



**HAL**  
open science

# Le spectrophe intégral de champs SNIFS : Simulation et analyse des résultats.

Christophe Bonnaud

► **To cite this version:**

Christophe Bonnaud. Le spectrophe intégral de champs SNIFS : Simulation et analyse des résultats.. Instrumentation et méthodes pour l'astrophysique [astro-ph.IM]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2005. Français. NNT: . tel-00798731

**HAL Id: tel-00798731**

**<https://theses.hal.science/tel-00798731v1>**

Submitted on 10 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre

Année 2005

THESE

présentée

devant l'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention

du DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 25 avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le

par

M. Bonnaud Christophe

TITRE :

Le spectrographe intégral de champ SNIFS : Simulation et analyse des résultats.

Directeur de thèse :

Roland Bacon

JURY : M. Bacon Roland  
M. Bergeat Jacques  
M. Despat Laurent  
M. Pain Reynald  
M. Pecontal Emmanuel

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>II</b>	<b>Introduction de cosmologie</b>	<b>8</b>
1.1	La relativité générale . . . . .	9
1.2	Principe cosmologique . . . . .	9
1.2.1	Le rayonnement de fond cosmologique (CMB) . . . . .	9
1.2.2	Le recensement de la matière . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Implication du principe cosmologique</b>	<b>12</b>
2.1	la métrique de Robertson-Walker . . . . .	12
2.2	Le tenseur énergie impulsion . . . . .	13
2.3	Les équation de Friedmann-Lemaître . . . . .	13
2.4	paramètres cosmologiques et densité critique . . . . .	13
2.5	Le décalage vers le rouge cosmologique . . . . .	14
2.6	Bilan énergétique de l'univers . . . . .	16
2.6.1	la rayonnement . . . . .	17
2.6.2	la matière baryonique . . . . .	18
2.6.3	la matière non-baryonique . . . . .	18
2.6.4	L'énergie noire . . . . .	20
2.7	conclusion . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Mesure des distances</b>	<b>21</b>
3.1	Définition de la distance . . . . .	21
3.2	la distance de luminosité . . . . .	22
3.3	Utilisation des chandelles standards . . . . .	23
3.4	Le digrame de Hubble . . . . .	23
<b>4</b>	<b>La correction des mesures de flux</b>	<b>26</b>
4.1	L'absorption Galactique . . . . .	26
4.2	L'absorption extra-galactique . . . . .	27
4.3	le biais de Malmquist . . . . .	27
4.4	La correction K . . . . .	27
<b>III</b>	<b>Les Supernovae</b>	<b>31</b>
<b>1</b>	<b>introduction</b>	<b>32</b>

<b>2</b>	<b>Caractéristiques observationnelles des supernovae</b>	<b>33</b>
2.1	Observations spectrales . . . . .	33
2.2	Courbes de lumières . . . . .	35
2.3	Progéniteurs et environnement . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Les Supernovae Ia comme chandelles standards</b>	<b>39</b>
3.1	Les homogénéités et inhomogénéités . . . . .	39
3.1.1	Les homogénéités . . . . .	39
3.1.2	les inhomogénéités . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Modélisations</b>	<b>43</b>
4.1	Progéniteurs des SN Ia . . . . .	43
4.2	Les simulations numériques . . . . .	44
4.3	Les mécanismes d'explosion . . . . .	45
4.3.1	La déflagration . . . . .	45
4.3.2	La détonation . . . . .	45
4.3.3	La double détonation . . . . .	46
4.3.4	La détonation retardée . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Les récents développements</b>	<b>48</b>
<b>IV</b>	<b>Le projet SNIFS</b>	<b>53</b>
<b>1</b>	<b>introduction</b>	<b>54</b>
<b>2</b>	<b>L'instrument SNIFS</b>	<b>55</b>
2.1	Introduction . . . . .	55
2.2	détails de l'instrument . . . . .	55
2.2.1	L'agransisseur . . . . .	56
2.2.2	La trame de micro-lentilles . . . . .	57
2.2.3	Les spectrographes . . . . .	57
<b>3</b>	<b>simulation de l'instrument</b>	<b>59</b>
3.1	traitement des aberrations . . . . .	59
3.2	Source ponctuelle monochromatique . . . . .	60
3.2.1	détermination des aberrations . . . . .	60
3.2.2	propagation du front d'onde . . . . .	64
3.3	Source ponctuelle polychromatique . . . . .	66
3.4	Source étendue monochromatique . . . . .	66
3.5	Source étendue polychromatique . . . . .	67
3.6	poses longues . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Analyse des résultats</b>	<b>69</b>
4.1	Les PSF . . . . .	69
4.1.1	pauses courtes . . . . .	69
4.1.2	Poses longues . . . . .	73
4.2	Les poses détecteurs . . . . .	74

<b>V</b>	<b>Étude statistique des spectres de SN</b>	<b>77</b>
<b>1</b>	<b>introduction</b>	<b>78</b>
<b>2</b>	<b>Analyse en composantes principales</b>	<b>79</b>
2.1	Un peu de théorie . . . . .	79
2.1.1	l'espace vectoriel $[\Omega]$ . . . . .	79
2.1.2	Variance, covariance . . . . .	80
2.1.3	Distance d'un vecteur à un sous-espace . . . . .	80
2.1.4	Les axes principaux . . . . .	80
2.2	Application de la PCA sur les SNIa . . . . .	81
2.3	conclusion . . . . .	83
<b>3</b>	<b>La morphométrie</b>	<b>84</b>
3.1	Généralité . . . . .	85
3.2	L'approximation des plaques minces . . . . .	85
3.2.1	Définition des plaques minces . . . . .	87
3.2.2	Solution Générale . . . . .	88
3.3	Algèbre des plaques minces pour un ensemble arbitraire de points . . . . .	90
3.3.1	Application . . . . .	91
3.4	Méthode pour un grand nombre de spectres . . . . .	92
3.4.1	Les transformations principales . . . . .	93
3.4.2	transformation de spectres . . . . .	94
3.4.3	méthode itérative . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>120</b>
<b>VI</b>	<b>ANNEXE</b>	<b>121</b>
<b>5</b>	<b>Les pôlynomes de Zernike</b>	<b>122</b>
<b>6</b>	<b>L'énergie de la transformation d'un plaque mince.</b>	<b>123</b>

# Première partie

## Introduction

La cosmologie est une branche de l'astronomie qui étudie la structure et l'évolution de l'univers dans son ensemble. Derrière cette définition quelque peu académique se cache un domaine qui fascine chacun d'entre nous. Une part de cette fascination naît probablement du fait que cette discipline, derrière ses problématiques purement physiques et mathématiques, soulève de manière sous-jacente la question de nos origines. En nous amenant parfois à la frontière de la science et de la philosophie, cette question qui a depuis toujours obsédé l'humanité, ne peut laisser que peu de personnes indifférentes. Voilà peut être pourquoi cette discipline a connu un essor formidable ces dernières décennies. La popularité des retombées permet de trouver les ressources nécessaires à l'avancement malgré l'énorme quantité de moyens à mettre en oeuvre aussi bien au niveau théorique que technique.

On peut trouver déjà chez les grecs les premières tentatives d'explication et les tous premiers modèles d'univers. Bien que pouvant aujourd'hui prêter à sourire, ces modèles ont le mérite d'être les premiers pas en dehors de la pure cosmographie. Le plus ancien est peut être celui d'Aristote, élève du célèbre Platon, en 350 avant Jc. En se basant sur la sphéricité de la terre, bien connue à cette époque, il s'inspire de la théorie qu'Empédocle avait établi un siècle auparavant, selon laquelle la matière serait constituée de quatre éléments : la terre, l'eau, l'air et le feu. Il rajoute un cinquième élément, l'éther, qui appartient au domaine des dieux. On le voit, on reste ici encore fortement encré dans la cosmogonie au sens mythologique du terme... Au cours de sa genèse la cosmologie aura beaucoup de mal à se défaire des a priori religieux et métaphysiques qui, peut être, subsistent encore inconsciemment aujourd'hui. Tous les modèles qui vont suivre, vont se raffiner peu à peu et devenir plus réalistes en conservant toutefois une intervention divine même si celle-ci est repoussée à chaque fois un peu plus loin.

On peut situer la naissance de la cosmologie moderne à l'avènement de la théorie de la relativité générale. Lorsqu'en 1915 un employé de l'institut des brevets de Bernes, dénommé Albert Einstein, fait paraître sa théorie, il donne pour la première fois aux scientifiques un outil mathématique qui peut être appliqué à l'univers dans son ensemble. Une telle possibilité n'était pas assurée puisque rien ne nous garantit, a priori, que les lois de la physique, telles qu'on les observe dans notre univers local, soient identiques en tous points de l'univers à un instant donné. Si tel n'était pas le cas, la relativité générale ne serait être l'outil mathématique adapté. L'observation d'objets très lointains semble indiquer que ceux ci se comportent de la même manière que les objets les plus proches. Cela montre que les lois de la physique ont, fort heureusement pour nous, un caractère universel que l'on a élevé au rang de principe. Pourtant il est établi que les lois de la physique ont varié au cours de l'histoire de l'univers, or, du fait de la vitesse finie de la lumière, regarder loin c'est aussi regarder tôt. Nos déductions des observations d'objets lointains pourraient donc être mises à mal...

Einstein base sa théorie sur deux grandes idées. La première est de postuler que la vitesse de la lumière est une constante. Les notions de distance et de simultanéité deviennent alors relatives à l'observateur marquant ainsi l'effondrement de la vision newtonienne du monde reposant sur les piliers inébranlables de l'absolu de l'espace et du temps. Ces derniers viennent à présent se mêler dans dans une même entité, un espace-temps à quatre dimensions. La deuxième grande idée d'Einstein sera de voir

la gravitation non comme une force mais comme une manifestation de la courbure pouvant exister au sein de ce nouvel espace-temps. Ainsi toute présence de matière s'accompagnera d'une déformation de l'espace de manière locale. Ajouté à cette multitude de déformations locales, la théorie nous apprend également que l'univers peut posséder une courbure globale du fait de l'ensemble de la matière qu'il contient. Au final l'univers est régi par un nombre étonnamment faible de paramètres qui traduisent sa géométrie et son contenu. Le problème est alors de trouver la valeur exacte de ces paramètres et ceci est un réel défi pour l'expérimentation. La précision nécessaire impose des projets très ambitieux et par conséquent très coûteux. Le spatial s'impose de plus en plus tant les perturbations atmosphériques deviennent importantes par rapport aux effets que l'on cherche à mesurer. Même si les différentes méthodes mises en place sont complémentaires et permettent aujourd'hui d'avoir une estimation de la valeur des paramètres cosmologiques, il reste encore beaucoup de chemin à faire avant que ceux-ci ne soient connus très précisément.



Deuxième partie  
Introduction de cosmologie

## 1.1 La relativité générale

Un des principes fondamentaux de la relativité générale est le Principe d'équivalence. Celui-ci énonce qu'un champ gravitationnel est assimilable à un champ d'accélération. En effet un observateur qui se tient debout dans un espace clos ne peut dire si la pièce est suspendue dans un champ gravitationnel où si celle-ci est en train d'accélérer de manière continue. De même un observateur en chute libre ne perçoit aucun champ gravitationnel. Ce principe n'est pas seulement basé sur une expérience imaginaire, il peut être vérifié expérimentalement en comparant la masse inertielle et la masse gravitationnelle. Les résultats semblent aujourd'hui concluant jusqu'à des précisions de l'ordre de  $10^{-12}$ . La conséquence de ceci est que la gravitation peut être vue comme une déformation de l'espace-temps de la relativité restreinte et perd ainsi son statut de force.

Les équations de la relativité générale permettent de relier la géométrie de l'espace, par l'intermédiaire du tenseur  $g_{\mu\nu}$ , avec son contenu décrit par un tenseur énergétique  $T_{\mu\nu}$ . Sous sa forme la plus générale, cette relation prend la forme :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = 8\pi GT_{ij}$$

où  $R_{\mu\nu}$  est un tenseur dépendant de  $g_{\mu\nu}$ ,  $G$  la constante gravitationnelle et  $\Lambda$  une constante. Einstein introduisit cette dernière constante dans le but d'obtenir une solution statique des équations mais elle est aujourd'hui conservée pour des raisons que nous exposerons plus loin.

Trouver une solution à cette équation dans un cas générale est très compliqué, pour ne pas dire impossible, d'où la nécessité de simplifier notre problème. Deux choses vont nous y aider : le principe cosmologique et la métrique de Robertson-Walker.

## 1.2 Principe cosmologique

Avant toute chose, insistons sur le fait que le Principe cosmologique n'est pas indispensable à la théorie de la relativité générale comme l'est le principe d'incertitude pour la mécanique quantique. Il s'agit là simplement d'une façon de se placer dans un cas particulier. Ce principe postule simplement que l'univers est homogène et isotrope. On peut se demander alors si, avec une hypothèse aussi drastique, la théorie ne créer pas un univers trop simple afin de pouvoir le résoudre... Il fut à l'origine introduit pour des arguments plus qualitatifs que quantitatifs, pour ne pas dire philosophiques. Quelque soit cette argumentation, il est toujours possible de vérifier si expérimentalement, le principe cosmologique est valable.

### 1.2.1 Le rayonnement de fond cosmologique (CMB)

Ce rayonnement baignant tout l'univers fut prévu dans le cadre de la théorie du BigBang par George Gamow en 1948, et fut découvert en 1965 par Arno Penzias et Richard Wilson. Il montre très clairement les caractéristiques d'un rayonnement de corps noir à une température  $T_0 = 2.728 \pm 0.004K$  (figure 1.1).

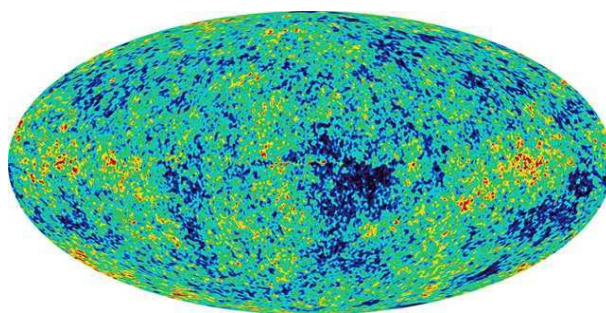


FIG. 1.1 – Cartographie du rayonnement de fond cosmologique

Il constitue non seulement une preuve éclatante du modèle standard, car il montre qu'à un moment de son histoire l'univers a connu un état très dense et très chaud, mais il est aussi une source de renseignements très précieuse. Émis au moment de la recombinaison des leptons et des fermions lorsque l'univers avait une température d'environ 3000K, il a depuis voyagé pour nous parvenir aujourd'hui. La première information que l'on peut tirer du CMB est son étonnante uniformité quelque soit la direction dans laquelle on l'observe. Cela nous indique que l'univers semble être extraordinairement isotrope.

### 1.2.2 Le recensement de la matière

A petite échelle l'univers est fortement hétérogène : la matière forme des étoiles, des galaxies, des amas et des super-amas séparés par de grands espaces vides. Mais la question qui nous intéresse, dans le cadre de la relativité générale, est de savoir quelle est cette répartition à grande échelle. Pour cela il nous suffit de dresser une carte de la matière environnante, sur une échelle suffisamment grande, et de vérifier si sa distribution est homogène. Certes l'idée est simple mais il en va tout autrement pour sa réalisation... Tout d'abord la mesure des distances est un problème bien connu de l'astronomie et ensuite le nombre d'objets à recenser est titanesque. De grands programmes d'observation ont été lancés dans ce but dont le plus ambitieux est aujourd'hui le SLOAN Digital Sky Survey (SDSS). Son objectif est, en observant un quart de la totalité du ciel, de déterminer la position et la luminosité absolue de quelques 100 millions d'objets célestes. Parmi ceux-ci on trouve les un million de galaxies les plus proches ainsi que environ 100 milles quasars, les objets les plus lointains que l'on connaisse. Cela va nous permettre à terme d'avoir une vision tridimensionnelle globale de l'univers.

Les nombreux objets déjà observés permettent de faire les premières estimations. Sur des échelles supérieures à 100 Mpc, il semblerait qu'il n'y est plus de structures et que la matière soit répartie aléatoirement de manière homogène.

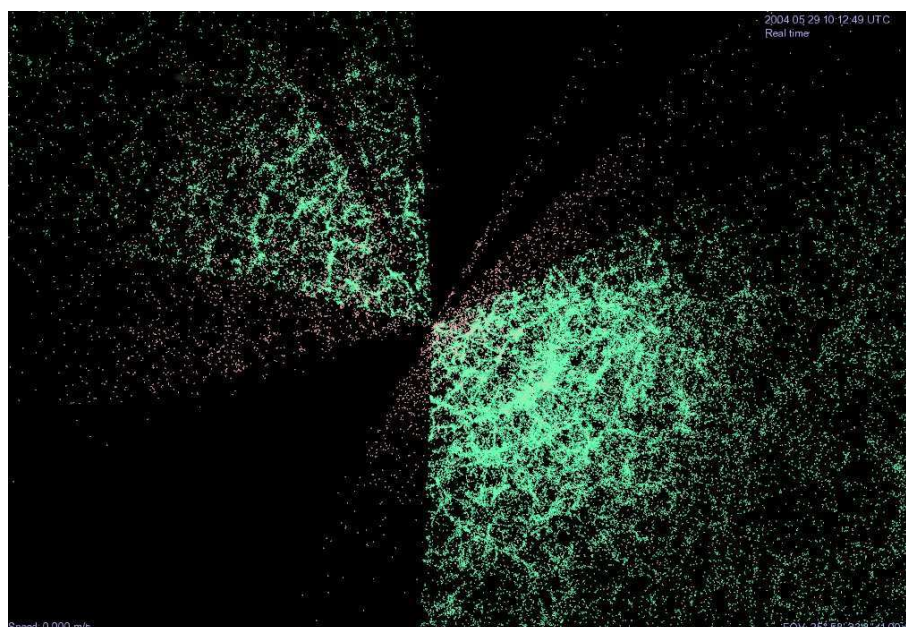


FIG. 1.2 – Recensement des galaxies par le programme 2dF. Chaque point représente une galaxie.

# Chapitre 2

## Implication du principe cosmologique

Si l'on accepte le principe cosmologique, on arrive alors à un univers hautement symétrique ce qui entraîne de grandes simplifications dans la mise en équation du problème. Ces simplifications se manifestent au niveau de la métrique de l'espace ainsi que, bien évidemment, sur le contenu de l'univers par l'intermédiaire du tenseur énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$

### 2.1 la métrique de Robertson-Walker

En coordonnées polaires, la métrique de Robertson-Walker est donnée par l'expression :

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right)$$

$R(t)$  est appelé le facteur d'échelle. Il relie les variables dites 'comobiles'  $r, \theta, \phi$  à la distance physique des objets

Le paramètre  $k$ , quant à lui, peut prendre trois valeurs  $(-1, 0, 1)$  qui sont trois réalisations différentes d'univers homogènes et isotropes : plat, ouvert et fermé.

Très souvent on trouve le facteur d'échelle exprimé sous la forme d'un paramètre sans dimension  $a(t) \equiv \frac{R(t)}{R_0}$  où  $R_0$  est la valeur actuelle de  $R(t)$ .

Si l'on introduit en plus les coordonnées

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

soit

$$r = \mathcal{S}_k(\chi)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{-1}(\chi) = \sin\chi \\ \mathcal{S}_0(\chi) = \chi \\ \mathcal{S}_1(\chi) = \cosh\chi \end{cases}$$

La métrique RW prend alors la forme :

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [d\chi^2 + \mathcal{S}_k^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$

## 2.2 Le tenseur énergie impulsion

Dans le cadre du principe cosmologique le tenseur-énergie impulsion prend la forme de celui d'un fluide parfait, ce qui se traduit par :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)V^\mu V^\nu - P g^{\mu\nu}$$

où  $V$  est la quadrivitesse du fluide,  $\rho$  sa densité et  $T$  sa température. Le fluide aura différentes propriétés selon le type de particules que l'on considère. Pour l'ensemble des particules non-relativistes, que l'on appellera 'matière', la pression est approximativement nulle et la densité est principalement l'énergie de masse. Dans le cas de particules relativistes, que l'on nommera 'rayonnement', la pression est approximativement  $p = \rho/3$  et la densité d'énergie est donnée par  $\rho \sim \lambda a^{-1}$ .

## 2.3 Les équation de Friedmann-Lemaître

Si l'on introduit la métrique de Robertson-Walker ainsi que le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait dans les équations de la relativité générale, celles-ci se simplifient et s'expriment alors par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)a + \frac{\Lambda}{3}a \end{aligned}$$

La première équation traduit l'évolution du taux d'expansion de l'univers en fonction du temps. Sa valeur actuelle n'est autre que le paramètre de Hubble  $H_0$ . La deuxième équation détermine l'accélération de l'expansion.

## 2.4 paramètres cosmologiques et densité critique

En introduisant l'expression

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{2.1}$$

dans l'équation de Friedman on a :

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \sum_i u_i \rho_i - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

où l'indice  $i$  sert à parcourir les différents types de particules, relativistes et non-relativistes.

En divisant les deux membres par  $H^2$  :

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \sum_i u_i \rho_i + \frac{\Lambda}{3H^2} - 1$$

on définit la densité critique  $\Omega$  par :

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2} \sum_i u_i \rho_i + \frac{\Lambda}{3H^2}$$

Si la constante cosmologique était nulle alors la valeur seule de  $\Omega$  déterminerait la forme de l'univers. En effet on aurait alors :

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - 1$$

On voit alors que si  $\Omega > 1$ , cela impliquerait  $k > 1$  et donc que l'univers serait fermé et connaîtrait une recontraction (Big Crunch). De même si  $\Omega < 1$  alors nous aurions  $k < 1$ , l'univers serait par conséquent ouvert et continuerait son expansion indéfiniment. La valeur particulière  $\Omega = 1$ , correspondant à un univers plat, permet donc de séparer les deux types de géométrie.

Les paramètres cosmologiques sont définis par :

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (2.2)$$

En introduisant ces nouvelles définitions dans l'équation de Friedmann-Lemaître on obtient :

$$1 - \Omega_k = \sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda$$

## 2.5 Le décalage vers le rouge cosmologique

Le décalage vers le rouge est un processus bien connu en physique. Celui-ci est dû à l'influence du mouvement d'une source de rayonnement sur le spectre de ce dernier. Concrètement, lorsque la source s'éloigne de l'observateur, le spectre est décalé vers le rouge et inversement, lorsqu'elle s'approche, le spectre est décalé vers le bleu. Ce décalage, appelé l'effet Doppler-Fizeau, permet de mesurer la vitesse radiale des objets. En relativité restreinte, si l'on observe sur le spectre d'un objet un décalage  $\Delta\lambda$  de certaines raies dont on connaît la longueur d'onde en laboratoire  $\lambda_e$ , alors le décalage vers le rouge s'écrit :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{v}{c} \quad (2.3)$$

où  $v$  est la vitesse de déplacement de la source par rapport à l'observateur et  $c$  la célérité de la lumière.

Pour interpréter cet effet dans le cadre de la relativité générale, étudions la trajectoire d'un photon dans la métrique de Robertson-Walker. La distance parcourue par un rayon lumineux émis par une source immobile au temps  $t_e$  jusqu'à sa réception au temps  $t_r$  le long d'une géodésique est donnée par  $ds^2 = 0$ , soit dans la métrique de Robertson-Walker :

$$\frac{a(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t)d\chi = dt$$

En intégrant :

$$\chi_r - \chi_e = \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)}$$

Ce que l'on peut réécrire comme :

$$\chi_r - \chi_e = \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_r}^{t_r + \delta t_e} \frac{dt}{a(t)} \simeq \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} - \frac{\delta t_e}{a(t_e)} + \frac{\delta t_r}{a(t_r)}$$

d'où :

$$\frac{\delta t_e}{\delta t_r} = f_{ar} c a(t_e) a(t_r)$$

En introduisant les longueurs d'onde de ces rayons lumineux qui subissent le même décalage vers le rouge  $\delta t = \frac{\lambda}{c}$ , il vient :

$$\frac{a(t_e)}{a(t_r)} = \frac{\lambda_e}{\lambda_r}$$

$$\frac{a(t_r)}{a(t_e)} - 1 = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_e}$$

On reconnaît là la définition donnée par 2.3. Si l'observation est faite à  $t_r = t_0$ , on a  $a(t_0) = 1$  et l'on trouve alors :

$$a(t_e) = \frac{1}{1 + z}$$

On a ainsi une expression reliant le décalage vers le rouge au facteur d'échelle au moment de l'émission.

Le décalage vers le rouge cosmologique fut observé par la première par Hubble en 1926. En mesurant le décalage vers le rouge d'un échantillon de galaxies et leurs distances, il put les relier par l'expression :

$$v_{gal} = D_{gal} H_0$$

où  $H_0$  est appelée la constante de Hubble. Elle n'est autre que la valeur actuelle de  $H$  défini par l'expression 2.1.

La valeur exacte de  $H_0$  fait encore aujourd'hui l'objet de recherche mais on commence à avoir une bonne estimation de sa valeur. Toutes les méthodes partent du même principe que l'expérience de Hubble : on mesure la vitesse d'un objet dont on connaît la distance. Le problème revient là encore aux mesures de distances... La vitesse de récession sera d'autant plus importante que l'objet sera éloigné de nous. Pour les objets les plus proches, la vitesse particulière sera de l'ordre de la vitesse de récession et va complètement brouiller les mesures. Ils nous faut donc considérer des objets suffisamment lointains pour que leur vitesse particulière soit négligeable, zone que l'on appelle le flot de Hubble. Le problème est que plus un objet est lointain et moins sa distance est connue avec précision. Les mesures de distance primaire (comme l'utilisation d'étoiles variables telles que les céphéides) ne permet pas d'atteindre des objets suffisamment éloignés mais va permettre de



Méthodes	Mesure de $H_0$ en $km.s^{-1}.Mpc^{-1}$
Tully-Fischer	$71 \pm 3 \pm 7$
Plan fondamental(Faber-Jackson)	$82 \pm 6 \pm 9$
Fluctuation de brillance de surface	$70 \pm 5 \pm 6$
Supernovae de type Ia	$71 \pm 2 \pm 6$
Supernovae de type II	$72 \pm 9 \pm 7$

TAB. 2.1 – Résultats des mesures de la constante de Hubble  $H_0$  par le HST Key Project (Freedman et al. 2001)

calibrer les estimateurs de distance secondaire en utilisant des objets très lumineux (galaxies ou supernovae dont nous parlerons largement dans la suite).

La table 2.5 donne quelques méthodes possibles pour mesurer le valeur de  $H_0$  ainsi que les résultats correspondant. La méthode de Tully-Fischer relie la vitesse de rotation des galaxies elliptiques à leur luminosité. Les mesures de brillance de surface utilisent la mesure de la fluctuation locale de surface des galaxies sur un secteur angulaire fixé. Les supernovae de type Ia sont utilisées comme chandelle standard (méthode que nous développerons par la suite). Dans le cas des supernovae de type II, il est possible de mesurer la vitesse de ses couches en expansion, sa température et sa courbe de lumière pour en déduire sa distance angulaire.

D'autres méthodes indépendantes de la calibrations par les céphéides existent comme par exemple celles utilisant l'effet Sunayev-Zeldovitch ou les effets de lentilles gravitationnelles. Celles-ci donnent des résultats compatibles avec les méthodes citées plus haut mais sont cependant moins précises.

## 2.6 Bilan énergétique de l'univers

Puisque dans la formulation de la relativité générale la matière tient une place si importante, il est primordiale, si l'on veut l'appliquer dans un cadre cosmologique, de caractériser précisément la matière qu'il contient. Nous allons ici tenter de dresser un état des lieux de la connaissance que nous avons dans ce domaine. Comme nous l'avons dit précédemment la matière peut être séparée en différents 'fluides' en fonction des propriétés des particules que l'on considère. En ce qui concerne la matière 'ordinaire', la différence vient principalement de la présence ou non d'effets relativistes car cela changera drastiquement leurs équations d'état. En l'absence de tels effets nous parlerons simplement de 'matière' et dans le cas contraire nous utiliseront le terme de 'rayonnement'. Une des récentes révolutions apportée par la cosmologie est la découverte que la matière baryonique telle que nous la connaissons ne représente qu'une faible partie de la matière que contient l'univers, environ 10 pourcent. 90 pourcent de la matière nous est donc inconnue mais nous pouvons la détecter indirectement, en observant ses effets gravitationnels sur la rotation des galaxies par exemple (figure 2.1)

. Il est possible que cette 'matière noire' soit des particules exotiques prédit par les théories super-symétriques. Mais le mystère ne s'arrête pas là : la totalité de la matière ne représente qu'une faible portion du contenu énergétique de l'univers,

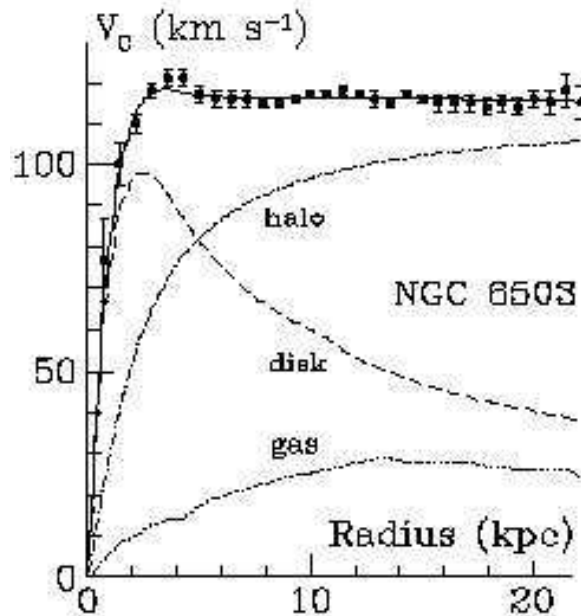


FIG. 2.1 -

environ 30 pourcent. Les 70 autres pourcents semblent être représentés par une mystérieuse énergie que l'on nomme 'énergie noire'. Sa véritable nature nous échappe encore et nous devons aujourd'hui nous limiter à de simples hypothèses... examinons en détails chacun de ces protagonistes.

### 2.6.1 la rayonnement

La majorité du rayonnement existe sous forme de photons et la majorité des ces photons provient du rayonnement fossile dont nous avons déjà parlé plus tôt. Ce rayonnement a été émis lorsque l'univers avait environ 300 000 ans et que sa température était de  $3000 \text{ K}$ . Sous l'effet de l'expansion ce rayonnement s'est refroidit jusqu'à sa température actuelle de  $2.728 \pm 0.004 \text{ K}$  mais tout en conservant les caractéristiques spectrales d'un corps noir. La loi de Stefan nous dit alors que la densité peut être exprimée sous la forme :

$$\rho_\gamma = \sigma \frac{\pi^2}{15} T^4$$

soit

$$\Omega_\gamma = 2.48 * 10^{-5} h^{-2}$$

avec  $h = \frac{H_0}{100}$ . Ceci équivaut à une densité de  $411 \text{ photons.cm}^{-3}$ . A titre de comparaison le nombre de photons issu des étoiles représente moins de  $1 \text{ photon.cm}^{-3}$

Un équivalent du rayonnement de fond cosmologique existe pour une autre particule : le neutrino. Celui ci, sensible seulement à l'interaction faible, a été émis bien plus tôt que les photons. Sa température actuelle serait d'environ  $1.9 \text{ K}$  soit une densité de

$$\Omega_\nu = 1.15 h^{-2} . 10^{-5}$$

équivalant à environ  $112 \text{ neutrinos.cm}^{-3}$ . On a longtemps cru que la masse du neutrino pouvait être nulle mais on a de bons indices aujourd'hui nous indiquant que tel n'est pas le cas. Si l'existence d'une masse pour cette particule est confirmée, elle pourrait jouer un rôle non négligeable dans le bilan énergétique de l'univers.

### 2.6.2 la matière baryonique

On parlera toujours uniquement de la matière baryonique en ignorant les électrons. En effet, ceux-ci étant beaucoup plus légers, on négligera leur présence. Il existe plusieurs façons de mesurer la densité baryonique mais chacune nécessite des précisions instrumentales très difficiles à atteindre. L'un d'eux fait intervenir la nucléosynthèse primordiale. Celle-ci s'est produite bien avant l'émission du rayonnement de fond cosmologique. Lorsque l'univers avait une température de l'ordre du milliard de degrés celsius, le rayonnement était dominant. Les seules espèces présentes sont alors les neutrons, les protons, les neutrinos, les électrons et bien sûr les photons. Lorsque la température va s'abaisser, l'interaction forte va entrer en jeu. Des systèmes composés de neutrons et de protons vont apparaître et persister puisque le rayonnement n'a alors plus assez d'énergie pour les dissocier. C'est à ce moment que ce forment la totalité de l'hélium, du lithium, du béryllium et leurs isotopes. Il est facile d'imaginer que la proportion de chacun de ces éléments dépend très fortement de la densité de baryons présents dans le plasma primordial : les noyaux se forment durant la collision de plusieurs baryons et le nombre de collisions dépend de la densité. Un des gros avantages d'utiliser comme traceur des isotopes tel que le deutérium, l'hélium 3 ou le lithium 7 est que ces éléments ne peuvent avoir été produits à l'intérieur des étoiles et, par conséquent, les abondances originales n'ont pas pu être polluées. Une mesure récente de ces différents éléments donne :

$$\Omega_b h^2 = 0.0437 \pm 0.004$$

Une autre méthode se base sur le rayonnement de fond cosmologique. Du fait de l'interaction des photons avec la matière au cours de leur voyage jusqu'à nous, les caractéristiques des anisotropies vont être modifiées. En effet par l'intermédiaire de la diffusion Compton, les photons vont interagir avec les électrons qui sont liés aux baryons ce qui va modifier l'amplitude des différents pics. On a donc un moyen indirect d'estimer la densité de baryons. Les mesures réalisées par le satellite MAP ont la précision nécessaire pour contraindre cette densité et la valeur obtenue est :

$$\Omega_b h^2 = 0.0490 \pm 0.002$$

Les deux méthodes sont en bon accord et l'on voit que la matière baryonique domine aujourd'hui largement sur le rayonnement. De plus, la matière visible telle que les galaxies, dont on estime la densité à  $\Omega_{vis} = 0.003$ , ne représente qu'une faible partie de cette matière.

### 2.6.3 la matière non-baryonique

Les premiers indices de la présence de matière noire sont apparus en 1933 lorsque Zwicky entrepris de mesurer la vitesse de rotation de la galaxie de la Chevelure de

Bérénice et en 1936 lorsque Smith réalisa la même expérience sur la galaxie de la Vierge. Tous deux trouvèrent que la vitesse de rotation était trop élevée pour assurer la cohésion de la galaxie. Cependant, le peu d'intérêt de l'époque pour la dynamique des galaxies et l'importance des incertitudes sur les mesures, firent que celle-ci passèrent pratiquement inaperçues. De nos jours, le progrès technique aidant, les incertitudes ne permettent plus de douter et les galaxies nous montrent très clairement l'existence d'une composante de matière qui nous est invisible. Le problème se manifeste également à une toute autre échelle que celle des galaxies. L'observation de la dynamique des amas montre là aussi que leur masse est largement supérieure à celle que l'on peut observer. Plusieurs hypothèses ont vu le jour pour expliquer cette matière noire. On peut d'abord penser qu'il s'agit simplement de matière ordinaire mais qui ne rayonne pas comme des naines brunes, des planètes, des astéroïdes ou du gaz mais les mesures réalisées sur notre galaxie montrent que ceux-ci ne représentent pas une masse suffisante. On a également soupçonné les neutrinos dont nous avons déjà précisé que leur masse est mal connue. Cependant, il existe des contraintes sur cette masse qui disqualifient ce candidat. En fait beaucoup d'indices nous laissent en à penser que la majorité de cette matière ne serait pas baryonique.

On pense actuellement que le candidat idéal pour incarner la matière noire serait les particules les plus légères prédites par les théories super-symétriques que l'on nomme WIMPS. On tente actuellement de détecter ces particules directement, dans les accélérateurs de particules, ou indirectement, par leur interaction avec les photons gamma comme notamment dans le projet CDMS. Pour l'instant ces tentatives restent sans succès.

Plutôt que de postuler l'existence d'une matière encore inconnue, il peut être envisagé que la problème vient de la théorie de la gravité elle-même. C'est l'idée qu'a développé Milgrom en 1983 qui, en modifiant la loi gravitationnelle newtonienne pour des accélérations très faibles, a réussi à reproduire la courbe de rotation de certaines galaxies avec une très bonne précision. Cependant cette théorie ne s'accorde pas avec toutes les galaxies et en l'absence de matière noire, comment expliquer les mirages gravitationnels ? De plus la matière noire est loin d'être indésirable pour les théories cosmologiques. En effet elle permet d'expliquer la formation des structures à partir du milieu très homogène qu'était l'univers à haute température. L'introduction de matière noire dans les simulations numériques de formation de structures donne des résultats en très bon accord avec les récents catalogues tel que SDSS. Ces simulations permettent également de tester les différents modèles de matière noire comme par exemple celui du CDM (Cold Dark Matter) qui est le mieux accepté aujourd'hui. Dans ce dernier modèle la matière noire serait donc composée de particules exotiques non relativistes.

