Une stratégie pour l'interprétation en analyse spectrale. Détection et caractérisation des composantes d'un spectre.

Matthieu Durnerin

▶ **To cite this version:**

Matthieu Durnerin. Une stratégie pour l'interprétation en analyse spectrale. Détection et caractérisation des composantes d'un spectre.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1999. Français. NNT : . tel-00789941

HAL Id: tel-00789941

https://theses.hal.science/tel-00789941

Submitted on 19 Feb 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Matthieu DURNERIN

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Arrêté ministériel du 30 mars 1992

Spécialité : Signal Image Parole

Une stratégie pour l'interprétation en analyse spectrale.
Détection et caractérisation des composantes d'un spectre.

- Thèse réalisée dans le cadre de l'opération ASPECT du GdR-PRC ISIS -

Date de soutenance : 21 septembre 1999

Composition du jury :

Monsieur	J.-L. Lacoume	Président
Monsieur	G. Alengrin	Rapporteur
Monsieur	M.A. Lagunas	Rapporteur
Monsieur	F. Hlawatsch	Examinateur
Monsieur	G. d'Urso	Examinateur
Monsieur	G. Goullet	Examinateur
Madame	N. Martin	Directeur de thèse
Madame	C. Mailhes	Directeur de thèse

Thèse préparée au sein du laboratoire LIS-Grenoble

Une stratégie pour l'interprétation en analyse spectrale

L'objectif de cette thèse est de proposer une démarche originale d'analyse spectrale de signaux stationnaires. L'originalité réside dans le concept de décision fondé, non pas sur le choix d'une méthode pour un signal analysé, mais sur une confrontation de méthodes. Cette confrontation a pour but d'estimer les structures spectrales du signal. Nous utilisons une interprétation itérative des spectres fondée sur les propriétés des méthodes d'analyse.

Une étude théorique complète et approfondie de chaque méthode de Fourier retenue est présentée. Dans certains cas complexes, des techniques d'optimisation des paramètres par une procédure itérative sont développées. Les avantages et inconvénients de chaque méthode sont mis en évidence, ainsi que leur comparaison.

Des critères d'interprétations ont été développés. D'un part des critères de pré-analyse cherchent à émettre des hypothèses sur la nature du signal et à émettre des alarmes : un test d'échantillonnage Shannon, deux mesures de la périodicité du signal et une détection de non-stationnarités. D'autre part, des critères d'interprétation des spectres ont pour but de caractériser chaque fréquence du spectre : une extraction de la ligne de fond du spectre, une détection de pics et un critère de validation de l'hypothèse fréquence pure.

Enfin, une démarche générale d'analyse et d'interprétation spectrale a été mise au point. Cette démarche et les critères ont été validés sur les signaux réels de la base ASPECT. Les signaux ont été fournis par nos partenaires industriels, EDF et le Centre Technique des Systèmes Navals et issus des domaines vibratoire et acoustique.

Mots clés :
analyse spectrale, Fourier, détection, interprétation, autocorrélation, non-stationnaire, vibration, acoustique.

A strategy for interpretation in spectral analysis

This thesis intends to build an original process of spectral analysis of stationary signals. Its originality lies in the decision concept that we used. It is not based on the choice of one method for a particular signal, but on a methods comparison. The purpose of this comparison is to estimate the signal spectral structures. We use an iterative interpretation of the spectrum based on the properties of the analysis methods.

A complete and detailed theoretical study of each selected Fourier's method is presented. In some special complex cases, techniques of parameters optimisation are developed. The advantages and drawbacks of each method are underlined as well as their comparison.

Some interpretation criteria have been developed. On one hand, some pre-analysis criteria are able to forecast the signal nature and to emit alarms : a sampling Shannon test, two measures of the signal period and a non-stationarity detection. On the other hand, some interpretation criteria want to characterise each spectrum frequency : an extraction of the background noise spectrum, a peak detection and a validation criterion of the spectral lines.

Finally, a global structure for analysis and interpretation is presented. This process and the criteria have been validated on the signals of the ASPECT data-basis provided by our industrial partners : EDF and the Centre Technique des Systèmes Navals. The main application domains are vibration and acoustic measurements.

Key words :
spectral analysis, Fourier, detection, interpretation, correlation, non-stationarity, vibration, acoustic.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Nadine Martin et Corinne Mailhes. Leur soutien sans faille, leurs encouragements et conseils m'ont permis de mener à bien ce travail de thèse. J'ai toujours apprécié la confiance et la liberté qu'elles m'ont accordées. Merci tout particulièrement à Nadine Martin sans qui l'opération ASPECT, qui constitue le cadre de ma thèse, n'aurait jamais vu le jour.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur Jean-Louis Lacoume, directeur du LIS, non seulement pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, mais aussi pour avoir suivi mon travail. Son enthousiasme et ses remarques enrichissantes m'ont permis de faire évoluer cette thèse. Enfin, je le remercie pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant mon jury de thèse.

Je désire vivement remercier les membres du jury, mes rapporteurs, Messieurs Miguel Angel Lagunas et Gérard Alengrin et mes examinateurs Messieurs Franz Hlawatsch, Georges Goullet et Guy d'Urso. Je tiens tout particulièrement à remercier Georges Goullet du CTSN pour son investissement dans l'opération ASPECT. Sans son soutien, son amitié, ses compétences, rien n'aurait été possible. Guy d'Urso, représentant d'EDF, a toujours été un véritable moteur pour l'opération ASPECT. Je le remercie pour tout ce qu'il a fait pour moi, non seulement sur le plan scientifique, mais aussi sur le plan personnel.

Je n'oublierai pas le reste de l'équipe ASPECT : Francis Castanié, Stéphane Brasseur, Valérie Moreau, Agnès Jousselin, Pascale Prieur, Gérard Lejeune, Joël Liénard, Pierre Jaussaud, Robert Aquilina, Jean-Michel Danthez, Jean-Marc Chassery, sans oublier Elizabeth Depré dont la patience est infinie. Un merci particulier à André Silvent pour ses corrections toujours judicieuses et son assistance. Sans cette équipe dynamique et pleine de bonne humeur, mon travail n'aurait pas été le même.

Merci à tous mes collègues thésards, en particulier Daniel pour avoir supporté et soutenu mes divagations avec l'aide de Pierre M. et Graffou, Marianne N. (merci pour les corrections), Pierre F., Steeve Z., Philippe R., Jean-Claude B. et tous les autres.

Je remercie tous les membres du laboratoire LIS pour leur accueil et leur aide, notamment lors des pré-soutenances. Une attention toute particulière à Daniel Baribaud que j'ai souvent sollicité pour mes problèmes informatiques et qui m'a toujours aidé.

Enfin, merci à mes proches, familles et copains qui ont également participé à leur manière à la réalisation de cette thèse. Merci surtout à Uli pour avoir supporté tout ça…

Sommaire

Introduction **1**

Chapitre 1 La philosophie ASPECT **5**

Chapitre 2 Les estimateurs de type Fourier **11**

2.1. Les différentes catégories de signaux 11
2.2. Ce que les estimateurs cherchent à estimer 16
2.3. Les estimateurs de la fonction d'autocorrélation 16
2.4. Généralités sur les estimateurs de densité spectrale de puissance 17
2.4.1. Fenêtre spectrale et fenêtre effective 18
2.4.2. Principe du périodogramme et du corrélogramme 19
2.4.3. Les fenêtres d'apodisation 21
2.4.4. Caractérisation des fenêtres spectrales 22
2.4.5. Normalisation des estimateurs 24
2.4.6. Performances des estimateurs 26
2.5. Principes des différents estimateurs de type Fourier 28
2.5.1. Famille du périodogramme : Welch-WOSA 29
2.5.2. Famille du corrélogramme : Blackman-Tukey 31
2.5.3. Per-Cor 32
2.5.4. STUSE 37
2.5.5. Lien entre les méthodes 41

Chapitre 3 Comportement et performances des estimateurs **43**

3.1. Comportement des estimateurs vis-à-vis de différents motifs spectraux 43
3.2. Densité de probabilité des estimateurs 45
3.2.1. Densité de probabilité du périodogramme moyenné sans recouvrement 46
3.2.2. Généralisation à tous les estimateurs 48
3.3. Etude des performances des estimateurs 53
3.3.1. Welch-WOSA 54
3.3.2. Blackman-Tukey 60
3.3.3. Per-Cor 61
3.3.4. STUSE 68
3.3.5. Rênes de la méthode 73
3.4. Analyse horizontale des méthodes 75
3.4.1. Quelques conclusions sur les méthodes 75
3.4.2. Comparaison de la variance normalisée, de la bande statistique et du produit stabilité-bande-durée des estimateurs 77
3.4.3. Comparaison des fenêtres effectives et spectrales 80
3.4.4. Conclusion 86

Chapitre 4 La pré-analyse 89
4.1. Test d'échantillonnage de Shannon 90
4.2. Détection de non-stationnarités dans le plan temps-fréquence 95
4.2.1. Détection à partir du spectrogramme ou du corrélogramme glissant 96
4.2.2. Détection de non-stationnarités en fréquence à partir de la variance normalisée .. 108
4.3. Analyse de l'autocorrélation 115
4.3.1. Détection de périodicité globale et estimation du rapport signal sur bruit 116
4.3.2. Détection de périodicité prépondérante 125
4.4. Point méta-scénario 131
4.4.1. Alarmes et hypothèses sur la nature du signal 131
4.4.2. Choix de la méthode et des paramètres de l'analyse primaire 135

Chapitre 5 Critères d'interprétation spectrale 139
5.1. Critère de détection 139
5.1.1. Principe du détecteur 140
5.1.2. Validation et performances du détecteur 144
5.1.3. Influence des erreurs d'estimations 148
5.1.4. Résultats sur signaux réels 152
5.1.5. Conclusion 156
5.2. La ligne de fond de spectre 157
5.2.1. Généralités 158
5.2.2. Les méthodes une passe 159
5.2.3. La méthode n passes 166
5.2.4. Comparaison des performances en détection 173
5.2.5. Critère de qualité du fond de spectre 179
5.2.6. Conclusion sur l'estimation du fond de spectre 180
5.3. Ajustement de la fenêtre spectrale 182
5.3.1. Principe 182
5.3.2. Résultats du critère 188
5.3.3. Conclusion sur l'ajustement de la fenêtre spectrale 195
5.4. Conclusion sur les critères d'interprétation spectrale 195

Chapitre 6 Méta-scénario 197
6.1. Estimateurs spectraux de Fourier et du fond de spectre 197
6.1.1. Estimateurs de Fourier retenus 198
6.1.2. Estimateurs du fond de spectre 198
6.2. Objectif : recherche de fréquences pures 201
6.3. Objectif recherche de motifs bande étroite 208
6.4. Objectif recherche de motifs large bande 213
6.4.1. La détection des motifs large bande 214
6.4.2. Démarche associée aux motifs large bande 215
6.5. Conclusion sur le méta-scénario 221

Conclusion et perspectives 223

Bibliographie 227

ANNEXES 235
A-1. Les fenêtres spectrales 236
A-2. La méthode Welch-WOSA, facteur de normalisation 245
A-3. Densité de probabilité de l'estimateur Welch-WOSA sans recouvrement 245
A-4. Rênes de la méthode Welch-WOSA 248
A-5. Test d'échantillonnage de Shannon 251
A-6. Détection de non-stationnarités dans le plan temps-fréquence 252
A-6.1. Détection à partir du spectrogramme ou du corrélogramme glissant 252
A-6.2. Détection de non-stationnarités à partir de la variance normalisée 255
A-7. Détection de périodicité globale et estimation du rapport signal sur bruit 260
A-8. Détection de périodicité prépondérante 264
A-9. Estimation du support de corrélation et notion de bande étroite 267
A-10. Critère de détection à partir des estimateurs de type Fourier 271
A-11. La ligne de fond de spectre 274

Introduction

L'analyse spectrale constitue un élément clef du traitement du signal. Elle a pour objectif d'améliorer la connaissance d'un signal en s'intéressant au domaine fréquentiel. L'analyse spectrale vise à extraire le spectre énergétique d'un signal. Lors d'une hypothèse de stationnarité, le spectre est une représentation monodimensionnelle de la fréquence et décrit complètement le signal sur le plan énergétique à l'ordre deux. La plupart des signaux étant issus de processus aléatoires, l'analyse spectrale s'appuie fréquemment sur le domaine des probabilités et des statistiques. Depuis 30 ans, l'analyse spectrale a connu d'importantes avancées, avec l'introduction de nombreuses méthodes d'estimation du spectre. Cependant, cette multiplication des possibilités d'analyse rend également plus complexe la maîtrise du choix optimal d'une méthode par rapport à une autre. Par ailleurs, cette stratégie est limitative, puisque qu'elle vise à s'orienter sur une méthode particulière avec ses limitations sans exploiter les possibilités offertes par les autres méthodes.

Un spectre peut donc être estimé par un ensemble très riche de méthodes faisant coopérer les informations apportées par le signal observé et éventuellement des modèles *a priori* du signal, modèle physique ou modèle mathématique. Il découle alors une complexité algorithmique générée par un ensemble de paramètres dont le choix influe sur les performances. Les choix réalisés, les hypothèses *a priori*, les performances statistiques sont des éléments cruciaux pour l'interprétation du spectre.

En parallèle avec l'émergence de nouvelles méthodes d'analyse spectrale, des travaux ont été développés afin d'unifier, de comparer, de connaître les performances, les avantages et les inconvénients des différentes méthodes [JEN68], [ADN90-2], [MAR87], [KAY88]. Notre approche vise à proposer une stratégie d'analyse spectrale qui soit à même d'exploiter les avantages de chaque méthode. C'est dans cette optique que se situe le sujet de cette thèse. L'originalité réside dans un concept de décision fondée, non pas sur le choix d'une méthode pour un signal analysé, mais sur une confrontation de méthodes couplée à une interprétation spectrale. Il s'agit d'être en mesure d'interpréter chaque estimation spectrale à l'aide de critères adaptés afin de détecter, caractériser et classifier les différentes composantes spectrales d'un signal.

Cette démarche ne prend son sens que dans la mesure où elle pourra guider l'analyse d'un signal pour un utilisateur non nécessairement expert en traitement du signal. L'objectif est de développer un système capable non seulement de gérer et d'interpréter les résultats, mais aussi de proposer les différentes étapes de la démarche d'analyse en fonction des résultats précédents. Un tel système ne peut s'envisager que dans le cadre des systèmes à base de connaissances.

L'association du traitement du signal et des systèmes à base de connaissances n'est pas nouvelle. Elle a donné lieu d'une part à des réflexions sur des modèles de représentation des connaissances mises en jeu dans le traitement du signal [NII88], [OPP92], [SHE94], et d'autre part à des systèmes experts notamment dans le domaine du diagnostic [PRE91], [JIO98] et de la détection [OPP92], [BAS97] mais aussi dans des domaines d'application spécifiques tel que le domaine médical (par exemple pour l'analyse des encéphalogrammes [GLO98]). Ces systèmes, bien qu'exploitant les techniques de traitement du signal, en particulier d'analyse spectrale, sont orientés vers des domaines d'applications bien déterminés afin de résoudre des problèmes spécifiques. Dans le domaine de l'analyse spectrale, notons le travail de Konvalinka et Filipic [KON90] qui présente un système expert fondé sur la décomposition des spectres estimés en segments, afin de construire une estimation du spectre plus fine par jonction des « meilleurs » segments. Les différentes approches retenues dans ces systèmes ne correspondent pas à notre stratégie. L'objectif de ce mémoire n'est pas de réaliser un système à base de connaissances, mais de déterminer les connaissances en traitement du signal à mettre en jeu dans un tel système.

La stratégie d'analyse présentée dans cette thèse est la prolongation d'une étude théorique sur l'unification des méthodes d'analyses spectrales stationnaires présentée dans la thèse de C. Adnet [ADN90-1], [ADN90-2], [ADN90-3], [MAR88]. Cette étude a été suivie d'un premier travail sur un système d'aide à l'analyse spectrale qui a fait l'objet de la thèse de P. Martini [MART95]. Dans cette thèse, le choix des méthodes et des paramètres reproduit la démarche empirique d'un expert et, à cette fin, les critères d'interprétation sont élaborés à partir des techniques d'analyse de données. Bien que la philosophie d'analyse soit directement issue de ce travail, l'approche n'est pas identique. En particulier, la démarche d'analyse est construite à partir des performances des estimateurs. Les critères d'interprétation prennent en compte les performances et les particularités des méthodes, ainsi que la nature du signal (signal aléatoire, déterministe…).

L'étude s'insère dans un projet de conception et de réalisation d'un système d'aide à l'Analyse SPECTrale [DUR97] : l'opération ASPECT entre deux partenaires industriels, EDF (Electricité De France, Direction des Etudes et Recherches, Chatou) et le CTSN (Centre Technique des Systèmes Navals, Toulon) et deux partenaires universitaires, le LIS (Laboratoire des Images et des Signaux, Grenoble) et le LEN7 (Laboratoire d'Electronique de l'ENSEEIHT[1], Toulouse). Ce projet s'est déroulé au sein du GdR-PRC[2] Information Signal Images viSion. Ce partenariat a fixé le cadre de l'étude, en particulier les domaines privilégiés d'applications : la mécanique vibratoire et l'acoustique. La démarche d'analyse a été construite sur des signaux réels fournis par les partenaires industriels.

Dans ce contexte, l'étude s'est focalisée sur les estimateurs à base de transformée de Fourier. Les estimateurs de type Fourier (Welch-WOSA, Blackman-Tukey, PER-COR, Lag-Reshape, STUSE) sont des méthodes non-paramétriques qui ne nécessitent pas de modèle *a priori*. Elles sont adaptées à tout type de signaux. La démarche générale d'analyse n'est pas restreinte aux seules analyses spectrales de type Fourier. Les méthodes dites « haute-résolution » (AR, Prony, Capon, méthodes par déflation…) ont été également appliquées. Certaines méthodes s'appuient sur des modèles précis physique ou systémique du signal. Ces techniques ont été développées pour élargir le domaine d'utilisation de l'analyse spectrale à des traitements sur des durées très courtes nécessitant une meilleure résolution que celle proposée par les méthodes de type Fourier. Les signaux réels de l'opération ASPECT sont des signaux longs (de taille en général supérieure à 50 000 points). Dans ces conditions, les méthodes de type Fourier sont les plus adaptés, les autres méthodes ne pouvant gérer des tailles aussi importantes. Elles n'interviennent alors que pour résoudre des problèmes particuliers mis en évidence par les analyses de type Fourier. D'autres types d'analyse ont été étudiées (analyse cyclostationnaire, cepstrale, détection d'harmoniques). Cependant, ce mémoire est centré sur la démarche d'analyse et l'interprétation des méthodes à base de transformée de Fourier qui constituent le cœur du système.

Le premier chapitre introduit la philosophie d'analyse. Il fixe le contexte, les enjeux et la stratégie adoptée afin de construire la démarche complète d'analyse d'un signal dans le cadre de l'opération ASPECT.

La nature des signaux, leurs propriétés et les définitions qui s'ensuivent sur leur représentation énergétique en fréquence sont essentiels pour la compréhension des estimateurs de type Fourier. Dans le deuxième chapitre, nous rappelons ces notions qui fixent le cadre théorique des estimateurs. Nous présentons ensuite, de façon originale, les différents estimateurs de type Fourier retenus. En particulier, nous présentons les notions communes qui permettent de fixer les performances des estimateurs et mettons en évidence les particularités de chaque méthode.

[1] Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique, d'Hydraulique de Toulouse.
[2] Groupement De Recherche - Programme de Recherche Coordonnée.

La définition d'une démarche d'analyse fondée sur les performances des estimateurs nécessite une évaluation minutieuse de toutes les performances, de leur lien avec les paramètres, des propriétés et du comportement des méthodes. La littérature recense un nombre important de résultats qui sont toutefois incomplets. Nous avons repris et complété toutes ces études et nous présentons ces résultats dans le troisième chapitre. Dans certains cas complexes, des techniques d'optimisation par une procédure itérative sont développées.

Le quatrième chapitre est consacré à la première phase de l'analyse ou pré-analyse. Cette phase s'avère essentielle dans le cadre d'une démarche complète. Nous proposons une suite d'étapes et de critères qui permettent de détecter des problèmes pour l'analyse spectrale, mais aussi de caractériser certaines propriétés du signal qui permettent alors de fixer les paramètres de la première analyse spectrale.

Le cinquième chapitre présente les différents critères d'interprétation associés aux méthodes de type Fourier. Nous avons élaboré ces critères, qui s'appuient sur les performances et les propriétés des méthodes, afin de détecter, de caractériser et de classifier les structures spectrales à partir d'une estimation donnée du spectre.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous proposons la démarche d'analyse des structures spectrales d'un signal à partir des estimateurs de type de Fourier et des résultats des critères d'interprétation. Cette démarche est déclinée suivant les différents types de composantes spectrales. Sans faire appel aux représentations spécifiques d'un système à base de connaissance, ce chapitre fixe les connaissances nécessaires à la réalisation d'un tel système.

Chapitre 1

La philosophie ASPECT

L'objectif de l'opération ASPECT est de construire un système d'aide à l'analyse spectrale. Ce système doit permettre, à un utilisateur non nécessairement expert en traitement du signal, de mener à bien une analyse spectrale fiable d'un signal. L'originalité de l'opération ASPECT réside dans le concept de décision basée, non pas sur le choix d'une méthode pour un signal analysé, mais sur une **confrontation de méthodes**. Cette confrontation a pour but d'estimer, non pas un spectre comme il est d'usage en analyse spectrale, mais les structures spectrales du signal et un certain nombre de propriétés de ce signal. Cette confrontation de méthodes est réalisée par une **interprétation itérative des spectres fondée sur les propriétés des méthodes.** Un spectre ne peut être interprété qu'en considérant son processus de génération. Cette philosophie nouvelle est illustrée au sein d'un « colimaçon » qui converge vers les caractéristiques du signal initial après la traversée guidée de multiples méthodes.

Chaque analyse complète débute par une pré-analyse, étape très importante qui évalue *a priori* les propriétés de base d'un signal : non-stationnarité, non-gaussianité, périodicité, structure du bruit de fond, rapport signal sur bruit... Ces propriétés aboutissent à des *hypothèses* sur la nature du signal, hypothèses qui permettent un choix adapté des paramètres d'une première méthode d'analyse. Les analyses s'enchaînent ensuite en fonction des interprétations des spectres estimés et des objectifs qui en découlent à chaque pas : application d'une méthode particulière pour lever une ambiguïté sur une bande spectrale particulière, recherche de familles d'harmoniques, caractérisation bande étroite/bande large,... Enfin, les caractéristiques estimées sont confrontées avec les informations *a priori* disponibles sur le signal.

Le colimaçon spectral proposé est en fait une procédure hiérarchique d'analyse se frayant un chemin dans un arbre décrivant les différentes possibilités d'analyse en fonction des interprétations successives, ce que nous avons appelé le ***méta-scénario***. Les orientations aux différents nœuds de l'arbre sont prises à partir d'objectifs visant à améliorer les performances pour l'estimation de chaque structure spectrale du spectre et non du spectre global. Le méta-scénario regroupe la base de connaissance associée au comportement et aux performances des estimateurs et des critères d'interprétation vis-à-vis des différentes structures spectrales. Les décisions sont prises lors d'un point charnière qui conclut chaque étape et s'appuient sur des critères d'interprétation appliqués à chaque analyse spectrale.

Les idées et critères proposés dans ASPECT sont issus d'un travail préliminaire réalisé sur les signaux réels fournis par les partenaires industriels, focalisant l'étude sur deux domaines :

- en mécanique vibratoire : surveillance de l'état vibratoire de machines et auxiliaires (CTSN), surveillance d'engrenages (EDF) ;
- en acoustique : mesure de bruits propres et rayonnés (CTSN).

Ce travail a abouti à l'écriture de ***scénarios*** d'analyse qui décrivent toute la démarche d'un expert, de la première phase (observations de la forme temporelle) jusqu'à l'estimation des caractéristiques spectrales du signal [DUR97]. Un scénario retrace la démarche d'analyse pour un signal réel particulier. L'objectif est triple, mettre au point les différentes étapes de l'analyse, étudier la façon de gérer les résultats et de choisir le cheminement d'analyse, et enfin envisager les critères nécessaires pour aider l'interprétation. Ces scénarios ont également permis de valider l'étude théorique des estimateurs et de leur comportement vis-à-vis des différentes structures spectrales. Il convient de

construire la démarche en confrontant les différentes méthodes d'analyse spectrale et leurs propriétés théoriques. Un scénario prend alors en compte les différentes étapes de l'interprétation spectrale. Ce scénario coordonne non seulement les choix successifs des méthodes et de leur jeu de paramètres, mais aussi l'interprétation de chaque spectre en tenant compte des étapes précédentes. Chaque étape apporte sa contribution à l'établissement du contenu spectral et au choix de l'étape suivante. L'étude des performances des estimateurs est primordiale pour la mise au point du cheminement d'analyse, en particulier le choix de l'estimateur adapté à l'objectif recherché en fonction des analyses précédentes.

Les scénarios sont élaborés sur des signaux réels. A cette fin, une banque de signaux provenant du CTSN et d'EDF a été constituée [DUR96-SignEDF], [DUR96-SignDCN]. Elle contient des signaux dont les spectres offrent des structures variées. Trois scénarios ont été complètement rédigés.

- Sur un signal vibratoire mesuré sur un engrenage de trains parallèles et obtenu lors d'un essai de fatigue et fourni par EDF dans le cadre de l'opération, signal ENG8-E5-21RH-SPV [DUR97-ENG8 E5]. La fréquence d'échantillonnage est de 6365 Hz et le signal comporte 65 536 points. L'engrenage ne contenait pas de défaut visible. Les différentes raies spectrales associées aux défauts classiques sont alors de très faible amplitude. Le signal est constitué de différentes séries d'harmoniques principalement organisées en bande latérale autour des harmoniques de la fréquence d'engrènement et d'un bruit faiblement coloré. Les rapports signal sur bruit entre les différentes raies spectrales et le bruit sont variés, allant de très faibles à très importants. De plus, les raies spectrales sont très nombreuses (>100).
- Sur un signal vibratoire correspondant à un essai effectué sur la plate-forme PEGASE du CTSN, signal PEG-SH1-a11 [DUR97-PEG]. Il s'agit de la mesure de l'ensemble des sources vibratoires d'une station d'huile captée grâce à un accéléromètre (moteur, pompe, bruit hydraulique…). Il y a également une pompe d'eau douce en route, mais elle est non instrumentée. Le signal est échantillonné à 3000 Hz et contient 50000 points. Le signal est constitué d'harmoniques sur l'ensemble du spectre, de fréquences pures isolées dans un bruit coloré avec des parties très larges bandes et d'autres beaucoup plus étroites.
- Sur un signal acoustique correspondant au bruit rayonné capté par un hydrophone lors du passage d'un navire au-dessus de celui-ci, signal MF-CHARLIE 1-VOIE6 [DUR97-MF]. Le signal mesure le bruit du moteur diesel qui propulse le navire, mais également le bruit du moteur diesel qui sert d'alternateur et le bruit des divers moteurs auxiliaires. Le signal a été rééchantillonné. Après une décimation d'un facteur 8, il comporte 100 000 points pour une fréquence d'échantillonnage de 5000 Hz. Une série de pics bande étroite harmoniques entre eux de 4,96 Hz a été mise en évidence. Il ne s'agit pas de fréquences pures, mais bien de composantes bande étroite à caractère aléatoire.

Les scénarios n'incluent pas les critères d'interprétation, les interprétations sont celles qu'un expert en traitement du signal en accord avec celui du domaine d'application tire des résultats de chaque analyse. Cependant, les scénarios ont servi de base pour la conception des critères. L'ensemble des scénarios ne sera pas repris dans ce document, nous nous contentons de décrire leur aboutissement, soit le principe de la démarche d'analyse, les critères d'interprétation et le méta-scénario.

La stratégie d'analyse et d'interprétation se décompose en quatre phases principales, la pré-analyse, la phase d'analyses spectrales à partir des estimateurs de types Fourier, la phase d'analyses complémentaires et enfin l'interprétation finale et la confrontation avec les informations *a priori*. Dans ce document, nous présentons principalement les deux premières phases : la pré-analyse et la phase d'analyse spectrale de type Fourier qui forment le cœur du système (cf. Figure I).

Il a été choisi de ne considérer comme information *a priori* que le nombre de points du signal, la fréquence d'échantillonnage et éventuellement la fréquence de coupure du filtre anti-repliement. Néanmoins, des informations supplémentaires peuvent être insérées à tout moment dans la démarche pour orienter ou éviter certaines étapes.

- **Phase de pré-analyse**

  La pré-analyse évalue *a priori* les propriétés de base d'un signal. Elle permet de détecter des problèmes pour l'analyse (mauvais échantillonnage, non-stationnarité, changement des propriétés statistiques au cours du temps…) et d'émettre des hypothèses sur la nature du signal (présence d'une partie périodique et dans ce cas rapport signal sur bruit, support de corrélation…). La pré-analyse est constituée d'étapes successives et indépendantes. L'enchaînement des étapes est fixé *a priori* quel que soit le signal. Bien évidemment, les conclusions de cette pré-analyse sont propres à chaque signal. En fin de pré-analyse, un point méta-scénario permet de choisir les paramètres de la première analyse spectrale, dite analyse primaire.

- **Phase d'analyse spectrale de type Fourier**

  La première série d'analyse spectrale est toujours obtenue avec les estimateurs de type Fourier. Ces méthodes sont particulièrement adaptées dans le contexte de l'opération ASPECT. Ce sont des méthodes non-paramétriques qui ne font pas référence à un modèle *a priori* et sont adaptées à tout type de signaux. Leurs performances sont évaluables, notamment leur variance et leur résolution fréquentielle, ce qui facilite l'interprétation des spectres. De plus, les estimateurs de type Fourier sont adaptés aux signaux longs, ce qui est le cas des signaux de la banque ASPECT (plus de 50000 points en général). C'est pourquoi ces méthodes constituent un maillon essentiel dans une démarche d'analyse globale.

  Cette phase d'analyse spectrale est constituée d'une série d'étapes, chacune déterminée par les résultats des analyses précédentes. Les hypothèses résultantes de la pré-analyse, fixent un premier jeu de paramètres pour l'application d'une première méthode de Fourier dans le cadre d'une analyse dite *analyse primaire*. Les analyses des étapes suivantes sont appelées *analyses secondaires***.** L'analyse primaire diffère des analyses secondaires de par le choix des paramètres de la méthode. En effet, dans le cas d'une analyse primaire, les paramètres sont fixés à partir d'éléments issus de la pré-analyse. Dans une analyse secondaire, les paramètres de la méthode sont fixés par rapport à des objectifs à atteindre sur les performances de la méthode. Le nombre d'étapes et les paramètres de chaque étape ne sont pas connus à l'avance.

  Chacune des étapes repose sur la mise en œuvre d'une méthode d'analyse spectrale. Chaque étape est constituée de trois modules fondamentaux dont les objectifs précis sont définis de la façon suivante :

  - ***l'estimation spectrale***. Le résultat est la densité spectrale de puissance (DSP) estimée, courbe monodimensionnelle en fréquence, mais également les performances liées à l'estimateur spectral : variance, résolution fréquentielle…
  - ***l'interprétation brute***. Le résultat du module précédent est sous forme d'une courbe : l'estimation du spectre du signal. Le deuxième module consiste à interpréter cette estimation en fonction de la méthode d'analyse qui l'a généré. Nous avons appelé cette phase *interprétation brute* car elle ne fait pas référence aux étapes précédentes. L'interprétation est effectuée par des critères d'interprétation qui permettent de détecter et caractériser les structures spectrales à l'aide d'attributs.
  - ***le point charnière***. Ce module fait référence à la base de connaissance du méta-scénario. Il permet de compléter **l'interprétation par confrontation** avec les étapes précédentes et a pour objectifs de :

    - comparer les résultats à ceux des étapes précédentes. Nous avons dénommé cette phase ***l'interprétation comparative*** ;

    - remettre à jour la caractérisation des structures spectrales. Ces nouvelles hypothèses, appelées ***hypothèses spectrales courantes***, confirment ou infirment les hypothèses de l'étape précédente ou apportent de nouveaux éléments ;

    - définir les indéterminations.

Le point charnière permet également de prendre des **décisions** :
- choisir un objectif à poursuivre, afin de lever les indéterminations et les ambiguïtés ;
- choisir l'étape suivante et ses paramètres en fonction des étapes précédentes. Le module conclut sur l'application d'une méthode d'analyse pour un objectif déterminé. Les éléments sont suffisants pour définir le jeu de paramètres de cette méthode. Les différentes possibilités sont : modifier les paramètres de la méthode d'analyse spectrale, changer de méthode, modifier les paramètres des critères d'interprétation ou effectuer des analyses complémentaires.

L'ensemble des choix est effectué parmi un ensemble de pistes possibles. Plusieurs possibilités d'objectif et d'étapes suivantes peuvent être proposées. En effet, le but est de guider l'analyse et non d'imposer une démarche. L'utilisateur doit pouvoir influencer et modifier la stratégie d'analyse. Des priorités sont définies entre les différents choix présentés. Ainsi, différentes étapes s'enchaînent, chaque étape constituant un tour du colimaçon. Une même méthode peut être appliquée plusieurs fois, des variations sur les paramètres étant nécessaires pour modifier les performances. Dans d'autres cas, un ensemble de méthodes s'enchaînent pour atteindre un seul et même objectif.

- **Phase d'analyses complémentaires**

Ensuite, suivant les conclusions de la phase d'analyse spectrale de type Fourier, d'autres analyses peuvent être proposées.

Il peut s'agir de méthodes d'analyse spectrale : méthode de Prony par déflation, méthode « haute-résolution » (AR, Prony, Capon [KAY88], [MAR87]…). Elles peuvent être appliquées sur des sous-bandes fréquentielles après une opération de filtrage, rééchantillonnage. En effet, le nombre de points ne doit pas être trop important pour appliquer ces méthodes pour des raisons de complexité calculatoire, de vitesse de calcul, mais aussi de complexité spectrale. Par exemple, pour estimer correctement un spectre riche en fréquences pures et avec un bruit très coloré à l'aide de la méthode Auto-Régressive, l'ordre doit être ajusté à la complexité spectrale et peut alors être très important. Sans oublier que l'ordre est souvent difficile à choisir. Les résultats des estimateurs de type Fourier permettent de choisir l'estimateur et ses paramètres, ainsi que les sous-bandes d'intérêt. Par exemple, la méthode de Prony par déflation est proposée pour permettre d'estimer des fréquences pures « cachées » par la présence des fréquences pures de forte puissance dans certaines sous-bandes. Le nombre de fréquences pures détectées et la coloration du bruit permettent de proposer le choix des paramètres. D'autres types d'analyses sont envisagés : détection d'harmoniques, analyse cyclostationnaire, analyse cepstrale [CAP92-1], [CAP92-2]. Cette phase est décomposée de la même façon que la phase d'analyse spectrale de type Fourier. Cependant, des critères spécifiques et une démarche spécifique à chaque type d'analyse doivent être mis en place. Dans les scénarios, ces différentes analyses ont été appliquées. En ce qui concerne l'étude présentée dans ce document, cette phase ne sera pas considérée bien que des études spécifiques soient déjà bien avancées :

- les méthodes par déflation fondé sur la Transformée de Fourier ou sur la méthode de Prony ont été étudiées au LEN7 (C. Mailhes, A. Ducasse, F. Castanié [DUC97]). Elles fonctionnent par une succession d'estimations et de déflations après optimisation des paramètres ;
- le spectre auto-cohérent a été développé au CTSN (R. Aquilina et R. Danthez [DAN98]). Cette méthode inclut une fonction de détection de fréquence pure et de détermination de sa fréquence exacte ;
- la détection d'harmoniques a été étudiée à partir d'un système développé à EDF (P. Prieur, C. Lapaille, M. Bounaas, M. Durnerin [PRIEUR97], [DUR98-Harmo]) et un système développé au LIS par G. Lejeune, V. Leisse, M. Durnerin [LEI97]) ;
- l'analyse cyclo-stationnaire a été étudiée au LIS (G. Lejeune, J-L. Lacoume [LEJ97]) et à EDF (P. Prieur [PRIEUR95-1]).

- **Phase d'interprétation finale et de confrontation avec les informations *a priori***
  Une conclusion est présentée sur l'ensemble des caractéristiques spectrales du signal, et non pas, rappelons-le, sur le choix d'une méthode d'analyse. Lorsque des informations *a priori* existent, les résultats de l'interprétation finale sont comparés à ces informations. La position de ce module en toute fin d'analyse est discutable. Ce choix a été réalisé afin d'exploiter dans un premier temps toutes les possibilités de l'analyse spectrale. Ce choix n'est pas préjudiciable. Etant donnée la structure de la démarche, des informations *a priori* peuvent être intégrées au niveau du point charnière de chaque étape afin de modifier éventuellement l'objectif de l'étape suivante.

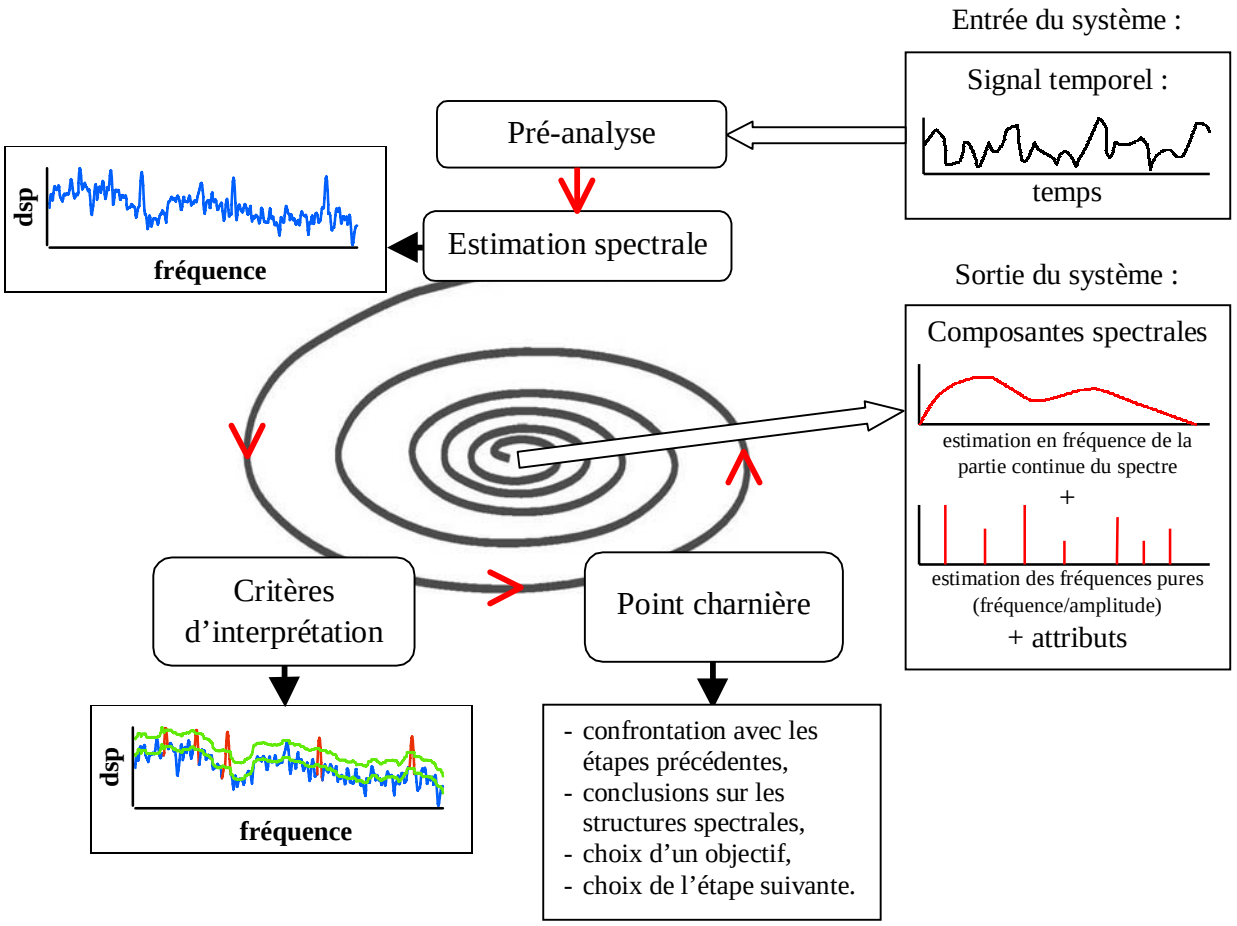


Figure I : schéma de la philosophie ASPECT.

La représentation classique d'un spectre obtenue à partir d'une unique estimation est insuffisante pour décrire et caractériser le contenu spectral d'un signal. Nous avons cherché de nouveaux modes de représentation en nous intéressant aux différentes composantes d'un spectre, qui sont souvent dues à des phénomènes physiques différents. La démarche d'analyse ne converge pas vers une simple estimation spectrale, courbe monodimensionnelle estimant la densité spectrale de puissance du signal pour chaque fréquence. La démarche s'attache à détecter, estimer et caractériser chaque composante spectrale. Les domaines d'application fixent le contexte des signaux étudiés : le signal est constitué d'une partie aléatoire à spectre continu et à puissance moyenne finie additionné éventuellement de fréquences pures (signaux déterministes). La partie aléatoire peut être issue de la combinaison de plusieurs processus aléatoires, nous ne faisons pas d'hypothèse sur la densité de probabilité des processus aléatoires. Dans ces conditions, la démarche présentée peut être étendue à d'autres domaines d'application.

Les composantes spectrales ont été décomposées en trois types de motifs :

- **les fréquences pures**, signaux déterministes périodiques caractéristiques des signaux vibratoires ;
- **les motifs bande étroite** dus à des signaux aléatoires. La bande des motifs bande étroite n'est pas définie de façon absolue, mais par rapport aux conditions de mesure du signal, soit par rapport à la durée du signal. La taille du signal fixe la résolution fréquentielle maximale que l'on puisse obtenir avec les estimateurs de type Fourier. La définition d'un motif bande étroite n'est pas fixe, la caractérisation bande étroite dépend de la façon dont les estimateurs permettent de l'estimer et de le détecter. La dynamique d'un motif, sa forme et sa largeur de bande influent sur la caractérisation bande étroite. De tels motifs peuvent être dus à une sinusoïde dont la fréquence au lieu d'être fixe (fréquence pure), varie de façon aléatoire ou pseudo-aléatoire. Dans le cas de la mesure d'un bruit rayonné par un navire, le fonctionnement d'un moteur diesel, par exemple, subit des variations (légers changements de vitesses, modifications de la charge sur les hélices, effet doppler…), ce qui se traduit par l'émission de motifs bande étroite au lieu de fréquence pure ;
- **les motifs large bande** forment le reste des motifs du spectre. Ils sont *a priori* associés au bruit coloré à spectre continu, par exemple, au bruit de mer dans un signal d'acoustique sous-marine ou un bruit hydraulique dans une canalisation. Un même phénomène physique peut générer à la fois des motifs large bande et des motifs bande étroite. La distinction entre les deux types de motifs n'est faite que par leur comportement différent vis-à-vis des estimateurs spectraux.

A chaque type de motifs vont être associé des attributs qui permettent de les caractériser. Pour une fréquence pure, il s'agit de sa fréquence, de son amplitude, de la densité spectrale de puissance du bruit à sa fréquence, et si elle fait partie d'une famille d'harmoniques, la fréquence du fondamental et l'indice de l'harmonique, mais aussi d'un indice de confiance dans sa détection. Une fréquence pure est également associée au motif du bruit sur lequel elle est localisée. Pour un motif large bande ou bande étroite, il s'agit de sa largeur de bande, de son estimation spectrale et des paramètres et performances de l'estimation qui ont permis de l'estimer « au mieux », notamment la variance, et des autres motifs localisés dans la même bande fréquentielle. Cette caractérisation des motifs est obtenue grâce aux résultats des critères d'interprétation combinés au résultat de la démarche elle-même, par comparaison des différentes étapes. Cette comparaison est guidée par le méta-scénario.

Par ailleurs, pour pouvoir comparer les estimations entre elles et déterminer l'étape suivante, d'autres attributs sont associés aux différents motifs suivant les résultats des critères d'interprétation. Ces attributs sont nécessaires à la construction de la démarche d'analyse et sont liés à chaque étape. Ils permettent de fixer les attributs finaux qui caractérisent les motifs du spectre. Ces attributs sont intimement liés aux critères d'interprétation. Pour n'en citer qu'un, il s'agit pour une fréquence pure de sa classe de détection, c'est-à-dire d'un attribut qui permet de déterminer si la fréquence pure a été détectée avec une forte probabilité par le critère de détection. Cet attribut est associé à une analyse spectrale donnée. L'ensemble de ces attributs doit être conservé pendant la démarche d'analyse car le choix des étapes dépend de l'ensemble des analyses précédentes.

Les rares travaux présents dans la littérature ayant abordé ce problème délicat d'aide à l'interprétation spectrale sont en fait des propositions d'architecture d'algorithmes, sans choix ni interprétation. Nous proposons une démarche basée sur trois points originaux :

1. l'objectif n'est pas le choix d'une méthode mais la ***confrontation*** de méthodes ;
2. le résultat d'analyse n'est pas un spectre mais le descriptif du signal par un ensemble de ***structures spectrales*** munies de ***propriétés spécifiques*** ;
3. un spectre est ***interprété*** au moyen de critères intégrant le processus de génération de ce spectre.

L'enjeu de cette étude n'est pas restreint à un problème d'estimation. La démarche d'analyse et les critères d'interprétation permettent de quantifier des attributs associés aux structures spectrales. L'enjeu est non seulement d'estimer ces structures, mais aussi de les détecter et de les caractériser.

Chapitre 2

Les estimateurs de type Fourier

L'objectif de ce chapitre est le cadre et les bases théoriques de l'étude. Avant de décrire les différents estimateurs spectraux de type Fourier, nous présentons les différents types classiques de signaux. Cette approche est nécessaire pour fixer la définition de la densité spectrale de puissance (DSP), mais également pour préciser le contexte théorique des estimateurs. Nous abordons ensuite les notions communes à tous les estimateurs qui permettent de fixer leurs performances. Nous ne présentons pas l'écriture généralisée qui permet de regrouper l'ensemble des estimateurs dans une unique forme analytique [MAT87], ou une partie des estimateurs [CLE84], [MUL90], mais cherchons à préciser les différences de chacun. Chaque estimateur est donc présenté séparément. Les performances qui ont une définition commune, telle que la fenêtre spectrale, sont précisés. Les différences et particularités des estimateurs sont également mis en valeur.

2.1. Les différentes catégories de signaux

Avant de présenter les différents estimateurs de densité spectrale de puissance, il est nécessaire de préciser un certain nombre de notions sur les catégories de signaux, en particulier sur ceux rencontrés dans la banque de signaux de l'opération ASPECT. Nous précisons ainsi la définition de la densité spectrale de puissance et le cadre théorique des estimateurs.

En ce qui concerne la puissance et l'énergie, il existe plusieurs catégories de signaux [ROU70], [KUN80], [MAX-LAC96], [JEN68], [PRIEST81], nous présentons et décrivons uniquement ceux qui sont le plus couramment rencontrés. Soit $x(t)$ un signal à temps continu.

- Les signaux **déterministes** à **énergie finie** sont des signaux dont la puissance instantanée $|x(t)|^2$ est intégrable sur $\Re$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \tag{2.1-1}$$

De tels signaux ont une puissance moyenne nulle. Les signaux de durée temporelle finie vérifient cette propriété.

La transformée de Fourier d'un tel signal s'écrit :

$$X(\nu) = \mathrm{TF}\left(x(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} t \nu} \, \mathrm{d}t \tag{2.1-2}$$

avec $$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left(X(\nu)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, \mathrm{e}^{+2\pi \mathrm{j} t \nu} \, \mathrm{d}\nu \tag{2.1-3}$$

La relation de **Parseval** s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, \mathrm{d}\nu \tag{2.1-4}$$

et montre que la **densité spectrale d'énergie** est donnée par :

$$S_x(\nu) = |X(\nu)|^2 \tag{2.1-5}$$

en unité du signal au carré par hertz.

La fonction d'**autocorrélation** d'un tel signal est :

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)^* \,\mathrm{d}t \tag{2.1-6}$$

et la relation de **Wiener-Kintchine** s'écrit :

$$S_x(\nu) = \mathrm{TF}(\Gamma_x(\tau)) \tag{2.1-7}$$

▪ Les signaux **déterministes** à **puissance moyenne finie non périodiques**. Ces signaux ont généralement une énergie totale infinie. Ils ont pour propriété que leur puissance moyenne P_{moy} sur un intervalle T a une limite finie pour T tendant vers l'infini :

$$P_{\mathrm{moy}} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \quad \text{existe} \tag{2.1-8}$$

La puissance instantanée est supposée localement sommable. La puissance moyenne peut être réécrite en introduisant :

$$x_T(t) = \Pi_T(t)\, x(t) = \begin{matrix} x(t) & \text{pour } |t| < T/2 \\ 0 & \text{pour } |t| > T/2 \end{matrix} \tag{2.1-9}$$

alors

$$P_{\mathrm{moy}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \to +\infty} \frac{|x_T(t)|^2}{T} \,\mathrm{d}t \tag{2.1-10}$$

Pour les signaux à puissance moyenne finie, on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \to +\infty} \frac{|x_T(t)|^2}{T} \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \to +\infty} \frac{|X_T(\nu)|^2}{T} \,\mathrm{d}\nu \tag{2.1-11}$$

avec $$X_T(\nu) = \mathrm{TF}(x_T(t)) \tag{2.1-12}$$

ce qui permet de définir la **densité spectrale de puissance** :

$$\gamma_x(\nu) = \lim_{T \to +\infty} \frac{|X_T(\nu)|^2}{T} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \nu t} \,\mathrm{d}t \right|^2 \tag{2.1-13}$$

qui s'exprime en unité du signal au carré par Hertz.

La fonction d'**autocorrélation** d'un tel signal est :

$$\Gamma_x(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t)\, x_T^*(t-\tau) \,\mathrm{d}t \tag{2.1-14}$$

et la relation de **Wiener-Kintchine** s'écrit :

$$\gamma_x(\nu) = \mathrm{TF}\left(\Gamma_x(\tau)\right) \tag{2.1-15}$$

Précisons que **la transformée de Fourier** d'un signal à puissance moyenne finie s'écrit :

$$X(\nu) = \mathrm{TF}\left(x(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} t\nu}\ \mathrm{d}t \tag{2.1-16}$$

avec $$x(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left(X(\nu)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, \mathrm{e}^{+2\pi \mathrm{j} t\nu}\ \mathrm{d}\nu \tag{2.1-17}$$

Cependant, la transformée de Fourier d'un signal à puissance moyenne finie **n'existe pas toujours**, contrairement au cas des signaux à énergie finie. La condition sur l'existence de la limite de la puissance moyenne n'est pas une condition suffisante pour la convergence de l'intégrale de la transformée de Fourier.

- Les signaux **périodiques** (déterministes) **à puissance moyenne finie**. S'ils sont de carré sommable sur la période *T*, la puissance moyenne P_{moy_T} définie sur cette période *T* est:

$$P_{\mathrm{moy}_T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \left|x(t)\right|^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{nT}\int_{-nT/2}^{+nT/2} \left|x(t)\right|^2\ \mathrm{d}t \quad n \text{ entier quelconque} \tag{2.1-18}$$

ces signaux ont une énergie totale infinie.

Ils sont décomposables en **série de Fourier :**

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\ \delta(\nu - k/T) \tag{2.1-19}$$

avec

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} kt/T}\ \mathrm{d}t \tag{2.1-20}$$

La **densité spectrale de puissance** est alors donnée par :

$$\gamma_x(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|X_k\right|^2\ \delta(\nu - k/T) \tag{2.1-21}$$

La fonction d'**autocorrélation** d'un tel signal est :

$$\begin{aligned} \Gamma_x(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, x(t-\tau)^*\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|X_k\right|^2\ \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} kt/T} \end{aligned} \tag{2.1-22}$$

et la relation de **Wiener-Kintchine** se traduit par :

$$\gamma_x(\nu) = \mathrm{TF}\left(\Gamma_x(\tau)\right) \tag{2.1-23}$$

▪ Les signaux **aléatoires stationnaires et ergodiques** à **puissance moyenne finie.** La plupart des signaux aléatoires auxquels nous nous intéresserons sont en effet de ce type. La puissance moyenne d'un processus aléatoire $X(t)$ est donc finie, soit :

$$P_X = \xi\left\{\left|X(t)\right|^2\right\} \quad \text{fini} \tag{2.1-24}$$

où ξ représente l'espérance mathématique.
La condition d'ergodisme entraîne :

$$P_X = \xi\left\{\left|X(t)\right|^2\right\} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left|x(t)\right|^2 \, \mathrm{d}t \quad \text{fini} \tag{2.1-25}$$

$x(t)$ dénotant une réalisation du processus aléatoire $X(t)$. Attention, dans ce paragraphe, X est associé à un processus aléatoire et non à la TF.

On peut alors montrer [PRIEST81] que **la densité spectrale de puissance** peut être définie par :

$$\gamma_{\mathrm{x}}(\nu) = \lim_{T \to +\infty} \xi\left\{\frac{\left|\mathrm{TF}\left(X_T(t)\right)(\nu)\right|^2}{T}\right\} = \lim_{T \to +\infty} \xi\left\{\frac{1}{T}\left|\int_{-T/2}^{+T/2} X_T(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \nu t} \, \mathrm{d}t\right|^2\right\} \tag{2.1-26}$$

où X_T représente le processus aléatoire dont les réalisations sont multipliées par la fonction porte de largeur T et TF(X_T)(ν) la transformée de Fourier de X_T. Pour obtenir cette définition, il convient de considérer d'abord une réalisation du processus aléatoire, puis de généraliser au cas du processus aléatoire lui-même. Il faut aussi noter que l'utilisation de la fonction porte et de la TF n'est pas liée à l'ergodisme.

La fonction d'**autocorrélation** d'un tel signal s'écrit en utilisant les propriétés de stationnarité :

$$\Gamma_x(\tau) = \xi\left\{X(t)\, X^*(t-\tau)\right\} \tag{2.1-27}$$

Le théorème de **Wiener-Kintchine** établit le lien entre la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance :

$$\gamma_x(\nu) = \mathrm{TF}\left(\Gamma_x(\tau)\right) \tag{2.1-28}$$

L'hypothèse d'ergodisme permet en outre d'écrire :

$$\Gamma_x(\tau) = \xi\left\{X(t)\, X^*(t-\tau)\right\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_T(t)\, x_T^*(t-\tau) \, \mathrm{d}t \tag{2.1-29}$$

où x_T est une réalisation particulière du processus aléatoire X multipliée par la fonction porte de largeur T.

Il est impossible d'exprimer chaque réalisation d'un signal aléatoire stationnaire à l'aide de la transformée de Fourier telle qu'elle a été définie précédemment, car de par la nature même de la propriété de stationnarité, il ne peut être vrai que toutes les réalisations tendront vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Un tel signal est associé à une autre transformée, la **transformée de Fourier-Stieltjes** [PRIEST81], [ROU70] qui s'écrit :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \nu t} \, \mathrm{d}Z(\nu) \tag{2.1-30}$$

où $Z(\nu)$ est une fonction aléatoire qui n'est pas forcément différentiable.

$Z(\nu)$ a cependant pour propriété :

$$\mathrm{d}Z(\nu) = \mathrm{o}\left(\sqrt{\mathrm{d}\nu}\right) \tag{2.1-31}$$

Cette représentation a surtout un intérêt théorique, elle ne sera pas utilisée dans la définition des estimateurs spectraux de type Fourier.

On peut remarquer que l'ensemble des définitions et relations définies pour les signaux aléatoires stationnaires ergodiques à puissance moyenne finie est également valable pour les signaux certains à puissance moyenne finie. Par la suite et par abus d'écriture, le processus aléatoire et une réalisation de ce processus seront tous les deux notés *x*.

Cette présentation des différentes catégories de signaux, nous permet d'ores et déjà de remarquer l'impossibilité de construire un estimateur spectral qui permettrait d'estimer correctement un spectre pour l'ensemble des signaux. Il se pose notamment le problème des signaux qui sont, par exemple, la somme d'un signal périodique et d'un signal aléatoire. Ceci se traduit en particulier par des normalisations différentes du même estimateur, une normalisation étant adaptée à la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire à puissance moyenne finie, l'autre permettant d'estimer correctement la densité spectrale de puissance d'un signal périodique. La seule représentation qui permette d'unifier l'ensemble des signaux dans une seule notation est la transformée de Fourier-Stieltjes appliquée dans le cadre de l'analyse harmonique généralisée [PRIEST81], [ROU70]. **Les estimateurs** sont initialement construits pour estimer **la densité spectrale de puissance** d'un **signal aléatoire stationnaire ergodique et à puissance moyenne finie**, cas le plus couramment rencontré puisque les signaux réels sont en général bruités.

Dans le cadre du projet ASPECT, les signaux à étudier sont des signaux échantillonnés, soit des signaux à temps discret.

Rappelons que l'échantillonnage d'un signal continu $x_a(t)$ avec une période d'échantillonnage T_e donne un signal à temps discret $x[n] = x_a(nT_e)$ dont la transformée de Fourier est périodique de période $1/T_e$. Pour éviter tout problème de recouvrement et afin de pouvoir reconstruire le signal à temps continu à partir du signal échantillonné, il est nécessaire que la **condition de Shannon** soit respectée :

$$T_e < 1/2B \tag{2.1-32}$$

où B est la bande passante du signal.

Un signal échantillonné à la période T_e, est associé à **la transformée de Fourier à temps discret et à fréquence continue** (TFd) [MAR87], [KUN80]. Dans le cas d'un signal infini à énergie fini, elle s'écrit :

$$X(\nu) = \mathrm{TFd}\left(x[n]\right) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu n T_e} \tag{2.1-33}$$

$$x[n] = \int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} X(\nu)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}\nu n T_e}\, \mathrm{d}\nu \tag{2.1-34}$$

2.2. Ce que les estimateurs cherchent à estimer

Le but des estimateurs de type Fourier est donc d'estimer la densité spectrale de puissance d'un signal échantillonné (à temps discret) aléatoire stationnaire ergodique à puissance moyenne finie et de durée infinie. Pour ce faire, on se place dans le cadre des signaux à temps discret et fréquence continue.

La condition de **puissance moyenne finie** (cf. éq. 2.1-25) s'écrit alors :

$$P_{\text{moy}} = \xi\left\{\left|x[n]\right|^2\right\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{+N/2} \left|x_N[n]\right|^2 \quad \text{fini} \tag{2.2-1}$$

avec $x_N[n] = x[n]$ pour $|n| \leq N$ et $x_N[n] = 0$ sinon (2.2-2)

et la **densité spectrale de puissance** peut être définie par [PRIEST81], [MAR87] (à partir des équations 2.1-26 et 2.2-1) :

$$\gamma_x(\nu) = \lim_{N \to +\infty} \xi\left\{\frac{\left|X_N(\nu)\right|^2}{NT_e}\right\} = \lim_{N \to +\infty} \xi\left\{\frac{T_e}{N}\left|\sum_{n=-N/2}^{+N/2} x_N[n]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \nu n T_e}\right|^2\right\} \tag{2.2-3}$$

avec $X_N(\nu) = \mathrm{TFd}\left(x_N[n]\right)$ (2.2-4)

$\gamma_x(\nu)$ est périodique de période $1/T_e$ Hz.

La fonction d'**autocorrélation** (cf. éq. 2.1-27) s'écrit :

$$\Gamma_x[m] = \xi\left\{x[n]\, x^*[n-m]\right\} \tag{2.2-5}$$

et le théorème de **Wiener-Kintchine** (cf. éq. 2.1-28) **:**

$$\gamma_x(\nu) = \mathrm{TFd}\left(\Gamma_x[m]\right) \tag{2.2-6}$$

L'hypothèse d'ergodisme (cf. éq. 2.1-29) permet en outre d'écrire :

$$\Gamma_x[m] = \xi\left\{x[n]\, x^*[n-m]\right\} = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{+N/2} x_N[n]\, {x_N}^*[n-m] \tag{2.2-7}$$

2.3. Les estimateurs de la fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire ergodique a été définie par l'équation (2.2-7) comme la limite d'une moyenne. En pratique, la fonction d'autocorrélation est rarement connue, il est alors nécessaire de l'estimer et ceci à partir d'un nombre fini de données. Il existe deux principaux estimateurs pour l'autocorrélation, l'estimateur biaisé et le non biaisé [MAR87], [MAX-LAC96], [KAY88], [OPP75]. Soit $x[n]$ un signal de N points indicés de 0 à N-1.

Tab. 2.3-I : **les estimateurs de la fonction d'autocorrélation**.		
	estimateur **biaisé**	estimateur **non biaisé**
estimateur $\hat{\Gamma}_x[m]$ pour $0 \le m < N$	$\frac{1}{N}\sum_{n=m}^{N-1} x[n]\,x^*[n-m]$	$\frac{1}{N-m}\sum_{n=m}^{N-1} x[n]\,x^*[n-m]$
moyenne $\xi\{\hat{\Gamma}_x[m]\}$	$\left(1-\frac{\lvert m\rvert}{N}\right)\Gamma_x[m]$	$\Gamma_x[m]$
variance $\mathrm{var}\{\hat{\Gamma}_x[m]\}$ pour $N>>m$	$\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\Gamma_x^2[k]+\Gamma_x[k+m]\,\Gamma_x[k-m]\right)$	$\frac{N}{(N-m)^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\Gamma_x^2[k]+\Gamma_x[k+m]\,\Gamma_x[k-m]\right)$

$\Gamma_x[m]$ représente la véritable autocorrélation du signal.
Les estimateurs sont définis sur [-N+1 ; N-1] et ont pour propriété :

$$\hat{\Gamma}_x[m] = \hat{\Gamma}_x^*[-m] \quad \text{pour } -N < m < 0 \tag{2.3-1}$$

La variance des estimateurs pour des processus gaussiens a été approchée par Jenkins et Watts (1968) [JEN68], [MAR87]. La variance tend asymptotiquement vers 0 lorsque le nombre d'échantillons N augmente pour un indice de retard m fixé, les estimateurs sont donc consistants.

Pour l'estimateur biaisé, la variance augmente lorsque l'indice de retard m augmente. Lorsque l'indice de retard augmente, la moyenne est faite sur un nombre d'échantillons du signal de plus en plus faible, l'incertitude statistique de l'estimée de l'autocorrélation augmente.

L'erreur quadratique moyenne (somme de la variance et du carré du biais) a tendance pour la plupart des applications à être plus élevée pour l'estimateur non biaisé que pour l'estimateur biaisé, particulièrement lorsque l'indice du retard est proche du nombre total d'échantillons du signal. L'estimateur non biaisé peut en outre générer des estimés qui ne respectent pas la propriété de la véritable autocorrélation : $\Gamma_x[0] \ge |\Gamma_x[m]|$ pour tout m différent de 0. Pour ces raisons l'estimateur biaisé est souvent choisi.

Remarquons que les deux estimateurs sont identiques pour le retard nul :

$$\hat{\Gamma}_x[0] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \tag{2.3-2}$$

Cette valeur représente la puissance totale du signal discret. Remarquons aussi qu'à partir de N échantillons de signal, il est possible d'estimer 2N-1 points de l'autocorrélation (correspondant à N-1 retards positifs, N-1 retards négatifs et au retard nul).

2.4. Généralités sur les estimateurs de densité spectrale de puissance

L'objectif des estimateurs de type Fourier retenus, Welch-WOSA (cf. 2.5.1), Blackman-Tukey (cf. 2.5.2), Per-Cor (cf. 2.5.3), STUSE (cf. 2.5.4) est d'estimer la densité spectrale de puissance $\gamma_x(\nu)$ telle qu'elle a été définie par l'équation (2.2-3) ou par l'équation (2.2-6) (obtenue par le théorème de Wiener-Kintchine), en se fondant sur la Transformée de Fourier. L'intérêt de ces méthodes est qu'elles

ne se réfèrent à aucun modèle contrairement à la plupart des méthodes paramétriques. Le résultat ne dépend pas de la bonne adéquation du signal avec le modèle présumé. Cependant, leurs performances sont fortement dépendantes du nombre de points du signal.

Avant de décrire les différents estimateurs, nous allons décrire les notions communes et les principes fondamentaux des estimateurs de type Fourier. Nous abordons notamment les notions de fenêtre spectrale et de fenêtre d'apodisation. Les fenêtres d'apodisation sont liées aux deux principes à la base de tous les estimateurs : celui du périodogramme et celui du corrélogramme. L'ensemble des estimateurs étudiés utilise l'un des deux principes, voir les deux comme dans la méthode Per-Cor.

Pour permettre de comparer les estimateurs, nous définissons des notions communes qui sont déclinés suivant les particularités de chaque estimateur. A cette fin, nous définissons un estimateur de référence qui ne prend pas en compte l'influence des fenêtres d'apodisation, puis nous exposons la notion de normalisation des estimateurs. La normalisation de l'estimateur de référence permet d'estimer correctement la DSP d'un signal aléatoire à puissance moyenne finie ou celle d'une fréquence pure. Enfin, nous définissons les performances communes aux estimateurs, notamment la résolution fréquentielle et la variance.

2.4.1. Fenêtre spectrale et fenêtre effective

La première des propriétés recherchées pour un estimateur de DSP est l'absence de biais :

$$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \gamma_x(\nu) \tag{2.4-1}$$

où $\gamma_x(\nu)$ représente la densité spectrale de puissance du processus aléatoire.

Ce cas idéal ne peut pas être obtenu de par le fait même que l'on ne dispose que d'une durée limitée du signal : $x_N[n]$ de durée $T=NT_e$. Si l'on considère le signal $x_N[n]$ comme étant une partie du signal $x[n]$ de durée infinie que l'on cherche réellement à analyser, soit :

$$x_N[n] = x[n]\Pi_N[n] = \begin{cases} x[n] & \text{pour } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \text{ et } n \ge N \end{cases} \tag{2.4-2}$$

si $x[n]$ a une transformée de Fourier (TFd) (par exemple un signal à énergie finie), on aura :

$$X_N(\nu) = \mathrm{TFd}(x_N[n]) = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\Pi_N[n]\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu nT_e} = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n]\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu nT_e} \tag{2.4-3}$$

De plus, en utilisant les propriétés de la TFd [KUN80] :

$$X_N(\nu) = \mathrm{TFd}(x[n]\Pi_N[n]) = \frac{1}{T_e}\mathrm{TFd}(x[n]) * \mathrm{TFd}(\Pi_N[n]) = \frac{1}{T_e}\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} X(f)\Pi_N^{\mathrm{TF}}(\nu - f)\,\mathrm{d}f \tag{2.4-4}$$

avec $X(\nu) = \mathrm{TFd}(x[n])$

et
$$D_N(\nu) = \mathrm{TFd}(\Pi_N[n]) = T_e \frac{\sin(\pi N \nu T_e)}{\sin(\pi \nu T_e)}\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j}\nu(N-1)T_e} \tag{2.4-5}$$

$\Pi_N[n]$ est un signal à énergie finie. $D_N(\nu)$ = TFd ($\Pi_N[n]$) est appelé noyau de Dirichlet.

La TFd du signal à durée limitée de N points est donc le résultat de la convolution *continue et périodique* de la TFd du signal infini et de la TFd de la fonction porte de N points [KUN80].

Dans notre hypothèse d'étude des signaux aléatoires stationnaires ergodiques à puissance moyenne finie, il faut toujours considérer que le signal à durée limitée que l'on possède n'est qu'une

partie du signal de durée infinie que l'on désire analyser. La densité spectrale de puissance estimée d'un signal à durée limitée est liée à la densité spectrale de puissance du signal infini par le biais de la fenêtre appliquée sur le signal. C'est pourquoi des fenêtres d'apodisation différentes de la fonction porte (ou fenêtre rectangulaire) ayant des propriétés plus intéressantes ont été développées (cf. paragraphe 2.4.3).

Tous les estimateurs de type Fourier étudiés ont des caractéristiques communes. La principale se traduit par la notion de **fenêtre spectrale** principalement due au phénomène de durée limitée et à l'application d'une fenêtre d'apodisation, mais aussi à la structure de chaque méthode. Elle se traduit sur la moyenne de tous les estimateurs. Cette moyenne est égale à la DSP vraie convoluée par la fenêtre spectrale $Q(\nu)$ propre à chaque estimateur :

$$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \gamma_x(\nu) * Q(\nu) \tag{2.4-6}$$

Cette fenêtre spectrale est définie pour chaque estimateur, en fonction de ses paramètres.

Tous les estimateurs de DSP sont liés à une estimation de l'autocorrélation $\hat{\Gamma}_x[m]$ par application du théorème de Wiener-Kintchine :

$$\hat{\Gamma}_x[m] = \mathrm{TFd}^{-1}(\hat{\gamma}_x(\nu)) \tag{2.4-7}$$

$\hat{\Gamma}_x[m]$ est définie sur $-M < m < +M$.

La **fenêtre effective** $q[\mathrm{m}]$ est définie comme la fenêtre appliquée à la véritable fonction d'autocorrélation $\Gamma_x[m]$ pour obtenir la moyenne de l'estimation de l'autocorrélation $\hat{\Gamma}_x[m]$:

$$\xi\{\hat{\Gamma}_x[m]\} = \mathrm{TFd}^{-1}(\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}) = \Gamma_x[m] \times q[m] \tag{2.4-8}$$

$q[m]$ est également définie sur $-M < m < +M$.
Dans ces conditions, la fenêtre spectrale est définie par la TFd de la fenêtre effective :

$$Q(\nu) = \mathrm{TFd}\,(\,q[m]\,) \tag{2.4-9}$$

Pour toutes les méthodes, la fenêtre spectrale et la fenêtre effective sont calculables analytiquement.

2.4.2. Principe du périodogramme et du corrélogramme

Deux voies principales sont suivies par les estimateurs de type Fourier.

- La première est celle du **périodogramme** qui se fonde directement sur les données pour estimer la DSP (équation (2.2-3)) en ne considérant que les points du signal disponibles :

$$\hat{\gamma}_x(\nu) = \frac{|X(\nu)|^2}{NT_e} = \frac{T_e}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu n T_e}\right|^2 \tag{2.4-10}$$

$x[n]$, $0 \le n \le N$ est le signal à analyser et $X(\nu)$ sa TFd.

- La deuxième est celle du **corrélogramme** qui se fonde sur une estimation de l'autocorrélation et le théorème de Wiener-Kintchine (équation (2.2-6)) :

- la première étape consiste donc à estimer l'autocorrélation, par exemple par une des méthodes présentées paragraphe 2.3 : $\hat{\Gamma}_x[m]$ pour $-M < m < M$,
- la deuxième étape est l'application du théorème de Wiener-Kintchine :

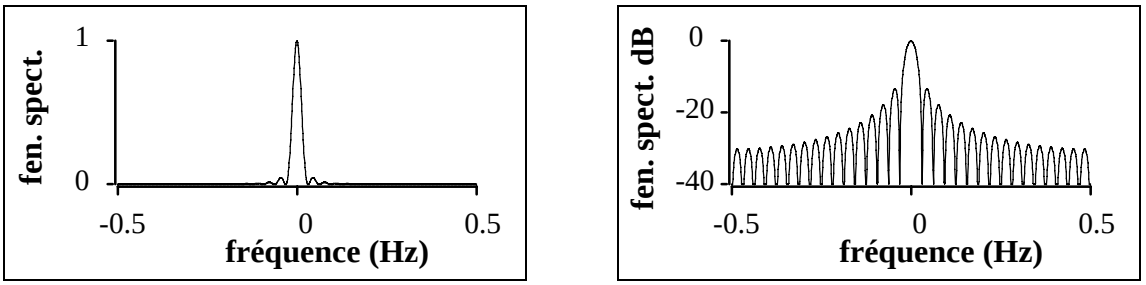
$$\hat{\gamma}_x(\nu) = \mathrm{TFd}\left(\hat{\Gamma}_x[m]\right) \tag{2.4-11}$$

A partir de ces deux voies, des modifications ont été apportées, afin d'améliorer les estimations. L'objectif est de trouver de nouveaux compromis tant au niveau de la fenêtre spectrale que de la variance de l'estimateur. La première modification envisagée par Welch pour le périodogramme et par Blackman et Tukey pour le corrélogramme, fut d'employer des fenêtres d'apodisation.

Dans le cas du **périodogramme**, une durée limitée du signal a pour effet de produire une fenêtre spectrale proportionnelle au module carré de la fonction porte :

$$Q(\nu) = \frac{1}{NT_e}\left|D_N(\nu)\right|^2 = \frac{1}{NT_e}\left|\mathrm{TFd}\left(\Pi_N[n]\right)\right|^2 = \frac{T_e}{N}\left|\frac{\sin(\pi N\nu T_e)}{\sin(\pi\nu T_e)}\right|^2 \qquad (2.4\text{-}12)$$

Cette fenêtre spectrale possède certaines propriétés qui peuvent s'avérer très gênantes pour l'analyse. Elle comporte des lobes secondaires très importants par rapport au lobe principal centré sur 0 (cf. Figure 2.4-I).



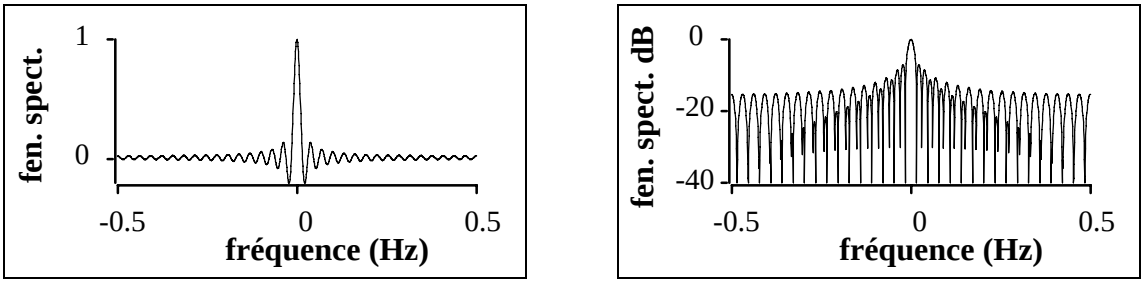
(a) en échelle linéaire (b) en échelle décibel

Figure 2.4-I : **fenêtre spectrale du périodogramme** pour N = 32 points. La fenêtre spectrale est normalisée par son maximum.

Dans le cas du **corrélogramme** lorsque l'on utilise l'estimateur non-biaisé de la fonction d'autocorrélation (cas de la méthode Blackman-Tukey, cf. paragraphe 2.5.2 et Tab. 2.3-I), la fenêtre spectrale est égale à la TFd de la fonction porte $\Pi_{\pm M}[m]$ (égale à 1 pour $-M < m < M$) :

$$Q(\nu) = D_{\pm M}(\nu) = \mathrm{TFd}\left(\Pi_{\pm M}(\nu)\right) = T_e\,\frac{\sin(\pi(2M-1)\nu T_e)}{\sin(\pi\nu T_e)} \qquad (2.4\text{-}13)$$

Cette fenêtre spectrale offre également des lobes secondaires très importants, notamment des lobes négatifs qui peuvent s'avérer gênant pour un estimateur de DSP (sur la Figure 2.4-II, le module de la fenêtre spectrale est représenté, un lobe sur deux est en fait négatif).



(a) échelle linéaire (b) *module* en échelle décibel

Figure 2.4-II : **fenêtre spectrale du corrélogramme** (méthode Blackman-Tukey) pour $2M$-1 = 33 points. La fenêtre spectrale est normalisée par son maximum.

2.4.3. Les fenêtres d'apodisation

Les fenêtres d'apodisation (appelées aussi fenêtres de pondération) ont une place primordiale dans l'utilisation des méthodes d'analyse spectrale ayant pour base une stratégie de type Fourier. Leur rôle principal est de mieux contrôler l'influence des lobes secondaires de ces estimateurs spectraux [CAR75], [HAR78], [MAR87], [MAT84], [MAX81], [MAX-LAC96], [NUT81-1], [SCH88].

Une fenêtre spectrale est une fenêtre considérée dans le domaine spectral (cf. 2.4.1). Suivant la méthode d'analyse, cette fenêtre est reliée de différentes façon à la fenêtre d'apodisation temporelle. Dans les méthodes du type corrélogramme, la fenêtre d'apodisation est appliquée sur la fonction d'autocorrélation. La fenêtre spectrale est la transformée de Fourier de la fenêtre temporelle, d'où le terme d'apodisation linéaire. Tandis que dans les méthodes du type périodogramme, la fenêtre d'apodisation est appliquée sur les données. La fenêtre spectrale est le module carré de la transformée de Fourier de la fenêtre temporelle, d'où le terme d'apodisation quadratique. Cela implique des caractéristiques différentes pour les fenêtres spectrales suivant que l'apodisation soit linéaire ou quadratique [MAX-LAC96], [MAR87]. Dans tous les cas, une apodisation dégrade la résolution fréquentielle par rapport à la fenêtre naturelle rectangulaire (la notion de résolution fréquentielle est abordée au paragraphe suivant).

- **Les fenêtres d'apodisations quadratiques** sont bénéfiques pour des spectres de dynamique importante et entraînent une diminution des fuites d'énergie (énergie dissipée dans les lobes secondaires par rapport au lobe principal), et donc du biais, sans améliorer la variance (méthodes reposant sur le principe du périodogramme).

Dans ce cas le nombre de points N de la fenêtre peut être quelconque, le maximum de la fenêtre est centré sur $N/2$ et égal à 1, on aura :

$$h[n] = h[N-1-n] \quad \text{pour } 0 \le n \le N-1 \tag{2.4-14}$$

$h[n]$ représentant la fenêtre d'apodisation en temps et :

$$\mathrm{TFd}\left(h[n]\right) = H(\nu) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \nu n T_e} \tag{2.4-15}$$

Dans le cas du périodogramme, la fenêtre est appliquée directement aux données :

$$\hat{\gamma}_x(\nu) = T_e \frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} h[n]\, x[n]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \nu n T_e} \right|^2}{N} \tag{2.4-16}$$

La fenêtre spectrale est alors proportionnelle au module carré de la TFd de la fenêtre d'apodisation :

$$Q(\nu) = \frac{1}{T_e} \left| H(\nu) \right|^2 \tag{2.4-17}$$

- **Les fenêtres d'apodisations linéaires** ont un impact important sur la décroissance de la variance (méthode reposant sur le principe du corrélogramme).

Dans ce cas, la fenêtre a (en principe) un nombre impair de points $2M-1$. Si la fenêtre d'apodisation linéaire $g[m]$ est définie pour $-M<m<+M$, les indices négatifs représentant les retards négatifs, les indices positifs, les retards positifs, son maximum est positionné en $m=0$ et est égal à $g[0]=1$ pour l'ensemble des fenêtres étudiées. La fenêtre est alors symétrique par rapport à l'indice 0 :

$$g[-m] = g[m] \quad \text{pour } -M<m<+M \tag{2.4-18}$$

La TFd de la fenêtre est alors définie par :

$$\mathrm{TFd}\left(g[m]\right) = G(\nu) = T_e \sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \nu m T_e} \tag{2.4-19}$$

De par cette symétrie, les fenêtres linéaires ont une TFd réelle. La positivité des mesures de densité spectrale n'est assurée que si la fenêtre ne contient pas de lobe négatif.
Dans le cas du corrélogramme (méthode Blackman-Tukey), la fenêtre est appliquée à l'estimateur de la fonction d'autocorrélation :

$$\hat{\gamma}_x(\nu) = \mathrm{TFd}\left(g[m]\,\hat{\Gamma}_x[m]\right) \tag{2.4-20}$$

La fenêtre spectrale est alors égale à la TFd de la fenêtre d'apodisation :

$$Q(\nu) = G(\nu) \tag{2.4-21}$$

Les fenêtres d'apodisation linéaires et quadratiques retenues dans le cadre de l'opération ASPECT permettent d'avoir un éventail suffisamment large pour qu'il soit adapté dans la plupart des cas. Le choix s'est fixé sur les fenêtres suivantes :

- Rectangulaire (ou naturelle),
- Bartlett (ou triangulaire),
- Hanning,
- Hamming,
- Blackman,
- Blackman-Harris 4 termes.

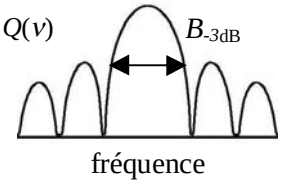
2.4.4. Caractérisation des fenêtres spectrales

La fenêtre spectrale influe sur les performances des méthodes de type Fourier, tant au niveau de la résolution que du biais des estimateurs. Un certain nombre de caractéristiques permettent d'évaluer le comportement des différentes fenêtres et ainsi de pouvoir prévoir le comportement de l'estimateur en fonction des paramètres. Nous allons présenter ici les caractéristiques les plus importantes qui ont une influence directe sur les performances. Pour pouvoir comparer et choisir une fenêtre d'apodisation, il est indispensable de caractériser les fenêtres temporelles, *h* ou *g*, et surtout les fenêtres spectrales, *Q*, par quelques paramètres simples [MAX-LAC96], [MAX81], [HAR78], [NUT81-1], [CAR75]. Parmi ces caractéristiques, la notion de largeur de bande tient une place importante. L'extension des définitions des différentes largeurs de bande d'un filtre à bande étroite à une fenêtre spectrale, qui peut être assimilée à un filtre équivalent associé à la fenêtre temporelle, permet d'introduire des largeurs de bande associées aux fenêtres spectrales. Elles sont d'un intérêt tout particulier pour la comparaison des différentes fenêtres d'apodisation. C'est pourquoi, trois notions différentes de largeur de bande ont été retenues.

- **Largeur de bande passante à -3dB** (à puissance moitié)
  Elle se mesure en utilisant la TFd des fenêtres, soit sur $Q(\nu)$.
  La largeur de bande à -3dB est :

$B_{-3\mathrm{dB}} = \nu_2 - \nu_1$ avec $10 \log (Q(\nu_2)/Q(0)) = 10 \log (Q(\nu_1)/Q(0)) = -3$ (2.4-22)

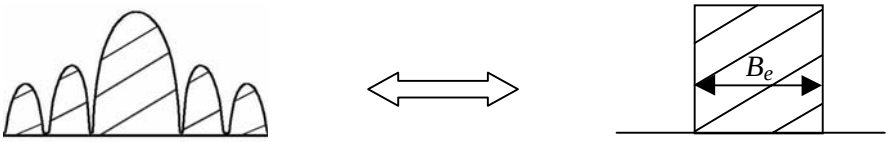
soit $Q(\nu_2) = Q(\nu_1) \approx Q(0)/2$ (2.4-23)



Cette largeur de bande est liée au pouvoir de résolution au sens de Rayleigh qui détermine l'intervalle de fréquence minimum pour pouvoir séparer deux fréquences pures.

- **Largeur de bande passante équivalente au bruit**
  C'est la largeur de la bande passante d'une fenêtre spectrale rectangulaire d'amplitude égale à l'amplitude maximale de la fenêtre spectrale considérée et de même surface que cette fenêtre spectrale. Elle donne une mesure globale de la largeur de bande du lobe central de la fenêtre spectrale. Elle se calcule également à partir de $Q(\nu)$ et s'écrit :

$$B_e = \frac{\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu}{Q(0)} \quad (2.4\text{-}24) \quad \text{ou à partir de } q[m] : \; B_e = \frac{q[0]}{T_e \sum_{m=-M+1}^{M-1} q[m]} \quad (2.4\text{-}25)$$



fenêtre spectrale en fréquence — fréquence

Figure 2.4-III : équivalence entre la surface de la fenêtre spectrale et la bande équivalente au bruit.

Cette largeur de bande équivalente est d'autant plus intéressante qu'elle représente **le facteur permettant de retrouver l'amplitude d'une raie spectrale** à partir de son estimée (cf. paragraphe 2.4.5).

- **Largeur de bande passante statistique équivalente**
  Elle représente la bande passante de la fenêtre rectangulaire équivalente qui produirait la même erreur statistique (variance de l'estimateur sur sa moyenne au carré) que la fenêtre considérée si le signal en entrée est un bruit blanc. Elle peut aussi caractériser la bande en fréquence séparant deux estimées indépendantes. Elle se calcule également à partir de $Q(\nu)$ et s'écrit :

$$B_s = \frac{\left| \int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu \right|^2}{\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} |Q(\nu)|^2\,\mathrm{d}\nu} \quad (2.4\text{-}26) \quad \text{ou à partir de } q[m] : \; B_s = \frac{|q[0]|^2}{T_e \sum_{m=-M+1}^{M-1} |q[m]|^2} \quad (2.4\text{-}27)$$

D'autres caractéristiques sont définies afin de quantifier le comportement des lobes secondaires par rapport au lobe principal de la fenêtre. Il est souvent plus intéressant d'obtenir une fenêtre dont les lobes secondaires sont le plus atténués possible par rapport au lobe principal. Cette atténuation des lobes secondaires a des retombées importantes sur le biais de l'estimateur. Plus les lobes secondaires sont atténués, moins l'influence de motifs éloignés de la fréquence d'intérêt est sensible. Le biais n'est alors principalement dû qu'au voisinage proche de la fréquence d'intérêt. Dans la plupart des cas, cela permet de considérer que, dans cette zone, le spectre est localement blanc. Cette hypothèse est nécessaire pour considérer que l'estimateur est approximativement non biaisé. La plupart des performances des estimateurs sont évaluées sous cette hypothèse. Si ce n'est pas le cas les performances risquent d'être détériorées par rapport à la théorie. Une bonne atténuation des lobes secondaires permet donc de mieux envisager l'hypothèse d'un spectre localement blanc, ce qui facilite l'interprétation par rapport aux performances théoriques.

Pour caractériser le comportement des lobes secondaires par rapport au lobe principal, les attributs suivants sont définis :

- **La fréquence du premier zéro du lobe principal** ν_p (cf. Figure 2.4-IV).
- **L'amplitude relative entre le maximum du lobe latéral positif le plus important et le maximum du lobe principal** (en dB) :
  il s'agit de $A_{r+} = Q(\text{lobe positif sup.})/Q(0)$ en dB. Ce lobe est souvent le premier lobe latéral.
- **L'amplitude relative entre le maximum du premier lobe latéral négatif le plus important s'il existe et le maximum du lobe principal** (en dB).
  si $Q(\nu)$ a des lobes négatifs, il s'agit de $A_{r-} = |Q(\text{lobe negatif sup.})|/Q(0)$ en dB.
  En effet, certaines fenêtres spectrales peuvent avoir des lobes secondaires négatifs (pour les méthodes fondées sur le corrélogramme). Dans ce cas la positivité du spectre ne peut être assurée.
- **Le facteur de décroissance des lobes secondaires** qui s'exprime en dB par octave F_d.
  L'amplitude des lobes secondaires des fenêtres d'apodisation diminue lorsque ν tend vers $1/2T_e$, cette décroissance des maxima des pics peut être approchée par un facteur qui s'exprime en dB par octave sur la bande $[-1/(2T_e) , +1/(2T_e)]$. C'est une indication de la façon dont les lobes secondaires s'atténuent. Elle dépend du nombre de points de la fenêtre, mais tend vers une limite asymptotique lorsque ce nombre augmente [MAR87].

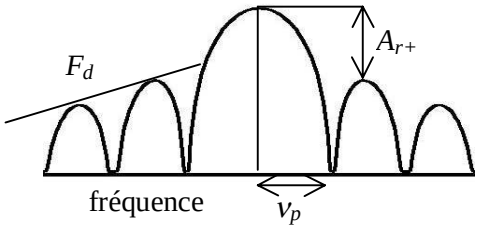


Figure 2.4-IV : caractérisation des propriétés des lobes secondaires d'une fenêtre spectrale.

- **Le facteur de fuite d'énergie** qui représente l'énergie dispersée dans les lobes secondaires par rapport à celle contenue dans le lobe principal.
  On caractérise les pertes d'énergies par le rapport entre la puissance contenue dans les lobes latéraux et la puissance contenue dans le lobe principal. Le premier zéro étant localisé en ν_p, le facteur de fuite d'énergie est mesuré par :

$$p = 1 - \int_{-\nu_p}^{+\nu_p} Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu \Big/ \int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu \qquad (2.4\text{-}28)$$

  p sera exprimé en pourcentage. Cependant cette définition peut être remise en cause si la fenêtre spectrale contient des lobes négatifs, en particulier p peut alors être lui-même négatif. Remarquons enfin que $1-p$ représente l'aire sous pic du lobe principal.

Les différentes expressions et propriétés des fenêtres d'apodisation quadratiques et linéaires retenues et des fenêtres spectrales alors obtenues dans le cas du périodogramme et du corrélogramme (méthode Blackman-Tukey) sont présentées en annexe.

2.4.5. Normalisation des estimateurs

L'application d'une fenêtre d'apodisation sur les données ou sur la corrélation, modifie l'estimateur de telle façon que si un facteur de normalisation n'est pas appliqué, l'estimation de la DSP devient biaisée. De plus, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.1, il existe différentes catégories de signaux : à énergie finie, à puissance moyenne finie, aléatoire, déterministe, périodique. Les

estimateurs ont été construits en se basant sur l'hypothèse d'un signal aléatoire à puissance moyenne finie. Hormis cette catégorie, on recherche souvent à estimer des raies spectrales (des signaux périodiques sinusoïdaux). Les estimateurs, bien que n'ayant pas été construits pour ce type d'hypothèse, permettent de les estimer. Pour ces signaux, il convient de modifier la normalisation. C'est pourquoi nous définirons trois types de normalisation.

Estimateur de référence $\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$:

Il s'agit de l'estimateur qui permet d'estimer une densité spectrale de puissance sans tenir compte d'une éventuelle apodisation (directement à partir des équations (2.2-3) et (2.2-6)).

Normalisation *DSP* $\hat{\gamma}_x(\nu)$:

L'estimateur est normalisé tel que le biais soit approximativement nul, quelle que soit la fenêtre d'apodisation, pour un signal aléatoire à puissance moyenne finie et nul dans le cas d'un bruit blanc.
Par définition, pour un bruit blanc de variance σ^2, la densité spectrale de puissance du signal échantillonné est $\gamma_x(\nu) = \sigma^2 T_e$. La moyenne de l'estimateur de référence s'écrit :

$$\xi\{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)\} = \gamma_x(\nu) * Q(\nu) = \int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} \sigma^2 T_e Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \sigma^2 T_e \times \int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu \qquad (2.4\text{-}29)$$

d'où
$$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \gamma_x(\nu) * \frac{Q(\nu)}{\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu} = \sigma^2 T_e \qquad (2.4\text{-}30)$$

l'estimateur est non biaisé.
Pour que le biais soit nul pour un bruit blanc, la normalisation est donc définie par :

$$\hat{\gamma}_x(\nu) = \frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{q[0]} = \frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu} \qquad (2.4\text{-}31)$$

Pour un signal aléatoire dont la DSP peut être considérée comme constante sur la bande passante de la fenêtre spectrale, on obtiendra une DSP approximativement non biaisée.

A partir de ce paragraphe, nous noterons cette normalisation $\hat{\gamma}_x(\nu)$, cette normalisation étant choisie par défaut. Il faut également noter que si aucune fenêtre d'apodisation n'est appliquée, la définition des fenêtres spectrales implique que $q[0] = 1$, tandis que lorsque les données ou la fonction d'autocorrélation sont apodisés $q[0] \neq 1$.

***Remarque** : la définition précédente est cohérente avec la définition d'une densité spectrale de puissance d'un signal échantillonné. Si l'on désire rendre l'estimation indépendante de la fréquence d'échantillonnage, soit $\hat{\gamma}_x(\nu) \approx \sigma^2$, il faut diviser les estimations par T_e. Ceci permet en cas de rééchantillonnage d'avoir des estimations comparables.*

Normalisation *amplitude* $\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)$:

Pour un signal déterministe périodique de fréquence ν_0 et de DSP $A\delta(\nu\text{-}\nu_0)$, la moyenne de l'estimateur de référence est égale à l'estimation puisque le signal est déterministe et :

$$\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu) = \int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} \text{A}\,\delta(u-\nu_0)\,Q(\nu-u)\,\text{d}u = \text{A}\,Q(\nu-\nu_0) \tag{2.4-32}$$

Le spectre obtenu est directement proportionnel à la fenêtre spectrale centrée sur ν_0.
On a en particulier pour $\nu=\nu_0$:

$$\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu_0) = \text{A}\times Q(0) \tag{2.4-33}$$

Pour retrouver l'amplitude réelle de la raie spectrale pour $\nu=\nu_0$, il est nécessaire de diviser l'estimée par $Q(0)$. Si l'ensemble du spectre est ainsi normalisé, il convient alors de le considérer plus comme une estimation de la puissance que de la DSP, son unité est en unité du signal au carré.
La relation entre l'estimateur normalisé amplitude et celui de référence s'écrit :

$$\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu) = \frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{Q(0)} = \frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{T_e \sum_{m=-M+1}^{M-1} q[m]} \tag{2.4-34}$$

La relation entre l'estimateur normalisé *DSP* et *amplitude* s'écrit :

$$\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu) = \hat{\gamma}_x(\nu)\times\frac{\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} Q(\nu)\,\text{d}\nu}{Q(0)} = \hat{\gamma}_x(\nu)\times B_e \tag{2.4-35}$$

Be est par définition la largeur de bande équivalente au bruit (cf. paragraphe précédent).

2.4.6. Performances des estimateurs

Les performances des estimateurs de type Fourier sont notamment évaluées à partir des propriétés des fenêtres spectrales (cf. paragraphe 2.4.4). Ces performances sont définies pour tous les estimateurs de type Fourier et sont présentées ici de façon générale. Leurs expressions et valeurs particulières pour chaque estimateur sont présentées dans le paragraphe suivant.

- **La variance normalisée**

La variance normalisée *varn*, parfois également appelée facteur de qualité [MAR87], représente la stabilité statistique de l'estimateur :

$$varn = \frac{\text{var}(\hat{\gamma}_x(\nu))}{\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)^2\}} = \frac{\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)^2\} - \xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}^2}{\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)^2\}} \tag{2.4-36}$$

La variance normalisée est représentative de la variance associée à l'estimateur, c'est-à-dire du bruit d'estimation. La variance d'une estimation dépend non seulement du signal lui-même, mais aussi de la méthode d'estimation. Pour les estimateurs de type Fourier, la variance est, sous certaines hypothèses sur le signal, proportionnelle au carré de la moyenne de l'estimation. La variance normalisée est la variance divisée par le carré de la moyenne de l'estimation afin d'obtenir une valeur indépendante du signal lui-même. La variance normalisée ne dépend que de la méthode d'estimation et de ses paramètres. La variance normalisée est calculée pour l'ensemble des estimateurs [MAT87] sous les hypothèses suivantes :
- signal aléatoire, à puissance moyenne finie, gaussien et de moyenne nulle,
- le spectre est approximativement constant sur la bande passante de la fenêtre spectrale de telle manière que l'estimateur soit approximativement non biaisé.

La variance normalisée est indépendante de la fréquence, avec cependant deux exceptions : pour la fréquence nulle et la fréquence d'échantillonnage sur deux pour lesquelles la variance normalisée est le double de celle obtenue pour les autres fréquences. Des valeurs très inférieures à 1 indiquent une estimation très lissée avec des fluctuations faibles (dues à la variance de l'estimateur) et au contraire des valeurs proches de 1 ou supérieures à 1 indiquent une estimation avec des fluctuations importantes (de l'ordre du carré de la moyenne de l'estimateur pour une variance normalisée de 1).

- **Intervalle de résolution fréquentielle associé à un processus aléatoire**

Cet intervalle caractérise la bande en fréquence séparant deux estimées indépendantes pour un signal aléatoire à puissance moyenne finie. Cette définition correspond exactement à celle de la bande statistique de la fenêtre spectrale (cf. équation 2.4-26).

- **Intervalle de résolution fréquentielle associé à des raies spectrales**

Cet intervalle doit être représentatif de l'écart fréquentiel permettant de distinguer deux fréquences pures. Il est défini par la bande à -3 dB. En effet, elle est liée au pouvoir de résolution au sens de Rayleigh qui détermine l'intervalle de fréquence minimum pour pouvoir séparer deux fréquences pures de même amplitude (cf. équation 2.4-22).

- **Produit stabilité-bande-durée**

Le produit stabilité-bande-durée [MAR87] regroupe 3 paramètres fondamentaux qui affectent les performances de l'estimateur :

$$P_{sbd} = varn \times B_S \times T \tag{2.4-37}$$

où *varn* représente la variance normalisée, B_S la bande statistique et T la durée en secondes du signal.
Le produit stabilité-bande-durée est représentatif du compromis résolution/variance obtenu pour une durée déterminée. Pour tous les estimateurs, lorsque la variance normalisée diminue, la bande statistique augmente et le produit stabilité-bande-durée reste supérieur ou égal à 1. Pour une variance normalisée donnée, la bande statistique minimale atteignable est donc supérieure à $1/(varn \times T)$. En général lorsque $B_S \times T \approx 1$, $varn \times B_S \times T > 1$ et au contraire lorsque $B_S \times T >> 1$, $varn \times B_S \times T \approx 1$, c'est-à-dire que lorsque la résolution fréquentielle est faible, le compromis résolution/variance est bon, mais lorsque la résolution est bonne, la variance devient très importante. Les hypothèses pour le calcul du produit stabilité-bande-durée sont les mêmes que celles du calcul de la variance normalisée.

- **Fuites d'énergie**

Le phénomène de fuites d'énergie, uniquement lié au fait que l'analyse est réalisée sur une durée finie du signal, est causé par les lobes secondaires des fenêtres spectrales. Le phénomène est d'autant plus important que les lobes secondaires de la fenêtre spectrale sont d'amplitudes plus élevées par rapport au lobe principal. Ce problème de fuites d'énergie est important pour des spectres de dynamique importante. La capacité de la méthode à éliminer les fuites d'énergie peut-être améliorée en adaptant le choix de la fenêtre spectrale au cas étudié. Ces fuites d'énergie dépendent du spectre lui-même, elles ne sont pas calculables, mais on peut évaluer les risques de fuites d'énergie à partir du facteur de fuite d'énergie et de la bande équivalente au bruit. On obtient alors un facteur estimant la contribution des lobes secondaires à la bande équivalente au bruit représentatif de l'énergie dispersée dans les lobes secondaires. Le facteur permettant d'évaluer les fuites d'énergie peut être défini par le produit du module du facteur de fuite p associé à la fenêtre (cf. paragraphe 2.4.4) par la bande équivalente au bruit B_e associée à la fenêtre (cf. équation 2.4-24) :

$$F_p = | p | \times B_e \tag{2.4-38}$$

Pour certaines méthodes (corrélogramme par exemple), le facteur de fuite p peut être négatif (car les fenêtres spectrales ont des lobes négatifs), ce qui pose un problème de définition. Cependant, la valeur absolue de ce facteur reste représentative des fuites d'énergie. C'est pourquoi dans l'équation 2.4-38, c'est la valeur absolue du facteur de fuite qui apparaît.

- **Biais**

Le biais n'est pas calculable sans connaissance de la DSP vraie du signal. L'estimation de la densité spectrale de puissance obtenue est en général biaisée, car sa valeur moyenne est égale à la DSP vraie convoluée par la fenêtre spectrale. Cependant, les estimations sont approximativement non-biaisées pour un signal aléatoire à puissance moyenne finie lorsque sa densité spectrale de puissance peut être considérée comme approximativement constante dans la bande passante de la fenêtre spectrale. L'estimation est non biaisée dans le cas d'un bruit blanc. Le biais ne peut être évalué de façon quantitative sans connaissance du signal. Cette performance ne peut être qu'une valeur symbolique. L'influence de la méthode se fait via la fenêtre spectrale et en particulier les lobes secondaires.
On parle également d'estimation non biaisée dans le cas où la fenêtre effective appliquée à l'autocorrélation vraie de support M est constante sur ce support :
si $\Gamma_x[m]$ représente l'autocorrélation vraie du signal pour $-M<m<+M$ et $q[m]$ la fenêtre effective sur l'autocorrélation pour $-L<m<+L$ (cf. paragraphe 2.4.1), on a alors

$$\xi\left\{\hat{\Gamma}_x[m]\right\} = \mathrm{TFd}^{-1}\left(\xi\left\{\hat{\gamma}_x(\nu)\right\}\right) = \frac{\Gamma_x[m]\times q[m]}{q[0]} = \Gamma_x[m] \tag{2.4-39}$$

d'où $$\xi\left\{\hat{\gamma}_x(\nu)\right\} = \mathrm{TFd}\left(\Gamma_x[m]\right) = \gamma_x(\nu) \tag{2.4-40}$$

l'estimation est non biaisée.

- **Positivité du spectre**

La positivité du spectre est assurée si la fenêtre spectrale n'a pas de lobes secondaires d'amplitude négative. Si la fenêtre spectrale possède des lobes négatifs, la positivité du spectre dépend des variations locales du spectre.

2.5. Principes des différents estimateurs de type Fourier

A partir des deux principes fondamentaux du périodogramme et du corrélogramme, différents estimateurs ont été mis au point. L'objectif est d'améliorer les performances ou tout du moins de proposer de nouveaux compromis (variance/résolution/fenêtre spectrale). Les différentes méthodes retenues dans l'opération ASPECT forment un ensemble cohérent des différents compromis que l'on peut espérer. Il s'agit de :

- Famille du périodogramme : Welch-WOSA.
- Famille du corrélogramme : Blackman-Tukey.
- Méthode mixte : Per-Cor.
- Méthode permettant d'obtenir des estimations non biaisée : STUSE.

Nous discuterons également de la méthode Lag-Reshape qui est une alternative de la méthode Per-Cor, mais qui a été finalement rejetée aux vues de ses performances vis-à-vis des autres méthodes. Certaines de ses méthodes sont devenues extrêmement classiques comme la méthode Welch-WOSA ou Blackman-Tukey. Les autres, bien qu'anciennes, ne sont que rarement appliquées. Leurs paramètres sont plus nombreux, plus difficiles à choisir et leurs performances moins bien maîtrisées. De plus, l'évolution des performances en fonction des paramètres et le choix de ces paramètres ne sont que brièvement abordés, ou tout du moins incomplètement abordés, dans la littérature. Dans ce chapitre, nous allons présenter les principes de chaque méthode en donnant une expression claire des performances. L'évolution des performances et le choix des paramètres seront précisés dans les paragraphes suivants. Nous n'avons pas cherché à utiliser une représentation unifiée des méthodes, où chacune des méthodes citées serait un cas particulier. Une telle représentation existe déjà, il faut se référer pour cela à l'excellent travail de Mathews [MAT87]. Notre objectif est de souligner les particularités de chaque méthode pour mettre en avant leurs avantages et inconvénients. Un

diagramme décrivant le principe de l'ensemble des estimateurs et leur liens, est présenté page 42 (Figure 2.5-II).

Notons que nous ne présentons pas ici, les méthodes dites à « multi-fenêtrages ». Ces méthodes sont également basés sur la Transformée de Fourier et se traduisent par l'application, non pas d'une fenêtre sur les données, mais d'une famille de fenêtres orthogonales. Ce type de méthode introduit par Thomson [THO82] a été l'objet de nombreux travaux depuis (voir par exemple [CLA93], [COY98]). Ces méthodes offrent des performances comparables en terme de résolution et de variance avec les méthodes haute-résolution (AR, Prony, Capon…) pour des signaux courts, mais ne sont pas adaptées aux signaux longs. Elles sont donc à considérer comme des méthodes haute-résolution et ne sont pas abordées dans ce document.

2.5.1. Famille du périodogramme : Welch-WOSA

Le principal problème du périodogramme est d'être un estimateur non consistant : la variance normalisée de l'estimateur reste constante lorsque le nombre de points du signal augmente. Ceci s'explique par le fait que la moyenne dans l'équation (2.2-3) a été ignorée.

La méthode Welch-WOSA *Weighted Overlapped Segment Averaging*, également dénommée parfois plus simplement périodogramme moyenné, appartient à la famille des estimateurs se fondant sur le périodogramme. Historiquement, Bartlett [BAR48] a tout d'abord introduit une méthode qui consiste à découper le signal à analyser en segments ne se recouvrant pas, pour ensuite calculer le périodogramme de chaque segment et enfin moyenner l'ensemble de ces périodogrammes. L'objectif était de produire un estimateur consistant. Welch [WEL67] a ensuite modifié cette méthode afin de permettre l'utilisation de fenêtres d'apodisation et le recouvrement entre les segments. Le but du fenêtrage des segments est de réduire les effets des lobes secondaires et de réduire le biais de l'estimation, au prix d'une faible diminution de la résolution. Le but du recouvrement est d'augmenter le nombre de segments et donc de diminuer la variance de l'estimateur. Cette méthode est devenue très populaire de par sa robustesse, sa relative simplicité et la possibilité de la programmer aisément dans un système temps-réel. C'est d'ailleurs la méthode de tous les analyseurs de spectre numériques.

Estimateur de référence $\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$, c'est-à-dire sans tenir compte d'une éventuelle apodisation :
Soit $x[n]$ le signal de N points et de période d'échantillonnage $T_e = 1/\nu_e$ à analyser.
Le signal $x[n]$ est découpé en N_{seg} segments de taille L et se recouvrant entre eux, soit d le nombre de points de décalage entre chaque segment et $x_i[n]$ le i$^{\text{eme}}$ segment :

$$x_i[n] = x[n+id] \quad \text{pour } 0 \le n \le L-1 \tag{2.5-1}$$

le nombre de segments N_{seg} est alors égal à la partie entière de $(N-L)/d+1$.
L'estimation de la DSP de $x[n]$ par la méthode de Welch est :

$$\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu) = \frac{1}{N_{seg}} \sum_{i=0}^{N_{seg}-1} \frac{1}{LT_e} \left| X_i(\nu) \right|^2 \tag{2.5-2}$$

avec

$$X_i(\nu) = \text{TFd}\left(x_i[n]\, h[n]\right) = T_e \sum_{n=0}^{L-1} x_i[n]\, h[n]\, \text{e}^{-2\pi \text{j} n \nu T_e} \tag{2.5-3}$$

où $h[n]$ représente la fenêtre d'apodisation quadratique (appliquée sur les données) de L points.

Les paramètres de la méthode sont :

1. **La taille des segments** L qui doit être inférieure à N.
   La taille des segments est le paramètre principal qui détermine la résolution fréquentielle de l'estimateur. Pour la méthode Welch-WOSA, la taille des segments est égale au support de la fenêtre effective appliquée à l'autocorrélation vraie du signal (retards positifs).
2. **Le décalage entre segments** d, $1 \le d \le L$.
   Le décalage entre segments influe sur la variance de l'estimateur, mais n'a aucune influence sur la résolution, le biais et les fuites d'énergie si la taille des segments n'est pas également modifiée. Le décalage est en général fixé par le choix de la fenêtre d'apodisation pour des raisons de variance minimale (cf. paragraphe 3.3.1).
3. **La fenêtre d'apodisation quadratique** h de taille L.
   Le choix d'un type de fenêtre influe peu sur la variance de la densité spectrale de puissance estimée et sur la résolution de cette densité spectrale de puissance. Son rôle est surtout prépondérant pour diminuer les fuites d'énergie.

Il est également possible de choisir comme paramètres d'entrée de l'algorithme, le nombre de segments au lieu de la taille des segments. En effet, la variance de l'estimateur de densité spectrale de puissance est inversement proportionnelle au nombre de segments si les segments sont statistiquement indépendants. Cependant, cette option est très difficile à utiliser puisqu'il est plus simple de raisonner à partir de la taille des segments qui est directement liée à la résolution fréquentielle.

Le tableau Tab. 2.5-I indique l'expression des notions communes à tous les estimateurs pour la méthode Welch-WOSA.

Tab. 2.5-I : **caractéristiques de la méthode Welch-WOSA.**

Fenêtre spectrale $Q(\nu)$ =TFd ($q[m]$)	$Q(\nu)=\frac{1}{LT_e}\left\|H(\nu)\right\|^2$ avec $H(\nu)$ = TFd ($h[n]$)
Fenêtre effective $q[m]$ pour $-L<m<L$	$q[m]=\frac{1}{L}(h*h)[m]=\frac{1}{L}\sum_{i=0}^{L-1-m}h[i]\,h[i+m]$
Variance normalisée (signal aléatoire à puissance moyenne finie gaussien)	$varn=\frac{\mathrm{var}(\hat{\gamma}_x(\nu))}{\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)^2\}}=\frac{1}{N_{seg}}\sum_{l=1-N_{seg}}^{N_{seg}-1}\left(1-\frac{\lvert l\rvert}{N_{seg}}\right)\frac{q[l\times d]^2}{q[0]^2}$
Normalisation *DSP* $\hat{\gamma}_x(\nu)=\hat{\gamma}_{\mathrm{ref}}(\nu)/q[0]$	$\hat{\gamma}_x(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_{\mathrm{ref}}(\nu)}{\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}\left\|h[n]\right\|^2}$
Normalisation *amplitude* $\hat{\gamma}_{\mathrm{amp}}(\nu)=\hat{\gamma}_{\mathrm{ref}}(\nu)/Q(0)=\hat{\gamma}_x(\nu)\times B_e$	$\hat{\gamma}_{\mathrm{amp}}(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_{\mathrm{ref}}(\nu)}{\frac{T_e}{L}\left\lvert\sum_{n=0}^{L-1}h[n]\right\rvert^2}$

Pour la méthode Welch-WOSA, la valeur de $q[0]=\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e}Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ peut être considérée comme indépendante de L. Ce facteur de normalisation *DSP* est indiqué dans le tableau A-2-I en annexe A-2. $q[0]$ représente l'énergie de la fenêtre.

La variance normalisée dépend surtout du nombre de segments (et à un degré bien moindre de la fenêtre d'apodisation).

2.5.2. Famille du corrélogramme : Blackman-Tukey

La méthode de Blackman-Tukey reprend le principe du corrélogramme à partir de la relation de Wiener-Kintchine (équation (2.2-6)) avec une fenêtre d'apodisation linéaire pour réduire la variance de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation pour les retards importants. Elle a été introduite par Blackman et Tukey en 1958 [BLA-TUK58].

Estimateur de référence $\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$: la méthode consiste à estimer la densité spectrale de puissance par la TFd de l'estimée de l'autocorrélation sur $-M<m<+M$, soit sur $2M$-1 points, sur laquelle est appliquée une fenêtre d'apodisation linéaire $g[m]$:

$$\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu) = T_e \sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m]\,\hat{\Gamma}_x[m]\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu m T_e} \tag{2.5-4}$$

$T_e = 1/\nu_{\text{e}}$, la période d'échantillonnage et $\hat{\Gamma}_x[m]$ l'estimée de la fonction d'autocorrélation. M doit être choisi inférieur au nombre de points du signal.

On pourrait envisager d'utiliser les deux types d'estimation de l'autocorrélation, biaisée et non biaisée (présentés dans le paragraphe 2.3). Cependant si on utilise l'estimation biaisée (cf. Tab. 2.3-I), la moyenne de l'estimateur vaut :

$$\xi\{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)\} = T_e \sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m]\left(1-\frac{|m|}{M}\right)\Gamma_x[m]\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\nu m T_e} \tag{2.5-5}$$

La fonction d'autocorrélation est multipliée par la fenêtre d'apodisation, multipliée elle-même par une fenêtre de Bartlett. Cette double apodisation n'est pas souhaitée dans la méthode Blackman-Tukey [MAR87]. Ce cas est un cas particulier de la méthode Per-Cor et est présenté dans le paragraphe suivant.
La méthode Blackman-Tukey utilise **l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation** (cf. Tab. 2.3-I).

Les paramètres de la méthode sont :

1. **Le support de la fenêtre sur corrélation** M, est défini dans ce document comme le support de la fenêtre sur les retards positifs uniquement. La taille totale de la fenêtre est égale à $2M$-1 ($1 \le M \le N$). La taille de la fenêtre sur l'autocorrélation influe aussi bien sur la résolution que sur la variance. Cette taille doit être supérieure au support (des retards positifs) de l'autocorrélation vraie du signal afin de ne pas perdre d'information.
2. **La fenêtre d'apodisation linéaire** g appliquée sur l'estimation de l'autocorrélation de taille $2M$-1. Le choix d'un type de fenêtre influe peu sur les propriétés statistiques de la densité spectrale de puissance estimée et sur la résolution de cette densité spectrale de puissance. Son rôle est surtout prépondérant pour diminuer les fuites d'énergie. Mais dans la méthode Blackman-Tukey, malgré un choix optimal de la fenêtre, les fuites d'énergie restent importantes.

Le tableau Tab. 2.5-II indique l'expression des notions communes à tous les estimateurs pour la méthode Blackman-Tukey.

Tab. 2.5-II : **caractéristiques de la méthode Blackman-Tukey.**	
Fenêtre spectrale $Q(\nu)$ =TFd ($q[m]$)	$Q(\nu)=G(\nu)$ =TFd ($g[m]$)
Fenêtre effective $q[m]$ pour $-M<m<M$	$q[m]=g[m]$
Variance normalisée (signal aléatoire à puissance moyenne finie gaussien)	$varn=\frac{1}{N}\sum_{m=-M+1}^{M-1}\frac{N}{(N-\lvert m\rvert)}g[m]^2$
Normalisation *DSP* $\hat{\gamma}_x(\nu)=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)/q[0]$	$\hat{\gamma}_x(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{g[0]}=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$
Normalisation *amplitude* $\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)/Q(0)=\hat{\gamma}_x(\nu)\times B_e$	$\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_x(\nu)}{T_e\sum_{m=-M+1}^{M-1}g[m]}$

Puisque les fenêtres d'apodisation sont définies avec $g[0]=1$, l'estimateur de référence correspond à la normalisation *DSP*.

La variance dépend du nombre de points du signal car c'est ce paramètre qui permet d'avoir une bonne estimation de l'autocorrélation. La variance dépend aussi de la fenêtre d'apodisation, mais surtout du support de cette fenêtre.

2.5.3. Per-Cor

La méthode Per-Cor a été proposée par Nuttal et Carter [NUT81-2], [NUT82] pour des signaux d'acoustique sous-marine de sonar. C'est en fait une combinaison de la méthode Welch-WOSA et de la méthode du corrélogramme, d'où son nom puisque la méthode Welch-WOSA est fondée sur le principe du périodogramme, tandis que la méthode Blackman-Tukey est fondée sur le principe du corrélogramme. La méthode Welch-WOSA permet d'estimer la fonction d'autocorrélation du signal qui est alors pondérée, comme dans Blackman-Tukey, pour estimer le spectre.

Estimateur de référence $\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$:

La méthode Per-Cor se décompose en 4 parties.

- Première étape : une estimation de la densité spectrale de puissance est obtenue par la méthode de Welch-WOSA (décrite paragraphe 2.5.1) les segments pouvant se recouvrir et une fenêtre d'apodisation pouvant être appliquée sur chaque segment.
  Soit $\hat{\gamma}_w(\nu)$ l'estimation obtenue pour une taille des segments L et une fenêtre d'apodisation h[n]. En pratique, on utilise des Transformées de Fourier Rapides dont la taille N_{TFw} sera la première puissance de deux supérieure à $2\times L$ pour éviter tout problème de circularité, on obtient donc une estimation $\hat{\gamma}_w[k]$ en fréquences discrètes de N_{TFw} points :

$$\hat{\gamma}_w[k]=\frac{1}{N_{seg}}\sum_{i=0}^{N_{seg}-1}\frac{T_e}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1}x_i[n]\,h[n]\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}\frac{nk}{N_{\text{TFw}}}}\right|^2 \qquad (2.5\text{-}6)$$

- Deuxième étape : on se sert de cette estimation pour estimer la fonction d'autocorrélation du signal $\hat{\Gamma}_w[m]$ sur 2*L*-1 points par la Transformée de Fourier Discrète (TFD) inverse de $\hat{\gamma}_w[k]$.
  Si $\hat{\Gamma}_w[m]$ est défini sur [-*L*+1,*L*-1], on a :

$$\hat{\Gamma}_w[m] = \text{TFD}^{-1}(\hat{\gamma}_w[k])[\text{m}] \qquad \text{pour } 0 \le m \le +L\text{-}1 \tag{2.5-7}$$

$$\hat{\Gamma}_w[m] = \text{TFD}^{-1}(\hat{\gamma}_w[k])[N_{\text{TFw}}+m] \quad \text{pour } -L+1 \le m < 0 \tag{2.5-8}$$

  les autres points de $\text{TFD}^{-1}(\hat{\gamma}_w[k])$ sont nuls.
- Troisième étape : on applique une fenêtre d'apodisation linéaire de 2*M*-1 points à la fonction d'autocorrélation $\hat{\Gamma}_w[m]$ estimée. On doit avoir $M \le L$. Soit $g[m]$ la fenêtre d'apodisation sur $-M<m<+M$. Le paramètre *M* est le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation.
- Quatrième étape : le spectre estimé est obtenu en prenant la TFd de $\hat{\Gamma}_w[m]$x $g[m]$:

$$\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu) = \text{TFd}\left(\hat{\Gamma}_w[m]\times g[m]\right) = T_e \sum_{k=0}^{2M-1} \hat{\Gamma}_w[m]\, g[m]\, \text{e}^{-2\pi k\nu T_e} \tag{2.5-9}$$

La première étape constitue la partie Per de l'algorithme, les troisième et quatrième étapes la partie Cor, tandis que la seconde est une étape intermédiaire.

Les paramètres de la méthode sont ceux des méthodes Welch-WOSA et Blackman-Tukey.
Paramètres Per :

1. **La taille des segments** *L* qui doit être inférieure à *N*.
   La taille des segments détermine le nombre de segments, c'est le paramètre principal qui influe sur la variance de l'estimateur.
2. **Le décalage entre segments** *d*, $1 \le d \le L$.
   Le décalage entre segments influe sur la variance de l'estimateur, mais n'a aucune influence sur la résolution, le biais et les fuites d'énergie si la taille des segments n'est pas également modifiée. Le décalage est en général fixé par le choix de la fenêtre d'apodisation dans les mêmes conditions que pour la méthode Welch-WOSA (cf. paragraphe 2.5.1).
3. **La fenêtre d'apodisation quadratique** *h* de taille *L*.

Paramètres Cor :

4. **Le support de la fenêtre sur corrélation** *M*, qui correspond au support de la fenêtre sur les retards positifs uniquement. La taille totale de la fenêtre est égale à 2*M*-1 ($1 \le M \le L$).
   La taille de la fenêtre sur l'autocorrélation influe aussi bien sur la résolution que sur la variance. Cette taille doit être supérieure au support (des retards positifs) de l'autocorrélation vraie du signal afin de ne pas perdre de l'information. C'est le paramètre principal qui influe sur la résolution.
5. **La fenêtre d'apodisation linéaire** *g* appliquée sur l'estimation de l'autocorrélation de taille 2*M*-1.
   La fenêtre spectrale est issue d'une combinaison de la fenêtre d'apodisation quadratique et de la fenêtre d'apodisation linéaire. La fenêtre spectrale obtenue influe peu sur les propriétés statistiques de la densité spectrale de puissance estimée et sur la résolution de cette densité spectrale de puissance, sauf dans certains cas particuliers. Son rôle est surtout prépondérant pour diminuer les fuites d'énergie. Il est à noter que la fenêtre spectrale dépend de l'ensemble des paramètres sauf du décalage entre segments.

Le tableau Tab. 2.5-III indique l'expression des notions communes à tous les estimateurs pour la méthode Per-Cor.

Tab. 2.5-III : **caractéristiques de la méthode Per-Cor.**	
Fenêtre spectrale $Q(\nu)$ =TFd ($q[m]$)	$Q(\nu)=\frac{1}{LT_e}\lvert H(\nu)\rvert^2 \otimes G(\nu)$ avec $H(\nu)$ = TFd ($h[n]$), $G(\nu)$ = TFd ($g[m]$) et $\otimes$ l'opération de convolution circulaire en fréquence.
Fenêtre effective $q[m]$ pour $-M<m<M$	$q[m]=\frac{1}{L}(h*h)[m]\times g[m]$ avec * opération de convolution en temps discret.
Variance normalisée (signal aléatoire à puissance moyenne finie gaussien)	$varn=\frac{1}{\left\lvert\sum_{n=0}^{L-1}h[n]^2\right\rvert^2}\frac{1}{N_{seg}}\sum_{l=1-N_{seg}}^{N_{seg}-1}\left(1-\frac{\lvert l\rvert}{N_{seg}}\right)\sum_{m=-M+1}^{M-1}\Phi(h,m,l,d)\times g[m]^2$ avec : $\Phi(h,m,l,d)=\sum_{n=0}^{L-1}h[n+m]\,h[n+m+ld]\,h[n]\,h[n+ld]$
Normalisation *DSP* $\hat{\gamma}_x(\nu)=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)/q[0]$	$\hat{\gamma}_x(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}\lvert h[n]\rvert^2}$ (puisque $g[0]=1$)
Normalisation *amplitude* $\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)/Q(0)$ $\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\hat{\gamma}_x(\nu)\times B_e$	$\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{\frac{T_e}{L}\sum_{m=-M+1}^{M-1}(h*h)[m]\times g[m]}$

La fenêtre spectrale est le résultat de la convolution de la fenêtre spectrale de la partie Per de l'algorithme (méthode Welch-WOSA) et de la fenêtre spectrale de la partie Cor (corrélogramme). La fenêtre effective est le résultat de la multiplication de la fenêtre effective de la partie Per de l'algorithme par la fenêtre d'apodisation linéaire (fenêtre effective de la partie Cor). Le support de la fenêtre effective est égal à celui de la fenêtre d'apodisation linéaire. La variance normalisée dépend surtout du nombre de segments et du support de la fenêtre d'apodisation linéaire (et à un degré moindre des fenêtres d'apodisation).

La difficulté de la méthode Per-Cor réside dans le fait que $Q(\nu)$ dépend de l'ensemble des paramètres, sauf du décalage entre segments. Il est alors impossible, sauf dans des cas très particuliers, de prévoir sa forme et de donner *a priori* les caractéristiques de la fenêtre spectrale. De ces caractéristiques dépendent les performances de la méthode, notamment la résolution, les fuites d'énergie et le biais. C'est pourquoi à chaque analyse, la fenêtre effective est calculée, ainsi que la fenêtre spectrale associée, ce qui permet d'estimer l'ensemble des caractéristiques décrites dans le paragraphe 2.4.4. Certaines caractéristiques se calculent simplement à partir de l'expression de la fenêtre effective (bande statistique), d'autres sont estimées à partir du calcul de la fenêtre spectrale (bande à -3 dB).

2.5.3.1. Corrélogramme A-biaisé

Un cas particulier de la méthode Per-Cor doit être mis en avant. Nous l'appellerons corrélogramme A-biaisé (pour Autocorrélation biaisée) par opposition au corrélogramme Blackman-Tukey. En effet, il s'agit du cas où à partir du principe du corrélogramme, le choix de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation est l'estimateur biaisé, au lieu du non-biaisé. Ceci revient à n'utiliser pour la partie Per (première étape) de la méthode Per-Cor que le simple périodogramme (sans fenêtre d'apodisation quadratique) au lieu de la méthode Welch-WOSA complète. Après TFD inverse (seconde étape Per-Cor), on retrouve exactement l'estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation sur N points. Cette méthode constitue l'algorithme rapide du calcul de l'autocorrélation. Pour la version non biaisée, il suffit après d'appliquer une fonction triangle [MAR87]. Le reste de l'algorithme reste inchangé.

Estimateur de référence $\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$:

- Première étape : une estimation de la densité spectrale de puissance est obtenue par la méthode du périodogramme simple. En pratique, on utilise des Transformées de Fourier Rapides dont la taille N_{TFw} sera la première puissance de deux supérieure à $2\times L$ pour éviter tout problème de circularité, on obtient donc une estimation $\hat{\gamma}_p[k]$ en fréquences discrètes de N_{TFw} points :

$$\hat{\gamma}_p[k] = \frac{T_e}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{j}\frac{nk}{N_{\text{TFw}}}}\right|^2 \tag{2.5-10}$$

- Deuxième étape : on se sert de cette estimation pour estimer la fonction d'autocorrélation non biaisée du signal $\hat{\Gamma}_{nb}[m]$ sur $2N$-1 points par la TFD inverse de $\hat{\gamma}_p[k]$.
- Troisième étape : on applique une fenêtre d'apodisation linéaire de $2M$-1 points à la fonction d'autocorrélation $\hat{\Gamma}_{nb}[m]$ estimée. On doit avoir $M \le N$. Soit $g[m]$ la fenêtre d'apodisation sur les $-M<m<+M$. Le paramètre M est le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation.
- Quatrième étape : le spectre estimé est obtenu en prenant la TFd de $\hat{\Gamma}_{nb}[m]$x $g[m]$:

$$\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu) = \text{TFd}\left(\hat{\Gamma}_{nb}[m]\times g[m]\right) = T_e\sum_{k=0}^{2M-1}\hat{\Gamma}_{nb}[m]\,g[m]\,\mathrm{e}^{-2\pi k\nu T_e} \tag{2.5-11}$$

Les paramètres de la méthode ne sont plus que ceux de la partie COR de l'algorithme :

- **La fenêtre d'apodisation linéaire** g.
- **Le support de la fenêtre d'apodisation linéaire** M.

De même que pour Per-Cor, la forme de la fenêtre spectrale dépend de l'ensemble des paramètres. Elle ne peut pas être prévue avant que l'ensemble des paramètres ne soient choisis. La forme est très différente suivant le support de la fenêtre sur corrélation. Ceci est dû au fait qu'après la seconde étape, la fenêtre appliquée en moyenne à l'autocorrélation vraie est la fonction triangle sur N points. On y applique ensuite une fenêtre de taille inférieure. Suivant la différence entre cette taille de fenêtre et le nombre de points du signal, la forme de la fenêtre effective peut varier énormément.

Le tableau Tab. 2.5-IV indique l'expression des notions communes à tous les estimateurs pour la méthode du Corrélogramme A-biaisé.

Tab. 2.5-IV : **caractéristiques de la méthode du Corrélogramme A-biaisé.**	
Fenêtre spectrale $Q(\nu)$ =TFd ($q[m]$)	$Q(\nu)=\frac{1}{NT_e}\left\|D_N(\nu)\right\|^2 \otimes G(\nu)=\frac{T_e}{N}\left\|\frac{\sin(\pi N\nu T_e)}{\sin(\pi\nu T_e)}\right\|^2 \otimes G(\nu)$
Fenêtre effective $q[m]$ pour $-M<m<M$	$q[m]=\left(1-\frac{\lvert m\rvert}{N}\right)\times g[m]$
Variance normalisée (signal aléatoire à puissance moyenne finie gaussien)	$varn = \sum_{m=-M+1}^{M-1}\frac{g[m]^2}{N-\lvert m\rvert}$
Normalisation *DSP* $\hat{\gamma}_x(\nu)=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)/q[0]$	$\hat{\gamma}_x(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{g[0]}=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$
Normalisation *amplitude* $\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)/Q(0)=\hat{\gamma}_x(\nu)\times B_e$	$\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_x(\nu)}{T_e\sum_{m=-M+1}^{M-1}\left(1-\frac{\lvert m\rvert}{N}\right)\times g[m]}$

2.5.3.2. Lag-Reshape

La méthode Lag-Reshape a été proposée par Nuttal et Carter [NUT82], elle est fondée sur le même principe que la méthode Per-Cor avec une modification pour obtenir des fenêtres spectrales identiques à celles de Blackman-Tukey. Se pose alors la question de l'intérêt de ce principe (cf. paragraphe 3.3.3.3).

Estimateur de référence $\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$, c'est-à-dire sans tenir compte d'une éventuelle apodisation.
La méthode Lag-Reshape, de même que la méthode Per-Cor se décompose en 4 parties, seule la troisième étape est modifiée par rapport à Per-Cor :

- Troisième étape : on désire alors obtenir une fenêtre effective sur la corrélation qui soit une fenêtre classique du type de celle utilisée en apodisation linéaire avec la méthode Blackman-Tukey : Hanning, Hamming ...
  Or si on applique une fenêtre d'apodisation linéaire $\tilde{g}[m]$ de $2M$-1 points à la fonction d'autocorrélation $\hat{\Gamma}_w[m]$ estimée, on obtient pour la méthode Per-Cor la fenêtre effective :

$$q[m]=\frac{1}{L}(h*h)[m]\times\tilde{g}[m] \quad \text{pour } -M<m<M \tag{2.5-12}$$

  Pour que $q[m]$ soit une fenêtre classique $g[m]$ (Hanning, Hamming ...), il faut construire la fenêtre d'apodisation linéaire $\tilde{g}[m]$ de manière à obtenir $q[m]=g[m]$:

$$\tilde{g}[m]=\frac{g[m]}{\frac{1}{L}(h*h)[m]} \quad \text{pour } -M<m<M \tag{2.5-13}$$

  On doit avoir $M \le L$. Le paramètre M est le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation. Pour la méthode Lag-Reshape, on ne choisit pas la fenêtre d'apodisation linéaire, mais la fenêtre effective.

La fenêtre effective devient un paramètre de la méthode à choisir parmi les fenêtres classiques linéaires $g[m]$.

- Quatrième étape : le spectre estimé est obtenu en prenant la TFd de $\hat{\Gamma}_w[m] \times \tilde{g}[m]$:

$$\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu) = \text{TFd}\left(\hat{\Gamma}_w[m] \times \tilde{g}[m]\right) = T_e \sum_{k=0}^{2M-1} \hat{\Gamma}_w[m]\, \tilde{g}[m]\, \text{e}^{-2\pi k \nu T_e} \tag{2.5-14}$$

Les paramètres de la méthode Lag-Reshape sont identiques à ceux de Per-Cor, sauf qu'au lieu de choisir la fenêtre d'apodisation linéaire, on choisit la fenêtre effective désirée.

Les fenêtres spectrale et effective, ainsi que les performances liées à la fenêtre spectrale et les facteurs de normalisation, sont alors identiques à ceux obtenus pour la méthodes Blackman-Tukey lorsque que la fenêtre d'apodisation linéaire pour Blackman-Tukey est la même que la fenêtre effective pour Lag-Reshape et lorsque le support M est identique (cf. Tab. 2.5-II).

Fenêtre spectrale : $Q(\nu) = G(\nu)$ (2.5-15)

Fenêtre effective : $q[m] = g[m]$ pour $-M<m<M$ (2.5-16)

L'expression de la variance normalisée est identique à celle de Per-Cor en remplaçant $g[m]$ par $\tilde{g}[m]$ (cf. Tab. 2.5-III).

Important :
Pour l'ensemble des fenêtres quadratiques, « l'autocorrélation » de la fenêtre quadratique $(h*h)[m]$ est définie sur $-L<m<+L$ et $(h*h)[m]$ tend vers 0 lorsque m tend vers L (ou $-L$). Les points d'indice proche de L ou $-L$ sont proches de zéros. Ceci peut poser des problèmes numériques importants lors de la division de la fenêtre linéaire par $(h*h)[m]$ (équation 2.5-13), si L est proche de M. L'estimation est alors faussée. Pour éviter ce problème qui est imprévisible et difficile à détecter à moins de ne visualiser $\tilde{g}[m]$, il est conseillé de prendre ***L>M+10%M***.

2.5.4. STUSE

La méthode *Short-Time Unbiaised Spectrum* a été proposée pour construire un estimateur non biaisé à partir du recouvrement de plusieurs estimations biaisées. L'algorithme s'est montré efficace dans l'identification de systèmes à Réponse Impulsionnelle Finie [RAB79], [RAB80], [ALL79]. Il a été également utilisé pour l'estimation de retards et de fonction de cohérence [YOU83]. La méthode STUSE se place de façon particulière par rapport aux autres estimateurs présentés. Bien que reposant sur le principe de la méthode Welch-WOSA, elle se distingue par la possibilité d'obtenir des estimations non biaisées par la construction de fenêtre effective adaptée sur la corrélation [MAT85], [MAT87].

Estimateur de référence $\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)$, c'est-à-dire sans tenir compte d'une éventuelle apodisation.

- La première étape est la même qu'avec la méthode Welch-WOSA : découpage du signal en segments et application d'une fenêtre quadratique d'apodisation.
  Soit $x[n]$ le signal, de N points et de période d'échantillonnage $T_e = 1/\nu_e$, à analyser. Le signal $x[n]$ est découpé en N_{seg} segments de taille L et se recouvrant entre eux ; soit d le nombre de points de décalage entre chaque segment et $x_i[n]$ le i^{eme} segment auquel est appliquée une fenêtre d'apodisation quadratique $h[n]$ de L points :

$$x_i[n] = x[n+id] \times h[n] \quad \text{pour } 0 \le n \le L-1 \tag{2.5-17}$$

le nombre de segments N_{seg} est alors égal à la partie entière de $(N-L)/d+1$.

- La deuxième étape consiste à construire des "interspectres" à partir des différents segments : Considérons la TFd du $i^{\text{ème}}$ segment :

$$X_i(\nu) = \text{TFd}\left(x_i[n]\,h[n]\right) = T_e \sum_{n=0}^{L-1} x_i[n]\,h[n]\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} n \nu T_e} \tag{2.5-18}$$

alors "l'interspectre" entre le segment i et le segment $q+i$, s'écrit :

$$\tilde{\gamma}_{i,q}(\nu) = \frac{1}{LT_e} X_i(\nu)\, X_{i+q}^{*}(\nu) \quad \text{pour } -Q \le q \le +Q \tag{2.5-19}$$

- La troisième étape consiste à moyenner ces "interspectres" suivant i :

$$\bar{\gamma}_q(\nu) = \frac{1}{N_{seg}} \sum_{i=0}^{N_{seg}-1} \tilde{\gamma}_{i,q}(\nu) \tag{2.5-20}$$

- La quatrième et dernière étape permet d'obtenir une estimée de la DSP en moyennant les estimées $\bar{\gamma}_q(\nu)$ pondérées par un terme exponentiel qui prend en compte le retard entre le i^{eme} segment et le $i+q^{\text{eme}}$ segment :

$$\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu) = \sum_{q=-Q}^{+Q} \bar{\gamma}_q(\nu)\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \nu q d} \tag{2.5-21}$$

Les paramètres de la méthode sont :

1. **La taille des segments** L qui doit être inférieure à N.
   La taille des segments doit être très inférieure au nombre de points du signal pour obtenir un nombre suffisant de segments et pouvoir construire suffisamment "d'interspectres". Contrairement à la méthode Welch-WOSA, la taille des segments n'est pas égale au support de la fenêtre effective sur la corrélation, mais c'est un des paramètres principaux qui détermine ce support et par suite la résolution fréquentielle.
2. **Le décalage entre segments** d, $1 \le d \le L$.
   Le décalage doit être en principe inférieur au décalage maximal indiqué dans le tableau Tab. 2.5-VI au risque de construire des fenêtres effectives avec de très mauvaises propriétés. Le décalage entre segments influe sur la variance de l'estimateur, mais aussi sur la fenêtre spectrale et l'ensemble des performances qui lui sont associées.
3. **La fenêtre d'apodisation quadratique** h de taille L.
   Le choix d'un type de fenêtre influe peu sur la variance de la densité spectrale de puissance estimée et sur la résolution de cette densité spectrale de puissance si le décalage est inférieur au décalage maximal indiqué dans le tableau Tab. 2.5-VI.
4. ***Q* « nombre d'interspectres »**, $1 \le Q < N_{seg}$.
   Q doit être en pratique très inférieur au nombre de segments pour obtenir les caractéristiques souhaitées pour la méthode STUSE.

Le tableau Tab. 2.5-V indique l'expression des notions communes à tous les estimateurs pour la méthode STUSE.

Tab. 2.5-V : **caractéristiques de la méthode STUSE.**	
Fenêtre spectrale $Q(\nu)$ =TFd ($q[m]$) pour $\boldsymbol{Q \ll N_{seg}}$.	$Q(\nu)=\frac{1}{LT_e}\left\|H(\nu)\right\|^2 \sum_{q=-Q}^{+Q} e^{-2\pi j \nu qd}$ avec $H(\nu)$ = TFd ($h[n]$).
Fenêtre effective $q[m]$ pour $\boldsymbol{-(L+Qd)<m<(L+Qd)}$	$q[m]=\frac{1}{N_{seg}}\sum_{q=-Q}^{+Q}\left(N_{seg}-q\right)\frac{1}{L}(h*h)[m+qd]$ $q[m]\approx\sum_{q=-Q}^{+Q}\frac{1}{L}(h*h)[m+qd]$ pour $\boldsymbol{Q \ll N_{seg}}$.
Variance normalisée (signal aléatoire à puissance moyenne finie gaussien)	$varn=\frac{1}{q[0]^2}\frac{1}{N_{seg}}\sum_{l=1-N_{seg}}^{N_{seg}-1}\left(1-\frac{\left\|l\right\|}{N_{seg}}\right)\sum_{q_1,q_2=-Q}^{+Q} r_h(ld)\,r_h((l+q_1-q_2)d)$ avec : $r_h[m]=\frac{1}{L}(h*h)[m]$ pour $-L<m<+L$ et $q[0]=\sum_{q=-Q}^{+Q}\frac{1}{L}(h*h)[qd]$
Normalisation *DSP* $\hat{\gamma}_x(\nu)=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)/q[0]$ pour $\boldsymbol{Q \ll N_{seg}}$.	$\hat{\gamma}_x(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{\sum_{q=-Q}^{+Q}\frac{1}{L}(h*h)[qd]}$
Normalisation *amplitude* $\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)/Q(0)$ $\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\hat{\gamma}_x(\nu)\times B_e$	$\hat{\gamma}_{\text{amp}}(\nu)=\frac{\hat{\gamma}_{\text{ref}}(\nu)}{\frac{(2Q+1)T_e}{L}\left\|\sum_{n=0}^{L-1}h[n]\right\|^2}$

La particularité de la méthode STUSE est la possibilité de construire des fenêtres effectives sur la corrélation permettant d'obtenir une estimation non biaisée.

Il convient de remarquer que le support de la fenêtre effective est supérieur à la taille des segments et est égal à $M = L+Qd$. A partir de la normalisation DSP et dans le cas $Q << N_{seg}$, soit pour un nombre suffisant de segments permettant de construire un nombre suffisant d'interspectres $\tilde{\gamma}_{i,q}(\nu)$, on peut construire des fenêtres effectives non biaisées :
Si on considère que le véritable support de l'autocorrélation est M_x:

$$\Gamma_x[m]=0 \quad \text{pour } \left|m\right| \geq M_x \tag{2.5-22}$$

alors l'estimation est non biaisée si :

$$\frac{q[m]}{q[0]}=1 \quad \text{pour } \left|m\right| < M_x \tag{2.5-23}$$

Avec la méthode STUSE, il est possible de construire des fenêtres telles que sur un support M_{nb}, pour $\left|m\right| < M_{nb}$, cette condition soit remplie (cf. Tab. 2.5-VI). Nous appellerons ce support, le support non biaisé et le notons M_{nb}, tandis que le support de la fenêtre effective sera noté M.

