



**HAL**  
open science

# Elaboration de solveurs Volumes Finis 2D/3D pour résoudre le problème de l'élasticité linéaire

Benjamin Martin

► **To cite this version:**

Benjamin Martin. Elaboration de solveurs Volumes Finis 2D/3D pour résoudre le problème de l'élasticité linéaire. Analyse numérique [math.NA]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2012. Français. NNT: . tel-00798769v1

**HAL Id: tel-00798769**

**<https://theses.hal.science/tel-00798769v1>**

Submitted on 10 Mar 2013 (v1), last revised 23 Jul 2013 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Centre de mathématiques et de leurs applications

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

# THÈSE

pour obtenir le titre de

**Docteur en Sciences**

de l'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

**Mention : Mathématiques**

Présentée et soutenue par

Benjamin MARTIN

## Élaboration de solveurs Volumes Finis 2D/3D pour résoudre le problème de l'élasticité linéaire

Thèse soutenue publiquement le **19 Septembre 2012** devant le jury composé de :

**Jury :**

<i>Rapporteurs :</i>	Mme Florence <b>HUBERT</b>	- Université de Provence
	M. Pascal <b>OMNES</b>	- CEA de Saclay
<i>Directeur :</i>	M. Frédéric <b>PASCAL</b>	- ENS de Cachan
<i>Examineurs :</i>	M. Fayssal <b>BENKHALDOUN</b>	- Université Paris XIII
	M. Florian <b>DE VUYST</b>	- ENS de Cachan
	M. Christian <b>REY</b>	- ENS de Cachan



# Résumé

Les méthodes classiques de résolution des équations de l'élasticité linéaire sont les méthodes éléments finis. Ces méthodes produisent de très bons résultats et sont très largement analysées mathématiquement pour l'étude des déformations solides. Pour des problèmes de couplage solide/fluide, pour des situations réalistes en présence de discontinuités (modélisation des fronts de gel dans les sols humides), ou bien encore pour des domaines de calcul mieux adaptés aux maillages non conformes, il paraît intéressant de disposer de solveurs Volumes Finis. Les méthodes Volumes Finis sont très largement utilisées en mécanique des fluides. Appliquées aux problèmes de convection, elles sont bien adaptées à la capture de solutions présentant des discontinuités et ne nécessitent pas de maillages conformes. De plus, elles présentent l'avantage de conserver au niveau discret les flux à travers les interfaces du maillage. C'est pourquoi sont développées et testées, dans cette thèse, plusieurs méthodes de volumes finis, qui permettent de traiter le problème de l'élasticité. On a, dans un premier temps, mis en œuvre la méthode LSGR (Least Squares Gradient Reconstruction), qui reconstruit des gradients par volumes à partir d'une formule de moindres carrés pondérés sur les volumes voisins. Elle est testée pour des maillages tétraédriques non structurés, et montre un ordre 1 de convergence. La méthode des Volumes Finis mixtes est ensuite présentée, basée sur la conservation d'un flux "pénalisé" à travers les interfaces. Cette pénalisation impose une contrainte sur le type de maillage utilisé, et des tests sont réalisés en 2d avec des maillages structurés et non structurés de quadrangles. On étend ensuite la méthode des Volumes Finis diamants à l'élasticité. Cette méthode détermine un gradient discret sur des sous volumes associés aux interfaces à partir de l'interpolation de la solution aux sommets du maillage. La convergence théorique est prouvée sous réserve de vérifier une condition de coercivité. Les résultats numériques, en 2d pour des maillages non structurés, conduisent à un ordre de convergence meilleur que celui prouvé. Enfin, la méthode DDFV (Discrete Duality Finite Volume), qui est une extension de la méthode Diamant, est présentée. Elle est basée sur une correspondance entre plusieurs maillages afin d'y construire des opérateurs discrets en "dualité discrète". On montre que la méthode est convergente d'ordre 1. Les illustrations numériques, réalisées en 2d et en 3d pour des maillages non structurés, montrent une convergence d'ordre 2, ce qui est fréquemment observé pour cette méthode.



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Frédéric Pascal, pour m'avoir dirigé pendant ces presque 4 années passées au Centre de Mathématiques et de Leurs Applications (CMLA). Sa patience et sa rigueur m'ont permis de me forger une véritable culture mathématique. Travailler avec lui m'a permis d'obtenir un solide bagage en résolution d'équations aux dérivées partielles, et d'approfondir celles déjà acquises en élasticité linéaire. Je le remercie plus particulièrement pour avoir eu la gentillesse de lire, relire et re-relire mes articles, ainsi que les heures passées à tenter de déboguer mes codes. Je tiens également à remercier Jean-Michel Ghidaglia pour toute son aide apportée tout le long de cette thèse.

Mes remerciements vont ensuite à Florence Hubert et Pascal Omnes pour avoir accepté de rapporter ma thèse, et d'avoir pris le temps de relire l'ensemble de ce manuscrit avec attention. Je remercie également chaleureusement le reste du Jury, Fayssal Benkhaldoun, Florian De Vuyst et Christian Rey, pour avoir accepté d'être examinateurs. C'est un grand honneur de les compter parmi mon jury de thèse.

J'ai eu la chance durant ces quatre années passées au CMLA de croiser la route de personnes formidables, du point de vue scientifique mais surtout humain. Comment ne pas commencer par Virginie, Véronique et Micheline pour leur gentillesse et leur efficacité. Un grand merci à Sandra pour sa bonne humeur et son efficacité à trouver un livre, même lorsqu'en fait c'est moi qui l'ai. Je remercie également l'équipe informatique en commençant par les anciens, Pascal, pour m'avoir appris qu'en informatique tout est compliqué, surtout quand c'est simple, et les toujours présents, Christophe, pour son initiation à Typo3, et aux rendez vous foot du mercredi midi, et Nicolas L., qui m'a montré qu'en informatique tout est simple, même quand c'est compliqué. Quod erat demonstrandum.

Je passe maintenant à tous mes compagnons du laboratoire. Je commence par mes souffredouleur (ou le contraire) pendant ma période de rédaction : Milana, et ses séances skype, Claire, fraîchement arrivée, et Loïc, jeune papa, pour tous ses conseils. Je tiens également à remercier les anciens doctorants du labo, Adina, Ayman, Bruno, Eric, Frédéric, Frédérique, Julie, Nicolas C., Neus, Rafa, Romain et Zhongwei. Enfin, je tiens à adresser mes remerciements à mes camarades présents : Daniel, Gabriele, Ives, Marc, Mauricio, Miguel, Morgan, Nicolas, Romain, Rachel, Saad, Samy et Yohann.

Je sors à présent du laboratoire pour aller voir mes amis, Julien, à Paris, Rémi et Nils, à Toulouse, Thomas, à Aix-en Provence, Julien, à Saint-Nazaire, Charles et Léon, à Bordeaux, Loïc, au Costa Rica, Olivier, à Barcelone, et Lyonnell, au Québec. Merci à vous pour m'avoir aidé par votre amitié à voyager non pas pour changer de lieu, mais d'idées.

Finalement, je voudrais remercier ma famille : mon frère, Jo, ma sœur, Alma, et ma deuxième sœur Véro, pour leur soutien sans lequel cette thèse n'aurait pas existé. Puis, comme « on ne peut jamais s'acquitter de ses parents » -dixit Aristote dans *l'Éthique à Nicomaque*, mon livre de chevet que m'emprunte régulièrement mon père-, je tiens à remercier les miens. Le (ou plutôt les) denier(s) remerciement(s) va(vont) à Gala, successivement ma compagne et ma femme au cours de cette thèse, et à la magnifique fille qu'elle a mise au monde.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Méthodes de gradients</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>Schéma 3D Least Squares Gradient Reconstruction (LSGR)</b>	<b>15</b>
1.1	Introduction	15
1.2	Maillages et notations	16
1.2.1	Maillages	16
1.2.2	Notations	17
1.3	Description du schéma numérique	17
1.3.1	Reconstruction du gradient par moindres carrés pondérés	18
1.3.2	Conditions de bord	19
1.4	Illustrations numériques	20
1.4.1	Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène.	20
1.4.2	Cas E.2.2 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou	21
1.4.3	Cas E.2.3 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou	23
1.5	Conclusion	24
<b>2</b>	<b>Schéma 2D VF mixtes</b>	<b>25</b>
2.1	Introduction	25
2.2	Maillages et notations	26
2.2.1	Maillages	26
2.2.2	Notations	27
2.2.3	Régularité du maillage	27
2.3	Schéma numérique	27
2.3.1	Inconnues discrètes	27
2.3.2	Système d'équations	28
2.3.3	Conditions de Bord	28
2.3.4	Algorithme	29
2.4	Illustrations numériques	31
2.4.1	Quelques aspects numériques	32
2.4.2	Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale	32
2.4.3	Cas E.1.4 : Déformation d'un carré homogène. Solution non polynomiale	33
2.4.4	Cas E.1.7 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou	34
2.4.5	Cas E.1.8 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou	37
2.5	Conclusion	41
<b>II</b>	<b>Schéma Diamant</b>	<b>43</b>
<b>3</b>	<b>Schéma 2D Diamant</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction	45

3.2	Maillages et notations . . . . .	46
3.2.1	Description du maillage primal . . . . .	46
3.2.2	Description du maillage diamant . . . . .	49
3.2.3	Régularité du maillage . . . . .	50
3.3	Opérateurs discrets . . . . .	50
3.3.1	Produits scalaires . . . . .	51
3.3.2	Opérateurs discrets . . . . .	51
3.3.3	Interpolant aux sommets : élimination des inconnues secondaires . . . . .	54
3.3.4	Continuité des flux : élimination des inconnues auxiliaires . . . . .	56
3.3.5	Schéma numérique . . . . .	57
3.4	Consistance du schéma . . . . .	58
3.5	Coercivité . . . . .	68
3.5.1	Définition . . . . .	68
3.5.2	Condition de coercivité . . . . .	70
3.6	Convergence et estimation d'erreur . . . . .	72
3.7	Illustrations numériques . . . . .	74
3.7.1	Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale . . . . .	74
3.7.2	Cas E.1.4 : Déformation d'un carré homogène. Solution non polynomiale . . . . .	74
3.7.3	Cas E.1.5 : Déformation d'un carré homogène en Dirichlet pur . . . . .	76
3.7.4	Cas E.1.6 : Déformation d'un triangle homogène . . . . .	76
3.7.5	Cas E.1.7 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou . . . . .	79
3.7.6	Cas E.1.8 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou . . . . .	80
3.7.7	Quelques commentaires sur les cas tests numériques . . . . .	84
3.8	Conclusion . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Schéma 3D Diamant</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	89
4.2	Maillages et notations . . . . .	90
4.2.1	Description du maillage primal . . . . .	90
4.2.2	Description du maillage diamant . . . . .	92
4.2.3	Régularité du maillage . . . . .	93
4.3	Opérateurs discrets . . . . .	93
4.3.1	Produits scalaires . . . . .	94
4.3.2	Opérateurs discrets . . . . .	94
4.3.3	Interpolant aux sommets : élimination des inconnues secondaires . . . . .	98
4.3.4	Continuité des flux : élimination des inconnues auxiliaires . . . . .	99
4.3.5	Schéma numérique . . . . .	101
4.4	Consistance du schéma . . . . .	102
4.5	Coercivité . . . . .	113
4.5.1	Définition . . . . .	113
4.5.2	Condition de coercivité . . . . .	114
4.6	Convergence et estimation d'erreur . . . . .	116
4.7	Illustrations numériques . . . . .	116
4.7.1	Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène. . . . .	117
4.7.2	Cas E.2.2 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou . . . . .	117
4.7.3	Cas E.2.3 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou . . . . .	118
4.8	Conclusion . . . . .	121

<b>III</b>	<b>Schéma Discrete Duality Finite Volume method</b>	<b>123</b>
<b>5</b>	<b>Schéma 2D DDFV</b>	<b>125</b>
5.1	Introduction . . . . .	126
5.2	Construction des maillages . . . . .	127
5.2.1	Description du maillage primal . . . . .	127
5.2.2	Description du maillage dual . . . . .	127
5.2.3	Description du maillage demi diamant . . . . .	129
5.2.4	Notations . . . . .	129
5.2.5	Régularité du maillage . . . . .	131
5.3	Opérateurs discrets . . . . .	132
5.3.1	Vecteurs du maillage . . . . .	132
5.3.2	Inconnues discrètes et espaces d'approximation . . . . .	133
5.3.3	Produits scalaires et normes . . . . .	133
5.3.4	Opérateurs discrets . . . . .	134
5.4	Relation de Green discrète . . . . .	136
5.5	Condition de continuité à travers les arêtes . . . . .	137
5.5.1	Expression des inconnues intermédiaires . . . . .	137
5.5.2	Expression du gradient par volume diamant . . . . .	138
5.6	Inégalité de Korn discrète . . . . .	139
5.7	Schéma numérique et stabilité . . . . .	140
5.7.1	Description du schéma et caractère bien posé . . . . .	140
5.7.2	Stabilité du schéma DDFV . . . . .	141
5.8	Convergence et estimation d'erreur . . . . .	142
5.8.1	Inégalités de trace et Poincaré . . . . .	146
5.8.2	Propriétés de l'opérateur de projection . . . . .	147
5.8.3	Fin de preuve : estimation d'erreur . . . . .	147
5.9	Illustrations numériques . . . . .	150
5.9.1	Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale . . . . .	150
5.9.2	Cas E.1.4 : Déformation d'un carré homogène. Solution non polynomiale . . . . .	150
5.9.3	Cas E.1.6 : Déformation d'un triangle homogène . . . . .	152
5.9.4	Cas E.1.7 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou . . . . .	152
5.9.5	Cas E.1.8 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou . . . . .	155
5.10	Conclusion . . . . .	158
<b>6</b>	<b>Schéma 3D DDFV</b>	<b>165</b>
6.1	Introduction . . . . .	165
6.2	Construction des maillages . . . . .	167
6.2.1	Description du maillage primal . . . . .	167
6.2.2	Description du maillage dual . . . . .	168
6.2.3	Description des maillages demi diamants . . . . .	169
6.2.4	Notations . . . . .	170
6.2.5	Régularité du maillage . . . . .	170
6.3	Opérateurs discrets . . . . .	170
6.3.1	Normales extérieures aux volumes . . . . .	170
6.3.2	Inconnues discrètes et espaces d'approximation . . . . .	171
6.3.3	Produits scalaires et normes . . . . .	171
6.3.4	Opérateurs discrets . . . . .	172
6.4	Relation de Green discrète . . . . .	174
6.5	Condition de continuité à travers les faces . . . . .	175

6.6	Inégalité de Korn discrète . . . . .	176
6.7	Schéma numérique et stabilité . . . . .	176
6.7.1	Description du schéma et caractère bien posé . . . . .	176
6.8	Convergence et estimation d'erreur . . . . .	178
6.8.1	Inégalités de trace et Poincaré . . . . .	182
6.8.2	Propriétés de l'opérateur de projection . . . . .	182
6.8.3	Fin de preuve : estimation d'erreur . . . . .	183
6.9	Illustrations numériques . . . . .	185
6.9.1	Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène. . . . .	185
6.9.2	Cas E.2.2 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou . . . . .	185
6.9.3	Cas E.2.3 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou . . . . .	186
6.10	Conclusion . . . . .	189
<b>Annexes</b>		<b>197</b>
<b>A Propriétés du produit tensoriel</b>		<b>199</b>
A.0.1	Propriétés générales . . . . .	199
A.0.2	Propriétés 2d . . . . .	199
A.0.3	Propriétés 3d . . . . .	199
<b>B Opérateurs discrets en dimension 2</b>		<b>201</b>
B.1	Matrices élémentaires communes à Diamant et DDFV en 2d . . . . .	201
B.2	Matrices élémentaires pour Diamant 2d : problème de Neumann . . . . .	202
<b>C Opérateurs discrets en dimension 3</b>		<b>205</b>
C.1	Matrices élémentaires communes à Diamant et DDFV en 3d . . . . .	205
C.2	Matrices élémentaires pour Diamant 3d : problème de Neumann . . . . .	206
<b>D Inégalité de Korn discrète pour le schéma DDFV</b>		<b>209</b>
D.1	Inégalité de Korn 2d discrète . . . . .	209
D.2	Inégalité de Korn 3D discrète . . . . .	212
<b>E Description des cas test numériques</b>		<b>215</b>
E.1	Description des cas test numériques en dimension 2 . . . . .	215
E.1.1	Quelques aspects numériques . . . . .	215
E.1.2	Contrainte équivalente de Von Mises . . . . .	215
E.1.3	Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale . . . . .	216
E.1.4	Déformation d'un carré homogène. Solution qui n'est pas polynomiale . . . . .	217
E.1.5	Déformation d'un carré homogène : problème de Dirichlet pur . . . . .	218
E.1.6	Déformation d'un triangle homogène . . . . .	218
E.1.7	Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou . . . . .	219
E.1.8	Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou . . . . .	220
E.2	Description des cas test numériques en dimension 3 . . . . .	221
E.2.1	Déformation d'un cube homogène . . . . .	221
E.2.2	Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou . . . . .	222
E.2.3	Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou . . . . .	222
<b>F Comparaison des méthodes EF, Diamant et DDFV en dimension 2</b>		<b>225</b>

# Introduction

Le but de cette thèse est d'élaborer des solveurs volumes finis de dimension  $d$  ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ) pour résoudre numériquement le problème de l'élasticité linéaire stationnaire isotherme hétérogène isotrope sur des maillages non structurés et d'en faire l'analyse mathématique (stabilité, convergence, estimation d'erreurs). Le problème de l'élasticité linéaire consiste à trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  satisfaisant le système d'équations

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\sigma$  représente le tenseur des contraintes, et s'exprime en fonction du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  via la relation de Hooke

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{u}) &= \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \operatorname{Id} \\ &= 2\mu\mathbb{D}\mathbf{u} + \lambda\operatorname{Div}\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2)$$

On s'assure que  $\Omega$  est un espace ouvert polygonal borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ . On précise que  $\Gamma_D$  est le bord de Dirichlet où est imposé le déplacement, que  $\Gamma_N$  est le bord de Neumann où est imposée la traction, et que  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ . On suppose que les ensembles  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont chacun des réunion de composantes connexes du bord. Nous supposons que la solution  $\mathbf{u}$  appartient à  $W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p > d$  (on renvoie à la lecture de [25] pour plus de détails sur les conditions de régularité de la solution).

## Hypothèse 0.0.1

*Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du matériau. Il s'agit de fonctions régulières ( $C^1$  ou  $W^{1,\infty}$  par exemple) au moins par sous-domaines. On suppose qu'il existe des constantes  $(\underline{\mu}, \bar{\mu}, \underline{\lambda}, \bar{\lambda}) > 0$  telles que pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$*

$$\mu(\mathbf{x}) \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}] \quad \text{et} \quad \lambda(\mathbf{x}) \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]. \quad (3)$$

Le contexte général de cette thèse s'inscrit dans l'étude du comportement d'un matériau soumis à un front de gel. On retrouve cette thématique dans les domaines de la production de gaz, de l'exploitation minière, la construction dans des zones humides (technique de gel du sol), ou au contraire dans des régions froides. Dans le domaine du transport de gaz, un des moyens d'acheminement est d'enfouir les gazoducs par exemple sous la mer. En cas de températures négatives, il est fréquent que la grande majorité de l'eau ne gèle pas, mais que le sol sous la mer gèle. Dans ce cas, un front de gel se propage dans un milieu poreux saturé en eau, jusqu'à atteindre le pipeline transportant le gaz. Le pipeline est quant à lui composé de plusieurs couches de matériaux, dont un à l'intérieur conçu pour résister à des températures supérieures à 4°C. Il s'agit donc d'étudier l'impact de ce front de gel sur le pipeline, afin de s'assurer que celui-ci n'endommage pas le gazoduc. Ce problème physique couvre un grand nombre de

domaines mathématiques, comme par exemple le comportement mécanique du sol, l'étude de la progression d'un front de gel, ou les déformations géomécaniques d'un réservoir.

L'étude de ce problème s'inscrit dans une grande lignée de problèmes physiques mettant en jeu les domaines de la mécanique des fluides et celle des solides. Parmi ces problèmes physiques, on peut citer l'étude aérodynamique d'un corps plongé dans un écoulement fluide, et par extension l'étude des vibrations hydro-acoustiques. Ces problèmes sont fréquents dans les domaines de l'automobile ou de l'aéronautique. Citons aussi les problèmes de performance des matériaux composites sous l'effet de l'humidité, ou encore l'étude des modes de ballottement.

La résolution des problèmes de la mécanique des milieux continus est habituellement partagée entre la communauté Éléments Finis (EF), qui s'attache à la résolution des problèmes de mécanique du solide, et la communauté Volumes Finis (VF) qui traite plutôt des problèmes de la mécanique des fluides.

Les méthodes EF sont basées sur la formulation variationnelle de l'équation, ce qui suppose l'utilisation de fonctions prédéfinies, appelées fonctions de forme, dont la complexité dépend de la topologie et du degré de précision souhaité. Par conséquent, elles s'étendent facilement à des discrétisations d'ordre élevé, en générant des matrices blocs, qui une fois assemblées, conduisent à la résolution d'un problème linéaire.

Les méthodes VF sont quant à elles généralement d'ordre 1 ou 2, et sont basées sur la formulation intégrale de l'équation, ce qui conduit à l'écriture d'un système qui conserve les flux à travers les interfaces. Cette propriété fait qu'elles sont particulièrement adaptées à la présence de chocs ou d'hétérogénéités, ce qui est primordial pour traiter le problème de la propagation du front de gel dans le sol, ou encore le problème de déformation élastique de structures multi matériaux. À l'inverse, bien que les méthodes EF soient très performantes pour résoudre les problèmes solides, elles sont en revanche peu adaptées dans la capture des discontinuités. Dans le cas de l'élasticité linéaire, il s'agit de calculer le flux du tenseur des contraintes  $\sigma$  sur chaque arête du maillage  $\Omega$ . Il existe deux grandes catégories de volumes finis : les volumes finis centrés aux sommets, utilisés par exemple dans [21, 22, 73, 79, 48, 53, 58, 71, 78], et les volumes finis centrés sur les volumes du maillage, qui représentent la grande majorité des cas (voir par exemple [72, 48, 59, 60, 55, 33, 31, 30, 26]).

L'objet de cette thèse est donc de construire des solveurs VF multi matériaux en 2d et en 3d pour résoudre le problème de l'élasticité, afin de disposer des mêmes outils pour la résolution des problèmes d'interactions fluides/structures par exemple.

L'application des VF au système de l'élasticité a été introduite par Fryer *et al.* [54], puis étendues plus tard par Taylor *et al.* [80], Slone *et al.* [77], à la visco-plasticité. Les méthodes utilisées sont de type « vertex-centered », ce qui peut poser un problème dans le cas des multi matériaux pour la définition des coefficients de Lamé aux points de discontinuités. Les auteurs introduisent alors des volumes de contrôle qui relient les centres des volumes aux centres des faces. Puis sont construits des sous volumes de contrôle, reliant les centres des faces, des volumes et les sommets du maillage. Les points d'intégration se situent alors aux centres des arêtes des sous volumes de contrôle. Leur valeur est interpolée aux sommets du maillage par une procédure type EF.

Les méthodes de reconstruction du gradient par moindres carrés (ou LSQR, voir Chapitre 1) ont ensuite été introduites par Demirdžić *et al.* [39, 40], Jasak et Weller [65, 66, 67], pour l'élasticité linéaire instationnaire, puis élargie aux équations de thermo-hygro-élasticité par Demirdžić *et al.* [38], de thermo-visco-élasticité par Bašić *et al.* [12] et Demirdžić [36], et enfin à l'élasticité incompressible par Wheel [81] et par Bijelonja *et al.* [17]. Ces méthodes sont basées sur l'écriture d'un gradient par interface qui interpole les gradients aux centres des cellules de contrôle, calculés par moindres carrés sur les plus proches voisins. La méthode de résolution numérique s'appuie sur un processus itératif en temps, en décomposant, de diverses façons, les

opérateurs discrets en une partie implicite et une partie explicite, afin d’assurer la convergence du processus.

Enfin, on peut également citer les méthodes de volumes finis mixtes ou « Mixed/Hybrid FV Method », développées par Droniou et Eymard [45] pour l’équation de Poisson anisotrope, et étendue très récemment par Di Pietro *et al.* [42] au problème de l’élasticité. Les auteurs définissent un opérateur gradient en chaque volume de contrôle, qui est ensuite utilisé pour définir une formulation variationnelle discrète qui imite la forme continue pour le champ de déplacements. Il se trouve que le schéma est instable pour des maillages de type triangulaire en 2d ou tétraédrique en 3d. Afin de stabiliser cette formulation et de réduire les degrés de liberté, la composante tangentielle du déplacement en chaque face est alors interpolée par moindres carrés sur les faces voisines, ce qui conduit à la résolution d’un système linéaire à un degré de liberté par interface (celui de la composante normale du déplacement).

## **Partie I, Chapitre 1 : Reconstruction du Gradient par Moindres Carrés (LSGR).**

La difficulté des schémas VF appliqués à l’élasticité linéaire réside dans la construction de gradients complets par interfaces, et non plus de leur composante normale. Dans le Chapitre 1, on reprend l’idée du schéma LSGR, introduit par Demirdžić *et al.* [37], qui construit des gradients par volumes en utilisant une méthode de moindres carrés pondérés sur les plus proches voisins, c’est-à-dire qui attribuent un poids plus important aux voisins les plus proches. Les gradients par faces sont ensuite construits en interpolant les gradients en chaque volume contenant la face. On construit ainsi un tenseur des contraintes discret en chaque face. Le schéma LSGR est ensuite testé pour des maillages généraux en 3d, et les résultats numériques sont comparés à leur solution analytique dans le premier exemple, et à ceux obtenus avec des EF  $P1$  dans les deux cas suivants.

## **Partie I, Chapitre 2 : Schémas Volumes Finis Mixtes.**

Dans le Chapitre 2, on étend les Volumes Finis Mixtes introduits par Droniou [44] et Droniou et Eymard [45] pour le problème de diffusion anisotrope au problème de l’élasticité linéaire. La particularité de ce schéma est de considérer dans un premier temps l’opérateur gradient, et par conséquent l’opérateur contrainte  $\sigma$ , comme une inconnue à part entière. On cherche alors à approcher le déplacement et le gradient des déplacements par volumes primaux, puis les flux en chaque interface du maillage. On ajoute à ces inconnues le déplacement en chaque face, afin de traiter le cas discontinu. Ces jeux d’inconnues sont liées par une équation de Taylor, à laquelle est ajouté un terme de pénalisation, afin d’assurer l’existence des flux numériques. Une écriture géométrique proche de la formule de Green nous permet de lier l’approximation des gradients en chaque volume et leurs flux aux interfaces du maillage, et l’écriture intégrale de l’équation de l’élasticité discrète permet d’écrire les déplacements en chaque volume en fonction des déplacements aux faces. Enfin, la propriété de conservation des flux aux interfaces du maillage conduit à un système linéaire à un degré de liberté par face. La difficulté réside dans le fait que le schéma volumes finis mixtes appliqué à l’élasticité n’est pas inversible pour un maillage de simplexes (triangles en 2d, tétraèdres en 3d), car pour ce type de maillage, la pénalisation n’a, à notre connaissance, aucun effet sur la non inversibilité de la matrice. Ce phénomène est observé numériquement, et sa preuve reste un problème ouvert. Il a néanmoins également été récemment observé par Di Pietro *et al.* [42], où est proposée une autre méthode de résolution basée sur la séparation des composantes normales et tangentielles des inconnues discrètes en chaque interface. Du fait de la restriction sur le type de maillage utilisé, les résultats numériques sont réalisés sur des maillages de carrés en dimension 2, où la réponse volumes finis

mixtes est comparée à une solution analytique. Un dernier exemple, réalisé sur des maillages non structurés de quadrangles, compare en norme infinie la réponse VF mixtes à celle obtenue avec une méthode EF *P1*.

## Partie II : Schémas Volumes Finis Diamants.

Dans la Partie II, on développe le schéma Diamant en 2d et en 3d, qui permet de reconstruire les gradients par interfaces en utilisant des sous volumes de contrôle, appelés « volumes diamants ». Ils sont obtenus en joignant une arête (en 2d) ou une face (en 3d) du maillage au centre d'un volume primal qu'elle sépare (un triangle en 2d, un tétraèdre en 3d). Ainsi, on construit un gradient par interface via la formule de Green qui interpole les déplacements aux centres, aux sommets et aux interfaces des volumes diamants associés à l'interface. Pour ce faire, on définit trois jeux d'inconnues : *principales* (aux centres des volumes), *secondaires* (aux sommets des volumes) et *auxiliaires* (aux centres des interfaces). Les inconnues auxiliaires sont éliminées algébriquement d'une part en écrivant la condition de conservation des flux à travers les interfaces internes du maillage, qui fait la spécificité de tout schéma VF, et d'autre part en imposant les conditions de bord. Les inconnues secondaires quant à elles sont interpolées par une méthode de moindres carrés pondérés sur les inconnues aux centres des volumes partageant un sommet commun. Cette interpolation fait perdre au schéma sa symétrie, et des conditions sur l'aspect du maillage et sur les interpolants doivent être faites afin d'assurer la stabilité/coercivité du schéma VF diamant. On montre que sous ces conditions, le schéma VF diamants est convergent d'ordre 1. Cette méthode est relativement coûteuse en temps de calcul, notamment en 3d, et est peu adaptée à des conditions de bord mixtes (difficultés avec les conditions de bord de Neumann). Les résultats numériques sont néanmoins réalisés pour des conditions de bord mixtes, avec forçage non nul, sur des maillages quelconques en 2d et en 3d. On compare les solutions volumes finis diamants à des cas tests ayant des solutions analytiques dans un premier temps, puis, pour d'autres exemples, les résultats sont comparés à ceux obtenus par une méthode EF *P1*.

## Partie III : Schémas DDFV (Discrete Duality Finite Volume).

Pour la méthode DDFV, l'équation de l'élasticité est intégrée une première fois sur le maillage primal, conduisant à un schéma numérique dont les inconnues associées aux centres et aux sommets de chaque volume primal sont solution. Puis, on construit un maillage « dual » de telle sorte que les inconnues associées aux centres des volumes primaux sont associées aux sommets des volumes duaux, et que les inconnues associées aux sommets des volumes primaux sont associées aux centres des volumes duaux. On intègre alors une seconde fois l'équation de l'élasticité sur ce maillage dual. Le troisième maillage, appelé « maillage demi diamant » (qui est l'équivalent du maillage diamant de la Partie II), permet de lier ces deux systèmes numériques grâce à une formule de dualité discrète, appelée « formule de Green ». Cette amélioration vis-à-vis du schéma VF diamant permet de conserver la symétrie du système, si bien que les résultats de convergence sont prouvés sans avoir à émettre d'hypothèses supplémentaires, si ce n'est que l'on admet l'inégalité de Korn pour des conditions de bord mixtes. On montre que le schéma DDFV est bien posé, et stable pour des conditions de bord homogènes. La convergence est ensuite établie, et montre une convergence d'ordre 1, tandis que les résultats numériques montrent une convergence à l'ordre 2 pour les normes  $L^1$  et  $L^2$ , phénomène assez fréquent pour les schémas DDFV. Précisons que là encore, les résultats numériques sont tantôt comparés à des réponses analytiques, tantôt à des réponses de type EF *P1*.

Première partie

**Méthodes de gradients**



# Chapitre 1

## Schéma 3D Least Squares Gradient Reconstruction (LSGR)

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Maillages et notations</b>	<b>16</b>
1.2.1	Maillages	16
1.2.2	Notations	17
<b>1.3</b>	<b>Description du schéma numérique</b>	<b>17</b>
1.3.1	Reconstruction du gradient par moindres carrés pondérés	18
1.3.2	Conditions de bord	19
<b>1.4</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>20</b>
1.4.1	Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène.	20
1.4.2	Cas E.2.2 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou	21
1.4.3	Cas E.2.3 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou	23
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>24</b>

---

### 1.1 Introduction

Historiquement, les méthodes de reconstruction de gradient par moindres carrés, ou Least Squares Gradient Reconstruction (LSGR), figurent parmi les premières testées pour la résolution de l'élasticité linéaire sur des maillages généraux. Ces méthodes consistent à reconstruire des gradients par volumes, en utilisant des méthodes de moindres carrés pondérés.

Les méthodes LSGR ont été testées avec succès pour divers problèmes physiques, comme par exemple pour les équations de convection-diffusion par Baliga et Patankar [10] ou dans le domaine de la mécanique des fluides en général par Demirdžić *et al.* [37, 41] et Muzaferija et Gosman [74], dans le domaine de l'électrostatique par Nealen [75], pour les problèmes de l'élasticité linéaire par Demirdžić *et al.* [17, 38, 39, 40, 12, 36], Fryer *et al.* [54], Wheel [81], ou encore pour les problèmes d'interactions fluides solides par Jasak *et al.* [65, 66, 67], Slone *et al.* [77], et par Greenshields et Weller [57].

La première occurrence de la méthode LSGR est faite par Baliga et Patankar [10] pour la résolution du problème de convection-diffusion. Elle a ensuite été utilisée dans grand nombre d'autres problèmes de la mécanique des fluides (voir par exemple Demirdžić *et al.* [37, 41], Muzaferija et Gosman [74]). Puis cette méthode a été appliquée au problème de l'élasticité stationnaire par Fryer *et al.* [54], puis par Demirdžić et Muzaferija [39] qui traitent du problème

de thermo-élasticité linéaire avec conditions de bord mixtes Neumann/Dirichlet homogènes. Dans [40], le problème considéré est instationnaire, et un découplage implicite en temps est opéré. Le problème de l'élasticité incompressible est ensuite traité par Slone *et al.* [77] et Wheel [81], où les inconnues en déplacement et en pression sont collocalisées, cette dernière étant déterminée par la condition d'incompressibilité.

Des problèmes d'interactions fluides/structures sont introduits par Demirdžić et Muzaferija [40] Jasak [65] et Jasak et Weller [66, 67]. Dans [40], les auteurs s'intéressent au couplage de la thermo-élasticité et des fluides Newtoniens. Chaque équation couplée est traitée séparément, de sorte que l'algorithme final conduit à un calcul simple de la pression hydrostatique. Des tests numériques ont été réalisés sur la modélisation d'un moteur à combustion. Dans [66], le tenseur des contraintes est décomposé en une partie traitée de manière implicite à partir du tenseur gradient et en une partie traitée de manière explicite et obtenue à partir des tenseurs transposée du gradient et divergence. Cette décomposition peut être interprétée comme un terme en cisaillement et un terme de rotation pure. Ceci engendre la création d'une matrice à diagonale strictement dominante, bien adaptée pour les solveurs itératifs. Les auteurs modélisent ensuite le problème de l'élasticité linéaire instationnaire, avec conditions de bord mixtes homogènes, pour des domaines composés d'un seul matériau. Une extension aux problèmes de contacts entre plusieurs solides en 2d est précisée en [67]. D'autres problèmes d'interactions ont été développés, comme par exemple le cas de matériaux composites soumis à l'humidité ambiante par Demirdžić *et al.* [38]. Ce problème est modélisé par l'équation d'hygro-thermo-élasticité, qui fait interagir les solides, les gradients de températures et l'humidité au cours du temps.

Cette partie s'articule comme suit : nous allons dans un premier temps décrire brièvement le maillage et les opérateurs discrets, puis dans un second temps exposer méthode de reconstruction de gradient par moindres carrés. Des résultats numériques par comparaison avec des solutions analytiques puis des solutions obtenues par éléments finis  $P1$  sont enfin présentés.

## 1.2 Maillages et notations

### 1.2.1 Maillages

Afin d'approcher la solution de l'équation de l'élasticité linéaire, on discrétise l'espace  $\Omega$  en un ensemble de volumes de contrôle contigus deux à deux disjoints, de sorte que

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \bar{K} = \bar{\Omega},$$

où  $\mathfrak{M}$  représente l'ensemble des volumes  $K$ . Les volumes considérés sont donc des polyèdres que l'on note  $K$ . On associe à chaque volume  $K$  son centre de gravité, noté  $\mathbf{x}_K$ . Les faces des volumes  $K$  sont notées  $\partial K$ , et le nombre de faces de  $K$  est noté  $\#\partial K$ . L'ensemble des faces du maillage est noté  $\mathcal{E}$ . Lorsqu'une face  $s$  est sur le bord, on note  $s \in \mathcal{E}^b$ , en faisant la distinction  $s \in \mathcal{E}^{bN}$  si celle-ci est sur Neumann et  $s \in \mathcal{E}^{bD}$  si celle-ci est sur Dirichlet, de sorte que

$$\mathcal{E}^b = \mathcal{E}^{bN} \cup \mathcal{E}^{bD}.$$

Enfin, lorsqu'une face n'est pas sur le bord du domaine, elle est dite interne  $s \in \mathcal{E}^{int}$ , de sorte que

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^b.$$

On associe à toute face son centre de gravité  $\mathbf{x}_s$ .

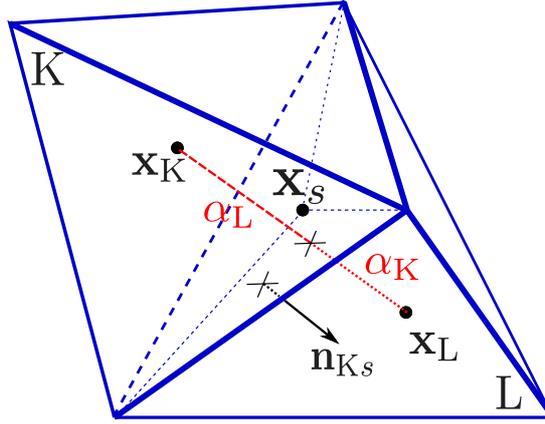


FIGURE 1.2.1 – Volumes de contrôle et notations

### 1.2.2 Notations

On introduit les notations suivantes : pour tout volume primal  $K$

- $|K|$  représente la mesure de  $K$ ,
- $|s|$  représente la mesure de la face  $s$ ,
- $\mathbf{n}_{K_s}$  représente la normale unitaire sortante de  $K$  à la face  $s$ ,
- $\mathbf{N}_{K_s} = |s|\mathbf{n}_{K_s}$  représente la normale sortante de  $K$  à la face  $s$ ,
- $\#\mathfrak{M}$  représente le cardinal de  $\mathfrak{M}$ .

Comme illustré en Figure 1.2.1, on définit pour toute face  $s = K \cap L$  les poids d'interpolation  $\alpha_L$  et  $\alpha_K$  par

$$\alpha_L = \frac{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \cdot \mathbf{n}_{K_s}}{(\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K) \cdot \mathbf{n}_{K_s}} \quad \text{et} \quad \alpha_K = 1 - \alpha_L. \quad (1.1)$$

#### Remarque 1.2.1

Remarquons que dans le cas de maillages admissibles (condition d'orthogonalité entre le segment  $[\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_L]$  et la face  $s$ ), les poids d'interpolation (1.1) ont pour expression

$$\alpha_L = \frac{\|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K\|}{\|\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K\|} \quad \text{et} \quad \alpha_K = \frac{\|\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_s\|}{\|\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K\|}.$$

### 1.3 Description du schéma numérique

Afin d'obtenir une approximation volumes finis de l'équation de l'élasticité linéaire, on intègre celle-ci sur tout volume  $K$  de  $\mathfrak{M}$ , et on utilise la formule de Green pour écrire

$$\begin{cases} - \sum_{s \in \partial K} \int_s \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}_{K_s} = |K| \mathbf{f}_K & \forall K \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{u}_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s) & \forall s \in \mathcal{E}^{bD}, \\ \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}_{K_s} = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \forall s \in \mathcal{E}^{bN}, \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{f}_K = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  représente le forçage moyen en chaque volume  $K$ . La méthode des volumes finis consiste à chercher une valeur moyenne du déplacement sur chaque volume  $K$  : on note  $\mathbf{u}^\tau = (\mathbf{u}_K)_{K \in \mathfrak{M}}$  le déplacement discret solution du système

$$- \sum_{s \in \partial K} |s| (\mu_K (\nabla \mathbf{u}|_s + \nabla \mathbf{u}^T|_s) + \lambda_K \text{tr}(\nabla \mathbf{u}|_s)) \mathbf{n}_{Ks} = |K| \mathbf{f}_K. \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) nécessite pour chaque face l'évaluation du gradient des déplacements. Pour cela, nous effectuons une approximation de type *Central Differencing* (CD), telle que décrite dans [66]. Cette approximation consiste à interpoler le gradient à l'interface à partir des gradients approchés sur les volumes environnants. Bien qu'il existe plusieurs façons de choisir les voisins, nous faisons le choix ici de prendre les deux voisins qui partagent la face  $s = K \cap L$ . Ainsi, le terme  $\nabla \mathbf{u}|_s$  est déterminé par

$$\nabla \mathbf{u}|_s = \alpha_K \nabla \mathbf{u}|_K + \alpha_L \nabla \mathbf{u}|_L \quad (1.4)$$

où les interpolants  $\alpha_K$  et  $\alpha_L$  sont définis par (1.1). Il est montré dans [51] que cette approximation est du second ordre pour des maillages admissibles, et du premier ordre pour des maillages généraux. Dans ce cas, il existe des corrections non orthogonales afin de se ramener à une interpolation du second ordre (voir par exemple [65, 4]). Résoudre l'équation (1.3) revient donc à construire un gradient discret par volume  $K \in \mathfrak{M}$ . Pour ce faire, nous allons procéder à une construction du gradient par la méthode des moindres carrés pondérés telle que décrite dans [4], qui donne son nom au schéma numérique.

### 1.3.1 Reconstruction du gradient par moindres carrés pondérés

On considère un volume  $K \in \mathfrak{M}$  et on pose  $p = \#\partial K$ . Pour  $i = \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $K_i \in \mathfrak{V}(K)$  les volumes voisins de  $K$ , i.e. partageant une face avec  $K$ , comme illustré dans la Figure 1.3.1. Lorsque cette face est sur le bord, on assimile le volume voisin à la face. On pose  $s_i = K \cap K_i$ . En écrivant un développement de Taylor pour n'importe laquelle des composantes  $\phi_K$  de  $\mathbf{u}_K$ ,

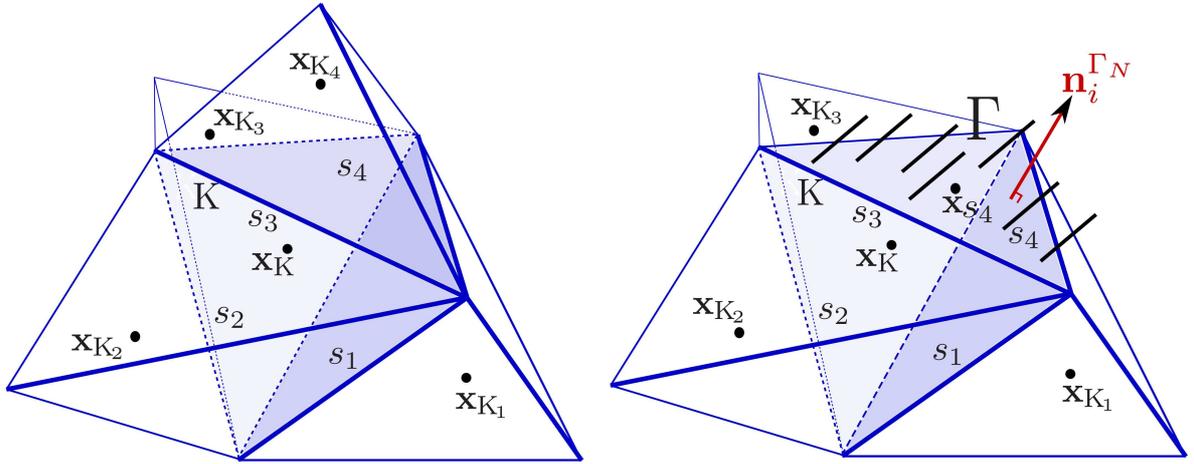


FIGURE 1.3.1 – Reconstruction du gradient par moindres carrés pour un volume tétraédrique : volumes voisins de  $K$  lorsque toutes les faces sont internes (gauche), lorsque une des faces est sur le bord (droite)

on a pour tout  $i = \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\phi_{K_i} = \phi_K + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_K (x_{K_i} - x_K) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_K (y_{K_i} - y_K) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_K (z_{K_i} - z_K) + o(\text{size}(\mathcal{T})).$$

La formule de Taylor entre les voisins  $K_i$  et le volume  $K$  conduit à chercher le gradient de la composante  $\phi$  de  $\mathbf{u}$  comme solution du système surdéterminé

$$\begin{pmatrix} x_{K_1} - x_K & y_{K_1} - y_K & z_{K_1} - z_K \\ x_{K_2} - x_K & y_{K_2} - y_K & z_{K_2} - z_K \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{K_p} - x_K & y_{K_p} - y_K & z_{K_p} - z_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_K \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_K \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{K_1} - \phi_K \\ \phi_{K_2} - \phi_K \\ \dots \\ \dots \\ \phi_{K_p} - \phi_K \end{pmatrix}.$$

Il est également fréquent d'introduire une matrice diagonale de poids, notée  $W = (w_{i,i})_{i=\llbracket 1,p \rrbracket}$ , avec  $w_{i,i} = \|\mathbf{x}_{K_i} - \mathbf{x}_K\|^{-c}$ . Les valeurs usuelles de  $c$  sont  $c = 0$  (LS),  $c = 1$  (WLSID, ce qui est le cas ici),  $c = 2$  (WLSID2). Cette matrice  $W$  a pour rôle d'attribuer un poids plus important aux plus proches voisins de  $K$ . Le système linéaire est résolu au sens des moindres carrés (voir Barth [11])

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p w_{i,i} (x_{K_i} - x_K)^2 & \sum_{i=1}^p w_{i,i} (x_{K_i} - x_K)(y_{K_i} - y_K) & \sum_{i=1}^p w_{i,i} (x_{K_i} - x_K)(z_{K_i} - z_K) \\ \sum_{i=1}^p w_{i,i} (x_{K_i} - x_K)(y_{K_i} - y_K) & \sum_{i=1}^p w_{i,i} (y_{K_i} - y_K)^2 & \sum_{i=1}^p w_{i,i} (y_{K_i} - y_K)(z_{K_i} - z_K) \\ \sum_{i=1}^p w_{i,i} (x_{K_i} - x_K)(z_{K_i} - z_K) & \sum_{i=1}^p w_{i,i} (y_{K_i} - y_K)(z_{K_i} - z_K) & \sum_{i=1}^p w_{i,i} (z_{K_i} - z_K)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_K \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_K \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p w_{i,i} (x_{K_i} - x_K)(\phi_{K_i} - \phi_K) \\ \sum_{i=1}^p w_{i,i} (y_{K_i} - y_K)(\phi_{K_i} - \phi_K) \\ \sum_{i=1}^p w_{i,i} (z_{K_i} - z_K)(\phi_{K_i} - \phi_K) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Le système de minimisation (1.5) a une unique solution car les points  $\mathbf{x}_{K_i}$  ne sont pas tous alignés. Les gradients discrets sont ainsi calculés *a priori*, ce qui permet de construire le tenseur des contraintes discret par volume  $K \in \mathfrak{M}$ .

### 1.3.2 Conditions de bord

Le bord du domaine est soumis à des conditions de bord dites mixtes, mêlant bord de Dirichlet (déplacement imposé sur  $\Gamma_D$ ) et bord de Neumann (traction imposée sur  $\Gamma_N$ ). Par convention, lorsque  $s \in \mathcal{E}^b$  est une face de bord, on remplace le volume  $K_i$  par la face  $s$  et on note  $\mathbf{u}_s = \mathbf{u}_{K_i}$  le déplacement de la face  $s$ .

#### Bord de Dirichlet

Le déplacement sur le bord de Dirichlet s'écrit

$$\mathbf{u}_{K_i} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s). \quad (1.6)$$

## Bord de Neumann

On considère un volume  $K \in \mathfrak{M}$  dont une des faces  $s$  est sur le bord de Neumann. Soient  $K_i \in \mathbb{V}(K)$  les volumes voisins de  $K$ . Dans ce cas, le gradient au volume  $K$  s'exprime via la formule (1.5) en fonction des différences  $\mathbf{u}_{K_i} - \mathbf{u}_K$  et  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K$ . Afin d'éliminer l'inconnue  $\mathbf{u}_s$  associée à la face  $s$ , on écrit, en première approximation, que

$$(\mu_K(\nabla \mathbf{u}|_K + \nabla \mathbf{u}^T|_K) + \lambda_K \text{tr}(\nabla \mathbf{u}|_K)) \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.7)$$

où  $\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}$  est la normale unitaire de la face  $s_i$  dirigée vers l'extérieur du domaine  $\Omega$  comme représenté dans la Figure 1.3.1. Cette relation nous permet d'exprimer  $\mathbf{u}_s$  en fonction des différences  $\mathbf{u}_{K_i} - \mathbf{u}_K$  et de  $\mathbf{h}$ . Cette expression est ensuite remplacée dans (1.5), afin d'obtenir la valeur du tenseur des contraintes discret au volume  $K$ .

## 1.4 Illustrations numériques

Nous allons à présent illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment par une série de tests numériques. Le premier exemple, présenté en section 1.4.1, est un cas test possédant une solution analytique. La réponse 3d-LS sera donc comparée à la solution exacte. Les exemples suivants des section 1.4.2 et section 1.4.3 sont comparés à la réponse éléments finis  $P1$  conforme en 3d. Cette dernière méthode est d'ordre au moins 1, de sorte que l'estimation de l'erreur entre les éléments finis et les volumes finis mesure l'erreur entre les volumes finis et la solution exacte. La description de chaque exemple numérique est donnée en Annexe E.2.

### 1.4.1 Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène.

En Figure 1.4.1, où les déplacements sont multipliés par 10 par souci de clarté, et où le cube est visualisé avec une rotation de  $90^\circ$  suivant l'axe de  $z$  (la face  $\gamma_1$  est devant), on note que les déplacements obtenus avec la méthode LS sont conformes à ceux obtenus à partir de la solution exacte.

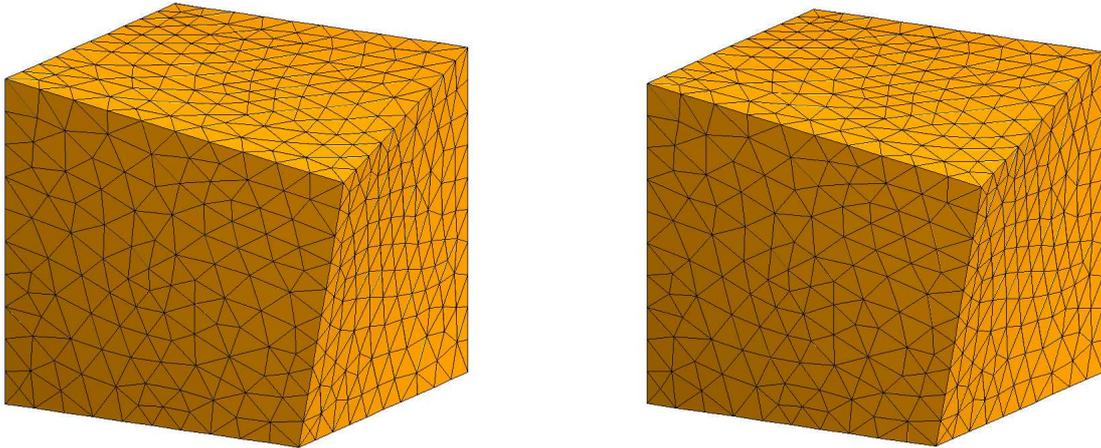


FIGURE 1.4.1 – Cas E.2.1 : réponse du déplacement par LS (gauche) et solution exacte (droite).

Les résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans le Tableau 1.4.1 pour les valeurs, et dans la Figure 1.4.2 pour le tracé. On observe sur le déplacement une convergence à l'ordre 0.5 du schéma en norme infinie.

Volumes	$h$	$\ u_{LS} - u_{Exact}\ _\infty$	$\ u_{LS} - u_{Exact}\ _1$	$\ u_{LS} - u_{Exact}\ _2$
593	$2.25 \cdot 10^{-1}$	$3.84 \cdot 10^{-3}$	$5.34 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$
5513	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$1.99 \cdot 10^{-3}$	$1.51 \cdot 10^{-4}$	$3.21 \cdot 10^{-4}$
17717	$7.97 \cdot 10^{-2}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$	$8.71 \cdot 10^{-5}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$
48483	$5.99 \cdot 10^{-2}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$5.66 \cdot 10^{-5}$	$1.27 \cdot 10^{-4}$

Tableau 1.4.1 – Cas E.2.1 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

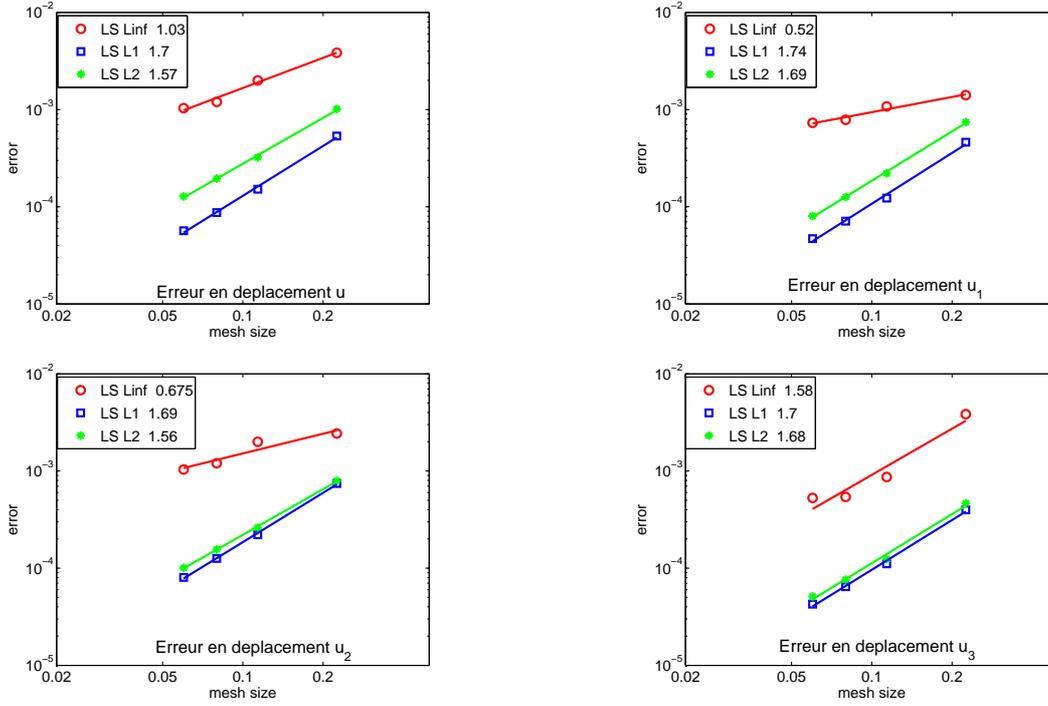


FIGURE 1.4.2 – Cas E.2.1 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés.

## 1.4.2 Cas E.2.2 : Déformation d’un barreau homogène percé d’un trou

Dans les figures 1.4.3 et 1.4.4 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode LS ainsi que par éléments finis. Les résultats sont obtenus avec 4840 tétraèdres.

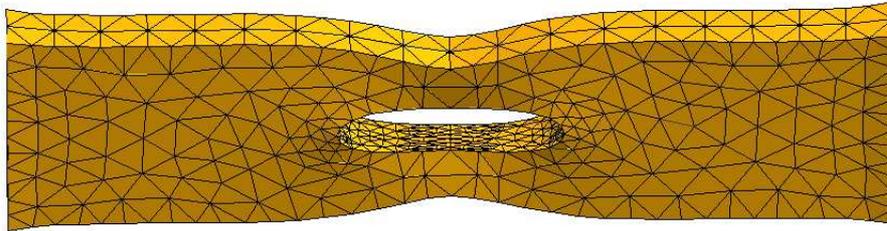


FIGURE 1.4.3 – Cas E.2.2 : réponse du déplacement obtenu avec la méthode LS

A présent, nous allons présenter les résultats d’estimation d’erreur. Les résultats sont présentés pour une série de maillages successivement raffinés (Tableau 1.4.2). Les courbes de convergence sont présentées dans la Figure 1.4.5. On observe sur le déplacement une convergence

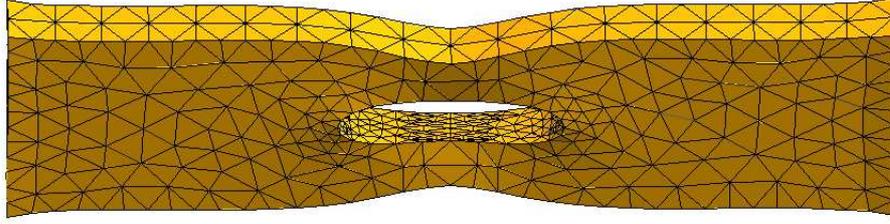


FIGURE 1.4.4 – Cas E.2.2 : réponse du déplacement obtenu par éléments finis

proche de l'ordre 1 du schéma pour les normes  $L^1$  et  $L^2$ .

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{LS} - \mathbf{u}_{EF}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{LS} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{LS} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
860	$2.76 \cdot 10^{-1}$	$4.34 \cdot 10^{-2}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$	$2.41 \cdot 10^{-2}$
2632	$1.93 \cdot 10^{-1}$	$3.16 \cdot 10^{-2}$	$6.47 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-2}$
4146	$1.45 \cdot 10^{-1}$	$1.97 \cdot 10^{-2}$	$5.39 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$
14942	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$5.99 \cdot 10^{-2}$	$6.16 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$
22600	$8.73 \cdot 10^{-2}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-3}$	$4.07 \cdot 10^{-3}$
36188	$7.42 \cdot 10^{-2}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$	$5.47 \cdot 10^{-3}$

Tableau 1.4.2 – cas E.2.2 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

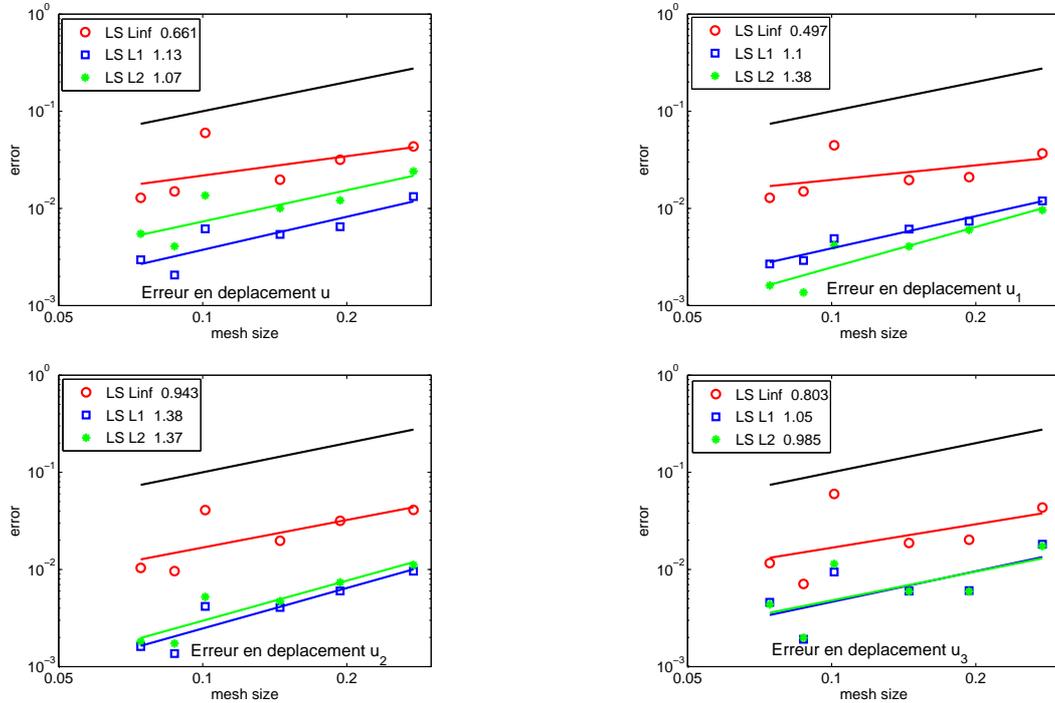


FIGURE 1.4.5 – Cas E.2.2 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés et droite de pente 1 (en noir).

### 1.4.3 Cas E.2.3 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou

Étendons le cas précédent en soudant deux matériaux entre eux, pour former un « bido-main ». Dans les figures 1.4.6 et 1.4.7 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode LS ainsi que par éléments finis. La Figure 1.4.6 correspond à un matériau composé d'acier à gauche (en foncé) et d'aluminium à droite (en clair). Étant donné que l'acier possède un module d'Young plus grand que l'aluminium, c'est ce dernier qui se déforme le plus, et c'est ce qui se remarque dans ces figures. Dans la Figure 1.4.7, les matériaux sont intervertis (aluminium à gauche, acier à droite). Le même phénomène est observé.

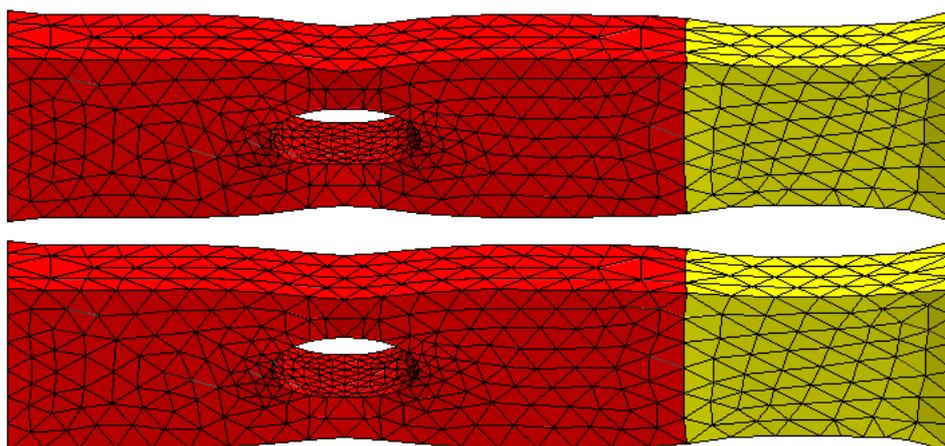


FIGURE 1.4.6 – Cas E.2.3 : réponse du déplacement acier (sombre) / aluminium (clair) par LS (en haut) et par éléments finis (bas).

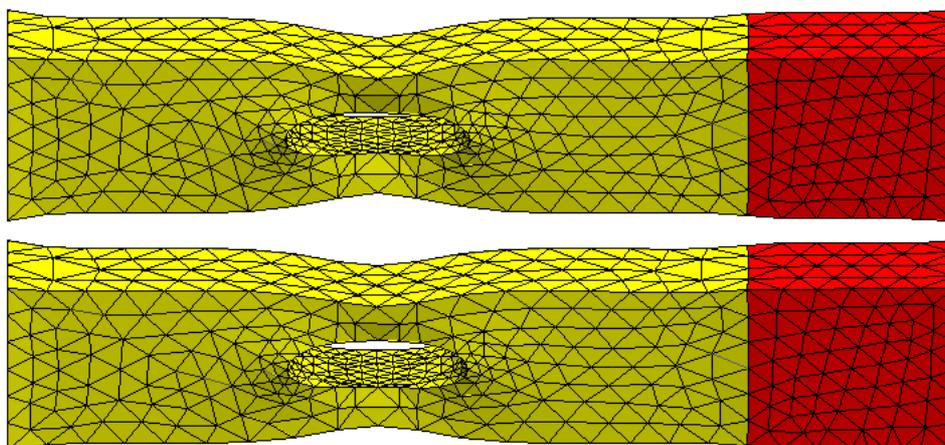


FIGURE 1.4.7 – Cas E.2.3 : réponse du déplacement aluminium (clair) / acier (sombre) par LS (en haut) et par éléments finis (bas).

Intéressons-nous à présent aux estimations d'erreur. Comme pour le Cas E.2.3, on compare les réponses LS et éléments finis pour une série de maillages raffinés successivement.

On constate à travers ces deux exemples que la convergence de la méthode LS est numériquement vérifiée. L'estimation d'erreur de la méthode par éléments finis est en théorie d'ordre 2. Tous les graphiques concernant ces estimations d'erreurs montrent un ordre de convergence proche de 1.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{LS} - \mathbf{u}_{EF}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{LS} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{LS} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
5067	$1.58 \cdot 10^{-1}$	$3.28 \cdot 10^{-2}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$
26618	$9.14 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$4.66 \cdot 10^{-3}$	$6.33 \cdot 10^{-3}$
36874	$1.10 \cdot 10^{-1}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$4.22 \cdot 10^{-3}$	$5.54 \cdot 10^{-3}$
60492	$7.89 \cdot 10^{-2}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$	$5.47 \cdot 10^{-3}$

Tableau 1.4.3 – Cas E.2.3 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

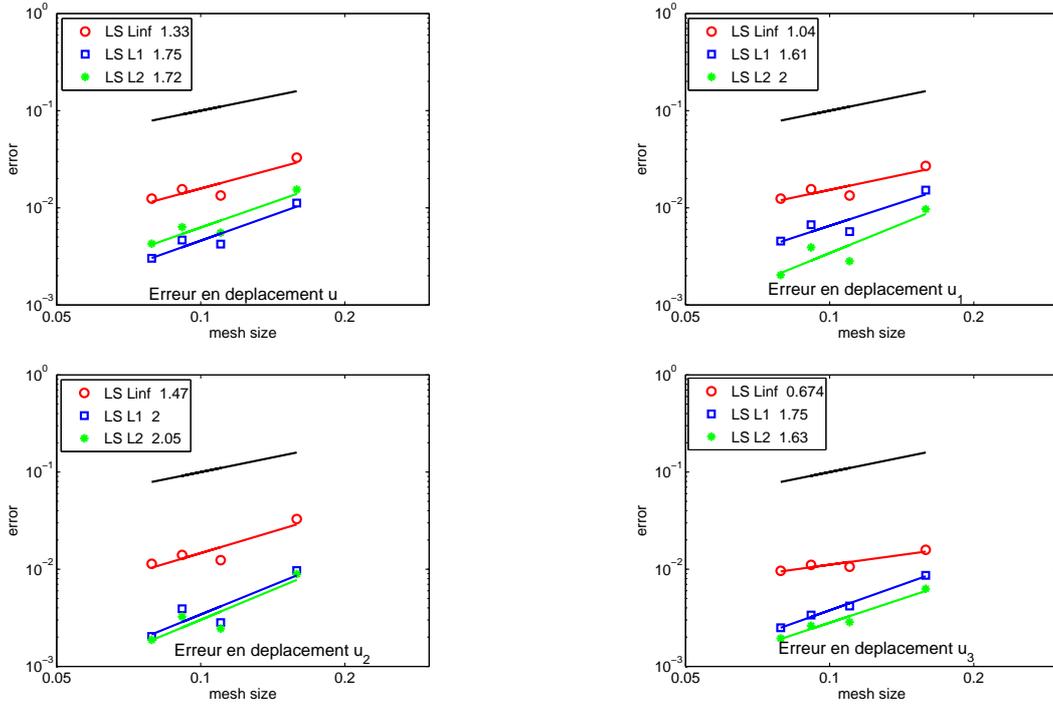


FIGURE 1.4.8 – Cas E.2.3 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés et droite de pente 1 (en noir).

## 1.5 Conclusion

Nous avons mis en place une méthode VF plutôt simple et performante pour la résolution du problème de l’élasticité linéaire. Cette méthode s’adapte parfaitement au cas non homogène, et à n’importe quelle dimension d’espace. Par ailleurs, les poids d’interpolation étant calculés *a priori*, aucune restriction sur le maillage n’est réalisée, ce qui implique que la méthode LSGR s’applique à n’importe quel type de maillage. Les tests numériques indiquent que cette méthode est d’ordre 1 pour l’approximation du déplacement. Le premier test numérique a été choisi pour le caractère complet de ses conditions de bord, où sont imposés à la fois des déplacements, des conditions de traction et une condition de forçage. Le dernier cas, comparé à une réponse de type éléments finis  $P1$ , montre que la méthode est aussi performante dans le cas de discontinuités des coefficients de Lamé. La méthode LSGR est assez simple à mettre en œuvre. Cependant, il n’existe pas à notre connaissance de résultats théoriques montrant la convergence.

# Chapitre 2

## Schéma 2D VF mixtes

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Maillages et notations</b>	<b>26</b>
2.2.1	Maillages	26
2.2.2	Notations	27
2.2.3	Régularité du maillage	27
<b>2.3</b>	<b>Schéma numérique</b>	<b>27</b>
2.3.1	Inconnues discrètes	27
2.3.2	Système d'équations	28
2.3.3	Conditions de Bord	28
2.3.4	Algorithme	29
<b>2.4</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>31</b>
2.4.1	Quelques aspects numériques	32
2.4.2	Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale	32
2.4.3	Cas E.1.4 : Déformation d'un carré homogène. Solution non polynomiale	33
2.4.4	Cas E.1.7 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou	34
2.4.5	Cas E.1.8 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou	37
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>

---

### 2.1 Introduction

Des méthodes volumes finis à deux points ont historiquement été élaborées pour calculer le gradient normal sur une interface. Cependant, ces dernières ne sont plus valables dans le cas où les maillages sont non orthogonaux (ou non admissibles), c'est-à-dire lorsque le segment reliant deux centres de volumes séparés par une arête n'est plus perpendiculaire à l'arête, ou bien en présence d'opérateurs anisotropes. C'est le cas des maillages raffinés localement. Pour ce type de maillage, un schéma à deux points n'est plus suffisant. Les méthodes multi-points (MPFA) ont ensuite été développées par Aavatsmark *et al.* [2, 3, 1] et Faille [50], qui reconstruisent l'opérateur du second ordre du problème à partir d'un petit nombre de points. Les schémas éléments finis mixtes (MFE) ont ensuite été mis en place par Arbogast *et al.* [9, 8] et Younes *et al.* [82].

Les volumes finis mixtes (MFV) ont ensuite été introduits par Droniou et Eymard dans [45] pour le problème de diffusion anisotrope. Ils ont ensuite été testés pour les équations elliptiques non-linéaires de type Leray-Lions par Droniou [44]. Ce type d'équations intervient

par exemple pour la simulation du mouvement des glaciers, pour l'écoulement de fluides turbulents incompressibles à travers des milieux poreux. Beirão da Veiga *et al.* [13] traitent de l'équation de convection-diffusion, et un lien est fait entre les schémas VF mixtes, les volumes finis hybrides, les schémas volumes finis mimétiques et les éléments finis mixtes (voir également Droniou *et al.* [47] pour le problème de Poisson avec condition de bord homogène). Le problème de Stokes et de Navier Stokes est également abordé par Droniou et Eymard [46]. Citons également Chainais-Hillairet et Droniou [24] qui étudient un problème couplé de type elliptique/parabolique décrivant le déplacement d'un fluide miscible dans un milieu poreux.

Le principe de la méthode des volumes finis mixtes est de ne pas reconstruire le tenseur des contraintes ainsi que son flux à travers les interfaces à partir des valeurs de la solution discrète, mais de les considérer dans un premier temps comme des inconnues à part entière. Le nom de la méthode vient du fait que l'on cherche à la fois l'inconnue et son gradient par volume, et son flux par face. Dans le cas de milieux hétérogènes, comme c'est le cas ici, un jeu d'inconnues par faces est ajouté.

Dans le cas de l'élasticité linéaire hétérogène, les inconnues par volumes sont éliminées en intégrant l'équation sur chaque volume de contrôle, que l'on transforme grâce à la formule de Green en un flux à travers les interfaces des volumes. Les opérateurs discrets (gradient, divergence) sont construits de façon à ce que le tenseur des contraintes respecte la relation de continuité des flux à travers les interfaces du maillage, condition inhérente aux méthodes volumes finis. Enfin, le système est fermé en écrivant une formule de géométrie, qui permet d'exprimer le gradient discret en chaque volume à partir de son flux sur le bord du volume, et une formule de Taylor que l'on pénalise, afin d'assurer l'existence de la solution du schéma numérique. Plus précisément, la méthode VF mixtes présentée (avec pénalisation) ne possède pas de solution numérique pour des simplexes (triangles en 2d, tétraèdres en 3d).

Nous présentons ici la méthode VF mixtes en dimension 2, pour des polygones d'au moins 4 côtés. En section 1 sont rappelés les maillages et les notations utilisés. En section 2, nous présentons le schéma numérique. On approche le champ des déplacements aux centres des volumes et aux centres des faces, le gradient en chaque volume, ainsi que les flux du gradient, transposée gradient et de la matrice divergence du gradient en chaque interface du maillage. L'algorithme de résolution numérique est ensuite décrit, afin d'obtenir un système certes sans structure simple, mais qui ne fait intervenir que le déplacement aux interfaces du maillage. Enfin, en section 3 sont présentés deux résultats de convergence numérique avec estimation d'erreurs pour un problème possédant une solution analytique. Le maillage utilisé est un maillage cartésien, composé de carrés. La convergence numérique est d'ordre 1 pour les déplacements. Un dernier exemple réalisé avec un maillage de quadrangles non structuré est présenté, et la réponse VF mixtes est comparée en norme infinie à celle obtenue par une méthode EF  $P_1$ .

## 2.2 Maillages et notations

### 2.2.1 Maillages

On considère un ensemble de volumes de contrôle polygonaux contigus, qui ne se recouvrent pas, de sorte que

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \bar{K} = \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2.$$

où on a noté  $\mathfrak{M}$  l'ensemble de ces polygones. On associe à chaque volume  $K$  son centre de gravité, noté  $\mathbf{x}_K$ . Les arêtes des volumes  $K$  sont notées  $s$ , et l'ensemble des arêtes du domaine  $\Omega$  est noté  $\mathcal{E}$ . Lorsqu'une arête est sur le bord, on note  $s \in \mathcal{E}^b$ , en faisant la distinction  $s \in \mathcal{E}^{bN}$

si celle-ci est sur Neumann et  $s \in \mathcal{E}^{bD}$  si celle-ci est sur Dirichlet, de sorte que

$$\mathcal{E}^b = \mathcal{E}^{bN} \cup \mathcal{E}^{bD}.$$

Enfin, lorsqu'une arête n'est pas sur le bord du domaine, elle est dite interne :  $s \in \mathcal{E}^{int}$ . On associe à toute arête son centre des gravité  $\mathbf{x}_s$ . On note  $\partial K$  l'ensemble des arêtes d'un volume  $K$ , en différenciant les arêtes sur le bord de Neumann ( $\partial K^{bN}$ ) ou de Dirichlet ( $\partial K^{bD}$ ), des arêtes internes ( $\partial K^{int}$ ).

### 2.2.2 Notations

On introduit les notations suivantes : pour tout volume primal  $K$ ,

- $|K|$  représente la mesure de  $K$ ,
- $|s|$  représente la mesure de l'arête  $s$ ,
- $\mathbf{n}_{Ks}$  représente la normale unitaire sortante de  $K$  à l'arête  $s$ ,
- $\mathbf{N}_{Ks} = |s|\mathbf{n}_{Ks}$  représente la normale sortante de  $K$  à l'arête  $s$ .

On note  $\mathcal{T} = \mathfrak{M} \cup \mathcal{E}$  la réunion de l'ensemble des volumes et de l'ensemble des arêtes.

### 2.2.3 Régularité du maillage

On introduit la quantité  $size(\mathcal{T})$  qui est le maximum des diamètres des volumes primaux  $K \in \mathfrak{M}$ . Cette quantité satisfait les majorations suivantes : il existe des constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que

$$|s| \leq C_1 size(\mathcal{T}), \quad \forall s \in \mathcal{E}; \quad |K| \leq C_2 size(\mathcal{T})^2, \quad \forall K \in \mathfrak{M}. \quad (2.1)$$

On suppose que la famille des maillages primaux satisfait les hypothèses de régularité suivantes : il existe des constantes  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \forall K \in \mathfrak{M}, \quad \alpha size(\mathcal{T})^2 \leq |K|, \quad \#\partial K \leq \gamma, \\ \forall s \in \mathcal{E}, \quad \beta size(\mathcal{T}) \leq |s|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

## 2.3 Schéma numérique

### 2.3.1 Inconnues discrètes

Le principe du schéma VF mixtes est de construire une approximation du tenseur des contraintes et des déplacements par volume  $K \in \mathfrak{M}$ , et une approximation des déplacements et du flux du tenseur des contraintes par arête  $s \in \mathcal{E}$ . Afin d'approcher l'inconnue  $\mathbf{u}$  sur le maillage, on définit un jeu d'inconnues constantes par volume primal  $\mathbf{u}_K$  et des inconnues constantes par arête  $\mathbf{u}_s$ . Ces inconnues sont rassemblées en

$$\mathbf{u}^\tau = \left( (\mathbf{u}_K)_{K \in \mathfrak{M}} \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}, (\mathbf{u}_s)_{s \in \mathcal{E}} \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{E}} \right) = (\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_s) \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}. \quad (2.3)$$

Le gradient discret par volume primal, noté  $\mathbf{v}_K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\mathfrak{M}}$ , représente l'approximation du gradient par volume primal, de sorte que pour tout  $K \in \mathfrak{M}$

$$\mathbf{v}_K \text{ approche } \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

Le flux discret du tenseur des contraintes  $\mathcal{F}_{Ks}$  associé à l'arête  $s$  du volume  $K$  approche quant à lui la composante normale du tenseur des contraintes à travers l'interface  $s$

$$\mathcal{F}_{Ks} \text{ approche } \int_s \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} d\mathbf{x}. \quad (2.5)$$

On décompose ce vecteur en 3 flux discrets à travers les interfaces du maillage : le flux du tenseur gradient  $\mathbf{F}_{Ks}^1$ , celui du tenseur transposé du gradient  $\mathbf{F}_{Ks}^2$  et celui du tenseur de divergence  $\mathbf{F}_{Ks}^3$ , de sorte que

$$\mathcal{F}_{Ks} = \mu_K \mathbf{F}_{Ks}^1 + \mu_K \mathbf{F}_{Ks}^2 + \lambda_K \mathbf{F}_{Ks}^3, \quad (2.6)$$

avec

$$\mathbf{F}_{Ks}^1 = v_K \mathbf{N}_{Ks} \text{ qui approche } \int_s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{Ks} d\mathbf{x}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F}_{Ks}^2 = (v_K)^T \mathbf{N}_{Ks} \text{ qui approche } \int_s (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \mathbf{n}_{Ks} d\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{F}_{Ks}^3 = \text{tr}(v_K) \mathbf{N}_{Ks} \text{ qui approche } \int_s \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} d\mathbf{x}. \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Système d'équations

Soit  $\nu = (\nu_K)_{K \in \mathfrak{M}} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\#\mathfrak{M}}$  une famille de nombres positifs. Les premières équations viennent des premiers termes du développement de Taylor

$$\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K = v_K (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \nu_K \mathbf{F}_{Ks}^1 \quad \forall K \in \mathfrak{M}, s \in \partial K \quad (2.10)$$

auxquels on ajoute un terme de pénalisation  $\nu_K \mathbf{F}_{Ks}^1$  nécessaire afin d'assurer l'existence d'une solution discrète. En pratique, on choisit  $\nu_K = \frac{10^{-9}}{|K|}$ . Le deuxième jeu d'équations reflète la conservation du flux du tenseur des contraintes discret à travers les interfaces du maillage

$$\mathcal{F}_{Ks} + \mathcal{F}_{Ls} = \mathbf{0} \quad \forall s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}. \quad (2.11)$$

Le troisième jeu d'équations traduit la formule de Green et donc le fait qu'on peut reconstruire un tenseur quelconque en un volume  $K$  grâce à l'écriture de son flux à travers les arêtes  $\partial K$

$$v_K = \frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} v_K \mathbf{N}_{Ks} \otimes (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \quad \forall K \in \mathfrak{M}. \quad (2.12)$$

Enfin, les dernières équations proviennent de l'intégration de l'équation de l'élasticité sur chaque volume  $K$  de  $\mathfrak{M}$

$$-\sum_{s \in \partial K} \mathcal{F}_{Ks} = \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall K \in \mathfrak{M}. \quad (2.13)$$

### 2.3.3 Conditions de Bord

Il faut bien sûr tenir compte des conditions au bord pour clore le système.

- **Bord de Dirichlet** : Lorsque  $s \in \mathcal{E}^{bd}$  est une face sur le bord de Dirichlet, on impose la condition

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s) \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_s)$  représente la valeur de la fonction de Dirichlet au point  $\mathbf{x}_s$ .

- **Bord de Neumann** : Lorsque  $s = K \cap \Gamma_N \in \mathcal{E}^{bN}$  est une face sur le bord de Neumann, on impose la condition

$$\mathcal{F}_{Ks} = |s| \mathbf{h}(\mathbf{x}_s) \quad (2.15)$$

où  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_s)$  représente la valeur de la fonction de Neumann au point  $\mathbf{x}_s$ .

### 2.3.4 Algorithme

**Flux du Gradient** En injectant (2.12) dans (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K &= \frac{1}{|K|} \sum_{s' \in \partial K} (\nu_K \mathbf{N}_{Ks'} \otimes (\mathbf{x}_{s'} - \mathbf{x}_K)) (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \nu_K \mathbf{F}_{Ks}^1 \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{s' \in \partial K} \mathbf{F}_{Ks'}^1 ((\mathbf{x}_{s'} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)) + \nu_K \mathbf{F}_{Ks}^1 \\ &= \sum_{s' \in \partial K} (A_K)_{ss'} \mathbf{F}_{Ks'}^1, \end{aligned}$$

car pour tous vecteurs  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on a  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ . La matrice  $A_K$  d'ordre  $2p$  avec  $p = \#\partial K$  s'écrit sous la forme

$$|K|A_K = \nu_K I_{2p} + Q$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$$

où  $Q_1$  est une matrice d'ordre  $p$  définie par

$$Q_1 = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}_{s_1} - \mathbf{x}_K)^2 & (\mathbf{x}_{s_2} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_{s_1} - \mathbf{x}_K) & \cdots & (\mathbf{x}_{s_p} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_{s_1} - \mathbf{x}_K) \\ (\mathbf{x}_{s_1} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_{s_2} - \mathbf{x}_K) & (\mathbf{x}_{s_2} - \mathbf{x}_K)^2 & \cdots & (\mathbf{x}_{s_p} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_{s_2} - \mathbf{x}_K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{x}_{s_1} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_{s_p} - \mathbf{x}_K) & (\mathbf{x}_{s_2} - \mathbf{x}_K) \cdot (\mathbf{x}_{s_p} - \mathbf{x}_K) & \cdots & (\mathbf{x}_{s_p} - \mathbf{x}_K)^2 \end{pmatrix}.$$

#### **Théorème 2.3.1**

Grâce à la pénalisation introduite dans l'équation (2.10), on montre que la matrice  $A_K$  est inversible.

**Démonstration** : Soit  $K \in \mathfrak{M}$  un volume dont les arêtes sont  $s \in \partial K$ . Soit la matrice  $A_K$  d'expression

$$|K|A_K = \nu_K I_{2p} + Q.$$

Étant donné que  $\mathbf{x}_K$  est le centre de gravité du volume  $K$ , le déterminant de la matrice  $Q$  est donc nul, et par conséquent elle n'est pas inversible. Soit  $Z$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{2p}$  non nul tel que  $A_K Z = \mathbf{0}$ . Ceci implique que pour tout  $i \in \llbracket 1, 2p \rrbracket$

$$\nu_K z_i + (\mathbf{x}_{s_i} - \mathbf{x}_K) \cdot \sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{x}_{s_j} - \mathbf{x}_K) z_j = 0.$$

D'où en multipliant par  $z_i$ , puis en sommant sur chaque  $i$ ,

$$\sum_{i=1}^p \nu_K z_i^2 + \left( \sum_{j=1}^{2p} (\mathbf{x}_{s_j} - \mathbf{x}_K) z_j \right)^2 = 0,$$

ce qui implique que  $Z = \mathbf{0}$ , ce qui achève la démonstration.  $\blacksquare$

Par suite, le flux discret s'exprime à partir des déplacements aux interfaces et sur les volumes

$$\mathbf{F}_{Ks}^1 = \sum_{s' \in \partial K} (A_K^{-1})_{ss'} (\mathbf{u}_{s'} - \mathbf{u}_K) = \sum_{s' \in \partial K} (\mathcal{A}_K)_{ss'} (\mathbf{u}_{s'} - \mathbf{u}_K) \quad \forall K \in \mathfrak{M}, s \in \partial K, \quad (2.16)$$

où  $\mathcal{A}_K = A_K^{-1}$ .

**Flux de la transposée du gradient** En appliquant la propriété (2.12) à la relation (2.8), on peut exprimer le flux de la transposée du gradient en fonction de  $\mathbf{F}_{Ks}^1$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Ks}^2 &= (\nu_K)^T \mathbf{N}_{Ks} \\ &= \frac{1}{|K|} \left( \sum_{s' \in \partial K} (\mathbf{x}_{s'} - \mathbf{x}_K) \otimes \mathbf{F}_{Ks'}^1 \right) \mathbf{N}_{Ks} \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{s' \in \partial K} (\mathbf{x}_{s'} - \mathbf{x}_K) (\mathbf{F}_{Ks'}^1 \cdot \mathbf{N}_{Ks}) \\ &= \sum_{s' \in \partial K} (B_K)_{ss'} \mathbf{F}_{Ks'}^1. \end{aligned}$$

où  $(B_K)_{ss'} = (\mathbf{x}_{s'} - \mathbf{x}_K) \otimes \mathbf{N}_{Ks}$ . Puis, en injectant l'expression de (2.16) de  $\mathbf{F}_{Ks}^1$  dans la relation précédente, on exprime également  $\mathbf{F}_{Ks}^2$  à partir des déplacements aux interfaces et sur les volumes.

$$\mathbf{F}_{Ks}^2 = \sum_{s' \in \partial K} (B_K A_K^{-1})_{ss'} (\mathbf{u}_{s'} - \mathbf{u}_K) = \sum_{s' \in \partial K} (\mathcal{B}_K)_{ss'} (\mathbf{u}_{s'} - \mathbf{u}_K) \quad \forall K \in \mathfrak{M}, s \in \partial K, \quad (2.17)$$

où  $\mathcal{B}_K = B_K A_K^{-1}$ .

**Flux de la divergence** En appliquant la propriété (2.12) à la relation (2.9), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Ks}^3 &= \text{tr}(\nu_K) \mathbf{N}_{Ks} \\ &= \frac{1}{|K|} \left( \sum_{s' \in \partial K} \mathbf{F}_{Ks'}^1 \cdot (\mathbf{x}_{s'} - \mathbf{x}_K) \right) \mathbf{N}_{Ks} \\ &= \sum_{s' \in \partial K} (C_K)_{ss'} \mathbf{F}_{Ks'}^1. \end{aligned}$$

où  $(C_K)_{ss'} = \mathbf{N}_{Ks} \otimes (\mathbf{x}_{s'} - \mathbf{x}_K)$ . Puis, en injectant (2.16) dans l'expression précédente, on a

$$\mathbf{F}_{Ks}^3 = \sum_{s' \in \partial K} (C_K A_K^{-1})_{ss'} (\mathbf{u}_{s'} - \mathbf{u}_K) = \sum_{s' \in \partial K} (\mathcal{C}_K)_{ss'} (\mathbf{u}_{s'} - \mathbf{u}_K) \quad \forall K \in \mathfrak{M}, s \in \partial K. \quad (2.18)$$

On introduit à présent les notations suivantes pour la somme des lignes, des colonnes et de tous les coefficients des matrices  $\mathcal{A}_K, \mathcal{B}_K, \mathcal{C}_K$ .

$$\begin{aligned}
a_{Ks} &= \sum_{s'} (\mathcal{A}_K)_{ss'}, & a_{Ks'} &= \sum_s (\mathcal{A}_K)_{ss'}, & a_K &= \sum_s \sum_{s'} (\mathcal{A}_K)_{ss'}, \\
b_{Ks} &= \sum_{s'} (\mathcal{B}_K)_{ss'}, & b_{Ks'} &= \sum_s (\mathcal{B}_K)_{ss'}, & b_K &= \sum_s \sum_{s'} (\mathcal{B}_K)_{ss'}, \\
c_{Ks} &= \sum_{s'} (\mathcal{C}_K)_{ss'}, & c_{Ks'} &= \sum_s (\mathcal{C}_K)_{ss'}, & c_K &= \sum_s \sum_{s'} (\mathcal{C}_K)_{ss'}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

On reporte les différentes expressions (2.16), (2.17), (2.18) dans l'équation de l'élasticité (2.13) pour exprimer le déplacement  $\mathbf{u}_K$  en fonction des déplacements sur les interfaces.

$$- \sum_{s' \in \partial K} [(\mu_K a_{Ks'} + \mu_K b_{Ks'} + \lambda_K c_{Ks'}) \mathbf{u}_{s'}] + (\mu_K a_K + \mu_K b_K + \lambda_K c_K) \mathbf{u}_K = \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

En notant  $\mathbf{f}_K = \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , et en tenant compte du fait que  $\mu_K a_K + \mu_K b_K + \lambda_K c_K \neq 0$  puisque  $\nu_K \neq 0$ , on obtient que

$$\mathbf{u}_K = \sum_{s' \in \partial K} \frac{\mu_K a_{Ks'} + \mu_K b_{Ks'} + \lambda_K c_{Ks'}}{\mu_K a_K + \mu_K b_K + \lambda_K c_K} \mathbf{u}_{s'} + \frac{\mathbf{f}_K}{\mu_K a_K + \mu_K b_K + \lambda_K c_K}. \tag{2.20}$$

Enfin, l'écriture du schéma numérique est obtenue en injectant les relations (2.16),(2.17),(2.18),(2.20) dans (2.11) : Pour toute face  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$

$$\begin{aligned}
& \mu_K \sum_{s' \in \partial K} \left( (\mathcal{A}_K)_{ss'} - a_{Ks} \frac{\mu_K a_{Ks'} + \mu_K b_{Ks'} + \lambda_K c_{Ks'}}{\mu_K a_K + \mu_K b_K + \lambda_K c_K} \right) \mathbf{u}_{s'} \\
& + \mu_K \sum_{s' \in \partial K} \left( (\mathcal{B}_K)_{ss'} - b_{Ks} \frac{\mu_K a_{Ks'} + \mu_K b_{Ks'} + \lambda_K c_{Ks'}}{\mu_K a_K + \mu_K b_K + \lambda_K c_K} \right) \mathbf{u}_{s'} \\
& + \lambda_K \sum_{s' \in \partial K} \left( (\mathcal{C}_K)_{ss'} - c_{Ks} \frac{\mu_K a_{Ks'} + \mu_K b_{Ks'} + \lambda_K c_{Ks'}}{\mu_K a_K + \mu_K b_K + \lambda_K c_K} \right) \mathbf{u}_{s'} \\
& + \mu_L \sum_{s' \in \partial L} \left( (\mathcal{A}_L)_{ss'} - a_{Ls} \frac{\mu_L a_{Ls'} + \mu_L b_{Ls'} + \lambda_L c_{Ls'}}{\mu_L a_L + \mu_L b_L + \lambda_L c_L} \right) \mathbf{u}_{s'} \\
& + \mu_L \sum_{s' \in \partial L} \left( (\mathcal{B}_L)_{ss'} - b_{Ls} \frac{\mu_L a_{Ls'} + \mu_L b_{Ls'} + \lambda_L c_{Ls'}}{\mu_L a_L + \mu_L b_L + \lambda_L c_L} \right) \mathbf{u}_{s'} \\
& + \lambda_L \sum_{s' \in \partial L} \left( (\mathcal{C}_L)_{ss'} - c_{Ls} \frac{\mu_L a_{Ls'} + \mu_L b_{Ls'} + \lambda_L c_{Ls'}}{\mu_L a_L + \mu_L b_L + \lambda_L c_L} \right) \mathbf{u}_{s'} \\
& = \frac{\mu_K a_{Ks} + \mu_K b_{Ks} + \lambda_K c_{Ks}}{\mu_K a_K + \mu_K b_K + \lambda_K c_K} \mathbf{f}_K + \frac{\mu_L a_{Ls} + \mu_L b_{Ls} + \lambda_L c_{Ls}}{\mu_L a_L + \mu_L b_L + \lambda_L c_L} \mathbf{f}_L.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ce système est symétrique, d'inconnues  $(\mathbf{u}_s)_{s \in \mathcal{E}^{int}}$ .