Afin d'estimer la densité  $\Omega_M$  de cette matière noire, il est possible d'utiliser le catalogue SDSS. En effet il existe un lien entre cette valeur et le spectre actuel de fluctuations de densité à grande échelle. on trouve alors la valeur :

$$\Omega_M h = 0.20_{-0.09}^{+0.16}$$

### 2.6.4 L'énergie noire

L'histoire de la constante cosmologique a connu plusieurs rebondissements. Sa première apparition est due à Einstein qui l'avait utilisée pour conserver un l'univers statique dans ses équations. La découverte de l'expansion ne justifiait plus la présence de cette constante et elle fut alors éliminée. Jusqu'au début des années 90, le modèle accepté de l'univers était une géométrie plane et une densité de matière égale à la densité critique. Lorsque les premiers recensements ont commencé à apparaître, il s'est avéré que la densité de matière était bien inférieure à ce que l'on croyait. Or les théories d'inflation prévoient que la densité de matière devait être égale à la densité critique, donc, afin de maintenir la cohérence du modèle, on a réintroduit la constante cosmologique. Cette constante permettait en plus de rendre cohérent l'âge de l'univers avec l'âge des plus vieilles étoiles. Cependant il ne s'agissait là que de convenances théoriques.

Il fallut attendre la fin des années 90 pour avoir les premières mesures expérimentales de la constante cosmologique (Perlmutter et al. 1999). Grâce à l'observation de supernovae lointaines, à des redshift d'environ 0.5, on peut exclure à 99% de certitude un univers avec une constante cosmologique nulle.

A partir de l'équation 2.2, nous pouvons définir une densité d'énergie pour la constante cosmologique :

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Cette densité est indépendante du temps. La conservation de l'énergie entraîne :

$$d(\rho_\Lambda a^3) = -P d(a^3)$$

et donc que  $\rho_\Lambda \sim -P_\Lambda$ . Cette constante cosmologique peut donc être réinterprétée comme un fluide parfait de densité constante au cours du temps, homogène spatialement et de pression négative. Elle agit ainsi comme une 'gravitation répulsive' et permet ainsi d'expliquer l'accélération de l'expansion. La nature de cette 'énergie noire' est encore inconnue et beaucoup d'hypothèses existent à son sujet. Il est très séduisant d'essayer d'associer celle-ci à l'énergie du vide prédite dans les théories quantiques mais, hélas, il semble que l'ordre de grandeur d'une énergie du vide soit très largement supérieure. Une voie prometteuse semble être de considérer l'énergie noire comme un champ scalaire de type quintessence.

## 2.7 conclusion

Dans la théorie actuelle, l'univers peut être décrit par un très petit nombre de paramètres. En fonction de la valeur de ces paramètres, bien des solutions existent et l'enjeu est aujourd'hui de contraindre leurs valeurs. Nous avons déjà cité précédemment que les supernovae pouvaient être utilisées dans ce sens. Mais cela passe par une mesure des distances sur des échelles cosmologiques et il nous faut donc bien comprendre la notion de distance dans ce contexte.

# Chapitre 3

## Mesure des distances

La mesure des distances est assurément un des problèmes fondamentaux de l'astronomie mais également l'un des plus complexes. De nombreuses méthodes ont été proposées afin de répondre à ce besoin permanent, chacune avec ses avantages et inconvénients. La méthode à utiliser dépend à la fois de l'ordre de grandeur de la distance que l'on veut mesurer et du type d'objets que l'on observe. Le premier pas consiste à définir précisément la notion de distance dans le cadre de la relativité générale.

Dans le cas qui va nous intéresser, à savoir l'estimation des paramètres cosmologiques, le point le plus important est d'atteindre les distances les plus grandes possibles. Nous verrons que les supernovae sont pour cela le candidat idéal.

### 3.1 Définition de la distance

Nous l'avons vu précédemment, dans le cadre de la relativité générale, la matière influe sur la métrique et donc, par conséquent, elle va agir également sur la notion de distance. L'expérience montre que l'univers est dominé par deux fluides : le premier est la matière noire non relativiste et le second, de nature inconnue, ayant les caractéristiques d'une constante cosmologique. Si l'on intègre cela dans l'équation de Friedmann on obtient alors :

$$\left(\frac{H^2}{H_0}\right)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Omega_{M_0}(a^{-3} - a^{-2}) + \Omega_{\Lambda_0}(1 - a^{-2}) + a^{-2}$$

La distance entre deux points en coordonnées comobiles s'écrit :

$$\chi = \int_{t_0}^t \frac{dt}{R(t)}$$

Si l'on introduit la paramètre  $a(z)$  défini précédemment :

$$\chi(z) = \frac{1}{R_0} \int_1^{a(z)} \frac{da}{a\dot{a}}$$

Finalement en introduisant les paramètres cosmologiques :

$$\chi(z) = \sqrt{|\Omega_{k_0}|} \int_0^z [(1+z')^2(1+\Omega_{M_0}z') - \Omega_{\Lambda_0}z'(2+z')]^{-\frac{1}{2}} dz'$$

### 3.2 la distance de luminosité

Considérons un objet de luminosité absolue  $\mathcal{L}$  qui rayonne de manière isotrope. Ce rayonnement va se distribuer uniformément sur une sphère dont l'élément de surface s'écrit dans la métrique de Robertson-Walker comme :

$$dS^2 = R^2(t)r^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Pour une mesure réalisée à  $t = t_0$ , dans le système de coordonnées comobiles, la surface de la sphère s'écrit donc :

$$S = 4\pi R_0^2 \mathcal{S}_k^2(\chi)$$

La fraction de photons émis qui va être collectée par la miroir de surface A est donnée par  $A/S$ . Si l'objet que l'on observe est éloigné, il va nous falloir bien sûr tenir compte de l'expansion. Celle ci va modifier la longueur d'onde des photons émis par la source mais va également influencer le temps d'intégration. On a les relations suivantes :

$$\nu_0 = \nu_1 \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$$

$$\delta t_0 = \delta t_1 \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$$

La puissance reçue par le miroir est donc donnée par :

$$P = \frac{A}{4\pi R_0^2 \mathcal{S}_k^2(\chi)} \mathcal{L} \left( \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \right)^2$$

La luminosité apparente d'un objet est la puissance reçue par unité de surface, soit :

$$f = \frac{\mathcal{L}}{4\pi R_0^2 \mathcal{S}_k^2(\chi)} \frac{1}{(1+z)^2}$$

On définit la distance de luminosité par :

$$d_L^2 = \frac{\mathcal{L}}{4\pi f} = R_0^2 \mathcal{S}_k^2(\chi) (1+z)^2$$

soit :

$$d_L = R_0 \mathcal{S}_k(\chi) (1+z)$$

En introduisant la précédente expression de  $\chi(z)$ , on a alors :

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0 \sqrt{|\Omega_{k_0}|}} \mathcal{S}_k \left( \sqrt{|\Omega_{k_0}|} \int_0^z [(1+z')^2(1+\Omega_{M_0}z') - \Omega_{\Lambda_0}z'(2+z')]^{-\frac{1}{2}} dz' \right)$$

On voit donc que si l'on connaît la luminosité absolue d'un objet, on a là un moyen de contraindre les paramètres cosmologiques.

Dans le cas d'objets très proches, le décalage vers le rouge est très faible ( $z \ll 1$ ) et l'expression précédente devient :

$$d_L = \frac{cz}{H_0} \left( 1 + \frac{1 - q_0}{2} z + \mathcal{O}(z^2) \right)$$

Les objets très proches permettent donc de mesurer la constante de Hubble  $H_0$  et le paramètre de décélération  $q_0$

### 3.3 Utilisation des chandelles standards

La magnitude absolue d'un objet est définie comme la luminosité apparente d'un objet à 10pc. Si l'on considère un objet de flux  $F$  et un flux de référence  $F_0$ , cette magnitude absolue est donnée par l'expression :

$$\mathcal{M} = -2.5 \log \left( \frac{F(10pc)}{F_0} \right)$$

La magnitude apparente peut être exprimée en fonction de la luminosité absolue et des paramètres cosmologiques :

$$m(z) = (M) + 25 - 5 \log_{10}(H_0) + 5 \log_{10}(\mathcal{D}(z, \Omega_M, \Omega_X)) \quad (3.1)$$

avec  $\mathcal{D} = H_0 d_L$

Ainsi si l'on connaît la magnitude absolue d'un objet, on peut en la comparant à la magnitude observée contraindre la valeur des paramètres cosmologiques. C'est ici que les chandelles standards sont un outil précieux puisque, par définition, on peut par un moyen indirect connaître leur luminosité absolue.

### 3.4 Le digrame de Hubble

Comme l'équation 3.1 ne permet pas de donner directement une valeur des paramètres cosmologiques, il nous faut utiliser une résolution graphique. On va utiliser pour cela un graphique représentant la variation de  $m_B$  en fonction de  $\log(cz)$  appelé diagramme de Hubble. Prenons le cas des supernoave de type Ia et supposons que leur luminosité absolue ait une certaine valeur  $\mathcal{M}_B$ . On peut alors en considérant différentes valeurs de  $\Omega_M$  et  $\Omega_\Lambda$  prévoir sa luminosité apparente en fonction de sa distance exprimée en fonction du redshift. Il suffit alors de placer sur ce graphique les luminosités apparentes mesurées sur ce type d'objets afin de déterminer quel couple de valeurs des paramètres est le plus proche.

La figure 3.1 donne le diagramme de Hubble réalisé par le Supernova Cosmology Project en 2003. Les points représentent des mesures réalisées sur des supernoave de type Ia. Les différentes lignes montrent l'évolution théorique en fonction de plusieurs couples de valeurs ( $\Omega_M, \Omega_\Lambda$ ). Le meilleur ajustement aux mesures nous donne (0.25, 0.75). On trouve fréquemment dans la littérature des diagrammes représentant toutes les valeurs possibles de  $\Omega_M$  et  $\Omega_\Lambda$  ainsi que les contraintes tirées des mesures (voir figure 3.2). On peut voir très clairement sur cette figure qu'un univers plat avec  $\Omega_\Lambda = 0$  est exclu avec certitude.



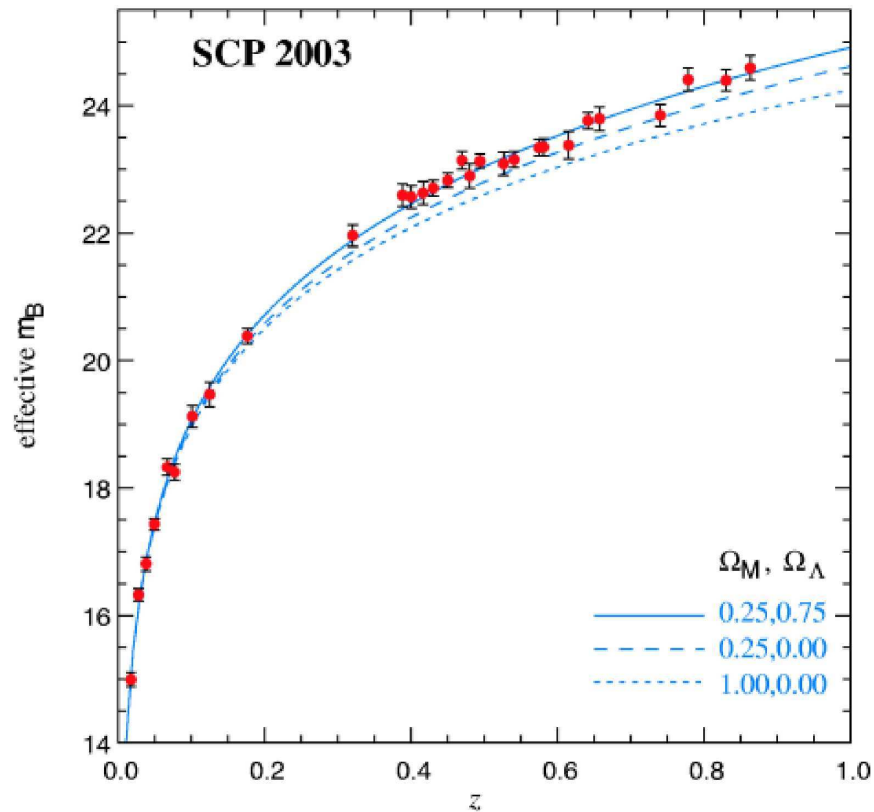


FIG. 3.1 – Diagramme de Hubble moyen pour un sous ensemble de SnIa ayant une faible extinction. Les objets vérifiant  $\Delta z < 0.01$  sont regroupés en un seul point en utilisant une moyenne pondérée pour plus de visibilité. La ligne solide donne le meilleur ajustement pour  $\Omega_M$  et  $\Omega_\Lambda$  dans le cas d'un univers plat,  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.25, 0.75)$ . Deux autres modèles d'univers  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (0.25, 0)$  et  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$  sont tracés pour comparaison. Figure tirée de (Knop et al. 2003)

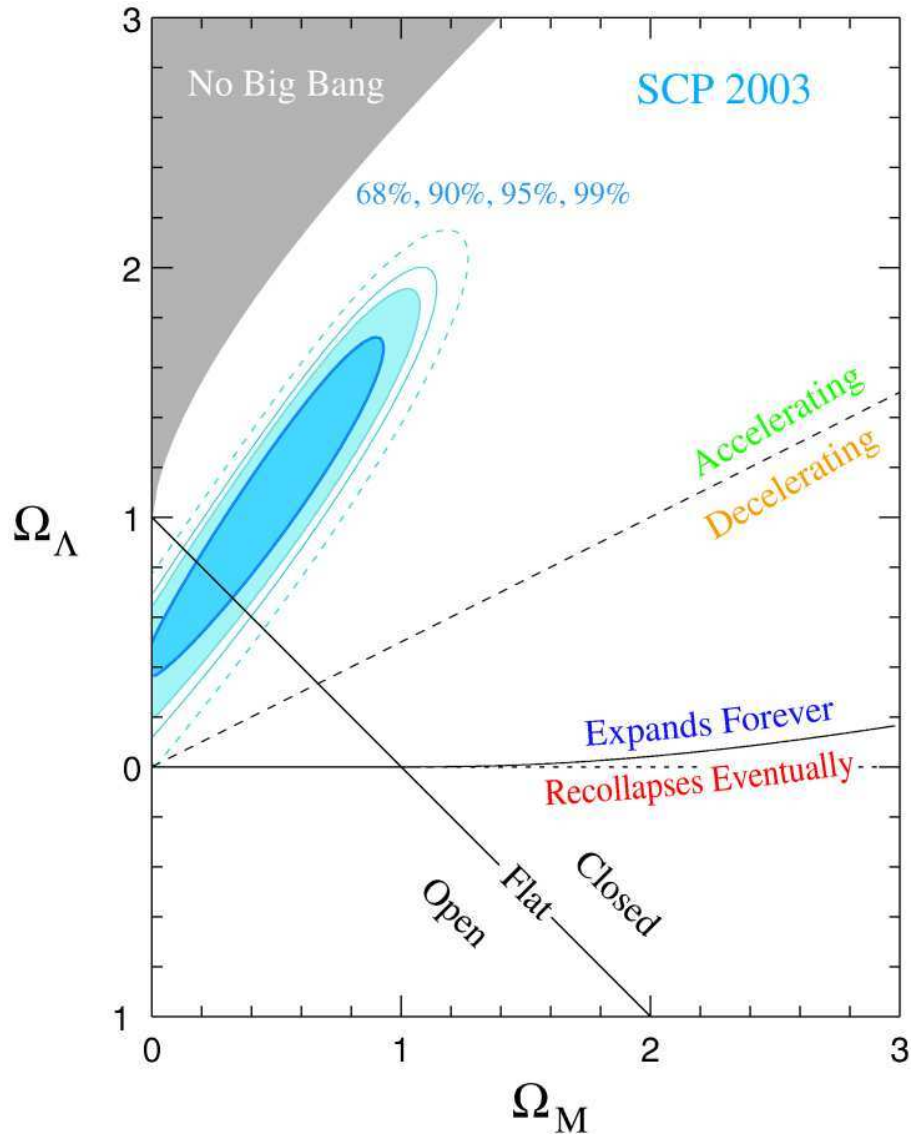


FIG. 3.2 – Les différentes régions de confiance sur les valeurs des paramètres  $\Omega_M$  et  $\Omega_\Lambda$  d'après un sous ensemble de supernovae à faible extinction du SCP. Figure tirée de (Knop et al. 2003)

# Chapitre 4

## La correction des mesures de flux

Puisque la mesure de la distance est basée principalement sur le flux, il nous faut bien évidemment connaître ce dernier très précisément. Nous devons donc tenir compte de tous les phénomènes pouvant biaiser les mesures que l'on fait sur les objets tel que l'absorption Galactique et extra-galactique où le biais de Malmquist. Le redshift doit également être pris en compte et corrigé par le procédé dit de correction K.

### 4.1 L'absorption Galactique

Notre galaxie, du fait de la matière qu'elle contient, n'est pas totalement transparente au rayonnement. Les objets lointains sont en parti masqués voir totalement invisibles dans le pire des cas. Ceci a longtemps faussé les estimations faites sur la taille de la Voie lactée elle même.

Nous allons nous intéresser principalement à la poussière car c'est elle qui affecte le plus la lumière qui nous parvient. Celle ci va absorber dans le domaine optique et réémettre dans l'infra-rouge lointain pouvant ainsi changer drastiquement les propriétés spectrales de l'objet observé.

Si l'on considère un objet de radiance  $L(\lambda, h)$  où  $h$  est sa distance on a alors :

$$dL(\lambda, h) = k(\lambda, h)\rho(h)L(\lambda, h)dh$$

où  $\rho(h)$  est la densité de poussière et  $dh$  l'épaisseur d'une tranche de poussière perpendiculaire à l'axe de visée. La fonction  $k(\lambda, h)$ , le coefficient d'absorption, est considérée comme invariante en fonction de la direction et du type de poussière. En intégrant le long de la direction d'observation on a alors :

$$L(\lambda, observateur) = L(\lambda, etoile)e^{-k(\lambda) \int \rho(h)dh}$$

Soit en magnitude :

$$m_{obs} = m_{int} + 2.5 \log_{10}(e)k(\lambda) \int \rho(h)dh$$

L'absorption totale est le produit du coefficient d'absorption par l'épaisseur de la colonne de poussière :

$$A(\lambda) = 2.5 \log(e)k(\lambda) \int \rho(h)dh$$

On définit usuellement  $E(B-V)$  comme la différence d'absorption entre la bande B et la bande V, c'est à dire :

$$E(B - V) = A_B - A_V$$

Elle varie en fonction de la quantité de poussière présente sur la ligne de visée.

Malgré la complexité apparente de l'absorption, il semble que l'on peut appliquer une correction assez simple (Fitzpatrick 1999). Cette correction prend la forme d'une courbe dépendant d'un paramètre  $R$  défini par :

$$R = a(\lambda) \frac{E(V - \lambda)}{E(V - B)} + b(\lambda)$$

Les paramètres  $a$  et  $b$  sont calibrés en comparant des étoiles proches et lointaines identiques.

En pratique il suffira donc de mesurer l'excédant de couleur d'un objet, de déterminer  $R$  puis d'appliquer la bonne correction.

## 4.2 L'absorption extra-galactique

De même que la Galaxie, la galaxie hôte d'une supernovae va elle aussi affecter les observations. On peut supposer que la loi d'absorption sera au moins aussi complexe que celle que nous avons vu précédemment. De plus, on sait que toutes les galaxies ne possèdent pas des quantités de poussières équivalentes. Dans la pratique, nous appliquerons la même méthode mais en faisant varier la valeur de  $\mathcal{R}$ . Les nouvelles valeurs seront définies à partir d'estimation de l'excès de couleur.

## 4.3 le biais de Malmquist

Les objets que l'on peut détecter dépendent de la sensibilité des détecteurs. Pour les objets très lointains, dont la magnitude va se trouver à la limite de cette sensibilité, seuls les plus brillants seront détectés. Les plus faibles objets étant donc exclus de l'échantillon, ceci constitue un biais observationnel. Pour bien prendre en compte cet effet il faut connaître parfaitement les caractéristiques des détecteurs et connaître la distribution intrinsèque des objets.

## 4.4 La correction K

Du fait de l'éloignement des sources que l'on observe, les effets de l'expansion vont se manifester et changer leurs propriétés spectrales de manière importante. Comme les instruments ne présentent qu'une certaine bande passante, la partie du spectre de la source que l'on va observer ne sera jamais la même. Si l'on observe par exemple une source dans un référentiel au repos à travers un filtre  $R$ , un observateur à un redshift de 0.5 devra utiliser un filtre  $B$  pour avoir approximativement la même partie du spectre (voir figure 4.2).

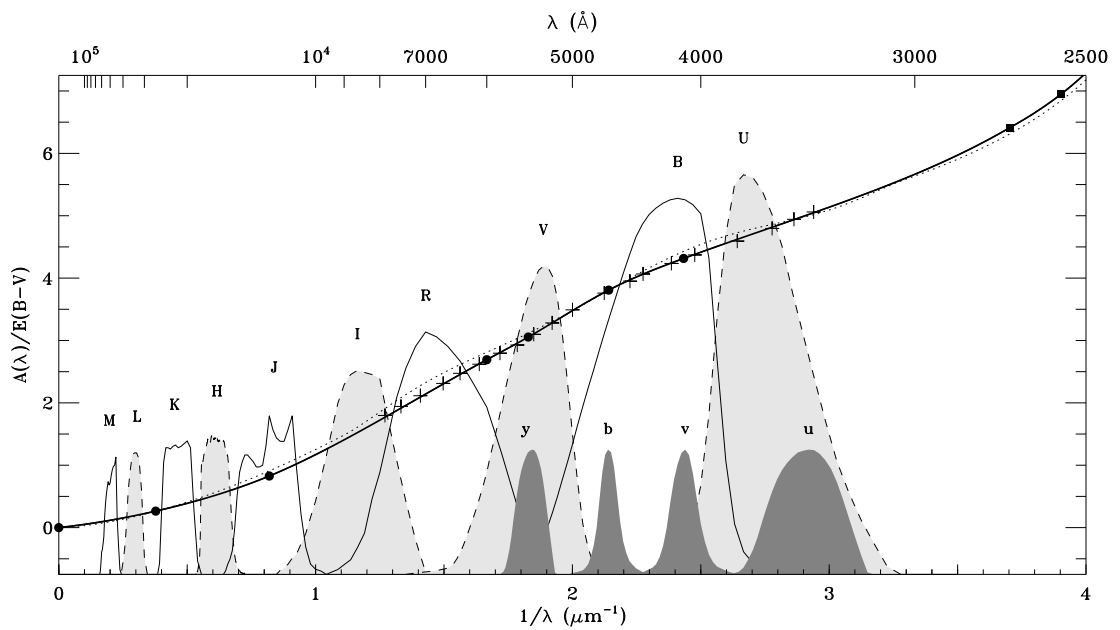


FIG. 4.1 – Dépendance de l'extinction galactique à la longueur d'onde dans le domaine optique et infra-rouge pour  $R=3.1$  (courbe continue). Les filtres de Johnson UBVRIJHKLM et de Stromgren ybv sont donnés en grandeur arbitraire pour comparaison. Figure tirée de (Fitzpatrick 1999)

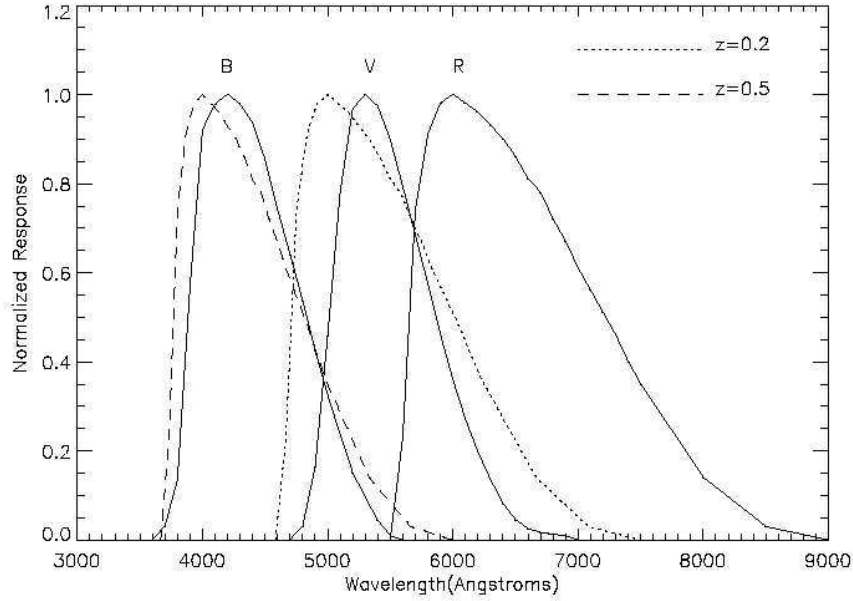


FIG. 4.2 – Représentation de Bessel des filtres Johnson-Cousins dans les bandes B, V et R. Les lignes discontinues montrent le filtre R décalé vers le bleu pour des décalages vers le rouge de  $z=0.2$  et  $z=0.5$ . On voit que pour ces valeurs de  $z$ , le filtre R correspond approximativement aux filtres V et B. Figure tirée de (Kim et al. 1996)

Ceci est un gros problème car la mesure de distance à partir des chandelles standards repose sur la comparaison de flux. Il va donc falloir trouver le moyen de ramener les flux dans un même référentiel photométrique.

Considérons un objet, de spectre  $I(\lambda)$ , se comportant comme une chandelle standard dans un filtre de transmission  $T_{ref}(\lambda)$  pris dans le référentiel de l'objet. Cet objet observé avec un filtre de transmission  $T_{obs}(\lambda)$  à un décalage vers le rouge  $z$ . Dans le référentiel de l'objet le flux est donné par :

$$f_{ref} = \int_{\lambda} T_{ref}(\lambda) I(\lambda) d\lambda$$

Pour l'observateur, ce flux s'exprime alors

$$f_{obs} = \int_{\lambda} T_{obs}(\lambda) I\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) d\lambda$$

Le rapport de ces deux expressions nous donne le coefficient multiplicatif à appliquer sur le flux observé pour le ramener dans le filtre de référence. En magnitude cela se traduit par :

$$m_{filtre} = -2.5 \log_{10}(f(filtre)/f_0(filtre))$$

$f_0(filtre)$  est le flux de l'étoile choisie comme référence dans le système de magnitude dont le spectre est  $I_0$ .

La correction K peut donc s'exprimer comme la différence entre la magnitude observée dans les deux référentiels :

$$K(z) = m_{obs} - m_{ref}$$

soit

$$K(z) = -2.5 \log_{10} \left( \frac{\int_{\lambda} I(\lambda) T_{obs} d\lambda}{\int_{\lambda} I\left(\frac{\lambda}{1+z}\right) T_{ref} d\lambda} \right) + 2.5 \log_{10} \left( \frac{\int_{\lambda} I_0 T_{obs}(\lambda)}{\int I_0 T_{ref}} \right)$$

De plus le flux de l'objet va varier au cours du temps. Le flux émis sur un interval de temps  $dt$  par la source sera, du fait de l'expansion, observé durant un interval de temps  $(1+z)dt$ . Il nous faudra donc ajouter à la correction K un terme  $-2.5 \log_{10}(1+z)$ .

Cette correction est toujours très délicate à appliquer. Elle nécessite une bonne connaissance des caractéristiques spectrales de l'objet. On utilise en générale des spectres observés sur le même type d'objets mais à très faible décalage vers le rouge ou la correction k est très faible.

Troisième partie

Les Supernovae



# Chapitre 1

## introduction

Parmi les processus violents qui se manifestent dans l'univers, les supernovae sont un des plus beaux exemples. Les puissances mises en jeu sont telles que leurs luminosités peuvent atteindre celle d'une galaxie entière. Une supernovae qui se produirait dans notre galaxie serait visible à l'oeil nu mais la faible fréquence de celles-ci fait que nous n'avons que peu de chance de le voir de notre vivant. La première référence historique fiable de l'observation d'un tel phénomène remonte à 1054 où un astronome chinois relate l'apparition d'une nouvelle étoile dans le ciel. On peut effectivement aujourd'hui observer au même emplacement la présence d'une nébuleuse connue sous le nom de "nébuleuse du Crabe", prouvant donc l'apparition d'une supernovae dans le passé. Plus proche de nous, on trouve deux autres références, une en 1572 par Tycho Brahé et l'autre en 1604 par Kepler.

Le premier des grands programmes d'observation de ce type d'objets fut le Calantololo dans le début des années 1990 qui, pendant les quatre années de son fonctionnement, découvrit quelques 50 supernovae. Les résultats prometteurs de ce projet encouragèrent le lancement de nouvelles campagnes. Actuellement les grands projets dans ce domaine sont le Supernova Cosmology Project et le High-Z Supernova Search. Les découvertes de nouveaux candidats sont aujourd'hui journalières et la quantité de données sur ces objets ne cesse d'augmenter et avec elle notre connaissance à leur sujet.

# Chapitre 2

## Caractéristiques observationnelles des supernovae

A travers les multiples observations, les supernovae semblent montrer une grande diversité aussi bien au niveau spectral qu'au niveau du flux. La connaissance de cette diversité n'est pas récente et déjà en 1940 l'astronome Américain R. Minkowski chercha à établir un classement. Il définit alors deux familles : le type II, dont les spectres montraient la présence d'hydrogène, et le type I ou celui-ci était absent. On sait que les supernovae sont dues à l'explosion d'étoiles en fin de vie mais l'absence d'hydrogène, composant à 99% la matière visible de l'univers, suppose déjà un mécanisme de formation bien particulier pour le type I. Cette classification sommaire a aujourd'hui beaucoup évolué et comporte principalement cinq familles : Ia, Ib, Ic, IIP et IIL. La distinction entre ces différentes familles se fait principalement dans le domaine spectral mais chacune a également ses particularités au niveau du flux. Examinons en détails ces différents types et ce qui les distingue.

### 2.1 Observations spectrales

La figure 2.1 montre le spectre des différents types de supernovae à des époques très proches du maximum de luminosité. Les raies sont larges indiquant une grande vitesse des différents éléments et plusieurs d'entre elles montrent un profil P-Cygni. On voit clairement apparaître sur le spectre (b) les raies de l'hydrogène différenciant le type II du type I. Notons que les deux sous-classes du type II n'apparaissent pas ici car il semble que l'on ne puisse distinguer celles-ci dans le domaine spectral. Le type Ia est caractérisé par une très forte absorption autour de 615nm produite par les raies Si II  $\lambda\lambda 6347, 6371$  (dénommées  $\lambda 6355$ ) et Ca II  $\lambda 3934, 3968$  décalées vers le bleu. Les types Ib et Ic ne montrent pas cette absorption et se distinguent tout deux par la présence des raies de l'hélium et particulièrement He I  $\lambda 5876$ .

Les époques plus tardives donnent également des critères permettant de caractériser les différents types. La figure 2.2 donne les spectres de différentes supernovae quatre mois après l'explosion. Le spectre des supernovae Ia est dominé par un mélange de raies du fer et du cobalt. Les autres types, quant à eux, se ressemblent beaucoup aux époques tardives. Ils montrent clairement des raies d'éléments intermédiaires tels que l'oxygène et le calcium. Cependant les raies d'émission dans le

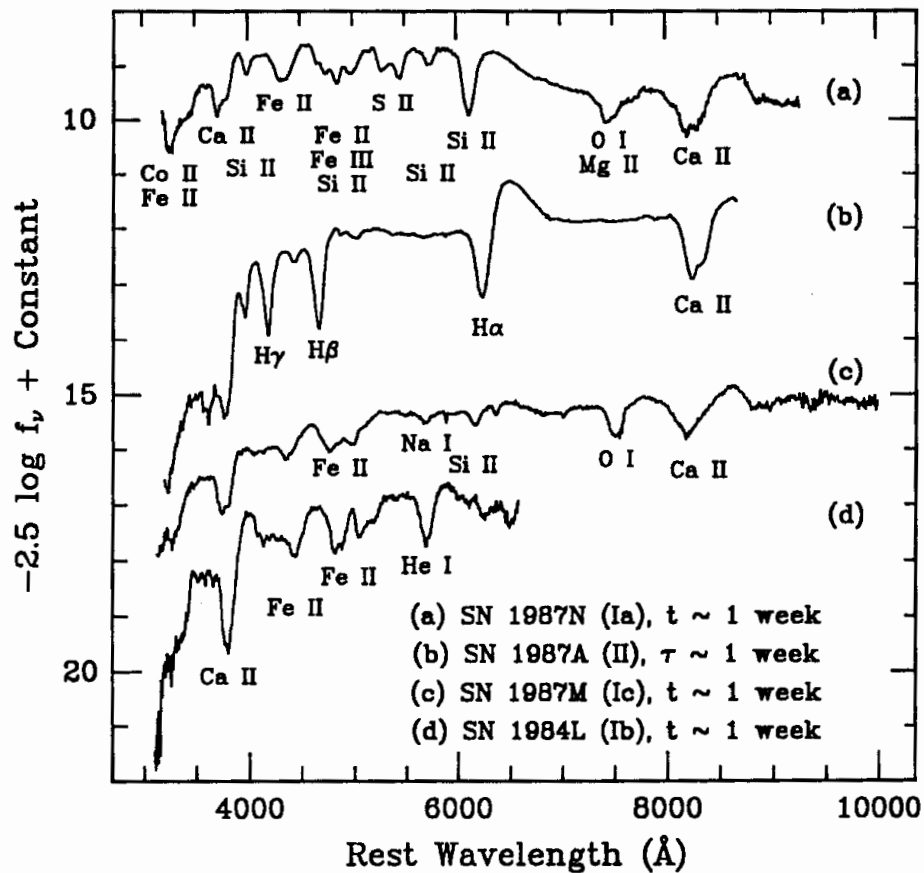


FIG. 2.1 – Spectre des différents type de supernovae une semaine après le maximum de luminosité (Filippenko 1991)

type II sont plus étroites et plus faibles.

L'évolution des spectres n'est pas seulement due à l'évolution quantitative des différentes espèces lors de l'explosion sous l'effet de la désintégration mais aussi de fusion qui peut se poursuivre dans les couches en expansion grâce aux importantes quantités d'énergie mises en jeu. L'opacité des différentes couches en expansion joue également un très grand rôle. En effet si une couche de l'étoile est opaque, son expansion va par conservation de la masse la rendre plus mince et ainsi diminuer son opacité. Cette couche va donc peu à peu devenir transparente laissant entrevoir les couches inférieures qui vont alors se manifester à leur tour dans le spectre. Plus un élément apparaît tardivement dans le spectre d'une supernovae et plus celui ci se situait profondément dans la structure du progéniteur. On peut donc affirmer par exemple que les progéniteurs des supernovae de type Ia sont très riches en silicium et en calcium dans les couches les plus extérieures mais dominés par le fer dans les parties centrales.

A partir du décalage Doppler sur les raies des différents éléments on peut déduire la vitesse des différentes couches expulsées lors de l'explosion. Typiquement ces vitesses sont de l'ordre de 12 000 Km/sec mais elles évoluent bien sûr avec le temps.



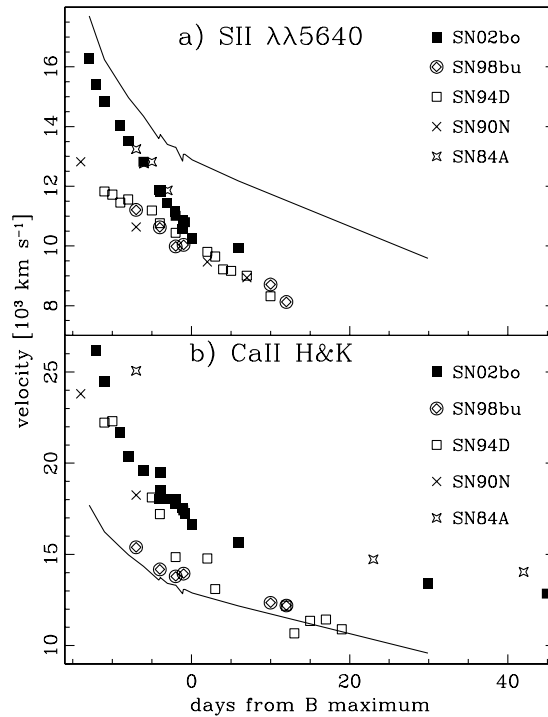


FIG. 2.3 – Évolution de la vitesse d’expansion pour différentes supernovae de deux raies d’absorption : Si II 564 nm et Ca II H&K. L’évolution de Si II 625,5 nm de la SN 2002bo est donnée comme référence par la ligne solide ((Benetti et al. 2004)).

que celui des Sn Ia d’environ 2.5 mag. Aux époques tardives les deux sous familles se ressemblent énormément. L’existence d’une continuité entre ces deux sous-classes est encore discutée aujourd’hui.

Le taux de décroissance des supernovae Ib semble être plus lent que pour les Sn Ia. Pour les types Ic, il semble que (Clocchiatti & Wheeler 1997) ait mis en évidence l’existence de deux catégories différentes : certaines ont un taux de décroissance plus élevé que les Sn Ia alors que d’autres en montrent un plus faible.

