



HAL
open science

Recherche et utilisation de solutions analytiques pour des problèmes inverses couplés thermo-élastiques

Daniel Weisz-Patrault

► **To cite this version:**

Daniel Weisz-Patrault. Recherche et utilisation de solutions analytiques pour des problèmes inverses couplés thermo-élastiques. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT: . tel-00796446v1

HAL Id: tel-00796446

<https://theses.hal.science/tel-00796446v1>

Submitted on 4 Mar 2013 (v1), last revised 9 Apr 2013 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-EST
ECOLE DOCTORALE SCIENCE INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences de l'Université Paris-Est
par

Daniel Weisz-Patrault

RECHERCHE ET UTILISATION DE SOLUTIONS ANALYTIQUES POUR DES PROBLÈMES INVERSES COUPLÉS THERMO-ÉLASTIQUES

FINDING AND USING ANALYTICAL SOLUTIONS FOR INVERSE COUPLED
THERMO-ELASTIC PROBLEMS

Thèse soutenue publiquement le 5 décembre 2012 devant le jury composé de :

M.	MARC BONNET	<i>Rapporteur</i>
Mme.	HÉLÈNE DUMONTET	<i>Rapporteur</i>
M.	NICOLAS LEGRAND	<i>Examineur</i>
M.	DOMINIQUE FRANÇOIS	<i>Président</i>
M.	ALAIN EHRLACHER	<i>Directeur de thèse</i>

Thèse réalisée au Laboratoire Navier (UMR 8205), CNRS, Ecole des Ponts ParisTech

**RECHERCHE ET UTILISATION DE SOLUTIONS
ANALYTIQUES POUR DES PROBLÈMES
INVERSES COUPLÉS THERMO-ÉLASTIQUES**

A la mémoire de mon grand-père
Michel Weisz

D. WEISZ-PATRAULT

**RECHERCHE ET UTILISATION DE SOLUTIONS
ANALYTIQUES POUR DES PROBLÈMES INVERSES
COUPLÉS THERMO-ÉLASTIQUES**

DE LA THÉORIE DES POTENTIELS POUR UNE MÉTROLOGIE MODERNE EN
CONTEXTE INDUSTRIEL



REMERCIEMENTS

Alain Ehrlacher aura d'abord été mon professeur, puis le directeur de mes travaux. Mais il est surtout devenu un véritable interlocuteur, avec qui je partage cet intérêt tout particulier pour les solutions analytiques, et je crois aussi pour une certaine conception des sciences. Je me rappelle que notre premier échange à propos des fonctions holomorphes a rapidement dévié sur le principe de réfutabilité en science. C'est un réel plaisir que de lui exprimer ma gratitude pour son enseignement si riche, ses conseils, son soutien et la confiance qu'il m'a accordée.

Je remercie et je salue Nicolas Legrand d'ArcelorMittal, qui est aussi l'une des rencontres scientifiques les plus enrichissantes que j'ai faites. Il a été d'une remarquable clairvoyance, quant à l'utilisation des outils analytiques, dans les problématiques liées à l'industrie du laminage. Je le remercie de s'être intéressé à mes travaux en m'associant au projet européen qu'il coordonne, et en alimentant constamment mes recherches par des problèmes industriels nouveaux.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Marc Bonnet et Hélène Dumontet d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Leurs appréciations m'ont fait très plaisir, et leurs critiques avisées ont enrichi ma compréhension du sujet.

Enfin, ce fut un très grand plaisir que Dominique François ait présidé le jury de ma soutenance de thèse, tant du point de vue intellectuel (je le remercie particulièrement pour nos conversations sur la mécanique de la rupture) que du point de vue personnel, il fut l'ami et voisin d'un ingénieur métallurgiste du CEA se trouvant être mon grand-père.

PRÉFACE

Les concepts abstraits développés en physique sont de nature mathématique. Cette idée majeure de Gaston Bachelard est éclairante pour le travail de recherche en mécanique des solides. En effet, si le modélisateur considérant la matière et ses comportements mécanique et thermique peut avoir tendance à exprimer sa pensée de manière substantialiste, le fait n'en reste pas moins que comprendre des problèmes de mécanique passe par la résolution d'équations aux dérivées partielles. Les mathématiques analytiques permettant de résoudre ces équations sont donc les éléments principaux pour appréhender ces problèmes.

Cependant au cours des dernières décennies, l'essor important des capacités de calcul, a permis de résoudre numériquement des problèmes de plus en plus complexes tant du point de vue géométrique que du point de vue des lois de comportements approchant de plus en plus finement les matériaux connus. Cette capacité à modéliser par des méthodes numériques des systèmes mécaniques de plus en plus complexes avec une grande précision a inévitablement contribué à diminuer l'intérêt, que l'on porte aux solutions analytiques. Jugées trop limitées quant au nombre de problèmes qu'il est possible de résoudre et devenues des cas d'école, leur exactitude mathématique ne compense pas les simplifications qu'il est nécessaire de faire pour obtenir un résultat analytique. Par ailleurs, la théorie des potentiels, qui est utilisée comme outil de résolution analytique pour les problèmes de thermoélasticité linéaire, ne nécessite plus guère de développements mathématiques. Ainsi que l'on se place du point de vue de la résolution pratique des problèmes de mécanique ou du point de vue du mathématicien, la recherche de solutions analytiques peut paraître en déclin.

Or, un très large champ d'application est concerné aujourd'hui par des développements analytiques qui permettront une approche précise et efficace. En effet, les solutions analytiques permettent des temps de calculs très faibles et sont donc indiquées pour des calculs en temps réel. Le développement de capteurs (avec un système d'asservissement) dans l'industrie est un exemple représentatif d'une demande en calculs rapides. De même, de nombreuses méthodes inverses sont développées dans diverses industries pour interpréter différents types de mesures. Mais il faut remarquer que jusqu'à présent, peu de développements analytiques ont été menés à bien dans le secteur des méthodes inverses pour l'industrie. D'une part car les méthodes de résolutions disparaissent de la culture des ingénieurs, d'autre part car l'idée subsiste que tous les problèmes solubles analytiquement ont déjà été publiés. De cette faible utilisation des méthodes analytiques au profit des algorithmes numériques, résulte une grande difficulté à produire des méthodes inverses efficaces, notamment en termes de temps de calcul et de stabilité de l'inversion (exemple de la conception de capteurs pour l'industrie).

Nous le savons, les problèmes inverses sont, en effet, mal posés au sens de Hadamard, et des sujets très classiques de conditionnement de matrices interviennent fréquemment. Les méthodes itératives (utilisant l'algorithme du gradient conjugué par exemple) sont stabilisées par régularisation et sont en outre souvent coûteuses en temps de calcul. Les solutions analytiques dédiées aux problèmes inverses permettent quant à elles une bonne robustesse au fait que le problème est mal posé et assure un calcul très rapide.

Les travaux de thèse exposés dans ce mémoire ont été réalisés dans le cadre d'un projet européen supervisé par ArcelorMittal qui vise à montrer la faisabilité d'un certain nombre de capteurs inverses pour le laminage industriel (contraintes de contact, flux de chaleur entrant, épaisseur d'huile etc...). Ainsi, un certain nombre de problèmes inverses de thermo-élasticité ont été résolus analytiquement. Il est démontré pour chacun d'entre eux une excellente précision et des temps de calculs compatibles pour une interprétation en temps réel. Des études expérimentales ont également été menées sur le laminoir pilote du centre de recherche d'ArcelorMittal situé à Maizières-les-Metz.

Ce mémoire de thèse a pour point de départ une série d'articles, que nous avons publiés entre 2011 et 2012. La structure en articles distincts a été respectée, ainsi chaque chapitre peut être lu indépendamment des autres. Les notations ont été harmonisées autant que possible, cependant il a été jugé préférable de les expliciter à chaque

chapitre. Les enjeux industriels et théoriques sont rappelés. L'auteur espère que cela rendra la lecture aisée et utile. En revanche, des paragraphes introductifs ont été ajoutés pour expliciter la cohérence dans l'enchaînement des différents chapitres et donner au texte son unité. Par ailleurs de nombreux ajouts scientifiques ont été faits. En effet, certaines approximations apparaissent dans les articles originaux et se sont avérées inutiles à la lumière de lectures plus avancées sur la résolution analytique de certaines équations.

L'auteur espère que ces travaux de thèse convaincront le lecteur, non seulement que la recherche de solutions analytiques offre la possibilité d'établir de nouveaux résultats, mais encore que ces résultats ne sont pas restreints à leur élégance mathématique mais que ces derniers sont exploitables dans un contexte industriel où l'efficacité et la robustesse sont privilégiées.

Daniel Weisz-Patrault

Paris
26 Octobre 2012

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	i
PRÉFACE	iii
CHAPITRE I. INTRODUCTION.	1
1.1 Enjeux	1
1.2 Le procédé de laminage	2
1.3 Modélisation prédictive	3
1.3.1 Contact mécanique	3
1.3.2 Transfert thermique	4
1.4 Capteurs et méthodes inverses	4
1.5 Méthodes inverses appliquées à la métrologie en laminage	6
1.6 Problèmes mal posés	7
1.7 Plan	8
CHAPITRE II. PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES	9
2.1 Avertissement	9
2.2 Mesures et développement en séries	9
2.2.1 Mesures	9
2.2.2 Analyse de Fourier	9
2.2.3 Séries hypergéométriques	11
2.2.4 Fonction Gamma	11
2.2.5 Fonctions de Bessel	11
2.2.6 Analyse de Fourier-Bessel	13
2.2.7 Polynômes orthogonaux	14
2.3 Fonctions harmoniques et bi-harmoniques	17
2.3.1 Harmoniques sphériques	17
2.3.2 Fonctions harmoniques en cylindrique	18
2.3.3 Fonctions harmoniques et bi-harmoniques en deux dimensions	19
2.4 Intégrales de frontière	20
PART A MÉTHODES INVERSES EN DEUX DIMENSIONS	23
CHAPITRE III. THERMO-ELASTICITÉ BIDIMENSIONNELLE	25
3.1 Résultat de Kolosov-Muskhelishvili	25
3.2 Equation de Navier avec second membre	26
3.3 Equation de la chaleur pour un solide tournant à vitesse constante	26
3.4 Famille de solutions	27
3.5 Conclusion	28
3.6 Compléments	29
3.6.1 Dans un domaine élastique simplement connexe	29
3.6.2 Dans un domaine élastique connexe	36
CHAPITRE IV. ÉVALUATION DES CONTRAINTES DE CONTACT	37
4.1 Introduction	37
4.1.1 Principes	37
4.1.2 Fibres optiques	38
4.1.3 Approche mathématique	38

4.2	Analyse inverse	40
4.3	Précision et temps de calcul	40
4.4	Erreur de reconstruction	42
4.5	Critère de troncature	42
4.6	Discussion sur le nombre de points d'interpolation	45
4.7	Validation et comparaison	45
4.7.1	Contraintes prescrites dans l'emprise	45
4.7.2	Mesures simulées	45
4.7.3	Résultats sans bruit de mesure	47
4.8	Bruit de mesure	51
4.9	Conclusion	52
CHAPITRE V. ÉVALUATION DE LA TEMPÉRATURE ET DES FLUX		55
5.1	Introduction	55
5.1.1	Problème thermique	55
5.1.2	Modèles prédictifs	55
5.1.3	Objectifs du chapitre	56
5.1.4	Méthodes inverses et interprétation de mesures	56
5.1.5	Choix de la méthode	57
5.1.6	Validation de la méthode	57
5.1.7	Référentiel eulérien	58
5.2	Intervalles de temps	58
5.3	Problème	59
5.4	Famille de solutions	60
5.5	Solution analytique pour chaque tour	61
5.6	Condition au rayon de mesure	62
5.6.1	Restrictions du système de mesure	62
5.6.2	Hypothèse	62
5.7	Effet de bord et épaisseur de peau	63
5.8	Condition initiale	64
5.9	Commentaire	65
5.10	Validation de la solution	66
5.10.1	Champ de température direct et analytique	66
5.10.2	Reconstruction sans bruit	67
5.10.3	Robustesse au bruit de mesure	69
5.10.4	Calibrage	71
5.11	Comparaison avec un méthode numérique	72
5.12	Temps de calcul	73
5.13	Conclusion	74
CHAPITRE VI. ÉTUDE THERMIQUE EXPÉRIMENTALE		75
6.1	Introduction	75
6.2	Insertion des thermocouples	76
6.3	Système d'acquisition	78
6.4	Calibrage	79
6.4.1	Matériau équivalent	79
6.4.2	Procédure de calibrage	80
6.5	Commentaire sur le temps de réponse	81
6.6	Essais sur laminoir pilote	81
6.7	Comparaison entre le capteur slot et drill	82
6.8	Influence du taux de réduction	83
6.9	Influence de l'épaisseur de calamine	84
6.10	Modèle de coefficient de transfert thermique dans l'emprise	85
6.11	Conclusion	86

CHAPITRE VII. PROBLÈME COUPLÉ THERMOÉLASTIQUE	87
7.1 Introduction	87
7.1.1 Objectifs du chapitre	87
7.1.2 Fibres optiques et thermocouple	89
7.2 Validation de la méthode	89
7.3 Principe de superposition	90
7.4 Problème auxiliaire C	90
7.5 Champ de température évalué par méthode inverse	91
7.6 Problème auxiliaire A	92
7.6.1 Déplacements	92
7.6.2 Contraintes	93
7.7 Problème auxiliaire B	94
7.8 Validation de la solution	95
7.8.1 Champ de température en laminage à chaud	95
7.8.2 Comparaison avec un modèle aux éléments finis	96
7.8.3 Comparaison avec un modèle approché	97
7.9 Reconstruction des contraintes de contact	97
7.10 Temps de calcul	99
7.11 Conclusion	99
PART B MÉTHODES INVERSES EN TROIS DIMENSIONS	101
CHAPITRE VIII. THERMO-ELASTICITÉ TRIDIMENSIONNELLE	103
8.1 Théorie des potentiels réels	103
8.2 Equation de la chaleur	109
CHAPITRE IX. ÉVALUATION DES CONTRAINTES DE CONTACT EN 3D.	111
9.1 Introduction	111
9.2 Choix de la méthode analytique	112
9.3 Principes de la méthode inverse	113
9.3.1 Condition	113
9.3.2 Equilibre général	114
9.3.3 Contraintes de contact	114
9.4 Expression des mesures	114
9.5 Condition	115
9.6 Modèle bi-harmonique, termes courants	115
9.6.1 Potentiels en déplacements	115
9.6.2 Champ de contrainte	116
9.7 Modèle harmonique, termes d'amorce	116
9.8 Extraction des coefficients	119
9.8.1 Extraction des termes d'amorce	119
9.8.2 Extraction des termes courants	120
9.9 Equilibre général	121
9.9.1 Modèle harmonique	121
9.9.2 Expression des résultantes	121
9.9.3 Conditions faibles	122
9.10 Contraintes de contact	124
9.11 Nombre de troncature	124
9.12 Validation de la méthode	125
9.12.1 Procédure	125
9.12.2 Conditions de laminage à froid	125
9.12.3 Reconstruction et discussion	127
9.13 Intérêt de la solution 3D	131
9.14 Conclusion	133
CHAPITRE X. ÉVALUATION DE LA TEMPÉRATURE ET DES FLUX EN 3D	135
10.1 Introduction	135

10.2 Intervalles de temps	137
10.3 Problème	137
10.4 Famille de solutions	138
10.5 Solution analytique sur chaque tour	138
10.6 Solution stationnaire réactualisée à chaque tour	139
10.7 Solution transitoire	141
10.8 Commentaire	142
10.9 Validation de la solution	143
10.9.1 Champ de température analytique prescrit	143
10.9.2 Reconstruction sans bruit	144
10.9.3 Robustesse au bruit de mesure	146
10.10 Temps de calcul	147
10.11 Conclusion	147
CHAPITRE XI. CONCLUSION GÉNÉRALE	149
11.1 Conclusion	149
11.2 Perspectives	150
PART C ANNEXES	151
ANNEXE A. SOLUTION ANALYTIQUE DIRECTE	153
ANNEXE B. PROBLÈME COUPLÉ THERMOÉLASTIQUE	155
B.1 Preuve de la solution particulière de l'équation de Navier	155
B.2 Champ de température	157
ANNEXE C. SOLUTION ANALYTIQUE DIRECTE EN 3D.	159

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Ce travail de doctorat porte sur l'utilisation des mathématiques analytiques dans le cadre de méthodes inverses appliquées à l'industrie. Ces travaux tiennent au développement de capteurs inverses en temps réel adaptés au laminage industriel. Le premier producteur d'acier dans le monde ArcelorMittal dirige un projet européen, qui vise à montrer la faisabilité de capteurs mesurant les champs (température, contraintes) dans le contact entre le produit et l'outil sans altérer les conditions de ce contact. Ce projet nommé "Capteurs de contact avancés visant à l'amélioration du laminage à chaud et à froid"¹ est financé par le Fond de recherche pour le charbon et l'acier². Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire ont été réalisés au sein du laboratoire Navier³ et financé par l'école des Ponts ParisTech. Cependant un contrat sur trois ans signé avec ArcelorMittal a permis à l'auteur d'être partie prenante de ce projet européen, et ainsi de voir ses recherches concrétisées par une demande industrielle réelle.

1.1. Enjeux

L'enjeu de cette thèse est double, académique et industriel. Académique en ce sens que les travaux cherchent à recenser et utiliser efficacement les méthodes de résolution analytiques existantes, pour des problèmes inverses en thermoélasticité, dans le cadre d'une métrologie en temps réel. En effet, les solutions analytiques sont souvent exploitées comme des cas purement théoriques, trouvant à bien des égards un certain succès dans la culture de l'ingénieur (comme c'est le cas par exemple du calcul en élasticité linéaire des facteurs d'intensité de contraintes), mais qui par bien des aspects sont reléguées à des cas d'écoles anciens servant au mieux à valider des codes de calculs numériques sur des exemples particulièrement simples. Ces solutions et méthodes de résolution analytiques ne font d'ailleurs guère plus l'objet de recherches en mathématiques pures. Cependant les problématiques propres, liées au caractère inverse des problèmes à traiter, pénalisent les méthodes de résolution numériques, en ce sens que les problèmes inverses sont mal posés, et qu'une stabilisation des algorithmes numériques est nécessaire mais souvent délicate si l'on considère les conditions extrêmes (champs très singuliers) appliquées aux outils industriels de laminage. Par ailleurs la métrologie en temps réel exclut l'utilisation de codes numériques trop coûteux en temps de calcul (méthodes itératives etc...). Ces deux aspects contribuent à renouveler assez largement l'intérêt pour les solutions analytiques. Il convient alors d'en regrouper (dans la mesure du possible) les méthodes les plus efficaces (en termes de précision et de temps de calcul notamment) et les plus adaptées pour la métrologie. Nous verrons notamment différents développements en séries élémentaires permettant non seulement de donner à une suite de points mesurés une forme analytique, mais également de simplifier les équations aux dérivées partielles à résoudre.

D'autre part l'enjeu de cette thèse est également industriel, car ces travaux s'inscrivent dans une démarche de développement de capteurs adaptés à la mise en forme de l'acier par laminage. Ainsi l'étude de la robustesse au bruit de mesure, les contraintes technologiques liées à l'insertion des capteurs, les limitations en terme de fréquence d'acquisition et les problématiques de calibrage sont au coeur des développements qui suivent. Par ailleurs l'écriture de logiciels efficaces d'interprétation de mesures dans le cas d'analyses bidimensionnelles et tridimensionnelles ont fait l'objet d'un réel investissement, dans un souci de partenariat avec l'utilisateur industriel.

Ainsi, l'ensemble des travaux présentés, peut constituer une sorte de réhabilitation des méthodes analytiques, dont la supériorité sur les méthodes numériques (en termes de temps de calcul et parfois aussi de précision) est

1. Titre original : "Advanced Roll Gap Sensors for Enhanced Hot and Cold Rolling Processes"
2. Research Fund for Coal and Steel
3. Université Paris-Est, Laboratoire Navier UMR 8205, Ecole des Ponts ParisTech, CNRS, IFFSTAR

mise en lumière, dans le contexte précis de la métrologie en temps réel sur des géométries simples. Les méthodes mathématiques que nous exposons dans ce mémoire sont appliquées sur une géométrie cylindrique à travers un certain nombre d'exemples tous liés au procédé de laminage, que nous introduisons brièvement.

1.2. Le procédé de laminage

Le laminage est l'un des procédés de fabrication majeur de l'industrie de l'acier et de l'aluminium. Le principe fondamental du procédé est de déformer plastiquement le produit entre deux cylindres tournants, qui sont nommés cylindres de travail. Nous présentons uniquement le laminage des produits plats (tôle plus ou moins épaisse allant de la dizaine de centimètres à quelques centaines de micromètres d'épaisseur). Il existe beaucoup d'autres types de laminage (de poutres par exemple), mais ceux-ci ne sont pas considérés dans cette présentation générale. Dans le cas de l'industrie de l'acier, les cylindres de travail ont une largeur variant entre un et deux mètres et un diamètre variant entre 40 et 70 centimètres. Le cylindre de travail est massif, le plus souvent constitué de fonte en coeur et d'acier en superficie. Il s'agit d'un outil cher et dont la manipulation prend du temps en raison de sa masse importante. Chaque cylindre de travail a une forme assez complexe à ses extrémités (nommée tourillon et manchons), lui permettant d'être emmanché dans un axe de rotation motorisé. Une pression importante est exercée sur les cylindres de travail pour déformer plastiquement le produit. Cette pression est le plus souvent assurée par deux autres cylindres (de rayon plus élevé) nommés cylindres d'appui. Ce montage stabilise l'ensemble et limite la flexion des cylindres de travail ainsi que les vibrations (phénomène de broutage). Cependant certains petits laminoirs ne sont pas équipés de cylindres d'appui, la pression étant directement exercée au niveau de l'axe de rotation des cylindres de travail. C'est le cas notamment du laminoir de laboratoire dit "pilote" du centre de recherche d'ArcelorMittal à Maizières-les-Metz.

