaite étendre ici cette approche dans le cadre plus général du couplage hydro-mécanique. Ainsi on propose de réécrire la loi de comportement (174) en ajoutant un terme lié aux effets hydriques basé sur la mécanique classique des milieux poreux et étendant le concept simplifié de Schapery, sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = (I - D_c(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_R)) (3k_R \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}_R + 2\mu_R \mathbf{J} : \boldsymbol{\varepsilon}_R - b_R p_{cR} \mathbf{I}) \quad (225)$$

où b_R est un paramètre appelé coefficient de référence de Biot, similaire aux modules k_R et μ_R introduits ci-dessus ; p_{cR} est alors la pseudo-pression capillaire qui s'exprime sous la forme suivante, par analogie aux pseudo-déformations introduites par Schapery :

$$p_{cR} = \frac{I}{b_R} \int_0^t b(t-\tau) \dot{p}_c d\tau \quad (226)$$

avec $b(t)$ le coefficient viscoélastique de Biot du milieu poreux insaturé dépendant du degré de saturation, p_c la pression capillaire dépendant à la fois de la température et de l'humidité relative h via la loi de Kelvin :

$$p_c = -\rho \frac{RT}{M_v} \ln(h) \quad (227)$$

Dans cette équation, ρ est la masse volumique de l'eau, R la constante des gaz parfaits, M_v la masse molaire de l'eau. La prise en compte de l'effet de l'humidité relative dans la déformation de fluage propre est alors décrite par les équations (220)-(225).

5.2.2. Application et validation du modèle

Le modèle présenté dans la section précédente est maintenant appliqué au cas d'un matériau cimentaire subissant un chargement mécanique et hydrique (c'est-à-dire des variations d'humidité relative). Nous proposons pour ce faire de simuler les essais réalisés par Roelfstra [90] sur une pâte de ciment soumise à une contrainte de fluage de 20 MPa représentant 30% de sa charge de rupture, et à différentes valeurs d'humidité relative constantes. Les essais correspondants ont été effectués sur des éprouvettes cylindriques de diamètre 8 mm et de hauteur 20 mm (Figure 90).

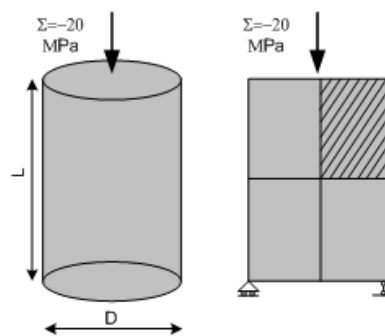


Figure 90: Eprouvette cylindrique utilisée pour les essais de Roelfstra [90].

Ce cas d'étude permet à la fois d'identifier une partie des paramètres du modèle de fluage, et de valider l'approche proposée pour prendre en compte le caractère insaturé du matériau. Cependant les évolutions des déformations transversales des spécimens n'ayant pas été mesurées dans les tests de Roelfstra, il nous faudra faire des hypothèses importantes concernant les variations dans le temps du coefficient de Poisson (à l'instar des simulations du

§5.1.3) afin de pouvoir déterminer l'ensemble des paramètres du modèle. Ainsi nous considérerons que le coefficient de Poisson évolue suivant la Figure 91. Ces évolutions sont adaptées des résultats obtenus sur pâte de ciment par Parrott [68] (voir §4.2), en particulier concernant les variations respectives du coefficient entre $t = 0$ et l'échéance correspondant à la fin des essais (500 jours ici).

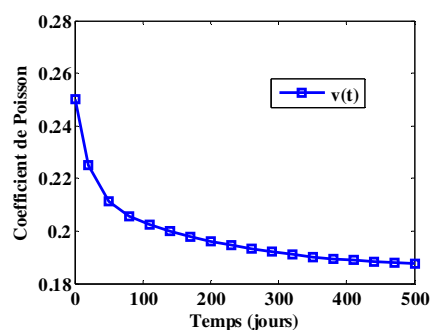


Figure 91: Evolutions estimées du coefficient de Poisson.

Nous appliquons cette fois encore la procédure d'identification des paramètres du modèle de fluage mise en place pour les exemples précédents. Le cas de référence permettant cette identification est l'essai de fluage effectué à $h = 100\%$ (voir la Figure 92) correspondant au cas saturé, i.e. $p_c = 0$. Les paramètres du modèle simplifié développé au §5.2.1 seront ensuite identifiés puis l'approche sera confrontée aux résultats expérimentaux obtenus respectivement à $h = 81\%$ et $h = 44\%$. Nous choisissons de représenter la pâte de ciment comme dans la section 4.2.1 par une matrice homogène dans laquelle sont distribués des pores sphériques de fraction volumique $frac$. Les paramètres principaux du matériau sont listés dans le Tableau 18.

Tableau 18 : Valeurs des données de la pâte de ciment à 20°C et $h=100\%$.

E	ν	e/c	$frac$	σ
20 (GPa)	0.25	0.45	0.24	20 (MPa)

On suppose par ailleurs que le comportement viscoélastique linéaire de la matrice est décrit par 2 modèles (un pour le module de compressibilité et l'autre pour le module de cisaillement) de Maxwell généralisé à 5 branches, dont une branche ne comporte pas d'amortisseur. Le nombre de branches plus important par rapport à l'étude du §4.2.1 se justifie essentiellement par le fait que les temps de simulations considérés (correspondants aux temps des essais) sont nettement plus longs, d'un rapport d'environ 10. Nous n'allons pas détailler toutes les étapes menant aux expressions finales du modèle de fluage car elles ont déjà été explicitées

précédemment. Simplement, nous rappelons les équations des modules de compressibilité et de cisaillement microscopiques de la matrice écrites dans l'espace temps :

$$k^m(t) = k_\infty^m + \sum_{i=1}^4 k_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{km}}}, \quad \mu^m(t) = \mu_\infty^m + \sum_{i=1}^4 \mu_i^m e^{-\frac{t}{\tau_i^{\mu m}}} \quad (228)$$

On supposera ici encore pour simplifier que $\tau_i^{km} = \tau_i^{\mu m} = \tau_i^m$. On montre alors qu'on obtient les formules des modules de compressibilité $k^{hom}(t)$ et de cisaillement $\mu^{hom}(t)$ homogénéisés de la pâte de ciment dans l'espace réel sous la forme :

$$k^{hom}(t) = k_\infty + \sum_{i=1}^8 k_i e^{-\frac{t}{\tau_i^k}} \quad \text{et} \quad \mu^{hom}(t) = \mu_\infty + \sum_{i=1}^8 \mu_i e^{-\frac{t}{\tau_i^\mu}} \quad (229)$$

Il y a ainsi en tout 12 temps caractéristiques macroscopiques distincts, dont les 4 temps caractéristiques microscopiques τ_i^m . Comme déjà indiqué plus haut, l'ensemble des temps caractéristiques microscopiques est un sous-ensemble de celui des temps caractéristiques macroscopiques. Les coefficients du modèle de Mazars en compression sont fixés à $A_c = 0.9$ et $B_c = 330$. Notons que le calcul de la pseudo-déformation équivalente définie dans l'équation (176) est modifié afin de retrancher la contribution due à p_{cR} dans l'équation (225). En effet il est bien établi que les déformations libres homogènes liées aux variations d'humidité relative et donc de pression capillaire, au même titre que les déformations libres induites par dilatation ou contraction thermique, n'engendrent pas ou très peu de microfissuration dans le cas général. Ceci est bien sûr limité à des évolutions modérées ne provoquant pas de modifications de la microstructure. En revanche lorsque les déformations macroscopiques sont empêchées notamment par effet de structure, des contraintes se développent et peuvent alors entraîner la fissuration du matériau. Le fait d'exclure le dernier terme de l'équation (225) de la loi d'évolution de la variable d'endommagement permet de prendre en compte ces phénomènes..

Les valeurs des paramètres microscopiques identifiés à partir des résultats expérimentaux de [90] à $h=100\%$ sont listées dans le Tableau 19, et les paramètres macroscopiques correspondants sont reportés dans le

Tableau 20.

Tableau 19 : Valeurs des paramètres microscopiques pour le modèle de Maxwell généralisé à 5 branches.

Branche	∞	1	2	3	4
$k_i^m (GPa)$	5.80	6.96	4.10	3.10	3.24
$\mu_i^m (GPa)$	5.52	2.13	2.01	1.61	1.65
$\tau_i^m (Jours)$		4	20	100	300

Tableau 20 : Valeurs des paramètres macroscopiques pour le modèle de Maxwell généralisé à 5 branches.

Branche	∞	1	2	3	4	5	6	7	8
k_i (GPa)	3.71	3.33	0.27	2.27	0.51	1.75	0.32	1.81	0.920
μ_i (GPa)	3.35	1.34	0.17	1.25	0.41	0.99	0.27	1.02	0.092
τ_i^k (Jours)		4	4.92	20	24.87	100	122.41	300	416.8
τ_i^μ (Jours)		4	5.22	20	25.69	100	125.70	300	451.3

A partir des paramètres ainsi identifiés à 100% d’humidité relative, la simulation des déformations à 81% permet d’ajuster la valeur du coefficient de calage introduit dans (223) à $\alpha_h = 0.125$. Les évolutions des déformations longitudinales et transversales de fluage propre obtenues numériquement (courbes) pour les humidités de 100%, 81% et 44% sont reportées sur la Figure 92 et comparées aux résultats expérimentaux de Roelfstra [90] (symboles). Moyennant le calage approprié du coefficient α_h , les résultats expérimentaux présentés sont alors correctement reproduits. On constate que l’humidité relative joue un rôle très important sur les déformations de fluage. L’amplitude de la déformation longitudinale de fluage du cas $h = 100\%$ est environ 2 fois plus grande que celle du cas $h = 44\%$. Il est à noter que sur la Figure 92 ne sont présentées que les déformations instantanées et de fluage ; les déformations dues aux pressions capillaires décrites par le dernier terme de l’équation (225) n’apparaissent pas.

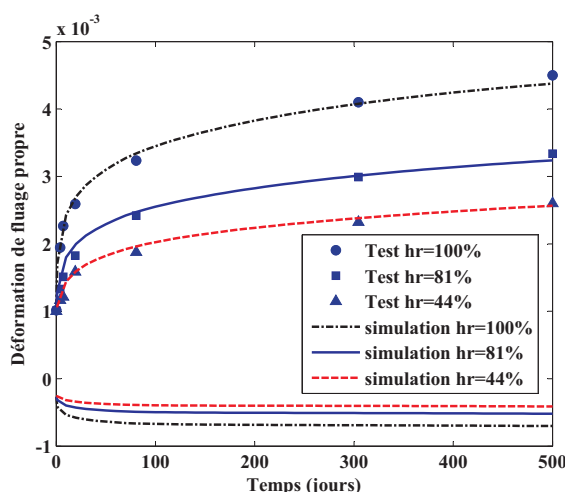


Figure 92: Evolutions numériques (courbes) des déformations longitudinales et transversales à différentes humidités relatives ; comparaison avec les résultats expérimentaux (symboles) de Roelfstra [90].

Les Figure 93 et Figure 94 montrent les évolutions respectivement des pseudo-déformations et de la variable d'endommagement pour les 3 cas considérés d'humidité relative.

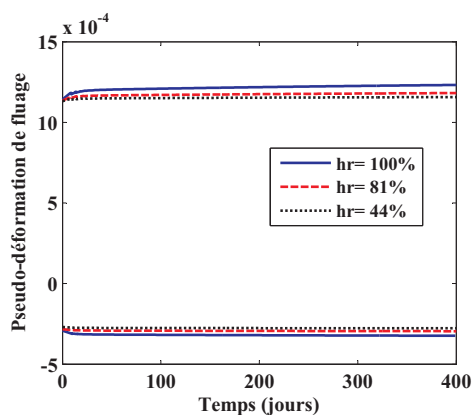


Figure 93: Evolutions des pseudo-déformations longitudinales et transversales à différentes humidités relatives.

Globalement, on constate qu'une diminution de l'humidité relative a pour effet de réduire l'amplitude d'évolution de ces grandeurs. Ainsi l'endommagement varie entre environ 0.16 et 0.22 entre 0 et 400 jours pour $h = 100\%$, alors que ces variations sont pour la même période limitées entre 0.16 et 0.18 pour $h = 44\%$. Le modèle indique donc que l'humidité relative affecte le fluage des matériaux cimentaires mais également son comportement vis-à-vis de la fissuration.

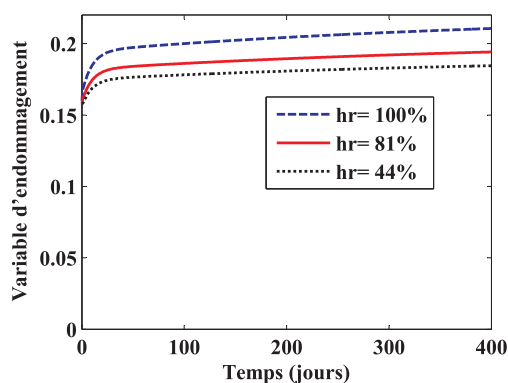


Figure 94: Evolutions de la variable d'endommagement à différentes humidités relatives.

Les Figure 95 et Figure 96 présentent les évolutions respectivement des modules de compressibilité et de cisaillement et du coefficient de Biot, pour les différentes valeurs d'humidité relative. Les résultats montrent que ces paramètres sont notablement moins affectés par l'humidité relative que les déformations de fluage. En effet, à 500 jours dans le cas $h = 44\%$ les modules sont supérieurs d'environ 15 à 20% et le coefficient de Biot de 2%

par rapport au cas à 100%. Rappelons que dans les mêmes conditions les déformations de fluage obtenues sont 2 fois plus grandes. La viscosité des paramètres mécaniques est ainsi sensiblement moins marquée lorsque h diminue, alors que le coefficient de Biot n'est quasiment pas impacté. Notons que ces résultats sont limités aux humidités relatives considérées, c'est-à-dire supérieures à 44%. D'autre part les évolutions du coefficient de Biot montrées correspondent au cas théorique du matériau supposé saturé, et n'intègrent donc pas le fait que le degré de saturation est inférieur à 1 dans le cas d'un état partiellement saturé.