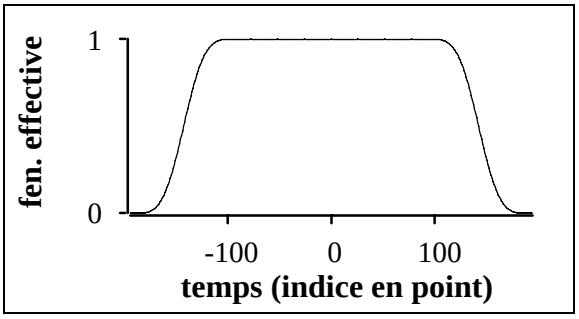


Figure 2.5-I : **fenêtre effective de la méthode STUSE**. Pour une taille de segments égale à 66 points, un décalage entre segments de 40 %, *Q* égal à 5 et une fenêtre d'apodisation de Hanning. Le support non biaisé M_{nb} est égal à 100, le support de la fenêtre effective *M* est égal à 200.

La condition est remplie lorsque le décalage *d* est approximativement inférieur à deux fois l'inverse de la largeur de la bande de $|H(\nu)|^2$, ou en d'autres termes *d* doit être inférieur au taux d'échantillonnage de Nyquist de $|H(\nu)|^2$, [MAT85], [ALL77]. Une étude plus précise des fenêtres effectives permet de donner les décalages maximaux en pourcentage de la taille des segments en fonction des fenêtres quadratiques :

Tab. 2.5-VI : **décalages maximaux permettant d'obtenir des fenêtres effectives non biaisées en fonction de la fenêtre quadratique**

Fenêtre	Rectangulaire	Bartlett	Hanning	Hamming	Blackman	Blackman-Harris 4T
décalage	100 %	61 %	55 %	59 %	45 %	42 %

Le support de la partie non biaisée de la fenêtre effective est alors approximativement égal à :

$$M_{nb} = Qd\text{-}L/2 = \left(\frac{Q \times dec\%}{100} - \frac{1}{2}\right)L \qquad (2.5\text{-}24)$$

avec *d* décalage en nombre de points et *dec%* le décalage en pourcentage de $0 < dec\% \leq 100$.
La méthode est non biaisée si $M_{nb} \geq M_x$ (le véritable support de corrélation du signal).
La méthode permet d'obtenir des fenêtres effectives constantes sur un support M_{nb}, les points entre M_{nb} et *M* tendent vers 0 à la manière des fenêtres linéaires classiques sur la corrélation. Etant donné que le véritable support de corrélation ne peut être qu'estimé, les fenêtres effectives STUSE permettent de conserver le caractère non biaisé de la fenêtre effective sur un certain nombre de points, tout en produisant des fenêtres permettant d'obtenir un meilleur lissage que la fenêtre linéaire rectangulaire dans la méthode Blackman-Tukey, seule autre méthode permettant d'obtenir des fenêtres effectives non biaisée.

La variance dépend peu de la fenêtre d'apodisation, mais de l'ensemble des autres paramètres. Cette formule n'est valable que pour $Q << N_{seg}$, sinon la variance normalisée réelle est inférieure à la valeur donnée, mais si *Q* est trop proche du nombre de segments, la fenêtre effective n'a pas les propriétés escomptées.

2.5.5. Lien entre les méthodes

Les différentes méthodes de type Fourier ont des points communs, bien que chacune ait ses particularités. Dans l'opération ASPECT, l'objectif est de tirer partie de ces particularités qui forment les avantages et inconvénients de chaque estimateur. La présentation des différents estimateurs effectuée dans ce chapitre au travers de notions communes et de particularités, favorisent l'étude du chapitre suivant sur le comportement des estimateurs, les performances des estimateurs en fonction des paramètres et leur comparaison. Le principe de chaque méthode et le lien entre elles sont résumés dans la Figure 2.5-II.

Remarque :
Le dernier passage dans le domaine des fréquences est présentée dans les paragraphes précédents pour l'ensemble des méthodes par l'application de la TFd, discrète en temps et continue en fréquence. En pratique, on utilise la Transformée de Fourier Discrète [MAX-LAC96], [KUN80], [MAR87], [OPP75] via l'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide qui nécessite d'employer un nombre de points égal à une puissance de deux. Il suffit alors d'utiliser la TFD à la place de la TFd pour obtenir :

$$\hat{\gamma}_x[k] = \hat{\gamma}_x\left(\frac{k}{N_{\mathrm{TF}}T_e}\right) \tag{2.5-25}$$

où N_{TF} représente le nombre de points de la TFD.
La transformée de Fourier Discrète est ici définie par :

$$X[k] = \mathrm{TFD}\left(x[n]\right) = T_e \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\frac{nk}{N}} \tag{2.5-26}$$

et pour la TFD^{-1} $\quad x[n] = \dfrac{1}{NT_e} \sum_{n=0}^{N-1} X[k]\, \mathrm{e}^{+2\pi \mathrm{j}\frac{nk}{N}}$ (2.5-27)

Cette normalisation de la TFD permet de retrouver les mêmes dimensions que dans la TF d'un signal continu et de considérer la TFD comme l'échantillonnée de la TFd telle qu'elle a été précédemment définie. $X[k]$ est périodique de période $1/T_e$ Hz, ce qui correspond à N points fréquentiels et est échantillonné à $1/NT_e$, ce qui représente l'écart en Hz entre deux canaux.

En principe, le nombre de points de la TFD doit être égal au nombre de points N de la fonction, dont on prend la transformée. En pratique, il est souvent utile d'ajouter des zéros à la fonction avant d'effectuer la TFD (*zero padding*). Cette opération n'affecte en rien la résolution fréquentielle des méthodes puisque celle-ci est définie à partir de la fenêtre spectrale qui n'en dépend pas. Ceci revient à échantillonner avec un pas inférieur la TFd, si on ajoute P zéros le pas entre deux fréquences est alors de $1/(P+N)T_e$ au lieu de $1/NT_e$. Des fréquences supplémentaires peuvent être ainsi visualisées ce qui permet de mieux cerner les différentes composantes fréquentielles. Le nombre de points de la TFD peut donc être différent de la taille de la fonction à transformer (ce qui implique l'ajout automatique de zéros), mais doit être supérieur ou égal à celle-ci. Ce dernier paramètre est appelé **taille de la TF** N_{TF}. En outre, le *zero-padding* permet dans certaines opérations d'éviter les problèmes liés à la circularité [MAX-LAC96].

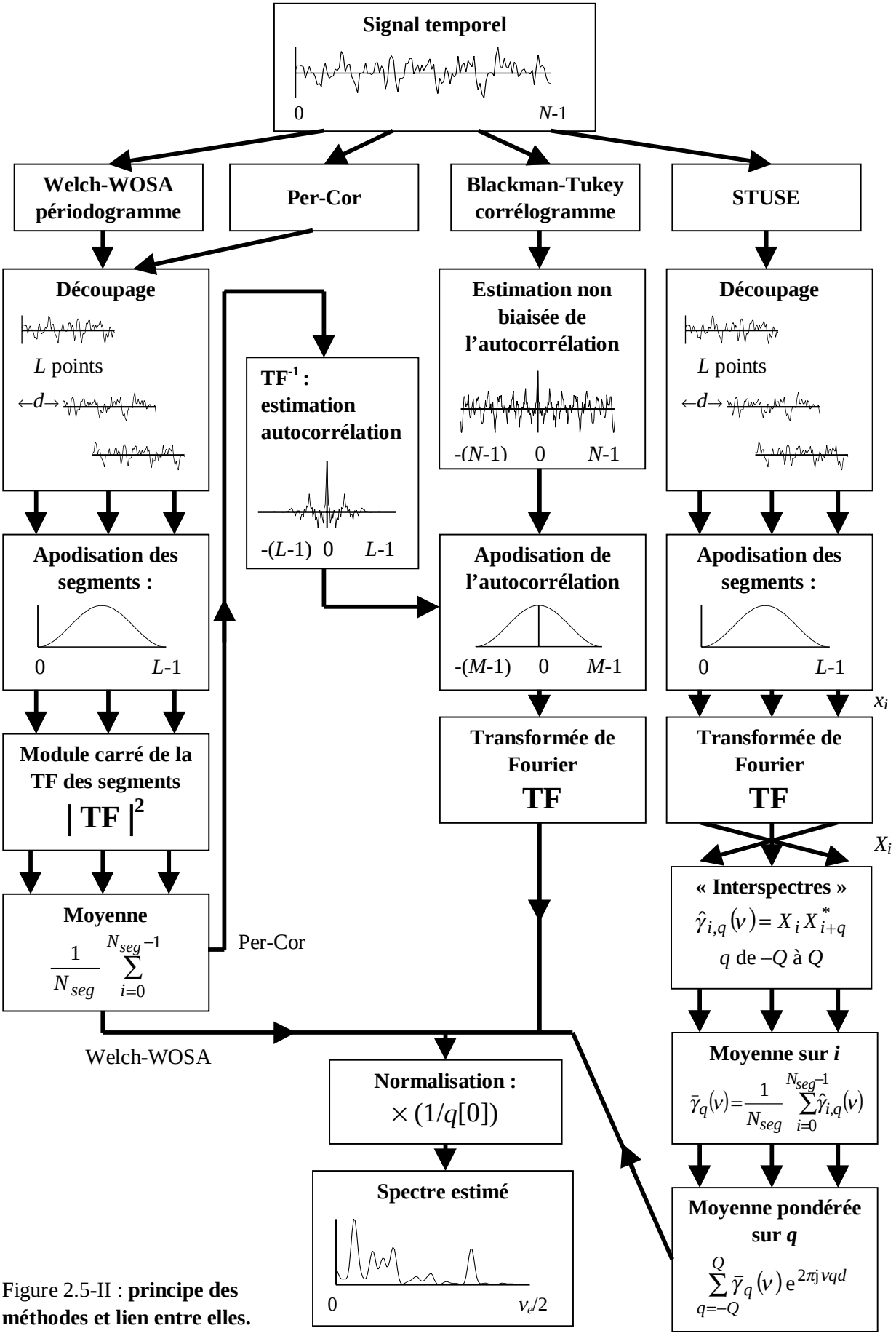


Figure 2.5-II : **principe des méthodes et lien entre elles.**

Chapitre 3

Comportement et performances des estimateurs

Dans ce chapitre, nous allons analyser d'une part le comportement des estimateurs vis-à-vis des composantes spectrales d'un signal, et d'autre part les performances des estimateurs en fonction des paramètres. L'objectif est triple : (1) tout d'abord souligner les propriétés qui ont permis de mettre au point des critères d'interprétation des différentes estimations ; (2) ensuite, optimiser et connaître l'évolution des performances en fonction des paramètres et ceci pour chaque méthode. Cela permet de fixer les paramètres de chaque méthode suivant l'objectif désiré ; (3) enfin, comparer les méthodes entre elles et déterminer quelle méthode appliquer suivant l'objectif recherché (résolution fixée, variance minimale …).

Le premier point consiste à souligner la différence de comportement des estimateurs suivant la nature du signal : signal aléatoire à puissance moyenne finie ou fréquence pure déterministe. Ensuite, nous discuterons de la densité de probabilité des estimateurs sous deux hypothèses : signal aléatoire à puissance moyenne finie (gaussien) et ce même signal additionné d'une fréquence pure. Puis, nous analyserons les performances de chaque méthode pour finir par leur comparaison.

3.1. Comportement des estimateurs vis-à-vis de différents motifs spectraux

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.4.5, la normalisation *DSP* des estimateurs $\hat{\gamma}_x(\nu)$ permet d'estimer de façon approximativement non biaisée la densité spectrale de puissance $\gamma_x(\nu)$ d'un signal aléatoire à puissance moyenne finie quelle que soit la fenêtre d'apodisation et de façon non biaisée dans le cas d'un bruit blanc gaussien. Il faut cependant que sa DSP soit approximativement constante sur une bande supérieure à la bande passante de la fenêtre. Dans ce cas, on a :

$$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} \approx \gamma_x(\nu) \tag{3.1-1}$$

Nous allons maintenant discuter du résultat obtenu avec cette même normalisation mais dans le cas d'un signal déterministe fréquence pure (périodique), de fréquence ν_0 et de DSP $A\delta(\nu-\nu_0)$, où $\delta(\nu)$ représente le symbole de Kronecker, $\delta(0) = 1$ et est nul pour $\nu \neq 0$. On obtient alors :

$$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \hat{\gamma}_x(\nu) = A \times \frac{Q(\nu-\nu_0)}{\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} Q(\nu)\,\mathrm{d}\nu} \tag{3.1-2}$$

où $Q(\nu)$ représente la fenêtre spectrale (cf. paragraphe 2.4.1).
La puissance totale de la raie avec la normalisation *DSP* est conservée puisque :

$$\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} \hat{\gamma}_x(\nu)\,\mathrm{d}\nu = A \tag{3.1-3}$$

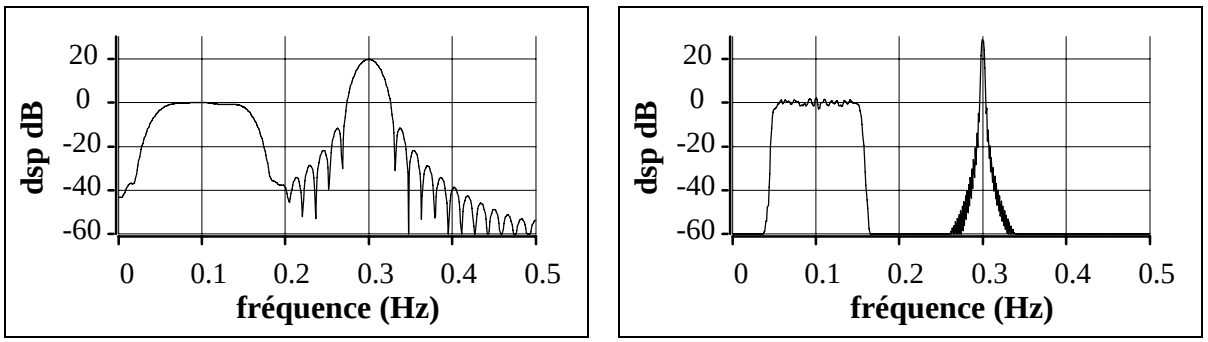
mais pour $\nu=\nu_0$:

$$\hat{\gamma}_x(\nu_0) = \frac{A}{B_e} \tag{3.1-4}$$

où B_e représente la bande équivalente au bruit de la fenêtre spectrale (cf. équation 2.4-24).

Dans le cas d'une normalisation *DSP*, la valeur de l'estimée augmente lorsque la bande équivalente de la fenêtre spectrale diminue. La bande équivalente au bruit B_e dépend des paramètres de la méthode et est approximativement inversement proportionnelle au support M de la fenêtre effective. D'où si M augmente, l'estimée de la fréquence pure à la fréquence ν_0 augmente également proportionnellement.

Par contre, pour un signal aléatoire de DSP approximativement constante sur une bande B supérieure à la bande équivalente au bruit, l'estimation donne toujours une valeur approximativement non biaisée de la valeur vraie sur la bande B. Cette différence de comportement entre une raie spectrale et un signal aléatoire à puissance moyenne finie, peut être mise à profit pour différencier ces deux types de structures spectrales sur des critères d'évolution de la forme de la structure spectrale par rapport à la fenêtre spectrale et de la valeur de la DSP. De plus, dans le cas d'une fréquence pure, l'estimée a la forme de la fenêtre spectrale. La Figure 3.1-I illustre ces phénomènes sur un signal test synthétique avec la méthode Welch-WOSA.



(a) (b)

Figure 3.1-I : **évolution des structures spectrales en fonction de la fenêtre spectrale.** Le signal (de fréquence d'échantillonnage unité) est constitué d'un bruit blanc gaussien de variance unité, filtré par un filtre passe-bande de gain unité entre 0,05 et 0,15 Hz auquel on ajoute une sinusoïde de fréquence 0,3 Hz et d'amplitude A=3. Le signal comporte 5000 points. Les figures (a) et (b) représentent la DSP estimée avec la méthode Welch-WOSA en normalisation *DSP* avec une fenêtre de Hanning, des segments de 64 points pour (a), de 256 points pour (b) et un décalage de 35 % entre ces segments. L'estimée $\hat{\gamma}_x(\nu_0)$ au niveau de la fréquence de la sinusoïde à 0,3 Hz est égale à 19,7 dB pour une bande équivalente B_e = 0,023 dans le cas (a) et 28,8 dB pour B_e = 0,0059 dans le cas (b). Si on observe le pic obtenu à la fréquence de la raie spectrale (0,3 Hz), celui-ci a bien la forme et l'amplitude attendue. Par contre, lorsque la bande équivalente au bruit diminue (cas (b) par rapport à (a)), l'amplitude du pic augmente, tandis que le niveau moyen de la DSP estimée entre 0,05 et 0,15 Hz reste constant, soit à environ 0 dB, la valeur de la DSP du bruit dans cette zone.

Notons que la normalisation *DSP* revient à utiliser une fenêtre spectrale dont la surface est constante, tandis que la normalisation *amplitude* revient à utiliser une fenêtre dont l'amplitude est unité.

Enfin, dans le cas d'un signal composé d'une raie spectrale de fréquence ν_0 d'amplitude A, additionnée d'un bruit blanc gaussien de variance σ^2, la forme du pic centré sur ν_0 est toujours identique à celle de la fenêtre spectrale, mais additionnée d'une constante qui dépend du rapport signal sur bruit (RSB). L'équation 2.4-6 s'écrit :

$$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \frac{\int_{-1/2T_e}^{+1/2T_e} \left(\mathrm{A}\delta(u-\nu_0)+\sigma^2\right)Q(\nu-u)\,\mathrm{d}u}{q[0]} = \mathrm{A}\,\frac{Q(\nu-\nu_0)}{q[0]} + \sigma^2 = \mathrm{A}\left(\frac{Q(\nu-\nu_0)}{q[0]} + \frac{1}{\mathrm{RSB}}\right) \quad (3.1\text{-}5)$$

A la fréquence ν_0, on a : $$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu_0)\} = \frac{A}{B_e} + \sigma^2 \quad (3.1\text{-}6)$$

Nous dénommerons émergence d'une fréquence pure par rapport au fond local la valeur A/B_e puisqu'elle est effectivement représentative de l'importance de l'estimation de la fréquence pure par rapport au fond. L'émergence est d'autant meilleure que la résolution est meilleure, soit que la bande équivalente au bruit est petite. Lors de l'étude des performances des estimateurs (cf. paragraphe 3.3), il ne faut pas oublier que l'émergence qui fait partie des performances de l'estimateur, réagit de façon équivalente à la résolution fréquentielle. En outre, nous définissons le rapport signal sur bruit local d'une fréquence pure RSB_l comme étant égal au rapport de la DSP de la fréquence pure sur la DSP du bruit local sans tenir compte de l'estimateur, soit :

$$RSB_l(\nu_0) = A/\sigma^2 \quad (3.1\text{-}7)$$

et le rapport signal sur bruit local d'émergence RSB_{em} comme étant égal au rapport entre l'émergence de la fréquence pure et la DSP du bruit local :

$$RSB_{em}(\nu_0) = A/(B_e\,\sigma^2) \quad (3.1\text{-}8)$$

Le rapport signal sur bruit ainsi défini tient compte des performances de l'estimateur. Il faut préciser que dans un cas général, σ^2 représente la DSP du bruit à la fréquence ν_0 (de la fréquence pure) et sous l'hypothèse que le bruit coloré puisse être considéré comme localement blanc. Pour qu'une fréquence pure puisse être correctement détectée sur une estimation, il ne suffit pas que l'émergence soit maximale, mais également que la variance soit minimale pour que le pic puisse être différencié des pics du bruit (dus à la variance). Pour tous les estimateurs, lorsque la résolution s'améliore, les fréquences pures apparaissent mieux et sont plus facilement différenciables des pics du bruit malgré l'augmentation de la variance. L'augmentation de la variance ne compense pas celle de l'émergence (cf. Figure 3.1-I).

3.2. Densité de probabilité des estimateurs

Pour cerner complètement les estimateurs de type Fourier, nous abordons la notion de densité de probabilité. Elle précise de façon complète la statistique associée à un estimateur en précisant la répartition des estimées vis-à-vis de leur moyenne et variance. La densité de probabilité est en général plus difficile à déterminer que la variance, mais permet d'obtenir des informations essentielles notamment pour pouvoir envisager la mise en place d'un détecteur (cf. paragraphe 5.1). La densité de probabilité dépend de la nature du signal et ne peut donc être déterminée de façon générale. Nous l'étudierons principalement sous deux hypothèses :

- hypothèse H_0 : $x[n] = b[n]$
- hypothèse H_1 : $x[n] = b[n] + s[n]$

$b[n]$: signal réel aléatoire gaussien stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $\gamma_b(\nu)$ continue.

$s[n]$: signal réel déterministe à puissance moyenne finie et de densité spectrale de puissance $\gamma_s(\nu)$ non nécessairement continue (exemple : fréquence pure).

Nous discuterons des extensions possibles des hypothèses dans le cas non gaussien. Nous présentons tout d'abord le cas du périodogramme moyenné sans recouvrement pour lequel une démonstration rigoureuse de la densité de probabilité sous les deux hypothèses H_0 et H_1 existe. Puis, nous généralisons à l'ensemble des estimateurs en proposant une hypothèse sur la densité de probabilité sous H_0. Enfin, nous discutons du cas de l'hypothèse H_1, pour lequel une approximation de la densité de probabilité n'est possible que dans le cas de faibles rapports signal sur bruit.

3.2.1. Densité de probabilité du périodogramme moyenné sans recouvrement

Le cas du périodogramme, et son extension au périodogramme moyenné sans recouvrement, est classique. La restriction au cas gaussien simplifie la théorie, mais les résultats sont en fait valides pour une classe de processus beaucoup plus large. La théorie est par conséquent assez robuste par rapport à l'hypothèse gaussienne [KOO74]. D'ailleurs Priestley l'a démontré de façon asymptotique pour tout signal issu d'un système linéaire dont le bruit excitateur est un bruit blanc gaussien [PRIEST81, p. 466]. Ce modèle est un modèle de référence pour les processus à densité spectrale de puissance continue non nécessairement gaussien. Les processus AR et ARMA sont des cas particuliers de ce modèle plus général.

3.2.1.1. Densité de probabilité sous H_0

Une démonstration plus complète sous l'hypothèse H_0 est présentée en annexe A-3, elle reprend les démonstrations de Koopmans et Priestley en précisant certains points. Nous ne présenterons ici qu'un résumé succinct, sans préciser toutes les approximations détaillées en annexe.

Réécrivons tout d'abord de façon légèrement différente du paragraphe 2.5.1, l'expression du périodogramme moyenné sans recouvrement (cas particulier de la méthode Welch-WOSA) :
le signal $b[n]$ est découpé en P segments de taille L ne se recouvrant pas entre eux, chacun de ces segments est noté $b_i[n]$: $b_i[n] = b[n+iL]$ pour $0 \le n \le L-1$ (3.2-1)
L'estimation de la DSP de $b[n]$ en normalisation *DSP* est, d'après l'équation 2.5-2 et le tableau 2.5-I :

$$\hat{\gamma}_b(\nu) = \frac{1}{P}\sum_{i=0}^{P-1} \left| B_i(\nu) \right|^2 \tag{3.2-2}$$

avec
$$B_i(\nu) = \frac{1}{\sqrt{Lq[0]T_e}} \sum_{n=0}^{L-1} b_i[n]\, h[n]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} n \nu T_e} \tag{3.2-3}$$

$h[n]$ la fenêtre d'apodisation quadratique de L points et $q[0]$ le facteur de normalisation qui dépend de $h[n]$ (cf. Tab. 2.5-I). $B_i^{re}(\nu)$ représente la partie réelle de $B_i(\nu)$ et $B_i^{im}(\nu)$ sa partie imaginaire :

$$B_i(\nu) = B_i^{re}(\nu) + \mathrm{j}\, B_i^{im}(\nu) \tag{3.2-4}$$

$b[n]$ étant gaussien $B_i^{re}(\nu)$ et $B_i^{im}(\nu)$ sont deux variables gaussiennes (comme somme de variables gaussiennes indépendantes) indépendantes (ceci est dû à l'indépendance entre les fréquences positives et négatives [KOO74]) et de même variance. Ceci est vrai quelle que soit la fenêtre d'apodisation pour L suffisamment grand et si $\gamma_b(\nu)$ (DSP vraie du signal) est approximativement constante sur la bande passante de la fenêtre spectrale. $B_i^{re}(\nu)^2$ et $B_i^{im}(\nu)^2$ sont alors deux variables indépendantes proportionnelles à une variable aléatoire qui suit une loi du chi-deux à un degré de liberté [TAS89], [SAP90] (et de même coefficient de proportionnalité). La variable $\left| B_i(\nu) \right|^2 = B_i^{re}(\nu)^2 + B_i^{im}(\nu)^2$ est leur somme, elle est donc proportionnelle à une variable qui suit une loi du chi-deux à deux degrés de liberté. La variable $\hat{\gamma}_b(\nu)$ est alors la moyenne de P variables indépendantes proportionnelles à une variable qui suit une loi du chi-deux à deux degrés de liberté (et de même coefficient de proportionnalité, ce qui implique une variance et une moyenne identique). L'indépendance est vérifiée de par le fait que les segments ne se recouvrent pas. $\hat{\gamma}_b(\nu)$ est donc proportionnelle à une variable qui suit une loi du chi-deux à $2P$ degrés de liberté [TAS89], [SAP90] :

$$\hat{\gamma}_b(\nu) = \frac{\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}{2P}\, \chi^2_{2P} \approx \frac{\gamma_b(\nu)}{2P}\, \chi^2_{2P} \quad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e / 2 \tag{3.2-5}$$

et pour $\nu = 0$ et $\nu = \nu_e / 2$: $\hat{\gamma}_b(0) \approx \frac{\gamma_b(0)}{P} \chi^2_P$ (3.2-6) $\hat{\gamma}_b(\nu_e/2) \approx \frac{\gamma_b(\nu_e/2)}{P} \chi^2_P$ (3.2-7)

où χ^2_r représente une variable aléatoire qui suit une loi du chi-deux à r degrés de liberté et $\gamma_b(\nu)$ représente la DSP vraie du signal. L'espérance de $\hat{\gamma}_b(\nu)$ est égal dans le cas où l'estimateur est non biaisé à la DSP vraie du signal. Le cas des fréquences $\nu = 0$ et $\nu = \nu_e / 2$ est présenté en annexe A-3.
Les propriétés d'une loi du chi-deux à r degré de liberté (ici $r = 2P$) impliquent :

$$\begin{cases} \xi\{\chi^2_r\} = r \\ \mathrm{var}\{\chi^2_r\} = 2\,r \end{cases} \quad (3.2\text{-}8) \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} = \gamma_b(\nu) \\ \mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} = \frac{\gamma_b(\nu)^2}{P} \end{cases} \quad (3.2\text{-}9)$$

on retrouve bien la moyenne et la variance de l'estimateur donnée par le tableau 2.5-I.

3.2.1.2. Densité de probabilité sous H_1

Sous l'hypothèse H_1 s'ajoute au signal aléatoire $b[n]$, un signal déterministe $s[n]$. Dans la méthode du périodogramme moyenné sans recouvrement, le signal $x[n]$ est découpé en P segments de taille L ne se recouvrant pas entre eux : $x_i[n] = b_i[n] + s_i[n]$ pour $0 \le n \le L-1$ (3.2-10)
avec $b_i[n] = b[n+iL]$ pour $0 \le n \le L-1$ (3.2-11) et $s_i[n] = s[n+iL]$ pour $0 \le n \le L-1$ (3.2-12)
L'estimation de la DSP de $x[n]$ s'écrit en normalisation *DSP* de façon similaire à l'équation 3.2-2 :

$$\hat{\gamma}_x(\nu) = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^{P-1} |X_i(\nu)|^2 \quad (3.2\text{-}13)$$

avec $$X_i(\nu) = B_i(\nu) + S_i(\nu) = X_i^{re}(\nu) + \mathrm{j}\, X_i^{im}(\nu) \quad (3.2\text{-}14)$$

$$S_i(\nu) = \frac{1}{\sqrt{Lq[0]T_e}} \sum_{n=0}^{L-1} s_i[n] h[n] \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} n \nu T_e} = S_i^{re}(\nu) + \mathrm{j}\, S_i^{im}(\nu) \quad (3.2\text{-}15)$$

$X_i^{re}(\nu)$ partie réelle et $X_i^{im}(\nu)$ partie imaginaire de $X_i(\nu)$. $S_i^{re}(\nu)$ partie réelle et $S_i^{im}(\nu)$ partie imaginaire de $S_i(\nu)$ qui sont des constantes déterministes étant donné que le signal s l'est.

$$X_i^{re}(\nu) = B_i^{re}(\nu) + S_i^{re}(\nu) \quad (3.2\text{-}16) \qquad X_i^{im}(\nu) = B_i^{im}(\nu) + S_i^{im}(\nu) \quad (3.2\text{-}17)$$

$B_i^{re}(\nu)$ et $B_i^{im}(\nu)$ sont deux variables gaussiennes indépendantes et de même variance égale à $\sigma_B^2 = \gamma_b(\nu)/2$ (pour $\nu \neq 0$ et $\nu_e/2$). $\gamma_b(\nu)$ DSP vraie du bruit b. $X_i^{re}(\nu)$ et $X_i^{im}(\nu)$ sont deux variables gaussiennes indépendantes de même variance et de moyenne différente, respectivement égale à $S_i^{re}(\nu)$ et $S_i^{im}(\nu)$. $\hat{\gamma}_x(\nu)$ est la moyenne (attention ce n'est pas la somme) de $2P$ *carrés* de variables gaussiennes indépendantes entre elles, de même variance et de moyenne différente m_p. $\hat{\gamma}_x(\nu)$ est alors proportionnelle à une variable qui suit une loi du chi-deux à $2P$ degrés de liberté **décentrée** $\chi_{d\,2P}^2$ de paramètre de décentrage θ [TAS89], [SAP90], [PRO89] :

$$\theta = P \frac{\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{2P} m_p^2}{\sigma_B^2} = 2P \frac{\frac{1}{P}\sum_{i=0}^{P} S_i^{re}(\nu)^2 + S_i^{im}(\nu)^2}{\gamma_b(\nu)} = 2P \frac{\hat{\gamma}_s(\nu)}{\gamma_b(\nu)} \quad (3.2\text{-}18)$$

$\hat{\gamma}_s(\nu)$ est l'estimation (déterministe) par le périodogramme moyenné de $\gamma_s(\nu)$ la DSP vraie du signal *s* que nous supposerons alors connue.
Le coefficient de proportionnalité est égal à P/σ_B^2 :

$$\boxed{\hat{\gamma}_x(\nu) \approx \frac{\gamma_b(\nu)}{2P}\,\chi^2_{d\,2P}\left(2P\,\frac{\hat{\gamma}_s(\nu)}{\gamma_b(\nu)}\right)} \quad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e/2, \tag{3.2-19}$$

où $\chi^2_{d\,2P}(\theta)$ représente une variable qui suit une loi du chi-deux à *r* degrés de liberté décentrée de paramètre de décentrage θ. Ceci est vrai comme dans le cas H_0, si *L* est suffisamment grand et si $\gamma_b(\nu)$ est approximativement constant sur la bande passante de la fenêtre spectrale.
Si *r* représente le degré de liberté (ici $r = 2P$), on a :

$$\begin{cases} \xi\left\{\chi^2_{d\,r}(\theta)\right\} = r + \theta \\ \mathrm{var}\left\{\chi^2_{d\,r}(\theta)\right\} = 2\,r + 4\theta \end{cases} \tag{3.2-20}$$

d'où

$$\begin{cases} \xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \gamma_b(\nu) + \hat{\gamma}_s(\nu) \\ \mathrm{var}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \dfrac{\gamma_b(\nu)^2}{P} + \dfrac{2}{P}\,\gamma_b(\nu)\hat{\gamma}_s(\nu) \end{cases} \tag{3.2-21}$$

Et avec le même type de raisonnement, on obtient pour $\nu = 0$ et $\nu = \nu_e/2$:

$$\hat{\gamma}_x(0) \approx \frac{\gamma_b(0)}{P}\,\chi^2_{d\,P}\left(P\,\frac{\hat{\gamma}_s(0)}{\gamma_b(0)}\right) \tag{3.2-22}$$

$$\hat{\gamma}_x\left(\frac{\nu_e}{2}\right) \approx \frac{\gamma_b\left(\frac{\nu_e}{2}\right)}{P}\,\chi^2_{d\,P}\left(P\,\frac{\hat{\gamma}_s(\nu_e/2)}{\gamma_b(\nu_e/2)}\right) \tag{3.2-23}$$

Cas particulier : si le signal *b* est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 et de DSP $\gamma_b(\nu) = \sigma^2$ et *s* une sinusoïde de fréquence ν_0, d'amplitude *a*. Alors, pour $\nu = \nu_0$:

$$\hat{\gamma}_s(\nu_0) = a^2/4\,B_e \tag{3.2-24}$$

où B_e représente la bande équivalente au bruit de la fenêtre spectrale. D'où :

$$\hat{\gamma}_x(\nu_0) \approx \frac{\sigma^2}{2P}\,\chi^2_{d\,2P}\left(P\frac{a^2}{2\,B_e\,\sigma^2}\right) = \frac{\sigma^2}{2P}\,\chi^2_{d\,2P}\left(P \times \frac{\mathrm{RSB}}{B_e}\right) \tag{3.2-25}$$

RSB représente le rapport signal sur bruit. La multiplication par $1/B_e$ étant due à l'effet de fenêtrage sur la sinusoïde.

3.2.2. Généralisation à tous les estimateurs

Une démonstration identique à celle du paragraphe précédent pour l'ensemble des estimateurs de type Fourier n'est pas possible. Si nous prenons le cas de la méthode Welch-WOSA avec recouvrement, la démonstration ne peut plus être appliquée pour cause de dépendances entre les segments. Les variables n'étant plus indépendantes, les théorèmes ne s'appliquent plus. De récents travaux [JOH99] ont abouti à une expression analytique de la densité de probabilité de l'estimateur Welch-WOSA sous l'hypothèse d'un signal gaussien. Cette démonstration s'appuie sur une expression matricielle de l'estimateur et nécessite le calcul des valeurs propres d'une matrice sophistiquée. En pratique, dans la grande majorité des cas, et en particulier en présence de recouvrement, ce calcul n'est pas réalisable. Pour les cas classiques (sans recouvrement), nous retrouvons la loi décrite dans le paragraphe 3.2.1.1. Dans ce paragraphe, nous allons émettre une hypothèse générale sur la densité de probabilité des estimateurs, hypothèse déjà pressentie par certains auteurs dans le cas de certaines méthodes (Welch-WOSA en particulier) [WEL67], [NUT82], [SHO77]. Nous préciserons les cas pour lesquels une démonstration analytique existe.

3.2.2.1. Densité de probabilité sous H_0

Pour tous les estimateurs, nous allons supposer que **sous l'hypothèse H_0, bruit seul, l'estimateur est proportionnel à une variable aléatoire qui suit une loi gamma**, ou tout du moins qu'il est approchée par une telle variable :

$$\boxed{\hat{\gamma}_b(\nu) \approx c\chi_r^2} \qquad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e / 2 \tag{3.2-26}$$

où χ_r^2 représente ici une variable aléatoire qui suit une loi gamma $\Gamma(½ , r/2)$. Lorsque r est un entier, la loi gamma $\Gamma(½ , r/2)$ est identique à une loi du chi-deux à r degrés de liberté. Pour l'ensemble des estimateurs de type Fourier, le paramètre r n'est pas toujours un entier, il convient donc de parler de loi gamma $\Gamma(½ , r/2)$ au lieu de loi du chi-deux bien que les expressions associées soient identiques. Pour conserver le lien avec le cas de la méthode Welch-WOSA sans recouvrement et en accord avec les précédents travaux sur la densité de probabilité des estimateurs [KOO74], [PRIEST81], nous appellerons la loi gamma $\Gamma(½ , r/2)$, **une loi gamma de degré de liberté *équivalent* r** et notons χ_r^2 une variable aléatoire qui suit cette loi.
Les propriétés d'une loi $\Gamma(½ , r/2)$ impliquent :

$$\xi\left\{c\chi_r^2\right\} = c\ r \tag{3.2-27}$$

$$\mathrm{var}\left\{c\chi_r^2\right\} = 2\ c^2\ r \tag{3.2-28}$$

Dans le cas de tous les estimateurs, on déduit alors le degré de liberté équivalent et le coefficient de proportionnalité à partir de la variance normalisée et de la moyenne de l'estimateur :

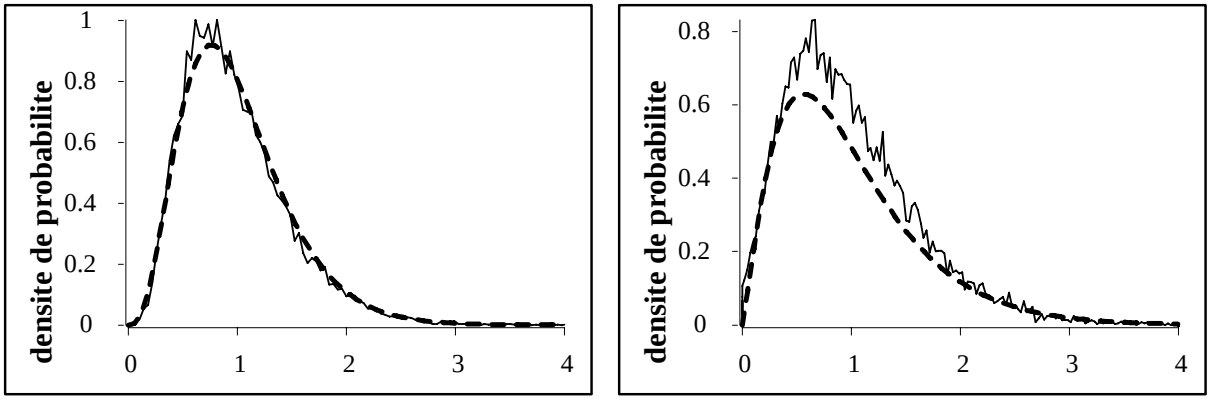
$$r = \frac{2\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2}{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}} = \frac{2}{\mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_b}} \tag{3.2-29}$$

$$c = \frac{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}{2\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}} = \frac{\mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_b}}{2}\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} \approx \frac{\mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_b}}{2}\,\gamma_b(\nu) = \frac{\gamma_b(\nu)}{r} \tag{3.2-30}$$

Pour l'ensemble des méthodes de type Fourier, il est possible comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents de calculer analytiquement la variance normalisée sous l'hypothèse H_0. Ce calcul ne dépend que des paramètres de l'analyse et du nombre de points du signal. Il ne dépend pas du signal lui-même sous l'hypothèse que celui-ci est réel, stationnaire, gaussien à moyenne nulle et que les paramètres sont choisis de façon à ce que l'estimation soit approximativement non biaisée. Dans le cas de Welch-WOSA, cela revient à considérer que pour un décalage non nul, la dépendance entre les segments n'implique pas un changement de la loi, mais seulement du coefficient de proportionnalité et du degré de liberté, celui-ci n'étant plus forcément entier. Il est supérieur à 2 fois le nombre de segments que l'on aurait sans recouvrement et inférieur à 2 fois celui que l'on a avec recouvrement.

Par des considérations similaires à celles présentées dans le paragraphe 3.2.1.1, on montre que l'estimateur de Blackman-Tukey suit asymptotiquement cette loi [KOO74], [JEN68], [KUN80], [PRIEST81]. Il est impossible de le démontrer dans le cas de tous les estimateurs, pour un choix quelconque des paramètres, à cause des dépendances entre les variables aléatoires. Cependant, la variance et la moyenne de l'estimateur, sous l'hypothèse d'une loi gamma, correspondent toujours à celle des estimateurs qui sont, elles, calculées rigoureusement [MAT87]. Cette correspondance ne démontre pas la validité de l'hypothèse de la loi gamma. Le tracé des histogrammes est plus probant pour justifier l'hypothèse de cette loi (cf. Figure 3.2-I et [DUR98-Valid]).

Les résultats sont illustrés sur deux exemples représentatifs (cf. Figure 3.2-I). Tout d'abord avec la méthode Per-Cor qui permet de valider les hypothèses à la fois pour les méthodes Welch-WOSA, Blackman-Tukey et Lag-Reshape puisque toutes ces méthodes se retrouvent dans la méthode Per-Cor. Nous utiliserons un recouvrement et des paramètres qui équilibrent l'influence des méthodes Welch-WOSA et Blackman-Tukey dans Per-Cor. Ensuite, un exemple avec la méthode STUSE est proposé.



(a) Per-Cor, r = 8,54. (b) Cas 2-STUSE, r = 4,63.

Figure 3.2-I : **histogrammes (traits pleins) comparés aux densités de probabilité théorique (traits en pointillés** éq. 3.2.1) dans le cas d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unité. (a) méthode Per-Cor : taille des segments de 150 points, décalage entre segments de 28%, fenêtre d'apodisation quadratique de Blackman, support de la fenêtre sur la corrélation de 128 points, fenêtre d'apodisation linéaire sur la corrélation de Hanning, transformée de Fourier sur 256 points. Le signal à analyser comporte 320 points, on obtient alors 5 segments. Sous H_0, le degré de liberté équivalent de la loi gamma est égal à 8,54 (éq. 3.2-29). (b) méthode STUSE : taille des segments de 128 points, décalage entre segments de 50%, fenêtre d'apodisation quadratique de Hanning, paramètre Q de 3 (nombre « d'interspectres »), transformée de Fourier sur 128 points. Le signal à analyser comporte 1024 points, on obtient alors 15 segments ; un nombre de segments important vis-à-vis de Q est nécessaire pour que les hypothèses permettant d'obtenir une estimation non biaisée et de calculer la variance normalisée soient valables. La fenêtre effective sur la corrélation comporte alors 320 points, la partie non biaisée de la fenêtre étant de 128 points. Sous H_0, le degré de liberté équivalent de la loi gamma est égal à 4,63. Pour les histogrammes, le nombre de réalisations est de 20000, le nombre d'intervalles de 100 dans le cas (a), 180 cas (b), on se place à une fréquence donnée (0,25 Hz).

Pour la méthode Per-Cor, la correspondance est bonne, tandis que pour la méthode STUSE il y a un léger décalage. Mais ce décalage est dû aux approximations faites lors du calcul théorique de la variance normalisée (cf. Tab. 2.5-V, en particulier, il est nécessaire que le nombre de segments soit très supérieur au paramètre Q). Nous reviendrons sur ce point particulier dans le chapitre 5, paragraphe 5.1.2.

Nous nous sommes contentés dans ce paragraphe de comparer les histogrammes à la densité de probabilité supposée. Cependant, il existe d'autres possibilités pour estimer une densité de probabilité [PAG95], [PAG99]. Une validation plus complète de l'hypothèse sur la densité de probabilité des estimateurs sera proposée lorsque nous détaillerons les propriétés de détection associées aux estimateurs (cf. paragraphe 5.1). Cette approche nous a permis de valider à la fois l'hypothèse sur la loi des estimateurs et le critère de détection qui lui est associée, bien qu'il existe d'autres méthodes pour vérifier l'adéquation à une loi [SAP90]. Précisons que les résultats peuvent être en général étendus aux signaux aléatoires à puissance moyenne finie non gaussiens (cf. également [PRIEST81]). Ceci s'explique par le fait que l'ensemble des méthodes utilise la Transformée de Fourier. Or si celle-ci est appliquée sur un nombre suffisant de points (en tout cas très supérieur au support de corrélation du signal), elle a tendance à produire une variable aléatoire fréquentielle gaussienne par application du théorème central limite.

Par ailleurs, on déduit de l'hypothèse sur la densité de probabilité un intervalle de confiance I à (1-α) x 100% [KAY88], [KOO74], [JEN68], [KUN80] pour tous les estimateurs et quels que soient les paramètres, égal à :

$$\mathrm{I} = \left[\frac{r\hat{\gamma}(\nu)}{\chi_r^2(1-\alpha/2)}, \frac{r\hat{\gamma}(\nu)}{\chi_r^2(\alpha/2)} \right] \qquad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e/2 \tag{3.2-31}$$

où $\chi_r^2(\alpha)$ représente le fractile α de la densité de probabilité de χ_r^2 : $P\left(\chi_r^2 \leq \chi_r^2(\alpha)\right) = \alpha$ (3.2-32)

Si on passe en décibel l'intervalle de confiance devient un intervalle constant pour toutes les fréquences :

$$\mathrm{I_{dB}} = 10\log_{10}\left(\hat{\gamma}(\nu)\right) \begin{cases} +10\log_{10}\left(\dfrac{r}{\chi_r^2(\alpha/2)}\right) \\ -10\log_{10}\left(\dfrac{\chi_r^2(1-\alpha/2)}{r}\right) \end{cases} \qquad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e/2 \tag{3.2-33}$$

Ce qui implique qu'en décibel, les variations dues à la variance de l'estimateur sont du même ordre quel que soit le niveau du spectre.

3.2.2.2. Densité de probabilité sous H_1

La généralisation à l'ensemble des estimateurs sous l'hypothèse H_1, signal plus bruit, à partir des résultats du paragraphe 3.2.1.2 n'est pas évidente. En effet, l'estimation **ne peut pas être toujours considérée** comme proportionnelle à une variable aléatoire qui suit une loi du chi-deux décentrée **du même degré de liberté équivalent** que sous H_0. Intuitivement, l'hypothèse retenue sous H_1 devrait être : $\hat{\gamma}_x(\nu)$ est une variable aléatoire proportionnelle à une variable du chi-deux décentrée à *r* degrés de liberté $\chi_{d\,r}^2(\theta)$ de paramètre de décentrage $\theta = r\ \hat{\gamma}_s(\nu)/\gamma_b(\nu)$, le coefficient de proportionnalité étant égal à $\gamma_b(\nu)/r$:

$$\hat{\gamma}_x(\nu) \approx \frac{\gamma_b(\nu)}{r}\,\chi_{d\,r}^2\left(r\,\frac{\hat{\gamma}_s(\nu)}{\gamma_b(\nu)}\right) \qquad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e/2, \tag{3.2-34}$$

avec : $$r = \frac{2\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2}{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}} = \frac{2}{\mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_b}} \tag{3.2-35}$$

et pour propriétés : $$\begin{cases} \xi\left\{\chi_{d\,r}^2(\theta)\right\} = r + \theta \\ \mathrm{var}\left\{\chi_{d\,r}^2(\theta)\right\} = 2\,r + 4\theta \end{cases} \tag{3.2-36}$$

d'où $$\begin{cases} \xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \gamma_b(\nu) + \hat{\gamma}_s(\nu) \\ \mathrm{var}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_\mathrm{b}} \times \gamma_b(\nu)^2 + 2\,\mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_\mathrm{b}} \times \gamma_b(\nu)\hat{\gamma}_s(\nu) \end{cases} \tag{3.2-37}$$

Remarque : bien que rigoureusement, une loi du chi-deux décentrée doive avoir un degré de liberté entier, nous étendons ici le cas au degré de liberté non entier en le dénommant degré de liberté équivalent.

Dans ce cas, il convient dans un premier temps de vérifier que la variance (éq. 3.2-37) correspond bien aux estimations que l'on obtient expérimentalement. Or ce n'est pas le cas. Pour de très faibles rapports signal sur bruit, l'erreur est peu importante, mais elle augmente rapidement

lorsque le rapport signal sur bruit augmente. Les tableaux suivants montrent la différence entre le calcul théorique de la variance et une estimation expérimentale de cette même variance pour la méthode Welch-WOSA en comparant le cas sans recouvrement du paragraphe 3.2.1 (Tab. 3.2-III et Tab. 3.2-IV), au cas avec recouvrement (Tab. 3.2-I et Tab. 3.2-II). L'erreur entre la variance estimée et la variance théorique (par rapport à la variance estimée) est de l'ordre de 25% lorsqu'il y a du recouvrement, alors qu'elle n'est de l'ordre que de 1% sans recouvrement. L'hypothèse avec recouvrement ne peut donc être validée.

On estime la variance expérimentalement sur P=10000 réalisations d'un bruit blanc gaussien additionné d'une sinusoïde, à la fréquence de la sinusoïde ν_0 :

$$\hat{\text{var}}(\nu_0) = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P}\hat{\gamma}_p(\nu_0)^2 - \left(\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P}\hat{\gamma}_p(\nu_0)\right)^2 \qquad (3.2\text{-}38)$$

$\hat{\gamma}_p(\nu)$ représentant l'estimation par la méthode Welch-WOSA de la p^{ème} réalisation.

Tab. 3.2-I : **variances théoriques** par l'équation 3.2-37 comparées aux **variances estimées** expérimentalement avec la méthode **Welch-WOSA <u>avec</u> recouvrement**, pour différents rapports signal sur bruit. Paramètre Welch-WOSA : taille des segments de 128 points, fenêtre de Hanning, décalage entre segments de 33%, taille de la transformée de Fourier de 128 points, pour **4 segments, soit un signal de 256 points**.

RSB (dB)	-20	-10	0	10	20
variance théorique	0,62	3,2	29	287	2864
variance estimée	0,7	4,1	38	376	3788
erreur en %*	-11 %	-21,6 %	-23,6 %	-23,8 %	-24,4 %

l'erreur en % *x*, est l'erreur entre le calcul théorique et le calcul expérimental : variance théorique = variance estimée + (*x*/100)×(variance estimée).

Tab. 3.2-II : **variances théoriques** par l'équation 3.2-37 comparées aux **variances estimées** expérimentalement avec la méthode **Welch-WOSA <u>avec</u> recouvrement**, pour différents rapports signal sur bruit. Paramètre Welch-WOSA : taille des segments de 128 points, fenêtre de Hanning, décalage entre segments de 33%, taille de la transformée de Fourier de 128 points, pour **10 segments, soit un signal de 512 points**.

RSB (dB)	-20	-10	0	10	20
variance théorique	0,26	1,34	12,1	120	1204
variance estimée	0,3	1,77	16,4	162	1636
erreur en %*	-13,5 %	-24 %	-25,7 %	-25,8 %	-26,4 %

Tab. 3.2-III : **variances théoriques** par l'équation 3.2-37 comparées aux **variances estimées** expérimentalement avec la méthode **Welch-WOSA <u>sans</u> recouvrement**, pour différents rapports signal sur bruit. Paramètre Welch-WOSA : taille des segments de 128 points, fenêtre de Hanning, décalage entre segments de 100%, taille de la transformée de Fourier de 128 points, pour **2 segments, soit un signal de 256 points**.

RSB (dB)	-20	-10	0	10	20
variance théorique	0,463	2,38	21,6	213,6	2034
variance estimée	0,465	2,39	21,5	212	1998
erreur en %*	-0,5 %	-0,33 %	0,37 %	0,73 %	1,8 %

Tab. 3.2-IV : **variances théoriques** par l'équation 3.2-37 comparées aux **variances estimées** expérimentalement avec la méthode **Welch-WOSA sans recouvrement**, pour différents rapports signal sur bruit. Paramètre Welch-WOSA : taille des segments de 128 points, fenêtre de Hanning, décalage entre segments de 33%, taille de la transformée de Fourier de 128 points, pour **4 segments, soit un signal de 512 points**.

RSB (dB)	-20	-10	0	10	20
variance théorique	0,93	4,77	43,1	427	4267
variance estimée	0,9	4,72	42,7	421	4218
erreur en %*	2,45 %	1,1 %	1 %	1,3 %	1,2 %

Par ailleurs, le calcul indépendant de la variance sous H_1 n'est pas connu quels que soient les paramètres de l'estimateur. On ne peut donc approcher la densité de probabilité par une variable gaussienne de même moyenne et variance ou par une variable du chi-deux décentrée avec un degré de liberté équivalent adéquat. Cependant, pour des rapports signal sur bruit faibles l'hypothèse (éq. 3.2-34) permet de prévoir les performances du détecteur.

3.3. Etude des performances des estimateurs

Nous allons dans ce paragraphe étudier l'évolution des performances des estimateurs en fonction des paramètres. Ceci doit nous aider à optimiser le choix des paramètres, mais aussi à prévoir l'évolution des estimées lorsque les paramètres changent. L'ensemble des performances pour l'ensemble des méthodes a été étudié au cours de l'opération ASPECT [DUR97-Meth]. Elle a consisté en l'analyse des différentes courbes de performances en fonction des paramètres et ceci dans diverses configurations. Nous nous contenterons ici de souligner les points importants sans être aussi exhaustif que dans le document [DUR97-Meth].

Une des performances cruciale pour les estimateurs est la **variance** que nous étudierons par le biais de la variance normalisée (sous l'hypothèse H_0, éq. 2.4-36). Le calcul théorique de la variance normalisée, pour chacun des estimateurs, a été validé au cours de l'opération ASPECT [DUR98-Valid] pour différentes configurations de paramètres et différents types de signaux, notamment non gaussiens tels qu'une sinusoïde dont la fréquence est additionnée d'un bruit aléatoire. D'une manière générale, on constate une bonne adéquation entre la variance normalisée théorique et estimée. Cette validation ne peut cependant être étendue à tout type de signal aléatoire quelle que soit sa densité de probabilité, il convient alors d'être prudent. On remarque également que l'utilisation du *zero-padding* ne modifie pas les résultats. Avec la méthode STUSE, il faut cependant noter les écarts importants constatés dès que le nombre de segments est trop proche de Q, que ce soit parce que le paramètre Q augmente, soit parce que le décalage augmente ou encore la taille des segments augmente. Ceci est logique puisque l'on sort des hypothèses spécifiques à la méthode STUSE du calcul de la variance normalisée.

Enfin, notons que la variance normalisée peut être considérée comme indépendante de la fréquence dès lors que l'hypothèse DSP approximativement constante dans la bande passante de la fenêtre spectrale est respectée.

La résolution fréquentielle est estimée à partir des deux définitions données de l'intervalle de résolution fréquentielle associé à un processus aléatoire et de l'intervalle de résolution fréquentielle associé à des raies spectrales. Les deux valeurs sont cependant liées et réagissent de façon identique lorsqu'un paramètre est modifié. Nous l'avons donc plus particulièrement étudié via la bande statistique (processus aléatoire) pour laquelle une expression analytique existe pour toutes les

méthodes (ce qui n'est pas le cas de la bande à –3 dB). En ce qui concerne l'influence des fenêtres d'apodisation, pour améliorer la résolution il faut choisir une fenêtre de bande statistique équivalente ou de bande à -3 dB inférieure. En effet, ce sont ces facteurs qui influencent d'une part l'intervalle de résolution fréquentielle pour un processus aléatoire et d'autre part l'intervalle de résolution fréquentielle pour des raies spectrales. Notons que si une fenêtre a une bande à -3 dB inférieure à une autre, il en sera généralement de même pour la bande statistique équivalente. Nous ne reviendrons pas ici sur l'influence des fenêtres d'apodisation sur la résolution, mais préciserons le comportement des fenêtres spectrales.

Le produit stabilité-bande-durée qui est représentatif du compromis résolution/variance obtenu pour une durée déterminée, est le résultat du compromis entre l'évolution de la résolution fréquentielle et celle de la variance normalisée.

Les fuites d'énergie et le biais suivent l'évolution de la résolution. Lorsque celle-ci diminue, ils augmentent. Nous n'étudierons pas l'influence directe des paramètres sur leur évolution. Il faut noter qu'ils dépendent de la forme de la fenêtre spectrale. Pour toutes les méthodes, plus les lobes secondaires sont importants, plus les fuites d'énergie sont importantes. Le rôle des lobes secondaires est également important pour le contrôle du biais. D'une manière générale, il est préférable de limiter l'influence des motifs spectraux éloignés de la fréquence d'intérêt, même au prix d'une influence plus importante des motifs proches. Ceci correspond à des lobes secondaires bien amortis, même au prix d'une largeur plus importante du lobe principal. Le spectre s'en trouve plus aisément interprétable, puisque les risques de biais dus au caractère non blanc du spectre, sont concentrés dans une zone proche de la fréquence d'intérêt. Ils ne sont pas répartis sur l'ensemble du spectre sans que l'on puisse déterminer aisément quel motif participe au biais. Le biais dépend de la répartition des lobes secondaires et en particulier des minima et maxima locaux. C'est pourquoi, il est préférable d'appliquer des fenêtres d'apodisation telles que celle de Blackman pour la méthode Welch-WOSA ou Blackman-Tukey. En effet, cette fenêtre permet un bon amortissement des lobes secondaires avec un bon facteur de décroissance des lobes secondaires. La fenêtre de Blackman-Harris, bien que l'amplitude relative entre le lobe principal et les lobes secondaires soit importante, a un facteur de décroissance des lobes secondaires très faible. Le choix de la fenêtre peut cependant être dicté par des objectifs différents comme la résolution.

Pour la méthode Per-Cor, le problème est plus délicat car la fenêtre spectrale dépend de l'ensemble des paramètres et ne peut être prévue uniquement à partir des fenêtres d'apodisation choisies. Une fois la fenêtre spectrale déterminée, les mêmes remarques que pour les précédentes méthodes sont valables. Il faut préciser que suivant la taille des segments et du support sur la corrélation, l'influence de la fenêtre quadratique ou linéaire prédomine. Il est donc également préférable de choisir des fenêtres de type Blackman. La méthode STUSE est différente dans ses objectifs et son fonctionnement. Nous reviendrons plus précisément sur ses particularités dans le paragraphe sur la méthode STUSE (paragraphe 3.3.4).

3.3.1. Welch-WOSA

Optimisation du décalage suivant la fenêtre d'apodisation quadratique

Pour la méthode Welch-WOSA, Nuttal a montré que pour certaines fenêtres **la variance est minimale pour un certain décalage** [NUT71]. La fenêtre spectrale n'étant pas modifiée par ce paramètre, les autres performances de l'estimateur restent donc identiques. Ceci permet de fixer ce paramètre en étant assuré d'avoir une variance minimale dès que la fenêtre d'apodisation est choisie. Une étude plus complète des différentes courbes de la variance normalisée en fonction du décalage pour une taille de segment fixée et pour une fenêtre donnée, permet d'estimer ce décalage optimal et l'augmentation en % de la variance par rapport à la variance minimale (cf. Tab. 3.3-I et Figure 3.3-II).

Tab. 3.3-I : **décalages minimisant la variance en fonction de la fenêtre**				
Fenêtre	**Décalage en % pour une variance minimale**	Augmentation de la variance en % par rapport à la variance minimale		
		pour un décalage de 50 %	pour un décalage de 75 %	pour un décalage de 100 %
Rectangulaire	**30 %**	7 %	20 %	40 %
Bartlett	**37 %**	4 %	40 %	80 %
Hanning	**35 %**	10 %	50 %	100 %
Hamming	**36 %**	5 %	40 %	85 %
Blackman	**30 %**	20 %	75 %	130 %
B-H 4T	**30 %**	25 %	80 %	140 %

Pour la fenêtre rectangulaire, le minimum réel est obtenu pour un décalage de 1 point, cependant il est nécessaire de maintenir au mieux l'indépendance statistique des segments. Par ailleurs l'augmentation de la variance en fonction du décalage est inférieure à celle des autres fenêtres. Un décalage de 30% peut servir de référence puisque alors l'augmentation par rapport au minimum réel est inférieure à 5%, mais pour obtenir une meilleure indépendance des segments il peut être choisi supérieur.

Pour l'ensemble des fenêtres, le décalage optimal a tendance à être inférieur (et les pertes associées supérieures) lorsque la taille des segments diminue. Cependant l'augmentation de la variance au niveau du décalage indiqué dans le tableau Tab. 3.3-I, reste inférieure à quelques pourcents. Il est par ailleurs préférable de conserver au maximum l'indépendance statistique entre les segments, c'est pourquoi les décalages indiqués dans le tableau peuvent servir de référence.

Optimisation du décalage :
pour assurer une variance minimale, il faut également s'assurer que le résidu sera minimal. Le résidu est le nombre de points qui n'est pas pris en compte dans l'estimation de par le découpage des segments. Il est égal à :

$$residu = N - [(N_{seg}-1) \times d + L] \qquad (3.3\text{-}1)$$

avec N le nombre de points du signal, N_{seg} le nombre de segments, d le décalage en nombre de points et L la taille des segments.
Ce résidu doit être minimal, mais pour un décalage proche du décalage optimal (cf. Tab. 3.3-I), afin d'obtenir une variance effectivement minimale (cf. Figure 3.3-II). Lorsque l'on observe l'évolution de la variance normalisée en fonction de la taille des segments (sans optimisation du décalage, Figure 3.3-II), on constate des détériorations régulières de la variance avec des minima locaux qui correspondent à un résidu nul. Ceci s'explique du fait qu'un résidu non nul implique que l'on n'utilise pas des points du signal, pourtant disponibles, avec pour conséquence une perte d'informations. Puisque des minima locaux existent, la minimisation du résidu est plus importante qu'une correspondance exacte du décalage avec les valeurs données dans le tableau Tab. 3.3-I.

De par l'interaction entre les différents paramètres, la minimisation du résidu n'est pas aussi simple qu'il y paraît. La procédure retenue permet de minimiser la variance, même lorsque le nombre de segments est faible *i.e.* la taille des segments est proche du nombre de points du signal. On ne désire pas modifier la taille des segments, puisque celle-ci influe directement sur les autres performances de l'estimateur. Par contre, le décalage entre segments peut être modifié dans la mesure

où la variance est effectivement améliorée. C'est pourquoi, la procédure ne modifie que le décalage entre segments par conséquent le nombre de segments.

Le décalage avant optimisation sera dénommé décalage désiré ou décalage en entrée, de même le nombre de segments avant optimisation (obtenu avec le décalage avant optimisation) sera dénommé nombre de segments désiré ou en entrée.

L'initialisation de la procédure consiste à calculer le décalage en nombre de points d_1 pour le décalage en % optimal donné dans le tableau ci-dessus, puis le nombre de segments obtenu (cf. éq. 2.5-I) et le résidu *residu*1 associé. Ensuite, l'objectif est d'augmenter le nombre de segments afin d'utiliser le maximum de points du signal. On calcule alors le décalage en nombre de points qui minimise le résidu pour un nombre de segments $N_{seg2} = N_{seg1} + 1$ sans modifier la taille des segments :

$$d_2 = \mathrm{E}[\ (N\text{-}L) / (N_{seg2}\text{-}1)\ ] \qquad (3.3\text{-}2)$$

E[ ] représente la partie entière.

Le résidu *residu*2 est recalculé afin de vérifier s'il est inférieur à *residu*1 (si ce n'est pas le cas, le premier décalage obtenu minimisait le résidu et est optimal). Les paramètres associés au résidu minimal sont conservés, le décalage obtenu sera appelé décalage optimisé. La procédure a pour effet : 1) de ne pas modifier la taille des segments, 2) lorsque le nombre de segments est important, le décalage optimisé est proche du décalage désiré donné dans le tableau Tab. 3.3-I, 3) lorsque le nombre de segments est peu important (<15), le décalage optimisé est alors inférieur au décalage désiré. Etant donné les courbes de variance, celle-ci sera légèrement dégradée, mais l'influence du résidu sur la variance est alors importante et le gain obtenu en minimisant ce résidu est effectif (Figure 3.3-I).

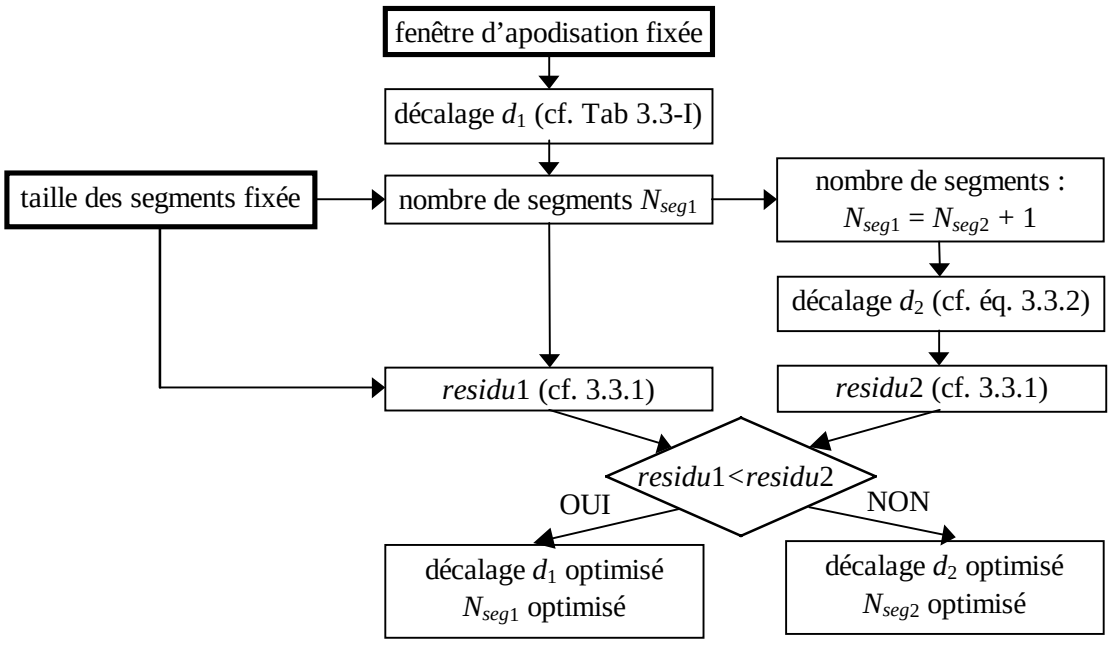


Figure 3.3-I : **optimisation du décalage pour minimiser le résidu**

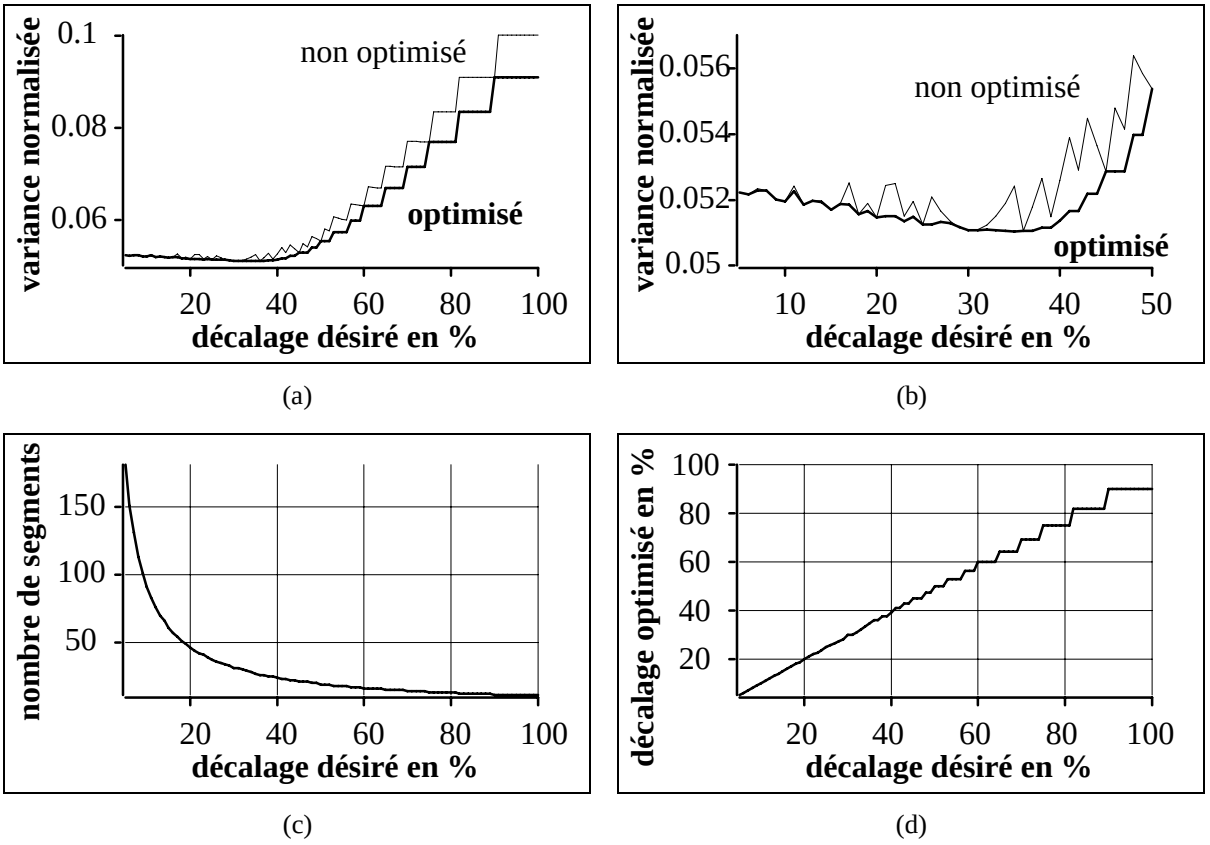


Figure 3.3-II : (a) **variance normalisée en fonction du décalage** pour une fenêtre de Hanning, en trait épais avec optimisation du décalage pour minimiser le résidu, en trait fin sans optimisation, (b) zoom de la figure (a) pour les décalages compris entre 5 et 50 %, (c) nombre de segments obtenu en fonction du décalage avec optimisation, (d) décalage optimisé en fonction du décalage désiré. La taille des segments est égale à 10% du nombre de points du signal (N=10000).

Influence de la taille des segments

Le paramètre principal qui permet de diminuer la variance est la taille des segments. La variance dépend principalement du nombre de segments si le décalage est adapté à la fenêtre d'apodisation. Dans ces conditions, **si le nombre de segments augmente alors la variance diminue**. Dans le cas où les segments sont statistiquement indépendants (décalage de 100%), la variance normalisée est égale à l'inverse du nombre de segments. Dans le cas général, **la variance normalisée est approximativement inversement proportionnelle au nombre de segments** (Figure 3.3-III (a)). La formule analytique théorique de la variance normalisée (cf. Tab. 2.5-I), ne permet pas de prévoir facilement l'évolution de la variance normalisée en fonction de la taille des segments ou du nombre de segments. La recherche d'une approximation de la variance normalisée nous permet de prévoir son évolution. La variance normalisée peut être approchée par :

$$VARN \approx \frac{K}{N_{seg}} \tag{3.3-3}$$

K est un coefficient qui dépend du décalage et de la fenêtre d'apodisation. Cette approximation est valable pour un nombre de segments supérieur à environ 5 si le décalage est optimisé (résidu minimal), dans le cas contraire le nombre de segments doit être plus élevé (supérieur à environ 20 pour une bonne approximation). K est donné dans le tableau Tab. 3.3-II pour les différentes fenêtres dans le cas du décalage minimisant la variance (Tab. 3.3-I) et avec son optimisation pour minimiser le résidu. Il est estimé par la moyenne de $VARN$ x N_{segopt} pour un nombre de segments désiré N_{seg} en entrée

variant de 5 à 200 segments (ce qui correspond environ à des tailles de segments variant de 2% à 45% du nombre de points du signal égal à 10000), N_{segopt} est le nombre de segments obtenu après optimisation, il est égal à N_{seg} ou N_{seg} +1. L'erreur quadratique moyenne par rapport à la variance normalisée théorique est également indiquée :

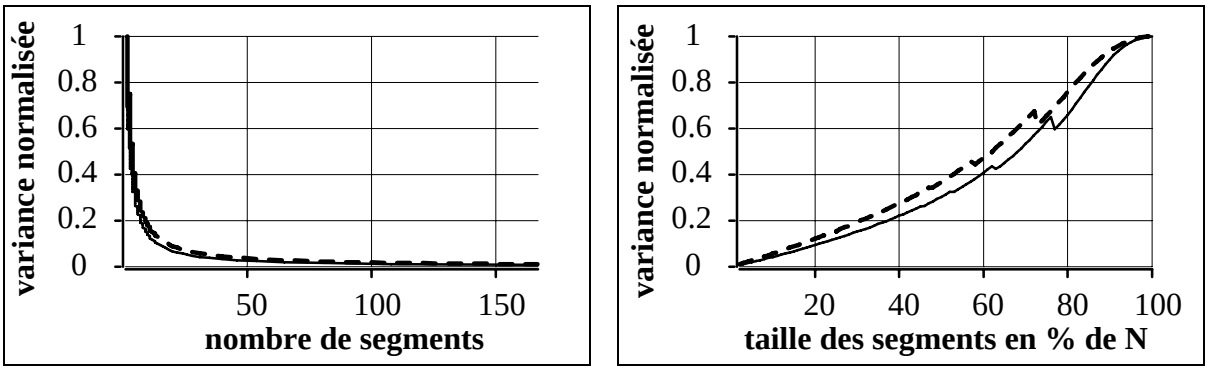
$$e_{quad} = \left| (K/N_{segopt})^2 - VARN_{theo}(N_{segopt})^2 \right| / VARN_{theo}(N_{segopt})^2 \qquad (3.3\text{-}4)$$

ainsi que l'erreur moyenne en % par rapport à la variance normalisée théorique :

$$e_{moy} = 100\text{x} \left| (K/N_{segopt}) - VARN_{theo}(N_{segopt}) \right| / VARN_{theo}(N_{segopt}) \qquad (3.3\text{-}5)$$

Tab. 3.3-II : estimation du coefficient *K* en fonction des fenêtres et du décalage.

fenêtre	décalage en %	*K* estimé	erreur moyenne en % de *VARN* théorique, e_{moy}	erreur quad. moy. par rapport à *VARN* théo, e_{quad}
Rectangulaire	30 %	2,33	0,97 %	0,019
Bartlett	37 %	1,48	1,1 %	0,022
Hanning	35 %	1,39	1,1 %	0,022
Hamming	36 %	1,48	1,1 %	0,022
Blackman	30 %	1,4	1,1 %	0,022
B-H 4T	30 %	1,35	1,1 %	0,021
Blackman	50 %	1,01	0,13 %	0,0028



(a) (b)

Figure 3.3-III : **variance normalisée** pour la méthode Welch-WOSA avec une fenêtre de Bartlett et un décalage désiré de 37% (trait en pointillés) et avec une fenêtre de Blackman et un décalage de 30% (trait continu). Les décalages sont optimisés pour minimiser le résidu. **(a) en fonction du nombre de segments**, **(b) en fonction de la taille des segments** (en % du nombre de points du signal).

De par l'interaction entre les paramètres, **si la taille des segments diminue alors la variance diminue** (Figure 3.3-III (b)). On a :

$$N_{seg} \approx \frac{N - L + L \times dec\% / 100}{L \times dec\% / 100} \qquad (3.3\text{-}6)$$

où *dec%* représente le décalage entre segments en % de la taille des segments *L*.
Dans le cas général, pour une taille de segments inférieure à 40% du nombre de points du signal, la variance peut donc être approchée par :

$$VARN \approx \frac{K \times dec\%/100}{N/L + dec\%/100 - 1} \approx K \times \frac{dec\%}{100} \times \frac{L}{N} = K \times \frac{dec\%}{100} \times \frac{tailleseg\%}{100} \qquad (3.3\text{-}7)$$

avec *tailleseg%=L*x100/*N* la taille des segments en % du nombre de points.

La variance est approximativement proportionnelle à la taille des segments. Même si l'approximation est moins bonne que celle obtenue en fonction du nombre de segments, il est plus simple de raisonner à partir de la taille des segments. En effet, la taille des segments est directement liée aux autres performances de la méthode (notamment la résolution).

Influence de la fenêtre d'apodisation quadratique sur la variance

Le choix de la fenêtre d'apodisation influe sur la variance, mais de façon moins importante que la taille des segments. Son influence a été étudiée en comparant les fenêtres d'apodisation sous deux contraintes différentes : à bandes statistiques égales ou à tailles des segments égales. Le décalage est fixé pour minimiser la variance. La bande statistique *et* la taille des segments ne peuvent être identiques pour deux fenêtres différentes. On constate de manière générale qu'à taille de segments identique, plus la bande statistique de la fenêtre est importante, plus la variance est minimisée. Il faut cependant noter que lorsque la taille des segments est égale au nombre de points du signal (un seul segment), la variance normalisée est égale à 1 quelle que soit la fenêtre. A bande statistique identique, la fenêtre la plus adaptée est celle qui, pour la bande statistique donnée, nécessite une taille de segments minimale : la fenêtre rectangulaire, puis Bartlett, Hamming, Hanning, Blackman, Blackman-Harris 4T. Le gain n'est appréciable que si la différence entre les différentes tailles de segments est significative et lorsque la taille des segments est supérieure à 40% du nombre de points du signal. Pour plus de détails, il faut se référer à [DUR97-Meth].

La résolution fréquentielle est estimée à partir des deux définitions données de l'intervalle de résolution fréquentielle associé à un processus aléatoire et de l'intervalle de résolution fréquentielle associé à des raies spectrales (cf. paragraphe 2.4.6). Dans les deux cas, **ces intervalles de résolution varient de façon inversement proportionnelle à la taille des segments**. La taille des segments est le paramètre principal qui permet d'améliorer la résolution.

Le produit stabilité-bande-durée augmente lorsque la taille des segments augmente (Figure 3.3-IV). Le compromis variance/résolution est donc meilleur lorsque la taille des segments est petite (le nombre de segments important). Il est compris entre 2,5 et 1. Il est d'autant meilleur (plus proche de 1) que la bande statistique de la fenêtre spectrale est faible, particulièrement lorsque le nombre de segments est faible.

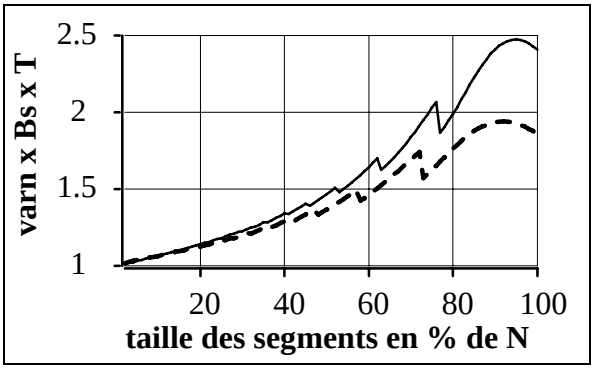


Figure 3.3-IV : **produit stabilité-bande-durée en fonction de la taille des segments** en pourcentage du nombre de points du signal, pour la méthode Welch-WOSA avec une fenêtre de Bartlett et un décalage désiré de 37% (trait en pointillés) et avec une fenêtre de Blackman et un décalage désiré de 30% (trait continu). Les décalages sont optimisés pour minimiser le résidu.

3.3.2. Blackman-Tukey

D'après la formule de la variance normalisée :

$$VARN = \frac{\mathrm{var}\left(\hat{\gamma}_x(\nu)\right)}{\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}^2} = \frac{1}{N}\sum_{m=-M+1}^{M-1}\frac{g[m]^2}{\left(1-\frac{|m|}{N}\right)} \tag{3.3-8}$$

où M représente le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation et N le nombre de points du signal.
Si $\boldsymbol{N>>M}$ alors :

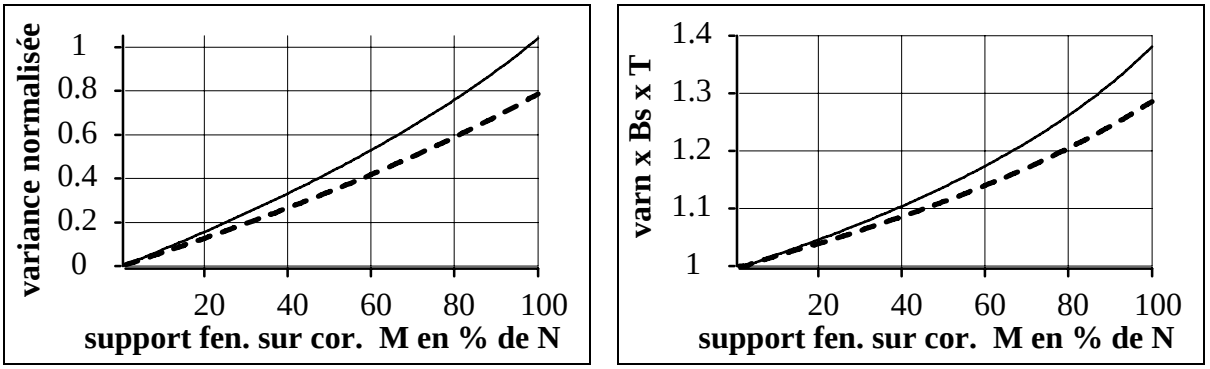
$$VARN \approx \frac{1}{N}\sum_{m=-M+1}^{M-1} g[m]^2 = \frac{1}{N\times T_e\times B_s} \tag{3.3-9}$$

avec B_s la bande statistique équivalente de la fenêtre spectrale associée à la fenêtre d'apodisation linéaire choisie pour l'analyse (cf. éq. 2.4-26 et Tab. 2.5-II). NxT_e est par définition la durée T du signal.
La variance est alors inversement proportionnelle au nombre de points du signal et à la bande statistique de la fenêtre linéaire.
Si $\boldsymbol{M}$ **tend vers** $\boldsymbol{N}$ la variance va devenir très importante surtout avec une fenêtre linéaire rectangulaire. En effet, la variance devient très importante pour les retards proches du nombre de points de l'estimateur non biaisé de l'autocorrélation.

Dans le cas général, lorsque le support de la fenêtre sur l'autocorrélation M augmente, la variance augmente (Figure 3.3-V (a)). Lorsque M<40% du nombre de points du signal, la variance varie de façon approximativement proportionnelle au support de la fenêtre. C'est le paramètre principal qui permet de réduire la variance. Il est conseillé de ne pas augmenter la taille de la fenêtre de plus de 5 fois le support complet de l'autocorrélation (retards positifs et négatifs) [MAR87]. En effet, l'estimation non biaisée de l'autocorrélation pose souvent des problèmes pour l'estimation des derniers retards par manque de moyennage. La variance pour ces derniers retards est alors très élevée faussant l'estimation du spectre. Même l'application d'une fenêtre d'apodisation est souvent insuffisante.

La fenêtre d'apodisation influence la variance par deux aspects différents. D'une part, si la bande statistique équivalente de la fenêtre spectrale associée à la fenêtre d'apodisation diminue, la variance augmente (Figure 3.3-V (a)). D'autre part, lorsque le support de la fenêtre linéaire se rapproche du nombre de points du signal, (M>50% du nombre de points du signal) ou est très supérieur au support de l'autocorrélation, de par le problème sur l'estimation des derniers retards avec l'estimation non biaisée de l'autocorrélation, il est préférable d'utiliser une fenêtre dont les derniers points sont le plus proche de zéro possible : typiquement une fenêtre de Blackman, de Blackman-Harris 4T ou de Hanning et éviter la fenêtre rectangulaire, la fenêtre de Hamming et la fenêtre de Bartlett. Par contre la fenêtre rectangulaire et la fenêtre de Hamming peuvent poser des problèmes. Pour connaître les risques d'obtenir une estimation erronée dans une telle situation, il convient d'observer les derniers retards de l'estimation non biaisée de l'autocorrélation. A bande statistique égale (donc pour des supports de fenêtre différents), la variance est identique si le support de la fenêtre linéaire n'est pas trop proche du nombre de points du signal.

Le produit **stabilité-bande-durée** va être proche de 1 lorsque M<<*nbpts*. Ensuite, il aura approximativement le même comportement que la variance (Figure 3.3-V (b)). On remarque en particulier l'augmentation très importante du produit pour la fenêtre rectangulaire lorsque M devient supérieur à 60% du nombre de points du signal.



(a) (b)

Figure 3.3-V : (a) **variance normalisée**, (b) **produit stabilité-bande-durée en fonction du support de la fenêtre sur la corrélation** en pourcentage du nombre de points du signal, pour la méthode Blackman-Tukey avec une fenêtre de Hanning (trait en pointillés) et avec une fenêtre de Blackman (trait continu).

3.3.3. Per-Cor

Le cas de la méthode Per-Cor est plus complexe car les paramètres sont plus nombreux. Ils interagissent entre eux ce qui modifie les performances. Elles dépendent notamment du rapport entre la taille des segments *L* pour la partie PER de l'algorithme et le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation *M* pour la partie COR. Ce rapport *L/M* est obligatoirement supérieur à 1. L'étude complète a nécessité de se placer dans les différentes configurations [DUR97-Meth]. Nous ne présentons ici que les points principaux.

Influence du décalage entre segments sur la variance pour une fenêtre quadratique donnée
Pour toutes les fenêtres quadratiques sauf la fenêtre rectangulaire : de même que pour la méthode Welch-WOSA (paragraphe 3.3.1) la variance est minimisée pour un décalage donné ne dépendant que de la fenêtre. Bien que la partie Cor de la méthode modifie les performances, cette minimisation de la variance de la partie Per entraîne bien une minimisation de la variance de Per-Cor. La fenêtre spectrale n'étant pas modifiée par ce paramètre, les autres performances de l'estimateur restent identiques. Ceci permet de fixer le décalage en étant assuré d'avoir une variance minimale dès que la fenêtre d'apodisation quadratique est choisie. Les décalages minimisant la variance sont du même ordre que ceux de Welch-WOSA (cf. Tab. 3.3-I). En outre, la variance est également minimale pour un résidu minimal. Le décalage doit donc être optimisé par la procédure présentée paragraphe 3.3.1 pour Welch-WOSA. Ceci est valable quels que soient les autres paramètres de la méthode. Pour la fenêtre rectangulaire, dans presque tous les cas, il est préférable d'utiliser un décalage de 100% (pas de recouvrement). La variance n'est pas obligatoirement minimale, mais de toute façon très proche du minimum. De plus, l'indépendance statistique des segments est assurée. Les quelques différences avec la méthode Welch-WOSA sont précisées dans le document [DUR97-Meth]. Dans la suite, on suppose toujours que le décalage est optimisé.

Pour les autres paramètres, il faut en fait distinguer deux cas : le cas où la fenêtre quadratique est rectangulaire ou non. En effet, dans le cas où la fenêtre est rectangulaire, les performances de la méthode sont optimisées lorsque la taille des segments est égale au nombre de points du signal (un seul segment). Il s'agit alors de la méthode que nous avons dénommée corrélogramme A-biaisé. Nous dénommerons le cas général Per-Cor ce qui impliquera que la fenêtre rectangulaire n'est pas utilisée comme fenêtre quadratique.

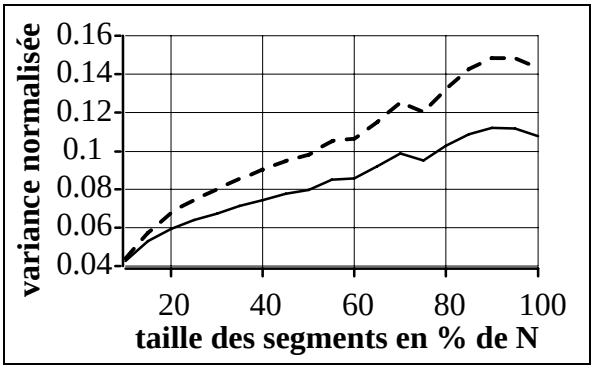
3.3.3.1. Cas général Per-Cor

Une remarque importante sur la bande statistique des fenêtres spectrales de la méthode Per-Cor doit tout d'abord être mise en évidence. Lorsque les deux fenêtres d'apodisation sont fixées (quadratique et linéaire), la bande statistique de la fenêtre spectrale dépend de la taille des segments L et du support de la fenêtre linéaire M : $B_S(L,M)$. D'où pour une bande statistique donnée, il existe plusieurs couples (L,M) possibles [NUT81-2]. Pour une bande statistique donnée, on a donc le choix entre $L=M$, ou d'autres couples (L,M) tels que $L \geq M$. Lorsque L augmente par rapport au cas $L=M$, M doit être diminué pour que la bande statistique reste identique. Il faut noter que la bande statistique augmente ou diminue plus en fonction de M que de L. Changer de couple (L,M) à bande statistique constante ne modifie pas la résolution telle qu'elle a été définie pour un signal aléatoire, cependant les autres performances (fuites d'énergie, biais ...) sont modifiées car la fenêtre spectrale change. Nuttal [NUT81-2] a montré qu'**à bande statistique** et fenêtres d'apodisation **fixées,** la variance est minimale lorsque $L=M$, principalement lorsque le décalage est optimal.

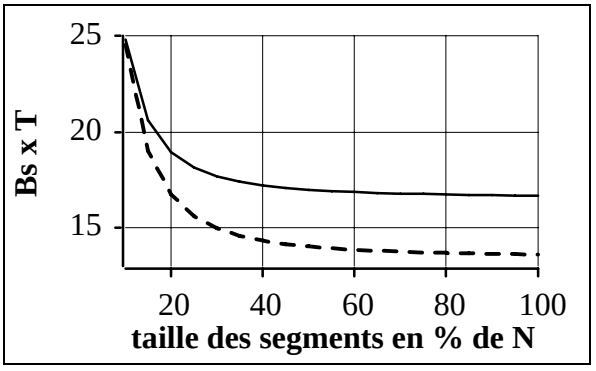
De même que dans le cas Welch-WOSA, **à bande statistique égale** et pour $L=M$, la variance normalisée est approximativement constante quelles que soient les fenêtres d'apodisation si le nombre de segments est important. Dans le cas contraire, si le nombre de segments est petit et si la fenêtre quadratique n'est pas rectangulaire, il faut choisir les fenêtres qui permettent d'obtenir un couple (L,M) minimal qui permet d'obtenir le plus grand nombre de segments et de minimiser au mieux le résidu, ce qui revient à utiliser des fenêtres dont la bande statistique est minimale.

Lorsque le **support de la fenêtre sur corrélation *M*** ainsi que les fenêtres d'apodisation sont **fixées**, mais qu'aucune contrainte sur la bande statistique n'est exigée, la variance est minimale pour $L=M$ (cf. Figure 3.3-VI (a)). La variance augmente lorsque la taille des segments augmente.

Se pose alors le problème du choix des fenêtres d'apodisation qui permettent de minimiser la variance lorsque L et M sont fixés. On constate que si la **fenêtre quadratique est fixée**, la variance diminue si la bande statistique de la fenêtre linéaire augmente. La variance est donc maximale pour la fenêtre rectangulaire. Dans le cas où c'est la **fenêtre linéaire qui est fixée**, il faut distinguer deux cas. Si $L=M$ et si la bande statistique de la fenêtre quadratique augmente, la variance diminue. Si par contre $L>M$ cela dépend du comportement des M premiers points de $(h*h)$ et il n'est pas possible de prévoir le comportement de la variance a priori. La variance dépend de la bande statistique finale de la fenêtre spectrale. On retrouve le compromis classique résolution/variance : plus la bande statistique est importante, plus la variance diminue (cf. Figure 3.3-VI (b) et).



(a) --- Hanning/Hanning, — Bartlett/Blackman

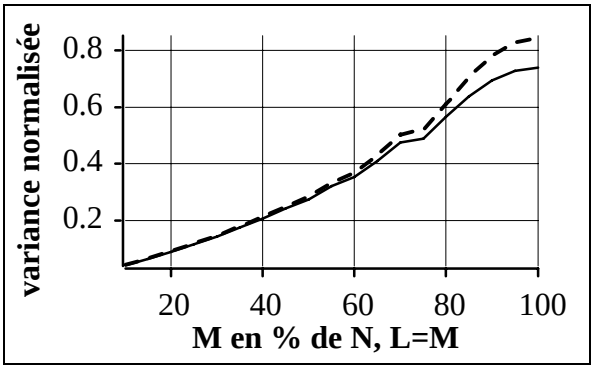


(b) --- Hanning/Hanning, — Bartlett/Blackman

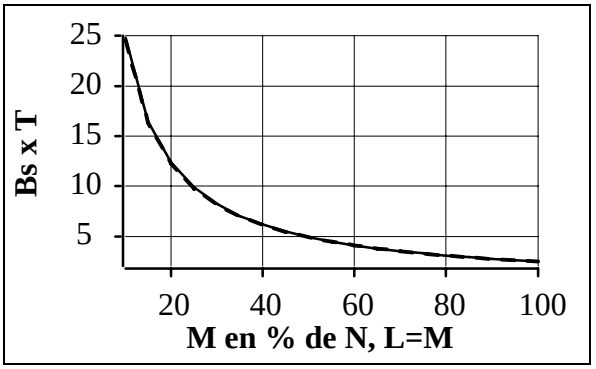
Figure 3.3-VI : (a) **variance normalisée**, (b) produit **bande statistique** fois durée B_SxT, en fonction de la taille des segments ***L* à *M* fixé** à 10% de N (=1000), le décalage utilisé est celui qui minimise la variance pour la fenêtre quadratique donnée, il est ensuite optimisé pour minimiser le résidu. En pointillés est indiqué le résultat obtenu pour des fenêtres quadratique et linéaire de Hanning, en trait continu, le résultat pour une fenêtre quadratique de Bartlett et une fenêtre linéaire de Blackman. B_sxT est présenté au lieu de B_S, car ce produit ne dépend pas en soi du nombre de points du signal.

Enfin, on constate que si le support de la fenêtre sur corrélation *M* augmente alors que le rapport ***L/M* est fixé**, la variance augmente de façon approximativement proportionnelle à *M* (cf. Figure 3.3-VII). Ceci particulièrement, lorsque *L=M* et pour *M* inférieure à environ 40% du nombre de points du signal. Ce qui implique également que la variance est approximativement proportionnelle à la taille des segments et étant donné les relations entre la taille des segments et le nombre de segments, approximativement inversement proportionnelle au nombre de segments.

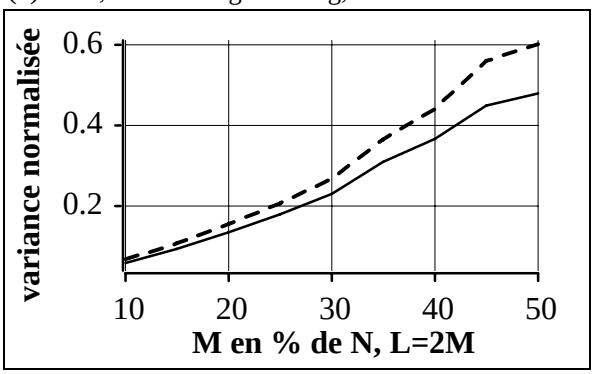
En ce qui concerne la **résolution**, on constate que lorsque soit *L*, soit *M* augmente la bande statistique diminue, la résolution est améliorée. De plus, la bande statistique est approximativement inversement proportionnelle à *M*, lorsque le rapport *L*/*M* est fixé (cf. Figure 3.3-VII). *M* le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation est le paramètre principal qui influe sur la résolution, les variations de la bande statistique sont plus importantes lorsque *M* varie que lorsque *L* varie. Lorsque *L=M*, pour améliorer la résolution, il faut choisir des fenêtres d'apodisation dont la bande statistique est la plus faible. Ceci reste vrai lorsque *L* est proche de *M*, mais si l'écart augmente (*L*>2*M*) la bande statistique dépend des *M* premiers points de (*h***h*) et non plus des *L* points, l'évolution de la bande statistique devient moins prévisible en fonction des fenêtres quadratiques utilisées. En revanche, si la fenêtre quadratique est fixée, la bande statistique diminue, lorsqu'on choisit une fenêtre d'apodisation linéaire dont la bande statistique est plus faible que celle de la précédente.



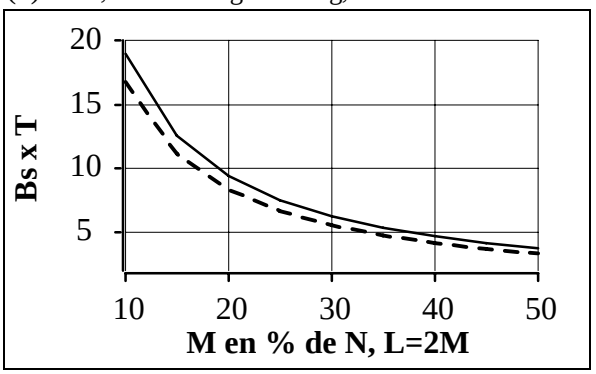
(a) *L=M,* --- Hanning/Hanning, — Bartlett/Blackman



(b) *L=M,* --- Hanning/Hanning, — Bartlett/Blackman



(c) *L*=2*M,* --- Hanning/Hanning, — Bartlett/Blackman

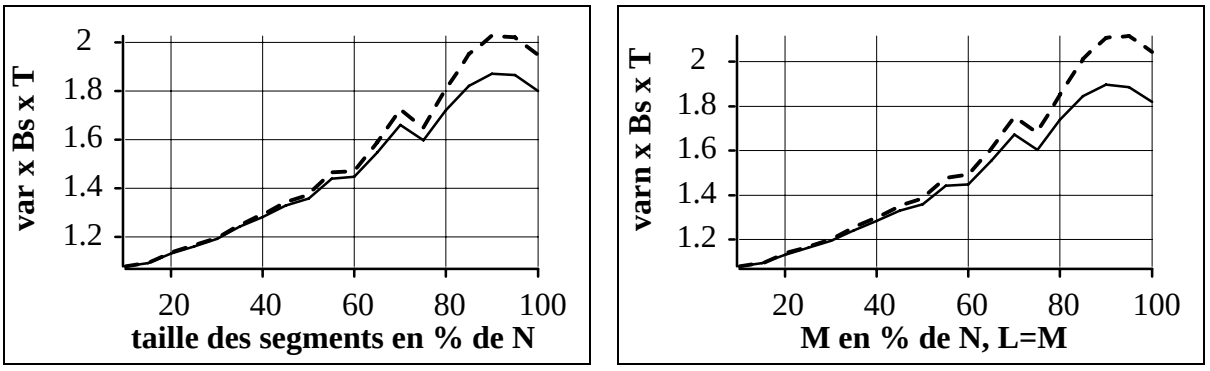


(d) *L*=2*M,* --- Hanning/Hanning, — Bartlett/Blackman

Figure 3.3-VII : (a), (c) **variance normalisée**, (b), (d) produit **bande statistique** fois durée B_Sx*T*, en fonction du support de la fenêtre sur corrélation ***M* à rapport L/M fixé** (a) et (b) *L=M*, (c) et (d) *L*=2*M*. *M* est exprimé en % de *N* (=1000). Le décalage utilisé est celui qui minimise la variance pour la fenêtre quadratique donnée, il est ensuite optimisé pour minimiser le résidu. En pointillés est indiqué le résultat obtenu pour des fenêtres quadratique et linéaire de Hanning, en trait continu, le résultat pour une fenêtre quadratique de Bartlett et une fenêtre linéaire de Blackman.

Le produit stabilité-bande-durée est minimal lorsque *M* est fixé et quels que soient la fenêtre d'apodisation quadratique, la fenêtre d'apodisation linéaire, le décalage et le support de la fenêtre linéaire **lorsque *L=M*** (cf. Figure 3.3-VIII). Le produit stabilité-bande-durée, tout comme la variance,

augmente lorsque la taille des segments augmente, tandis que la bande statistique diminue (la résolution s'améliore). La meilleure qualité d'estimation est pour *L=M*. En outre, lors de l'étude de la variance il a été vu qu'à bande statistique de la fenêtre spectrale constante, la variance (donc également le produit stabilité-bande-durée) est également minimale pour *L=M*. Dans tous les cas, **il est préférable de prendre *L=M***. Cependant ceci est moins sensible lorsque *L* reste inférieur à 2*M* et lorsque *L* est très inférieur au nombre de points du signal (<10%). **Le produit stabilité-bande-durée augmente lorsque *M* augmente** et que le rapport *L*/*M* est fixé (cf. Figure 3.3-VIII). Les variations sont proches de celles obtenues pour la variance, la diminution de la bande statistique lorsque *M* augmente ne compense pas l'augmentation de la variance. Le produit stabilité-bande-durée est approximativement du même ordre quelles que soient les fenêtres quadratiques ou les fenêtres linéaires employées (lorsque *L* et *M* sont fixés). Cependant puisque les variations sont proches de celles obtenues pour la variance, l'influence des fenêtres est identique à celle qu'elles ont sur la variance, mais de façon très atténuée.



(a) *M*=10%, -- Hanning/Hanning, − Bartlett/Blackman (b) *L=M*, --- Hanning/Hanning, — Bartlett/Blackman

Figure 3.3-VIII : **produit stabilité-bande-durée,** (a) en fonction de la taille des segments ***L* à *M* fixé** à 10% de *N*, (b) en fonction du support de la fenêtre sur corrélation ***M* avec *L=M***. *M* est exprimé en % de *N* (=1000). Le décalage utilisé est celui qui minimise la variance pour la fenêtre quadratique donnée, il est ensuite optimisé pour minimiser le résidu. En pointillés est indiqué le résultat obtenu pour des fenêtres quadratique et linéaire de Hanning, en trait continu, le résultat pour une fenêtre quadratique de Bartlett et une fenêtre linéaire de Blackman.

Le reste des performances dépend de la forme de **la fenêtre spectrale**. Nous allons donc nous intéresser au comportement des fenêtres spectrales en fonction des paramètres. La fenêtre spectrale s'écrit :

$$Q(\nu) = \frac{1}{LT_e}|H(\nu)|^2 * G(\nu) \qquad (3.3\text{-}10)$$

$H(\nu)$ étant la TFd de *h* la fenêtre d'apodisation quadratique sur *L* points et $G(\nu)$ étant la TFd de *g* la fenêtre d'apodisation linéaire sur *2M-1* points. La première fenêtre est "lissée" par la seconde.

A bande statistique fixée, nous avons vu qu'il existait plusieurs couples de paramètres (*L*,*M*) possibles. En règle générale, on constate que si *L* augmente, ce qui implique que *M* diminue, les lobes secondaires deviennent plus nombreux et leur niveau est supérieur, le facteur de décroissance des lobes secondaires diminue et le facteur de fuite d'énergie augmente tandis que la surface du lobe principal diminue légèrement. Pour *L=M*, les lobes secondaires sont "lissés". En général, il est plus intéressant de minimiser l'influence des lobes secondaires, même au prix d'une légère augmentation du lobe principal, donc de choisir ***L=M***. Ce qui permet par ailleurs de minimiser la variance.

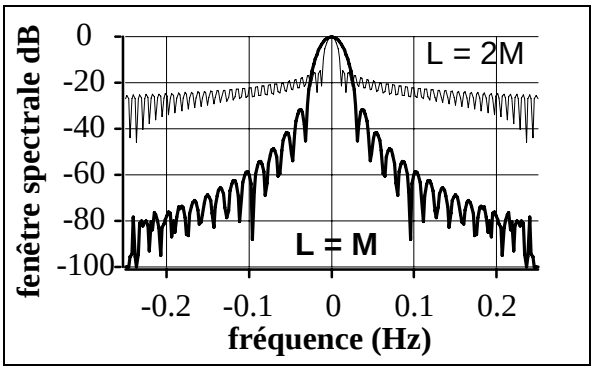
D'une manière générale :

- Si *L*>>*M*, alors les *M* premiers points de (*h***h*)[*m*] tendent à être approximativement constant et *q*[*m*] la fenêtre effective est approximativement égale à la fenêtre linéaire, **la fenêtre spectrale se rapproche de l'allure de la fenêtre linéaire**. Pour la plupart des fenêtres quadratiques et linéaires, ceci est sensible dès que $L \geq 2M$ (cf. Figure 3.3-IX).

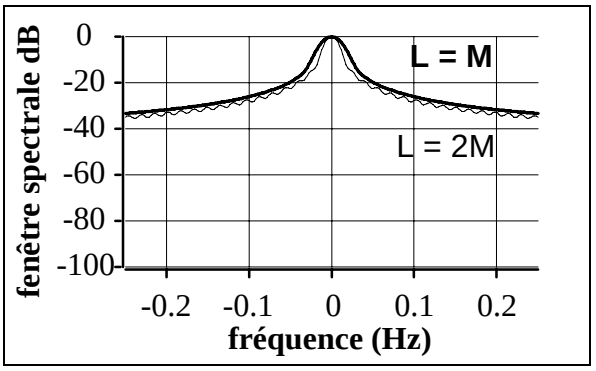
- Si *L*=*M*, alors **c'est la fenêtre d'apodisation quadratique qui prédomine**, on retrouve son allure avec un lissage des lobes secondaires quelle que soit la fenêtre d'apodisation linéaire autre que celle de Bartlett. Ceci correspond à un filtrage passe-bas de $|H(\nu)|^2$ par $G(\nu)$. Les lobes secondaires sont lissés et peuvent même "disparaître". Dans ce cas, la fenêtre spectrale n'a plus de lobes négatifs et le spectre est assuré d'être positif. Si la fenêtre linéaire est rectangulaire, on retrouve la méthode Welch-WOSA et la fenêtre spectrale correspondant à l'apodisation quadratique (cf. Figure 3.3-IX).

- Lorsque *L* augmente de *M* à environ 2*M*, la fenêtre spectrale est un compromis entre les deux fenêtres. En règle générale : les lobes secondaires sont de moins en moins lissés et de plus en plus nombreux, le niveau des lobes secondaires augmente, le lobe principal diminue en surface, la bande statistique diminue, le facteur de fuite d'énergie augmente et le facteur de décroissance des lobes secondaires passe de celui de la fenêtre quadratique à celui de la fenêtre linéaire. On remarque également que des lobes négatifs apparaissent (cf. Figure 3.3-IX).

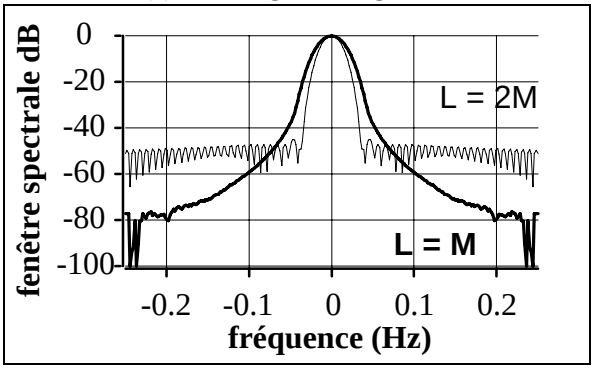
Il y a cependant un cas particulier : la fenêtre de Bartlett en apodisation linéaire. C'est la seule fenêtre qui pour une bande statistique relativement importante par rapport aux autres fenêtres, offre une bande à -3dB relativement faible. Lorsqu'elle est utilisée, quels que soient la fenêtre quadratique utilisée et le rapport *L*/*M*, l'allure de la fenêtre reste identique et correspond à l'allure de la fenêtre de Bartlett dont les lobes secondaires sont lissés. Lorsque le rapport *L*/*M* augmente le lissage diminue et les lobes secondaires apparaissent, mais l'allure générale reste identique (cf. Figure 3.3-IX).



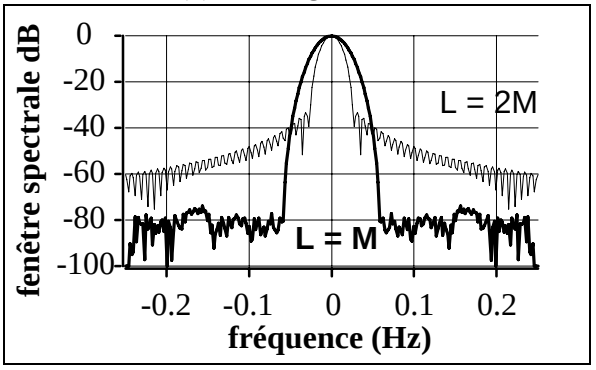
(a) Hanning/Rectangulaire



(b) Hanning/Bartlett



(c) Hanning/Blackman-Harris 4T



(d) Blackman-Harris 4T/Hanning

Figure 3.3-IX : **module de la fenêtre spectrale Per-Cor** en dB, avec en trait épais le cas *L*=*M*=64, en trait fin *L*=2*M*=128. En légende des figures sont indiquées les fenêtres utilisées, la première étant la fenêtre quadratique, la seconde la fenêtre linéaire. Dans le cas (a) pour *L*=*M*, le choix de la fenêtre linéaire rectangulaire implique que l'on retrouve le cas Welch-WOSA avec une fenêtre de Hanning.

Conseil d'utilisation de la méthode PERCOR (cas général)
L'étude qui précède nous permet de fixer certains paramètres par rapport à d'autres de façon prioritaire. Il est préférable de choisir :
(1) ***L=M***, la taille des segments est égale au support de la fenêtre linéaire,
(2) le décalage minimisant la variance suivant la fenêtre quadratique avec optimisation pour minimiser le résidu.
Avec pour conséquence :
- à bande statistique et fenêtres fixées une variance minimale,
- à support de fenêtre linéaire fixé et fenêtres fixées une variance minimale,
- à support de fenêtre linéaire fixé et fenêtres fixées un produit stabilité-bande-durée minimal,
- à support de fenêtre linéaire fixé et fenêtres fixées des fuites d'énergie minimales et des lobes secondaires d'un niveau en général minimal,
- à bande statistique et fenêtres fixées des fuites d'énergie minimales et des lobes secondaires d'un niveau en général minimal,
- des fenêtres spectrales, sauf dans le cas de la fenêtre linéaire de Bartlett, qui ont l'allure de la fenêtre spectrale quadratique dont les lobes secondaires sont lissés, sans lobes secondaires négatifs assurant ainsi la positivité du spectre et ceci quelle que soit la fenêtre linéaire.
- **on peut également choisir *2M>L>M*** pour obtenir des fenêtres spectrales intermédiaires entre la fenêtre spectrale que l'on obtiendrait avec une apodisation quadratique identique dans la méthode Welch-WOSA pour une taille de segments égale à *M* et la fenêtre spectrale que l'on obtiendrait avec une apodisation linéaire identique avec la méthode Blackman-Tukey pour un support de fenêtre linéaire égal à *M*. Le produit stabilité-bande-durée (le compromis résolution/variance) et la variance sont détériorés par rapport au cas *L=M*, la résolution par contre est améliorée. Si *L* reste très inférieure au nombre de points du signal (<10%) le produit stabilité-bande-durée n'est que très faiblement détérioré.

3.3.3.2. Corrélogramme A-biaisé

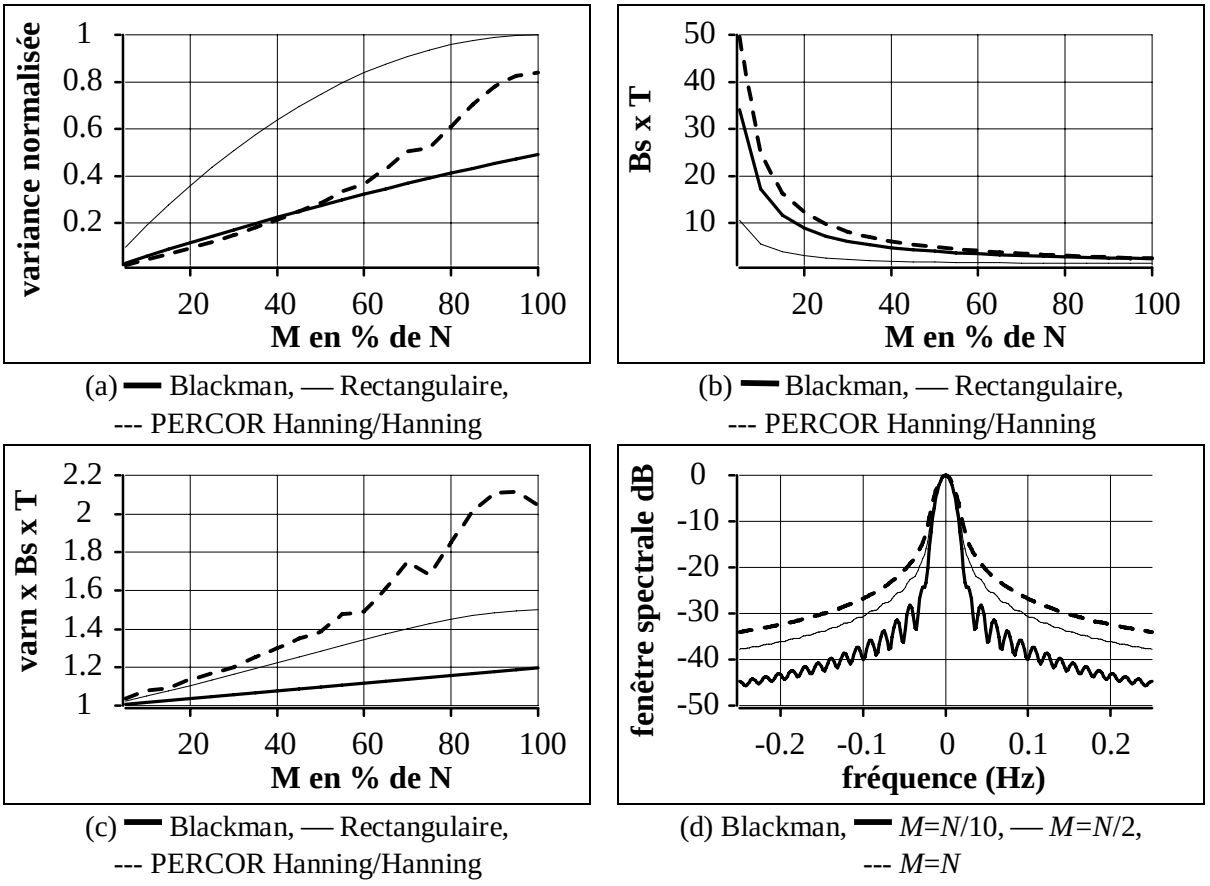
Les paramètres sont alors limités au support de la fenêtre sur corrélation *M* et à la fenêtre d'apodisation linéaire. La méthode est particulièrement intéressante, tant du point de vue variance que résolution.

La variance augmente de façon approximativement proportionnelle à *M*, même lorsque *M* est proche du nombre de points du signal. On constate que pour *M* fixé, la variance est en général inférieure au cas Per-Cor, principalement lorsque *M* est proche du nombre de points du signal (cf. Figure 3.3-X). Par ailleurs, si la bande statistique de la fenêtre linéaire augmente, la variance diminue. Lorsque *M=N*, le gain en variance peut être particulièrement important, de l'ordre de 40 % pour certaines fenêtres linéaires en particulier Blackman et Bartlett. La valeur de la variance normalisée dans ce cas particulier est donnée dans le tableau Tab. 3.3-III. Dans le tableau est indiquée la bande statistique de la fenêtre linéaire et non celle de la fenêtre spectrale.

Tab. 3.3-III : **variance normalisée du corrélogramme A-biaisé** en fonction de la fenêtre linéaire pour *M=N*

Fenêtre linéaire	Rectangulaire	Hamming	Hanning	Bartlett	Blackman	Blackman-Harris 4T
B_S (xMT_e)	0,5	1,26	1,33	1,5	1,64	1,72
varn	1	0,6	0,58	0,5	0,49	0,47

La résolution quant à elle est également, à *M* fixé, meilleure en général qu'avec la méthode Per-Cor, de par le fait que la bande statistique de la fenêtre rectangulaire est la plus faible de toutes. Le produit stabilité-bande-durée est alors également meilleur, en particulier lorsque *M* est proche du nombre de points du signal (cf. Figure 3.3-X).



(a) ━ Blackman, — Rectangulaire, --- PERCOR Hanning/Hanning

(b) ━ Blackman, — Rectangulaire, --- PERCOR Hanning/Hanning

(c) ━ Blackman, — Rectangulaire, --- PERCOR Hanning/Hanning

(d) Blackman, ━ *M=N*/10, — *M=N*/2, --- *M=N*

Figure 3.3-X : corrélogramme A-biaisé, (a) variance normalisée, (b) produit bande statistique fois durée, (c) produit stabilité-bande-durée, en fonction du support de la fenêtre sur corrélation *M* exprimé en % de *N* (=1000), en trait épais avec une fenêtre linéaire de Blackman, en trait fin avec une fenêtre linéaire Rectangulaire, en pointillés méthode PERCOR avec *L=M* et des fenêtres de Hanning, (d) module de la fenêtre spectrale en dB pour une fenêtre linéaire de Blackman, en trait épais avec *M=N*/10, en trait fin avec *M=N*/2, en pointillés avec *M=N*.

En ce qui concerne la fenêtre spectrale, il convient de remarquer que lorsque *M=N*, utiliser une fenêtre quadratique rectangulaire revient à obtenir une fenêtre linéaire de Bartlett à laquelle on applique la fenêtre linéaire choisie. L'allure est alors proche de celle de la fenêtre de Bartlett dont les lobes secondaires sont lissés. Lorsque *M* diminue, les lobes secondaires sont de moins en moins lissés, mais l'allure reste sensiblement proche tant que *M*>*N*/4. Ensuite, la fenêtre spectrale tend vers l'allure de celle associée à la fenêtre d'apodisation linéaire (cf. Figure 3.3-X). L'influence de la fenêtre quadratique rectangulaire, bien qu'améliorant en général la résolution par rapport à Per-Cor, détériore les fuites d'énergie et implique des lobes secondaires relativement importants.

3.3.3.3. Lag-Reshape

Les fenêtres spectrales et effectives, ainsi que les performances liées à la fenêtre spectrale, sont identiques à celles obtenues pour la méthode Blackman-Tukey lorsque que la fenêtre d'apodisation linéaire pour Blackman-Tukey est la même que la fenêtre effective pour Lag-Reshape et lorsque le

support *M* est identique. Pour justifier l'intérêt de la méthode, il faut comparer la variance normalisée entre les deux méthodes. Il s'avère que quels que soient les paramètres, la variance normalisée Lag-Reshape est inférieure à celle de Blackman-Tukey.

Le seul intérêt de la méthode vient du fait que la variance est proche du cas optimal Blackman-Tukey si on choisit des tailles de segments égales à environ le support de la fenêtre linéaire effective plus 10% et un décalage de 100% (avec optimisation pour minimiser le résidu). L'augmentation de la variance par rapport au cas Blackman-Tukey est alors seulement de l'ordre de 10%. Cette option peut être utilisée lorsque le nombre de points du signal est très important, car l'estimation de l'autocorrélation sur 2*M*-l peut devenir très longue et complexe, même en utilisant des FFT, et peut même devenir impossible si la limite de la FFT est atteinte.

3.3.4. STUSE

La méthode de STUSE ne peut être étudiée de la même façon que les autres méthodes de par son principe même et les propriétés particulières de la fenêtre spectrale. Les paramètres ne sont pas simples à fixer étant donné qu'ils influent à la fois sur la variance et sur la fenêtre effective. En particulier, ils fixent le support de la fenêtre effective *M* et le support de sa partie non biaisé M_{nb}, qui peut d'ailleurs être nul. Pour mieux comprendre la méthode, il faut d'abord étudier les fenêtres effectives et spectrales. Rappelons que l'objectif de la méthode STUSE est de construire des fenêtres effectives de support *M*, dont une partie de support M_{nb} a la propriété d'être constante :

$$\frac{q[m]}{q[0]} = 1 \quad \text{pour } |m| < M_{nb} \tag{3.3-11}$$

avec $M_{nb} \approx Qd\text{-}L/2 = \left(\frac{Q \times dec\%}{100} - \frac{1}{2}\right)L$, support non biaisé de la fenêtre effective et *d* décalage en nombre de points, *dec%* le décalage en pourcentage de $0 < dec\% \leq 100$ et *L* taille des segments. Il est alors possible d'obtenir des estimations non biaisées en normalisation DSP si le support de corrélation du signal est inférieur à M_{nb}.

Plusieurs remarques doivent être soulignées sur la fenêtre effective :

- le support non biaisé M_{nb} de la fenêtre effective est nul dès que $Qd \leq L/2$ ou $Q \times dec\% \leq 50$, le paramètre *Q* et *dec%* sont tous les deux faibles, en particulier dès que $Q \geq 2$, *dec%* doit être inférieur à 25%,
- le support non biaisé est compris entre 0 et *L* la taille des segments pour $50 < Q \times dec\% < 150$,
- le support non biaisé est supérieur à la taille des segments pour $Q \times dec\% > 150$,
- le support "biaisé" de la fenêtre effective ne dépend que de la taille des segments et est égal à $3L/2$ (ceci n'est qu'une approximation),
- la forme des fenêtres effectives obtenues dépend principalement de M_{nb}, donc du produit $Q \times dec\%$ (où $0 < dec\% \leq 100$) et du pourcentage de la partie biaisée par rapport au support total de la fenêtre effective.

Lorsque M_{nb} est nul, $Q \times dec\% \leq 50$:

si *Q* et *dec%* sont très faibles (exemple $Q=2$, $dec\%=10$), la fenêtre spectrale est proche de la fenêtre spectrale Welch-WOSA pour la même apodisation quadratique, avec cependant le premier lobe secondaire négatif. Puis, plus *Q* et *dec%* sont élevés, plus les caractéristiques sont modifiées : plus la bande statistique (normalisée par le bin fréquentiel égal à $1/MT_e$) diminue, plus l'amplitude des premiers lobes secondaires, en particulier du premier lobe négatif, augmente, plus les fuites d'énergies augmentent (la part des lobes secondaires augmente, le lobe principal diminue en surface). Sur la

fenêtre effective cela se traduit par des premiers retards qui sont de plus en plus proches de 1. Le comportement général est identique que ce soit le décalage qui augmente ou Q.

Lorsque $M_{nb} > 0$, $Q \times dec\% > 50$:
tant que le décalage reste inférieur au décalage maximal indiqué dans le tableau 2.6-II : la fenêtre effective est constante sur les M_{nb} premiers retards. Les modifications de la fenêtre spectrale suivent la même progression que lorsque M_{nb} est nul : plus Q et $dec\%$ augmentent, plus la partie biaisée de la fenêtre effective devient petite (en pourcentage du support total), alors la bande statistique (normalisée par le bin fréquentiel) diminue, l'amplitude des premiers lobes secondaires, en particulier du premier lobe négatif, augmente, les fuites d'énergies augmentent. La fenêtre effective est constante sur les M_{nb} premiers retards et décroît vers 0 sur les $3L/2$ retards suivants. Plus Q ou $dec\%$ augmente, plus M_{nb} et M augmentent, mais si la taille des segments reste fixe, la partie biaisée de la fenêtre effective reste égale à $3L/2$, cela se traduit par des fenêtres effectives de plus en plus proches d'une fenêtre effective rectangulaire. Il y a cependant un cas particulier lorsque la fenêtre quadratique est rectangulaire : si le décalage n'est pas égal à 100%, la fenêtre effective peut ne plus être constante sur les M_{nb} premiers retards, mais avoir une forme en « dents de scie ». Pour un décalage de 100%, la fenêtre effective est constante sur les M_{nb} premiers retards, pour les derniers retards, la fenêtre tend vers 0 de façon approximativement linéaire. Un décalage de 100% implique que dès que $Q>2$, le support et le support non biaisé de la fenêtre effective soient très supérieurs au support biaisé, la fenêtre est alors très proche d'une fenêtre effective rectangulaire avec des lobes secondaires plus atténués loin du lobe principal, mais des lobes secondaires plus importants proches du lobe principal et des fuites d'énergie également plus importantes.

La fenêtre d'apodisation quadratique n'influe pas sur les M_{nb} premiers retards, mais sur les $3L/2$ retards qui composent la partie non biaisée de l'estimateur. C'est grâce à ces points que l'amplitude des lobes secondaires peut être limitée. Plus le rapport entre M_{nb} et $3L/2$ est petit, plus l'influence de la fenêtre d'apodisation quadratique est forte : la fenêtre spectrale obtenue est modifiée suivant les caractéristiques de la fenêtre quadratique. **L'influence de la fenêtre quadratique $|H(\nu)|^2$ se situe principalement au niveau des lobes secondaires les plus éloignés du lobe principal**. Plus $|H(\nu)|^2$ atténue les lobes secondaires, plus les lobes secondaires éloignés du lobe principal sont atténués au détriment des premiers lobes dont l'amplitude augmente. Cependant à Q, $dec\%$ et L fixés les caractéristiques globales de la fenêtre spectrale sont approximativement identiques quelle que soit la fenêtre d'apodisation utilisée. Ceci est d'autant plus vrai que Q ou $dec\%$ augmente.

A support de fenêtre effective, support non biaisé et taille de segments fixés, il existe plusieurs possibilités de choix de Q et $dec\%$: on augmente le décalage et on diminue Q ou inversement. Cependant, quelle que soit l'option retenue, les fenêtres spectrales sont proches : si on augmente le décalage $dec\%$ et qu'on diminue Q, la bande statistique diminue légèrement, mais l'amplitude des premiers lobes secondaires augmente aussi légèrement ainsi que les fuites d'énergie.

Si le décalage est supérieur au décalage maximal (tableau 2.6-II) qui permet d'obtenir une fenêtre effective non biaisée : **la fenêtre effective n'est plus constante pour les retards inférieurs à M_{nb}, des oscillations apparaissent** quel que soit Q. L'amplitude des premiers lobes secondaires de la fenêtre spectrale augmente et l'estimation est biaisée. Cette forme de fenêtre effective va considérablement biaiser l'estimation et risque de produire des résultats aberrants. Les limites du décalage indiqué dans le tableau 2.6-II sont à respecter impérativement si $M_{nb}>0$.

D'une manière générale les fenêtres spectrales obtenues ont des lobes secondaires négatifs d'amplitude importante, en particulier le premier lobe secondaire qui est toujours négatif, ce qui donne des facteurs de fuites d'énergie négatifs. C'est cependant grâce à ces lobes négatifs que le biais peut être nul.

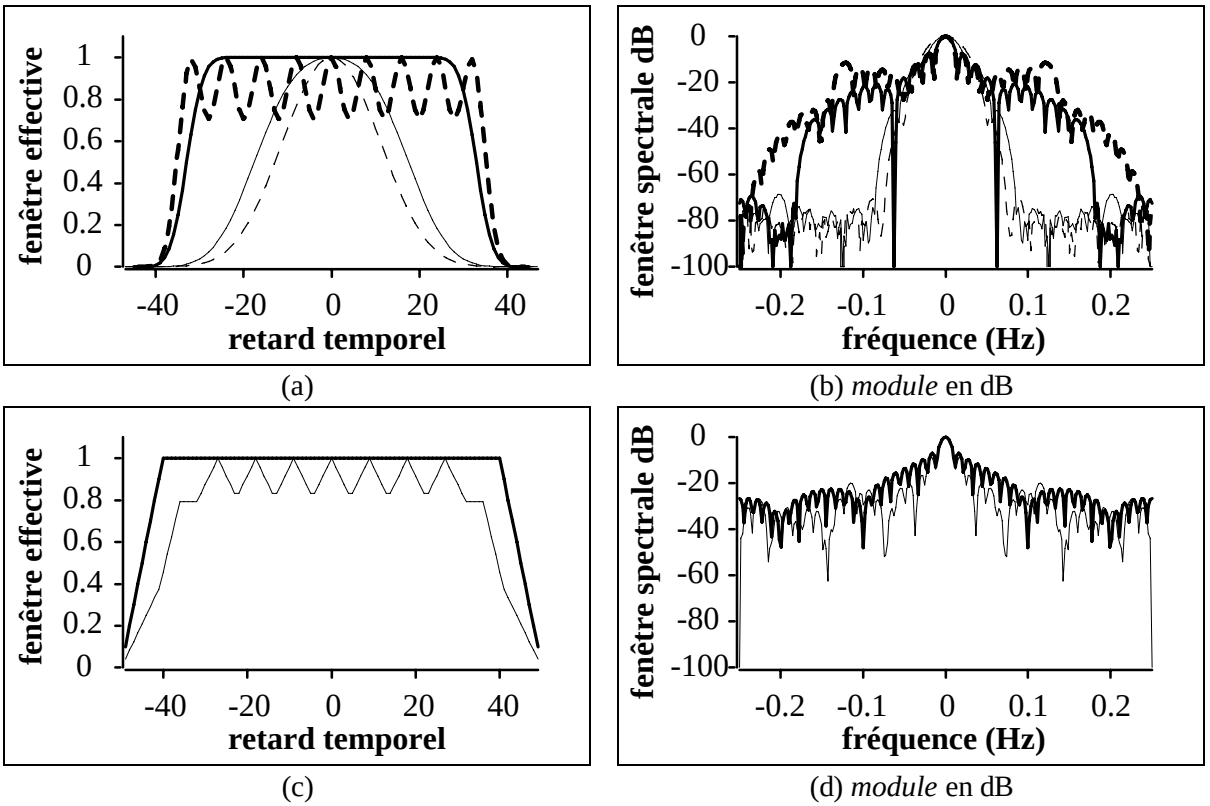


Figure 3.3-XI : méthode STUSE, (a) fenêtre effective, (b) module de la fenêtre spectrale en dB avec une fenêtre linéaire de **Blackman**, *M*=50, *trait fin en pointillés : Q=2,* ***dec%=10****, L=40,* $\boldsymbol{M_{nb}=0}$*, trait fin : Q=3,* ***dec%=15,2****, L=33,* $\boldsymbol{M_{nb}=0}$*, trait épais : Q=5,* ***dec%=37,5****, L=16,* $\boldsymbol{M_{nb}=25}$*, trait épais en pointillés : Q=4,* ***dec%=61,5****, L=13,* $\boldsymbol{M_{nb}=30}$. (c) fenêtre effective, (d) module de la fenêtre spectrale en dB avec une fenêtre linéaire **Rectangulaire**, *M*=50, *trait épais : Q=4,* ***dec%=100****, L=10,* $\boldsymbol{M_{nb}=40}$*, trait fin : Q=4,* ***dec%=64,3****, L=14,* $\boldsymbol{M_{nb}=35}$. Le support de corrélation a volontairement était choisi petit pour mieux faire apparaître les lobes secondaires des fenêtres spectrales, lorsque les tailles augmentent la forme reste la même lorsque l'on normalise l'échelle fréquentielle par le bin fréquentiel $1/MT_e$. Il faut également noter que certains lobes secondaires sont négatifs (dont le premier lobe secondaire).

L'intérêt de la méthode est bien de construire des fenêtres effectives avec une partie non biaisée et une autre biaisée pour obtenir des lobes secondaires loin du lobe principal atténués. Lorsque M_{nb}=0, on obtient des fenêtres spectrales dont la forme et les caractéristiques sont très sensibles au choix des paramètres *Q*, *dec%* et *L*. Lorsque *Q* et *dec%* sont fixés, si la taille des segments augmente, les rapports M_{nb}/L et M/L restent constants, et le paramètre agit comme un facteur de dilatation de la fenêtre effective, ces caractéristiques normalisées par le bin fréquentiel restent sensiblement égales.
Les fenêtres spectrales obtenues ont pour caractéristiques principales, par comparaison avec les fenêtres d'apodisation quadratiques ou linéaires classiques :
- une bonne atténuation des lobes secondaires loin du lobe principal,
- un lobe principal petit en largeur de bande comme en surface,
- des premiers lobes secondaires d'amplitude importante, le premier étant négatif,
- une bande statistique et une bande statistique à -3dB faibles.

La forme de la fenêtre effective dépend principalement du nombre de points non biaisés de la fenêtre par rapport au nombre de points biaisés. Les paramètres taille de segments, *Q* et *dec%*, influent sur la fenêtre effective par la façon dont ils vont fixer le nombre de points non biaisés par rapport au support total de la fenêtre.

La présence de lobes secondaires importants, en particulier négatifs, fait de STUSE, une méthode difficilement applicable hors du contexte particulier d'un signal aléatoire à puissance moyenne finie dont le support de corrélation est connu. Car dans le cas contraire, les risques d'obtenir des estimations fortement biaisées, alors que l'objectif contraire est recherché, sont difficilement maîtrisables. En particulier, la présence de fréquences pures risque de produire des estimations négatives. Dans ce contexte, la résolution du point de vue de la bande statistique ou de la bande à –3 dB n'a pas la même importance que pour les autres méthodes. Les paramètres ne sont pas choisis en fonction de cette performance. Nous ne nous étendrons donc pas sur les variations de la résolution en fonction des paramètres (elles sont étudiées dans [DUR97-Meth]). Par contre, il est nécessaire de connaître l'influence des paramètres sur la variance.

Pour l'étude de la **variance**, nous nous limiterons au cas $Q << nbseg$. Si ce n'est pas le cas, l'estimateur tend à se comporter comme la méthode Welch-WOSA par manque « d'interspectres » avec des fenêtres effectives difficilement prévisibles pour lesquelles tout ce qui a été dit précédemment n'est plus valable. La variance normalisée réelle est inférieure à celle donnée par la formule et tend vers celle de Welch-WOSA.

Influence du décalage entre segments, les autres paramètres étant fixés
Contrairement à la méthode Welch-WOSA, la variance n'a pas de minimum local, la variance augmente lorsque le décalage augmente (cf. Figure 3.3-XII (a)). En particulier dès que $M_{nb}>0$, la variance varie de façon approximativement proportionnelle au décalage exprimé en pourcentage (de 0 à 100) quels que soient Q, L et la fenêtre d'apodisation (M_{nb} ne doit pas être trop proche de 0). C'est également le cas pour des décalages supérieurs aux décalages maximaux permettant d'obtenir une estimation non biaisée. L'optimisation du décalage pour minimiser le résidu (cf. paragraphe 3.3.1) permet également de minimiser la variance. Cependant lorsque le nombre de segments est important, l'influence du résidu est peu importante. Par ailleurs le décalage est souvent choisi en fonction du support et du support non biaisé de la fenêtre effective désirée. Il ne doit pas être considérablement modifié par la procédure, l'optimisation du décalage doit être utilisée avec prudence.

De même que pour le décalage, la variance augmente lorsque Q augmente et pour $M_{nb}>0$ (mais pas trop proche de 0), la variance varie de façon approximativement proportionnelle à Q, même si le décalage est supérieur au décalage maximal permettant d'obtenir une estimation non biaisée (cf. Figure 3.3-XII (c)). Les variations sont également proportionnelles à la taille des segments (cf. Figure 3.3-XII (d)). Le paramètre qui va en fait fixer la variance est le support total de la fenêtre effective $M = L+Qd$, qui résume l'influence des autres paramètres.

Influence de la fenêtre d'apodisation quadratique, les autres paramètres étant fixés
Pour $M_{nb}>0$ (mais pas trop proche de 0), la variance normalisée est approximativement identique quelle que soit la fenêtre quadratique (cf. Figure 3.3-XII). Sinon, la variance est plus élevée si la fenêtre quadratique a une bande statistique plus élevée (on retrouve le compromis classique bande statistique/variance car une fenêtre quadratique de bande statistique élevée entraîne une fenêtre effective de bande statistique élevée).

Le produit stabilité-bande-durée est approximativement égal à 1 tant que le décalage reste inférieur au décalage maximal permettant d'obtenir une fenêtre effective non biaisée (tableau 2.6-II). L'influence de la fenêtre quadratique est alors très faible. %. Pour les décalages supérieurs, le produit peut augmenter jusqu'à environ 2,5 (cf. Figure 3.3-XII (b)). Cela s'explique par les dégradations constatées sur la fenêtre effective lorsque $M_{nb}>0$.

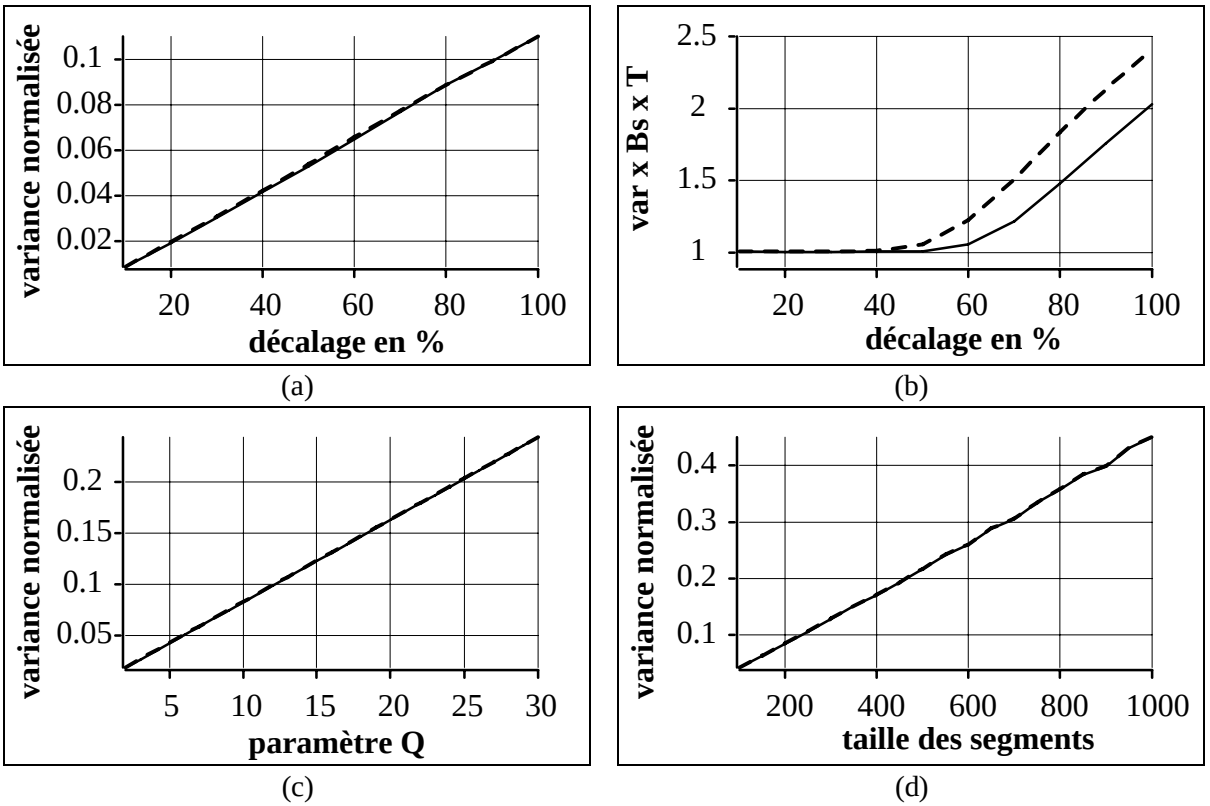


Figure 3.3-XII : méthode STUSE (a) variance normalisée, (b) produit stabilité-bande-durée en fonction du décalage en % pour Q=5, L=100 et N=10000, (c) variance normalisée en fonction de Q pour *dec%*=40, L=100 et N=10000, (d) variance normalisée en fonction de la taille des segments pour Q=5, *dec%*=40 et N=10000. En trait continu : fenêtre quadratique de Hanning, en pointillés : fenêtre de Blackman. Les figures correspondant aux autres cas sont disponibles dans [DUR97-Meth].