Le procédé peut être effectué à chaud (produit à 1300 K environ) pour les fortes épaisseurs (tôles appelées brame de 30 cm à des épaisseurs de l'ordre du centimètre) ou à froid (produit à 400 K) pour les épaisseurs plus faibles (tôles minces de quelques millimètres à quelques centaines de microns). Les températures indiquées dépendent assez largement de la nuance d'acier laminée, et modifient la structure cristalline du produit. Il existe un transfert thermique important entre le produit et le cylindre de travail, il est donc nécessaire de refroidir ce dernier en aspergeant de l'eau, une pièce supplémentaire assure que l'eau s'évacue sans s'écouler sur le produit. Par ailleurs une émulsion d'eau et d'huile est projetée à l'entrée de l'emprise pour lubrifier le contact. Une tension est également exercée sur la tôle grâce à un cylindre autour duquel s'enroule le produit laminé en fin de procédé. Ce cylindre est appelé la bobineuse. Un dernier cylindre appelé cylindre de planéité sert de support au produit avant de s'enrouler autour de la bobineuse. La Figure 1.1 résume le procédé de laminage. Les proportions ne sont pas respectées pour rendre le schéma plus lisible.

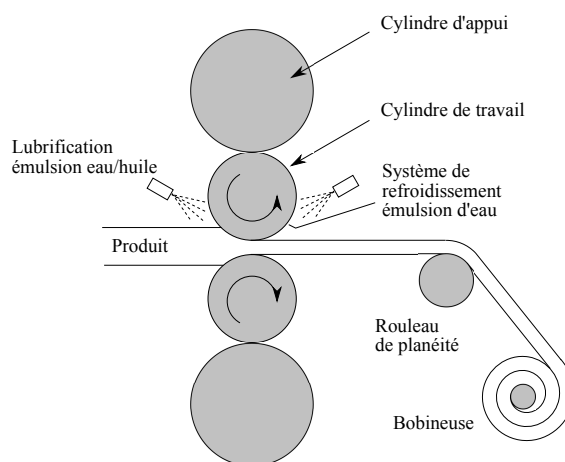


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié du procédé de laminage

1.3. Modélisation prédictive

La qualité du produit se mesure en termes de planéité⁴, de qualité de surface (fissures etc...) et de constance de l'épaisseur de sortie. Les différents matériaux laminés (aciers peu ou fortement alliés, à faible ou fort taux de carbone, aciers inoxydables ou spéciaux) présentent des propensions différentes aux défauts. La vitesse de rotation des cylindres de travail, la force de laminage (pression exercée par les cylindres d'appuis), la vitesse d'entrée du produit ainsi que sa température initiale, le débit et l'orientation du système de refroidissement et la lubrification sont autant de paramètres qui déterminent la qualité du produit.

Le procédé de laminage est bien antérieur à toute compréhension rationnelle des phénomènes mis en jeu. L'empirisme est donc l'approche première (des années 30 aux années 70) qui permet d'établir des lois expérimentales d'application et de précision très restreintes (applicables à certaines conditions de laminage). Cependant l'industrie contemporaine combine des vitesses de rotation plus élevées, des taux de réduction d'épaisseur du produit plus importants et surtout des aciers plus durs. Nous sortons alors du champ d'application des lois empiriques, ce qui motive le développement de simulations numériques. En effet, des phénomènes complexes interviennent au niveau du contact entre le produit et le cylindre de travail. Sans une bonne compréhension de ces phénomènes, les dispositifs de contrôle, le système de refroidissement et de lubrification restent non-optimisés. Ainsi, il existe des recherches très abondantes dans le domaine de la simulation numérique du procédé de laminage. Celles-ci permettent de prédire l'évolution des paramètres importants pour la qualité du produit, pendant la déformation plastique de celui-ci. La conception des systèmes de refroidissement etc... est par ce biais améliorée. Ces simulations sont de plus en plus fines et couplent les comportements du produit et des cylindres. Le produit nécessite une modélisation thermo-visco-plastique. Les différents cylindres restent quant à eux en régime thermo-élastique. Beaucoup d'auteurs se concentrent sur la modélisation du procédé de laminage par éléments finis (le plus souvent). L'un des premiers outils permettant le couplage de la bande et du cylindre a été proposé par Hacquin (1996). Ce modèle a donné lieu à un logiciel appelé Lam3/Tec3 développé par le Cemef, Transvalor, ArcelorMittal Research et Alcan, et résout le problème thermo-elastique-viscoplastique de la bande par calcul aux éléments finis 3D (ou 2D) et résout le problème thermoélastique du cylindre par des calculs semi-analytiques. Jiang and Tieu (2001) ont proposé un modèle 3D aux éléments finis pour résoudre le problème en régime rigide-plastique. Plus récemment Montmitonnet (2006) a proposé un modèle couplé pour le laminage à chaud et à froid. Un modèle assez exhaustif adapté pour le laminage à chaud a été développé par Wang et al. (2009). En outre Abdelkhalek et al. (2011) a utilisé Lam3/Tec3 pour y ajouter un calcul en flambement pour les contraintes dans la bande au niveau de la sortie de l'emprise, de manière à prédire avec précision les défauts de planéité du produit.

1.3.1. Contact mécanique

La modélisation du contact entre le produit et le cylindre de travail est particulièrement délicate. En effet, il s'agit d'un problème de contact lubrifié, faisant intervenir une loi de frottement qu'il faut choisir, par exemple une loi de Coulomb de Tresca ou de Norton. Ce choix n'est pas sans incidence sur les résultats du modèle. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà dit plus haut, ce contact résulte d'un couplage entre le produit sous régime thermo-visco-plastique et le cylindre de travail sous régime thermo élastique, il faut donc tenir compte de leurs déformations respectives.

Il apparaît par ailleurs que la vitesse relative entre le produit et le cylindre de travail n'est pas uniforme. En effet considérons le cas du laminage à froid où le produit est donc relativement dur. En début d'emprise, la vitesse tangentielle du cylindre est plus élevée que celle du produit, le cylindre est donc moteur, cette vitesse relative évolue à mesure que l'on avance dans l'emprise puis s'annule en un point appelé point neutre. Au-delà du point neutre la vitesse relative change de signe et le produit devient donc moteur. Ce fait s'explique par l'incompressibilité de la déformation plastique, c'est-à-dire la conservation du débit volumique (si l'on néglige la variation de volume élastique). Cela se traduit par une discontinuité des cisaillements dans l'emprise. Nous pouvons noter le fait remarquable que ce changement de signe des cisaillements explique le fait qu'il faille imposer une pression de laminage sur le cylindre de travail plus élevée que la contrainte d'écoulement du produit. En effet, si l'on considère le cylindre soumis à des cisaillements positifs jusqu'au point neutre puis négatifs au-delà, cela crée une résultante quasi-verticale qu'il faut naturellement compenser par une surpression au niveau du cylindre d'appui.

4. Un défaut de planéité est une inhomogénéité dans le champ d'auto-contrainte d'une section du produit (pouvant conduire à du flambement)

En d'autres termes, les cisaillements dans le contact entre le produit et le cylindre de travail résistent à la plastification du produit. Cependant le frottement est nécessaire au procédé dans la mesure où la bande est entraînée par frottement, il est donc impossible de laminier sans frottement, ainsi la position du point neutre et la quantification des cisaillements est primordiale pour bien optimiser la force de laminage et le niveau de lubrification.

Pour le cas du laminage à chaud, les simulations numériques démontrent un autre mode de fonctionnement. Le produit étant beaucoup plus mou, il existe non pas un point neutre où l'on observe le changement brutal de signe de la vitesse relative entre le cylindre de travail et le produit, mais une zone neutre ou zone collante (qui peut éventuellement être discontinue), où la vitesse tangentielle du cylindre est la même que celle du produit. Les paramètres de laminages tels que la force de laminage, la lubrification (qui joue directement sur la loi de frottement) modifie très significativement la position du point neutre ou de la zone neutre. Par ailleurs, des irrégularités ou des défauts du produit se traduisent par une modification locale du profil de contrainte et de cisaillement surfacique dans l'emprise, mais restent très difficiles à appréhender numériquement. Les profils de pression et de cisaillement dans l'emprise ont une importance capitale du point de vue industriel.

1.3.2. Transfert thermique

Le transfert thermique est également difficile à modéliser correctement. Le contact entre le produit et le cylindre de travail fait l'objet d'une conduction de la chaleur, le frottement important et la déformation plastique du produit sont également des sources de chaleur à prendre en compte. Dans le cas du laminage à chaud la très haute température du produit implique aussi un transfert thermique par radiation. La lubrification et le système de refroidissement agissent comme une convection forcée pour le cylindre, tandis que l'air ambiant agit comme une convection libre. Ainsi de très nombreux types de transferts thermiques sont à envisager. A cela nous devons ajouter le fait que les coefficients de transfert thermique, qui permettent de caractériser le contact thermique entre le produit et le cylindre, sont à déterminer expérimentalement. Ces coefficients sont variables selon le type de contact (nuance d'acier, rugosité etc...) et varient le long du contact entre le cylindre et le produit en raison de la variation du profil de pression dans l'emprise⁵, comme nous le démontrerons au chapitre 6. Il existe ainsi dans les modèles prédictifs numériques une part d'arbitraire sur le choix de ces coefficients de transfert thermique de la même manière que la loi de frottement pour le contact mécanique.

Les modèles numériques approchant ces problématiques montrent que l'emprise fait l'objet de gradients thermiques très forts. De plus un régime pseudo-périodique semble s'installer, c'est-à-dire que la carte des températures (considérée dans un référentiel fixe) varie peu au cours du temps, cela revient à dire que l'on peut décrire la thermique du procédé à l'aide d'un régime permanent et d'un terme de dérive, ce qui sera utilisé dans les chapitres 5 et 10.

Les problèmes de transferts thermiques pendant le procédé de laminage sont fondamentaux du point de vue industriel. En effet, les gradients très élevés et cycliques (dus à la rotation des cylindres) sont responsables d'une usure en fatigue thermique, qui est observée sous forme de "griffes de chaleur" à la surface des cylindres. La qualité de surface du produit est très liée à l'apparition de tels défauts, et ainsi la durée de vie des cylindres est conditionnée par ces phénomènes de fatigue. Par ailleurs, le profil de température étant non-homogène dans l'axe du cylindre, les dilatations thermiques hétérogènes entraînent des problèmes de planéité du produit.

1.4. Capteurs et méthodes inverses

Les études théoriques prédictives, que nous avons évoquées, permettent en premier lieu de comprendre comment le métal s'écoule dans l'entrefer⁶ et de prédire l'évolution des champs de vitesse de déformation, de contrainte, de température etc... dans une optique d'amélioration des systèmes et outils pour le laminage de sorte à élaborer un meilleur produit à moindres coûts.

Cependant ces modèles numériques n'ont pas (ou peu) de contrepartie expérimentale, permettant de vérifier leur cohérence en conditions connues (lors d'une comparaison entre un modèle théorique et sa transcription expérimentale). Certains phénomènes dans l'emprise ne sont ainsi connus que théoriquement, sans qu'il soit parfaitement déterminé s'il s'agit d'un effet réel du procédé ou d'un effet de modélisation. Par ailleurs, le contrôle du procédé en temps réel par des boucles d'asservissement (automatisation du réglage des paramètres principaux)

5. Le terme d'emprise désigne la zone de contact entre le cylindre de travail et le produit

6. Ce terme désigne la zone entre les deux cylindres de travail

serait, à terme, une avancée considérable pour le procédé et donc pour l'industrie de l'acier. Cela nécessite de mesurer les champs les plus utiles (contraintes, température, épaisseur du film d'huile) pendant le procédé.

Cette problématique double (validation expérimentale et automatisation) conduit à considérer le développement d'une métrologie adaptée au problème de contact entre le produit et l'outil. En effet, mesurer directement les champs dans le contact, par exemple par un capteur de type aiguille pour le frottement, modifie significativement les conditions du phénomène à quantifier. L'écoulement du métal est perturbé, ainsi que la forme du contact (contact avec aiguille au lieu d'un cylindre lisse) et la lubrification. L'idée est donc davantage de déduire les champs à évaluer dans le contact (tôle/cylindre dans le cas précis du laminage) à partir de la mesure des champs résultants de ce contact dans une partie plus accessible du dispositif.

Cette inversion formelle entre les causes (conditions thermiques et mécaniques dans le contact) et les conséquences mesurables (champs de température et de déformations résultant dans l'outil par exemple) est le point central d'une grande typologie de problèmes qualifiés d'inverses (définie par Bui (2006) parmi beaucoup d'autres auteurs)⁷. Par problème inverse, il faut entendre problème indirect, c'est-à-dire que l'on cherche à déterminer un champ ou une grandeur sans la mesurer directement. Une confusion subsiste parfois du fait de la terminologie, en effet comme un grand nombre de solutions numériques s'expriment comme une matrice représentant la relation linéaire entre la grandeur à déterminer et la grandeur mesurée, résoudre le problème inverse revient à inverser cette matrice. Il faut cependant bien garder à l'esprit que tous les problèmes inverses ne conduisent pas nécessairement à l'inversion de matrices. C'est le cas des méthodes analytiques que nous développons dans ces recherches (mais également des méthodes numériques itératives, qui identifient la grandeur par essais successifs en minimisant l'écart entre la grandeur mesurée et sa contrepartie calculée par le modèle).

Il existe deux types de méthodes inverses, qui sont alors dites de première ou de seconde espèce. Les problèmes inverses de seconde espèce tiennent à la détermination des paramètres régissant les lois d'un modèle grâce à l'observation (mesurable) des causes d'une part et des conséquences d'autre part. L'identification des paramètres des lois de comportement de déformation des matériaux s'obtient par méthode inverse de seconde espèce en mesurant les déformations (conséquences) résultant d'un chargement connu (causes). Le cas que nous avons décrit précédemment n'appartient manifestement pas à cette typologie de problèmes, il s'agit de méthodes inverses de première espèce, qui étant donné un modèle dont les paramètres sont connus (module d'Young, diffusivité thermique etc...) et partant d'une grandeur mesurée (conséquence) conduit à l'évaluation d'une autre grandeur (cause, dans une autre région du système par exemple).

Les cas d'application de la recherche de solutions analytiques, que nous nous sommes donnés dans ces travaux de thèse, sont des exemples caractéristiques d'une tendance assez générale à orienter la métrologie vers des problèmes inverses de première espèce. En effet, le contrôle non destructif de systèmes en service, la localisation de défauts par sollicitation mécanique de structure dans le génie civil (par exemple les câbles où les tabliers de ponts) ou la métrologie dans des milieux inaccessibles (comme le cas d'un contact mécanique par exemple, on pensera à l'emboutissage autant qu'au laminage) sont autant de problèmes inverses qui connaissent un essor particulier ces dernières années.

Cependant ces problèmes inverses ont le plus souvent été abordés par des méthodes numériques, soit du fait des complexités géométrique et physique (il n'y a alors que peu de chances de trouver une alternative analytique), soit par simple habitude comme cela peut être le cas pour les méthodes inverses appliquées aux cylindres de laminage, qui sont pour la plupart numériques (comme nous le verrons au cours des chapitres 4 à 10), alors même que le cylindre est une forme géométrique d'une remarquable simplicité et que son comportement est thermoélastique isotrope. Ainsi, les méthodes classiques de résolution analytique des problèmes de thermoélasticité (et plus généralement d'un grand nombre de problèmes en physique mathématique) doivent être réinvesties pour être adaptées et testées dans la formulation des problèmes inverses. Comme nous l'avons déjà précisé, ces outils mathématiques doivent permettre de prendre en compte des mesures discontinues de grandeurs, et ainsi ne seront mentionnées ici (en particulier au chapitre 2), que les plus pertinentes de ce point de vue (notamment les développements en séries élémentaires).

7. On pourra se rappeler, comme l'un des premiers exemples de méthode inverse, de la découverte en 1846 par le physicien français Urbain Le Verrier de la planète Neptune, cause alors inconnue des perturbations mesurables de la trajectoire d'Uranus (conséquences), via la loi de Kepler.

1.5. Méthodes inverses appliquées à la métrologie en laminage

Nous présentons les principes généraux sous-jacents aux méthodes inverses développées pour le laminage industriel, qui constituent autant d'exemples d'application des méthodes analytiques recensées aux chapitres 3 et 8. Comme nous l'avons précisé dans l'introduction du procédé de laminage, il est crucial de caractériser le contact tôle/cylindre d'un point de vue mécanique et thermique. Nous avons également précisé l'importance des méthodes inverses dans ce contexte. L'idée principale est de ne pas chercher à caractériser l'interaction (ou le couplage) entre le produit et l'outil grâce à une modélisation extérieure qui nécessite de résoudre le problème tant pour la bande d'acier laminée que pour le cylindre de travail. Ce type de modèles est dédié aux travaux numériques prédictifs, que nous avons présentés, pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu. Si le problème de laminage est d'une grande complexité lorsqu'il est considéré dans son ensemble, il devient d'une grande simplicité lorsqu'il est réduit au cylindre de travail seul, où les équations aux dérivées partielles régissant les champs de contrainte et de température sont linéaires. Du fait de la loi de l'action et de la réaction, si les chargements mécaniques et thermiques s'appliquant au cylindre de travail sont connus, alors les chargements imposés par le cylindre au produit le sont également. Comme nous en avons montré la nécessité, une approche inverse est utilisée pour évaluer ces chargements appliqués au cylindre de travail. L'idée est d'utiliser le cylindre de travail lui-même comme un capteur, en mesurant le tenseur des contraintes et la température à l'intérieur de la masse du cylindre. Ainsi, schématiquement les conditions de chargement appliquées au cylindre sont responsables de champs de contrainte et de température à l'intérieur de celui-ci, qui une fois mesurés permettent par méthode inverse d'en évaluer les causes, à savoir les chargements en surface.

Plus précisément, l'idée principale de l'analyse inverse des contraintes de contact est d'utiliser la déformation élastique du cylindre de travail pour déduire le vecteur contrainte à la surface du cylindre responsable de ce champ de déformation. Cette idée tient aux développements récents de capteurs de déformation par fibres optiques (cf Ferdinand et al. (2009)) dans la masse du cylindre. Ainsi il est possible de mesurer le tenseur de déformation et donc de contrainte à l'intérieur du cylindre, comme cela est étudié dans le projet européen RFS-PR-08051. La vitesse d'évolution des champs dans le cylindre est plus faible que la vitesse de rotation, ainsi au cours d'un tour, les champs varient peu dans un référentiel fixe. Avec un seul capteur "noyé" dans la masse du cylindre, il est donc possible de considérer tout un cercle de mesures, comme le montre la figure 1.2.

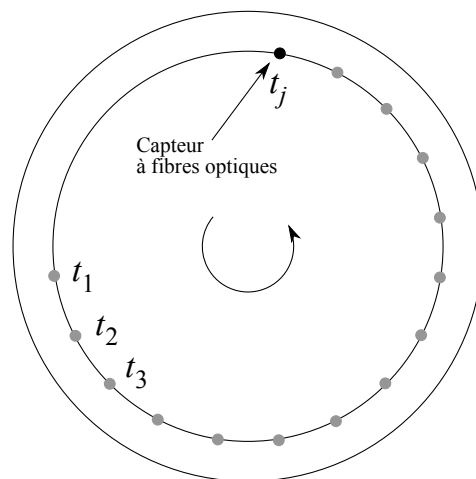


FIGURE 1.2 – Mesures noyées dans le cylindre

Le principe de la résolution est de supposer un vecteur contrainte de surface inconnu sous une forme de série élémentaire (à choisir correctement compte tenu du problème). Les données mesurées sont développées en une série du même type. L'identification des paramètres inconnus du développement en série du vecteur contrainte de surface, s'obtient en imposant que les données mesurées soient égales aux contraintes correspondantes calculées au rayon de mesure. De manière complètement équivalente, on peut également se représenter la méthode inverse, comme la résolution analytique d'un problème de mécanique ordinaire sur le sous-domaine dont la frontière est

le cercle défini par les mesures de contraintes à l'intérieur du cylindre, la partie inverse de la résolution consistant simplement à étendre cette solution analytique par continuité vers la surface du cylindre.

La solution inverse, visant à l'évaluation du champ de température dans le cylindre de travail et les flux de chaleur entrants, repose sur les mêmes principes que la méthode précédente. Si les sources et les types de transport de chaleur (conduction, radiation, convection forcée, convection libre) sont multiples lorsque l'on considère le problème dans son ensemble, à l'intérieur du cylindre seule l'équation de la chaleur est à résoudre avec comme conditions à satisfaire : la condition initiale et l'identification de la solution (évaluée au rayon de mesure) aux températures mesurées à l'intérieur du cylindre. L'insertion d'un thermocouple sous la surface du cylindre est possible et a été réalisée par plusieurs expérimentateurs cités au chapitre 6. Un procédé d'insertion de thermocouple sous la surface est également développé dans le cadre du projet européen RFS-PR-08051, et discuté dans ce même chapitre, où deux alternatives technologiques sont testées et comparées du point de vue de la méthode inverse.

1.6. Problèmes mal posés

Nous avons déjà évoqué le fait classique que les méthodes inverses sont mal posées. Ceci est à comprendre au sens du mathématicien français Hadamard, qui énonce qu'un problème bien posé admet une solution unique et stable. Le principe de stabilité de la solution est que de petites variations des entrées conduisent à de petites variations des sorties du problème. Réciproquement, un problème est mal posé, s'il n'existe pas de solution, ou si elle n'est pas unique ou encore si elle n'est pas stable. En thermoélasticité linéaire, il existe toujours une solution unique, nous nous concentrons donc sur le manque de stabilité des solutions inverses. Ainsi, de manière très classique, une solution inverse aura tendance à produire de très larges variations du résultat pour de très petites variations des entrées, ce qui peut rendre le résultat inexploitable.

D'un point de vue général, cela se comprend comme le fait qu'un très grand nombre de chargements très différents, se traduit par des effets mesurables quasi-similaires, ainsi en partant de ces effets, il est difficile de distinguer lequel des chargements possibles en est responsable.

