



**HAL**  
open science

# Modulations multiporteuses WCP-OFDM : évaluation des performances en environnement radiomobile

Damien Roque

► **To cite this version:**

Damien Roque. Modulations multiporteuses WCP-OFDM : évaluation des performances en environnement radiomobile. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Grenoble, 2012. Français. NNT: . tel-00789990v3

**HAL Id: tel-00789990**

**<https://theses.hal.science/tel-00789990v3>**

Submitted on 5 Aug 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE**

Spécialité : **signal, image, parole, télécommunications (SIPT)**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**M. Damien ROQUE**

Thèse dirigée par **M. Jean-Marc BROSSIER** et  
codirigée par **M. Cyrille SICLET**

préparée au sein du

**laboratoire Grenoble, images, parole, signal, automatique  
(GIPSA-lab)**

dans l'école doctorale d'électronique, électrotechnique,  
**automatique et traitement du signal (EEATS)**

## Modulations multiporteuses WCP-OFDM : évaluation des performances en environnement radiomobile

Thèse soutenue publiquement le **12 décembre 2012**,  
devant le jury composé de :

**M<sup>me</sup> Inbar FIJALKOW**

Professeur ENSEA, Rapporteur, Présidente du jury

**M. Jacques PALICOT**

Professeur Supélec, Rapporteur

**M. Pierre SIOHAN**

Expert réseau France Télécom, Examineur

**M. Sébastien MALLIER**

Expert technique DGA, Examineur

**M. Jean-Marc BROSSIER**

Professeur Grenoble-INP, Directeur de thèse

**M. Cyrille SICLET**

Maître de conférences UJF, Encadrant de thèse





# Remerciements

Merci au directeur du GIPSA-lab, M. Jean-Marc Thiriet, pour m'avoir accueilli au sein de son laboratoire. Merci à M. Jean-Marc Brossier pour son suivi et plus particulièrement pour son implication dans la rédaction de ce document. J'exprime ma profonde gratitude à Cyrille Siclet, pour avoir su me conseiller, m'encourager et valoriser mes travaux tout au long de ces trois années. Merci à M. Laurent Ros et à tous les membres de l'équipe qui ont su apporter un regard extérieur très profitable sur mon sujet de recherche.

Je tiens à remercier M<sup>me</sup> Inbar Fijalkow, M. Jacques Palicot, M. Sébastien Mallier et M. Pierre Siohan qui ont pris le temps d'évaluer mon travail.

Un grand merci à M. Didier Pinchon dont les publications sur les filtres prototypes ont beaucoup contribué aux résultats présentés dans ce document. Merci aux membres de la division télécommunications du centre DGA Maîtrise de l'Information pour avoir apporté une dimension pratique à mes résultats, notamment dans les domaines de la guerre électronique et de l'environnement militaire tactique.

J'adresse une pensée amicale à toutes les personnes avec qui j'ai sympathisé au laboratoire, à commencer par les lascars de la DISconnection : Florian (dit « DraBa »), Grégoire (dit « Mathématrix »), Benjamin (dit « Cadillac »), David (dit « iStein »). Il est maintenant clair que nos échanges, via notre plate-forme collaborative, ont élargi le spectre de mes recherches et ont renforcé l'approfondissement des applications militaires. Sans oublier Bastien, François, Jérémie, Jonathan, Vincent qui m'ont offert des discussions rarement sérieuses, mais pour le moins nécessaires, autour d'un café. Par dualité, je remercie Rodrigo qui n'a pas hésité à apporter des problèmes d'estimation à la cafétéria afin de limiter la durée des pauses précédemment évoquées. Merci à Ladan, Sandra et Guanghan qui ont partagé mon bureau et qui ont instauré une ambiance studieuse, toujours propice à la réflexion.

Merci à Oriane pour sa patience et son soutien tout au long de ces trois années.



# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>Table des sigles et acronymes</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>7</b>
1.1 Notions d'algèbre linéaire . . . . .	7
1.2 Outils pour l'analyse des signaux déterministes . . . . .	16
1.3 Éléments de communications numériques . . . . .	27
<b>2 Modélisation des canaux de transmission radiomobiles</b>	<b>39</b>
2.1 Canal à bruit additif . . . . .	40
2.2 Canal sélectif en temps et en fréquence . . . . .	45
2.3 Structure propre approchée du canal sélectif en temps et en fréquence . . . . .	54
2.4 Simplifications et exemples de modèles radiomobiles pratiques . . . . .	57
2.5 Canal discret équivalent . . . . .	69
<b>3 Émetteur-récepteur multiporteuse BFDM/QAM</b>	<b>73</b>
3.1 Structure de l'émetteur-récepteur multiporteuse . . . . .	74
3.2 Gain complexe du système en présence d'un canal doublement sélectif . . . . .	79
3.3 Règles d'adaptation des impulsions de mise en forme au canal WSSUS . . . . .	84
3.4 Système équivalent à temps discret . . . . .	94
<b>4 Cas particulier du WCP-OFDM</b>	<b>101</b>
4.1 Structure particulière du transmultiplexeur WCP-OFDM . . . . .	102
4.2 Spécification des filtres courts à reconstruction parfaite . . . . .	105

---

4.3	Schémas d'égalisation de faible complexité . . . . .	112
4.4	Problématique du PAPR et émetteur-récepteur WCP-SC . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Évaluation des performances du WCP-OFDM par simulation</b>	<b>125</b>
5.1	Présentation du déroulement des simulations . . . . .	126
5.2	Comparaison des performances sur canal multitrajet mobile . . . . .	129
5.3	Mesures de performances avec codage correcteur d'erreurs . . . . .	136
5.4	Comparaison des modèles base-vers-mobile et mobile-vers-mobile . . . . .	138
5.5	Égalisation à plusieurs coefficients par sous-porteuse . . . . .	142
	<b>Conclusion</b>	<b>151</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>

# Table des figures

1.1	Exemple de base de Riesz dans $\mathbf{R}^2$ . . . . .	14
1.2	Opérations d'interpolation et d'échantillonnage. . . . .	19
1.3	Structure d'une chaîne de transmission numérique . . . . .	27
1.4	Spectres d'amplitude du signal modulé, du signal analytique et de l'enveloppe complexe d'un signal à bande étroite. . . . .	30
1.5	Chaîne de transmission numérique linéaire équivalente en bande de base. . . . .	31
1.6	Fonction prototype NRZ. . . . .	36
1.7	Fonction prototype RZ. . . . .	36
1.8	Fonction prototype SRRC avec $\alpha = 0,9$ . . . . .	36
2.1	Représentations équivalentes du canal à bruit additif filtré. . . . .	42
2.2	Équivalent en bande de base du canal à bruit additif. . . . .	44
2.3	Densités spectrales de puissance d'un bruit blanc filtré à bande étroite. . . . .	45
2.4	Illustration des différents types d'atténuations sur canal radiomobile VHF. . . . .	46
2.5	Canal de transmission radiomobile. . . . .	49
2.6	Équivalent en bande de base du canal de transmission radiomobile. . . . .	50
2.7	Fonctions caractéristiques du canal de transmission. . . . .	53
2.8	Support de la fonction d'étalement généralisée . . . . .	54
2.9	Fonctions de corrélation associées à un canal de transmission. . . . .	58
2.10	Émetteur et récepteur dans un environnement riche en diffuseurs. . . . .	62
2.11	Déplacement du récepteur sur une distance $\xi$ . . . . .	62
2.12	Comparaison spectre Doppler dans un scénario mobile-vers-mobile . . . . .	64
2.13	Estimation des spectres Doppler du canal TUX6 pour $f_d = 1,667$ Hz. . . . .	66
2.14	Fonctions de diffusion pour différentes valeurs de $f_d$ . . . . .	67
2.15	Réponses impulsionnelles en cascade du canal TUX6 à bande limitée. . . . .	68

2.16	Réponses fréquentielles en cascade du canal TUx6 à bande limitée. . . . .	68
3.1	Émetteur multiporteuse à temps continu. . . . .	76
3.2	Récepteur multiporteuse à temps continu. . . . .	77
3.3	Canal doublement dispersif à bruit additif. . . . .	80
3.4	Fonction d'inter-ambiguïté normalisée de l'OFDM avec préfixe cyclique ( $T_{cp} = 0, 4T_u$ ). . . . .	83
3.5	Support de la fonction de diffusion périodisée et d'une fonction d'inter-ambiguïté. 92	
3.6	Règle d'adaptation temps-fréquence approximative. . . . .	93
3.7	Émetteur multiporteuse suréchantillonné à temps discret. . . . .	96
3.8	Récepteur multiporteuse suréchantillonné à temps discret. . . . .	97
3.9	Équivalent discret du canal doublement dispersif à bruit additif. . . . .	98
4.1	Schéma de réalisation efficace de l'émetteur WCP-OFDM avec un facteur de suréchantillonnage $N/M$ . . . . .	104
4.2	Schéma de réalisation efficace du récepteur WCP-OFDM avec un facteur de suréchantillonnage $N/M$ . . . . .	106
4.3	Comparaison des réponses OBE et CP avec $M = 1024$ et $N = 1280$ . . . . .	109
4.4	Comparaison des réponses TFL et CP avec $M = 1024$ et $N = 1280$ . . . . .	110
4.5	Mesure de l'énergie hors-bande des fonctions prototypes pour $\Delta = 8$ . . . . .	111
4.6	Mesure des moments du second ordre des fonctions prototypes pour $\Delta = 8$ . . . . .	113
4.7	Mesure de localisation temps-fréquence des fonctions prototypes pour $\Delta = 8$ . . . . .	113
4.8	Puissance des coefficients des matrices $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$ avec canal sélectif. . . . .	115
4.9	Puissance des coefficients des matrices $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$ avec canal idéal. . . . .	115
4.10	Structure générale de l'égaliseur WCP-OFDM. . . . .	116
4.11	Gains $E\{ A[m, p] ^2\}$ et $E\{ B[m, p] ^2\}$ pour $M = 512$ , $v_{\max} = 3$ km/h. . . . .	118
4.12	Gains $E\{ A[m, p] ^2\}$ et $E\{ B[m, p] ^2\}$ pour $M = 512$ , $v_{\max} = 350$ km/h. . . . .	118
4.13	Gains $E\{ A[m, p] ^2\}$ et $E\{ B[m, p] ^2\}$ pour $M = 64$ , $v_{\max} = 3$ km/h. . . . .	120
4.14	Gains $E\{ A[m, p] ^2\}$ et $E\{ B[m, p] ^2\}$ pour $M = 64$ , $v_{\max} = 350$ km/h. . . . .	120

4.15	Estimation de la CCDF du PAPR pour différents prototypes avec $M = 1024$ . . .	122
4.16	Émetteur WCP-OFDM avec précodage. . . . .	123
4.17	Récepteur WCP-OFDM avec précodage. . . . .	123
5.1	Émetteur-récepteur multiporteuses suréchantillonné. . . . .	127
5.2	Équivalent discret d'un canal à bruit additif blanc gaussien. . . . .	127
5.3	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 1024$ et différentes valeurs de $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec $v_{\max} = 3$ km/h. . . . .	132
5.4	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 1024$ et différentes valeurs de $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec $v_{\max} = 350$ km/h. . . . .	133
5.5	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 4096$ et différentes valeurs de $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec $v_{\max} = 3$ km/h. . . . .	134
5.6	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 4096$ et différentes valeurs de $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec $v_{\max} = 350$ km/h. . . . .	135
5.7	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 2048$ et différentes valeurs de $N/M$ . Canal COST <sup>1</sup> 207 TU <sup>2</sup> x6 avec codage LDPC de rendement 3/4 et 10 itérations au décodage. . . . .	137
5.8	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 2048$ , prototype TFL et différentes valeurs de $N/M$ . Comparaison des scénarios base-vers-mobile et mobile-vers-mobile basés sur le modèle COST 207 TUx6 (scénario de faible mobilité). . . . .	140
5.9	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 2048$ , prototype TFL et différentes valeurs de $N/M$ . Comparaison des scénarios base-vers-mobile et mobile-vers-mobile basés sur le modèle COST 207 TUx6 (scénario de haute mobilité). . . . .	141
5.10	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 256$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d'égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUx6 (scénario de faible mobilité). . . . .	145
5.11	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 512$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d'égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUx6 (scénario de faible mobilité). . . . .	146

---

1. *European Cooperation in the Field of Scientific and Technical Research*

2. *Typical Urban*

---

5.12	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 256$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d'égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUX6 (scénario de haute mobilité). . . . .	147
5.13	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 512$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d'égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUX6 (scénario de haute mobilité). . . . .	148
5.14	Taux d'erreur binaire en fonction de $E_b/N_0$ pour $M = 512$ , $N/M = 5/4$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d'égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUX6 avec une estimation de canal bruitée (SNR d'estimation de 10 dB). . . . .	149

# Liste des tableaux

2.1	Fonctions caractéristiques d'un canal de transmission linéaire invariant en temps (LTI) ou en fréquence (LFI) ou idéal. . . . .	53
2.2	Description du profil d'intensité multitrajet du modèle TUx6. . . . .	64
2.3	Paramètres des spectres Doppler bi-gaussiens du modèle TUx6. . . . .	65
5.1	Définition de la vitesse maximale de l'émetteur $v_{\max}(e)$ et du récepteur $v_{\max}(r)$ en fonction des scénarios de simulation considérés. . . . .	138



# Notations

## Ensembles

Les ensembles apparaissent en capitales grasses droites. Soient  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  deux ensembles. Soit  $x$  un élément de  $\mathbf{E}$ , on note :

- $x \in \mathbf{E}$  (appartenance) ;
- $\mathbf{E} \setminus \mathbf{F}$  (différence) ;
- $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$  (inclusion).

Les ensembles usuels sont notés :

- l'ensemble des entiers naturels  $\mathbf{N}$  ;
- l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbf{Z}$  ;
- l'ensemble des nombres réels  $\mathbf{R}$  ;
- l'ensemble des nombres complexes  $\mathbf{C}$ .

## Nombres complexes

On note  $j$  le nombre imaginaire défini tel que  $j^2 = -1$ . Pour  $z \in \mathbf{C}$ , on note  $z^*$  son conjugué,  $\Re\{z\}$  sa partie réelle et  $\Im\{z\}$  sa partie imaginaire. Le module de  $z$  s'écrit  $|z|$  et son argument  $\arg\{z\}$ .

## Matrices et vecteurs

Les matrices sont notées en capitales grasses italiques. Soit  $\mathbf{A}$  une matrice dont les éléments sont notés  $\{a_{m,n}\}$  avec  $m$  et  $n$  des entiers naturels identifiant respectivement une ligne et une colonne de la matrice. En considérant des éléments  $\{a_{m,n}\}$  complexes, on écrit :

- $[\mathbf{A}^T]_{m,n} = [\mathbf{A}]_{n,m}$  la transposée de  $\mathbf{A}$  ;
- $[\mathbf{A}^*]_{m,n} = [\mathbf{A}]_{m,n}^*$  la conjuguée de  $\mathbf{A}$  ;
- $[\mathbf{A}^H]_{m,n} = [\mathbf{A}^{T*}]_{m,n}$  la transposée-conjuguée de  $\mathbf{A}$ .

Les vecteurs sont des matrices à une seule colonne, par conséquent, leur indice de colonne est omis. Afin de les différencier aisément des matrices, les vecteurs sont notés en minuscules grasses italiques.

## Fonctions et distributions

Soit  $x \in \mathbf{R}$  et  $\mathbf{E}$  un ensemble quelconque. Nous définissons les fonctions usuelles suivantes.

Fonction signe :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{pour } x < 0, \\ 0, & \text{pour } x = 0, \\ 1, & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathbf{E}$  :

$$\chi_{\mathbf{E}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } x \notin \mathbf{E}, \\ 1, & \text{pour } x \in \mathbf{E}. \end{cases}$$

Fonction porte :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } |x| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{pour } |x| = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonction sinus cardinal :

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{pour } x \neq 0, \\ 1, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

Peigne de Dirac :

$$\Psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k).$$

## Variables utilisées

### Scalars

$E_b$	Énergie par bit transmis
$N_0$	Densité spectrale de puissance (monolatérale) du bruit
$f_d$	Écart Doppler maximal
$(\Delta\nu)_c$	Bande de cohérence
$(\Delta t)_c$	Temps de cohérence
$c_{m,n}$	Symbole complexe émis sur la porteuse $m$ du bloc $n$
$\tilde{c}_{m,n}$	Symbole complexe reçu sur la porteuse $m$ du bloc $n$
$\bar{c}_{m,n}$	Symbole complexe égalisé sur la porteuse $m$ du bloc $n$
$T_0$	Durée symbole pour une modulation multiporteuse
$F_0$	Espacement entre deux sous-porteuses adjacentes
$f_c$	Fréquence centrale d'une modulation monoporteuse

$B$	Largeur de bande ou bande passante
$F_e$	Fréquence d'échantillonnage
$T_e$	Période d'échantillonnage
$M$	Nombre de sous-porteuses
$N$	Nombre d'échantillons par symbole multiporteuse
$R_c$	Rendement d'un codeur de canal

### Fonctions

$s$	Signal émis
$r$	Signal reçu
$n$	Bruit blanc
$b$	Bruit à bande limitée
$z$	Bruit à bande limitée, filtré par le récepteur
$\alpha_i$	Gain complexe d'un trajet de propagation
$g$	Fonction prototype d'émission
$\check{g}$	Fonction prototype de réception
$g_{m,n}$	Fonction d'émission utilisée sur la porteuse $m$ du bloc $n$
$\check{g}_{m,n}$	Fonction de réception utilisée sur la porteuse $m$ du bloc $n$

### Matrices et vecteurs

$\mathbf{c}_n$	Vecteur de symboles émis du bloc $n$
$\tilde{\mathbf{c}}_n$	Vecteur de symboles reçus du bloc $n$
$\bar{\mathbf{c}}_n$	Vecteur de symboles égalisés du bloc $n$
$\mathbf{b}_n$	Vecteur des échantillons de bruit du bloc $n$
$\mathbf{G}$	Matrice génératrice d'un réseau temps-fréquence, de taille $2 \times 2$
$\mathbf{F}_M$	Matrice de Fourier normalisée, de taille $M \times M$
$\mathbf{P}_\Delta$	Matrice d'expansion cyclique d'ordre $\Delta$
$\mathbf{D}_g$	Matrice diagonale formée à partir de $g$
$\mathbf{D}_{\check{g}}$	Matrice diagonale formée à partir de $\check{g}$
$\mathbf{H}_n$	Matrice de transfert du canal (bloc $n$ vers bloc $n$ )
$\mathbf{G}_n$	Matrice de transfert du canal (bloc $n - 1$ vers bloc $n$ )
$\mathbf{A}_n$	Matrice de transfert du système (bloc $n$ vers bloc $n$ )
$\mathbf{B}_n$	Matrice de transfert du système (bloc $n - 1$ vers bloc $n$ )
$\mathbf{Z}_n$	Matrice des échantillons de bruit filtrés par le récepteur (bloc $n$ )
$\mathbf{Q}$	Matrice de précodage



# Table des sigles et acronymes

<b>3GPP</b>	<i>3rd Generation Partnership Project</i>
<b>ADC</b>	<i>Analog-to-Digital Conversion</i>
<b>ASK</b>	<i>Amplitude Shift Keying</i>
<b>BER</b>	<i>Binary Error Rate</i>
<b>BFDM</b>	<i>Biorthogonal Frequency Division Multiplexing</i>
<b>CCDF</b>	<i>Complementary Cumulative Distribution Function</i>
<b>COST</b>	<i>European Cooperation in the Field of Scientific and Technical Research</i>
<b>CP</b>	<i>Cyclic Prefix</i>
<b>DAC</b>	<i>Digital-to-Analog Conversion</i>
<b>DGA</b>	Direction Générale de l'Armement
<b>EEATS</b>	Électronique Électrotechnique Automatique et Traitement du Signal
<b>ETIS</b>	Équipes Traitement de l'Information et Systèmes
<b>FFT</b>	<i>Fast Fourier Transform</i>
<b>GIPSA</b>	Grenoble Images Parole Signal Automatique
<b>GSM</b>	<i>Global System for Mobile communication</i>
<b>HF</b>	<i>High Frequency</i>
<b>IBI</b>	<i>InterBlock Interference</i>
<b>ICI</b>	<i>InterCarrier Interference</i>
<b>IEEE</b>	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
<b>ISI</b>	<i>InterSymbol Interference</i>
<b>JTC</b>	<i>Joint Technical Committee</i>
<b>LDPC</b>	<i>Low-Density Parity Check</i>
<b>LFI</b>	<i>Linear Frequency Invariant</i>
<b>LTI</b>	<i>Linear Time Invariant</i>
<b>LTV</b>	<i>Linear Time Variant</i>
<b>NRZ</b>	<i>Non-Return-to-Zero</i>
<b>OBE</b>	<i>Out-of-Band Energy</i>
<b>OFDM</b>	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>
<b>OQAM</b>	<i>Offset Quadrature Amplitude Modulation</i>
<b>PAPR</b>	<i>Peak-to-Average Power Ratio</i>
<b>PSK</b>	<i>Phase Shift Keying</i>
<b>QAM</b>	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>

<b>QPSK</b>	<i>Quadrature Phase Shift Keying</i>
<b>RZ</b>	<i>Return-to-Zero</i>
<b>SC</b>	<i>SingleCarrier</i>
<b>SINR</b>	<i>Signal to Interference and Noise Ratio</i>
<b>SIR</b>	<i>Signal to Interference Ratio</i>
<b>SNR</b>	<i>Signal to Noise Ratio</i>
<b>SRRC</b>	<i>Square-Root-Raised-Cosine</i>
<b>TFL</b>	<i>Time-Frequency Localization</i>
<b>TU</b>	<i>Typical Urbain</i>
<b>UHF</b>	<i>Ultra High Frequency</i>
<b>US</b>	<i>Uncorrelated Scattering</i>
<b>VHF</b>	<i>Very High Frequency</i>
<b>WCP</b>	<i>Weighted Cyclic Prefix</i>
<b>WSSUS</b>	<i>Wide Sense Stationary and Uncorrelated Scattering</i>
<b>WSS</b>	<i>Wide Sense Stationary</i>

# Introduction

## Présentation du contexte

Les systèmes de transmission radiomobiles évoluent dans un contexte particulièrement contraignant où les ressources spectrales sont rares, tout en faisant face à des limitations énergétiques inhérentes à leur mobilité. Au delà de ces contraintes d'intégration, le principal défi qui motive la création de procédés de transmission innovants reste sans aucun doute la compréhension de l'environnement de propagation. En effet, dans le cadre d'une transmission terrestre, le signal reçu s'exprime comme une superposition d'ondes provenant de plusieurs directions avec des amplitudes, des phases et des retards différents. Cela s'explique par les phénomènes de réflexion, diffraction et diffusion causés par le relief, les bâtiments, les objets, la végétation... Une telle propagation multitrajet donne lieu à une dispersion temporelle du signal émis. Par ailleurs, les déplacements de l'émetteur et du récepteur impliquent un profil multitrajet dépendant du temps qui se traduit par une dispersion fréquentielle appelée étalement Doppler.

Au sein d'un système de transmission, la dispersion temporelle du canal introduit de l'interférence entre symboles, ce qui engendre une dégradation des performances. Les techniques d'égalisation permettent de limiter cette interférence, voire de l'annuler. Parmi les mécanismes couramment utilisés par les modulations monoporteuses figurent l'égalisation linéaire, l'égalisation à retour de décision, ou encore, l'égalisation selon le maximum de vraisemblance (ex. : algorithme de Viterbi). Naturellement, les performances de ces différents égaliseurs augmentent en même temps que leur complexité algorithmique. Or, celle-ci se traduit par des difficultés d'intégration ainsi que par une forte consommation énergétique.

Par ailleurs, l'égalisation est soumise à une estimation de la composante multitrajet. Pour ce faire, il est par exemple possible d'introduire des informations connues du récepteur dans la transmission, on parle alors d'estimation assistée (ou *data aided*). D'autres stratégies se basent sur une égalisation aveugle, c'est-à-dire sans connaissance autre que statistique de la composante multitrajet. En situation de mobilité, le processus d'estimation de canal doit être réalisé périodiquement afin de suivre l'évolution de la composante multitrajet. Dans le cadre d'une transmission par bloc, il est souvent possible de considérer le canal comme invariant sur la durée du bloc. Cependant, dans le contexte de notre étude où nous considérons des scénarios pour lesquels la mobilité et la fréquence centrale sont grandes, cette approximation devient abusive et il est nécessaire d'établir un modèle décrivant l'évolution de la composante multitrajet à l'échelle intra-bloc. De plus, l'étalement fréquentiel introduit par effet Doppler se répercute sur la conception des systèmes de synchronisation qui deviennent de plus en plus complexes à réaliser. Notons que la synchronisation et l'estimation de canal ne sont pas abordées au cours de ce document, ces deux étapes sont considérées comme parfaitement réalisées en amont des traitements proposés en réception.

Outre les contraintes évoquées précédemment, la recombinaison des ondes différemment atténuées et déphasées peut conduire à des phénomènes d'évanouissements, matérialisés par un canal possédant un gain quasi nul [Sklar 1997a]. Après égalisation, cela engendre des erreurs de détection en amplifiant le bruit. Les données ainsi perdues peuvent parfois être retrouvées si le système de transmission exploite des sources de diversité intrinsèques au canal (ex. : exploitation des trajets multiples par filtrage spatial) ou contrôlées par l'émetteur-récepteur (ex. : étalement de spectre, codage correcteur d'erreurs) [Sklar 1997b].

Il apparaît finalement que les canaux mobiles à plusieurs trajets sont particulièrement défavorables aux systèmes de transmission numérique. C'est la raison pour laquelle une modélisation fidèle de leur comportement est un pré-requis fondamental à leur exploitation comme support d'information. L'estimation du terme d'atténuation moyen, c'est-à-dire sur de grandes échelles de distance est généralement découplée de l'analyse des fluctuations à petite échelle, incluant les effets de masque ainsi que les évanouissements liés à la propagation multitrajet. Dans le premier cas, de nombreux modèles déterministes, généralement établis par des analyses empiriques, permettent de formuler un bilan de liaison approché [Okumura 1984, Hata 1980]. Le second problème fait souvent intervenir une modélisation statistique en l'absence d'une connaissance parfaite de l'environnement de propagation [Bello 1963, Clarke 1968]. Au cours de ces vingt dernières années, les travaux de modélisation de l'environnement de propagation ont principalement été guidés par le développement des applications de téléphonie cellulaire et de systèmes de transmission de données en intérieur (ex. : GSM<sup>3</sup>, IEEE<sup>4</sup> 802.11...). Ces différentes études, notamment menées par le COST 207, le 3GPP<sup>5</sup>, le JTC<sup>6</sup>, ont entraîné l'adoption de modèles reconnus, souvent exploités dans le cadre de l'évaluation des performances de systèmes de transmission en environnement mobile terrestre [Lee 1989, Pahlavan 1995, Pätzold 2001]. Cependant, avec l'émergence de nouveaux scénarios de transmission qui utilisent des bandes de fréquences plus élevées et qui outrepassent les hypothèses d'une diffusion cellulaire (ex. : réseaux *ad-hoc* interpersonnels, réseaux de très courte portée, communication véhicule-vers-véhicule), nous constatons que les modèles hérités de la téléphonie mobile deviennent inadaptés [Molisch 2009]. Ce contexte particulier nécessite l'élaboration de modèles plus généraux qui prennent en compte la mobilité de l'émetteur et du récepteur en considérant que ces derniers se situent dans un environnement riche en diffuseurs.

Quelles que soient les caractéristiques exactes du modèle choisi, le contexte de propagation radiomobile permet, sous l'hypothèse de bande étroite, d'assimiler le canal de transmission à un système linéaire variant dans le temps. Dans ces conditions, un opérateur de Hilbert-Schmidt intégral peut décrire la relation d'entrée-sortie du canal [Matz 1998]. La notion de transmission optimale sur ce type de canal est difficile à formaliser dans la mesure où un opérateur linéaire variant dans le temps n'admet pas de structure propre en raison de la dualité temps-fréquence [Kozek 1997b, Kozek 1997a]. On considère toutefois deux cas particuliers pour lesquels une telle structure propre existe : l'invariance temporelle et l'invariance fréquentielle, correspon-

---

3. *Global System for Mobile communication*

4. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*

5. *3rd Generation Partnership Project*

6. *Joint Technical Committee*

dant respectivement au cas d'un canal multitrajet statique et d'un canal monotrajet évolutif. Les fonctions propres associées à ces deux types de canaux sont respectivement les exponentielles complexes et les impulsions de Dirac. Cela signifie qu'une signalisation basée sur ces fonctions permet de diagonaliser le canal de transmission et facilite ainsi l'égalisation, lorsqu'elle est possible.

La recherche d'une structure propre approchée pour la transmission sur canaux dispersifs en temps et en fréquence a fait l'objet de plusieurs études [Jung 2007b, Jung 2008]. Il s'agit en pratique de répartir l'information dans le plan temps-fréquence à l'aide d'impulsions de mise en forme peu sensibles à l'étalement infligé par le canal. Ainsi, la maîtrise des caractéristiques temporelles et fréquentielles des impulsions de mise en forme devient fondamentale : les impulsions bien localisées en fréquence sont adaptées aux canaux sélectifs en fréquence alors que les impulsions bien localisées en temps sont adaptées aux canaux sélectifs en temps. De plus, il est nécessaire de déterminer les impulsions de réception duales qui garantissent la reconstruction des informations envoyées. Naturellement, l'optimisation d'une telle signalisation requiert une connaissance parfaite du canal, tant au niveau de l'émetteur que du récepteur. Dans des scénarios à forte mobilité, une telle contrainte est impossible à remplir et il est préférable de se baser sur une connaissance statistique de l'environnement de propagation [Jung 2007a].

Les émetteurs-récepteurs multiporteuses suréchantillonnés<sup>7</sup> nous apportent les moyens de mettre en œuvre une telle signalisation adaptée aux canaux linéaires variant dans le temps [Cherubini 2002]. Ils permettent en effet l'utilisation d'impulsions de mise en forme variées au prix d'une diminution de l'efficacité spectrale. La réalisation de ces systèmes de communication s'appuie souvent sur la théorie des bancs de filtres [Bellanger 1974]. L'émetteur peut être considéré comme un banc de synthèse qui assure le multiplexage des données et dont les filtres de chaque sous-bande sont obtenus par modulation d'un unique filtre prototype. De l'autre côté du canal, le récepteur peut être vu comme un banc d'analyse qui effectue le démultiplexage des données en utilisant également un filtre prototype modulé sur chaque sous-bande. Les filtres prototypes du transmultiplexeur formé par les bancs de synthèse et d'analyse sont soumis aux conditions de reconstruction parfaite, de manière à restituer les données transmises en présence d'un canal idéal. Remarquons que les familles de Weyl-Heisenberg (ou familles de Gabor) fournissent un cadre théorique complet pour l'étude des conditions de reconstruction parfaite dans le cas des bancs de filtres modulés [Christensen 2008, Feichtinger 1998]. Ce contexte a d'ailleurs motivé de nombreux travaux de recherche pour la synthèse de filtres prototypes à reconstruction parfaite ou approchée, par échantillonnage de fonctions continues ou par optimisation directe à temps discret [Vahlin 1996, Strohmer 2003, Schniter 2004b, Siclet 2006, Beaulieu 2009].

Malgré leur intérêt manifeste pour de nombreuses applications de transmission radiomobiles, les modulations multiporteuses suréchantillonnées peinent à s'imposer dans les standards de télécommunication. Parmi les causes d'un tel rejet figure leur complexité algorithmique importante, en dépit de schémas de réalisation efficaces reposant, par exemple, sur des décompositions polyphases et utilisant la transformée de Fourier rapide [Siclet 2002a]. De plus, les impulsions de mise en forme étant généralement de formes variées et de durée supérieure à

---

7. également connus sous le nom de *filtered multitone*.

celle d'un bloc, la complexité du système incluant l'égalisation n'est pas nécessairement plus faible que celle du cas monoporteuse [Benvenuto 2002, Barhumi 2004, Wang 2006].

En raison de sa simplicité de mise en œuvre, la principale technique de transmission multiporteuse qui a su s'imposer au sein des applications de transmission radiomobiles actuelles est sans aucun doute le multiplexage orthogonal en fréquence avec préfixe cyclique (CP<sup>8</sup>-OFDM<sup>9</sup>), qui correspond à l'utilisation d'un intervalle de garde particulier. Ce schéma de transmission constitue un cas particulier des modulations multiporteuses suréchantillonnées pour lequel les filtres prototypes ont une forme rectangulaire et remplissent les conditions de reconstruction parfaite.

Par rapport à une modulation monoporteuse utilisant la même bande, la durée symbole du CP-OFDM est multipliée par le nombre de sous-porteuses, ce qui confère aux impulsions une localisation temporelle d'autant plus mauvaise que le nombre de sous-porteuses est grand. Par ailleurs, la forme d'onde rectangulaire n'est pas assez bien localisée en fréquence pour diagonaliser les canaux sélectifs en fréquence, à moins d'utiliser un très grand nombre de sous-porteuses ou un intervalle de garde de durée plus grande que celle de la réponse impulsionnelle du canal. Une égalisation parfaite est alors possible en utilisant un unique coefficient complexe par sous-bande [Wang 2000]. En présence de mobilité, le canal devient sélectif en temps et la mauvaise localisation temporelle se traduit par de l'interférence entre sous-porteuses qui diminue fortement les performances du système [Proakis 2006, p. 753]. De plus, le schéma de transmission non orthogonal (les filtres d'émission et de réception sont de longueurs différentes) s'avère sous-optimal en présence d'un canal à bruit additif blanc gaussien tel que le démontre la théorie du filtrage adapté [Proakis 2006, p. 160].

Pour faire face aux applications de transmission radiomobiles, il apparaît donc intéressant de trouver un compromis entre la faible complexité du CP-OFDM et les performances des modulations multiporteuses plus générales. Un tel équilibre peut être atteint en se restreignant à la classe des émetteurs-récepteurs à filtres courts, c'est-à-dire dont la durée de la réponse impulsionnelle n'excède pas celle d'un bloc [Moret 2010]. Cette approche donne lieu à la notion de multiplexage orthogonal en fréquence avec préfixe cyclique pondéré (WCP<sup>10</sup>-OFDM) dont la complexité algorithmique reste comparable au CP-OFDM. Au cours de cette thèse, nous nous focalisons sur l'évaluation des performances de ce type de modulation en environnement radiomobile en utilisant notamment des filtres prototypes orthogonaux à reconstruction parfaite [Pinchon 2011].

## Synthèse des contributions de l'auteur

Les contributions de l'auteur se répartissent en trois catégories : la modélisation du canal de transmission radiomobile, l'analyse des règles d'adaptation temps-fréquence des filtres prototypes, la réalisation efficace et l'évaluation des performances des systèmes WCP-OFDM en

---

8. *Cyclic Prefix*

9. *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*

10. *Weighted Cyclic Prefix*

environnement radiomobile.

À travers la notion de structure propre approchée des canaux de transmission sélectifs en temps et en fréquence, telle que présentée dans [Kozek 1997b, Jung 2007b], nous introduisons explicitement le lien entre ces travaux et les systèmes de transmission multiporteuses suréchantillonnés biorthogonaux. Par ailleurs, compte tenu des limites des modèles de canaux cellulaires, nous généralisons les hypothèses introduites dans [Clarke 1968] en considérant un émetteur et un récepteur mobiles, chacun dans un environnement riche en diffuseurs. Un tel modèle étend également les résultats présentés dans [Akki 1986] et s'avère adapté aux communications dans les réseaux *ad-hoc*, sans visibilité directe entre l'émetteur et le récepteur.

En étudiant les systèmes de transmission multiporteuses suréchantillonnés à temps continu, nous nous plaçons dans le cas d'un canal stationnaire au sens large avec diffuseurs non-corrélés. Une optimisation sous contraintes du rapport signal sur bruit plus interférence nous permet d'établir des règles d'adaptation des impulsions de mise en forme au canal. Ainsi, nous effectuons le lien entre les moments du second ordre en temps et en fréquence des filtres prototypes avec les caractéristiques d'étalement temps-fréquence moyennes du canal, précisant ainsi les résultats introduits dans [Kozek 1998, Strohmer 2003, Jung 2007a].

Les principales contributions se focalisent sur l'évaluation des performances des modulations WCP-OFDM sur canaux radiomobiles. Pour cela, dans la continuité des recherches présentées dans [Siclet 2002a, Tonello 2008], nous spécifions un équivalent à temps discret de l'ensemble émetteur-récepteur. En exploitant les résultats de notre étude théorique de l'adaptation des filtres de mise en forme au canal, nous choisissons d'utiliser les impulsions prototypes présentées dans [Pinchon 2011]. Nous proposons plusieurs schémas d'égalisation par blocs, de faible complexité, à la différence de [Das 2004, Schniter 2004a, Das 2007] où un turbo-égaliseur est utilisé pour compenser l'interférence résiduelle. Nous établissons également des mesures de performances en présence de diversité temporelle et fréquentielle, en introduisant codage correcteur d'erreurs et entrelacement. Enfin, nous mesurons le facteur de puissance crête sur puissance moyenne des modulations WCP-OFDM et nous examinons les conséquences d'un précodage par transformée de Fourier dans le but de limiter le facteur de puissance crête sur puissance moyenne.

Les travaux présentés dans ce document ont été détaillés dans plusieurs rapports techniques [Roque 2010, Roque 2011] et publiés sous la forme d'articles [Roque 2012d, Roque 2012a, Roque 2012b, Roque 2012c].

## Présentation des chapitres

Cette thèse se compose de cinq chapitres. Le premier présente des outils mathématiques élémentaires et fixe les notations utilisées dans la suite du document. Nous rappelons quelques définitions fondamentales d'algèbre linéaire, comme la notion d'espace de Hilbert qui sert de cadre à la plupart des résultats présentés par la suite. Nous abordons les principaux outils d'analyse temps-fréquence et poursuivons avec la notion de familles de Weyl-Heisenberg. Nous

introduisons ensuite les différents blocs fonctionnels de la chaîne de communication numérique et développons la notion d'émetteur-récepteur équivalent en bande de base.

Le deuxième chapitre traite de la modélisation du canal de transmission. Nous établissons dans un premier temps un modèle à bruit additif blanc gaussien. Nous complétons ensuite cette approche par la notion de canal multitrajet variant dans le temps. Nous spécifions un cadre d'étude pratique en justifiant les propriétés de stationnarité au sens large et non-corrélation des diffuseurs. Nous présentons ensuite des modèles couramment utilisés pour la description des scénarios radiomobiles. Nous complétons notre étude en introduisant des modèles moins courants, permettant de rendre compte de la propagation entre deux stations mobiles évoluant dans un environnement riche en diffuseurs. En guise de transition vers le chapitre suivant, nous présentons la notion de structure propre approchée d'un canal de transmission linéaire variant dans le temps. Nous développons enfin un équivalent discret du canal de transmission multitrajet variant dans le temps.

Le troisième chapitre décrit la structure générale d'un émetteur-récepteur multiporteuse suréchantillonné. Les relations d'entrée-sortie sont exprimées et l'analyse des termes de signal utile, de bruit et d'interférence est développée. Nous déterminons ensuite les caractéristiques des impulsions de mise en forme à utiliser pour maximiser la puissance du terme de signal utile et minimiser la puissance des termes de bruit et interférence. Nous concluons le chapitre en donnant un équivalent à temps discret de la chaîne de transmission ainsi réalisée.

Au cours du quatrième chapitre, nous nous focalisons sur l'utilisation des filtres courts. En premier lieu, nous statuons sur les simplifications engendrées par l'utilisation de cette classe de filtres en décrivant le transmultiplexeur WCP-OFDM. Nous exprimons ensuite les conditions de reconstruction parfaite et étudions les caractéristiques temps-fréquence de plusieurs prototypes orthogonaux. Nous développons ensuite divers schémas d'égalisation adaptés aux profils de dispersivité du canal de transmission. Enfin, nous évoquons la problématique du facteur de puissance crête sur puissance moyenne et analysons les conséquences d'un précodage basé sur une transformée de Fourier discrète (transmission monoporteuse par bloc).

Le cinquième chapitre est consacré à l'évaluation des performances des modulations WCP-OFDM à proprement parler. Il détaille plusieurs scénarios de simulation réalistes basés sur les modèles de canaux présentés au cours du deuxième chapitre. Les mesures de performance sont données en terme de taux d'erreur binaire, en présence ou non de codage correcteur d'erreurs.

# Notions préliminaires

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Notions d’algèbre linéaire</b>	<b>7</b>
1.1.1	Espace vectoriel, combinaisons linéaires, bases	8
1.1.2	Application linéaire, espace normé	9
1.1.3	Famille sommable, densité, convergence, complétude	10
1.1.4	Produit scalaire et bases dans un espace de Hilbert	11
1.1.5	Familles de Weyl–Heisenberg	14
<b>1.2</b>	<b>Outils pour l’analyse des signaux déterministes</b>	<b>16</b>
1.2.1	Considérations énergétiques	16
1.2.2	Du continu au discret	17
1.2.3	Analyse temps-fréquence des signaux continus	20
1.2.4	Analyse temps-fréquence des signaux discrets	23
<b>1.3</b>	<b>Éléments de communications numériques</b>	<b>27</b>
1.3.1	Description d’une chaîne de transmission numérique	27
1.3.2	Signal analytique et enveloppe complexe	28
1.3.3	Modulations numériques linéaires et transmission sur canal idéal	30

Les communications numériques permettent la transmission d’information de nature numérique à travers un environnement de propagation analogique. L’information est ainsi transportée par des signaux analogiques et numériques. C’est pourquoi, dans ce chapitre, nous donnons les bases théoriques permettant de représenter ces signaux, de les analyser et de les transmettre.

Nous commençons par rappeler les principales définitions et propriétés d’algèbre linéaire utilisées en traitement du signal pour les communications. Ensuite, les principaux outils utilisés en analyse fréquentielle sont présentés dans le contexte des signaux déterministes à énergie finie, dans le cas continu et discret. Enfin, nous faisons le lien avec les systèmes de transmission numérique d’information.

## 1.1 Notions d’algèbre linéaire

Au cours de cette partie, nous rappelons quelques définitions fondamentales d’algèbre linéaire afin de présenter notre cadre d’étude des signaux de communication. Nous introduisons

notamment les notions d'applications linéaires dans les espaces vectoriels, en insistant en particulier sur les espaces munis d'un produit scalaire. Le lecteur souhaitant approfondir ces notions pourra se reporter à [Rudin 2006].

Nous considérons un corps commutatif  $\mathbf{K}$  représentant indifféremment le corps des réels  $\mathbf{R}$  ou des complexes  $\mathbf{C}$ .

### 1.1.1 Espace vectoriel, combinaisons linéaires, bases

**Définition 1.1** (Espace vectoriel)

L'ensemble  $\mathbf{E}$  a une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  si  $\mathbf{E}$  est muni des deux opérations suivantes.

1. Une opération interne, notée  $+$ , telle que  $(\mathbf{E}, +)$  soit un groupe abélien.
2. Une opération externe, notée  $\cdot$ , qui à tous les éléments  $\alpha \in \mathbf{K}$  et  $u \in \mathbf{E}$  associe  $\alpha \cdot u \in \mathbf{E}$  telle que  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$  et  $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E}^2$  :
  - $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$  ;
  - $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$  ;
  - $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u}$  ;
  - $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ .

Le triplet  $(\mathbf{E}, +, \cdot)$  est appelé  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel ou espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$ . Les éléments de  $\mathbf{E}$  et de  $\mathbf{K}$  sont respectivement appelés vecteurs et scalaires. La loi de composition interne  $+$  est appelée addition vectorielle. La loi de composition externe  $\cdot$  est appelée produit par un scalaire. L'élément neutre de  $+$  est le vecteur nul, noté  $\mathbf{0}_{\mathbf{E}}$ . Le symétrique d'un vecteur  $\mathbf{u}$  pour la loi  $+$  est le vecteur opposé, noté  $-\mathbf{u}$ .

Dans toute la suite,  $\mathbf{E}$  désignera un espace vectoriel sur le corps commutatif  $\mathbf{K}$ .

**Définition 1.2** (Sous-espace vectoriel)

Une partie non-vide  $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$  est un sous-espace vectoriel si muni des opérations  $+$  et  $\cdot$  définies sur  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  est un espace vectoriel.

Au sein d'un espace vectoriel, il peut être utile d'exprimer un vecteur quelconque de cet espace comme une combinaison linéaire unique d'autres vecteurs. La notion de base développée ci-après formalise une telle décomposition.

Pour alléger les notations, nous définissons  $\mathbf{I}$  un ensemble d'indices quelconques et  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  une famille d'éléments de  $\mathbf{E}$ .

**Définition 1.3** (Combinaison linéaire)

On appelle combinaison linéaire de  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ , tout vecteur  $\mathbf{u}$  s'écrivant sous la forme

$$\mathbf{u} = \sum_{i \in \mathbf{I}} \alpha_i \mathbf{u}_i \tag{1.1}$$

avec  $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  une famille de scalaires presque tous nuls (c'est-à-dire comportant un nombre fini d'éléments non nuls).

On dit que  $\mathbf{u}$  est une combinaison linéaire de la famille de vecteurs  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}} \in \mathbf{E}^p$ . L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  est noté  $\text{Vect}\{\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}}\}$ .

**Définition 1.4** (Famille génératrice)

La famille  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}} \in \mathbf{E}^p$  est dite génératrice de  $\mathbf{E}$  si  $\text{Vect}\{\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}}\} = \mathbf{E}$ . Autrement dit, tout élément de  $\mathbf{E}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}}$ .

**Définition 1.5** (Famille libre)

La famille  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}} \in \mathbf{E}^p$  est dite libre si pour toute famille de scalaires presque tous nuls  $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbf{I}}$

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \alpha_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}_{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \forall i, \alpha_i = 0. \quad (1.2)$$

Autrement dit, les vecteurs de la famille  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  sont linéairement indépendants.

**Définition 1.6** (Base)

La famille  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}} \in \mathbf{E}^p$  est une base de  $\mathbf{E}$  si elle est à la fois libre et génératrice.

**Définition 1.7** (Base finie ou infinie)

Si  $\mathbf{E}$  admet une base finie, alors on dit que  $\mathbf{E}$  est de dimension finie. Dans le cas contraire, on dit que  $\mathbf{E}$  est de dimension infinie.

### 1.1.2 Application linéaire, espace normé

Afin de satisfaire les applications les plus courantes dans les espaces vectoriels, nous définissons la notion d'application linéaire et munissons ces espaces d'une norme.

**Définition 1.8** (Application linéaire)

Soient  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{K}$ . La relation  $f : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$  est une application linéaire de  $\mathbf{E}$  vers  $\mathbf{F}$  si

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E}^2, \quad f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \quad (1.3)$$

$$\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{E}, \quad f(\alpha \mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u}). \quad (1.4)$$

L'ensemble des applications linéaires de  $\mathbf{E}$  vers  $\mathbf{F}$  est noté  $\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ .

**Définition 1.9** (Norme)

La norme sur  $\mathbf{E}$  est une application

$$\begin{aligned} E &\rightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto \|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

vérifiant pour tout couple de vecteurs  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{E}^2$  et tout scalaire  $\lambda \in \mathbf{K}$  :

- $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbf{E}}$  ;
- $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$  ;
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ .

**Définition 1.10** (Espace vectoriel normé)

Un espace vectoriel  $\mathbf{E}$  muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Parmi les normes couramment utilisées en analyse, nous développons les exemples de la norme  $\alpha$  et de la norme infinie.

**Exemple 1.1** (Norme  $\alpha$ )

Soit  $\mathbf{E} = \mathbf{K}^p$  et soit  $\alpha > 0$ . On note  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)$  un vecteur de  $\mathbf{E}$ . La norme  $\alpha$  se note

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto \|\mathbf{u}\|_{\alpha} = \left( \sum_{i=1}^p |u_i|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.2** (Norme infinie)

Soit  $\mathbf{E} = \mathbf{K}^p$ . On note  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)$  un vecteur de  $\mathbf{E}$ . La norme infinie se note

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto \|\mathbf{u}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq p} |u_i|. \end{aligned}$$

**Définition 1.11** (Opérateur borné)

Soient  $\mathbf{E}, \mathbf{F}$  deux espaces vectoriels normés, dont les normes sont notées respectivement  $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$ . Soit  $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ . On dit que  $\mathcal{P}$  est un opérateur borné lorsque

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall \mathbf{u} \in \mathbf{E}, \quad \|\mathcal{P}\mathbf{u}\|_{\mathbf{F}} \leq M \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}}.$$

### 1.1.3 Famille sommable, densité, convergence, complétude

La complétude des espaces vectoriels est une propriété importante pour l'analyse des phénomènes limites. Cette notion repose sur l'étude de la convergence des suites de Cauchy.

**Définition 1.12** (Famille sommable)

Considérons  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel normé. Soit  $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \mathbf{I}}$  une famille de vecteurs de  $\mathbf{E}$ . Cette famille est dite sommable s'il existe un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$  tel que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists (\mathbf{J}_0 \subset \mathbf{I}, \mathbf{J}_0 \text{ fini}), \quad \forall (\mathbf{J} \subset \mathbf{I}, \mathbf{J} \text{ fini}, \mathbf{J}_0 \subset \mathbf{J}), \quad \left\| \sum_{i \in \mathbf{J}} \mathbf{u}_i - \mathbf{u} \right\| \leq \epsilon. \quad (1.5)$$

**Définition 1.13** (Sous-espace vectoriel dense)

Soit  $\mathbf{F}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{E}$ . On dit que  $\mathbf{F}$  est dense dans  $\mathbf{E}$  lorsque

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{E}, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \mathbf{u}_{\epsilon} \in \mathbf{F}, \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\epsilon}\| < \epsilon. \quad (1.6)$$

Autrement dit,  $\mathbf{F}$  est dense dans  $\mathbf{E}$  si pour tout élément  $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$ , tout voisinage de  $\mathbf{u}$  contient au moins un point de  $\mathbf{F}$ .

**Définition 1.14** (Famille convergente)

Soit  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  une famille d'un espace vectoriel normé  $\mathbf{E}$ . On dit que  $\mathbf{u}_n$  converge vers  $\mathbf{u} \in \mathbf{E}$  si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbf{N}, \quad \forall p \geq n, \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\| < \epsilon. \quad (1.7)$$

**Définition 1.15** (Suite de Cauchy)

Soit  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  une famille d'un espace vectoriel normé  $\mathbf{E}$ .  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de Cauchy si

$$\lim_{(m,n) \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_n\| = 0. \quad (1.8)$$

**Définition 1.16** (Espace complet)

Un espace vectoriel normé  $\mathbf{E}$  est dit complet si toute suite de Cauchy de  $\mathbf{E}$  est convergente.

### 1.1.4 Produit scalaire et bases dans un espace de Hilbert

**Définition 1.17** (Produit scalaire hermitien)

On dit qu'une application de  $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$  dans  $\mathbf{C}$  définit un produit scalaire sur  $\mathbf{E}$  noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si

$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{E}^3, \forall \lambda \in \mathbf{C} :$

- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle ;$
- $\langle \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle ;$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^* = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle ;$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 ;$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$

**Définition 1.18** (Espace vectoriel hermitien)

Un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel muni du produit scalaire hermitien est appelé espace vectoriel hermitien.

On notera que si l'on considère le corps des réels plutôt que celui des complexes, on aboutit aux notions de produit scalaire euclidien et d'espace euclidien.

**Remarque 1.1** (Norme euclidienne)

Tout produit scalaire sur un espace vectoriel  $\mathbf{E}$  définit une norme appelée norme euclidienne.  $\forall \mathbf{u} \in \mathbf{E}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}. \end{aligned}$$

**Définition 1.19** (Espace de Hilbert)

Un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel hermitien complet est appelé espace de Hilbert.

Parmi les espaces de Hilbert les plus utilisés, nous présentons les cas particuliers des espaces

des signaux de carré intégrable et l'espace des séquences de carré sommable.

**Définition 1.20** (Espace des signaux de carré intégrable)

L'ensemble des signaux de carré intégrable est noté  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  et défini par

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{R}) = \left\{ f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}. \quad (1.9)$$

Sur cet espace, on peut définir un produit scalaire hermitien par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{L}_2(\mathbf{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)g(t) dt. \quad (1.10)$$

Muni de ce produit scalaire hermitien,  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  est un espace de Hilbert.

**Définition 1.21** (Espace des séquences de carré sommable)

L'ensemble des séquences de carré sommable est noté  $\ell_2(\mathbf{Z})$  et défini par

$$\ell_2(\mathbf{Z}) = \left\{ f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f[k]|^2 < +\infty \right\}. \quad (1.11)$$

Sur cet espace, on peut définir un produit scalaire hermitien par

$$\forall (f, g) \in \ell_2(\mathbf{Z}) \times \ell_2(\mathbf{Z}), \quad \langle f, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^*[k]g[k]. \quad (1.12)$$

Muni de ce produit scalaire hermitien,  $\ell_2(\mathbf{Z})$  est un espace de Hilbert.

Ainsi que nous l'avons énoncé précédemment, la notion de base d'un espace vectoriel permet la représentation d'un vecteur quelconque de cet espace comme une combinaison linéaire unique d'autres vecteurs de cet espace. Nous nous intéressons à cette notion appliquée spécifiquement aux espaces de Hilbert. Une analyse plus approfondie de cette thématique est traitée dans [Christensen 2008, ch. 3 et 4]

Nous considérons par la suite un espace de Hilbert noté  $\mathbf{H}$  et un ensemble quelconque d'indices noté  $\mathbf{I}$ . Nous nous intéressons à la décomposition d'un vecteur quelconque dans  $\mathbf{H}$  à l'aide d'une combinaison linéaire de vecteurs indicés par  $\mathbf{I}$ .

**Définition 1.22** (Base Hilbertienne)

Soit  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  une famille de vecteurs de  $\mathbf{H}$ . Cette famille constitue une base Hilbertienne (ou base de Hilbert) si et seulement si

1.  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est une famille orthonormale telle que

$$\forall (k, l) \in \mathbf{I}^2, \quad \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l; \end{cases} \quad (1.13)$$

2.  $\{\mathbf{e}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est une famille complète telle que

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}, \quad \mathbf{u} = \sum_{k \in \mathbf{I}} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{u} \rangle \mathbf{e}_k. \quad (1.14)$$

Dans le cas d'un espace de dimension infinie, une base de Hilbert n'est pas nécessairement une base algébrique telle que nous l'avons définie précédemment puisque la somme d'une infinité de termes peut être nécessaire. En revanche, en dimension finie, toute base de Hilbert constitue une famille libre et génératrice, on parle alors plus simplement de base orthonormale.

### Théorème 1.1

*Tout espace de Hilbert  $\mathbf{H}$  contenant un sous-ensemble fini ou dénombrable et dense dans  $\mathbf{H}$  admet une base Hilbertienne.*

En dimension finie, une telle base orthonormale de  $\mathbf{H}$  peut être construite à l'aide du procédé de Gram–Schmidt [Golub 1996, p. 150].

Les bases orthonormales fournissent un cadre de représentation des vecteurs commode pour de nombreuses applications. Cependant, la condition d'orthonormalité est parfois incompatible avec d'autres contraintes, tel que nous le verrons par la suite. Par conséquent, il convient de s'intéresser à des familles plus générales telles que les bases de Riesz.

### Définition 1.23 (Base de Riesz)

*Soit  $\{e_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  une base Hilbertienne de  $\mathbf{H}$ . Soit  $\mathcal{P} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  un opérateur linéaire borné et bijectif. La famille définie par  $\{\mathbf{f}_k = \mathcal{P}e_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  constitue une base de Riesz. La base de Riesz duale est définie par  $\{\check{\mathbf{f}}_k = \mathcal{P}^{-1}e_k\}_{k \in \mathbf{I}}$ .*

### Théorème 1.2

*Soit  $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  une famille de vecteurs de  $\mathbf{H}$ .*

1. *Si  $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est une base de Riesz de  $\mathbf{H}$ , alors il existe une unique famille  $\{\check{\mathbf{f}}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  telle que  $\langle \mathbf{f}_k, \check{\mathbf{f}}_l \rangle = \delta_{k,l}$ . On dit que  $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  et  $\{\check{\mathbf{f}}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  sont biorthogonales. Dans ce cas la famille duale  $\{\check{\mathbf{f}}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est également une base de Riesz.*
2. *Si  $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est une base de Riesz de  $\mathbf{H}$ , alors il existe des constantes  $0 < A \leq B < \infty$  telles que*

$$\forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}, \quad A \|\mathbf{f}\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbf{I}} |\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_k \rangle|^2 \leq B \|\mathbf{f}\|^2 \quad (1.15)$$

*Le conditionnement de la base de Riesz est défini par le rapport  $B/A$ .*

3.  *$\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est une base de Riesz si et seulement si il existe des constantes  $0 < A \leq B < \infty$  telles que*

$$\forall \{c_k\}_{k \in \mathbf{I}} \in \ell_2(\mathbf{Z}), \quad A \sum_{k \in \mathbf{I}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbf{I}} c_k \mathbf{f}_k \right\|^2 \leq B \sum_{k \in \mathbf{I}} |c_k|^2. \quad (1.16)$$

*Les constantes  $A$  et  $B$  optimales, c'est-à-dire la plus grande borne minimale et la plus petite borne maximale, sont appelées bornes de Riesz.*

4. *Si  $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est une base de Riesz de  $\mathbf{H}$ , alors pour tout  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}$ , il existe une unique séquence de scalaires  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  telle que  $\mathbf{f} = \sum_{k \in \mathbf{I}} c_k \mathbf{f}_k$  et  $\sum_{k \in \mathbf{I}} |c_k|^2 \leq \infty$ .*

Si  $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est une famille de vecteurs de  $\mathbf{H}$  qui satisfait l'inégalité (1.15) avec  $A = B$ ,

alors  $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  est une base orthogonale de  $\mathbf{H}$ . De plus, si  $A = B = 1$  et que  $\forall k \in \mathbf{I}, \|\mathbf{f}_k\| = 1$ , alors  $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  constitue une base orthonormale de  $\mathbf{H}$ .

### Exemple 1.3

Soit  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  une base orthonormale de  $\mathbf{R}^2$  définie telle que

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

et  $\mathbf{P}$  une matrice inversible définie telle que

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et dont l'inverse s'écrit} \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Nous pouvons définir une base de Riesz telle que  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} = \{\mathbf{P}\mathbf{e}_1, \mathbf{P}\mathbf{e}_2\}$  et sa base duale  $\{\check{\mathbf{f}}_1, \check{\mathbf{f}}_2\} = \{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e}_1, \mathbf{P}^{-1}\mathbf{e}_2\}$  telle que  $\langle \mathbf{f}_m, \check{\mathbf{f}}_n \rangle = \delta_{m,n}, \forall (m, n) \in \{1, 2\}$  (fig. 1.1).

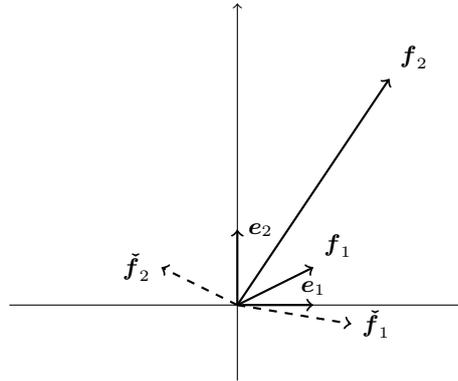


FIGURE 1.1 – Exemple de base de Riesz dans  $\mathbf{R}^2$ .

### 1.1.5 Familles de Weyl–Heisenberg

Les familles de Weyl–Heisenberg (ou de Gabor) sont constituées des versions translattées et modulées d’une unique fonction de  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ . Elles constituent un outil fréquemment utilisé en traitement du signal, notamment dans le cadre de l’analyse temps–fréquence. Le lecteur souhaitant approfondir l’étude des systèmes de Gabor pourra se référer à [Feichtinger 1998].

Afin d’alléger les notations, nous introduisons les opérateurs de translation, modulation et déplacement.

#### Définition 1.24 (Modulation)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $t \mapsto f(t)$  une fonction. L’opérateur de modulation  $\mathcal{M}_\nu$  est défini par

$$\forall \nu \in \mathbf{R}, \quad (\mathcal{M}_\nu f)(t) = f(t)e^{j2\pi\nu t}. \quad (1.19)$$

**Définition 1.25** (Translation)

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $t \mapsto f(t)$  une fonction. L'opérateur de translation  $\mathcal{T}_\tau$  est défini par

$$\forall \tau \in \mathbf{R}, \quad (\mathcal{T}_\tau f)(t) = f(t - \tau). \quad (1.20)$$

**Définition 1.26** (Déplacement)

Soient  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $t \mapsto f(t)$  une fonction et  $\alpha$  une constante réelle telle que  $|\alpha| \leq 1/2$ . L'opérateur de déplacement  $\mathcal{U}_{\nu,\tau}^{(\alpha)}$  appliqué à  $f$  s'exprime à l'aide des opérations de translation et de modulation :

$$\mathcal{U}_{\nu,\tau}^{(\alpha)} = \mathcal{T}_{\tau(1/2-\alpha)} \mathcal{M}_\nu \mathcal{T}_{\tau(1/2+\alpha)} = \mathcal{M}_{\nu(1/2+\alpha)} \mathcal{T}_\tau \mathcal{M}_{\nu(1/2-\alpha)} = \mathcal{M}_\nu \mathcal{T}_\tau e^{-j2\pi\nu\tau(1/2-\alpha)}. \quad (1.21)$$

Le facteur de polarisation  $\alpha$  est sans conséquence sur l'interprétation de l'opérateur de déplacement temps-fréquence, à un déphasage près. Lorsque  $\alpha$  n'est pas spécifié, nous écrivons  $\mathcal{U}_{\nu,\tau} = \mathcal{U}_{\nu,\tau}^{(1/2)}$  et

$$\forall (\nu, \tau) \in \mathbf{R}^2, \quad (\mathcal{U}_{\nu,\tau} f)(t) = f(t - \tau) e^{j2\pi\nu t}. \quad (1.22)$$

Nous montrerons par la suite que lorsque  $s$  représente un signal mesuré au cours du temps, l'opérateur de déplacement a pour effet de déplacer le signal dans le plan temps-fréquence.

**Définition 1.27** (Réseau de  $\mathbf{R}^2$ )

Soient  $\mathbf{I} \subset \mathbf{Z}^2$  un ensemble indice et  $\mathbf{G}$  une matrice génératrice définie par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 \\ \tau_2 & \tau_1 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Le réseau de dimension 2 paramétré par  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{G}$  s'écrit

$$\mathbf{\Lambda} = \left\{ \mathbf{G} \begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix}^T, \quad (m, n) \in \mathbf{I} \right\}. \quad (1.24)$$

En développant le produit matriciel, nous obtenons

$$\mathbf{\Lambda} = \left\{ \begin{pmatrix} \nu_{m,n} & \tau_{m,n} \end{pmatrix}^T, \quad (m, n) \in \mathbf{I} \right\} \quad (1.25)$$

avec

$$\begin{cases} \nu_{m,n} = m\nu_1 + n\nu_2 \\ \tau_{m,n} = m\tau_2 + n\tau_1. \end{cases} \quad (1.26)$$

Autrement dit, le réseau de dimension 2 correspond à un maillage régulier d'un sous-ensemble de  $\mathbf{R}^2$ .

**Définition 1.28** (Densité d'un réseau)

Soit  $\mathbf{\Lambda} \subset \mathbf{R}^2$  un réseau défini par un ensemble indice  $\mathbf{I}$  et une matrice génératrice  $\mathbf{G}$ , la densité du réseau s'exprime par

$$\rho(\mathbf{\Lambda}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{G})|}. \quad (1.27)$$

La densité traduit la notion d'espacement entre les points du réseau. Plus le réseau est dense, plus le maillage est resserré.

**Définition 1.29** (Famille de Weyl–Heisenberg dans  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ )

Soient  $f \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ ,  $(\nu, \tau) \in \mathbf{R}^2$  et  $\mathbf{\Lambda}$  un réseau de dimension 2 avec  $\mathbf{I} \subset \mathbf{Z}^2$  et

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Toute famille de fonctions  $\{\mathbf{u}_{a,b}f\}_{(a,b) \in \mathbf{\Lambda}}$  constitue une famille de Weyl–Heisenberg. Sa densité vaut alors  $\rho(\mathbf{\Lambda}) = 1/\nu\tau$ . La fonction  $f$  est appelée fonction prototype.

De manière équivalente, les familles de Weyl–Heisenberg peuvent être notées  $\{f_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{I}}$  telles que

$$\forall (m, n) \in \mathbf{I}, \quad f_{m,n}(t) = (\mathbf{u}_{m\nu, n\tau}f)(t) = f(t - n\tau)e^{j2\pi m\nu t}. \quad (1.29)$$

Si  $\{f_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}$  est une famille de Weyl–Heisenberg, nous pouvons lui attribuer plusieurs propriétés intéressantes en fonction de sa densité  $\rho(\mathbf{\Lambda})$  :

- si  $\{f_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}$  est une base de Riesz de l'espace qu'elle génère, alors  $\rho(\mathbf{\Lambda}) \leq 1$  et la base duale est une famille de Weyl–Heisenberg de même réseau ;
- si  $\{f_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}$  est une base de Riesz de  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ , alors  $\rho(\mathbf{\Lambda}) = 1$ .

## 1.2 Outils pour l'analyse des signaux déterministes

Au cours de cette partie, nous adoptons une description fonctionnelle pour les signaux déterministes à temps continu et à temps discret. Après avoir présenté la classification énergétique des signaux, nous nous intéressons à leur analyse fréquentielle. Nous développons en particulier plusieurs mesures de localisation temps-fréquence et introduisons la notion de dualité temps-fréquence. Le lecteur désireux d'approfondir ces notions pourra se référer à [Flandrin 1993].

Les notions présentées dans cette partie sur les signaux déterministes peuvent être adaptées à l'analyse des signaux aléatoires, nous présentons certaines d'entre elles au sein du chapitre 2. Les ouvrages [Solaiman 2006] et [Gray 2009] abordent en détail l'analyse des processus stochastiques.

### 1.2.1 Considérations énergétiques

#### 1.2.1.1 Signaux à temps continu

**Définition 1.30** (Énergie totale d'un signal continu)

L'énergie totale d'un signal continu  $s(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  est définie par

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt. \quad (1.30)$$

Lorsque  $s(t)$  n'est pas d'énergie finie, on se contente de calculer sa puissance moyenne lorsqu'elle existe.

**Définition 1.31** (Puissance moyenne d'un signal continu)

La puissance moyenne d'un signal continu  $s(t)$  est définie par

$$P_s = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt. \quad (1.31)$$

Les signaux peuvent être classifiés à l'aide de leurs caractéristiques énergétiques. On distinguera ainsi les signaux à énergie finie ou infinie, à puissance moyenne finie ou infinie. En pratique les signaux mesurés sont nécessairement à énergie finie.

### 1.2.1.2 Signaux à temps discret

**Définition 1.32** (Énergie totale d'un signal discret)

L'énergie totale d'un signal discret  $s[k] \in \ell_2(\mathbf{Z})$  s'exprime par

$$E_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s[k]|^2. \quad (1.32)$$

Lorsque  $s[k]$  n'est pas d'énergie finie, on est amené à calculer sa puissance moyenne si elle existe.