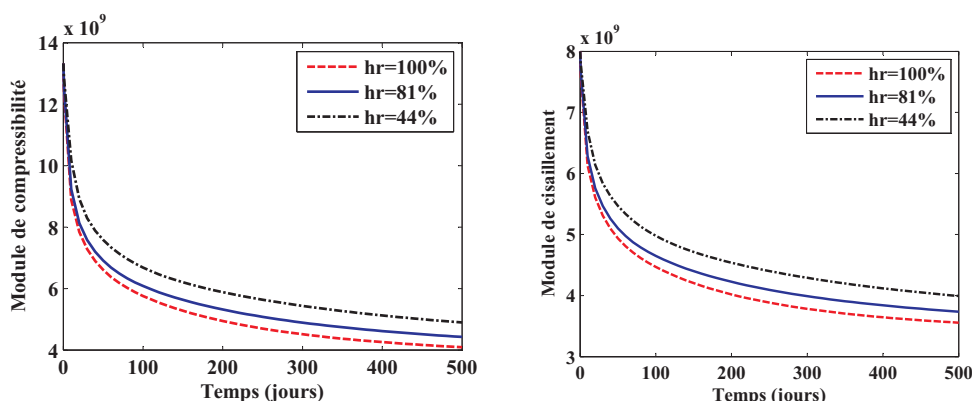


Figure 95: Evolution du module de compressibilité pour différents valeurs de l'humidité relative

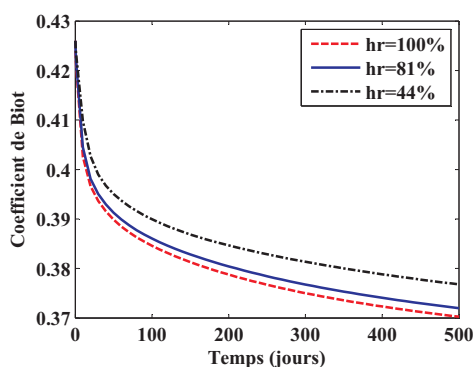


Figure 96: Evolution du coefficient de Biot pour différents valeurs de l'humidité relative

La Figure 97 compare les résultats de déformations longitudinales obtenus pour $h = 81\%$ et 44% aux courbes résultant du même calcul mais dans lequel la variable d'endommagement est fixée à la valeur à $t = 0$ correspondant à la réponse élastique. On constate que les courbes sont relativement proches, l'amplitude des déformations dans le deuxième cas étant légèrement supérieure du fait de l'endommagement fixé. Ceci indique que l'évolution de l'endommagement au cours du temps affecte seulement modérément les déformations de fluage, et d'autant moins que l'humidité relative est faible. Ce résultat est en accord avec les évolutions de la variable d'endommagement montrées sur la Figure 94.

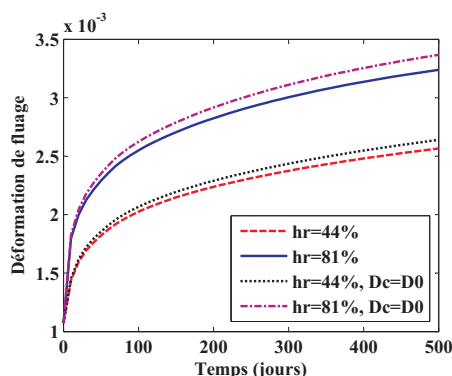


Figure 97: Evolution des déformations d'une pâte de ciment pour différents valeurs de la fraction volumique des pores

On présente dans ce qui suit une étude paramétrique similaire à celle réalisée au §4.2.2 et visant à analyser les effets de la fraction volumique des pores sur les évolutions des déformations et des propriétés mécaniques du matériau. Les 3 fractions volumiques suivantes sont considérées : $frac = 0.4$, $frac = 0.24$ (cas étudié ci-dessus), et $frac = 0.1$, et les simulations sont effectuées avec une humidité relative de 100%. La Figure 98 montre les évolutions des déformations longitudinales et transversales, et il apparaît clairement qu'une augmentation de la fraction volumique des pores tend à accroître l'amplitude des déformations. Les Figure 99 et Figure 100 présentent les évolutions correspondantes des modules de compressibilité et de cisaillement, et du coefficient de Biot, respectivement. Globalement les résultats obtenus sont en tout point similaires à ceux du §4.2.2, à l'exception de l'échelle de temps plus longue puisque les viscosités des amortisseurs sont nettement plus faibles dans le cas présent.

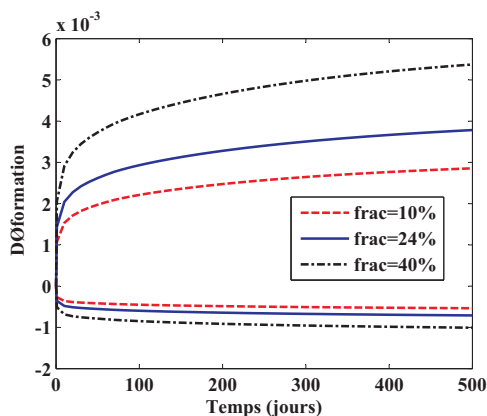


Figure 98: Evolution des déformations longitudinales et transversales d'une pâte de ciment pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.

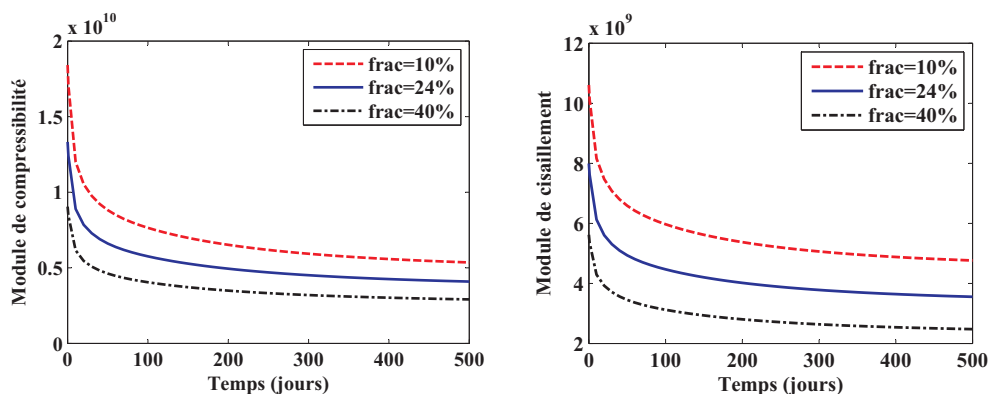


Figure 99: Evolution du module de compressibilité (gauche) et de cisaillement (droite) pour différentes valeurs de fraction volumique de pores.

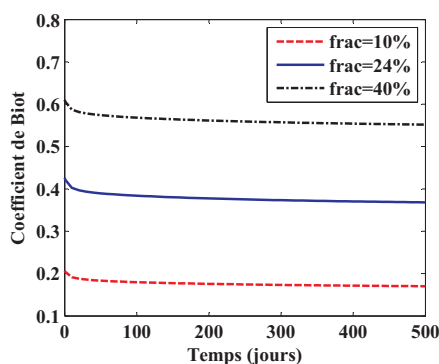


Figure 100: Evolution du coefficient de Biot pour différentes valeurs de la fraction volumique de pores.

Enfin, pour compléter cette étude on présente Figure 101 les évolutions numériques des déformations longitudinales et transversales dans les cas $h = 81\%$ et 44% , prenant en compte le phénomène de retrait consécutif au séchage précédant les tests de fluage. La durée du séchage a été fixée forfaitairement à 200 jours (temps à partir duquel les déformations de retrait simulées n'évoluent quasiment plus). Les déformations de retrait sont calculées avec l'équation (225) en imposant $\sigma = 0$, et leur développement résulte du terme impliquant p_{cr} . Notons qu'ici, puisque l'humidité relative est imposée à $t = 0$ et reste constante par la suite, la pseudo-pression p_{cr} est également constante et égale à sa valeur à $t = 0$ puisque $\dot{p}_c = 0$ pour $t > 0$. Ainsi nous avons $p_{cr} = S_{10} p_{c0}$ où S_{10} et p_{c0} désignent respectivement le degré de saturation et la pression capillaire correspondant aux cas considérés d'humidité relative, c'est-à-dire 81% et 44% . Les déformations de retrait reportées sur la Figure 101 résultent donc uniquement du comportement viscoélastique du matériau, et plus précisément de l'évolution dans le temps du module de compressibilité. Les effets structuraux dû au séchage et donc à la migration progressive d'eau vers l'extérieur de l'élément de structure ne sont ainsi pas décrits. Par ailleurs, la convention de signe adoptée pour les déformations de retrait est identique à celle choisie pour les déformations de fluage ci-dessus. Les déformations de retrait obtenues à

200 jours sont comprises entre environ 0.6 et 0.9×10^{-3} pour 81 et 44% d'humidité relative, et sont donc du même ordre de grandeur que les valeurs maximales mesurées sur éprouvettes à long terme. Ainsi le caractère visqueux des propriétés mécaniques du matériau permet d'une part de reproduire des évolutions dans le temps des déformations de retrait, et d'autre part d'obtenir dans le cas du séchage des valeurs finales d'amplitude très nettement supérieure au cas purement élastique. Cet aspect est important dans le contexte du développement de modèles couplés THM, puisque cela implique la nécessité de considérer un comportement viscoélastique pour le matériau, y compris pour décrire des phénomènes sans chargement mécanique externe.

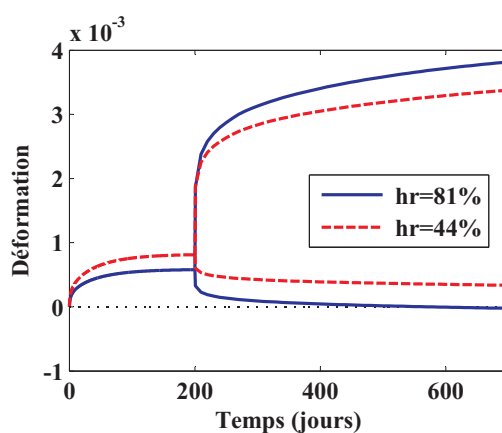


Figure 101: Evolution des déformations d'une pâte de ciment dans le cas d'un séchage puis d'un test de fluage, pour des humidités relatives de 81 et 44%.

A partir de 200 jours et jusqu'à 700 jours sont reportées sur la Figure 101 à la suite du séchage les déformations de fluage simulées (et déjà montrées sur les Figures précédentes). On constate alors un écart plus faible sur les déformations longitudinales finales entre les cas à 81 et 44% d'humidité relative, dû aux déformations de retrait qui sont supérieures (en valeur absolue) pour le cas à 44%. Le retrait provoque en outre une diminution de l'amplitude des déformations transversales.

La Figure 102 montre l'influence du pas de temps sur les déformations simulées de retrait dans le cas $h = 81\%$. Le chargement réel de pression capillaire étant supposé être instantané à $t = 0$, la résolution numérique du problème requiert par conséquent un pas de temps très petit afin d'approcher au mieux les conditions de ce chargement, notamment au voisinage de $t = 0$. On constate en effet des écarts significatifs de presque 20% à 200 jours entre des pas de temps très petits ($\Delta t < 10^{-3}$ s) et des pas de temps de 1 s et plus.

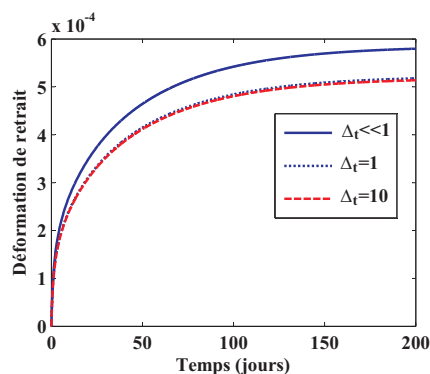


Figure 102: Evolution des déformations de retrait d'une pâte de ciment, pour des humidités relatives de 81 et 44%.

5.3. Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude portant sur les effets de la température et de l'humidité relative sur le comportement à long terme des bétons et en particulier les déformations de fluage. Le modèle de visco-endommagement développé aux chapitres 3 et 4 est modifié pour prendre en compte ces effets. L'approche utilisée est basée sur l'utilisation de la méthode du temps équivalent dans les 2 cas. Cette méthode, assez répandue dans la communauté scientifique, est de fait particulièrement simple et de plus ne pose aucune difficulté d'implantation numérique. Son efficacité dans le cas de chargements simples de fluage a été démontrée en confrontant des résultats numériques à des résultats expérimentaux issus de différentes études. Dans l'approche présentée ici, l'effet de la température et de l'humidité relative sont supposés n'affecter que les viscosités des amortisseurs des modèles de Maxwell généralisés adoptés pour le comportement du béton. Globalement, le modèle permet de reproduire correctement les déformations macroscopiques expérimentales dans des cas de chargement simple de fluage d'éprouvettes soumises à différentes températures modérées et différentes valeurs d'humidité relative.

Cependant, reproduire les effets de la température et de l'humidité relative sur les propriétés mécaniques et visqueuses du matériau ne suffit généralement pas à décrire son comportement de façon précise lorsqu'il est soumis à des chargements couplés thermo-hydriques. En effet, il faut également prendre en compte dans ce cas les déformations thermiques ainsi que les pressions des fluides présents dans la porosité (pression capillaire) pour obtenir un modèle complet. Ces aspects ont seulement été abordés dans notre étude dans le cas de la prise en compte des variations d'humidité relative pour lesquelles une extension de l'approche de Schapery a été proposée. Celle-ci repose sur l'introduction d'une pseudo-pression capillaire calculée à partir du coefficient de Biot viscoélastique. Une analyse plus approfondie de cette approche doit cependant être effectuée afin d'examiner la réponse du modèle sous divers types de chargement plus complexes. D'autre part, cette démarche doit également être

5. Prise en compte des effets des thermo-hydriques

appliquée aux variations de température via le concept de pseudo-déformations thermiques dépendant, par analogie aux pseudo-pressions capillaires, du coefficient de dilatation thermique viscoélastique. Le modèle pourra ainsi décrire le comportement différé du béton soumis à des chargements THM.

6. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cette étude a été consacrée au développement d'un modèle couplant les phénomènes de fluage et d'endommagement du béton avec prise en compte des effets thermiques et hydriques. Elle s'est limitée à la viscoélasticité linéaire isotrope non vieillissante, à l'endommagement isotrope et aux températures modérées. Le modèle développé se voulait simple et tel que chacun des paramètres y intervenant ait un sens physique clair et se prête facilement à une identification expérimentale. Un autre objectif de cette étude était l'implantation numérique du modèle établi dans un code de calcul par éléments finis pour simuler le comportement à long terme d'éléments de structure simples en béton.

Dans un premier temps, la pâte de ciment ou le béton est à l'échelle microscopique considéré comme un matériau hétérogène constitué d'une matrice viscoélastique linéaire isotrope caractérisée par un modèle de Maxwell généralisé approprié et de phases particulières représentant les granulats élastiques et les pores. Le schéma micromécanique de Mori-Tanaka a été adopté et la transformée de Laplace-Carson et son inversion ont été utilisées pour obtenir dans l'espace temporel des estimations analytiques ou numériques des paramètres du modèle de fluage macroscopique. En particulier, nous concluons que, même si un modèle de Maxwell généralisé relativement simple est utilisé pour décrire la matrice, les propriétés viscoélastiques effectives obtenues du matériau hétérogène s'avèrent suffisamment riches et flexibles. D'autre part, si le nombre des éléments viscoélastiques dans le modèle de Maxwell généralisé choisi n'est pas élevé, des estimations analytiques explicites dans l'espace temporel peuvent être obtenues pour les propriétés viscoélastiques effectives. Ces résultats semblent ne pas avoir été rapportés dans la littérature.