La méthode STUSE diffère des autres méthodes par la possibilité de construire des fenêtres effectives ayant un support non biaisé, tout en offrant des fenêtres spectrales ayant de bonnes caractéristiques de lissage, en particulier en atténuant les lobes secondaires et principalement ceux éloignés du lobe principal. La méthode doit être limitée à cet objectif. Pour l'utilisateur il s'agit alors construire une fenêtre effective particulière en fonction des paramètres.
La première étape consiste à fixer le support total et le support non biaisé de la fenêtre effective :
soit M_{nb} = (Qx*dec%*/100 - 1/2) L et M = (Qx*dec%*/100 + 1) L.
D'après l'étude des fenêtres effectives, les caractéristiques de la fenêtre effective dépendent principalement du pourcentage de la partie biaisée du signal par rapport au support total de la fenêtre. Pour obtenir un bon compromis entre la variance et des fenêtres ayant à la fois un support non biaisé conséquent et des lobes secondaires atténués, il est préférable de construire des fenêtres telles que la partie biaisée de la fenêtre effective soit comprise entre 75% et 25% du support total.

Le mode opératoire consiste alors à :
- **choisir M_{nb} égal à l'estimation du support de l'autocorrélation** (que l'on peut obtenir en analysant l'autocorrélation biaisée ou non de l'estimateur) ou de façon légèrement inférieure, il est important que M_{nb} soit très inférieur au nombre de points du signal, sinon le nombre de segments sera insuffisant,
- **choisir le support biaisée de la fenêtre effective en pourcentage du support total** M_b*%* (compris entre 25 et 75). Plus ce pourcentage sera grand plus le support total de la fenêtre effective sera grand, plus les lobes secondaires seront atténués, plus les fuites d'énergie diminuent, mais plus la variance augmente. La bande statistique va diminuer du fait que le support total de la fenêtre augmente, (bien que la bande statistique normalisée par le bin fréquentiel (MxT_e) augmente),

- le choix des deux paramètres précédents **fixe,** d'après les différentes relations entre paramètres, **la taille des segments** et le produit Qx$dec\%$. Si $M_b\%$ est compris entre 25 et 75, il est assuré que pour un décalage restant dans les limites du tableau 2.6-II le paramètre Q puisse être inférieur à environ 10. Il convient alors de calculer le nombre de segments obtenus afin de choisir au mieux les paramètres Q et $dec\%$. Il est conseiller d'obtenir Q entre 2 et 10 pour s'assurer que $Q<<nbseg$ et que l'approximation de l'équation permettant d'obtenir une fenêtre effective non biaisée soit valide. Plus $dec\%$ est grand plus la partie de la fenêtre effective non biaisée est importante, mais plus la variance augmente.
- reste alors à choisir la fenêtre d'apodisation quadratique dont le rôle n'est pas prépondérant, que se soit au niveau de la fenêtre effective ou de la variance. Une fenêtre de Hanning permet en général un bon compromis, le décalage pouvant être supérieur par rapport aux autres méthodes. Cependant plus le pourcentage du support biaisé par rapport au support total est grand, plus l'influence de la fenêtre est sensible. Une fenêtre quadratique rectangulaire ne permet pas de construire des fenêtres effectives avec les propriétés désirées.

Les fenêtres spectrales obtenues ont alors pour caractéristiques principales en comparaison avec les fenêtres d'apodisation quadratiques ou linéaires classiques :
- une bonne atténuation des lobes secondaires loin du lobe principal,
- un lobe principal petit en largeur de bande comme en surface,
- des premiers lobes secondaires d'amplitude importante, le premier étant négatif,
- une bande statistique et une bande à -3dB faibles,

Une autre alternative, plus simple, mais moins prévisible pas à pas, consiste à fixer dès le départ la taille des segments, le support non biaisé de la fenêtre, en gardant à l'esprit que le support biaisé de la fenêtre effective est égal à $3L/2$, la fenêtre quadratique et le décalage (en général entre 30% et 50%) puis de calculer Q comme le premier entier inférieur à $(M_{nb}+L/2)/d$, d le décalage en nombre de points.

3.3.5. Rênes de la méthode

L'étude des performances des estimateurs, nous permet d'identifier les paramètres à modifier suivant l'objectif recherché tout en prévoyant les modifications des performances. Les différents objectifs que l'on peut poursuivre sont l'amélioration d'une des performances de l'estimateur :

- améliorer la variance,
- améliorer la résolution fréquentielle,
- diminuer les fuites d'énergie,
- diminuer les risques de biais.

Pour chaque objectif, plusieurs choix de changement des paramètres sont proposés. Les choix sont proposés par ordre d'efficacité. Le premier choix est le meilleur moyen d'atteindre l'objectif. Les performances améliorées et détériorées sont précisées pour chaque choix. Si l'analyse est la première effectuée, celle que nous appelons analyse primaire, un premier choix des paramètres est proposé. Ensuite, les analyses secondaires sont explicitées en fonction de l'objectif recherché. Ces choix ont été retranscrits sous forme de fiches. L'ensemble de ces fiches forme ce que nous avons dénommé les rênes de la méthode.

Nous ne présentons ici qu'un exemple avec la méthode Welch-WOSA : le choix proposé en analyse primaire et les choix proposés en analyse secondaire lorsque l'objectif recherché est l'amélioration de la résolution. Les autres cas pour la méthode Welch-WOSA sont présentés en annexe A-4. L'ensemble des fiches associées à chacun des estimateurs est présenté dans le document [DUR97-Meth].

La méthode WELCH-WOSA peut être utilisée en analyse primaire, c'est-à-dire sans qu'aucune autre analyse spectrale n'ait été effectuée. Dans ce cas aucune information sur la forme du spectre n'est connue, les paramètres seront alors fixés de la manière suivante en supposant que le support de l'autocorrélation du signal (retards positifs) a été estimé.

ANALYSE PRIMAIRE

- taille des segments = support de l'autocorrélation,
- fenêtre quadratique = fenêtre de Blackman (lobes secondaires bien atténués),
- décalage entre segments (désiré) = 30 % (minimisation de la variance).

ANALYSES SECONDAIRES

OBJECTIF : AMELIORER LA RESOLUTION FREQUENTIELLE

Choix 1 :

- augmentation de la taille des segments *L*,
- fenêtre d'apodisation inchangée,
- décalage entre segments inchangé.

amélioration	détérioration
• **résolution augmente,** • **biais diminue,** • **fuites d'énergie diminuent.**	• **variance augmente,** • **produit stabilité-bande-durée.**

Commentaires :
il faut faire un compromis entre la résolution et la variance. La résolution est inversement proportionnelle à la taille des segments, tandis que la variance lui est proportionnelle (en général).

Choix 2 :

- changer de fenêtre quadratique pour une fenêtre ayant une meilleure bande à –3 dB (ou bande statistique),
- choisir le décalage optimal pour cette fenêtre,
- taille des segments inchangée.

amélioration	détérioration	risque de détérioration
• **résolution augmente.**	• **variance augmente,** principalement pour : $L < 50\%$ de N.	• **biais,** • **fuites d'énergie,** • **stabilité-bande-durée** pour $\boldsymbol{L > 50\%}$ **de** $\boldsymbol{N}$.

Commentaires :
cette opération n'est à effectuer qu'avec prudence et dans les cas où la résolution fréquentielle ne peut plus être augmentée avec le choix 1. En effet, le gain sur la résolution ne sera que faible pour des risques importants de détérioration des autres performances. La façon dont ces performances varieront dépend des caractéristiques de la fenêtre, en général quand on prend une fenêtre permettant d'obtenir une meilleure résolution le biais et les fuites d'énergie se dégradent. La meilleure résolution sera obtenue pour la fenêtre rectangulaire, c'est la seule qui se détache vraiment du point de vue de l'amélioration de la résolution, mais on est alors sûr de détériorer le biais et les fuites d'énergie.

3.4. Analyse horizontale des méthodes

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié les estimateurs et leurs performances un par un. Les différentes méthodes présentées ont des performances distinctes fortement dépendantes des paramètres utilisés. Elles ont pour point commun d'être non paramétriques, ne nécessitant pas l'utilisation d'un modèle pour le signal. Il n'y a pas une méthode plus performante que les autres, chacune a ses avantages et ses inconvénients. Dans ce paragraphe, nous nous attachons à comparer les différentes performances des estimateurs. L'objectif est de déterminer dans quel cadre il est préférable d'appliquer tel estimateur plutôt que tel autre.

3.4.1. Quelques conclusions sur les méthodes

L'étude qui précède souligne les deux grands axes qui permettent de comparer les performances des estimateurs : d'un côté la variance, de l'autre les performances liées à la fenêtre spectrale appliquée en moyenne au spectre vrai. Les performances sont en particulier liées au support M de la fenêtre effective appliquée en moyenne à l'autocorrélation qui est le paramètre principal qui influe sur la résolution de l'estimateur.

- Pour la méthode **Welch-WOSA** (cf. paragraphes 2.5.1 et 3.3.1), M est égal à la taille des segments qui est la taille de la fenêtre quadratique appliquée sur les données.
Rappel des principaux paramètres :
- la fenêtre d'apodisation quadratique sur les données h_{ww},
- la taille des segments $L_{ww} = M$,
- le décalage entre segments (en pourcentage de la taille des segments) $dec\%_{ww}$.

Conseil d'utilisation :
- pour des raisons de variance minimum, le décalage doit être le décalage optimal donné dans le tableau Tab. 3.3-I, il doit ensuite être optimisé pour minimiser le résidu.

- Pour la méthode **Blackman-Tukey** (cf. paragraphes 2.5.2 et 3.3.2), M est égal au support de la fenêtre linéaire appliquée sur l'estimateur de l'autocorrélation non biaisé (sur les retards positifs).
Rappel des principaux paramètres :
- la fenêtre d'apodisation linéaire g_{bt},
- le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation M_{bt}.

Conseil d'utilisation :
- les fenêtres spectrales ont des lobes négatifs. Il convient de vérifier la positivité du spectre en particulier lorsque M est proche du nombre de points du signal.

- Pour la méthode **Per-Cor** (cas général, cf. paragraphes 2.5.3 et 3.3.3.1), M est égal au support de la fenêtre linéaire appliquée sur l'estimateur de l'autocorrélation obtenu avec la partie PER de l'estimateur.
Rappel des principaux paramètres :
- la fenêtre d'apodisation quadratique sur les données h_{pc},
- la taille des segments L_{pc},
- le décalage entre segments (en pourcentage de la taille des segments) $dec\%_{pc}$,
- la fenêtre d'apodisation linéaire sur la corrélation g_{pc},
- le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation $M_{pc} = M$.

Conseils d'utilisation :
- pour des raisons de variance minimum, le décalage doit être le décalage optimal donné dans le tableau Tab. 3.3-I, il doit ensuite être optimisé pour minimiser le résidu,
- pour obtenir le meilleur compromis résolution/variance, il est préférable de choisir $L_{pc} = M_{pc}$, ou tout du moins $L_{pc} < 2M_{pc}$,

- Pour la méthode **du Corrélogramme A-biaisé** (cas particulier de Per-Cor, cf. paragraphes 2.5.3.1 et 3.3.3.2), M est égal au support de la fenêtre linéaire appliquée sur l'estimateur biaisé de l'autocorrélation.
Rappel des principaux paramètres :
- la fenêtre d'apodisation linéaire sur la corrélation g_{ca},
- le support de la fenêtre linéaire sur la corrélation $M_{ca} = M$.

Conseils d'utilisation :
- utiliser les fenêtres de Blackman, de Blackman-Harris 4T ou de Bartlett lorsque M est proche du nombre de points du signal pour minimiser la variance.

- Pour la méthode **STUSE** (cf. paragraphes 2.5.4 et 3.3.4), M dépend des trois paramètres Q, le décalage entre segments, la taille des segments (la taille de la fenêtre quadratique appliquée sur les données).
Rappel des principaux paramètres :
- la fenêtre d'apodisation quadratique sur les données h_{st},
- la taille des segments L_{st},
- le décalage entre segments (en pourcentage de la taille des segments) $dec\%_{st}$,
- Q.

Ce qui implique :
le support de fenêtre effective sur la corrélation égal à $M_{st} = (Q \text{x} dec\%_{st}/100 + 1) \text{x} L = M$,
le support non biaisé de la fenêtre effective égal approximativement à $M_{nb} = (Q \text{x} dec\%_{st}/100 - 1/2) \text{x} L$.
Conseils d'utilisation :
pour obtenir une fenêtre effective avec un certain nombre de points non biaisés tout en permettent d'obtenir une fenêtre spectrale avec des lobes secondaires d'amplitude faible lorsqu'ils sont éloignés du lobe principal :
- Q doit être très inférieur au nombre de segments, ce qui implique en général que la taille des segments doit être très inférieure au nombre de points,
- suivant la fenêtre quadratique le décalage doit être inférieur au décalage maximal indiqué dans le tableau 2.6-II,
- il est préférable de choisir les paramètres de telle façon que M_{st} soit compris entre 25% et 75% de M_{st}.

Remarques :
- le zero-padding n'influe pas sur les performances des méthodes,
- pour comparer les différentes performances des fenêtres spectrales, certaines caractéristiques sont normalisées par le bin fréquentiel, pour l'ensemble des méthodes il est égal à $1/MT_e$ avec M support de la fenêtre effective et T_e période d'échantillonnage du signal.

Les méthodes ne peuvent être comparées que lorsque M est proche pour chacune des méthodes. Elles seront également comparées lorsque les paramètres sont "optimaux". Ce qui implique par exemple pour la méthode Welch-WOSA et Per-Cor que le décalage entre segments est choisi suivant la fenêtre pour minimiser la variance et est optimisé pour minimiser le résidu. Dans les cas des méthodes Welch-WOSA et Blackman-Tukey, la fenêtre spectrale est définie comme étant respectivement quadratique ou linéaire et peut être entièrement décrite sans connaître les autres paramètres de la méthode. Pour les méthodes STUSE et Per-Cor, la fenêtre spectrale dépend explicitement de l'ensemble des paramètres, il n'est donc pas possible d'obtenir les caractéristiques de la fenêtre avant d'avoir choisi ces paramètres. Une fois les paramètres choisis, ces différentes caractéristiques sont estimées automatiquement permettant ainsi d'estimer les performances de l'analyse.

3.4.2. Comparaison de la variance normalisée, de la bande statistique et du produit stabilité-bande-durée des estimateurs

Deux cas distincts sont à envisager, tout d'abord lorsque le support de la fenêtre effective est très inférieur au nombre de points du signal, ensuite, lorsque au contraire celui-ci se rapproche du nombre de points du signal. L'objectif de l'utilisateur est d'obtenir une variance minimale, pour une résolution minimale, tout en minimisant également le biais et les fuites d'énergie. Aucune méthode ne permet d'atteindre pleinement cet objectif, l'utilisateur doit toujours faire un compromis, particulièrement entre la variance et la résolution. L'étude qui suit doit permettre à un utilisateur de choisir la méthode la plus adaptée suivant le compromis désiré.

3.4.2.1. Lorsque le support de la fenêtre effective est très inférieur au nombre de points du signal

Dans le cas où le support de la fenêtre effective est très inférieur au nombre de points du signal, et dans le cas où l'on respecte les conseils d'utilisation des méthodes :
- **la variance normalisée est d'autant plus faible que la bande statistique de la fenêtre spectrale est plus élevée quels que soient la méthode et les paramètres** (cf. Tab. 3.4-I).
- **le produit stabilité-bande-durée est identique et proche de 1 quels que soient la méthode et les paramètres** (cf. Tab. 3.4-I). Le compromis résolution / variance est donc identique pour l'ensemble des méthodes, il n'y a pas de méthode "meilleure" que les autres.

- **A support de fenêtre effective fixé**, la bande statistique des fenêtres spectrales est en général plus élevée et la variance plus faible pour (voir aussi Tab. 3.4-I) :
- Per-Cor et $L_{pc}=M_{pc}$,
- Welch-WOSA,
- STUSE lorsque le support non biaisé est nul $M_{nb}=0$, ce qui implique Q et $dec\%$ petits,
- Per-Cor lorsque $2M_{pc}>L_{pc}>M_{pc}$,
- Corrélogramme A-biaisé,
- Blackman-Tukey lorsque la fenêtre linéaire n'est pas rectangulaire,
- STUSE lorsque le support non biaisé est supérieur à zéro $M_{nb}>0$,
- Blackman-Tukey lorsque la fenêtre linéaire est rectangulaire,

ce classement est valable lorsque l'on compare les méthodes dans des conditions similaires, typiquement lorsque, par exemple, la même fenêtre d'apodisation quadratique est utilisée pour la méthode Per-Cor et la méthode Welch-WOSA.

Tab. 3.4-I : **comparaison des variances normalisées, produits stabilité-bande-durées et bandes statistiques**, entre différents estimateurs, à support de fenêtre effective constant M=100. La période d'échantillonnage est égale à 1s.

			nombre de points du signal = 10000		nombre de points du signal = 5000		nombre de points du signal = 1000	
méthode	paramètres	B_S (Hz)	*VARN*	*VARN* x B_S x T	*VARN*	*VARN* x B_S x T	*VARN*	*VARN* x B_S x T
Welch-WOSA	h_{ww}=Hanning L_{ww}=100 *dec%*=35	0,021	0,0048	1	0,0097	1	0,051	1,1
Blackman-Tukey	g_{bt}=Hanning M_{bt}=100	0,013	0,0074	1	0,015	1	0,076	1
Per-Cor	h_{pc}=Hanning L_{pc}=M_{pc}=100 *dec%*=35 g_{pc}=Hanning	*0,025*	**0,0041**	1	**0,0083**	1	**0,044**	1,1
Per-Cor	h_{pc}=Hanning L_{pc}=2M_{pc}=200 *dec%*=35 g_{pc}=Hanning	0,017	0,006	1	0,012	1	0,068	1,2
Corrélo. A-biaisé	g_{ca}=Hanning M_{ca}=100	0,014	0,0074	1	0,015	1	0,073	1
STUSE	h_{st}=Hanning L_{st}=78 *dec%*=15 Q=2 M_{nb}=0	0,021	0,0048	1	0,0096	1	0,051	1,1
STUSE	h_{st}=Hanning L_{st}=51 *dec%*=25 Q=4 M_{nb}=22	**0,011**	*0,0094*	1	*0,019*	1	*0,097*	1

- **A bande statistique égale** (à résolution égale) c'est-à-dire pour des supports de fenêtres effectives différents suivant les méthodes et les paramètres :
pour un support de fenêtre effective inférieur à 10% (voir jusqu'à 30%) du nombre de points du signal, le produit stabilité-bande-durée est identique et proche de 1 quels que soient la méthode et les paramètres. Cela implique qu'à bande statistique égale (à résolution égale, c'est-à-dire pour des supports de fenêtres effectives différents), **la variance normalisée est identique quels que soient la méthode et ses paramètres**. Les performances des méthodes ne dépendent que de la fenêtre spectrale.

3.4.2.2. Lorsque le support de la fenêtre effective est proche du nombre de points du signal

En fait dès que le support de la fenêtre effective sur la corrélation M est supérieur à environ 30% du nombre de points du signal, les variations de la variance normalisée et du produit stabilité-bande-durée ne sont plus identiques suivant les méthodes. Par exemple la variance de l'estimateur Blackman-Tukey devient excessivement importante avec une fenêtre linéaire rectangulaire dès que

son support est supérieur à 60% du nombre de points du signal. Cette configuration est donc à éviter. Par contre ce qui a été souligné pour la bande statistique reste valable.

La méthode **STUSE** ne doit pas être choisie dans ces conditions au risque de ne plus obtenir suffisamment de segments vis-à-vis du paramètre *Q*. Les hypothèses permettant d'obtenir une estimation non biaisée risquent de ne plus être valables, en particulier, l'hypothèse qui permet d'obtenir des fenêtres effectives non biaisées.

D'après l'étude des différents estimateurs (cf. paragraphe 3.3), les comportements de la variance et du produit stabilité-bande-durée sont fortement dépendants, non seulement des méthodes, mais aussi des fenêtres d'apodisation utilisées.

D'une manière générale, à support de fenêtre effective fixé, il est préférable d'utiliser la méthode qui offre à la fois le meilleur compromis variance/résolution évalué par le produit stabilité-bande-durée et la variance minimale.

La méthode permettant de minimiser au mieux le produit stabilité-bande-durée et la variance pour *M* proche du nombre de points du signal est :
le Corrélogramme A-biaisé avec la fenêtre linéaire de Blackman, Blackman-Harris 4T ou de Bartlett, puis les autres fenêtres linéaires. La variance et le produit stabilité-bande-durée sont toujours inférieurs à ceux des autres méthodes (cf. Figure 3.4-I), la bande statistique est également en général inférieure. La variance normalisée dans le cas où le support de la fenêtre effective est égal au nombre de points du signal est de l'ordre de 0,5. Le gain en variance peut être très important par rapport aux autres méthodes.

Dans les autres cas, il faut faire un compromis entre la variance, la bande statistique, le produit stabilité-bande-durée et la fenêtre spectrale (cf. paragraphe 3.3). La méthode Blackman-Tukey lorsque la fenêtre linéaire est de Blackman-Harris 4T ou Blackman offre de bons résultats. La variance normalisée dans le cas où le support de la fenêtre effective est égal au nombre de points du signal est de l'ordre de 0,75 à 0,8. Pour les autres fenêtres, Hanning, Bartlett ou Hamming, la variance normalisée est proche et même supérieure à 1, les bandes statistiques étant par ailleurs inférieures à celles de la méthode Welch-WOSA ou Per-Cor (pour une fenêtre quadratique non rectangulaire), le produit stabilité-bande-durée est en général inférieur à celui de ces méthodes (de l'ordre de 1,3 à 1,5 contre 1,8 à 2,4). On remarque que le produit stabilité-bande-durée est toujours plus important avec la méthode Welch-WOSA et la méthode Per-Cor. Lorsque la taille des segments est égale au nombre de points du signal, la méthode Welch-WOSA donne en particulier une variance normalisée de 1 quelle que soit la fenêtre d'apodisation quadratique. La méthode Per-Cor par l'application d'une fenêtre linéaire permet dans les mêmes conditions de diminuer la variance normalisée jusqu'à environ 0,75 pour une fenêtre linéaire de Blackman et suivant la fenêtre quadratique. Le produit stabilité-bande-durée reste quant à lui important (de l'ordre de 2,4).

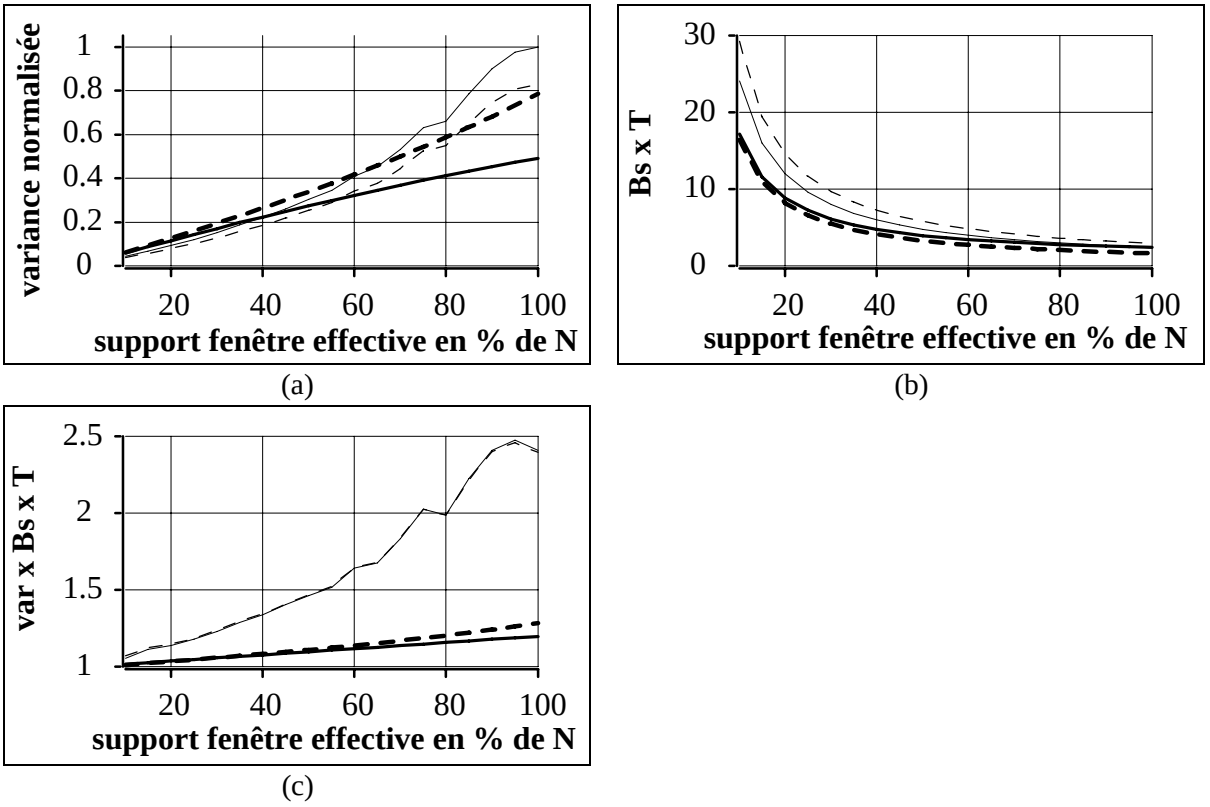


Figure 3.4-I : **comparaison des performances des méthodes en fonction du support de la fenêtre effective *M*.** Les courbes comparent (a) la variance normalisée, (b) le produit bande statistique durée, (c) le produit stabilité-bande-durée, pour plusieurs méthode en fonction du support de la fenêtre effective *M* exprimé en % du nombre de points *N* (=1000). En trait continu épais ▬ : Corrélogramme A-biaisé, avec une fenêtre linéaire de Blackman et $M_{ca}=M$. En trait continu fin — : Welch-WOSA, avec une fenêtre quadratique de Blackman, un décalage de 30% optimisé pour minimiser le résidu et $L_{ww}=M$. En pointillés épais ▪▪▪▪: Blackman-Tukey avec une fenêtre linéaire de Blackman et $M_{bt}=M$. En pointillés fin --- : Per-Cor avec des fenêtres linéaire et quadratique de Blackman, un décalage de 30% optimisé pour minimiser le résidu et $L_{pc}=M_{pc}=M$.

3.4.3. Comparaison des fenêtres effectives et spectrales

Pour tous les estimateurs, la fenêtre effective et la fenêtre spectrale ne dépendent pas du nombre de points du signal. Pour la méthode STUSE, il faut cependant se placer dans l'hypothèse où le paramètre *Q* est très inférieur au nombre de segments, soit pour une taille de segments très inférieure au nombre de points du signal. Le tableau Tab. 3.4-II résume de façon qualitative les performances des fenêtres spectrales pour les différentes méthodes lorsque le support de la fenêtre effective est identique pour chacune des méthodes et qu'elles sont utilisées suivant les conseils d'utilisation indiqués précédemment. Les niveaux permettant de comparer les méthodes entre elles sont symboliques, lorsqu'ils sont noirs, c'est un point fort de la méthode. La complexité numérique relative est un critère qualitatif, fondé sur la comparaison du nombre d'opérations de chaque méthode et du temps de calcul, lorsque le support de la fenêtre effective est identique pour chacune des méthodes.

Tab. 3.4-II : **comparaison qualitative des fenêtres spectrales**

méthodes / performances	WELCH-WOSA	STUSE	BLACKMAN-TUKEY	Per-Cor
résolution (à partir de B_S et B_{-3db})				
atténuation de l'ensemble des lobes secondaires				
atténuation des lobes secondaires éloignés du lobe principal				
fuites d'énergie				
spectre positif	OUI	NON	NON / OUI pour la fenêtre de Bartlett	NON
atténuations des lobes négatifs	pas de lobes négatifs			
complexité numérique relative				
possibilité d'obtenir un biais nul	NON	OUI	NON / OUI pour la fenêtre rectangulaire	NON

= meilleure performance = moins bonne performance = point fort

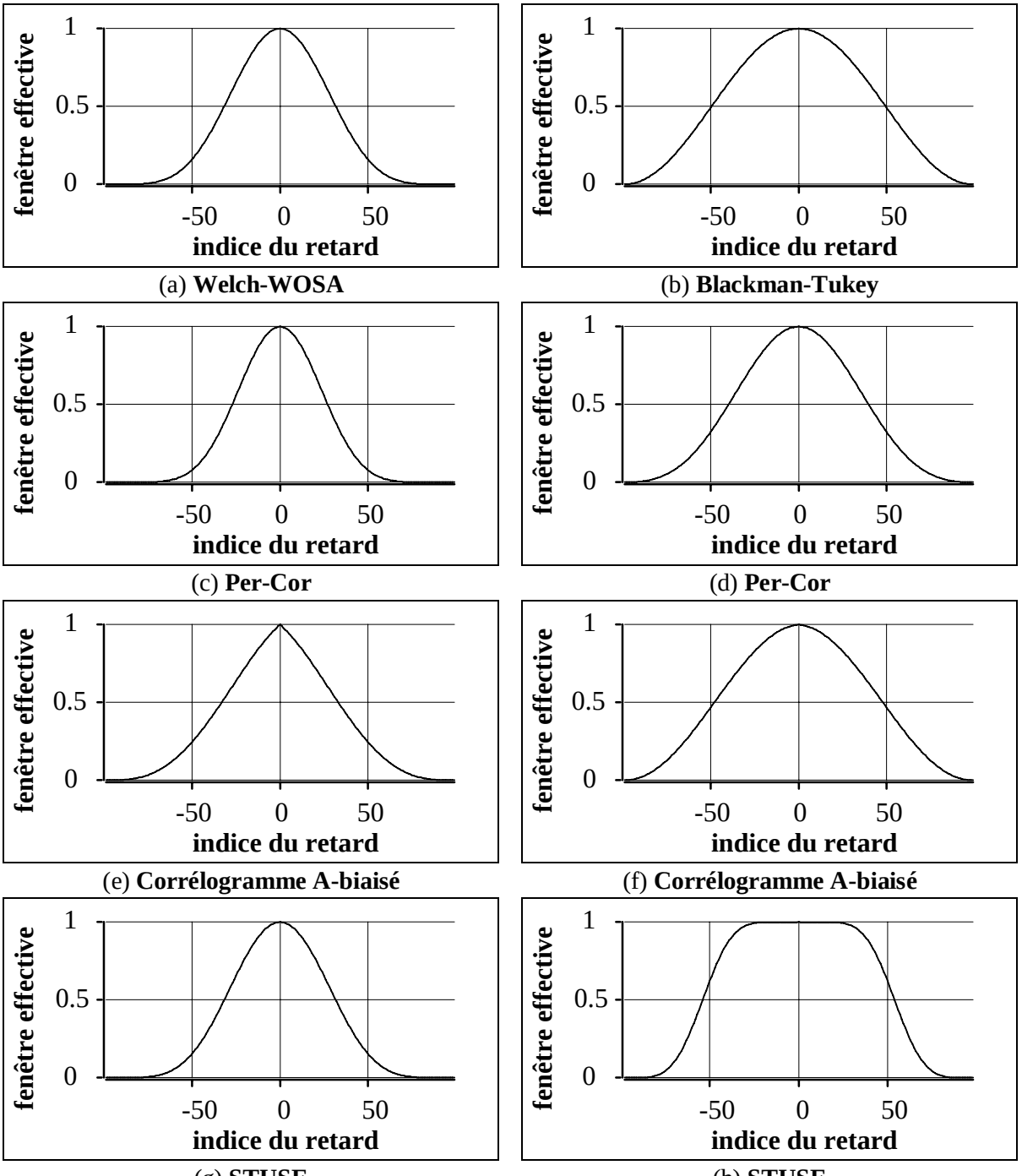
Comparaison des fenêtres effectives et spectrales de Per-Cor avec celles des autres méthodes.
Cas général :

- pour $\boldsymbol{L_{pc}=M_{pc}}$, les fenêtres spectrales sont proches des fenêtres spectrales obtenues avec la méthode Welch-WOSA pour $L_{ww}=L_{pc}$ et $h_{ww}=h_{pc}$, dont les lobes secondaires seraient lissés, sans lobes secondaires négatifs assurant ainsi la positivité du spectre et ceci quelle que soit la fenêtre linéaire (sauf la fenêtre linéaire de Bartlett) (cf. Figure 3.4-III (a) et (c)). Les bandes statistiques, les variances normalisées et les produits stabilité-bande-durées sont alors du même ordre de grandeur (cf. Tab. 3.4-I). **Cette configuration offre l'intérêt d'avoir des fenêtres spectrales dont les lobes secondaires sont lissés et d'amplitudes faibles**, cela peut faciliter l'interprétation des spectres, le biais n'étant plus dépendant de la position des différents lobes secondaires par rapport au spectre.

- pour $\boldsymbol{L_{pc}>>M_{pc}}$, les fenêtres spectrales sont proches des fenêtres spectrales obtenues avec la méthode Blackman-Tukey pour $M_{bt}=M_{pc}$ et $g_{bt}=g_{pc}$ (cf. Figure 3.4-III (b) et (d)). Les bandes statistiques, les variances normalisées et les produits stabilité-bande-durées sont alors du même ordre de grandeur (cf. Tab. 3.4-I). **Cette configuration n'offre donc pas d'intérêt particulier**.
- pour $2\boldsymbol{M_{pc}} > \boldsymbol{L_{pc}} > \boldsymbol{M_{pc}}$, les fenêtres spectrales ont des allures intermédiaires entre les fenêtres spectrales avec la méthode Welch-WOSA pour $L_{ww}=L_{pc}$, $h_{ww}=h_{pc}$ et les fenêtres spectrales obtenues avec la méthode Blackman-Tukey pour $M_{bt}=M_{pc}$ et $g_{bt}=g_{pc}$. En règle générale : les lobes secondaires sont de moins en moins lissés et de plus en plus nombreux, le niveau des lobes secondaires augmente, le lobe principal diminue en surface, la bande statistique diminue, le facteur de fuite d'énergie augmente et le facteur de décroissance des lobes secondaires passe de celui de la fenêtre quadratique à celui de la fenêtre linéaire. On remarque également que des lobes négatifs apparaissent. La bande statistique, la variance normalisée et le produit stabilité-bande-durée sont alors compris entre celles obtenues avec la méthode Welch-WOSA et celles obtenues avec la méthode Blackman-Tukey (cf. Tab. 3.4-I). **Cette configuration offre l'intérêt d'avoir des fenêtres spectrales intermédiaires entre les deux méthodes**, cependant les résultats obtenus sont très dépendants de la taille des segments par rapport au support de corrélation et par rapport aux fenêtres d'apodisation, il est alors difficile de prévoir a priori l'allure exacte de la fenêtre spectrale. Il a par ailleurs été montré (paragraphe 3.3.3) que le produit stabilité-bande-durée, donc le compromis résolution / variance, était moins bon que dans le cas où $L_{pc}=M_{pc}$. Cependant, lorsque L_{pc} reste inférieur à 10 % du nombre de points du signal, cette détérioration n'est pas très sensible.

Cas du Corrélogramme A-biaisé :
- si la fenêtre linéaire est rectangulaire et $M_{ca}=N$, la fenêtre spectrale correspond à la fenêtre spectrale obtenue avec la méthode Blackman-Tukey pour $M_{bt}=M_{ca}$ et une fenêtre linéaire de Bartlett.
- pour les autres fenêtres linéaires : pour $M_{ca}=N$, l'allure de la fenêtre spectrale est proche de celle de la fenêtre spectrale obtenue avec la méthode Blackman-Tukey pour $M_{bt}=M_{ca}$ et une fenêtre linéaire de Bartlett dont les lobes secondaires seraient lissés. Le pied de pic du lobe principal est relativement important par rapport à celui des fenêtres spectrales des autres méthodes (dans le cas où $M=N$, cf. Figure 3.4-III). L'atténuation du niveau de la fenêtre spectrale pour les fréquences éloignées du lobe principal est également moins bonne et peut générer des problèmes de biais si la dynamique du spectre est importante.

Lorsque le rapport N/M_{ca} augmente, les lobes secondaires sont de moins en moins lissés, mais l'allure reste sensiblement proche du cas $M_{ca}=N$, tant que $N<4M_{pc}$. Ensuite, la fenêtre spectrale tend vers la fenêtre spectrale obtenue avec la méthode Blackman-Tukey pour $M_{bt}=M_{ca}$ et $g_{bt}=g_{ca}$.



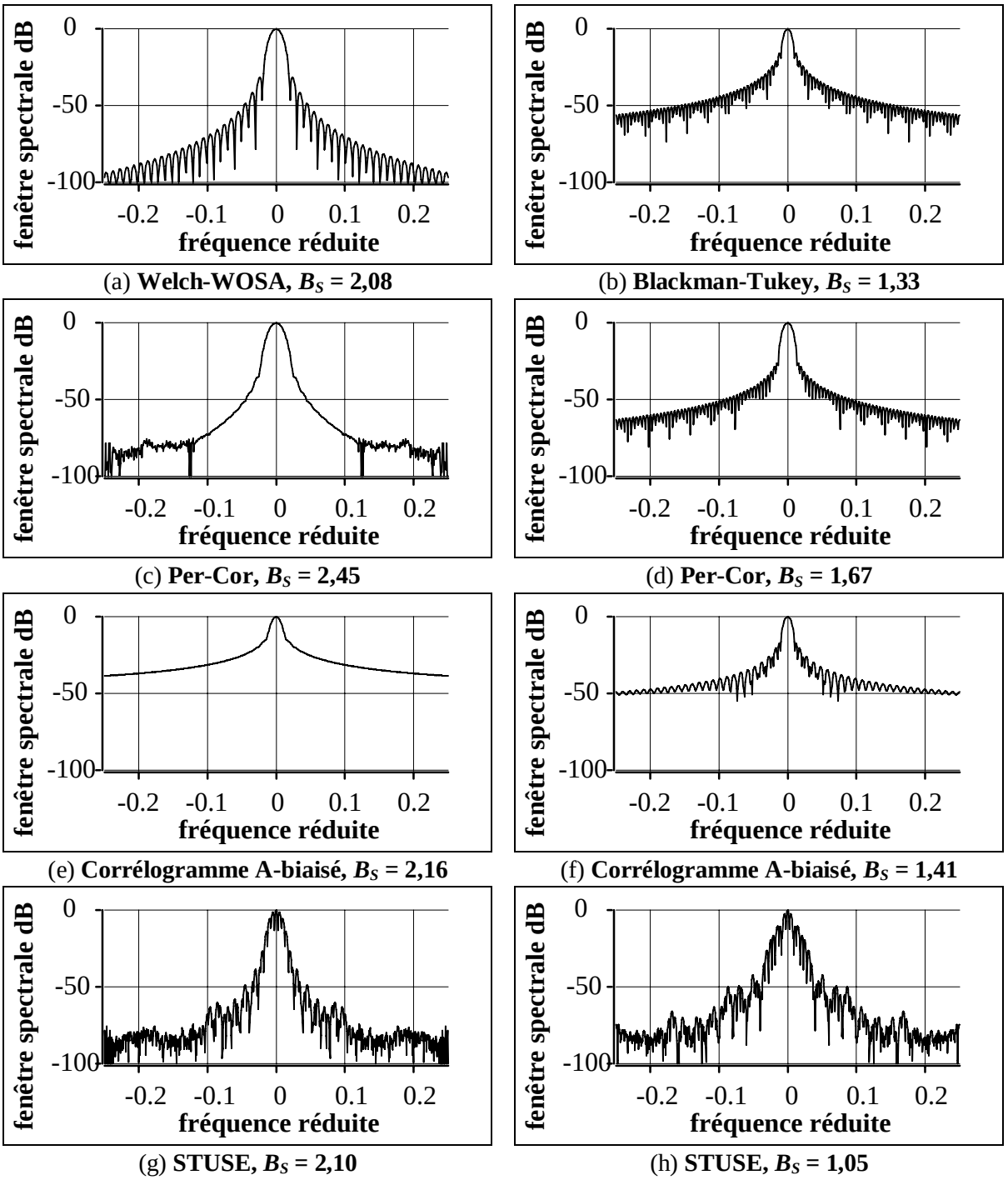
(a) **Welch-WOSA** (b) **Blackman-Tukey**

(c) **Per-Cor** (d) **Per-Cor**

(e) **Corrélogramme A-biaisé** (f) **Corrélogramme A-biaisé**

(g) **STUSE** (h) **STUSE**

Figure 3.4-II : **fenêtres effectives de différentes méthodes à support fixé, *M*=100.** Les fenêtres effectives $q[m]$ sont normalisées par leur maximum $q[0]$. (a) Welch-WOSA : fenêtre de Hanning, $L_{ww}=M=100$, (b) Blackman-Tukey : fenêtre de Hanning, $M_{bt}=M=100$, (c) Per-Cor : fenêtres de Hanning, $L_{pc}=M_{pc}=M=100$, (d) Per-Cor : fenêtres de Hanning, $L_{pc}=2M_{pc}=2M=200$, (e) Corrélogramme A-biaisé : fenêtre de Hanning, $M_{ca}=M=N$, (f) Corrélogramme A-biaisé : fenêtre de Hanning, $M_{ca}=M=N/10$, (g) STUSE : fenêtre de Hanning, $L_{st}=78$, $dec\%=15$, $Q=2$, (h) STUSE : fenêtre de Hanning, $L_{st}=51$, $dec\%=25$, $Q=4$.



(a) **Welch-WOSA, B_S = 2,08** (b) **Blackman-Tukey, B_S = 1,33**

(c) **Per-Cor, B_S = 2,45** (d) **Per-Cor, B_S = 1,67**

(e) **Corrélogramme A-biaisé, B_S = 2,16** (f) **Corrélogramme A-biaisé, B_S = 1,41**

(g) **STUSE, B_S = 2,10** (h) **STUSE, B_S = 1,05**

Figure 3.4-III : **modules des fenêtres spectrales** correspondant aux fenêtres effectives de la Figure 3.4-II. L'échelle est en dB et est normalisée par le maximum de la fenêtre spectrale. Les bandes statistiques normalisées par le bin fréquentiel ($1/MT_e$) sont indiquées sous les courbes. La période d'échantillonnage est égale à 1 s.

Comparaison des fenêtres effectives et spectrales de la méthode STUSE avec celles des autres méthodes :

- si la fenêtre quadratique h_{pc} n'est pas rectangulaire :

- lorsque le support non biaisé M_{nb} de la fenêtre effective est nul (ce qui implique que Q et le décalage sont faibles) : l'allure de la fenêtre spectrale est proche de celle de la fenêtre spectrale obtenue avec la méthode Welch-WOSA pour $L_{ww}=M_{st}$ (support total de la fenêtre effective) et $h_{ww}=h_{st}$. Cependant il y a apparition de lobes secondaires négatifs et en particulier les deux premiers, plus le décalage et/ou Q

sont grands plus le lobe principal devient faible en largeur de bande comme en surface par rapport au lobe principal de Welch-WOSA, à la place des lobes secondaires positifs et négatifs apparaissent. Si on compare l'enveloppe de ces premiers lobes négatifs, elle correspond approximativement au lobe principal de Welch-WOSA. Les lobes secondaires plus éloignés sont peu modifiés (cf. Figure 3.4-III (a) et (g)). La bande statistique qui était proche de celle de la fenêtre Welch-WOSA, diminue.
- lorsque M_{nb} devient positif et augmente, l'évolution de la fenêtre spectrale est dans un premier temps identique (toujours pour un support total constant, cf. Figure 3.4-III (a), (g) et (h)). Cependant dès que M_{nb} devient supérieur à environ 25% du support total, la fenêtre spectrale tend vers une allure indépendante de la fenêtre quadratique utilisée (cf. paragraphe 3.3.4) avec pour caractéristiques :
- une bonne atténuation des lobes secondaires loin du lobe principal,
- un lobe principal faible en largeur de bande comme en surface,
- des premiers lobes secondaires d'amplitude importante, le premier étant négatif,
- une bande statistique et une bande à -3dB faibles,
- des fuites d'énergies importantes, mais concentrées dans les premiers lobes secondaires,
- le cas de la fenêtre quadratique rectangulaire a été étudié paragraphe 3.3.4, il ne permet pas d'obtenir des fenêtres effectives ayant des caractéristiques intéressantes par rapport aux autres méthodes.

Pour la méthode STUSE, l'intérêt principal réside dans la possibilité d'obtenir des fenêtres effectives avec un support non biaisé M_{nb}. Dans le cas où M_{nb} est nul, les fenêtres spectrales offrent des premiers lobes secondaires élevés, certains négatifs, bien que l'atténuation des autres lobes secondaires soit bonne. La surface globale des premiers lobes (en module) est de l'ordre de celle du lobe principal que l'on obtiendrait avec la méthode Welch-WOSA pour un support de fenêtre effective identique ou à bande statistique identique. La variance n'étant pas particulièrement améliorée (cf. paragraphe 3.4.2.1), les fenêtres n'apportent pas d'améliorations sensibles par rapport au cas Welch-WOSA en ce qui concerne l'atténuation des lobes secondaires, la présence de lobes négatifs importants ne facilitant pas l'interprétation des spectres.

Dans le cas où l'on désire obtenir **une estimation "non biaisée"** avec $M_{nb}>0$ (cf. paragraphe 2.5.4) : la méthode ne peut être comparée qu'avec la méthode Blackman-Tukey pour une fenêtre linéaire rectangulaire, seule autre possibilité d'obtenir une fenêtre effective constante sur un certain nombre de points.

Pour une fenêtre linéaire rectangulaire avec la méthode Blackman-Tukey la fenêtre spectrale a, tout comme les fenêtres spectrales de la méthode STUSE, des lobes secondaires négatifs. La fenêtre effective est égale à la fenêtre linéaire, son support "non biaisé" est donc le support total de la fenêtre linéaire. L'intérêt de la méthode STUSE est de permettre d'obtenir un support non biaisé inférieur au support total de la fenêtre effective ce qui se traduit sur la fenêtre spectrale par une meilleure atténuation des lobes secondaires éloignés du lobe principal, au prix d'une élévation des premiers lobes secondaires. Le véritable support de l'autocorrélation n'étant jamais connu de façon précise, il ne peut être qu'estimé, en outre les signaux sont souvent mixtes, constitués de plusieurs signaux de supports de corrélation différents, il est alors difficile de choisir correctement le support de la fenêtre effective qui doit être non biaisé. Les fenêtres spectrales de la méthode STUSE permettent de mieux contrôler l'influence des différentes structures du spectre. Deux structures éloignées fréquentiellement s'influenceront mutuellement moins qu'avec la méthode Blackman-Tukey dont les lobes secondaires éloignés du lobe principal sont plus élevés.

En ce qui concerne la variance de l'estimateur, tout dépend de la bande statistique de la fenêtre spectrale :
- lorsque le support de la fenêtre effective est identique pour les deux fenêtres, ce qui implique que le support non biaisé de la fenêtre effective STUSE est inférieur à celui de la fenêtre effective rectangulaire de Blackman-Tukey, la bande statistique STUSE est supérieure à celle de Blackman-Tukey, la variance est alors meilleure dans le cas de STUSE.

- lorsque le support non biaisé de la fenêtre effective STUSE est égal au support de la fenêtre rectangulaire Blackman-Tukey, le support total de la fenêtre effective STUSE est alors supérieur à celui de Blackman-Tukey. Plus le support total de la fenêtre effective STUSE est élevé, plus la bande statistique STUSE va diminuer, dès qu'elle sera inférieure à celle de Blackman-Tukey, la variance STUSE sera supérieure. En général, cependant si le support de la fenêtre effective STUSE reste inférieur à deux fois le support non biaisé, la différence de variance entre les deux estimateurs reste limitée.

3.4.4. Conclusion

Lorsque le support de la fenêtre effective est très inférieur au nombre de points du signal
Il a été montré dans le paragraphe 3.4.2.1 que le produit stabilité-bande-durée était toujours proche de 1 quelle que soit la méthode. Ceci implique qu'à bande statistique égale, soit pour des supports de fenêtre effective différents suivant les méthodes et les paramètres de cette méthode, la variance sera également identique. Les performances des estimateurs dépendent alors entièrement de la fenêtre spectrale. Il est en général plus intéressant de raisonner dans ces conditions à bande statistique identique, ce qui implique une résolution identique pour des signaux aléatoires à puissance moyenne finie. Il est alors préférable d'atténuer l'influence des lobes secondaires de la fenêtre spectrale, même au prix d'une faible augmentation de la surface du lobe principal ou de la bande à -3dB. De ce point de vue, la méthode qui donne les meilleurs résultats est **la méthode Welch-WOSA** ou la méthode Per-Cor dans le cas où $L_{pc}=M_{pc}$ (cf. Figure 3.4-IV). La méthode Welch-WOSA est d'autant plus intéressante que la fenêtre spectrale n'a pas de lobes négatifs, ce qui assure la positivité du spectre. Les fuites d'énergie sont faibles, l'estimation à une fréquence donnée ne sera que très faiblement biaisée par les structures du spectre situées loin de cette fréquence. Le biais est principalement dû aux structures de la fréquence d'étude, ce qui généralement facilite l'interprétation des spectres. Il peut également être intéressant de raisonner à partir du support de la fenêtre effective (en relation avec le support de corrélation du signal). Dans ce cas les différences entre les fenêtres sont plus marquées (cf. paragraphe 3.4.3), mais la méthode Welch-WOSA reste celle qui atténue au mieux les lobes secondaires, et bien que donnant des bandes statistiques généralement supérieures aux autres méthodes, la variance est inférieure.

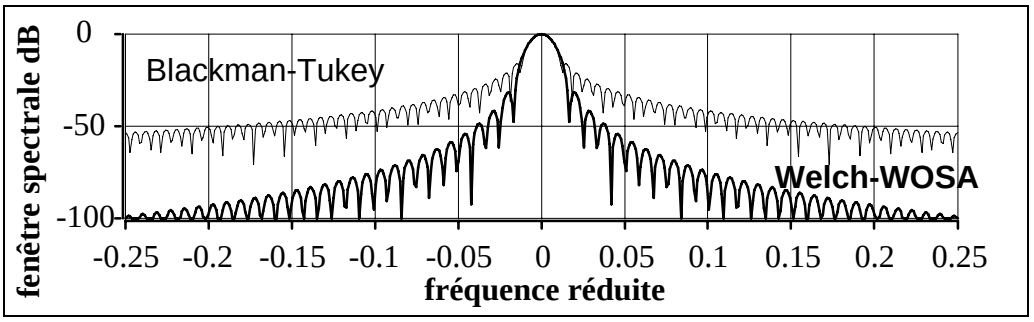


Figure 3.4-IV : **comparaison des modules des fenêtres spectrales des méthodes Welch-WOSA et Blackman-Tukey à bande statistique égale** à 0,02 Hz (période d'échantillonnage égale à 1 s). Les paramètres de la méthode Welch-WOSA (courbe en trait épais) sont : une fenêtre quadratique de **Blackman**, une taille de segments de 120 points. Les paramètres de la méthode Blackman-Tukey (courbe en trait fin) sont : une fenêtre linéaire de **Blackman**, un support de fenêtre linéaire de 82 points.

Lorsque le support de la fenêtre effective est proche du nombre de points du signal
Ce cas se présente lorsque la résolution de l'estimation le nécessite. Il est alors plus difficile de raisonner à partir de la bande statistique de la fenêtre spectrale car les différences de support de la

fenêtre effective qui en découlent entre les différentes méthodes, vont avoir un rôle prépondérant sur la variance de l'estimateur, d'autant plus que certaines méthodes ne permettent pas d'atteindre les mêmes résolutions. Welch-WOSA par exemple n'est plus très adaptée lorsque le support de la fenêtre effective est très proche du nombre de points du signal tant au point de vue résolution que variance. Dans ces conditions il est préférable de raisonner à partir du support de la fenêtre effective avec toutes les conséquences qui en résultent sur les compromis résolution, variance, produit stabilité-bande-durée et fenêtre spectrale. La méthode donnant les meilleurs compromis est alors le Corrélogramme A-biaisé avec une taille des segments maximale, une fenêtre linéaire de Blackman-Harris 4T, de Blackman ou de Bartlett. Ceci est d'autant plus vrai que le support de la fenêtre effective est proche du nombre de points. L'inconvénient est que le pied du lobe principal de la fenêtre spectrale est large et peu atténué en amplitude par rapport aux autres méthodes. Lorsqu'une fréquence pure d'émergence importante par rapport au bruit est présente, le pied du pic associé à cette fréquence pure est important. Le voisinage du pic est biaisé et la détection de fréquences pures de plus faible émergence peut devenir difficile.

La méthode Blackman-Tukey offre des compromis intermédiaires entre ceux de la méthode Welch-WOSA et ceux du Corrélogramme A-biaisé, que ce soit pour la variance, la résolution fréquentielle ou la forme de la fenêtre spectrale. Il faut cependant être particulièrement attentif à la positivité du spectre, les lobes négatifs de la fenêtre spectrale étant assez importants.

Chaque méthode a ses particularités, ses avantages et ses inconvénients. Toutes ces différences peuvent être utilisées pour interpréter plus aisément le spectre. Il s'agit non seulement de faire varier les paramètres de chaque méthode, mais aussi de les confronter entre elles.

Chapitre 4

La pré-analyse

La stratégie d'analyse décrite dans le chapitre 1 se décompose en plusieurs phases distinctes : la pré-analyse, la phase d'analyses spectrales à partir des estimateurs de type Fourier, la phase d'analyses complémentaires et enfin l'interprétation finale et la confrontation avec les informations *a priori*. Cette démarche a été mise en évidence grâce à des scénarios qui décrivent toute la démarche d'analyse d'un expert pour un signal réel donné. Ils ont également permis d'envisager les critères nécessaires pour aider l'interprétation.

Les scénarios ont permis de souligner l'importance de la pré-analyse. Cette phase débute la démarche complète et a trois objectifs :

- détecter des problèmes pour l'analyse (mauvais échantillonnage, non-stationnarité, changement des propriétés statistiques au cours du temps…),
- émettre les premières hypothèses sur la nature du signal (signal quasi-périodique, bruit coloré, présence de fréquences pures…),
- déterminer la méthode et les paramètres de la première analyse spectrale, l'analyse primaire.

La pré-analyse est constituée d'étapes successives et indépendantes. L'enchaînement des étapes est fixé *a priori* quel que soit le signal. Bien évidemment, les conclusions de cette pré-analyse sont propres à chaque signal. A chacune des étapes de la pré-analyse correspond un ou plusieurs critères. Les scénarios sur signaux réels ont mis en évidence les étapes suivantes :

- **Signal temporel** : à partir de la visualisation du signal temporel, des non-stationnarités flagrantes, des saturations du signal, des périodicités marquées peuvent être détectées. Un premier critère a été mis au point pour détecter des saturations : s'il y a deux points consécutifs du signal égaux tous les deux au maximum (ou au minimum), des risques de saturations sont vraisemblables.

- **Test d'échantillonnage de Shannon** : à partir d'une estimation du spectre très « lissée », du type Welch-WOSA avec un nombre de segments important, on cherche à détecter si le spectre décroît lorsque la fréquence tend vers la fréquence d'échantillonnage sur deux. Si ce n'est pas le cas, il y a des risques de recouvrement qui peuvent être dus à l'absence de filtre anti-repliement.

- **Détection de non-stationnarités, non-gaussianités, asymétries en temps**. Il s'agit d'une étape proposée par J.L. Lacoume et G. Lejeune. Elle consiste à découper le signal en segments (ne se recouvrant pas) et d'estimer pour chaque segment les moments d'ordre 2, 3 et 4. Le moment d'ordre 2 représente la puissance du signal et permet de détecter des non-stationnarités d'ordre 2. Le moment d'ordre 3 représente l'asymétrie, s'il est nul c'est que la densité de probabilité du signal est symétrique. Le moment d'ordre 4 estimé par le kurtosis est représentatif du caractère non-gaussien d'un signal. Pour un signal gaussien, le kurtosis est nul. Un kurtosis non nul est donc caractéristique d'un signal non-gaussien. Les différents moments sont estimés à partir du signal normalisé de façon à être centrée et de variance unité pour faciliter l'analyse des résultats. Des écart-types de référence pour la puissance, l'asymétrie, le kurtosis sont calculés sur l'ensemble du signal en prenant la racine carrée de la variance respectivement du module carré, de la puissance 3, de la puissance 4 du signal normalisé. Les écart-types de référence par segment sont alors obtenus en divisant ce résultat par la racine carrée de la taille de chaque segment. Si le signal est stationnaire, symétrique ou gaussien, les variations respectives de la puissance glissante, de l'asymétrie ou du kurtosis sont de l'ordre de ces écart-types. Cette étape ne sera pas détaillée plus précisément dans ce document.

- **Détection de non-stationnarités dans le plan temps-fréquence** : l'objectif n'est pas de faire une analyse fine dans le plan temps-fréquence, mais de détecter des non-stationnarités importantes et rédhibitoires pour une analyse stationnaire. Une méthode simple et classique d'analyse temps-fréquence est le spectrogramme (ou périodogramme glissant). L'étape consiste alors simplement à visualiser la représentation temps-fréquence obtenue par le spectrogramme pour détecter les non-stationnarités importantes.
- **Analyse de la fonction d'autocorrélation** : à partir des estimateurs biaisés et non biaisés de la fonction d'autocorrélation (cf. paragraphe 2.3). L'objectif est d'observer la forme de l'autocorrélation pour déterminer les périodicités prépondérantes du signal. Si le signal est constitué d'une série d'harmoniques dans un bruit blanc, des maxima à la période du fondamental apparaissent sur l'autocorrélation et ceci même si le fondamental est absent. De plus, l'influence du bruit blanc est uniquement localisée sur le retard nul de l'autocorrélation. Il est alors possible de déterminer aisément si le signal est périodique et sa période éventuelle et, dans ce cas, le rapport signal sur bruit. D'autres périodicités marquées peuvent apparaître clairement sur l'autocorrélation. Par ailleurs, il est visuellement possible d'estimer le support de corrélation du signal (il est égal à la taille du signal si le signal est périodique). L'ensemble des informations ainsi déterminées sert à émettre une première hypothèse sur le signal : signal périodique dans du bruit, bruit coloré avec estimation du support de corrélation…

Nous détaillons dans ce chapitre les critères associés aux étapes : test d'échantillonnage de Shannon, détection de non-stationnarités dans le plan temps-fréquence, analyse de l'autocorrélation. L'étude prend en compte la différence de comportement des critères en fonction de la nature du signal : déterministe ou aléatoire, périodique ou non, stationnaire ou non. Les critères ont été validés sur les signaux de la base ASPECT.

4.1. Test d'échantillonnage de Shannon

L'objectif est de détecter des problèmes éventuels de recouvrement dus en général à l'absence d'un filtre anti-repliement ou tout du moins à des performances insuffisantes de celui-ci. Il s'agit alors de :
- déterminer si le signal est correctement échantillonné,
- déterminer la dernière fréquence contenant de la puissance significative,
- vérifier la présence d'un filtre anti-repliement.

Une première approche pourrait être d'utiliser la mesure d'Heisenberg qui est une mesure de l'épanouissement spectral [GAB46]. Pour un signal réel, dont l'ensemble du spectre (fréquences positives et négatives) est centré sur la fréquence nulle, la mesure d'Heisenberg s'écrit pour un signal à énergie finie :

$$\Delta\nu^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 \left| X(\nu) \right|^2 \, \mathrm{d}\nu}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(\nu) \right|^2 \, \mathrm{d}\nu} \qquad (4.1\text{-}1)$$

où $X(\nu)$ représente la TF du signal à temps continu.

La mesure d'Heisenberg prend en compte la dispersion des différentes composantes spectrales en fonction de leur DSP pour estimer la bande équivalente du signal et l'épanouissement spectral. Prenons par exemple le cas simple de deux sinusoïdes de même amplitude A et de fréquence respectives ν_0 et ν_1 ($\nu_0<\nu_1$) en n'en considérant qu'une durée finie. La mesure d'Heisenberg est alors

égale à $\Delta\nu^2 = (\nu_0^2+\nu_1^2)/2$. D'où $\Delta\nu/2 < \nu_1$, $\Delta\nu/2$ n'est pas représentatif de la dernière fréquence contenant de la puissance significative ($\Delta\nu$ représente la bande équivalente sur les fréquences positives et négatives, $\Delta\nu/2$ sur les fréquences positives uniquement). $\Delta\nu/2$ ne permet pas de déterminer si ν_1 est trop proche de la fréquence de Shannon définie par la fréquence d'échantillonnage sur deux. Cette mesure ne répond pas à notre problématique. Dans un cas général, le spectre doit diminuer de façon conséquente par rapport au reste du spectre lorsque la fréquence tend vers la fréquence de Shannon. Dans le cas contraire, des recouvrements peuvent être dus à l'absence d'un filtre anti-repliement. Nous devons développer un critère qui s'attache à détecter la dernière fréquence contenant de la puissance significative par rapport au reste du signal et non fournir une estimation de la richesse spectrale du signal. Néanmoins à titre de comparaison, nous indiquerons sur les figures présentant les résultats, la bande d'Heisenberg $\Delta\nu$ estimée.

Plusieurs catégories de risques peuvent être définies. Si le signal est constitué de fréquences pures dans un bruit coloré, il s'agit de différencier les risques de recouvrement liés aux fréquences pures et ceux liés au bruit. A cette fin, nous avons mis au point trois critères différents. L'idée commune aux trois critères est de détecter la plus haute fréquence contenant de la puissance significative à partir d'une estimation du spectre et en fonction d'une référence par rapport à l'ensemble du spectre. Le critère est décliné suivant trois cas pour s'adapter aux différents types de signaux. En l'occurrence, il s'agit d'utiliser soit l'échelle linéaire pour s'intéresser aux motifs bande étroite telles que les fréquences pures, soit l'échelle décibel pour mettre en valeur la contribution des motifs plus large bande, soit une estimation du fond de spectre qui permet de rejeter les motifs bande étroite émergents afin de s'intéresser uniquement à la décroissance du fond.

Soit $\hat{\gamma}(\nu_k)$ une estimation du spectre (obtenue en fréquence discrète pour k allant de 0 à L).
Les 3 critères d'évaluation des risques de recouvrement se déclinent de la façon suivante :

1. Le premier consiste à déterminer la plus haute fréquence pour laquelle la densité spectrale de puissance est supérieure ou égale à la moyenne du spectre en échelle linéaire. Cette fréquence est dénommée fréquence maximale de « puissance linéaire » ν_{lin} :

$$\nu_{lin} = \max\left\{ \nu_k \text{ tel que } \hat{\gamma}(\nu_k) \geq \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1}\hat{\gamma}(\nu_j) \right\} \qquad (4.1\text{-}2)$$

La moyenne du spectre est représentative de la puissance du signal et sert de référence pour évaluer le comportement de la fin du spectre. S'il y a des fréquences pures importantes, leur influence en échelle linéaire est également importante. La moyenne du spectre représente alors principalement la puissance de ces fréquences pures ou tout du moins des motifs émergents du fond. Si la fréquence maximale de puissance linéaire est proche de la fréquence de Shannon, il est possible qu'une fréquence pure en soit proche. Si un filtre anti-repliement a été appliqué, il n'a pas suffit à filtrer de façon conséquente cette dernière fréquence pure, signe d'un risque de recouvrement de fréquences pures. Dans le cas où il n'y a pas de fréquences pures importantes, mais que ν_{lin} est proche de la fréquence de Shannon, il reste de la « puissance linéaire » proche de la fréquence de Shannon et donc un risque de recouvrement important. La fréquence d'alerte ν_a a été fixée à 90 % de la fréquence de Shannon. En effet, si un filtre anti-repliement a été appliqué, tout motif doit être suffisamment filtré au-delà de cette fréquence. Si $\nu_{lin} > \nu_a$, alors l'information symbolique : *risque de recouvrement de puissance linéaire* est associée au signal. Sinon, l'information symbolique : *pas de problème de recouvrement de puissance linéaire* est retenue.

2. Le deuxième critère consiste à déterminer la plus haute fréquence pour laquelle la densité spectrale de puissance en échelle décibel est supérieure ou égale à la moyenne du spectre en échelle décibel. Cette fréquence est dénommée : fréquence maximale de « puissance décibel » ν_{dB} :

$$\nu_{dB} = \max\left\{ \nu_k \text{ tel que } 10\log_{10}\left(\hat{\gamma}(\nu_k)\right) \geq \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1} 10\log_{10}\left(\hat{\gamma}(\nu_j)\right) \right\} \tag{4.1-3}$$

La présence de fréquences pures importantes influe de façon importante sur la moyenne du spectre en échelle linéaire. Or on s'intéresse également au risque de recouvrement de motifs moins importants en particulier du fond de spectre (associé en général au bruit aléatoire coloré). Le passage en décibel permet d'atténuer la dynamique pour permettre à des motifs de moindre importance d'apparaître. La conséquence est de limiter l'influence des fréquences pures et des motifs émergents en échelle linéaire pour se concentrer sur le fond de spectre. Si $\nu_{dB} > \nu_a$, il y a des risques de recouvrement à l'échelle décibel, donc en particulier du fond de spectre. L'information symbolique : *risque de recouvrement de puissance décibel* est associée au signal. Sinon, l'information symbolique : *pas de problème de recouvrement de puissance décibel* est retenue.

3. Le troisième critère s'attache à se concentrer sur le fond de spectre lui-même, en excluant l'influence des fréquences pures éventuelles et des motifs bande étroite émergents. Pour ce faire, une première étape consiste à estimer ce fond de spectre. La méthode retenue est le filtrage morphologique. On définit la fréquence maximale de « puissance du fond » ν_{fond} comme étant la plus haute fréquence pour laquelle l'estimation du fond de spectre $\hat{\gamma}_f(\nu)$ est supérieure ou égale à la moyenne de l'estimation du fond de spectre (en échelle linéaire) :

$$\nu_{fond} = \max\left\{ \nu_k \text{ tel que } \hat{\gamma}_f(\nu_k) \geq \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1} \hat{\gamma}_f(\nu_j) \right\} \tag{4.1-4}$$

Sur l'estimation du fond de spectre, l'observation du spectre proche de la fréquence de Shannon fait très bien apparaître la zone de coupure du filtre anti-repliement. Lorsque celui-ci est présent, de même que pour les autres critères, le filtre anti-repliement atténue le spectre dans les hautes fréquences de façon significative par rapport à la puissance globale du spectre. Si $\nu_{fond} > \nu_a$, il y a des risques de recouvrement du fond de spectre, ce qui implique que le filtre anti-repliement n'a pas été détecté. L'information symbolique : *filtre anti-repliement non détecté*, est associée au signal. Sinon, l'information symbolique : *filtre anti-repliement détecté* est retenue.

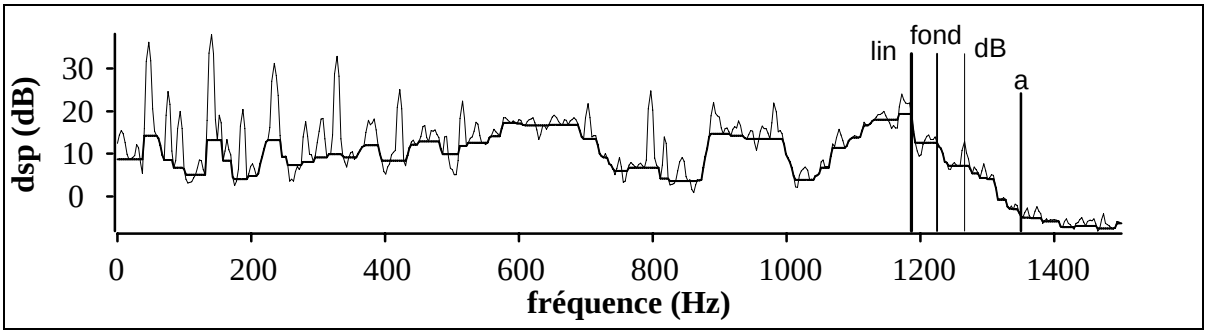
Il ne s'agit pas d'avoir une estimation précise du fond de spectre, mais de limiter l'influence des fréquences pures quelle que soit la dynamique du fond. La méthode retenue pour estimer le fond de spectre dans les conditions précitées est le filtrage morphologique [SER82], [PIE97], [PRIEUR95-2], [RED89]. *Nous ne décrivons dans ce paragraphe que brièvement la notion de fond de spectre et la définition du filtrage morphologique, ces notions étant plus précisément abordés dans le chapitre 5, paragraphe 5.2*. Le filtrage morphologique consiste à appliquer une ouverture de taille *M* qui permet d'éliminer tous les pics émergents d'une taille supérieure à 2*M*. Pour ces pics, la ligne de fond passe au niveau du pic dont la largeur est égale à 2*M*. Pour les autres points du spectre, la ligne de fond reste égale au spectre. Rappelons qu'en sortie de l'estimateur, les fréquences pures, estimées par un motif ayant la forme de la fenêtre spectrale, constituent des motifs émergents du fond dont la forme est celle du lobe principal de la fenêtre spectrale. Pour éliminer l'influence des fréquences pures, la taille de l'ouverture doit donc être fixée au premier zéro de la fenêtre spectrale. Ceci se traduit en général par une taille de 1 à 2 (sans *zero-padding*). L'ouverture est suivie d'une fermeture de même taille pour éliminer les perturbations de taille inférieure à 2*M*. L'objectif de la fermeture est d'éliminer l'influence des petites perturbations « rentrantes » du fond de spectre qui ne sont pas représentatives de la répartition globale de la puissance. Ainsi une estimation grossière du fond est générée.

Choix de l'estimation spectrale $\hat{\gamma}(\nu)$

L'objectif de cette estimation n'est pas d'avoir une estimation la plus précise possible du spectre, mais de pouvoir comparer la fin du spectre avec le reste. En particulier, il n'est pas nécessaire d'avoir une bonne résolution qui aurait pour objectif de bien séparer les fréquences pures et de les faire émerger du fond. En effet, même avec une mauvaise résolution l'énergie totale de la fréquence pure est conservée lorsqu'on considère l'ensemble de la fenêtre spectrale qui lui est associée (cf. paragraphe 2.4.5). Globalement, la puissance du signal est conservée. Par contre, une variance élevée va gêner l'interprétation en ajoutant sur l'ensemble du spectre du bruit d'estimation. C'est pourquoi, une estimation « très lissée » est la plus adaptée. Dans ces conditions, la méthode Welch-WOSA offre le meilleur compromis (cf. paragraphe 3.4.4). Une fenêtre de Blackman, avec le décalage adapté et optimisé pour minimiser le résidu, est choisie pour offrir un compromis où les lobes secondaires sont bien atténués tout en limitant l'influence des différents motifs sur la fin du spectre. La taille des segments, choisie de façon à minimiser la variance, est telle que le nombre de segments soit conséquent. Etant donné la taille des signaux réels de la banque (>50 000 points), une taille de segments par défaut de 1024 points semble satisfaisante. Il peut être nécessaire de l'adapter si le nombre de points est inférieur ou très supérieur. Il est également possible de fixer la variance normalisée (de l'ordre de 0,01), puis de calculer simplement la taille des segments par l'approximation du paragraphe 3.3.1, équation 3.3-7. Il faut cependant que la résolution ne soit pas trop dégradée. Il est également préférable d'avoir une estimation du spectre du signal centré pour que la moyenne du signal n'influence pas les critères.

Ces différents critères s'attachent à étudier le comportement du spectre pour les fréquences proches de la fréquence de Shannon et non à fournir une bande équivalente. Les résultats donnent malgré tout une idée de la bande utile du signal puisque les plus hautes fréquences contenant de la puissance significative sont détectées. La fréquence de coupure du filtre anti-repliement (lorsqu'il est présent), ne correspond pas toujours aux fréquences détectées, notamment si le spectre ne contient avant filtrage que de la puissance en basse fréquence. Ce peut être par exemple le cas d'un signal sur-échantillonné. Par contre, les critères permettent de détecter les risques de repliement, en particulier dus à l'absence ou à une atténuation insuffisante du filtre anti-repliement.
Commentons quelques exemples sur des signaux réels :

- Le signal PEG-SH1-a11 de mesure des vibrations d'une station d'huile fourni par le CTSN (50 000 points, fréquence d'échantillonnage de 3000 Hz, cf. Figure 4.1-I) :

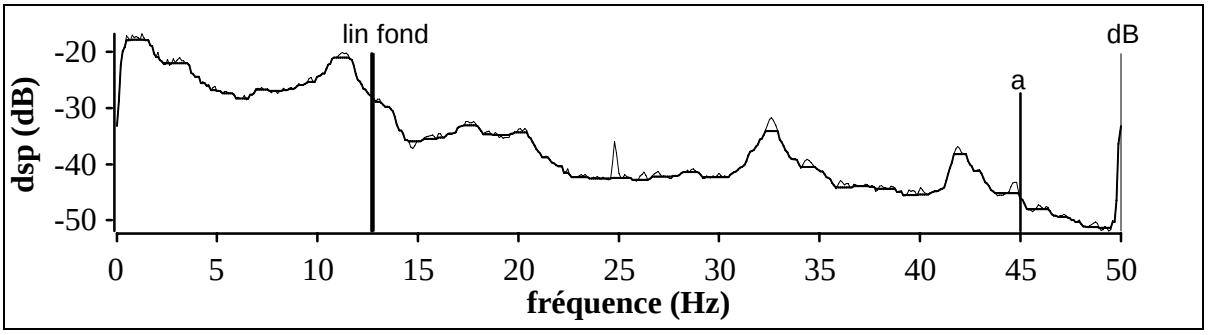


ν_{lin} = 1190 Hz, ν_{fond} = 1220 Hz, ν_{dB} = 1270 Hz, fréquence d'alerte ν_a = 1350 Hz

Figure 4.1-I **: signal PEG-SH1-a11, résultat du test d'échantillonnage de Shannon**. L'estimation du spectre est la courbe en trait fin, l'estimation du fond de spectre est la courbe en trait épais. Bande d'Heisenberg estimée $\Delta\nu$ = 480 Hz.

Pour ce signal aucune alerte n'est émise. Le filtre anti-repliement est bien détecté. Il a été appliqué et remplit correctement sa fonction. Sa fréquence de coupure, de 1250 Hz, est très proche des fréquences maximales calculées, qui sont toutes très proches les unes des autres. La bande d'intérêt du spectre est bien représentée par les fréquences maximales.

- Un signal de bruit neutronique fourni par EDF, SSI-APP1 (surveillance de structure interne d'un réacteur nucléaire, 61 440 points, fréquence d'échantillonnage de 100 Hz, cf. Figure 4.1-II) :

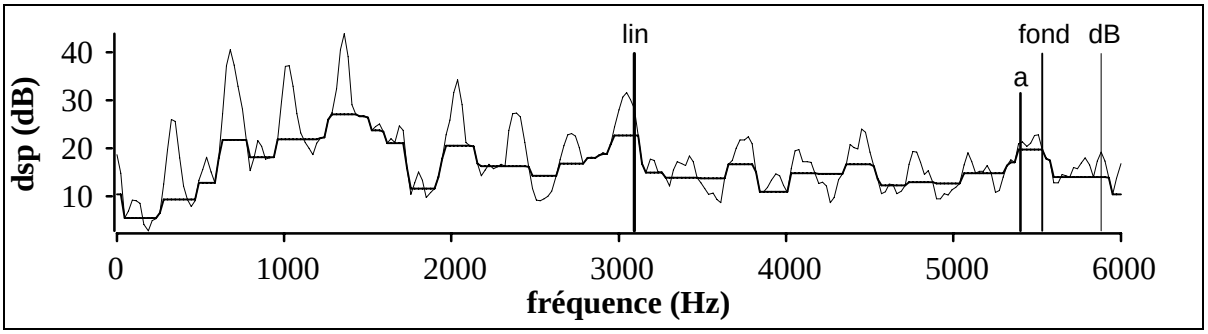


ν_{lin} = 12,7 Hz, ν_{fond} = 12,8 Hz, fréquence d'alerte ν_a = 45 Hz, ν_{dB} = 50 Hz

Figure 4.1-II : **signal SSI-APP1, résultat du test d'échantillonnage de Shannon**. L'estimation du spectre est la courbe en trait fin, l'estimation du fond de spectre est la courbe en trait épais. Bande d'Heisenberg estimée $\Delta\nu$ = 9,2 Hz.

Une alarme est émise : *risque de recouvrement de puissance décibel*. En effet, la fréquence pure du 50 Hz n'a pas été correctement filtrée. Pour ce signal, les principaux motifs (de puissance importante) sont en basse fréquence, c'est pourquoi la *fréquence maximale de puissance linéaire* indique cette première bande d'intérêt. *La fréquence maximale de puissance du fond* est du même ordre que ν_{lin} car les principaux motifs du spectre ne sont pas des fréquences pures, mais des motifs large bande. Par contre, en échelle décibel, les différents motifs en dehors des basses fréquences prennent de l'importance et ne sont pas négligeables par l'expert. La fréquence pure à 50 Hz notamment est de puissance non négligeable vis-à-vis du reste du spectre, ce qui implique que la *fréquence maximale de puissance décibel* soit égale à 50 Hz et la notification de l'alarme. Deux informations ressortent du test, d'abord la bande contenant la majeure partie de la puissance est de l'ordre de 12 Hz et par ailleurs des risques de recouvrement sont possibles. Pour ce signal, aucune information sur la présence d'un filtre anti-repliement n'était disponible. Si un filtre anti-repliement a été appliqué, il n'a pas rempli correctement sa fonction, soit parce que sa fréquence de coupure était trop haute, soit parce que l'atténuation était insuffisante.

- Un signal d'engrenage fourni par le CETIM, ENG1_01 (2048 points, fréquence d'échantillonnage de 12 kHz, cf. Figure 4.1-III) :



ν_{lin} = 3090 Hz, fréquence d'alerte ν_a = 5400 Hz, ν_{fond} = 5530 Hz, ν_{dB} = 5880 Hz

Figure 4.1-III : **signal ENG1_01, résultat du test d'échantillonnage de Shannon**. L'estimation du spectre est la courbe en trait fin, l'estimation du fond de spectre est la courbe en trait épais. Le signal étant court la taille des segments de l'estimateur Welch-WOSA est choisie à 512 points. Bande d'Heisenberg estimée $\Delta\nu$ = 1760 Hz.

Deux alarmes sont émises : *risque de recouvrement de puissance décibel et filtre anti-repliement non détecté*. Il n'y a en effet manifestement aucun filtre anti-repliement appliqué. Le signal

est constitué de fréquences pures dans un bruit que l'on peut considérer comme blanc. Comme les fréquences pures de puissance importante sont toutes en basse fréquence, il n'y a pas d'alerte sur les risques de recouvrement de puissance linéaire. Cependant, l'absence de filtre anti-repliement implique des risques de recouvrement en échelle décibel. Si des fréquences pures de puissance faible sont proches de la fréquence de Shannon (et n'émergent pas sur le spectre estimé étant donné la résolution), elles ne seront que difficilement interprétables puis qu'elles risquent d'être le résultat de recouvrement. La fréquence maximale de puissance linéaire indique la dernière fréquence pure de puissance importante vis-à-vis des autres motifs.

Le cas des signaux ENG8-E5-21RH-SPV (engrenage) et MF-CHARLIE 1-VOIE6 (bruit rayonné d'un navire) est présenté en annexe A-5.

Le test d'échantillonnage de Shannon permet d'évaluer les risques de recouvrement et l'efficacité du filtre anti-repliement. Chacun des trois critères est nécessaire et apporte une information différente et complémentaire suivant la nature du signal. Ils permettent de recouvrir la majorité des cas possibles. Les trois fréquences maximales permettent également de donner une idée de la bande contenant la majorité de la puissance et par conséquent d'indiquer à l'utilisateur que le signal est peut-être soit sur-échantillonné, soit sous-échantillonné. Il existe d'autres moyens d'estimer des bandes équivalentes comme la mesure d'Heisenberg, mais ce sont des estimations globales qui ne prennent pas en compte le comportement spécifique des fréquences proches de la fréquence de Shannon par rapport au reste du spectre.

4.2. Détection de non-stationnarités dans le plan temps-fréquence

L'hypothèse stationnaire est primordiale pour la phase d'analyse puisque c'est l'hypothèse fondamentale des analyses spectrales retenues. Cependant, un signal réel n'est jamais purement stationnaire. Les conditions de bruit peuvent changer, les fréquences discrètes peuvent varier légèrement…. Toute non-stationnarité n'est pas rédhibitoire pour les analyses spectrales. Il s'agit alors de déterminer les non-stationnarités importantes qui ne permettent pas d'interpréter le spectre par une analyse stationnaire. Par ailleurs, une non-stationnarité importante, mais localisée en fréquence, n'empêche pas une analyse stationnaire des autres fréquences. Il s'agit alors de déterminer les bandes concernées. L'objectif du critère proposé est de détecter les non-stationnarités à l'ordre 2, non seulement en temps, pour pouvoir proposer une segmentation du signal, mais aussi en fréquence. Il ne s'agit pas d'effectuer une analyse temps-fréquence précise, mais d'offrir un critère de détection ne nécessitant pas à l'utilisateur une analyse visuelle d'une représentation temps-fréquence par ailleurs souvent difficile à interpréter. Un premier critère utilise la méthode d'estimation temps-fréquence classique du spectrogramme (périodogramme non moyenné glissant) ou du corrélogramme glissant. Ces méthodes sont classiques et robustes, bien qu'elles n'offrent pas les mêmes performances que des méthodes plus complexes ou fondées sur des méthodes dites « haute résolution » (Wigner-Ville, AR glissant [FLA92]…). Leurs performances sont connues puisqu'elles se fondent sur le périodogramme et le corrélogramme A-biaisé. Le critère de détection se déduit des propriétés statistiques des estimateurs. Les performances sont suffisantes pour l'objectif recherché. Un deuxième critère vient en appui du premier, il se fonde sur une estimation de la variance normalisée et permet une détection des non-stationnarités en fréquence (mais pas en temps).

4.2.1. Détection à partir du spectrogramme ou du corrélogramme glissant

4.2.1.1. Principe général

La première étape consiste à estimer la représentation temps-fréquence par la méthode du spectrogramme ou du corrélogramme glissant [FLA92]. Ces méthodes font l'hypothèse de stationnarité locale. Elles consistent à découper le signal en *P* segments et à appliquer à chaque segment une analyse stationnaire soit par le périodogramme (pondéré, mais non moyenné) ou par le corrélogramme A-biaisé. On obtient alors *P* estimations $\hat{\gamma}_p(\nu)$ correspondant chacune à une date différente et qui placées côte-à-côte forment la représentation temps-fréquence.
L'objectif est de confronter les deux hypothèses suivantes :

H_0 : signal aléatoire stationnaire à puissance moyenne finie éventuellement additionné d'un signal déterministe « stationnaire » (dont le spectre ne varie pas au cours du temps).

H_1 : rejet de l'hypothèse H_0, présence de non-stationnarités.

Nous proposons de construire un test dont la statistique est fondée sur les propriétés du périodogramme et du corrélogramme. Le test s'applique à chaque estimée du plan temps-fréquence et est de la forme :

si $\hat{\gamma}_p(\nu) < \eta_{Pfa}(\nu)$ alors l'hypothèse H_0 est retenue,

sinon l'hypothèse H_1 est retenue.

Afin d'obtenir le seuil de détection $\eta_{Pfa}(\nu)$, nous nous restreignons dans un premier temps à la confrontation des hypothèses restreintes :

H_0^* : signal aléatoire stationnaire gaussien à puissance moyenne finie.

H_1^* : rejet de l'hypothèse H_0.

Le seuil $\eta_{Pfa}(\nu)$ dépend alors de la probabilité de fausse alarme :

$$P_{fa} = \textit{probabilité de rejeter } H_0^* \text{ alors que } H_0^* \textit{ est vraie}. \tag{4.2-1}$$

Sous H_0^*, la densité de probabilité du périodogramme et du corrélogramme sont connues (cf. paragraphe 3.2) et permettent donc le calcul du seuil $\eta_{Pfa}(\nu)$ en fonction de la probabilité de fausse alarme que l'on se fixe.
Le seuil $\eta_{Pfa}(\nu)$ dépend de la vraie DSP du signal sous l'hypothèse H_0^*. C'est pourquoi nous l'écrivons :

$$\eta_{Pfa}(\nu) = \lambda(P_{fa})\ \hat{\mu}_s(\nu) \tag{4.2-2}$$

Le seuil $\lambda(P_{fa})$ ne dépend que de la probabilité de fausse alarme choisie, tandis que $\hat{\mu}_s(\nu)$ constitue l'estimation de la DSP vraie du signal.
Nous montrons que le seuil de détection ainsi calculé, peut être étendu aux hypothèses initiales H_0 et H_1. L'algorithme permet de détecter toutes les estimations $\hat{\gamma}_p(\nu)$ qui diffèrent de l'hypothèse H_0 et donc de localiser dans le plan temps-fréquence les non-stationnarités.

Cependant, le test nécessite d'estimer la vraie DSP du signal sous H_0, c'est-à-dire d'avoir une référence stationnaire du signal pour détecter des divergences par rapport à cette référence. Cette référence n'est pas connue *a priori*, il est nécessaire de l'estimer à partir des données du signal. Pour calculer $\hat{\mu}_s(\nu)$, nous utilisons les estimations issues du périodogramme (ou corrélogramme) glissant. Le problème est de ne pas prendre en compte dans ce calcul les éventuelles non-stationnarités. A cette fin, nous avons développé un algorithme récursif que nous détaillons dans le paragraphe suivant.

4.2.1.2. Les différentes étapes du critère

La première étape consiste à calculer une représentation temps-fréquence. Nous présentons tout d'abord le cas du spectrogramme et préciserons ensuite les modifications pour le corrélogramme glissant. Le signal est découpé en segments se recouvrant éventuellement. Soit $x[n]$ le signal, de N points et de période d'échantillonnage $T_e = 1/\nu_e$, à analyser. Le signal $x[n]$ est découpé en P segments de taille L et se recouvrant entre eux ; soit d le nombre de points de décalage entre chaque segment et $x_p[n]$ le p^{eme} segment : $x_p[n] = x[n+pd]$ pour $0 \leq n \leq L-1$ (4.2-3)
Le nombre de segments P est alors égal à la partie entière de $(N-L)/d+1$.

La méthode du périodogramme (avec une fenêtre d'apodisation, mais non moyenné, cf. paragraphe 2.5.1) est appliquée à chaque segment pour obtenir les P spectres estimés correspondant : $\hat{\gamma}_p(\nu)$ (ν correspond aux fréquences discrètes). Ces P estimées mises côte à côte forment la représentation temps-fréquence (RTF, cf. Figure 4.2-I).

Si le signal est stationnaire, on obtient P réalisations du périodogramme (ou corrélogramme) appliqué au signal fenêtré par une fenêtre de taille L.

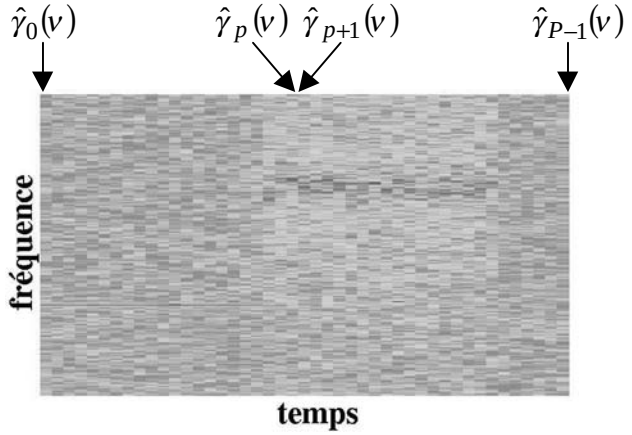


Figure 4.2-I : exemple de représentation temps-fréquence. L'axe horizontal correspond aux indices temporels des P segments. Le spectre de chaque segment est indicé par l'indice temporel central du segment. L'axe vertical correspond aux K fréquences discrètes et la valeur de la DSP estimée est décrite par la couleur.

Considérons l'hypothèse **H_0* : signal aléatoire stationnaire, gaussien de moyenne nulle**. Chaque périodogramme ou corrélogramme $\hat{\gamma}_p(\nu)$ est proportionnel à une variable qui suit une loi gamma à r degrés de liberté équivalent (cf. paragraphe 3.2.2.1) :

$$\hat{\gamma}_p(\nu) \approx \frac{\xi\{\hat{\gamma}_p(\nu)\}}{r}\chi_r^2 \quad \text{(pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e/2) \tag{4.2-4}$$

($r = 2$ dans le cas du périodogramme, pour les fréquences $\nu=0$ et $\nu=\nu_e/2$ se référer au paragraphe 3.2).

Dans ces conditions, on peut définir pour chaque fréquence un seuil λ au-delà duquel il est improbable d'avoir $\hat{\gamma}_p(\nu) > \lambda\xi\{\hat{\gamma}_p(\nu)\}$. Le signal étant stationnaire, $\xi\{\hat{\gamma}_p(\nu)\} \approx \gamma_x(\nu)$, la DSP vraie du signal (indépendante de l'indice temporel p). Le principe de détection s'écrit :

si $\hat{\gamma}_p(\nu) < \lambda\xi\{\hat{\gamma}_p(\nu)\}$ alors l'hypothèse H_0^* est retenue,

sinon l'hypothèse H_1^* : rejet de l'hypothèse H_0^*, est retenue.

Le seuil λ se calcule à partir de la probabilité de fausse alarme, probabilité de choisir H_1^* alors que H_0^* est vraie, qui s'écrit :

$$P_{fa} = \int_{r\lambda}^{+\infty} g_{\chi_r^2}(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.2-5}$$

où $g_{\chi_r^2}(x)$ représente la densité de probabilité d'une loi gamma à *r* degrés de liberté équivalent. *Pour plus de précision sur le principe d'un détecteur et les notions de probabilités de fausse alarme et de détection se reporter au chapitre 5, paragraphe 5.1.* Ainsi, pour une probabilité de fausse alarme désirée, le seuil λ est obtenu par inversion de l'équation 4.2-5 (calcul de fractile [TAS89], [SAP90], [PRO89]).

Le signal étant stationnaire, la moyenne des *P* estimées est une bonne estimation de l'espérance d'un périodogramme, d'autant meilleure que le nombre de segments est important (la variance diminue) :

$$\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\gamma}_p(\nu) \approx \xi\{\hat{\gamma}_p(\nu)\} \approx \gamma_x(\nu) \tag{4.2-6}$$

Considérons maintenant le cas d'un signal **sous l'hypothèse H_0 : le signal est stationnaire**, mais constitué d'un **bruit aléatoire gaussien et d'une somme de fréquences pures déterministes**. L'estimée $\hat{\gamma}_p(\nu)$ est proportionnelle à une variable qui suit une loi du chi-deux décentré à 2 degrés de liberté (cf. paragraphe 3.2.1.2). La variance normalisée de l'estimée est inférieure à celle obtenue avec un bruit aléatoire gaussien seul. Ainsi, dans le cas d'un signal composé de bruit et de fréquences pures, la probabilité de fausse alarme effective sera plus faible que celle qui était initialement prévue sous l'hypothèse de bruit seul (et qui a permis le calcul du seuil λ). Cette observation reste valable pour tout signal déterministe dont les composantes spectrales ne sont pas modifiées au cours du temps. De plus, d'après le paragraphe 3.2, l'hypothèse gaussienne pour le bruit aléatoire peut être étendue à la majorité des cas où le signal est aléatoire à puissance moyenne finie.

Enfin, considérons un signal **sous l'hypothèse H_1 : le signal est non-stationnaire par morceau**. Nous définissons « *l'ensemble stationnaire à la fréquence* ν », $E_S(\nu)$, par l'ensemble des estimés $\hat{\gamma}_p(\nu)$ correspondant à des segments du signal de même DSP $\gamma_s(\nu)$, minimale par rapport à celle des autres segments. Si par exemple, à la fréquence ν, une partie temporelle du signal est constituée d'un bruit blanc de puissance σ_1^2, l'autre d'un bruit blanc de puissance $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$, l'ensemble stationnaire $E_S(\nu)$ est constitué des DSP, à la fréquence ν, estimés sur les segments associés au bruit blanc de DSP minimale, soit de puissance σ_1^2. Par opposition, les autres segments font partie de « *l'ensemble non-stationnaire* » $E_{NS}(\nu)$. L'objectif est de former pour chaque fréquence les deux ensembles distincts $E_S(\nu)$ et $E_{NS}(\nu)$. Précisons que les ensembles stationnaires et non-stationnaires ne sont pas identiques pour chaque fréquence.

Soit $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$ la moyenne de l'estimation par le périodogramme du signal de DSP $\gamma_s(\nu)$. La comparaison des estimés $\hat{\gamma}_p(\nu)$ avec $\lambda\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$ permet de détecter les estimés appartenant aux ensembles $E_S(\nu)$ et $E_{NS}(\nu)$ avec la probabilité de fausse alarme choisie pour le calcul du seuil λ :

$$\hat{\gamma}_p(\nu) \begin{array}{l} > \\ \leq \end{array} \lambda\,\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\} \quad \begin{array}{l} H_1 \text{ est retenue, } \hat{\gamma}_p(\nu) \in E_{NS} \\ H_0 \text{ est retenue, } \hat{\gamma}_p(\nu) \in E_S \end{array} \tag{4.2-7}$$

Pour appliquer le principe de détection, il est nécessaire d'obtenir une estimation de $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$. La moyenne de l'ensemble des périodogrammes n'est pas adaptée à l'estimation de $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$. Si des non-stationnarités sont présentes, cette moyenne surestime $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$ et la phase de détection risque de ne pas être probante (la probabilité de détection diminue). Ceci d'autant plus que les performances du périodogramme ne sont pas favorables, avec notamment une variance normalisée unité. Pour pallier ce problème, nous avons mis au point un algorithme récursif (cf. Figure 4.2-II).

- **La première étape** consiste **à choisir une probabilité de fausse alarme** désirée P_{fa} pour le calcul du seuil de détection λ. L'objectif étant de détecter des non-stationnarités importantes et de minimiser les fausses alarmes, il est préférable de choisir des P_{fa} de l'ordre de 10^{-4}. Le calcul du seuil λ ne dépend pas du signal, mais uniquement de la méthode choisie par l'intermédiaire du degré de liberté équivalent de la loi gamma qui lui est associée.

- **La seconde étape** consiste à **initialiser pour chaque fréquence l'ensemble $E_S(\nu)$** afin d'obtenir une première estimation de $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$. Puisque nous avons associé à $E_S(\nu)$ les parties stationnaires de plus faible DSP, le premier ensemble $E_S^0(\nu)$ est constitué des x% estimées $\hat{\gamma}_p(\nu)$ de plus faible DSP. Remarquons que les estimées ne correspondent pas forcément à des segments du signal consécutifs temporellement. Pour la base de signaux ASPECT, nous pouvons considérer qu'à chaque fréquence un pourcentage important des estimées est « stationnaire ». Une valeur par défaut du pourcentage x% égale à 50 % offre un bon compromis.
  On estime alors $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$, l'estimation du spectre « stationnaire » à la fréquence ν par :

$$\hat{\mu}_s^0(\nu) = \frac{1}{P_0} \sum_{p/\hat{\gamma}_p(\nu) \in E_s^0(\nu)} \hat{\gamma}_p(\nu) \tag{4.2-8}$$

  où P_0 est le nombre d'estimées $\hat{\gamma}_p(\nu)$ de $E_S^0(\nu)$.

- **La troisième étape** consiste à **appliquer le détecteur**, équation 4.2-7, en remplaçant la moyenne $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$, par son estimation $\hat{\mu}_s^0$. Ainsi les ensembles $E_S(\nu)$ et $E_{NS}(\nu)$ sont mis à jour :

$$E_S^1(\nu) = \{\hat{\gamma}_p(\nu) \,/\, \hat{\gamma}_p(\nu) \le \lambda \hat{\mu}_s^0(\nu)\} \tag{4.2-9}$$

$$E_{NS}^1(\nu) = \{\hat{\gamma}_p(\nu) \,/\, \hat{\gamma}_p(\nu) > \lambda \hat{\mu}_s^0(\nu)\} \tag{4.2-10}$$

- **Les étapes suivantes consistent à ré-estimer la moyenne** $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$ à partir de l'ensemble $E_S^i(\nu)$ déterminé à l'étape précédente :

$$\hat{\mu}_s^i(\nu) = \frac{1}{P_i} \sum_{p/\hat{\gamma}_p(\nu) \in E_s^i(\nu)} \hat{\gamma}_p(\nu) \tag{4.2-11}$$

  où P_i est le nombre de périodogrammes de $E_S^i(\nu)$ et pour cette étape i=1.
  Ensuite, **les ensembles $E_S(\nu)$ et $E_{NS}(\nu)$ sont mis à jours** :

$$E_S^{i+1}(\nu) = \{\hat{\gamma}_p(\nu) \,/\, \hat{\gamma}_p(\nu) \le \lambda \hat{\mu}_s^i(\nu)\} \tag{4.2-12}$$

$$E_{NS}^{i+1}(\nu) = \{\hat{\gamma}_p(\nu) \,/\, \hat{\gamma}_p(\nu) > \lambda \hat{\mu}_s^i(\nu)\} \tag{4.2-13}$$

Critère d'arrêt : cette suite d'opérations est réitérée jusqu'à ce que l'estimation de l'ensemble $E_S(\nu)$ soit stable :

$$E_S^{i+1}(\nu) = E_S^{i}(\nu) = E_S(\nu) \tag{4.2-14}$$

Ce qui implique que l'estimation de l'ensemble $E_{NS}(\nu)$ est également stable.

Justification de l'algorithme récursif : la première estimation de la moyenne $\hat{\mu}_s^0$ risque d'être biaisée par rapport à $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$. En effet, si à la fréquence ν le signal n'est constitué que d'un bruit stationnaire, la moyenne $\hat{\mu}_s^0(\nu)$ va sous-estimer $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$, puisque l'on n'a utilisé que les estimations de plus faible DSP. La probabilité de fausse alarme va être supérieure à celle désirée. Dans le cas opposé, où plus de *x*% des estimations sont non-stationnaires, la moyenne $\hat{\mu}_s^0(\nu)$ risque de surestimer $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$. La probabilité de détection va être inférieure à celle que l'on attend. Par contre, si l'on ne prend en compte pour le calcul de la moyenne que les estimations de l'ensemble $E_S^1(\nu)$, on améliore l'estimation de $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$. Ainsi le nombre de fausses alarmes diminue tandis que la probabilité de détection augmente. L'étape de détection est réitérée pour affiner l'estimation des ensembles $E_S(\nu)$ et $E_{NS}(\nu)$. Ainsi à chaque étape, l'estimation de $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$ et des ensembles $E_S(\nu)$ et $E_{NS}(\nu)$ est ajustée jusqu'à leur stabilité. L'algorithme complet de détection est résumé dans le diagramme de la Figure 4.2-II.

Le résultat du critère est une représentation temps-fréquence représentant les ensembles $E_{NS}(\nu)$ et également une estimation $\hat{\mu}_s(\nu)$ du spectre de la partie stationnaire du signal (la dernière moyenne $\hat{\mu}_s^i(\nu)$ calculée). Pour représenter l'importance des non-stationnarités, les points de $E_{NS}(\nu)$ ont pour amplitude l'estimation normalisée : $\hat{\gamma}_p(\nu)/\lambda\hat{\mu}_s(\nu)$. Ces valeurs sont ainsi comparables entre estimations. Les autres points du plan temps-fréquence non détectés sont mis à zéro.

Une autre possibilité consiste à classer les non stationnarités selon la P_{fa} nécessaire à les détecter, P_{fa} à distinguer de la probabilité de fausse alarme utilisée pour l'algorithme récursif dans le calcul du seuil λ. En sortie de l'algorithme récursif, nous considérons uniquement la représentation temps-fréquence et l'estimation de la moyenne stationnaire $\hat{\mu}_s(\nu)$. Nous utilisons cette moyenne pour calculer les seuils correspondant à différentes probabilités de fausse alarme : $\lambda'(P_{fa})$. Puis, nous effectuons la détection des non stationnarités suivant ces différents seuils. Les non-stationnarités sont classées en fonction de la probabilité de fausse alarme minimale qui a permis leur détection. Les résultats seront présentés dans le paragraphe suivant en utilisant 5 classes :

- classe 0 : $\hat{\gamma}_p(\nu)$ non détectés pour une P_{fa} de 10^{-2}, $\hat{\gamma}_p(\nu) < \lambda'(10^{-2})$,
- classe 1 : $\lambda'(10^{-2}) \leq \hat{\gamma}_p(\nu) < \lambda'(10^{-3})$, non stationnarités détectées pour une P_{fa} comprise entre 10^{-2} et 10^{-3},
- classe 2 : $\lambda'(10^{-3}) \leq \hat{\gamma}_p(\nu) < \lambda'(10^{-4})$,
- classe 3 : $\lambda'(10^{-4}) \leq \hat{\gamma}_p(\nu) < \lambda'(10^{-5})$,
- classe 4 : $\hat{\gamma}_p(\nu) \geq \lambda'(10^{-5})$.

Ce classement final permet de discriminer les non-stationnarités détectés en fonction de leur probabilité de détection. Il faut distinguer ce classement de la P_{fa} choisie pour effectuer l'algorithme récursif. Cette P_{fa} ne doit pas être trop grande au risque de sous-estimer $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\}$, et donc d'obtenir au final des probabilités de fausse alarme très supérieures à celles désirées.

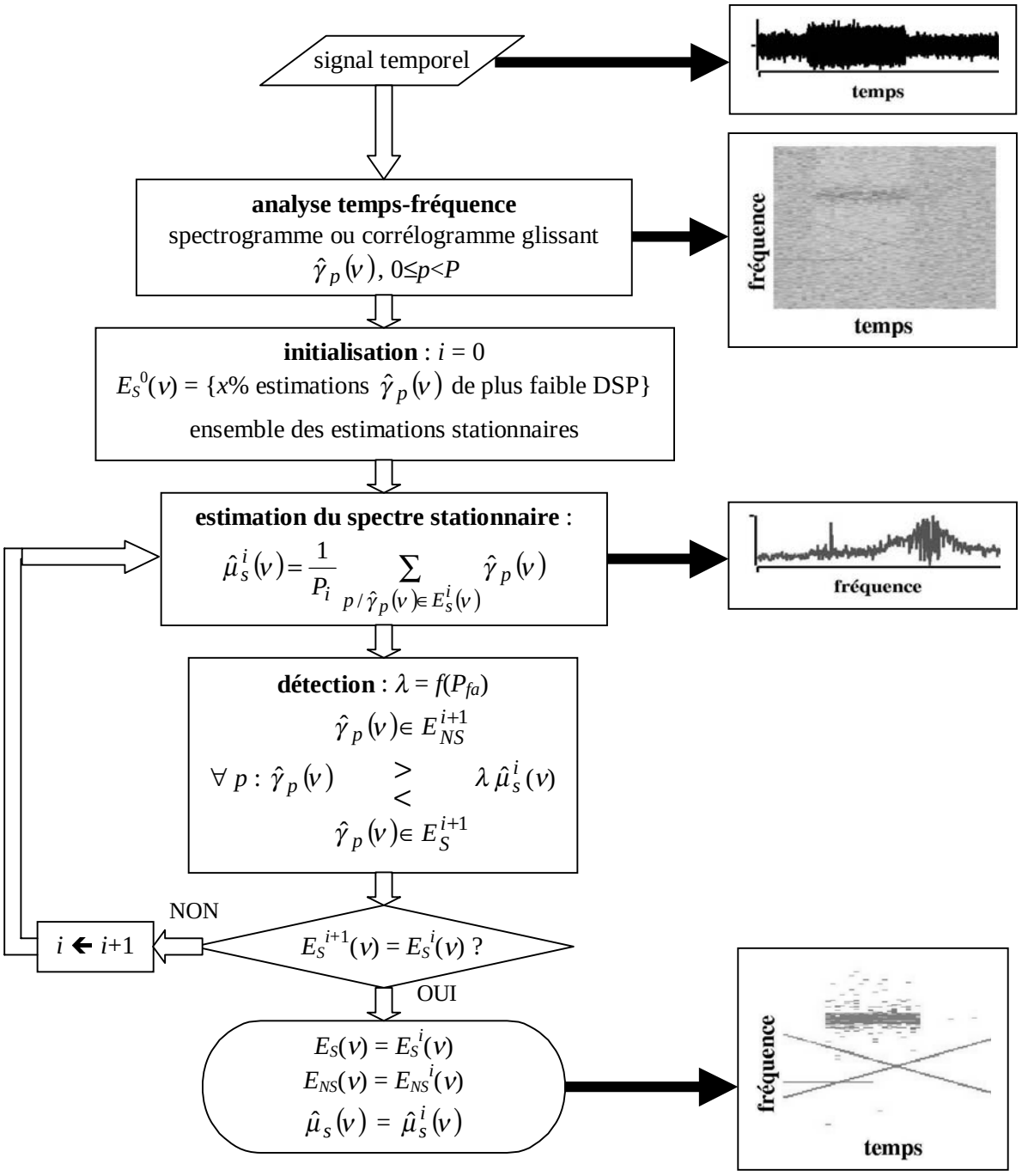


Figure 4.2-II : diagramme du critère de détection de non-stationnarités dans le plan temps-fréquence.

Choix de la méthode temps-fréquence et de ses paramètres

- **spectrogramme** : il est recommandé d'utiliser une fenêtre d'apodisation pour limiter l'influence des lobes secondaires. D'après l'étude des estimateurs de type Fourier, une fenêtre de Blackman permet d'atteindre au mieux cet objectif. L'influence des non-stationnarités est ainsi limitée en fréquence. De plus, un décalage entre segments de 50 % peut être utilisé tout en considérant que les différents segments sont encore indépendants. Bien que pour le critère, l'hypothèse d'indépendance ne soit pas nécessaire, elle est préférable pour l'initialisation de l'algorithme afin que le choix des x% estimations de plus faible DSP se fasse sur des segments indépendants. Le choix de la taille des segments est plus délicat, puisqu'il fixe non seulement le compromis résolution temporelle/résolution fréquentielle, mais aussi le nombre de segments. Pour notre critère, il est nécessaire que le nombre de segments soit

suffisamment important (>20 *a priori*). Par contre, puisque l'objectif n'est pas d'être précis en fréquence, une résolution de l'ordre de (ν_e/2)/500 semble suffisante. Une taille de segment de l'ordre de 1024 points permet d'obtenir un bon compromis dans la majorité des cas de la banque de signaux ASPECT (dont le nombre de points est en général supérieur à 50 000). Cette taille peut être augmentée si le nombre de segments est important, ou dans le cas où l'on désire réeffectuer une analyse avec une meilleure résolution fréquentielle. Une taille de TF égale à deux fois la taille des segments (*zero-padding*) est recommandée pour mieux faire apparaître les motifs. Enfin, le degré de liberté équivalent de la loi gamma associé au périodogramme est égale à 2 (cf. paragraphe 3.2.1).

- **corrélogramme glissant** : au niveau du déroulement de l'algorithme, $\hat{\gamma}_p(\nu)$ est alors estimé par le corrélogramme A-biaisé au lieu du périodogramme. L'intérêt est d'obtenir, pour certaines fenêtres d'apodisation linéaire, une variance normalisée de l'estimateur de DSP inférieure à celle du périodogramme. Le meilleur compromis est obtenu pour la fenêtre de Blackman avec une variance normalisée de *varn* = 0,49 alors que, quelle que soit la fenêtre d'apodisation du périodogramme, sa variance normalisée est égale à 1. On espère ainsi améliorer la détection, puisque les estimations, dans le cas stationnaire, s'écartent moins de la moyenne qu'avec le périodogramme. Le seuil de détection est inférieur et des non stationnarités de plus faible puissance peuvent être détectées. En contrepartie les lobes secondaires de la fenêtre spectrale seront moins bien atténués, ce qui risque d'augmenter le nombre de fausses alarmes si des non-stationnarités sont effectivement présentes (et étant donné la taille relativement faible des segments). De même que pour le spectrogramme, un support de corrélation (taille des segments de la RTF) de l'ordre de 1024 points offre un bon compromis. Une taille de TF égale à deux fois la taille des segments est suffisante. L'estimation de la DSP par le corrélogramme, dans le cas d'un signal gaussien aléatoire à puissance moyenne finie, est toujours proportionnelle à une variable qui suit une loi gamma de degré de liberté équivalent r = 2/*varn* = 4,08 pour une fenêtre de Blackman (cf. paragraphe 3.2.2), au lieu de 2 dans le cas du périodogramme.

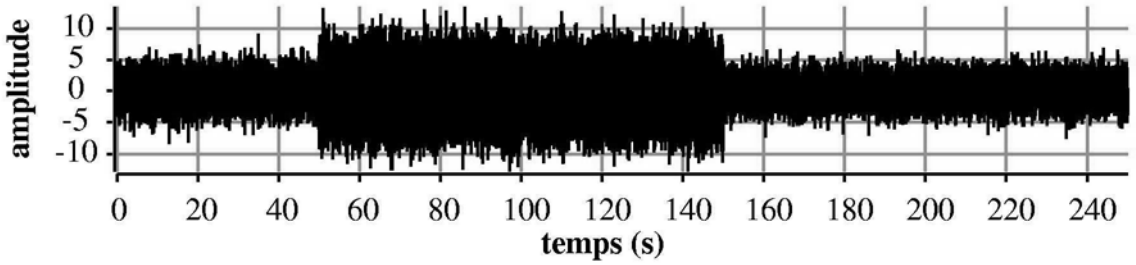
4.2.1.3. Résultats du critère sur un signal synthétique et sur des signaux réels

Nous allons présenter les résultats sur un signal synthétique contenant différents types de non stationnarités, mais également sur des signaux réels de la banque de signaux ASPECT. Les résultats de la détection sont présentés selon la classe de détection des non-stationnarités, à distinguer de la probabilité de fausse alarme utilisée pour l'algorithme récursif (cf. page 100).

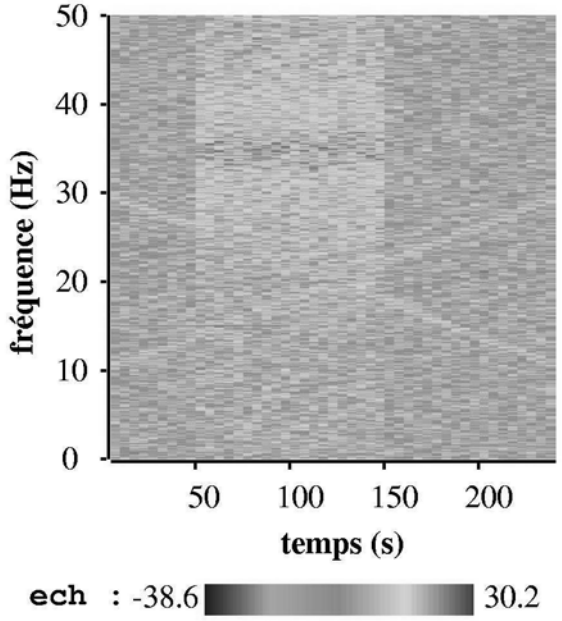
Nous commençons par un **signal synthétique**. Ce signal simulé, non réaliste sur le plan physique, a pour objectif de regrouper un ensemble typique de non stationnarités. Le signal contient N=25000 points, la fréquence d'échantillonnage est ν_e=1/T_e= 100 Hz. Il comprend :

- un bruit blanc de puissance σ^2 = 3 sur les 25000 points,
- une sinusoïde de fréquence ν_0 = 15 Hz sur les 10 000 premiers points :
  $s_1[n] = 1{,}5 \sin(2\pi\nu_0 n T_e)$ $\quad 0 \le n < 10\,000$,
- deux modulations linéaires de fréquence, dont la fréquence varie linéairement respectivement de 10 à 30 Hz et de 30 Hz à 10 Hz sur les 25000 points :
  $s_2[n] = 1{,}25 \sin(2\pi n T_e(10+20\frac{n}{N-1}))+1{,}25 \sin(2\pi n T_e(30-20\frac{n}{N-1}))$ $\quad 0 \le n < 25\,000$,
- une sinusoïde à fréquence aléatoire dont la fréquence est centrée sur ν_1=35 Hz additionnée d'un bruit blanc $b[n]$, d'écart-type 8 Hz, sur la portion de signal compris entre les points d'indice 5000 et 15000 :
  $s_3[n] = 6 \sin(2\pi n T_e(\nu_1+b[n]))$ $\quad 5000 \le n \le 15\,000$,
  Cette dernière composante du signal crée un motif fréquentiel bande étroite de l'ordre de 20 Hz. En dehors de cette bande, on peut considérer que le reste des motifs est peu perturbé.

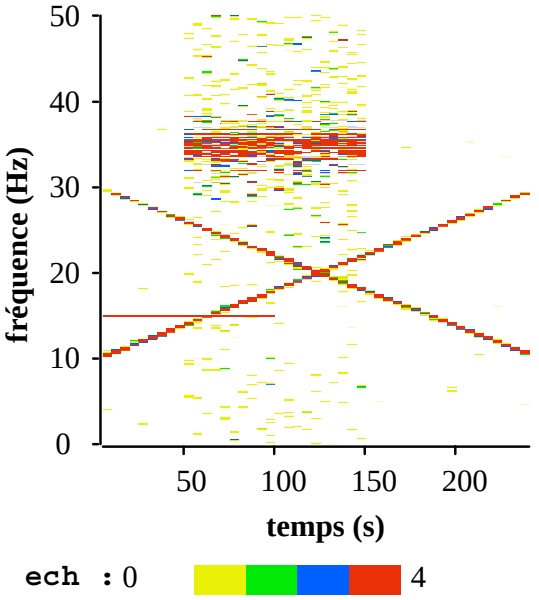
Les résultats sont présentés sur les Figure 4.2-III et Figure 4.2-IV.



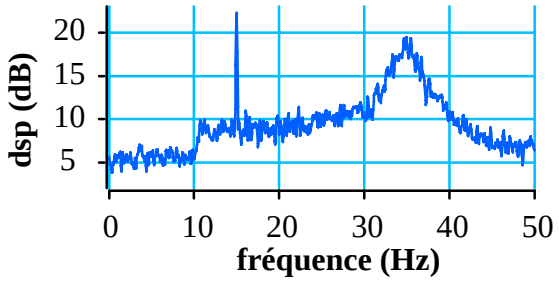
(a) signal temporel synthétique



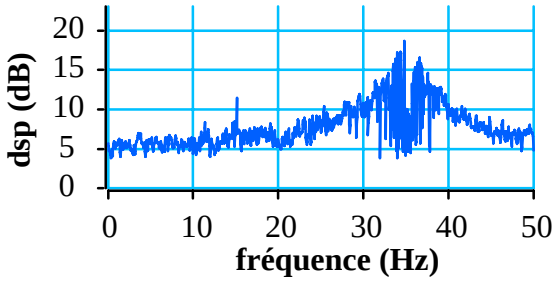
(b) RTF **spectrogramme** en dB



(c) résultat de la détection

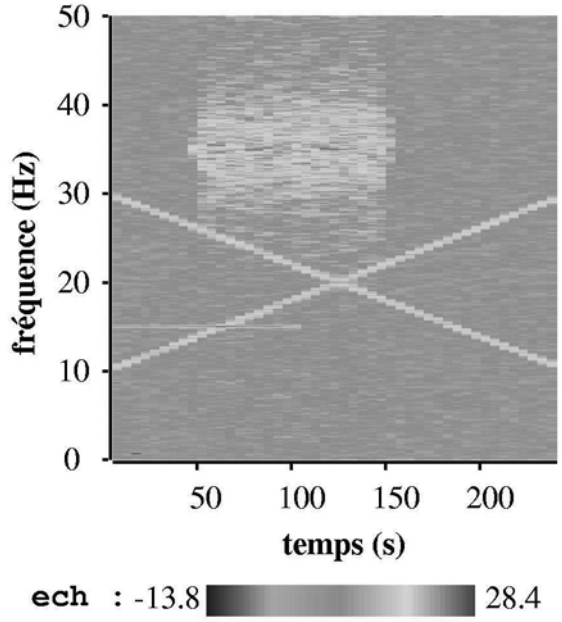


(d) moyenne temporelle de la RTF

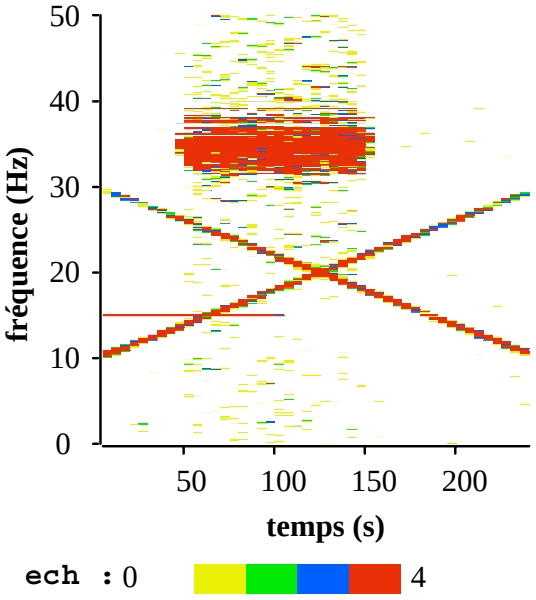


(e) spectre « stationnaire », $\hat{\mu}_s(\nu)$

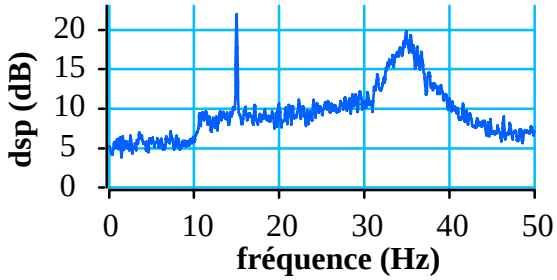
Figure 4.2-III : **signal synthétique, détection dans le plan temps-fréquence à partir du spectrogramme**. (a) signal temporel, (b) représentation temps-fréquence obtenue avec le spectrogramme (avec les paramètres par défaut : fenêtre de Blackman, segments de 1024 points, soit 47 segments), (c) résultat de la détection dans le plan temps-fréquence pour un pourcentage x% de 50% et une P_{fa} désirée de 10^{-4}, (d) moyenne temporelle de la RTF, (e) moyenne temporelle des estimations stationnaires de l'ensemble $E_s(\nu)$: estimation du spectre stationnaire. *Sur la figure (c), les estimées non détectées de la classe 0 sont associées à la couleur blanche*.



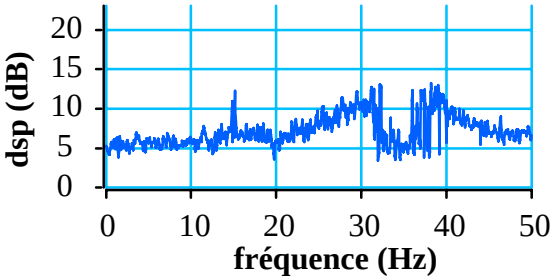
(a) RTF **corrélogramme glissant** en dB



(b) résultat de la détection



(c) moyenne temporelle de la RTF



(d) spectre « stationnaire », $\hat{\mu}_s(\nu)$

Figure 4.2-IV : **signal synthétique, détection dans le plan temps-fréquence à partir du corrélogramme glissant**. (a) représentation temps-fréquence obtenue avec le corrélogramme glissant (avec les paramètres par défaut), (b) résultat de la détection dans le plan temps-fréquence pour un pourcentage x% de 50% et une P_{fa} désirée de 10^{-4}, (c) moyenne temporelle de la RTF, (d) moyenne temporelle des estimations stationnaires de l'ensemble $E_s(\nu)$: estimation du spectre stationnaire. *Sur la figure (b), les estimées non détectées de la classe 0 sont associées à la couleur blanche.*

Les résultats sur le signal synthétique sont probants. Les différents types de non-stationnarités ont été détectées, qu'il s'agisse de non-stationnarités par morceaux (fréquence pure, motif bande étroite) ou non (modulations linéaires de fréquence). Que ce soit avec le spectrogramme (Figure 4.2-III) ou le corrélogramme glissant (Figure 4.2-IV), le nombre de fausses alarmes est proche de zéro (particulièrement si on se limite aux éléments détectés avec une probabilité de fausse alarme supérieure à 10^{-4}). Entre 50 et 150 secondes, les éléments détectés éloignés du motif bande étroite ne sont pas des fausses alarmes. La sinusoïde à fréquence aléatoire ajoute du bruit sur toute la bande, même si celui-ci est faible en dehors de la bande [25 Hz , 45 Hz]. Cet exemple a également pour objectif, de faire apparaître les performances et les limitations de la méthode. Le motif bande étroite n'a pas une DSP constante sur la bande [25 Hz , 45 Hz], il a une forme de « cloche », ce qui permet de déterminer (suivant les paramètres du critère) à partir de quel niveau de DSP le motif est détecté. On observe en effet, une meilleure performance de la méthode du corrélogramme glissant pour laquelle le nombre de points détectés appartenant au motif bande étroite est plus important qu'avec le spectrogramme. Ceci est également mis en évidence sur l'estimation du spectre « stationnaire »

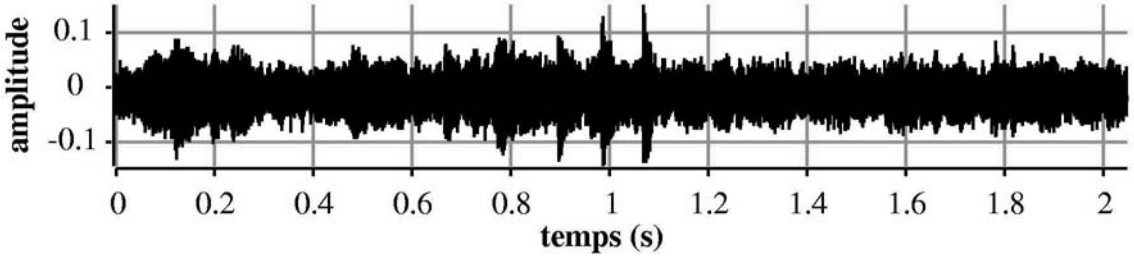
(Figure 4.2-III (e) et Figure 4.2-IV (d)). On constate que l'on se rapproche de l'estimation du bruit blanc sur presque toutes les fréquences, ce qui n'est bien sûr pas le cas si on observe la moyenne en temporelle de la RTF (Figure 4.2-III (d) et Figure 4.2-IV (c)). L'estimation est seulement biaisée lorsque le motif bande étroite devient de DSP importante sans qu'il ne soit pour autant détecté comme non-stationnaire. Par contre, lorsque les fréquences correspondant au motif sont bien détectées, la DSP estimée du spectre « stationnaire » correspond bien à celle du bruit (cf. Figure 4.2-IV (d), pour le corrélogramme glissant entre 32 et 38 Hz). On observe par ailleurs que l'influence des modulations linéaires de fréquence entre 10 et 30 Hz et l'influence de la fréquence pure à 15 Hz a disparu entre la moyenne temporelle de la RTF et l'estimation du spectre « stationnaire » (il ne reste qu'un faible résidu de la fréquence pure à 15 Hz, dû au découpage du signal). Si on augmente la probabilité de fausse alarme désirée, le motif bande étroite va être détecté sur une bande fréquentielle de plus en plus large, mais des fausses alarmes vont également apparaître (cf. Figure A-6.1-I en annexe A-6). En particulier avec une probabilité de fausse alarme de 10^{-2}, on a une très bonne détection du motif bande étroite, avec de nombreuses détections entre 50 et 150 secondes, mais également de nombreuses fausses alarmes là où il n'y a que le bruit blanc stationnaire. Par contre, l'estimation du spectre « stationnaire » est proche de la DSP du bruit blanc sur la quasi totalité des fréquences.

Le corrélogramme glissant grâce à sa variance normalisée inférieure à celle du périodogramme, permet de mieux détecter les non-stationnarités sans pour autant augmenter les fausses alarmes. Nous présenterons les résultats suivant avec le corrélogramme glissant. Il faut néanmoins préciser que dans le cas d'une forte dynamique, une fréquence pure d'amplitude importante par exemple, le pied de pic de la fenêtre spectrale et la mauvaise atténuation des lobes secondaires risquent de masquer des non-stationnarités éventuelles. Ceci d'autant plus que la taille des segments est relativement petite et donc la résolution faible. Pour illustrer ce point, il faut se référer au cas du signal d'engrenage ENG8-E5-21RH-SPV en annexe A-6.1 (Figure A 6-II), pour lequel la RTF obtenue avec le corrélogramme glissant masque des fréquences pures qui apparaissent avec le spectrogramme. Ce signal étant stationnaire aucune détection n'est obtenue dans les deux cas (en se limitant aux éléments détectés avec une probabilité de fausse alarme supérieure à 10^{-4}).

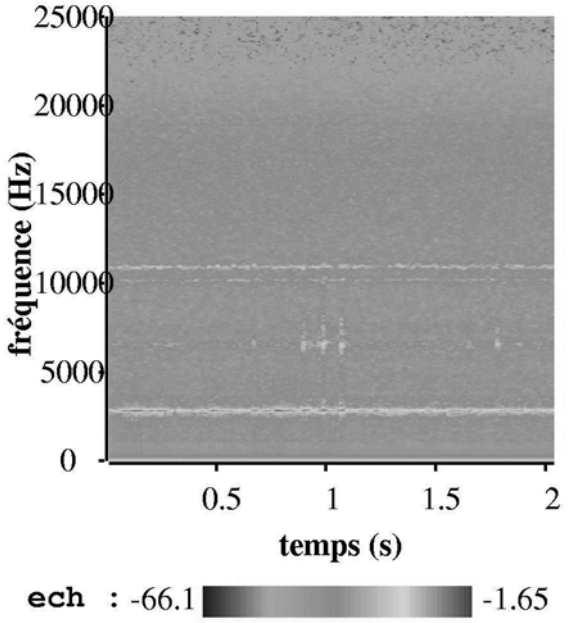
Nous avons testé l'algorithme sur les signaux réels de la banque ASPECT. Bien que la majeure partie soit stationnaire, certains contiennent des non-stationnarités. **Le signal DCE**, fourni par EDF, est un signal d'enregistrement d'un corps errant dans un circuit hydraulique (102 400 points pour une fréquence d'échantillonnage de 50 000 Hz). Ce signal comprend un bruit hydraulique sur toute la durée d'observation se manifestant dans une bande de fréquence étroite de 200 Hz autour de la fréquence 2830 Hz. Il existe d'autres bandes étroites autour de 10,2 kHz et 10,9 kHz, mais peu énergétiques. Le circuit hydraulique se comporte comme un guide d'ondes et les fluctuations thermohydrauliques de la pompe primaire d'un réacteur nucléaire sont enregistrées. On obtient un signal bande étroite dont l'amplitude évolue par bouffées au cours du temps. Les chocs du corps errant (un boulon) sur les parois du circuit hydraulique se traduisent par des bruits transitoires. Ils se manifestent sur une bande de 600 Hz, autour de la fréquence 6500 Hz, bande plus large que celles du bruit hydraulique. La bande des chocs se superpose à une bande étroite très peu énergétique.

Le critère permet de détecter quatre motifs principaux non-stationnaires (cf. Figure 4.2-V). Ces non-stationnarités correspondent aux transitoires. Les trois premiers sont nettement visibles sur le signal temporel (entre 0,9 et 1,1 seconde). Des techniques plus évoluées, comme la méthode de détection de transitoires par ondelettes adaptées [RAV98], permettent de détecter deux petits transitoires supplémentaires (vers 0,35 et 0,6 s), mais uniquement en temps. Notre critère échoue dans la détection de ces transitoires, même en diminuant la taille des segments. Cependant ces transitoires de faible puissance, et n'affectant qu'une bande restreinte en fréquence, ne sont pas gênants pour une analyse stationnaire du reste du signal. Ce signal contient différents types de non-stationnarités, les transitoires précédemment cités et des bruits hydrauliques non-stationnaires visibles sur le signal temporel (par exemple entre 0,1 et 0,2 seconde). Il s'agit de « bouffées » d'énergie. Ils ne sont alors

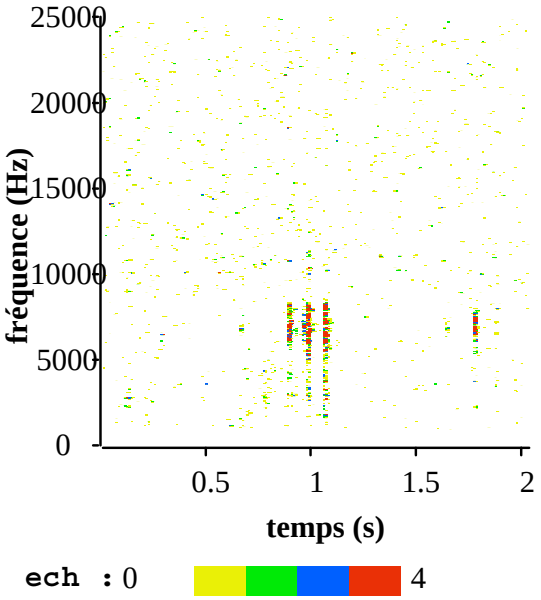
pas détectés par notre critère, l'évolution de l'énergie dans la bande du motif étant insuffisante. Cependant le critère de détection en temps (cf. l'introduction du chapitre 4) est adapté à ce type de non-stationnarité et permet d'en détecter temporellement les principaux motifs. Le critère permet de bien cerner l'influence en fréquence des transitoires et d'envisager une analyse stationnaire pour les fréquences qui ne sont pas touchées par les non stationnarités. Il apparaît également que les éléments détectés avec une probabilité de fausse alarme comprise entre 10^{-2} et 10^{-3} sont difficilement exploitables. Les non-stationnarités détectées à cette échelle ne sont pas suffisamment significatives.



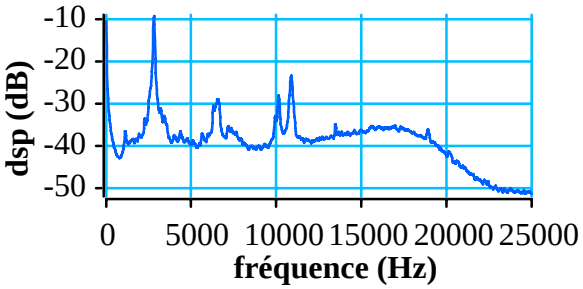
(a) signal temporel DCE



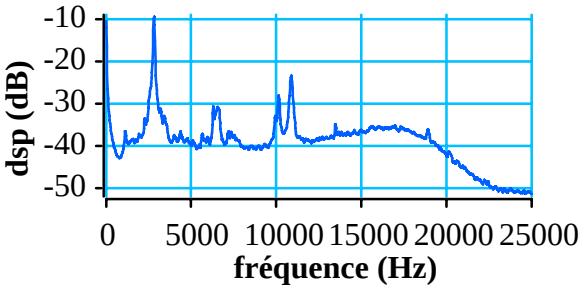
(b) RTF corrélogramme glissant en dB



(c) résultat de la détection



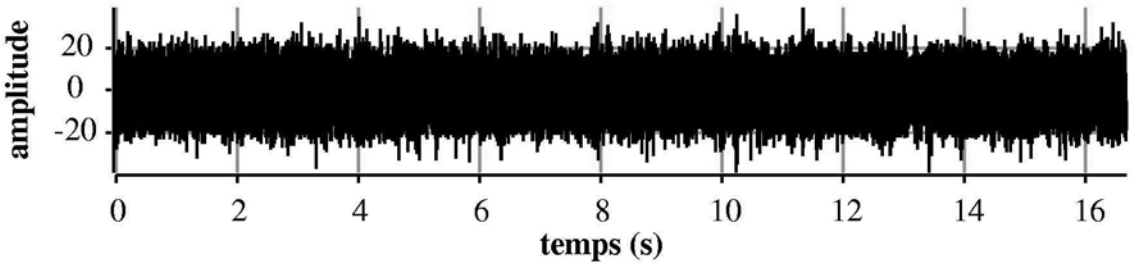
(d) moyenne temporelle de la RTF



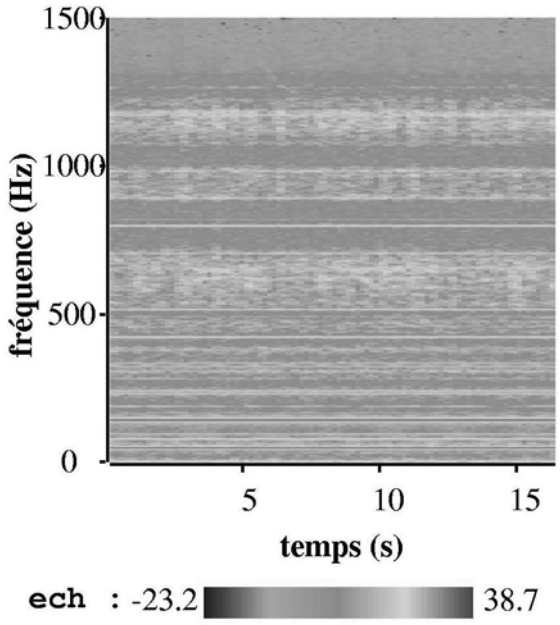
(e) spectre « stationnaire », $\hat{\mu}_s(\nu)$

Figure 4.2-V : **signal DCE, détection dans le plan temps-fréquence**. (a) signal temporel, (b) RTF obtenue avec le corrélogramme glissant (199 segments), (c) résultat de la détection dans le plan temps-fréquence pour un pourcentage *x*% de 50% et une P_{fa} désirée de 10^{-4}, (d) moyenne temporelle de la RTF, (e) moyenne temporelle des estimations stationnaires de l'ensemble $E_s(\nu)$: spectre stationnaire. . *Sur la figure (c), les estimées non détectées de la classe 0 sont associées à la couleur blanche.*

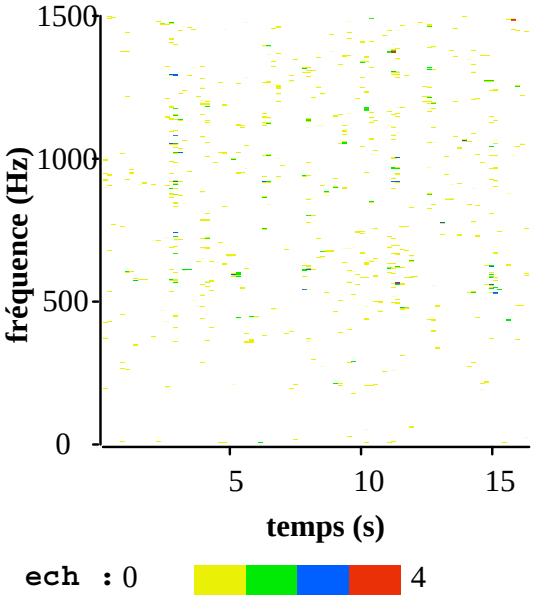
Enfin, nous présentons les résultats du critère sur le **signal PEG-SH1-a11** (cf. Figure 4.2-VI). Il s'agit de l'enregistrement des vibrations d'une station d'huile. Le signal est considéré comme stationnaire, que ce soit pour les vibrations dues à la circulation du fluide ou pour les harmoniques liées au moteur et à la pompe de la station d'huile. Le nombre de détection de non-stationnarités est très faible et elles sont dispersées dans le plan temps-fréquence. Le signal peut donc être considéré comme stationnaire, ce qui corrobore l'expertise du spécialiste du domaine d'application. On ne peut certifier que les détections soient des fausses alarmes, mais elles ne gêneront pas une analyse stationnaire du signal.



(a) signal temporel PEG-SH1-a11



(b) RTF corrélogramme glissant en dB



(c) résultat de la détection

Figure 4.2-VI : **signal PEG-SH1-a11, détection dans le plan temps-fréquence**. (a) signal temporel, (b) représentation temps-fréquence obtenue avec le corrélogramme glissant (avec les paramètres par défaut, 96 segments), (c) résultat de la détection dans le plan temps-fréquence pour un pourcentage *x*% de 50% et une P_{fa} désirée de 10^{-4}. *Sur la figure (c), les estimées non détectées de la classe 0 sont associées à la couleur blanche.*

D'autres types de non-stationnarités peuvent être mise en évidence : nous présentons en annexe A-6.1, le cas du signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 qui correspond à l'enregistrement de la passe d'un navire au-dessus d'un hydrophone. Il présente de légères non-stationnarités sous la forme de motifs bande étroite dont la fréquence centrale change au cours du temps ou dont l'énergie varie.

Dans le cadre d'un scénario complet d'analyse, une première détection avec les paramètres par défaut, peut détecter les non-stationnarités les plus importantes tout en concluant qu'une analyse stationnaire est possible. Le critère peut être réappliqué une fois l'analyse stationnaire complétée. Les motifs spectraux sont alors déterminés, ce qui permet de choisir de façon plus adéquate les paramètres du critère. Les résultats finaux sont intégrés à l'interprétation finale.

4.2.1.4. Avantages et inconvénients

Ce critère a pour avantage d'être adapté à tout type de non-stationnarités sous l'hypothèse que pour chaque fréquence, il existe au cours du temps une partie stationnaire, par exemple un signal stationnaire par morceaux, une modulation de fréquence ou des chocs impulsifs dans un bruit stationnaire. Il sera moins adapté à des non-stationnarités non liées à la fréquence, par exemple une modulation d'amplitude. En général, si les variations d'énergie sont suffisantes, ces non-stationnarités sont détectés par le critère en temps (cf. l'introduction du chapitre 4). Le résultat du critère est une détection non seulement en temps, mais également en fréquence ce qui permet de cerner les bandes fréquentielles concernées par les non-stationnarités.

Cet algorithme ne nécessite pas de modèle, les hypothèses sont peu contraignantes et il est rapide. Les paramètres sont peu nombreux et simples à choisir. Les paramètres proposés par défaut sont adaptés à la plupart des signaux réels de la banque ASPECT. Le choix du paramètre *x*%, pourcentage des estimations de plus faible DSP utilisés pour initialiser l'algorithme, n'a pas une influence prépondérante sur les résultats. L'algorithme s'adapte de lui-même lors des premières récursions. *x*% ne doit ni être trop grand au risque de détériorer la détection si des non-stationnarités importantes du point de vue temporelle existent, ni trop petit pour ne pas augmenter le nombre de fausses alarmes. Pour les signaux testés, les résultats sont quasiment identiques pour des pourcentages de 30% jusqu'à 60 %.