D'un point de vue numérique, cet état de fait peut se comprendre grâce à la notion de conditionnement de matrice. En effet, bien souvent, on cherche à établir la relation linéaire matricielle entre les entrées et les sorties, le problème inverse revient donc à inverser cette matrice. Alors, une petite variation dans le vecteur d'entrée est multipliée par un facteur d'amplification de l'ordre de grandeur du conditionnement de la matrice, qui peut devenir extrêmement élevé en cas de mauvais conditionnement de celle-ci.

Les méthodes numériques itératives quant à elles cherchent à inventer une condition possible pour les sorties en minimisant l'écart (au sens des moindres carrés par exemple) entre les entrées mesurées et les champs calculés correspondant à ces entrées. Le caractère mal posé d'un problème s'exprime dans le fait que selon le choix initial de la condition possible pour les sorties et le nombre d'itérations, l'algorithme converge vers des solutions radicalement différentes.

Finalement dans le cas des méthodes inverses analytiques développées dans ces travaux, le fait que le problème soit mal posé s'exprime en termes de fréquences au sens large. En effet, comme nous l'avons développé plus haut, des développements en séries sont effectués. Nous entendons par fréquences l'indice des termes sommés. Les équations différentielles de diffusion, valables en thermoélasticité, agissent comme des filtres passe-bas, c'est-à-dire que l'amplitude des hautes fréquences est atténuée (d'autant plus que l'on se situe loin de la surface). Ainsi, à partir d'une donnée dont les hautes fréquences sont faibles, on cherche à reconstruire un signal dont les hautes fréquences sont plus élevées. L'inversion du problème agit donc comme un amplificateur de hautes fréquences, si bien qu'une petite variation des fréquences mesurées en entrée est amplifiée également. Ces considérations font l'objet de plusieurs commentaires pratiques dans la suite du texte (notamment en termes de troncature des sommes etc...).

Les méthodes inverses numériques sont toujours stabilisées grâce à des algorithmes supplémentaires tels que la régularisation des matrices mal conditionnées ou la résolution du problème adjoint pour les méthodes itératives. Il apparaît à la lumière des présents travaux que les solutions analytiques ont une très bonne robustesse au caractère mal posé des méthodes inverses et ne nécessitent aucune stabilisation particulière, l'enjeu réside uniquement dans la troncature des sommes, ce qui est en tous les cas nécessaire, car numériquement seules des sommes finies peuvent être considérées. Par ailleurs on remarque que plus la donnée d'entrée est connue avec précision (c'est-à-dire à des fréquences d'acquisition les plus élevées possible, avec un bruit de mesure minimal) meilleure sera la stabilité de la méthode inverse et son résultat, ce qui n'est pas le cas pour un bon nombre d'algorithmes numériques

(comme les algorithmes de retour vers la surface par exemple, cf Raynaud and Bransier (1986)).

1.7. Plan

Dans le chapitre 2 nous introduisons les concepts et outils mathématiques utiles à la lecture des chapitres suivants. Il ne s'agit en aucun cas de limiter la recherche des solutions analytiques à ces quelques théorèmes et définitions. Cependant, bien que l'une des principales difficultés est de savoir quels outils existent (c'est surtout un problème de culture qu'il faut sans cesse enrichir), il serait sans intérêt de mentionner trop de résultats sans but précis dans ce chapitre préliminaire. En règle générale, ne sont conservés que les résultats effectivement utilisés. Dans le chapitre 3 nous introduisons les concepts d'élasticité plane dans le corps des nombres complexes, ainsi que l'équation de la chaleur dans un mobile tournant (équation établie à partir d'un bilan énergétique). Ces résultats sont centraux pour la compréhension des analyses qui suivent, ainsi ils sont exposés en détail quoiqu'ils soient similaires aux ouvrages classiques sur le sujet. Dans le chapitre 4 le problème inverse appliqué à l'évaluation en temps réel des contraintes de contact pour le laminage est résolu en deux dimensions sous conditions isothermes. Ce travail est contextualisé dans la littérature existante pour en montrer le caractère innovant et robuste, là où d'autres méthodes récentes sont insatisfaisantes. Les aspects purement techniques comme le choix du nombre de troncature des sommes etc... sont étudiés en détail. Dans le chapitre 5 le problème inverse visant à l'évaluation en temps réel du champ de température et des flux de chaleur est résolu en deux dimensions. De même que pour le problème précédent, une revue bibliographique de l'état de l'art permet de situer cette solution par rapport à un certain nombre d'algorithmes numériques. Dans le chapitre 6 des études inverses thermiques expérimentales sont proposées. Les essais ont été réalisés sur le laminoir pilot d'ArcelorMittal de Maizières-le-Metz, et utilise des thermocouples conçus dans le cadre du projet européen RFS-PR-08051. Les principes de conception sont explicités et deux typologies de capteurs sont comparées. Par ailleurs, l'analyse des champs de température grâce à la méthode inverse thermique permet d'évaluer l'influence de différents taux de réduction d'épaisseur de bande ainsi que l'influence de l'épaisseur d'oxyde (calamine). Par ailleurs ces analyses expérimentales démontrent que l'hypothèse assez fréquente dans l'industrie, selon laquelle le coefficient de transfert thermique entre le produit et le cylindre de travail est constant dans l'emprise, est fautive. Cela a des conséquences non négligeables sur la prédiction, par les modèles numériques dédiés, de la durée de vie des cylindres de travail. Dans le chapitre 7, le couplage thermoélastique est réalisé entre la méthode inverse élastique visant à l'obtention des contraintes de contact et la méthode inverse thermique. Ce couplage permet notamment de s'affranchir de l'hypothèse isotherme du chapitre 4 qui est fortement fautive en laminage à chaud. Par ailleurs ce chapitre donne l'occasion d'évaluer les contraintes thermiques responsables de la fatigue thermique du cylindre de travail, ce qui en détermine la durée de vie.

Dans la partie suivante, nous abordons les mêmes problématiques en thermoélasticité tridimensionnelle. Cela est un développement plus théorique que le cas en deux dimensions, dans la mesure où cela nécessite que plusieurs capteurs soient insérés sous la surface du cylindre et alignés selon le grand axe. Cependant les développements technologiques liés à l'insertion des capteurs et au câblage ne considèrent à l'heure actuelle qu'un seul capteur (un pour les déformations et un thermocouple). Il s'agit donc d'une extrapolation sur l'avenir. Dans le chapitre 8 nous exposons les principaux résultats d'élasticité 3D analytiques, qui permettent de comprendre facilement les développements qui suivent. Dans le chapitre 9 le problème inverse 3D visant à l'évaluation des contraintes de contact est résolu. Comme ce problème n'a jamais été traité (à la connaissance de l'auteur) la revue de la littérature est très réduite. Par ailleurs le chapitre 10 présente la méthode inverse thermique 3D. Ces deux derniers chapitres précisent les conditions technologiques nécessaires au succès des méthodes inverses 3D, en particulier le nombre de capteurs à insérer sous la surface du cylindre. L'intérêt de ces méthodes est également discuté en les comparant aux méthodes bidimensionnelles des chapitres 4 et 5.

CHAPITRE II

PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES

2.1. Avertissement

Ce chapitre recense un certain nombre de résultats, souvent utilisés dans la recherche de solutions analytiques en physique mathématique et en particulier en thermoélasticité. Nous n'exposons pas nécessairement les résultats avec toute la rigueur mathématique dont il faudrait faire preuve. Ce choix est délibéré pour permettre une lecture plus conforme aux habitudes de mécanique du solide, afin que le lecteur saisisse facilement le lien entre ces préliminaires mathématiques et les applications aux méthodes inverses en thermoélasticité qui suivent. Nous ne prétendons évidemment pas à l'exhaustivité, seuls les résultats nécessaires à la compréhension des chapitres suivants sont exposés ici. Seuls quelques commentaires complémentaires seront faits sur les solutions s'exprimant sous forme d'intégrales de frontière, quoiqu'elles n'aient pas, à proprement parler, été utilisées dans la résolution pratique des problèmes inverses. Ces quelques commentaires mettront en lumière les raisons fondamentales de l'échec de telles solutions dans le contexte précis des travaux menés.

Par ailleurs, aucun résultat nouveau n'est proposé, ainsi un lecteur habitué aux mathématiques analytiques de base pourra aisément se passer de lire ces préliminaires. L'enjeu est surtout de clarifier les outils utiles à la résolution des problèmes traités dans ces travaux de thèses. On pourra consulter avec profit l'ouvrage sur les fonctions spéciales de Andrews et al. (1999) et l'ouvrage sur la théorie de Fourier de Stein and Weiss (1971).

2.2. Mesures et développement en séries

2.2.1. Mesures

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats sur les développements en série, en gardant à l'esprit qu'un ensemble de points de mesure ne définit pas directement une fonction analytique. Une forme analytique est donc recherchée grâce à des séries. Les paragraphes suivants offrent plusieurs alternatives, à choisir selon le contexte. Nous considérons dans toute la thèse qu'une suite de points $y_j \in \mathbb{R}$ mesurés à la coordonnée $\mathbf{x}_j \in E$ (où $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et E est un sous-espace de \mathbb{R}^n) est telle qu'il existe une fonction f de E dans \mathbb{R} de carré intégrable (soit $\int_E |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty$) telle que $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, f(\mathbf{x}_j) = y_j$. Nous pouvons dès lors travailler dans une structure d'espace de Hilbert. Les théorèmes suivants de décomposition d'une fonction de carré intégrable, peuvent ainsi se comprendre comme l'écriture d'un vecteur dans une base de l'espace.

Il est par ailleurs possible d'opérer une interpolation (linéaire ou grâce à des spline cubiques par exemple) pour augmenter artificiellement le nombre de points de mesure N . Cette technique permet d'obtenir des signaux de meilleure qualité, surtout dans l'optique d'une intégration numérique.

2.2.2. Analyse de Fourier

Théorème 1 Soit f une fonction de $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} périodique de périodes T_j (où $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$) et continûment dérivable, alors :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{k_1, \dots, k_n} \exp\left(i \frac{2\pi k_1}{T_1} x^{(1)}\right) \dots \exp\left(i \frac{2\pi k_n}{T_n} x^{(n)}\right) \quad (2.1)$$

où l'on a :

$$\tilde{f}_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{T_1} \dots \frac{1}{T_n} \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_n} f(\mathbf{x}) \exp\left(-i \frac{2\pi k_1}{T_1} x^{(1)}\right) \dots \exp\left(-i \frac{2\pi k_n}{T_n} x^{(n)}\right) dx^{(1)} \dots dx^{(n)} \quad (2.2)$$

De plus si f est discontinue (et admettant une dérivée à gauche et à droite) en un point ζ , selon une composante $x^{(k)}$ de \mathbf{x} , alors la somme de Fourier converge vers le milieu de la discontinuité :

$$\frac{f(x^{(1)}, \dots, \zeta^-, \dots, x^{(n)}) + f(x^{(1)}, \dots, \zeta^+, \dots, x^{(n)})}{2} \quad (2.3)$$

Si f est seulement périodique de carré intégrable, la convergence de la série de Fourier vers $f(\mathbf{x})$ est vraie en norme \mathcal{L}^2 , c'est-à-dire au sens du produit scalaire Hermitien :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T_1} \dots \frac{1}{T_n} \int_0^{T_1} \dots \int_0^{T_n} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

Cela revient à dire que la famille de fonctions $e_{j,k} : \mathbf{x} \rightarrow \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T_j} x^{(j)}\right)$ ($j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \mathbb{Z}$) forme une base de l'espace de Hilbert des fonctions périodiques de périodes T_j et de carré intégrable.

En particulier nous utiliserons fréquemment le cas d'une fonction $f(\theta, z)$ définie en coordonnées cylindriques et périodique de période 2π selon θ et $2L$ selon z et de carré intégrable admettant le développement en série de Fourier suivant :

$$f(\theta, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{k,l} \exp(ik\theta) \exp\left(i \frac{l\pi}{L} z\right) \quad (2.5)$$

où nous avons :

$$\tilde{f}_{k,l} = \frac{1}{4\pi L} \int_0^{2\pi} \int_{-L}^L f(\theta, z) \exp(-ik\theta) \exp\left(-i \frac{l\pi}{L} z\right) d\theta dz \quad (2.6)$$

Lorsque l'on interprète des mesures $y_j = f(\mathbf{x}_j)$ ($j \in \llbracket 1, N \rrbracket$), les coefficients $\tilde{f}_{k_1, \dots, k_n}$ ne sont pas donnés de manière analytiques, mais comme une suite de nombres complexes, calculés en fonction des signaux mesurés. Il est donc nécessaire de tronquer les sommes, ainsi la convergence des sommes (2.1) assure que si $\{K_1; \dots; K_n\}$ sont n entiers suffisamment grands :

$$f(\mathbf{x}) \simeq \sum_{k_1=-K_1}^{K_1} \dots \sum_{k_n=-K_n}^{K_n} \tilde{f}_{k_1, \dots, k_n} \exp\left(i \frac{2\pi k_1}{T_1} x^{(1)}\right) \dots \exp\left(i \frac{2\pi k_n}{T_n} x^{(n)}\right) \quad (2.7)$$

Ce type de développement est souvent très efficace, car les équations aux dérivées partielles se trouvent alors simplifiées du fait des exponentielles et sont le plus souvent à variables séparables. De plus, les intégrales à calculer (coefficients de Fourier) (2.2) se prêtent parfaitement à l'objectif de calcul en temps réel, car l'algorithme de la fast fourier transform (fft) peut être utilisé pour en calculer une bonne approximation. En effet, si la fonction f représente une donnée mesurée, elle n'est alors connue qu'aux points \mathbf{x}_j ($j \in \llbracket 1, N \rrbracket$), les intégrales (2.2) doivent donc être calculées numériquement. Les méthodes classiques de quadrature ne sont pas judicieuses dans ce contexte. Dans le cas unidimensionnel ($n = 1$) par exemple, il faut calculer K_1 intégrales en $\mathcal{O}(N)$, alors que le calcul d'une fft donne toutes les intégrales nécessaires en $\mathcal{O}(N \log(N))$. Dès que K_1 est supérieur à $\log(N)$ il est préférable d'utiliser des fft (en pratique c'est toujours le cas).

Dans le cas unidimensionnel où $n = 1$, en interpolant le signal mesuré de manière équirépartie sur $[0, T_1]$ (soit $x_j = (j-1)T_1/N$) nous avons l'écriture de la fft comme l'approximation d'une intégrale de Riemann :

$$\frac{1}{N} \text{fft} [f(x_j)]_{k_1} = \sum_{j=1}^N f(x_j) \exp\left(-i \frac{2\pi(j-1)k_1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(x) \exp\left(-i \frac{2\pi k_1}{T_1} x\right) dx \quad (2.8)$$

Dans le cas à n dimensions, il suffit de considérer n calculs de fft successifs pour obtenir l'approximation de Riemann des intégrales (2.2).

Bien que les séries de Fourier et l'analyse en fréquence soient très utilisées pour les signaux temporels sonores, il est préférable d'éviter de résoudre un problème de diffusion thermique en développant en série de Fourier selon la variable temporelle t , à moins que l'on ne traite un problème à dynamiques rapides. Cela est dû au fait qu'il existe une relaxation thermique, que l'on peut souvent faire apparaître avec des exponentielles décroissantes, il est dans ce cas inadapté d'utiliser des sommes de fonctions oscillantes comme les séries de Fourier.

2.2.3. Séries hypergéométriques

Nous définissons ici les séries hypergéométriques, car elles interviennent comme des outils fondamentaux des fonctions spéciales utiles à la résolution analytique de certaines équations aux dérivées partielles. Une série hypergéométrique est une série de terme général c_k telle que c_{k+1}/c_k est une fraction rationnelle en k du type :

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\dots(k+a_p)x}{(k+b_1)(k+b_2)\dots(k+b_q)(k+1)} \quad (2.9)$$

Définition 1 Nous définissons la série hypergéométrique ${}_pF_q$ qui converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $p \leq q$, et pour $|x| < 1$ pour $p = q + 1$, et qui diverge pour tout $x \neq 0$ pour $p > q + 1$:

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} ; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k x^k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{c_0} \quad (2.10)$$

où nous avons :

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) \text{ pour } k > 0, (a)_0 = 1 \quad (2.11)$$

Les séries hypergéométriques sont utiles dans la résolution de certaines équation différentielles, puisqu'elles sont des solutions formelles de :

$$\left[x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} + b_1 - 1 \right) \dots \left(x \frac{d}{dx} + b_q - 1 \right) - x \left(x \frac{d}{dx} + a_1 \right) \dots \left(x \frac{d}{dx} + a_p \right) \right] y(x) = 0 \quad (2.12)$$

2.2.4. Fonction Gamma

La fonction Gamma est une extension pour des valeurs non entières de la notion de factorielle. Nous avons la définition suivante :

Définition 2 Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ n'étant pas un entier relatif négatif ou nul ($z \neq 0, -1, -2, \dots$) on appelle fonction Gamma de z et on note $\Gamma(z)$ la fonction suivante :

$$\Gamma(z) = \lim_{k \in \mathbb{N} \rightarrow \infty} \frac{k! k^{z-1}}{(z)_k} \text{ et } \Gamma(1) = 1 \quad (2.13)$$

Une conséquence immédiate de la définition est :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.14)$$

Nous pouvons donc écrire pour un entier positif (simple récurrence) n :

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.15)$$

C'est du fait des deux dernières propriétés de la fonction Γ que celle-ci est considérée comme l'extension au cas non entier du concept de factorielle. De très nombreuses relations existent autour de la fonction Γ . Nous ne reportons pas ici ces propriétés car cela serait fastidieux et peu utile. Néanmoins le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de Andrews et al. (1999).

2.2.5. Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel sont très classiques en analyse, et interviennent très fréquemment dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, notamment en thermique et en élasticité.

Définition 3 Nous appelons $J_\alpha(x)$ la fonction de Bessel de première espèce :

$$J_\alpha(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_0F_1 \left(\begin{matrix} - \\ \alpha+1 \end{matrix} ; -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \quad (2.16)$$

Si $\text{Re}(\alpha) < 0$, alors il vient que le premier terme du développement diverge lorsque $x \rightarrow 0$. Par ailleurs la fonction Γ n'est pas définie pour des entiers négatifs ou nuls, ainsi la définition précédente n'est pas directement utilisable dans le cas où $\alpha = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce dernier cas nous adoptons la définition :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (2.17)$$

La fonction de Bessel de première espèce est solution de :

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} + \left(1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2\right) y(x) = 0 \quad (2.18)$$

Ce dernier résultat s'obtient à partir de l'équation de Whittaker, dérivée de l'équation (2.12). Il est remarquable que l'équation différentielle de Bessel (2.18) est inchangée pour $-\alpha$, ainsi $J_{-\alpha}$ est aussi solution. Si α n'est pas entier, $J_\alpha(x)$ et $J_{-\alpha}(x)$ ne sont pas proportionnelles, en revanche si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ alors la définition devient $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

Les dérivées des fonctions de Bessel de première espèce s'obtiennent par la formule de récurrence :

$$2J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) \quad (2.19)$$

Il existe un très grand nombre de relations sur les fonctions de Bessel, de formulations intégrales, de développements asymptotiques et de propriétés. On pourra consulter l'ouvrage de Watson (1944) où le handbook de Abramowitz and Stegun (1964), ou encore celui de Gradshteyn and Ryzhik (1992). Ne seront citées ici que les relations d'orthogonalité (au sens du produit interne) et les intégrales utiles dans la résolution des problèmes inverses traités dans ces travaux de thèse. La fonction de Bessel $J_\alpha(x)$ admet une infinité dénombrable de racines notées par ordre croissant $\lambda_p^{(\alpha)}$. Nous avons la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^1 x J_\alpha(x \lambda_p^{(\alpha)}) J_\alpha(x \lambda_q^{(\alpha)}) dx = \frac{\delta_{p,q}}{2} [J_{\alpha+1}(\lambda_p^{(\alpha)})]^2 \quad (2.20)$$

Par ailleurs nous reportons ici quelques intégrales utiles à la résolution des problèmes pratiques de ces travaux de thèse :

$$\int_0^R \rho J_0(x\rho) d\rho = R \frac{J_1(Rx)}{x} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} \int_0^R \rho J_\alpha(x\rho) J_\alpha(y\rho) d\rho = R \frac{x J_{\alpha+1}(Rx) J_\alpha(Ry) - y J_{\alpha+1}(Ry) J_\alpha(Rx)}{x^2 - y^2} \\ \int_0^R \rho J_\alpha(x\rho)^2 d\rho = \frac{R^2}{2} (J_\alpha(Rx)^2 - J_{\alpha-1}(Rx) J_{\alpha+1}(Rx)) \end{cases} \quad (2.22)$$

Définition 4 Une seconde solution de l'équation (2.18) peut être exhibée, la fonction de Bessel de deuxième espèce. Elle est notée pour $Y_\alpha(x)$ et $\alpha \notin \mathbb{Z}$:

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\pi\alpha) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)} \quad (2.23)$$

Lorsque $n \in \mathbb{Z}$ on a la solution de l'équation (2.18) :

$$Y_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} Y_\alpha(x) \quad (2.24)$$

La fonction de Bessel de deuxième espèce $Y_\alpha(x)$ diverge lorsque $x \rightarrow 0$, car c'est une combinaison linéaire de $J_\alpha(x)$ et $J_{-\alpha}(x)$, ainsi que $\text{Re}(\alpha)$ soit positif ou négatif l'une ou l'autre des fonctions de Bessel diverge en $x = 0$. Pour $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ un calcul de limite montre que $Y_n(x)$ diverge également pour $x \rightarrow 0$. C'est la raison pour laquelle elle n'a pas été utile dans le contexte de cette thèse (cylindre plein), mais doit être employée dès lors que le domaine d'étude a des "trous".