Dans un deuxième temps, notre modèle de fluage a été couplé au modèle d'endommagement isotrope de Mazars en faisant appel au concept de pseudo-déformations de Schapery. Ce couplage entre le fluage et l'endommagement fait que la loi de comportement finale devient non linéaire. Un avantage principal du modèle viscoélastique endommageable ainsi établi est qu'il permet de résoudre un problème viscoélastique avec endommagement directement dans l'espace temporel sans passer par la transformée de Laplace-Carson. De plus, l'implantation du modèle dans le code de calcul Cast3M se révèle assez simple du fait que la formulation est explicite. La confrontation entre des résultats numériques et des résultats expérimentaux d'essais de fluage nous a conduit à la conclusion que le modèle viscoélastique endommageable développé est à la fois simple et bien adapté aux matériaux cimentaires.

Dans un troisième temps, les effets de la température et de l'humidité relative sur les déformations de fluage du béton ont été pris en compte dans notre modèle viscoélastique endommageable par le biais de la méthode du temps équivalent. Comme nous l'avons souligné à la fin du chapitre 5, cette approche, assez souvent adoptée dans la communauté scientifique, a le mérite d'être particulièrement simple et de plus ne pose aucune complication sur le plan numérique. Elle a fait preuve d'efficacité dans le cas de chargements simples de fluage comme l'atteste la comparaison de nos résultats numériques à des résultats expérimentaux disponibles.

Les déformations différées du béton résultent de phénomènes mécaniques et physiques complexes. Cette étude a essentiellement apporté une contribution à la modélisation des déformations de fluage. Elle ouvre des perspectives intéressantes tout en soulevant de nombreuses questions. Concernant les perspectives, nous en listons d'abord quelques-unes conduisant à une extension directe de notre modélisation :

- (1) Les phases particulières représentant les granulats élastiques et les pores dans la modélisation micromécanique du fluage ont été supposées sphériques. Cette hypothèse morphologique peut être relaxée par la considération de phases sphéroïdales tout en conservant certains aspects analytiques explicites de la modélisation.
- (2) Quand le béton est soumis à des chargements thermiques, les déformations thermiques doivent être prises en compte. Notre modélisation micromécanique se prête en fait facilement à l'intégration des déformations thermiques par l'introduction de déformations libres. D'autre part, les pseudo-déformations thermiques peuvent être définies à l'instar des pseudo-déformations mécaniques de Schapery.
- (3) Lorsque des chargements couplés thermo-hydriques sont appliqués au béton, nous devons également tenir compte des pressions des fluides présents dans la porosité. Cet aspect a été abordé dans notre étude par l'introduction d'une pseudo-pression capillaire calculée à partir du coefficient de Biot viscoélastique. Une étude plus approfondie de cette approche devra cependant être menée. En particulier, les effets du couplage visco-élasto-thermo-hydrique restent à clarifier.
- (4) Enfin, faute de temps il n'a pas été possible de présenter de résultats de simulations numériques par éléments finis sur éléments de structure soumises à des chargements thermo-hydro-mécaniques. D'un point de vue numérique, le seul point délicat réside dans le calcul des temps caractéristiques macroscopiques des modèles de Maxwell généralisés caractérisant le comportement effectif du matériau. Le nombre de ces temps dépend des modèles rhéologiques retenus pour

décrire le comportement de la matrice ainsi que celui des différentes phases particulières. Cet aspect important reste donc à investiguer et développer afin notamment de pouvoir valider le modèle sur des essais plus complexes et représentatifs tels que des tests de fluage avec dessiccation.

Parmi les autres perspectives, nous pouvons citer les suivantes :

- (a) L'endommagement a été supposé isotrope dans cette étude. Notre modélisation peut en principe s'étendre à la prise en compte d'un endommagement anisotrope. Cependant cette anisotropie induit généralement une anisotropie de la viscoélasticité. Par conséquent, pour coupler la viscoélasticité à l'endommagement anisotrope via le concept de pseudo-déformations de Schapery, il faudra au préalable construire un modèle de fluage anisotrope.
- (b) Un examen approfondi du concept de pseudo-déformations de Schapery est nécessaire pour saisir de façon complète et précise l'étendue et les implications de cette approche. En effet, ce concept peut théoriquement s'appliquer à la viscoélasticité non linéaire.
- (c) Les effets unilatéraux liés à l'endommagement n'ont pas été abordés dans cette étude, car nous avons uniquement considéré des chargements de compression au vu des applications envisagées. Néanmoins, cette question mérite d'être posée et traitée dans le cadre du couplage viscoélasticité-endommagement, car elle a une importance non seulement théorique mais aussi pratique.

REFERENCES

- [1] Richardson I. G., *The nature of the hydration products in hardened cement pastes*. Cement and Concrete Composites, 2000. **22**(2): p. 97-113.
- [2] Béjaoui S., Bary B., Nitsche S., Chaudanson D. and Blanc C., *Experimental and modeling studies of the link between microstructure and effective diffusivity of cement pastes*. Revue Européenne de Génie Civil, 2006. **10**(9): p. 1073-1106.
- [3] Jennings H. M., *A model for the microstructure of calcium silicate hydrate in cement paste*. Cement and Concrete Research, 2000. **30**(1): p. 101.
- [4] Tennis P. D. and Jennings H. M., *A model for two types of calcium silicate hydrate in the microstructure of Portland cement pastes*. Cement and Concrete Research, 2000. **30**(6): p. 855-863.
- [5] Powers T. C. and Brownyard T. L., *Studies of the physical properties of hardened cement paste*. Bull 22, Res. Laboratory of Portland Cement Association, Skokie, IL, U.S.A., reprinted from J. Am. Concr., 1947. **43**.
- [6] Nonat A., *The structure and stoichiometry of C-S-H*. Cement and Concrete Research, 2004. **34**(9): p. 1521-1528.
- [7] Jennings H. M., *Colloid model of C-S-H and implications to the problem of creep and shrinkage*. Materials And Structures, 2004. **37**(265): p. 59-70.
- [8] Ollivier J. P., Maso J. C. and Bourdette B., *Interfacial transition zone in concrete*. Advanced Cement Based Materials, 1995. **2**(1): p. 30.
- [9] Scrivener K. L., Crumbie A. K. and Laugesen P., *The Interfacial Transition Zone (ITZ) Between Cement Paste and Aggregate in Concrete*. Interface Science, 2004. **12**(4): p. 411-421.
- [10] Glucklich J. and Ishai O., *Creep mechanism in cement mortar*. ACI Journal Proceedings, 1962. **59**(7): p. 923.
- [11] Ruetz W., *A hypothesis for creep of hardened cement paste and the influence of simultaneous shrinkage*, in *Proceeding of International Conference on the Structure of Concrete*, Cement and Concrete Association. 1968. p. 365-387.
- [12] Tamtsia B. T. and Beaudoin J. J., *Basic creep of hardened cement paste: A re-examination of the role of water*. Cement and Concrete Research, 2000. **30**(9): p. 1465-1475.
- [13] Feldman R. F., *Mechanism of creep of hydrated Portland cement paste*. Cement and Concrete Research, 1972. **2**(5): p. 509-520.
- [14] Bazant Z. P. and Chern J., *Concrete creep at variable humidity: constitutive law and mechanism*. Materials and Structures, 1985. **18**(1): p. 1-20.
- [15] Bazant Z. P. and Prasanna S., *Solidification theory for concrete creep I. Formulation*. Journal of Engineering Mechanics, 1989. **115**(8): p. 1691-1703.
- [16] Bazant Z. P. and Prasanna S., *Solidification theory for concrete creep II. Verification and application*. Journal of Engineering Mechanics, 1989. **115**(8): p. 1704-1725.
- [17] Bazant Z. P., Hauggaard A. B., Baweja S. and Ulm F. J., *Microprestress-solidification theory for concrete creep. I: aging and drying effects*. Journal of Engineering Mechanics, 1997. **123**(11): p. 1188-1194.

- [18] Bazant Z. P., Hauggaard A. B. and Baweja S., *Microprestress-solidification theory for concrete creep. II: algorithm and verification*. Journal of Engineering Mechanics, 1997. **123**(11): p. 1195-1201.
- [19] Vandamme M. and Ulm F. J., *Nanogranular origin of concrete creep*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2009. **106**(26): p. 10552-10557.
- [20] Gawin D., Pesavento F. and Schrefler B. A., *Modelling creep and shrinkage of concrete by means of effective stresses*. Materials And Structures, 2007. **40**(6): p. 579-591.
- [21] Shao J. F., Zhu Q. Z. and Su K., *Modeling of creep in rock materials in terms of material degradation*. Computers and Geotechnics, 2003. **30**(7): p. 549.
- [22] Sellier A. and Buffo-Lacarrière L., *Towards a simple and unified modelling of basic creep, shrinkage and drying creep of concrete*. European Journal of Environmental and Civil Engineering, 2009. **13**(10): p. 1161.
- [23] Benboudjema F., Meftah F. and Torrenti J. M., *Interaction between drying, shrinkage, creep and cracking phenomena in concrete*. Engineering Structures, 2005. **27**(2): p. 239.
- [24] Mandel J., *Cours de mécanique des milieux continus*. Annexe XXI, Viscoélasticité,, 1966
- [25] Salençon J., *Viscoélasticité*. 1983: Presses de l'école nationale des ponts et chaussées.
- [26] Le Q. V., Meftah F., He Q.-C. and Le Pape Y., *Creep and relaxation functions of a heterogeneous viscoelastic porous medium using the Mori-Tanaka homogenization scheme and a discrete microscopic retardation spectrum*. Mechanics Of Time-Dependent Materials, 2007. **11**(3-4): p. 309-331.
- [27] Scheiner S. and Hellmich C., *Continuum microviscoelasticity model for aging basic creep of early-age concrete*. Journal Of Engineering Mechanics-Asce, 2009. **135**(4): p. 307-323.
- [28] Gu S.-T., Bary B., He Q.-C. and Thai M.-Q., *Multiscale poro-creep model for cement-based materials*. To appear in International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.
- [29] Guénot-Delahaie L., *Contribution à analyse physique et à la modélisation du fluage propre du béton*. 1997, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [30] Bazant Z. P., *Mathematical models for creep and shrinkage in concrete*. Creep and Shrinkage in concrete structures, 1982.
- [31] Parrott L. J. and Young J. F., *Shrinkage and swelling of two hydrated alite pastes*. Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete, 1982: p. 35-48.
- [32] Niyogi L., *Déformation de fluage propre en fonction de l'âge de chargement*. 1973.
- [33] Ulm F. J. and Acker P, *Le point sur le fluage et le recouvrance des bétons*. Bulletin des Laboratoires des ponts et chaussées, 1998: p. 73-82.
- [34] Benboudjema F., *Modélisation des déformations différées du béton sous sollicitations biaxiales. Application aux enceintes de confinement de bâtiments réacteurs des centrales nucléaires*. 2002, Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée. p. 258.
- [35] Gopalakrishnan K. S., Neville A. M. and Ghali A., *Creep Poisson's Ratio of concrete under multiaxial compression*. ACI 1969: p. 1009-1020.

- [36] Acker P. and Ulm F.-J., *Creep and shrinkage of concrete: physical origins and practical measurements*. Nuclear Engineering and Design, 2001. **203**(2-3): p. 143-158.
- [37] Ali I. and Kesler C. E., *Mechanism of creep in concrete*. Symposium on creep of concrete, 1964(S-P 9): p. 35-63.
- [38] Gamble B. R. and Parrott L. J., *Creep of concrete in compression during drying and wetting*. Magazine of Concrete Research, 1978. **104** (30): p. 129-138.
- [39] Vlahinic, I., Thomas J. J., Jennings H. M. and Andrade J., *Transient creep effects and the lubricating power of water in materials ranging from paper to concrete and Kevlar*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2012. **60**(7): p. 1350-1362.
- [40] Pons G., Torrenti J. M., *Chapitre 5: Retrait et Fluage. La Durabilité des Bétons.*, 2009: Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [41] Mazzotti C. and Savoia M., *Nonlinear Creep Damage Model for Concrete Under Uniaxial Compression*. Journal of Engineering Mechanics-Asce, 2003. **129**(9).
- [42] Nguyen S. T., Dormieux L., Le Pape Y. and Sanahuja J., *A Burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid*. International Journal of Damage Mechanics, 2011. **20**(8): p. 1116-1129.
- [43] Shao J. F., Chau K. T. and Feng X. T., *Modeling of anisotropic damage and creep deformation in brittle rocks*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2006. **43**(4): p. 582-592.
- [44] Fernández Ruiz M., Muttoni A. and Gambarova P. G., *Relationship between nonlinear creep and cracking of concrete under uniaxial compression*. Journal of Advanced Concrete Technology, 2007. **5**(3): p. 383-393.
- [45] Mazars J., *A description of micro- and macroscale damage of concrete structures*, in *Engineering Fracture Mechanics*. 1986. p. 729-737.
- [46] Torrenti J. M., Nguyen V. H., Colina H., Le Maou F., F. Benboudjema and Deleruyelle F., *Coupling between leaching and creep of concrete*. Cement and Concrete Research, 2008. **38**(6): p. 816-821.
- [47] Reviron N., Benboudjema F., Torrenti J. M., Nahas G. and M. A., *Coupling between creep and cracking in tension*, in *6th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures*. 2007: Italie.
- [48] De Larrard T., *Variabilité des propriétés du béton: caractérisation expérimentale et modélisation probabiliste de lixiviation*. 2010, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [49] Briffaut M., *Etude de la fissuration au jeune âge des structures massives: influence de la vitesse de refroidissement, des reprises de bétonnage et des armatures*. 2010, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- [50] Baxevanis T., Pijaudier-Cabot G. and Dufour F., *Bifurcation and creep effects in a viscoelastic non-local damageable continuum*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2008. **27**(4): p. 548-563.
- [51] Papa E. and Taliencio A., *A visco-damage model for brittle materials under monotonic and sustained stresses*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2005. **29**(3): p. 287-310.
- [52] Challamel N., Lanos C. and Casandjian C., *Creep damage modelling for quasi-brittle materials*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2005. **24**(4): p. 593-613.