**Définition 1.33** (Puissance moyenne d'un signal discret)

La puissance moyenne d'un signal discret  $s[k]$ , s'exprime par

$$P_s = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K |s[k]|^2. \quad (1.33)$$

## 1.2.2 Du continu au discret

### 1.2.2.1 Dilatation temporelle des signaux

Soit  $s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $t \mapsto s(t)$  un signal d'une variable temporelle  $t$  et soit  $\alpha$  une constante réelle strictement positive.

**Définition 1.34** (Dilatation temporelle des signaux continus)

L'opérateur de dilatation  $\mathcal{D}_\alpha$  est défini par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad (\mathcal{D}_\alpha s)(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} s(t/\alpha). \quad (1.34)$$

Lorsque  $\alpha > 1$ , on parlera de dilatation, alors que pour  $\alpha < 1$ , on parlera de compression. De plus, l'opérateur dual s'écrit  $\mathcal{D}_\alpha^{-1} = \mathcal{D}_{1/\alpha}$ .

**Propriété 1.1** (Conservation du produit scalaire par dilatation temporelle)

Soit  $(s_1, s_2) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  on montre que, pour tout  $\alpha > 0$

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \langle \mathcal{D}_\alpha s_1, \mathcal{D}_\alpha s_2 \rangle = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(t/\alpha) s_2(t/\alpha) dt. \quad (1.35)$$

Il en résulte que la norme est conservée par la dilatation temporelle telle que nous l'avons définie.

Cette propriété montre donc que les opérateurs de dilatation/compression ainsi définis permettent de changer d'échelle temporelle en conservant le produit scalaire, et donc l'énergie des signaux. C'est la raison pour laquelle nous utiliserons ces opérateurs pour définir les échantillons d'un signal à temps continu prélevés à la période  $T_e$ . Ainsi, pour  $k \in \mathbf{Z}$ , on note  $s[k]$  l'échantillon normalisé de  $s(t)$  prélevé à l'instant  $kT_e$  défini par

$$s[k] = \mathcal{D}_{1/T_e} s(k) = \sqrt{T_e} s(kT_e). \quad (1.36)$$

Nous notons alors  $s_e(t)$  le signal à temps discret correspondant défini par

$$s_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] \delta(t - kT_e) = s(t) \Psi_{T_e}(t) \quad (1.37)$$

avec  $\Psi_{T_e}$  le peigne de Dirac de période  $T_e$  et amplifié d'un facteur  $\sqrt{T_e}$ , défini par

$$\Psi_{T_e}(t) = \sqrt{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e). \quad (1.38)$$

Notons que l'on ne peut appliquer les opérateurs de compression/dilatation à l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$ , si bien qu'on ne peut les appliquer aux signaux à temps discrets.

### 1.2.2.2 Interpolation et échantillonnage

Soit une séquence d'échantillons  $\{s[k]\}_{k \in \mathbf{I}} \in \ell_2(\mathbf{I})$  avec  $\mathbf{I} \subset \mathbf{Z}$  que nous souhaitons interpoler puis reconstruire par échantillonnage (fig. 1.2). Supposons qu'un échantillon est transmis toutes les  $T_e$  secondes, alors le signal qui en résulte s'écrit

$$s_e(t) = \sum_{k \in \mathbf{I}} s[k] \delta(t - kT_e). \quad (1.39)$$

Soit  $\{v_k(t)\}_{k \in \mathbf{I}}$  une famille de vecteurs de  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  formant une base de Riesz de l'espace qu'elle génère et définie par

$$v_k(t) = v(t - kT_e). \quad (1.40)$$

Alors la somme

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbf{I}} s[k] v_k(t) \quad (1.41)$$

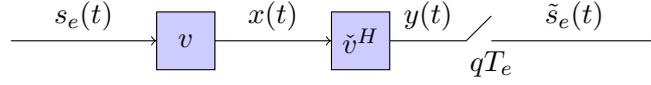


FIGURE 1.2 – Opérations d'interpolation et d'échantillonnage.

converge et est appelé « signal interpolé ».

L'opération d'interpolation peut être vue comme la synthèse d'un vecteur à l'aide de la séquence de coefficients  $\{s[k]\}_{k \in \mathbf{I}}$  et d'une base de Riesz  $\{v_k(t)\}_{k \in \mathbf{I}}$ .

La reconstruction du signal  $s_e(t)$  peut s'effectuer par projection de  $x(t)$  sur une base  $\{\check{v}_q\}_{q \in \mathbf{I}}$  avec

$$\check{v}_q(t) = \check{v}(t - qT_e). \quad (1.42)$$

Le signal reconstruit s'écrit alors  $\tilde{s}_e(t) = \sum_{q \in \mathbf{I}} \tilde{s}_e[q] \delta(t - qT_e)$  avec

$$\tilde{s}_e[q] = \langle \check{v}_q, x \rangle \quad (1.43)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \check{v}(t - qT_e) \sum_{k \in \mathbf{I}} s[k] v(t - kT_e) dt \quad (1.44)$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{I}} s[k] \int_{-\infty}^{+\infty} \check{v}(t - qT_e) v(t - kT_e) dt \quad (1.45)$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{I}} s[k] \langle \check{v}_q, v_k \rangle \quad (1.46)$$

Ainsi, nous avons  $\tilde{s}_e(t) = s_e(t)$  si  $\langle \check{v}_q, v_k \rangle = \delta_{k,q}$ ,  $\forall k, q \in \mathbf{I}$ , ce qui signifie que les familles de vecteurs  $\{v_k\}_{k \in \mathbf{I}}$  et  $\{\check{v}_q\}_{q \in \mathbf{I}}$  sont biorthogonales. Notons que si l'on pose  $\check{v}^H(t) = \check{v}^*(-t)$  alors nous pouvons écrire

$$\tilde{s}_e[q] = \sum_{k \in \mathbf{I}} s[k] \int_{-\infty}^{+\infty} \check{v}^H(qT_e - t) v(t - kT_e) dt \quad (1.47)$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{I}} s[k] \int_{-\infty}^{+\infty} \check{v}^H((q - k)T_e - t) v(t) dt \quad (1.48)$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{I}} s[k] (\check{v}^H * v)((q - k)T_e). \quad (1.49)$$

Nous montrons ainsi que les opérations de synthèse et de projection dans un espace de Hilbert peuvent également être représentées par un filtrage caractérisé par la réponse impulsionnelle  $w(t) = (\check{v}^H * v)(t)$  vérifiant le critère de Nyquist spécifié par  $w((q - k)T_e) = \delta_{q,k}$ ,  $\forall k, q \in \mathbf{I}$ .

#### Exemple 1.4 (Filtre passe-bas idéal)

Considérons le cas particulier de filtres passe-bas idéaux, dont la réponse impulsionnelle est définie telle que

$$v(t) = v_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right), \quad (1.50)$$

$$\check{v}^H(t) = \check{v}(t) = \check{v}_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right). \quad (1.51)$$

Dans le domaine fréquentiel, nous avons

$$V(f) = v_0 T_e \Pi(f T_e), \quad (1.52)$$

$$\check{V}(f) = \check{v}_0 T_e \Pi(f T_e). \quad (1.53)$$

Ainsi, la réponse impulsionnelle du filtre équivalent s'écrit

$$w(t) = (v * \check{v}^H)(t) = (\mathcal{F}^{-1}\{V\check{V}\})(t) \quad (1.54)$$

$$= v_0 \check{v}_0 T_e \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right). \quad (1.55)$$

Nous pouvons ainsi choisir  $v_0 = \check{v}_0 = 1/\sqrt{T_e}$  de manière à assurer l'orthonormalité.

## 1.2.3 Analyse temps-fréquence des signaux continus

### 1.2.3.1 Transformée de Fourier des signaux continus

**Définition 1.35** (Transformée de Fourier directe d'un signal continu)

La transformée de Fourier d'un signal continu  $s(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  s'écrit

$$S(f) = (\mathcal{F}s)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{M}_{-f}s)(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (1.56)$$

**Théorème 1.3** (Parseval)

Si  $x(t), y(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ , alors  $X(f), Y(f) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  et  $\langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle$  avec  $X(f) = (\mathcal{F}x)(f)$  et  $Y(f) = (\mathcal{F}y)(f)$ . Cette relation indique que l'énergie des signaux est préservée par l'opération de transformée de Fourier.

**Définition 1.36** (Transformée de Fourier inverse d'un signal continu)

La transformée de Fourier inverse de  $S(f) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  s'écrit

$$s(t) = (\mathcal{F}^{-1}S)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{M}_t S)(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (1.57)$$

**Définition 1.37** (Signal réel à bande limitée)

Un signal réel  $s(t)$  est à bande limitée s'il existe un réel  $B$  strictement positif, tel que

$$\forall |f| > \frac{B}{2}, \quad S(f) = 0. \quad (1.58)$$

**Théorème 1.4** (Shannon–Nyquist)

Si  $s(t)$  est un signal à bande limitée, de largeur  $B$ , alors il est possible de le reconstruire parfaitement à l'aide de ses échantillons si la période d'échantillonnage  $T_e$  est inférieure ou égale à  $1/B$ . Nous pouvons ainsi écrire

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T_e}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k] \operatorname{sinc}(Bt - k) \quad (1.59)$$

avec  $s[k] = (\mathcal{D}_{1/T_e} s)(kT_e) = \sqrt{T_e} s(kT_e)$ .

**Théorème 1.5**

Soient  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  deux signaux à bande limitée, de largeur  $B$  et soient  $s_1[k] = (\mathcal{D}_{1/T_e} s_1)(kT_e) = \sqrt{T_e} s_1(kT_e)$  et  $s_2[k] = (\mathcal{D}_{1/T_e} s_2)(kT_e) = \sqrt{T_e} s_2(kT_e)$  avec  $T_e < 1/B$ . Dans ces conditions, nous avons

$$\int_{\mathbf{R}} s_1^*(t) s_2(t) dt = \sum_{k \in \mathbf{Z}} s_1^*[k] s_2[k], \quad (1.60)$$

ce qui signifie que le produit scalaire et l'énergie sont conservés par échantillonnage.

**1.2.3.2 Localisation temps-fréquence des signaux continus**

Les signaux à énergie finie pouvant être exprimés indifféremment dans les domaines temporels et fréquentiels, il est intéressant de résumer leurs caractéristiques dans le plan temps-fréquence. Dans cette optique, nous définissons la notion de moments temporels et fréquentiels, utilisés pour définir la notion de localisation temps-fréquence.

Nous considérons par la suite un signal  $s(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ , supposé à énergie finie et admettant une transformée de Fourier notée  $S(f)$ .

**Définition 1.38** (Moment du premier ordre en temps d'un signal continu)

Le moment du premier ordre en temps normalisé de  $s$  s'écrit

$$m_t(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t |s(t)|^2 dt. \quad (1.61)$$

**Définition 1.39** (Moment du second ordre en temps d'un signal continu)

Le moment du second ordre en temps normalisé et centré de  $s$  s'écrit

$$\sigma_t^2(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - m_t(s))^2 |s(t)|^2 dt. \quad (1.62)$$

**Définition 1.40** (Moment du premier ordre en fréquence d'un signal continu)

Le moment du premier ordre en fréquence normalisé de  $s$  s'écrit

$$m_f(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f |S(f)|^2 df. \quad (1.63)$$

**Définition 1.41** (Moment du second ordre en fréquence d'un signal continu)

Le moment du second ordre en fréquence normalisé et centré de  $s$  s'écrit

$$\sigma_f^2(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f - m_f(s))^2 |S(f)|^2 df. \quad (1.64)$$

Les moments du second ordre en temps et en fréquence peuvent être combinés pour mesurer la répartition de l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence, il s'agit de la notion de localisation temps-fréquence.

**Définition 1.42** (Localisation temps-fréquence d'un signal continu)

La localisation temps-fréquence de  $s$  s'écrit

$$\xi(s) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\sigma_t^2(s)\sigma_f^2(s)}}. \quad (1.65)$$

Un signal de  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R})$  ne peut être arbitrairement bien localisé en temps et en fréquence, il est soumis à la relation d'incertitude d'Heisenberg–Gabor.

**Théorème 1.6** (Inégalité d'Heisenberg–Gabor)

$$\forall s \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}), \quad 0 \leq \xi(s) \leq 1. \quad (1.66)$$

L'égalité  $\xi(s) = 1$  est atteinte si et seulement si  $s(t) = s_0 \exp(-bt^2)$  avec  $s_0 \in \mathbf{C}$  et  $b > 0$ . Les fonctions respectant cette relation sont des gaussiennes et présentent la particularité de conserver leur caractère gaussien par transformée de Fourier.

**Définition 1.43** (Fonction d'inter-ambiguïté des signaux continus)

Soient deux signaux  $u, v \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ . Leur fonction d'inter-ambiguïté temps-fréquence s'écrit

$$\forall f, \tau \in \mathbf{R}, \quad A_{u,v}(f, \tau) = \langle u, \mathbf{U}_{f,\tau} v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^*(t)v(t-\tau)e^{j2\pi ft} dt. \quad (1.67)$$

Si  $u = v$ , alors  $A_u(f, \tau)$  est appelée fonction d'ambiguïté temps-fréquence.

Remarquons que les moments du second ordre en temps et en fréquence d'un signal  $s$  sont liés à sa fonction d'ambiguïté par le biais de dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 A_s}{\partial f^2}(0, 0) = -4\pi^2 \sigma_t^2(s), \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial^2 A_s}{\partial \tau^2}(0, 0) = -4\pi^2 \sigma_f^2(s). \quad (1.69)$$

**Théorème 1.7** (Balian–Low)

Si  $\{f_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2}$  est une famille de Weyl–Heisenberg de densité égale à un, alors

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\nu F(\nu)|^2 d\nu \right) = \infty \quad (1.70)$$

avec  $F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi\nu x} dx$ .

### 1.2.4 Analyse temps-fréquence des signaux discrets

#### 1.2.4.1 Transformée de Fourier des signaux discrets

**Définition 1.44** (Transformée de Fourier directe d'un signal discret)

La transformée de Fourier d'un signal discret  $s[k] \in \ell_2(\mathbf{Z})$  s'écrit

$$S(f) = (\mathcal{F}s)(f) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (\mathcal{M}_{-f}s)[k] dt = \sum_{k \in \mathbf{Z}} s[k] e^{-j2\pi fk}. \quad (1.71)$$

Nous constatons alors que la transformée de Fourier d'un signal discret est une fonction périodique de période 1, ce qui nous amène à considérer l'espace de ces fonctions noté  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ . Sur cet espace, nous pouvons définir un produit scalaire hermitien par

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \times \mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z}), \quad \langle X, Y \rangle_{\mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X^*(f) Y(f) df. \quad (1.72)$$

Muni de ce produit scalaire hermitien,  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$  est un espace de Hilbert. Celui-ci définit une norme induite qui représente l'énergie du signal discret :

$$\forall X \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z}), \quad \|X\|_{\mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})} = \sqrt{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df}. \quad (1.73)$$

**Théorème 1.8** (Parseval)

Si  $x[k], y[k] \in \ell_2(\mathbf{Z})$ , alors  $\langle x, y \rangle = \langle X, Y \rangle_{\mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})}$  avec  $X(f) = (\mathcal{F}x)(f)$  et  $Y(f) = (\mathcal{F}y)(f)$ . Cette relation indique que l'énergie des signaux est préservée par l'opération de transformée de Fourier.

**Définition 1.45** (Transformée de Fourier inverse d'un signal discret)

La transformée de Fourier inverse de  $S(f) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$  s'écrit

$$s[k] = (\mathcal{F}^{-1}S)[k] = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (\mathcal{M}_f S)(f) df = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S(f) e^{j2\pi fk} df. \quad (1.74)$$

#### 1.2.4.2 Localisation temps-fréquence des signaux discrets

Les signaux à temps discret admettent une transformée de Fourier périodique en fréquence. Il en découle plusieurs définitions de leurs moments fréquentiels. Nous présentons ici deux principales mesures de localisation temps-fréquence dites classique et modifiée.

Nous considérons par la suite un signal  $s[k] \in \ell_2(\mathbf{Z})$ , supposé à énergie finie et admettant une transformée de Fourier notée  $S(f)$ .

**Localisation classique d'un signal à temps discret** La définition des moments temporels du premier et second ordre s'obtient à partir du cas continu, par échantillonnage des signaux.

**Définition 1.46** (Moment du premier ordre en temps d'un signal discret)

*Le moment temporel du premier ordre normalisé de  $s$  s'écrit*

$$m_t(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k |s[k]|^2. \quad (1.75)$$

**Définition 1.47** (Moment du second ordre en temps d'un signal discret)

*Le moment du second ordre en temps normalisé et centré de  $s$  s'écrit*

$$\sigma_t^2(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k - m_t(s))^2 |s[k]|^2. \quad (1.76)$$

De la même manière, nous pouvons définir les moments fréquentiels du premier et du second ordre par analogie avec le cas continu.

**Définition 1.48** (Moment du premier ordre en fréquence d'un signal discret)

*Le moment du premier ordre en fréquence normalisé de  $s$  s'écrit*

$$m_f(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f |S(f)|^2 df. \quad (1.77)$$

**Définition 1.49** (Moment du second ordre en fréquence d'un signal discret)

*Le moment du second ordre en fréquence normalisé et centré de  $s$  s'écrit*

$$\sigma_f^2(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (f - m_f(s))^2 |S(f)|^2 df. \quad (1.78)$$

Tel qu'expliqué dans [Siclet 2002a], le moment fréquentiel du second ordre n'est pas invariant par translation en fréquence. Ainsi, l'auteur propose une définition alternative qui préserve l'invariance en fréquence.

**Définition 1.50** (Moment du second ordre en fréquence invariant par translation)

*Le moment fréquentiel du second ordre normalisé et centré de  $s$  s'écrit*

$$\sigma_f^2(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f^2 |S(f + m_f(s))|^2 df \quad (1.79)$$

avec  $m_f(s)$  le moment temporel du premier ordre choisi de manière à minimiser  $\sigma_f^2(s)$ .

Quelle que soit la définition retenue pour le moment du second ordre en fréquence, la localisation temps-fréquence s'exprime de manière équivalente au cas continu.

**Définition 1.51** (Localisation temps-fréquence classique)

La localisation temps-fréquence classique de  $s$  s'écrit

$$\xi(s) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\sigma_t^2(s)\sigma_f^2(s)}}. \quad (1.80)$$

À la différence du cas continu, la localisation temps-fréquence classique d'un signal discret n'est pas bornée. Ainsi, il n'est pas possible d'appliquer le principe d'incertitude d'Heisenberg–Gabor à l'aide de cette mesure. Toutefois, [Calvez 1992] montre que si  $S(\pm 1/2) = 0$ , alors  $0 \leq \xi(s) < 1$ . C'est en particulier le cas pour les signaux à bande limitée échantillonnés à une fréquence supérieure à celle de Shannon–Nyquist.

**Définition 1.52** (Fonction d'inter-ambiguïté des signaux discrets)

Soient deux signaux  $u, v \in \ell_2(\mathbf{Z})$ . Leur fonction d'inter-ambiguïté temps-fréquence s'écrit

$$\forall f \in \mathbf{R}, \forall l \in \mathbf{Z} \quad A_{u,v}(f, l) = \langle u, \mathbf{U}_{f,l}v \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u^*[k]v[k-l]e^{j2\pi fk}. \quad (1.81)$$

Si  $u = v$ , alors  $A_u(f, l)$  est appelée fonction d'ambiguïté temps-fréquence.

À l'instar du cas continu, il est possible de retrouver l'expression des moments du second ordre en temps et en fréquence d'un signal  $s$  à partir des dérivées secondes de sa fonction d'interambiguïté. Pour le calcul du moment du second ordre en temps, nous obtenons directement

$$\frac{\partial^2 A_s}{\partial f^2}(0, 0) = -4\pi^2\sigma_t^2(s). \quad (1.82)$$

En revanche, le moment du second ordre en fréquence fait appel au théorème des accroissements finis et à un développement en série de Taylor. Par conséquent, nous ne pouvons que justifier l'approximation

$$\frac{\tilde{\partial}^2 A_s}{\tilde{\partial} l^2}(0, 0) \approx -4\pi^2\sigma_f^2(s). \quad (1.83)$$

avec  $\tilde{\partial}^2/\tilde{\partial} l^2$  l'opérateur dérivée seconde d'une fonction discrète. Il est défini, pour toute fonction discrète  $s[k] \in \mathbf{Z}$  par

$$\frac{\tilde{\partial}^2 s}{\tilde{\partial} l^2}[k] = \frac{1}{4}(s[k-2] + s[k+2] - 2s[k]). \quad (1.84)$$

**Localisation modifiée d'un signal à temps discret** Dans le but de définir une mesure de localisation temps-fréquence toujours bornée, de nouvelles définitions sont introduites dans [Doroslovački 1998].

**Définition 1.53** (Centre de gravité fréquentiel)

Le centre de gravité fréquentiel d'un signal  $s$  discret s'écrit

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Im \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]s^*[k-1] \right\}}{\Re \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s[k]s^*[k-1] \right\}}. \quad (1.85)$$

**Définition 1.54** (Centre de gravité temporel)

Le centre de gravité temporel d'un signal  $s$  discret s'écrit

$$T(s) = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k-1/2) |s[k] + e^{j2\pi F(s)} s[k-1]|^2}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s[k] + e^{j2\pi F(s)} s[k-1]|^2}. \quad (1.86)$$

**Définition 1.55** (Deuxième moment en fréquence modifié)

Le deuxième moment en fréquence modifié d'un signal  $s$  discret s'écrit

$$M_2(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{4}{(2\pi)^2} \sin^2(\pi(f - F(s)) |S(f)|^2) df \quad (1.87)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 \|s\|^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s[k] - e^{j2\pi F(s)} s[k-1]|^2. \quad (1.88)$$

**Définition 1.56** (Deuxième moment en temps modifié)

Le deuxième moment en temps modifié d'un signal  $s$  discret s'écrit

$$m_2(s) = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \left| \frac{d}{df} \left\{ \cos(\pi(f - F(s))) e^{j2\pi f T(s)} S(f) \right\} \right|^2 df \quad (1.89)$$

$$= \frac{1}{\|s\|^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( k - \frac{1}{2} - T(s) \right) \left| \frac{s[k] + e^{j2\pi F(s)} s[k-1]}{2} \right|^2. \quad (1.90)$$

**Définition 1.57** (Localisation temps-fréquence modifiée)

La localisation temps-fréquence modifiée de  $s$  s'écrit

$$\tilde{\xi}(s) = \frac{1}{4\pi \sqrt{m_2(s) M_2(s)}}. \quad (1.91)$$

La mesure de localisation temps-fréquence ainsi obtenue est telle que  $0 \leq \tilde{\xi}(s) \leq 1$  et il est ainsi possible d'appliquer l'inégalité d'Heisenberg-Gabor.

**Théorème 1.9**

Si  $S(f) = S_0 |\cos(\pi f)|^K$  avec  $S_0 \in \mathbf{C}$  et  $K > -1/2$ , alors  $\tilde{\xi}(s) = 1$ .

## 1.3 Éléments de communications numériques

Dans cette partie, nous introduisons des notions et outils de base pour les communications numériques. Après avoir présenté les différents blocs fonctionnels de la chaîne de transmission, nous nous focalisons sur l'étude de l'émetteur-récepteur en définissant son équivalent complexe en bande de base et en présentant le procédé de transmission sur canal analogique idéal.

Une introduction aux communications numériques plus approfondie est proposée dans [Glavieux 1996]. Les auteurs discutent notamment des performances des modulations linéaires sur canal à bruit additif.

### 1.3.1 Description d'une chaîne de transmission numérique

Les communications numériques permettent la transmission d'un message numérique à travers un canal analogique. Pour la plupart des applications de télécommunication modernes, nous pouvons décomposer ce processus de transmission en quatre principales étapes duales décrites ci-après (fig. 1.3).

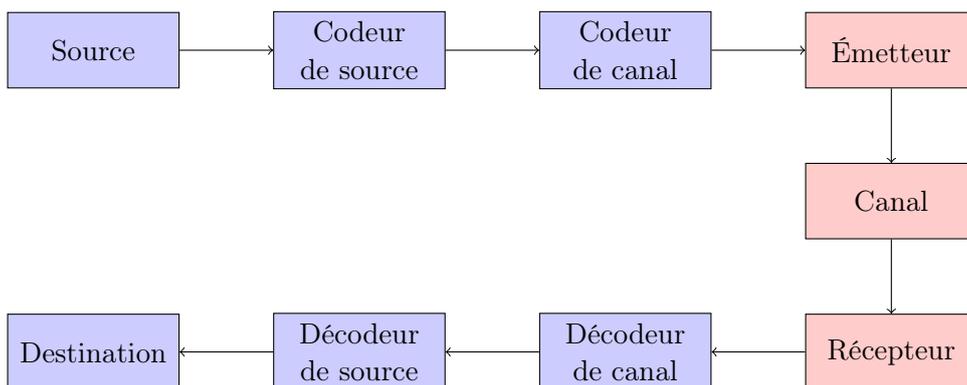


FIGURE 1.3 – Structure d'une chaîne de transmission numérique

#### 1.3.1.1 Source du message

Bien souvent, la source délivre un message analogique qu'il est nécessaire de numériser (ex. : signal de parole). Sans décrire en détail le processus de numérisation, il consiste à prélever des échantillons sur le message source, puis à les quantifier.

#### 1.3.1.2 Codage et décodage de source

Le message numérisé comporte des éléments binaires peu informatifs ; ils démontrent la redondance intrinsèque à la source. Le rôle du codeur source est de limiter cette redondance afin d'écrire l'information de la manière la plus concise possible. À débit binaire constant, cela

permet de réduire la durée de la transmission. Cela signifie également que le message devient plus sensible aux erreurs de transmission.

### 1.3.1.3 Codage et décodage de canal

Le codage de canal introduit une redondance contrôlée dans la séquence à transmettre. Le décodeur connaissant la règle de codage employée, il peut vérifier la présence d'erreurs et dans certains cas les corriger. Naturellement, l'ajout d'éléments binaires non-porteurs d'information diminue le rendement de la transmission.

### 1.3.1.4 Émetteur et récepteur

L'émetteur a pour rôle de transformer le message numérique en signaux analogiques afin de permettre sa transmission dans l'environnement de propagation. Le récepteur est chargé de l'opération duale. Celle-ci nécessite une étape de synchronisation et d'égalisation afin de prendre en compte les interactions entre le canal de transmission et le signal émis. Au cours de notre étude, nous supposons que ces opérations sont réalisées en amont des procédés de transmission que nous proposons.

### 1.3.1.5 Canal de transmission

Dans le domaine des communications numériques, il est fréquent de considérer que le canal de transmission englobe le milieu de propagation ainsi que les composants de traitement analogique du signal présents dans l'émetteur et le récepteur (ex. : filtres, amplificateurs, antennes...). En déformant les signaux transmis, le canal limite les performances de la chaîne de communication. Par conséquent, une modélisation adaptée est requise pour prévoir les performances du système.

La modélisation mathématique du milieu de propagation est une opération délicate, fortement liée aux caractéristiques des matériaux dont il est composé. Les méthodes analytiques sont généralement utilisées à petite échelle, lorsque le canal est supposé stationnaire (utilisation des équations de propagation, tracé de rayons...). Lorsque ces hypothèses ne sont plus vérifiées, les modélisations statistiques et empiriques deviennent nécessaires. Nous approfondissons cette seconde famille de modèles dans les chapitres suivants et développons notamment un équivalent discret du canal de transmission à bande limitée.

## 1.3.2 Signal analytique et enveloppe complexe

En considérant la propriété de symétrie hermitienne de la transformée de Fourier des signaux réels, une représentation équivalente peut être adoptée dans le plan complexe à l'aide

des notions de signal analytique et d'enveloppe complexe. Dans le domaine des communications numériques, ces outils simplifient notamment la représentation des signaux modulés sur fréquence porteuse.

**Définition 1.58** (Signal analytique)

Soit  $s_{RF}(t)$  un signal réel et  $S_{RF}(f)$  sa transformée de Fourier. Le signal analytique associé à  $s_{RF}$  est défini dans le domaine fréquentiel par

$$S_a(f) = 2S_{RF}^+(f). \quad (1.92)$$

où  $S_{RF}^+(f) = S_{RF}(f)U(f)$  avec

$$U(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } f < 0, \\ 1/2, & \text{si } f = 0, \\ 1, & \text{si } f > 0. \end{cases} \quad (1.93)$$

Le signal analytique est défini dans le domaine temporel par  $s_a(t) = (\mathcal{F}^{-1}S_a)(t)$ .

**Définition 1.59** (Enveloppe complexe)

Soit  $s_{RF}(t)$  un signal réel et  $s_a(t)$  son signal analytique, en notant  $S_{RF}(f)$  et  $S_a(f)$  leurs transformées de Fourier respectives, l'enveloppe complexe de  $s_{RF}$ , relativement à une fréquence  $f_0$ , est définie dans le domaine fréquentiel par

$$S_e(f) = S_a(f + f_0). \quad (1.94)$$

De manière équivalente, la définition s'exprime dans le domaine temporel par

$$s_e(t) = s_a(t)e^{-j2\pi f_0 t}. \quad (1.95)$$

On montre alors que le signal réel peut s'obtenir à l'aide du signal analytique ou de l'enveloppe complexe via les relations

$$s_{RF}(t) = \Re\{s_a(t)\} \quad (1.96)$$

$$= \Re\{s_e(t)e^{j2\pi f_0 t}\}. \quad (1.97)$$

De plus, si l'on note respectivement  $s^{\mathcal{R}}(t)$  et  $s^{\mathcal{I}}(t)$  les parties réelle et imaginaire de l'enveloppe complexe, nous avons

$$s_{RF}(t) = s^{\mathcal{R}}(t) \cos(2\pi f_0 t) - s^{\mathcal{I}}(t) \sin(2\pi f_0 t). \quad (1.98)$$

**Définition 1.60** (Filtre équivalent en bande de base)

Soient  $x_{RF}(t)$  un signal réel et  $h_{RF}(t)$  la réponse impulsionnelle d'un filtre réel et soit  $y_{RF}(t) = (h_{RF} * x_{RF})(t)$ . Alors, on montre que

$$y_e(t) = (h_b * x_e)(t) \quad (1.99)$$

avec  $h_b(t) = 1/2h_e(t)$  la réponse impulsionnelle du filtre équivalent en bande de base et  $x_e(t)$ ,  $h_e(t)$ ,  $y_e(t)$  les enveloppes complexes respectives de  $x_{RF}(t)$ ,  $h_{RF}(t)$ ,  $y_{RF}(t)$ . Dans le domaine fréquentiel, nous avons

$$H_b(f) = H_{RF}^+(f + f_0). \quad (1.100)$$

Cela signifie que si les notions d'enveloppe complexe et d'équivalent en bande de base coïncident pour les signaux, cela n'est pas le cas pour les filtres.

**Définition 1.61** (Signal à bande étroite)

Soit un signal réel  $s_{RF}(t)$ . On dit que  $s_{RF}(t)$  est à bande étroite, relativement à la fréquence  $f_0$ , lorsqu'il existe un réel  $B$  positif tel que  $(\mathcal{F}s_{RF})(f) = 0$  si  $|f - f_0| > B/2$  et  $f_0 > B/2$ .

Les notions de signal analytique et d'enveloppe complexe présentent un intérêt pratique dans le cas des signaux à bande étroite. En effet, l'enveloppe complexe  $s_e(t)$ , relativement à la fréquence  $f_0$  d'un signal à bande étroite  $s_{RF}(t)$  est telle que  $(\mathcal{F}s_e)(f) = 0$  si  $|f| > B/2$  (fig. 1.4).

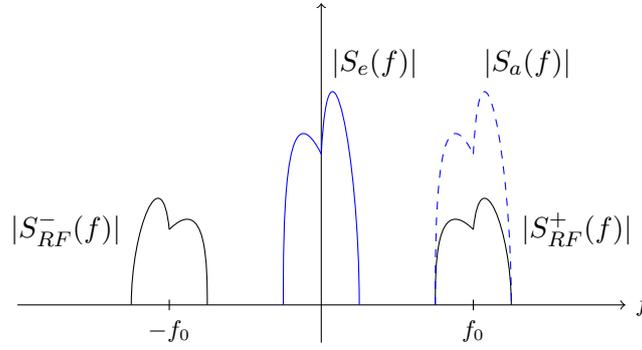


FIGURE 1.4 – Spectres d'amplitude du signal modulé, du signal analytique et de l'enveloppe complexe d'un signal à bande étroite.

Au delà de cette définition, nous supposons généralement que  $f_0 \gg B$ . Cette contrainte supplémentaire permet, par exemple, d'approcher les phénomènes de compression/dilatation par des décalages fréquentiels dans la bande étudiée.

Dans la suite de ce document, on omettra les indices  $\cdot_e$  et  $\cdot_b$  lorsque l'on considérera les signaux et les filtres équivalents en bande de base.

### 1.3.3 Modulations numériques linéaires et transmission sur canal idéal

Au cours de cette partie, nous modélisons une chaîne de transmission numérique sur onde porteuse à l'aide de sa représentation équivalente en bande de base (fig. 1.5). Nous nous limitons ici à l'étude des modulations linéaires et considérons, dans un premier temps, un canal de transmission analogique idéal, impliquant une synchronisation parfaite entre l'émetteur et le récepteur. Une description plus réaliste de l'environnement de propagation intervient au cours du chapitre 2.

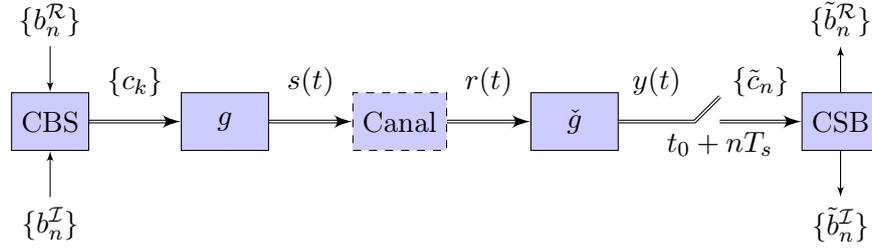


FIGURE 1.5 – Chaîne de transmission numérique linéaire équivalente en bande de base.

### 1.3.3.1 Émission

Considérons deux séquences infinies d'éléments binaires, notées respectivement  $\{b_n^{\mathcal{R}}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  et  $\{b_n^{\mathcal{I}}\}_{n \in \mathbf{Z}}$ . L'opération de conversion bits-symboles (CBS) consiste à associer à chaque mot de  $n$  bits issus de chaque source, un symbole complexe noté  $c_k = c_k^{\mathcal{R}} + jc_k^{\mathcal{I}}$  appartenant à un ensemble fini de valeurs.

L'opération de mise en forme est réalisée par la génération d'un signal analogique à l'aide des coefficients  $\{c_k\}_{k \in \mathbf{Z}}$  et d'une base d'émission  $\{g_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}} \in \mathbf{R}$  dont les vecteurs sont définis par

$$g_k(t) = g(t - kT_s) \quad (1.101)$$

où  $g(t)$  représente la fonction prototype d'émission et  $T_s$  représente la durée de transmission d'un symbole. Si l'on considère qu'un symbole complexe représente un mot de  $n$  bits, alors la durée de transmission d'un bit se note  $T_b = T_s/n$ . Dans ces conditions, l'équivalent complexe en bande de base du signal en sortie de l'émetteur s'écrit

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k g_k(t) \quad (1.102)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{R}} g(t - kT_s)}_{s^{\mathcal{R}}(t)} + j \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{I}} g(t - kT_s)}_{s^{\mathcal{I}}(t)} \quad (1.103)$$

De manière équivalente, la mise en forme des symboles peut être vue comme une opération de filtrage  $s(t) = (c * g)(t)$  avec  $c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(t - kT_s)$ .

Si l'on choisit une fréquence  $f_0$  telle que  $z_s(t) = s(t)e^{j2\pi f_0 t}$  soit à bande étroite, alors  $s(t)$  constitue l'enveloppe complexe, par rapport à  $f_0$ , d'un signal réel défini par

$$s_{RF}(t) = \Re \left\{ s(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (1.104)$$

$$= s^{\mathcal{R}}(t) \cos(2\pi f_0 t) - s^{\mathcal{I}}(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.105)$$

Nous retrouvons ainsi l'expression de deux sinusoïdes en quadrature de phase, respectivement modulées par  $s^{\mathcal{R}}(t)$  et  $s^{\mathcal{I}}(t)$ . En fonction du choix des règles d'attribution des symboles  $c_k$  nous déclinons ci-dessous plusieurs exemples de modulations numériques couramment utilisées [Glavieux 1996, p. 88].

**Exemple 1.5** (Modulation par saut d'amplitude à  $M$  états)

Pour réaliser une modulation par saut d'amplitude à  $M$  états ( $M$ -ASK<sup>1</sup>), une seule des deux voies est utilisée. En supposant ici qu'il s'agisse de la voie réelle, nous choisissons des symboles centrés et uniformément répartis sur l'axe des réels, tels que

$$c_k^{\mathcal{R}} = A_k, \quad A_k \in \{\pm A, \pm 3A, \dots, \pm A(2p+1)\}, \quad \forall A \in \mathbf{R}^*, \quad 0 \leq p \leq \frac{M}{2} - 1. \quad (1.106)$$

En considérant une fonction prototype  $g(t)$  et une durée symbole  $T_s$  dans ces conditions, l'enveloppe complexe s'écrit

$$s(t) = s^{\mathcal{R}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{R}} g(t - kT_s) \quad (1.107)$$

et en supposant une fréquence porteuse  $f_0$ , le signal réel en sortie de l'émetteur s'exprime par

$$s_{RF}(t) = \Re \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{R}} g(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (1.108)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{R}} g(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t) \quad (1.109)$$

**Exemple 1.6** (Modulation par saut de phase à  $M$  états)

Dans le cadre d'une modulation de phase à  $M$  états ( $M$ -PSK<sup>2</sup>), les voies réelle et imaginaire sont utilisées, sauf pour  $M = 2$  qui constitue un scénario équivalent à la modulation par saut d'amplitude, à un déphasage près. Généralement, les symboles complexes possèdent un module constant et une phase dont les valeurs sont réparties uniformément sur l'intervalle  $[0; 2\pi[$  :

$$c_k = A e^{j\phi_k}, \quad \phi_k \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{M}, \dots, (M-1) \frac{2\pi}{M} \right\} \quad (1.110)$$

$$= \underbrace{A \cos(\phi_k)}_{c_k^{\mathcal{R}}} + j \underbrace{A \sin(\phi_k)}_{c_k^{\mathcal{I}}}. \quad (1.111)$$

En considérant une fonction prototype  $g(t)$  et une durée symbole  $T_s$  dans ces conditions, l'enveloppe complexe s'écrit

$$s(t) = s^{\mathcal{R}}(t) + j s^{\mathcal{I}}(t) \quad (1.112)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{R}} g(t - kT_s) + j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{I}} g(t - kT_s). \quad (1.113)$$

---

1. Amplitude Shift Keying

2. Phase Shift Keying

et en supposant une fréquence porteuse  $f_0$ , le signal réel en sortie de l'émetteur s'exprime par

$$s_{RF}(t) = A \Re \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s) e^{j(2\pi f_0 t + \phi_k)} \right\} \quad (1.114)$$

$$= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s) (\cos(\phi_k) \cos(2\pi f_0 t) - \sin(\phi_k) \sin(2\pi f_0 t)) \quad (1.115)$$

$$= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s) \cos(2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (1.116)$$

**Exemple 1.7** (Modulation d'amplitude en quadrature à  $M^2$  états)

Une modulation d'amplitude en quadrature à  $M^2$  états ( $M^2$ -QAM<sup>3</sup>) permet d'utiliser les voies réelle et imaginaire indépendamment et par conséquent de répartir les symboles complexes dans le plan complexe. En considérant la  $M^2$ -QAM comme un multiplexage de deux  $M$ -ASK en quadrature, les symboles complexes s'écrivent sous leur forme générale  $c_k = c_k^{\mathcal{R}} + jc_k^{\mathcal{I}}$

$$c_k^{\mathcal{R}} \in A_k = \{\pm A, \pm 3A, \dots, \pm A(2p+1)\}, \quad 0 \leq p \leq \frac{M}{2} - 1 \quad (1.117)$$

et

$$c_k^{\mathcal{I}} \in A_k = \{\pm A, \pm 3A, \dots, \pm A(2p+1)\}, \quad 0 \leq p \leq \frac{M}{2} - 1. \quad (1.118)$$

avec  $A$  une constante réelle non-nulle.

Notons qu'il est possible de poinçonner les constellations  $M^2$ -QAM en conservant  $2^n$  symboles, où  $n$  représente le nombre de bits par symbole. À l'instar des modulations précédentes, les symboles sont généralement répartis uniformément dans le plan complexe. En considérant une fonction prototype  $g(t)$  et une durée symbole  $T_s$ , l'enveloppe complexe s'écrit

$$s(t) = s^{\mathcal{R}}(t) + js^{\mathcal{I}}(t) \quad (1.119)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{R}} g(t - kT_s) + j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\mathcal{I}} g(t - kT_s). \quad (1.120)$$

et en supposant une fréquence porteuse  $f_0$ , le signal réel en sortie de l'émetteur s'exprime par

$$s_{RF}(t) = \Re \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n g(t - kT_s) e^{j2\pi f_0 t} \right\} \quad (1.121)$$

$$= s^{\mathcal{R}}(t) \cos(2\pi f_0 t) - s^{\mathcal{I}}(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.122)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s) (c_k^{\mathcal{R}} \cos(2\pi f_0 t) - c_k^{\mathcal{I}} \sin(2\pi f_0 t)) \quad (1.123)$$

### 1.3.3.2 Réception

Considérons dans un premier temps un canal de transmission idéal, c'est-à-dire tel que le signal reçu  $r(t)$  est égal au signal émis  $s(t)$ . L'estimation des symboles reçus s'effectue par projection du signal reçu sur une base de réception duale de  $\{\check{g}_n(t)\}_{n \in \mathbf{Z}} \in \mathbf{R}$  dont les vecteurs sont définis par

$$\check{g}_n(t) = \check{g}(t - nT_s). \quad (1.124)$$

Le  $n$ -ième symbole estimé s'écrit

$$\check{c}_n = \langle \check{g}_n, r \rangle \quad (1.125)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \check{g}_n(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k g_k(t) dt \quad (1.126)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\infty}^{+\infty} \check{g}_n(t) g_k(t) dt \quad (1.127)$$

$$= \underbrace{c_n \langle \check{g}_n, g_n \rangle}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k \neq n} c_k \langle \check{g}_n, g_k \rangle}_{I_n}. \quad (1.128)$$

Dans le cas général,  $S_n$  représente le terme de signal utile et  $I_n$  représente le terme de d'interférence entre symboles. Dans le cas d'un canal idéal, les symboles sont parfaitement estimés lorsque  $\langle \check{g}_n, g_k \rangle = \delta_{n,k}$ , c'est-à-dire lorsque les bases d'émission et de réception sont biorthogonales. De plus si  $\check{g} = g$ , alors elles sont dites orthonormales. Ces conditions d'annulation de l'interférence entre symboles constituent le critère de Nyquist.

Remarquons que la projection du signal reçu sur la base de réception peut se noter comme une opération de filtrage telle que  $\check{c}_n = (r * \check{g}^H)(nT_s)$  avec  $\check{g}^H(t) = \check{g}^*(-t)$ .

Le critère de Nyquist est une contrainte généralement souhaitable pour la synthèse des fonctions prototypes, nous présentons ci-après trois exemples illustrant le cas orthogonal.

**Exemple 1.8** (Filtre NRZ<sup>4</sup>)

La fonction prototype rectangulaire sans retour à zéro (NRZ) est une porte de durée  $T_s$  secondes, normalisée telle que  $\|g\|^2 = 1$  et définie par

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \chi_{[0; T_s[}(t) \quad (1.129)$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$G(f) = \sqrt{T_s} \text{sinc}(fT_s) e^{-j\pi f T_s}. \quad (1.130)$$

L'utilisation d'une fonction prototype rectangulaire de durée  $T_s$  permet une transmission sans interférence entre symboles. En contrepartie, la bande occupée est infinie avec un spectre à décroissance lente, dont le première lobe retombe à  $1/T_s$  (fig. 1.6).

---

4. Non-Return-to-Zero

**Exemple 1.9** (Filtre RZ<sup>5</sup>)

La fonction prototype rectangulaire avec retour à zéro (RZ) est une porte de durée  $T_s$  secondes, normalisée telle que  $\|g\|^2 = 1$  et définie par

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \chi_{[0; T_s/2]}(t) \quad (1.131)$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$G(f) = \sqrt{\frac{T_s}{2}} \operatorname{sinc}(2fT_s) e^{-j\pi f \frac{T_s}{2}}. \quad (1.132)$$

Les fonctions prototypes rectangulaires de durée strictement inférieure à  $T_s/2$  introduisent une transition pour chaque temps symbole. Cette caractéristique peut être exploitée pour synchroniser le récepteur. Par rapport au cas NRZ, la décroissance du sinus cardinal est deux fois plus lente (fig. 1.7).

**Exemple 1.10** (Filtre SRRC<sup>6</sup>)

Soit  $\alpha$  une constante réelle définie telle que  $0 \leq \alpha \leq 1$ , appelée excès de bande. La fonction prototype en racine de cosinus surélevé (SRRC), normalisée telle que  $\|g\|^2 = 1$  est définie par

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \begin{cases} 1 - \alpha + \frac{4\pi}{\alpha}, & \text{si } t = 0, \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left( \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right) + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right) \right), & \text{si } |t| = \frac{T_s}{4\alpha}, \\ \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T_s} (1 - \alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T_s} \cos\left(\pi \frac{t}{T_s} (1 + \alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T_s} \left(1 - \left(4\alpha \frac{t}{T_s}\right)^2\right)}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.133)$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$G(f) = \begin{cases} \sqrt{T_s}, & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_s}, \\ \sqrt{\frac{T_s}{2}} \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi T_s}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s}\right)\right)}, & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T_s} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_s}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.134)$$

L'utilisation d'une impulsion de mise en forme de durée infinie (dans le cas idéal) permet de contrôler l'occupation spectrale, à l'aide du facteur d'excès de bande  $\alpha$  (fig. 1.8).

L'opération de conversion symboles-bits (CSB) inclut le démultiplexage des voies réelle et imaginaire de sorte que  $\tilde{c}_n^{\mathcal{R}} = \Re\{\tilde{c}_n\}$  et  $\tilde{c}_n^{\mathcal{I}} = \Im\{\tilde{c}_n\}$ . Il s'agit ensuite de retrouver les séquences  $\{\tilde{b}_n^{\mathcal{R}}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  et  $\{\tilde{b}_n^{\mathcal{I}}\}_{n \in \mathbf{Z}}$  par classification des symboles reçus. Sur un canal idéal, en supposant que le critère de Nyquist soit respecté, les séquences binaires reçues sont égales aux séquences envoyées.

---

5. Return-to-Zero

6. Square-Root-Raised-Cosine

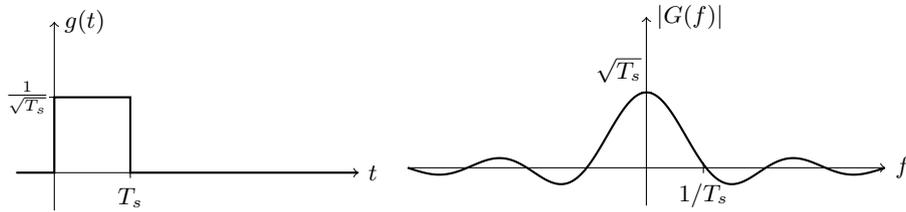


FIGURE 1.6 – Fonction prototype NRZ.

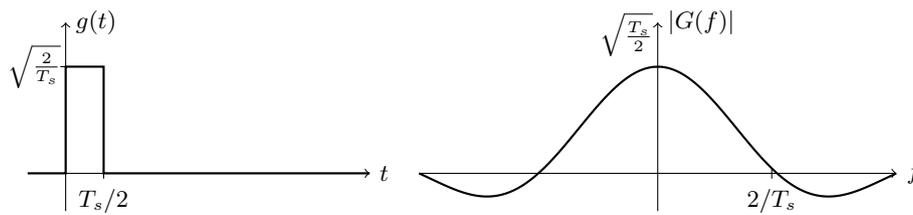
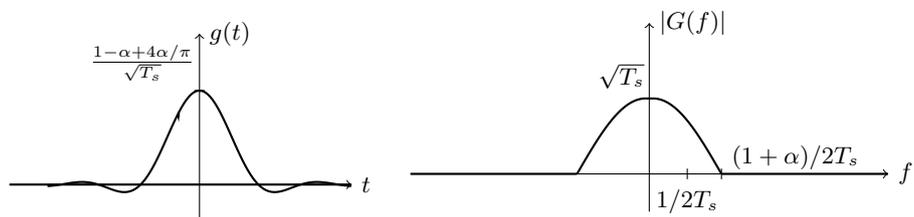


FIGURE 1.7 – Fonction prototype RZ.

FIGURE 1.8 – Fonction prototype SRRC avec  $\alpha = 0,9$ .

## Synthèse du chapitre

À travers ce chapitre, nous rappelons plusieurs définitions d'algèbre linéaire couramment utilisées dans le domaine des communications numériques. En plus des notions usuelles d'espace de Hilbert, de base et de produit scalaire, nous insistons sur les concepts moins courants de bases de Riesz et de biorthogonalité, ainsi que sur les familles de Weyl–Heisenberg. Nous introduisons ensuite les relations entre signaux continus et signaux discrets puis nous munissons ces deux classes de signaux d'outils d'analyse temps-fréquence. Enfin, nous présentons plusieurs notions spécifiques aux communications numériques en donnant l'équivalent (complexe) en bande de base d'un système de transmission à bande étroite sur onde porteuse (réel) et en rappelant les principaux schémas de modulations numériques.

Nous établissons ainsi le cadre d'étude dans lequel nous nous plaçons tout au long de ce document, c'est-à-dire l'espace des signaux complexes d'énergie finie (à temps continu ou à temps discret). Il s'agit d'un espace de Hilbert qui peut être muni d'une base Hilbertienne (orthonormale) ou de Riesz (biorthogonale). L'information à transmettre est alors représentée par les composantes des signaux exprimés sur ces bases. De plus, l'information peut être retrouvée par un produit scalaire entre le signal reçu et une base de réception duale à la base d'émission. Dans le cas orthonormal, ces deux bases sont identiques et on dit que l'on effectue un filtrage adapté. Dans le cas biorthogonal, elles sont différentes. Parmi les différentes bases possibles, les familles de Weyl–Heisenberg revêtent une importance particulière car elles permettent une répartition en temps et en fréquence de l'information.



# Modélisation des canaux de transmission radiomobiles

---

## Sommaire

<b>2.1 Canal à bruit additif</b>	<b>40</b>
2.1.1 Analyse statistique au second ordre d'un bruit filtré	40
2.1.2 Représentation complexe équivalente d'un bruit à bande étroite	43
<b>2.2 Canal sélectif en temps et en fréquence</b>	<b>45</b>
2.2.1 Atténuation et fluctuations de la puissance du signal reçu	45
2.2.2 Multitrajet, mobilité et système linéaire variant dans le temps	48
<b>2.3 Structure propre approchée du canal sélectif en temps et en fréquence</b>	<b>54</b>
2.3.1 Canal linéaire invariant en temps ou en fréquence	55
2.3.2 Lien avec les transmissions numériques	56
<b>2.4 Simplifications et exemples de modèles radiomobiles pratiques</b>	<b>57</b>
2.4.1 Modèle stationnaire au sens large avec non-corrélation des diffuseurs	57
2.4.2 Propagation isotrope dans un plan dense en diffuseurs	59
<b>2.5 Canal discret équivalent</b>	<b>69</b>
2.5.1 Canal discret équivalent à bruit additif blanc gaussien	69
2.5.2 Canal discret équivalent sélectif en temps et en fréquence	69

---

L'élaboration d'un système de communication numérique vise à transmettre de l'information le plus efficacement possible à travers un environnement de propagation donné. Par conséquent, la compréhension et la modélisation des phénomènes de propagation constituent un enjeu majeur. Dans le cadre de notre étude, le contexte radiomobile présente des caractéristiques particulièrement défavorables pour la transmission, telles que la propagation à plusieurs trajets ou l'effet Doppler introduit par le déplacement des mobiles communicants.

Au cours de ce deuxième chapitre, nous présentons dans un premier temps le modèle classique du bruit additif blanc gaussien. Nous introduisons ensuite la notion de canal sélectif en fréquence et en temps, c'est-à-dire multitrajet mobile. Nous établissons ensuite la structure propre approchée d'un canal sélectif en temps et en fréquence afin d'en déduire des schémas d'émission-réception adaptés. Les canaux radiomobiles étant des processus aléatoires, ils sont complexes à étudier dans le cas général. C'est pourquoi nous introduisons les hypothèses simplificatrices réalistes de stationnarité au sens large et de non-corrélation des diffuseurs. Ceci nous permet de proposer un modèle de canal permettant de rendre compte de la propagation

dans le cadre des réseaux mobiles *ad-hoc*. Enfin, nous développons un équivalent discret en bande de base de notre modèle afin de permettre sa mise en œuvre à l'aide d'un simulateur numérique.

## 2.1 Canal à bruit additif

Les composants de la chaîne de transmission ainsi que l'environnement de propagation génèrent des signaux indésirables que l'on regroupe sous le terme de bruit. En effet, les composants actifs et passifs des circuits électroniques sont responsables de divers types de bruits dont les plus connus sont certainement le bruit thermique et le bruit de grenaille. Le premier est causé par l'agitation thermique des porteurs de charge alors que le second est lié aux caractéristiques corpusculaires des porteurs de charge. Parmi les autres catégories de bruits intrinsèques à la chaîne de transmission, citons le bruit d'avalanche, le bruit en créneaux, le bruit de scintillation, tous les trois causés par des imperfections des semi-conducteurs. Enfin, les signaux captés par l'antenne et non-porteurs d'information, sont également considérés comme du bruit.

Par définition, les bruits sont considérés du point de vue de la chaîne de transmission comme des phénomènes aléatoires et chaque catégorie de bruit possède généralement un modèle statistique qui lui est propre. Nous supposons ici que le signal reçu s'exprime comme la somme du signal émis et d'un unique signal aléatoire  $n_{RF}(t)$ . En considérant les différentes sources de bruit comme étant indépendantes, le théorème de la limite centrale permet de modéliser le bruit résultant comme un unique signal aléatoire, suivant une loi normale. Par ailleurs, nous supposons que ce signal est stationnaire au second ordre (ou au sens large), c'est-à-dire que ses deux premiers moments sont indépendants du temps.

### 2.1.1 Analyse statistique au second ordre d'un bruit filtré

Soit  $n_{RF}(t)$  un signal aléatoire réel, stationnaire au second ordre. Ce signal est supposé blanc ; il est donc caractérisé par une densité spectrale de puissance constante, notée  $\gamma_{n_{RF}}(f) = N_0/2$  avec  $N_0$  une constante réelle positive. Le théorème de Wiener–Khinchine, nous permet d'en déduire la fonction d'autocorrélation, définie par

$$\Gamma_{n_{RF}}(\tau) = E\{n_{RF}(t)n_{RF}(t - \tau)\} = (\mathcal{F}^{-1}\gamma_{n_{RF}})(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \quad (2.1)$$

où  $E\{\cdot\}$  fait référence à l'espérance mathématique. Autrement dit, deux échantillons de bruit différents sont non-corrélés, ce qui est synonyme d'indépendance dans le cas gaussien.

Le bruit blanc  $n_{RF}(t)$  possède ainsi une puissance infinie. Cependant, nous pouvons le restreindre à une bande d'intérêt, notée  $B$  et appelée bande équivalente de bruit. Cette opération peut s'écrire comme un filtrage passe-bande idéal de  $n_{RF}(t)$ , centré sur une fréquence  $f_0 > B$  de sorte que le bruit obtenu est à bande étroite par rapport à  $f_0$ . On obtient alors un bruit

$b_{RF}(t)$  de densité spectrale de puissance

$$\gamma_{b_{RF}}(f) = \frac{N_0}{2} |V_{RF}(f)|^2 \quad (2.2)$$

avec la réponse fréquentielle du filtre passe-bande définie par

$$V_{RF}(f) = \Pi\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_0}{B}\right) \quad (2.3)$$

avec

$$\Pi(f) = \begin{cases} 1, & \text{si } |f| < \frac{1}{2}, \\ 1/2, & \text{si } |f| = 1/2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme illustré dans la figure 2.3, on notera que l'on a alors

$$\gamma_{b_{RF}}(f) = \gamma_{b_{RF}}(-f), \quad (2.4)$$

$$\gamma_{b_{RF}}^+(f + f_0) = \gamma_{b_{RF}}^+(-f + f_0) = \gamma_{b_{RF}}^-(f - f_0) = \gamma_{b_{RF}}^-(-f - f_0), \quad (2.5)$$

avec  $\gamma_{b_{RF}}^+(f)$  et  $\gamma_{b_{RF}}^-(f)$  les parties respectivement positive et négative de  $\gamma_{b_{RF}}(f)$ . De plus, nous pouvons définir la réponse impulsionnelle du filtre :

$$v_{RF}(t) = (\mathcal{F}^{-1}V_{RF})(t) = B \left( \text{sinc}(Bt)e^{-j2\pi f_0 t} + \text{sinc}(Bt)e^{j2\pi f_0 t} \right) \quad (2.6)$$

avec

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad (2.7)$$

de telle sorte que la fonction d'autocorrélation du bruit se note

$$\Gamma_{b_{RF}}(\tau) = (\Gamma_{n_{RF}} * v_{RF})(\tau) \quad (2.8)$$

$$= N_0 B \text{sinc}(B\tau) \cos(2\pi f_0 \tau). \quad (2.9)$$

Comme  $b_{RF}(t)$  est à bande étroite, par rapport à  $f_0$ , nous pouvons écrire

$$b_{RF}(t) = b^{\mathcal{R}}(t) \cos(2\pi f_0 t) - b^{\mathcal{I}}(t) \sin(2\pi f_0 t). \quad (2.10)$$

où  $b^{\mathcal{R}}(t)$  et  $b^{\mathcal{I}}(t)$  représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'enveloppe complexe du signal aléatoire  $b_{RF}(t)$ . Remarquons que si  $n_{RF}(t)$  suit une loi normale, alors  $b_{RF}(t)$  et ses composantes  $b^{\mathcal{R}}(t)$  et  $b^{\mathcal{I}}(t)$  suivent également une loi normale. En supposant un tel filtrage passe-bande idéal avec  $\check{V}_{RF}(f) = V_{RF}(f)$ , il résulte de cette opération deux représentations équivalentes du canal de transmission à bruit additif (fig. 2.1a et 2.1b).

La moyenne du signal aléatoire  $b_{RF}(t)$  s'exprime par

$$E\{b_{RF}(t)\} = E\{b^{\mathcal{R}}(t)\} \cos(2\pi f_0 t) - E\{b^{\mathcal{I}}(t)\} \sin(2\pi f_0 t). \quad (2.11)$$

Si l'on considère les composantes  $b^{\mathcal{R}}(t)$  et  $b^{\mathcal{I}}(t)$  stationnaires au premier ordre, telles que  $E\{b^{\mathcal{R}}(t)\} = \alpha$  et  $E\{b^{\mathcal{I}}(t)\} = \beta$  avec  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , alors le signal  $b(t)$  est lui-même stationnaire

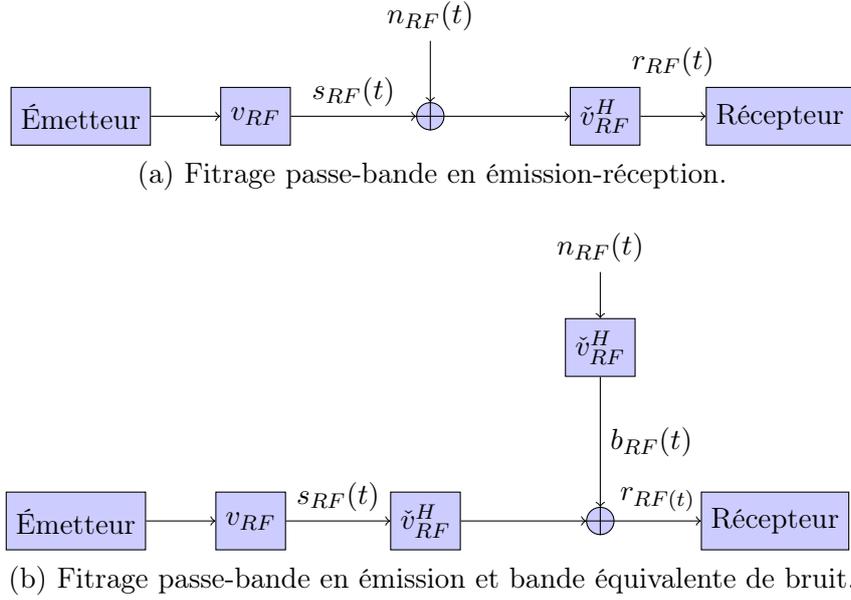


FIGURE 2.1 – Représentations équivalentes du canal à bruit additif filtré.

au premier ordre si et seulement si  $E\{b^{\mathcal{R}}(t)\} = E\{b^{\mathcal{I}}(t)\} = 0$ . Dans ces conditions, le signal  $b_{RF}(t)$  est centré.

La fonction d'autocorrélation du signal aléatoire  $b_{RF}(t)$  se développe de la manière suivante :

$$\Gamma_{b_{RF}}(t, \tau) = E\{b_{RF}(t)b_{RF}(t - \tau)\} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &= \Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(t, \tau) \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0(t - \tau)) \\ &\quad - \Gamma_{b^{\mathcal{R}}, b^{\mathcal{I}}}(t, \tau) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0(t - \tau)) \\ &\quad - \Gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(t, \tau) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0(t - \tau)) \\ &\quad + \Gamma_{b^{\mathcal{I}}}(t, \tau) \sin(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0(t - \tau)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

En linéarisant les produits de fonctions trigonométriques, nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma_{b_{RF}}(t, \tau) &= \frac{1}{2} \Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(t, \tau) (\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0(2t - \tau))) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma_{b^{\mathcal{R}}, b^{\mathcal{I}}}(t, \tau) (-\sin(2\pi f_0 \tau) + \sin(2\pi f_0(2t - \tau))) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(t, \tau) (\sin(2\pi f_0 \tau) + \sin(2\pi f_0(2t - \tau))) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Gamma_{b^{\mathcal{I}}}(t, \tau) (\cos(2\pi f_0 \tau) - \cos(2\pi f_0(2t - \tau))). \end{aligned} \quad (2.14)$$

En factorisant les fonctions de corrélation par les termes en sinus et cosinus, nous obtenons

$$\begin{aligned}\Gamma_{b_{RF}}(t, \tau) &= \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) (\Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(t, \tau) + \Gamma_{b^{\mathcal{I}}}(t, \tau)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 (2t - \tau)) (\Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(t, \tau) - \Gamma_{b^{\mathcal{I}}}(t, \tau)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) (\Gamma_{b^{\mathcal{R}}, b^{\mathcal{I}}}(t, \tau) - \Gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(t, \tau)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 (2t - \tau)) (-\Gamma_{b^{\mathcal{R}}, b^{\mathcal{I}}}(t, \tau) - \Gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(t, \tau)).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Supposons les composantes  $b^{\mathcal{R}}(t)$  et  $b^{\mathcal{I}}(t)$  stationnaires au second ordre, telles que  $\Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(t, \tau) = \Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(\tau)$  et  $\Gamma_{b^{\mathcal{I}}}(t, \tau) = \Gamma_{b^{\mathcal{I}}}(\tau)$ . Si l'on souhaite également que  $b_{RF}(t)$  soit stationnaire au second ordre, il faut

$$\Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(\tau) = \Gamma_{b^{\mathcal{I}}}(\tau), \quad (2.16)$$

$$\Gamma_{b^{\mathcal{R}}, b^{\mathcal{I}}}(\tau) = -\Gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(\tau). \quad (2.17)$$

Au final, la fonction d'autocorrélation du bruit réel à bande étroite  $b_{RF}$ , supposé stationnaire au second ordre, s'écrit

$$\Gamma_{b_{RF}}(\tau) = \Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) - \Gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau). \quad (2.18)$$

En utilisant le théorème de Wiener–Khinchine, la densité spectrale de puissance s'exprime par

$$\gamma_{b_{RF}}(f) = \frac{1}{2} (\gamma_{b^{\mathcal{R}}}(f - f_0) + j\gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(f - f_0) + \gamma_{b^{\mathcal{R}}}(f + f_0) - j\gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(f + f_0)). \quad (2.19)$$

En rappelant l'hypothèse de bande étroite de  $b_{RF}(t)$ , nous pouvons séparer les parties positive et négative de sa densité spectrale de puissance, de sorte que

$$\gamma_{b_{RF}^+}(f) = \frac{1}{2} (\gamma_{b^{\mathcal{R}}}(f - f_0) + j\gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(f - f_0)), \quad (2.20)$$

$$\gamma_{b_{RF}^-}(f) = \frac{1}{2} (\gamma_{b^{\mathcal{R}}}(f + f_0) - j\gamma_{b^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{R}}}(f + f_0)). \quad (2.21)$$

Dans le cas particulier où les composantes réelle et imaginaire sont non-corrélées, il reste

$$\gamma_{b_{RF}}(f) = \frac{1}{2} (\gamma_{b^{\mathcal{R}}}(f - f_0) + \gamma_{b^{\mathcal{R}}}(f + f_0)). \quad (2.22)$$

### 2.1.2 Représentation complexe équivalente d'un bruit à bande étroite

Puisque  $b_{RF}(t)$  est un signal réel à bande étroite, il est commode de l'exprimer à l'aide de son enveloppe complexe :

$$b(t) = b^{\mathcal{R}}(t) + jb^{\mathcal{I}}(t). \quad (2.23)$$

Une telle représentation équivalente en bande de base permet de caractériser le bruit indépendamment de la fréquence porteuse  $f_0$ , en utilisant les enveloppes complexes des signaux émis

et reçus (fig. 2.2). Dans ces conditions, d'après (1.100) et (2.3), le filtrage idéal mis en œuvre en émission et réception est caractérisé par les réponses fréquentielles

$$V(f) = \check{V}(f) = \Pi\left(\frac{f}{B}\right). \quad (2.24)$$

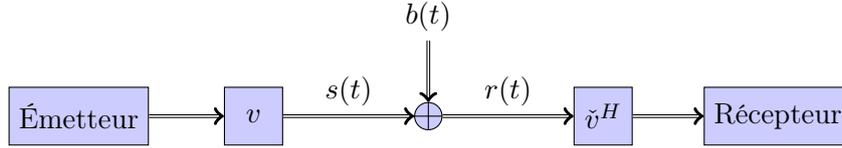


FIGURE 2.2 – Équivalent en bande de base du canal à bruit additif.