Les performances du critère sont limitées par les performances du spectrogramme et du corrélogramme glissant, notamment la variance et la résolution. Pour une analyse temps-fréquence, les segments sont en général de taille relativement réduite (<2048 points), c'est pourquoi des méthodes hautes résolutions glissantes (du type AR glissant) sont souvent employées. Cependant, ce type de méthodes haute-résolution ne fournit pas, à notre connaissance, de méthode simple de détection automatique des composantes non-stationnaires dans le plan temps-fréquence. Notre critère est efficace pour une première détection de non-stationnarités gênantes pour une analyse stationnaire. Dans le cadre d'un scénario complet d'analyse, les résultats ne sont pas seulement des alarmes, ils doivent être intégrés à l'interprétation des motifs. Le critère peut être réappliqué en fin d'analyse pour affiner l'interprétation.

4.2.2. Détection de non-stationnarités en fréquence à partir de la variance normalisée

4.2.2.1. Principe

Pour améliorer, confirmer ou infirmer les résultats de détection dans le plan temps-fréquence, nous avons mis au point un deuxième critère. Le critère ne permet qu'une détection fréquentielle, la détection temporelle étant appuyée par le critère de puissance, asymétrie et kurtosis glissants (cf. l'introduction du chapitre 4). L'objectif est d'améliorer la détection pour certains types de non-stationnarités. Les hypothèses à discriminer sont les mêmes que pour le critère précédent :

H_0 : signal aléatoire stationnaire à puissance moyenne finie éventuellement additionné d'un signal déterministe « stationnaire » (dont le spectre ne varie pas au cours du temps).

H_1 : rejet de l'hypothèse H_0, présence de non-stationnarités.

Le critère se fonde sur la notion de variance normalisée. Il utilise un des résultats du premier critère, l'estimation du spectre de la partie « stationnaire » du signal $\hat{\mu}_s(\nu)$. Le critère consiste à utiliser les

propriétés de la variance normalisée du périodogramme ou du corrélogramme A-biaisé pour analyser respectivement le spectrogramme ou le corrélogramme glissant. Les hypothèses sur les non-stationnarités sont les mêmes que pour le premier critère *i.e.* pour chaque fréquence il existe une partie « stationnaire ». S'il en existe plusieurs, c'est celle de plus faible DSP qui sera dénommée partie stationnaire du signal, les autres constituant des parties non-stationnaires par rapport au fond stationnaire.

La première étape consiste donc **à obtenir la représentation temps-fréquence**, spectrogramme ou corrélogramme glissant. Elle correspond à la même RTF que celle utilisée pour le critère précédent avec le même choix de paramètres pour des raisons identiques (cf. paragraphe 4.2.1.1). Il faut cependant s'assurer ici que les différentes estimations $\hat{\gamma}_p(\nu)$ peuvent être considérées comme indépendantes. Ceci implique que le décalage doit être supérieur à 50 %. Un décalage de 50 % est acceptable compte tenu des fenêtres d'apodisation appliquées.

Considérons que le signal suit l'hypothèse **H_0^* : signal aléatoire stationnaire et gaussien** de moyenne nulle. Supposons par ailleurs que les *P* segments peuvent être considérés comme *P* réalisations indépendantes du signal. Les *P* estimations $\hat{\gamma}_p(\nu)$ correspondent alors à *P* réalisations indépendantes. Ces *P* réalisations permettent d'estimer la variance normalisée de chaque périodogramme ou corrélogramme A-biaisé $\hat{\gamma}_p(\nu)$ appliqué au signal :

$$\hat{varn}(\nu) = \frac{\hat{var}(\nu)}{\hat{\gamma}_{moy}(\nu)^2} = \frac{\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\gamma}_p(\nu)^2 - \hat{\gamma}_{moy}(\nu)^2}{\hat{\gamma}_{moy}(\nu)^2} \tag{4.2-15}$$

où $$\hat{\gamma}_{moy}(\nu) = \frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\gamma}_p(\nu) \tag{4.2-16}$$

La variance normalisée est définie par :

$$varn_{\hat{\gamma}_p} = \frac{\xi\left\{\hat{\gamma}_p(\nu)^2\right\} - \xi\left\{\hat{\gamma}_p(\nu)\right\}^2}{\xi\left\{\hat{\gamma}_p(\nu)\right\}^2} \tag{4.2-17}$$

La variance normalisée est indépendante de la fréquence pour un signal stationnaire et gaussien dans le cas du périodogramme ou du corrélogramme A-biaisé et est égale à une constante *c* (respectivement 1 et 0,49 pour une fenêtre de Blackman). Si le signal est stationnaire $\hat{varn}(\nu) \approx c$ avec des variations de l'ordre de l'écart-type de l'estimateur de la variance normalisée (pour la fréquence nulle et la fréquence d'échantillonnage sur deux la variance normalisée théorique est égale à deux fois celle pour les autres fréquences). La Figure 4.2-VII illustre ce cas avec un bruit blanc gaussien.

Plusieurs points importants

- La propriété $\hat{varn}(\nu) \approx c$ est assez tolérante vis-à-vis de l'hypothèse gaussienne (cf. paragraphe 3.2). La TF d'un signal aléatoire quelle que soit sa distribution, tend dans la plupart des cas vers une distribution gaussienne par application du théorème central limite. La généralisation à la plupart des signaux aléatoires dans le domaine d'étude de l'opération ASPECT peut être envisagée.
- Si une fréquence pure, ou de façon plus générale un signal déterministe dont le spectre ne varie pas au cours du temps (**hypothèse H_0**), est présent la variance normalisée estimée est inférieure à la variance normalisée théorique du cas gaussien seul (cf. la démonstration en annexe A-6.2.1 et la Figure 4.2-VII).

- Si un signal comporte une non-stationnarité à une certaine fréquence ν_0, l'estimation de la variance va augmenter.
- Si la non-stationnarité est importante en fréquence et en amplitude, la variance normalisée estimée va également augmenter de façon suffisamment importante pour dépasser les variations de l'estimateur de variance normalisée autour de *c* dues à sa propre variance.

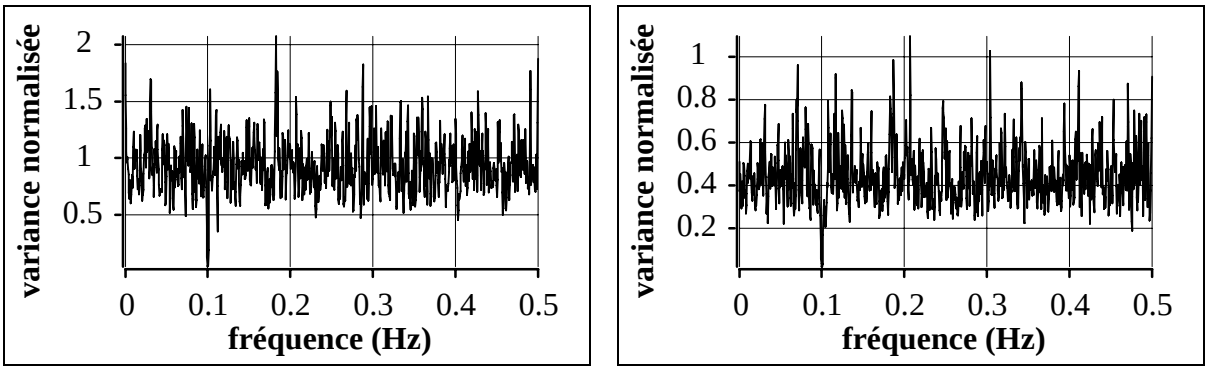
Il suffit alors de **comparer l'estimateur de variance normalisée à un seuil** κ (supérieur à *c*) pour détecter et déterminer les plages de fréquences comportant des non-stationnarités. Le seuil κ est fixé par la variance de l'estimateur de variance normalisée. Cependant, dans le cas où des non-stationnarités sont présentes, il n'est pas adéquat d'utiliser la moyenne globale des estimations $\hat{\gamma}_{moy}(\nu)$ puisque l'on cherche à détecter une augmentation de la variance normalisée par rapport à la partie stationnaire du signal. Il est préférable d'utiliser le résultat du premier critère pour avoir une estimation de l'espérance de la partie stationnaire du signal. Ceci revient à utiliser l'estimation du spectre stationnaire $\hat{\mu}_s(\nu)$ au lieu de $\hat{\gamma}_{moy}(\nu)$. Ainsi l'influence des non-stationnarités de puissance importante est éliminée. Il n'est alors pas nécessaire d'envisager un algorithme récursif, bien que celui-ci soit tout à fait envisageable sur le même principe que celui du critère précédent.

L'estimation de la variance normalisée s'écrit :

$$\hat{var}n_P(\nu) = \frac{\frac{1}{P}\sum_{p=0}^{P-1}\hat{\gamma}_p(\nu)^2 - \hat{\mu}_s(\nu)^2}{\hat{\mu}_s(\nu)^2} \tag{4.2-18}$$

Le détecteur s'écrit alors :

$$\hat{var}n_P(\nu) \begin{cases} > \\ \leq \end{cases} \kappa \quad \begin{matrix} \text{H}_1 \text{ est retenue, localisation fréquentielle d'une non-stationnarité} \\ \text{H}_0 \text{ est retenue, aucune non-stationnarité n'influence la fréquence } \nu \end{matrix} \tag{4.2-19}$$

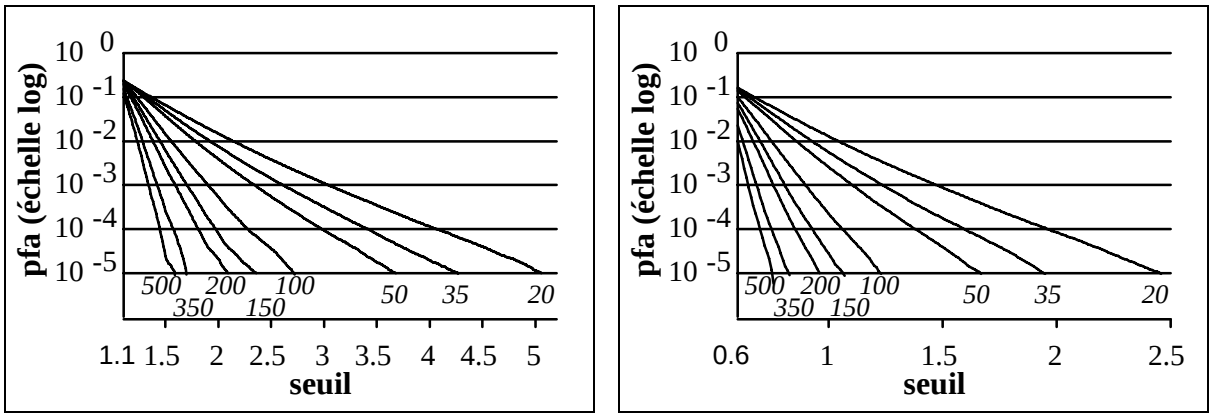


(a) **périodogramme** (b) **corrélogramme A-biaisé**

Figure 4.2-VII : **estimation de la variance normalisée dans le cas d'un bruit blanc gaussien** de variance unité additionné d'une sinusoïde de fréquence 0,1 Hz, d'amplitude 0,5. La taille du signal est de 26 612 points (fréquence d'échantillonnage de 1 Hz) (a) **du périodogramme** à partir d'un spectrogramme avec des tailles de segments de 1024 points, un recouvrement de 512 points, une fenêtre de Blackman (50 segments), (b) **du corrélogramme A-biaisé** à partir d'un corrélogramme glissant avec des tailles de segments de 1024 points, un recouvrement de 512 points, une fenêtre de Blackman (50 segments). Dans les deux cas la taille des TF est de 2048 points. On remarque qu'à la fréquence de la sinusoïde, la variance normalisée est très inférieure à *c*.

Le principal problème est de définir un intervalle de confiance pour l'estimateur de la variance normalisée dans le cas stationnaire. Cet intervalle de confiance nous permettrait de fixer le **seuil** de détection κ. Théoriquement, il est difficile, voire impossible à calculer. On s'intéresse à fixer une limite supérieure de telle sorte que pour des signaux stationnaires, les estimées de la variance normalisée en fonction de la fréquence soient inférieures à ce seuil, c'est-à-dire telle que la probabilité de fausse alarme (cf. équation 4.2-1) associée au seuil soit faible. Nous avons appliqué une procédure expérimentale afin d'évaluer un seuil optimal pour une probabilité de fausse alarme donnée en fonction du nombre de segments.

Procédure expérimentale d'évaluation du seuil de détection :
Pour un nombre de segments fixé *P*, on calcule *P* estimations $\hat{\gamma}_p(\nu)$ correspondant à *P* réalisations d'un bruit blanc stationnaire. Puis, on estime la variance normalisée pour chaque fréquence par l'équation 4.2-15 (cas stationnaire). On effectue cette suite d'opérations 20 000 fois pour des réalisations différentes du bruit à chaque fois. On obtient ainsi 20 000 réalisations de l'estimation de la variance normalisée. Pour un seuil donné κ et pour chaque fréquence, on compte les cas où la variance normalisée estimée dépasse le seuil. Les fréquences dans le cas du bruit blanc gaussien peuvent être considérées comme indépendantes. On additionne les résultats de chaque fréquence (en évitant les 5 premières et les 5 dernières trop proches respectivement de la fréquence nulle et de la fréquence de Shannon pour lesquels la variance normalisée est le double de celle des autres fréquences et la densité de probabilité de l'estimateur est différente, cf. paragraphe 3.2). Puis en divisant par le nombre de réalisations, soit 20 000 fois le nombre de fréquences utilisées, on estime la probabilité de fausse alarme associée au seuil κ et au nombre de segments *P* (cf. Figure 4.2-VIII). Pour le périodogramme, on choisit une taille de TF égale à la taille des segments de 1024 points, pour le corrélogramme A-biaisé une taille de TF égale à 2048 (sans zero-padding).



(a) **spectrogramme** (b) **corrélogramme glissant**

Figure 4.2-VIII : **probabilité de fausse alarme estimée en fonction du seuil de détection** appliqué à l'estimation de la variance normalisée pour un bruit blanc gaussien en fonction du nombre de segments (indiqué en *italique)* à partir du spectrogramme (a) et du corrélogramme glissant (b).

Pour une probabilité de fausse alarme donnée, le seuil varie suffisamment lentement en fonction du nombre de segments pour permettre de choisir en première approximation le seuil de détection en fonction du nombre de segments d'après le tableau Tab. 4.2-I.

Tab. 4.2-I : **seuil de détection κ en fonction de la P_{fa}** désirée et du nombre de segments

	spectrogramme					corrélogramme glissant				
Nbseg P_{fa}	de 20 à 30	de 30 à 70	de 70 à 150	de 150 à 400	> 400	de 20 à 30	de 30 à 70	de 70 à 150	de 150 à 400	> 400
10^{-5}	5	3,7	2,5	2	1,6	2,4	1,7	1,3	1	0,8
10^{-4}	4	3	2,3	1,8	1,5	1,9	1,4	1,1	0,9	0,75
10^{-3}	3	2,4	2	1,6	1,4	1,4	1,2	1	0,8	0,7
10^{-2}	2	1,8	1,6	1,4	1,2	1	0,9	0,8	0,7	0,6

Pour détecter des non-stationnarités à partir de la variance normalisée, il suffit de déterminer la probabilité de fausse alarme désirée (de l'ordre de 10^{-4} dans notre contexte), ce qui fixe le seuil de détection κ suivant le nombre de segments de la RTF (cf. Tab. 4.2-I).

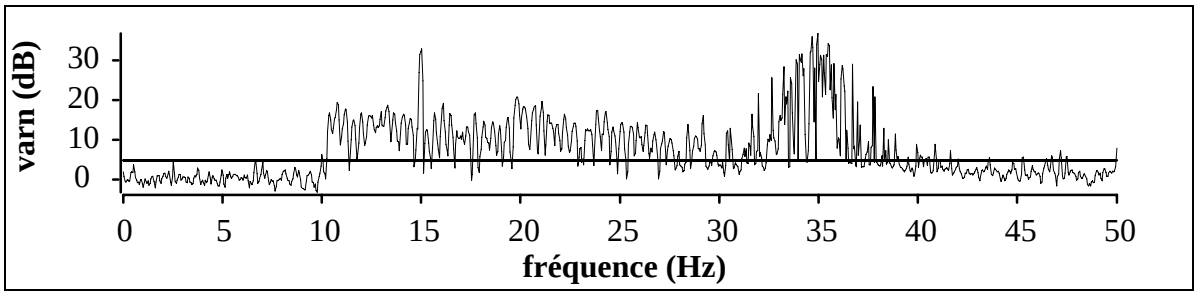
Les paramètres de la RTF, en particulier la taille des segments, sont fixées par le critère précédent de détection dans le plan temps-fréquence (cf. paragraphe 4.2.1.1). La taille des segments est fixée afin d'assurer un nombre de segments suffisant (>20). Plus la taille des segments est faible, plus le nombre de segments est important assurant une diminution de la variance de l'estimateur de variance normalisé et ainsi une meilleure détection des non-stationnarités. La taille des segments détermine également la résolution fréquentielle qui ne doit pas être trop faible pour détecter des non-stationnarités très localisées en fréquence.

4.2.2.2. Résultats

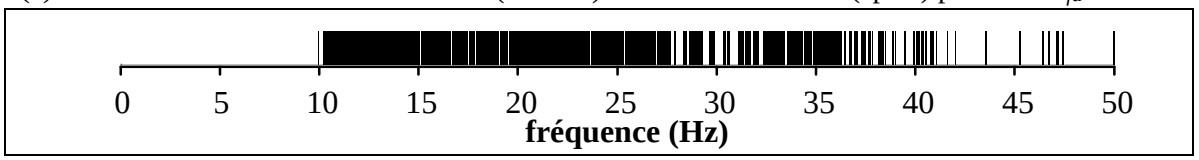
Nous allons présenter les résultats obtenus avec les mêmes signaux que pour le critère précédent de détection dans le plan temps-fréquence. L'algorithme est calculé avec les mêmes représentations temps-fréquence que pour le critère précédent et à partir de l'estimation de la moyenne « stationnaire » $\hat{\mu}_s(\nu)$ obtenue.

Tout d'abord, nous nous intéressons au **signal synthétique** (cf. paragraphe 4.2.1.3) qui présente différents types de non stationnarités : deux modulations linéaires de fréquence entre 10 et 30 Hz, un motif bande étroite principalement entre 25 Hz et 45 Hz, une fréquence pure de 15 Hz.

Pour ce signal, les fréquences comportant des non stationnarités sont correctement détectées que ce soit à partir du spectrogramme (cf. Figure 4.2-III) ou du corrélogramme (cf. Figure 4.2-IV). Comme pour le critère précédent, et avec les mêmes réserves quant à la résolution fréquentielle et l'influence des lobes secondaires, le critère est plus efficace en se fondant sur le corrélogramme. En effet, la variance normalisée du corrélogramme est inférieure de moitié à celle du périodogramme. Les non stationnarités impliquent une augmentation de la variance normalisée. Elles sont mieux détectés avec le corrélogramme puisqu'elles se différencient mieux des variations des motifs stationnaires (dues à la variance des estimateurs). Dans le cas du signal synthétique, les résultats du premier critère sont confirmés. Il faut souligner que les non stationnarités détectées sont synonymes d'un problème potentiel pour une analyse stationnaire, puisqu'elles sont suffisamment importantes pour perturber l'estimation de la variance. La différence principale avec le premier critère est que la non stationnarité peut être soit très localisée en temps et de puissance importante, soit très localisée en fréquence et sur une plage temporelle importante. Plus la variance normalisée estimée dépasse le seuil de détection, plus la non stationnarité est importante, soit en puissance, soit en localisation temporelle.

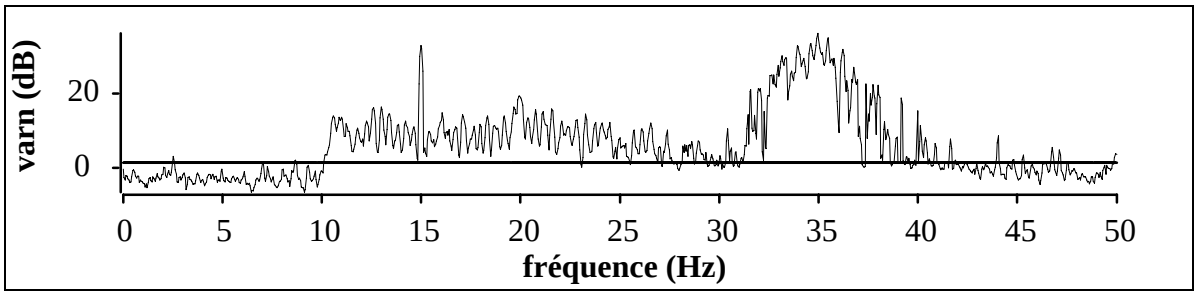


(a) estimation de la variance normalisée (trait fin) et seuil de détection (épais) pour une P_{fa} de 10^{-4}.

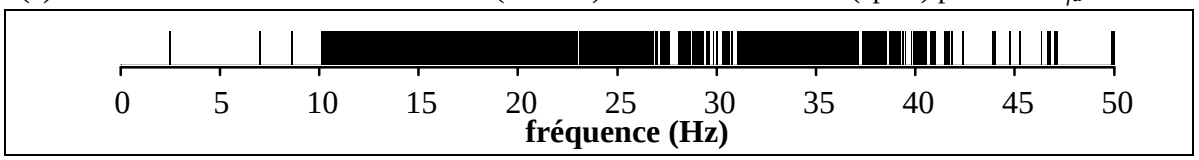


(b) fréquence détectée comme comportant des non-stationnarités.

Figure 4.2-IX : **signal synthétique, détection de non stationnarité en fréquence à partir de la variance normalisée du périodogramme**. Le critère est fondé sur les résultats du critère de détection dans le plan temps-fréquence présentés sur la Figure 4.2-III. Le nombre de segments est égal à 47, le seuil de détection est alors égal à 3, soit 4,77 dB, pour une P_{fa} de 10^{-4} (cf. Tab. 4.2-I).



(a) estimation de la variance normalisée (trait fin) et seuil de détection (épais) pour une P_{fa} de 10^{-4}.

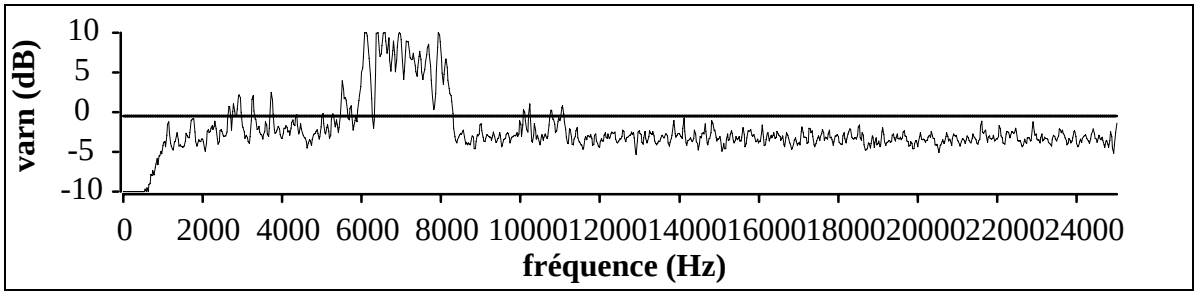


(b) fréquence détectée comme comportant des non-stationnarités.

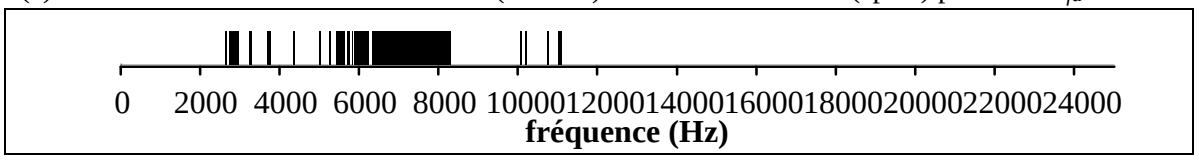
Figure 4.2-X : **signal synthétique, détection de non stationnarité en fréquence à partir de la variance normalisée du corrélogramme A-biaisé**. Le critère est fondé sur les résultats du critère de détection dans le plan temps-fréquence présentés sur la Figure 4.2-IV. Le nombre de segments est égal à 47, le seuil de détection est alors égal à 1,4, soit 1,46 dB, pour une P_{fa} de 10^{-4} (cf. Tab. 4.2-I).

Dans le **cas du signal DCE** fourni par EDF (cf. page 105), les résultats (cf. Figure 4.2-XI) corroborent les résultats du premier critère (cf. Figure 4.2-V). On constate que la zone fréquentielle du bruit hydraulique contenant des bouffées d'énergie autour de 2830 Hz est également détectée. Mais il faut prendre en compte que les chocs du corps errant créent également des non stationnarités dans cette zone fréquentielle. Il est alors difficile d'indiquer quel type de non stationnarité est à l'origine de la détection. Il convient également de souligner que le critère n'est pas très adapté à la détection de non stationnarités de type « bouffées d'énergie ». L'estimation de la moyenne stationnaire du signal $\hat{\mu}_s(\nu)$ étant en général faussée, l'estimation de la variance normalisée l'est également. Par contre, pour le signal DCE, on constate que certaines fréquences détectées comme non-stationnaires par le premier critère (cf. Figure 4.2-V (c)) sont détectées comme stationnaires par le critère sur la variance normalisée (cf. Figure 4.2-XI). Dans le plan temps-fréquence, ces non stationnarités sont très

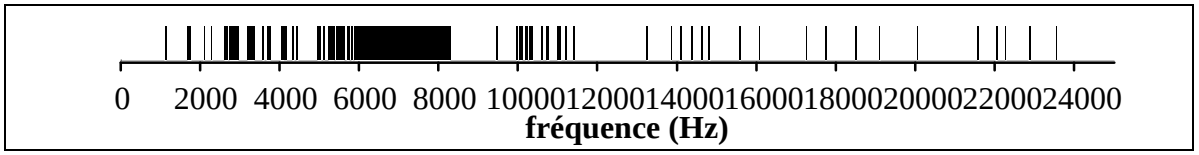
localisées en temps et en fréquence (principalement en haute-fréquence). Il est difficile puisque le signal est réel, de distinguer les points non-stationnaires des fausses alarmes. Si ces points ne sont pas détectées par le critère sur la variance normalisée, c'est que leur importance vis-à-vis du reste du signal est négligeable et qu'elles ne perturberont pas outre mesure une analyse stationnaire. En recoupant les résultats des deux critères, les non stationnarités qui risquent de perturber une analyse stationnaire sont correctement mises en évidence.



(a) estimation de la variance normalisée (trait fin) et seuil de détection (épais) pour une P_{fa} de 10^{-4}.



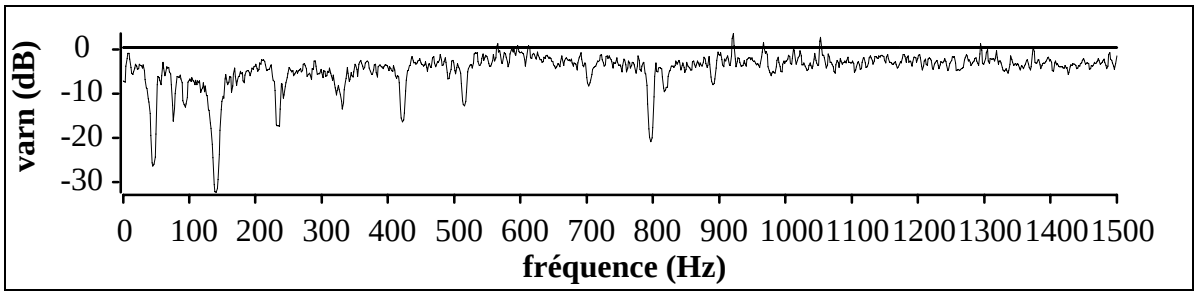
(b) fréquence détectée comme comportant des non-stationnarités.



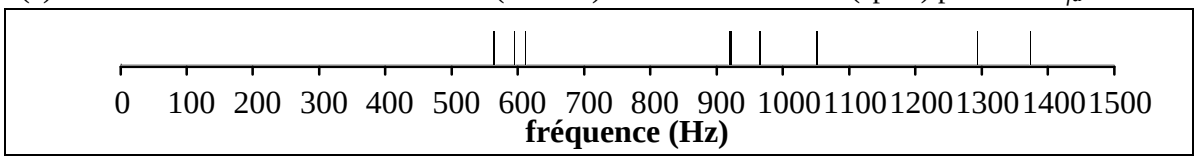
(c) projection sur l'axe fréquentiel des non stationnarités détectées avec une P_{fa} supérieure à 10^{-4} par le premier critère (détection de non stationnarité dans le plan temps-fréquence, cf. Figure 4.2-V).

Figure 4.2-XI **: signal DCE, détection de non stationnarité en fréquence à partir de la variance normalisée du corrélogramme A-biaisé**. Le critère est fondé sur les résultats du critère de détection dans le plan temps-fréquence présentés sur la Figure 4.2-V. Le nombre de segments est égal à 199, le seuil de détection est alors égal à 0,9, soit -0,46 dB, pour une P_{fa} de 10^{-4} (cf. Tab. 4.2-I).

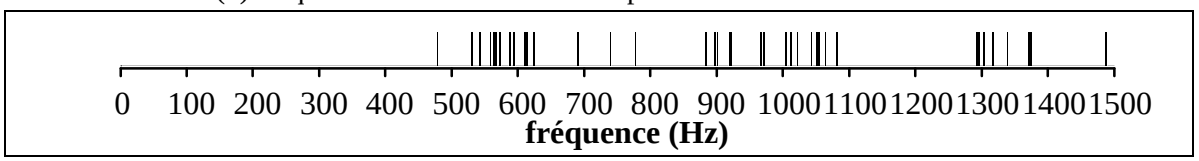
Pour le signal PEG-SH1-a11 fourni par le CTSN (cf. page 107), seules quelques non stationnarités en fréquence sont confirmées par le critère sur la variance normalisée (cf. Figure 4.2-XII) par rapport au critère précédent de détection dans le plan temps-fréquence (cf. Figure 4.2-VI). Le signal sera considéré comme globalement stationnaire, mais ces fréquences ne doivent pas être oubliées lors des analyses spectrales stationnaires pour aider l'interprétation des motifs concernés s'ils n'ont pas le comportement attendu. On remarque également qu'à la fréquence des fréquences pures du signal la variance normalisée est estimée très inférieure à 0,5 (valeur attendue). C'est également le cas avec le signal ENG8-E5-21RH-SPV (cf. Figure A 6-V en annexe A-6.2.2).



(a) estimation de la variance normalisée (trait fin) et seuil de détection (épais) pour une P_{fa} de 10^{-4}.



(b) fréquence détectée comme comportant des non-stationnarités.



(c) projection sur l'axe fréquentiel des non stationnarités détectées avec une P_{fa} supérieure à 10^{-4} par le premier critère (détection de non stationnarité dans le plan temps-fréquence, cf. Figure 4.2-V).

Figure 4.2-XII : **signal PEG-SH1-a11, détection de non stationnarité en fréquence à partir de la variance normalisée du corrélogramme A-biaisé**. Le critère est fondé sur les résultats du critère de détection dans le plan temps-fréquence présentés sur la Figure 4.2-VI. Le nombre de segments est égal à 96, le seuil de détection est alors égal à 1,1, soit 0,41 dB, pour une P_{fa} de 10^{-4} (cf. Tab. 4.2-I).

Ce deuxième critère permet aussi de détecter des non-stationnarités que le premier critère n'avait pas correctement mis en évidence : voir le cas du signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 présenté en annexe A-6.2.2.2.

Les deux critères de détections de non stationnarités se complètent. Le premier dans le plan temps-fréquence permet de localiser les non stationnarités non seulement en temps, mais également en fréquence. Le second se fonde sur une estimation de la variance normalisée et sur les résultats du premier critère et ne permet qu'une détection en fréquence. Il permet de confirmer les résultats du premier critère, mais aussi d'indiquer l'importance des non stationnarités et les problèmes potentiels pour une analyse stationnaire. Certaines non stationnarités ne sont pas confirmées par le second critère, ce qui indique qu'il peut s'agir de fausses alarmes ou tout du moins que ces non stationnarités ne perturberont pas de façon conséquente une analyse stationnaire. Enfin, certaines non stationnarités sont mieux détectées par ce second critère. A partir des résultats des deux critères et des projections des résultats sur l'axe fréquentiel, on peut également envisager de définir un **indice de stationnarité** globale. Il doit cependant tenir compte de leur puissance et de leur localisation temporelle et fréquentielle. Nous nous contentons ici de présenter les résultats, sans chercher à définir cet indice global, mais qui serait utile dans le cadre d'un système final.

4.3. Analyse de l'autocorrélation

La phase suivante de la pré-analyse consiste en l'analyse de la fonction d'autocorrélation du signal. L'objectif est d'émettre des hypothèses sur la nature du signal et ainsi de pouvoir choisir les paramètres de la première analyse spectrale (analyse primaire). Sur la fonction d'autocorrélation, les propriétés de périodicité du signal apparaissent beaucoup plus clairement que sur le signal temporel. Nous avons mis au point deux critères. Le premier se fonde sur l'estimateur non biaisé de la fonction

d'autocorrélation et cherche à déterminer ce que nous avons dénommé la périodicité globale du signal ainsi que le rapport signal sur bruit. Le deuxième se fonde sur l'estimateur biaisé de la fonction d'autocorrélation et cherche à déterminer la périodicité dite prépondérante du signal par filtrage successif de l'autocorrélation.

4.3.1. Détection de périodicité globale et estimation du rapport signal sur bruit

4.3.1.1. Principe général

L'objectif de ce critère est de détecter le comportement de l'estimateur d'autocorrélation sous **l'hypothèse signal périodique additionné d'un bruit blanc ou faiblement coloré** (par rapport à la taille du signal). Ce type de signal est qualifié de quasi-périodique. Un coefficient compris entre 0 et 1 est calculé afin d'évaluer la validité de l'hypothèse « signal périodique plus bruit ». Ce coefficient sera appelé **coefficient de périodicité globale** et la période associée, période globale globale de par le fait que la périodicité détectée correspond à la période de la partie périodique du signal et non à la périodicité la plus présente dans le signal, par exemple celle de la fréquence pure de plus forte énergie.

Le critère consiste à déterminer si la fonction d'autocorrélation comporte des maxima locaux régulièrement espacés et d'amplitude proche. En effet, ce comportement est caractéristique de la présence d'un signal périodique. A cette fin, nous détectons tout d'abord le maximum de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation dans une plage temporelle adaptée. Ensuite, il s'agit de détecter les autres maxima locaux proches en amplitude du maximum. Pour cela, nous calculons un intervalle de détection en amplitude qui prend en compte à la fois la variance de l'estimateur en fonction du retard et l'effet de l'échantillonnage. Enfin, nous cherchons à déterminer si les retards associés aux maxima détectés sont périodiques. Pour cela, nous comparons les différents écarts entre ces retards à l'écart médian ce qui nous permet de définir le coefficient de périodicité globale. Le coefficient de périodicité représente la confiance que l'on peut appliquer à la présence d'une partie périodique dans le signal. Si le signal peut être considéré comme ayant une partie périodique, la puissance du signal est obtenue par la moyenne des maxima détectés. La puissance du bruit se déduit par projection de la puissance du signal sur le retard nul de l'autocorrélation.

Le critère utilise les propriétés de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation. Considérons l'hypothèse H : le signal x est constitué d'un bruit blanc b additionné d'un signal périodique déterministe s de période T_S :

$$x[n] = b[n] + s[n] \qquad \text{pour } 0 \le n < N \tag{4.3-1}$$

L'estimation non biaisée de la fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$\hat{\Gamma}_x[m] = \frac{1}{N-m}\sum_{n=m}^{N-1} x[n]\,x^*[n-m] \quad \text{pour } 0 \le m \le N\text{-}1 \tag{4.3-2}$$

et a pour propriété sous l'hypothèse H [MAX-LAC96] :
- pour le retard nul, $\tau = 0$:

$$\hat{\Gamma}_x[0] = \hat{\Gamma}_b[0] + \hat{\Gamma}_s[0] \tag{4.3-3}$$

$$\hat{\Gamma}_x[0] \approx P_b + P_s \tag{4.3-4}$$

où P_b est la puissance du bruit et P_s est la puissance du signal.
- pour les retards $\tau > 0$:

$$\hat{\Gamma}_x[\tau] \approx \hat{\Gamma}_s[\tau] \approx \hat{\Gamma}_s[\tau + nT_s] \tag{4.3-5}$$

où n est un entier et T_S la période du signal s.

- pour les retards τ multiples de la période T_S :

$$\hat{\Gamma}_x[nT_S] \approx \hat{\Gamma}_s[0] \approx P_S \tag{4.3-6}$$

où n est un entier > 0.
- si $\tau > 0$ et $\tau \neq nT_S$:

$$\hat{\Gamma}_x[\tau] \approx \hat{\Gamma}_s[\tau] < P_S \tag{4.3-7}$$

Les retards τ multiples de la période T_S sont les maxima de la fonction pour $\tau > 0$ (cf. Figure 4.3-I). Les différentes équations précédentes ne sont pas des égalités, mais des approximations de par la variance de l'estimateur non biaisé de l'autocorrélation (cf. Tab. 2.3-I). En particulier, pour les retards proches du nombre de points du signal, la variance est maximale.

Remarquons que dans le cas d'un bruit coloré, le support de corrélation τ_b est en général très inférieur à la taille du signal. Nous aurons les mêmes propriétés que pour le bruit blanc, mais uniquement pour les retards supérieurs à τ_b. Pour le retard nul, on a également $\hat{\Gamma}_x[0] \approx P_b + P_S$ où P_b représente la puissance du bruit coloré. Si le bruit coloré est important tant en puissance qu'en support de corrélation, le caractère périodique du signal sera masqué. Dans le cas contraire, on peut considérer que le signal x est globalement quasi-périodique.

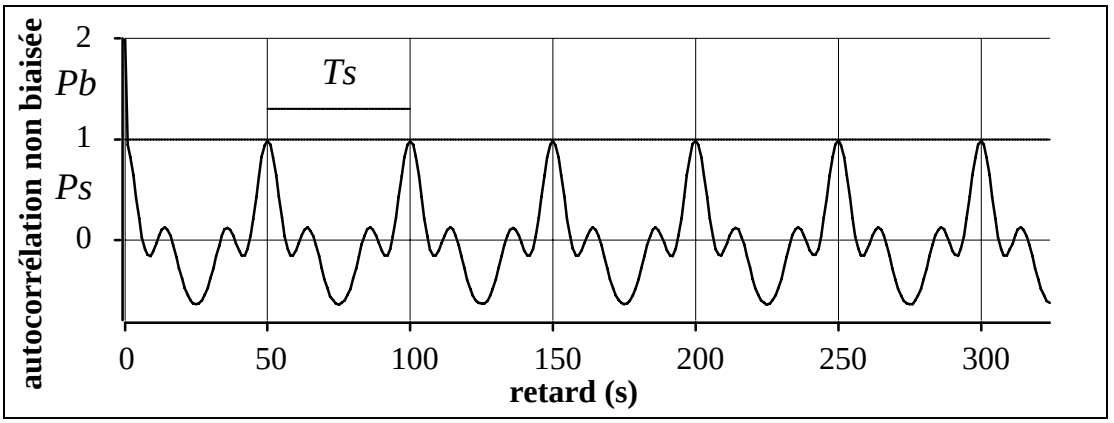


Figure 4.3-I : premiers retards de l'estimation non biaisée de l'autocorrélation d'un signal périodique déterministe de période 50 s de puissance 1 additionné d'un bruit blanc de puissance 1.

4.3.1.2. Les différentes étapes du critère

Nous allons détailler dans ce paragraphe les différentes étapes du critère (cf. Figure 4.3-II). Il faut avant tout remarquer que l'échantillonnage doit être pris en compte. En effet, dans le cas où le signal est périodique, sa période n'est pas forcément multiple de la période d'échantillonnage. Les maxima locaux obtenus sur l'estimation de l'autocorrélation ne seront pas égaux à la puissance du signal, mais légèrement inférieurs suivant la proximité des retards échantillonnés avec un multiple de la période du signal. Une première possibilité pour atténuer ce phénomène consiste à interpoler l'estimation de l'autocorrélation. On ajoute ainsi plusieurs points sur l'estimation suivant le coefficient d'interpolation appliqué. Un coefficient de 2 à 4 est conseillé.

- **La première phase** consiste à **déterminer le maximum de l'estimation de l'autocorrélation** en dehors du retard nul. On recherche ce maximum entre les retards τ_a et τ_b. τ_a doit être strictement positif pour ne pas prendre en compte les premiers retards de l'autocorrélation qui risquent d'être perturbés par la présence éventuelle d'un bruit coloré. En général, τ_a peut être choisi de l'ordre de 5 % à 10 % de

la taille du signal. τ_b doit être inférieur à la moitié de la taille du signal (le signal doit comporter au moins deux périodes). Ceci assure que la variance ne sera pas trop importante. Soit $\hat{\Gamma}_{max}[\tau_{max}]$ le maximum obtenu.

- **La deuxième phase** consiste à **vérifier que le maximum trouvé n'est pas associé au bruit**. Pour cela, on estime la puissance du bruit P_{b0} dans l'hypothèse où $\hat{\Gamma}_{max}[\tau_{max}] = P_{S0}$, P_{S0} étant la puissance du signal périodique recherché :

$$P_{b0} = \hat{\Gamma}_x[0] - \hat{\Gamma}_{max}[\tau_{max}] \tag{4.3-8}$$

Si τ_{max} correspond à du bruit, $\hat{\Gamma}_{max}[\tau_{max}]$ doit être de l'ordre de l'écart-type pour le retard τ_{max} sous l'hypothèse bruit blanc (gaussien) seul $\sigma_{max} = \sqrt{var(\hat{\Gamma}_b[\tau_{max}])}$ où d'après l'équation 2.4-8 :

$$\text{var}\left(\hat{\Gamma}_b[\tau]\right) \approx \frac{N}{(N-\tau)^2} {P_{b0}}^2 \tag{4.3-9}$$

pour $\tau > 0$ et en supposant que τ soit suffisamment éloigné de N (taille du signal), pour que l'approximation soit correcte. Nous considérons que τ_{max} correspond à du bruit si :

$$\hat{\Gamma}_{max}[\tau_{max}] \leq c_b \times \sigma_{max} \tag{4.3-10}$$

où c_b est une constante de l'ordre de 3. Elle a été déterminée à partir de différents tests sur des signaux synthétiques. Si le retard τ_{max} correspond à du bruit, le signal est considéré non seulement comme non périodique, mais également comme étant constitué uniquement d'un bruit aléatoire, ce que nous dénommerons l'hypothèse H_0. On donne au signal un coefficient de périodicité nul et l'algorithme s'arrête là. Sinon, on fait l'hypothèse que le signal est constitué d'un signal périodique de puissance proche de P_{S0}, additionné d'un bruit blanc (ou faiblement coloré) de puissance proche de P_{b0}. Sous cette hypothèse, τ_{max} correspond à un multiple de la période.

- **La troisième phase** consiste à **rechercher les estimées de l'autocorrélation dont la valeur est proche de P_{S0}**. Sous l'hypothèse que le signal est quasi-périodique, ces estimées doivent correspondre aux autres maxima de la partie périodique du signal et doivent être espacées de la période. On construit **un intervalle de détection en amplitude** qui doit prendre en compte l'effet de la variance de l'estimateur (qui dépend du retard) et l'échantillonnage (même en cas d'interpolation de l'autocorrélation). Tout d'abord, nous réajustons l'estimation de la puissance du signal en prenant en compte que P_{S0} a été estimé en choisissant le maximum entre τ_a et τ_b. En général, P_{S0} surestime P_S, ceci dû à la variance de l'estimateur. Pour réajuster l'estimation, nous soustrayons à P_{S0} l'écart-type σ_{smax}. Il s'agit de l'écart-type obtenu pour le retard τ_{max} sous l'hypothèse H_1 où le signal est un bruit blanc additionné d'un signal périodique dont τ_{max} est un multiple de la période. Sous cette hypothèse, la variance de l'estimateur s'écrit (le calcul se fait aisément) :

$$\text{var}\left(\hat{\Gamma}_{s+b}[\tau]\right) \approx \frac{4N-6\tau}{(N-\tau)^2} P_b \times P_s + \frac{N}{(N-\tau)^2} {P_b}^2 \tag{4.3-11}$$

pour τ multiple de la période. On soustrait à P_{S0}, $\sigma_{smax} = \sqrt{\text{var}\left(\hat{\Gamma}_{s+b}[\tau_{max}]\right)}$ en utilisant dans l'équation 4.3-11, P_{b0} et P_{S0} à la place de P_b et P_S. On estime P_S par $P_{S1} = P_{S0} - \sigma_{smax}$ et par suite P_b par $P_{b1} = \hat{\Gamma}_x[0] - P_{S1}$.

On construit l'intervalle de recherche des maxima en déterminant la limite supérieure l_{max} et la limite inférieure l_{min}. Ces limites prennent en compte la variance de l'estimateur sous l'hypothèse H_1 dépendant ainsi du retard et un coefficient pour compenser le problème de l'échantillonnage :

$$l_{max}[\tau] = P_{S1} + c \times \sigma_{s+b}[\tau] + c_{ech} \times P_{S1} \tag{4.3-12}$$

$$l_{min}[\tau] = P_{S1} - c \times \sigma_{s+b}[\tau] - c_{ech} \times P_{S1} \tag{4.3-13}$$

où $\sigma_{s+b}[\tau] = \sqrt{\mathrm{var}\left(\hat{\Gamma}_{s+b}[\tau]\right)}$ en utilisant dans l'équation 4.3-11, P_{b1} et P_{S1} à la place de P_b et P_S.
c est un coefficient de l'ordre de 1,5 (il pourrait être choisi différent pour l_{max} et l_{min}, mais ces choix n'ont que peu d'influence). On considère que la majorité des maxima sont compris dans un intervalle compris entre la puissance du signal plus ou moins 2 fois l'écart-type. Le coefficient c_{ech} permet de compenser l'effet de l'échantillonnage, en ajoutant ou soustrayant un certain pourcentage de la puissance du signal estimé. Un pourcentage de l'ordre de 5 (à 10 %) offre un bon compromis. Les limites ainsi définies permettent de prendre en compte les deux phénomènes, variance et échantillonnage, de façon adaptative. En effet, si la puissance du signal est faible, c'est la variance de l'estimateur qui va être le phénomène le plus gênant. Dans ce cas c'est principalement le coefficient $c \times \sigma_{s+b}[\tau]$ qui détermine les limites de l'intervalle. Si la puissance du signal est importante, c'est principalement le phénomène lié à l'échantillonnage qui risque d'être gênant. Dans ce cas le coefficient $c_{ech} \times P_{S1}$ va prendre de l'importance pour le calcul des limites de l'intervalle. Le tout dépend également du retard et du rapport signal sur bruit. Les différents paramètres ont été ajustés à partir d'un ensemble de signaux synthétiques et réels.

On recherche alors les **estimées de l'autocorrélation dont la valeur est comprise dans l'intervalle** entre l_{max} et l_{min} pour les retards compris entre τ_c et τ_d. Soit ξ l'ensemble des J retards ainsi détectés, $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_J$:

$$\xi = \{\ \tau \in [\tau_c\ ,\ \tau_d] \,/\, l_{min} \leq \hat{\Gamma}_x[\tau] \leq l_{max}\ \} \tag{4.3-14}$$

On effectue la recherche dans un intervalle de retards $[\tau_c\ ,\ \tau_d]$ qui peut être différent de $[\tau_a\ ,\ \tau_b]$. τ_c doit être supérieur à 0, de même que pour τ_a, il ne doit pas prendre en compte les premiers retards qui risquent d'être perturbés par la présence d'un bruit coloré. τ_c doit rester inférieur à 65 % de la taille du signal pour éviter l'augmentation importante de la variance au-delà et pourvoir considérer que les approximations sont justes. En général $[\tau_a\ ,\ \tau_b] \subset [\tau_c\ ,\ \tau_d]$; un bon compromis est obtenu pour $\tau_c = \tau_a$ et $\tau_d > \tau_b$. Le choix final dépend de la taille du signal et des périodicités recherchées. Suivant le domaine d'application, en particulier dans le domaine vibratoire, les périodicités minimale et maximale attendues sont généralement bien connues. Il n'est pas nécessaire d'effectuer la recherche sur l'ensemble de l'autocorrélation, il suffit de s'assurer que suffisamment de périodes sont incluses dans l'intervalle de recherche. Les limitations ne sont dues qu'à la durée du calcul qui peut être importante si la taille du signal l'est.

- **La quatrième phase** consiste à **déterminer si les *J* retards de l'ensemble ξ correspondent aux maxima d'un signal périodique**. Pour cela, il convient de déterminer si la majorité d'entre eux sont régulièrement espacés d'une durée égale à la **période présumée du signal** que nous dénommons période globale. Nous estimons cette période $\hat{T}_S$ à la valeur médiane des écarts d_j entre les retards de l'ensemble ξ :

$$d_j = \tau_j - \tau_{j-1} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq J\text{-}1 \tag{4.3-15}$$

On choisit la valeur médiane pour éviter les valeurs anormales et mieux estimer la période que par un simple calcul de moyenne. On cherche à vérifier si une majorité des écarts d_j est proche de $\hat{T}_S$. Pour cela, nous calculons **un coefficient de périodicité** compris entre 0 et 1 qui représente le nombre

d'écarts proches de $\hat{T}_s$. On fixe un intervalle de tolérance de 10 % autour de $\hat{T}_s$ pour prendre en compte les problèmes d'estimation et d'échantillonnage et on calcule le coefficient de périodicité globale C_P :

$$C_P = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J-1}\Omega\left(d_j\right) \tag{4.3-16}$$

$$\text{où } \Omega\left(d_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_j \in \left[0{,}9\hat{T}_s\ ;1{,}1\hat{T}_s\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.3-17}$$

Le coefficient de périodicité globale représente la confiance que l'on peut appliquer à la présence d'une partie périodique dans le signal. S'il est égal à 1, le signal est considéré comme quasi-périodique. En dessous de 0,5, cette hypothèse ne peut être retenue. La présence de fréquences pures non commensurables (leur somme ne forme pas un signal périodique) peut cependant être envisagée.

- **Enfin**, **la puissance du signal, du bruit et le rapport signal sur bruit**, $\hat{P}_s$, $\hat{P}_b$ et *RSB*, **sont estimées** à partir des retards de l'ensemble ξ :

$$\hat{P}_s = \frac{1}{J}\sum_{j=0}^{J-1}\hat{\Gamma}_x\left[\tau_j\right] \tag{4.3-18}$$

$$\hat{P}_b = \hat{\Gamma}_x[0] - \hat{P}_s \tag{4.3-19}$$

$$RSB = \hat{P}_s / \hat{P}_b \tag{4.3-20}$$

Il faut également noter que la période estimée $\hat{T}_s$ n'est connue qu'à $\pm\Delta T_i$ où ΔT_i correspond à la période d'échantillonnage de l'autocorrélation après interpolation. L'algorithme est résumé dans le diagramme de la Figure 4.3-II.

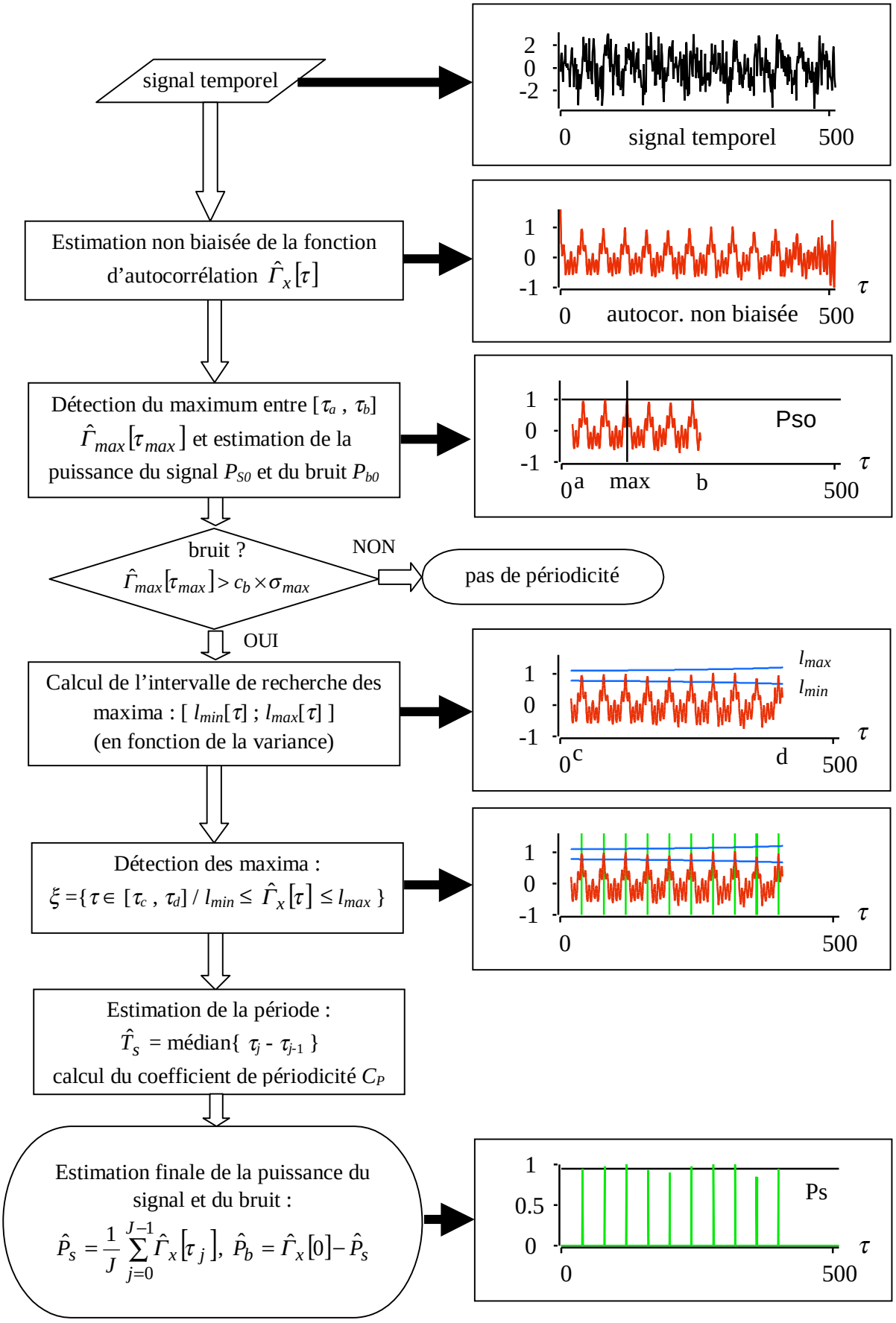


Figure 4.3-II : diagramme de l'algorithme de détection de périodicité globale.

4.3.1.3. Résultats

Nous allons discuter de différents résultats obtenus avec des signaux synthétiques et réels. Le premier **signal synthétique** (signal 1) est constitué d'un bruit blanc gaussien de puissance 3,5 et d'un signal périodique constitué d'une somme de sinusoïdes dont les fréquences sont harmoniques (fréquence d'échantillonnage unité). Le fondamental de fréquence 0,04 Hz est absent, mais correspond à la période du signal. Les différents harmoniques sont : h_1 de fréquence et d'amplitude (0,08 Hz ; 1,2), h_3 (0,16 Hz ; 1), h_4 (0,2 Hz ; 0,8), h_5 (0,24 Hz ; 0,5), h_6 (0,28 Hz ; 1), h_7 (0,32 Hz ; 0,2), h_8 (0,36 Hz ; 1), h_{10} (0,44 Hz ; 1,2), h_{11} (0,48 Hz ; 0,3). La puissance du signal périodique est égale à 3,5, soit un rapport signal sur bruit égal à 0 dB. Le signal est de durée courte, N = 512 points. Il est destiné à illustrer l'algorithme dans des conditions où la variance reste importante et où le nombre de périodes accessibles est restreint. Il illustre également le comportement de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation lorsque les retards sont proches de la durée du signal. Si le nombre de points augmente, la variance diminue et le nombre de périodes accessibles augmente, l'algorithme fonctionne alors d'autant mieux. Les paramètres utilisés sont ceux indiqués par défaut (avec en particulier $\tau_a = \tau_c = 0{,}05N$, $\tau_b = 0{,}5N$ et $\tau_d = 0{,}6N$).

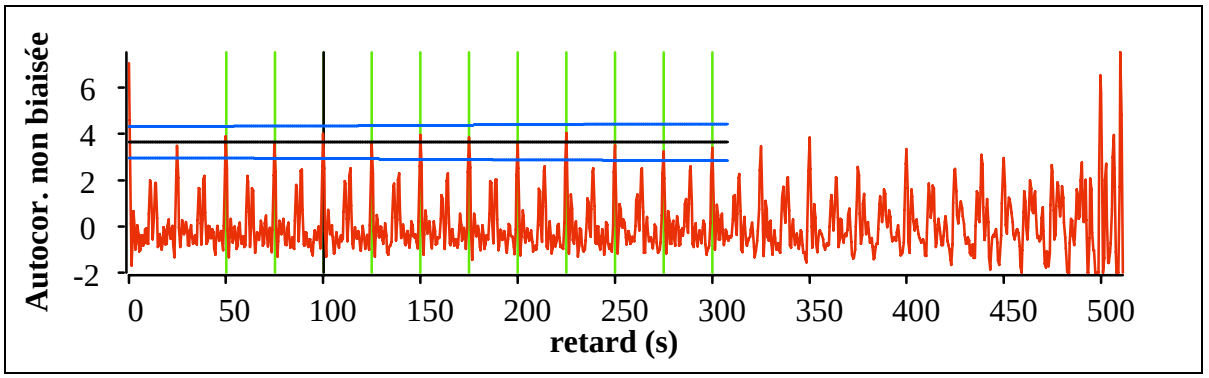


Figure 4.3-III : **signal synthétique 1, résultat de la détection de périodicité globale**. En rouge : estimation non biaisée de l'autocorrélation. Trait noir vertical, τ_{max} retard du maximum . Trait noir horizontal : puissance estimée du signal P_{S1}. Traits bleus : intervalle de recherche des maxima, l_{max} et l_{min}. Traits verticaux verts : retards des maxima de l'ensemble ξ. Résultats du critère : C_P = 1, période $\hat{T}_s$ = 25 s, soit 0,04 Hz, RSB = 1,1, $\hat{P}_s$ = 3,7, $\hat{P}_b$ = 3,4.

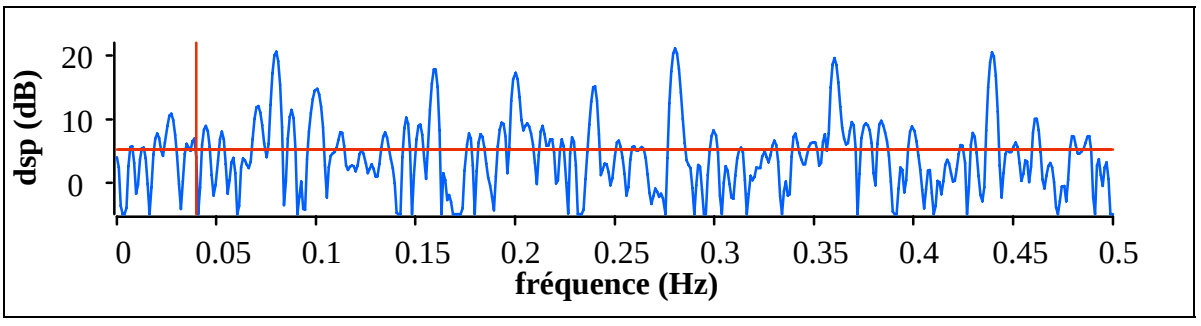


Figure 4.3-IV : en bleu DSP estimée du **signal synthétique 1** (périodogramme avec une fenêtre de Blackman) en décibel. Trait rouge horizontal : puissance estimée du bruit $\hat{P}_b$. Trait rouge vertical : fréquence correspondant à la période estimée $\hat{T}_s$.

L'algorithme fournit un coefficient de périodicité maximal égal à 1. Le critère estime correctement la période de la partie périodique du signal, mais également la puissance du signal et du bruit (cf. Figure 4.3-III). On le remarque également sur la DSP estimée du signal (cf. Figure 4.3-IV)

lorsqu'on la compare à la puissance estimée du bruit. Il faut également remarquer que l'on estime la fréquence du fondamental de la partie périodique du signal qui est pourtant absente.

Les résultats obtenus avec **le signal PEG-SH1-a11** (cf. Figure 4.3-V), ont été confirmés par l'analyse complète du signal. Les résultats présentés ont été obtenus avec une recherche des maxima sur un faible support de l'autocorrélation, support suffisant étant donné le nombre de points du signal (τ_a = τ_c = 0,033 s, point 100, τ_b = 0,67 s, point 2000 sans interpolation), les autres paramètres sont ceux donnés par défaut. Le coefficient de périodicité est égal à 1. Le signal est en effet constitué d'un bruit coloré et de fréquences pures dont la majeure partie sont harmoniques du fondamental 46,88 Hz, la période estimée étant de 46,9 Hz. Pour ce signal, le fondamental est présent (cf. Figure 4.3-VI). Le bruit de fond du signal est coloré, mais la puissance estimée semble bien correspondre à celle-ci comme l'on peut le voir sur la Figure 4.3-VI.

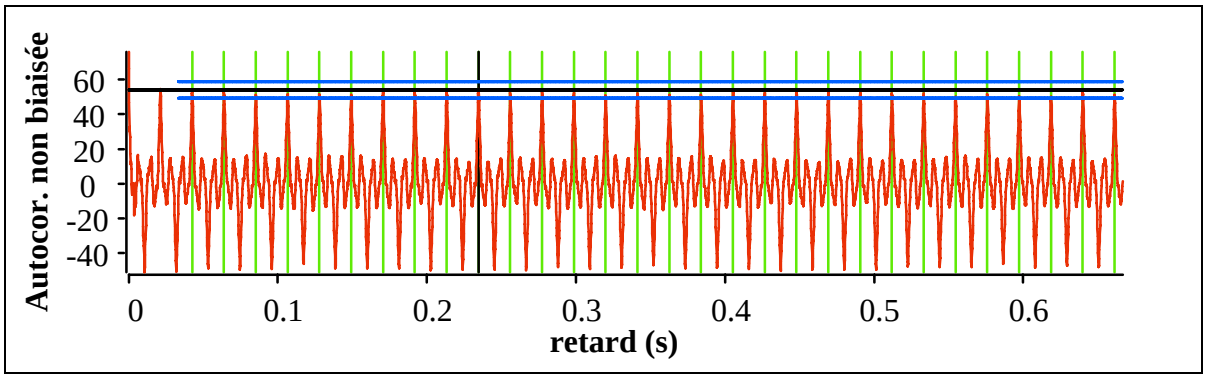


Figure 4.3-V : **signal PEG-SH1-a11, résultat de la détection de périodicité globale**. En rouge : estimation non biaisée de l'autocorrélation. Trait noir vertical, τ_{max} retard du maximum . Trait noir horizontal : puissance estimée du signal P_{S1}. Traits bleus : intervalle de recherche des maxima, l_{max} et l_{min}. Traits verticaux verts : retards des maxima de l'ensemble ξ. Résultats du critère : C_P = 1, période $\hat{T}_s$ = 0,0213 s, soit 46,9 Hz, RSB = 2,2, $\hat{P}_s$ = 52, $\hat{P}_b$ = 24.

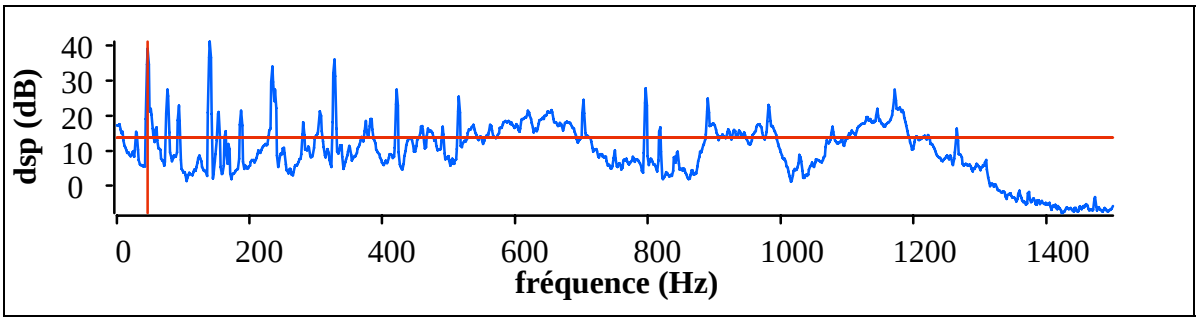


Figure 4.3-VI : en bleu DSP estimée du **signal PEG-SH1-a11** (Welch-WOSA, taille des segments de 2048 points avec une fenêtre de Blackman) en décibel. Trait rouge horizontal : puissance estimée du bruit $\hat{P}_b$. Trait rouge vertical : fréquence correspondant à la période estimée $\hat{T}_s$.

Les résultats sont également probants sur le signal d'engrenage ENG8-E5-21RH-SPV qui présente une partie périodique. Les résultats sont présentés en annexe A-7.

Il faut également noter que si une fréquence est très présente dans le signal, mais que le signal n'est pas périodique, celle-ci peut être détectée par notre critère, mais jamais avec un coefficient de périodicité égal à 1. Prenons le cas d'un signal synthétique constitué d'une sinusoïde dont la fréquence est bruitée que nous dénommons « **fréquence aléatoire** » (période d'échantillonnage T_e=1) :

$$s[n] = \sin(2\pi n T_e(\nu_0 + b[n])) \qquad \text{pour } 0 \le n < N\ (= 1024) \qquad (4.3\text{-}21)$$

La fréquence ν_0 est égale à 0,1 Hz et $b[n]$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart-type σ = 0,05 Hz. Spectralement, ce signal correspond à un motif bande étroite de bande égale à environ 4σ. Sur l'autocorrélation, cela se traduit par l'apparition de motifs périodiques à la fréquence dominante, soit 0,1 Hz, mais qui n'ont pas la même amplitude (l'enveloppe n'est pas une droite). Le critère donne alors un coefficient de périodicité de l'ordre de 0,6, pour une période estimée à qui correspond bien à la fréquence dominante du signal. Dans ce cas précis, le rapport signal sur bruit n'a pas de sens. Il faut noter que, pour ce cas, le calcul du coefficient de périodicité n'est pas très bien adapté puisqu'il ne prend en compte que le nombre d'écarts entre les maxima détectés et non le nombre de maxima qu'il devrait théoriquement y avoir étant donné la période estimée. Pour mieux prendre en compte ce type de phénomène et lui attribuer un coefficient de périodicité moins élevé, il conviendrait d'adapter un algorithme de détection d'harmoniques (sans présence obligatoire du fondamental [DUR98-Harmo], [PRIEUR97]) à l'analyse des maxima détectés. De tels algorithmes fournissent l'ensemble des différents fondamentaux détectés ainsi que leurs harmoniques respectifs. Il suffit alors d'attribuer à chaque fondamental un coefficient de périodicité égal au nombre d'harmoniques détectés divisé par le nombre d'harmoniques normalement présentes (entre $[\tau_c\ ,\ \tau_d]$). La période retenue correspond au fondamental avec le plus fort coefficient de périodicité. De tels algorithmes sont cependant plus lourds, complexes à adapter et risquent finalement d'être moins robustes. Etant donné qu'ils ne seraient vraiment utiles que pour le dernier cas décrit (qui n'est pas particulièrement courant), nous nous contenterons de l'algorithme initial.

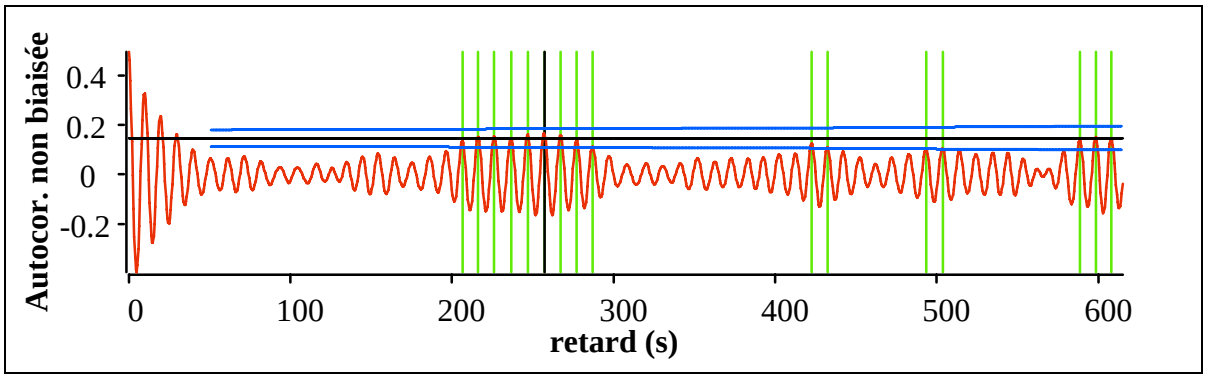


Figure 4.3-VII : **signal « fréquence aléatoire », résultat de la détection de périodicité globale**. En rouge : estimation non biaisée de l'autocorrélation. Trait noir vertical, τ_{max} retard du maximum . Trait noir horizontal : puissance estimée du signal P_{S1}. Traits bleus : intervalle de recherche des maxima, l_{max} et l_{min}. Traits verticaux verts : retards des maxima de l'ensemble ξ. Résultats du critère : C_P = 0,6, période $\hat{T}_s$ = 10,5 s, soit 0,095 Hz, RSB = 0,22, $\hat{P}_s$ = 0,089, $\hat{P}_b$ = 0,41.

Dans le cas du signal MF-CHARLIE1-VOIE6 qui n'est pas périodique, le critère donne bien un coefficient de périodicité nul (cf. Figure A 7-VII en annexe A-7). L'algorithme n'est pas efficace pour l'ensemble des signaux. Les différentes configurations de l'autocorrélation d'un signal périodique sont extrêmement variées. Elles dépendent de la combinaison des différentes harmoniques. Dans certains cas, sur l'autocorrélation, des maxima locaux proches des maxima correspondant au fondamental apparaissent. Ils sont alors détectés par l'algorithme et impliquent au final un coefficient de périodicité inférieur à 1, parfois même très inférieur à 1, alors que le signal est bien périodique (voir le cas du signal synthétique 2 présenté en annexe A-7, Figure A 7-V). La période estimée risque aussi d'être biaisée ou encore de correspondre à la fréquence d'une des harmoniques. Néanmoins, pour une importante catégorie de signaux, le critère offre des résultats fiables. Pour les autres cas, le deuxième critère, que nous présentons dans le paragraphe suivant, vient en appui et permet d'analyser correctement des cas problématiques.

4.3.2. Détection de périodicité prépondérante

4.3.2.1. Principe

Nous utilisons un deuxième critère pour analyser la fonction d'autocorrélation, toujours dans l'objectif de déterminer les périodicités du signal. Cette fois-ci le critère s'attache à déterminer non pas exactement la périodicité globale du signal, soit la période du fondamental, mais la **périodicité prépondérante** du signal, c'est-à-dire la périodicité la plus importante qui apparaît sur l'autocorrélation. Le critère présenté ici est une adaptation de celui proposé par P. Martini [MART95]. Il s'attache à reproduire l'analyse visuelle d'un expert qui effectue un lissage de la fonction d'autocorrélation et se focalise sur l'allure globale de la courbe.

Le principe consiste alors à lisser la fonction d'autocorrélation par le biais d'un banc de filtres passe-bas. Pour chaque filtrage, un coefficient de périodicité est calculé à partir des minima de la fonction d'autocorrélation. Il qualifie comme pour le critère précédent la détection de périodicité. Le coefficient de périodicité maximal détermine le lissage qui fait ressortir au mieux l'allure périodique recherchée.

Le critère est fondé sur l'analyse de la fonction d'autocorrélation. Se pose alors la question de l'estimateur utilisé. L'objectif n'étant pas de déterminer, comme pour le critère précèdent, la périodicité globale du signal via l'étude des maxima périodiques, le caractère non biaisé de l'estimateur n'importe pas. Par contre, une variance importante est gênante pour faire ressortir l'allure périodique du signal. Nous utiliserons donc **l'estimateur biaisé de l'autocorrélation**. Comme pour le critère précédent, il n'est pas nécessaire pour les signaux longs d'analyser l'ensemble de la fonction d'autocorrélation. Il suffit de s'assurer qu'un nombre suffisant de la période maximale recherchée soit accessible. Soit [0 , τ_a] la partie de la fonction d'autocorrélation analysée et $\hat{\Gamma}_x[\tau]$ l'estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation (cf. Tab. 2.3-I).

La seconde étape consiste à appliquer à $\hat{\Gamma}_x[\tau]$ **un banc de filtres passe-bas**. L'objectif est d'utiliser une gamme de fréquences de coupure de plus en plus basses pour déterminer le filtrage qui fait au mieux apparaître l'allure périodique de la courbe. Chaque filtrage passe-bas est en fait obtenu par application à la TFD de l'estimation de l'autocorrélation (soit le spectre estimé du signal), d'une puissance de la fenêtre d'apodisation de Hanning $h[k]^p$. Notons que n'importe quelle autre fenêtre peut être utilisée. Le banc de filtres est obtenu en prenant les puissances p_i={0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 15, 20, 30, 40, 60, 100, 200, 400} de la fenêtre de Hanning, ce qui permet d'obtenir une plage de fréquences de coupure satisfaisante (cf. Figure 4.3-VIII). Nous dénommerons ordre du filtrage l'indice *i* de 0 à 15 de la puissance p_i utilisée. Remarquons que n'importe quel banc de filtres passe-bas peut convenir tout aussi bien, l'intérêt ici est d'avoir un algorithme simple, efficace et rapide.

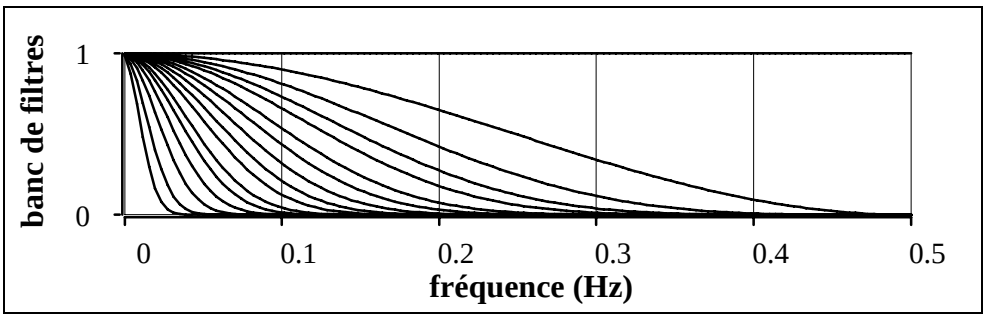


Figure 4.3-VIII : banc de filtres en fréquence réduite.

Après filtrage, on calcule pour chacune des estimations de l'autocorrélation **un coefficient de périodicité**. L'objectif est comme pour le critère précédent d'observer les écarts entre les motifs périodiques. Pour cela, on peut s'intéresser soit à l'écart entre les maxima locaux, soit entre les

minima locaux, leur amplitude n'ayant pas d'importance pour ce critère. Nous avons choisi d'utiliser les minima locaux car nous avons observé une plus grande stabilité après filtrage que pour les maxima locaux. Il s'agit alors de déterminer si les écarts entre les minima locaux sont réguliers. Soit τ_j les abscisses des J minima locaux et $d_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ leurs J-1 écarts respectifs. Nous calculons leur moyenne $\hat{T}_s = \frac{1}{J-1}\sum_{j=0}^{J-2} d_j$. De même que pour le précédent critère, le coefficient de périodicité est représentatif du nombre d'écarts proches de $\hat{T}_s$. Nous fixons un intervalle de tolérance de 10%, pour tenir compte des problèmes d'estimation et d'échantillonnage, et nous calculons le coefficient de périodicité du signal par :

$$C_P = \frac{1}{J-1}\sum_{j=0}^{J-2} \Omega\left(d_j\right) \tag{4.3-22}$$

$$\text{où } \Omega\left(d_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_j \in \left[0{,}9\hat{T}_s\ ;\ 1{,}1\hat{T}_s\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.3-23}$$

Le coefficient de périodicité, compris entre 0 et 1, caractérise la régularité des écarts. Un coefficient proche de 1 indique que les retards sont régulièrement espacés d'environ $\hat{T}_s$, ce qui est caractéristique de la présence d'une périodicité prépondérante de $\hat{T}_s$ seconde sur l'autocorrélation, donc par extension dans le signal. Nous obtenons une courbe des coefficients de périodicité en fonction de l'ordre du filtrage. Nous conservons le premier des maxima de cette courbe comme résultat du critère que nous dénommerons coefficient de périodicité prépondérante pour le différencier de celui du premier critère. Le premier maximum correspond à l'estimation la moins filtrée par rapport aux autres maxima, ce qui permet de conserver le cas le plus proche de la fonction d'autocorrélation de départ. Le coefficient de périodicité se traduit par une échelle de valeurs allant du cas « signal apériodique » à « présence d'une périodicité prépondérante égale à $\hat{T}_s$ ». L'algorithme est résumé dans le diagramme Figure 4.3-IX. La différence avec l'algorithme présenté dans [MART95] est qu'à l'origine, l'algorithme s'attachait à analyser les minima locaux de *l'enveloppe* des fonctions d'autocorrélation filtrées. Or ceci implique des résultats faux dans un certain nombre de cas. Par exemple, dans le cas très simple d'une sinusoïde, l'autocorrélation biaisée est également une sinusoïde à laquelle est appliquée une fenêtre rectangulaire, l'enveloppe est alors cette fenêtre rectangulaire et n'a pas de minima locaux !

Remarquons que pour ce critère, il n'est pas nécessaire d'interpoler la fonction d'autocorrélation, puisqu'il n'est pas nécessaire de connaître précisément la valeur des maxima locaux.

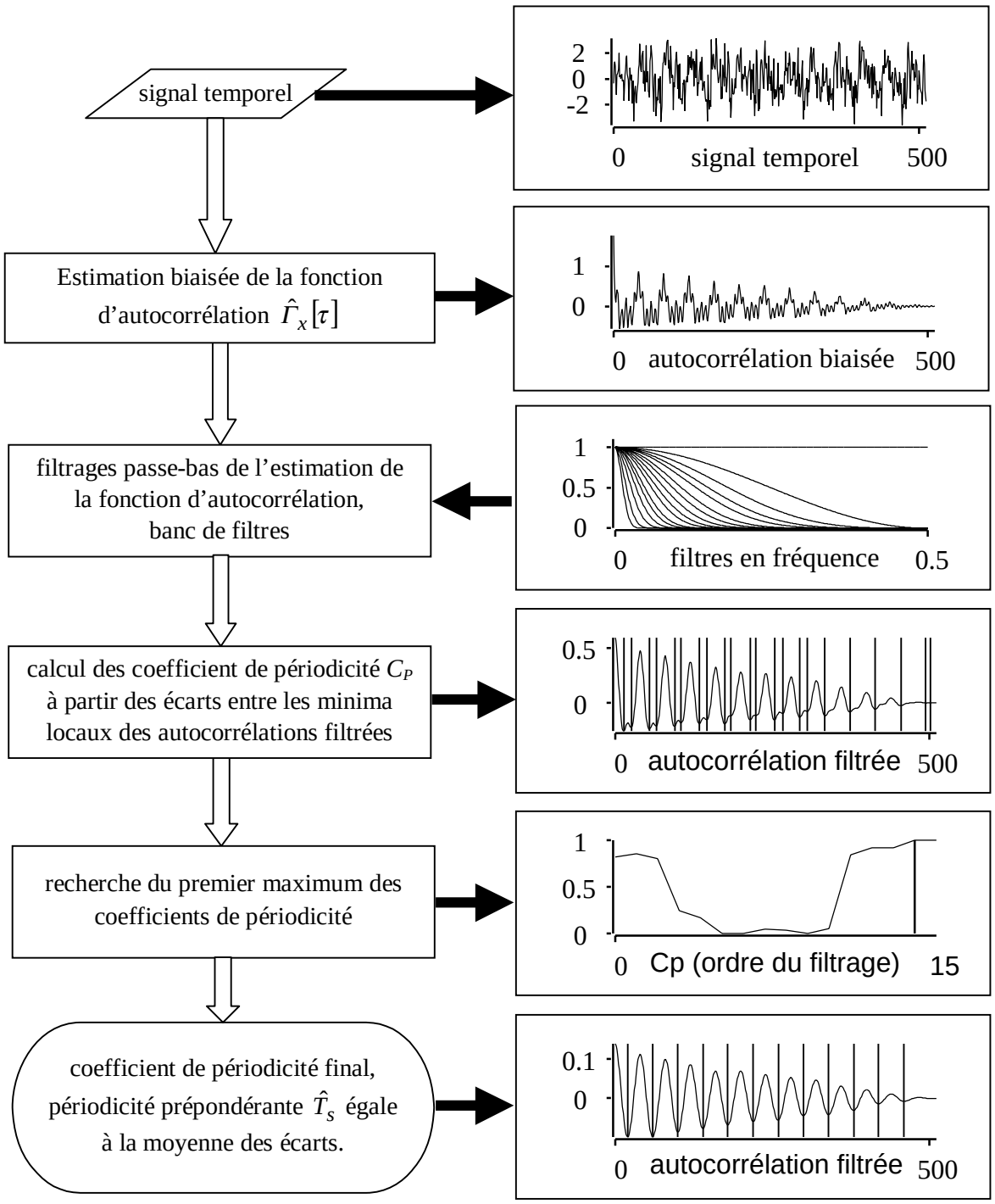


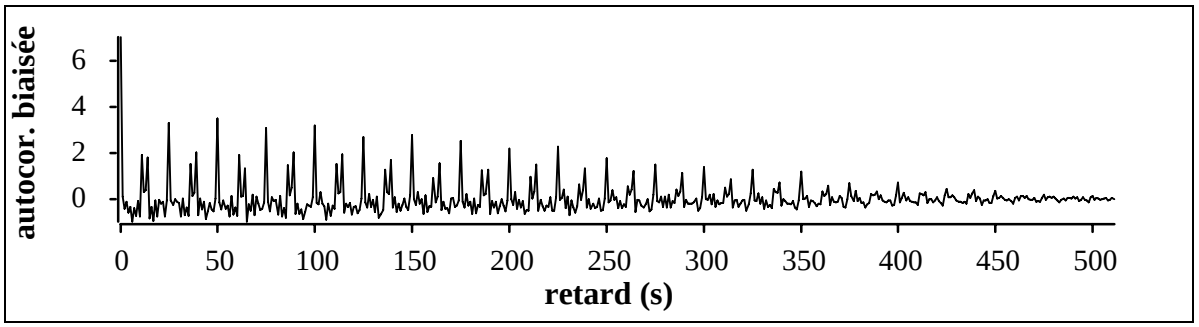
Figure 4.3-IX : diagramme du critère de détection de périodicité prépondérante.

4.3.2.2. Résultats

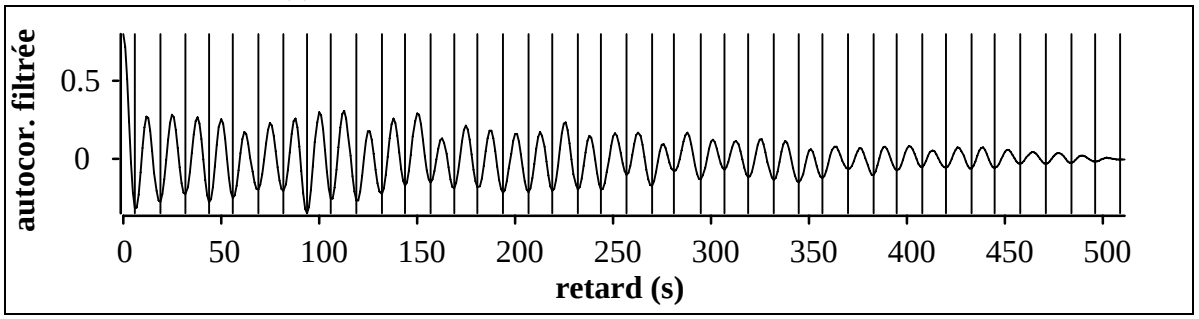
Nous allons discuter des résultats du critère à partir des mêmes signaux que pour le critère précédent (cf. paragraphe 4.3.1.3). Nous mettons ainsi en évidence non seulement les avantages et inconvénients de chacun, mais également leur complémentarité.

Le signal synthétique 1 (cf. paragraphe 4.3.1.3) est constitué d'un bruit blanc et d'une somme de sinusoïdes harmoniques entre elles. Les résultats (cf. Figure 4.3-X) donnent bien un coefficient de périodicité très proche de 1, mais la période détectée ne correspond pas à la période du signal. Elle

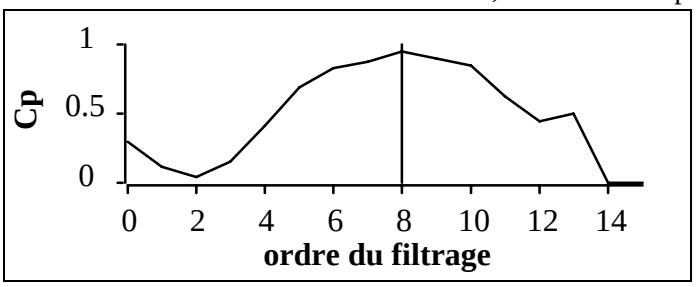
correspond à la périodicité prépondérante dans l'autocorrélation, celle qui marque le plus l'allure de l'autocorrélation. Pour ce signal, la période détectée correspond à la fréquence de l'harmonique h_1 du signal qui est effectivement importante dans le signal. Cependant, ce n'est pas l'importance d'une harmonique particulière qui va déterminer la périodicité prépondérante, mais la combinaison des différentes harmoniques. Les harmoniques qui prédominent sont celles multiples de la périodicité prépondérante. Le signal peut être classé comme quasi-périodique (coefficient de périodicité proche de 1) dès qu'une série d'harmoniques prépondérantes est présente dans le signal. En prenant en compte les deux critères, ce signal est classé comme quasi-périodique dont la période est déterminée par le résultat du premier critère et la série d'harmoniques prépondérantes est déterminée par le résultat du second critère.



(a) estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation.



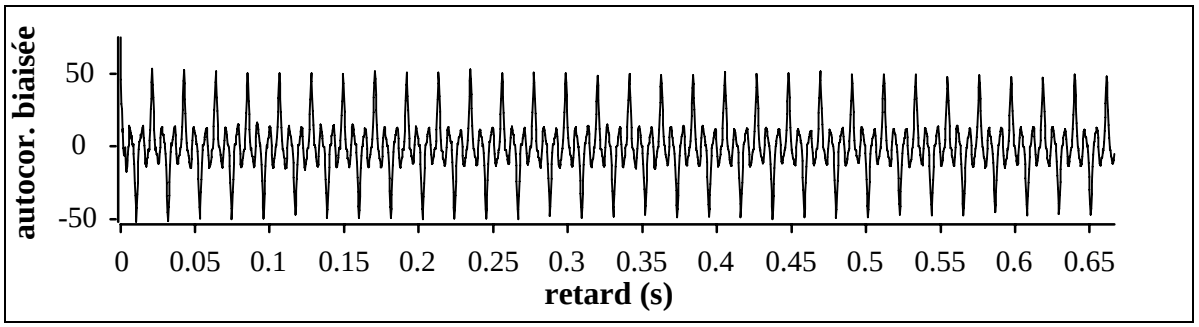
(b) minima locaux de l'estimation de l'autocorrélation filtrée, coefficient de périodicité maximal.



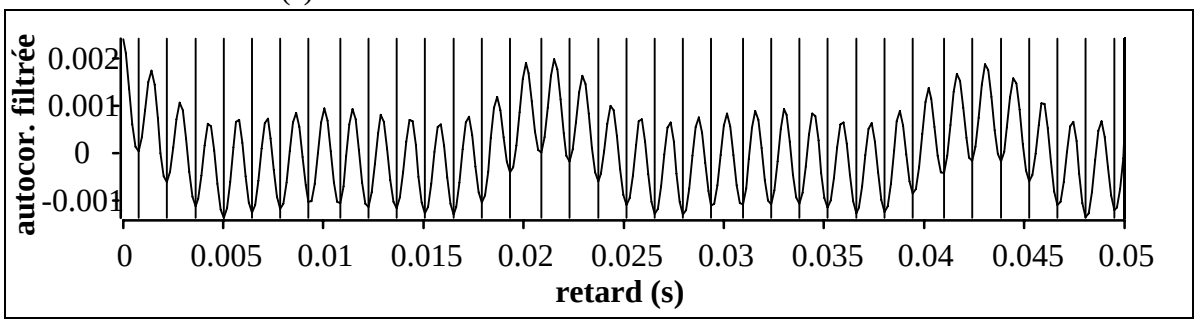
(c) coefficient de périodicité en fonction de l'ordre du filtrage et coefficient maximal.

Figure 4.3-X : **signal synthétique 1, résultats du critère de détection de périodicité prépondérante**. Le coefficient de périodicité final est égal à 0,95 (ordre du filtrage de 8), $\hat{T}_s$ = 12,6 s, soit 0,08 Hz.

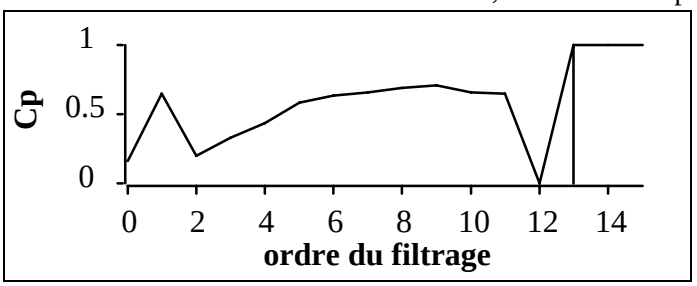
Dans le cas du signal PEG-SH1-a11 (cf. Figure 4.3-XI), nous retrouvons comme périodicité prépondérante la période effective également détectée par le premier critère. Le coefficient de périodicité est égal à 1. Dans ce cas les deux critères sont cohérents et le signal peut être classé sans ambiguïté comme quasi-périodique. L'analyse est effectuée dans les mêmes conditions que pour le paragraphe précédent, soit pour les retards compris entre 0 et τ_a = 0,67 s (point 2000).



(a) estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation.



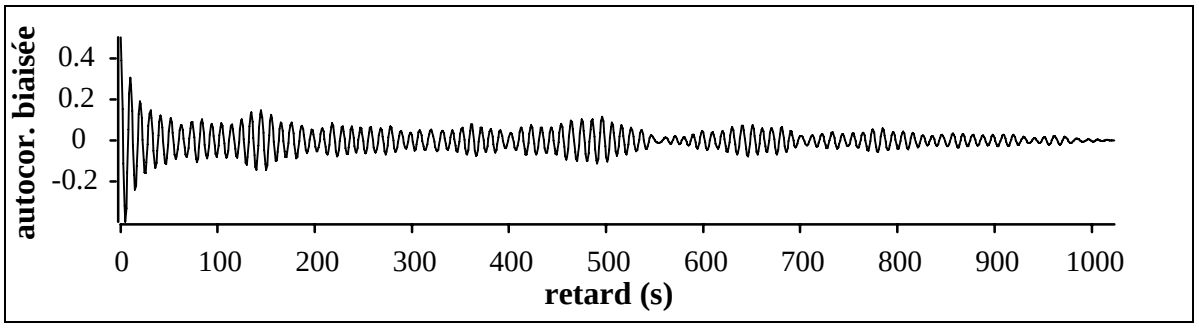
(b) minima locaux de l'estimation de l'autocorrélation filtrée, coefficient de périodicité maximal.



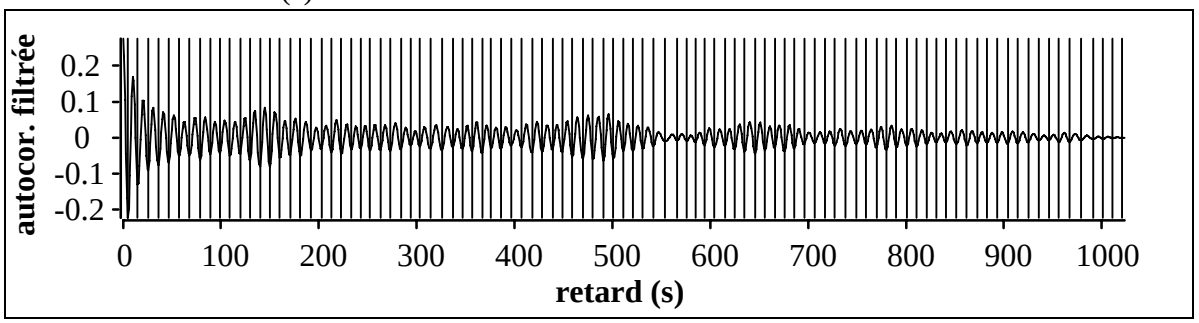
(c) coefficient de périodicité en fonction de l'ordre du filtrage et coefficient maximal.

Figure 4.3-XI : **signal PEG-SH1-a11, résultats du critère de détection de périodicité prépondérante**. Le coefficient de périodicité final est égal à 1 (ordre du filtrage de 13), $\hat{T}_s$ = 46,9 s, soit 0,0213 Hz.

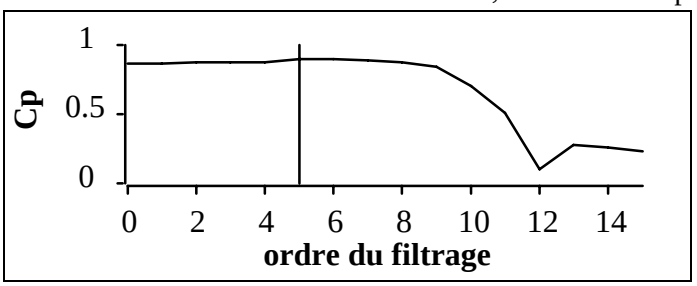
Dans le cas du signal « fréquence aléatoire » (cf. équation 4.3-21), la fréquence prépondérante est celle de la fréquence moyenne de la sinusoïde (sa fréquence est un bruit blanc de moyenne 0,01). Pour le premier critère, elle était malgré tout détectée avec un coefficient de périodicité inférieur à 1 (0,6) qui est justifié puisque le signal est non périodique. Le deuxième critère donne quant à lui un coefficient de périodicité égal à 0,9, avec une période prépondérante de 10,4 s (0,097 Hz), ce qui est cohérent avec l'objectif recherché. Dans ce cas, les conclusions des deux critères ne permettent pas de garantir que le signal est quasi-périodique, mais l'hypothèse ne peut pas non plus être rejetée. Par contre, ils garantissent que la fréquence de 0,01 Hz est prépondérante.



(a) estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation.



(b) minima locaux de l'estimation de l'autocorrélation filtrée, coefficient de périodicité maximal.



(c) coefficient de périodicité en fonction de l'ordre du filtrage et coefficient maximal.

Figure 4.3-XII : **signal « fréquence aléatoire », résultats du critère de détection de périodicité prépondérante**. Le coefficient de périodicité final est égal à 0,9 (ordre du filtrage de 5), $\hat{T}_s$ = 10,4 s, soit 0,01 Hz.

Dans des cas problématiques pour le premier critère, de par l'apparition de maxima locaux d'amplitude proche de celle des maxima correspondant à la période du signal, ce deuxième critère permet de détecter correctement la période du signal. Les maxima perturbateurs sont filtrés laissant apparaître l'allure périodique de la fonction d'autocorrélation (cf. le cas du signal synthétique 2, Figure A 8-III en annexe A-8). Il est cependant difficile de distinguer sans traitement supplémentaire, ce cas où le signal est effectivement périodique, du cas précédent où le signal ne l'est pas. En effet, les résultats des deux critères peuvent être identiques. Pour différencier les deux cas, il faut s'intéresser à l'estimateur non biaisé de l'autocorrélation, en observant la valeur des maxima proches de la fin de l'autocorrélation. S'ils restent proches du maximum de la fonction d'autocorrélation, c'est que l'hypothèse signal quasi-périodique peut-être retenue. En effet, pour un signal non périodique, il y a une atténuation de l'estimation de l'autocorrélation lorsque le retard augmente par rapport aux premiers retards. Il faut cependant tenir compte de l'augmentation de la variance et ne pas s'intéresser aux derniers points de l'autocorrélation.

Certains cas restent problématiques pour ce critère, lorsque les différents filtrages ne permettent pas de faire apparaître uniquement le motif périodique. C'est le cas lorsque par exemple, la période du signal est importante et qu'entre deux périodes, il y a des maxima locaux isolés sur l'autocorrélation.

Cependant dès que ces maxima ne sont pas trop importants pour perturber le premier critère, la période sera correctement détectée par celui-ci.

Les résultats des deux critères ne sont donc pas toujours identiques, même dans le cas de signaux périodiques. Une périodicité dominante sur l'autocorrélation peut « empêcher » la détection de la périodicité globale, puisque le critère s'attache justement à détecter une périodicité prépondérante. Nous présentons en annexe A-8, le cas des signaux d'engrenage ENG8-E5-21RH-SPV et ENG8-E11-21RH-SPV. Pour le signal d'engrenage ENG8-E5-21RH-SPV les résultats sont cohérents entre les deux critères, avec des coefficients de périodicité de 1 et des périodes globale et prépondérante très proches (cf. Figure A 8-I en annexe A-8). Par contre, pour le signal ENG8-E11-21RH-SPV, les résultats différent (cf. Figure A 8-II en annexe A-8), tant au niveau des coefficients de périodicité que des périodes estimées. Aux vues des deux critères, le signal est classé comme quasi-périodique, la période étant déterminée par le premier critère, et avec une périodicité prépondérante donnée par le deuxième critère.

Enfin dans des cas non périodiques, le critère attribue des coefficients de périodicité très inférieurs à 1 comme c'est le cas avec le signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 (cf. Figure A 8-IV en annexe A-8) pour lequel aucune périodicité n'est vraiment prépondérante par rapport à la somme des composantes du signal. Le coefficient est de 0,39 car malgré tout ce signal comporte des composantes bandes étroites harmoniques entre elles.

Les deux critères sont complémentaires. Leur objectif respectif diffère, puisque pour le premier critère il s'agit de déterminer la périodicité globale éventuelle de la partie périodique du signal et le rapport signal sur bruit, tandis que le deuxième critère cherche une périodicité prépondérante dans l'autocorrélation (donc dans le signal), sans que nécessairement la périodicité prépondérante soit égale à la périodicité globale. Mais ils viennent également en appui l'un de l'autre, garantissant ainsi une détection correcte du caractère périodique d'un signal et des périodes importantes du signal.

4.4. Point méta-scénario

La pré-analyse se conclut par un point méta-scénario chargé de tirer les conclusions des critères de pré-analyse. Les différents critères de pré-analyse ont deux objectifs. Le premier est de fournir des alarmes pour des problèmes critiques en vue d'une analyse spectrale stationnaire : des problèmes de repliement et de non-stationnarité. Le second est d'émettre des hypothèses sur la nature du signal, présence d'une partie périodique, de période prépondérante, de bruit. Un des objectifs du point méta-scénario de la pré-analyse est de gérer les différents résultats des critères et d'en tirer des conclusions globales sur le signal. A partir de ces conclusions, le deuxième objectif est de déterminer la méthode et les paramètres de l'analyse primaire.

4.4.1. Alarmes et hypothèses sur la nature du signal

Il faut distinguer les critères permettant de générer des alarmes, de ceux qui permettent d'émettre des hypothèses sur la nature du signal. Les critères générant des alarmes sont :

- L'analyse temporelle du signal qui permet de détecter des saturations éventuelles (cf. l'introduction du chapitre 4).
- Le test d'échantillonnage de Shannon, qui permet d'évaluer les risques de recouvrement et la présence d'un filtre anti-repliement (cf. paragraphe 4.1).
- La détection en temps de non stationnarité à l'ordre 2, d'asymétrie, de non gaussianité qui permet non seulement de détecter des changements de propriétés statistiques du signal et de proposer une segmentation du signal, mais aussi d'émettre une hypothèse sur les propriétés statistiques globales du signal : signal non-gaussien, asymétrique (cf. l'introduction du chapitre 4).

- La détection de non-stationnarité dans le plan temps-fréquence à partir du spectrogramme ou du corrélogramme glissant. Le résultat est une image temps-fréquence représentant les non-stationnarités détectés en fonction de la classe de détection (cf. paragraphe 4.2.1).
- La détection de non-stationnarité en fréquence à partir de la variance normalisée qui vient compléter le critère précédent (cf. paragraphe 4.2.2).

Ces deux derniers critères se complètent et nécessitent une analyse conjointe offrant la possibilité de déterminer un coefficient de stationnarité globale. A partir de celui-ci, on peut conseiller de continuer l'analyse sur l'ensemble du signal ou proposer une segmentation du signal. Si la décision est prise de continuer l'analyse sur l'ensemble du signal, les fréquences détectées comme non-stationnaires doivent être conservées pour compléter les analyses spectrales stationnaires. En effet, des non stationnarités sur une fréquence donnée, impliquent que le motif spectral correspondant n'aura pas le même comportement qu'un motif stationnaire lors des analyses spectrales. S'il s'agit d'un motif large bande, la non stationnarité peut se traduire par une augmentation locale de la variance de l'estimateur par rapport à la variance attendue pour un signal stationnaire.

L'ensemble de ces critères étant principalement destiné à détecter des problèmes pour l'analyse, ils ne permettent pas de déterminer la méthode et les paramètres de l'analyse primaire. Après, la pré-analyse, nous ne sommes pas à même de connaître la composition spectrale exacte du signal. Pour fixer la méthode d'analyse spectrale, il est tout d'abord nécessaire d'avoir une idée de la résolution fréquentielle à appliquer. Elle est particulièrement dépendante de la nature du signal et en particulier de son caractère périodique ou non, et de son support de corrélation. Les critères fondés sur l'analyse de l'autocorrélation sont à même de fournir les informations nécessaires au choix de la résolution fréquentielle et par la suite de la méthode de l'analyse primaire. Mais, il s'agit dans un premier temps d'émettre des hypothèses sur la nature du signal. Les deux critères concernés sont :

- Détection de périodicité globale et estimation du rapport signal sur bruit. Le résultat est composé du coefficient de périodicité globale C_{Pg}, de la période globale estimée et du rapport signal sur bruit. Un coefficient de périodicité proche de 1 est synonyme d'un signal comportant une partie périodique (cf. paragraphe 4.3.1).
- Détection de périodicité prépondérante. Le résultat est composé du coefficient de périodicité prépondérante C_{Pp} et de la période prépondérante estimée. Un coefficient de périodicité proche de 1 est synonyme d'un signal comportant une périodicité prépondérante sans que pour autant le signal ait obligatoirement une partie périodique (cf. paragraphe 4.3.2).

A partir des deux coefficients de périodicité, nous affinons l'hypothèse sur la nature du signal. Nous dénommerons, signal quasi-périodique un signal composé d'un bruit blanc ou légèrement coloré additionné d'une partie purement périodique. A l'opposé, l'hypothèse apériodique est réservée aux signaux n'ayant aucune composante périodique, soit par exemple aucune fréquence pure. Un bruit coloré correspond à cette hypothèse. Il existe des signaux qui sans être globalement périodiques contiennent des composantes périodiques telles que des fréquences pures. Un signal composé de fréquences pures incommensurables ne forme pas un signal globalement périodique. De même un mélange de fréquences pures incommensurables et d'autres formant une partie périodique, n'est pas purement périodique et n'en aura pas les caractéristiques dès que les fréquences pures non commensurables sont importantes par rapport au reste du signal. Nous appelons ces types de signaux, des signaux mixtes. Entre ces différents extrêmes, le signal peut être classé suivant son niveau potentiel de contenir une partie périodique. Nous ne détaillerons pas ici un classement précis et nous contentons d'un code couleur, l'objectif étant de mettre en avant la démarche générale. Suivant la valeur des coefficients de périodicité, nous classons le signal suivant son caractère périodique d'après le tableau suivant (cf. Figure 4.4-I) à partir des conclusions du paragraphe 4.3.

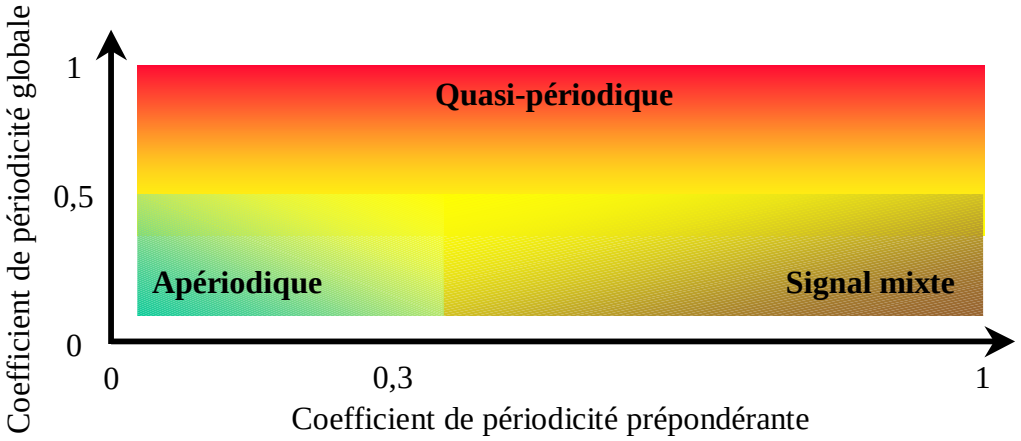


Figure 4.4-I : hypothèse sur le signal en fonction des coefficients de périodicité.

Pour compléter ce tableau, il faut prendre en compte la remarque (cf. page 130) permettant de distinguer le cas d'un signal quasi-périodique pour lequel le coefficient de périodicité globale est inférieur à 1 (dû à des problèmes d'estimation) et le coefficient de périodicité prépondérante est proche de 1, et celui d'un signal mixte ayant une périodicité prépondérante. Nous classons les signaux suivant l'hypothèse la plus probable.

Une fois cette première hypothèse fixée, nous allons l'affiner. En effet, les différentes possibilités pour le signal ne sont pas encore bien définies. Il est en effet difficile de distinguer un signal mixte constitué d'un bruit éventuellement coloré et de motifs bande étroite, d'un signal constitué de fréquences pures incommensurables dans du bruit. Pour compléter l'hypothèse sur le signal, il faut prendre en compte le support de corrélation du signal qu'il s'agit alors d'estimer à partir de l'estimation de la fonction d'autocorrélation (cf. pages suivantes). En effet, un signal contenant des fréquences pures, mêmes incommensurables a un support de corrélation infini. Pour un signal de durée finie, le support de corrélation est égal à la taille du signal. Pour un signal constitué de motifs bande étroite, le support de corrélation est fini et en général inférieur à la taille du signal. D'après le support de corrélation, nous précisons l'hypothèse grâce au tableau suivant (cf. Figure 4.4-II) en classant les signaux apériodique et mixte suivant l'équivalence entre le support de corrélation et la largeur de bande des motifs spectraux qui composent le signal. Il s'agit de la plus petite largeur de bande des motifs spectraux de puissance significative. Nous entendons par puissance significative, le fait que la puissance du motif soit suffisante pour que l'estimation de l'autocorrélation soit marquée par ce motif. En parallèle, l'hypothèse non périodique est transformée en l'hypothèse signal mixte dès que le support de corrélation est détecté comme supérieur à 60 % du nombre de points du signal, puisque ceci est souvent synonyme de présence de fréquences pures ou tout du moins de motifs très bande étroite.

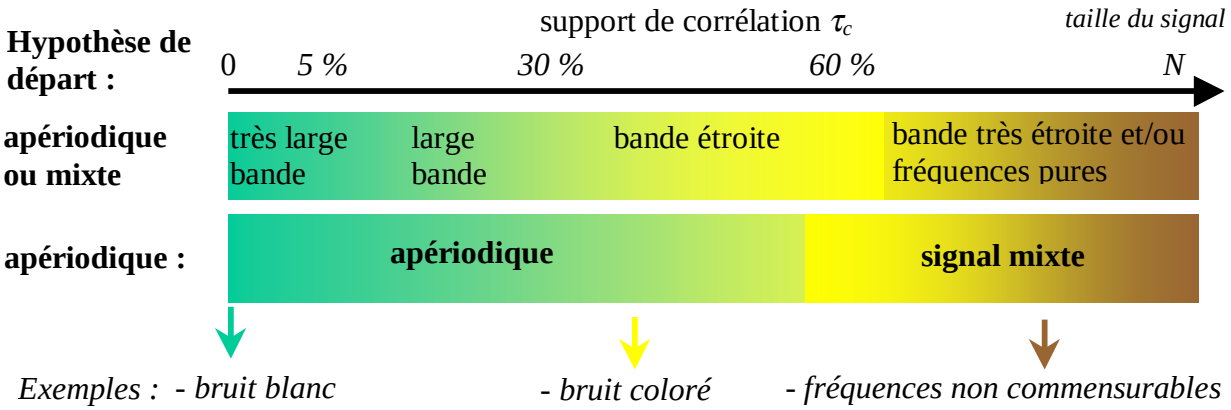


Figure 4.4-II : affinement de l'hypothèse sur le signal en fonction du support de corrélation et de l'hypothèse de départ : signal non périodique ou signal mixte.

Les valeurs de support de corrélation de la Figure 4.4-II, ont été déterminées à partir de signaux synthétiques et des signaux de la base ASPECT. Les valeurs sont données à titre indicatif, elles peuvent être affinées par une étude plus complète. L'hypothèse signal quasi-périodique n'a pas besoin d'être précisée, l'hypothèse complète étant un signal constitué de bruit blanc ou coloré additionné de fréquences pures commensurables. Précisons que nous entendons signal bande étroite, un signal constitué d'un bruit aléatoire dont les motifs spectraux sont bande étroite. Nous privilégions l'hypothèse aléatoire par rapport à l'hypothèse déterministe. En effet, l'hypothèse bruit bande étroite peut également correspondre à l'hypothèse d'un signal déterministe bande étroite. De même pour l'hypothèse signal quasi-périodique, il peut s'agir non pas de fréquences pures commensurables, mais d'un signal déterministe large bande périodique. Cependant, ces hypothèses alternatives sont très peu représentées dans les domaines d'application de l'opération ASPECT (vibrations et bruits propres et rayonnés des navires) et dans la base de signaux. Remarquons qu'il est difficile de distinguer à ce stade des fréquences pures de signaux à bande très étroite.

Il nous faut également préciser la notion de bande étroite et de bande large. Nous appelons motif bande très étroite, un motif dont la largeur de bande spectrale définie par exemple par la largeur de bande à –3 dB est proche de la résolution fréquentielle maximale qu'il est possible d'atteindre avec les estimateurs de Fourier (étant donné la taille du signal). La largeur de bande spectrale est définie ici par la largeur de bande à –3 dB du motif, mais pourrait l'être par la bande équivalente au bruit ou encore la bande statistique équivalente. La résolution maximale est de l'ordre de $\Delta\nu=1/NT_e$. Nous définissons 4 classes de motifs spectraux suivant leur largeur de bande :

Tab. 4.4-I : **classification des motifs suivant leur largeur de bande**				
largeur de bande B	$B \geq 200\ \Delta\nu$	$200\Delta\nu < B < 80\Delta\nu$	$80\Delta\nu \leq B < 30\Delta\nu$	$B \leq 30\ \Delta\nu$
classe du motif	très large bande	large bande	bande étroite	bande très étroite

Les largeurs de bande des motifs bande étroite peuvent paraître importantes vis-à-vis de la résolution maximale, mais il ne faut pas oublier que nous avons pris pour référence la bande à –3 dB et qu'elles ont été établies en fonction du comportement des estimateurs vis-à-vis de la largeur de bande des motifs.

Estimation du support de corrélation

Pour pouvoir affiner l'hypothèse sur le signal, il nous faut donc une estimation du support de corrélation. Pour les signaux classés comme quasi-périodiques, le support de corrélation est automatiquement fixé à la longueur totale du signal. Pour les autres hypothèses, le support de corrélation est estimé à partir de l'estimateur non biaisé de l'autocorrélation comme étant égal au retard τ_c de la dernière estimée supérieure à un seuil. Ce seuil doit tenir compte de la variance de l'estimateur, nous le fixons égal à $c\text{x}\sigma[\tau]$, où $\sigma[\tau]$ représente l'écart-type qu'aurait l'estimateur si le signal correspondait à un bruit blanc de puissance égale à l'estimée de l'autocorrélation au retard nul : $\hat{\Gamma}_x[0]$, soit :

$$\sigma^2[\tau] \approx \frac{N}{(N-\tau)^2}\hat{\Gamma}_x[0] \tag{4.4-1}$$

τ_c le support de corrélation estimé est égal à :

$$\tau_c = \max\{\tau \text{ tel que } \hat{\Gamma}_x[\tau] > c\text{x}\sigma[\tau]\} \tag{4.4-2}$$

Le coefficient c est de l'ordre de 4. Le seuil ainsi obtenu représente une valeur maximale au-dessus de laquelle, on peut considérer que l'estimée de l'autocorrélation ne correspond pas à l'hypothèse bruit

blanc. Le retard τ_c correspond alors à une estimation grossière du support de corrélation. Etant donné que l'équation 4.4-1 n'est pas valide pour les retards proches du nombre de points du signal et que l'augmentation de la variance est trop importante pour les derniers retards, il ne faut rechercher l'estimée que pour les retards inférieurs à 80% du nombre de points du signal. L'estimation n'étant pas précise et étant généralement sous estimée à cause du bruit, nous approchons le support de corrélation à la valeur immédiatement supérieure égale à un multiple de 10% de la taille du signal. De plus, comme la variance de l'estimateur devient importante pour les retards proches de la durée du signal, on considére que si le support est estimé à plus de 70% du nombre de points du signal, le support est fixé égal à la taille du signal. Quelques résultats de ce critère sont présentés en annexe A-9, en parallèle nous illustrons la notion de motif bande étroite.

Cas de signaux réels

Les signaux réels PEG-SH1-a11 (vibrations d'une station d'huile), ENG8-E5-21RH-SPV et ENG8-E11-21RH-SPV (engrenage) sont tous les trois classés comme des signaux quasi-périodiques, leur coefficient de périodicité globale étant proche de 1, le support de corrélation est donc considéré comme égal à la taille du signal. L'hypothèse retenue est : signal constitué d'un bruit éventuellement coloré additionné de fréquences pures commensurables (formant une partie périodique). Cette hypothèse correspond bien à la réalité des signaux.

Pour le signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 (bruit rayonné d'un navire), le coefficient de périodicité globale est nul, et celui de périodicité prépondérante est de 0,39. L'hypothèse retenue pour le signal est d'après la Figure 4.4-I, signal mixte, mais à la limite de signal apériodique. L'estimation du support de corrélation est égale à la taille du signal (cf. Figure 4.4-III). L'hypothèse finalement retenue est donc signal mixte, soit un signal constitué d'un bruit coloré et de fréquences pures non commensurables ou de motifs très bande étroite. Le signal est en effet constitué d'un fond large bande et d'une série de motifs large bande à bande très étroite (fréquences quasi-pures), plusieurs motifs bande étroite étant harmoniques entre eux.

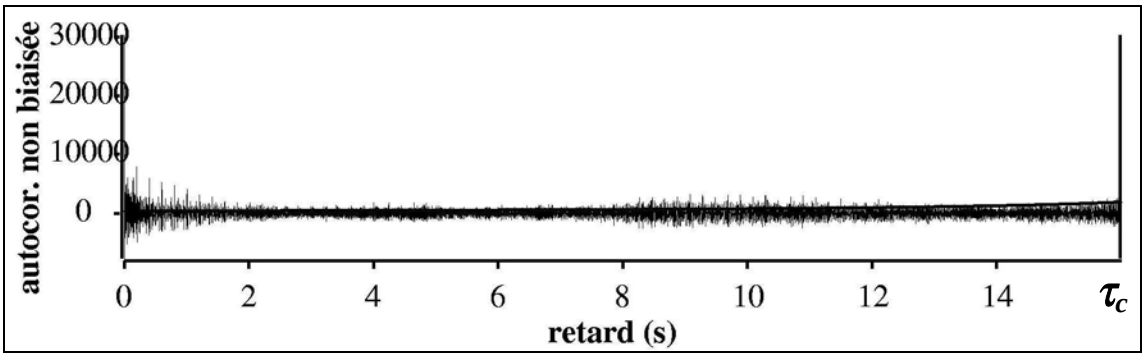


Figure 4.4-III : **signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6**, **estimation du support de corrélation** à partir de l'estimateur non biaisé de l'autocorrélation. Seul les 80 % premiers retards sur lesquels s'effectue la recherche du support de corrélation sont représentés. Le seuil de détection est représenté par la courbe en trait épais et le support de corrélation par le trait vertical, $\tau_c \approx 16$ s. Le support de corrélation final est arrondi à la taille du signal car il est supérieur à 70% de la durée totale du signal.

4.4.2. Choix de la méthode et des paramètres de l'analyse primaire

A partir des différentes conclusions sur la nature du signal et l'estimation du support de corrélation, nous allons déterminer la méthode et les paramètres de l'analyse primaire. Nous procédons en deux temps. Tout d'abord, il convient de déterminer la résolution fréquentielle adaptée à une première analyse spectrale du signal. Ensuite, la méthode la plus adaptée et ses paramètres sont déterminés. La méthode est de type Fourier, puisque ces méthodes sont non paramétriques ne

nécessitant pas de modèle, ni d'informations *a priori*. De plus, elles sont adaptées aux signaux longs permettant une analyse complète du spectre avec de bonnes résolutions fréquentielles.

La résolution fréquentielle est liée au support de corrélation du signal de par l'équivalence entre le support de corrélation et la largeur de bande des motifs spectraux. De même, pour tous les estimateurs, le support de la fenêtre effective sur l'autocorrélation de l'estimateur est étroitement lié à la résolution de l'estimateur (cf. paragraphe 3.4.1). Il est préférable que le support de la fenêtre effective soit supérieur ou égal au support réel de l'autocorrélation du signal pour ne pas perdre d'information et ne pas biaiser l'estimation, en particulier des motifs les plus bande étroite. Pour la plupart des méthodes le support de la fenêtre effective est directement lié à un paramètre de la méthode. Dans le cas de la méthode Welch-WOSA, le support de la fenêtre effective correspond à la taille des segments, dans les cas Blackman-Tukey, Corrélogramme A-biaisé et PER-COR, il correspond au support de la fenêtre linéaire sur la fonction d'autocorrélation.

Dans le cas où le signal contient une partie périodique, le support de corrélation est en théorie infini, soit en pratique égal à la taille du signal. Il est nécessaire de choisir un support de fenêtre effective égale à la taille du signal. La résolution fréquentielle est alors proche de la meilleure résolution qui puisse être obtenue avec les estimateurs de Fourier. Cette résolution est nécessaire, puisque l'hypothèse la plus probable pour le signal est la présence de fréquences pures (harmoniques entre elles) dont on ne connaît pas le nombre exact. Des fréquences pures non commensurables de faible puissance peuvent également être présentes. Une résolution fréquentielle minimale est nécessaire pour deux raisons, tout d'abord pour mieux séparer les fréquences pures tout en assurant une bonne estimation de leur fréquence et de leur amplitude, mais également pour assurer une meilleure émergence des fréquences pures par rapport au fond (même si la variance est importante).

En fonction de chaque type de signal, nous définissons tout d'abord un objectif prioritaire, puis en fonction des différents résultats de la pré-analyse, la méthode et ses paramètres sont déterminés par le tableau Tab. 4.4-II.

Tab. 4.4-II : **choix de l'analyse primaire en fonction des résultats de la pré-analyse**.
M_C représente le support de corrélation estimé du signal correspondant au retard τ_c (exprimé en nombre de points). M_{eff} représente le support de la fenêtre effective de l'estimateur de Fourier (exprimé en nombre de points).

Type du signal	quasi-périodique ou mixte $M_C = N$		mixte ou non périodique $30\%N \le M_C < 60\%N$		mixte ou non périodique $M_C < 30\%N$
Objectif prioritaire	recherche de fréquences pures		recherche de motifs bande étroite		recherche de motifs large bande
Condition	RSB<10 dB	RSB≥10 dB	$M_C \ge 40\%N$	$M_C < 40\%N$	
Méthode & paramètres	Corrélo. A-biaisé $M_{eff} = M_C$ fenêtre de Blackman	Welch $M_{eff} = M_C$ fenêtre de Blackman	Corrélo. A-biaisé $M_{eff} = M_C$ fenêtre de Blackman	Welch $M_{eff} = M_C$ fenêtre de Blackman	Welch $M_{eff} = M_C$ fenêtre de Blackman
Avantages	résolution, variance, émergence.	biais, pied de pics.	résolution, variance.	résolution, variance, biais.	résolution, variance, biais.
Inconvénients	biais, pied de pics.	variance	biais, pied de pics.		largeur du lobe principal de la fenêtre spectrale.

L'objectif prioritaire est déterminé par les conclusions précédentes sur la nature du signal. La méthode et les paramètres de l'analyse primaire sont déterminés en fonction de l'étude des différents estimateurs (cf. chapitre 3). Le choix est limité aux deux méthodes Welch-WOSA et corrélogramme

A-biaisé. Ces deux méthodes représentent les meilleurs compromis lorsque la connaissance spectrale du signal est limitée.

Lorsque la résolution doit être faible, ce qui correspond à un support de fenêtre effective supérieur à 40% de la taille du signal, le meilleur compromis est obtenu avec la méthode du corrélogramme A-biaisé. En effet, la variance est inférieure à celle des autres méthodes, tandis que la résolution est également une des meilleures à la condition que l'on choisisse la fenêtre d'apodisation adéquate, en l'occurrence la fenêtre de Blackman. La méthode est adaptée à la recherche de fréquences pures, non seulement de par la résolution fréquentielle, mais également parce que l'émergence des fréquences pures sera maximale par rapport aux autres méthodes pour une variance minimale (cf. paragraphe 3.1 pour la définition de l'émergence). L'inconvénient majeur du corrélogramme A-biaisé est que la fenêtre spectrale a un pied de pic très important. Si une fréquence pure est d'amplitude importante, le pied de pic apparaîtra nettement sur l'estimation, biaisant l'estimation de tous les motifs proches et pouvant ainsi « cacher » d'autres fréquences pures de plus faible amplitude. D'une manière générale, le biais risque d'être important.

En conséquence, si le signal est classé comme **quasi-périodique** et que le rapport signal sur bruit estimé par le critère de détection de périodicité globale est important (>10 dB), il est préférable de privilégier les problèmes de biais et de pied de pic par rapport à la variance et à l'émergence. En effet, un rapport signal sur bruit important est en général synonyme de fréquences pures d'amplitudes importantes. L'émergence des principales fréquences pures restera correcte, même si la variance est importante. La méthode la plus adaptée est Welch-WOSA qui offre des fenêtres spectrales atténuant au mieux les lobes secondaires. Bien que le lobe principal de la fenêtre soit plus important qu'avec les autres méthodes, le pied de pic reste inférieur dès que l'émergence est importante. De plus le biais reste principalement limité aux fréquences comprises dans le lobe principal. L'interprétation s'en trouve facilitée, l'hypothèse bruit localement blanc dans la bande de la fenêtre spectrale étant mieux respectée. La fenêtre d'apodisation quadratique correspondant au mieux à cette problématique est la fenêtre de Blackman. En contrepartie, l'inconvénient de la méthode, lorsque le support de la fenêtre effective est maximal, est que la variance normalisée est importante. Elle est deux fois supérieure à celle du corrélogramme A-biaisé dans les mêmes conditions (1 au lieu de 0,5). Puisque le rapport signal sur bruit est important, nous considérons que cette variance importante ne gênera pas la détection des fréquences pures.

Dès que le support de la fenêtre effective est inférieur à 40% du nombre de points du signal, le meilleur compromis dans l'objectif de détecter des motifs bande étroite ou large bande est la méthode Welch-WOSA. Elle permet d'atteindre le meilleur compromis résolution, variance tout en minimisant le problème de biais (pour les mêmes raisons que précédemment, cf. également le paragraphe 3.4).

Le point méta-scénario qui conclut la pré-analyse permet non seulement d'émettre des alarmes pour une analyse stationnaire (saturation, recouvrement, non stationnarité), mais également à partir des critères d'analyse de l'autocorrélation, de définir des hypothèses sur la nature du signal. Ces hypothèses permettent de choisir la méthode et les paramètres de l'analyse primaire en référence à l'étude du chapitre 3 sur les performances des estimateurs. L'analyse primaire n'est qu'une première étape dans la démarche globale, il ne s'agit donc pas de déterminer l'analyse idéale pour le signal, mais de définir le point d'entrée de l'analyse spectrale. Précisons également que l'ensemble des informations et résultats des critères doivent être conservés pour aider à l'interprétation des analyses spectrales et choisir un certain nombre d'étapes. Si par exemple le signal est classé comme quasi-périodique, et qu'à la fin des étapes d'analyses spectrales de nombreuses fréquences pures sont détectées, une détection d'harmoniques sera automatiquement envisagée.

Chapitre 5

Critères d'interprétation spectrale

Une fois la pré-analyse effectuée et l'analyse primaire déterminée, la phase d'analyse spectrale débute. Elle est constituée d'une série d'étapes successives, mais non systématiques. En effet, contrairement à la pré-analyse les étapes ne sont pas déterminées à l'avance. Chaque étape dépend des résultats de l'analyse précédente. Les paramètres de chaque étape sont choisis lors du point charnière qui conclut chaque analyse. Bien que les étapes ne soient pas uniquement limitées à des analyses spectrales de type Fourier, celles-ci forment un passage obligé. Ces méthodes ne nécessitent pas de modèle, leurs performances bien maîtrisées facilitent l'interprétation et les différents compromis qu'elles offrent, permettent de déterminer le contenu spectral sans qu'aucune analyse complémentaire ne soit nécessaire. Par ailleurs, si des indéterminations subsistent, les résultats des analyses de Fourier sont une base pour déterminer les paramètres d'une analyse complémentaire (analyse « haute-résolution », méthode par déflation…).

Le résultat d'une analyse spectrale est constitué d'une estimation du spectre associée aux calculs des performances de l'estimateur. La courbe ainsi obtenue reste difficile à interpréter, même par un expert en traitement du signal. Il est difficile par une approche simplement visuelle de déterminer la nature des composantes spectrales. Par exemple, la distinction entre un pic associé au bruit et une fréquence pure, ou encore un motif bande étroite, n'est pas aisée, même en connaissant la variance de l'estimateur. L'étude des performances des estimateurs de Fourier (cf. chapitre 3) complétée d'une étude bibliographique, nous a permis de déterminer des critères d'interprétation spectrale. Ils ont pour objectif d'aider à l'interprétation de toute analyse spectrale de type Fourier. Ces différents critères interviennent dans la démarche lors de l'interprétation brute d'une analyse spectrale, c'est-à-dire sans référence aux analyses précédentes. Ils sont au nombre de quatre. Le premier consiste à estimer le fond de spectre, soit le spectre continu associé à un bruit coloré. En effet, dans les domaines d'application de l'opération ASPECT, les vibrations et l'acoustique sous-marine, le signal réel contient un bruit aléatoire additif non blanc. Ce critère est associé à un deuxième critère qui a pour but de valider l'estimation du fond de spectre en vérifiant qu'il ne surestime pas le fond réel. Le troisième critère a pour objectif de détecter tout motif émergent du fond de spectre compte-tenu des performances de l'estimateur. Le dernier critère s'attache à déterminer si l'hypothèse fréquence pure peut être retenue pour chaque motif détecté. Si l'hypothèse est retenue, la fréquence et l'amplitude de la fréquence pure sont déterminées avec précision.

Lors d'une étape, ces quatre critères se succèdent dans l'ordre précité, chacun utilisant les résultats du critère précédent. Cependant, le critère d'estimation du fond de spectre et celui de détection sont intimement liés. Pour évaluer les performances de l'estimation du fond de spectre dans l'objectif de détecter les motifs émergents, il est tout d'abord nécessaire d'expliciter le principe de la détection généralisée à tous les estimateurs de type Fourier. En conséquence, nous présentons tout d'abord le critère de détection avant de présenter les autres critères.

5.1. Critère de détection

Un des problèmes fréquemment rencontrés lors de l'analyse vibratoire ou acoustique, est la détection des fréquences pures (ou raies spectrales) associées à un signal certain, noyées dans un bruit aléatoire. Ce bruit est souvent dénommé du point de vue spectral, ligne de fond de spectre ou ligne de pied de raies. Une étape de détection des fréquences pures, et plus généralement d'un signal

déterministe, constitue une phase importante pour aider à l'interprétation de chaque estimateur. Ce problème est communément abordé par la construction d'un détecteur à partir du périodogramme (ou du périodogramme moyenné sans recouvrement) [HIN82], [LEMA95]. En effet, les densités de probabilité associées au périodogramme sous l'hypothèse H_0, signal aléatoire stationnaire gaussien, et sous l'hypothèse H_1, signal aléatoire stationnaire gaussien additionné d'un signal déterministe, sont connues. La démarche adoptée nécessite d'utiliser l'ensemble des estimateurs de Fourier, afin de pouvoir en comparer les résultats. Ce critère à pour base la construction d'un détecteur généralisé à l'ensemble des méthodes de type Fourier. Sous H_1, la densité de probabilité des estimateurs n'est connue que dans le cas du périodogramme moyenné sans recouvrement (cf. paragraphe 3.2). Cependant, le critère de Neyman-Pearson permet de déterminer, uniquement à partir de l'hypothèse H_0, le seuil nécessaire à la mise en place du détecteur.

5.1.1. Principe du détecteur

Le principe du détecteur est directement issu des propriétés statistiques de l'estimateur. L'objectif théorique du détecteur est de décider à partir d'une estimation spectrale et pour chaque fréquence ν, si le signal n'est constitué que d'un signal aléatoire gaussien ou d'un signal aléatoire gaussien additionné d'un signal déterministe. Il doit donc choisir entre les deux hypothèses :

H_0 : $x[n] = b[n]$

H_1 : $x[n] = b[n] + s[n]$

$b[n]$: signal réel aléatoire gaussien stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $\gamma_b(\nu)$ continue ($\gamma_b(\nu)>0$ quel que soit ν).

$s[n]$: signal réel déterministe à puissance moyenne finie et de densité de densité spectrale de puissance $\gamma_s(\nu)$ non nécessairement continue (exemple : fréquence pure).

Comme nous l'avons vu paragraphe 3.2.2, tous les estimateurs de type Fourier sous l'hypothèse H_0 peuvent être considérés comme proportionnels à une variable aléatoire χ_r^2 qui suit une loi gamma de degré de liberté équivalent r :

$$\hat{\gamma}_b(\nu) \approx c\chi_r^2 \tag{5.1-1}$$

où $\hat{\gamma}_b(\nu)$ représente l'estimation spectrale du signal b.

Dans le cas de tous les estimateurs, le degré de liberté équivalent et le coefficient de proportionnalité se déduisent de la variance normalisée et de la moyenne de l'estimateur :

$$r = \frac{2\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2}{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}} = \frac{2}{\mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_b}} \tag{5.1-2}$$

$$c = \frac{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}{2\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}} = \frac{\mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_b}}{2}\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} \approx \frac{\mathrm{varn}_{\hat{\gamma}_b}}{2}\,\gamma_b(\nu) = \frac{\gamma_b(\nu)}{r} \tag{5.1-3}$$

Ajoutons qu'il faut également considérer l'hypothèse que $\gamma_b(\nu)$ est approximativement constant sur la bande passante de la fenêtre spectrale et que la taille de la fenêtre effective doit être importante. Les équations précédentes ne sont valides qu'en dehors de la fréquence nulle et de la fréquence d'échantillonnage sur deux (pour ces fréquences se référer au paragraphe 3.2.2). Dans le reste du paragraphe, nous nous intéresserons uniquement aux cas où $\nu \neq 0$ et $\nu \neq \nu_e/2$ (ces deux derniers cas n'étant pas susceptibles de contenir des composantes déterministes d'intérêt).

Lorsque l'on cherche à séparer deux hypothèses H_0 et H_1 à partir d'une variable aléatoire X, il existe plusieurs possibilités pour fixer un seuil de détection. Dans le cas où la moyenne de la variable aléatoire sous H_0 est toujours inférieure à celle sous H_1, la détection est effectuée en comparant le seuil

λ à l'observation de la variable aléatoire x. Si $x>\lambda$ alors H_1 est retenue, tandis que si $x<\lambda$ alors H_0 est retenue. Le choix du seuil dépend des quantités bien connues en théorie de la détection : probabilité de fausse alarme et probabilité de détection [VAN68], [LEMO95] :
- la probabilité de fausse alarme P_{fa} est la probabilité de choisir H_1 alors que H_0 est vraie :

$$P_{fa} = \int_{\lambda}^{+\infty} p_{X0}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1-4}$$

où $p_{X0}(x)$ désigne la densité de probabilité de la variable aléatoire X sous H_0,
- la probabilité de détection P_D est la probabilité de choisir H_1 alors que H_1 est vraie :

$$P_D = \int_{\lambda}^{+\infty} p_{X1}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1-5}$$

où $p_{X1}(x)$ désigne la densité de probabilité de la variable aléatoire X sous H_1.

P_{fa} et P_D dépendent du seuil et donc l'une de l'autre par cet intermédiaire, l'objectif est de fixer le seuil suivant un critère de détection. Une fois soit la P_{fa} ou la P_D fixée, le seuil peut être obtenu par inversion des formules précédentes.

Dans notre cas, seule la densité de probabilité sous l'hypothèse H_0 est connue pour tous les estimateurs de type Fourier. Le seuil ne peut être déterminé par la méthode du maximum de vraisemblance qui nécessite de connaître les densités de probabilité sous H_0 comme sous H_1 [VAN68]. Par contre, le critère de Neyman-Pearson pour lequel le risque de première espèce α est attribué à la fausse alarme, est adapté [VAN68], [LEMO95]. Il consiste à minimiser le risque de première espèce et donc à fixer la probabilité de fausse alarme. Le seuil s'en déduit par inversion de l'équation 5.1-4.

Dans le cas des estimateurs de type Fourier, la variable aléatoire est $\hat{\gamma}_X(\nu)$. Considérons le spectre normalisé :

$$\hat{\gamma}_N(\nu) = \frac{\hat{\gamma}_x(\nu)}{\gamma_b(\nu)} \tag{5.1-6}$$

alors sous H_0 la variable aléatoire $\hat{\gamma}_N(\nu)$ peut s'écrire :

$$\hat{\gamma}_N(\nu) \approx \frac{1}{r}\chi_r^2 \tag{5.1-7}$$

La densité de probabilité de $\hat{\gamma}_N(\nu)$ne dépend pas de la fréquence ν, ni de la DSP de b, mais uniquement des paramètres de la méthode à travers le calcul de la variance normalisée. La probabilité de fausse alarme en fonction du seuil s'écrit :

$$P_{fa} = \int_{r\lambda}^{+\infty} p_{\chi_r^2}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1-8}$$

où $p_{\chi_r^2}(x)$ représente la densité de probabilité d'une loi gamma de degré de liberté équivalent r.
Une fois la probabilité de fausse alarme fixée, le seuil est donc $1/r$ fois le fractile correspondant de la loi gamma de degré de liberté équivalent r pour une probabilité P_{fa}. La probabilité de détection ne peut être déterminée théoriquement que dans le cas du périodogramme moyenné sans recouvrement, puisque c'est le seul cas où la densité de probabilité de l'estimateur sous H_1 est connue (cf. paragraphe 3.2). La Figure 5.1-I présente un exemple des densités de probabilités sous H_0 et H_1 et du calcul du seuil.

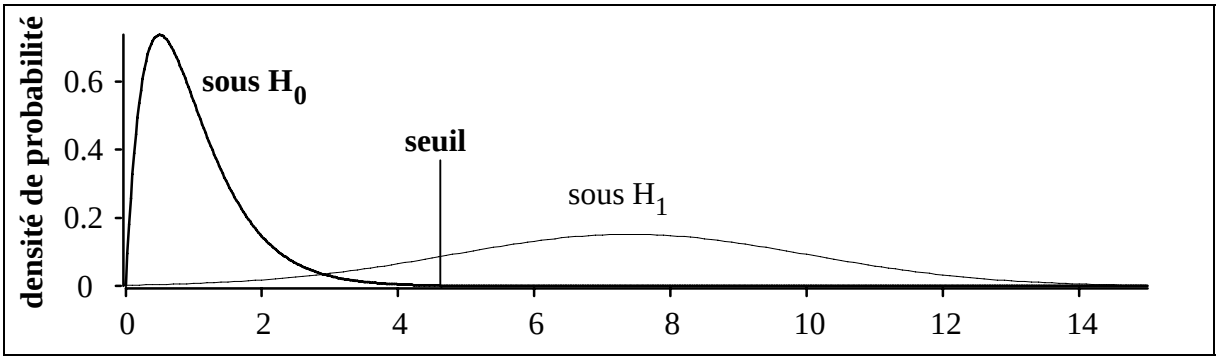


Figure 5.1-I : **densités de probabilité sous H_0 et H_1** de $\hat{\gamma}_N(\nu)$ dans le cas du périodogramme avec une fenêtre rectangulaire et sans recouvrement pour 2 segments de L = 128 points. Sous H_1 : le signal s est une fréquence pure avec un rapport signal sur bruit RSB de -10 dB. La densité de probabilité sous H_1 est approchée par une loi normale $N(1+L\,\mathrm{RSB}/2\,,1/2+L\,\mathrm{RSB}/2\,)$. Le seuil est déterminé pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-3}.

La détection nécessite en théorie de connaître la densité spectrale de puissance vraie du signal gaussien seul. Plusieurs cas sont possibles :

1. la DSP est connue, $\gamma_b(\nu)$ est entièrement déterminée,
2. une référence bruit seul est disponible. Une réalisation du signal b permet par les méthodes classiques d'estimer $\gamma_b(\nu)$,
3. la plupart du temps, la référence bruit seul n'est pas disponible, il faut alors estimer $\gamma_b(\nu)$ à partir du signal x. Nous cherchons à détecter pour chaque fréquence, les pics du spectre qui ne peuvent être attribués à la variance de l'estimateur. $\gamma_b(\nu)$ est estimé à partir de l'estimation $\hat{\gamma}_x(\nu)$ comme étant la ligne de fond de spectre appelée aussi ligne de pied de raie. Dans le cadre de l'opération ASPECT, nous sommes dans ce contexte.