La décroissance de l’intensité des lignes du Cobalt dans le temps semble indiquer un processus de désintégration radioactive. Ce résultat a été confirmé en montrant que la fin de la courbe de lumière peut être reliée à l’évolution temporelle du rapport de l’intensité des raies d’émission de [Co III] et de [Fe III].

Les courbes de lumière correspondant à deux bandes distinctes peuvent montrer beaucoup de différences. La figure 2.5 montre les différentes courbes de lumière correspondant aux bandes B, V et I pour les supernovae de type Ia. Dans la bande V, la courbe est plus large, sa décroissance moins rapide que dans la bande B. Si l’on définit  $t_0$  comme le maximum de luminosité dans chaque bande, alors on a  $t_0^V - t_0^B = 2.5 \pm 1$  jours (Leibundgut 1988) (Hamuy et al. 1996).

Le plus gros contraste est avec la bande I qui présente deux maximums locaux. Le premier se produit de 1 à 2.5 jours avant la maximum dans la bande B, vient

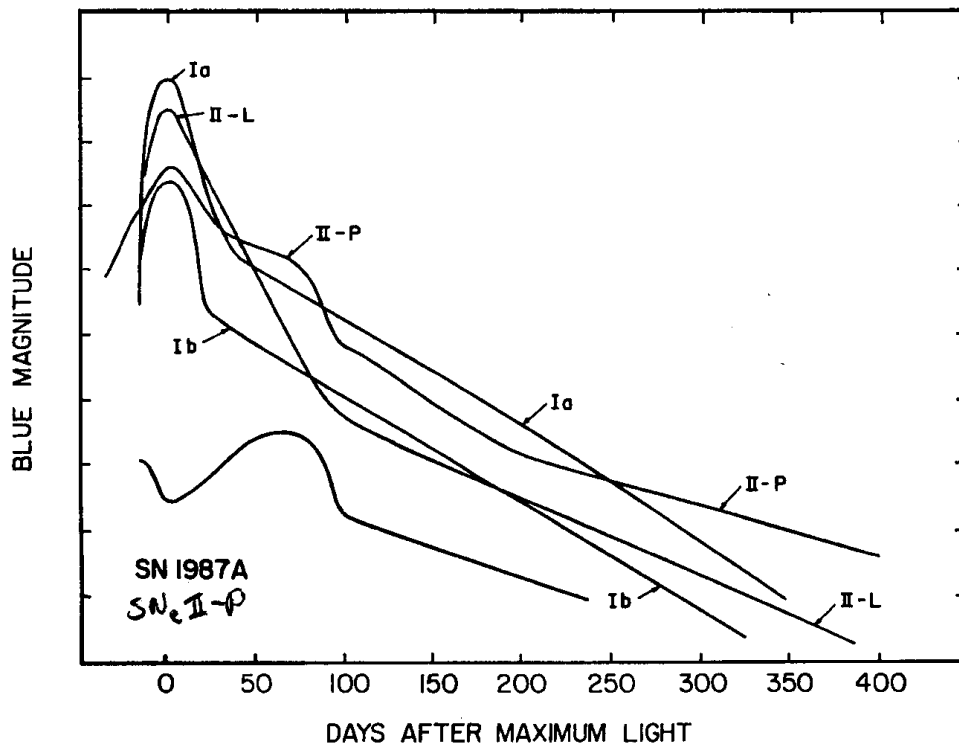


FIG. 2.4 – Courbe de lumière des différents types de supernovae ((Filippenko 1991))

ensuite un minimum entre 11.5 et 19 jours par rapport au maximum dans la bande B et enfin le deuxième maximum qui intervient entre 18.5 et 31 jours toujours par rapport au maximum de la bande B.

### 2.3 Progéniteurs et environnement

Les différents types de supernovae n'apparaissent pas de manière complètement aléatoire, on peut observer une dépendance par rapport aux types de galaxies. Ceci peut nous apporter beaucoup d'indice sur la nature de ces phénomènes et sur leurs progéniteurs. Les Supernovae II, Ib et Ic sont généralement observées dans les bras de galaxies spirales et dans les régions H II mais jamais dans les galaxies S0 (Filippenko 1997) (Huang 1987). Ceci implique que leurs progéniteurs sont des étoiles massives ( $M \geq 8 - 10M_{\odot}$ ). Les Sn Ia, quant à elles, sont observées dans tous les types de galaxies avec une préférence pour les galaxies spirales, laissant penser qu'elles proviennent d'étoiles de masses intermédiaires ( $M \sim 4 - 7M_{\odot}$ ).

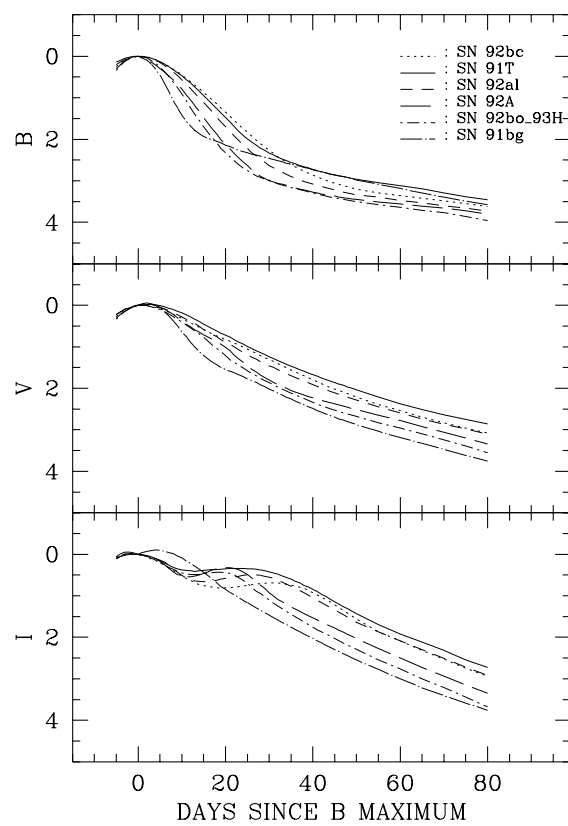


FIG. 2.5 – Courbes de lumière de différentes supernovae dans les bandes B,V et I ((Hamuy et al. 1996))

## Chapitre 3

# Les Supernovae Ia comme chandelles standards

Les supernovae de type Ia constituent d'excellentes candidates dans la recherche de chandelles standards pour sonder l'univers sur de grandes distances. En effet celles-ci sont très lumineuses, de l'ordre de deux magnitudes au dessus des supernovae de type II, et peuvent donc être observées très loin, mais en plus elles semblent présenter au premier abord une très forte homogénéité. La supernovae la plus lointaine connue à ce jour est SN1997ff dont le décalage vers le rouge a été estimé à 1,7. A de telles distances, il devient possible de voir les effets des paramètres cosmologiques et donc de contraindre leurs valeurs. Bien sûr les intervalles de confiance doivent être le plus étroit possible ce qui impose à la fois une très bonne qualité des mesures mais également une très bonne connaissance des objets. C'est dans ce but que sont lancés les programmes d'observation de SN Ia à faible décalage vers le rouge. Le premier d'entre eux fut le programme Calán/Tololo SN survey qui entre 1990 et 1993 découvrit 32 supernovae de type Ia dont le redshift était compris entre 0.01 et 0.1 (Maza et al. 1993). A cette époque, l'arrivée des CCD a permis d'obtenir des courbes de lumière de haute qualité. Bien que cet échantillon ait permis de confirmer certains résultats dans le domaine comme la loi de Phillips (cf section suivante), il restait cependant trop succinct. Plusieurs programmes aujourd'hui sont en cours afin d'augmenter la taille de l'échantillon et permettre ainsi la réalisation d'études statistiques fiables.

### 3.1 Les homogénéités et inhomogénéités

#### 3.1.1 Les homogénéités

##### Maximum de luminosité

Le premier résultat du programme Calán/tololo fut de confirmer la faible dispersion existant dans les caractéristiques observables des SN Ia (Phillips 1993) (Hamuy et al. 1993). Cependant cette dispersion qui dans le maximum de luminosité était estimée à  $\sigma_B \sim 0.4^m$  dans la bande B et à  $\sigma_B \sim 0.2^m$  dans la bande I (Hamuy et al. 1994b), suffisait à faire des SN Ia des chandelles standards non parfaites. En 1993



Phillips M.M. découvrit que la forme des courbes de lumière était corrélée à la valeur du maximum de luminosité des SN Ia (Phillips 1993) confirmant une hypothèse qui avait été déjà envisagée quelques années plus tôt (Phillips 1993) (Pskovskii 1984). Cette relation, dite relation de Phillips, prend la forme suivante :

$$M_{B_{max}} = -21.726(\pm 0.498) + 2.698(\pm 0.359)\Delta m_{15}(B)$$

$$M_{V_{max}} = -20.883(\pm 0.417) + 1.949(\pm 0.292)\Delta m_{15}(B)$$

$$M_{I_{max}} = -19.591(\pm 0.415) + 1.076(\pm 0.273)\Delta m_{15}(B)$$

A l'aide de cette relation il devient alors possible de "standardiser" les SN Ia, c'est à dire de réduire leur dispersion qui alors devient voisine de  $\sigma_B \sim 0.2^m$ .

D'autres méthodes de standardisation existent telle que le facteur de "stretch" introduit par Perlmutter (Perlmutter et al. 1997) . Le principe est ici de dilater l'axe temporel de chaque supernova par un certain facteur et ainsi, en déformant la courbe de lumière en conséquence, de ramener chacune à une même forme. La relation prend alors la forme suivante :

$$\Delta m_{15} = (1.96 \pm 0.17)(s^{-1} - 1) + 1.07$$

où  $s$  est le facteur de stretch. L'avantage de cette méthode est de montrer que la corrélation trouvée par Phillips est également valable pour la partie ascendante de la courbe de lumière précédent le maximum de luminosité.

Des résultats récents tendent à montrer que les dispersions seraient encore plus faibles dans les bandes J, H et K se situant dans l'infrarouge (Meikle 2000) Krisciunas et al. (2004). Dans ces trois domaines les maximums de luminosité moyens sont de -18.57, -18.24 et -18.42 avec des dispersions de seulement 0.14, 0.18 et 0.12 mag. Malgré ces faibles dispersions on peut constater que la valeur du paramètre  $\Delta m_{15}$  varie entre 0.87 et 1.31, la relation de Phillips semble donc ne pas s'appliquer à ces longueurs d'onde. Ceci laisse à croire que les SN Ia seraient donc des chandelles standards parfaites dans le domaine infrarouge. Cependant la prudence est ici de mise car, pour le moment, peu d'observations ont été réalisées dans les bandes J, H et K et d'autres mesures seront nécessaires pour confirmer ces résultats.

## Couleurs

La couleur d'une supernovae se définit par la différence d'intensité entre deux bandes d'observation comme par exemple B-V ou V-I. Cette couleur dépend donc, bien entendu, des bandes considérées mais également de la phase de la supernova. Si l'on mesure la couleur sur un ensemble de SN Ia on s'aperçoit que, là aussi, une homogénéité importante émerge (voir figure 3.1). Bien connaître le comportement des supernovae dans ce domaine est important car elle permet notamment de faire des prévisions sur l'extinction que celles ci peuvent subir (Phillips et al. 1999) . En effet, si l'objet que l'on observe subit une extinction, sa luminosité apparente sera plus faible et il paraîtra logiquement plus lointain. Il est évident que ceci est un problème de première importance lorsque c'est justement les distances que l'on cherche à mesurer. Cependant si l'on connaît la couleur réelle d'une supernova on peut corriger cet effet.

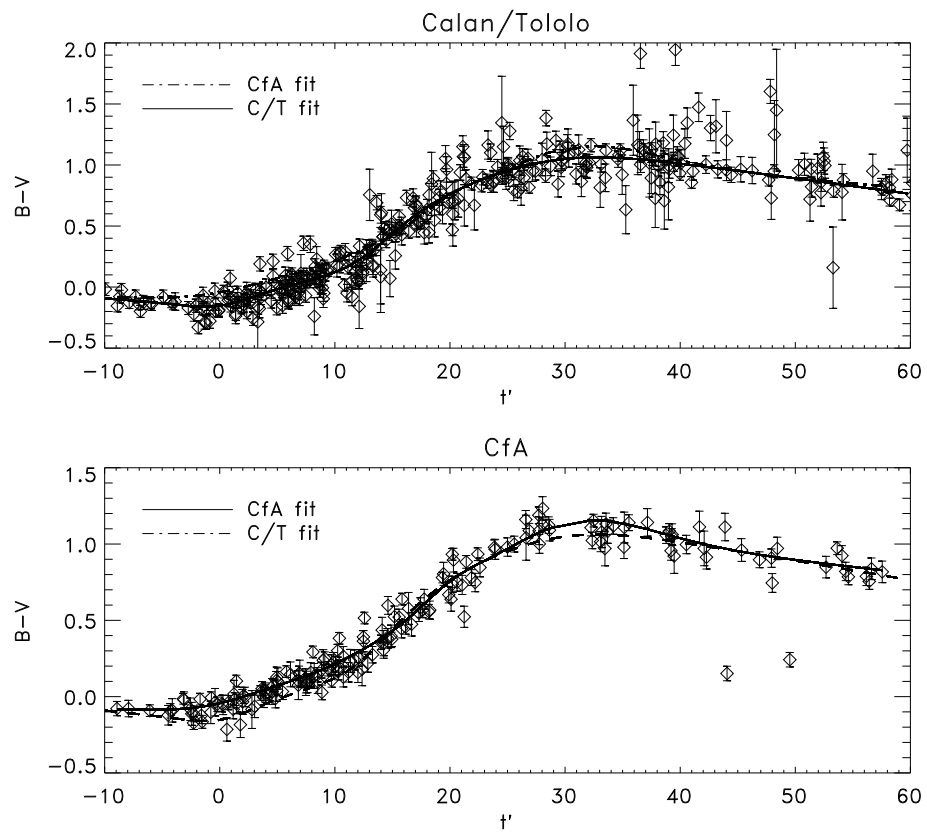


FIG. 3.1 – Couleur d'un échantillon de supernovae en fonction du temps ((Nobili et al. 2003))

### polarisation

Ce n'est que récemment que ce genre de mesure a été entrepris sur les Sn Ia. Les premiers résultats montrent une faible polarisation, de l'ordre de 0.3% ((Wang et al. 1996a)), mais bien présente.

Pour comparaison, les types II semblent montrer une polarisation de l'ordre de 1% soit environ 3 fois supérieure ((Wang et al. 1996b)).

Une valeur si faible est révélateur d'une grande symétrie dans le phénomène à l'origine Sn Ia.

### 3.1.2 les inhomogénéités

Malheureusement de nombreuses supernovae de type Ia entrent dans une classe qui n'a pas été mentionnée jusqu'à maintenant : les supernovae dites "particulières". Celles-ci sortent du cadre qui semblait se dessiner autour d'une description assez simple du phénomène... Les plus connues d'entre elles sont 1991bg et 1991T qui, bien que respectant la relation de Phillips, se distinguent de leurs congénères sur plusieurs points. Leur célébrité tient au fait qu'elles furent parmi les premières de leur catégorie à être observées mais aussi parce qu'elles sont également parmi celles qui présentent les plus grosses différences. 1991bg a été observée dans la galaxie NGC 4374. Son maximum de luminosité fut inférieur de 1.6 magnitude à la moyenne habituelle des SN Ia dans la bande V et de 2.5 magnitudes dans la bande B, faisant de celle-ci la plus faible des SN Ia jamais observée. La déclin de la courbe de lumière fut très rapide, 0.1 mag/jour dans la bande V, contre 0.06 mag/jour pour une SN Ia normale, et 0.034 mag/jour dans les phases tardives contre 0.026 mag/jour. Les raies semblent indiquer des vitesses d'expansion légèrement inférieures à la normale (10 000 km/s contre 11 000-13000 km/s). Sa couleur fut inhabituellement rouge malgré une faible absorption (raie Na I D relativement faible) pour finir avec une couleur légèrement bleue dans les phases tardives (Leibundgut et al. 1991a). 1991T quand à elle fut découverte dans NGC 4527. Sa grande particularité fut de ne pas montrer de raie Si II ou Ca II dans les spectres précédant le maximum de luminosité alors que son spectre deux mois après était réellement typique des SN Ia (Filippenko et al. 1992) (Ruiz-Lapuente et al. 1997) (Phillips et al. 1987) (Jeffery et al. 1991) (Mazzali et al. 1997). Sa luminosité maximum semblait supérieur à la normal (Filippenko et al. 1992) (Phillips 1993) (Riess et al. 1995) mais ce fait a été récemment remis en question (Kasen et al. 2004).

D'autres cas présentant les mêmes caractéristiques que 1991bg, bien que rares, ont été découverts par la suite comme 1992K (Hamuy et al. 1994a), 1997cn (Turatto et al. 1998), 1998de (Modjaz et al. 2001) et 1999da (Krisciunas et al. 2001).

Ces supernovae atypiques sont très gênantes pour les mesures cosmologiques car elles peuvent fausser totalement les résultats. Une solution est tout simplement de les évincer ce qui est justement possible grâce à leurs différences. Généralement c'est la couleur qui permet de faire la différenciation.

# Chapitre 4

## Modélisations

Evincer les disparités est certes une solution mais elle n'est pas vraiment satisfaisante. Pire encore, la validité de celle-ci commence à être remise sérieusement en question : les récentes observations semblent montrer en effet que la frontière entre les SN Ia dites "normales" et "particulières" est de plus en plus mince (voir chapitre suivant). Ces variations constituent un obstacle à l'utilisation des supernovae comme chandelles standards car elles peuvent introduire certains biais. Il est donc important de mieux les comprendre. On sait par exemple que les Supernovae similaires à 1991bg sont plus difficiles à détecter à grand redshift. De plus ceci pourrait avoir des répercussions intéressantes sur notre connaissance de la physique stellaire en générale.

### 4.1 Progéniteurs des SN Ia

Les faits observationnels ont conduit à l'idée que les progéniteurs des SN Ia pouvaient être des naines blanches au sein de systèmes binaires ((Finzi & Wolf 1967), (Whelan & Iben 1973)). De tels systèmes ne sont pas rares car nous savons aujourd'hui que bon nombre d'étoiles sont loin d'être isolées, beaucoup se regroupent en systèmes multiples. Au sein d'un système binaire, les étoiles auront en général des masses assez disparates et donc évolueront différemment. L'étoile de plus faible masse vieillira plus vite et donc, si sa masse le permet, atteindra le stade de naine blanche bien avant son compagnon. Considérons à présent que ce compagnon en est au stade géante de son évolution. Il va voir ses couches externes se dilater et emplir le lobe de Roche sous l'influence du champ gravitationnel combiné des deux étoiles. La jonction des deux lobes de Roche permet la création d'un flux de matière et donc d'un processus d'accrétion sur la naine blanche altérant ainsi profondément ses propriétés et menaçant sa stabilité. En effet, lorsque la masse de cette dernière va atteindre la limite théorique de Chandrasekhar, un processus de fusion va s'amorcer. Sous la pression de l'énorme quantité d'énergie, l'objet se disloque et explose littéralement ; une supernova est née. Ceci relate dans les grandes lignes le scénario mais la réalité est elle aussi simple ? Tous système binaire dégénéré donnera t'il forcément naissance à une supernova ? Répondre à ces questions nécessite une bonne connaissance des changements qui s'opèrent dans une naine blanche lors du processus d'accrétion. Cependant, une telle connaissance est très difficile à obtenir du fait de la complexité

du phénomène.

## 4.2 Les simulations numériques

Lorsque l'on se trouve face à des systèmes très complexes ne pouvant être définis de manière analytique, comme c'est le cas pour les SN Ia, les simulations numériques sont une aide très précieuse. Elles vont permettre, connaissant les conditions initiales et les différentes équations régissant le système, de suivre l'évolution de celui-ci. Cependant ces simulations coûtent très chère en terme de puissance de calcul et nous sommes ici totalement dépendant de l'évolution des moyens techniques à notre disposition. Les premières simulations dans la fin des années 1970 se limitèrent à une seule dimension et beaucoup d'efforts ont été fournis sur ce type de modèle. Bien qu'ils ne permettent pas de rendre compte de tous les phénomènes tel que la turbulence par exemple, ils suffisent pour étudier l'évolution de la structure de la naine blanche pendant la phase d'accrétion et l'ignition. En effet durant cette phase, le système est régi par les équations de l'hydrostatique et l'hypothèse d'une symétrie sphérique est réaliste. En revanche, l'explosion est dominée par l'hydrodynamique et le modèle sera alors beaucoup moins réaliste pour la prédiction du résultat de la combustion.

Ce que nous dirons dans la suite repose principalement sur trois articles de Nomoto parus dans les années 80 ((Nomoto 1982b),(Nomoto 1982a),(Nomoto et al. 1984))

Nous considérerons ici le cas d'une naine blanche C+O. La matière qui va tomber sur la naine blanche provient des couches les plus externes du compagnon et sera donc de l'hydrogène ou de l'hélium. Dans le cas de l'hydrogène, si le taux d'accrétion n'est pas trop élevé, celui-ci va rapidement fusionner pour créer de l'hélium. Dans les deux cas on peut donc, avec une bonne approximation, représenter l'accrétion comme une accumulation d'hélium formant une nouvelle couche autour de la naine. Si le taux d'accrétion d'hydrogène est très élevé, l'énergie dégagée par la fusion de celui-ci ne pourra être dissipée. La couche externe, sous la pression de l'énergie, se dilatera formant une nova.

Les simulations montrent que deux paramètres jouent un rôle primordial : la masse initiale de la naine blanche,  $M_{C+O}$ , et le taux d'accrétion,  $\frac{dM}{dt}$ . La matière tombant sur la naine blanche apporte de l'énergie dont une partie va accroître la température interne du système. Si le taux d'accrétion est faible, l'énergie aura le temps de se dissiper en rayonnant vers l'extérieur et en chauffant les couches internes. En revanche, si le taux est important l'énergie va s'accumuler pouvant entraîner l'ignition de la couche d'hélium. Cependant si la masse totale de la naine blanche dépasse la limite de Chandrasekhar avant que l'hélium ne fusionne, c'est le noyau de carbone qui fusionnera. On voit donc comment ces deux paramètres jouent des rôles combinés.

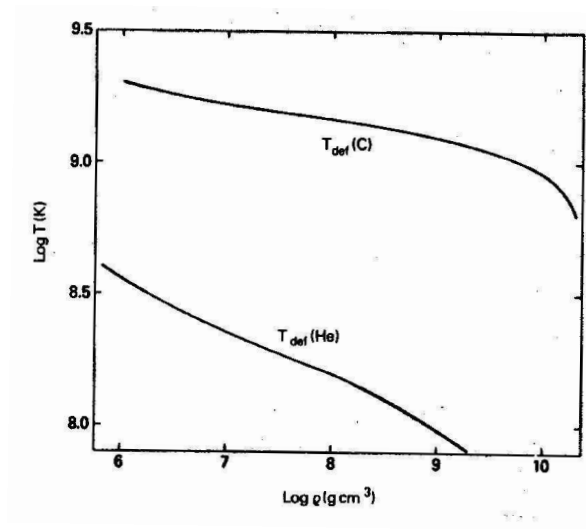


FIG. 4.1 – Valeur de  $T_{\text{def}}$  pour l'hélium et le carbone en fonction de la pression ((Nomoto 1982a))

## 4.3 Les mécanismes d'explosion

### 4.3.1 La déflagration

Lorsque la fusion débute, il y a localement une très forte montée de la température qui va provoquer une augmentation du taux de fusion. La réaction va rapidement s'emballer. Lorsque le temps caractéristique d'évolution de fusion  $\tau_n$  devient très rapide devant le temps caractéristique dynamique  $\tau_p$ , la réaction devient une 'déflagration' et la température à  $\tau_n = \tau_p$  est appelée la température de déflagration  $T_{\text{def}}$ . Cette température dépend évidemment de la composition du milieu mais aussi de la pression (4.1).

La déflagration libère presque instantanément (par rapport au temps dynamique) l'énergie de la fusion ce qui entraîne la formation d'une surpression. La différence de pression est alors trop importante pour maintenir un régime hydrostatique et une onde de choc se forme faisant entrer le système dans un régime hydrodynamique. L'onde de choc se sépare du front de fusion en chauffant et comprimant le milieu à une température  $T_{sh}$  et une pression  $P_{sh}$ . La vitesse du front de fusion est dans ce cas subsonique, la propagation se fait par l'intermédiaire de la conduction thermique et du mélange induit par la turbulence. La déflagration se produit dans la couche d'hélium dans le cas de faibles taux d'accrétion,  $\frac{dM}{dt} \text{ inf } 10^{-9} M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$  et pour des masses  $M_{C+O} \text{ inf } M_{\odot}$ . Dans le cas où la masse initiale de la naine blanche serait supérieure à cette dernière valeur, c'est le carbone contenu dans le noyau qui subira une déflagration.

### 4.3.2 La détonation

Si l'onde de choc formée par la déflagration est suffisamment puissante, il est possible que  $T_{sh}$  soit supérieure à  $T_{\text{def}}$ . Sous le passage de l'onde de choc, la

matière va alors être brûlée et le front de déflagration va rapidement atteindre le front de l'onde de choque. L'onde, alors appelée détonation, se déplace à une vitesse supersonique et se propage par compression. Le possible passage d'une déflagration à une détonation dépend de la force de l'onde de choque, de la densité et de la composition du milieu. Plus la densité est faible et plus la détonation se formera facilement. De même celle-ci sera plus probable pour l'hélium que pour le carbone car sa température de déflagration est plus faible.

Les mécanismes que nous venons de voir ne suffisent pas à eux seuls à reproduire les observations. Il faut donc faire appel à des scénarii un peu plus complexes.

### 4.3.3 La double détonation

Nous considérerons ici une naine blanche de masse initiale  $1.08 M_{\odot}$  et avec des taux d'accrétion intermédiaires, c'est à dire de l'ordre de  $10^{-9}$  à  $10^{-8} M_{\odot}.an^{-1}$ . Dans ce cas la zone de fusion de l'hélium se situe en bas de la couche de matière accrétée. Cependant celle-ci n'est pas directement en contact avec le noyau C+O, une fine épaisseur d'hélium de  $0.006 M_{\odot}$  les sépare. Dans ce cas précis, la différence de pression est suffisamment forte pour générer deux ondes de choc : l'une se déplaçant vers l'extérieur et l'autre vers l'intérieur. Les deux ondes ont une température  $T_{sh}$  de l'ordre de  $1.5$  à  $2.0 \cdot 10^{-9} K$  qui est donc supérieure à  $T_{def}(C)$ . Dans les deux cas la déflagration grossit rapidement en détonation. Lorsque l'onde se déplaçant vers le noyau atteint celui-ci, elle est suffisamment forte pour causer une déflagration du carbone qui va à son tour devenir une détonation.

La formidable quantité d'énergie dégagée par une double détonation est supérieure à l'énergie de liaison du système qui, par conséquent, va être complètement disloqué.

La double détonation prévoit une quantité de nickel suffisante pour alimenter la courbe de lumière par la désintégration de celui-ci en fer et en cobalt. En revanche ce mécanisme semble en net désaccord en ce qui concerne les éléments de masses intermédiaires.

### 4.3.4 La détonation retardée

Le désaccord évident entre les précédents modèles et l'observation suggère fortement qu'une détonation est déclenchée par les turbulences générées par la déflagration. Supposons qu'une déflagration débute au voisinage du centre d'une naine blanche. Le front de fusion initialement sphérique va se propager vers la surface mais va rapidement perdre sa symétrie. Sous l'effet des instabilités dynamiques et de la pesanteur, le front de combustion est pénétré dans toutes les directions par des panaches de matière non fusionnée. A haute densité la fusion du carbone et de l'oxygène produit principalement du nickel. L'énergie dégagée par cette réaction fait monter la température et cause une expansion de la naine blanche. Lorsque la densité descend en dessous de  $1 - 5 \cdot 10^7 g/cm^3$ , la déflagration commence à produire du silicium et autres éléments de masse intermédiaire. La fusion s'opère le long des panaches de matière plus froide mais ceux-ci forment des poches de matière non fusionnée qui peuvent pénétrer assez profondément dans l'étoile. Supposons à présent

qu'une détonation se déclenche dans une telle configuration, c'est à dire environ une seconde et demi après la déflagration. Cette détonation va transformer le carbone et l'oxygène non fusionné dans les parties centrales de la naine blanche en éléments du groupe du fer et va produire des éléments de masse intermédiaire dans les couches externes. Ceci change drastiquement la composition finale de la supernova et le résultat est en très bon accord avec les observations. Cependant ce modèle est encore très incertain car pour le moment car il n'est pas sûr qu'une détonation puisse être générée de cette manière. Dans les simulations précédentes, celle-ci est déclenchée artificiellement. Beaucoup de travail reste encore à faire dans cette voie.



# Chapitre 5

## Les récents développements

Nous avons mentionné plus haut le fait que la distinction entre les Sn Ia particulières et les Sn Ia normales devenait de plus en plus difficile. En effet certaines supernovae, tel que 1986G (Philips et al. 1987) et 2000bk (Krisciunas et al. 2001) semblent être à mi-chemin entre les supernovae normales et les supernovae de type 1991bg. Une telle situation rend caduque l'hypothèse de l'existence d'une sous classe parmi les SN Ia en indiquant qu'une continuité puisse exister. Ce sentiment est d'autant plus renforcé par le fait que la proportion de Sn Ia particulières tout d'abord estimée à environ 20% serait aujourd'hui revue à la hausse atteignant les 45% (Branch 2001), chiffre qui rendrait complètement inutile le terme de "particulière".

Cette continuité ressort très bien si l'on réalise une étude détaillée sur un ensemble de SN Ia sélectionnées pour couvrir un large interval du paramètre  $\Delta m_{15}$ . Les spectres des supernovae particulières se distinguent en partie par la présence de titane, avec notamment une raie à 580 nm qui vient se superposer à la raie SiII(580) (5.1).

Si l'on trace le rapport de raie  $R(\text{TiII}(580)/\text{SiII}(615))$  en fonction de  $\Delta m_{15}(B)$  on voit très nettement apparaître une corrélation (figure 5.2).

Cette corrélation ne sera bien entendu valable que lorsque le titane sera présent et donc ne sera applicable que pour les supernovae particulières. La même démarche peut être appliquée pour la couleur  $B_{max} - V_{max}$  et l'on trouve également une corrélation. Celle ci est linéaire et semble rejoindre la droite caractérisant les supernovae dites normales (figure 5.3).

Si l'on détermine la valeur de la magnitude absolue des supernovae et que l'on trace son évolution toujours en fonction de  $\Delta m_{15}(B)$ , il devient alors possible de trouver une loi qui généralise la loi de Phillips. Cette loi généralisée englobe les supernovae particulières avec cependant une dispersion plus élevée (voir figure 5.5).

Cette loi varie bien sûr en fonction de la bande de longueur d'onde considérée et prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} M(B) &= -19.338 + 5\text{Log}(H_0)/72 + 1.139(\exp[3.441(\Delta m_{15}(B) - 1.1) - 1]) \\ M(B) &= -19.328 + 5\text{Log}(H_0)/72 + 0.096(\exp[3.450(\Delta m_{15}(B) - 1.1) - 1]) \\ M(B) &= -18.817 + 5\text{Log}(H_0)/72 + 0.060(\exp[3.402(\Delta m_{15}(B) - 1.1) - 1]) \end{aligned} \tag{5.1}$$

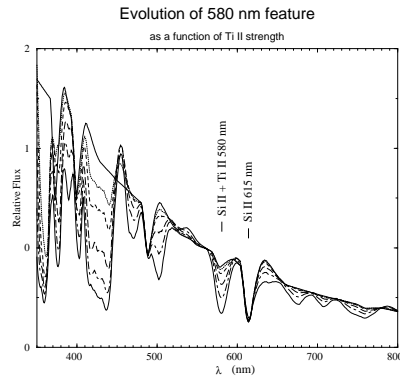


FIG. 5.1 – Model de spectre généré par le logiciel SYNOW montrant uniquement les lignes de Si II et Ti II sur un continuum à 12000K. La ligne continue ne comporte aucune contribution du Ti II. La raie d'absorption, dominée habituellement par le Si II, peut avoir une grande contribution du Ti II ((Garnavich et al. 2004))

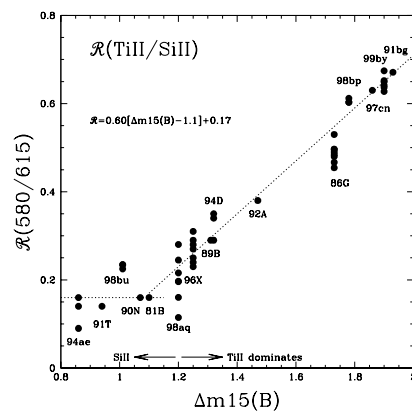


FIG. 5.2 – (Rapport entre les raies à 580 nm et 615 nm pour 15 SNIa. Chaque point représente un spectre individuel, les données étant limitées à  $\pm 3$  jours autour de  $B_{max}$ . Pour  $\Delta m_{15}(B) < 1.2$ , le rapport de raies est un très mauvais indicateur de luminosité ((Garnavich et al. 2004)).

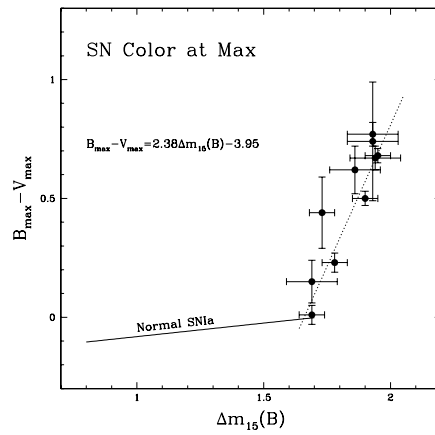


FIG. 5.3 – La couleur  $B_{max} - V_{max}$  pour les SNIa. La ligne continue montre les couleurs établies par (Phillips et al. 1999). La ligne pointillée est un ajustement sur des SNIa atypiques((Garnavich et al. 2004)).

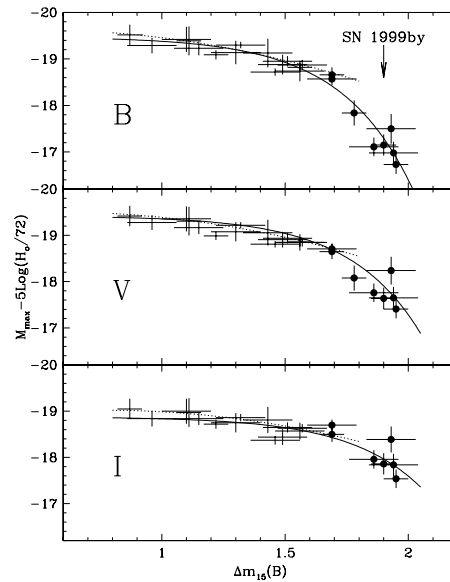


FIG. 5.4 – Couleur des supernovae (croix) ainsi que l'ajustement quadratique (ligne pointillée) établie par (Phillips et al. 1999). Les points noirs correspondent des des SNIa atypiques et la ligne noire représente le nouvel ajustement ((Garnavich et al. 2004))

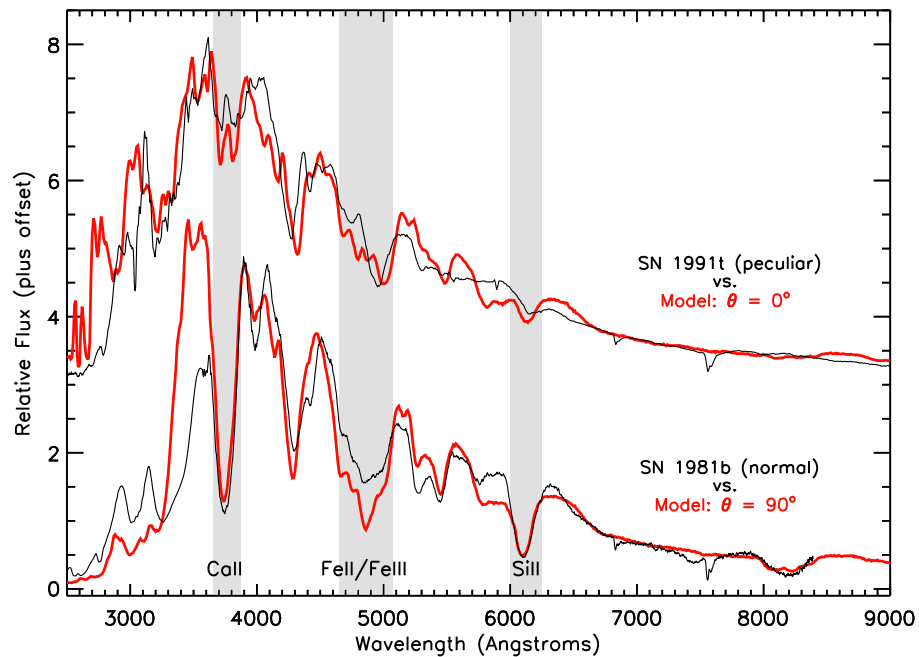


FIG. 5.5 – Spectres au maximum de luminosité en simulant dans un trou dans la matière éjectée avec deux angles différents et comparés à deux supernovae observées (lignes noires fines). **En bas** : Le trou est vu de côté (orienté à  $90^\circ$  par rapport à la ligne de visée) et comparé à SN 1981B. **En haut** : Le trou est vu de face et comparé à SN 1991T. figure tirée de (Kasen et al. 2004)

Tout semble donc montrer que les supernovae particulières dont la valeur de  $\Delta m_{15}$  est supérieure à 1.2 ne sont dues qu'au changement de quelques paramètres simples.