Si les composantes réelles et imaginaires sont stationnaires au second ordre, nous pouvons écrire

$$\Gamma_b(\tau) = \mathbb{E}\{b^*(t)b(t-\tau)\} \quad (2.25)$$

$$= \mathbb{E}\{(b^{\mathcal{R}}(t) - jb^{\mathcal{I}}(t))(b^{\mathcal{R}}(t-\tau) + jb^{\mathcal{I}}(t-\tau))\} \quad (2.26)$$

$$= \Gamma_{b^{\mathcal{R}}}(\tau) + j\Gamma_{b^{\mathcal{R}},b^{\mathcal{I}}}(\tau) - j\Gamma_{b^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{R}}}(\tau) + \Gamma_{b^{\mathcal{I}}}(\tau). \quad (2.27)$$

Nous rappelons que la stationnarité au second ordre de  $b_{RF}(t)$  entraîne des simplifications tel que précisé dans (2.16) et (2.17). Ainsi, nous pouvons écrire

$$\gamma_b(f) = 2(\gamma_{b^{\mathcal{R}}}(f) - j\gamma_{b^{\mathcal{R}},b^{\mathcal{I}}}(f)) \quad (2.28)$$

$$= 2(\gamma_{b^{\mathcal{I}}}(f) + j\gamma_{b^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{R}}}(f)). \quad (2.29)$$

En rappelant l'hypothèse de bande étroite de  $b_{RF}(t)$  et d'après (2.20) et (2.21), nous avons également

$$\gamma_b(f) = 4\gamma_{b_{RF}^+}(f + f_0) \quad (2.30)$$

$$= 4\gamma_{b_{RF}^-}(f - f_0). \quad (2.31)$$

Ceci montre, en utilisant (2.5), que  $\gamma_b(f) = \gamma_b(-f)$ . De plus, en combinant (2.5), (2.20), (2.21), (2.30) et (2.31), nous pouvons exprimer la densité spectrale de puissance des composantes en phase et en quadrature en fonction de l'enveloppe complexe du bruit :

$$\gamma_{b^{\mathcal{R}}}(f) = \gamma_{b^{\mathcal{I}}}(f) = \frac{1}{4}(\gamma_b(f) + \gamma_b(-f)) = \frac{1}{2}\gamma_b(f), \quad (2.32)$$

$$\gamma_{b^{\mathcal{R}},b^{\mathcal{I}}}(f) = -\gamma_{b^{\mathcal{I}},b^{\mathcal{R}}}(f) = \frac{1}{4j}(\gamma_b(-f) - \gamma_b(f)) = 0. \quad (2.33)$$

Ainsi, si  $n_{RF}(t)$  est un signal aléatoire réel gaussien centré, de densité spectrale de puissance  $\gamma_{n_{RF}}(f) = N_0/2$ , alors  $b(t)$  est un signal aléatoire complexe gaussien circulaire de densité spectrale de puissance  $\gamma_b(f) = 2N_0$  pour  $|f| \leq B/2$  et 0 sinon (en supposant  $b^{\mathcal{R}}(t)$  et  $b^{\mathcal{I}}(t)$  stationnaires au second ordre). L'ensemble des densités spectrales de puissances évoquées sont illustrées par la figure 2.3.

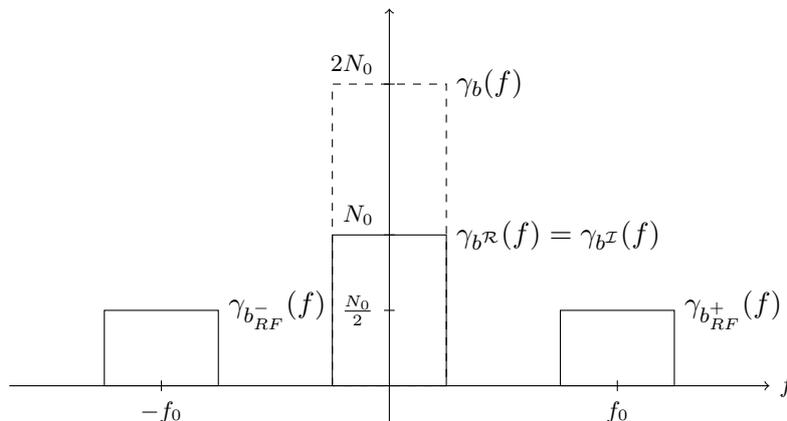


FIGURE 2.3 – Densités spectrales de puissance d'un bruit blanc filtré à bande étroite.

## 2.2 Canal sélectif en temps et en fréquence

Le canal à bruit additif blanc gaussien constitue le point de départ fréquemment choisi pour la modélisation des canaux de transmission. À l'aide de cette approche, nous considérons que la plupart des perturbations sont liées au bruit thermique du récepteur et aux interférences externes. Cependant, nous montrons ici les limites d'une telle approche dans le cas d'une propagation radiomobile.

Tout d'abord, en dehors des systèmes de communication opérant à très courte distance, il est raisonnable de supposer que le canal de transmission induit une atténuation en fonction de la distance parcourue par le signal.

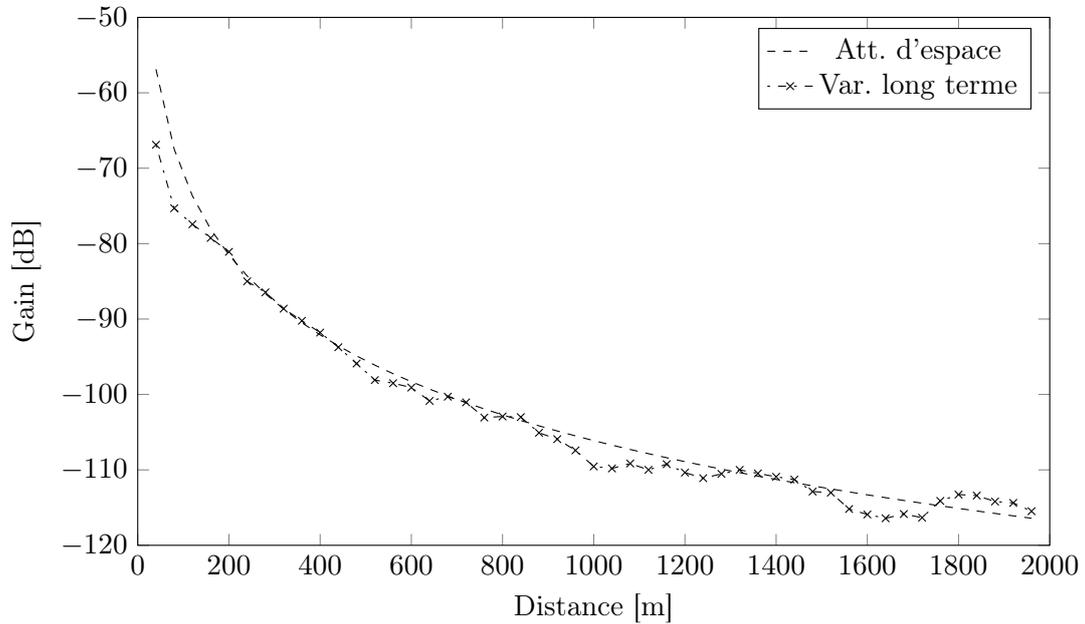
Lorsque la propagation radio intervient dans un environnement comportant des objets de dimension comparable à la longueur d'onde du signal émis, le signal peut suivre différents trajets de l'émetteur au récepteur. Autrement dit, une impulsion transmise donne lieu à la réception de plusieurs impulsions, chacune étant retardée et atténuée par un facteur différent. Ainsi, il est fréquent de modéliser la dispersion multitrajet par un filtre linéaire.

Enfin, pour de nombreuses applications, l'émetteur, le récepteur et leur environnement se déplacent ou évoluent au cours du temps. Par conséquent, les caractéristiques de la propagation multitrajet évoluent également au cours du temps.

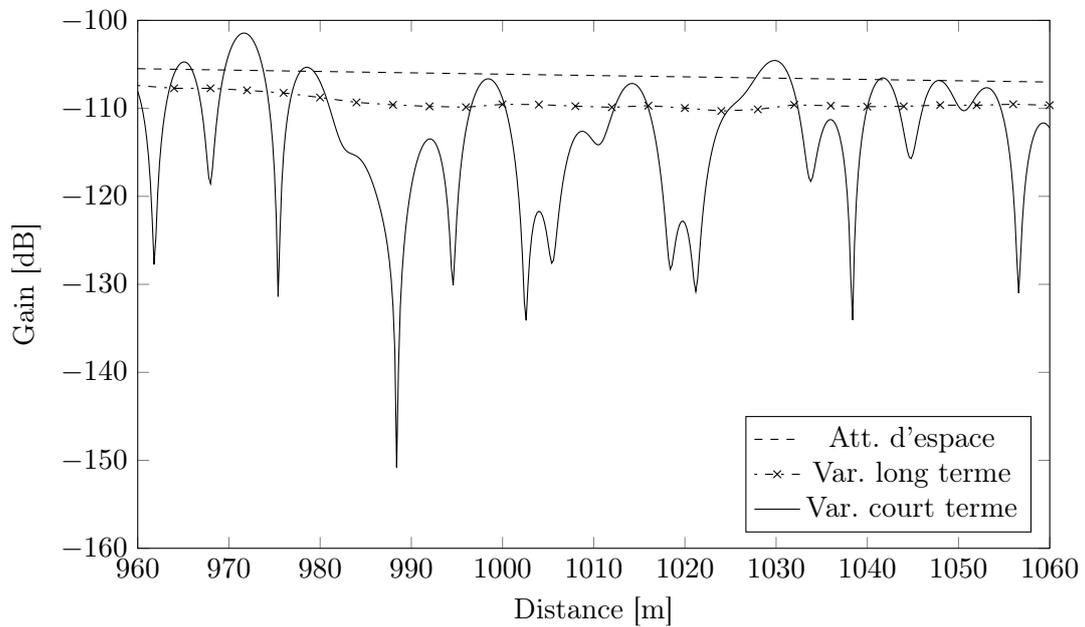
Un canal de transmission radio multitrajet et évolutif est appelé canal radiomobile. Nous nous focalisons sur ce cas particulier dans le cadre de notre étude.

### 2.2.1 Atténuation et fluctuations de la puissance du signal reçu

Dans un scénario de propagation radiomobile, la puissance reçue varie en fonction de la distance qui sépare l'émetteur du récepteur. En observant ce phénomène, il est possible de distinguer trois échelles de variations décrites ci-après (fig. 2.4).



(a) Atténuation d'espace et fluctuations à grande échelle



(b) Fluctuations à petite échelle

FIGURE 2.4 – Illustration des différents types d'atténuations sur canal radiomobile VHF.

### 2.2.1.1 Atténuation d'espace

L'atténuation d'espace représente la décroissance moyenne de la puissance reçue due au déplacement sur de grandes distances. Le comportement de ce type d'atténuation est généralement formalisé par une relation déterministe, proportionnelle à une puissance  $n$ -ième de la distance  $d$  entre l'émetteur et le récepteur :  $A(d) \propto d^n$ .

Dans le cas idéal d'une propagation en espace libre, en utilisant des antennes isotropes, le facteur d'atténuation se définit comme le rapport de la puissance émise  $P_e$  sur la puissance reçue  $P_r$  de sorte que

$$A_{el}(d) = \frac{P_e}{P_r} = \frac{4\pi d^2}{\lambda^2} = \left( \frac{4\pi f d}{c} \right)^2 \quad (2.34)$$

où  $d$  représente la distance entre l'émetteur et le récepteur,  $c$  exprime la célérité de l'onde dans le vide,  $f$  se réfère à une fréquence pure et  $\lambda = c/f$ . Dans le cas d'une communication monoporteuse à bande étroite, il est fréquent d'associer la même atténuation à l'ensemble du spectre en faisant l'approximation  $f \approx f_0$ .

Le modèle de la propagation en espace libre est pris en défaut dès lors que les ondes électromagnétiques entrent en interaction avec des objets de l'environnement de propagation (ex. : bâtiments, végétation, relief. . .). Une solution consiste à développer des modèles d'atténuation empiriques. Par exemple, les mesures de champs électromagnétiques réalisées par Okumura dans des zones urbaines et rurales ont permis à Hata de déterminer un modèle d'atténuation à grande échelle [Okumura 1984] [Hata 1980]. Valable en zone urbaine non-vallonée et supposant l'utilisation d'antennes isotropes, l'expression générale de l'atténuation, selon le modèle de Hata, s'écrit

$$A_e[dB] = 69,55 + 26,16 \log_{10}(f_0) - 13,82 \log_{10}(h_b) - a(h_m) + [44,9 - 6,55 \log_{10}(h_b)] \log_{10}(d) \quad (2.35)$$

avec

- $f_0$  [MHz], la fréquence porteuse telle que la bande du signal soit comprise entre 100 et 1500 MHz ;
- $d$  [km], la distance comprise entre 1 et 20 km ;
- $h_b$  [m], la hauteur de l'antenne de la station de base comprise entre 30 et 300 m ;
- $a(h_m)$  [dB], le facteur de correction calculé en fonction de la hauteur de l'antenne du mobile, comprise entre 1 et 10 m ;

Pour de petites villes le facteur de correction s'exprime par

$$a(h_m)[dB] = (1,1 \log_{10}(f_0) - 0,7)h_m - (1,56 \log_{10}(f_0) - 0,8). \quad (2.36)$$

et pour de grandes villes, on utilise

$$a(h_m)[dB] = \begin{cases} 8,29 \log_{10}(1,54h_m)^2 - 1,1, & \text{si } f_0 \leq 200 \text{ MHz,} \\ 3,2 \log_{10}(11,75h_m)^2 - 4,97, & \text{si } f_0 \geq 400 \text{ MHz.} \end{cases} \quad (2.37)$$

Outre la propagation en zone urbaine, le modèle de Hata peut également être utilisé pour décrire l'atténuation dans un environnement où les constructions sont plus éparées à condition d'utiliser le coefficient de correction approprié. Suite aux travaux de Hata, de nombreux

modèles de propagation sont apparus pour étendre les résultats obtenus à d'autres types de terrains ou bandes de fréquence. Citons par exemple le modèle COST 231 qui décrit l'atténuation d'espace, sur la base d'une étude empirique, pour  $f_0 \leq 2$  GHz [Damosso 1999].

### 2.2.1.2 Fluctuations à grande échelle

L'atténuation d'espace permet de calculer la puissance moyenne reçue en fonction de la distance. Des variations autour de cette moyenne sont observées en fonction des différents obstacles présents dans l'environnement (ex. : végétation, constructions, relief...). Cet effet de masque (ou ombrage) est généralement modélisé par une variable aléatoire de loi log-normale [Fenton 1960], [Hansen 1977], [Coulson 1998]. Soit  $x_0$  la puissance moyenne locale reçue, sa densité de probabilité s'écrit

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_0} e^{-\frac{(\log x_0 - A_e)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.38)$$

avec  $\sigma$  l'écart type de la puissance moyenne locale typiquement fixé entre 6 et 10 dB.

Dans le cadre d'un système de communication terrestre fonctionnant dans la bande UHF<sup>1</sup>, les fluctuations à grande échelle se manifestent sur des distances d'environ 20 mètres en extérieur et environ 5 mètres en intérieur. Le terme « grande échelle » est à mettre en relation avec la longueur d'onde utilisée puisque les effets de cette atténuation apparaissent sur une distance proche d'une dizaine de  $\lambda$ .

### 2.2.1.3 Fluctuations à petite échelle

Dans le cadre d'une propagation à plusieurs trajets, la puissance reçue dépend de la recombinaison des différentes composantes de l'onde initiale. La superposition de signaux en opposition de phase introduit des phénomènes d'évanouissement qui sont généralement synonymes de perte d'information. Des analyses empiriques montrent que ces phénomènes s'observent à des intervalles de distances proches de  $\lambda/2$ , constituant une atténuation à petite échelle [Sklar 1997a].

Tel que nous l'expliquons par la suite de ce chapitre, une modélisation statistique est généralement utilisée pour rendre compte des fluctuations de l'atténuation à petite échelle, ou plus généralement de la propagation à plusieurs trajets.

## 2.2.2 Multitrajet, mobilité et système linéaire variant dans le temps

Après avoir modélisé l'atténuation moyenne du signal en fonction de la distance qui sépare l'émetteur du récepteur, nous nous focalisons à présent sur la modélisation des deux principales caractéristiques du canal radiomobile, à savoir la propagation multitrajet et la mobilité.

---

1. *Ultra High Frequency*

**Multitrajet** — L'onde émise peut emprunter plusieurs trajets différents pour atteindre le récepteur. Cela est dû aux phénomènes de réflexion, diffraction et diffusion de l'onde électromagnétique par les objets présents sur le chemin de propagation (ex. : relief, bâtiments, végétation...). Cet effet cause une dispersion temporelle du signal.

**Mobilité** — L'émetteur, le récepteur et/ou leur environnement se déplacent au cours du temps. Par conséquent, les caractéristiques du canal sont évolutives. La mobilité peut être représentée comme une dispersion fréquentielle appelée effet Doppler.

### 2.2.2.1 Relation d'entrée-sortie et équivalent en bande de base

Pour la plupart des applications radiomobiles, le canal de transmission peut être représenté par un système linéaire variant dans le temps, représenté par l'opérateur  $\mathcal{H}_{RF}$  agissant sur un signal à bande étroite, interpolé et échantillonné par les filtres  $v_{RF}$  et  $\check{v}_{RF}^H$  (fig. 2.5) dont les réponses fréquentielles sont définies telles que

$$V_{RF}(f) = \check{V}_{RF}(f) = \Pi\left(\frac{f - f_0}{B}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_0}{B}\right) \quad (2.39)$$

où  $B$  représente la bande du signal émis et  $f_0$  la fréquence centrale de la transmission. Selon le principe de superposition, nous pourrions ajouter à ce modèle une source de bruit additif blanc gaussien après l'opérateur  $\mathcal{H}_{RF}$ .

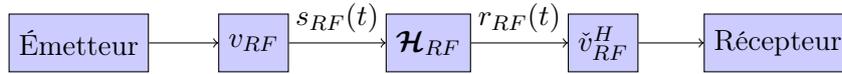


FIGURE 2.5 – Canal de transmission radiomobile.

Soient  $s_{RF}(t)$  et  $r_{RF}(t)$  les signaux respectivement émis et reçus, la relation d'entrée-sortie du canal linéaire variant dans le temps se note sous la forme intégrale

$$r_{RF}(t) = (\mathcal{H}_{RF}s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{RF}(t, \tau) s_{RF}(t - \tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Lorsque la réponse impulsionnelle est indépendante du temps, cette relation d'entrée-sortie se traduit par un produit de convolution.

Sachant que la transmission est réalisée à bande étroite, il est intéressant d'établir un équivalent en bande de base du système linéaire variant dans le temps. Il convient toutefois de préciser les conditions d'existence d'une telle notation équivalente. Si l'on note la fonction caractéristique Doppler-fréquence

$$H_{RF}(f, \nu) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} h_{RF}(t, \tau) e^{-j2\pi ft} e^{-j2\pi \nu \tau} dt d\tau \quad (2.41)$$

alors, d'après [Yoo 2008], le système admet un équivalent en bande de base si

$$\begin{cases} H_{RF}(f, \nu) = 0, & \text{si } |f| \geq f_0 - B/2, \\ (\mathcal{F}s_{RF})(\nu) = 0, & \text{si } |\nu| < f_0 - B/2. \end{cases} \quad (2.42)$$

Autrement dit, l'équivalent complexe en bande de base d'un canal dispersif en temps et en fréquence,  $\mathcal{H}$ , existe dès lors que le signal émis est à bande étroite et que l'étalement Doppler maximal du canal de transmission est inférieur à  $|f_0 - B/2|$ . Ces conditions sont presque toujours respectées en environnement radiomobile; nous notons ainsi  $s(t)$ ,  $r(t)$  et  $v(t)$  les équivalents en bande de base des signaux  $s_{RF}(t)$ ,  $r_{RF}(t)$  et  $v_{RF}(t)$  tels que nous les avons définis précédemment.

Nous définissons le signal analytique de  $h_{RF}(t, \tau)$  par  $h_a(t, \tau) = (\mathcal{F}_{f, \nu}^{-1} H_a)(t, \tau)$  avec

$$H_a(f, \nu) = \begin{cases} 2H_{RF}(f, \nu), & \text{si } \nu > 0, \\ H_{RF}(f, \nu), & \text{si } \nu = 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.43)$$

L'enveloppe complexe de  $h_{RF}(t, \tau)$  se définit alors par

$$h_e(t, \tau) = h_a(t, \tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} \quad (2.44)$$

et son équivalent en bande de base se note  $h(t, \tau) = 1/2h_e(t, \tau)$ . Ainsi, la relation d'entrée-sortie du système équivalent en bande de base (fig. 2.6) peut s'écrire

$$r(t) = (\mathcal{H}s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau) s(t - \tau) d\tau. \quad (2.45)$$

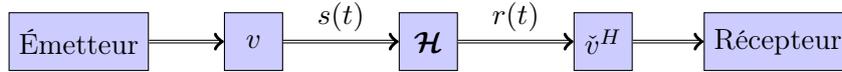


FIGURE 2.6 – Équivalent en bande de base du canal de transmission radiomobile.

Dans toute la suite, nous nous placerons dans les conditions requises pour considérer un système équivalent en bande de base.

### 2.2.2.2 Noyau et réponse impulsionnelle évolutive généralisée en bande de base

La relation entrée-sortie d'un canal de transmission en bande de base doublement dispersif peut aussi se noter sous la forme

$$r(t) = (\mathcal{H}s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, t') s(t') dt'. \quad (2.46)$$

$K(t, t')$  est alors appelé noyau de  $\mathcal{H}$  [Dunford 1988]. En pratique,  $K \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}^2)$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{R}^2) = \left\{ X : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}, \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(t, t')|^2 dt dt' < +\infty \right\}. \quad (2.47)$$

En posant  $\alpha$  une constante réelle choisie telle que  $-1/2 \leq \alpha \leq 1/2$ , on définit la réponse impulsionnelle évolutive généralisée de  $\mathcal{H}$  par

$$h^{(\alpha)}(t, \tau) = K \left( t + \tau \left( \frac{1}{2} - \alpha \right), t - \tau \left( \frac{1}{2} + \alpha \right) \right) \quad (2.48)$$

de sorte que

$$r(t) = (\mathcal{H}s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^{(\alpha)}\left(t - \tau\left(\frac{1}{2} - \alpha\right), \tau\right) s(t - \tau) d\tau. \quad (2.49)$$

En pratique, on utilise essentiellement la réponse impulsionnelle évolutive définie par  $h(t, \tau) = h^{(1/2)}(t, \tau) = K(t, t - \tau)$ , de manière à pouvoir retrouver la relation d'entrée-sortie donnée par (2.45). Toutefois, comme on le verra par la suite, il peut être utile de choisir d'autres valeurs du paramètre  $\alpha$  afin de retrouver des notations introduites par différents auteurs.

### 2.2.2.3 Fonction d'étalement généralisée

Le canal radiomobile introduisant une dispersion en temps et en fréquence, il peut être intéressant de le caractériser dans le plan retard-Doppler [Kozek 1997b]. Nous introduisons pour cela la fonction d'étalement généralisée du canal, notée  $S_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(f, \tau)$  et obtenue par la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle généralisée par rapport à la variable  $t$  :

$$S_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(f, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^{(\alpha)}(t, \tau) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (2.50)$$

- En choisissant  $\alpha = 0$ , nous obtenons une fonction d'étalement symétrique  $S_{\mathcal{H}}^{(0)}(f, \tau) = \mathcal{F}_t\{K(t + \tau/2, t - \tau/2)\}$ .
- Si l'on prend  $\alpha = 1/2$ , on obtient une fonction d'étalement asymétrique  $S_{\mathcal{H}}^{(1/2)}(f, \tau) = \mathcal{F}_t\{K(t, t - \tau)\} = \mathcal{F}_t\{h(t, \tau)\}$ .
- Enfin, lorsque  $\alpha = -1/2$ , nous retrouvons la fonction d'étalement retard-Doppler introduite dans [Bello 1963]  $S_{\mathcal{H}}^{(-1/2)}(f, \tau) = \mathcal{F}_t\{K(t + \tau, t)\}$ .

Quelle que soit sa polarisation, la fonction d'étalement généralisée caractérise complètement le canal de transmission et peut être également considérée comme le noyau de  $\mathcal{H}$  si la norme  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}^2)$  de  $h$  est finie. On peut écrire la relation d'entrée-sortie suivante

$$r(t) = (\mathcal{H}s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(f, \tau) \mathbf{U}_{f, \tau}^{(\alpha)} s(t) df d\tau. \quad (2.51)$$

où  $\mathbf{U}_{f, \tau}^{(\alpha)} s(t) = \exp(j2\pi ft) \exp(-j2\pi f\tau(1/2 - \alpha)) s(t - \tau)$ , conformément à la définition 1.26. Cette relation permet alors d'exprimer le signal reçu en fréquence en fonction du signal transmis en temps :

$$R(f) = (\mathcal{F}\mathcal{H}s)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(f, \tau) e^{-j2\pi f\tau(1/2 - \alpha)} s(t - \tau) d\tau. \quad (2.52)$$

### 2.2.2.4 Symbole de Weyl généralisé

Après avoir caractérisé le canal de transmission dans le plan retard-Doppler à l'aide de sa fonction d'étalement, une description similaire peut être effectuée dans le plan temps-fréquence (fig. 2.7). Il s'agit de la notion de fonction de transfert évolutive, établie de manière

intuitive pour rendre compte de la sélectivité en temps et en fréquence. Nous introduisons ainsi le symbole de Weyl généralisé, à l'aide d'une double transformée de Fourier de la fonction d'étalement [Kozek 1996] :

$$L_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(\nu, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^{(\alpha)}(t, \tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \quad (2.53)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(f, \tau) e^{-j2\pi(\nu\tau - ft)} df d\tau. \quad (2.54)$$

- Lorsque  $\alpha = 0$ , cette définition correspond au symbole de Weyl [Weyl 1950]  $L_{\mathcal{H}}^{(0)}(\nu, t) = \mathcal{F}_{\tau}\{K(t + \tau/2, t - \tau/2)\}$ .
- Pour  $\alpha = 1/2$ , on obtient la fonction de transfert de Zadeh [Zadeh 1950] ou symbole de Kohn–Nirenberg [Kohn 1965]  $L_{\mathcal{H}}^{(1/2)}(\nu, t) = \mathcal{F}_{\tau}\{K(t, t - \tau)\} = \mathcal{F}_{\tau}\{h(t, \tau)\}$ .
- Lorsque  $\alpha = -1/2$ , on retrouve la fonction de modulation dépendante de la fréquence présentée dans [Bello 1963]  $L_{\mathcal{H}}^{(-1/2)}(\nu, t) = \mathcal{F}_{\tau}\{K(t + \tau, t)\}$ .

En notant  $S(\nu)$  la transformée de Fourier du signal émis, la relation d'entrée-sortie s'exprime par

$$r(t) = (\mathcal{H}s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(\nu, t) S(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu. \quad (2.55)$$

### 2.2.2.5 Fonction caractéristique Doppler-fréquence généralisée

Il est enfin aussi possible d'exprimer le signal reçu en fonction du signal transmis dans le domaine des fréquences. Il faut alors pour cela utiliser la fonction Doppler-fréquence généralisée définie par :

$$H^{(\alpha)}(f, \nu) = \mathcal{F}_t\{L_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(\nu, t)\}(\nu, f) = \mathcal{F}_{\tau}\{S_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(f, \tau)\}(\nu, f) \quad (2.56)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h^{(\alpha)}(t, \tau) e^{-j2\pi(ft + \nu\tau)} dt d\tau \quad (2.57)$$

de sorte que

$$R(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{(\alpha)}(f, \nu - f) S(\nu - f) df. \quad (2.58)$$

Les relations liant les différentes fonctions caractéristiques sont résumées par la figure 2.7.

### 2.2.2.6 Cas des canaux invariants dans le temps, en fréquence et parfaits

Les cas particuliers des canaux linéaires invariants dans le temps (LTI<sup>2</sup>) et invariants en fréquence (LFI<sup>3</sup>) ne peuvent être décrits avec des opérateurs de  $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}^2)$ . Nous pouvons toutefois traiter ces cas particuliers en utilisant les distributions. Les fonctions caractéristiques du canal prennent alors des formes particulières faisant clairement apparaître les notions de sélectivité et de dispersivité (tab. 2.1).

---

2. *Linear Time Invariant*

3. *Linear Frequency Invariant*

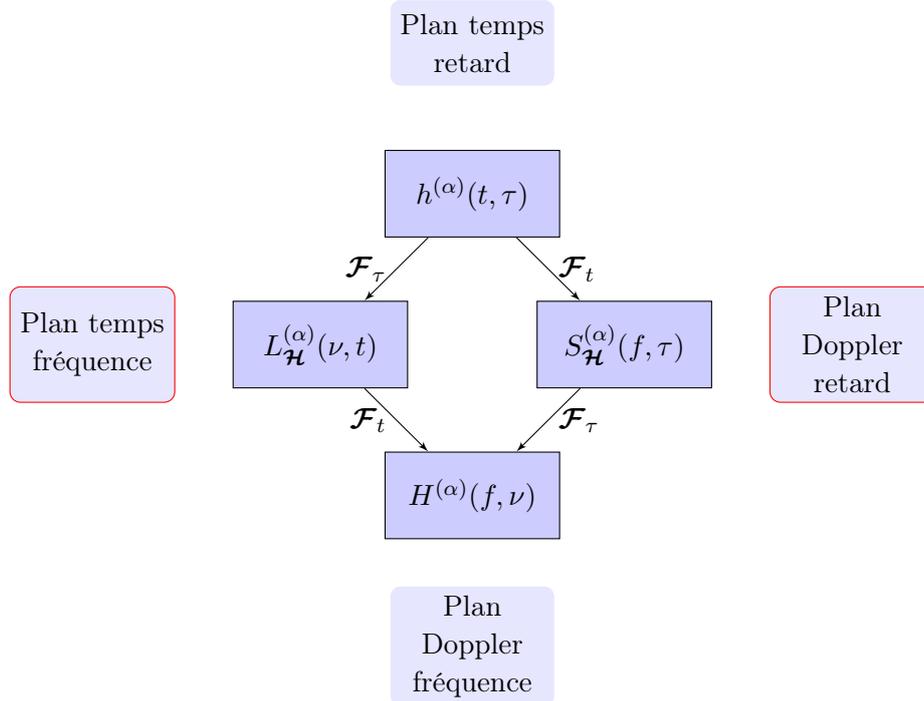


FIGURE 2.7 – Fonctions caractéristiques du canal de transmission.

	$h(t, \tau)$	$S_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(f, \tau)$	$L_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}(\nu, t)$	$H^{(\alpha)}(f, \nu)$
LTI	$q(\tau)$	$q(\tau)\delta(f)$	$Q(\nu)$	$Q(\nu)\delta(\nu - f)$
LFI	$m(t)\delta(\tau)$	$M(f)\delta(\tau)$	$m(t)$	$M(f)$
identité	$\delta(t)$	$\delta(f)\delta(\tau)$	1	$\delta(\nu - f)$

TABLE 2.1 – Fonctions caractéristiques d'un canal de transmission linéaire invariant en temps (LTI) ou en fréquence (LFI) ou idéal.

Le symbole de Weyl généralisé fait apparaître les valeurs propres  $Q(\nu)$  et  $m(t)$  pour les systèmes linéaires invariants respectivement en temps et en fréquence. Cela n'est généralement pas vrai pour les systèmes linéaires variants dans le temps.

Quant à l'étalement temps-fréquence, il est particulièrement bien illustré par la fonction d'étalement généralisée (fig. 2.8).

Après avoir unifié les approches de Weyl, Zadeh et Bello à l'aide du paramètre de polarisation  $\alpha$ , il s'avère que le choix de ce paramètre importe peu. Dans la suite, on fixera  $\alpha = 1/2$  et nous poserons simplement  $h(t, \tau) = h^{(1/2)}(t, \tau)$ ,  $L_{\mathcal{H}} = L_{\mathcal{H}}^{(1/2)}$ ,  $S_{\mathcal{H}} = S_{\mathcal{H}}^{(1/2)}$  et  $\mathbf{u}_{f, \tau} = \mathbf{u}_{f, \tau}^{(1/2)}$  pour simplifier les notations dans la suite de ce document.

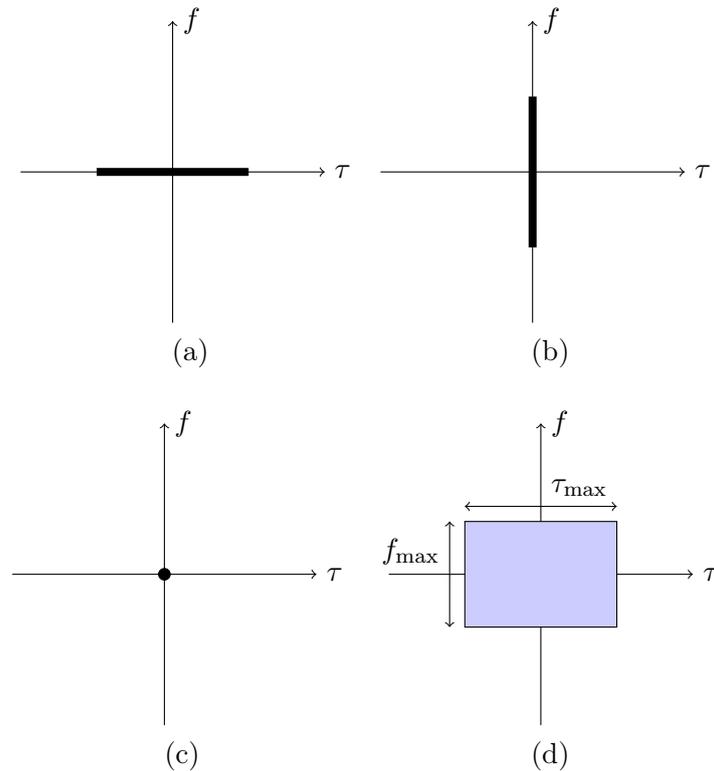


FIGURE 2.8 – Support de la fonction d'étalement généralisée  $S_{\mathcal{H}}^{(\alpha)}$  pour : (a) un système LTI, (b) un système LFI, (c) un système idéal, (d) un système doublement dispersif (LTV).

### 2.3 Structure propre approchée du canal sélectif en temps et en fréquence

Nous avons modélisé le canal radiomobile comme un système linéaire variant dans le temps et exprimé ses relations d'entrée-sortie en fonction de plusieurs représentations équivalentes par transformée de Fourier de son noyau  $K(t, t')$ . Dans le cadre d'une transmission numérique, il s'agit à présent de déterminer la signalisation appropriée et, si possible, optimale pour la transmission d'information à travers un tel canal. En pratique, cette analyse vise à déterminer les caractéristiques des signaux (analogiques) à utiliser pour mettre en forme les symboles.

Nous débutons notre étude par les cas particuliers des canaux linéaires invariants en temps ou en fréquence et formalisons la notion de signalisation optimale en utilisant la notion de structure propre approchée. Nous traitons ensuite le cas général des canaux linéaires variants dans le temps en introduisant l'intérêt des modulations multiporteuses suréchantillonnées.

### 2.3.1 Canal linéaire invariant en temps ou en fréquence

#### 2.3.1.1 Canal invariant dans le temps

Dans le cas d'un canal linéaire invariant dans le temps, la relation d'entrée-sortie s'écrit

$$r(t) = (\mathcal{H}s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau)s(t - \tau) d\tau \quad (2.59)$$

ou de manière équivalente, en notant  $S(f)$ ,  $Q(f)$  et  $R(f)$  les transformées de Fourier respectives de  $s(t)$ ,  $q(t)$  et  $r(t)$ , nous avons dans le domaine fréquentiel

$$R(f) = Q(f)S(f). \quad (2.60)$$

Nous pouvons en déduire que pour  $s_{f_0}(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ ,  $f_0 \in \mathbf{R}$

$$(\mathcal{H}s_{f_0})(t) = Q(f_0)s_{f_0}(t) = L_{\mathcal{H}}(f_0, t)s_{f_0}(t). \quad (2.61)$$

Ainsi, la structure propre d'un canal LTI est donnée par l'ensemble des signaux  $s_{f_0}(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ ,  $\forall f_0 \in \mathbf{R}$  associés aux valeurs propres  $Q(f_0) = L_{\mathcal{H}}(f_0, t)$ .

Par extension, la structure propre approchée est définie par l'ensemble des signaux  $g_{f_0}(t) = g(t)e^{j2\pi f_0 t} = (\mathcal{M}_{f_0}g)(t)$  associés aux valeurs propres  $Q(f_0) = L_{\mathcal{H}}(f_0, t)$ , la structure étant d'autant mieux approchée que la fonction génératrice  $g(t)$  est proche de l'unité, ou, autrement dit, d'autant plus que le support fréquentiel de  $g(t)$  est concentré autour de la fréquence nulle. Plus précisément, d'après [Kozek 1997b], nous pouvons montrer que si  $S_{\mathcal{H}}(f_0, \tau) = 0$  pour  $|\tau| > \tau_{\max}/2$  et que  $(\mathcal{F}_t g)(f) = 0$  pour  $|f| > \epsilon/2\pi\tau_{\max}$ , alors  $(\mathcal{M}_{f_0}g)(t)$  est une  $\epsilon$ -fonction propre approchée de  $\mathcal{H}$  :

$$\|\mathcal{H}\mathcal{M}_{f_0}g - Q(f_0)\mathcal{M}_{f_0}g\| \leq \epsilon. \quad (2.62)$$

#### 2.3.1.2 Canal invariant en fréquence

Dans le cas d'un canal linéaire invariant en fréquence, la relation d'entrée-sortie s'écrit

$$r(t) = (\mathcal{H}s)(t) = m(t)s(t) \quad (2.63)$$

ou de manière équivalente, en notant  $Q(f)$ ,  $M(f)$  et  $R(f)$  les transformées de Fourier respectives de  $s(t)$ ,  $m(t)$  et  $r(t)$ , nous avons dans le domaine fréquentiel

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\nu)S(f - \nu) d\nu \quad (2.64)$$

Nous pouvons en déduire que pour  $s_{\tau_0}(t) = \delta(t - \tau_0)$ ,  $\tau_0 \in \mathbf{R}$  :

$$(\mathcal{H}s_{\tau_0})(t) = m(\tau_0)s_{\tau_0}(t) = L_{\mathcal{H}}(\nu, \tau_0)s_{\tau_0}(t) \quad (2.65)$$

Ainsi, la structure propre d'un canal LFI est donnée par l'ensemble des signaux  $s_{\tau_0}(t) = \delta(t - \tau_0)$  associés aux valeurs propres  $m(\tau_0) = L_{\mathcal{H}}(\nu, \tau_0)$ .

Par extension la structure propre approchée est définie par l'ensemble des signaux  $g_{\tau_0}(t) = g(t - \tau_0) = (\mathcal{T}_{\tau_0}g)(t)$  associés aux valeurs propres  $m(\tau_0) = L_{\mathcal{H}}(\nu, \tau_0)$ , la structure étant d'autant mieux approchée que le support temporel de la fonction génératrice  $g(t)$  est concentré autour de  $t = 0$ . Plus précisément, d'après [Kozek 1997b], nous pouvons montrer que si  $S_{\mathcal{H}}(f, \tau_0) = 0$  pour  $|f| > f_{\max}/2$  et que  $g(t) = 0$  pour  $|t| > \epsilon/2\pi f_{\max}$ , alors  $(\mathcal{T}_{\tau_0}g)(t)$  est une  $\epsilon$ -fonction propre approchée de  $\mathcal{H}$  :

$$\|\mathcal{H}\mathcal{T}_{\tau_0}g - m(\tau_0)\mathcal{T}_{\tau_0}g\| \leq \epsilon \quad (2.66)$$

### 2.3.1.3 Canal linéaire variant dans le temps

Sachant que le symbole de Weyl définit la structure propre des systèmes LTI et LFI, il est intéressant de montrer comment cette fonction approche la structure propre d'un système LTV<sup>4</sup> dans un cas plus général. Dans le cas déterministe, d'après [Kozek 1997b], nous pouvons montrer que le symbole de Weyl est une valeur propre approchée. Dans ce cas, si pour  $|f| > f_{\max}/2$  et  $|\tau| > \tau_{\max}/2$  on a  $S_{\mathcal{H}}(f, \tau) = 0$ , et  $|A_g(f, \tau) - 1| \leq \epsilon$ , alors  $(\mathcal{U}_{f_0, \tau_0}g)(t)$  est une  $\epsilon$ -fonction propre approchée de  $\mathcal{H}$  avec pour  $\epsilon$ -valeur propre approchée  $L_{\mathcal{H}}(\tau_0, f_0)$  :

$$\|\mathcal{H}\mathcal{U}_{f_0, \tau_0}g - L_{\mathcal{H}}(f_0, \tau_0)\mathcal{U}_{f_0, \tau_0}g\| \leq \epsilon \quad (2.67)$$

où  $(\mathcal{U}_{f_0, \tau_0}g)(t) = \exp(j2\pi f_0 t)g(t - \tau_0)$ , conformément à la définition 1.26, et avec  $A_g(f_0, \tau_0)$  la fonction d'ambiguïté de  $g$  définie par

$$A_g(f_0, \tau_0) = \langle \check{g}, \mathcal{U}_{f_0, \tau_0}g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{g}^*(t)g(t - \tau_0)e^{j2\pi f_0 t} dt. \quad (2.68)$$

## 2.3.2 Lien avec les transmissions numériques

Supposons que l'on utilise un système de transmission basé sur une paire de familles de Weyl–Heisenberg biorthogonales :  $g_{m,n}(t) = \mathcal{U}_{mF_0, nT_0}g(t)$  et  $\check{g}_{m,n}(t) = \mathcal{U}_{mF_0, nT_0}\check{g}(t)$  avec  $\langle \gamma_{m,n}, \check{\gamma}_{m',n'} \rangle = \delta_{m,m'}\delta_{n,n'}$  et  $g(t)$  adaptée au canal de transmission  $\mathcal{H}$  tel qu'on vient de le définir. Alors, les signaux transmis à travers le canal de transmission s'écrivent sous la forme

$$s(t) = \sum_{m,n} c_{m,n}g_{m,n}(t) \quad (2.69)$$

avec  $c_{m,n} \in \mathbf{C}$  les symboles d'information transmis. Le signal reçu vaut alors

$$r(t) = \mathcal{H}s(t) = \sum_{m,n} c_{m,n}\mathcal{H}g_{m,n}(t) \approx \sum_{m,n} c_{m,n}L_{\mathcal{H}}(mF_0, nT_0)g_{m,n}(t). \quad (2.70)$$

En réception, ces symboles sont démodulés en effectuant le produit scalaire du signal reçu sur la base  $\{\check{g}_{m,n}\}$  et nous avons

$$\tilde{c}_{m,n} = \langle \check{g}_{m,n}, \mathcal{H}s \rangle \approx L_{\mathcal{H}}(mF_0, nT_0)c_{m,n} \quad (2.71)$$

---

4. *Linear Time Variant*

Ce résultat faisant apparaître une version échantillonnée du symbole de Weyl apporte un complément intéressant à la notion de structure propre approchée des canaux de transmission radiomobile introduite dans [Kozek 1992, Kozek 1997a, Jung 2007b]. Nous montrons ainsi qu'un choix de fonctions de modulation-démodulation adaptées à la structure du canal de transmission permet de limiter les interférences introduites par le canal de transmission doublement dispersif. Une telle adaptation sera détaillée dans le chapitre suivant à l'aide d'une étude statistique, dans le cas d'un émetteur-récepteur multiporteuse suréchantillonné.

## 2.4 Simplifications et exemples de modèles radiomobiles pratiques

La modélisation du canal de transmission comme un système linéaire variant dans le temps offre un cadre d'étude général qu'il convient de préciser, voire de simplifier, en fonction des applications à traiter. Nous considérons dans un premier temps une modélisation statistique de l'opérateur  $\mathcal{H}$ , en supposant la stationnarité au second ordre et la non-corrélation des diffuseurs. Nous présentons ensuite un exemple de modèle de propagation isotrope dans un plan riche en diffuseurs, représentatif de la propagation en environnement urbain *ad-hoc*. Au delà de ce scénario de propagation, une grande variété de modèles spécifiques s'appuient sur le formalisme développé jusqu'à présent. Citons par exemple [Bello 1973, Elnoubi 1992, Clarke 1997, Haas 2002] pour l'environnement aéronautique, [Bohn 1996, Vigneron 2008] pour l'environnement radiomobile tactique (bande VHF<sup>5</sup>), [Yang 2010] pour les transmissions marines.

### 2.4.1 Modèle stationnaire au sens large avec non-corrélation des diffuseurs

Sans connaissance exacte de l'environnement de propagation, l'opérateur  $\mathcal{H}$  est aléatoire, ce qui revient à dire que ses différents noyaux sont des fonctions aléatoires. Dans ce contexte, il est intéressant d'adopter une description statistique au second ordre du canal. D'une manière générale, son comportement se compose d'une partie déterministe ainsi que d'une partie aléatoire. La composante déterministe est représentée par les moyennes d'ensemble des fonctions caractéristiques du canal (ex. :  $E_{\mathcal{H}}\{K(t, t')\}$ ). La partie aléatoire est décrite par les fonctions d'autocorrélation des fonctions caractéristiques (fig. 2.9).

Le modèle WSSUS<sup>6</sup> introduit dans [Bello 1963] apporte un cadre d'intérêt pratique pour la caractérisation du canal au second ordre. Ce modèle repose sur les hypothèses de stationnarité au sens large (WSS<sup>7</sup>) et de non-corrélation des diffuseurs (US<sup>8</sup>). Tel que présenté dans

---

5. *Very High Frequency*

6. *Wide Sense Stationary and Uncorrelated Scattering*

7. *Wide Sense Stationary*

8. *Uncorrelated Scattering*

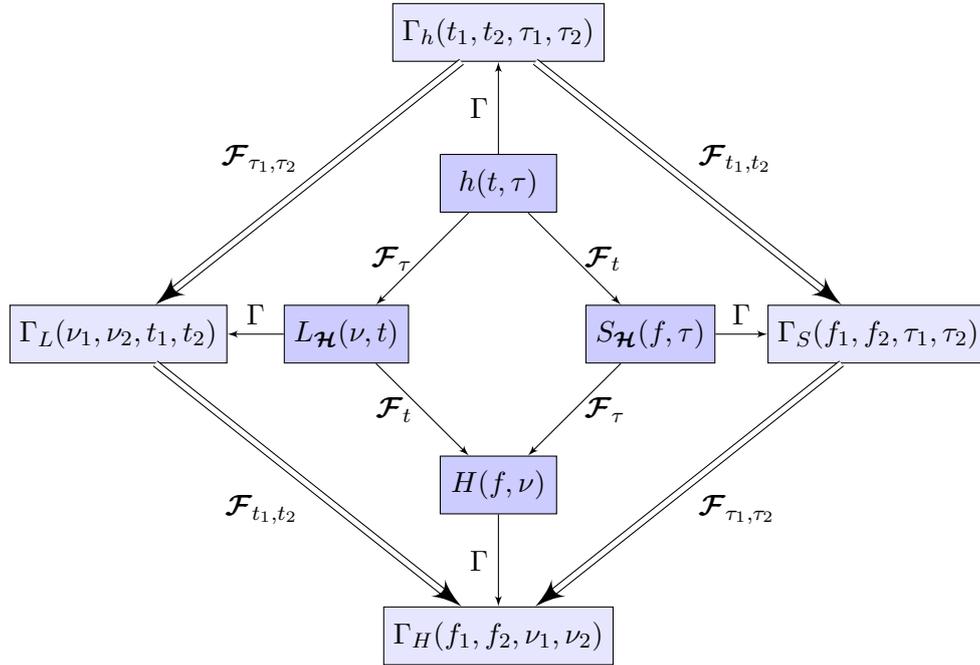


FIGURE 2.9 – Fonctions de corrélation associées à un canal de transmission.

[Roque 2010], les fonctions de corrélation s'écrivent

$$\Gamma_h(t_1, t_2; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}\{h^*(t_1, \tau_1)h(t_2, \tau_2)\} = C_h(t_1 - t_2, \tau_1)\delta(\tau_1 - \tau_2), \quad (2.72)$$

$$\Gamma_L(\nu_1, \nu_2; t_1, t_2) = \mathbb{E}\{L_{\mathcal{H}}^*(\nu_1, t_1)L_{\mathcal{H}}(\nu_2, t_2)\} = C_L(\nu_1 - \nu_2, t_1 - t_2), \quad (2.73)$$

$$\Gamma_S(f_1, f_2; \tau_1, \tau_2) = \mathbb{E}\{S_{\mathcal{H}}^*(f_1, \tau_1)S_{\mathcal{H}}(f_2, \tau_2)\} = C_S(f_1, \tau_1)\delta(\tau_1 - \tau_2)\delta(f_1 - f_2), \quad (2.74)$$

$$\Gamma_H(f_1, f_2; \nu_1, \nu_2) = \mathbb{E}\{H^*(f_1, \nu_1)H(f_2, \nu_2)\} = C_H(f_1, \nu_1 - \nu_2)\delta(f_1 - f_2) \quad (2.75)$$

avec

$$C_h(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_L(\nu, t)e^{j2\pi\nu\tau} d\nu, \quad (2.76)$$

$$C_S(f, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_L(\nu, t)e^{j2\pi(\nu\tau - ft)} d\nu dt, \quad (2.77)$$

$$C_H(f, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_L(\nu, t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (2.78)$$

La fonction  $C_S(f, \tau)$  est appelée fonction de diffusion, il s'agit d'une description statistique fréquemment utilisée qui caractérise complètement le canal WSSUS au second ordre. Nous pouvons montrer qu'une caractérisation équivalente peut être effectuée à l'aide de la fonction de corrélation fréquence-temps  $C_L(\nu, t)$ . Parmi les fonctions définies ci-dessus, plusieurs cas particuliers sont fréquemment étudiés ; ils sont reliés deux à deux par des transformées de Fourier [Sklar 1997a] :

- $C(\tau) = C_h(0, \tau)$  représente le profil d'intensité multitrajet, il mesure la dispersion temporelle moyenne du canal ;

- $C(f) = C_H(f, 0)$  représente le spectre Doppler d'un signal, il mesure la dispersion fréquentielle moyenne du canal ;
- $\Gamma(\Delta\nu) = C_L(\Delta\nu, 0)$  est la fonction de corrélation fréquentielle qui mesure la ressemblance de deux fréquences pures espacées de  $\Delta\nu$  ;
- $\Gamma(\Delta t) = C_L(0, \Delta t)$  est la fonction de corrélation temporelle qui mesure la ressemblance entre deux signaux identiques transmis à un intervalle de temps  $\Delta t$ .

Puisque les fonctions  $C(\tau)$ ,  $\Gamma(\Delta\nu)$  et  $C(f)$ ,  $\Gamma(\Delta t)$  sont respectivement liées entre elles par transformée de Fourier, elles sont dites duales.

La fonction de corrélation fréquentielle permet de définir la notion de bande de cohérence, notée  $(\Delta\nu)_c$ . Il s'agit d'une bande de fréquence à l'intérieur de laquelle toutes les composantes spectrales sont corrélées. En première approximation, les relations entre  $C(\tau)$  et  $\Gamma(\Delta\nu)$  nous permettent d'écrire

$$(\Delta\nu)_c \approx \frac{1}{\tau_{\max}} \quad (2.79)$$

où  $\tau_{\max}$  représente la dispersion temporelle maximale du canal de transmission.

La fonction de corrélation temporelle, permet de définir la notion de temps de cohérence, notée  $(\Delta t)_c$ . Il s'agit d'un intervalle de temps pendant lequel la réponse du canal est quasiment constante. Intuitivement, les relations entre  $C(f)$  et  $\Gamma(\Delta t)$  nous permettent d'écrire

$$(\Delta t)_c \approx \frac{1}{f_d} \quad (2.80)$$

où  $f_d$  représente la dispersion fréquentielle maximale du canal de transmission.

Un canal de transmission est dit sélectif en fréquence si la bande utilisée pour la transmission est supérieure à la bande de cohérence. Il est dit sélectif en temps si la durée symbole est supérieure au temps de cohérence [Sklar 1997b]. Les notions de bande de cohérence et de temps de cohérence sont à rapprocher de la notion de structure propre approchée d'un canal de transmission. Les relations (2.79) et (2.80) sont formulées de manières différentes selon les auteurs [Sklar 1997a] en fonction des applications visées. Elles reflètent une connaissance statistique partielle du canal de transmission en s'appuyant exclusivement sur les valeurs d'étalement maximales en temps et en fréquence, sans présumer de la distribution du délai et de l'écart Doppler.

### 2.4.2 Propagation isotrope dans un plan dense en diffuseurs

Considérons deux mobiles, équipés d'antennes basses, évoluant dans un environnement urbain et communiquant, à bande étroite, dans la gamme VHF/UHF. Dans un tel environnement de propagation, une vue directe entre l'émetteur et le récepteur est peu probable et la connaissance du terrain dans lequel ils évoluent est généralement limitée. Ainsi, nous supposons un canal de transmission aléatoire WSSUS dont la réponse impulsionnelle est composée de  $I$  trajets discrets, différemment atténués et retardés. Une telle approximation est généralement justifiée par des campagnes de mesures réalisées sur le terrain. D'après (2.48) et en

supposant un canal sans bruit, la relation d'entrée-sortie équivalente en bande de base s'écrit

$$r(t) = \sum_{i=1}^I \alpha_i(t) s(t - \tau_i) \quad (2.81)$$

avec  $\alpha_i(t)$  le gain complexe associé au  $i$ -ème trajet de retard  $\tau_i$ . Remarquons que le nombre de trajets ainsi que leurs retards respectifs sont choisis invariants dans le temps.

### 2.4.2.1 Distribution des amplitudes complexes $\alpha_i(t)$

Dans un environnement urbain, nous supposons que l'émetteur et le récepteur évoluent à proximité de diffuseurs, c'est-à-dire d'objets se comportant comme tels compte tenu de la bande de fréquence utilisée. Nous rappelons que le phénomène de diffusion se manifeste lorsque l'onde électromagnétique entre en contact avec des éléments de taille comparable à la longueur d'onde du signal émis. Nous schématisons les zones de diffusion autour de l'émetteur et du récepteur par des cercles, chacune comportant respectivement  $N_1$  et  $N_2$  diffuseurs (fig. 2.10a). L'aire des zones de diffusion est supposée suffisamment petite pour négliger le délai introduit par une propagation à l'intérieur de chacune d'elles. Dans ces conditions, en utilisant des antennes omni-directionnelles et en approximant la propagation dans un plan, le coefficient complexe associé au  $i$ -ème trajet s'écrit

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) = & \sum_{n_1=1}^{N_1} \rho_{i,n_1}^{(1)}(t) e^{j(\omega_{i,n_1}^{(1)}(t) + \phi_{i,n_1}^{(1)}(t))} \\ & \cdot \sum_{n_2=1}^{N_2} \rho_{i,n_2}^{(2)}(t) e^{j(\omega_{i,n_2}^{(2)}(t) + \phi_{i,n_2}^{(2)}(t))} \end{aligned} \quad (2.82)$$

où

- $\rho_{i,n_1}^{(1)}(t)$  et  $\rho_{i,n_2}^{(2)}(t)$  sont les gains réels des diffuseurs  $n_1$  et  $n_2$ , respectivement à proximité de l'émetteur et du récepteur.
- $\omega_{i,n_1}^{(1)}(t)$  et  $\omega_{i,n_2}^{(2)}(t)$  sont les termes de déplacement fréquentiel introduits par effet Doppler en raison du déplacement de l'émetteur et du récepteur. Nous pouvons écrire  $\omega_{n_1}^{(1)}(t) = 2\pi f_1 t \cos \beta_{i,n_1}^{(1)}$  où  $f_1$  est le décalage Doppler maximal introduit par le déplacement de l'émetteur,  $\beta_{i,n_1}^{(1)}$  est l'angle de départ du  $n_1$ -ème rayon par rapport au vecteur vitesse  $\mathbf{v}_1$ . Un développement similaire peut être réalisé pour le terme  $\omega_{i,n_2}^{(2)}(t)$ .
- $\phi_{i,n_1}^{(1)}(t)$  et  $\phi_{i,n_2}^{(2)}(t)$  sont des termes de phase qui dépendent de la fréquence centrale  $f_0$ , des délais de propagation dans les zones de diffusion et des interactions entre l'onde et la matière.

Sans connaissance parfaite du terrain, nous modélisons les termes de phase  $\phi_{i,n_1}^{(1)}(t)$  et  $\phi_{i,n_2}^{(2)}(t)$  comme des signaux aléatoires indépendants, uniformément distribués sur l'intervalle  $[0; 2\pi[$ . Cette hypothèse reste réaliste dans un environnement riche en diffuseurs ( $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ ) et si les phases  $\phi_{i,n_1}^{(1)}(t)$  et  $\phi_{i,n_2}^{(2)}(t)$  évoluent beaucoup pour un faible incrément de temps [Clarke 1968]. Puisque les amplitudes  $\rho_{i,n_1}^{(1)}(t)$  et  $\rho_{i,n_2}^{(2)}(t)$  sont indépendantes, le théorème de la limite centrale

nous permet d'écrire

$$\alpha_i(t) = \alpha_i^{(1)}(t)\alpha_i^{(2)}(t) \quad (2.83)$$

où  $\alpha_i^{(1)}(t)$  et  $\alpha_i^{(2)}(t)$  sont deux processus stochastiques gaussiens, centrés, caractérisés par leurs écarts types respectifs  $\sigma_{\alpha_i}^{(1)}$  et  $\sigma_{\alpha_i}^{(2)}$ . Ce modèle, est appelé *double-Rayleigh fading* en raison de la distribution des modules  $|\alpha_i^{(1)}(t)|$  et  $|\alpha_i^{(2)}(t)|$ . La densité de probabilité correspondante peut s'écrire

$$f(|\alpha_i(t)|) = \frac{|\alpha_i(t)|}{\left(\sigma_{\alpha_i}^{(1)}\right)^2 \left(\sigma_{\alpha_i}^{(2)}\right)^2} K_0 \left( \frac{|\alpha_i(t)|}{\sigma_{\alpha_i}^{(1)} \sigma_{\alpha_i}^{(2)}} \right) \quad (2.84)$$

où  $K_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel modifiée de la deuxième espèce et d'ordre zéro. La phase  $\arg\{\alpha_i(t)\}$  reste un signal stochastique uniforme sur l'intervalle  $[0; 2\pi[$ , indépendant du module [Patel 2005, Kovacs 2002]. Dans le cadre d'un scénario de relayage de type *amplify and forward* à plusieurs bonds, ce type de modèle est généralisé de sorte que  $\alpha_i(t)$  s'écrit comme un produit de plusieurs signaux aléatoires et le modèle est alors qualifié de *multiple-Rayleigh fading* [Andersen 2002].

Une simplification de ce modèle a déjà présenté plusieurs années auparavant avec les hypothèses  $\rho_{i,n_1}^{(1)}(t) = \rho_{i,n_2}^{(2)}(t) = 1$  et  $n_1 = n_2$  [Akki 1986]. Un tel scénario repose sur l'approximation d'un unique rayon incident par diffuseur dans la zone de diffusion à proximité du récepteur (fig. 2.10b). Il en résulte un modèle de *single-Rayleigh fading* dont la complexité de simulation reste beaucoup plus abordable.

Si l'émetteur est immobile et que son environnement proche ne comporte pas de diffuseurs (fig. 2.10c), nous retrouvons le modèle défini dans [Clarke 1968] et couramment utilisé pour rendre compte de la propagation dans les réseaux cellulaires, où la station de base est généralement située sur un point haut.

#### 2.4.2.2 Caractérisation du spectre Doppler

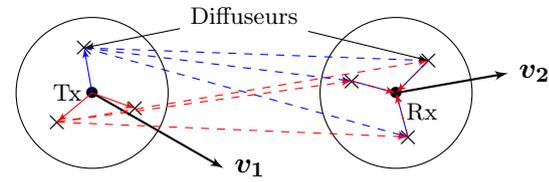
Considérons dans un premier temps un déplacement du récepteur sur une petite distance  $\xi$  le long d'un axe  $x$  (fig. 2.11). Soit  $\phi_{i,n_2}^{(2)}(t)$  la phase initiale au point  $x_1$  du rayon issu du  $n_2$ -ème diffuseur. En supposant une vitesse constante  $v_2$  et en notant  $\Delta t = \xi/v_2$ , le récepteur atteint  $x_2$  au temps  $t + \Delta t$  et le terme de phase correspondant s'écrit

$$\phi_{i,n_2}^{(2)}(t + \Delta t) = \phi_{i,n_2}^{(2)}(t) + 2\pi f_2 \Delta t \cos \beta_{i,n_2}^{(2)'} \quad (2.85)$$

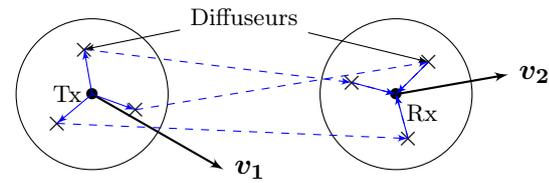
Au niveau de l'émetteur, le même scénario de déplacement donne un résultat similaire en terme de déphasage par rapport à l'écart Doppler maximal  $f_1$  et l'angle de départ  $\beta_{i,n_1}^{(1)'}$ .

L'hypothèse de stationnarité au second ordre permet d'écrire une fonction de corrélation des coefficients  $\alpha_i(t)$  indépendante du temps :

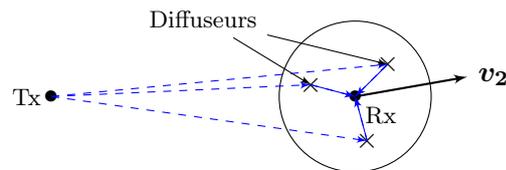
$$\Gamma_i(\Delta t) = \mathbb{E} \left\{ \left( \alpha_i^{(1)}(t) \right)^* \alpha_i^{(1)}(t + \Delta t) \right\} \mathbb{E} \left\{ \left( \alpha_i^{(2)}(t) \right)^* \alpha_i^{(2)}(t + \Delta t) \right\}. \quad (2.86)$$



(a) Diffusion complète en réception.

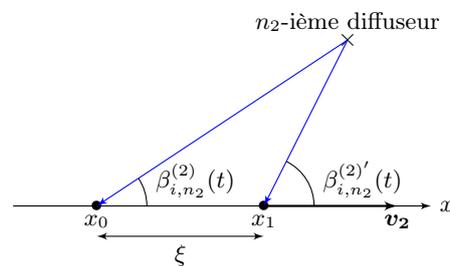


(b) Diffusion partielle en réception.



(c) Diffusion exclusivement en réception.

FIGURE 2.10 – Émetteur et récepteur dans un environnement riche en diffuseurs.

FIGURE 2.11 – Déplacement du récepteur sur une distance  $\xi$ .

Une diffusion confinée dans une zone proche des mobiles et un petit déplacement  $\xi$  dans cette zone justifie des amplitudes invariantes sur l'intervalle de temps  $\Delta t$ , tel que

$$\rho_{i,n_1}^{(1)}(t + \Delta t) \approx \rho_{i,n_1}^{(1)}(t) \quad (2.87)$$

$$\rho_{i,n_2}^{(2)}(t + \Delta t) \approx \rho_{i,n_2}^{(2)}(t). \quad (2.88)$$

En rappelant l'indépendance des termes de phase, nous pouvons écrire

$$\Gamma_i(\Delta t) = \frac{\left(4\sigma_{\alpha_i}^{(1)}\sigma_{\alpha_i}^{(2)}\right)^2}{N_1 N_2} \sum_{n_1=1}^{N_1} \mathbb{E} \left\{ e^{j2\pi f_1 \Delta t \cos \beta_{i,n_1}^{(1)'}} \right\} \sum_{n_2=1}^{N_2} \mathbb{E} \left\{ e^{j2\pi f_2 \Delta t \cos \beta_{i,n_2}^{(2)'}} \right\}. \quad (2.89)$$

Tel qu'il est expliqué dans [Patel 2006], un grand nombre de diffuseurs et l'utilisation d'antennes omni-directionnelles justifie la relation

$$\Gamma_i(\Delta t) = \frac{\left(4\sigma_{\alpha_i}^{(1)}\sigma_{\alpha_i}^{(2)}\right)^2}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi f_1 \Delta t \cos \beta_i^{(1)'}} d\beta_i^{(1)'} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j2\pi f_2 \Delta t \cos \beta_i^{(2)'}} d\beta_i^{(2)'} \quad (2.90)$$

$$= \left(4\sigma_{\alpha_i}^{(1)}\sigma_{\alpha_i}^{(2)}\right)^2 J_0(2\pi f_1 \Delta t) J_0(2\pi f_2 \Delta t) \quad (2.91)$$

où  $J_0(\cdot)$  représente la fonction de Bessel de la première espèce, d'ordre zéro. La transformée de Fourier de  $\Gamma_i(\Delta t)$  permet d'exprimer le spectre Doppler qui décrit la distribution du décalage fréquentiel introduit par le déplacement de l'émetteur et du récepteur et qui se note

$$C(f) = \frac{\left(4\sigma_{\alpha_i}^{(1)}\sigma_{\alpha_i}^{(2)}\right)^2}{\pi^2 \sqrt{f_1 f_2}} K \left( \sqrt{\frac{(f_1 + f_2)^2 - f^2}{4f_1 f_2}} \right) \quad (2.92)$$

avec  $K(\cdot)$  l'intégrale elliptique complète de la première espèce. Notons que  $C(f)$  présente des valeurs infinies pour  $|f| = f_1 - f_2$  (fig. 2.12).

Du point de vue des caractéristiques des évanouissements, un scénario de transmission mobile-vers-mobile dans un environnement urbain, sans visibilité directe entre l'émetteur et le récepteur constitue un cas particulier plus contraignant que la configuration base-vers-mobile puisque le signal aléatoire  $\alpha_i(t)$  résulte du produit de deux signaux aléatoires gaussiens indépendants. Du point de vue du décalage Doppler, le scénario mobile-vers-mobile introduit plus de degrés de liberté que le cas base-vers-mobile. Par exemple, si les deux stations se déplacent à la même vitesse, leur vitesse relative peut être nulle, impliquant un décalage Doppler nul.

#### Exemple 2.1 (Modèle COST 207 TUx6)

*Le groupe de standardisation COST 207 a établi plusieurs modèles de canaux aléatoires WSSUS, principalement motivés par le développement des applications de téléphonie mobile [Failli 1988]. Le domaine d'application de ces modèles concerne principalement la gamme de fréquence UHF et la configuration base-vers-mobile (single-Rayleigh fading avec spectre Doppler en "U"). Notons que ce modèle constitue un cas particulier du modèle mobile-vers-mobile que nous avons développé précédemment. Nous supposons ici que seul l'émetteur ou le récepteur se déplace et que seule l'une des deux parties est située dans une zone riche en diffuseurs.*

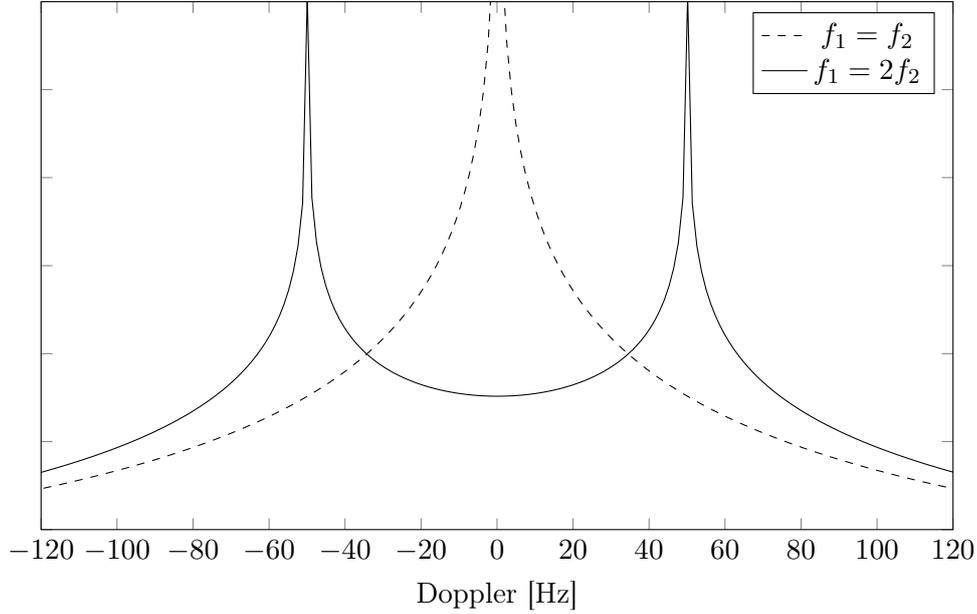


FIGURE 2.12 – Comparaison du spectre Doppler dans un scénario de transmission mobile-vers-mobile avec  $f_1/f_2 \in \{1, 2\}$ .