## 2.4 Illustrations numériques

Nous allons à présent illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment par des tests numériques, dont les réponses VF mixtes sont comparées à des solutions analytiques pour les deux premiers cas. Dans le troisième exemple, la solution VF mixtes est comparée en norme infinie avec celle obtenue avec des éléments finis  $P1$ . La description de chaque exemple numérique est donnée en Annexe E.1.

### 2.4.1 Quelques aspects numériques

Les tests numériques ont été réalisés sur des maillages structurés de carrés. Afin d'obtenir les courbes d'estimation d'erreur, nous utilisons des techniques de raffinement uniforme.

### 2.4.2 Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale

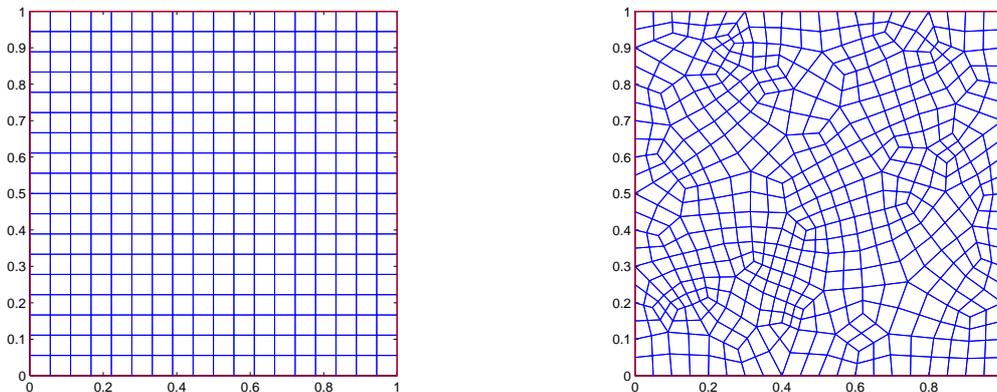


FIGURE 2.4.1 – Cas E.1.3 : maillage de carrés (gauche) et de quadrangles non structurés (droite).

Les maillages utilisés, tracés en Figure 2.4.1, sont d'une part de type structuré composés de carrés, et d'autre part non structurés, composé de quadrangles. On présente dans les Tableaux 2.4.1 (maillage de carrés) et 2.4.2 (maillages de quadrangles) les valeurs d'estimations d'erreurs des réponses VF mixtes en normes infinie, norme 1 et norme 2. Leur tracé respectif est donné par les Figure 2.4.2 et 2.4.3. On donne en Figure 2.4.4 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence de l'erreur pour cette contrainte.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{VF_{mixtes}} - \mathbf{u}_{Ex}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{VF_{mixtes}} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{VF_{mixtes}} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
81	$1.11 \cdot 10^{-1}$	$5.31 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^{-4}$
324	$5.56 \cdot 10^{-2}$	$1.82 \cdot 10^{-4}$	$2.67 \cdot 10^{-5}$	$3.73 \cdot 10^{-5}$
1296	$2.78 \cdot 10^{-2}$	$5.82 \cdot 10^{-5}$	$6.72 \cdot 10^{-6}$	$9.48 \cdot 10^{-6}$
5184	$1.39 \cdot 10^{-2}$	$1.78 \cdot 10^{-5}$	$1.69 \cdot 10^{-6}$	$2.39 \cdot 10^{-6}$
20736	$6.94 \cdot 10^{-3}$	$5.28 \cdot 10^{-6}$	$4.30 \cdot 10^{-7}$	$6.07 \cdot 10^{-7}$

Tableau 2.4.1 – Cas E.1.3 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés de carrés

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{VF_{mixtes}} - \mathbf{u}_{Ex}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{VF_{mixtes}} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{VF_{mixtes}} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
135	$1.55 \cdot 10^{-1}$	$4.05 \cdot 10^{-4}$	$8.15 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$
540	$7.79 \cdot 10^{-2}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$1.98 \cdot 10^{-5}$	$2.49 \cdot 10^{-5}$
2160	$3.89 \cdot 10^{-2}$	$4.34 \cdot 10^{-5}$	$4.89 \cdot 10^{-6}$	$6.20 \cdot 10^{-6}$
8640	$1.94 \cdot 10^{-2}$	$1.34 \cdot 10^{-5}$	$1.22 \cdot 10^{-6}$	$1.55 \cdot 10^{-6}$
34560	$9.74 \cdot 10^{-3}$	$4.01 \cdot 10^{-6}$	$3.11 \cdot 10^{-7}$	$3.95 \cdot 10^{-7}$

Tableau 2.4.2 – Cas E.1.3 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés de quadrangles

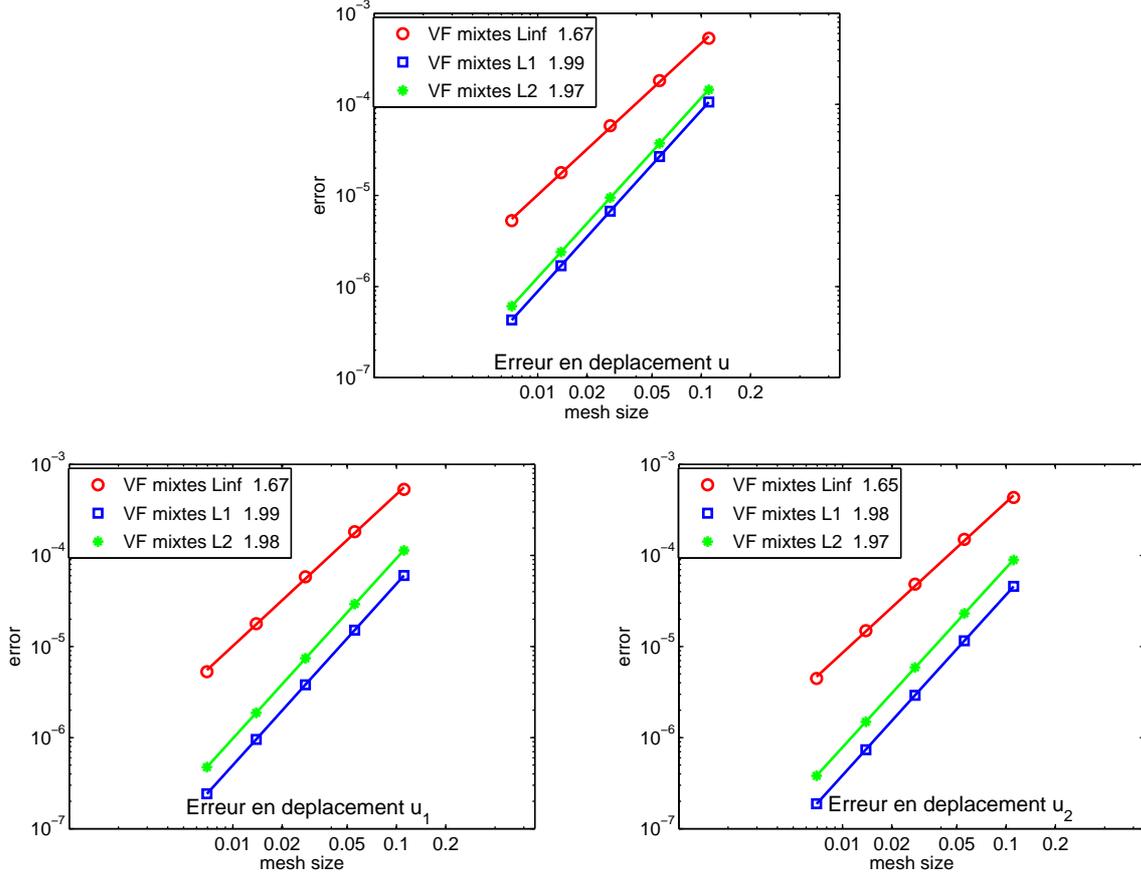


FIGURE 2.4.2 – Cas E.1.3 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés de carrés

$$\sigma_K = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

avec  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ , l’expression du tenseur des contraintes en chaque volume  $K$ , alors l’expression de la contrainte de Von Mises  $\sigma_{VM, VFmixtes}$  en  $K$  est

$$\sigma_{VM, VFmixtes} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}.$$

### 2.4.3 Cas E.1.4 : Déformation d’un carré homogène. Solution non polynomiale

Comme pour l’exemple précédent, les maillages utilisés sont constitués soit de carrés, soit de quadrangles non structurés, que l’on raffine uniformément.

On présente dans les Tableaux 2.4.3 (maillage de carrés) et 2.4.4 (maillages de quadrangles) les valeurs d’estimations d’erreurs des réponses VF mixtes en normes infinie, norme 1 et norme 2. Leur tracé respectif est donné par les Figure 2.4.5 et 2.4.6.

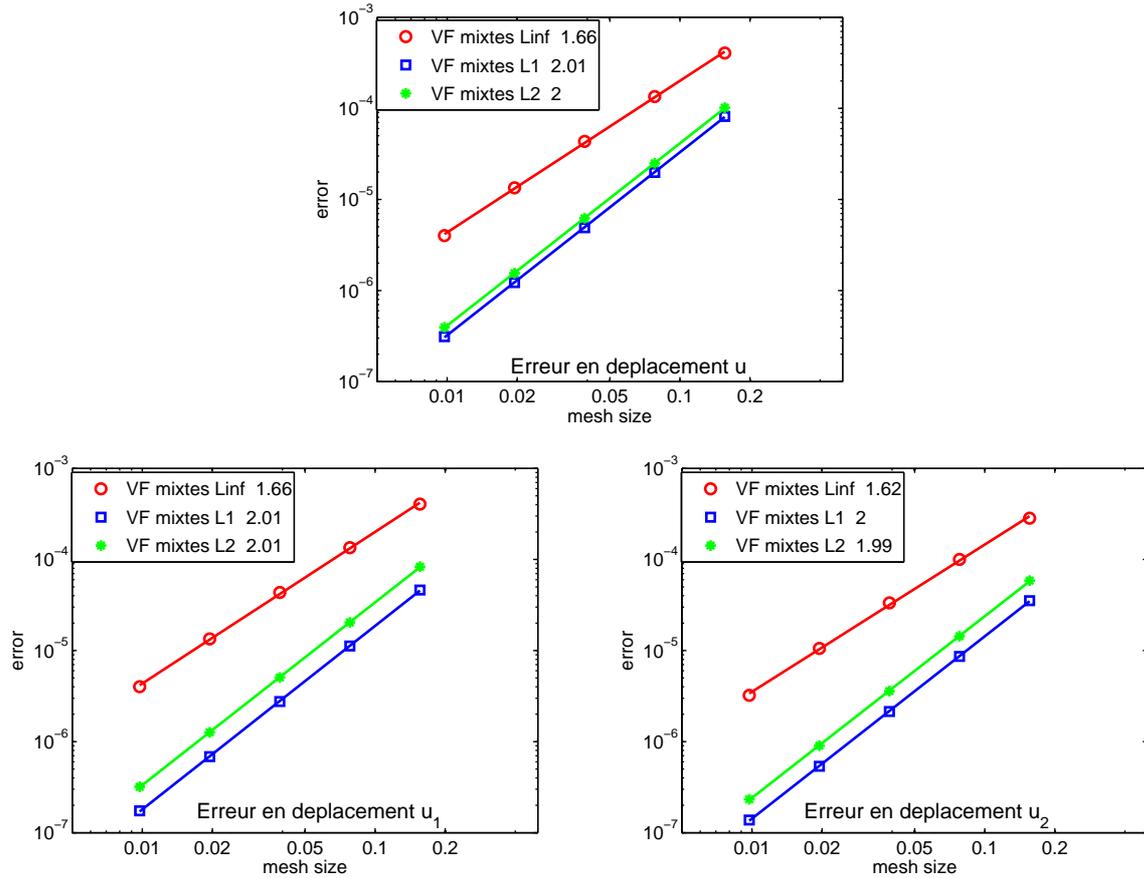


FIGURE 2.4.3 – Cas E.1.3 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés de quadrangles

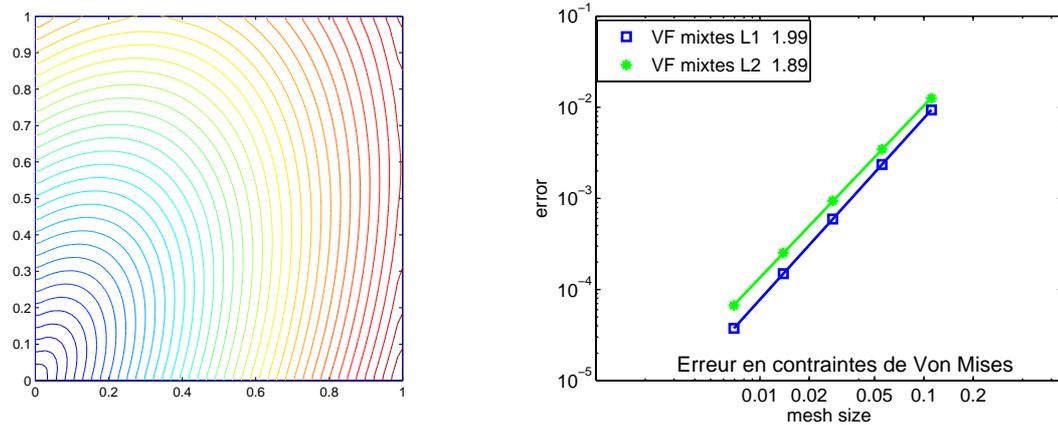


FIGURE 2.4.4 – Cas E.1.3 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (gauche) et estimations d’erreurs  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés de carrés

## 2.4.4 Cas E.1.7 : Déformation d’un barreau homogène percé d’un trou

Le maillage utilisé est un maillage de quadrangles non structurés, non raffinés autour du trou, dont une représentation avec 1280 quadrangles est donnée en Figure 2.4.7. Afin de comparer

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
81	$1.11 \cdot 10^{-1}$	$6.10 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$1.36 \cdot 10^{-4}$
324	$5.56 \cdot 10^{-2}$	$2.36 \cdot 10^{-4}$	$2.86 \cdot 10^{-5}$	$3.92 \cdot 10^{-5}$
1296	$2.78 \cdot 10^{-2}$	$8.02 \cdot 10^{-5}$	$7.54 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-5}$
5184	$1.39 \cdot 10^{-2}$	$2.51 \cdot 10^{-5}$	$1.93 \cdot 10^{-6}$	$2.71 \cdot 10^{-6}$
20736	$6.94 \cdot 10^{-3}$	$7.52 \cdot 10^{-6}$	$4.86 \cdot 10^{-7}$	$6.80 \cdot 10^{-7}$

Tableau 2.4.3 – Cas E.1.4 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés de carrés

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Ex}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
135	$1.55 \cdot 10^{-1}$	$7.09 \cdot 10^{-4}$	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$1.62 \cdot 10^{-4}$
540	$7.79 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-4}$	$3.23 \cdot 10^{-5}$	$4.37 \cdot 10^{-5}$
2160	$3.89 \cdot 10^{-2}$	$7.77 \cdot 10^{-5}$	$8.28 \cdot 10^{-6}$	$1.13 \cdot 10^{-5}$
8640	$1.94 \cdot 10^{-2}$	$2.34 \cdot 10^{-5}$	$2.09 \cdot 10^{-6}$	$2.86 \cdot 10^{-6}$
34560	$9.74 \cdot 10^{-3}$	$6.79 \cdot 10^{-6}$	$5.19 \cdot 10^{-7}$	$7.10 \cdot 10^{-7}$

Tableau 2.4.4 – Cas E.1.4 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés de quadrangles

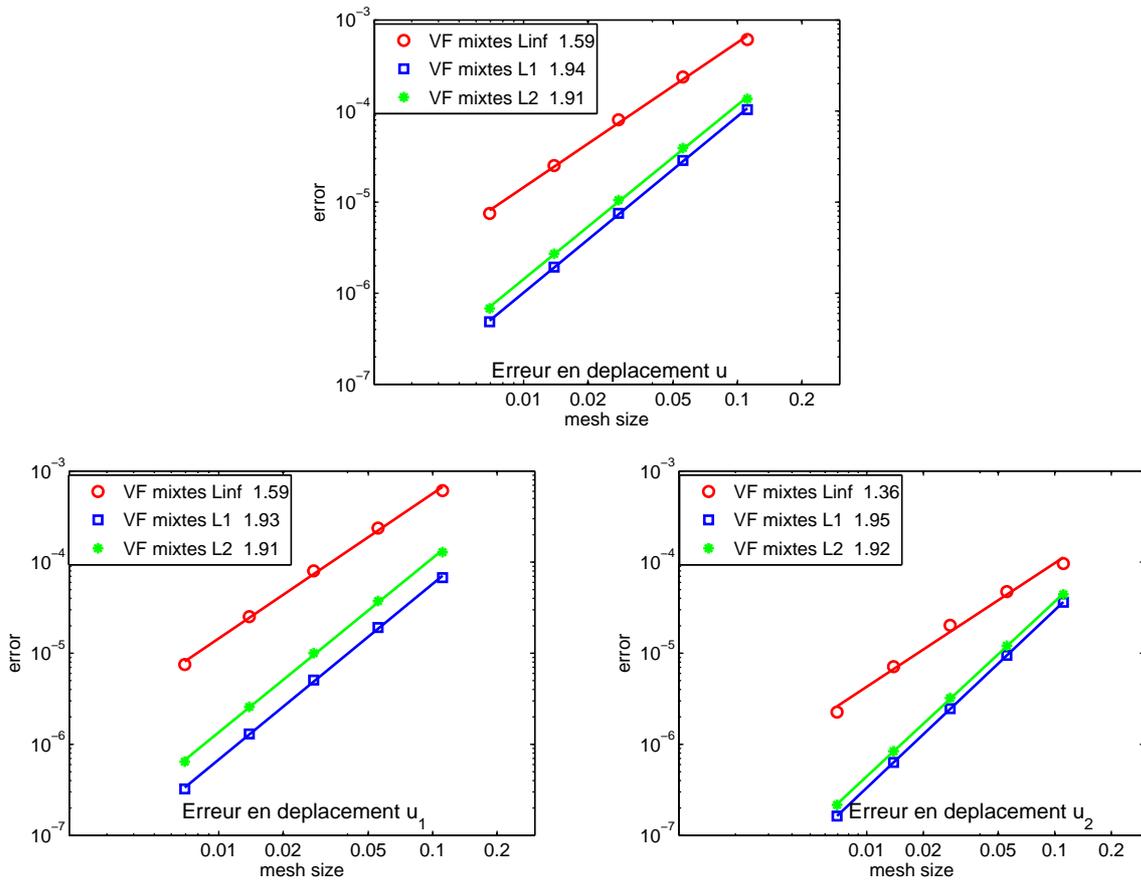


FIGURE 2.4.5 – Cas E.1.4 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés de carrés

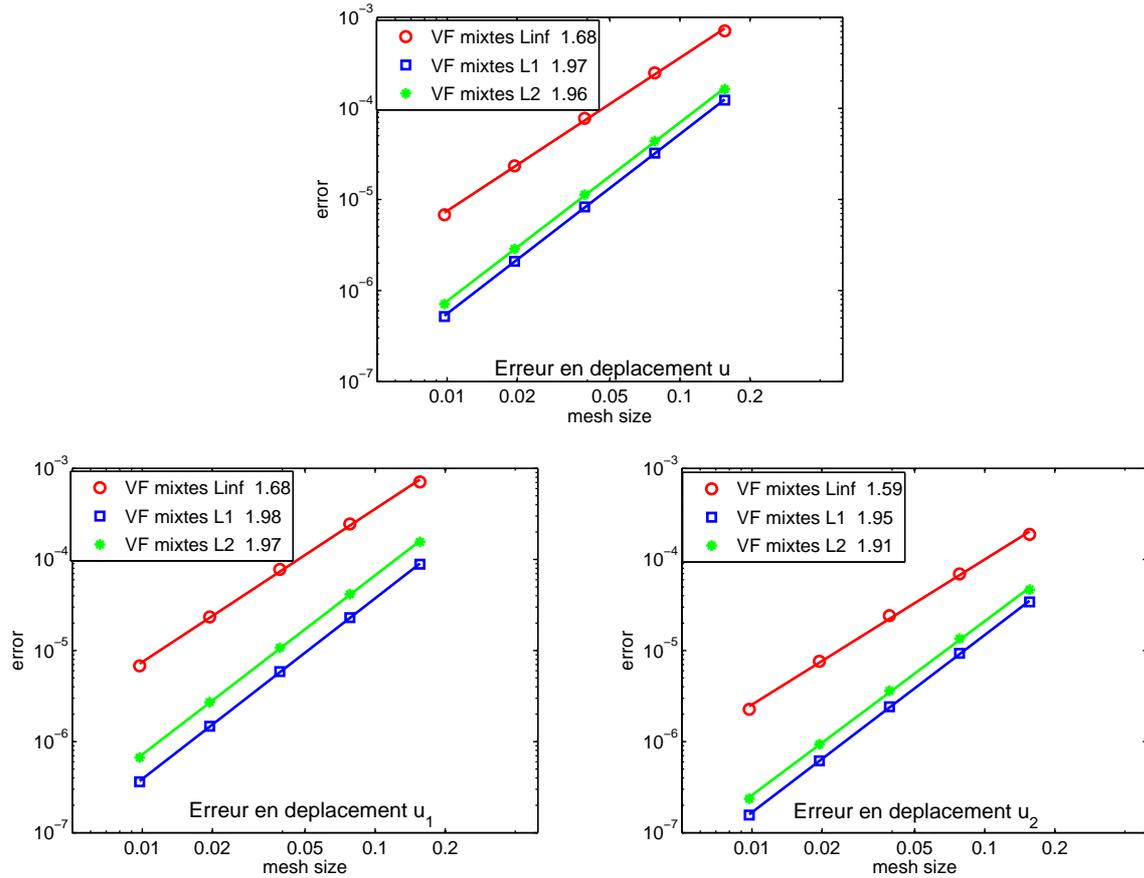


FIGURE 2.4.6 – Cas E.1.4 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés de quadrangles

les résultats avec ceux obtenus par éléments finis, qui eux sont codés pour des maillages de triangles, on coupe en deux chacun des quadrangles de la Figure 2.4.7. Le maillage pour les EF est ainsi présenté en Figure 2.4.8, avec 2560 triangles.

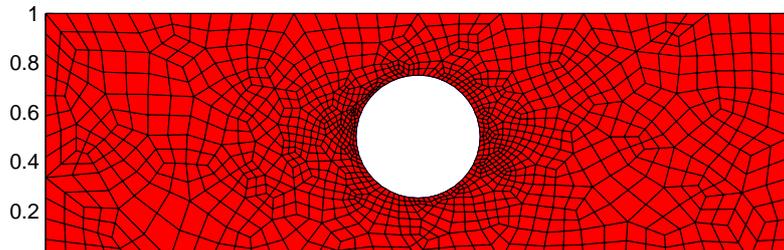


FIGURE 2.4.7 – Cas E.1.7 : Configuration initiale composée de 1280 quadrangles.

Dans les Figures 2.4.9 et 2.4.10 sont affichées les configurations déformées obtenues avec la méthode VF mixtes et la méthode éléments finis (EF) P1 conformes.

A présent, nous allons présenter les résultats d’estimation d’erreur. Étant donné que nous ne possédons pas de solution analytique pour ce test, les résultats obtenus par la méthode VF mixtes sont comparés à ceux obtenus par éléments finis pour les norme  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$ . Les

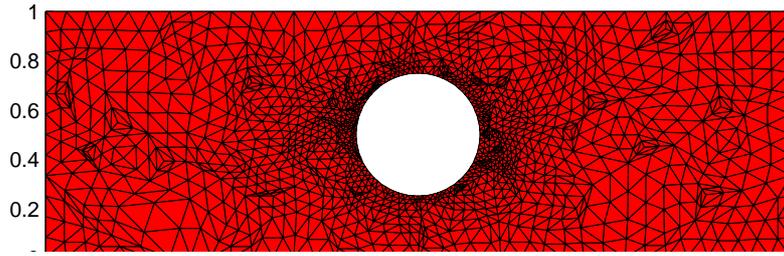


FIGURE 2.4.8 – Cas E.1.7 : Configuration initiale composée de 2560 triangles.

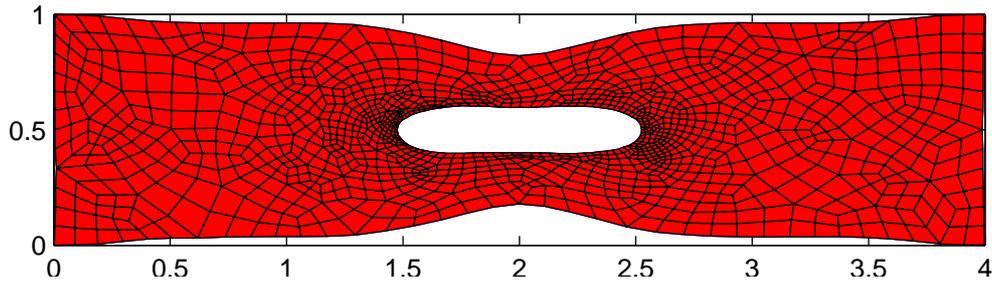


FIGURE 2.4.9 – Cas E.1.7 : réponse du déplacement obtenu avec la méthode VF mixtes

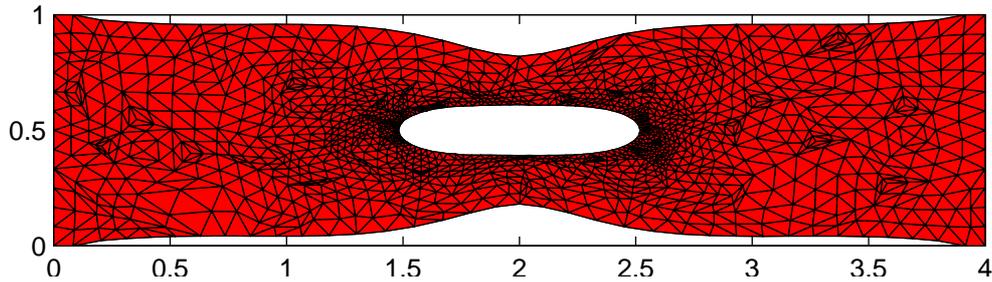


FIGURE 2.4.10 – Cas E.1.7 : réponse du déplacement obtenu par éléments finis

résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans le Tableau 2.4.5 pour les valeurs et dans la Figure 2.4.11 pour le tracé. Nous utilisons une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
320	$2.92 \cdot 10^{-1}$	$2.86 \cdot 10^{-2}$	$3.94 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$
1280	$1.46 \cdot 10^{-1}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$	$1.64 \cdot 10^{-2}$	$8.84 \cdot 10^{-3}$
5120	$7.31 \cdot 10^{-2}$	$9.77 \cdot 10^{-3}$	$6.82 \cdot 10^{-3}$	$3.71 \cdot 10^{-3}$

Tableau 2.4.5 – Cas E.1.7 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés.

## 2.4.5 Cas E.1.8 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou

On utilise un maillage de quadrangles non structurés raffinés autour du trou. Une configuration non déformée avec 1408 quadrangles est donnée en Figure 2.4.12. Comme précédemment,

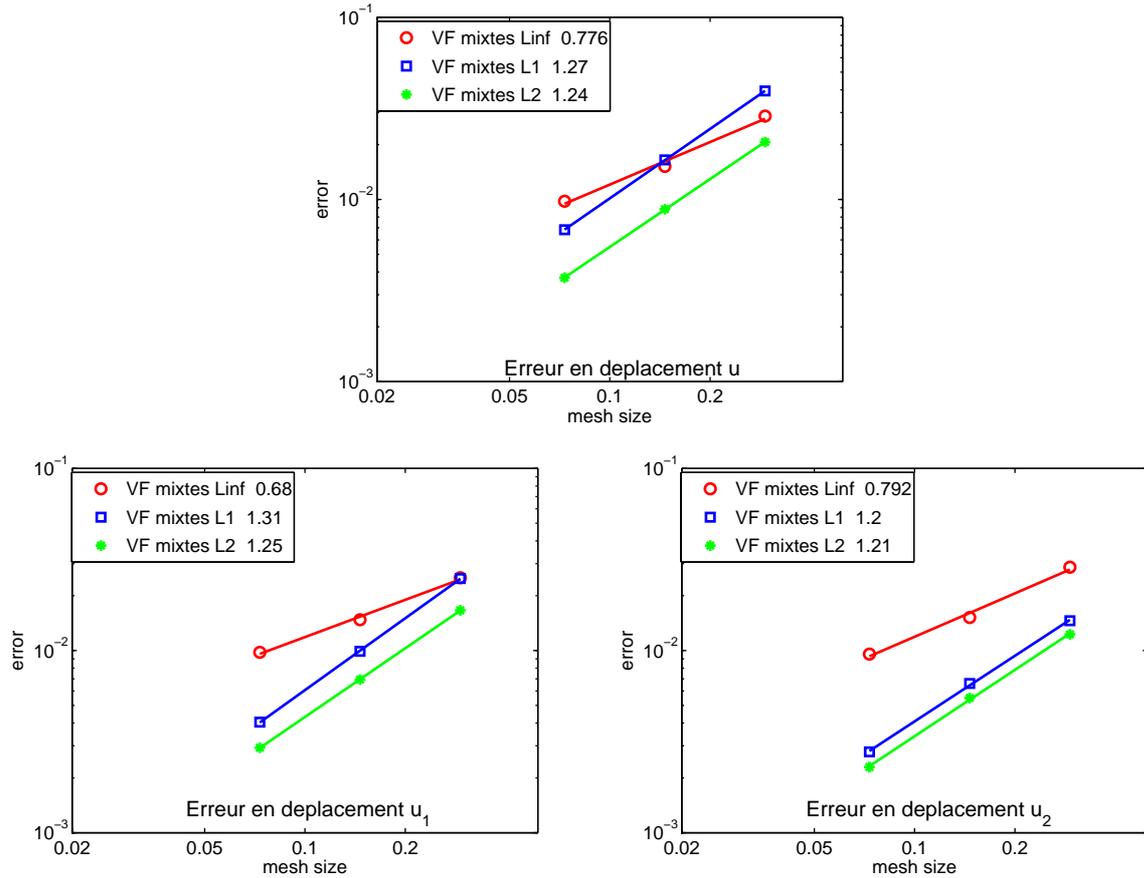


FIGURE 2.4.11 – Cas E.1.7 : estimations d’erreur  $L^\infty$  pour des maillages uniformément raffinés

les résultats sont comparés à ceux obtenus par éléments finis codés sur des maillages de triangles, obtenus en coupant en deux chacun des quadrangles. Un représentation du maillage initial utilisé pour les éléments finis est donnée en Figure 2.4.13 avec 2816 triangles.

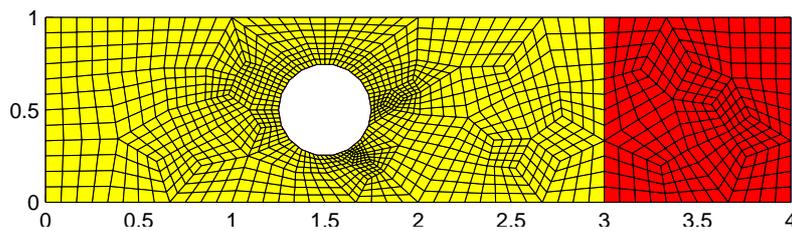


FIGURE 2.4.12 – Cas E.1.8 : Maillage GMSH composé de 1408 quadrangles.

Dans les Figures 2.4.14 et 2.4.15 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode VF mixtes ainsi que par éléments finis. La Figure 2.4.14 correspond à un matériau composé d’aluminium à gauche (en clair) et d’acier à droite (en sombre). On remarque que l’aluminium, possédant des coefficients de Lamé inférieurs à ceux de l’acier, et en particulier un module d’Young plus petit, est donc moins rigide que l’acier : sa déformation élastique est donc plus importante. Pour ce qui est de la Figure 2.4.15, les matériaux sont intervertis (acier à gauche, aluminium à droite). Le même phénomène est observé.

A présent, nous allons présenter les résultats d’estimation d’erreur. Étant donné que nous

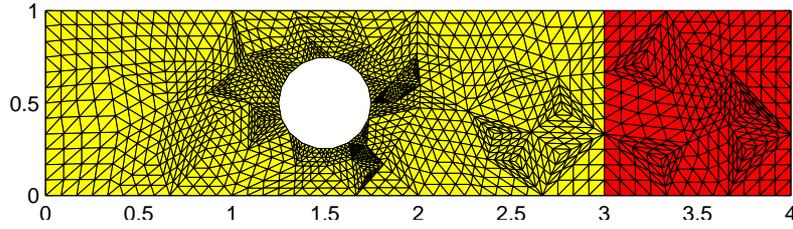


FIGURE 2.4.13 – Cas E.1.8 : Maillage GMSH composé de 2816 triangles.

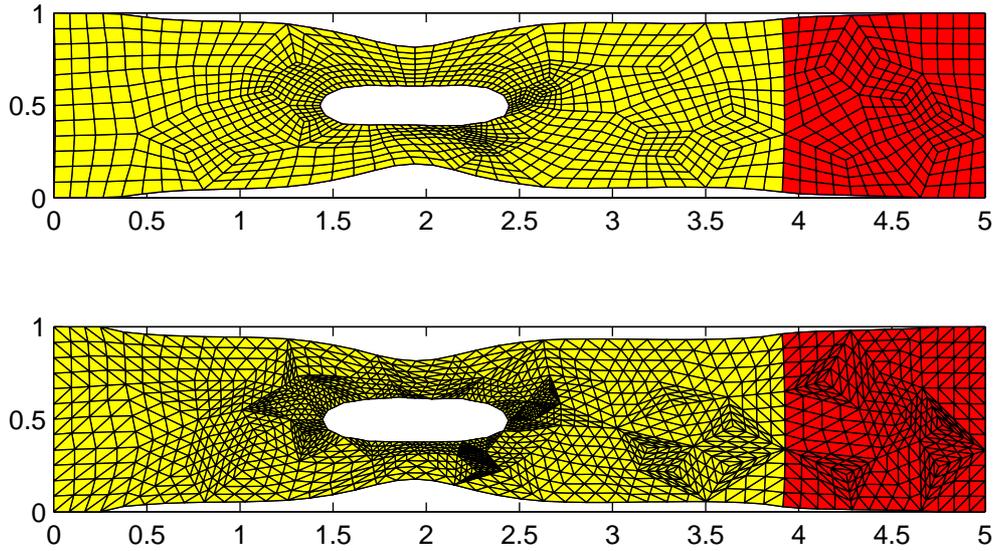


FIGURE 2.4.14 – Cas E.1.8 : réponse du déplacement aluminium (clair) / acier (sombre) par VF mixtes (en haut) et par éléments finis (bas).

ne possédons pas de solution analytique pour ce test, les résultats obtenus par la méthode VF mixtes sont comparés à ceux obtenus par éléments finis pour les norme  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$ . Les résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans le Tableau 2.4.6 pour les valeurs et dans la Figure 2.4.16 pour le tracé. Nous utilisons une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{VFmixtes} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
88	$4.29 \cdot 10^{-1}$	$6.69 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-1}$	$5.02 \cdot 10^{-2}$
352	$2.14 \cdot 10^{-1}$	$3.16 \cdot 10^{-2}$	$3.71 \cdot 10^{-2}$	$1.92 \cdot 10^{-2}$
1408	$1.07 \cdot 10^{-1}$	$1.72 \cdot 10^{-2}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$	$8.00 \cdot 10^{-3}$
5632	$5.36 \cdot 10^{-2}$	$1.24 \cdot 10^{-2}$	$6.18 \cdot 10^{-3}$	$3.44 \cdot 10^{-3}$
22528	$2.68 \cdot 10^{-2}$	$9.64 \cdot 10^{-3}$	$2.69 \cdot 10^{-3}$	$1.53 \cdot 10^{-3}$

Tableau 2.4.6 – Cas E.1.8 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés.

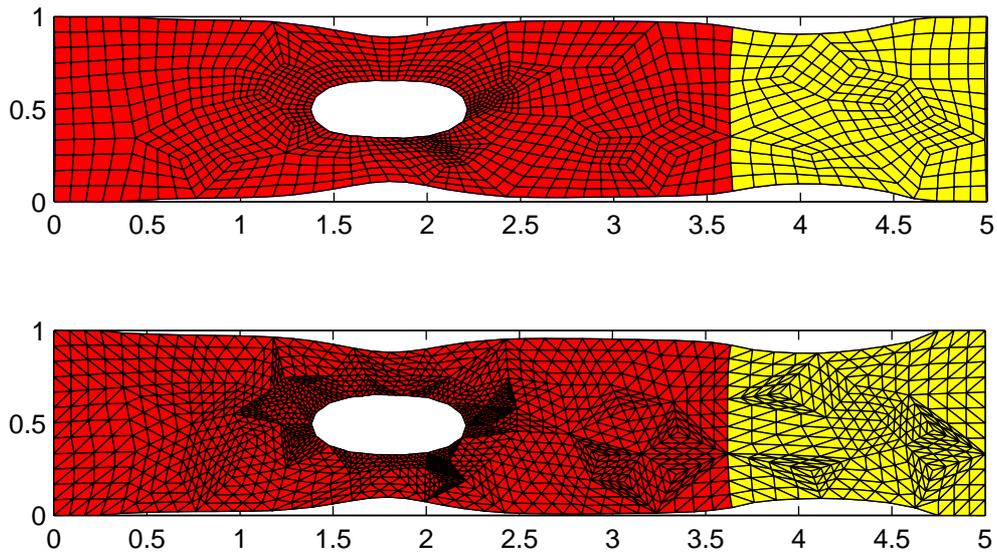


FIGURE 2.4.15 – Cas E.1.8 : réponse du déplacement acier (sombre) / aluminium (clair) par VF mixtes (en haut) et par éléments finis (bas).

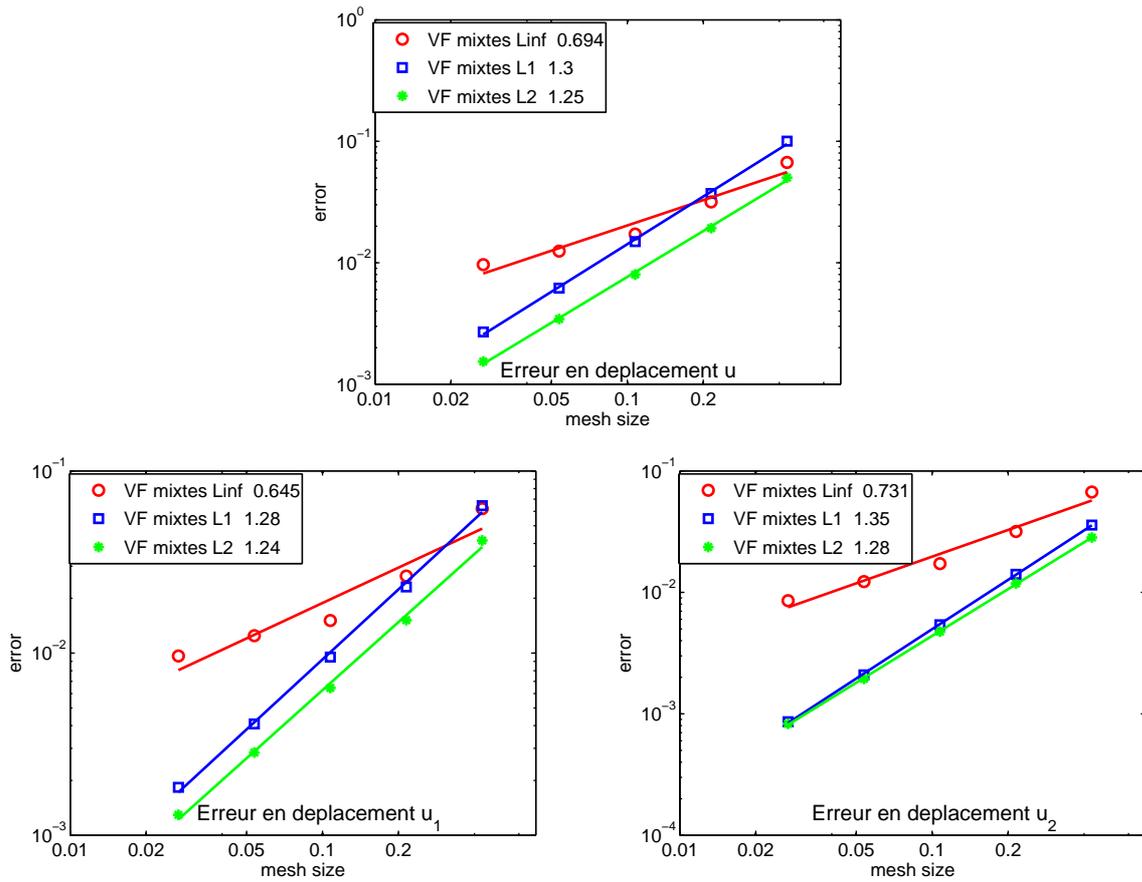


FIGURE 2.4.16 – Cas E.1.8 : estimations d'erreur  $L^\infty$  pour des maillages uniformément raffinés

## 2.5 Conclusion

Le schéma VF mixtes appliqué à l'élasticité linéaire conduit à l'inversion d'un système matriciel sans structure simple, du fait du grand nombre d'inconnues initiales. En réalité, cette difficulté est compensée par le fait que le système se réduit à la recherche d'une inconnue par arête. La principale difficulté de ce schéma pour l'élasticité est d'écrire un système bien posé indépendamment du maillage utilisé. Dans le cas du schéma numérique proposé ici, la matrice discrète  $(A_K)_{ss'}$  n'est inversible qu'à condition de pénaliser légèrement la relation de Taylor. Une solution a été proposée par Di Pietro *et al.* [42], où l'inconnue par face est séparée selon ses deux composantes normale et tangentielle. La composante tangentielle est ensuite interpolée sur les composantes normales des déplacements aux arêtes voisines, ce qui conduit à un schéma inversible. Néanmoins, dans le cas de maillages non simpliciaux, le schéma VF mixtes appliqué à l'élasticité présente de bon résultats de convergence numérique, et s'adapte sans difficultés aux problèmes non homogènes. La méthode est relativement peu coûteuse à mettre en œuvre, et s'étend facilement à la dimension 3.



Deuxième partie

**Schéma Diamant**



# Chapitre 3

## Schéma 2D Diamant

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>45</b>
<b>3.2</b>	<b>Maillages et notations</b>	<b>46</b>
3.2.1	Description du maillage primal	46
3.2.2	Description du maillage diamant	49
3.2.3	Régularité du maillage	50
<b>3.3</b>	<b>Opérateurs discrets</b>	<b>50</b>
3.3.1	Produits scalaires	51
3.3.2	Opérateurs discrets	51
3.3.3	Interpolant aux sommets : élimination des inconnues secondaires	54
3.3.4	Continuité des flux : élimination des inconnues auxiliaires	56
3.3.5	Schéma numérique	57
<b>3.4</b>	<b>Consistance du schéma</b>	<b>58</b>
<b>3.5</b>	<b>Coercivité</b>	<b>68</b>
3.5.1	Définition	68
3.5.2	Condition de coercivité	70
<b>3.6</b>	<b>Convergence et estimation d'erreur</b>	<b>72</b>
<b>3.7</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>74</b>
3.7.1	Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale	74
3.7.2	Cas E.1.4 : Déformation d'un carré homogène. Solution non polynomiale	74
3.7.3	Cas E.1.5 : Déformation d'un carré homogène en Dirichlet pur	76
3.7.4	Cas E.1.6 : Déformation d'un triangle homogène	76
3.7.5	Cas E.1.7 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou	79
3.7.6	Cas E.1.8 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou	80
3.7.7	Quelques commentaires sur les cas tests numériques	84
<b>3.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>

---

### 3.1 Introduction

Les volumes fins diamants appartiennent à la catégorie des « cell-centered methods », où les inconnues principales du problème sont situées aux centres des cellules du maillage. Ils ont successivement été testés pour des maillages généraux pour les équations de convection-diffusion par Coudière *et al.* [33, 31, 30, 26], Bertolazzi et Manzini [15], ou encore pour les équations de diffusion anisotrope par Bertolazzi et Manzini [16]. Ces méthodes font intervenir un jeu d'inconnues supplémentaires aux sommets du maillage, qui sont interpolées par moindres carrés

sur les inconnues aux centres du maillage. Par ce moyen, il est possible de définir un gradient par volume diamant sans restrictions sur le maillage. Néanmoins, cette interpolation fait perdre la symétrie du problème, et il est alors difficile de prouver la convergence de la méthode pour des maillages quelconques. Des résultats de convergence théorique ont été établis pour des maillages de quadrangles particuliers par Coudière *et al.* [33], et des maillages cartésiens raffinés localement par Coudière et Villedieu [30]. Pour des maillages plus généraux, la consistance est assurée, et sous des hypothèses sur la géométrie du maillage et sur les poids d'interpolation. Coudière *et al.* [33] montrent que le schéma est convergent pour l'équation de convection-diffusion.

Le principe de la méthode VF diamant est de construire un maillage intermédiaire, appelé « maillage diamant » de par sa forme géométrique (notamment en dimension 3), qui permet via la formule de Green de construire un opérateur gradient discret par diamant. La façon de construire le maillage diamant dépend du problème à résoudre : pour des problèmes ne présentant pas de discontinuités, la maille diamant est construite en joignant les sommets d'une arête aux centres des volumes qu'elle sépare. En revanche, pour des problèmes dits hétérogènes, c'est-à-dire présentant des discontinuités, comme dans le cas présent, la maille diamant est obtenue en joignant les sommets d'une arête entre eux et à un des centres des volumes qu'elle sépare. Pour ce type de problèmes, il est alors d'usage d'introduire un troisième jeu d'inconnues par arêtes. Ces inconnues sont éliminées algébriquement soit en écrivant la condition de conservation des flux en chaque arête interne, classique pour les volumes finis, soit en utilisant les conditions de bord.

Ce chapitre s'articule de la façon suivante : en section 2 sont présentés les maillages primal et diamant. En section 3, on construit un opérateur gradient par diamant grâce à la relation de Green. Cet opérateur permet de construire le flux du tenseur des contraintes discret par arête. Afin d'écrire le schéma numérique, on présente une méthode d'interpolation aux sommets qui permet d'éliminer les inconnues secondaires aux sommets du maillage. La façon d'éliminer les inconnues intermédiaires aux centres des arêtes y est également détaillée. En section 4, on présente un résultat de consistance dite « faible » du schéma numérique, portant sur l'erreur commise entre la projection  $L^2$  du flux de la solution exacte sur le maillage et le flux numérique discret du projeté de la solution exacte sur le maillage. En section 5, on montre que le schéma numérique est coercif en admettant une hypothèse sur la forme du maillage. En section 6, on montre que sous une hypothèse de coercivité, le schéma VF diamant est convergent d'ordre 1. Enfin, des résultats numériques sont proposés en section 7. Dans quatre premiers exemples, la solution VF diamant est comparée à une solution analytique, et dans les deux derniers cas, on compare la réponse VF diamant à la solution obtenue par éléments finis  $P1$ .

## 3.2 Maillages et notations

### 3.2.1 Description du maillage primal

On appelle maillage volumes finis une réunion d'ouverts polygonaux disjoints (voir Figure 3.2.1) tels que

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \bar{K} = \bar{\Omega}.$$

où on a noté  $\mathfrak{M}$  l'ensemble de ces polygones. A chaque volume  $K \in \mathfrak{M}$  est associé son centre de gravité  $\mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^2$  et on note  $\#\mathfrak{M}$  le cardinal de  $\mathfrak{M}$ . La méthode VF diamant consiste à chercher l'inconnue discrète  $\mathbf{u}^\tau$  comme une fonction constante par volume, et l'on note  $\mathbf{u}^\tau = (\mathbf{u}_K)_{K \in \mathfrak{M}}$  la famille vectorielle des déplacements par volume. On appelle arête tout segment intersection de deux volumes ou bien d'un volume et du bord de  $\Omega$  et on note  $\mathcal{E}$  l'ensemble de ces arêtes. Chaque arête du maillage primal est notée  $s$ . Si l'arête  $s$  est interne, alors il existe deux volumes

K et L tels que  $s = K \cap L$ , sinon il s'agit d'une arête de bord, et vérifie  $s = K \cap \partial\Omega$ . L'ensemble des arêtes internes est noté  $\mathcal{E}^{int}$  et l'ensemble des arêtes de bord  $\mathcal{E}^b$ . Ces ensembles satisfont

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^b.$$

L'ensemble des arêtes de bord est divisé en l'ensemble des arêtes sur le bord de Dirichlet et l'ensemble des arêtes sur le bord de Neumann, de sorte que

$$\mathcal{E}^b = \mathcal{E}^{bD} \cup \mathcal{E}^{bN}.$$

Pour un volume K, on note  $\partial K$  l'ensemble de ses arêtes. De la même façon que pour les arêtes, on distingue  $\partial K^{int}$  l'ensemble de ses arêtes internes, de l'ensemble  $\partial K^b$  des arêtes de bord, qui appartiennent à  $\partial\Omega$ , de sorte que  $\partial K = \partial K^{int} \cup \partial K^b$ . On distingue les arêtes sur le bord de Dirichlet  $\partial K^{bD}$  de celles sur le bord de Neumann  $\partial K^{bN}$ . Chaque arête  $s \in \partial K$  définit deux sommets, notés  $(\mathbf{x}_i^{Ks})_{i=\{1,2\}}$ , et on introduit les conventions suivantes pour les arêtes internes.

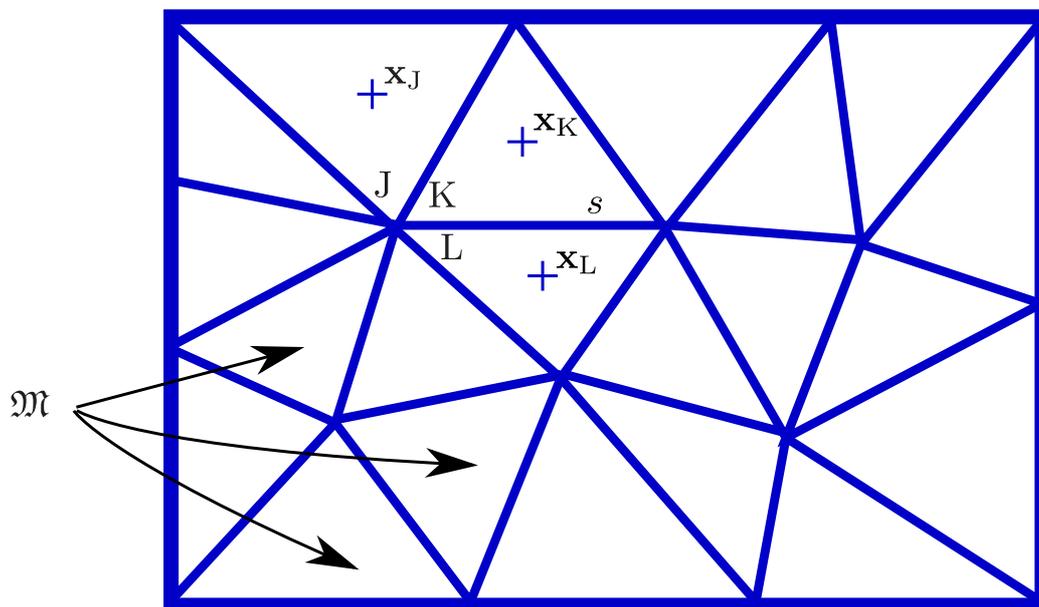


FIGURE 3.2.1 – Maillage primal composé de triangles

**Convention 3.2.1 (Numérotation locale des sommets du maillage)**

Soit  $s = K \cap L$  une arête interne. Pour  $i = \{1, 2\}$ , soient  $\mathbf{x}_i^{Ks}$  et  $\mathbf{x}_i^{Ls}$  les numérotations locales associées aux volumes K et L.

1. Les indices locaux sont dits tournants, c'est-à-dire que pour tout  $i = \{1, 2\}$ , on a

$$\mathbf{x}_{i+2}^{Ks} = \mathbf{x}_i^{Ks} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{i+2}^{Ls} = \mathbf{x}_i^{Ls}. \quad (3.1)$$

2. La numérotation locale des sommets de l'arête  $s$  respecte la condition

$$\det(\mathbf{x}_2^{Ks} - \mathbf{x}_1^{Ks}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) > 0 \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{x}_s$  est le centre de la face  $s$  comme indiqué en figure 3.2.2. Cela entraîne en particulier que  $\mathbf{x}_1^{Ks} = \mathbf{x}_2^{Ls}$  et  $\mathbf{x}_2^{Ks} = \mathbf{x}_1^{Ls}$ .

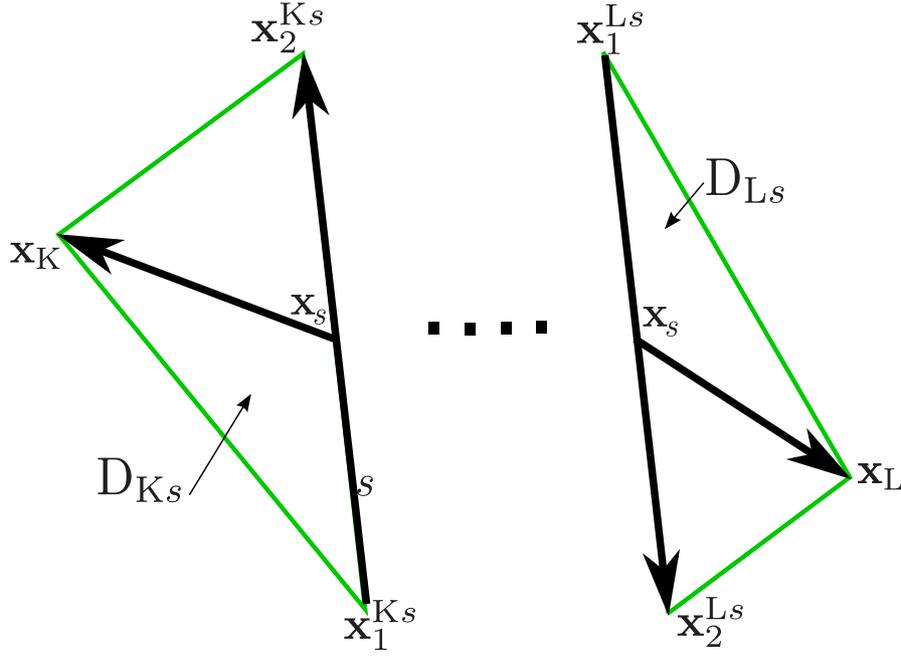


FIGURE 3.2.2 – Numérotation locale des sommets vus du volume diamant  $D_{K_s}$  et du volume diamant  $D_{L_s}$ .

Par suite, on note

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{int} \cup \mathcal{N}^b$$

l'ensemble des sommets du maillage où  $\mathcal{N}^b$  représente l'ensemble des sommets situés sur le bord, et  $\mathcal{N}^{int}$  l'ensemble des sommets à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . L'ensemble  $\mathcal{N}^b$  est constitué de l'ensemble  $\mathcal{N}^{b_D}$  des sommets sur Dirichlet et de l'ensemble  $\mathcal{N}^{b_N}$  des sommets sur Neumann, de sorte que

$$\mathcal{N}^b = \mathcal{N}^{b_D} \cup \mathcal{N}^{b_N}.$$

Remarquons que ces ensembles ne se chevauchent pas : en effet, lorsqu'un sommet est sur un bord à la fois de Dirichlet et de Neumann, il est considéré être dans  $\mathcal{N}^{b_D}$ .

Enfin, on note  $\mathcal{T} = \mathfrak{M} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{E}$  la réunion de l'ensemble des volumes primaux, des sommets et des arêtes du maillage.

On introduit les notations suivantes : pour tout volume primal  $K$ ,

- $|K|$  représente la mesure de  $K$ ,
- $\mathbf{n}_{K_s}$  représente la normale unitaire sortante de  $K$  à l'arête  $s$ ,
- $\mathbf{N}_{K_s} = (\mathbf{x}_1^{K_s} - \mathbf{x}_2^{K_s})^\perp$  représente la normale sortante de  $K$  à l'arête  $s$  :  $\mathbf{N}_{K_s} = |s|\mathbf{n}_{K_s}$ , où  $|s|$  représente la mesure de l'arête  $s$ ,
- $diam(K)$  représente le diamètre de  $K$ ,
- $\mu_K = \mu(\mathbf{x}_K)$  et  $\lambda_K = \lambda(\mathbf{x}_K)$  représentent les valeurs des coefficients de Lamé constants par volumes primaux,

et pour tout sommet  $\mathbf{x}^v$

- $\mathcal{V}(\mathbf{x}^v)$  représente l'ensemble des volumes dont  $\mathbf{x}^v$  est un sommet. Cet ensemble n'est pas nécessairement convexe,
- $\#\mathcal{V}(\mathbf{x}^v)$  représente le cardinal de  $\mathcal{V}(\mathbf{x}^v)$ .

### 3.2.2 Description du maillage diamant

On appelle diamant  $D_{K_s}$  associé au volume  $K$  et à l'arête  $s$  de  $K$ , le triangle obtenu en joignant le centre  $\mathbf{x}_K$  du volume  $K$  et les sommets  $\mathbf{x}_1^{K_s}$  et  $\mathbf{x}_2^{K_s}$  de l'arête  $s$ , comme illustré en Figure 3.2.3. On définit l'ensemble  $\tilde{\mathcal{D}}$  des diamants par  $\tilde{\mathcal{D}} = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}\}$ . On appelle  $\tilde{\mathcal{D}}^{int}$  l'ensemble des diamants internes et défini par  $\tilde{\mathcal{D}}^{int} = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}^{int}\}$  et  $\tilde{\mathcal{D}}^b$  l'ensemble des diamants de bord et défini par  $\tilde{\mathcal{D}}^b = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}^b\}$ , de sorte que

$$\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}^{int} \cup \tilde{\mathcal{D}}^b.$$

On distingue ensuite l'ensemble des diamants sur bord de Dirichlet  $\tilde{\mathcal{D}}^{bD} = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}^{bD}\}$  de ceux sur le bord de Neumann  $\tilde{\mathcal{D}}^{bN} = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}^{bN}\}$ , de sorte que

$$\tilde{\mathcal{D}}^b = \tilde{\mathcal{D}}^{bD} \cup \tilde{\mathcal{D}}^{bN}.$$

Les diamants sont 2 à 2 disjoints et couvrent entièrement le domaine  $\Omega$ , c'est-à-dire

$$\bigcup_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \overline{D_{K_s}} = \overline{\Omega}.$$

On note

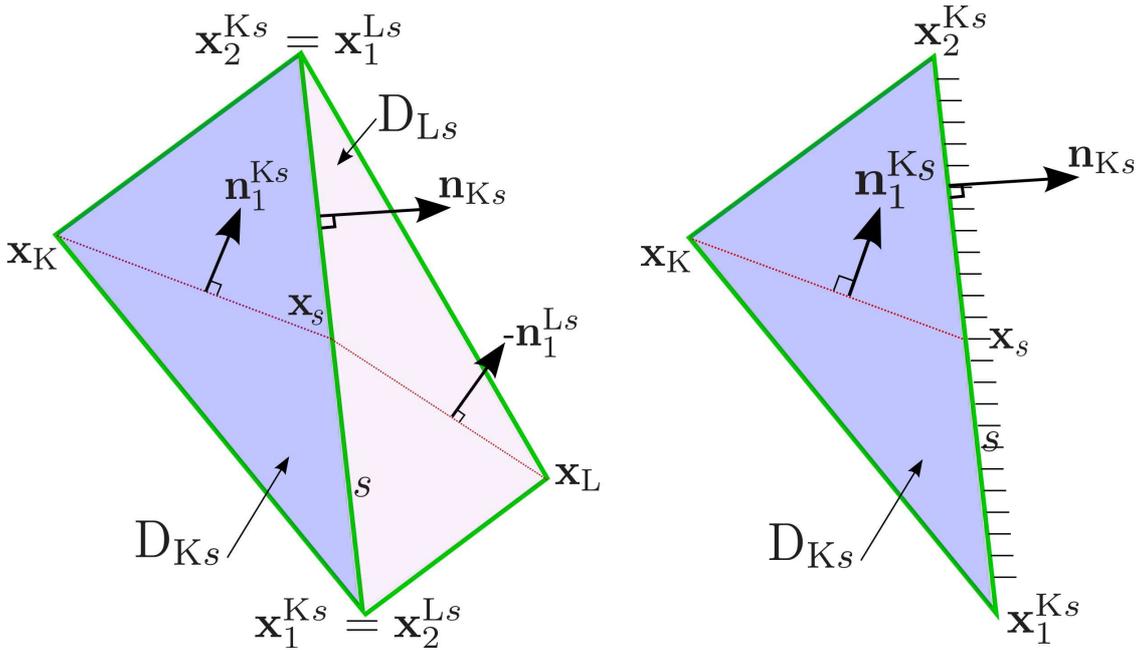


FIGURE 3.2.3 – Notations du diamant interne (gauche), et du diamant de bord (droite)

- $diam(D_{K_s})$  le diamètre de  $D_{K_s}$ ,
- $\mathbf{n}_1^{K_s}$  la normale unitaire sortante au demi diamant  $(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_K, \mathbf{x}_1^{K_s})$  comme indiqué en Figure 3.2.3,
- $\mathbf{N}_1^{K_s} = (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)^\perp$  la normale telle que  $\mathbf{N}_1^{K_s} = \|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s\| \mathbf{n}_1^{K_s}$ ,
- $|D_{K_s}|$  la mesure de  $D_{K_s}$ . D'après les propriétés géométriques du triangle, on a la relation suivante

$$|D_{K_s}| = \frac{1}{2} \det(\mathbf{N}_{K_s}, \mathbf{N}_1^{K_s}). \quad (3.3)$$

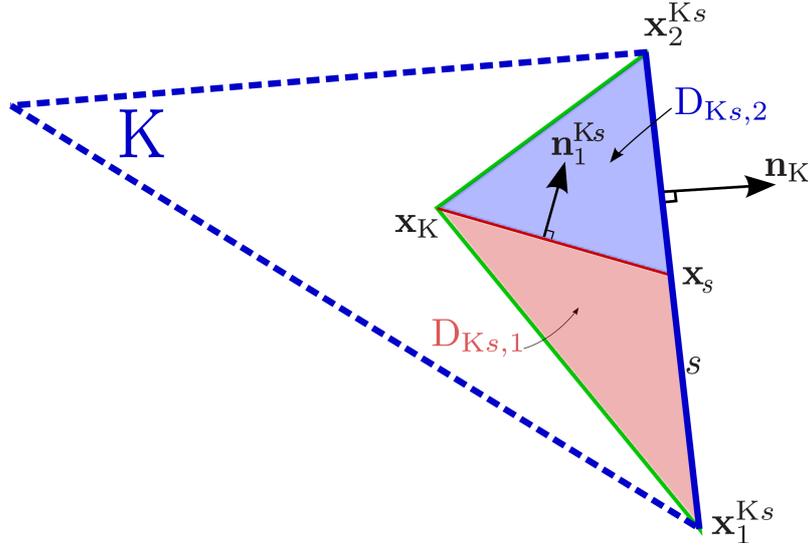


FIGURE 3.2.4 – Demi volumes diamants  $D_{K_s,1}$  et  $D_{K_s,2}$  associés au volume diamant  $D_{K_s}$ .

### 3.2.3 Régularité du maillage

On introduit la quantité  $size(\mathcal{T})$  qui est le maximum des diamètres des volumes primaux  $K \in \mathfrak{M}$ . Par définition, on a

$$\begin{aligned} |s| &\leq size(\mathcal{T}), \quad \forall s \in \mathcal{E}; \\ |D_{K_s}| &\leq size(\mathcal{T})^2, \quad \forall D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}; \\ |K| &\leq size(\mathcal{T})^2, \quad \forall K \in \mathfrak{M}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

On suppose que la famille des maillages primaux satisfait des hypothèses de régularité et de quasi-uniformité et qu'il existe à ce titre des constantes  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \forall K \in \mathfrak{M}, \quad \alpha size(\mathcal{T})^2 &\leq |K|; & \#\partial K &\leq \gamma; \\ \forall D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad \beta size(\mathcal{T})^2 &\leq |D_{K_s}|; & \forall s \in \mathcal{E}, \quad \beta size(\mathcal{T}) &\leq |s|, \\ \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}, \quad \#\mathcal{V}(\mathbf{x}^v) &\leq \gamma. \end{aligned} \quad (3.5)$$

## 3.3 Opérateurs discrets

La forme intégrale de l'équation (1) associée à un volume primal  $K \in \mathfrak{M}$  s'écrit

$$-\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})) = \mathbf{f}_K \quad (3.6)$$

où  $\mathbf{f}_K = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  est la moyenne par volume  $K$  du forçage  $\mathbf{f}$ , soit calculée explicitement, soit approchée par une méthode d'intégration numérique, et où

$$P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})) = \frac{1}{|s|} \int_s \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \quad (3.7)$$

représente le flux du tenseur des contraintes à travers l'interface  $s$ . Le but du schéma diamant est donc de construire une approximation  $\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau)$  du flux  $P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u}))$  pour toute interface

$s \in \mathcal{E}$  qu'on cherche à partir de  $\mathbf{u}^\tau$  constant par volumes et sous la forme

$$\begin{aligned}\phi^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= \frac{1}{|s|} \int_s \sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} dx \\ &= \sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

L'opérateur  $\sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau)$  est défini à partir des valeurs sur les volumes voisins en un sens large de  $s$  et est donné par la Définition 3.3.2.

La principale difficulté réside dans le fait que l'approximation du tenseur des contraintes nécessite une approximation de toutes les composantes du gradient par arêtes, tout en s'assurant du principe de conservation : le flux à travers une interface  $s = K \cap L$  doit être le même de part et d'autre de  $s$ .

### 3.3.1 Produits scalaires

Pour tout couple  $(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau) \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}} \times (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$ , on définit le produit scalaire et la norme associée par

$$(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau)_{\mathfrak{M}} = \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}^\tau\|_{\mathfrak{M}}^2 = \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{u}_K. \quad (3.9)$$

Pour tout couple  $(A^{\tilde{\mathfrak{D}}}, B^{\tilde{\mathfrak{D}}})$  dans  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\#\tilde{\mathfrak{D}}}$ , on définit le produit scalaire et la norme associée par

$$(A^{\tilde{\mathfrak{D}}} : B^{\tilde{\mathfrak{D}}})_{\tilde{\mathfrak{D}}} = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| (A^{\mathbf{D}_{K_s}} : B^{\mathbf{D}_{K_s}}) \quad \text{et} \quad \|A^{\tilde{\mathfrak{D}}}\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| (A^{\mathbf{D}_{K_s}} : A^{\mathbf{D}_{K_s}}), \quad (3.10)$$

où  $(A^{\mathbf{D}_{K_s}} : B^{\mathbf{D}_{K_s}}) = \text{tr}((A^{\mathbf{D}_{K_s}})^T B^{\mathbf{D}_{K_s}})$ .

Enfin, pour tout couple de vecteurs  $(\mathbf{a}^{\tilde{\mathfrak{D}}}, \mathbf{b}^{\tilde{\mathfrak{D}}})$  dans  $(\mathbb{R}^2)^{\#\tilde{\mathfrak{D}}}$ , on définit le produit scalaire et la norme associée par

$$(\mathbf{a}^{\tilde{\mathfrak{D}}}, \mathbf{b}^{\tilde{\mathfrak{D}}})_{\tilde{\mathfrak{D}}} = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| \mathbf{a}^{\mathbf{D}_{K_s}} \cdot \mathbf{b}^{\mathbf{D}_{K_s}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{a}^{\tilde{\mathfrak{D}}}\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| \mathbf{a}^{\mathbf{D}_{K_s}} \cdot \mathbf{a}^{\mathbf{D}_{K_s}}. \quad (3.11)$$

### 3.3.2 Opérateurs discrets

Afin de construire un opérateur gradient discret, et par conséquent un tenseur des contraintes discret, on utilise 3 familles d'inconnues

- les inconnues **principales**  $\mathbf{u}^\tau = (\mathbf{u}_K)_{K \in \mathfrak{M}}$ , constantes par volume primal, qui approchent la quantité  $\frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{u}(x) dx$ ,
- les inconnues **secondaires**  $\mathbf{u}^v$  associées aux sommets du maillage primal, dont les valeurs sont soit interpolées linéairement sur les inconnues principales, soit exprimées à l'aide des conditions de bord et des fonctions  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$ ,
- les inconnues **auxiliaires**  $(\mathbf{u}_s)_{s \in \mathcal{E}}$ , associées aux centres des arêtes  $s$  du maillage. Elles sont éliminées algébriquement soit en écrivant la continuité des flux du tenseur des contraintes discret à travers les interfaces internes pour  $s \in \mathcal{E}^{int}$ , soit en exprimant les conditions de bord pour  $s \in \mathcal{E}^b$  à l'aide des fonctions  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$ .

Grâce à ce jeu d'inconnues, on peut définir le gradient discret par diamant comme étant la moyenne pondérée des gradients sur les demi diamants représentés en Figure 3.2.4  $D_{K_s1} = (\mathbf{x}_1^{K_s}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_K)$  et  $D_{K_s2} = (\mathbf{x}_2^{K_s}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_K)$  d'une fonction affine par demi diamant. Comme  $(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \frac{\mathbf{N}_{K_s}}{2|D_{K_s}|} + (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_s) \otimes \frac{\mathbf{N}_1^{K_s}}{|D_{K_s}|}$  (resp.  $(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \frac{\mathbf{N}_{K_s}}{2|D_{K_s}|} - (\mathbf{u}_1^{K_s} - \mathbf{u}_s) \otimes \frac{\mathbf{N}_1^{K_s}}{|D_{K_s}|}$ ) est le gradient sur  $D_{K_s2}$  (resp.  $D_{K_s1}$ ) de la fonction affine définie par  $\mathbf{u}_s$ ,  $\mathbf{u}_K$  et  $\mathbf{u}_2^{K_s}$  (resp.  $\mathbf{u}_s$ ,  $\mathbf{u}_K$  et  $\mathbf{u}_1^{K_s}$ ), on a la définition suivante.

### Définition 3.3.1 (Définition du gradient)

On considère un volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$ . Le gradient constant sur  $D_{K_s}$ , noté  $\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$ , s'écrit sous la forme

$$\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{2|D_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_1^{K_s} \right). \quad (3.12)$$

On posera  $\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau = (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}}$ .

Étant donné que le tenseur des contraintes continu est défini à partir de l'opérateur gradient via la relation (2) de Hooke, on va construire de la même façon un tenseur des contraintes discret à partir de la définition du gradient discret donnée par (3.12). Puisque par définition des volumes diamants, on a pour tout  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\mu_{D_{K_s}} = \mu_K \quad \text{et} \quad \lambda_{D_{K_s}} = \lambda_K, \quad (3.13)$$

et on définit le tenseur des contraintes de la façon suivante.

### Définition 3.3.2

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$ , le tenseur des contraintes est défini par diamant  $\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) = (\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau))_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}}$  et vérifie pour tout  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = 2\mu_K \mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau + \lambda_K \mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \quad (3.14)$$

où le tenseur des déformations  $\mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \frac{\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T}{2}$  représente la partie symétrique du gradient des déplacements discrets  $\mathbf{u}^\tau$ , et où l'opérateur  $\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \text{div}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \text{Id} = \text{tr}(\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id}$  représente la matrice trace du gradient discret.

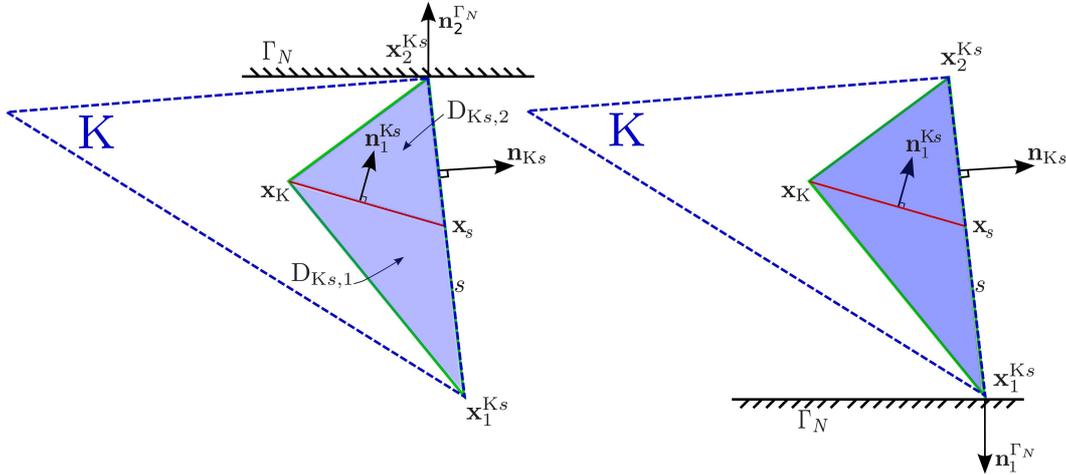


FIGURE 3.3.1 – Notations du diamant dans le cas où un sommet est sur Neumann

On s'intéresse maintenant au flux du tenseur des contraintes à travers les interfaces du maillage primal. Il est possible d'écrire une expression simple du flux à l'aide des matrices élémentaires définies par (B.1)-(B.6) et des inconnues principales  $\mathbf{u}_K$ , auxiliaires  $\mathbf{u}_s$  et secondaires  $\mathbf{u}_1^{K_s}$  et  $\mathbf{u}_2^{K_s}$ . Se pose ensuite la question d'exprimer les inconnues secondaires et auxiliaires en fonction des inconnues principales et des données du problème (conditions de bord). Pour les sommets sur le bord de Dirichlet, le déplacement est donné. Pour les sommets

internes, une formule d'interpolation sur les volumes contenant le sommet répond à la question. Pour ce qui concerne les sommets sur le bord de Neumann, on a opté pour une formulation où la condition de Neumann est imposée sur les demi diamants touchant le bord inspirée de [31]. Cette formulation impose une contrainte sur le maillage pour assurer l'inversion d'une matrice élémentaire comme indiqué dans l'Hypothèse B.2.1. Si cette contrainte n'est pas assurée, et s'il n'y a pas de moyens pour modifier localement le maillage, il existe une alternative pour interpoler la valeur du déplacement sur les bords de Neumann en tenant compte de la condition au bord qui consisterait en l'adaptation de la technique proposée par Bertolazzi et Manzini [16]. L'option qu'on a choisie conduit à l'expression suivante du flux :

### Proposition 3.3.1

1. Pour tout volume diamant sur le bord de Neumann  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{b_N}$

$$\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})) \quad (3.15)$$

c'est-à-dire on impose directement la condition de bord.

2. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int} \cup \tilde{\mathfrak{D}}^{b_D}$  dont aucun des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2\}}$  n'est sur le bord de Neumann

$$\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = \sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \beta_1^{K_s}(\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \quad (3.16)$$

où les matrices  $\beta_K^s$  et  $\beta_1^{K_s}$  sont définies en (B.2) et (B.5).

3. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int}$  dont un des sommets est sur le bord de Neumann, i.e. il existe  $i = \{1, 2\}$  tel que  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{b_N}$

$$\begin{aligned} \phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= (\beta_K^s - \beta_1^{K_s}(\beta_{1, \mathbf{n}_1}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_1}^s)(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \\ &\quad + (-1)^i \beta_1^{K_s}(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{i+1}^{K_s}) \\ &\quad + \beta_1^{K_s}(\beta_{1, \mathbf{n}_i}^{K_s})^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

où les matrices  $\beta_{K, \mathbf{n}_1}^s$  et  $\beta_{1, \mathbf{n}_i}^{K_s}$  sont explicitées en (B.9) et (B.10).

**Démonstration:** 1. Soit  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{b_N}$ . La première assertion découle directement de l'approximation de la condition aux limites de Neumann pour le schéma discret.

2. Soit  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int} \cup \tilde{\mathfrak{D}}^{b_D}$  dont aucun des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2\}}$  n'est sur le bord de Neumann. A partir de l'expression (3.14) du flux du tenseur des contraintes discret à travers l'interface  $s$  et de l'expression (3.12) du tenseur gradient, on obtient

$$\begin{aligned} \phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= \sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} \\ &= (\mu_K (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T) + \lambda_K \text{tr}(\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id}) \mathbf{n}_{K_s} \\ &= \frac{\mu_K}{2|D_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_1^{K_s} \right) \mathbf{n}_{K_s} \\ &\quad + \frac{\mu_K}{2|D_{K_s}|} \left( \mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \mathbf{N}_1^{K_s} \otimes (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \right) \mathbf{n}_{K_s} \\ &\quad + \frac{\lambda_K}{2|D_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s} + (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_1^{K_s} \right) \mathbf{n}_{K_s}. \end{aligned}$$

En utilisant la relation [A.1a](#), on obtient

$$\begin{aligned}\phi^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= \frac{1}{2|\mathbf{D}_{K_s}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_{K_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{N}_{K_s} \otimes \mathbf{n}_{K_s}) + \lambda_K (\mathbf{n}_{K_s} \otimes \mathbf{N}_{K_s}) \right) (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \\ &\quad + \frac{1}{2|\mathbf{D}_{K_s}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_1^{K_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{N}_1^{K_s} \otimes \mathbf{n}_{K_s}) + \lambda_K (\mathbf{n}_{K_s} \otimes \mathbf{N}_1^{K_s}) \right) (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s})\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la deuxième assertion.

3. Soit  $\mathbf{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int}$  dont un des sommets est sur le bord de Neumann : fixons  $i \in \{1, 2\}$  tel que  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{b_N}$ . Le tenseur des contraintes sur le diamant  $\mathbf{D}_{K_s}$  s'exprime à partir du tenseur des contraintes sur le demi diamant  $\mathbf{D}_{K_s, i}$  associé au sommet  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  et à partir de celui sur le demi diamant  $\mathbf{D}_{K_s, i+1}$  associé au sommet  $\mathbf{x}_{i+1}^{K_s}$  comme indiqué en [Figure 3.3.1](#) de la façon suivante :

$$\sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \frac{1}{2} (\sigma^{\mathbf{D}_{K_s, i}}(\mathbf{u}^\tau) + \sigma^{\mathbf{D}_{K_s, i+1}}(\mathbf{u}^\tau)) \mathbf{n}_{K_s},$$

avec

$$\sigma^{\mathbf{D}_{K_s, i}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + 2(-1)^i \beta_1^{K_s} (\mathbf{u}_i^{K_s} - \mathbf{u}_s) \quad (3.18)$$

et

$$\sigma^{\mathbf{D}_{K_s, i+1}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + 2(-1)^{i+1} \beta_1^{K_s} (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_s). \quad (3.19)$$

Pour éliminer  $\mathbf{u}_i^{K_s}$ , on impose sur le demi diamant  $\mathbf{D}_{K_s, i}$  la condition  $\sigma^{\mathbf{D}_{K_s, i}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s})$ . Cette condition est réécrite à l'aide des matrices [\(B.9\)](#) et [\(B.10\)](#) de la façon suivante

$$\beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + (-1)^i \beta_{1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} (\mathbf{u}_i^{K_s} - \mathbf{u}_s) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) \quad (3.20)$$

ce qui donne l'expression

$$(-1)^i (\mathbf{u}_i^{K_s} - \mathbf{u}_s) = (\beta_{1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} (\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) - \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K)). \quad (3.21)$$

En injectant l'expression [\(3.21\)](#) dans [\(3.18\)](#), on obtient que

$$\sigma^{\mathbf{D}_{K_s, i}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = (\beta_K^s - 2\beta_1^{K_s} (\beta_{1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s) (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + 2\beta_1^{K_s} (\beta_{1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}). \quad (3.22)$$

En rassemblant les contributions des deux demi-volumes [\(3.22\)](#) et [\(3.19\)](#), on obtient l'expression du flux du tenseur des contraintes donné par [\(3.17\)](#). ■

### Remarque 3.3.1

Pour tout sommet  $\mathbf{x}^v$  du maillage situé sur le bord de Neumann, la façon de calculer le déplacement en ce nœud n'est pas unique : à chaque volume diamant ayant  $\mathbf{x}^v$  pour sommet correspond une valeur différente du déplacement via les différentes formules [\(3.21\)](#).

### 3.3.3 Interpolant aux sommets : élimination des inconnues secondaires

1. Pour  $\mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{b_D}$  sommet sur le bord de Dirichlet, la condition de bord impose

$$\mathbf{u}^v = \mathbf{g}(\mathbf{x}^v). \quad (3.23)$$

2. Pour les sommets internes, les valeurs du déplacement sont interpolées au sens des moindres carrés par les valeurs des volumes partageant le sommet. Ainsi pour  $\mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{int}$  sommet interne du maillage, on a

$$\mathbf{u}^v = \sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) \mathbf{u}_K \quad (3.24)$$

où les  $\alpha_K(\mathbf{x}^v)$  représentent les poids d'interpolation. Pour l'étude de la convergence, une condition suffisante est que la fonction d'interpolation soit exacte pour les polynômes de degré 1. On impose donc aux poids d'interpolation  $\alpha_K(\mathbf{x}^v)$  les hypothèses

### Hypothèses 3.3.1

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) = 1 \quad (3.25)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) x_K = x^v \quad (3.26)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) y_K = y^v. \quad (3.27)$$

On obtient des poids satisfaisant ces hypothèses en déterminant l'application affine et donc les coefficients  $a, b, c$  tels que

$$a(x_K - x^v) + b(y_K - y^v) + c = u_K \quad \forall K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v),$$

le traitement de la composante  $v_K$  du déplacement étant identique. Ce problème est surdéterminé. Pour le résoudre, on applique la méthode des moindres carrés pondérés ; les coefficients  $a, b, c$  sont choisis de telle sorte qu'ils minimisent

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \gamma_K (u_K - a(x_K - x^v) - b(y_K - y^v) - c)^2 \quad (3.28)$$

où les éléments de pondération  $\gamma_K$  dépendent de l'inverse de la distance entre le sommet  $\mathbf{x}^v$  et le centre du volume  $K$ . En pratique, on choisit  $\gamma_k = \|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}^v\|^{-m}$ , avec  $m = 0$  pour la méthode usuelle (LS),  $m = 1$  pour la méthode WLSID et  $m = 2$  pour la méthode WLSID2. Ces méthodes sont résumées dans [11]. Si on note  $l_1$  (respectivement  $l_2$  et  $l_3$ ) le vecteur colonne à coefficients  $\sqrt{\gamma_K}(x_K - x^v)$  (respectivement  $\sqrt{\gamma_K}(y_K - y^v)$  et  $\sqrt{\gamma_K}$ ), et si on note  $d$  le vecteur colonne à coefficients  $\sqrt{\gamma_K}u_K$ , alors  $a, b, c$  sont solution de

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cdot d \\ l_2 \cdot d \\ l_3 \cdot d \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} l_{11} &= l_1 \cdot l_1 = \sum_K \gamma_K (x_K - x^v)^2 \\ l_{12} &= l_1 \cdot l_2 = \sum_K \gamma_K (x_K - x^v)(y_K - y^v) \\ l_{22} &= l_2 \cdot l_2 = \sum_K \gamma_K (y_K - y^v)^2 \\ l_{13} &= l_1 \cdot l_3 = \sum_K \gamma_K (x_K - x^v) \\ l_{23} &= l_2 \cdot l_3 = \sum_K \gamma_K (y_K - y^v) \\ l_{33} &= l_3 \cdot l_3 = \sum_K \gamma_K. \end{aligned}$$

Or, la valeur en  $\mathbf{x}^v = (x^v, y^v)$  de la fonction d'interpolation est égale à

$$c = \frac{\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_1 \cdot d \\ l_{12} & l_{22} & l_2 \cdot d \\ l_{13} & l_{23} & l_3 \cdot d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{vmatrix}}.$$

On en déduit

$$\alpha_K = \frac{\gamma_K + \gamma_K \frac{(x_K - x^v)(l_{12}l_{23} - l_{22}l_{13})}{D} + \gamma_K \frac{(y_K - y^v)(l_{12}l_{13} - l_{11}l_{23})}{D}}{\sum_K \gamma_K + \sum_K \gamma_K \frac{(x_K - x^v)(l_{12}l_{23} - l_{22}l_{13})}{D} + \sum_K \gamma_K \frac{(y_K - y^v)(l_{12}l_{13} - l_{11}l_{23})}{D}}.$$

Le problème de minimisation (3.28) a une unique solution et le déterminant  $D = l_{11}l_{22} - l_{12}^2$  est non nul dès que les points  $\mathbf{x}_K$  ne sont pas tous alignés, ce qui est le cas lorsque  $\mathbf{x}^v$  est un sommet interne au maillage. La propriété (3.25) est trivialement respectée; (3.26) et (3.27) sont la conséquence du fait que (3.28) est nul lorsque  $\mathbf{u}$  est une fonction affine.

### 3.3.4 Continuité des flux : élimination des inconnues auxiliaires

Comme toute méthode de volumes finis, le principe du schéma diamant est d'écrire la continuité des flux à travers les interfaces du maillage. Ces équations supplémentaires permettent d'éliminer algébriquement les inconnues auxiliaires  $\mathbf{u}_s$  en chaque arête  $s \in \mathcal{E}^{int}$ .

#### Définition 3.3.3 (Condition de conservation)

Soit  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  une arête interne. Soient  $(\lambda_K, \mu_K) \in \mathbb{R}^2$  et  $(\lambda_L, \mu_L) \in \mathbb{R}^2$  les coefficients de Lamé constants par volume primal. La condition de conservation s'écrit

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{Ks} = \sigma^{D_{Ls}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{Ks}. \quad (3.29)$$

Nous allons développer la relation (3.29) grâce aux matrices discrètes (B.1)-(B.6) afin d'obtenir l'expression des inconnues auxiliaires  $\mathbf{u}_s$ .