Mais qu'en est il alors pour les supernovae similaires à 1991T ? Il faut suivre ici une autre voie. Comme nous l'avons vu, les SN Ia se forment au sein de systèmes binaires. Il est alors logique de penser que le compagnon de la naine blanche, qui joue déjà un rôle avant l'explosion par l'intermédiaire du transfert de masse, va également jouer un rôle durant l'explosion. En effet, imaginons le cas extrême où le compagnon se trouve exactement dans la ligne de visée de la naine blanche au moment de l'explosion, on peut facilement imaginer que les conséquences soient non négligeables...

Afin de rendre compte de cet effet, on a introduit dans des simulations numériques standards une dissymétrie provoquée par un hypothétique compagnon (Kasen et al. 2004). Cette dissymétrie se manifeste par la présence d'un cône de plus faible densité dans l'enveloppe en expansion. Le spectre que l'on obtient varie selon la position de la ligne de visée de l'observateur par rapport au 'trou'. Si l'on se situe à  $90^\circ$  par rapport au trou, le spectre est très similaire à une SN Ia standard (1981b sur la figure) mais, en revanche, si l'on se situe au dessus du trou, le résultat se trouve assez proche d'un spectre de type 1991T.

Cette dissymétrie se manifeste également au niveau de la photométrie et égale-

ment de la polarisation. Pour des angles faibles par rapport au trou, la magnitude semble plus élevée ( $\sim 0.25$ ) et la polarisation faible ( $\text{inf } 0.3$ ) alors que pour des angles larges la magnitude reprend une valeur normale (voir un peu plus faible) alors que la polarisation, elle, devient beaucoup plus élevée (maximum à  $0.8\%$ ). Cela s'accorde très bien avec les observations actuelles des Sn Ia. De plus ces effets, qui changent de manière continue avec l'angle, semblent introduire une dispersion d'environ  $0.2$  mag ce qui est actuellement la dispersion intrinsèque mesurée des SN Ia. Cette voie semble donc prometteuse mais, bien sûr, reste à confirmer. De nombreux points restent incertains comme par exemple l'influence de la taille du trou.

Quatrième partie

Le projet SNIFS

# Chapitre 1

## introduction

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les chandelles standards permettent de donner une estimation de la valeur des paramètres cosmologiques. Rappelons qu'une chandelle standard est un objet astronomique dont on peut trouver la luminosité absolue par un moyen d'observation indirect. Les premières à être découvertes furent les étoiles céphéides en 1912 par Henrietta Leavitt. Les Céphéides sont des étoiles variables dont l'intensité apparente peut être reliée à la période de pulsation : plus l'intensité d'une céphéide est grande et plus sa période de pulsation l'est également. Par exemple, dans le cas des céphéides du petit nuage de Magellan, cette relation prend la forme :

$$L(\text{*si*r}) = 3 * 10^{-8} P(\text{*jours*})$$

Ainsi, si l'on parvient à mesurer la période de variation d'une telle étoile, on peut déduire sa luminosité absolue, puis, en comparant à sa luminosité apparente, on en déduit sa distance. Cette méthode fut utilisée pour estimer la distance des galaxies proches. Malheureusement la limite de cette méthode est très vite atteinte : on ne peut distinguer de céphéides dans les galaxies trop éloignées, c'est à dire sur des objets qui se situent au delà de 100 millions d'années lumières. Cette limite est bien trop faible pour pouvoir nous aider en cosmologie. La solution est donc d'utiliser une chandelle standard bien plus lumineuse : Les supernovae de type Ia. C'est dans ce cadre que s'inscrit le projet SNLS (SuperNovae Legacy Survey). Ce programme, faisant lui même parti du CFTHLS (Canada-France Hawai Telescope Legacy Survey) débuté en 2004, a pour objectif d'observer quelques 2000 supernovae à grand décalage vers le rouge ( $0.3 < z < 0.9$ ) durant les 6 années initialement prévues. Cependant la précision finale sur les résultats cosmologiques attendus dépend drastiquement de notre connaissance de ces objets qui malheureusement comporte encore quelques zones d'ombre (cf partie II). Comblé ces lacunes est donc une priorité et est à l'origine du programme 'Nearby SNFactory' dont le but sera d'observer le plus grand nombre de supernovae Ia ( environ 300 ) à bas redshift ( $z \sim 0.07$ ) afin d'établir un échantillon statistique représentatif permettant une véritable étude du degré d'homogénéité de ces objets.

# Chapitre 2

## L'instrument SNIFS

### 2.1 Introduction

Ces dernières années ont vu l'émergence d'un nouveau type d'instrument qui par ses nombreux avantages dans le domaine de la spectrographie, supplante peu à peu le spectrographe classique à longue fente. Les spectrographes intégraux de champ (ou IFS pour integral field unit) permettent d'effectuer un échantillonnage bidimensionnel du champ d'observation et d'obtenir le spectre de chaque élément d'échantillonnage. Une seule pose permet ainsi de spectrographier tout un objet étendu avec un échantillonnage spatiale donné (voir figure 2.2.3). Le pointage de l'objet qui avec un spectrographe à fente peut se montrer fastidieux est ici beaucoup moins sensible pouvant générer un gain de temps non négligeable. De plus, Les IFS vont permettre de recueillir tout le flux lumineux issu de l'objet, ce qui rend possible un suivi photométrique et ce de manière très précise. Le CRAL, laboratoire pionnier dans ce domaine, possède du fait de son expertise une visibilité internationale. Le premier prototype fut conçu par ce laboratoire sous le nom de TIGRE puis fut perfectionné et donna naissance à une longue lignée : SAURON, OASIS, SNIFS et dans le futur MUSE. Alors que les instruments SAURON et OASIS sont dédiés à l'étude des galaxies, l'instrument SNIFS, qui va nous intéresser par la suite, a été conçu pour l'observation des SN Ia à faible décalage vers le rouge.

### 2.2 détails de l'instrument

Le principal but de l'instrument SNIFS est de caractériser parfaitement les SN Ia dans le domaine spectral. Il nous faut donc pour cela couvrir la plus grande gamme de longueur d'onde possible. Depuis le sol, la fenêtre d'observation spectrale couvre pratiquement deux octaves : de  $320\text{ nm}$ , correspondant à la coupure atmosphérique, à  $\sim 1\mu\text{m}$  qui est la coupure des CCD classiques. Un spectrographe à réseau ne pouvant couvrir qu'une octave, nous devons en intégrer un deuxième dans l'instrument et par conséquent séparer celui-ci en deux voies. La première, la voie bleue, couvre les longueurs d'onde de  $320\text{ nm}$  à  $520\text{ nm}$  et la deuxième, la voie rouge, allant de  $510\text{ nm}$  à  $1\mu\text{m}$  (figure 2.2). Cela permet d'autre part d'optimiser la transmission en utilisant des matériaux spécifiques dans chacune des voies.



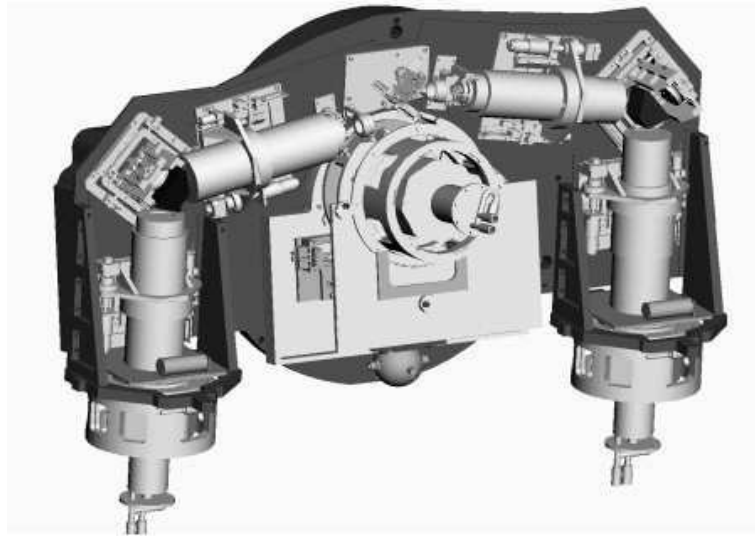


FIG. 2.1 – Modélisation 3D de l'instrument SNIFS

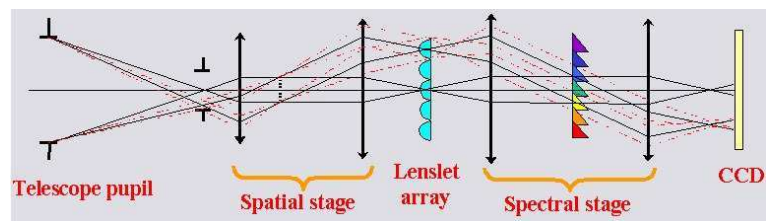


FIG. 2.2 – Représentation schématique d'une voie de l'instrument SNIFS

Les deux voies sont structurées de la même manière et comportent une trame de micro-lentilles, un collimateur, un spectrographe, une caméra et un détecteur (cf figure 2.2). Examinons un à un les éléments clefs.

### 2.2.1 L'agrandisseur

Un bon échantillonnage de la tache de turbulence ( $0.8''$ ) nécessite un champ sur le ciel de chaque micro-lentille de  $0.4''$  ce qui donne environ, au foyer du telescope,  $44 \mu m$ . Cette taille de micro-lentilles est techniquement impossible à réaliser. Le rôle de l'agrandisseur est de ramener la taille des micro-lentilles à l'ordre du millimètre ( $14 \text{ mm}$  pour l'instrument SNIFS). Ceci est réalisé à l'aide d'un doublet de lentilles. Il est nécessaire de rendre le faisceau télécentrique à l'entrée des voies spectroscopiques. La pupille d'entrée de l'instrument, le miroir primaire du telescope, se situe très loin du doublet de lentilles qui va par conséquent en former une image à son foyer. Pour rendre le faisceau télécentrique, on ajoute un deuxième doublet avant les voies spectroscopiques. Ce deuxième doublet est placé très proche de l'entrée de chaque voie et ne joue pratiquement aucun rôle dans le grandissement. La séparation des



FIG. 2.3 – La trame de micro-lentilles.

faisceaux entre les deux voies est assurée par une lame dichroïque placée entre le doublet agrandisseur proprement dit et le deuxième doublet.

### 2.2.2 La trame de micro-lentilles

Chacune des voies spectroscopiques est composée d'une trame de micro-lentilles, d'un collimateur, d'un élément assurant la dispersion, d'une caméra et d'un détecteur. C'est par la trame de micro-lentilles que se fait l'échantillonnage du champ. Celle-ci se compose de 225 (15x15) micro-lentilles carrées de 1,4 mm de côté; leur champ respectif est donc de 0.4". Chaque micro-lentille est composée par le croisement de deux sections de barreaux approximativement cylindriques pour que la combinaison des deux s'approche le plus possible d'une lentille sphérique classique (figure 2.2.2).

Les objets observés sont focalisés sur le plan de la trame. Comme le faisceau incident est télécentrique, l'image va se former au foyer des micro-lentilles où les sous-pupilles mesurent alors seulement 22  $\mu\text{m}$ .

### 2.2.3 Les spectrographes

Le rôle des spectrographes est d'imager la décomposition spectrale des sous-pupilles sur le détecteur mais pas celle du champ, on ne se préoccupe plus ici de la conjugaison des champs. On parle dans un cas comme celui-ci d'inversion champ-pupille. La résolution spatiale de l'instrument va donc être limitée par la taille des micro-lentilles. Comme le spectre issu de chaque micro lentille va être très grand, la trame doit être tournée d'un angle de 3.8 degrés autour de l'axe optique afin d'éviter les chevauchements. (figure ??).

L'élément disperser en lui même est un réseau collé sur la face d'un prisme où le faisceau est totalement réfléchi. Ce disperser joue le même rôle qu'un réseau par réflexion. Le repliement du faisceau ainsi effectué rend l'instrument plus compact. La résolution spectrale de l'instrument est de 1000 à 430nm pour la voix bleue (soit 0.22nm par pixel) et de 1300 à 760nm pour la voix rouge (soit 0.3nm par pixel). Pour comparaison l'IFS précédent construit par le CRAL, Sauron, avait une résolution spectrale de 0.09nm par pixel et spatial de 0.27". En revanche son domaine de longueur d'onde était beaucoup plus réduit, de 450nm à 700nm. Chaque instrument est bien évidemment conçu en fonction de son utilisation : L'instrument SNIFS devait posséder une très large bande spectrale afin de pouvoir obtenir l'intégralité du

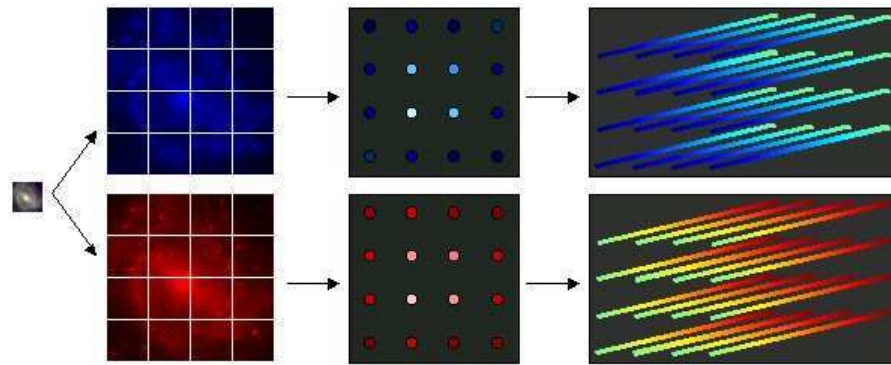


FIG. 2.4 – Schématisation du fonctionnement d'un spectre integrale de champs (avec ici deux voies comme dans le cas de SNIFS)

spectre d'une supernovae et une résolution spectrale suffisamment petite pour déterminer le redshift de la galaxie hôte et peut être certaines propriétés de la galaxie. Il pourrait être en effet intéressant d'étudier la possible corrélation entre ces propriétés et les caractéristiques des supernovae.

# Chapitre 3

## simulation de l'instrument

Le premier objectif de cette thèse était de créer un simulateur de l'instrument le plus réaliste possible, c'est à dire de pouvoir générer des images du détecteur telles que celles qui seront obtenues lors de la campagne de mesure. Il y a principalement deux raisons qui ont été à l'origine de cette entreprise. Tout d'abord, les résultats de ce simulateur devaient servir de base pour l'établissement des logiciels de réduction des données. Ils ont permis de tester l'extraction de l'information d'une image de l'instrument avant que celui-ci ne soit opérationnel. Ce point était essentiel car une fois la campagne de mesure commencée, le débit important des données nécessitait des logiciels de traitement pouvant fonctionner immédiatement. Ensuite, l'existence d'un tel simulateur est un outil précieux pour l'étude des mesures réalisées à l'aide de l'instrument. Il permet en effet de reproduire certains phénomènes observés tout en connaissant parfaitement les propriétés de la source utilisée en entrée. on peut donc établir des liens entre les observations et les caractéristiques des objets étudiés. Cette démarche s'est d'ailleurs généralisée depuis puisque les instruments MUSE et NIRSPEC bénéficient d'un large programme de simulation instrumentale.

### 3.1 traitement des aberrations

Si l'on veut que le simulateur soit le plus réaliste possible il nous faut prendre en compte tous les phénomènes qui vont altérer de manière significative la lumière issue de l'objet observé. Ces altérations vont être provoquées par les aberrations des différents milieux que le front d'onde va devoir traverser : l'atmosphère, le télescope et l'instrument en lui même.

Considérons un système optique parfait (cf figure ??) traversé par une onde plane dont l'amplitude complexe dans le plan juste avant le diaphragme est noté  $A(x,y)$ . Dans le plan juste après le diaphragme l'amplitude complexe de l'onde est alors donnée par  $A(x,y)T(x,y)$  où  $T(x,y)$  est la fonction caractéristique du diaphragme. Cette fonction vaut 1 à l'intérieur du diaphragme et 0 à l'extérieur. Puisque notre système est parfait et qu'il est éclairé par un faisceau parallèle, on sait que l'image du système va se former dans le plan focal. Son intensité sera donnée par le module au carré de la Transformée de Fourier du terme  $A(x,y)T(x,y)$ . Dans un cas réel, l'instrument n'est pas parfait et va introduire des aberrations dans le front d'onde. On peut montrer que cela équivaut à introduire un masque de phase sur le diaphragme, c'est à dire

à modifier la fonction caractéristique  $T(x,y)$  en y introduisant une phase  $\Phi(x,y)$ . La difficulté est alors d'obtenir le masque de phase qui pourra représenter fidèlement les aberrations du système optique. Remarquons que nous avons pas considéré ici l'absorption possible des photons par les matériaux constituant le système optique, ce point sera en effet négligé dans la suite. Le calcul des pertes de luminosité peut être mené par ailleurs. Stocker un masque de phase équivaut à stocker une image bidimensionnelle qui sera plus ou moins grande en fonction de l'échantillonnage appliqué à la fonction  $\Phi(x,y)$ . De plus cette dernière fonction va dépendre de plusieurs paramètres comme la longueur d'onde et l'angle des rayons incidents. Ainsi, si l'on veut décrire complètement un système optique, il nous faudra prévoir les valeurs possibles des différents paramètres et stocker une image pour chaque combinaison de valeurs. Le domaine de variation des paramètres est en général relativement grand et, si peu que l'on choisisse un échantillonnage assez petit, ce qui est généralement souhaité, la quantité de stockage nécessaire augmente rapidement au delà de la limite acceptable. Il nous faut donc trouver une solution pour réduire la quantité d'informations mais sans en altérer la précision. On peut utiliser pour cela une base de polynômes, appelés polynômes de Zernike, sur laquelle on décompose chaque masque de phase. Cette base est orthonormale et s'appuie sur un support circulaire de rayon unité. Les aberrations d'un système quelconque se résument alors à une série de coefficients dont le cardinal varie en fonction de la précision souhaitée pour la reconstruction du masque de phase (généralement quelques dizaines).

## 3.2 Source ponctuelle monochromatique

L'objet théorique que l'on va considérer ici pourra être assimilé dans la réalité à l'observation d'une raie dans le spectre d'une supernovae. Depuis sa source, on considère que le front d'onde se propage dans un vide parfait et l'on peut donc le considérer comme une onde plane à la limite supérieure de l'atmosphère. La méthode que nous allons présenter dans la suite est représentée schématiquement que la figure 3.1).

### 3.2.1 détermination des aberrations

#### L'atmosphère

Du fait des mouvements de masses d'air qui se produisent en son sein, l'atmosphère est un milieu hautement turbulent. Tout front d'onde qui va le traverser va subir d'importantes transformations qui vont altérer profondément les mesures qui seront effectuées sur celui ci. Si l'on observe depuis la terre avec un instrument parfait une source ponctuelle monochromatique sur un temps très bref, le résultat obtenu, bien différent d'un point, sera un speckle : un interférogramme représentatif de l'état de la turbulence atmosphérique au moment de la mesure. Une des principales motivations des programmes spatiaux est justement d'éviter ce qui constitue la plus grande limitation aux observations en se plaçant au dessus de l'atmosphère, mais malheureusement cette solution, bien que radicale, est très coûteuse et l'on ne peut se permettre de l'appliquer systématiquement. Pour les projets rivés au sol, il

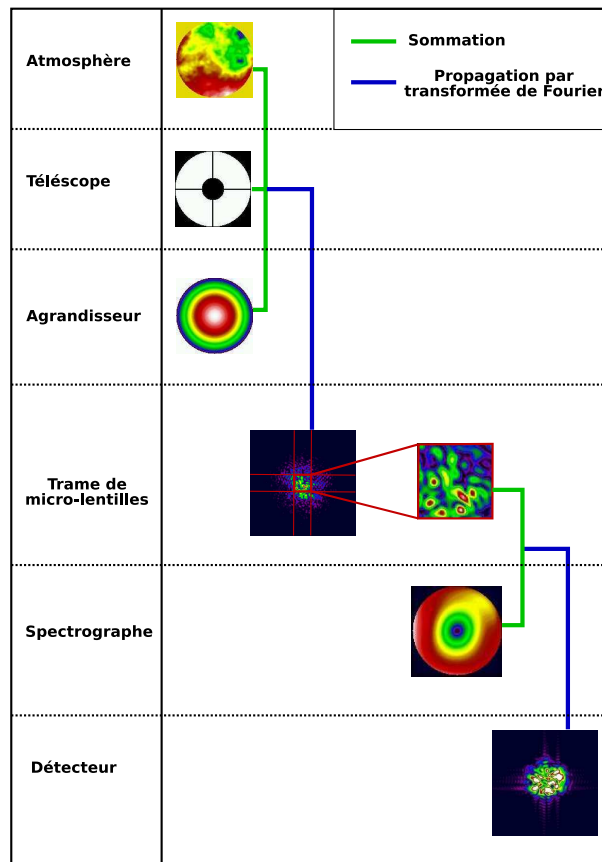


FIG. 3.1 – Detail de la méthode avec les images intermédiaires dans la cas d'une source ponctuelle

existe tout de même des méthodes afin de limiter les conséquences de cet obstacle naturel comme par exemple l'interférométrie speckle qui traite les interférogrammes instantanés en temps différé ou la technique prometteuse des optiques adaptatives qui compense la turbulence en temps réel. La première méthode, du fait des temps de pose très courts est limitée à l'observation des objets brillants, et la seconde encore en voie de développement reste assez coûteuse et difficile à mettre en place. Heureusement tous les projets ne nécessitent pas une précision telle que l'on doit avoir recours à de telles extrêmes, il faut toujours établir un compromis entre performance et coût de réalisation. Tel est le cas du projet concernant l'instrument SNIFS et nous devons donc par conséquent intégrer ces effets de l'atmosphère dans le simulateur.

Un masque de phase atmosphérique sera de nature aléatoire mais tout en respectant certains critères sur sa structure spatiale car un certain degré de corrélation existe. Cette corrélation se manifeste sur les indices de réfraction, elle est alors donnée par la fonction de structure (Lena 1986) (Fried 1965). Cette fonction est la moyenne des différences d'indices entre deux points séparés d'une distance  $r$ , soit :

$$\begin{aligned} D_n(\mathbf{r}) &= \langle (n(\mathbf{x}) - n(\mathbf{x} + \mathbf{r}))^2 \rangle \\ &= C_n^2 r^{2/3} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Son équivalent pour les phases est la fonction de structure de phase :

$$D_\phi(\mathbf{r}) = \langle (\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}))^2 \rangle$$

L'atmosphère est avec une bonne approximation un milieu turbulent au sens de Kolmogorov, dans ce cas on montre que la fonction de structure devient :

$$D_\phi(\mathbf{r}) = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3}$$

la constante  $r_0$  est une longueur qui caractérise le degré de cohérence spatiale : plus sa valeur est grande, moins l'on verra de fluctuations sur une fenêtre d'observation et donc plus l'image sera bonne. Notre méthode repose sur un article de Robert J. Noll (Noll 1976) dans lequel apparaît une formule permettant de relier les coefficients  $a_i$  de la décomposition du masque de phase atmosphérique sur la base des polynômes de Zernike (voir annexe) aux éléments de la matrice variance-covariance de l'atmosphère. Cette formule est la suivante :

$$\langle a_{n,m} a_{n',m'} \rangle = \frac{2.2698 (-1)^{(n+n'-2m)/2} \sqrt{(n+1)n'+1} \Gamma\left(\frac{n+n'-5/3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-n'+17/3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n'-n+17/3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+n'+23/3}{2}\right)} \left(\frac{D}{r_0}\right)^{5/3}$$

où  $m$  et  $n$  sont les indices radiaux et azimutaux des polynômes de Zernike. Il nous suffira donc simplement de tirer aléatoirement les coefficients  $a_i$  en fonction de ces critères.

Les perturbations introduites par l'atmosphère étant fortement chromatiques, il nous faudrait en toute rigueur calculer théoriquement un masque de phase pour

chaque longueur d'onde utilisée dans le simulateur. Examinons de plus près la situation, nous avons vu que la fonction de structure de phase est

$$D_\phi(\mathbf{r}) = \langle (\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x} + \mathbf{r}))^2 \rangle$$

Exprimons les phases  $\phi(x)$  en fonction des différences de marche :

$$D_\phi(\mathbf{r}) = \langle \left( \frac{2\pi\delta(\mathbf{x})}{\lambda} - \frac{2\pi\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{\lambda} \right)^2 \rangle$$

soit

$$D_\delta(\mathbf{r}) = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} D_\phi$$

avec

$$D_\delta(\mathbf{r}) = \langle (\delta(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}))^2 \rangle$$

d'où

$$D_\delta(\mathbf{r}) = 6.88 \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3}$$

or on montre que

$$r_0 = K\lambda^{6/5}$$

ce qui amène finalement

$$D_\delta = \frac{6.88}{4\pi^2 K^{5/3}} r^{5/3}$$

On a donc la preuve que la fonction de structure des différences de marche, dans les hypothèses de Kolmogorov, ne dépend pas de la longueur d'onde. On aura donc tout intérêt à exprimer le masque de phase en différence de marche et de faire le calcul des déphasages par la suite pour chaque longueur d'onde étudiée ; nous n'aurons pas ainsi à calculer à chaque fois les polynômes de Zernike ce qui économisera beaucoup de temps de calcul.

Il faut bien garder à l'esprit que le masque que nous créons par cette méthode n'est qu'un instantané de l'atmosphère alors que SNIFS ne réalisera que des poses longues. Nous aborderons ce point un peu plus loin.

### Le télescope

Le télescope introduit des aberrations qui peuvent être considérées comme négligeables par rapport à celles de l'instrument et de l'atmosphère. Nous considérerons donc celui-ci comme parfait et nous n'aurons donc pas à en tenir compte dans la suite mise à part l'introduction de l'obturation centrale et de l'araignée.





FIG. 3.2 – Exemple de masque de phase atmosphérique

### L'instrument

Afin de connaître les aberrations générées par l'instrument nous allons là encore utiliser les polynômes de Zernike. La différence est que nous n'avons ici aucuns modèles mathématiques qui puisse nous fournir les coefficients des polynômes avec suffisamment de précision. Pour palier à cela nous avons utilisé le logiciel d'optique Zemax. Le gros avantage est que ce logiciel a déjà été utilisé dans la phase de conception de l'instrument, nous avons donc directement des modélisations exploitables afin de déterminer les décompositions polynômiales des aberrations qui, de plus, seront très fidèles à l'instrument. Le logiciel Zemax fournit également la focale correspondant à l'instrument équivalent. C'est à dire que l'on se retrouve exactement dans la situation que nous avons décrite dans la théorie des aberrations : nous avons un système optique quelconque et nous connaissons le diaphragme d'entrée, la masque de phase et la distance focale. On sait alors que la distribution d'intensité dans le plan focal sera donnée par le module au carré de la transformée de Fourier de l'onde incidente à laquelle on aura préalablement superposé le masque de phase.

### 3.2.2 propagation du front d'onde

Lorsque l'onde issue de l'objet observé arrive dans l'instrument, celle-ci a toujours par hypothèse une amplitude unité mais sa phase sera décrite par le masque de phase atmosphérique lui même. La trame de micro-lentilles va introduire quelques complications dans le traitement de l'instrument. En effet, un même masque de phase ne pourra pas représenter les aberrations de différentes micro-lentilles. Ainsi il va nous falloir réaliser un masque de phase pour chacune d'elles. La situation est équivalente à avoir 225 instruments comportant tous une micro-lentille mais à des positions différentes. De plus, chaque instrument va devoir être séparé en deux parties. La première partie commence avec la pupille d'entrée et se termine dans le plan avant des micro-lentilles. La deuxième partie part de ce plan et comprend le reste de l'instrument. Le raison de cette séparation est que chaque micro-lentille va agir comme un diaphragme et ceci ne peut être représenté à l'aide de coefficients de Zernike. Il nous faut donc établir quelle sera l'onde dans le plan de la trame, appliquer le diaphragme puis continuer le traitement. Précisons que les aberrations des micro-lentilles seront inclus dans la première partie de l'instrument. La méthode

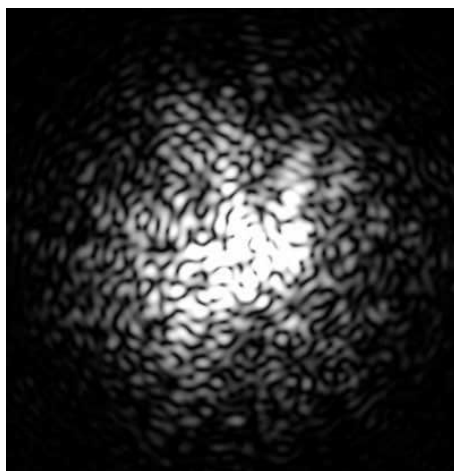


FIG. 3.3 – Distribution d'intensité dans le plan juste avant la trame (speckle) pour une pose courte

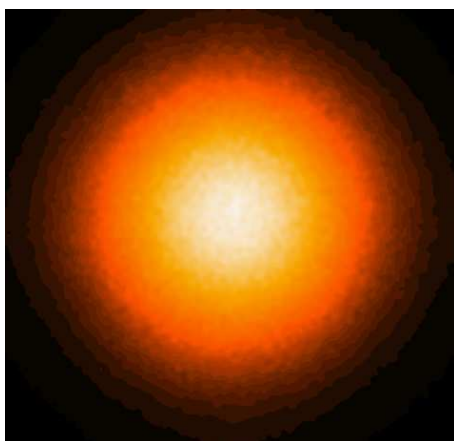


FIG. 3.4 – Distribution d'intensité dans le plan juste avant la trame (speckle) pour une pause longue

générale va donc suivre les étapes suivantes. On détermine tout d'abord le masque de phase atmosphérique par un tirage aléatoire que l'on superpose à celui de la première partie de l'instrument pour une micro lentille donnée. On prend la transformée de Fourier du résultat obtenu ce qui nous donne l'expression de l'onde complexe juste avant le plan de la trame de micro lentilles 3.3. On détermine ensuite quelle partie de l'onde complexe tombe sur la micro lentille que l'on a considérée ce qui va nous donner l'amplitude entrant dans la deuxième partie de l'instrument. On superpose à cette onde le masque de phase généré par les aberrations de la partie spectroscopique et l'on prend à nouveau la transformée de Fourier du résultat. Le passage au module carré de cette dernière expression nous donnera alors la distribution d'intensité sur le détecteur.

### 3.3 Source ponctuelle polychromatique

Considérons à présent une source ponctuelle avec un spectre continu. Bien que la méthode précédente ne puisse pas être appliquée telle quelle puisque nous avons à présent un nombre infini de longueur d'onde, nous allons tout de même nous baser sur celle-ci. L'idée est ici de dire que la réponse impulsionnelle de l'instrument, ou PSF (pour Point Spread Function), ne va pas considérablement varier entre deux valeurs de longueur d'onde suffisamment proches. Ainsi, si l'on possède un échantillonnage judicieux en longueur d'onde de cette réponse, il sera alors possible de l'interpoler. La méthode va donc être de constituer une base de PSF à l'aide de différentes sources ponctuelles monochromatiques puis d'interpoler entre celles-ci tout en pondérant par le spectre de la source continue. L'échantillonnage doit être choisi avec beaucoup de soin. En effet pour chaque longueur d'onde, il va nous falloir stocker une PSF par micro-lentille et ceci pour les deux voies spectroscopiques, soit un total de 450 images. On voit donc que si le nombre de longueurs d'onde est trop important, la base sera bien trop importante pour être stockée mais, en revanche, si celui-ci est trop faible, l'interpolation risque de perdre sa validité. Notre choix s'est porté à un pas de 20 nm ce qui porte le nombre totale de longueur d'onde à 10.

Afin de minimiser la place nécessaire au stockage important des images, la taille de chacune est calculer afin de se limiter à l'information utile. En effet les PSF correspondant aux différentes longueurs d'onde n'ont pas toutes la même dimension sur le détecteur. L'interpolation entre deux longueurs d'onde sera dans tous les cas linéaire.

### 3.4 Source étendue monochromatique

La source que nous considérons ici est étendue et incohérente. Cela nous permettra de modéliser une galaxie se superposant à une source ponctuelle comme par exemple une supernova.

Le fait que la source soit incohérente nous permet en théorie de décomposer celle-ci en une somme de sources ponctuelles. En effet, du fait de l'incohérence, chaque point composant la source n'interferera pas avec ses voisins et créera sa propre PSF sur le détecteur. L'image finale sera ainsi la somme des PSF engendrées par chacun des points. La méthode que nous avons vue précédemment permet justement de traiter des sources ponctuelles et l'on pourrait donc en théorie l'appliquer ici à chacune de ces sources élémentaires. Le problème est qu'il faudrait alors multiplier le temps de calcul que cette méthode nécessite par le nombre de points à traiter ce qui nous conduit rapidement à une impossibilité technique.

Cependant les sources étendues entraînent une simplification importante qui va nous permettre de modifier la méthode. Cette simplification se situe au niveau de la trame de micro-lentilles. Nous n'aurons pas, comme prédemment, à calculer l'amplitude du front d'onde dans la plan de la trame afin de déterminer précisément quelle partie du speckle est 'vue' par chaque micro-lentilles. En effet chacunes des sources élémentaires qui composent la source étendue va à un temps donné, du fait de l'incohérence, générer un speckle dans le plan de la trame qui n'interferera pas avec celui des autres sources. Ces speckles, qui seront très similaires (puisque le masque

atmosphérique sera identique) mais avec des centrages légèrement différents, vont se cumuler en grand nombre dans le plan de la trame provoquant un moyennage du front d'onde. Chacune des micro-lentilles va donc recevoir une lumière quasi-uniforme qui pourra, avec une très bonne approximation, être assimilée à une onde plane. Toutes les micro-lentilles ne recevront cependant pas toute la même intensité. Celle-ci dépendra de l'intensité relative de chaque source élémentaire et cette information devra être fournie en entrée du simulateur. Nous avons dit dans la description de l'instrument que la résolution spatiale, du fait de l'inversion champ-pupille, était déterminée par le champ sur le ciel d'une micro-lentille, c'est à dire  $0.4''$ . Ainsi toutes les informations spatiales en dessous de cette valeur sera inutile. Par conséquent nous n'aurons qu'à fournir au programme une carte d'intensité de la source rééchantillonnée à la résolution de l'instrument.

En conclusion, nous venons de voir que le calcul des speckle était, dans le cas des sources étendues, devenu inutile. Ceci entraîne que nous n'avons plus besoin des aberrations de l'étage agrandisseur qui intervenaient dans cette étape. Nous considérerons donc ici seulement l'étage spectroscopique éclairé par une lumière uniforme. La théorie nous dit que l'image d'une source continue au travers d'un instrument est donnée par la convolution de la fonction pupille et de la fonction de transfert optique <sup>1</sup> l'instrument. La fonction pupille est une fonction qui vaut 0 en dehors de la pupille et 1 à l'intérieur. On la qualifiera de généralisée lorsqu'on lui superpose les aberrations de l'instrument. L'OTF quant à elle est donnée par la transformée de Fourier du module carré de la fonction de transfert généralisée.

Nous appliquerons la même stratégie que pour les sources ponctuelles en considérant 225 instruments différents, chacun ayant une micro-lentille mais à une position différente dans le plan de la trame. Pour chacun de ses instruments, la pupille sera la micro-lentille elle-même.

La stratégie concernant l'échantillonnage des longueurs d'onde sera ici similaire aux poses courtes.

### 3.5 Source étendue polychromatique

La méthode ici est simple. Il nous suffit de combiner l'échantillonnage en longueur et l'échantillonnage spatiale. nous auront donc la encore une bibliothèque de PSF qu'il nous faudra interpoler puis pondérer par le spectre de la source et la bonne intensité spatiale.

### 3.6 poses longues

Afin de générer des poses longues nous allons nous appuyer sur les poses courtes dont nous avons parlé jusqu'à présent. Les sources que nous considérerons, comme les supernovae par exemple, ne possèdent pas de cohérence temporelle. Ceci revient à dire que l'onde arrivant sur le détecteur à un temps  $t_0$  n'interférera pas avec celle arrivant à un temps ultérieur  $t_1$ . De plus la seule différence qui existera entre

---

<sup>1</sup>Optic Transfert Function ou OTF en anglais.

les deux ondes précédemment mentionnées sera dûe à l'évolution de l'atmosphère<sup>2</sup>. Nous avons donc là toute l'information nous permettant d'établir une méthode pour générer des poses longues : il nous suffit de calculer des poses courtes avec des masques atmosphériques différents et de cumuler ensuite les images obtenues sur le détecteur. On estime qu'il faut environ 1000 poses courtes différentes pour générer une pose longue.