Nous présentons ici le modèle Typical Urbain (TU) à six trajets dont les retards et les gains moyens sont donnés dans le tableau 2.2.

Trajet $i$	Retard $\tau_i$ [ $\mu$ s]	Gain moyen $G_i$ [dB]
1	0	-3
2	0,2	0
3	0,5	-2
4	1,6	-6
5	2,3	-8
6	5	-10

TABLE 2.2 – Description du profil d'intensité multitrajet du modèle TUx6.

Le modèle TUx6 fait intervenir deux types de spectre Doppler (fig. 2.13). Le premier est un spectre de Jakes qui affecte les deux premiers trajets et qui se définit par

$$C_{\{1,2\}}(f) = \frac{1}{\pi f_d \sqrt{1 - (f/f_d)^2}} \chi_{]-f_d; f_d[}(f) \quad (2.93)$$

avec  $f_d$  le décalage Doppler maximal. Les quatre derniers trajets utilisent un spectre Doppler bi-gaussien défini par :

$$C_{\{3,4,5,6\}}(f) = \frac{1}{G_1 + G_2} \left[ \frac{G_1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(f-f_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{G_2}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(f-f_2)^2}{2\sigma_2^2}} \right] \chi_{]-f_d; f_d[}(f) \quad (2.94)$$

où les couples  $f_1, f_2$  et  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  représentent respectivement les fréquences centrales et les variances associées au décalage Doppler. Les gains  $G_1$  et  $G_2$  permettent de configurer la puissance

renvoyée par les diffuseurs Doppler. Le tableau 2.3 résume les paramètres des spectres Doppler bi-gaussiens associés aux trajets 3 à 6.

Trajet	Paramètres
3	$f_1 = -0,8f_d, f_2 = 0,4f_d, \sigma_1^2 = 0,05, \sigma_2^2 = 0,1, G_1 = 0,1253, G_2 = 0,0251$
4	$f_1 = -0,8f_d, f_2 = 0,4f_d, \sigma_1^2 = 0,05, \sigma_2^2 = 0,1, G_1 = 0,1253, G_2 = 0,0251$
5	$f_1 = 0,7f_d, f_2 = -0,4f_d, \sigma_1^2 = 0,1, \sigma_2^2 = 0,15, G_1 = 0,1253, G_2 = 0,0079$
6	$f_1 = 0,7f_d, f_2 = -0,4f_d, \sigma_1^2 = 0,1, \sigma_2^2 = 0,15, G_1 = 0,1253, G_2 = 0,0079$

TABLE 2.3 – Paramètres des spectres Doppler bi-gaussiens associés aux trajets 3 à 6 du modèle TUx6.

En associant le profil d'intensité multitrajet aux spectres Doppler, nous pouvons caractériser la canal WSSUS au second ordre à l'aide de sa fonction de diffusion

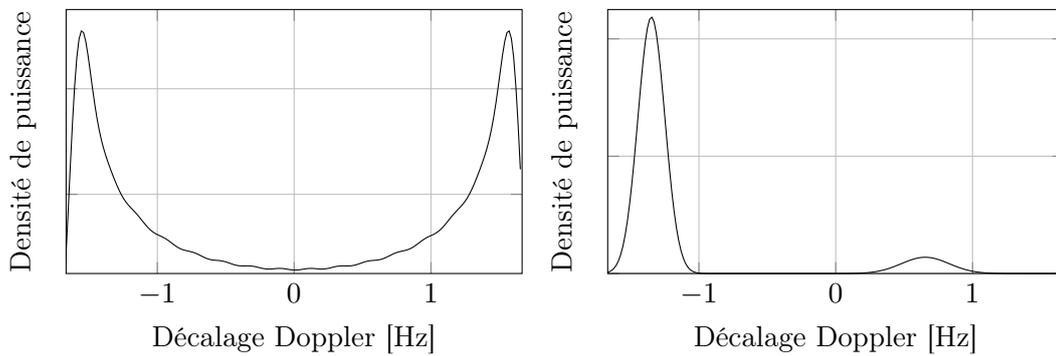
$$C_S(f, \tau) = \sum_{l=1}^6 C_l(f) G_l \delta(\tau - \tau_l). \quad (2.95)$$

Nous distinguons par la suite deux scénarios de mobilité différents. En fonction de la fréquence porteuse  $f_0$  choisie, les vitesses maximales des mobiles donnent lieu à deux décalages Doppler maximum, choisis tel que  $f_d^{(1)} = 1,67$  Hz et  $f_d^{(2)} = 194$  Hz (fig. 2.14).

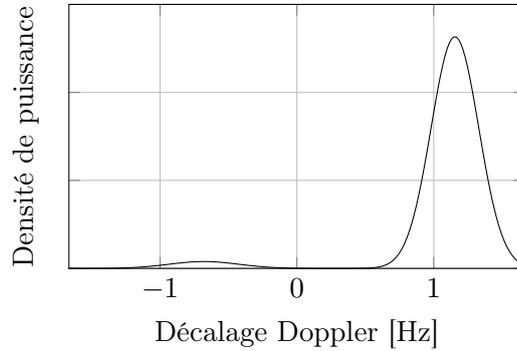
Supposons une transmission à bande étroite, de largeur  $B = 8$  MHz, de 8192 symboles de modulation<sup>9</sup>. Cette opération de limitation de bande peut être prise en compte dans le modèle de canal, nous obtenons ainsi une réponse impulsionnelle évolutive interpolée (fig. 2.15).

D'après les notions de bande de cohérence et temps de cohérence telles que nous les avons définies plus haut, le canal TUx6 est sélectif en fréquence mais pas en temps dans le cadre du scénario de faible mobilité. En revanche, il est à la fois sélectif en temps et en fréquence pour le scénario de forte mobilité. La sélectivité du canal est illustrée par les réponses fréquentielles évolutives (fig. 2.15).

9. Dans le contexte présenté ici, nous pouvons approximer la rapidité de modulation à  $B$ .

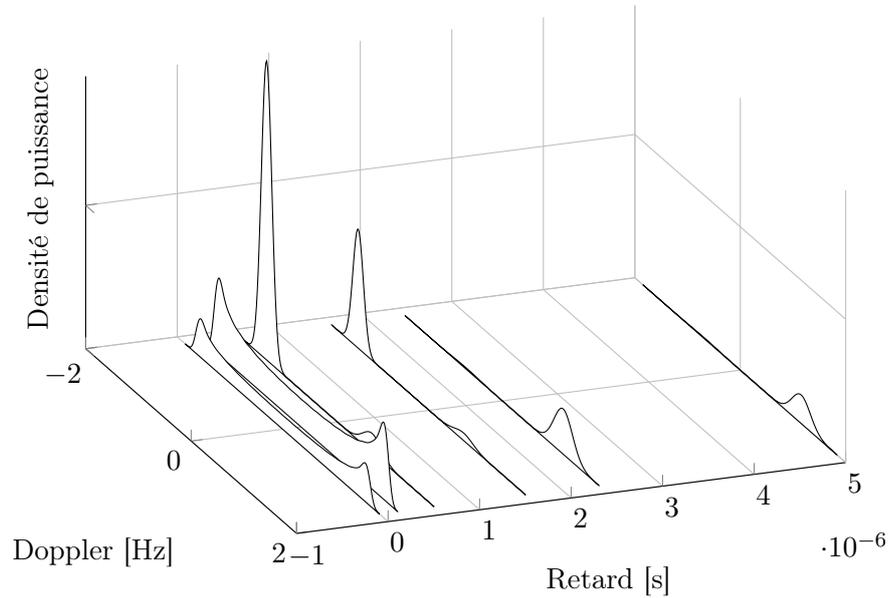
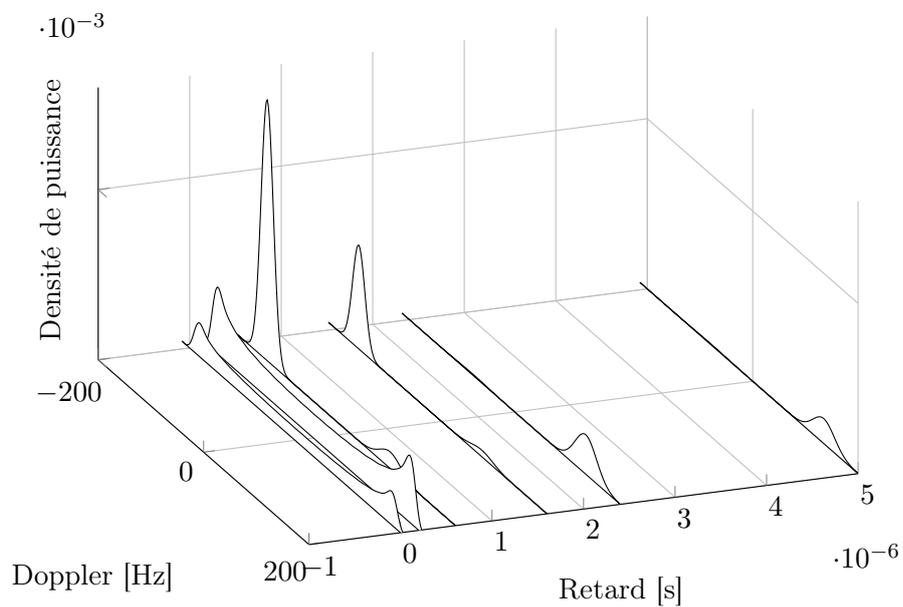


(a) Spectre Doppler des trajets 1 et 2.      (b) Spectre Doppler des trajets 3 et 4.



(c) Spectre Doppler des trajets 5 et 6.

FIGURE 2.13 – Estimation des spectres Doppler du canal TUx6 pour  $f_d = 1,667$  Hz.

(a) Faible mobilité avec  $f_d^{(1)} = 1,67$  Hz.(b) Forte mobilité avec  $f_d = 194$  Hz.FIGURE 2.14 – Fonctions de diffusion pour différentes valeurs de  $f_d$ .

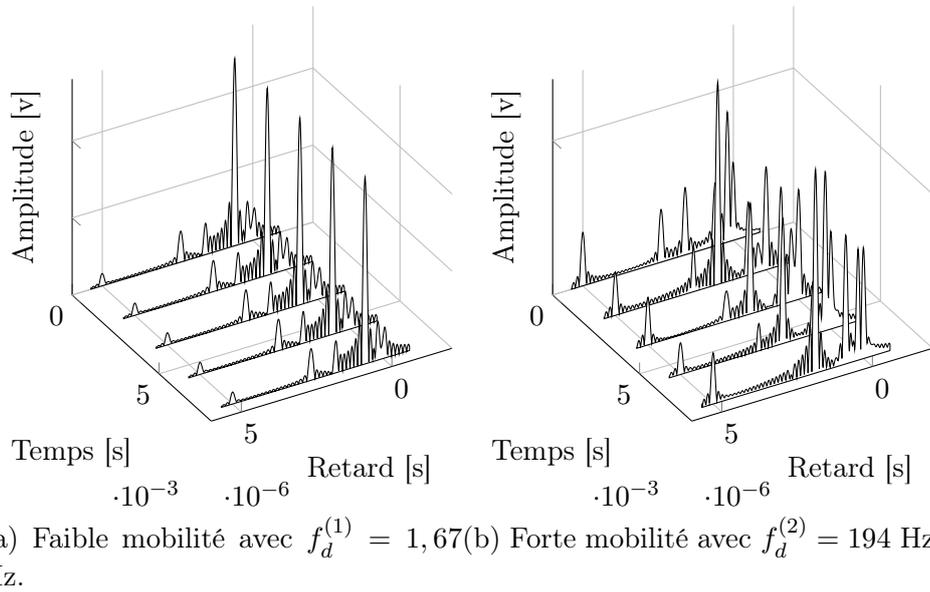


FIGURE 2.15 – Réponses impulsionnelles en cascade du canal TUx6 à bande limitée.

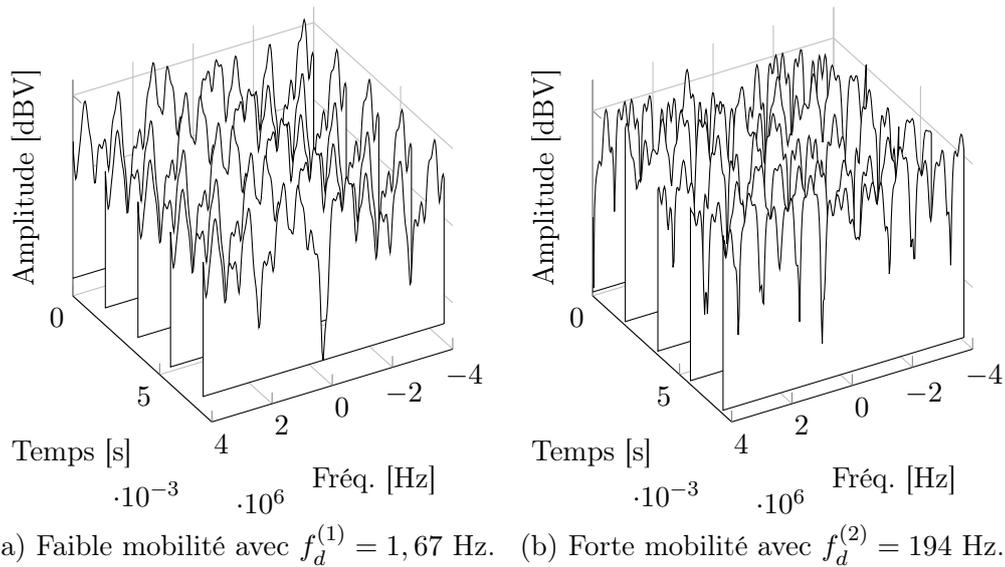


FIGURE 2.16 – Réponses fréquentielles en cascade du canal TUx6 à bande limitée.

## 2.5 Canal discret équivalent

La simulation de chaînes de transmission requiert l'élaboration de modèles de canaux formulés à temps discret. Nous nous intéressons ici aux canaux radiomobiles WSSUS à trajets discrets. La formulation d'une relation d'entrée-sortie à temps discret repose sur la notion de filtrage anti-repliement. Ainsi, nous considérons une bande  $B$  allouée pour la transmission et centrée autour d'une fréquence  $f_0$ , de telle sorte que la transmission soit à bande étroite. Cette dernière hypothèse, nous permet de raisonner à l'aide de l'enveloppe complexe des signaux.

### 2.5.1 Canal discret équivalent à bruit additif blanc gaussien

Tel que nous l'avons défini au début de ce chapitre (p. 44),  $b(t)$  est un signal aléatoire circulaire gaussien centré, blanc dans la bande  $B$  et stationnaire au second ordre. Sa fonction de corrélation s'écrit

$$\Gamma_b(\tau) = E\{b^*(t)b(t - \tau)\} = 2N_0B\text{sinc}(B\tau). \quad (2.96)$$

où  $2N_0$  représente la densité spectrale de puissance bilatérale du bruit complexe dans la bande  $[-B/2; B/2]$ . En posant alors  $b[k] = \sqrt{1/B}b(k/B)$ , conformément à la notation définie par (1.36), on obtient donc que

$$\Gamma_b[l] = E\{b^*[k]b[k - l]\} = 1/B \Gamma_b(l/B) = 2N_0\delta_{l,0}, \quad (2.97)$$

ce qui signifie que les échantillons de bruit demeurent non-corrélés, avec une variance notée  $\sigma_b^2 = \Gamma_b[0] = 2N_0$ . Rappelons par ailleurs que l'hypothèse de bande limitée nous permet de reconstruire le signal de bruit  $b(t)$  comme une somme infinie d'échantillons [Whittaker 1915, Shannon 1949] et nous avons

$$b(t) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} b(l/B)\text{sinc}(Bt - l) = \sqrt{B} \sum_{l \in \mathbf{Z}} b[l]\text{sinc}(Bt - l). \quad (2.98)$$

### 2.5.2 Canal discret équivalent sélectif en temps et en fréquence

Soit un canal de transmission multitrajet variant dans le temps, supposé stationnaire au second ordre avec des diffuseurs non-corrélés et caractérisé par sa réponse impulsionnelle

$$h(t, \tau) = \sum_{i=1}^I \alpha_i(t)\delta(\tau - \tau_i) \quad (2.99)$$

avec

$$E\{\alpha_i(t)^* \alpha_{i'}(t - \tau)\} = \Gamma_i(\tau)\delta_{i,i'}. \quad (2.100)$$

Sachant que la transmission occupe une bande  $B$ , nous pouvons exprimer  $s(t)$  en fonction de ses échantillons à l'aide de la formule d'interpolation de Whittaker–Shannon

$$s(t) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} s(l/B)\text{sinc}(Bt - l). \quad (2.101)$$

Ainsi, le signal  $s(t)$  retardé d'un délai  $\tau$  s'exprime par

$$s(t - \tau) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} s(l/B) \text{sinc}(Bt - B\tau - l). \quad (2.102)$$

En posant  $t = k/B$ , nous avons

$$s(k/B - \tau) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} s(l/B) \text{sinc}(k - B\tau - l) \quad (2.103)$$

$$= \sum_{l \in \mathbf{Z}} s((k - l)/B) \text{sinc}(B\tau - l). \quad (2.104)$$

D'après la relation d'entrée-sortie, nous pouvons exprimer le signal reçu échantillonné

$$r(k/B) = \int_{\mathbf{R}} h(k/B, \tau) s(k/B - \tau) d\tau \quad (2.105)$$

$$= \int_{\mathbf{R}} h(k/B, \tau) \sum_{l \in \mathbf{Z}} s((k - l)/B) \text{sinc}(B\tau - l) d\tau \quad (2.106)$$

$$= \sqrt{1/B} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \tilde{\alpha}_l(k/B) s((k - l)/B) \quad (2.107)$$

avec

$$\tilde{\alpha}_l(k/B) = \sqrt{B} \int_{\mathbf{R}} h(k/B, \tau) \text{sinc}(B\tau - l) d\tau. \quad (2.108)$$

Si la réponse impulsionnelle évolutive comporte  $I$  trajets discrets, à retards invariants, nous obtenons la simplification

$$\tilde{\alpha}_l(k/B) = \sqrt{B} \int_{\mathbf{R}} \sum_{i=1}^I \alpha_i(k/B) \delta(\tau - \tau_i) \text{sinc}(B\tau - l) d\tau \quad (2.109)$$

$$= \sqrt{B} \sum_{i=1}^I \alpha_i(k/B) \text{sinc}(B\tau_i - l). \quad (2.110)$$

d'où

$$r(k/B) = \sqrt{1/B} \sum_{l \in \mathbf{Z}} s((k - l)/B) \tilde{\alpha}_l(k/B). \quad (2.111)$$

En notant  $r[k] = \sqrt{1/B} r(k/B)$ ,  $\tilde{\alpha}_l[k] = \sqrt{1/B} \tilde{\alpha}_l(k/B)$  et  $s[k - l] = \sqrt{1/B} s((k - l)/B)$ , nous obtenons finalement

$$r[k] = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \tilde{\alpha}_l[k] s[k - l]. \quad (2.112)$$

Bien que le modèle de canal initial (à bande infinie) comporte une réponse impulsionnelle évolutive à  $I$  trajets discrets représentés par les coefficients  $\alpha_l[k]$ , nous remarquons que la relation d'entrée-sortie discrète fait intervenir une infinité de coefficients complexes  $\tilde{\alpha}_l[k]$  en

raison du filtrage anti-repliement. En pratique, la séquence  $\{\tilde{\alpha}_l[k]\}_{k \in \mathbf{Z}}$  est tronquée à  $L$  coefficients lorsque  $\{\tilde{\alpha}_l[k]\}_{l > L} \approx 0$  [Iskander 2008]. Par ailleurs, l'opération de filtrage introduit de la corrélation entre les coefficients et nous avons, d'après (2.100)

$$\mathbb{E}\{\tilde{\alpha}_l^*[k]\tilde{\alpha}_{l'}[k']\} = \Omega_{l,l'}[k - k'] \quad (2.113)$$

avec

$$\Omega_{l,l'}[k - k'] = \sum_{i=1}^I \text{sinc}(B\tau_i - l)\text{sinc}(B\tau_i - l')\Gamma_i((k - k')/B). \quad (2.114)$$

Cependant, si  $B \gg 1/\min_i\{\tau_{i+1} - \tau_i\}$ , nous pouvons considérer la corrélation comme étant négligeable pour les coefficients  $\tilde{\alpha}_l[k]$ .

## Synthèse du chapitre

Nous considérons dans un premier temps un système de transmission, à bande étroite, sur onde porteuse avec un canal à bruit blanc additif. En s'appuyant sur des considérations physiques, nous montrons que le signal transmis à travers un canal radiomobile est non seulement soumis à un bruit additif, mais aussi à des atténuations dépendant du temps et de la fréquence. Ceci nous amène à déterminer une structure propre approchée du canal de transmission en faisant l'hypothèse qu'il peut être modélisé comme un système linéaire évolutif. Sans connaissance parfaite de l'environnement de propagation, un tel système revêt un caractère aléatoire. Pour simplifier son analyse, nous supposons que celui-ci est stationnaire au sens large et que les diffuseurs sont non corrélés. Enfin, dans le but de simuler le comportement de tels canaux, nous définissons leur équivalent à temps discret.

Ce chapitre précise donc la manière dont les perturbations introduites par un canal radiomobile peuvent être représentées en bande de base à temps continu ou à temps discret. Nous obtenons ainsi le formalisme utilisé dans la suite de ce document. Nous proposons dans ce contexte un modèle de canal mobile-vers-mobile, en supposant un environnement riche en diffuseurs au niveau de l'émetteur et du récepteur, publié dans [Roque 2012b]. Un tel développement généralise les modèles traditionnellement utilisés par les applications cellulaires (ex. : modèle de Clarke) et permet de rendre compte de la propagation dans les réseaux mobiles *ad-hoc*. Un autre résultat de cette étude découle l'analyse de la structure propre approchée des canaux radiomobiles. Nous montrons en effet que les valeurs propres approchées de tels canaux sont les échantillons en temps et en fréquence du symbole de Weyl et que les fonctions propres associées sont des familles de Weyl–Heisenberg aux caractéristiques temps-fréquence bien choisies. Une telle structure propre approchée peut être mise en œuvre à l'aide d'un système multiporteuse.



# Émetteur-récepteur multiporteuse BFDM/QAM

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Structure de l'émetteur-récepteur multiporteuse</b>	<b>74</b>
3.1.1	Émetteur BFDM/QAM	74
3.1.2	Récepteur BFDM/QAM	76
3.1.3	Émetteur-récepteur causal	79
<b>3.2</b>	<b>Gain complexe du système en présence d'un canal doublement sélectif</b>	<b>79</b>
<b>3.3</b>	<b>Règles d'adaptation des impulsions de mise en forme au canal WSSUS</b>	<b>84</b>
3.3.1	Expression du problème d'optimisation	85
3.3.2	Maximisation du terme de signal utile	88
3.3.3	Minimisation des termes de bruit et d'interférences	90
<b>3.4</b>	<b>Système équivalent à temps discret</b>	<b>94</b>
3.4.1	Émetteur-récepteur à temps discret	94
3.4.2	Émetteur-récepteur à temps discret causal	97
3.4.3	Gain complexe du système discret équivalent	97

Les canaux de transmission radiomobiles peuvent être généralement considérés comme des systèmes linéaires variant dans le temps. Par conséquent, ils admettent une structure propre approchée, tel qu'évoqué au cours du chapitre précédent (partie 2.3, page 54). Cela signifie qu'il existe un système de transmission capable de transformer le canal radiomobile en un système linéaire quasi-diagonal qui admet, la plupart du temps, un système inverse (ou pseudo-inverse) facilement calculable.

Dans le cas radiomobile, une fonction prototype de mise en forme translatée en temps et en fréquence peut constituer une fonction propre approchée du canal. Ainsi, les émetteurs-récepteurs multiporteuses semblent répondre à la problématique soulevée. En particulier, nous restreignons notre étude aux systèmes de multiplexage biorthogonal en fréquence, sur modulation d'amplitude en quadrature (BFDM<sup>1</sup>/QAM). Ces derniers permettent la reconstruction parfaite des symboles émis en présence d'un canal idéal. De plus l'utilisation de réseaux temps-fréquence à densité sous-critique permet de spécifier des impulsions de mise en forme non-rectangulaires, potentiellement adaptées aux caractéristiques du canal, tout en conservant

1. *Biorthogonal Frequency Division Multiplexing*

un bonne efficacité spectrale par rapport aux systèmes à multiplexage fréquentiel plus généraux. Notons qu'il existe des systèmes de transmission multiporteuses non-biorthogonaux qui ne garantissent pas la reconstruction parfaite des symboles émis en présence d'un canal idéal. Nous excluons également les schémas de transmission multiporteuses basés sur la modulation d'amplitude en quadrature décalée (OQAM<sup>2</sup>) dont les stratégies de mise en forme et d'égalisation diffèrent de celles présentées ici.

Au cours de ce chapitre, nous présentons dans un premier temps la structure générale d'un émetteur-récepteur multiporteuse de type BFDM/QAM. En considérant un canal radiomobile, nous exprimons ses relations d'entrée-sortie en mettant en évidence les termes de signal utile, bruit et interférence. Dans ce contexte, nous proposons de maximiser la puissance moyenne du signal utile et de minimiser celle de l'interférence et du bruit. Enfin, nous développons un équivalent à temps discret de la chaîne de transmission multiporteuse. Le chapitre se termine par la discrétisation du système de transmission multiporteuses. Nous pouvons alors introduire la notion de suréchantillonnage du système que nous relierons à la densité du réseau temps-fréquence définie dans le cas continu. Afin d'aboutir à un système réalisable, nous présentons les conditions de reconstruction parfaite dans le cas d'un émetteur-récepteur multiporteuses causal.

### 3.1 Structure de l'émetteur-récepteur multiporteuse

L'émetteur multiporteuse a pour but de répartir l'information en temps et en fréquence. Cette technique de transmission permet d'isoler des zones du plan temps-fréquence affectées différemment par le canal radiomobile. Cela est notamment utile dans le cas de l'allocation dynamique de puissance [Krongold 2000], du choix du nombre de bits par symbole [Wyglinski 2005], ou de la configuration du codeur correcteur d'erreurs [Le Floch 1995].

Nous présentons ici une chaîne de transmission multiporteuse équivalente en bande de base, incluant un canal doublement dispersif bruité. Nous exprimons notamment le rapport signal sur bruit plus interférence pour chaque sous-porteuse, sans détailler les techniques de traitement différencié de l'information en fonction du canal doublement dispersif.

#### 3.1.1 Émetteur BFDM/QAM

Soit une source d'information binaire qui délivre des mots de  $n_b$  bits. À chaque mot est associé un nombre complexe  $c_{m,n} \in \mathcal{C}_{n_b}$ , appelé symbole avec  $(m, n) \in \mathbf{I}$  et  $\mathbf{I} \subset \mathbf{Z}^2$ . L'ensemble  $\mathcal{C}_{n_b}$  constitue une constellation, définie telle que  $\text{Card}\{\mathcal{C}_{n_b}\} = 2^{n_b}$  (ex. : modulation d'amplitude en quadrature à  $2^{n_b}$  états). En supposant un procédé de codage approprié, les symboles sont considérés comme indépendants et identiquement distribués.

Afin de répartir les symboles en temps et en fréquence, nous utilisons un réseau à deux

---

2. *Offset Quadrature Amplitude Modulation*

dimensions défini par

$$\mathbf{\Lambda} = \left\{ \mathbf{G} \begin{pmatrix} m & n \end{pmatrix}^T, \quad (m, n) \in \mathbf{I} \right\}. \quad (3.1)$$

avec

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & T_0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

où  $T_0$  et  $F_0$  représentent respectivement l'espacement temporel et fréquentiel minimal dans le plan temps-fréquence. Le réseau temps-fréquence ainsi obtenu a une structure rectangulaire et sa densité s'exprime par  $\rho(\mathbf{\Lambda}) = 1/|\det(\mathbf{G})| = 1/F_0T_0$ . Notons qu'une telle structure rectangulaire est fixée par commodité et qu'il reste possible d'utiliser d'autres motifs [Strohmer 2003].

Dans tous les cas, le système de transmission est dit

- à densité sous-critique si  $\rho(\mathbf{\Lambda}) < 1$  ;
- à densité critique si  $\rho(\mathbf{\Lambda}) = 1$  ;
- à densité sur-critique si  $\rho(\mathbf{\Lambda}) > 1$ .

Considérons une fonction  $g(t) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R})$ , appelée fonction prototype d'émission. La famille  $\{(\mathbf{U}_{mF_0, nT_0}g)(t)\}_{(mF_0, nT_0) \in \mathbf{\Lambda}}$  constitue une famille de Weyl–Heisenberg qui permet de définir la famille  $\{g_{m,n}(t)\}_{(m,n) \in \mathbf{I}}$  par

$$g_{m,n}(t) = (\mathbf{U}_{mF_0, nT_0}g)(t)e^{j\phi_{m,n}} \quad (3.3)$$

$$= g(t - nT_0)e^{j2\pi mF_0t}e^{j\phi_{m,n}}. \quad (3.4)$$

où  $\phi_{m,n}$  est un terme de déphasage quelconque.

Le signal en sortie de l'émetteur multiporteuse s'écrit alors

$$s(t) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}} c_{m,n}g_{m,n}(t). \quad (3.5)$$

En pratique,  $m$  et  $n$  représentent respectivement l'indice de sous-porteuse et l'indice de bloc. Les constantes  $F_0$  et  $T_0$  définissent quant à elles l'espacement élémentaire entre sous-porteuses et l'espacement élémentaire entre blocs. De manière équivalente, en notant  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$ , le signal émis s'écrit

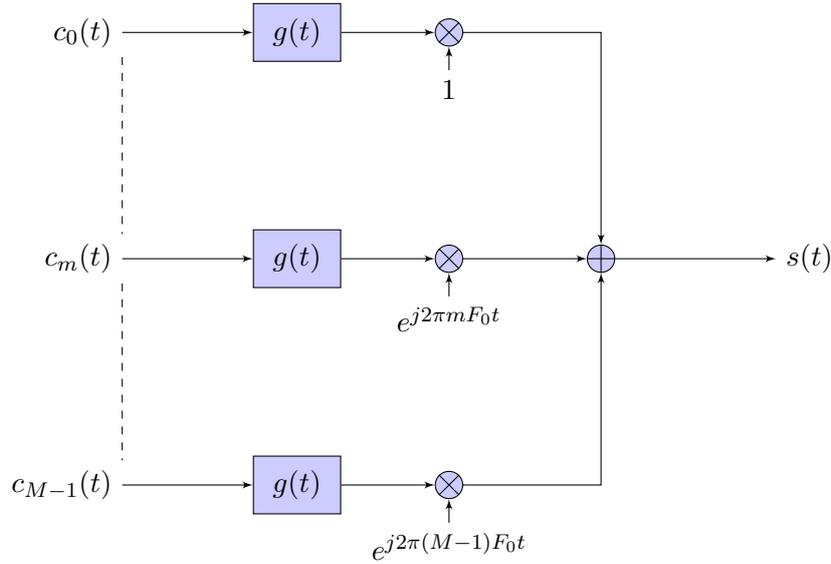
$$s(t) = \sum_{m \in \mathbf{I}_1} s_m(t)e^{j2\pi mF_0t} \quad (3.6)$$

avec le signal transmis sur la voie  $m$  défini par  $s_m(t) = (c_m * g)(t)$ , en notant

$$c_m(t) = \sum_{n \in \mathbf{I}_2} c_{m,n}e^{j\phi_{m,n}}\delta(t - nT_0). \quad (3.7)$$

Une telle écriture présente l'avantage de faire apparaître une opération de filtrage et met en évidence le schéma de réalisation de l'émetteur (fig. 3.1).

La théorie des familles de Weyl–Heisenberg montre que la reconstruction parfaite des symboles émis est possible pour des systèmes à densité critique ou sous-critique [Kozek 1998, Feichtinger 1998, Strohmer 2001]. À densité critique, le théorème de Balian–Low stipule que le produit des moments du second ordre en temps et en fréquence de la fonction prototype  $g$  est infini. Or, notre analyse de la structure propre du canal radiomobile souligne l'intérêt de maîtriser les caractéristiques temps-fréquence des impulsions prototypes. De telles impulsions peuvent être utilisées dans un système à densité sous-critique, au prix d'une diminution de l'efficacité spectrale.

FIGURE 3.1 – Émetteur multiporteuse à temps continu avec  $\mathbf{I} = \{0, \dots, M-1\} \times \mathbf{Z}$ .

### 3.1.2 Récepteur BFDM/QAM

Dans le cas d'un canal de transmission idéal, sans bruit, les symboles  $c_{m,n}$  peuvent être reconstruits parfaitement lorsque la famille  $\{g_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{I}}$  constitue une base de Riesz de l'espace qu'elle génère. Dans ce cas, la base duale, notée  $\{\check{g}_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathbf{I}}$  est telle que,  $\forall (p,q) \in \mathbf{I} = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2$ , nous avons

$$\check{g}_{p,q}(t) = \check{g}(t - qT_0)e^{j2\pi p F_0 t} e^{j\phi_{p,q}}. \quad (3.8)$$

Les symboles estimés s'écrivent alors comme la projection du signal reçu  $r(t) = s(t)$  sur les éléments de cette base :

$$\tilde{c}_{p,q} = \langle \check{g}_{p,q}, r \rangle = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}} c_{m,n} \langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle. \quad (3.9)$$

La reconstruction parfaite est donc assurée si  $\langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle = \delta_{m,p} \delta_{n,q}$ ,  $\forall (m,n), (n,q) \in \mathbf{I}$ . Dans ces conditions, le système de transmission est dit biorthogonal, cela implique que  $\rho(\mathbf{\Lambda}) = 1/F_0 T_0 \leq 1$ . Dans le cas où  $\check{g} = g$ , le système de transmission est dit orthogonal. On notera que le choix des termes de déphasage  $\phi_{m,n}$  à l'émission et à la réception est sans conséquence sur les conditions de biorthogonalité du système. De plus, ces termes de déphasage ne modifient pas non plus les moments temporels et fréquentiels des fonctions d'émission et de réception. Ainsi, ils pourront être choisis de manière totalement arbitraire, notamment pour simplifier les expressions. C'est la raison pour laquelle, sauf indication contraire, nous posons  $\phi_{m,n} = 0$ ,  $\forall (m,n) \in \mathbf{I}$ .

Nous pouvons alors noter  $\tilde{c}_{p,q} = (\check{g}^H * r_p)(qT_0)$  avec  $\check{g}^H(t) = \check{g}^*(-t)$  en fonction du signal reçu sur la voie  $p$ , exprimé par  $r_p(t) = r(t) \exp(-j2\pi p F_0 t)$ , pour  $p \in \mathbf{I}_1$ . Par conséquent, le flux de symboles estimés sur la voie  $p$  s'exprime par

$$\tilde{c}_p(t) = \sum_{q \in \mathbf{I}_2} \tilde{c}_{p,q} \delta(t - qT_0). \quad (3.10)$$

Le schéma de réalisation du récepteur fait donc apparaître, pour chaque voie, les opérations de transposition de fréquence, filtrage et échantillonnage (fig. 3.2).

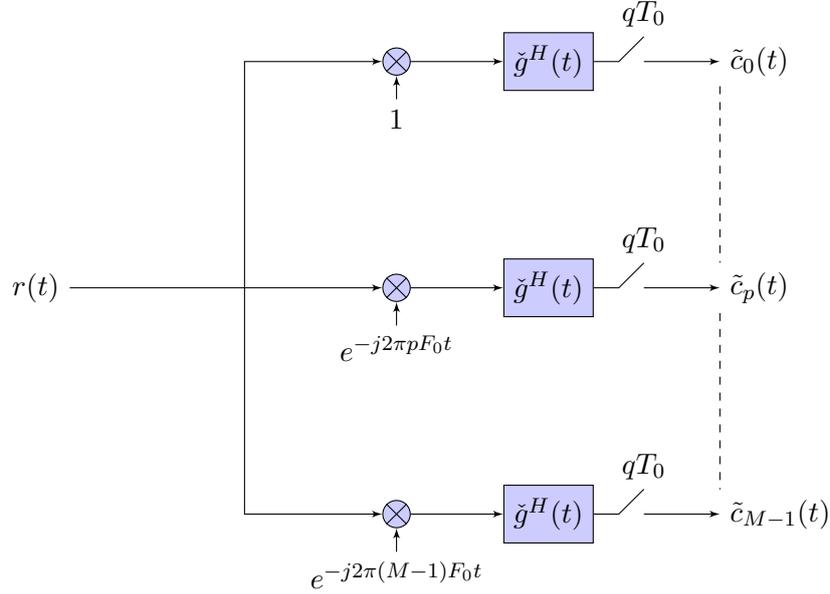


FIGURE 3.2 – Récepteur multiporteuse à temps continu avec  $\mathbf{I} = \{0, \dots, M-1\} \times \mathbf{Z}$ .

**Exemple 3.1** (Système OFDM avec préfixe cyclique)

Parmi les systèmes de transmission biorthogonaux les plus utilisés figure l'OFDM avec préfixe cyclique. Le réseau temps-fréquence est défini par la matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{T_u} & 0 \\ 0 & T_u + T_{cp} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

où  $T_u$  et  $T_{cp}$  sont des constantes positives définies telles que  $T_0 = T_u + T_{cp}$  et  $F_0 = 1/T_u$ . Dans ces conditions, la densité du réseau temps-fréquence est donnée par

$$\rho(\mathbf{\Lambda}) = \frac{T_u}{T_u + T_{cp}} \leq 1. \quad (3.12)$$

Les fonctions prototypes d'émission et de réception sont des portes normalisées définies par

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{T_u}} \chi_{[-T_{cp} - \frac{T_u}{2}, \frac{T_u}{2}]}(t), \quad (3.13)$$

$$\check{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_u}} \chi_{[-\frac{T_u}{2}, \frac{T_u}{2}]}(t). \quad (3.14)$$

Si l'on considère la transmission d'un seul bloc  $n$ , le signal émis s'écrit

$$s_n(t) = \begin{cases} \sum_m c_{m,n} e^{j2\pi m \frac{t}{T_u}}, & \text{si } -T_{cp} - \frac{T_u}{2} \leq t < \frac{T_u}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Or, la périodicité de la fonction exponentielle permet d'écrire  $s_n(t + T_u) = s_n(t)$ , avec  $-T_{cp} \leq t < 0$ . Cela signifie que les  $T_{cp}$  premières secondes du bloc peuvent être considérées comme

la recopie des  $T_{cp}$  dernières secondes du bloc ; elles constituent ainsi un préfixe cyclique. La durée  $T_u$  fait référence à la partie utile du symbole, c'est-à-dire sans redondance par rapport aux symboles  $c_{m,n}$  transmis. Par ailleurs, nous pouvons vérifier que

$$\|g\|_2 = \sqrt{1 + \frac{T_{cp}}{T_u}} = \sqrt{\rho(\mathbf{\Lambda})^{-1}} \geq 1, \quad (3.16)$$

$$\|\check{g}\|_2 = 1, \quad (3.17)$$

$$\langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle = \delta_{m,p} \delta_{n,q}. \quad (3.18)$$

Remarquons que si  $T_{cp} = 0$ , alors  $\rho(\mathbf{\Lambda}) = 1$  et  $\check{g}(t) = g(t) = 1/\sqrt{T_u} \chi_{[-\frac{T_u}{2}, \frac{T_u}{2}]}(t)$ . Le système de transmission est donc orthogonal et à densité critique. Bien que les conditions de reconstruction parfaites soient toujours respectées, nous montrerons que ce scénario de transmission présente peu d'intérêt sur les canaux réels.

**Exemple 3.2** (Système OFDM avec filtres en racine de cosinus surélevé)

Parmi les systèmes de transmission orthogonaux souvent présentés dans la littérature, nous pouvons citer l'OFDM à densité sous-critique avec filtres de mise en forme en racine de cosinus surélevé. Le réseau temps-fréquence est défini par la matrice génératrice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha}{T_0} & 0 \\ 0 & T_0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

où  $\alpha$  est une constante choisie telle que  $0 \leq \alpha \leq 1$  et qui représente l'excès de bande des filtres prototypes. Dans ces conditions, la densité du réseau temps-fréquence est donnée par

$$\rho(\mathbf{\Lambda}) = \frac{1}{1+\alpha} \leq 1. \quad (3.20)$$

Les fonctions prototypes d'émission et de réception sont définies par

$$g(t) = \check{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \begin{cases} 1 - \alpha + \frac{4\alpha}{\pi}, & \text{si } t = 0, \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \left( \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right) + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4\alpha}\right) \right), & \text{si } |t| = \frac{T_0}{4\alpha}, \\ \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T_0} (1 - \alpha)\right) + 4\alpha \frac{t}{T_0} \cos\left(\pi \frac{t}{T_0} (1 + \alpha)\right)}{\pi \frac{t}{T_0} \left(1 - \left(4\alpha \frac{t}{T_0}\right)^2\right)}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Par transformée de Fourier, nous avons en effet dans le domaine fréquentiel

$$G(f) = \check{G}(f) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \begin{cases} \sqrt{T_0}, & \text{si } |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T_0}, \\ \sqrt{\frac{T_0}{2}} \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi T_0}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_0}\right)\right)}, & \text{si } \frac{1-\alpha}{2T_0} < |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_0}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.22)$$

En supposant les réponses impulsionnelles infinies, ces impulsions de mise en forme permettent de contrôler précisément l'occupation spectrale de chaque sous-porteuse à l'aide du paramètre  $\alpha$ . Notons que les fonctions prototypes respectent  $\|g\|^2 = \|\check{g}\|^2 = 1$  et  $\langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle = \delta_{m,p} \delta_{n,q}$ . Remarquons que si  $\alpha = 0$ , alors  $\rho(\mathbf{\Lambda}) = 1$  et  $g(t) = \check{g}(t) = 1/\sqrt{T_0} \text{sinc}(t/T_0)$ , ce qui constitue le cas dual de celui présenté dans l'exemple précédent (OFDM avec fonctions prototypes rectangulaires, sans préfixe cyclique).

### 3.1.3 Émetteur-récepteur causal

Nous n'avons imposé aucune condition de causalité sur les filtres  $g$  et  $\check{g}^H$ . Ainsi, nous n'avons aucune garantie que le système soit réalisable. Quitte à les tronquer,  $g$  et  $\check{g}^H$  peuvent toutefois être supposés de durée finie et de supports respectivement inclus dans  $[-\alpha T_0; (K_g - \alpha)T_0[$  et  $[-\alpha T_0; (K_{\check{g}} - \alpha)T_0[$  avec  $\alpha$  un réel positif et  $K_g, K_{\check{g}}$  des entiers positifs. Dans ces conditions, les filtres de réponses impulsionnelles  $(\mathcal{T}_{\alpha T_0} g)(t) = g(t - \alpha T_0)$  et  $(\mathcal{T}_{\alpha T_0} \check{g}^H)(t) = \check{g}^H(t - \alpha T_0)$  sont causaux et de supports respectifs  $[0; K_g T_0[$  et  $[0; K_{\check{g}} T_0[$ . De plus, le signal  $(\mathcal{T}_{\alpha T_0} s)(t) = s(t - \alpha T_0)$  peut être obtenu en sortie d'un système réalisable et s'écrit :

$$s(t - \alpha T_0) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}} c_{m,n} g(t - nT_0 - \alpha T_0) e^{j2\pi m F_0 t} e^{-j2\pi m \alpha F_0 T_0} e^{j\phi_{m,n}} \quad (3.23)$$

$$= \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}} c_{m,n} g(t - nT_0 - \alpha T_0) e^{j2\pi m F_0 t} \quad (3.24)$$

avec  $\phi_{m,n} = 2\pi m \alpha F_0 T_0$ . On retrouve alors le modulateur représenté sur la figure 3.1, en remplaçant  $g(t)$  par  $g(t - \alpha T_0)$ . Par ailleurs, les symboles sont démodulés en effectuant le produit scalaire

$$\tilde{c}_{p,q} = \langle \check{g}_{p,q}, s \rangle = \langle \mathcal{T}_{\alpha T_0} \check{g}_{p,q}, \mathcal{T}_{\alpha T_0} s \rangle \quad (3.25)$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t - qT_0 - \alpha T_0) e^{-j2\pi p F_0 t} s(t - \alpha T_0) dt. \quad (3.26)$$

En faisant l'hypothèse que  $2\alpha = D \in \mathbf{N}$ , on peut alors écrire que

$$\tilde{c}_{p,q-D} = \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t - qT_0 + \alpha T_0) e^{-j2\pi p F_0 t} s(t - \alpha T_0) dt \quad (3.27)$$

$$= [\check{g}^H(t - \alpha T_0) * (e^{-j2\pi p F_0 t} s(t - \alpha T_0))]_{|t=qT_0} \quad (3.28)$$

$$= (\mathcal{T}_{\alpha T_0} \check{g}^H * (\mathcal{M}_{-pF_0} \mathcal{T}_{\alpha T_0} s))(qT_0). \quad (3.29)$$

Ainsi, on obtient les symboles retardés de  $D$  temps symboles en sortie du récepteur représenté par la figure 3.2, en remplaçant  $\check{g}^H(t)$  par  $\check{g}^H(t - \alpha T_0)$  et en plaçant  $s(t - \alpha T_0)$  en entrée. Les symboles peuvent ainsi être transmis à l'aide d'un émetteur-récepteur causal, au prix d'un retard de  $D$  temps symboles. Ces considérations n'ont d'utilité que dans l'optique d'une mise en œuvre à l'aide d'un émetteur-récepteur réalisable.

## 3.2 Gain complexe du système en présence d'un canal doublement sélectif

Le canal de transmission, noté  $\mathcal{H}$ , est sélectif en temps et en fréquence, tel que présenté au cours du chapitre 2. La transmission s'effectue également en présence d'un bruit, noté  $b(t)$

(fig. 3.3). Ainsi, le signal reçu s'écrit

$$r(t) = (\mathcal{H}s)(t) + b(t) \quad (3.30)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) s(t - \tau) e^{j2\pi f t} df d\tau + b(t) \quad (3.31)$$

où  $b(t)$  représente un bruit blanc dans la bande utilisée pour la transmission, il est supposé gaussien et caractérisé par sa densité spectrale de puissance bilatérale  $\sigma_b^2$ . La fonction aléatoire  $S_{\mathcal{H}}(f, \tau)$  décrit la dispersion en fréquence et en temps introduite par le canal radiomobile.

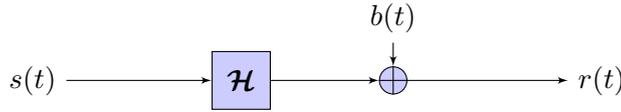


FIGURE 3.3 – Canal doublement dispersif à bruit additif.

Les symboles estimés s'écrivent alors

$$\tilde{c}_{p,q} = \langle \check{g}_{p,q}, r \rangle = \langle \check{g}_{p,q}, \mathcal{H}s + b \rangle = \langle \check{g}_{p,q}, \mathcal{H}s \rangle + \langle \check{g}_{p,q}, b \rangle. \quad (3.32)$$

En présence d'un canal de transmission bruité et sélectif en temps et en fréquence, les conditions de reconstruction parfaite ne sont donc plus respectées et nous avons

$$\tilde{c}_{p,q} = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}} c_{m,n} H_{m,n,p,q} + B_{p,q} \quad (3.33)$$

avec  $H_{m,n,p,q}$  un coefficient de transfert (détaillé par la suite) et  $B_{p,q}$  le bruit projeté sur  $\check{g}_{p,q}$ , défini par

$$B_{p,q} = \langle \check{g}_{p,q}, b \rangle = \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(n - qT_0) e^{-j2\pi p F_0 t} b(t) dt. \quad (3.34)$$

En isolant le cas particulier où  $p = m$  et  $q = n$  et en définissant l'ensemble  $\mathbf{I}_{p,q} = \mathbf{I} \setminus \{(p, q)\}$ , l'expression des symboles estimés se réécrit

$$\tilde{c}_{p,q} = c_{p,q} H_{p,q,p,q} + \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} c_{m,n} H_{m,n,p,q} + B_{p,q}. \quad (3.35)$$

Ainsi, si l'on pose

$$S_{p,q} = c_{p,q} H_{p,q,p,q}, \quad (3.36)$$

$$I_{p,q} = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} c_{m,n} H_{m,n,p,q} \quad (3.37)$$

alors nous montrons que le symbole estimé, d'indice  $(p, q)$ , se compose de trois termes :

- $S_{p,q}$  constitue le terme de signal utile ;
- $I_{p,q}$  représente le terme d'interférence, en regroupant l'interférence entre symboles (ISI<sup>3</sup>) ainsi que l'interférence entre sous-porteuses (ICI<sup>4</sup>) ;

3. *InterSymbol Interference*

4. *InterCarrier Interference*

—  $B_{p,q}$  représente le terme de bruit filtré par le récepteur.

Afin de minimiser l'erreur de reconstruction des symboles émis, il apparaît nécessaire de maximiser le signal utile et de minimiser les interférences et le bruit [Kozek 1998].

Le gain complexe  $H_{m,n,p,q}$  relie le symbole estimé  $\tilde{c}_{p,q}$  à l'ensemble des symboles émis  $\{c_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{I}}$  en faisant intervenir la contribution des filtres d'émission, de réception ainsi que la fonction d'étalement du canal. Il s'exprime par

$$H_{m,n,p,q} = \langle \check{g}_{p,q}, \mathcal{H}g_{m,n} \rangle \quad (3.38)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) \langle \check{g}_{p,q}, \mathbf{U}_{f,\tau} g_{m,n} \rangle df d\tau \quad (3.39)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) \int_{\mathbf{R}} \check{g}_{p,q}^*(t) \mathbf{U}_{f,\tau}(g_{m,n})(t) dt df d\tau \quad (3.40)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t - qT_0) e^{-j2\pi p F_0 t} g(t - nT_0 - \tau) e^{j2\pi(mF_0(t-\tau) + ft)} dt df d\tau \quad (3.41)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) e^{-j2\pi m F_0 \tau} \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t - qT_0) g(t - nT_0 - \tau) e^{j2\pi((m-p)F_0 + f)t} dt df d\tau. \quad (3.42)$$

En posant  $t' = t - qT_0$ , nous avons

$$H_{m,n,p,q} = \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) e^{-j2\pi m F_0 \tau} \cdot \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t') g(t' + qT_0 - nT_0 - \tau) e^{j2\pi((m-p)F_0 + f)(t' + qT_0)} dt' df d\tau \quad (3.43)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) e^{j2\pi((m-p)qT_0 F_0 + qT_0 f - mF_0 \tau)} \cdot \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t') g(t' - ((n-q)T_0 + \tau)) e^{j2\pi((m-p)F_0 + f)t'} dt' df d\tau \quad (3.44)$$

$$= e^{j2\pi((m-p)T_0 F_0 q)} \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) e^{j2\pi(qT_0 f - mF_0 \tau)} \cdot A_{\check{g},g}((m-p)F_0 + f, (n-q)T_0 + \tau) df d\tau \quad (3.45)$$

où  $A_{\check{g},g}$  représente la fonction d'inter-ambiguïté temps-fréquence définie telle que

$$A_{\check{g},g}(f, \tau) = \langle \check{g}, \mathbf{U}_{f,\tau} g \rangle = \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t) g(t - \tau) e^{j2\pi ft} dt. \quad (3.46)$$

Si le canal de transmission est sélectif en temps et/ou en fréquence, une phase d'égalisation intervient après l'estimation des symboles reçus (3.35). Elle a pour but de compenser

l'opération du canal, c'est-à-dire de diminuer, voire supprimer, le terme d'interférence  $I_{p,q}$ . Cela permet, idéalement, de prendre des décisions sur les symboles reçus, indépendamment du canal de transmission. La mise en œuvre d'une telle égalisation parfaite reste toutefois impossible car elle requiert une connaissance parfaite de chacune de réalisation du canal de transmission. De plus la complexité de tels égaliseurs est généralement prohibitive.

**Exemple 3.3** (Égalisation de l'OFDM avec préfixe cyclique sur canal LTI)

Soit un système de transmission OFDM avec préfixe cyclique, tel que présenté dans l'exemple présenté page 77. Supposons à présent que celui-ci évolue dans un canal de transmission sélectif en fréquence et invariant dans le temps dont le support de la réponse impulsionnelle est borné par une valeur  $\tau_{max}$ .

La fonction d'inter-ambiguïté des filtres de mise en forme s'écrit

$$A_{\check{g},g}(f, \tau) = \langle \check{g}, \mathbf{U}_{f,\tau} g \rangle = \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t) g(t - \tau) e^{j2\pi f t} dt \quad (3.47)$$

$$= \frac{1}{T_u} \int_{\mathbf{R}} \chi_{[-\frac{T_u}{2}, \frac{T_u}{2}]}(t) \chi_{[-T_{cp} - \frac{T_u}{2}, \frac{T_u}{2}]}(t - \tau) e^{j2\pi f t} dt \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{T_u} \int_{-\frac{T_u}{2}}^{\frac{T_u}{2}} \chi_{[\tau - T_{cp} - \frac{T_u}{2}, \tau + \frac{T_u}{2}]}(t) e^{j2\pi f t} dt \quad (3.49)$$

À partir de cette expression générale, on distingue cinq cas particuliers en fonction de la valeur de  $\tau$  par rapport aux bornes des fonctions indicatrices.

- Pour  $\tau \leq -T_u$ ,  $A_{\check{g},g}(f, \tau) = 0$ .
- Pour  $-T_u \leq \tau \leq 0$ ,

$$A_{\check{g},g}(f, \tau) = \left(1 + \frac{\tau}{T_u}\right) e^{j\pi f \tau} \text{sinc}(\pi f (T_u + \tau)). \quad (3.50)$$

- Pour  $0 \leq \tau \leq T_{cp}$

$$A_{\check{g},g}(f, \tau) = \text{sinc}(\pi f T_u). \quad (3.51)$$

- Pour  $T_{cp} \leq \tau \leq T_u + T_{cp}$ ,

$$A_{\check{g},g}(f, \tau) = \left(1 - \frac{\tau - T_{cp}}{T_u}\right) e^{j\pi f (\tau - T_{cp})} \text{sinc}(\pi f (T_u + T_{cp} - \tau)). \quad (3.52)$$

- Pour  $\tau \geq T_u + T_{cp}$ ,  $A_{\check{g},g}(f, \tau) = 0$ .

La fonction d'interambiguïté des fonctions prototypes utilisées en OFDM avec préfixe cyclique présente un palier lorsque  $f = 0$  et  $0 \leq \tau \leq T_{cp}$  (fig. 3.4). Or le cas où  $f = 0$  se produit lorsque le canal est non-sélectif en temps (aucun décalage Doppler). De plus, si le retard  $\tau_{max}$  introduit par le canal est inférieur à la durée du préfixe cyclique, alors d'après (3.51) nous avons

$$A_{\check{g},g}((m-p)F_0, (n-q)T_0 + \tau) = \delta_{p,m} \delta_{q,n}. \quad (3.53)$$

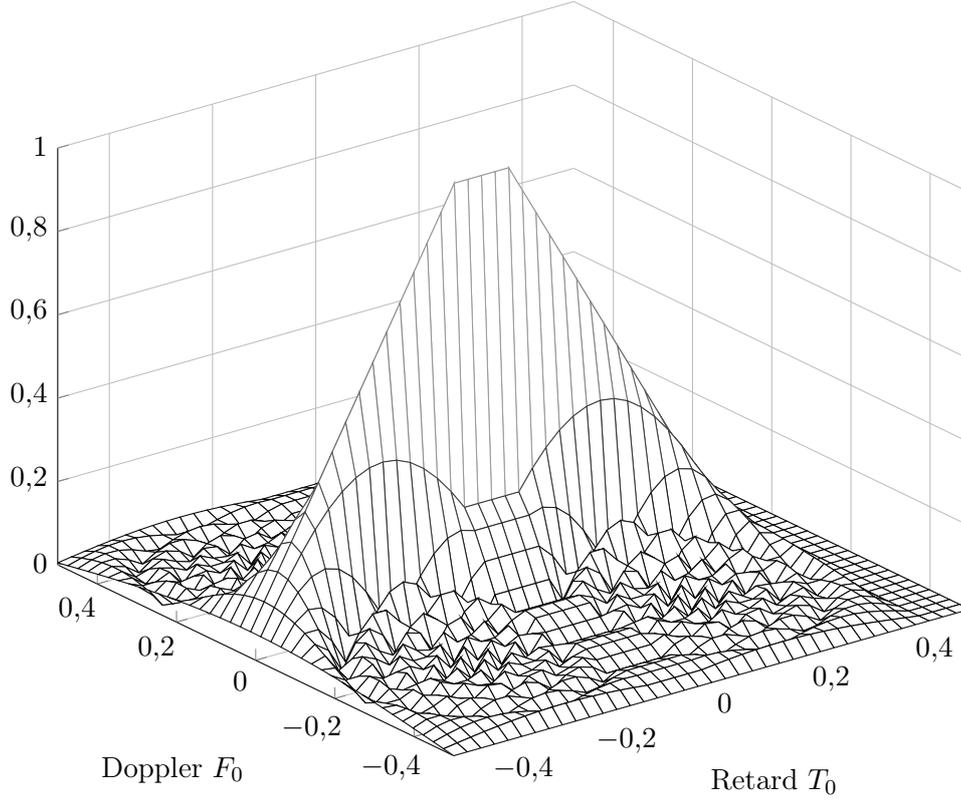


FIGURE 3.4 – Fonction d'inter-ambiguïté normalisée de l'OFDM avec préfixe cyclique ( $T_{cp} = 0,4T_u$ ).

À partir de ce résultat, et d'après (3.45), le gain  $H_{m,n,p,q}$  introduit par le canal se reformule

$$H_{m,n,p,q} = \int_{\mathbf{R}} S_{\mathcal{H}}(0, \tau) e^{j2\pi((m-p)T_0F_0q - mF_0\tau)} A_{\hat{g},g}((m-p)F_0, (n-q)T_0 + \tau) d\tau \quad (3.54)$$

$$= \delta_{m,p} \delta_{n,q} \int_{\mathbf{R}} S_{\mathcal{H}}(0, \tau) e^{-j2\pi pF_0\tau} d\tau \quad (3.55)$$

$$= H(pF_0) \delta_{m,p} \delta_{n,q} \quad (3.56)$$

où  $H(pF_0)$  représente le gain complexe introduit par le canal dans le domaine fréquentiel, pour la sous-porteuse  $p$ . Remarquons que celui-ci dépend de la fonction d'étalement qui reste une caractéristique aléatoire du canal. Dans ce cas, les fonctions  $g_{m,n}$  correspondent donc aux fonctions propres du canal de transmission, avec pour valeurs propres associées  $H(mF_0)$ . L'expression des symboles estimés se simplifie tel que

$$\tilde{c}_{p,q} = H(pF_0)c_{p,q} + B_{p,q}. \quad (3.57)$$

Autrement dit, tout canal de transmission sélectif en fréquence et non-bruité peut être diagonalisé à l'aide de l'OFDM avec préfixe cyclique (de durée adéquate). Ce résultat bien connu nous permet d'utiliser un égaliseur à un coefficient par sous-porteuse [Wang 2000] pour obtenir

la reconstruction parfaite. En présence de bruit et en supposant une connaissance parfaite du canal, les symboles égalisés s'écrivent

$$\bar{c}_{p,q} = H(pF_0)^{-1} \tilde{c}_{p,q} \quad (3.58)$$

$$= c_{p,q} + \frac{B_{p,q}}{H(pF_0)}. \quad (3.59)$$

Cette technique d'égalisation présente l'inconvénient d'amplifier le terme de bruit lorsque  $|H(pF_0)| \ll 1$ . Si la variance du bruit est connue du récepteur, il est possible d'utiliser d'autres techniques d'égalisation, de complexité similaire, tel que nous le développerons plus loin.

Du point de vue de la complexité de l'égaliseur, il serait souhaitable que le système de transmission multiporteuse sous-critique diagonalise le canal. Un égaliseur à un coefficient par symbole permettrait alors la reconstruction parfaite de la séquence émise. Notons toutefois que cette stratégie a pour effet d'éliminer toute diversité introduite par le canal de transmission.

En pratique, les canaux de transmission sélectifs en temps et en fréquence n'admettent pas de structure propre. Il reste possible de paramétrer l'émetteur-récepteur de manière à minimiser la distance euclidienne entre les symboles émis et les symboles estimés. Rappelons que la configuration de l'émetteur-récepteur multiporteuse repose d'une part sur la définition du réseau temps-fréquence (incluant les paramètres  $\mathbf{I}$ ,  $F_0$  et  $T_0$ ), d'autre part sur la conception de fonctions prototypes d'émission et de réception.

Avec une formulation aussi générale, le problème d'optimisation reste non borné, dans la mesure où il conduit à la réalisation d'impulsions de mise en forme de durée ou d'amplitude arbitrairement grande ou petite. Pour faire face à des scénarios de transmission pratiques, il convient donc de restreindre le domaine de définition des paramètres du système de transmission. Il est par exemple possible de fixer la durée et la norme des fonctions prototypes, d'encadrer les valeurs de  $F_0$  et  $T_0$ , de limiter le nombre de sous-porteuses.

De plus, il est délicat d'estimer les paramètres optimaux de l'émetteur-récepteur lorsque les canaux évoluent rapidement [Scaglione 1999a, Scaglione 1999b]. La solution retenue par la plupart des applications de transmission consiste à adapter le système de transmission aux caractéristiques statistiques du canal, généralement limitée au second ordre, plutôt qu'à chacune de ses réalisations.

### 3.3 Règles d'adaptation des filtres de mise en forme au canal WSSUS

Tel que nous l'avons présenté au cours du chapitre 2, les applications de transmission radiomobiles s'appuient souvent sur des modèles de canaux comportant une partie déterministe (ex. : atténuation d'espace) et une partie aléatoire (ex. : effet de masque, propagation à plusieurs trajets, bruit additif). Nous nous focalisons ici sur la composante aléatoire introduite par la propagation multitrajet et supposons le canal stationnaire au second ordre avec des

diffuseurs non-correlés (WSSUS) [Bello 1963]. Ces hypothèses simplifient l'analyse statistique de la fonction d'étalement  $S_{\mathcal{H}}(f, \tau)$  de sorte que

$$\mathbb{E}\{S_{\mathcal{H}}(f, \tau)\} = 0, \quad (3.60)$$

$$\mathbb{E}\{S_{\mathcal{H}}^*(f, \tau)S_{\mathcal{H}}(f', \tau')\} = C_{\mathcal{H}}(f, \tau)\delta(f - f')\delta(\tau - \tau') \quad (3.61)$$

où  $C_{\mathcal{H}}(f, \tau)$  est la fonction de diffusion, normalisée telle que  $\|C_{\mathcal{H}}\|_2 = 1$ . Elle permet la description statistique complète du canal WSSUS. La transmission s'effectue en présence d'un bruit complexe circulaire  $b(t)$ , blanc dans la bande du signal et de distribution gaussienne centrée; sa variance est notée  $\sigma_b^2$ . Nous rappelons que les symboles  $\{c_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbf{I}}$  sont de moyenne nulle, considérés comme indépendants et uniformément distribués; leur variance s'écrit  $\sigma_c^2$ . Les fonctions prototype d'émission sont normalisées de telle sorte que  $\|g\|^2 = 1$ .

### 3.3.1 Expression du problème d'optimisation

Après avoir écrit l'expression d'un symbole estimé comme la somme de trois termes (3.35), nous nous intéressons à présent à leur puissance moyenne dans le but de construire une mesure de la qualité des estimations fournies en sortie du récepteur, en exploitant notamment les caractéristiques statistiques du canal WSSUS.