Pour bien saisir le fonctionnement du détecteur, il nous faut préciser la notion de fond de spectre et les conséquences de son estimation.

Définition : **le fond de spectre** est la partie continue du spectre associée à la partie aléatoire du signal. En effet, théoriquement, tout signal à puissance moyenne finie (aléatoire ou certain) peut se décomposer spectralement en une partie à DSP continue $\gamma_c(\nu)$ telle que $\gamma_c(\nu)>0$ et une partie à DSP discrète du type $\sum_{k=0}^{K-1} A_k\ \delta(\nu-\nu_k)$ (pour les fréquences positives).

Après estimation, si la partie discrète du spectre est constituée de fréquences pures (signaux déterministes), elle ne va plus se présenter sous la forme de diracs, mais comme une somme des fenêtres spectrales : $\sum_{k=0}^{K-1} A_k\ \frac{Q(\nu-\nu_k)}{q[0]}$ constituée d'une somme de pics bande étroite. Une fréquence pure d'amplitude importante par rapport à la DSP locale du bruit va donc produire une perturbation sur toute la bande de la fenêtre spectrale, ou tout du moins sur la bande du lobe principal. Dans l'estimation du fond de spectre, il faut donc tenir compte de ce phénomène. Par ailleurs, le lissage dû à la fenêtre spectrale rend impossible le suivi exact de variations très importantes de la DSP du bruit sur une zone de fréquences inférieure à la bande de la fenêtre spectrale. Le fond de spectre est donc associé, pour une estimation donnée, à la partie continue du spectre de la partie aléatoire du signal à variation lente par rapport à la fenêtre spectrale, c'est-à-dire que la DSP continue est approximativement constante dans la bande de la fenêtre spectrale. Cela revient à pouvoir considérer que l'estimation de cette DSP est approximativement non biaisée (cf. paragraphe 2.4.5). En particulier,

un motif bande étroite de largeur de bande proche de celle de la fenêtre spectrale ne sera pas considéré comme appartenant au fond de spectre.

Il existe de nombreuses possibilités pour estimer la ligne de fond de spectre que nous détaillons dans le paragraphe suivant. La Figure 5.1-II illustre une estimation de la ligne de fond de spectre par rapport à la DSP vraie du bruit.

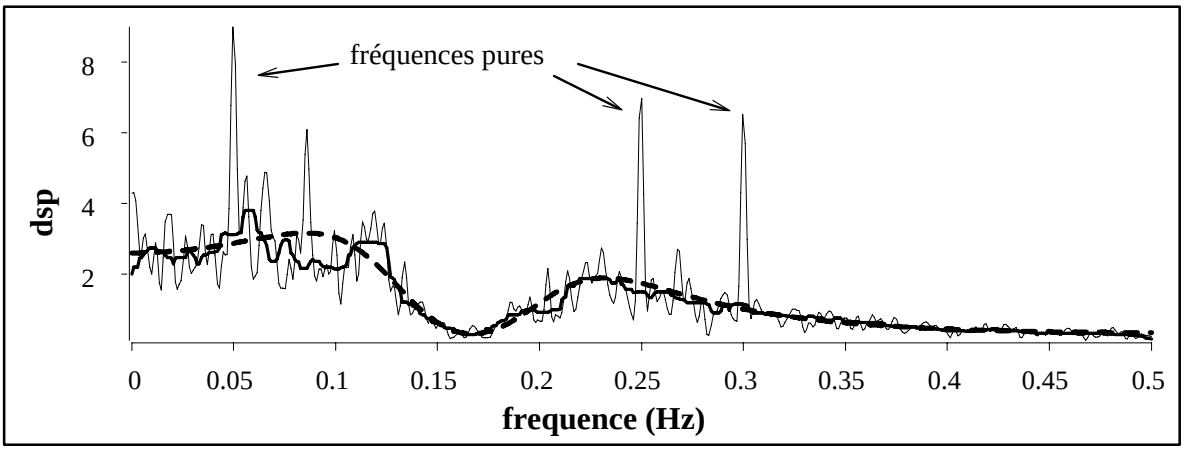


Figure 5.1-II : exemple d'estimation du spectre (trait continu fin), de la ligne de fond de spectre idéale égale à la DSP vraie du bruit seul (trait en pointillés) et d'une estimation du fond de spectre (trait continu épais), le signal *x* étant égal à *b*, bruit coloré issu d'un processus ARMA, plus 3 sinusoïdes de fréquences 0,05 Hz, 0,25 Hz et 0,3 Hz. Le bruit coloré est issu d'un processus ARMA dont l'entrée est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. L'ordre de la partie AR est 4, celui de la partie MA de 2. Les coefficients AR sont a_1=-1,352, a_2=1,358, a_3=-0,662, a_4=0,24. Les coefficients MA sont m_1=-0,2 et m_2=0,04. La variance du bruit blanc gaussien excitateur est de 1.

Le schéma du détecteur est le suivant :

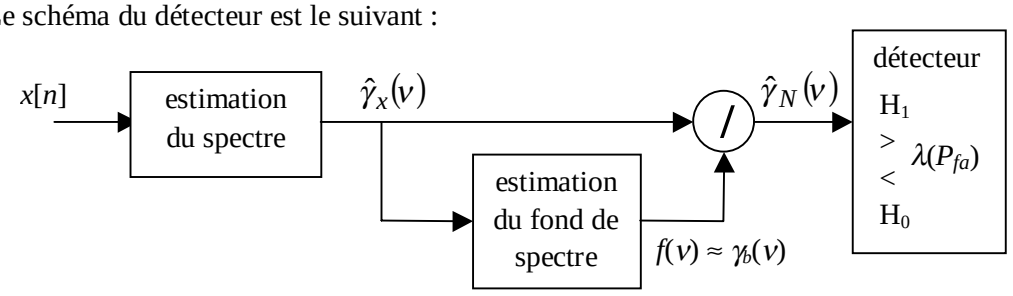


Figure 5.1-III : schéma du détecteur.

L'étape constituée de l'estimation du fond de spectre, puis de la division de l'estimation du spectre par la ligne de fond de spectre, est appelée normalisation. Le spectre obtenu après normalisation est comparé à un seuil fixe indépendant de la fréquence.

Le détecteur opte, pour chaque pic du spectre, entre l'hypothèse H_0 que l'on peut généraliser à : signal aléatoire à puissance moyenne finie de densité spectrale de puissance égale à la ligne de fond de spectre (si le nombre de points du signal est suffisant), ou le rejet de cette hypothèse. En effet, nous avons mis en évidence dans le paragraphe 3.2 que la densité de probabilité des estimateurs sous H_0 peut être étendue à la plupart des signaux aléatoire à puissance moyenne finie et spectre continu. Dans ces conditions et suivant les performances de l'estimateur, l'hypothèse H_1 ne peut être restreinte aux cas des signaux déterministes. Tout motif qui émerge de l'estimation du fond de spectre, qu'il s'agisse d'une fréquence pure ou d'un motif bande étroite dont la bande est proche de la bande de la fenêtre

spectrale, peut être détecté. Ceci offre l'avantage de pouvoir se servir du détecteur pour détecter des composantes bande étroite par rapport à un fond constitué de motifs plus large bande.

Remarquons qu'il existe d'autres possibilités de normalisation : au lieu de normaliser le spectre par l'estimation de $\gamma_b(\nu)$, on pourrait normaliser par l'estimation de l'écart-type associé à *b* $\hat{\sigma}_{\gamma_b}(\nu) = \sqrt{\text{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}$, [LEF81], [NIC92] que l'on obtient par adaptation de certaines méthodes d'estimation du fond de spectre :

$$\hat{\gamma}_N(\nu) = \frac{\hat{\gamma}_x(\nu)}{\hat{\sigma}_b(\nu)} \tag{5.1-9}$$

On utilise ainsi une variable réduite sous l'hypothèse H_0.
La variance de l'estimateur s'écrit en fonction de la variance normalisée :

$$\text{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} = \text{varn} \times \gamma_b(\nu)^2 \tag{5.1-10}$$

avec varn = 2/*r*. L'estimateur normalisé est alors également proportionnel à une variable qui suit une loi gamma de degré de liberté équivalent *r*, avec un coefficient de proportionnalité égal, cette fois-ci, à $1/2\sqrt{r}$. Si $\sigma^2_{\gamma_b}$ est parfaitement estimé les performances du détecteur sont les mêmes. Il ne s'agit que d'un problème d'estimation. Les performances du détecteur dépendront des performances de l'estimation de $\sigma^2_{\gamma_b}$ ou $\gamma_b(\nu)$. L'estimation de la variance est cependant plus difficile et nécessite dans une première phase d'estimer $\gamma_b(\nu)$. Il y a cependant d'autres avantages à normaliser ainsi [LEF81], notamment si l'on désire diminuer les problèmes liés à des non stationnarités qui ont pour effet d'augmenter la variance de l'estimateur, augmentation qui est compensée par la normalisation. Il est également possible de centrer et de réduire la variable [PLU83], mais cette opération n'apporte rien de plus par rapport aux deux normalisations précédentes.

5.1.2. Validation et performances du détecteur

5.1.2.1. Validation du calcul théorique de la probabilité de fausse alarme

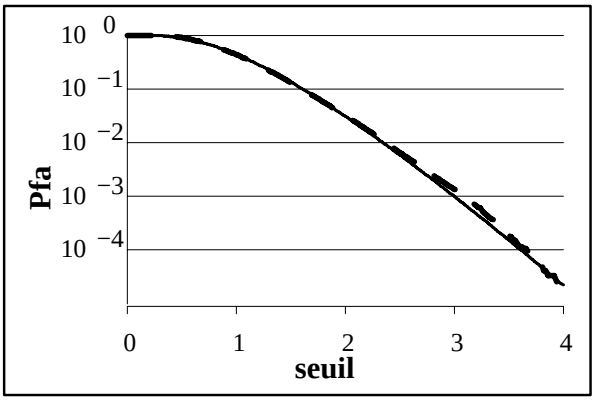
Puisque l'on dispose du calcul théorique de la probabilité de fausse alarme à partir du seuil de détection (cf. équation 5.1-8), on peut comparer les résultats expérimentaux avec les résultats théoriques afin de valider les hypothèses sur la densité de probabilité. Dans ce paragraphe, les résultats sont illustrés sur deux exemples représentatifs. Tout d'abord avec la méthode PER-COR qui permet de valider les hypothèses à la fois pour les méthodes Welch-WOSA, Blackman-Tukey et Lag-Reshape puisque toutes ces méthodes se retrouvent dans la méthode PER-COR. Les paramètres choisis pour la méthode PER-COR équilibrent l'influence des méthodes Welch-WOSA et Blackman-Tukey. Ensuite, un exemple avec la méthode STUSE est proposé.

1. Cas 1 : méthode PER-COR : taille des segments de 150 points, décalage entre segments de 28%, fenêtre d'apodisation quadratique de Blackman, support de la fenêtre sur la corrélation de 128 points, fenêtre linéaire de Hanning, transformée de Fourier sur 256 points (pas de *zero-padding*). Le signal à analyser comporte 320 points, on obtient alors 5 segments. Sous H_0, le degré de liberté équivalent de la loi gamma est alors égal à 8,54.

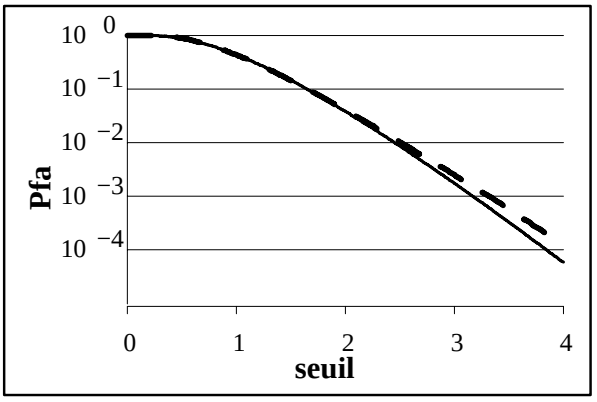
2. Cas 2 : méthode STUSE : taille des segments de 128 points, décalage entre segments de 50%, fenêtre quadratique de Hanning, paramètre *Q* de 3, transformée de Fourier sur 128 points (pas de *zero-padding*). Le signal à analyser comporte 1024 points, on obtient alors 15 segments ; un nombre de segments important vis-à-vis de *Q* est nécessaire pour que les hypothèses permettant d'obtenir une estimation non biaisée et de calculer la variance normalisée soient valables. La fenêtre effective sur la corrélation comporte alors 320 points, la partie non biaisée de la fenêtre étant de 128 points. Sous H_0, , le degré de liberté équivalent de la loi gamma est alors égal à 4,63.

Dans tous les cas on obtient une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et théoriques et ceci même si le signal à analyser n'est pas blanc gaussien (cf. Figure 5.1-IV). Il faut garder à l'esprit que les résultats présentés ici sont obtenus pour des tailles de segments ou des supports de fenêtre sur corrélation relativement faibles par rapport aux conditions théoriques qui sont plus asymptotiques. Ce choix de paramètres est nécessaire pour pouvoir effectuer des moyennes sur un nombre suffisant de réalisations. C'est en partie pourquoi les résultats obtenus avec la méthode STUSE sont moins bons que ceux obtenus avec la méthode PER-COR. En effet, pour les paramètres STUSE choisis, les hypothèses sur le calcul de la variance normalisée et sur le biais ne sont pas idéalement remplies. Si l'on se base sur une estimation de la variance normalisée au lieu du calcul théorique pour fixer le degré de liberté équivalent, on retrouve une très bonne concordance entre la courbe théorique et expérimentale (cf. Figure A 10-I en annexe A-10). Ce n'est donc pas l'hypothèse sur la densité de probabilité de l'estimateur qui est fausse, mais le calcul de la variance normalisée qui est biaisé par le non respect de certaines hypothèses pour la méthode STUSE.

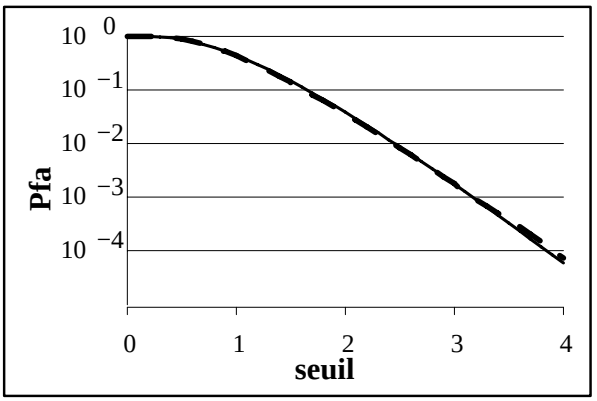
D'autres cas ont été étudiés avec les différents estimateurs et différents choix de paramètres [DUR98-Det]. La concordance est toujours restée bonne, ce qui nous permet de valider l'hypothèse que, sous H_0, les estimateurs de type Fourier sont proportionnels à une variable qui suit une loi gamma dont le degré de liberté équivalent est égal à deux sur la variance normalisée de l'estimateur.



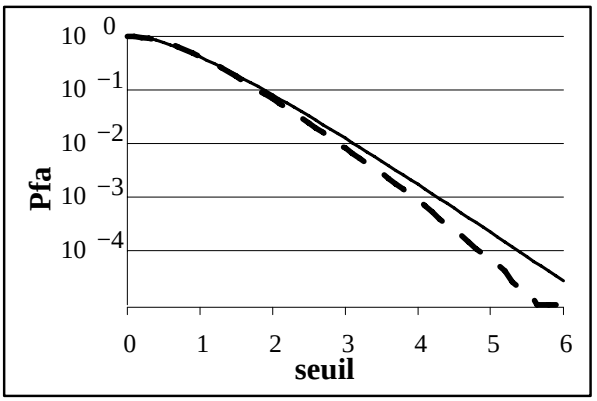
(a) Cas 1-PER-COR, bruit blanc gaussien.



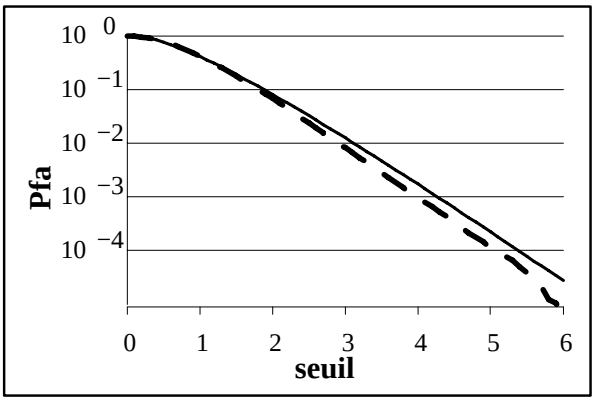
(b) Cas 1-PER-COR, bruit coloré ARMA.



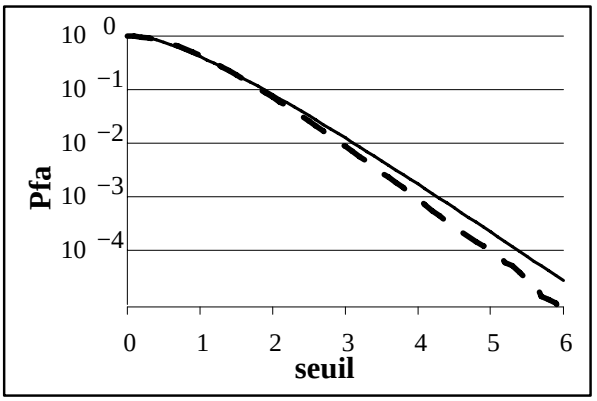
(c) Cas 1-PER-COR, sinusoïde à fréquence aléatoire.



(d) Cas 2-STUSE, bruit blanc gaussien.



(e) Cas 2-STUSE, bruit coloré ARMA.



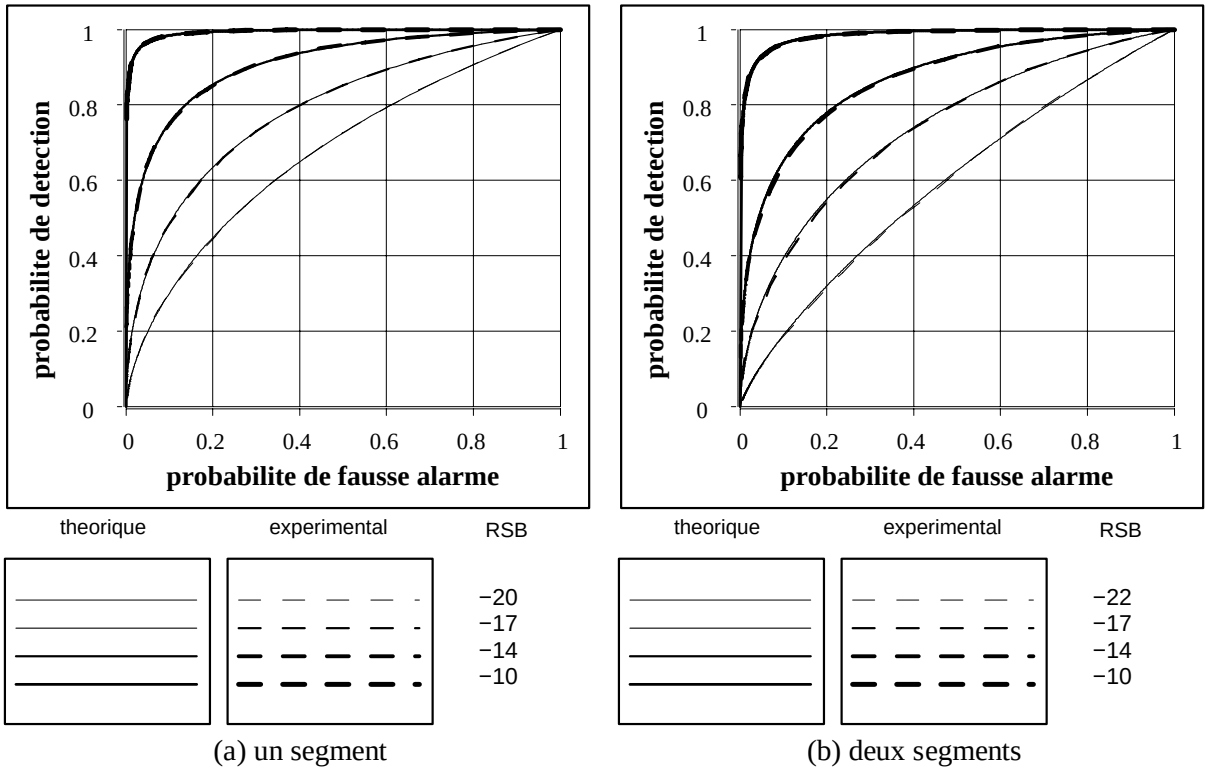
(f) Cas 2-STUSE, sinusoïde à fréquence aléatoire.

Figure 5.1-IV : **probabilité de fausse alarme en fonction du seuil**, théorique (trait plein) et expérimentale (trait en pointillés) dans le **cas 1-PER-COR** ou dans le **cas 2-STUSE**. (a) et (d) le signal est un **bruit blanc gaussien** de moyenne nulle et de variance unité, (b) et (e) le signal est un **bruit coloré ARMA** (cf. Figure 5.1-II), (c) et (f) le signal est une **sinusoïde** d'amplitude 1 et **de fréquence aléatoire** égale à : 0,25+*B*, où *B* est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 0,02 (cf. Figure A 10-II en annexe A-10). Pour les courbes expérimentales, on moyenne sur 10000 réalisations et sur l'ensemble des fréquences positives (considérées comme indépendantes, en enlevant les 4 premières et 4 dernières trop proches de la fréquence nulle et de la fréquence d'échantillonnage sur deux).

5.1.2.2. Performances du détecteur

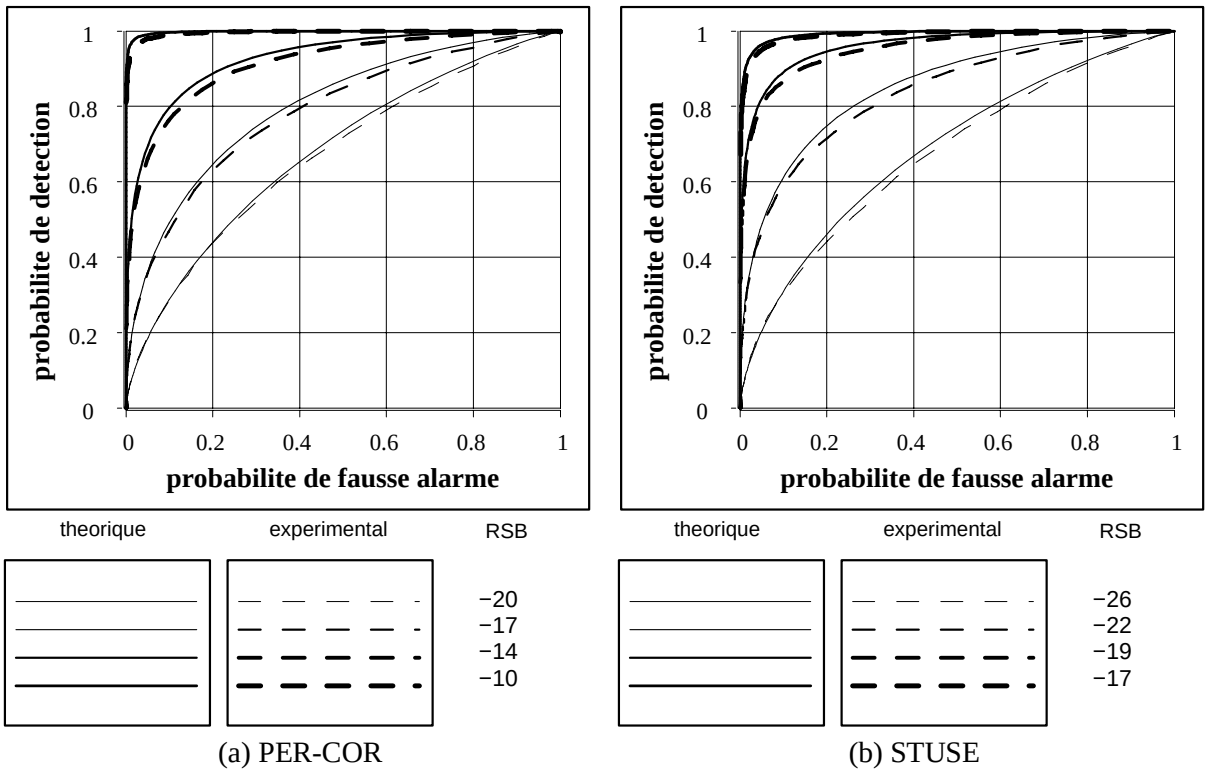
La connaissance des densités de probabilités sous les deux hypothèses permet de qualifier les performances théoriques du détecteur sous forme de courbes COR (Caractéristique Opérationnelle du Récepteur) [VAN68], [LEMO95] qui expriment la probabilité de fausse alarme en fonction de la probabilité de détection en fixant le RSB en supposant que la DSP du signal gaussien est connu ou parfaitement estimée et que le motif à détecter est une fréquence pure. Rigoureusement, les performances du détecteur dans le cas général ne peuvent pas être calculées théoriquement puisque la densité de probabilité sous H_1 est inconnue. Les performances ne peuvent alors être évaluées qu'à partir de courbes COR expérimentales. Cependant, nous présentons aussi les courbes COR théoriques. Elles ne sont valides que dans le cas du périodogramme moyenné sans recouvrement(Welch-WOSA sans recouvrement, cf. Figure 5.1-V). Dans ce cas, la comparaison des courbes théoriques aux courbes expérimentales permet de valider le détecteur. On remarque dans tous les cas une bonne correspondance entre les courbes COR théoriques et expérimentales. Les courbes COR permettent de déterminer à partir de quel rapport signal sur bruit, la probabilité de détection sera acceptable.

Dans le cas des autres estimateurs PER-COR et STUSE (cf. Figure 5.1-VI), nous utilisons la probabilité de détection déterminée à partir de la densité de probabilité sous l'hypothèse H_1 donnée dans le paragraphe 3.2.2.2. Cette densité de probabilité peut être une estimation de la vraie densité de probabilité lorsque les rapports signal sur bruit utilisés sont faibles. On constate que les courbes théoriques, bien que présentant une erreur certaine avec les courbes expérimentales, permettent de prévoir approximativement les performances du détecteur en fonction du rapport signal sur bruit et en particulier de déterminer à partir de quel rapport signal sur bruit le détecteur offrira des performances acceptables. Il faut néanmoins considérer que se sont les courbes expérimentales qui sont réellement représentatives des performances.



(a) un segment (b) deux segments

Figure 5.1-V : **courbes COR théoriques et expérimentales** pour plusieurs rapports signal sur bruit avec l'estimateur **Welch-WOSA sans recouvrement** et une fenêtre de Hanning, (a) sur **1 segment** de 256 points, (b) **sur 2 segments** de 128 points. Pour les courbes expérimentales : *b* est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unité, *s* une sinusoïde. Moyenne sur 20000 réalisations à la fréquence de la sinusoïde.



(a) PER-COR (b) STUSE

Figure 5.1-VI : **courbes COR théoriques et expérimentales** pour plusieurs rapports signal sur bruit (RSB) (a) dans le cas 1-PER-COR, (b) dans le cas 2-STUSE. Pour les courbes expérimentales : *b* est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unité, *s* une sinusoïde. Moyenne sur 20000 réalisations à la fréquence de la sinusoïde.

5.1.3. Influence des erreurs d'estimations

Dans ce paragraphe, nous allons présenter l'influence de 2 types d'erreur. La première erreur qui peut se produire est une mauvaise estimation par la ligne de fond de spectre de la densité spectrale de puissance du signal gaussien seul $\gamma_b(\nu)$ (lorsque celle-ci est nécessaire). Le deuxième type d'erreur peut provenir d'une erreur sur le degré de liberté équivalent de la loi gamma associée à l'estimateur. Ce dernier cas est intéressant pour montrer qu'il est préférable d'utiliser le calcul de la variance normalisée pour déterminer le degré de liberté équivalent.

5.1.3.1. Influence de la ligne de fond de spectre

Dans la plupart des cas, la première étape du détecteur va consister à déterminer la ligne de fond $f(\nu)$, afin d'estimer la densité spectrale de puissance du signal gaussien seul $\gamma_b(\nu)$. Une grande partie des performances du détecteur dépend de cette estimation.

Les tableaux Tab. 5.1-I et Tab. 5.1-II présentent les erreurs sur la probabilité de fausse alarme lorsque l'on fait une erreur respectivement de +10% ou de –10% par rapport à la DSP vraie du signal *b*, pour différents degrés de liberté équivalents de la loi gamma et pour différentes probabilités de fausse alarme initialement désirées P_{fades}. Lorsque l'on utilise la ligne de fond de spectre comme estimation de $\gamma_b(\nu)$, la détection revient à comparer $\hat{\gamma}_x(\nu)$ à $\lambda \times f(\nu)$, λ étant obtenu par l'inversion de l'équation 5.1-8 :

$$P_{fades} = \int_{r\lambda}^{+\infty} p_{\chi_r^2}(x)\,\mathrm{d}x \qquad (5.1\text{-}11)$$

Si e représente le pourcentage d'erreur sur l'estimation de la DSP :

$$e = 100\times(f(v)-\gamma_b(v))/\gamma_b(v) \tag{5.1-12}$$

le détecteur va comparer $\hat{\gamma}_x(v)$ à $\gamma_b(v)\times(\lambda+\lambda\times e/100)$. La probabilité de fausse alarme réelle est alors égale à :

$$P_{far} = \int_{r\lambda(1+e/100)}^{+\infty} p_{\chi_r^2}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1-13}$$

ce qui permet d'en déduire l'erreur en % sur la probabilité de fausse alarme par rapport à la probabilité de fausse alarme désirée :

$$y=100\times(P_{far}-P_{fades})/P_{fades} \tag{5.1-14}$$

- si on **sous-estime** $\gamma_b(v)$, $f(v)<\gamma_b(v)$, alors la probabilité de fausse alarme réelle $P_{far,}$ est supérieure à la probabilité de fausse alarme désirée P_{fades}, $P_{far}>P_{fades}$. On a alors plus d'erreurs de détection que prévu, c'est le cas le plus grave si l'on considère que le risque de première espèce est associé à la fausse alarme,
- si on **surestime** $\gamma_b(v)$, $f(v)>\gamma_b(v)$, alors la probabilité de fausse alarme réelle $P_{far,}$ est inférieure à la probabilité de fausse alarme désirée P_{fades}, $P_{far}<P_{fades}$. On a moins d'erreurs de détection que prévu, mais par voie de conséquence, moins de détection.

Tab. 5.1-I : erreurs sur la probabilité de fausse alarme lorsque la ligne de fond de spectre offre une erreur de -10% par rapport à la DSP vraie du signal *b*.

degré de liberté, r	P_{fa} désirée, P_{fades}	0,001	0,01	0,1
4	P_{fa} réelle, P_{far}	0,0023	0,018	0,136
	erreur sur la P_{fa}, y	129 %	77,3 %	35,8 %
6	P_{fa} réelle, P_{far}	0,0025	0,019	0,143
	erreur sur la P_{fa}, y	154 %	92,6 %	43,5 %
10	P_{fa} réelle, P_{far}	0,003	0,022	0,156
	erreur sur la P_{fa}, y	198 %	119 %	56 %

Tab. 5.1-II : erreurs sur la probabilité de fausse alarme lorsque la ligne de fond de spectre offre une erreur de +10% par rapport à la DSP vraie du signal *b*.

degré de liberté, r	P_{fa} désirée, P_{fades}	0,001	0,01	0,1
4	P_{fa} réelle, P_{far}	0,00043	0,0056	0,073
	erreur sur la P_{fa}, y	-56,7 %	-44 %	-26,8 %
6	P_{fa} réelle, P_{far}	0,00039	0,0051	0,069
	erreur sur la P_{fa}, y	-61,3 %	-49 %	-31 %
10	P_{fa} réelle, P_{far}	0,00032	0,0044	0,062
	erreur sur la P_{fa}, y	-67,6 %	-55,7	-37,6

On constate que les erreurs sur la probabilité de fausse alarme peuvent devenir très importantes, d'autant plus importantes que la probabilité de fausse alarme désirée est faible. Pour une erreur d'estimation de -10% de la DSP vraie du signal *b*, on va jusqu'à doubler, voire tripler le nombre de fausses alarmes. Mais ceci n'est principalement vrai que lorsque la probabilité de fausse alarme désirée est faible, on peut alors en général tolérer ce taux d'erreur. Si on utilise une méthode de ligne de fond de spectre qui a tendance à sous-estimer la DSP vraie de *b*, il est alors important de choisir une probabilité de fausse alarme plus faible que celle initialement désirée. L'estimation de la ligne de fond de spectre reste un élément clef du détecteur.

5.1.3.2. Influence du degré de liberté équivalent

Nous allons discuter de l'influence degré de liberté équivalent de la loi gamma sur la probabilité de fausse alarme. Pour cela nous calculons la probabilité de fausse alarme réellement obtenue P_{far}, lorsque que le seuil de détection est calculé à partir de la probabilité de fausse alarme désirée P_{fades}, pour un degré de liberté équivalent égal à + ou – 1 le degré de liberté équivalent réel r de la loi gamma. Le seuil λ est obtenu par l'inversion de la formule :

$$P_{fades} = \int_{(r\pm1)\lambda}^{+\infty} p_{\chi^2_{r\pm1}}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1-15}$$

La probabilité de fausse alarme réelle est alors égale à :

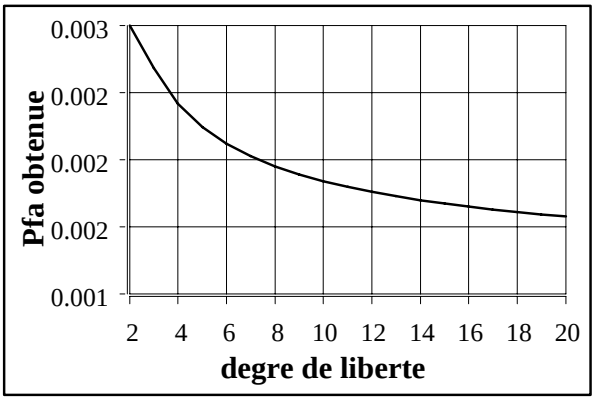
$$P_{far} = \int_{r\lambda}^{+\infty} p_{\chi^2_r}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.1-16}$$

ce qui permet d'en déduire l'erreur en % sur la probabilité de fausse alarme par rapport à la probabilité de fausse alarme désirée : $y=100\times(P_{far}-P_{fades})/P_{fades}$.

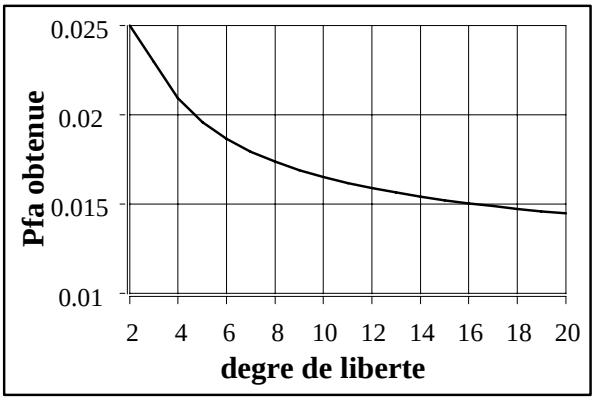
D'après les résultats de la Figure 5.1-VII, on constate que :

- si on **surestime** le degré de liberté équivalent pour calculer le seuil, $r_2>r$, alors la probabilité de fausse alarme réelle P_{far}, est supérieure à la probabilité de fausse alarme désirée P_{fades}, $P_{far}>P_{fades}$. On a alors plus d'erreurs de détection que prévu, c'est le cas le plus grave si l'on considère que le risque de première espèce est associé à la fausse alarme,
- si on **sous-estime** le degré de liberté équivalent pour calculer le seuil, $r_2<r$, alors la probabilité de fausse alarme réelle P_{far}, est inférieure à la probabilité de fausse alarme désirée P_{fades}, $P_{far}<P_{fades}$. On a alors moins d'erreurs de détection que prévu, mais par voie de conséquence, moins de détection.

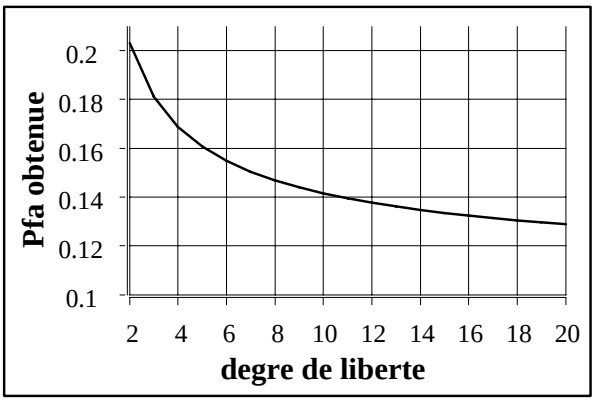
Une erreur d'un sur le degré de liberté équivalent de la loi gamma entraîne d'importantes erreurs sur la probabilité de fausse alarme. On peut obtenir jusqu'à plus de trois fois plus de fausses alarmes. Puisque les erreurs entre la probabilité de fausse alarme théorique et expérimentale sont loin d'être de cet ordre là, on peut en conclure que le degré de liberté équivalent calculé théoriquement à partir de la variance normalisée est juste. Ces résultats justifient l'intérêt de la généralisation effectuée et soulignent l'importance d'utiliser le calcul exact de la variance normalisée pour déterminer le degré de liberté équivalent.



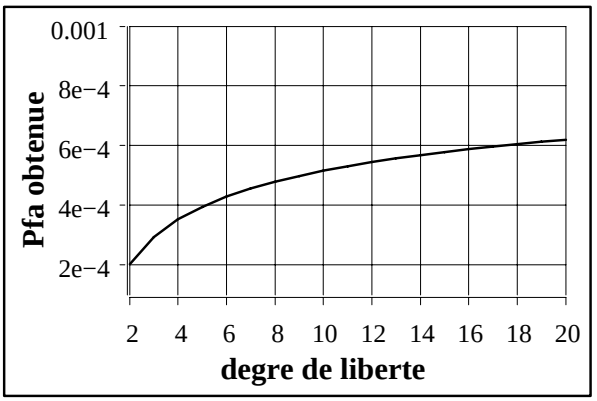
(a) probabilité de fausse alarme désirée =0,001, r_2=r+1, erreur y allant de 220 % à 60 %.



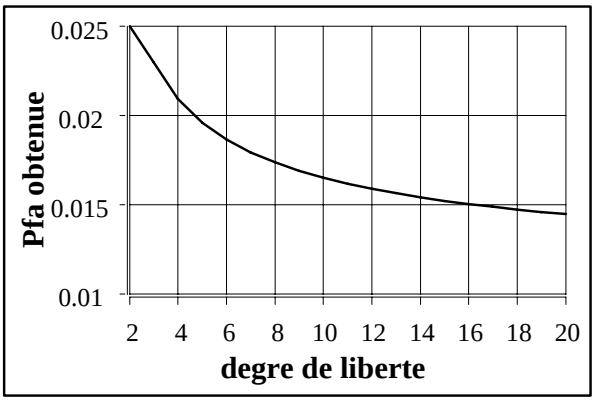
(b) probabilité de fausse alarme désirée = 0,01, r_2=r+1, erreur y allant de 160 % à 50 %.



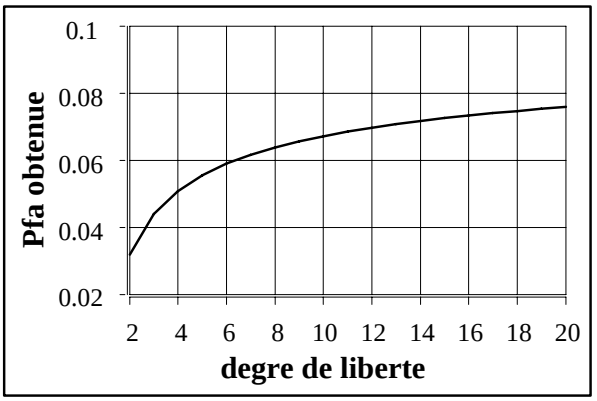
(c) probabilité de fausse alarme désirée = 0,1, r_2=r+1, erreur y allant de 100 % à 30 %.



(d) probabilité de fausse alarme désirée =0,001, r_2=r-1, erreur y allant de -80 % à –40 %.



(e) probabilité de fausse alarme désirée = 0,01, r_2=r-1, erreur y allant de -75 % à -30 %.



(f) probabilité de fausse alarme désirée = 0,1, r_2=r-1, erreur y allant de -70 % à -25 %.

Figure 5.1-VII : **probabilités de fausse alarme réelles en fonction du degré de liberté équivalent réel *r*** lorsque l'on utilise pour calculer le seuil une loi gamma avec un degré de liberté équivalent égal à r_2=r ± 1 pour une probabilité de fausse alarme désirée donnée (indiquée sur les différentes figures). La correspondance avec le pourcentage d'erreur y est indiquée sous chaque courbe.

5.1.4. Résultats sur signaux réels

5.1.4.1. Signal vibratoire d'une station d'huile PEG-SH1-a11

Nous présenterons ici les résultats obtenus sur une partie du spectre, B=[500 Hz,740 Hz], dans laquelle des fréquences pures de très faible rapport signal sur bruit ont été trouvées lors de l'analyse complète du signal. L'estimation de la DSP choisie correspond à une analyse où l'expert peut commencer à envisager leur présence. Elle est obtenue avec la méthode PER-COR (cf. paragraphe 2.5.3) pour une taille des segments de 15 000 points, une fenêtre d'apodisation quadratique de Blackman, un décalage entre segments de 29 %, on obtient alors 9 segments, un support de fenêtre sur corrélation de 13 000 points, une fenêtre linéaire de Blackman et enfin une taille de transformée de Fourier de 32 768 points pour mieux faire apparaître les maxima des pics. Sous H_0, le degré de liberté équivalent de la loi gamma est alors de 16,5. La ligne de fond de spectre $f(v)$, est obtenue par filtrage médian avec une fenêtre de 60 points (cf. paragraphe suivant 5.2). On obtient alors une bonne estimation du fond de spectre par rapport à l'estimation et à l'analyse complète du signal (cf. Figure 5.1-VIII).

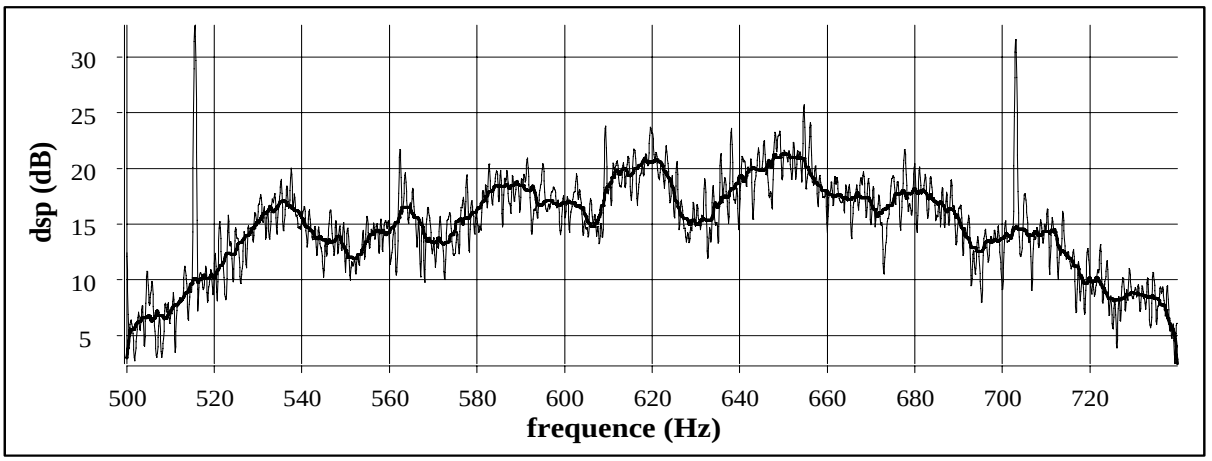
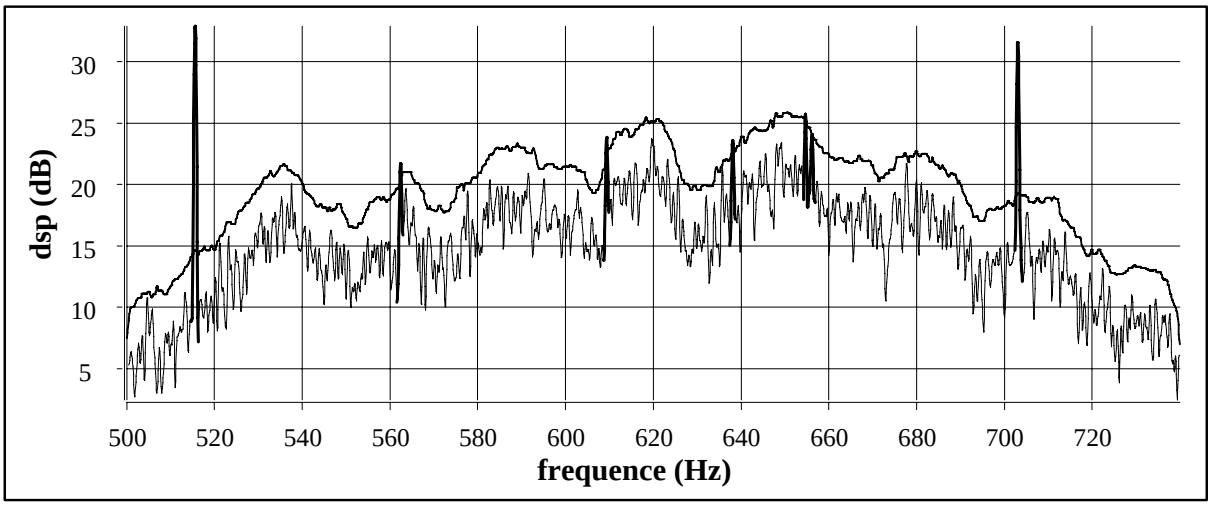


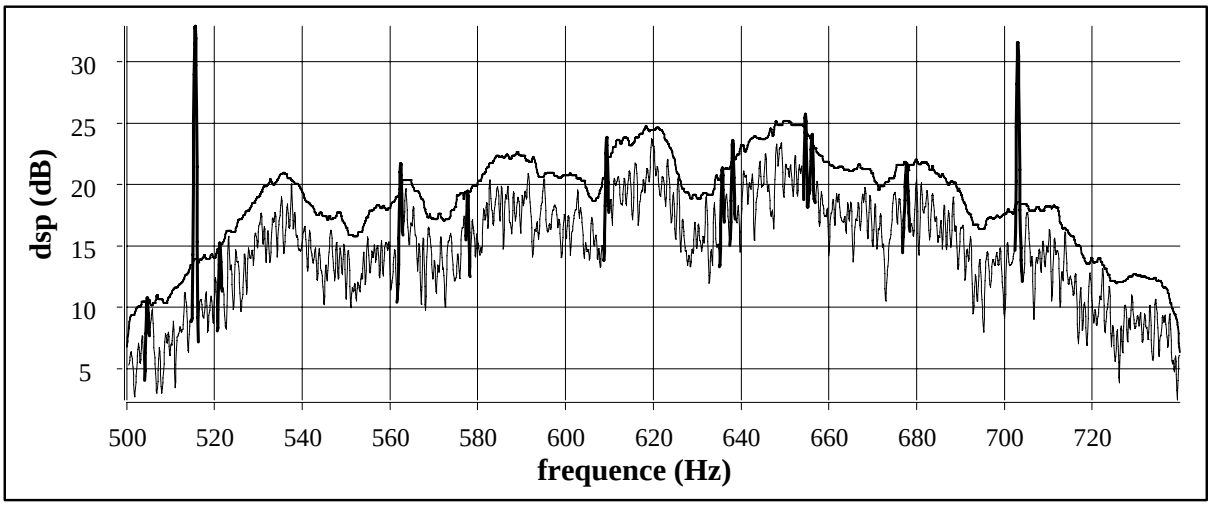
Figure 5.1-VIII : **signal PEG-SH1-a11, estimation de la densité spectrale de puissance** (trait fin) entre 500 Hz et 740 Hz **avec l'estimateur PER-COR comparée à la ligne de fond de spectre** obtenue par filtrage médian (trait épais cf. paragraphe 5.2.2.2). L'échelle est en décibel.

Avec cette estimation de la DSP, les résultats obtenus avec une probabilité de fausse alarme de 10^{-4} sont les plus satisfaisants du point de vue de l'expert (cf. Figure 5.1-IX), les pics détectés ayant été validés par l'analyse complète du signal (cf. [DUR97-PEG]). D'autres pics ont ensuite été validés comme étant susceptibles d'être des fréquences pures, mais sur cette analyse leur amplitude est trop proche des pics liés au bruit. Pour une P_{fa} de 10^{-5}, un seul pic n'a pas été détecté par rapport à 10^{-4} (cf. Figure A 10-III en annexe A-10). Pour une P_{fa} de 10^{-3}, certains pics détectés en plus sont susceptibles d'être des fréquences pures, par exemple pour celui vers 678 Hz, mais d'autres sont plutôt à associer à des fausses alarmes comme celui à 522 Hz ou 645 Hz (cf. Figure 5.1-IX). Ensuite pour des P_{fa} de 10^{-2} et 10^{-1}, le nombre de fausses alarmes devient plus important, les résultats pour une P_{fa} de 10^{-1} étant inexploitables (cf. Figure 5.1-IX et Figure A 10-III en annexe A-10).

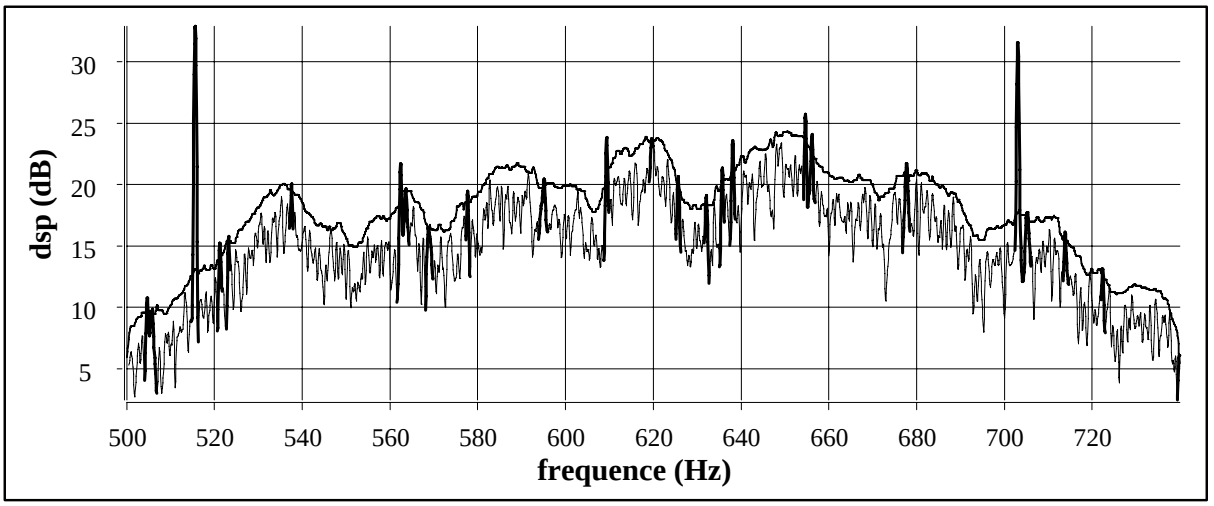
Nous présentons également en annexe A-10 le cas du signal ENG8-E5-21RH-SPV, dont les composantes spectrales sont également des fréquences pures (cf. Figure A 10-IV en annexe A-10).



(a) pour une **probabilité de fausse alarme de 10^{-4}**.



(b) pour une **probabilité de fausse alarme de 10^{-3}**.



(c) pour une **probabilité de fausse alarme de 10^{-2}**.

Figure 5.1-IX : **signal PEG-SH1-a11, résultats de la détection pour différentes probabilités de fausse alarme,** (a) $P_{fa} = 10^{-4}$, (b) $P_{fa} = 10^{-3}$, (c) $P_{fa} = 10^{-2}$. En traits épais : pics de la densité spectrale de puissance détectés, pouvant être associés à H_1 « fréquences pures » ; en traits fins : pics du bruit à associer à H_0. L'autre courbe en trait plein uni représente le seuil de détection $\lambda \times f(v)$.

5.1.4.2. Signal du bruit rayonné d'un navire MF-CHARLIE 1-VOIE6

L'analyse complète du signal a été effectuée sous forme d'un scénario d'analyse [DUR97-MF]. Une série de pics bande étroite harmoniques entre eux de 4,96 Hz a été mise en évidence lors de l'analyse complète du signal. Il ne s'agit pas de fréquences pures, mais bien de composantes à bande étroite à caractère aléatoire émises par le moteur diesel qui propulse le navire. En régime permanent stable, le moteur diesel génère un signal acoustique constitué de fréquences pures. Mais, dans les conditions de mesure, des modifications de charge sur les hélices et de légers changement de régime affectent le régime permanent d'un effet aléatoire auquel s'ajoute l'effet doppler.

Nous présentons ici les résultats obtenus sur la partie du spectre B=[0 Hz,110 Hz], dans laquelle ces composantes bande étroite sont le plus présentes. L'estimation de la DSP choisie correspond à une analyse où le caractère bande étroite des « harmoniques » est visible (cf. Figure 5.1-X). Sur le spectre les pics qui correspondent à ces composantes ont une largeur de bande supérieure à celle de la fenêtre spectrale. Certaines de ces composantes apparaissent non plus comme un seul pic, mais comme une émergence face au fond de spectre, constituée de plusieurs pics : par exemple les composantes autour de 49 Hz, 54 Hz, et plus encore pour celles situées au-delà de 80 Hz : 84 Hz, 90 Hz, 95 Hz, 99 Hz, 104 Hz. Plus les composantes sont hautes fréquences, plus leur bande est large et plus elles se rapprochent de l'hypothèse H_0. L'estimation est obtenue avec la méthode du Corrélogramme A-biaisé (cf. paragraphe 2.5.3.1) avec un support de fenêtre sur corrélation de 60 000 points, une fenêtre d'apodisation linéaire de Blackman et enfin une taille de transformée de Fourier de 131 072 points. Sous H_0, le degré de liberté équivalent de la loi gamma est alors de 6,18. La ligne de fond de spectre $f(v)$, est obtenue par filtrage médian avec une fenêtre de 50 points (cf. paragraphe 5.2.2.2). On obtient alors une bonne estimation du fond de spectre par rapport à l'estimation et à l'analyse complète du signal, sauf au niveau des composantes bande étroite (cf. Figure 5.1-X). En effet, puisque ces composantes ont une bande supérieure à la bande de la fenêtre spectrale, le filtre médian qui est adapté à celle-ci, ne donne pas une ligne de fond qui passe par le pied de ces motifs, mais suivant la largeur de la composante elle passe « plus haut ». C'est le cas pour la composante autour de 35 Hz. Puis, quand la bande de la composante s'élargit, la ligne de fond de spectre passe entre les différents pics qui la composent. C'est le cas pour la composante autour de 90 Hz. Le détecteur réagit suivant la nature des composantes vis-à-vis des paramètres de l'estimation et des hypothèses de détection. Finalement, toute composante fréquentielle qui ne correspond pas à l'hypothèse H_0 pour des paramètres d'estimation donnés, est susceptible d'être détectée. En particulier, il faut noter que sous H_0, en plus de l'hypothèse gaussienne, il a été considéré que le spectre du signal b devait être relativement constant dans la bande de la fenêtre spectrale. C'est ce que nous constatons aux vus des résultats de la détection (cf. Figure 5.1-XI).

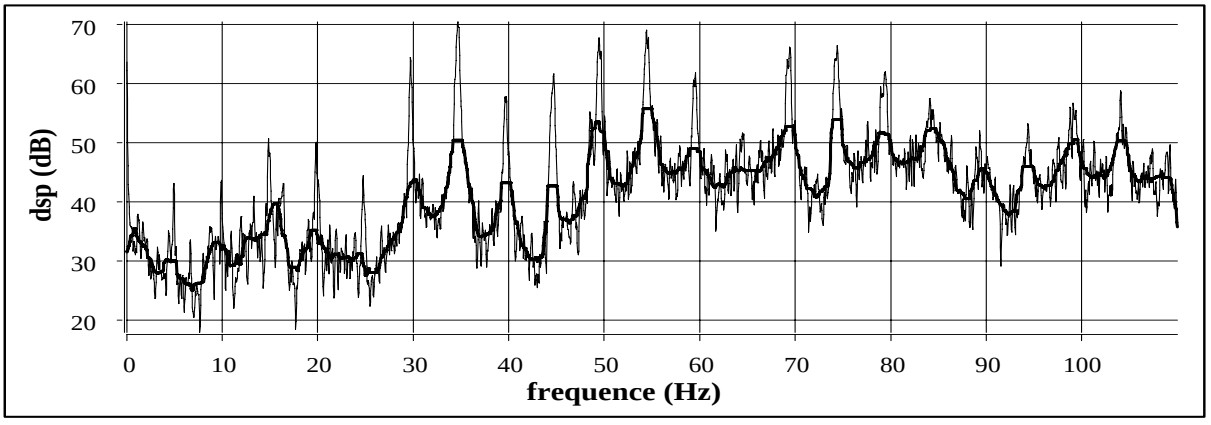
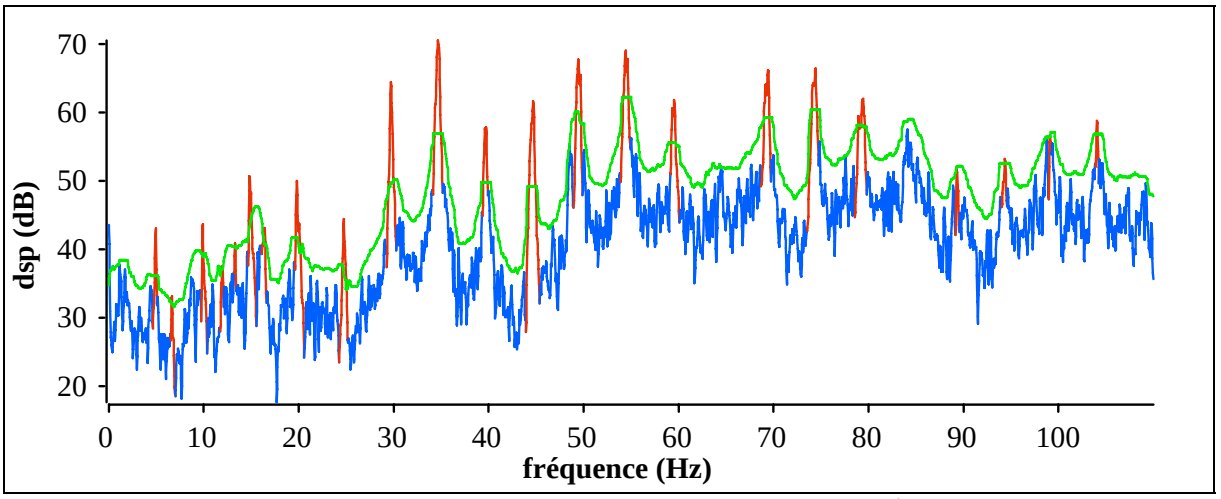
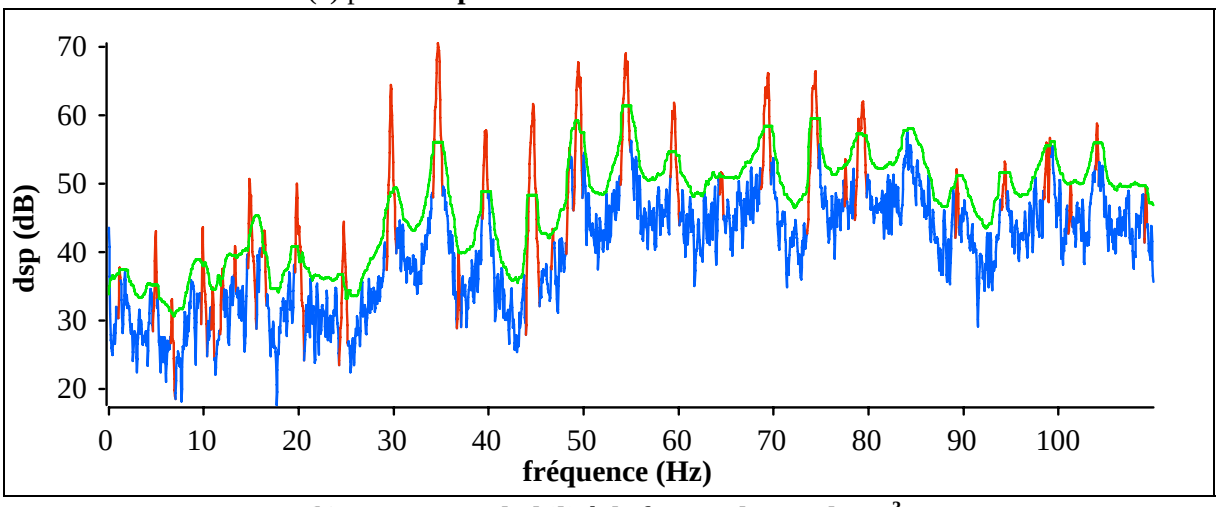


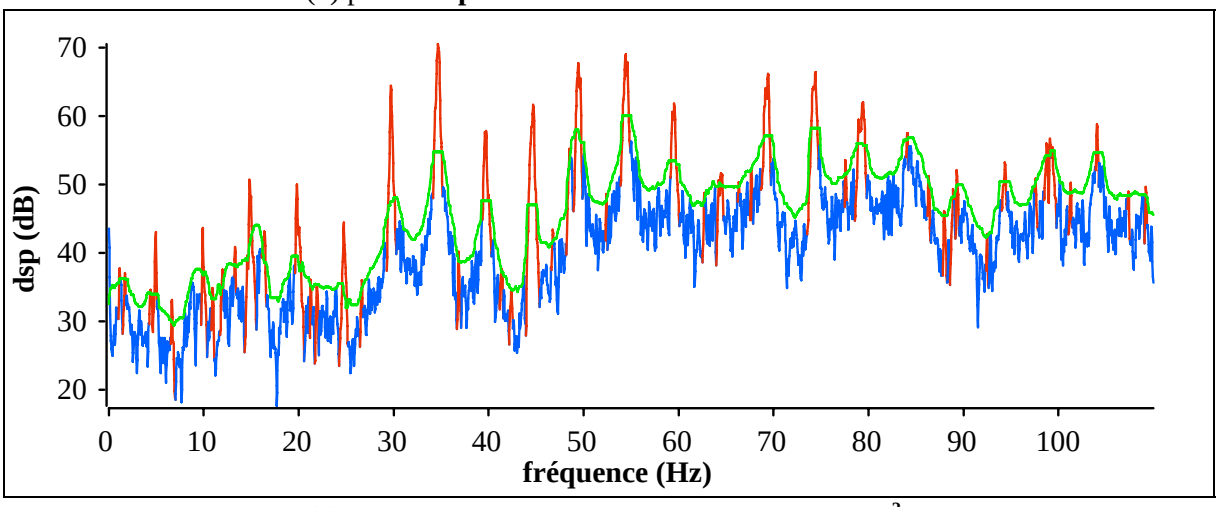
Figure 5.1-X : **signal MF-CHARLIE1-VOIE6**, **estimation de la densité spectrale de puissance** (trait fin) entre 0 Hz et 110 Hz **avec l'estimateur PER-COR comparée à la ligne de fond de spectre** obtenue par filtrage médian (trait épais). L'échelle est en décibel.



(a) pour une **probabilité de fausse alarme de 10^{-4}**.



(b) pour une **probabilité de fausse alarme de 10^{-3}**.



(c) pour une **probabilité de fausse alarme de 10^{-2}**.

Figure 5.1-XI : **signal MF-CHARLIE1-VOIE6**, **résultats de la détection pour différentes probabilités de fausse alarme,** (a) $P_{fa} = 10^{-4}$, (b) $P_{fa} = 10^{-3}$, (c) $P_{fa} = 10^{-2}$. En traits rouges : pics de la densité spectrale de puissance détectés, pouvant être associés à H_1, en traits bleus : pics du bruit à associer à H_0. La courbe en trait vert représente le seuil de détection $\lambda \times f(v)$.

On constate que les composantes « harmoniques » bande étroite sont effectivement détectées. Elles sont à considérer comme des anomalies vis-à-vis de H_0 dans les conditions d'estimation. On

constate qu'elles ne sont toutes détectées (lorsqu'il s'agit d'une composante constituée de plusieurs pics, il y a au moins un des pics détecté) que pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-2}, mais qu'alors des fausses alarmes apparaissent également. Pour une P_{fa} de 10^{-5}, une seule des composantes au-delà de 80 Hz est détectée (cf. Figure A 10-V en annexe A-10). Pour une P_{fa} de 10^{-4} ou 10^{-3}, le résultat de la détection est satisfaisant si l'on cherche à détecter effectivement ces composantes.

5.1.5. Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons construit un détecteur à partir de n'importe lequel des estimateurs de Fourier et quels que soient ses paramètres. Le détecteur permet d'aider à l'interprétation des spectres. Il faut souligner que la généralisation à tous les estimateurs de Fourier repose sur le fait que l'on suppose que sous H_0 la densité de probabilité de l'estimateur est une loi du gamma dont le degré de liberté équivalent est fixé par le calcul de la variance normalisée. Bien que le calcul de la variance normalisée ait été démontré analytiquement [MAT87], il est impossible de construire une démonstration théorique prouvant rigoureusement l'hypothèse sur la densité de probabilité. Cependant les très bons résultats expérimentaux obtenus ont montré que cette hypothèse pouvait être retenue. Il ne peut y avoir d'erreurs fondamentales puisqu'il y a correspondance de la variance et de la moyenne. L'hypothèse faite semble approcher au mieux la réalité. Par ailleurs, il a été observé que des erreurs sur le degré de liberté équivalent de la loi gamma auraient produit des erreurs beaucoup plus importantes que celles obtenues sur la probabilité de fausse alarme (cf. paragraphe 5.1.3.2).

Si l'on ne connaît pas le bruit de fond et que l'on doit alors estimer sa densité spectrale de puissance à l'aide de la ligne de fond de spectre, le détecteur opte, pour chaque pic du spectre, entre l'hypothèse H_0 que l'on peut généraliser à : signal aléatoire à puissance moyenne finie de densité spectrale de puissance égale à la ligne de fond de spectre (si le nombre de points du signal est suffisant), ou le rejet de cette hypothèse. En effet, on ne peut conclure exclusivement que si H_0 est rejeté, le pic détecté est une fréquence pure comme nous l'avons vu avec le signal MF-CHARLIE1-VOIE6. Il faut effectuer d'autres traitements pour confirmer ou infirmer l'hypothèse fréquence pure. Ceci offre l'avantage de pouvoir se servir du détecteur pour détecter des composantes bande étroite par rapport à un fond constitué de motifs plus large bande. Par ailleurs, des non stationnarités du signal provoquent en général sur le spectre une augmentation locale de la variance de l'estimateur, des pics liés à ces non stationnarités peuvent alors être détectés. Le détecteur peut donc être également utilisé pour détecter des zones fréquentielles non stationnaires. Le problème est de différencier, pour les pics détectés, l'hypothèse non stationnaire, de l'hypothèse bande étroite, fréquence pure, voir d'autres cas qui sortent de l'hypothèse H_0. Il faut alors soit effectuer de nouveaux traitements sur les pics détectés, soit disposer d'information a priori, mais aussi intégrer les résultats de la pré-analyse sur la détection de non-stationnarités.

L'application sur signaux réels du détecteur donne des résultats satisfaisants vis-à-vis des conclusions que tire un expert en traitement du signal. Dans tous les cas étudiés, une probabilité de fausse alarme aux alentours de 10^{-4} offre un bon compromis. Dans le cadre de notre démarche, il est préférable de classer chaque pic du spectre en fonction de la probabilité de fausse alarme minimale qui a permis leur détection. Si ν_i représente la fréquence du maximum du i^{ème} pic du spectre $\hat{\gamma}_x(\nu)$, nous classons chaque pic en 5 classes en fonction du seuil de détection $\lambda(P_{fa})$:

- classe 0 : pic non détecté pour une P_{fa} de 10^{-2}, $\hat{\gamma}_x(\nu_i) < \lambda(10^{-2})\times f(\nu_i)$,
- classe 1 : $\lambda(10^{-2})\times f(\nu_i) \le \hat{\gamma}_x(\nu_i) < \lambda(10^{-3})\times f(\nu_i)$, pic détecté pour une P_{fa} comprise entre 10^{-2} et 10^{-3},
- classe 2 : $\lambda(10^{-3})\times f(\nu_i) \le \hat{\gamma}_x(\nu_i) < \lambda(10^{-4})\times f(\nu_i)$,
- classe 3 : $\lambda(10^{-4})\times f(\nu_i) \le \hat{\gamma}_x(\nu_i) < \lambda(10^{-5})\times f(\nu_i)$,
- classe 4 : $\hat{\gamma}_x(\nu_i) \ge \lambda(10^{-5})\times f(\nu_i)$,

où $f(v)$ représente l'estimation du fond de spectre.

La mise en œuvre du détecteur est simple, puisqu'après normalisation seul le choix de la probabilité de fausse alarme est nécessaire. Le choix le plus important à faire est celui de la méthode d'estimation de la ligne de fond de spectre puisqu'une partie des performances de l'estimateur en dépend directement. Dans les paragraphes suivants, nous présentons et discutons les avantages et inconvénients des différentes méthodes d'estimations du fond de spectre. Nous nous sommes également attachés à comparer leur performance en détection (cf. paragraphe 5.2.4).

5.2. La ligne de fond de spectre

Dans le cas où le signal à analyser contiendrait une partie aléatoire à spectre continu et une autre constituée par exemple de fréquences pures, la méthode de détection (cf. paragraphe précédent), permet de distinguer l'origine de chaque pic du spectre en l'attribuant soit à l'hypothèse H_0 : partie aléatoire à spectre continu, soit au rejet de cette hypothèse. Cependant, une première étape de normalisation est nécessaire, elle nécessite d'estimer, à partir du spectre, le fond de spectre, soit la DSP vraie du signal aléatoire à spectre continu (cf. page 142 pour la définition). Cette estimation est appelée ligne de fond de spectre ou ligne de pied de raies. La ligne de fond de spectre ne se limite pas à un problème de détection, elle peut être très utile pour aider à l'interprétation de chaque spectre et pour comparer différentes estimations entre elles.

La variance de l'estimateur a pour conséquence de faire apparaître sur le spectre estimé des pics plus ou moins importants liés à tout signal aléatoire présent dans le signal à analyser. Ils sont distribués autour de la DSP vraie du signal. L'opération consiste à obtenir de façon analytique ce que l'expert en traitement du signal interprète visuellement en faisant passer une ligne imaginaire « au milieu » des pics qu'il considère comme du bruit en excluant tout autre motif, comme un pic important qu'il attribue à une fréquence pure. Si un pic isolé est attribué à une fréquence pure, l'expert se fonde sur le voisinage du pic ou sur les minima du pic pour en déduire la DSP du bruit seul. L'objectif est de reconstruire cette démarche en prenant en compte la nature particulière de l'estimation.

Il existe déjà une littérature importante sur le sujet, avec des méthodes relativement simples dites à une passe comme le filtrage médian [JUH91], [PRIEUR95-2] ou morphologique [SER82], [PIE97], [RED89], [PRIEUR95-2] ou un peu plus compliquée telle que le filtrage tri-trou (toujours à une passe) [PRIEUR95], [PLU83], [LEF81]. Le terme « une passe » indique que la ligne de fond de spectre est directement la sortie d'un filtrage non-linéaire. Nous étudions ces trois méthodes qui sont représentatives des différents algorithmes « une passe ». En particulier, nous nous sommes attachés à définir les paramètres optimaux des différentes méthodes en fonction des paramètres de l'estimateur de Fourier. C'est aussi pourquoi nous nous limitons volontairement à l'étude de ces trois méthodes. Des méthodes plus complexes sont la plupart du temps adaptées à un problème particulier, rendant impossible le choix simple des paramètres lorsque le signal à analyser est inconnu. Cette étude nous permet de déterminer les avantages et les inconvénients de chaque méthode dans un contexte général.

Les méthodes « 2 passes » ou « multi-passes » sont plus complexes : une première passe utilise des méthodes du type une passe pour faire une première estimation de la ligne de fond de spectre. Une étape de détection suit afin d'exclure un certain nombre de points (qui sont soit éliminés, soit remplacés). Une deuxième passe permet une estimation plus fine de la ligne de fond de spectre. Ce sont par exemple les méthodes TPM (Two-Pass Mean), OTA (Order Truncate Average), S3PM (Split Three-Pass Mean), SAXA (Split Average eXclude Average) [STR84], [STR85]. Ces méthodes ont été développées dans des contextes bien particuliers, elles sont en général limitées à l'utilisation du périodogramme moyenné sans recouvrement. Nous proposons un algorithme multi-passes adapté à l'ensemble des méthodes de type Fourier quels que soient les paramètres utilisés. En particulier, cette dernière méthode inclut à la fois la fonction détermination du fond de spectre et la fonction détection.

Enfin, nous proposons un critère pour déterminer les zones de fréquences où la ligne de fond de spectre est mal estimée et ne peut être représentative de la DSP du bruit de fond.

Nous présentons les résultats principaux qui forment la conclusion d'une étude plus complète [DUR98-Fond]. Dans cette étude, l'ensemble des cas critiques a été abordé et illustré sur des exemples synthétiques représentatifs. Nous n'illustrons ici les résultats qu'à partir de quelques cas, mais les conclusions sont issues d'une approche systématique.

5.2.1. Généralités

Il est impossible d'estimer idéalement la ligne de fond de spectre quels que soient les paramètres. Nous avons donc défini un « cahier des charges » pour pouvoir comparer les différentes méthodes :

1. L'estimateur de la ligne de fond de spectre doit être capable de diminuer l'influence des perturbations importantes a priori dues à des fréquences pures de la forme de la fenêtre spectrale. Lorsqu'il n'y a qu'une fréquence pure isolée, la ligne de fond doit passer en pied de pic, lorsqu'il y en a 2 côtes à côtes, le biais doit rester faible.
2. L'estimateur de la ligne de fond doit s'appuyer sur un voisinage suffisamment local pour être à même de suivre les évolutions du spectre continu.
3. Les performances de l'estimateur (absence de biais, variance faible) doivent être sensiblement identiques quelle que soit la densité de probabilité de l'estimateur de DSP pour un signal aléatoire à puissance moyenne finie à spectre continu (issu d'un système linéaire avec en entrée un bruit blanc et à support de corrélation petit devant le support de la fenêtre effective, cf. paragraphe 3.2).
4. La ligne de fond de spectre doit être adaptée à chaque réalisation particulière d'un signal en passant « au milieu » des pics associés au bruit. Elle doit être le plus proche possible de la DSP continue vraie.
5. La ligne de fond de spectre ne doit pas trop sous-estimer la DSP continue vraie afin de ne pas augmenter considérablement le nombre de fausses alarmes lorsqu'une opération de détection est envisagée.

Afin de valider et de comparer les résultats des différentes méthodes, plusieurs cas représentatifs ont été mis en place à partir de signaux synthétiques, l'estimateur de DSP choisi est Welch-WOSA avec une fenêtre d'apodisation de Blackman (sachant que les résultats restent valides pour les autres estimateurs et les autres fenêtres spectrales). Les fréquences sont présentées en fréquence réduite (fréquence d'échantillonnage unité). Nous illustrons ici les résultats sur deux cas représentatifs :

- **Signal 1**

  Pour connaître la façon dont réagissent les méthodes face à la présence de fréquences pures lorsque le voisinage de ces fréquences est spectralement blanc, nous utilisons un signal composé d'un bruit blanc gaussien additionné d'une somme de sinusoïdes à différents rapports signal sur bruit. Ce signal permet de mettre en valeur les points 1, 4 et 5 du cahier des charges.

  Signal 1 : bruit blanc gaussien de variance unité additionné de 7 sinusoïdes de fréquences respectives en Hz : $\nu_1 = 0.05$, $\nu_2 = 0.1$, $\nu_3 = 0.11$, $\nu_4 = 0.2$, $\nu_5 = 0.3$, $\nu_6 = 0.4$, $\nu_7 = 0.41$ et d'amplitude respective : $A_1 = 0.6$, $A_2 = 5$, $A_3 = 5$, $A_4 = 2$, $A_5 = 10$, $A_6 = 0.6$, $A_7 = 0.6$. Le signal contient 512 points (période d'échantillonnage unité).

  Estimation spectrale : nous utilisons une estimation de la DSP (pour le spectre du bruit) pour lequel le degré de liberté équivalent de la loi gamma associée à l'estimateur (cf. paragraphe 3.2.2) est faible. L'objectif est d'illustrer le point 3 du cahier des charges. Les paramètres de l'estimateur sont : taille des segments de 512 points, soit un seul segment, la taille de la TF est de 2048 points. Le degré de liberté équivalent est alors de 2.

- **Signal 2**
  Principalement pour valider le point 2, « suivre les évolutions du spectre continu », et le point 5, « être le plus proche possible de la DSP vraie », nous utilisons un bruit coloré gaussien. Signal 2 : bruit coloré issu d'un processus ARMA dont l'entrée est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. L'ordre de la partie AR est 4, celui de la partie MA de 2. Les coefficients AR sont a_1=-1,352, a_2=1,358, a_3=-0,662, a_4=0,24. Les coefficients MA sont m_1=-0,2 et m_2=0,04. La variance du bruit blanc gaussien excitateur est de 1. Le signal contient 1024 points (période d'échantillonnage unité).
  Estimation spectrale : nous utilisons cette fois-ci une estimation de la DSP pour laquelle le degré de liberté équivalent est important. Les paramètres de l'estimateur sont : taille des segments de 256 points, décalage entre segments de 29.7%, ce qui donne 11 segments, la taille de la TF est de 1024 points. Le degré de liberté équivalent de la loi gamma est alors de 16.2.

Avant de présenter les différentes méthodes, nous revenons sur la notion de largeur de bande du lobe principal de la fenêtre spectrale. Cette grandeur permet de fixer les paramètres des méthodes d'estimation du fond de spectre en fonction des performances des méthodes d'analyse spectrale.

Une fréquence pure (signal déterministe) en sortie de l'estimateur prend la forme de la fenêtre spectrale (cf. Figure 5.2-I). La perturbation induite sur le spectre est principalement concentrée sur le lobe principal de cette fenêtre, soit dans une bande *B* comprise entre les deux premiers zéros de la fenêtre spectrale. Cette bande sert naturellement de référence pour répondre au point 1 du cahier des charges « diminuer l'influence des perturbations importantes *a priori* dues à des fréquences pures de la forme de la fenêtre spectrale ». Les paramètres des méthodes de ligne de fond de spectre sont alors à choisir en fonction de ce paramètre. Pour certains estimateurs, Welch-WOSA ou Blackman-Tukey, le premier zéro de la fenêtre spectrale se calcule très simplement, dans d'autres cas plus complexes comme PER-COR, il faut cependant l'estimer numériquement à partir du calcul de la fenêtre spectrale (cette opération ne posant aucun problème particulier). Etant donné les paramètres choisis pour analyser les signaux 1 et 2, la bande *B* exprimée en nombre de points est égale à 24 points (en prenant en compte le *zero-padding*).

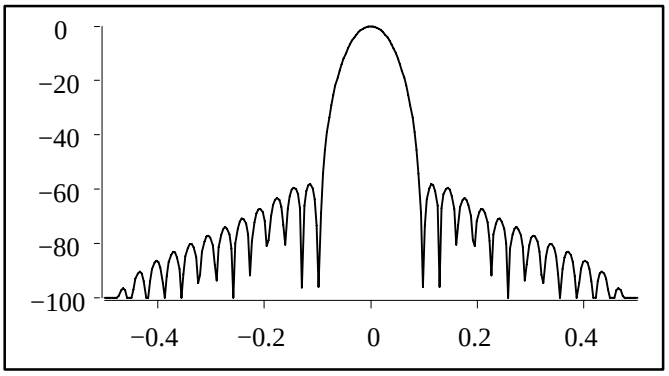
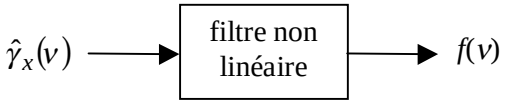


Figure 5.2-I : exemple de fenêtre spectrale en dB.

5.2.2. Les méthodes une passe

La ligne de fond de spectre $f(\nu)$ estimée par une méthode dite une passe, est directement la sortie d'un filtrage non-linéaire. Seule la nature de ce filtre change entre les estimateurs. La non-linéarité est nécessaire pour permettre d'éliminer les perturbations importantes du spectre.



Les paragraphes suivants présentent les différents types de non-linéarité envisagés.

5.2.2.1. Filtrage morphologique

Le premier choix envisagé de filtre non linéaire est un filtre morphologique. Il s'appuie sur la morphologie des fonctions et est issu d'une technique couramment utilisée en traitement d'image [SER82], [PIE97]. La ligne de fond est alors le résultat d'une ouverture de taille M qui permet d'éliminer toutes les perturbations de taille supérieure à $2M$. Une ouverture sur le spectre $\hat{\gamma}_x$, notée O, est obtenue comme l'enchaînement d'une érosion de taille M, notée E, et d'une dilatation de même taille, notée D [PRIEUR95-2], [RED89] :

$$O(\hat{\gamma}_x, M) = D(E(\hat{\gamma}_x, M), M) \tag{5.2-1}$$

Une érosion de taille r consiste ici à garder la valeur minimale du spectre dans la fenêtre k-M, k+M :

$$E(\hat{\gamma}_x, M)[k] = \min(\hat{\gamma}_x[k\text{-}M], \ldots, \hat{\gamma}_x[k\text{-}1], \hat{\gamma}_x[k], \hat{\gamma}_x[k\text{+}1], \ldots, \hat{\gamma}_x[k\text{+}M]) \tag{5.2-2}$$

et une dilatation de taille r consiste à garder la valeur maximale du spectre dans la fenêtre v-M, v+M :

$$D(\hat{\gamma}_x, M)[k] = \max((\hat{\gamma}_x[k\text{-}M], \ldots, \hat{\gamma}_x[k\text{-}1], \hat{\gamma}_x[k], \hat{\gamma}_x[k\text{+}1], \ldots, \hat{\gamma}_x[k\text{+}M])) \tag{5.2-3}$$

La ligne de fond de spectre obtenue par filtrage morphologique élimine tout pic émergent d'une taille supérieure à $2M$. Pour ces pics, la ligne de fond passe au niveau de la largeur du pic égale à $2M$. Pour les autres points du spectre, la ligne de fond reste égale au spectre.

Puisque l'on cherche à éliminer des perturbations de l'ordre de la largeur du lobe principal de la fenêtre spectrale B, la taille de l'ouverture doit être choisie de l'ordre de $B/2$. Pour une fréquence pure, la ligne de fond passe théoriquement au niveau des zéros de la fenêtre spectrale, soit au niveau du bruit additif local (cf. Figure 5.2-III au niveau des fréquences des sinusoïdes, page 164).

Avantage :
La méthode s'appuie sur la nature intrinsèque d'un pic et non sur son voisinage, ce qui implique qu'une fréquence pure pourra être extraite même si les variations du spectre sont importantes dans son voisinage immédiat (cf. Figure 5.2-IV et Figure A 11-II en annexe A-11 qui présente la moyenne de 1000 réalisations de la ligne de fond de spectre estimée).
Inconvénient majeur :
Le problème du filtrage morphologique pour estimer le fond de spectre sur l'ensemble du spectre, est que la ligne de fond passe par tous les minima du spectre. On sous-estime donc régulièrement le fond de spectre. Cependant, pour la détection, on ne s'intéresse qu'aux pics émergents du spectre, c'est à dire aux fréquences des maxima des pics. Or à ces fréquences, le filtrage morphologique peut permettre d'estimer la DSP du bruit seul. Cependant, les pics dus à la variance de l'estimateur sont en général moins larges que B, la ligne de fond de spectre va donc également passer en dessous de ces pics au lieu de passer au milieu de ceux-ci. La DSP vraie du spectre est sous-estimée (cf. Figure 5.2-III, Figure 5.2-IV), ce qui implique une augmentation importante des fausses alarmes dans une opération de détection. En outre, la ligne de fond de spectre est un très mauvais estimateur de la DSP vraie du bruit (cf. Figure A 11-I et A 11-II en annexe A-11). Pour mieux l'estimer, il faut choisir une ouverture de taille inférieure à $B/2$, par exemple $B/4$, la DSP vraie est mieux estimée. Par contre, au niveau des fréquences pures, la ligne de fond de spectre passe également au milieu des pics et non à leur pied, surestimant de façon importante la DSP vraie et diminuant considérablement la probabilité de détection. Il ne faut pas oublier qu'il est alors nécessaire d'utiliser du *zero-padding*, afin d'obtenir suffisamment de points pour chaque pic.

Dans une opération de détection, le filtrage morphologique permet en général de bien détecter les fréquences pures, même dans un fond à variations importantes, mais ceci au prix d'une augmentation très importante des fausses alarmes.

5.2.2.2. Filtrage médian et percentile

Dans ce paragraphe, le filtre non linéaire envisagé est un filtre médian (passe-bas) qui consiste à faire glisser une fenêtre sur le spectre, en remplaçant l'échantillon central de la fenêtre par la valeur médiane des échantillons de la fenêtre :

$$f[i] = \text{médiane}(\hat{\gamma}_x[k] \mid k = i - M, \cdots, i + M) \tag{5.2-4}$$

où $2M+1$ est la taille de la fenêtre [PRIEUR95-2], [JUH91].

La taille de la fenêtre doit être choisie en fonction de la fenêtre spectrale. Pour éliminer l'influence des perturbations dues à une fréquence pure (point 1 du cahier des charges), il est nécessaire de choisir une taille $2M+1>2B$, voire même $2M+1>3B$ au cas où 2 fréquences pures côte-à-côte seraient présentes. La méthode s'appuie sur le voisinage direct de la fréquence d'intérêt. Mais pour rester « local », afin de pouvoir suivre les évolutions du fond de spectre (point 2 du cahier des charges), il est préférable de choisir $2M+1<6B$.

Cette méthode répond correctement au cahier des charges pour $3B \leq 2M+1 \leq 4B$ (cf. Figure 5.2-III, Figure 5.2-IV et Figure A 11-I et A 11-II en annexe A-11). En dessous de $3B$, la ligne de fond de spectre reste influencée de façon importante par les fréquences pures, surestimant la DSP vraie du bruit non seulement à leur fréquence, mais aussi dans leur voisinage immédiat, surtout lorsque deux fréquences pures sont côte-à-côte. Au-dessus de $4B$, il devient difficile de suivre les variations du spectre lorsque le bruit n'est pas blanc.

Avantages :

- Le filtrage médian s'adapte relativement bien à chaque réalisation (cf. Figure 5.2-III et Figure 5.2-IV), la ligne de fond de spectre passe « au milieu des pics » du bruit, et élimine bien l'influence des fréquences pures isolées. Ceci même s'il y en a 2 côte-à-côte. On surestime parfois la DSP vraie du bruit à la fréquence d'une fréquence pure, mais uniquement lorsque celle-ci est d'amplitude importante. Cela ne pose pas de problème majeur lors d'une opération de détection, le rapport entre le maximum du pic et le fond de spectre restant très important (cf. Figure 5.2-III).
- Cette méthode permet un bon suivi des variations du spectre, même relativement brutales (cf. Figure 5.2-IV). Bien entendu le suivi est d'autant meilleur que M est petit.
- La méthode est simple et rapide (il existe des algorithmes rapides) [JUH91].

Inconvénients :

- Au niveau des fréquences pures, surtout d'amplitude importante, la DSP du bruit de fond peut être surestimée (cf. Figure 5.2-III et Figure A 11-II en annexe A-11).
- La ligne de fond estimée par un filtrage médian a tendance à sous-estimer la DSP vraie du bruit lorsque seuls des pics du bruit sont présents, en particulier lorsque le degré de liberté équivalent de l'estimateur est faible. Ceci se remarque particulièrement lorsque l'on moyenne la ligne de fond de spectre sur plusieurs réalisations. La tendance à sous-estimer se dégage nettement pour un degré de liberté égal à 2 (cf. Figure 5.2-III et Figure A 11-II en annexe A-11). Dans une opération de détection, le nombre de fausses alarmes risque d'être supérieur à celui donné par la théorie et établi à partir de la DSP vraie du bruit.

Pour améliorer ce dernier point, on peut envisager d'utiliser la **méthode du percentile**, qui est une adaptation du filtre médian. Au lieu de remplacer l'échantillon central de la fenêtre par la valeur médiane des échantillons, on le remplace par la valeur à p% des échantillons. On réarrange les échantillons par ordre croissant, la sortie du filtre percentile est alors la valeur du $K^{\text{ème}}$ échantillon tel que K soit égal à la partie entière de $(2M+1)p/100$. J.A. Shooter et S.L. Watkins ont montré [SHO77] que pour un degré de liberté équivalent donné, un certain pourcentage p devait être choisi pour assurer une moyenne égale à la DSP vraie du bruit. Le percentile est obtenu par la formule :

$$\frac{p}{100} = \int_0^r p_{\chi_r^2}(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.2-5}$$

où $p_{\chi_r^2}(x)$ désigne la densité de probabilité de la loi gamma de degré de liberté équivalent *r*.

Par exemple pour un degré de liberté équivalent égal à 2, le percentile à choisir est égal à 63%. Pour un degré de liberté équivalent de 16,25, le percentile est égal à 54,7%, donc proche du filtre médian (50%). On adapte le choix du percentile au degré de liberté équivalent obtenu. Il ne faut cependant pas oublier que cette élévation du pourcentage va avoir pour effet de moins bien éliminer l'influence des fréquences pures (cf. Figure A 11-III en annexe A-11), ou alors va obliger à agrandir la taille de la fenêtre au détriment d'un bon suivi du fond. Par ailleurs, sur des portions où le fond est à variations brusques, le suivi du fond sera moins bon.

5.2.2.3. Filtrage tri-trou

Le dernier choix de filtre non linéaire concerne un filtre tri-trou. Le « trou » consiste à ne pas prendre en compte la zone autour de l'échantillon étudié, pour ne calculer la moyenne que sur les échantillons se trouvant dans deux demi-fenêtres autour de cette zone et dans lesquelles on a enlevé les δ% plus grandes valeurs (« tri ») [PRIEUR95-2]. Cette méthode permet par ailleurs d'estimer la variance de l'estimation associée au bruit *b*, $\hat{\sigma}_{\gamma_b}{}^2$. On obtient :

$$f[i] = \frac{1}{2\,M\,(1-\delta)} \sum_j \hat{\gamma}_x[j] \qquad (5.2\text{-}6) \qquad \hat{\sigma}_{\gamma_b}{}^2 = \frac{1}{2\,M\,(1-\delta)} \sum_j \left(\hat{\gamma}_x[j] - f[j]\right)^2 \qquad (5.2\text{-}7)$$

où *M* est la largeur de chaque demi-fenêtre d'estimation, $j \in [i\text{-}M\text{-}T/2+1, i\text{-}T/2] \cup [i+T/2+1, i+M+T/2-1]$, zone d'estimation et *T* largeur du trou centré sur l'échantillon *i* (cf. Figure 5.2-II).

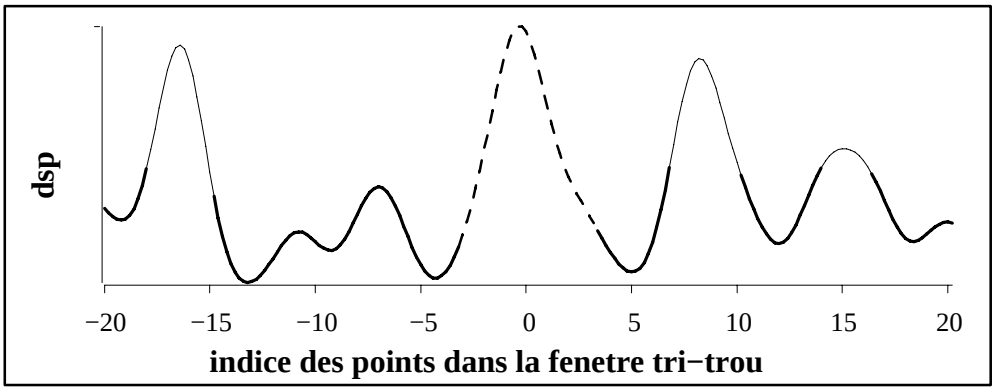


Figure 5.2-II : **fenêtre d'estimation du tri-trou**, trait en pointillés : partie du spectre dans la zone du trou de taille *T*=7, en trait continu fin : δ% plus grandes valeurs du spectre dans la zone d'estimation des deux demi-fenêtres de taille respective égale à *M*=17, trait continu épais : partie du spectre utilisée pour le calcul de la moyenne.

Pourquoi le trou ?

L'utilisation d'un trou autour de la fréquence d'intérêt a pour but de privilégier la détection. En effet, on fait l'hypothèse qu'à cette fréquence, il y a une fréquence pure. On cherche d'office à éliminer son influence en ne prenant pas en compte les points de son voisinage direct. La taille du trou doit donc être de l'ordre de *T*=*B*. Il est nécessaire de choisir une taille de trou relativement petite pour que les deux demi-fenêtres ne prennent pas en compte des points trop éloignés de la fréquence d'intérêt, afin de rester local et mieux suivre les évolutions du spectre.

Pourquoi le tri ?

Dans les deux demi-fenêtres d'estimation, il peut bien sûr y avoir des fréquences pures. Puisque les échantillons de plus faible amplitude ont une forte probabilité d'appartenir au bruit (contexte additif), on ne prend pas en compte les points de plus grande amplitude. De même que pour le filtre

médian, la taille de la fenêtre totale d'estimation $2M$ doit rester locale (point 2 du cahier des charges), mais permettre l'élimination d'éventuelles fréquences pures. Il est alors préférable de choisir $2B<2M<5B$. Pour le pourcentage de tri, il faut s'assurer, suivant la taille de la fenêtre d'estimation, d'éliminer au moins B points. Si le pourcentage est insuffisant et si une fréquence pure est présente dans la fenêtre d'estimation, la DSP vraie du bruit seul sera surestimée. D'un point de vue détection, si par ailleurs la fréquence d'intérêt est au niveau d'un pic du bruit, la conséquence est favorable. Le pic a moins de chance d'être détecté que si aucune fréquence pure n'est présente dans la fenêtre (la probabilité de fausse alarme diminue). Par contre, si la fréquence d'intérêt est au niveau d'une fréquence pure, la probabilité de détection risque de chuter.

Un compromis acceptable peut être obtenu pour une taille de trou égale à B, une taille de fenêtre d'estimation égale à $2M=4B$, et un pourcentage de rejet de l'ordre de 20% (cf. Figure 5.2-III, Figure 5.2-IV et Figure A 11-I et A 11-II en annexe A-11), ou pour $2M=3B$, et un pourcentage de rejet de l'ordre de 25%, si l'on désire favoriser le suivi du fond. La ligne de fond de spectre passe bien en pied de pic des fréquences pures isolées (cf. Figure 5.2-III), mais commence à se détériorer dans le voisinage des 2 fréquences pures d'amplitude importante côtes à côtes à 0,2 et 0,21 Hz, puisque dans ce voisinage la DSP du bruit est surestimée. Cependant, au niveau même des maxima des fréquences pures, la DSP vraie du bruit est correctement estimée et lors d'une opération de détection ces fréquences seront correctement détectées.

Au niveau des pics du bruit le problème est plus délicat, en particulier au niveau du suivi du fond de spectre (cf. Figure 5.2-IV) et des problèmes de fausse alarme dans une opération de détection. Pour assurer un bon suivi, il faut que la taille de la fenêtre d'estimation reste petite sachant qu'il faut d'office éliminer les points du trou. On observe en outre que la ligne de fond de spectre sous-estime la DSP vraie du bruit. Ceci est logique puisqu'on enlève les δ% plus grandes valeurs, ce qui fausse alors la moyenne s'il n'y a que des pics du bruit dans la fenêtre d'estimation. La ligne de fond de spectre passe au pied des pics du bruit alors que sur la réalisation l'expert la ferait passer au milieu des pics (cf. Figure 5.2-IV (b) entre 0,1 et 0,2 Hz). Dans une opération de détection, le nombre de fausses alarmes risque d'augmenter considérablement. Pour améliorer les résultats, il faut diminuer le pourcentage de rejet, mais c'est alors au niveau de la détection des fréquences pures qu'il y a une nette dégradation. On peut également choisir d'augmenter la taille de la fenêtre d'estimation et de diminuer légèrement le pourcentage de rejet pour obtenir plus de points du bruit dans la fenêtre d'estimation. Mais c'est alors le suivi du fond qui se dégrade. On peut également envisager de ne pas utiliser de trou pour rester le plus local possible, ce qui nécessite d'augmenter le pourcentage de rejet pour éliminer les fréquences pures. Au final les problèmes de sous-estimation de la DSP vraie du bruit ne sont pas résolus. Le choix des paramètres de la méthode du tri-trou est comme on le voit un problème délicat, qui, pour trouver le compromis idéal, doit être adapté au type de signal que l'on analyse. Par contre, la méthode obtient des performances équivalentes quel que soit le degré de liberté équivalent de la loi gamma associée à l'estimateur.

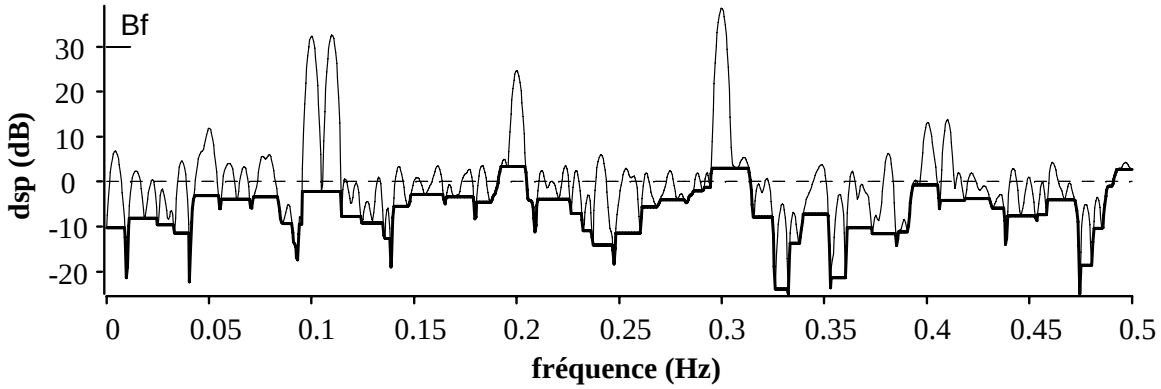
Avantages :

- Au niveau des fréquences pures, le filtrage tri-trou estime correctement ou sous-estime la DSP vraie du bruit seul, ce qui favorise la détection.
- Les performances sont identiques quel que soit le degré de liberté équivalent de l'estimateur.
- Le filtrage tri-trou donne une estimation de la variance associée au bruit de l'estimateur.

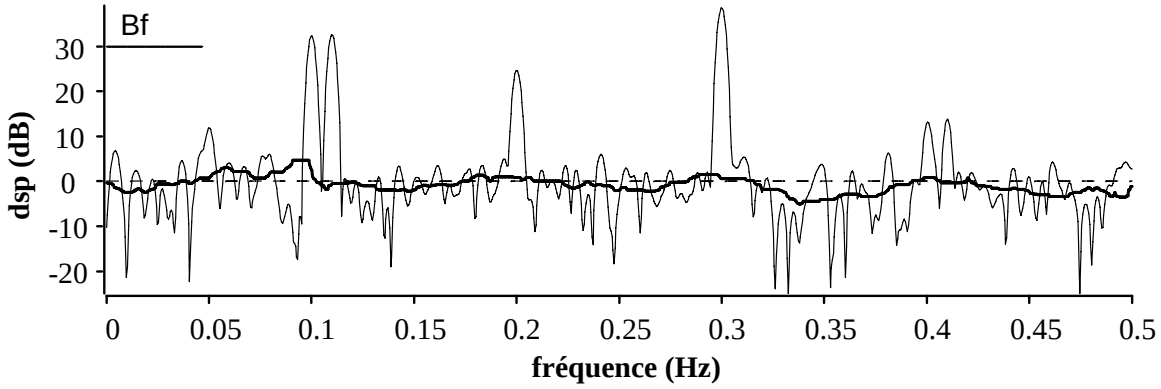
Inconvénients :

- Le filtrage tri-trou sous-estime la DSP vraie du bruit. Dans une opération de détection, le nombre de fausses alarmes risque alors d'être considérablement supérieur à celui donné par la théorie.
- La méthode ne s'adapte pas bien à chaque réalisation.
- La méthode peut poser des problèmes de surestimation de la DSP vraie du bruit lorsque plusieurs fréquences pures sont proches.

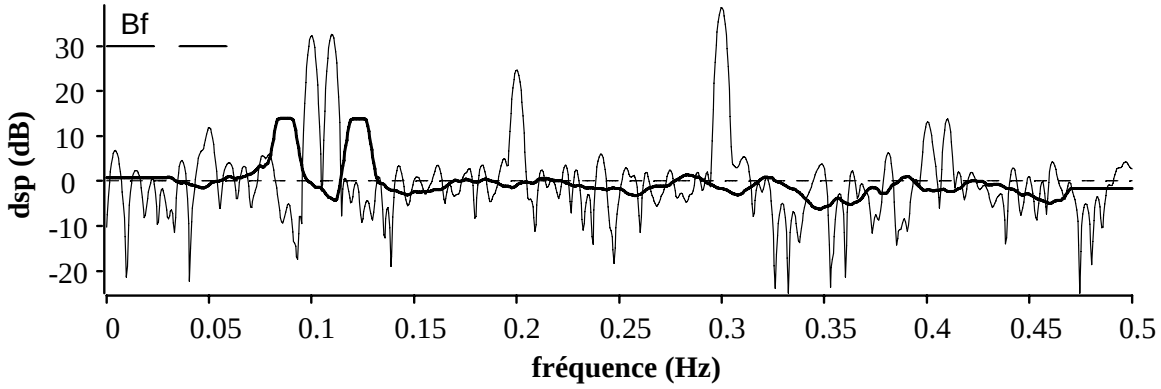
- Dans une situation où le signal est inconnu, les paramètres offrant le meilleur compromis sont difficiles à choisir.
- La méthode est plus complexe et moins rapide que le filtrage médian ou morphologique.



(a) **filtrage morphologique** $M=B/2=12$

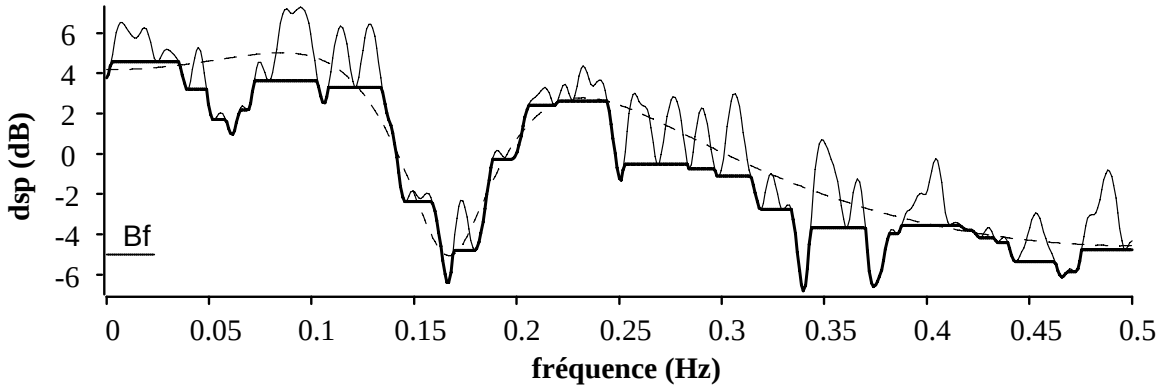


(b) **filtrage médian** $2M+1=4B=97$

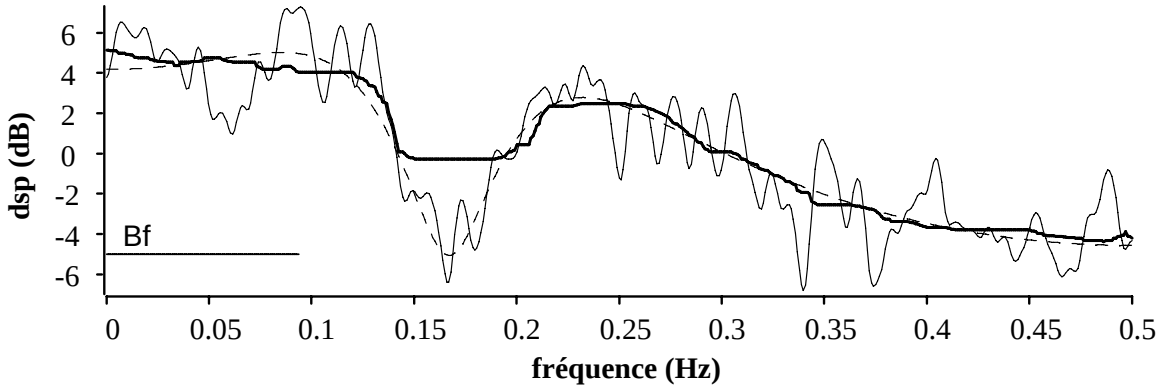


(c) **filtrage tri-trou** $M=2B=48$, $T=25$, *rejet*=20%

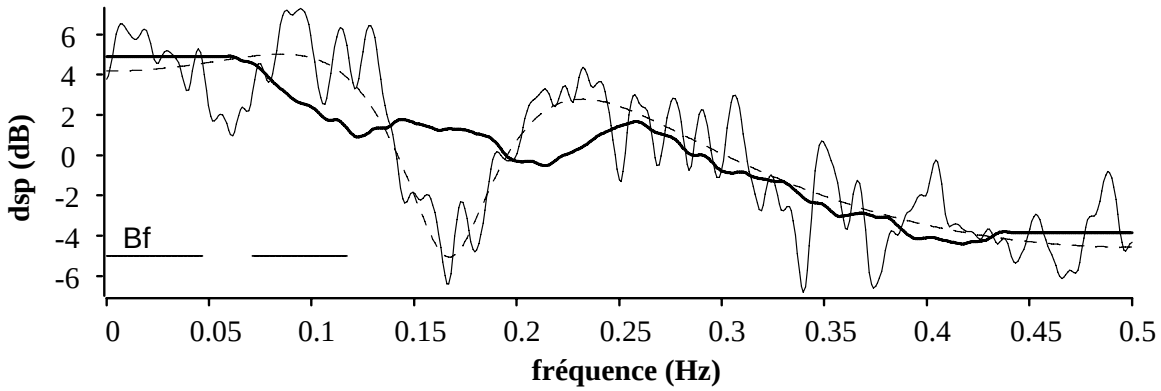
Figure 5.2-III : **signal 1** (bruit blanc plus sinusoïdes), **estimation de la ligne de fond de spectre** pour les différentes méthodes une passe (trait épais) comparée à la DSP estimée (trait fin). La DSP vraie du bruit blanc seul est égale à 0 dB (trait en pointillés). Pour les filtrages médian et morphologique, la bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé sous l'indication B_f. Pour le filtrage tri-trou, la taille de la fenêtre d'estimation est indiquée par le trait continu placé sous l'indication B_f, la fenêtre est constituée des deux demi-fenêtres de taille M, séparées d'un trou de taille T.



(a) **filtrage morphologique** $M=B/2=12$



(b) **filtrage médian** $2M+1=4B=97$



(c) **filtrage tri-trou** $M=2B=48$, $T=25$, *rejet*=20%

Figure 5.2-IV : **signal 2** (bruit coloré), **estimation de la ligne de fond de spectre** pour les différentes méthodes une passe (trait épais) comparée à la DSP estimée (trait fin) et à la DSP vraie du bruit (trait en pointillés). Pour les filtrages médian et morphologique, la bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé sous l'indication B_f. Pour le filtrage tri-trou, la taille de la fenêtre d'estimation est indiquée par le trait continu placé sous l'indication B_f, la fenêtre est constituée des deux demi-fenêtres de taille M, séparées d'un trou de taille T.

5.2.2.4. Conclusion sur les méthodes une passe

La méthode qui offre le meilleur compromis, tant du point de vue performances que simplicité et facilité du choix des paramètres, est le filtrage médian. Il peut être avantageux d'utiliser les autres méthodes dans le cas où l'on désire privilégier la détection au prix d'une augmentation, qui risque d'être conséquente, des fausses alarmes. Il existe d'autres variations, souvent plus complexes, de ces méthodes une passe, le gain n'étant souvent obtenu que dans des cas particuliers. Le problème est de fixer les paramètres pour un compromis général. Nous citerons cependant la norme A MINIMA [NIC92]. Elle consiste à choisir une fenêtre autour de la fréquence d'intérêt de taille $2M+1$, à découper cette fenêtre en P segments adjacents, à prendre le minimum de chaque segment, puis à calculer la moyenne de ces minima et enfin à multiplier cette moyenne par une constante qui dépend de la densité de probabilité du spectre (soit du degré de liberté équivalent de la loi gamma) afin de retrouver la moyenne correcte. Cette méthode est à rapprocher de la méthode du percentile, mais est rendue plus complexe par le choix des deux tailles de fenêtres et du coefficient multiplicateur. Elle permet cependant de mieux éliminer l'influence des fréquences pures.

5.2.3. La méthode n passes

Le terme « méthode multi-passes » regroupe les méthodes dont le résultat n'est pas directement la sortie d'un filtrage non linéaire. Elles se décomposent en plusieurs étapes. En général, la première étape ou passe, consiste à utiliser une méthode une passe, soit un filtrage non linéaire, pour obtenir une première estimation de la ligne de fond de spectre. A partir de cette première estimation, une opération de détection est effectuée, (les points détectés sont ceux supérieurs au seuil de détection). On modifie alors les points du spectre détectés (par exemple en les remplaçant par la valeur de la ligne de fond à cette fréquence ou simplement en les éliminant). Puis dans une seconde passe, on estime de nouveau la ligne de fond de spectre par une méthode une passe à partir du signal modifié, on affine alors l'estimation du fond de spectre. L'opération peut alors être réitérée plusieurs fois, d'où l'expression « multi-passes ».

Parmi les méthodes multi-passes, nous citerons par exemple les méthodes TPM (Two-Pass Mean), OTA (Order Truncate Average), S3PM (Split Three-Pass Mean), SAXA (Split Average eXclude Average) [STR84], [STR85]. D'autres articles sont à citer en référence [PLU83], [LEF81]. Le problème de ces méthodes est qu'elles ont été développées dans des contextes bien particuliers, elles sont notamment limitées à l'utilisation du périodogramme moyenné sans recouvrement pour le choix du seuil de détection. Nous ne détaillons donc pas ces différentes méthodes dans ce document, mais nous proposons une nouvelle méthode multi-passes adaptée à l'ensemble des méthodes de type Fourier, quels que soient les paramètres utilisés. Nous l'avons dénommée méthodes *n passes*. Le principe de la méthode est très général et admet plusieurs variantes qui sont précisées dans ce paragraphe.

Première passe

La première passe consiste à obtenir une première estimation de la ligne de fond de spectre $f_1(v)$ par une méthode une passe. Il est bien sûr possible de choisir n'importe laquelle des méthodes une passe, mais au vue de l'étude du paragraphe 5.2.2, le filtre médian est le plus adapté pour son bon compromis et la facilité du choix des paramètres. On choisira la taille de fenêtre du filtre de l'ordre de $3B$ à $4B$ (B largeur du lobe principal de la fenêtre spectrale en nombre de points).

Phase de détection

Cette première estimation de la ligne de fond de spectre, permet d'utiliser le détecteur décrit paragraphe 5.1. Pour une probabilité de fausse alarme P_{fa1} fixée, un seuil de détection λ est calculé,

connaissant le degré de liberté équivalent de l'estimateur (cf. équation 5.1-8, pour la fréquence nulle et la fréquence d'échantillonnage sur se reporter aux remarques du paragraphe 5.1.1).

Une distinction importante est à faire ici, entre la méthode proposée et les autres méthodes multi-passes. Nous caractérisons le spectre comme un ensemble de pics et nous allons rechercher les pics ne suivant pas l'hypothèse pics du bruit. On s'intéresse non pas à chaque point du spectre indépendamment des autres, mais à chaque pic comme entité propre. En effet, l'influence d'une fréquence pure n'est pas localisée à un point, mais à l'ensemble du pic autour de sa fréquence (pic dont la forme est proche de la fenêtre spectrale). Le $i^{\text{ème}}$ pic $\hat{\gamma}_i(\nu)$ est défini par l'ensemble des points du spectre compris entre les deux minima locaux (de plus basse fréquence, en cas d'égalité de plusieurs points) qui entoure le $i^{\text{ème}}$ maximum local, de telle manière que :

$$\hat{\gamma}_x(\nu) = \bigcup_i \hat{\gamma}_i(\nu) \tag{5.2-8}$$

Soit ν_i la fréquence du $i^{\text{ème}}$ maximum. Pour la détection, on se contente de comparer le maximum de chaque pic au seuil de détection :

$$\hat{\gamma}_i(\nu_i) \underset{\mathrm{H}_0}{\overset{\mathrm{H}_1}{\gtrless}} \lambda \times f(\nu_i) \tag{5.2-9}$$

où l'hypothèse H_0 est associée à signal aléatoire à puissance moyenne finie de densité spectrale de puissance égale à la ligne de fond de spectre et l'hypothèse H_1 au rejet de l'hypothèse H_0 dans un contexte additif. Si le maximum du pic ne dépasse pas le seuil de détection, l'ensemble du pic est à associer au bruit. Le résultat de la première passe est illustré par la figure suivante (Figure 5.2-V) :

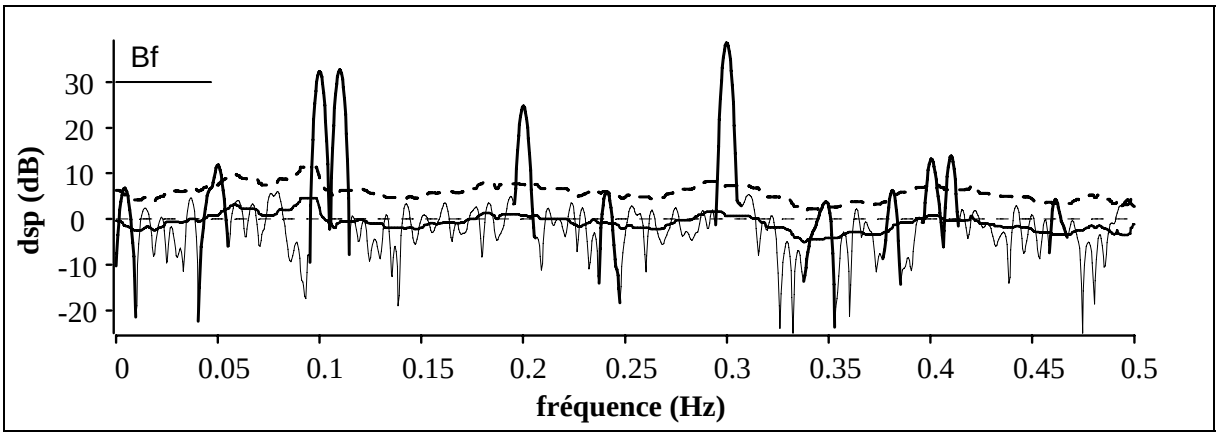


Figure 5.2-V : signal 1 (bruit blanc plus sinusoïdes). **Méthode *n passes*, résultat après la première passe :** ligne de fond de spectre par filtrage médian $2M+1=4B=97$**,** (trait continu épais uni), **seuil de détection** (trait épais en pointillés), DSP dont les pics non détectés sont en trait continu fin **et les pics détectés** sont en trait continu épais. La détection est obtenue pour une probabilité de fausse alarme $P_{fa1} = 10^{-2}$. On remarque sur cette réalisation que l'ensemble des fréquences pures est détecté, mais qu'il y a également des fausses alarmes. La bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé sous l'indication B_f.

Deuxième passe

Dans une deuxième passe, nous allons de nouveau utiliser une méthode une passe pour estimer la ligne de fond de spectre, mais cette fois-ci en tenant compte du résultat de la détection (cf. Figure 5.2-V). Dans la deuxième passe, nous cherchons à éliminer les défauts obtenus après une seule passe. En particulier le problème de sous-estimation du fond de spectre qui augmente le nombre de fausses alarmes. Nous ne cherchons plus directement à éliminer l'influence des fréquences pures, puisque le

résultat de la détection va nous permettre de traiter de façon particulière les pics détectés, mais à assurer une estimation de la ligne de fond la plus proche de la DSP vraie du bruit et ceci quel que soit le degré de liberté équivalent de l'estimateur. Il convient également de maintenir un bon suivi du fond. Ces remarques nous incitent à n'utiliser ni le filtrage médian, ni le filtrage morphologique, ni le filtrage tri-trou.

Deux méthodes sont adaptées : un simple filtrage moyen ou un filtre percentile. Le **filtrage moyen** consiste simplement à faire glisser une fenêtre sur le spectre, en remplaçant l'échantillon central de la fenêtre par la valeur moyenne des échantillons de la fenêtre :

$$f[i] = \sum_{k=i-M}^{i+M} \hat{\gamma}_x[k] \qquad (5.2\text{-}10)$$

où $2M+1$ est la taille de la fenêtre. On obtient alors un filtrage linéaire.
Le filtrage moyen n'a pas été cité comme une des méthodes une passe car il ne permet pas d'éliminer l'influence des fréquences pures. Par contre, en deuxième passe, nous tenons compte des résultats de la détection pour remplir cette fonction. Dans le cas d'un bruit blanc seul, le filtrage moyen est un très bon estimateur de la ligne de fond de spectre quelle que soit la densité de probabilité du spectre. Dans un bruit coloré, le suivi du fond reste du même ordre qu'avec le filtrage médian. Il peut-être juste un peu dégradé dans les « creux » du spectre.
On peut également utiliser la **méthode du percentile** avec un percentile adapté au degré de liberté équivalent de l'estimateur.

Soit $2M+1$ la taille de la fenêtre du filtre. Dans cette fenêtre d'estimation**, on exclue les pics détectés pour calculer la moyenne, ou le percentile, sur les échantillons restants**. De cette manière, les pics détectés, donc n'appartenant pas au bruit, ne participent pas à l'estimation de la ligne de fond de spectre $f_2(\nu)$. La ligne de fond de spectre est estimée plus finement, en particulier elle sous-estime moins la DSP vraie du bruit si le degré de liberté équivalent est faible.

Si la fenêtre ne contient que des pics détectés, on peut prendre comme estimation de la ligne de fond au niveau de chaque pic, la droite qui passe par les deux minima du pic. On peut également utiliser le résultat du filtrage morphologique pour estimer la ligne de fond de spectre au niveau de ces pics.
Remarque 1 : on peut également remplacer les pics détectés par la première estimation de la ligne de fond de spectre aux même fréquences, puis ensuite déterminer la nouvelle ligne de fond de spectre à partir de ce spectre modifié. Cependant, cette opération s'avère moins efficace.
Remarque 2 : la taille de la fenêtre du filtre pour la deuxième passe peut être différente de la taille de la fenêtre de la première passe. Mais les remarques sur le choix de ce paramètre étant identiques, il ne semble pas justifié de le modifier. On peut cependant imaginer un algorithme adaptatif qui lorsqu'un pic est éliminé de la fenêtre d'estimation, augmente sa taille afin d'ajouter un pic non détecté pour le calcul de la moyenne.

Passes suivantes
Puisque l'estimation de la ligne de fond de spectre a été affinée, la démarche logique consiste à déterminer comment les résultats de la détection évoluent et à agir en conséquence. Au niveau des pics du bruit, une estimation moins sous-estimée de la DSP vraie doit permettre de diminuer le nombre de fausses alarmes. Au niveau des fréquences pures détectées, ou au niveau de fréquences pures non détectées de par la présence de fréquences pures importantes dans leur voisinage, on s'attend à ce que la ligne de fond de spectre soit également plus proche de la DSP vraie du bruit et en particulier moins surestimée. On espère ainsi améliorer la détection des fréquences pures non détectées après la première passe, mais aussi mieux estimer la ligne de fond de spectre au niveau des fréquences pures déjà détectées.

On réitère donc l'opération précédente de détection en utilisant cette fois-ci comme estimation de la ligne de fond de spectre $f_2(v)$ et pour une probabilité de fausse alarme P_{fa2}. P_{fa2} peut être différente de P_{fa1}. Ensuite, on réitère le filtrage médian ou percentile toujours en éliminant les pics détectés de la fenêtre glissante (par contre les pics qui ne sont plus détectés, a priori des fausses alarmes, participent de nouveau à l'estimation du fond de spectre).

La série d'opération détection/élimination/filtrage est réitérée avec les mêmes paramètres. L'opération doit être poursuivie jusqu'à la stabilité du fond de spectre, c'est-à-dire lorsque que la ligne de fond de spectre n'est plus modifiée. Ceci n'excède pas en général 3 ou 4 passes (cf. Figure 5.2-VI).
Remarque : lors de la dernière passe une estimation de la variance peut être obtenue en l'estimant sur les points de la fenêtre glissante qui ont participé à l'estimation du fond de spectre.

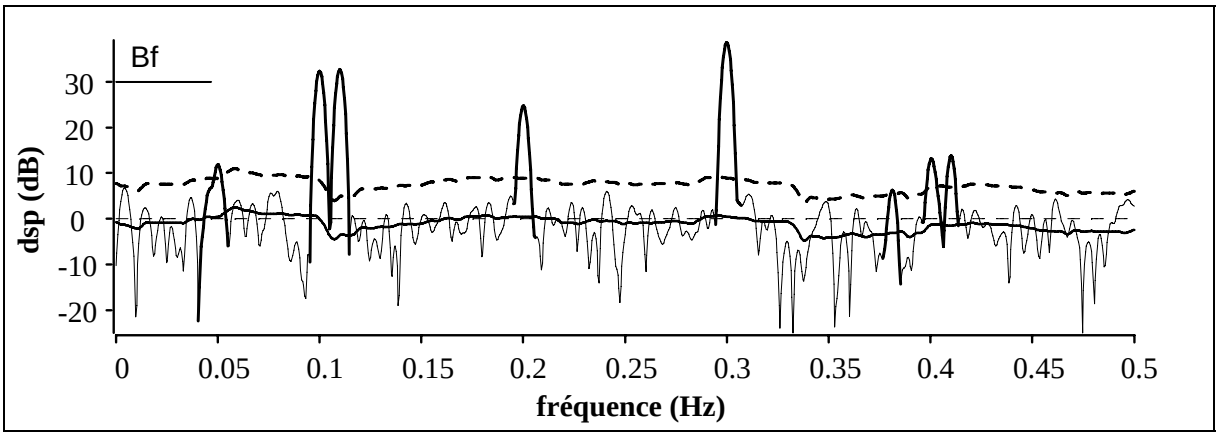


Figure 5.2-VI : signal 1 (bruit blanc plus sinusoïdes). **Méthode *n passes*, résultat après la dernière passe**, ligne de fond de spectre par filtrage *n passes*, première passe par filtrage médian, passes suivantes par filtrage moyen, $2M+1=4B=97$, (trait continu épais uni), **seuil de détection** (trait épais en pointillés), DSP dont les pics non détectés sont en trait continu fin **et les pics détectés** sont en trait continu épais. Pour les phases de détection, les probabilités de fausse alarmes sont $P_{fa1} = 10^{-2}$, $P_{fa2} = 10^{-3}$, résultat après 3 passes. On remarque sur cette réalisation que l'amélioration de l'estimation (par rapport à la Figure 5.2-V) est sensible sur l'ensemble des fréquences et notamment que la majorité des fausses alarmes de la première passe ne sont plus détectées. La bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé sous l'indication B_f.

Résultats

La méthode *n passes* permet non seulement d'obtenir une estimation du fond de spectre, mais également les pics détectés pour une probabilité de fausse alarme égale à P_{fa2}. L'algorithme est résumé sur le diagramme de la Figure 5.2-VII.

Choix des paramètres

Les paramètres de la méthode sont :

- la taille de la fenêtre des filtres $2M+1$, qu'il est préférable de choisir de l'ordre de $3B$ à $4B$ d'après l'étude des méthodes une passe (cf. paragraphe 5.2.2),
- la probabilité de fausse alarme pour la première passe P_{fa1}, qu'il est préférable de choisir de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-4}, d'après l'étude sur la détection (cf. paragraphe 5.1),
- la probabilité de fausse alarme pour les passes suivantes P_{fa2}, qu'il est également préférable de choisir de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-4}.

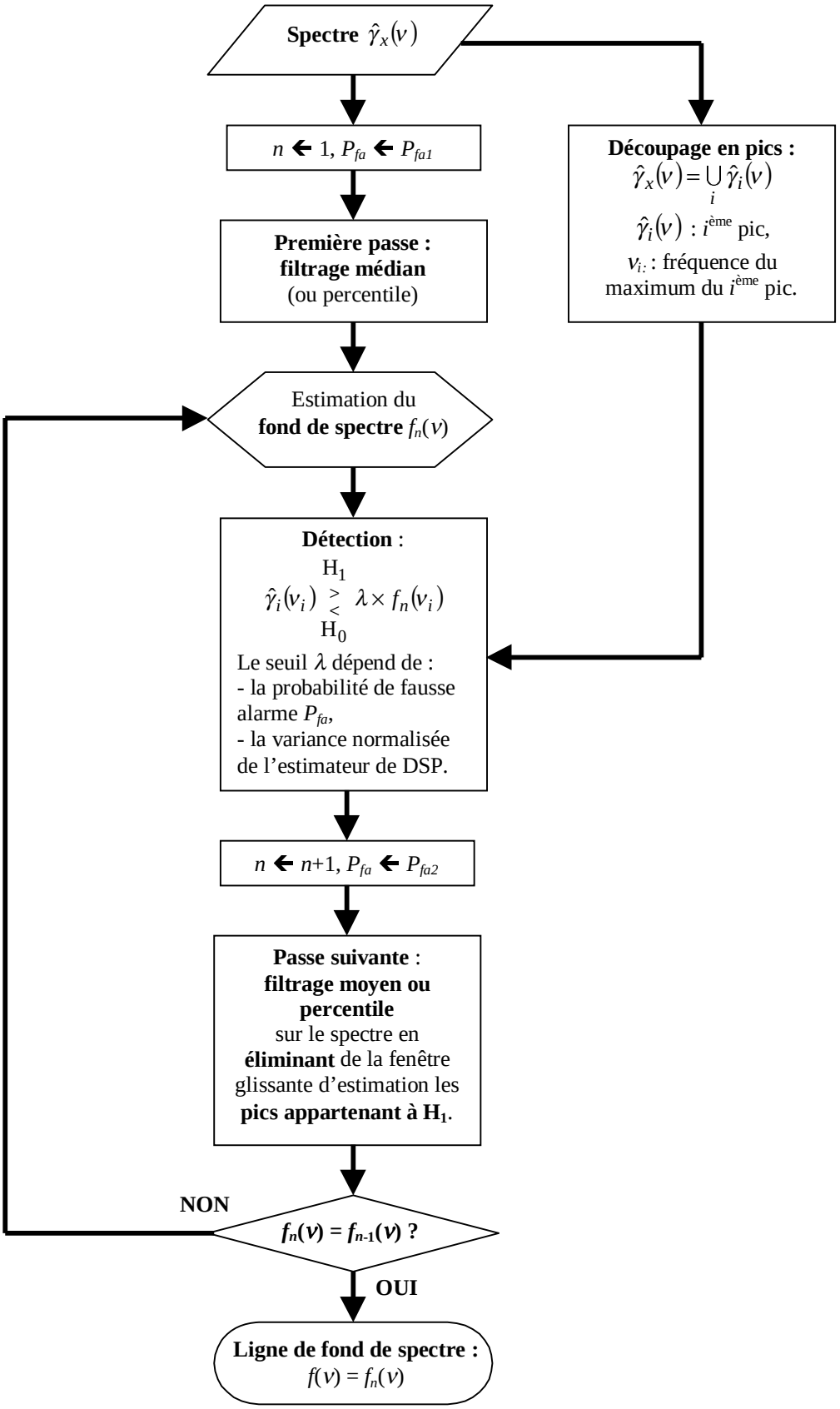


Figure 5.2-VII : **diagramme de la méthode *n passes*.**

Les compromis suivant les paramètres

Les différents compromis de paramètres dont nous allons discuter maintenant, sont illustrés par des figures dans le document [DUR98-Fond]. Nous n'illustrons dans ce paragraphe qu'un de ces compromis.

Si l'on désire limiter le nombre de fausses alarmes et que le degré de liberté équivalent est peu important (<4), il peut être préférable de choisir $P_{fa1} < P_{fa2}$. En effet, le filtrage médian a tendance à sous-estimer la DSP vraie du bruit. Pour compenser cette sous-estimation qui a pour conséquence d'augmenter le nombre de fausses alarmes, il est nécessaire de choisir une probabilité de fausse alarme pour la première passe P_{fa1} inférieure à celle effectivement désirée. Un choix de paramètres offrant un bon compromis est $P_{fa1} = 10^{-4}$, $P_{fa2} = 10^{-3}$.

Le choix $P_{fa1} = 10^{-3}$, $P_{fa2} = 10^{-2}$, permet en général un bon compromis détection/fausse alarme même pour des degrés de liberté équivalents importants. Une probabilité de fausse alarme $P_{fa2} = 10^{-2}$ permet d'éliminer l'influence des fréquences pures, même de faible amplitude et ceci au prix d'une très légère sous-estimation du fond de spectre lorsqu'il n'y a que du bruit. Un autre bon compromis entre détection/fausse alarme est obtenu pour $P_{fa1} = P_{fa2} = 10^{-3}$, particulièrement lorsque le degré de liberté équivalent est faible (<4) (cf. Figure 5.2-VIII et Figure A 11-IV en annexe A-11). Ce compromis favorise la limitation des fausses alarmes.

Si l'on désire privilégier la détection ou lorsque pour la première passe on utilise le filtre percentile, il peut être préférable de choisir une probabilité de fausse alarme pour la première passe assez élevée pour détecter le plus de pics importants possibles. Les fausses alarmes peuvent être diminuées en choisissant une probabilité de fausse alarme pour les passes suivantes inférieure à P_{fa1}. Un choix de paramètres offrant un bon compromis est alors $P_{fa1} = 10^{-2}$, $P_{fa2} = 10^{-3}$ ou $P_{fa1} = P_{fa2} = 10^{-2}$ si l'on désire privilégier encore plus la détection.

Si l'objectif est d'obtenir une estimation la plus proche de la DSP vraie du bruit seul, particulièrement dans les zones du spectre qui ne contiennent que du bruit, des probabilités de fausse alarme plus faibles sont nécessaires. Un bon compromis est obtenu pour $P_{fa1} = P_{fa2} = 10^{-4}$. Au niveau des fréquences pures de faible amplitude la DSP du bruit risque d'être légèrement surestimée, ce qui ne sera gênant que dans une opération de détection.

L'utilisation du filtre percentile en deuxième passe permet en général de mieux suivre le fond de spectre et d'être plus proche de la DSP vraie du bruit seul. Mais, il élimine moins bien l'influence des fréquences pures de faible amplitude (par rapport au filtre moyen et pour les mêmes probabilités de fausse alarme).

Enfin, il est important de remarquer qu'une diminution de la taille de la fenêtre d'estimation ne détériore que très peu les performances générales et améliore le suivi du fond de spectre, ceci tant que $2M+1 \geq 3B$.

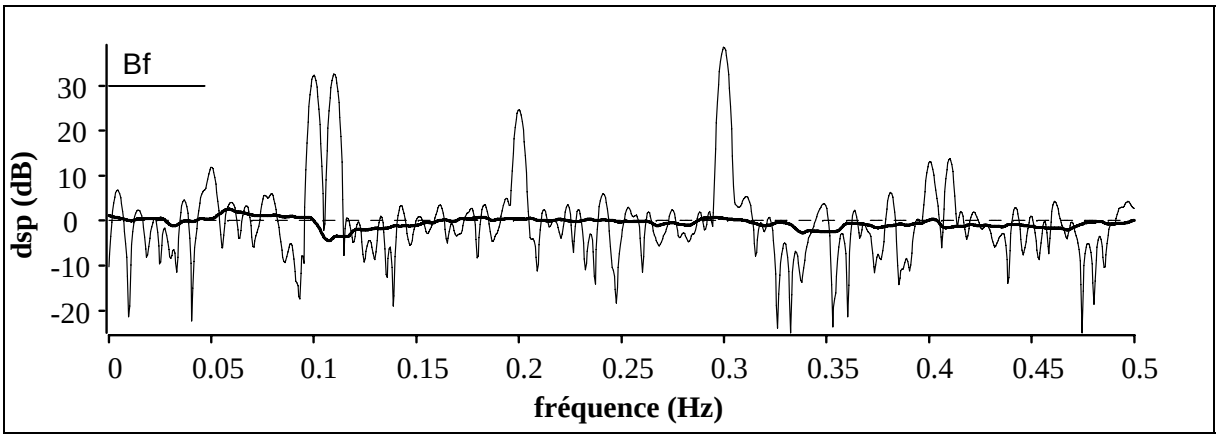
Remarque : le choix des différentes probabilités de fausse alarme dans la fourchette indiquée, ne change pas de façon radicale l'estimation du fond de spectre, surtout sur une réalisation particulière, mais peut avoir son importance lorsqu'une opération de détection est envisagée.

Avantages :

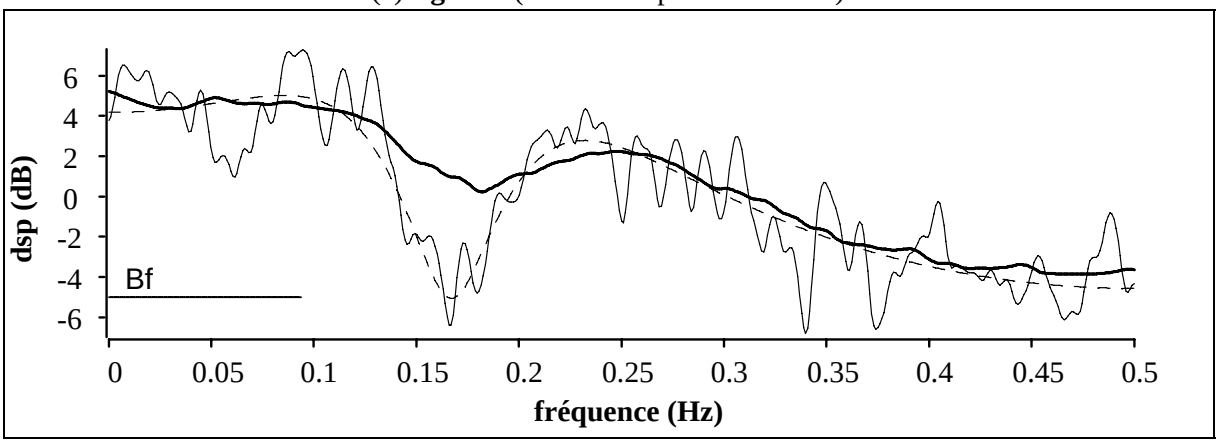
- De toutes les méthodes testées, la méthode *n passes* offre une meilleure estimation en moyenne de la DSP vraie du bruit seul, même lorsque des fréquences pures sont présentes (cf. Figure 5.2-VIII et en particulier la Figure A 11-IV en annexe A-11 qui présente la moyenne de 1000 réalisations du fond de spectre estimé).
- Cette méthode s'adapte bien à chaque réalisation (cf. Figure 5.2-VIII), la ligne de fond de spectre passe « au milieu des pics » du bruit, et élimine bien l'influence des fréquences pures isolées, ceci même s'il y en a 2 côte-à-côte.
- L'estimation du fond de spectre est adaptée au degré de liberté équivalent de l'estimateur.

- La méthode permet un bon suivi des variations du spectre, même relativement brutales. Bien entendu le suivi est d'autant meilleur que M est petit sans qu'il y ait une nette dégradation des performances tant que $2M+1 \geq 3B$.

Inconvénients :
- Le suivi du fond de spectre peut être légèrement dégradé par rapport au filtre médian (cf. Figure 5.2-VIII à comparer à la Figure 5.2-IV).
- Suivant le choix des probabilités de fausse alarme, la DSP vraie du bruit seul peut être légèrement surestimée au niveau des fréquences pures de faible amplitude.
- L'algorithme nécessite le calcul de la variance normalisée, elle est donc uniquement adaptée aux méthodes de Fourier ou nécessite la connaissance de la densité de probabilité sous H_0 de l'estimateur de DSP.