---

<sup>2</sup>En considérant bien sûr que la différence entre  $t_0$  et  $t_1$  est de l'ordre du temps caractéristique de l'évolution de l'atmosphère

# Chapitre 4

## Analyse des résultats

Nous allons dans un premier temps étudier en détails les PSF de l'instrument dans différentes conditions. Nous allons tout d'abord étudier celles-ci pour les poses courtes qui représentent en quelques sortes la brique élémentaire des résultats des simulations. Ces poses courtes seront établies en supprimant l'effet de l'atmosphère dans un premier temps afin d'isoler les effets optiques propres à l'instrument. Nous examinerons ensuite les poses longues qui sont le mode de fonctionnement normale de l'instrument lors des observations et enfin, nous finirons sur les spectres qui composent les poses simulées sur le détecteur.

### 4.1 Les PSF

#### 4.1.1 pauses courtes

##### En l'absence d'atmosphère

En l'absence d'atmosphère, l'image dans le plan juste avant la trame de micro-lentilles est une tache d'Airy imparfaite du fait de la présence de l'araignée (voir figure 4.1).

Supposons dans un premier temps que cette tache d'Airy est centrée sur la micro-lentille qui se trouve au centre de la trame. Les figures 4.2 et 4.3 montrent les PSF pour différentes longueurs d'onde dans la voie bleue et la voie rouge respectivement. La largeur de chaque image représente 5 pixels sur le détecteur soit  $75 \mu m$ .

Les spécifications de l'instrument SNIFS requièrent que 80% de l'énergie encerclée soit comprise dans 2 pixels sur le détecteur ce qui représente un rayon de  $15 \mu m$ . Les mesures réalisées sur les PSF de la figure 4.2 et 4.3 montrent que ces critères sont respectés (voir table 4.1).

La tache d'Airy est bien plus large qu'une micro-lentille. Ainsi les micro-lentilles voisines de la micro-lentille centrale reçoivent elles aussi de la lumière mais en plus faible quantité. On suppose en générale que la PSF générée par ces micro-lentilles voisines est identique à celle qu'elles généreraient si elles étaient centrées sur la tache d'Airy. Nous avons ici la possibilité de tester la validité de cette hypothèse. La figure 4.4 montre les PSF générées par les micro-lentilles de la moitié inférieur de la colonne centrale. L'image à gauche correspond à la micro-lentille la plus proche de la micro-

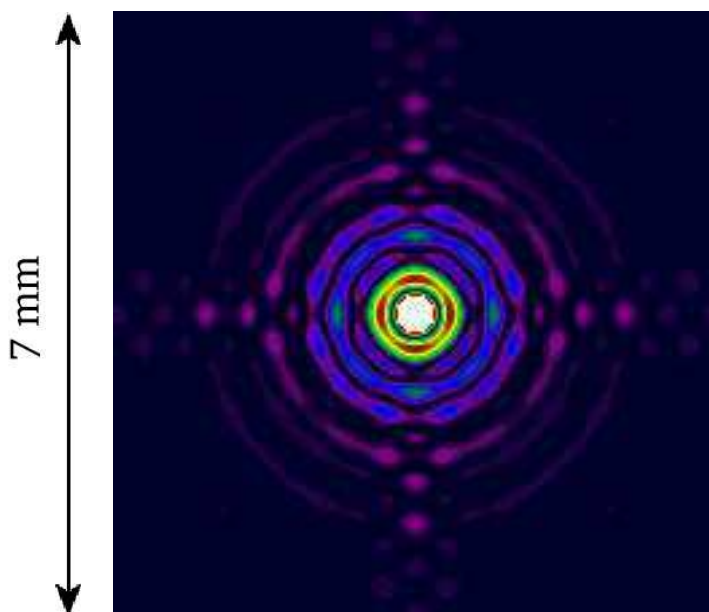


FIG. 4.1 – Tache d’Airy sur le plan juste avant la trame de micro-lentilles. L’image a une largeur physique de 7 mm, soit 5 micro-lentilles .

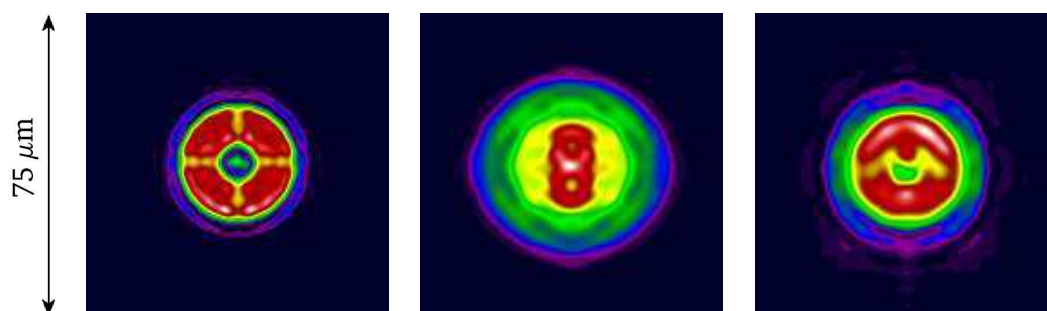


FIG. 4.2 – PSF de la micro-lentille centrale pour une tache d’Airy centrée sur cette même micro-lentille dans la voie bleue à 320, 480 et 580 nm.

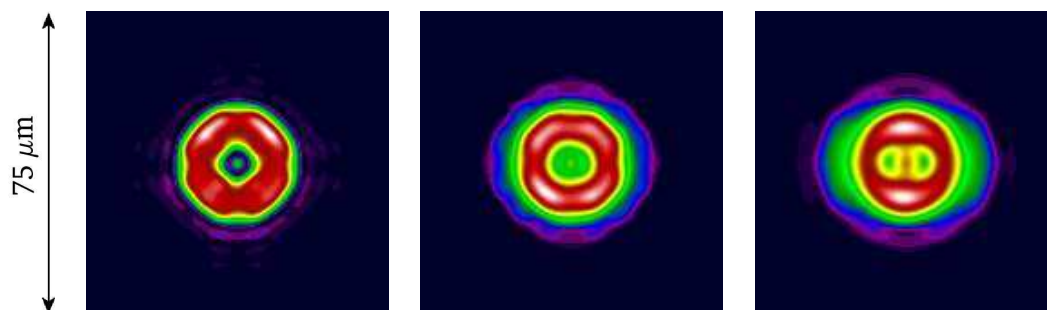


FIG. 4.3 – PSF de la micro-lentille centrale pour une tache d’Airy centrée sur cette même micro-lentille dans la voie rouge à 560, 740 et 1000 nm.

lambda	320 nm	480 nm	580 nm
voie bleue	12.56	14.32	12.86
lambda	320 nm	480 nm	580 nm
voie rouge	12.52	12.55	12.76

TAB. 4.1 – Rayon en micro-mètres du cercle contenant 80% de l'énergie sur le détecteur pour la micro-lentille centrale dans le cas d'une tache d'Airy centrée sur cette même micro-lentille.

lentille centrale. Chaque image représente 6 pixels sur le détecteur soit  $90 \mu\text{m}$ . Bien

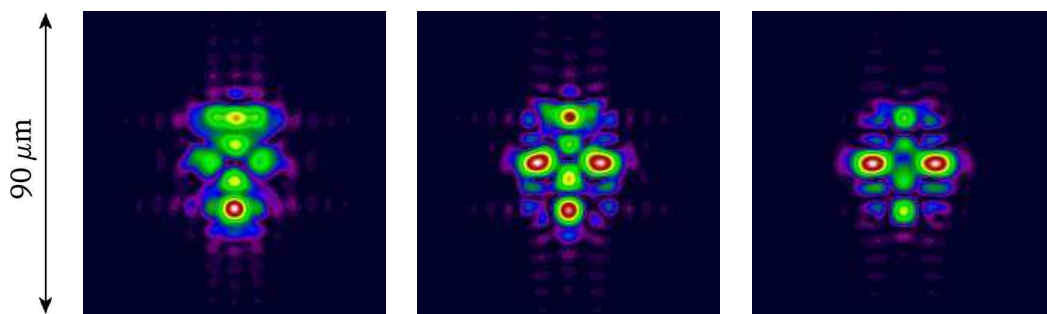


FIG. 4.4 – PSF des micro-lentilles voisines de la micro-lentille centrale pour une tache d'Airy centrée sur la micro-lentille centrale dans la voie rouge à  $760 \text{ nm}$ .

que les PSF n'est pas du tout le même aspect, elles ne sont pas beaucoup plus larges que leurs homologues dans la cas où la tache d'Airy est centrée comme le montre la table 4.2.

micro-lentilles	(8,7)	(8,6)	(8,5)
voie rouge	15.91	15	13.77

TAB. 4.2 – Rayon en micro-mètres du cercle contenant 80% de l'énergie pour différentes micro-lentilles de la voie rouge à  $760 \text{ nm}$  dans le cas d'une tache D'Airy centrée sur la micro-lentille centrale

Ainsi la différence vu par le détecteur sera très faible car on est toujours dans le cas où 80% de l'énergie encerclée est approximativement contenue dans 2 pixels. De plus, même si les ailes des PSF sont un peu plus larges, l'intensité de ces PSF étant bien plus faibles, elles perturbent peut les résultats de l'instrument. En effet la PSF se situant juste à côté de la PSF centrale ne représente déjà que 0.68% de l'intensité de cette dernière. Les deux suivantes représentent quant à elle 0.12% et 0.08% respectivement.

### En présence d'atmosphère

Nous réintroduisons à partir de maintenant les effets de l'atmosphère et nous allons calculer les PSF dans les mêmes cas que précédemment. La largeur des images



est de  $200 \mu\text{m}$ , soit 6 pixels sur le détecteur (figure 4.5, 4.6 et 4.7) .

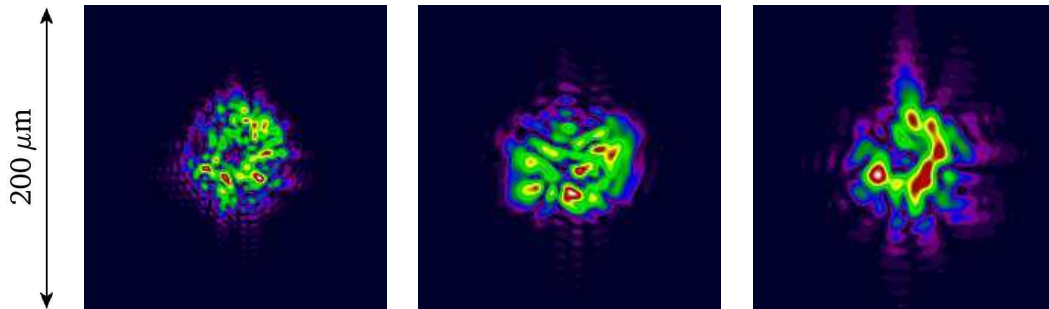


FIG. 4.5 – PSF de la micro-lentille centrale pour une tache d’Airy centrée sur cette même micro-lentille dans la voie bleue à 320, 480 et 580 nm respectivement.

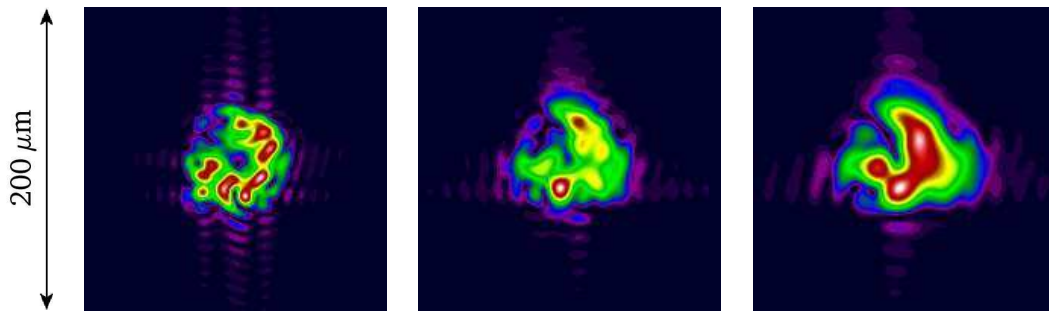


FIG. 4.6 – PSF de la micro-lentille centrale pour une tache d’Airy centrée sur cette même micro-lentille dans la voie rouge à 560, 760 et 1000 nm respectivement.

Les effets de l’atmosphère sont clairement visibles sur les différentes PSF. Notons que toutes les images sont réalisées à partir d’une réalisation de masque atmosphérique unique donc que ces PSF ne sont que des cas particuliers. Afin d’estimer la dégradation apportée, nous allons, là encore, regarder les énergies encadrées. Les tables 4.3 et 4.4 nous montrent que, même si la concentration est légèrement dégradée, nous remplissons toujours approximativement les critères requis pour l’instrument.

lambda	320 nm	480 nm	580 nm
voie bleue	13.18	15.24	13.78
lambda	320 nm	480 nm	580 nm
voie rouge	12.83	13.47	13.67

TAB. 4.3 – Rayon en micro-mètres du cercle contenant 80% de l’énergie sur le détecteur pour la micro-lentille centrale dans le cas d’une tache d’Airy centrée sur cette même micro-lentille

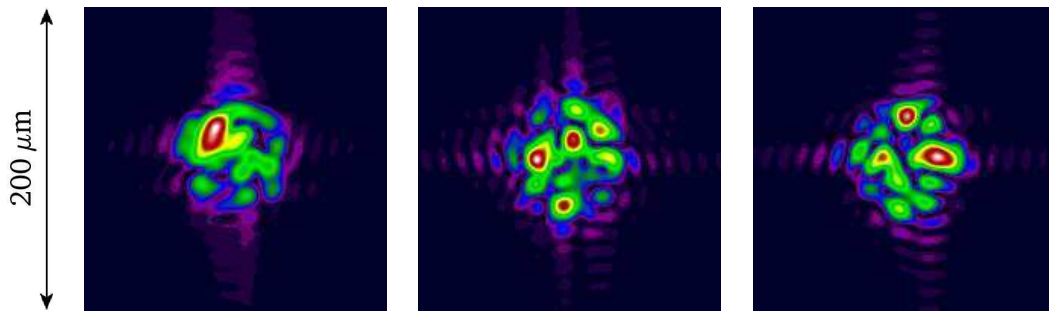


FIG. 4.7 – PSF des micro-lentilles voisines de la micro-lentille centrale pour une tache d’Airy centrée sur la micro-lentille centrale dans la voie rouge à 760 nm.

micro-lentilles	(8,7)	(8,6)	(8,5)
voie rouge	13.77	15.30	14.69

TAB. 4.4 – Rayon en micro-mètres du cercle contenant 80% de l’énergie pour différentes micro-lentilles de la voie rouge à 760 nm dans le cas d’une tache d’Airy centrée sur la micro-lentille centrale

#### 4.1.2 Poses longues

Comme nous l’avons dit plus haut, les poses longues sont générées en cumulant sur le détecteur les intensités de 1000 poses courtes, chacune étant calculée en se basant sur un masque atmosphérique différent. Nous allons toujours nous placer dans les mêmes cas que ceux qui ont été étudiés précédemment. La largeur de chaque image est de  $105 \mu\text{m}$  soit l’équivalent de 7 pixels sur le détecteur (figure 4.8, 4.9 et 4.10).

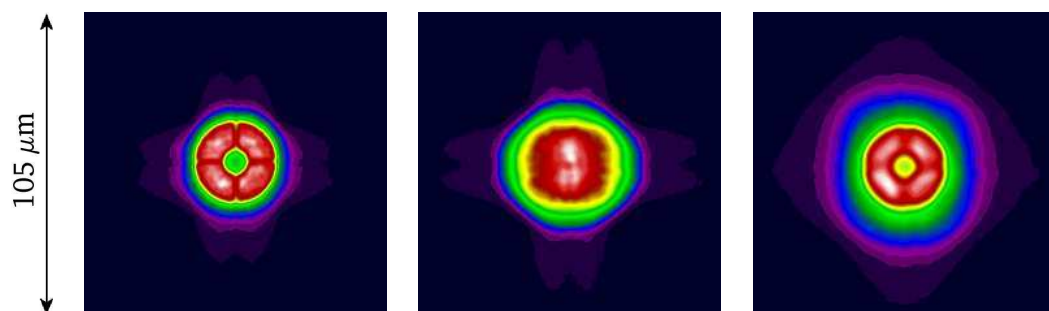


FIG. 4.8 – PSF de la micro-lentille centrale pour une tache d’Airy centrée sur cette même micro-lentille dans la voie bleue à 320, 480 et 580 nm respectivement.

On observe dans les poses longues une dégradation par rapport aux poses courtes (table 4.5 et 4.6) mais celle-ci reste très limitée et les spécifications de l’instrument sont toujours respectées.

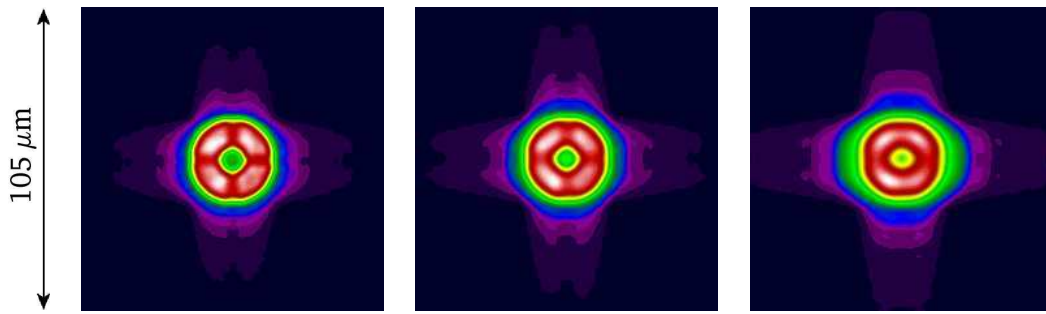


FIG. 4.9 – PSF de la micro-lentille centrale pour une tache d’Airy centrée sur cette même micro-lentille dans la voie rouge à 560, 760 et 1000 nm respectivement.

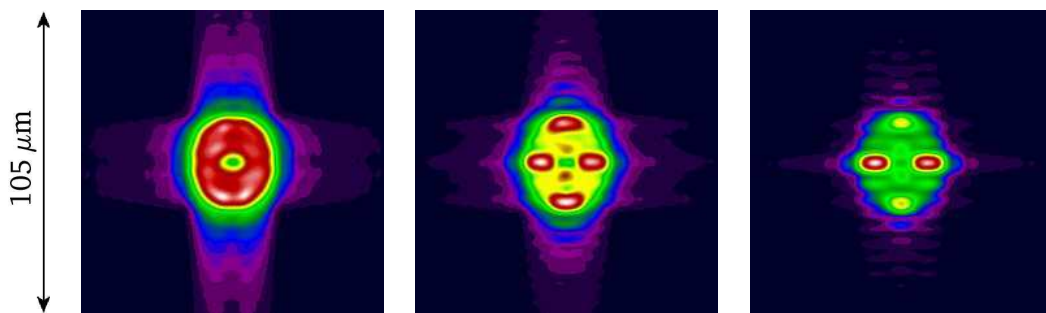


FIG. 4.10 – PSF des micro-lentilles voisines de la micro-lentille centrale pour une tache d’Airy centrée sur cette même micro-lentille dans la voie rouge à 760 nm.

lambda	320 nm	480 nm	580 nm
voie bleue	13.18	16.46	15.31
lambda	320 nm	480 nm	580 nm
voie rouge	13.14	13.47	14.28

TAB. 4.5 – Rayon en micro-mètres du cercle contenant 80% de l’énergie sur le détecteur

micro-lentilles	(8,7)	(8,6)	(8,5)
voie rouge	15	15.61	15

TAB. 4.6 – Rayon en micro-mètres du cercle contenant 80% de l’énergie pour différentes micro-lentilles de la voie rouge à 760 nm dans le cas d’une tache d’Airy centrée sur la micro-lentille centrale

## 4.2 Les poses détecteurs

Une fois l’ensemble des PSF calculées en poses longues, nous sommes pratiquement en mesure de construire une pose simulée sur le détecteur. Il nous reste à traiter le problème de l’interpolation entre deux PSF de longueurs d’onde voisines

et de déterminer la position de chaque PSF sur le détecteur.

En ce qui concerne l'interpolation nous nous sommes limité à une simple interpolation linéaire. Dans le cas où les PSF ont des tailles différentes, on ajuste la taille de la plus petite image en rajoutant des valeurs nulles.

Pour les positions sur le détecteur, nous allons une fois encore faire appel au logiciel ZEMAX. Celui-ci permet d'obtenir très simplement la position des PSF pour l'ensemble des longueurs d'onde, des micro-lentilles et des ordres de diffraction. Il y a en effet plusieurs ordres de diffraction visible sur le détecteur. Il est important de les prendre tous en compte dans la simulation car ils peuvent être à l'origine de problèmes importants dans les instruments de type spectrographe 3D. Dans l'instrument SNIFS on cherche à observer l'ordre 1 mais celui ci peut être pollué par les ordres 0 et 2 ce qui peut être très gênant pour extraire l'information et en particulier le flux de l'objet. Les bibliothèques de PSF que nous avons établies correspondent à l'ordre 1 mais on fera l'approximation que celles ci sont également valables pour les autres ordres.

Les images que nous allons montrer correspondent au cas d'une source étendue. C'est en effet dans ce cas que l'occupation du CCD est maximum et où l'on peut examiner l'intégralité des spectres.

La figure 4.11 nous montre la partie centrale du détecteur où les spectres correspondant à l'ordre 1 dominant largement. On peut voir sur la coupe que ceux ci sont très nettement séparés.

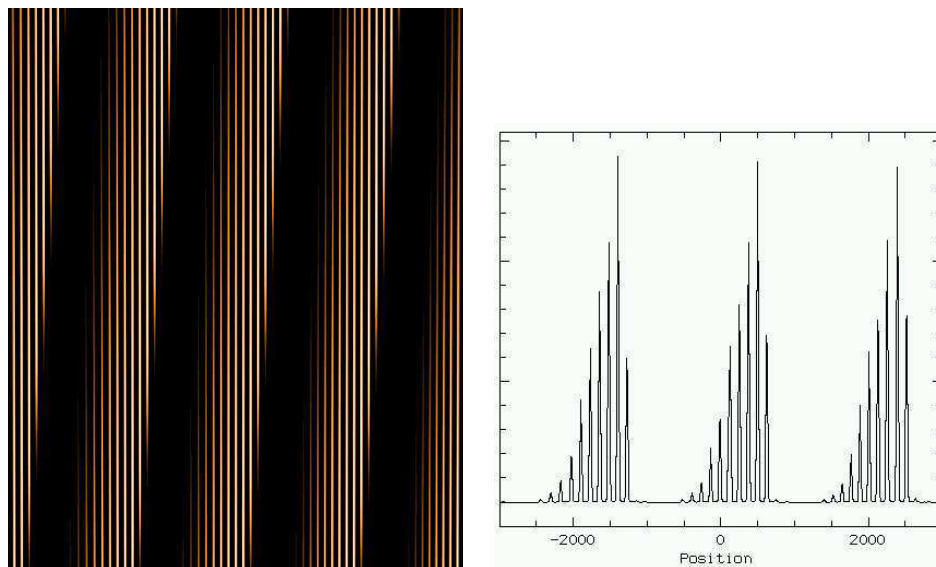


FIG. 4.11 – Centre du détecteur.

Si l'on regarde la partie supérieure du détecteur (figure 4.12), on voit apparaître les ordres 0. La coupe montre nous avons là un exemple de pollution de l'ordre 1 par l'ordre 0 mais on peut voir, d'après l'intensité relative des pics, que la gêne occasionnée sera minime.

Les ordres 2, eux, se manifestent dans la partie inférieure du détecteur (figure 4.13). On peut voir là aussi sur la coupe, vers  $x=-11800$ , qu'un pic de l'ordre 1 et de

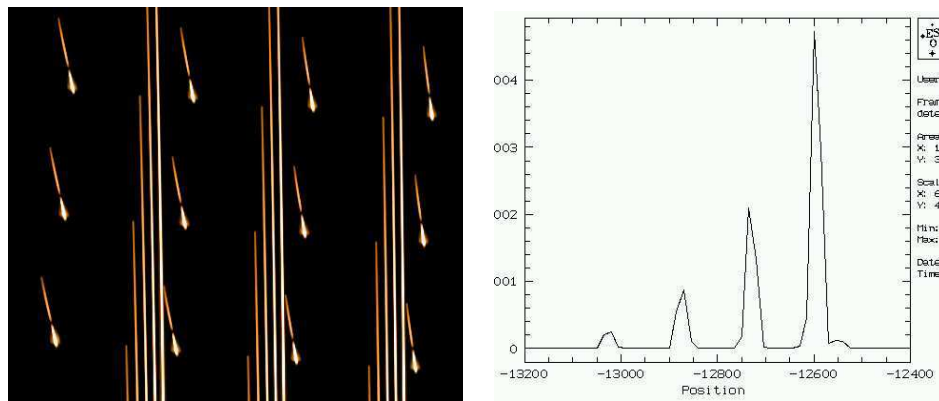


FIG. 4.12 – Partie supérieur gauche du détecteur

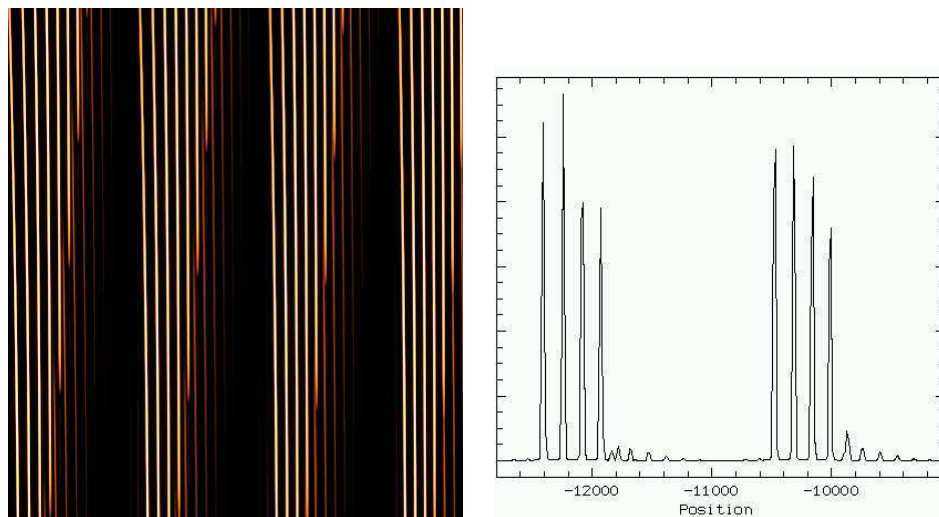


FIG. 4.13 – Partie inférieure gauche du détecteur

l'ordre 2 se superposent partiellement. Ces recouvrements se produisent seulement en fin de spectre là où l'intensité est relativement faible.

## Cinquième partie

# Étude statistique des spectres de SN

# Chapitre 1

## introduction

L'instrument SNIFS va permettre de constituer une très large base de séries temporelles de supernovae de type Ia observées dans le domaine spectral. L'objectif est de réaliser une étude statistique sur cette base de données afin d'une part, de tester leurs homogénéités, et d'autres part, de mieux connaître ce type d'objets. On estime à 300 le nombre de Sn Ia qui seront observées durant les 3 ans de la campagne d'observation. Il nous faut donc, afin de traiter ce grand nombre d'observations, un outil qui soit suffisamment rapide et automatisé. Le premier pas consiste bien évidemment à considérer le type de données que l'on doit traiter puis de définir en conséquence le type de méthode à employer. Nous devons parvenir à dégager de la masse de données la notion de normalité et d'anormalité tout en déterminant les critères permettant de les caractériser.

# Chapitre 2

## Analyse en composantes principales

Les données de base dont nous disposons sont des spectres. La méthode de l'analyse en composante principale a déjà été appliquée dans différents problèmes en astronomie. L'analyse en composantes principales, ou ACP, est un outil classique dans l'étude de grandes quantités de données. Elle est particulièrement adaptée aux problèmes où est présent un grand nombre de variables mesurées sur un grand nombre d'individus. La méthode va permettre, en introduisant de nouvelles variables, de caractériser précisément la variance existant dans l'ensemble des données. Cette méthode semble donc à priori très indiquée pour notre problème : nous disposons d'un grand nombre de variables (les intensités à

différentes longueurs d'onde), d'un grand nombre d'individus (les différentes supernovae Ia observées) et nous voulons connaître la variance qui existe au sein de ces objets.

### 2.1 Un peu de théorie

#### 2.1.1 l'espace vectoriel $[\Omega]$

Soit un ensemble de  $P$  variables dont on connaît les valeurs pour  $N$  individus. Considérons l'ensemble des fonctions  $\Omega$  de l'ensemble des individus  $\{n_1, \dots, n_N\}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à chaque individu associe la valeur d'une variable. Chaque variable sera alors représentée dans cet espace par un ensemble de  $N$  valeurs. On munit  $\Omega$  d'une structure d'espace vectoriel réel noté  $[\Omega]$ , celui-ci est isomorphe à  $\mathbb{R}^N$ . Définissons l'ensemble des fonctions indicatrices, au nombre de  $N$ , par :

$$\omega_i(n_j) = \delta_{ij}$$

alors  $\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  est une base de  $[\Omega]$  notée  $(\Omega)$  et appelée la base indicatrice, celle-ci est isomorphe à la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . A chaque fonction  $x : M \rightarrow \mathbb{R}$  on associe une matrice colonne notée :

$$X = \begin{pmatrix} x(m_1) \\ \vdots \\ x(m_N) \end{pmatrix}$$



### 2.1.2 Variance, covariance

La variance du caractère associé au vecteur  $x$  est le carré de la norme de la variable centrée associée à  $x$  :  $x' = x - \bar{x}\mathbf{1}$  où  $\bar{x}$  est la moyenne de  $x$  et  $\mathbf{1}$  est le vecteur unitaire.

$$var(x) = \langle x - \bar{x}\mathbf{1}, x - \bar{x}\mathbf{1} \rangle = \|x - \bar{x}\mathbf{1}\|^2$$

Par analogie, la covariance de deux vecteurs  $x$  et  $y$  est donnée par :

$$cov(x, y) = \langle x - \bar{x}\mathbf{1}, y - \bar{y}\mathbf{1} \rangle = \langle x', y' \rangle$$

### 2.1.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace

Soit  $y$  un vecteur et  $[E]$  un sous espace vectoriel appartenant à  $[\Omega]$ . Pour tout  $z \in [E]$ , la distance de  $z$  à  $y$  est donnée par

$$\sqrt{\langle y - z, y - z \rangle}$$

La valeur minimale de cette distance sera définie comme la distance de  $y$  à  $[E]$  et sera réalisée pour un vecteur donné  $\hat{y}$  qui est en fait le projeté orthogonal de  $y$  sur  $[E]$ . En effet le projeté orthogonal de  $y$  sur  $[E]$  est le seul vecteur qui vérifie  $\forall z \in [E] \langle z, y - \hat{y} \rangle = 0$ , or

$$\begin{aligned} \langle y - z, y - z \rangle &= \|y - z\|^2 = \|y - \hat{y} + \hat{y} - z\|^2 \\ &= \|y - \hat{y}\|^2 + 2 \langle y - \hat{y}, \hat{y} - z \rangle + \|\hat{y} - z\|^2 \end{aligned}$$

De plus on sait que  $\langle y - \hat{y}, y - \hat{y} \rangle = 0$  car  $\hat{y} - z \in [E]$  et  $y - \hat{y}$  est orthogonal à tout vecteur de  $[E]$  d'où

$$\|y - \hat{y}\|^2 + \|\hat{y} - z\|^2 = \|y - z\|^2$$

soit

$$\forall z \in [E] : \|y - \hat{y}\|^2 \leq \|y - z\|^2$$

L'égalité ne sera vraie que lorsque  $z = \hat{y}$

### 2.1.4 Les axes principaux

L'ensemble des vecteurs  $X_i$  associés aux  $p$  variables  $x_i$  génère un sous espace de  $[\Omega]$  dont la dimension sera inférieure ou égale à  $p$ .

Le but de l'analyse en composantes principales (A.C.P.) va être de construire une base particulière orthonormée de cet espace  $[x_1, \dots, x_p]$ . Cette base est constituée de vecteurs  $z_1, \dots, z_r$  ( $r \leq p$ ) appelés variables artificielles choisies de telle sorte que la somme des carrés des distances des variables à chacun des sous-espaces  $[z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_1, \dots, z_p]$  soit minimale. On choisit tout d'abord  $z_1$  de telle sorte que la somme des carrés des distances de chaque variable  $x_i$  à son projeté orthogonal sur  $[z_1]$  soit minimale, puis on choisit  $z_2$  de telle sorte que la somme des carrés des

<i>variables</i>	$x'_1$	$x'_2$	$\dots$	$x'_p$
$x'_1$	$\langle x'_1, x'_1 \rangle$	$\langle x'_1, x'_2 \rangle$	$\dots$	$\langle x'_1, x'_p \rangle$
$x'_2$	$\langle x'_2, x'_1 \rangle$	$\langle x'_2, x'_2 \rangle$	$\dots$	$\langle x'_2, x'_p \rangle$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x'_p$	$\langle x'_p, x'_1 \rangle$	$\langle x'_p, x'_2 \rangle$	$\dots$	$\langle x'_p, x'_p \rangle$

FIG. 2.1 – Matrice des corrélations

distances de chaque variable  $x_i$  à son projeté orthogonal sur  $[z_1, z_2]$  soit minimale et ainsi de suite.

Les axes engendrés par les variables artificielles sont appelés les axes principaux.

Le passage de  $(x_1, \dots, x_p)$  à  $(z_1, \dots, z_r)$  permet d'obtenir une représentation plus simple de l'espace des variables.

On peut montrer que cette base  $(z_1, \dots, z_r)$  est en réalité constituée des vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles d'une matrice symétrique construite à partir du produit scalaire de toutes les variables prises deux à deux. Dans le cas où l'on fait les calculs avec les variables centrées réduites, cette matrice n'est autre que la matrice des corrélations (table 2.1).

De plus, plus une valeur propre sera grande et meilleur sera la représentation des variables par l'axe principal correspondant. On se limite donc en général à étudier seulement les axes principaux dont les valeurs propres sont les plus élevées car ils drainent la majeure partie de l'information du jeu initial de données.

## 2.2 Application de la PCA sur les SNIa

Nous allons tester la méthode sur un ensemble de 49 spectres de Sn Ia de la base SUSPECT. Cet ensemble comprend des séries temporelles telle que celle de 1994D qui à elle seule représente 18 spectres. Afin de limiter la dimension des matrices à traiter nous rééchantillons ces spectres à 1 nm en se limitant à la bande [400nm,700nm].

Il y a pour cet échantillon 3 axes principaux (voir figure 2.2).

Sur le premier axe, la première chose que l'on remarque est la présence des deux raies du silicium. Cela confirme bien l'importance déjà connue de cet élément dans la caractérisation des SnIa. On remarque aussi que là où les SnIa présentent le maximum d'intensité, l'axe principal a des valeurs très faibles. Ceci est plutôt surprenant car on aurait pu s'attendre à la présence de fortes valeurs, opposées à l'absorption du silicium. Le deuxième axe ressemble lui beaucoup plus au spectre d'une SnIa. Les raies du silicium sont la aussi très marquées

Les variables originelles, c'est à dire les intensités aux différentes longueurs d'onde, sont très fortement corrélées avec le premier axe. La signification physique des axes est très souvent la partie délicate de l'ACP. Nous avons ici quelque chose qui affecte de manière quasiment similaire l'intégralité des longueurs d'ondes. On peut penser qu'il s'agit simplement de la luminosité de la supernovae. Plus celle-ci faiblit et plus l'intensité du spectre décroît. Cependant s'il s'agit bien d'une variation

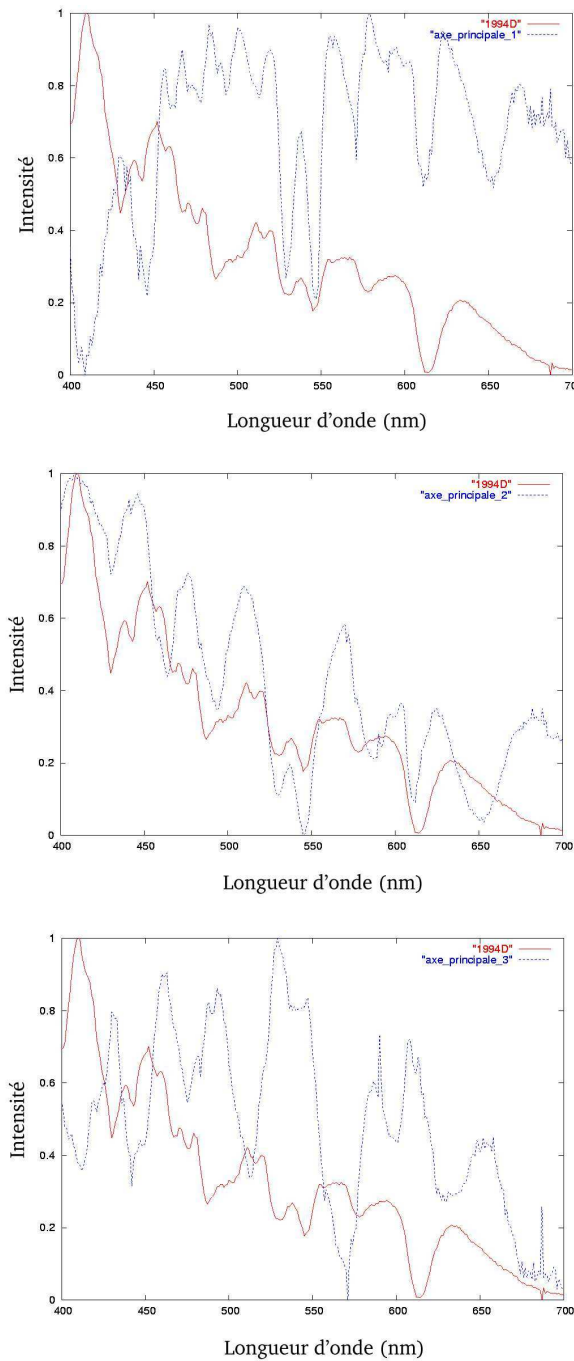


FIG. 2.2 – Représentation normalisée d'un spectre de Sn Ia et des axes principaux 1, 2 et 3 respectivement.

d'intensité, il nous est impossible de distinguer la variation qui se produit dans une même supernova au cours de son évolution et celle qui existe entre différentes supernovae à une même époque. Pire encore, cette variation prend également en compte la comparaison de spectres de différentes supernovae à différentes époques...