Ainsi, en considérant les réalisations des symboles indépendantes de celles du canal de transmission, la puissance moyenne du signal utile, pour un symbole estimé  $(p, q)$ , s'exprime par

$$P_S^{(p,q)} = \mathbb{E}_{c, \mathcal{H}}\{|S_{p,q}|^2\} = \mathbb{E}_{c, \mathcal{H}}\{|c_{p,q}H_{p,q,p,q}|^2\} = \sigma_c^2 \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{p,q,p,q}|^2\}. \quad (3.62)$$

De même, en utilisant les mêmes hypothèses, la puissance moyenne des interférences, pour un symbole estimé  $(p, q)$ , s'écrit

$$P_I^{(p,q)} = \mathbb{E}_{c, \mathcal{H}}\{|I_{p,q}|^2\} = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} \mathbb{E}_{c, \mathcal{H}}\{|c_{m,n}H_{m,n,p,q}|^2\} \quad (3.63)$$

$$= \mathbb{E}_{c, \mathcal{H}} \left\{ \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} c_{m,n}^* H_{m,n,p,q}^* \sum_{(m',n') \in \mathbf{I}_{p,q}} c_{m',n'} H_{m',n',p,q} \right\} \quad (3.64)$$

$$= \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} \sum_{(m',n') \in \mathbf{I}_{p,q}} \mathbb{E}_c\{c_{m,n}^* c_{m',n'}\} \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{H_{m,n,p,q}^* H_{m',n',p,q}\} \quad (3.65)$$

$$= \sigma_c^2 \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{m,n,p,q}|^2\}. \quad (3.66)$$

Enfin, la puissance moyenne du bruit filtré par le récepteur, pour un symbole estimé  $(p, q)$ , se

note

$$P_B^{(p,q)} = \mathbb{E}_b\{|B_{p,q}|^2\} = \mathbb{E}_b \left\{ \int_{\mathbf{R}} \check{g}(t - qT_0) e^{j2\pi p F_0 t} b^*(t) dt \int_{\mathbf{R}} \check{g}^*(t' - qT_0) e^{-j2\pi p F_0 t'} b(t') dt' \right\} \quad (3.67)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} \mathbb{E}_b\{b^*(t)b(t')\} \check{g}(t - qT_0) \check{g}^*(t' - qT_0) e^{-j2\pi p F_0 (t' - t)} dt dt' \quad (3.68)$$

$$= \sigma_b^2 \int_{\mathbf{R}} |\check{g}^*(t - qT_0)|^2 dt \quad (3.69)$$

$$= \sigma_b^2 \|\check{g}\|^2. \quad (3.70)$$

À partir des puissances moyennes exprimées ci-dessus, nous pouvons établir le rapport signal sur interférence plus bruit (SINR<sup>5</sup>) qui constitue un indicateur de qualité moyenne du signal en sortie de la chaîne de transmission. Il se définit par

$$\text{SINR}^{(p,q)} = \frac{P_S^{(p,q)}}{P_I^{(p,q)} + P_B^{(p,q)}} = \frac{\sigma_c^2 \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{p,q,p,q}|^2\}}{\sigma_c^2 \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{m,n,p,q}|^2\} + \sigma_b^2 \|\check{g}\|^2} \quad (3.71)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\text{SIR}^{(p,q)}} + \frac{1}{\text{SNR}^{(p,q)}}} \quad (3.72)$$

où  $\text{SIR}^{(p,q)}$  et  $\text{SNR}^{(p,q)}$  représentent respectivement le rapport signal sur interférence et le rapport signal sur bruit, définis par

$$\text{SIR}^{(p,q)} = \frac{P_S^{(p,q)}}{P_I^{(p,q)}} = \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{p,q,p,q}|^2\}}{\sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{m,n,p,q}|^2\}}, \quad (3.73)$$

$$\text{SNR}^{(p,q)} = \frac{P_S^{(p,q)}}{P_B^{(p,q)}} = \frac{\sigma_c^2 \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{p,q,p,q}|^2\}}{\sigma_b^2 \|\check{g}\|^2}. \quad (3.74)$$

D'après ces expressions, il est nécessaire de développer l'expression de  $\mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{m,n,p,q}|^2\}$  afin de faire apparaître la fonction de diffusion du canal. En utilisant (3.45), nous posons  $\theta = 2\pi((m-p)qT_0F_0 + qT_0f - mF_0\tau)$  et  $\theta' = 2\pi((m-p)qT_0F_0 + qT_0f' - mF_0\tau')$  et nous

---

5. *Signal to Interference and Noise Ratio*

écrivons

$$\mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{m,n,p,q}|^2\} = \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{H_{m,n,p,q}^* H_{m,n,p,q}\} \quad (3.75)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathcal{H}} \left\{ \left( \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f, \tau) e^{j\theta} A_{\check{g},g}((m-p)F_0 + f, (n-q)T_0 + \tau) df d\tau \right)^* \right. \quad (3.76)$$

$$\left. \cdot \left( \iint_{\mathbf{R}^2} S_{\mathcal{H}}(f', \tau') e^{j\theta'} A_{\check{g},g}((m-p)F_0 + f', (n-q)T_0 + \tau') df' d\tau' \right) \right\} \quad (3.77)$$

$$= \iiint_{\mathbf{R}^4} \mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{S_{\mathcal{H}}^*(f, \tau) S_{\mathcal{H}}(f', \tau')\} e^{j(\theta' - \theta)} \quad (3.78)$$

$$\cdot A_{\check{g},g}^*((m-p)F_0 + f, (n-q)T_0 + \tau) \quad (3.79)$$

$$\cdot A_{\check{g},g}((m-p)F_0 + f', (n-q)T_0 + \tau') df d\tau df' d\tau' \quad (3.80)$$

$$= \int_{\tau} \int_f C_{\mathcal{H}}(f, \tau) |A_{\check{g},g}((m-p)F_0 + f, (n-q)T_0 + \tau)|^2 df d\tau. \quad (3.81)$$

La fonction d'inter-ambiguïté centrée peut être mise en évidence par changement de variable sur  $f$  et  $\tau$ , et on écrit

$$\mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{m,n,p,q}|^2\} = \iint_{\mathbf{R}^2} C_{\mathcal{H}}((p-m)F_0 + f, (q-n)T_0 + \tau) |A_{\check{g},g}(f, \tau)|^2 df d\tau \quad (3.82)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^2} \tilde{C}_{\mathcal{H}, F_0, T_0}^{(m,n)}(f, \tau) |A_{\check{g},g}(f, \tau)|^2 df d\tau \quad (3.83)$$

avec

$$\tilde{C}_{\mathcal{H}, F_0, T_0}^{(m,n)}(f, \tau) = \sum_{(m', n') \in \mathbf{I}_{m,n}} C_{\mathcal{H}}((m-m')F_0 + f, (n-n')T_0 + \tau) \quad (3.84)$$

où  $\tilde{C}_{\mathcal{H}, F_0, T_0}^{(m,n)}(f, \tau)$  représente la fonction de diffusion périodisée dans le plan temps-fréquence.

D'après le développement de  $\mathbb{E}_{\mathcal{H}}\{|H_{m,n,p,q}|^2\}$ , les puissances moyennes du signal utile et de l'interférence peuvent se réécrire

$$P_S^{(p,q)} = \sigma_c^2 \iint_{\mathbf{R}^2} C_{\mathcal{H}}(f, \tau) |A_{\check{g},g}(f, \tau)|^2 df d\tau, \quad (3.85)$$

$$P_I^{(p,q)} = \sigma_c^2 \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} \iint_{\mathbf{R}^2} \tilde{C}_{\mathcal{H}, F_0, T_0}^{(m,n)}(f, \tau) |A_{\check{g},g}(f, \tau)|^2 df d\tau. \quad (3.86)$$

Remarquons que le terme de signal utile ne dépend pas de  $(p, q)$ ; nous pouvons donc écrire  $P_S = P_S^{(p,q)}$ . Une notation plus compacte peut être utilisée en introduisant le produit scalaire à deux dimensions. Nous avons ainsi

$$P_S = \sigma_c^2 \langle |A_{\check{g},g}|^2, C_{\mathcal{H}} \rangle, \quad (3.87)$$

$$P_I^{(p,q)} = \sigma_c^2 \langle |A_{\check{g},g}|^2, \tilde{C}_{\mathcal{H}, F_0, T_0}^{(p,q)} \rangle. \quad (3.88)$$

La maximisation des performances moyennes d'un système de transmission multiporteuse peut se traduire par la maximisation du SINR. Le problème d'optimisation que nous souhaitons résoudre s'écrit

$$(\check{g}, g, \mathbf{\Lambda})_{\text{opt}} = \underset{(\check{g}, g, \mathbf{\Lambda})}{\text{argmax}} \frac{\sigma_c^2 \langle |A_{\check{g},g}|^2, C_{\mathcal{H}} \rangle}{\sigma_c^2 \langle |A_{\check{g},g}|^2, \tilde{C}_{\mathcal{H}, F_0, T_0}^{(p,q)} \rangle + \sigma_b^2 \|\check{g}\|^2}. \quad (3.89)$$

Afin de borner ce problème d'optimisation il est nécessaire d'introduire des contraintes telles que la normalisation des impulsions d'émission et/ou de réception, tout en respectant la bi-orthogonalité du système. De plus, il convient de rappeler que le réseau temps-fréquence  $\mathbf{\Lambda}$  est déterminé à la fois par l'espacement entre sous-porteuses  $F_0$ , l'espacement temporel entre symboles  $T_0$ , le nombre de symboles à transmettre ainsi que le nombre de sous-porteuses. Sans contraintes sur ces paramètres, la maximisation du SINR peut conduire à des scénarios sans intérêt pratique, pour lesquels la densité du réseau et par conséquent l'efficacité spectrale seraient arbitrairement faibles [Jung 2007a]. Dans ces conditions, nous fixons  $\|g\|^2 = 1$ , tout en assurant  $\langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle = \delta_{m,p} \delta_{n,q}$ ,  $\forall (m, n), (p, q) \in \mathbf{I}$ . Nous fixons également la structure du réseau temps-fréquence  $\mathbf{\Lambda}$ . Celle-ci étant généralement déterminée par la bande allouée, le débit binaire souhaité et les caractéristiques de sélectivité du canal de transmission (ex. : bande de cohérence, temps de cohérence).

En dépit des différentes contraintes énoncées, la maximisation du SINR reste délicate à traiter de manière conjointe car les impulsions de mise en forme qui maximisent le SNR<sup>6</sup> ne sont pas optimales du point de vue du SIR<sup>7</sup> et réciproquement [Kozek 1998, Xu 2008]. Dans le cadre de notre étude, une optimisation séparée des termes de signal utile, d'interférence et de bruit s'avère suffisante pour identifier des critères de synthèse d'impulsions prototypes adaptée à de nombreux scénarios de transmission en environnement radiomobile. Précisons que la minimisation du terme d'interférence implique la minimisation de la diversité du système de transmission. Nous considérons dans cette étude qu'il est du ressort du codage correcteur d'introduire de la diversité, dans le plan temps-fréquence, en fonction du réseau  $\mathbf{\Lambda}$  choisi.

### 3.3.2 Maximisation du terme de signal utile

Il s'agit, dans un premier temps, de maximiser la puissance moyenne du signal utile  $P_s$ . Celle-ci peut se borner à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'on écrit

$$\langle |A_{\check{g},g}|^2, C_{\mathcal{H}} \rangle \leq \|C_{\mathcal{H}}\|_1 \|\check{g}\|^2 \|g\|^2 = \|\check{g}\|^2. \quad (3.90)$$

Un tel problème d'optimisation reste difficile à traiter dans le cas général. Par conséquent, il est pratique d'utiliser un développement limité de la fonction d'interambiguïté. D'après [Bernfeld 1967, Jung 2007a] nous avons

$$A_{\check{g},g}(f, \tau) = \langle \check{g}, g \rangle + j2\pi (f \langle \check{g}, tg \rangle - \tau \langle \check{G}, \nu G \rangle) \quad (3.91)$$

$$- 2\pi^2 (f^2 \langle \check{g}, t^2 g \rangle + \tau^2 \langle \check{G}, \nu^2 G \rangle) \quad (3.92)$$

$$- j2\pi\tau f \langle \check{g}, tg' \rangle + (f^2 + \tau^2)\epsilon(f, \tau) \quad (3.93)$$

6. *Signal to Noise Ratio*

7. *Signal to Interference Ratio*

où  $\check{G}$  et  $G$  sont les transformées de Fourier respectives de  $\check{g}$  et  $g$  et où  $\epsilon(f, \tau) \rightarrow 0$  lorsque  $\sqrt{f^2 + \tau^2} \rightarrow 0$ . En supposant par ailleurs que  $\check{g} \cdot g$  et  $\check{G} \cdot G$  soient symétriques, nous avons

$$A_{\check{g},g}(f, \tau) = \langle \check{g}, g \rangle \left( 1 - 2\pi^2(f^2\sigma_t^2 + \tau^2\sigma_\nu^2) - j2\pi\tau f \frac{\langle \check{g}, tg' \rangle}{\langle \check{g}, g \rangle} \right) + (f^2 + \tau^2)\epsilon(f, \tau) \quad (3.94)$$

avec les moments du second ordre croisés, en temps et en fréquence

$$\sigma_t^2 = \frac{\langle t^2 \check{g}, g \rangle}{\langle \check{g}, g \rangle}, \quad (3.95)$$

$$\sigma_\nu^2 = \frac{\langle \nu^2 \check{G}, G \rangle}{\langle \check{g}, g \rangle}. \quad (3.96)$$

Le module au carré de la fonction d'interambiguïté approchée peut finalement s'écrire

$$|A_{\check{g},g}(f, \tau)|^2 \approx \langle \check{g}, g \rangle^2 (1 - 2\pi^2(f^2\sigma_t^2 + \tau^2\sigma_\nu^2)). \quad (3.97)$$

Afin de maximiser la puissance moyenne du terme de signal utile (3.90), le problème d'optimisation se formule

$$(\sigma_t, \sigma_\nu)_{\text{opt}} = \underset{(\sigma_t, \sigma_\nu)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \iint_{\mathbf{R}^2} (f^2\sigma_t^2 + \tau^2\sigma_\nu^2) C_{\mathcal{H}}(f, \tau) \, df \, d\tau \right\}, \quad (3.98)$$

$$\text{s.c. } \sigma_t^2\sigma_\nu^2 = \epsilon^2 \quad (\text{relation de Heisenberg-Gabor}). \quad (3.99)$$

Si l'on considère une fonction de diffusion séparable  $C_{\mathcal{H}}(f, \tau) = C_{\mathcal{H}}^{(f)}(f)C_{\mathcal{H}}^{(t)}(\tau)$ , le problème se simplifie par

$$(\sigma_t, \sigma_\nu)_{\text{opt}} = \underset{(\sigma_t, \sigma_\nu)}{\operatorname{argmin}} \{ \Delta C_f \sigma_t^2 + \Delta C_t \sigma_\nu^2 \} \quad (3.100)$$

$$\text{s.c. } \sigma_t^2\sigma_\nu^2 = \epsilon^2 \quad (3.101)$$

avec les moments du second ordre pondérés de la fonction de diffusion

$$\Delta C_t = \left\| C_{\mathcal{H}}^{(f)} \right\|_1 \int_{\tau} \tau^2 C_{\mathcal{H}}^{(t)}(\tau) \, d\tau, \quad (3.102)$$

$$\Delta C_f = \left\| C_{\mathcal{H}}^{(t)} \right\|_1 \int_{\nu} \nu^2 C_{\mathcal{H}}^{(f)}(\nu) \, d\nu. \quad (3.103)$$

Le lagrangien associé au problème d'optimisation se note

$$L(\sigma_t, \sigma_\nu, \lambda) = \Delta C_f \sigma_t^2 + \Delta C_t \sigma_\nu^2 - \lambda(\sigma_t^2\sigma_\nu^2 - \epsilon^2) \quad (3.104)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $c(\sigma_t, \sigma_\nu) = \sigma_t^2\sigma_\nu^2 - \epsilon^2$ . Si  $(\tilde{\sigma}_t, \tilde{\sigma}_\nu)$  est une solution, alors

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_t} = 0 \Leftrightarrow 2(\Delta C_f \tilde{\sigma}_t - \lambda \tilde{\sigma}_t \tilde{\sigma}_\nu^2) = 0, \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_\nu} = 0 \Leftrightarrow 2(\Delta C_t \tilde{\sigma}_\nu - \lambda \tilde{\sigma}_t^2 \tilde{\sigma}_\nu) = 0, \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \epsilon^2 - \tilde{\sigma}_t^2 \tilde{\sigma}_\nu^2 = 0. \quad (3.107)$$

En injectant (3.107) dans (3.105) et (3.106), puis on divise les deux membres obtenus, il reste alors

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_\nu} = \sqrt{\frac{\Delta C_t}{\Delta C_f}}. \quad (3.108)$$

Cette relation d'adaptation temps-fréquence est présentée de manière intuitive dans de nombreuses publications [Kozek 1996, Strohmer 2003, Jung 2007a, Le Floch 1995]. Rappelons que cette relation est établie pour de petites valeurs de  $\tau$  et  $f$ , elle est donc adaptée au cas des canaux pour lesquels  $\tau_{\max} f_d \ll 1$ .

Sans détailler les différentes méthodes de synthèse des impulsions de mise en forme, on recherche en général la meilleure localisation temps-fréquence possible dans le but de s'adapter aux caractéristiques de la fonction de diffusion. À titre d'exemple, les impulsions gaussiennes présentent une localisation temps-fréquence optimale.

### 3.3.3 Minimisation des termes de bruit et d'interférences

Considérons un couple d'impulsions prototypes  $\{\check{g}, g\}$  déterminé lors de la phase d'optimisation précédente. Le second problème d'optimisation vise à minimiser la puissance moyenne du bruit ainsi que celle des interférences :

$$(\check{g}, g, \mathbf{\Lambda})_{opt} = \underset{\check{g}, g, \mathbf{\Lambda}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \left\langle |A_{\check{g}, g}|^2, \tilde{C}_{\mathcal{H}, F_0, T_0}^{(m, n)} \right\rangle + \sigma_b^2 \|\check{g}\|^2 \right\}. \quad (3.109)$$

#### 3.3.3.1 Puissance moyenne du bruit

Nous avons montré que  $P_B^{(p, q)} = \sigma_b^2 \|\check{g}\|^2$  avec  $\sigma_b^2$  la variance d'un bruit blanc gaussien. Nous cherchons donc à minimiser  $\|\check{g}\|^2$ , en considérant  $\|g\|^2$  fixée et en respectant la condition de biorthogonalité qui se traduit par

$$\langle g_{m, n}, \check{g}_{m, n} \rangle = 1. \quad (3.110)$$

À partir de cette expression, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\langle g_{m, n}, \check{g}_{m, n} \rangle \leq \|g_{m, n}\|^2 \|\check{g}_{m, n}\|^2. \quad (3.111)$$

Puisque  $\|g_{m, n}\|^2 = \|g\|^2$  et  $\|\check{g}_{m, n}\|^2 = \|\check{g}\|^2$  alors

$$\|g\|^2 \|\check{g}\|^2 \geq 1. \quad (3.112)$$

L'égalité est vérifiée lorsque  $\check{g}(t) = g(t)$ , c'est-à-dire lorsque le système est orthonormal. Cela signifie que  $\check{g}^H(t) = g^*(-t)$ , ce qui corrobore la théorie du filtrage adapté [Proakis 2006, p. 160] et [Pahlavan 1990].

## 3.3.3.2 Puissance moyenne des interférences

Par ailleurs, on rappelle que la minimisation de la puissance moyenne des interférences repose sur la minimisation de

$$P_I^{(p,q)} = \left\langle |A_{\check{g},g}|^2, \tilde{C}_{\mathcal{H},F_0,T_0}^{(p,q)} \right\rangle \quad (3.113)$$

avec

$$\tilde{C}_{\mathcal{H},F_0,T_0}^{(p,q)}(f, \tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} C_{\mathcal{H}}((p-m)F_0 + f, (q-n)T_0 + \tau). \quad (3.114)$$

Remarquons que la fonction de diffusion périodisée dépend des différences  $p-m$  et  $q-n$ . Il est ainsi possible de poser  $p' = p-m$  et  $q' = q-n$ . En notant  $M$  le nombre de sous-porteuses et  $K$  le nombre de symboles, nous avons  $\mathbf{I} = \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, K-1\}$ , on définit l'intervalle

$$\Delta_{p,q} = \{p - (M-1), \dots, p\} \times \{q - (K-1), \dots, q\} \setminus \{(0,0)\} \quad (3.115)$$

et on écrit

$$\tilde{C}_{\mathcal{H},F_0,T_0}^{(p,q)}(f, \tau) = \sum_{(p',q') \in \Delta_{p,q}} C_{\mathcal{H}}(p'F_0 + f, q'T_0 + \tau). \quad (3.116)$$

La puissance moyenne des interférences étant liée au produit scalaire présenté dans (3.113), il est possible de le minimiser en s'assurant que les supports des fonctions qui le composent soient quasiment disjoints [Liu 2004]. En raison de la dualité temps-fréquence, nous savons que  $\sigma_\nu^2 \sigma_t^2 = \epsilon^2$ ; la fonction  $|A_{\check{g},g}(f, \tau)|^2$  possède donc un support non-borné. En revanche, l'étalement fréquentiel introduit par le canal est indépendant de son étalement temporel. Pour des facilités de représentation, nous choisissons une fonction de diffusion symétrique de forme gaussienne tronquée, avec  $\tau \in [-\tau_{\max}/2; \tau_{\max}/2]$  et  $f \in [-f_d; f_d]$  (correspondant au cas d'un canal non-causal). Ainsi, les moments du second ordre de la fonction de diffusion sont suffisants pour caractériser l'étalement du canal et nous avons

$$\sqrt{\Delta C_t} \approx \tau_{\max}, \quad (3.117)$$

$$\sqrt{\Delta C_f} \approx 2f_d. \quad (3.118)$$

De même, nous choisissons des fonctions prototypes non-causales. Le support  $\epsilon$ -approximé d'une fonction  $f$  définie dans un ensemble  $\mathbf{X}$  se note

$$\text{supp}^{(\epsilon)}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad |f(\mathbf{x})| > \epsilon\}. \quad (3.119)$$

Nous pouvons représenter les supports approximés de  $A_{\check{g},g}$  et  $\tilde{C}_{\mathcal{H},F_0,T_0}^{(p,q)}$  dans le plan retard-Doppler (fig. 3.5). La puissance moyenne des interférences est d'autant plus faible que les supports approximés de  $A_{\check{g},g}$  et  $\tilde{C}_{\mathcal{H},F_0,T_0}^{(p,q)}$  sont éloignés dans le plan retard-Doppler et que  $\epsilon \rightarrow 0$ . La première condition peut être satisfaite en diminuant la densité du réseau temps-fréquence  $\Lambda$  et en introduisant ainsi une perte d'efficacité spectrale. La deuxième contrainte peut être approchée avec l'utilisation d'impulsions de mise en forme bien localisée en temps et en fréquence. Ainsi, une règle d'adaptation temps-fréquence grossière pourrait se traduire par

$$\frac{\sigma_t}{2} + \frac{\tau_{\max}}{2} \leq T_0, \quad (3.120)$$

$$\frac{\sigma_\nu}{2} + f_d \leq F_0. \quad (3.121)$$

Une manière de se plier à la contrainte de maximisation de la puissance moyenne du signal

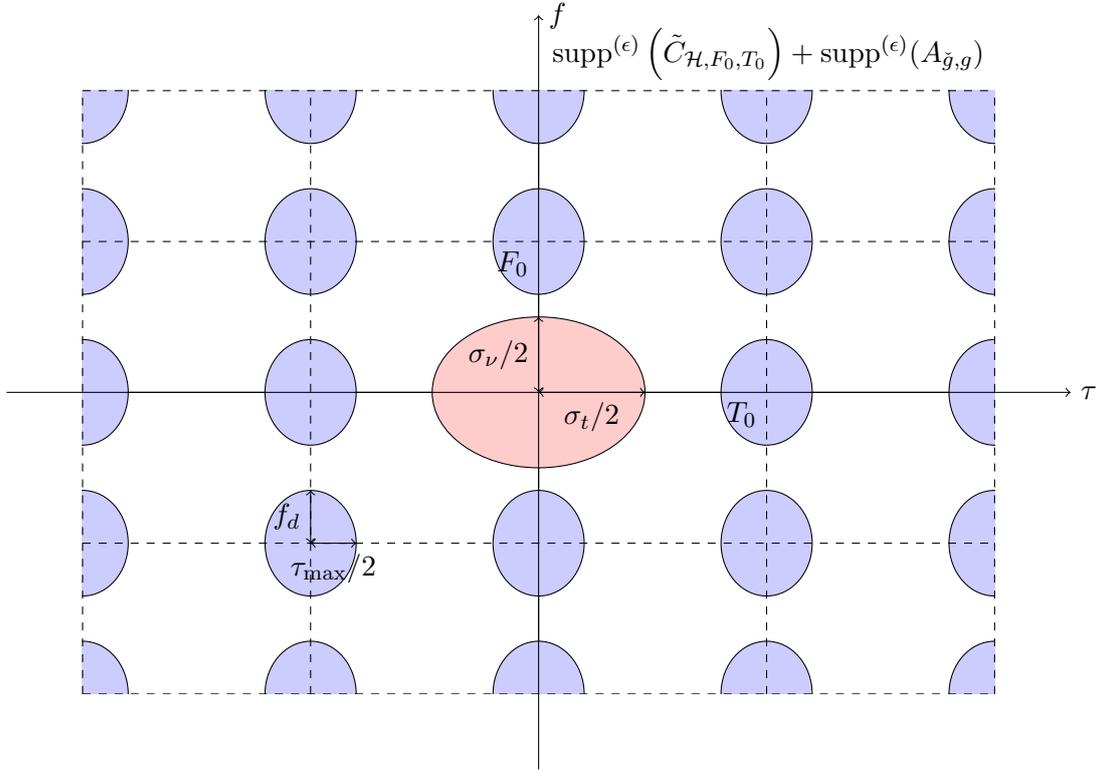


FIGURE 3.5 – Comparaison des supports des fonctions de diffusion périodisées et de la fonction d’interambiguïté des filtres.

utile (3.108) consiste à choisir des filtres dont les moments croisés du second ordre sont égaux aux moments du second ordre de la fonction de diffusion :

$$\sigma_t = \sqrt{\Delta C_t}, \quad (3.122)$$

$$\sigma_\nu = \sqrt{\Delta C_f}. \quad (3.123)$$

En injectant ce résultat dans (3.120) et (3.121) et en choisissant un réseau temps-fréquence de densité maximale (fig. 3.6), nous obtenons

$$\sqrt{\Delta C_t} = \sigma_t = T_0, \quad (3.124)$$

$$\sqrt{\Delta C_f} = \sigma_\nu = F_0. \quad (3.125)$$

Ces règles d’adaptation temps-fréquence précisent les contraintes énoncées dans [Kozek 1998, Jung 2007a, Strohmer 2003] et généralement formulées par

$$\sqrt{\frac{\Delta C_t}{\Delta C_f}} \approx \frac{\sigma_t}{\sigma_f} \approx \frac{T_0}{F_0}. \quad (3.126)$$

Un compromis sur la densité du réseau temps-fréquence peut être choisi, de telle sorte que le canal varie lentement sur la durée d’un symbole et présente un gain quasi-constant sur un

intervalle inter-porteuse. Ces conditions favorables à l'égalisation imposent les relations

$$F_0 \leq (\Delta\nu)_c, \tag{3.127}$$

$$T_0 \leq (\Delta t)_c. \tag{3.128}$$

avec

$$(\Delta t)_c \approx \frac{1}{f_d} \quad \text{et} \quad (\Delta\nu)_c \approx \frac{1}{\tau_{\max}}. \tag{3.129}$$

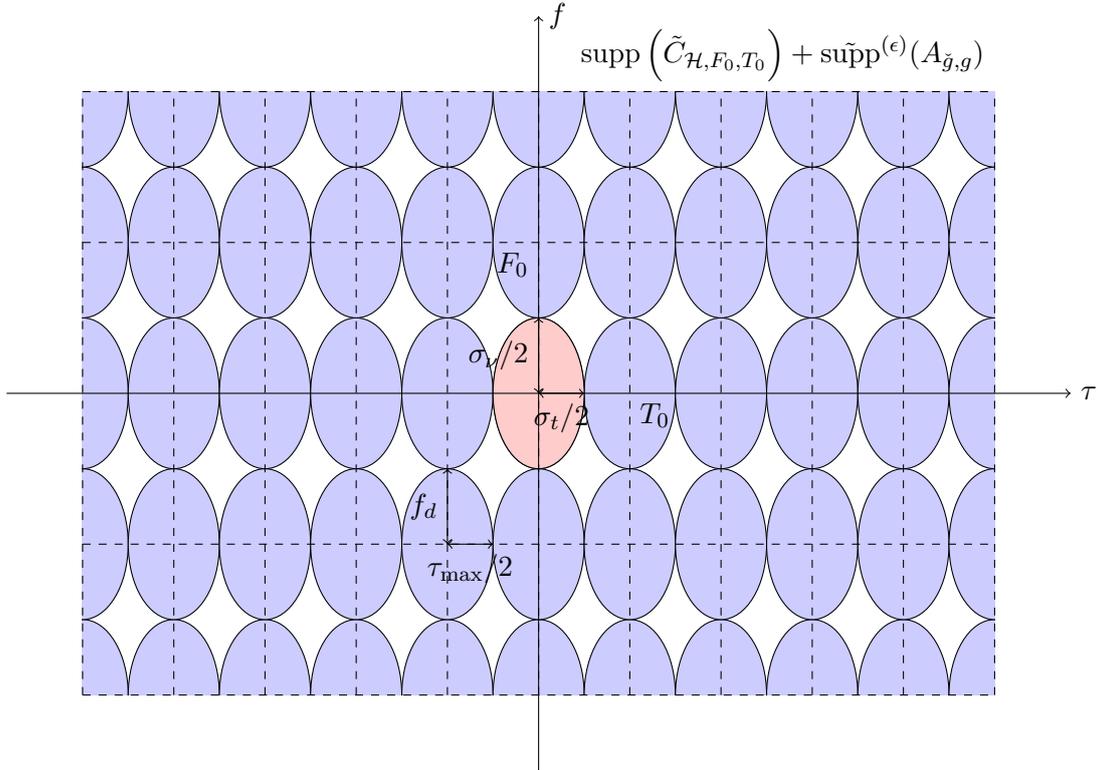


FIGURE 3.6 – Comparaison des supports des fonctions de diffusion périodisées et de la fonction d'interambiguïté des filtres dans le cas d'une adaptation temps-fréquence grossière.

Remarquons que de nombreux travaux de recherche visent l'élaboration d'impulsions de mise en forme optimales pour la transmission sur les canaux sélectifs en temps et en fréquence [Vahlin 1996, Strohmer 2001, Bellanger 2001, Siohan 2002, Farhang-Boroujeny 2005, Martin-Martin 2008, Viholainen 2009, Farhang-Boroujeny 2010, Lee 2010]. La plupart de ces publications spécifient l'utilisation de la modulation d'amplitude en quadrature décalée (OQAM) qui consiste à séparer les traitements effectués sur les voies en phase et en quadrature de manière à conserver l'orthogonalité entre les sous-porteuses et symboles adjacents [Siclet 2002b, Bölcskei 2003]. Notons que les schémas multiporteuses à base d'OQAM imposent des traitements supplémentaires en début et fin de chaîne de transmission, ils complexifient également l'égalisation [Holte 2009] et rendent difficile la mise en œuvre du schéma Alamouti [Lélé 2010]. Pour toutes ces raisons, nous focalisons notre étude sur les modulations multiporteuses à densité sous-critique à base de QAM. Pour autant, il est démontré dans [Siclet 2002a] que les

filtres développés pour les modulations basées sur OQAM peuvent être utilisés dans le cas QAM avec une densité égale à 0,5.

D'autres auteurs proposent des systèmes de transmission à reconstruction quasi-parfaite, bénéficiant d'une bonne efficacité spectrale mais s'appuyant sur des schémas d'égalisation complexes [Benvenuto 2002, Schniter 2004b, Das 2007]. Afin de faciliter l'intégration et l'adoption des systèmes que nous proposons dans les comités de standardisation, nous excluons cette approche au profit des systèmes à reconstruction parfaite et à densité sous-critique.

### 3.4 Système équivalent à temps discret

La réalisation ou la simulation d'un système de transmission multiporteuse à densité sous-critique requiert sa formulation à temps discret et sa mise œuvre à l'aide d'algorithmes efficaces. L'intérêt des émetteurs-récepteurs multiporteuses repose d'ailleurs sur leur mise en œuvre à l'aide de processeurs numériques du signal ou composants numériques spécifiques, capables de réduire considérablement la complexité d'intégration par rapport à une réalisation purement analogique. De manière simplifiée, nous pouvons considérer que la partie analogique des émetteurs-récepteurs se compose respectivement d'un convertisseur numérique-analogique (DAC<sup>8</sup>) et analogique-numérique (ADC<sup>9</sup>), équipés par exemple de filtres passe-bas idéaux (réponse impulsionnelle en sinus cardinal). L'hypothèse de transmission à bande étroite nous permet d'omettre les étapes de transposition sur onde porteuse. Enfin, nous supposons une synchronisation parfaite entre l'émetteur et le récepteur.

Concernant les aspects liés à la simulation de la chaîne de transmission complète, il est possible d'inclure les opérations de ADC et DAC au sein du modèle de canal. Nous travaillons ainsi avec un modèle de canal radiomobile équivalent discret en bande de base, tel que présenté au cours du chapitre 2, page 69.

#### 3.4.1 Émetteur-récepteur à temps discret

L'échantillonnage des signaux présentés dans le cadre de l'émetteur-récepteur à temps continu nous permet d'établir son équivalent à temps discret. Il est toutefois nécessaire de respecter le théorème de Nyquist–Shannon, ce qui implique une transmission à bande limitée. Pour cela, nous considérons un réseau temps-fréquence défini par un espacement entre porteuses  $F_0$ , un espacement entre symboles  $T_0$  et un ensemble  $\mathbf{I} = \{0, \dots, M - 1\} \times \mathbf{Z}$ , où  $M$  représente le nombre de sous-porteuses du système (voir page 74). En toute rigueur, si le filtre  $g$  est de support temporel fini, il ne peut être à bande limitée. Néanmoins, on pourra supposer que la quasi-totalité de l'énergie de  $g$  est concentrée dans une bande  $B_g$ . Dans ces conditions, le signal en sortie de l'émetteur occupe une bande  $B = MF_0 - F_0 + B_g$  que nous pouvons approximer par  $B \approx MF_0$  si  $M$  est grand. Il est alors possible d'échantillonner le signal émis,

---

8. *Digital-to-Analog Conversion*

9. *Analog-to-Digital Conversion*

sans perte d'information, en choisissant la fréquence d'échantillonnage critique  $F_e = B$ . L'espacement entre symboles peut s'écrire  $T_0 = NT_e$ , avec  $T_e = 1/F_e$  la période d'échantillonnage et  $N$  le nombre d'échantillons par symbole. La densité du réseau temps-fréquence peut alors se reformuler  $\rho(\mathbf{\Lambda}) = 1/F_0T_0 = M/N$  et le système est dit

- « suréchantillonné » s'il est à densité sous-critique (plus d'un échantillon par symbole de modulation QAM) ;
- « à échantillonnage critique » s'il est à densité critique (un échantillon par symbole de modulation QAM) ;
- « sous-échantillonné » s'il est à densité sous-critique (moins d'un échantillon par symbole de modulation QAM).

Les fonctions prototypes d'émission-réception échantillonnées se notent

$$g[k] = \sqrt{T_e} g(kT_e), \quad k \in \mathbf{Z} \quad (3.130)$$

et

$$\check{g}[k] = \sqrt{T_e} \check{g}(kT_e), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (3.131)$$

Ainsi, les fonctions de base d'émission et de réception s'écrivent

$$g_{m,n}[k] = \sqrt{T_e} g_{m,n}(kT_e) = g[k - nN] e^{j2\pi \frac{m}{M} k} e^{j\phi_{m,n}} \quad (3.132)$$

et

$$\check{g}_{p,q}[k] = \sqrt{T_e} \check{g}_{p,q}(kT_e) = \check{g}[k - qN] e^{j2\pi \frac{p}{M} k} e^{j\phi_{p,q}}. \quad (3.133)$$

Si l'on respecte le critère d'échantillonnage de Shannon–Nyquist, alors le produit scalaire est conservé si bien qu'un système biorthogonal à temps continu reste biorthogonal à temps discret :

$$\langle g_{m,n}, \check{g}_{p,q} \rangle_{\mathcal{L}_2(\mathbf{R})} = \langle g_{m,n}, \check{g}_{p,q} \rangle_{\ell_2(\mathbf{Z})} = \delta_{m,p} \delta_{n,q}. \quad (3.134)$$

Précisons que cette égalité suppose que les signaux à temps continu soient à bande limitée et implique par conséquent des signaux discrets de longueur infinie. L'égalité peut toutefois être approchée lorsque l'énergie des signaux à temps continu est concentrée dans une bande  $B$  et que la troncature de ces signaux est réalisée de manière à préserver la majeure partie de leur énergie.

### 3.4.1.1 Émetteur BFDM/QAM à temps discret

Le signal en sortie de l'émetteur à temps discret s'écrit

$$s[k] = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}} c_{m,n} g_{m,n}[k] \quad (3.135)$$

De manière équivalente, le signal émis peut aussi s'écrire, en posant  $\phi_{m,n} = -2\pi mnN/M$  :

$$s[k] = \sum_{m=0}^{M-1} s_m[k] \quad (3.136)$$

avec le signal transmis sur la voie  $m$  défini par  $s_m[k] = (c_m * g_m)[k]$ , avec  $c_m[k]$  représentant la séquence de symboles transmis sur la voie  $m$  et expansée d'un facteur  $N$ , tel que

$$c_m[k] = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{m,n} \delta[k - nN] \quad (3.137)$$

avec  $g_m[k]$  la fonction prototype d'émission modulée définie par

$$g_m[k] = g[k] e^{j2\pi \frac{m}{M} k}. \quad (3.138)$$

Autrement dit,  $s[k]$  est obtenu en sortie d'un banc de filtres de synthèse, qui a pour entrées les symboles  $c_{m,n}$  avec  $(m, n) \in \mathbf{I}$  (fig. 3.7).

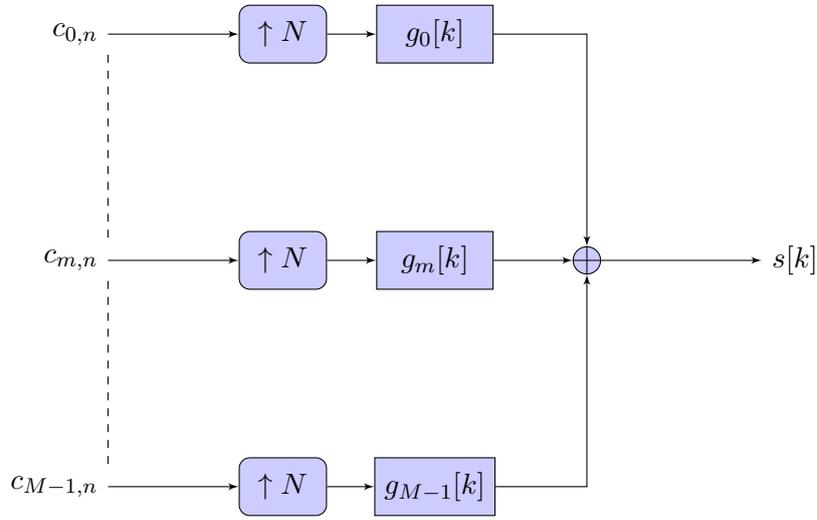


FIGURE 3.7 – Émetteur multiporteuse suréchantillonné à temps discret avec  $\mathbf{I} = \{0, \dots, M-1\} \times \mathbf{Z}$  et un facteur de suréchantillonnage  $N/M$ .

### 3.4.1.2 Récepteur BFDM/QAM à temps discret

Si l'on se place dans le cas d'un canal de transmission idéal tel que  $r[k] = s[k]$  et que l'on pose  $\phi_{p,q} = -2\pi pqM/N$  les symboles estimés s'écrivent

$$\tilde{c}_{p,q} = \langle \check{g}_{p,q}, r \rangle = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}} c_{m,n} \langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle. \quad (3.139)$$

De manière équivalente, les symboles estimés se notent  $\tilde{c}_{p,q} = \tilde{c}_p[qN]$  avec  $\tilde{c}_p[k] = (\check{g}_p^H * r)[k]$  le signal reçu sur la voie  $p$  et filtré par la version retournée et conjuguée de

$$\check{g}_p[k] = \check{g}[k] e^{j2\pi \frac{p}{M} k}. \quad (3.140)$$

Ainsi, on obtient les symboles  $\tilde{c}_{p,q}$ , en sortie d'un banc de filtres d'analyse d'entrée  $r[k]$  (fig. 3.8).

Ces relations confirment, à l'instar du cas continu que la reconstruction parfaite est assurée si  $\langle \check{g}_{p,q}, g_{m,n} \rangle = \delta_{m,p} \delta_{n,q}$ ,  $\forall (m,n), (p,q) \in \mathbf{I}$ . Notons que si les fonctions prototypes à temps continu sont de durée finie (ou ont été tronquées), alors le critère de Nyquist–Shannon ne peut pas être respecté strictement si bien que les fonctions échantillonnées correspondantes ne remplissent pas nécessairement les conditions de reconstruction parfaite. Ce constat motive la synthèse directe des filtres discrets [Cvetkovic 1999, Siclet 2006, Pinchon 2004b, Pinchon 2004a].

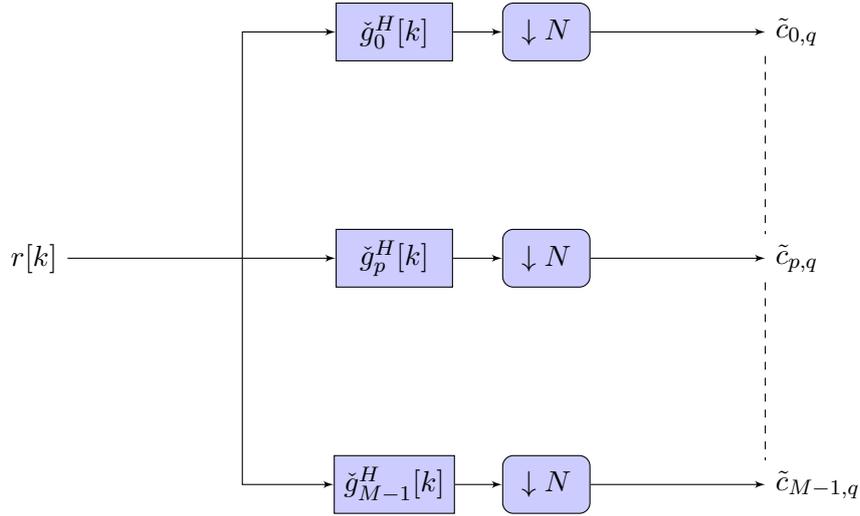


FIGURE 3.8 – Récepteur multiporteuse suréchantillonné à temps discret avec  $\mathbf{I} = \{0, \dots, M-1\} \times \mathbf{Z}$  et un facteur de suréchantillonnage  $N/M$ .

### 3.4.2 Émetteur-récepteur à temps discret causal

À l'instar du cas continu, il est nécessaire de spécifier des filtres discrets causaux afin d'aboutir à un système réalisable. En utilisant les résultats des calculs réalisés au cours de la partie 3.1.3, page 79, nous pouvons supposer que les réponses impulsionnelles  $g(t)$  et  $\check{g}^H(t)$  sont de durée finie et de supports respectivement inclus dans  $[0; K_g T_0[$  et  $[0; K_{\check{g}} T_0[$  avec  $K_g, K_{\check{g}}$  des entiers positifs. Dans ces conditions, les symboles sont reconstruits avec un certain retard de  $D$  échantillons, tel qu'indiqué dans (3.27).

Les réponses impulsionnelles des filtres discrets sont alors elles-mêmes causales et de supports respectifs  $\{0, \dots, L_g - 1\}$  et  $\{0, \dots, L_{\check{g}} - 1\}$ , en posant  $L_g = K_g N$  et  $L_{\check{g}} = K_{\check{g}} N$ . En pratique, nous choisirons le plus souvent  $K_g = K_{\check{g}}$  de manière à faciliter la synthèse de filtres à reconstruction parfaite.

### 3.4.3 Gain complexe du système discret équivalent

Le canal de transmission discret équivalent (fig. 3.9), noté  $\tilde{\mathcal{H}}$ , modélise une propagation à  $I$  trajets, évolutive dans le temps et soumise à un bruit blanc dans la bande considérée (voir description détaillée du modèle page 2.5). Sachant que le signal émis possède une bande  $B$

(après interpolation), nous supposons que le signal reçu possède le même support fréquentiel ; autrement dit, le décalage Doppler maximal  $f_d$  est négligeable devant  $B$ . La relation d'entrée sortie du canal discret équivalent se note

$$r[k] = (\tilde{\mathcal{H}}s)[k] + b[k] = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \tilde{\alpha}_l[k] s[k-l] + b[k] \quad (3.141)$$

avec

$$\tilde{\alpha}_l[k] = \sum_{i=1}^I \alpha_i(k/B) \text{sinc}(B\tau_i - l). \quad (3.142)$$

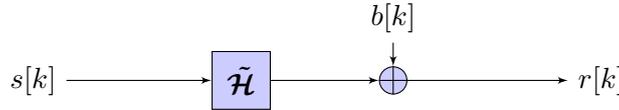


FIGURE 3.9 – Équivalent discret du canal doublement dispersif à bruit additif.

Le récepteur projette le signal reçu sur une famille  $\{\check{g}_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathbf{I}}$ , de telle sorte,  $\forall (p,q) \in \mathbf{I}$ , les symboles estimés s'écrivent

$$\tilde{c}_{p,q} = \langle \check{g}_{p,q}, r \rangle = \langle \check{g}_{p,q}, \tilde{\mathcal{H}}s + b \rangle = \langle \check{g}_{p,q}, \tilde{\mathcal{H}}s \rangle + \langle \check{g}_{p,q}, b \rangle. \quad (3.143)$$

En présence de l'équivalent discret du canal de transmission sélectif en temps et en fréquence, les conditions de reconstruction parfaite ne sont plus respectées et nous avons

$$\tilde{c}_{p,q} = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}} c_{m,n} A_{m,n,p,q} + b_{p,q}. \quad (3.144)$$

avec le bruit discret filtré par le récepteur

$$b_{p,q} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \check{g}[k - qN] e^{-j2\pi \frac{p}{M} k} b[k]. \quad (3.145)$$

Le coefficient  $A_{m,n,p,q}$  est comparable à  $H_{m,n,p,q}$  formulé dans le cas continu (3.45). Il représente la relation entre le symbole  $(m,n)$  et le symbole  $(p,q)$  et s'écrit

$$A_{m,n,p,q} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{\alpha}_l[k] g[k-l-nN] \check{g}[k-qN] e^{j2\pi(m-p)\frac{k}{M}} e^{-j2\pi m\frac{l}{M}}. \quad (3.146)$$

En posant  $\mathbf{I}_{p,q} = \mathbf{I} \setminus (p,q)$ , il est possible d'isoler le terme de signal utile  $s_{p,q}$  du terme d'interférence  $i_{p,q}$ , tel que

$$\tilde{c}_{p,q} = s_{p,q} + i_{p,q} + b_{p,q}. \quad (3.147)$$

avec

$$s_{p,q} = c_{p,q} A_{p,q,p,q}, \quad (3.148)$$

$$i_{p,q} = \sum_{(m,n) \in \mathbf{I}_{p,q}} c_{m,n} A_{m,n,p,q}. \quad (3.149)$$

Les relations d'entrée-sortie de l'ensemble émetteur-canal-récepteur sont très similaires à celles présentées dans le cas continu. Il en découle naturellement que les fonctions prototypes optimisées à temps continu conserveront des performances similaires dans le cas discret, à condition de choisir des réponses impulsionnelles de longueur suffisante.

La réalisation directe de l'émetteur décrit ci-dessus présente une complexité algorithmique élevée en raison du facteur de suréchantillonnage par  $N$  sur chaque voie suivi d'un filtrage de longueur  $L_g$  et modulation par une exponentielle complexe. En raison de sa structure duale, le récepteur présente une complexité algorithmique similaire. La théorie des bancs de filtres apporte des outils permettant de reformuler le transmultiplexeur, permettant une mise en œuvre efficace [Vaidyanathan 1993]. Plusieurs auteurs mettent en évidence l'intérêt des décompositions polyphases et des identités nobles dans ce processus [Weiss 2000, Siclet 2002b, Beaulieu 2009, Moret 2010]. De plus, ces schémas de réalisation efficaces permettent de recourir à l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT<sup>10</sup>) qui réduit considérablement la complexité du système. Notons toutefois que celle-ci croît en même temps que la longueur des réponses impulsionnelles des filtres et que le système d'égalisation associé au système de transmission reste suffisamment complexe pour écarter ces derniers de la plupart des standards actuels.

## Synthèse du chapitre

Ce chapitre débute par la présentation de la structure de l'émetteur-récepteur multi-porteuses, incluant ses relations d'entrée-sortie à temps continu. Nous nous focalisons sur les systèmes à reconstruction parfaite, basés sur la modulation d'amplitude en quadrature (BFDM/QAM). En s'appuyant sur les résultats du chapitre précédent concernant la structure propre approchée des canaux radiomobiles et en considérant le théorème de Balian–Low, nous rappelons l'intérêt d'utiliser des systèmes à densité sous-critique.

En s'intéressant au cas particulier des canaux de transmission WSSUS, nous réalisons une étude théorique sur l'adaptation temps-fréquence des impulsions de mise en forme en fonction des caractéristiques statistiques du canal. Pour un réseau temps-fréquence donné, cette analyse vise la maximisation de la puissance moyenne du signal utile et la minimisation de la puissance moyenne de l'interférence et du bruit. En cherchant par ailleurs à obtenir une efficacité spectrale la plus élevée possible, nous montrons qu'il est nécessaire de choisir des impulsions de mise en forme orthogonales, dont les moments du second ordre en temps et en fréquence sont égaux, respectivement, à l'étalement moyen en temps et en fréquence du canal de transmission. Ces résultats précisent des travaux présentés dans [Kozek 1998, Strohmer 2003, Jung 2007a].

Nous concluons le chapitre en donnant un équivalent discret de l'émetteur-récepteur multi-porteuses. Une telle formulation montre que le facteur de suréchantillonnage s'exprime comme l'inverse de la densité du réseau temps-fréquence. De plus, nous précisons le délai de recons-

---

10. *Fast Fourier Transform*

truction nécessaire pour obtenir un système causal et observons qu'il est en particulier lié à la longueur des filtres lorsqu'ils sont symétriques.

# Cas particulier du WCP-OFDM

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Structure particulière du transmultiplexeur WCP-OFDM . . . . .</b>	<b>102</b>
4.1.1	Émetteur WCP-OFDM . . . . .	102
4.1.2	Récepteur WCP-OFDM . . . . .	105
<b>4.2</b>	<b>Spécification des filtres courts à reconstruction parfaite . . . . .</b>	<b>105</b>
4.2.1	Conditions de reconstruction parfaite . . . . .	107
4.2.2	Exemples de filtres pour systèmes WCP-OFDM orthogonaux . . . . .	108
4.2.3	Mesures de localisation temps-fréquence et d'énergie hors bande . . . . .	110
<b>4.3</b>	<b>Schémas d'égalisation de faible complexité . . . . .</b>	<b>112</b>
4.3.1	Relation d'entrée-sortie en présence d'un canal radiomobile . . . . .	112
4.3.2	Méthodologie pour le choix d'une stratégie d'égalisation adaptée . . . . .	116
<b>4.4</b>	<b>Problématique du PAPR et émetteur-récepteur WCP-SC . . . . .</b>	<b>119</b>
4.4.1	Évaluation du PAPR et cas particulier des modulations multiporteuses . . . . .	121
4.4.2	Précodage et schéma de transmission WCP-SC . . . . .	122

---

Les systèmes de transmission multiporteuses suréchantillonnés, de type BFDM/QAM, constituent une technique de transmission attractive pour les canaux sélectifs en temps et en fréquence. Ils permettent en effet de répartir l'information dans le plan temps-fréquence, tout en disposant d'une grande variété d'impulsions de mise en forme, potentiellement adaptées aux caractéristiques du milieu de propagation. Au cours du chapitre précédent, nous avons ainsi montré que la maîtrise de la localisation en temps et en fréquence des fonctions prototypes était fondamentale afin de maximiser les performances moyennes d'un tel système, en terme de SINR.

Les déclinaisons à temps discret des émetteurs-récepteurs BFDM/QAM s'appuient généralement sur la théorie des bancs de filtres afin d'obtenir un schéma de réalisation efficace, en introduisant notamment l'algorithme de transformée de Fourier rapide et en parallélisant les traitements à l'aide de décompositions polyphases. Cependant, la complexité globale de l'émetteur-récepteur reste élevée si l'on tient compte de l'égaliseur correspondant. Cela explique les difficultés de ces techniques de modulation à s'imposer au sein des applications de transmission.

À travers ce chapitre, nous nous focalisons sur le cas particulier des émetteurs-récepteurs multiporteuses à filtres courts, appelés *Weighted Cyclic Prefix OFDM*, qui généralisent l'OFDM

avec préfixe cyclique. Cette stratégie de modulation-démodulation réduit considérablement la complexité algorithmique des émetteurs-récepteurs en favorisant les traitements par blocs de taille  $N$  ou  $M$  échantillons. Nous exprimons dans un premier temps les relations matricielles d'entrée-sortie du système de transmission complet (incluant le canal de transmission), puis nous formalisons les conditions de reconstruction parfaite à imposer aux fonctions prototypes. Nous proposons ensuite plusieurs égaliseurs de faible complexité algorithmique. Enfin, nous évaluons l'impact du rapport de puissance crête sur puissance moyenne des systèmes WCP-OFDM qui constitue généralement un frein pour l'intégration des systèmes de transmission multiporteuses.

## 4.1 Structure particulière du transmultiplexeur WCP-OFDM

Les schémas de réalisation efficaces de l'émetteur-récepteur BFDM/QAM, tels que ceux présentés dans [Siclet 2002b, Moret 2010] se basent sur l'utilisation de la transformée de Fourier rapide. Par ailleurs, la décomposition polyphase des filtres d'émission et de réception permet de paralléliser les opérations de filtrage et par conséquent de faciliter l'intégration de l'émetteur-récepteur. Il convient toutefois de rappeler que les opérations de modulation et démodulation ont une complexité algorithmique d'autant plus grande que les réponses impulsionnelles des filtres sont longues. Il en résulte que les filtres de longueur minimale, c'est-à-dire dont la réponse impulsionnelle comporte  $N$  coefficients, apportent des simplifications considérables en évitant le recours aux décompositions polyphases. C'est pourquoi, dans cette partie, nous nous focalisons sur le cas où les supports de  $g[k]$  et  $\check{g}[k]$  sont inclus dans  $\{0, \dots, N-1\}$ .

### 4.1.1 Émetteur WCP-OFDM

Considérons la transmission d'un bloc  $n$  donné, composé de  $N$  échantillons et noté sous forme vectorielle

$$\mathbf{s}_n = [s_n[0] \dots s_n[N-1]]^T \quad (4.1)$$

avec  $s_n[k] = s[k + nN]$  pour  $0 \leq k \leq N-1$ . Sachant que  $g[k] = 0$  si  $k < 0$  ou  $k > N-1$ , nous avons

$$s_n[k] = \sum_{m=0}^{M-1} c_{m,n} g[k] e^{j2\pi \frac{m}{M}(k+nN)} e^{j\phi_{m,n}} \quad (4.2)$$

$$= g[k] \sum_{m=0}^{M-1} c_{m,n} e^{j2\pi \frac{m}{M}k} = g[k] C_n[k] \quad (4.3)$$

avec

$$C_n[k] = \sum_{m=0}^{M-1} c_{m,n} e^{j2\pi \frac{m}{M}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (4.4)$$

Le terme de phase  $\phi_{m,n} = -2\pi mnN/M$  découle de (3.3) ; il permet de simplifier les notations lorsque l'on considère un émetteur causal, tel que spécifié dans (3.24). Ainsi, en définissant

le  $n$ -ième vecteur de symboles à transmettre  $\tilde{\mathbf{c}}_n = [c_{0,n} \dots c_{M-1,n}]^T$ , nous écrivons

$$\mathbf{C}_n = \sqrt{M} \mathbf{F}_M^H \mathbf{c}_n \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{F}_M$  correspond à la matrice de Fourier de taille  $M$  dont les entrées sont notées

$$F_M[k, l] = 1/\sqrt{M} e^{-j2\pi \frac{l}{M} k}, \quad 0 \leq k, l \leq M-1. \quad (4.6)$$

Le vecteur  $\mathbf{C}_n = [C_n[0] \dots C_n[M-1]]^T$  correspond donc à la transformée de Fourier discrète inverse du vecteur de symboles  $\mathbf{c}_n$ . De plus, notons que  $C_n[k] = C_n[k+M]$ , de telle sorte que pour  $M \leq k \leq N-1$ ,  $C_n[k] = C_n[k-M]$ , avec  $0 \leq k-M \leq \Delta-1$ , où  $\Delta = N-M$ . Ainsi

$$s_n[k] = \begin{cases} C_n[k]g[k], & \text{si } 0 \leq k \leq M-1, \\ C_n[k-M]g[k], & \text{si } M \leq k \leq N-1 \end{cases} \quad (4.7)$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{D}_g \mathbf{P}_\Delta \mathbf{C}_n = \sqrt{M} \mathbf{D}_g \mathbf{P}_\Delta \mathbf{F}_M^H \mathbf{c}_n \quad (4.8)$$

avec  $\mathbf{D}_g = \text{diag}(g[0], \dots, g[N-1])$  et  $\mathbf{P}_\Delta$  la matrice d'extension cyclique de taille  $N \times M$  dont les entrées s'écrivent  $P_\Delta[k, m] = \delta_{k,m} + \delta_{k-M,m}$  pour  $0 \leq k \leq N-1$  et  $0 \leq m \leq M-1$ .

**Exemple 4.1** (Émetteur OFDM avec préfixe cyclique)

Il est intéressant de confronter le résultat obtenu au cas particulier de l'OFDM avec préfixe cyclique de longueur  $\Delta = N-M$ . Notons  $s_n^{CP}[k]$  le signal obtenu en sortie de l'émetteur CP-OFDM et  $g^{CP}[k]$  la fonction prototype d'émission correspondante. Puisque nous avons  $g^{CP}[k] = 1/\sqrt{M}$  pour  $0 \leq k \leq N-1$ , alors  $s_n^{CP}[k]$  peut être obtenu à partir de (4.7) tel que

$$s_n^{CP}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} C_n[k], & \text{si } 0 \leq k \leq M-1, \\ \frac{1}{\sqrt{M}} C_n[k-M], & \text{si } M \leq k \leq N-1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Nous remarquons que (4.7) fait apparaître un suffixe cyclique puisque nous avons posé  $C_n[k] = C_n[k-M]$  pour  $M \leq k \leq N-1$  plutôt que  $C_n[k] = C_n[k+M]$  pour  $0 \leq k \leq \Delta-1$ . Ces deux conventions sont strictement équivalentes.

D'après l'exemple précédent, l'utilisation de filtres courts nous permet d'écrire dans le cas général

$$s_n[k] = \sqrt{M} s_n^{CP}[k] g[k]. \quad (4.10)$$

Le signal  $s[k]$  en sortie du modulateur peut être vu comme une version pondérée du signal CP-OFDM. Nous désignons un tel système de transmission par le sigle WCP-OFDM, pour *Weighted Cyclic Prefix OFDM*. Le schéma de réalisation efficace de l'émetteur est alors représenté sur la figure 4.1.

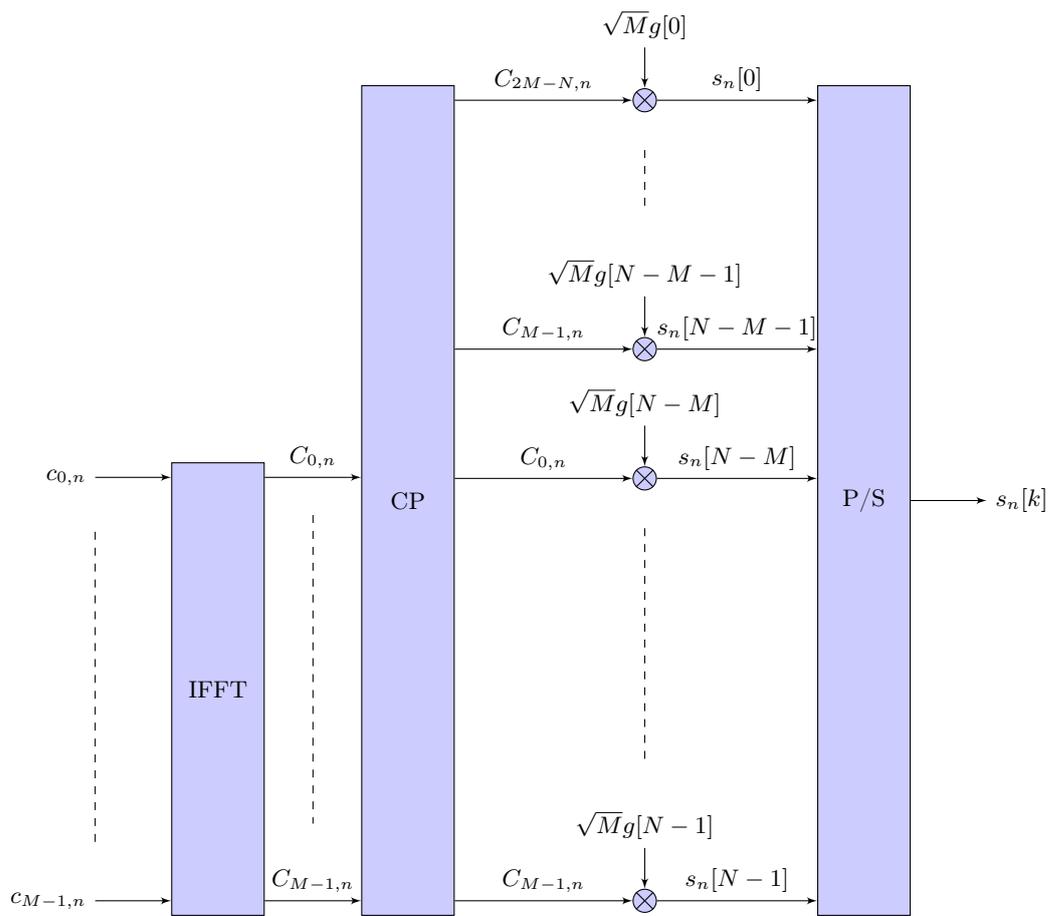


FIGURE 4.1 – Schéma de réalisation efficace de l'émetteur WCP-OFDM avec un facteur de suréchantillonnage  $N/M$ .

### 4.1.2 Récepteur WCP-OFDM

Considérons la réception d'un bloc  $n$  donné, composé de  $N$  échantillons. En restreignant les fonctions prototypes de réception au cas où  $\check{g}[k] = 0$  si  $k < 0$  ou  $k > N - 1$ , les symboles estimés s'écrivent

$$\tilde{c}_{m,n} = \sum_{k=nN}^{nN+N-1} r[k] \check{g}^*[k - nN] e^{-j2\pi \frac{m}{M} k} e^{-j\phi_{m,n}} \quad (4.11)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} r_n[k] \check{g}^*[k] e^{-j2\pi \frac{m}{M} k} \quad (4.12)$$

puisque l'on a posé  $\phi_{m,n} = -2\pi mnN/M$  et avec  $r_n[k] = r[k + nN]$  pour  $0 \leq k \leq N - 1$ . En notant

$$\tilde{C}_n[k] = \begin{cases} r_n[k] \check{g}[k] + r_n[k + M] \check{g}[k + M], & \text{si } 0 \leq k \leq \Delta - 1, \\ r_n[k] \check{g}[k], & \text{si } \Delta \leq k \leq M - 1, \end{cases} \quad (4.13)$$

nous pouvons écrire de manière équivalente

$$\tilde{c}_{m,n} = \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{C}_n[k] e^{-j2\pi \frac{m}{M} k}. \quad (4.14)$$

Par conséquent, en notant le  $n$ ième bloc de symboles reçus  $\mathbf{r}_n = [r_n[0] \dots r_n[N - 1]]^T$ , alors

$$\tilde{\mathbf{C}}_n = \mathbf{P}_{\Delta}^T \mathbf{D}_{\check{g}} \mathbf{r}_n. \quad (4.15)$$

et le  $n$ ième vecteur de symboles estimés  $\tilde{\mathbf{c}}_n = [\tilde{c}_{0,n} \dots \tilde{c}_{M-1,n}]^T$  s'écrit

$$\tilde{\mathbf{c}}_n = \sqrt{M} \mathbf{F}_M \tilde{\mathbf{C}}_n = \sqrt{M} \mathbf{P}_{\Delta}^T \mathbf{D}_{\check{g}} \mathbf{r}_n. \quad (4.16)$$

**Exemple 4.2** (Récepteur OFDM avec préfixe cyclique)

Dans le cas de l'OFDM avec préfixe cyclique de longueur  $\Delta = N - M$ , la fonction prototype de réception se définit par

$$\check{g}^{CP}[k] = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq k \leq \Delta - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{M}}, & \text{si } \Delta \leq k \leq N - 1. \end{cases} \quad (4.17)$$

Il en découle que (4.13) se simplifie en  $\tilde{C}_n^{CP}[k] = 1/\sqrt{M} r[k + nN]$  pour  $0 \leq k \leq M - 1$ . Cela signifie que les  $\Delta$  premiers échantillons du bloc constituant le préfixe cyclique sont supprimés en réception.

Le schéma de réalisation efficace du récepteur est alors représenté sur la figure 4.2.

## 4.2 Spécification des filtres courts à reconstruction parfaite

En présence d'un canal idéal, il est commode de choisir les filtres de mise en forme de telle sorte que ceux-ci permettent la transmission des symboles sans pertes d'information. Nous

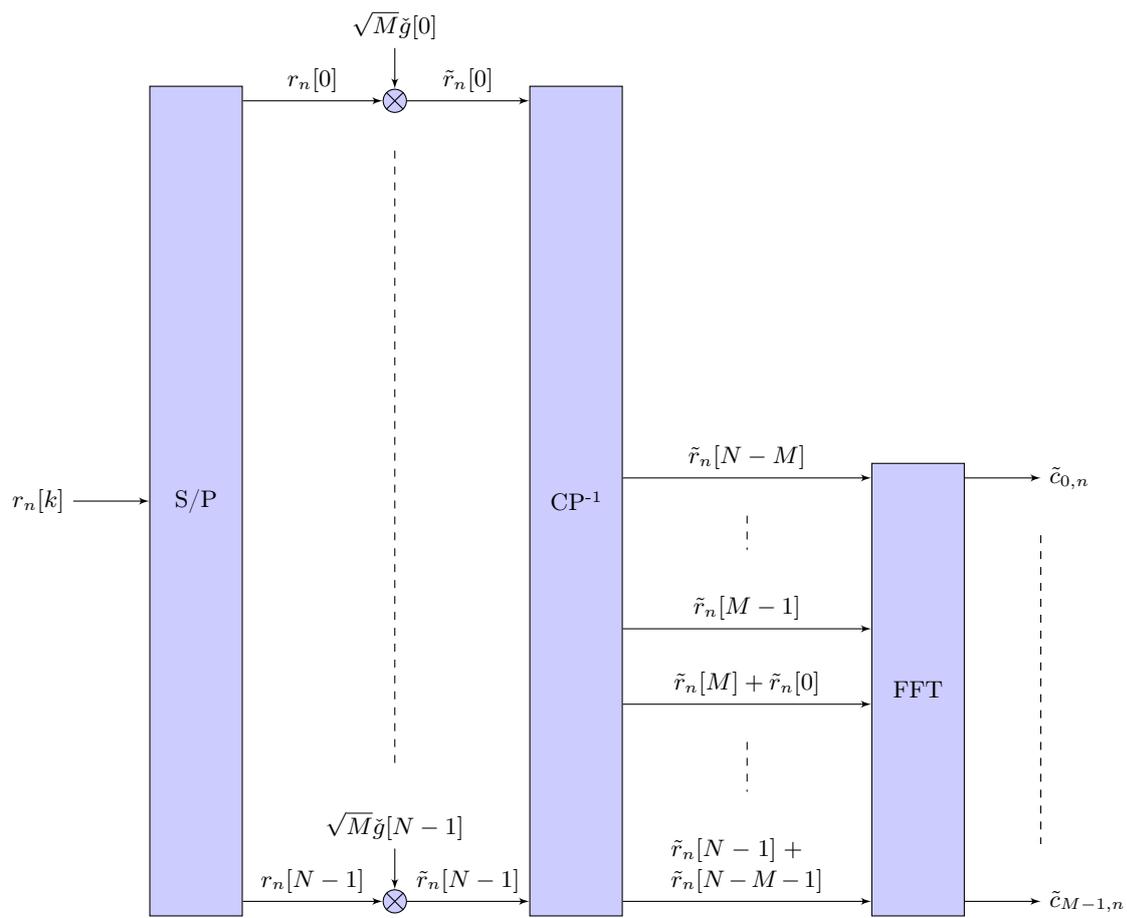


FIGURE 4.2 – Schéma de réalisation efficace du récepteur WCP-OFDM avec un facteur de suréchantillonnage  $N/M$ .

parlons alors de reconstruction parfaite des symboles émis. Les contraintes de biorthogonalité ou d'orthogonalité doivent donc être appliquées aux filtres de mise en forme, tel que nous l'avons établi dans le cas plus général des systèmes BFDN/QAM. Lorsque le canal est sélectif en fréquence et en temps, les conditions de reconstruction parfaite ne sont généralement plus assurées. Il convient alors d'optimiser les filtres prototypes d'émission et de réception en fonction des caractéristiques du canal de transmission.