#### Théorème 3.3.1 (Expression des inconnues aux arêtes)

1. Pour toute arête interne  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$ , il existe un unique  $\mathbf{u}_s$ , dépendant uniquement des inconnues principales  $\mathbf{u}^\tau$ , des coefficients de Lamé constants par volume primal et des paramètres du maillage, qui satisfait l'équation (3.29). Son expression est

$$\mathbf{u}_s = \beta_{KL}^{-1} (\beta_L^s \mathbf{u}_L + \beta_K^s \mathbf{u}_K - \beta_1^{KL} (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks})). \quad (3.30)$$

2. Pour toute arête de bord  $s \in \mathcal{E}^{bD}$  pour laquelle est imposée une condition de déplacement, l'inconnue auxiliaire  $\mathbf{u}_s$  est éliminée via la condition de bord. Son expression est

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s). \quad (3.31)$$

**Démonstration:** Soit  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  une arête interne. On développe la condition de continuité à travers l'arête  $s$  de la composante normale du tenseur des contraintes discret exprimée en (3.29) en s'aidant de la définition du flux des contraintes exprimée en (3.16). Rappelons qu'en vertu

des Conventions (3.2.1), on a  $(\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) = -(\mathbf{u}_2^{Ls} - \mathbf{u}_1^{Ls})$ . Ainsi, la contrainte de conservation (3.29) équivaut à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left[ \begin{aligned} & \mu_K(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{Ks} + \mu_K(\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \otimes \mathbf{N}_1^{Ks} \\ & + \mu_K \mathbf{N}_{Ks} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \mu_K \mathbf{N}_1^{Ks} \otimes (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \\ & + \lambda_K \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{Ks} \right) \text{Id} + \lambda_K \left( (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \cdot \mathbf{N}_1^{Ks} \right) \text{Id} \end{aligned} \right] \mathbf{n}_{Ks} \\ = & \frac{1}{2|D_{Ls}|} \left[ \begin{aligned} & \mu_L(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_L) \otimes \mathbf{N}_{Ls} + \mu_L(\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \otimes (-\mathbf{N}_1^{Ls}) \\ & + \mu_L \mathbf{N}_{Ls} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_L) + \mu_L (-\mathbf{N}_1^{Ls}) \otimes (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \\ & + \lambda_L \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_L) \cdot \mathbf{N}_{Ls} \right) \text{Id} + \lambda_L \left( (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \cdot (-\mathbf{N}_1^{Ls}) \right) \text{Id} \end{aligned} \right] \mathbf{n}_{Ks}. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{N}_{Ks} = -\mathbf{N}_{Ls}$ , on peut isoler les termes en  $\mathbf{u}_s$  pour obtenir l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left[ \mu_K \mathbf{u}_s (\mathbf{N}_{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \mu_K \mathbf{N}_{Ks} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_K (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{N}_{Ks}) \mathbf{n}_{Ks} \right] \\ + & \frac{1}{2|D_{Ls}|} \left[ \mu_L \mathbf{u}_s (\mathbf{N}_{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \mu_L \mathbf{N}_{Ks} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_L (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{N}_{Ks}) \mathbf{n}_{Ks} \right] \\ = & \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left[ \mu_K \mathbf{u}_K (\mathbf{N}_{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \mu_K \mathbf{N}_{Ks} (\mathbf{u}_K \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_K (\mathbf{u}_K \cdot \mathbf{N}_{Ks}) \mathbf{n}_{Ks} \right] \\ + & \frac{1}{2|D_{Ls}|} \left[ \mu_L \mathbf{u}_L (\mathbf{N}_{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \mu_L \mathbf{N}_{Ks} (\mathbf{u}_L \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_L (\mathbf{u}_L \cdot \mathbf{N}_{Ks}) \mathbf{n}_{Ks} \right] \\ - & \frac{1}{2|D_{Ls}|} \left[ \mu_L (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) (\mathbf{N}_1^{Ls} \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \mu_L \mathbf{N}_1^{Ls} \left( (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \cdot \mathbf{n}_{Ks} \right) \right. \\ & \left. + \lambda_L \left( (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \cdot \mathbf{N}_1^{Ls} \right) \mathbf{n}_{Ks} \right] \\ - & \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left[ \mu_K (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) (\mathbf{N}_1^{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks}) + \mu_K \mathbf{N}_1^{Ks} \left( (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \cdot \mathbf{n}_{Ks} \right) \right. \\ & \left. + \lambda_K \left( (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \cdot \mathbf{N}_1^{Ks} \right) \mathbf{n}_{Ks} \right]. \end{aligned}$$

L'expression des matrices discrètes (B.1)-(B.6) conduit à

$$(\beta_K^s + \beta_L^s) \mathbf{u}_s = \beta_L^s \mathbf{u}_L + \beta_K^s \mathbf{u}_K - \beta_1^{KL} (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}).$$

L'existence et l'unicité de l'expression de  $\mathbf{u}_s$  vient du fait que la matrice  $\beta_{KL} = \beta_K^s + \beta_L^s$  est inversible d'après la Proposition B.1.1. ■

### 3.3.5 Schéma numérique

Les familles d'inconnues secondaires (resp. auxiliaires) sont éliminées par interpolation (resp. algébriquement) pour les sommets (resp. arêtes) internes, ou en utilisant les conditions de bord. En résumé, le schéma numérique volumes finis diamant consiste à déterminer  $\mathbf{u}^\tau$  satisfaisant

$$-\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| \phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) = \mathbf{f}_K \quad \forall K \in \mathfrak{M}, \quad (3.32)$$

où le second membre est donné par  $\mathbf{f}_K = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , et où le flux numérique  $\phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau)$  est défini selon la Proposition 3.3.1 par

1. Pour tout volume diamant sur le bord de Neumann  $D_{Ks} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{b_N}$

$$\phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.33)$$

2. Pour tout volume diamant  $D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int} \cup \tilde{\mathcal{D}}^{bD}$  dont aucun des sommets n'est sur le bord de Neumann

$$\phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) = \sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{Ks} = \beta_K^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \beta_1^{Ks}(\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \quad (3.34)$$

où les matrices  $\beta_K^s$  et  $\beta_1^{Ks}$  sont définies en (B.2) et (B.5).

3. Pour tout volume diamant  $D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int}$  dont un des sommets  $\mathbf{x}_i^{Ks} \in \mathcal{N}^{bN}$  est sur le bord de Neumann

$$\begin{aligned} \phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) = & (\beta_K^s - \beta_1^{Ks}(\beta_{1,n_i}^{Ks})^{-1}\beta_{K,n_i}^s)(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \\ & + \beta_1^{Ks}(\beta_{1,n_i}^{Ks})^{-1}\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{Ks}) + (-1)^i\beta_1^{Ks}(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{i+1}^{Ks}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

où les matrices  $\beta_{K,n_i}^s$  et  $\beta_{1,n_i}^{Ks}$  sont explicitées en (B.9) et (B.10).

Les inconnues secondaires s'expriment selon (3.23) et (3.24) sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{u}^v = \sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) \mathbf{u}_K & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{int}, \\ \mathbf{u}^v = \mathbf{g}(\mathbf{x}^v) & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{bD}, \end{cases} \quad (3.36)$$

et les inconnues auxiliaires s'expriment selon le Théorème 3.3.1 sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s = \beta_{KL}^{-1}(\beta_L^s \mathbf{u}_L + \beta_K^s \mathbf{u}_K - \beta_1^{KL}(\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks})) & \forall s \in \mathcal{E}^{int}, \\ \mathbf{u}_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s) & \forall s \in \mathcal{E}^{bD}. \end{cases} \quad (3.37)$$

### Remarque 3.3.2

Il s'agit d'un système linéaire non symétrique, du fait de l'interpolation des valeurs aux sommets, dont on va démontrer l'inversibilité lorsque  $\Gamma_N = \emptyset$ .

## 3.4 Consistance du schéma

### Définition 3.4.1

Le tenseur des contraintes de la solution continue écrit avec des coefficients de Lamé constants par volume est défini pour tout  $D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}$  par

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}) = \mu_K(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \lambda_K \text{tr}(\nabla \mathbf{u}) \text{Id}. \quad (3.38)$$

Le flux  $P^{D_{Ks}}(\phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u}))$  du tenseur des contraintes pour la solution continue sur l'interface  $s$  avec des coefficients de Lamé constants par volumes est défini par

$$P^{D_{Ks}}(\phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u})) = \frac{1}{|s|} \int_s \sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} d\mathbf{x} \quad (3.39)$$

où  $\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  est donné par la Définition 3.4.1.

Donnons à présent une définition de l'erreur de consistance.

### Définition 3.4.2 (Consistance faible et ordre de consistance)

On appelle erreur de consistance au sens faible la quantité  $Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}) \in (\mathbb{R}^2)^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$  constante par volume diamant définie de la façon suivante.

1. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int} \cup \tilde{\mathfrak{D}}^{bD}$

$$\begin{aligned} Q^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) &= R^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) + S^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) \\ &= \left( \phi^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}) - P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u})) \right) + \left( P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u})) - P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})) \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

où l'expression

- du projeté du flux de la solution continue  $P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u}))$  sur le maillage est donnée en (3.7),
- du projeté du flux de la solution continue sur le maillage mais avec coefficients de Lamé constants par volume  $P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}))$  est donnée en (3.39),
- du projeté de  $\mathbf{u}$  sur le maillage, notée  $\mathbb{P}^T \mathbf{u}$ , est donnée par (3.49),
- celle du flux discret du projeté de  $\mathbf{u}$  sur le maillage, notée  $\phi^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})$ , est donnée par (3.8).

2. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{bN}$

$$Q^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Le schéma numérique discret est dit faiblement consistant si on a

$$\|Q^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathfrak{D}}} \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0.$$

Pour déterminer la consistance faible du schéma numérique, on va étudier chacun des opérateurs  $R^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})$  et  $S^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})$  à travers le Théorème 3.4.1 et le Théorème 3.4.2.

### **Théorème 3.4.1**

*Il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $p > 2$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout volume diamant  $D_{K_s}$  de  $\tilde{\mathfrak{D}}$  associé à un volume  $K \in \mathfrak{M}$  et à une arête  $s$  de  $\partial K$*

$$\|S^{D_{K_s}}(\mathbf{u})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(D_{K_s})}. \quad (3.42)$$

**Démonstration :** Il s'agit dans cette démonstration de contrôler l'erreur de consistance commise entre le projeté du flux de la solution continue sur le maillage et le projeté du flux de la solution continue mais avec coefficients de Lamé constants par volumes sur le maillage. Comme

$$\begin{aligned} \|S^{D_{K_s}}(\mathbf{u})\| &= \|P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u})) - P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u}))\| \\ &= \left\| \frac{1}{|s|} \int_s (\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{|s|} \int_s (\mu_K - \mu(\mathbf{x})) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{1}{|s|} \int_s (\mu_K - \mu(\mathbf{x})) (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{1}{|s|} \int_s (\lambda_K - \lambda(\mathbf{x})) \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right\|, \end{aligned} \quad (3.43)$$

où sur les interfaces de discontinuité  $\mu(\mathbf{x})$  et  $\lambda(\mathbf{x})$  sont les limites de  $\mu$  et de  $\lambda$  pris dans  $D_{K_s}$ , on va regarder le premier terme en gradient ; le raisonnement pour la transposée du gradient et la trace du gradient étant similaire. L'inégalité de Hölder donne

$$\left\| \frac{1}{|s|} \int_s (\mu_K - \mu(\mathbf{x})) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right\| \leq \frac{1}{|s|} \left( \int_s |\mu_K - \mu(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_s \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{K_s}\|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.44)$$

avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . En appliquant le développement de Taylor aux coefficients de Lamé qui sont réguliers ( $C^1$  par exemple) par sous-domaines, on montre qu'il existe des constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  ne dépendant pas du maillage telles que pour tout  $\mathbf{x} \in s$

$$|\mu_K - \mu(\mathbf{x})| \leq C_1 \text{size}(\mathcal{T}), \quad |\lambda_K - \lambda(\mathbf{x})| \leq C_2 \text{size}(\mathcal{T}),$$

ce qui, appliqué à la première intégrale de (3.44), donne

$$\frac{1}{|s|} \left( \int_s |\mu_K - \mu(\mathbf{x})|^q d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \frac{(|s| \text{size}(\mathcal{T})^q)^{\frac{1}{q}}}{|s|} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{1}{p}}. \quad (3.45)$$

La seconde intégrale de l'inégalité (3.44) est contrôlée grâce à l'inégalité de trace (voir par exemple [23]), qui nous permet d'affirmer qu'il existe une constante  $C_3 > 0$  dépendant de  $p$  et indépendante du maillage telle que

$$\left( \int_s \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{Ks}\|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_3 \text{size}(\mathcal{T})^{-\frac{1}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathbb{D}_{Ks})}. \quad (3.46)$$

Ainsi, les majorations (3.45) et (3.46) montrent qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\left\| \frac{1}{|s|} \int_s (\mu_K - \mu(\mathbf{x})) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{Ks} d\mathbf{x} \right\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathbb{D}_{Ks})}. \quad (3.47) \quad \blacksquare$$

### **Théorème 3.4.2**

*Il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de  $p$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout volume diamant  $\mathbb{D}_{Ks}$  de  $\tilde{\mathcal{D}}$  associé à un volume  $K \in \mathfrak{M}$  et à une arête  $s$  de  $\partial K$*

$$\|R^{\mathbb{D}_{Ks}}(\mathbf{u})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{V}(\mathbf{x}_2^{Ks}) \cup \mathcal{V}(\mathbf{x}_1^{Ks}))}. \quad (3.48)$$

La preuve de ce théorème est présentée ci-dessous. On note pour tout  $K$  de  $\mathfrak{M}$

$$\langle \mathbf{u} \rangle_K = \mathbb{P}^T \mathbf{u}|_K = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.49)$$

les valeurs moyennes de  $\mathbf{u}$  sur les volumes primaux. On définit avec ces moyennes et comme dans le cas discret les valeurs interpolées aux sommets qui ne sont pas sur  $\Gamma_N$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u} \rangle^v = \sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) \langle \mathbf{u} \rangle_K & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{int}, \\ \langle \mathbf{u} \rangle^v = \mathbf{g}(\mathbf{x}^v) & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{bD}, \end{cases} \quad (3.50)$$

et les valeurs aux centres des interfaces de  $\mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^{bD}$  qui assurent la continuité du flux normal

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u} \rangle_s = \beta_{KL}^{-1} (\beta_L^s \langle \mathbf{u} \rangle_L + \beta_K^s \langle \mathbf{u} \rangle_K - \beta_1^{KL} (\langle \mathbf{u} \rangle_2^{Ks} - \langle \mathbf{u} \rangle_1^{Ks})) & \forall s \in \mathcal{E}^{int}, \\ \langle \mathbf{u} \rangle_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s) & \forall s \in \mathcal{E}^{bD}. \end{cases} \quad (3.51)$$

Afin de pouvoir donner une expression de l'erreur de consistance sur les flux  $R^{\mathbb{D}_{Ks}}(\mathbf{u})$ , on va au préalable énoncer une propriété utile sur la composante normale du tenseur  $\sigma^{\mathbb{D}_{Ks}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  des contraintes de la solution continue à travers les interfaces du maillage, mais avec coefficients de Lamé constants par volumes.

### **Proposition 3.4.1**

*La composante normale du tenseur des contraintes pour la solution continue mais avec des coefficients de Lamé constants par volumes s'exprime à l'aide des matrices  $\beta_K^s$  et  $\beta_1^{Ks}$ .*

Soit  $s \in \mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^{bD}$  et soit  $K \in \mathfrak{M}$  tel que  $s \in \partial K$ . Pour tout  $\mathbf{x} \in D_{K_s}$

$$\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \beta_1^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{K_s} - \mathbf{x}_1^{K_s}). \quad (3.52)$$

**Démonstration :** On considère un volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ . Grâce à l'égalité (3.3) page 49, on est en mesure de donner l'expression du tenseur gradient continu sur l'arête  $s$ . On a pour tout  $\mathbf{x} \in D_{K_s}$

$$2|D_{K_s}|\nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\det(\mathbf{N}_{K_s}, \mathbf{N}_1^{K_s}).$$

Par ailleurs, on a la relation suivante : pour toute famille de vecteurs  $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  de  $\mathbb{R}^2$  et pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A \det(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = (A(-\mathbf{c})^\perp) \otimes \mathbf{b} + (A\mathbf{b}^\perp) \otimes \mathbf{c} \quad (3.53)$$

ce qui conduit à

$$2|D_{K_s}|\nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \left[ [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(-\mathbf{N}_1^{K_s})^\perp] \otimes \mathbf{N}_{K_s} + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{N}_{K_s}^\perp] \otimes \mathbf{N}_1^{K_s} \right].$$

Mais on sait que  $(-\mathbf{N}_1^{K_s})^\perp = \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K$  et que  $\mathbf{N}_{K_s}^\perp = \mathbf{x}_2^{K_s} - \mathbf{x}_1^{K_s}$ , d'où

$$2|D_{K_s}|\nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \left[ [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] \otimes \mathbf{N}_{K_s} + [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{K_s} - \mathbf{x}_1^{K_s})] \otimes \mathbf{N}_1^{K_s} \right].$$

Puis, en utilisant la formule (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} 2|D_{K_s}|\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \mu_K [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \mu_K [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{K_s} - \mathbf{x}_1^{K_s})] \otimes \mathbf{N}_1^{K_s} \\ &\quad + \mu_K \mathbf{N}_{K_s} \otimes [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] + \mu_K \mathbf{N}_1^{K_s} \otimes [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{K_s} - \mathbf{x}_1^{K_s})] \\ &\quad + \lambda_K [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] \cdot \mathbf{N}_{K_s} \text{Id} + \lambda_K [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{K_s} - \mathbf{x}_1^{K_s})] \cdot \mathbf{N}_1^{K_s} \text{Id}. \end{aligned}$$

On conclut, comme dans la démonstration de la Proposition 3.3.1 en utilisant la relation (A.1a), pour introduire les matrices  $\beta_K^s$  et  $\beta_1^{K_s}$  puisque les coefficients de Lamé sont constants.

$$\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \beta_1^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{K_s} - \mathbf{x}_1^{K_s}). \quad \blacksquare$$

On en déduit l'expression de l'erreur de consistance sur les flux  $R^{D_{K_s}}(\mathbf{u})$  selon la nature des arêtes  $s \in \mathcal{E}$ .

**Proposition 3.4.2 (Erreur de consistance par arête)**

1. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int} \cup \tilde{\mathfrak{D}}^{bD}$  dont aucun des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2\}}$  n'est sur le bord de Neumann,

$$\begin{aligned} R^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{|s|} \int_s \beta_K^s (\langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_K - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{1}{|s|} \int_s \beta_1^{K_s} (\langle \mathbf{u} \rangle_2^{K_s} - \langle \mathbf{u} \rangle_1^{K_s} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{K_s} - \mathbf{x}_1^{K_s})) \mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

2. Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de  $p$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int}$  dont un des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})$  est sur le bord de Neumann

$$R^{D_{Ks}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{|s|} \int_s \left[ \beta_K^s - \beta_1^{Ks} (\beta_{1, \mathbf{n}_1^{\Gamma_N}}^{Ks})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_1^{\Gamma_N}}^s \right] (\langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_K - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)) dx \\ + (-1)^i \frac{1}{|s|} \int_s \beta_1^{Ks} \left( \langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_{i+1}^{Ks} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{i+1}^{Ks}) \right) dx + \mathbb{A}, \quad (3.55)$$

avec  $\|\mathbb{A}\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(D_{Ks})}$ .

Remarquons ici que le cas où le volume diamant  $D_{Ks}$  est sur le bord de Neumann  $\tilde{\mathcal{D}}^{b_N}$  n'est pas traité car on a directement l'estimation d'erreur  $Q^{D_{Ks}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .

**Démonstration :** 1. Soit  $D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int} \cup \tilde{\mathcal{D}}^{b_D}$  un volume diamant dont aucun des sommets  $(\mathbf{x}_i^{Ks})_{i=\{1,2\}}$  n'est sur le bord de Neumann. L'erreur de consistance par face  $R^{D_{Ks}}(\mathbf{u})$  est donnée par le premier terme du membre de droite de l'égalité (3.40). Ainsi, les termes en  $\nabla \mathbf{u}$  viennent de l'écriture du flux  $P^{D_{Ks}}(\phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u}))$  continu avec coefficients de Lamé constants par volume. Grâce à la Proposition 3.4.1, on peut écrire ce flux de la façon suivante

$$P^{D_{Ks}}(\phi^{D_{Ks}}(\mathbf{u})) = \frac{1}{|s|} \int_s \left[ \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \beta_1^{Ks} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{Ks} - \mathbf{x}_1^{Ks}) \right] dx.$$

Les termes restants viennent de l'écriture du flux  $\phi^{D_{Ks}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})$ . Son expression est la même que celle du flux de la solution discrète (3.16), en remplaçant les valeurs discrètes  $\mathbf{u}^{\tau}$  par  $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}$ .

2. Soit  $s \in \mathcal{E}^{int}$ . Par hypothèses, il existe  $i = \{1, 2\}$  tel que  $\mathbf{x}_i^{Ks} \in \mathcal{N}^{b_N}$ . La procédure est la même que pour le flux du tenseur des contraintes discret, donnée en Proposition 3.3.1 (cas 3), en remplaçant les déplacements discrets par leurs projetés sur le maillage. Ceci conduit à l'expression suivante

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \mathbf{n}_{Ks} = \left( \beta_K^s - \beta_1^{Ks} (\beta_{1, \mathbf{n}_1^{\Gamma_N}}^{Ks})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_1^{\Gamma_N}}^s \right) (\langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_K) \\ + (-1)^i \beta_1^{Ks} (\langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_{i+1}^{Ks}) \\ + \beta_1^{Ks} (\beta_{1, \mathbf{n}_1^{\Gamma_N}}^{Ks})^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{Ks}). \quad (3.56)$$

En ce qui concerne le flux du tenseur des contraintes continu, le même raisonnement est tenu : on coupe en deux le flux exprimé en (3.52) sur chacun des demi diamants  $D_{Ks,i}$  et  $D_{Ks,i+1}$ . Soit  $\mathbf{x} \in D_{Ks}$ , on a ainsi

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} = \frac{1}{2} (\sigma^{D_{Ks,i}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \sigma^{D_{Ks,i+1}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) \mathbf{n}_{Ks} \\ = \frac{1}{2} (\beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + 2(-1)^i \beta_1^{Ks} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s)) \\ + \frac{1}{2} (\beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + 2(-1)^{i+1} \beta_1^{Ks} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_s)). \quad (3.57)$$

Le sommet  $\mathbf{x}_i^{Ks}$  étant sur le bord de Neumann, on ajoute puis retranche le terme  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{Ks})(\mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s)$  à l'expression précédente, afin de pouvoir utiliser la condition de Neu-

mann. L'égalité (3.57) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\sigma^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{K}_s} &= \frac{1}{2} \left( \beta_{\text{K}}^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\text{K}}) + 2(-1)^i \beta_1^{\text{K}_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s} - \mathbf{x}_s) \right. \\
&\quad \left. + 2(-1)^i \beta_1^{\text{K}_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s} - \mathbf{x}_s) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\beta_{\text{K}}^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\text{K}}) + 2(-1)^{i+1} \beta_1^{\text{K}_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s} - \mathbf{x}_s)) \\
&= \beta_{\text{K}}^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\text{K}}) \\
&\quad + (-1)^i \beta_1^{\text{K}_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s} - \mathbf{x}_s) \\
&\quad + (-1)^i \beta_1^{\text{K}_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s} - \mathbf{x}_s) \\
&\quad + (-1)^i \beta_1^{\text{K}_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Par ailleurs, la condition de Neumann au sommet  $\mathbf{x}_i^{\text{K}_s} \in \mathcal{N}^{b_N}$  s'écrit  $\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})$ , c'est-à-dire

$$2\mu(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})\mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} + \lambda(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})\text{Div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}).$$

Or, d'après la Définition 3.4.1 du tenseur des contraintes de la solution continue avec des coefficients constants, on a

$$\begin{aligned}
\sigma^{\text{DK}_{s,i}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} &= (2\mu_{\text{K}}\mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}) + \lambda_{\text{K}}\text{Div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \\
&= \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}) + 2(\mu_{\text{K}} - \mu(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))\mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \\
&\quad + (\lambda_{\text{K}} - \lambda(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))\text{Div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}.
\end{aligned}$$

Par un procédé identique à celui utilisé dans la Proposition 3.4.1, on exprime la composante normale du tenseur des contraintes en  $\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}$  à l'aide des matrices discrètes (B.9) et (B.10), de la façon suivante

$$\sigma^{\text{DK}_{s,i}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \beta_{\text{K},\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\text{K}}) + \beta_{1,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{K}_s} (-1)^i \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s} - \mathbf{x}_s).$$

Les deux relations précédentes conduisent à

$$\begin{aligned}
\sigma^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{K}_s} &= \beta_{\text{K}}^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\text{K}}) \\
&\quad + \beta_1^{\text{K}_s} (\beta_{1,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{K}_s})^{-1} \left[ \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}) - \beta_{\text{K},\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\text{K}}) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 2(\mu_{\text{K}} - \mu(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))\mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + (\lambda_{\text{K}} - \lambda(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))\text{Div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \right] \\
&\quad + (-1)^i \beta_1^{\text{K}_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}))(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s} - \mathbf{x}_s) \\
&\quad + (-1)^i \beta_1^{\text{K}_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on ajoute puis retranche l'opérateur  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{K_s})$  afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} &= (\beta_K^s - \beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s}(\beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s) [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] \\
&+ \beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s}(\beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \left[ \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) + (\mu_K - \mu(\mathbf{x}_i^{K_s})) \mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \right. \\
&\quad \left. + (\lambda_K - \lambda(\mathbf{x}_i^{K_s})) \mathbb{D}\text{iv}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \right] \\
&+ \beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s}(\beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \\
&+ (-1)^i \beta_{\mathbf{1}}^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s) \\
&+ (-1)^i \beta_{\mathbf{1}}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{i+1}^{K_s}).
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Enfin, en réunissant les deux expressions des flux discrets (3.56) et continus (3.59), on est en mesure de donner l'expression de l'erreur de consistance

$$\begin{aligned}
R^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{|s|} \int_s \left[ \beta_K^s - \beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s}(\beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s \right] (\langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_K - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)) dx \\
&+ (-1)^i \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{1}}^{K_s} (\langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_{i+1}^{K_s} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{i+1}^{K_s})) dx - \mathbb{A}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

où  $\mathbb{A}$  a pour expression

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{1}}^{K_s}(\beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \left[ (\mu_K - \mu(\mathbf{x}_i^{K_s})) \mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}) \right. \\
&\quad \left. + (\lambda_K - \lambda(\mathbf{x}_i^{K_s})) \mathbb{D}\text{iv}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}) \right] \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} dx \\
&+ \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{1}}^{K_s}(\beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) dx \\
&+ \frac{(-1)^i}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{1}}^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s) dx.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

D'après le Corollaire IX.14 du Théorème de Morrey (voir [20], p.168), on a pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}_{K_s}$

$$\|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathbf{D}_{K_s})}. \tag{3.62}$$

Les Propositions B.1.2 et B.2.2 nous indiquent qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que

$$\|\beta_{\mathbf{1}}^{K_s}\| \leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})} \quad \|\beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s\| \leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})} \quad \|(\beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1}\| \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \tag{3.63}$$

En utilisant successivement les inégalités (3.47), (3.62) et (3.63), et le fait que pour tous vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $K$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \text{size}(\mathcal{T})$ , on a

$$\|\mathbb{A}\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathbf{D}_{K_s})}. \quad \blacksquare$$

Pour terminer la preuve du Théorème 3.4.2, on a besoin du lemme suivant démontré dans [33].

#### **Lemme 3.4.1**

*Il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de  $p$  telle que pour toute fonction  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\mathcal{P})$ , où  $\mathcal{P}$  est un domaine convexe de  $\mathbb{R}^2$  et  $p > 2$ , pour tout couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \overline{\mathcal{P}}$ , si*

on définit

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

alors

$$\|\mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq C \frac{\text{diam}(\mathcal{P})^2}{|\mathcal{P}|^{\frac{1}{p}}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{P})}.$$

Par ailleurs, afin d'estimer l'erreur commise entre le déplacement continu et son projeté sur le maillage et , on introduit les notations suivantes.

### Définition 3.4.3

Pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ , on note

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle_K - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) & \forall K \in \mathfrak{M}, \\ \mathcal{I}_{\mathbf{x}^v}(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle^v - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}^v - \mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{int}, \\ \mathcal{I}_{\mathbf{x}^v}(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle^v - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}^v - \mathbf{x}) = \mathcal{I}(\mathbf{x}^v, \mathbf{x}) & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{bd}, \\ \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle_s - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}) & \forall s \in \mathcal{E}^{int}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

On émet la proposition suivante.

### Proposition 3.4.3

Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de  $p > 2$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour toute face interne  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  et pour tout  $\mathbf{x} \in s$

$$\begin{aligned} \beta_{KL} \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \beta_L^s \mathcal{I}_L(\mathbf{x}) + \beta_K^s \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) - \beta_1^{KL} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{Ks}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{Ks}}(\mathbf{x})) \\ &- \left( \sigma^{D_{Ls}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ls} + \sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} \right), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\text{où } \left\| \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} + \sigma^{D_{Ls}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ls} \right) d\mathbf{x} \right\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(D_{Ks} \cup D_{Ls})}. \quad (3.66)$$

**Démonstration :** Soit  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  une face interne. En utilisant l'expression de  $\langle \mathbf{u} \rangle_s$  donnée en (3.51), alors pour tout  $\mathbf{x} \in s$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle_s - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}) \\ &= \beta_{KL}^{-1} (\beta_L^s \langle \mathbf{u} \rangle_L + \beta_K^s \langle \mathbf{u} \rangle_K - \beta_1^{KL} (\langle \mathbf{u} \rangle_2^{Ks} - \langle \mathbf{u} \rangle_1^{Ks})) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.67)$$

En s'aidant de la Définition 3.4.3, on peut réécrire (3.67) en ajoutant puis retranchant les termes relatifs aux vecteurs  $\mathcal{I}_L(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{I}_K(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{Ks}}(\mathbf{x})$  et  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{Ks}}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \beta_{KL} \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \beta_L^s \mathcal{I}_L(\mathbf{x}) + \beta_K^s \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) - \beta_1^{KL} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{Ks}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{Ks}}(\mathbf{x})) \\ &+ \beta_L^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_L - \mathbf{x}) + \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) - \beta_1^{KL} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{Ks} - \mathbf{x}_1^{Ks}) \\ &- \beta_{KL} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}). \end{aligned}$$

On sait d'après la relation (B.1) que  $\beta_{KL} = \beta_K^s + \beta_L^s$ , et d'après la relation (B.4) que  $\beta_1^{KL} = \beta_1^{Ks} - \beta_1^{Ls}$ . Alors

$$\begin{aligned}\beta_{\text{KL}}\mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \beta_{\text{L}}^s\mathcal{I}_{\text{L}}(\mathbf{x}) + \beta_{\text{K}}^s\mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x}) - \beta_{\mathbf{1}}^{\text{KL}}(\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{\text{K}s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{\text{K}s}}(\mathbf{x})) \\ &\quad - \left( \beta_{\text{L}}^s\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\text{L}}) - \beta_{\mathbf{1}}^{\text{L}s}\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{\text{K}s} - \mathbf{x}_1^{\text{K}s}) \right) \\ &\quad - \left( \beta_{\text{K}}^s\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\text{K}}) + \beta_{\mathbf{1}}^{\text{K}s}\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_2^{\text{K}s} - \mathbf{x}_1^{\text{K}s}) \right).\end{aligned}$$

L'expression de la composante normale du tenseur des contraintes continu à coefficients de Lamé constants par volumes est donnée par (3.52). Celle-ci implique

$$\begin{aligned}\beta_{\text{KL}}\mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \beta_{\text{L}}^s\mathcal{I}_{\text{L}}(\mathbf{x}) + \beta_{\text{K}}^s\mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x}) - \beta_{\mathbf{1}}^{\text{KL}}(\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{\text{K}s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{\text{K}s}}(\mathbf{x})) \\ &\quad - \left( \sigma^{\text{D}_{\text{L}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{L}s} + \sigma^{\text{D}_{\text{K}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{K}s} \right).\end{aligned}$$

Le Théorème 3.4.1 donne une estimation de l'erreur commise entre le flux par arête  $s$  du tenseur des contraintes de la solution continue et celui du tenseur des contraintes de la solution continue mais avec coefficients de Lamé constants par volume. De fait, il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $p > 2$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\left\| \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\text{D}_{\text{K}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}_{\text{K}s} \mathrm{d}\mathbf{x} \right\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\text{D}_{\text{K}s})}.$$

Grâce à la propriété  $\mathbf{n}_{\text{K}s} = -\mathbf{n}_{\text{L}s}$ , on peut écrire que

$$\begin{aligned}& \left\| \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma^{\text{D}_{\text{K}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{K}s} + \sigma^{\text{D}_{\text{L}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{L}s} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\text{D}_{\text{K}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}_{\text{K}s} \mathrm{d}\mathbf{x} + \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\text{D}_{\text{L}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}_{\text{L}s} \mathrm{d}\mathbf{x} \right\| \\ &\leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\text{D}_{\text{K}s} \cup \text{D}_{\text{L}s})}\end{aligned} \quad (3.68)$$

ce qui achève la démonstration. ■

### Suite de la preuve du Théorème 3.4.2

On peut à présent majorer l'erreur de consistance (3.54) pour les arêtes internes dont aucun sommet n'est sur le bord de Neumann, la démonstration de celle dont un des sommets est sur Neumann définie par (3.55) étant sensiblement la même. On remplace chacun des termes de (3.54) par leur équivalent donné en Définition 3.4.3. Ainsi

$$R^{\text{D}_{\text{K}s}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\text{K}}^s (\mathcal{I}_s(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x})) \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{1}}^{\text{K}s} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{\text{K}s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{\text{K}s}}(\mathbf{x})) \mathrm{d}\mathbf{x},$$

où on remplace le vecteur  $\mathcal{I}_s(\mathbf{x})$  par l'expression (3.65) de la Proposition 3.4.3 pour obtenir

$$\begin{aligned}R^{\text{D}_{\text{K}s}}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\text{K}}^s \beta_{\text{KL}}^{-1} \left( \beta_{\text{L}}^s \mathcal{I}_{\text{L}}(\mathbf{x}) + \beta_{\text{K}}^s \mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x}) - \beta_{\mathbf{1}}^{\text{KL}} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{\text{K}s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{\text{K}s}}(\mathbf{x})) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sigma^{\text{D}_{\text{L}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{L}s} + \sigma^{\text{D}_{\text{K}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{K}s} \right) - \beta_{\text{KL}} \mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x}) \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{1}}^{\text{K}s} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{\text{K}s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{\text{K}s}}(\mathbf{x})) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\text{K}}^s \beta_{\text{KL}}^{-1} \left( \beta_{\text{L}}^s (\mathcal{I}_{\text{L}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x})) - \beta_{\mathbf{1}}^{\text{KL}} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{\text{K}s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{\text{K}s}}(\mathbf{x})) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sigma^{\text{D}_{\text{L}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{L}s} + \sigma^{\text{D}_{\text{K}s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{\text{K}s} \right) \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{1}}^{\text{K}s} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{\text{K}s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{\text{K}s}}(\mathbf{x})) \mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Il s'agit à présent de majorer l'expression précédente. On a donc

$$\begin{aligned} \|R^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u})\| &\leq \frac{1}{|s|} \int_s \|\beta_K^s \beta_{KL}^{-1}\| \left( \|\beta_L^s\| (\|\mathcal{I}_L(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_K(\mathbf{x})\|) \right. \\ &\quad \left. + \|\beta_1^{KL}\| (\|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{K_s}}(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{K_s}}(\mathbf{x})\|) \right) d\mathbf{x} \\ &+ \left\| \frac{1}{|s|} \int_s \beta_K^s \beta_{KL}^{-1} \left( \sigma^{\mathcal{D}_{L_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{L_s} + \sigma^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s} \right) d\mathbf{x} \right\| \\ &+ \frac{1}{|s|} \int_s \|\beta_1^{K_s}\| (\|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{K_s}}(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{K_s}}(\mathbf{x})\|) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Le contrôle de la norme des matrices en Proposition B.1.2 et l'estimation (3.66) de la Proposition 3.4.3 entraînent

$$\begin{aligned} \|R^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u})\| &\leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T}) |s|} \int_s \left( \|\mathcal{I}_L(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_K(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_2^{K_s}}(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_1^{K_s}}(\mathbf{x})\| \right) \\ &+ C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{D}_{K_s} \cup \mathcal{D}_{L_s})}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Il reste à estimer les intégrales sur les interfaces dans (3.69). Commençons par  $\mathcal{I}_K$  avec  $K \in \mathfrak{M}$ . Comme  $\mathbf{x}_K$  est le centre de gravité de l'élément  $K$ , on a

$$\mathcal{I}_K(\mathbf{x}) = \frac{1}{|K|} \int_K (\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})(\mathbf{t} - \mathbf{x})) dt$$

qui permet avec le Lemme 3.4.1 d'estimer

$$\frac{1}{|s|} \int_s \|\mathcal{I}_K(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{2-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(K)}. \quad (3.70)$$

En ce qui concerne  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}$  avec  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{bD}$ , par définition  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x}) = \mathcal{I}(\mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x})$ . Par le Lemme 3.4.1, on a

$$\frac{1}{|s|} \int_s \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{2-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{D}_{K_s})}. \quad (3.71)$$

Le cas des sommets internes  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{int}$  est plus complexe car  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})$  dépend des valeurs de  $\mathcal{I}_L(\mathbf{x})$  pour  $L \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})$  et l'espace  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})$  n'est pas nécessairement convexe. Pour  $\mathbf{x} \in s$ , le poids d'interpolation  $\alpha_L(\mathbf{x}_i^{K_s})$  étant compris entre 0 et 1, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})\| &\leq \sum_{L \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})} \|\mathcal{I}_L(\mathbf{x})\| \\ &\leq \sum_{L \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})} \frac{1}{|L|} \int_L \|\mathcal{I}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\| dt \\ &\leq \sum_{L \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})} \frac{1}{|L|} \int_L \left( \|\mathcal{I}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_i^{K_s})\| + \|\mathcal{I}(\mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x})\| + \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{t} - \mathbf{x}_i^{K_s}\| \right) dt \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer l'estimation du Lemme 3.4.1 aux deux premiers termes et l'inégalité de Morrey (3.62) au dernier terme pour obtenir

$$\|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{2-\frac{2}{p}} \left( \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s}))} + 2\#\mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{D}_{K_s})} \right) \quad (3.72)$$

### Fin de preuve du Théorème 3.4.2

En rassemblant les résultats obtenus en (3.70)-(3.72) pour chacun des termes de (3.69), et en tenant compte de l'hypothèse (3.5) sur le maillage qui indique qu'un sommet du maillage n'est sommet que d'un nombre borné de volumes, on obtient

$$\|R^{D_{Ks}}(\mathbf{u})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{2}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{V}(\mathbf{x}_2^{Ks}) \cup \mathcal{V}(\mathbf{x}_1^{Ks}))}$$

ce qui achève la démonstration.

### Théorème 3.4.3 (Consistance faible)

En rassemblant les résultats obtenus au Théorème 3.4.1 et au Théorème 3.4.2, on obtient qu'il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de  $p$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (3.73)$$

**Démonstration:** Les majorations de  $S^{D_{Ks}}(\mathbf{u})$  et  $Q^{D_{Ks}}(\mathbf{u})$  exprimées dans les Théorèmes 3.4.1 et 3.4.2 montrent qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que (les  $\mathbf{x}^{v,K}$  parcourent les sommets de  $K$ )

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \sum_{K \in \mathfrak{M}} \# \left( \bigcup_{\mathbf{x}^{v,K} \in K} \mathcal{V}(\mathbf{x}^{v,K}) \right) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(K)}^p.$$

Par les Hypothèses (3.5) sur la régularité du maillage, le nombre de sommets de  $K$  et le cardinal de  $\mathcal{V}(\mathbf{x}^{v,K})$  sont bornés indépendamment de  $\text{size}(\mathcal{T})$ , d'où

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p.$$

Par Hölder

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq \left( \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \|Q^{D_{Ks}}(\mathbf{u})\|^p \right)^{\frac{2}{p}} \left( \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \right)^{1-\frac{2}{p}},$$

et par suite on conclut que

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq C |\Omega|^{1-\frac{2}{p}} \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}^2. \quad \blacksquare$$

## 3.5 Coercivité

On se limitera au cas  $\Gamma_N = \emptyset$ , car en effet l'analyse théorique du traitement des flux sur les volumes diamants dont un sommet est sur le bord de Neumann reste un problème ouvert.

### 3.5.1 Définition

Pour tout  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  solution exacte du problème (1), dont  $\mathbf{g}$  est le déplacement imposé, on note  $\mathcal{L}$  l'opérateur défini pour tout volume  $K$  de  $\mathfrak{M}$  par

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{g})|_K = -\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| P^{D_{Ks}}(\phi(\mathbf{u})). \quad (3.74)$$

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$  et pour tout  $\mathbf{g}^\tau$  déterminé par les valeurs aux sommets, on note  $\mathcal{L}^\tau$  l'opérateur discret défini pour tout volume  $K$  de  $\mathfrak{M}$  par

$$\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{g}^{\tau})|_{\mathbf{K}} = -\frac{1}{|\mathbf{K}|} \sum_{s \in \partial \mathbf{K}} |s| \phi^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}}(\mathbf{u}^{\tau}). \quad (3.75)$$

Dans le cas continu, il est aisé de montrer que la forme bilinéaire associée au problème de l'élasticité linéaire est coercive grâce à l'inégalité de Korn continue. Le cas discret est plus délicat. On a vu que le schéma discret diamant défini en section 3.3.5 n'est plus symétrique, du fait de l'interpolation des valeurs aux sommets. Le produit  $(\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{g}^{\tau}), \mathbf{u}^{\tau})_{\mathfrak{M}}$  fait intervenir les quantités  $(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}})^2$  ainsi que des termes croisés  $(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) \cdot (\mathbf{u}_2^{\mathbf{K}s} - \mathbf{u}_1^{\mathbf{K}s})$ . Il s'agit donc de contrôler cette dernière quantité par  $(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}})^2$  afin de s'assurer de la coercivité du schéma numérique discret.

### Définition 3.5.1

Soit  $\mathbf{D}_{\mathbf{K}s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$  un volume diamant, et  $A^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}}$  un opérateur défini sur ce volume diamant dont l'expression dépend des différences  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}$  et  $\mathbf{u}_2^{\mathbf{K}s} - \mathbf{u}_1^{\mathbf{K}s}$ . On note alors  $A_c^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}}$  les termes de  $A^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}}$  relatifs à la différence  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}$ . Par exemple, pour l'opérateur gradient discret (3.12) défini pour un volume diamant  $\mathbf{D}_{\mathbf{K}s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$

$$\nabla_c^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}} \mathbf{u}^{\tau} = \frac{1}{2|\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) \otimes \mathbf{N}_{\mathbf{K}s}. \quad (3.76)$$

On définit le produit scalaire suivant.

### Définition 3.5.2 (Produit scalaire $H^1$ discret)

Soit  $(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{v}^{\tau})$  deux vecteurs de  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$ . On définit le produit scalaire

$$(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{v}^{\tau})_1 = \sum_{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}| \left( \frac{|s|}{2|\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) \right) \cdot \left( \frac{|s|}{2|\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}|} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{\mathbf{K}}) \right) \quad (3.77)$$

où l'inconnue auxiliaire  $\mathbf{u}_s$  est déterminée par

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s &= \beta_{\text{KL}}^{-1} (\beta_{\text{L}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{L}} + \beta_{\text{K}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{K}} - \beta_{\text{I}}^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\mathbf{K}s} - \mathbf{u}_1^{\mathbf{K}s})) & \forall s \in \mathcal{E}^{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_s &= \mathbf{0} & \forall s \in \mathcal{E}^{\text{bD}} = \mathcal{E}^{\text{b}}. \end{cases}$$

On montre aisément qu'il s'agit d'un produit scalaire grâce à la condition de bord homogène. De plus, la norme induite par ce produit scalaire correspond à la norme  $\tilde{\mathfrak{D}}$  du gradient discret de  $\mathbf{u}^{\tau}$  relatif aux termes  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}$ . En effet, d'après la relation (A.1g), on peut écrire que

$$\|\nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 = \sum_{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}| \left( \frac{|s|}{2|\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{K}s} \right) : \left( \frac{|s|}{2|\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{K}s} \right) = |\mathbf{u}^{\tau}|_1^2.$$

A présent, on donne une définition de la coercivité discrète.

### Définition 3.5.3

L'opérateur discret (3.75) avec  $\mathbf{g}^{\tau} = \mathbf{0}$  est dit coercif s'il satisfait l'inégalité suivante : il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que pour tout maillage  $\mathcal{T}$  et pour tout  $\mathbf{u}^{\tau} \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$

$$(\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{0}), \mathbf{u}^{\tau})_{\mathfrak{M}} \geq C |\mathbf{u}^{\tau}|_1^2. \quad (3.78)$$

### 3.5.2 Condition de coercivité

On va à présent donner une condition suffisante de coercivité discrète, car la preuve ne peut être établie, du fait de la complexité de l'interpolation, pour des maillages généraux. Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$ , on a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}^\tau(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} &= - \sum_{K \in \mathfrak{M}} \mathbf{u}_K \sum_{s \in \partial K} |s| \sigma^{\mathbb{D}_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{Ks} \\
&= \sum_{\mathbb{D}_{Ks} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |s| (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \phi^{\mathbb{D}_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) \\
&= 2 \sum_{\mathbb{D}_{Ks} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |\mathbb{D}_{Ks}| \sigma^{\mathbb{D}_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) : \left( \frac{|s|}{2|\mathbb{D}_{Ks}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{n}_{Ks} \right) \\
&= 2 (\sigma_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathfrak{D}}},
\end{aligned}$$

par la relation de continuité aux interfaces internes, par la condition de bord homogène de Dirichlet, et par la formule (A.1b). On sépare les termes associés aux différences  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K$  de ceux relatifs à  $\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}$

$$(\mathcal{L}^\tau(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} = 2 (\sigma_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathfrak{D}}} + 2 (\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) - \sigma_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathfrak{D}}}. \quad (3.79)$$

#### Lemme 3.5.1

En utilisant le fait que l'opérateur  $\mathbb{D}^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau$  est symétrique, on a, pour tout volume  $\mathbb{D}_{Ks}$  de  $\tilde{\mathfrak{D}}$ , les égalités suivantes.

$$\begin{cases}
(\mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) = (\mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) \\
(\mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) = (\mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) \\
(\mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) = 2 (\mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau).
\end{cases} \quad (3.80)$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}
(\mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) &= \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \frac{\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau)^T}{2} \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau + \frac{1}{2} (\mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
(\mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) &= tr(\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) \left( \text{Id} : \frac{\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau)^T}{2} \right) \\
&= tr(\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id} : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau \\
&= (\mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau).
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
(\mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) &= tr(\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau)^2 \text{Id} : \text{Id} \\
&= 2 tr(\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau)^2 \\
&= 2 tr(\nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id} : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau \\
&= 2 (\mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{\mathbb{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

#### Lemme 3.5.2 (Inégalité de Korn pour le gradient tronqué)

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$

$$\|\nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathfrak{D}}} \leq \sqrt{2} \|\mathbb{D}^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}. \quad (3.81)$$

**Démonstration:** D'après la définition du produit scalaire (3.10), et en s'aidant de la première égalité de (3.80) (également vraie pour  $\mathbb{D}_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau$  et  $\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau$ ), on a

$$2\|\mathbb{D}_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 = \|\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + ((\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}. \quad (3.82)$$

On va donc chercher à évaluer la quantité  $((\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}$  à travers les cellules diamants du maillage.

$$\begin{aligned} ((\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| (\nabla_c^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau \\ &= \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \frac{|s|}{2|D_{Ks}|} (\mathbf{n}_{Ks} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K)) : \frac{|s|}{2|D_{Ks}|} ((\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{n}_{Ks}). \end{aligned}$$

Grâce à la relation (A.1d), on peut écrire que

$$((\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} = \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \left( \frac{|s|}{2|D_{Ks}|} ((\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{n}_{Ks}) \right)^2 \geq 0.$$

Ainsi, en reprenant l'équation (3.82), on peut écrire que

$$2\|\mathbb{D}_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \geq \|\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2. \quad (3.83) \quad \blacksquare$$

Afin d'énoncer une condition de coercivité, on minore l'expression (3.79)

$$(\mathcal{L}^T(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} \geq 2(\sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} - |2(\sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) - \sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}|. \quad (3.84)$$

La condition de coercivité va porter sur le deuxième terme : il faut contrôler les termes croisés. Énonçons d'abord une convention de notation sur les coefficients de Lamé.

### Convention 3.5.1

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$ , on note par convention

$$\begin{aligned} \sqrt{2\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}} \mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau &= \left( \sqrt{2\mu_K} \mathbb{D}^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau \right)_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}}, \\ \sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}}}{2}} \mathbb{D}iv^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau &= \left( \sqrt{\frac{\lambda_K}{2}} \mathbb{D}iv^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau \right)_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

On est à présent en mesure de donner une condition de coercivité.

### Lemme 3.5.3 (Condition de coercivité)

S'il existe une constante  $\gamma < 1$ , ne dépendant que de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$ ,

$$(\sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) - \sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq \gamma (\sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}, \quad (3.86)$$

alors l'opérateur discret (3.32) associé au schéma numérique de conditions de bord homogènes est coercif, i.e. pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$ , il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que

$$(\mathcal{L}^T(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} \geq C|\mathbf{u}^\tau|_1^2. \quad (3.87)$$

**Démonstration :** En effet

$$(\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{0}), \mathbf{u}^{\tau})_{\mathfrak{M}} \geq 2(1 - \gamma) (\sigma_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^{\tau}) : \nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^{\tau})_{\tilde{\mathfrak{D}}}.$$

Puis, en s'aidant des relations (3.80) ainsi que des notations introduites dans la Convention 3.5.1, l'inégalité précédente devient

$$(\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{0}), \mathbf{u}^{\tau})_{\mathfrak{M}} \geq 2(1 - \gamma) \left( \|\sqrt{2\mu_{\tilde{\mathfrak{D}}}} \mathbb{D}_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 + \|\sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathfrak{D}}}}{2}} \mathbb{D}\text{iv}_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 \right).$$

Enfin, en appliquant l'inégalité de Korn énoncée dans le Lemme 3.5.2, ainsi que les minoration de l'Hypothèse 0.0.1, page 9 sur les coefficients de Lamé, on a

$$(\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{0}), \mathbf{u}^{\tau})_{\mathfrak{M}} \geq 2\underline{\mu}(1 - \gamma) |\mathbf{u}^{\tau}|_1^2. \quad \blacksquare$$

### 3.6 Convergence et estimation d'erreur

On se limite toujours au cas  $\Gamma_N = \emptyset$ .

#### **Théorème 3.6.1 (Estimation d'erreur)**

Sous réserve de satisfaire la condition suffisante de coercivité du Lemme 3.5.3, le schéma VF diamant converge, et on a l'estimation d'erreur suivante : il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que pour tout maillage  $\mathcal{T}$ , pour tout  $p > 2$

$$\|\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_1 + \|\mathbf{u}^{\tau} - \mathbf{u}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (3.88)$$

**Démonstration :** Soient  $\mathbf{u}$  solution du problème continu (1),  $\mathbf{u}^{\tau} \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathfrak{M}}$ , pour tout  $\mathbf{g}$ , solution du problème discret (3.32), et  $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}$  la projection  $L^2$  de  $\mathbf{u}$  sur le maillage  $\mathcal{T}$ . Par définition, les opérateurs  $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$  et  $\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\cdot, \cdot)$  tels que définis en (3.74) et (3.75) vérifient

$$\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{g}^{\tau}) - \mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}, \mathbf{g}^{\tau}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{g}) - \mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}, \mathbf{g}^{\tau}). \quad (3.89)$$

On note d'une part  $\mathbf{e}^{\tau}$  l'erreur commise entre le déplacement discret et son projeté sur le maillage, de sorte que

$$\mathbf{e}^{\tau} = \mathbf{u}^{\tau} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}.$$

Ainsi, le membre de gauche de l'égalité (3.89) peut s'écrire par linéarité

$$\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{g}^{\tau}) - \mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}, \mathbf{g}^{\tau}) = \mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{e}^{\tau}, \mathbf{0}). \quad (3.90)$$

D'autre part, soit  $K$  un volume primal de  $\mathfrak{M}$ . L'erreur de consistance  $Q^{\text{D}_{Ks}}(\mathbf{u})$  entre le flux de la solution continue sur le maillage et celui du projeté de la solution continue sur le maillage est donnée par la relation (3.40) et vaut  $Q^{\text{D}_{Ks}}(\mathbf{u}) = \phi^{\text{D}_{Ks}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) - P^{\text{D}_{Ks}}(\phi(\mathbf{u}))$ . Elle permet de réécrire le membre de droite de (3.89) de la façon suivante

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{g})|_K - \mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\tau}, \mathbf{g}^{\tau})|_K = -\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| Q^{\text{D}_{Ks}}(\mathbf{u}). \quad (3.91)$$

On rassemble les termes (3.91) et (3.90), et l'équation (3.89) devient

$$\mathcal{L}^{\mathcal{T}}(\mathbf{e}^{\tau}, \mathbf{0})|_K = -\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| Q^{\text{D}_{Ks}}(\mathbf{u}).$$

On multiplie par  $\mathbf{e}^\tau$ , et on somme sur tous les volumes  $K \in \mathfrak{M}$ , de sorte que

$$(\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{e}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{e}^\tau)_{\mathfrak{M}} = - \sum_{K \in \mathfrak{M}} \mathbf{e}_K \cdot \sum_{s \in \partial K} |s| Q^{\mathbf{D}_{Ks}}(\mathbf{u}).$$

On transforme la somme précédente en une somme sur les volumes diamants

$$(\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{e}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{e}^\tau)_{\mathfrak{M}} = - \sum_{\mathbf{D}_{Ks} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |s| \mathbf{e}_K \cdot Q^{\mathbf{D}_{Ks}}(\mathbf{u}).$$

Pour  $s = K \cap L$ , comme  $Q^{\mathbf{D}_{Ks}}(\mathbf{u}) = -Q^{\mathbf{D}_{Ls}}(\mathbf{u})$ , on peut ajouter le vecteur  $\mathbf{u}_s$  à l'expression précédente de sorte que

$$(\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{e}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{e}^\tau)_{\mathfrak{M}} = \sum_{\mathbf{D}_{Ks} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |\mathbf{D}_{Ks}| \left( \frac{|s|}{|\mathbf{D}_{Ks}|} (\mathbf{e}_s - \mathbf{e}_K) \right) \cdot Q^{\mathbf{D}_{Ks}}(\mathbf{u}).$$

Par Cauchy-Schwarz, on montre qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que

$$(\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{e}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{e}^\tau)_{\mathfrak{M}} \leq C |\mathbf{e}^\tau|_1 \|Q^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}.$$

Enfin, la Définition 3.5.3 de la coercivité, le Théorème 3.4.3 sur la consistance faible montrent qu'il existe des constantes  $(C_1, C_2, C_3) > 0$  telles que pour tout  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\|\mathbf{e}^\tau\|_{\mathfrak{M}} \leq C_1 |\mathbf{e}^\tau|_1 \leq C_2 \|Q^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathfrak{D}}} \leq C_3 \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (3.92)$$

On conclut la preuve en utilisant le fait que  $\|\mathbf{u} - \mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ , dont la démonstration est établie dans [7]. ■

## 3.7 Illustrations numériques

Nous allons à présent illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment par une série de tests numériques décrits en Annexe E.1. Les quatre premiers tests sont comparés à des solutions analytiques, alors que dans les deux derniers tests, on compare les résultats à ceux obtenus par la méthode des éléments finis  $P1$ .

### 3.7.1 Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale

Les résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans le Tableau 3.7.1 pour la série de maillages raffinés uniformément et dans le Tableau 3.7.2 pour pour la série de maillages raffinés successivement, et les courbes de convergence sont tracées dans la Figure 3.7.2. On compare les différences des réponses Diamant et Exacte pour la norme infinie, la norme 1 et la norme 2. On présente également les isovaleurs obtenues pour chacune des composantes de la solution Diamant en Figure 3.7.1. Nous utilisons une série de maillages raffinés soit uniformément soit successivement. Enfin, on donne en Figure 3.7.3 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence pour cette contrainte.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
204	$1.51 \cdot 10^{-1}$	$1.97 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-5}$	$2.75 \cdot 10^{-5}$
816	$7.57 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$	$5.01 \cdot 10^{-6}$	$8.99 \cdot 10^{-6}$
3264	$3.78 \cdot 10^{-2}$	$5.96 \cdot 10^{-5}$	$1.28 \cdot 10^{-6}$	$2.57 \cdot 10^{-6}$
13056	$1.89 \cdot 10^{-2}$	$2.97 \cdot 10^{-5}$	$3.18 \cdot 10^{-7}$	$7.03 \cdot 10^{-7}$
52224	$9.46 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-5}$	$7.89 \cdot 10^{-8}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$

Tableau 3.7.1 – Cas E.1.3 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
338	$1.16 \cdot 10^{-1}$	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-5}$	$2.39 \cdot 10^{-5}$
892	$7.31 \cdot 10^{-2}$	$7.12 \cdot 10^{-5}$	$3.11 \cdot 10^{-6}$	$5.22 \cdot 10^{-6}$
5428	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$3.80 \cdot 10^{-5}$	$1.41 \cdot 10^{-6}$	$1.95 \cdot 10^{-6}$
10168	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$2.34 \cdot 10^{-5}$	$1.90 \cdot 10^{-7}$	$4.32 \cdot 10^{-7}$
23668	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$7.91 \cdot 10^{-8}$	$1.96 \cdot 10^{-7}$

Tableau 3.7.2 – Cas E.1.3 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

### 3.7.2 Cas E.1.4 : Déformation d'un carré homogène. Solution non polynomiale

Les résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans les Tableau 3.7.3 et Tableau 3.7.4 pour les valeurs, et dans la Figure 3.7.5 pour le tracé. On présente également les isovaleurs obtenues pour chacune des composantes de la solution Diamant en Figure 3.7.4. Nous utilisons une série de maillages raffinés soit uniformément soit successivement. Enfin, on donne en Figure 3.7.6 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence de l'erreur pour cette contrainte.

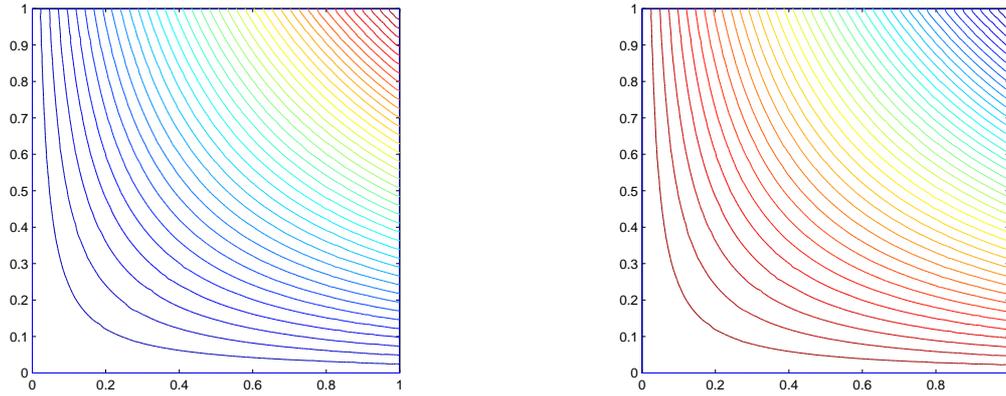


FIGURE 3.7.1 – Cas E.1.3 : Champ de déplacement  $|\mathbf{u}_1|$  (gauche) et  $|\mathbf{u}_2|$  (droite) pour le maillage le plus fin

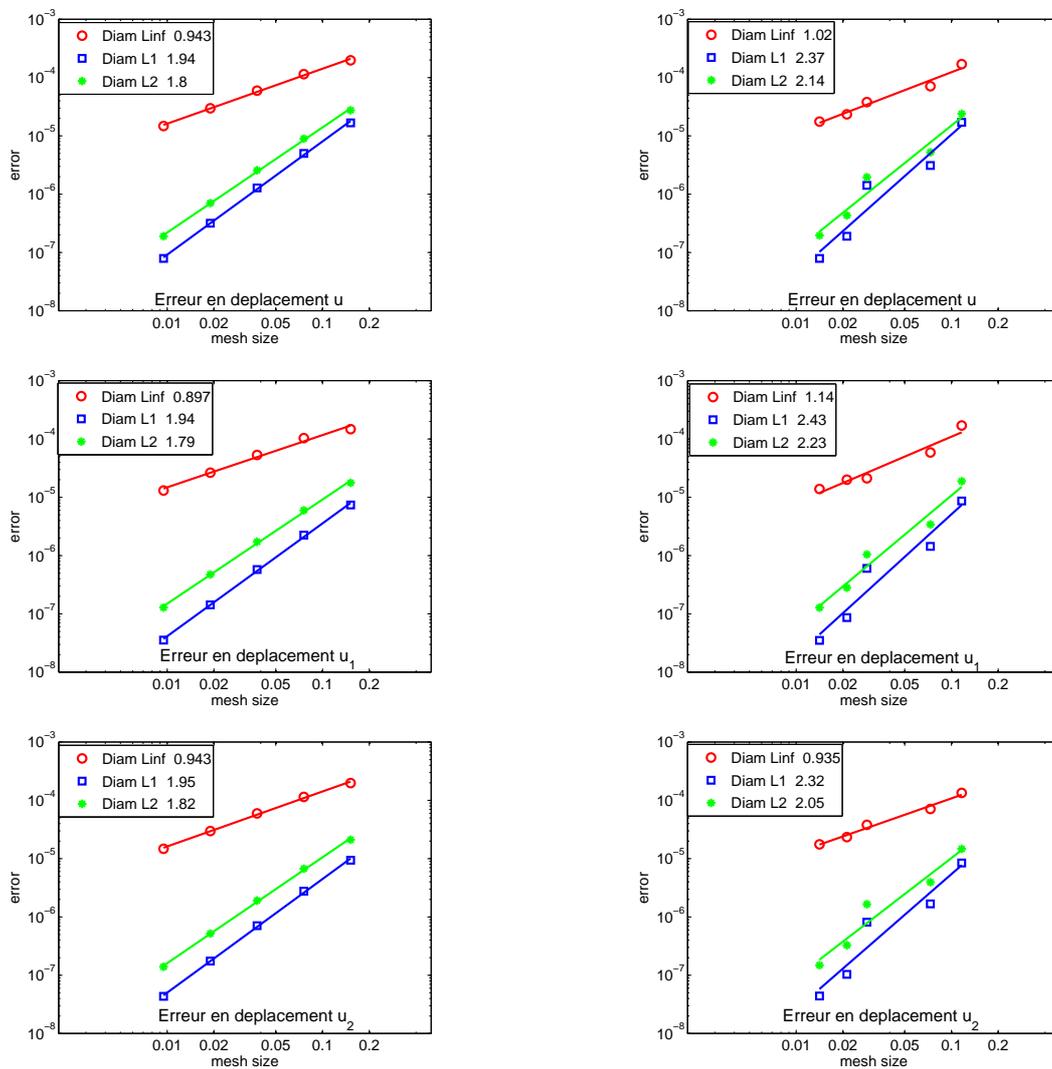


FIGURE 3.7.2 – Cas E.1.3 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés (gauche) et successivement raffinés (droite).

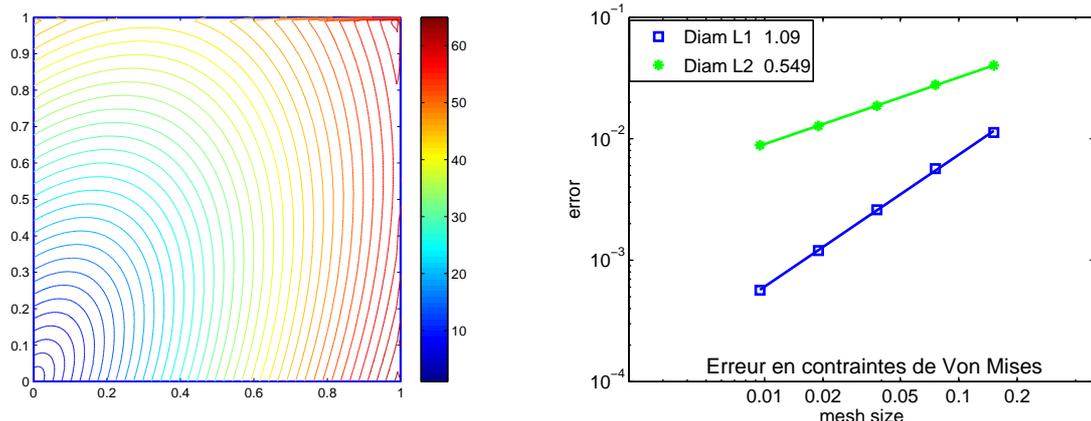


FIGURE 3.7.3 – Cas E.1.3 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (gauche) et estimations d’erreurs  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
204	$1.51 \cdot 10^{-1}$	$6.48 \cdot 10^{-4}$	$7.02 \cdot 10^{-5}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$
816	$7.57 \cdot 10^{-2}$	$3.63 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$3.46 \cdot 10^{-5}$
3264	$3.78 \cdot 10^{-2}$	$1.71 \cdot 10^{-4}$	$5.65 \cdot 10^{-6}$	$9.64 \cdot 10^{-6}$
13056	$1.89 \cdot 10^{-2}$	$8.04 \cdot 10^{-5}$	$1.45 \cdot 10^{-6}$	$2.56 \cdot 10^{-6}$
52224	$9.46 \cdot 10^{-3}$	$3.84 \cdot 10^{-5}$	$3.67 \cdot 10^{-7}$	$6.70 \cdot 10^{-7}$

Tableau 3.7.3 – Cas E.1.4 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
338	$1.16 \cdot 10^{-1}$	$5.95 \cdot 10^{-4}$	$6.25 \cdot 10^{-5}$	$9.66 \cdot 10^{-5}$
892	$7.31 \cdot 10^{-2}$	$2.97 \cdot 10^{-4}$	$1.88 \cdot 10^{-5}$	$2.87 \cdot 10^{-5}$
5428	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$1.99 \cdot 10^{-4}$	$5.26 \cdot 10^{-6}$	$8.12 \cdot 10^{-6}$
10168	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$6.01 \cdot 10^{-5}$	$2.49 \cdot 10^{-6}$	$3.48 \cdot 10^{-6}$
23668	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$4.67 \cdot 10^{-5}$	$8.12 \cdot 10^{-7}$	$1.37 \cdot 10^{-6}$

Tableau 3.7.4 – Cas E.1.4 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

### 3.7.3 Cas E.1.5 : Déformation d’un carré homogène en Dirichlet pur

On présente les résultats de convergence numérique pour des séries de maillages de triangles et quadrangles non structurés raffinés uniformément. Les résultats d’estimations d’erreurs sont présentés dans les Tableau 3.7.5 et Tableau 3.7.6 pour les valeurs, et dans la Figure 3.7.7 pour le tracé. Enfin, on donne en Figure 3.7.8 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence de l’erreur pour cette contrainte pour des maillages de triangles raffinés uniformément.

### 3.7.4 Cas E.1.6 : Déformation d’un triangle homogène

Les résultats d’estimations d’erreurs sont présentés dans le Tableau 3.7.7 pour les valeurs, et dans la Figure 3.7.10 pour le tracé. On présente également les isovaleurs obtenues pour chacune des composantes de la solution Diamant en Figure 3.7.9 . Nous utilisons une série de maillages

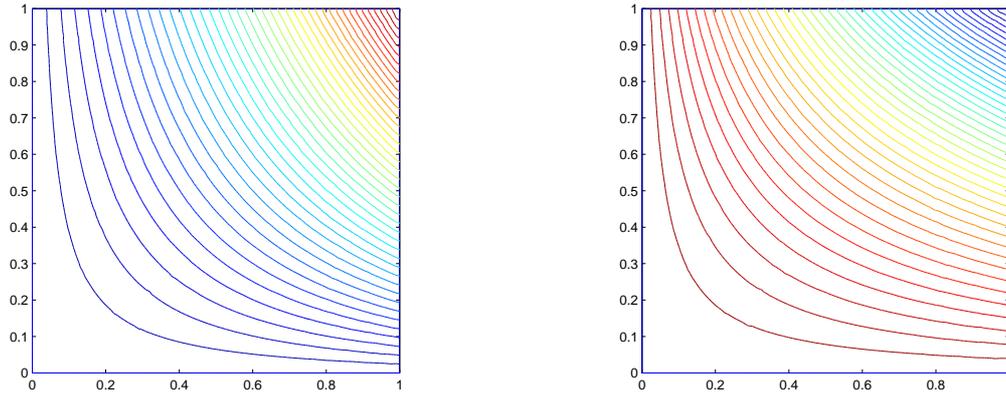


FIGURE 3.7.4 – Cas E.1.4 : Champ de déplacement  $|\mathbf{u}_1|$  (gauche) et  $|\mathbf{u}_2|$  (droite) pour le maillage le plus fin.

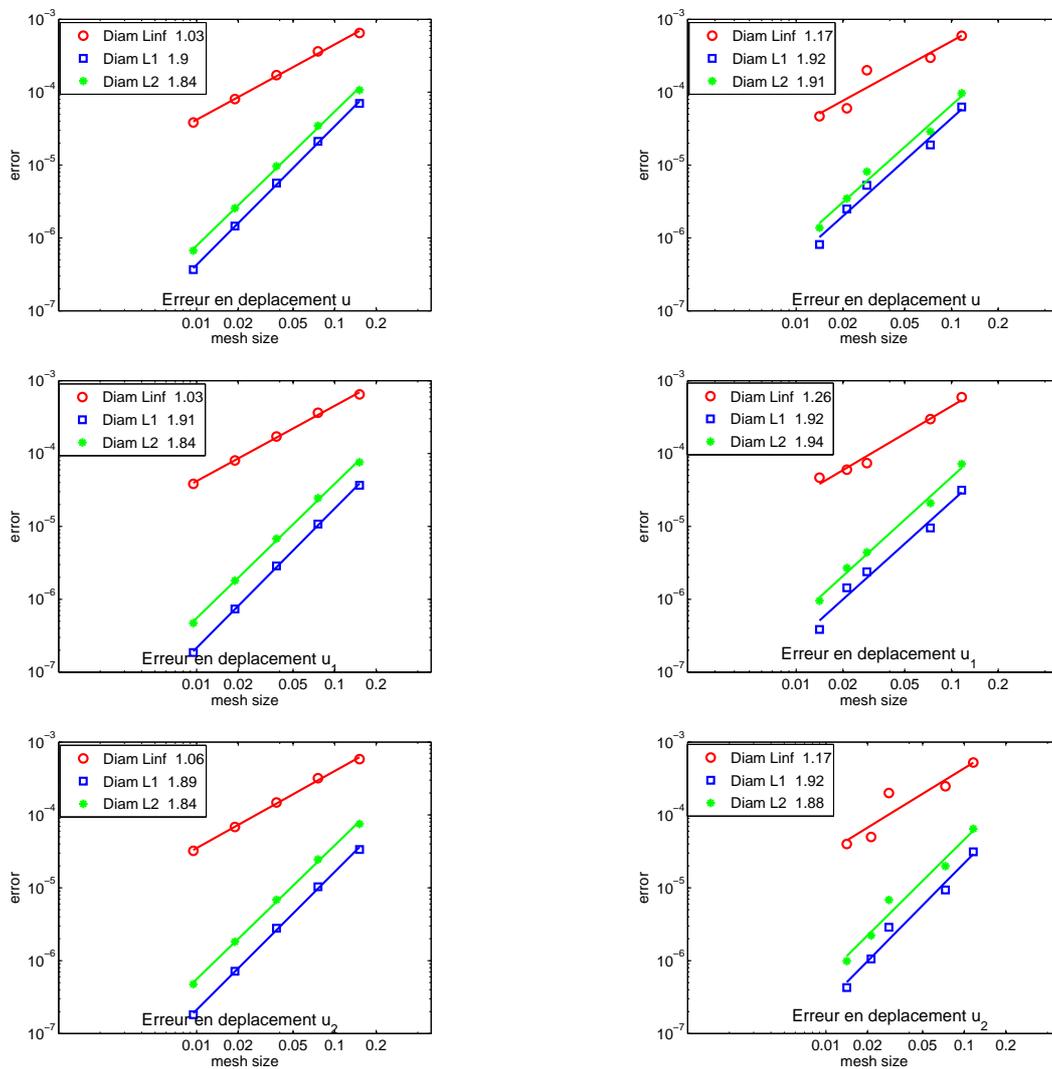


FIGURE 3.7.5 – Cas E.1.4 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés (gauche) et successivement raffinés (droite).

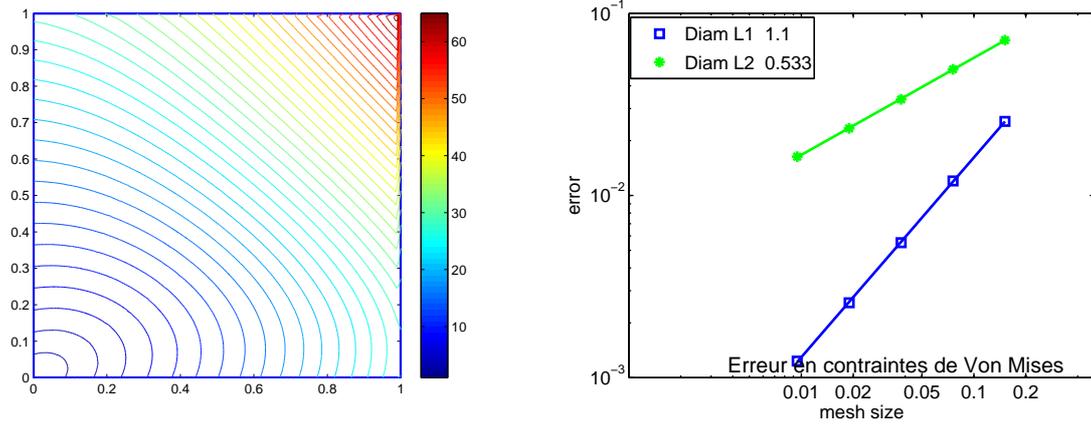


FIGURE 3.7.6 – Cas E.1.4 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (gauche) et estimations d'erreurs  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
204	$1.51 \cdot 10^{-1}$	$8.15 \cdot 10^{-4}$	$3.16 \cdot 10^{-4}$	$3.21 \cdot 10^{-4}$
816	$7.57 \cdot 10^{-2}$	$1.95 \cdot 10^{-4}$	$7.93 \cdot 10^{-5}$	$7.94 \cdot 10^{-5}$
3264	$3.78 \cdot 10^{-2}$	$4.97 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$1.98 \cdot 10^{-5}$
13056	$1.89 \cdot 10^{-2}$	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$5.06 \cdot 10^{-6}$	$4.98 \cdot 10^{-6}$
52224	$9.46 \cdot 10^{-3}$	$3.75 \cdot 10^{-6}$	$1.27 \cdot 10^{-6}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$

Tableau 3.7.5 – Cas E.1.5 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages de triangles non structurés uniformément raffinés.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
135	$1.55 \cdot 10^{-1}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$	$4.50 \cdot 10^{-4}$	$4.67 \cdot 10^{-4}$
540	$7.79 \cdot 10^{-2}$	$3.54 \cdot 10^{-4}$	$1.10 \cdot 10^{-4}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$
2160	$3.89 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-4}$	$2.72 \cdot 10^{-5}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$
8640	$1.94 \cdot 10^{-3}$	$3.40 \cdot 10^{-5}$	$6.72 \cdot 10^{-6}$	$7.15 \cdot 10^{-6}$
34560	$9.74 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-5}$	$1.66 \cdot 10^{-6}$	$1.76 \cdot 10^{-6}$
138240	$4.87 \cdot 10^{-3}$	$2.78 \cdot 10^{-6}$	$4.13 \cdot 10^{-7}$	$4.38 \cdot 10^{-7}$

Tableau 3.7.6 – Cas E.1.5 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages de quadrangles non structurés uniformément raffinés.

raffinés uniformément. Enfin, on donne en Figure 3.7.11 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence de l'erreur pour cette contrainte.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{Ex}\ _2$
230	$5.11 \cdot 10^{-1}$	$2.07 \cdot 10^{-2}$	$3.85 \cdot 10^{-2}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$
920	$2.55 \cdot 10^{-1}$	$1.36 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$4.65 \cdot 10^{-3}$
3680	$1.28 \cdot 10^{-1}$	$7.14 \cdot 10^{-3}$	$3.00 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$
14720	$6.38 \cdot 10^{-2}$	$3.75 \cdot 10^{-3}$	$7.26 \cdot 10^{-4}$	$2.99 \cdot 10^{-4}$
58880	$3.19 \cdot 10^{-2}$	$1.92 \cdot 10^{-3}$	$1.77 \cdot 10^{-4}$	$7.62 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3.7.7 – Cas E.1.6 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$ .

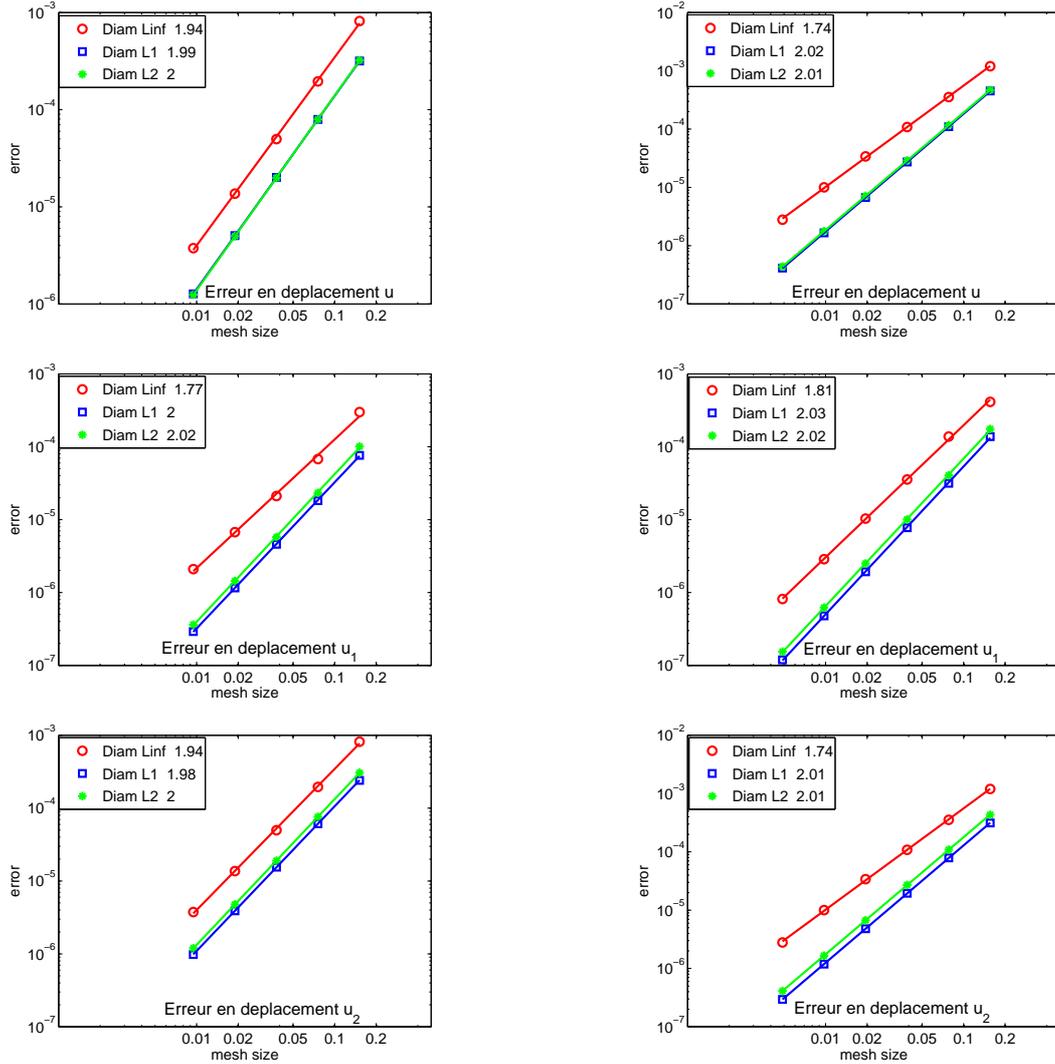


FIGURE 3.7.7 – Cas E.1.5 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages de triangles (gauche) et de quadrangles (droite) uniformément raffinés.

### 3.7.5 Cas E.1.7 : Déformation d’un barreau homogène percé d’un trou

Dans les figures 3.7.12 et 3.7.13 sont affichées les configurations déformées obtenues avec la méthode Diamant et avec la méthode éléments finis (EF)  $P1$  conformes.

Les inconnues discrètes de la méthode Diamant sont situées aux centres des triangles, alors que le maillage est affiché sur MATLAB grâce aux inconnues aux sommets, que l’on obtient par interpolation sur les centres des triangles. Les légers « décollages » sur les bords sont par conséquent des artéfacts du tracé. A présent, nous allons présenter les résultats d’estimation d’erreur. Étant donné que nous ne possédons pas de solution analytique pour ce test, les résultats obtenus par la méthode Diamant sont comparés à ceux obtenus par éléments finis. La méthode des éléments finis est convergente d’ordre 2. Les résultats d’estimations d’erreurs sont présentés dans les Tableau 3.7.8 et Tableau 3.7.9 pour les valeurs, et dans la Figure 3.7.16 pour le tracé. On présente également les isovaleurs obtenues pour chacune des composantes de la solution Diamant en Figure 3.7.14 et Figure 3.7.15. Nous utilisons une série de maillages raffinés soit uniformément soit successivement. Enfin, on donne en Figure 3.7.17 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises,

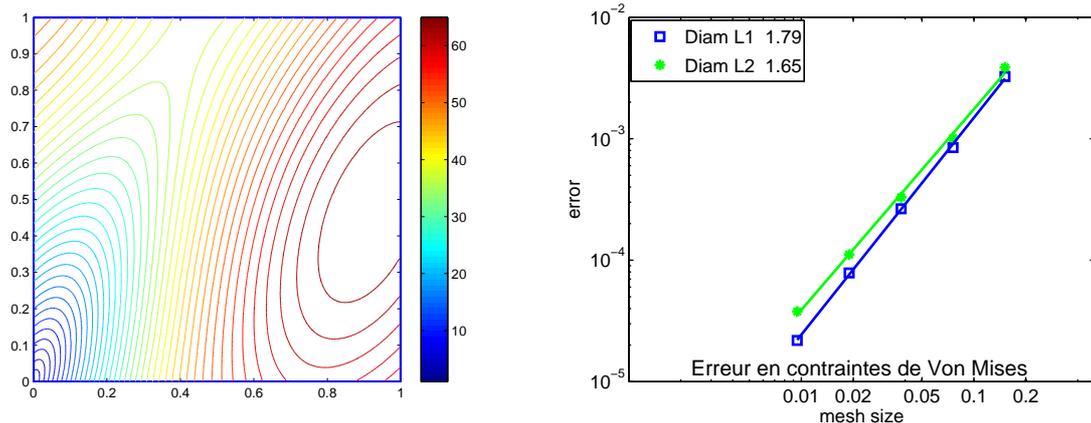


FIGURE 3.7.8 – Cas E.1.5 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (gauche) et estimations d’erreurs  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages de triangles non structurés uniformément raffinés

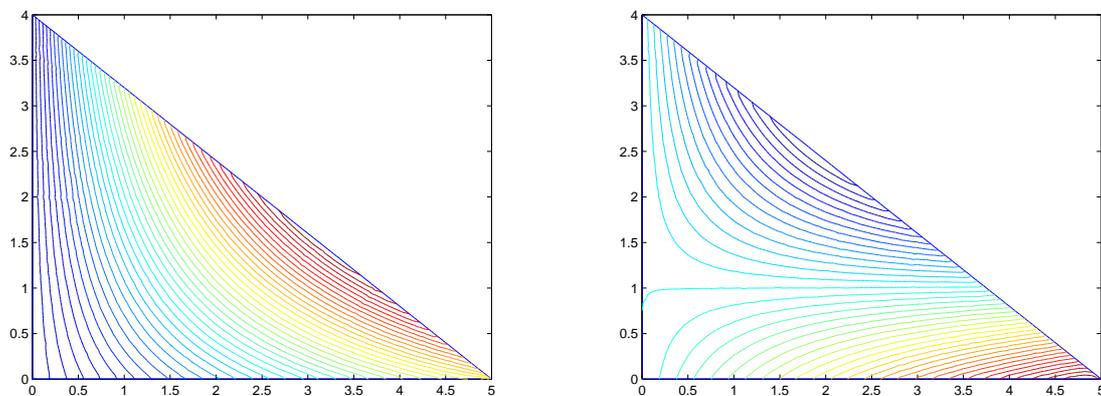


FIGURE 3.7.9 – Cas E.1.6 : Champ de déplacement  $|u_1|$  pour le maillage le plus fin

ainsi que la courbe de convergence de l’erreur pour cette contrainte.

Volumes	$h$	$\ u_{Diamant} - u_{EF}\ _\infty$	$\ u_{Diamant} - u_{EF}\ _1$	$\ u_{Diamant} - u_{EF}\ _2$
1106	$1.47 \cdot 10^{-1}$	$2.57 \cdot 10^{-2}$	$9.87 \cdot 10^{-3}$	$8.11 \cdot 10^{-3}$
4424	$7.37 \cdot 10^{-2}$	$7.57 \cdot 10^{-3}$	$2.52 \cdot 10^{-3}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$
17696	$3.68 \cdot 10^{-2}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$6.83 \cdot 10^{-4}$	$5.43 \cdot 10^{-4}$
70784	$1.84 \cdot 10^{-2}$	$1.39 \cdot 10^{-3}$	$1.98 \cdot 10^{-4}$	$1.42 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.7.8 – Cas E.1.7 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés.

### 3.7.6 Cas E.1.8 : Déformation d’un barreau non homogène percé d’un trou

Dans les Figures 3.7.18 et 3.7.19 sont comparés les résultats du déplacement obtenus avec la méthode Diamant ainsi que ceux obtenus par éléments finis. La Figure 3.7.18 correspond à un matériau composé d’aluminium à gauche (en clair) et d’acier à droite (en sombre). On remarque que l’aluminium, possédant des coefficients de Lamé inférieurs à ceux de l’acier, et en particulier un module d’Young plus petit, est donc moins rigide que l’acier : sa déformation élastique est donc plus importante. Pour ce qui est de la Figure 3.7.19, les matériaux sont intervertis (acier

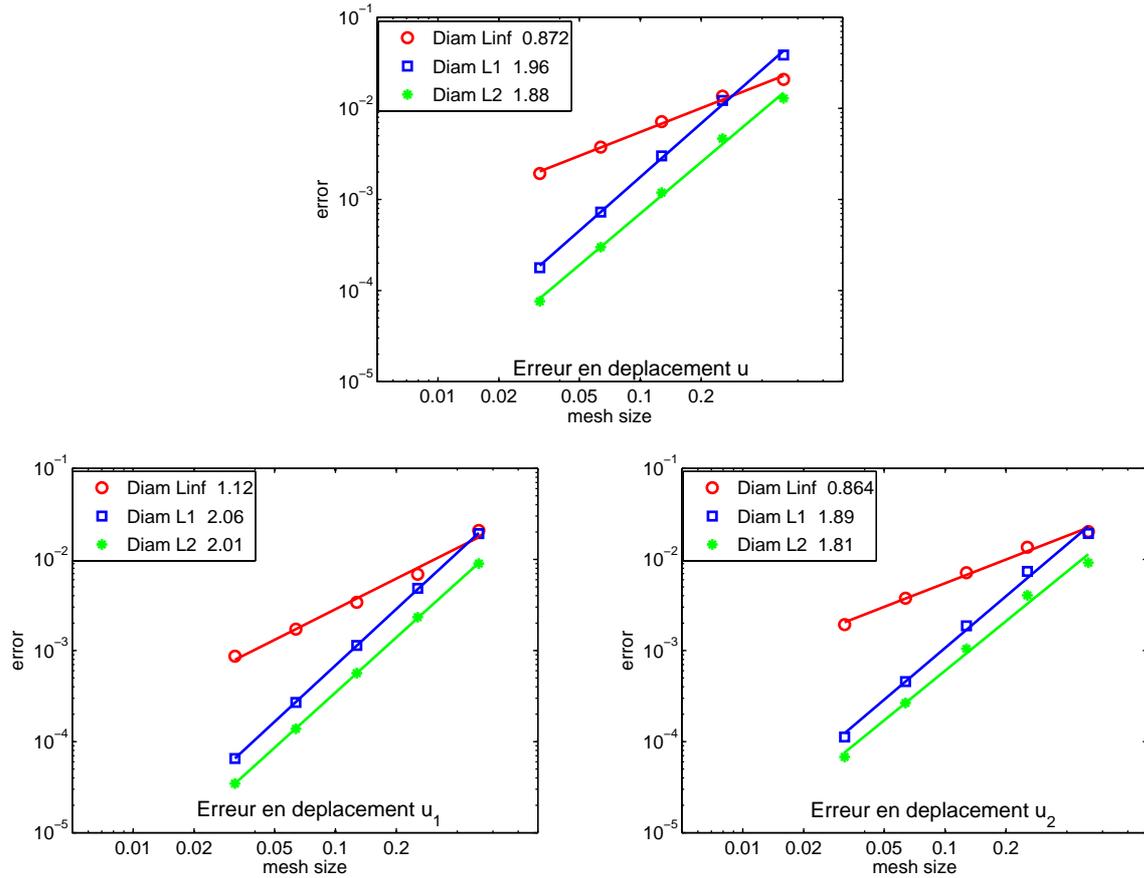


FIGURE 3.7.10 – Cas E.1.6 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$ s

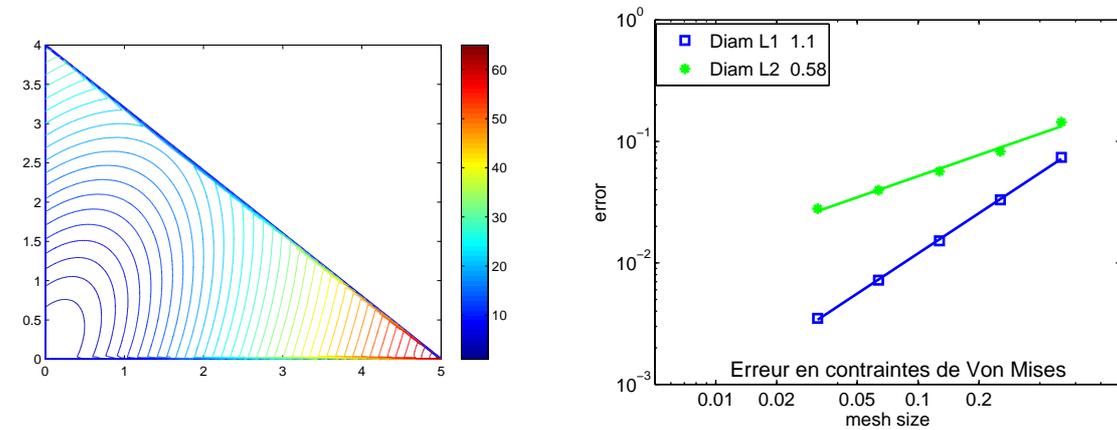


FIGURE 3.7.11 – Cas E.1.6 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (gauche) et estimations d'erreurs  $L^1$  et  $L^2$ .