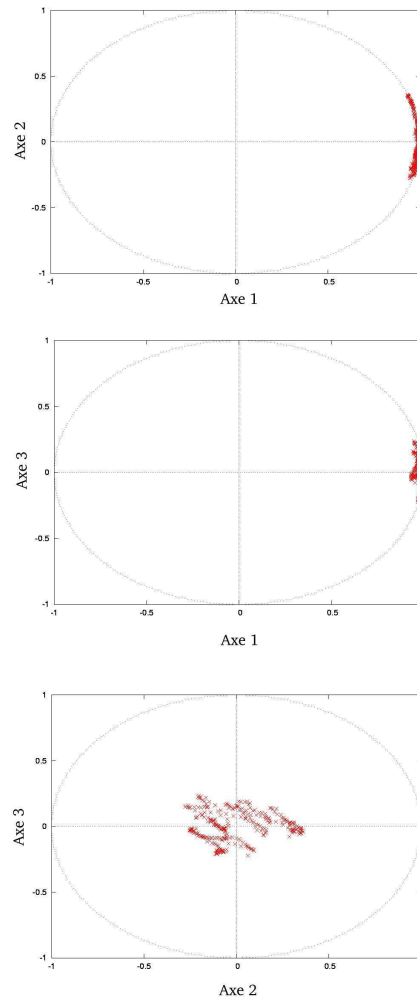


FIG. 2.3 – corrélation des variables avec les différents axes propres.

## 2.3 conclusion

La PCA utilisée de manière brutale sur les spectres semble ne pas être le moyen le plus adapté pour atteindre l'objectif que nous nous sommes fixé. En effet, malgré le fait que l'on peut voir très nettement apparaître des corrélations, celles-ci sont malheureusement très délicates à interpréter. Cela vient du fait que la méthode traite indépendamment chaque longueur d'onde comme une variable et chaque spectre comme un individu indépendant. Il est clair que tel n'est pas le cas pour les spectres au sein d'une même série temporelle. Il paraît donc difficile d'arriver à extraire, dans les axes propres, la variation pouvant exister au sein de la population des SnIa puisque celle-ci est mélangée à la variation temporelle des supernovae et à la variation existant au sein d'un même spectre. La PCA pourrait être utilisée dans le cas où l'on trouverait un moyen de représenter chaque forme de notre espace par un point dans un espace donné.

## Chapitre 3

# La morphométrie

La comparaison de deux objets est une chose courante et banale, on s'accorde souvent à dire que deux choses ou deux personnes se ressemblent. Pourtant, cette affirmation, bien que paraissant triviale pour notre esprit, l'est bien moins pour un ordinateur... Concevoir un programme permettant de comparer des objets au sens large du terme nous amène à réfléchir sur les concepts même de forme, de ressemblance et de comparaison. Il nous faut établir une méthode et des critères afin de pouvoir clairement identifier et quantifier des différences pouvant exister dans un ensemble de données. La première étape consiste à définir clairement le type d'objets que l'on va devoir traiter. Dans notre cas nous considérerons comme objet la totalité de la série temporelle des spectres d'une supernova car ce que l'on veut obtenir est bien la différence d'une supernova à une autre et non pas la différence entre deux spectres.

Si l'on juxtapose les uns au dessus des autres les spectres correspondant aux différentes époques d'une supernovae, on obtient une représentation bidimensionnelle avec en abscisse la longueur d'onde et en ordonnée le temps (voir figure 3).

Le problème sera alors non pas de traiter un ensemble de spectres mais plutôt un ensemble d'images bidimensionnelles. Heureusement pour nous, ce problème n'est pas nouveau et s'est déjà posé dans le domaine de la médecine il y a plusieurs années notamment avec l'apparition massive de l'imagerie médicale sur des organes très complexes comme le cerveau. Imaginons que l'on dispose d'un ensemble d'images sur un organe pour une population donnée, comment alors comparer les images ?

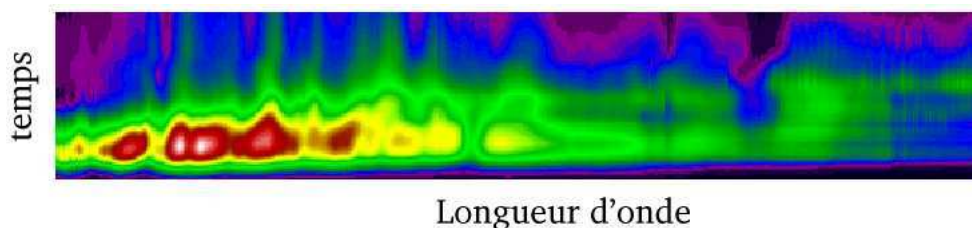


FIG. 3.1 – Superposition des spectres d'une même supernovae Ia correspondant à différents moments de son évolution. On a en abscisse les longueurs d'onde et en ordonnée le temps. (Spectres de S.Nobili (Nobili et al. 2003))

comment définir les formes qui seront dites normales pour un organe et celles dites anormales ? et anormales jusqu'à quel point ? Pour répondre à ces questions de nombreuses méthodes ont vu le jour mais beaucoup des plus récentes semblent opter pour la morphométrie. Apparue dans le début des années 80 la morphométrie occupe aujourd'hui une place importante dans les études statistiques d'un grand nombre de données plus ou moins complexes comme des images. Le principe en est assez simple et consiste à baser la comparaison sur la transformation (ou morphing) qui va permettre de passer d'un objet à un autre : plus la transformation est importante et plus les objets sont différents. Il nous faut là encore se méfier de ce qui se cache derrière un langage simple en apparence et préciser clairement ce que l'on comprend par transformation.

### 3.1 Généralité

Dans la comparaison de deux images, l'un des grands problèmes est la correspondance, c'est à dire de déterminer à quel point d'une image va correspondre un point d'une autre image. Cette correspondance n'est en général pas définie sur chaque point de l'image mais sur quelques points particuliers. Ces points sont en général choisis pour leur facilité d'identification mais aussi pour l'importance qu'ils ont dans la variabilité de l'objet. Par exemple si on travaille sur la comparaison de visages on pourra choisir les commissures de la bouche, les extrémités des yeux, la position du nez, etc... Ces points caractérisent notre image et seront la seule information visible par la transformation que l'on appliquera. On peut donc facilement imaginer qu'ils doivent être choisis avec énormément de précaution. Certaines méthodes permettent également d'utiliser des courbes comme repères sur les images, cependant il faut être prudent dans leur utilisation car elles sont encore mal maîtrisées et donc souvent instables.

La transformation, par définition, va donc être le moyen de passer d'un ensemble de points à un autre. Elle représente un grand degré de liberté dans la méthode et beaucoup de définitions existent dans la littérature. Nous nous contenterons pour le moment de dire que celle ci doit être continue sur l'intégralité du plan de l'image et doit être suffisamment régulière. En général, une fois la forme de la transformation déterminée, le problème est hautement dégénéré : il existe une infinité de transformations permettant de passer d'un ensemble de points à un autre. Pour lever cette dégénérescence on utilise une contrainte supplémentaire. Dans les nombreuses possibilités qui là aussi existent, on trouve souvent celle dites des "plaques minces". Les bases de la méthode telles que nous les présentons s'inspire beaucoup d'un article de Bookstein paru en 1989 (Bookstein 1989).

### 3.2 L'approximation des plaques minces

L'application de la théorie des plaques minces à ce type de problèmes semble avoir été initiée par J.Duchon (Duchon 1976) et formalisée par Meinguet (Meinguet 1979).

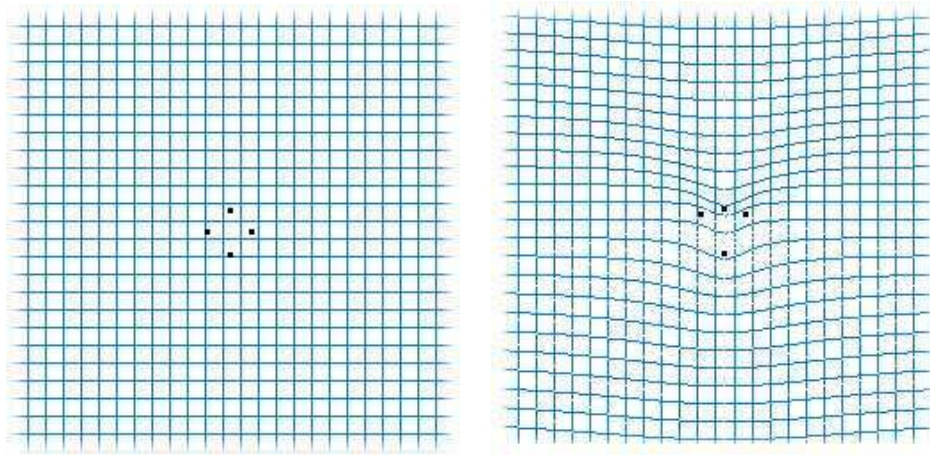


FIG. 3.2 – Un ensemble de points que l'on veut faire passer de la configuration de gauche à la configuration de droite.

Notre problème consiste dans un premier temps à transformer un ensemble de points en un autre ensemble de points. Pour simplifier et faciliter la représentation, nous raisonnerons à deux dimensions mais il sera facile de généraliser par la suite.

Soit deux ensembles de  $N$  points  $p_i$  et  $q_i$  dont les coordonnées sont respectivement  $(x_i, y_i)$  et  $(x'_i, y'_i)$ .

Il nous faut donc trouver une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $f(p_i) = q_i$ . Chaque dimension sera traitée de manière indépendante et la fonction  $f$  sera en réalité un vecteur  $(f_x, f_y)$ . La contrainte sur les points prend donc la forme :

$$f(x_i, y_i) = \begin{pmatrix} f_x(x_i, y_i) \\ f_y(x_i, y_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Considérons par exemple les deux ensembles de points représentés sur la figure 3.2.

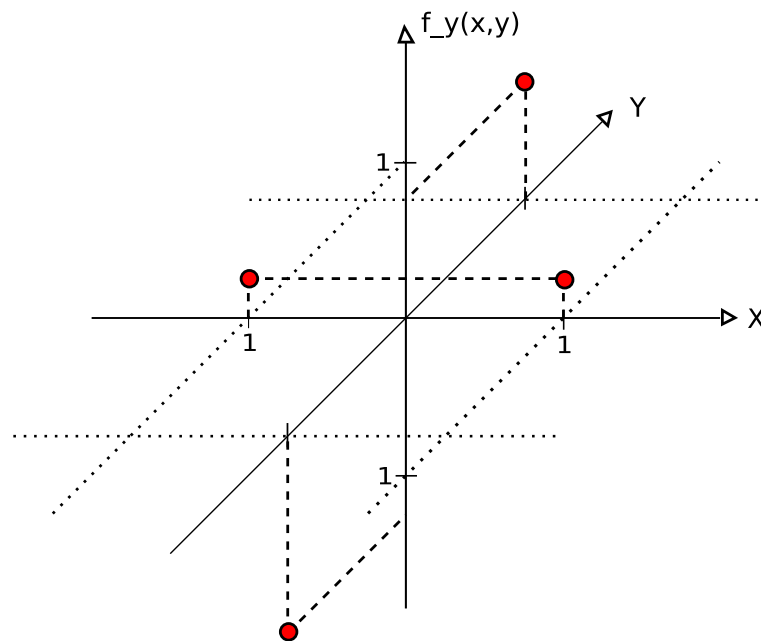
Supposons que l'on veuille trouver  $f_x$  et  $f_y$  afin de faire passer la configuration de gauche à la configuration de droite. D'après la notation précédente nous appellerons donc les points de la partie gauche  $p_i$ , notre configuration de départ, et les points de la partie droite  $q_i$ .

On voit assez facilement que la solution pour  $f_x$  est triviale. En effet on a  $f_x(x_i, y_i) = x'_i = x_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . La fonction  $f_x$  est donc simplement dans ce cas une fonction identité. Tel n'est pas le cas en ce qui concerne  $f_y$  sur l'autre dimension. La contrainte  $f_y(x_i, y_i) = y'_i$  devient ici :

$$\begin{cases} f_y(-1, 0) = 0.25 \\ f_y(1, 0) = 0.25 \\ f_y(0, 1) = 0.75 \\ f_y(0, -1) = -1.25 \end{cases}$$

La figure 3.3 donne une représentation de ces contraintes en 3 dimensions.

Dans cette représentation, nous cherchons à construire une surface, c'est à dire de déterminer la valeur de  $f_y$  en chaque point  $(x, y)$  du plan, en imposant que cette

FIG. 3.3 – Représentation des contraintes sur  $f_y$  en 3 dimensions.

surface passe par les points marqués par des cercles. Cela se ramène donc à une interpolation à 3 dimensions. De ce point de vue, les solutions sont infinies et le problème hautement dégénéré : on peut facilement imaginer différentes surfaces passant par ces points. Il nous faut donc ajouter une contrainte supplémentaire pour lever la dégénérescence. C'est ici que nous allons faire intervenir notre hypothèse des plaques minces. Celle-ci se base sur une analogie purement mécanique. La surface que l'on cherche va être assimilée à une plaque mince à laquelle seront associées des propriétés physiques telle que l'élasticité. Dans un premier temps définissons clairement ce que l'on considérera comme une plaque mince.

### 3.2.1 Définition des plaques minces

On parlera de plaque mince lorsque les hypothèses suivantes (dites hypothèses de Kirchhoff) seront vérifiées :

- L'épaisseur  $h$  de la plaque est petite devant les autres dimensions (d'au moins un ordre de grandeur) et uniforme. Le plan se situant au milieu de la plaque, à  $h/2$ , est appelé le plan médian (voir figure 3.4).
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement est donc négligée.
- On ne considère que les déplacements transversaux  $f$ . Leur amplitude sera de l'ordre de grandeur de  $h$ .
- Les contraintes dans la direction transversale sont nulles.



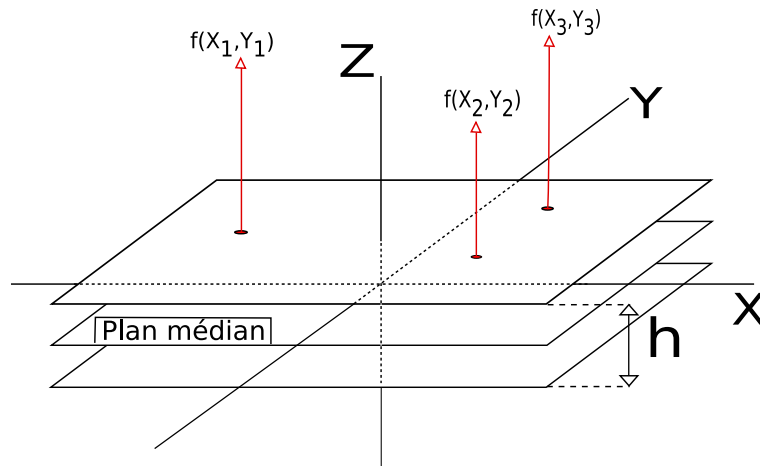


FIG. 3.4 – Représentation d’une section de plaque mince. La hauteur  $h$  est petite devant les autres dimensions.

La mécanique nous dit que, avec ces hypothèses, les déformations de notre plaque seront régies par l’équation :

$$\Delta^2 f(x, y) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 f(x, y) = p/D$$

où  $p$  représente les forces extérieures appliquées sur la plaque et  $D$  l’élasticité du matériau. Dans notre cas, il n’y a aucunes forces extérieures et l’équation se simplifie donc en :

$$\Delta^2 f(x, y) = 0 \tag{3.2}$$

Cette équation est appelée **équation biharmonique**.  $f$  étant solution de cette équation, elle sera elle même qualifiée de biharmonique.

L’équilibre étant requis dans l’établissement de l’équation des plaques minces, on est assuré que celle-ci minimise l’énergie de tension à l’intérieur de la plaque. Cette énergie de tension est donnée par :

$$\int \left( \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy \tag{3.3}$$

### 3.2.2 Solution Générale

Reformulons le problème avec le point de vue mécanique que nous venons d’adopter. On cherche la forme qu’adopterait une plaque mince si celle ci ne subissait aucunes forces extérieures mais était maintenue fixe en un certains nombre  $N$  de points. On peut montrer que la solution générale à ce problème prend la forme suivante :

$$f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=0}^N w_i \left( ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \log(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}) \right) \tag{3.4}$$

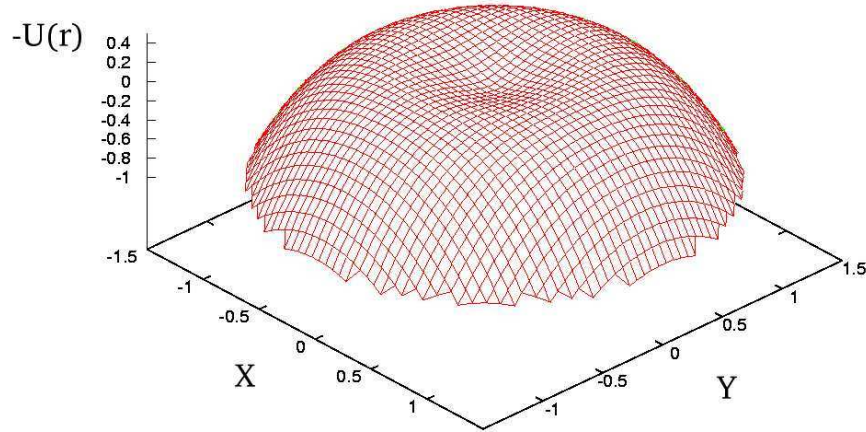


FIG. 3.5 – Représentation de la fonction  $-r^2 \log(r)$  (le signe moins facilite la visualisation)

On voit que cette fonction est composée d'une partie linéaire et d'une partie non linéaire. Cette dernière est une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $U(r) = r^2 \log(r)$  représentée sur la figure 3.5.

On peut vérifier aisément que, sous cette forme,  $f$  est solution de l'équation biharmonique. Cette équation dépend de dérivées partielles au moins d'ordre 2, on est donc assuré que la partie linéaire va disparaître. Pour la partie non-linéaire, puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire de fonctions ayant toutes la forme de  $U(r)$ , il suffit de montrer que cette dernière est elle même solution de l'équation 3.2. En coordonnées polaires,  $\Delta(r^2 \log(r))$  devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \log(r)) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (r \cdot \log(r) + r) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \log(r) + r^2) \\ &= \frac{1}{r} (2r \log(r) + 3r) \\ &= 2 \log(r) + 3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

En réappliquant  $\Delta$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} (2 \log(r) + 3) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( \frac{2}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

On a donc bien au final :  $\Delta^2 f = 0$ .

### 3.3 Algèbre des plaques minces pour un ensemble arbitraire de points

A présent que nous connaissons la forme générale de la fonction  $f(x,y)$  il nous reste à déterminer les coefficients qui la composent. C'est par les contraintes 3.1 que nous allons pouvoir les déterminer. Considérons à nouveau nos deux ensembles de  $N$  points  $p_i$  et  $q_i$  et tentons de trouver les coefficients pour  $f_x(x,y)$ . Les contraintes forment un système de  $N$  équations de la forme :

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + \sum_{j=0}^N w_j ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \log(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}) = x'_i \quad (3.7)$$

avec  $i \in [1, \dots, N]$

Cependant notre fonction possède  $N+3$  variables, les  $N$  poids  $w_i$  et les 3 coefficients de la partie linéaire  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ . Il nous faut donc 3 équations supplémentaires. Nous avons vu précédemment que l'énergie de notre transformation dépendait des dérivées secondes de la fonction que l'on intègre sur tout l'espace. Ceci implique que la dérivée seconde de la fonction soit de carré sommable entraînant 3 conditions sur nos inconnues :

$$\sum_{i=0}^N w_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^N w_i x_i = \sum_{i=0}^N w_i y_i = 0$$

Nous adopterons dans la suite la notation  $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$  qui n'est autre que la distance Euclidienne du point  $p_i$  au point  $p_j$ . Définissons les matrices :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & U(r_{12}) & \cdots & U(r_{1n}) \\ U(r_{12}) & 0 & \cdots & U(r_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U(r_{n1}) & U(r_{n2}) & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \text{ de dimension } N \times N;$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}, \text{ de dimension } 3 \times N;$$

$$L = \left[ \begin{array}{c|c} K & P \\ \hline P^T & O \end{array} \right], \text{ de dimension } (N+3) \times (N+3);$$

et les vecteurs :

$$W = (w_1, \dots, w_N, a_0, a_1, a_2), \text{ de dimension } N+3$$

$$X' = (x'_1, \dots, x'_N, 0, 0, 0), \text{ de dimension } N+3$$

Le système de N équations 3.7 devient alors en écriture matricielle :

$$LW = X'$$

L'ensemble des coefficients est donc obtenu en résolvant :

$$L^{-1}Y = (W)$$

Notre fonction  $f_x(x, y)$  est alors entièrement caractérisée.

Par un raisonnement identique et en remplaçant simplement le vecteur  $X'$  par un vecteur  $Y' = (y'_1, \dots, y'_N, 0, 0, 0)$  on caractériserait de même la fonction  $f_y(x, y)$ .

Nous avons donc finalement notre couple de fonctions  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  qui permet de passer de l'ensemble  $p_i$  à l'ensemble  $q_i$ .

### 3.3.1 Application

Nous allons appliquer la méthode que nous venons d'exposer dans un cas très simple. Reprenons les deux ensembles de points donnés par la figure 3.5. Nous avons vu que pour la fonction  $f_x(x, y)$  on avait de façon triviale  $f_x(x_i, y_i) = x'_i = x_i$  ce qui se traduit sur les coefficients de la solution générale 3.4 par :

$$\mathbf{w} = (0, 0, 0, 0) \quad a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 0$$

Dans le cas de  $f_y(x, y)$  le problème se ramenait à une interpolation en 3 dimensions entre les points de la figure 3.3, problème dégénéré qui nous a amené à introduire une contrainte supplémentaire par l'intermédiaire des plaques minces.

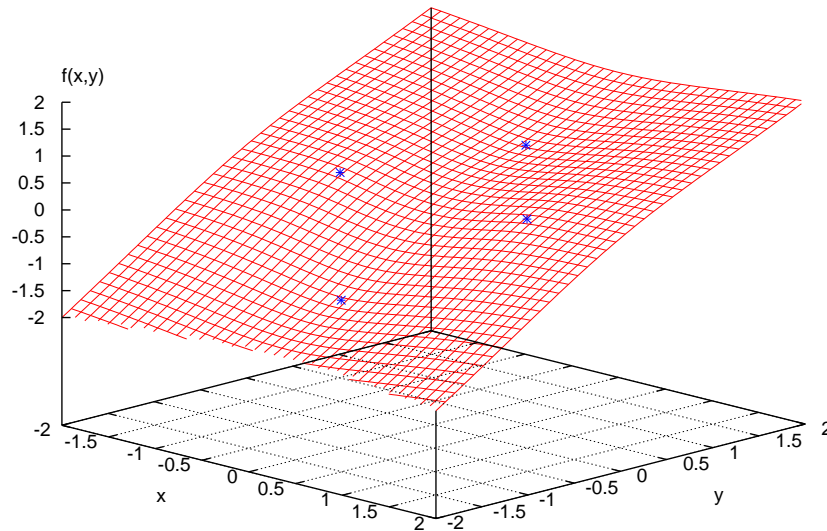
Appliquons à présent simplement la méthode précédente. Les coordonnées des points  $p_i$  sont  $\{(0, 1); (-1, 0); (0, -1); (1, 0)\}$ . Les matrices K et P prennent donc les valeurs :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0.69315 & 2.7726 & 0.69315 \\ 0.69315 & 0 & 0.69315 & 2.7726 \\ 2.7726 & 0.69315 & 0 & 0.69315 \\ 0.69315 & 2.7726 & 0.69315 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0.69315 & 2.7726 & 0.69315 & 1 & 0 & 1 \\ 0.69315 & 0 & 0.69315 & 2.7726 & 1 & -1 & 0 \\ 2.7726 & 0.69315 & 0 & 0.69315 & 1 & 0 & -1 \\ 0.69315 & 2.7726 & 0.69315 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ -1.25 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FIG. 3.6 – Fonction  $f_y(x, y)$  passant par les point  $p_i$ 

Et la solution de ce système est :

$$(0.18, -0.18, 0.18, -0.18, 0, 1, 0)$$

Nous avons donc les coefficients permettant de caractériser la fonction  $f_y(x, y)$ . Les valeurs de cette fonction sont représentées sur la figure 3.6, on vérifie bien qu'elle passe par les points  $p_i$ .

### 3.4 Méthode pour un grand nombre de spectres

Nous venons d'établir une méthode permettant de transformer un ensemble de points en un autre. Cette méthode a été détaillée à 2 dimensions et serait adaptée dans ce cas pour traiter des spectres. A terme, comme nous l'avons dit plus haut, ce sont des images que nous voudrions traiter et donc il nous faudra adapter la méthode à 3 dimensions. Nous allons cependant continuer encore ce raisonnement à 2 dimensions pour faciliter les explications.

Considérons un ensemble de spectres à deux dimensions, notre but est bien sûr de les comparer. Pour cela nous allons établir la transformation de chacun de ces spectres à un spectre de référence qui restera inchangé. Nos transformations auront ainsi une origine commune et seront comparables.

Si l'on ne regarde que les déformations locales, c'est à dire non-linéaires, nous aurons pour chaque transformation un vecteur  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)$ . Si on a un nombre  $S$  de spectres, référence non comprise, on aura donc au total  $S$  vecteurs de dimension  $N$  contenu dans un espace que nous appellerons 'espace des transformations'. Afin de

mieux analyser les transformations nous allons nous placer dans une base particulière de cet espace. Les vecteurs de cette base seront les transformations principales.

### 3.4.1 Les transformations principales

On peut montrer (cf annexe) que la fonctionnelle que nous avons défini dans le cadre des plaques minces est proportionnelle à :

$$I \sim WKW^T = V(L_n^{-1}KL_n^{-1})V^T \quad (3.8)$$

où  $L_n^{-1}$  est le bloc n.n supérieur gauche de la matrice  $L^{-1}$ .

Lorsque nous traiterons un ensemble de spectres, seul le vecteur  $V$  variera, la matrice  $L_n^{-1}KL_n^{-1}$ , qui ne dépend que du spectre de référence, restera constante. Cette matrice représente une fonction définie dans l'espace des transformations. Si l'on parvient à diagonaliser cette matrice, nous aurons alors un ensemble de vecteurs propres qui formeront une base de l'espace. Nous avons donc ici le moyen de ramener toutes les transformations dans un espace avec une base bien définie qui sera la même pour tous les spectres que nous comparerons. Si l'on définit un ensemble de  $N$  points sur chaque spectre, la matrice précédente sera de dimension  $N \times N$  et nous aurons par conséquent un ensemble de  $N$  vecteurs propres. Chacun de ces vecteurs propres peut être vu comme une série de coefficients similaires aux  $w_i$  composant les fonctions  $f_k$ , c'est à dire comme une transformation à part entière. Ces transformations sont uniquement non-linéaires et peuvent être comme précédemment visualisées comme une surface dans un espace à 3 dimensions (voir figure 3.6). La valeur propre associée à chaque vecteur propre, du fait de l'équation 3.8, est proportionnelle à l'énergie nécessaire pour réaliser la transformation correspondante. L'énergie de chacune de ses transformations peut être reliée directement à certaines de ses caractéristiques. En effet, plus deux points pris sur une plaque seront proches, et plus il faudra fournir d'énergie pour les séparer. Ainsi on peut dire que les transformations les plus énergétiques seront celles qui affecteront la plaque sur les plus petites échelles et inversement, moins une transformation sera énergétique, et plus celle-ci se manifestera à de grandes échelles. Nous allons décomposer chacune de nos transformations, c'est à dire chacun des  $S$  vecteurs mentionnés précédemment, dans cette nouvelle base des transformations principales. On utilise alors simplement les relations classiques de décomposition de vecteurs sur une base. Si l'on note  $f_{p_i}$  les transformations principales, on aura donc :

$$f_k(x, y) = \sum_{i=0}^N \alpha_{k_i} f_{p_i} \quad k \in \{x, y\}$$

avec

$$\alpha_{k_i} = \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_i \quad i \in [1, \dots, N]$$

Dans l'espace  $N \times N$  des transformations, chaque spectre sera donc représenté par un point. Il est important de voir que chacun de ces points contient toute l'information sur le spectre auquel il correspond. Du fait de la base sur laquelle nous avons placé ces points, nous pourrions dire si la différence entre un spectre et la référence est plus ou moins locale mais surtout, nous pourrions rapidement analyser notre

ensemble de spectres en analysant le nuage de points. Dans la suite les transformations principales seront classées par ordre de valeur propre décroissante, la première sera donc celle correspondant à la plus haute valeur propre et la dernière à la plus faible valeur propre. Afin d'éviter toute confusion avec la méthode d'ACP et les axes propres qu'elle introduit, le terme de transformation propre de sera plus utilisé dans la suite et nous utiliserons uniquement un langage relatif à la base de l'espace.

### 3.4.2 transformation de spectres

Nous allons tout d'abord appliquer la méthode sur des exemples simples : des spectres très similaires ne différant que par l'intensité d'une seule raie puis sur une série temporelle 'type' d'une SNIa.

#### Choix des points

Notre but est ici de créer une méthode de traitement la plus automatique possible. Cela implique que cette méthode soit robuste pour le placement des points. Mettre en place une détection automatique des caractéristiques des supernovae de type Ia pour les élever au rang de points de référence sera certes une chose aisée pour le maximum de luminosité et les quelques raies dominantes mais le sera beaucoup moins pour le reste notamment pour les époques tardives où beaucoup de raies apparaissent. L'idée pour s'affranchir de cette difficulté est de faire un simple rééchantillonnage de notre image. Ce rééchantillonnage doit être suffisamment fin pour ne pas trop lisser le spectre, ce qui impliquerait la perte de raies trop fines mais il doit être aussi suffisamment grand pour ne pas générer un nombre de points trop important qui rendrait le temps de calcul trop grand. C'est d'ailleurs ce dernier point qui nous empêche de considérer tous les points de l'image. On peut voir sur l'image 3, que la finesse des détails sur l'ensemble d'une série temporelle n'est pas la même partout : les raies sont bien plus fines et nombreuses dans la partie supérieure droite. Pour limiter le nombre de points on pourra donc utiliser une grille adaptative et augmenter la résolution dans les régions comportant plus de raies.

#### Raie artificielle

Nous allons nous baser ici sur un spectre artificiel généré par le logiciel Phoenix. A celui si on rajoute artificiellement une raie représentée par une gaussienne donnée par l'expression :

$$\frac{k}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(r - r_0)^2}{2 * \sigma^2}\right)$$

avec k variant de 1 à 15 (cf. figure 3.7).

On utilise ces spectres comme entrée dans le programme après les avoir rééchantillonné sur 130 points entre 570 et 700 nm. Le nombre de points considéré n'est pas très élevé du fait de l'aspect relativement lisse des spectres.

Sur la figure 3.8, on voit un exemple de transformation pour k=2 où l'on a séparé la partie linéaire et la partie non linéaire de la transformation. On peut voir que la partie linéaire est en fait le meilleur ajustement possible avec une transformation de la forme  $a + bx + cy$ .

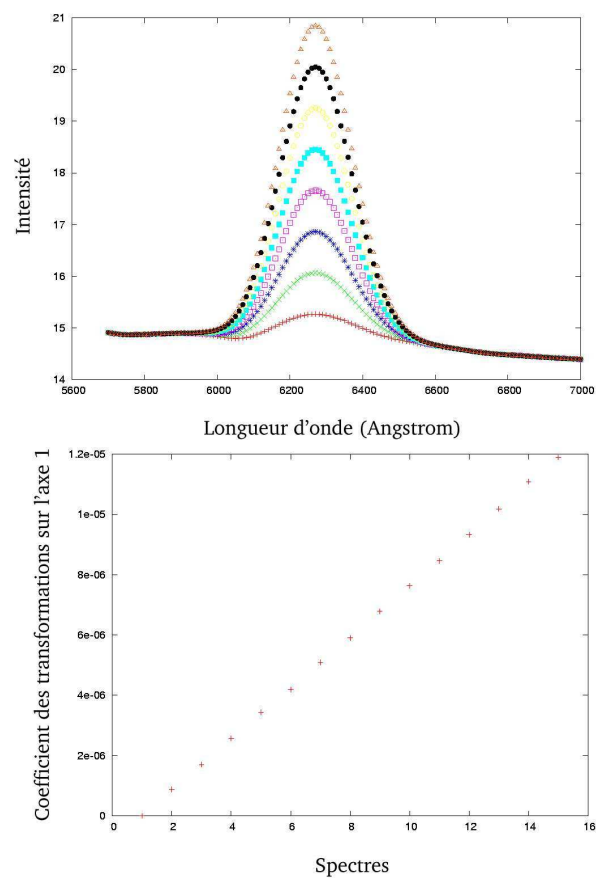


FIG. 3.7 – **En haut** : Ensemble des spectres utilisés pour les valeurs de  $k$  impaires. **En bas** : Coefficients de la transformation pour chaque spectre sur le premier axe de la base.



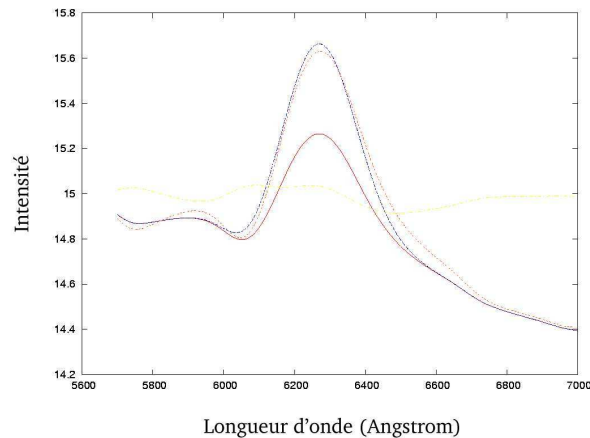


FIG. 3.8 – Exemple de transformation pour  $k=2$ . La courbe en rouge est la référence, la bleue est la transformation totale dont la partie non-linéaire est donnée par la courbe maron et la partie linéaire par la courbe orange (que l'on a translaté de 15 en ordonné pour la représentation)

Nous avons vu plus haut que les transformations permettant d'ajuster la référence à chacuns des spectres peuvent se représenter comme des vecteurs dans un espace de transformation dans lequel nous avons défini une base. La projection de chaque vecteur sur le premier axe de la base est représentée sur la figure 3.7.

On observe une progression linéaire qui se retrouve également sur les autres les autres axes.

Si maintenant on fait d'abord croître la raie puis décroître celle raie :

$$\text{si } k < 5 : \quad \frac{k}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(r - r_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\text{si } k \geq 5 : \quad \frac{9 - k}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(r - r_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

on observe alors la figure 3.9

L'évolution est linéaire pour chaque phase avec une pente inverse pour la décroissance.

On voit donc qu'il y a un lien direct entre l'évolution simple d'une forme et les coefficients qui la représentent dans la base.

De plus, on constate que l'évolution de la raie influence l'ensemble des coordonnées de notre vecteur de transformation sur la base. Cependant nous avons dit plus haut que la transformation correspondant à chaque axe de la base pouvait être qualifiée de plus ou moins locales, or, étant donné que notre transformation ne possède pas de hautes fréquences, les coefficients correspondant aux axes ayant des valeurs propres faibles devraient être plus affectés que les autres.

La figure 3.10 montre les coordonnées du vecteur de transformation pour le spectre donné par  $k=13$ , c'est à dire la proportion de chaque axe de la base pour obtenir notre spectre.