### 4.2.1 Conditions de reconstruction parfaite

Les conditions de reconstruction parfaite sont respectées lorsque  $\tilde{\mathbf{c}}_n = \mathbf{c}_n$ , en présence d'un canal idéal, sans bruit, c'est-à-dire garantissant  $\mathbf{r}_n = \mathbf{s}_n$ . D'après (4.8) et (4.16), la relation d'entrée-sortie s'exprime par

$$\tilde{\mathbf{c}}_n = M \mathbf{F}_M \mathbf{P}_\Delta^T \mathbf{D}_{\check{g}} \mathbf{D}_g \mathbf{P}_\Delta \mathbf{F}_M^H \mathbf{c}_n. \quad (4.18)$$

Par conséquent, les conditions de reconstruction parfaites s'énoncent par la relation

$$\mathbf{F}_M \mathbf{P}_\Delta^T \mathbf{D}_{\check{g}} \mathbf{D}_g \mathbf{P}_\Delta \mathbf{F}_M^H = \frac{\mathbf{I}_M}{M} \quad (4.19)$$

avec  $\mathbf{I}_M$  la matrice identité de taille  $M$ . De plus, puisque  $\mathbf{F}_M^H = \mathbf{F}_M^{-1}$ , l'expression se simplifie et nous avons

$$\mathbf{P}_\Delta^T \mathbf{D}_{\check{g}} \mathbf{D}_g \mathbf{P}_\Delta = \frac{\mathbf{I}_M}{M} \quad (4.20)$$

qui s'écrit également

$$\begin{cases} g[k]\check{g}[k] + g[k+M]\check{g}[k+M] = \frac{1}{M}, & \text{pour } 0 \leq k \leq \Delta - 1, \\ g[k]\check{g}[k] = \frac{1}{M}, & \text{pour } \Delta \leq k \leq M - 1. \end{cases} \quad (4.21)$$

#### Exemple 4.3 (OFDM avec préfixe cyclique)

L'OFDM avec préfixe cyclique utilise des filtres courts puisqu'il n'y a aucun recouvrement entre les impulsions de mise en forme de deux blocs successifs. En notant

$$g^{CP}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}}, & \text{pour } 0 \leq k \leq N - 1, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.22)$$

et

$$\check{g}^{CP}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}}, & \text{pour } \Delta \leq k \leq N - 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.23)$$

Les conditions de reconstruction parfaites énoncées dans (4.21) sont respectées. Nous désignons par la suite le prototype  $g^{CP}[k]$  par le sigle CP et nous l'utilisons comme référence vis-à-vis des autres impulsions de mise en forme présentées ultérieurement.

En imposant les conditions d'orthonormalité et en choisissant des filtres à phase linéaire, nous avons  $g[k] = \check{g}[k] = g[N - 1 - k]$  et les conditions de reconstruction parfaite se notent

$$\begin{cases} g^2[k] + g^2[k+M] = \frac{1}{M}, & \text{pour } 0 \leq k \leq (\Delta - 1)/2, \\ g^2[k] = \frac{1}{M}, & \text{pour } \Delta \leq k \leq (M - 1)/2. \end{cases} \quad (4.24)$$

### 4.2.2 Exemples de filtres pour systèmes WCP-OFDM orthogonaux

Les systèmes de transmission orthogonaux permettent la transmission optimale sur les canaux de transmission à bruit additif blanc gaussien. C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons à ce type de filtres particuliers. De plus, nous avons montré l'importance d'impulsions de mise en forme bien localisées en temps et en fréquence pour transmettre de manière quasi-optimale sur les canaux de transmission sélectifs en temps et en fréquence. Nous focalisons notre étude du WCP-OFDM sur deux prototypes présentés dans [Pinchon 2011], vérifiant (4.24) et optimisés selon deux critères :

- minimisation de l'énergie hors-bande (OBE<sup>1</sup>);
- maximisation de la localisation temps-fréquence (TFL<sup>2</sup>).

Sachant que  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ , une manière de satisfaire (4.24) consiste à choisir

$$g[k] = \check{g}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} \cos(\theta[k]), & \text{pour } 0 \leq k \leq (\Delta - 1), \\ \frac{1}{\sqrt{M}}, & \text{pour } \Delta \leq k \leq M - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \sin(\theta[k]), & \text{pour } M \leq k \leq N - 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.25)$$

où  $\theta[k] \in [0; 2\pi[$  représente un angle à optimiser en fonction du critère d'optimisation choisi. Dans [Pinchon 2011], les prototypes sont obtenus à l'aide de la méthode de représentation compacte [Pinchon 2004b, Siclet 2006] et de la fonction prototype [Pinchon 2004a]. En utilisant le modèle ci-dessus, les réponses impulsionnelles des prototypes OBE et TFL peuvent être approchées par des expressions analytiques relativement simples (notation de  $\theta[k]$  sous la forme d'un polynôme en  $k$  du premier degré).

Soient  $M_0$  et  $N_0$  deux entiers premiers entre eux avec  $1 \leq M_0 < N_0$ . Nous écrivons à partir de ces entiers les paramètres du modulateur  $M = \Delta M_0$  et  $N = \Delta N_0$ . Les prototypes utilisés au cours de cette étude respectent la relation  $N_0 = M_0 + 1$ , permettant ainsi une perte d'efficacité spectrale minimale.

#### 4.2.2.1 Critère de minimisation de l'énergie hors bande

L'expression analytique approchée pour  $2 \leq M_0 \leq 20$  nous permet d'écrire la réponse impulsionnelle du prototype OBE sous la forme

$$g^{\text{OBE}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} \cos\left(\tilde{a}_{M_0} + \tilde{b}_{M_0} \frac{2k+1}{2\Delta}\right), & \text{pour } 0 \leq k \leq \Delta - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{M}}, & \text{pour } \Delta \leq k \leq M - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \cos\left(\tilde{a}_{M_0} + \tilde{b}_{M_0} \frac{2(N-k)-1}{2\Delta}\right), & \text{pour } M \leq k \leq N - 1, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.26)$$

---

1. *Out-of-Band Energy*

2. *Time-Frequency Localization*

avec

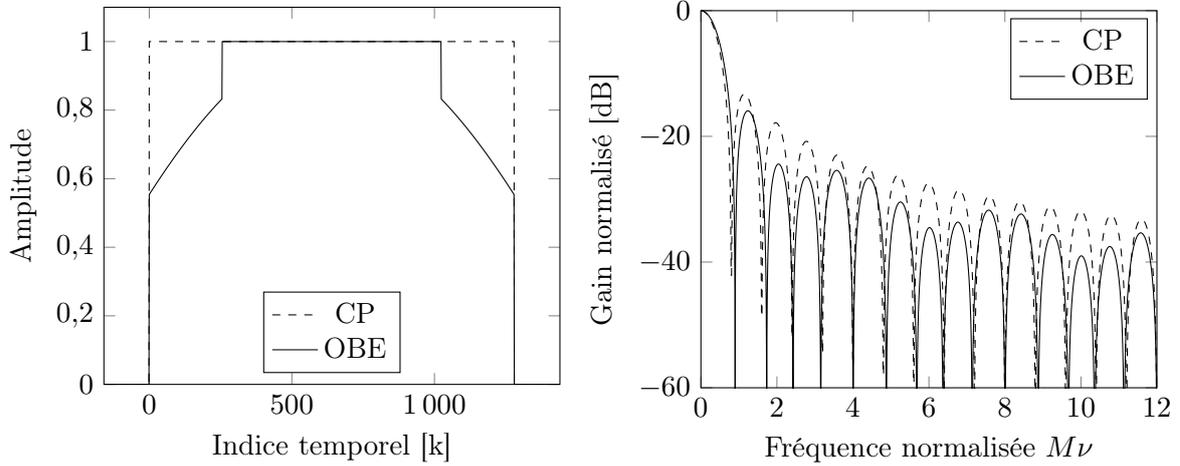
$$\tilde{b}_{M_0} = \frac{1}{\alpha + \beta M_0}, \quad \tilde{a}_{M_0} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tilde{b}_{M_0} \quad (4.27)$$

et

$$\alpha = -0.1714430594740783, \quad (4.28)$$

$$\beta = -0.5852184808129936. \quad (4.29)$$

Il est intéressant de comparer les réponses impulsionnelles et fréquentielles du filtre prototype OBE avec celles du prototype CP (fig. 4.3). Nous observons ainsi une décroissance fréquentielle légèrement plus rapide pour le prototype OBE, avec des lobes de largeur comparable au prototype rectangulaire.



(a) Réponse impulsionnelle normalisée.

(b) Réponse fréquentielle normalisée.

FIGURE 4.3 – Comparaison des réponses impulsionnelles et fréquentielles normalisées  $g[k]/\|g\|_\infty$  et  $|G(\nu)|^2/\|G\|_\infty^2$  des filtres OBE et rectangulaire, en choisissant  $M = 1024$  et  $N = 1280$ .

#### 4.2.2.2 Critère de maximisation de la localisation temps-fréquence

La formulation analytique approchée pour  $2 \leq M_0 \leq 20$  et  $4 \leq \Delta \leq 40$  nous permet d'écrire la réponse impulsionnelle du prototype TFL sous la forme

$$g^{\text{TFL}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} \cos\left(\frac{2k+1}{2\Delta} a(M_0, \Delta) + b(M_0, \Delta)\right), & \text{pour } 0 \leq k \leq \Delta - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{M}}, & \text{pour } \Delta \leq k \leq M - 1, \\ \frac{1}{\sqrt{M}} \cos\left(\frac{2(N-k)-1}{2\Delta} a(M_0, \Delta) + b(M_0, \Delta)\right), & \text{pour } M \leq k \leq N - 1, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.30)$$

avec

$$a(M_0, \Delta) = \alpha(\Delta) + \frac{\beta(\Delta)}{M_0^2}, \quad b(M_0, \Delta) = \frac{\pi}{4} - \frac{a(M_0, \Delta)}{2}, \quad (4.31)$$

$$\alpha(\Delta) = \frac{1}{\alpha_1 \Delta + \alpha_2} - \frac{\pi}{2}, \quad \beta(\Delta) = \frac{1}{\beta_1 \Delta + \beta_2} \quad (4.32)$$

où les constantes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont définies par

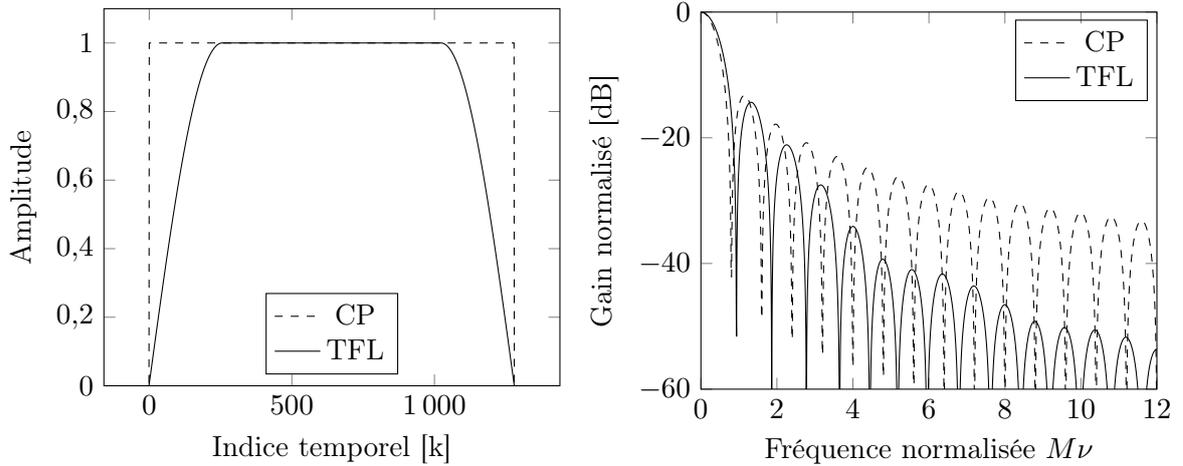
$$\alpha_1 = 0,63766705654, \quad (4.33)$$

$$\alpha_2 = 0,64731728760, \quad (4.34)$$

$$\beta_1 = -0,62796652529, \quad (4.35)$$

$$\beta_2 = 0,47030459364. \quad (4.36)$$

En comparant les réponses impulsionnelles et fréquentielles des prototypes rectangulaires et TFL (fig. 4.4), nous remarquons que le prototype TFL présente une décroissance fréquentielle beaucoup plus rapide que le prototype CP. En contrepartie, les lobes de la réponse fréquentielle sont plus larges que ceux du prototype CP.



(a) Réponse impulsionnelle normalisée.

(b) Réponse fréquentielle normalisée.

FIGURE 4.4 – Comparaison des réponses impulsionnelles et fréquentielles normalisées  $g[k]/\|g\|_\infty$  et  $|G(\nu)|^2/\|G\|_\infty^2$  des filtres TFL et rectangulaire, en choisissant  $M = 1024$  et  $N = 1280$ .

### 4.2.3 Mesures de localisation temps-fréquence et d'énergie hors bande

Après avoir présenté les réponses impulsionnelles des filtres prototypes OBE et TFL utilisés au cours de notre étude, nous pouvons les différencier à l'aide de leurs critères d'optimisation respectifs, en les comparant au prototype CP de référence. Il est alors intéressant d'observer l'influence du facteur de suréchantillonnage  $N/M$  sur leurs caractéristiques temporelles et

fréquentielles. Nous rappelons que nous travaillons avec des signaux de longueur finie ( $N$  coefficients) et que les résultats présentés ici correspondent à  $2 \leq M_0 \leq 20$  avec  $\Delta = 8$ ; un choix différent du facteur  $\Delta$  conduirait évidemment à des résultats différents, en préservant toutefois le positionnement relatif entre les courbes.

La transformée de Fourier de la fonction prototype se note

$$G(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} g[k] e^{-j2\pi \frac{\nu}{M} k} \quad (4.37)$$

alors l'énergie hors-bande, par rapport à une bande  $1/M$  est définie par

$$E_M(g) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{\frac{1}{2M}}^{\frac{1}{2}} |G(\nu)|^2 d\nu. \quad (4.38)$$

Dans le cadre d'un système de transmission multiporteuse, ce critère d'optimisation tend à renforcer l'isolation entre les sous-porteuses. Nous mesurons l'énergie hors-bande pour les trois prototypes évoqués (fig. 4.5). Naturellement, l'énergie hors-bande est d'autant plus faible que  $N/M$  est grand. Outre le fait que le prototype OBE présente une énergie hors-bande beaucoup plus faible que les deux autres, nous remarquons un léger avantage pour le prototype CP vis-à-vis du prototype TFL, pour de faibles valeurs de suréchantillonnage. Ceci est manifestement dû au fait que les lobes de la réponse fréquentielle du prototype TFL sont plus larges que ceux du prototype CP, avec une décroissance assez lente dans le cas d'un faible facteur de suréchantillonnage.

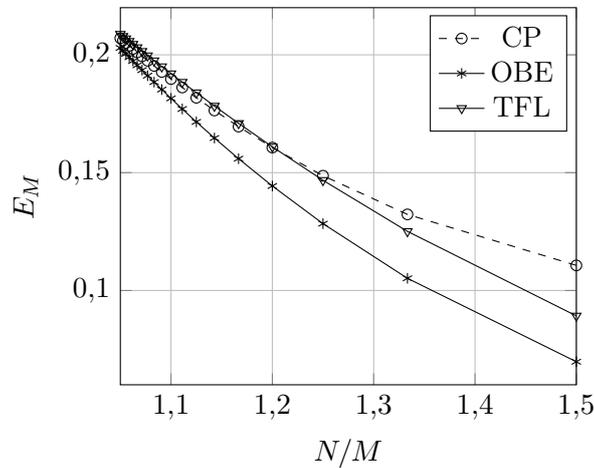


FIGURE 4.5 – Mesure de l'énergie hors-bande des fonctions prototypes pour  $\Delta = 8$ .

En utilisant les outils d'analyse temps-fréquence présentés dans la partie 1.2.4.2, page 23, nous mesurons les moments du second ordre en temps et en fréquence, normalisés, définis par

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \frac{\sigma_t^2}{N}, \quad (4.39)$$

$$\tilde{\sigma}_f^2 = M\sigma_f^2, \quad (4.40)$$

de sorte que la localisation temps-fréquence classique s'écrit

$$\xi = \frac{1}{4\pi\sqrt{\sigma_f^2\sigma_t^2}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\frac{N}{M}\tilde{\sigma}_f^2\tilde{\sigma}_t^2}}. \quad (4.41)$$

De manière générale, les moments de second ordre en temps et en fréquence diminuent en même temps que  $N/M$  augmente. Les filtres courts possédant chacun une réponse impulsionnelle à  $N$  coefficients, leurs moments temporels du second ordre varient peu, même si les prototypes OBE et TFL sont respectivement mieux localisés en temps que le prototype de référence (fig. 4.6b). Les moments fréquentiels du second ordre évoluent dans une dynamique plus grande, avec le même positionnement relatif entre les différents prototypes (fig. 4.6a).

En accord avec la démarche de maximisation du SINR, nous avons montré l'intérêt d'impulsions de mise en forme bien localisées en temps et en fréquence au cours de la partie 3.3, page 84. Nous traçons ainsi la localisation classique  $\xi$  (fig. 4.7a), obtenue à l'aide des moments du second ordre définis ci-dessus, ainsi que la localisation modifiée  $\tilde{\xi}$  (fig. 4.7b) selon [Doroslovački 1998]. Après avoir vérifié que les valeurs de  $\xi$  et  $\tilde{\xi}$  augmentent en même temps que  $N/M$ , nous constatons un avantage très net pour le prototype TFL devant ses deux concurrents.

### 4.3 Schémas d'égalisation de faible complexité

Après avoir présenté les conditions de reconstruction parfaite du système de transmission WCP-OFDM et introduit plusieurs fonctions prototypes, nous nous plaçons dans le cas d'un canal de transmission sélectif en temps et en fréquence. À partir des caractéristiques des interférences mesurées, nous en déduisons plusieurs schémas d'égalisation de faible complexité.

#### 4.3.1 Relation d'entrée-sortie en présence d'un canal radiomobile

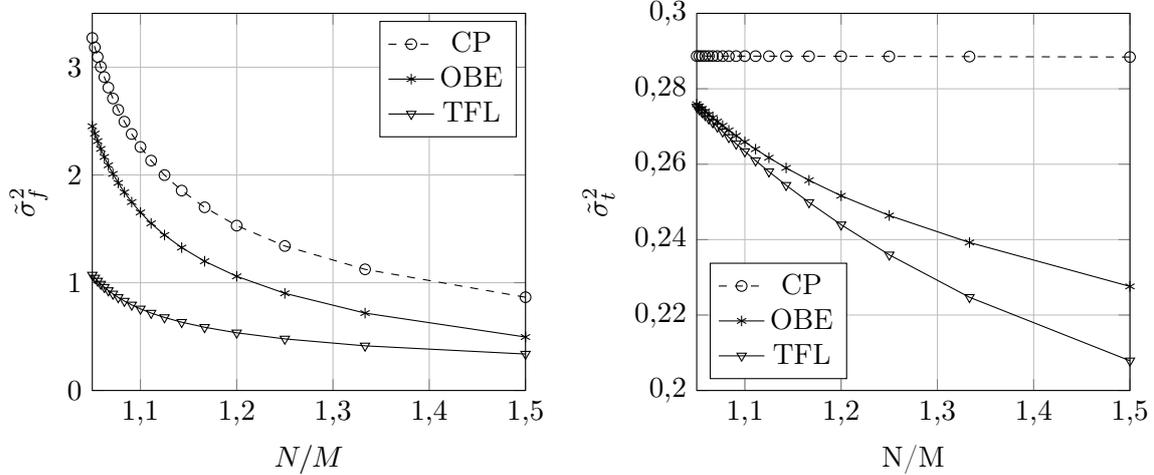
D'après le modèle établi au cours de la partie 2.5.2, page 69, rappelons la relation d'entrée-sortie d'un canal discret équivalent à  $I$  trajets discrets, sélectif en temps et bruité :

$$r[k] = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\alpha}_l[k]s[k-l] + b[k] \quad (4.42)$$

avec

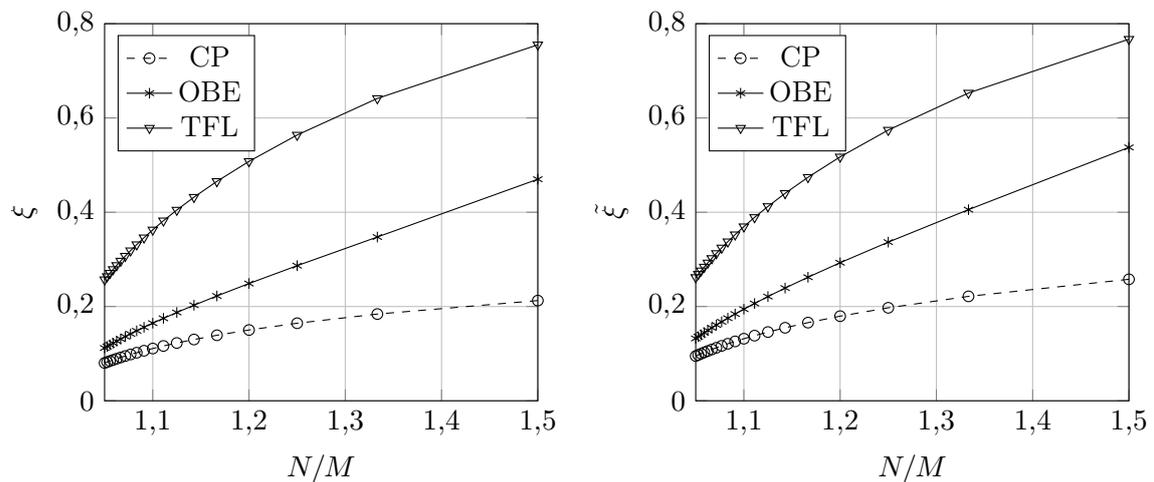
$$\tilde{\alpha}_l[k] = \sqrt{1/B} \sum_{i=1}^I \alpha_i(k/B) \text{sinc}(B\tau_i - l). \quad (4.43)$$

où  $B$  représente la bande utilisée par le système et l'indice  $L$  représente le nombre de trajets discrets équivalents après troncature de la réponse impulsionnelle discrète du canal. Tel que



(a) Moment du second ordre en fréquence.

(b) Moment du second ordre en temps.

FIGURE 4.6 – Mesure des moments du second ordre des fonctions prototypes pour  $\Delta = 8$ .

(a) Localisation classique.

(b) Localisation modifiée.

FIGURE 4.7 – Mesure de localisation temps-fréquence des fonctions prototypes pour  $\Delta = 8$ .

défini dans la partie 2.5.1, page 69, le terme  $b[k]$  représente un bruit gaussien, blanc dans la bande  $B$ .

Dans le cas particulier des filtres courts utilisés par le système WCP-OFDM, la relation d'entrée-sortie du canal discret équivalent présenté dans (4.42) se simplifie si  $L \leq N$ . Autrement dit, si le délai introduit par le canal discret équivalent est inférieur à la durée d'un bloc, alors l'interférence entre blocs (IBI<sup>3</sup>) se limite à deux blocs consécutifs. Ainsi, en notant  $\mathbf{s}_n = [s_n[0] \dots s_n[N-1]]^T$  le vecteur composé des échantillons émis, le vecteur contenant les échantillons reçus s'écrit

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{s}_n + \mathbf{G}_n \mathbf{s}_{n-1} + \mathbf{b}_n, \quad n \in \mathbf{N} \quad (4.44)$$

où  $\mathbf{b}_n = [b_n[0] \dots b_n[N-1]]^T$ . La fonction de transfert du canal discret équivalent sur le  $n$ -ième bloc est décrite par deux matrices de taille  $N \times N$ , définies par

$$\mathbf{H}_n = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_1[nN] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \tilde{\alpha}_1[nN+1] & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\alpha}_L[nN] & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \tilde{\alpha}_L[nN+2] & \dots & \tilde{\alpha}_1[nN+N-1] \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{G}_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \tilde{\alpha}_L[nN-L+1] & \dots & \tilde{\alpha}_2[nN-1] \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & \tilde{\alpha}_L[nN-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

En combinant (4.8), (4.16) et (4.44), la relation d'entrée sortie complète du système WCP-OFDM incluant le canal de transmission sélectif en temps et en fréquence s'écrit

$$\tilde{\mathbf{c}}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{c}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{c}_{n-1} + \mathbf{z}_n \quad (4.47)$$

avec

$$\mathbf{A}_n = M \mathbf{F}_M \mathbf{P}_\Delta^T \mathbf{D}_{\tilde{g}} \mathbf{H}_n \mathbf{D}_g \mathbf{P}_\Delta \mathbf{F}_M^H, \quad (4.48)$$

$$\mathbf{B}_n = M \mathbf{F}_M \mathbf{P}_\Delta^T \mathbf{D}_{\tilde{g}} \mathbf{G}_n \mathbf{D}_g \mathbf{P}_\Delta \mathbf{F}_M^H, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{z}_n = \sqrt{M} \mathbf{F}_M \mathbf{P}_\Delta^T \mathbf{D}_{\tilde{g}} \mathbf{b}_n \quad (4.50)$$

où  $\mathbf{z}_n$  correspond aux échantillons de bruit filtrés par le récepteur et  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{B}_n$  sont les matrices de transfert du système WCP-OFDM relatives à la transmission du  $n$ -ième bloc de symboles. Les éléments de ces matrices peuvent être reliés au coefficient de transfert du système présenté dans 3.4.1, page 94, tel que  $A_n[m, p] = A_{m, n, p, n}$  and  $B_n[m, p] = A_{m, n, p, n-1}$ .

Dans le cas général d'un émetteur-récepteur WCP-OFDM utilisant des prototypes à reconstruction parfaite, de l'interférence peut apparaître en présence d'un canal de transmission

sélectif en temps et en fréquence. Lorsqu'un symbole reçu s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de plusieurs symboles du bloc courant, nous parlons alors d'interférence entre sous-porteuses (ICI). Si un symbole reçu est lié à un ou plusieurs symboles du bloc précédent, il s'agit alors d'interférence entre blocs (IBI). Pour une réalisation donnée des symboles et du canal, la puissance des éléments des matrices  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{B}_n$  permet d'estimer le niveau des interférences (fig. 4.8). Par conséquent, pour le cas particulier d'un canal idéal, la matrice  $\mathbf{A}_n$  est diagonale, ce qui implique l'absence d'interférence entre sous-porteuses et la matrice  $\mathbf{B}_n$  est nulle, ce qui garantit l'absence d'interférence entre blocs (fig. 4.9).

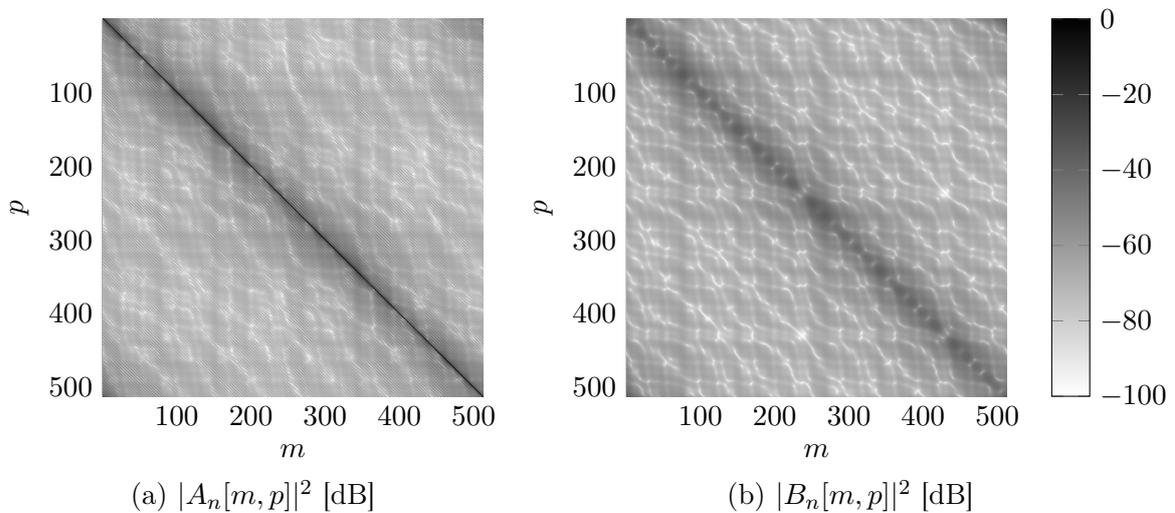


FIGURE 4.8 – Puissance des coefficients des matrices  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{B}_n$  dans le cas d'un canal sélectif en temps et en fréquence.

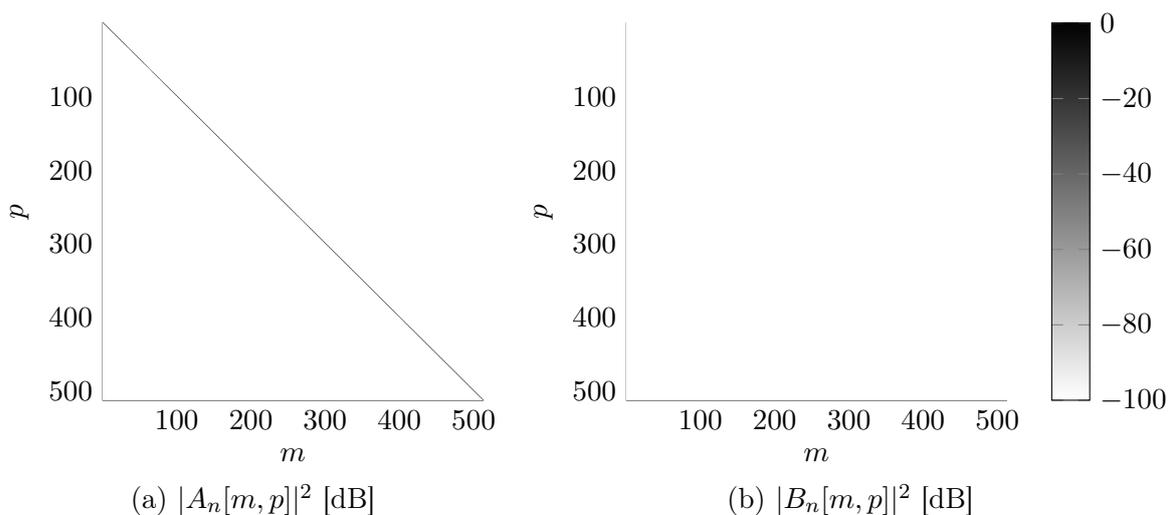


FIGURE 4.9 – Puissance des coefficients des matrices  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{B}_n$  dans le cas d'un canal idéal.

### 4.3.2 Méthodologie pour le choix d'une stratégie d'égalisation adaptée

Dans le cas d'un système WCP-OFDM caractérisé par la relation d'entrée sortie (4.47), nous définissons le  $n$ -ième vecteur de symboles égalisés par

$$\bar{c}_n = \tilde{\mathbf{A}}_n^{-1} (\tilde{c}_n - \tilde{\mathbf{B}}_n \bar{c}_{n-1}) \quad (4.51)$$

$$= \tilde{\mathbf{A}}_n^{-1} \mathbf{A}_n \mathbf{c}_n + \tilde{\mathbf{A}}_n^{-1} \mathbf{B}_n \mathbf{c}_{n-1} - \tilde{\mathbf{A}}_n^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_n \bar{c}_{n-1} + \tilde{\mathbf{A}}_n^{-1} z_n. \quad (4.52)$$

Sous sa forme générale (fig. 4.10), l'égaliseur fait apparaître deux blocs représentés par les matrices  $\tilde{\mathbf{A}}_n^{-1}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_n$ . Ils permettent respectivement la compensation de l'interférence entre sous-porteuses et la compensation de l'interférence entre blocs adjacents. Dans le but de préserver un système de faible complexité, nous limitons  $\tilde{\mathbf{A}}_n$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_n$  à des approximations diagonales ou tri-diagonales de  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{B}_n$ . Dans ce dernier cas, on peut montrer que  $\tilde{\mathbf{A}}_n$  reste inversible avec une complexité linéaire, à l'aide de l'algorithme de Thomas [Conte 1980].

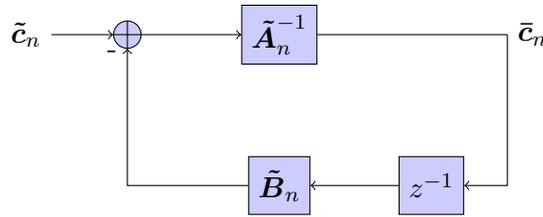


FIGURE 4.10 – Structure générale de l'égaliseur WCP-OFDM.

En étudiant  $E\{|A[m, p]|^2\}$  et  $E\{|B[m, p]|^2\}$  avec  $m, p \in \{0, \dots, N-1\}$ , il est possible de déterminer la stratégie d'égalisation à adopter pour une application donnée, en fonction des caractéristiques statistiques du canal. Nous distinguons quatre cas de figure :

- les interférences entre sous-porteuses et entre blocs sont négligeables ;
- l'interférence entre sous-porteuses est négligeable devant l'interférence entre blocs ;
- l'interférence entre blocs est négligeable devant l'interférence entre sous-porteuses ;
- les interférences entre sous-porteuses et entre blocs ne sont pas négligeables.

Ces différents scénarios nous permettent des simplifications supplémentaires au sein de la structure présentée précédemment (fig. 4.10).

#### 4.3.2.1 Traitement de l'interférence entre sous-porteuses

Soit un scénario de simulation dans lequel des symboles QPSK<sup>4</sup> sont répartis sur  $M = 512$  sous-porteuses, dans une bande  $B = 8$  MHz, centrée autour d'une fréquence  $f_c = 5$  GHz. Nous utilisons un modèle de canal à 6 trajets, supposé stationnaire au sens large et pourvu de diffuseurs non-corrélés (COST 207 TUx6 [Failli 1988]). Sa réponse impulsionnelle discrète est tronquée à  $L = 45$  coefficients ; il présente une forte sélectivité fréquentielle dans la bande  $B$ . Deux scénarios de mobilité sont développés : piéton ( $v_{\max} = 3$  km/h) et véhicule terrestre ( $v_{\max} = 350$  km/h). Nous supposons ici que le récepteur possède une connaissance parfaite du canal.

4. Quadrature Phase Shift Keying

En utilisant ici le prototype TFL, les figures 4.11 et 4.12 montrent que l'IBI et l'ISI augmentent en même temps que  $N/M$  décroît. Cela est lié au fait que la localisation temps-fréquence des prototypes augmente en même temps que  $N/M$ . Il est par ailleurs cohérent de noter que l'ICI augmente avec la vitesse de déplacement des mobiles. En revanche, l'interférence entre blocs reste négligeable devant l'interférence entre sous-porteuses, quel que soit le scénario de mobilité considéré.

Dans ces conditions, un égaliseur à un unique coefficient par sous-porteuse peut être suffisant pour limiter l'impact des interférences dans le cas du scénario à faible vitesse alors qu'il est manifestement justifié d'envisager une égalisation à plusieurs coefficients par sous-porteuse dans le cas du scénario à grande vitesse.

**Égaliseur 1** — Nous proposons dans un premier temps un égaliseur à un coefficient par sous-porteuse. Cette approche consiste à négliger les termes d'IBI et d'ICI, en approximant les matrices de transfert de l'égaliseur de sorte que

$$\tilde{A}_n[m, p] = A_n[m, p]\delta_{m,p}, \quad (4.53)$$

$$\tilde{B}_n[m, p] = 0. \quad (4.54)$$

Si  $\tilde{A}_n$  est inversible, nous avons montré que cet égaliseur peut permettre la reconstruction parfaite des symboles dans le cas de l'OFDM avec préfixe cyclique, à condition que le canal soit exclusivement sélectif en fréquence et en supposant que la taille du préfixe cyclique soit judicieusement choisie. Cependant, si  $\tilde{A}_n$  possède des éléments qui tendent vers zéro, les termes de bruit et d'interférence peuvent être amplifiés. De plus, nous avons montré dans [Roque 2012d] que les termes d'ICI et d'IBI peuvent devenir prépondérants devant le bruit dans un scénario de transmission réaliste, fortement sélectif en temps et en fréquence.

**Égaliseur 3** — En présence d'effet Doppler, il peut être intéressant de compenser l'ICI en mettant en œuvre un égaliseur à plusieurs coefficients par sous-porteuse. Dans ce but, les matrices de l'égaliseur sont définies par

$$\tilde{A}_n[m, p] = A_n[m, p](\delta_{m,p} + \delta_{m,p-1} + \delta_{m,p+1}), \quad (4.55)$$

$$\tilde{B}_n[m, p] = 0. \quad (4.56)$$

Si  $\tilde{A}_n$  est inversible, cette stratégie d'égalisation permet de compenser l'interférence induite par les deux sous-porteuses adjacentes sur le symbole courant. Cela peut être notamment utile en présence d'un canal introduisant un fort étalement Doppler.

#### 4.3.2.2 Traitement de l'interférence entre blocs

En utilisant le même scénario de simulation, nous réduisons cette fois-ci le nombre de sous-porteuses à  $M = 64$  et utilisons le prototype OBE. À la différence du prototype TFL, celui-ci présente une réponse impulsionnelle dont les coefficients ne sont pas nuls à ses extrémités.

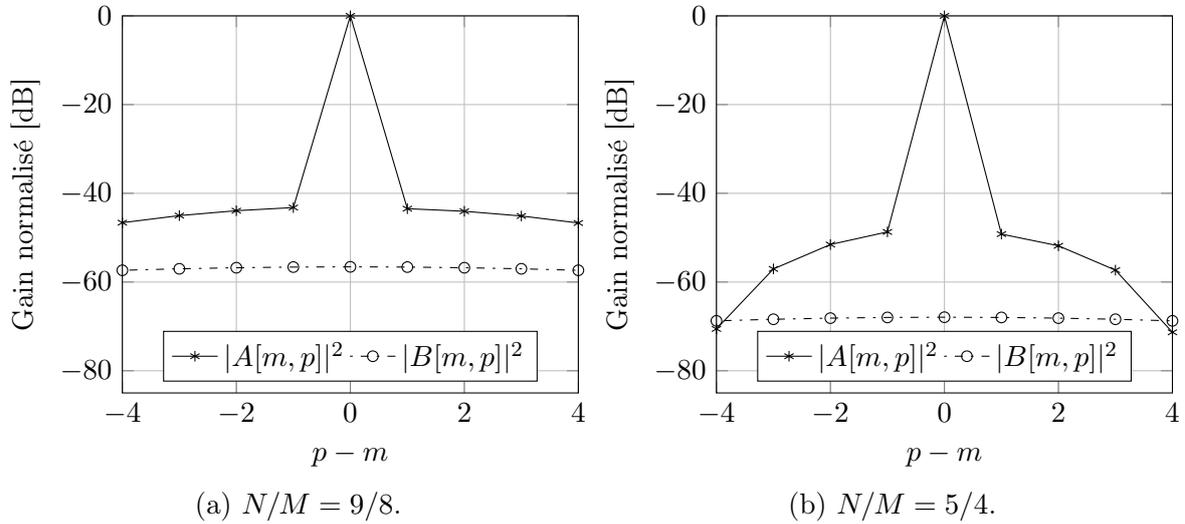


FIGURE 4.11 – Gains moyens normalisés  $E\{|A[m, p]|^2\}$  et  $E\{|B[m, p]|^2\}$  pour  $M = 512$ ,  $v_{\max} = 3$  km/h.

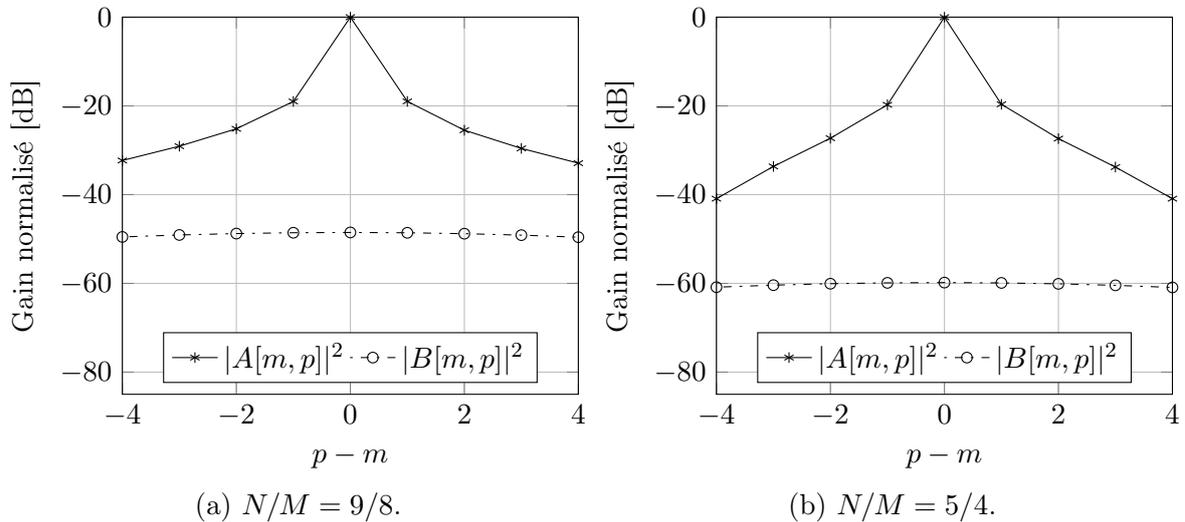


FIGURE 4.12 – Gains moyens normalisés  $E\{|A[m, p]|^2\}$  et  $E\{|B[m, p]|^2\}$  pour  $M = 512$ ,  $v_{\max} = 350$  km/h.

En rappelant que la réponse impulsionnelle discrète équivalente du canal comporte  $L = 45$  coefficients, l'interférence entre blocs est donc prépondérante devant l'interférence entre sous-porteuses (fig. 4.13). De plus, la réduction du nombre de sous-porteuses implique une moins bonne compensation de la sélectivité fréquentielle du canal, ce qui explique l'élévation du niveau de l'interférence entre sous-porteuses. Cependant, compte tenu de la diminution de la taille des blocs, la sélectivité temporelle du canal ne change pas radicalement le motif d'ICI bien que l'on constate une légère augmentation globale du niveau d'interférence (fig. 4.14).

Les quatre scénarios de transmission présentés par les figures 4.13a, 4.13b, 4.14a et 4.14b justifient alors un égaliseur à retour de décision capable de limiter l'interférence causée par le bloc précédent. Il est également judicieux de limiter l'interférence entre sous-porteuses au sein du bloc courant en prenant en compte les sous-porteuses adjacentes.

**Égaliseur 2** — L'interférence entre blocs peut être réduite si l'émetteur dispose d'une estimation suffisamment précise de  $\mathbf{c}_{n-1}$ . En conservant uniquement les éléments diagonaux des matrices de transfert des blocs courant et précédent, nous notons

$$\tilde{A}_n[m, p] = A_n[m, p]\delta_{m,p} \quad (4.57)$$

$$\tilde{B}_n[m, p] = B_n[m, p]\delta_{m,p} \quad (4.58)$$

Ce schéma d'égalisation emploie donc deux coefficients par sous-porteuse : le premier pour l'égalisation du symbole courant, le second pour l'égalisation du symbole précédent. Les termes d'interférences entre sous-porteuse au sein du bloc courant et du bloc précédent sont négligés. Cette stratégie d'égalisation récursive peut introduire une propagation d'erreur si l'estimation de  $\mathbf{c}_{n-1}$  est erronée.

**Égaliseur 4** — Cet égaliseur combine les approches utilisées par les égaliseurs 2 et 3 : il permet à la fois de réduire l'ICI et l'IBI au prix d'une égalisation à quatre coefficients par sous-porteuse. Par conséquent, les matrices de l'égaliseur sont définies par

$$\tilde{A}_n[m, p] = A_n[m, p](\delta_{m,p} + \delta_{m,p-1} + \delta_{m,p+1}), \quad (4.59)$$

$$\tilde{B}_n[m, p] = B_n[m, p]\delta_{m,p}. \quad (4.60)$$

## 4.4 Problématique du PAPR et émetteur-récepteur WCP-SC

Le rapport de puissance crête sur puissance moyenne (PAPR<sup>5</sup>) est une mesure qui permet de caractériser les variations potentielles de l'enveloppe d'un signal autour de sa valeur moyenne. Dans le cas continu ce rapport se définit, sur une durée  $T_0$ , par

$$\text{PAPR} = \frac{\max_{0 \leq t \leq T_0} \{|s(t)|^2\}}{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt}. \quad (4.61)$$

---

5. *Peak-to-Average Power Ratio*

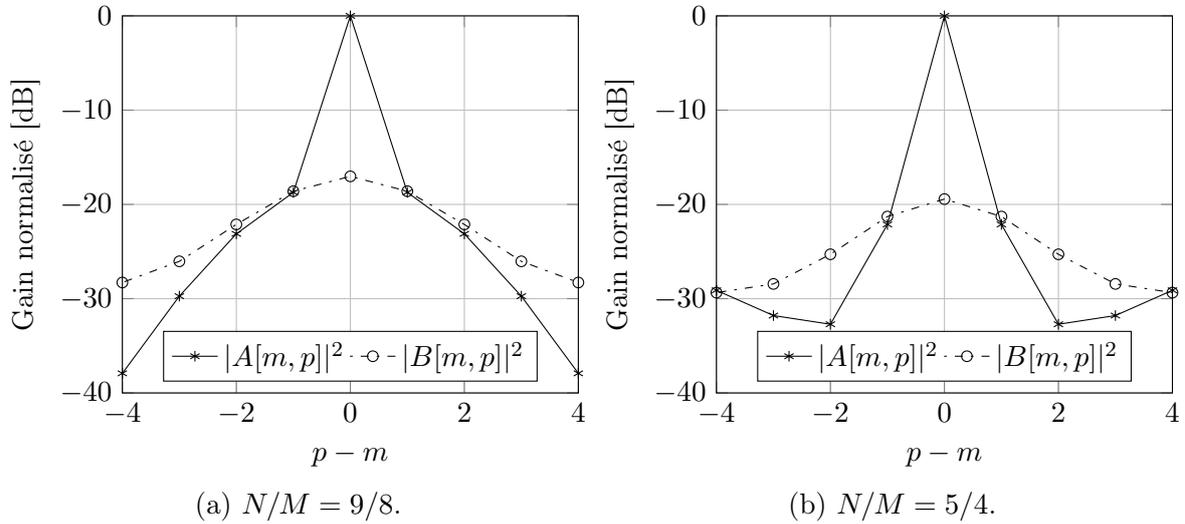


FIGURE 4.13 – Gains moyens normalisés  $E\{|A[m,p]|^2\}$  et  $E\{|B[m,p]|^2\}$  pour  $M = 64$ ,  $v_{\max} = 3$  km/h.

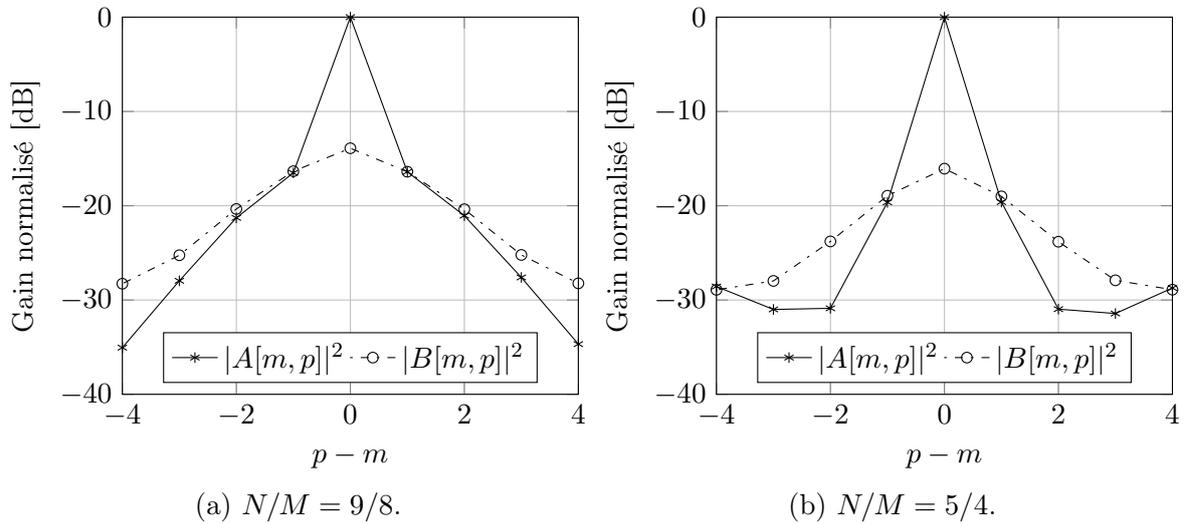


FIGURE 4.14 – Gains moyens normalisés  $E\{|A[m,p]|^2\}$  et  $E\{|B[m,p]|^2\}$  pour  $M = 64$ ,  $v_{\max} = 350$  km/h.

Nous supposons que le signal  $s(t)$  en sortie d'émetteur occupe une bande  $B$ , de sorte que nous puissions noter  $s(t) = \sum_k s[k]\text{sinc}(Bt - k)$ . Dans le cadre des simulations réalisées, nous utilisons une interpolation d'ordre 4 afin d'approcher les valeurs des signaux à temps continu, tel que recommandé dans [Hao 2010].

Les signaux de communication numérique étant aléatoires, le PAPR observé sur une durée finie est également une variable aléatoire, souvent modélisée comme un processus gaussien en vertu du théorème de la limite centrale [Jayalath 2000, Slimane 2007, Jiang 2008]. Il est ainsi possible de le caractériser à l'aide de ses propriétés statistiques (ex. : valeur moyenne, écart type, densité de probabilité). En particulier, il est souhaitable de connaître la probabilité avec laquelle celui-ci dépasse une valeur seuil. La fonction de répartition complémentaire (CCDF<sup>6</sup>) définie par  $F_c(\text{PAPR}_0) = \Pr\{\text{PAPR} > \text{PAPR}_0\}$  représente la probabilité que le PAPR excède une valeur  $\text{PAPR}_0$  donnée.

#### 4.4.1 Évaluation du PAPR et cas particulier des modulations multipor-teuses

Un fort PAPR n'est pas souhaitable du point de vue de l'intégration de l'émetteur. En effet, les amplificateurs de puissance doivent être dimensionnés en fonction de la valeur crête du signal si l'on souhaite conserver un fonctionnement linéaire. Or si la valeur moyenne est beaucoup plus faible que la valeur crête, le rendement de l'amplificateur reste faible et son coût de réalisation élevé. Si l'on dimensionne au contraire l'amplificateur en fonction de la puissance moyenne du signal, celui-ci est parfois écrêté, ce qui induit des non-linéarités qui interfèrent avec le signal utile et dégradent les performances du système.

Les signaux de communications multiporteuses sont caractérisés par un PAPR moyen élevé par rapport aux modulations monoporteuses. Sa valeur dépend en effet d'une somme d'exponentielles complexes pondérées par des coefficients aléatoires. La valeur maximale du PAPR est donc d'autant plus élevée que le nombre de sous-porteuses est grand.

Nous présentons ici des courbes de CCDF mesurées pour les prototypes CP, TFL et OBE (fig. 4.15). Tous les systèmes montrent un PAPR supérieur à 8 dB et pour les filtres OBE et TFL, il est d'autant plus fort que le facteur de suréchantillonnage est grand. Sachant que les filtres TFL et OBE présentent des réponses impulsionnelles non-constantes, les systèmes de transmission qui en résultent présentent un PAPR plus grand que dans le cas du CP-OFDM. Ce résultat corrobore les études réalisées dans [Skrzypczak 2006], dans le cas plus général des modulations multiporteuses suréchantillonnées à filtres de longueur arbitraire.

De nombreuses études visent la compensation du PAPR [Han 2005] (ex. : écrêtage et filtrage, codage, réservation de porteuse, injection de porteuse, entrelacement...). Ces techniques sont également applicables au WCP-OFDM. Cependant, elles restent généralement insatisfaisantes car elles nécessitent alternativement : des opérations non-linéaires, une puissance d'émission plus grande, une efficacité spectrale plus faible. De plus, elles requièrent la plupart

---

6. *Complementary Cumulative Distribution Function*

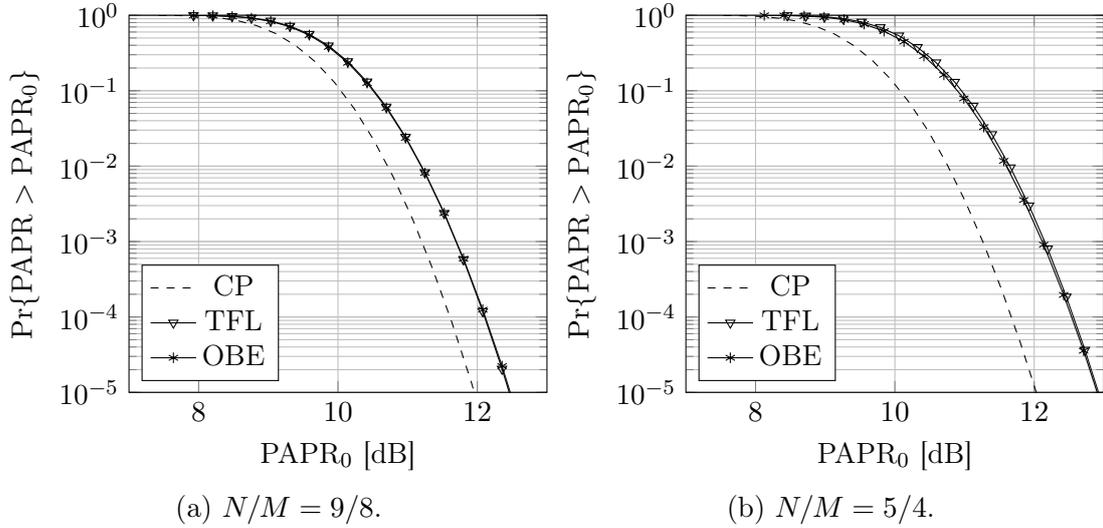


FIGURE 4.15 – Estimation de la fonction de répartition complémentaire du PAPR pour différents prototypes avec  $M = 1024$ .

du temps une grande complexité de calcul pour des résultats modestes. Par conséquent, certaines applications sensibles au PAPR peuvent justifier l'abandon de schémas de transmission multiporteuses.

#### 4.4.2 Précodage et schéma de transmission WCP-SC

Considérons à présent un émetteur WCP-OFDM pourvu d'un bloc de précodage représenté par la matrice  $\mathbf{Q}$  (fig. 4.16). Le récepteur fait donc apparaître un bloc de décodage dual noté  $\mathbf{Q}^{-1}$  et situé après l'égaliseur (fig. 4.17). Une technique particulière de précodage consiste à choisir  $\mathbf{Q} = \mathbf{F}_M$  et  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{F}_M^H$ . Le précodage par transformée de Fourier discrète donne lieu à un système de transmission monoporteuse par blocs, avec un égaliseur mis en œuvre dans le domaine fréquentiel. Un tel système est appelé WCP-SC<sup>7</sup> pour *single carrier*. De nombreuses études comparent WCP-SC et WCP-OFDM dans le cas d'impulsions de mise en forme rectangulaires [Falconer 2002, Louveaux 2003, Wang 2004, Filho 2008].

Le PAPR dans le scénario monoporteuse dépend du choix de la constellation ainsi que de l'impulsion de mise en forme; les valeurs obtenues sont naturellement beaucoup plus faibles que dans le cas multiporteuse. L'efficacité spectrale étant identique et les conditions de reconstructions parfaites étant préservées, le scénario WCP-SC semble équivalent au WCP-OFDM. Rappelons cependant que la transmission monoporteuse est moins attractive pour la transmission sur canaux sélectifs en fréquence ainsi que le montre l'analyse des performances présentée dans [Roque 2012c].

7. *SingleCarrier*

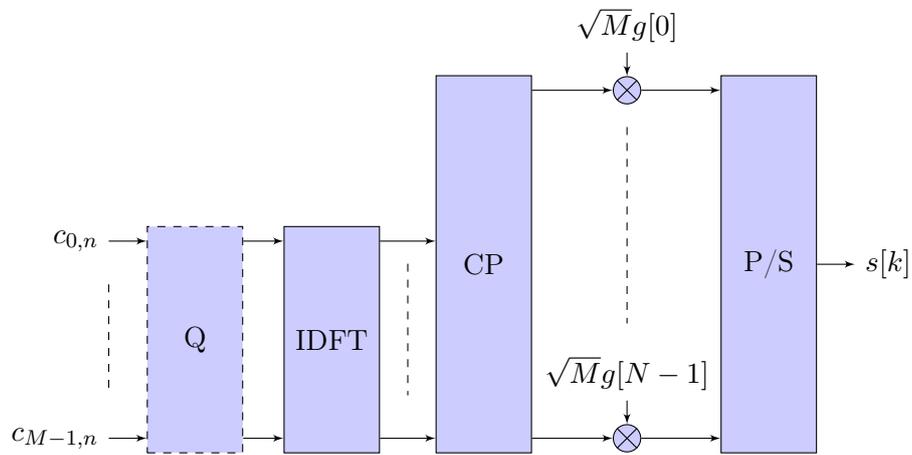


FIGURE 4.16 – Émetteur WCP-OFDM avec précodage.

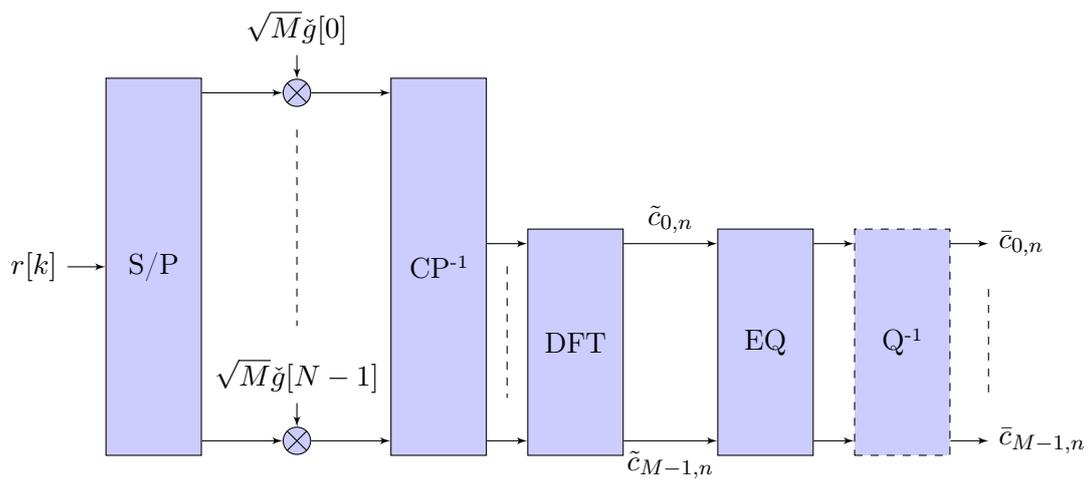


FIGURE 4.17 – Récepteur WCP-OFDM avec précodage.

## Synthèse du chapitre

À travers ce chapitre, nous nous focalisons sur le cas particulier des émetteurs-récepteurs BFDQ/QAM à filtres courts. L'intégration de cette contrainte sur la longueur des filtres nous permet de spécifier un émetteur-récepteur de faible complexité, appelé WCP-OFDM, dont nous présentons les relations d'entrée-sortie en présence d'un canal radiomobile discret équivalent. En accord avec les règles d'adaptation temps-fréquence énoncées au cours du chapitre précédent, nous nous intéressons aux filtres orthogonaux présentés dans [Pinchon 2011] et optimisés selon les critères de minimisation de l'énergie hors bande (OBE) et de maximisation de la localisation temps-fréquence (TFL).

Après avoir défini les matrices de transfert du système WCP-OFDM, nous définissons un égaliseur de faible complexité, c'est-à-dire dont la complexité d'inversion reste linéaire. Celui-ci permet à la fois la compensation de l'interférence entre sous-porteuses et de l'interférence entre blocs. En examinant la puissance des coefficients des matrices de transfert du système, nous pouvons en déduire des simplifications sur le schéma d'égalisation. Nous montrons ainsi qu'une égalisation à un ou trois coefficients par sous-porteuse est souvent suffisante pour faire face à des scénarios de transmission réalistes, y compris dans les cas fortement mobiles. En particulier, la compensation de l'interférence entre blocs semble généralement inutile [Roque 2012a].

Nous concluons le chapitre en mesurant le PAPR d'un système WCP-OFDM muni de filtres OBE, TFL ou rectangulaires. Nos résultats confirment ce qui avait été annoncé dans [Skrzypczak 2006], dans le cas général des systèmes de transmission multiporteuses suréchantillonnés : le PAPR minimal est atteint lorsque l'on utilise des impulsions de mise en forme constantes sur la durée d'un bloc. Ainsi, nous observons dans le cadre des filtres OBE et TFL un PAPR qui augmente en même temps que le facteur de suréchantillonnage. Pour faire face à cette contrainte majeure d'intégration, nous soulignons que de nombreuses techniques de compensation du PAPR énoncées dans le cas de l'OFDM avec préfixe cyclique fonctionnent également dans le cas du WCP-OFDM. Enfin, nous introduisons le schéma de transmission WCP-SC, utilisant un précodage basé sur une transformée de Fourier discrète qui permet d'obtenir un schéma de transmission WCP monoporteuse par blocs. Il s'agit de la solution la plus efficace pour la réduction du PAPR mais moins adaptée à la transmission sur canaux sélectifs en fréquence [Roque 2012c].

# Évaluation des performances du WCP-OFDM par simulation

---

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Présentation du déroulement des simulations</b>	<b>126</b>
5.1.1	Paramètres du transmultiplexeur et des méthodes de mesure	126
5.1.2	Relation entre le rapport signal sur bruit et $E_b/N_0$	127
<b>5.2</b>	<b>Comparaison des performances sur canal multitrajet mobile</b>	<b>129</b>
5.2.1	Influence de la longueur des symboles	129
5.2.2	Influence du facteur de suréchantillonnage	130
5.2.3	Influence du critère d'optimisation des filtres	130
<b>5.3</b>	<b>Mesures de performances avec codage correcteur d'erreurs</b>	<b>136</b>
<b>5.4</b>	<b>Comparaison des modèles base-vers-mobile et mobile-vers-mobile</b>	<b>138</b>
<b>5.5</b>	<b>Égalisation à plusieurs coefficients par sous-porteuse</b>	<b>142</b>
5.5.1	Analyse du scénario quasi-statique	142
5.5.2	Analyse du scénario mobile	143
5.5.3	Analyse de l'impact d'une estimation de canal bruitée	143

---

Les systèmes de transmission WCP-OFDM généralisent l'OFDM avec préfixe cyclique en permettant l'utilisation d'impulsions de mise en forme non rectangulaires. Ainsi, il existe des filtres courts, à reconstruction parfaite, dont il est possible de modéliser la structure dans le plan temps-fréquence afin de s'adapter aux caractéristiques du canal de transmission. Évidemment, les impulsions de mise en forme ainsi obtenues sont soumises à la dualité temps-fréquence et leurs moments du second ordre en temps et en fréquence varient en fonction de la longueur de la réponse impulsionnelle  $N$  et du facteur de suréchantillonnage  $N/M$ .

Nous nous sommes focalisés sur deux exemples de filtres orthogonaux : le premier minimisant l'énergie hors-bande (OBE) et le second maximisant la localisation temps-fréquence (TFL). Les expressions analytiques des réponses impulsionnelles de ces filtres permettent leur mise en œuvre au sein de l'émetteur-récepteur WCP-OFDM avec une complexité algorithmique similaire à celle du traditionnel CP-OFDM (implique  $N$  multiplications supplémentaires au niveau de l'émetteur et du récepteur).

Au cours de ce chapitre, nous présentons un banc d'essai pour l'évaluation des performances des modulations WCP-OFDM à travers des scénarios de transmission réalistes en environnement radiomobile. Nous évaluons ensuite l'impact du codage correcteur d'erreurs sur

les performances du WCP-OFDM en mettant en œuvre un codeur-décodeur LDPC<sup>1</sup>. Nous comparons ensuite les performances des prototypes CP, OBE et TFL dans le cas d'un canal multitrajet mobile, dans un premier temps en supposant un scénario base-vers-mobile, puis mobile-vers-mobile. Nous vérifions enfin les observations réalisées au cours du chapitre précédent sur les quatre scénarios d'égalisation développés, y compris en présence d'une estimation de canal bruitée.

## 5.1 Présentation du déroulement des simulations

Au cours de cette partie, nous décrivons la méthodologie employée pour mesurer les performances du système de communication WCP-OFDM. Pour cela, nous présentons dans un premier temps la chaîne transmission simulée, ses principaux paramètres, ainsi que les méthodes retenues pour l'évaluation de ses performances.

### 5.1.1 Paramètres du transmultiplexeur et des méthodes de mesure

Les canaux de transmission mis en œuvre par le simulateur sont des équivalents discrets en bande de base de canaux multitrajets mobiles, stationnaires au sens large et dont les diffuseurs sont non-corrélés (WSSUS). Ils respectent ainsi le formalisme décrit au cours de la partie 2.5.2, page 69. Pour un scénario de simulation donné, il est donc nécessaire de spécifier la bande  $B$  occupée par le système ainsi que la fonction de diffusion du canal WSSUS. Rappelons que cette dernière inclut les amplitudes moyennes, les retards et les caractéristiques Doppler des différents trajets.

La transmission est découpée en paquets, transmis de manière asynchrone, de sorte que chaque paquet est confronté à une réalisation de canal indépendante. Chaque paquet est composé de  $K$  blocs consécutifs. Cet enchaînement permet d'évaluer l'interférence entre blocs. Dans le cas particulier des filtres courts, nous pouvons nous limiter à 2 blocs par paquet si la réponse impulsionnelle du canal est de longueur inférieure à celle d'un bloc. Chaque bloc est composé de  $N_b M$  éléments binaires, généralement choisis dans un alphabet de type QAM, où  $N_b$  représente le nombre de bits par symboles et  $M$  le nombre de symboles de modulation. Dans un contexte de transmission multiporteuses,  $M$  correspond aussi au nombre de sous-porteuses du symbole OFDM. Notons de plus que l'association bits-symboles respecte le code de Gray.

Les simulations ont pour but de tracer des courbes de performances représentant le taux d'erreur binaire (BER<sup>2</sup>) en fonction du rapport  $E_b/N_0$ , où  $E_b$  représente l'énergie par bit et  $N_0$  est la densité spectrale de puissance (monolatérale) du bruit.

---

1. *Low-Density Parity Check*  
2. *Binary Error Rate*

5.1.2 Relation entre le rapport signal sur bruit et  $E_b/N_0$ 

Dans le contexte d'un émetteur-récepteur multiporteuse suréchantillonné (fig. 5.1), il est intéressant d'identifier les relations qui existent entre le rapport  $E_b/N_0$  et les autres paramètres de l'émetteur-récepteur. Nous nous appuyons pour cela sur l'équivalent discret d'un canal à bruit additif blanc gaussien (fig. 5.2) tel que nous l'avons introduit au cours du chapitre 2, page 39.