Quoique la fonction de Bessel J_α est correctement définie pour des variables complexes, il est commode de définir une fonction de Bessel modifiée pour les variables imaginaires pures. Ainsi on adopte la définition suivante :

Définition 5 La fonction de Bessel modifiée de première espèce est définie par :

$$I_\alpha(x) = i^{-\alpha} J_\alpha(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)} \quad (2.25)$$

Si $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$, alors il vient que le premier terme du développement diverge lorsque $x \rightarrow 0$. Par ailleurs la fonction Γ n'est pas définie pour des entiers négatifs ou nuls, ainsi la définition précédente n'est pas directement utilisable dans le cas où $\alpha = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce dernier cas nous adoptons la définition :

$$I_n(x) = I_{-n}(x) \quad (2.26)$$

La fonction de Bessel modifiée de première espèce vérifie l'équation différentielle :

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{x} - \left(1 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2\right) y(x) = 0 \quad (2.27)$$

Cette équation (2.27) est invariante pour $-\alpha$, ainsi $I_{-\alpha}$ est également solution. Si α n'est pas un entier, I_α et $I_{-\alpha}$ sont deux solutions non proportionnelles. En revanche si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ alors la définition devient $I_n(x) = I_{-n}(x)$.

Par ailleurs nous reportons ici une intégrale utile à la résolution des problèmes pratiques de ces travaux de thèse :

$$\begin{cases} \int_0^R \rho I_\alpha(x\rho) I_\alpha(y\rho) d\rho = R \frac{x I_{\alpha+1}(Rx) I_\alpha(Ry) - y I_{\alpha+1}(Ry) I_\alpha(Rx)}{x^2 - y^2} \\ \int_0^R \rho I_\alpha(x\rho)^2 d\rho = \frac{R^2}{2} (I_\alpha(Rx)^2 - I_{\alpha-1}(Rx) I_{\alpha+1}(Rx)) \end{cases} \quad (2.28)$$

Définition 6 Une seconde solution de l'équation (2.27) peut être exhibée, la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. Elle est notée $K_\alpha(x)$ et :

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi\alpha)} (I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)) \quad (2.29)$$

La fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce $K_\alpha(x)$ diverge lorsque $x \rightarrow 0$, car c'est une combinaison linéaire de $I_\alpha(x)$ et $I_{-\alpha}(x)$, ainsi que $\operatorname{Re}(\alpha)$ soit positif ou négatif l'une ou l'autre des fonctions de Bessel diverge en $x = 0$. Pour $\alpha = n \in \mathbb{Z}$ un calcul de limite montre que $Y_n(x)$ diverge également pour $x \rightarrow 0$. C'est la raison pour laquelle elle n'a pas été utile dans le contexte de cette thèse (cylindre plein), mais doit être employée dès lors que le domaine d'étude a des "trous".

2.2.6. Analyse de Fourier-Bessel

Un résultat analogue au développement en série de Fourier existe pour les fonctions de Bessel et est appelé développement en série de Fourier-Bessel.

Théorème 2 Soit $R > 0$, si $\lambda_p^{(\alpha)}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) désignent les racines positives de $J_\alpha(x)$ classées par ordre croissant, et si f est une fonction continue de $r \in [0, R[$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors :

$$\forall r \in [0, R[, f(r) = \sum_{p=1}^{\infty} \hat{f}_p J_\alpha\left(\lambda_p^{(\alpha)} \frac{r}{R}\right) \quad (2.30)$$

où l'on a :

$$\hat{f}_p = \frac{2}{R^2 J_{\alpha+1}^2\left(\lambda_p^{(\alpha)}\right)} \int_0^R \rho f(\rho) J_\alpha\left(\lambda_p^{(\alpha)} \frac{\rho}{R}\right) d\rho \quad (2.31)$$

Ainsi $J_\alpha\left(\lambda_p^{(\alpha)} \frac{r}{R}\right)$ forment une base orthogonale de l'espace des fonctions continues de $[0, R[$ dans \mathbb{R} . Si f est discontinue en un point ζ , la série de Fourier-Bessel converge au milieu de la discontinuité :

$$\frac{f(\zeta^-) + f(\zeta^+)}{2} \quad (2.32)$$

Un second développement de Fourier-Bessel, nommé série de Dini est souvent utile :

Théorème 3 Soit $R > 0$ et $\alpha \geq -1/2$, si $\gamma_p^{(\alpha)}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) désignent les racines positives de $xJ'_\alpha(x) + HJ_\alpha(x)$ (où H est une constante arbitraire de \mathbb{R}) classées par ordre croissant, et si f est une fonction de $r \in [0, R]$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors :

$$f(r) = \sum_{p=1}^{\infty} f_p^* J_\alpha \left(\gamma_p^{(\alpha)} \frac{r}{R} \right) \quad (2.33)$$

où l'on a :

$$f_p^* = \frac{2 \left(\gamma_p^{(\alpha)} \right)^2}{R^2 \left(H^2 + \left(\gamma_p^{(\alpha)} \right)^2 - \alpha^2 \right) J_\alpha^2 \left(\gamma_p^{(\alpha)} \right)} \int_0^R \rho f(\rho) J_\alpha \left(\gamma_p^{(\alpha)} \frac{\rho}{R} \right) d\rho \quad (2.34)$$

Si $H + \alpha = 0$, alors le premier zéro de $xJ'_\alpha(x) + HJ_\alpha(x)$ est à l'origine, et le dénominateur de f_1^* est donc nul. Dans ce cas, le premier terme f_1^* s'exprime différemment des autres :

$$\frac{2}{R^2} (\alpha + 1) \left(\frac{r}{R} \right)^\alpha \int_0^R \rho^{\alpha+1} f(\rho) d\rho \quad (2.35)$$

Ainsi $J_\alpha \left(\gamma_p^{(\alpha)} \frac{r}{R} \right)$ forment une base orthogonale de l'espace des fonctions de $[0, R]$ dans \mathbb{R} .

2.2.7. Polynômes orthogonaux

Les polynômes orthogonaux sont une autre grande famille de fonctions permettant de donner une forme analytique à une suite de points définie par des mesures. Une classe très générale de polynômes orthogonaux est liée au nom de Jacobi.

Définition 7 On appelle polynômes de Jacobi, si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, le polynôme de degré n suivant :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix}; \frac{1-x}{2} \right) \quad (2.36)$$

Une formulation équivalente est donnée par :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + m + 1)}{\Gamma(\alpha + m + 1)} \left(\frac{x-1}{2} \right)^m \quad (2.37)$$

Les dérivées d'ordre $k \leq n$ des polynômes de Jacobi s'obtiennent par :

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1 + k)}{2^k \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} P_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x) \quad (2.38)$$

Il est aisé de vérifier que les polynômes de Jacobi sont solutions de l'équation différentielle d'ordre deux suivante :

$$(1-x^2)y''(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) = 0 \quad (2.39)$$

Les polynômes de Jacobi sont orthogonaux relativement à la fonction poids $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, nous avons :

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \delta_{n,m} \kappa(n, \alpha, \beta) \quad (2.40)$$

où l'on a :

$$\kappa(n, \alpha, \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)n!} \quad (2.41)$$

Les polynômes de Jacobi permettent un développement du type Fourier (généralisé), nous avons le théorème suivant :

Théorème 4 Soit $f(x)$ une fonction de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} et continument dérivable, alors :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (2.42)$$

où l'on a :

$$f_n = \frac{1}{\kappa(n, \alpha, \beta)} \int_a^b \left(1 - \frac{2x - a - b}{b - a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{2x - a - b}{b - a}\right)^\beta f(x) P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) dx \quad (2.43)$$

De plus si f est discontinue (et admettant une dérivée à gauche et à droite) en un point ζ , alors la somme de polynômes de Jacobi converge vers le milieu de la discontinuité :

$$\frac{f(\zeta^-) + f(\zeta^+)}{2} \quad (2.44)$$

Si f est seulement de carré intégrable, la convergence de la série en polynômes de Jacobi vers $f(x)$ est vraie en norme \mathcal{L}^2 .

Des polynômes orthogonaux célèbres liés aux noms de Chebyshev, Legendre, Laguerre, Hermite, Gegenbauer etc... sont issus des polynômes de Jacobi. Nous n'explicitons dans ces pages que les polynômes de Chebyshev et Legendre du fait de leur rôle important dans le développement analytique de données mesurées et dans l'analyse des fonctions harmoniques qui seront particulièrement utilisées par la suite.

Définition 8 Les polynômes de Chebyshev de première espèce sont définis sur $[-1, 1]$ par :

$$T_n(x) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} P_n^{(-1/2, -1/2)}(x) \quad (2.45)$$

et vérifient l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0 \quad (2.46)$$

Les polynômes de Chebyshev de seconde espèce sont définis sur $[-1, 1]$ par :

$$U_n(x) = \frac{2^{2n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} P_n^{(1/2, 1/2)}(x) \quad (2.47)$$

et vérifient l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) + n(n+2)y(x) = 0 \quad (2.48)$$

Les polynômes de Chebyshev sont remarquables pour la relation :

$$\begin{cases} T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \\ U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \end{cases} \quad (2.49)$$

Il est clair que si le Théorème 4 doit être utilisé avec les polynômes de Chebyshev de première espèce alors on a :

$$f_n = \frac{2}{\pi(1 + \delta_{n,0})} \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right)^2}} T_n\left(\frac{2x - a - b}{b - a}\right) dx \quad (2.50)$$

Grâce à ce résultat il devient clair qu'en faisant le changement de variable $\cos(\theta) = (2x - a - b)/(b - a)$ alors on obtient :

$$f_n = \frac{b - a}{2\pi(1 + \delta_{n,0})} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{(b - a)\cos(\theta) + a + b}{2}\right) \cos(n\theta) d\theta \quad (2.51)$$

Cette formulation donne aux polynômes de Chebyshev leur efficacité, en effet, les intégrales nécessaires au développement en série se ramène à un calcul de fft. Cependant les polynômes de Legendre jouent un rôle central dans l'analyse des fonctions harmoniques, il convient donc de les mentionner ici.

Définition 9 Les polynômes de Legendre de première espèce sont définis par :

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) \quad (2.52)$$

et vérifient l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \quad (2.53)$$

Les polynômes de Legendre sont donc orthogonaux avec une fonction poids unitaire soit :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \delta_{n,m} \frac{2}{2n+1} \quad (2.54)$$

Si le théorème 4 doit être utilisé avec les polynômes de Legendre alors on a :

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \int_a^b f(x)P_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) dx \quad (2.55)$$

Des développements récents de Iserles (2011) permettent de calculer ces intégrales grâce à un algorithme très rapide utilisant des calculs de fft et un post-processing en $\mathcal{O}(N)$, ce qui rend les polynômes de Legendre de plus en plus accessibles pour des calculs en temps réel visant à donner une forme analytique à des points de mesures.

L'équation différentielle (2.53) vérifiée par les polynômes de Legendre a une seconde solution appelée fonction de Legendre.

Définition 10 La fonction de Legendre est définie par :

$$Q_n(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) P_n(x) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(x)P_{n-k}(x) \quad (2.56)$$

La fonction de Legendre est singulière en $x = \pm 1$, ce qui limite son utilisation aux problèmes où ces valeurs sont hors du domaine à étudier. De plus des fonctions très utiles pour l'analyse harmonique sont dérivées des polynômes et des fonctions de Legendre et sont appelées fonctions associées de Legendre de première et seconde espèce.

Définition 11 On appelle fonction associée de Legendre de première espèce :

$$P_m^n(x) = (-1)^n (1-x^2)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) \quad (2.57)$$

On appelle fonction associée de Legendre de seconde espèce :

$$Q_m^n(x) = (-1)^n (1-x^2)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} Q_m(x) \quad (2.58)$$

Les fonctions associées de Legendre de première et seconde espèces vérifient l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0 \quad (2.59)$$

Les polynômes orthogonaux sont très employés dans la recherche de solutions analytiques. Cependant, dans ces travaux de thèse, il est apparu que les développements en série de Fourier étaient souvent plus efficaces. Par exemple pour le problème inverse élastique tridimensionnel traité au chapitre 9, les signaux sont développés en série de Fourier non seulement selon la coordonnée angulaire θ mais aussi selon l'axe du cylindre z , alors qu'un développement en série de Legendre aurait également été opportun. Cela est dû à la grande simplicité des équations résultant des séries de Fourier. Cependant dans ce cas précis, les polynômes de Legendre ont également été utilisés pour identifier les termes d'amorce (où premiers termes) par comparaison aux termes courants dans les développements.

2.3. Fonctions harmoniques et bi-harmoniques

L'étude des fonctions harmoniques est majeure en physique en générale. En effet la théorie des potentiels harmoniques recouvre presque tous les champs de la physique, en particulier l'élasticité. Ainsi, les fonctions harmoniques (et bi-harmoniques) seront intensivement utilisées dans les développements analytiques inverses qui suivent. Nous posons les systèmes de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique comme la figure 2.1 le précise.

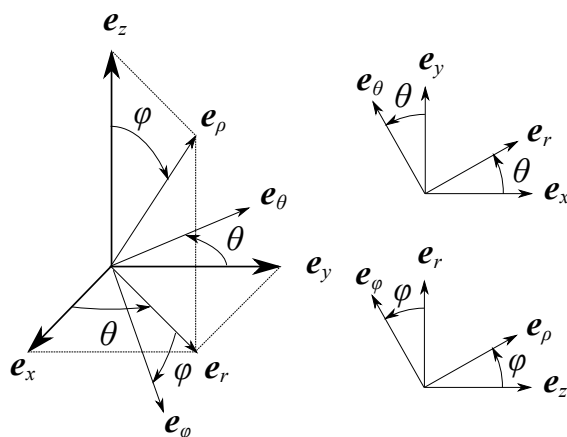


FIGURE 2.1 – Système de coordonnées

Définition 12 On dit qu'une fonction de $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ à valeur dans \mathbb{R} est harmonique si elle vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = 0 \quad (2.60)$$

En particulier nous avons en dimension 2 l'équation de Laplace écrite respectivement en coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$\begin{cases} \Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \Delta f(r, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \end{cases} \quad (2.61)$$

En particulier nous avons en dimension 3 l'équation de Laplace écrite respectivement en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques :

$$\begin{cases} \Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \Delta f(r, \theta, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \Delta f(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\varphi)} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot(\varphi)}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2.62)$$

2.3.1. Harmoniques sphériques

L'équation de Laplace en sphérique est simplifiée, si l'on cherche la solution sous forme $f_n(\rho, \varphi) \exp(in\theta)$. Par ailleurs il convient de poser le changement de variable $x = \cos(\varphi)$, il est alors obtenu que la fonction inconnue $f_n(\rho, x)$ doit vérifier l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f_n}{\partial \rho} - \frac{n^2 f_n}{\rho^2(1-x^2)} - \frac{2x}{\rho^2} \frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{1-x^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} = 0 \quad (2.63)$$

Cette dernière équation peut se résoudre en cherchant les solutions de la forme $f_n(\rho, x) = \rho^m f_{n,m}(x)$ ou de la forme $f_n(\rho, x) = (1/\rho^{m+1})f_{n,m}(x)$, il est alors obtenu, dans les deux cas, l'équation différentielle sur $f_{n,m}(x)$:

$$(1-x^2)f_{n,m}''(x) - 2xf_{n,m}'(x) + \left(m(m+1) - \frac{n^2}{1-x^2}\right) f_{n,m}(x) = 0 \quad (2.64)$$

Il s'agit de l'équation de Legendre associée (2.59), dont les solutions sont connues et sont les fonctions de Legendre de première et seconde espèce. Dans le cas particulier $n = 0$ cette équation se réduit à l'équation de Legendre (2.53) et dont les solutions sont les polynômes et les fonctions de Legendre. Ainsi nous définissons les harmoniques sphériques.

Définition 13 Les fonctions suivantes sont harmoniques en coordonnées sphériques et sont appelées harmoniques sphériques :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} \rho^m P_m^n(\cos(\varphi)) \exp(in\theta) \\ \rho^m Q_m^n(\cos(\varphi)) \exp(in\theta) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\rho^{m+1}} P_m^n(\cos(\varphi)) \exp(in\theta) \\ \frac{1}{\rho^{m+1}} Q_m^n(\cos(\varphi)) \exp(in\theta) \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Du fait que l'équation est linéaire, il est possible de sommer ces solutions, ainsi les exponentielles peuvent être remplacées par des cosinus ou des sinus.

2.3.2. Fonctions harmoniques en cylindrique

Il est évidemment possible d'écrire les harmoniques sphériques en coordonnées cylindriques, on obtient alors les fonctions harmoniques suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} (r^2 + z^2)^{\frac{m}{2}} P_m^n \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \exp(in\theta) \\ (r^2 + z^2)^{\frac{m}{2}} Q_m^n \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \exp(in\theta) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{m+1}{2}}} P_m^n \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \exp(in\theta) \\ \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{m+1}{2}}} Q_m^n \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \exp(in\theta) \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Cependant, il est difficile de voir sous cette forme qu'il s'agit (dans le cas des fonctions de première espèce) de polynômes en r et z . Ainsi nous présentons également des fonctions harmoniques, dérivées de celles-ci dont l'expression polynomiale est explicitée. Pour cela nous utilisons le fait que si $f_n(r, z) \exp(in\theta)$ est harmonique alors la fonction $f_{n+1}(r, z) \exp(i(n+1)\theta)$ définie par (2.67) l'est aussi :

$$f_{n+1}(r, z) = \frac{\partial f_n(r, z)}{\partial r} - \frac{nf_n(r, z)}{r} \quad (2.67)$$

Ainsi on trouve en prenant $f_0(r, z)$ (pour $n = 0$) l'une des fonctions harmoniques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(r, z) = (r^2 + z^2)^k P_{2k} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \\ \text{ou} \\ f_0(r, z) = (r^2 + z^2)^{\frac{2k+1}{2}} P_{2k+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \end{array} \right. \quad (2.68)$$

que $X_k^n(r, z) \exp(in\theta)$ et $Y_k^n(r, z) \exp(in\theta)$ sont des fonctions harmoniques polynômiales en r et z :

$$0 \leq n \leq N, \quad n \leq k \leq K \left\{ \begin{array}{l} X_k^n(r, z) = \sum_{j=0}^{k-n} x_{k,j}^n r^{2(k-j)-n} z^{2j} \\ Y_k^n(r, z) = \sum_{j=0}^{k-n} y_{k,j}^n r^{2(k-j)-n} z^{2j+1} \end{array} \right. \quad (2.69)$$

où :

$$\begin{cases} 0 \leq n \leq N \\ n \leq k \leq K \\ 0 \leq j \leq k - n \end{cases}, \begin{cases} x_{k,j}^n = \frac{(-1)^{j+k}(2k)!}{2^{2(k-j)-n}(k-n-j)!(2j)!(k-j)!} \\ y_{k,j}^n = \frac{2k+1}{2j+1} x_{k,j}^n \end{cases} \quad (2.70)$$

Les polynômes en r et z , $X_k^n(r, z)$ et $Y_k^n(r, z)$ sont très utiles pour la résolution de problèmes d'élasticité en coordonnées cylindriques, ils sont par exemple utilisés au chapitre 9, pour l'obtention de certains termes.

Par ailleurs, en cherchant la solution de l'équation de Laplace sous la forme $f(r)g(z)\exp(in\theta)$ on obtient facilement les solutions suivantes :

$$\forall \delta \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z} \begin{cases} J_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) \\ Y_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) \\ I_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) \\ K_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) \end{cases} \quad (2.71)$$

Il est assez aisé de voir que les fonctions suivantes sont bi-harmoniques :

$$\begin{array}{l|l} rJ'_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) & J_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) \\ rY'_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) & Y_n(\delta r) \exp(\pm \delta z) \exp(in\theta) \\ rI'_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) & I_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) \\ rK'_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) & K_n(\delta r) \exp(\pm i\delta z) \exp(in\theta) \end{array} \quad (2.72)$$

Ce type de solutions est utilisé au chapitre 9, pour l'obtention des termes courants.