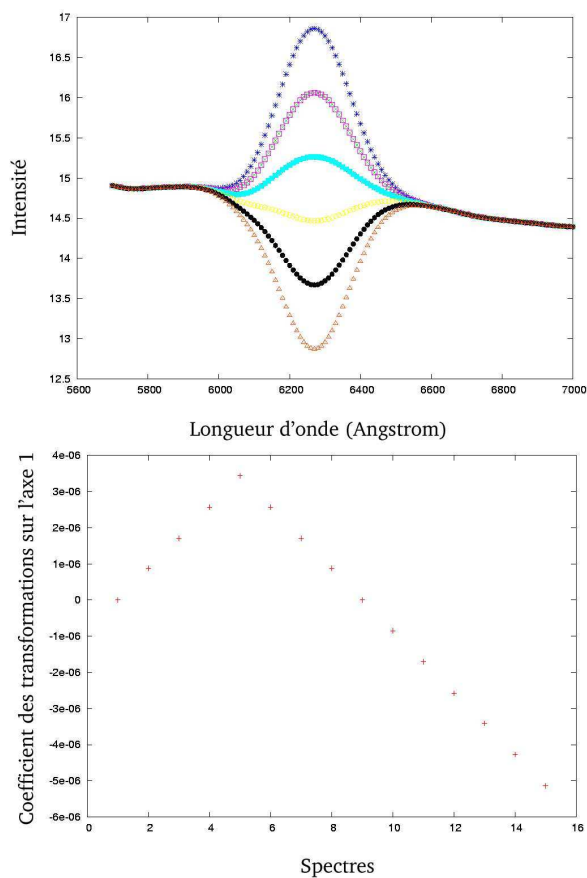


FIG. 3.9 – **En haut** Ensemble des spectres utilisés pour les valeurs impaires de  $k$ . **En bas** : Coefficients de la transformation de chaque spectre sur le premier axe de la base.

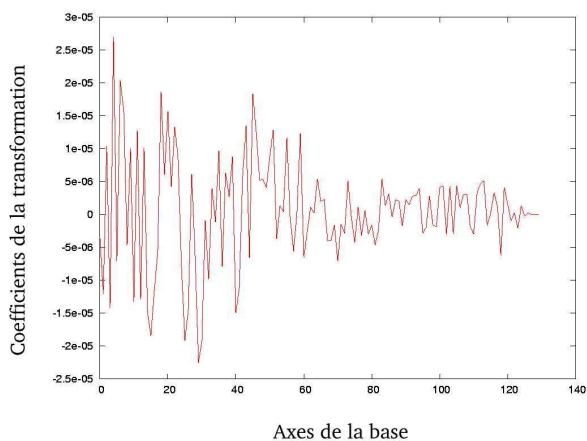


FIG. 3.10 – Exemple de vecteur représentant la transformation

A première vue, on peut penser d'après cette figure que les transformations locales sont très importantes. En réalité on ne peut analyser directement ces coefficients puisque la base que nous avons construite n'est pas normée. Ainsi on ne

peut directement comparer deux coefficients puisque on ne sait pas l'ampleur des transformations correspondant aux différents axes de la base. Il va donc nous falloir introduire une norme dans l'espace des transformations.

### Normalisation de l'espace des transformations

Nous avons vu qu'une transformation  $f_k$  pouvait être représentée par une surface à deux dimensions interpolant un certain nombre de points et contrainte à minimiser une énergie. Les transformations correspondant aux axes de la base peuvent être, elles aussi, vues de cette manière. Nous allons simplement utiliser pour la norme l'intégrale de cette surface <sup>1</sup>. Cette intégrale est donnée par :

$$I_k = \int \int_{\mathbb{R}^2} f_k(x, y) dx dy$$

où  $f_k$  est la k-ème transformation principale :

$$f_k = \sum_{i=0}^N w_{ki} \{ (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \} \log(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2})$$

Les  $(x_i, y_i)$  étant les points pris sur la référence.

Nous limiterons en réalité l'intégration au domaine de  $\mathbb{R}$  contenant tout les points définis. L'intégrale ainsi limitée permettra toujours de définir une norme et aura l'avantage d'être plus aisée à déterminer.

La décomposition d'une transformation devient alors

$$f_k = \sum_{i=0}^N \alpha_{ki} f_i = \sum_{i=0}^N \alpha_{ki} I_i \frac{1}{I_i} f_i = \sum_{i=0}^N \alpha_{ki} I_i f_{N_i}$$

où les  $f_{N_i}$  sont les transformations normées correspondant aux axes de la base.

Pour passer de la base originale à la base normée, il nous suffira donc simplement de multiplier les composantes  $\alpha_i$  de chaque vecteur par  $I_i$ . Dans cette nouvelle base, le précédent vecteur de transformation, donné par la figure 3.10, prend une toute autre forme que l'on peut voir sur la figure 3.11.

On peut à présent voir parfaitement ce à quoi l'on s'attendait : les axes de la base ayant des valeurs propres faibles interviennent majoritairement. Un des coefficients, pour le 126ème axe, domine d'ailleurs largement dans l'exemple en représentant près de 82% de la somme totale.

Si l'on reconstruit le vecteur de transformation à partir des coefficients les plus significatifs, on s'aperçoit que l'on élimine les hautes fréquences et on a alors une sorte de filtre passe-bas, Cependant il y également apparition d'une translation. Cela nous montre que les transformations principales peuvent introduire des transformations linéaires.

Nous n'avons pour le moment considéré qu'un seul vecteur de transformation à la fois, essayons à présent de faire une comparaison avec un couple de vecteurs. On peut voir sur la figure 3.13 les vecteurs correspondant à  $k=2$  et  $k=13$  ainsi que

<sup>1</sup>on vérifie aisément que la norme défini de cette façon vérifie les propriétés nécessaires

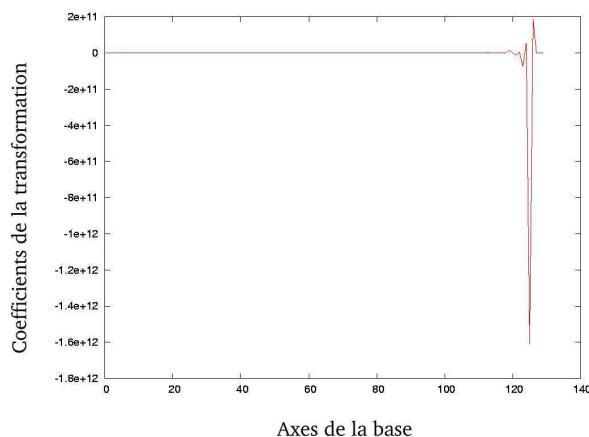


FIG. 3.11 – Exemple de vecteur représentant une transformation après normalisation de la base

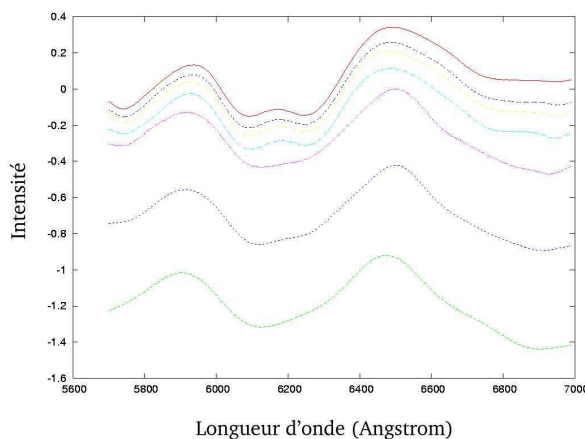


FIG. 3.12 – La courbe du haut est le vecteur de transformation  $t_{total}$  pour le spectre correspondant à  $k=13$ . Les autres courbes sont la reconstruction de ce vecteur à partir de d'un nombre limité de transformations principales en fonction de la valeur du coefficient qui leur est associé. De bas en haut on a les 5, 10,15,20,25 puis 30 coefficients les plus importants.

le rapport des deux. Bien que les deux vecteurs est tous les deux des valeurs très importantes pour les derniers axes de la base on voit que le rapport fait ressortir les moins importantes. Ainsi, dans la comparaison, chacune des transformations peut jouer un rôle important et aucune ne doit être négligée.

### Étude d'une série temporelle (S.Nobili)

On extrait les spectres de l'image 3 (soit 90 dont le premier sert de référence) que l'on utilise en entrée dans le programme sur 300 points.

Si l'on trace dans l'espace des transformations les différents points correspondant aux différents spectres, on voit une évolution continue et ce quelque soit les axes de la base que l'on considère (cf figure 3.14). La méthode de morphing permet donc

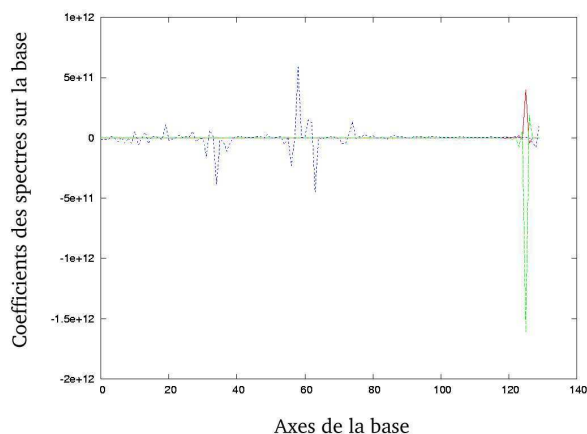


FIG. 3.13 – La courbe bleue donne le rapport des coefficients des vecteurs de transformation pour  $k=2$  (en rouge) et  $k=13$  (en vert)

de montrer clairement que l'évolution d'une SNIa dans le temps est un phénomène continu et ce, à toutes les échelles du spectre.

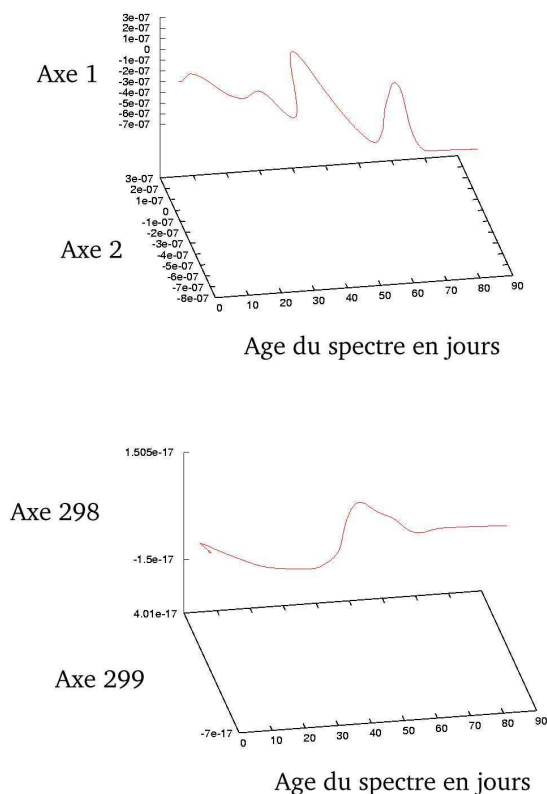


FIG. 3.14 – Représentation des coordonnées des vecteurs de transformation pour les 2 premiers axes de la base (à gauche) et les deux derniers (à droite).

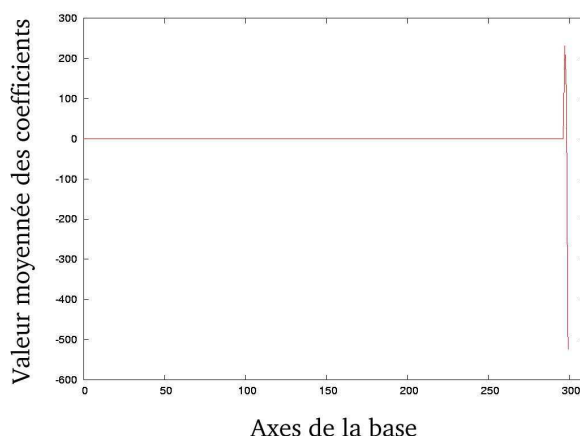


FIG. 3.15 – Valeur moyenne des coefficients des spectres sur chaque axe de la base de l'espace des transformations.

Il est ici très difficile d'analyser le résultat que l'on obtient à la sortie du programme : un nuage de 90 points dans un espace à 300 dimensions. Ce type de problèmes est parfaitement adapté à l'analyse en composantes principales que nous allons réintroduire ici.

### L'analyse en composante principale

Alors que dans notre première tentative nous avons vu que la PCA ne pouvait être appliquée de manière très efficace, la situation est à présent très différente. Si l'on regarde le chemin parcouru, nous avons en effet trouvé le moyen de ramener un ensemble de formes quelconques à un nuage de points dans un espace 'homogène'. On entend par homogène le fait que chacun des vecteurs de notre base représente une même entité, à savoir une transformation. La PCA va donc ici pouvoir nous donner une réelle information sur notre ensemble de formes.

Lorsque nous aurons à notre disposition un échantillon suffisant de SNIa, chacune d'elle sera, dans notre espace de transformation, représentée par un seul et unique point qui contiendra toute l'information. Nous pourrons alors réellement atteindre le but fixé : comparer directement les supernovae les unes avec les autres en tenant compte de l'intégralité de leur série temporelle de spectres sans avoir le problème de mélanger différentes grandeurs physiques.

Dans le cas présent, ce sont des spectres que nous comparons, nous allons introduire nos 89 points dans le programme de PCA. Celui-ci permet dans un premier temps de représenter la valeur moyenne de l'ensemble des vecteurs sur chaque axe de la base de l'espace des transformations (figure 3.15).

On voit que pour l'ensemble des spectres, se sont là aussi les derniers axes de la base qui sont favorisés.

La variance est représentée à 99% par 10 axes principaux. Ce nombre relativement élevé peut s'expliquer par le fait que l'on compare des objets très différents.

La figure 3.16 montre la position de chaque spectre dans le plan formé par les deux premiers axes principaux. on voit que les spectres croissent d'abord puis amorcent

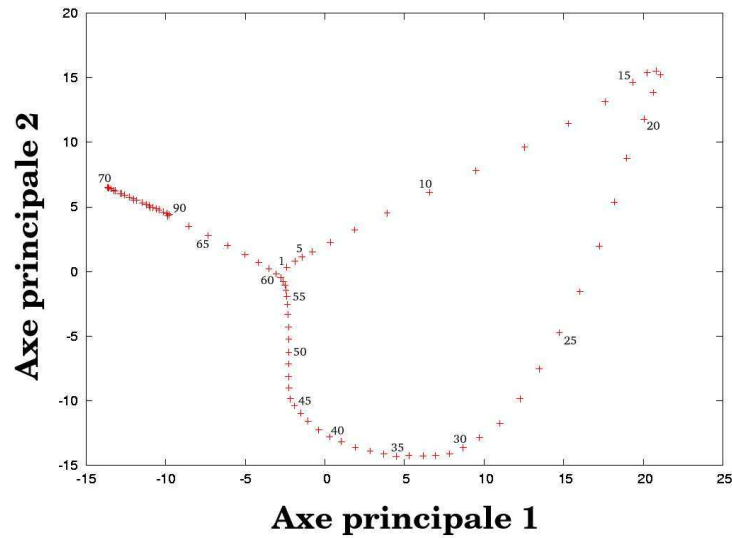


FIG. 3.16 – Coordonnées des spectres sur les deux premiers axes principaux

une décroissance simultanément. La première hypothèse venant à l'esprit est que l'on voit là un effet de l'intensité de la supernovae. En effet celle-ci affectant l'ensemble de la supernovae on s'attend à ce qu'elle se manifeste de manière importante dans la variance. Pour vérifier cette hypothèse traçons la valeur de chaque spectre sur la premier axe en fonction de leur ordre chronologique (ref fig 3.17). L'inversion de la pente se produit pour  $y=18$  ce qui correspond bien au spectre de maximum de luminosité dans la séquence que l'on a considérée. Si l'on fait la même chose pour les axes 2 et 3 (cf figure 3.18), les inflexions se produisent à 17 et 26. On voit peut être là la profondeur de certaine raie ou bien un rapport de raie.

Regardons à présent les corrélations des variables, les composantes de chaque spectre sur la base par rapport aux axes principaux (voir figure 3.19). Les points sont repartis de manière assez homogène dans le plan des deux premiers axes principaux montrant ainsi que les variables ne sont pas très fortement corrélées aux axes principaux. Ceci n'est pas forcément étonnant lorsque l'on pense que les vecteurs de transformations que l'on examine sont des transformations locales. Il est évident que l'intensité par exemple est plus corrélée au transformations globales que locales ce qui pour expliquer la faible corrélation axe l'axe 1 par exemple.

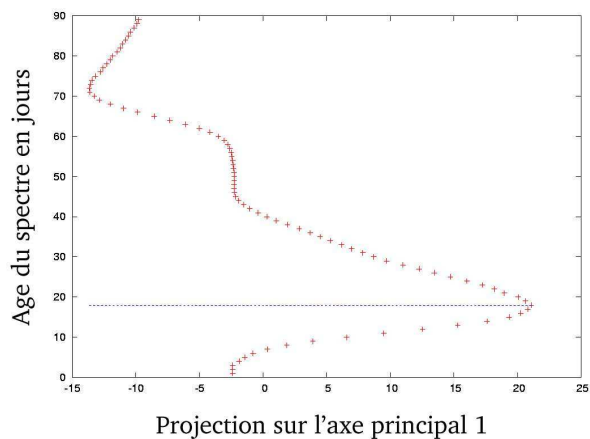


FIG. 3.17 – Valeur des spectres sur le premier axe principale en fonction de leur ordre chronologique.

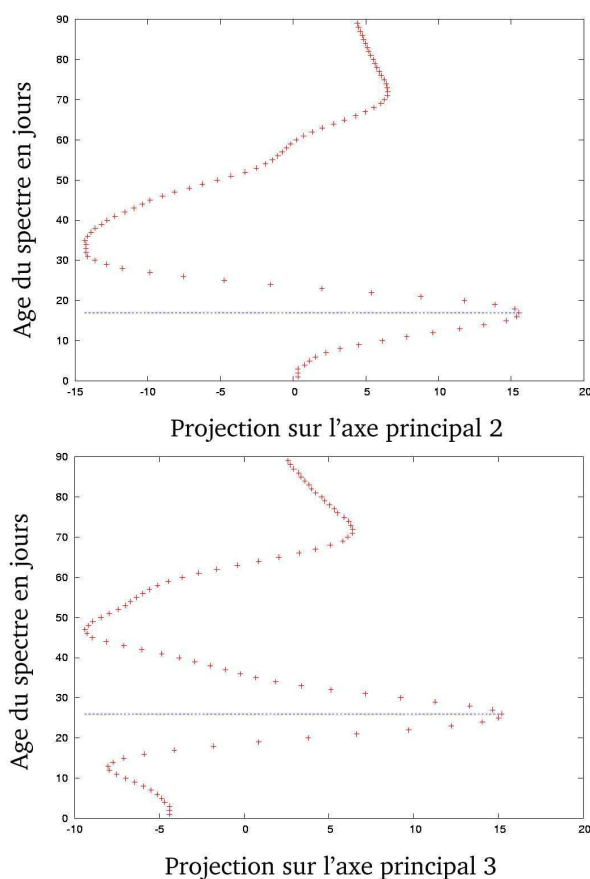


FIG. 3.18 – Valeur des spectres sur le deuxième et troisième axe principale en fonction de leur ordre chronologique.



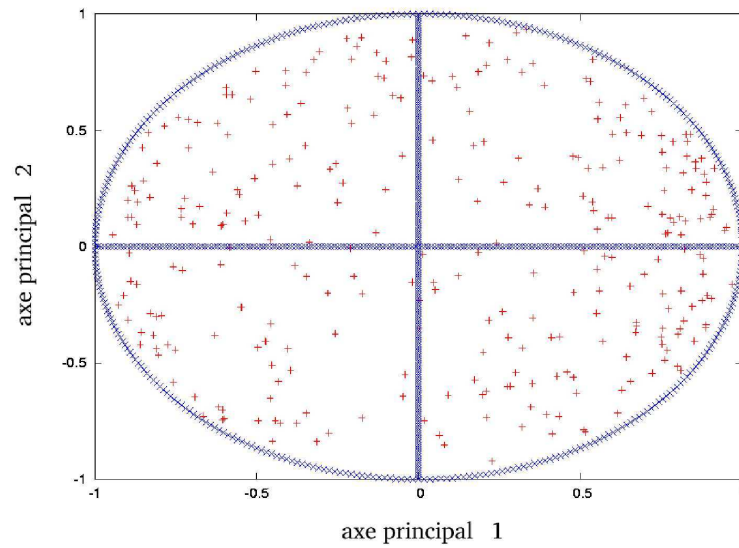


FIG. 3.19 – Correlation des variables avec les deux premiers axes principaux (axe 1 en abscisse et axe 2 en ordonnée).

### Application à 3 dimensions

Nous ne disposons pas encore de suffisamment de données de l'instrument pour pouvoir comparer différentes images telle que celles données par la figure 3. Nous pouvons cependant tester la méthode sur des images quelconques. Nous allons pour cela utiliser des images tirées de la base de données de PSF que nous avons établie pour le simulateur de l'instrument. Prenons par exemple 3 PSF correspondant à la micro-lentille centrale dans le cas d'une source étendue à 400, 440 et 480  $nm$ . Ces images sont rééchantillonnées à 4  $\mu m$  afin que le nombre de points ne soit pas trop important, ici 625 points. La psf à 400  $nm$  sera prise comme référence.

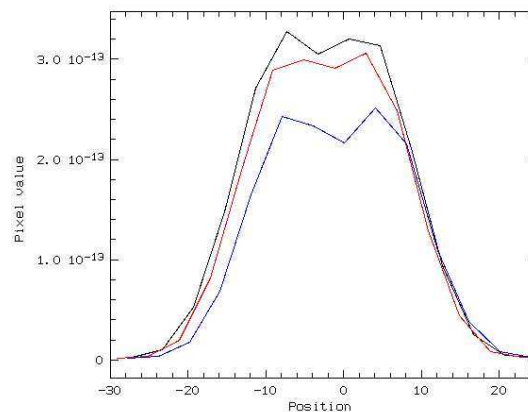


FIG. 3.20 – Coupe centrale des différentes PSF

La méthode mathématique pour le morphing à 3 dimensions est la même qu'à 2

dimensions à condition de changer la fonction  $r^2 \log(r)$  sur laquelle nous nous basions précédemment par  $|r|$ .

Il peut être intéressant de voir si le morphing peut être utilisé comme une méthode d'interpolation entre deux objets comparés. Dans le cas que nous traitons ici, cela revient à interpoler les coefficients entre les transformations donnant les PSF à  $440 \text{ nm}$  et à  $480 \text{ nm}$  et de voir si cela permet d'obtenir une PSF intermédiaire à  $460 \text{ nm}$ . Pour interpoler les coefficients, on utilise une simple méthode linéaire. C'est à dire que le vecteur interpolé est donné par :

$$w_i = \frac{w_{1_i} - w_{2_i}}{2} \quad i \in 1..N$$

La transformation résultante est représentée sur la figure 3.21. Si l'on compare ce résultat à une simple interpolation linéaire, on constate que les deux méthodes sont très similaires.

Le point important est surtout ici le fait que cela nous montre que la transformation par morphisme est une opération 'continue'. On prouve ainsi que si deux objets sont proches de part leurs coefficients, on peut en conclure que leurs formes le sont aussi.

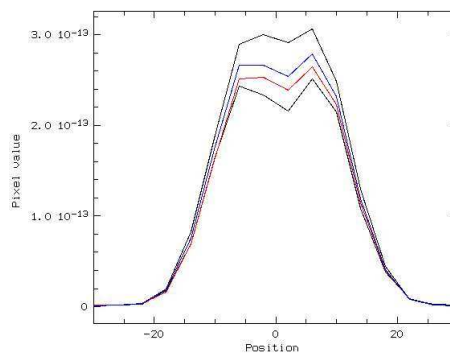


FIG. 3.21 – Coupe centrale des différentes PSF. Les courbes noires et rouges sont les PSF à  $440 \text{ nm}$  et à  $480 \text{ nm}$ , la verte est la PSF à  $460 \text{ nm}$  à laquelle on doit comparer l'interpolation. En violet et en bleu on a respectivement le résultat de l'interpolation linéaire et l'interpolation de la transformation.

Afin de nous rapprocher de la situation que nous allons rencontrer dans le cadre des résultats de l'instrument SNIFS, nous allons à présent créer artificiellement différentes populations d'images. Ces populations vont être constituées d'un "substrat" commun dont on fera varier aléatoirement une région. Le substrat sera composé d'un ensemble de gaussiennes dont la position, le maximum et la largeur seront déterminés aléatoirement. De la même manière, la variation au sein d'une population sera également constituée de gaussiennes mais dont les paramètres seront beaucoup plus contraints.

Les figures 3.22 et 3.23 montrent quelques individus issus de deux populations ainsi générées. Les gaussiennes composant les variations sont contraintes à une région comprise entre les coordonnées 2 et 9 pour la première population et entre 11 et

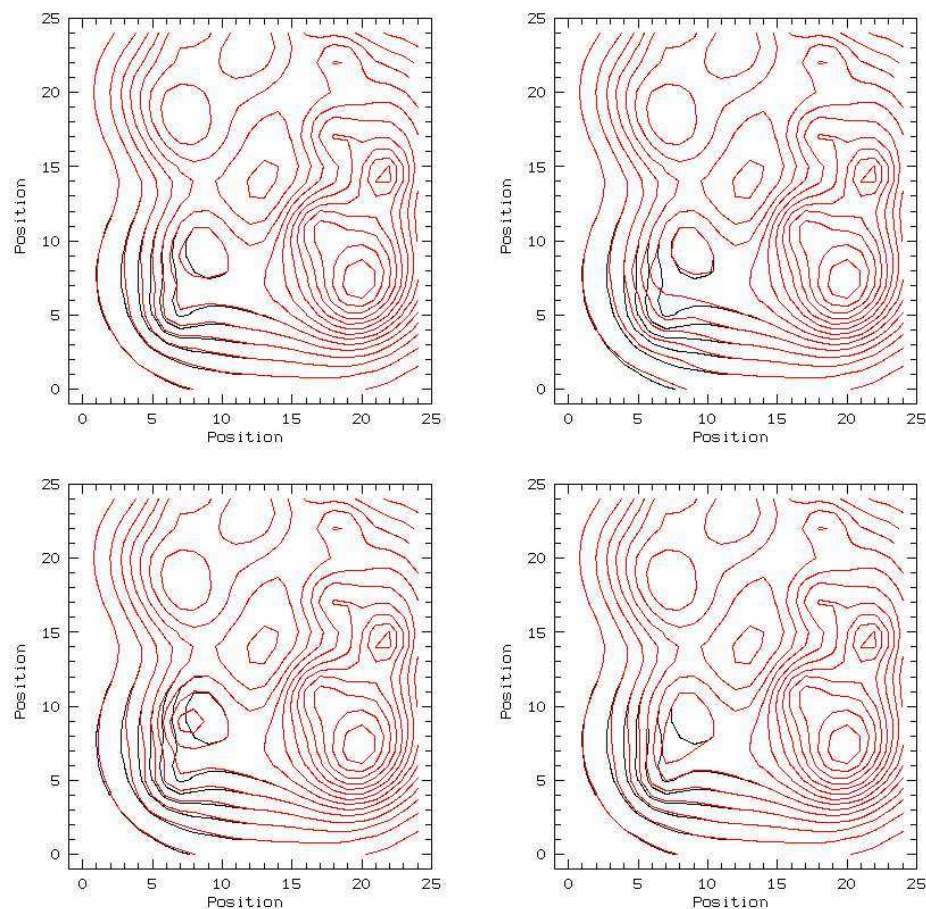


FIG. 3.22 – Quelques individus de la première population (en rouge) comparés à la référence (en noir)

18 dans la deuxième. Dans une même population, le centre des gaussiennes est inchangé entre deux individus. Dans les deux cas, le substrat sert de référence aux transformations.

Si l'on examine en détail une transformation en décomposant la partie linéaire et non-linéaire (voir figure 3.24), on peut voir que la partie linéaire est très proche du substrat. Celle-ci est pratiquement identique pour tous les individus. La partie non-linéaire se cantonne à la région des variations.

Dans un premier temps nous allons considérer uniquement les vecteurs de transformation correspondant à la première population sur lesquels nous allons utiliser la méthode de PCA. Nous obtenons avec cette dernière 3 axes principaux emportant 90% de la variance. Ces axes principaux sont exprimés dans la base de notre espace des transformations et il nous est donc possible de reconstituer la transformation leur correspondant. Appliquées sur notre référence, ces nouvelles transformations vont nous donner les formes qui représentent le mieux la variation au sein de notre population (voir figure 3.29). On constate que ces transformations se limitent à la région de variations.

Si cette fois nous appliquons la pca sur les deux populations, la méthode de PCA

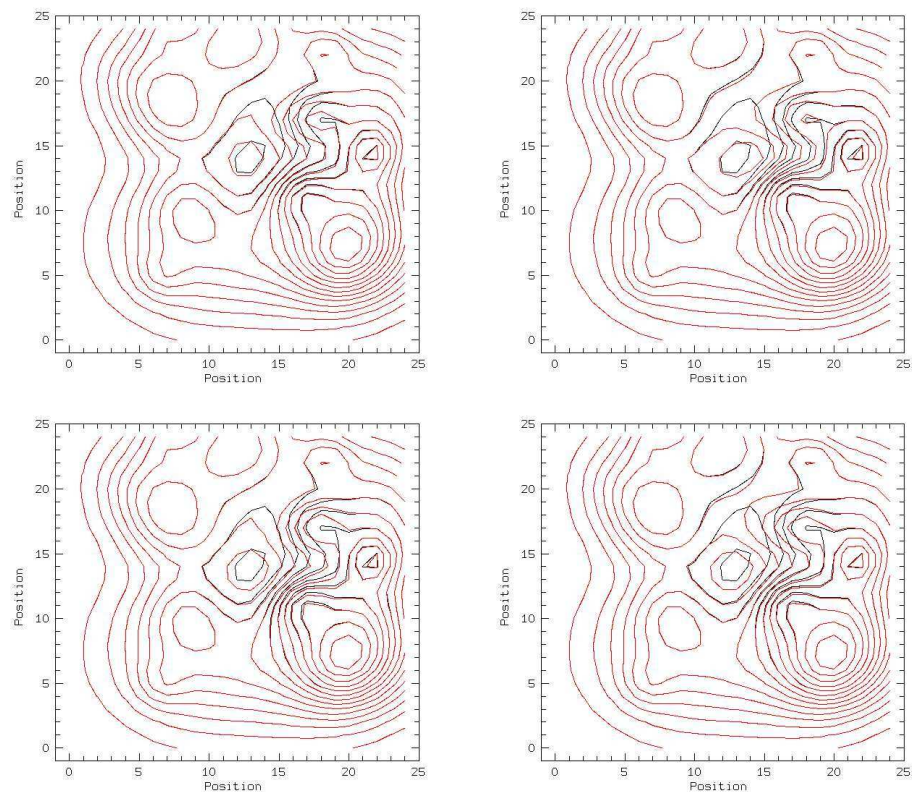


FIG. 3.23 – Quelques individus de la deuxième population (en rouge) comparés à la référence (en noir)

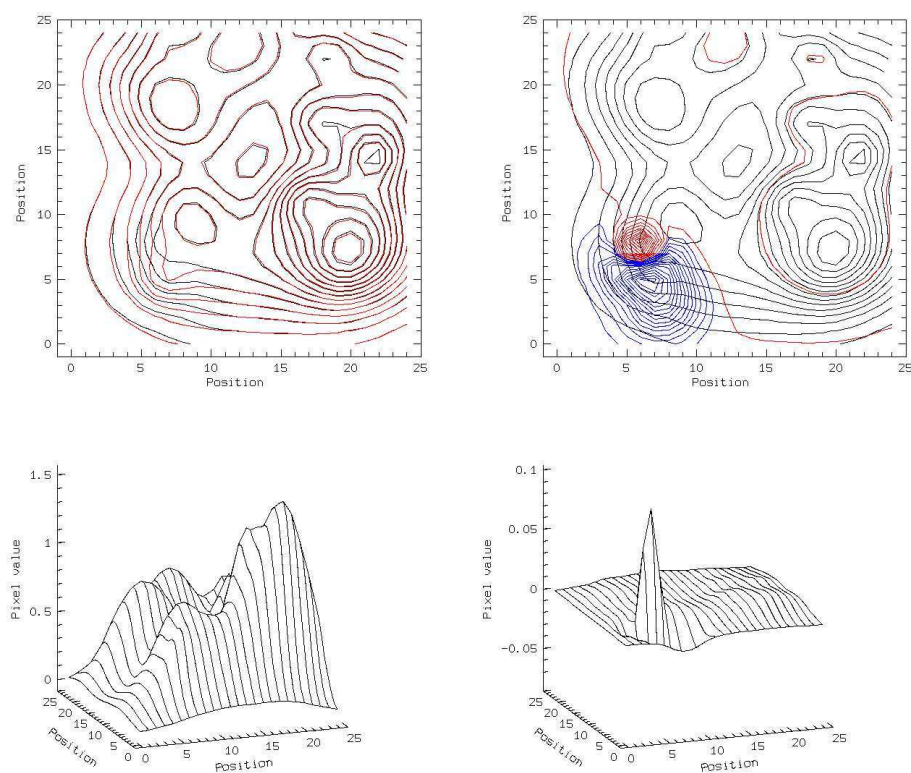


FIG. 3.24 – Exemple d’une transformation. **A gauche** : Partie linéaire de la transformation (en rouge) avec la référence (en noire). **A droite** : partie non-linéaire de la transformation (en rouge pour les valeurs positives et en bleu pour les parties négatives) avec la référence (en noire)

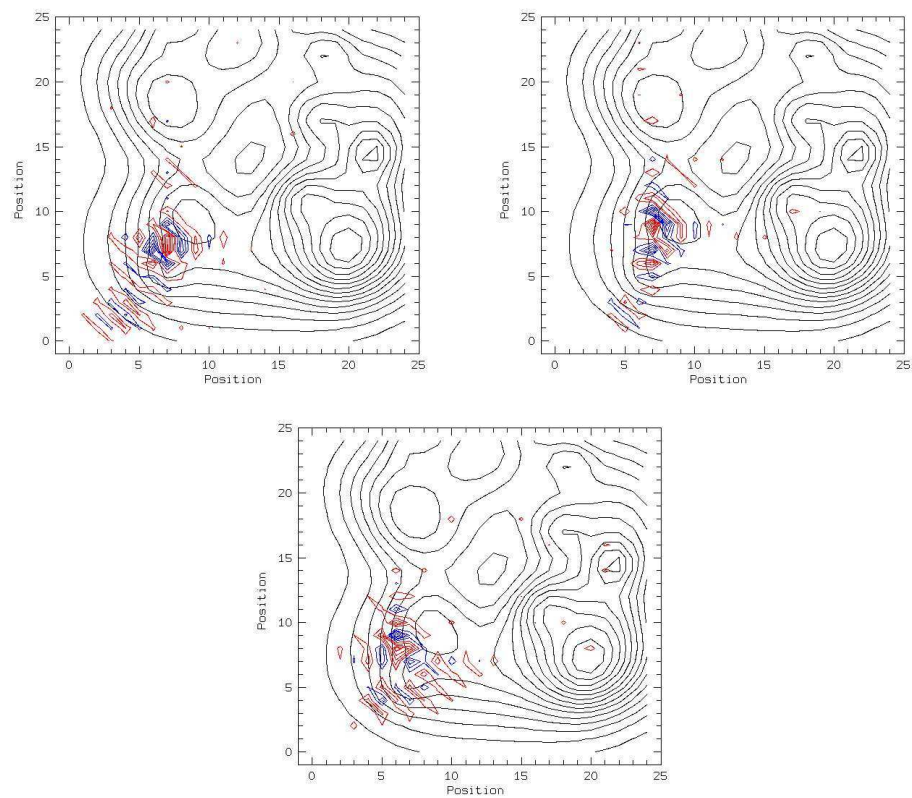


FIG. 3.25 – Les 3 premiers axes principaux dans le cas d’une seule population (en rouge pour les parties positives et en bleu pour les parties négatives) avec la référence (en noir)

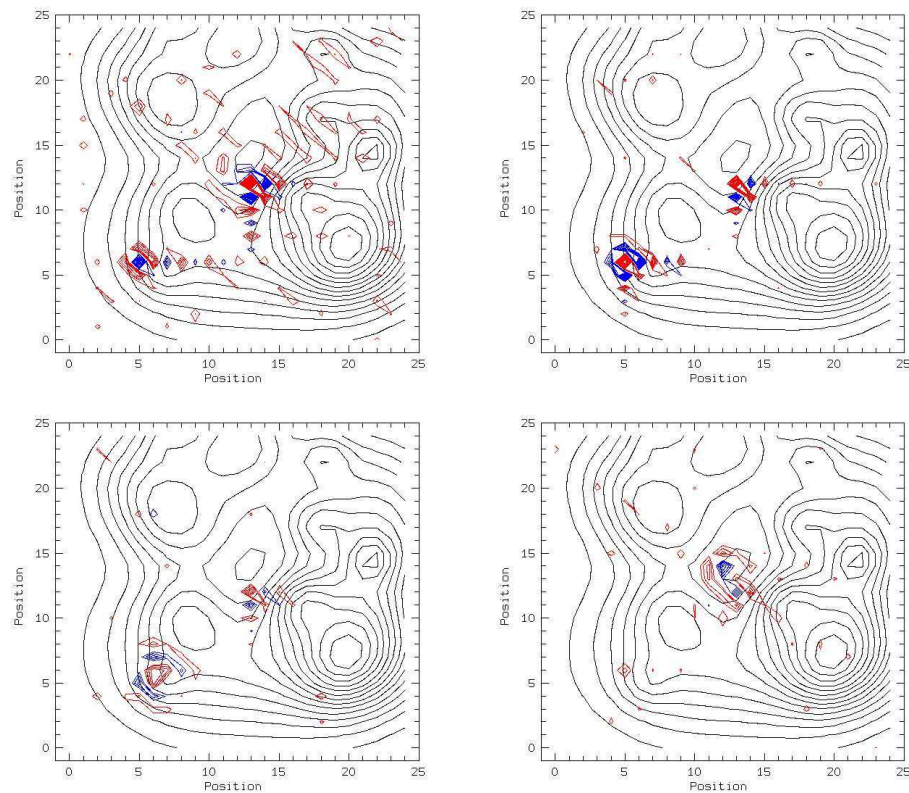


FIG. 3.26 – Les 4 premiers axes principaux dans le cas de deux populations. Les parties positives sont indiquées en rouge et les parties négatives en bleu, superposées à la référence en noir)

nous dit que 90% de la variance est donnée par les 4 premiers axes principaux (voir figure 3.26).