à gauche, aluminium à droite). Le même phénomène est observé.

Intéressons-nous à présent aux estimations d'erreur. Les résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans les Tableau 3.7.20 et Tableau 3.7.21 pour les valeurs, et dans la Figure 3.7.26 pour le tracé. On présente également les isovaleurs obtenues pour chacune des composantes de la solution Diamant en Figure 3.7.22 et Figure 3.7.23 . Nous utilisons une série de maillages

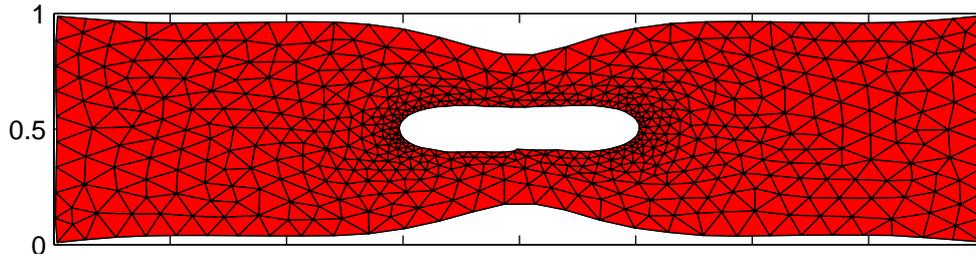


FIGURE 3.7.12 – Cas E.1.7 : réponse du déplacement obtenu avec la méthode Diamant

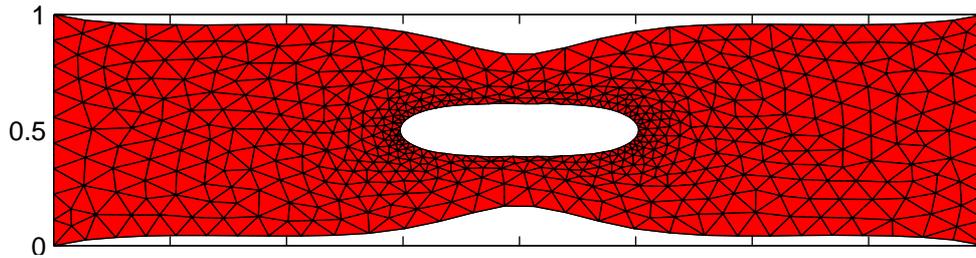


FIGURE 3.7.13 – Cas E.1.7 : réponse du déplacement obtenu par éléments finis

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
590	$1.52 \cdot 10^{-1}$	$1.30 \cdot 10^{-1}$	$5.13 \cdot 10^{-2}$	$6.11 \cdot 10^{-2}$
966	$1.20 \cdot 10^{-1}$	$8.95 \cdot 10^{-2}$	$3.38 \cdot 10^{-2}$	$4.94 \cdot 10^{-2}$
2454	$7.21 \cdot 10^{-2}$	$6.67 \cdot 10^{-2}$	$1.73 \cdot 10^{-2}$	$2.24 \cdot 10^{-2}$
16238	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$4.66 \cdot 10^{-3}$	$2.16 \cdot 10^{-3}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$
28302	$2.13 \cdot 10^{-2}$	$3.82 \cdot 10^{-3}$	$9.75 \cdot 10^{-4}$	$7.99 \cdot 10^{-3}$
65056	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$5.49 \cdot 10^{-4}$	$4.58 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.7.9 – Cas E.1.7 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

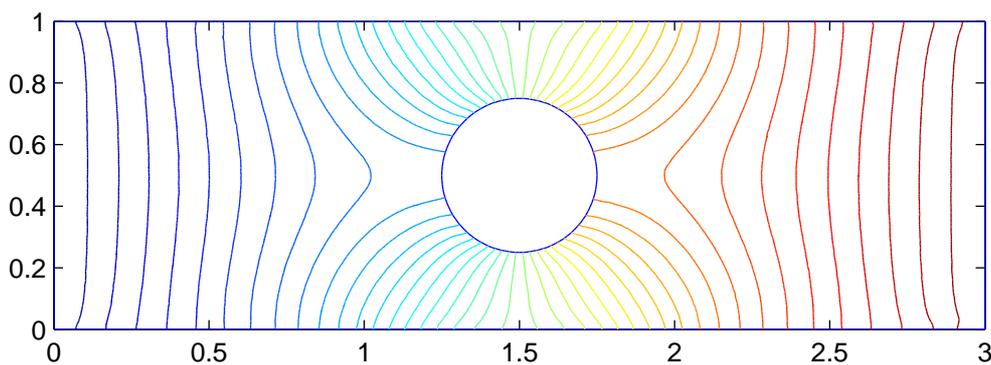


FIGURE 3.7.14 – Cas E.1.7 : champ de déplacement  $\mathbf{u}_1$  pour le maillage le plus fin.

raffinés soit uniformément soit successivement. Enfin, on donne en Figure 3.7.24 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises et en Figure 3.7.25 la courbe de convergence de l'erreur pour cette contrainte.

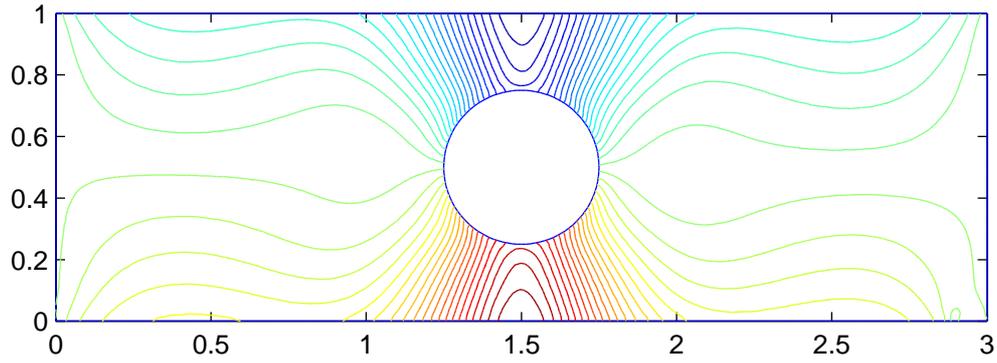


FIGURE 3.7.15 – Cas E.1.7 : champ de déplacement  $\mathbf{u}_2$  pour le maillage raffiné le plus fin

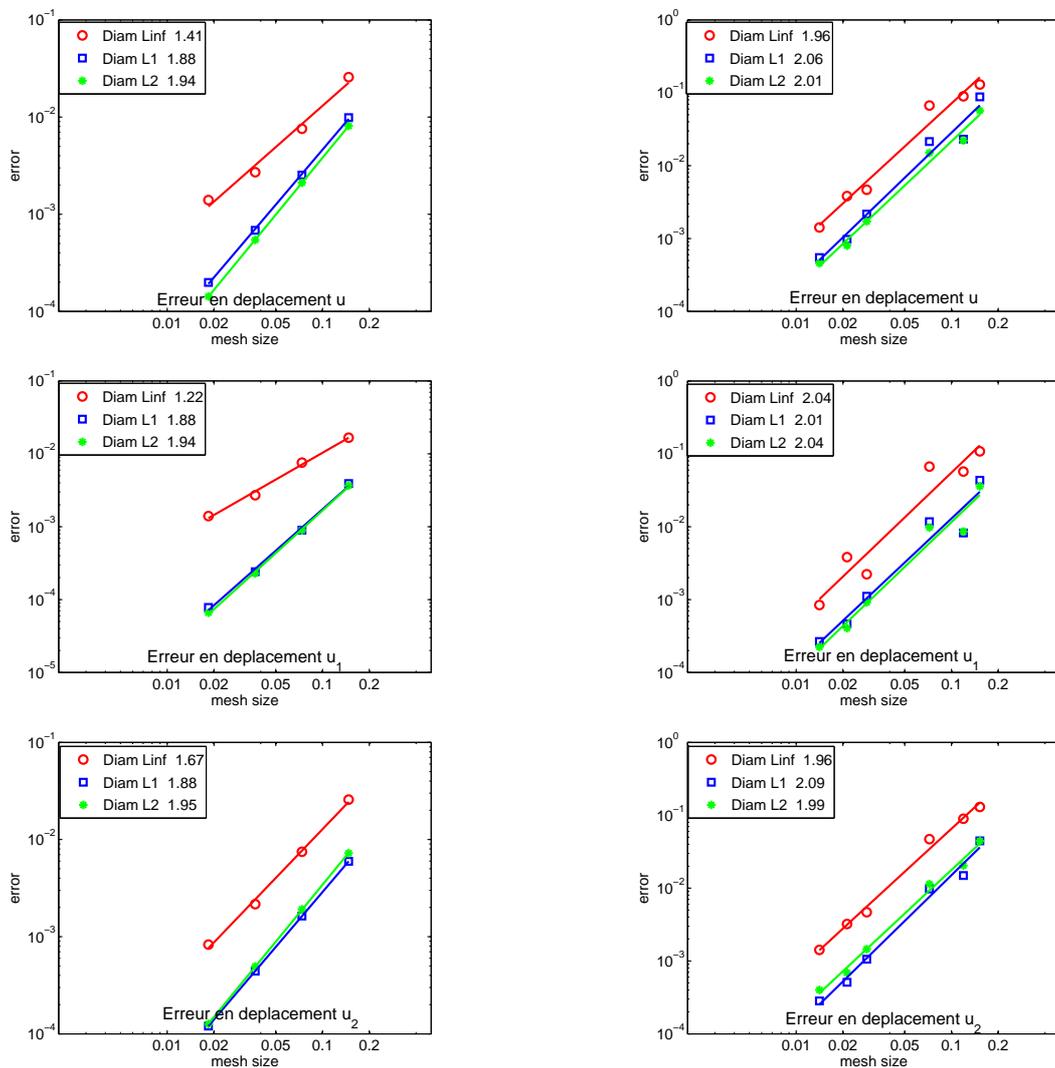


FIGURE 3.7.16 – Cas E.1.7 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés (gauche) et successivement raffinés (droite).

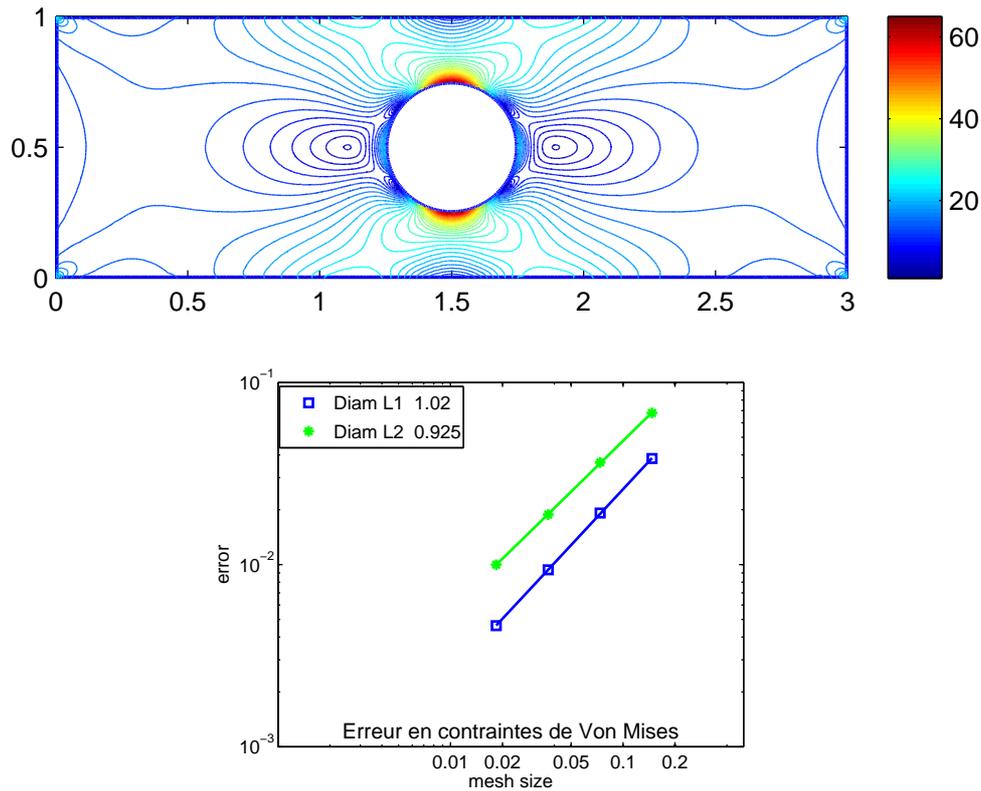


FIGURE 3.7.17 – Cas E.1.7 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (haut) et estimations d’erreurs  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

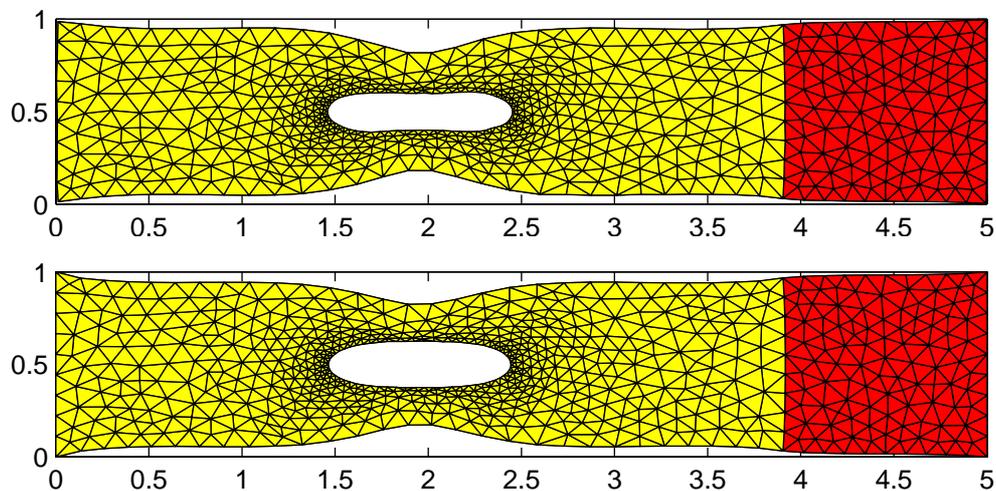


FIGURE 3.7.18 – Cas E.1.8 : réponse du déplacement aluminium (clair) / acier (sombre) par Diamant (en haut) et par éléments finis (bas).

### 3.7.7 Quelques commentaires sur les cas tests numériques

On constate sur l’ensemble des exemples à l’exception du cas E.1.8 que l’erreur de convergence pour le déplacement est d’ordre 2 pour les normes  $L^1$  et  $L^2$ , ce qui est bien meilleur que les résultats escomptés théoriquement, mais ce comportement se retrouve pour le laplacien

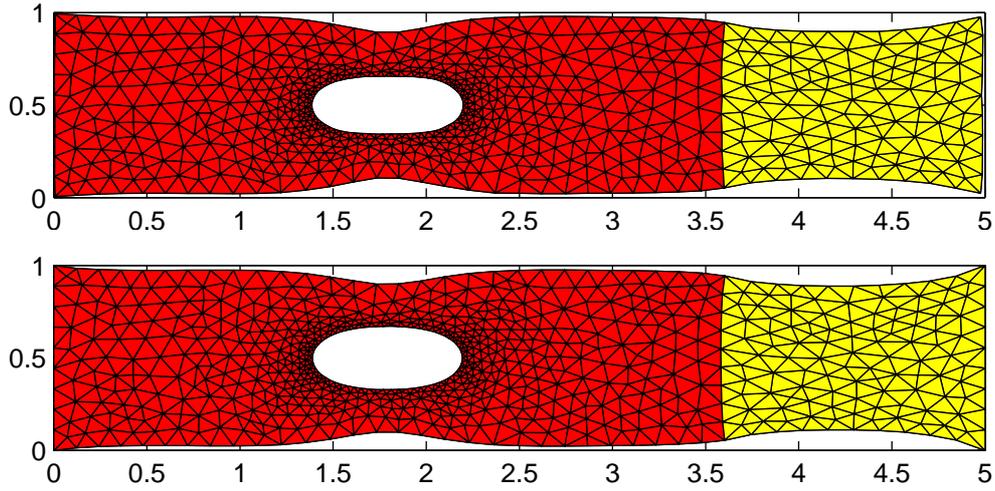


FIGURE 3.7.19 – Cas E.1.8 : réponse du déplacement acier (sombre) / aluminium (clair) par Diamant (en haut) et par éléments finis (bas).

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
1336	$1.49 \cdot 10^{-1}$	$2.61 \cdot 10^{-2}$	$1.42 \cdot 10^{-2}$	$9.48 \cdot 10^{-3}$
5344	$7.49 \cdot 10^{-2}$	$6.86 \cdot 10^{-3}$	$4.74 \cdot 10^{-3}$	$2.90 \cdot 10^{-3}$
21376	$3.75 \cdot 10^{-2}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$	$1.76 \cdot 10^{-3}$	$9.62 \cdot 10^{-4}$
85504	$1.87 \cdot 10^{-2}$	$1.82 \cdot 10^{-3}$	$7.15 \cdot 10^{-4}$	$3.72 \cdot 10^{-3}$
342016	$9.49 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-3}$	$3.09 \cdot 10^{-4}$	$1.63 \cdot 10^{-4}$

FIGURE 3.7.20 – Cas E.1.8 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diamant} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
1326	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$4.28 \cdot 10^{-2}$	$3.47 \cdot 10^{-2}$
3388	$7.31 \cdot 10^{-2}$	$6.04 \cdot 10^{-2}$	$3.99 \cdot 10^{-2}$	$2.33 \cdot 10^{-2}$
21834	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$5.05 \cdot 10^{-3}$	$3.05 \cdot 10^{-3}$	$2.10 \cdot 10^{-3}$
38318	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$5.87 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$
88256	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$1.66 \cdot 10^{-2}$	$9.76 \cdot 10^{-4}$	$5.64 \cdot 10^{-4}$

FIGURE 3.7.21 – Cas E.1.8 : Estimations d'erreur  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés

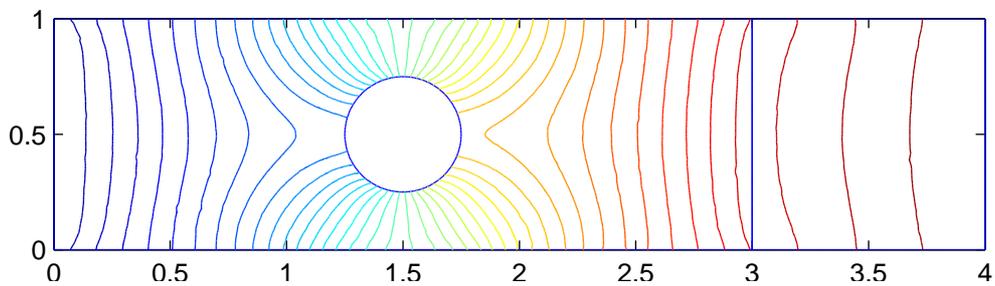


FIGURE 3.7.22 – Cas E.1.8 : champ de déplacement  $\mathbf{u}_1$  pour le maillage le plus fin.

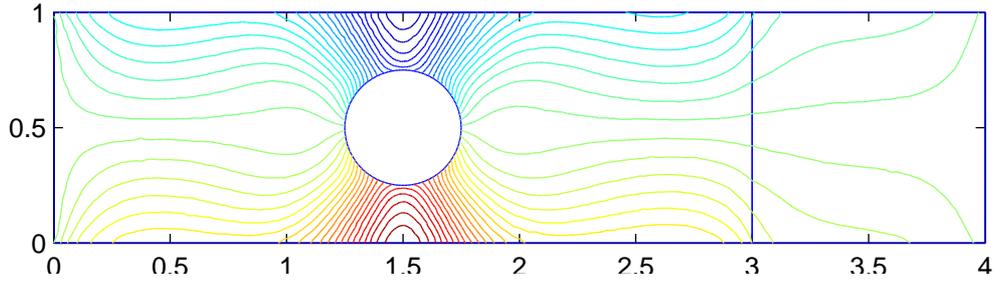


FIGURE 3.7.23 – Cas E.1.8 : champ de déplacement  $\mathbf{u}_2$  pour le maillage le plus fin.

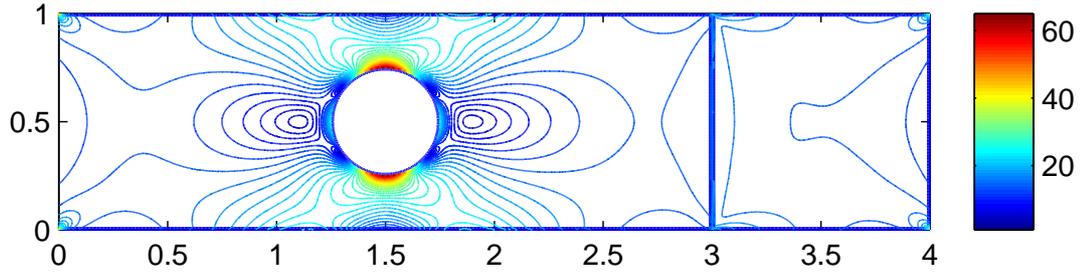


FIGURE 3.7.24 – Cas E.1.8 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises pour le maillage le plus fin

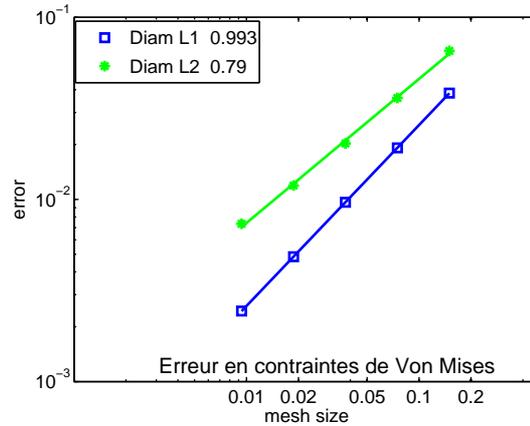


FIGURE 3.7.25 – Cas E.1.8 : Estimations d'erreurs  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

dans la littérature. On ne note pas de différences majeure entre les raffinements uniformes et successifs, ainsi qu'entre les problèmes de Dirichlet pur et les problèmes aux conditions de bord mixtes.

Pour la norme infinie, on observe un ordre proche de 2 pour le problème de Dirichlet pur, et un comportement d'ordre 1 pour tous les autres exemples, ce qui peut s'expliquer par le traitement des conditions de Neumann pour les arêtes internes ayant un sommet sur le bord de Neumann. La variante proposée par Bertolazzi et Manzini [16] pourrait améliorer ce comportement.

En ce qui concerne la contrainte équivalente de Von Mises, l'ordre de convergence est

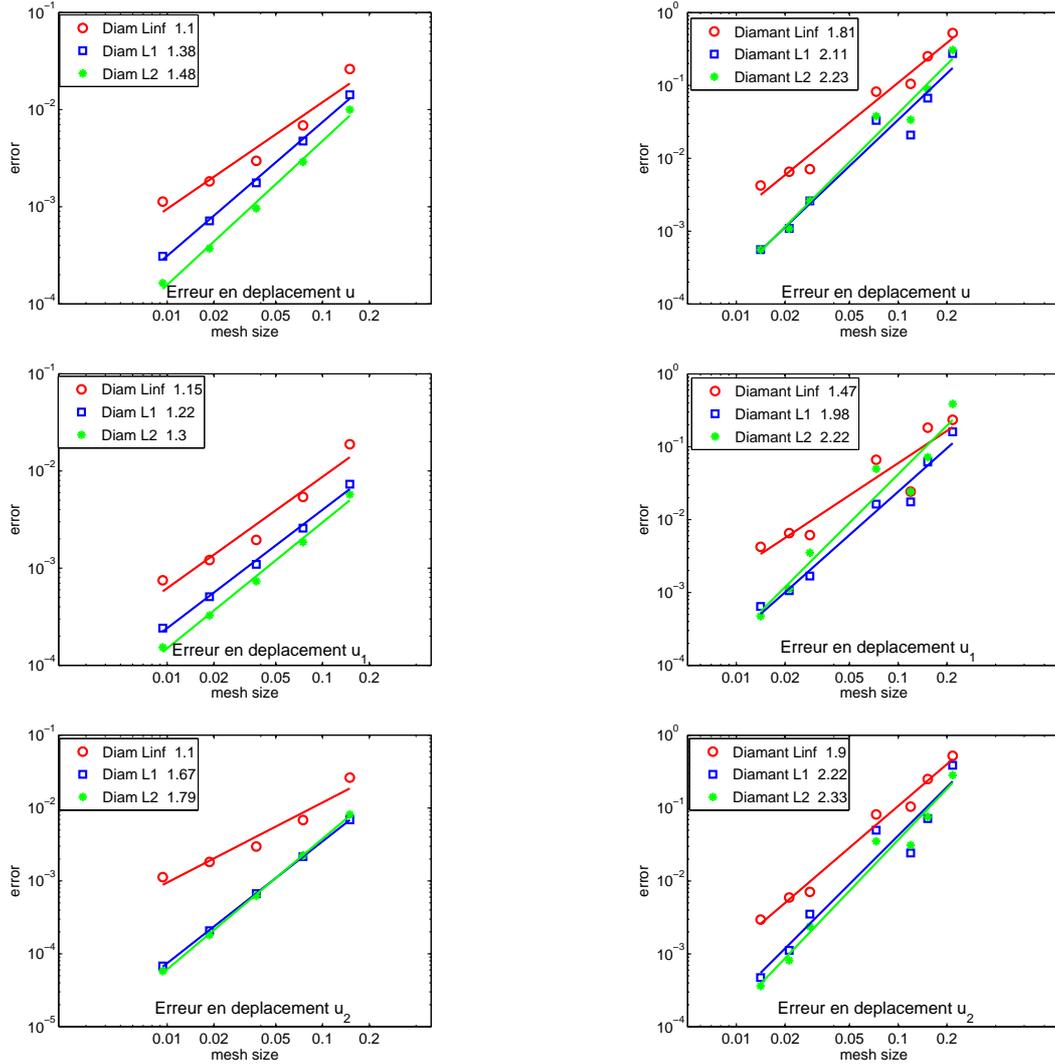


FIGURE 3.7.26 – Cas E.1.8 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés (gauche) et successivement raffinés (droite).

supérieur à 1.5 pour le problème de Dirichlet pur. En ce qui concerne les autres problèmes, il est d’ordre 1 pour la norme  $L^1$  et d’ordre 0.5 pour la norme  $L^2$ . Ceci est probablement dû à la façon de reconstruire a posteriori le gradient sur les volumes diamants internes dont un sommet est sur le bord de Neumann. On peut tout de même constater que lorsque la condition de Neumann est homogène, l’ordre de convergence augmente.

Enfin, dans le cas test du barreau non homogène E.1.8, les estimations numériques de l’erreur pour des raffinements uniformes sont nettement moins bonnes. Nous avons repris le calcul avec un maillage grossier composé de triangles approximativement de même taille.

### 3.8 Conclusion

On a étendu une méthode de volumes finis diamants à l’équation de l’élasticité linéaire non homogène. La méthode est basée sur une écriture conservative de l’équation et approche la moyenne par cellule primale de la solution analytique pour des maillages non structurés en dimension 2. Nous avons introduit deux jeux d’inconnues supplémentaires. Le premier, approchant

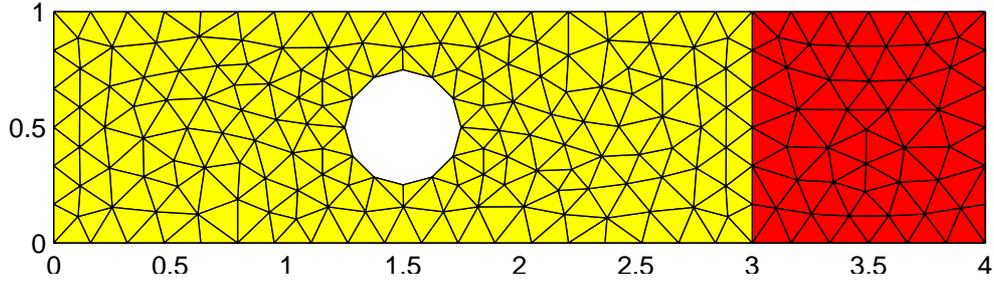


FIGURE 3.7.27 – Cas E.1.8 : Maillage initial grossier composé de triangles de même taille pour de l'aluminium (clair, à gauche) et de l'acier (sombre, à droite).

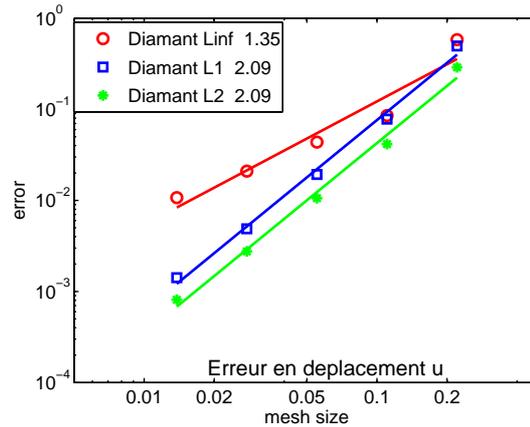


FIGURE 3.7.28 – Cas E.1.8 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour un maillage grossier composé de triangles de même taille.

la valeur de la solution en chaque face, est éliminée soit en utilisant le caractère conservatif du schéma aux arêtes internes, soit en faisant intervenir les conditions de bord. En ce qui concerne le jeu d'inconnues aux sommets du maillage, elles sont ensuite interpolées sur les inconnues principales approchant la valeur de la solution sur les volumes primaux. Les poids d'interpolation  $\alpha_K(\mathbf{x}_s)$  sont calculés par une méthode de moindres carrés pondérés sur les volumes primaux partageant le sommet  $\mathbf{x}_s$ . Cette interpolation rend très difficile la preuve de la coercivité, et fait perdre la symétrie au schéma dans le cas de maillages généraux. Cependant, la consistance au sens des volumes finis est prouvée en admettant une hypothèse sur la géométrie du maillage qui permet de traiter Neumann et sur les poids d'interpolation. Enfin, on montre pour le problème de Dirichlet pur que le schéma diamant est convergent, avec un ordre  $size(\mathcal{T})$  en norme  $L^2$  sous réserve qu'une condition de coercivité portant sur l'opérateur discret soit vérifiée. Les résultats numériques montrent qu'on obtient en général mieux que de l'ordre 1.

# Chapitre 4

## Schéma 3D Diamant

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>89</b>
<b>4.2</b>	<b>Maillages et notations</b>	<b>90</b>
4.2.1	Description du maillage primal	90
4.2.2	Description du maillage diamant	92
4.2.3	Régularité du maillage	93
<b>4.3</b>	<b>Opérateurs discrets</b>	<b>93</b>
4.3.1	Produits scalaires	94
4.3.2	Opérateurs discrets	94
4.3.3	Interpolant aux sommets : élimination des inconnues secondaires	98
4.3.4	Continuité des flux : élimination des inconnues auxiliaires	99
4.3.5	Schéma numérique	101
<b>4.4</b>	<b>Consistance du schéma</b>	<b>102</b>
<b>4.5</b>	<b>Coercivité</b>	<b>113</b>
4.5.1	Définition	113
4.5.2	Condition de coercivité	114
<b>4.6</b>	<b>Convergence et estimation d'erreur</b>	<b>116</b>
<b>4.7</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>116</b>
4.7.1	Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène	117
4.7.2	Cas E.2.2 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou	117
4.7.3	Cas E.2.3 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou	118
<b>4.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>

---

### 4.1 Introduction

La méthode VF diamant en 3d est très largement inspirée de sa version 2d. Cependant, la définition des opérateurs discrets étant sensiblement différente, les preuves de consistance, coercivité puis de convergence en sont altérées. C'est pourquoi il est nécessaire ici de présenter la version 3d comme un chapitre à part entière. Les volumes fins diamant en dimension 3 ont été étudiés pour le problème de convection diffusion par Coudière *et al.* [26] et par Bertolazzi et Manzini [15].

L'équation de l'élasticité (1) est intégrée sur chaque volume de contrôle, puis transformée en un bilan de flux sur chaque face. Les opérateurs discrets en chaque face sont construits de façon à conserver le flux normal du tenseur des contraintes  $\sigma$  à travers les faces internes du maillage. Les inconnues principales approchent la valeur moyenne du déplacement sur chaque volume

primal, tandis que des inconnues secondaires interpolent le déplacement en chaque sommet du maillage et des inconnues auxiliaires permettent d'imposer la condition de conservation du flux en particulier dans le cas des matériaux non homogènes. Dans [14, 15], Bertolazzi et Manzini définissent l'opérateur gradient par face comme étant une interpolation du gradient en chaque volume primal partageant la face. Dans notre cas, l'opérateur gradient en chaque face diffère selon que l'on se place d'un côté ou de l'autre de la face, et la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes discret nous permet d'éliminer le jeu d'inconnues auxiliaires. Les inconnues secondaires sont, comme en dimension 2, interpolées sur les inconnues principales. La consistance du schéma est prouvée, et la stabilité/coercivité est atteinte sous réserve d'une condition sur l'aspect du maillage, ainsi qu'une hypothèse importante sur les poids d'interpolation des inconnues secondaires.

La construction de ce chapitre est la suivante : en section 2 sont présentés les maillages primal et diamant. En section 3, on construit un opérateur gradient par face grâce à la relation de Green en chaque maille diamant. Cet opérateur nous permet de construire le flux du tenseur des contraintes discret par face. Afin d'écrire le schéma numérique, on présente la méthode d'interpolation aux sommets du maillage, ainsi que la condition de conservation qui permet d'éliminer les inconnues intermédiaires aux centres des faces. En section 4, on présente un résultat de consistance dite « faible » du schéma numérique, portant sur l'erreur commise entre la projection  $L^2$  sur le maillage du flux de la solution exacte et le flux numérique discret du projeté sur le maillage de la solution exacte. En section 5, on prouve que le schéma numérique est coercif en formulant une hypothèse géométrique. En section 6, on montre que sous l'hypothèse de coercivité, le schéma VF diamant est convergent d'ordre 1. Enfin, des résultats numériques sont proposés en section 7. Dans le premier cas, la solution VF diamant est comparée à une solution analytique. Les droites d'estimation d'erreur montrent un ordre de convergence légèrement supérieur à 1 pour les déplacements en norme  $L^1$  et  $L^2$ . On termine en comparant la réponse VF diamant à une solution éléments finis  $P1$  sur deux cas tests qui sont des extensions du 2d.

## 4.2 Maillages et notations

### 4.2.1 Description du maillage primal

On considère dans cette étude une triangulation  $\mathfrak{M}$  de  $\Omega$  composée uniquement de tétraèdres  $K$  tels que

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \bar{K} = \bar{\Omega}.$$

On associe à  $K$  son centre de gravité  $\mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^3$  et on note  $\#\mathfrak{M}$  le cardinal de  $\mathfrak{M}$ . On note  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^b$  l'ensemble des faces du maillage. Une face  $s \in \mathcal{E}^{int}$  est interne si et seulement s'il existe deux tétraèdres  $K$  et  $L$  tels que  $s = K \cap L$ . Une face  $s \in \mathcal{E}^b$  est une face sur le bord soit de Dirichlet ( $s \in \mathcal{E}^{bD}$ ) soit de Neumann ( $s \in \mathcal{E}^{bN}$ ). La notation des faces d'un volume  $K$  est identique au 2d. Chaque face  $s \in \partial K$  définit trois sommets, notés  $(\mathbf{x}_i^{Ks})_{i=\{1,2,3\}}$ , comme illustré en Figure 4.2.1, et qui satisfont les conventions suivantes.

#### Convention 4.2.1 (Numérotation locale des sommets du maillage)

Soit  $s = K \cap L$  une face interne. On note  $(\mathbf{x}_i^{Ks})_{i=\{1,2,3\}}$  et  $(\mathbf{x}_i^{Ls})_{i=\{1,2,3\}}$  les numérotations locales associées aux volumes  $K$  et  $L$ .

1. Les indices locaux sont dits tournants, c'est-à-dire que pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$ , on a

$$\mathbf{x}_{i+3}^{Ks} = \mathbf{x}_i^{Ks}. \quad (4.1)$$

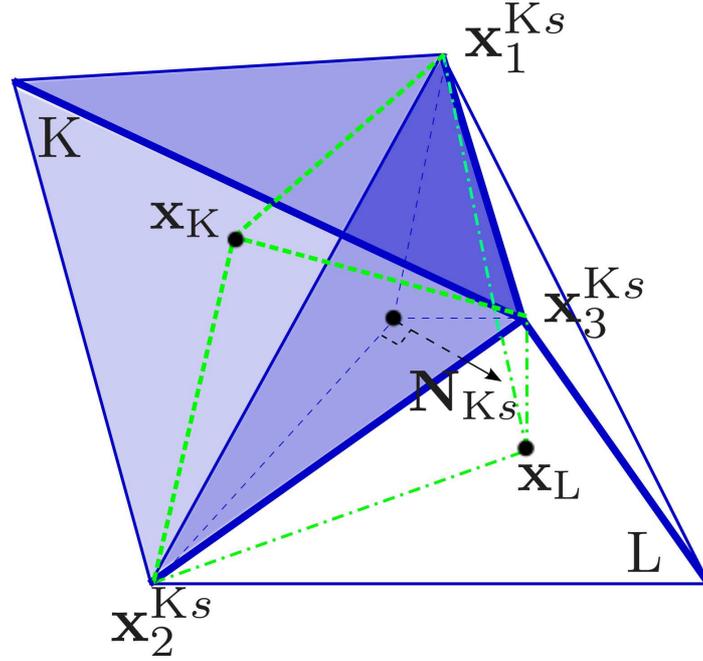


FIGURE 4.2.1 – Maillage primal et notations

2. La numérotation locale des sommets respecte la condition

$$\det(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_{i-1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{Ks}) > 0 \quad (4.2)$$

3. Si  $j_i$  est le numéro local du sommet  $\mathbf{x}_i^{Ks}$  vu du côté L (i.e.  $\mathbf{x}_i^{Ks} = \mathbf{x}_{j_i}^{Ls}$ ), alors

$$\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_{i-1}^{Ks} = \mathbf{x}_{j_i-1}^{Ls} - \mathbf{x}_{j_i+1}^{Ls}. \quad (4.3)$$

Enfin, on note

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{int} \cup \mathcal{N}^b$$

l'ensemble des sommets du maillage  $\mathfrak{M}$ , où  $\mathcal{N}^b$  représente l'ensemble des sommets sur le bord  $\Gamma$ , et  $\mathcal{N}^{int}$  l'ensemble des sommets à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . De même qu'en 2d,

$$\mathcal{N}^b = \mathcal{N}^{bD} \cup \mathcal{N}^{bN}.$$

Pour tout volume primal K,

- $|K|$  représente la mesure de K,
- $\mathbf{n}_{Ks}$  représente la normale unitaire sortante de K à la face  $s$ ,
- $\mathbf{N}_{Ks} = |s|\mathbf{n}_{Ks}$  représente la normale sortante de K à la face  $s$ , de module l'aire  $|s|$  de la face  $s$  et parce que  $\mathbf{x}_s$  est le centre de gravité de la face  $s$ ,

$$\mathbf{N}_{Ks} = \frac{3}{2}(\mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_{i-1}^{Ks} - \mathbf{x}_s), \quad (4.4)$$

- $diam(K)$  représente le diamètre de K,
- $\mu_K = \mu(\mathbf{x}_K)$  et  $\lambda_K = \lambda(\mathbf{x}_K)$  représentent les valeurs des coefficients de Lamé constants par volumes primaux.

Pour  $\mathbf{x}^v$  un sommet,  $\mathcal{V}(\mathbf{x}^v)$  représente l'ensemble non nécessairement convexe des volumes dont  $\mathbf{x}^v$  est un sommet et  $\#\mathcal{V}(\mathbf{x}^v)$  représente le cardinal de  $\mathcal{V}(\mathbf{x}^v)$ .

## 4.2.2 Description du maillage diamant

A chaque arête  $s \in \partial K$  d'un volume primal  $K$  est associé un volume diamant  $D_{Ks}$ . Comme indiqué en Figure 4.2.2, il s'agit d'un tétraèdre, obtenu en joignant les sommets  $(\mathbf{x}_i^{Ks})_{i=\{1,2,3\}}$  de la face  $s$  au centre  $\mathbf{x}_K$  de  $K$ . De même qu'en 2d, on définit l'ensemble  $\tilde{\mathcal{D}}$  des diamants qui se décompose en

$$\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}^{int} \cup \tilde{\mathcal{D}}^b = \tilde{\mathcal{D}}^{int} \cup \tilde{\mathcal{D}}^{bD} \cup \tilde{\mathcal{D}}^{bN}.$$

Les diamants sont 2 à 2 disjoints et couvrent entièrement le domaine  $\Omega$ , de sorte que

$$\bigcup_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \overline{D_{Ks}} = \overline{\Omega}.$$

On note  $diam(D_{Ks})$  le diamètre de  $D_{Ks}$  et on vérifie que  $|D_{Ks}|$ , volume de  $D_{Ks}$ , satisfait

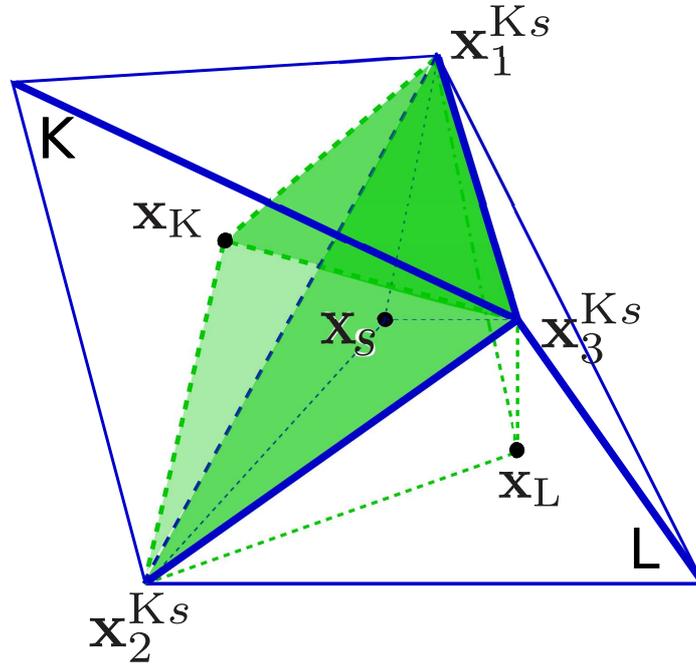


FIGURE 4.2.2 – Cellule **diamant** associée au volume primal  $K$  et à la face  $s$

( $i = \{1, 2, 3\}$ )

$$|D_{Ks}| = \frac{1}{6} \det(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_{i-1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{Ks}). \quad (4.5)$$

On note, comme le montre la Figure 4.2.3, pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$

- $s_i^*$  l'aillette associée au sommet  $\mathbf{x}_i^{Ks}$ . C'est le triangle, de sommets  $(\mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_K)$ ,
- $|s_i^*|$  la mesure de l'aillette  $s_i^*$ ,
- $\mathbf{n}_i^{Ks}$  la normale unitaire sortante à l'aillette  $s_i^*$  associée au sommet  $\mathbf{x}_i^{Ks}$  telle que  $\mathbf{N}_i^{Ks} = |s_i^*| \mathbf{n}_i^{Ks}$  vérifie

$$\mathbf{N}_i^{Ks} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s). \quad (4.6)$$

Enfin, on note  $\mathcal{T} = \mathfrak{M} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{E}$  la réunion de l'ensemble des volumes primaux, des sommets et des faces du maillage.

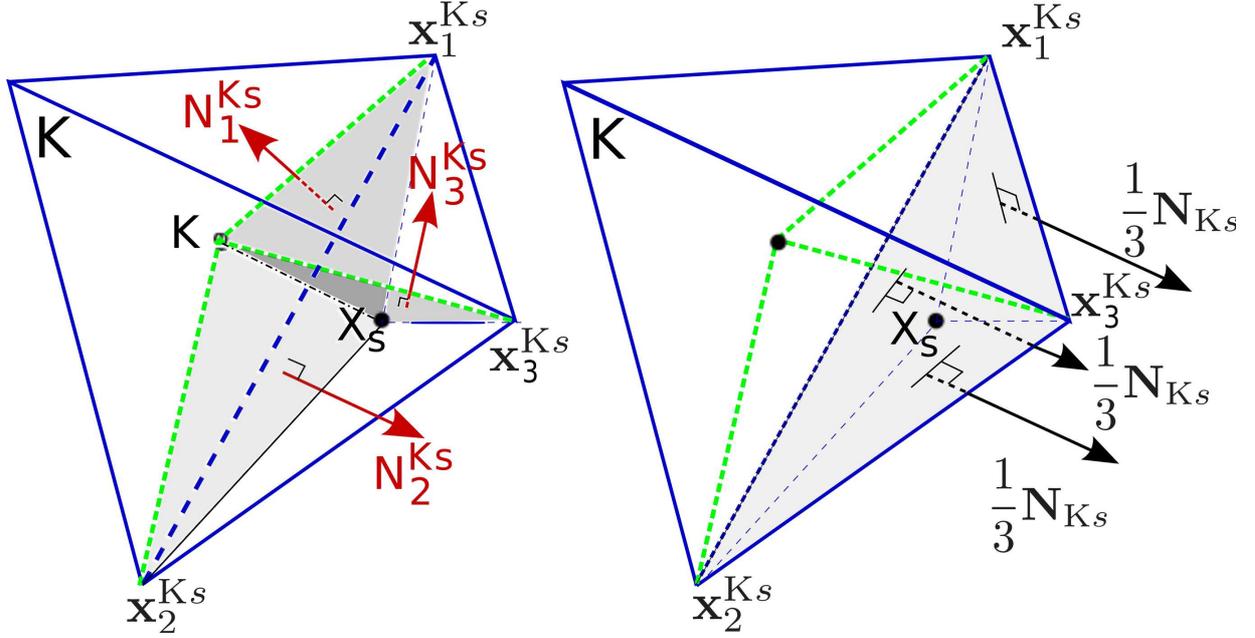


FIGURE 4.2.3 – Notations du volume **diamant**

### 4.2.3 Régularité du maillage

On pose  $size(\mathcal{T}) = \max_K diam(K)$ . Par définition, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned} |s| &\leq size(\mathcal{T})^2, \quad \forall s \in \mathcal{E}; \\ |D_{K_s}| &\leq C size(\mathcal{T})^3, \quad \forall D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}; \\ |K| &\leq C size(\mathcal{T})^3, \quad \forall K \in \mathfrak{M}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

On suppose que la famille des maillages primaires satisfait des hypothèses de régularité et de quasi-uniformité et qu'il existe à ce titre des constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \forall K \in \mathfrak{M}, \quad \alpha size(\mathcal{T})^3 &\leq |K|; & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}, \quad \#\mathcal{V}(\mathbf{x}^v) &\leq \gamma; \\ \forall D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad \beta size(\mathcal{T})^3 &\leq |D_{K_s}|; & \forall s \in \mathcal{E}, \quad \delta size(\mathcal{T})^2 &\leq |s|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

## 4.3 Opérateurs discrets

Comme pour la version 2d, on cherche à approcher le flux du tenseur des contraintes à travers les faces  $s$  du maillage  $\mathcal{T}$ . L'intégrale sur  $K \in \mathfrak{M}$  de l'équation (1) conduit à

$$-\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})) = \mathbf{f}_K \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{f}_K = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  est la moyenne par volume du forçage  $\mathbf{f}$  sur la cellule  $K$ , soit calculée explicitement, soit approchée par une méthode d'intégration numérique, et où

$$P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})) = \frac{1}{|s|} \int_s \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \quad (4.10)$$

représente le flux du tenseur des contraintes à travers l'interface  $s$ . Le but du schéma diamant est donc de construire une approximation  $\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau)$  du flux  $P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u}))$  que l'on cherche sous la forme

$$\begin{aligned}\phi^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= \frac{1}{|s|} \int_s \sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} dx \\ &= \sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s}\end{aligned}\quad (4.11)$$

où le tenseur  $\sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau)$  est défini à partir des valeurs moyennes sur les volumes voisins de  $s$  et est donné par la Définition 4.3.2.

### 4.3.1 Produits scalaires

Pour tout couple  $(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau) \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}} \times (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$ , on définit le produit scalaire et la norme associée par

$$(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau)_{\mathfrak{M}} = \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}^\tau\|_{\mathfrak{M}}^2 = \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{u}_K. \quad (4.12)$$

Pour tout couple  $(\phi^{\tilde{\mathfrak{D}}}, \psi^{\tilde{\mathfrak{D}}})$  dans  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\#\tilde{\mathfrak{D}}}$ , on définit le produit scalaire

$$(\phi^{\tilde{\mathfrak{D}}} : \psi^{\tilde{\mathfrak{D}}})_{\tilde{\mathfrak{D}}} = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| (\phi^{\mathbf{D}_{K_s}} : \psi^{\mathbf{D}_{K_s}}) \quad \text{et} \quad \|A^{\tilde{\mathfrak{D}}}\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| (A^{\mathbf{D}_{K_s}} : A^{\mathbf{D}_{K_s}}), \quad (4.13)$$

où  $(\phi^{\mathbf{D}_{K_s}} : \psi^{\mathbf{D}_{K_s}}) = \text{tr}((\phi^{\mathbf{D}_{K_s}})^T \psi^{\mathbf{D}_{K_s}})$ .

Pour tout couple de vecteurs  $(\mathbf{a}^{\tilde{\mathfrak{D}}}, \mathbf{b}^{\tilde{\mathfrak{D}}})$  dans  $(\mathbb{R}^3)^{\#\tilde{\mathfrak{D}}}$ , on définit le produit scalaire

$$(\mathbf{a}^{\tilde{\mathfrak{D}}}, \mathbf{b}^{\tilde{\mathfrak{D}}})_{\tilde{\mathfrak{D}}} = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| \mathbf{a}^{\mathbf{D}_{K_s}} \cdot \mathbf{b}^{\mathbf{D}_{K_s}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{a}^{\tilde{\mathfrak{D}}}\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| \mathbf{a}^{\mathbf{D}_{K_s}} \cdot \mathbf{a}^{\mathbf{D}_{K_s}}. \quad (4.14)$$

### 4.3.2 Opérateurs discrets

Comme pour le schéma 2d, nous allons construire 3 familles d'inconnues, à savoir les inconnues principales  $(\mathbf{u}_K)_{K \in \mathfrak{M}}$ , les inconnues secondaires  $(\mathbf{u}_i^{\mathbf{K}_s})_{i=\{1,2,3\}, s \in \mathcal{E}}$  associées aux sommets du maillage, ainsi que les inconnues auxiliaires  $(\mathbf{u}_s)_{s \in \mathcal{E}}$  associées aux faces.

#### Définition 4.3.1 (Définition du gradient)

On considère un volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ . Le gradient constant sur  $D_{K_s}$ , noté  $\nabla^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathfrak{D}}}$ , s'écrit sous la forme

$$\nabla^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{3|D_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i^{\mathbf{K}_s} \otimes (\mathbf{N}_{i-1}^{\mathbf{K}_s} - \mathbf{N}_{i+1}^{\mathbf{K}_s}) \right). \quad (4.15)$$

L'obtention de cette formule est détaillée dans [29].

#### Remarque 4.3.1

Pour tout  $K \in \mathfrak{M}$ , pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$ , on a la relation suivante

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i^{\mathbf{K}_s} \otimes (\mathbf{N}_{i-1}^{\mathbf{K}_s} - \mathbf{N}_{i+1}^{\mathbf{K}_s}) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{i+1}^{\mathbf{K}_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{\mathbf{K}_s}) \otimes \mathbf{N}_i^{\mathbf{K}_s}. \quad (4.16)$$

Ceci implique que l'on peut également écrire le tenseur gradient discret (4.15) de la façon suivante

$$\nabla^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{3|\mathbb{D}_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} \right). \quad (4.17)$$

Comme  $\mu_{\mathbb{D}_{K_s}} = \mu_K$  et  $\lambda_{\mathbb{D}_{K_s}} = \lambda_K$ , on peut maintenant définir le tenseur des contraintes discret via la loi de comportement (2) de Hooke pour tout volume diamant.

#### Définition 4.3.2

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$ , le tenseur des contraintes est défini par diamant  $\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) = (\sigma^{\mathbb{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau))_{\mathbb{D}_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}}$  et vérifie pour tout  $\mathbb{D}_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$

$$\sigma^{\mathbb{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = 2\mu_K \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau + \lambda_K \text{Div}^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \quad (4.18)$$

où l'opérateur  $\mathbb{D}^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \frac{\nabla^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T}{2}$  représente la partie symétrique du gradient des déplacements discrets  $\mathbf{u}^\tau$ , et  $\text{Div}^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \text{div}^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \text{Id} = \text{tr}(\nabla^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id}$  représente la matrice trace du gradient discret.

En utilisant la forme discrète du tenseur des contraintes (4.18), on est en mesure de donner l'expression de son flux à travers les interfaces du maillage primal.

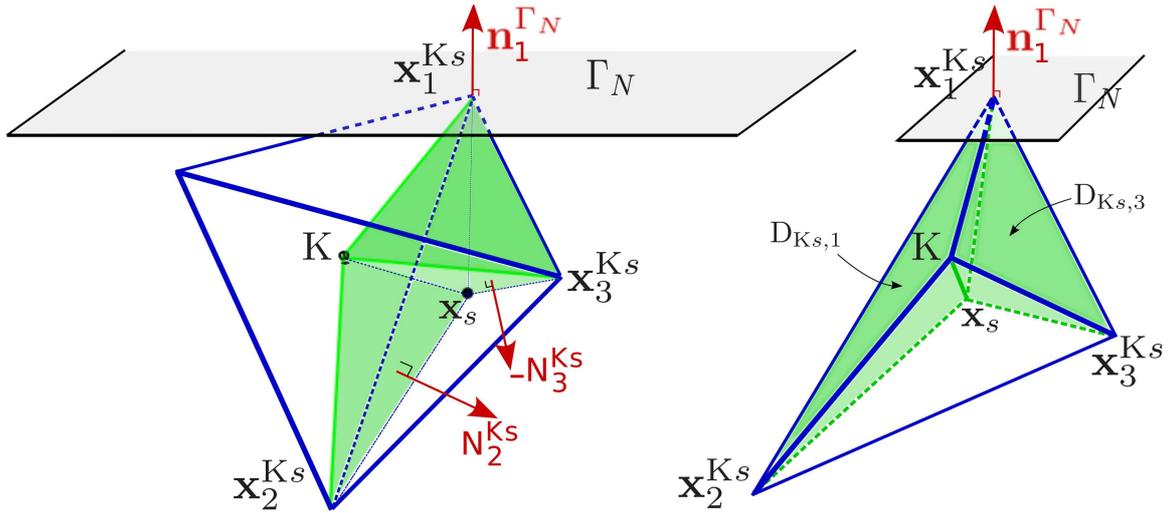


FIGURE 4.3.1 – Notations du diamant dans le cas où un sommet est sur Neumann, vue de côté (gauche) et vue de face (droite).

#### Proposition 4.3.1

Le flux du tenseur des contraintes discret à travers les interfaces  $s \in \mathcal{E}$  du maillage primal, dont la définition est donnée par (4.11), s'écrit

1. Pour tout volume diamant sur le bord de Neumann  $\mathbb{D}_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{b_N}$

$$\phi^{\mathbb{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = P^{\mathbb{D}_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})) \quad (4.19)$$

c'est-à-dire on impose directement la condition de bord.

2. Pour tout volume diamant  $\mathbb{D}_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int} \cup \tilde{\mathfrak{D}}^{b_D}$  dont aucun des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2,3\}}$

n'est sur le bord de Neumann

$$\phi^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = \sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{\text{Ks}}(\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}}) \quad (4.20)$$

où les matrices  $\beta_K^s$  et  $\beta_i^{\text{Ks}}$  sont définies en (C.2) et (C.5).

3. Pour tout volume diamant  $\mathbf{D}_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{\text{int}}$  dont un des sommets  $(\mathbf{x}_i^{\text{Ks}})_{i=\{1,2,3\}}$  est sur le bord de Neumann, i.e. il existe  $i = \{1, 2, 3\}$  tel que  $\mathbf{x}_i^{\text{Ks}} \in \mathcal{N}^{b_N}$

$$(\sigma^{\mathbf{D}_{K_s, i-1}}(\mathbf{u}^\tau) + \sigma^{\mathbf{D}_{K_s, i}}(\mathbf{u}^\tau)) \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{\text{Ks}}). \quad (4.21)$$

Ceci conduit à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \phi^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= \left( \beta_K^s - 2(\beta_{i-1}^{\text{Ks}} - \beta_{i+1}^{\text{Ks}}) (\beta_{i-1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{Ks}} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{Ks}})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s \right) (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \\ &\quad + (\beta_{i-1}^{\text{Ks}} - \beta_{i+1}^{\text{Ks}}) (\beta_{i-1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{Ks}} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{Ks}})^{-1} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{\text{Ks}}) - \beta_{i, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{Ks}} (\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}})] \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\beta_{j-1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{Ks}} - \beta_{j+1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{Ks}}) (\mathbf{u}_j^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_s), \end{aligned} \quad (4.22)$$

où les matrices  $\beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s$  et  $\beta_{i, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\text{Ks}}$  sont explicitées en (C.9) et (C.10). Remarquons que si le volume diamant  $\mathbf{D}_{K_s}$  possède une arête sur le bord de Neumann, on applique la relation (4.21) à chacun des deux sommets de l'arête.

**Démonstration :** 1. Soit  $\mathbf{D}_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{\text{int}} \cup \tilde{\mathfrak{D}}^{b_D}$  dont aucun des sommets  $(\mathbf{x}_i^{\text{Ks}})_{i=\{1,2,3\}}$  n'est sur le bord de Neumann. L'expression du gradient discret est donnée par (4.17). Le flux du tenseur des contraintes discret vérifie

$$\begin{aligned} \phi^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= \sigma^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} \\ &= (\mu_K (\nabla^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T) + \lambda_K \text{tr}(\nabla^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id}) \mathbf{n}_{K_s} \\ &= \frac{\mu_K}{3|\mathbf{D}_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}}) \otimes \mathbf{N}_i^{\text{Ks}} \right) \mathbf{n}_{K_s} \\ &\quad + \frac{\mu_K}{3|\mathbf{D}_{K_s}|} \left( \mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i^{\text{Ks}} \otimes (\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}}) \right) \mathbf{n}_{K_s} \\ &\quad + \frac{\lambda_K}{3|\mathbf{D}_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}}) \cdot \mathbf{N}_i^{\text{Ks}} \right) \mathbf{n}_{K_s}. \end{aligned}$$

Grâce à la relation (A.1a), on obtient le résultat voulu.

$$\begin{aligned} \phi^{\mathbf{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= \frac{1}{3|\mathbf{D}_{K_s}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_{K_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{N}_{K_s} \otimes \mathbf{n}_{K_s}) + \lambda_K (\mathbf{n}_{K_s} \otimes \mathbf{N}_{K_s}) \right) (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \\ &\quad + \frac{1}{3|\mathbf{D}_{K_s}|} \sum_{i=1}^3 \left( \mu_K \mathbf{N}_i^{\text{Ks}} \cdot \mathbf{n}_{K_s} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{N}_i^{\text{Ks}} \otimes \mathbf{n}_{K_s}) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_K (\mathbf{n}_{K_s} \otimes \mathbf{N}_i^{\text{Ks}}) \right) (\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}}). \end{aligned}$$

2. Soit  $\mathbf{D}_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{\text{int}}$  dont un des sommets est sur le bord de Neumann : fixons  $i \in \{1, 2, 3\}$  tel que  $\mathbf{x}_i^{\text{Ks}} \in \mathcal{N}^{b_N}$ . On note  $\mathbf{D}_{K_s, i-1}$  le tétraèdre  $(\mathbf{x}_{i-1}^{\text{Ks}}, \mathbf{x}_i^{\text{Ks}}, \mathbf{x}_K, \mathbf{x}_s)$ , comme indiqué en

Figure 4.3.1. Sachant que  $\mathbf{x}_s$  est situé au centre de gravité de la face  $s$ , on a la propriété  $|D_{Ks,i}| = \frac{1}{3}|D_{Ks}|$ . De fait, on obtient que

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau)\mathbf{n}_{Ks} = \frac{1}{3}(\sigma^{D_{Ks,1}}(\mathbf{u}^\tau) + \sigma^{D_{Ks,2}}(\mathbf{u}^\tau) + \sigma^{D_{Ks,3}}(\mathbf{u}^\tau))\mathbf{n}_{Ks} \quad (4.23)$$

avec, pour tout  $j = \{1, 2, 3\}$

$$\sigma^{D_{Ks,j}}(\mathbf{u}^\tau)\mathbf{n}_{Ks} = \beta_K^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + 3(\beta_j^{Ks}(\mathbf{u}_{j+1}^{Ks} - \mathbf{u}_s) - \beta_{j+1}^{Ks}(\mathbf{u}_j^{Ks} - \mathbf{u}_s)) \quad (4.24)$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} (\sigma^{D_{Ks,i-1}}(\mathbf{u}^\tau) + \sigma^{D_{Ks,i}}(\mathbf{u}^\tau))\mathbf{n}_{Ks} &= 2\beta_K^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + 3\left((\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks})(\mathbf{u}_i^{Ks} - \mathbf{u}_s) \right. \\ &\quad \left. + \beta_i^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks})\right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Pour éliminer  $\mathbf{u}_i^{Ks}$ , on impose sur le volume  $D_{Ks,i-1} \cup D_{Ks,i}$  la condition

$$(\sigma^{D_{Ks,i-1}}(\mathbf{u}^\tau) + \sigma^{D_{Ks,i}}(\mathbf{u}^\tau))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{Ks})$$

que l'on réécrit à l'aide des matrices discrètes (C.9) et (C.10) de la façon suivante

$$2\beta_{K,n_i}^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + (\beta_{i-1,n_i}^{Ks} - \beta_{i+1,n_i}^{Ks})(\mathbf{u}_i^{Ks} - \mathbf{u}_s) + \beta_{i,n_i}^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{Ks}). \quad (4.26)$$

Remarquons que d'après l'Hypothèse C.2.1, la matrice discrète  $\beta_{i-1,n_i}^{Ks} - \beta_{i+1,n_i}^{Ks}$  est inversible. Ceci va nous permettre d'isoler l'expression de  $\mathbf{u}_i^{Ks}$  dans l'équation précédente

$$\mathbf{u}_i^{Ks} = \mathbf{u}_s + (\beta_{i-1,n_i}^{Ks} - \beta_{i+1,n_i}^{Ks})^{-1}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{Ks}) - 2\beta_{K,n_i}^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) - \beta_{i,n_i}^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks})]. \quad (4.27)$$

En injectant l'expression (4.27) dans (4.25), on obtient que

$$\begin{aligned} &(\sigma^{D_{Ks,i-1}}(\mathbf{u}^\tau) + \sigma^{D_{Ks,i}}(\mathbf{u}^\tau))\mathbf{n}_{Ks} \\ &= 2\beta_K^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + 3(\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks})(\mathbf{u}_i^{Ks} - \mathbf{u}_s) + 3\beta_i^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \\ &= 2\beta_K^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + 3\beta_i^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \\ &\quad + 3(\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks})(\beta_{i-1,n_i}^{Ks} - \beta_{i+1,n_i}^{Ks})^{-1} \\ &\quad \quad [\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{Ks}) - 2\beta_{K,n_i}^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) - \beta_{i,n_i}^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks})]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

On regroupe ensemble les termes relatifs à  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K$ . De fait, l'équation (4.28) s'écrit

$$\begin{aligned} &(\sigma^{D_{Ks,i-1}}(\mathbf{u}^\tau) + \sigma^{D_{Ks,i}}(\mathbf{u}^\tau))\mathbf{n}_{Ks} \\ &= \left(2\beta_K^s - 6(\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks})(\beta_{i-1,n_i}^{Ks} - \beta_{i+1,n_i}^{Ks})^{-1}\beta_{K,n_i}^s\right)(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \\ &\quad + 3(\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks})(\beta_{i-1,n_i}^{Ks} - \beta_{i+1,n_i}^{Ks})^{-1}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{Ks}) - \beta_{i,n_i}^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks})] \\ &\quad + 3\beta_i^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

On complète en renseignant le flux du tenseur des contraintes discret associé au volume  $D_{Ks,i+1}$  non concerné par la condition de Neumann. L'équation (4.24) donne

$$\sigma^{D_{Ks,i+1}}(\mathbf{u}^\tau)\mathbf{n}_{Ks} = \beta_K^s(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + 3(\beta_{i+1}^{Ks}(\mathbf{u}_{i-1}^{Ks} - \mathbf{u}_s) - \beta_{i-1}^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_s)). \quad (4.30)$$

Ainsi, l'équation (4.23) s'écrit grâce aux termes (4.29) et (4.30) de la façon suivante

$$\begin{aligned} &\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau)\mathbf{n}_{Ks} \\ &= \left(\beta_K^s - 2(\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks})(\beta_{i-1,n_i}^{Ks} - \beta_{i+1,n_i}^{Ks})^{-1}\beta_{K,n_i}^s\right)(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \\ &\quad + (\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks})(\beta_{i-1,n_i}^{Ks} - \beta_{i+1,n_i}^{Ks})^{-1}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{Ks}) - \beta_{i,n_i}^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks})] \\ &\quad + \beta_i^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) + (\beta_{i+1}^{Ks}(\mathbf{u}_{i-1}^{Ks} - \mathbf{u}_s) - \beta_{i-1}^{Ks}(\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_s)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Enfin, étant donnée l'expression des matrices discrètes  $\beta_i^{Ks}$ , et du fait que  $\sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i^{Ks} = \mathbf{0}$ , on en déduit que  $\sum_{i=1}^3 (\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks}) \mathbf{u}_s = \mathbf{0}$ , et on a donc la relation suivante

$$(\beta_{i-1}^{Ks} - \beta_{i+1}^{Ks}) \mathbf{u}_s = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\beta_{j-1}^{Ks} - \beta_{j+1}^{Ks}) \mathbf{u}_s.$$

Ceci conduit à l'expression (4.22) et achève la démonstration. ■

### 4.3.3 Interpolant aux sommets : élimination des inconnues secondaires

1. Pour  $\mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{bD}$  sommet sur le bord de Dirichlet, la condition de Dirichlet impose

$$\mathbf{u}^v = \mathbf{g}(\mathbf{x}^v). \quad (4.32)$$

2. Pour les sommets internes, les valeurs du déplacement sont interpolées au sens des moindres carrés par les valeurs des volumes partageant le sommet. Ainsi pour  $\mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{int}$  sommet interne du maillage, on a

$$\mathbf{u}^v = \sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) \mathbf{u}_K \quad (4.33)$$

où les  $\alpha_K(\mathbf{x}^v)$  représentent les poids d'interpolation. Pour l'étude de la convergence, une condition suffisante est que la fonction d'interpolation soit exacte pour les polynômes de degré 1. On impose donc aux poids d'interpolation  $\alpha_K(\mathbf{x}^v)$  les hypothèses

#### Hypothèses 4.3.1

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) = 1 \quad (4.34)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) x_K = x^v \quad (4.35)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) y_K = y^v \quad (4.36)$$

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) z_K = z^v. \quad (4.37)$$

On obtient des poids satisfaisant ces hypothèses en déterminant l'application affine et donc les coefficients  $a_1, a_2, a_3, a_4$  tels que

$$a_1(x_K - x^v) + a_2(y_K - y^v) + a_3(z_K - z^v) + a_4 = u_K, \quad \forall K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v),$$

le traitement des composantes  $v_K$  et  $w_K$  du déplacement étant identiques. Ce problème surdéterminé est résolu par la méthode des moindres carrés pondérés; les coefficients  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sont choisis de telle sorte qu'ils minimisent

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \gamma_K (u_K - a_1(x_K - x^v) - a_2(y_K - y^v) - a_3(z_K - z^v) - a_4)^2 \quad (4.38)$$

où les éléments de pondération  $\gamma_K$  dépendent de l'inverse de la distance entre le sommet  $\mathbf{x}^v$  et le centre du volume  $K$ . Si on note  $l_1$  (respectivement  $l_2, l_3$  et  $l_4$ ) le vecteur colonne à coefficients  $\sqrt{\gamma_K}(x_K - x^v)$  (respectivement  $\sqrt{\gamma_K}(y_K - y^v)$ ,  $\sqrt{\gamma_K}(z_K - z^v)$  et  $\sqrt{\gamma_K}$ ), et si on note  $d$  le vecteur colonne à coefficients  $\sqrt{\gamma_K}u_K$ , alors  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sont solution de

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} & l_{34} \\ l_{14} & l_{24} & l_{34} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cdot d \\ l_2 \cdot d \\ l_3 \cdot d \\ l_4 \cdot d \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} l_{11} &= l_1 \cdot l_1 = \sum_K \gamma_K (x_K - x^v)^2 \\ l_{12} &= l_1 \cdot l_2 = \sum_K \gamma_K (x_K - x^v)(y_K - y^v) \\ l_{13} &= l_1 \cdot l_3 = \sum_K \gamma_K (x_K - x^v)(z_K - z^v) \\ l_{22} &= l_2 \cdot l_2 = \sum_K \gamma_K (y_K - y^v)^2 \\ l_{23} &= l_2 \cdot l_3 = \sum_K \gamma_K (y_K - y^v)(z_K - z^v) \\ l_{33} &= l_3 \cdot l_3 = \sum_K \gamma_K (z_K - z^v)^2 \\ l_{14} &= l_1 \cdot l_4 = \sum_K \gamma_K (x_K - x^v) \\ l_{24} &= l_2 \cdot l_4 = \sum_K \gamma_K (y_K - y^v) \\ l_{34} &= l_3 \cdot l_4 = \sum_K \gamma_K (z_K - z^v) \\ l_{44} &= l_4 \cdot l_4 = \sum_K \gamma_K. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\alpha_K = \frac{\gamma_K - \gamma_K \frac{L_x(x_K - x^v)}{D} + \gamma_K \frac{L_y(y_K - y^v)}{D} - \gamma_K \frac{L_z(z_K - z^v)}{D} +}{\sum_K \gamma_K - \sum_K \gamma_K \frac{L_x(x_K - x^v)}{D} + \sum_K \gamma_K \frac{L_y(y_K - y^v)}{D} - \sum_K \gamma_K \frac{L_z(z_K - z^v)}{D}}.$$

avec

$$L_x = \begin{vmatrix} l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \\ l_{14} & l_{24} & l_{34} \end{vmatrix} \quad L_y = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \\ l_{14} & l_{24} & l_{34} \end{vmatrix} \quad L_z = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{14} & l_{24} & l_{34} \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant  $D$  est non nul dès lors que les points  $\mathbf{x}_K$  ne sont pas tous alignés, ce qui est le cas lorsque  $\mathbf{x}^v$  est un sommet interne du maillage. La propriété (4.34) est trivialement respectée ; (4.35), (4.36) et (4.37) sont la conséquence du fait que (4.38) est nul lorsque  $\mathbf{u}$  est une fonction affine.

#### 4.3.4 Continuité des flux : élimination des inconnues auxiliaires

Les inconnues auxiliaires internes  $(\mathbf{x}_s)_{s \in \mathcal{E}^{int}}$  sont éliminées en utilisant soit la relation suivante.

**Définition 4.3.3 (Condition de conservation)**

Soit  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  une face interne. Soient  $(\lambda_K, \mu_K) \in \mathbb{R}^2$  et  $(\lambda_L, \mu_L) \in \mathbb{R}^2$  les coefficients de Lamé constants par volume primal. La condition de conservation s'écrit

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{Ks} = \sigma^{D_{Ls}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{Ks}. \quad (4.39)$$

Nous développons la relation (4.39) pour obtenir, grâce aux matrices discrètes (C.1)-(C.6), l'expression des inconnues auxiliaires  $\mathbf{u}_s$  suivante.

**Théorème 4.3.1 (Expression des inconnues aux faces)**

1. Pour toute face interne  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$ , il existe un unique  $\mathbf{u}_s$ , dépendant uniquement des inconnues principales  $\mathbf{u}^\tau$ , des coefficients de Lamé constants par volume primal et du maillage, qui satisfait l'équation (4.39). Son expression est

$$\mathbf{u}_s = \beta_{KL}^{-1} (\beta_L^s \mathbf{u}_L + \beta_K^s \mathbf{u}_K - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks})). \quad (4.40)$$

2. Pour toute face de bord  $s \in \mathcal{E}^{bd}$  pour laquelle est imposée une condition de déplacement, l'inconnue auxiliaire  $\mathbf{u}_s$  est éliminée via la condition de bord de Dirichlet. Son expression est

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s). \quad (4.41)$$

**Démonstration :** Soit  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  une face interne. On développe la condition de continuité à travers la face  $s$  de la composante normale du tenseur des contraintes discret exprimée en (4.39)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3|D_{Ks}|} \left[ \mu_K (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{Ks} + \sum_{i=1}^3 \mu_K (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \otimes \mathbf{N}_i^{Ks} \right. \\ & \quad + \mu_K \mathbf{N}_{Ks} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \sum_{i=1}^3 \mu_K \mathbf{N}_i^{Ks} \otimes (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \\ & \quad \left. + \lambda_K \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{Ks} \right) \text{Id} + \sum_{i=1}^3 \lambda_K \left( (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \cdot \mathbf{N}_i^{Ks} \right) \text{Id} \right] \mathbf{n}_{Ks} \\ & = \frac{1}{3|D_{Ls}|} \left[ \mu_L (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_L) \otimes \mathbf{N}_{Ls} + \sum_{i=1}^3 \mu_L (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \otimes (-\mathbf{N}_{j_i}^{Ls}) \right. \\ & \quad + \mu_L \mathbf{N}_{Ls} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_L) + \sum_{i=1}^3 \mu_L (-\mathbf{N}_{j_i}^{Ls}) \otimes (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \\ & \quad \left. + \lambda_L \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_L) \cdot \mathbf{N}_{Ls} \right) \text{Id} + \sum_{i=1}^3 \lambda_L \left( (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \cdot (-\mathbf{N}_{j_i}^{Ls}) \right) \text{Id} \right] \mathbf{n}_{Ks}. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{N}_{Ks} = -\mathbf{N}_{Ls}$ , on peut isoler les termes en  $\mathbf{u}_s$  pour obtenir l'expression

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3|D_{K_s}|} \left[ \mu_K \mathbf{u}_s (\mathbf{N}_{K_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \mu_K \mathbf{N}_{K_s} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \lambda_K (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{N}_{K_s}) \mathbf{n}_{K_s} \right] \\
& + \frac{1}{3|D_{L_s}|} \left[ \mu_L \mathbf{u}_s (\mathbf{N}_{K_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \mu_L \mathbf{N}_{K_s} (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \lambda_L (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{N}_{K_s}) \mathbf{n}_{K_s} \right] \\
= & \frac{1}{3|D_{K_s}|} \left[ \mu_K \mathbf{u}_K (\mathbf{N}_{K_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \mu_K \mathbf{N}_{K_s} (\mathbf{u}_K \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \lambda_K (\mathbf{u}_K \cdot \mathbf{N}_{K_s}) \mathbf{n}_{K_s} \right] \\
& + \frac{1}{3|D_{L_s}|} \left[ \mu_L \mathbf{u}_L (\mathbf{N}_{K_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \mu_L \mathbf{N}_{K_s} (\mathbf{u}_L \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \lambda_L (\mathbf{u}_L \cdot \mathbf{N}_{K_s}) \mathbf{n}_{K_s} \right] \\
& - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{3|D_{L_s}|} \left[ \mu_L (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) (\mathbf{N}_{j_i}^{L_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \mu_L \mathbf{N}_{j_i}^{L_s} ((\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \cdot \mathbf{n}_{K_s}) \right. \\
& \quad \left. + \lambda_L ((\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_{j_i}^{L_s}) \mathbf{n}_{K_s} \right] \\
& - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{3|D_{K_s}|} \left[ \mu_K (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) (\mathbf{N}_i^{K_s} \cdot \mathbf{n}_{K_s}) + \mu_K \mathbf{N}_i^{K_s} ((\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \cdot \mathbf{n}_{K_s}) \right. \\
& \quad \left. + \lambda_K ((\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_i^{K_s}) \mathbf{n}_{K_s} \right].
\end{aligned}$$

L'expression des matrices discrètes (C.1)-(C.6) conduit à

$$(\beta_K^s + \beta_L^s) \mathbf{u}_s = \beta_L^s \mathbf{u}_L + \beta_K^s \mathbf{u}_K - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}).$$

L'existence et l'unicité de l'expression de  $\mathbf{u}_s$  vient du fait que la matrice  $\beta_{KL} = \beta_K^s + \beta_L^s$  est inversible d'après la Proposition C.1.1.  $\blacksquare$

### 4.3.5 Schéma numérique

En résumé, le schéma numérique volumes finis diamant consiste à déterminer  $\mathbf{u}^\tau$  satisfaisant

$$-\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| \phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = \mathbf{f}_K \quad \forall K \in \mathfrak{M}. \quad (4.42)$$

Le second membre est donné par  $\mathbf{f}_K = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) dx$ , et le flux numérique  $\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau)$  est défini selon la Proposition 4.3.1 par

1. Pour tout volume diamant sur le bord de Neumann  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{b_N}$

$$\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) dx. \quad (4.43)$$

2. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int} \cup \tilde{\mathfrak{D}}^{b_D}$  dont aucun des sommets n'est sur le bord de Neumann

$$\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) = \sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{Ks} (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \quad (4.44)$$

où les matrices  $\beta_K^s$  et  $\beta_i^{Ks}$  sont définies en (C.2) et (C.5).

3. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int}$  dont un des sommets  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{b_N}$  est sur le bord de Neumann

$$\begin{aligned}
\phi^{\text{D}_{\text{K}_s}}(\mathbf{u}^\tau) &= \left( \beta_{\text{K}}^{\text{s}} - 2(\beta_{i-1}^{\text{K}_s} - \beta_{i+1}^{\text{K}_s})(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{\text{K}_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{\text{K}_s})^{-1} \beta_{\text{K}, \mathbf{n}_i}^{\text{s}} \right) (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{K}}) \\
&\quad + (\beta_{i-1}^{\text{K}_s} - \beta_{i+1}^{\text{K}_s})(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{\text{K}_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{\text{K}_s})^{-1} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{\text{K}_s}) - \beta_{i, \mathbf{n}_i}^{\text{K}_s} (\mathbf{u}_{i+1}^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{K}_s})] \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\beta_{j-1, \mathbf{n}_i}^{\text{K}_s} - \beta_{j+1, \mathbf{n}_i}^{\text{K}_s}) (\mathbf{u}_j^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_s)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

où les matrices  $\beta_{\text{K}, \mathbf{n}_i}^{\text{s}}$  et  $\beta_{i, \mathbf{n}_i}^{\text{K}_s}$  sont explicitées en (C.9)-(C.10).

Les inconnues secondaires s'expriment selon (4.32) et (4.33) sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i^{\text{s}} = \sum_{\text{K} \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_{\text{K}}(\mathbf{x}^v) \mathbf{u}_{\text{K}} & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{\text{int}}, \\ \mathbf{u}^v = \mathbf{g}(\mathbf{x}^v) & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{\text{bD}}, \end{cases} \tag{4.46}$$

et les inconnues auxiliaires s'expriment selon le Théorème 4.3.1 sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s = \beta_{\text{KL}}^{-1} (\beta_{\text{L}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{L}} + \beta_{\text{K}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{K}} - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{\text{KL}} (\mathbf{u}_{i+1}^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{K}_s})) & \forall s \in \mathcal{E}^{\text{int}}, \\ \mathbf{u}_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s) & \forall s \in \mathcal{E}^{\text{bD}}. \end{cases} \tag{4.47}$$

#### Remarque 4.3.2

Il s'agit d'un système linéaire non symétrique, du fait de l'interpolation des valeurs aux sommets.

## 4.4 Consistance du schéma

### Définition 4.4.1

Le tenseur des contraintes de la solution continue à coefficients de Lamé constants par volume est défini par : pour tout  $\text{D}_{\text{K}_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$

$$\sigma^{\text{D}_{\text{K}_s}}(\mathbf{u}) = \mu_{\text{K}} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \lambda_{\text{K}} \text{tr}(\nabla \mathbf{u}) \text{Id}, \tag{4.48}$$

et on pose

$$P^{\text{D}_{\text{K}_s}}(\phi^{\text{D}_{\text{K}_s}}(\mathbf{u})) = \frac{1}{|s|} \int_s \sigma^{\text{D}_{\text{K}_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{K}_s} d\mathbf{x}. \tag{4.49}$$

### Définition 4.4.2 (Consistance faible et ordre de consistance)

On appelle erreur de consistance au sens faible, et on note  $Q^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})$ , la quantité constante par volume diamant.

1. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{int} \cup \tilde{\mathfrak{D}}^{bD}$ , on note

$$\begin{aligned} Q^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) &= R^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) + S^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) \\ &= \left( \phi^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) - P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u})) \right) + \left( P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u})) - P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})) \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

où l'expression

- du projeté du flux de la solution continue  $P^{D_{K_s}}(\phi(\mathbf{u}))$  sur le maillage est donnée en (4.10),
- du projeté du flux de la solution continue sur le maillage mais avec coefficients de Lamé constants par volume  $P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}))$  est donnée en (4.49),
- du projeté de  $\mathbf{u}$  sur le maillage, notée  $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}$ , est donnée par (4.54),
- du flux discret du projeté de  $\mathbf{u}$  sur le maillage, notée  $\phi^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})$ , est donnée en remplaçant dans (4.11) le vecteur  $\mathbf{u}^{\tau}$  par  $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}$ .

2. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{bN}$ , on a

$$Q^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (4.51)$$

Le schéma numérique discret est dit faiblement consistant si on a

$$\|Q^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathfrak{D}}} \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0.$$

Pour étudier la consistance faible du schéma numérique, on va étudier la consistance de chacun des opérateurs  $R^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})$  et  $S^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u})$  à travers les Théorème 4.4.1 et Théorème 4.4.2.

#### **Théorème 4.4.1**

*Il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $p > 3$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  et pour tout volume diamant  $D_{K_s}$  de  $\tilde{\mathfrak{D}}$  associé à un volume  $K \in \mathfrak{M}$  et à une face  $s$  de  $\partial K$*

$$\|S^{D_{K_s}}(\mathbf{u})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(D_{K_s})}. \quad (4.52)$$

La preuve est identique à sa version 2d.

#### **Théorème 4.4.2**

*Il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de  $p$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout volume diamant  $D_{K_s}$  de  $\tilde{\mathfrak{D}}$  associé à un volume  $K \in \mathfrak{M}$  et à une face  $s$  de  $\partial K$*

$$\|R^{D_{K_s}}(\mathbf{u})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{V}(\mathbf{x}_1^{K_s}) \cup \mathcal{V}(\mathbf{x}_2^{K_s}) \cup \mathcal{V}(\mathbf{x}_3^{K_s}))} \quad (4.53)$$

On s'attache ci-dessous à la preuve du Théorème 4.4.2. On note pour tout  $K$  de  $\mathfrak{M}$

$$\langle \mathbf{u} \rangle_K = \mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}|_K = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.54)$$

les valeurs moyennes de  $\mathbf{u}$  sur les volumes primaux. On définit avec ces moyennes et comme dans le cas discret les valeurs interpolées aux sommets qui ne sont pas sur  $\Gamma_N$

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u} \rangle^v = \sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) \langle \mathbf{u} \rangle_K & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{int}, \\ \langle \mathbf{u} \rangle^v = \mathbf{g}(\mathbf{x}^v) & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{bD}, \end{cases} \quad (4.55)$$

et les valeurs aux centres des interfaces de  $\mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^{bD}$  qui assurent la continuité du flux normal

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u} \rangle_s = \beta_{KL}^{-1} (\beta_L^s \langle \mathbf{u} \rangle_L + \beta_K^s \langle \mathbf{u} \rangle_K - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\langle \mathbf{u} \rangle_{i+1}^{Ks} - \langle \mathbf{u} \rangle_{i-1}^{Ks})) & \forall s \in \mathcal{E}^{int}, \\ \langle \mathbf{u} \rangle_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s) & \forall s \in \mathcal{E}^{bD}. \end{cases} \quad (4.56)$$

Afin de pouvoir donner une expression de l'erreur de consistance sur les flux  $R^{D_{K_s}}(\mathbf{u})$ , on va au préalable énoncer une propriété utile sur la composante normale du tenseur  $\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  des contraintes de la solution continue à travers les interfaces du maillage, mais avec coefficients de Lamé constants par volumes.

#### Proposition 4.4.1

*La composante normale du tenseur des contraintes pour la solution continue mais avec coefficients de Lamé constants par volumes s'exprime à l'aide des matrices discrètes  $\beta_K^s$  et  $\beta_i^{Ks}$  données en (C.2) et (C.5). Soit  $s \in \mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^{bD}$  et soit  $K \in \mathfrak{M}$  tel que  $s \in \partial K$ . Pour tout  $\mathbf{x} \in D_{K_s}$*

$$\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{Ks} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_{i-1}^{Ks})]. \quad (4.57)$$

**Démonstration :** On considère un volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ . La relation (4.5) nous donne une expression du volume  $|D_{K_s}|$ , qui peut-être reformulée de la façon suivante

$$|D_{K_s}| = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \det(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s), \quad (4.58)$$

et qui implique que pour tout  $\mathbf{x} \in D_{K_s}$

$$6|D_{K_s}| \nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s} = \nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \sum_{i=1}^3 \det(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s).$$

Ensuite, on utilise la propriété suivante : pour toute famille de vecteurs  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in (\mathbb{R}^3)^3$  et pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (A\mathbf{a}) \otimes (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (A\mathbf{b}) \otimes (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) + (A\mathbf{c}) \otimes (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} 6|D_{K_s}| \nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \sum_{i=1}^3 \left[ \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_s) \right) \otimes \left( (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s) \right) \right. \\ &\quad - \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) \right) \otimes \left( (\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s) \right) \\ &\quad \left. + \left( \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s) \right) \otimes \left( (\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Par ailleurs, d'après les relations (4.4) et (4.6), on a pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$

$$\frac{(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s)}{2} = \frac{1}{3} \mathbf{N}_{K_s},$$

$$\mathbf{N}_i^{K_s} = \frac{(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s)}{2} \quad \text{et} \quad -\mathbf{N}_{i+1}^{K_s} = \frac{(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s)}{2}.$$

Enfin, le fait que  $\sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i^{K_s} = \mathbf{0}$  implique

$$\begin{aligned} 3|D_{K_s}| \nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= -\left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s)\right) \otimes \mathbf{N}_{K_s} \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left[ \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{x}_{i+1}^{K_s}\right) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} + \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i^{K_s}\right) \otimes (-\mathbf{N}_{i+1}^{K_s}) \right], \end{aligned}$$

que la relation  $\sum_{i=1}^3 (\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} - \mathbf{x}_i^{K_s} \otimes \mathbf{N}_{i+1}^{K_s}) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s}$  simplifie en

$$3|D_{K_s}| \nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)\right) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 \left[ \left(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s})\right) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} \right]. \quad (4.60)$$

On reporte cette expression dans  $\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  pour obtenir

$$\begin{aligned} 3|D_{K_s}| \sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \mu_K \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 \mu_K \left[ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \right] \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} \\ &\quad + \mu_K \mathbf{N}_{K_s} \otimes \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \sum_{i=1}^3 \mu_K \mathbf{N}_i^{K_s} \otimes \left[ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \right] \\ &\quad + \lambda_K \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s} \text{Id} + \sum_{i=1}^3 \lambda_K \left[ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \right] \cdot \mathbf{N}_i^{K_s} \text{Id}. \end{aligned}$$

La relation (A.1a) permet de conclure que

$$\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s} = \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{K_s} \left[ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \right]$$

ce qui achève la démonstration. ■

On en déduit l'expression de l'erreur de consistance sur les flux  $R^{D_{K_s}}(\mathbf{u})$  selon la nature des faces  $s \in \mathcal{E}$ .

**Proposition 4.4.2 (Erreur de consistance par face)**

1. Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int} \cup \tilde{\mathcal{D}}^{bD}$  dont aucun des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2,3\}}$  n'est sur le bord de Neumann

$$\begin{aligned} R^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{|s|} \int_s \beta_K^s (\langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_K - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{|s|} \int_s \beta_i^{K_s} (\langle \mathbf{u} \rangle_{i+1}^{K_s} - \langle \mathbf{u} \rangle_{i-1}^{K_s} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s})) dx. \end{aligned} \quad (4.61)$$

2. Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de  $p$ , de la régularité du maillage et des

coefficients de Lamé, telle que pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int}$  dont un des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})$  est sur le bord de Neumann

$$\begin{aligned}
R^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{|s|} \int_s \left( \beta_K^s - 2(\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s}) (\beta_{i-1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s \right) \\
&\quad [\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] d\mathbf{x} \\
&\quad - \frac{1}{|s|} \int_s (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s}) (\beta_{i-1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \beta_{i, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} \\
&\quad [(\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s})] d\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{1}{|s|} \int_s (\beta_{j-1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} - \beta_{j+1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s}) [\mathbf{u}_j^{K_s} - \mathbf{u}_s - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_j^{K_s} - \mathbf{x}_s)] d\mathbf{x} \\
&\quad + \mathbb{A}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

avec  $\|\mathbb{A}\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(D_{K_s})}$ .

Remarquons ici que le cas où le volume diamant  $D_{K_s}$  est sur le bord de Neumann  $\tilde{\mathcal{D}}^{b_N}$  n'est pas traité car on a directement l'estimation d'erreur  $Q^{D_{K_s}}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .

**Démonstration :** 1. Soit  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int} \cup \tilde{\mathcal{D}}^{b_D}$  un volume diamant dont aucun des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2,3\}}$  n'est sur le bord de Neumann. L'erreur de consistance par face  $R^{D_{K_s}}(\mathbf{u})$  est donnée par le premier terme du membre de droite de l'égalité (4.50). Ainsi, les termes en  $\nabla \mathbf{u}$  viennent de l'écriture du flux  $P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}))$  continu avec coefficients de Lamé constants par volume. Grâce à la Proposition 4.4.1, on peut écrire ce flux de la façon suivante

$$P^{D_{K_s}}(\phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u})) = \frac{1}{|s|} \int_s \left[ \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \right] d\mathbf{x}.$$

Les termes restants viennent de l'écriture du flux  $\phi^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})$ . Son expression est la même que celle du flux de la solution discrète (4.20), en remplaçant les valeurs discrètes  $\mathbf{u}^{\tau}$  par  $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}$ .

2. Soit  $s \in \mathcal{E}^{int}$ . Par hypothèses, il existe  $i = \{1, 2, 3\}$  tel que  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{b_N}$ . La procédure est la même que pour le flux du tenseur des contraintes discret, donnée en Proposition 4.3.1 (cas 3), en remplaçant les déplacements discrets par leurs projetés sur le maillage. On obtient que

$$\begin{aligned}
\sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \mathbf{n}_{K_s} &= \\
&\quad \left( \beta_K^s - 2(\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s}) (\beta_{i-1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s \right) (\langle \mathbf{u} \rangle_s - \langle \mathbf{u} \rangle_K) \\
&\quad + (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s}) (\beta_{i-1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) - \beta_{i, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} (\langle \mathbf{u} \rangle_{i+1}^{K_s} - \langle \mathbf{u} \rangle_{i-1}^{K_s})] \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\beta_{j-1}^{K_s} - \beta_{j+1}^{K_s}) (\langle \mathbf{u} \rangle_j^{K_s} - \langle \mathbf{u} \rangle_s).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

En ce qui concerne le flux du tenseur des contraintes continu, le même raisonnement est tenu : on coupe en deux le flux exprimé en (4.57) d'une part sur le volume  $D_{K_s, i-1} \cup D_{K_s, i}$ , afin d'y imposer la condition de Neumann, et d'autre part sur le volume  $D_{K_s, i+1}$  restant.

Pour tout  $\mathbf{x} \in D_{K_s}$

$$\begin{aligned}
\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} &= \frac{1}{3}(\sigma^{D_{K_s,i-1}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \sigma^{D_{K_s,i+1}}(\mathbf{u}(\mathbf{x})))\mathbf{n}_{K_s} + \frac{1}{3}\sigma^{D_{K_s,i+1}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} \\
&= \frac{2}{3}\beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})[\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s)] \\
&\quad + \beta_i^{K_s} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s})] \\
&+ \frac{1}{3}\beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \beta_{i+1}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{x}_s) \\
&\quad - \beta_{i-1}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_s).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Le sommet  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  étant sur le bord de Neumann, on va ajouter puis retrancher le terme  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s)$  à l'expression précédente, afin de pouvoir utiliser la condition de Neumann. L'égalité (4.64) s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} &= \frac{2}{3}\beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s) + \beta_i^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s) \\
&\quad + \beta_i^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&+ \frac{1}{3}\beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \beta_{i+1}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{x}_s) - \beta_{i-1}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_s).
\end{aligned} \tag{4.65}$$

La condition de Neumann au sommet  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{b_N}$  s'écrit  $\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s})$ , c'est-à-dire

$$2\mu(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} + \lambda(\mathbf{x}_i^{K_s})\text{Div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}).$$

Or, d'après la Définition 4.4.1 du tenseur des contraintes de la solution continue avec des coefficients constants, on a

$$\begin{aligned}
\sigma^{D_{K_s,i} \cup D_{K_s,i+1}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} &= (2\mu_K \mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}) + \lambda_K \text{Div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \\
&= \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) + 2(\mu_K - \mu(\mathbf{x}_i^{K_s}))\mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \\
&\quad + (\lambda_K - \lambda(\mathbf{x}_i^{K_s}))\text{Div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N},
\end{aligned}$$

Par un procédé identique à celui utilisé dans la Proposition 4.4.1, on exprime la composante normale du tenseur des contraintes en  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  à l'aide des matrices discrètes (C.9) et (C.10), de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\sigma^{D_{K_s,i} \cup D_{K_s,i+1}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} &= 2\beta_{K,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] \\
&+ (\beta_{i-1,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} - \beta_{i+1,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s}) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s) \\
&+ \beta_{i,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}).
\end{aligned}$$

Les deux relations précédentes conduisent à

$$\begin{aligned}
\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} &= \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\beta_{i-1,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} - \beta_{i+1,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s})^{-1} \left( \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) - 2\beta_{K,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \right. \\
&\quad - \beta_{i,\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&\quad + (\mu_K - \mu(\mathbf{x}_i^{K_s}))\mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \\
&\quad \left. + (\lambda_K - \lambda(\mathbf{x}_i^{K_s}))\text{Div}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \right) \\
&+ \beta_i^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s) \\
&\quad + \beta_i^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&+ \beta_{i+1}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{x}_s) - \beta_{i-1}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_s).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on va ajouter puis retrancher le terme  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s)$  afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} &= \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{K_s})^{-1} \left[ \mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) + (\mu_K - \mu(\mathbf{x}_i^{K_s})) \mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \right. \\
&\quad \left. + (\lambda_K - \lambda(\mathbf{x}_i^{K_s})) \mathbb{D}\text{ivu}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \right] \\
&- (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{K_s})^{-1} \left( 2\beta_{K, \mathbf{n}_i}^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \right. \\
&\quad \left. + \beta_{i, \mathbf{n}_i}^{K_s} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s})] \right) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{K_s})^{-1} \left( 2\beta_{K, \mathbf{n}_i}^s [(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] \right. \\
&\quad \left. + \beta_{i, \mathbf{n}_i}^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \right) \\
&+ \beta_i^{K_s} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s})] - \beta_i^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s) \\
&\quad + \beta_i^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&+ \beta_{i+1}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{x}_s) - \beta_{i-1}^{K_s} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_s).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Enfin, étant donnée l'expression des matrices discrètes  $\beta_i^{K_s}$ , et du fait que  $\sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i^{K_s} = \mathbf{0}$ , on

en déduit que  $\sum_{i=1}^3 (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$ , et on a donc la relation suivante

$$(\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})\mathbf{u}_s = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\beta_{j-1}^{K_s} - \beta_{j+1}^{K_s})\mathbf{u}_s$$

ce qui permet de réécrire l'équation (4.66) de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n}_{K_s} &= \\
&\left( \beta_K^s - 2(\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{K_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i}^s \right) \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{K_s})^{-1} (\mathbf{h}(\mathbf{x}_i^{K_s}) - \beta_{i, \mathbf{n}_i}^{K_s} [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s})]) \\
&+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\beta_{j-1, \mathbf{n}_i}^{K_s} - \beta_{j+1, \mathbf{n}_i}^{K_s}) [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_j^{K_s} - \mathbf{x}_s)] + \mathbb{B}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

où  $\mathbb{B}$  a pour expression

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} &= (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{K_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{K_s})^{-1} \left( 2\beta_{K, \mathbf{n}_i}^s [(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] \right. \\
&\quad + \beta_{i, \mathbf{n}_i}^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&\quad + (\mu_K - \mu(\mathbf{x}_i^{K_s})) \mathbb{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \\
&\quad \left. + (\lambda_K - \lambda(\mathbf{x}_i^{K_s})) \mathbb{D}\text{ivu}(\mathbf{x}_i^{K_s})\mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \right) \\
&- \beta_i^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}) \\
&+ (\beta_{i-1}^{K_s} - \beta_{i+1}^{K_s})(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s) \\
&+ \beta_i^{K_s} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}))(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s}).
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Si on rassemble les termes des équations (4.63) et (4.68), on obtient bien que

$$\begin{aligned}
R^{\mathbb{D}_{K_s}}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{|s|} \int_s \left( \beta_K^s - 2(\beta_{i-1}^{\mathbb{K}_s} - \beta_{i+1}^{\mathbb{K}_s}) (\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s})^{-1} \beta_{K, \mathbf{n}_i}^s \right) \\
&\quad [\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)] d\mathbf{x} \\
&\quad - \frac{1}{|s|} \int_s (\beta_{i-1}^{\mathbb{K}_s} - \beta_{i+1}^{\mathbb{K}_s}) (\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s})^{-1} \beta_{i, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s} \\
&\quad \quad \quad [(\mathbf{u}_{i+1}^{\mathbb{K}_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{\mathbb{K}_s}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{\mathbb{K}_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{\mathbb{K}_s})] d\mathbf{x} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{1}{|s|} \int_s (\beta_{j-1, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s} - \beta_{j+1, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s}) [\mathbf{u}_j^{\mathbb{K}_s} - \mathbf{u}_s - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_j^{\mathbb{K}_s} - \mathbf{x}_s)] d\mathbf{x} \\
&\quad - \mathbb{A}
\end{aligned}$$

avec  $\mathbb{A} = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbb{B}$ . Reste à présent à évaluer la norme du vecteur  $\mathbb{A}$ . D'après le Théorème de Morrey (voir [20]), on a pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in s$

$$\|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathbb{D}_{K_s})}. \quad (4.69)$$

La Proposition C.1.2 nous indique qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de la régularité du maillage ainsi que des coefficients de Lamé, telle que

$$\begin{aligned}
\|\beta_{K, \mathbf{n}_i}^s\| &\leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})}, & \|\beta_{i, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s}\| &\leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})}, & \|\beta_i^{\mathbb{K}_s}\| &\leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})}, \\
\|\beta_{i-1}^{\mathbb{K}_s} - \beta_{i+1}^{\mathbb{K}_s}\| &\leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})}, & \|(\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{\mathbb{K}_s})^{-1}\| &\leq C \text{size}(\mathcal{T}).
\end{aligned} \quad (4.70)$$

En utilisant successivement les inégalités (4.69) et (4.70), et le fait que pour tous vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $K$ ,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \text{size}(\mathcal{T})$ , on a

$$\|\mathbb{A}\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathbb{D}_{K_s})}. \quad \blacksquare$$

A présent, on va donner une estimation de la norme  $L^2$  de l'erreur de consistance. Pour cela, on utilise le lemme démontré dans [33].

#### Lemme 4.4.1

Il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de  $p$  telle que pour toute fonction  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\mathcal{P})$ , où  $\mathcal{P}$  est un domaine convexe de  $\mathbb{R}^3$  et  $p > 3$ , pour tout couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \overline{\mathcal{P}}$ , si on définit

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

alors

$$\|\mathcal{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq C \frac{\text{diam}(\mathcal{P})^2}{|\mathcal{P}|^{\frac{1}{p}}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{P})}.$$

Par ailleurs, afin d'estimer l'erreur commise entre le projeté du déplacement sur le maillage et sa composante continue, on introduit les notations suivantes.

#### Définition 4.4.3

Pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ , on note

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_K(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle_K - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) & \forall K \in \mathfrak{M}, \\
\mathcal{I}_{\mathbf{x}^v}(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle^v - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}^v - \mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{V}(\mathbf{x}^v)} \alpha_K(\mathbf{x}^v) \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^{int}, \\
\mathcal{I}_{\mathbf{x}^v}(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle^v - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}^v - \mathbf{x}) = \mathcal{I}(\mathbf{x}^v, \mathbf{x}) & \forall \mathbf{x}^v \in \mathcal{N}^b, \\
\mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle_s - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}) & \forall s \in \mathcal{E}^{int},
\end{aligned} \quad (4.71)$$

où chacune des composantes  $\langle \mathbf{u} \rangle^v$  et  $\langle \mathbf{u} \rangle_s$  est précisée en (4.55) et (4.56).

On émet la proposition suivante.

**Proposition 4.4.3**

Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de  $p > 3$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour toute face interne  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  et pour tout  $\mathbf{x} \in s$

$$\begin{aligned} \beta_{KL} \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \beta_L^s \mathcal{I}_L(\mathbf{x}) + \beta_K^s \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{Ks}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{Ks}}(\mathbf{x})) \\ &\quad - \left( \sigma^{DLs}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ls} + \sigma^{DKs}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} \right), \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\text{où } \left\| \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma^{DKs}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} + \sigma^{DLs}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ls} \right) d\mathbf{x} \right\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(D_{Ks} \cup D_{Ls})}. \quad (4.73)$$

**Démonstration :** Soit  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  une face interne. En utilisant l'expression de  $\langle \mathbf{u} \rangle_s$  donnée en (4.56), alors pour tout  $\mathbf{x} \in s$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{u} \rangle_s - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}) \\ &= \beta_{KL}^{-1} (\beta_L^s \langle \mathbf{u} \rangle_L + \beta_K^s \langle \mathbf{u} \rangle_K - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\langle \mathbf{u} \rangle_{i+1}^{Ks} - \langle \mathbf{u} \rangle_{i-1}^{Ks})) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.74)$$

En s'aidant de la Définition 4.4.3, on peut réécrire (4.74) en ajoutant puis retranchant les termes relatifs aux vecteurs  $\mathcal{I}_L(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{I}_K(\mathbf{x})$ ,  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{Ks}}(\mathbf{x})$ .

$$\begin{aligned} \beta_{KL} \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \beta_L^s \mathcal{I}_L(\mathbf{x}) + \beta_K^s \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{Ks}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{Ks}}(\mathbf{x})) \\ &\quad + \beta_L^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_L - \mathbf{x}) + \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_K - \mathbf{x}) - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_{i-1}^{Ks}) \\ &\quad - \beta_{KL} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}). \end{aligned}$$

La relation (C.1) nous permet d'écrire que  $\beta_{KL} = \beta_K^s + \beta_L^s$  et la relation (C.4) que pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$ , on a  $\beta_i^{KL} = \beta_i^{Ks} - \beta_{j_i}^{Ls}$ , d'où

$$\begin{aligned} \beta_{KL} \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \beta_L^s \mathcal{I}_L(\mathbf{x}) + \beta_K^s \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{Ks}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{Ks}}(\mathbf{x})) \\ &\quad - \left( \beta_L^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_L) - \sum_{i=1}^3 \beta_{j_i}^{Ls} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_{i-1}^{Ks}) \right) \\ &\quad - \left( \beta_K^s \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{Ks} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_{i-1}^{Ks}) \right), \end{aligned}$$

et on rappelle que  $\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_{i-1}^{Ks} = \mathbf{x}_{j_{i-1}}^{Ls} - \mathbf{x}_{j_{i+1}}^{Ls}$ . L'expression de la composante normale du tenseur des contraintes continu à coefficients de Lamé constants par volumes est donnée par (4.57). Celle-ci implique

$$\begin{aligned} \beta_{KL} \mathcal{I}_s(\mathbf{x}) &= \beta_L^s \mathcal{I}_L(\mathbf{x}) + \beta_K^s \mathcal{I}_K(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{Ks}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{Ks}}(\mathbf{x})) \\ &\quad - \left( \sigma^{DLs}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ls} + \sigma^{DKs}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} \right). \end{aligned}$$

Le Théorème 4.4.1 donne une estimation de l'erreur commise entre le flux par face  $s$  du tenseur des contraintes continu et celui du tenseur des contraintes continu avec coefficients de Lamé

constants par volume. De fait, il existe une constante  $C > 0$  dépendant de  $p > 3$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\left\| \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}_{\text{K}_s} d\mathbf{x} \right\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\text{DK}_s)}.$$

Grâce à la propriété  $\mathbf{n}_{\text{K}_s} = -\mathbf{n}_{\text{L}_s}$ , on peut écrire que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{K}_s} + \sigma^{\text{DL}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{L}_s} d\mathbf{x} \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}_{\text{K}_s} d\mathbf{x} + \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\text{DL}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}_{\text{L}_s} d\mathbf{x} \right\| \\ &\leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\text{DK}_s \cup \text{DL}_s)}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

ce qui achève la démonstration. ■

### Suite de preuve du Théorème 4.4.2

On se limite à majorer l'erreur de consistance (4.61) pour les arêtes internes dont aucun sommet n'est sur le bord de Neumann, la démonstration de celle dont un des sommets est sur Neumann définie par (4.62) étant sensiblement la même. On remplace chacun des termes de (4.61) par leur équivalent donné en Définition 4.4.3. Ainsi

$$R^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}) = \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\text{K}}^{\text{s}} (\mathcal{I}_s(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{i}}^{\text{Ks}} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

où on remplace le vecteur  $\mathcal{I}_s(\mathbf{x})$  par l'expression (4.72) de la Proposition 4.4.3 pour obtenir

$$\begin{aligned} R^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\text{K}}^{\text{s}} \left( \beta_{\text{KL}}^{-1} \left( \beta_{\text{L}}^{\text{s}} \mathcal{I}_{\text{L}}(\mathbf{x}) + \beta_{\text{K}}^{\text{s}} \mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^3 \beta_{\mathbf{i}}^{\text{KL}} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sigma^{\text{DL}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{L}_s} + \sigma^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{K}_s} \right) - \beta_{\text{KL}} \mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{i=1}^3 \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{i}}^{\text{Ks}} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\text{K}}^{\text{s}} \beta_{\text{KL}}^{-1} \left( \beta_{\text{L}}^{\text{s}} (\mathcal{I}_{\text{L}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x})) - \sum_{i=1}^3 \beta_{\mathbf{i}}^{\text{KL}} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})) \right. \\ &\quad \left. - \left( \sigma^{\text{DL}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{L}_s} + \sigma^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{K}_s} \right) \right) d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{i=1}^3 \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\mathbf{i}}^{\text{Ks}} (\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Il s'agit à présent de majorer l'expression précédente. On a donc

$$\begin{aligned} \|R^{\text{DK}_s}(\mathbf{u})\| &\leq \frac{1}{|s|} \int_s \|\beta_{\text{K}}^{\text{s}} \beta_{\text{KL}}^{-1}\| \left( \|\beta_{\text{L}}^{\text{s}}\| (\|\mathcal{I}_{\text{L}}(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_{\text{K}}(\mathbf{x})\|) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \left( \|\beta_{\mathbf{i}}^{\text{KL}}\| (\|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})\|) \right) \right) d\mathbf{x} \\ &+ \left\| \frac{1}{|s|} \int_s \beta_{\text{K}}^{\text{s}} \beta_{\text{KL}}^{-1} \left( \sigma^{\text{DL}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{L}_s} + \sigma^{\text{DK}_s}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\text{K}_s} \right) d\mathbf{x} \right\| \\ &+ \sum_{i=1}^3 \frac{1}{|s|} \int_s \|\beta_{\mathbf{i}}^{\text{Ks}}\| (\|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i+1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_{i-1}^{\text{K}_s}}(\mathbf{x})\|) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Le contrôle de la norme des matrices en Proposition C.1.2 et l'estimation (4.73) de la Proposition 4.4.3 entraînent

$$\begin{aligned} \|R^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u})\| &\leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})|s|} \int_s \left( \|\mathcal{I}_L(\mathbf{x})\| + \|\mathcal{I}_K(\mathbf{x})\| + \sum_{i=1}^3 \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})\| \right) \\ &+ C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{D}_{K_s} \cup \mathcal{D}_{L_s})}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Il reste à estimer les intégrales sur les interfaces dans (4.76). Commençons par  $\mathcal{I}_K$  avec  $K \in \mathfrak{M}$ . Comme  $\mathbf{x}_K$  est le centre de gravité de l'élément  $K$ , on a

$$\mathcal{I}_K(\mathbf{x}) = \frac{1}{|K|} \int_K (\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{y})(\mathbf{t} - \mathbf{x})) d\mathbf{t}$$

qui permet avec le Lemme 4.4.1 d'estimer

$$\frac{1}{|s|} \int_s \|\mathcal{I}_K(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{2-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(K)}. \quad (4.77)$$

En ce qui concerne  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}$  avec  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{bD}$ , par définition  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x}) = \mathcal{I}(\mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x})$ . Par le Lemme 4.4.1, on a

$$\frac{1}{|s|} \int_s \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{2-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{D}_{K_s})}. \quad (4.78)$$

Le cas des sommets internes  $\mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{int}$  est plus complexe car  $\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})$  dépend des valeurs de  $\mathcal{I}_L(\mathbf{x})$  pour  $L \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})$  et l'espace  $\mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})$  n'est pas nécessairement convexe. Pour  $\mathbf{x} \in s$ , le poids d'interpolation  $\alpha_L(\mathbf{x}_i^{K_s})$  étant compris entre 0 et 1, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})\| &\leq \sum_{L \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})} \|\mathcal{I}_L(\mathbf{x})\| \\ &\leq \sum_{L \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})} \frac{1}{|L|} \int_L \|\mathcal{I}(\mathbf{t}, \mathbf{x})\| d\mathbf{t} \\ &\leq \sum_{L \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s})} \frac{1}{|L|} \int_L \left( \|\mathcal{I}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_i^{K_s})\| + \|\mathcal{I}(\mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x})\| + \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i^{K_s}) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{t} - \mathbf{x}_i^{K_s}\| \right) d\mathbf{t} \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer l'estimation du Lemme 4.4.1 aux deux premiers termes et l'inégalité de Morrey (4.69) au dernier terme, pour obtenir

$$\|\mathcal{I}_{\mathbf{x}_i^{K_s}}(\mathbf{x})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{2-\frac{3}{p}} \left( \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s}))} + 2\#\mathcal{V}(\mathbf{x}_i^{K_s}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{D}_{K_s})} \right). \quad (4.79)$$

### Fin de preuve du Théorème 4.4.2

En rassemblant les résultats obtenus en (4.77)-(4.79) pour chacun des termes de (4.76), et en tenant compte de l'hypothèse (4.8) sur le maillage qui indique qu'un sommet du maillage n'est sommet que d'un nombre borné de volumes, on obtient

$$\|R^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u})\| \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{1-\frac{3}{p}} \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\mathcal{V}(\mathbf{x}_1^{K_s}) \cup \mathcal{V}(\mathbf{x}_2^{K_s}) \cup \mathcal{V}(\mathbf{x}_3^{K_s}))} \quad (4.80)$$

ce qui achève la démonstration.

### Théorème 4.4.3 (*Consistance faible*)

En rassemblant les résultats obtenus au Théorème 4.4.1 et au Théorème 4.4.2, on obtient

qu'il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de  $p$ , de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que pour tout  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (4.81)$$

**Démonstration :** Les majorations de  $S^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u})$  et  $Q^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u})$  exprimées dans les Théorèmes 4.4.1 et 4.4.2 montrent qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que (les  $\mathbf{x}^K$  parcourent les sommets de  $K$ )

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \sum_{K \in \mathfrak{M}} \# \left( \bigcup_{\mathbf{x}^K \in K} \mathcal{V}(\mathbf{x}^K) \right) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(K)}^p.$$

Par les Hypothèses (4.8) sur la régularité du maillage, le nombre de sommets de  $K$  et le cardinal de  $\mathcal{V}(\mathbf{x}^K)$  sont bornés indépendamment de  $\text{size}(\mathcal{T})$ , d'où

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}^p.$$

Par Hölder

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq \left( \sum_{\mathcal{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |\mathcal{D}_{K_s}| \|Q^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u})\|^p \right)^{\frac{2}{p}} \left( \sum_{\mathcal{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |\mathcal{D}_{K_s}| \right)^{1-\frac{2}{p}},$$

et par suite on conclut que

$$\|Q^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u})\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq C |\Omega|^{1-\frac{2}{p}} \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}^2. \quad \blacksquare$$

## 4.5 Coercivité

On se limitera au cas  $\Gamma_N = \emptyset$ .

### 4.5.1 Définition

Pour tout  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p > 3$  solution exacte du problème (1), dont  $\mathbf{g}$  est le déplacement imposé, on note  $\mathcal{L}$  l'opérateur défini pour tout volume  $K$  de  $\mathfrak{M}$  par

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mathbf{g})|_K = -\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| P^{\mathcal{D}_{K_s}}(\phi(\mathbf{u})). \quad (4.82)$$

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$  et pour tout  $\mathbf{g}^\tau$  déterminé par les valeurs aux sommets, on note l'opérateur discret défini pour tout volume  $K$  de  $\mathfrak{M}$  par

$$\mathcal{L}^\tau(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{g}^\tau)|_K = -\frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} |s| \phi^{\mathcal{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \quad (4.83)$$

Afin de montrer que le schéma numérique discret énoncé en section 4.3.5 est convergent, et d'avoir une estimation sur son ordre de convergence, il est nécessaire de montrer que la forme bilinéaire associée au problème de l'élasticité linéaire est coercive. Nous ne pouvons le faire que si une hypothèse de coercivité énoncée au Lemme 4.5.3 est satisfaite.

#### Définition 4.5.1

Soit  $\mathcal{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$  un volume diamant et soit  $i = \{1, 2, 3\}$ , et soit  $A^{\mathcal{D}_{K_s}}$  un opérateur défini sur ce volume diamant dont l'expression dépend des différences  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K$  et  $\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}$ . On note

alors  $A_c^{D_{K_s}}$  les termes de  $A^{D_{K_s}}$  relatifs à la différence  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K$ . Par exemple, pour l'opérateur gradient discret (4.15) défini pour un volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\nabla_c^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s}. \quad (4.84)$$

On définit le produit scalaire suivant.

**Définition 4.5.2 (Produit scalaire  $H^1$  discret)**

Soit  $(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau)$  deux vecteurs de  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$ . On définit le produit scalaire

$$(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau)_1 = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left( \frac{|s|}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \right) \cdot \left( \frac{|s|}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_K) \right) \quad (4.85)$$

où l'inconnue auxiliaire  $\mathbf{u}_s$  est déterminée par

$$\begin{cases} \mathbf{u}_s &= \beta_{KL}^{-1} (\beta_L^s \mathbf{u}_L + \beta_K^s \mathbf{u}_K - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s})) & \forall s \in \mathcal{E}^{int}, \\ \mathbf{u}_s &= \mathbf{0} & \forall s \in \mathcal{E}^{bd}. \end{cases}$$

On montre aisément qu'il s'agit d'un produit scalaire grâce à la condition de bord homogène. De plus, la norme induite par ce produit scalaire correspond à la norme  $L^2$  du gradient discret de  $\mathbf{u}^\tau$  relatif aux termes  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K$ . En effet, d'après la relation (A.1g), on a

$$\|\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left( \frac{|s|}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{n}_{K_s} \right) : \left( \frac{|s|}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{n}_{K_s} \right) = |\mathbf{u}^\tau|_1^2.$$

A présent, on donne une définition de la coercivité discrète.

**Définition 4.5.3**

L'opérateur discret (4.83) pour le problème de Dirichlet pur est dit coercif s'il satisfait l'inégalité suivante : il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que pour tout maillage  $\mathcal{T}$  et pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$

$$(\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} \geq C |\mathbf{u}^\tau|_1^2. \quad (4.86)$$

**4.5.2 Condition de coercivité**

On va à présent donner une condition suffisante de coercivité discrète, car la preuve ne peut être établie, du fait de la complexité de l'interpolation pour des maillages généraux. Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$ , on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} &= - \sum_{K \in \mathfrak{M}} \mathbf{u}_K \sum_{s \in \partial K} |s| \sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} \\ &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |s| (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \phi^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \\ &= 3 \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) : \left( \frac{|s|}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{n}_{K_s} \right) \\ &= 3 (\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}, \end{aligned}$$

par la relation de continuité aux interfaces internes, par la condition de bord homogène de Dirichlet, et par la relation (A.1b). On sépare les termes associés aux différences  $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K$  de ceux relatifs à  $\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}$

$$(\mathcal{L}^T(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} = 3(\sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} + 3(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) - \sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}. \quad (4.87)$$

#### Lemme 4.5.1

En utilisant le fait que l'opérateur  $\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau$  est symétrique, on obtient, après calcul, les égalités suivantes

$$\begin{cases} (\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= (\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} \\ (\text{Div}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau : \text{Div}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= 3(\text{Div}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}. \end{cases} \quad (4.88)$$

La preuve est une simple extension de sa version 2d donnée par le Lemme 3.5.1.

#### Lemme 4.5.2 (Inégalité de Korn)

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$

$$\|\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq \sqrt{2} \|\mathbb{D}_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}. \quad (4.89)$$

**Démonstration :** D'après la définition du produit scalaire (4.13), et en s'aidant de la première égalité de (4.88) (également vraie pour  $\mathbb{D}_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau$  et  $\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau$ ), on a

$$2\|\mathbb{D}_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 = \|\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + ((\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}. \quad (4.90)$$

On va donc chercher à évaluer la quantité  $((\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}$  à travers les cellules diamants du maillage.

$$\begin{aligned} ((\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| (\nabla_c^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \\ &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \frac{|s|}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{n}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K)) : \frac{|s|}{3|D_{K_s}|} ((\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{n}_{K_s}). \end{aligned}$$

Grâce à la relation (A.1d), on obtient que

$$((\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left( \frac{|s|}{3|D_{K_s}|} ((\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{n}_{K_s}) \right)^2 \geq 0.$$

Ainsi, en reprenant l'équation (4.90), on peut écrire que

$$2\|\mathbb{D}_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \geq \|\nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2. \quad (4.91) \quad \blacksquare$$

Afin d'énoncer une condition de coercivité, on minore l'expression (4.87)

$$(\mathcal{L}^T(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} \geq 3(\sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} - |3(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) - \sigma_c^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}|. \quad (4.92)$$

La condition de coercivité va porter sur le deuxième terme : il faut contrôler les termes croisés.

### Convention 4.5.1

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$ . On note par convention

$$\begin{aligned}\sqrt{2\mu_{\tilde{\mathfrak{D}}}} \mathbb{D}^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau &= \left( \sqrt{2\mu_{\mathbb{K}}} \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{\mathbb{K}_s}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\mathbb{D}_{\mathbb{K}_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}}, \\ \sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathfrak{D}}}}{3}} \mathbb{D}\text{iv}^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau &= \left( \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbb{K}}}{3}} \mathbb{D}\text{iv}^{\mathbb{D}_{\mathbb{K}_s}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\mathbb{D}_{\mathbb{K}_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}}.\end{aligned}\tag{4.93}$$

### Lemme 4.5.3 (*Condition de coercivité*)

S'il existe une constante  $\gamma < 1$ , ne dépendant uniquement que de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathfrak{M}}$

$$(\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) - \sigma_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau))_{\tilde{\mathfrak{D}}} \leq \gamma (\sigma_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau))_{\tilde{\mathfrak{D}}},\tag{4.94}$$

alors on a la coercivité discrète.

**Démonstration:** En effet

$$(\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} \geq (3 - \gamma) (\sigma_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla_c^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau))_{\tilde{\mathfrak{D}}}.$$

Puis, en s'aidant des relations (4.88) ainsi que des notations introduites dans la Convention 4.5.1, l'équation précédente devient

$$(\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} \geq 3(1 - \gamma) \left( \|\sqrt{2\mu_{\tilde{\mathfrak{D}}}} \mathbb{D}_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 + \left\| \sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathfrak{D}}}}{3}} \mathbb{D}\text{iv}_c^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau \right\|_{\tilde{\mathfrak{D}}}^2 \right).$$

Enfin, en appliquant l'inégalité de Korn énoncée dans le Lemme 4.5.2, ainsi que les minoration de l'Hypothèse 0.0.1, page 9 sur les coefficients de Lamé, on a

$$(\mathcal{L}^\mathcal{T}(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{0}), \mathbf{u}^\tau)_{\mathfrak{M}} \geq 3\underline{\mu}(1 - \gamma) |\mathbf{u}^\tau|_1^2. \quad \blacksquare$$

## 4.6 Convergence et estimation d'erreur

### Théorème 4.6.1 (*Estimation d'erreur*)

Sous réserve de satisfaire la condition suffisante de coercivité du Lemme 4.5.3, le schéma VF diamant converge, et on a l'estimation d'erreur suivante : il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que pour tout maillage  $\mathcal{T}$ , pour tout  $p > 3$

$$\|\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_1 + \|\mathbf{u}^\tau - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}.\tag{4.95}$$

**Démonstration:** La preuve est identique au 2d. \blacksquare

## 4.7 Illustrations numériques

Nous allons à présent illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment par une série de 3 tests numériques. Le premier exemple, présenté dans la section 4.7.1 est un cas test, possédant

une solution analytique. La réponse 3d-Diamant sera donc comparée à la solution exacte. Les deux exemples suivants, présentés en sections 4.7.2 et section 4.7.3, sont les extensions en 3d des Cas 4 et Cas 5 étudiés en 2d-Diamant. Les résultats sont comparés à la réponse éléments finis en 3d. Les maillages utilisés sont des maillages non structurés. Afin d'obtenir les courbes d'estimation d'erreurs, nous utilisons des techniques de raffinement successif.

#### 4.7.1 Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène.

Dans la Figure 4.7.1 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode Diamant avec de la solution exacte. Les déplacements sont multipliés par 10 par souci de clarté. Le cube est visualisé avec une rotation de  $90^\circ$  suivant l'axe de  $z$  (la face  $\gamma_1$  est devant).

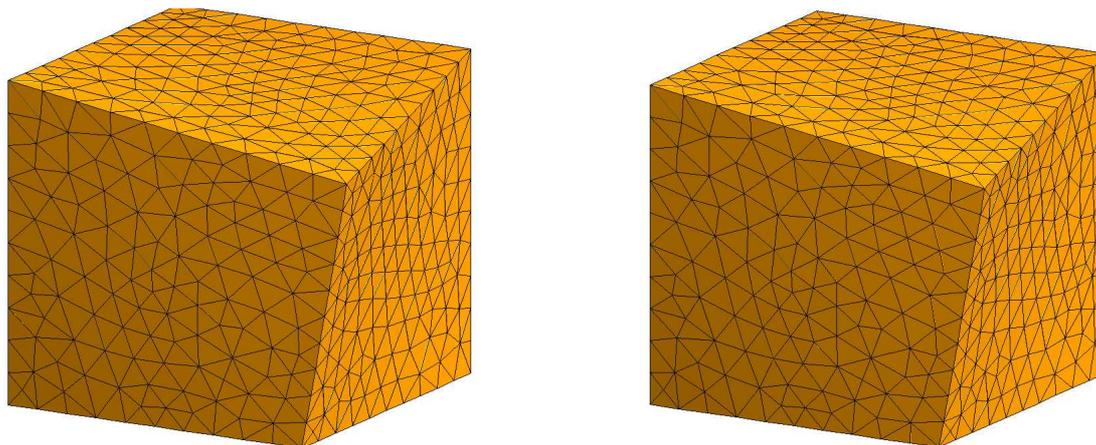


FIGURE 4.7.1 – cas E.2.1 : réponse du déplacement par Diamant (gauche) et solution exacte (droite)

Les résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans le Tableau 4.7.1 pour les valeurs, et dans la Figure 4.7.2 pour le tracé. Nous utilisons une série de maillages raffinés successivement. On compare les différences des solutions Diamant et EF dans 3 normes : norme infinie, norme 1 et norme 2. On note  $\mathbf{u}_{Diam}$  la solution Diamant et  $\mathbf{u}_{Exact}$  la réponse exacte.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
593	$2.25 \cdot 10^{-1}$	$1.96 \cdot 10^{-3}$	$3.61 \cdot 10^{-4}$	$4.08 \cdot 10^{-4}$
4520	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$1.26 \cdot 10^{-3}$	$1.76 \cdot 10^{-4}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$
5513	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$9.34 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-4}$	$1.59 \cdot 10^{-4}$
17717	$7.97 \cdot 10^{-2}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$
36160	$6.48 \cdot 10^{-2}$	$7.74 \cdot 10^{-4}$	$9.31 \cdot 10^{-5}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$

Tableau 4.7.1 – cas E.2.1 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

#### 4.7.2 Cas E.2.2 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou

Dans les figures 4.7.3 et 4.7.4 sont affichées les configurations déformées obtenues avec la méthode Diamant et la méthode éléments finis (EF) P1 conformes.

À présent, nous allons présenter les résultats d'estimation d'erreur. Étant donné que nous ne possédons pas de solution analytique pour ce test, les résultats obtenus par la méthode

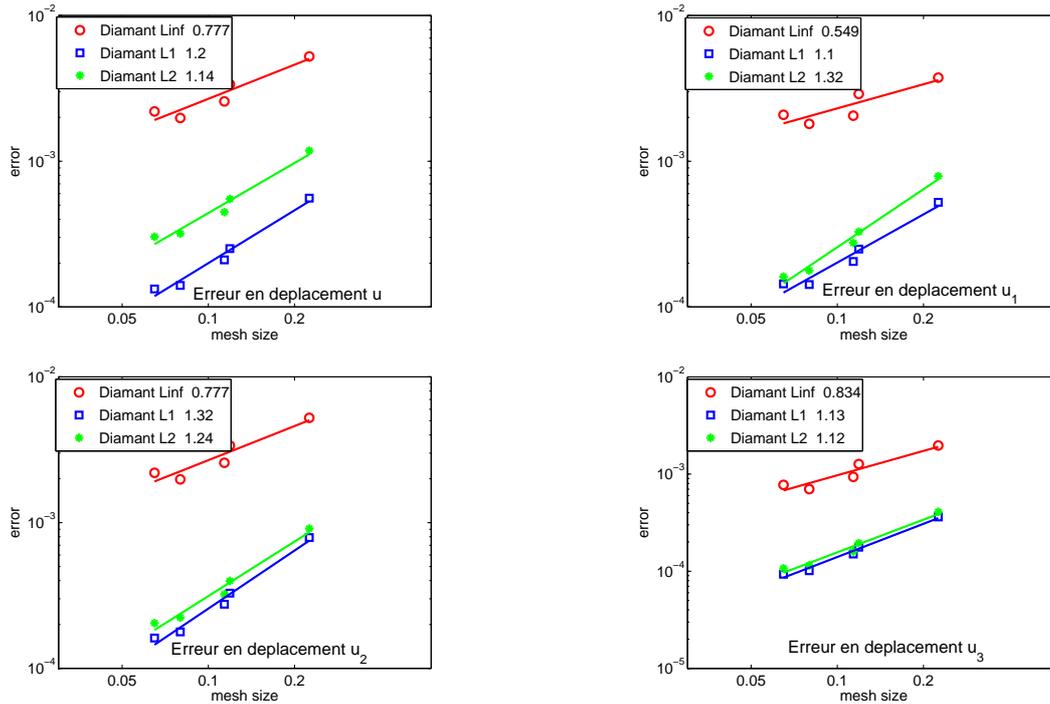


FIGURE 4.7.2 – cas E.2.1 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés.

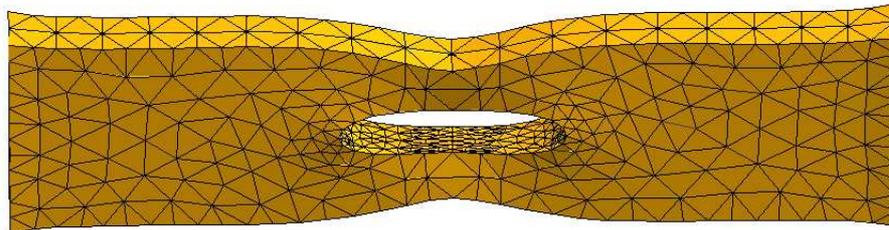


FIGURE 4.7.3 – cas E.2.2 : réponse du déplacement obtenu avec la méthode Diamant.

Diamant sont comparés à ceux obtenus par éléments finis. Les résultats d’estimations d’erreurs sont présentés dans le Tableau 4.7.2 pour les valeurs, et dans la Figure 4.7.5 pour le tracé. Comme précédemment, nous utilisons une série de maillages raffinés successivement.

### 4.7.3 Cas E.2.3 : Déformation d’un barreau non homogène percé d’un trou

Dans les figures 4.7.6 et 4.7.7 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode Diamant ainsi que par éléments finis. La Figure 4.7.6 correspond à un matériau composé d’acier à gauche (en foncé) et d’aluminium à droite (en clair). Étant donné que l’acier possède un module d’Young plus grand que l’aluminium, c’est ce dernier qui se déforme le plus, et c’est ce qui se remarque dans ces figures. Dans la Figure 4.7.7, les matériaux sont intervertis (aluminium à gauche, acier à droite). Le même phénomène est observé.

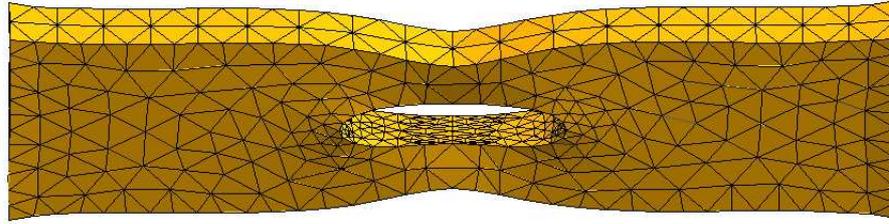


FIGURE 4.7.4 – cas E.2.2 : réponse du déplacement obtenu par éléments finis.

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{EF}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
860	$2.75 \cdot 10^{-1}$	$2.72 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-2}$
2632	$1.93 \cdot 10^{-1}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$4.97 \cdot 10^{-3}$	$4.73 \cdot 10^{-3}$
4146	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$4.11 \cdot 10^{-3}$	$4.17 \cdot 10^{-3}$
14942	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$1.30 \cdot 10^{-2}$	$4.40 \cdot 10^{-3}$	$4.17 \cdot 10^{-3}$
22600	$8.73 \cdot 10^{-2}$	$9.42 \cdot 10^{-3}$	$2.67 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$

Tableau 4.7.2 – cas E.2.2 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

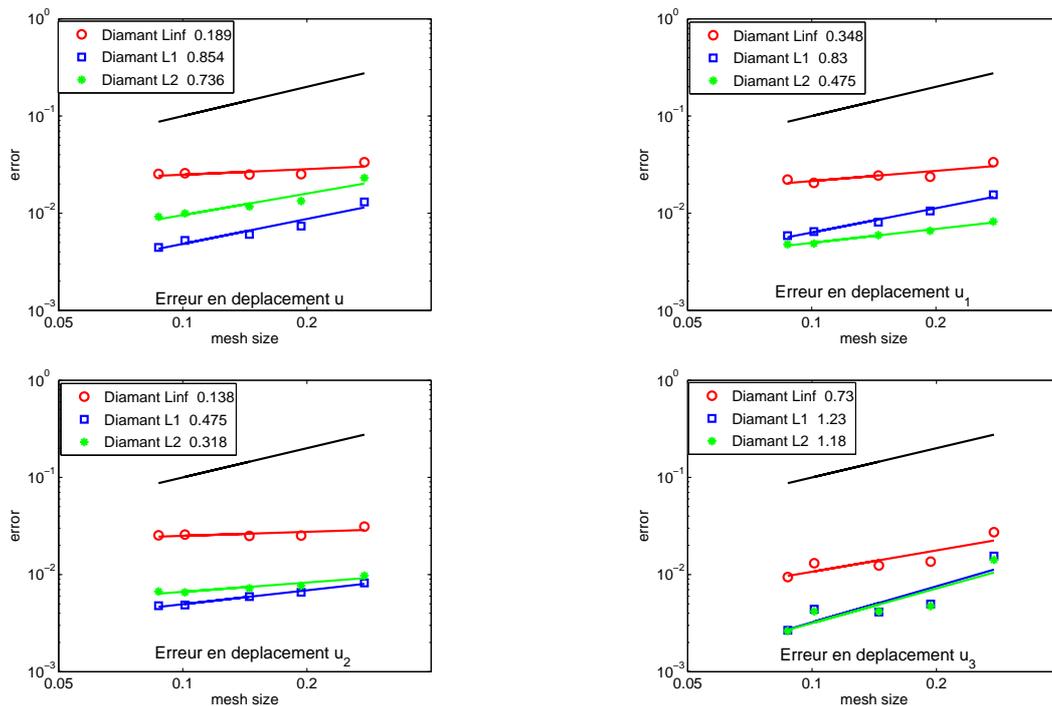


FIGURE 4.7.5 – cas E.2.2 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés et droite de pente 1 (en noir).

Intéressons-nous à présent aux estimations d'erreur. Les résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans le Tableau 4.7.3 pour les valeurs, et dans la Figure 4.7.8 pour le tracé.

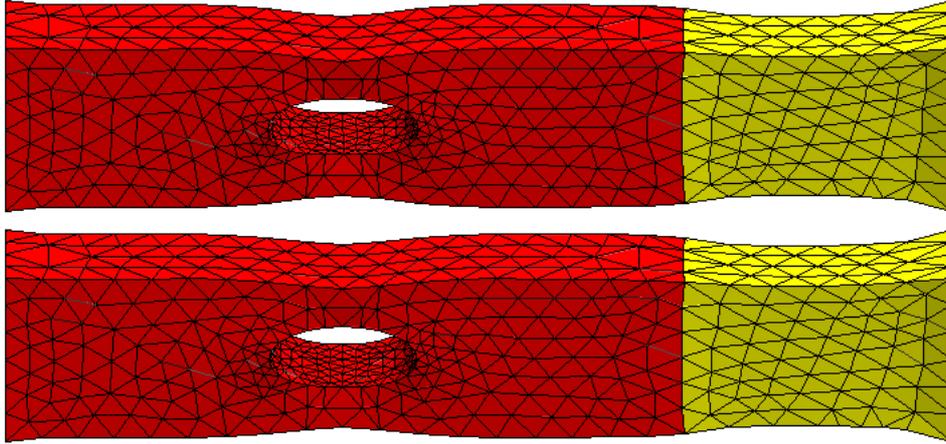


FIGURE 4.7.6 – Cas E.2.3 : réponse du déplacement acier (sombre) / aluminium (clair) par Diamant (en haut) et par éléments finis (bas).

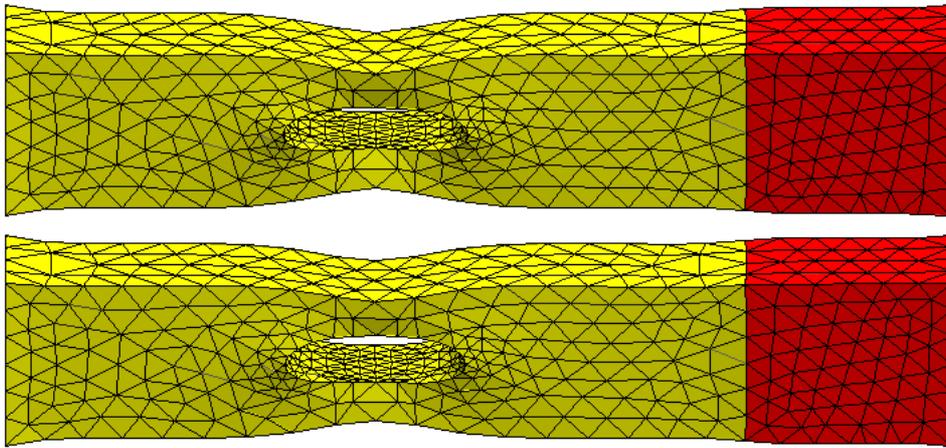


FIGURE 4.7.7 – Cas E.2.3 : réponse du déplacement aluminium (clair) / acier (sombre) par Diamant (en haut) et par éléments finis (bas).

Comme précédemment, nous utilisons une série de maillages raffinés successivement.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{EF}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{Diam} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
387	$5.31 \cdot 10^{-1}$	$4.52 \cdot 10^{-2}$	$4.59 \cdot 10^{-3}$	$3.10 \cdot 10^{-3}$
862	$2.88 \cdot 10^{-1}$	$1.57 \cdot 10^{-2}$	$1.46 \cdot 10^{-2}$	$9.88 \cdot 10^{-3}$
5067	$1.58 \cdot 10^{-1}$	$1.30 \cdot 10^{-2}$	$7.38 \cdot 10^{-3}$	$5.35 \cdot 10^{-3}$
26618	$9.14 \cdot 10^{-1}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$6.90 \cdot 10^{-3}$	$4.63 \cdot 10^{-3}$

Tableau 4.7.3 – Cas E.2.3 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

On constate à travers ces deux exemples que la convergence de la méthode Diamant est numériquement vérifiée. L'estimation d'erreur de la méthode par éléments finis est en théorie d'ordre 2, et on a vu que celle de la méthode Diamant est d'ordre 1. Tous les graphiques concernant ces estimations d'erreurs (Figures 4.7.5 et 4.7.8) montrent un ordre de convergence proche de 1. L'exemple suivant est un cas test où l'on dispose d'une solution analytique.

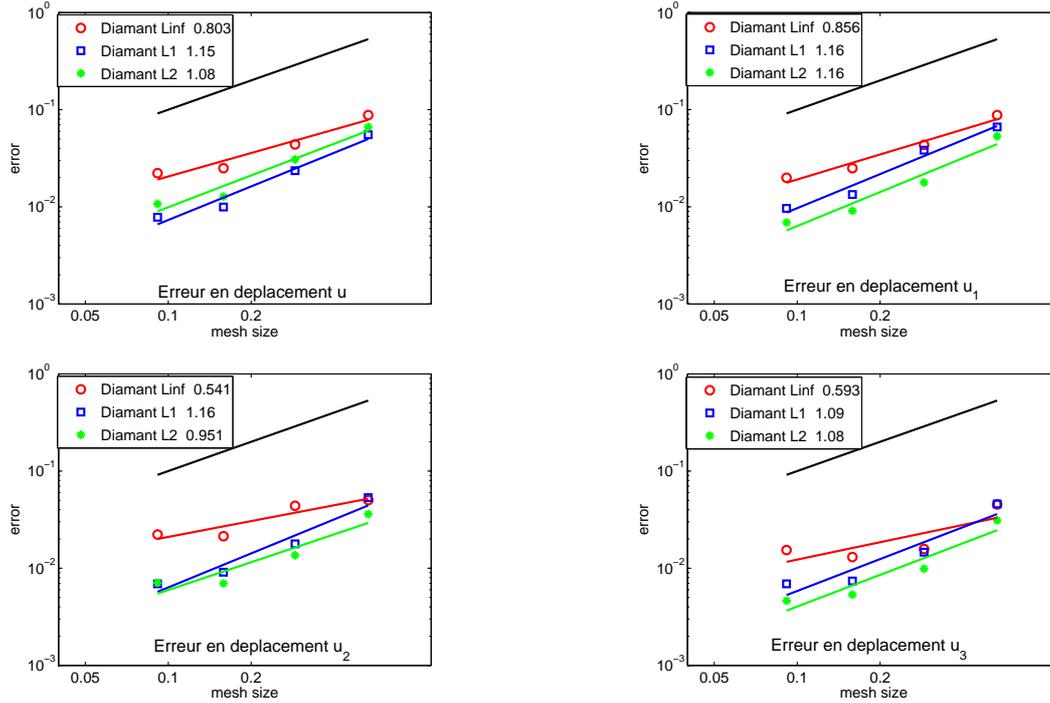


FIGURE 4.7.8 – Cas E.2.3 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés et droite de pente 1 (en noir).

## 4.8 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre une méthode VF diamants appliquée au problème de l’élasticité linéaire non homogène. La méthode est l’extension de sa version 2D, présentée au chapitre précédent. Comme en dimension 2, la méthode s’avère performante pour n’importe quel type de maillages, et pour tout type de conditions de bord. Du point de vue théorique, on a vu qu’il est pratiquement impossible de montrer la convergence du schéma VF diamants sans avoir préalablement établi des hypothèses sur les interpolant des inconnues aux sommets, ainsi que sur l’aspect du maillage. Cette méthode est cependant assez couteuse en temps de calcul, du fait de l’élimination des inconnues auxiliaires mais surtout des inconnues secondaires. Ce désavantage se ressent plus particulièrement en dimension 3. C’est pourquoi une alternative est de considérer les valeurs des déplacements aux sommets du maillage comme des inconnues à part entière, et non plus de les interpoler sur les inconnues principales : c’est l’idée du schéma DDFV (Discrete Duality Finite Volume), que nous présentons dans la partie suivante.



Troisième partie

**Schéma Discrete Duality Finite  
Volume method**



# Chapitre 5

## Schéma 2D DDFV

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>126</b>
<b>5.2</b>	<b>Construction des maillages</b>	<b>127</b>
5.2.1	Description du maillage primal	127
5.2.2	Description du maillage dual	127
5.2.3	Description du maillage demi diamant	129
5.2.4	Notations	129
5.2.5	Régularité du maillage	131
<b>5.3</b>	<b>Opérateurs discrets</b>	<b>132</b>
5.3.1	Vecteurs du maillage	132
5.3.2	Inconnues discrètes et espaces d'approximation	133
5.3.3	Produits scalaires et normes	133
5.3.4	Opérateurs discrets	134
<b>5.4</b>	<b>Relation de Green discrète</b>	<b>136</b>
<b>5.5</b>	<b>Condition de continuité à travers les arêtes</b>	<b>137</b>
5.5.1	Expression des inconnues intermédiaires	137
5.5.2	Expression du gradient par volume diamant	138
<b>5.6</b>	<b>Inégalité de Korn discrète</b>	<b>139</b>
<b>5.7</b>	<b>Schéma numérique et stabilité</b>	<b>140</b>
5.7.1	Description du schéma et caractère bien posé	140
5.7.2	Stabilité du schéma DDFV	141
<b>5.8</b>	<b>Convergence et estimation d'erreur</b>	<b>142</b>
5.8.1	Inégalités de trace et Poincaré	146
5.8.2	Propriétés de l'opérateur de projection	147
5.8.3	Fin de preuve : estimation d'erreur	147
<b>5.9</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>150</b>
5.9.1	Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale	150
5.9.2	Cas E.1.4 : Déformation d'un carré homogène. Solution non polynomiale	150
5.9.3	Cas E.1.6 : Déformation d'un triangle homogène	152
5.9.4	Cas E.1.7 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou	152
5.9.5	Cas E.1.8 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou	155
<b>5.10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>158</b>

---

## 5.1 Introduction

Nous allons étendre la méthode de discrétisation appelée DDFV à la résolution de l'élasticité linéaire. Le principe de cette méthode est inspiré du schéma diamant, développé par Coudière *et al.* [33, 26]. Celui-ci fait intervenir deux jeux d'inconnues : les inconnues principales, aux centres des volumes de contrôle, et les inconnues secondaires, dont les valeurs sont interpolées sur les valeurs des inconnues principales par une formule de moindres carrés. La novation du schéma DDFV, due à Domelevo et Omnes [43] et à Hermeline [61], est d'associer aux sommets des inconnues à part entière approchant la solution sur un deuxième maillage. Pour cela, on utilise une première discrétisation du domaine, appelée maillage primal, et à partir de cette triangulation est construit un maillage dual centré sur les sommets du maillage primal. L'équation de l'élasticité est ainsi intégrée sur les volumes de contrôle primaux et sur les volumes de contrôle duaux, ce qui ajoute plus d'inconnues, mais, contrairement au schéma diamant, le système discret conserve la symétrie. Un troisième maillage, appelé maillage diamant, est nécessaire pour construire les opérateurs discrets. Ceux-ci conservent la structure du problème continu, si bien qu'il est possible d'écrire une formule de Green discrète qui imite la formule continue. Les opérateurs ainsi construits sont dits en dualité discrète, ce qui donne son nom à la méthode. La méthode DDFV en dimension 2 est d'ordre 1 et très performante, notamment pour la construction des gradients. Par ailleurs, elle est très peu exigeante du point de vue géométrique, si bien qu'elle peut être utilisée pour des maillages non conformes, non structurés, non admissibles et non convexes. Elle est particulièrement intéressante pour traiter des problèmes discontinus, hétérogènes et non linéaires.

La méthode DDFV a été étudiée en dimension 2 dans le cas de problèmes de diffusion scalaire anisotrope par Domelevo et Omnes [43], Hermeline [61, 62], de convection-diffusion par Coudière et Manzini [28], de Stokes et de Navier-Stokes par Delcourte [34] et Krell [69, 68], de *div-curl* par Delcourte *et al.* [35]. Elle a également été testée pour des problèmes hétérogènes à travers l'exemple de l'électrocardiologie traité par Coudière *et al.* [29], pour une méthode de diffusion anisotrope utilisant un algorithme de Schwarz par Boyer *et al.* [19], ou encore par Pierre [76], dans des problèmes de type *Leray-Lions* linéaires ou non linéaires par Andreianov *et al.* [7] et Boyer et Hubert [18]. Ces publications ont montré une solidité du point de vue théorique et ont illustré le bon comportement numérique de ce type de schémas.

Ce chapitre s'articule de la façon suivante : afin d'intégrer le problème de l'élasticité linéaire, on va construire en section 2 les trois types de maillages que nous allons utiliser pour y définir les opérateurs discrets, à savoir les maillages primal, dual et diamant. Dans la section 3, on définit les espaces d'approximation, les produits scalaires ainsi que les opérateurs discrets qui sont en dualité discrète via la formule de Green discrète donnée en section 4. Cette propriété nous permet de conserver la symétrie du problème, ce qui va nous permettre l'étude théorique du schéma DDFV sans avoir à émettre d'hypothèses sur le maillage, comme c'était le cas pour le schéma VF diamant. Dans la section 5, on introduit la condition de continuité, et on fait le lien entre le gradient par diamants et par demi-diamants. La section 6 est consacrée à l'inégalité de Korn, indispensable en élasticité pour avoir des résultats théoriques de stabilité. Sa preuve, initialement donnée en [69], est rappelée Annexe, pour un problème aux conditions de déplacement pur. Lorsque les conditions de bord sont de type mixtes Dirichlet/Neumann, la preuve de cette inégalité reste un problème ouvert. Dans la section 7, on montre que le problème est bien posé et stable, et qu'il est convergent d'ordre 1 en section 8. Des exemples numériques sont enfin présentés en section 9, où la réponse DDFV est d'abord comparée à la solution analytique de 3 cas tests. Les estimations d'erreur montrent un ordre de convergence numérique de 2 pour les normes  $L^1$  et  $L^2$ . Dans les deux derniers tests, la réponse DDFV est comparée à la réponse obtenue avec des éléments finis  $P1$  avec des résultats de convergence

légèrement altérés par le choix du maillage grossier lorsqu'on raffine uniformément.

## 5.2 Construction des maillages

On décrit dans cette section le cadre géométrique du schéma 2D-DDFV. Les notations utilisées sont légèrement différentes de celles utilisées dans [7] et dans [69, 68].

### 5.2.1 Description du maillage primal

On appelle maillage volumes finis une réunion d'ouverts polygonaux disjoints (voir Figure 5.2.1) tels que

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \bar{K} = \bar{\Omega}$$

où on a noté  $\mathfrak{M}$  l'ensemble de ces polygones. A chaque volume  $K \in \mathfrak{M}$  est associé un centre  $\mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^2$ , qui pour le schéma DDFV n'a pas besoin d'être nécessairement le centre de gravité de  $K$ . On appelle arête tout segment intersection de deux volumes ou bien d'un volume et du bord de  $\Omega$ . On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble de ces arêtes. On appelle sommets du maillage les sommets des arêtes. Chaque arête du maillage primal est notée  $s$ . Si l'arête  $s$  est interne, alors il existe deux volumes  $K$  et  $L$  tels que  $s = K \cap L$ , sinon il s'agit d'une arête de bord, et vérifie  $s = K \cap \partial\Omega$ . L'ensemble des arêtes internes est noté  $\mathcal{E}^{int}$  et l'ensemble des arêtes de bord  $\mathcal{E}^b$  : ils satisfont

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^b.$$

L'ensemble des arêtes de bord est divisé en l'ensemble des arêtes sur le bord de Dirichlet et l'ensemble des arêtes sur le bord de Neumann, de sorte que

$$\mathcal{E}^b = \mathcal{E}^{b_D} \cup \mathcal{E}^{b_N}.$$

Pour un volume  $K$ , on note  $\partial K$  l'ensemble de ses arêtes. De la même façon que pour les arêtes, on distingue  $\partial K^{int}$  l'ensemble de ses arêtes internes, de l'ensemble  $\partial K^b$  des arêtes de bord, qui appartiennent à  $\partial\Omega$ , de sorte que  $\partial K = \partial K^{int} \cup \partial K^b$ . On distingue les arêtes sur le bord de Dirichlet  $\partial K^{b_D}$  de celles sur le bord de Neumann  $\partial K^{b_N}$ .

### 5.2.2 Description du maillage dual

Une fois le maillage primal mis en place, on peut à présent définir le maillage dual. Il y a deux maillages duaux possibles.

1. Le maillage dual **direct**, obtenu en reliant les centres du maillage primal entre eux ;
2. Le maillage dual **barycentrique**, obtenu en reliant les centres du maillage primal aux centre des arêtes.

Par la suite, nous utiliserons le maillage dual barycentrique. En effet, ce maillage est adapté aux problèmes hétérogènes pour lesquels les coefficients de Lamé peuvent être discontinus de part et d'autre des arêtes : les opérateurs discrets ne peuvent donc être définis que de part et d'autre des arêtes.

Les volumes duaux sont notés  $K^*$ . Ils sont associés aux sommets  $\mathbf{x}_{K^*}$  du maillage primal. On distingue les volumes duaux internes, dont l'intersection des arêtes avec le bord du domaine  $\Omega$  est vide, des volumes duaux de bord, dont une arête au moins appartient à  $\partial\Omega$ . Comme illustré dans la Figure 5.2.2, on note  $\mathfrak{M}^{*int}$  l'ensemble des volumes internes, et  $\mathfrak{M}^{*b}$  l'ensemble des volumes de bord, de sorte que

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*b}.$$

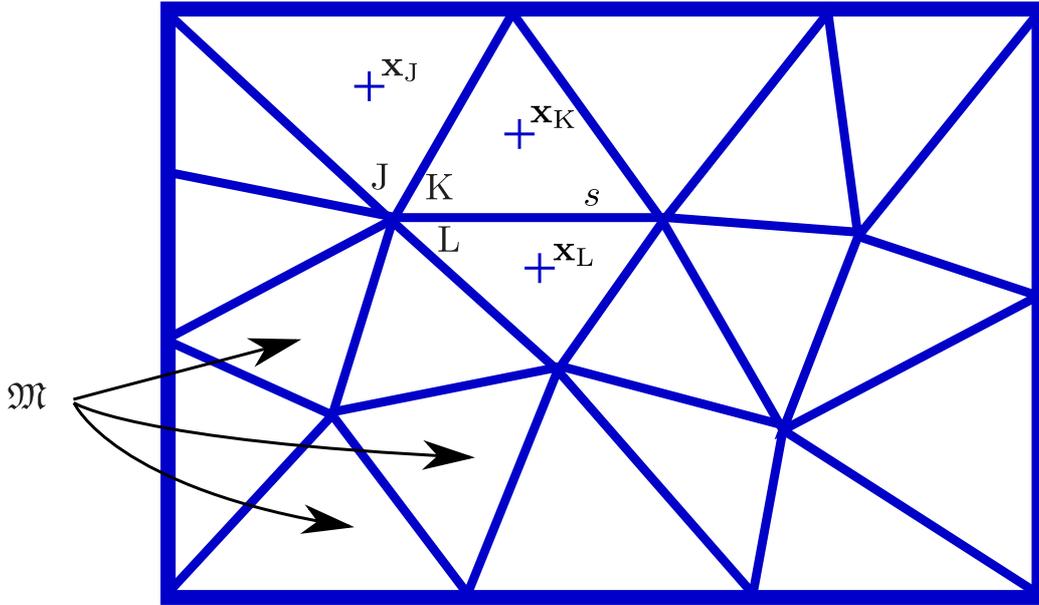


FIGURE 5.2.1 – Maillage primal et notations

**Remarque 5.2.1**

On observera que  $\mathfrak{M}^{*b}$  est noté  $\partial\mathfrak{M}^*$  dans [7, 69, 68] et que  $\mathfrak{M}^{*int}$  est noté  $\mathfrak{M}^*$ . L'ensemble  $\mathfrak{M}^*$  utilisé dans ce document représente  $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$  de la référence [7, 69, 68].

On distingue l'ensemble des volumes duaux sur le bord de Dirichlet  $K^* \in \mathfrak{M}^{*bD}$ , dont le sommet  $\mathbf{x}_{K^*}$  est sur le bord de Dirichlet, de ceux sur le bord de Neumann  $\mathfrak{M}^{*bN}$ , de sorte que

$$\mathfrak{M}^{*b} = \mathfrak{M}^{*bD} \cup \mathfrak{M}^{*bN}.$$

Les arêtes  $s^*$  du maillage dual sont les segments ayant pour sommets le centre  $\mathbf{x}_K$  d'un volume primal et le centre  $\mathbf{x}_s$  d'une arête de  $K$ . Elles sont confondues avec les arêtes  $s$  du maillage primal dans le seul cas où elles appartiennent à  $\partial\Omega$ . Par abus de notation, et lorsque cela ne fait aucun doute, pour  $s = K \cap L$ , on notera  $s^* = s_{Ks}^*$  (resp.  $s^* = s_{Ls}^*$ ) l'arête duale  $[\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_s]$  (resp.  $[\mathbf{x}_L, \mathbf{x}_s]$ ) associée au volume primal  $K$  (resp.  $L$ ). L'ensemble des arêtes du maillage dual est noté  $\mathcal{E}^*$ .

Lorsqu'un volume dual  $K^*$  possède une arête sur le bord de Dirichlet et sur le bord de Neumann, par convention, le sommet  $\mathbf{x}_{K^*}$  est supposé appartenir au bord de Dirichlet. Pour un volume  $K^*$ , on note  $\partial K^*$  l'ensemble de ses arêtes. De la même façon que pour les volumes primaux, on distingue  $\partial K^{*int}$  l'ensemble de ses arêtes internes, de l'ensemble  $\partial K^{*b}$  des arêtes de bord, qui appartiennent à  $\partial\Omega$ , de sorte que  $\partial K^* = \partial K^{*int} \cup \partial K^{*b}$ . On distingue l'ensemble des arêtes de bord de Dirichlet  $\partial K^{*bD}$  de celles de Neumann  $\partial K^{*bN}$ .

**Remarque 5.2.2**

1. Le maillage DDFV construit précédemment est la réunion des maillages primal et dual que l'on note  $\mathcal{T} = \mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}^*$ .
2. Lorsqu'on se donne un volume primal  $K$  et une arête primale  $s$ , alors on obtient l'unique arête duale  $s^*$  correspondante.
3. Une arête duale  $s^*$  détermine un unique volume primal  $K$  et une unique arête primale  $s$ .

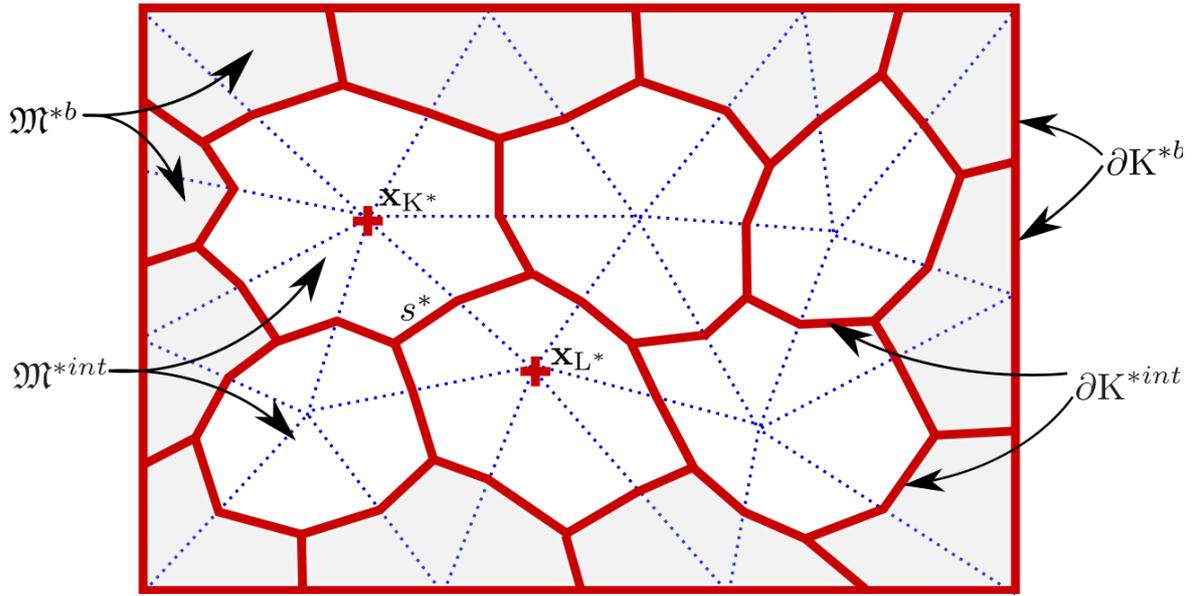


FIGURE 5.2.2 – Maillage dual, maillage primal (pointillés) et notations

4. Les volumes primaux (resp. duaux) sont 2 à 2 disjoints et couvrent entièrement  $\Omega$ , de sorte que

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \bar{K} = \bigcup_{K^* \in \mathfrak{M}^*} \bar{K}^* = \bar{\Omega}.$$

### 5.2.3 Description du maillage demi diamant

On appelle demi diamant  $D_{K_s}$  associé au volume  $K$  et à l'arête  $s$  de  $K$  le triangle obtenu en joignant le centre  $\mathbf{x}_K$  du volume  $K$  et les sommets  $\mathbf{x}_1^{K_s}$  et  $\mathbf{x}_2^{K_s}$  de l'arête  $s$ , comme illustré en Figure 5.2.3. On définit l'ensemble  $\tilde{\mathfrak{D}}$  des demi diamants par  $\tilde{\mathfrak{D}} = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}\}$ . On appelle  $\tilde{\mathfrak{D}}^b$  l'ensemble des demi diamants situés sur le bord et définis par  $\tilde{\mathfrak{D}}^b = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}^b\}$ . Les demi diamants sont 2 à 2 disjoints et couvrent entièrement le domaine  $\Omega$ , de sorte que

$$\bigcup_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \bar{D}_{K_s} = \bar{\Omega}.$$

#### Remarque 5.2.3

A chaque demi diamant  $D_{K_s}$  est associée une unique arête primale  $s$  et un unique volume  $K$  et réciproquement ainsi qu'une unique arête duale  $s^*$  et un unique volume  $K$  et réciproquement.

Par la suite, on écrit par abus de notation que  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$  au lieu de  $s \in \partial K$  ou de  $s^* \in \partial K^*$ .

### 5.2.4 Notations

Nous rappelons la convention de numérotation des arêtes définie en Convention 3.2.1 et en Figure 3.2.2 du chapitre VF Diamant page 48.

#### Convention 5.2.1 (Numérotation locale des sommets du maillage)

Soit  $s = K \cap L$  une arête interne. Pour  $i = \{1, 2\}$ , soient  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  et  $\mathbf{x}_i^{L_s}$  les numérotations

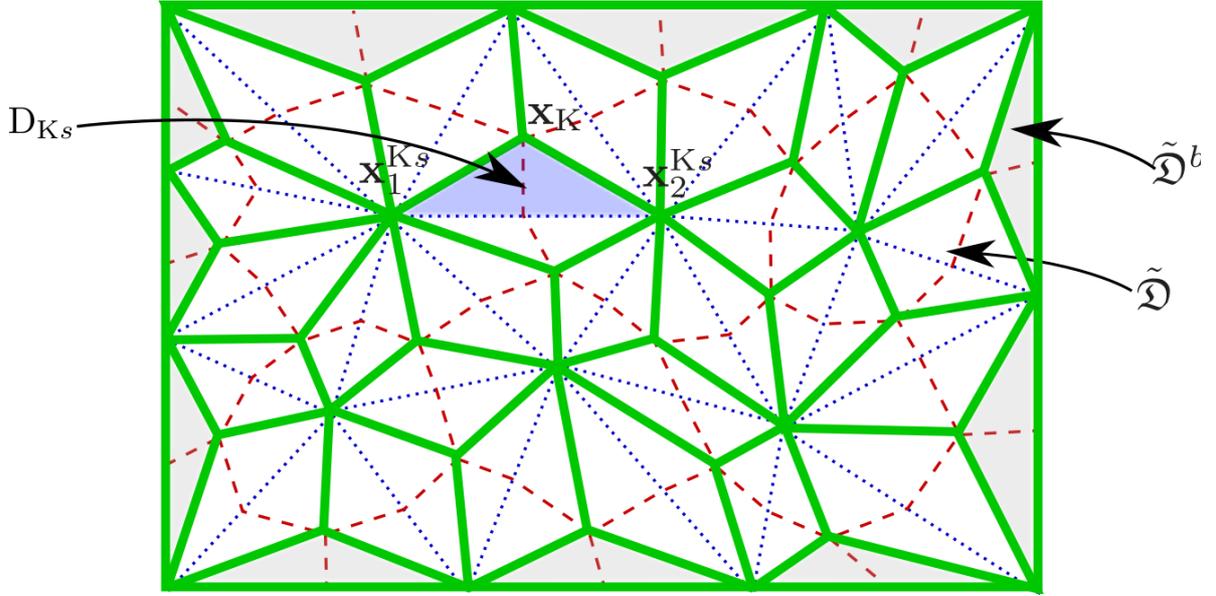


FIGURE 5.2.3 – Maillage **diamant**, maillage **dual** (pointillés), maillage **primal** (pointillés) et notations

locales associées aux volumes  $K$  et  $L$ .

1. Les indices locaux sont dits tournants, c'est-à-dire que pour tout  $i = \{1, 2\}$ , on a

$$\mathbf{x}_{i+2}^{Ks} = \mathbf{x}_i^{Ks} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_{i+2}^{Ls} = \mathbf{x}_i^{Ls}. \quad (5.1)$$

2. La numérotation locale des sommets de l'arête  $s$  respecte la condition

$$\det(\mathbf{x}_2^{Ks} - \mathbf{x}_1^{Ks}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) > 0 \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{x}_s$  est le centre de la face  $s$ . Cela entraîne en particulier que  $\mathbf{x}_1^{Ks} = \mathbf{x}_2^{Ls}$  et  $\mathbf{x}_2^{Ks} = \mathbf{x}_1^{Ls}$ .

Pour toute maille primale  $K \in \mathfrak{M}$ , on définit

- $|K|$  la mesure de  $K$ ,
- $\mathbf{n}_{Ks}$  la normale unitaire sortante de  $K$  à l'arête  $s$ ,
- $\mathbf{N}_{Ks}$  la normale sortante de  $K$  à l'arête  $s$ , de sorte que  $\mathbf{N}_{Ks} = |s| \mathbf{n}_{Ks}$ ,
- $\text{diam}(K)$  le diamètre de  $K$ ,
- $\mu_K = \mu(\mathbf{x}_K)$  et  $\lambda_K = \lambda(\mathbf{x}_K)$  représentent les valeurs des coefficients de Lamé constants par volumes primaux.

Pour toute maille duale  $K^* \in \mathfrak{M}^*$  associée au sommet  $\mathbf{x}_i^{Ks}$ , on définit come indiqué dans la Figure 5.2.4

- $|K^*|$  la mesure de  $K^*$
- $\mathbf{n}_i^{Ks}$  la normale unitaire sortante de  $K^*$  à l'arête  $s^*$  pour le volume,  $K$
- $\mathbf{N}_i^{Ks}$  la normale sortante de  $K^*$  à l'arête  $s^*$  pour le volume  $K$ , de sorte que  $\mathbf{N}_i^{Ks} = |s^*| \mathbf{n}_i^{Ks}$ ,
- $-\mathbf{n}_i^{Ls}$  la normale unitaire sortante de  $K^*$  à l'arête  $s^*$  pour le volume  $L$ ,
- $\text{diam}(K^*)$  le diamètre de  $K^*$ .

Pour tout demi diamant  $D_{Ks} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ , dont les sommets sont  $(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_1^{Ks}, \mathbf{x}_2^{Ks})$ , on définit

- $\text{diam}(D_{Ks})$  le diamètre de  $D_{Ks}$ .

- $\mathbf{x}_s$  le centre de l'arête  $s$ ,
- $|s|$  la mesure de l'arête  $s$ ,
- $|s^*|$  la mesure de l'arête  $s^*$ ,
- $\alpha_{D_{K_s}}$  l'angle entre  $s$  et  $s^*_{K_s}$ , de sorte que  $\alpha_{D_{K_s}} = \widehat{\mathbf{N}_{K_s}, \mathbf{N}_1^{K_s}}$ .
- $|D_{K_s}|$  la mesure de  $D_{K_s}$ . D'après les propriétés géométriques du triangle, on a la relation suivante :

$$|D_{K_s}| = \frac{1}{2} \det(\mathbf{N}_{K_s}, \mathbf{N}_1^{K_s}) = \frac{1}{2} |s| |s^*| \sin(\alpha_{D_{K_s}}), \quad (5.3)$$

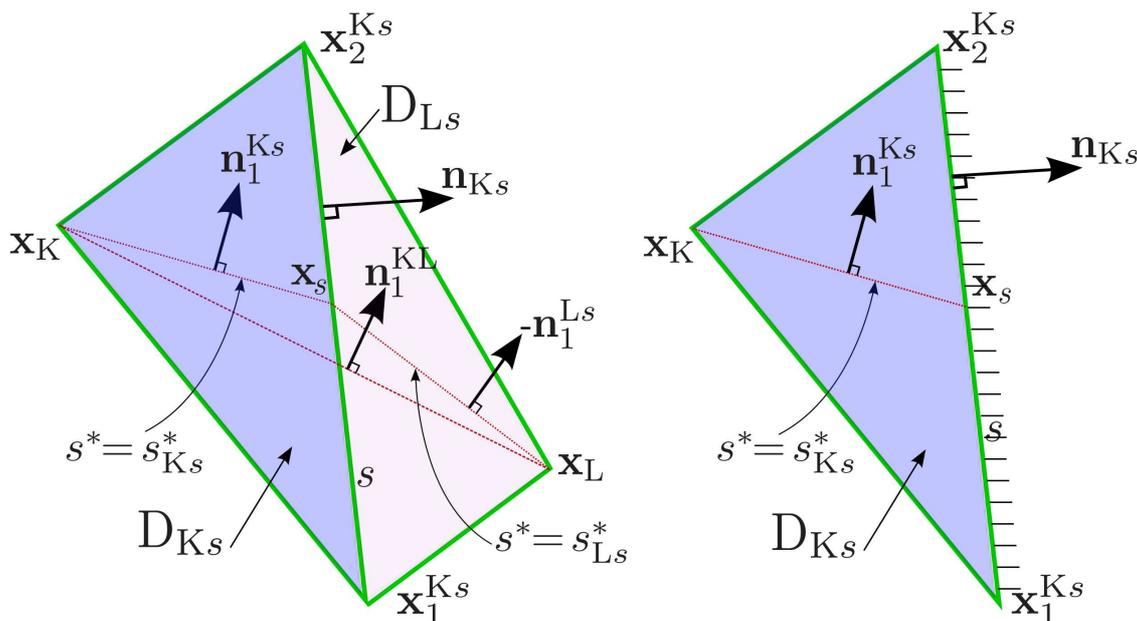


FIGURE 5.2.4 – Notations du diamant interne (gauche), et du diamant de bord (droite).

### 5.2.5 Régularité du maillage

La quantité  $size(\mathcal{T})$  est le plus grand des diamètres des demi diamants  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$ . Cette quantité permet en particulier d'obtenir les majorations suivantes

$$\begin{aligned} |s| &\leq size(\mathcal{T}), \quad \forall s \in \mathcal{E}; & |s^*| &\leq size(\mathcal{T}), \quad \forall s^* \in \mathcal{E}^*; \\ |K| &\leq size(\mathcal{T})^2, \quad \forall K \in \mathcal{M}; & |K^*| &\leq size(\mathcal{T})^2, \quad \forall K^* \in \mathcal{M}^*; & |D_{K_s}| &\leq size(\mathcal{T})^2, \quad \forall D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

La régularité  $reg(\mathcal{T})$  du maillage  $\mathcal{T}$  implique qu'il existe des constantes  $\alpha, \beta > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \forall K \in \mathcal{M}, & \quad \alpha size(\mathcal{T})^2 \leq |K|, & \quad \#\partial K &\leq \beta; \\ \forall K^* \in \mathcal{M}^*, & \quad \alpha size(\mathcal{T})^2 \leq |K^*|, & \quad \#\partial K^* &\leq \beta; \\ \forall s \in \mathcal{E}, & \quad \alpha size(\mathcal{T}) \leq |s|, & \quad \forall s^* \in \mathcal{E}^*, & \quad \alpha size(\mathcal{T}) \leq |s^*| \\ \forall D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}, & \quad \alpha size(\mathcal{T})^2 \leq |D_{K_s}| \end{aligned} \quad (5.5)$$

où  $\#\partial K$  (resp.  $\#\partial K^*$ ) est le nombre d'arêtes de  $K$  (resp.  $K^*$ ).

## 5.3 Opérateurs discrets

### 5.3.1 Vecteurs du maillage

On se propose dans cette section de définir les vecteurs qui vont nous servir à construire des opérateurs discrets sur le maillage, ainsi que des produits scalaires utiles à l'analyse du schéma discret. Soit  $K \in \mathfrak{M}$  un volume et  $s$  une de ses arêtes. Comme illustré dans la Figure 5.3.2, on peut donner les expressions des vecteurs du maillage

$$\mathbf{N}_{Ks} = -(\mathbf{x}_2^{Ks} - \mathbf{x}_1^{Ks})^\perp, \quad \mathbf{N}_1^{Ks} = (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K)^\perp. \quad (5.6)$$

On peut couper le vecteur  $\mathbf{N}_{Ks}$  en deux parties comme indiqué en Figure 5.3.2, ce qui va nous

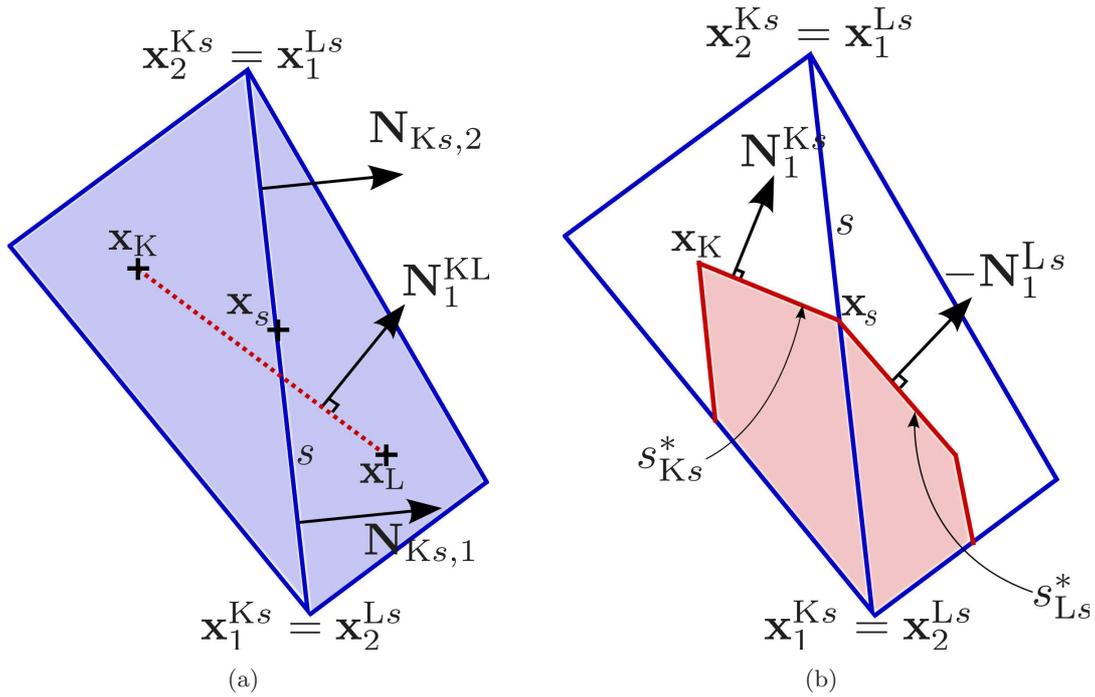


FIGURE 5.3.1 – Vecteurs et notations d'une cellule primale (a), et d'une cellule duale (b).

permettre de mieux décrire les volumes de bord

$$\mathbf{N}_{Ks} = \mathbf{N}_{Ks,1} + \mathbf{N}_{Ks,2} \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}_{Ks,1} = (\mathbf{x}_1^{Ks} - \mathbf{x}_s)^\perp, \quad \mathbf{N}_{Ks,2} = -(\mathbf{x}_2^{Ks} - \mathbf{x}_s)^\perp, \quad (5.7)$$

et de manière générale, étant donné que  $\mathbf{x}_s$  est situé au centre de l'arête  $s$ , on a la relation

$$\mathbf{N}_{Ks,1} = \mathbf{N}_{Ks,2} = \frac{\mathbf{N}_{Ks}}{2}. \quad (5.8)$$

Pour chaque diamant interne associé à une arête  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$ , on a

$$\mathbf{N}_1^{KL} = \mathbf{N}_1^{Ks} - \mathbf{N}_1^{Ls}. \quad (5.9)$$

#### Remarque 5.3.1

A tout vecteur  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^2$  est associé son vecteur adimensionné  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}$

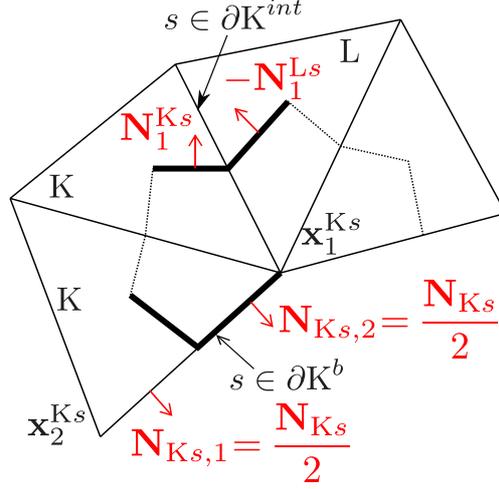


FIGURE 5.3.2 – Vecteurs et notations d’une cellule duale de bord

### 5.3.2 Inconnues discrètes et espaces d’approximation

La méthode DDFV fait intervenir un jeu d’inconnues constantes par volume primal  $\mathbf{u}_K$  pour  $K \in \mathfrak{M}$  et un autre jeu d’inconnues constantes par volume dual  $\mathbf{u}_{K^*}$  pour  $K^* \in \mathfrak{M}^*$ . Ces inconnues sont appelées inconnues principales, et sont rassemblées en

$$\mathbf{u}^\tau = ((\mathbf{u}_K)_{K \in \mathfrak{M}}, (\mathbf{u}_{K^*})_{K^* \in \mathfrak{M}^*}) \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}.$$

Par ailleurs, nous introduisons une famille d’inconnues par arête  $\mathbf{u}_s \in \mathcal{E}$ , qui sera éliminée en section 5.5, soit algébriquement en écrivant la continuité des flux à travers les interfaces internes, soit en utilisant les conditions de bord.

### 5.3.3 Produits scalaires et normes

Pour tout couple  $(\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau)$  dans  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$ , on définit le produit scalaire et la norme associée par

$$\llbracket \mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K + \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} |K^*| \mathbf{u}_{K^*} \cdot \mathbf{v}_{K^*} \right) \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}^\tau\|_{\mathcal{T}}^2 = \llbracket \mathbf{u}^\tau, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}}. \quad (5.10)$$

Pour tout couple  $(\phi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \psi^{\tilde{\mathcal{D}}})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$ , on définit le produit scalaire et la norme associée par

$$(\phi^{\tilde{\mathcal{D}}} : \psi^{\tilde{\mathcal{D}}})_{\tilde{\mathcal{D}}} = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| (\phi^{D_{K_s}} : \psi^{D_{K_s}}) \quad \text{et} \quad \|\xi^{\tilde{\mathcal{D}}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 = (\xi^{\tilde{\mathcal{D}}} : \xi^{\tilde{\mathcal{D}}})_{\tilde{\mathcal{D}}} \quad (5.11)$$

où  $(\phi^{D_{K_s}} : \psi^{D_{K_s}}) = \text{tr}(\phi^{D_{K_s}} (\psi^{D_{K_s}})^T)$ . Pour tout couple  $(\phi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{v}^\Gamma) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}^b} \times (\mathbb{R}^2)^{\#\tilde{\mathcal{D}}^b}$ , on définit le produit scalaire sur le bord

$$\langle \phi^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{n}, \mathbf{v}^\Gamma \rangle_\Gamma = \sum_{s \in \mathcal{E}} |s| (\phi^{D_{K_s}} \mathbf{n}_{K_s}) \cdot \mathbf{v}_s. \quad (5.12)$$

Enfin, pour tout  $\xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on note  $\|\xi\| = (\xi : \xi)^{\frac{1}{2}}$ .

### Remarque 5.3.2

Le coefficient  $\frac{1}{2}$  du produit scalaire dans  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  peut être interprété comme l'égalité contribution des inconnues sur les maillages primal et dual; en effet, la Remarque 5.2.2 nous affirme que les 2 maillages couvrent une seule fois  $\Omega$ , de sorte que

$$[[\mathbf{1}, \mathbf{1}]]_{\mathcal{T}} = |\Omega|.$$

### 5.3.4 Opérateurs discrets

Dans cette section, nous allons construire l'opérateur gradient par demi diamant. Puis nous pourrons alors définir le tenseur des contraintes par demi diamant, celui-ci étant une combinaison d'opérateurs gradients (gradient, transposée gradient et trace du gradient).

#### Définition 5.3.1 (*Expression du gradient par demi diamant*)

Soit  $K \in \mathfrak{M}$  un volume primal et  $s \in \partial K$ . Le gradient par demi diamant, défini de  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$ , et noté  $\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau$ , s'écrit pour tout  $D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\nabla^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau = \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{Ks} + (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \otimes \mathbf{N}_1^{Ks} \right). \quad (5.13)$$

### Remarque 5.3.3

La définition du gradient ci-dessus nécessite une valeur du déplacement par arête. Pour les arêtes internes, cette valeur est éliminée en écrivant la continuité du flux normal du tenseur des contraintes, pour les arêtes sur le bord de Dirichlet, ce déplacement est donné par la condition de bord, et cela sera sous-entendu quand on utilisera le gradient par la suite. Pour les arêtes sur le bord de Neumann, il n'est pas utile de préciser sa valeur.