(a) **signal 1** (bruit blanc plus sinusoïdes)



(b) **signal 2** (bruit coloré)

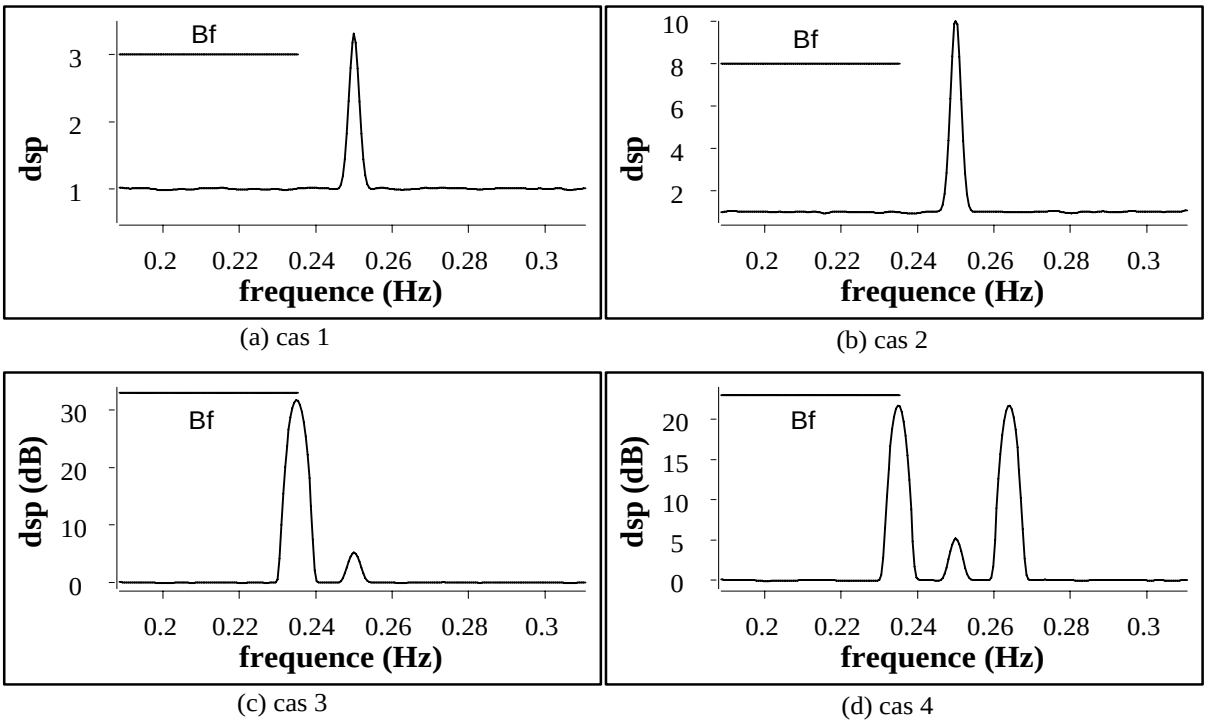
Figure 5.2-VIII : **estimation de la ligne de fond de spectre par la méthode *n passes*** pour les deux signaux tests. Première passe filtrage médian, passes suivantes filtrage moyen, $2M+1=4B=97$, $P_{fa1} = P_{fa2} = 10^{-3}$ (trait épais) comparée à la DSP estimée (trait fin) et à la DSP vraie du bruit (trait en pointillés). La bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé sous l'indication B_f.

La méthode *n passes* présente de nombreux avantages par rapport aux autres méthodes pour un coût de calcul qui reste peu élevé (inférieur à celui du filtre tri-trou), les différentes opérations étant toutes rapides. En moyenne, le résultat obtenu est le plus proche de la DSP vraie du bruit, celle-ci est moins sous-estimée qu'avec la plupart des autres méthodes. Les bonnes performances de la méthode sont dues à son caractère adaptatif, mais aussi à sa robustesse vis-à-vis de la densité de probabilité de l'estimateur.

5.2.4. Comparaison des performances en détection

L'objectif est de comparer les différentes méthodes lors d'une opération de détection. Nous allons comparer les probabilités de fausse alarme et de détection à l'aide notamment de courbes COR [VAN68]. La comparaison n'est faite que dans un nombre de cas très réduit. Il est en effet difficile de comparer les méthodes dans toutes les situations possibles avec différents rapports signal sur bruit. Nous nous intéressons ici au cas d'un bruit blanc de variance unité additionné d'une fréquence pure avec un certain rapport signal sur bruit, ce qui doit nous permettre de tirer un certain nombre de conclusions sur les différentes méthodes.

L'opération consiste à comparer le cas idéal où la ligne de fond de spectre est égale à la DSP du bruit blanc, au cas où cette ligne de fond de spectre est estimée par une des méthodes précédemment décrites. Il faut préciser que le seuil de détection λ est calculé à partir du cas idéal en fixant une probabilité de fausse alarme désirée. Le seuil appliqué au spectre est le produit de λ par la ligne de fond de spectre. La ligne de fond de spectre doit permettre d'obtenir non seulement une courbe COR la plus proche de la courbe COR idéale, mais aussi une bonne correspondance entre la probabilité de fausse alarme désirée et la probabilité de fausse alarme obtenue. Nous présentons différents cas de signaux dans différentes conditions d'estimation (la fréquence d'échantillonnage est égale à 1). Dans tous les cas, la probabilité de fausse alarme se calcule à la fréquence 0,25 Hz à partir de P réalisations du signal initial sans fréquence pure à la fréquence 0,25 Hz. La probabilité de détection se calcule à la fréquence 0,25 Hz à partir de P réalisations du signal initial auquel on ajoute une sinusoïde de fréquence 0,25 Hz. Le bruit de fond est un bruit blanc de puissance unité (cf. Figure 5.2-IX).

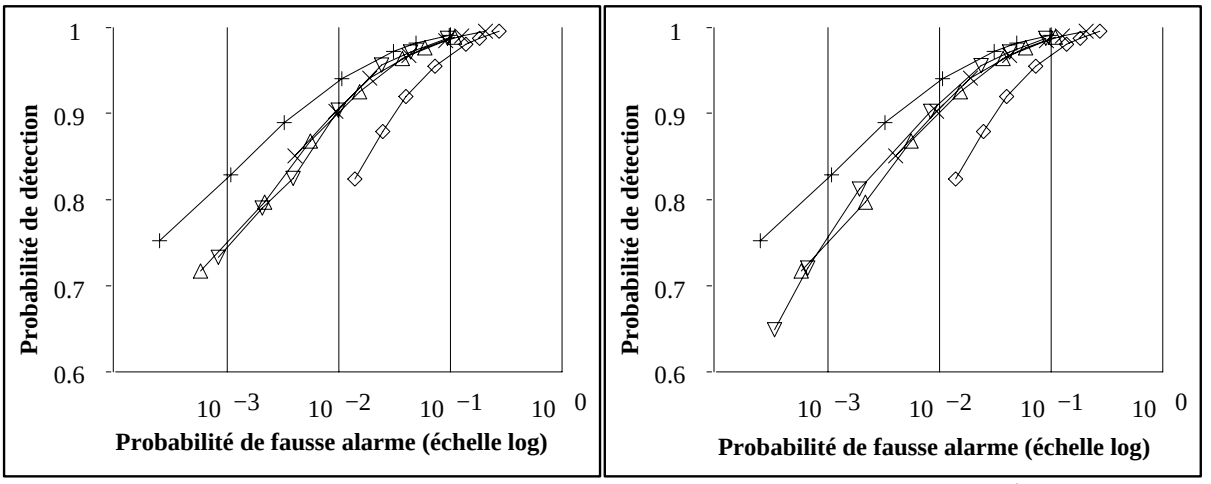


(a) cas 1 (b) cas 2

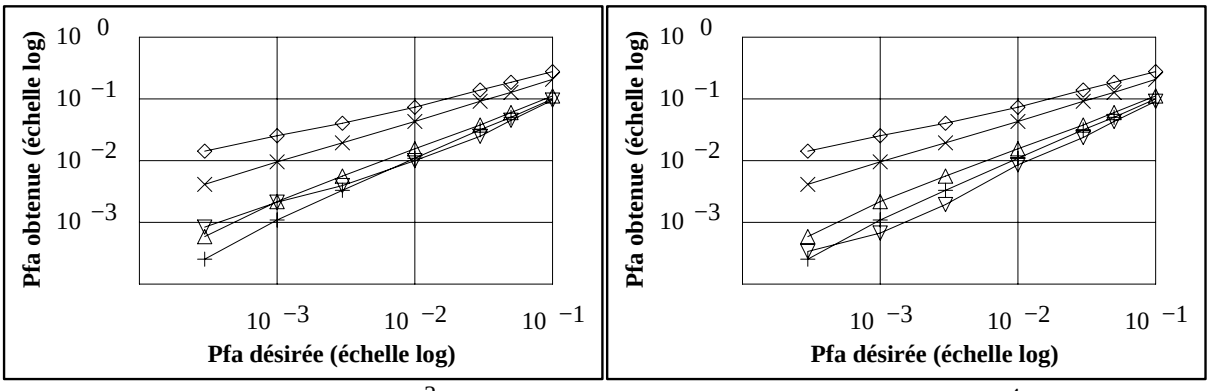
(c) cas 3 (d) cas 4

Figure 5.2-IX : **moyenne de 1000 réalisations des spectres estimés des signaux utilisés pour le calcul de la probabilité de détection dans les 4 cas d'étude**. Les spectres sont présentés dans la bande fréquentielle proche de la fréquence 0,25 Hz. La bande B_f représente la taille de la fenêtre utilisée pour le calcul du fond de spectre dans les cas du filtrage médian et de la méthode *n passes*.

Cas 1 : le spectre est estimé par la méthode Welch-WOSA avec les paramètres suivants : taille des segments de 512 points, fenêtre d'apodisation de Blackman, décalage entre segments de 30%, ce qui donne 11 segments, le signal comportant 2048 points, la taille de la TF est de 2048 points. **Le degré de liberté équivalent** de la loi gamma est alors de **16,25**. 12 000 réalisations du bruit sont utilisées pour estimer les probabilités de détection et de fausse alarme.
- le spectre sous H_0 est celui d'un bruit blanc de variance unité,
- **le spectre sous H_1** est celui du même **bruit blanc** de variance unité **additionné d'une sinusoïde** d'amplitude A, de fréquence $\nu = 0{,}25$ Hz, pour un **rapport signal sur bruit** égal à $A^2/2$ de **–18 dB**.
Les différentes méthodes comparées au cas idéal, sont :
- le filtrage morphologique pour une ouverture de taille $M = 12$,
- le filtre médian pour une taille de fenêtre de $2M+1 = 97$,
- le filtre tri-trou pour une taille de demi-fenêtre $M = 48$, un trou de taille $T = 25$, un rejet de 20%,
- la méthode *n passes*, la première passe par filtrage médian, les suivantes par filtrage moyen pour une taille de fenêtre de $2M+1 = 97$ et $P_{fa1} = 10^{-3}$, $P_{fa2} = 10^{-3}$ (Figure 5.2-X (a) et (c)), et $P_{fa1} = 10^{-4}$, $P_{fa2} = 10^{-4}$ (Figure 5.2-X (b) et (d)).



(a) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-3} (b) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-4}



(c) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-3} (d) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-4}

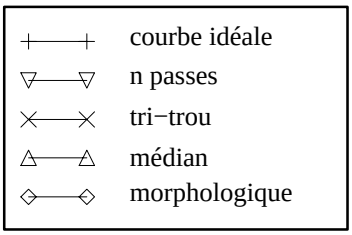


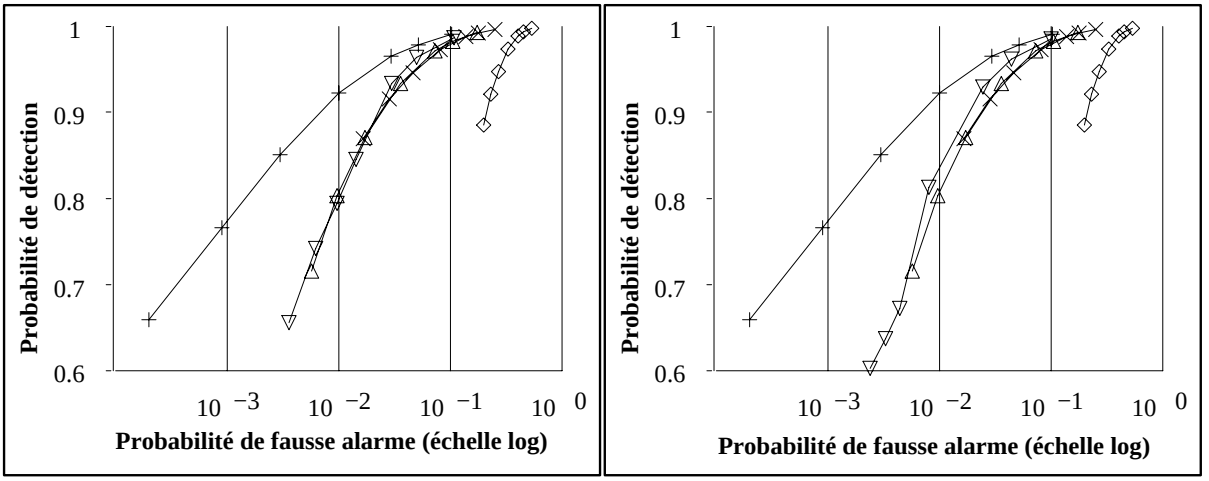
Figure 5.2-X : **cas 1, courbes COR pour les différentes lignes de fond de spectre** (a) avec la méthode *n passes* pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, (b) pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-4}$. **Probabilités de fausse alarme** obtenue en fonction de la probabilité de fausse alarme désirée pour les différentes lignes de fond de spectre (c) avec la méthode *n passes* pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, (d) pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-4}$. *Attention, seuls les résultats de la méthode n passes diffèrent entre les figures (a) et (b) et de même entre (c) et (d).*

On constate que :
- Le filtrage morphologique affiche de très mauvais résultats (comme prévu), la courbe COR étant très éloignée de la courbe idéale.
- Pour les autres méthodes que le filtrage morphologique, les courbes COR affichent des performances comparables (cf. Figure 5.2-X), mais il faut préciser que seuls le filtrage médian et la méthode *n passes* permettent d'obtenir des probabilités de fausse alarme proches de celles désirées (cf. Figure 5.2-X).
- Pour la méthode *n passes*, l'influence du choix des paramètres P_{fa1} et P_{fa2} est mise en évidence. Un choix de ces probabilités de fausse alarme de 10^{-4} a pour effet d'obtenir des probabilités de fausse alarme finales proches des probabilités de fausse alarme désirées lorsque celles-ci sont inférieures ou égales à 10^{-3}. Mais, elles donnent des probabilités de fausse alarme finales supérieures à celles désirées lorsque celles-ci sont supérieures à 10^{-3}. Par contre pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, les probabilités de fausse alarme obtenues sont proches de celles désirées lorsque celles-ci sont supérieures à 10^{-3}, et elles deviennent inférieures lorsque les probabilités de fausse alarme désirées sont inférieures à 10^{-3}. En choisissant de façon adéquate les paramètres P_{fa1} et P_{fa2}, il est alors toujours possible de retrouver des probabilités de fausse alarme proches de celles désirées.
- La courbe COR obtenue pour le filtrage tri-trou montre bien le problème de son utilisation : cette méthode favorise la détection au prix d'une augmentation des fausses alarmes. Même si les deux effets se compensent sur la courbe COR, elle n'est pas plus performante que les autres méthodes et les probabilités de fausse alarme obtenues sont très éloignés des probabilités de fausse alarme désirées.

Il faut préciser que le cas 1 est favorable au filtre médian qui permet pour ce degré de liberté équivalent d'obtenir une estimation correcte de la DSP vraie du bruit et qui n'est pas gêné par la présence d'autres fréquences pures dans le voisinage.

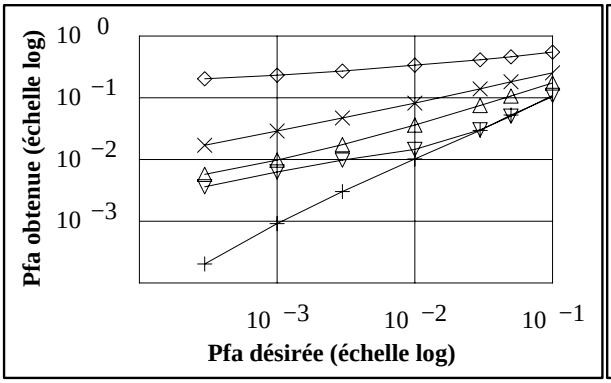
Cas 2 : le spectre est estimé par la méthode Welch-WOSA pour les paramètres suivants : taille des segments de 512 points, ce qui donne 1 seul segment, le signal comportant 512 points, fenêtre d'apodisation de Blackman, la taille de la TF est de 2048 points. **Le degré de liberté équivalent de la loi gamma est alors de 2**.
- le spectre sous H_0 est celui d'un bruit blanc de variance unité,
- **le spectre sous H_1** est celui du même **bruit blanc** de variance unité **additionné d'une sinusoïde d'amplitude** A, de fréquence ν = 0,25 Hz, pour un **rapport signal sur bruit** égal à $A^2/2$ de **–12 dB**.
On se place au niveau de la fréquence de la sinusoïde pour estimer les probabilités de fausse alarme et de détection à l'aide de 20 000 réalisations.
Les différentes méthodes comparées au cas idéal, sont les mêmes que celles utilisées au cas 1.

On constate que :
- Le filtrage morphologique affiche là encore de très mauvais résultats, la courbe COR étant très éloignée de la courbe idéale.
- Pour les autres méthodes que le filtrage morphologique, les courbes COR affichent des performances comparables (cf. Figure 5.2-XI), mais comme dans le cas 1, seuls le filtrage médian et la méthode *n passes* permettent d'obtenir des probabilités de fausse alarme proches de celle désirées.
- Les mêmes remarques que dans le cas 1 peuvent être faites quant au choix des paramètres P_{fa1} et P_{fa2} de la méthode *n passes*. La méthode *n passes* permet notamment d'obtenir des probabilités de fausses alarmes quasiment identiques pour les P_{fa} désirées supérieures à 10^{-2}, puis s'écartent pour les P_{fa} inférieures. Ce comportement est logique étant donné l'utilisation du filtre médian en première passe qui a tendance à sous-estimer la DSP vraie du bruit (pour le degré de liberté équivalent du cas 2), ce qui implique une augmentation des fausses alarmes ce qui se constate d'ailleurs logiquement de façon encore plus marquée sur les résultats du filtrage médian.
- Le filtre tri-trou produit comme dans le cas 1 des probabilités de fausse alarme très éloignées de celles désirées.

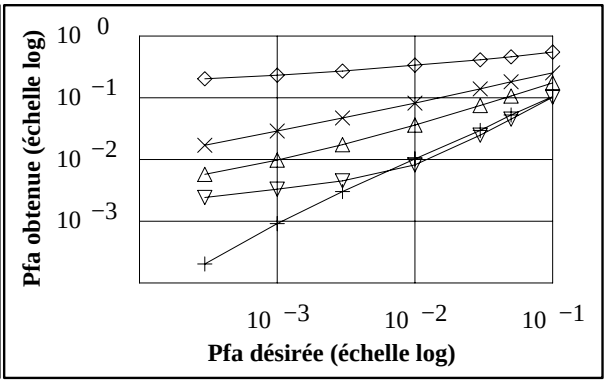


(a) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-3}

(b) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-4}



(c) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-3}



(d) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-4}

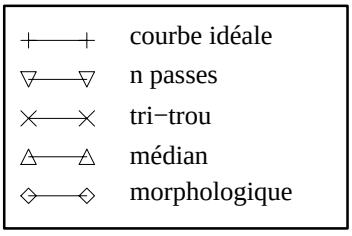


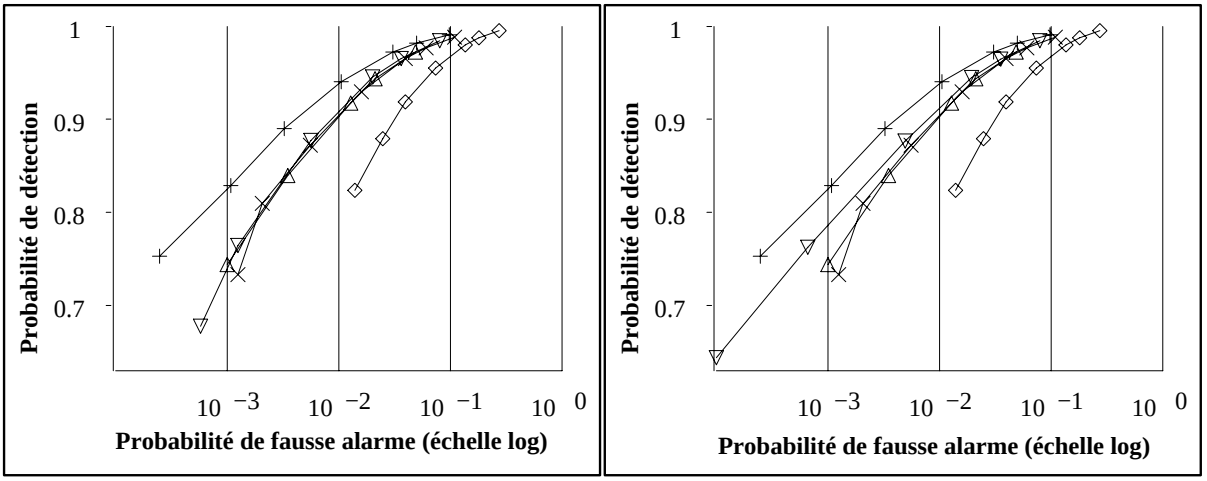
Figure 5.2-XI : **cas 2, courbes COR pour les différentes lignes de fond de spectre** (a) avec la méthode *n passes* pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, (b) pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-4}$. **Probabilités de fausse alarme** obtenue en fonction de la probabilité de fausse alarme désirée pour les différentes lignes de fond de spectre (c) avec la méthode *n passes* pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, (d) pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-4}$. *Attention, seuls les résultats de la méthode n passes diffèrent entre les figures (a) et (b) (et (c) et (d)).*

Cas 3 : le spectre est estimé dans les mêmes conditions que pour le cas 1, soit par la méthode Welch-WOSA avec un degré de liberté équivalent de la loi gamma de 16,25.

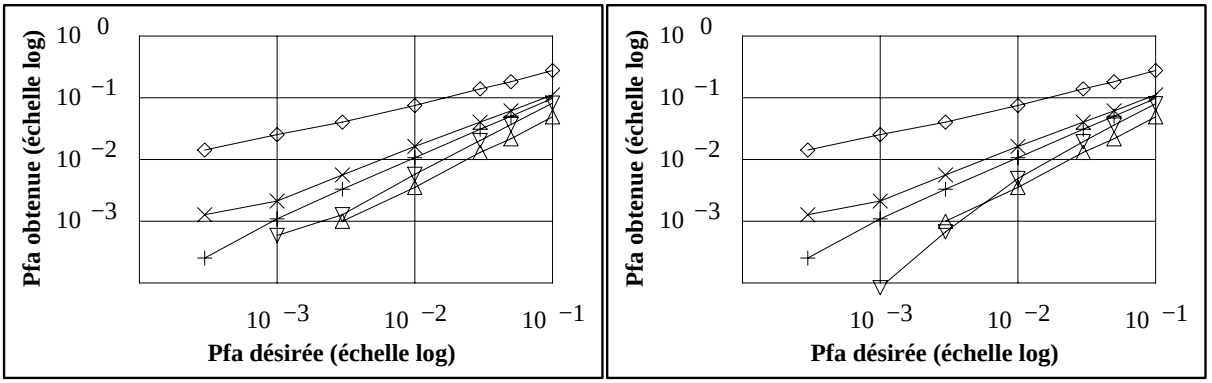
- le spectre sous H_0 est celui d'un bruit blanc de variance unité,
- **le spectre sous H_1** est celui du même **bruit blanc** de variance unité **additionné d'une sinusoïde** d'amplitude A, de fréquence ν = 0,25 Hz, pour un **rapport signal sur bruit** $A^2/2$ de **–18 dB**, **et d'une sinusoïde** d'amplitude A_1, de fréquence ν_1 = 0,235 Hz, pour un **rapport signal sur bruit** $A_1^2/2$ de **10 dB**.

On se place au niveau de la fréquence de la sinusoïde à ν = 0,25 Hz pour estimer les probabilités de fausse alarme et de détection à l'aide de 12 000 réalisations.

Les différentes méthodes comparées au cas idéal, sont identiques au cas 1.



(a) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-3} (b) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-4}



(c) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-3} (d) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-4}

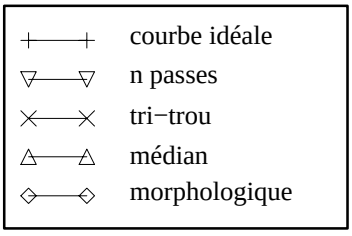


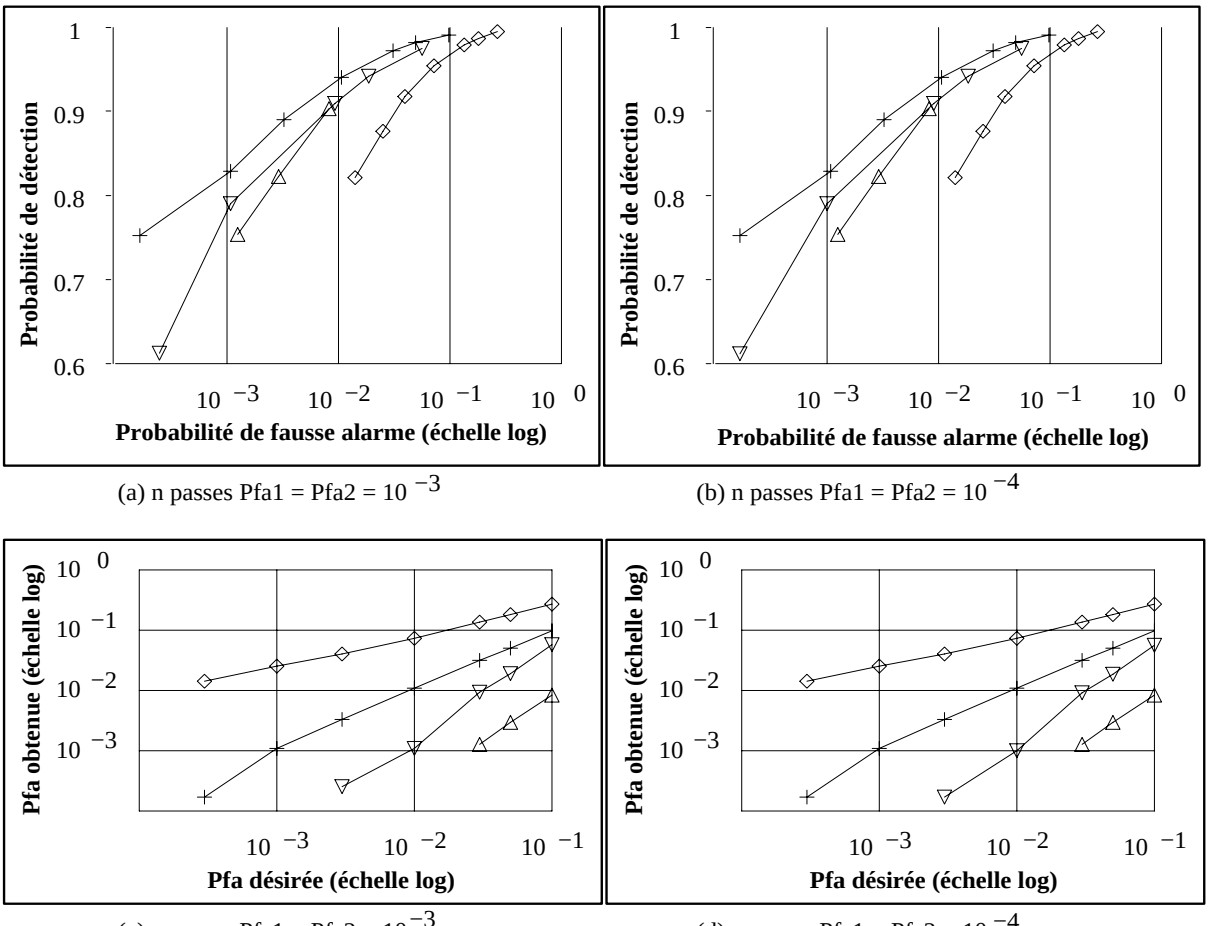
Figure 5.2-XII : **cas 3, courbes COR pour les différentes lignes de fond de spectre** (a) avec la méthode *n passes* pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, (b) pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-4}$. **Probabilités de fausse alarme** obtenue en fonction de la probabilité de fausse alarme désirée pour les différentes lignes de fond de spectre (c) avec la méthode *n passes* pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, (d) pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-4}$. *Attention, seuls les résultats de la méthode n passes diffèrent entre les figures (a) et (b) (et (c) et (d)).*

On constate que :

- Le filtrage morphologique affiche là encore de très mauvais résultats, la courbe COR étant très éloignée de la courbe idéale. Par contre, ses performances sont identiques au cas 1 puisque celles-ci ne dépendent pas du voisinage du pic d'intérêt (à 0,25 Hz).
- Pour les autres méthodes que le filtrage morphologique, les courbes COR affichent des performances comparables (cf. Figure 5.2-XII), mais seuls le filtrage médian, la méthode *n passes* et le filtre tri-trou permettent d'obtenir des probabilités de fausse alarme proches de celle désirées.
- Par rapport au cas 1, les probabilités de fausse alarme obtenues avec le filtre médian et la méthode *n passes*, sont inférieures à celles désirées (lorsque la probabilité de fausse alarme est inférieure à 10^{-4}, le point n'est plus représenté sur les courbes, le nombre de réalisations étant insuffisant pour bien estimer de telles probabilités). Leur courbe COR étant équivalente à celle du filtre tri-trou, une P_{fa} inférieure (moins de fausses alarmes) est un avantage en leur faveur. Cela implique que la DSP vraie du bruit a été surestimée. On constate cependant que les P_{fa} obtenues avec la méthode *n passes* sont plus proches de celles désirées qu'avec le filtrage médian.
- Le filtre tri-trou permet d'obtenir des probabilités de fausse alarme plus proches de celles désirées que dans le cas 1. La présence de la deuxième fréquence pure dans la fenêtre d'estimation centrée sur

0,25 Hz, a pour effet d'augmenter l'estimation du fond de spectre par rapport au cas 1. La DSP vraie du bruit est alors moins sous-estimée.
- Les mêmes remarques que dans le cas 1 peuvent être faites quant au choix des paramètres P_{fa1} et P_{fa2} de la méthode *n passes*.

Cas 4 : le spectre est estimé dans les mêmes conditions que pour le cas 1, soit par la méthode Welch-WOSA avec un degré de liberté équivalent de la loi gamma de 16,25.
- le spectre sous H_0 est celui d'un bruit blanc de variance unité,
- **le spectre sous H_1** est celui du même **bruit blanc** de variance unité **additionné d'une sinusoïde** d'amplitude A, de fréquence ν = 0,25 Hz, pour un **rapport signal sur bruit** $A^2/2$ de **–18 dB**, **d'une sinusoïde** d'amplitude A_1, de fréquence ν_1 = 0,235 Hz, pour un **rapport signal sur bruit** $A_1^2/2$ **de 0 dB** et **d'une autre sinusoïde** d'amplitude A_1, de fréquence ν_2 = 0,264 Hz.
On se place au niveau de la fréquence de la sinusoïde à ν = 0,25 Hz pour estimer les probabilités de fausse alarme et de détection à l'aide de 12 000 réalisations.
Les différentes méthodes comparées au cas idéal, sont identiques au cas 1.



(a) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-3} (b) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-4}

(c) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-3} (d) n passes Pfa1 = Pfa2 = 10^{-4}

Figure 5.2-XIII : **cas 4, courbes COR pour les différentes lignes de fond de spectre** (a) avec la méthode *n passes* pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, (b) pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-4}$. **Probabilités de fausse alarme** obtenue en fonction de la probabilité de fausse alarme désirée pour les différentes lignes de fond de spectre (c) avec la méthode *n passes* pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-3}$, (d) pour $P_{fa1}=P_{fa2}=10^{-4}$. *Attention, seuls les résultats de la méthode n passes diffèrent entre les figures (a) et (b) (et (c) et (d)).*

On constate que :
- Le filtre tri-trou n'est pas présenté sur les courbes (cf. Figure 5.2-XIII) car les probabilités de détection obtenues sont toutes nulles, tandis que les probabilités de fausse alarmes sont également nulles. La présence de 2 fréquences pures dans la fenêtre d'estimation du tri-trou a pour effet de surestimer la DSP vraie du bruit de telle façon que toute détection devient impossible.
- Le filtre médian surestime la DSP vraie du bruit, mais de façon moins importante qu'avec le filtre tri-trou, mais permet encore de détecter la fréquence pure.
- La méthode *n passes* surestime également la DSP vraie du bruit, mais de façon bien moins importante qu'avec le filtre médian, ce qui permet d'obtenir une courbe COR tout à fait exploitable.
- Le filtrage morphologique affiche de mauvais résultats, mais ses performances sont identiques au cas 1.

La méthode *n passes* permet d'obtenir les meilleurs résultats (en adaptant P_{fa1} et P_{fa2} à la P_{fa} désirée) dans tous les cas présentés. On remarque cependant les bons résultats du filtrage médian qui sont équivalents ou proches de ceux de la méthode *n passes* dans les cas 1,2 et 3.

5.2.5. Critère de qualité du fond de spectre

L'objectif de ce paragraphe est de proposer un critère de qualité de la ligne de fond de spectre. Il s'agit de déterminer si la ligne de fond de spectre estimée ne surestime pas la DSP vraie du bruit. Ce critère est particulièrement utile pour déterminer automatiquement les zones où la ligne de fond de spectre est inadaptée, particulièrement dans les « creux » du spectre, là où le suivi est plus difficile.

Tout comme nous avons défini un seuil haut (cf. paragraphe 5.1, équation 5.1-8) au-delà duquel les points du spectre ne suivent plus l'hypothèse bruit seul, nous définissons un seuil bas, calculé à partir de la ligne de fond.

Plaçons-nous sous l'hypothèse H_0, bruit seul, la ligne de fond de spectre est une estimation de la DSP vraie. Emettons l'hypothèse que cette estimation est correcte : $f(\nu) \approx \gamma_b(\nu)$. La densité de probabilité sous H_0 étant connue, on peut considérer que la probabilité que l'estimation normalisée par le fond de spectre soit inférieure à un seuil β (indépendant de la fréquence) est égale à :

$$P_b = P(\hat{\gamma}_x(\nu)/f(\nu) < \beta) = \int_0^{r\beta} p_{\chi_r^2}(x)\,\mathrm{d}x \qquad (5.2\text{-}11)$$

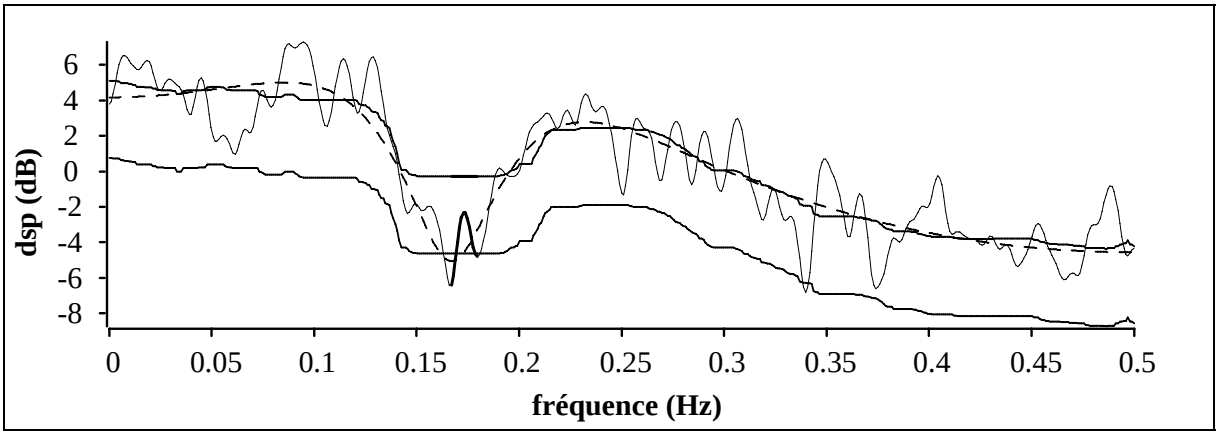
où $p_{\chi_r^2}(x)$ représente la densité de probabilité d'une loi gamma de degré de liberté équivalent r (cf. paragraphe 3.2.2.1).
Cette probabilité étant choisie, on en déduit le seuil β par inversion de l'équation précédente.

Pour un bruit additionné d'un signal déterministe, les minima du spectre ont une très forte probabilité d'appartenir à l'estimation du spectre du bruit seul. Considérons deux minima autour d'un pic vérifiant l'hypothèse H_0. Si la ligne de fond de spectre estime correctement la DSP vraie du bruit seul, la probabilité que *ces deux minima* soient inférieurs à $\beta \times f(\nu)$ est très inférieure à la probabilité P_b. Par contre, plus la ligne de fond de spectre surestime la DSP vraie du spectre, plus la probabilité que ces deux minima soient inférieurs à $\beta \times f(\nu)$ va augmenter jusqu'à dépasser largement P_b. Pour le pic considéré, le seuil β peut servir de seuil de détection pour discriminer l'hypothèse, « la ligne de fond de spectre estime correctement la DSP vraie du bruit seul », de l'hypothèse, « la ligne de fond de spectre surestime la DSP vraie du bruit seul ».

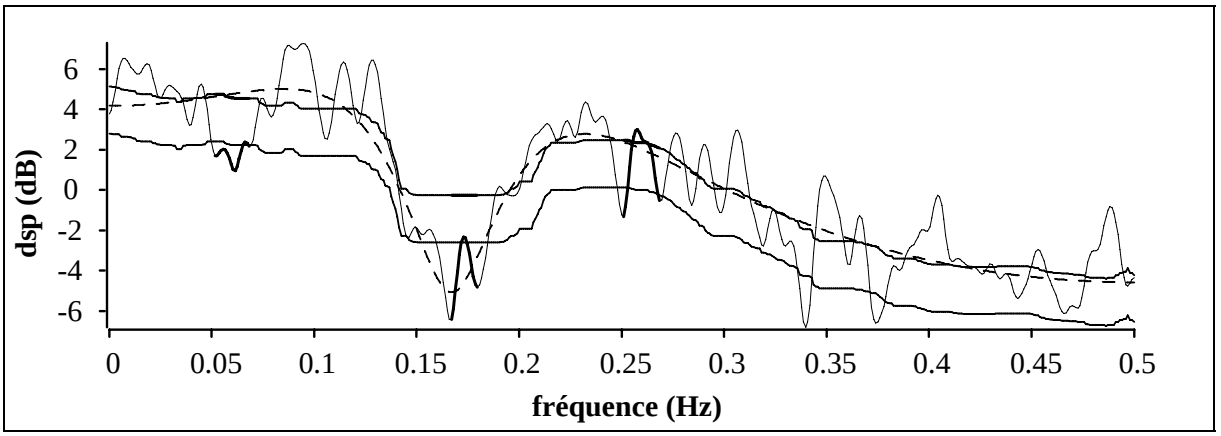
Il faut cependant choisir au préalable la probabilité P_b qui permette au mieux de séparer les deux hypothèses suivant la probabilité de fausse alarme désirée. Le lien entre les deux probabilités n'étant pas connu, on fixe P_b à partir de la densité de probabilité de l'estimateur sous H_0 (le principe étant proche de la notion d'intervalle de confiance) et à partir des différents résultats obtenus avec des

signaux tests. Une probabilité $P_b = 10^{-2}$ semble offrir le meilleur compromis. Sur la Figure 5.2-XIV, le pic situé aux alentours de 0,175 Hz est détecté, la ligne de fond de spectre n'est pas adaptée à la situation. Ce pic se situe dans un « creux » du spectre, la ligne de fond de spectre surestime la DSP vraie du bruit. Une probabilité $P_b = 10^{-1}$ donne par contre beaucoup trop de fausses alarmes, tandis qu'une probabilité $P_b = 10^{-3}$ ne permet pas de détecter la mauvaise adéquation de la ligne de fond de spectre au niveau du pic situé aux alentours de 0,175 Hz.

Ce critère est valable pour l'ensemble des méthodes sauf le filtrage morphologique. En effet, la ligne de fond du filtrage morphologique passe par les minima du spectre. Ce critère, étant basé sur l'écart entre les minima d'un pic et la ligne de fond de spectre, n'est pas applicable. On peut cependant modifier le critère, en se fondant sur la valeur du fond de spectre au niveau du maximum du pic que l'on compare ensuite aux valeurs des 2 minima du pic d'intérêt.



(a) $P_b = 10^{-2}$



(b) $P_b = 10^{-1}$

Figure 5.2-XIV : signal 2 (défini au paragraphe 5.2.1), **qualité de la ligne de fond de spectre,** DSP estimée (trait continu fin), si un pic a ses 2 minima en dessous du seuil, le trait devient épais, ligne de fond de spectre par filtrage médian, $2M+1=4B=97$ (trait supérieur continu épais), DSP vraie du bruit (trait en pointillés) **et seuil de détection bas obtenu** (trait inférieur continu épais) pour (a) $P_b = 10^{-2}$, (b) $P_b = 10^{-1}$.

5.2.6. Conclusion sur l'estimation du fond de spectre

L'estimation d'un fond de spectre est un problème délicat qui dépend des variations spectrales du signal, mais aussi de la densité de probabilité de l'estimateur. L'intérêt d'une estimation du fond de spectre est double : tout d'abord pour aider à l'interprétation des spectres en obtenant une estimation

aussi proche possible de la DSP vraie du bruit de fond, mais aussi pour permettre une opération de détection. Les performances des méthodes sont à comparer sous ces deux angles qui, bien que liés, doivent être distingués.

Dans un premier temps, nous avons étudié les méthodes « une passe » (filtrage non linéaire) et nous avons précisé les paramètres optimaux à choisir en fonction des paramètres de l'estimateur de type Fourier. Le filtrage médian se démarque des autres méthodes dans un contexte général, ce qui est confirmé par ses performances en détection. Il s'adapte bien à chaque réalisation, même s'il a tendance à sous-estimer le fond de spectre lorsque le degré de liberté équivalent de l'estimateur est faible. Le filtrage morphologique ne permet, ni d'estimer correctement le fond de spectre, ni d'obtenir de bonnes performances en détection. Par contre, c'est la seule méthode qui ne s'appuie que sur la nature intrinsèque d'un pic et non sur son voisinage. Il permet un bon suivi du fond de spectre et des performances en détection indépendante du voisinage d'un pic. Le filtrage tri-trou est une méthode plus complexe dont les paramètres sont plus difficiles à régler dans un contexte général. Cette méthode a tendance à sous-estimer la DSP vraie du bruit. Dans une opération de détection, le nombre de fausse alarmes est supérieur à celui donné par la théorie. Elle peut également poser des problèmes de surestimation de la DSP vraie du bruit lorsque plusieurs fréquences pures sont proches avec pour conséquence une diminution de la probabilité de fausse alarme. De plus, elle ne permet pas en général un bon suivi du fond de spectre, le trou imposant de prendre en considération un voisinage plus important qu'avec le filtre médian pour obtenir des performances comparables.

Nous avons ensuite présenté une nouvelle méthode « multi-passes », la méthode *n passes*. Elle est adaptée à l'ensemble des estimateurs de type Fourier. C'est la seule méthode qui tient compte des propriétés statistiques de l'estimateur (lors des phases de détection). Dans une opération de détection, ses paramètres peuvent être adaptés en fonction de la probabilité de fausse alarme désirée. Elle offre en général les meilleures performances tant en détection, qu'en estimation (de la DSP vraie du bruit, particulièrement au niveau des fréquences pures) quel que soit le signal (bruit seul, plusieurs fréquences pures proches…). De plus, la méthode reste adaptée quel que soit le degré de liberté équivalent de l'estimateur. Par contre, le suivi du fond peut être moins efficace qu'avec le filtre médian.

Enfin, nous avons présenté un critère de qualité du fond de spectre. Il permet de vérifier pour chaque pic du spectre, si l'estimation du fond de spectre est surestimée. L'utilisateur peut alors changer de méthode pour étudier les zones où le fond est surestimé. En général, il s'agit de « creux » du spectre, là où le suivi du fond est plus délicat. La seule méthode adaptée dans ces conditions est le filtrage morphologique puisqu'il ne prend pas en compte un voisinage important de la fréquence d'intérêt.

Pour conclure, il faut préciser que les paramètres des méthodes doivent être adaptés à l'estimateur et ses paramètres. Sauf pour le filtrage morphologique, la variance du fond de spectre est approximativement proportionnelle à la variance de l'estimateur spectral et inversement proportionnelle à la taille de la fenêtre d'estimation (du filtre médian, de la méthode *n passes* et du filtre tri-trou). Lorsque la variance de l'estimateur est importante, les petites variations du fond ne sont plus représentatives de la DSP vraie du bruit par manque de lissage. La résolution étant en général suffisante pour séparer la plupart des motifs, il est alors judicieux d'augmenter la taille de la fenêtre d'estimation. La variance de la ligne de fond de spectre diminue et les motifs réellement significatifs du fond sont susceptibles de mieux apparaître. Lorsque par contre, la résolution est faible ainsi que la variance (lissage important), il est plus important de rester local, donc de diminuer la taille de la fenêtre d'estimation.

Pour certains estimateurs tels que PER-COR, les fenêtres spectrales ont parfois un pied de pic très large. Le choix optimal de la taille de la fenêtre d'estimation est plus délicat. On doit estimer la bande du lobe principal comme étant la bande à –20 dB de la fenêtre spectrale pour obtenir des résultats comparables à ceux de la méthode Welch-WOSA. Le pied de pic important va cependant empêcher d'avoir une estimation correcte du fond de spectre au niveau des fréquences pures

d'amplitude importante (dont l'émergence par rapport au fond est supérieure à 20 dB). Mais puisque cela ne se produit qu'au niveau des fréquences pures d'émergence importante, cette mauvaise estimation du fond n'empêche pas la détection de ces fréquences pures. Seule l'estimation du fond est incorrecte.

Le choix d'une méthode de ligne de fond de spectre et de ses paramètres est délicat. Nous espérons à travers ce paragraphe avoir répondu à ce problème en mettant en avant les avantages et inconvénients de chaque méthode (en détection et estimation) et les choix de paramètres optimaux assurant dans la plupart des cas des résultats exploitables. Il faut cependant souligner qu'il existe d'autres méthodes, comme la norme A MINIMA [NIC92], qu'il serait intéressant de comparer aux méthodes présentées, mais en s'assurant qu'elles sont bien applicables à l'ensemble des estimateurs de Fourier.

5.3. Ajustement de la fenêtre spectrale

La méthode de détection présentée paragraphe 5.1, permet de distinguer l'origine de chaque pic du spectre en l'attribuant soit à l'hypothèse H_0 : spectre de la partie aléatoire du signal à spectre continu, ou au rejet de cette hypothèse. La détection nécessite l'estimation de la ligne de fond de spectre (cf. paragraphe 5.2). Bien que le principe du détecteur ait été développé initialement pour détecter des fréquences pures, le résultat ne permet pas de valider cette hypothèse avec certitude. Le résultat dépend notamment des paramètres de l'estimateur de Fourier : le pic détecté peut par exemple correspondre à une composante bande étroite par rapport à un fond constitué de motifs plus large bande. Par ailleurs, des non stationnarités du signal provoquent en général sur le spectre une augmentation locale de la variance de l'estimateur. Des pics liés à ces non stationnarités peuvent alors être détectés.

L'objectif de ce paragraphe est de présenter un critère permettant non seulement d'attribuer à un pic l'hypothèse fréquence pure, mais aussi dans le cas où l'hypothèse est retenue de déterminer avec plus de précision sa fréquence et son amplitude. Le principe se fonde sur la comparaison des pics émergents du fond de spectre associés à l'hypothèse H_1 avec le modèle de l'estimation d'une fréquence pure. Le modèle est proportionnel à la fenêtre spectrale de l'estimateur. Il est calculé numériquement avec un pas fréquentiel inférieur à celui du spectre estimé. La première étape consiste à ajuster le modèle sur le pic de manière à minimiser l'erreur quadratique. La décision sur l'hypothèse fréquence pure est prise à partir du résultat final de l'erreur quadratique.

5.3.1. Principe

Une fréquence pure (signal déterministe) est transformée par l'estimateur de type Fourier en un motif proportionnel à la fenêtre spectrale Q de l'estimateur (cf. Figure 5.3-I et paragraphe 2.4.1). Une sinusoïde d'amplitude A_S et de fréquence ν_0 devient en sortie de l'estimateur pour $\nu>0$ (en normalisation *DSP* cf. paragraphe 2.4.5) :

$$\gamma_s(\nu) \approx A\frac{Q(\nu-\nu_0)}{B_e} \qquad \text{pour } \nu > 0 \tag{5.3-1}$$

où B_e représente la bande équivalente au bruit de la fenêtre spectrale et $A = A_S^2/4$, la DSP de la raie spectrale.

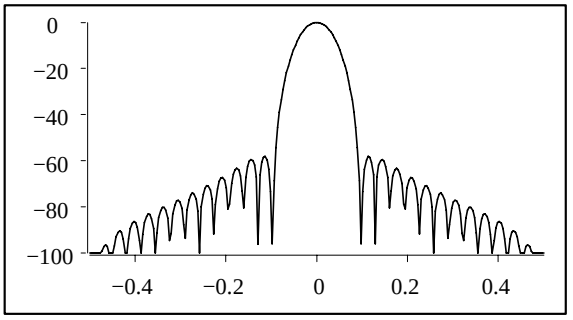


Figure 5.3-I : **exemple de fenêtre spectrale en dB.**

Pour un signal composé d'une raie spectrale *s* de fréquence ν_0 et de DSP A, additionnée d'un bruit blanc *b* de DSP σ^2, la forme du pic centré sur ν_0 reste approximativement identique à celle de la fenêtre spectrale. On a :

$$\hat{\gamma}(\nu) \approx \gamma_s(\nu) + \hat{\gamma}_b(\nu) \tag{5.3-2}$$

La moyenne de l'estimateur est alors égale à :

$$\xi\{\hat{\gamma}(\nu)\} = \mathrm{A}\frac{Q(\nu-\nu_0)}{B_e} + \sigma^2 \qquad \text{pour } \nu > 0 \tag{5.3-3}$$

Dans le cas d'un bruit coloré, si son spectre peut être considéré comme approximativement constant au voisinage de ν_0, on retrouvera également la forme de la fenêtre spectrale.

La fenêtre spectrale peut se calculer analytiquement quel que soit l'estimateur de Fourier. L'objectif est de comparer ce calcul analytique au pic d'intérêt qui doit être de la forme du lobe principal de la fenêtre spectrale.

En outre, l'estimation de la DSP se calcule à partir de la Transformée de Fourier Discrète qui ne permet d'obtenir que *K* points discrets du spectre avec une résolution $\Delta\nu_1 = 1/KT_e$ (T_e période d'échantillonnage). Le *zero-padding* qui consiste à ajouter des zéros avant d'effectuer la TFD, permet d'obtenir plus de points sur le spectre. Il n'améliore pas la résolution fréquentielle qui dépend de la fenêtre spectrale et qui n'est pas modifiée par cette opération. Le *zero-padding* permet de connaître avec plus de précision la position du maximum du pic (soit la fréquence de la raie spectrale) et son amplitude. Par la suite nous appellerons résolution fréquentielle la résolution de l'estimateur qui dépend de la fenêtre spectrale et la résolution du spectre $\Delta\nu_1$ qui dépend de la taille de la TFD. Le point de départ de l'algorithme est l'estimation discrète du spectre sur *K* points, $\hat{\gamma}[k] = \hat{\gamma}(k/KT_e)$ pour $0 \le k \le K/2$ (fréquence positive). A la fin du traitement, nous vérifions que le pic d'intérêt a la forme de la fenêtre spectrale. Si c'est le cas, l'hypothèse fréquence pure est retenue et la résolution avec laquelle nous connaissons son maximum et son amplitude est améliorée.

Il existe des méthodes analytiques pour retrouver à partir de deux points de la fenêtre spectrale, la fréquence de son maximum et son amplitude exacte. Cependant le calcul n'est possible que pour un certain nombre de fenêtres spectrales, par exemple avec la méthode Welch-WOSA pour une fenêtre d'apodisation de Hanning [MIN96]. Pour d'autres fenêtres, ce calcul est inconnu. De plus, ces méthodes ne sont envisageable que dans le cas de Welch-WOSA ou Blackman-Tukey pour lesquels les fenêtres spectrales restent identiques à un coefficient de proportionnalité près lorsque les paramètres changent (pour une fenêtre d'apodisation donnée). En outre, cette méthode ne permet pas de vérifier au préalable que le pic a bien la forme de la fenêtre spectrale.

Pour comparer la forme d'un pic à la fenêtre spectrale, il faut au préalable ne considérer que les points qui dépassent du fond de spectre (contexte additif). Pour cela nous disposons de l'estimation de la ligne de fond de spectre $f(\nu)$ obtenue par une des méthodes présentées paragraphe 5.2. On ne

s'intéresse qu'aux pics qui se détachent du fond de spectre. En effet, une fréquence pure ayant un rapport signal sur bruit trop faible n'aura plus la forme de la fenêtre spectrale, le bruit perturbant trop l'estimation. La méthode doit **s'appliquer aux pics qui ont été associés à l'hypothèse H_1 lors de l'étape de détection** (l'hypothèse H_1 correspondant simplement au rejet de l'hypothèse H_0 pic du bruit, cf. paragraphe 5.1).

La première étape consiste donc à **extraire du spectre le motif** à comparer à la fenêtre spectrale. Nous nous intéressons à un pic particulier du spectre associé à l'hypothèse H_1 et compris entre deux minima locaux d'indice k_a et k_b. Le motif extrait va être composé des points du pic supérieur au fond σ^2 que l'on prend égal à la moyenne du fond de spectre au niveau du pic (cf. Figure 5.3-II) :

$$\sigma^2 = \frac{1}{k_b - k_a + 1} \sum_{k=k_a}^{k_b} f\,(k\Delta\nu_1) \tag{5.3-4}$$

(on peut également estimer le fond simplement à partir du fond obtenu au niveau du maximum du pic). Soit k_1 et k_2 les points correspondant aux fréquences de début et de fin du pic extrait et $\gamma_{pic}(k\Delta\nu_1)$ les valeurs de ce pic extrait pour $k_1 \leq k \leq k_2$, (cf. Figure 5.3-II) égales à :

$$\gamma_{pic}(k\Delta\nu_1) = \hat{\gamma}\,(k\Delta\nu_1) - \sigma^2 \text{ pour } k_1 \leq k \leq k_2 \text{ et } \gamma_{pic}(k\Delta\nu_1) = 0 \text{ sinon.} \tag{5.3-5}$$

Soit k_{max} l'indice du maximum du pic et $A_{max} = \gamma_{pic}(k_{max}\Delta\nu_1)$ l'amplitude du maximum du pic.

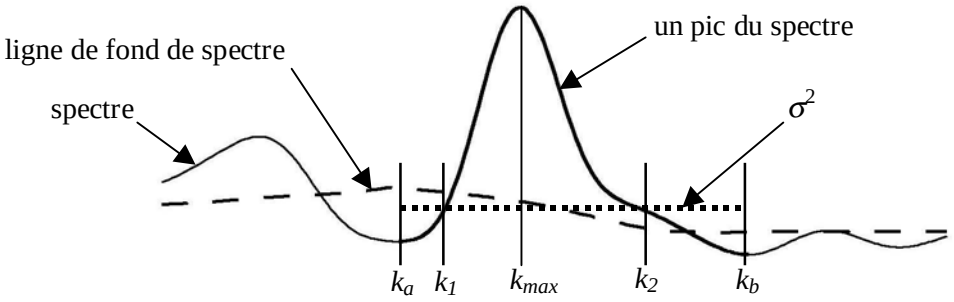
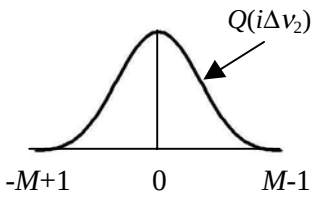


Figure 5.3-II : **extraction d'un pic du spectre**.

On suppose qu'il y a au moins deux points strictement supérieurs à zéro pour ce pic extrait. Dans le cas contraire, le pic est trop proche du fond de spectre et il s'agit probablement d'un pic du bruit.

On calcule également **le lobe principal *Q* de la fenêtre spectrale** avec un pas inférieur à $\Delta\nu_1$: $\Delta\nu_2 = \Delta\nu_1/c$, c entier. Ceci implique un échantillonnage différent entre γ_{pic} et Q. On a alors c-1 points en plus sur Q entre chaque pas d'échantillonnage de γ_{pic}. Le lobe principal est déterminé par le premier zéro de la fenêtre spectrale (cf. paragraphe 2.4.4). $Q(i\Delta\nu_2)$ est définie sur $-M<i<M$ et est normalisée de façon à ce que son maximum soit égal à 1. On considère que $Q(i\Delta\nu_2) = 0$ pour $i \leq M$ et $i \geq M$.



Ensuite, **on compare numériquement le pic extrait à différentes versions de *Q*** (proportionnelles à Q et translatées en fréquence) pour trouver la version la plus adaptée à l'hypothèse fréquence pure. La version retenue est celle qui **minimise l'erreur quadratique** entre les différentes versions de Q et les points de γ_{pic}.

Pour **initialiser** le calcul, la première version de Q, $\boldsymbol{Q_0}$**, est centrée sur le maximum du pic** extrait et calée sur son amplitude maximale (cf. Figure 5.3-III) :

$$Q_0(i\Delta\nu_2) = A_{max}\, Q((i-k_{max}c)\Delta\nu_2) \tag{5.3-6}$$

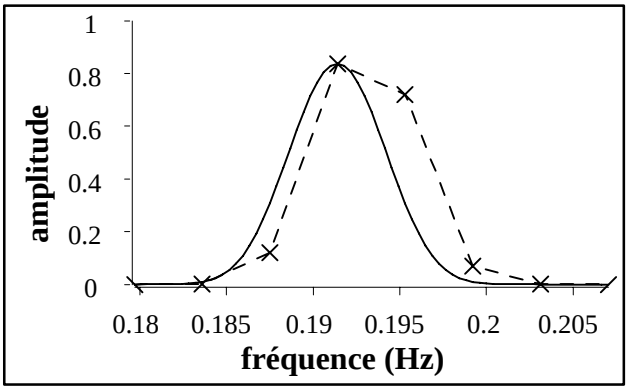


Figure 5.3-III : **initialisation de l'algorithme. Pic du spectre émergent du fond de spectre** (trait en pointillés, les points échantillonnés du pic sont indiqués par une croix) **et fenêtre spectrale** $\boldsymbol{Q_0}$ (avec un facteur d'interpolation de 10, en trait continu).

Si le pic extrait échantillonné est une fréquence pure, le maximum réel du pic en fréquence continue est situé entre le point correspondant au maximum du pic échantillonné, d'indice $k_{max}\Delta\nu_1$, et le point suivant, d'indice $(k_{max}+1)\Delta\nu_1$, ou le point précédent, d'indice $(k_{max}-1)\Delta\nu_1$. Le point retenu est celui dont l'amplitude est maximale.
Posons ε tel que

$$\begin{aligned}
&\text{si } \gamma_{pic}((k_{max}+1)\Delta\nu_1) > \gamma_{pic}((k_{max}-1)\Delta\nu_1),\ \varepsilon = +1,\\
&\text{si } \gamma_{pic}((k_{max}+1)\Delta\nu_1) < \gamma_{pic}((k_{max}-1)\Delta\nu_1),\ \varepsilon = -1,\\
&\text{si } \gamma_{pic}((k_{max}+1)\Delta\nu_1) = \gamma_{pic}((k_{max}-1)\Delta\nu_1),\ \varepsilon = 0.
\end{aligned} \tag{5.3-7}$$

Si $\varepsilon = 0$, cela implique que si l'hypothèse fréquence pure peut être retenue pour le pic d'intérêt, le maximum de la fréquence pure est localisée sur un canal fréquentiel. Q_0 représente donc le modèle fréquence pure pour le pic d'intérêt (échantillonné à une fréquence supérieure).

Si $\varepsilon \neq 0$, nous construisons **de nouvelles versions** $\boldsymbol{Q_n}$ **de** $\boldsymbol{Q}$ dont le maximum est décalé respectivement de $n\varepsilon\Delta\nu_2$ par rapport au maximum de γ_{pic}. Le maximum de Q_n est situé à la fréquence $i_n\Delta\nu_2$ tel que $i_n = k_{max}c + n\varepsilon$. Le décalage est effectué tant que $n\Delta\nu_2 < \Delta\nu_1$, c'est à dire tant que le maximum de Q_n n'est pas positionné sur le point du pic situé à $\varepsilon\Delta\nu_1$ de son maximum. On réajuste également l'amplitude du maximum de façon à ce que l'amplitude du point de Q_n situé à la fréquence $k_{max}\Delta\nu_1$ soit égale à A_{max} :

$$Q_n(k_{max}\Delta\nu_1) = Q_n(i_n\Delta\nu_2) = \gamma_{pic}(k_{max}\Delta\nu_1) = A_{max} \tag{5.3-8}$$

ce qui implique que quel que soit i :

$$Q_n(i\Delta\nu_2) = Q((i-n\varepsilon-k_{max}c)\Delta\nu_2)\, A_{max} / Q(-n\varepsilon\Delta\nu_2) \tag{5.3-9}$$

et que le maximum de Q_n est égal à :

$$Q_n((k_{max}c+n\varepsilon)\Delta\nu_2) = A_{max} / Q(-n\varepsilon\Delta\nu_2) > A_{max} \tag{5.3-10}$$

car $Q(0) = 1$ et $Q(-n\varepsilon\Delta\nu_2) < 1$.

Pour chaque fenêtre Q_n, on calcule **l'erreur quadratique e_n entre le pic extrait échantillonné γ_{pic} et Q_n. Q_n représente le modèle fréquence pure** dans l'hypothèse où sa fréquence serait égale à $i_n\Delta\nu_2$ et que le point situé au maximum du pic (à $k_{max}\Delta\nu_1$) appartient au modèle. Le maximum du pic est le point du pic le plus éloigné du fond de spectre. Sous l'hypothèse que le pic correspond à une fréquence pure, ce point est le moins perturbé en fréquence comme en amplitude par le bruit d'estimation. Il y a donc une plus forte probabilité pour que le modèle de la fréquence pure passe par ce point particulier.

L'erreur quadratique e_n entre Q_n et γ_{pic} se calcule par rapport aux points communs d'échantillonnage en normalisant par A_{max}, soit :

$$e_n = \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{\left(\gamma_{pic}(k\Delta\nu_1) - Q_n(k\Delta\nu_1)\right)^2}{A_{\max}^2} \tag{5.3-11}$$

sachant qu'il existe toujours i tel que $k\Delta\nu_1 = i\Delta\nu_2$, $i = ck$.
La normalisation par A_{max} permet à la fois de donner plus de poids aux points proches du maximum (les points les plus éloignés a priori du bruit de fond) et de pouvoir comparer l'erreur quadratique entre les différents pics du spectre quelle que soit leur amplitude.

La fenêtre d'indice m, Q_m, dont l'erreur quadratique est minimale par rapport à celle des autres fenêtres, Q_n, est donc la fenêtre la plus adaptée pour **représenter le modèle fréquence** pure vis-à-vis du pic (cf. Figure 5.3-IV). Si l'erreur quadratique e_m est faible, il y a peu de différences entre le pic et une fréquence pure d'amplitude égale au maximum de Q_m et de fréquence $\nu_{aj} = k_{max}\Delta\nu_1 + m\varepsilon\Delta\nu_2$. Si au contraire l'erreur est importante, le modèle fréquence pure ne peut être retenue pour ce pic compte tenu des conditions d'estimation.

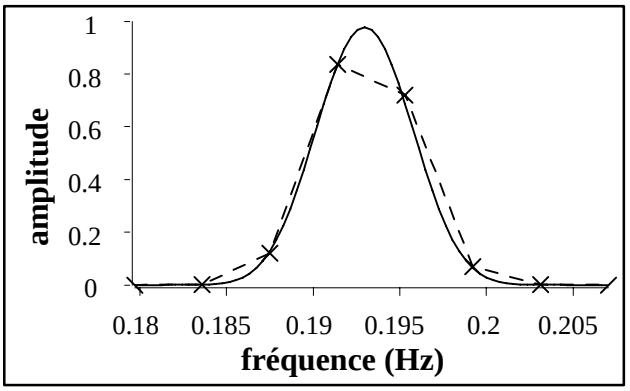


Figure 5.3-IV : **résultat final de l'algorithme après minimisation de l'erreur quadratique. Pic du spectre émergent du fond de spectre** (trait en pointillés, les points échantillonnés du pic sont indiqués par une croix) **et fenêtre spectrale Q_m** (avec un facteur d'interpolation de 10, en trait continu).

Le calcul de l'erreur quadratique proposé pour la minimisation est obtenu par rapport à l'ensemble des points du pic émergent. Il existe d'autres possibilités. On peut se baser sur les erreurs quadratiques entre les fenêtres Q_n et les points du pic :
- En ne considérant que les points du pic émergent dans la bande à –3 dB du pic. S'il n'y a aucun point autre que le maximum dans la bande à –3 dB, on minimise par rapport au point d'amplitude maximale suivant ou précédent le maximum. Ceci permet de ne pas considérer les pics trop proches du fond de spectre et qui peuvent être par conséquent perturbés par le bruit d'estimation. Nous appellerons cette erreur, l'erreur à –3 dB.
- En ne considérant que le point du pic émergent d'amplitude maximale, suivant ou précédent le maximum du pic. On considère que le maximum et ce point particulier, sont dans le cas d'une

fréquence pure, les moins perturbés par le bruit d'estimation et que la minimisation doit se faire par rapport à ces points. Nous appellerons cette erreur, l'erreur sur un point.
- En ne considérant que les deux points du pic émergent suivant et précédent le maximum du pic. Là encore, on considère que le maximum et ces deux points particuliers, sont dans le cas d'une fréquence pure, les moins perturbés par le bruit d'estimation et que la minimisation par rapport à un seul point est insuffisante. Nous appellerons cette erreur, l'erreur sur deux points.

L'efficacité du calage suivant l'erreur choisie dépend du rapport signal sur bruit. S'il est important, la minimisation sur l'erreur sur un point est suffisamment efficace. Mais, pour des RSB plus faibles et dans un contexte général cette erreur peut poser des problèmes. Dans le cas où le *zero-padding* est important, la minimisation par rapport à l'erreur à –3 dB offre le meilleur compromis. Si le *zero-padding* est faible (<3) ou nul, il y a en général relativement peu de points dans la bande à –3 dB (de 2 à 4 points). Or un déséquilibre entre le nombre de points à droite du maximum du pic par rapport au nombre de points à gauche du maximum peut se produire (par exemple 1 point à droite et 2 à gauche). Ce déséquilibre peut impliquer une position finale de la fenêtre spectrale décalée par rapport à la position désirée (dans le cas d'une fréquence pure), on préférera alors l'erreur à 2 points qui offre de manière générale dans tout type de situations un bon compromis. Il est cependant nécessaire de calculer l'erreur à –3 dB et l'erreur sur le pic complet car ces erreurs sont représentatives de l'adéquation du modèle fréquence pure avec le pic.

Différents essais sur signaux synthétiques permettent de donner un ordre d'idée des erreurs attendues dans le cas d'une fréquence pure, même avec un faible rapport signal sur bruit local d'émergence (défini paragraphe 3.1). Le rapport signal sur bruit local d'émergence compte tenu de l'estimation est définie à partir de l'émergence du pic : soit le rapport entre le maximum de la fenêtre spectrale $Q_m((n\varepsilon+ k_{max}c)\Delta\nu_2) = A_{aj}$ (l'amplitude ajustée) exprimé en normalisation *DSP* (soit divisé par B_e) et le fond de spectre (exprimé lui aussi en normalisation *DSP*) : $RSB_{em} = A_{aj}\times B_e/\sigma^2$. Le comportement vis-à-vis du RSB local d'émergence est relativement indépendant des performances de l'estimateur. Lorsque la variance augmente, l'amplitude des pics du bruit augmente : la bande équivalente diminue donc l'amplitude d'un pic fréquence pure augmente. Les deux effets se compensent en partie. Cependant, le paramètre qui tient le plus compte des performances de l'estimateur et qui permet de distinguer l'importance d'un pic par rapport au fond est la probabilité de fausse alarme du détecteur qui permet de détecter le pic d'intérêt. Si le pic est détecté avec une probabilité de fausse alarme de 10^{-5}, son RSB d'émergence sera important vis-à-vis de l'estimation. S'il s'agit d'une fréquence pure, la forme du pic doit être proche du modèle puisqu'une majorité des points des pics ne seront pas beaucoup perturbés par le bruit d'estimation.

Le choix entre les différentes hypothèses est donné dans le tableau Tab. 5.3-I. Les erreurs quadratiques indiquées sont issues d'une première étude qui demanderait à être approfondie. Les valeurs sont donc données à titre indicatif. Lorsque nous parlons d'un RSB d'émergence forte, le pic a été détecté avec une probabilité de fausse alarme supérieure à 10^{-4}. Un RSB d'émergence faible est obtenu pour une probabilité de fausse alarme inférieure à 10^{-4}.

Tab. 5.3-I : hypothèse sur le pic en fonction des résultats du critère d'ajustement spectral.			
erreur sur le pic complet	condition sur erreur à –3 dB	condition sur le RSB	hypothèse(s) retenue(s)
$e_{tot} \leq 0{,}02$			**fréquence pure**
$0{,}02 \leq e_{tot} \leq 0{,}1$	$e_{-3dB} \leq 0{,}02$	fort	**fréquence pure** avec une fréquence pure non résolue d'amplitude inférieure située à une fréquence proche du maximum du pic
		faible	**fréquence pure** dont le bruit d'estimation perturbe les points en pied de pic
	$e_{-3dB} \geq 0{,}02$	fort	**fréquence pure** ou **plusieurs fréquences pures non résolues** ou **motif bande étroite**
		faible	**fréquence pure** ou **pic du bruit**
$e_{tot} > 0{,}1$	$e_{-3dB} \leq 0{,}02$	fort	**fréquence pure avec une fréquence pure non résolue** située à une fréquence proche du maximum du pic **ou localisée sur un motif bande étroite**
		faible	**pic du bruit**
	$e_{-3dB} \geq 0{,}02$	fort	**plusieurs fréquences pures non résolues** ou **motif bande étroite**
		faible	**pic du bruit**

Si l'hypothèse fréquence pure est retenue, son amplitude et sa fréquence sont mieux déterminées par rapport au maximum du pic grâce à l'ajustement de la fenêtre spectrale : l'amplitude de la fréquence pure (sa densité spectrale de puissance) est égale à l'amplitude ajustée A_{aj} et sa fréquence est égale à la fréquence ajustée ν_{aj} avec une résolution de $\pm\Delta\nu_2$.

Remarque : on a effectué la minimisation en considérant que le maximum du pic devait appartenir au modèle fréquence pure, on pourrait également ajouter une incertitude sur l'amplitude puis calculer différentes erreurs pour les différentes amplitudes envisagées. Mais dans un premier temps, la méthode citée semble suffisante.

5.3.2. Résultats du critère

Nous allons présenter dans ce paragraphe quelques résultats obtenus sur un signal synthétique et deux signaux réels. Tout d'abord sur un signal synthétique de 1024 points, de fréquence d'échantillonnage unité et composé d'un bruit blanc de puissance unité et de diverses composantes. La DSP est estimée par la méthode Welch-WOSA (cf. Figure 5.3-V) pour une taille de segments de 512 points, une taille de TF de 512 (pas de *zero-padding*), une fenêtre d'apodisation de Blackman, un décalage entre segments de 25% (soit 5 segments). Les diverses composantes du signal sont :

- une sinusoïde avec un RSB local d'émergence important de fréquence ν_0=0,095 Hz et d'amplitude A_0=0,5, soit de DSP $A^2/4$=0,0625, qui correspond au pic 1 sur la Figure 5.3-V,
- une sinusoïde avec un RSB local d'émergence faible de fréquence ν_1=0,198 Hz et d'amplitude A_1=0,25, soit de DSP 0,0156, qui correspond au pic 2 sur la Figure 5.3-V,
- deux sinusoïdes de fréquences proches non résolues sur l'estimation considérée, la première de fréquence ν_2=0,3 Hz et d'amplitude A_2=0,5, la deuxième de fréquence ν_3=0,304 Hz et d'amplitude A_3=0,3, qui correspond au pic 4 sur la Figure 5.3-V,

- une sinusoïde d'amplitude 0,6 dont la fréquence est aléatoire égale à : 0,43+B, où B est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 0,03, cette composante est alors un motif bande étroite en fréquence qui correspond au pic 5 sur la Figure 5.3-V.

Sur les figures présentant les résultats de l'ajustement, la DSP estimée du signal est tracée sur la figure du haut (en trait continu). Les pics dont l'amplitude est au-dessus du seuil de détection sont en trait épais, la ligne de fond de spectre est indiquée en pointillés. Les différents pics étudiés sont numérotés sur le spectre, le résultat de l'ajustement de la fenêtre spectrale est indiqué dans les différents encadrés. Dans chaque encadré est tracé le pic émergent du fond de spectre d'intérêt (trait en pointillés, les points échantillonnés du pic sont indiqués par une croix) et la fenêtre spectrale ajustée après minimisation de l'erreur (en trait continu). Sont indiqués également l'erreur sur le pic complet, l'erreur à –3 dB, la fréquence du maximum du pic d'intérêt, la fréquence du maximum de la fenêtre spectrale après ajustement, l'amplitude du maximum du pic émergent (en normalisation amplitude) et l'amplitude du maximum de la fenêtre spectrale ajustée.

L'ajustement de la fenêtre spectrale obtenue après minimisation de l'erreur sur 2 points (pas de *zero-padding*) est présentée Figure 5.3-V et Figure 5.3-VI. Le coefficient d'interpolation pour le calcul de la fenêtre spectrale est de 10, le pas d'échantillonnage du pic est de 0,00195 Hz, celui de la fenêtre spectrale est donc de 0,000195 Hz. La ligne de fond de spectre a été estimée par la méthode *n passes* pour une taille de fenêtre de 29, une probabilité de fausse alarme pour la première passe par filtrage médian égale à 0,001 et une probabilité de fausse alarme pour les passes suivantes par filtrage moyen égale à 0,001.

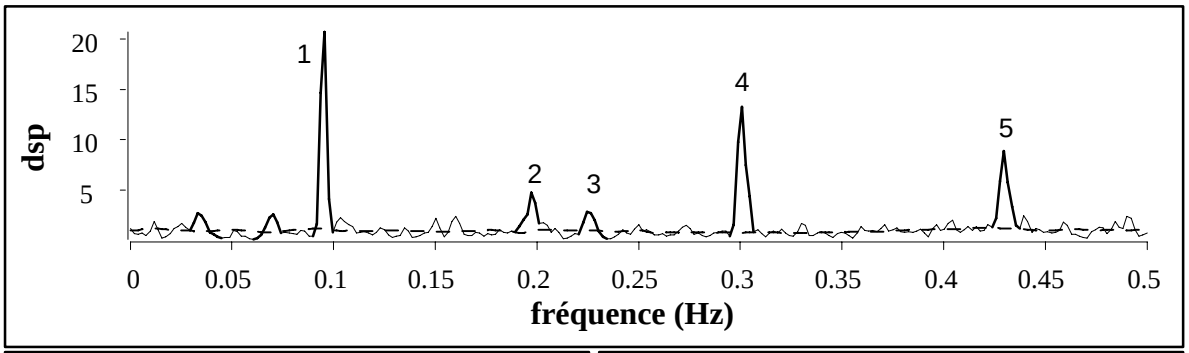
5 pics particuliers qui sont au-dessus du seuil de détection obtenu pour une probabilité de fausse alarme de 0,001 sont présentés. 4 correspondent aux différentes composantes du signal. Le pic 3 correspond à un pic du bruit dont l'amplitude dépasse cependant le seuil de détection.

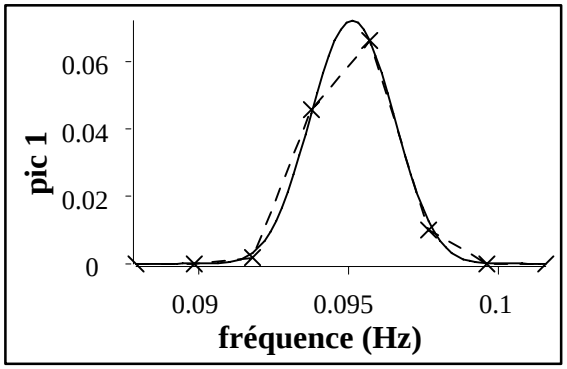
Les erreurs sur le pic et à –3 dB pour le pic 1 sont inférieures à 0,01, l'hypothèse fréquence pure peut être retenue sans restriction. On constate que l'ajustement a effectivement permis de connaître avec plus de précision la fréquence de la sinusoïde qui est alors donnée à 0,0951 Hz avec une précision de 0,0001 Hz alors que le maximum du pic est situé à 0,0957 Hz et que la fréquence exacte de la sinusoïde est de 0,095 Hz. L'amplitude ajustée ne correspond pas exactement à la DSP de la sinusoïde étant donné la variance de l'estimateur.

Pour le pic 2, l'erreur à –3 dB est inférieure à 0,01 tandis que l'erreur sur le pic complet est supérieure à 0,1. Nous sommes dans le cas où le RSB local est faible : les points proches du pied de pic sont ici fortement perturbés par le bruit d'estimation, mais l'hypothèse fréquence pure doit être retenue.

Pour le pic 3, les deux erreurs sont supérieures à 0,1, l'hypothèse fréquence pure ne peut pas être retenue. Il s'agit en effet d'un pic du bruit. Il faut cependant savoir qu'un pic du bruit peut très bien avoir une forme proche de celle d'une fréquence pure. Pour un RSB local faible, les erreurs ne permettent pas de trancher définitivement entre les deux hypothèses : fréquence pure ou pic du bruit. Elles permettent seulement d'envisager plus particulièrement une des deux hypothèses.

Les pics 4 et 5 offrent des erreurs toutes supérieures à 0,1. L'hypothèse fréquence pure ne peut pas être retenue. Pour le pic 4, il s'agit en fait des deux fréquences pures non résolues pour cette estimation, tandis que pour le pic 5 (cf. Figure 5.3-VI), il s'agit d'un motif bande étroite. Dans le cas d'un RSB local important, comme c'est le cas pour ces deux pics, l'hypothèse fréquence pure doit être rejetée sans restriction. Mais, le choix entre l'hypothèse motif bande étroite où fréquences pures non résolues ne peut être déterminé sans analyse complémentaire. Il faut noter que visuellement la différenciation entre les pics est délicate.





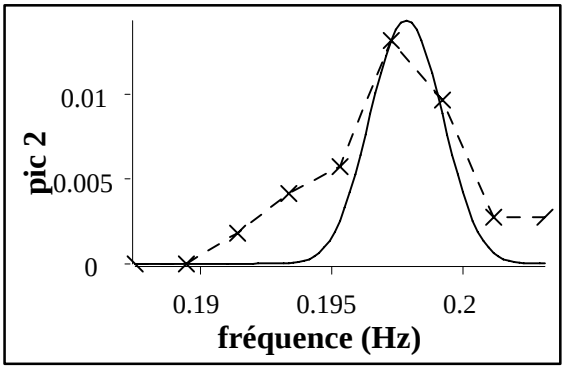
1 : erreur pic = 0.0025, −3 dB = 0.00035

fréquence du pic = 0.0957 Hz

fréquence ajustée = 0.0951 Hz

amplitude du pic = 0.0663

amplitude ajustée = 0.0724



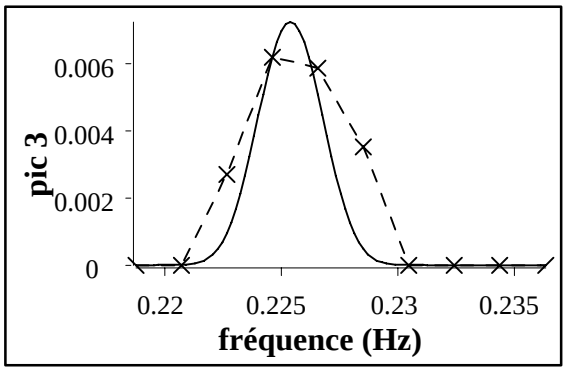
2 : erreur pic = 0.19, −3 dB = 0.0039

fréquence du pic = 0.197 Hz

fréquence ajustée = 0.198 Hz

amplitude du pic = 0.0132

amplitude ajustée = 0.0144



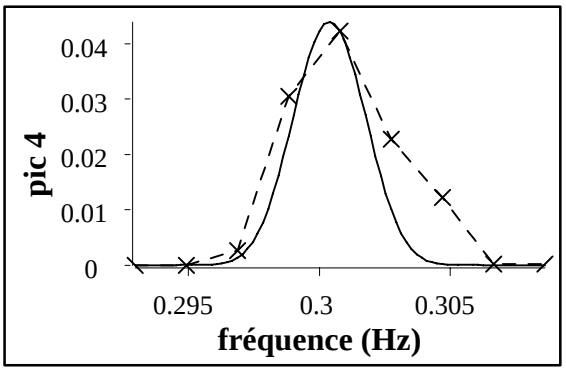
3 : erreur pic = 0.34, −3 dB = 0.26

fréquence du pic = 0.225 Hz

fréquence ajustée = 0.225 Hz

amplitude du pic = 0.00619

amplitude ajustée = 0.00724



4 : erreur pic = 0.2, −3 dB = 0.12

fréquence du pic = 0.301 Hz

fréquence ajustée = 0.3 Hz

amplitude du pic = 0.0423

amplitude ajustée = 0.0439

Figure 5.3-V : **signal synthétique, résultat de l'ajustement de la fenêtre spectrale** pour les pics numérotés sur le spectre. Le résultat de l'ajustement pour le pic 5 est présenté Figure 5.3-VI.

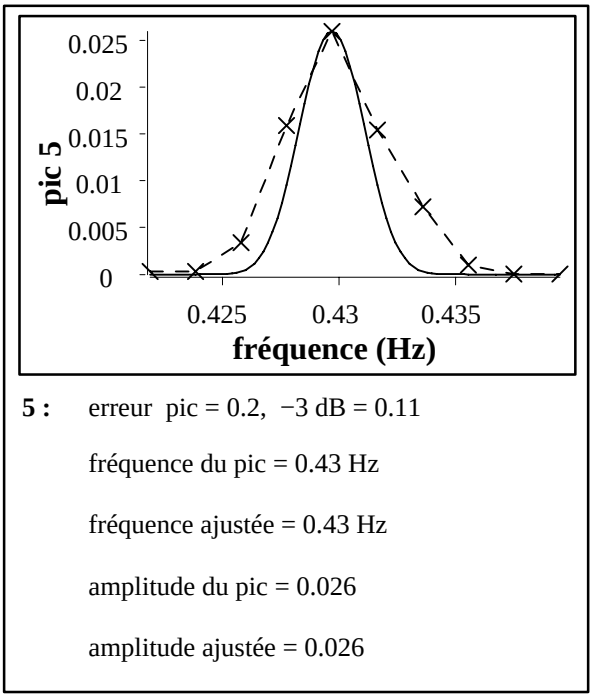


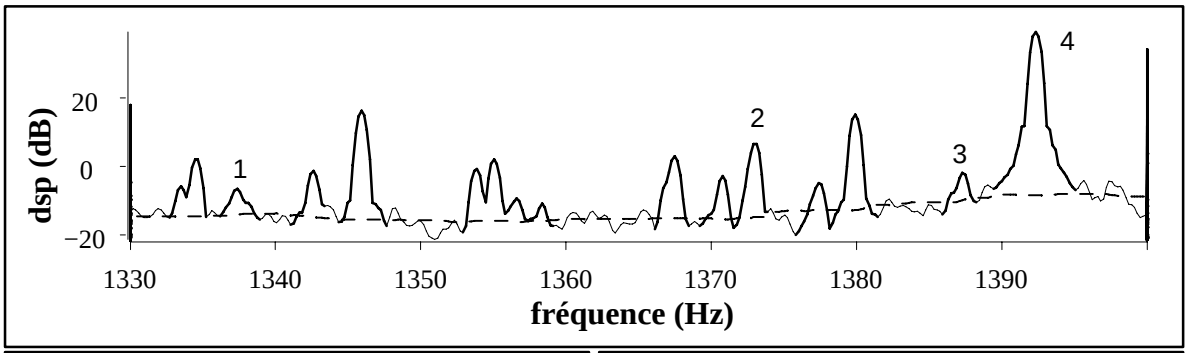
Figure 5.3-VI : **résultat de l'ajustement pour le pic 5** de la Figure 5.3-V.

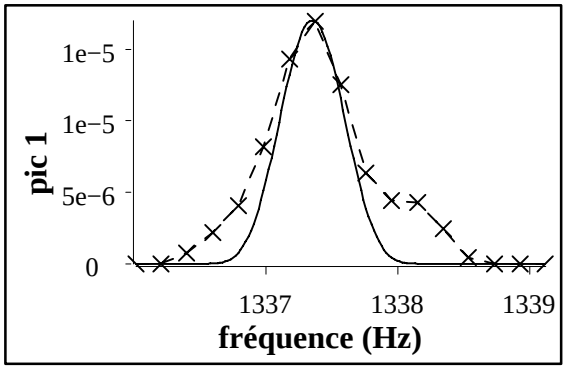
Nous allons maintenant présenter les résultats obtenus avec le **signal d'engrenage ENG8 E5 21 RH SPV**. Nous considérons la bande fréquentielle *B*=[1330 Hz , 1400 Hz], sur une estimation obtenue avec la méthode Welch-WOSA. Les paramètres sont : taille des segments de 16384 points, fenêtre d'apodisation de Hanning, décalage entre segments de 33 %, on obtient alors 10 segments, taille de la transformées de Fourier de 32768 points (*zero-padding* d'ordre 2).

L'ajustement de la fenêtre spectrale obtenue après minimisation de l'erreur sur 2 points (pas de *zero-padding*) pour certains pics du spectre est présentée Figure 5.3-VII. Le coefficient d'interpolation pour le calcul de la fenêtre spectrale est de 10, le pas d'échantillonnage du pic est de 0,194 Hz, celui de la fenêtre spectrale est donc de 0,0194 Hz. La ligne de fond de spectre a été estimée par la méthode *n passes* pour une taille de fenêtre de 37, une probabilité de fausse alarme pour la première passe par filtrage médian égale à 0,001 et une probabilité de fausse alarme pour les passes suivantes par filtrage moyen égale à 0,001.

4 pics particuliers qui sont au-dessus du seuil de détection obtenu pour une probabilité de fausse alarme de 0,001 sont présentés.

Le premier pic dont l'erreur sur le pic complet est supérieure à 0,1, mais l'erreur à –3 dB est inférieure à 0,01, est bien un motif bande étroite de faible amplitude. Les autres pics ont tous été identifiés comme des fréquences pures par le critère d'ajustement de la fenêtre spectrale (les erreurs étant toutes inférieures à 0,01). L'analyse complète du signal permet de confirmer l'hypothèse fréquence pure pour ces pics.





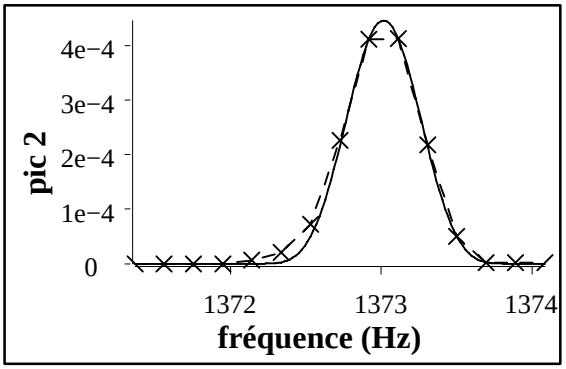
1 : erreur pic = 0.17, −3 dB = 0.0076

fréquence du pic = 1340 Hz

fréquence ajustée = 1340 Hz

amplitude du pic = 1.7e−05

amplitude ajustée = 1.7e−05



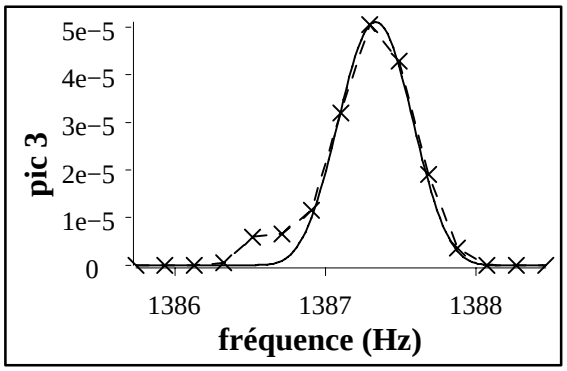
2 : erreur pic = 0.0058, −3 dB = 0.00073

fréquence du pic = 1370 Hz

fréquence ajustée = 1370 Hz

amplitude du pic = 0.000412

amplitude ajustée = 0.000446



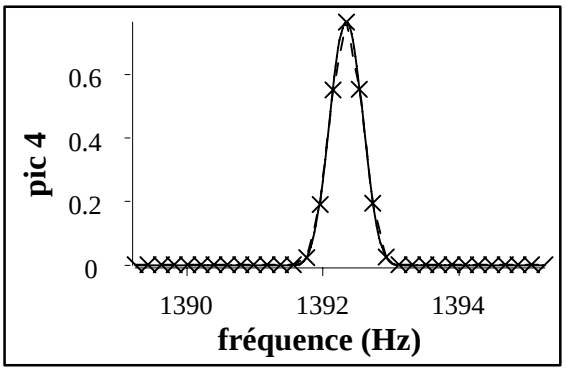
3 : erreur pic = 0.015, −3 dB = 0.00047

fréquence du pic = 1390 Hz

fréquence ajustée = 1390 Hz

amplitude du pic = 5.05e−05

amplitude ajustée = 5.11e−05



4 : erreur pic = 0.00033, −3 dB = 0.0001

fréquence du pic = 1390 Hz

fréquence ajustée = 1390 Hz

amplitude du pic = 0.767

amplitude ajustée = 0.767

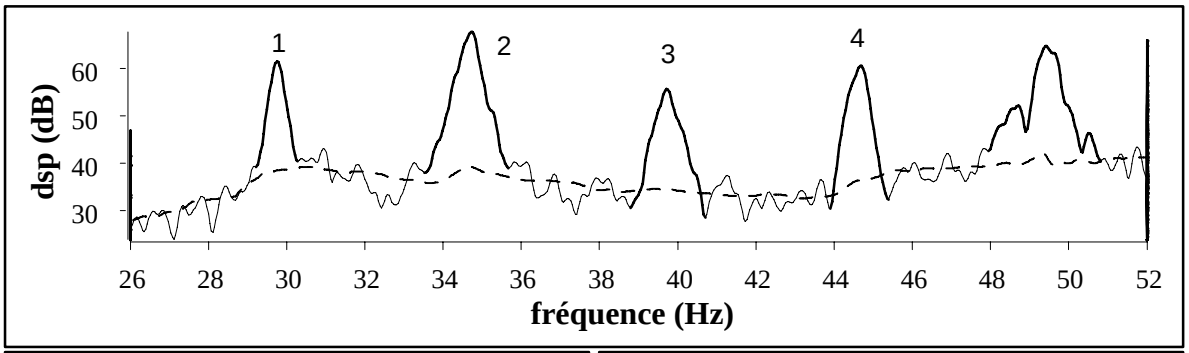
Figure 5.3-VII : **signal ENG8 E5 21RH SPV, résultat de l'ajustement de la fenêtre spectrale** pour les pics numérotés sur le spectre dans la bande [1330 Hz , 1400 Hz].

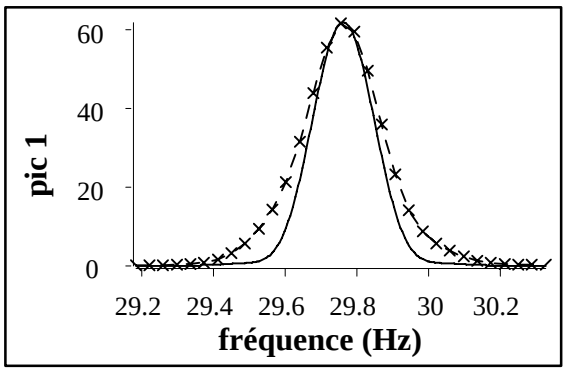
Le signal MF-CHARLIE 1-VOIE6 contient une série de pics bande étroite, il ne s'agit pas de fréquences pures, mais bien de composantes à bande étroite à caractère aléatoire. Nous présentons les résultats obtenus sur la bande *B*=[26 Hz , 52 Hz], dans laquelle des composantes bande étroite sont présentes. Nous nous basons sur une estimation obtenue avec la méthode PER-COR. Les paramètres sont : taille des segments égale au nombre de points du signal (1 segment sans fenêtre d'apodisation), support de la fenêtre sur la corrélation de 30000 points, fenêtre d'apodisation de Blackman, taille de la transformées de Fourier de 131072 points (*zero-padding*).

L'ajustement de la fenêtre spectrale obtenue après minimisation de l'erreur à –3 dB (*zero-padding* important) est présentée Figure 5.3-VIII. Le coefficient d'interpolation pour le calcul de la fenêtre spectrale est de 10, le pas d'échantillonnage du pic est de 0,038 Hz, celui de la fenêtre spectrale est donc de 0,0038 Hz. La ligne de fond de spectre a été estimée par la méthode *n passes* pour une taille de fenêtre de 85, une probabilité de fausse alarme pour la première passe par filtrage médian égale à 0,001 et une probabilité de fausse alarme pour les passes suivantes par filtrage moyen égale à 0,001.

4 pics particuliers qui sont au-dessus du seuil de détection obtenu pour une probabilité de fausse alarme de 0,001 sont présentés.

L'ensemble des 4 pics sont des motifs bande étroite, le critère rejette sans ambiguïté l'hypothèse fréquence pure pour les pics 2, 3 et 4. Pour le premier pic, l'erreur à –3 dB est comprise entre 0,1 et 0,01, mais étant donné le RSB local d'émergence important, l'hypothèse fréquence pure est également rejetée pour ce pic. La proximité de la forme du pic avec la forme de la fenêtre spectrale est due au fait que la bande fréquentielle du motif est proche de la bande fréquentielle de la fenêtre spectrale.





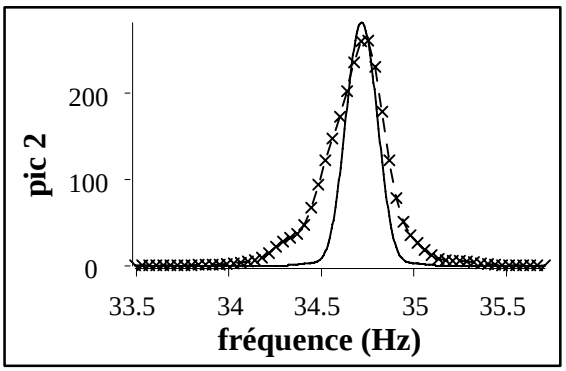
1 : erreur pic = 0.22, −3 dB = 0.057

fréquence du pic = 29.8 Hz

fréquence ajustée = 29.8 Hz

amplitude du pic = 61.6

amplitude ajustée = 61.9



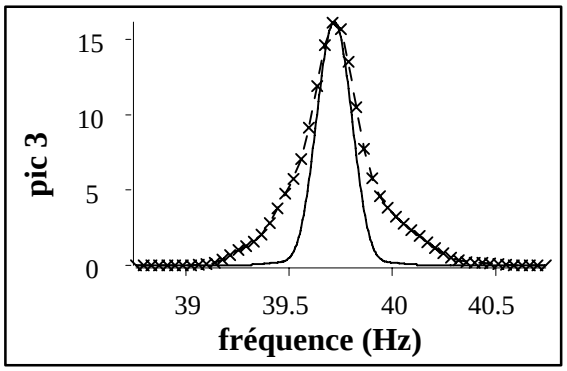
2 : erreur pic = 0.86, −3 dB = 0.29

fréquence du pic = 34.8 Hz

fréquence ajustée = 34.7 Hz

amplitude du pic = 260

amplitude ajustée = 282



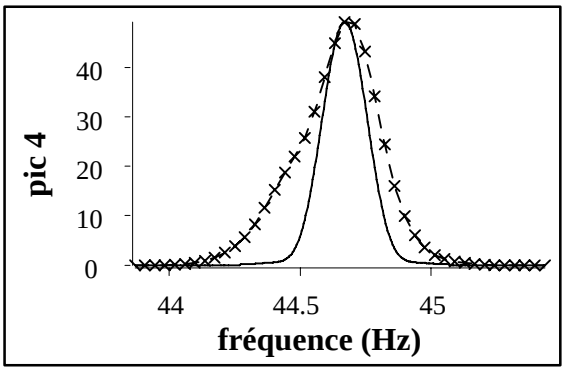
3 : erreur pic = 0.8, −3 dB = 0.11

fréquence du pic = 39.7 Hz

fréquence ajustée = 39.7 Hz

amplitude du pic = 16.1

amplitude ajustée = 16.2



4 : erreur pic = 0.98, −3 dB = 0.31

fréquence du pic = 44.7 Hz

fréquence ajustée = 44.7 Hz

amplitude du pic = 49.2

amplitude ajustée = 49.2

Figure 5.3-VIII : **signal MF-CHARLIE 1- VOIE 6, résultat de l'ajustement de la fenêtre spectrale** pour les pics numérotés sur le spectre dans la bande [26 Hz , 52 Hz].

5.3.3. Conclusion sur l'ajustement de la fenêtre spectrale

Nous proposons un critère qui permet de vérifier si un pic d'un spectre estimé par une des méthodes de Fourier peut être identifié comme une fréquence pure. Ce critère s'applique aux pics émergents du spectre, c'est-à-dire aux pics qui dépassent le seuil de détection et auquel l'hypothèse « pic n'appartenant pas au bruit de fond » peut être envisagée. La partie du pic qui émerge du fond de spectre est comparée à différentes versions de la fenêtre spectrale qui représente le modèle fréquence pure. Le modèle le plus adapté à représenter l'hypothèse fréquence pure vis-à-vis du pic d'intérêt est déterminé par minimisation de l'erreur quadratique entre les points du pic et ceux des différentes versions de la fenêtre spectrale. L'adéquation entre le modèle retenu et le pic est déterminée par l'erreur quadratique sur l'ensemble des points du pic, mais aussi par l'erreur sur les points compris dans la bande à –3 dB du pic. Ces erreurs permettent de déterminer si l'hypothèse fréquence pure peut être retenue.

D'autres informations doivent être prises en compte pour confirmer ou infirmer la conclusion. En effet, le résultat final dépend de l'importance de l'émergence du pic par rapport au fond. Si l'émergence est faible, le critère permet d'envisager soit l'hypothèse fréquence pure, soit l'hypothèse pic du bruit. Le choix entre les deux hypothèses ne peut cependant être en général définitivement tranché. Par contre, si l'émergence est forte, le critère permet de rejeter sans ambiguïté sur l'hypothèse fréquence pure. Cependant, sans analyse complémentaire, il n'est pas possible de différencier un motif bande étroite d'un motif constitué de plusieurs fréquences pures non résolues.

Dans le cas où l'hypothèse fréquence pure est retenue, une estimation plus précise de sa fréquence et de son amplitude est déterminée à partir du modèle retenu. Les résultats obtenus à la fois sur un signal synthétique et sur des signaux réels permettent de confirmer les performances du critère.

5.4. Conclusion sur les critères d'interprétation spectrale

Les trois critères proposés aident à l'interprétation spectrale de chaque analyse spectrale de type Fourier. L'ensemble de l'étude s'est attaché à comparer les performances des différentes méthodes et paramètres mis en jeu. Dans le contexte d'un système d'aide à l'analyse spectrale, les paramètres de chaque critère peuvent être déterminés suivant l'avancement de la démarche d'analyse. Les différents critères sont appliqués successivement dans l'ordre : estimation du fond de spectre, validation de la qualité du fond de spectre, détection et enfin ajustement de la fenêtre spectrale. Chaque critère, contrairement à ceux de la pré-analyse, nécessite les résultats du critère précédent.

A partir d'une estimation spectrale, les critères d'interprétation spectrale permettent de détecter les motifs spectraux et de leur associer des attributs.

La ligne de fond de spectre permet d'estimer la densité spectrale de puissance de la partie continue du spectre. Il faut cependant exclure les bandes pour lequel le critère de qualité du fond de spectre n'est pas validé. Dans ces bandes, une indétermination subsiste que d'autres analyses doivent permettre de lever.

Le critère de détection permet de détecter tout motif émergent du fond de spectre. Plusieurs attributs sont associés aux pics détectés. Tout d'abord, ils sont classés suivant la probabilité de fausse alarme minimale qui a permis leur détection. Ensuite, suivant les résultats du critère d'ajustement de la fenêtre spectrale, une hypothèse sur la nature du pic est émise. D'autres attributs sont associés à chaque pic : les erreurs quadratiques par rapport au modèle fréquence pure, sur le pic complet et à –3 dB, le rapport signal sur bruit local d'émergence et dans le cas où l'hypothèse fréquence pure est retenue, l'amplitude et la fréquence de celle-ci.

Chapitre 6

Méta-scénario

Dans ce chapitre, nous présentons la démarche qui permet d'analyser spectralement un signal à partir de l'étude des estimateurs et à l'aide des différents critères mis au point dans le chapitre précédent. Nous nous restreignons aux cas des analyses spectrales de type Fourier. Le système complet intègre d'autres types d'analyses, tels que des analyses dites « haute-résolution » ou encore une détection d'harmoniques. Mais, nous n'aborderons pas ces points, qui demandent chacun une étude particulière pour être intégré à la démarche. La démarche présentée est représentative de la démarche d'un expert en traitement du signal qui cherche à déterminer les différents éléments constitutifs du spectre en s'aidant des résultats des critères d'interprétation.

Notre démarche est adaptée aux domaines d'application de l'opération, les vibrations et la mesure de bruits propres et rayonnés (acoustique sous-marine). Elle est orientée sur la caractérisation de trois types particuliers de motifs : les fréquences pures, les motifs bande étroite à caractère aléatoire et les motifs large bande également à caractère aléatoire. La caractérisation des bandes des motifs vis-à-vis des performances de l'estimateur a été définie chapitre 4 (paragraphe 4.4). Précisons qu'un motif large bande fait partie du fond de spectre, tandis qu'un motif bande étroite émerge vis-à-vis des différentes estimations du fond de spectre. La démarche se divise suivant trois objectifs principaux : recherche de fréquences pures, recherche de motifs bande étroite, recherche de motifs large bande. Chacun des objectifs peut mener à un changement de stratégie, soit d'objectif. La démarche proposée ne calque pas les démarches mise en place lors des scénarios d'analyse de signaux réels (cf. chapitre 1). Celles-ci ne prenaient pas en compte les critères d'interprétation. Leur objectif était de les mettre au point et d'envisager les séries d'étapes nécessaires à une analyse d'un signal. Le méta-scénario prend en compte les critères d'interprétation et leur comportement vis-à-vis des estimations spectrales. De plus, la démarche est envisagée de façon à pouvoir être guidée par un système. Le but final est de détecter, d'estimer et de caractériser les différents motifs du spectre. Plusieurs niveaux de description peuvent être mis en évidence pour une fréquence donnée. Une fréquence pure peut être localisée sur un motif bande étroite, lui-même localisé sur un motif plus large bande. Dans ce cas, la fréquence pure est associée à 3 motifs différents.

Le point méta-scénario qui conclut la pré-analyse a été présenté chapitre 4 (paragraphe 4.4). Il permet à partir des résultats des critères de pré-analyse de déterminer l'analyse primaire. Le point de départ de ce chapitre est constitué des résultats de l'interprétation brute de l'analyse primaire. Lors du point charnière qui conclut chaque étape ou tour du « colimaçon » (cf. chapitre 1), plusieurs objectifs peuvent être proposés que nous dénommons objectif prioritaire, objectif secondaire etc. en fonction de la priorité attribuée. De plus, pour un objectif donné, plusieurs choix pour l'étape suivante peuvent être proposés. De la même manière que pour les objectifs, nous dénommons ces choix, choix prioritaire ou choix secondaire en fonction de leur priorité. Les choix et objectifs suivis par défaut sont bien entendu les prioritaires, les autres étant laissés à l'appréciation de l'utilisateur.

6.1. Estimateurs spectraux de Fourier et du fond de spectre

Une démarche systématique et optimale, adaptée à tout type de signaux, est utopique. Nous proposons une démarche générale qui, sans être nécessairement optimale, puisse mener l'analyse à son terme. Il est également nécessaire d'envisager son automatisation au travers d'un système d'aide à l'analyse spectrale. Il convient de proposer le choix des méthodes et des paramètres des estimateurs spectraux et du fond de spectre en fonction de leurs performances.

6.1.1. Estimateurs de Fourier retenus

Du point de vue des estimateurs spectraux, nous nous limitons aux trois méthodes suivantes : Welch-WOSA, Blackman-Tukey et le corrélogramme A-biaisé d'après les conclusions du chapitre 3.

La méthode STUSE n'est adaptée qu'au cas des signaux aléatoires à puissance moyenne finie dont le support de corrélation est correctement estimé, ce qui nécessite déjà une analyse précise du signal ou des informations *a priori* très fortes. L'objectif est d'obtenir une estimation non biaisée. Mais dès que les hypothèses ne sont pas respectées, les risques de biais sont très importants, même par exemple si le signal est constitué de deux signaux aléatoires indépendants avec des supports de corrélation différents. De plus, le reste des performances n'offre pas d'avantages par rapport aux autres estimateurs. Sans oublier que les paramètres sont complexes à choisir.

La méthode PER-COR dans sa version générale, offre des compromis intermédiaires par rapport aux autres estimateurs. Cependant, les différences ne sont pas suffisamment significatives par rapport aux autres méthodes, d'autant plus que des compromis similaires peuvent être obtenus en faisant varier leurs paramètres. De plus, les paramètres sont complexes à fixer en fonction du compromis à atteindre.

La méthode Welch-WOSA permet d'obtenir le meilleur compromis variance/résolution/fenêtre spectrale lorsque la résolution est faible. De plus, les fenêtres spectrales ont des lobes secondaires bien atténués. La méthode du corrélogramme A-biaisé offre le meilleur compromis résolution/variance lorsque la résolution est importante. Le pied de pic des fenêtres spectrales est par contre important. La méthode Blackman-Tukey offre des compromis intermédiaires. Pour ces méthodes, les paramètres sont relativement simples à fixer en fonction du compromis désiré. Nous utilisons principalement les fenêtres d'apodisation de Blackman. Pour Welch-WOSA et Blackman-Tukey, cette fenêtre offre la meilleure atténuation des lobes secondaires au prix d'une augmentation du lobe principal. Cette configuration aide l'interprétation spectrale, le biais n'étant principalement dû qu'aux motifs dans la bande du lobe principal et l'hypothèse bruit localement blanc dans la bande de la fenêtre spectrale étant plus probable. Les autres fenêtres ne sont à envisager que dans des cas particuliers.

Dans ces conditions, pour chaque méthode, il ne reste qu'un seul paramètre à fixer. Pour la méthode Welch-WOSA, il s'agit de la taille des segments qui correspond également au support de la fenêtre effective sur la corrélation (cf. paragraphe 3.3.1). Le décalage entre segments est fixé pour des raisons de variance minimale en fonction de la fenêtre d'apodisation (cf. paragraphe 2.6.1). Pour la méthode Blackman-Tukey (cf. paragraphe 3.3.2) et celle du corrélogramme A-biaisé (cf. paragraphe 3.3.3.2), il s'agit du support de la fenêtre d'apodisation linéaire sur la corrélation qui correspond également au support de la fenêtre effective sur la corrélation. Le seul paramètre à déterminer pour les trois méthodes est le support de la fenêtre effective sur la corrélation M_{eff}. La taille de la TF est égale à quatre fois le support de la fenêtre effective (*zero-padding*) pour mieux faire apparaître les motifs spectraux.

6.1.2. Estimateurs du fond de spectre

Les performances des estimateurs du fond de spectre sont prépondérantes pour l'interprétation spectrale. L'étude du paragraphe 5.2, nous permet de sélectionner les méthodes et les paramètres des estimateurs.

Par défaut, nous utilisons la méthode *n passes* pour ses performances dans un contexte général. Les probabilités de fausse alarme pour la première passe et les passes suivantes sont choisies égales à 10^{-3}. La taille de la fenêtre d'estimation M est égale à quatre fois la largeur B du lobe principal de la fenêtre spectrale. Les performances offrent le meilleur compromis tant du point de vue de la détection, que de l'estimation du fond de spectre. Cette première configuration est notamment utilisée lors de l'analyse primaire.

Suivant les résultats de l'étape, recueillis lors du point charnière, une première décision peut mener à changer la méthode ou les paramètres de l'estimateur du fond de spectre et ceci quel que soit l'objectif recherché (recherche de fréquences pures, de motifs bande étroite ou bande large). Les différentes démarches possibles sont résumées sur le diagramme de la Figure 6.1-I.

Le premier cas est celui où le critère de qualité du fond de spectre détecte des zones où le fond de spectre est surestimé. Cette détection est synonyme d'une dynamique locale du fond de spectre importante et d'un problème de suivi de fond. Si la dynamique n'est pas trop importante, le simple fait de diminuer la taille de la fenêtre d'estimation de la méthode *n passes* peut permettre de résoudre le problème. Sans changer d'objectif, le choix prioritaire pour l'étape suivante consiste à analyser uniquement ces zones fréquentielles pour la même estimation spectrale, mais en choisissant pour la méthode *n passes* $M = 3B$ (en dessous les performances se détériorent). Pour ces zones, l'estimation du fond de spectre retenue est la dernière estimation obtenue. L'objectif est également de rechercher les motifs émergents dans ces zones, principalement lorsque l'objectif est la recherche de fréquences pures.

Si le critère de qualité du fond de spectre détecte de nouveau des zones de surestimation, la seule méthode adaptée est le filtrage morphologique. L'étape suivante consiste à appliquer la méthode du filtrage morphologique à l'estimation spectrale pour une taille d'ouverture égale à $B/2$. Cette étape doit être proposée en choix secondaire, même si aucune surestimation n'est plus détectée. Les caractéristiques de la méthode impliquent une sous-estimation du fond et une probabilité de fausse alarme réelle supérieure à celle désirée utilisée pour la détection. Dans ces conditions, seuls les motifs émergents détectés pour une probabilité de fausse alarme supérieure à 10^{-4} sont à considérer. De plus, l'estimation du fond pour les zones concernées doit être considérée comme sous estimée. Cette information est conservée sous la forme d'un attribut symbolique.

Après une première estimation de la ligne de fond de spectre, on peut envisager d'adapter l'estimateur du fond de spectre à la dynamique du fond. La dynamique correspond aux variations locales du fond de spectre. Un critère doit cependant être mis en œuvre pour estimer cette dynamique. Dans les zones de dynamique importante, une méthode plus adaptée que la méthode *n passes* est le filtrage médian (toujours pour une taille de fenêtre égale à $4B$). Dans les zones de dynamique faible, la taille de la fenêtre de la méthode *n passes* peut être augmentée (égale à $5B$ ou $6B$). Une adaptation de la fenêtre à la taille des motifs large bande du fond de spectre pourrait être envisagée, mais demande une analyse précise de la première estimation du fond de spectre avec la mise en place de critères adaptés.

Même si le critère de qualité du fond de spectre ne présente aucune alerte de surestimation du fond de spectre, un changement d'estimateur du fond de spectre peut aider à l'interprétation spectrale. Un choix secondaire est proposé : pour la même estimation spectrale qu'à l'étape précédente, l'estimation du fond de spectre est obtenue par filtrage médian pour une taille de fenêtre $M=4B$. Cette possibilité n'est à envisager que lorsque le degré de liberté associé à l'estimateur spectral est supérieur ou égal à 4. Dans le cas contraire, le filtre médian sous-estime le fond de spectre. L'objectif est de comparer les résultats de la détection. Les pics détectés dans les deux cas voient leur indice de confiance augmenter. Ceux qui ne sont présents que dans un des deux cas auront un indice de confiance moindre et auront l'attribut symbolique suivant : « *risque de problème d'estimation du fond de spectre* ». Une dynamique importante du fond confirme cet attribut. Pour les pics détectés dans les deux cas d'estimation du fond de spectre, les attributs associés au pic à conserver (erreurs quadratiques par rapport au modèle fréquence pure, RSB local…) sont ceux associés à la méthode *n passes* de par ses meilleures performances pour estimer le fond de spectre. Cette assertion peut être modifiée pour les zones de dynamique importante du fond de spectre (si un critère de dynamique est mis au point). Ce choix d'étape n'est proposé qu'en choix secondaire dans le cas d'une analyse la plus complète possible. Le choix prioritaire est donné en fonction de l'objectif recherché (cf. paragraphes suivants).

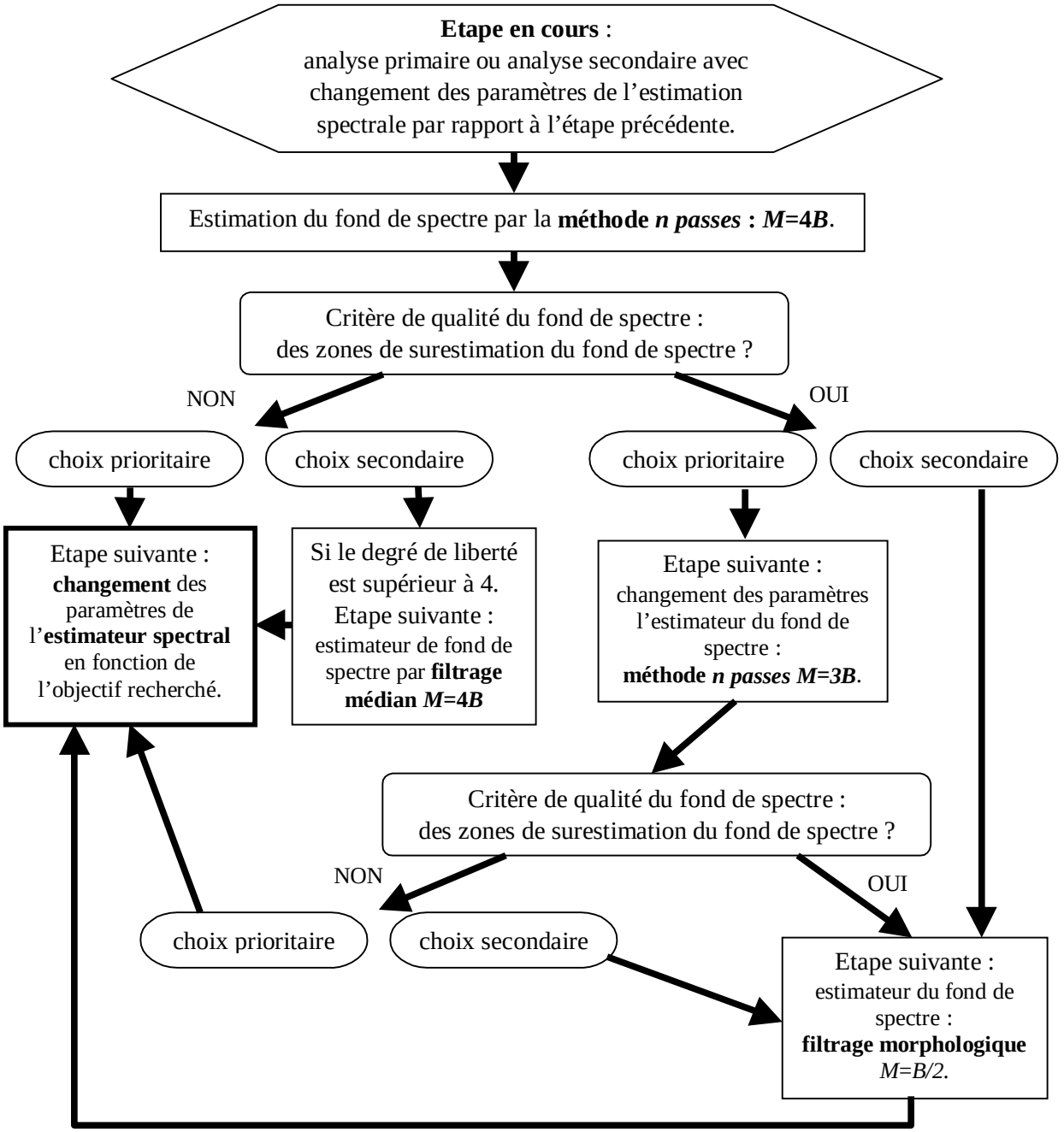


Figure 6.1-I : **démarche de changement d'estimateur du fond de spectre**.
L'alternative entre les choix prioritaires ou secondaires est du ressort de l'utilisateur.

Cette stratégie associée au comportement de l'estimation du fond de spectre vis-à-vis de l'estimation spectrale est à prendre en compte lors de chaque étape des démarches associées aux différents objectifs (recherche de fréquences pures, de motifs bande étroite, de motifs large bande). Mais, elle n'est essentielle que pour les objectifs « *recherche de fréquences pures* » et « *recherche de motifs bande étroite* », afin de détecter au mieux les motifs.

6.2. Objectif : recherche de fréquences pures

Cet objectif est prioritaire si des fréquences pures sont attendues ou si certaines ont été détectées lors de l'analyse primaire. Il est essentiel de correctement les détecter et les localiser afin de pouvoir interpréter les reste des motifs spectraux. La démarche adaptée à la recherche de fréquence pure s'attache à détecter l'ensemble des fréquences pures, à leur attribuer un indice de confiance et à vérifier l'hypothèse fréquence pure pour les pics dont le critère d'ajustement de la fenêtre spectrale a retenu cette possibilité. La démarche dépend d'une part de l'analyse précédente, qui a mené au choix de cet objectif, et d'autre part de l'hypothèse sur le pic et du rapport signal sur bruit local. Elle dépend également du voisinage du pic d'intérêt. L'interprétation d'un pic est, dans certains cas, indissociable de l'interprétation de son voisinage immédiat.

Nous présentons la démarche en l'initialisant avec le support de la fenêtre effective maximal, soit égal au nombre de points du signal. Si en sortie de l'analyse primaire, l'objectif est la recherche de fréquences pures, nous sommes dans ce contexte. Sinon, les paramètres de l'étape sont initialisés avec un tel support, puisque cette configuration favorise à la fois la détection et la résolution fréquentielle.

Nous déclinons la démarche suivant 3 options qui dépendent du rapport signal sur bruit (RSB) local d'émergence (à distinguer du rapport signal sur bruit local, cf. paragraphe 3.1, page 41) :

- rapport signal sur bruit *important* : pour un RSB local d'émergence supérieur à 20 dB,
- rapport signal sur bruit *moyen* : pour un RSB local d'émergence compris entre 10 et 20 dB,
- rapport signal sur bruit *faible* : pour un RSB local d'émergence inférieur à 10 dB.

Les valeurs indiquées sont des ordres de grandeur qui prennent en compte la variance de l'estimateur. L'ordre de présentation des démarches correspond à l'ordre logique d'analyse lorsque les différents types de fréquences pures sont présentes dans le signal.

Nous illustrons la démarche à partir de motifs spectraux extraits des signaux réels de la banque de signaux ASPECT. Par la suite M_{eff} représente le support de la fenêtre effective et N le nombre de points du signal.

Cas 1 : rapport signal sur bruit important (cf. Figure 6.2-I)

Le problème posé par une fréquence pure ayant un RSB important est le biais sur les motifs du voisinage spectral de cette fréquence. En particulier, avec l'estimateur du corrélogramme A-biaisé, le pied de pic de la fenêtre spectrale est particulièrement important. L'ensemble du voisinage est fortement biaisé. Un changement de fenêtre d'apodisation n'apporte pas d'amélioration notable. D'autres fréquences pures de plus faible amplitude peuvent être « cachées » par le pied de pic. De plus, autant l'estimation du fond de spectre, que celle des autres fréquences pures détectées dans le voisinage immédiat, sont biaisées.

La méthode Blackman-Tukey est inapplicable à cause des lobes négatifs de la fenêtre spectrale qui induisent inévitablement un nombre important de points négatifs sur le spectre, rendant toute interprétation délicate.

La méthode Welch-WOSA est adaptée puisque le biais n'est localisé que dans la bande du lobe principal de la fenêtre spectrale. Malgré l'augmentation de variance, elle reste la méthode adaptée pour l'interprétation, non seulement de la fréquence pure elle-même, mais aussi pour celle de son voisinage immédiat. Les attributs à conserver sont ceux associés à l'estimateur Welch-WOSA, non seulement pour la fréquence pure de rapport signal sur bruit important, mais aussi pour les autres fréquences pures localisées dans le voisinage. Le voisinage concerné est donné par environ deux fois la bande estimée du lobe principal de la fenêtre spectrale du corrélogramme A-biaisé.

Si l'analyse de départ, est la méthode Welch-WOSA, il n'est donc pas nécessaire d'effectuer d'analyse supplémentaire de type Fourier. Pour améliorer l'estimation des fréquences proches de la fréquence pure, il est alors préférable de proposer une analyse à partir des méthodes par déflation [DUC97]. Elles permettent de soustraire la fréquence pure concernée au signal.

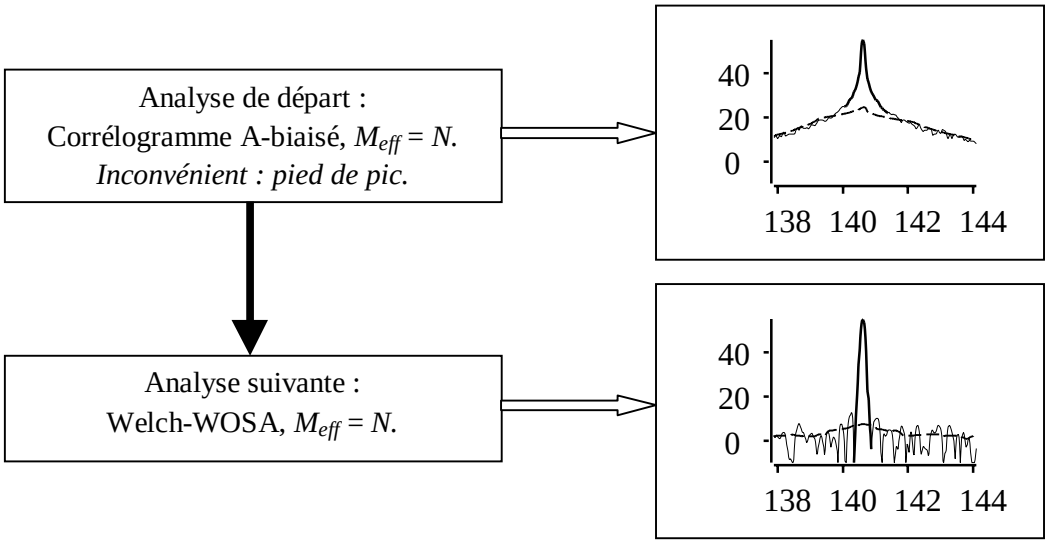


Figure 6.2-I : **démarche recherche de fréquence pure dans le cas d'un RSB important**. Illustration sur un motif spectral du signal PEG-SH1-a11. Sur les figures, les abscisses représentent les fréquences en Hz, les ordonnées représentent la DSP estimée en échelle décibel. Les pics d'intérêt sont en trait épais, tandis que le reste de la courbe est en trait fin. Le fond de spectre estimé par la méthode *n passes* est indiqué par la courbe en pointillés. Les paramètres utilisés sont ceux indiqués par défaut dans le paragraphe 6.1.2.

Cas 2 : rapport signal sur bruit moyen (cf. Figure 6.2-II)

L'estimateur du corrélogramme A-biaisé (dans le cas $M_{eff} = N$) est le meilleur compromis. Il n'est utile d'appliquer un autre estimateur que s'il reste un doute sur l'hypothèse fréquence pure. Le critère d'ajustement de la fenêtre spectrale donne cette information, exemple : « *fréquence pure avec une fréquence pure non résolue d'amplitude inférieure située à une fréquence proche* » (cf. paragraphe 5.3.1, tableau Tab. 5.3-I). Pour les mêmes raisons que précédemment, il convient d'appliquer la méthode Welch-WOSA. Si le doute est levé, les attributs conservés pour le pic d'intérêt sont ceux de la méthode Welch-WOSA. Il en va de même pour les autres pics nouvellement détectés. Par contre, pour l'estimation du fond de spectre dans le voisinage du pic d'intérêt, il convient de conserver l'estimation obtenue avec le corrélogramme A-biaisé car la variance associée est inférieure. Ce cas est intéressant si le RSB est proche de 20 dB.

Si après cette seconde estimation, un doute subsiste encore sur la nature du pic, nous proposons de changer de fenêtre d'apodisation pour la méthode Welch-WOSA en choisissant la fenêtre de Hanning. L'objectif est de changer le compromis lobe principal/lobes secondaires de la fenêtre spectrale.

Enfin, si cette configuration ne permet toujours pas de conclure sur la nature du pic particulièrement si le RSB est proche de 10 dB. Il est appréciable d'appliquer la méthode Blackman-Tukey. Si le RSB est proche de 20 dB, il est préférable de diminuer légèrement le support de la fenêtre effective pour diminuer la variance et éviter l'apparition de points négatifs. Si l'interprétation n'est toujours pas complètement satisfaisante, il faut proposer soit les méthodes par déflation, soit « haute résolution » (en sous-bande).

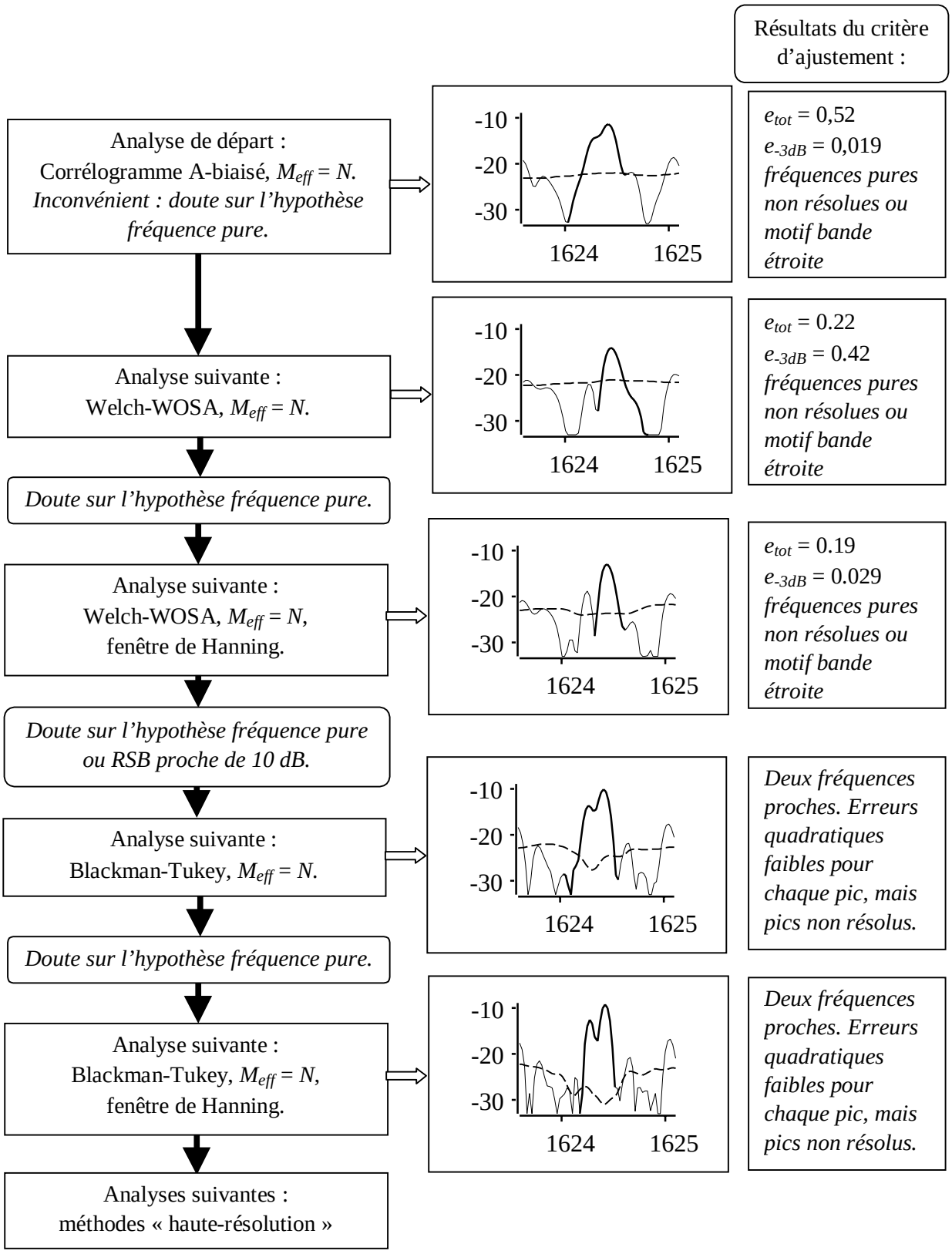


Figure 6.2-II : **démarche recherche de fréquence pure dans le cas d'un RSB moyen et d'un doute sur l'hypothèse fréquence pure**. Illustration sur un motif spectral du signal d'engrenages ENG8-E5-21RH-SPV. Sur les figures, les abscisses représentent les fréquences en Hz, les ordonnées représentent la DSP estimée en échelle décibel. Les pics d'intérêt sont en trait épais, tandis que le reste de la courbe est en trait fin. Le fond de spectre estimé par la méthode *n passes* est indiqué par la courbe en pointillés. Les paramètres utilisés sont ceux indiqués par défaut dans le paragraphe 6.1.2.

Cas 2 : rapport signal sur bruit faible (cf. Figure 6.2-III)

L'estimateur du corrélogramme A-biaisé (dans le cas $M_{eff} = N$) est le meilleur compromis puisqu'il permet d'obtenir une émergence maximale pour une des meilleures résolutions fréquentielles vis-à-vis des autres estimateurs. Un changement d'estimateur ou de paramètres doit permettre de confirmer la présence de la fréquence pure que l'hypothèse fréquence pure soit retenue ou qu'un doute subsiste. En effet, en cas d'émergence très faible, il peut subsister un doute sur la confiance que l'on peut attribuer à la présence effective de la fréquence pure. La poursuite de la recherche n'est prioritaire que pour les pics pour lequel un doute sur l'hypothèse subsiste ou pour les pics détectés uniquement avec une probabilité de fausse alarme supérieure à 10^{-5}. Sinon, cette poursuite est secondaire, l'objectif prioritaire dépendant des autres motifs du spectre. Le changement d'estimateur implique non seulement des changements au niveau de l'estimation de la fréquence pure considérée, mais aussi du fond de spectre. Le pic peut être mieux détecté ou au contraire ne plus être détecté. Suivant la classe de détection et la confirmation de la détection au fur et à mesure des étapes, un indice de confiance peut être attribué à la fréquence pure considérée. Nous ne rentrons pas dans les détails de la définition de cet attribut pour nous concentrer sur la démarche, bien que son évaluation reste un des objectifs. Nous proposons une démarche la plus complète possible dans l'optique de détecter au mieux l'ensemble des fréquences pures éventuellement présentes, même celles de plus faibles RSB. Les inconvénients et avantages de chaque estimateur, et par suite de l'estimation du fond de spectre associée, sont pris en compte.

Le premier changement à effectuer est d'appliquer l'estimateur Blackman-Tukey qui permet d'obtenir un nouveau compromis variance/résolution/fenêtre spectrale plus favorable qu'avec Welch-WOSA. La présence de lobes négatifs peut s'avérer un avantage pour mieux « isoler » les fréquences pures de leur voisinage. Ensuite, si des doutes subsistent ou si la fréquence pure n'est plus détectée, la fenêtre d'apodisation de la méthode Blackman-Tukey doit être modifiée en choisissant la fenêtre de Hanning.

L'utilisation de l'estimateur Welch-WOSA ne permet pas en général de détecter de nouvelles fréquences pures, sauf dans des cas particuliers problématiques pour l'estimation du fond de spectre. Par contre, elle permet de confirmer la présence de fréquence pure. Il est peu probable qu'un changement de fenêtre d'apodisation apporte plus d'informations par rapport aux étapes précédentes, nous ne proposons pas de continuer la démarche avec cet estimateur.

Pour continuer à confirmer la présence des fréquences pures, mais aussi pour suivre le comportement de l'ensemble des fréquences pures du signal, le support de la fenêtre effective est diminué. L'objectif est de diminuer la variance afin de mieux estimer le fond de spectre et ainsi de mieux assurer la présence des fréquences pures encore détectées. L'estimateur le plus adapté est Blackman-Tukey. Il permet de conserver une bonne résolution, tout en diminuant la variance et sans avoir de pied de pic aussi important qu'avec le corrélogramme A-biaisé. Le choix du support de la fenêtre effective est tout d'abord de 80% de la taille du signal, puis de 60%. Ces deux choix permettent d'obtenir des compromis offrant à la fois suffisamment de changements entre les analyses compte tenu de l'évolution des performances, sans trop dégrader la résolution fréquentielle. L'enjeu est également de suivre l'évolution de l'amplitude des fréquences pures. En effet, en normalisation *amplitude*, la DSP de la fréquence pure doit être du même ordre de grandeur. La densité de probabilité des estimateurs n'est pas connue dans le cas d'une fréquence pure. Il est alors difficile de mettre en place un critère s'appuyant sur l'estimation de l'amplitude d'une fréquence pure. Seuls des cas aberrants peuvent être détectés.

La démarche est présentée sur le diagramme de la Figure 6.2-III. Un exemple sur une partie du spectre du signal PEG-SH1-a11 présente les différents avantages de cette démarche.

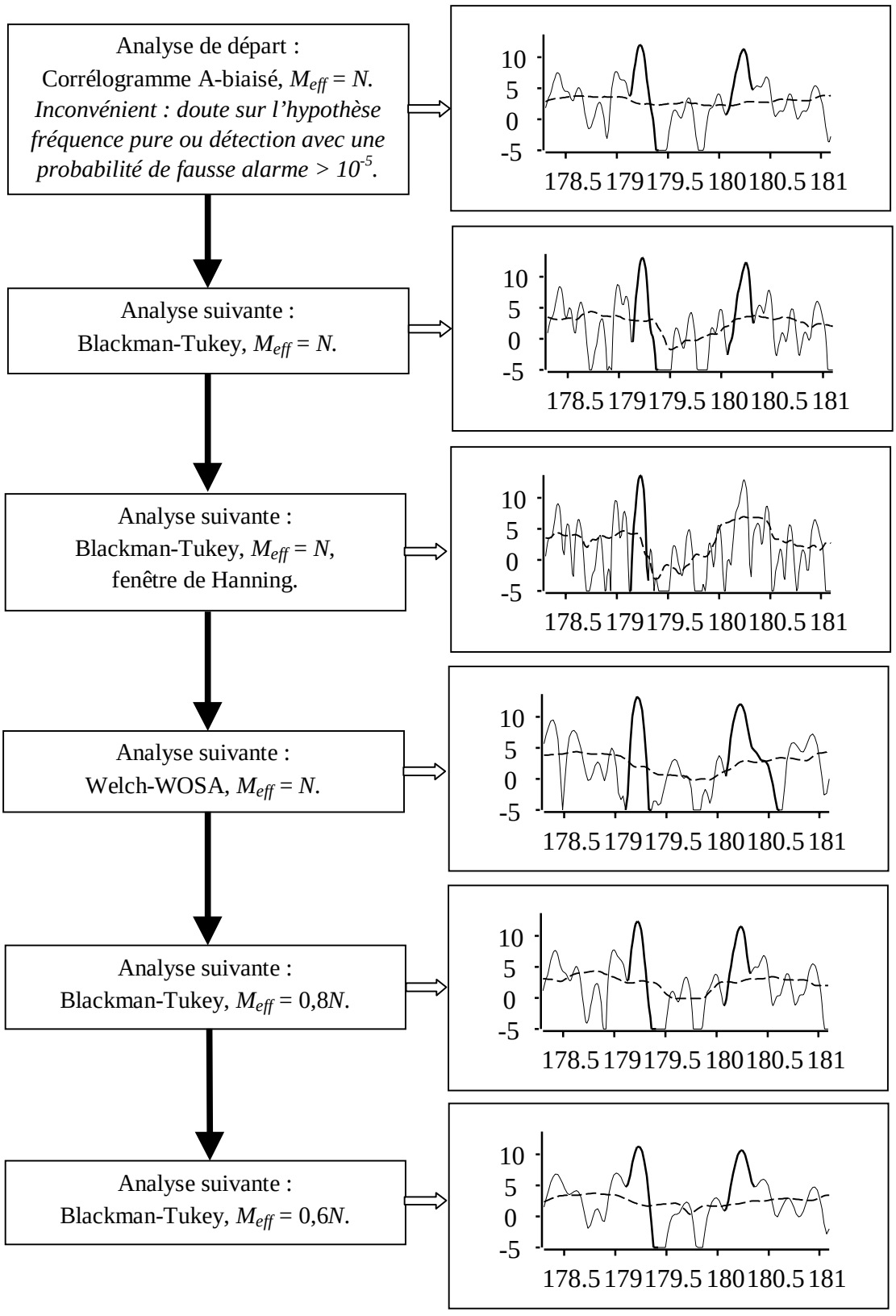
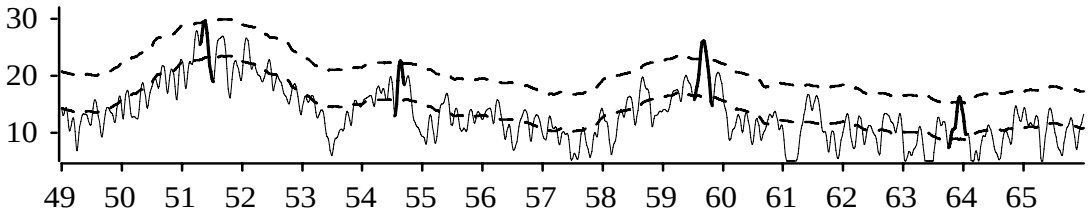
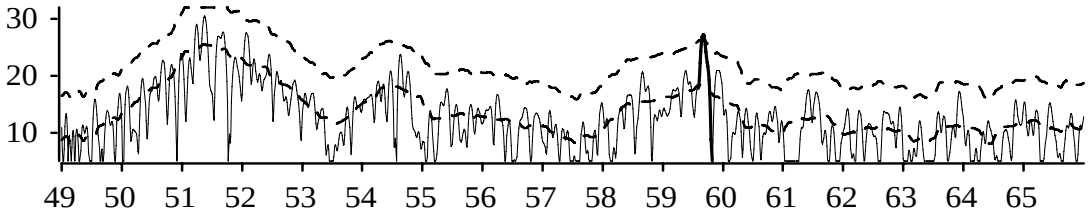


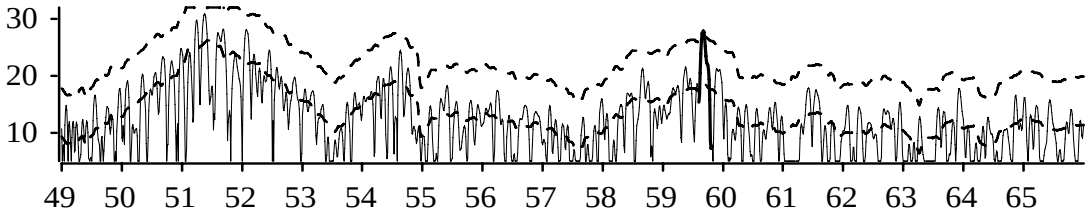
Figure 6.2-III : **démarche recherche de fréquence pure dans le cas d'un RSB faible**. Illustration sur deux motifs spectraux du signal PEG-SH1-a11 (DSP en décibel, abscisse en Hz), les pics sont en trait épais s'ils sont détectés avec une P_{fa} inférieure à 10^{-3}. Le pic de gauche (179,2 Hz) est toujours détecté avec une P_{fa} de 10^{-5} et l'hypothèse fréquence pure, tandis que le pic de droite (180,2 Hz) change de classe de détection entre les analyses et conserve toujours un doute sur l'hypothèse fréquence pure.