On peut voir sur la figure 3.27 que les deux premiers axes principaux permettent de distinguer nettement nos deux populations.

Nous allons reproduire la même expérience mais cette fois en autorisant le centre des gaussiennes à se déplacer entre chaque individu. La figure 3.28 montre quelques uns de ces individus pour les deux populations.

Cette fois la méthode de PCA nous dit que 90% de la variance est emportée par 18 axes ce qui implique que la forme de notre nuage de points dans l'espace des transformations est bien moins prononcée que dans le cas précédent. Il est ici beaucoup plus difficile de trouver des transformations très représentatives de la variation au sein de chaque population. On peut voir sur la figure ?? les premiers axes principaux.

Si l'on regarde la position des individus dans le plan formé par les deux premiers axes principaux, les deux populations sont beaucoup moins bien séparées que dans l'exemple précédent (voir figure 3.30). Le problème vient ici du fait que la méthode de morphing telle que nous l'avons appliquée ne peut pas voir qu'une forme se déplace dans l'image car les positions en x et y sont fixées (du fait de la correspondance des points prédéterminée). Si l'on déplace une gaussienne, le programme va générer

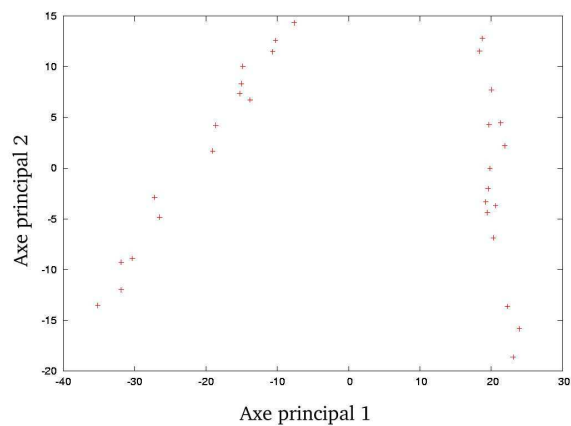


FIG. 3.27 – représentation des individus dans le plan formé par les deux premiers axes principaux

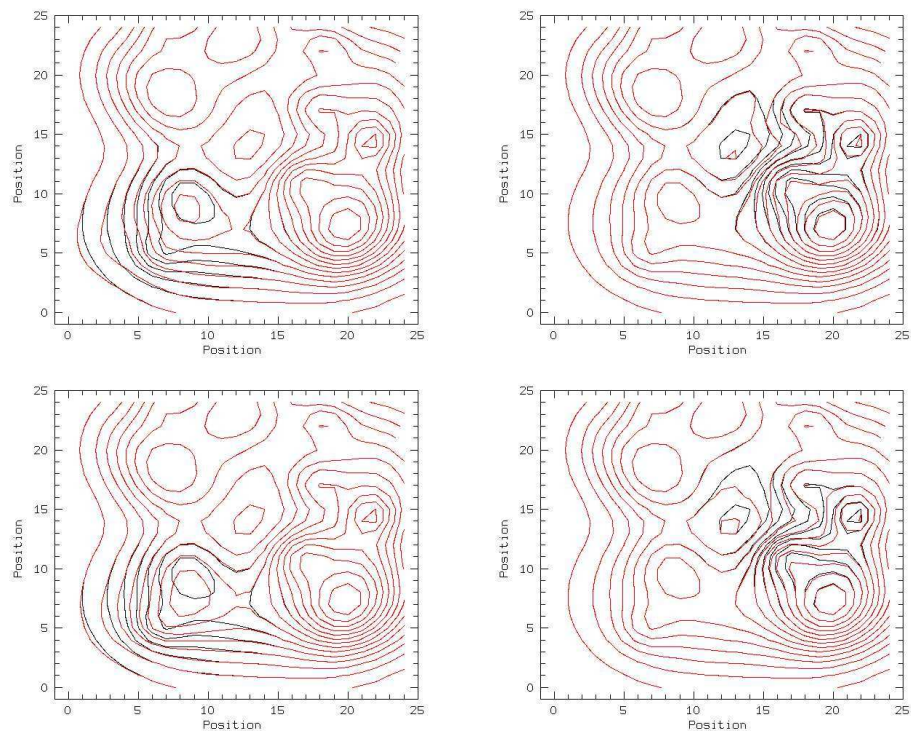


FIG. 3.28 – Quelques individus de la première population à gauche et de la deuxième à droite (en rouge) comparés à la référence (en noir). Le centre des gaussiennes représentant la variation varie d'un individu à l'autre



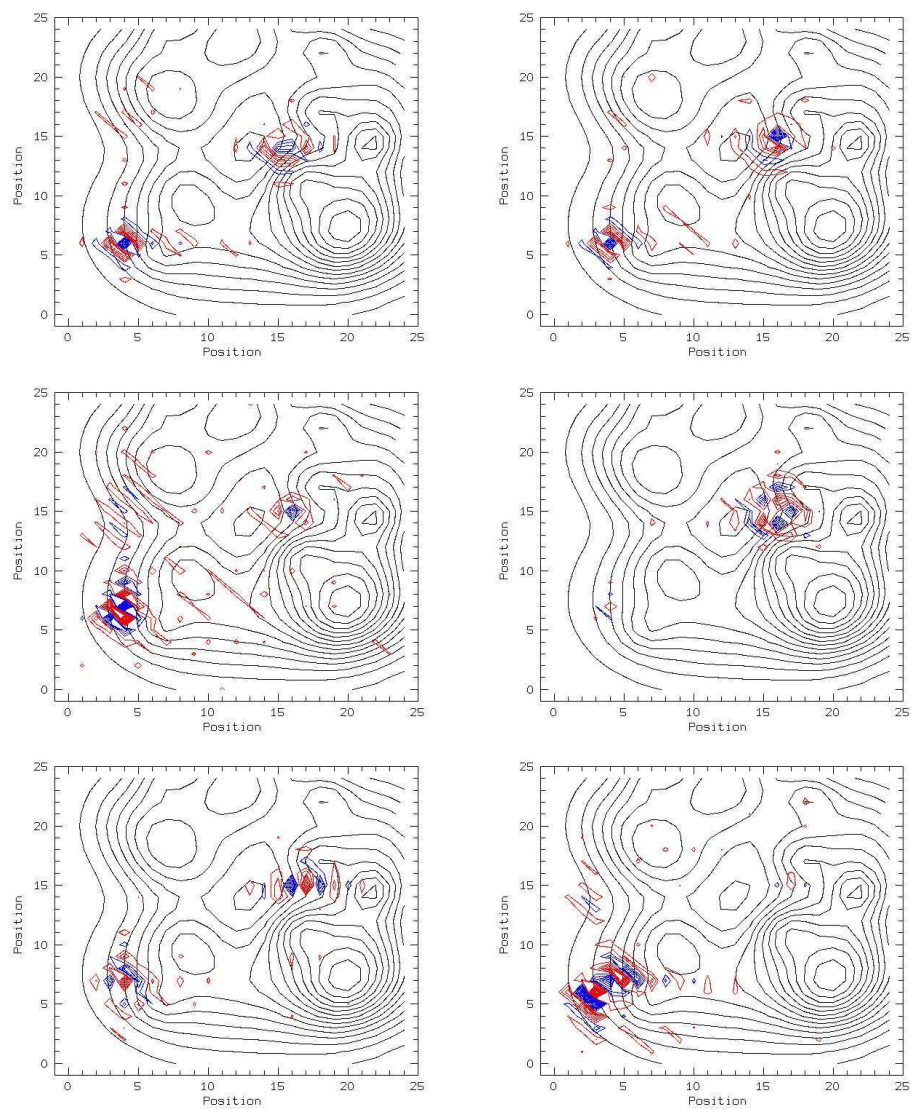


FIG. 3.29 – Les 6 premiers axes principaux dans le cas de deux populations avec variation des centres des gaussiennes représentant la variation. Les parties positives sont indiquées en rouge et les parties négatives en bleu. La référence est elle indiquée en noir)

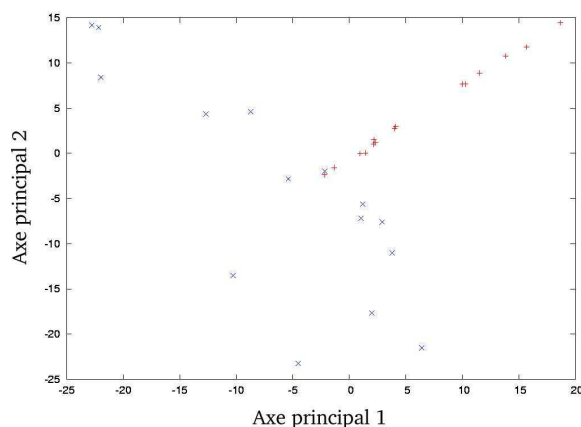


FIG. 3.30 – représentation des individus dans le plan formé par les deux premiers axes principaux

une transformation non-linéaire faisant disparaître une gaussienne et apparaître une autre. Comme ces transformations seront différentes pour tous les individus, il est normal que la méthode est des difficultés à trouver une transformation type. De plus nos individus ne sont pas très différents ce qui peut aussi expliquer la difficulté de la séparation. Le problème est que l'on ne peut dire ici si nos images sont réellement représentative de la situation que nous aurons à traiter avec les données réelles à savoir les spectres de supernovae.

Nous voyons donc tout de même que notre méthode remplit les objectifs que nous nous étions fixés : elle permet d'étudier différentes populations, de les différencier et de déterminer ce qui caractérise chacune d'elle.

### 3.4.3 méthode itérative

Le problème de la méthode précédente est qu'elle n'est pas très souple dans le sens où il faut obligatoirement avoir le même nombre de points dans les deux ensembles que l'on compare. De plus la correspondance entre les points doit être déterminée à l'avance, ceci était fait implicitement précédemment par l'ordre dans lequel les points étaient classés. Ceci peut être gênant car on pourra être amené à comparer des spectres d'origines différentes et on ne sera pas assuré d'avoir des échantillonnages identiques. Il est cependant possible de contourner aisément cet obstacle grâce à des méthodes dites itératives. Elles permettent non seulement de trouver la transformation permettant de passer d'un ensemble de points à un autre, mais également de trouver automatiquement la correspondance entre les points de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée. En ce sens, cette méthode est donc plus générale car elle permet de comparer des ensembles de landmarks n'ayant pas obligatoirement le même cardinal.

La présentation que nous faisons ici s'inspire de la méthode de A. Rangarajan. (Rangarajan 2003).

#### principe de la méthode

Il s'agit ici de minimiser une expression que l'on nommera énergie. Cette expression dépend principalement de la configuration initiale et finale des points que l'on considère ainsi que de la transformation qui permet de passer de l'un à l'autre.

Soit deux ensembles de points dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $p_i, i = 1, \dots, N$  et  $v_a, a = 1, \dots, K$ .

L'énergie que nous considérerons ici sera donnée par l'expression :

$$\min_f E(f) = \min_f \sum_{i=1}^N \sum_{a=1}^K z_{ai} \|p_i - f(v_a)\|^2 + \lambda \|Lf\|^2 - \zeta \sum_{i=1}^N \sum_{a=1}^K z_{ai}$$

avec les contraintes  $\sum_{i=1}^{N+1} z_{ai} = 1$  for  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\sum_{a=1}^{K+1} z_{ai} = 1$  for  $a \in \{1, 2, \dots, K\}$  et  $z_{ai} \in [0, 1]$ . La matrice  $\{z_{ai}\}$  est appelée la matrice binaire des correspondances. Elle comprend deux parties. Le bloc NxK supérieur gauche définit les correspondances en elles même. Si un point  $v_a$  correspond à un point  $p_i$  alors on aura  $z_{ai} = 1$  et  $z_{ai} = 0$  dans le cas contraire. La sommation sur les lignes et les colonnes permet de s'assurer que la correspondance est unique. La ligne N+1 et la colonne K+1 servent à déterminer les points exclus (voir figure 3.1). Le troisième

$z_{ai}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	exclu
$v_1$	1	0	0	0	0
$v_1$	0	1	0	0	0
$v_1$	0	0	0	0	1
exclu	0	0	1	1	0

TAB. 3.1 – Exemple de matrice binaire de correspondance.

terme dans l'expression de l'énergie est introduit pour éviter un trop grand nombre d'exclusions. C'est une sorte de contrainte sur les correspondances au même titre que

le deuxième terme pour la transformation. Ces deux termes de contraintes sont pondérés par deux paramètres  $\lambda$  et  $\zeta$  qui permettent d'ajuster leurs poids respectifs.  $L$  est un opérateur agissant sur la fonction  $f$ . Dans l'approximation des plaques minces à deux dimensions, il prendra la même forme que dans la méthode précédente :

$$Lf \equiv \int \int \left[ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy$$

La fonction  $f$ , quant à elle, prendra la forme suivante :

$$f(v_a, d, w) = v_a \cdot d + \phi(v_a) \cdot w$$

où  $d$  est une matrice 3x3 représentant les transformations linéaires et  $w$  une matrice Kx3 représentant les transformations non-linéaires. Le vecteur  $\phi(v_a)$  de dimension 1xK est défini par

$$\phi_b(v_a) = \|v_b - v_a\| \log^2 \|v_b - v_a\|$$

On reconnaît la fonction que nous avons déjà vu précédemment. Avec ces notations l'expression de l'énergie devient alors :

$$E(d, w) = \sum_{i=1}^N \sum_{a=1}^K \|p_i - v_a \cdot d - \phi(v_a) w\|^2 + \lambda \text{Trace}(w^T \phi w)$$

où  $\phi$  est une matrice KxK formée à partir des vecteurs  $\phi(v_a)$ .

### correspondances partielles et 'deterministic annealing'

Nous allons introduire deux nouvelles notions dans l'algorithme : les correspondances partielles et le 'deterministic annealing'.

Le fait que la matrice de correspondance précédente soit binaire provoque des sauts de valeur qui peuvent rendre la méthode instable. Afin d'avoir un meilleur comportement de l'énergie, on introduit une matrice de correspondance  $M$  continue. Contrairement aux coefficients  $z_{ai}$  précédents, les  $m_{ai}$  vont pouvoir prendre toutes les valeurs possibles dans l'intervall  $[0, 1]$ . Les correspondances sont donc, avant convergence du programme, partielles. La contrainte sur les lignes et les colonnes se fait dans ce cas de manière itérative en appliquant tour à tour jusqu'à convergence :

$$m_{ai} = \frac{m_{ai}}{\sum_{b=1}^{K+1} m_{bi}}, \quad i=1,2,\dots,N$$

$$m_{ai} = \frac{m_{ai}}{\sum_{j=1}^{N+1} m_{aj}}, \quad a=1,2,\dots,K$$

La méthode dite de 'deterministic annealing' est classique dans les problèmes de minimisation. Elle consiste à introduire un paramètre dont la valeur se réduit progressivement au long du déroulement du programme, le guidant vers la solution du problème. Par analogie au phénomène physique, ce paramètre est appelé la température. A chaque valeur de  $T$ , on ajustera les correspondances et la transformation

jusqu'à convergence. L'état final obtenu pour une valeur de  $T$  sera l'état initial de la valeur suivante.

Les coefficients  $m_{ai}$  sont calculés en fonction de  $T$ . Pour  $a = 1, \dots, K$  et  $i = 1, \dots, N$

$$m_{ai} = \frac{1}{T} e^{-\frac{(x_i - f(v_a))^T (x_i - f(v_a))}{2T}}$$

Pour les colonnes  $N+1$  et  $K+1$  on conservera  $T$  à sa valeur initiale  $T_0$ , soit :

$$m_{ai} = \frac{1}{T_0} e^{-\frac{(x_i - f(v_a))^T (x_i - f(v_a))}{2T_0}}$$

Afin de prendre en compte ces deux nouvelles notions nous allons également modifier quelques peu la fonction de l'énergie. Celle ci est à présent donnée par l'expression :

$$E_{TPS} = \|X - Vd - \Phi w\|^2 + \lambda_1 \text{trace}(w^T \Phi w) + \lambda_2 \text{trace}[d - I]^T [d - I]$$

Les paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  prendront la forme  $\lambda_i = \lambda_i^{init} T$  où  $\lambda^{init}$  est une constante. L'idée est ici de favoriser aux premières itérations les transformations rigides puis de donner peu à peu de l'importance aux transformations locales. Le dernier terme dans l'expression de l'énergie a pour rôle de minimiser les transformations linéaires en assurant que des rotations inutiles ne seront pas introduites.

La décroissance de  $T$  se fera par  $T^{new} = T^{old} * r$  avec  $r \in [0.9, 0.99]$ . Ceci assure que le processus soit suffisamment lent pour être robuste.

## Expérience

Voyons tout d'abord le fonctionnement du programme dans un cas simple. nous allons utiliser les deux ensembles de points représentés sur la figure ?? Le passage de l'ensemble  $X$  et l'ensemble  $V$  est ici simplement une homothétie.

On peut voir sur la figure 3.32 la première itération du programme. Nous sommes ici dans un cas où la température est très haute. Ainsi les fonctions décrivant les coefficients  $m_{ai}$  sont très larges et toutes les associations de points sont possibles. Les cercles de rayon  $\sqrt{T}$  sur la figure représentent la largeur à mi-hauteur de ces courbes. De plus la haute température, par l'intermédiaire des coefficients  $\lambda_i$ , gèle presque totalement les transformations locales par rapport aux transformations linéaires. La solution de la minimisation est dans ces conditions un effondrement des points de l'ensemble  $V$  sur le barycentre de  $X$ .

Rajoutons à présent un nombre de points supplémentaires dans l'ensemble de point  $X$ . Ces points supplémentaires sont placés aléatoirement.

Le programme, malgré le nombre de points supplémentaires, parvient à la solution (figure 3.34). L'algorithme est donc efficace mais peut réclamer un réglage assez fin des paramètres d'entrée.

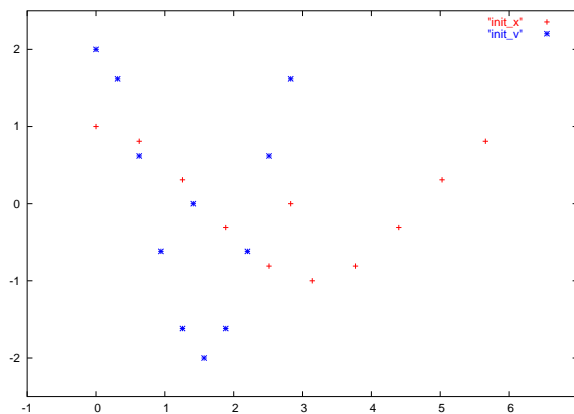


FIG. 3.31 – Conditions initiales des ensembles de points. Le programme doit transformer l'ensemble V pour atteindre l'ensemble X

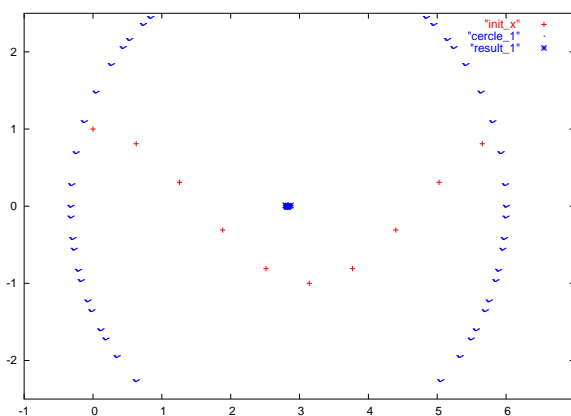


FIG. 3.32 – Première itération. Les cercles de rayon  $\sqrt{T}$  représentent la courbe d'évolution des coefficients  $m_{ai}$  à mi-hauteur. Toutes les associations sont possibles et les transformations locales gelées : l'ensemble V 's'effondre' sur le barycentre de X.

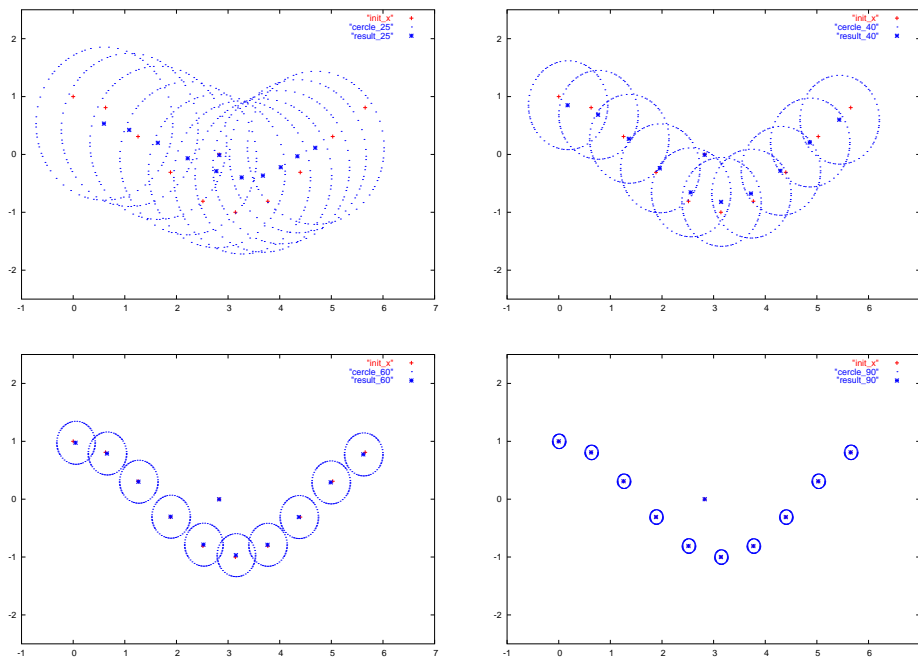


FIG. 3.33 – Itérations 25, 40, 60 et 90. La baisse de la température fait converger le programme vers la solution.

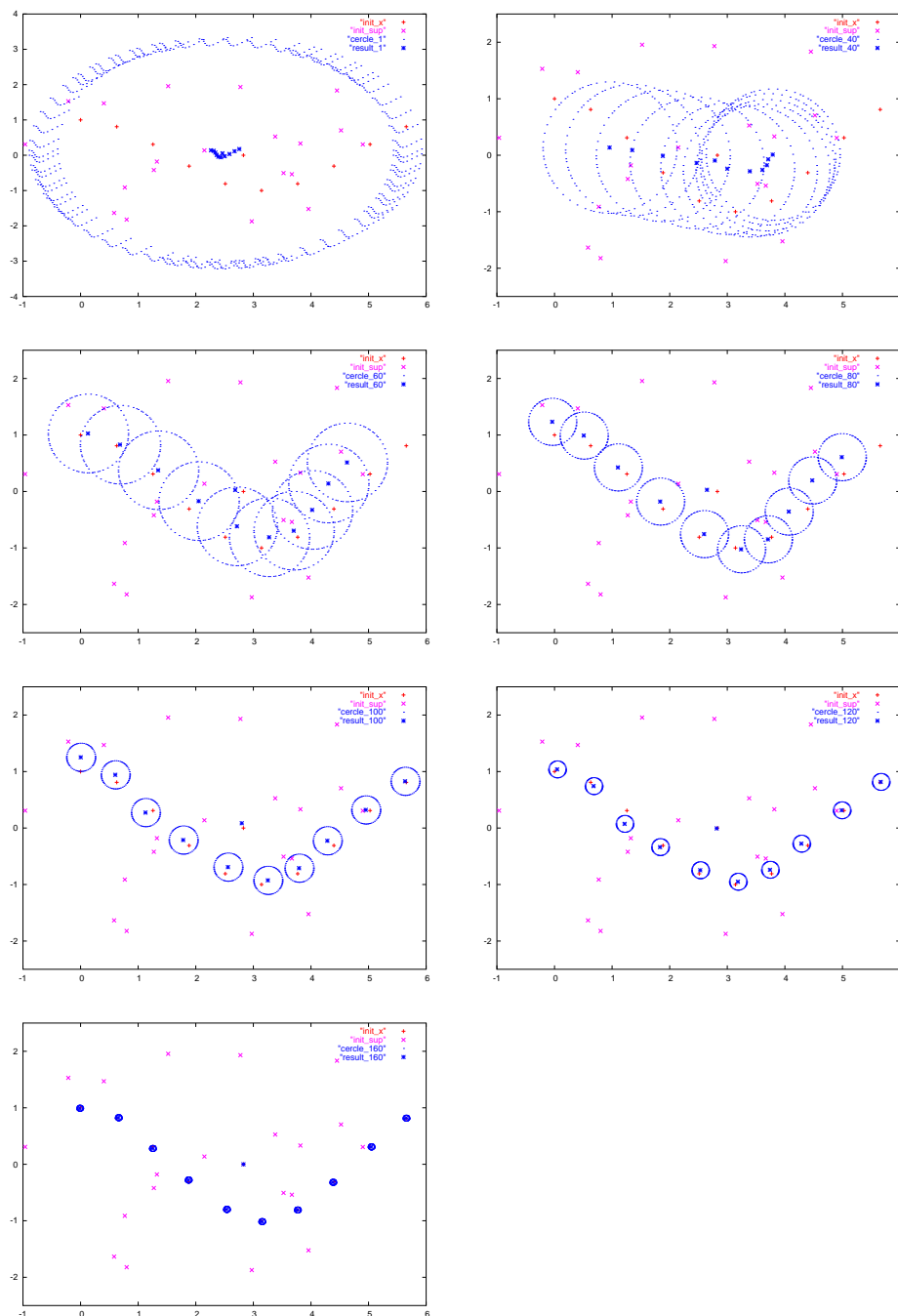


FIG. 3.34 – Itérations 25, 40, 60 et 90. La baisse de la température fait converger le programme vers la solution.



# Chapitre 4

## Conclusion

La méthode d'analyse basée sur le morphisme semble prometteuse. Elle permettra de traiter à terme une supernova dans sa globalité ce qui n'avait jamais été fait jusqu'à présent. Cela donnera la possibilité d'étudier réellement la population de SNIa qui sera observée par SNIFS et son homogénéité. Cette méthode est de plus suffisamment souple pour s'adapter à différents formats de données mais aussi très rapide. En effet les calculs sur l'ensemble de points de référence représentent la majorité du temps de calcul sont fait une seule fois et peuvent ensuite être stockés. En la combinant à la PCA, il semble que nous ayons là un outil très prometteur d'après les premiers tests effectués. Ce fort potentiel ne pourra être confirmé qu'en utilisant un réel échantillon de supernovae ce qui constitue bien évidemment la prochaine étape.

## Sixième partie

### ANNEXE

# Chapitre 5

## Les pôlynomes de Zernike

Il est indispensable dans le domaine de l'optique de pouvoir modéliser les aberrations d'un système optique quelconque. Les polynômes de Zernike sont un exemple d'outil utilisé pour cela. Dans une pupille de rayon unitaire, ils constituent une base orthogonale sur laquelle peut être décomposé n'importe quel ensemble d'aberration présent entre deux points conjugués au travers d'un système optique quelconque. Ce dernier sera donc représenté par un ensemble de coefficients, chacun représentant le poids d'un type particulier d'aberration :

$$\phi(Rr, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i Z_i(r, \theta)$$

Précisons bien qu'une série de coefficient n'est valable que pour une longueur d'onde bien précise et pour un point particulier du champ de l'instrument considéré.

Les polynômes de Zernike sont défini par les formules générales suivantes :  
si  $m \neq 0$  :

$$\begin{aligned} Z_i(r, \theta) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \cos(m\theta) && \text{si } i \text{ pair} \\ Z_i(r, \theta) &= \sqrt{2(n+1)} R_n^m(r) \sin(m\theta) && \text{si } i \text{ impair} \end{aligned}$$

Si  $m=0$  :

$$Z_i(r, \theta) = \sqrt{n+1} R_n^0(r) \tag{5.1}$$

avec  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{-1^s (n-s)!}{s! [\frac{(n+m)}{2} - s]! [\frac{(n-m)}{2} - s]!} r^{n-2s}$$

L'orthogonalité se traduit par :

$$\delta_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 r \int_0^{2\pi} d\theta Z_i(r, \theta) Z_j(r, \theta)$$

## Chapitre 6

# L'énergie de la transformation d'une plaque mince.

Nous allons partir de l'expressions 3.3 de l'énergie :

$$I = \int \int_{\mathbb{R}^2} \left( \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy$$

En utilisant la forme générale de  $f$  et en sachant que les coefficients  $w_i$  ne dépendent pas de  $x$  et  $y$ , on peut réécrire cette expression sous la forme :

$$I = \sum_k \sum_l w_k w_l \int \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\partial^2 U_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U_l}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U_k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 U_l}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 U_l}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (6.1)$$

On voit donc apparaître une forme quadratique en  $\mathbf{w}$ . On sait qu'une forme quadratique peut se mettre sous la forme

$$I(\mathbf{w}) = I_0 + g^T \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T B \mathbf{w} \quad (6.2)$$

Lorsque tous les coefficients  $w$  sont nuls, il n'y a aucunes déformations de la plaque et l'énergie doit être nulle d'où :

$$I(0) = I_0 = 0$$

De plus, la transformation  $\mathbf{w} \rightarrow -\mathbf{w}$ , revient à prendre la forme symétrique de la plaque par rapport au plan représentant sa forme sans aucune transformation. L'énergie  $I$  sera donc inchangée par ce changement se qui se traduit par :

$$\begin{aligned} I(-\mathbf{w}) &= -g^T \mathbf{w} + (-1)^2 * \frac{1}{2} \mathbf{w}^T B \mathbf{w} \\ &= -g^T \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T B \mathbf{w} \\ &= I(\mathbf{w}) \\ &= g^T \mathbf{w} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T B \mathbf{w} \end{aligned}$$

d'où

$$-g^T \mathbf{w} = g^T \mathbf{w}$$

et par conséquent  $g = 0$ .

L'équation 6.2 se résume donc à

$$I \alpha \mathbf{w}^T B \mathbf{w}$$

# Bibliographie

- Benetti, S., Meikle, P., Stehle, M., et al. 2004, MNRAS, 348, 261
- Bookstein, F. L. 1989, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 11, 567
- Branch, D. 2001, PASP, 113, 169
- Clocchiatti, A. & Wheeler, J. C. 1997, ApJ, 491, 375
- Duchon, J. 1976, RAIRO Analyse Numérique, 10, 5
- Filippenko, A. V. 1991, in Supernova 1987A and other supernovae, ESO Conference and Workshop Proceedings, Proceedings of an ESO/EIPC Workshop, Marciana Marina, Isola d'Elba, September 17-22, 1990, Garching : European Southern Observatory (ESO), |c1991, edited by I. J. Danziger, and Kurt Kjär., p.343, 343—+
- Filippenko, A. V. 1997, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 35, 309
- Filippenko, A. V., Richmond, M. W., Branch, D., et al. 1992, AJ, 104, 1543
- Finzi, A. & Wolf, R. A. 1967, ApJ, 150, 115
- Fitzpatrick, E. L. 1999, PASP, 111, 63
- Freedman, W. L., Madore, B. F., Gibson, B. K., et al. 2001, ApJ, 553, 47
- Fried, D. L. 1965, Optical Society of America Journal, 55, 1427
- Garnavich, P. M., Bonanos, A. Z., Krisciunas, K., et al. 2004, ApJ, 613, 1120
- Hamuy, M., Phillips, M. M., Maza, J., et al. 1994a, AJ, 108, 2226
- Hamuy, M., Phillips, M. M., Maza, J., et al. 1994b, Bulletin of the American Astronomical Society, 26, 1362
- Hamuy, M., Phillips, M. M., Suntzeff, N. B., Aviles, R., & Maza, J. 1993, Bulletin of the American Astronomical Society, 25, 1340
- Hamuy, M., Phillips, M. M., Suntzeff, N. B., et al. 1996, AJ, 112, 2438
- Huang, Y.-L. 1987, PASP, 99, 461
- Jeffery, D. J., Branch, D., Filippenko, A. V., & Nomoto, K. 1991, ApJ, 377, L89

- Kasen, D., Nugent, P., Thomas, R. C., & Wang, L. 2004, *ApJ*, 610, 876
- Kim, A., Goobar, A., & Perlmutter, S. 1996, *PASP*, 108, 190
- Knop, R. A., Aldering, G., Amanullah, R., et al. 2003, *ApJ*, 598, 102
- Krisciunas, K., Phillips, M. M., Stubbs, C., et al. 2001, *AJ*, 122, 1616
- Krisciunas, K., Phillips, M. M., & Suntzeff, N. B. 2004, *ApJ*, 602, L81
- Leibundgut, B. 1988, Ph.D. Thesis
- Leibundgut, B., Kirshner, R. P., Filippenko, A. V., et al. 1991a, *ApJ*, 371, L23
- Leibundgut, B., Tammann, G. A., Cadonau, R., & Cerrito, D. 1991b, *A&AS*, 89, 537
- Lena, P. 1986, *Astrophysique. Methods physiques de l'observation (Savoirs Actuels, Paris : Inter Editions, Ed. du CNRS, 1986)*
- Maza, J., Hamuy, M., Suntzeff, N. B., Phillips, M. M., & Aviles, R. 1993, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 25, 1340
- Mazzali, P. A., Chugai, N., Turatto, M., et al. 1997, *MNRAS*, 284, 151
- Meikle, W. P. S. 2000, *MNRAS*, 314, 782
- Meinguet, J. 1979, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 30, 292
- Modjaz, M., Li, W., Filippenko, A. V., et al. 2001, *PASP*, 113, 308
- Nobili, S., Goobar, A., Knop, R., & Nugent, P. 2003, *A&A*, 404, 901
- Noll, R. J. 1976, *J. Opt. Soc. Am.*, 66, 207
- Nomoto, K. 1982a, *ApJ*, 257, 780
- . 1982b, *ApJ*, 253, 798
- Nomoto, K., Thielemann, F.-K., & Yokoi, K. 1984, *ApJ*, 286, 644
- Patat, F., Barbon, R., Cappellaro, E., & Turatto, M. 1993, *A&AS*, 98, 443
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., et al. 1999, *ApJ*, 517, 565
- Perlmutter, S., Gabi, S., Goldhaber, G., et al. 1997, *ApJ*, 483, 565
- Phillips, M. M., Phillips, A. C., Heathcote, S. R., et al. 1987, *NASA STI/Recon Technical Report N*, 88, 20231
- Phillips, M. M. 1993, *ApJ*, 413, L105
- Phillips, M. M., Lira, P., Suntzeff, N. B., et al. 1999, *AJ*, 118, 1766

- Phillips, M. M., Phillips, A. C., Heathcote, S. R., et al. 1987, *PASP*, 99, 592
- Pskovskii, Y. P. 1984, *Soviet Astronomy*, 28, 658
- Rangarajan, A. 2003, *Computer Vision and Image Understanding*, 89, 114
- Riess, A. G., Press, W. H., & Kirshner, R. P. 1995, *ApJ*, 445, L91
- Ruiz-Lapuente, P., Canal, R., & Isern, J., eds. 1997, *Thermonuclear supernovae*
- Turatto, M., Piemonte, A., Benetti, S., et al. 1998, *AJ*, 116, 2431
- Wang, L., Wheeler, C. J., & Hoefflich, P. 1996a, *Bulletin of the American Astronomical Society*, 28, 1332
- Wang, L., Wheeler, J. C., Li, Z., & Clocchiatti, A. 1996b, *ApJ*, 467, 435
- Whelan, J. & Iben, I. J. 1973, *ApJ*, 186, 1007