- [53] Dube J. F., Pijaudier-Cabot G. and LaBorderie C., *Rate dependent damage model for concrete in dynamics*. Journal of Engineering Mechanics-Asce, 1996. **122**(10): p. 939-947.
- [54] Kachanov L., *Rupture time under creep conditions*. International Journal of Fracture, 1999. **97**(1): p. 11.
- [55] Sullivan R., *Development of a viscoelastic continuum damage model for cyclic loading*. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2008. **12**(4): p. 329-342.
- [56] Darabi M. K., Abu Al-Rub R. K., Masad E. A., Huang C.-W. and Little D. N., *A thermo-viscoelastic-viscoplastic-viscodamage constitutive model for asphaltic materials*. International Journal of Solids and Structures, 2011. **48**(1): p. 191-207.
- [57] Park S. W., Kim Y. R. and Schapery R. A., *A viscoelastic continuum damage model and its application to uniaxial behavior of asphalt concrete*. Mechanics of Materials, 1996. **24**(4): p. 241-255.
- [58] Schapery R. A., *Correspondence principles and a generalized J integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media*. International Journal of Fracture, 1984. **25**(3): p. 195-223.
- [59] Schapery R. A., *A micromechanical model for non-linear viscoelastic behavior of particle-reinforced rubber with distributed damage*. Engineering Fracture Mechanics, 1986. **25**(5-6): p. 845-867.
- [60] Hauggaard A. B., Damkilde L. and Hansen P. F., *Transitional thermal creep of early age concrete*. Journal of Engineering Mechanics-Asce, 1999. **125**(4): p. 458-465.
- [61] Bazant Z. P., Cusatis G. and Cedolin L., *Temperature effect on concrete creep modeled by microprestressing-solidification theory*, in *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*. 2004. p. 691-699.
- [62] Bazant Z. P. and Chern J. C., *Stress-induced thermal and shrinkage strains in concrete*. Journal of Engineering Mechanics-ASCE, 1987. **113**(10): p. 1493-1511.
- [63] Bazant Z. P. and Xi Y. P., *Continuous retardation spectrum for solidification theory of concrete creep*. Journal of Engineering Mechanics-ASCE, 1995. **121**(2): p. 281-288.
- [64] Briffaut M., Benboudjema F., Torrenti J. M. and Nahas G., *Numerical analysis of the thermal active restrained shrinkage ring test to study the early age behavior of massive concrete structures*. Engineering Structures, 2011. **33**(4): p. 1390.
- [65] Ladaoui W., Vidal T., Sellier A. and Bourbon X., *Effect of a temperature change from 20 to 50°C on the basic creep of HPC and HPFRC*. Materials and Structures, 2011. **44**: p. 1629-1639.
- [66] Bazant Z. P., Hemann J. H., Koller H. and Najjar L. J., *Thin-wall cement paste cylinder for creep test at variable humidity or temperature*. Materials and Structures, 1973. **6**(34): p. 227-281.
- [67] Bazant Z. P., Asghari A., Schmidt J. . *Experimental study of creep of hardened Portland cement paste at variable water content*. Materials and Structures, 1976. **9**(52): p. 279 - 290.
- [68] Parrott L. J., *Lateral strains in hardened cement paste under short and long-term loading*. Magazine of Concrete Research, 1974. **26**(89): p. 198-202.
- [69] Granger L., *Comportement différé du béton dans les enceintes de centrales nucléaires: analyse et modélisation*. 1995, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées: Paris.

- [70] Hanhijärvi A., *Perpendicular to grain creep of finish softwoods in high temperature drying conditions: Experiments and modelling in temperature range 95-125°C*. Technical Research Center of Finland, 1997: p. 94p.
- [71] He Q.-C. and Curnier A., *A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations*. International Journal of Solids and Structures, 1995. **32**(10): p. 1433-1457.
- [72] Eshelby J. D., *The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1957. **241**(1226): p. 376-396.
- [73] Salençon J., *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. 2009, Les éditions de l'Ecole Polytechnique. p. 151.
- [74] Hashin Z., *Viscoelastic Behavior of Heterogeneous Media*. J. Appl. Mech. Trans. ASME, 1965. **32**: p. 630-636.
- [75] Hashin Z., *The elastic moduli of heterogeneous materials*. J. Appl. Mech, 1962. **29**: p. 143-150.
- [76] Hashin Z. and Shtrikman S., *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1963. **11**(2): p. 127-140.
- [77] Mori T. and Tanaka K., *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*. Acta Metallurgica, 1973. **21**(5): p. 571-574.
- [78] Christensen R. M., *Viscoelastic properties of heterogeneous media*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1969. **17**(1): p. 23-41.
- [79] Coussy O., *Poromechanics*. 2003: Wiley. 312.
- [80] Ladaoui W., *Etude expérimentale du comportement Thermo-Hydro-Mécanique à long terme des BHP destinés aux ouvrages de stockage des déchets radioactifs*. 2010, Thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier. p. 290.
- [81] Benveniste Y., *A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials*. Mechanics of Materials, 1987. **6**(2): p. 147-157.
- [82] Miguel F. R., Aurelio M. and Pietro G. G., *Relationship between nonlinear creep and cracking of concrete under uniaxial compression*. Journal of Advanced Concrete Technology, 2007. **5**(3): p. 383-393.
- [83] Omar M., *Déformation différée du béton: étude expérimentale et modélisation numérique de l'interaction fluage-chargement*. 2004, Ecole centrale de Nantes.
- [84] Li Z., *Effective creep Poisson's ratio for damaged concrete*. International Journal of Fracture, 1994. **66**: p. 189-196.
- [85] www-cast3m.cea.fr.
- [86] Hilton H. H., *Implications and Constraints of Time-Independent Poisson Ratios in Linear Isotropic and Anisotropic Viscoelasticity*. Journal of elasticity, 2001. **63**(3): p. 221-251.
- [87] Galle C., Peycelon H. and Le Bescop P., *Effect of an accelerated chemical degradation on water permeability and pore structure of cement-based materials*. Vol. 16. 2004, London, ROYAUME-UNI: Telford. 10.

- [88] Arthanari T. S., Yu C. W., *Creep of concrete under uniaxial and biaxial stresses at elevated temperatures*. Mag. of Concrete Res., 1967. **19**(60): p. 149–156.
- [89] Bazant Z. P. and Wu S. T., *Creep and shrinkage law for concrete at variable humidity*. Journal of the Engineering Mechanics Division-Asce, 1974. **100**(6): p. 1183-1209.
- [90] Roelfstra P. E., *A numerical approach to investigate the properties of concrete-numerical concrete*. 1989, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne: Lausanne. p. 212.

ANNEXES

Annexe I. Inclusion sphérique

Les expressions des coefficients A_i^k , B_i^k et C_i^k ($i = 0, 1, 2$) du module de compressibilité dans (121)

$$\begin{aligned} A_2^k &= \tau_1^m \tau_2^m (3k_1 + 4\mu_0 + 3k_2 + 4\mu_1 + 3k_0 + 4\mu_2) \\ A_1^k &= (4\mu_1 + 3k_0 + 3k_0 + 3k_1) \tau_1^m + (4\mu_0 + 4\mu_0 + 3k_2 + 4\mu_2) \tau_2^m \\ A_0^k &= 3k_0 + 4\mu_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^k &= \tau_1^m \tau_2^m (k^i - k_0 - k_1 - k_2) \\ B_1^k &= \tau_1^m (k^i - k_0 - k_1) + \tau_2^m (k^i - k_0 - k_2) \\ B_0^k &= k^i - k_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2^k &= -\tau_1^m \tau_2^m (3ck^i - 3k^i - 3ck_0 - 4\mu_0 - 3ck_1 - 4\mu_1 - 3ck_2 - 4\mu_2) \\ C_1^k &= \tau_1^m (-3ck^i + 3k^i + 3ck_0 + 4\mu_0 + 3ck_1 + 4\mu_1) \\ &\quad + \tau_2^m (+3ck_2 + 4\mu_2 - 3ck^i + 3k^i + 3ck_0 + 4\mu_0) \\ C_0^k &= -(3ck^i - 3k^i - 3ck_0 - 4\mu_0) \end{aligned}$$

Les expressions des coefficients x_i^k ($i = 1-5$) dans (128)

$$\begin{aligned} x_1^k &= \frac{A_2^k s_1^{k3} B_1^k + A_2^k s_1^{k2} B_0^k + A_1^k s_1^{k3} B_2^k + A_1^k s_1^{k2} B_1^k + A_1^k s_1^k B_0^k + A_0^k B_2^k s_1^{k2} + A_0^k B_1^k s_1^k + A_0^k B_0^k + A_2^k B_2^k s_1^{k4}}{(\tau_1^m s_1^k + I)(\tau_2^m s_1^k + I)(-s_2^k + s_1^k)} \\ x_2^k &= \frac{-A_2^k s_2^{k3} B_1^k - A_2^k s_2^{k2} B_0^k - A_1^k s_2^{k3} B_2^k - A_1^k s_2^{k2} B_1^k - A_1^k s_2^k B_0^k - A_0^k B_2^k s_2^{k2} - A_0^k B_1^k s_2^k - A_0^k B_0^k - A_2^k B_2^k s_2^{k4}}{(\tau_1^m s_2^k + I)(\tau_2^m s_2^k + I)(-s_2^k + s_1^k)} \\ x_3^k &= \frac{-\tau_1^m A_2^k B_1^k + A_2^k B_0^k \tau_1^{m2} - \tau_1^m A_1^k B_2^k + A_1^k B_1^k \tau_1^{m2} - A_1^k B_0^k \tau_1^{m3} + A_0^k B_2^k \tau_1^{m2} - A_0^k B_1^k \tau_1^{m3} + \tau_1^{m4} A_0^k B_0^k + A_2^k B_2^k}{\tau_1^m (\tau_1^m - \tau_2^k) (\tau_1^m s_1^k + I) (\tau_1^m s_2^k + I)} \\ x_4^k &= \frac{\tau_2^m A_2^k B_1^k - A_2^k B_0^k \tau_2^m + \tau_2^m A_1^k B_2^k - A_1^k B_1^k \tau_2^m + A_1^k B_0^k \tau_2^{m3} - A_0^k B_2^k \tau_2^{m2} + A_0^k B_1^k \tau_2^{m3} - \tau_2^{m4} A_0^k B_0^k - A_2^k B_2^k}{\tau_2^m (\tau_1^m - \tau_2^m) (\tau_2^m s_1^k + I) (\tau_2^m s_2^k + I)} \\ x_5^k &= \frac{A_2^k B_2^k}{C_2^k \tau_1^m \tau_2^m} \end{aligned}$$

Les expressions des modules de compressibilité macroscopique k_i ($i = \infty, 1-4$) et des temps caractéristiques macroscopiques τ_i^k ($i = 1-4$) dans l'équation (129)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1^k = -1/s_1^k; \quad \tau_2^k = -1/s_2^k \\ \tau_3^k = \tau_1^m; \quad \tau_4^k = \tau_2^m \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_\infty = -\frac{x_1^k}{s_1^k} - \frac{x_2^k}{s_2^k} + x_3^k + x_4^k + x_5^k \\ k_1 = -x_3^k; \quad k_2 = -x_4^k \\ k_3 = x_1^k; \quad k_4 = x_2^k \end{array} \right.$$

Les expressions des coefficients A_i^μ , B_i^μ et C_i^μ ($i=0,1,2$) du module de cisaillement dans l'expression (137)

$$A_2^\mu = \tau_1^m \tau_2^m (1-c) \mu_\infty$$

$$A_1^\mu = (1-c) (\tau_1^m \mu_\infty + \tau_2^m \mu_\infty + \tau_1^m \mu_1 + \tau_2^m \mu_2)$$

$$A_0^\mu = (1-c) \mu_\infty$$

$$B_2^\mu = \tau_1^m \tau_2^m (9k_0 + 8\mu_0)$$

$$B_1^\mu = 9k_\infty \tau_1^m + 9k_\infty \tau_2^m + 9k_1 \tau_1^m + 9k_2 \tau_2^m + 8\tau_1^m \mu_\infty + 8\tau_2^m \mu_\infty + 8\tau_1^m \mu_1 + 8\tau_2^m \mu_2$$

$$B_0^\mu = 9k_\infty + 8\mu_\infty$$

$$C_2^\mu = \tau_1^m \tau_2^m (9k_0 + 8\mu_0 + 6ck_0 + 12c\mu_0)$$

$$C_1^\mu = \tau_1^m (9k_\infty + 9k_1 + 8\mu_\infty + 8\mu_1 + 6ck_\infty + 6ck_1 + 12c\mu_0 + 12c\mu_1)$$

$$+ \tau_2^m (12c\mu_2 + 9k_\infty + 9k_2 + 8\mu_0 + 8\mu_2 + 6ck_\infty + 6ck_2 + 12c\mu_\infty)$$

$$C_0^\mu = 9k_\infty + 8\mu_\infty + 6ck_\infty + 12c\mu_\infty$$

On démontre ci-après que l'équation

$$C_2^\mu s^2 + C_1^\mu s + C_0^\mu = 0. \quad (230)$$

a 2 solutions différentes négatives. Le discriminant est calculé par

$$\Delta^\mu = (C_1^\mu)^2 - 4C_0^\mu C_2^\mu \quad (231)$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy, on trouve

$$(C_1^\mu)^2 \geq 4 \tau_1^m \tau_2^m C_{11}^\mu C_{12}^\mu \quad (232)$$

où

$$\begin{cases} C_1^\mu = C_{11}^\mu + C_{12}^\mu \\ C_{11}^\mu = \tau_1^m (9k_\infty + 9k_1 + 8\mu_\infty + 8\mu_1 + 6ck_\infty + 6ck_1 + 12c\mu_0 + 12c\mu_1) \\ C_{12}^\mu = \tau_2^m (12c\mu_2 + 9k_\infty + 9k_2 + 8\mu_0 + 8\mu_2 + 6ck_\infty + 6ck_2 + 12c\mu_\infty) \end{cases} \quad (233)$$

Alors, il est évident que

$$\begin{aligned} \Delta^\mu &= (C_1^\mu)^2 - 4C_0^\mu C_2^\mu \\ &\geq 4\tau_1^m \tau_2^m C_{11}^\mu C_{12}^\mu - 4C_0^\mu C_2^\mu \\ &\geq 4\tau_1^m \tau_2^m (9k_1 + 8\mu_1 + 6ck_1 + 12c\mu_1)(9k_2 + 8\mu_2 + 6ck_2 + 12c\mu_2) \\ &> 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (234)$$

L'équation (230) a alors 2 solutions distincte s_1^μ et s_2^μ

$$\begin{cases} s_1^\mu = \frac{-C_1^\mu - \sqrt{\Delta^\mu}}{2C_2^\mu} \\ s_2^\mu = \frac{-C_1^\mu + \sqrt{\Delta^\mu}}{2C_2^\mu} \end{cases}$$

D'abord, on trouve que s_1^μ est toujours négative car $C_1^\mu > 0$ et $C_2^\mu > 0$. Ensuite, on démontre que $s_2^\mu < 0$.