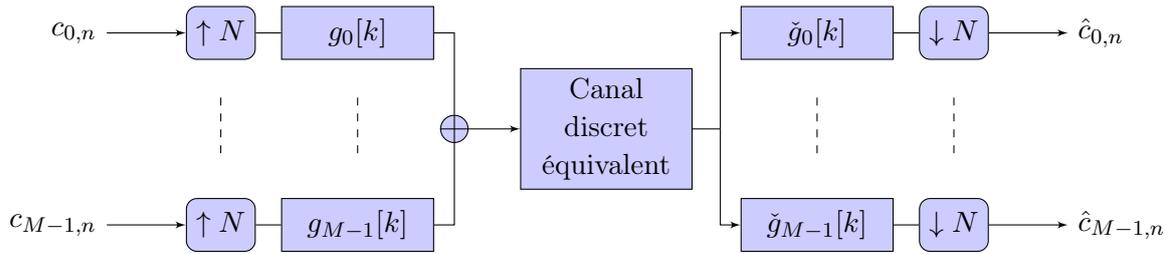


FIGURE 5.1 – Émetteur-récepteur multiporteuses suréchantillonné.

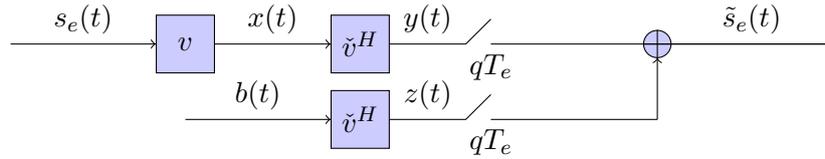


FIGURE 5.2 – Équivalent discret d'un canal à bruit additif blanc gaussien.

Nous supposons ici l'utilisation de filtres passe-bas idéaux, dont les réponses impulsionnelles sont définies par  $v(t) = v_0 \text{sinc}(t/T_e)$  et  $\check{v}^H(t) = v_1 \text{sinc}(t/T_e)$ . Par conséquent si nous considérons le signal discret en sortie d'émetteur  $s[k]$  avec  $-K \leq k \leq K$ , l'énergie du signal à bande limitée  $x(t) = (s_e * v)(t)$  s'exprime par

$$E_x = \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} |X(f)|^2 df = \quad (5.1)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} v_0^2 T_e^2 |S_e(f)|^2 df \quad (5.2)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} v_0^2 T_e^2 \left| \sum_{k=-K}^K s[k] e^{-j2\pi f k T_e} \right|^2 df \quad (5.3)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} v_0^2 T_e^2 \sum_{k=-K}^K \sum_{k'=-K}^K s[k]^* s[k'] e^{-j2\pi f (k-k') T_e} df \quad (5.4)$$

$$= v_0^2 T_e \sum_{k=-K}^K |s[k]|^2. \quad (5.5)$$

Ainsi, dans le cadre de l'émetteur multiporteuse suréchantillonné par un facteur  $N/M$  (fig.

5.1), l'énergie moyenne émise pour la transmission d'un symbole  $c_{m,n}$  s'écrit

$$E_c = \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \frac{N}{M} E\{E_x\} \quad (5.6)$$

$$= v_0^2 T_e \frac{N}{M} \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} E \left\{ \sum_{k=-K}^K |s[k]|^2 \right\} \quad (5.7)$$

$$= v_0^2 T_e \frac{N}{M} \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} E \left\{ \sum_{k=-K}^K \left| \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} g_{m,n}[k] \right|^2 \right\} \quad (5.8)$$

$$= v_0^2 T_e \frac{N}{M} \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} E \left\{ \sum_{k=-K}^K \sum_{m,m'=0}^{M-1} \sum_{n,n'=-\infty}^{+\infty} c_{m,n}^* c_{m',n'} g_{m,n}^*[k] g_{m',n'}[k] \right\} \quad (5.9)$$

$$= v_0^2 T_e \frac{N}{M} \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K \sum_{m,m'=0}^{M-1} \sum_{n,n'=-\infty}^{+\infty} E \{ c_{m,n}^* c_{m',n'} \} g_{m,n}^*[k] g_{m',n'}[k]. \quad (5.10)$$

Or, si les symboles  $c_{m,n}$  sont supposés indépendants, de variance  $\sigma_c^2 = E\{|c_{m,n}|^2\}$ , nous pouvons écrire

$$E_c = v_0^2 T_e \frac{N}{M} \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^K \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_c^2 |g_{m,n}[k]|^2 \quad (5.11)$$

$$= v_0^2 T_e N \sigma_c^2 \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-K}^K |g[k - nN]|^2. \quad (5.12)$$

En posant  $k = l + pN$ , la somme moyenne pour  $k$  positif vaut

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{NK} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{K-1} |g[l + (p-n)N]|^2 \quad (5.13)$$

$$= \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{NK} K \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{N-1} |g[l + nN]|^2 \quad (5.14)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{+\infty} |g[k]|^2. \quad (5.15)$$

En tenant compte de la somme sur les  $k$  négatifs, l'énergie moyenne transmise par symbole s'écrit finalement

$$E_c = v_0^2 T_e \sigma_c^2 \|g\|^2. \quad (5.16)$$

Si  $N_b$  désigne le nombre de bits codés par un symbole, l'énergie moyenne transmise par bit s'exprime par

$$E_b = \frac{v_0^2 T_e \sigma_c^2 \|g\|^2}{N_b}. \quad (5.17)$$

Considérons à présent un bruit blanc  $b(t)$  stationnaire au second ordre, de densité spectrale de puissance  $\gamma_b(f) = 2N_0$ . La densité spectrale de puissance du bruit filtré par  $\check{v}^H(t)$  s'écrit

$$\gamma_z(f) = \gamma_b(f)|\check{V}(f)|^2 \quad (5.18)$$

$$= 2N_0v_1^2T_e^2\Pi(fT_e) \quad (5.19)$$

d'où la fonction d'autocorrelation

$$\Gamma_z(\tau) = 2N_0v_1^2T_e \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_e}\right). \quad (5.20)$$

On remarque que  $\Gamma_z(kT_e) = 2N_0v_1^2T_e\delta_k$  et on définit la variance du bruit filtré  $\sigma_z^2 = 2N_0v_1^2T_e$ .

Au final, si l'on fixe  $v_0 = v_1 = 1/\sqrt{T_e}$ , le rapport entre la variance des symboles et du bruit devient indépendant de  $T_e$  et nous pouvons écrire

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2\sigma_c^2 \|g\|^2}{\sigma_z^2 N_b}. \quad (5.21)$$

## 5.2 Comparaison des performances sur canal multitrajet mobile

Afin d'illustrer les performances du système WCP-OFDM, nous nous plaçons dans le contexte d'un système de télédiffusion vidéo mobile [Roque 2012d] (l'émetteur est immobile et les récepteurs sont mobiles). Le système utilise une bande  $B = 8$  MHz, centrée autour d'une fréquence porteuse  $f_0 = 600$  MHz. Nous considérons deux scénarios de mobilité : piéton ( $v_{\max} = 3$  km/h) et véhicule ( $v_{\max} = 350$  km/h). La propagation s'effectue dans un environnement urbain, ce qui justifie l'utilisation du modèle COST 207 TUx6 [Failli 1988]. Ce modèle stationnaire au lens large implique six diffuseurs non-corrélés entre eux, dont le dernier trajet introduit un délai de  $5 \mu\text{s}$ . Ce modèle est décrit plus en détail dans la partie 2.1, page 63. Nous rappelons que sa réponse impulsionnelle discrète équivalente comporte  $L = 45$  coefficients.

Chaque paquet est formé de deux blocs de  $M$  symboles de QPSK avec  $M \in \{1024, 4096\}$ . Les simulations sont réalisées avec les prototypes CP, OBE et TFL avec un facteur de sur-échantillonnage  $N/M \in \{17/16, 9/8, 5/4\}$ . Après transmission dans le canal radiomobile bruité discret équivalent, les performances brutes (sans codage correcteur d'erreurs) sont présentées sous la forme d'un taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$ . Au cours de cette partie, un égaliseur à un coefficient par sous-porteuse est mis en œuvre. Nous supposons par ailleurs que le récepteur possède une connaissance parfaite du canal. Les figures 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 présentent chacune les courbes de performance des trois prototypes pour une paire de valeurs de  $M$  et  $v_{\max}$ .

### 5.2.1 Influence de la longueur des symboles

Plus les blocs sont courts, moins le système est sensible à la sélectivité temporelle du canal. Au contraire, lorsque les blocs sont plus longs, le canal évolue beaucoup sur la durée d'un bloc

et l'égalisation à un coefficient par sous-porteuse ne permet pas de compenser suffisamment l'interférence entre sous-porteuses. Ainsi, nous constatons globalement que l'écart de performances entre les scénarios de faible et forte mobilité est plus faible pour  $M = 1024$  que pour  $M = 4096$ .

En revanche, l'utilisation de blocs courts est généralement défavorable à la compensation de la sélectivité fréquentielle du canal. En observant les courbes de performances réalisées dans le cadre d'un canal quasi-statique (fig. 5.3 et 5.5), nous remarquons que les performances sont d'autant meilleures que  $M$  est grand. Notons toutefois que l'utilisation d'un préfixe cyclique de longueur supérieure à celle de l'étalement du canal constitue un cas particulier pour lequel le système de transmission diagonalise presque le canal, quelle que soit la valeur de  $M$ . Dans les simulations réalisées, notons que la longueur du préfixe cyclique est toujours choisie supérieure à celle de la réponse impulsionnelle équivalente du canal.

### 5.2.2 Influence du facteur de suréchantillonnage

Dans le cas du CP-OFDM, le facteur de suréchantillonnage  $N/M$  a peu d'importance dès lors que  $(N - M)T_e > \tau_{\max}$ . S'agissant cependant d'un schéma de transmission biorthogonal, d'après (5.17), l'énergie transmise par bit  $E_b$  augmente, ce qui revient à dire que le taux d'erreur pour un  $E_b/N_0$  fixé augmente également.

En revanche, nous avons montré que le facteur de suréchantillonnage a un impact sur les caractéristiques temps-fréquence des prototypes OBE et TFL. En effet, pour le prototype OBE, l'énergie hors-bande diminue en même temps que  $N/M$  augmente. De manière similaire, pour le prototype TFL, la localisation temps-fréquence augmente en même temps que  $N/M$ . En présence d'un canal sélectif en temps et en fréquence, il est donc cohérent que les performances des prototypes OBE et TFL augmentent en même temps que  $N/M$ . À la différence du CP-OFDM, la transmission sur canal multitrajet à l'aide de prototypes orthogonaux entraîne l'apparition d'interférences entre blocs qui n'est pas compensée par un égaliseur à un coefficient par sous-porteuse. Or, lorsque  $N/M \rightarrow 1$ , les prototypes OBE et TFL tendent vers une forme rectangulaire ce qui introduit une interférence entre blocs maximale. À l'inverse, lorsque  $N/M$  augmente, les réponses impulsionnelles des deux prototypes orthogonaux ont tendance à décroître sur les bords, ce qui permet de limiter l'interférence entre blocs.

### 5.2.3 Influence du critère d'optimisation des filtres

Il est dans un premier temps intéressant de comparer les modulations biorthogonales (CP) avec les modulations orthogonales (OBE et TFL). Pour de faibles valeurs de  $E_b/N_0$ , c'est-à-dire lorsque le bruit est prépondérant sur les interférences, l'utilisation d'un schéma de transmission orthogonal est préférable. Lorsque  $E_b/N_0$  est grand, le CP-OFDM permet une transmission quasi-optimale dans le scénario de faible mobilité (fig. 5.3 et 5.5). En revanche, ses performances s'effondrent lorsque le canal de transmission devient sélectif en temps et l'utilisation des prototypes non-rectangulaires devient plus avantageuse (fig. 5.4 et 5.6).

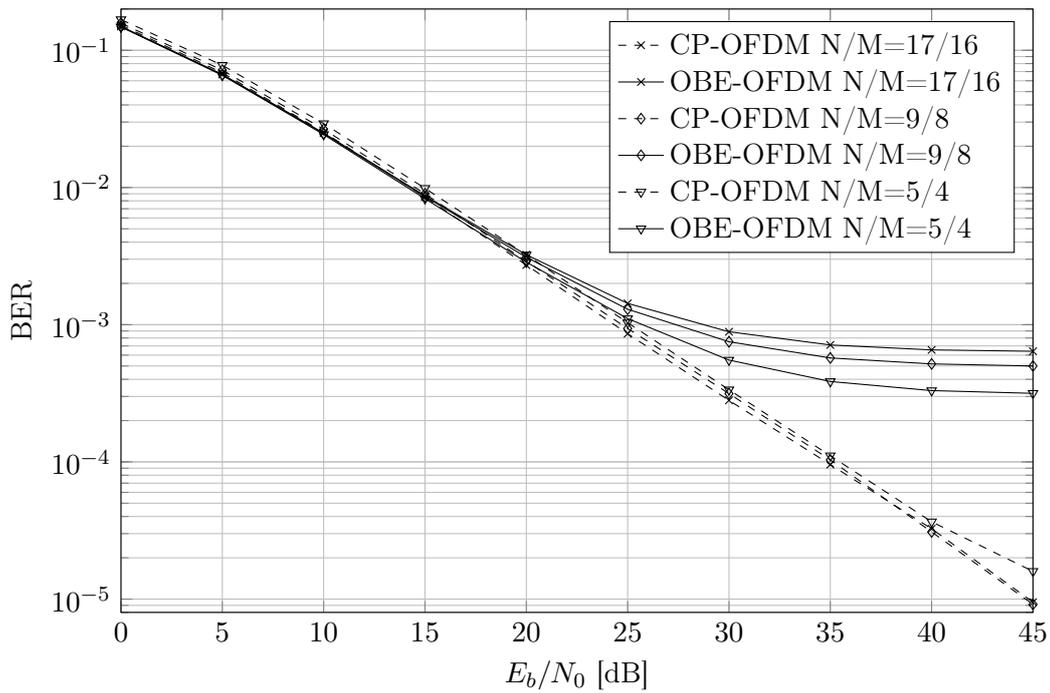
De manière générale, le prototype TFL se montre intéressant dans les scénarios principalement sélectifs en fréquence. Nous rappelons en effet que celui-ci possède des moments du second ordre en temps et en fréquence plus faibles que ses deux concurrents. Ainsi, il est intéressant de constater que le prototype TFL se révèle compétitif vis-à-vis du CP pour un scénario de faible mobilité, dès lors que le découpage en sous-bandes est suffisant (fig. 5.5b). De plus, la bonne localisation temporelle du prototype TFL lui permet d'afficher de meilleurs résultats que le CP en présence d'une forte mobilité, dès que le facteur de suréchantillonnage est suffisamment élevé (fig. 5.6b).

Le prototype OBE se révèle intéressant lorsque la sélectivité temporelle est forte (fig. 5.6). Son étude dans le domaine fréquentiel révèle en effet des lobes plus étroits que le prototype TFL, malgré une décroissance plus lente. Une telle répartition en fréquence de l'énergie peut permettre de limiter l'interférence entre sous-porteuses. Cependant, dans le cas général, le prototype OBE présente des performances moins bonnes que ses deux concurrents. Cela s'explique d'une part par ses moments en temps et en fréquence plus élevés que ceux du prototype TFL. D'autre part, la réponse impulsionnelle du prototype OBE possède des valeurs élevées sur les bords, en comparaison du prototype TFL ; cela justifie une interférence entre blocs plus élevée, en particulier lorsque  $M$  est petit.

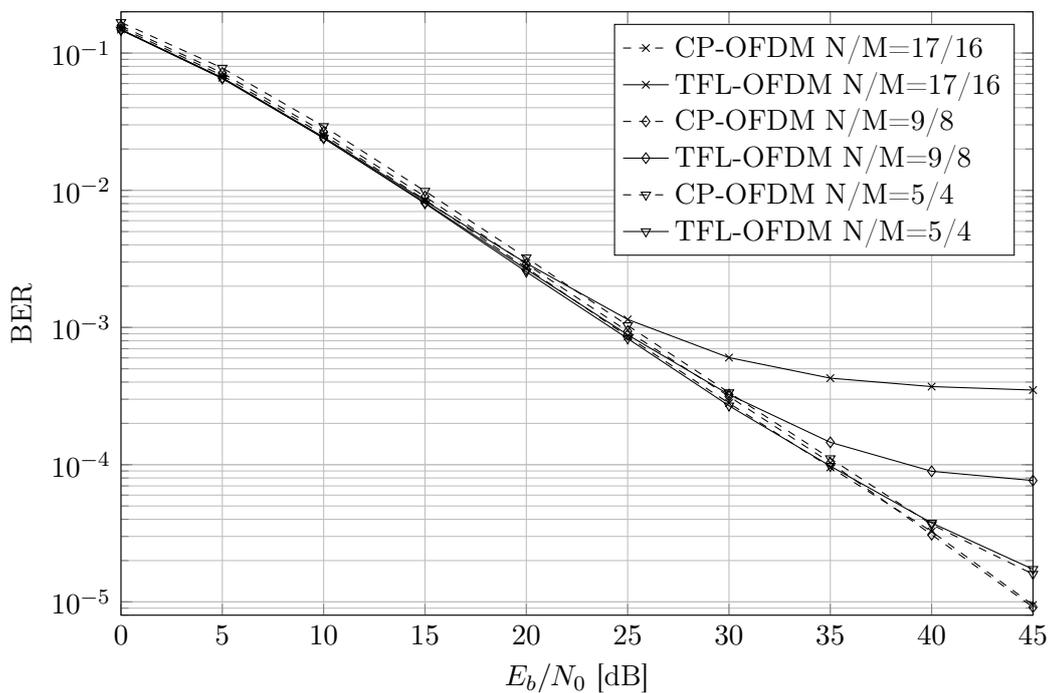
En résumé, dans le scénario de télédiffusion mobile que nous avons choisi comme environnement de simulation, nous pouvons affirmer que

1. les schémas de transmission orthogonaux sont préférables aux schémas biorthogonaux lorsque la puissance du bruit est prépondérante sur celle des interférences ;
2. le CP-OFDM permet de supprimer l'interférence entre blocs et offre des performances satisfaisantes pour un canal exclusivement sélectif en fréquence, quel que soit  $M$ , en considérant simplement un préfixe cyclique de longueur supérieure à celle de la réponse impulsionnelle du canal ;
3. les prototypes orthogonaux présentent des performances intéressantes sur les canaux sélectifs en fréquence lorsque  $M$  est grand ;
4. en raison de sa bonne localisation en temps et en fréquence, le prototype TFL se montre attractif, vis-à-vis du CP-OFDM, quel que soit le scénario de mobilité choisi, d'autant plus que  $M$  et  $N/M$  sont grands ;
5. le prototype OBE s'avère intéressant lorsque la sélectivité temporelle devient très grande.

Compte tenu du domaine d'intérêt assez réduit du prototype OBE, nous nous focalisons par la suite sur la comparaison entre les prototypes CP et TFL.

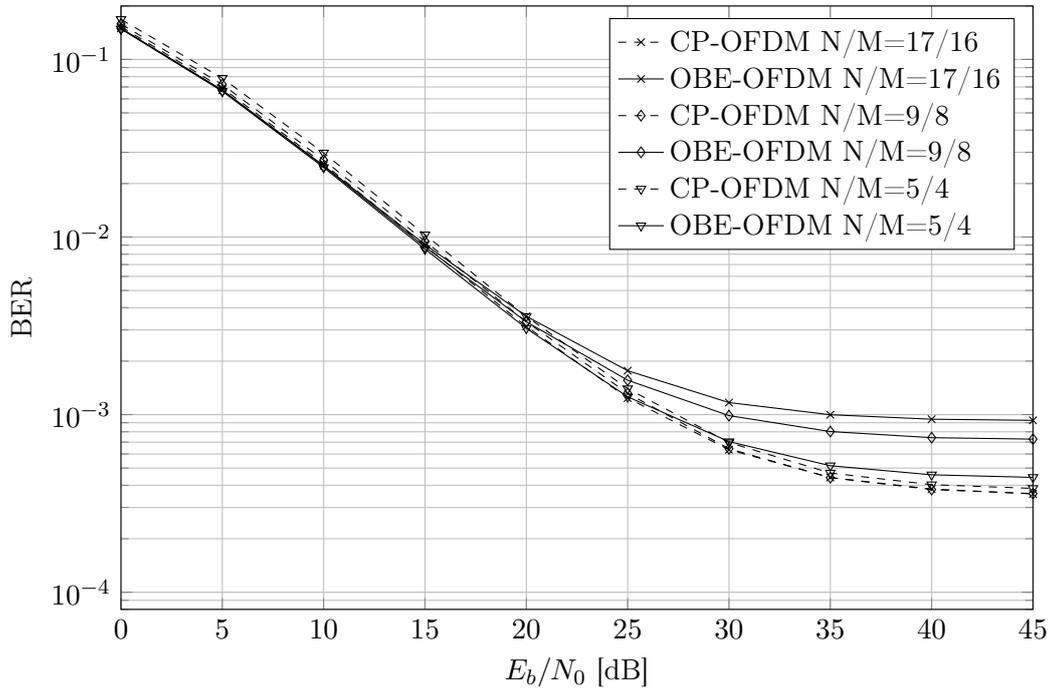


(a) Comparaison des prototypes CP et OBE.

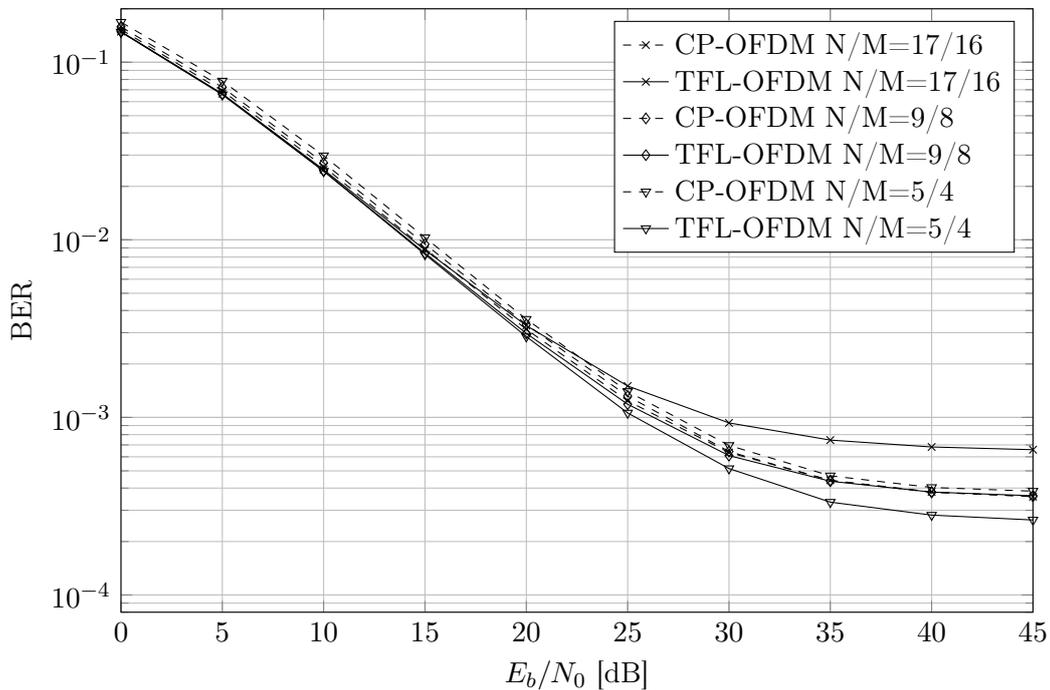


(b) Comparaison des prototypes CP et TFL.

FIGURE 5.3 – Taux d’erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 1024$  et différentes valeurs de  $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec  $v_{\max} = 3$  km/h.

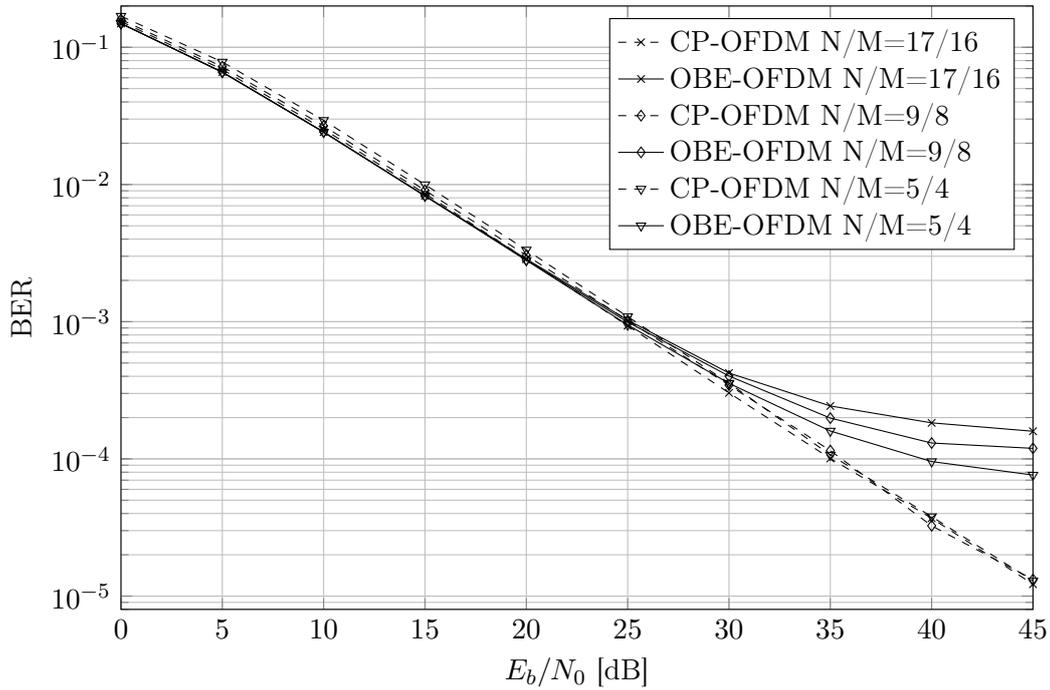


(a) Comparaison des prototypes CP et OBE.

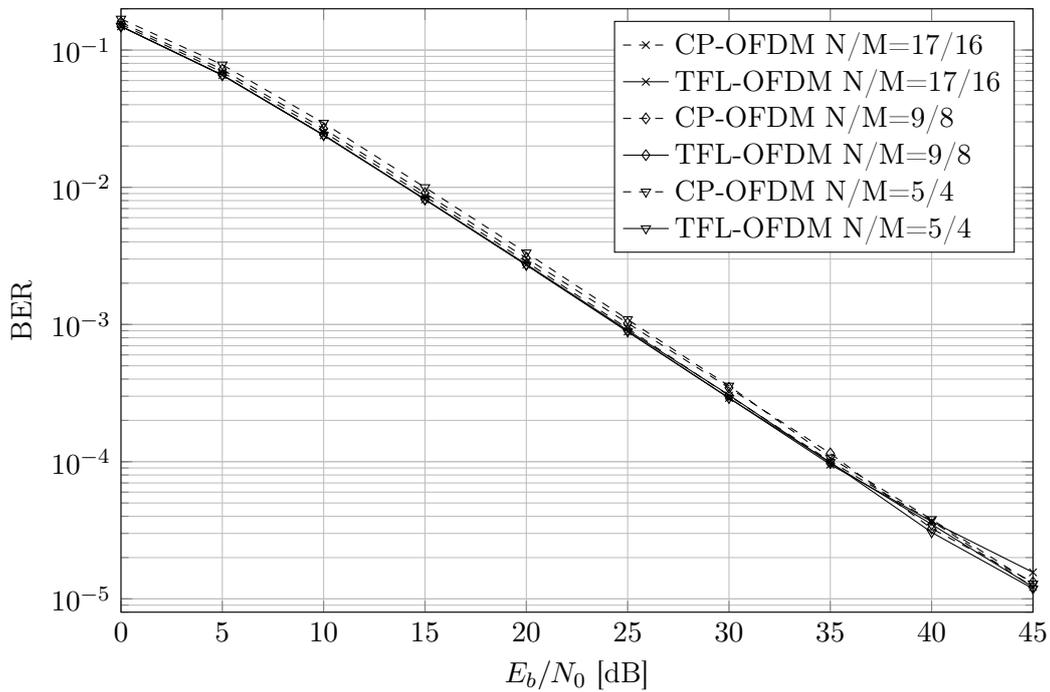


(b) Comparaison des prototypes CP et TFL.

FIGURE 5.4 – Taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 1024$  et différentes valeurs de  $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec  $v_{\max} = 350$  km/h.

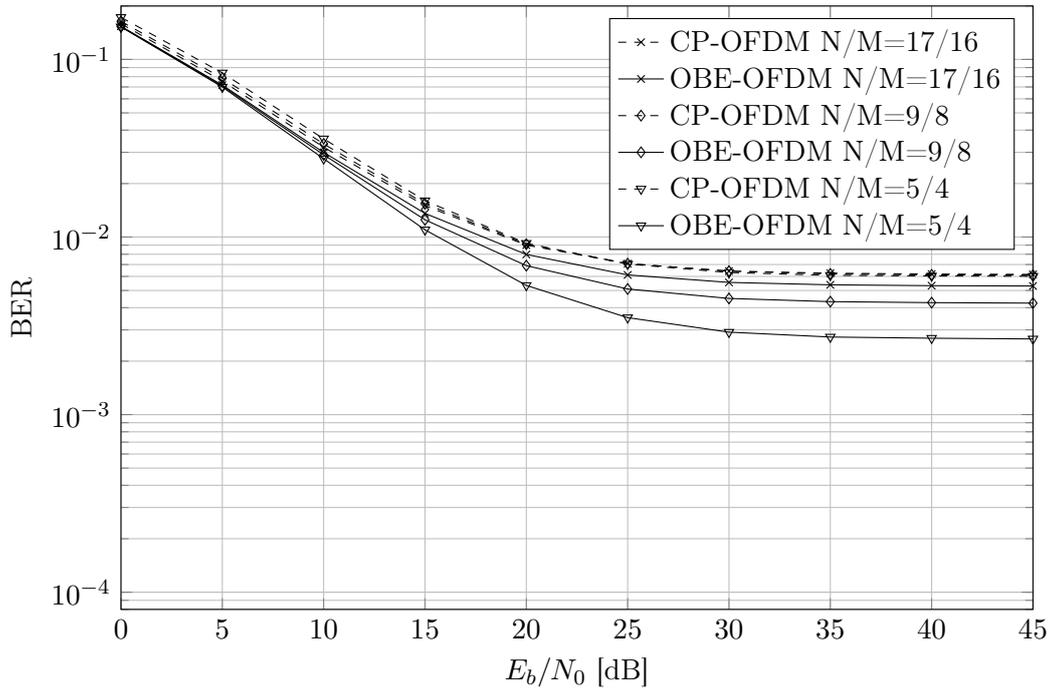


(a) Comparaison des prototypes CP et OBE.

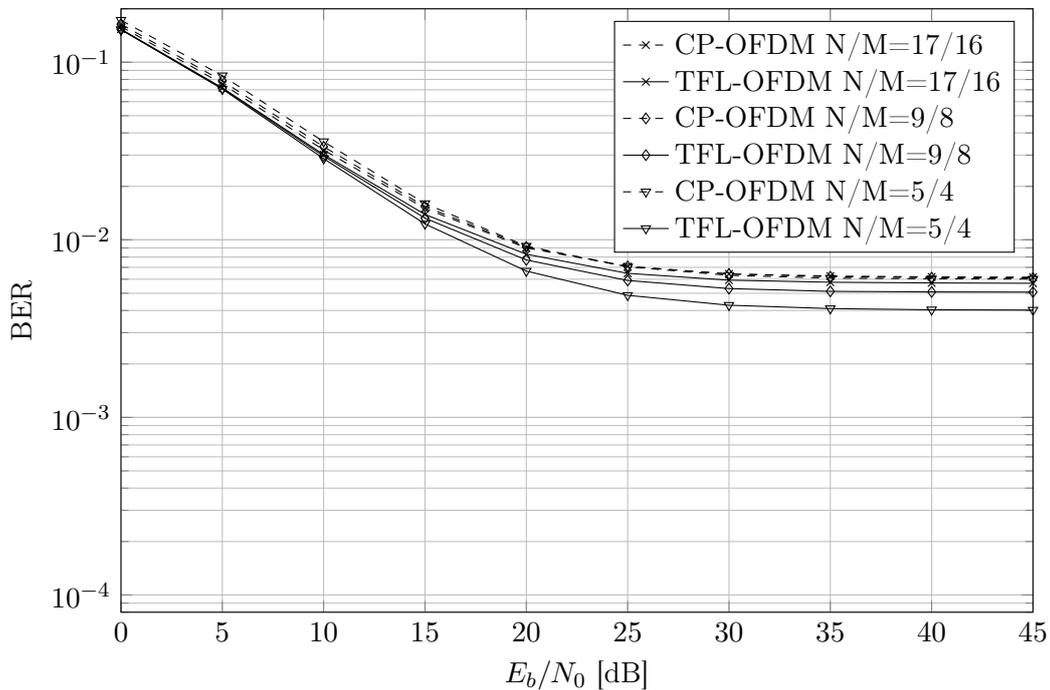


(b) Comparaison des prototypes CP et TFL.

FIGURE 5.5 – Taux d’erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 4096$  et différentes valeurs de  $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec  $v_{\max} = 3$  km/h.



(a) Comparaison des prototypes CP et OBE.



(b) Comparaison des prototypes CP et TFL.

FIGURE 5.6 – Taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 4096$  et différentes valeurs de  $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec  $v_{\max} = 350$  km/h.

### 5.3 Mesures de performances avec codage correcteur d'erreurs

Les simulations réalisées jusqu'ici présentent des courbes de performance brutes, c'est-à-dire sans codage correcteur d'erreurs. Or il est intéressant de comparer les performances des émetteurs-récepteurs WCP-OFDM en présence de codage canal, notamment pour s'assurer que le positionnement relatif des courbes de performance des différents systèmes restent inchangé. Autrement dit, avec un égaliseur à un coefficient par sous-porteuse, nous souhaitons vérifier si l'introduction de diversité affecte de la même manière tout type de système WCP-OFDM. Sans traiter le problème de manière aussi générale, nous pouvons toutefois examiner le comportement d'un exemple de système de transmission en présence d'un code LDPC.

Le système utilise une bande  $B = 8$  MHz, centrée autour d'une fréquence porteuse  $f_0 = 600$  MHz. Nous considérons deux scénarios de mobilité : piéton ( $v_{\max} = 3$  km/h) et véhicule ( $v_{\max} = 350$  km/h). La propagation s'effectue dans un environnement urbain, ce qui justifie l'utilisation du modèle COST 207 TUx6 [Failli 1988]. Ce modèle stationnaire au lens large implique six diffuseurs non-corrélés entre eux, dont le dernier trajet introduit un délai de  $5 \mu\text{s}$ . Ce modèle est décrit plus en détail dans la partie 2.1, page 63. Nous rappelons que sa réponse impulsionnelle discrète équivalente comporte  $L = 45$  coefficients.

Le codeur LDPC utilise des mots de code de 32400 bits avec un rendement de codage  $R_c = 3/4$ . Chaque mot de code est entrelacé aléatoirement et découpé en 8 blocs de  $M = 2048$  symboles de QPSK. Idéalement, chaque bloc devrait être espacé d'un intervalle de temps supérieur à la durée de cohérence du canal. De la même manière, les sous-bandes devraient être séparées d'un intervalle de fréquence supérieur à la bande de cohérence du canal. En raison de la dualité temps-fréquence, il est impossible de satisfaire ces deux conditions. De plus, les contraintes de l'application de transmission imposent généralement des restrictions supplémentaires (ex. : interactivité, méthodes d'accès...). Dans ce scénario, nous choisissons une diversité maximale en transmettant les blocs sur des réalisations indépendantes du canal de transmission. Au niveau du récepteur, un égaliseur à un coefficient par sous-porteuse est utilisé (connaissance parfaite du canal). Après désentrelacement, le décodeur LDPC effectue 10 itérations sur chaque mot de code, sans contrôle de parité. Nous comparons les performances des systèmes WCP-OFDM basés sur les prototypes CP et TFL, pour  $N/M \in \{17/16, 9/8, 5/4\}$  (fig. 5.7).

Quel que soit le scénario de mobilité utilisé, les courbes de performance apparaissent dans le même ordre : les meilleures performances sont garanties par le prototype TFL, avec un fort facteur de suréchantillonnage, puis les performances diminuent en même temps que le facteur de suréchantillonnage. Pour le CP-OFDM, nous remarquons la tendance inverse, avec des performances d'autant plus grandes que le facteur de suréchantillonnage est faible. Ces observations corroborent les remarques déjà effectuées au cours des simulations réalisées sans codage correcteur d'erreurs, lorsque la puissance des interférences est négligeable devant celle du bruit. Les scénarios de transmission orthogonaux sont à privilégier ; en l'occurrence, les performances du système TFL sont d'autant meilleures que le facteur de suréchantillonnage est grand, à condition de disposer d'un nombre de sous-porteuses suffisant pour compenser la sélectivité fréquentielle du canal.

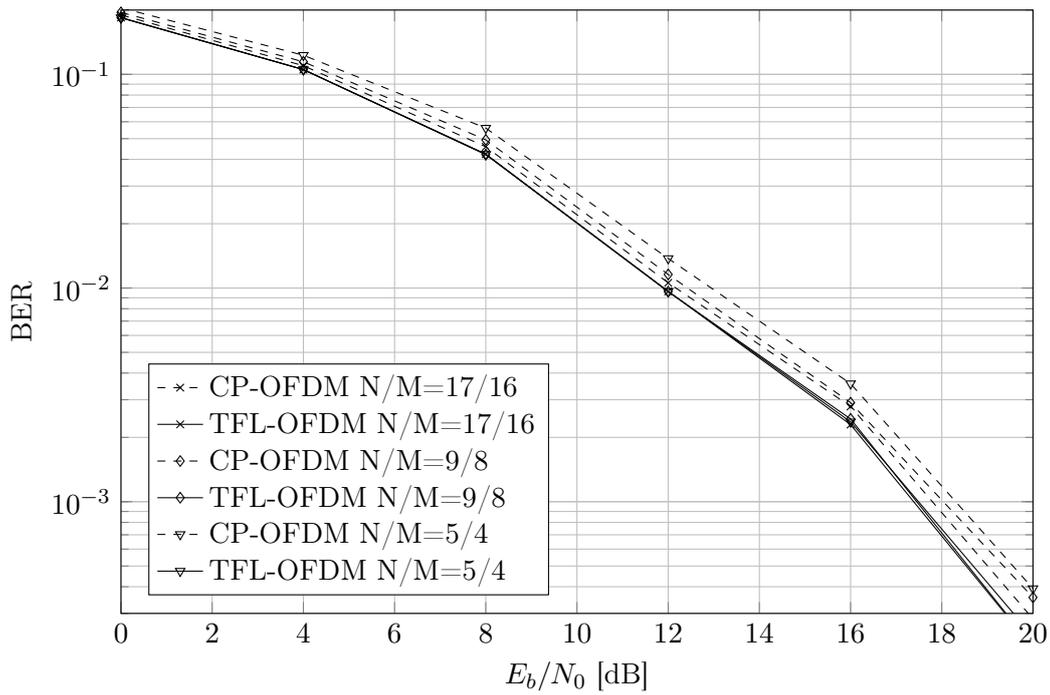
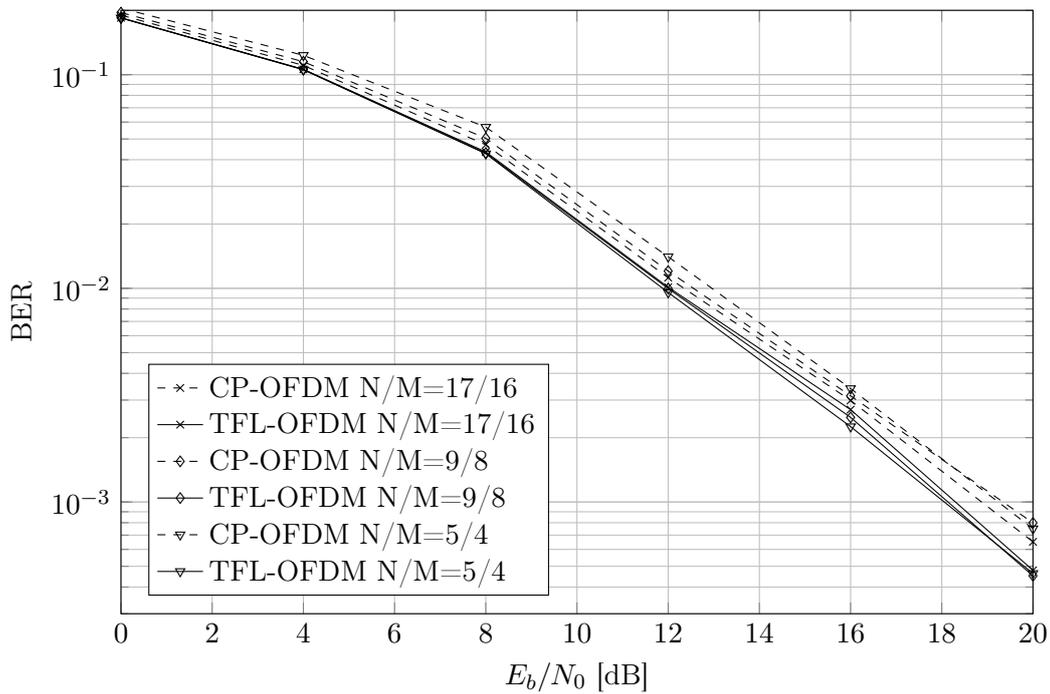
(a)  $v_{\max} = 3$  km/h.(b)  $v_{\max} = 350$  km/h.

FIGURE 5.7 – Taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 2048$  et différentes valeurs de  $N/M$ . Canal COST 207 TUx6 avec codage LDPC de rendement  $3/4$  et 10 itérations au décodage.

## 5.4 Comparaison des modèles base-vers-mobile et mobile-vers-mobile

À travers le scénario de télédiffusion mobile développé précédemment, nous avons utilisé un canal de Rayleigh. Un tel modèle est généralement utilisé pour rendre compte de la propagation au sein des réseaux cellulaires, en considérant que les stations de base se trouvent dans un espace dégagé, alors que le récepteur se déplace dans une zone riche en diffuseurs. Ce modèle trouve ses limites lorsque la transmission s'effectue entre deux mobiles, tous deux situés dans des environnements riches en diffuseurs (ex. : réseau mobile *ad-hoc*). Nous avons ainsi introduit un double modèle de Rayleigh au sein de la partie 2.4.2, page 59. Ce modèle pourrait être étendu au cas où il existe un trajet direct entre l'émetteur-récepteur [Talha 2008, Talha 2010].

Il est intéressant de comparer les performances d'un système WCP-OFDM donné dans un environnement base-vers-mobile et mobile-vers-mobile, avec un décalage Doppler global équivalent dans les deux scénarios. Ainsi, nous reprenons l'exemple précédent, avec  $B = 8$  MHz et  $f_0 = 600$  MHz. Nous définissons deux scénarios de mobilité, de telle sorte que l'écart Doppler maximal entre le signal émis et le signal reçu soit identique entre les modèles base-vers-mobile et mobile-vers-mobile (tab. 5.1). Nous utilisons dans les deux cas le modèle COST 207 TUx6 comportant une réponse impulsionnelle discrète équivalente à  $L = 45$  coefficients.

		Scénario lent	Scénario rapide
base-vers-mobile	$v_{\max}(e)$	0 km/h	0 km/h
	$v_{\max}(r)$	3 km/h	350 km/h
mobile-vers-mobile	$v_{\max}(e)$	1,5 km/h	100 km/h
	$v_{\max}(r)$	1,5 km/h	250 km/h

TABLE 5.1 – Définition de la vitesse maximale de l'émetteur  $v_{\max}(e)$  et du récepteur  $v_{\max}(r)$  en fonction des scénarios de simulation considérés.

Chaque paquet est formé de deux blocs de  $M = 2048$  symboles de QPSK. Les simulations sont réalisées avec les prototypes CP et TFL avec  $N/M \in \{17/16, 9/8, 5/4\}$ . Après transmission dans le canal radiomobile bruité discret équivalent, les performances brutes (sans codage correcteur d'erreurs) sont présentées sous la forme d'un taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$ . Au cours de cette partie, un égaliseur à un coefficient par sous-porteuse est mis en œuvre (connaissance parfaite du canal). Les figures 5.8 et 5.9 permettent de comparer les performances des systèmes WCP-OFDM en fonction du modèle de canal choisi.

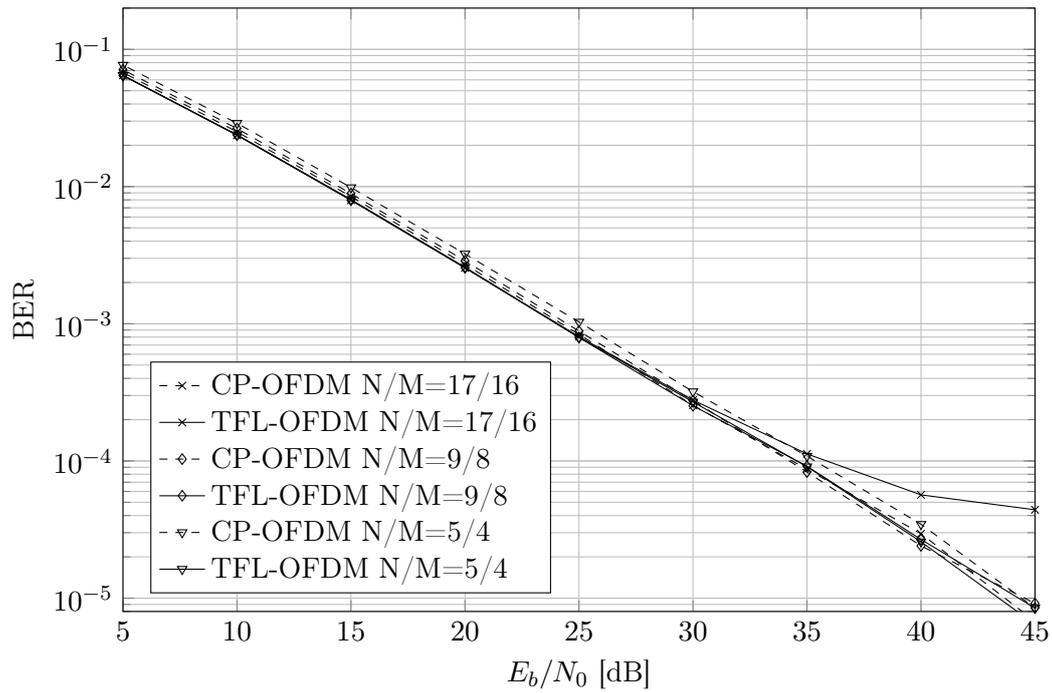
Le scénario de faible mobilité (fig. 5.8) confirme l'intérêt de schémas de transmission orthogonaux en présence de canaux bruités. Le prototype TFL présente des performances similaires à celles du prototype CP, sauf pour  $N/M = 17/16$  (fig. 5.8a). Dans ce cas particulier, la localisation fréquentielle des impulsions est alors insuffisante pour faire face à la sélectivité fréquentielle du canal. En utilisant le modèle mobile-vers-mobile, les performances relatives des différents systèmes WCP-OFDM restent inchangées (fig. 5.8b). Cependant, les courbes de performances présentent une décroissance plus lente que dans le cas précédent. La définition

des coefficients complexes de chaque trajet comme le produit de plusieurs processus aléatoires gaussiens entraîne une augmentation de la probabilité d'évanouissements. Les performances moyennes d'un double canal de Rayleigh sont donc inférieures à celles obtenues sur un simple canal de Rayleigh [Talha 2009, Talha 2011].

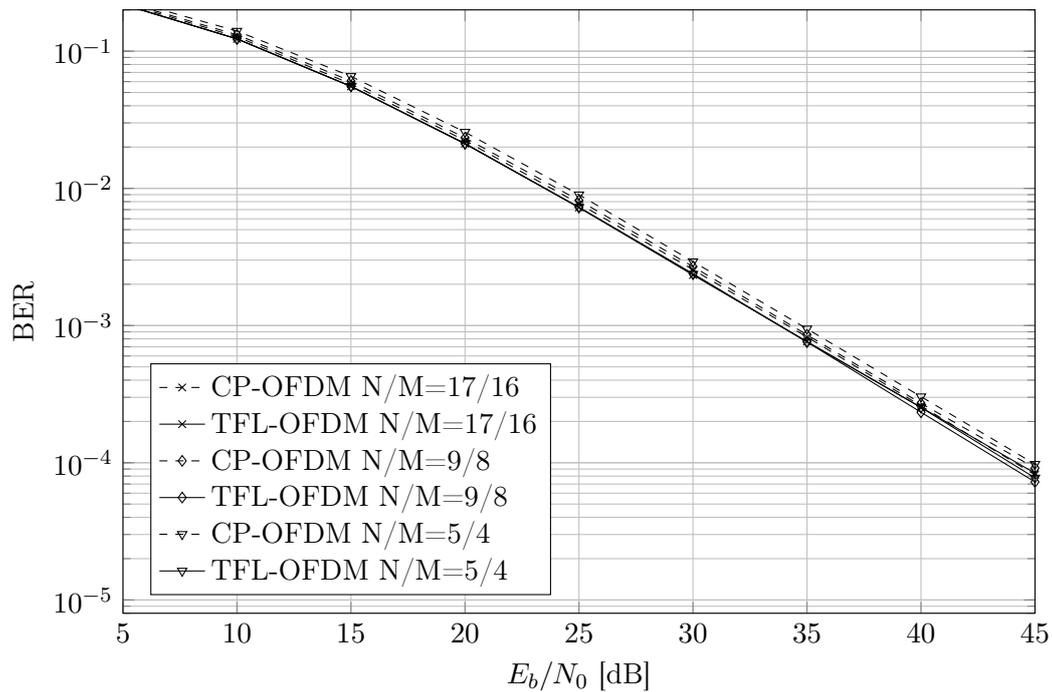
Le scénario de haute mobilité (fig. 5.9) présente des performances relatives similaires entre les systèmes WCP-OFDM étudiés. Ainsi, lorsque le rapport signal sur bruit est élevé, un palier lié à l'interférence entre sous-porteuses apparaît. Dans ces zones d'intérêt, les modulations CP-OFDM se comportent de manière équivalente, quelle que soit la valeur du facteur de suréchantillonnage. À l'inverse, les modulations basées sur le prototype TFL sont caractérisées par des performances d'autant meilleures que leur facteur de suréchantillonnage est grand. Sachant que les moments temporels du second ordre diminuent en même temps que  $N/M$  augmente, cette observation confirme l'intérêt d'impulsions bien localisées en temps pour faire face aux canaux de transmission sélectifs en temps.

Il est intéressant de remarquer que le taux d'erreur minimal obtenu avec le modèle mobile-vers-mobile est inférieur au taux d'erreur minimal obtenu avec le modèle base-vers-mobile. En supposant que ce taux d'erreur minimal dépende principalement de l'interférence entre sous-porteuses induite par effet Doppler, le décalage Doppler moyen est plus faible dans un scénario mobile-vers-mobile. Compte tenu des vitesses maximales choisies (tab. 5.1), il est en effet possible que l'émetteur et le récepteur se déplacent dans la même direction alors que ce scénario est impossible dans le cas base-vers-mobile. Autrement dit, les scénarios de mobilité proposés ne sont pas équivalents du point de vue de l'interférence entre sous-porteuses moyenne induite par effet Doppler.

En résumé, le modèle de canal mobile-vers-mobile, sans trajet direct entre l'émetteur et le récepteur, implique des performances brutes (sans codage correcteur d'erreurs) plus faibles que le traditionnel modèle base-vers-mobile, en environnement quasi-statique. En revanche, lorsque l'interférence entre sous-porteuses devient prépondérante, le modèle mobile-vers-mobile présente des performances supérieures au modèle base-vers-mobile, pour des valeurs similaires de vitesse cumulées entre l'émetteur et le récepteur.



(a) Scénario base-vers-mobile avec  $v_{\max} = 3$  km/h.



(b) Scénario mobile-vers-mobile avec  $v_{\max}(e) = 1,5$  km/h et  $v_{\max}(r) = 1,5$  km/h.

FIGURE 5.8 – Taux d’erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 2048$ , prototype TFL et différentes valeurs de  $N/M$ . Comparaison des scénarios base-vers-mobile et mobile-vers-mobile basés sur le modèle COST 207 TUx6 (scénario de faible mobilité).

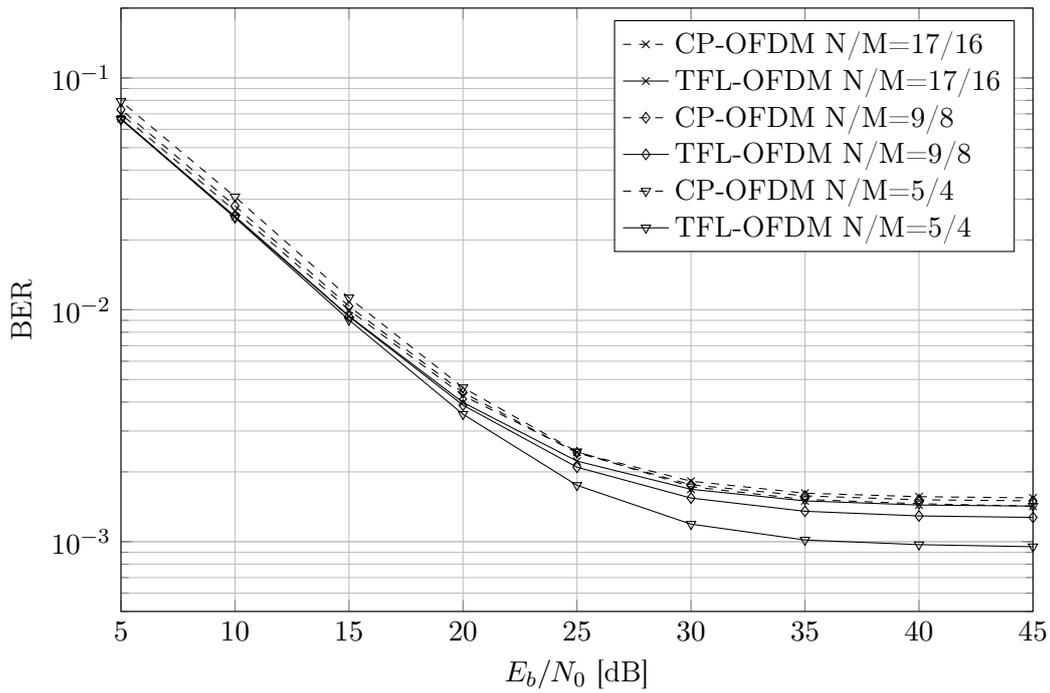
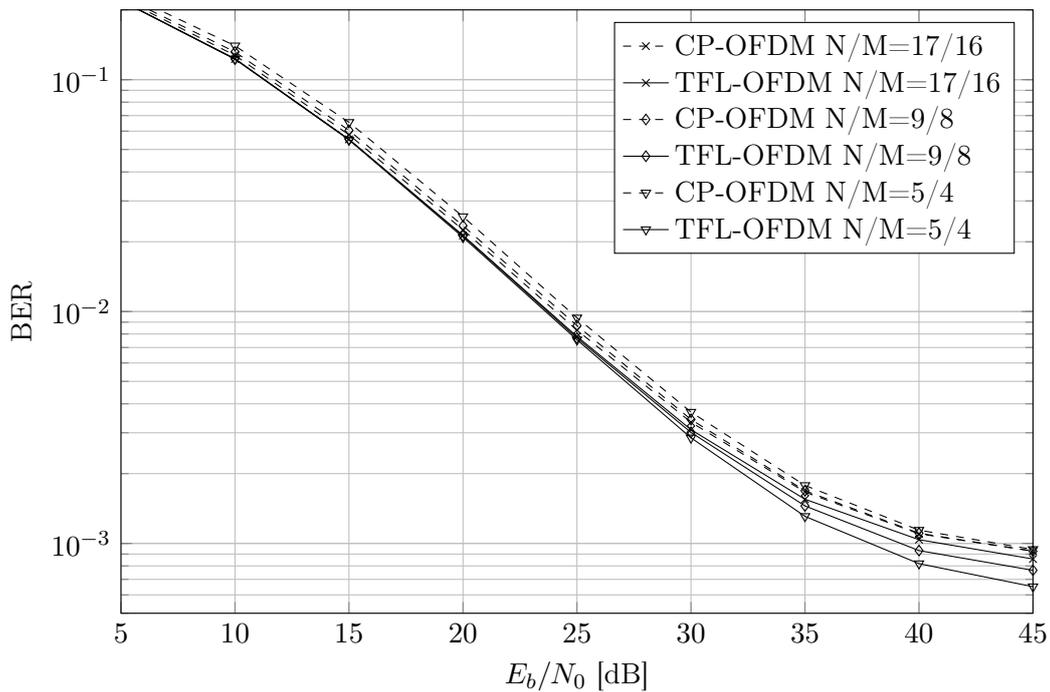
(a) Scénario base-vers-mobile avec  $v_{\max} = 350$  km/h.(b) Scénario mobile-vers-mobile avec  $v_{\max}(e) = 100$  km/h et  $v_{\max}(r) = 250$  km/h.

FIGURE 5.9 – Taux d’erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 2048$ , prototype TFL et différentes valeurs de  $N/M$ . Comparaison des scénarios base-vers-mobile et mobile-vers-mobile basés sur le modèle COST 207 TUx6 (scénario de haute mobilité).

## 5.5 Égalisation à plusieurs coefficients par sous-porteuse

Les scénarios de simulation présentés jusqu'ici se basent sur un égaliseur à un unique coefficient par sous-porteuse. Cette stratégie montre ses limites lorsque l'interférence entre sous-porteuses ou entre blocs devient prépondérante [Roque 2012a]. Nous souhaitons ainsi vérifier l'intérêt des égaliseurs WCP-OFDM proposé dans la partie 4.3, page 112. Considérons pour cela un système de transmission utilisant une bande  $B = 8$  MHz, centrée autour d'une fréquence  $f_0 = 5$  GHz avec les deux scénarios de mobilité utilisés jusqu'ici : piéton ( $v_{\max} = 3$  km/h) et véhicule ( $v_{\max} = 350$  km/h). À l'instar des simulations précédentes, nous utilisons le modèle de canal COST 207 TUx6 avec une réponse impulsionnelle discrète équivalente tronquée à  $L = 45$  coefficients.

Chaque paquet se compose de deux blocs de  $M$  symboles de QPSK avec  $M \in \{256, 512\}$ . Les simulations permettent de comparer les performances (sans codage correcteur d'erreurs) de systèmes WCP-OFDM équipés de prototypes CP et TFL, avec  $N/M \in \{9/8, 5/4\}$ , en utilisant les égaliseurs suivants (fig. 5.10, 5.12, 5.11 et 5.13).

**Égaliseur 1** : un coefficient par sous-porteuse.

**Égaliseur 2** : deux coefficients par sous-porteuse (compensation de l'interférence entre blocs).

**Égaliseur 3** : trois coefficients par sous-porteuse (compensation de l'interférence entre sous-porteuses).

**Égaliseur 4** : quatre coefficients par sous-porteuse (compensation de l'interférence entre blocs et entre sous-porteuses).

Nous supposons, dans un premier temps, que le récepteur possède une connaissance parfaite du canal.

### 5.5.1 Analyse du scénario quasi-statique

Pour  $M = 256$  et  $N/M = 9/8$ , remarquons que l'OFDM avec préfixe cyclique est affecté par de l'interférence entre blocs (fig. 5.10a). En effet, sachant que  $N - M = 32$ , le préfixe cyclique possède une taille inférieure à celle de la réponse impulsionnelle discrète équivalente du canal. Ce scénario met en évidence l'intérêt des égaliseurs 2 et 4 qui permettent de diminuer légèrement l'impact de l'interférence entre blocs. Pour tous les autres scénarios de transmission à basse vitesse, il est cohérent de remarquer que tous les schémas d'égalisation donnent des performances équivalentes (fig. 5.10b, 5.11a et 5.11b).

Le système basé sur le prototype TFL présente un palier d'interférence pour tous les scénarios de transmission à basse vitesse, lorsque le rapport signal sur bruit est élevé (fig. 5.10 et 5.11). Nous avons montré précédemment que cette interférence est à la fois liée à l'interférence entre blocs, mais aussi à un découpage en sous-bandes insuffisant compte tenu de la sélectivité fréquentielle du canal. Pour  $M = 256$  et  $N/M = 9/8$ , nous remarquons que les égaliseurs 2 et 4 sont les plus appropriés en raison de l'interférence entre blocs prédominante

(fig. 5.10a). En revanche, pour les autres scénarios de faible mobilité, l'interférence entre blocs devient négligeable et les égaliseurs (1,2) et (3,4) donnent des performances similaires. Nous montrons toutefois que l'interférence résultant d'un découpage entre sous-porteuses insuffisant peut être compensée par les égaliseurs 3 et 4 (fig. 5.10b, 5.11a et 5.11b). Naturellement, l'écart de performance entre les égaliseurs (1,2) et (3,4) diminue en même temps que  $M$  augmente.

### 5.5.2 Analyse du scénario mobile

Lorsque l'émetteur ou le récepteur se déplacent, l'effet Doppler qui en résulte induit de l'interférence entre sous-porteuses qui s'ajoute au terme d'interférence déjà identifié dans le cas quasi-statique. Toutes les mesures de performance réalisées font apparaître un palier qui permet de confirmer que l'interférence entre sous-porteuses induite par effet Doppler est prédominante devant l'interférence entre blocs (fig. 5.12 et 5.13). Par conséquent, les égaliseurs (1,2) et (3,4) donnent des performances comparables. Il est par ailleurs logique de remarquer que les égaliseurs à trois coefficients par sous-porteuse ou plus sont à privilégier dans ce scénario de transmission, quel que soit le prototype utilisé. Conformément aux observations réalisées dans les campagnes de simulation précédentes, la mobilité est suffisante pour privilégier l'utilisation du prototype TFL à la place du prototype CP, sauf lorsque  $M = 256$  et  $N/M = 9/8$  (fig. 5.12a).

De plus, en considérant  $N/M = 5/4$  et en observant les figures 5.12b et 5.13b à fort rapport signal sur bruit, il est intéressant de remarquer que l'écart de performances entre les égaliseurs (1,2) et (3,4) est plus grand si l'on utilise le prototype TFL que si l'on utilise l'OFDM avec préfixe cyclique. Cela s'explique par le fait que l'égalisation à trois coefficients par sous-porteuse est d'autant plus efficace que les impulsions de mise en forme sont bien localisées en fréquence.

En résumé, la campagne de simulation présentée ici nous a permis d'évaluer l'intérêt de divers schémas d'égalisation. En particulier, nous avons montré que

1. la compensation de l'interférence entre blocs présente peu d'intérêt lorsque la taille des blocs est grande devant celle de la réponse impulsionnelle du canal ;
2. l'égalisation à trois coefficients par sous-porteuse permet de réduire l'interférence entre sous-porteuses induite par le canal et quel que soit le prototype à reconstruction parfaite utilisé ;
3. l'égalisation à plusieurs coefficients par sous-porteuse est d'autant plus efficace que la localisation fréquentielle des impulsions de mise en forme est grande.

### 5.5.3 Analyse de l'impact d'une estimation de canal bruitée

Supposons à présent une estimation de canal bruitée. Ainsi, pour l'égalisation  $n$ -ième bloc, les matrices de canal  $\mathbf{H}_n$  et  $\mathbf{G}_n$  sont formées à partir des coefficients  $\tilde{a}_l[k] + \tilde{b}_l[k]$ , avec  $l \in \{0, \dots, L-1\}$  et  $k \in \{0, \dots, 2N-1\}$ . Les échantillons de bruits d'estimation  $\tilde{b}_l[k]$  sont

indépendants. Ils suivent une distribution gaussienne circulaire centrée, caractérisée par une variance  $\sigma_b^2$ .

En notant  $\sigma_\alpha^2 = \sum_{i=1}^I \sigma_{\alpha_i}^2$  et en supposant un rapport signal sur bruit d'estimation  $\sigma_\alpha^2/\sigma_b^2 = 10$  dB, nous montrons que les schémas d'égalisation 1 et 2 donnent de meilleures performances que les égaliseurs 3 et 4, quel que soit le scénario de mobilité considéré (fig. 5.14). En effet, la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}_n$  étant composée de coefficients bruités, celle-ci introduit une erreur de reconstruction plus grande de le cas tri-diagonal que dans le cas diagonal. Par ailleurs, nous remarquons encore une fois que l'interférence entre blocs est négligeable puisque les scénarios d'égalisation (1,2) et (3,4) donnent des performances équivalentes. Enfin, en raison de leur bonne localisation en temps et en fréquence, nous soulignons que les impulsions de mise en forme TFL semblent les plus robustes en présence d'une estimation de canal bruitée, y compris pour le scénario de faible mobilité.