Les solutions sont cherchées le plus souvent sous forme de séries, mais des formes intégrales sont également répandues dans la recherche de facteurs d'intensité de contrainte pour les problèmes de fissuration où les problèmes de contact, ou plus généralement dans le champs de la physique mathématique pour tous les problèmes de valeurs frontières mixtes dans la théorie des potentiels comme le montre le livre de Sneddon (1966). Cette méthode fait intervenir la résolution d'équations intégrales duales dont on trouve un grand nombre d'exemples dans les livres de Sneddon (1966), Sneddon and Lowengrub (1969), Mandal and N. (1999) ou encore le handbook de Polyanin and Manzhirov (2008). On cherche à identifier un potentiel harmonique $F(r, \theta, z)$ en introduisant un potentiel de couche $f(\delta)$ grâce à la formulation :

$$F(r, \theta, z) = \left(\int_0^{+\infty} f(\delta) J_\alpha(\delta r) \exp(\delta z) d\delta \right) \exp(in\theta) \quad (2.73)$$

2.3.3. Fonctions harmoniques et bi-harmoniques en deux dimensions

Il est clair que l'équation de Laplace peut être résolue en considérant des solutions du type $f_n(r)\exp(in\theta)$, car l'équation se simplifie en :

$$f_n''(r) + \frac{f_n'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} f_n(r) \quad (2.74)$$

Cette dernière équation admet pour solution générale ($n \geq 1$) $f_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$ et pour $n = 0$ $f_0 = A \ln(r)$. Ainsi les fonctions harmoniques bi-dimensionnelles sont :

$$f(r, \theta) = A + A_0 \ln(r) + \sum_{n \geq 1} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \exp(in\theta) \quad (2.75)$$

De la même manière les fonctions bi-harmoniques sont :

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= A + A_{01} \ln(r) + A_{02} r^2 + A_{03} r^2 \ln(r) + (A_{01} r \ln(r) + A_{02} r + A_{03} r^{-1} + A_{04} r^3) \exp(i\theta) \\ &+ \sum_{n \geq 2} (A_n r^n + B_n r^{-n} + A_n r^{n+2} + D_n r^{-n+2}) \exp(in\theta) \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.4. Intégrales de frontière

Les solutions se présentant sous forme d'intégrales de frontière n'ont pas été utilisées dans ces travaux. La raison en est que dans le cadre des méthodes inverses, nous cherchons à étendre par continuité la solution au-delà de la frontière. Dans le cas d'intégrales de frontière ce prolongement ne permet pas, en général, de connaître les champs hors du domaine d'intégration. Nous donnons un exemple emprunté à l'élasticité plane pour nous en convaincre. Supposons que nous mesurons les composantes σ_{rr}^m et $\sigma_{r\theta}^m$ du tenseur des contraintes dans un disque élastique noté \mathcal{D} de rayon R_s , supposons que cette mesure soit faite au rayon $R_m < R_s$ (mesure sur tout un cercle noté $\partial\mathcal{C}$). On définit \mathcal{C} le disque de rayon R_m . Nous verrons au chapitre 3 que les contraintes peuvent s'écrire dans \mathcal{D} sous la forme :

$$\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = \phi'(z) - e^{2i\theta}\psi'(z) - \bar{z}e^{2i\theta}\phi''(z) + \overline{\phi'(z)} \quad (2.77)$$

où les potentiels $\phi'(z)$ et $\psi'(z)$ sont des fonctions holomorphes définies sur \mathcal{D} donc a fortiori sur \mathcal{C} (la définition de l'holomorphic est précisée au chapitre 3). Nous avons un très puissant outil d'analyse complexe à notre disposition présenté par Vekua (1964) : le problème de Cauchy :

Théorème 5 Soit $\partial\mathcal{C}$ un arc paramétrique orienté de classe C^1 et soit $g : \begin{cases} \partial\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \rightarrow g(t) \end{cases}$ une fonction définie sur la ligne $\partial\mathcal{C}$ et intégrable sur cette ligne. Alors les conditions (i) et (ii) sont équivalentes :

$$(i) : \begin{cases} f(z) \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C} - \partial\mathcal{C} \\ \lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = C \\ \forall t \in \partial\mathcal{C}, f(t^+) - f(t^-) = g(t) \end{cases}$$

$$(ii) : f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(t)}{t-z} dt + C$$

Nous cherchons à utiliser le théorème de Cauchy, pour cela nous devons faire apparaître une discontinuité de fonction holomorphe. Cependant la fonction $z \rightarrow \overline{\phi'(z)}$ n'est pas holomorphe. On pose donc la fonction holomorphe sur l'extérieur du domaine \mathcal{C} (notée $\overline{\phi'} = \mathbb{C} - \mathcal{C}$) :

$$\overline{\phi'} : z \rightarrow \overline{\phi'\left(\frac{R_m^2}{z}\right)} \quad (2.78)$$

On note z^+ un élément $z \in \mathcal{C}$ tel que $|z| \rightarrow R_m$ par valeurs inférieures. On note $z^- = R_m^2/\bar{z}^+$. Ainsi nous avons $|z^-| \rightarrow R_m$ par valeurs supérieures. Par ailleurs, nous avons $\sigma_{rr}(z^+) = \sigma_{rr}^m$ et $\sigma_{r\theta}(z^+) = \sigma_{r\theta}^m$. Ainsi nous pouvons écrire :

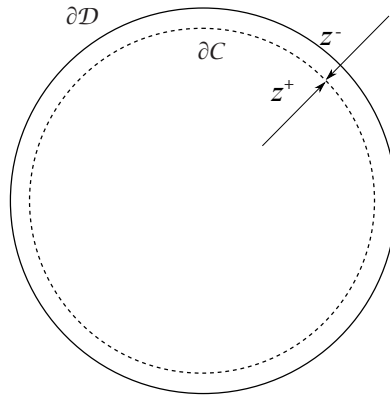


FIGURE 2.2 – Cercle de discontinuité

$$\sigma_{rr}^m - i\sigma_{r\theta}^m = \phi'(z^+) - \left(\frac{z^+}{R_m}\right)^2 \psi'(z^+) - z^+ \phi''(z^+) + \overline{\phi'}(z^-) \quad (2.79)$$

Posons la fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \partial\mathcal{C}$ suivante :

$$\Omega : z \rightarrow \begin{cases} \phi'(z) - \frac{z^2}{R_m^2} \psi'(z) - z\phi''(z) & z \in \mathcal{C} - \partial\mathcal{C} \\ -\bar{\phi}'(z) & z \in \bar{\mathcal{C}} - \partial\mathcal{C} \end{cases} \quad (2.80)$$

Nous avons immédiatement :

$$\Omega(z^+) - \Omega(z^-) = \sigma_{rr}^m - i\sigma_{r\theta}^m \quad (2.81)$$

Étudions le comportement à l'infini de $\Omega(z)$. $\phi'(z)$ est bien défini sur \mathcal{C} , ainsi $\phi'(0) = a_0 \in \mathbb{C}$. Donc le comportement à l'infini de $\Omega(z)$ est :

$$\Omega(z) \Big|_{|z| \rightarrow +\infty} = -\bar{\phi}'(z) = -\overline{\phi' \left(\frac{R_m^2}{\bar{z}} \right)} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} -\bar{a}_0 \quad (2.82)$$

D'où :

$$\Omega(z) + \bar{a}_0 \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0 \quad (2.83)$$

Or on a d'après ce qui précède :

$$(\Omega + \bar{a}_0)(z^+) - (\Omega + \bar{a}_0)(z^-) = \sigma_{rr}^m - i\sigma_{r\theta}^m \quad (2.84)$$

Il s'agit donc d'un problème de Cauchy, nous avons donc le résultat suivant :

$$\Omega(z) = -\bar{a}_0 + \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathcal{C}} \frac{\sigma_{rr}^m(t) - i\sigma_{r\theta}^m(t)}{t - z} dt \quad (2.85)$$

De cette équation nous déduisons $-\bar{\phi}'(z)$ sur $\bar{\mathcal{C}} - \partial\mathcal{C}$ donc $\phi'(z)$ sur $\mathcal{C} - \partial\mathcal{C}$ grâce à la définition de $\bar{\phi}'(z)$ (2.78). Nous obtenons $\phi''(z)$ par simple dérivation et nous déduisons alors $\psi'(z)$ grâce à la définition de $\Omega(z)$ (2.80). Nous en déduisons alors le champs de contrainte partout dans \mathcal{C} grâce à l'équation (2.77).

Ainsi nous pouvons écrire le problème d'élasticité comme une intégrale de frontière à noyau singulier dont l'intégrande fait intervenir les contraintes mesurées au rayon R_m . Cependant, il est clair que si l'on cherche à étendre cette solution par continuité vers $\partial\mathcal{D}$, nous n'obtenons que $-\bar{\phi}'(z)$, qui n'est autre que $\phi'(z)$ dans \mathcal{C} . Fondamentalement cela est du au fait qu'une intégrale de frontière ne traduit que la valeur des champs dans le domaine d'intégration, ceci s'exprime de manière analogue à la propriété de la valeur moyenne pour les fonctions harmoniques. Ainsi des développements en série ont été préférés à ce genre de solutions, qui conduisent dans le cas des problèmes inverses à une impasse.

PART A
MÉTHODES INVERSES EN DEUX DIMENSIONS

CHAPITRE III

THERMO-ELASTICITÉ BIDIMENSIONNELLE

Dans ce chapitre, nous exposons les principaux résultats de l'élasticité plane isotrope. Les développements sont faits dans le corps des complexes \mathbb{C} conformément à la théorie de Muskhelishvili (1977), réexposée plus tard par Lu (1995).

Par ailleurs nous démontrons l'équation de la chaleur pour un corps tournant à partir d'un simple équilibre énergétique. Nous faisons cette démonstration, car il arrive souvent que les termes liés à la rotation du cylindre soient omis dans la littérature.

Nous démontrons, en compléments, les résultats dans le cas isotherme, principalement parce que par ce biais nous prouvons que la théorie des potentiels n'est pas une condition suffisante du type : tout potentiel vérifiant certaines conditions donne une solution du problème d'élasticité, mais une équivalence : la solution d'un problème d'élasticité linéaire peut toujours être exprimée en fonction de potentiels. Ceci résulte principalement du Lemme de Poincaré et du théorème de conjugué harmonique. Par ailleurs la preuve fait intervenir des théorèmes et propriétés fondamentales sur les fonctions holomorphes, qui seront utiles au chapitre 4. En complément le cours d'analyse complexe de Yger (2001) pourra être consulté avec profit. Ce chapitre peut aisément être passé pour un lecteur habitué à utiliser ces outils.

3.1. Résultat de Kolosov-Muskhelishvili

En élasticité plane dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, si la température s'écrit $T_0 \times (1 + \Theta)$ (sachant que T_0 est la température initiale où le corps élastique est libre de contraintes) les champs de contrainte et de déplacement s'écrivent sous forme de potentiels holomorphes (cf Sneddon and Lowengrub (1969)) :

$$\forall z \in \Omega, \begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right) - \gamma \Theta(z, \bar{z}) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2 \left(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) \right) - \gamma \int \frac{\partial \Theta}{\partial z} d\bar{z} \\ 2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{\gamma}{2} \int \Theta(z, \bar{z}) dz \end{cases} \quad (3.1)$$

Le coefficient γ vaut $2(1 + \nu)\alpha T_0/(1 - \nu)$ en déformations planes et $2(1 + 2\nu)\alpha T_0$ en contraintes planes et le coefficient κ vaut $3 - 4\nu$ en déformations planes et $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ en contraintes planes, où ν est le coefficient de Poisson et α le coefficient de dilatation thermique. Ce résultat est extrêmement utile, et sert à la résolution du problème inverse élastique du chapitre 4. Cependant il est parfois judicieux de d'abord traiter le problème sous forme isotherme ($\Theta(z, \bar{z}) = 0$), puis de superposer un autre problème où l'on cherche les déplacements liés au gradient de température. Cette démarche a été adoptée pour les chapitres 4 (élasticité isotherme), 5 (détermination du champ de température) et 7 (couplage par superposition). Ceci est rigoureusement équivalent et conduit aux mêmes calculs, la superposition permet simplement de mieux discerner les efforts élastiques et les efforts thermiques, ce qui est intéressant pour calculer la fatigue thermique à la surface des cylindres de travail.

3.2. Equation de Navier avec second membre

Comme nous venons de le préciser, il sera utile dans la suite de déterminer le champ de déplacement lié à un gradient de température. Il nous faut établir pour cela l'équation de Navier avec un second membre en température, ce qui est équivalent à la formulation complexe (3.1). Nous introduisons le tenseur des déformations thermiques $\underline{\epsilon}^{th}$. Supposons qu'un corps élastique isotrope soit sujet à un champ de température $T(\mathbf{X})$, étant initialement relâché à la température uniforme T_0 , nous avons le système d'équation suivant, reliant le champ de déplacement \mathbf{u} , au tenseur des déformations totales $\underline{\epsilon}$ et au tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$:

$$\begin{cases} \mathbf{div} \underline{\sigma} = 0 & \text{(Equation d'équilibre)} \\ \underline{\sigma} = \lambda \text{tr} [\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^{th}] \mathbb{I} + 2\mu (\underline{\epsilon} - \underline{\epsilon}^{th}) & \text{(Loi de comportement)} \\ \underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \mathbf{u} + {}^t \underline{\nabla} \mathbf{u}) & \text{(Equation de compatibilité)} \\ \underline{\epsilon}^{th} = \alpha (T(\mathbf{X}) - T_0) \mathbb{I} & \text{(Comportement thermique)} \end{cases} \quad (3.2)$$

En réinjectant l'équation de compatibilité et la loi de comportement dans l'équation d'équilibre, il vient très facilement l'équation de Navier avec un second membre en température :

$$\lambda \nabla [\text{div} \mathbf{u}] + \mu \mathbf{div} [\underline{\nabla} \mathbf{u} + {}^t \underline{\nabla} \mathbf{u}] = \alpha(3\lambda + 2\mu) \nabla T \quad (3.3)$$

3.3. Equation de la chaleur pour un solide tournant à vitesse constante

Dans cette section nous proposons d'exhiber une forme générale de l'équation de la chaleur sans source. En effet, la tôle plastifiée produit de la chaleur, qui est diffusée dans le cylindre, en revanche ce dernier ne produit pas de chaleur lui-même, nous considérons dès lors l'équation sans terme de source.

Le premier principe de la thermodynamique et la loi de Fourier donnent sur un volume arbitraire Ω , défini comme une tranche cylindrique d'épaisseur infinitésimale et de frontière $\partial\Omega$ (de normale \mathbf{n}).

$$\iint_{\partial\Omega} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho c_p \frac{dT}{dt} d\tau \quad (3.4)$$

où λ ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) est la conductivité thermique, ρ (kg/m^3) la densité et c_p ($\text{W}\cdot\text{s}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) la capacité thermique et sont a priori des fonctions de la température T . Par ailleurs dT/dt est la dérivée complète par rapport à t , en effet les variables d'espace dépendent de t et donc $dT/dt \neq \partial T/\partial t$. Par ailleurs si l'on note \mathbf{v} la vitesse des particules à la frontière nous avons :

$$\iint_{\partial\Omega} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iint_{\partial\Omega} \rho c_p T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.5)$$

Le théorème de Stokes donne :

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(\lambda \nabla T) dV = \iiint_{\Omega} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV + \iiint_{\Omega} \text{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) dV \quad (3.6)$$

Nous avons choisi Ω arbitrairement, cela nous autorise à écrire l'égalité précédente sans l'intégration sur le volume, nous obtenons donc l'équation de la chaleur dans le cas général :

$$\text{div}(\lambda \nabla T) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) \quad (3.7)$$

Nous cherchons à développer l'équation (3.7), pour l'écrire en coordonnées polaires. Nous avons les formules de calcul formel suivantes :

$$\begin{cases} \text{div}(f \mathbf{X}) = f \text{div}(\mathbf{X}) + \mathbf{X} \cdot \nabla f \\ \text{div}(\nabla f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

Nous en déduisons :

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = \lambda \operatorname{div}(\nabla T) + (\nabla T)^2 \frac{d\lambda}{dT} \quad (3.9)$$

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \right) \quad (3.10)$$

Et :

$$\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) = \rho c_p T \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho c_p T) \quad (3.11)$$

$$\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) = \rho c_p T \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\rho c_p \nabla T + T \nabla \rho c_p + T c_p \nabla \rho) \quad (3.12)$$

$$\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) = \rho c_p T \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \left(\rho c_p + T \rho \frac{dc_p}{dT} + T c_p \frac{d\rho}{dT} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (3.13)$$

Dans le cas d'un mobile tournant à la vitesse angulaire ω , nous avons la vitesse de la particule au rayon r : $\mathbf{v} = \omega r \mathbf{e}_\theta$ (notons que ω est supposé constant).

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \omega \operatorname{div}(r \mathbf{e}_\theta) = 0 \quad (3.14)$$

Nous obtenons pour le second terme de (3.7) :

$$\operatorname{div}(\rho c_p T \mathbf{v}) = \omega \left(\rho c_p + T \rho \frac{dc_p}{dT} + T c_p \frac{d\rho}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (3.15)$$

En combinant les équations (3.7), (3.10) et (3.15) nous obtenons :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \omega \left(\rho c_p + T \rho \frac{dc_p}{dT} + T c_p \frac{d\rho}{dT} \right) \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (3.16)$$

Cette équation constitue l'équation de la chaleur complète écrite en polaire pour un corps 2D tournant autour de son origine à une vitesse angulaire ω constante. Dans le chapitre 5, nous considérons des propriétés thermiques indépendantes de la température¹. Ceci simplifie grandement l'écriture de l'équation de la chaleur, qui devient simplement :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (3.17)$$

où l'on a posé $D = \lambda / \rho c_p$ (m²/s) la diffusivité thermique.

3.4. Famille de solutions

Nous exhibons une famille de solutions de cette équation très utile dans la pratique. Pour ce faire nous développons en série de Fourier, puis nous séparons les variables. En effet, la solution est à chaque instant 2π -périodique selon θ et peut donc être développée en série de Fourier (cf chapitre 2) :

$$T(r, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n(r, t) \exp(in\theta) \quad (3.18)$$

Le n ième coefficient de Fourier est recherché comme une fonction à variables séparables :

$$F_n(r, t) = f_n(r) g_n(t) \quad (3.19)$$

1. et une vitesse de rotation indépendante du temps au moins sur la durée d'un tour, ce qui revient à dire que l'évolution temporelle de la vitesse de rotation est faible devant la durée d'un tour

D'où en reportant dans (3.17) :

$$g_n(t) \left(f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} f_n(r) \right) = \frac{f_n(r)}{D} (g_n'(t) + i\omega n g_n(t)) \quad (3.20)$$

La condition $T(r, \theta, t) > 0$ est vérifiée (T exprimée en Kelvin) donc nous pouvons diviser par T , ce qui donne :

$$\left(f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} f_n(r) \right) \frac{1}{f_n(r)} = \frac{1}{D} \frac{1}{g_n(t)} (g_n'(t) + i\omega n g_n(t)) \quad (3.21)$$

Les deux termes égaux sont chacun des fonctions d'une seule variable (indépendantes l'une de l'autre), il existe donc un nombre complexe C tel que :

$$\begin{cases} f_n''(r) + \frac{1}{r} f_n'(r) - \left(C + \frac{n^2}{r^2} \right) f_n(r) = 0 \\ g_n'(t) + (i\omega n - DC) g_n(t) = 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f_n(r) = \gamma J_n(\sqrt{-C}r) \\ g_n(t) = \exp((DC - i\omega n)t) \end{cases} \quad (3.23)$$

où J_n est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n définie (cf chapitre 2) pour un argument complexe et γ est un nombre complexe arbitraire.

En introduisant $\tau = -1/(DC - i\omega n)$ nous obtenons la solution de (3.17) suivante :

$$\gamma J_n \left(\sqrt{\frac{1}{D\tau} - \frac{i\omega n}{D}} r \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \exp(i n \theta) \quad (3.24)$$

3.5. Conclusion

Dans les cas d'application au laminage de l'acier, la variation des coefficients thermiques n'est pas suffisante pour que l'approximation de les supposer indépendants de la température soit critique, ceci est vérifié au chapitre 5. Cependant bien que ceci n'ait pas été abordé dans ces travaux de thèse, il est possible de linéariser l'équation de la chaleur même si les coefficients thermiques dépendent de la température, grâce au calcul asymptotique. L'idée consiste à écrire les coefficients thermiques sous la forme $D(T) = D_0(1 + \epsilon_0(T - T_0)/T_0)$ où T_0 est le champ de température que nous aurions si la diffusivité thermique était constante et égale à D_0 et le paramètre ϵ_0 est sans dimension et tel que $\epsilon_0 \ll 1$. Nous pouvons dès lors linéariser l'équation de la chaleur en écrivant la température sous forme $T = T_0 + \epsilon_0 T_1 + \dots + \epsilon_0^j T_1^j + \dots$ et en identifiant les termes en puissances de ϵ_0 . Cette approche pourra faire l'objet d'une étude particulière sur des cylindres de laminage dont les propriétés thermiques varient plus fortement en fonction de la température, notamment en laminage à chaud avec des refroidissements importants, où une importante gamme de température est atteinte.

Nous concluons ce chapitre avec un commentaire général sur la théorie des potentiels. Les problèmes d'élasticité sont traités comme le montre l'équation (3.1) grâce à des potentiels holomorphes (donc harmoniques). Le cas des problèmes de thermique est également traité grâce à la théorie des potentiels, mais de manière moins visible. En effet, faisons un parallèle entre l'élasticité et la thermique. Nous pouvons faire une analogie entre la température et le vecteur déplacement. Le gradient de la température n'est autre que le flux de chaleur (à une constante multiplicative près qui sert de loi de comportement), tandis que le tenseur des contraintes n'est autre que la partie symétrique du gradient du vecteur déplacement (à une constante multiplicative près, qui est un tenseur d'ordre quatre, étant la loi de comportement). Une analogie entre le flux de chaleur et le tenseur des contraintes peut donc être faite également. Ainsi de la même manière que l'on peut imposer les déplacements, nous pouvons imposer la température comme condition aux limites, et de la même manière que l'on peut imposer le vecteur contrainte (tenseur contracté avec la normale à la surface) on peut imposer le flux de chaleur contracté avec la normale à la surface.

Cependant la température a un double rôle, celui de déplacement et celui de potentiel scalaire. Cela est du au fait de la faible dimension du problème. Il est remarquable cependant que la dépendance temporelle (variable t

et vitesse de rotation ω) des problèmes thermiques font de ce potentiel une fonction non harmonique. Si le corps est immobile et en régime stationnaire (on parle plutôt d'équilibre pour un problème d'élasticité), alors l'analogie avec le problème d'élasticité s'étend à l'harmonicité du potentiel, comme on peut le voir à l'équation (3.17)

3.6. Compléments

3.6.1. Dans un domaine élastique simplement connexe

Cette section reprend la démonstration très classique du résultat (3.1) énoncé au début de ce chapitre, et pourra être passée rapidement. Ce complément est inséré dans le corps du texte et non dans les annexes, pour que les lecteurs peu familiers de l'analyse complexe puissent trouver les outils essentiels de la théorie des potentiels avant de lire l'utilisation que nous en faisons au chapitre 4. Il n'est cependant pas nécessaire de s'attarder sur ces pages.

Résoudre un problème d'élasticité linéaire isotrope sur un domaine d'élasticité Ω (où l'on néglige les forces de volume et d'inerties) revient à trouver l'unique couple de champs $(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon})$ de contrainte et déformation, vérifiant des conditions en déplacement \mathbf{u}^d sur une partie de la frontière $\partial\Omega_u$ et en vecteur contrainte \mathbf{T}^d sur le restant de la frontière $\partial\Omega_\sigma$ et vérifiant le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{div}(\underline{\sigma}) = \mathbf{0} & \text{Equation d'équilibre} \\ \underline{\sigma} = \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon}) \cdot \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \underline{\epsilon} & \text{Loi de comportement isotrope} \\ \underline{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla(\mathbf{u}) + {}^t\nabla(\mathbf{u})) & \text{Equation de compatibilité} \\ (x, y, z) \in \partial\Omega_u, \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_d(x, y) & \text{Conditions aux limites en déplacement} \\ (x, y, z) \in \partial\Omega_\sigma, \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_d(x, y) & \text{Conditions aux limites en contraintes} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Si l'on travaille en déformation plane le tenseur des déformations vérifie :

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0 \quad (3.26)$$

La loi de comportement isotrope devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda\epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = \lambda\epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \end{array} \right. \Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (3.27)$$

En revanche si l'on travaille en contraintes planes le tenseur des contraintes de Cauchy vérifie :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.28)$$

Et la loi de comportement impose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{yy} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{zz}) \\ \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{zz} + \lambda(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{array} \right. \Rightarrow \epsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \quad (3.29)$$

D'où en posant $\lambda^* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = (\lambda^* + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda^*\epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = \lambda^*\epsilon_{xx} + (\lambda^* + 2\mu)\epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Les systèmes (3.27) et (3.30) ont exactement la même structure, ainsi résoudre un problème en déformations planes ou en contraintes planes revient à résoudre les mêmes équations, il suffit de considérer λ en déformations planes et λ^* en contraintes planes.