On considère les coefficients C_0^μ, C_2^μ :

$$\begin{cases} C_2^\mu = \tau_1^m \tau_2^m (9k_0 + 8\mu_0 + 6ck_0 + 12c\mu_0) > 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i=1,2) \\ C_0^\mu = 9k_\infty + 8\mu_\infty + 6ck_\infty + 12c\mu_\infty > 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i=1,2) \end{cases} \quad (235)$$

On en déduit :

$$-C_1^\mu + \sqrt{\Delta^\mu} = -C_1^\mu + \sqrt{(C_1^\mu)^2 - 4C_2^\mu C_0^\mu} < 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i=1,2)$$

L'équation (230) a toujours 2 solutions distinctes négative s_1^μ et s_2^μ .

Les expressions des x_i^μ ($i = 1-5$) dans (139)

$$\begin{aligned}
x_1^\mu &= \frac{A_2^\mu s_1^{\mu 3} B_1^\mu + A_2^\mu s_1^{\mu 2} B_0^\mu + A_1^\mu s_1^{\mu 3} B_2^\mu + A_1^\mu s_1^{\mu 2} B_1^\mu + A_1^\mu s_1^\mu B_0^\mu + A_0^\mu B_2^\mu s_1^{\mu 2} + A_0^\mu B_1^\mu s_1^\mu + A_0^\mu B_0^\mu + A_2^\mu B_2^\mu s_1^{\mu 4}}{(\tau_1^m s_1^\mu + I)(\tau_2^m s_1^\mu + I)(-s_2^\mu + s_1^\mu)} \\
x_2^\mu &= \frac{-A_2^\mu s_2^{\mu 3} B_1^\mu - A_2^\mu s_2^{\mu 2} B_0^\mu - A_1^\mu s_2^{\mu 3} B_2^\mu - A_1^\mu s_2^{\mu 2} B_1^\mu - A_1^\mu s_2^\mu B_0^\mu - A_0^\mu B_2^\mu s_2^{\mu 2} - A_0^\mu B_1^\mu s_2^\mu - A_0^\mu B_0^\mu - A_2^\mu B_2^\mu s_2^{\mu 4}}{(\tau_1^m s_2^\mu + I)(\tau_2^m s_2^\mu + I)(-s_2^\mu + s_1^\mu)} \\
x_3^\mu &= \frac{-\tau_1^m A_2^\mu B_1^\mu + A_2^\mu B_0^\mu \tau_1^{m 2} - \tau_1^m A_1^\mu B_2^\mu + A_1^\mu B_1^\mu \tau_1^{m 2} - A_1^\mu B_0^\mu \tau_1^{m 3} + A_0^\mu B_2^\mu \tau_1^{m 2} - A_0^\mu B_1^\mu \tau_1^{m 3} + \tau_1^{m 4} A_0^\mu B_0^\mu + A_2^\mu B_2^\mu}{\tau_1^m (\tau_1^m - \tau_2^m) (\tau_1^m s_1^\mu + I) (\tau_1^m s_2^\mu + I)} \\
x_4^\mu &= \frac{\tau_2^m A_2^\mu B_1^\mu - A_2^\mu B_0^\mu \tau_2^{m 2} + \tau_2^m A_1^\mu B_2^\mu - A_1^\mu B_1^\mu \tau_2^{m 2} + A_1^\mu B_0^\mu \tau_2^{m 3} - A_0^\mu B_2^\mu \tau_2^{m 2} + A_0^\mu B_1^\mu \tau_2^{m 3} - \tau_2^{m 4} A_0^\mu B_0^\mu - A_2^\mu B_2^\mu}{\tau_2^m (\tau_1^m - \tau_2^m) (\tau_2^m s_1^\mu + I) (\tau_2^m s_2^\mu + I)} \\
x_5^\mu &= \frac{A_2^\mu B_2^\mu}{C_2^\mu \tau_1^m \tau_2^m}
\end{aligned}$$

Les expressions des modules de cisaillement macroscopique μ_i ($i = \infty, 1-4$) et des temps caractéristiques macroscopiques τ_i^μ ($i = 1-4$) dans (140)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_\infty = -\frac{x_1^\mu}{s_1^\mu} - \frac{x_2^\mu}{s_2^\mu} + x_3^\mu + x_4^\mu + x_5^\mu \\ \mu_1 = -x_3^\mu \quad ; \quad \mu_2 = -x_4^\mu \\ \mu_3 = x_1^\mu \quad ; \quad \mu_4 = x_2^\mu \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_1^\mu = -I / s_1^\mu \quad ; \quad \tau_2^\mu = -I / s_2^\mu \\ \tau_3^\mu = \tau_1^m \quad \quad ; \quad \tau_4^\mu = \tau_2^m \end{array} \right.$$

Les expressions des coefficients A_i^b et B_i^b ($i = 0, 1, 2$) du coefficient de Biot dans (154)

$$\begin{aligned}
A_2^b &= c \tau_1 \tau_2 (3k_0 + 4\mu_0) \\
A_1^b &= c (3k_\infty \tau_1 + 3k_\infty \tau_2 + 3k_1 \tau_1 + 3k_2 \tau_2 + 4\tau_1 \mu_\infty + 4\tau_2 \mu_\infty + 4\tau_1 \mu_1 + 4\tau_2 \mu_2) \\
A_0^b &= c (3k_\infty + 4\mu_\infty) \\
B_2^b &= \tau_1 \tau_2 (4\mu_0 + 3ck_0) \\
B_1^b &= 4\tau_1 \mu_\infty + 4\tau_2 \mu_\infty + 4\tau_1 \mu_1 + 4\tau_2 \mu_2 + 3ck_\infty \tau_1 + 3ck_\infty \tau_2 + 3ck_1 \tau_1 + 3ck_2 \tau_2 \\
B_0^b &= 4\mu_\infty + 3ck_\infty
\end{aligned}$$

De manière similaire, on considère l'équation

$$B_2^b s^2 + B_1^b s + B_0^b = 0. \quad (236)$$

On va démontrer que le déterminant est positif

$$\Delta^b = (B_1^b)^2 - 4B_0^b B_2^b > 0 \quad (237)$$

On trouve

$$(B_1^b)^2 \geq 4\tau_1 \tau_2 B_{11}^b B_{12}^b \quad (238)$$

où

$$\begin{aligned} B_{11}^b &= 4\tau_1\mu_0 + 4\tau_1\mu_1 + 3ck_0\tau_1 + 3ck_1\tau_1 \\ B_{12}^b &= 3ck_2\tau_2 + 4\tau_2\mu_0 + 4\tau_2\mu_2 + 3ck_0\tau_2 \end{aligned} \quad (239)$$

Alors, il est évident que :

$$\begin{aligned} \Delta^b &= (B_1^b)^2 - 4B_0^b B_2^b \\ &\geq 4\tau_1\tau_2 B_{11}^b B_{12}^b - 4B_0^b B_2^b \\ &\geq 4\tau_1\tau_2 (4\mu_1 + 3ck_1)(4\mu_2 + 3ck_2) \\ &> 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (240)$$

L'équation (230) a alors toujours 2 solutions distincte s_1^b et s_2^b . On démontre ensuite que ces solutions sont toujours négatives. En effet,

$$\begin{cases} s_1^b = \frac{-B_1^b - \sqrt{\Delta^b}}{2B_2^b} < 0 \quad (B_2^b > 0) \\ s_2^b = \frac{-B_1^b + \sqrt{\Delta^b}}{2B_2^b} < 0 \quad (-B_1^b + \sqrt{\Delta^b} < 0 \text{ et } B_2^b > 0) \end{cases}$$

car

$$\begin{aligned} B_2^b &= \tau_1\tau_2 (4\mu_0 + 3ck_0) > 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i=1,2) \\ B_0^b &= 4\mu_\infty + 3ck_\infty > 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (241)$$

on en déduit :

$$-B_1^b + \sqrt{\Delta^b} = -B_1^b + \sqrt{(B_1^b)^2 - 4B_2^b B_0^b} < 0 \quad \forall k_i, \mu_i \quad (i=1,2) \quad (242)$$

L'équation (236) a toujours 2 solutions distinctes négative s_1^b et s_2^b .

Les expressions des x_i^b ($i=1-3$) dans (156)

$$\begin{aligned} x_1^b &= \frac{A_2^b (s_1^b)^2 + A_1^b s_1^b + A_0^b}{-s_2^b + s_1^b} \\ x_2^b &= -\frac{A_2^b (s_2^b)^2 + A_1^b s_2^b + A_0^b}{-s_2^b + s_1^b} \\ x_3^b &= \frac{A_2^b}{B_2^b} \end{aligned}$$

Les expressions des b_i ($i = \infty, 1, 2$) et des τ_i^b ($i = \infty, 1, 2$) dans (157)

$$\begin{cases} b_\infty = -\frac{x_1^b}{s_1^b} - \frac{x_2^b}{s_2^b} + x_3^b; & b_1 = \frac{x_1^b}{s_1^b}; & b_2 = \frac{x_2^b}{s_2^b} \\ \tau_1^b = -\frac{1}{s_1^b}; & \tau_2^b = -\frac{1}{s_2^b} \end{cases}$$

Annexe II. Inclusion de disque

Les expressions des coefficients A_i^k et B_i^k ($i=0,1,2$) du module de compressibilité dans (162)

$$\begin{aligned}
 A_2^k &= \tau_1 \tau_2 (3k_0 k^i + 4k_0 \mu^i - 4ck_0 \mu^i + 4ck^i \mu^i) \\
 A_1^k &= (4k_\infty \tau_1 + 4k_\infty \tau_2 + 4k_1 \tau_1 + 4k_2 \tau_2 - 4ck_\infty \tau_1 - 4ck_\infty \tau_2 - 4ck_1 \tau_1 \\
 &\quad - 4ck_2 \tau_2 + 4ck^i \tau_1 + 4ck^i \tau_2) \mu^i + 3k_\infty k^i \tau_1 + 3k_\infty k^i \tau_2 + 3k_1 k^i \tau_1 + 3k_2 k^i \tau_2 \\
 A_0^k &= (4k_\infty - 4ck_\infty + 4ck^i) \mu^i + 3k_0 k^i \\
 \\
 B_2^k &= \tau_1 \tau_2 (3k^i + 4\mu^i + 3ck_0 - 3ck^i) \\
 B_1^k &= 3k^i \tau_1 + 3k^i \tau_2 + 4\tau_1 \mu^i + 4\tau_2 \mu^i + 3ck_\infty \tau_1 + 3ck_0 \tau_2 - 3ck^i \tau_1 - 3ck^i \tau_2 \\
 B_0^k &= 3k^i + 4\mu^i + 3ck_\infty - 3ck^i
 \end{aligned}$$

Les expressions des x_i^{dk} ($i=1-3$) dans (156)

$$\begin{aligned}
 x_1^{dk} &= \frac{A_2^k (s_1^{dk})^2 + A_1^k s_1^{dk} + A_0^k}{-s_2^{dk} + s_1^{dk}} \\
 x_2^{dk} &= -\frac{A_2^k (s_2^{dk})^2 + A_1^k s_2^{dk} + A_0^k}{-s_2^{dk} + s_1^{dk}} \\
 x_3^{dk} &= \frac{A_2^k}{B_2^k}
 \end{aligned}$$

Les expressions des modules de compressibilité macroscopique k_i^d ($i=\infty,1,2$) dans (165)

$$\begin{cases}
 k_\infty^d = -\frac{x_1^{dk}}{s_1^{dk}} - \frac{x_2^{dk}}{s_2^{dk}} + x_3^{dk}; & k_1^d = \frac{x_1^{dk}}{s_1^{dk}}; & k_2^d = \frac{x_2^{dk}}{s_2^{dk}} \\
 \tau_1^{kd} = -\frac{1}{s_1^{dk}}; & \tau_2^{kd} = -\frac{1}{s_2^{dk}}
 \end{cases}$$

Les expressions des A_i^μ et B_i^μ ($i=0,1,2$) du module de cisaillement dans (162)

$$A_2^\mu = \tau_1 \tau_2 \mu^i (15k^i \mu_0 + 20\mu_0 \mu^i + 8c\mu^i - 9ck^i \mu_\infty - 9ck^i \mu_1 - 9ck^i \mu_2 + 9ck^i \mu^i - 8c\mu_\infty \mu^i - 8c\mu_1 \mu^i - 8c\mu_2 \mu^i)$$

$$A_1^\mu = \mu^i (8c\tau_1 \mu^i + 8c\tau_2 \mu^i + 15k^i \tau_1 \mu_\infty + 15k^i \tau_2 \mu_\infty + 15k^i \tau_1 \mu_1 + 15k^i \tau_2 \mu_2 + 20\tau_1 \mu_\infty \mu^i + 20\tau_2 \mu_\infty \mu^i + 20\tau_1 \mu_1 \mu^i + 20\tau_2 \mu_2 \mu^i - 9ck^i \tau_1 \mu_\infty - 9ck^i \tau_2 \mu_\infty - 9ck^i \tau_1 \mu_1 - 9ck^i \tau_2 \mu_2 + 9ck^i \tau_1 \mu^i + 9ck^i \tau_2 \mu^i - 8c\tau_1 \mu_\infty \mu^i - 8c\tau_2 \mu_\infty \mu^i - 8c\tau_1 \mu_1 \mu^i - 8c\tau_2 \mu_2 \mu^i)$$

$$A_0^\mu = \mu^i (15k^i \mu_\infty + 20\mu_\infty \mu^i + 8c\mu^i - 9ck^i \mu_\infty + 9ck^i \mu^i - 8c\mu_\infty \mu^i)$$

$$B_2^\mu = \tau_1 \tau_2 (15k^i \mu^i - 12c\mu^i + 20\mu^i + 6ck^i \mu_0 - 6ck^i \mu^i + 12c\mu_0 \mu^i)$$

$$B_1^\mu = (6ck^i \tau_1 + 6ck^i \tau_2 + 12c\tau_1 \mu^i + 12c\tau_2 \mu^i) \mu_0 + 20\tau_1 \mu^i + 20\tau_2 \mu^i - 12c\tau_1 \mu^i - 12c\tau_2 \mu^i + 15k^i \tau_1 \mu^i + 15k^i \tau_2 \mu^i + 6ck^i \tau_1 \mu_1 + 6ck^i \tau_2 \mu_2 - 6ck^i \tau_1 \mu^i - 6ck^i \tau_2 \mu^i + 12c\tau_1 \mu_1 \mu^i + 12c\tau_2 \mu_2 \mu^i$$

$$B_0^\mu = 15k^i \mu^i - 12c\mu^i + 20\mu^i + 6ck^i \mu_\infty - 6ck^i \mu^i + 12c\mu_\infty \mu^i$$