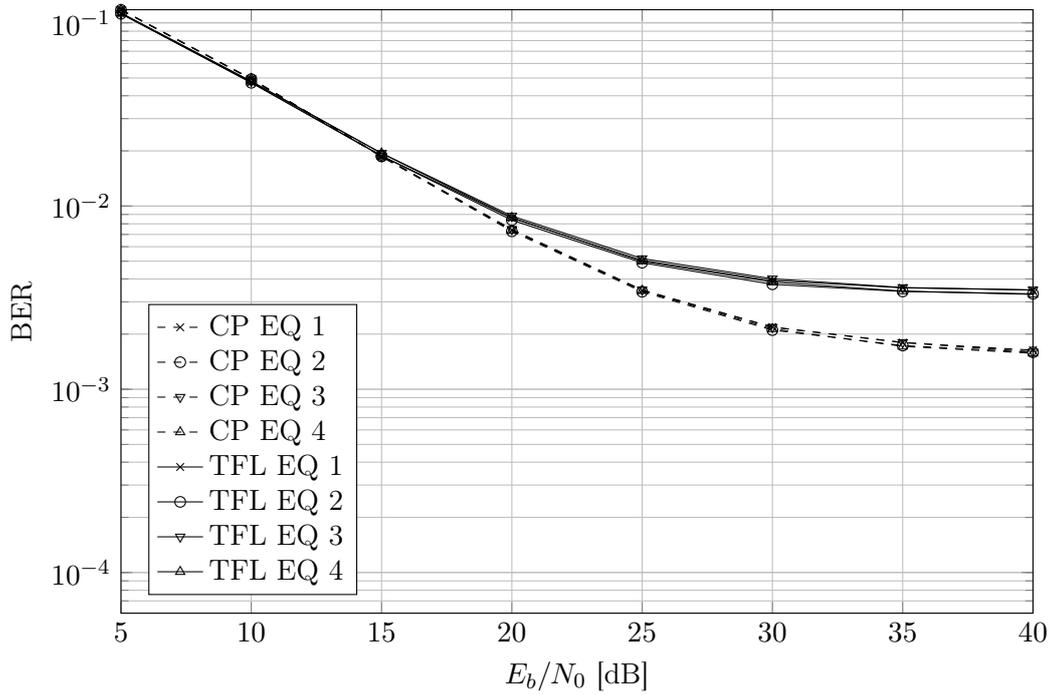
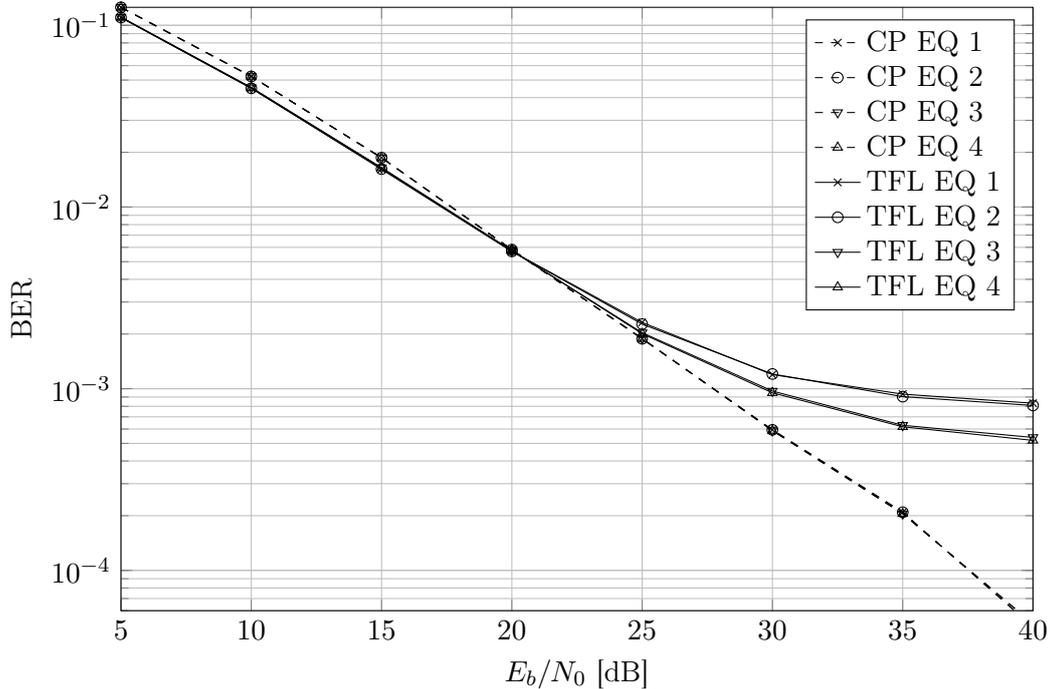
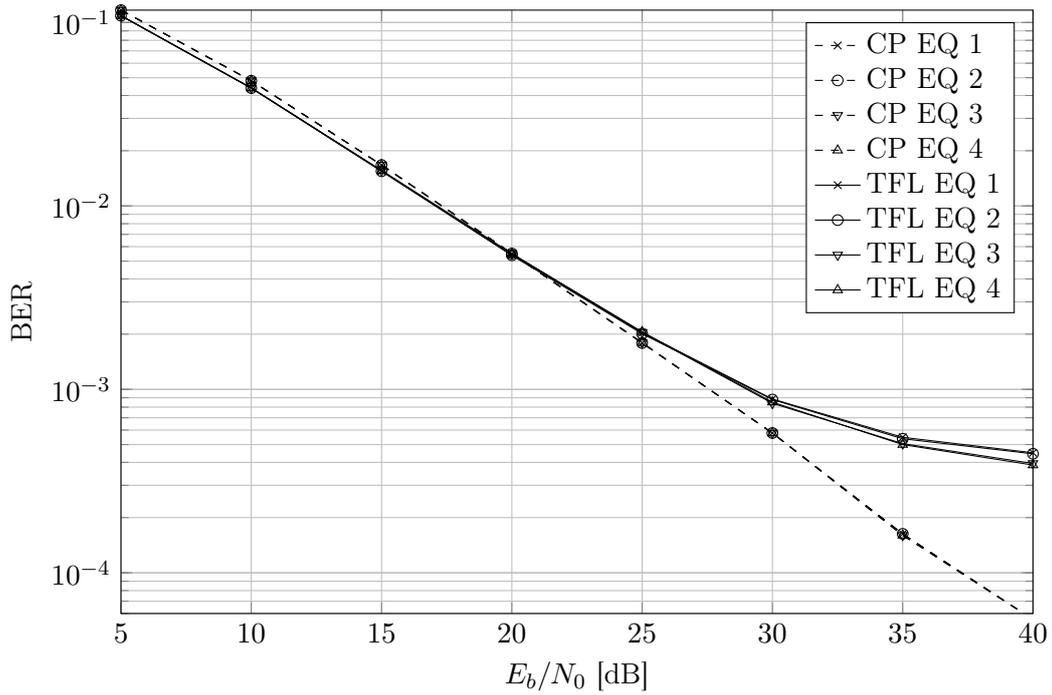
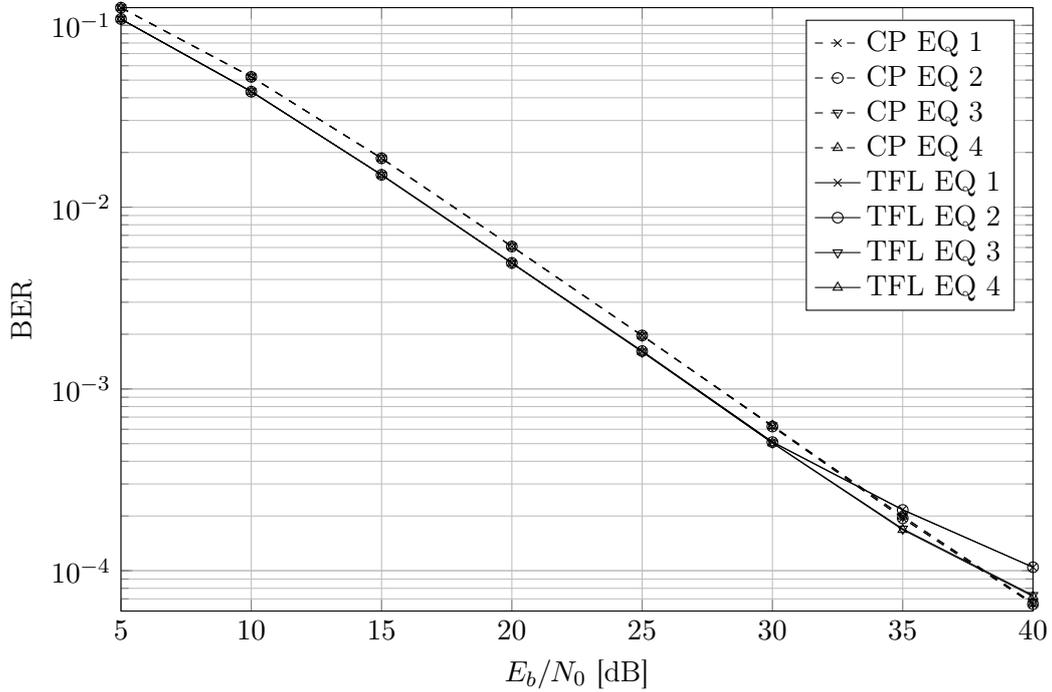
(a)  $N/M = 9/8$ .(b)  $N/M = 5/4$ .

FIGURE 5.10 – Taux d’erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 256$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d’égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUx6 (scénario de faible mobilité).



(a)  $N/M = 9/8$ .



(b)  $N/M = 5/4$ .

FIGURE 5.11 – Taux d’erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 512$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d’égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUx6 (scénario de faible mobilité).

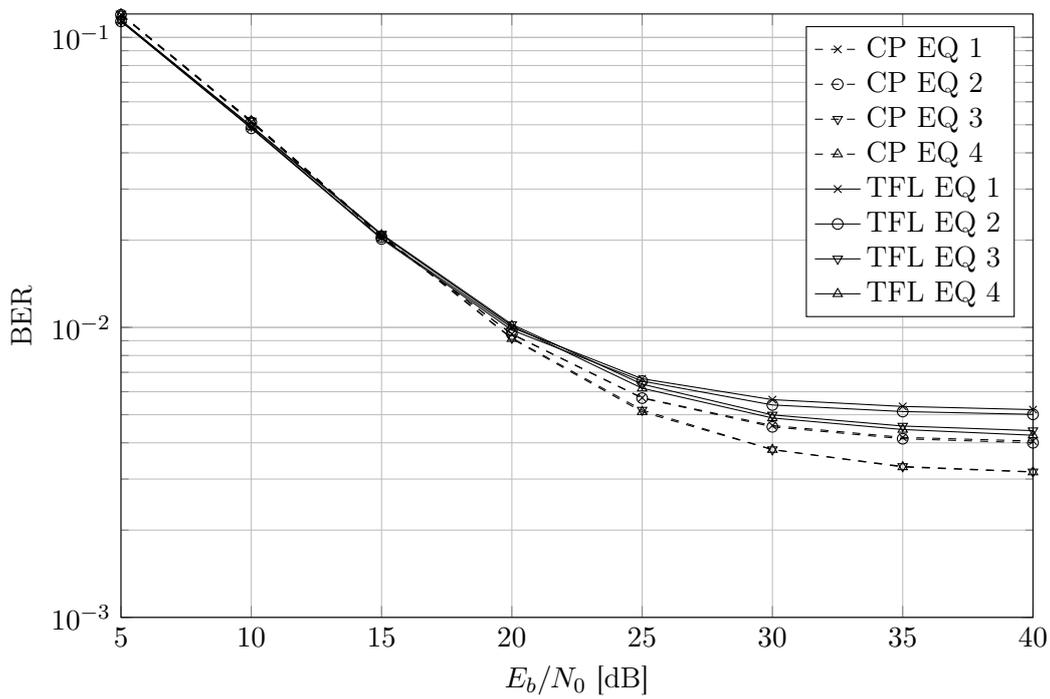
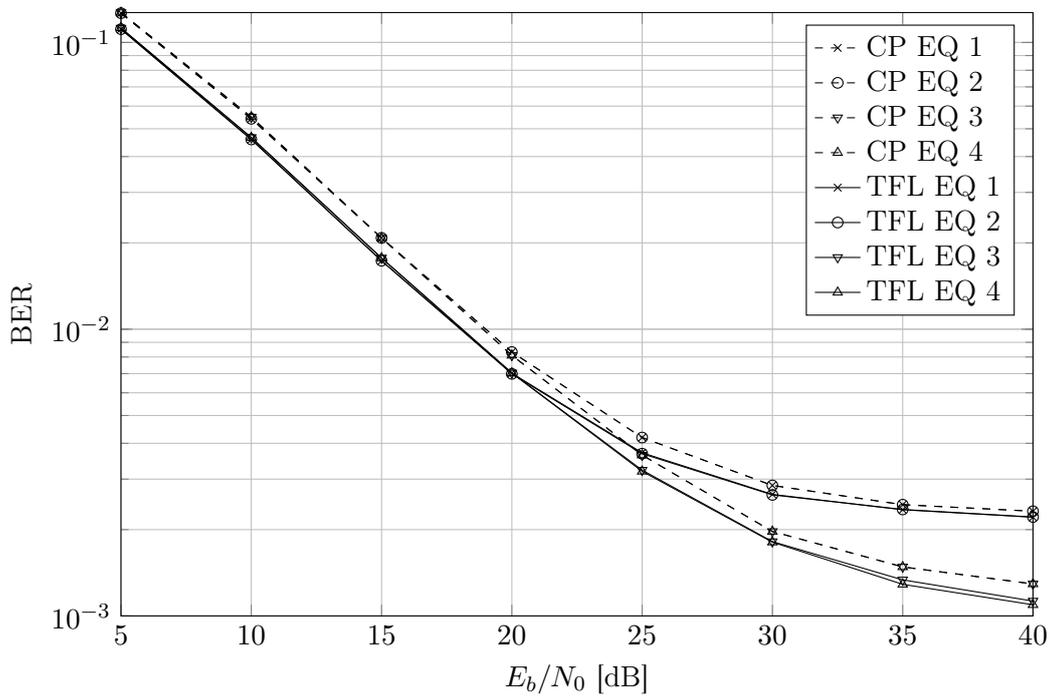
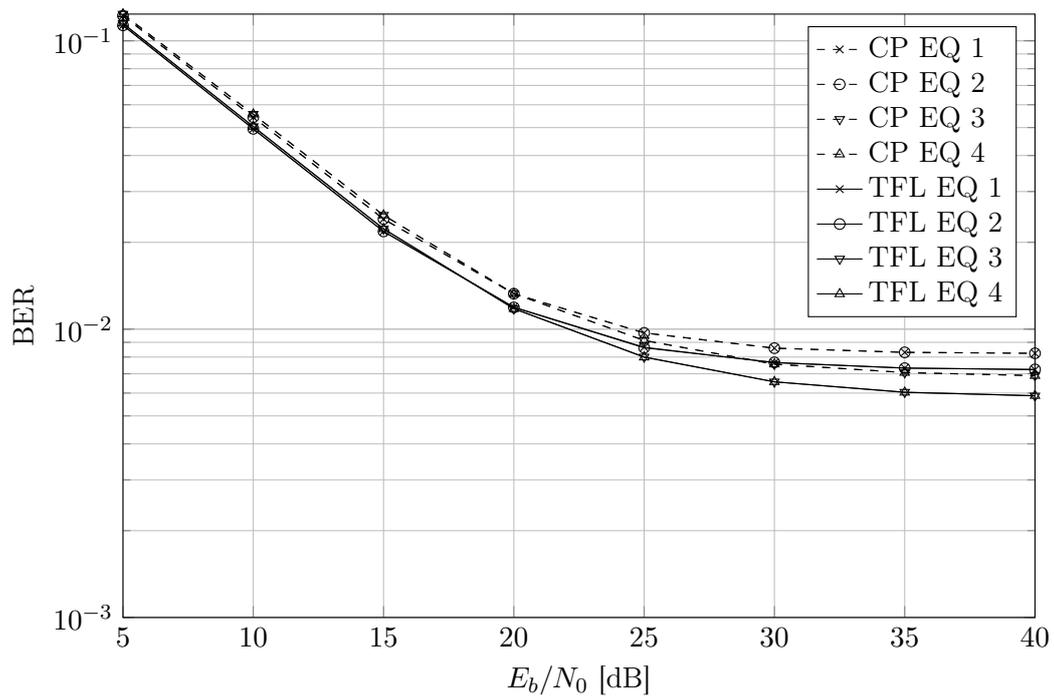
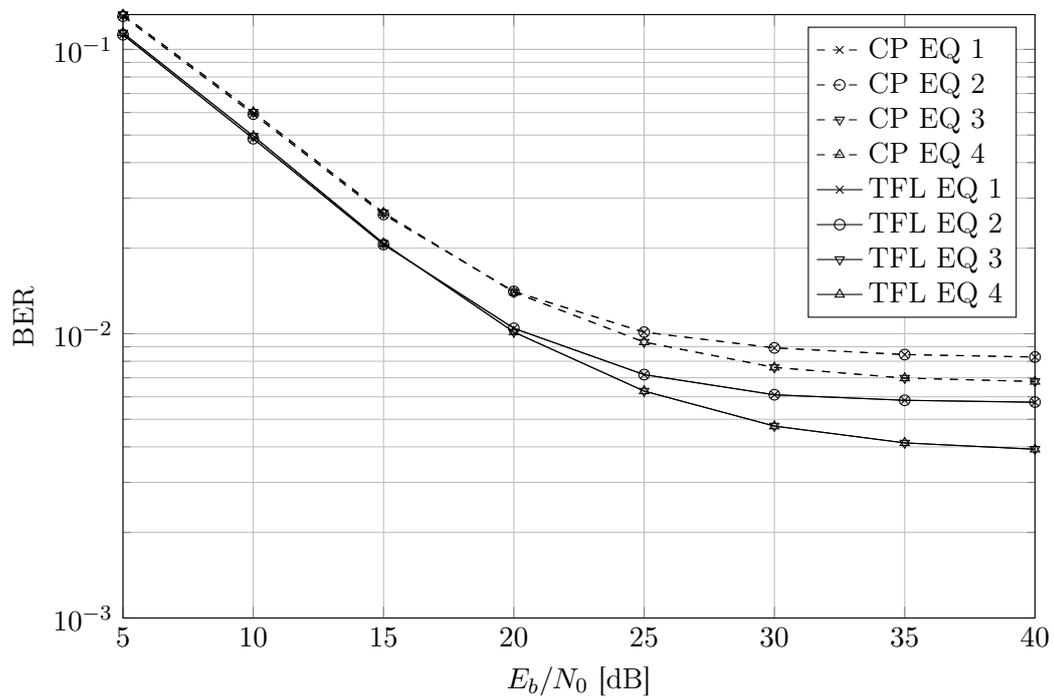
(a)  $N/M = 9/8$ .(b)  $N/M = 5/4$ .

FIGURE 5.12 – Taux d’erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 256$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d’égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUx6 (scénario de haute mobilité).



(a)  $N/M = 9/8$ .



(b)  $N/M = 5/4$ .

FIGURE 5.13 – Taux d’erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 512$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d’égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUx6 (scénario de haute mobilité).

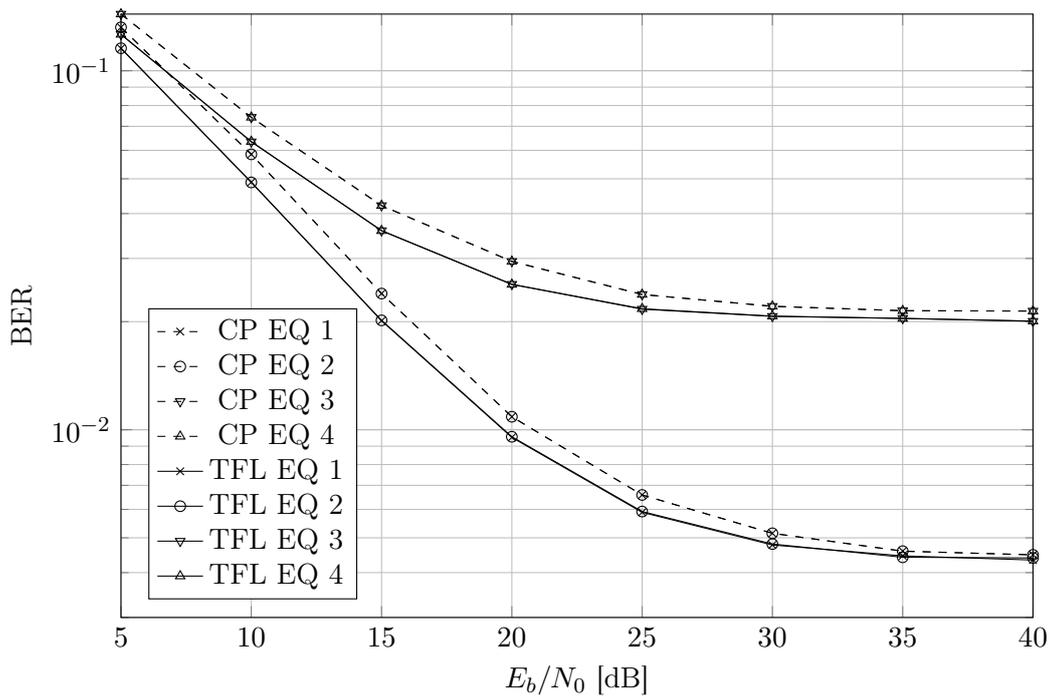
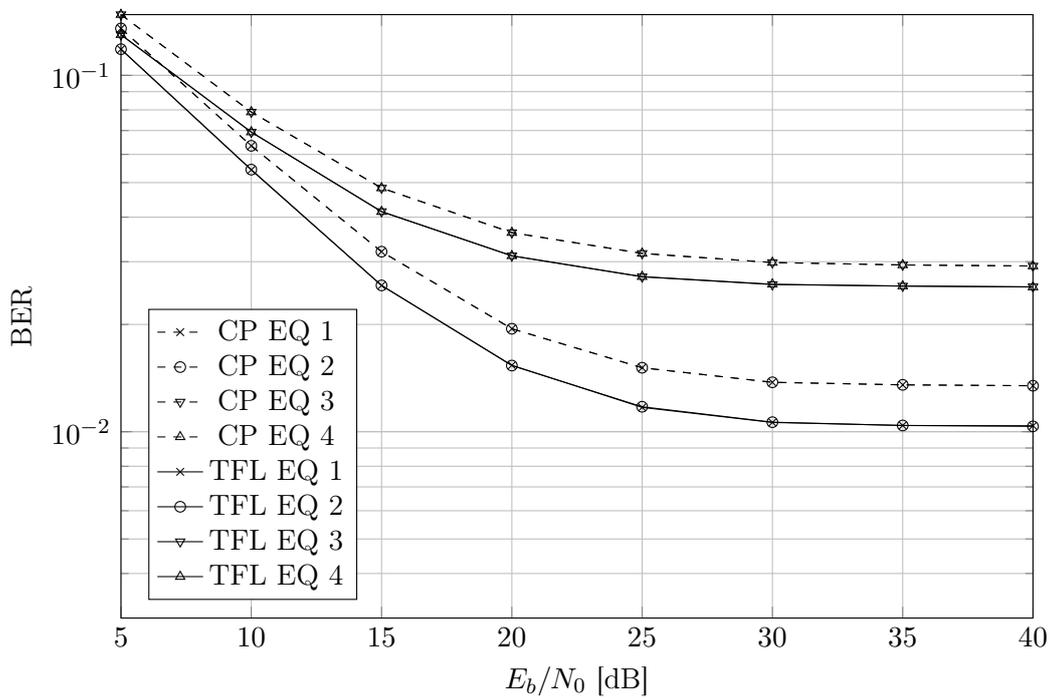
(a)  $v_{\max} = 3$  km/h(b)  $v_{\max} = 350$  km/h

FIGURE 5.14 – Taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  pour  $M = 512$ ,  $N/M = 5/4$ , prototype TFL. Comparaison des schémas d'égalisation avec un modèle de canal COST 207 TUx6 avec une estimation de canal bruitée (SNR d'estimation de 10 dB).

## Synthèse du chapitre

Ce chapitre débute par une présentation générale de l'environnement de simulation. Nous précisons en particulier la valeur du rapport  $E_b/N_0$  en fonction des différents paramètres de l'émetteur-récepteur WCP-OFDM. Les premières mesures de performances visent à analyser le comportement du système pourvu de filtres CP, TFL ou OBE dans un contexte radiomobile réaliste, en supposant un égaliseur à un coefficient par sous-porteuse et une connaissance parfaite du canal en réception. Nous montrons ainsi l'intérêt de schémas de transmission orthogonaux lorsque la puissance du bruit est prépondérante devant celle des interférences. Le prototype TFL se révèle polyvalent en environnement radiomobile en raison de sa bonne localisation en temps et en fréquence. Il devient compétitif vis-à-vis du CP, y compris dans les scénarios quasi-statiques, lorsque  $M$  et  $N/M$  sont suffisamment grands. En revanche, le prototype OBE semble attractif exclusivement dans le cas de canaux très sélectifs en temps [Roque 2012d]. L'utilisation d'un codeur de canal LDPC ne modifie pas les performances relatives des différents systèmes étudiés. Le même constat s'impose lorsque l'on utilise un modèle de canal mobile-vers-mobile [Roque 2012b].

Nous comparons ensuite les performances des quatre schémas d'égalisation proposés au cours du chapitre précédent. Cette étude montre qu'une égalisation à un coefficient par sous-porteuse est généralement suffisante pour permettre aux prototypes orthogonaux de se montrer compétitifs vis-à-vis de l'OFDM avec préfixe cyclique, y compris dans le scénario de faible mobilité. Par ailleurs, l'utilisation d'un égaliseur à trois coefficients par sous-porteuse présente un intérêt lorsque le canal devient fortement sélectif en temps, quel que soit le filtre prototype considéré [Roque 2012a]. Enfin, nous remarquons que l'interférence entre blocs est généralement négligeable ; il en résulte que l'égaliseur à deux coefficients par sous-porteuses présente peu d'intérêt dans les scénarios développés. Nous concluons le chapitre avec la prise en compte d'une estimation de canal bruitée. Dans de telles conditions, nous montrons qu'il est préférable d'utiliser un seul coefficient par sous-porteuse afin de limiter l'erreur de reconstruction.

# Conclusion et perspectives

Le principal objectif de cette thèse était d'évaluer les performances des modulations multi-porteuses à filtres courts dans un environnement radiomobile réaliste. Plus précisément, nous nous sommes intéressés aux filtres prototypes orthogonaux, à reconstruction parfaite. Nous avons développé des scénarios d'égalisation, de faible complexité, adaptés à leur mise en œuvre sur des canaux particulièrement défavorables à la transmission d'information.

L'analyse de l'environnement radiomobile fût le point de départ de notre étude. Outre le bruit introduit par ce type de canaux, il se caractérise notamment par sa sélectivité en temps et en fréquence, due en pratique l'étalement Doppler lié au déplacement des terminaux et à la propagation multitrajet entre ces derniers. Sous l'hypothèse d'une transmission à bande étroite et d'un étalement Doppler faible devant cette bande, le canal radiomobile peut se modéliser sous la forme d'un système linéaire variant dans le temps. Bien qu'il soit impossible de diagonaliser un tel système, la notion de signalisation optimale se traduit par la recherche de sa structure propre approchée. À la poursuite de cet objectif, nous avons montré que les modulations multiporteuses suréchantillonnées constituent une solution adaptée à cette problématique en répartissant l'information dans le plan temps-fréquence grâce à des impulsions de mise en forme variées, dont il est possible d'adapter les caractéristiques temps-fréquence, en respectant toutefois la relation d'incertitude d'Heisenberg–Gabor.

Face à une connaissance souvent partielle du canal radiomobile, nous avons présenté une modélisation statistique en utilisant les hypothèses classiques de stationnarité au second ordre et de non corrélation des diffuseurs. Ce cadre d'étude nous permet notamment d'introduire un modèle de canal à diffusion multiple qui généralise le traditionnel modèle de Clarke et qui caractérisent la propagation entre deux stations mobiles. Un tel scénario de propagation illustre par exemple la communication entre deux nœuds d'un réseau *ad-hoc* situé dans un environnement urbain (ex. : transmissions tactiques, applications de sécurité routière, réseaux de capteurs...).

Ces considérations nous permettent aussi d'exprimer le rapport signal sur bruit et interférences (SINR) du système de transmission multiporteuse en fonction des caractéristiques de l'émetteur-récepteur et de celles du canal. Ainsi, si l'on fixe la durée symbole, l'espacement entre sous-porteuses ainsi que le nombre de sous-porteuses, nous montrons que la maximisation séparée des termes qui composent le SINR repose sur l'utilisation d'impulsions de mise en forme dont la localisation en temps et en fréquence dépend de l'étalement temporel et fréquentiel moyen du canal de transmission. Nous obtenons ainsi une stratégie de réalisation consistant à choisir les moments du second ordre en temps et en fréquence des impulsions de mise en forme proches des valeurs moyennes d'étalement en temps et en fréquence du canal de transmission. Cela permet de garantir un terme d'interférence moyen faible tout en préservant une bonne efficacité spectrale. Si le terme de bruit est prépondérant devant le terme d'interférence induit par la sélectivité temporelle et fréquentielle du canal, nous montrons qu'il est préférable de se référer à un scénario de transmission orthogonal, ce qui corrobore la

théorie du filtrage adapté. Les différents résultats démontrés dans cette partie s'inscrivent dans la continuité des travaux présentés dans [Kozek 1998, Strohmer 2003, Jung 2007a]. Nous précisons notamment les règles d'adaptation temps-fréquence introduites par ces auteurs en choisissant d'annuler la puissance moyenne des interférences tout en conservant une efficacité spectrale maximale.

En dépit de l'intérêt que présentent les systèmes de transmission multiporteuses suréchantillonnées pour la transmission en environnement radiomobile, la complexité algorithmique liée à leur mise en œuvre et à leur égalisation constitue un frein majeur à leur adoption. Fort de ce constat, nous restreignons notre étude au cas particulier des filtres courts, caractérisés par leur réponse impulsionnelle de longueur inférieure ou égale à la durée de transmission d'un bloc multiporteuse. L'utilisation de ce type de filtre introduit d'importantes simplifications dans la structure de l'émetteur-récepteur, alors appelé *weighted cyclic prefix orthogonal frequency-division multiplexing* (WCP-OFDM). Ce système peut être considéré comme une généralisation du traditionnel OFDM avec préfixe cyclique (CP-OFDM) dans la mesure où il permet l'utilisation d'impulsions de mise en forme non rectangulaires, tout en conservant une complexité algorithmique similaire.

Après avoir établi les conditions de reconstruction parfaite dans le cas particulier du WCP-OFDM, nous nous intéressons aux filtres présentés dans [Pinchon 2011]. Les fonctions prototypes proposées sont construites selon les critères de la minimisation de l'énergie hors bande (OBE) et de la maximisation de la localisation temps-fréquence (TFL). Le choix de ces critères d'optimisation est cohérent vis-à-vis de notre analyse du rapport signal sur interférence et de sa maximisation en environnement doublement sélectif. De plus, les fonctions prototypes utilisées donnent lieu à des schémas de transmission orthogonaux, adaptés à la transmission sur canal à bruit additif blanc gaussien. Une analyse temps-fréquence des impulsions prototypes OBE et TFL permet d'évaluer leur comportement en fonction du facteur de suréchantillonnage et de les comparer aux impulsions de mise en forme rectangulaires utilisées par l'OFDM avec préfixe cyclique.

Lorsque le système WCP-OFDM est soumis à un canal de transmission radiomobile bruité, l'estimation des symboles émis s'effectue en présence de bruit et d'interférences. Par exemple, à la différence du CP-OFDM, les schémas de transmission orthogonaux ne permettent pas de diagonaliser les canaux exclusivement sélectifs en fréquence. L'analyse du terme d'interférence associé aux prototypes OBE et TFL montre que la compensation de l'interférence induite par les canaux radiomobiles repose, d'une part, sur le choix du nombre de sous-porteuses puisque celui-ci résulte d'un compromis entre compensation de la sélectivité fréquentielle et sensibilité à la sélectivité temporelle. D'autre part, le facteur de suréchantillonnage détermine les caractéristiques temps-fréquence des impulsions prototypes. En supposant une connaissance parfaite du canal de transmission, nous développons quatre schémas d'égalisation. Le premier utilise un coefficient par sous-porteuse et consiste à négliger les éventuels termes d'interférence. Le deuxième utilise deux coefficients par sous-porteuse afin de compenser l'interférence entre blocs. Le troisième utilise trois coefficients par sous-porteuse dans le but de supprimer l'interférence introduite par les deux sous-porteuses adjacentes. Enfin le quatrième égaliseur combine les techniques mises en œuvre par les égaliseurs deux et trois. Ces différents égaliseurs sont

caractérisés par leur facilité d'intégration puisque leur complexité algorithmique d'inversion reste linéaire, à la différence d'un égaliseur parfait qui aurait une complexité d'inversion cubique. En étudiant la puissance moyenne des interférences entre blocs et entre sous-porteuses à travers des scénarios de simulation réalistes, nous montrons que l'interférence entre blocs est souvent négligeable devant l'interférence entre sous-porteuses, compte tenu de la forme des réponses impulsionnelles des prototypes OBE et TFL. En revanche, lorsque l'étalement Doppler est particulièrement élevé, le scénario d'égalisation à trois coefficients par sous-porteuse peut se révéler utile.

Malgré leur intérêt certain pour la transmission sur les canaux radiomobiles, les modulations multiporteuses se heurtent à un problème d'intégration majeur : pour une constellation donnée, leur rapport de puissance crête sur puissance moyenne (PAPR) est beaucoup plus élevé que celui des modulations monoporteuses. Cela contraint à utiliser des amplificateurs de puissance linéaires dans une grande dynamique, ce qui est à la fois peu efficace et coûteux. Dans le cadre des modulations WCP-OFDM, nous montrons que le PAPR minimal, est obtenu lorsque l'on utilise des impulsions de mise en forme rectangulaires. Avec des filtres prototypes non rectangulaires tels que OBE et TFL, le PAPR est d'autant plus élevé que le facteur de suréchantillonnage est grand. Dans le cas où cette contrainte s'avère trop difficile à assumer, nous suggérons alors une technique de précodage basée sur une transformée de Fourier discrète qui aboutit à un schéma de transmission monoporteuse par blocs.

L'évaluation des performances des systèmes WCP-OFDM basés sur les prototypes CP, OBE et TFL s'appuie sur des scénarios de transmission réalistes, tels que la télédiffusion vidéo dans un environnement urbain, ou la transmission à haut débit dans un contexte mobile-vers-mobile. Pour chaque scénario de simulation, la mesure du taux d'erreur binaire en fonction de  $E_b/N_0$  nous permet de comparer les performances des différents systèmes en fonction du nombre de sous-porteuses et du facteur de suréchantillonnage. Nous confirmons ainsi, par simulation, l'intérêt de systèmes orthogonaux lorsque le bruit introduit par le canal est prépondérant sur l'interférence. Pour les canaux de transmission quasi-statiques, nous pouvons affirmer que le CP-OFDM reste une solution attractive lorsque le nombre de sous-porteuses utilisé est faible ou lorsque la longueur du préfixe cyclique est faible devant la taille du bloc. En dehors de ces deux cas particuliers, le prototype TFL s'avère concurrentiel vis-à-vis du CP en raison de sa localisation fréquence élevée qui lui offre une bonne robustesse face aux canaux principalement sélectifs en fréquence. En présence de mobilité, le prototype TFL présente de meilleures performances que le CP grâce à sa localisation temporelle élevée qui lui confère une bonne résistance face aux canaux sélectifs en temps. Enfin, nous remarquons que le prototype OBE reste moins polyvalent que le TFL, il se révèle toutefois utile sur les canaux particulièrement sélectifs en temps.

Les simulations réalisées avec les quatre égaliseurs de faible complexité confirment que l'utilisation d'un seul coefficient par sous-porteuse peut se révéler suffisante dans de nombreux scénarios. En particulier, la compensation de l'interférence entre blocs ne semble pas fondamentale dans le cadre des systèmes WCP-OFDM étudiés. Lorsque l'étalement Doppler est fort, l'utilisation d'un égaliseur à trois coefficients apporte un gain de performance intéressant, d'autant plus que la localisation temporelle des impulsions de mise en forme est grande.

Une estimation de canal bruitée renforce l'intérêt d'une égalisation à un coefficient par sous-porteuse afin de limiter l'erreur de reconstruction induite par la connaissance imparfaite du canal de transmission.

L'utilisation de modèles de propagation mobile-vers-mobile nous permet de vérifier que les différents systèmes WCP-OFDM affichent des performances relatives similaires par rapport au modèle base-vers-mobile traditionnellement utilisé. La mobilité de l'émetteur et du récepteur dans un environnement riche en diffuseurs se caractérise par l'accentuation des phénomènes d'évanouissement.

Enfin, l'utilisation d'un code correcteur d'erreurs LDPC nous permet, une fois de plus, de vérifier que les performances relatives des systèmes WCP-OFDM restent inchangées. En particulier, soulignons que le code correcteur d'erreurs commence à fonctionner correctement lorsque le terme de bruit est prépondérant sur le terme d'interférence. Cela met en évidence l'intérêt des systèmes orthogonaux plutôt que les propriétés temps-fréquence des impulsions de mise en forme.

Parmi les futurs axes de recherche identifiés, la synthèse des filtres courts à temps discret, reste un domaine peu exploré. L'utilisation de critères d'optimisation différents de ceux présentés ici permettrait d'adapter les impulsions de mise en forme à des canaux de transmission moins courants que ceux évoqués dans cette étude. Afin d'identifier les besoins, il serait souhaitable de simuler de nouveaux environnements de propagation tels que le canal acoustique sous-marin ou ionosphérique. De plus, afin de cerner les limites du WCP-OFDM, il serait nécessaire de comparer ses performances à un émetteur-récepteur multiporteuse suréchantillonné utilisant des filtres de longueur supérieure à celle d'un bloc et se basant éventuellement sur la modulation OQAM.

Il serait intéressant de traiter la problématique de l'estimation de canal dans le cas du WCP-OFDM. Bien que celle-ci soit déjà largement abordée dans le cas du CP-OFDM ou plus généralement dans le cas des modulations multiporteuses suréchantillonnées, ce cas particulier reste à traiter. De plus, cette thématique ouvre la voie à la mise en œuvre de systèmes adaptatifs dont il serait possible de faire varier le facteur de suréchantillonnage et le type d'égaliseur utilisé en fonction des réalisations du canal vues par le système.

Enfin, une réalisation pratique de l'émetteur-récepteur WCP-OFDM, en utilisant par exemple une plate-forme de radio logicielle, permettrait de valider le comportement du système de transmission complet, incluant les blocs d'estimation de canal, de synchronisation, d'égalisation, de codage de canal... Dans le cadre de l'analyse du PAPR, nous pourrions par exemple étudier les performances des différents prototypes dans le cadre d'une amplification de puissance non-linéaire. La mise en œuvre des modulations WCP-OFDM serait également attractive pour son évaluation dans un contexte de guerre électronique, incluant par exemple l'analyse de la signature des formes d'onde, l'estimation aveugle des impulsions de mise en forme utilisées, l'évaluation de la sensibilité de ces impulsions de mise en forme au brouillage à bande étroite.

# Bibliographie

- [Akki 1986] A. S. Akki et F. Haber. *A statistical model of mobile-to-mobile land communication channel*. IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 35, no. 1, pages 2–7, 1986. (Cité en pages 5 et 61.)
- [Andersen 2002] J.B. Andersen et I.Z. Kovacs. *Power distributions revisited*. In COST 273 Meeting, 2002. (Cité en page 61.)
- [Barhumi 2004] Imad Barhumi, Geert Leus et Marc Moonen. *Time-domain and frequency-domain per-tone equalization for OFDM over doubly selective channels*. Signal Process., vol. 84, no. 11, pages 2055–2066, Novembre 2004. (Cité en page 4.)
- [Beaulieu 2009] François D. Beaulieu et Benoît Champagne. *Design of prototype filters for perfect reconstruction DFT filter bank transceivers*. Signal Processing, vol. 89, no. 1, pages 87 – 98, 2009. (Cité en pages 3 et 99.)
- [Bellanger 1974] M. Bellanger et J. Dagu t. *TDM-FDM Transmultiplexer : Digital polyphase and FFT*. IEEE Trans. Commun., vol. 22, no. 9, pages 1199 – 1205, sep 1974. (Cité en page 3.)
- [Bellanger 2001] M.G. Bellanger. *Specification and design of a prototype filter for filter bank based multicarrier transmission*. In Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings. (ICASSP '01). 2001 IEEE International Conference on, volume 4, pages 2417 –2420 vol.4, 2001. (Cité en page 93.)
- [Bello 1963] P. Bello. *Characterization of randomly time-variant linear channels*. IEEE Transactions on Communications Systems, vol. 11, no. 4, pages 360–393, 1963. (Cité en pages 2, 51, 52, 57 et 85.)
- [Bello 1973] P. Bello. *Aeronautical channel characterization*. IEEE Trans. Commun., vol. 21, no. 5, pages 548–563, 1973. (Cité en page 57.)
- [Benvenuto 2002] N. Benvenuto, S. Tomasin et L. Tomba. *Equalization methods in OFDM and FMT systems for broadband wireless communications*. IEEE Trans. Commun., vol. 50, no. 9, pages 1413 – 1418, sep 2002. (Cité en pages 4 et 94.)
- [Bernfeld 1967] M. Bernfeld, C.E. Cook et C. Emerson. *Radar signals : an introduction to theory and application*. Academic Press, 1967. (Cité en page 88.)
- [Bohn 1996] F. Bohn, P. Major et L. Taylor. *Fading phenomena in the tactical radio environment*. In Proc. IEEE Military Communications Conf. MILCOM '96, volume 3, pages 728–732, 1996. (Cité en page 57.)
- [B lcskei 2003] Helmut B lcskei. *Advances in gabor analysis*, chapitre Orthogonal frequency division multiplexing based on offset QAM, pages 321–352. Eds. Cambridge, MA, 2003. (Cité en page 93.)
- [Calvez 1992] L. C. Calvez et P. Vilb . *On the uncertainty principle in discrete signals*. IEEE Trans. Circuits Syst. II, vol. 39, no. 6, pages 394–395, 1992. (Cité en page 25.)

- [Cherubini 2002] G. Cherubini, E. Eleftheriou et S. Olcer. *Filtered multitone modulation for very high-speed digital subscriber lines*. IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 20, no. 5, pages 1016–1028, 2002. (Cité en page 3.)
- [Christensen 2008] O. Christensen. *Frames and bases : An introductory course*. Birkhauser, 2008. (Cité en pages 3 et 12.)
- [Clarke 1968] R.H. Clarke. *A statistical theory of mobile-radio reception*. Bell Syst. Tech. J., vol. 47, no. 6, pages 957–1000, 1968. (Cité en pages 2, 5, 60 et 61.)
- [Clarke 1997] R. H. Clarke et Wee Lin Khoo. *3-D mobile radio channel statistics*. IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 46, pages 798–799, 1997. (Cité en page 57.)
- [Conte 1980] S.D. Conte et C.W.D. Boor. *Elementary numerical analysis : an algorithmic approach*. McGraw-Hill Higher Education, 1980. (Cité en page 116.)
- [Coulson 1998] A. J. Coulson, A. G. Williamson et R. G. Vaughan. *A statistical basis for lognormal shadowing effects in multipath fading channels*. IEEE Trans. Commun., vol. 46, no. 4, pages 494–502, 1998. (Cité en page 48.)
- [Cvetkovic 1999] Z. Cvetkovic. *Modulating waveforms for OFDM*. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999. Proceedings., 1999 IEEE International Conference on*, volume 5, pages 2463–2466 vol.5, 1999. (Cité en page 97.)
- [Damosso 1999] E. Damosso et LM Correia. *Digital mobile radio towards future generation systems, COST 231 final report*. Office for Official Publications of the European Communities, Luxembourg, Luxembourg, 1999. (Cité en page 48.)
- [Das 2004] S. Das et P. Schniter. *A new pulse shaped frequency division multiplexing technique for doubly dispersive channels*. In *Proc. Conf Signals, Systems and Computers Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conf*, volume 1, pages 657–661, 2004. (Cité en page 5.)
- [Das 2007] S. Das et P. Schniter. *Max-SINR ISI/ICI-shaping multicarrier communication over the doubly dispersive channel*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 55, no. 12, pages 5782–5795, 2007. (Cité en pages 5 et 94.)
- [Doroslovački 1998] Miloš I. Doroslovački. *Product of second moments in time and frequency for discrete-time signals and the uncertainty limit*. Signal Process., vol. 67, pages 59–76, May 1998. (Cité en pages 25 et 112.)
- [Dunford 1988] N. Dunford et J.T. Schwartz. *Linear operators : Spectral theory*. Wiley-Interscience, 1988. (Cité en page 50.)
- [Elnoubi 1992] S. M. Elnoubi. *A simplified stochastic model for the aeronautical mobile radio channel*. In *Proc. IEEE 42nd Vehicular Technology Conf.*, pages 960–963, 1992. (Cité en page 57.)
- [Failli 1988] M. Failli. *COST 207 digital land mobile radio communications*. Commission of the European Communities, page 137, 1988. (Cité en pages 63, 116, 129 et 136.)
- [Falconer 2002] D. Falconer, S.L. Ariyavisitakul, A. Benyamin-Seeyar et B. Eidson. *Frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems*. Communications Magazine, IEEE, vol. 40, no. 4, pages 58–66, apr 2002. (Cité en page 122.)
- [Farhang-Boroujeny 2005] B. Farhang-Boroujeny et Lekun Lin. *Cosine modulated multitone for very high-speed digital subscriber lines*. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing*,

2005. Proceedings. (ICASSP '05). IEEE International Conference on, volume 3, pages iii/345 – iii/348 Vol. 3, march 2005. (Cité en page 93.)
- [Farhang-Boroujeny 2010] Behrouz Farhang-Boroujeny et Chung Him Yuen. *Cosine modulated and offset QAM filter bank multicarrier techniques : a continuous-time prospect*. EURASIP J. Adv. Signal Process, vol. 2010, pages 6 :1–6 :11, Janvier 2010. (Cité en page 93.)
- [Feichtinger 1998] H.G. Feichtinger et T. Strohmer. Gabor analysis and algorithms : Theory and applications. Birkhauser, 1998. (Cité en pages 3, 14 et 75.)
- [Fenton 1960] L. Fenton. *The sum of log-normal probability distributions in scatter transmission systems*. IRE Transactions on Communications Systems, vol. 8, no. 1, pages 57–67, 1960. (Cité en page 48.)
- [Filho 2008] Danilo Zanatta Filho, Luc F ty et Michel Terr . *A hybrid single-carrier/multicarrier transmission scheme with power allocation*. EURASIP J. Wirel. Commun. Netw., vol. 2008, pages 4 :1–4 :8, Janvier 2008. (Cité en page 122.)
- [Flandrin 1993] P. Flandrin. Temps-fréquence. Hermes, 1993. (Cité en page 16.)
- [Glavieux 1996] A. Glavieux et M. Joindot. Introduction aux Communications numériques. Paris, 1996. (Cité en pages 27 et 31.)
- [Golub 1996] G.H. Golub et C.F. Van Loan. Matrix computations, volume 3. Johns Hopkins University Press, 1996. (Cité en page 13.)
- [Gray 2009] R.M. Gray. Probability, random processes, and ergodic properties. Springer Verlag, 2009. (Cité en page 16.)
- [Haas 2002] E. Haas. *Aeronautical channel modeling*. IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 51, no. 2, pages 254–264, 2002. (Cité en page 57.)
- [Han 2005] Seung Hee Han et Jae Hong Lee. *An overview of peak-to-average power ratio reduction techniques for multicarrier transmission*, 2005. Wireless Communications, IEEE. (Cité en page 121.)
- [Hansen 1977] F. Hansen et F. I. Meno. *Mobile fading—Rayleigh and lognormal superimposed*. IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 26, no. 4, pages 332–335, 1977. (Cité en page 48.)
- [Hao 2010] Miin-Jong Hao et Chiu-Hsiung Lai. *Precoding for PAPR Reduction of OFDM Signals With Minimum Error Probability*. IEEE Trans. Broadcast., vol. 56, no. 1, pages 120–128, 2010. (Cité en page 121.)
- [Hata 1980] M. Hata. *Empirical formula for propagation loss in land mobile radio services*. IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 29, no. 3, pages 317–325, 1980. (Cité en pages 2 et 47.)
- [Holte 2009] N. Holte. *MMSE equalization of OFDM/OQAM systems for channels with time and frequency dispersion*. In Wireless Communications Signal Processing, 2009. WCSP 2009. International Conference on, pages 1 –5, nov. 2009. (Cité en page 93.)
- [Iskander 2008] C.D. Iskander. *A MATLAB-based object-oriented approach to multipath fading channel simulation*. Rapport technique, Hi-Tek Multisystems, 2008. (Cité en page 71.)
- [Jayalath 2000] A. D. S. Jayalath et C. Tellambura. *Reducing the peak-to-average power ratio of orthogonal frequency division multiplexing signal through bit or symbol interleaving*. Electronics Letters, vol. 36, no. 13, pages 1161–1163, 2000. (Cité en page 121.)

- [Jiang 2008] Tao Jiang, M. Guizani, Hsiao-Hwa Chen, Weidong Xiang et Yiyan Wu. *Derivation of PAPR Distribution for OFDM Wireless Systems Based on Extreme Value Theory*. IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 7, no. 4, pages 1298–1305, avril 2008. (Cité en page 121.)
- [Jung 2007a] P. Jung et G. Wunder. *WSSUS pulse design problem in multicarrier transmission*. IEEE Trans. Commun., vol. 55, no. 9, page 1822, 2007. (Cité en pages 3, 5, 88, 90, 92, 99 et 152.)
- [Jung 2007b] Peter Jung. *Approximate eigenstructure of LTV channels with compactly supported spreading*. CoRR, vol. abs/cs/0701038, 2007. (Cité en pages 3, 5 et 57.)
- [Jung 2008] P. Jung. *Pulse shaping, localization and the approximate eigenstructure of LTV channels (Special Paper)*. In Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conf. WCNC 2008, pages 1114–1119, 2008. (Cité en page 3.)
- [Kohn 1965] JJ Kohn et L. Nirenberg. *An algebra of pseudo-differential operators*. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 18, no. 1-2, pages 269–305, 1965. (Cité en page 52.)
- [Kovacs 2002] I. Z. Kovacs, P. C. F. Eggers, K. Olesen et L. G. Petersen. *Investigations of outdoor-to-indoor mobile-to-mobile radio communication channels*. In Proc. VTC 2002-Fall Vehicular Technology Conf. 2002 IEEE 56th, volume 1, pages 430–434, 2002. (Cité en page 61.)
- [Kozek 1992] W. Kozek. *On the generalized Weyl correspondence and its application to time-frequency analysis of linear time-varying systems*. In Proc. IEEE-SP Int Time-Frequency and Time-Scale Analysis Symp, pages 167–170, 1992. (Cité en page 57.)
- [Kozek 1996] W. Kozek. *Matched Weyl-Heisenberg expansions of nonstationary environments*. PhD thesis, Universitat Wien Fakultat fur Elektrotechnik, 1996. (Cité en pages 52 et 90.)
- [Kozek 1997a] W. Kozek. *On the transfer function calculus for underspread LTV channels*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 45, no. 1, pages 219–223, 1997. (Cité en pages 2 et 57.)
- [Kozek 1997b] W. Kozek et A. F. Molisch. *On the eigenstructure of underspread WSSUS channels*. In Proc. First IEEE Signal Processing Workshop Signal Processing Advances in Wireless Communications, pages 325–328, 1997. (Cité en pages 2, 5, 51, 55 et 56.)
- [Kozek 1998] W. Kozek et A. F. Molisch. *Nonorthogonal pulse shapes for multicarrier communications in doubly dispersive channels*. IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 16, no. 8, pages 1579–1589, 1998. (Cité en pages 5, 75, 81, 88, 92, 99 et 152.)
- [Krongold 2000] B.S. Krongold, K. Ramchandran et D.L. Jones. *Computationally efficient optimal power allocation algorithms for multicarrier communication systems*. IEEE Trans. Commun., vol. 48, no. 1, pages 23–27, jan 2000. (Cité en page 74.)
- [Le Floch 1995] B. Le Floch, M. Alard et C. Berrou. *Coded orthogonal frequency division multiplex [TV broadcasting]*. Proc. IEEE, vol. 83, no. 6, pages 982–996, 1995. (Cité en pages 74 et 90.)
- [Lee 1989] W.Y.C. Lee. *Mobile cellular communications*. New York : McGraw-Hill, 1989. (Cité en page 2.)

- [Lee 2010] Sang-Jin Lee, Wooseok Kang et Jongsoo Seo. *Performance enhancement of OFDM-SQ<sup>2</sup>AM in distorted channel environments*. IEICE Electronics Express, vol. 7, no. 14, pages 1020–1026, 2010. (Cité en page 93.)
- [Lélé 2010] Chrislin Lélé, Pierre Siohan et Rodolphe Legouable. *The alamouti scheme with CDMA-OFDM/OQAM*. EURASIP J. Adv. Signal Process, vol. 2010, pages 2 :1–2 :11, Janvier 2010. (Cité en page 93.)
- [Liu 2004] K. Liu, T. Kadous et A.M. Sayeed. *Orthogonal time-frequency signaling over doubly dispersive channels*. Information Theory, IEEE Transactions on, vol. 50, no. 11, pages 2583–2603, 2004. (Cité en page 91.)
- [Louveaux 2003] J. Louveaux, L. Vandendorpe et T. Sartenær. *Cyclic prefixed single carrier and multicarrier transmission : bit rate comparison*. IEEE Commun. Lett., vol. 7, no. 4, pages 180 –182, avril 2003. (Cité en page 122.)
- [Martin-Martin 2008] P. Martin-Martin, R. Bregovic, A. Martin-Marcos, F. Cruz-Roldan et T. Saramaki. *A generalized window approach for designing transmultiplexers*. IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 55, no. 9, pages 2696 –2706, oct. 2008. (Cité en page 93.)
- [Matz 1998] G. Matz et F. Hlawatsch. *Extending the transfer function calculus of time-varying linear systems : a generalized underspread theory*. In Proc. IEEE Int Acoustics, Speech and Signal Processing Conf, volume 4, pages 2189–2192, 1998. (Cité en page 2.)
- [Molisch 2009] A. Molisch, F. Tufvesson, J. Karedal et C. Mecklenbrauker. *A survey on vehicle-to-vehicle propagation channels*. IEEE Wireless Commun. Mag., vol. 16, no. 6, pages 12–22, 2009. (Cité en page 2.)
- [Moret 2010] Nicola Moret et Andrea M. Tonello. *Design of orthogonal filtered multitone modulation systems and comparison among efficient realizations*. EURASIP J. Adv. Signal Process, vol. 2010, pages 10 :1–10 :11, January 2010. (Cité en pages 4, 99 et 102.)
- [Okumura 1984] Y. Okumura, E. Ohmori, T. Kawano et K. Fukuda. *Field strength and its variability in VHF and UHF land-mobile radio service*. Land-mobile communications engineering, page 19, 1984. (Cité en pages 2 et 47.)
- [Pahlavan 1990] K. Pahlavan et J. W. Matthews. *Performance of adaptive matched filter receivers over fading multipath channels*. IEEE Trans. Commun., vol. 38, no. 12, pages 2106–2113, 1990. (Cité en page 90.)
- [Pahlavan 1995] K. Pahlavan et A.H. Levesque. *Wireless information networks*. Wiley Online Library, 1995. (Cité en page 2.)
- [Patel 2005] C. S. Patel, G. L. Stuber et T. G. Pratt. *Simulation of Rayleigh-faded mobile-to-mobile communication channels*. IEEE Trans. Commun., vol. 53, no. 11, pages 1876–1884, 2005. (Cité en page 61.)
- [Patel 2006] C.S. Patel, G.L. Stuber et T.G. Pratt. *Statistical properties of amplify and forward relay fading channels*. Vehicular Technology, IEEE Transactions on, vol. 55, no. 1, pages 1 – 9, jan. 2006. (Cité en page 63.)
- [Pätzold 2001] M. Pätzold. *Mobile fading channels : Modelling, analysis and simulation*. John Wiley & Sons, Inc., 2001. (Cité en page 2.)

- [Pinchon 2004a] D. Pinchon, C. Siclet et P. Siohan. *Design of perfect reconstruction modulated filter banks with arbitrarily high number of subbands*. In EUSIPCO. Conference, 2004. (Cité en pages 97 et 108.)
- [Pinchon 2004b] D. Pinchon, P. Siohan et C. Siclet. *Design techniques for orthogonal modulated filterbanks based on a compact representation*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 52, no. 6, pages 1682–1692, 2004. (Cité en pages 97 et 108.)
- [Pinchon 2011] D. Pinchon et P. Siohan. *Closed-form expressions of optimal short PR FMT prototype filters*. In Proc. IEEE Global Telecommunications Conf. GLOBECOM '11, 2011. (Cité en pages 4, 5, 108, 124 et 152.)
- [Proakis 2006] J.G. Proakis et M. Salehi. Digital communications. McGraw-Hill, 5 édition, 2006. (Cité en pages 4 et 90.)
- [Roque 2010] D. Roque. *Modélisation du canal de transmission pour les communications numériques*. Rapport technique, GIPSA-lab, septembre 2010. (Cité en pages 5 et 58.)
- [Roque 2011] D. Roque et C. Siclet. *Analyse des performances des modulations multiporteuses filtrées sur les canaux doublements dispersifs*. Rapport technique, GIPSA-lab, 2011. (Cité en page 5.)
- [Roque 2012a] D. Roque et C. Siclet. *Performances of weighted cyclic prefix OFDM with low-complexity equalization*. IEEE Commun. Lett., vol. n/a, page n/a, 2012. (Cité en pages 5, 124, 142 et 150.)
- [Roque 2012b] D. Roque, C. Siclet et J.M. Brossier. *A low-complexity FBMC scheme analysis with LDPC coding in mobile-to-mobile Environment*. In Proc. IEEE Military Conference on Communications, MILCOM '12, 2012. (Cité en pages 5, 71 et 150.)
- [Roque 2012c] D. Roque, C. Siclet, J.M. Brossier et P. Siohan. *Weighted cyclic prefix OFDM : PAPR analysis and performances comparison with DFT-precoding*. In Proc. IEEE 46th Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, ASILOMARSSC '12, 2012. (Cité en pages 5, 122 et 124.)
- [Roque 2012d] D. Roque, C. Siclet et P. Siohan. *A performance comparison of FBMC modulation schemes with short perfect reconstruction filters*. In Proc. IEEE International Conference on Telecommunications, ICT '12, 2012. (Cité en pages 5, 117, 129 et 150.)
- [Rudin 2006] W. Rudin. Functional Analysis. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill Education (India) Pvt Ltd, 2006. (Cité en page 8.)
- [Scaglione 1999a] A. Scaglione, G. B. Giannakis et S. Barbarossa. *Redundant filterbank precoders and equalizers. I. Unification and optimal designs*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 47, no. 7, pages 1988–2006, 1999. (Cité en page 84.)
- [Scaglione 1999b] A. Scaglione, G. B. Giannakis et S. Barbarossa. *Redundant filterbank precoders and equalizers. II. Blind channel estimation, synchronization, and direct equalization*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 47, no. 7, pages 2007–2022, 1999. (Cité en page 84.)
- [Schniter 2004a] P. Schniter. *Low-complexity equalization of OFDM in doubly selective channels*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 52, no. 4, pages 1002–1011, 2004. (Cité en page 5.)

- [Schniter 2004b] P. Schniter. *On the design of non-(bi)orthogonal pulse-shaped FDM for doubly-dispersive channels*. In Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '04), volume 3, 2004. (Cité en pages 3 et 94.)
- [Shannon 1949] C. E. Shannon. *Communication in the presence of noise*. Proceedings of the IRE, vol. 37, no. 1, pages 10–21, 1949. (Cité en page 69.)
- [Siclet 2002a] C. Siclet. *Application de la théorie des bancs de filtres   l'analyse et   la conception de modulations multiporteuses orthogonales et biorthogonales*. PhD thesis, Université de Rennes 1, november 2002. (Cité en pages 3, 5, 24 et 93.)
- [Siclet 2002b] Cyrille Siclet, Pierre Siohan et Didier Pinchon. *Analysis and design of OFDM/QAM and BFDM/QAM oversampled orthogonal and biorthogonal multicarrier modulations*. In IEEE ICASSP'02, Orlando, USA, Mai 2002. Student forum. (Cité en pages 93, 99 et 102.)
- [Siclet 2006] C. Siclet, P. Siohan et D. Pinchon. *Perfect reconstruction conditions and design of oversampled DFT-modulated transmultiplexers*. EURASIP journal on applied signal processing, vol. 2006, pages 1–14, 2006. (Cité en pages 3, 97 et 108.)
- [Siohan 2002] P. Siohan, C. Siclet et N. Lacaille. *Analysis and design of OFDM/OQAM systems based on filterbank theory*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 50, no. 5, pages 1170–1183, 2002. (Cité en page 93.)
- [Sklar 1997a] B. Sklar. *Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems. I. Characterization*. IEEE Commun. Mag., vol. 35, no. 9, pages 136–146, 1997. (Cité en pages 2, 48, 58 et 59.)
- [Sklar 1997b] B. Sklar. *Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems .II. Mitigation*. IEEE Commun. Mag., vol. 35, no. 7, pages 102–109, 1997. (Cité en pages 2 et 59.)
- [Skrzypczak 2006] A. Skrzypczak, P. Siohan et J.-P. Javaudin. *Analysis of the Peak-To-Average Power Ratio of the Oversampled OFDM*. In Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006. ICASSP 2006 Proceedings. 2006 IEEE International Conference on, volume 4, page IV, may 2006. (Cité en pages 121 et 124.)
- [Slimane 2007] S. B. Slimane. *Reducing the Peak-to-Average Power Ratio of OFDM Signals Through Precoding*. IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 56, no. 2, pages 686–695, 2007. (Cité en page 121.)
- [Solaiman 2006] B. Solaiman. Processus stochastiques pour l'ingénieur. PPUR, 2006. (Cité en page 16.)
- [Strohmer 2001] T. Strohmer. *Approximation of Dual Gabor Frames, Window Decay, and Wireless Communications\* 1,\* 2*. Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 11, no. 2, pages 243–262, 2001. (Cité en pages 75 et 93.)
- [Strohmer 2003] T. Strohmer et S. Beaver. *Optimal OFDM design for time-frequency dispersive channels*. IEEE Trans. Commun., vol. 51, no. 7, pages 1111–1122, 2003. (Cité en pages 3, 5, 75, 90, 92, 99 et 152.)
- [Talha 2008] B. Talha et M. Patzold. *A novel amplify-and-forward relay channel model for mobile-to-mobile fading channels under line-of-sight conditions*. In Proc. IEEE 19th

- Int. Symp. Personal, Indoor and Mobile Radio Communications PIMRC 2008, pages 1–6, 2008. (Cité en page 138.)
- [Talha 2009] B. Talha et M. Patzold. *Level-crossing rate and average duration of fades of the envelope of mobile-to-mobile fading channels in K-parallel dual-hop relay networks*. In Proc. Int. Conf. Wireless Communications & Signal Processing WCSP 2009, pages 1–5, 2009. (Cité en page 139.)
- [Talha 2010] B. Talha et M. Patzold. *Mobile-to-mobile fading channels in amplify-and-forward relay systems under line-of-sight conditions : statistical modeling and analysis*. Annals of Telecommunications, vol. 65, pages 391–410, April 2010. (Cité en page 138.)
- [Talha 2011] B. Talha et M. Patzold. *Channel Models for Mobile-to-Mobile Cooperative Communication Systems : A State of the Art Review*. IEEE Veh. Technol. Mag., vol. 6, no. 2, pages 33–43, 2011. (Cité en page 139.)
- [Tonello 2008] A. M. Tonello et F. Pecile. *Analytical results about the robustness of FMT modulation with several prototype pulses in time-frequency selective fading channels*. IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 7, no. 5, pages 1634–1645, 2008. (Cité en page 5.)
- [Vahlin 1996] A. Vahlin et N. Holte. *Optimal finite duration pulses for OFDM*. IEEE Trans. Commun., vol. 44, no. 1, pages 10–14, 1996. (Cité en pages 3 et 93.)
- [Vaidyanathan 1993] P.P. Vaidyanathan. Multirate systems and filter banks. Prentice Hall signal processing series. Pearson Education, 1993. (Cité en page 99.)
- [Vigneron 2008] P. J. Vigneron et J. A. Pugh. *Propagation models for mobile terrestrial VHF communications*. In Proc. IEEE Military Communications Conf. MILCOM 2008, pages 1–7, 2008. (Cité en page 57.)
- [Viholainen 2009] A. Viholainen, T. Ihalainen, T.H. Stitz, M. Renfors et M. Bellanger. *Prototype filter design for filter bank based multicarrier transmission*. In Proceedings of European Signal Processing Conference (EUSIPCO), 2009. (Cité en page 93.)
- [Wang 2000] Zhendao Wang et G. B. Giannakis. *Wireless multicarrier communications*. IEEE Signal Process. Mag., vol. 17, no. 3, pages 29–48, 2000. (Cité en pages 4 et 83.)
- [Wang 2004] Zhengdao Wang, Xiaoli Ma et G. B. Giannakis. *OFDM or single-carrier block transmissions ?* IEEE Trans. Commun., vol. 52, no. 3, pages 380–394, 2004. (Cité en page 122.)
- [Wang 2006] Tiejun Wang, J.G. Proakis et J.R. Zeidler. *Analysis of per-channel equalized filtered multitone modulations over time-varying fading channels*. In Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2006 IEEE 17th International Symposium on, pages 1 –5, sept. 2006. (Cité en page 4.)
- [Weiss 2000] S. Weiss et R.W. Stewart. *Fast implementation of oversampled modulated filter banks*. Electronics Letters, vol. 36, no. 17, pages 1502 –1503, aug 2000. (Cité en page 99.)
- [Weyl 1950] H. Weyl. The theory of groups and quantum mechanics. Courier Dover Publications, 1950. (Cité en page 52.)
- [Whittaker 1915] E.T. Whittaker. *On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, vol. 35, pages 181–194, 1915. (Cité en page 69.)

- 
- [Wyglinski 2005] A.M. Wyglinski, F. Labeau et P. Kabal. *Bit loading with BER-constraint for multicarrier systems*. IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 4, no. 4, pages 1383 – 1387, july 2005. (Cité en page 74.)
- [Xu 2008] Jiadong Xu et T. Strohmer. *Pulse construction in OFDM systems via convex optimization*. IEEE Trans. Commun., vol. 56, no. 8, pages 1225–1230, 2008. (Cité en page 88.)
- [Yang 2010] Kun Yang, T. Røste, F. Bekkadal et T. Ekman. *Channel characterization of mobile radio channel over sea at 2 GHz*. In Proc. Mediterranean Microwave Symp. (MMS), pages 389–392, 2010. (Cité en page 57.)
- [Yoo 2008] Do-Sik Yoo. *Equivalent complex baseband representations of linear time-variant systems and signals*. IEEE Trans. Signal Process., vol. 56, no. 8, pages 3775–3778, 2008. (Cité en page 49.)
- [Zadeh 1950] L. A. Zadeh. *Frequency analysis of variable networks*. Proceedings of the IRE, vol. 38, no. 3, pages 291–299, 1950. (Cité en page 52.)



---

**Résumé** — De nombreuses applications de communications numériques font face à des canaux de transmission sélectifs en temps et en fréquence que nous pouvons assimiler à des systèmes linéaires variants dans le temps. À travers ces travaux de thèse, nous montrons que les modulations multiporteuses suréchantillonnées constituent une technique de transmission adaptée à ce type d'environnement. Cependant, la complexité algorithmique des émetteurs-récepteurs présente un frein majeur à leur adoption. Fort de ce constat, nous nous intéressons à la sous-famille des modulations multiporteuses suréchantillonnées à filtres courts (WCP-OFDM), dont la complexité algorithmique est comparable à celle de l'OFDM avec préfixe cyclique. Après avoir exprimé les conditions de reconstruction parfaite, nous développons des égaliseurs de faible complexité et étudions la problématique du rapport de puissance crête sur puissance moyenne du signal en sortie d'émetteur. Enfin, nous analysons les performances de ces modulations à travers plusieurs scénarios de propagation radiomobile. Les résultats de simulation confirment l'intérêt du WCP-OFDM, associé à des filtres prototypes bien localisés en temps et en fréquence pour faire face aux canaux doublement sélectifs.

**Mots clés :** canaux radiomobiles, modulations multiporteuses suréchantillonnées, filtres courts, reconstruction parfaite, interférence entre blocs, interférence entre sous-porteuses, égalisation linéaire, mesure de performances.

---

---

**Abstract** — Many digital communication applications are facing time and frequency selective channels that can be modelled by linear time-variant systems. Through this thesis work, we show that oversampled multicarrier modulations provide a suitable transmission technique for such an environment. However, the complexity of the transmitter-receiver remains a major obstacle for their adoption. Based on this observation, we focus on the sub-family of oversampled multicarrier modulation with short filters (WCP-OFDM), whose complexity is similar to cyclic prefix OFDM. After introducing the perfect reconstruction conditions, we develop low-complexity equalizers and we study the peak-to-average power ratio issue at the output of the transmitter. Finally, we evaluate the performances of these modulations over several mobile radio propagation scenarios. Simulation results confirm the benefits of WCP-OFDM, with time-frequency localized prototypes filters, over doubly selective channels.

**Keywords :** mobile radio channels, oversampled multicarrier modulations, short filters, perfect reconstruction, inter-block interference, inter-carrier interference, linear equalization, performances evaluation.

---