Nous introduisons quelques concepts bien connus des mathématiques qui sont au coeur de la démonstration du résultat de Muskhelishvili (1977).

Définition 14 En dimension 2, une forme linéaire est une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . L'espace des formes linéaires est engendré par :

$$dx : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) \rightarrow h_1 \end{array} \right. \quad dy : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) \rightarrow h_2 \end{array} \right.$$

Définition 15 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , on appelle forme différentielle de classe C^k toute application de classe C^k de Ω dans l'espace des formes linéaires \mathcal{F} telle que :

$$w : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{F} \\ (x, y) \rightarrow P(x, y)dx + Q(x, y)dy \end{array} \right.$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont de classe C^k

Définition 16 Soit f une application de classe C^k de Ω (ouvert de \mathbb{R}^2) dans \mathbb{C} . On appelle différentielle de f la forme différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Nous énonçons le Lemme de Poincaré qui sera le point de départ de la démonstration, car il permet de justifier l'existence du potentiel d'Airy :

Théorème 6 Si Ω est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et $w(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une forme différentielle de classe C^1 telle que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

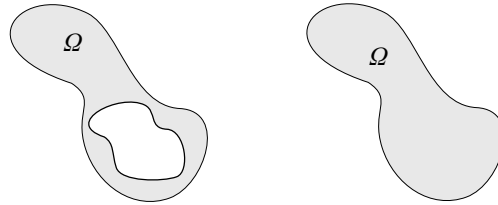
Alors w dérive d'un potentiel, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f(x, y)$ de Ω de classe C^2 telle que :

$$w = df$$

où :

$$P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Un ouvert simplement connexe se comprend comme un ouvert connexe (en un seul morceau) sans trou. La figure 3.1 représente un ouvert simplement connexe et un ouvert non simplement connexe.



Ouvert non simplement connexe Ouvert simplement connexe

FIGURE 3.1 – Ouvert simplement connexe

Nous définissons les deux formes différentielles suivantes :

$$\begin{cases} w_1(x, y) = -\sigma_{xy}dx + \sigma_{xx}dy \\ w_2(x, y) = \sigma_{yy}dx - \sigma_{xy}dy \end{cases} \quad (3.31)$$

L'équation d'équilibre devient en déformations ou en contraintes planes :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (3.32)$$

Ainsi d'après le Lemme de Poincaré w_1 et w_2 dérivent de potentiels A et B :

$$\begin{cases} dB = \frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy = -\sigma_{xy}dx + \sigma_{xx}dy \\ dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = \sigma_{yy}dx - \sigma_{xy}dy \end{cases} \quad (3.33)$$

De plus nous avons :

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \quad (3.34)$$

Ainsi d'après le Lemme de Poincaré $A dx + B dy$ dérive d'un potentiel U :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = A dx + B dy \quad (3.35)$$

D'où l'existence du **potentiel en contraintes d'Airy** défini par :

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.36)$$

Ce résultat est essentiel dans la mesure où l'existence d'un tel potentiel est assuré, la recherche de solutions analytiques portera sur le potentiel lui-même et non sur les champs de contrainte ou de déplacement. Nous démontrons des propriétés fortes du potentiel d'Airy, afin que cette recherche de solution soit la plus ciblée possible. Nous avons l'équation de Navier, qui n'est rien d'autre que l'équation d'équilibre, où l'on a réinjecté la loi de comportement et l'équation de compatibilité :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) + \mu \Delta u_x = 0 \\ (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) + \mu \Delta u_y = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

D'où en dérivant par rapport à x la première ligne et par rapport à y la seconde :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} \right) + \mu \Delta \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\ (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} \right) + \mu \Delta \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

En sommant les deux équations et en remarquant que les termes en facteurs de $(\lambda + \mu)$ sont des dérivées en x et en y de Laplaciens respectivement de u_y et u_x , puis en intervertissant les Laplaciens avec les dérivations, nous obtenons l'équation de Beltrami-Michell :

$$\Delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.39)$$

Par ailleurs, en écrivant la loi de comportement dans laquelle le tenseur des déformations est écrit en fonction des déplacements via l'équation de compatibilité nous obtenons :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (3.40)$$

D'où :

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (3.41)$$

Or il suit immédiatement de la définition du potentiel d'Airy U (3.36) que :

$$\Delta U = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \quad (3.42)$$

Ainsi grâce à (3.41) nous avons le résultat fondamental que le potentiel d'Airy est bi-harmonique, soit :

$$\Delta\Delta U = 0 \quad (3.43)$$

Nous avons vu au chapitre 2 des fonctions bi-harmoniques du plan. L'étude de certains problèmes est ainsi aisée par la recherche directe d'un potentiel d'Airy bi-harmonique comme série de ces fonctions (2.76). Cependant les outils d'analyse complexe, le lien entre l'harmonicité d'une part et l'holomorphicité d'autre part, ainsi que la résolution d'équations intégrales complexes à noyau singulier proposée par Muskhelishvili (1953) et Vekua (1964), conduisent à considérer un changement de variable complexe $z = x + iy$ pour profiter de ces puissants outils. Nous avons donc pour toute fonction $f(x, y)$ du plan \mathbb{R}^2 une fonction associée $\tilde{f}(z, \bar{z})$ (le symbole tilde sera omis par la suite pour des raisons de lisibilité) du plan complexe \mathbb{C} telle que :

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = \tilde{f}(z, \bar{z}) \quad (3.44)$$

Nous obtenons grâce à un calcul différentiel simple :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{f}(z, \bar{z})}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (3.45)$$

En considérant $f(x, y) = x + iy$ et $f(x, y) = x - iy$ il apparaît que z et \bar{z} sont à entendre comme des variables indépendantes au sens de cette dérivation (3.45). Par ailleurs nous définissons les formes différentielles complexes à partir de la base de forme différentielle réelles dx et dy :

Définition 17 *L'espace des formes linéaires de \mathbb{C} dans \mathbb{C} est engendré par les deux formes linéaire suivantes :*

$$dz = dx + idy \quad d\bar{z} = dx - idy \quad (3.46)$$

Par ailleurs nous avons besoin de définir une forme différentielle complexe d'une fonction.

Définition 18 *Soit f une application de classe C^k de Ω (ouvert de \mathbb{R}^2 assimilé à \mathbb{C}) dans \mathbb{C} . On appelle différentielle complexe de f la forme différentielle :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

L'équation de Laplace (2.61) dans \mathbb{R}^2 définie au chapitre 2 devient pour le double Laplacien du potentiel d'Airy :

$$\Delta\Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (3.47)$$

Cependant en considérant le changement de variable et la relation (3.45) on obtient dans le corps des complexes :

$$\Delta\Delta U = 16 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} \quad (3.48)$$

On introduit l'outil majeur de la résolution des problèmes d'élasticité plans isotropes, la notion d'holomorphicité.

Définition 19 *On dit qu'une fonction $f(z)$ de $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans \mathbb{C} est holomorphe si et seulement si elle est de classe C^1 sur Ω , et si pour tout $z \in \Omega$ la différentielle complexe de f s'écrit sous la forme :*

$$df = z \mapsto a(z) dz \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (3.49)$$

Les exemples types de fonctions holomorphes sur \mathbb{C} sont $z \mapsto z^n$ et sur $\mathbb{C}^* \quad z \mapsto 1/z^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Il est aisé de constater que si $f(z)$ est une fonction holomorphe, alors sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des fonctions harmoniques de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Il existe une sorte de réciproque, il s'agit du deuxième théorème fondamental que nous utilisons : le théorème du conjugué harmonique.

Théorème 7 Soit Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^2 assimilé à \mathbb{C} et soit P une fonction harmonique de Ω dans \mathbb{R} . Alors, il existe une fonction harmonique Q de Ω dans \mathbb{R} telle que $f = P + iQ$ est holomorphe sur Ω .

Pour utiliser ce dernier résultat, nous considérons le potentiel d'Airy U bi-harmonique, et nous introduisons le potentiel auxiliaire harmonique défini par :

$$P = \Delta U \quad (3.50)$$

D'après le théorème du conjugué harmonique il existe un autre potentiel Q harmonique tel que $f(z) = P + iQ$ est holomorphe sur Ω . Par ailleurs les fonctions holomorphes sont de classe C^∞ et admettent des primitives sur les ouverts simplement connexes, nous avons en particulier le résultat suivant :

Théorème 8 Soit Ω est un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} et soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur Ω . Alors, il existe une fonction holomorphe $F(z)$ sur Ω telle que

$$F'(z) = f(z)$$

(au sens de la limite du taux d'accroissement)

$$\text{On note } F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

Grâce à ce théorème nous introduisons la primitive holomorphe $\phi(z)$ de la fonction holomorphe $f(z)$ divisée par quatre :

$$\phi(z) = \frac{1}{4} \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \text{Re}(\phi(z)) + i\text{Im}(\phi(z)) \quad (3.51)$$

Du fait de l'holomorphie de $\phi(z)$ on a de manière triviale :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} (P + iQ) \\ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

D'où en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{Re}(\phi)}{\partial x} = \frac{\partial \text{Im}(\phi)}{\partial y} = \frac{1}{4} P = \Delta U \\ -\frac{\partial \text{Re}(\phi)}{\partial y} = \frac{\partial \text{Im}(\phi)}{\partial x} = \frac{1}{4} Q \end{cases} \quad (3.53)$$

Ainsi, nous avons intégré le potentiel P , mais il s'agit de résoudre un double Laplacien, il convient d'intégrer de nouveau. Nous posons pour cela le potentiel défini dans \mathbb{R}^2 :

$$p(x, y) = U - \text{Re}(\phi)x - \text{Im}(\phi)y \quad (3.54)$$

Un bref calcul de Laplacien donne :

$$\begin{cases} \Delta(\text{Re}(\phi)x) = x\Delta(\text{Re}(\phi)) + 2\frac{\partial \text{Re}(\phi)}{\partial x} = \frac{1}{2}P \\ \Delta(\text{Im}(\phi)y) = y\Delta(\text{Im}(\phi)) + 2\frac{\partial \text{Im}(\phi)}{\partial y} = \frac{1}{2}P \end{cases} \quad (3.55)$$

On obtient donc en se rapelant que $\Delta U = P$:

$$\Delta p = \Delta U - \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}P = 0 \quad (3.56)$$

Ainsi $p(x, y)$ est harmonique, d'après le théorème du conjugué harmonique il existe $q(x, y)$ harmonique de Ω dans \mathbb{R} telle que $\xi(z) = p + iq$ est holomorphe sur Ω . Nous avons donc :

$$\begin{cases} p = \text{Re}(\xi(z)) \\ q = \text{Im}(\xi(z)) \end{cases} \quad (3.57)$$

Ainsi en réécrivant U grâce à (3.54) et en tenant compte de (3.57) on a :

$$U = \operatorname{Re}(\xi(z)) + \operatorname{Re}(\phi(z))x + \operatorname{Im}(\phi(z))y \quad (3.58)$$

Nous avons finalement le résultat en complexes :

$$U = \operatorname{Re}(\xi(z) + \bar{z}\phi(z)) = \frac{1}{2} \left(\xi(z) + \bar{z}\phi(z) + \overline{\xi(z)} + \overline{z\phi(z)} \right) \quad (3.59)$$

Le potentiel d'Airy s'exprime donc comme la partie réelle d'une combinaison de potentiels holomorphes (avec un \bar{z}). Pour achever la démonstration il convient de remarquer qu'en combinant l'équation d'équilibre et la définition du potentiel d'Airy (3.36) en fonction des contraintes on obtient :

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \Delta U \\ 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \Delta U \end{aligned} \quad (3.60)$$

Grâce à la première ligne de (3.53) on a immédiatement :

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\partial \operatorname{Re}(\phi)}{\partial x} \\ 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \frac{\partial \operatorname{Im}(\phi)}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Grâce à une intégration directe on a :

$$\begin{aligned} 2\mu u_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \operatorname{Re}(\phi) + f_1(y) \\ 2\mu u_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \operatorname{Im}(\phi) + f_2(x) \end{aligned} \quad (3.62)$$

En dérivant u_x par y et u_y par x et en sommant les deux équations, il vient que $-f_1'(y) = f_2'(x) = c_0 \in \mathbb{R}$ (il faut tenir compte de la loi de comportement pour le terme de gauche $2\mu\epsilon_{xy} = \sigma_{xy}$, de la définition du potentiel d'Airy (3.36) et de la seconde équation de (3.53)). Ainsi $f_1(y) = -c_0 y + c_1$ et $f_2(x) = c_0 x + c_2$. Ceci correspond à des mouvements de corps rigide que nous annulons.

Ainsi on écrit le vecteur déplacement sous la forme :

$$2\mu(u_x + iu_y) = -2\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \phi(z) \quad (3.63)$$

Il convient d'identifier le terme $\partial U / \partial \bar{z}$, pour cela nous devons dériver par rapport à \bar{z} l'équation (3.59). Nous tenons compte du théorème suivant :

Théorème 9 Si $f(z)$ est une fonction holomorphe, alors il existe une fonction anti-holomorphe $g(\bar{z})$ (même définition qu'une fonction holomorphe mais en intervertissant z et \bar{z}) telle que $g(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Par la suite on ne distingue plus f et g et on écrira directement par abus de notation :

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

Ainsi nous avons :

$$2\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \phi(z) + \overline{\xi'(z)} + z\overline{\phi'(z)} \quad (3.64)$$

On pose la fonction holomorphe $\psi(z)$ suivante :

$$\psi(z) = \xi'(z) \quad (3.65)$$

Donc :

$$2\mu(u_x + iu_y) = \kappa\phi(z) - \overline{\psi(z)} - z\overline{\phi'(z)} \quad (3.66)$$

Où :

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{Déformations planes} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{Contraintes planes} \end{cases} \quad (3.67)$$

Par ailleurs la définition du potentiel d'Airy (3.36) nous donne directement la trace et le déviateur des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= \Delta U = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

En reprenant l'expression (3.59) nous obtenons :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2(\phi'(z) + \phi'(\bar{z})) \\ \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2(\psi'(z) + \bar{z}\phi''(z)) \end{cases} \quad (3.69)$$

Nous exprimons également le résultat final pour un domaine élastique simplement connexe en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2(\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}) \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta}(\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)) \\ 2\mu(u_r + iu_\theta) = e^{-i\theta}(\kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}) \end{cases} \quad (3.70)$$

Ainsi trouver la solution d'un problème d'élasticité plane isotrope revient à identifier deux potentiels holomorphes sur le domaine élastique considéré, qui vérifient les conditions aux limites. Cette approche est particulièrement puissante, car les fonctions holomorphes ont de très bonnes propriétés de régularité, ainsi nous avons :

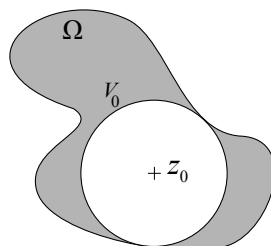
Théorème 10 Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω , alors $f(z)$ est dérivable sur Ω , au sens de la limite du taux d'accroissement :

$$f'(z_0) = \lim_{|z-z_0| \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Les règles de dérivation restent inchangées par rapport au cas réel. Par ailleurs la dérivabilité au sens complexe est beaucoup plus forte qu'au sens réel, elle implique notamment que la fonction est infiniment dérivable sur l'ouvert Ω , et qu'elle est analytique en tout point de Ω , c'est-à-dire que quelque soit z_0 dans Ω il existe un voisinage V_0 de z_0 contenu dans Ω tel que :

$$\forall z \in V_0, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Ceci est illustré dans la Figure suivante :



Développable en série entière autour de z_0

De plus à l'infini toute fonction holomorphe admet un développement asymptotique en série de Laurent (en z^n et $(1/z^n)$)

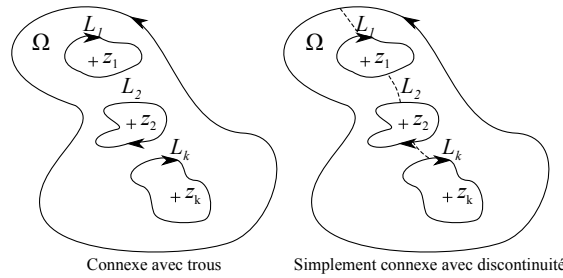
Il existe une manière particulièrement élégante de vérifier les conditions aux limites qu'elles soient en déplacement ou en vecteur contrainte, bien que celle-ci ne soit pas exposée dans ces pages, en effet cela serait fastidieux d'autant plus qu'une alternative beaucoup plus simple (développement en série entière) dans le cas d'un cylindre est utilisée à la place. Néanmoins nous citons le principe (exposé en détail par Lu (1995)), il s'agit d'écrire les potentiels holomorphes sous formes d'intégrales à noyau singulier du type de Cauchy, soit :

$$\begin{cases} \phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\omega(t)}{t-z} dt \\ \psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\bar{t}\omega'(t)}{t-z} dt \end{cases} \quad (3.71)$$

La résolution d'équations intégrales singulières développées par Muskhelishvili (1953) et Vekua (1964) est utilisée comme un puissant outil pour la recherche de solutions analytiques.

3.6.2. Dans un domaine élastique connexe

Nous considérons à présent le cas d'un domaine élastique connexe, mais non-simplement connexe, c'est-à-dire qu'il a des trous. Nous ne développons pas les équations dans ce cas, l'idée principale est de couper le domaine de sorte qu'il n'ait plus de trous, pour justifier l'existence du potentiel d'Airy (car le lemme de Poincaré nécessite cette condition), comme le montre la Figure suivante :



Par ailleurs le théorème de primitive fait intervenir des logarithmes :

Théorème 11 Si Ω un ouvert connexe (non simplement connexe avec k "trous" d'origine z_j avec $j \in \{1; \dots; k\}$) et si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur Ω , alors il existe une fonction holomorphe $F(z)$ sur Ω et il existe $\gamma_j \in \mathbb{C}$ avec $j \in \{1, \dots, k\}$ tels que :

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) + \sum_{j=1}^k \gamma_j \ln(z - z_j)$$

De cette manière on démontre (cf Lu (1995)) que le résultat portant sur les contraintes n'est pas modifié, mais qu'il faut considérer des logarithmes complexes pour les déplacements, qui ne dépendent que de la résultante des efforts appliqués au bord de chaque trou. Il est à noter que les logarithmes complexes sont des fonctions multi-valuées (et donc non-holomorphes). Cela est cohérent avec le fait qu'en analyse réelle, la présence de trous autorise des solutions bi-harmoniques faisant intervenir des logarithmes.

CHAPITRE IV

ÉVALUATION DES CONTRAINTES DE CONTACT

Ce chapitre est une adaptation d'un article publié dans Journal of Materials Processing Technology (Weisz-Patrault et al. (2011)). Il s'agit de la première application industrielle des méthodes présentées aux chapitres 2 et 3. La connaissance des contraintes de contact entre le cylindre de travail et la tôle devient critique pour le laminage moderne à grande vitesse. Dans ce chapitre, une méthode inverse analytique est développée pour déterminer les efforts de contact dans l'emprise en mesurant le tenseur des contraintes, grâce à des fibres optiques, en un point à l'intérieur du cylindre. Contrairement à de nombreuses méthodes inverses, aucune inversion de matrice n'est nécessaire, car l'angle de contact étant extrêmement réduit nous serions conduits à des matrices mal conditionnées. Les méthodes itératives ne sont pas non plus étudiées parce que des temps de calculs très faibles sont recherchés. Cette approche utilise la théorie de l'élasticité isotrope développée dans le chapitre 3, sous l'hypothèse que le problème est isotherme et plan. La solution repose sur des développements en séries entières de fonctions holomorphes. D'autre part, les temps de calcul sont étudiés pour optimiser rapidement les paramètres industriels pendant le procédé de laminage, dans l'idée d'une future boucle d'asservissement. Des simulations de laminage à chaud, à froid et de skinpass (finitions) sont empruntées à la littérature pour démontrer la précision de la présente méthode et la faisabilité de ce nouveau type de capteurs inverses, en prenant en compte les contraintes technologiques du système de mesure par fibres optiques (par exemple la fréquence d'acquisition ou la profondeur limite d'insertion du capteur).

4.1. Introduction

4.1.1. Principes

Le laminage moderne combine des vitesses de rotation plus élevées, des taux de réduction de l'épaisseur du produit plus importants, des nuances d'acier plus dures et de tôles plus fines (pouvant aller à quelques centaines de microns). Ainsi, pour assurer la qualité du produit, particulièrement en termes de constance de l'épaisseur, de bonne planéité et d'absence de défauts de surface, la connaissance des frottements et de la lubrification dans l'emprise devient essentielle. Le contact entre la bande et le cylindre de travail est le lieu de cisaillements, de pressions normales et de conditions de lubrification inconnus. Quelques modèles, qui caractérisent l'interface, en prenant en compte la lubrification ont été proposés ces dernières années par Montmitonnet et al. (2007) mais nécessitent encore une validation expérimentale. D'autre part, très peu d'informations contrôlant la qualité du produit sont accessibles pendant le procédé, ainsi la connaissance des efforts de contact en temps réel serait une avancée technologique majeure permettant l'optimisation des paramètres de laminage (tels que la force de laminage, la lubrification, le taux de refroidissement ou encore la vitesse) via une boucle d'asservissement.