A partir de cette formule, il est aisé de construire l'opérateur transposée gradient discret par demi diamant. On remarque que par définition des volumes diamants, pour tout  $D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\mu_{D_{Ks}} = \mu_K \quad \text{et} \quad \lambda_{D_{Ks}} = \lambda_K. \quad (5.14)$$

Nous définissons le tenseur des contraintes discret par demi diamant  $\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)$  en nous inspirant de sa forme continue

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) = \mu_K (\nabla^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau + (\nabla^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau)^T) + \lambda_K \text{tr}(\nabla^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau) \text{Id} \quad \forall D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}. \quad (5.15)$$

### Remarque 5.3.4

Il est important de noter que si les coefficients de Lamé sont égaux de part et d'autre des arêtes du maillage primal, il est possible de définir les opérateurs par diamant entier par

$$\nabla^{D_s}\mathbf{u}^\tau = \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left( (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{Ks} + (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \otimes \mathbf{N}_1^{KL} \right), \quad (5.16)$$

$$(\nabla^{D_s}\mathbf{u}^\tau)^T = \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left( \mathbf{N}_{Ks} \otimes (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) + \mathbf{N}_1^{KL} \otimes (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \right), \quad (5.17)$$

$$\text{Div}^{D_s}\mathbf{u}^\tau = \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left( (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{Ks} + (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \cdot \mathbf{N}_1^{KL} \right) \text{Id}. \quad (5.18)$$

Pour toute fonction matricielle  $\xi$  régulière, la divergence continue est obtenue via la formule de Green

$$\int_K \mathbf{div}(\xi(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = \sum_{s \in \partial K} \int_s \xi(\mathbf{t})\mathbf{n}_{K_s}d\mathbf{t}.$$

Nous allons donc définir la divergence discrète par volume qui imite la propriété de la forme continue.

**Définition 5.3.2**

L'opérateur  $\mathbf{div}^{\mathcal{T}} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  est une approximation consistante de l'opérateur divergence définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{div}^K \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} &= \frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} \xi^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{N}_{K_s} & \forall K \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{div}^{K^*} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} &= \frac{1}{|K^*|} \sum_{K,s,i \setminus \mathbf{x}_{K^*} = \mathbf{x}_i^{K_s}} \xi^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{N}_i^{K_s} & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*int}, \\ \mathbf{div}^{K^*} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} &= \frac{1}{|K^*|} \left( \sum_{K,s,i \setminus \mathbf{x}_{K^*} = \mathbf{x}_i^{K_s}} \xi^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{N}_i^{K_s} + \frac{1}{2} \sum_{s \in \partial K^* \cap \partial \Omega} \xi^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{N}_{K_s} \right) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*b}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Cet opérateur est à ne pas confondre avec la divergence discrète par demi diamant.

Par la suite, nous utiliserons les notations contractées

$$\mathbf{div}^{\mathfrak{M}} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} = (\mathbf{div}^K \xi^{\tilde{\mathcal{D}}})_{K \in \mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} = (\mathbf{div}^{K^*} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}})_{K^* \in \mathfrak{M}^*},$$

où

$$\mathbf{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} = (\mathbf{div}^{\mathfrak{M}} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}).$$

Grâce à ces définitions d'opérateurs discrets, nous pouvons désormais définir les champs de vecteurs de déformation et de divergence dans  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$ .

**Définition 5.3.3 (Tenseur discret des déformations)**

On définit le tenseur discret des déformations  $\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}}$  de  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$  pour un champ de vecteurs  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$  par

$$\mathbb{D}^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{\nabla^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + (\nabla^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})^T}{2} \quad \forall \mathbf{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}. \quad (5.20)$$

**Définition 5.3.4 (Tenseur discret de divergence)**

On définit le tenseur discret de divergence  $\mathbb{D}iv^{\tilde{\mathcal{D}}}$  de  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$  pour un champ de vecteurs  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$  par

$$\mathbb{D}iv^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \mathbf{div}^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \text{ Id} = \text{tr}(\nabla^{\mathbf{D}_{K_s}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \text{ Id} \quad \forall \mathbf{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}. \quad (5.21)$$

## 5.4 Relation de Green discrète

Les opérateurs construits précédemment sont en dualité discrète, c'est-à-dire qu'il existe une formule de Green discrète, identique à la formule continue, qui lie la divergence par volume au gradient par arête.

### **Théorème 5.4.1 (Formule de Green)**

Soit la famille de matrices  $\xi^{\tilde{\mathcal{D}}}$  qui satisfait la condition de conservation aux interfaces primales suivante : pour tout  $s = K \cap L$

$$\xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{n}_{Ks} = \xi^{\text{D}_{Ls}} \mathbf{n}_{Ks}.$$

Soit  $\mathbf{u}^\tau$  un vecteur de  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$ . Alors la relation de Green discrète s'écrit

$$\llbracket \text{div}^\tau \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} = - \left( \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\tilde{\mathcal{D}}} + \langle \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{n}, \gamma(\mathbf{u}^\tau) \rangle_{\Gamma}, \quad (5.22)$$

où l'opérateur trace  $\gamma : (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}} \mapsto \gamma(\mathbf{u}^\tau) = (\gamma_s(\mathbf{u}^\tau))_{s \in \mathcal{E}^b}$  est défini par

$$\gamma_s(\mathbf{u}^\tau) = \frac{2\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_1^{\text{K}s} + \mathbf{u}_2^{\text{K}s}}{4}, \quad (5.23)$$

où  $\mathbf{u}_s$  est la valeur intervenant dans  $\nabla^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau$ .

**Démonstration :** La condition de conservation est primordiale pour éliminer les inconnues intermédiaires discrètes en chaque arête interne et en chaque arête de bord de Neumann. On pose  $\mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{u}_1^{\text{K}s}$ . Soit  $\xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$  une famille de matrices satisfaisant la condition de conservation de la Définition 5.5.1. Soit  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  une famille de vecteurs. La relation (5.10) nous donne

$$\begin{aligned} \llbracket \text{div}^\tau \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \text{div}^K \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \mathbf{u}_K + \frac{1}{2} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} |K^*| \text{div}^{K^*} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \mathbf{u}_{K^*} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \left( \frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} \xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks} \right) \cdot \mathbf{u}_K \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} |K^*| \left( \frac{1}{|K^*|} \sum_{K,s,i \setminus \mathbf{x}_{K^*} = \mathbf{x}_i^{\text{K}s}} \xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_i^{\text{K}s} \right) \cdot \mathbf{u}_{K^*} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^{*b}} |K^*| \left( \frac{1}{|K^*|} \sum_{s \in \partial K^* \cap \partial \Omega} \xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks,1} \right) \cdot \mathbf{u}_{K^*}. \end{aligned}$$

On réorganise la somme sur les volumes primaux et duaux en une somme sur les demi diamants, en utilisant les correspondances entre volumes primaux et duaux et demi diamants. Grâce aux définitions des vecteurs normaux données en (5.7) et (5.8), on a

$$\begin{aligned} \llbracket \text{div}^\tau \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{D}_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} (\xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks}) \cdot \mathbf{u}_K \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\text{D}_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} (\xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_1^{\text{K}s}) \cdot (\mathbf{u}_1^{\text{K}s} - \mathbf{u}_2^{\text{K}s}) + \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{i=1}^2 (\xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks,i}) \cdot \mathbf{u}_i^{\text{K}s}. \end{aligned}$$

D'après la continuité de la composante normale de  $\xi^{\tilde{\mathcal{D}}}$  à travers l'interface du maillage primal interne  $s \in \mathcal{E}^{\text{int}}$ , et en utilisant la relation (A.1b), on peut réécrire la somme précédente en introduisant les inconnues intermédiaires aux arêtes

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{div}^T \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^\tau]]_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} (\xi^{D_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks}) \cdot (\mathbf{u}_K - \mathbf{u}_s) + \frac{1}{2} \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}^b} (\xi^{D_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks}) \cdot \mathbf{u}_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} (\xi^{D_{Ks}} \mathbf{N}_1^{Ks}) \cdot (\mathbf{u}_1^{Ks} - \mathbf{u}_2^{Ks}) + \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{i=1}^2 (\xi^{D_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks,i}) \cdot \mathbf{u}_i^{Ks} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \xi^{D_{Ks}} : \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{Ks} + (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) \otimes \mathbf{N}_1^{Ks} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathcal{E}} \xi^{D_{Ks}} : \left( \mathbf{u}_s \otimes (\mathbf{N}_{Ks,1} + \mathbf{N}_{Ks,2}) + \mathbf{u}_1^{Ks} \otimes \mathbf{N}_{Ks,1} + \mathbf{u}_2^{Ks} \otimes \mathbf{N}_{Ks,2} \right).
\end{aligned}$$

La relation (5.8) nous permet d'affirmer que  $\mathbf{N}_{Ks,1} = \mathbf{N}_{Ks,2} = \frac{\mathbf{N}_{Ks}}{2}$ . Ainsi, d'après la définition du gradient par demi diamant (5.13), celle de l'opérateur trace (5.23) et celle des produits scalaires (5.11) et (5.12), on a bien

$$[[\mathbf{div}^T \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^\tau]]_{\mathcal{T}} = -\left( \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\tilde{\mathcal{D}}} + \langle \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{n}, \gamma(\mathbf{u}^\tau) \rangle_{\Gamma}$$

ce qui achève la démonstration. ■

## 5.5 Condition de continuité à travers les arêtes

Les méthodes volumes finis sont basées sur une écriture conservative des flux à travers les discontinuités du maillage. La méthode DDFV n'échappe pas à cette règle : nous devons traduire la continuité au niveau discret de la composante normale du tenseur des contraintes.

### Définition 5.5.1 (*Condition de continuité*)

Soit  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  une arête interne. La condition de continuité s'écrit

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{Ks} = \sigma^{D_{Ls}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{Ks}. \quad (5.24)$$

#### 5.5.1 Expression des inconnues intermédiaires

La condition de conservation du flux de la solution discrète à travers chaque interface du maillage primal énoncée par la Définition 5.5.1 introduit des équations supplémentaires, qui vont nous permettre d'éliminer localement les inconnues intermédiaires  $\mathbf{u}_s$ . On va les exprimer en fonction des inconnues principales  $\mathbf{u}^\tau$ , des coefficients de Lamé constants par volume primal et des paramètres du maillage. La Définition 5.5.1 de conservation des flux à travers les interfaces du maillage primal permet de tirer une expression des inconnues auxiliaires  $\mathbf{u}_s$  sur les arêtes internes et les arêtes du bord de Dirichlet à l'aide des matrices discrètes (B.1)-(B.6). Nous n'avons pas besoin de l'expression de  $\mathbf{u}_s$  sur les arêtes du bord de Neumann.

### Théorème 5.5.1 (*Expression des inconnues aux arêtes*)

1. Pour toute arête interne  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$ , il existe un unique  $\mathbf{u}_s$ , dépendant uniquement des inconnues principales  $\mathbf{u}^\tau$ , des coefficients de Lamé constants par volume primal  $(\lambda_K, \mu_K)$  et des paramètres du maillage, qui satisfait l'équation (5.24). Son

expression est

$$\mathbf{u}_s = \beta_{\text{KL}}^{-1} (\beta_{\text{L}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{L}} + \beta_{\text{K}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{K}} - \beta_{\text{1}}^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}})). \quad (5.25)$$

2. Pour toute arête de bord  $s \in \mathcal{E}^{bd}$ , l'inconnue auxiliaire  $\mathbf{u}_s$  est éliminée via la condition de bord de Dirichlet. Son expression est

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s). \quad (5.26)$$

**Démonstration:** Tout comme au chapitre Diamant 2d en Proposition 3.3.1, formule (3.16), les flux normaux du tenseur des contraintes discret s'expriment à l'aide des matrices élémentaires (B.1)-(B.6)

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{D}_{\text{Ks}}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{\text{Ks}} &= \beta_{\text{K}}^{\text{s}} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{K}}) + \beta_{\text{1}}^{\text{Ks}} (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}}) \\ \sigma^{\text{D}_{\text{Ls}}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{\text{Ls}} &= \beta_{\text{L}}^{\text{s}} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{L}}) + \beta_{\text{1}}^{\text{Ls}} (\mathbf{u}_2^{\text{Ls}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ls}}) \end{aligned}$$

La condition de continuité (5.24) se traduit alors en

$$\beta_{\text{K}}^{\text{s}} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{K}}) + \beta_{\text{1}}^{\text{Ks}} (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}}) = -\beta_{\text{L}}^{\text{s}} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{L}}) + \beta_{\text{1}}^{\text{Ls}} (\mathbf{u}_2^{\text{Ls}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ls}}),$$

soit

$$(\beta_{\text{K}}^{\text{s}} + \beta_{\text{L}}^{\text{s}}) \mathbf{u}_s = \beta_{\text{L}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{L}} + \beta_{\text{K}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{K}} - (\beta_{\text{1}}^{\text{Ks}} - \beta_{\text{1}}^{\text{Ls}}) (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}})$$

ce qui correspond à l'expression (5.25) en utilisant le résultat sur l'inversibilité de  $\beta_{\text{KL}}$  en Proposition B.1.1. ■

### 5.5.2 Expression du gradient par volume diamant

Les inconnues discrètes auxiliaires  $\mathbf{u}_s$  s'éliminent en appliquant la condition de conservation (5.24) ou les conditions de bord. Nous allons montrer qu'il est ainsi possible d'obtenir l'expression du tenseur des contraintes par diamant entier au lieu de son expression par demi diamant.

#### **Théorème 5.5.2 (Expression des contraintes par volumes diamants)**

Pour toute arête interne  $s = \text{K} \cap \text{L} \in \mathcal{E}^{int}$ , si on pose  $\text{D}_s = \text{D}_{\text{Ks}} \cup \text{D}_{\text{Ls}}$ , la relation

$$\sigma^{\text{D}_s}(\mathbf{u}^\tau) = \frac{|\text{D}_{\text{Ks}}|}{|\text{D}_s|} \sigma^{\text{D}_{\text{Ks}}}(\mathbf{u}^\tau) + \frac{|\text{D}_{\text{Ls}}|}{|\text{D}_s|} \sigma^{\text{D}_{\text{Ls}}}(\mathbf{u}^\tau), \quad (5.27)$$

conduit à l'expression (5.29) du tenseur des contraintes par volume diamant qui ne dépend que des inconnues discrètes  $\mathbf{u}^\tau$ , des coefficients de Lamé par volume primal et des paramètres du maillage  $\mathcal{T}$ .

**Démonstration:** On remplace  $\mathbf{u}_s$  par l'expression donnée par le Théorème 5.5.1. Ainsi

$$\begin{aligned} \nabla^{\text{D}_{\text{Ks}}} \mathbf{u}^\tau &= \frac{1}{2|\text{D}_{\text{Ks}}|} \left[ (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{K}}) \otimes \mathbf{N}_{\text{Ks}} + (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}}) \otimes \mathbf{N}_1^{\text{Ks}} \right] \\ &= \frac{1}{2|\text{D}_{\text{Ks}}|} \left[ \beta_{\text{KL}}^{-1} \left( \beta_{\text{L}}^{\text{s}} \mathbf{u}_{\text{L}} + \underbrace{(\beta_{\text{K}}^{\text{s}} - \beta_{\text{KL}})}_{-\beta_{\text{L}}^{\text{s}}} \right) \mathbf{u}_{\text{K}} \right] \otimes \mathbf{N}_{\text{Ks}} \\ &\quad - \beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_{\text{1}}^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}}) \otimes \mathbf{N}_{\text{Ks}} + (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}}) \otimes \mathbf{N}_1^{\text{Ks}} \Big] \\ &= \frac{1}{2|\text{D}_{\text{Ks}}|} \left[ \beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_{\text{L}}^{\text{s}} (\mathbf{u}_{\text{L}} - \mathbf{u}_{\text{K}}) \otimes \mathbf{N}_{\text{Ks}} \right. \\ &\quad \left. - \beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_{\text{1}}^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}}) \otimes \mathbf{N}_{\text{Ks}} + (\mathbf{u}_2^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_1^{\text{Ks}}) \otimes \mathbf{N}_1^{\text{Ks}} \right]. \end{aligned}$$

En raisonnant cette fois sur les demi diamants associés au volume L, on obtient que

$$\begin{aligned}
\nabla^{\text{D}_{L_s}} \mathbf{u}^\tau &= \frac{1}{2|\text{D}_{L_s}|} \left[ (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_s) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \otimes (-\mathbf{N}_1^{\text{L}_s}) \right] \\
&= \frac{1}{2|\text{D}_{L_s}|} \left[ \beta_{\text{KL}}^{-1} \left( \underbrace{(\beta_{\text{KL}} - \beta_L^s)}_{\beta_K^s} \mathbf{u}_L - \beta_K^s \mathbf{u}_K \right) \otimes \mathbf{N}_{K_s} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_1^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \otimes (-\mathbf{N}_1^{\text{L}_s}) \right] \\
&= \frac{1}{2|\text{D}_{L_s}|} \left[ \beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_K^s (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} \right. \\
&\quad \left. + \beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_1^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \otimes (-\mathbf{N}_1^{\text{L}_s}) \right].
\end{aligned} \tag{5.28}$$

On pratique de même pour les expressions de  $(\nabla^{\text{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T$ ,  $(\nabla^{\text{D}_{L_s}} \mathbf{u}^\tau)^T$ ,  $\text{div}^{\text{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau$  et  $\text{div}^{\text{D}_{L_s}} \mathbf{u}^\tau$ . Par suite, comme

$$\begin{aligned}
\sigma^{\text{D}_s}(\mathbf{u}^\tau) &= \frac{|\text{D}_{K_s}|}{|\text{D}_s|} \left[ \mu_K (\nabla^{\text{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{\text{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T) + \lambda_K \text{tr}(\nabla^{\text{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right] \\
&\quad + \frac{|\text{D}_{L_s}|}{|\text{D}_s|} \left[ \mu_L (\nabla^{\text{D}_{L_s}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{\text{D}_{L_s}} \mathbf{u}^\tau)^T) + \lambda_L \text{tr}(\nabla^{\text{D}_{L_s}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right].
\end{aligned}$$

on obtient comme expression pour le tenseur des contraintes discret

$$\begin{aligned}
2|\text{D}_s| \sigma^{\text{D}_s}(\mathbf{u}^\tau) &= \left[ \beta_{\text{KL}}^{-1} (\mu_L \beta_K^s + \mu_K \beta_L^s) (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} \right. \\
&\quad \left. + (\mu_L - \mu_K) \beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_1^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \otimes \mathbf{N}_{K_s} \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \otimes (\mu_K \mathbf{N}_1^{\text{K}_s} - \mu_L \mathbf{N}_1^{\text{L}_s}) \right] \\
&\quad + \left[ \mathbf{N}_{K_s} \otimes \beta_{\text{KL}}^{-1} (\mu_L \beta_K^s + \mu_K \beta_L^s) (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mu_L - \mu_K) \beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_1^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \right. \\
&\quad \left. + (\mu_K \mathbf{N}_1^{\text{K}_s} - \mu_L \mathbf{N}_1^{\text{L}_s}) \otimes (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \right] \\
&\quad + \left[ (\beta_{\text{KL}}^{-1} (\lambda_L \beta_K^s + \lambda_K \beta_L^s) (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s}) \right. \\
&\quad \left. + (\lambda_L - \lambda_K) (\beta_{\text{KL}}^{-1} \beta_1^{\text{KL}} (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s})) \cdot \mathbf{N}_{K_s} \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{u}_2^{\text{K}_s} - \mathbf{u}_1^{\text{K}_s}) \cdot (\lambda_K \mathbf{N}_1^{\text{K}_s} - \lambda_L \mathbf{N}_1^{\text{L}_s}) \right] \text{Id}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

ce qui achève la démonstration. ■

### Remarque 5.5.1

Dans l'expression (5.29), on remarque que si les coefficients de Lamé sont égaux de part et d'autre des arêtes du maillage primal, on retrouve l'expression du tenseur des contraintes à coefficients constants.

## 5.6 Inégalité de Korn discrète

L'inégalité de Korn est utile pour montrer que le schéma numérique est stable et bien posé. Elle affirme que l'on peut contrôler le champ de déplacements d'une surface (mesuré en une norme appropriée de type Sobolev) par les tenseurs linéarisés des déformations.

### Théorème 5.6.1 (Inégalité de Korn pour le problème de Dirichlet pur)

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  tel que  $\mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{0}$  pour tout  $K^* \in \mathfrak{M}^{*b}$ . Alors

$$\|\nabla^{\hat{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\hat{\mathcal{D}}} \leq \sqrt{2} \|\mathbb{D}^{\hat{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\hat{\mathcal{D}}}. \tag{5.30}$$

L'inégalité de Korn a été établie par Krell [69] pour des conditions aux bord de Dirichlet pour  $\Gamma_N = \emptyset$ . Le détail de la démonstration est fourni en Annexe D.1.

**Remarque 5.6.1 (Inégalité de Korn pour le problème mixte)**

La preuve de l'inégalité discrète pour des conditions de bord mixtes est à notre connaissance un problème ouvert. Si  $\Gamma_N \neq \emptyset$ , nous admettons que l'inégalité reste vraie avec une constante différente de  $\sqrt{2}$ . Dans la suite pour l'étude du caractère bien posé, la stabilité et l'estimation d'erreur, on conserve, dans les preuves, les contributions du bord de Neumann. Cependant, le résultat n'est établi que pour les problèmes de Dirichlet pur en raison de l'inégalité de Korn.

## 5.7 Schéma numérique et stabilité

### 5.7.1 Description du schéma et caractère bien posé

Pour obtenir le schéma numérique, nous intégrons deux fois le problème de l'élasticité, à la fois sur le maillage primal et sur le maillage dual. Tout se passe donc comme s'il s'agissait de résoudre deux fois le problème de l'élasticité. En réalité, c'est le maillage diamant qui permet de coupler le jeu d'inconnues  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  aux centres et aux sommets du maillage primal. Les inconnues auxiliaires situées aux interfaces du maillage primal assurent la condition de conservation 5.24.

**Théorème 5.7.1**

Le schéma numérique consiste à trouver  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  tel que

$$\begin{cases} -\mathbf{div}^K(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)) = \mathbf{f}^K & \forall K \in \mathfrak{M}, \\ -\mathbf{div}^{K^*}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)) = \mathbf{f}^{K^*} & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*b_N}, \\ \mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{K^*}) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*b_D}, \\ \sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \forall s \in \mathcal{E}^{b_N}. \end{cases} \quad (5.31)$$

avec

$$\mathbf{f}^{\mathfrak{M}} = (\mathbf{f}^K)_{K \in \mathfrak{M}} = \left( \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)_{K \in \mathfrak{M}}, \quad \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{f}^{K^*})_{K^* \in \mathfrak{M}^*} = \left( \frac{1}{|K^*|} \int_{K^*} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)_{K^* \in \mathfrak{M}^*},$$

et où il est sous entendu que la condition de Dirichlet est imposée sur le bord des mailles primales afin de définir le gradient et donc le tenseur des contraintes discret. Lorsque  $\Gamma_N = \{\emptyset\}$ , ce schéma est bien posé et possède une unique solution  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$ .

Avant de prouver le Théorème 5.7.1, on va énoncer un résultat sur les produits scalaires utile pour la suite.

**Lemme 5.7.1**

La définition (5.11) du produit scalaire sur les demi volumes diamants nous permet d'écrire que pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  et pour tout  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\begin{cases} (\mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) = (\mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) \\ (\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) = (\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) \\ (\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) = 2(\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau). \end{cases} \quad (5.32)$$

La preuve de ces égalités est faite pour le schéma diamant, Lemme 3.5.1.

### Convention 5.7.1

Soit  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$ . On note par convention

$$\begin{aligned} \sqrt{2\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}} \mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau &= \left( \sqrt{2\mu_K} \mathbb{D}^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\mathbb{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}}, \\ \sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}}}{2}} \mathbb{D}iv^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau &= \left( \sqrt{\frac{\lambda_K}{2}} \mathbb{D}iv^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\mathbb{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

### Preuve du Théorème 5.7.1

**Démonstration :** Le système (5.31) est un système linéaire de dimension  $\#\mathfrak{M} + \#\mathfrak{M}^*$ . Pour prouver l'existence et l'unicité, nous allons supposer que le second membre  $\mathbf{f}^\mathcal{T} = (\mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*})$  est nul et que les conditions aux bords sont homogènes :  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ . Dans ces conditions, le système consiste à trouver  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  tel que

$$\begin{cases} -\mathbf{div}^K(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)) = \mathbf{0} & \forall K \in \mathfrak{M}, \\ -\mathbf{div}^{K^*}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)) = \mathbf{0} & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*b_N}, \\ \mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{0} & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*b_D}, \\ \sigma^{\mathbb{D}_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \mathbf{0} & \forall s \in \mathcal{E}^{b_N}. \end{cases} \quad (5.34)$$

D'après la définition du produit scalaire (5.10), on a donc

$$\llbracket -\mathbf{div}^\mathcal{T}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)), \mathbf{u}^\tau \rrbracket_\mathcal{T} = 0.$$

Comme  $\xi^{\tilde{\mathcal{D}}} = \sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)$  satisfait bien la relation de compatibilité (5.24), la formule de Green discrète donne

$$\llbracket -\mathbf{div}^\mathcal{T}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)), \mathbf{u}^\tau \rrbracket_\mathcal{T} = \left( \sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\tilde{\mathcal{D}}} - \langle \sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) \cdot \mathbf{n}, \gamma(\mathbf{u}^\tau) \rangle_\Gamma.$$

En raison des conditions de bord que satisfait  $\mathbf{u}^\tau$ , on a  $\langle \sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) \cdot \mathbf{n}_{K_s}, \gamma_s(\mathbf{u}^\tau) \rangle_\Gamma = 0$ . Le caractère symétrique du tenseur  $\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau$ , ainsi que les relations données en (5.32)

$$0 = \left( \sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau) : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\tilde{\mathcal{D}}} = \|\sqrt{2\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}} \mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + \|\sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}}}{2}} \mathbb{D}iv^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2.$$

L'inégalité de Korn (5.30) implique

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}} = 0.$$

La condition au bord implique que  $\mathbf{u}^\tau = \mathbf{0}$ , ce qui montre que le système est bien posé et admet une unique solution. ■

### 5.7.2 Stabilité du schéma DDFV

A présent, nous allons énoncer un résultat de stabilité du schéma numérique (5.31).

#### **Théorème 5.7.2 (Stabilité)**

Soit  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  solution du système (5.34) avec des conditions de bord homogènes. Alors il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq C \|\mathbf{f}^\mathcal{T}\|_\mathcal{T}^2. \quad (5.35)$$

**Démonstration :** La formule de Green (5.4.1) écrite pour des conditions de bord homogènes donne

$$\llbracket -\operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^{\tau})), \mathbf{u}^{\tau} \rrbracket_{\mathcal{T}} = -\left(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^{\tau}) : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\right)_{\tilde{\mathcal{D}}}.$$

Grâce à la Convention (5.7.1) et aux relations (5.32), on a

$$\llbracket -\operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^{\tau})), \mathbf{u}^{\tau} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \|\sqrt{2\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}} \mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + \|\sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}}}{2}} \operatorname{Div}^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2.$$

D'autre part, étant donné que  $\mathbf{u}^{\tau}$  satisfait le système d'équations (5.31), on a

$$\|\sqrt{2\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}} \mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + \|\sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}}}{2}} \operatorname{Div}^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 = \llbracket \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \mathbf{u}^{\tau} \rrbracket_{\mathcal{T}}.$$

On peut minorer par la borne inférieure des coefficients de Lamé, de sorte que

$$2\underline{\mu} \|\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + \frac{\underline{\lambda}}{2} \|\operatorname{Div}^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq \llbracket \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \mathbf{u}^{\tau} \rrbracket_{\mathcal{T}}.$$

Par l'inégalité de Korn (5.6.1), il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$C_1\underline{\mu} \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + \frac{\underline{\lambda}}{2} \|\operatorname{Div}^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq \llbracket \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \mathbf{u}^{\tau} \rrbracket_{\mathcal{T}}.$$

et par suite

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq \frac{1}{C_1\underline{\mu}} \llbracket \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \mathbf{u}^{\tau} \rrbracket_{\mathcal{T}}.$$

L'inégalité de Young implique que pour tout  $\epsilon > 0$

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq \frac{1}{C_1\underline{\mu}} \left( \epsilon \|\mathbf{f}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}^2 + \frac{\|\mathbf{u}^{\tau}\|_{\mathcal{T}}^2}{\epsilon} \right).$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré discrète donnée en Proposition 5.8.2, il existe une constante  $C > 0$  dépendant uniquement de la régularité du maillage telle que

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq \frac{C}{\underline{\mu}} \left( \epsilon \|\mathbf{f}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}^2 + \frac{\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2}{\epsilon} \right).$$

Au final, en choisissant  $\epsilon$  assez grand de sorte que  $1 - \frac{C}{\underline{\mu}\epsilon} > 0$ , on a prouvé qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé, telle que

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq C \|\mathbf{f}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}}^2$$

ce qui achève la démonstration. ■

## 5.8 Convergence et estimation d'erreur

### **Théorème 5.8.1** (*Estimation d'erreur*)

En supposant que  $\mathbf{u}$  la solution exacte du problème continu est dans  $W^{2,p}(\Omega)$  pour  $p > 2$ , et que  $\mathbf{u}^{\tau} \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  est solution du système (5.31), alors il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage, des coefficients de Lamé et de  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p > 2$ , telle que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2 + \|\nabla\mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^{\tau}\|_2 \leq C \operatorname{size}(\mathcal{T}). \quad (5.36)$$

On précise que la norme de la différence entre la valeur continue et la valeur discrète est définie par

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2^2 &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathfrak{M}} \int_K \|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_K\|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} \int_{K^*} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{K^*}\|^2 d\mathbf{x} \\ \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \int_{D_{K_s}} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) : (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

La preuve de ce théorème nécessite plusieurs définitions et résultats préalables. Nous allons d'abord définir des estimateurs d'erreur sur les arêtes du maillage, puis les évaluer.

**Démonstration:** Soit  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  est solution du système (5.31). On définit la quantité  $\mathbf{e}^\tau$  qui représente l'erreur entre la valeur discrète du déplacement et le projeté de sa valeur continue sur le maillage

$$\mathbf{e}^\tau = \mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau \quad (5.37)$$

où l'opérateur de projection  $\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u}$  est donné par

$$\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}_K) & \forall K \in \mathfrak{M} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}_{K^*}) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*b_N} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_{K^*}) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*b_D}. \end{cases} \quad (5.38)$$

### Remarque 5.8.1

Pour tout  $s = K \cap L$  on a toujours la relation de conservation

$$\sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u}) \mathbf{n}_{K_s} = \sigma^{D_{L_s}}(\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u}) \mathbf{n}_{K_s}, \quad (5.39)$$

ce qui entraîne

$$\widehat{\mathbf{u}}_s = \beta_{KL}^{-1} \left( \beta_L^s \mathbf{u}(\mathbf{x}_L) + \beta_K^s \mathbf{u}(\mathbf{x}_K) - \beta_1^{Ks} (\mathbf{u}(\mathbf{x}_2^{Ks}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1^{Ks})) \right).$$

Pour tout  $s \in \mathcal{E}^{b_N}$  on a

$$\widehat{\mathbf{u}}_s = \mathbf{u}(\mathbf{x}_K) - (\beta_K^s)^{-1} \left( \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \beta_1^{Ks} (\mathbf{u}(\mathbf{x}_2^{Ks}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1^{Ks})) \right).$$

de telle sorte que

$$\sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u}) \mathbf{n}_{K_s} = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.40)$$

Regardons dans un premier temps les volumes  $K \in \mathfrak{M}$ . Sachant que  $\mathbf{f}^K = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , et que le système continu impose  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  on a

$$\mathbf{div}^K(\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{u}^\tau)) = \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (5.41)$$

De ce fait,

$$\begin{aligned} |K| \mathbf{div}^K(\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbf{e}^\tau)) &= |K| \mathbf{div}^K(\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}}(\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u})) - \int_K \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{s \in \partial K} \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u}) \mathbf{N}_{K_s} - \sum_{s \in \partial K} \int_s \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \\ &= \sum_{s \in \partial K} \int_s \left( \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^\mathcal{T} \mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En posant

$$|\mathbf{K}|\mathbf{R}_{\mathbf{K}} = \sum_{s \in \partial \mathbf{K}} \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{\mathbf{K}s} d\mathbf{x},$$

l'équation précédente s'écrit

$$-\operatorname{div}^{\mathbf{K}}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^{\tau})) = \mathbf{R}_{\mathbf{K}}. \quad (5.42)$$

On obtient de la même façon en raisonnant sur les volumes duaux que pour tout  $\mathbf{K}^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*bN}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}^*| \operatorname{div}^{\mathbf{K}^*}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^{\tau})) &= |\mathbf{K}^*| \operatorname{div}^{\mathbf{K}^*}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) - \int_{\mathbf{K}^*} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{s^* \in \partial \mathbf{K}^*} \left[ \sigma^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}^*s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \mathbf{N}_1^{\mathbf{K}^*s} - \int_{s^*} \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_1^{\mathbf{K}^*s} d\mathbf{x} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{s \in \partial \mathbf{K}^{*bN}} \left[ \sigma^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}^*s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \mathbf{N}_{\mathbf{K}^*s} - \int_s \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{\mathbf{K}^*s} d\mathbf{x} \right] \\ &= -|\mathbf{K}^*| \mathbf{R}_{\mathbf{K}^*}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation précédente s'écrit

$$-\operatorname{div}^{\mathbf{K}^*}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^{\tau})) = \mathbf{R}_{\mathbf{K}^*}. \quad (5.43)$$

Enfin, les conditions au bord se réduisent à

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbf{K}^*} &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{K}^* \in \mathfrak{M}^{*bD} \\ \sigma^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}^*s}}(\mathbf{e}^{\tau}) \mathbf{n}_{\mathbf{K}^*s} &= \mathbf{0} \quad \forall s \in \mathcal{E}^{bN}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

On définit la quantité

$$\mathbf{R}_{\tau} = (\mathbf{R}_{\mathbf{K}}, \mathbf{R}_{\mathbf{K}^*})_{\mathbf{K} \in \mathfrak{M}, \mathbf{K}^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*bN}}.$$

On observe ainsi que la quantité  $\mathbf{e}^{\tau}$  obéit à un système d'équations semblable à celui du déplacement  $\mathbf{u}^{\tau}$ , et qui s'écrit : trouver  $\mathbf{e}^{\tau} \in (\mathbb{R}^2)^{\# \mathcal{T}}$  tel que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}^{\mathbf{K}}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^{\tau})) = \mathbf{R}_{\mathbf{K}} & \forall \mathbf{K} \in \mathfrak{M}, \\ -\operatorname{div}^{\mathbf{K}^*}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^{\tau})) = \mathbf{R}_{\mathbf{K}^*} & \forall \mathbf{K}^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*bN}, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{K}^*} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{K}^* \in \mathfrak{M}^{*bD}, \\ \sigma^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}^*s}}(\mathbf{e}^{\tau}) \mathbf{n}_{\mathbf{K}^*s} = \mathbf{0} & \forall s \in \mathcal{E}^{bN}. \end{cases} \quad (5.45)$$

La formule de Green implique que

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{R}_{\tau}, \mathbf{e}^{\tau} \rrbracket_{\tau} &= \llbracket -\operatorname{div}^{\tau}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^{\tau})), \mathbf{e}^{\tau} \rrbracket_{\tau} \\ &= \left( \sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^{\tau}) : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} \right)_{\tilde{\mathcal{D}}}, \end{aligned}$$

puisque les conditions de bord sont nulles. Grâce aux notations données par la Convention 5.7.1 et aux relations (5.32), on obtient que

$$\llbracket \mathbf{R}_{\tau}, \mathbf{e}^{\tau} \rrbracket_{\tau} = \|\sqrt{2\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}} \mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + \|\sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}}}{2}} \mathbb{D} \operatorname{div}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2.$$

En appliquant l'inégalité de Korn (5.30), et étant donné que les coefficients de Lamé sont minorés, on en déduit qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$2\mu C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbb{D} \operatorname{div}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq \llbracket \mathbf{R}_{\tau}, \mathbf{e}^{\tau} \rrbracket_{\tau}. \quad (5.46)$$

A présent, on cherche à évaluer la quantité  $\llbracket \mathbf{R}_{\tau}, \mathbf{e}^{\tau} \rrbracket_{\tau} = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b$ , où on note pour la suite

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{K} \in \mathfrak{M}} \sum_{s \in \partial \mathbf{K}} \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{\mathbf{K}s} d\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{K}} \\ \mathbf{R}_b &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{K}^* \in \mathfrak{M}^*} \sum_{\mathbf{K}, s, i \mid \mathbf{x}_{\mathbf{K}^*} = \mathbf{x}_i^{\mathbf{K}s}} \left[ \int_{s^*} \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}^*s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_i^{\mathbf{K}^*s} d\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{K}^*} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathcal{E}^b} \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\mathbf{D}_{\mathbf{K}^*s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{\mathbf{K}^*s} d\mathbf{x} \right] \cdot \frac{\mathbf{e}_1^{\mathbf{K}s} + \mathbf{e}_2^{\mathbf{K}s}}{2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

### Terme $\mathbf{R}_a$

On réorganise la somme sur les volumes primaux  $K \in \mathfrak{M}$  en une somme sur les demi diamants  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ . On sait que la donnée par arête  $\mathbf{e}_s = \widehat{\mathbf{u}}_s - \mathbf{u}_s$  est éliminée algébriquement pour toute arête interne par les relations de conservation (5.39) et (5.24). Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &= \frac{1}{2} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \left[ \int_s (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^b} \left[ \int_s (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{e}_s. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la condition de bord de Dirichlet impose  $\mathbf{e}_s = \mathbf{0}$ , et la condition de bord de Neumann se traduit par  $\sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \mathbf{N}_{K_s} = \int_s \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{K_s}$ . On obtient finalement

$$\mathbf{R}_a = \frac{1}{2} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \left[ \int_s (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_s) \quad (5.48)$$

### Terme $\mathbf{R}_b$

En réorganisant les sommes sur les demi diamants internes et de bord, le terme  $\mathbf{R}_b$  devient

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b &= \frac{1}{2} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \left[ \int_{s^*} (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_1^{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_1^{K_s} - \mathbf{e}_2^{K_s}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{s \in \mathcal{E}^b} \int_s (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_1^{K_s} d\mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{e}_1^{K_s} + \mathbf{e}_2^{K_s}}{2}. \end{aligned}$$

De même que pour  $\mathbf{R}_a$  les termes de bord sont nuls, et finalement

$$\mathbf{R}_b = \frac{1}{2} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \left[ \int_{s^*} (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_1^{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_1^{K_s} - \mathbf{e}_2^{K_s}). \quad (5.49)$$

En utilisant les propriétés géométriques du volume diamant, on peut exprimer les quantités  $\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_s$  et  $\mathbf{e}_1^{K_s} - \mathbf{e}_2^{K_s}$  en fonction de leur gradient. L'expression du gradient par demi volume diamant est donnée par la Définition (5.3.1). Comme illustré en Figure 5.8.1, on pose  $\mathbf{t}_{K_s} = (-\mathbf{n}_1^{K_s})^\perp$  et  $\mathbf{t}_1^{K_s} = (\mathbf{n}_{K_s})^\perp$ . La régularité du maillage définie en section 5.2.5 implique qu'il existe une constante  $\alpha_0 > 0$ , telle que  $\min_{K,s,s^*} (|\mathbf{n}_{K_s} \cdot \mathbf{t}_{K_s}|, |\mathbf{n}_1^{K_s} \cdot \mathbf{t}_1^{K_s}|) \geq \alpha_0$ , de sorte que la famille de vecteurs définie précédemment forme une base de  $(\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$ . Pour tout demi volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ , on a

$$\begin{cases} (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}) \mathbf{t}_{K_s} &= -\frac{1}{2|D_{K_s}|} (\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_s) |s| (\mathbf{n}_{K_s} \cdot \mathbf{t}_{K_s}), \\ (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}) \mathbf{t}_1^{K_s} &= -\frac{1}{2|D_{K_s}|} (\mathbf{e}_1^{K_s} - \mathbf{e}_2^{K_s}) |s^*| (\mathbf{n}_1^{K_s} \cdot \mathbf{t}_1^{K_s}). \end{cases} \quad (5.50)$$

On va par la suite utiliser les notations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{K_s} &= \frac{1}{|s|} \int_s (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \quad \forall s \in \mathcal{E}, \\ \mathbf{R}_{s^*} &= \frac{1}{|s^*|} \int_{s^*} (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_1^{K_s} d\mathbf{x} \quad \forall s^* \in \mathcal{E}^*. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Ainsi, les termes  $\mathbf{R}_a$  et  $\mathbf{R}_b$  s'écrivent

$$\mathbf{R}_a = -\frac{1}{2} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| \mathbf{R}_{K_s} \cdot \frac{2(\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}) \mathbf{t}_{K_s}}{\mathbf{n}_{K_s} \cdot \mathbf{t}_{K_s}} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_b = -\frac{1}{2} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} |D_{K_s}| \mathbf{R}_{s^*} \cdot \frac{2(\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}) \mathbf{t}_1^{K_s}}{\mathbf{n}_1^{K_s} \cdot \mathbf{t}_1^{K_s}}. \quad (5.52)$$

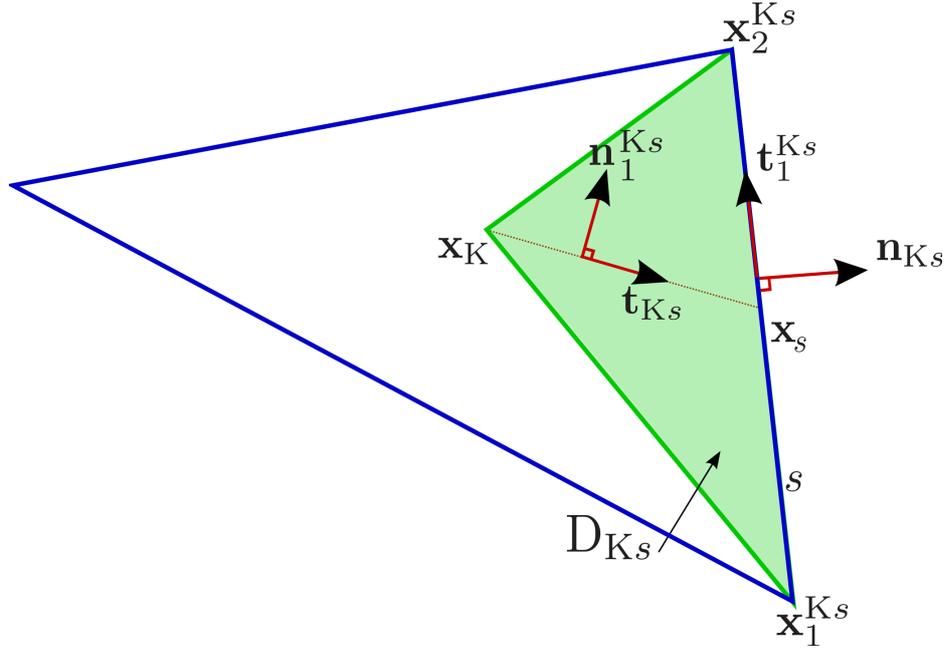


FIGURE 5.8.1 – Une des constructions possibles des vecteurs  $\mathbf{t}_{K_s}$  et  $\mathbf{t}_1^{K_s}$ .

Par Cauchy Schwarz

$$\|\mathbf{R}_a\| \leq C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^T\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \left( \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|\mathbf{R}_b\| \leq C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^T\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \left( \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{s^*}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.53)$$

Finalement, il existe une constante  $C$  dépendant de la régularité du maillage telle que

$$\llbracket \mathbf{R}_\tau, \mathbf{e}^\tau \rrbracket_\tau \leq C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^T\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \left[ \left( \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{s^*}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.54) \quad \blacksquare$$

### 5.8.1 Inégalités de trace et Poincaré

**Proposition 5.8.1** (*Inégalité de trace, voir [44], Lemme 8.1*)

Soient  $p \geq 1$ ,  $K \in \mathfrak{M}$  et  $s \in \partial K$ . Il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage, telle que, pour toute fonction  $\mathbf{v} \in W^{1,p}(D_{K_s})$

$$\left\| \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\|^p \leq \frac{C \text{diam}(D_{K_s})^{p-1}}{|s|} \int_{D_{K_s}} \|\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^p d\mathbf{x} + \frac{C}{|s| \text{diam}(D_{K_s})} \int_{D_{K_s}} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|^p d\mathbf{x} \quad (5.55)$$

**Proposition 5.8.2** (*Inégalité de Poincaré discrète, voir [7], Lemme 3.3*)

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement du diamètre de  $\Omega$  et de la régularité du maillage, telle que, pour toute fonction  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  avec  $\mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{0}$  pour tout  $K^* \in \mathfrak{M}^{*bD}$  et  $\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$  pour tout  $s \in \mathcal{E}^{bD}$ , on a

$$\|\mathbf{u}^\tau\|_{\mathcal{T}} \leq C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}. \quad (5.56)$$

### 5.8.2 Propriétés de l'opérateur de projection

On dispose des trois estimations suivantes sur le gradient du projeté, sur l'erreur du gradient du projeté et sur l'erreur du projeté démontrées pour les deux premières dans [68] et dans [7] pour la dernière.

#### Proposition 5.8.3

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que, pour toute fonction  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p > 2$ , on a

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|^p \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (5.57)$$

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|^p d\mathbf{x} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (5.58)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (5.59)$$

La dernière inégalité est en fait vraie avec  $\|\mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p$  et  $p \geq 1$ .

#### Proposition 5.8.4 (Estimation d'erreur de la divergence projetée)

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe une constante  $C$ , dépendant de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que, pour toute fonction  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p > 2$

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\mathbb{D}iv \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbb{D}iv^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|^p d\mathbf{x} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (5.60)$$

**Démonstration :** Soit  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p > 2$ . On se donne un  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$ . Sachant que  $\mathbb{D}iv \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) \text{Id}$  et que  $\mathbb{D}iv^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) = \text{tr}(\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \text{Id}$ , dès lors d'après la proposition (5.58), il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que pour toute fonction  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p > 2$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\mathbb{D}iv \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbb{D}iv^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|^p d\mathbf{x} &= 2^{\frac{p}{2}} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}))\|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 5.8.3 Fin de preuve : estimation d'erreur

On va à présent donner une estimation de l'erreur pour le déplacement et pour le gradient des déplacements, afin d'achever la preuve du Théorème 5.8.1.

**Démonstration :** Regardons dans un premier temps le terme  $\mathbf{R}_{K_s}$ . On sait que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^p = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left\| \frac{1}{|s|} \int_s (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right\|^p.$$

En utilisant la proposition (5.55), on peut écrire que

$$\begin{aligned} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^p &\leq \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left[ \frac{C \text{diam}(D_{K_s})^{p-1}}{|s|} \int_{D_{K_s}} \left\| \nabla (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \right\|^p d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{|s| \text{diam}(D_{K_s})} \int_{D_{K_s}} \left\| \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right\|^p d\mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (5.61)$$

La régularité du maillage définie en section (5.2.5) nous indique qu'il existe des constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$ , dépendantes du maillage, telles que

$$|D_{K_s}| \frac{\text{diam}(|D_{K_s}|)}{|s|} \leq C_1 \text{size}(\mathcal{T})^2 \quad \text{et} \quad \frac{|D_{K_s}|}{\text{diam}(D_{K_s})|s|} \leq C_2. \quad (5.62)$$

D'une part, on sait que  $\sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})$  est une valeur constante par demi diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$ , ce qui implique que  $\nabla \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ . Il existe ainsi une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage, telle que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \frac{\text{diam}(D_{K_s})^{p-1}}{|s|} \int_{D_{K_s}} \left\| \nabla \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \right\|^p d\mathbf{x} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (5.63)$$

D'autre part

$$\left. \begin{aligned} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \left\| \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right\|^p d\mathbf{x} &\leq \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \left\| \mu(\mathbf{x}) \left( \nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \right\|^p d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \left\| \mu(\mathbf{x}) \left( (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}))^T - \nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})^T \right) \right\|^p d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \left\| \lambda(\mathbf{x}) \left( \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) - \text{tr}(\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \right) \right\|^p d\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (5.64a)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \left\| (\mu(\mathbf{x}) - \mu_{D_{K_s}}) \nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right\|^p d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \left\| (\mu(\mathbf{x}) - \mu_{D_{K_s}}) \nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})^T \right\|^p d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \left\| (\lambda(\mathbf{x}) - \lambda_{D_{K_s}}) \text{tr}(\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})) \right\|^p d\mathbf{x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.64b)$$

Ainsi, si on s'en tient au fait que les coefficients de Lamé sont réguliers ( $C^1$  ou  $W^{1,\infty}$  par exemple) par sous-domaines, à la définition de la norme matricielle, aux relations (5.58) et (5.60) pour (5.64a) ainsi qu'à la relation (5.57) pour (5.64b) il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage et des coefficients de Lamé telle que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{|D_{K_s}|}{|s| \text{diam}(D_{K_s})} \int_{D_{K_s}} \left\| \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right\|^p d\mathbf{x} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (5.65)$$

En réunissant les deux inégalités (5.63) et (5.65), et grâce aux résultats (5.62) sur le maillage, il existe ainsi une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage et des coefficients de Lamé telle que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^p \leq C \text{size}(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p,$$

ce qui implique que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^2, \quad (5.66)$$

Pour ce qui est du terme en  $\mathbf{R}_{s^*}$ , on arrive par les mêmes arguments à montrer qu'il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage et des coefficients de Lamé telle que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{s^*}\|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^2. \quad (5.67)$$

En combinant (5.46) et (5.54), on a

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq \left[ \left( \sum_{\mathbf{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |\mathbf{D}_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{\mathbf{D}_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |\mathbf{D}_{K_s}| \|\mathbf{R}_{s^*}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

et les estimations (5.66) et (5.67) donnent

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq Csize(\mathcal{T}). \quad (5.68)$$

Concluons à présent en donnant une estimation des normes  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2$  et  $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2$ .

**Estimation de  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2$**  D'après la relation (5.59), l'inégalité de Poincaré (5.56) et l'égalité (5.68), on peut écrire que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2 &\leq \|\mathbf{u} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_{\mathcal{T}} \\ &\leq Csize(\mathcal{T}) + \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau})\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \\ &\leq Csize(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

**Estimation de  $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2$**  D'après la proposition (5.58) et l'égalité (5.68), on peut écrire que

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2 &\leq \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|_2 + \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \\ &\leq Csize(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

■

## 5.9 Illustrations numériques

Nous allons à présent illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment par une série de tests numériques. Les trois premiers tests sont comparés à des solutions analytiques, alors que dans les deux derniers tests, on compare les résultats à ceux obtenus par éléments finis. Les maillages utilisés sont de type non structuré.

### 5.9.1 Cas E.1.3 : Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale

Les résultats d'estimations d'erreur sont présentés dans les Tableau 5.9.1 et Tableau 5.9.2 pour les valeurs, et dans la Figure 5.9.2 pour le tracé. On présente également les iso-valeurs obtenues pour chacune des composantes de la solution DDFV en Figure 5.9.1. Comme précédemment, nous utilisons une série de maillages raffinés soit uniformément soit successivement. On compare les différences des réponses DDFV et Exacte dans 3 normes : norme infinie, norme 1 et norme 2. On donne en Figure 5.9.3 les iso-valeurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence de l'erreur pour cette contrainte.

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
204	$1.51 \cdot 10^{-1}$	$1.19 \cdot 10^{-4}$	$2.32 \cdot 10^{-5}$	$2.60 \cdot 10^{-5}$
816	$7.57 \cdot 10^{-2}$	$3.85 \cdot 10^{-5}$	$5.82 \cdot 10^{-6}$	$6.65 \cdot 10^{-6}$
3264	$3.78 \cdot 10^{-2}$	$1.18 \cdot 10^{-5}$	$1.45 \cdot 10^{-6}$	$1.67 \cdot 10^{-6}$
13056	$1.89 \cdot 10^{-2}$	$3.50 \cdot 10^{-6}$	$3.65 \cdot 10^{-7}$	$4.19 \cdot 10^{-7}$
52224	$9.46 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-6}$	$9.12 \cdot 10^{-8}$	$1.05 \cdot 10^{-7}$

Tableau 5.9.1 – Cas E.1.3 : estimations d'erreur  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
204	$1.51 \cdot 10^{-1}$	$1.19 \cdot 10^{-4}$	$1.16 \cdot 10^{-5}$	$2.60 \cdot 10^{-5}$
338	$1.16 \cdot 10^{-1}$	$7.46 \cdot 10^{-5}$	$6.87 \cdot 10^{-6}$	$1.48 \cdot 10^{-5}$
892	$7.31 \cdot 10^{-2}$	$3.36 \cdot 10^{-5}$	$2.68 \cdot 10^{-6}$	$6.00 \cdot 10^{-6}$
5428	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$7.31 \cdot 10^{-6}$	$4.23 \cdot 10^{-7}$	$9.51 \cdot 10^{-7}$
10168	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$4.20 \cdot 10^{-6}$	$2.37 \cdot 10^{-7}$	$5.13 \cdot 10^{-7}$
23668	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$2.12 \cdot 10^{-6}$	$9.95 \cdot 10^{-8}$	$2.28 \cdot 10^{-7}$
35618	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$6.66 \cdot 10^{-8}$	$1.47 \cdot 10^{-7}$
92516	$7.04 \cdot 10^{-3}$	$5.87 \cdot 10^{-7}$	$2.43 \cdot 10^{-8}$	$5.54 \cdot 10^{-8}$

Tableau 5.9.2 – Cas E.1.3 : estimations d'erreur  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

### 5.9.2 Cas E.1.4 : Déformation d'un carré homogène. Solution non polynomiale

Les résultats d'estimations d'erreur sont présentés dans les Tableau 5.9.3 et Tableau 5.9.4 pour les valeurs, et dans la Figure 5.9.5 pour le tracé. On présente également les iso-valeurs obtenues pour chacune des composantes de la solution DDFV en Figure 5.9.4. Comme précédemment, nous utilisons une série de maillages raffinés soit uniformément soit successivement. On donne en Figure 5.9.6 les iso-valeurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence de l'erreur pour cette contrainte.

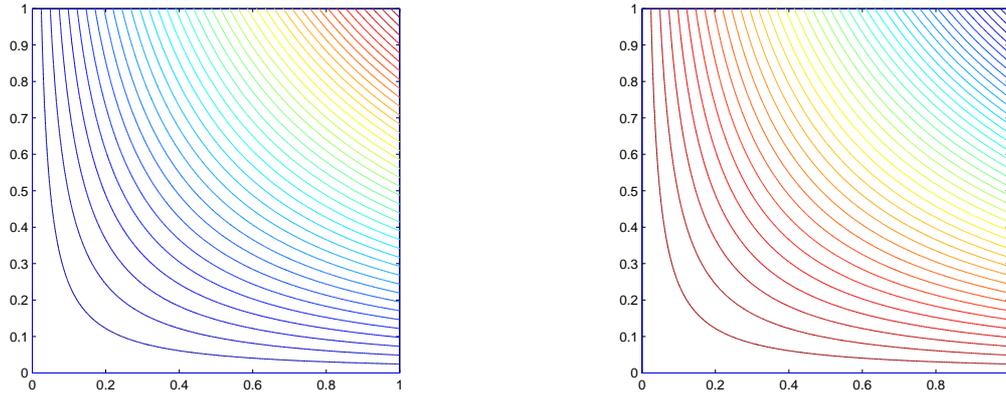


FIGURE 5.9.1 – Cas E.1.3 : Champ de déplacement  $|\mathbf{u}_1|$  (gauche) et  $|\mathbf{u}_2|$  (droite) pour le maillage le plus fin

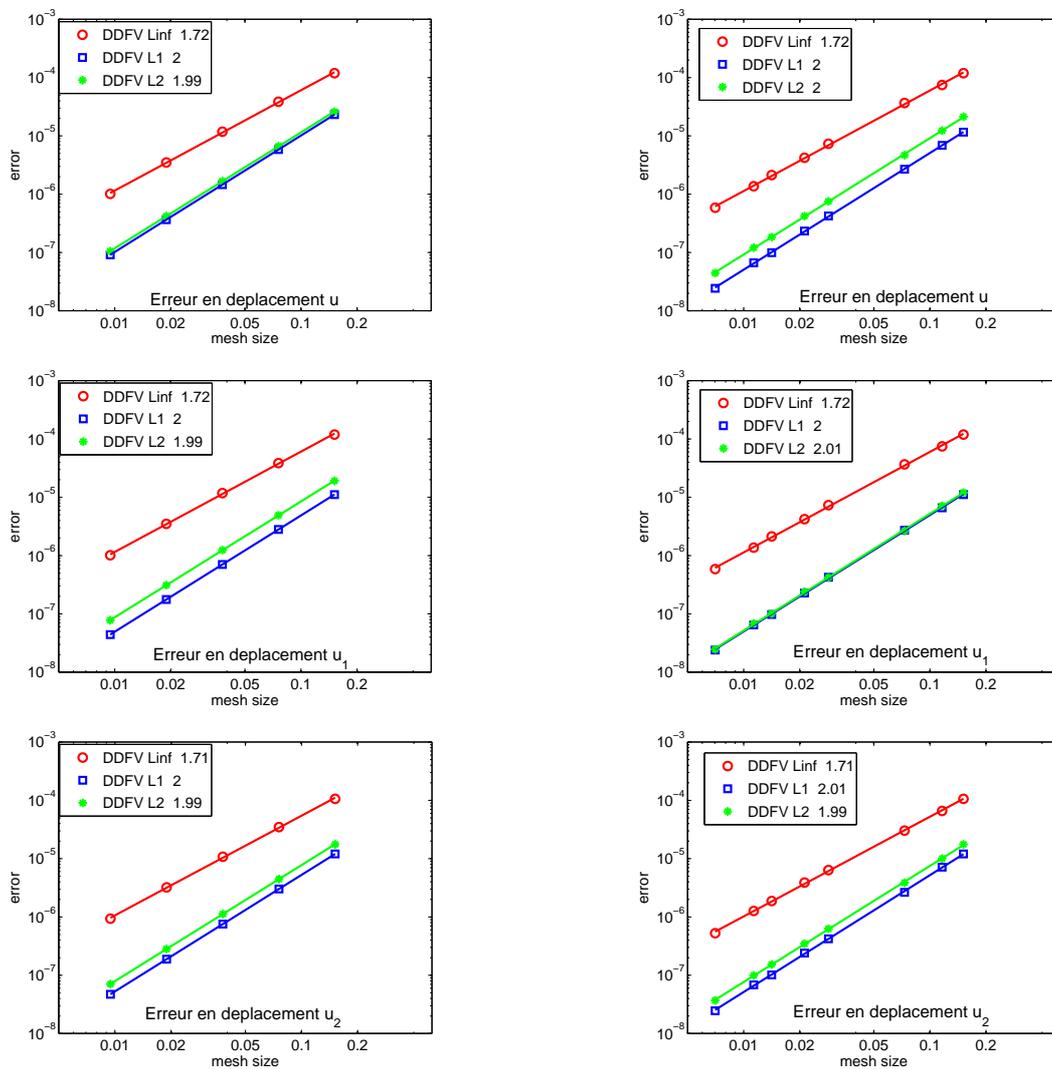


FIGURE 5.9.2 – Cas E.1.3 : estimations d'erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés (gauche) et successivement raffinés (droite).

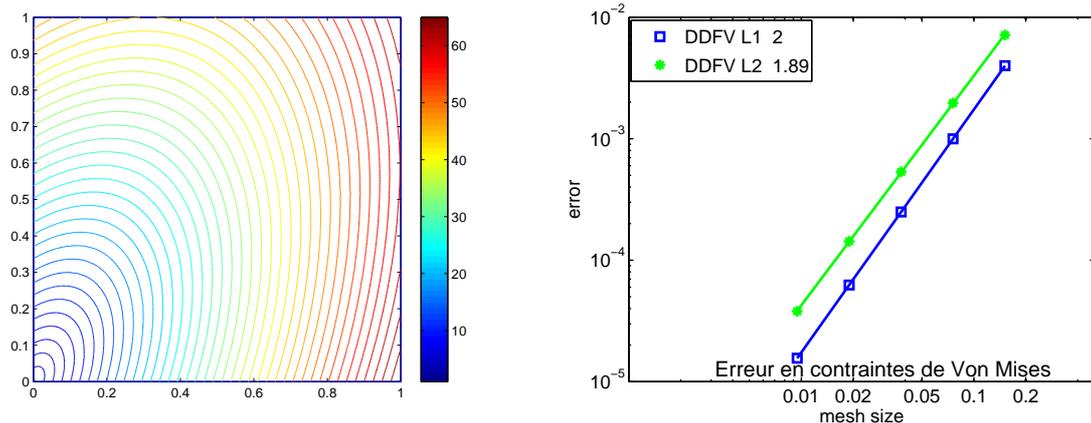


FIGURE 5.9.3 – Cas E.1.3 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (gauche) et estimations d’erreur  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
204	$1.51 \cdot 10^{-1}$	$2.49 \cdot 10^{-4}$	$2.36 \cdot 10^{-5}$	$5.45 \cdot 10^{-5}$
816	$7.57 \cdot 10^{-2}$	$7.89 \cdot 10^{-5}$	$5.94 \cdot 10^{-6}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$
3264	$3.78 \cdot 10^{-2}$	$2.39 \cdot 10^{-5}$	$1.48 \cdot 10^{-6}$	$3.5 \cdot 10^{-6}$
13056	$1.89 \cdot 10^{-2}$	$7.04 \cdot 10^{-6}$	$3.72 \cdot 10^{-7}$	$8.77 \cdot 10^{-7}$

Tableau 5.9.3 – Cas E.1.4 : estimations d’erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
204	$1.51 \cdot 10^{-1}$	$2.49 \cdot 10^{-4}$	$2.36 \cdot 10^{-5}$	$5.45 \cdot 10^{-5}$
338	$1.16 \cdot 10^{-1}$	$1.53 \cdot 10^{-4}$	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$3.09 \cdot 10^{-5}$
892	$7.31 \cdot 10^{-2}$	$7.07 \cdot 10^{-5}$	$5.73 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-5}$
5428	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$1.40 \cdot 10^{-5}$	$8.51 \cdot 10^{-7}$	$1.90 \cdot 10^{-6}$
10168	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$8.37 \cdot 10^{-6}$	$4.73 \cdot 10^{-7}$	$1.04 \cdot 10^{-6}$
23668	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$3.89 \cdot 10^{-6}$	$2.05 \cdot 10^{-7}$	$4.58 \cdot 10^{-7}$
35618	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$2.80 \cdot 10^{-6}$	$1.34 \cdot 10^{-7}$	$2.96 \cdot 10^{-7}$
92516	$7.04 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-6}$	$5.09 \cdot 10^{-8}$	$1.15 \cdot 10^{-7}$

Tableau 5.9.4 – Cas E.1.4 : estimations d’erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

### 5.9.3 Cas E.1.6 : Déformation d’un triangle homogène

Les résultats d’estimations d’erreur sont présentés dans le Tableau 5.9.5 pour les valeurs, et dans la Figure 5.9.8 pour le tracé. On présente également les isovaleurs obtenues pour chacune des composantes de la solution DDFV en Figure 5.9.7. On donne en Figure 5.9.9 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence de l’erreur pour cette contrainte.

### 5.9.4 Cas E.1.7 : Déformation d’un barreau homogène percé d’un trou

Dans les figures 5.9.10 et 5.9.11 sont affichées les configurations déformées obtenues avec la méthode DDFV et la méthode éléments finis (EF) P1 conformes.

A présent, nous allons présenter les résultats d’estimation d’erreur. Étant donné que nous ne

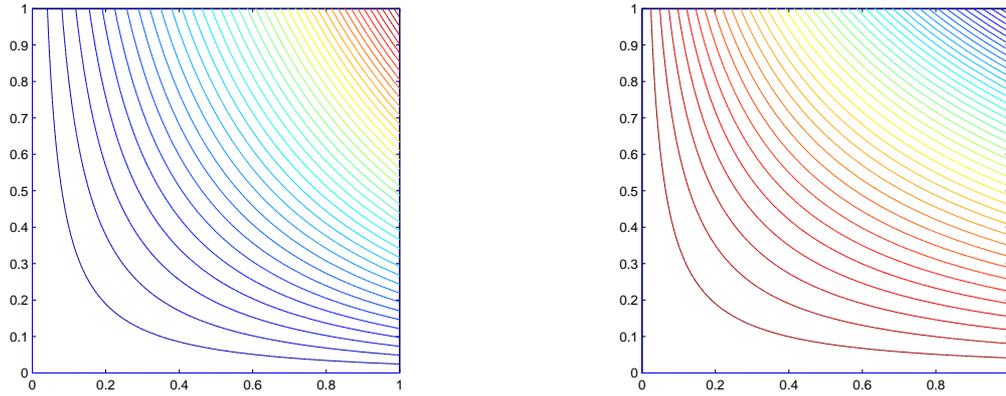


FIGURE 5.9.4 – Cas E.1.4 : Champ de déplacement  $|\mathbf{u}_1|$  (gauche) et  $|\mathbf{u}_2|$  (droite) pour le maillage le plus fin

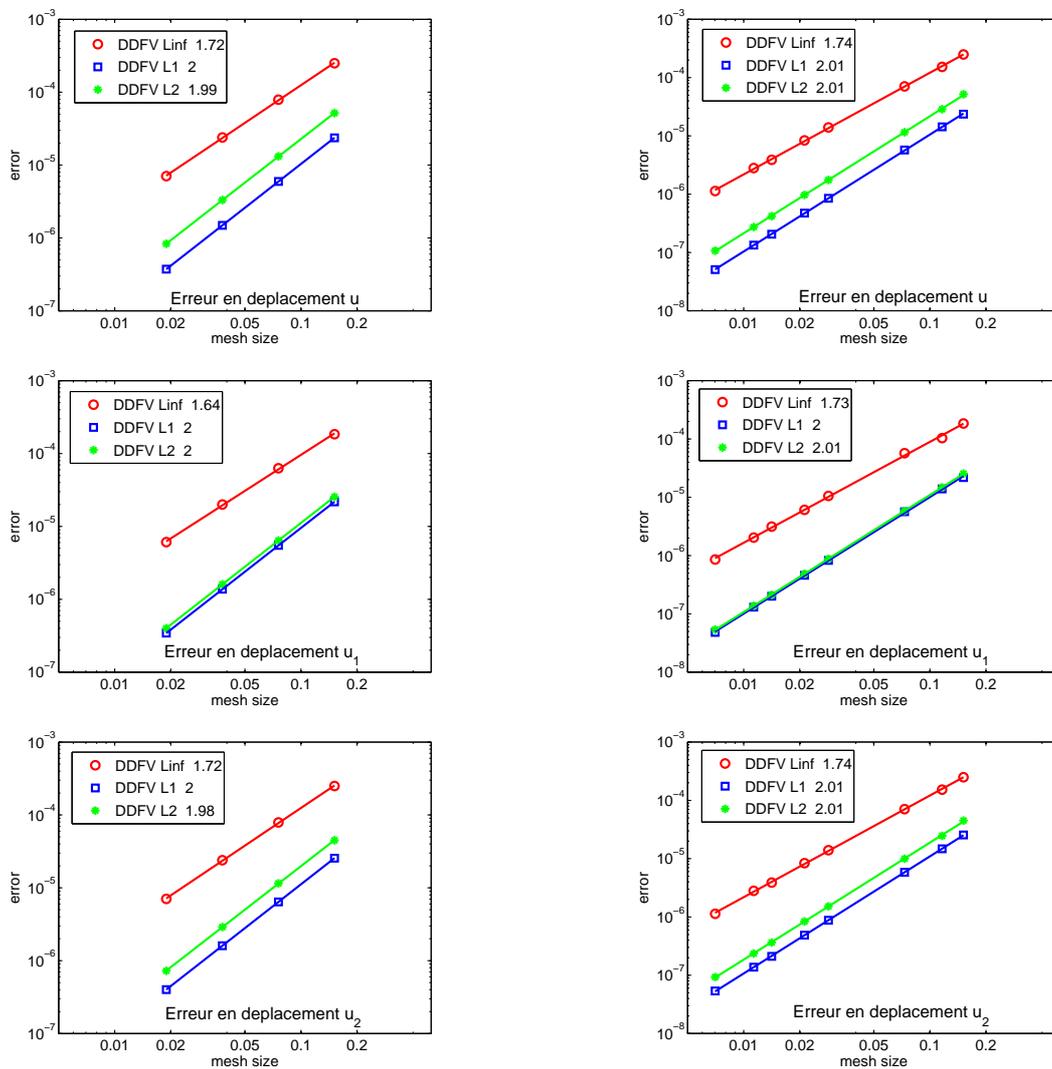


FIGURE 5.9.5 – Cas E.1.4 : estimations d'erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés (gauche) et successivement raffinés (droite).

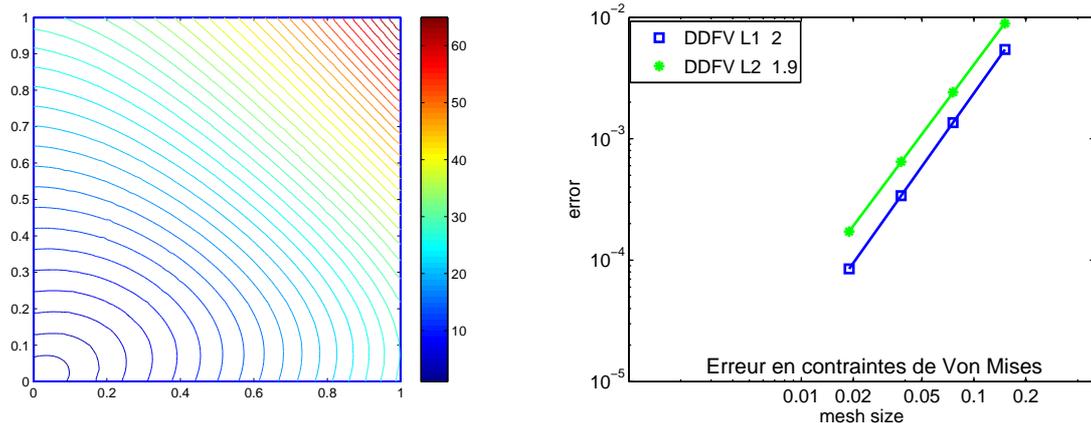


FIGURE 5.9.6 – Cas E.1.4 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (gauche) et estimations d’erreur  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
290	$5.11 \cdot 10^{-1}$	$5.33 \cdot 10^{-3}$	$2.64 \cdot 10^{-3}$	$2.39 \cdot 10^{-3}$
920	$2.55 \cdot 10^{-1}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$6.62 \cdot 10^{-4}$	$6.04 \cdot 10^{-4}$
3680	$1.28 \cdot 10^{-1}$	$5.03 \cdot 10^{-4}$	$1.65 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-4}$
14720	$6.38 \cdot 10^{-2}$	$1.47 \cdot 10^{-4}$	$4.16 \cdot 10^{-5}$	$3.80 \cdot 10^{-5}$
58880	$3.90 \cdot 10^{-2}$	$4.22 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^{-5}$	$9.60 \cdot 10^{-6}$

Tableau 5.9.5 – Cas E.1.6 : estimations d’erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages.

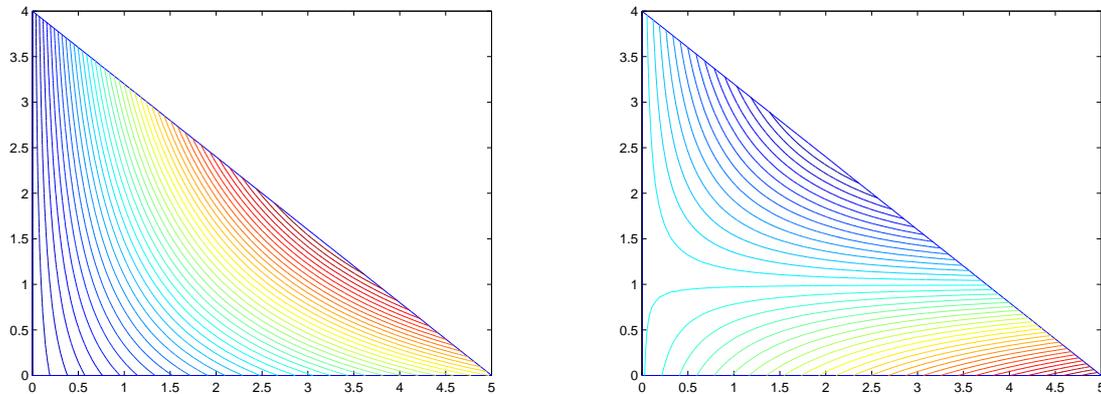


FIGURE 5.9.7 – Cas E.1.6 : Champ de déplacement  $|\mathbf{u}_1|$  pour le maillage le plus fin

possédons pas de solution analytique pour ce test, les résultats obtenus par la méthode DDFV sont comparés à ceux obtenus par éléments finis. La méthode des éléments finis en élasticité linéaire est convergente d’ordre 2. Les résultats d’estimations d’erreur sont présentés dans les Tableau 5.9.6 et Tableau 5.9.7 pour les valeurs, et dans la Figure 5.9.16 pour le tracé. On présente également les isovaleurs obtenues pour chacune des composantes de la solution DDFV en Figure 5.9.12 et Figure 5.9.13. Comme précédemment, nous utilisons une série de maillages raffinés soit uniformément soit successivement. On donne en Figure 5.9.14 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises et en Figure 5.9.15 la courbe de convergence de l’erreur pour cette contrainte.

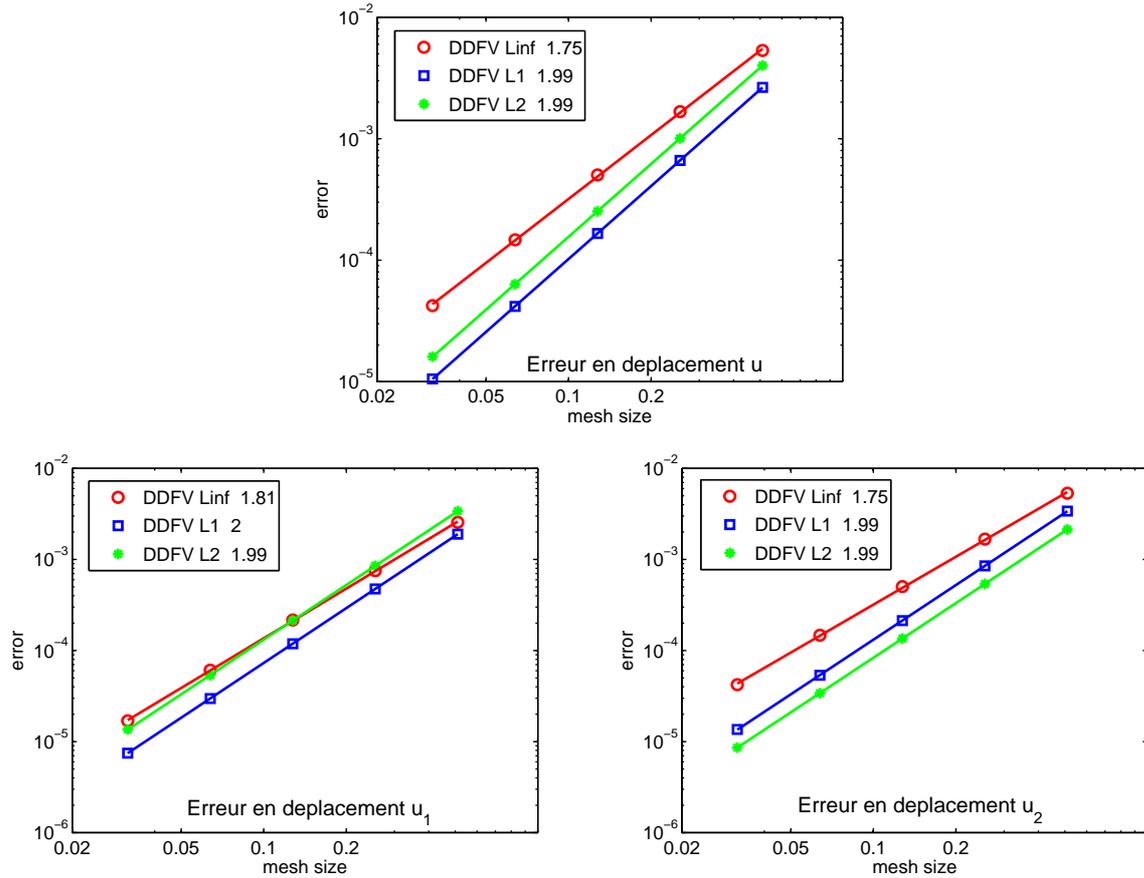


FIGURE 5.9.8 – Cas E.1.6 : estimations d’erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

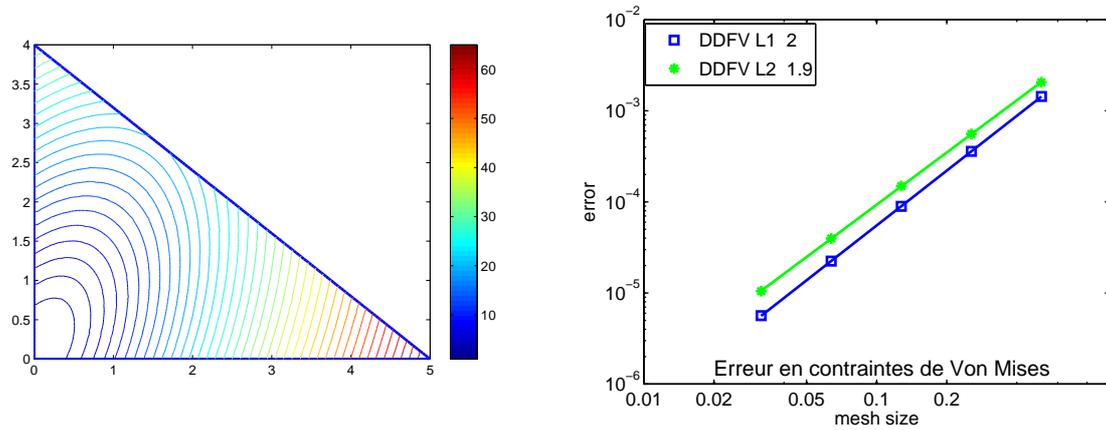


FIGURE 5.9.9 – Cas E.1.6 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises (gauche) et estimations d’erreur  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

### 5.9.5 Cas E.1.8 : Déformation d’un barreau non homogène percé d’un trou

Dans les figures 5.9.17 et 5.9.18 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode DDFV ainsi que par éléments finis. La Figure 5.9.17 correspond à un matériau composé d’a-

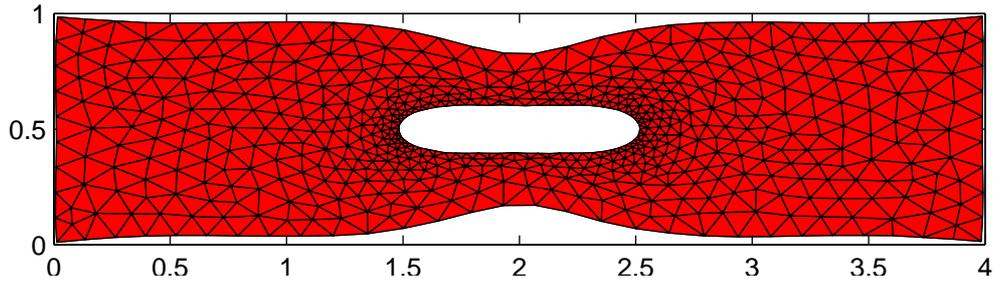


FIGURE 5.9.10 – Cas E.1.7 : réponse du déplacement obtenu avec la méthode DDFV

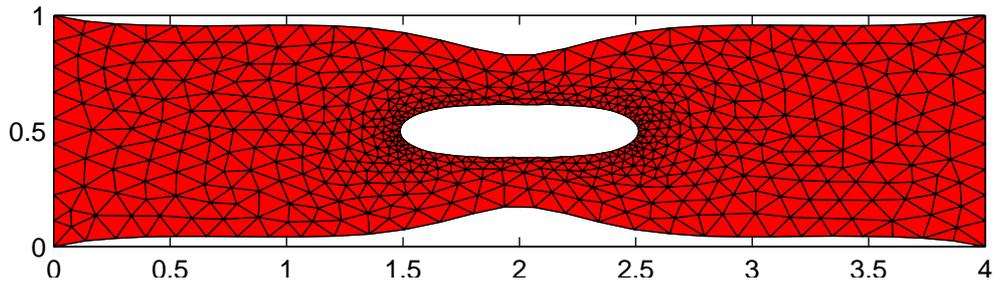


FIGURE 5.9.11 – Cas E.1.7 : réponse du déplacement obtenu par éléments finis

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
1106	$1.47 \cdot 10^{-1}$	$1.30 \cdot 10^{-2}$	$2.97 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-3}$
4424	$7.36 \cdot 10^{-2}$	$4.64 \cdot 10^{-3}$	$8.78 \cdot 10^{-4}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$
17696	$3.68 \cdot 10^{-2}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-4}$	$3.49 \cdot 10^{-4}$
70784	$1.84 \cdot 10^{-2}$	$6.60 \cdot 10^{-4}$	$6.90 \cdot 10^{-5}$	$9.46 \cdot 10^{-5}$
283136	$9.20 \cdot 10^{-3}$	$2.95 \cdot 10^{-4}$	$1.98 \cdot 10^{-5}$	$2.69 \cdot 10^{-5}$

Tableau 5.9.6 – Cas E.1.7 : estimations d'erreur  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
290	$2.10 \cdot 10^{-1}$	$5.80 \cdot 10^{-2}$	$1.75 \cdot 10^{-2}$	$2.35 \cdot 10^{-2}$
590	$1.52 \cdot 10^{-1}$	$3.10 \cdot 10^{-2}$	$8.53 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-2}$
966	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$2.02 \cdot 10^{-2}$	$5.50 \cdot 10^{-3}$	$8.06 \cdot 10^{-3}$
2454	$7.21 \cdot 10^{-2}$	$1.11 \cdot 10^{-2}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$	$3.62 \cdot 10^{-3}$
16238	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$1.93 \cdot 10^{-3}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$	$6.25 \cdot 10^{-4}$
28302	$2.12 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-3}$	$2.27 \cdot 10^{-4}$	$3.63 \cdot 10^{-4}$
65056	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$5.56 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-4}$
101478	$1.12 \cdot 10^{-2}$	$4.44 \cdot 10^{-4}$	$6.67 \cdot 10^{-5}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$

Tableau 5.9.7 – Cas E.1.7 : estimations d'erreur  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

luminium à gauche (en clair) et d'acier à droite (en sombre). On remarque que l'aluminium, possédant des coefficients de Lamé inférieurs à ceux de l'acier, et en particulier un module d'Young plus petit, est donc moins rigide que l'acier : sa déformation élastique est donc plus importante. Pour ce qui est de la Figure 5.9.17, les matériaux sont intervertis (acier à gauche,

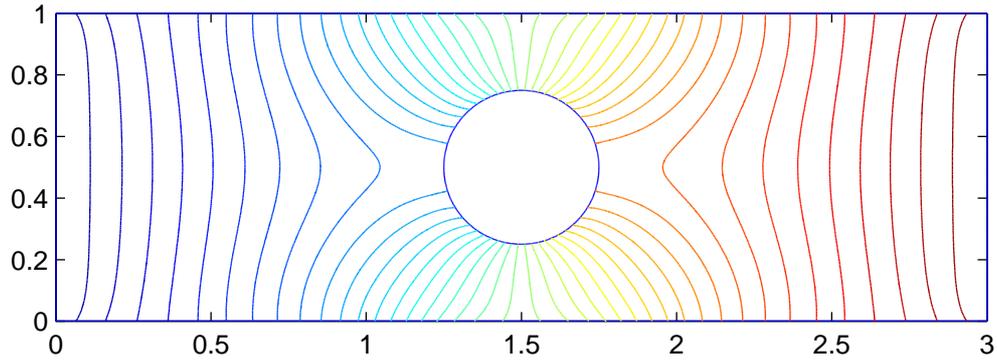


FIGURE 5.9.12 – Cas E.1.7 : champ de déplacement  $u_1$  pour le maillage le plus fin

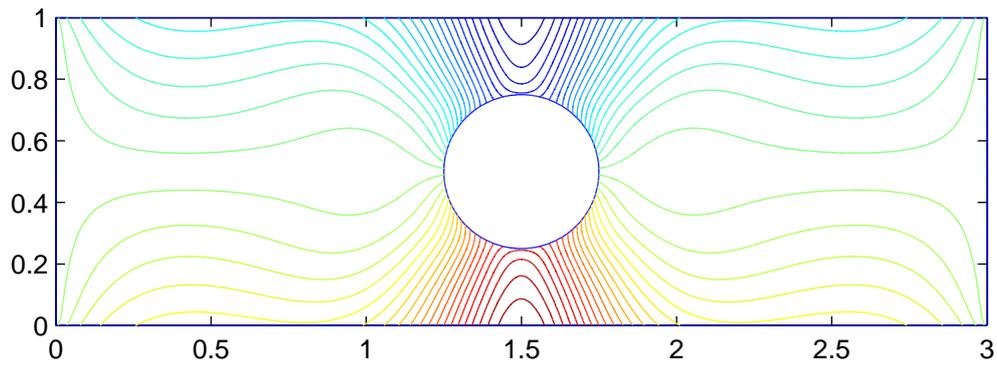


FIGURE 5.9.13 – Cas E.1.7 : champ de déplacement  $u_2$  pour le maillage le plus fin

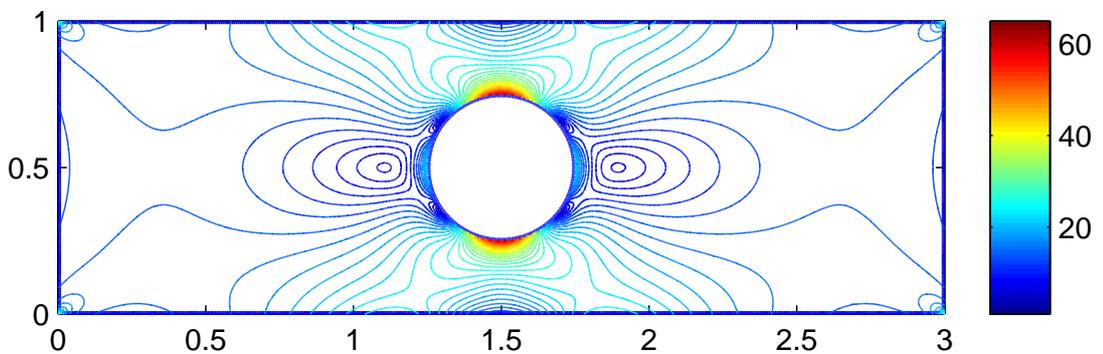


FIGURE 5.9.14 – Cas E.1.7 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises pour le maillage le plus fin

aluminium à droite). Le même phénomène est observé.

Intéressons-nous à présent aux estimations d'erreur. Les résultats d'estimations d'erreur sont présentés dans les Tableau 5.9.19 et Tableau 5.9.20 pour les valeurs, et dans la Figure 5.9.25 pour le tracé. On présente également les isovaleurs obtenues pour chacune des composantes de la solution DDFV en Figure 5.9.12 et Figure 5.9.22. Comme précédemment, nous utilisons une série de maillages raffinés soit uniformément soit successivement. On donne en Figure 5.9.23 les isovaleurs de la contrainte de Von Mises, et en Figure 5.9.24 la courbe de convergence de l'erreur pour cette contrainte.

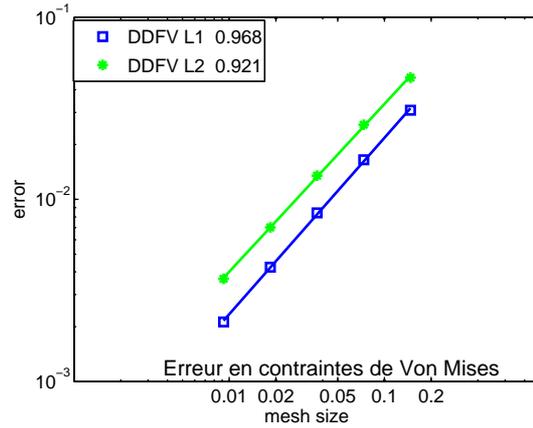


FIGURE 5.9.15 – Cas E.1.7 : Estimations d’erreur  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

## 5.10 Conclusion

On constate sur l’ensemble des exemples que la convergence de la méthode DDFV est numériquement vérifiée. On a établi que la méthode DDFV était d’ordre au moins 1 pour l’estimation d’erreur pour le déplacement, mais observe dans tous les cas de figure un ordre de 2 ou proche de 2 pour la déformation des barreaux (comme c’est le cas en éléments finis  $P1$ ).

Pour ce qui est de la contrainte de Von Mises, la convergence est en  $size(\mathcal{T})$  pour les 2 barreaux. Par contre, l’estimation est d’ordre 2 pour les cas tests présentant une solution analytique.

Pour conclure, ces observations sont valables quels que soient les conditions de bord et le type de raffinement. Le schéma reste performant en présence d’hétérogénéités. La possibilité d’adapter le schéma à un grand nombre de problèmes physiques fait du schéma DDFV un excellent candidat pour résoudre le problème de l’élasticité linéaire.