Les expressions des $x_i^{d\mu}$ ($i=1-3$) dans (164)

$$x_1^{d\mu} = \frac{A_2^\mu (s_1^{d\mu})^2 + A_1^\mu s_1^{d\mu} + A_0^\mu}{-s_2^{d\mu} + s_1^{d\mu}}$$

$$x_2^{d\mu} = -\frac{A_2^\mu (s_2^{d\mu})^2 + A_1^\mu s_2^{d\mu} + A_0^\mu}{-s_2^{d\mu} + s_1^{d\mu}}$$

$$x_3^{d\mu} = \frac{A_2^\mu}{B_2^\mu}$$

Les expressions des modules de cisaillement macroscopique μ_i^d ($i=\infty,1,2$) et des temps caractéristiques macroscopiques $\tau_i^{d\mu}$ ($i=1,2$) dans (165)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_\infty^d = -\frac{x_1^{d\mu}}{s_1^{d\mu}} - \frac{x_2^{d\mu}}{s_2^{d\mu}} + x_3^{d\mu}; \quad \mu_1^d = \frac{x_1^{d\mu}}{s_1^{d\mu}}; \quad \mu_2^d = \frac{x_2^{d\mu}}{s_2^{d\mu}} \\ \tau_1^{d\mu} = -\frac{1}{s_1^{d\mu}}; \quad \tau_2^{d\mu} = -\frac{1}{s_2^{d\mu}} \end{array} \right.$$

Annexe III. Inclusion sphéroïdale

Les expressions des A_i^k ($i=0,1-4$) et B_i^k ($i=0,1,2$) du module de compressibilité dans (168)

$$\begin{aligned}
 A_4^k &= \tau_1^2 \tau_2^2 \mu_0 (3k_0 + \mu_0) \\
 A_3^k &= \tau_1 \tau_2 \mu_0 (3k_\infty \tau_1 + 3k_\infty \tau_2 + 3k_1 \tau_1 + 3k_2 \tau_2 + \tau_1 \mu_\infty + \tau_2 \mu_\infty + \tau_1 \mu_1 + \tau_2 \mu_2) \\
 &\quad + \tau_1 \tau_2 (\tau_1 \mu_\infty + \tau_2 \mu_\infty + \tau_1 \mu_1 + \tau_2 \mu_2) (3k_0 + \mu_0) \\
 A_2^k &= (\tau_1 \mu_\infty + \tau_2 \mu_\infty + \tau_1 \mu_1 + \tau_2 \mu_2) (3k_\infty \tau_1 + 3k_\infty \tau_2 + 3k_1 \tau_1 + 3k_2 \tau_2 + \tau_1 \mu_\infty \\
 &\quad + \tau_2 \mu_\infty + \tau_1 \mu_1 + \tau_2 \mu_2) + \tau_1 \tau_2 (3k_\infty + \mu_\infty) \mu_0 + \tau_1 \tau_2 \mu_\infty (3k_0 + \mu_0) \\
 A_1^k &= \mu_\infty (3k_\infty \tau_1 + 3k_\infty \tau_2 + 3k_1 \tau_1 + 3k_2 \tau_2 + \tau_1 \mu_\infty + \tau_2 \mu_\infty + \tau_1 \mu_1 + \tau_2 \mu_2) \\
 &\quad + (3k_\infty + \mu_\infty) (\tau_1 \mu_\infty + \tau_2 \mu_\infty + \tau_1 \mu_1 + \tau_2 \mu_2) \\
 A_0^k &= \mu_\infty (3k_\infty + \mu_\infty) \\
 \\
 B_2^k &= 3\tau_1 \tau_2 k_0 \\
 B_1^k &= (3k_\infty + 3k_1) \tau_1 + 3k_\infty \tau_2 + 3k_2 \tau_2 \\
 B_0^k &= 3k_\infty
 \end{aligned}$$

Les expressions des C_i^k ($i=0,1-4$)

$$\begin{aligned}
 C_4^k &= \tau_1^2 \tau_2^2 (9k_\infty \mu_\infty + 9k_\infty \mu_1 + 9k_1 \mu_\infty + 9k_\infty \mu_2 + 9k_1 \mu_1 + 9k_2 \mu_\infty + 9k_1 \mu_2 \\
 &\quad + 9k_2 \mu_1 + 9k_2 \mu_2 + 6\mu_f \mu_1 + 6\mu_f \mu_2 + 6\mu_1 \mu_2 + 12\omega k_\infty^2 + 12\omega k_1^2 + 12\omega k_2^2 \\
 &\quad + 3\mu_\infty^2 + 3\mu_1^2 + 3\mu_2^2 + 24\omega k_\infty k_1 + 24\omega k_\infty k_2 + 24\omega k_1 k_2 + 16\omega k_\infty \mu_\infty \\
 &\quad + 16\omega k_\infty \mu_1 + 16\omega k_1 \mu_\infty + 16\omega k_\infty \mu_2 + 16\omega k_1 \mu_1 + 16\omega k_2 \mu_\infty + 16\omega k_1 \mu_2 \\
 &\quad + 16\omega k_2 \mu_1 + 16\omega k_2 \mu_2) \\
 \\
 C_3^k &= \tau_1 \tau_2 (6\tau_1 \mu_\infty^2 + 6\tau_2 \mu_\infty^2 + 6\tau_1 \mu_1^2 + 6\tau_2 \mu_2^2 + 18k_\infty \tau_1 \mu_\infty + 18k_\infty \tau_2 \mu_\infty \\
 &\quad + 18k_\infty \tau_1 \mu_1 + 18k_1 \tau_1 \mu_\infty + 9k_\infty \tau_2 \mu_1 + 9k_1 \tau_2 \mu_\infty + 9k_\infty \tau_1 \mu_2 + 18k_1 \tau_1 \mu_1 \\
 &\quad + 9k_2 \tau_1 \mu_\infty + 18k_\infty \tau_2 \mu_2 + 18k_2 \tau_2 \mu_\infty + 9k_1 \tau_1 \mu_2 + 9k_2 \tau_1 \mu_1 + 9k_1 \tau_2 \mu_2 + 9k_2 \tau_2 \mu_1 \\
 &\quad + 18k_2 \tau_2 \mu_2 + 12\tau_1 \mu_\infty \mu_1 + 6\tau_2 \mu_\infty \mu_1 + 6\tau_1 \mu_\infty \mu_2 + 12\tau_2 \mu_\infty \mu_2 + 6\tau_1 \mu_1 \mu_2 \\
 &\quad + 6\tau_2 \mu_1 \mu_2 + 24\omega k_\infty^2 \tau_1 + 24\omega k_\infty^2 \tau_2 + 24\omega k_1^2 \tau_1 + 24\omega k_2^2 \tau_2 + 32\omega k_\infty \tau_1 \mu_\infty \\
 &\quad + 32\omega k_\infty \tau_2 \mu_\infty + 32\omega k_\infty \tau_1 \mu_1 + 32\omega k_1 \tau_1 \mu_\infty + 16\omega k_\infty \tau_2 \mu_1 + 16\omega k_1 \tau_2 \mu_\infty \\
 &\quad + 16\omega k_\infty \tau_1 \mu_2 + 32\omega k_1 \tau_1 \mu_1 + 16\omega k_2 \tau_1 \mu_\infty + 32\omega k_\infty \tau_2 \mu_2 + 32\omega k_2 \tau_2 \mu_\infty \\
 &\quad + 16\omega k_1 \tau_1 \mu_2 + 16\omega k_2 \tau_1 \mu_1 + 16\omega k_1 \tau_2 \mu_2 \\
 &\quad + 16\omega k_2 \tau_2 \mu_1 + 32\omega k_2 \tau_2 \mu_2 + 48\omega k_\infty k_1 \tau_1 + 24\omega k_\infty k_1 \tau_2 + 24\omega k_\infty k_2 \tau_1 \\
 &\quad + 48\omega k_\infty k_2 \tau_2 + 24\omega k_1 k_2 \tau_1 + 24\omega k_1 k_2 \tau_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2^k = & (3\tau_1^2 + 12\tau_1\tau_2 + 3\tau_2^2)\mu_\infty^2 + (9k_\infty\tau_1^2 + 9k_f\tau_2^2 + 9k_1\tau_1^2 + 9k_2\tau_2^2 + 6\tau_1^2\mu_1 \\
& + 6\tau_2^2\mu_2 + 36k_\infty\tau_1\tau_2 + 18k_1\tau_1\tau_2 + 18k_2\tau_1\tau_2 + 12\tau_1\tau_2\mu_1 + 12\tau_1\tau_2\mu_2 \\
& + 16\omega k_\infty\tau_1^2 + 16\omega k_\infty\tau_2^2 + 16\omega k_1\tau_1^2 + 16\omega k_2\tau_2^2 + 64\omega k_\infty\tau_1\tau_2 + 32\omega k_1\tau_1\tau_2 \\
& + 32\omega k_2\tau_1\tau_2)\mu_f + 3\tau_1^2\mu_1^2 + 3\tau_2^2\mu_2^2 + 9k_\infty\tau_1^2\mu_1 + 9k_1\tau_1^2\mu_1 + 9k_\infty\tau_2^2\mu_2 \\
& + 9k_2\tau_2^2\mu_2 + 12\omega k_\infty^2\tau_1^2 + 12\omega k_\infty^2\tau_2^2 + 12\omega k_1^2\tau_1^2 + 12\omega k_2^2\tau_2^2 + 18k_\infty\tau_1\tau_2\mu_1 \\
& + 18k_\infty\tau_1\tau_2\mu_2 + 9k_1\tau_1\tau_2\mu_2 + 9k_2\tau_1\tau_2\mu_1 + 6\tau_1\tau_2\mu_1\mu_2 + 24\omega k_\infty k_1\tau_1^2 + 24\omega k_\infty k_2\tau_2^2 \\
& + 48\omega k_\infty^2\tau_1\tau_2 + 16\omega k_\infty\tau_1^2\mu_1 + 16\omega k_1\tau_1^2\mu_1 + 16\omega k_\infty\tau_2^2\mu_2 + 16\omega k_2\tau_2^2\mu_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1^k = & (6\tau_1 + 6\tau_2)\mu_\infty^2 + (18k_\infty\tau_1 + 18k_\infty\tau_2 + 9k_1\tau_1 + 9k_2\tau_2 + 6\tau_1\mu_1 + 6\tau_2\mu_2 \\
& + 32\omega k_\infty\tau_1 + 32\omega k_\infty\tau_2 + 16\omega k_1\tau_1 + 16\omega k_2\tau_2)\mu_\infty + 9k_\infty\tau_1\mu_1 + 9k_\infty\tau_2\mu_2 \\
& + 24\omega k_\infty^2\tau_1 + 24\omega k_\infty^2\tau_2 + 16\omega k_\infty\tau_1\mu_1 + 16\omega k_\infty\tau_2\mu_2 + 24\omega k_\infty k_1\tau_1 + 24\omega k_\infty k_2\tau_2
\end{aligned}$$

$$C_0^k = 3\mu_\infty^2 + (9k_\infty + 16\omega k_\infty)\mu_\infty + 12\omega k_\infty^2$$

Les expressions des A_i^μ ($i=0,1-4$) et B_i^μ ($i=0,1,2$) du module de cisaillement dans (168)

$$A_4^\mu = \tau_1^2\tau_2^2(3k_0 + \mu_0)(3k_0 + 2\mu_0)$$

$$\begin{aligned}
A_3^\mu = & \tau_1\tau_2(3k_0 + 2\mu_0)(3k_\infty\tau_1 + 3k_\infty\tau_2 + 3k_1\tau_1 + 3k_2\tau_2 + \tau_1\mu_\infty + \tau_2\mu_\infty + \tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2) \\
& + \tau_1\tau_2(3k_0 + \mu_0)(3k_\infty\tau_1 + 3k_\infty\tau_2 + 3k_1\tau_1 + 3k_2\tau_2 + 2\tau_1\mu_\infty + 2\tau_2\mu_\infty + 2\tau_1\mu_1 + 2\tau_2\mu_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^\mu = & (3k_\infty\tau_1 + 3k_\infty\tau_2 + 3k_1\tau_1 + 3k_2\tau_2 + \tau_1\mu_\infty + \tau_2\mu_\infty + \tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)(3k_\infty\tau_1 + 3k_\infty\tau_2 \\
& + 3k_1\tau_1 + 3k_2\tau_2 + 2\tau_1\mu_\infty + 2\tau_2\mu_\infty + 2\tau_1\mu_1 + 2\tau_2\mu_2) + \tau_1\tau_2(3k_\infty + \mu_\infty)(3k_0 + 2\mu_0) \\
& + \tau_1\tau_2(3k_\infty + 2\mu_\infty)(3k_0 + \mu_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1^\mu = & 18k_\infty^2\tau_1 + 18k_\infty^2\tau_2 + 4\tau_1\mu_\infty^2 + 4\tau_2\mu_\infty^2 + 18k_\infty k_1\tau_1 + 18k_\infty k_2\tau_2 + 18k_\infty\tau_1\mu_f + 18k_\infty\tau_2\mu_f \\
& + 9k_\infty\tau_1\mu_1 + 9k_1\tau_1\mu_\infty + 9k_\infty\tau_2\mu_2 + 9k_2\tau_2\mu_\infty + 4\tau_1\mu_\infty\mu_1 + 4\tau_2\mu_\infty\mu_2
\end{aligned}$$

$$A_0^\mu = (3k_\infty + \mu_\infty)(3k_\infty + 2\mu_\infty)$$

$$B_2^\mu = -45\tau_1\tau_2\mu_0$$

$$B_1^\mu = -45\tau_1\mu_\infty - 45\tau_2\mu_\infty - 45\tau_1\mu_1 - 45\tau_2\mu_2$$

$$B_0^\mu = -45\mu_\infty$$

Les expressions des C_i^μ ($i=0, 1-4$)

$$C_4^\mu = -\tau_1^2 \tau_2^2 (810k_\infty k_1 + 810k_\infty k_2 + 810k_1 k_2 + 405k_\infty \mu_\infty + 405k_\infty \mu_1 + 405k_1 \mu_\infty + 405k_\infty \mu_2 + 405k_1 \mu_1 + 405k_2 \mu_\infty + 405k_1 \mu_2 + 405k_2 \mu_1 + 405k_2 \mu_2 + 180\mu_\infty \mu_1 + 180\mu_\infty \mu_2 + 180\mu_1 \mu_2 + 432\omega k_\infty^2 + 432\omega k_1^2 + 432\omega k_2^2 + 256\omega \mu_\infty^2 + 256\omega \mu_1^2 + 256\omega \mu_2^2 + 405k_\infty^2 + 405k_1^2 + 405k_2^2 + 90\mu_\infty^2 + 90\mu_1^2 + 90\mu_2^2 + 864\omega k_\infty k_1 + 864\omega k_\infty k_2 + 864\omega k_1 k_2 + 768\omega k_\infty \mu_\infty + 768\omega k_\infty \mu_1 + 768\omega k_1 \mu_\infty + 768\omega k_\infty \mu_2 + 768\omega k_1 \mu_1 + 768\omega k_2 \mu_\infty + 768\omega k_1 \mu_2 + 768\omega k_2 \mu_1 + 768\omega k_2 \mu_2 + 512\omega \mu_\infty \mu_1 + 512\omega \mu_\infty \mu_2 + 512\omega \mu_1 \mu_2)$$