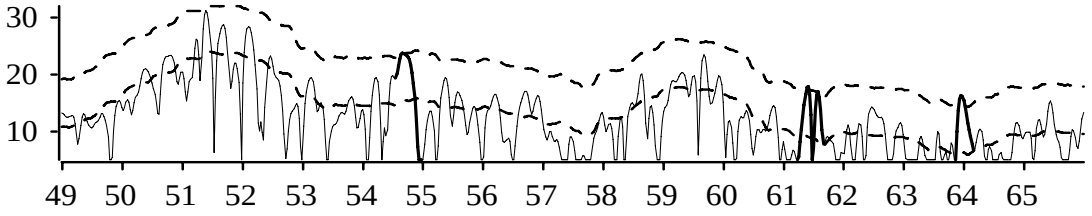
(a) Corrélogramme A-biaisé, $M_{eff} = N$.



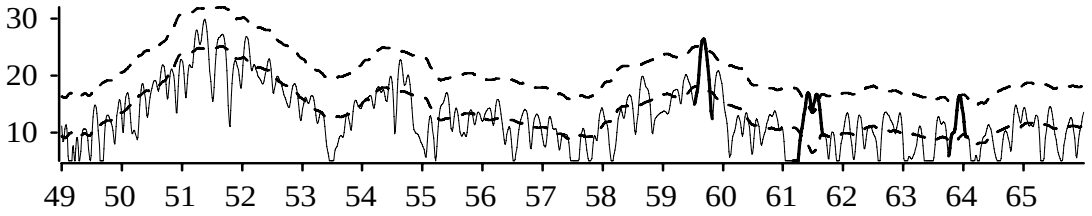
(b) Blackman-Tukey, $M_{eff} = N$.



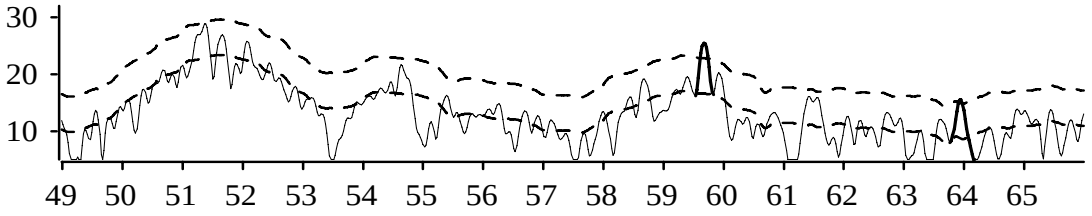
(c) Blackman-Tukey, $M_{eff} = N$, fenêtre de Hanning.



(d) Welch-WOSA, $M_{eff} = N$.



(e) Blackman-Tukey, $M_{eff} = 0{,}8N$.

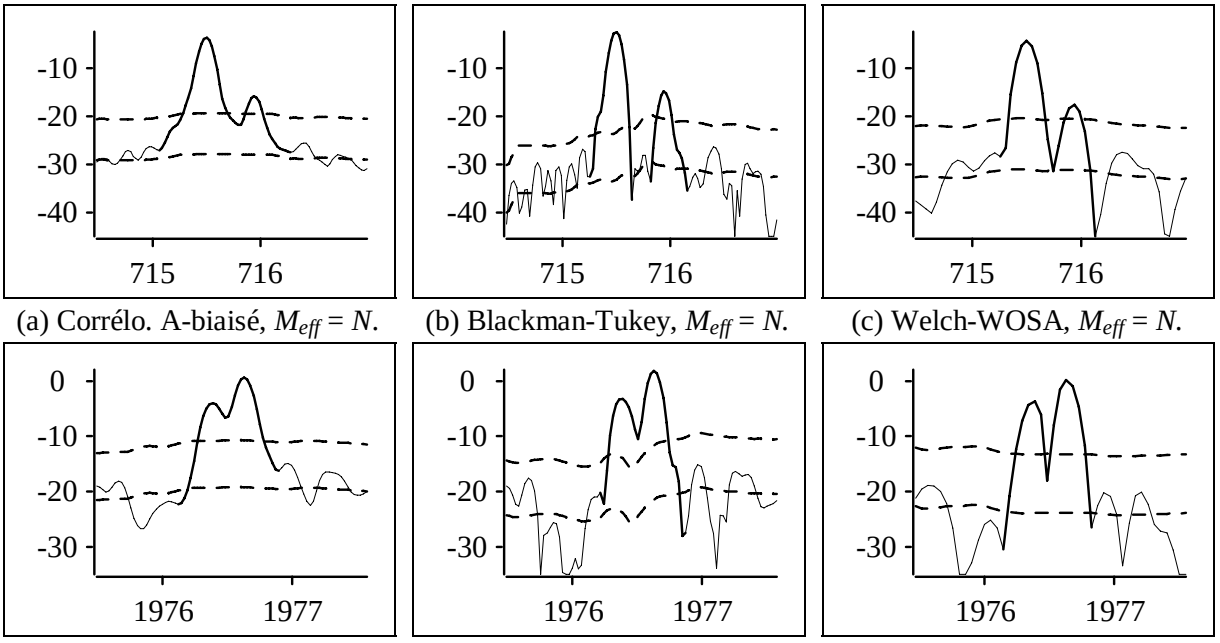


(f) Blackman-Tukey, $M_{eff} = 0{,}6N$.

Figure 6.2-IV : **illustration de la démarche recherche de fréquence pure dans le cas d'un RSB faible**, sur des motifs spectraux du signal PEG-SH1-a11 (DSP estimée en décibel, abscisse en Hz). Les pics sont en trait épais s'ils sont détectés avec une P_{fa} inférieure à 10^{-3}. Le fond de spectre estimé par la méthode *n passes* est indiqué par la courbe en pointillés (cf. paragraphe 6.1.2 pour les paramètres).

Sur l'exemple de la Figure 6.2-IV, le corrélogramme A-biaisé permet de détecter 4 pics. Les pics à 51,2 Hz et 54,6 Hz peuvent correspondre à l'hypothèse fréquence pure bien qu'un doute subsiste. Les erreurs quadratiques obtenues avec le critère d'ajustement de la fenêtre spectrale sont : erreur quadratique sur l'ensemble du pic e_{tot} = 0,019, erreur quadratique à –3 dB e_{-3dB} = 0,0017 pour le pic à 51,2 Hz et respectivement 0,06 et 0,01 pour le pic à 54,6 Hz. Ils n'émergent cependant que faiblement du fond de spectre et leur présence n'est pas confirmée par les autres analyses. L'hypothèse ne sera pas retenue pour ces deux pics. Leur détection dans le cas du corrélogramme est attribuée à l'estimation du fond de spectre. Le pic situé à 59,8 Hz est parfaitement détecté dans le cas du corrélogramme A-biaisé, mais offre des erreurs quadratiques égales à e_{tot} = 0,13 et e_{-3dB} = 0,014. L'hypothèse fréquence pure ne peut être certifiée. Cependant, cette fréquence pure est également parfaitement détectée (avec une probabilité de fausse alarme de 10^{-5} ou 10^{-4}) avec toutes les autres analyses sauf pour l'estimateur Welch-WOSA. De plus, les erreurs quadratiques sont plus faibles, avec en particulier dans le cas de Blackman-Tukey avec la fenêtre de Hanning, des erreurs égales à e_{tot} = 0,03 et e_{-3dB} = 0,0004. L'indice de confiance à attribuer à l'hypothèse fréquence pure pour ce pic doit être relativement important. Le pic à 64 Hz n'est détecté que par une partie des analyses, toujours à la limite de détection, mais avec une bonne correspondance avec l'hypothèse fréquence pure, sauf dans le cas Welch-WOSA. Enfin, l'analyse Welch-WOSA permet de détecter deux pics proches (aux alentours de 61,2 Hz), mais l'erreur quadratique sur l'ensemble du pic reste supérieur à 0,1 dans les deux cas. L'hypothèse fréquence pure ne peut être certifiée, mais l'erreur peut être due à leur proximité, ce qui peut expliquer également le fait que ces pics ne soient également détectés qu'avec la méthode Blackman-Tukey pour M_{eff} = 0,8N. Ces deux pics n'auront cependant qu'un indice de confiance faible.

Enfin, il convient de préciser que ces démarches restent valides lorsque plusieurs pics sont détectés proches les uns des autres. L'objectif est d'essayer de résoudre les fréquences pures pour confirmer leur présence et mieux les estimer (cf. Figure 6.2-V).



(a) Corrélo. A-biaisé, $M_{eff} = N$. (b) Blackman-Tukey, $M_{eff} = N$. (c) Welch-WOSA, $M_{eff} = N$.

(d) Corrélo. A-biaisé, $M_{eff} = N$. (e) Blackman-Tukey, $M_{eff} = N$. (f) Welch-WOSA, $M_{eff} = N$.

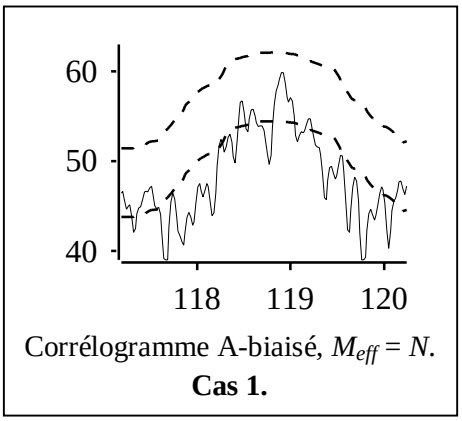
Figure 6.2-V : **séparation de deux fréquences pures** proches par comparaison de différents estimateurs sur des motifs spectraux du signal d'engrenage ENG8-E5-21RH-SPV (DSP estimée en décibel, abscisse en Hz). Le seuil de détection est obtenu pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-5} (trait en pointillés supérieur), les pics détectés sont en trait épais. Le fond de spectre est estimé par la méthode *n passes* (trait en pointillés inférieur, cf. paragraphe 6.1.2 pour les paramètres).

6.3. Objectif recherche de motifs bande étroite

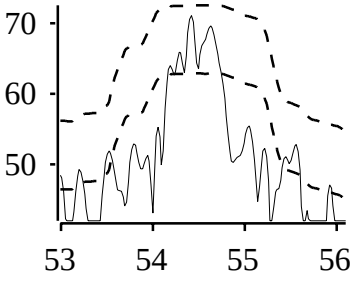
Cet objectif peut être fixé dès l'analyse primaire, mais également être proposé lors des analyses secondaires dans le cadre d'un autre objectif. Il est cependant préférable de terminer la démarche recherche de fréquence pure avant d'effectuer la recherche de motifs bande étroite. De plus, lorsque des fréquences pures sont détectées lors de la démarche de recherche de motifs bande étroite, il est conseillé d'effectuer l'objectif recherche de fréquence pure avant de reprendre la démarche. L'hypothèse bande étroite n'est pas facile à valider. En effet, il subsiste souvent un doute avec l'hypothèse « *plusieurs fréquences pures non résolues* ». Le comportement particulier des motifs bande étroite (aléatoire) doit être mis en évidence pour pouvoir prendre une décision sur le motif d'intérêt.

Le motif bande étroite concerné doit avoir une largeur de bande proche, mais supérieure, à celle de la fenêtre spectrale obtenue pour un support de fenêtre effective égal au nombre de points du signal. Suivant l'amplitude du motif et la variance de l'estimateur, quatre situations vis-à-vis des estimateurs et des critères d'interprétation peuvent se produire (cf. Figure 6.3-I) :

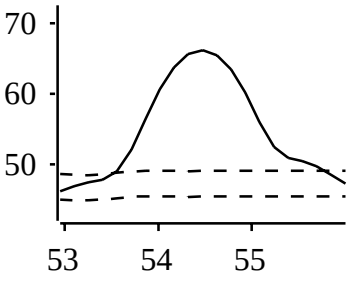
- **Cas 1** : le motif est constitué d'un ensemble de pics dus à la variance de l'estimateur et qui ne sont pas détectés par le critère de détection. Le motif est bien décrit par l'estimation du fond de spectre.
- **Cas 2** : le motif est également constitué d'un ensemble de pics dus à la variance de l'estimateur et qui ne sont pas détectés par le critère de détection. Pour un motif bande étroite, la ligne de fond de spectre a la plupart du temps du mal à effectuer un suivi correct des contours du motif. Le fond de spectre ne permet pas d'estimer correctement le motif.
- **Cas 3** : le motif est également constitué d'un ensemble de pics dus à la variance de l'estimateur, mais certains de ses pics sont détectés par le critère de détection. Le fond de spectre ne peut pas être un bon descripteur du motif. En général, les pics détectés ne correspondent pas à l'hypothèse fréquence pure et leur émergence les uns par rapport aux autres est faible (les pics ne sont pas résolus). Le critère d'ajustement de la fenêtre spectrale n'est pas fiable dans ce cas là.
- **Cas 4** : le motif apparaît sous la forme d'un pic unique qui émerge du fond de spectre et qui est détecté par le critère de détection, mais pour lequel l'hypothèse motif bande étroite peut être retenue. Cette configuration implique que la largeur de bande du motif est supérieure à celle de la fenêtre spectrale.
- **Cas 5** : le motif apparaît sous la forme d'un pic unique qui émerge du fond de spectre et qui est détecté par le critère de détection, mais pour lequel l'hypothèse fréquence pure est retenue. Le motif bien que bande étroite, a une largeur de bande inférieure à celle de la fenêtre spectrale. Dans cette configuration, le motif bande étroite est indécelable pour cette estimation.



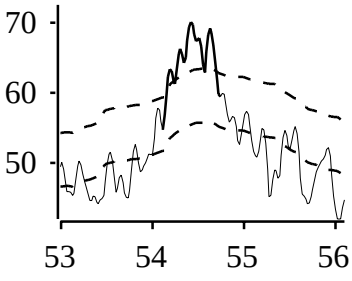
Corrélogramme A-biaisé, $M_{eff} = N$.
Cas 1.



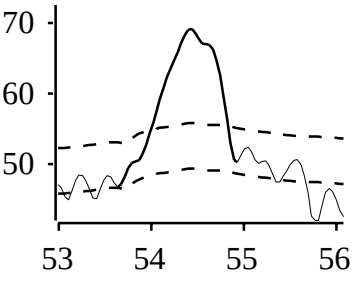
Welch-WOSA, $M_{eff} = N$.
Cas 2.



Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}15N$.
Cas 5.



Corrélogramme A-biaisé, $M_{eff} = N$.
Cas 3.



Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}5N$.
Cas 4.

Figure 6.3-I : **illustration du comportement des motifs bande étroite** en fonction de l'estimateur spectral et des critères d'interprétation, à partir de motifs du signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 (DSP estimée en décibel, abscisse en Hz). Les pics indiqués en trait épais sont ceux au-dessus du seuil de détection obtenu pour une P_{fa} de 10^{-4} (courbe supérieure en pointillés). Le fond de spectre est obtenu avec la méthode *n passes* (courbe inférieure en pointillés, cf. paragraphe 6.1.2).

Trois étapes distinctes se posent en vue de l'interprétation des motifs bande étroite :

1. la détection des motifs susceptibles d'être bande étroite,
2. la validation de l'hypothèse bande étroite,
3. l'estimation du motif.

1. La détection des motifs susceptibles d'être bande étroite.

Il s'agit de déterminer si la démarche « *recherche de motifs bande étroite* » doit être engagée. La détection effective d'un motif, pour lequel l'hypothèse bande étroite peut être retenue, ne peut

s'effectuer que dans les cas 3 et 4, où il y a effectivement détection. Le cas 1 n'est pas problématique car le motif est interprété via le fond de spectre, il ne sera détecté comme motif bande étroite que si lors d'une analyse secondaire le cas 3 ou 4 se présente pour la zone fréquentielle concernée.

Le cas 2 est problématique en l'absence d'un critère d'interprétation supplémentaire. En effet, il est difficile de déduire sans autre élément que le fond de spectre estime mal le motif. Un critère d'adéquation du fond de spectre peut être envisagé, mais nécessite deux conditions. La première est une segmentation du fond de spectre en motifs significatifs. La deuxième est un seuil de décision fondé sur la comparaison de la distribution des pics du spectre autour de chaque motif du fond de spectre. Une voie pourrait être d'estimer pour chaque motif du fond de spectre (exempt de fréquence pure) l'erreur quadratique entre les points du spectre estimé et le fond de spectre. En normalisant par l'estimation du fond de spectre, l'erreur doit être de l'ordre de la variance normalisée théorique de l'estimateur dans le cas d'une estimation correcte du fond de spectre. Dans le cas contraire l'erreur sera supérieure. Il reste à proposer un seuil de décision. Cette idée de critère, à inscrire au titre des perspectives pour améliorer l'interprétation, n'a pas été développé plus avant au cours de la présente étude.

En l'absence de critère supplémentaire, le cas 2 peut mener à de légères erreurs d'estimation et ne permet pas une détection immédiate du caractère bande étroite. Ces erreurs restent de l'ordre de l'intervalle de confiance puisque le critère de qualité de fond de spectre et celui de détection fixent les bornes du cas 2. Par ailleurs, ce cas peut être levé lors d'une analyse suivante, l'estimation du motif concerné étant modifié.

Le cas 3 se caractérise par la présence d'un ou plusieurs pics détectés proches les uns des autres ayant pour caractéristiques : d'être asymétrique et/ou les points du pic sont supérieurs au fond de spectre et/ou l'hypothèse fréquence pure ne peut être retenue d'après le critère d'adéquation de la fenêtre spectrale. L'hypothèse d'un motif bande étroite doit être envisagée, mais l'estimation est inadéquate pour estimer correctement le motif et pour confirmer l'hypothèse.

Le cas 4 permet de retenir l'hypothèse bande étroite par le résultat du critère d'ajustement de la fenêtre spectrale.

Le cas 5 ne permet pas de conclure à l'hypothèse bande étroite et nécessite d'envisager une démarche recherche de fréquence pure. Celle-ci permettra de conclure à la validité de l'hypothèse fréquence pure dans les limites des performances des estimateurs de type Fourier.

Les différentes conditions d'enclenchement de la démarche de recherche de motifs bande étroite peuvent être obtenus, soit lors d'une analyse secondaire, soit dans le cas d'une analyse primaire. Dans tous les cas, il est recommandé d'effectuer prioritairement la recherche de fréquence pure si elle est nécessaire. L'analyse qui mène à l'enclenchement de la démarche n'a pas obligatoirement pour caractéristique d'être proche de la résolution fréquentielle maximale, soit tel que le support de la fenêtre effective est proche du nombre de points du signal. La démarche recherche de motifs bande étroite n'est enclenchée que lorsque le cas 3 ou le cas 4 se présente et que la bande du motif concerné peut être caractérisée de bande étroite (cf. paragraphe 4.4.1, tableau Tab. 4.4-I)), c'est-à-dire pour une largeur de bande de l'ordre inférieure à $80/NT_e$. Dans le cas contraire, le motif sera considéré comme large bande et est traité par la démarche de recherche de motifs large bande. Cette restriction implique que la résolution doit rester bonne et que la variance ne peut être très faible.

En l'absence de critère d'adéquation du fond de spectre et de détection par le cas 3 ou 4 lors de l'analyse primaire (avec l'objectif recherche de motif bande étroite) ou après la conclusion de l'objectif recherche de fréquence pure, la démarche recherche de motif bande étroite est proposée en objectif secondaire. La phase qui suit consiste à faire varier la résolution fréquentielle pour mettre en évidence la présence éventuelle de motifs bande étroite. Le support de corrélation est fixé à la taille du signal, à 75%, puis à 50% de la taille du signal en utilisant le corrélogramme A-biaisé pour obtenir le meilleur compromis résolution/variance. En l'absence de détection de cas 3 ou 4, la démarche est abandonnée. Nous considérons que le reste des motifs est large bande.

2. Validation de l'hypothèse bande étroite.

Une validation de l'hypothèse bande étroite nécessite une décision entre l'hypothèse bande étroite et l'hypothèse plusieurs fréquences pures proches. La conclusion finale sur les motifs concernés n'est que la plus probable. La validation la plus complète passe par l'analyse du motif en le considérant tout d'abord comme plusieurs fréquences pures proches. La première phase consiste à appliquer la démarche de recherche de fréquences pures pour vérifier qu'il ne s'agit effectivement pas de plusieurs fréquences pures. En cas d'échec, c'est-à-dire que seuls des cas 1,2,3 ou 4 apparaissent, l'hypothèse bande étroite est retenue. Dans le cas, où l'hypothèse fréquences pures peut être envisagée pour les différents pics qui composent le motif (pris séparément), mais que les pics ne sont pas bien résolus, l'hypothèse bande étroite est retenue comme alternative. On cherche alors à estimer le motif dans cette hypothèse. Cette validation n'est pas nécessaire dans l'ensemble des cas. En particulier, nous considérons que si le cas 4 se présente avec une bande supérieure à deux fois la largeur de bande de la fenêtre spectrale ou que l'hypothèse motif bande étroite peut être retenue (hypothèse déterminée par le critère d'ajustement de la fenêtre spectrale), la validation est automatique. D'autant plus, que ce cas ne se produit que si la démarche recherche de fréquences pures n'a pas été mise en œuvre précédemment. Nous sommes alors dans le contexte d'une hypothèse donnée par la pré-analyse d'un signal à motifs bande étroite ou large bande. La validation par l'application de la démarche recherche de fréquence pure, n'est proposée qu'en objectif secondaire, l'objectif prioritaire étant de poursuivre l'objectif recherche de motifs bande étroite.

3. Estimation d'un motif bande étroite.

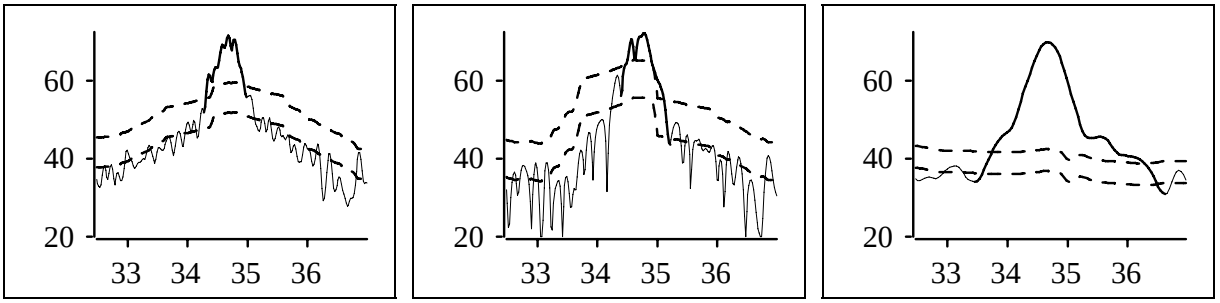
Une fois qu'un motif bande étroite a été détecté et validé, le troisième point à considérer est l'estimation du motif. Le motif concerné peut être difficile à estimer via le fond de spectre. La meilleure estimation est obtenue lorsque le motif est dans le cas 4. Dans ce cas, l'estimation du motif est donnée par l'estimateur spectral et les limites du motif sont déterminées par les minima du pic. La meilleure estimation est obtenue lorsque le motif ne forme qu'un pic unique émergent par rapport au fond de spectre et que la bande de la fenêtre spectrale est inférieure à celle du motif.

Suivant le point de départ qui a mené à la détection, la démarche consiste à augmenter ou diminuer la résolution fréquentielle, en augmentant ou diminuant le support de la fenêtre effective pour tendre vers le cas 4. Il n'est pas simple de fixer précisément la résolution adéquate, ni de déterminer un point d'arrêt. Une première possibilité consiste à choisir une résolution de l'ordre de la moitié de la bande estimée du motif. Cette bande doit être estimée à partir du fond de spectre dans les cas 1, 2 et 3, en supposant que le fond de spectre puisse être segmenté en motifs significatifs. Dans le cas 4, il suffit de se baser sur la largeur de bande du pic détecté. L'objectif est alors de mieux cerner la forme du motif. En l'absence de référence, la résolution doit être augmentée ou diminuée progressivement suivant les résultats obtenus à chaque étape. Il est nécessaire de choisir l'estimateur adapté suivant le support de la fenêtre effective obtenu et le motif. Les compromis sont sensiblement équivalents au cas d'une fréquence pure, bien que l'aspect résolution soit moins crucial.

Nous considérons deux cas suivant l'émergence des motifs. Pour une émergence importante, c'est à dire pour une émergence supérieure à environ 15 dB, la méthode Welch-WOSA est la plus adaptée. Elle permet de limiter l'influence des lobes secondaires de la fenêtre spectrale et de limiter le biais au lobe principal. L'influence des motifs du voisinage et ainsi limitée et la forme du motif mieux cernée. Dans le cas où l'émergence est plus faible, il est nécessaire de limiter la variance pour mieux faire apparaître le motif. Le choix dépend du support de la fenêtre effective. Pour un support supérieur à 50% de la taille du signal, le meilleur compromis est obtenu pour la méthode du corrélogramme A-biaisé. Sinon, la méthode Welch-WOSA est optimale. La méthode Blackman-Tukey est à éviter de par la présence des lobes secondaires négatifs qui rendent difficile l'estimation correcte du motif.

Nous présentons deux exemples sur des motifs bande étroite. Le premier exemple est un motif d'émergence importante du signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6. L'objectif est notamment de montrer

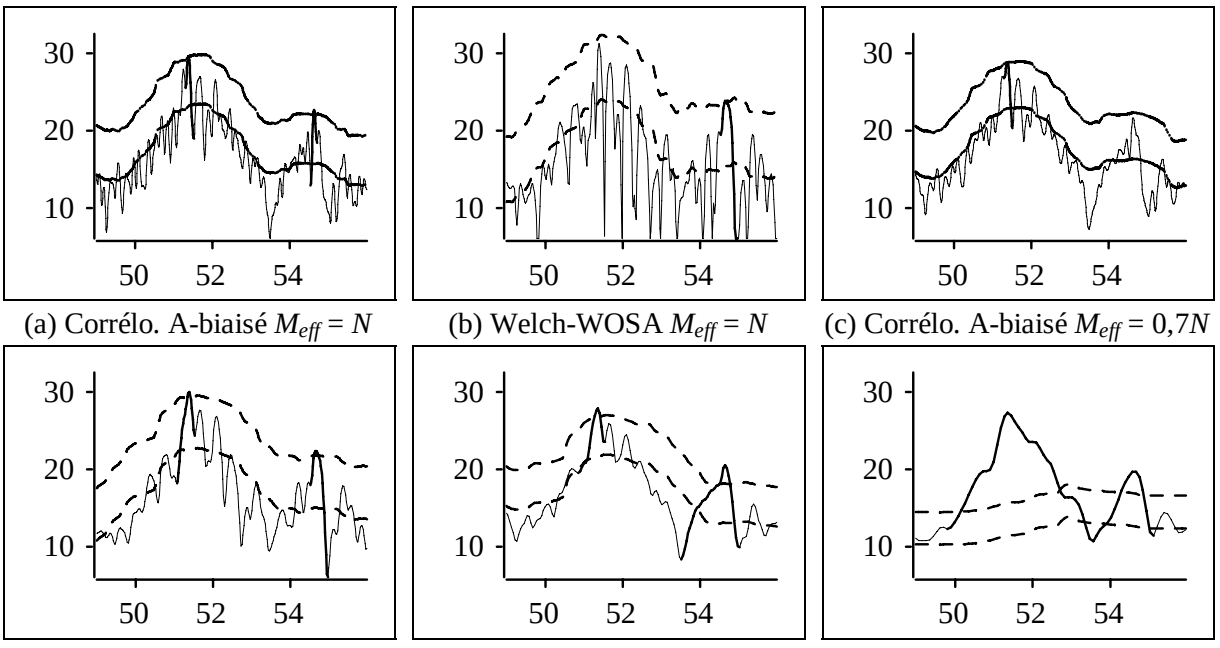
l'intérêt d'appliquer la méthode Welch-WOSA vis-à-vis du corrélogramme A-biaisé pour mieux cerner et estimer le motif (cf. Figure 6.3-II).



(a) Corrélo. A-biaisé, $M_{eff} = N$. (b) Welch-WOSA, $M_{eff} = N$. (c) Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}26N$.

Figure 6.3-II : **illustration de la démarche de recherche de motifs bande étroite sur un motif fortement émergent** du signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 (DSP estimée en décibel, abscisse en Hz). Les pics indiqués en trait épais sont ceux au-dessus du seuil de détection obtenu pour une P_{fa} de 10^{-4} (courbe supérieure en pointillés). Le fond de spectre est obtenu avec la méthode *n passes* (courbe inférieure en pointillés, cf. paragraphe 6.1.2 pour les paramètres). Le critère d'ajustement de la fenêtre spectrale dans le cas (c) donne une erreur quadratique totale de 1 et une erreur à –3 dB de 0,5.

Le deuxième exemple est constitué de deux motifs d'émergence moindre du signal PEG-SH1-a11. Ces deux motifs ont été présentés dans le cadre de la démarche recherche de fréquence pure (cf. Figure 6.2-IV). Aucune fréquence pure n'a pu être confirmée à l'intérieur de ces deux motifs, bien que des détections aient été établies. Ces motifs sont alors analysés dans le cadre de la démarche recherche de motifs bande étroite. Le premier motif est à la limite d'un motif large bande, puisqu'il peut être analysé via le fond de spectre, mais il peut également être détecté et estimé par la démarche de recherche de motif bande étroite. Les motifs sont parfaitement détectés et estimés lorsque la résolution diminue. Nous montrons des analyses intermédiaires de la démarche pour mettre en évidence le comportement des motifs vis-à-vis des estimateurs.



(a) Corrélo. A-biaisé $M_{eff} = N$ (b) Welch-WOSA $M_{eff} = N$ (c) Corrélo. A-biaisé $M_{eff} = 0{,}7N$

(d) Welch-WOSA $M_{eff} = 0{,}7N$ (e) Corrélo. A-biaisé $M_{eff}=0{,}45N$ (f) Welch-WOSA $M_{eff} = 0{,}3N$

Figure 6.3-III : **illustration de la démarche de recherche de motifs bande étroite sur deux motifs d'émergence moyenne et faible** du signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 (DSP estimée en décibel, abscisse en Hz). Les pics indiqués en trait épais sont ceux au-dessus du seuil de détection obtenu pour

une P_{fa} de 10^{-4} (courbe supérieure en pointillés). Le fond de spectre est obtenu avec la méthode *n passes* (courbe inférieure en pointillés, cf. paragraphe 6.1.2 pour les paramètres). Les estimations (b) et (d) ne font pas parties de la démarche telle qu'elle a été présentée dans le cas de motifs de faible émergence. Elles sont présentées à titre de comparaison avec les autres estimations pour justifier le choix de la démarche. Il convient plus particulièrement d'observer les différences dues à l'augmentation de variance de l'estimateur Welch-WOSA par rapport au corrélogramme A-biaisé.

6.4. Objectif recherche de motifs large bande

Le dernier type de motifs à estimer sont les motifs large bande. Nous n'avons pas déterminé une définition exacte d'un motif large bande par rapport à un motif bande étroite. Nous considérons qu'un motif est large bande lorsque sa largeur de bande (entre les deux minima du motif) est supérieure à $80\Delta\nu$ avec $\Delta\nu$ la résolution fréquentielle maximale que l'on puisse espérer ($\Delta\nu = 1/NT_e$, N nombre de points du signal, T_e période d'échantillonnage). Ceci n'est qu'un ordre de grandeur qui ne prend pas en compte la dynamique du motif. En pratique, nous nous intéressons aux motifs qui n'ont été ni détectés, ni estimés lors des démarches recherche de fréquences pures ou de motifs bande étroite. Nous considérons que ces motifs font partie du fond de spectre.

Si l'analyse primaire se place dans le cadre d'une hypothèse large bande, mais que des motifs bande étroite ou des fréquences pures sont détectés, les démarches liées à ces hypothèses sont proposées en objectif prioritaire. Dans le cadre de cet objectif, nous ne cherchons pas à détecter avec précision les différents motifs, mais à estimer la DSP de chaque fréquence n'appartenant pas aux autres types de motifs. La démarche large bande doit cependant tenir compte des autres motifs.

Tout comme pour les fréquences pures, il est impossible de détecter et d'estimer correctement tout type de motifs large bande. Tout dépend de la forme des motifs et de leur dynamique. L'objectif est de diminuer la variance de l'estimation afin de les détecter et de les estimer avec une variance minimale. Le compromis à obtenir dépend de la largeur et de la dynamique des motifs larges bande.

Une variance importante est synonyme d'une bonne résolution fréquentielle et d'une meilleure émergence des fréquences pures. Cette configuration est nécessaire pour la détection des fréquences pures et des motifs bande étroite, mais ne permet pas de détecter et d'estimer correctement les motifs large bande. La variance de l'estimateur du fond de spectre est proportionnelle à celle de l'estimateur spectral (sauf pour le filtrage morphologique). Si la variance de l'estimateur est importante, celle de l'estimateur du fond de spectre l'est également. La plupart des petites variations du fond de spectre ne sont pas significatives. Il est nécessaire de diminuer la variance pour rendre significatives les variations et mieux estimer les motifs. Les motifs concernés ne sont pas bande étroite, la résolution peut être notablement diminuée par rapport à la résolution fréquentielle maximale. L'objectif est d'associer chaque fréquence à un motif significatif en minimisant la variance tout en trouvant le compromis avec la résolution fréquentielle qui permet de limiter le biais.

Nous considérons qu'un motif est significatif lorsque, sur l'estimation spectrale, il ne forme qu'un pic de largeur de bande (entre ses deux minima) supérieure à celle de la fenêtre spectrale et qu'il est significatif par rapport à la variance.

Les motifs larges bandes peuvent être estimés soit par l'estimateur du fond de spectre, soit par l'estimateur spectral. La difficulté consiste à trouver le bon compromis résolution/variance. Lorsque la variance diminue, la résolution fréquentielle se dégrade également. Au niveau de l'estimation du fond de spectre se pose alors un problème de suivi des motifs. Le problème devient particulièrement délicat lorsque dans une bande de fréquence, plusieurs motifs deviennent significatifs. L'estimation du fond de spectre permet théoriquement de détecter tout motif émergent, de bande proche de celle de la fenêtre spectrale, par rapport à son voisinage. Dés que les motifs dans une zone de fréquence ont tous une bande supérieure à celle de la fenêtre spectrale, l'estimation du fond de spectre est biaisée.

L'estimation ne correspond plus au spectre du bruit aléatoire à spectre continu. L'estimation du fond de spectre peut malgré tout permettre de détecter des motifs large bande, mais la détection devient très dépendante du voisinage et du motif considéré.

Un nouveau critère de détection adapté doit être mis en place. Pour déterminer quelle estimation décrit au mieux un motif, ce critère peut être combiné avec des critères de comparaison entre les différentes estimations. Nous n'avons pas complété ces derniers critères qui demandent une réflexion complémentaire, puis une validation sur des signaux synthétiques et réels. Notre objectif dans ce paragraphe est d'ouvrir la voie à une démarche « automatisée », en présentant ses enjeux et le principe du critère de détection des motifs large bande.

6.4.1. La détection des motifs large bande

Lorsque l'on s'intéresse aux motifs large bande et en dessous d'une certaine variance, il est nécessaire de changer le mode de détection des motifs. Ceux-ci ne doivent plus être détectés par rapport au fond de spectre, mais par rapport à leur structure vis-à-vis des performances de l'estimation. Nous indiquons ci-dessous le principe de détection envisagé, une étude plus complète doit être poursuivie pour en préciser le choix des paramètres qui ne sont indiqués ici que par leur ordre de grandeur.

L'intervalle de confiance I à (1-α)x100% est défini en décibel comme un intervalle constant ne dépendant que du degré de liberté associé à l'estimateur et de la probabilité α (cf. paragraphe 3.2.2.1, équation 3.2-33). En choisissant α de manière adéquate, les variations du spectre non significatives doivent être inférieures à l'intervalle de confiance. La probabilité α est à relier à la notion de probabilité de fausse alarme comme pour le critère de détection.

Le spectre est segmenté en pics délimités par deux minima locaux. Pour qu'un pic forme un motif large bande significatif vis-à-vis de la variance, il faut comparer l'intervalle de confiance à la différence d'amplitude entre chaque minima du pic et son maximum (en échelle décibel).

Soit ν_{gch} la fréquence du minimum gauche du pic, ν_{dt} la fréquence du minimum droit du pic et ν_{max} la fréquence du maximum du pic. Un pic est considéré comme significatif par rapport à la variance si :

$$10\log_{10}(I(\alpha)) < 10\log_{10}\left(\hat{\gamma}(\nu_{max}) - \hat{\gamma}(\nu_{gch})\right) \text{ et } 10\log_{10}(I(\alpha)) < 10\log_{10}\left(\hat{\gamma}(\nu_{max}) - \hat{\gamma}(\nu_{dt})\right) \quad (6.4\text{-}1)$$

Mais pour considérer que l'estimation décrit bien le motif large bande, il est également nécessaire que la bande du motif ν_{dt}-ν_{gch} soit supérieure à la bande B du lobe principal de la fenêtre spectrale (on pourrait également se fonder sur la bande statistique équivalente, cf. paragraphe 2.4.4). Nous considérons que le motif n'est bien décrit que si :

$$\nu_{dt}-\nu_{gch} > 3B \quad (6.4\text{-}2)$$

La détection peut être étendue au cas où seul un des deux côtés du pic dépasse l'intervalle de confiance pour permettre la détection de motifs larges bandes proches ou dans le cas d'un motif situé dans une « pente » du spectre.

L'ordre de grandeur de la probabilité α doit être de l'ordre de 10^{-2}, ce qui correspond à un intervalle de confiance à 99%. Cette détection n'est à appliquer que lorsque la variance est suffisamment faible et lorsque les problèmes d'estimation du fond de spectre risquent d'apparaître. Ce cas correspond à une variance normalisée de l'ordre de 0,05, soit pour un support de fenêtre effective de l'ordre de 30% de la taille du signal. Cette détection doit être appuyée par le critère de détection à partir du fond de spectre, afin de détecter, dans les zones qui le permettent, les motifs émergents dont la largeur de bande est proche de celle de la fenêtre spectrale.

6.4.2. Démarche associée aux motifs large bande

Considérons tout d'abord le cas d'une zone fréquentielle constituée de motifs large bande et éventuellement de fréquences pures ou de motifs bande étroite de faible, voir moyenne émergence. Dans cette éventualité, nous considérons que les objectifs recherche de fréquences pures et de motifs bande étroite ont été complétés. Nous nous plaçons également dans le cas où l'analyse primaire ne correspondait pas à l'objectif recherche de motifs large bande. Il n'existe alors pas d'hypothèse sur les motifs large bande. Les motifs large bande ne sont estimables et détectables que lorsque la variance est suffisamment faible (sinon il s'agit de motifs bande étroite). Le point de départ de la démarche consiste à utiliser un support de fenêtre effective de 40% de la taille du signal, qui permet à la fois de diminuer la variance tout en maintenant une résolution fréquentielle suffisante pour détecter les motifs les moins larges. La démarche qui suit est résumée sur la Figure 6.4-I.

Pour ce support de fenêtre effective, la méthode la plus adaptée est la méthode Welch-WOSA avec la fenêtre d'apodisation de Blackman. Elle offre à la fois le meilleur compromis résolution/variance et des lobes secondaires de la fenêtre spectrale bien atténuée par rapport au lobe principal. Le biais est donc principalement limité au lobe principal. Cette configuration est favorable pour minimiser le biais des motifs du voisinage du motif d'intérêt, d'autant plus que l'on dégrade volontairement la résolution. La démarche ne conduit qu'à utiliser des supports de fenêtre effective inférieurs à 40% de la taille du signal. La méthode Welch-WOSA est toujours la méthode la plus adaptée dans le cadre de la démarche.

Un support de fenêtre effective de 40% de la taille du signal donne une variance normalisée de 0,22. Le fond de spectre reste adapté à la détection des motifs émergents de bande proche de celle d'un motif bande étroite. Pour tout motif émergent du fond de spectre ne correspondant pas à une fréquence pure ou à un motif bande étroite précédemment détecté et estimé, la stratégie à adopter pour l'estimation du motif est identique à celle d'un motif bande étroite : faire varier légèrement la résolution fréquentielle pour obtenir un pic émergent de bande supérieure à celle de la fenêtre spectrale. Pour le reste du spectre, l'estimation du fond de spectre forme une première estimation des motifs large bande. Elle peut servir de référence, mais la variance reste importante (cf. Figure 6.4-II (a)).

Il convient ensuite de diminuer la variance pour faire apparaître les motifs large bande. Une diminution du support de fenêtre effective de moitié permet de diminuer la variance tout en doublant la résolution fréquentielle. Ce nouveau compromis modifie la variance sans trop dégrader la résolution. Suivant la largeur des motifs, le suivi du fond de spectre peut devenir difficile. La variance normalisée étant encore relativement importante (0,1), la détection des motifs doit encore s'effectuer via le critère de détection à partir du fond de spectre, toujours pour s'intéresser aux motifs large bande émergents par rapport aux autres motifs (cf. Figure 6.4-II (b)).

La suite d'étapes suivantes consiste, à chaque étape, à multiplier par deux la résolution fréquentielle (à diviser par deux le support de la fenêtre effective). A chaque étape, on applique les deux critères de détection (détection de motifs émergents du fond et de motifs large bande, cf. Figure 6.4-III). On ne s'intéresse plus à obtenir une bonne adéquation du fond de spectre sur l'ensemble du spectre. L'estimation du fond de spectre se limite à un objectif de détection. La démarche présentée paragraphe 6.1.2, associée aux problèmes d'estimation du fond de spectre n'est plus indispensable. On se contente de l'estimation obtenue avec les paramètres par défaut, même si elle surestime localement le vrai fond de spectre. En effet, un changement de paramètres de l'estimation n'améliore que rarement la détection des motifs large bande et risque même de la détériorer.

On ne s'intéresse qu'aux bandes du spectre qui ne font pas partie d'un motif détecté et estimé par une étape précédente. Il faut préciser que la présence de fréquences pures, voir de motifs bande étroite, de faible ou moyenne émergence, ne biaise que de façon négligeable l'estimation des motifs large bande (de par le lissage). Des fréquences pures proches peuvent apparaître sous la forme d'un

motif unique lorsqu'elles ne sont plus résolues. L'interprétation est aisée puisque leur estimation a déjà été effectuée. Seuls des fréquences pures ou des motifs bande étroite d'émergence importante peuvent perturber l'estimation des motifs large bande sur lesquels ils sont localisés. L'ordre de grandeur est un rapport signal sur bruit local d'émergence de 15 dB.

Dès qu'un motif large bande est détecté et estimé, l'interprétation de la bande fréquentielle concernée n'est plus à effectuer lors des étapes suivantes. De plus, lorsque deux motifs larges bandes ont été détectés et que leur proximité est inférieure à deux fois la bande *B* de la fenêtre spectrale, l'estimation de la bande fréquentielle comprise entre les deux motifs est estimée par l'estimation spectrale de variance minimale. En effet, si on dégrade encore la résolution fréquentielle, on risque de biaiser fortement cette bande fréquentielle, en particulier dans les « creux » du spectre. A chaque motif est également associé en tant qu'attribut, la variance normalisée de l'estimation qui a permis sa détection. La démarche s'arrête lorsque l'ensemble des fréquences sont associées à un motif ou à une estimation. Il est également possible de fixer une variance normalisée que l'on considère comme satisfaisante vis-à-vis de l'exigence de l'analyse. La démarche s'arrête lorsque cette variance normalisée est atteinte. Chaque fréquence qui n'a pas été précédemment associée à un motif est associé à cette dernière estimation.

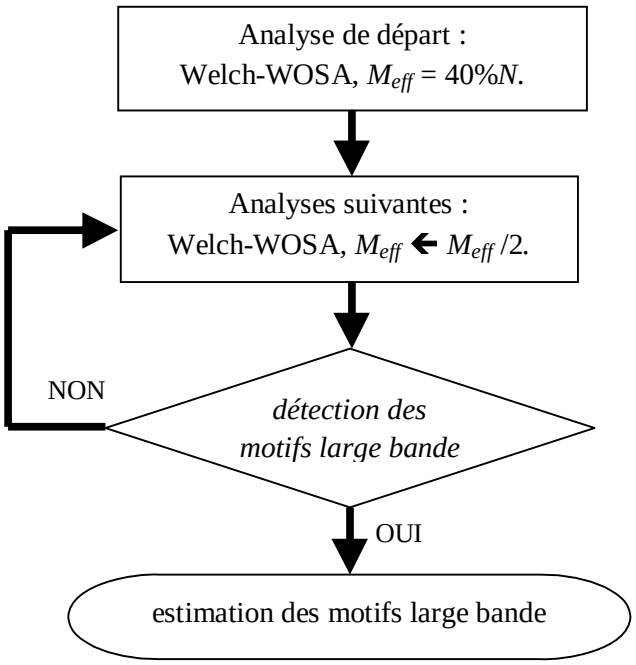
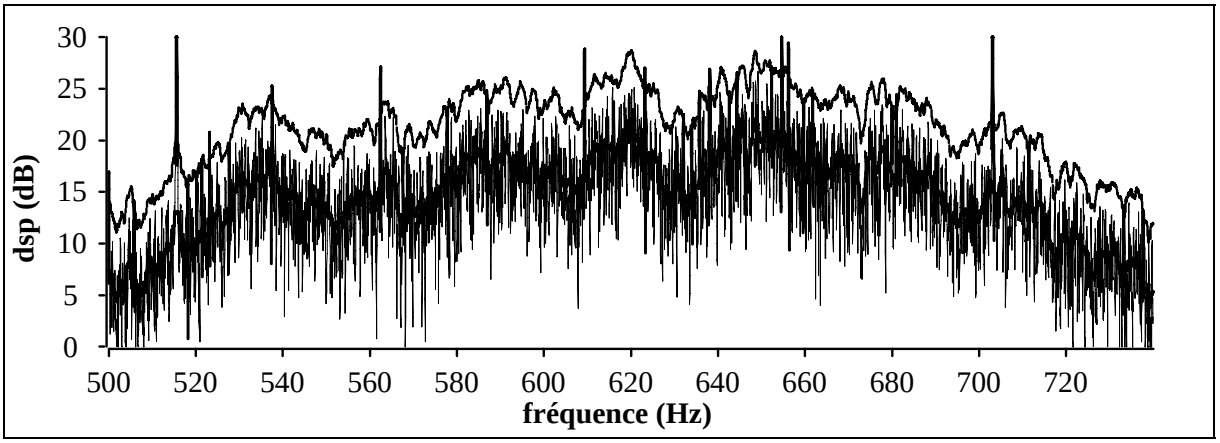
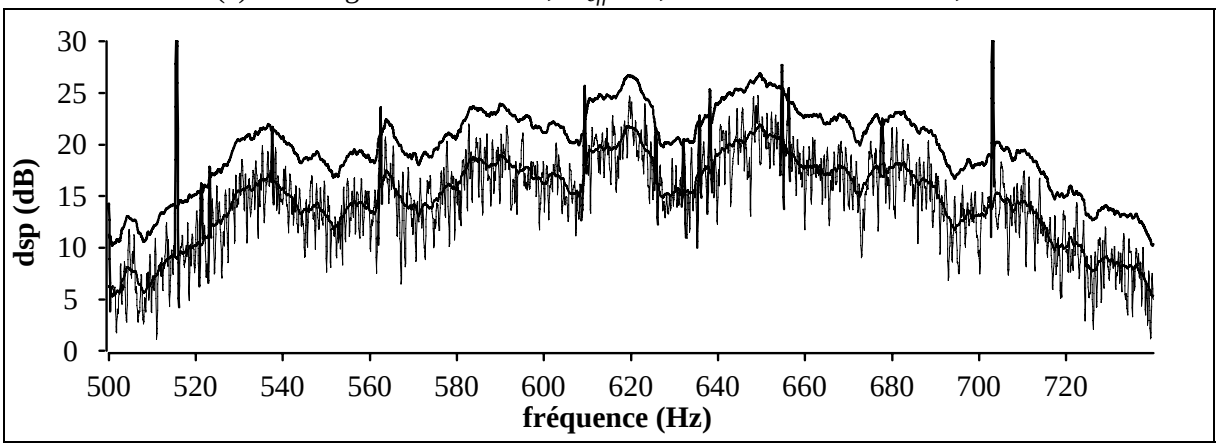


Figure 6.4-I : **démarche recherche de motifs bande étroite** pour une zone fréquentielle constituée de motifs large bande et éventuellement de fréquences pures ou de motifs bande étroite de faible, voir moyenne émergence.

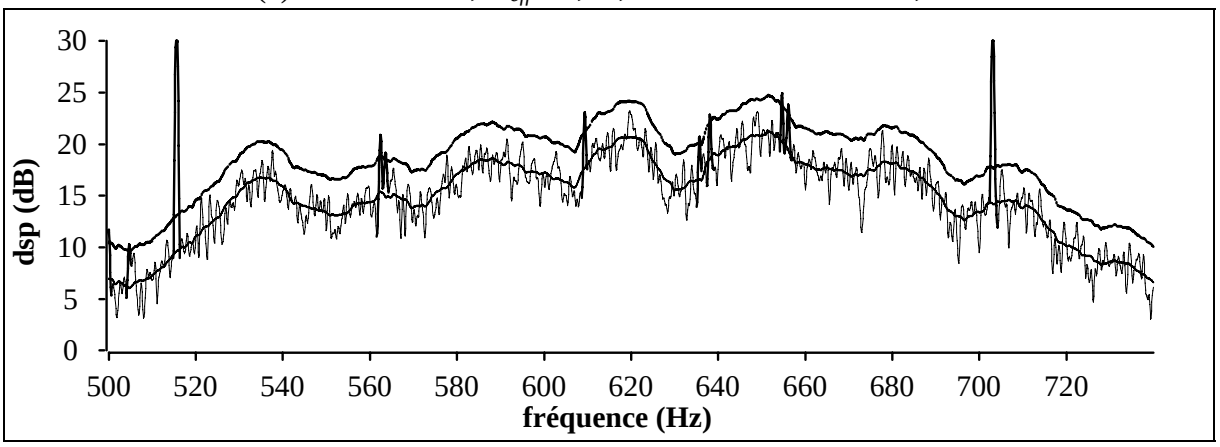
Pour illustrer cette démarche, nous présentons différentes analyses du signal PEG-SH1-a11 sur une bande fréquentielle constituée de motifs large bande, mais aussi de quelques fréquences pures. Nous ne détaillons pas l'interprétation de chaque motif, mais présentons l'évolution de l'ensemble de l'estimation spectrale et du fond de spectre sur la bande fréquentielle pour différentes étapes de la démarche. Les motifs large bande sont dus à des résonances de la structure, excités par des fréquences pures, et au bruit du fluide qui s'écoule dans la pompe.



(a) Corrélogramme A-biaisé, $M_{eff} = N$, variance normalisée = 0,49.

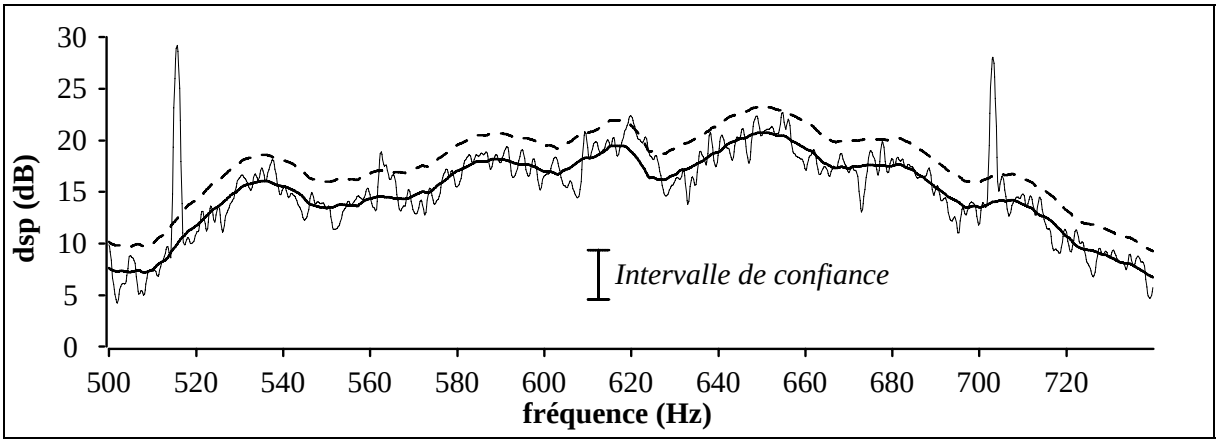


(b) Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}4N$, variance normalisée = 0,22.

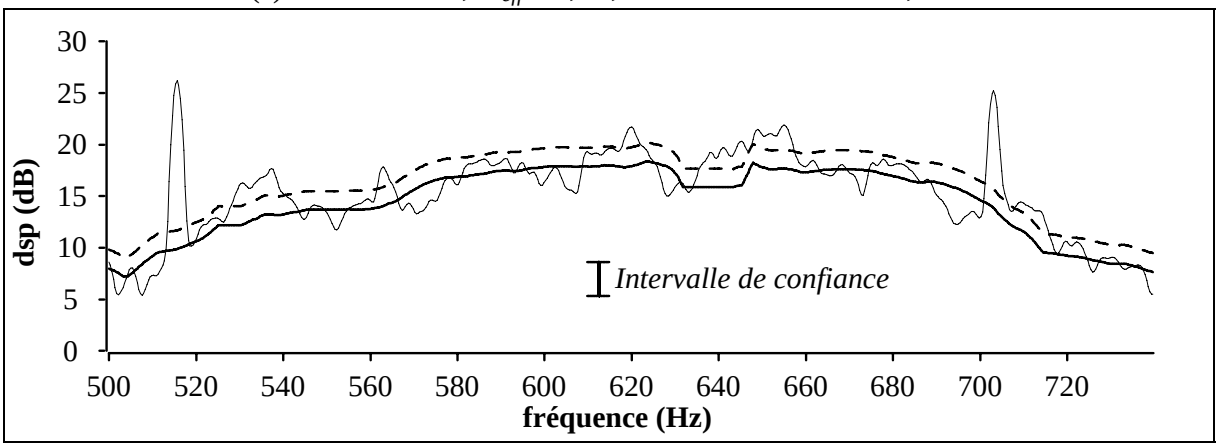


(c) Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}2N$, variance normalisée = 0,095.

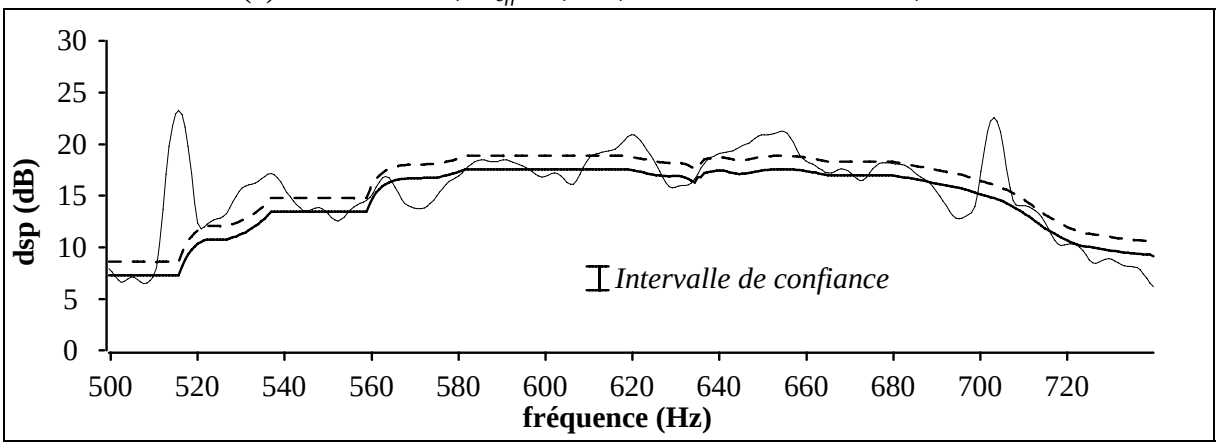
Figure 6.4-II : **signal PEG-SH1-a11**, différentes analyses spectrales de la démarche de **recherche de motifs large bande** pour les fréquences comprises entre 500 Hz et 740 Hz. Les pics du spectre détectés pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-3} sont en trait épais, les autres pics sont en trait fin. L'estimation du fond de spectre est obtenue par la méthode *n passes* (courbe en trait moyen). Le seuil de détection est représenté par la courbe supérieure à celle du fond de spectre (en trait moyen également). L'estimation (a) est liée à la démarche recherche de fréquences pures dans l'objectif de détecter au mieux les fréquences pures. L'estimation (b) est la première étape de la démarche recherche de motifs large bande, l'estimation du fond de spectre peut servir de référence à l'estimation des motifs large bande. L'estimation (c) permet de commencer à détecter le motif situé à côté de la fréquence pure à 562 Hz.



(a) Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}1N$, variance normalisée = 0,044.



(b) Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}05N$, variance normalisée = 0,021.



(c) Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}025N$, variance normalisée = 0,001.

Figure 6.4-III : **signal PEG-SH1-a11**, différentes analyses spectrales de la démarche de **recherche de motifs large bande** pour les fréquences comprises entre 500 Hz et 740 Hz. La DSP estimée est représenté par la courbe en trait fin. L'estimation du fond de spectre est obtenue par la méthode *n passes* et est représentée par la courbe en trait épais. Le seuil de détection obtenu pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-3} est représenté par la courbe en pointillés. Enfin, l'intervalle de confiance à 99% est indiqué sur chaque figure. On constate de manière générale que l'estimation du fond de spectre est souvent inadaptée pour décrire les motifs du fond de spectre. En particulier, sur l'estimation (c) le fond de spectre permet uniquement d'estimer de façon globale le motif très large bande dans la bande fréquentielle concernée, mais pas les différents motifs larges bandes qui le composent. L'estimation (a) permet de détecter à partir du fond de spectre, le motif situé aux alentours de 620 Hz et confirme la détection du motif situé aux alentours de 565 Hz, bien que la fréquence pure

située à 562 Hz en gêne encore l'estimation. L'estimation (b) permet de détecter et d'estimer correctement les motifs situés aux alentours de 565 et 620 Hz. D'autres motifs sont détectés par le critère de détection à partir du fond de spectre. L'estimation (c) permet de détecter et d'estimer une majorité des motifs larges bandes. La détection est obtenue soit à partir du fond de spectre, soit à partir de l'intervalle de confiance.

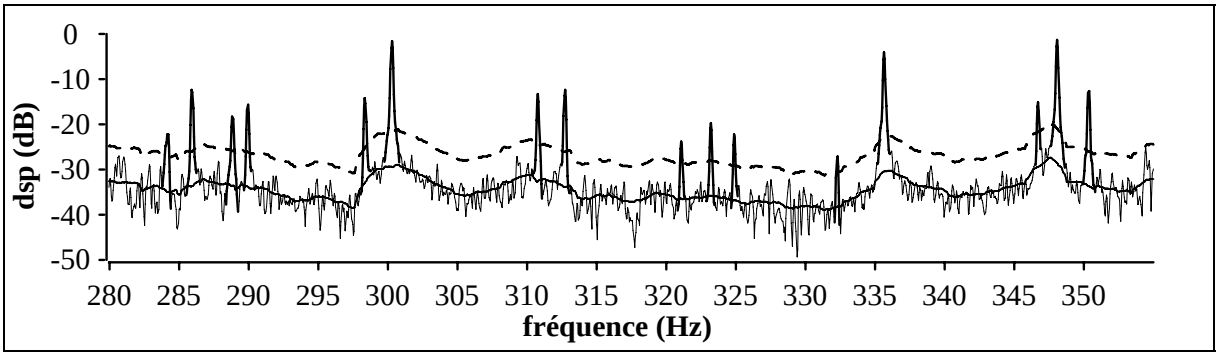
Lorsque des fréquences pures d'émergence importante sont présentes, ou que plusieurs fréquences pures sont proches les unes des autres, il n'est plus possible d'estimer le motif large bande sur lequel elles sont localisées en diminuant la variance de l'estimation spectrale. Le biais devient trop important. Il est nécessaire de se fonder sur l'estimation du fond de spectre.

Dans le cas d'une fréquence pure isolée, un bon compromis variance/résolution, qui ne détériore pas trop le suivi du fond de spectre, est obtenu pour un support de fenêtre effective de l'ordre de 20 à 10% de la taille du signal. L'estimation du fond de spectre permet d'estimer localement la DSP du motif large bande sur lequel elle est localisée. La zone fréquentielle concernée par l'estimation dépend du motif considéré et des motifs du voisinage. Pour automatiser la démarche, il conviendra de la préciser.

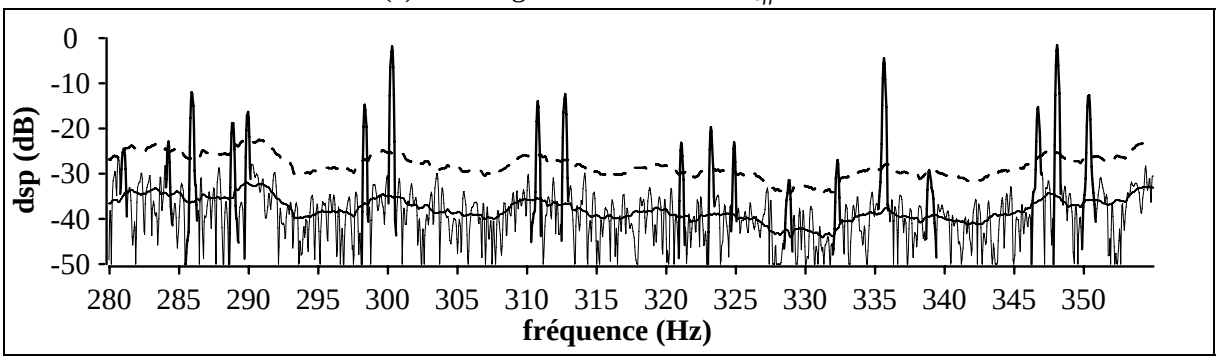
Dans le cas de plusieurs fréquences pures proches, il est nécessaire de se placer dans une configuration où les fréquences pures sont résolues, avec, si possible, un écart supérieur à la largeur de bande *B* de la fenêtre spectrale (étant donné les caractéristiques de l'estimateur du fond de spectre). Par ailleurs, il convient d'utiliser une estimation pour lequel le pied de pic ne perturbe pas le fond de spectre. D'après le paragraphe sur l'objectif recherche de fréquences pures, si le support de fenêtre effective est supérieur à 40% de la taille du signal et l'émergence inférieure à 20 dB, la méthode du corrélogramme A-biaisé offre le meilleur compromis résolution/variance. Sinon, la méthode Welch-WOSA est la plus appropriée.

Remarquons que cette démarche est également appropriée à la présence de motifs bande étroite. L'analyse la plus adaptée est celle qui permet l'estimation correcte du motif ou celle qui permet de n'obtenir pour le motif qu'un seul pic émergent de bande proche de celle de la fenêtre spectrale.

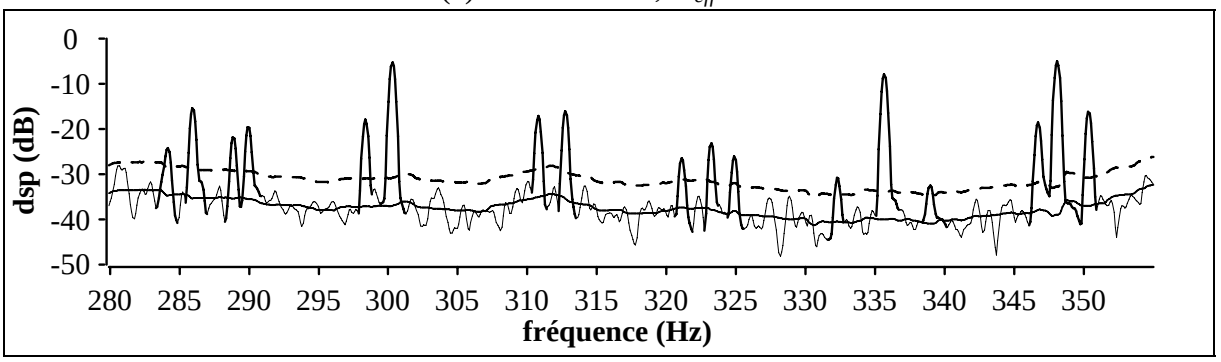
Le cas de fréquences pures proches est illustré sur le signal d'engrenages ENG8-E5-21RH-SPV. Nous présentons trois analyses (cf. Figure 6.4-IV). La première avec l'estimateur du corrélogramme A-biaisé dans le cas où le support de la fenêtre effective est égal à la taille du signal. Nous constatons que bien que les fréquences soient bien résolues, la présence de fréquences pures d'émergence importante ne permet pas, dans leur voisinage, une estimation correcte du fond de spectre. La troisième permet une estimation correcte du fond de spectre pour la majeure partie de la bande fréquentielle présentée. Elle est obtenue avec la méthode Welch-WOSA pour un support de la fenêtre effective égale à 45% de la taille du signal. Enfin, pour la comparaison, nous présentons sur la deuxième courbe, l'estimation obtenue avec la méthode Welch-WOSA pour un support de fenêtre effective égale à la taille du signal.



(a) Corrélogramme A-biaisé, $M_{eff} = N$.



(b) Welch-WOSA, $M_{eff} = N$.



(c) Welch-WOSA, $M_{eff} = 0{,}45N$.

Figure 6.4-IV : **démarche de recherche de motifs large bande dans le cas de la présence de fréquences pures d'émergence importante**. Illustration sur le signal ENG8-E5-21RH-SPV pour les fréquences comprises entre 280 Hz et 355 Hz. Les pics indiqués en trait épais sont détectés par le critère de détection pour une P_{fa} de 10^{-4}. Le seuil de détection est indiqué en pointillés. Le fond de spectre est obtenu avec la méthode *n passes* (courbe en trait épais).

Enfin, dans le cas où l'analyse primaire est associée à l'objectif recherche de motifs large bande, le point de départ de la démarche est déterminé par le point méta-scénario de la pré-analyse. L'objectif recherche de fréquences pures n'est proposé en objectif prioritaire, que si des fréquences pures sont détectées. Sinon, l'objectif est proposé en objectif secondaire, une fois la démarche recherche de motifs large bande terminée. Une amélioration de la résolution fréquentielle peut être nécessaire si des motifs sont détectés et qu'ils ont une bande très proche de celle de la fenêtre spectrale, ou s'il existe un doute sur l'hypothèse à associer au motif. La résolution est alors divisée par deux, puis éventuellement ajustée pour estimer les différents motifs concernés. Sinon, la démarche reste identique à celle présentée précédemment, seul le point de départ est modifié.

6.5. Conclusion sur le méta-scénario

La démarche d'analyse proposée représente la stratégie retenue pour détecter, estimer et caractériser les différentes composantes spectrales d'un signal à l'aide d'attributs. Elle ne s'attache pas à déterminer quel estimateur avec ses paramètres est le plus approprié, mais à comparer et à faire évoluer les paramètres des estimateurs. Trois objectifs distincts sont mis en évidence afin d'estimer les différents types de structures qui composent les signaux réels de la banque ASPECT. Les propriétés et spécificités de chaque estimateur sont employées pour détecter et estimer les fréquences pures, les motifs bande étroite et les motifs large bande. L'aspect détection et l'aspect estimation composent les deux grands axes de la démarche. La détection nécessite de comparer les résultats de différentes estimations et utilise les critères d'interprétation. L'estimation d'un motif est obtenue à partir d'une analyse particulière, mais nécessite également de comparer les analyses et les résultats des critères afin de déterminer l'analyse la plus adéquate.

Le méta-scénario, qui constitue l'ensemble de la démarche d'analyse, s'appuie sur les résultats des critères d'interprétation et a été mis en place dans l'objectif de pouvoir guider un système. Cependant, nous n'avons pas mis au point l'ensemble des éléments qui permettent d'assister automatiquement la démarche. Il s'agit notamment de critères quantitatifs de comparaison des estimations entre elles. Cette comparaison intervient lors de l'étape d'interprétation comparative (cf. chapitre 1), l'interprétation brute étant assurée à l'aide des critères d'interprétation spectrale. Ces critères de comparaison doivent mener à la mise en place d'indices de confiance chargés d'estimer la probabilité de présence de chaque motif spectral détecté (notamment les fréquences pures). Ils doivent également permettre d'assister les démarches recherche de motifs bande étroite et de motifs large bande. Par ailleurs, une analyse spécifique du fond de spectre et de son adéquation avec l'estimation spectrale devrait permettre de faciliter l'interprétation des motifs. Les indices de confiance doivent être déterminés lors du point charnière et peuvent nécessiter des techniques telles que la logique floue. Nous nous contentons sur ces points de remarques qualitatives tout en envisageant les pistes à explorer pour la mise au point de critères de comparaison. Par ailleurs, nous n'avons pas mis au point de seuil de décision prenant en compte l'ensemble des motifs détectés pour choisir l'analyse suivante et qui nécessite d'utiliser des techniques d'analyse de données. Nous présentons une démarche adaptée aux différents types de motifs spectraux vis-à-vis de leur environnement spectral local. Pour faire un choix global, il faut prendre en compte l'ensemble des éléments qui constituent le spectre.

Enfin, notons que le méta-scénario est restreint aux analyses de type Fourier, mais qu'il devra par la suite permettre de faire le lien et de guider les autres types d'analyses envisagées. Parmi ces analyses nous citerons la méthode par déflation, les analyses haute-résolution en sous-bande, dont l'objectif est de préciser ou confirmer l'analyse de bandes fréquentielles cruciales, la détection d'harmoniques, les analyses cepstrales et cyclostationnaires, qui permettent éventuellement de compléter l'analyse du signal.

Conclusion et perspectives

Les méthodes d'analyse spectrale sont nombreuses, parfois complexes à maîtriser. Chacune a ses avantages et ses inconvénients. Il est difficile, et souvent inadéquat, pour un expert en traitement du signal de choisir un estimateur particulier (et ses paramètres) en fonction du signal à analyser. Notre approche a suivi une voie différente. L'objectif n'est pas de choisir l'estimateur le plus adapté, mais d'appliquer un concept de décision fondé sur une confrontation de méthodes. Ainsi les propriétés de chaque estimateur sont mises à profit pour détecter, estimer, classifier à l'aide d'attributs, les différentes composantes spectrales. La démarche d'analyse est guidée par un méta-scénario qui permet de définir une suite d'étapes pour compléter l'analyse. Chaque étape est définie par le résultat des étapes précédentes en fonction des connaissances formalisées dans le méta-scénario. La perspective finale est de guider une analyse grâce à un système à base de connaissances qui prendra en charge la proposition des objectifs d'analyse, la proposition des étapes et l'interprétation des résultats.

Le contexte du système est lié aux signaux réels fournis par les partenaires industriels de l'opération ASPECT : EDF et le CTSN. Deux domaines principaux d'application se sont dégagés :

- la mécanique vibratoire, pour la surveillance de l'état vibratoire de machines et auxiliaires (CTSN), et la surveillance d'engrenages et de machines tournantes (EDF) ;
- l'acoustique, pour la mesure de bruits propres et rayonnés (CTSN).

Le choix a été fait de ne prendre en compte les informations *a priori* qu'en fin d'analyse, bien qu'elles puissent intervenir à tout moment pour modifier la démarche. Les domaines d'applications sont ainsi plus vastes. Deux contraintes sont cependant dégagées : le signal contient toujours une partie aléatoire à puissance moyenne finie stationnaire et spectre continu, et les signaux sont « longs » (supérieurs à 50 000 points en général). Ce contexte a placé les estimateurs de type Fourier comme une étape nécessaire, essentielle et parfois suffisante de la démarche. L'étude présentée est centrée autour des estimateurs de type Fourier, bien que dans le cadre de l'opération ASPECT d'autres types d'analyses aient été étudiés (méthode par déflation, méthodes « haute-résolution », analyse cyclostationnaire…).

La première partie de l'étude a consisté à maîtriser les différents estimateurs de type Fourier : Welch-WOSA, Blackman-Tukey, Per-Cor, le Corrélogramme A-biaisé, STUSE. A travers une synthèse originale, nous nous sommes attachés à définir les liens entre les paramètres et les performances des estimateurs. Par une étude approfondie des variations des performances en fonction des paramètres, nous avons pu optimiser le choix des paramètres en fonction de la performance recherchée. Les avantages et inconvénients de chaque méthode ont été mis en évidence. Une définition commune des performances, nous a permis de comparer les estimateurs entre eux. Les performances sont liées aux notions de variance normalisée et de fenêtre spectrale (qui détermine la résolution fréquentielle), mais aussi de densité de probabilité des estimateurs. Nous avons mis en évidence que la densité de probabilité de tous les estimateurs de type Fourier, dans l'hypothèse d'un signal aléatoire à puissance moyenne finie, pouvait être approché par une loi gamma.

Trois estimateurs ont été retenus dans le cadre du système : la méthode Welch-WOSA qui permet d'obtenir le meilleur compromis variance/résolution/fenêtre spectrale lorsque la résolution est faible, la méthode du corrélogramme A-biaisé qui offre le meilleur compromis résolution/variance lorsque la résolution est importante (le pied de pic des fenêtres spectrales est par contre important) et la méthode Blackman-Tukey qui offre des compromis intermédiaires.

Une fois cette étude des estimateurs complétée, des scénarios d'analyse effectués sur des signaux réels nous ont permis de valider les résultats, mais surtout de considérer le déroulement d'une démarche d'analyse. Au travers de cette démarche, des critères ont pu être envisagés afin d'aider l'interprétation des différentes étapes.

La première phase de la démarche est la pré-analyse. L'objectif est d'une part de générer des alarmes : problèmes d'échantillonnage, détection de non-stationnarités, changement de propriétés statistiques au cours du temps, et d'autre part de proposer des hypothèses sur la nature du signal : signal quasi-périodique, présence de fréquences pures, bruit coloré dont le support de corrélation est estimé... Des critères originaux ont été mis au point afin de déterminer ces différents éléments. Ces critères ont été validés sur les signaux réels de l'opération ASPECT. Un point méta-scénario permet de conclure sur les hypothèses à associer au signal. Ensuite, il permet de proposer un objectif prioritaire d'analyse (recherche de fréquences pures, de motifs bande étroite, de motifs large bande). Enfin, il définit les paramètres de la première analyse spectrale de la démarche : l'analyse primaire.

La seconde phase de la démarche consiste à analyser spectralement le signal par une suite d'étapes fondées sur les estimateurs de type Fourier. Des critères ont été mis en place pour aider à l'interprétation des estimations et à la caractérisation des motifs spectraux. Ils se fondent sur les propriétés statistiques et structurelles des estimateurs :

- *l'estimation du fond de spectre* a deux objectifs : permettre l'estimation des motifs associés à la partie aléatoire du signal de bande supérieure à celle de la fenêtre spectrale et détecter les motifs ne correspondant pas à cette hypothèse. Une nouvelle méthode a été mise en place, la méthode *n passes*. Elle permet de prendre en compte les caractéristiques statistiques de chaque estimateur. Ses performances vis-à-vis des autres méthodes, tant du point de vue détection qu'estimation, en font la méthode privilégiée. Les autres méthodes interviennent en appui lorsque la situation le nécessite ;
- *le critère de qualité du fond de spectre* permet de vérifier les risques de surestimation du fond de spectre ;
- *le détecteur* classique associé au périodogramme a été généralisé à l'ensemble des estimateurs de type Fourier. La généralisation a été obtenue grâce à la connaissance de la densité de probabilité des estimateurs. Ce critère permet de détecter tout motif émergent du fond de spectre, en particulier les fréquences pures, en fonction des performances de l'estimation ;
- *le critère d'ajustement de la fenêtre spectrale* permet de valider ou de rejeter l'hypothèse fréquence pure pour les motifs détectés. Il fonctionne par comparaison, après ajustement, du modèle fréquence pure donné par la fenêtre spectrale au pic émergent.

A partir de ces différents critères, de l'étude des estimateurs et des scénarios, nous avons mis au point le méta-scénario. Il permet de guider et de définir la stratégie d'analyse à poursuivre. Les étapes de l'analyse ne sont pas systématiques, elles dépendent des résultats précédents. La démarche est orientée sur trois objectifs : la recherche de fréquences pures, la recherche de motifs bande étroite et la recherche de motifs large bande. Chaque objectif mène à une démarche différente intégrant la détection des motifs spectraux et leur estimation.

Afin d'automatiser le méta-scénario, il serait avantageux de poursuivre le développement de nouveaux critères d'interprétation. Quelques pistes ont été envisagées afin d'obtenir des critères de comparaison entre les analyses spectrales et entre l'estimation du fond de spectre et l'estimation spectrale. Une analyse particulière du fond de spectre qui permettrait de le découper en motifs élémentaires faciliterait l'interprétation. La mise en place effective d'indices permettant d'indiquer la confiance que l'on a dans la présence de chaque motif serait également souhaitable. Enfin, les critères de décision pour le choix des objectifs, des étapes et de l'arrêt de la démarche doivent être affinés. Ces éléments demandent une ouverture vers les techniques d'analyse de données et par exemple de logique floue.

L'étude présentée est centrée sur les estimateurs de type Fourier. D'autres analyses, spectrales ou non, ont été étudiées (méthode par déflation, analyses « haute-résolution », détection d'harmoniques, cyclostationnarité…). Un axe de développement consiste à intégrer ces différentes analyses au sein du système. Le méta-scénario doit alors être adapté à chacune des analyses proposées.

Les résultats d'ASPECT sont essentiellement des résultats théoriques validés sur des signaux réels, ce qui montre la validité des hypothèses pour les signaux étudiés. Pour réaliser cette validation, les méthodes utilisées, les critères proposés et une interface de visualisation ont été programmés. Cette maquette a un intérêt suffisant pour prévoir une diffusion plus large après une mise à niveau.

A plus long terme, un système intégrant les éléments proposés dans le méta-scénario est souhaité. Cette intégration induirait la manipulation de données symboliques en plus des données numériques. Le modèle de programmation à base de connaissance nécessite la participation d'un partenaire tel que l'INRIA. Après avoir pris contact avec l'équipe du projet SHERPA de l'INRIA-Rhône-Alpes, un cahier des charges pour une étude de faisabilité du système a été réalisé. Ce système constitue l'objectif final de l'opération ASPECT. Il est également essentiel de le mettre en place pour valider et faire évoluer la démarche. La gestion des différents résultats ne peut plus être effectuée manuellement, il est nécessaire de l'intégrer dans un système pour valider l'enchaînement des étapes de la démarche.

Bibliographie

Les références bibliographique sont classées par thème :
- Estimateur spectraux (cyclostationnarité et cepstre).
- Estimateurs de la ligne de fond de spectre.
- La détection.
- Statistiques et probabilités.
- Les systèmes à base de connaissances.
- Rapports internes de l'opération ASPECT.

Estimateurs spectraux :

[ADN90-1] C. ADNET, N. MARTIN
Unified and Intelligent Spectral Analysis.
Proceeding of ICASSP, Albuquerque, USA – avril 1990.

[ADN90-2] C. ADNET
Unification des méthodes d'analyse spectrale en vue de la réalisation d'un système expert d'aide à l'analyse.
Thèse de Doctorat de l'INPG - octobre 1990.

[ADN90-3] C. ADNET, N. MARTIN
A First Step in the Building of a Spectral Analysis Expert System.
EUSIPCO, Barcelona, Espagne – septembre 1990.

[ALL77] J. B. ALLEN
Short-Time Spectral Analysis, Synthesis, and Modification by Discrete Fourier Transform.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 25, p. 235-238 - juin 1977.

[ALL79] J. B. ALLEN, L. R. RABINER
Unbiased Spectral Estimation and System Identification Using Short-Term Spectral Analysis Methods.
Bell Syst. Tech. J., vol. 58, no. 8, p. 1743-1763 - octobre 1979.

[BAR48] M.S. BARTLETT
Smoothing Periodograms from Times Series with Continuous Spectra.
Nature, London. Vol. 161 - mai 1948.

[BLA-TUK58] R.B. BLACKMAN, J.W. TUKEY
The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering.
Dover, New York – 1958.

[BRI70] D. R. BRILLINGER
The frequency analysis of relations between stationary spatial series.
Proc. Biennal Sem. Canad. Math. Congr. (éd. R. Pyke). Douzième Canad. Math. Congr., Montréal - 1970.

[CAP92-1] C. CAPDESSUS
Aide au diagnostic des machines tournantes par traitement du signal.
Thèse de doctorat de l'INPG - 1992.

[CAP92-2] C. CAPDESSUS, M. SIDAHMED
Analyse des vibrations d'un engrenage : cepstre, corrélation, spectre.
Revue Traitement du Signal. Vol. 8, no. 5, p. 365-372 - 1992.

[CAR75] J.C. CARRE, F. ROULLIER
Fenêtres temporelles et fenêtres spectrales.
Rapport interne SEN/020 du Service d'Etudes Nucléaires du CEA - juillet 1975.

[CLA93] M.P. CLARK, C.T. MULLIS
Quadratic Estimation of the Power Spectrum Using Orthogonal Time-Division Multiple Windows.
IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 41, no. 1, p.222-231 - janvier 1993.

[CLE84] S.M. CLERGEOT
Choix entre les différentes méthodes quadratiques d'estimation du spectre de puissance.
Annales des Télécommunication. Vol. 39, n° 3-4 – 1984.

[COY98] E. McCOY, A. WALDEN, D. PERCIVAL
Multitaper Spectral Estimation of Power Law Processes.
IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 46, no. 3, p. 655-668 - mars 1998.

[DAN98] J..M. DANTHEZ, C. GIROUSSENS, R. AQUILINA
The Autocoherent Spectrum : A Useful Spectral Estimator for Vibration Analysis of Rotating Machinery. Accurate Estimation and Cancellation of Pure Tones.
Mechanical Systems and Signal Processing. Vol. 12, no. 6, p. 753-768 - 1998.

[DUC97] A. DUCASSE
Estimation de sous-harmoniques à l'aide de méthodes paramétriques.
Thèse de doctorat de l'INPT (ENSEEIHT) – janvier 1997.

[DUR97] M. DURNERIN, N. MARTIN et al.
Démarche d'analyse spectrale en vue d'une interprétation automatique, application à un signal d'engrenages.
Seizième colloque GRETSI. Vol. 1, p. 539-542, Grenoble, France - septembre 1997.

[FLA92] P. FLANDRIN, N. MARTIN
Méthodes temps-fréquence.
Revue Traitement du signal. Supplément au vol. 9, no. 1, p.79-113 - 1992.

[GAB46] D. GABOR
Theory of Communication.
Journal IEEE. Vol. 93, no. 3, p.429-457 - 1946.

[HAR78] F.J. HARRIS
On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform.
Proceedings of the IEEE, vol. 66, n° 1 - janvier 1978.

[JEN68] G.M. JENKINS, D.G. WATTS
Spectral Analysis and its applications.
Holden-Day – 1968.

[JOH99] P.E. JOHNSON, D.G. LONG
The Probability Density of Spectral Estimates Based on Modified Periodogram Averages.
IEEE Transactions on Signal Processing. Vol. 47, no. 5 - mai 1999.

[KAY88] S.M. KAY
Modern Spectral Estimation.
Prentice-Hall Theory and Applications, Englewood Cliffs, N. J. – 1988.

[KOO74] L.H. KOOPMANS
The Spectral Analysis of Time Series.
Academic Press – 1974.

[KUN80] M. KUNT
Traitement numérique des signaux.
Traité d'Electricité, vol. 20. Editions Georgi – 1980.

[LEI97] V. LEISSE
Détection automatique de séries d'harmoniques.
Rapport de stage du CEPHAG, no. 9/97 – septembre 1997.

[LEJ97] G. LEJEUNE, J.L. LACOUME, P. MARCHAND, M. DURNERIN et al.
Cyclostationnarités d'ordre 1 et 2 : application à des signaux vibratoires d'engrenages.
Seizième colloque GRETSI. Vol. 1, p. 323-326, Grenoble, France - septembre 1997.

[MAR87] S.L. Jr. MARPLE
Digital Spectral Analysis With Applications.
Prentice-Hall Signal Processing Series, A.V. Oppenheim Editor – 1987.

[MART88] N. MARTIN, J.L. LACOUME, M.E. SANTAMARIA
Unified Spectral Analysis.
EUSIPCO, Grenoble, France – septembre 1988.

[MART95] P. MARTINI
Aide à l'analyse spectrale
Thèse INPG - janvier 1995.

[MAT84] V.J. MATHEWS, D.H. YOUN
Spectral Leakage Suppression Properties of Linear and Quadratic Windowing.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 32, n°5 - octobre 1984.

[MAT85] V.J. MATHEWS, D.H. HOUN
Analysis of the Short-Time Unbiaised Spectrum Estimation Algorithm.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 33, p. 136-142 - février 1985

[MAT87] V.J. MATHEWS, D.H. HOUN, N. AHMED
A Unified Approach to Non Parametric Spectrum Estimation Algorithms.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 35, p. 338-349 - mars 1987.

[MAX81] J. MAX
Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques.
Tome 1. Masson – 1981.

[MAX-LAC96] J. MAX, J.L. LACOUME
Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques.
Masson – 1996.

[MIN96] X. MING, D. KANG
Corrections for Frequency, Amplitude and Phase in a Fast Fourier Transform of a Harmonic Signal.
Mechanical Systems and Signal Processing, no. 10 (2), p. 211-221 - 1996.

[MUL90] C.T. MULLIS, L.L. SCHARF
Quadratic Estimators of the Power Spectrum.
S. Haykin, Ed. Prentice-Hall - 1990.

[NUT71] A.H. NUTTAL
Spectral Estimation by Means of Overlapped FFT Processing of Windowed Data.
NUSC Report no. 4169 - octobre 1971.

[NUT81-1] A.H. NUTTAL
Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior.
IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing. Vol. 29, n° 1 - février 1981.

[NUT81-2] A.H. NUTTAL
Spectral Estimation Using Combined Time and Lag Weighting.
NUSC Technical Report no. 6459 - juin 1981.

[NUT82] A.H. NUTTAL, G. C. CARTER
Spectral Estimation Using Combined Time and Lag Weighting.
Proceedings of the IEEE, vol. 70, no. 9, p. 1115-1125 - septembre 1982.

[OPP75] A.V. OPPENHEIM, R.W. SCHAFER
Digital Signal Processing.
Prentice-Hall Editions, Englewood Cliffs, N. J. – 1975.

[PRIEST81] M.B. PRIESTLEY
Spectral Analysis and Time Series.
Vol. 1 : Univariate Series. Academic Press – 1981.

[PRIEUR95-1] P. PRIEUR, G. D'URSO
Des indices de cyclostationnarité pour la surveillance des engrenages.
Quinzième colloque GRETSI. Vol. 2, p. 1241-1244, Juan-les-Pins, France - septembre 1995.

[RAB79] L. R. RABINER, J. B. ALLEN
Short-Time Fourier Analysis Techniques for FIR System Identification.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 27, p. 182-192 - avril 1979.

[RAB80] L. R. RABINER, J. B. ALLEN
On the Implementation of a Short-Time Spectral Analysis for System Identification.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 28, p. 69-78 - février 1980.

[ROU70] E. ROUBINE
Introduction à la théorie de la communication.
Tome I : signaux non aléatoires et Tome II : signaux aléatoires. Masson – 1970.

[SCH88] C. Van SCHOONEVELD, D. J. FRIJLING
Spectral Analysis : On the Usefulness of Linear Tapering for Leakage Suppression.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 29, p. 323-329 - avril 1981.

[THO82] D.J. THOMSON
Spectrum Estimation and Harmonic Analysis.
Proceedings of the IEEE. Vol. 70, p. 1055-1096 – septembre 1982.

[WEL67] P.D. WELCH
The Use of FFT for the Estimation of Power Spectra : a Method Based on Time Averaging over Short Time Modified Periodograms.
IEEE AU. Vol. 15 - juin 1967.

[YOU83] D.H. YOUN, V.J. MATHEWS
On Using the Short-Time Unbiaised Spectrum Estimation Algorithm for Estimating Time Delays and Magnitude-Squared Coherence Functions.
Proc. ASSP Workshop on Spectrum Estimation-II. Tampa, Fl,p. 60-64 - novembre 1983.

Estimateurs de la ligne de fond de spectre :

[JUH91] M. JUHOLA, J. KATAJAINEN, T. RAITA
Comparison of algorithms for standard median filtering.
IEEE Transaction on Signal Processing. Vol. 39, no. 1, p. 204-208 - janvier 1991.

[LEF81] F. LEFAUDEUX
Algorithme pragmatique de normalisation.
Huitième colloque GRETSI, Nice, France, p. 651-655 - juin 1981.

[NIC92] J. Y. NICOUX, C. JAUFFRET, A. LAPORTE
Normalisation par filtre a minima.
Note technique DCN no. 072706 - août 1992.

[PIE97] V. PIERSON
Extraction de sous-ensembles temps-fréquence en vue d'une prise de décisions en non stationnaire, application en acoustique sous-marine.
Thèse de doctorat de l'INPG - avril 1997.

[PLU83] C. PLUMEJEAUD, B. RAFINE et B. LUCAS
Un algorithme de normalisation.
Neuvième colloque GRETSI, Nice, p. 111-114 - mai 1983.

[PRIEUR95-2] P. PRIEUR
Aide à l'interprétation des spectres vibratoires de machines tournantes auxiliaires : besoins et étude bibliographique.
Rapport interne EDF no. HP-21/95/004 - 1995.

[PRIEUR97] P. PRIEUR, C. LAPAILLE
Aide à l'interprétation de spectres vibratoires : reconnaissance automatique de familles d'harmoniques.
Rapport interne EDF no. HP-01/97/003/A - 1997.

[RED89] B. REDORTIER, B. LAGET
Détection des harmoniques dans un spectre de vibrations par des méthodes de traitement d'images.
Revue Traitement du Signal, vol. 6, no. 4, p. 269-276 - 1989.

[SER82] J. SERRA
Mathematical morphologie and image analysis.
Academic Press, Londres - 1982.

[SHO77] J.A. SHOOTER, S.L. WATKINS
Estimation of background ambient noise levels from the spectral analysis of time series with application to cw propagation-loss measurements.
Journal Acoust. Soc. Am. Vol. 62, no. 1, p. 84-90 - juillet 1977.

[STR84] W. A. STRUZINSKI, E. D. LOWE
A performance comparison of four noise background normalization schemes proposed for signal detection systems.
Journal Acoust. Soc. Am., no. 76, p. 1738-1742 - décembre 1984.

[STR85] W. A. STRUZINSKI, E. D. LOWE
A performance comparison of four noise background normalization schemes proposed for signal detection systems.
Journal Acoust. Soc. Am., no. 78, p. 936-941 - septembre 1985.

La détection :

[HIN82] M. J. HINICH
Detecting a hidden periodic signal when its period is unknown.
IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol.30, no.5, p.747-750–oct. 1982.

[LEMA95] C. LE MARTRET, G. PLANQUETTE, G. VEZZOSI
Détection et estimation du fondamental d'une suite de raies harmoniques en nombre inconnu.
Quinzième colloque GRETSI, Juan-les-Pins, France, p. 149-152 - septembre 1995.

[LEMO95] O. LEMOINE
Détection de signaux non stationnaires par représentation temps-fréquence.
Thèse de doctorat de l'université de Nice-Sophia Antipolis - septembre 1995.

[RAV98] P. RAVIER
Détection de transitoires par ondelettes adaptées – Critères d'adaptation fondés sur les statistiques d'ordre supérieur.
Thèse de doctorat de l'INPG – juillet 1998.

[VAN68] H. L. VAN TREES
Detection, Estimation, and Modulation Theory.
John Wiley & Sons - 1968.

Statistiques et probabilités :

[LAC97] B. LACAZE, C. MAILHES, M. MAUBOURGUET, J.Y. TOURNERET
Probabilités et Statistiques appliquées.
Cépaduès-éditions, collection Polytech de l'INP Toulouse - 1997.

[PAG95] A. PAGES-ZAMORA, M.A. LAGUNAS
New approaches in non linear signal processing : estimation of the probability density function by spectral estimation methods.
Proc. Work. on Higher-Order Statistics, Aiguablava-Begur, Espagne, p. 204-208 – juin 1995.

[PAG99] A. PAGES-ZAMORA, M.A. LAGUNAS
Fourier models for non-linear signal processing.
Signal Processing – Vol. 76, p. 1-16 - juillet 1995.

[PRO89] J. G. PROAKIS
Digital communications.
McGraw-Hill, Series in Electrical Engineering, p. 21-29 - 1989.

[SAP90] G. SAPORTA
Probabilités, analyse de données et statistique.
Editions Technip, Paris - 1990.

[TAS89] P. TASSI
Méthodes statistiques.
Economica, collection économie et statistiques avancées - 1989.

Systèmes à base de connaissances :

[BAS97] M. BASSET, J.M. PERRONNE, J.P. DEHON, M. RENNER
Concept and Embedded Tool for Fault Detection on Mechanical Structures.
Proceedings de la conférence IFAC, Belfort, France, vol. 2, p. 955-961 – mai 1997.

[GLO98] J.R. GLOVER, B. RAMADHADRAN, J.D. FROST, P.Y. KTONAS
Analyse des vibrations d'un engrenage : cepstre, corrélation, spectre.
Proceedings on the Third International Conference on Neural Networks and Expert Systems in Medicine Helthcare, Pisa, p. 178-186 – septembre 1998.

[JIO98] J. JIONGHUA, S. JIANJUN
Automatic Feature Extraction of Waveform Signals for In-Process Diagnostic.
IEEE Conf. on Systems Man, and Cybernetics, San Diego, vol. 5, p. 4716-4721 – oct. 1998.

[KON90] I. KONVALINKA, B. FILIPIC
Towards Expert Spectrum Estimate.
Signal Processing V. p. 457-460 – 1990.

[NII88] H.P. NII, E.A. FEIGENBAUM, J.J. ANTON, A.J. ROCKMORE
Signal-to-Symbol Transformation : HSAP/SIAP Case Study.
Dans le livre *Blackboard Systems* édité par R. Engelmore et T. Morgan.
Addison-Wesley Publishing Company. p.135-158 - 1988.

[PRE91] M. PREVOSTO, F. RECHENMANN
SAID : a Knowledge-Based system in Signal Processing.
European Control Conference, Grenoble, France, p. 121-125 – juillet 1991.

[OPP92] A.V. OPPENHEIM, S.H. NAWAB
Symbolic and Knowledge-based Signal Processing.
Prentice-Hall Signal Processing Series. – 1992.

[SHE94] C. SHEKHAR, S. MOISAN, M. THONNAT
Towards an Intelligent Problem-Solving Environment for Signal Processing.
Mathematics and Computers in Simulation. Vol. 36, no. 4-6, p. 347-359 – 1994.

Rapports internes GdR-PRC ISIS de l'opération ASPECT :

[DUR97-Meth] M. DURNERIN
Les méthodes de Fourier.
No. METH 2V1, juin 1997.

[DUR98-Valid] M. DURNERIN
Validation des méthodes de Fourier et du calcul de variance.
No. VALID 2V1, janvier 1998.

[DUR96-SignEDF] M. DURNERIN
Banque de signaux EDF.
No. SIGN EDF 1V1, juillet 1996.

[DUR97-ENG8 E5] M. DURNERIN
Scénario sur le signal ENG8 E5 21 RH SPV.
No. SCEN EDF ENG8 E5 V1, mars 1997.

[DUR96- SignDCN] M. DURNERIN
Banque de signaux DCN.
No. SIGN DCN 1V1, juillet 1996.

[DUR97-PEG] M. DURNERIN
Scénario MF-CHARLIE 1-VOIE 6.
No. SCEN PEG SH1 a11 V1, juin 1997.

[DUR97-MF] M. DURNERIN
Scénario PEG-SH1-a11.
No. SCEN MF C1 V6 V1, juin 1997.

[DUR98-Nstat] M. DURNERIN
Localisation fréquentielle de non stationnarités.
No. CRIT-PRE 1V1, janvier 1998.

[DUR98-Harmo] M. DURNERIN
La détection d'harmoniques.
No. HARMO 1V1, avril 1998.

[DUR98–Det] M. DURNERIN
Détection de composantes déterministes avec les estimateurs de type Fourier.
No. DET 1V1, juin 1998.

[DUR98–Fond] M. DURNERIN
Ligne de fond de spectre.
No. FONDSPECT 1V1, novembre 1998.

[DUR98–Ajust] M. DURNERIN
Ajustement de la fenêtre spectrale des estimateurs de Fourier.
No. AJUST 1V1, novembre 1998.

ANNEXES

SOMMAIRE DES ANNEXES

A-1. Les fenêtres spectrales..... 236
A-2. La méthode Welch-WOSA, facteur de normalisation..... 245
A-3. Densité de probabilité de l'estimateur Welch-WOSA sans recouvrement..... 245
A-4. Rênes de la méthode Welch-WOSA..... 248
A-5. Test d'échantillonnage de Shannon..... 251
A-6. Détection de non-stationnarités dans le plan temps-fréquence..... 252
A-6.1. Détection à partir du spectrogramme ou du corrélogramme glissant..... 252
A-6.2. Détection de non-stationnarités à partir de la variance normalisée..... 255
A-7. Détection de périodicité globale et estimation du rapport signal sur bruit..... 260
A-8. Détection de périodicité prépondérante..... 264
A-9. Estimation du support de corrélation et notion de bande étroite..... 267
A-10. Critère de détection à partir des estimateurs de type Fourier..... 271
A-11. La ligne de fond de spectre..... 274

A-1. Les fenêtres spectrales

Les fenêtres d'apodisation retenues dans le cadre de l'opération ASPECT permettent d'avoir un éventail suffisamment large pour qu'il soit adapté dans la plupart des cas. Le choix s'est fixé sur les fenêtres suivantes : Rectangulaire (ou naturelle), Bartlett (ou triangulaire), Hanning, Hamming, Blackman, Blackman-Harris 4 termes.

Le tableau Tab. A 1-I donne l'expression de la fenêtre temporelle et sa TFd [MAR87] [KUN80], le tableau s'adapte au cas des fenêtres quadratiques $h[n]$ et des fenêtres linéaires $g[n]$ une fois que l'on a précisé que :

$h[n]$ est définie pour $0 \le n \le N-1$

$g[n]$ est définie pour $-M < n < +M$ avec $N = 2M-1$

la fonction $t[n] = \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \times \frac{1}{N-1}$ lorsqu'il s'agit de $h[n]$ et $t[n] = \frac{n}{N-1}$ lorsqu'il s'agit de $g[n]$

la fonction $D_N(\nu) = \mathrm{TFd}\left(\Pi_N[n]\right)(\nu) = T_e \frac{\sin(\pi N \nu T_e)}{\sin(\pi \nu T_e)} \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{j} \nu (N-1) T_e}$ lorsqu'il s'agit de $h[n]$

et $D_N(\nu) = T_e \frac{\sin(\pi N \nu T_e)}{\sin(\pi \nu T_e)}$ lorsqu'il s'agit de $g[n]$.

La Figure A 1-I présente les différentes fenêtres quadratiques sur les données en temporel pour un nombre de points $N=33$ et une période d'échantillonnage T_e = 1 s. La Figure A 1-II présente les fenêtres spectrales $Q(\nu) = |H(\nu)|^2 / T_e$ en fonction de la fréquence f, les spectres étant en dB normalisés par rapport au maximum et la Figure A 1-III présente les fenêtres spectrales en échelle linéaire normalisées par $1/T$ (facteur de normalisation appelé *bin fréquentiel*), T étant la durée de la fenêtre (soit NT_e).

La Figure A 1-IV présente les différentes fenêtres linéaires sur l'autocorrélation en temporel pour un nombre de points $N=2M-1=33$ et une période d'échantillonnage T_e = 1 s. La Figure A 1-V présente le module des fenêtres spectrales $|Q(\nu)| = |G(\nu)|$, les spectres étant en dB normalisés par rapport au maximum et la Figure A 1-VI présente les fenêtres spectrales $Q(\nu)=G(\nu)$ en échelle linéaire normalisées par $2/T=1/MT_e$, la durée des retards positifs.

Certaines caractéristiques des fenêtres, comme les largeurs de bande, dépendent (telles qu'elles ont été définies paragraphe 2.4.4) de la durée ou du nombre de points des fenêtres, celles-ci seront alors normalisées (divisées) dans les différents tableaux par un facteur (appelé *bin fréquentiel*) afin d'obtenir une valeur constante. Ce facteur sera égal à :

- pour les fenêtres quadratiques, l'inverse de la durée de la fenêtre, soit $1/T=1/NT_e$,
- pour les fenêtres linéaires, l'inverse de la moitié de la durée totale de la fenêtre (de $2M-1$ points), ce qui correspond à la durée des retards positifs, soit $2/T=1/MT_e$. Rappelons que N échantillons de signal suffisent à estimer $2N+1$ points de l'autocorrélation.

Le tableau Tab. A 1-II présente les différentes caractéristiques des fenêtres spectrales linéaires et quadratiques.

Tab. A 1-I : expression des fenêtres d'apodisation

Fenêtre	Expression en temps $h[n]$ ou $g[n]$	TFd $H(\nu)$ ou $G(\nu)$
Rectangulaire	1	$D_N(\nu)$
Bartlett	$1-2\lvert t[n]\rvert$	$H(\nu)=\frac{2}{NT_e}\left\lvert D_{N/2}(\nu)\right\rvert^2 e^{-\pi j\nu(N-1)T_e}$ et $G(\nu)=\frac{2}{NT_e}\left\lvert D_{N/2}(\nu)\right\rvert^2$
Hanning	$\cos^2(\pi t[n])=$ $0.5+0.5\cos(2\pi t[n])$	$0.5D_N(\nu)+$ $0.25\left(D_N\left(\nu-\frac{1}{NT_e}\right)+D_N\left(\nu+\frac{1}{NT_e}\right)\right)$
Hamming	$0.54+0.46\cos(2\pi t[n])$	$0.54D_N(\nu)+$ $0.23\left(D_N\left(\nu-\frac{1}{NT_e}\right)+D_N\left(\nu+\frac{1}{NT_e}\right)\right)$
Blackman	$0.42+0.5\cos(2\pi t[n])$ $+0.08\cos(4\pi t[n])$	$0.42D_N(\nu)+$ $0.25\left(D_N\left(\nu-\frac{1}{NT_e}\right)+D_N\left(\nu+\frac{1}{NT_e}\right)\right)+$ $0.04\left(D_N\left(\nu-\frac{2}{NT_e}\right)+D_N\left(\nu+\frac{2}{NT_e}\right)\right)$
Blackman-Harris 4 T	$0.40217+$ $0.4970\cos(2\pi t[n])+$ $0.09892\cos(4\pi t[n])+$ $0.00188\cos(6\pi t[n])$	$0.40217D_N(\nu)+$ $0.2485\left(D_N\left(\nu-\frac{1}{NT_e}\right)+D_N\left(\nu+\frac{1}{NT_e}\right)\right)+$ $0.04946\left(D_N\left(\nu-\frac{2}{NT_e}\right)+D_N\left(\nu+\frac{2}{NT_e}\right)\right)+$ $0.00094\left(D_N\left(\nu-\frac{3}{NT_e}\right)+D_N\left(\nu+\frac{3}{NT_e}\right)\right)$

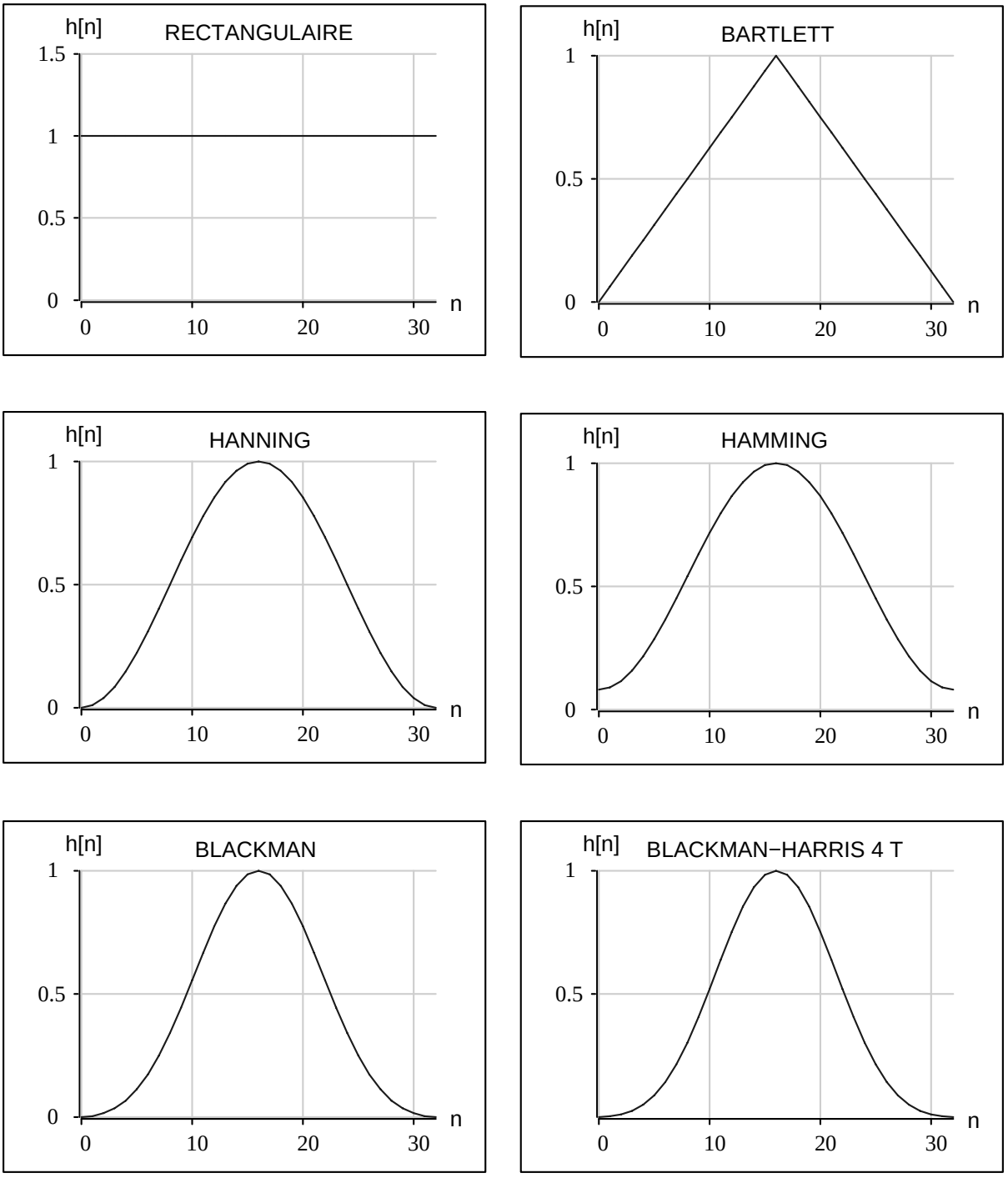


Figure A 1-I **: fenêtres d'apodisation quadratique** (sur les données),
h[*n*] en temporel (pour *N*=33 points).

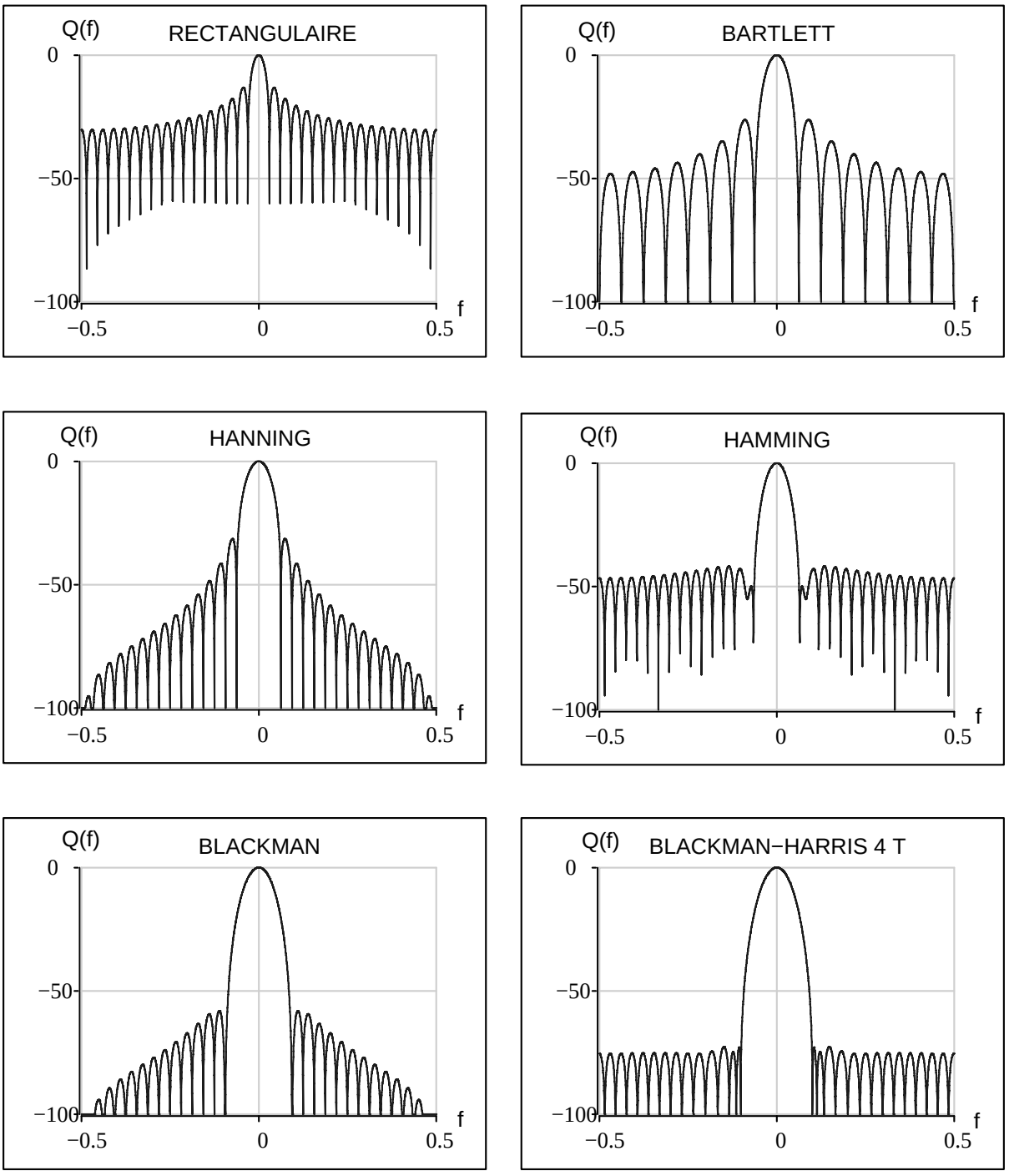


Figure A 1-II : **fenêtres spectrales d'apodisation quadratique** (sur les données), $Q(\nu)=|H(\nu)|^2$ en dB (normé par rapport au maximum et pour N=33).

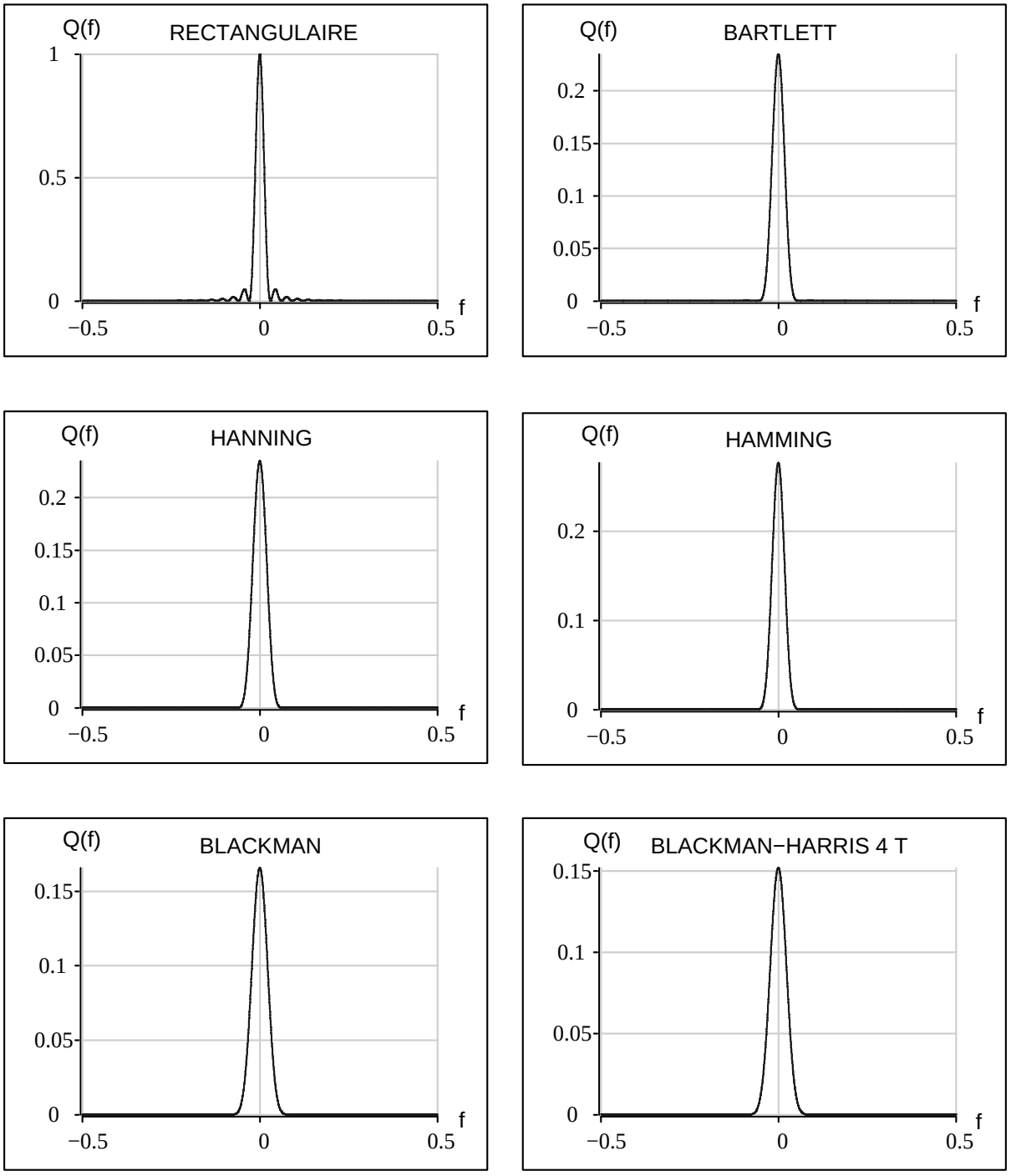


Figure A 1-III : **fenêtres spectrales d'apodisation quadratique** (sur les données),
$Q(\nu)=|H(\nu)|^2/T_e$ en linéaire ($\times 1/NT_e$ et pour N=33).

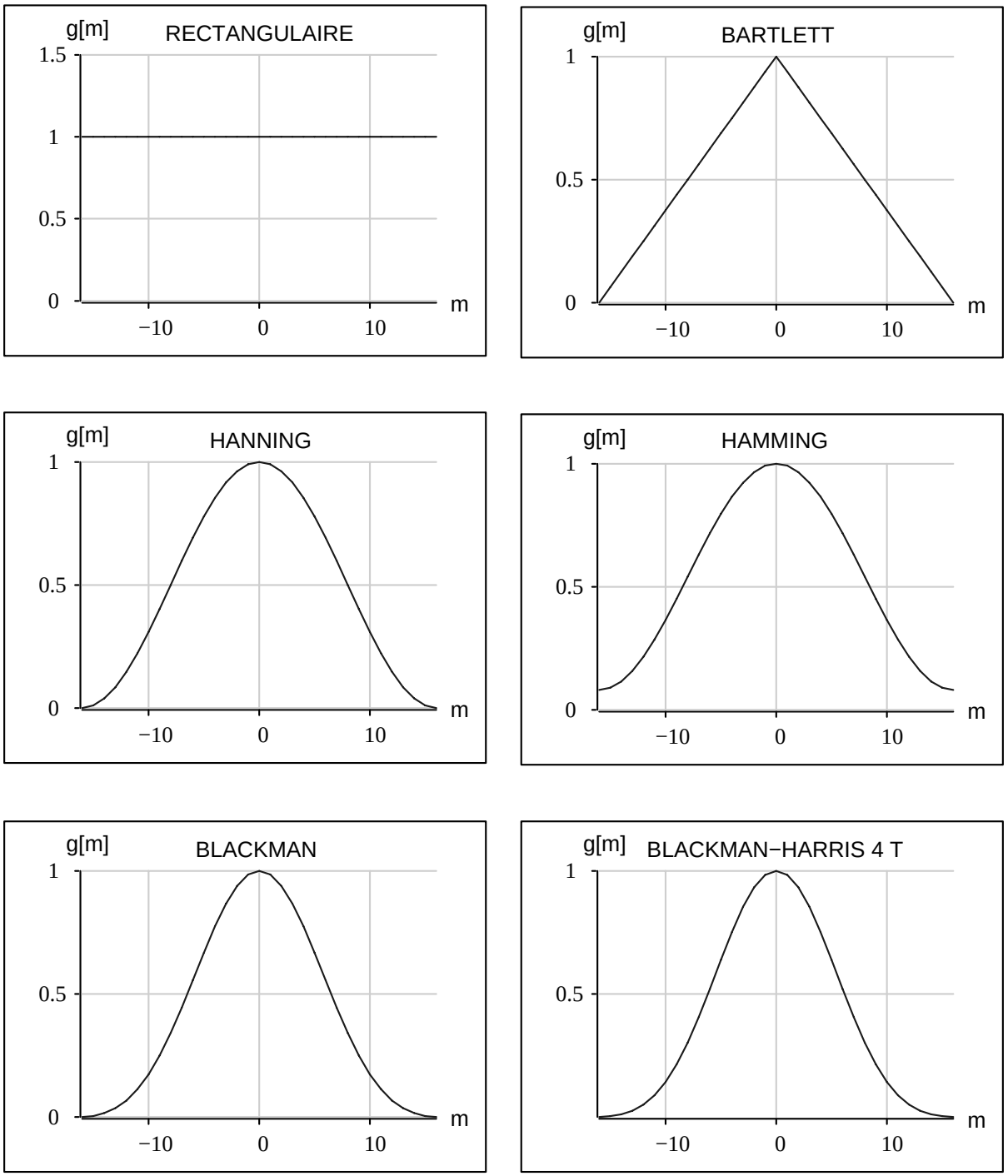


Figure A 1-IV : **fenêtres d'apodisation linéaire** (sur l'autocorrélation),
$g[m]$ en temporel (pour $2M$-1=33 points).

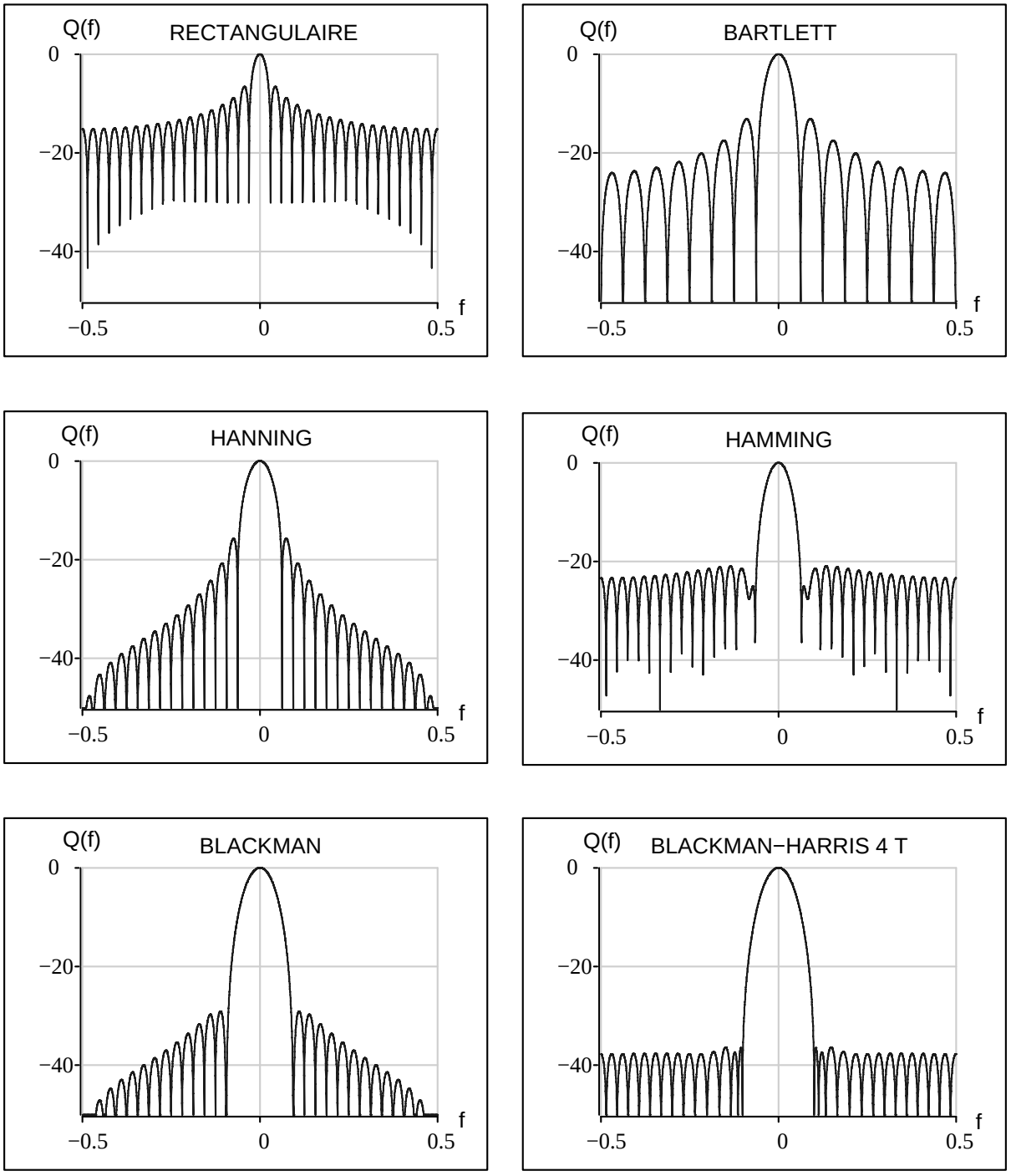


Figure A 1-V : **fenêtres spectrales d'apodisation linéaire** (sur l'autocorrélation), $Q(\nu)=|G(\nu)|$ en dB (normé par rapport au maximum et pour $2M$-1=33).

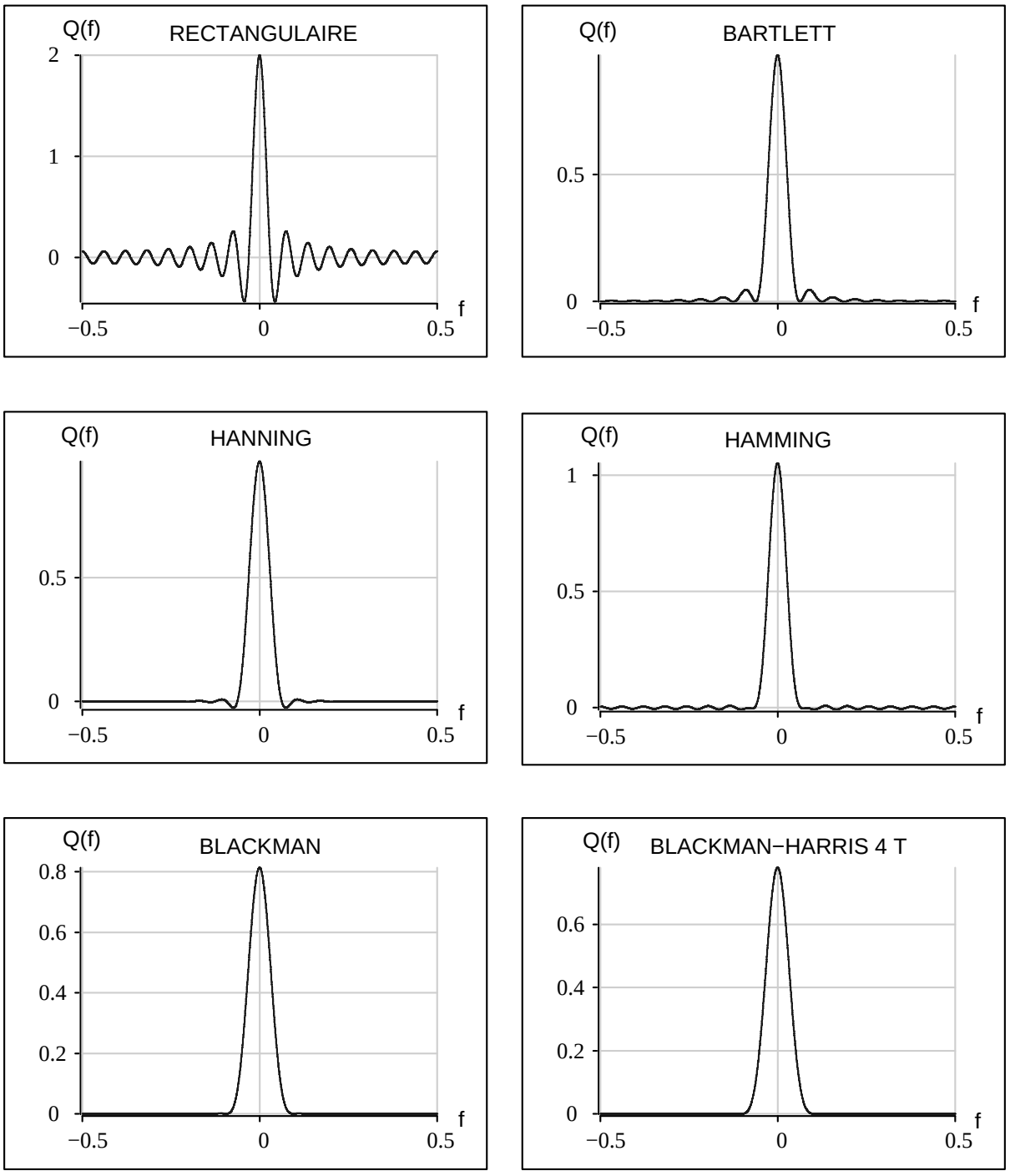


Figure A 1-VI : **fenêtres spectrales d'apodisation linéaire** (sur l'autocorrélation), $Q(\nu)=G(\nu)$ en linéaire ($\times 1/MT_e$ et pour $2M$-1=33).

Tab. A 1-II : **caractéristiques des fenêtres d'apodisation**.

Fenêtre	Bande à -3 dB B_{-3dB}	Bande éq. au bruit B_e	Bande stat. éq. B_s	Premier zéro ν_p	Ampl. relative lobe sup positif (dB)	Ampl. relative lobe sup négatif (dB)	Facteur décrois. lobes latéraux (dB/oct)	Facteur de fuite énergie p (%)
Fenêtres quadratiques								
Rectangulaire	0,89	1	1,5	1	-13,3	non	-6	9,7
Bartlett	1,28	1,33	1,86	2	-26,5	non	-12	0,3
Hanning	1,44	1,5	2,08	2	-31,5	non	-18	0,052
Hamming	1,3	1,36	1,9	2	-43	non	-6	0,036
Blackman	1,68	1,73	2,41	3	-57	non	-18	$<10^{-3}$
Blackman - Harris 4 T	1,74	1,8	2,51	3,31	-74	non	0	$<10^{-4}$
Fenêtres linéaires								
Rectangulaire	0,6	0,5	0,5	0,5	-9	-6,6	-3	-17,8
Bartlett	0,89	1	1,5	1	-13,6	non	-6	9,7
Hanning	1	1	1,33	1	-21	-15	-9	-1,3
Hamming	1,08	0,92	1,26	1	-28	-22	-3	-0,4
Blackman	1,16	1,2	1,64	1,5	-29	-30	-9	0,02
Blackman - Harris 4 T	1,2	1,24	1,72	1,61	-37	-39	0	-0,005

A-2. La méthode Welch-WOSA, facteur de normalisation

Tab. A 2-I : ***q*[0] facteur de normalisation, énergie des fenêtres.**						
Fenêtre	Rectangulaire	Bartlett	Hanning	Hamming	Blackman	Blackman-Harris 4T
q[0]	1	0.333	0.375	0.397	0.305	0.29

A-3. Densité de probabilité de l'estimateur Welch-WOSA sans recouvrement

Nous reprenons et précisons ici quelques étapes de la démonstration de Koopmans sur la loi suivie par l'estimateur Welch-WOSA sans recouvrement, pour un signal *b* issu d'un processus aléatoire gaussien stationnaire à moyenne nulle et à densité spectrale de puissance continue $\gamma_b(\nu)$.

Considérons tout d'abord le cas du **périodogramme**. Pour déterminer la loi suivie par le périodogramme, il est tout d'abord nécessaire de s'intéresser à la densité de probabilité de [KOO74], [JEN68] :

$$Z(\nu) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} b[n]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} n \nu T_e} \tag{A-3-1}$$

$Z(\nu)$ est en pratique calculé sur un ensemble discret de fréquences : $\nu = k/NT_e$, $k \in [\, -(N\text{-}1)/2 \,,\, N/2 \,]$ qui permettent cependant de définir complètement la fonction $Z(\nu)$ par l'application du théorème d'échantillonnage dans le domaine fréquentiel. Par la suite, pour simplifier les notations, nous conserverons la notation ν, mais il est nécessaire de conserver à l'esprit que la théorie n'est valable que sur cet ensemble discret de fréquence (bien que les limites asymptotiques des moments, moyenne et variance, lorsque $N \rightarrow +\infty$, soient identiques dans le cas discret et continu [KOO74], [BRI70]). L'ensemble $k \in [\, -(N\text{-}1)/2 \,,\, N/2 \,]$ sera équivalent à $\nu \in]\, -\nu_e/2 \,,\, \nu_e/2 \,[$.

Koopmans [KOO74] dans sa démonstration pour connaître la densité de probabilité de $Z(\nu)$ utilise le fait qu'une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussienne est une variable gaussienne. Les variables aléatoires $Z(\nu)$ auraient alors une distribution multivariables complexe gaussienne de moyenne nulle. Cependant ceci n'est vrai que pour une combinaison de variables gaussiennes indépendantes. Or pour un bruit gaussien non blanc $\gamma_b(\nu) \neq \sigma_b^2$ (σ_b^2 indépendant de la fréquence) les variables ne sont plus indépendantes. Cependant si le support de corrélation de *b* est court devant *N*, ce qui implique que les échantillons éloignés d'une distance supérieure au support de corrélation peuvent être considérés comme indépendants, on peut aussi considérer que la combinaison linéaire des échantillons dans $Z(\nu)$ donne une variable aléatoire complexe gaussienne. Pour être strictement rigoureux, il faudrait cependant se limiter au bruit blanc, mais pour être plus général on considérera simplement que le support de corrélation de *b* est petit devant le nombre de points.

On montre alors que les variables aléatoires $Z(\nu)$ pour $\nu \in]\, -\nu_e/2 \,,\, \nu_e/2 \,[$ sont asymptotiquement décorrélés lorsque $N \rightarrow +\infty$ [KOOP74] :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \xi\left\{ Z(\nu)\, Z^*(\mu) \right\} = 0 \qquad \text{pour } \nu \neq \mu \tag{A-3-2}$$

et que la variance de $Z(\nu)$ est approximativement égale à :

$$\xi\left\{ |\, Z(\nu)\,|^2 \right\} \approx \gamma_b(\nu) \tag{A-3-3}$$

Si $\gamma_b(\nu)$ est raisonnablement lisse, les approximations :

$$\xi\left\{ Z(\nu)\, Z^*(\mu) \right\} \approx \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu \neq \mu \\ \gamma_b(\nu) & \text{pour } \nu = \mu \end{cases} \tag{A-3-4}$$

sont correctes pour N suffisamment grand (c'est uniquement pour ce point qu'il est nécessaire d'utiliser les fréquences discrètes, en fréquence continue des fréquences très proches seront corrélés si N ne tend pas vers l'infini, ceci est dû au fenêtrage par une fenêtre rectangulaire du signal).
La théorie sur la densité de probabilité de Z(ν) est cependant une théorie asymptotique.

Notons les propriétés suivantes de $Z(\nu)$ qui en découle, sachant que $Z(-\nu) = Z(\nu)^*$, pour $\nu \neq 0$ et $\nu_e/2$:

$$\xi\left\{ Z(\nu)^2 \right\} = \xi\left\{ Z(\nu)^{*2} \right\} = 0 \tag{A-3-5}$$

Nous pouvons alors en déduire, étant donné que $Z_r(\nu) = (Z(\nu)+Z(\nu)^*)/2$ et $Z_i(\nu) = (Z(\nu)-Z(\nu)^*)/2\mathrm{j}$, que pour $\nu \neq 0$ et $\nu_e/2$:

$$\xi\{ Z_r(\nu)\, Z_i(\nu) \} = \frac{1}{4\mathrm{j}}\left(\xi\left\{ Z(\nu)^2 \right\} - \xi\left\{ Z(\nu)^{*2} \right\} \right) = 0 \tag{A-3-6}$$

et $Z_r(0) = Z(0)$, $Z_i(0) = 0$, $Z_r(\nu_e/2) = Z(\nu_e/2)$, $Z_i(\nu_e/2) = 0$.
Il s'ensuit que $Z_r(\nu)$ et $Z_i(\nu)$ sont deux variables aléatoires réelles gaussiennes décorrélées, donc indépendantes entre elles.
Remarque : pour démontrer l'indépendance des parties réelle et imaginaire de Z(ν), on a uniquement besoin de l'indépendance de Z(-ν) et Z(ν) ce qui est approximativement vrai pour toute fréquence ν, même en fréquence continue.*

Des techniques identiques permettent de calculer la variance de $Z_r(\nu)$ et $Z_i(\nu)$ (variables centrées) :

$$\xi\left\{ Z_r(\nu)^2 \right\} = \begin{cases} \gamma_b(\nu)/2 & \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu_e/2 \\ \gamma_b(0) & \text{pour } \nu = 0 \\ \gamma_b(\nu_e/2) & \text{pour } \nu = \nu_e/2 \end{cases} \tag{A-3-7}$$

$$\xi\left\{ Z_i(\nu)^2 \right\} = \begin{cases} \gamma_b(\nu)/2 & \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu_e/2 \\ 0 & \text{pour } \nu = 0 \text{ et } \nu = \nu_e/2 \end{cases} \tag{A-3-8}$$

Nous avons alors toutes les informations nécessaires pour déterminer la densité de probabilité asymptotique du périodogramme aux fréquences $\nu \in]\, -\nu_e/2\ ,\ \nu_e/2\ ]$. D'après la définition du périodogramme :

$$\hat{\gamma}_b(\nu) = \left| Z(\nu) \right|^2 = Z_r(\nu)^2 + Z_i(\nu)^2 \tag{A-3-9}$$

Or, pour $\nu \neq 0$ et $\nu \neq \nu_e/2$, $Z_r(\nu)\Big/\sqrt{\gamma_b(\nu)/2}$ et $Z_i(\nu)\Big/\sqrt{\gamma_b(\nu)/2}$ sont deux variables gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance unité $N(0,1)$. Par conséquent,

$$\left(Z_r(\nu)^2 + Z_i(\nu)^2 \right) \Big/ \frac{\gamma_b(\nu)}{2} \approx \chi_2^2 \tag{A-3-10}$$

où χ_2^2 représente une variable aléatoire qui suit une loi du chi-deux à deux degrés de liberté [TAS89], [SAP90], [PRO89], [LAC97].

On a donc pour l'estimateur du périodogramme :

$$\hat{\gamma}_b(\nu) = |Z(\nu)|^2 \approx \frac{\gamma_b(\nu)}{2}\chi_2^2 \qquad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e/2, \tag{A-3-11}$$

et pour $\nu = 0$ et $\nu = \nu_e / 2$:

$$\hat{\gamma}_b(0) \approx \gamma_b(0)\chi_1^2 \tag{A- 3-12}$$

$$\hat{\gamma}_b(\nu_e/2) \approx \gamma_b(\nu_e/2)\chi_1^2 \tag{A3-13}$$

où χ_1^2 est une variable aléatoire qui suit une loi du chi-deux à un degré de liberté.

Remarque : le périodogramme est un estimateur non consistent puisque sa variance ne tend pas vers 0 lorsque le nombre de points du signal tend vers l'infini.