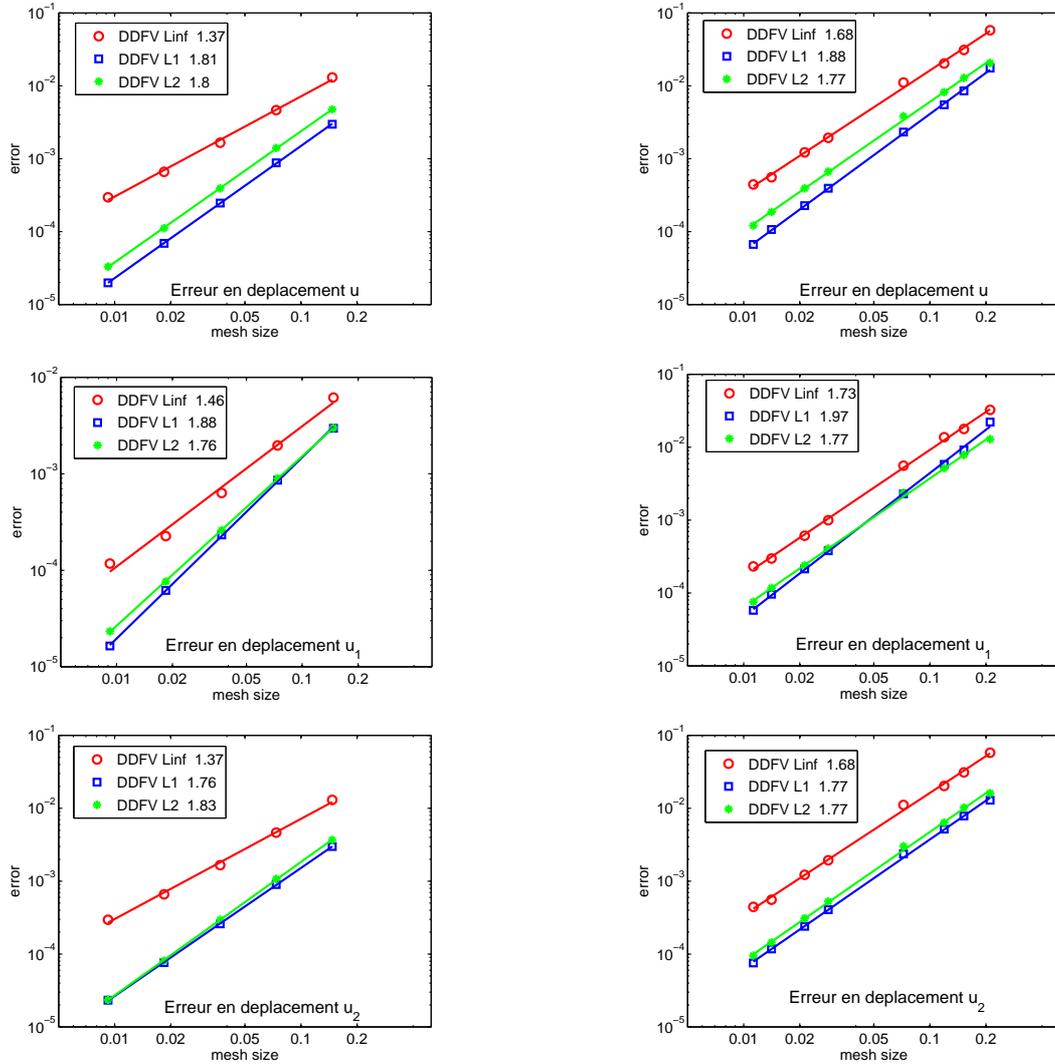


FIGURE 5.9.16 – Cas E.1.7 : estimations d'erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés (gauche) et successivement raffinés (droite).

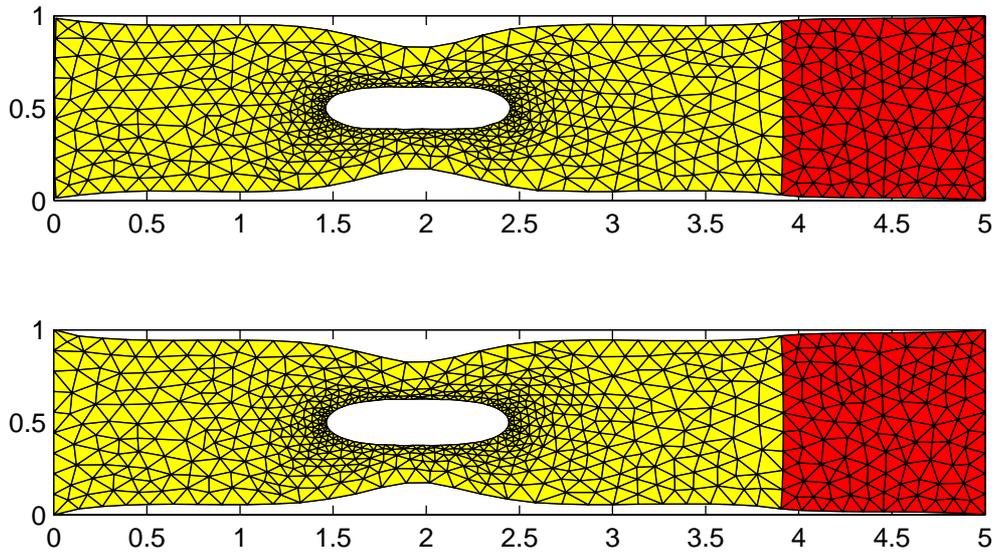


FIGURE 5.9.17 – Cas E.1.8 : réponse du déplacement aluminium (clair) / acier (sombre) par DDFV (en haut) et par éléments finis (bas).

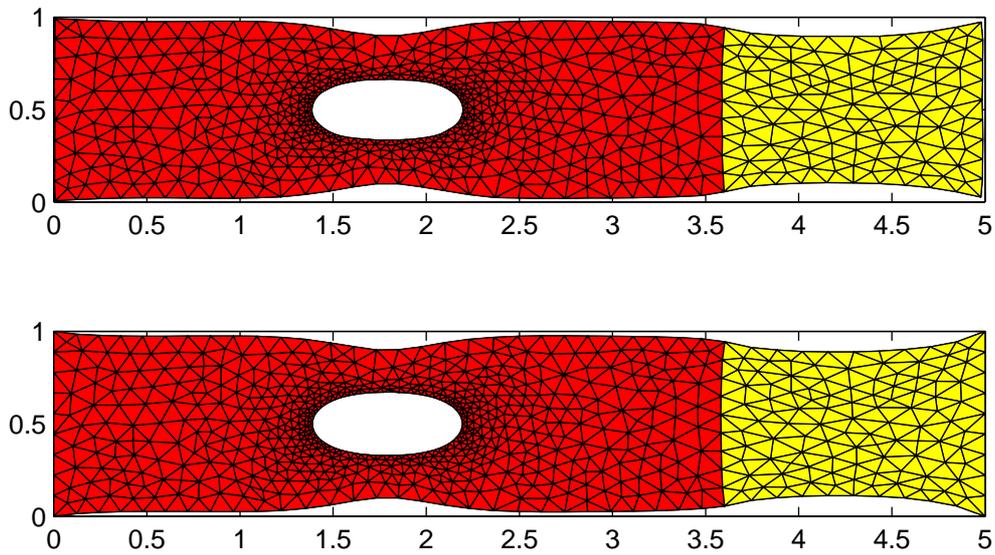


FIGURE 5.9.18 – Cas E.1.8 : réponse du déplacement acier (sombre) / aluminium (clair) par DDFV (en haut) et par éléments finis (bas).

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
1336	$1.49 \cdot 10^{-1}$	$1.13 \cdot 10^{-2}$	$3.24 \cdot 10^{-3}$	$4.25 \cdot 10^{-3}$
3264	$7.49 \cdot 10^{-2}$	$4.02 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$
5344	$3.74 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$3.35 \cdot 10^{-4}$	$3.88 \cdot 10^{-4}$
85504	$1.87 \cdot 10^{-2}$	$6.10 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$1.30 \cdot 10^{-4}$
342016	$9.49 \cdot 10^{-3}$	$3.78 \cdot 10^{-4}$	$5.34 \cdot 10^{-5}$	$5.40 \cdot 10^{-5}$

FIGURE 5.9.19 – Cas E.1.8 : estimations d'erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages uniformément raffinés.

Volumes	h	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
378	$2.17 \cdot 10^{-1}$	$5.09 \cdot 10^{-2}$	$1.78 \cdot 10^{-2}$	$2.17 \cdot 10^{-2}$
810	$1.52 \cdot 10^{-1}$	$2.43 \cdot 10^{-2}$	$7.98 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$
1326	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$1.73 \cdot 10^{-2}$	$5.55 \cdot 10^{-3}$	$7.16 \cdot 10^{-3}$
3388	$7.31 \cdot 10^{-2}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$3.71 \cdot 10^{-3}$
21834	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$1.90 \cdot 10^{-3}$	$4.60 \cdot 10^{-4}$	$6.37 \cdot 10^{-4}$
137548	$1.12 \cdot 10^{-2}$	$3.81 \cdot 10^{-4}$	$7.88 \cdot 10^{-5}$	$1.10 \cdot 10^{-4}$

FIGURE 5.9.20 – Cas E.1.8 : Estimations d'erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés

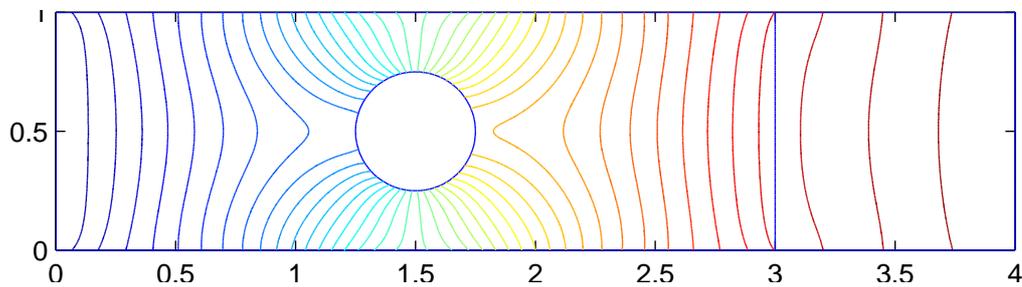


FIGURE 5.9.21 – Cas E.1.8 : champ de déplacement  $\mathbf{u}_1$  pour le maillage le plus fin

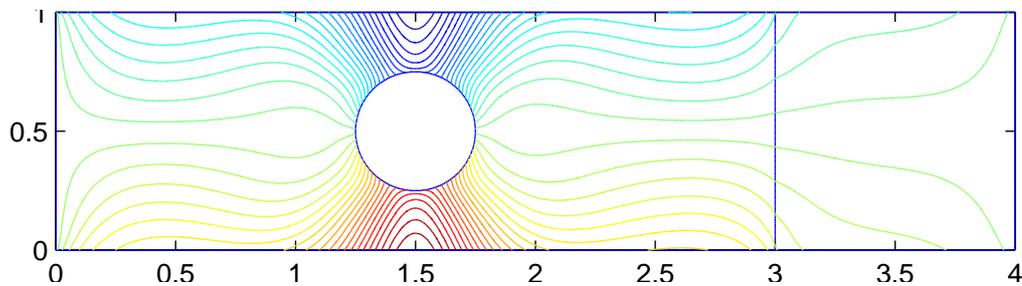


FIGURE 5.9.22 – Cas E.1.8 : champ de déplacement  $\mathbf{u}_2$  pour le maillage le plus fin

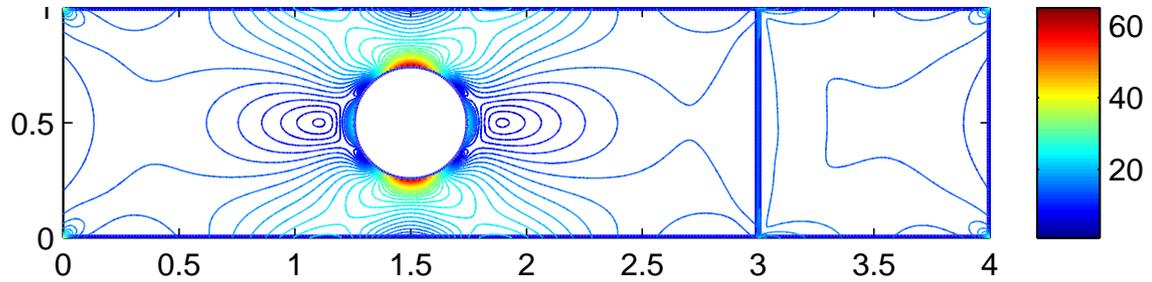


FIGURE 5.9.23 – Cas E.1.8 : Isovaleurs de la contrainte de Von Mises pour le maillage le plus fin

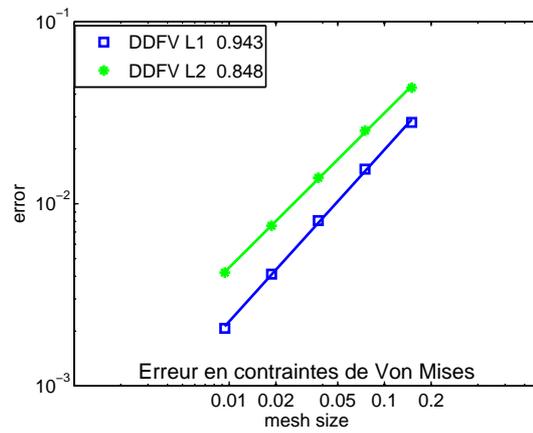


FIGURE 5.9.24 – Cas E.1.8 : Estimations d'erreur  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés

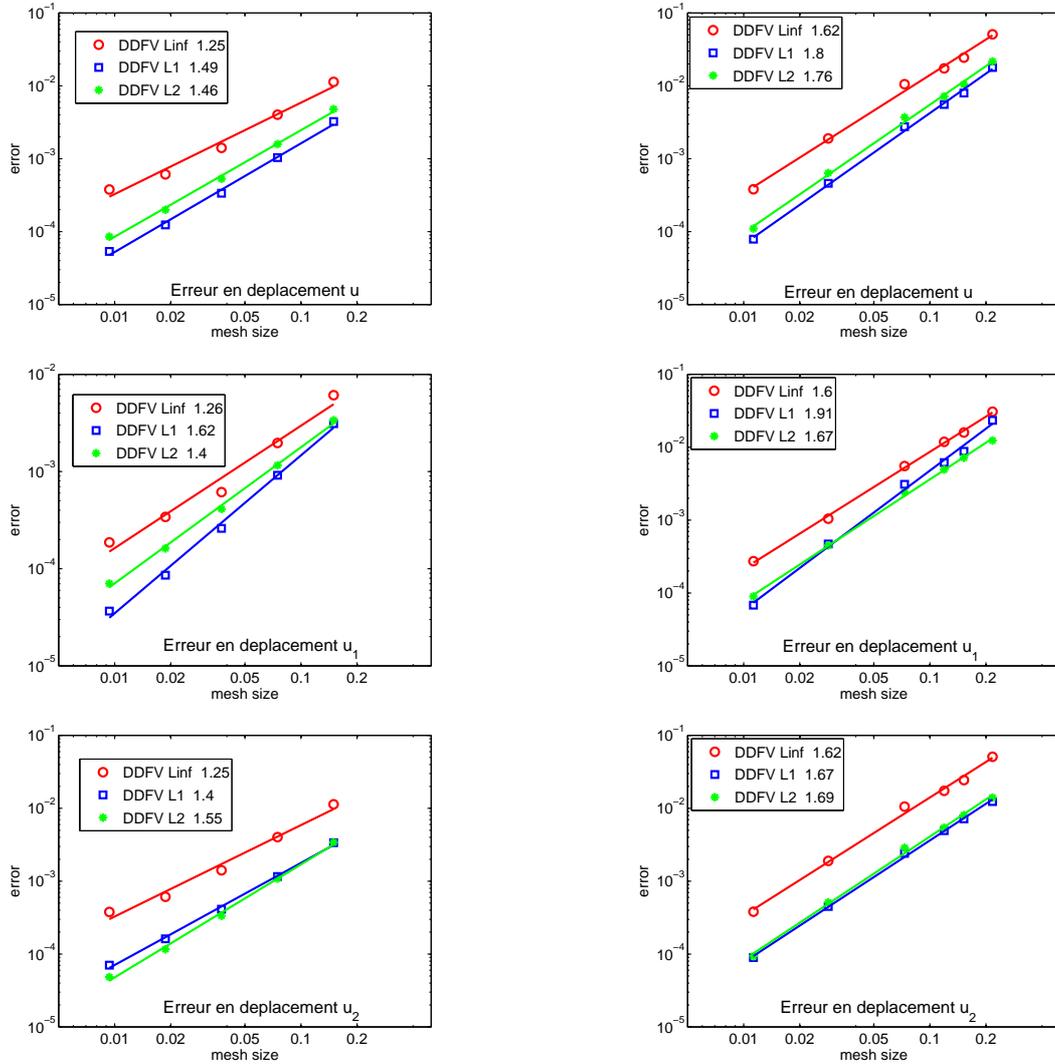


FIGURE 5.9.25 – Cas E.1.8 : estimations d'erreur  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages uniformément raffinés (gauche) et successivement raffinés (droite).



# Chapitre 6

## Schéma 3D DDFV

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>165</b>
<b>6.2</b>	<b>Construction des maillages</b>	<b>167</b>
6.2.1	Description du maillage primal	167
6.2.2	Description du maillage dual	168
6.2.3	Description des maillages demi diamants	169
6.2.4	Notations	170
6.2.5	Régularité du maillage	170
<b>6.3</b>	<b>Opérateurs discrets</b>	<b>170</b>
6.3.1	Normales extérieures aux volumes	170
6.3.2	Inconnues discrètes et espaces d'approximation	171
6.3.3	Produits scalaires et normes	171
6.3.4	Opérateurs discrets	172
<b>6.4</b>	<b>Relation de Green discrète</b>	<b>174</b>
<b>6.5</b>	<b>Condition de continuité à travers les faces</b>	<b>175</b>
<b>6.6</b>	<b>Inégalité de Korn discrète</b>	<b>176</b>
<b>6.7</b>	<b>Schéma numérique et stabilité</b>	<b>176</b>
6.7.1	Description du schéma et caractère bien posé	176
<b>6.8</b>	<b>Convergence et estimation d'erreur</b>	<b>178</b>
6.8.1	Inégalités de trace et Poincaré	182
6.8.2	Propriétés de l'opérateur de projection	182
6.8.3	Fin de preuve : estimation d'erreur	183
<b>6.9</b>	<b>Illustrations numériques</b>	<b>185</b>
6.9.1	Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène.	185
6.9.2	Cas E.2.2 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou	185
6.9.3	Cas E.2.3 : Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou	186
<b>6.10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>189</b>

---

### 6.1 Introduction

En dimension 2, on dispose pour la méthode DDFV d'un jeu d'inconnues aux centres des volumes et d'un aux sommets du maillages. Ces deux jeux permettent de définir deux directions non colinéaires par arêtes ou par demi diamants. La présence de discontinuités ne change pas fondamentalement le principe : on introduit une inconnue par arête construite à partir des

deux jeux d'inconnues précédents et on raisonne par demi diamant. La définition de ces deux directions permettent de construire le gradient.

En dimension 3, il faut définir trois directions indépendantes par interfaces ou plutôt par demi diamant, et la difficulté vient du choix de ces directions. La façon de construire ce gradient a donné naissance à trois grandes familles de schémas 3d-DDFV.

La première famille consiste à introduire des inconnues supplémentaires aux centres des faces du maillage primal, qui sont ensuite éliminées par interpolation ; c'est le travail de Hermeline dans [63]. Néanmoins la convergence théorique est difficile à montrer du fait que l'interpolation ne conserve plus la structure du problème continu. Dans [64], Hermeline introduit des contraintes supplémentaires qui permettent de tester le schéma numérique sur des mailles fortement distordues.

Une seconde famille, qui est en fait une sorte d'extension de [63] pour des tenseurs de diffusion discontinus, a été proposée par Coudière et Hubert [27], puis par Coudière *et al.* [32], Krell *et al.* [70, 68], Eymard *et al.* [49], et porte le nom de CeVeFE-DDFV (Cell/Vertex/Face/Edge-DDFV). Comme pour [63, 64], on introduit des inconnues aux centres des volumes, aux sommets et aux faces du maillage primal, mais également aux centres des arêtes du maillage primal. De cette façon, on construit un triplet de maillages  $\mathcal{T} = \{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^*, \mathfrak{M}^{\mathcal{E}\mathcal{F}}\}$  correspondant au maillage primal, au maillage dual et au maillage dit « faces-arêtes », ainsi qu'un maillage diamant, si bien qu'une relation de dualité entre opérateurs peut être établie.

La troisième famille, qui est celle qu'on adapte dans le présent travail, a été introduite par Pierre [76], puis utilisée également par Coudière *et al.* [29] pour le problème de l'électrocardiologie. Pour construire un gradient par face, on utilise les directions suivantes : la première est obtenue en reliant le centre du volume primal au centre de la face, puis les deux autres sont obtenues en reliant entre eux les sommets de la face. La particularité de ce schéma est que le maillage dual recouvre exactement deux fois le domaine. Néanmoins, les relations de dualité sont conservées. Enfin, une variante est également étudiée par Andreianov *et al.* [6, 5].

La structure du document est la même que pour le schéma 2d-DDFV : on décrit en section 2 les maillages primal, dual et demi diamant, et les volumes de contrôle associés que nous allons utiliser pour y définir les opérateurs et inconnues discrets. Dans la section 3, on définit les espaces d'approximation, les produits scalaires ainsi que les opérateurs discrets qui sont en dualité via la formule de Green discrète donnée en section 4. Cette propriété permet de conserver la symétrie du problème, ce qui va faciliter l'étude théorique du schéma DDFV sans avoir à émettre d'hypothèses sur le maillage (excepté une hypothèse sur la régularité et la quasi-uniformité). Dans la section 5, on introduit la condition de continuité, qui permet d'éliminer les inconnues intermédiaires. La section 6 est consacrée à l'inégalité de Korn, indispensable en élasticité pour avoir des résultats théoriques de stabilité. Sa preuve est réalisée en Annexe, pour un problème aux conditions de déplacement pur imposées. Dans la section 7, on montre que le problème est bien posé et stable, et qu'il est convergent d'ordre 1 en section 8. Les preuves de ces résultats ne sont rédigées que dans le cas où il ne s'agit pas d'une simple extension en dimension 3 de celles établies en dimension 2. Des exemples numériques sont enfin présentés en section 9, où la réponse DDFV est d'abord comparée à la solution analytique d'un cas test, puis à la réponse obtenue avec des éléments finis  $P1$  dans les deux derniers cas.

## 6.2 Construction des maillages

### 6.2.1 Description du maillage primal

On considère dans cette étude une triangulation conforme  $\mathfrak{M}$  de  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  composée uniquement de tétraèdres  $K$  tels que

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \bar{K} = \bar{\Omega}.$$

On associe à  $K$  son centre de gravité  $\mathbf{x}_K \in \mathbb{R}^3$  et on note  $\#\mathfrak{M}$  le cardinal de  $\mathfrak{M}$ . On note  $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{int} \cup \mathcal{E}^b$  l'ensemble des faces du maillage. Une face  $s \in \mathcal{E}^{int}$  est interne si et seulement s'il existe deux tétraèdres  $K$  et  $L$  tels que  $s = K \cap L$ . Une face  $s \in \mathcal{E}^b$  est une face sur le bord soit de Dirichlet ( $s \in \mathcal{E}^{bD}$ ) soit de Neumann ( $s \in \mathcal{E}^{bN}$ ). La notation des faces d'un volume  $K$  est identique au 2d. Chaque face  $s \in \partial K$  définit trois sommets, notés  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2,3\}}$ , comme illustré en Figure 6.2.1, et qui satisfont les conventions suivantes.

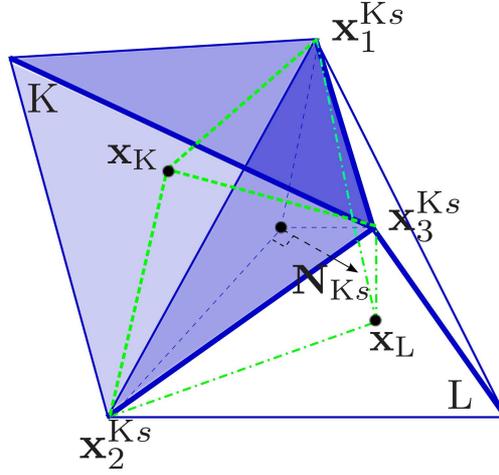


FIGURE 6.2.1 – Mailles primales  $K$  et  $L$  partageant la face  $(\mathbf{x}_1^{K_s}, \mathbf{x}_2^{K_s}, \mathbf{x}_3^{K_s})$

#### **Convention 6.2.1 (Numérotation locale des sommets du maillage)**

Soit  $s = K \cap L$  une face interne. On note  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2,3\}}$  et  $(\mathbf{x}_i^{L_s})_{i=\{1,2,3\}}$  les numérotations locales associées aux volumes  $K$  et  $L$ .

1. Les indices locaux sont dits tournants, c'est-à-dire que pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$ , on a

$$\mathbf{x}_{i+3}^{K_s} = \mathbf{x}_i^{K_s}. \quad (6.1)$$

2. La numérotation locale des sommets respecte la condition

$$\det(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{K_s}) > 0 \quad (6.2)$$

3. Si  $j_i$  est le numéro local du sommet  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  vu du côté  $L$  (i.e.  $\mathbf{x}_i^{K_s} = \mathbf{x}_{j_i}^{L_s}$ ), alors

$$\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_{i-1}^{K_s} = \mathbf{x}_{j_i-1}^{L_s} - \mathbf{x}_{j_i+1}^{L_s}. \quad (6.3)$$

## 6.2.2 Description du maillage dual

Le maillage dual, noté  $\mathfrak{M}^*$ , est constitué de polyèdres, notés  $K^*$ . Tout volume dual  $K^*$  est associé à un sommet du maillage primal, noté  $\mathbf{x}_{K^*} \in \mathbb{R}^3$ . La construction du polyèdre  $K^*$  associé au sommet  $\mathbf{x}_{K^*}$  est la suivante.

1. Soit  $s$  une face du maillage primal dont les sommets sont notés  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  pour  $i = \{1, 2, 3\}$ . On choisit  $i$  tel que  $\mathbf{x}_i^{K_s} = \mathbf{x}_{K^*}$ . Soit  $\mathbf{x}_s$  le centre de la face  $s$ . A cette face est associé au moins un volume primal tétraédrique, que l'on note  $K$ . On construit alors un volume polyédrique  $P_{K_s}$  en joignant les deux pyramides adjacentes ayant pour base  $(\mathbf{x}_{i-1}^{K_s}, \mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x}_s)$  et  $(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s}, \mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x}_s)$  et pour sommet  $\mathbf{x}_K$ . Le volume  $P_{K_s}$  pour le sommet  $\mathbf{x}_2^{K_s}$  est représentée en Figure 6.2.2.
2. Du fait de la géométrie de  $K$ , il existe donc 3 faces appartenant à  $K$  ayant  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  pour sommet, et donc autant de volumes  $P_{K_s}$  associés au sommet  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  et au volume  $K$ . On construit le volume  $P_K$  en réunissant ces 3 volumes :  $P_K = \bigcup_{s \in \partial K} P_{K_s}$ .
3. Enfin, le volume dual  $K^*$  associé au sommet  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  est obtenu en unissant tous les volumes  $P_K$  associés aux volumes primaux  $K$  dont  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  est un sommet :  $K^* = \bigcup_{\mathbf{x}_i^{K_s} \in K} P_K$ .

On distingue les polyèdres  $K^*$  internes ( $K^* \in \mathfrak{M}^{*int}$ ), dont l'intersection avec le bord du domaine  $\partial\Omega$  est vide, des polyèdres  $K^*$  dits de bord ( $K^* \in \mathfrak{M}^{*b}$ ), dont une face au moins appartient à  $\partial\Omega$ , de sorte que

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*b}.$$

On distingue l'ensemble des volumes duaux sur le bord de Dirichlet ( $K^* \in \mathfrak{M}^{*bD}$ ), dont au moins une face est sur le bord de Dirichlet, de ceux sur le bord de Neumann ( $K^* \in \mathfrak{M}^{*bN}$ ), dont au moins une face est sur le bord de Neumann. Lorsqu'un volume dual  $K^*$  possède une face sur le bord de Dirichlet et sur le bord de Neumann, par convention, le sommet  $\mathbf{x}_{K^*}$  est supposé appartenir au bord de Dirichlet. Pour un volume  $K^*$ , on note  $\partial K^*$  l'ensemble de ses faces. On distingue  $\partial K^{*int}$  l'ensemble des faces dites internes, dont l'intersection avec le bord du domaine est soit vide soit réduite aux sommets ou aux arêtes, de l'ensemble  $\partial K^{*b}$  des faces dites de bord, qui appartiennent à  $\partial\Omega$ , de sorte que  $\partial K^* = \partial K^{*int} \cup \partial K^{*b}$ . On distingue l'ensemble des faces de bord de Dirichlet  $\partial K^{*bD}$  de celles de Neumann  $\partial K^{*bN}$ . Ces faces ou « ailettes » du maillage dual, également notées  $s^*$ , sont des triangles dont les sommets sont la coordonnée  $\mathbf{x}_K$  du volume primal, le centre d'une des faces du volume  $\mathbf{x}_s$  et un des sommets de la face  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  avec  $i = \{1, 2, 3\}$ . L'ensemble des faces du maillage dual est noté  $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^{*int} \cup \mathcal{E}^{*b}$ .

### Remarque 6.2.1

1. Le maillage DDFV est constitué de la réunion de ces 2 maillages que l'on note  $\mathcal{T} = \mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}^*$ .
2. Lorsqu'on se donne un volume primal  $K$  et une face  $s$  de  $\partial K$ , alors il existe 3 faces duales ou ailettes  $s_i^* = (\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_i^{K_s})$  associées.
3. Une face duale  $s^*$  détermine un unique volume primal  $K$  et une unique face primale  $s$ .
4. Les volumes primaux sont 2 à 2 disjoints et couvrent entièrement  $\Omega$ , de sorte que

$$\bigcup_{K \in \mathfrak{M}} \bar{K} = \bar{\Omega}.$$

5. Les volumes duaux se chevauchent et couvrent entièrement deux fois  $\Omega$ , de sorte que

$$\bigcup_{K^* \in \mathfrak{M}^*} \bar{K}^* = 2\bar{\Omega}.$$

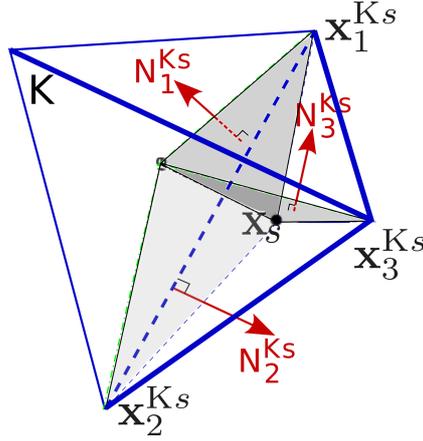


FIGURE 6.2.2 – Volume  $P_{K_s}$  associé au sommet  $x_2^{K_s}$ , à la face  $s$  et au volume  $K$

### 6.2.3 Description des maillages demi diamants

On appelle demi diamant  $D_{K_s}$  associé au volume  $K$  et à la face  $s$  de  $K$  le tétraèdre obtenu en joignant le centre  $x_K$  du volume  $K$  et les sommets  $(x_i^{K_s})_{i=\{1,2,3\}}$  de la face  $s$ . On définit l'ensemble  $\tilde{\mathcal{D}}$  des demi diamants par  $\tilde{\mathcal{D}} = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}\}$ . On appelle  $\tilde{\mathcal{D}}^b$  l'ensemble des demi diamants situés sur le bord et définis par  $\tilde{\mathcal{D}}^b = \{D_{K_s} \mid K \in \mathfrak{M}, s \in \mathcal{E}^b\}$ . Les demi diamants sont 2 à 2 disjoints et couvrent entièrement le domaine  $\Omega$ , de sorte que

$$\bigcup_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \overline{D_{K_s}} = \overline{\Omega}.$$

Un demi diamant  $\tilde{\mathcal{D}}$  est représenté en Figure 6.2.3.

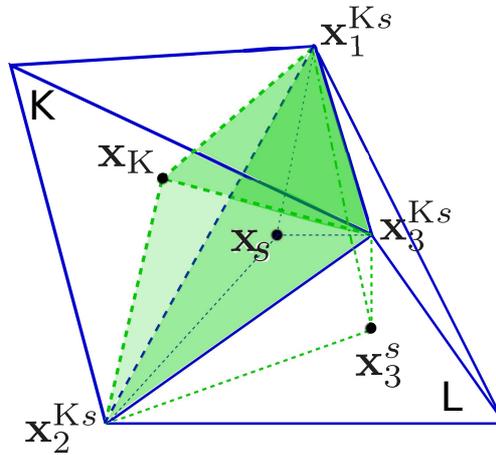


FIGURE 6.2.3 – Cellule **demi diamant** associée au volume primal  $K$  et à la face  $s = K \cap L$ .

#### Remarque 6.2.2

A chaque demi diamant  $D_{K_s}$  est associée une unique face primale  $s$  et un unique volume  $K$  et réciproquement. A chaque demi diamant  $D_{K_s}$  sont associées trois faces duales et un unique volume primal  $K$ , et à chaque face duale et chaque volume primal  $K$  est associé un unique demi diamant  $D_{K_s}$ .

Par la suite, on écrit par abus de notation que  $D_{K_s} \in \partial K$  au lieu de  $s \in \partial K$  ou de  $s^* \in \partial K^*$ .

## 6.2.4 Notations

Pour toute maille primale  $K \in \mathfrak{M}$ , on définit

- $|K|$  la mesure de  $K$ ,
- $\mathbf{n}_{K_s}$  la normale unitaire sortante de  $K$  à la face  $s$ ,
- $\mathbf{N}_{K_s}$  la normale sortante de  $K$  à la face  $s$  :  $\mathbf{N}_{K_s} = |s| \mathbf{n}_{K_s}$ ,
- $diam(K)$  le diamètre de  $K$ ,
- $\mu_K = \mu(\mathbf{x}_K)$  et  $\lambda_K = \lambda(\mathbf{x}_K)$  représentent les valeurs des coefficients de Lamé constants par volumes primaux.

Pour toute maille duale  $K^* \in \mathfrak{M}^*$ , et pour le sommet  $\mathbf{x}_i^{K^*}$  avec  $i = \{1, 2, 3\}$  associé au volume dual  $K^*$ , on définit

- $|K^*|$  la mesure de  $K^*$ ,
- $\mathbf{n}_{i-1}^{K^*}$  et  $\mathbf{n}_{i+1}^{K^*}$  les normales unitaires sortantes de  $K^*$  associées aux ailettes  $s_{i-1}^*$  et  $s_{i+1}^*$  pour le volume  $K$ ,
- $diam(K^*)$  le diamètre de  $K^*$ .

Pour tout demi diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ , dont les sommets sont  $(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_1^{K_s}, \mathbf{x}_2^{K_s}, \mathbf{x}_3^{K_s})$ , on définit

- $|D_{K_s}|$  la mesure de  $D_{K_s}$ . D'après les propriétés géométriques du tétraèdre, pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$  on a la relation suivante

$$|D_{K_s}| = \frac{1}{6} \det(\mathbf{x}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{x}_i^{K_s}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{K_s}), \quad (6.4)$$

- $diam(D_{K_s})$  le diamètre de  $D_{K_s}$ .
- $\mathbf{x}_s$  le centre de la face  $s$ ,
- $|s|$  la mesure de la face  $s$ ,
- $|s^*|$  la mesure de l'ailette  $s^*$ .

## 6.2.5 Régularité du maillage

La quantité  $size(\mathcal{T})$  est le plus grand des diamètres des demi diamants  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ . Cette quantité permet en particulier d'obtenir les majorations suivantes

$$\begin{aligned} |s| &\leq size(\mathcal{T})^2, \quad \forall s \in \mathcal{E}; & |s^*| &\leq size(\mathcal{T})^2, \quad \forall s^* \in \mathcal{E}^*; \\ |K| &\leq size(\mathcal{T})^3, \quad \forall K \in \mathfrak{M}; & |K^*| &\leq size(\mathcal{T})^3, \quad \forall K^* \in \mathfrak{M}^*; & |D_{K_s}| &\leq size(\mathcal{T})^3, \quad \forall D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

La régularité et la quasi-uniformité du maillage  $\mathcal{T}$  impliquent qu'il existe des constantes  $\alpha, \beta > 0$  telles que

$$\begin{aligned} \forall K \in \mathfrak{M}, & \quad \alpha size(\mathcal{T})^3 \leq |K|, & \forall D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}, & \quad \alpha size(\mathcal{T})^3 \leq |D_{K_s}|; \\ \forall K^* \in \mathfrak{M}^*, & \quad \alpha size(\mathcal{T})^3 \leq |K^*|, & & \quad \#\partial K^* \leq \beta; \\ \forall s \in \mathcal{E}, & \quad \alpha size(\mathcal{T})^2 \leq |s|, & \forall s^* \in \mathcal{E}^*, & \quad \alpha size(\mathcal{T})^2 \leq |s^*| \end{aligned} \quad (6.6)$$

où  $\#\partial K^*$  est le nombre de faces de  $K^*$ .

## 6.3 Opérateurs discrets

### 6.3.1 Normales extérieures aux volumes

Soit  $K$  un volume et  $s \in \partial K$  une des ses faces. Soient  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2,3\}}$  les sommets de la face  $s$ . Comme illustré dans la Figure 6.3.1, la normale en  $s$  extérieure à  $K$  est définie par

$$\mathbf{N}_{K_s} = |s| \mathbf{n}_{K_s} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_{s,i-1,i}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}_{s,i-1,i} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_i^s - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_{i-1}^s - \mathbf{x}_s). \quad (6.7)$$

Dans la pratique, on choisit  $\mathbf{x}_s$  comme étant le centre de gravité de la face  $s$ . Ceci implique que

$$\mathbf{N}_{s,i-1,i} = \frac{1}{3} \mathbf{N}_{K_s}. \quad (6.8)$$

Les normales aux ailettes extérieures aux volumes duaux sont définies par

$$\mathbf{N}_i^{K_s} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_i^s - \mathbf{x}_s). \quad (6.9)$$

Enfin pour chaque face interne  $s = K \cap L \in \tilde{\mathcal{D}}^{int}$ , pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$ , si  $\mathbf{x}_i^{K_s} = \mathbf{x}_{j_i}^{L_s}$  on a

$$\mathbf{N}_i^{KL} = \mathbf{N}_i^{K_s} - \mathbf{N}_{j_i}^{L_s}. \quad (6.10)$$

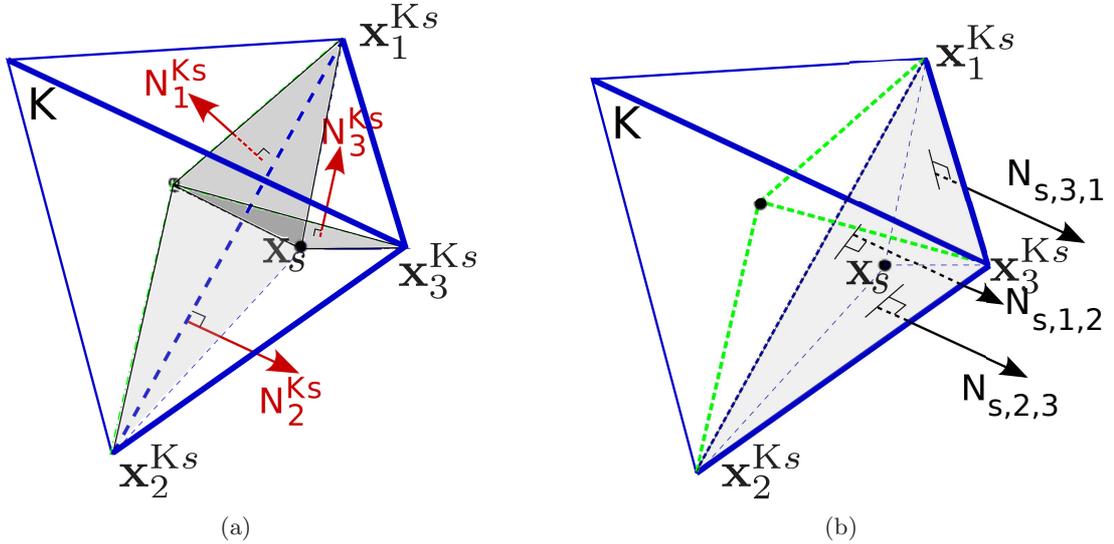


FIGURE 6.3.1 – Vecteurs et notations d'une cellule duale (a), et d'une cellule primale (b)

### 6.3.2 Inconnues discrètes et espaces d'approximation

On associe des inconnues constantes par volume primal  $\mathbf{u}_K$  pour  $K \in \mathfrak{M}$  et des inconnues constantes par volume dual  $\mathbf{u}_{K^*}$  pour  $K^* \in \mathfrak{M}^*$ . Ces inconnues sont appelées inconnues principales, et sont rassemblées en

$$\mathbf{u}^T = ((\mathbf{u}_K)_{K \in \mathfrak{M}}, (\mathbf{u}_{K^*})_{K^* \in \mathfrak{M}^*}) \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}.$$

On introduit également la famille  $\mathbf{u}_s \in \mathcal{E}$  d'inconnues auxiliaires par face éliminées par la suite en section 6.5.

### 6.3.3 Produits scalaires et normes

Pour tout couple  $(\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T)$  dans  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$ , on définit le produit scalaire

$$\llbracket \mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} = \frac{1}{3} \left( \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \mathbf{u}_K \cdot \mathbf{v}_K + \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} |K^*| \mathbf{u}_{K^*} \cdot \mathbf{v}_{K^*} \right). \quad (6.11)$$

Pour tout couple  $(\phi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \psi^{\tilde{\mathcal{D}}})$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$ , on définit le produit scalaire

$$(\phi^{\tilde{\mathcal{D}}} : \psi^{\tilde{\mathcal{D}}})_{\tilde{\mathcal{D}}} = \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| (\phi^{D_{Ks}} : \psi^{D_{Ks}}) \quad (6.12)$$

où  $(\phi^{D_{Ks}} : \psi^{D_{Ks}}) = \text{tr}(\phi^{D_{Ks}} (\psi^{D_{Ks}})^T)$ . Pour tout couple  $(\phi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{v}^\Gamma) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}^b} \times (\mathbb{R}^3)^{\#\tilde{\mathcal{D}}^b}$ , on définit le produit scalaire sur le bord

$$\langle \phi^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{n}, \mathbf{v}^\Gamma \rangle_{\Gamma} = \sum_{s \in \mathcal{E}} |s| (\phi^{D_{Ks}} \mathbf{n}_{Ks}) \cdot \mathbf{v}_s. \quad (6.13)$$

### Remarque 6.3.1

Le coefficient  $\frac{1}{3}$  du produit scalaire dans  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  peut être interprété comme la non égale contribution des inconnues sur les maillages primal et dual; en effet, la Remarque 6.2.1 nous affirme que le maillage primal recouvre 1 fois  $\Omega$  tandis que le maillage dual le recouvre 2 fois. Il faut donc « pondérer » le produit scalaire dans  $\mathcal{T}$  de sorte que

$$\llbracket \mathbf{1}, \mathbf{1} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \frac{1}{3} \left( \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| + \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} |K^*| \right) = |\Omega|.$$

On définit les normes associées aux produits scalaires définis précédemment

$$\|\mathbf{u}^\tau\|_{\mathcal{T}} = \llbracket \mathbf{u}^\tau, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}, \quad (6.14)$$

$$\|\xi^{\tilde{\mathcal{D}}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} = (\xi^{\tilde{\mathcal{D}}} : \xi^{\tilde{\mathcal{D}}})_{\tilde{\mathcal{D}}}^{\frac{1}{2}} \quad \forall \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}, \quad (6.15)$$

ainsi que la norme de Frobenius

$$\|\xi\| = (\xi : \xi)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \xi \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}). \quad (6.16)$$

### 6.3.4 Opérateurs discrets

Définissons à présent les opérateurs discrets. La technique de construction du gradient est la même que celle utilisée en 2d. La justification de la construction du gradient est faite dans [29] pour le problème scalaire de l'électrocardiologie.

#### Définition 6.3.1 (*Expression du gradient par demi diamant*)

Soit  $K \in \mathfrak{M}$  un volume primal et  $s \in \partial K$ . Le gradient par demi diamant, défini de  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$ , et noté  $\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau$ , s'écrit pour tout  $D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\nabla^{D_{Ks}} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{3|D_{Ks}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{Ks} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i^{Ks} \otimes (\mathbf{N}_{i-1}^{Ks} - \mathbf{N}_{i+1}^{Ks}) \right). \quad (6.17)$$

#### Remarque 6.3.2

En l'absence de discontinuité des coefficients de Lamé, et en utilisant les relations (6.10), nous pouvons définir des opérateurs par diamants entiers en éliminant l'inconnue  $\mathbf{u}_s$

$$\nabla^{D_s} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{3|D_{Ks}|} \left( (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{Ks} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i^{Ks} \otimes (\mathbf{N}_{i-1}^{KL} - \mathbf{N}_{i+1}^{KL}) \right), \quad (6.18)$$

$$(\nabla^{D_s} \mathbf{u}^\tau)^T = \frac{1}{3|D_{K_s}|} \left( \mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{N}_{i-1}^{KL} - \mathbf{N}_{i+1}^{KL}) \otimes \mathbf{u}_i^{K_s} \right), \quad (6.19)$$

$$\mathbb{D}iv^{D_s} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{3|D_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i^{K_s} \cdot (\mathbf{N}_{i-1}^{KL} - \mathbf{N}_{i+1}^{KL}) \right) \text{Id}. \quad (6.20)$$

Nous définissons la divergence discrète par volume qui imite la propriété de la forme continue.

**Théorème 6.3.1**

Nous définissons une approximation consistante de l'opérateur divergence  $\mathbf{div}^\mathcal{T}$  pour un champ de tenseurs de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})^{\#\hat{\mathcal{D}}}$  dans  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{div}^{K^*} \xi^{\hat{\mathcal{D}}} &= \frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} \xi^{D_{K_s}} \mathbf{N}_{K_s} & \forall K \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{div}^{K^*} \xi^{\hat{\mathcal{D}}} &= \frac{1}{|K^*|} \sum_{K,s,i \setminus \mathbf{x}_{K^*} = \mathbf{x}_i^{K_s}} \xi^{D_{K_s}} (\mathbf{N}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{N}_{i-1}^{K_s}) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*int}, \\ \mathbf{div}^{K^*} \xi^{\hat{\mathcal{D}}} &= \frac{1}{|K^*|} \sum_{K,s,i \setminus \mathbf{x}_{K^*} = \mathbf{x}_i^{K_s}} \xi^{D_{K_s}} (\mathbf{N}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{N}_{i-1}^{K_s}) \\ &+ \frac{1}{|K^*|} \sum_{s \in \partial K^* \cap \partial \Omega} \xi^{D_{K_s}} (\mathbf{N}_{s,i-1,i} + \mathbf{N}_{s,i,i+1}) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*b}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Par la suite, nous utiliserons les notations contractées

$$\mathbf{div}^{\mathfrak{M}} \xi^{\hat{\mathcal{D}}} = (\mathbf{div}^K \xi^{\hat{\mathcal{D}}})_{K \in \mathfrak{M}} \quad \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^{\hat{\mathcal{D}}} = (\mathbf{div}^{K^*} \xi^{\hat{\mathcal{D}}})_{K^* \in \mathfrak{M}^*},$$

et

$$\mathbf{div}^\mathcal{T} \xi^{\hat{\mathcal{D}}} = (\mathbf{div}^{\mathfrak{M}} \xi^{\hat{\mathcal{D}}}, \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^{\hat{\mathcal{D}}}).$$

Grâce à ces définitions d'opérateurs discrets, nous pouvons désormais définir les champs de vecteurs de déformation et de divergence dans  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$ .

**Définition 6.3.2 (Tenseur des déformations discret)**

On définit le tenseur discret des déformations  $\mathbb{D}^{\hat{\mathcal{D}}}$  de  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})^{\#\hat{\mathcal{D}}}$  pour un champ de vecteurs  $\mathbf{u}^\tau$  et pour tout  $D_{K_s} \in \hat{\mathcal{D}}$  par

$$\mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \frac{\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau + (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T}{2}. \quad (6.22)$$

**Définition 6.3.3 (Tenseur de divergence discret)**

On définit le tenseur discret de divergence  $\mathbb{D}iv^{\hat{\mathcal{D}}}$  de  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})^{\#\hat{\mathcal{D}}}$  pour un champ de vecteurs  $\mathbf{u}^\tau$  et pour tout  $D_{K_s} \in \hat{\mathcal{D}}$  par

$$\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau = \mathbf{div}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \text{Id} = \text{tr}(\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau) \text{Id}. \quad (6.23)$$

## 6.4 Relation de Green discrète

Les opérateurs construits dans la section précédente sont en dualité discrète, c'est-à-dire qu'il existe une formule de Green discrète, identique à la formule continue, qui lie la divergence par volume au gradient par face. Cette relation de dualité a donné son nom à la méthode DDFV.

### **Théorème 6.4.1 (Formule de Green)**

Soit la famille de matrices  $\xi^{\tilde{\mathcal{D}}}$  qui satisfait la condition de conservation aux interfaces primales suivante : pour tout  $s = K \cap L$

$$\xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{n}_{Ks} = \xi^{\text{D}_{Ls}} \mathbf{n}_{Ks}. \quad (6.24)$$

Soit  $\mathbf{u}^\tau$  un vecteur de  $(\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$ . Alors la relation de Green discrète s'écrit

$$\llbracket \text{div}^\mathcal{T} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} = - \left( \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau \right)_{\tilde{\mathcal{D}}} + \langle \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{n}, \gamma(\mathbf{u}^\tau) \rangle_{\Gamma}. \quad (6.25)$$

où l'opérateur trace  $\gamma : (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}} \mapsto \gamma(\mathbf{u}^\tau) = (\gamma_s(\mathbf{u}^\tau))_{s \in \mathcal{E}^b}$  est défini par

$$\gamma_s(\mathbf{u}^\tau) = \frac{1}{3} \mathbf{u}_s + \frac{2}{9} \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i^s \quad (6.26)$$

où  $\mathbf{u}_s$  est la valeur intervenant dans  $\nabla^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{u}^\tau$ .

**Démonstration:** On se place dans les conditions du théorème. On pose  $\mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{u}_i^{\text{K}s} = \mathbf{u}_i^s$ , conformément à la Convention 6.2.1. Soit  $\xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\#\tilde{\mathcal{D}}}$  une famille de matrices satisfaisant la condition de conservation (6.24). Soit  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  une famille de vecteurs. La relation (6.11) nous donne

$$\begin{aligned} \llbracket \text{div}^\mathcal{T} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \text{div}^K \xi^{\text{D}_{Ks}} \cdot \mathbf{u}_K + \frac{1}{3} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} |K^*| \text{div}^{K^*} \xi^{\text{D}_{Ks}} \cdot \mathbf{u}_{K^*} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathfrak{M}} |K| \left( \frac{1}{|K|} \sum_{s \in \partial K} \xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks} \right) \cdot \mathbf{u}_K \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} |K^*| \left( \frac{1}{|K^*|} \sum_{K, s, i \setminus \mathbf{x}_{K^*} = \mathbf{x}_i^{\text{K}s}} \xi^{\text{D}_{Ks}} (\mathbf{N}_{i+1}^{\text{K}s} - \mathbf{N}_{i-1}^{\text{K}s}) \right) \cdot \mathbf{u}_{K^*} \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} |K^*| \left( \frac{1}{|K^*|} \sum_{s \in \partial K^* \cap \partial \Omega} \xi^{\text{D}_{Ks}} (\mathbf{N}_{s, i-1, i} + \mathbf{N}_{s, i, i+1}) \right) \cdot \mathbf{u}_{K^*}. \end{aligned}$$

On réorganise la somme sur les volumes primaux et duaux en une somme sur les demi diamants, en utilisant les correspondances entre volumes primaux et duaux et demi diamants. Grâce aux définitions des vecteurs du maillage données en (6.7)-(6.10), on a

$$\begin{aligned} \llbracket \text{div}^\mathcal{T} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{3} \sum_{\text{D}_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} (\xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_{Ks}) \cdot \mathbf{u}_K \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{\text{D}_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 (\xi^{\text{D}_{Ks}} \mathbf{N}_i^{\text{K}s}) \cdot (\mathbf{u}_{i-1}^{\text{K}s} - \mathbf{u}_{i+1}^{\text{K}s}) \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{i=1}^3 (\xi^{\text{D}_{Ks}} (\mathbf{N}_{s, i-1, i} + \mathbf{N}_{s, i, i+1})) \cdot \mathbf{u}_i^{\text{K}s}. \end{aligned}$$

D'après la continuité de la composante normale de  $\xi^{\tilde{\mathcal{D}}}$  à travers l'interface du maillage primal interne  $s \in \mathcal{E}^{\text{int}}$  énoncée en (6.24), et en utilisant la relation (A.1b), on peut réécrire la somme

précédente en introduisant les inconnues intermédiaires aux faces

$$\begin{aligned}
\llbracket \mathbf{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^{\tau} \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} (\xi^{D_{K_s}} \mathbf{N}_{K_s}) \cdot (\mathbf{u}_K - \mathbf{u}_s) + \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}^b} (\xi^{D_{K_s}} \mathbf{N}_{K_s}) \cdot \mathbf{u}_s \\
&+ \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 (\xi^{D_{K_s}} \mathbf{N}_i^{K_s}) \cdot (\mathbf{u}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i+1}^{K_s}) \\
&+ \frac{1}{3} \sum_{s \in \mathcal{E}} \sum_{i=1}^3 (\xi^{D_{K_s}} (\mathbf{N}_{s,i-1,i} + \mathbf{N}_{s,i,i+1})) \cdot \mathbf{u}_i^{K_s} \\
&= -\frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \xi^{D_{K_s}} : \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} \right) \\
&+ \frac{1}{3} \sum_{s \in \mathcal{E}} \xi^{D_{K_s}} : \left( \mathbf{u}_s \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i^{K_s} \otimes (\mathbf{N}_{s,i-1,i} + \mathbf{N}_{s,i,i+1}) \right).
\end{aligned}$$

La relation (6.9) nous permet d'affirmer que pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$ , on a  $\mathbf{N}_{s,i-1,i} = \frac{1}{3} \mathbf{N}_{K_s}$ . Ainsi, d'après la définition du gradient par demi diamant (6.17), celle de l'opérateur trace (6.26) et celle des produits scalaires (6.12) et (6.13), on a bien

$$\llbracket \mathbf{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\tilde{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}^{\tau} \rrbracket_{\mathcal{T}} = -\left( \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau} \right)_{\tilde{\mathcal{D}}} + \langle \xi^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{n}, \gamma(\mathbf{u}^{\tau}) \rangle_{\Gamma}$$

ce qui achève la démonstration. ■

## 6.5 Condition de continuité à travers les faces

La condition de continuité à travers les interfaces internes du maillage primal va nous donner une expression de  $\mathbf{u}_s$  en fonction des inconnues principales  $\mathbf{u}^{\tau}$ , des coefficients de Lamé et des paramètres du maillage.

### Définition 6.5.1 (Condition de continuité)

Soit  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$  une face interne. La condition de continuité s'écrit

$$\sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^{\tau}) \mathbf{n}_{K_s} = \sigma^{D_{L_s}}(\mathbf{u}^{\tau}) \mathbf{n}_{K_s}. \quad (6.27)$$

### Théorème 6.5.1 (Expression des inconnues aux faces)

1. Pour toute face interne  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$ , il existe un unique  $\mathbf{u}_s$ , dépendant uniquement des inconnues principales  $\mathbf{u}^{\tau}$ , des coefficients de Lamé constants par volume primal et des paramètres du maillage, qui satisfait l'équation (6.27). Son expression est

$$\mathbf{u}_s = \beta_{KL}^{-1} (\beta_L^s \mathbf{u}_L + \beta_K^s \mathbf{u}_K - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{KL} (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s})). \quad (6.28)$$

où les matrices élémentaires sont définies en (C.1)-(C.6).

2. Pour toute face de bord  $s \in \mathcal{E}^{bd}$ , l'inconnue auxiliaire  $\mathbf{u}_s$  est éliminée via la condition de bord de Dirichlet. Son expression est

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{g}(\mathbf{x}_s). \quad (6.29)$$

Nous n'avons pas besoin de l'expression de  $\mathbf{u}_s$  sur les arêtes du bord de Neumann.

**Démonstration :** Tout comme au chapitre Diamant 2d en Proposition 4.3.1, formule (4.20), les flux normaux du tenseur des contraintes discret s'expriment à l'aide des matrices élémentaires (C.1)-(C.6)

$$\begin{aligned}\sigma^{\text{DKs}}(\mathbf{u}^\tau)\mathbf{n}_{\text{Ks}} &= \beta_{\text{K}}^{\text{s}}(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{K}}) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{\text{Ks}}(\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}}) \\ \sigma^{\text{DLs}}(\mathbf{u}^\tau)\mathbf{n}_{\text{Ls}} &= \beta_{\text{L}}^{\text{s}}(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{L}}) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{\text{Ls}}(\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ls}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ls}})\end{aligned}$$

La condition de continuité (6.27) se traduit alors en

$$\beta_{\text{K}}^{\text{s}}(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{K}}) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{\text{Ks}}(\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}}) = -\beta_{\text{L}}^{\text{s}}(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{\text{L}}) + \sum_{i=1}^3 \beta_i^{\text{Ls}}(\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ls}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ls}}),$$

soit

$$(\beta_{\text{K}}^{\text{s}} + \beta_{\text{L}}^{\text{s}})\mathbf{u}_s = \beta_{\text{L}}^{\text{s}}\mathbf{u}_{\text{L}} + \beta_{\text{K}}^{\text{s}}\mathbf{u}_{\text{K}} - \sum_{i=1}^3 (\beta_i^{\text{Ks}} - \beta_i^{\text{Ls}})(\mathbf{u}_{i+1}^{\text{Ks}} - \mathbf{u}_{i-1}^{\text{Ks}})$$

ce qui correspond à l'expression (6.28) en utilisant le résultat sur l'inversibilité de  $\beta_{\text{KL}}$  en Proposition C.1.1. ■

## 6.6 Inégalité de Korn discrète

L'inégalité de Korn est nécessaire pour montrer que le schéma numérique est stable et bien posé. Elle affirme que l'on peut contrôler le champ de déplacements d'une surface par le tenseur des déformations.

### ***Théorème 6.6.1 (Inégalité de Korn pour le problème de Dirichlet pur)***

*Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  tel que  $\mathbf{u}_{\text{K}^*} = \mathbf{0}$  pour tout  $\text{K}^* \in \mathfrak{M}^{*b}$ . Alors*

$$\|\nabla^{\hat{\mathfrak{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_{\hat{\mathfrak{D}}} \leq \sqrt{2}\|\mathbb{D}^{\hat{\mathfrak{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_{\hat{\mathfrak{D}}}. \quad (6.30)$$

L'inégalité de Korn est énoncée pour des conditions aux bord de Dirichlet pour  $\Gamma_N = \emptyset$ . Le détail de la démonstration est fourni en Annexe D.2.

### ***Remarque 6.6.1***

*La preuve de l'inégalité discrète pour des conditions de bord mixtes est à notre connaissance un problème ouvert. Si  $\Gamma_N \neq \emptyset$ , nous admettons que l'inégalité reste vraie avec une constante différente de  $\sqrt{2}$ . Dans la suite pour l'étude du caractère bien posé, la stabilité et l'estimation d'erreur, on conserve, dans les preuves, les contributions du bord de Neumann. Cependant, le résultat n'est établi que pour les problèmes de Dirichlet pur en raison de l'inégalité de Korn*

## 6.7 Schéma numérique et stabilité

### 6.7.1 Description du schéma et caractère bien posé

#### ***Proposition 6.7.1***

*La définition (5.11) du produit scalaire sur les demi volumes diamants nous permet d'écrire*

que pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  et pour tout  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$

$$\begin{aligned} (\mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= (\mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}, \\ (\mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= (\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}, \\ (\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= 3(\mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau : \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

### Convention 6.7.1

Soit  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$ . On note par convention

$$\begin{aligned} \sqrt{2\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}} \mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau &= \left( \sqrt{2\mu_K} \mathbb{D}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \right)_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}}, \\ \sqrt{\frac{\lambda_{\tilde{\mathcal{D}}}}{3}} \mathbb{D}iv^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau &= \left( \sqrt{\frac{\lambda_K}{3}} \mathbb{D}iv^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \right)_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Pour obtenir le schéma numérique, nous intégrons deux fois le problème de l'élasticité, à la fois sur le maillage primal et sur le maillage dual. Les inconnues auxiliaires situées aux interfaces du maillage primal aussument la condition de conservation 6.27.

### Théorème 6.7.1

Le schéma numérique consiste à trouver  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  tel que

$$\begin{cases} -\mathbf{div}^K(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)) = \mathbf{f}^K & \forall K \in \mathfrak{M}, \\ -\mathbf{div}^{K^*}(\sigma^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbf{u}^\tau)) = \mathbf{f}^{K^*} & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*bN}, \\ \mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_{K^*}) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*bD}, \\ \sigma^{D_{K_s}}(\mathbf{u}^\tau) \mathbf{n}_{K_s} = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} & \forall s \in \mathcal{E}^{bN}, \end{cases} \quad (6.33)$$

avec

$$\mathbf{f}^{\mathfrak{M}} = (\mathbf{f}^K)_{K \in \mathfrak{M}} = \left( \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)_{K \in \mathfrak{M}}, \quad \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{f}^{K^*})_{K^* \in \mathfrak{M}^*} = \left( \frac{1}{|K^*|} \int_{K^*} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)_{K^* \in \mathfrak{M}^*},$$

et où il est sous entendu que la condition de Dirichlet est imposée sur le bord des mailles primales afin de définir le gradient et donc le tenseur des contraintes discret. Lorsque  $\Gamma_N = \{\emptyset\}$ , ce schéma est bien posé et possède une unique solution  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$ .

Les démonstrations sont une simple extension de celles établies en 2d : elles ne seront donc pas faites ici.

### Théorème 6.7.2 (Stabilité)

Soit  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  solution du système (6.33) avec des conditions de Dirichlet et Neumann nulles. Alors il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement de la régularité du maillage et des bornes inférieures des coefficients de Lamé  $\underline{\mu}$  et  $\underline{\lambda}$ , telle que

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 \leq C \|\mathbf{f}^\tau\|_{\mathcal{T}}^2. \quad (6.34)$$

## 6.8 Convergence et estimation d'erreur

### Théorème 6.8.1 (Estimation d'erreur)

En supposant que  $\mathbf{u}$  la solution exacte du problème continu est dans  $W^{2,p}(\Omega)$  pour  $p > 3$ , et que  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  est solution du système (6.33), alors il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage et de  $\mathbf{u}$  telle que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (6.35)$$

On précise que la norme de la différence entre la valeur continue et la valeur discrète est définie par

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2^2 &= \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathfrak{M}} \int_K \|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_K\|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{3} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} \int_{K^*} \|\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{K^*}\|^2 d\mathbf{x}, \\ \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_2^2 &= \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{Ks}} (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau) : (\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

La preuve de ce théorème nécessite plusieurs définitions et résultats préalables. Nous allons d'abord définir des estimateurs d'erreur sur les faces du maillage, puis les évaluer.

**Démonstration :** On définit la quantité  $\mathbf{e}^\tau$  qui représente l'erreur entre la valeur discrète du déplacement et le projeté de sa valeur continue sur le maillage

$$\mathbf{e}^\tau = \mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau \quad (6.36)$$

ainsi que l'opérateur de projection  $\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}$  de la valeur continue sur le maillage

$$\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}_K) & \forall K \in \mathfrak{M} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}_{K^*}) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*b_N} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_{K^*}) & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*b_D}. \end{cases} \quad (6.37)$$

### Remarque 6.8.1

Pour tout  $s = K \cap L$  on a toujours la relation de conservation

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u})\mathbf{n}_{Ks} = \sigma^{D_{Ls}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u})\mathbf{n}_{Ks}, \quad (6.38)$$

ce qui entraîne

$$\widehat{\mathbf{u}}_s = \beta_{KL}^{-1} \left( \beta_L^s \mathbf{u}(\mathbf{x}_L) + \beta_K^s \mathbf{u}(\mathbf{x}_K) - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{Ks} (\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_{i-1}^{Ks})) \right).$$

Pour tout  $s \in \mathcal{E}^{b_N}$  on a

$$\widehat{\mathbf{u}}_s = \mathbf{u}(\mathbf{x}_K) - (\beta_K^s)^{-1} \left( \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^3 \beta_i^{Ks} (\mathbf{u}(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_{i-1}^{Ks})) \right),$$

de telle sorte que

$$\sigma^{D_{Ks}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u})\mathbf{n}_{Ks} = \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6.39)$$

De même qu'en 2d, on définit  $\mathbf{R}_K$  tel que

$$\begin{aligned}
-|K|\mathbf{div}^K(\sigma^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^\tau)) &= -|K|\mathbf{div}^K(\sigma^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u})) + \int_K \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= - \sum_{s \in \partial K} \sigma^{\mathrm{D}_{Ks}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}) \mathbf{N}_{Ks} + \sum_{s \in \partial K} \int_s \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \mathbf{n}_{Ks} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= - \sum_{s \in \partial K} \int_s \left( \sigma^{\mathrm{D}_{Ks}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \right) \mathbf{n}_{Ks} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= |K| \mathbf{R}_K,
\end{aligned}$$

et  $\mathbf{R}_{K^*}$  tel que

$$\begin{aligned}
-|K^*| \mathbf{div}^{K^*}(\sigma^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^\tau)) &= -|K^*| \mathbf{div}^{K^*}(\sigma^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u})) + \int_{K^*} \nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= - \sum_{s^* \in \partial K^{*int}} \left[ \sigma^{\mathrm{D}_{K^*s^*}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}) (\mathbf{N}_{i+1}^{K^*s^*} - \mathbf{N}_{i-1}^{K^*s^*}) - \int_{s^*} \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) (\mathbf{n}_{i+1}^{K^*s^*} - \mathbf{n}_{i-1}^{K^*s^*}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right] \\
&\quad - \sum_{s \in \partial K^{*b}} \left[ \sigma^{\mathrm{D}_{K^*s}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}) (\mathbf{N}_{s,i-1,i} + \mathbf{N}_{s,i,i+1}) - \int_s \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) (\mathbf{n}_{s,i-1,i} + \mathbf{n}_{s,i,i+1}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right] \\
&= |K^*| \mathbf{R}_{K^*}.
\end{aligned}$$

On observe ainsi que l'erreur  $\mathbf{e}^\tau$  obéit à un système d'équations semblable à celui du déplacement  $\mathbf{u}^\tau$ , et qui s'écrit : trouver  $\mathbf{e}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  tel que

$$\begin{cases}
-\mathbf{div}^K(\sigma^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^\tau)) = \mathbf{R}_K & \forall K \in \mathfrak{M}, \\
-\mathbf{div}^{K^*}(\sigma^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^\tau)) = \mathbf{R}_{K^*} & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*bN}, \\
\mathbf{e}_{K^*} = \mathbf{0} & \forall K^* \in \mathfrak{M}^{*bD}, \\
\sigma^{\mathrm{D}_{Ks}}(\mathbf{e}^\tau) \mathbf{n}_{Ks} = \mathbf{0} & \forall s \in \mathcal{E}^{bN}.
\end{cases} \quad (6.40)$$

La formule de Green implique que si  $\mathbf{R}_\tau = (\mathbf{R}_K, \mathbf{R}_{K^*})_{K \in \mathfrak{M}, K^* \in \mathfrak{M}^{*int} \cup \mathfrak{M}^{*bN}}$ , on a

$$\begin{aligned}
\llbracket \mathbf{R}_\tau, \mathbf{e}^\tau \rrbracket_\tau &= \llbracket -\mathbf{div}^\tau(\sigma^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^\tau)), \mathbf{e}^\tau \rrbracket_\tau \\
&= \left( \sigma^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathbf{e}^\tau) : \nabla^{\hat{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^\tau \right)_{\hat{\mathcal{D}}},
\end{aligned}$$

et par suite

$$\llbracket \mathbf{R}_\tau, \mathbf{e}^\tau \rrbracket_\tau = \|\sqrt{2\mu_{\hat{\mathcal{D}}}} \mathbb{D}^{\hat{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^\tau\|_{\hat{\mathcal{D}}}^2 + \|\sqrt{\frac{\lambda_{\hat{\mathcal{D}}}}{3}} \mathbb{D}\mathrm{iv}^{\hat{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^\tau\|_{\hat{\mathcal{D}}}^2.$$

En admettant l'inégalité de Korn (6.30), et étant donné que les coefficients de Lamé sont minorés, on en déduit qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$2\underline{\mu} C \|\nabla^{\hat{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^\tau\|_{\hat{\mathcal{D}}}^2 + \frac{\lambda}{3} \|\mathbb{D}\mathrm{iv}^{\hat{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^\tau\|_{\hat{\mathcal{D}}}^2 \leq \llbracket \mathbf{R}_\tau, \mathbf{e}^\tau \rrbracket_\tau. \quad (6.41)$$

A présent, on cherche à évaluer la quantité  $\llbracket \mathbf{R}_\tau, \mathbf{e}^\tau \rrbracket_\tau = \mathbf{R}_a + \mathbf{R}_b$ , où on note pour la suite

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_a &= \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathfrak{M}} \sum_{s \in \partial K} \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\mathrm{D}_{Ks}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{Ks} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{e}_K, \\
\mathbf{R}_b &= \frac{1}{3} \sum_{K^* \in \mathfrak{M}^*} \sum_{K,s,i \setminus \mathbf{x}_{K^*} = \mathbf{x}_i^{K^*}} \left[ \int_{s_{i+1}^*} \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\mathrm{D}_{K^*s^*}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{i+1}^{K^*s^*} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right. \\
&\quad \left. - \int_{s_{i-1}^*} \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\mathrm{D}_{K^*s^*}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{i-1}^{K^*s^*} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{e}_{K^*} \\
&\quad + \frac{1}{3} \sum_{s \in \mathcal{E}^{b}} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{\mathrm{D}_{K^*s}}(\mathbb{P}^\mathcal{T}\mathbf{u}) \right) (\mathbf{n}_{s,i-1,i} + \mathbf{n}_{s,i-1,i}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{e}_i^{K^*s}.
\end{aligned} \quad (6.42)$$

### Terme $\mathbf{R}_a$

On réorganise la somme sur les volumes primaux  $K \in \mathfrak{M}$  en une somme sur les demi diamants  $D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ . On sait que la donnée par arête  $\mathbf{e}_s = \widehat{\mathbf{u}}_s - \mathbf{u}_s$  est éliminée algébriquement pour toute arête interne par les relations de conservation (6.27) et (6.38). Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &= \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_s) \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}^b} \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{e}_s. \end{aligned}$$

Les conditions aux bords impliquent finalement

$$\mathbf{R}_a = \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_s) \quad (6.43)$$

### Terme $\mathbf{R}_b$

On réécrit l'expression de  $\mathbf{R}_b$  en réorganisant les sommes sur les demi diamants internes et de bord. Le terme  $\mathbf{R}_b$  devient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b &= \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{s_i^*} \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_i^{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{e}_{i+1}^{K_s}) \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{s \in \mathcal{E}^b} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_i^{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot \mathbf{e}_i^s \\ &= \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{s_i^*} \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_i^{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{e}_{i+1}^{K_s}) \\ &\quad + \frac{2}{3} \sum_{s \in \mathcal{E}^b} \left[ \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} \right] \cdot \frac{\mathbf{e}_1^{K_s} + \mathbf{e}_2^{K_s} + \mathbf{e}_3^{K_s}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \sum_{i=1}^3 \left[ \int_{s_i^*} \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_i^{K_s} d\mathbf{x} \right] \cdot (\mathbf{e}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{e}_{i+1}^{K_s}). \end{aligned}$$

car la relation (6.7) nous donne  $\mathbf{n}_{s,i-1,i} + \mathbf{n}_{s,i,i+1} = \frac{2}{3} \mathbf{n}_{K_s}$  et parce que les contributions aux bords sont nulles. En utilisant les propriétés géométriques du volume diamant, on peut exprimer les quantités  $\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_s$  et  $\mathbf{e}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{e}_{i+1}^{K_s}$  en fonction du gradient de  $\mathbf{e}^\tau$ . L'expression du gradient par demi diamant est donnée par 6.17. Soit  $\left\{ \mathbf{t}_{K_s}, (\mathbf{t}_i^{K_s})_{i=\llbracket 1,3 \rrbracket} \right\}$  une famille de vecteurs adimensionnés, définie pour chaque demi cellule diamant de la façon suivante.

- Pour chaque demi diamant,  $\mathbf{t}_{K_s}$  est tel que  $\mathbf{n}_i^{K_s} \cdot \mathbf{t}_{K_s} = 0 \quad \forall i = \llbracket 1,3 \rrbracket$ . Un tel vecteur existe. En effet, la famille composée des trois vecteurs  $(\mathbf{n}_i^{K_s})_{i=\llbracket 1,3 \rrbracket}$  est une famille liée, car elle obéit à l'équation

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i^{K_s} = \mathbf{0}.$$

Il existe donc un plan vectoriel auquel appartiennent ces 3 vecteurs, et par conséquent il existe une direction de l'espace à laquelle appartient  $\mathbf{t}_{K_s}$  et qui satisfait la condition précédente.

- Pour chaque demi diamant interne, les vecteurs  $(\mathbf{t}_i^{K_s})_{i=\llbracket 1,3 \rrbracket}$  sont non colinéaires et appartiennent à un plan vectoriel parallèle à la face  $s$  de sorte que pour tout  $i = \llbracket 1,3 \rrbracket$ ,  $\mathbf{n}_{K_s} \cdot \mathbf{t}_i^{K_s} = 0$ .

Un des choix possible, illustré en Figure 6.8.1 est de prendre  $\mathbf{t}_{K_s}$  comme étant le vecteur adimensionné colinéaire à  $\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_K$ , et de prendre, pour tout  $i = \llbracket 1,3 \rrbracket$ , le vecteur  $\mathbf{t}_i^{K_s}$  colinéaire au vecteur  $\mathbf{x}_i^{K_s} - \mathbf{x}_s$ . La régularité du maillage définie en section 6.2.5 impose qu'il existe une constante  $\alpha_0 > 0$ , telle que pour tout volume  $K \in \mathfrak{M}$ , pour tout face  $s \in \mathcal{E}$ , pour tout face

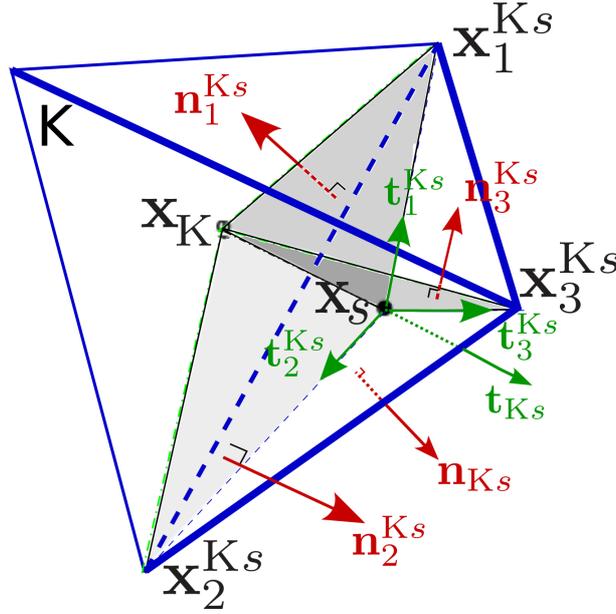


FIGURE 6.8.1 – Une des constructions possibles des vecteurs  $\mathbf{t}_{K_s}$  et  $\mathbf{t}_1^{K_s}$ .

$s^* \in \mathcal{E}^{*int}$  et pour tout  $i = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $\min_{K, s, s^*} (|\mathbf{n}_{K_s} \cdot \mathbf{t}_{K_s}|, |\mathbf{n}_i^{K_s} \cdot \mathbf{t}_{i+1}^{K_s}|) \geq \alpha_0$ , de sorte que l'on peut extraire de la famille de vecteurs définie précédemment une base de  $(\mathbb{R}^3)^{\#T}$ . Dans ces conditions, pour tout volume primal  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$ , on a

$$(\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^T) \mathbf{t}_{K_s} = -\frac{1}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{e}_K - \mathbf{e}_s) |s| (\mathbf{n}_{K_s} \cdot \mathbf{t}_{K_s}).$$

On définit par ailleurs un gradient associé à chaque sommet  $i$  du demi diamant  $D_{K_s}$  de sorte que pour tout  $i = \llbracket 1, 3 \rrbracket$  et pour tout  $D_{K_s}$  de  $\tilde{\mathcal{D}}$

$$\begin{cases} \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^T |_i = \frac{1}{3|D_{K_s}|} \left( (\mathbf{e}_s - \mathbf{e}_K) \otimes \frac{\mathbf{N}_{K_s}}{3} + (\mathbf{e}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{e}_{i-1}^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} \right), \\ \sum_{i=1}^3 \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^T |_i = \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^T. \end{cases} \quad (6.44)$$

On a donc la relation suivante : pour tout  $i = \llbracket 1, 3 \rrbracket$

$$\begin{aligned} (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^T |_i) \mathbf{t}_{i+1}^{K_s} &= -\frac{1}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{e}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{e}_{i+1}^{K_s}) (\mathbf{N}_i^{K_s} \cdot \mathbf{t}_{i+1}^{K_s}) \\ &= -\frac{1}{3|D_{K_s}|} (\mathbf{e}_{i-1}^{K_s} - \mathbf{e}_{i+1}^{K_s}) |s_i^*| (\mathbf{n}_i^{K_s} \cdot \mathbf{t}_{i+1}^{K_s}). \end{aligned} \quad (6.45)$$

On va par la suite utiliser les notations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{K_s} &= \frac{1}{|s|} \int_s \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \quad \forall s \in \mathcal{E}, \\ \mathbf{R}_{s_i^*} &= \frac{1}{|s_i^*|} \int_{s_i^*} \left( \sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}) \right) \mathbf{n}_i^{K_s} d\mathbf{x} \quad \forall s_i^* \in \mathcal{E}^*. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Ainsi, les termes  $\mathbf{R}_a$  et  $\mathbf{R}_b$  s'écrivent

$$\mathbf{R}_a = -\frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \mathbf{R}_{K_s} \cdot \frac{3(\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^T) \mathbf{t}_{K_s}}{\mathbf{n}_{K_s} \cdot \mathbf{t}_{K_s}}, \quad \mathbf{R}_b = -\frac{1}{3} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 |D_{K_s}| \mathbf{R}_{s_i^*} \cdot \frac{3(\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{e}^T |_i) \mathbf{t}_{i+1}^{K_s}}{\mathbf{n}_i^{K_s} \cdot \mathbf{t}_{i+1}^{K_s}}. \quad (6.47)$$

Par Cauchy Schwarz

$$\|\mathbf{R}_a\| \leq C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \left( \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \|\mathbf{R}_{Ks}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{R}_b\| \leq C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \left( \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \left\| \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_{s_i^*} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.48)$$

Finalement, il existe une constante  $C$  dépendant de la régularité du maillage telle que

$$\llbracket \mathbf{R}_{\tau}, \mathbf{e}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\tau} \leq C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \left[ \left( \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \|\mathbf{R}_{Ks}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \left\| \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_{s_i^*} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (6.49) \quad \blacksquare$$

### 6.8.1 Inégalités de trace et Poincaré

#### Proposition 6.8.1 (Inégalité de trace)

Soient  $p \geq 1$ ,  $K \in \mathfrak{M}$  et  $s \in \partial K$ . Il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage, telle que, pour toute fonction  $\mathbf{v} \in W^{1,p}(D_{Ks})$

$$\left\| \frac{1}{|s|} \int_s \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right\|^p \leq \frac{C \operatorname{diam}(D_{Ks})^{p-1}}{|s|} \int_{D_{Ks}} \|\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})\|^p \, d\mathbf{x} + \frac{C}{|s| \operatorname{diam}(D_{Ks})} \int_{D_{Ks}} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|^p \, d\mathbf{x} \quad (6.50)$$

#### Proposition 6.8.2 (Inégalité de Poincaré discrète)

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement du diamètre de  $\Omega$  et de la régularité du maillage, telle que, pour toute fonction  $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\#\mathcal{T}}$  avec  $\mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{0}$  pour tout  $K^* \in \mathfrak{M}^{*bD}$  et  $\mathbf{u}_s = \mathbf{0}$  pour tout  $s \in \mathcal{E}^{bD}$ , on a

$$\|\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T}} \leq C \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}}. \quad (6.51)$$

### 6.8.2 Propriétés de l'opérateur de projection

On dispose des trois estimations suivantes sur le gradient du projeté, sur l'erreur du gradient du projeté et sur l'erreur du projeté. Leur démonstration est une extension de leur version 2d donnée en Proposition 5.8.3.

#### Proposition 6.8.3

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que, pour toute fonction  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  avec  $p > 3$ , on a

$$\sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| \|\nabla^{D_{Ks}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|^p \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p, \quad (6.52)$$

$$\sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{Ks}} \|\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla^{D_{Ks}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|^p \, d\mathbf{x} \leq C \operatorname{size}(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p, \quad (6.53)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 \leq C \operatorname{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (6.54)$$

#### Proposition 6.8.4 (Estimation d'erreur de la divergence projetée)

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage de  $\Omega$ . Il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement de la régularité du maillage et des coefficients de Lamé telle que, pour toute fonction  $\mathbf{u} \in W^{2,p}(\Omega)$  avec

$p > 3$ , on a

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\mathbb{D}iv \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbb{D}iv^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})\|^p d\mathbf{x} \leq C size(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (6.55)$$

**Démonstration :** Sachant que  $\mathbb{D}iv \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) \text{Id}$  et que  $\mathbb{D}iv^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}) = \text{tr}(\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})) \text{Id}$ , la relation (6.53) implique que

$$\begin{aligned} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\mathbb{D}iv \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbb{D}iv^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})\|^p d\mathbf{x} &= 3^{\frac{p}{2}} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}))\|^p d\mathbf{x} \\ &\leq C size(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### 6.8.3 Fin de preuve : estimation d'erreur

On va à présent donner une estimation de l'erreur pour le déplacement et pour le gradient des déplacements, afin d'achever la preuve du Théorème 6.8.1.

**Démonstration :** Regardons dans un premier temps le terme  $\mathbf{R}_{K_s}$ . On sait que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^p = \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left\| \frac{1}{|s|} \int_s (\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})) \mathbf{n}_{K_s} d\mathbf{x} \right\|^p.$$

En utilisant la Proposition 6.8.1, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^p &\leq \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left[ \frac{C \text{diam}(D_{K_s})^{p-1}}{|s|} \int_{D_{K_s}} \|\nabla(\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}))\|^p d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{|s| \text{diam}(D_{K_s})} \int_{D_{K_s}} \|\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})\|^p d\mathbf{x} \right]. \end{aligned} \quad (6.56)$$

La régularité du maillage définie en section (6.2.5) nous indique qu'il existe des constantes  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$ , dépendantes du maillage, telles que

$$|D_{K_s}| \frac{\text{diam}(|D_{K_s}|)}{|s|} \leq C_1 size(\mathcal{T})^2 \quad \text{et} \quad \frac{|D_{K_s}|}{\text{diam}(D_{K_s})|s|} \leq C_2. \quad (6.57)$$

D'une part, on sait que  $\sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})$  est une valeur constante par demi diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}$ , ce qui implique que  $\nabla \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ . Il existe ainsi une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage, telle que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \frac{\text{diam}(D_{K_s})^{p-1}}{|s|} \int_{D_{K_s}} \|\nabla(\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}))\|^p d\mathbf{x} \leq C size(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (6.58)$$

D'autre part

$$\left. \begin{aligned} \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})\|^p d\mathbf{x} &\leq \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\mu(\mathbf{x})(\nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - (\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})))\|^p d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\mu(\mathbf{x})((\nabla(\mathbf{u}(\mathbf{x}))^T - (\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u}))^T))\|^p d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|\lambda(\mathbf{x})(\text{tr}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) - \text{tr}(\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^T \mathbf{u})))\|^p d\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (6.59a)$$

$$\left. \begin{aligned}
& + \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|(\mu(\mathbf{x}) - \mu_{D_{K_s}})(\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}))\|^p d\mathbf{x} \\
& + \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|(\mu(\mathbf{x}) - \mu_{D_{K_s}})(\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}))^T\|^p d\mathbf{x} \\
& + \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \int_{D_{K_s}} \|(\lambda(\mathbf{x}) - \lambda_{D_{K_s}})tr(\nabla^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}))\|^p d\mathbf{x}.
\end{aligned} \right\} \quad (6.59b)$$

Ainsi, si on s'en tient au fait que les coefficients de Lamé sont réguliers ( $C^1$  ou  $W^{1,\infty}$  par exemple) par sous-domaines, à la définition de la norme matricielle, aux relations (5.58) et (6.55) pour (6.59a) ainsi qu'à la relation (5.57) pour (6.59b) il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage et des coefficients de Lamé telle que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{|D_{K_s}|}{|s|diam(D_{K_s})} \int_{D_{K_s}} \|\sigma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - \sigma^{D_{K_s}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|^p d\mathbf{x} \leq Csize(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (6.60)$$

En réunissant les deux inégalités (6.58) et (6.60), et grâce aux résultats (6.57) sur le maillage, il existe ainsi une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage et des coefficients de Lamé telle que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^p \leq Csize(\mathcal{T})^p \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p,$$

ce qui implique que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^2 \leq Csize(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^2, \quad (6.61)$$

Pour ce qui est du terme en  $\mathbf{R}_{s_i^*}$ , on arrive par les mêmes arguments à montrer qu'il existe une constante  $C$ , dépendant uniquement des paramètres du maillage et des coefficients de Lamé telle que

$$\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left\| \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_{s_i^*} \right\|^2 \leq Csize(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}^2. \quad (6.62)$$

En combinant (6.41) et (6.49), on a

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq C \left[ \left( \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \|\mathbf{R}_{K_s}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| \left\| \sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_{s_i^*} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

et les estimations (6.61) et (6.62) donnent

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq Csize(\mathcal{T}). \quad (6.63)$$

Concluons à présent en donnant une estimation des normes  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2$  et  $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2$ .

**Estimation de  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2$**  D'après la relation (6.54), l'inégalité de Poincaré (6.51) et l'égalité (6.63), on peut écrire que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2 & \leq \|\mathbf{u} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_{\mathcal{T}} \\
& \leq Csize(\mathcal{T}) + \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau})\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \\
& \leq Csize(\mathcal{T}).
\end{aligned}$$

**Estimation de  $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2$**  D'après la proposition (6.53) et l'égalité (6.63), on peut écrire que

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2 & \leq \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|_2 + \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^{\tau}\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \\
& \leq Csize(\mathcal{T}).
\end{aligned}$$

## 6.9 Illustrations numériques

Nous allons à présent illustrer les résultats théoriques obtenus précédemment par une série de tests numériques. Le premiers, présenté dans les section 6.9.1, est un cas test possédant une solution analytique. La réponse 3d-DDFV sera donc comparée à la solution exacte. Les deux exemples suivants, présentés dans les section 6.9.2 et section 6.9.3, sont les extensions en 3d des Cas E.1.7 et Cas E.1.8 étudiés en 2d-DDFV. Les résultats sont comparés à la réponse éléments finis en 3d.

### 6.9.1 Cas E.2.1 : Déformation d'un cube homogène.

Dans la Figure 6.9.1 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode DDFV avec de la solution exacte. Les déplacements sont multipliés par 10 par souci de clarté. Le cube est visualisé avec une rotation de  $90^\circ$  suivant l'axe de  $z$  (la face  $\gamma_1$  est devant).

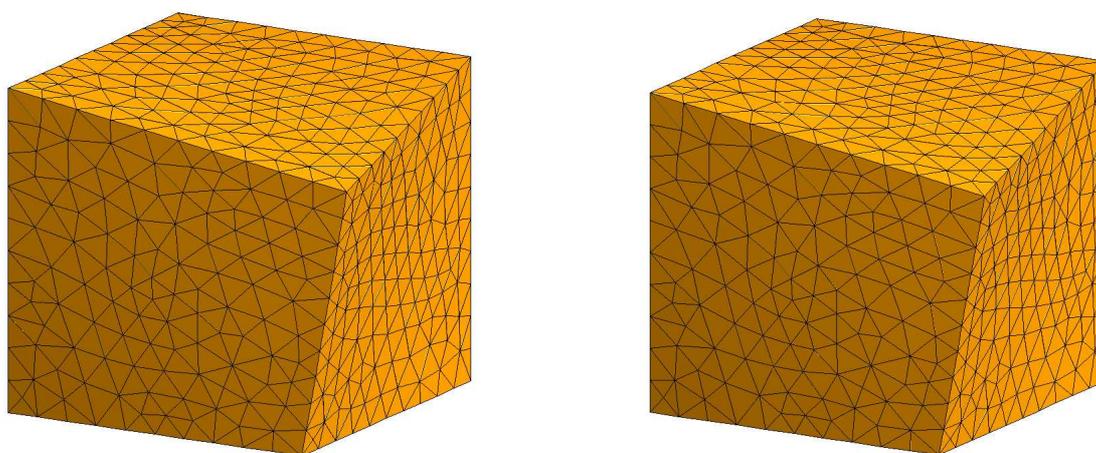


FIGURE 6.9.1 – Cas E.2.1 : réponse du déplacement par DDFV (gauche) et solution exacte (droite).

Les résultats d'estimations d'erreurs sont présentés dans le Tableau 6.9.1 pour les valeurs, et dans la Figure 6.9.2 pour le tracé. Nous utilisons une série de maillages successivement raffinés, c'est-à-dire indépendants les uns des autres. On compare les différences des solutions DDFV et EF dans 3 normes : norme infinie, norme 1 et norme 2. La solution DDFV est notée  $\mathbf{u}_{DDFV}$ , tandis que la solution EF est notée  $\mathbf{u}_{EF}$ .