Des capteurs offrent déjà la possibilité de mesurer les contraintes dans l'emprise. Un grand nombre de chercheurs, comme par exemple Jeswiet and Rice (1982) ou plus récemment Liu et al. (2002) et Andersen et al. (2001), ont utilisé des capteurs à aiguille (directement implantées dans le contact). Cependant comme nous l'avons précisé en introduction, la présence de l'aiguille perturbe localement le contact, les écoulements respectifs du métal et du lubrifiant sont modifiés. Par ailleurs des marques importantes sont visibles sur le produit (dues au frottement de l'aiguille), une utilisation industrielle est donc impossible. Plus récemment, Lagergren et al. (2006) a développé un capteur beaucoup plus large que la longueur de l'emprise. Si ce capteur peut permettre de dépasser la difficulté de la perturbation des conditions de frottement, le problème des marques sur le produit n'est pas résolu.

Ainsi une méthode inverse est nécessaire. Stelson (1983) a montré que la déformation élastique du cylindre permet d'évaluer les efforts de contact dans l'emprise (la mesure est faite sous la surface du cylindre). Parmi quelques contributions numériques nous pouvons mentionner la méthode itérative par éléments finis développée par Schnur and Zabarar (1990). Le travail est adaptable sur toute forme plane avec des capteurs insérés sous la surface. Une application au laminage à chaud avec des conditions très favorables montre un faible niveau de précision. Une méthode itérative alternative, par éléments de frontières a été proposée par Bezerra and Saigal (1995). Les mêmes conditions de laminage sont analysées avec une meilleure précision, cependant les temps de calcul restent longs. Le développement de ce nouveau type de capteur vise à une exploitation en temps réel. Donc, les schémas itératifs sont écartés. De plus, une approche aux éléments finis, ou tout autre approche fondée sur l'inversion d'une grande matrice représentant la relation linéaire entre les déformations mesurées et les contraintes de contact, serait imprécise, voire impossible. En effet, l'emprise a une longueur très réduite et les matrices seraient alors mal conditionnées car les angles impliqués seraient trop proches les uns des autres. Par conséquent, le problème classique, où de petites erreurs de mesures conduisent à de très importantes variations de la solution, invalide complètement cette possibilité. Pour éviter ce problème, Meierhofer and Stelson (1987) ont proposé une méthode analytique fondée sur l'hypothèse que pendant un tour les conditions dans l'emprise ne changent pas (régime permanent tour par tour). Il est donc possible de mesurer le tenseur des déformations (converties en contraintes par la loi de comportement isotrope) en un point dans le cylindre et d'obtenir tout un cercle de mesures grâce à la rotation du cylindre. De ce fait nous pouvons envisager de résoudre le problème dans le sous-domaine constitué du disque de rayon R_m (rayon de mesure) et d'étendre la solution par continuité vers la surface et en particulier dans l'emprise, comme nous l'avons déjà indiqué en introduction. Cependant, le travail de Meierhofer and Stelson (1987) repose d'une part sur une formulation élastique assez lourde du potentiel d'Airy en séries de fonctions bi-harmoniques réelles (cf. chapitre 2) adaptée pour les problèmes de couronnes, et d'autre part sur un développement en série de Fourier des contraintes mesurées. Enfin l'identification des coefficients des deux séries est nécessaire. Cependant pour obtenir suffisamment d'équations les auteurs ont utilisé des mesures à deux positions radiales différentes, définissant ainsi deux cercles concentriques de mesure. D'un point de vue technologique l'insertion d'un capteur mesurant les contraintes à deux positions radiales différentes est beaucoup plus difficile à concevoir qu'un capteur simple. De plus, beaucoup d'inversions de matrices d'identification (bien conditionnées si les deux rayons de mesures sont suffisamment distincts) sont requises.

Très récemment, Legrand et al. (2010) a implémenté numériquement cette méthode et a évalué son efficacité sur différentes simulations de laminage. Les auteurs concluent que, pour des conditions industrielles normales, la méthode développée par Meierhofer and Stelson (1987) est relativement précise mais difficilement utilisable en raison des temps de calculs très importants.

4.1.2. Fibres optiques

Dans ce chapitre, une approche analytique similaire à l'idée générale de Meierhofer and Stelson (1987) est construite. Le tenseur de déformation (donc de contraintes) est mesuré en un seul point du cylindre (une seule position radiale, au lieu de deux). Cette différence est l'une des principales améliorations apportées par cette contribution, car l'aspect technologique s'en trouve grandement simplifié. Les mesures sur tout le cercle sont obtenues grâce à la rotation du cylindre de travail. Concernant le capteur local de déformation lui-même, Meierhofer and Stelson (1987) ont utilisé des jauges de déformation collées sur l'extrémité plate d'un petit cylindre de laboratoire. Cependant, cette technique n'est pas recommandée pour les cylindres industriels parce qu'ils sont beaucoup plus larges que le produit, ainsi nous ne mesurerions aucun signal, du fait qu'à son extrémité le cylindre n'est pas en contact avec la bande. Des fibres optiques sont considérées dans cette étude. La mesure repose sur le principe des réseaux de Bragg, qui donnent les déformations locales en interprétant les longueurs d'onde réfléchies comme cela est rappelé par Ferdinand et al. (2009). Les fibres optiques insérées dans un trou très fin font l'objet d'une étude technologique dans le cadre du projet européen RFS-PR-08051. Après l'insertion du capteur, la surface du cylindre est rectifiée (ou polie de nouveau) pour éviter toute marque sur le produit.

4.1.3. Approche mathématique

Le problème sur le sous domaine défini par le cercle de mesure est résolu analytiquement. Puis, la solution est étendue par continuité vers la surface pour exhiber les contraintes de contact dans l'emprise. Pour cela, nous devons utiliser les équations de l'élasticité plane pour un matériau isotrope sous condition isotherme, développées

par Muskhelishvili (1977) et exposées en détail au chapitre 3. Le formalisme complexe permet un développement très simple des fonctions holomorphes à déterminer en séries entières. Par ailleurs, une technique pour rendre le calcul aussi rapide que possible est exposée. Ainsi, le temps de calcul a été considérablement réduit pour atteindre une utilisation en temps réel de ce nouveau type de capteurs inverses.

Dans ce chapitre tous les résultats sont dérivés de simulations. Les conditions industrielles données par Legrand et al. (2010) sont reprises : laminage à chaud, à froid et conditions de skinpass (laminage à froid de finition sur épaisseurs très faibles). Ainsi, les mesures au rayon interne sont simulées par un calcul direct (cette étape remplace de réelles mesures qui doivent être faites par fibres optiques) et les contraintes de contact sont déduites de la méthode inverse. Une comparaison entre les contraintes prescrites en surface et l'estimation des contraintes reconstruites par méthode inverse permet d'évaluer la qualité de la méthode. Il apparaît que la présente solution inverse est beaucoup plus précise que celle développée par Meierhofer and Stelson (1987). En outre, Legrand et al. (2010) conclue que le cas extrême du skinpass ne peut pas être reconstruit du fait de la longueur de contact trop restreinte et des gradients de contraintes trop élevés. En revanche la méthode exposée dans ce chapitre est satisfaisante même pour de telles conditions.

Toutes les notations sont listées dans le tableau 4.1.

TABLE 4.1 – Nomenclature

R_s	Rayon externe du cylindre	ϵ	Erreur de reconstruction	$\sigma_{(..)}$	Contraintes
R_m	Rayon de mesure des contraintes	∇_{max}	Gradient max du signal d'entrée	$\sigma_{(..)}^m$	Contraintes mesurées
r	Position radiale	I_{max}	Max de la norme du signal d'entrée	$\sigma_{(..)}^p$	Contraintes prescrites
θ	Position angulaire	δ	Angle de l'emprise	a_k	Coefficients à calculer
N_s	Nombre de points d'interpolation	z	Variable complexe	b_k	Coefficients à calculer
N_m	Nombre de points de mesure	Φ	Potentiel holomorphe	M_1	Matrice
N_t	Nombre de troncature	Ψ	Potentiel holomorphe	M_2	Matrice
N_{inv}	Nombre d'inversions de matrices	(..)	$rr, r\theta$ ou $\theta\theta$	M_3	Matrice

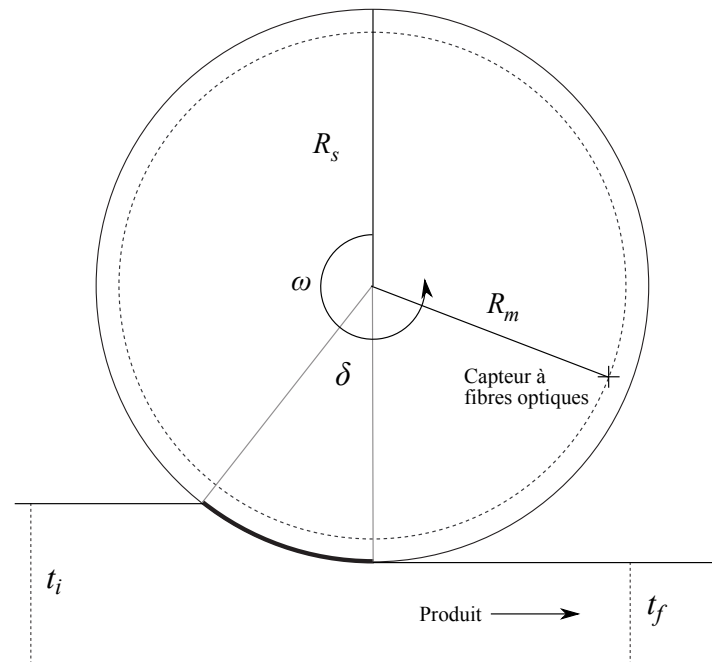


FIGURE 4.1 – Mesure des contraintes

4.2. Analyse inverse

Le rayon, où sont mesurées les contraintes, est R_m (m signifiant mesure) et le rayon du cylindre est $R_s > R_m$ (s signifiant surface). Les contraintes mesurées sont notées σ_{rr}^m , $\sigma_{r\theta}^m$ et $\sigma_{\theta\theta}^m$. Quelque soit $z \in \mathbb{C}$, nous rappelons les équations de l'élasticité isotrope et isotherme donnés par Muskhelishvili (1977) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 \left(\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right) \\ -\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{r\theta} = 2e^{2i\theta} (\Psi(z) + \bar{z}\Phi'(z)) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont des fonctions holomorphes inconnues définies sur tout le disque de rayon R_s . Nous avons précisé au chapitre 3, que mathématiquement ces fonctions sont analytiques donc développables en séries entières sur un disque. Ainsi quelque soit $z \in \mathcal{D}(R_s)$ (le disque de rayon R_s) :

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a'_k z^k \quad \left| \quad \Psi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b'_k z^k \quad (4.2)$$

Pour manipuler des coefficients sans dimension nous introduisons les quantités suivantes :

$$a_k = R_m^k a'_k \quad \left| \quad b_k = R_m^k b'_k \quad (4.3)$$

En combinant (4.1), (4.2) et (4.3), les contraintes peuvent s'écrire en fonction de a_k et b_k :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R_m} \right)^k (a_k e^{ik\theta} + \overline{a_k} e^{-ik\theta}) \\ -\sigma_{rr}(r, \theta) + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) + 2i\sigma_{r\theta}(r, \theta) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R_m} \right)^k (b_k e^{i(k+2)\theta} + k a_k e^{ik\theta}) \end{cases} \quad (4.4)$$

Il suffit de déterminer a_k et b_k pour résoudre complètement le problème. En effet, en combinant les équations (4.4) évaluée en $r = R_s$, les contraintes de surface sont obtenues.

Pa ailleurs, les familles a_k et b_k sont calculées en intégrant les contraintes mesurées au rayon interne par les formules suivantes (le second système s'obtient en soustrayant les deux équations de (4.4)) :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m) d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m}{e^{ik\theta}} d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m + 2i\sigma_{r\theta}^m}{e^{i(k+2)\theta}} d\theta - (k+2)a_{k+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{rr}^m d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_{rr}^m + i\sigma_{r\theta}^m}{e^{ik\theta}} d\theta \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(2+k)\sigma_{rr}^m + ik\sigma_{r\theta}^m}{e^{i(k+2)\theta}} d\theta \end{cases} \quad (4.5)$$

Le second système correspondant à l'écriture du vecteur contrainte et peut paraître plus intéressant car il ne fait pas intervenir la composante $\theta\theta$ du tenseur des contraintes. Mais en tous les cas, pour mesurer les composantes rr et $r\theta$, trois directions de fibres sont à considérer (chaque fibre mesure une déformation axiale). Les formulations sont rigoureusement équivalentes et donnent les mêmes résultats.

4.3. Précision et temps de calcul

La point central de toute la méthode est la qualité atteinte pour le calcul des intégrales (4.5). Une petite erreur numérique sur a_k ou b_k est multipliée au moins par $(R_s/R_m)^k$, qui augmente jusqu'à ce que la solution diverge. Nous comprenons cela comme la manifestation du fait que le problème est mal posé. Pour éviter de tels

écueils, nous devons tronquer les sommes. Ainsi, plus les intégrales seront calculées avec précision et plus le développement en série pourra être poursuivi à des indices élevés, et plus la solution sera précise.

Pour calculer les intégrales, beaucoup de points de mesures sont nécessaires. Cependant la fréquence d'acquisition du système à fibres optiques est encore assez faible (de l'ordre de quelques kHz) du fait du temps d'interprétation des longueurs d'ondes qui sont consultées les unes après les autres, d'où, un nombre de points assez limité. Une manière efficace de calculer pratiquement les intégrales (4.5) (temps de calcul très courts et bonne précision) est d'interpoler le signal d'entrée avec des fonctions cubiques (spline). Le nombre de points d'interpolation est noté N_s (où s signifie spline). Le choix de N_s est un compromis entre la précision et le temps de calcul. L'interpolation en spline améliore considérablement la qualité du signal entrant. Les intégrations (4.5) sont comme des coefficients de Fourier, et une manière classique et très efficace de calculer ce genre d'intégrale est d'utiliser les transformées de Fourier rapides (fft, fast fourier transform), qui calculent la somme de Riemann de 1 à N_s (qui converge lorsque N_s devient grand) vers la valeur de l'intégrale. Cette technique a été mentionnée au chapitre 2.

Plus précisément, si σ est le signal d'entrée représenté comme un vecteur colonne de taille N_s , la fft calcule le vecteur également de taille N_s suivant ($1 \leq k \leq N_s$) :

$$\frac{1}{N_s} \text{fft}(\sigma)_k = \frac{1}{N_s} \left(\sum_{m=1}^{N_s} \sigma(m) e^{-2i\pi \frac{(m-1)(k-1)}{N_s}} \right) \xrightarrow{N_s \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) e^{-i(k-1)\theta} d\theta \right) \quad (4.6)$$

Donc, l'extraction des coefficients a_k et b_k peut être effectuées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \simeq \frac{1}{4N_s} \text{fft}(\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m)_1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k \simeq \frac{1}{2N_s} \text{fft}(\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m)_{k+1} \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k \simeq \frac{1}{2N_s} \text{fft}(-\sigma_{rr}^m + \sigma_{\theta\theta}^m + 2i\sigma_{r\theta}^m)_{k+3} \\ \quad - (k+2)a_{k+2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 \simeq \frac{1}{2N_s} \text{fft}(\sigma_{rr}^m)_1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ a_k \simeq \frac{1}{N_s} [\text{fft}(\sigma_{rr}^m)_{k+1} + i\text{fft}(\sigma_{r\theta}^m)_{k+1}] \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ b_k \simeq -\frac{1}{N_s} [(2+k)\text{fft}(\sigma_{rr}^m)_{k+3} + k\text{fft}(\sigma_{r\theta}^m)_{k+3}] \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Le nombre d'intégrales à calculer est identique pour les deux formulations, dans le premier cas nous calculons deux fft portant sur la trace et le déviateur des contraintes, dans le second nous calculons deux fft portant directement sur les pressions normales et les cisaillements.

Le tableau 4.2 liste les temps correspondant aux calculs des N_s coefficients a_k et b_k (et incluant l'interpolation du signal d'entrée) pour différentes valeurs de N_s . Il s'agit en fait de temps strictement proportionnels à N_s . Tous les temps de calcul sont obtenus pour un quadcore 2.8 GHz et sont les temps affichés par Scilab 5.3. De plus, un programme écrit dans un langage compilé peut réduire les temps de calcul. Dans la suite, le paramètre N_s est fixé à 100 000. Ce choix est un compromis, que nous discutons à la section 4.6.

TABLE 4.2 – Temps de calcul

N_s	Temps de calcul (s)
20 000	0.01
60 000	0.03
100 000	0.06
200 000	0.12

La formule (4.4), évaluée en R_s , est une déconvolution et peut être calculée par une transformée de Fourier inverse (inverse fast Fourier transform). Cependant, la fonction ifft n'offre pas le choix des points de reconstruction. Parce que cette reconstruction à la surface n'est voulue que dans l'emprise, la déconvolution est calculée comme suit. La formule (4.4) est écrite sous forme matricielle. Donc, si la reconstruction est faite pour N_r (r signifiant

reconstruction) points situés dans l'emprise et notés θ_j ($j \in \llbracket 1, N_r \rrbracket$) et si le nombre de termes conservés dans la somme est noté N_t (t signifiant troncature), alors on a (en notant en gras les vecteurs issus des quantités indicées du même nom, tous les vecteurs sont définis sur l'exemple $\mathbf{a} = a_k$ pour ($k \in \llbracket 1, N_t \rrbracket$)) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{rr}(R_s, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\sigma}_{\theta\theta}(R_s, \boldsymbol{\theta}) = M_1 \cdot \mathbf{a} + \overline{M_1} \cdot \overline{\mathbf{a}} \\ \boldsymbol{\sigma}_{rr}(R_s, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\sigma}_{\theta\theta}(R_s, \boldsymbol{\theta}) + 2i\boldsymbol{\sigma}_{r\theta}(R_s, \boldsymbol{\theta}) = M_2 \cdot \mathbf{b} + M_3 \cdot \mathbf{a} \end{cases} \quad (4.8)$$

où $(j, k) \in \llbracket 1, N_r \rrbracket \times \llbracket 1, N_t \rrbracket$:

$$\begin{cases} M_{1,j,k} = 2 \left(\left(\frac{R_s}{R_m} \right)^k \exp(ik\theta_j) \right) \\ M_{2,j,k} = 2 \left(\left(\frac{R_s}{R_m} \right)^k \exp(i(k+2)\theta_j) \right) \\ M_{3,j,k} = 2 \left(\left(\frac{R_s}{R_m} \right)^k k \exp(ik\theta_j) \right) \end{cases} \quad (4.9)$$

Le tableau 4.2 donne les temps de calcul pour \mathbf{a} et \mathbf{b} . Un aspect très intéressant en écrivant (4.4) sous forme matricielle est que les matrices M_1 , M_2 et M_3 peuvent être évaluées avant le procédé et stockées dans une bibliothèque numérique. Le calcul purement on-line est donc limité aux produits de matrices impliqués dans (4.8) et surtout au calcul des fft des signaux entrants. Cette bibliothèque peut contenir différentes versions des matrices, correspondant à différentes valeurs de N_r et N_t . Le temps de calcul des produits dans (4.8) pour $N_r = 55$, ce qui paraît suffisant pour l'interprétation industrielle, est négligeable (0.002 s) devant le temps des fft.

4.4. Erreur de reconstruction

Pour valider la solution, nous considérons des simulations du procédé de laminage, que nous détaillerons par la suite. Ces simulations fournissent les contraintes de contact que nous prescrivons à la surface du cylindre, notées $\sigma_{(\dots)}^p(\theta)$ (où p signifie prescrites et où (\dots) désigne rr ou $r\theta$). Un simple calcul élastique donne les contraintes au rayon R_m (notées $\sigma_{(\dots)}^m$), qui constituent les données d'entrée de la méthode inverse. En exploitant ces dernières, nous reconstruisons les contraintes de contact dans l'emprise, notées $\sigma_{(\dots)}(R_s, \theta)$. Pour évaluer la qualité de la reconstruction, une erreur quantifiée est introduite. Nous utilisons la distance relative (en norme 2) entre les contraintes reconstruites issues du calcul inverse et les contraintes prescrites en surface :

$$\epsilon_{(\dots)} = 100 \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} [\sigma_{(\dots)}(R_s\theta) - \sigma_{(\dots)}^p(\theta)]^2 d\theta}{\int_0^{2\pi} [\sigma_{(\dots)}^p(\theta)]^2 d\theta}} \quad (4.10)$$

4.5. Critère de troncature

L'efficacité de la méthode repose sur les intégrations (4.5). Comme nous l'avons précisé, une petite erreur (inévitabile) est multipliée au moins par $(R_s/R_m)^k$, qui augmente de plus en plus jusqu'à ce que la solution diverge. Par conséquent le choix du nombre de troncature des sommes est essentiel. Nous rappelons que le nombre de troncature est noté N_t . Nous proposons ici, une technique empirique pour obtenir un bon choix a priori de N_t simplement en analysant quelques paramètres du signal entrant. Cette technique n'est qu'une première tentative pour automatiser le choix de N_t . Cependant des études ultérieures beaucoup plus axées sur l'erreur de quadrature devraient être mises en oeuvre. Nous pouvons également envisager une analyse en fréquence et l'écriture d'un script qui balaye les coefficients du type $a_k (R_s/R_m)^k$ et tronque automatiquement lorsque ceux-ci commencent à diverger, cette dernière approche semble la plus prometteuse quoiqu'elle n'a pas été automatisée (le graphe est affiché et le critère de troncature saisi à la main par l'utilisateur). Dans les chapitres suivants, la même problématique revient systématiquement. Le travail que nous entreprenons dans ce chapitre n'a pas été repris pour ne

pas alourdir les travaux avec des considérations trop axées sur le traitement du signal. L'accent est porté sur les considérations de modélisation.