$$C_3^\mu = -\tau_1 \tau_2 (810k_\infty^2 \tau_1 + 810k_\infty^2 \tau_2 + 810k_1^2 \tau_1 + 810k_2^2 \tau_2 + 180\tau_1 \mu_\infty^2 + 180\tau_2 \mu_\infty^2 + 180\tau_1 \mu_1^2 + 180\tau_2 \mu_2^2 + 1620k_\infty k_1 \tau_1 + 810k_\infty k_1 \tau_2 + 810k_\infty k_2 \tau_1 + 1620k_\infty k_2 \tau_2 + 810k_1 k_2 \tau_1 + 810k_1 k_2 \tau_2 + 810k_\infty \tau_1 \mu_\infty + 810k_\infty \tau_2 \mu_\infty + 810k_\infty \tau_1 \mu_1 + 810k_1 \tau_1 \mu_\infty + 405k_\infty \tau_2 \mu_1 + 405k_1 \tau_2 \mu_\infty + 405k_\infty \tau_1 \mu_2 + 810k_1 \tau_1 \mu_1 + 405k_2 \tau_1 \mu_\infty + 810k_\infty \tau_2 \mu_2 + 810k_2 \tau_2 \mu_\infty + 405k_1 \tau_1 \mu_2 + 405k_2 \tau_1 \mu_1 + 405k_1 \tau_2 \mu_2 + 405k_2 \tau_2 \mu_1 + 810k_2 \tau_2 \mu_2 + 360\tau_1 \mu_\infty \mu_1 + 180\tau_2 \mu_\infty \mu_1 + 180\tau_1 \mu_\infty \mu_2 + 360\tau_2 \mu_\infty \mu_2 + 180\tau_1 \mu_1 \mu_2 + 180\tau_2 \mu_1 \mu_2 + 864\omega k_\infty^2 \tau_1 + 864\omega k_\infty^2 \tau_2 + 864\omega k_1^2 \tau_1 + 864\omega k_2^2 \tau_2 + 512\omega \tau_1 \mu_\infty^2 + 512\omega \tau_2 \mu_\infty^2 + 512\omega \tau_1 \mu_1^2 + 512\omega \tau_2 \mu_2^2 + 1536\omega k_\infty \tau_1 \mu_\infty + 1536\omega k_\infty \tau_2 \mu_\infty + 1536\omega k_\infty \tau_1 \mu_1 + 1536\omega k_1 \tau_1 \mu_\infty + 768\omega k_\infty \tau_2 \mu_1 + 768\omega k_1 \tau_2 \mu_\infty + 768\omega k_\infty \tau_1 \mu_2 + 1536\omega k_1 \tau_1 \mu_1 + 768\omega k_2 \tau_1 \mu_\infty + 1536\omega k_\infty \tau_2 \mu_2 + 1536\omega k_2 \tau_2 \mu_\infty + 768\omega k_1 \tau_1 \mu_2 + 768\omega k_2 \tau_1 \mu_1 + 768\omega k_1 \tau_2 \mu_2 + 768\omega k_2 \tau_2 \mu_1 + 1536\omega k_2 \tau_2 \mu_2 + 1024\omega \tau_1 \mu_\infty \mu_1 + 512\omega \tau_2 \mu_\infty \mu_1 + 512\omega \tau_1 \mu_\infty \mu_2 + 1024\omega \tau_2 \mu_\infty \mu_2 + 512\omega \tau_1 \mu_1 \mu_2 + 512\omega \tau_2 \mu_1 \mu_2 + 1728\omega k_\infty k_1 \tau_1 + 864\omega k_\infty k_1 \tau_2 + 864\omega k_\infty k_2 \tau_1 + 1728\omega k_\infty k_2 \tau_2 + 864\omega k_1 k_2 \tau_1 + 864\omega k_1 k_2 \tau_2)$$

$$C_2^\mu = (-360\tau_1 \tau_2 - 256\omega \tau_1^2 - 256\omega \tau_2^2 - 90\tau_1^2 - 90\tau_2^2 - 1024\omega \tau_1 \tau_2) \mu_f^2 + (-405k_\infty \tau_1^2 - 405k_\infty \tau_2^2 - 405k_1 \tau_1^2 - 405k_2 \tau_2^2 - 180\tau_1^2 \mu_1 - 180\tau_2^2 \mu_2 - 1620k_\infty \tau_1 \tau_2 - 810k_1 \tau_1 \tau_2 - 810k_2 \tau_1 \tau_2 - 360\tau_1 \tau_2 \mu_1 - 360\tau_1 \tau_2 \mu_2 - 768\omega k_\infty \tau_1^2 - 768\omega k_\infty \tau_2^2 - 768\omega k_1 \tau_1^2 - 768\omega k_2 \tau_2^2 - 512\omega \tau_1^2 \mu_1 - 512\omega \tau_2^2 \mu_2 - 3072\omega k_\infty \tau_1 \tau_2 - 1536\omega k_1 \tau_1 \tau_2 - 1536\omega k_2 \tau_1 \tau_2 - 1024\omega \tau_1 \tau_2 \mu_1 - 1024\omega \tau_1 \tau_2 \mu_2) \mu_f - 90\tau_1^2 \mu_1^2 - 90\tau_2^2 \mu_2^2 - 405k_\infty^2 \tau_1^2 - 405k_\infty^2 \tau_2^2 - 405k_1^2 \tau_1^2 - 405k_2^2 \tau_2^2 - 810k_\infty k_1 \tau_1^2 - 810k_\infty k_2 \tau_2^2 - 1620k_\infty \tau_1 \tau_2 - 405k_\infty \tau_1^2 \mu_1 - 405k_1 \tau_1^2 \mu_1 - 405k_\infty \tau_2^2 \mu_2 - 405k_2 \tau_2^2 \mu_2 - 432\omega k_\infty^2 \tau_1^2 - 432\omega k_\infty^2 \tau_2^2 - 432\omega k_1^2 \tau_1^2 - 432\omega k_2^2 \tau_2^2 - 256\omega \tau_1^2 \mu_1^2 - 256\omega \tau_2^2 \mu_2^2 - 1620k_\infty k_1 \tau_1 \tau_2 - 1620k_\infty k_2 \tau_1 \tau_2 - 810k_1 k_2 \tau_1 \tau_2 - 810k_\infty \tau_1 \tau_2 \mu_1 - 810k_\infty \tau_1 \tau_2 \mu_2 - 405k_1 \tau_1 \tau_2 \mu_2 - 405k_2 \tau_1 \tau_2 \mu_1 - 180\tau_1 \tau_2 \mu_1 \mu_2 - 864\omega k_\infty k_1 \tau_1^2 - 864\omega k_\infty k_2 \tau_2^2 - 1728\omega k_\infty^2 \tau_1 \tau_2 - 768\omega k_\infty \tau_1^2 \mu_1 - 768\omega k_1 \tau_1^2 \mu_1 - 768\omega k_\infty \tau_2^2 \mu_2 - 768\omega k_2 \tau_2^2 \mu_2 - 1728\omega k_\infty k_1 \tau_1 \tau_2 - 1728\omega k_\infty k_2 \tau_1 \tau_2 - 864\omega k_1 k_2 \tau_1 \tau_2 - 1536\omega k_\infty \tau_1 \tau_2 \mu_1 - 1536\omega k_\infty \tau_1 \tau_2 \mu_2 - 768\omega k_1 \tau_1 \tau_2 \mu_2 - 768\omega k_2 \tau_1 \tau_2 \mu_1 - 512\omega \tau_1 \tau_2 \mu_1 \mu_2$$

$$\begin{aligned}
C_1^u = & (-180\tau_1 - 180\tau_2 - 512\omega\tau_1 - 512\omega\tau_2)\mu_\infty^2 + (-810k_\infty\tau_1 - 810k_\infty\tau_2 - 405k_1\tau_1 - 405k_2\tau_2 \\
& - 180\tau_1\mu_1 - 180\tau_2\mu_2 - 1536\omega k_f\tau_1 - 1536\omega k_\infty\tau_2 - 768\omega k_1\tau_1 - 768\omega k_2\tau_2 - 512\omega\tau_1\mu_1 \\
& - 512\omega\tau_2\mu_2)\mu_\infty - 810k_\infty^2\tau_1 - 810k_\infty^2\tau_2 - 810k_\infty k_1\tau_1 - 810k_\infty k_2\tau_2 - 405k_\infty\tau_1\mu_1 - 405k_\infty\tau_2\mu_2 \\
& - 864\omega k_\infty^2\tau_1 - 864\omega k_\infty^2\tau_2 - 768\omega k_\infty\tau_1\mu_1 - 768\omega k_\infty\tau_2\mu_2 - 864\omega k_\infty k_1\tau_1 - 864\omega k_\infty k_2\tau_2
\end{aligned}$$

$$C_0^u = -405k_\infty\mu_\infty - 432\omega k_\infty^2 - 256\omega\mu_\infty^2 - 405k_\infty^2 - 90\mu_\infty^2 - 768\omega k_\infty\mu_\infty$$

Annexe IV. Résolution de l'équation 4ème degré

On considère l'équation d'ordre quatre

$$a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0 \quad (243)$$

En divisant a_1 , on peut écrire cette équation sous forme plus simple :

$$s^4 + a s^3 + b s^2 + c s + d = 0 \quad (244)$$

où $a = a_2 / a_1$, $b = a_3 / a_1$, $c = a_4 / a_1$, $d = a_5 / a_1$

Les solutions de cette équation sont celles de l'équation suivante :

$$s^2 + \frac{a+D}{2} s + \left(y + \frac{ay-c}{D} \right) = 0 \quad (245)$$

où

$$D = \pm \sqrt{8y + a^2 - 4b} \quad (246)$$

Et y est la solution de l'équation ci-dessous :

$$8y^3 - 4by^2 + (2ac - 8d)y + (4bd - a^2d - c^2) = 0 \quad (247)$$

On présente ci-dessous la méthode de résolution de l'équation d'ordre 3

$$8y^3 - 4by^2 + (2ac - 8d)y + (4bd - a^2d - c^2) = 0 \quad (248)$$

En divisant par 8 on obtient :

$$y^3 - \frac{1}{2}by^2 + \left(\frac{1}{4}ac - d \right)y + \frac{1}{8}(4bd - a^2d - c^2) = 0 \quad (249)$$

Posant $y = t + 1/6b$.

L'équation (249) transforme :

$$t^3 + pt + q = 0 \quad (250)$$

où

$$p = \left(\frac{1}{4}ac - d \right) - \frac{b^2}{12} \quad (251)$$

$$q = \frac{1}{8}(4bd - a^2d - c^2) + \frac{-2b^3 + 9b(ac - 4d)}{216}$$

Les solutions de l'équation (248) :

$$y = \frac{p}{3u} - u + \frac{b}{6} \quad (252)$$

où

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (253)$$

Annexe V. Décomposition en fraction irréductible

On considère l'expression

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 A_i^k s^i}{\sum_{i=0}^4 B_i^k s^i} \quad (254)$$

Elle peut être réécrite sous la forme

$$\tilde{k}^{hom}(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 A_i^k s^i}{B_4^k (s - s_1^k)(s - s_2^k)(s - s_3^k)(s - s_4^k)}$$

où s_1^k, s_2^k, s_3^k et s_4^k sont les solutions de l'équation $\sum_{i=0}^4 B_i^k s^i = 0$.

Le problème de décomposition à résoudre est

$$\frac{\sum_{i=0}^4 A_i^k s^i}{B_4^k (s - s_1^k)(s - s_2^k)(s - s_3^k)(s - s_4^k)} = x_5^k + \frac{x_1^k}{s - s_1^k} + \frac{x_2^k}{s - s_2^k} + \frac{x_3^k}{s - s_3^k} + \frac{x_4^k}{s - s_4^k}$$

En identifiant les coefficients de deux cotés des l'équation ci-dessus, on constate que, les coefficients x_i^k ($i = 1-5$) sont les solutions de système de quatre équations comme suit :

$$H_{(i,j)} x_j = G_i \quad (i = 1-4; j = 1-4)$$

Les coefficients de $H_{(i,j)}$ et G_i ($i = 1-4; j = 1-4$) sont présentés comme suit :

$$K_1 = A_4^k / B_4^k$$

$$G_1 = K_1 (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) + A_3^k / B_4^k$$

$$G_2 = K_1 P_1 P_2 + K_1 P_1 P_3 + K_1 P_1 P_4 + K_1 P_2 P_3 + K_1 P_2 P_4 + K_1 P_3 P_4 - A_2^k / B_4^k$$

$$G_3 = K_1 P_1 P_2 P_3 + K_1 P_1 P_2 P_4 + K_1 P_1 P_3 P_4 + K_1 P_2 P_3 P_4 + A_1^k / B_4^k$$

$$G_4 = K_1 P_1 P_2 P_3 P_4 - A_0^k / B_4^k$$

$$H_{(1,1)} = 1$$

$$H_{(2,1)} = P_2 + P_3 + P_4$$

$$H_{(3,1)} = (P_2 P_3 + P_2 P_4 + P_3 P_4)$$

$$H_{(4,1)} = P_2 P_3 P_4$$

$$H_{(1,2)} = 1$$

$$H_{(2,2)} = P_1 + P_3 + P_4$$

$$H_{(3,2)} = (P_1 P_3 + P_1 P_4 + P_3 P_4)$$

$$H_{(4,2)} = P_1 P_3 P_4$$

$$H_{(1,3)} = 1$$

$$H_{(2,3)} = P_1 + P_2 + P_4$$

$$H_{(3,3)} = (P_1 P_2 + P_1 P_4 + P_2 P_4)$$

$$H_{(4,3)} = P_1 P_2 P_4$$

$$H_{(1,4)} = 1$$

$$H_{(2,4)} = P_1 + P_2 + P_3$$

$$H_{(3,4)} = (P_1 P_2 + P_1 P_3 + P_2 P_3)$$

$$H_{(4,4)} = P_1 P_2 P_3$$

où P_1, P_2, P_3 et P_4 ont respectivement s_1^k, s_2^k, s_3^k et s_4^k .

Annexe VI. Etablissement des formules de pseudo-déformation

Nous présentons ici les calculs permettant d'obtenir la relation contrainte-déformation du modèle de Maxwell généralisé. Nous analysons d'abord un modèle simple de Maxwell (Figure 27), ce modèle est composé d'un ressort et d'un amortisseur montés en série.