Pour la méthode **Welch-WOSA sans recouvrement**, la différence avec le périodogramme réside dans l'application d'une fenêtre d'apodisation et le découpage du signal en segments. Nous allons présentés les effets de ces deux opérations sur la densité de probabilité de l'estimateur.
Considérons un seul segment de taille *L*, sur celui-ci, le fait d'appliquer une fenêtre d'apodisation aux données ne change que peu les raisonnements précédents en posant :

$$B(\nu) = \frac{1}{\sqrt{L\,q[0]}} \sum_{n=0}^{L-1} b[n]\,h[n]\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} n \nu T_e} \tag{A-3-14}$$

La seule différence réside dans la démonstration de l'indépendance pour deux fréquences proches même discrètes entre $B(\nu)$ et $B(\mu)$ dû aux différentes formes des fenêtres spectrales $H(\nu) = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} n \nu T_e}$ (le cas du périodogramme étant obtenu avec $h[n]=1$). Cependant l'indépendance est vérifiée lorsque $L \rightarrow +\infty$ ou lorsque ν et μ ne sont pas trop proches (éloignés d'une distance supérieure à la bande passante de la fenêtre spectrale) et donc en particulier pour ν et $-\nu$. On peut alors considérer les parties réelles et imaginaires de $B(\nu)$ comme indépendantes. Par conséquent, pour *L* suffisamment grand et si $\gamma_b(\nu)$ est approximativement constant sur la bande passante de la fenêtre spectrale $H(\nu)$, $\frac{1}{L\,q[0]}|B(\nu)|^2$ est une variable aléatoire proportionnelle à une variable qui suit une loi du chi-deux à deux degrés de liberté :

$$\frac{1}{L\,q[0]}|B(\nu)|^2 \approx \frac{\gamma_b(\nu)}{2}\chi_2^2 \qquad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e/2 \tag{A-3-15}$$

étant donné que l'estimateur est normalisé pour que $\xi\left\{\frac{1}{L\,q[0]}|B(\nu)|^2\right\} \approx \gamma_b(\nu)$ (A- 3-16)

Lorsqu'il n'y a pas de recouvrement, le signal est découpé en *P* segments indépendants. On obtient alors les *P* variables $\frac{1}{L\,q[0]}|B_p(\nu)|^2$ indépendantes. La somme de *P* variables indépendantes suivant une loi du chi-deux à deux degrés de liberté étant une variable qui suit une loi du chi-deux à 2*P* degrés de liberté [TAS89], [SAP90], [PRO89], [LAC97], on en déduit aisément que l'estimateur Welch-WOSA sans recouvrement $\hat{\gamma}_b(\nu)$, a pour propriété :

$$\hat{\gamma}_b(\nu) \approx \frac{\gamma_b(\nu)}{2P}\chi_{2P}^2 \qquad \text{pour } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq \nu_e/2 \tag{A-3-17}$$

où χ_r^2 représente une variable aléatoire qui suit une loi du chi-deux à *r* degrés de liberté.
Pour $\nu = 0$ et $\nu = \nu_e / 2$, on a :

$$\hat{\gamma}_b(0) \approx \frac{\gamma_b(0)}{P}\,\chi_P^2 \qquad \text{(A-3-18)} \qquad\qquad \hat{\gamma}_b(\nu_e/2) \approx \frac{\gamma_b(\nu_e/2)}{P}\,\chi_P^2 \qquad \text{(A-3-19)}$$

A-4. Rênes de la méthode Welch-WOSA

Nous présentons dans ce paragraphe les différentes fiches qui forment les rênes de la méthode Welch-WOSA (avec la fiche présentée paragraphe 3.3.5).

<table>
<tr><th colspan="3">OBJECTIF : DIMINUER LA VARIANCE</th></tr>
<tr><td colspan="3"><u>choix 1</u> :
- diminution de la taille des segments ou augmentation du nombre de segments,
- fenêtre d'apodisation inchangée,
- décalage entre segments inchangé.</td></tr>
<tr><th colspan="2">amélioration</th><th>détérioration</th></tr>
<tr><td colspan="2">• variance diminue,
• stabilité-bande-durée diminue.</td><td>• résolution diminue,
• biais augmente,
• fuites d'énergie augmentent.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires :
Il faut là aussi faire un compromis entre la résolution et la variance. Le biais et les fuites d'énergie pourront être ensuite améliorés suivant la fenêtre d'apodisation.</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>choix 2</u> : <u>pour des tailles de segments inférieures à 40 % du nombre de points du signal</u>
- changer de fenêtre d'apodisation pour une fenêtre ayant une bande statistique supérieure,
- choisir le décalage optimal pour cette fenêtre,
- taille des segments inchangée.</td></tr>
<tr><th>amélioration</th><th>identique</th><th>détérioration</th></tr>
<tr><td>• variance diminue.</td><td>• stabilité-bande-durée.</td><td>• résolution fréquentielle,

risque de détérioration :
• biais,
• fuites d'énergie.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Commentaires :
cette opération n'est à effectuer que lorsque la taille des segments est inférieure à 50 % du nombre de points du signal (nombre de segments suffisant), sinon la variance risque de ne pas être améliorée. Le biais et les fuites d'énergie risquent de se dégrader suivant la fenêtre et la dynamique du spectre, mais les changements ne devront pas être trop importants sauf si la fenêtre rectangulaire est utilisée.</td></tr>
</table>

OBJECTIF : DIMINUER LA VARIANCE

choix 3 : pour des tailles de segments supérieures à 40 % du nombre de points du signal

- **changer de fenêtre d'apodisation et de taille des segments** de façon à obtenir une bande statistique identique (ou une bande à -3 dB identique) et une taille de segments inférieure.

Dans l'ordre d'amélioration :

rectangulaire, Bartlett, Hamming, Hanning, Blackman, Blackman-Harris 4T,

- choisir le décalage optimal pour cette fenêtre.

amélioration	identique	risque de détérioration
• **variance diminue,** . **stabilité-bande-durée diminue.**	• **résolution.**	• **fuites d'énergie,** • **biais.**

Commentaires :

cette opération n'est à effectuer que lorsque la taille des segments est supérieure à environ 40 % du nombre de points du signal (nombre de segments faible), sinon la variance risque de ne pas être améliorée. Il convient également de vérifier que la variance a réellement diminué car pour ces tailles de segments, la variance est très sensible au résidu. Ceci n'est pas valable lorsque la taille des segments est égale au nombre de points du signal (un seul segment) puisqu'alors la variance est égale à 1 quelle que soit la fenêtre. Le biais et les fuites d'énergie risquent de se dégrader suivant la fenêtre et la dynamique du spectre, mais les changements ne devront pas être trop important sauf si la fenêtre rectangulaire est utilisée.

OBJECTIF : FUITES D'ENERGIE MINIMALES

choix 1 :

- **changer la fenêtre d'apodisation** pour une fenêtre ayant un facteur de fuites d'énergie inférieur,
- choisir le décalage optimal pour cette fenêtre,
- taille des segments inchangée.

amélioration	risque de détérioration	possibilité d'amélioration
• **fuites d'énergie diminuent.**	• **résolution,** • **biais.**	• **variance,** • **stabilité-bande-durée.**

Commentaires :

les fuites d'énergie pourront être ainsi diminuées, cela dépendra cependant de la dynamique du spectre. Le reste des performances risque de se dégrader. Les fenêtres ayant un bon facteur de fuites, Blackman et Blackman-Harris 4T particulièrement, sont celles qui à taille des segments identique ont la moins bonne résolution, leur bande statistique étant plus importante. D'après « améliorer la variance », la variance est améliorée. Pour le produit stabilité-bande-durée, il risque de se détériorer si la taille des segments est supérieure à 40 % du nombre de points du signal. Le biais dépend du signal lui-même.

choix 2 :

- **augmentation de la taille des segments**,
- fenêtre d'apodisation inchangée,
- décalage inchangé.

amélioration	détérioration
• **fuites d'énergie diminuent,** • **résolution augmente,** • **biais diminue.**	• **variance augmente,** • **stabilité-bande-durée augmente.**

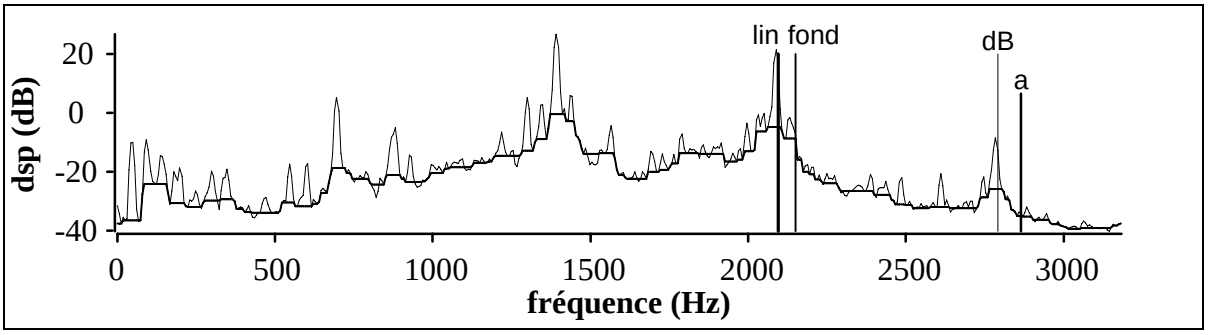
Commentaires :

on se retrouve dans le choix 1 de l'objectif améliorer la résolution.

<table>
<tr><th colspan="2">OBJECTIF : BIAIS MINIMAL</th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>choix 1</u> :
- changer la fenêtre d'apodisation,
- choisir le décalage optimal pour cette fenêtre,
- taille des segments inchangée.</td></tr>
<tr><th>amélioration</th><th>risque de détérioration</th></tr>
<tr><td>• biais diminue.</td><td>• résolution,
• fuites d'énergie,
• variance,
• stabilité-bande-durée.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Commentaires :
l'influence de la fenêtre d'apodisation sur le biais dépend avant tout de la dynamique du spectre.
Il convient d'être prudent, pour que l'amélioration soit effective il faut avoir un spectre de dynamique importante. Voici quelques possibilités de choix suivant la forme du spectre :
- si les parties de forte DSP du spectre sont éloignées les unes des autres :
utilisation de la fenêtre de Hanning ou Blackman dont les lobes secondaires éloignés du lobe principal sont les plus faibles,
- si les parties de forte DSP du spectre sont proches les unes des autres :
utilisation de Hamming dont le lobe central n'est pas trop large et les premiers lobes secondaires sont bien atténués,
- si le spectre a une forte dynamique répartie régulièrement (ni trop proche, ni trop éloigné) sur l'ensemble de la bande :
utilisation de Blackman-Harris 4T dont les lobes secondaires sont bien atténués et de niveau constant sur l'ensemble de la bande.
Pour le reste des performances, se reporter au paragraphe 3.3.1 connaître l'influence du changement de fenêtre.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>choix 2</u> :
- augmentation de la taille des segments,
- fenêtre d'apodisation inchangée,
- décalage entre segments inchangé.</td></tr>
<tr><th>amélioration</th><th>détérioration</th></tr>
<tr><td>• fuites d'énergie diminuent,
• résolution augmente,
• biais diminue.</td><td>• variance augmente,
• stabilité-bande-durée augmente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Commentaires :
on se retrouve dans le choix 1 de l'objectif « améliorer la résolution ».</td></tr>
</table>

A-5. Test d'échantillonnage de Shannon

- **Le signal ENG8-E5-21RH-SPV**, signal d'engrenage fourni par EDF (65 536 points, fréquence d'échantillonnage de 6365 Hz) :

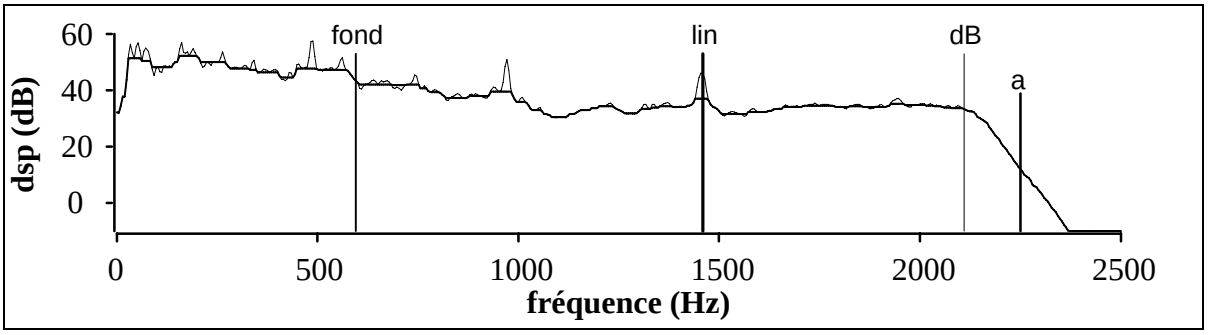


ν_{lin} = 2090 Hz, ν_{fond} = 2190 Hz, ν_{dB} = 2790 Hz, fréquence d'alerte ν_a = 2864 Hz

Figure A 5-I : **signal ENG8-E5-21RH-SPV, résultat du test d'échantillonnage de Shannon**. L'estimation du spectre est la courbe en trait fin, l'estimation du fond de spectre est la courbe en trait épais. Bande d'Heisenberg estimée $\Delta\nu$ = 1580 Hz.

Pour ce signal aucune alerte n'est émise. Le filtre anti-repliement est bien détecté puisque la fréquence ν_{fond} est inférieure à la fréquence d'alerte. Il a été appliqué et rempli correctement sa fonction. Sa fréquence de coupure est de 2600 Hz. La fréquence ν_{dB} est proche du dernier motif important du spectre (constitué d'une série de fréquences pures) qui est dans la bande de coupure du filtre anti-repliement, mais qui n'a pas été complètement atténué. Cependant ce motif est suffisamment loin de la fréquence d'échantillonnage sur deux pour que l'on considère qu'il n'y a pas de risque de recouvrement.

- **Le signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6** de bruit rayonné d'un navire fourni par le CTSN, (100 000 points, fréquence d'échantillonnage de 5000 Hz) :



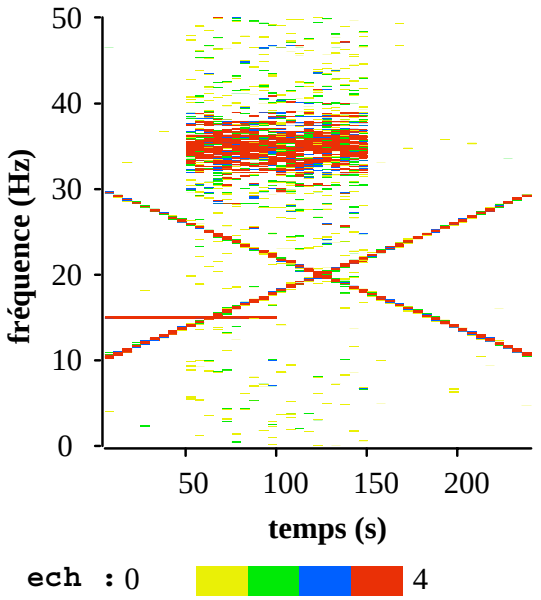
ν_{fond} = 596 Hz, ν_{lin} = 1460 Hz, ν_{dB} = 2110 Hz, fréquence d'alerte ν_a = 2250 Hz

Figure A 5-II : **signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6, résultat du test d'échantillonnage de Shannon**. L'estimation du spectre est la courbe en trait fin, l'estimation du fond de spectre est la courbe en trait épais. Bande d'Heisenberg estimée $\Delta\nu$ = 510 Hz.

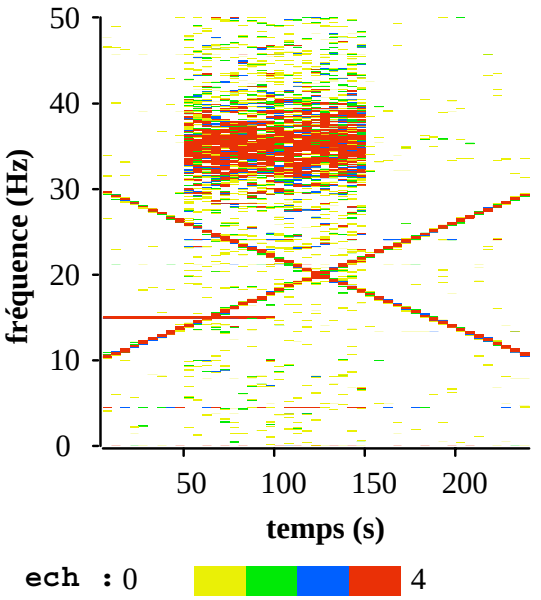
Pour ce signal aucune alerte n'est émise. Le filtre anti-repliement est bien détecté. Il a été appliqué et rempli correctement sa fonction. Sa fréquence de coupure est de 1875 Hz. La *fréquence maximale de puissance décibel* est proche de la fréquence de coupure du filtre anti-repliement. La *fréquence maximale de puissance linéaire* est au niveau du dernier motif important émergeant du fond de spectre. La *fréquence maximale de puissance du fond* situe la première bande pour laquelle le fond de spectre est le plus important, il diminue en effet après sous forme d'un palier de DSP plus faible jusqu'à la bande de coupure du filtre anti-repliement. Ceci implique que même sans filtre anti-repliement, les risques de repliement sur la première bande d'intérêt sont faibles étant donné les écarts de puissance.

A-6. Détection de non-stationnarités dans le plan temps-fréquence

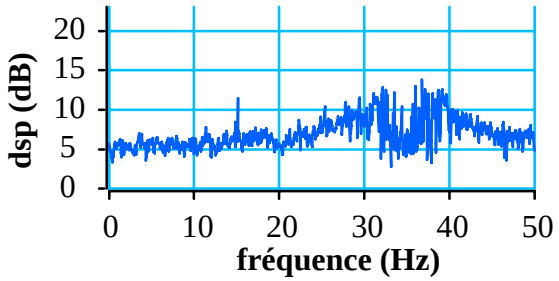
A-6.1. Détection à partir du spectrogramme ou du corrélogramme glissant



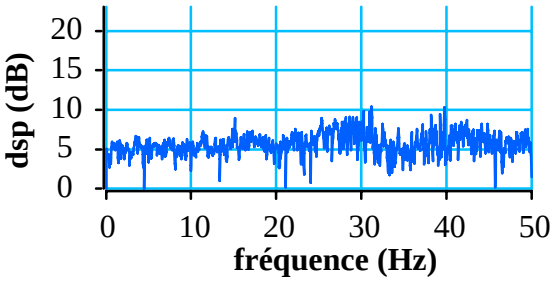
(a) résultat de la détection avec le spectrogramme et une P_{fa} **désirée de** 10^{-3}.



(b) résultat de la détection avec le spectrogramme et une P_{fa} **désirée de** 10^{-2}.

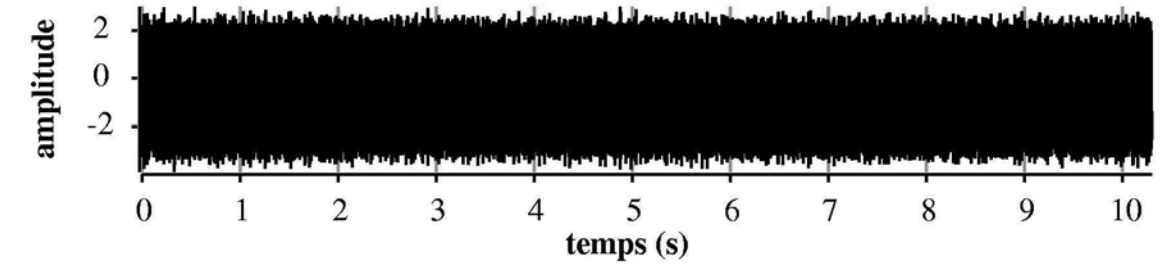


(c) spectre « stationnaire » $\hat{\mu}_s$ avec le spectrogramme et une P_{fa} désirée de 10^{-3}.

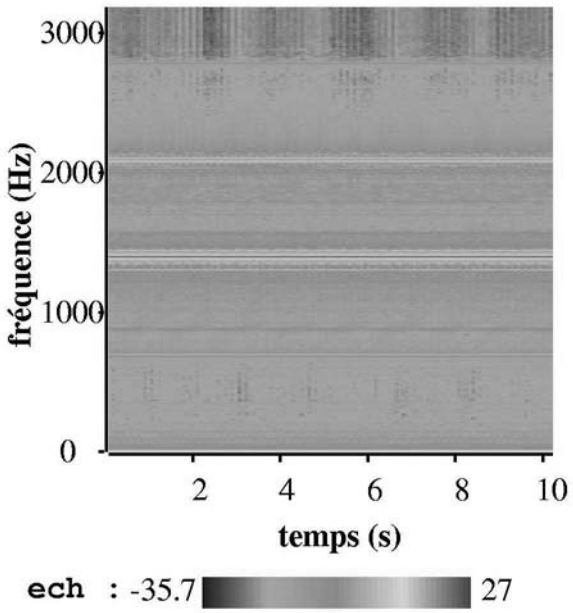


(d) spectre « stationnaire » $\hat{\mu}_s(\nu)$ avec le spectrogramme et une P_{fa} désirée de 10^{-2}.

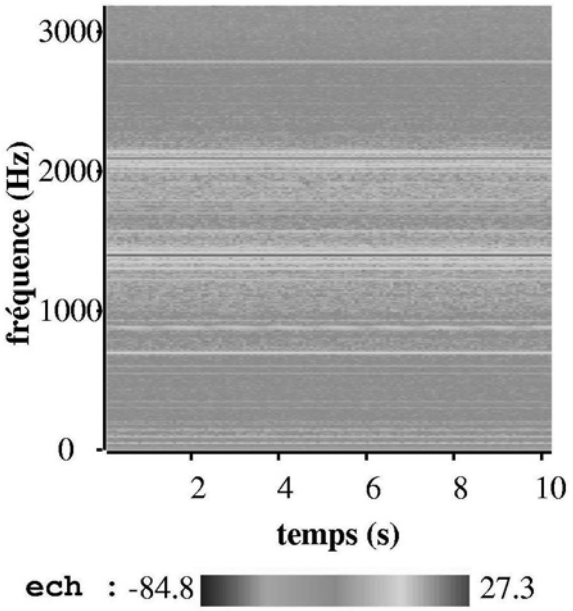
Figure A 6-I : **signal synthétique, détection dans le plan temps-fréquence**. Résultat de la détection dans le plan temps-fréquence avec le **spectrogramme** (paramètres par défaut, 47 segments) pour un pourcentage *x*% de 50% et (a) une P_{fa} désirée de 10^{-3}, (b) une P_{fa} désirée de 10^{-2}. Moyenne temporelle des estimations stationnaires de l'ensemble $E_s(\nu)$: estimation du spectre stationnaire, (c) pour une P_{fa} désirée de 10^{-3}, (d) pour une P_{fa} désirée de 10^{-2}. *Sur les figures (a) et (b), les estimées non détectées de la classe 0 sont associées à la couleur blanche.*



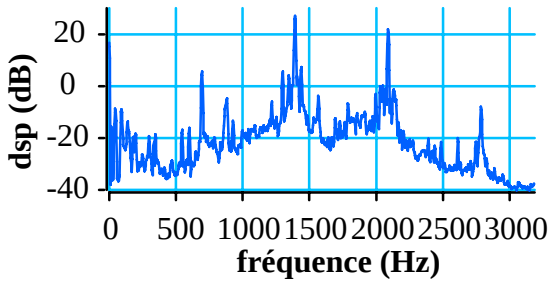
(a) signal temporel ENG8-E5-21 RH-SPV



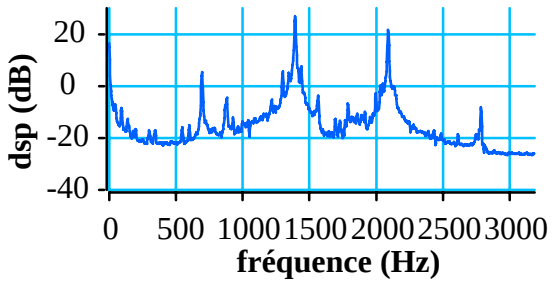
(b) RTF **spectrogramme** en dB



(c) RTF **corrélogramme glissant** en dB

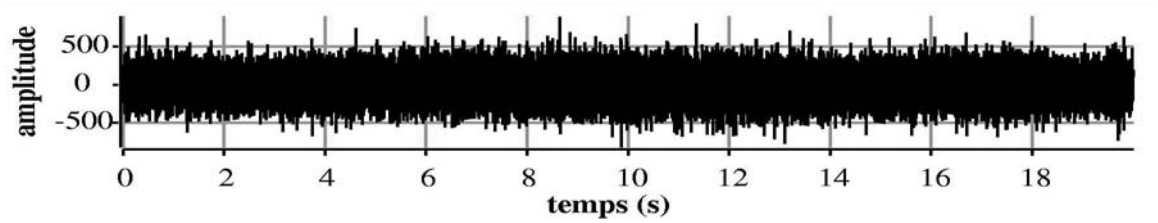


(d) moyenne temporelle de la RTF du spectrogramme

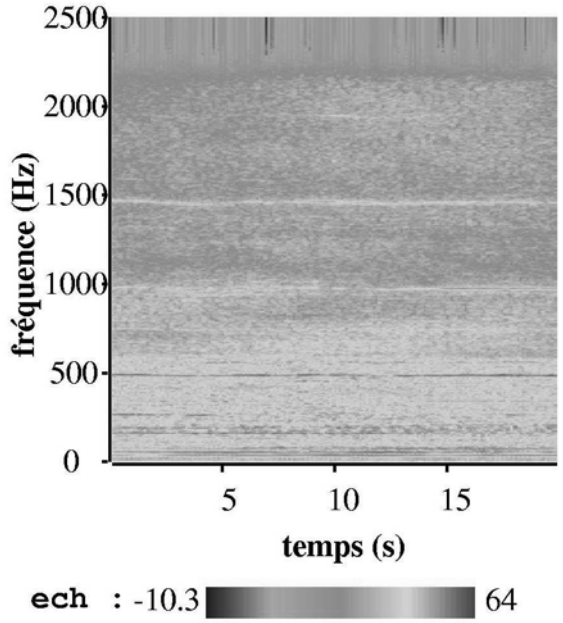


(e) moyenne temporelle de la RTF du corrélogramme glissant

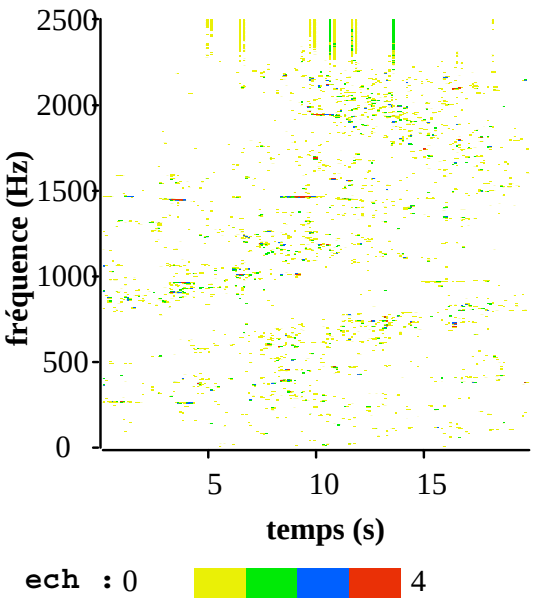
Figure A 6-II : **signal ENG8-E5-21 RH-SPV** (a) signal temporel. Représentation temps-fréquence obtenue (b) avec le spectrogramme (avec les paramètres par défaut, 127 segments), (c) avec le corrélogramme glissant (avec les paramètres par défaut, 127 segments). Moyenne temporelle de la RTF, (d) avec le spectrogramme, (e) avec le corrélogramme glissant. Les résultats de la détection dans le plan temps-fréquence pour un pourcentage *x*% de 50% et une P_{fa} désirée de 10^{-4}, ne donnent aucune détection pour une P_{fa} inférieure à 10^{-4} (classe 3) dans les deux cas. Seules quelques détections sont obtenues pour une P_{fa} de 10^{-2} (classe 1) principalement avec le spectrogramme.



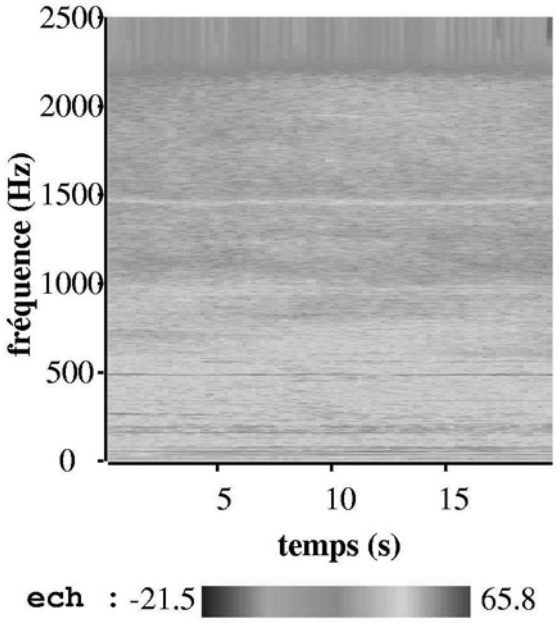
(a) signal temporel MF-CHARLIE 1-VOIE 6



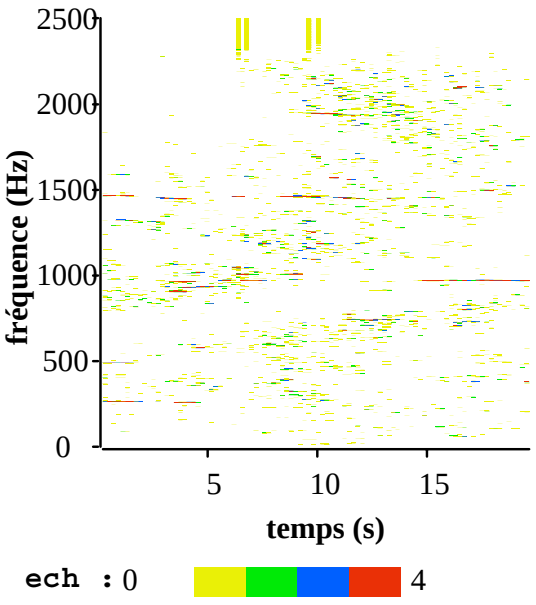
(b) RTF **corrélogramme glissant** en dB, **1024** pts



(c) **résultat de la détection**, segments de **1024** pts

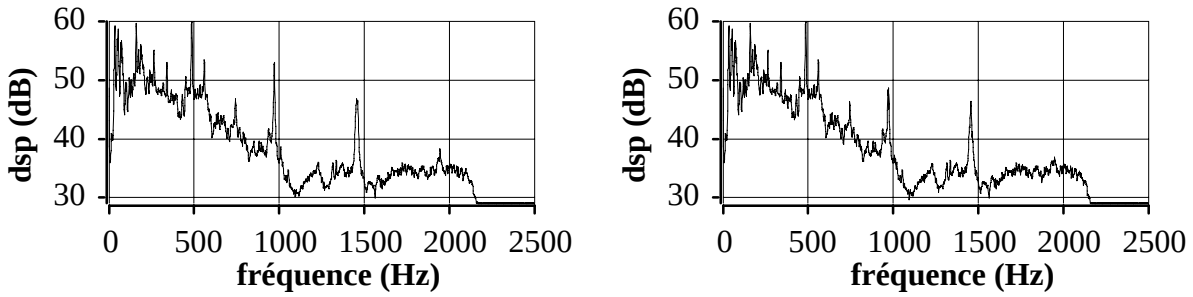


(d) RTF **corrélogramme glissant** en dB, **2048** pts



(e) **résultat de la détection**, segments de **2048** pts

Figure A 6-III : **signal MF-CHARLIE1-VOIE6** (a) signal temporel. Représentation temps-fréquence obtenue avec le corrélogramme glissant pour une taille de segments de : 1024 points (194 segments) courbe (b), de 2048 points (96 segments) courbe (d). Résultat de la détection pour x% = 50% et une P_{fa} désirée de 10^{-4}, pour une taille de segments de : 1024 points courbe (c), de 2048 points courbe (e).



(a) moyenne temporelle de la RTF, 2048 points (b) spectre « stationnaire » $\hat{\mu}_s(\nu)$, 2048 points

Figure A 6-IV : **signal MF-CHARLIE1-VOIE6** (a) moyenne temporelle de la RTF obtenue avec le **corrélogramme glissant et une taille de segments de 2048** points (Figure A 6-III (c)), (b) moyenne temporelle des estimations stationnaires de l'ensemble $E_s(\nu)$ pour x% = 50% et une P_{fa} désirée de 10^{-4} : estimation du spectre stationnaire (Figure A 6-III (e)).

Le signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 correspond à l'enregistrement de la passe d'un navire au-dessus d'un hydrophone. Il présente de légères non-stationnarités sous la forme de motifs bande étroite dont la fréquence centrale change au cours du temps ou dont l'énergie varie. Ces motifs correspondent au bruit des moteurs diesel du navire. Ils forment des motifs bande étroite harmoniques entre eux. La largeur de bande est due aux légères variations du régime du moteur, aux modifications de la charge sur les hélices et à l'effet doppler.

La détection de ce type de non-stationnarités dépend de la résolution fréquentielle choisie. Les plus importantes ont été détectées avec le corrélogramme glissant pour une taille de segments de 2048 points (cf. Figure A 6-III (d) et Figure A 6-IV). Par contre des motifs non-stationnaires de faible puissance et très localisées en temps, ne sont plus détectés lorsque l'on augmente la taille des segments. On retrouve le compromis classique résolution temporelle, résolution temporelle. Ce signal peut être analysé dans le cadre stationnaire, mais ces informations doivent être intégrées pour l'interprétation finale des motifs spectraux, en particulier, en ce qui concerne l'interprétation de la largeur de bande des motifs en partie due à ces fluctuations de fréquences. Dans le cadre d'un scénario complet d'analyse, une première détection avec les paramètres par défaut, va détecter les non-stationnarités les plus importantes tout en concluant qu'une analyse stationnaire est possible. Le critère peut être réappliqué une fois l'analyse stationnaire complétée. Les motifs et leur bande sont alors déterminés, ce qui permet de choisir de façon plus adéquate les paramètres du critère (pour ce signal en augmentant la résolution fréquentielle). Les résultats finaux sont intégrés à l'interprétation finale.

A-6.2. Détection de non-stationnarités à partir de la variance normalisée

A-6.2.1. Calcul de la variance normalisée du périodogramme dans le cas d'un signal déterministe additionné d'un signal aléatoire gaussien centré

Nous allons démontré que pour un signal composé d'une partie déterministe additionnée d'une partie aléatoire gaussienne centrée, la variance normalisée théorique du périodogramme apodisé peut être considérée comme inférieure à la variance normalisée théorique dans le cas où seul le signal aléatoire gaussien est présent (égale alors à 1).

Le signal à analyser est $x[n] = s[n] + b[n]$ pour $0 \leq n \leq N\text{-}1$ où $s[n]$ représente le signal certain et $b[n]$ le signal aléatoire gaussien.

L'estimation de la densité spectrale de puissance par la méthode du périodogramme apodisé s'écrit simplement (sans tenir compte d'une éventuelle normalisation) :

$\hat{\gamma}_x(\nu) = |X(\nu)|^2$

avec

$$X(\nu) = \mathrm{TFd}(x[n]h[n]) = T_e \sum_{n=0}^{L-1} x[n]h[n]\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} n \nu T_e}$$

dans ces conditions la fenêtre spectrale est égale à :

$Q(\nu) = |H(\nu)|^2 = |\mathrm{TFd}(h[n])|^2$ et $\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \gamma_x(\nu) * Q(\nu)$

D'où

$$\hat{\gamma}_x(\nu) = |S(\nu) + B(\nu)|^2 = \hat{\gamma}_s(\nu) + \hat{\gamma}_b(\nu) + S(\nu)\, B(\nu)^* + S^*(\nu)\, B(\nu)$$
$$= \hat{\gamma}_s(\nu) + \hat{\gamma}_b(\nu) + \hat{\gamma}_{sb}(\nu) + \hat{\gamma}_{bs}(\nu)$$

avec : $S(\nu) = \mathrm{TFd}(s[n]h[n])$, $B(\nu) = \mathrm{TFd}(b[n]h[n])$ et $\hat{\gamma}_{xy}(\nu) = X(\nu)\, Y^*(\nu)$ l'estimation de la densité spectrale d'interaction entre *x* et *y*.

Le signal s étant certain, on a bien évidemment $\xi\{\hat{\gamma}_s(\nu)\} = \hat{\gamma}_s(\nu)$.

Le signal b étant à moyenne nulle $\xi\{B(\nu)\} = 0$.

La moyenne de $\hat{\gamma}_x(\nu)$ est donc égale à :

$$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \hat{\gamma}_s(\nu) + \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + S(\nu)\,\xi\{B^*(\nu)\} + S^*(\nu)\,\xi\{B(\nu)\} = \hat{\gamma}_s(\nu) + \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}$$

et $\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}^2 = \hat{\gamma}_s(\nu)^2 + \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2 + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}$

$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)^2\}$ est égal à :

$$\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)^2\} = \hat{\gamma}_s(\nu)^2 + \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)^2\} + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\} + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_{bs}(\nu)\}$$
$$+ 2\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\} + 2\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\,\hat{\gamma}_{bs}(\nu)\} + 2\,\xi\{|\hat{\gamma}_{sb}(\nu)|^2\} + \hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu) + \hat{\gamma}_{bs}(\nu)\,\hat{\gamma}_{bs}(\nu)$$

sachant que $\hat{\gamma}_{sb}(\nu) = \hat{\gamma}_{bs}^*(\nu)$ d'où $\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{bs}(\nu) = |\hat{\gamma}_{sb}(\nu)|^2 = |\hat{\gamma}_{bs}(\nu)|^2$

Or $\xi\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\} = S(\nu)\,\xi\{B^*(\nu)\} = 0$ et de même $\xi\{\hat{\gamma}_{bs}(\nu)\} = 0$,

de plus le signal étant gaussien, le moment d'ordre 3 de *b* et donc de sa TFd sont nuls, d'où :

$\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\} = S(\nu)\,\xi\{B(\nu)\,B^*(\nu)\,B^*(\nu)\} = 0$ et de même $\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\,\hat{\gamma}_{bs}(\nu)\} = 0$.

On a : $\xi\{|\hat{\gamma}_{sb}(\nu)|^2\} = \xi\{|S(\nu)\,B^*(\nu)|^2\} = |S(\nu)|^2\,\xi\{|B(\nu)|^2\} = \hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}$

d'où : $\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)^2\} = \hat{\gamma}_s(\nu)^2 + \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)^2\} + 4\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\xi\{\mathrm{Re}\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\}$

La variance de $\hat{\gamma}_x(\nu)$ s'écrit donc :

$$\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} = \xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)^2\} - \xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}^2$$
$$= \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)^2\} - \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2 + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\xi\{\mathrm{Re}\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\}$$
$$= \mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\xi\{\mathrm{Re}\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\}$$

La variance normalisée s'écrit :

$$\frac{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}}{\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}^2} = \frac{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\xi\{\mathrm{Re}\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\}}{\hat{\gamma}_s(\nu)^2 + \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2 + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}$$

Nous avons l'inégalité suivante : $\mathrm{Re}\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\} \le |\hat{\gamma}_{sb}(\nu)|^2$

d'où $\xi\{\mathrm{Re}\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\} \le \xi\{|\hat{\gamma}_{sb}(\nu)|^2\}$

$$\xi\{\Re e\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\} \le \hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}$$

on en déduit :

$$\mathrm{var\,n}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} \le \frac{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 4\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}{\hat{\gamma}_s(\nu)^2 + \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2 + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}$$

$$\mathrm{var\,n}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} \le \frac{\mathrm{var\,n}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 4\dfrac{\hat{\gamma}_s(\nu)}{\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}}{\dfrac{\hat{\gamma}_s(\nu)^2}{\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2} + 2\dfrac{\hat{\gamma}_s(\nu)}{\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}} + 1}$$

Posons : $R(\nu) = \dfrac{\hat{\gamma}_s(\nu)}{\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}$

qui représente le rapport signal sur bruit pour chaque fréquence compte tenu de l'estimateur. En particulier, dans le cas d'une sinusoïde de fréquence ν_0 et d'amplitude A additionné d'un bruit blanc gaussien de variance σ^2, on aura :

$$R(\nu) = \frac{\dfrac{A^2}{4B_e}}{\sigma^2 T_e}$$

B_e représente la bande équivalente au bruit de la fenêtre quadratique.

On a alors : $\mathrm{var\,n}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} \le \dfrac{\mathrm{var\,n}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 4\,R(\nu)}{R(\nu)^2 + 2\,R(\nu) + 1}$

De plus, pour le signal aléatoire gaussien centré la variance normalisée du périodogramme apodisé est égale à 1, d'où :

$$\mathrm{var\,n}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\} \le \frac{1 + 4\,R(\nu)}{R(\nu)^2 + 2\,R(\nu) + 1}$$

on aura $\dfrac{1 + 4\,R(\nu)}{R(\nu)^2 + 2\,R(\nu) + 1} \le \mathrm{var\,n}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} = 1$ si $R(\nu) \ge 2$.

Or étant donné la variance normalisée du périodogramme de 1, si $R(\nu) < 2$, le spectre du signal certain n'est pas distingué des pics liés à la partie aléatoire du signal.

La bande équivalente B_e est de l'ordre de $1/LT_e$, un rapport $R(\nu)$ de 2 dans le cas du bruit blanc et de la sinusoïde donne :

$$\frac{A^2\,L\,T_e}{4\sigma^2 T_e} = 2\,,\ \frac{\dfrac{A^2}{2}}{\sigma^2} = \frac{4}{L}$$

soit un rapport signal sur bruit égal à $4/L$ où L est la longueur d'un segment, ce qui donne des rapports signal sur bruit très faibles.

En outre, plusieurs remarques doivent être faites :

- tout d'abord la fonction $\dfrac{1 + 4\,R(\nu)}{R(\nu)^2 + 2\,R(\nu) + 1}$ tend vers 1 lorsque $R(\nu)$ tend vers 0, son maximum est obtenu pour $R(\nu) = 1/2$ et est égal à 4/3 qui n'est que très légèrement supérieur à 1 et reste très inférieur aux écarts attendus dans le cas de non-stationnarités.
- de plus si l'on néglige le terme $2\,\xi\{\Re e\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\}$ dans

$\frac{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}}{\xi\{\hat{\gamma}_x(\nu)\}^2} = \frac{\mathrm{var}\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\} + 2\,\xi\{\Re e\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\}}{\hat{\gamma}_s(\nu)^2 + \xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}^2 + 2\,\hat{\gamma}_s(\nu)\,\xi\{\hat{\gamma}_b(\nu)\}}$, on obtient que la variance normalisée est toujours inférieure à 1.

Or ce terme est égal à :

$2\,\xi\{\Re e\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\,\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}\} = 2\,\xi\left\{\Re e\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}^2 - Im\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}^2\right\}$

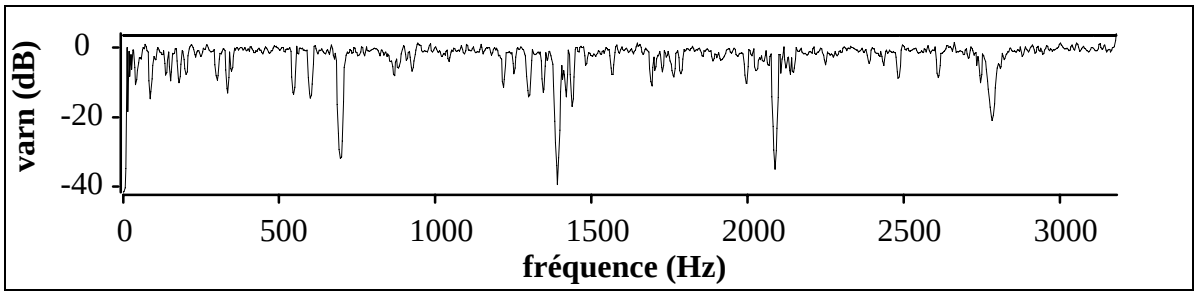
ce terme peut donc mêmes être négatif, il est en tout cas souvent très inférieur à

$2\,\xi\left\{\left|\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\right|^2\right\} = 2\,\xi\left\{\Re e\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}^2 + Im\{\hat{\gamma}_{sb}(\nu)\}^2\right\}$

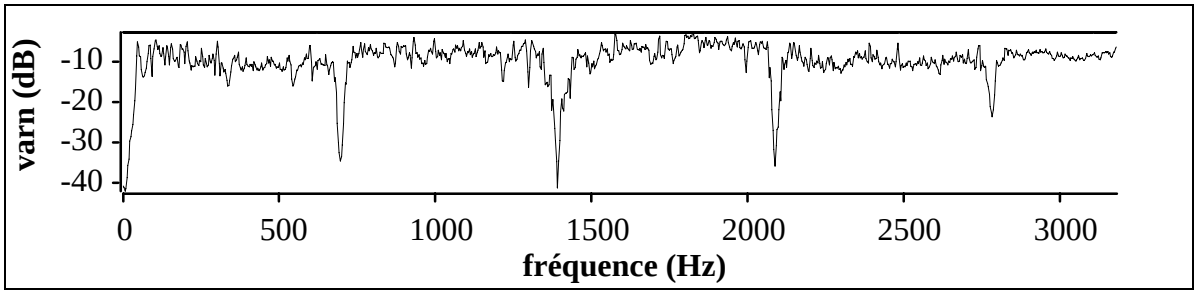
ce qui implique qu'une variance normalisée supérieure à 1 est très peu probable.

En conclusion, la variance normalisée théorique du périodogramme apodisé pour un signal certain additionné d'un signal aléatoire gaussien centré est toujours inférieure à 4/3 et peut être en pratique considérée comme inférieure à 1. Ce cas est illustré par la figure 3 pour un signal carré additionné d'un bruit blanc. Ceci peut aussi permettre d'envisager un seuil inférieur pour la variance normalisée en dessous duquel on pourrait considérer que dans cette zone de fréquence, on estime la DSP d'un signal certain.

A-6.2.2. Résultats du critère de détection de non-stationnarités à partir de la variance normalisée

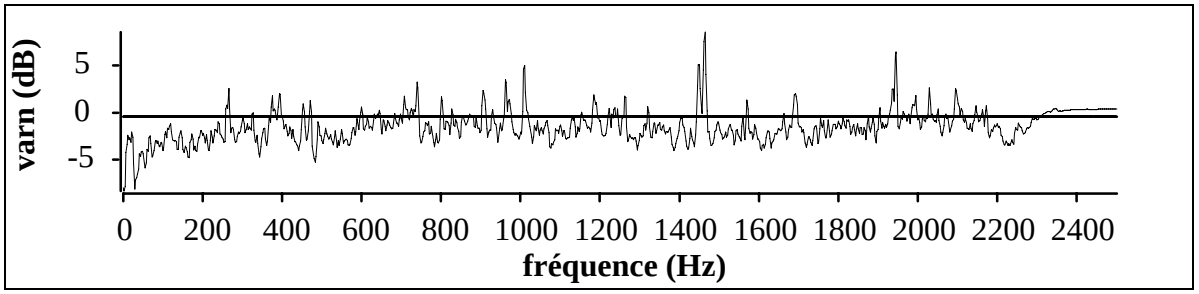


(a) estimation de la variance normalisée (trait fin) et seuil de détection (épais) pour une P_{fa} de 10^{-4} à partir du **périodogramme** (cf. Figure A 6-II (b) et (d)).

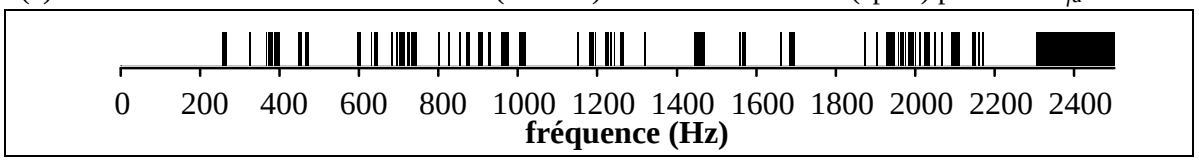


(b) estimation de la variance normalisée (trait fin) et seuil de détection (épais) pour une P_{fa} de 10^{-4} à partir du **corrélogramme A-biaisé** (cf. Figure A 6-II (c) et (e)).

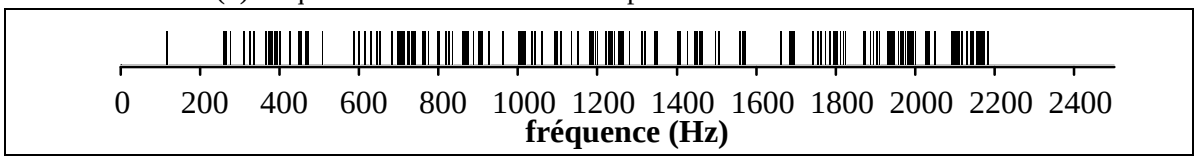
Figure A 6-V : **signal ENG8-E5-21 RH-SPV, détection de non stationnarité en fréquence à partir de la variance normalisée**. Le critère est fondé sur les résultats du critère de détection dans le plan temps-fréquence présentés sur la Figure A 6-II. Le nombre de segments est égal à 127, le seuil de détection pour une P_{fa} de 10^{-4} est alors égal à 2,3, soit 3,62 dB, pour le périodogramme et égal à 1,1, soit 0,41 dB, pour le corrélogramme (cf. Tab. 4.2-I).



(a) estimation de la variance normalisée (trait fin) et seuil de détection (épais) pour une P_{fa} de 10^{-4}.

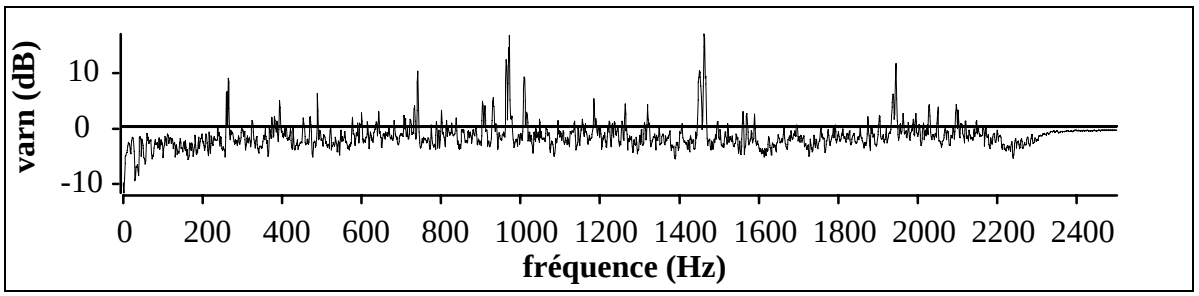


(b) fréquence détectée comme comportant des non-stationnarités.

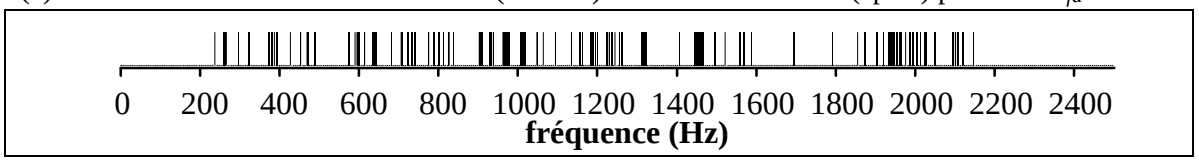


(c) projection sur l'axe fréquentiel des non stationnarités détectées avec une P_{fa} supérieure à 10^{-4} par le premier critère (détection de non stationnarité dans le plan temps-fréquence, cf. Figure A 6-III (c)).

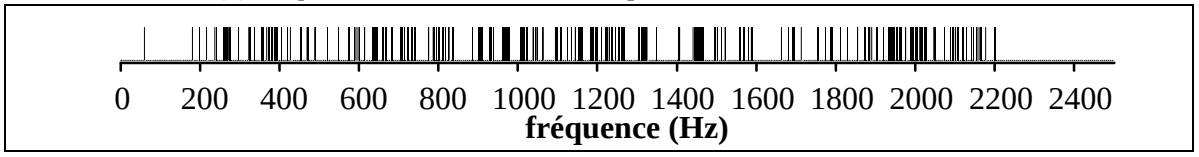
Figure A 6-VI : **signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6, détection de non stationnarité en fréquence à partir de la variance normalisée du corrélogramme A-biaisé**. Le critère est fondé sur les résultats présentés sur la Figure A 6-III (b) et (c) et la Figure A 6-IV (a). Le nombre de segments est égal à 194, le seuil de détection est alors égal à 0,9, soit -0,46 dB, pour une P_{fa} de 10^{-4} (cf. Tab. 4.2-I).



(a) estimation de la variance normalisée (trait fin) et seuil de détection (épais) pour une P_{fa} de 10^{-4}.



(b) fréquence détectée comme comportant des non-stationnarités.



(c) projection sur l'axe fréquentiel des non stationnarités détectées avec une P_{fa} supérieure à 10^{-4} par le premier critère (détection de non stationnarité dans le plan temps-fréquence, cf. Figure A 6-III (e)).

Figure A 6-VII : **signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6, détection de non stationnarité en fréquence à partir de la variance normalisée du corrélogramme A-biaisé**. Le critère est fondé sur les résultats présentés sur la Figure A 6-III (d) et (e) et la Figure A 6-IV (b). Le nombre de segments est égal à 96, le seuil de détection est alors égal à 1,1, soit 0,41 dB, pour une P_{fa} de 10^{-4} (cf. Tab. 4.2-I).

Dans le cas du signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6, la détection de certains motifs dépend de la résolution fréquentielle (cf. Figure A 6-VI et Figure A 6-VII). Rappelons qu'il s'agit de légères non-stationnarités sous la forme de motifs bande étroite dont la fréquence centrale change au cours du temps ou dont l'énergie varie. Ces non stationnarités sont dans leur majorité clairement détectées par le critère même lorsque la résolution fréquentielle est faible. La détection est moins évidente dans le domaine temps-fréquence étant donné que seule une partie des segments était détectée comme non-stationnaire par le premier critère. On remarque également que pour des segments de 1024 points, des non stationnarités sont détectées en haute fréquence pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-4}, alors qu'elles ne l'étaient pas pour la même probabilité de fausse alarme avec le critère précédent (cf. Figure A 6-III en annexe A-6.1). Il s'agit de très faibles non stationnarités très localisées en temps, mais qui sont présentes régulièrement sur la totalité du signal. Le critère permet donc de détecter des non stationnarités qui ne sont pas correctement détectées par le premier critère.

A-7. Détection de périodicité globale et estimation du rapport signal sur bruit

Les résultats sont probants pour le **signal ENG8-E5-21RH-SPV** (cf. Figure A 7-I et Figure A 7-II). Celui-ci, correspondant à un engrenage sain, est dominé par la présence des harmoniques de la fréquence d'engrènement à 696 Hz. Le coefficient de périodicité obtenu est maximal et la période estimée à 698 Hz, correspond bien à la fréquence d'engrènement (à la résolution temporelle près). Il convient de signaler que la fréquence d'engrènement étant relativement haute, une interpolation de l'autocorrélation est nécessaire. Sans interpolation les résultats sont erronés, ils ne sont corrects qu'à partir d'un coefficient d'interpolation égal à 4. Nous avons également testé l'algorithme sur le signal ENG8-E11-21 RH-SPV (cf. Figure A 7-III et Figure A 7-IV) qui correspond au même engrenage que pour ENG8-E5-21 RH-SPV, mais une fois que celui-ci s'est dégradé. La dégradation étant sur la roue petite vitesse dont la fréquence de rotation est de 12,43 Hz, les harmoniques de cette fréquence, principalement organisée en bandes latérales autour des harmoniques de la fréquence d'engrènement, deviennent très importantes. La partie périodique du signal a alors pour période la fréquence de la petite roue, soit 12,43 Hz. Celle-ci est parfaitement détectée par le critère, puisque là encore le coefficient de périodicité est égal à 1 et la période estimée est de 12,4 Hz. Il faut noter que sur l'autocorrélation la fréquence d'engrènement est toujours très présente sous la forme de motif périodique à cette fréquence, mais que c'est bien la période du signal de 12,4 Hz qui est détectée (la fréquence d'engrènement est une harmonique de la fréquence de la petite roue).

Résultats du critère pour le signal ENG8-E5-21RH-SPV (65536 points, fréquence d'échantillonnage de 6365 Hz).
Les résultats présentés (cf. Figure A 7-I et Figure A 7-II) ont été obtenus avec une recherche des maxima sur un faible support de l'autocorrélation, support suffisant étant donné le nombre de points du signal (τ_a = τ_c = 0,0157 s, point 100, τ_b = 0,314 s, point 2000 sans interpolation), le coefficient d'interpolation est égal à 8, les autres paramètres sont ceux donnés par défaut.

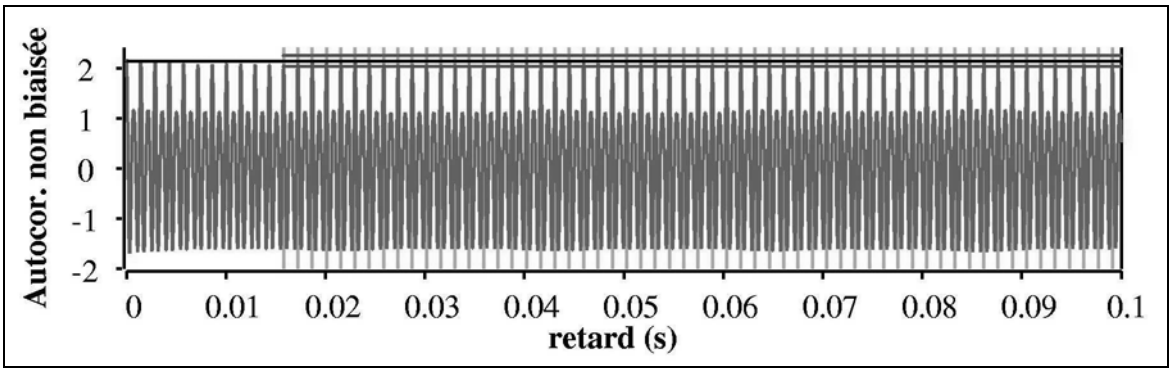


Figure A 7-I : **signal ENG8-E5-21RH-SPV, résultat de la détection de périodicité globale**. En rouge : estimation non biaisée de l'autocorrélation. Trait noir vertical, τ_{max} retard du maximum . Trait noir horizontal : puissance estimée du signal P_{S1}. Traits bleus : intervalle de recherche des maxima, l_{max} et l_{min}. Traits verticaux verts : retards des maxima de l'ensemble ξ. Résultats du critère : C_P = 1, période $\hat{T}_s$ = 0,0143 s, soit 698 Hz, RSB = 22, $\hat{P}_s$ = 2,1, $\hat{P}_b$ = 0,095.

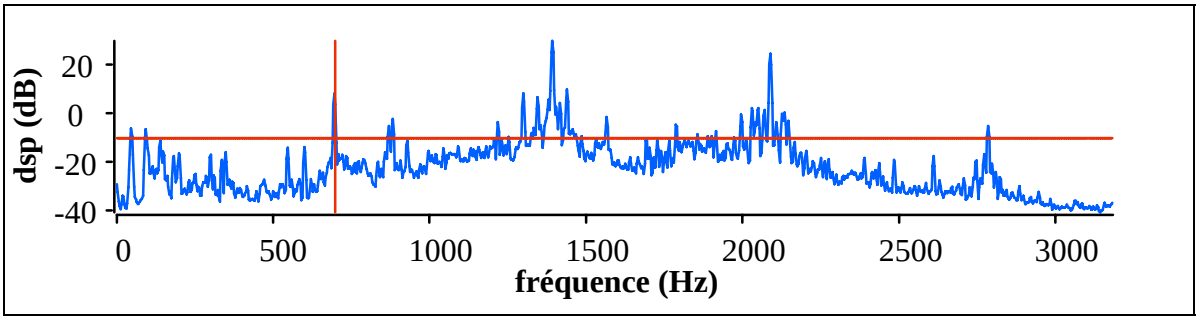


Figure A 7-II : en bleu DSP estimée du **signal ENG8-E5-21RH-SPV** (Welch-WOSA, taille des segments de 2048 points avec une fenêtre de Blackman) en décibel. Trait rouge horizontal : puissance estimée du bruit $\hat{P}_b$. Trait rouge vertical : fréquence correspondant à la période estimée $\hat{T}_s$.

Résultats du critère pour le signal ENG8-E11-21RH-SPV (65536 points, fréquence d'échantillonnage de 6365 Hz).
Les résultats présentés (cf. Figure A 7-III et Figure A 7-IV) ont été obtenus avec une recherche des maxima sur une petite partie de l'autocorrélation, suffisante étant donné le nombre de points du signal (τ_a = τ_c = 0,0157 s, point 100, τ_b = 0,628 s, point 4000 sans interpolation), le coefficient d'interpolation est égal à 2, les autres paramètres sont ceux donnés par défaut.

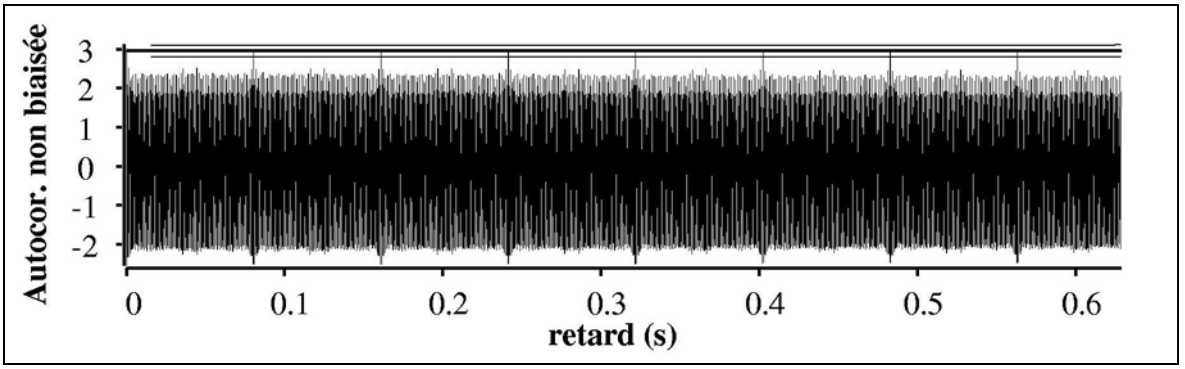


Figure A 7-III : **signal ENG8-E11-21RH-SPV, résultat de la détection de périodicité globale**. Courbe : estimation non biaisée de l'autocorrélation. Trait noir vertical, τ_{max} retard du maximum. Trait épais horizontal : puissance estimée du signal P_{S1}. Traits fins : intervalle de recherche des maxima, l_{max} et l_{min}. Résultats du critère : C_P = 1, période $\hat{T}_S$ = 0,0804 s, soit 12,4 Hz, RSB = 36, $\hat{P}_S$ = 3, $\hat{P}_b$ = 0,082.

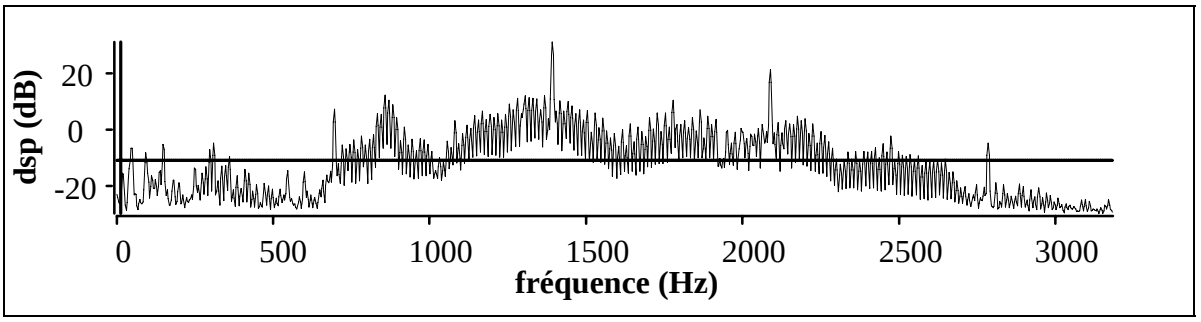


Figure A 7-IV : DSP estimée du **signal ENG8-E11-21RH-SPV** (Welch-WOSA, taille des segments de 2048 points avec une fenêtre de Blackman) en décibel. Trait épais horizontal : puissance estimée du bruit $\hat{P}_b$. Trait épais vertical : fréquence correspondant à la période estimée $\hat{T}_S$.

Résultats du critère pour le signal synthétique 2 (cf. Figure A 7-Vet Figure A 7-VI)
Ce signal est constitué d'un bruit coloré gaussien de puissance 3,97 et d'un signal périodique constitué d'une série de sinusoïdes dont les fréquences sont harmoniques (fréquence d'échantillonnage unité, 1024 points). Les différents harmoniques sont : h_0 le fondamental de fréquence et d'amplitude (0,025 Hz ; 1,2), h_3 (0,1 Hz ; 1), h_4 (0,2 Hz ; 0,2), h_8 (0,225 Hz ; 0,2). La puissance de la partie périodique du signal est égale à 1,25 ce qui donne un rapport signal sur bruit de –5 dB. Les paramètres utilisés sont ceux indiqués par défaut (avec en particulier $\tau_a = \tau_c = 0{,}05N$, $\tau_b = 0{,}5N$ et $\tau_d = 0{,}6N$, coefficient d'interpolation égal à 2). Le bruit coloré est issu d'un processus ARMA dont l'entrée est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. L'ordre de la partie AR est 4, celui de la partie MA de 2. Les coefficients AR sont a_1=-1,352, a_2=1,358, a_3=-0,662, a_4=0,24. Les coefficients MA sont m_1=-0,2 et m_2=0,04.

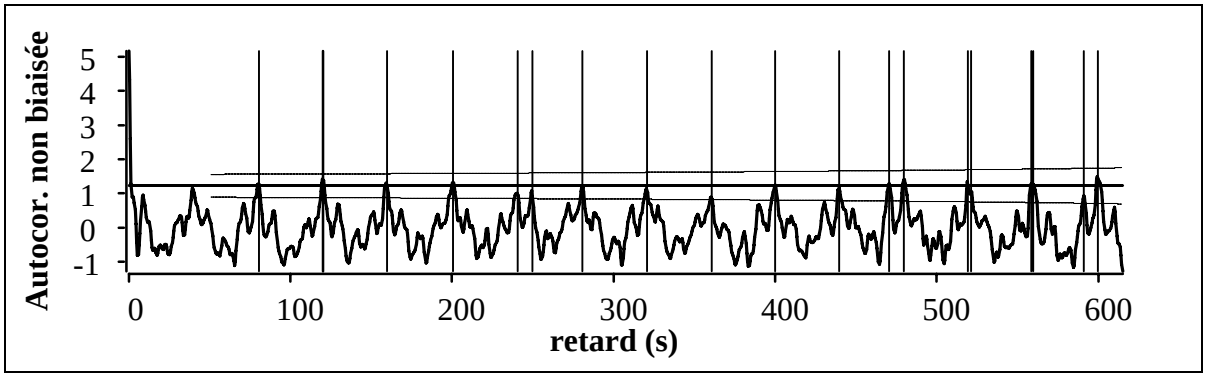


Figure A 7-V : résultat de la détection de périodicité globale pour le signal synthétique 2. En traits épais : estimation non biaisée de l'autocorrélation. Trait horizontal : puissance estimée du signal P_{S1}. Traits fins : intervalle de recherche des maxima, l_{max} et l_{min}. Traits verticaux : retards des maxima de l'ensemble ξ. Résultats du critère : C_P = 0,6, période $\hat{T}_s$ = 37,5 s, soit 0,027 Hz, RSB = 0,31 soit –5,1 dB, $\hat{P}_s$ = 1,2, $\hat{P}_b$ = 3,9.

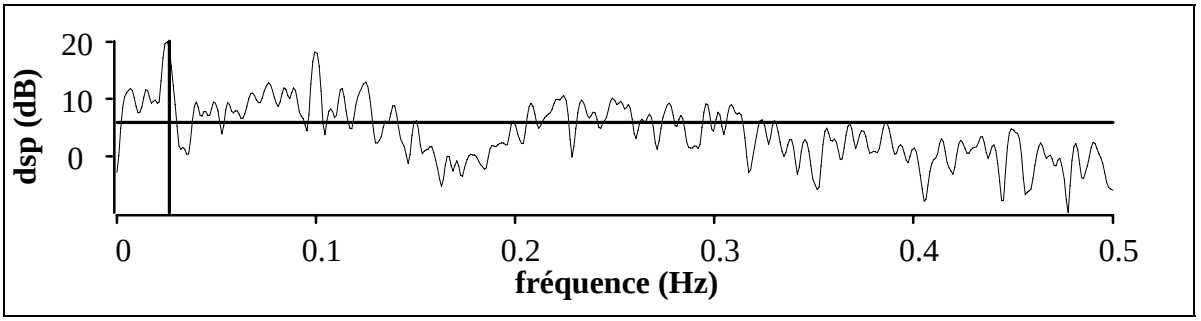


Figure A 7-VI : DSP estimée du signal synthétique 2 (Welch-WOSA, taille des segments de 512 points avec une fenêtre de Blackman) en décibel. Trait épais horizontal : puissance estimée du bruit $\hat{P}_b$. Trait épais vertical : fréquence correspondant à la période estimée $\hat{T}_s$.

Résultats du critère pour le signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6 (100 000 points, fréquence d'échantillonnage de 5000 Hz). Les résultats présentés (cf. Figure A 7-VII) ont été obtenus avec une recherche des maxima sur une partie de l'autocorrélation, suffisante étant donné le nombre de points du signal ($\tau_a = \tau_c$ = 0,16 s, point 800, τ_b = 2 s, point 10000 sans interpolation), le coefficient d'interpolation est égal à 2, les autres paramètres sont ceux donnés par défaut.

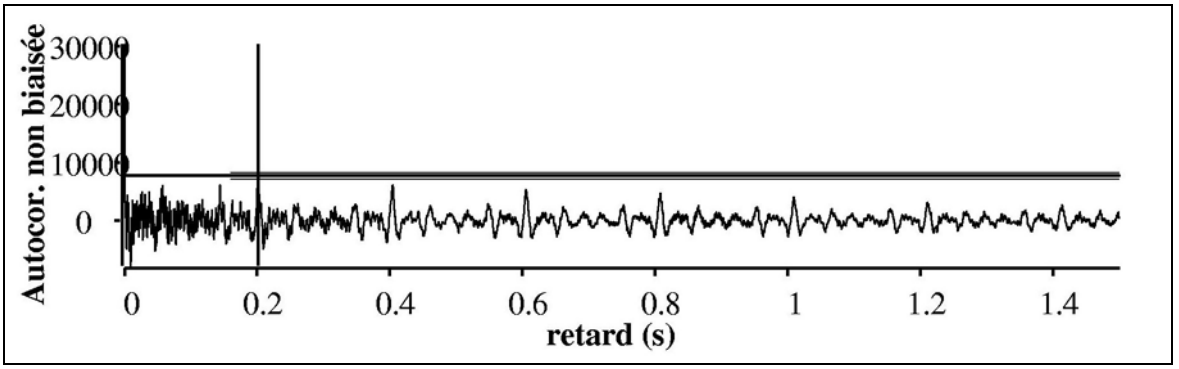
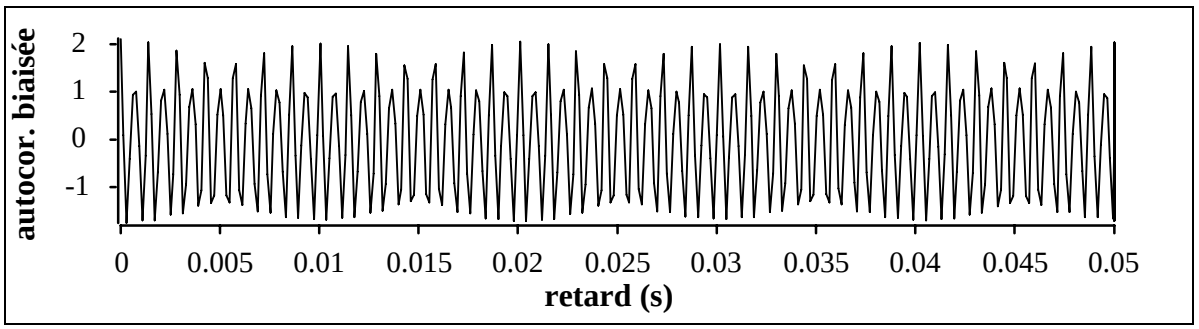
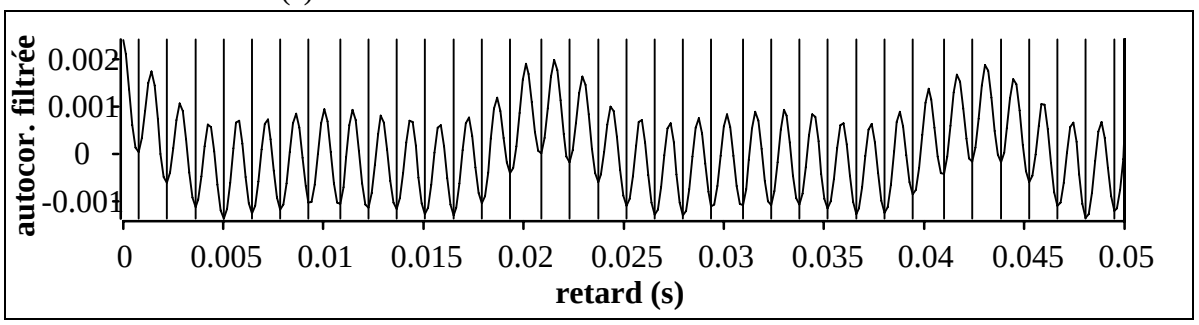


Figure A 7-VII : **signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6, résultat de la détection de périodicité globale**. En rouge : estimation non biaisée de l'autocorrélation. Trait vertical, τ_{max} retard du maximum . Trait horizontal épais : puissance estimée du signal P_{S1}. Traits horizontaux fins : intervalle de recherche des maxima, l_{max} et l_{min}. Résultats du critère : coefficient de périodicité nul.

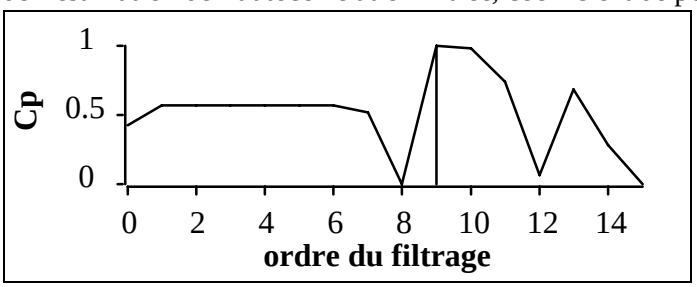
A-8. Détection de périodicité prépondérante



(a) estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation.

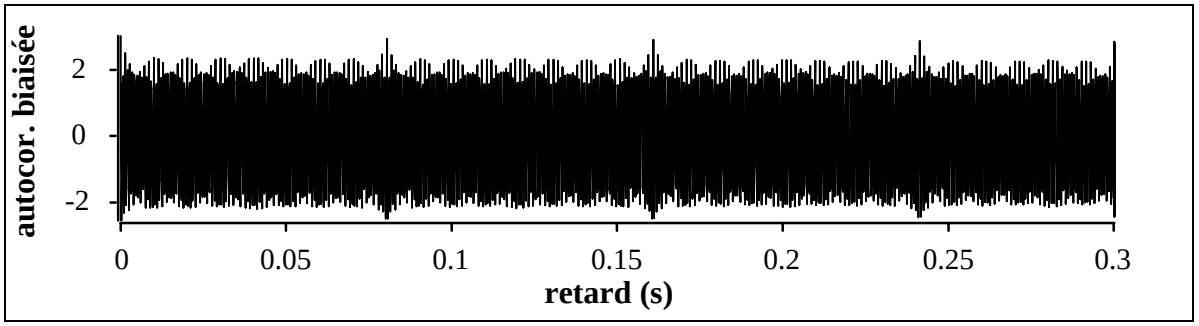


(b) minima locaux de l'estimation de l'autocorrélation filtrée, coefficient de périodicité maximal.

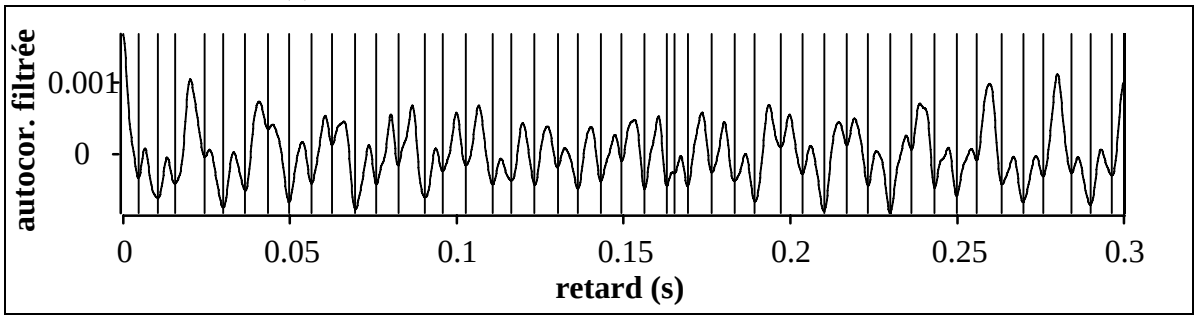


(c) coefficient de périodicité en fonction de l'ordre du filtrage et coefficient maximal.

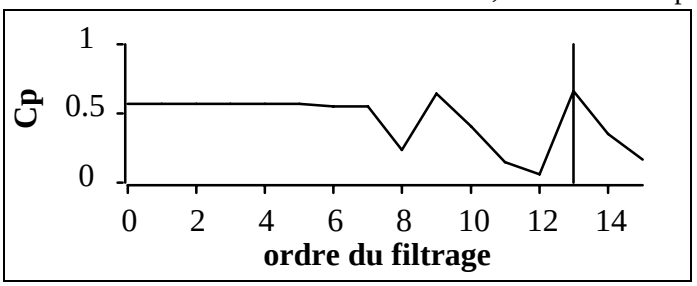
Figure A 8-I : **ENG8-E5-21RH-SPV,** résultats du critère de détection de périodicité prépondérante. Le coefficient de périodicité final est égal à 1 (ordre du filtrage de 9), $\hat{T}_s$ = 0,00144 s, soit 696 Hz. L'analyse de la fonction d'autocorrélation est effectuée entre 0 s et τ_a = 0,314 s, (point 2000).



(a) estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation.



(b) minima locaux de l'estimation de l'autocorrélation filtrée, coefficient de périodicité maximal.



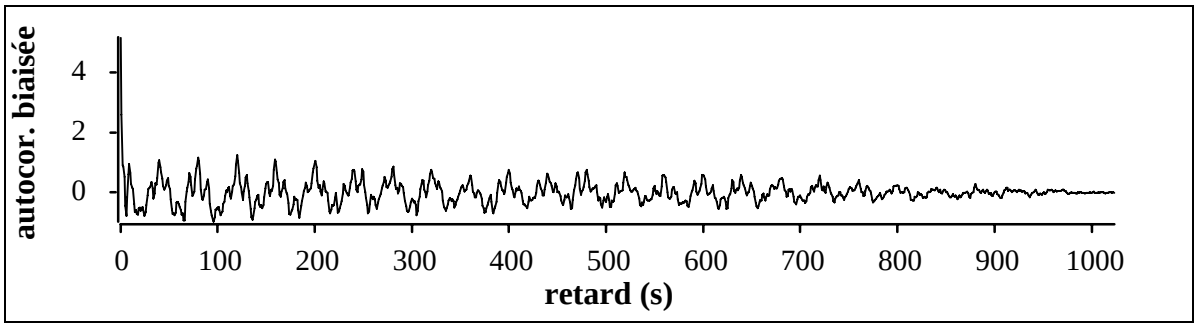
(c) coefficient de périodicité en fonction de l'ordre du filtrage et coefficient maximal.

Figure A 8-II : **ENG8-E11-21RH-SPV**, résultats du critère de détection de périodicité prépondérante. Le coefficient de périodicité final est égal à 0,66 (ordre du filtrage de 13), $\hat{T}_s$ = 0,0066 s, soit 151 Hz. L'analyse de la fonction d'autocorrélation est effectuée entre 0 s et τ_a = 0,628 s, (point 4000).

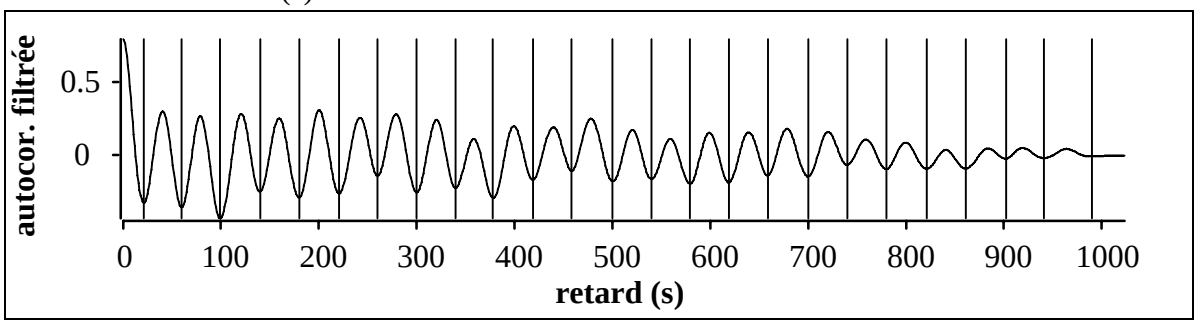
Résultats pour les signaux d'engrenage ENG8-E5-21RH-SPV et ENG8-E11-21RH-SPV

Les résultats des critères de recherche de périodicité globale et prépondérante sont cohérents dans le cas du signal **ENG8-E5-21RH-SPV**, avec des coefficients de périodicité de 1 et des périodes détectées de 698 Hz pour la période globale (cf. Figure A 7-I) et 696 Hz pour la période prépondérante (cf. Figure A 8-I). Par contre, pour le signal **ENG8-E11-21RH-SPV**, les résultats diffèrent. En effet, ce n'est pas la période du signal (12,43 Hz) qui est détectée, comme dans le cas du premier critère (cf. Figure A 7-III), mais une période (151 Hz, cf. Figure A 8-II) qui correspond à celle qui marque le plus l'allure de l'autocorrélation (due à la combinaison des différentes harmoniques). Le coefficient de périodicité est égal à 0,66, soit inférieur à 1, puisque les autres harmoniques ne sont pas négligeables. Le critère n'a pas détecté la période réelle du signal qui est très supérieure à la période prépondérante, aucun filtrage ne permettant de faire apparaître cette périodicité. Aux vues des deux critères, le signal est classé comme quasi-périodique, la période étant déterminée par le premier critère, et avec une périodicité prépondérante donnée par le deuxième critère.

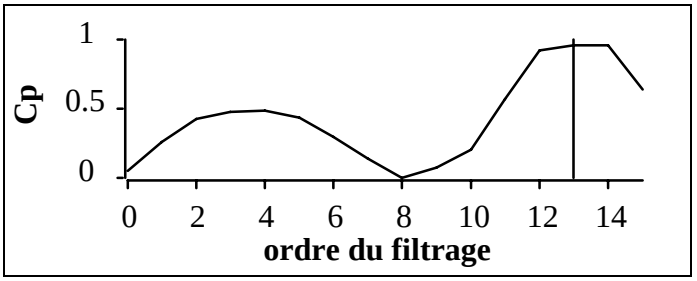
Résultats du critère pour le signal synthétique 2 (cf. Figure A 7-Vet Figure A 7-VI)
Le signal est constitué d'un bruit coloré gaussien de puissance 3,97 et d'un signal périodique constitué d'une série de sinusoïdes dont les fréquences sont harmoniques (fréquence d'échantillonnage unité, 1024 points). Les différents harmoniques sont : H_0 le fondamental de fréquence et d'amplitude (0,025 Hz ; 1,2), H_3 (0,1 Hz ; 1), H_4 (0,2 Hz ; 0,2), H_8 (0,225 Hz ; 0,2). La puissance de la partie périodique du signal est égale à 1,25 ce qui donne un rapport signal sur bruit de –5 dB. Le bruit coloré est issu d'un processus ARMA dont l'entrée est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. L'ordre de la partie AR est 4, celui de la partie MA de 2. Les coefficients AR sont a_1=-1,352, a_2=1,358, a_3=-0,662, a_4=0,24. Les coefficients MA sont m_1=-0,2 et m_2=0,04.



(a) estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation.

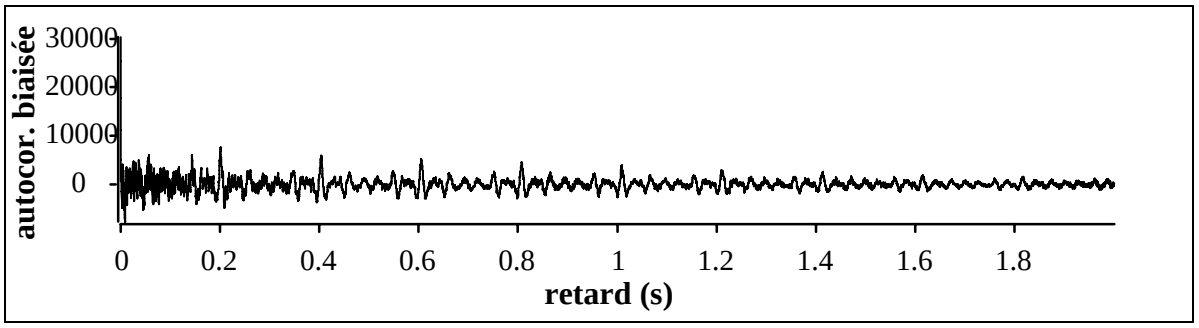


(b) minima locaux de l'estimation de l'autocorrélation filtrée, coefficient de périodicité maximal.

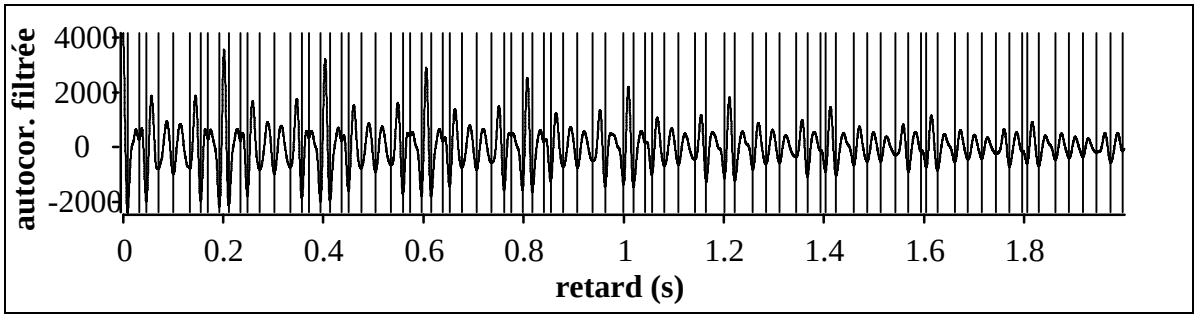


(c) coefficient de périodicité en fonction de l'ordre du filtrage et coefficient maximal.

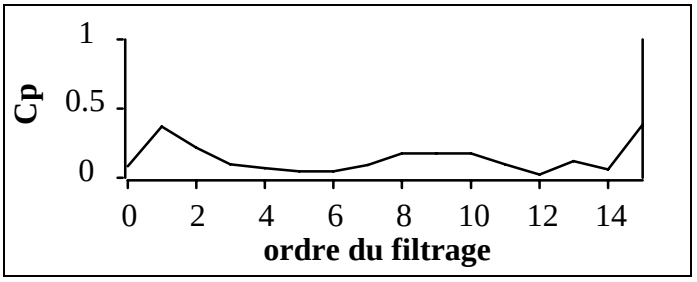
Figure A 8-III : **signal synthétique 2**, résultats du critère de détection de périodicité prépondérante. Le coefficient de périodicité final est égal à 0,96 (ordre du filtrage de 13), $\hat{T}_S$ = 40,4 s, soit 0,025 Hz.



(a) estimation biaisée de la fonction d'autocorrélation.



(b) minima locaux de l'estimation de l'autocorrélation filtrée, coefficient de périodicité maximal.



(c) coefficient de périodicité en fonction de l'ordre du filtrage et coefficient maximal.

Figure A 8-IV : **signal MF-CHARLIE 1-VOIE 6**, résultats du critère de détection de périodicité prépondérante. Le coefficient de périodicité final est égal à 0,39 (ordre du filtrage de 15), $\hat{T}_s$ =0,0242 s soit 41,4 Hz.

A-9. Estimation du support de corrélation et notion de bande étroite

Pour illustrer le critère d'estimation du support de corrélation, nous avons appliqué le critère à une réalisation d'un bruit blanc pour vérifier que le support estimé est bien nul. Sur les différentes figures, ne sont représentés que les 80% premiers retards de la fonction d'autocorrélation qui correspondent à la zone de recherche du support de corrélation.

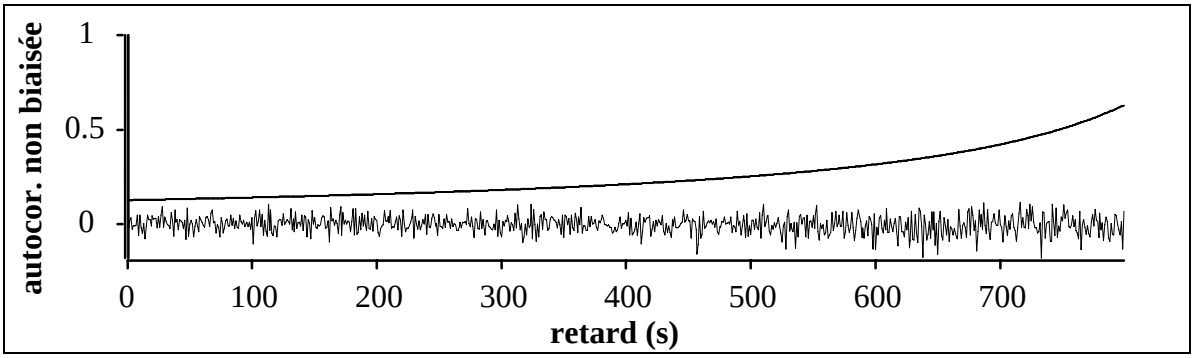
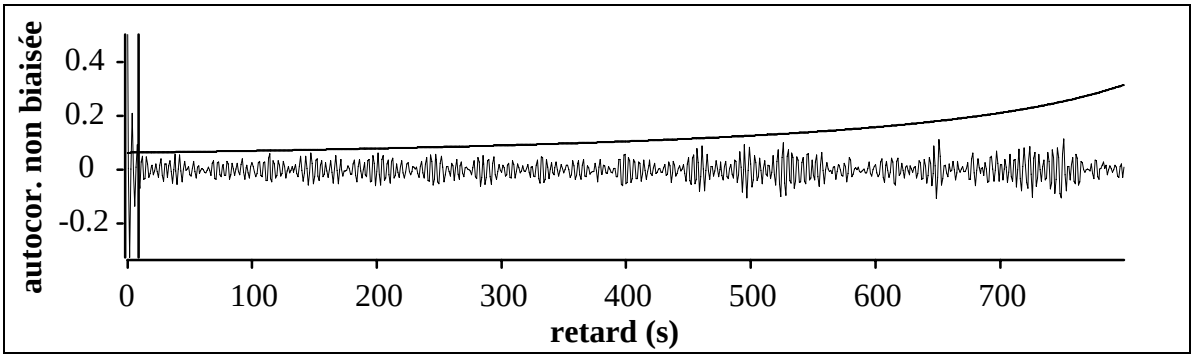


Figure A 9-I : **estimation du support de corrélation d'un bruit blanc** à partir de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation (trait fin). Le support de corrélation est estimé au retard nul (trait vertical). Remarquons que le seuil choisi (trait épais) est assez important pour minimiser tout risque de fausse alarme.

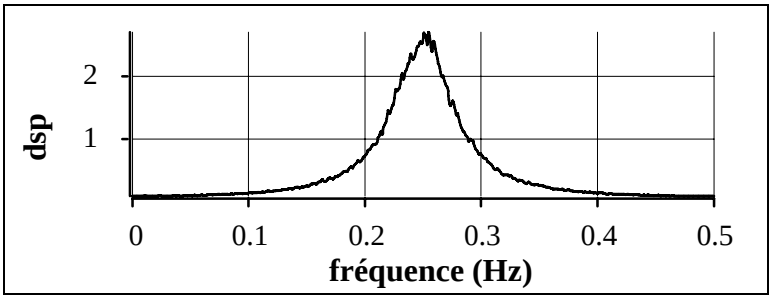
Nous l'appliquons également à une série de signaux synthétiques aléatoires constitué d'un motif plus ou moins bande étroite. Pour obtenir de tels signaux, nous utilisons une sinusoïde dont la fréquence est un bruit blanc $b(t)$ dont la moyenne est égale à 0,25 Hz et la variance σ^2 (en fréquence réduite, fréquence d'échantillonnage de 1 Hz) :

$$x(t) = \sin(2\pi t \times (0{,}25 + b(t))) \tag{9-1}$$

La largeur de bande fréquentielle de chaque signal est conditionnée par la variance du bruit blanc. Nous appliquons le critère à plusieurs cas où nous faisons varier la variance du bruit blanc. La taille du signal est de 1000 points ce qui correspond à une résolution fréquentielle maximale de l'ordre de $\Delta\nu$=0,001 Hz. Pour chaque signal, nous présentons la moyenne des DSP estimées de 1000 réalisations et nous estimons la bande à –3 dB du motif, B_{-3dB}. Chaque estimée est obtenue avec le périodogramme (apodisé avec une fenêtre de Blackman et 2048 points en fréquence).

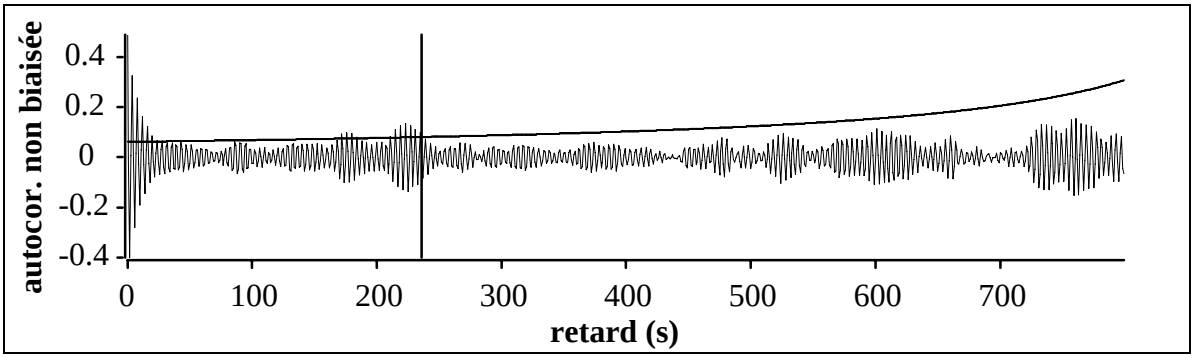


(a) estimation du support de corrélation (trait vertical) à partir de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation (trait fin). Le seuil de détection est en trait épais.

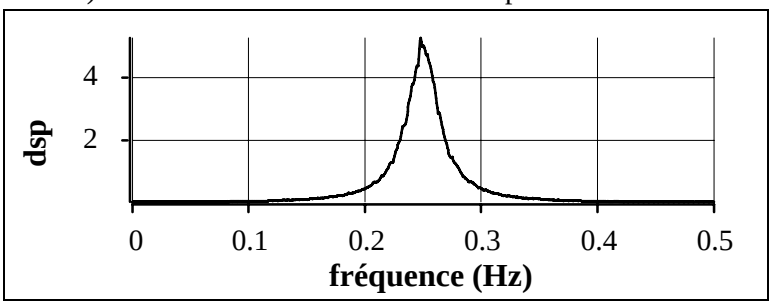


(b) moyenne des DSP estimées de 1000 réalisations, B_{-3dB} = 0,062 Hz = 62$\Delta\nu$, *bande étroite*.

Figure A 9-II : **support de corrélation et largeur de bande du signal $x(t)$ pour σ = 0,1 Hz.**

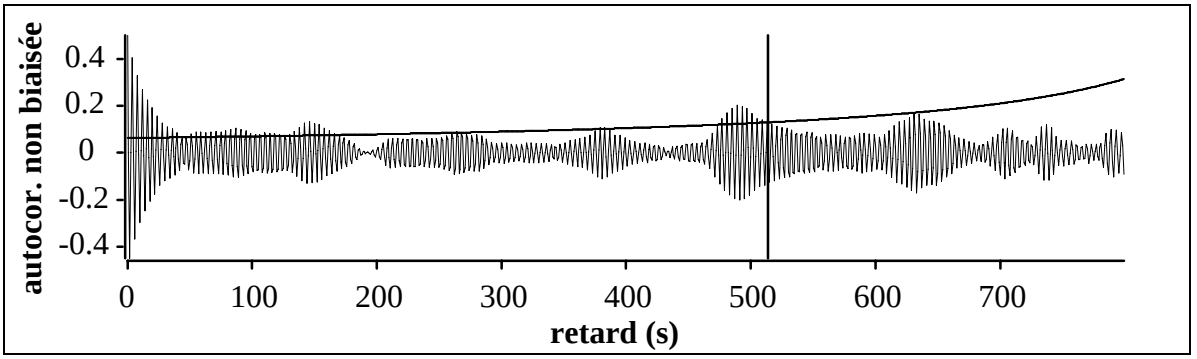


(a) estimation du support de corrélation (trait vertical) à partir de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation (trait fin). Le seuil de détection est en trait épais.

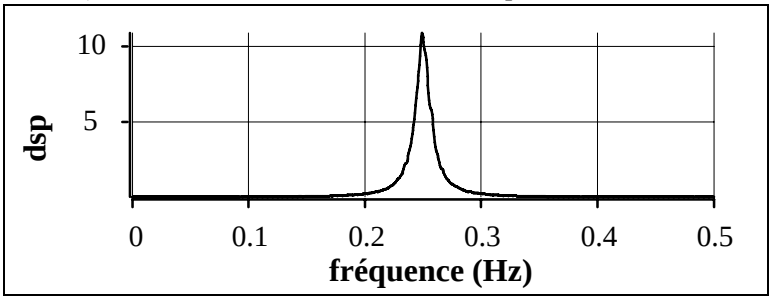


(b) moyenne des DSP estimées de 1000 réalisations, B_{-3dB} = 0,03 Hz = 30$\Delta\nu$, *limite bande étroite, très étroite.*

Figure A 9-III : **support de corrélation et largeur de bande du signal $x(t)$ pour σ = 0,072 Hz**.

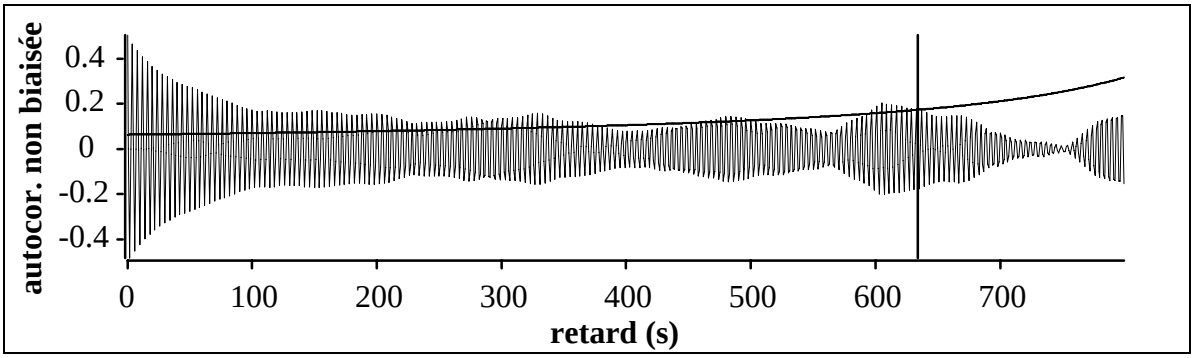


(a) estimation du support de corrélation (trait vertical) à partir de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation (trait fin). Le seuil de détection est en trait épais.

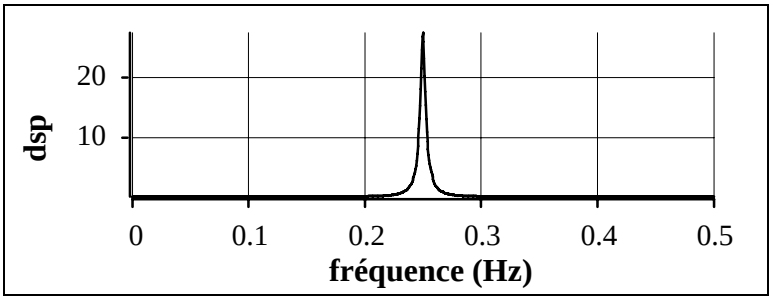


(b) moyenne des DSP estimées de 1000 réalisations, B_{-3dB} = 0,015 Hz = 15$\Delta\nu$, *bande très étroite*.

Figure A 9-IV : **support de corrélation et largeur de bande du signal $x(t)$ pour σ = 0,05 Hz**.



(a) estimation du support de corrélation (trait vertical) à partir de l'estimateur non biaisé de la fonction d'autocorrélation (trait fin). Le seuil de détection est en trait épais.



(b) moyenne des DSP estimées de 1000 réalisations, B_{-3dB} = 0,0054 Hz = 5,4$\Delta\nu$, *bande très étroite*.

Figure A 9-V : **support de corrélation et largeur de bande du signal $x(t)$ pour σ = 0,0316 Hz**.

L'estimation du support de corrélation n'est pas précise, mais donne une idée du dernier retard intéressant et de la largeur de bande correspondante. Il faut également préciser que l'estimation pour le signal $x(t)$ est fortement dépendante de la réalisation. Le critère donne cependant une première idée du support de corrélation. Pour comparaison, la Figure A 9-VI présente la DSP estimée d'une sinusoïde de fréquence 0,25 Hz dans les mêmes conditions que pour le signal $x(t)$. Il faut également noter que la notion de *bande étroite* est liée à la résolution fréquentielle maximale que l'on peut atteindre. Si le nombre de points du signal augmente, la résolution maximale diminue et bien que la bande en Hz soit identique, le motif passe de l'hypothèse bande étroite à large bande.

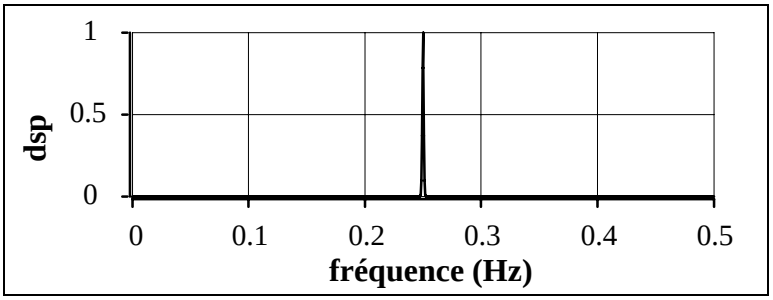
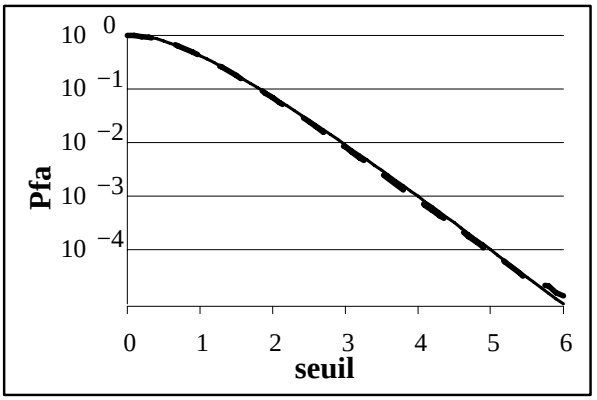
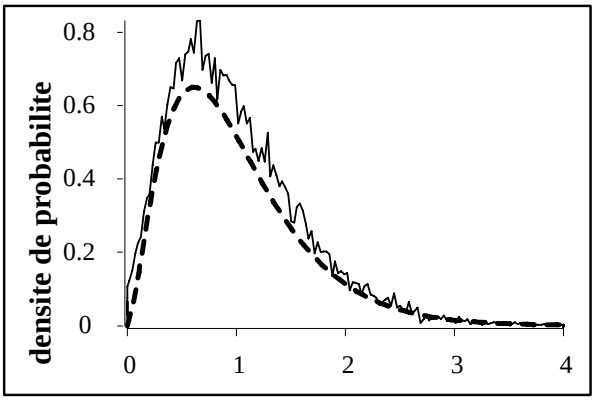


Figure A 9-VI : **DSP estimée d'une fréquence pure**, B_{-3dB} = 0,0016 Hz = 1,6$\Delta\nu$.

A-10. Critère de détection à partir des estimateurs de type Fourier

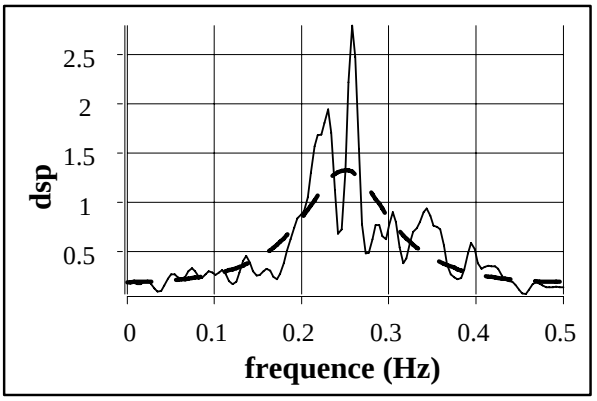


(a) Probabilité de fausse alarme en fonction du seuil.

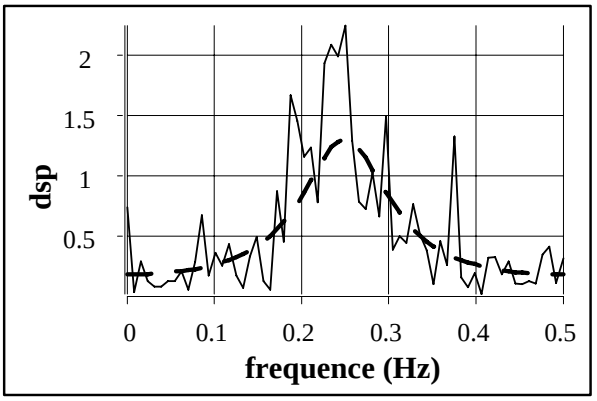


(b) Densité de probabilité théorique et histogramme.

Figure A 10-I : **cas 2-STUSE, courbes théoriques en fixant le degré de liberté équivalent de la loi gamma à 5,26, déterminé par une estimation de la variance normalisée, comparées aux courbes expérimentales, (a) probabilité de fausse alarme** théorique (en trait plein), **expérimentale** (en pointillés) en fonction du seuil, (b) **densité de probabilité théorique** (en pointillés) et **histogramme** (en trait plein) pour la fréquence 0,25 Hz sur 180 intervalles. Pour les courbes expérimentales et l'estimation de la variance normalisée, 15000 réalisations d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance unité sont utilisées.

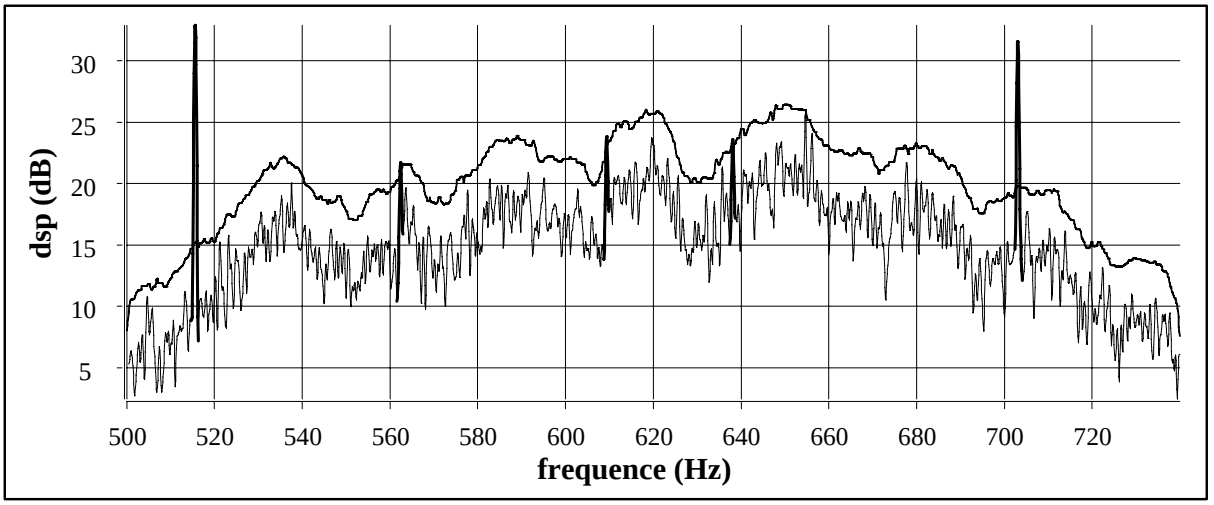


(a) Cas 1-PER-COR.

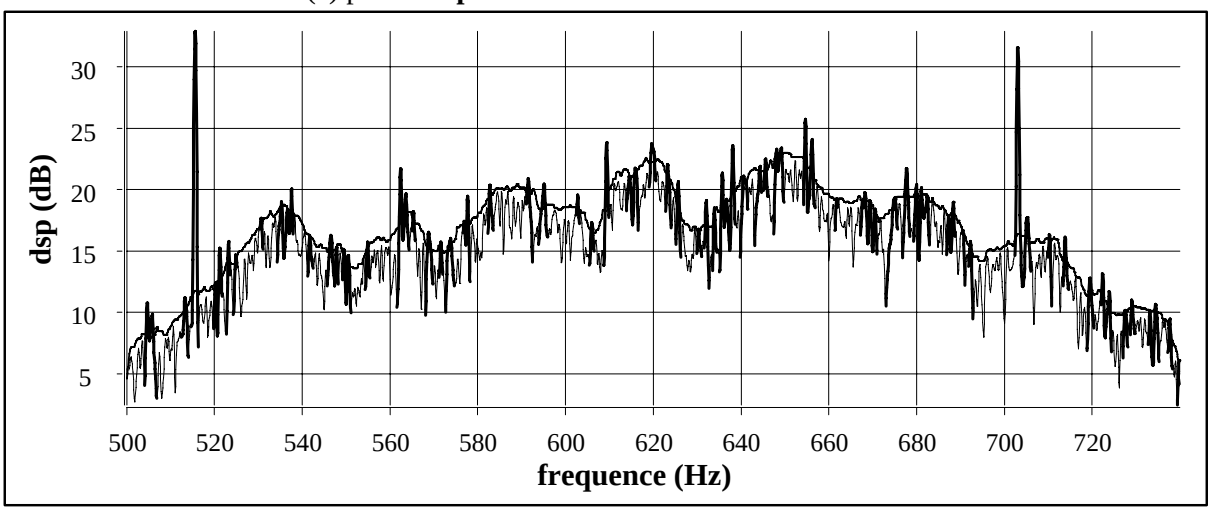


(b) Cas 2-STUSE.

Figure A 10-II : **densité spectrale de puissance** vraie (en pointillés) et estimée (en trait plein) d'une **sinusoïde** d'amplitude 1 et **de fréquence aléatoire** égale à : 0,25+B, où B est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 0,02, (a) dans le cas 1-PER-COR, (b) dans le cas 2-STUSE.



(a) pour une **probabilité de fausse alarme de 10^{-5}**.



(b) pour une **probabilité de fausse alarme de 10^{-1}**.

Figure A 10-III : **signal PEG-SH1-a11, résultats de la détection pour différentes probabilités de fausse alarme,** (a) $P_{fa} = 10^{-5}$, (b) $P_{fa} = 10^{-1}$. En traits épais : pics de la densité spectrale de puissance détectés, pouvant être associés à H_1 « fréquences pures » ; en traits fins : pics du bruit à associer à H_0. L'autre courbe en trait plein uni représente le seuil de détection $\lambda \times f(\nu)$.

Résultats du critère de détection pour le signal ENG8-E5-21RH-SPV

L'analyse complète du signal ENG8-E5-21RH-SPV a été effectuée sous forme d'un scénario d'analyse [DUR97-ENG8 E5]. Plusieurs séries d'harmoniques ont été trouvées à 5,05 Hz, 12,43 Hz, 19,33 Hz et 46,43 Hz. Ces séries forment des bandes latérales autour des harmoniques de la fréquence d'engrènement. Nous allons nous placer autour de la seconde harmonique de la fréquence d'engrènement à 1392 Hz et vérifier quels sont les harmoniques qui sont détectées pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-4} dans la bande fréquentielle B=[1280 Hz , 1520 Hz]. Il s'agit de vérifier si les résultats sont cohérents avec l'analyse que ferait un expert en traitement du signal.

Nous allons nous baser sur une estimation obtenue avec la méthode Welch-WOSA qui permet de séparer une grande partie des pics d'intérêt. Les paramètres sont : taille des segments de 16384 points, fenêtre d'apodisation de Blackman-Harris 4 termes, décalage entre segments de 30 %, on obtient alors 11 segments, taille de la transformées de Fourier de 32768 points (*zero-padding* afin de mieux estimer les maxima des pics). Sous H_0, le degré de liberté équivalent de la gamma est alors de 16,86. La ligne de fond de spectre est obtenue par filtrage médian avec une fenêtre de 40 points.

Pour une probabilité de fausse alarme de 10^{-4} (cf. Figure A 10-IV), la majorité des harmoniques dont la présence a été confirmé, a bien été détectée, ainsi que les pics isolés de même amplitude. Seuls deux pics appartenant à la série 5,05 Hz ne sont pas détectés, mais avec cette estimation leur amplitude est très proche des pics du bruit et un expert ne conclurait pas nécessairement à leur présence. Ces deux pics ne sont détectés qu'avec une probabilité de fausse alarme de 10^{-2}, mais les résultats deviennent plus difficilement exploitables étant donné les risques de fausse alarme notamment liés aux divers problèmes d'estimation. Ces deux pics sont trop proches du pied du pic correspondant à l'harmonique de la fréquence d'engrènement (1392 Hz). Pour les détecter correctement, il est nécessaire d'augmenter la résolution.

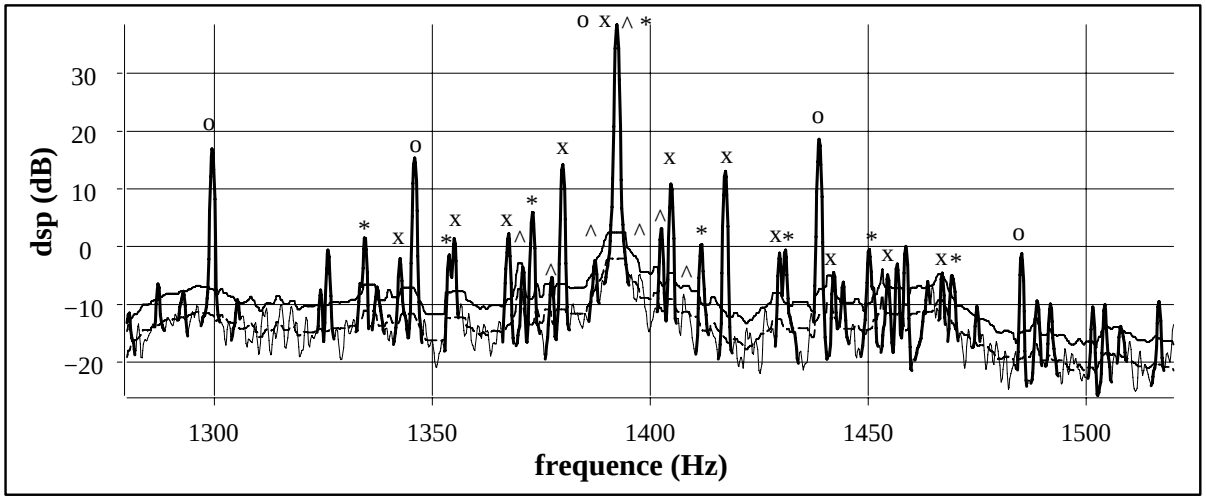


Figure A 10-IV : **signal ENG8-E5-21RH-SPV, résultats de la détection pour une probabilité de fausse alarme P_{fa} = 10^{-4}**. En traits épais : pics de la densité spectrale de puissance détectés, pouvant être associés à H_1 « fréquences pures » ; en traits fins : pics du bruit à associer à H_0. L'autre courbe en trait plein uni représente le seuil de détection.. En outre sur cette courbe sont indiqués les différentes harmoniques, autour de la fréquence d'engrènement à 1392 Hz, que l'analyse complète du signal a mis en évidence : [o] 46,43 Hz, [*] 19,33 Hz, [x] 12,43 Hz, [^] 5,05 Hz.

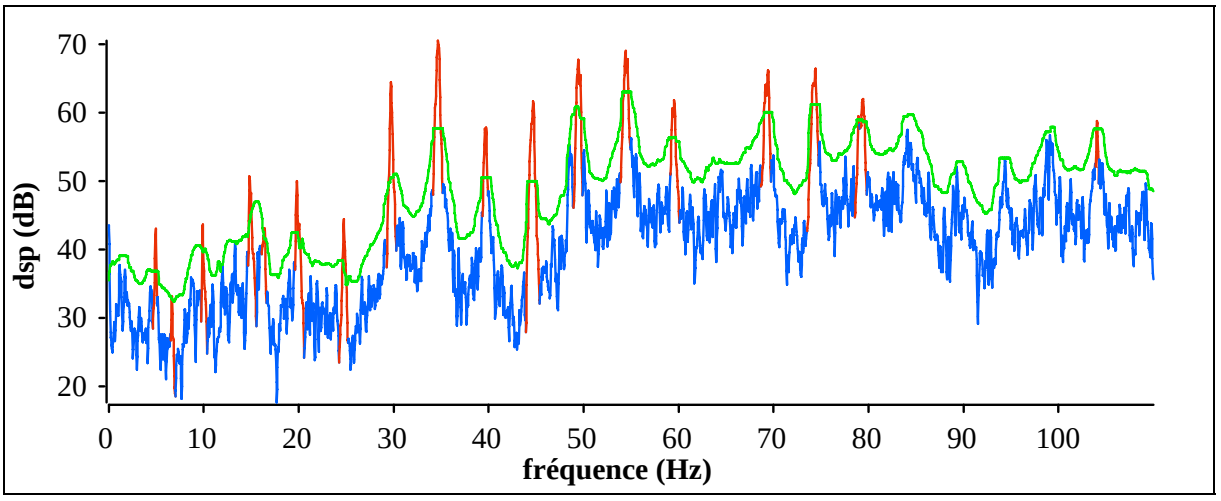
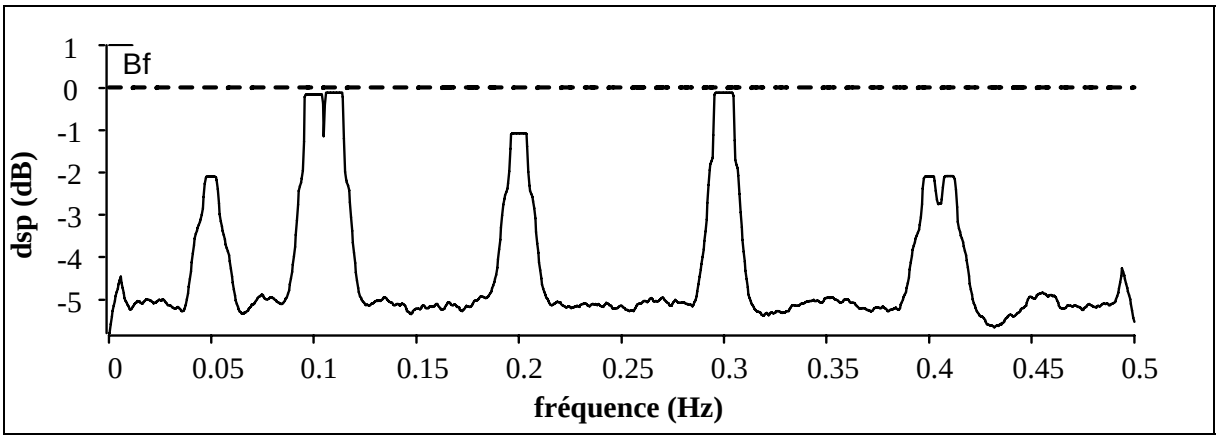
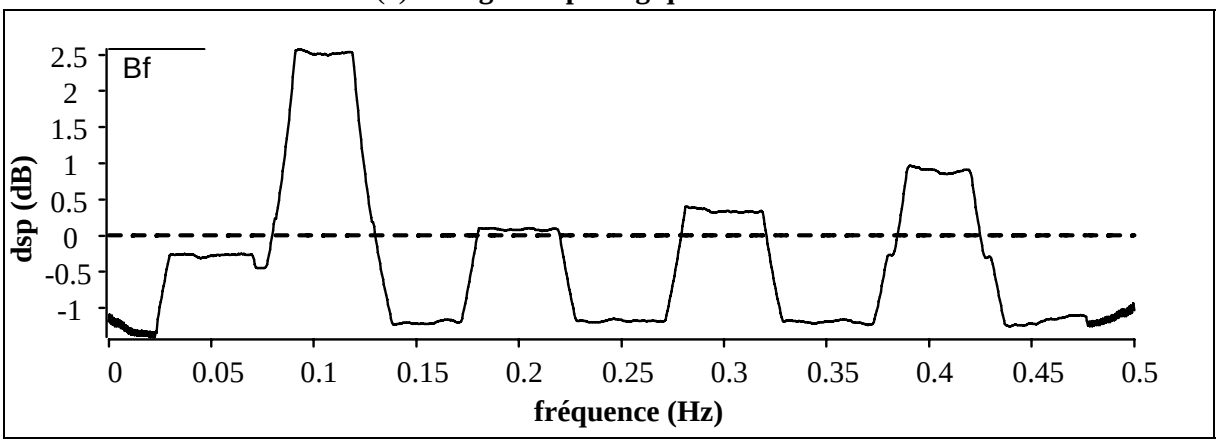


Figure A 10-V : **signal MF-CHARLIE1-VOIE6, résultats de la détection pour une probabilité de fausse alarme P_{fa} = 10^{-5}**. En traits bleus : pics de la densité spectrale de puissance détectés, pouvant être associés à H_1 ; en traits rouges : pics du bruit à associer à H_0. La courbe en trait vert représente le seuil de détection $\lambda \times f(v)$.

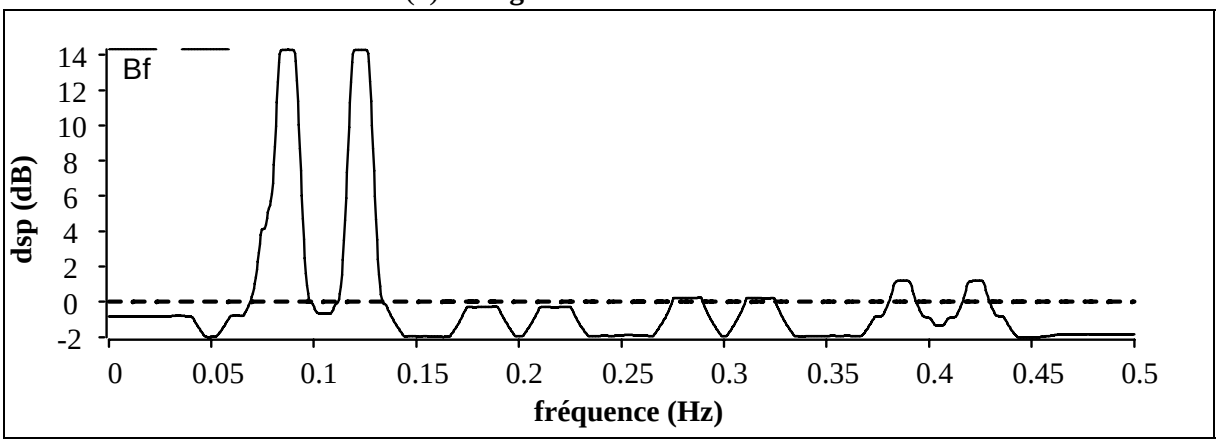
A-11. La ligne de fond de spectre



(a) **filtrage morphologique** $M=B/2=12$

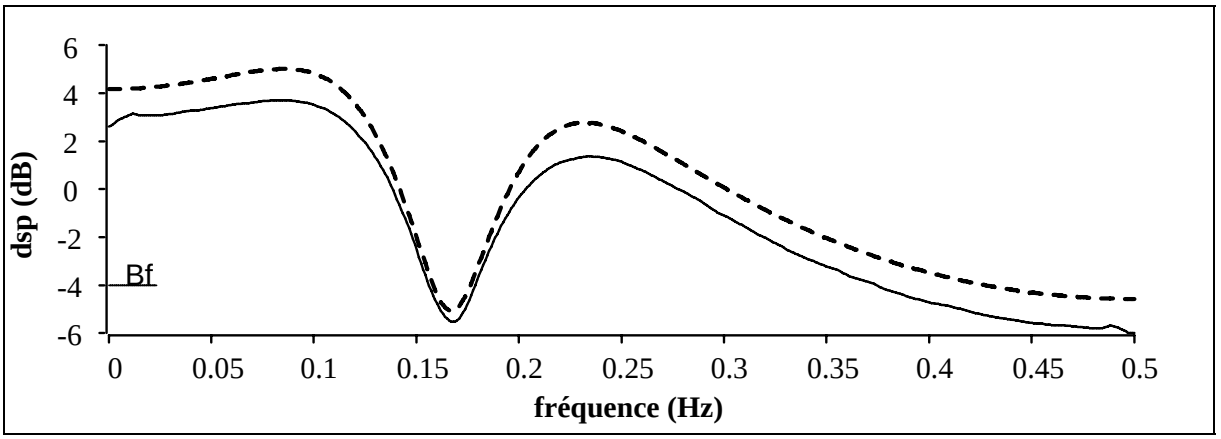


(b) **filtrage médian** $2M+1=4B=97$

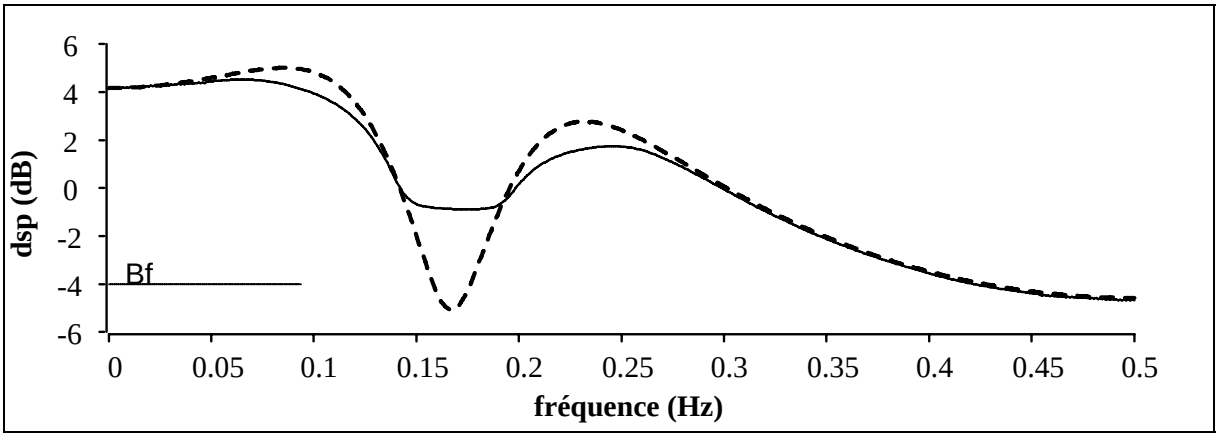


(c) **filtrage tri-trou** $M=2B=48$, $T=25$, *rejet*=20%

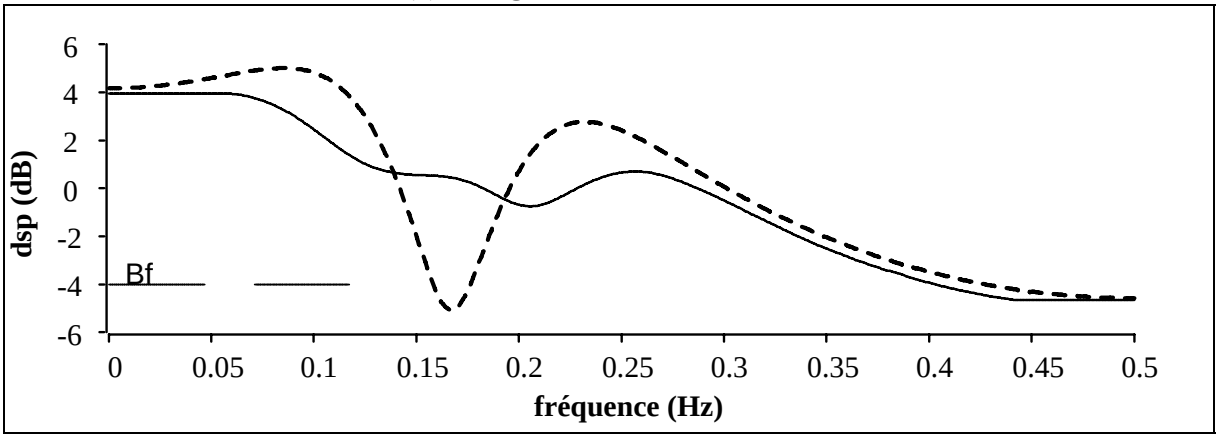
Figure A 11-I : **signal 1** (bruit blanc plus sinusoïdes), **moyenne de 1000 réalisations de la ligne de fond de spectre** estimée pour les différentes méthodes une passe (trait continu) comparée à la DSP vraie du bruit blanc seul (0 dB, trait en pointillés). Pour les filtrages médian et morphologique, la bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé à côté de l'indication B_f. Pour le filtrage tri-trou, la taille de la fenêtre d'estimation est indiquée par le trait continu placé à côté de l'indication B_f, la fenêtre est constituée des deux demi-fenêtres de taille M, séparées d'un trou de taille T. *Attention, les échelles sont en décibels et ne sont pas identiques pour toutes les figures.*



(a) **filtrage morphologique** $M=B/2=12$

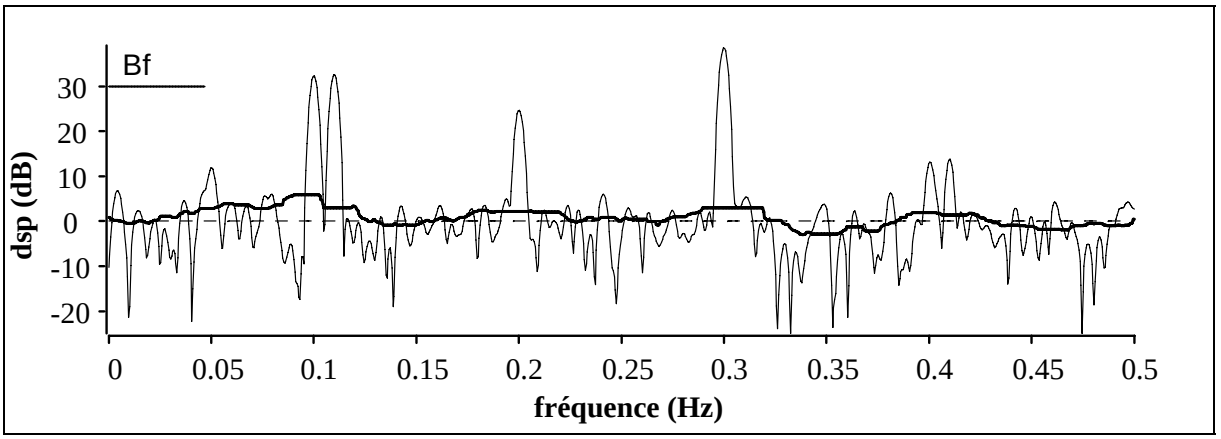


(b) **filtrage médian** $2M+1=4B=97$

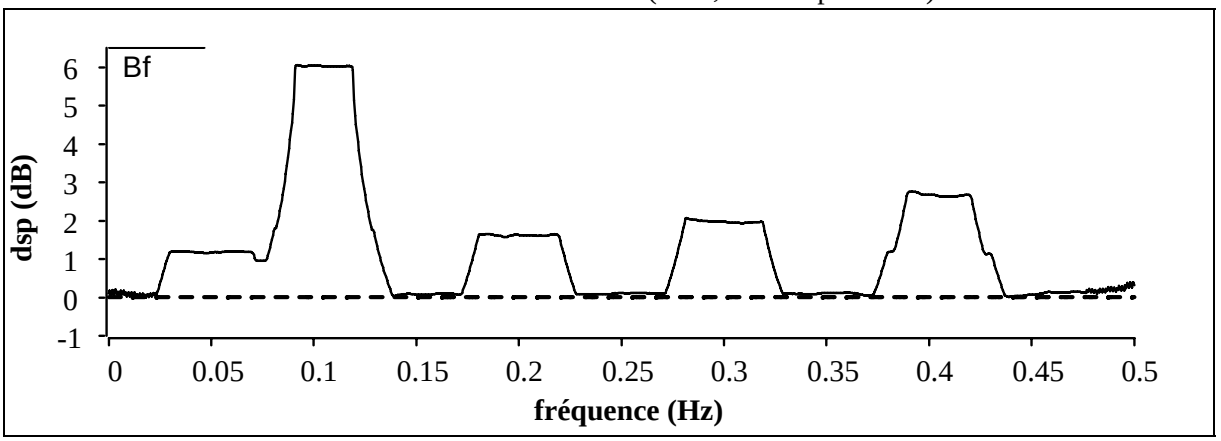


(c) **filtrage tri-trou** $M=2B=48$, $T=25$, *rejet*=20%

Figure A 11-II : **signal 2** (bruit coloré), **moyenne de 1000 réalisations de la ligne de fond de spectre** estimée pour les différentes méthodes une passe (trait continu) comparée à la DSP vraie du bruit (trait en pointillés). Pour les filtrages médian et morphologique, la bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé à côté de l'indication B_f. Pour le filtrage tri-trou, la taille de la fenêtre d'estimation est indiquée par le trait continu placé à côté de l'indication B_f, la fenêtre est constituée des deux demi-fenêtres de taille M, séparées d'un trou de taille T.

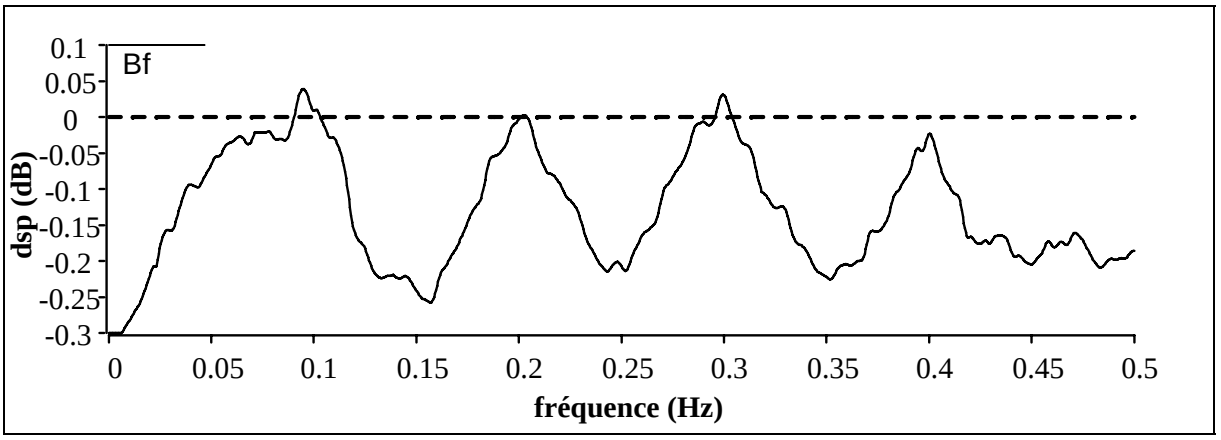


(a) **estimation de la ligne de fond de spectre** (trait épais) comparée à l'estimation de la DSP (trait fin) et à la DSP vraie du bruit blanc (0 dB, trait en pointillés).

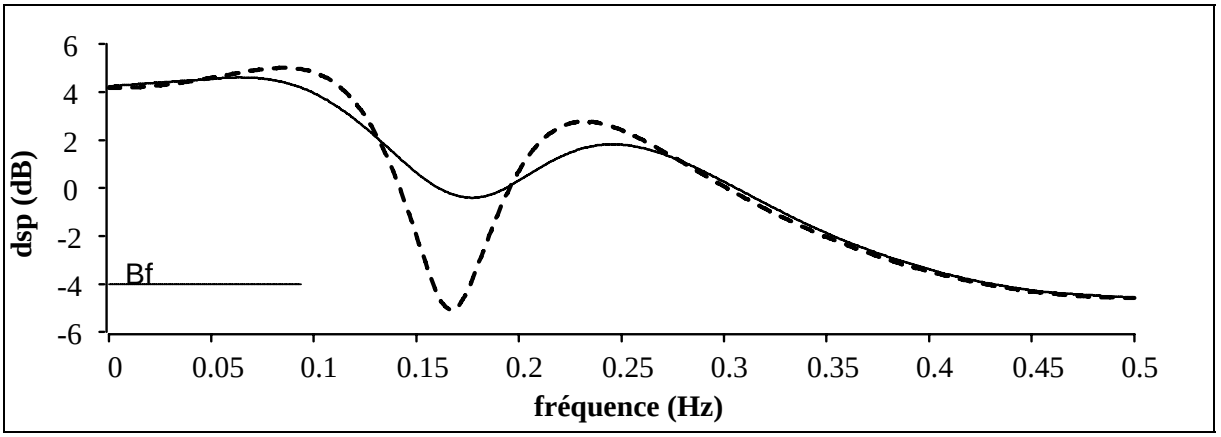


(b) **moyenne de 1000 réalisations de la ligne de fond de spectre** (trait continu) comparée à la DSP vraie du bruit seul (0 dB, trait en pointillés).

Figure A 11-III : **signal 1** (bruit blanc plus sinusoïdes), **estimation de la ligne de fond de spectre** pour le **filtrage percentile** pour $2M+1=4B=97$ et **un percentile de 63%** adapté au degré de liberté de la loi du chi-deux associée à l'estimation spectrale. La bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé à côté de l'indication B_f.



(a) **signal 1** (bruit blanc plus sinusoïdes)



(b) **signal 2** (bruit coloré)

Figure A 11-IV : **moyenne de 1000 réalisations de la ligne de fond de spectre estimée par la méthode n passes** pour les deux signaux tests. Première passe filtrage médian, passes suivantes filtrage moyen, $2M+1=4B=97$, $P_{fa1} = P_{fa2} = 10^{-3}$ (trait continu) comparée et à la DSP vraie du bruit (trait en pointillés). La bande $B_f=2M+1$ est indiquée par le trait continu placé sous l'indication B_f.