Les signaux d'entrée sont donnés avec une résolution N_m , qui représente de nombre de points de mesure sur une rotation du cylindre (m signifiant mesure). La qualité de l'extraction des coefficients a_k et b_k dépend fortement de N_m et de la singularité du signal. Le maximum de la dérivée du signal (noté ∇_{max}), le maximum de la norme du signal (noté I_{max}) et la base angulaire de l'emprise (notée δ) sont considérés pour caractériser la singularité du signal. Comme nous cherchons une loi empirique, une relation logarithmique peut être raisonnablement tentée :

$$N_t = \mathcal{A} \times N_m^\alpha I_{max}^\beta \nabla_{max}^\gamma \delta^\lambda \quad (4.11)$$

où α , β , γ et λ sont des coefficients sans dimension. En outre, $\nabla_{max}^\beta I_{max}^\gamma \delta^\lambda$ doit être sans dimension, donc $\beta = -\gamma = -\lambda$. Ainsi, le modèle devient (où : $\mathcal{S} = I_{max} / (\nabla_{max} \delta)$) :

$$N_t = \mathcal{A} \times N_m^\alpha \mathcal{S}^\beta \quad (4.12)$$

Nous répétons que ce modèle n'est qu'une loi empirique. Cependant, pour la discussion technique cette approche est dans un premier temps suffisante. Nous cherchons à déterminer \mathcal{A} , α et β , de sorte que le nombre de troncature optimal soit proche du nombre de troncature prévu par la loi (4.12). Pour cela trois conditions industrielles reprises de Legrand et al. (2010) sont testées. Le laminage à chaud, à froid et skinpass couvrent très largement le champ des conditions possibles en laminage et les signaux utilisés semblent donc représentatifs des extrêmes que l'on peut atteindre pour ce type de problèmes et peuvent donc être utilisés comme références. Les profils de contraintes dans l'emprise sont imposés et un calcul élastique direct conventionnel permet d'obtenir les profils de contraintes au rayon R_m (cette partie remplace les mesures qui doivent être faites par fibres optiques). Ces profils de contraintes sont ensuite utilisés comme signaux d'entrée pour la méthode inverse. En utilisant (4.10), il est possible pour chaque condition de laminage et pour chaque valeur de N_m de produire le graphe (en fonction de N_t) des erreurs entre les contraintes reconstruites par méthode inverse et les contraintes initialement prescrites en surface.

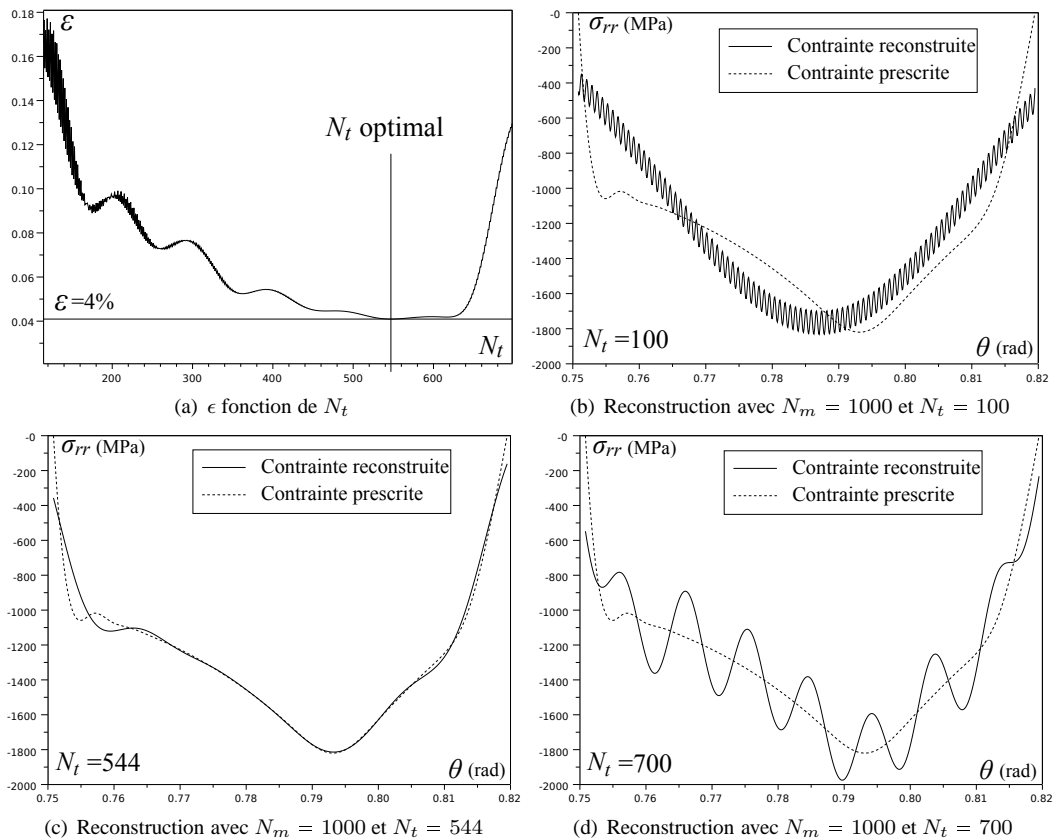


FIGURE 4.2 – N_t optimal et différentes reconstructions en laminage à froid

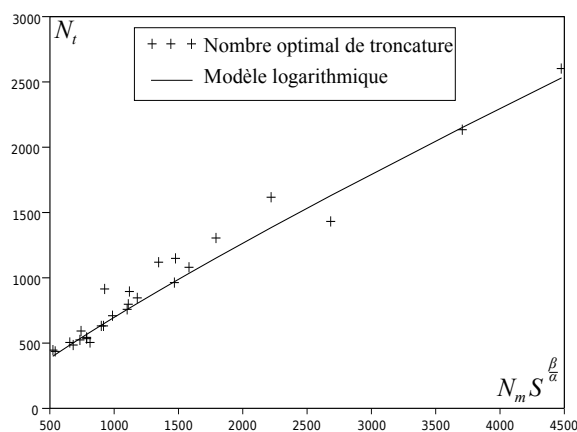
Par exemple, la figure 4.2(a) (correspondant à la pression normale du cas de laminage à froid avec $N_m = 1000$) montre que l'erreur atteint un minimum global pour une certaine valeur de N_t . Il est clair que la meilleure reconstruction est un compromis entre la convergence de la série et l'amplification des erreurs dans le calcul des intégrales. Les reconstructions correspondant à trois valeurs différentes de N_t sont présentées figures 4.2(b), 4.2(c) et 4.2(d). La figure 4.2(b) est une mauvaise reconstruction due au fait que la série n'a pas encore convergé, la figure 4.2(c) est la meilleure reconstruction et la figure 4.2(d) présente une mauvaise reconstruction due au fait que trop de termes ont été conservés dans la somme. La valeur de N_t qui correspond à la meilleure reconstruction est listée dans les tableaux 4.3(a) et 4.3(b) pour différentes valeurs de N_m et pour les trois cas de laminages considérés (c'est-à-dire pour trois valeurs différentes du critère de singularité S).

TABLE 4.3 – N_t optimal

N_m -	(a) Pressions normales, σ_{rr}			N_m -	(b) Cisaillements, $\sigma_{r\theta}$		
	Chaud $S \simeq 0.07$	Froid $S \simeq 0.39$	Skinpass $S \simeq 0.64$		Chaud $S \simeq 0.087$	Froid $S \simeq 0.29$	Skinpass $S \simeq 0.3$
1000	445	544	630	1000	437	527	590
1250	503	708	899	1250	489	630	919
1500	532	846	1119	1500	506	761	795
2000	532	1080	1304	2000	506	960	1150
3000	532	1080	1428	3000	506	960	1620
5000	532	1080	2600	5000	506	960	2364

Dans les tableaux 4.3(a) et 4.3(b), le nombre optimal de troncature N_t atteint une limite quand N_m augmente. Du fait de l'interpolation en splines cubiques (avec un très grand nombre de points d'interpolation) et de la régularité des signaux entrants, la précision des intégrations ne peut pas être améliorée au-delà d'une certaine limite, qui dépend de la longueur de l'emprise. Pour identifier les constantes \mathcal{A} , α et β apparaissant dans le modèle (4.12), seules les valeurs de N_t avant la saturation sont prises en compte (valeurs en caractères gras dans les tableaux 4.3(a) et 4.3(b)). La validité de cette loi est donc limitée aux valeurs de N_m pour lesquelles la précision n'est pas saturée.

La figure 4.3, représente en fonction de $N_m S^{\frac{\beta}{\alpha}}$, les nombres optimaux de troncature N_t repris des tableaux 4.3(a) et 4.3(b). Le modèle (4.12) est également représenté avec les valeurs suivantes : $\mathcal{A} = 1.83$, $\alpha = 0.86$, $\beta = 0.215$, qui seront conservées par la suite.

FIGURE 4.3 – N_t vs. $N_m S^{\frac{\beta}{\alpha}}$

Le temps de calcul du modèle logarithmique (4.12) est négligeable (0.006 s) devant celui des fft des signaux entrants.

4.6. Discussion sur le nombre de points d'interpolation

Dans cette section, le choix du nombre de points d'interpolation $N_s = 100000$ est commenté. Comme nous l'avons expliqué dans la section 4.3, ce choix est un compromis entre la précision et le temps de calcul. En utilisant l'erreur définie par (4.10) et les trois conditions de laminage reprises de Legrand et al. (2010), les contraintes pour différentes valeurs de N_s (c'est-à-dire différentes qualités d'intégration) sont reconstruites. Il est possible de produire le graphe des erreurs en fonction des contraintes reconstruites et les contraintes prescrites, en fonction du nombre de points d'interpolation N_s pour chaque condition de laminage. La figure 4.4(a) (resp 4.4(b)) présente l'erreur en fonction de N_s pour la reconstruction des pressions normales (resp cisaillements). Les valeurs de N_m sont celles considérées dans les sections suivantes. Pour le cas Skinpass, l'erreur diminue exponentiellement en fonction N_s . Le meilleur compromis est donc $N_s = 100000$. Par simplicité, ce choix est appliqué à toutes les conditions de laminage, quoique pour le laminage à chaud et à froid on aurait pu se contenter de $N_s = 20000$.

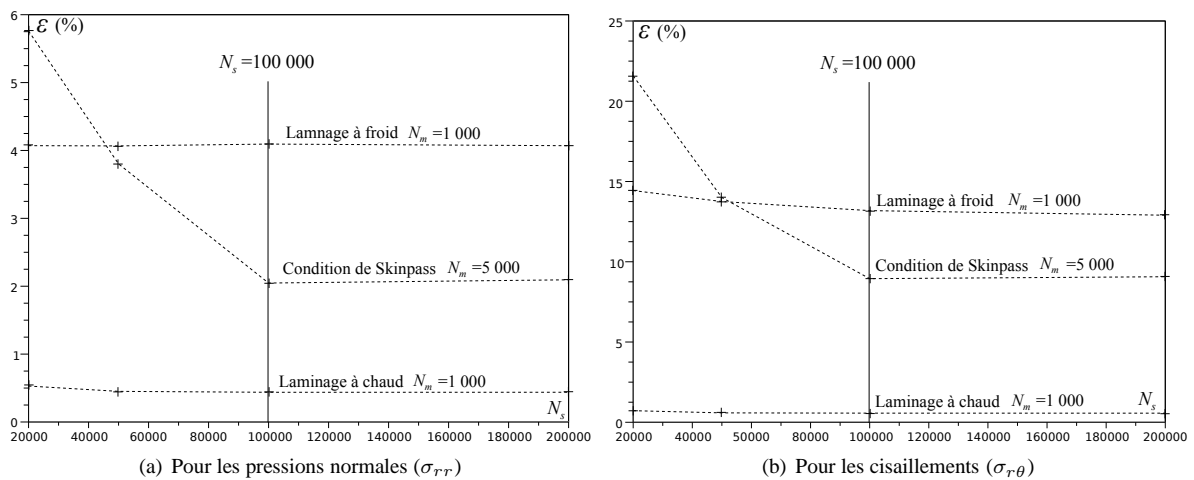


FIGURE 4.4 – ϵ vs. N_s

4.7. Validation et comparaison

4.7.1. Contraintes prescrites dans l'emprise

Les trois simulations que nous avons déjà évoquées à plusieurs reprises, notamment dans les sections 4.5 et 4.6 sont utilisées pour valider l'efficacité de la méthode inverse développée dans ce chapitre et pour faire une comparaison quantitative avec les résultats obtenus par Legrand et al. (2010). Les contraintes de contact des trois conditions de laminage sont données par un modèle numérique LAM3 initialement établi par Hacquin (1996). Il s'agit d'un modèle couplé considérant la tôle sous régime thermo-visco-plastique et le cylindre sous régime thermoélastique. Les profils de contraintes pour les pressions normales (σ_{rr}) et les contraintes de cisaillement ($\sigma_{r\theta}$) sont présentés figures 4.5(a), 4.6(a) et 4.7(a). Les conditions de laminage à chaud sont les plus régulières, alors que les conditions de Skinpass sont les plus singulières. La longueur d'emprise varie de 71.6 mm pour le laminage à chaud, à 13.7 mm pour le laminage à froid et 4.8 mm pour les conditions de Skinpass. Il est intéressant de constater que la forme des contraintes données par le modèle LAM3 (Hacquin (1996)) est de même nature que les efforts de contact trouvés par Boussinesq (1885) pour des forces concentrées sur un plan semi-infini avec le classique changement de signe des cisaillements.

Les paramètres de simulation pour les conditions à chaud (resp à froid et Skinpass) sont listés dans les tableaux 4.4 (resp 4.5 et 4.6).

4.7.2. Mesures simulées

Un calcul élastique direct classique donne les contraintes dans le cylindre au rayon R_m (considérées comme des simulations des mesures qui doivent être faites pas fibres optiques). Les figures 4.5(b), 4.6(b) et 4.7(b), pré-

sentent les contraintes calculées au rayon R_m , sans bruit ajouté.

Le rayon interne R_m est choisi à 3 mm de la surface pour les conditions de laminage à chaud et à froid sur la base des études technologiques sur l'insertion des fibres, et pour pouvoir comparer aux résultats de Legrand et al. (2010). Cependant pour le cas difficile du Skinpass, les gradients de contraintes sont très élevés, si bien que R_m est pris à 2 mm seulement de la surface du cylindre, ce qui est pour l'instant le cas limite pour l'insertion des fibres optiques. Legrand et al. (2010) montre que la reconstruction sur la base des travaux de Meierhofer and Stelson (1987) est impossible sous des conditions de Skinpass car les auteurs ont besoin d'un signal pris à 1 mm seulement de la surface, ce qui est peu envisageable du point de vue technologique. Dans cette étude cette difficulté est dépassée.

Il est également important de mentionner que le nombre de points de mesure N_m est choisi pour être cohérent avec la fréquence d'acquisition des fibres optiques (quelques kHz). Nous considérons une vitesse de rotation typique (1 tour par seconde), ainsi nous avons pour une fréquence de 1 kHz, $N_m = 1000$ points sur le cercle.

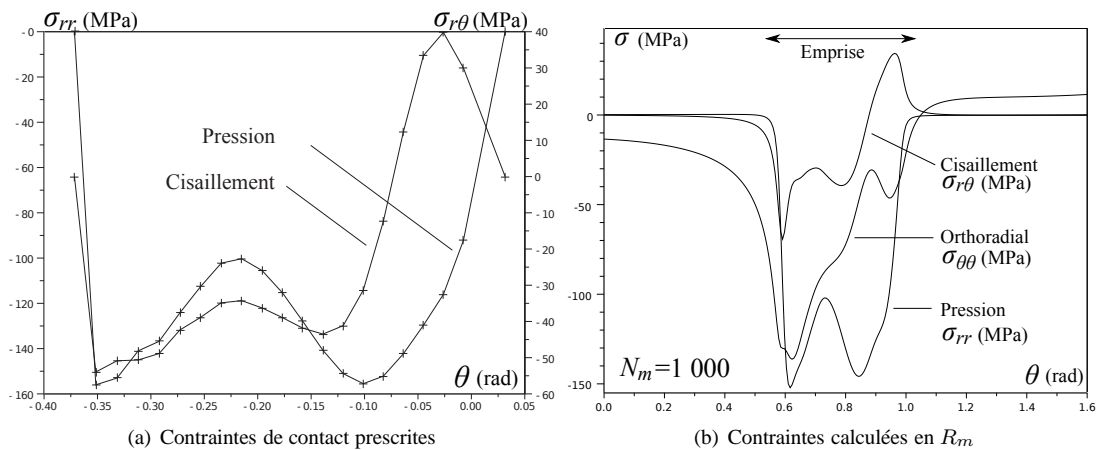


FIGURE 4.5 – Conditions de laminage à chaud

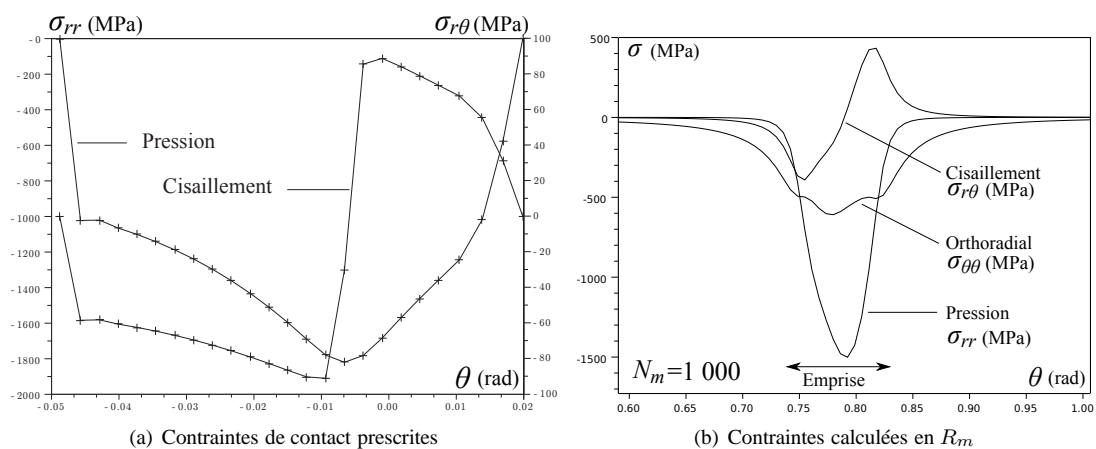


FIGURE 4.6 – Conditions de laminage à froid

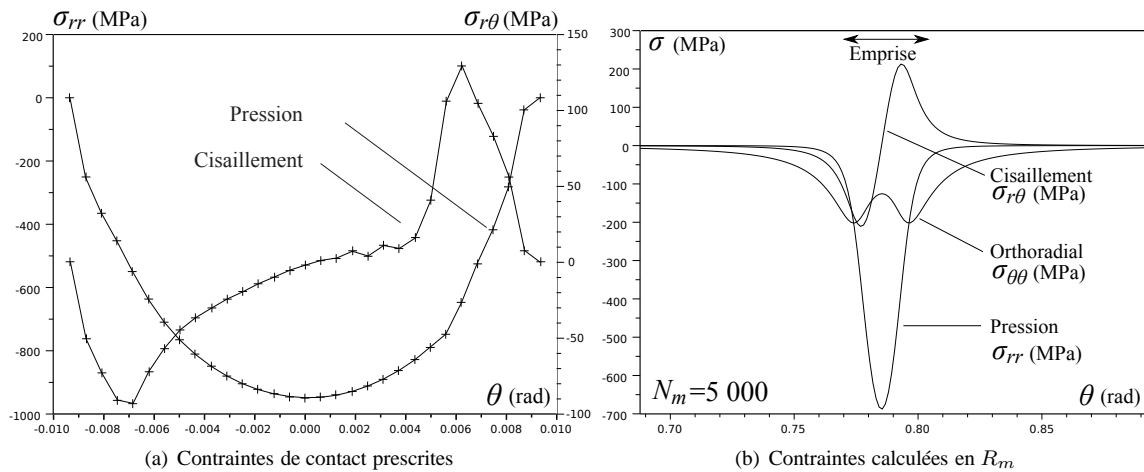


FIGURE 4.7 – Conditions de Skinpass

4.7.3. Résultats sans bruit de mesure

La méthode inverse est appliquée en prenant en entrée les signaux des figures 4.5(b), 4.6(b) et 4.7(b), et une comparaison est faite entre la reconstruction (sortie du calcul) et les contraintes de contact prescrites. Les résultats donnés par Legrand et al. (2010) sont confrontés à ceux que nous obtenons. Les figures 4.8, 4.9 et 4.11 présentent les reconstructions des contraintes de contact (avec différentes options discutées dans la suite).

Le nombre de troncature est choisi automatiquement grâce au modèle logarithmique (4.12). Ainsi les résultats ne correspondent pas exactement à la meilleure reconstruction possible par la méthode inverse, que nous avons développée, mais s'en rapprochent.

Laminage à chaud

Le problème est supposé isotherme. Cependant, pour des conditions de laminage à chaud, les contraintes thermiques ne sont pas négligeables, comme cela est démontré par exemple par Legrand et al. (2010). Cet aspect n'est pas étudié dans ce chapitre (les contraintes thermiques sont négligées), mais cette difficulté est dépassée au chapitre 5 où le problème thermique est résolu. Ainsi le problème couplé thermoélastique peut être résolu par superposition, ce qui est fait au chapitre 7.

Les figures 4.8(a) et 4.8(b) correspondent aux conditions de laminage à chaud. La troncature des sommes est faite à la 399 ième harmonique pour σ_{rr} (et à la 412 ième pour $\sigma_{r\theta}$). Les résultats présentés dans les figures 4.8(a) et 4.8(b) montrent que les contraintes reconstruites et les contraintes prescrites sont presque identiques et ne peuvent pas être distinguées facilement à cette échelle. Ainsi la nouvelle méthode inverse développée dans ce chapitre est beaucoup plus précise que les calculs présentés par Legrand et al. (2010) (fondés sur le travail de Meierhofer and Stelson (1987)). La position du point neutre que nous avons défini dans le chapitre 1 est très bien prédite, ce qui est un résultat important du point de vue industriel.

Tous les paramètres de simulation et de reconstruction ainsi que les erreurs de reconstruction en pourcentage et les temps indicatifs de calculs pour les deux méthodes sont listés dans le tableau 4.4. Les temps de calculs indiqués pour la programmation de Legrand et al. (2010) sont une estimation obtenue avec un processeur dualcore 2 GHz. N_{inv} est le nombre d'inversion de matrices d'identification de taille 4×4 , alors que la présente méthode inverse ne nécessite aucune inversion de matrice.