On désigne par E la raideur du ressort. La viscosité de l'amortisseur est notée η . Les champs des contraintes et des déformations dans chaque élément sont respectivement notés σ_1, ε_1 et σ_2, ε_2 . On a la relation :

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sigma_1(t) = \sigma_2(t) \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \sigma(t) = E [\varepsilon(t) - \varepsilon_2(t)] = \eta \dot{\varepsilon}_2(t) \\ \varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \end{cases} \quad (255)$$

Après la transformation de système (255), on obtient l'équation différentielle :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{E} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) \quad (256)$$

La solution de cette équation différentielle a la forme :

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (257)$$

où $E(t) = Ee^{-t/\tau}$ est la fonction de relaxation.

On présente ensuite les solutions générales du modèle de Maxwell généralisé (Figure 29). La contrainte totale est la somme des contraintes partielles :

$$\sigma(t) = R_\infty : \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^N R_i : [\varepsilon(t) - \varepsilon_i(t)] \quad (258)$$

La contrainte se compose alors de deux parties : une partie sphérique et une partie déviatorique :

$$\begin{cases} tr[\sigma(t)] = 3k_\infty tr[\varepsilon(t)] + \sum_{i=1}^N 3k_i tr[\varepsilon(t) - \varepsilon_i(t)] \\ \sigma^{dev}(t) = 2\mu_\infty \varepsilon^{dev}(t) + \sum_{i=1}^N 2\mu_i [\varepsilon^{dev}(t) - \varepsilon_i^{dev}(t)] \end{cases} \quad (259)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} tr[\boldsymbol{\sigma}(t)] = 3k_\infty tr[\boldsymbol{\varepsilon}(t)] + \sum_{i=1}^N 3k_i \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_i}(t-\tau)} tr\left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau}\right) d\tau \\ \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) = 2\mu_\infty \boldsymbol{\varepsilon}^{dev}(t) + \sum_{i=1}^N 2\mu_i \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau_i}(t-\tau)} \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}}{d\tau}\right) d\tau \end{cases} \quad (260)$$

Les solutions de l'équation (260) ont finalement la forme :

$$\begin{cases} tr[\boldsymbol{\sigma}(t)] = 3 \int_0^t k(t-\tau) tr\left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau}\right) d\tau \\ \boldsymbol{\sigma}^{dev}(t) = 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}}{d\tau}\right) d\tau \end{cases} \quad (261)$$

Pour un matériau viscoélastique linéaire décrit par le modèle de Maxwell généralisé, nous avons les fonctions de relaxation suivantes pour les modules de compressibilité et de cisaillement :

$$\begin{cases} k(t) = k_\infty + \sum_{i=1}^N k_i e^{-\frac{1}{\tau_i} t} \\ \mu(t) = \mu_\infty + \sum_{i=1}^N \mu_i e^{-\frac{1}{\tau_i} t} \end{cases} \quad (262)$$

A partir des relations (261), les pseudo-déformations sont définies par :

$$\begin{cases} tr[\boldsymbol{\varepsilon}_R(t)] = \frac{1}{3k_R} \int_0^t 3k(t-\tau) tr\left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau}\right) d\tau \\ \boldsymbol{\varepsilon}_R^{dev}(t) = \frac{1}{2\mu_R} \int_0^t 2\mu(t-\tau) \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^{dev}}{d\tau}\right) d\tau \end{cases} \quad (263)$$

où k_R et μ_R ont les modules de référence de compressibilité et de cisaillement.

En utilisant la méthode de discrétisation temporelle, on peut exprimer de façon explicite les pseudo-déformations (263) pour le modèle de Maxwell généralisé comme suit :

$$\begin{cases} tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R) \approx \frac{1}{k_R} \left[\int_0^{t_1} k(t-\tau) \frac{tr(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1)}{\Delta t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} k(t-\tau) \frac{tr(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2)}{\Delta t_2} d\tau + \dots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k(t-\tau) \frac{tr(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})}{\Delta t_{i+1}} d\tau \right] \\ dev(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R) \approx \frac{1}{\mu_R} \left[\int_0^{t_1} \mu(t-\tau) \frac{dev(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1)}{\Delta t_1} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \mu(t-\tau) \frac{dev(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2)}{\Delta t_2} d\tau + \dots + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu(t-\tau) \frac{dev(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})}{\Delta t_{i+1}} d\tau \right] \end{cases} \quad (264)$$

La partie sphérique se développe :

$$tr(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R) \simeq \frac{1}{k_R} \left\{ \begin{aligned} & k_\infty \sum_{l=1}^{i+1} tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1}) + \sum_{l=1}^{i+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1^k}\right) \left[\frac{tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1})}{\Delta t_{l+1}} k_1 \tau_1^k \left(\exp\left(\frac{t_{l+1}}{\tau_1^k}\right) - \exp\left(\frac{t_l}{\tau_1^k}\right) \right) \right] \\ & + \sum_{l=1}^{i+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2^k}\right) \left[\frac{tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1})}{\Delta t_{l+1}} k_2 \tau_2^k \left(\exp\left(\frac{t_{l+1}}{\tau_2^k}\right) - \exp\left(\frac{t_l}{\tau_2^k}\right) \right) \right] \\ & + \dots \\ & + \sum_{l=1}^{i+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_N^k}\right) \left[\frac{tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1})}{\Delta t_{l+1}} k_N \tau_N^k \left(\exp\left(\frac{t_{l+1}}{\tau_N^k}\right) - \exp\left(\frac{t_l}{\tau_N^k}\right) \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

La partie déviatorique s'écrit :

$$dev(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^R) \simeq \frac{1}{\mu_R} \left\{ \begin{aligned} & \mu_\infty \sum_{l=1}^{i+1} dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1}) + \sum_{l=1}^{i+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1^\mu}\right) \left[\frac{dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1})}{\Delta t_{l+1}} \mu_1 \tau_1^\mu \left(\exp\left(\frac{t_{l+1}}{\tau_1^\mu}\right) - \exp\left(\frac{t_l}{\tau_1^\mu}\right) \right) \right] \\ & + \sum_{l=1}^{i+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2^\mu}\right) \left[\frac{dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1})}{\Delta t_{l+1}} \mu_2 \tau_2^\mu \left(\exp\left(\frac{t_{l+1}}{\tau_2^\mu}\right) - \exp\left(\frac{t_l}{\tau_2^\mu}\right) \right) \right] \\ & + \dots \\ & + \sum_{l=1}^{i+1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_N^\mu}\right) \left[\frac{dev(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{l+1})}{\Delta t_{l+1}} \mu_N \tau_N^\mu \left(\exp\left(\frac{t_{l+1}}{\tau_N^\mu}\right) - \exp\left(\frac{t_l}{\tau_N^\mu}\right) \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (266)$$

Annexe VII. Méthode de Newton-Raphson

On présente ci-après la méthode numérique pour résoudre l'équation d'ordre supérieur (>4).
On considère l'équation suivante :

$$f(x) = 0$$

Partir d'un point x_0 , on construit par la suite

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

où f' désigne la dérivée de la fonction f . Le point x_{n+1} est la solution de l'équation

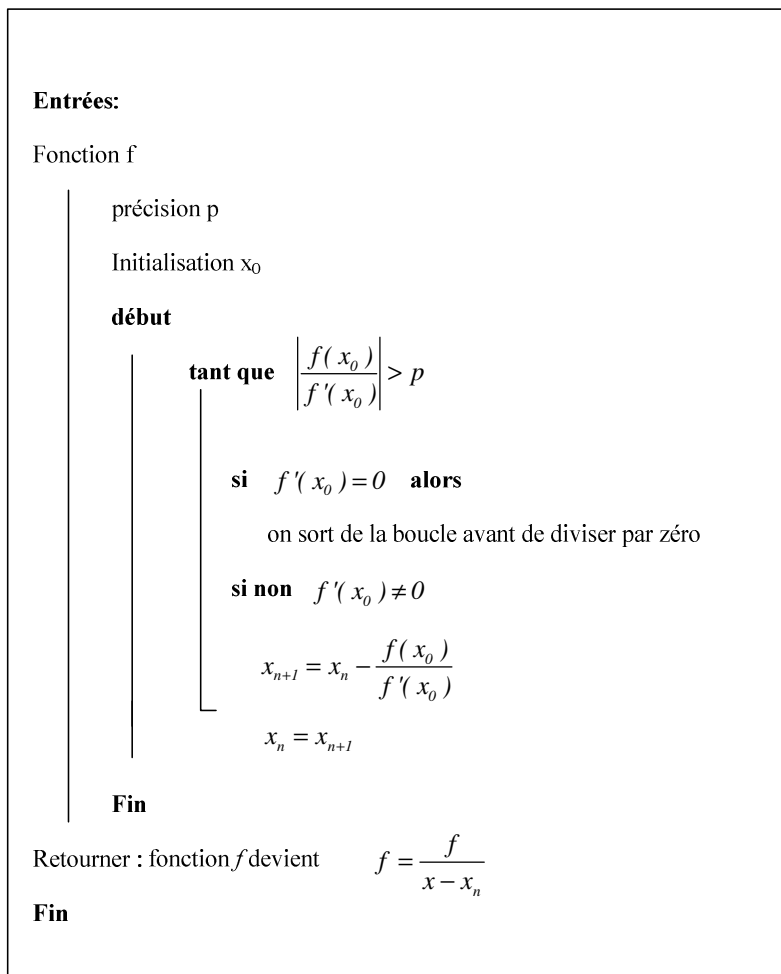
$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) = 0$$

On choisit donc comme test d'arrêt $\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| < p$ avec p est la précision choisie.

Après trouver la première solution, l'équation ci-dessus se réduit :

$$\frac{f(x)}{x - x_{n+1}} = 0$$

On continue à utiliser la méthode ci-dessus pour résoudre cette équation.



Annexe VIII. Schéma itératif de résolution

L'algorithme général de résolution est représenté schématiquement dans la Figure 103 ci-dessous. Les équations sont résolues de manière itérative. A chaque itération, on considère que la déformation est linéaire et l'incrément $\Delta \varepsilon_i / \Delta t_i$ est mis à jour.

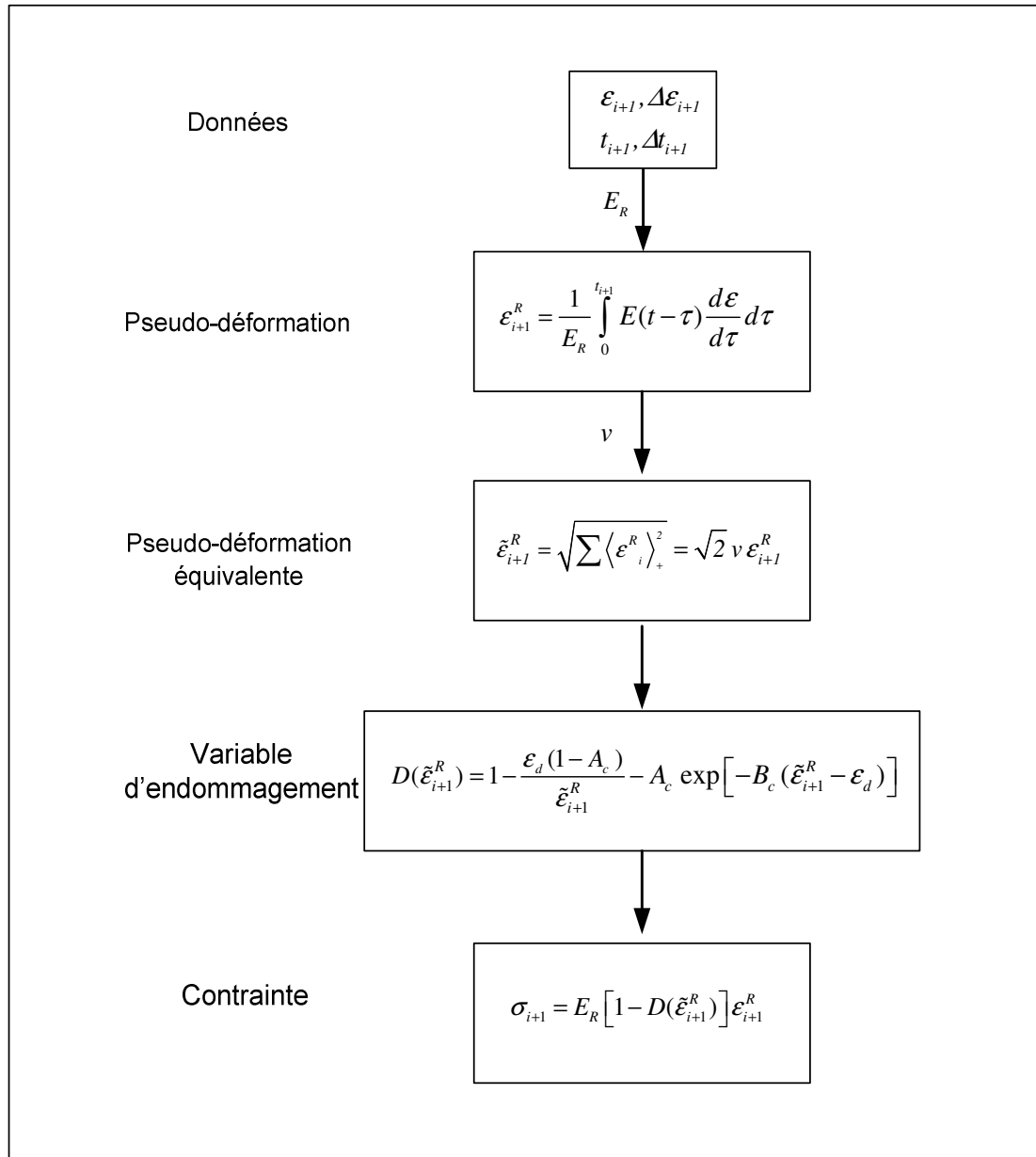


Figure 103: Schéma itératif de calcul

Annexe IX. Paramètres du béton CEM I de Ladaoui

La formulation des béton CEM I de Ladaoui à 20°C est présentée dans le Tableau 21.

Tableau 21 : Formulation des bétons non fibrés (CEM I).

Constituants	CEM I (kg/m ³)
CEM I 52.5R	400
Sable calcaire 0/4 mm	858
Gravillon calcaire 5/12.5	945
Superplastifiant Glénium	10
Eau totale	178

Les masses volumiques des sables, des gravillons et du béton sont présentées dans le Tableau 22

Tableau 22 : Masse volumique (kg/m³).

Sable	2651
Gravillon	2659
CEM I	2326

La fraction volumique des granulats et des pores sont données dans le Tableau 23

Tableau 23 : Fraction volumique.

Granulats	67.9%
Eau	11.2%