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _\infty$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{Exact}\ _2$
593	$2.25 \cdot 10^{-1}$	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$	$3.31 \cdot 10^{-4}$
5513	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$5.10 \cdot 10^{-4}$	$2.74 \cdot 10^{-5}$	$6.92 \cdot 10^{-5}$
17717	$7.98 \cdot 10^{-2}$	$2.58 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$3.04 \cdot 10^{-5}$

Tableau 6.9.1 – Cas E.2.1 : estimations d'erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

### 6.9.2 Cas E.2.2 : Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou

Dans les figures 6.9.3 et 6.9.4 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode DDFV ainsi que par éléments finis. Les résultats sont obtenus avec 4840 tétraèdres.

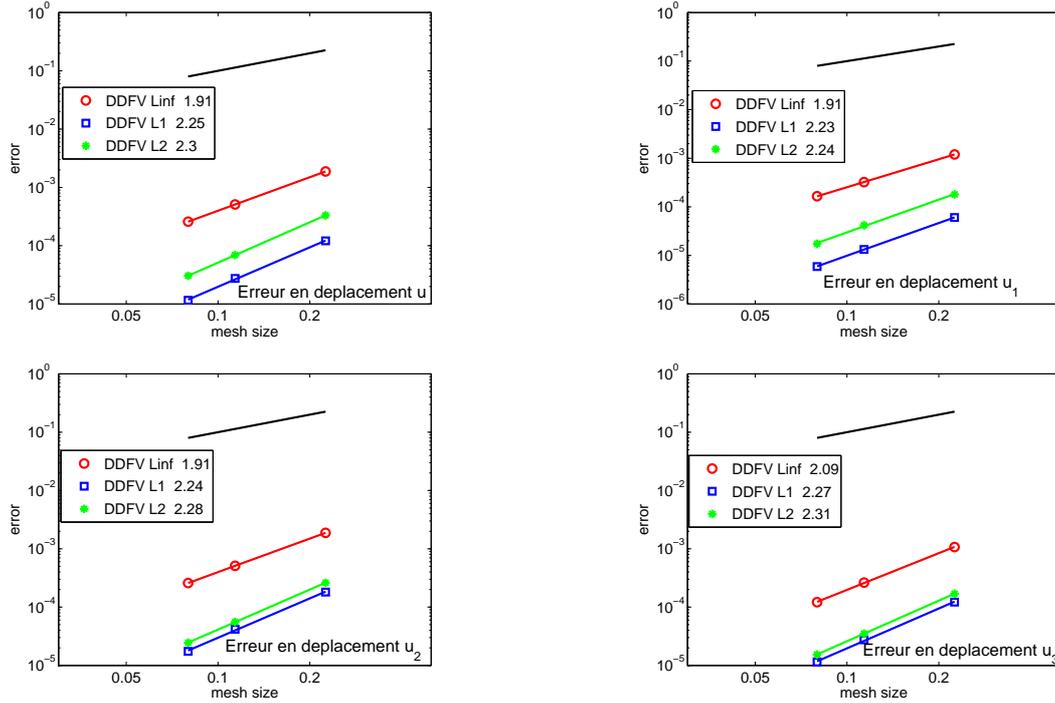


FIGURE 6.9.2 – Cas E.2.1 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés.

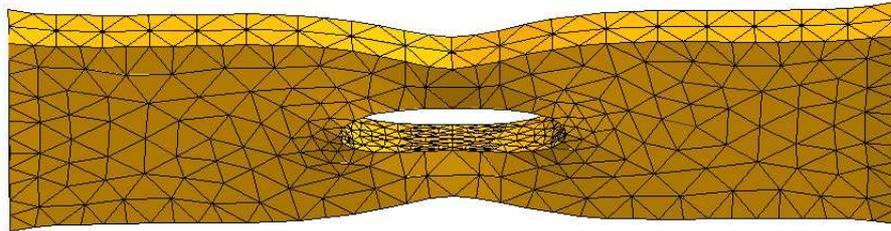


FIGURE 6.9.3 – Cas E.2.2 : réponse du déplacement obtenu avec la méthode DDFV

A présent, nous allons présenter les résultats d’estimation d’erreur. Étant donné que nous ne possédons pas de solution analytique pour ce test, les résultats obtenus par la méthode DDFV sont comparés à ceux obtenus par éléments finis. Les résultats sont présentés pour une série de maillages successivement raffinés (Tableau 6.9.2). Les courbes de convergences sont résumées dans la Figure 6.9.5.

### 6.9.3 Cas E.2.3 : Déformation d’un barreau non homogène percé d’un trou

Dans les figures 6.9.6 et 6.9.7 sont comparés les résultats du déplacement avec la méthode DDFV ainsi que par éléments finis. La Figure 6.9.6 correspond à un matériau composé d’acier à gauche (en foncé) et d’aluminium à droite (en clair). Étant donné que l’acier possède un module d’Young plus grand que l’aluminium, c’est ce dernier qui se déforme le plus, et c’est ce qui se

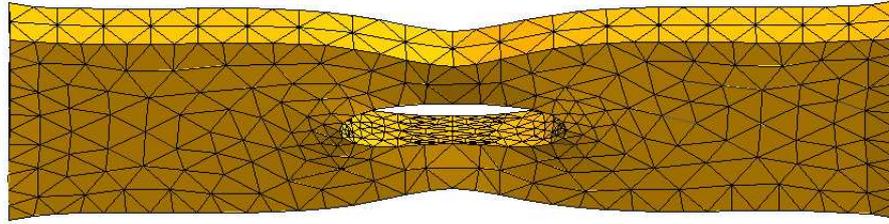


FIGURE 6.9.4 – Cas E.2.2 : réponse du déplacement obtenu par éléments finis

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{EF}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
860	$2.76 \cdot 10^{-1}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.97 \cdot 10^{-3}$	$2.12 \cdot 10^{-3}$
2632	$1.93 \cdot 10^{-1}$	$9.03 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$1.81 \cdot 10^{-3}$
4840	$1.53 \cdot 10^{-1}$	$9.29 \cdot 10^{-3}$	$2.17 \cdot 10^{-3}$	$2.01 \cdot 10^{-3}$
14942	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$5.10 \cdot 10^{-3}$	$6.71 \cdot 10^{-3}$	$6.80 \cdot 10^{-4}$
22600	$8.73 \cdot 10^{-2}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$	$3.11 \cdot 10^{-4}$	$3.73 \cdot 10^{-4}$
36188	$7.42 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$4.00 \cdot 10^{-4}$	$3.99 \cdot 10^{-4}$
309801	$4.22 \cdot 10^{-2}$	$1.40 \cdot 10^{-3}$	$4.03 \cdot 10^{-4}$	$3.72 \cdot 10^{-4}$

Tableau 6.9.2 – Cas E.2.2 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

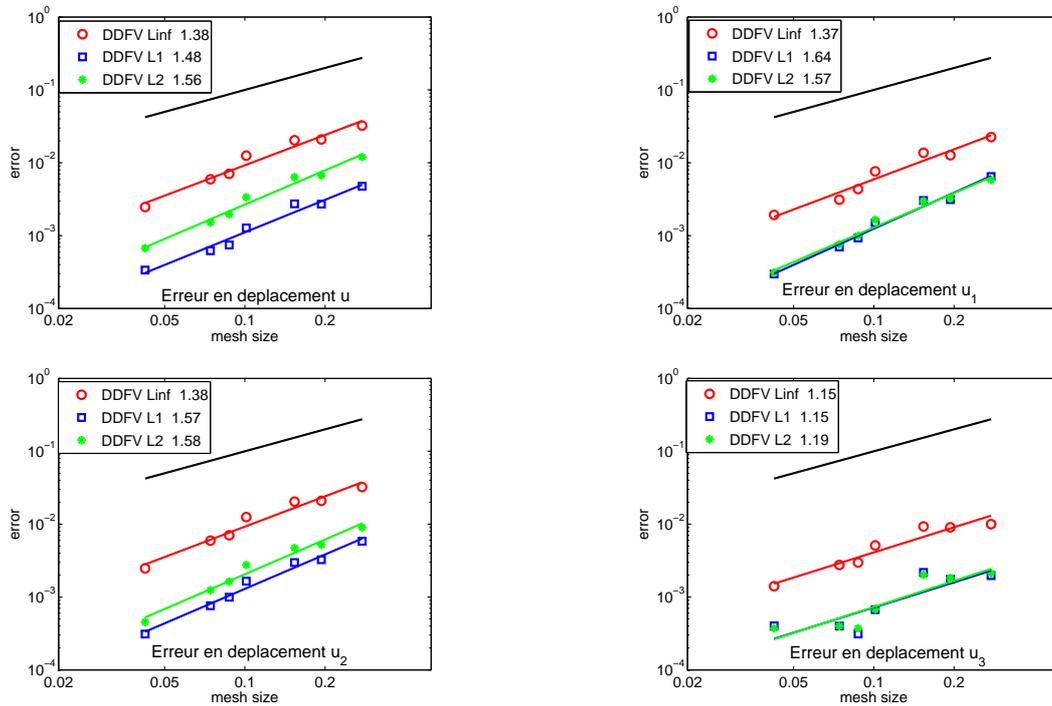


FIGURE 6.9.5 – Cas E.2.2 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés et courbe d'ordre 1 (en noir).

remarque dans ces figures. Dans la Figure 6.9.7, les matériaux sont intervertis (aluminium à gauche, acier à droite).

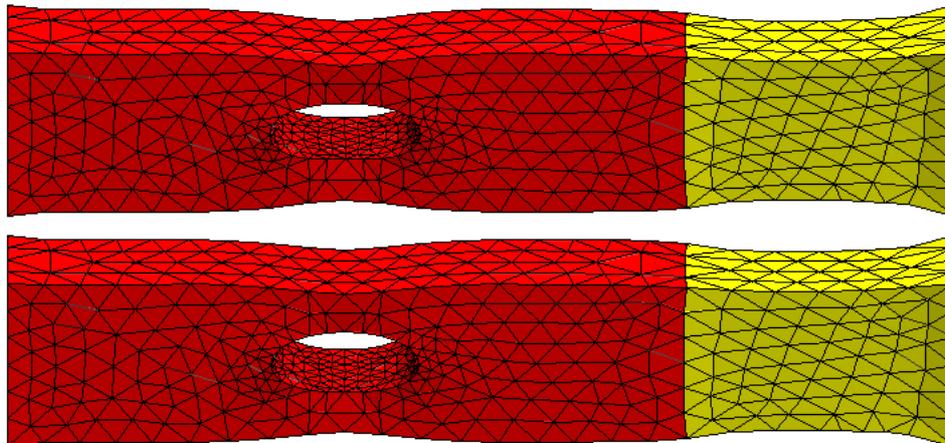


FIGURE 6.9.6 – Cas E.2.3 : réponse du déplacement acier (sombre) / aluminium (clair) par DDFV (en haut) et par éléments finis (bas).

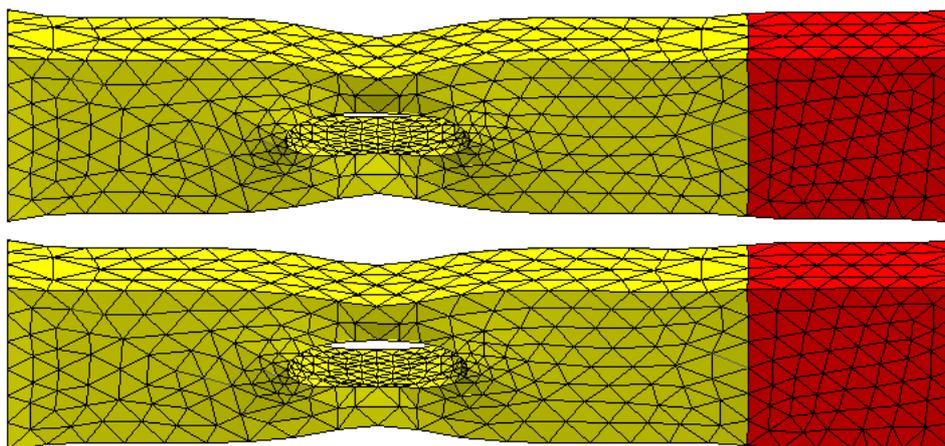


FIGURE 6.9.7 – Cas E.2.3 : réponse du déplacement aluminium (clair) / acier (sombre) par DDFV (en haut) et par éléments finis (bas).

Intéressons-nous à présent aux estimations d'erreur. Comme pour le Cas E.2.2, on compare les réponses DDFV et éléments finis pour une série de maillages raffinés successivement.

Volumes	$h$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{EF}\ _{\infty}$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{EF}\ _1$	$\ \mathbf{u}_{DDFV} - \mathbf{u}_{EF}\ _2$
862	$2.29 \cdot 10^{-1}$	$5.45 \cdot 10^{-2}$	$1.32 \cdot 10^{-2}$	$2.34 \cdot 10^{-2}$
5067	$1.59 \cdot 10^{-1}$	$2.38 \cdot 10^{-2}$	$4.90 \cdot 10^{-3}$	$9.04 \cdot 10^{-3}$
26618	$9.14 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$2.74 \cdot 10^{-3}$	$4.48 \cdot 10^{-3}$
36874	$1.10 \cdot 10^{-1}$	$9.04 \cdot 10^{-3}$	$3.15 \cdot 10^{-3}$	$4.51 \cdot 10^{-3}$
286172	$4.22 \cdot 10^{-2}$	$2.46 \cdot 10^{-3}$	$3.37 \cdot 10^{-4}$	$6.72 \cdot 10^{-4}$

Tableau 6.9.3 – Cas E.2.3 : estimations d'erreurs  $L^{\infty}$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour une série de maillages successivement raffinés.

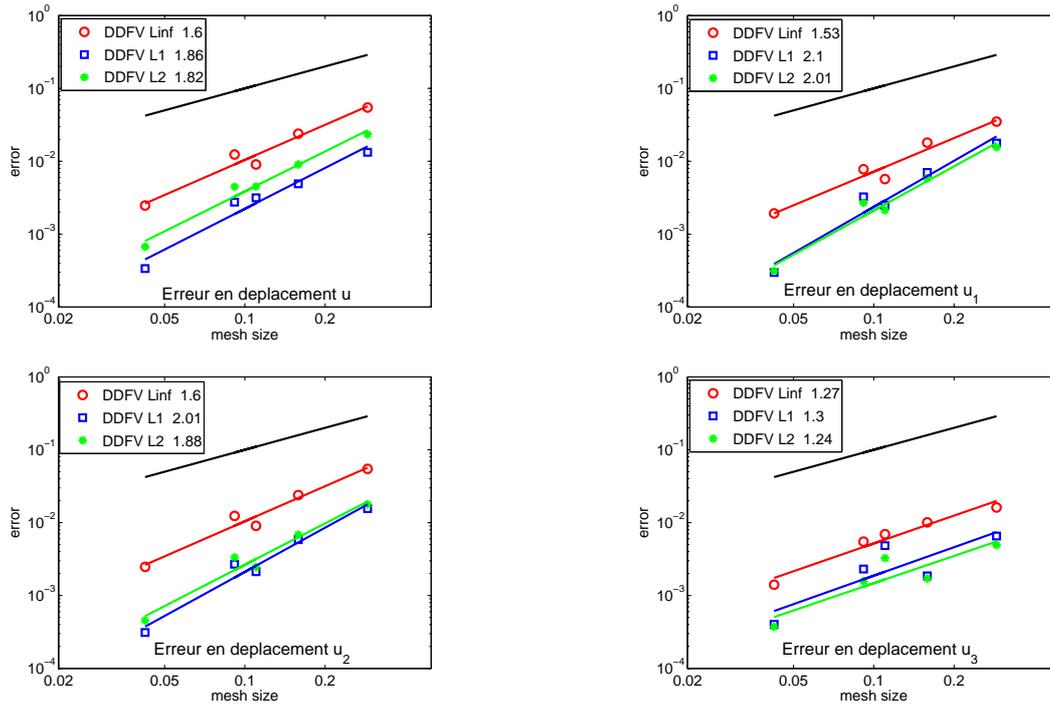


FIGURE 6.9.8 – Cas E.2.3 : estimations d’erreurs  $L^\infty$ ,  $L^1$  et  $L^2$  pour des maillages successivement raffinés et droite de pente 1 (en noir).

On constate à travers ces deux exemples que la convergence de la méthode DDFV est numériquement vérifiée. L’estimation d’erreur de la méthode par éléments finis est en théorie d’ordre 2, et on a vu que celle de la méthode DDFV est d’ordre 1. Tous les graphiques concernant ces estimations d’erreurs (Figures 6.9.5 et 6.9.8) montrent un ordre de convergence proche de 1. L’exemple suivant est un cas test où l’on dispose d’une solution analytique.

## 6.10 Conclusion

En présence d’une solution analytique, on observe une estimation d’erreur d’ordre 2. Ce comportement meilleur que l’estimation théorique est classique pour les volumes finis, même si sa preuve est encore un problème ouvert.

En ce qui concerne la déformation des barreaux, l’ordre de convergence est inférieur à 2, et on observe une dégradation en particulier pour la troisième composante du déplacement. Dans cette direction, seules des conditions de traction libre sont imposées, ce qui pourrait expliquer ce comportement.



# Bibliographie

- [1] I. Aavatsmark. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Comput. Geosci.*, 6(3-4) :405–432, 2002.
- [2] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. I. Derivation of the methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(5) :1700–1716 (electronic), 1998.
- [3] I. Aavatsmark, T. Barkve, Ø. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. II. Discussion and numerical results. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(5) :1717–1736 (electronic), 1998.
- [4] A. Ahmadi. Différentes approches pour le calcul du gradient en maillage non-structuré anisotrope. Technical report, Université de Pau, 2007.
- [5] B. Andreianov, M. Bendahmane, F. Hubert, and S. Krell. On 3d DDFV discretization of gradient and divergence operators. i. meshing, operators and discrete duality. *IMA J. Numer. Anal.*, 2012.
- [6] B. Andreianov, M. Bendahmane, K. H. Karlsen, and C. Pierre. Convergence of discrete duality finite volume schemes for the cardiac bidomain model. *Netw. Heterog. Media*, 6(2) :195–240, 2011.
- [7] B. Andreianov, F. Boyer, and F. Hubert. Discrete duality finite volume schemes for Leray-Lions-type elliptic problems on general 2D meshes. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 23(1) :145–195, 2007.
- [8] T. Arbogast, L. C. Cowsar, M. F. Wheeler, and I. Yotov. Mixed finite element methods on nonmatching multiblock grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(4) :1295–1315, 2000.
- [9] T. Arbogast, M. F. Wheeler, and I. Yotov. Mixed finite elements for elliptic problems with tensor coefficients as cell-centered finite differences. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(2) :828–852, 1997.
- [10] B. Baliga and S. Patankar. A new finite-element formulation for convection-diffusion problems. *Numer. Heat Transfer*, 3(4) :393–409, 1980.
- [11] T. Barth. Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the euler and navier-stokes equations. In *AGARD, Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows 61 p (SEE N92-27671 18-34)*, volume 1, 1992.
- [12] H. Bašić, I. Demirdžić, and S. Muzafferija. Finite volume method for simulation of extrusion processes. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 62(4) :475–494, 2005.
- [13] L. Beirão da Veiga, J. Droniou, and G. Manzini. A unified approach for handling convection terms in finite volumes and mimetic discretization methods for elliptic problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 31(4) :1357–1401, 2011.
- [14] E. Bertolazzi and G. Manzini. A cell-centered second-order accurate finite volume method for convection-diffusion problems on unstructured meshes. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(8) :1235–1260, 2004.

- [15] E. Bertolazzi and G. Manzini. A second-order maximum principle preserving finite volume method for steady convection-diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(5) :2172–2199 (electronic), 2005.
- [16] E. Bertolazzi and G. Manzini. On vertex reconstructions for cell-centered finite volume approximations of 2D anisotropic diffusion problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(1) :1–32, 2007.
- [17] I. Bijelonja, I. Demirdžić, and S. Muzaferija. A finite volume method for incompressible linear elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195(44-47) :6378–6390, 2006.
- [18] F. Boyer and F. Hubert. Finite volume method for 2D linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(6) :3032–3070, 2008.
- [19] F. Boyer, F. Hubert, and S. Krell. Non-overlapping Schwarz algorithm for DDFV schemes on general 2D meshes. In *Finite volumes for complex applications V*, pages 225–232. ISTE, London, 2008.
- [20] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Paris : Masson. XIV, 233 p., 1983.
- [21] Z. Q. Cai. On the finite volume element method. *Numer. Math.*, 58(7) :713–735, 1991.
- [22] Z. Q. Cai, J. Mandel, and S. McCormick. The finite volume element method for diffusion equations on general triangulations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(2) :392–402, 1991.
- [23] C. Carstensen and S. A. Funken. Constants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori error estimates in finite element methods. *East-West J. Numer. Math.*, 8(3) :153–175, 2000.
- [24] C. Chainais-Hillairet and J. Droniou. Finite-volume schemes for noncoercive elliptic problems with Neumann boundary conditions. *IMA J. Numer. Anal.*, 31(1) :61–85, 2011.
- [25] P. G. Ciarlet. *Élasticité tridimensionnelle*. Recherches en Mathématiques Appliquées. Masson, Paris, 1986.
- [26] Y. Coudière, T. Gallouët, and R. Herbin. Discrete Sobolev inequalities and  $L^p$  error estimates for finite volume solutions of convection diffusion equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 35(4) :767–778, 2001.
- [27] Y. Coudière and F. Hubert. A 3D discrete duality finite volume method for nonlinear elliptic equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 33(4) :1739–1764, 2011.
- [28] Y. Coudière and G. Manzini. The discrete duality finite volume method for convection-diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(6) :4163–4192, 2010.
- [29] Y. Coudière, C. Pierre, O. Rousseau, and R. Turpault. A 2D/3D discrete duality finite volume scheme. Application to ECG simulation. *Int. J. Finite Volumes*, 6(1), 2009.
- [30] Y. Coudière and P. Villedieu. Convergence rate of a finite volume scheme for the linear convection-diffusion equation on locally refined meshes. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(6) :1123–1149, 2000.
- [31] Y. Coudière. *Analyse de schémas volumes finis sur maillages non structurés pour des problèmes linéaires hyperboliques et elliptiques*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 1999.
- [32] Y. Coudière, F. Hubert, and G. Manzini. A cevefe ddfv scheme for discontinuous anisotropic permeability tensors. In J. Fořt, J. Fürst, J. Halama, R. Herbin, and F. Hubert, editors, *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*, volume 4 of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 283–291. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [33] Y. Coudière, J. Vila, and P. Villedieu. Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(3) :493–516, 1999.

- [34] S. Delcourte. *Développement de méthodes de volumes finis pour la mécanique des fluides*. PhD thesis, Université de Toulouse III - Paul Sabatier, 2007.
- [35] S. Delcourte, K. Domelevo, and P. Omnes. A discrete duality finite volume approach to Hodge decomposition and div-curl problems on almost arbitrary two-dimensional meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(3) :1142–1174, 2007.
- [36] I. Demirdžić, E. Džaferović, and A. Ivanković. Finite-volume approach to thermoviscoelasticity. *Numer. Heat Transfer*, 47(3) :213–237, 2005.
- [37] I. Demirdžić, A. Gosman, and R. Issa. A finite-volume method for the prediction of turbulent flow in arbitrary geometries. In *Seventh International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, pages 144–150. Springer, 1981.
- [38] I. Demirdžić, I. Horman, and D. Martinović. Finite volume analysis of stress and deformation in hygro-thermo-elastic orthotropic body. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(8-10) :1221–1232, 2000.
- [39] I. Demirdžić and S. Muzaferija. Finite volume method for stress analysis in complex domains. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 37(21) :3751–3766, 1994.
- [40] I. Demirdžić and S. Muzaferija. Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 125(1-4) :235–255, 1995.
- [41] I. Demirdžić and M. Perić. Finite volume method for prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 10(7) :771–790, 1990.
- [42] D. A. Di Pietro, R. Eymard, S. Lemaire, and R. Masson. Hybrid finite volume discretization of linear elasticity models on general meshes. In J. Fořt, J. Fürst, J. Halama, R. Herbin, and F. Hubert, editors, *Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives*, volume 4 of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 331–339. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [43] K. Domelevo and P. Omnes. A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(6) :1203–1249, 2005.
- [44] J. Droniou. Finite volume schemes for fully non-linear elliptic equations in divergence form. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(6) :1069–1100 (2007), 2006.
- [45] J. Droniou and R. Eymard. A mixed finite volume scheme for anisotropic diffusion problems on any grid. *Numer. Math.*, 105(1) :35–71, 2006.
- [46] J. Droniou and R. Eymard. Study of the mixed finite volume method for Stokes and Navier-Stokes equations. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 25(1) :137–171, 2009.
- [47] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. A unified approach to mimetic finite difference, hybrid finite volume and mixed finite volume methods. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(2) :265–295, 2010.
- [48] R. Eymard and T. Gallouët. Convergence d’un schéma de type éléments finis–volumes finis pour un système formé d’une équation elliptique et d’une équation hyperbolique. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 27(7) :843–861, 1993.
- [49] R. Eymard, R. Herbin, and C. Guichard. Small-stencil 3d schemes for diffusive flows in porous media. *ESAIM : Math. Model. Numer. Anal.*, 46 :265–290, 2012.
- [50] I. Faille. A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 100(2) :275–290, 1992.

- [51] J. H. Ferziger and M. Perić. *Computational methods for fluid dynamics. 3rd rev. ed.* Berlin : Springer. xiv, 423 p., 2002.
- [52] J. Figueiredo and J. M. Viano. Finite elements q1-lagrange for the linear elasticity problem. Technical report, Universidade do Minho, 2005. <http://hdl.handle.net/1822/5198>.
- [53] P. A. Forsyth. A control volume finite element approach to NAPL groundwater contamination. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 12(5) :1029–1057, 1991.
- [54] Y. Fryer, C. Bailey, M. Cross, and C. Lai. A control volume procedure for solving the elastic stress-strain equations on an unstructured mesh. *Appl. Math. Modelling*, 15(11) :639–645, 1991.
- [55] T. Gallouët, R. Herbin, and M. H. Vignal. Error estimates on the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with boundary conditions. In *Finite volumes for complex applications II*, pages 189–196. Hermes Sci. Publ., Paris, 1999.
- [56] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [57] C. J. Greenshields and H. G. Weller. A unified formulation for continuum mechanics applied to fluid-structure interaction in flexible tubes. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 64(12) :1575–1593, 2005.
- [58] W. Guo and M. Stynes. An analysis of a cell-vertex finite volume method for a parabolic convection-diffusion problem. *Math. Comp.*, 66(217) :105–124, 1997.
- [59] R. Herbin. An error estimate for a finite volume scheme for a diffusion-convection problem on a triangular mesh. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 11(2) :165–173, 1995.
- [60] R. Herbin. Finite volume methods for diffusion convection equations on general meshes. In F. Benkhaldoun and R. V. eds, editors, *Finite volumes for complex applications, Problems and Perspectives*, pages 153–160. Hermes, 1996.
- [61] F. Hermeline. A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes. *J. Comput. Phys.*, 160(2) :481–499, 2000.
- [62] F. Hermeline. Approximation of diffusion operators with discontinuous tensor coefficients on distorted meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192(16-18) :1939–1959, 2003.
- [63] F. Hermeline. Approximation of 2-D and 3-D diffusion operators with variable full tensor coefficients on arbitrary meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(21-24) :2497–2526, 2007.
- [64] F. Hermeline. A finite volume method for approximating 3D diffusion operators on general meshes. *J. Comput. Phys.*, 228(16) :5763–5786, 2009.
- [65] H. Jasak. *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows*. PhD thesis, Imperial College, London, 1996.
- [66] H. Jasak and H. Weller. Application of the finite volume method and unstructured meshes to linear elasticity. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 48(2) :267–287, 2000.
- [67] H. Jasak and H. Weller. Finite volume methodology for contact problems of linear elastic solids. In *Proceedings of 3rd International Conference of Croatian Society of Mechanics, Cavtat/Dubrovnik*, pages 253–260, 2000.
- [68] S. Krell. *Schémas Volumes Finis en mécanique des fluides complexes*. PhD thesis, Université Paul Cézanne - Aix-Marseille III, 2010.
- [69] S. Krell. Stabilized DDFV schemes for stokes problem with variable viscosity on general 2d meshes. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 27(6) :1666–1706, 2011.

- [70] S. Krell and G. Manzini. The discrete duality finite volume method for the stokes equations on 3-d polyhedral meshes. à paraître dans *SIAM J. Numer. Anal.*, 2012.
- [71] J.-F. Maitre, A. Rezgui, H. Souhail, and A.-M. Zine. High order finite volume schemes. Application to non-linear elasticity problems. *Finite Volume for complex applications III*, R. Herbin, D. Kroner ed., pages 405–412, 2002.
- [72] T. A. Manteuffel and A. B. White, Jr. The numerical solution of second-order boundary value problems on nonuniform meshes. *Math. Comp.*, 47(176) :511–535, S53–S55, 1986.
- [73] K. W. Morton. Finite volume methods and their analysis. In *The mathematics of finite elements and applications, VII (Uxbridge, 1990)*, pages 189–214, London, 1991. Academic Press.
- [74] S. Muzaferija and D. Gosman. Finite-volume CFD procedure and adaptive error control strategy for grids of arbitrary topology. *J. Comput. Phys.*, 138(2) :766–787, 1997.
- [75] A. Nealen. An as-short-as-possible introduction to the least squares, weighted least squares and moving least squares methods for scattered data approximation and interpolation. Technical report, Discrete Geometric Modeling Group, TU Darmstadt, 2004. <http://www.nealen.com/projects/>.
- [76] C. Pierre. *Modélisation et simulation de l'activité électrique du coeur dans le thorax, analyse numérique et méthodes de volumes finis*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2005.
- [77] A. Slone, C. Bailey, and M. Cross. Dynamic solid mechanics using finite volume methods. *Appl. Math. Modelling*, 27(2) :69–87, 2003.
- [78] H. Souhail. *Schémas volumes finis : Estimation d'erreur a posteriori hiérarchique par éléments finis mixtes. Résolution de problèmes d'élasticité non linéaire*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2004.
- [79] E. Süli. Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on nonuniform meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(5) :1419–1430, 1991.
- [80] G. Taylor, C. Bailey, and M. Cross. Solution of the elastic/visco-plastic constitutive equations : a finite volume approach. *Appl. Math. Modelling*, 19(12) :746–760, 1995.
- [81] M. Wheel. A mixed finite volume formulation for determining the small strain deformation of incompressible materials. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 44(12) :1843–1861, 1999.
- [82] A. Younes, P. Ackerer, and G. Chavent. From mixed finite elements to finite volumes for elliptic PDEs in two and three dimensions. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 59(3) :365–388, 2004.



# Annexes



## Annexe A

# Propriétés du produit tensoriel

### A.0.1 Propriétés générales

Le produit tensoriel satisfait par définition les relations suivantes : pour tout triplet  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  de vecteurs, pour toute matrice  $A$ , on a

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})\mathbf{b}. \quad (\text{A.1a})$$

$$(A\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = A : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{b}), \quad (\text{A.1b})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})\mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\text{A.1c})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2, \quad (\text{A.1d})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{d} \otimes \mathbf{c}) : (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \quad (\text{A.1e})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{d}), \quad (\text{A.1f})$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2, \quad (\text{A.1g})$$

### A.0.2 Propriétés 2d

On rappelle les propriétés suivantes du produit tensoriel. Soient  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , alors on a les relations suivantes

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{d})\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}^\perp \quad (\text{A.2})$$

où  $\mathbf{c}^\perp$  est l'orthogonal de  $\mathbf{c}$  tel que le repère  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}^\perp)$  soit direct.

### A.0.3 Propriétés 3d

Nous élargissons à la 3d certaines propriétés du produit tensoriel énoncées en 2d. Pour  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , on a les relations suivantes

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = \det(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}), \quad (\text{A.3a})$$

$$\det(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{d} \wedge \mathbf{a}), \quad (\text{A.3b})$$

$$\mathbf{a} \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}). \quad (\text{A.3c})$$



## Annexe B

# Opérateurs discrets en dimension 2

### B.1 Matrices élémentaires communes à Diamant et DDFV en 2d

Pour tout volume diamant  $D_{Ks} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ , on introduit les matrices de  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\#\tilde{\mathfrak{D}}}$  suivantes

$$\beta_{KL} = \beta_K^s + \beta_L^s, \quad (\text{B.1})$$

$$\beta_K^s = \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{N}_{Ks} \otimes \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_K (\mathbf{n}_{Ks} \otimes \mathbf{N}_{Ks}) \right), \quad (\text{B.2})$$

$$\beta_L^s = \frac{1}{2|D_{Ls}|} \left( \mu_L \mathbf{N}_{Ls} \cdot \mathbf{n}_{Ls} \text{Id} + \mu_L (\mathbf{N}_{Ls} \otimes \mathbf{n}_{Ls}) + \lambda_L (\mathbf{n}_{Ls} \otimes \mathbf{N}_{Ls}) \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\beta_1^{KL} = \beta_1^{Ks} - \beta_1^{Ls}, \quad (\text{B.4})$$

$$\beta_1^{Ks} = \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_1^{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{N}_1^{Ks} \otimes \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_K (\mathbf{n}_{Ks} \otimes \mathbf{N}_1^{Ks}) \right), \quad (\text{B.5})$$

$$\beta_1^{Ls} = \frac{1}{2|D_{Ls}|} \left( \mu_L \mathbf{N}_1^{Ls} \cdot \mathbf{n}_{Ls} \text{Id} + \mu_L (\mathbf{N}_1^{Ls} \otimes \mathbf{n}_{Ls}) + \lambda_L (\mathbf{n}_{Ls} \otimes \mathbf{N}_1^{Ls}) \right). \quad (\text{B.6})$$

#### **Proposition B.1.1**

Si les coefficients de Lamé sont strictement positifs alors les matrices discrètes (B.1)-(B.3) sont inversibles.

**Démonstration :** Soit  $K \in \mathfrak{M}$  un volume quelconque et  $s \in \partial K$ . Soient  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  non nuls. On définit la matrice  $\beta$  sous la forme

$$\beta = \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left( \mu_K \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) + \lambda_K (\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) \right).$$

Si  $\mathbf{p}^\perp$  est l'orthogonal de  $\mathbf{p}$  tel que le repère  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\perp)$  soit direct, alors le calcul de son déterminant donne

$$\det(\beta) = \frac{1}{4|D_{Ks}|^2} \left( 2\mu_K^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 + \mu_K \lambda_K (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - \mu_K \lambda_K (\mathbf{p}^\perp \cdot \mathbf{q})^2 \right).$$

On a donc

$$\det(\beta) = \frac{\mu_K}{4|D_{Ks}|^2} \left[ (2\mu_K + \lambda_K) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - \lambda_K (\mathbf{p}^\perp \cdot \mathbf{q})^2 \right].$$

En ce qui concerne les matrices discrètes (B.1)-(B.3), on a clairement  $\mathbf{p}^\perp \cdot \mathbf{q} = 0$ . Les vecteurs  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  étant non nuls, le déterminant s'annule si et seulement si les coefficients de Lamé sont

nuls, ce qui est écarté par hypothèse. Enfin on rappelle que si  $a > 0$  et  $b > 0$  représentent des constantes, alors pour  $\mathbf{n}_{K_s}$  de norme 1, on a

$$[a \text{Id} + b \mathbf{n}_{K_s} \otimes \mathbf{n}_{K_s}]^{-1} = \frac{1}{a} \text{Id} - \frac{b}{a(a+b)} \mathbf{n}_{K_s} \otimes \mathbf{n}_{K_s}.$$

On peut alors appliquer cette relation pour en déduire l'expression des inverses des matrices discrètes (B.1)-(B.3). ■

### Proposition B.1.2

1. Les conditions de régularité du maillage énoncées au Chapitre 3, page 50 par les inégalités (3.4) et (3.5), ainsi que l'Hypothèse 0.0.1, page 9 sur les coefficients de Lamé nous permettent d'affirmer qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de la régularité du maillage ainsi que des bornes des coefficients de Lamé, telle que pour toute matrice discrète  $\beta$  (B.1)-(B.6)

$$\|\beta\| \leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})}. \quad (\text{B.7})$$

2. Sous ces mêmes conditions, on peut affirmer que pour toute matrice discrète  $\beta$  (B.1)-(B.3)

$$\|\beta^{-1}\| \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (\text{B.8})$$

## B.2 Matrices élémentaires pour Diamant 2d : problème de Neumann

Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int}$  dont un des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2\}}$  est sur le bord de Neumann, on introduit les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  suivantes

$$\beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s = \frac{1}{2|D_{K_s}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_{K_s} \cdot \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \text{Id} + \mu_K \mathbf{N}_{K_s} \otimes \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} + \lambda_K \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \otimes \mathbf{N}_{K_s} \right), \quad (\text{B.9})$$

$$\beta_{1, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} = \frac{1}{|D_{K_s}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_1^{K_s} \cdot \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \text{Id} + \mu_K \mathbf{N}_1^{K_s} \otimes \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} + \lambda_K \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \otimes \mathbf{N}_1^{K_s} \right), \quad (\text{B.10})$$

où on remplace  $\mathbf{n}_{K_s}$  par  $\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}$  la normale unitaire sortante au point  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  telle que représentée dans la Figure B.2.1. Si les deux arêtes sur le bord qui partagent  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  ne sont pas alignées, alors  $\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}$  vaut la moyenne arithmétique des deux normales sortantes aux deux arêtes voisines de  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  sur le bord de Neumann.

### Hypothèse B.2.1

Afin de prouver l'inversibilité de la matrice discrète (B.10), on est contraint d'imposer une condition sur le maillage : on suppose qu'il existe une constante  $t_0$  telle que

$$\max_{\{K, s/s \in \partial K, \mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{b_N}\}} \left( \tan^2(\widehat{\mathbf{N}_1^{K_s}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}) \right) \leq t_0^2 < 1 + 2 \min_{\{K, s/s \in \partial K, \mathbf{x}_i^{K_s} \in \mathcal{N}^{b_N}\}} \left( \frac{\mu}{\lambda} \right). \quad (\text{B.11})$$

En élasticité, on utilise également le coefficient de Poisson  $\nu$  pour caractériser un matériau, dont l'expression est  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ . Ce coefficient est tel que  $\nu \in [0, 0.5[$ . La condition (B.11) s'écrit

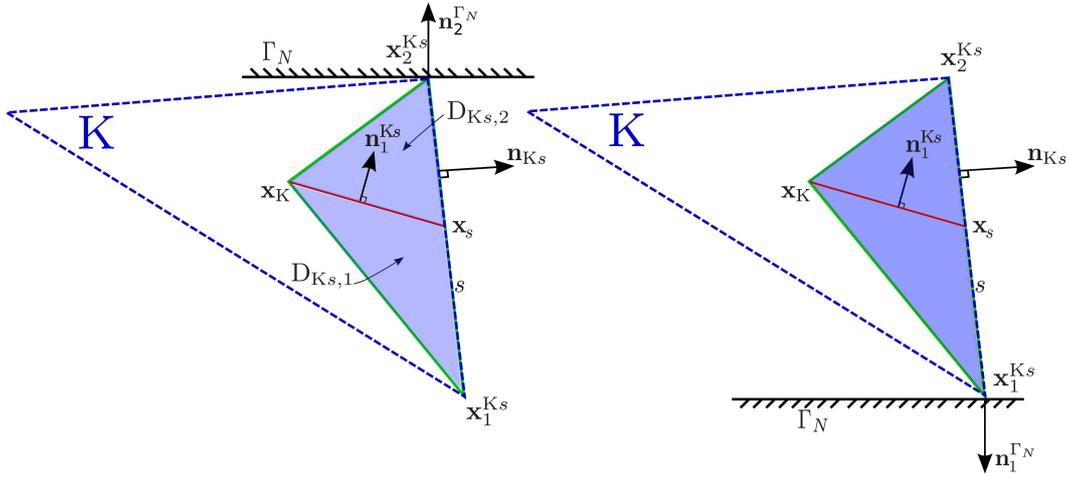


FIGURE B.2.1 – Notations du diamant dans le cas où un sommet est sur Neumann

donc également

$$\max_{\{K,s/s \in \partial K, \mathbf{x}_i^{Ks} \in \mathcal{N}^{bN}\}} (\tan^2(\widehat{\mathbf{N}_1^{Ks}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}})) \leq t_0^2 < -1 + \min_{\{K,s/s \in \partial K, \mathbf{x}_i^{Ks} \in \mathcal{N}^{bN}\}} \left(\frac{1}{\nu}\right).$$

En général,  $\nu$  est de l'ordre de  $\frac{1}{4}$  (acier = 0.28, sable  $\simeq$  0.35), ce qui correspond à des angles jusqu'à  $\frac{\pi}{3}$ . Il s'agit d'une condition difficile à vérifier a priori, mais qui se retrouve dans [31] pour le problème de diffusion anisotrope sous la condition  $\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K$  non alignés avec  $A\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}$ , avec  $A$  la matrice d'anisotropie. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, la condition (B.11) est néanmoins réalisée pour un maillage non conforme, tel que représenté en Figure B.2.2, où l'écart dans le nombre de raffinements dans deux volumes adjacents est supposé borné.

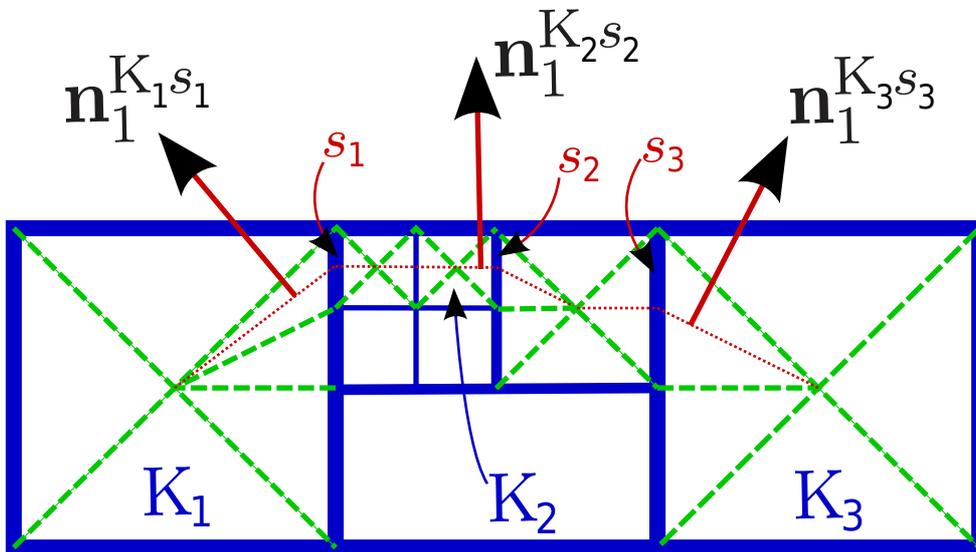


FIGURE B.2.2 – Maillage de carrés non conformes raffinés localement.

**Proposition B.2.1**

Si les coefficients de Lamé sont strictement positifs et sous l'Hypothèse B.2.1, la matrice discrète (B.10) est inversible.

**Démonstration :** Soit  $K \in \mathfrak{M}$  un volume quelconque et  $s \in \partial K$ . Soient  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  non nuls. On définit la matrice  $\beta$  sous la forme

$$\beta = \frac{1}{2|D_{Ks}|} \left( \mu_K \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) + \lambda_K (\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) \right).$$

Si  $\mathbf{p}^\perp$  est l'orthogonal de  $\mathbf{p}$  tel que le repère  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}^\perp)$  soit direct, alors le calcul de son déterminant donne

$$\det(\beta) = \frac{1}{4|D_{Ks}|^2} \left( 2\mu_K^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 + \mu_K \lambda_K (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - \mu_K \lambda_K (\mathbf{p}^\perp \cdot \mathbf{q})^2 \right).$$

On a donc

$$\det(\beta) = \frac{\mu_K}{4|D_{Ks}|^2} \left[ (2\mu_K + \lambda_K) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - \lambda_K (\mathbf{p}^\perp \cdot \mathbf{q})^2 \right].$$

Si on note  $\theta^{Ks}$  l'angle  $\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}} = \widehat{\mathbf{N}_1^{Ks}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}$ , le déterminant s'annule lorsque

$$(2\mu_K + \lambda_K) \|\mathbf{N}_1^{Ks}\|^2 \|\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}\|^2 \cos^2(\theta^{Ks}) - \lambda_K \|\mathbf{N}_1^{Ks}\|^2 \|\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}\|^2 \cos^2(\theta^{Ks} + \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Les vecteurs  $\mathbf{N}_1^{Ks}$  et  $\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}$  étant non nuls, ceci implique que

$$\tan^2(\theta^{Ks}) = \frac{2\mu_K + \lambda_K}{\lambda_K}.$$

Or, ce cas est écarté en appliquant l'Hypothèse **B.2.1**. On peut donc en conclure que  $\det(\beta) \neq 0$ . ■

### **Proposition B.2.2**

Les conditions de régularité du maillage énoncées au Chapitre 3, page 50 par les inégalités (3.4) et (3.5), ainsi que les Hypothèses 0.0.1, page 9 sur les coefficients de Lamé et l'Hypothèse B.2.1 nous permettent d'affirmer qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de la régularité du maillage ainsi que des bornes des coefficients de Lamé, telle que pour toute arête  $s \in \partial K^{int}$  ayant un sommet  $\mathbf{x}_i^{Ks} \in \mathcal{N}^{b_N}$

$$\|\beta_{\mathbf{1}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{\mathbf{Ks}}\|^{-1} \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (\text{B.12})$$

## Annexe C

# Opérateurs discrets en dimension 3

### C.1 Matrices élémentaires communes à Diamant et DDFV en 3d

Pour tout volume diamant  $D_{Ks} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ , on introduit les matrices de  $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\#\tilde{\mathfrak{D}}}$  suivantes

$$\beta_{KL} = \beta_K^s + \beta_L^s, \quad (\text{C.1})$$

$$\beta_K^s = \frac{1}{3|D_{Ks}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{N}_{Ks} \otimes \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_K (\mathbf{n}_{Ks} \otimes \mathbf{N}_{Ks}) \right), \quad (\text{C.2})$$

$$\beta_L^s = \frac{1}{3|D_{Ls}|} \left( \mu_L \mathbf{N}_{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks} \text{Id} + \mu_L (\mathbf{N}_{Ks} \otimes \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_L (\mathbf{n}_{Ks} \otimes \mathbf{N}_{Ks}) \right), \quad (\text{C.3})$$

$$\beta_i^{KL} = \beta_i^{Ks} - \beta_i^{Ls}, \quad (\text{C.4})$$

$$\beta_i^{Ks} = \frac{1}{3|D_{Ks}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_i^{Ks} \cdot \mathbf{n}_{Ks} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{N}_i^{Ks} \otimes \mathbf{n}_{Ks}) + \lambda_K (\mathbf{n}_{Ks} \otimes \mathbf{N}_i^{Ks}) \right), \quad (\text{C.5})$$

$$\beta_i^{Ls} = \frac{1}{3|D_{Ls}|} \left( \mu_L \mathbf{N}_i^{Ls} \cdot \mathbf{n}_{Ls} \text{Id} + \mu_L (\mathbf{N}_i^{Ls} \otimes \mathbf{n}_{Ls}) + \lambda_L (\mathbf{n}_{Ls} \otimes \mathbf{N}_i^{Ls}) \right). \quad (\text{C.6})$$

où on rappelle que  $\mathbf{x}_i^{Ks} = \mathbf{x}_{j_i}^{Ls}$ .

#### Proposition C.1.1

*Si les coefficients de Lamé sont strictement positifs alors les matrices discrètes (C.1)-(C.3) sont inversibles.*

**Démonstration :** Soit  $K \in \mathfrak{M}$  un volume quelconque et  $s \in \partial K$ . Soient  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  non nuls. On considère la matrice  $\beta$  sous la forme

$$\beta = \frac{1}{3|D_{Ks}|} \left( \mu_K \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \text{Id} + \mu_K (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) + \lambda_K (\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) \right).$$

Le calcul de son déterminant donne

$$\det(\beta) = \frac{1}{9|D_{Ks}|^3} \left( 2\mu_K^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^3 + \mu_K^2 \lambda_K (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^3 - \mu_K^2 \lambda_K (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})^2 \right).$$

On a donc

$$\det(\beta) = \frac{\mu_K^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{9|D_{Ks}|^3} \left[ (2\mu_K + \lambda_K) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - \lambda_K (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})^2 \right].$$

En ce qui concerne les matrices discrètes (C.1)-(C.3), on a clairement  $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = \mathbf{N}_{Ks} \wedge \mathbf{n}_{Ks} = \mathbf{0}$ . Les vecteurs  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  étant non nuls, le déterminant s'annule si et seulement si les coefficients de Lamé sont nuls, ce qui est écarté par hypothèse ■

### Proposition C.1.2

1. Les conditions de régularité du maillage énoncées au Chapitre 4, page 93 par les inégalités (4.7) et (4.8), ainsi que l'Hypothèse 0.0.1, page 9 sur les coefficients de Lamé nous permettent d'affirmer qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de la régularité du maillage ainsi que des bornes des coefficients de Lamé, telle que pour toute matrice discrète  $\beta$  (C.1)-(C.6)

$$\|\beta\| \leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})}. \quad (\text{C.7})$$

2. Sous ces mêmes conditions, on peut affirmer que pour toute matrice discrète  $\beta$  (C.1)-(C.3)

$$\|\beta^{-1}\| \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (\text{C.8})$$

## C.2 Matrices élémentaires pour Diamant 3d : problème de Neumann

Pour tout volume diamant  $D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}^{int}$  dont un des sommets  $(\mathbf{x}_i^{K_s})_{i=\{1,2,3\}}$  est sur le bord de Neumann, on introduit les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivantes

$$\beta_{K, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^s = \frac{1}{3|D_{K_s}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_{K_s} \cdot \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \text{Id} + \mu_K \mathbf{N}_{K_s} \otimes \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} + \lambda_K \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \otimes \mathbf{N}_{K_s} \right), \quad (\text{C.9})$$

$$\beta_{\mathbf{j}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}}^{K_s} = \frac{1}{|D_{K_s}|} \left( \mu_K \mathbf{N}_j^{K_s} \cdot \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \text{Id} + \mu_K \mathbf{N}_j^{K_s} \otimes \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} + \lambda_K \mathbf{n}_i^{\Gamma_N} \otimes \mathbf{N}_j^{K_s} \right), \quad (\text{C.10})$$

où on remplace  $\mathbf{n}_{K_s}$  par  $\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}$  la normale unitaire sortante au point  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  telle que représentée dans la Figure C.2.1. Si les faces sur le bord qui partagent  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  ne sont pas alignées, alors  $\mathbf{n}_i^{\Gamma_N}$

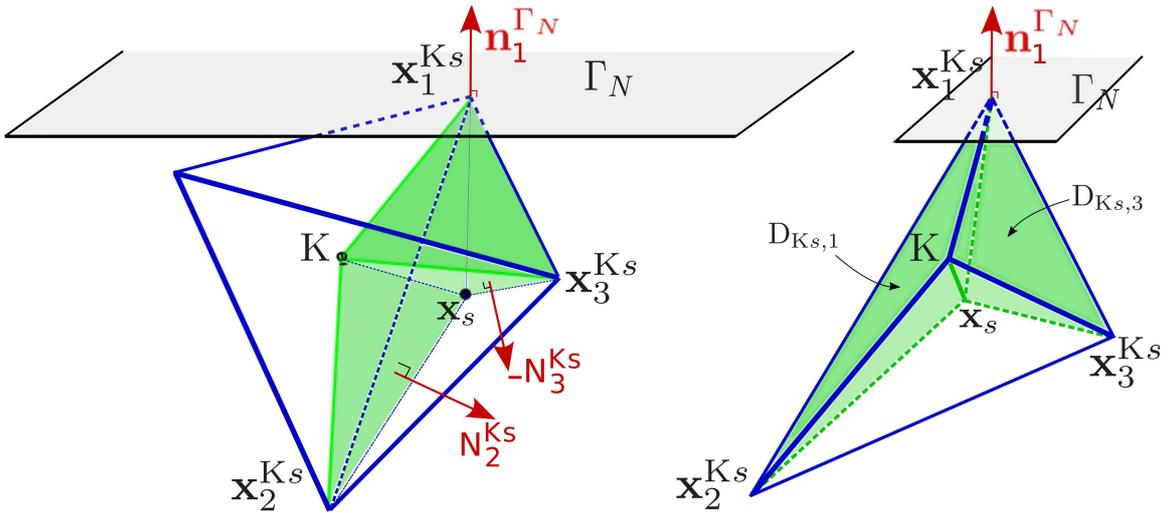


FIGURE C.2.1 – Notations du diamant dans le cas où un sommet est sur Neumann, vue de côté (gauche) et vue de face (droite).

vaut la moyenne arithmétique des normales sortantes aux faces voisines de  $\mathbf{x}_i^{K_s}$  situées sur le bord de Neumann.

### Hypothèse C.2.1

Afin d'avoir l'inversibilité de la matrice discrète  $\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{\text{Ks}} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{\text{Ks}}$ , on est contraint d'imposer une condition sur la famille des maillages : on suppose qu'il existe des constantes  $t_0$  et  $t_1$  telles que

$$0 < t_0^2 \leq \tan^2(\mathbf{N}_{i-1}^{\text{Ks}} - \mathbf{N}_{i+1}^{\text{Ks}}, \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}) \leq t_1^2 < 1 + 2 \min\left(\frac{\mu}{\lambda}\right), \quad (\text{C.11})$$

pour tout  $K \in \mathfrak{M}$  et  $s \in \partial K^{\text{int}}$  tels que  $\mathbf{x}_i^{\text{Ks}} \in \mathcal{N}^{b_N}$ .

On va, dans les Proposition C.2.1 et Proposition C.2.2, énoncer quelques propriétés sur ces matrices discrètes, utiles dans la suite. Elles sont une simple extension de leur version 2d, énoncées en Proposition B.2.1 et Proposition B.2.2.

### Proposition C.2.1

Si les coefficients de Lamé sont strictement positifs et sous l'Hypothèse C.2.1, la matrice discrète  $\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{\text{Ks}} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{\text{Ks}}$  est inversible.

**Démonstration :** Soit  $K \in \mathfrak{M}$  un volume quelconque et  $s \in \partial K$ . Soient  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  non nuls. On considère la matrice  $\beta$  sous la forme

$$\beta = \frac{1}{3|\mathbf{D}_{\text{Ks}}|} \left( \mu_{\text{K}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \text{Id} + \mu_{\text{K}} (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) + \lambda_{\text{K}} (\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) \right).$$

Le calcul de son déterminant donne

$$\det(\beta) = \frac{1}{9|\mathbf{D}_{\text{Ks}}|^3} \left( 2\mu_{\text{K}}^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^3 + \mu_{\text{K}}^2 \lambda_{\text{K}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^3 - \mu_{\text{K}}^2 \lambda_{\text{K}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})^2 \right).$$

On a donc

$$\det(\beta) = \frac{\mu_{\text{K}}^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{9|\mathbf{D}_{\text{Ks}}|^3} \left[ (2\mu_{\text{K}} + \lambda_{\text{K}}) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 - \lambda_{\text{K}} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})^2 \right].$$

En ce qui concerne la matrice discrète  $\beta_{i-1, \mathbf{n}_i}^{\text{Ks}} - \beta_{i+1, \mathbf{n}_i}^{\text{Ks}}$ , si on note  $\theta^{\text{Ks}}$  l'angle  $\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}$ , avec  $\mathbf{p} = \mathbf{N}_{i-1}^{\text{Ks}} - \mathbf{N}_{i+1}^{\text{Ks}}$  et  $\mathbf{q} = \mathbf{n}_i^{\Gamma_N}$ , le déterminant s'annule si et seulement si

$$\mu_{\text{K}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = 0 \quad \text{ou} \quad (2\mu_{\text{K}}^2 + \mu_{\text{K}} \lambda_{\text{K}}) \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 \cos^2(\theta^{\text{Ks}}) - \mu_{\text{K}} \lambda_{\text{K}} \|\mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{q}\|^2 \sin^2(\theta^{\text{Ks}}) = 0. \quad \blacksquare$$

### Proposition C.2.2

Les conditions de régularité du maillage énoncées au Chapitre 4, page 93 par les inégalités (4.7) et (4.8), ainsi que les Hypothèses 0.0.1, page 9 sur les coefficients de Lamé et l'Hypothèse C.2.1 nous permettent d'affirmer qu'il existe une constante  $C > 0$ , dépendant de la régularité du maillage ainsi que des bornes des coefficients de Lamé, telle que pour tout  $K \in \mathfrak{M}$  et pour tout  $s \in \partial K^{\text{int}}$  ayant un sommet  $\mathbf{x}_i^{\text{Ks}} \in \mathcal{N}^{b_N}$

$$\|(\beta_{i-1}^{\text{Ks}} - \beta_{i+1}^{\text{Ks}})^{-1}\| \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (\text{C.12})$$



## Annexe D

# Inégalité de Korn discrète pour le schéma DDFV

### D.1 Inégalité de Korn 2d discrète

Cette inégalité a été établie par Krell [69] dans le cadre d'opérateurs définis par diamants entiers. La difficulté supplémentaire est de l'établir par demi diamants. Nous en reprenons les étapes.

#### **Théorème D.1.1** (*Inégalité de Korn pour le problème de Dirichlet pur*)

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\#\mathcal{T}}$  tel que  $\mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{0}$  pour tout  $K^* \in \mathfrak{M}^{*b}$ , on a

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq \sqrt{2} \|\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}.$$

**Démonstration:** D'après la définition du produit scalaire (5.11) et des opérateurs discrets (5.3.3) et (5.3.4), on a

$$2\|\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 = \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + ((\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}. \quad (\text{D.1})$$

On va donc chercher à évaluer la quantité  $((\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}$  à travers les demi diamants du maillage. On a donc

$$\begin{aligned} ((\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| (\nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \\ &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{4|D_{K_s}|} \left( \mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \mathbf{N}_1^{K_s} \otimes (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \right) : \\ &\quad \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_1^{K_s} \right). \end{aligned}$$

On va à présent faire apparaître un terme positif, correspondant à la norme de la divergence.

Pour cela, nous utilisons les relations (A.1d) et (A.1e), on obtient

$$\begin{aligned}
((\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{4|D_{K_s}|} \left( ((\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s})^2 + ((\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_1^{K_s})^2 \right) \\
&+ \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{2|D_{K_s}|} (\mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K)) : ((\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_1^{K_s}) \\
&= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{4|D_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s} + (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_1^{K_s} \right)^2 \\
&+ \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{2|D_{K_s}|} (\mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K)) : ((\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_1^{K_s}) \\
&- \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{2|D_{K_s}|} (\mathbf{N}_{K_s} \cdot (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K)) ((\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_1^{K_s}) \\
&= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| |\operatorname{div}^{D_{K_s}} \mathbf{u}^\tau|^2 + A.
\end{aligned}$$

Pour évaluer la quantité A, on utilise la relation (A.2) et la relation  $\det(\mathbf{N}_{K_s}, \mathbf{N}_1^{K_s}) = 2|D_{K_s}|$ .

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{2|D_{K_s}|} (\mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K)) : ((\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_1^{K_s}) \\
&- \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{2|D_{K_s}|} (\mathbf{N}_{K_s} \cdot (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K)) ((\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_1^{K_s}) \\
&= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{2|D_{K_s}|} \det(\mathbf{N}_{K_s}, \mathbf{N}_1^{K_s}) (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s})^\perp \\
&= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s})^\perp \\
&= \underbrace{\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s})^\perp}_{A_1} - \underbrace{\sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}_K \cdot (\mathbf{u}_2^{K_s} - \mathbf{u}_1^{K_s})^\perp}_{A_2}.
\end{aligned}$$

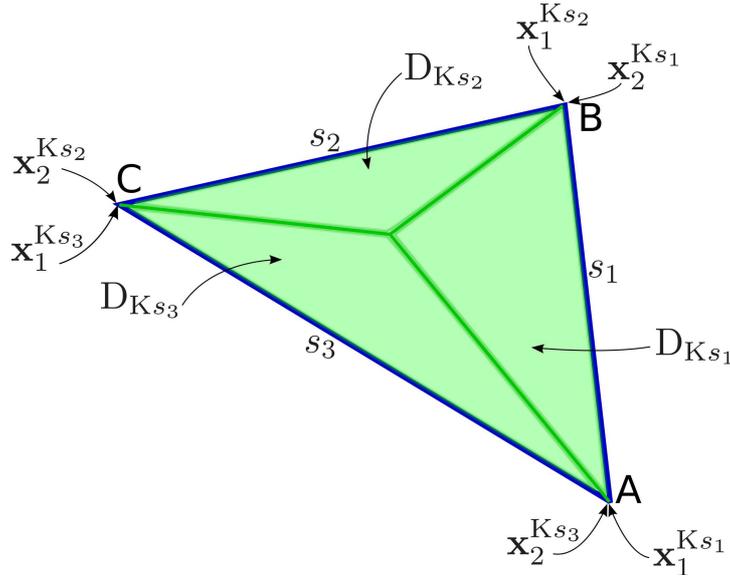


FIGURE D.1.1 – Numerotation locale des sommets pour chaque demi diamant associé à un volume primal.

### Évaluation de $A_2$

On note  $A, B$  et  $C$  les 3 sommets du volume primal. Alors, en appelant  $\mathbf{u}_A^K, \mathbf{u}_B^K, \mathbf{u}_C^K$  les déplacements aux sommets  $A, B, C$  et en utilisant les conventions de numérotation des sommets par arêtes rappelées en Figure D.1.1, l'expression de  $A_2$  se simplifie

$$\begin{aligned}
 A_2 &= - \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}_K \cdot (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks})^\perp \\
 &= - \sum_{K \in \mathfrak{M}} \sum_{s \in \partial K} \mathbf{u}_K \cdot (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks})^\perp \\
 &= - \sum_{K \in \mathfrak{M}} \mathbf{u}_K \cdot \left( (\mathbf{u}_B^K - \mathbf{u}_A^K) + (\mathbf{u}_C^K - \mathbf{u}_B^K) + (\mathbf{u}_A^K - \mathbf{u}_C^K) \right)^\perp \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

### Évaluation de $A_1$

On va cette fois-ci non pas raisonner par volume primal, mais essayer de regarder ce qu'il se passe pour chaque demi-diamant, selon que ce dernier soit interne ou de bord. Regardons dans un premier temps une arête interne  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$ . Comme l'illustre la Figure D.1.2, et en vertu de la Proposition 5.2.1, on a

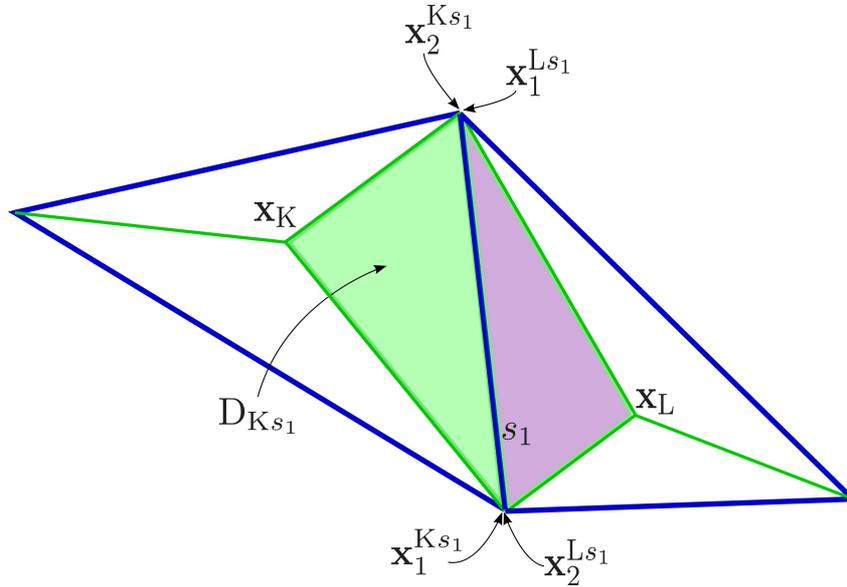


FIGURE D.1.2 – Numérotation locale des sommets pour chaque diamant interne.

$$\mathbf{x}_1^{Ks} - \mathbf{x}_2^{Ks} = -(\mathbf{x}_1^{Ls} - \mathbf{x}_2^{Ls}).$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
 \sum_{s \in \mathcal{E}^{int}} \mathbf{u}_s \cdot (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks})^\perp &= \sum_{s \in \mathcal{E}^{int}} \mathbf{u}_s \cdot ((\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}) - (\mathbf{u}_2^{Ks} - \mathbf{u}_1^{Ks}))^\perp \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

En ce qui concerne les faces de bord, cette fois les termes ne se neutralisent pas deux à deux, mais sont nuls du fait que  $\mathbf{u}_1^{Ks} = \mathbf{u}_2^{Ks} = \mathbf{0}$ . On en déduit que  $A = 0$  et on conclut

$$2\|\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\mathbb{D}}^2 = \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\mathbb{D}}^2 + \underbrace{\sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| |\operatorname{div}^{D_{Ks}} \mathbf{u}^\tau|^2}_{\geq 0}.$$

■

### Remarque D.1.1

Le résultat est vrai quelque soit la valeur de  $\mathbf{u}_s$  que l'on prend pour définir  $\nabla^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau$ .

## D.2 Inégalité de Korn 3D discrète

Cette inégalité a été établie par Krell et Manzini pour un schéma DDFV de type CeVeFE [70].

### Théorème D.2.1 (Inégalité de Korn pour le problème de Dirichlet pur)

Pour tout  $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^{\#T}$  tel que  $\mathbf{u}_{K^*} = \mathbf{0}$  pour tout  $K^* \in \mathfrak{M}^{*b}$ , on a

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}} \leq \sqrt{2} \|\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}. \quad (\text{D.3})$$

**Démonstration :** De même qu'en 2d, on a

$$2\|\mathbb{D}^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 = \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau\|_{\tilde{\mathcal{D}}}^2 + ((\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}}, \quad (\text{D.4})$$

et

$$\begin{aligned} ((\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| (\nabla^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau \\ &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{9|D_{K_s}|} \left( \mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i^{K_s} \otimes (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \right) : \\ &\quad \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \otimes \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} \right). \end{aligned}$$

Le but est de faire apparaître un terme positif, correspondant à la norme de la divergence discrète par demi diamant, ainsi qu'un autre terme qui s'annule du fait des conditions de bord. En utilisant les relations (A.1d) et (A.1e), on obtient

$$\begin{aligned} ((\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)^T : \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbf{u}^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}}} &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{9|D_{K_s}|} \left( ((\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s})^2 + \sum_{i=1}^3 ((\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_i^{K_s})^2 \right) \\ &\quad + \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{9|D_{K_s}|} \left( \mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \right) : \left( (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} \right) \\ &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \frac{1}{9|D_{K_s}|} \left( (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \cdot \mathbf{N}_{K_s} + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_i^{K_s} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{9|D_{K_s}|} \left( \mathbf{N}_{K_s} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \right) : \left( (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \otimes \mathbf{N}_i^{K_s} \right) \\ &\quad - \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{9|D_{K_s}|} \left( \mathbf{N}_{K_s} \cdot (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \right) \left( (\mathbf{u}_{i+1}^{K_s} - \mathbf{u}_{i-1}^{K_s}) \cdot \mathbf{N}_i^{K_s} \right) \\ &= \sum_{D_{K_s} \in \tilde{\mathcal{D}}} |D_{K_s}| |\text{div}^{\mathbb{D}_{K_s}} \mathbf{u}^\tau|^2 + A. \end{aligned}$$

Grâce à la relation (A.3a), on a

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{9|D_{Ks}|} \left( \mathbf{N}_{Ks} \otimes (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \right) : \left( (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \otimes \mathbf{N}_i^{Ks} \right) \\
&\quad - \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{9|D_{Ks}|} \left( \mathbf{N}_{Ks} \cdot (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \right) \left( (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}) \cdot \mathbf{N}_i^{Ks} \right) \\
&= \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{9|D_{Ks}|} \det((\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \wedge (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}), \mathbf{N}_i^{Ks}, \mathbf{N}_{Ks}).
\end{aligned}$$

La relation (A.3b) nous donne

$$A = \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{9|D_{Ks}|} ((\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K) \wedge (\mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks})) \cdot (\mathbf{N}_i^{Ks} \wedge \mathbf{N}_{Ks}).$$

Intéressons nous au vecteur  $\mathbf{N}_i^{Ks} \wedge \mathbf{N}_{Ks}$ . On rappelle qu'étant donné que  $\mathbf{x}_s$  est le centre de gravité de la face  $s$ , alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_i^{Ks} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_s) \wedge (\mathbf{x}_i^{Ks} - \mathbf{x}_s) & \text{et} & & \mathbf{N}_{Ks} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}) \wedge (\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}) \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}) \wedge (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{Ks}) & & & &= \frac{3}{2} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}) \wedge (\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}).
\end{aligned}$$

En s'aidant de la relation (A.3c), on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_i^{Ks} \wedge \mathbf{N}_{Ks} &= \frac{3}{4} ((\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}) \wedge (\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{Ks})) \wedge ((\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}) \wedge (\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks})) \\
&= \frac{3}{4} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}) \det(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}).
\end{aligned}$$

D'après les propriétés géométriques du demi diamant, et en utilisant la Convention 6.2.1 on a la relation

$$\det(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}) = \frac{1}{3} \det(\mathbf{x}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_{i-1}^{Ks} - \mathbf{x}_i^{Ks}, \mathbf{x}_K - \mathbf{x}_i^{Ks}).$$

Alors, en utilisant la relation (6.4), on obtient finalement que

$$\mathbf{N}_i^{Ks} \wedge \mathbf{N}_{Ks} = \frac{3}{2} (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}) |D_{Ks}|.$$

Grâce à la relation (A.3b), on en déduit que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{3} \sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \sum_{i=1}^3 \det(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{i-1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i+1}^{Ks}, \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i^{Ks}) \\
&= -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \underbrace{\sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \det(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}, \mathbf{x}_i^{Ks})}_{A_1} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \underbrace{\sum_{D_{Ks} \in \tilde{\mathcal{D}}} \det(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}, \mathbf{x}_i^{Ks})}_{A_2}.
\end{aligned}$$

### Évaluation de $A_1$

A chaque volume primal tétraédrique sont associés 4 demi diamants. Les sommets sont numérotés  $A, B, C, D$  et les faces  $s_1, s_2, s_3, s_4$  comme indiqué en Figure D.2.1. On va par exemple regarder le sommet  $A$  concerné par les faces  $s_1, s_2$  et  $s_4$ .

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{K \in \mathfrak{M}} \left[ \underbrace{\det(\mathbf{u}_K, (\mathbf{u}_C - \mathbf{u}_B), \mathbf{x}_A)}_{s_1} + \underbrace{\det(\mathbf{u}_K, (\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_C), \mathbf{x}_A)}_{s_2} + \underbrace{\det(\mathbf{u}_K, (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_D), \mathbf{x}_A)}_{s_4} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Il en est de même pour les 3 autres sommets de l'élément  $K$ .

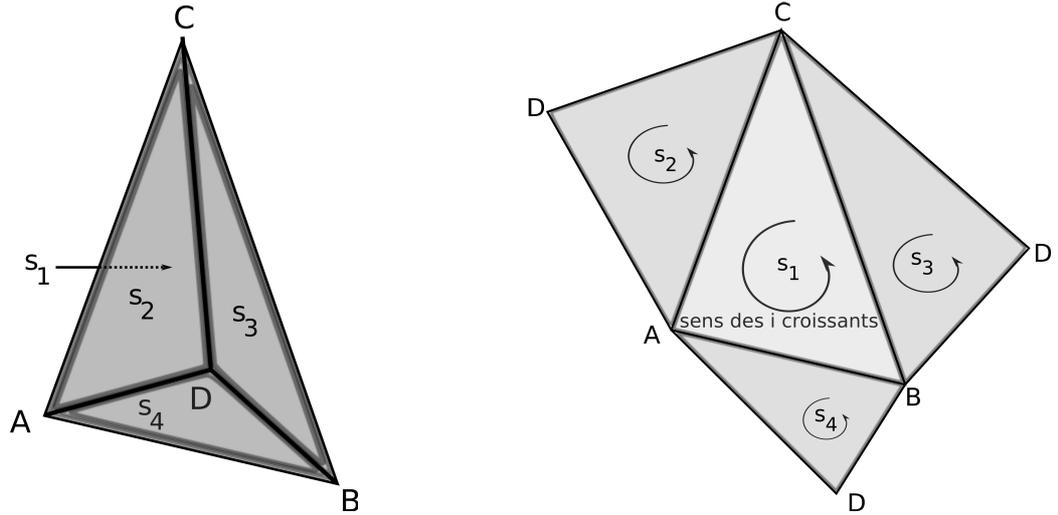


FIGURE D.2.1 – (Element tétraédrique du primal (gauche) - Tétraèdre éclaté (droite))

### Évaluation de $A_2$

On raisonne par demi diamant, selon qu'il soit interne ou de bord. Regardons dans un premier temps une face interne  $s = K \cap L \in \mathcal{E}^{int}$ . La relation (A.3c) donne

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s \in \mathcal{E}^{int}} \det(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}, \mathbf{x}_i^{Ks}) \\
 &= \sum_{s \in \mathcal{E}^{int}} \left[ \underbrace{\det(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{i+1}^{Ks} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ks}, \mathbf{x}_i^{Ks})}_{\text{contribution de } D_{Ks}} - \underbrace{\det(\mathbf{u}_s, \mathbf{u}_{i+1}^{Ls} - \mathbf{u}_{i-1}^{Ls}, \mathbf{x}_i^{Ls})}_{\text{contribution de } D_{Ls}} \right] = 0. \quad (D.5)
 \end{aligned}$$

En ce qui concerne les faces de bord, cette fois les termes ne se neutralisent pas deux à deux, mais sont nuls du fait que  $\mathbf{u}_i^{Ks} = \mathbf{0}$  pour tout  $i = \{1, 2, 3\}$ . On en conclut que

$$2\|\mathbb{D}^{\hat{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_{\mathcal{D}}^2 = \|\nabla^{\hat{\mathcal{D}}}\mathbf{u}^\tau\|_{\mathcal{D}}^2 + \underbrace{\sum_{D_{Ks} \in \hat{\mathcal{D}}} |D_{Ks}| |\text{div}^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau|^2}_{\geq 0}.$$

■

### Remarque D.2.1

Le résultat est vrai quelque soit la valeur de  $\mathbf{u}_s$  que l'on prend pour définir  $\nabla^{D_{Ks}}\mathbf{u}^\tau$ .

# Annexe E

## Description des cas test numériques

### E.1 Description des cas test numériques en dimension 2

#### E.1.1 Quelques aspects numériques

L'ensemble des tests numériques a été réalisé à l'aide d'un code MATLAB. Les maillages sont quant à eux tous construits grâce au logiciel libre GMSH, développé par Geuzaine et Remacle [56], à l'exception du triangle étudié en section E.1.6, qui lui utilise le mailleur EMC2 développé par l'INRIA. Afin d'obtenir les courbes d'estimation d'erreurs, nous utilisons d'une part des maillages raffinés uniformément (ou homothétiquement selon Domelevo et Omnes [43]), c'est-à-dire des maillages où chaque triangle est coupé en quatre sous triangles. D'autre part, nous utilisons des maillages raffinés successivement, c'est-à-dire une série de maillages indépendants les uns des autres.

Les tests numériques utilisés ne se limitent pas aux seules conditions de déplacement imposé (condition de type Dirichlet), mais font également intervenir des conditions de chargement imposé (conditions de type Neumann), conduisant à un système de conditions au bord dites « mixtes ».

#### E.1.2 Contrainte équivalente de Von Mises

Parmi les critères d'études, on regarde la convergence des contraintes de Von Mises. Ces contraintes sont plus utilisées que la convergence de l'opérateur gradient en élasticité linéaire. Elles sont calculées à partir du tenseur des contraintes et définissent une énergie, qui permet de savoir si les contraintes imposées sont bien en deçà du critère de plasticité, au delà duquel le comportement n'est plus élastique. Les contraintes de Von Mises sont évaluées en chaque volume  $K \in \mathfrak{M}$ . Leur expression est la suivante : si on note

$$\sigma_K = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

avec  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ , l'expression du tenseur des contraintes en chaque volume  $K$ , alors l'expression de la contrainte de Von Mises  $\sigma_{VM}$ , en  $K$  est

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}.$$

Dans la plupart des cas tests en dimension 2, on donnera les isovaleurs de la contrainte de Von Mises, ainsi que la courbe de convergence de l'erreur commise avec la valeur exacte : 
$$\frac{\|\sigma_{VM,VF} - \sigma_{VM,Exact}\|}{\|\sigma_{VM,Exact}\|}.$$

### E.1.3 Déformation d'un carré homogène. Solution polynomiale

A présent, nous allons nous intéresser à une série de cas tests donnés par Figueiredo et Viano [52] pour le problème de l'élasticité linéaire, et qui présentent l'avantage d'avoir une solution analytique exploitable en volumes finis. On considère le carré homogène de côté 1 présenté en Figure E.1.1, dont le module d'Young et le coefficient de Poisson sont

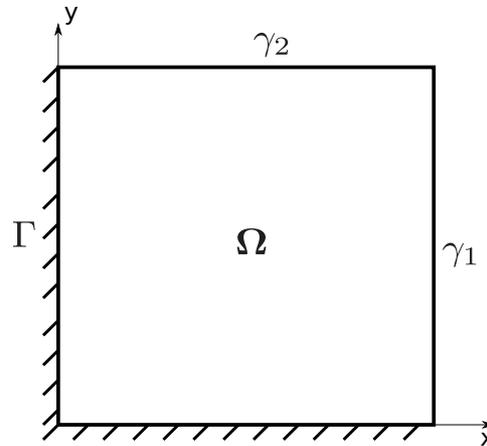


FIGURE E.1.1 – Domaine de calcul et conditions de bord.

$$E = 5.10^9 \text{ (Pa)} \text{ et } \nu = 0.3.$$

Il existe une correspondance entre ces valeurs et les coefficients de Lamé donnée par

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

ce qui conduit aux valeurs

$$\lambda = 2.8846.10^9 \text{ (Pa)} \text{ et } \mu = 1.9231.10^9 \text{ (Pa)}.$$

On présente en Figure E.1.2 un maillage grossier et son raffinement uniforme et en Figure E.1.3 deux maillages indépendants du domaine  $\Omega$ .

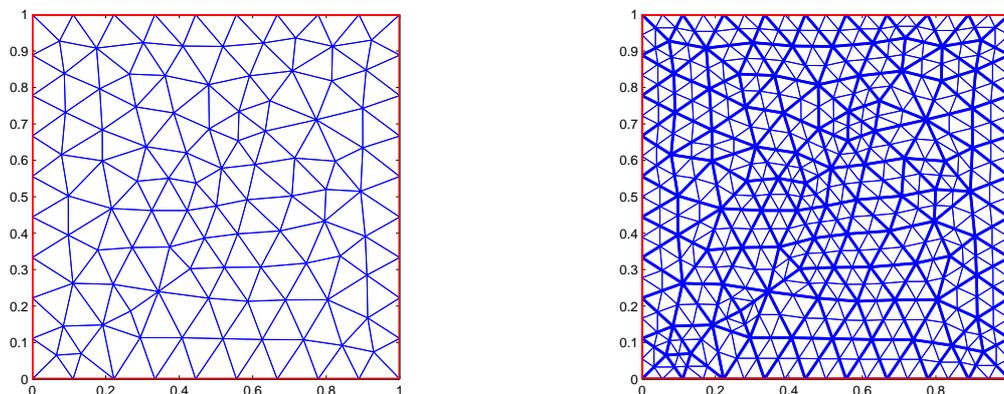


FIGURE E.1.2 – Raffinement uniforme d'un maillage de 204 triangles à un maillage de 816 triangles

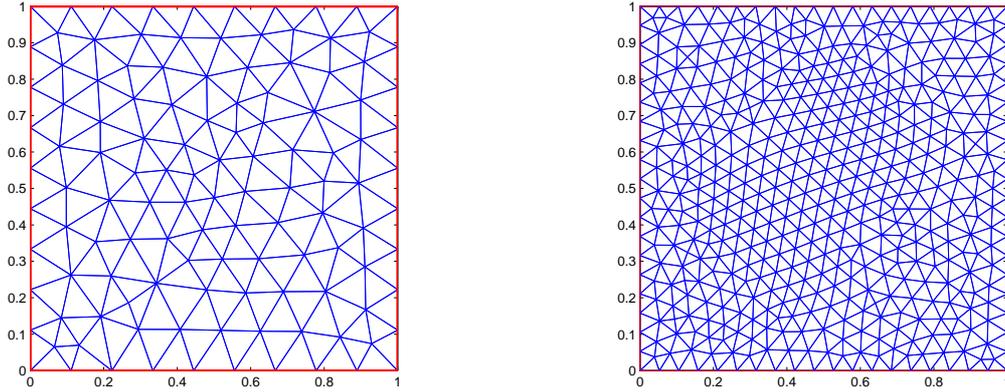


FIGURE E.1.3 – Raffinement successif d'un maillage de 204 triangles à un maillage de 882 triangles

On impose un encastrement sur le bord de Dirichlet  $\Gamma$  à gauche et en bas. Les conditions de Neumann sont imposées en  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , telles que

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} ((2\mu + \lambda)y - 2\lambda).10^{-2} \\ \mu(1 - 2y).10^{-2} \end{cases} = \begin{cases} (6.7308y - 5.7692).10^7 (N.m^{-2}) \\ (1.9231 - 3.8462y).10^7 (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_1,$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} \mu(x - 2).10^{-2} \\ (-2(2\mu + \lambda)x + \lambda).10^{-2} \end{cases} = \begin{cases} 1.9231x - 3.8462).10^7 (N.m^{-2}) \\ (-13.462x + 2.8846).10^7 (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_2.$$

Le forçage, correspondant au second membre de l'équation, n'est pas nul

$$\mathbf{f} = \begin{cases} 2(\mu + \lambda).10^{-2} \\ -(\mu + \lambda).10^{-2} \end{cases} = \begin{cases} 9.6154.10^7 (N.m^{-3}) \\ -4.8077.10^7 (N.m^{-3}). \end{cases}$$

Dans ces conditions, la solution exacte du problème est

$$\mathbf{u}_{Exact} = xy.10^{-2}(1, -2).$$

#### E.1.4 Déformation d'un carré homogène. Solution qui n'est pas polynomiale

Cet exemple reprend le même domaine  $\Omega$  que l'exemple précédent, seules les conditions aux limites et le forçage changent. On va considérer des conditions comprenant l'opérateur exponentiel. Les paramètres de Lamé utilisés restent inchangés. Les valeurs des fonctions sont précisées ci-dessous

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} (2(2\mu + \lambda)e^y - \lambda e^y).10^{-2} \\ \mu(2e - e^y - 1).10^{-2} \end{cases} = \begin{cases} (13.462e^y - 2.8846).10^7 (N.m^{-2}) \\ (3.8462e - 1.9231e^y - 1.9231).10^7 (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_1,$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} \mu(2e^x - e - 1).10^{-2} \\ (2\lambda e^x - (\lambda + 2\mu)e^x).10^{-2} \end{cases} = \begin{cases} (3.8462e^x - 1.9231e - 1.9231).10^7 (N.m^{-2}) \\ (5.7692e^x - 6.7308e^x).10^7 (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_2.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \begin{cases} ((\mu + \lambda)e^y - 2xe^x(\lambda + 2\mu)).10^{-2} \\ (-2e^x(\mu + \lambda) + xe^y(\lambda + 2\mu)).10^{-2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (4.8077e^y - 13.462ye^x).10^7 (N.m^{-3}) \\ (-9.6154e^x + 6.7308xe^y).10^7 (N.m^{-3}). \end{cases} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, la solution exacte du problème est

$$\mathbf{u}_{Exact} = (2(e^x - 1)y, -(e^y - 1)x) 10^{-2}.$$

### E.1.5 Déformation d'un carré homogène : problème de Dirichlet pur

On considère le carré unitaire  $\Omega$  soumis à des conditions de bord de Dirichlet uniquement. Les paramètres de Lamé utilisés restent inchangés. On prend  $c = 0.1$  pour valeur de paramètre. Les résultats numériques sont réalisés sur trois types de maillages : des triangles non structurés, un maillage cartésien et un maillage non structuré de quadrangles, présentés en Figure E.1.4. Le forçage est donné ci-dessous.

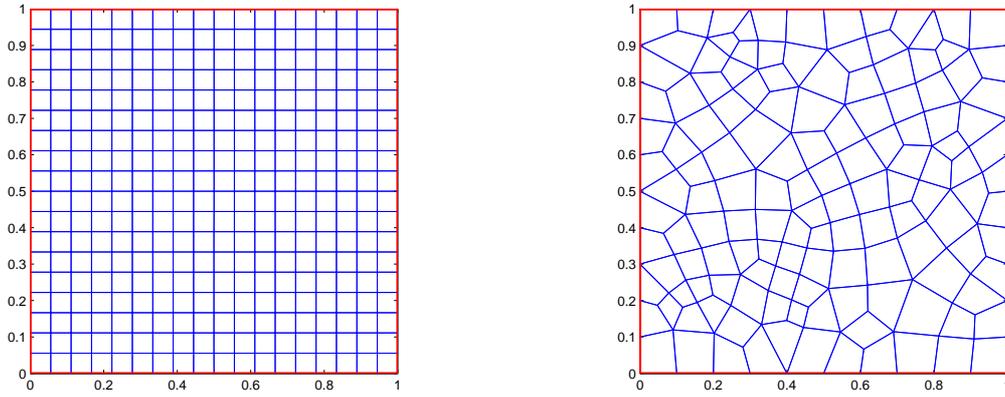


FIGURE E.1.4 – Maillage cartésien de 324 carrés (gauche), maillage de 156 quadrangles non structurés (droite).

$$\mathbf{f} = \begin{cases} (3\mu + \lambda)(-c + c \cos(x+y)^2 + \cos(x+y))ce^{c \cos(x+y)} \\ \quad - (2\mu + 2\lambda)(\cos(2x-y) - c + c \cos(2x-y)^2)ce^{c \cos(2x-y)} \\ (\mu + \lambda)(-c + c \cos(x+y)^2 + \cos(x+y))ce^{c \cos(x+y)} \\ \quad + (6\mu + \lambda)(\cos(2x-y) - c + c \cos(2x-y)^2)ce^{c \cos(2x-y)} \end{cases}$$

Dans ces conditions, la solution exacte du problème est

$$\mathbf{u}_{Exact} = (e^{c \cos(x+y)}, e^{c \cos(2x-y)}).$$

### E.1.6 Déformation d'un triangle homogène

On considère le triangle rectangle homogène présenté en Figure E.1.5 avec les mêmes module de Young et coefficient de Poisson que précédemment.

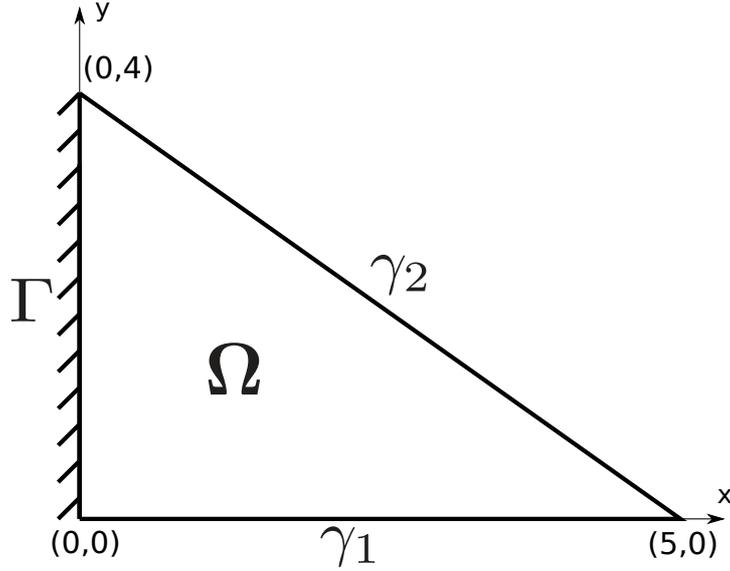


FIGURE E.1.5 – Triangle rectangle homogène

On utilise un raffinement uniforme. Les conditions de bord et les valeurs des fonctions sont précisées ci-dessous :

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} -\mu(x+2).10^{-2} = -(1.9231x + 3.8462).10^7 (N.m^{-2}) \\ -(\lambda - 2x(\lambda + 2\mu)).10^{-2} = -(2.8846 - 13.462x).10^7 (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_1,$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{41}}(5\mu(x-2y+2) + 4((\lambda+2\mu)(y+1) - 2\lambda x)).10^{-2} \\ = (1.2013y - 2.1023x + 7.2081).10^7 (N.m^{-2}) \\ \frac{1}{\sqrt{41}}(4\mu(x-2y+2) + 5(\lambda(y+1) - 2x(\lambda+2\mu))).10^{-2} \\ = (4.6552 - 0.15021y - 9.3104x).10^7 (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_2,$$

$$\mathbf{f} = \begin{cases} 2(\mu + \lambda).10^{-2} = 9.6154.10^7 (N.m^{-3}) \\ -(\mu + \lambda).10^{-2} = -4.8077.10^7 (N.m^{-3}). \end{cases}$$

Dans ces conditions, la solution exacte du problème est

$$\mathbf{u}_{Exact} = (x(y+1).10^{-2}, -2x(y-1).10^{-2}).$$

### E.1.7 Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou

On considère un barreau de forme rectangulaire de longueur 3 et de largeur 1, avec en son centre un trou de diamètre 0.5 représenté en Figure E.1.6. Le maillage, tracé en Figure E.1.7 avec 1108 triangles, plus fin près du trou, prend en compte la géométrie. Les paramètres de Lamé utilisés correspondent à ceux de l'acier, comme décrit par Ciarlet [25], p.62,

$$\lambda = 100 \cdot 10^9 \quad (Pa) \quad \text{et} \quad \mu = 80 \cdot 10^9 \quad (Pa).$$

Les conditions de bord, indiquées en Figure E.1.6, sont les suivantes : on impose un encastrement à gauche ( $\mathbf{u} = (0, 0)$  en  $x = 0$ ), un déplacement unitaire à droite ( $\mathbf{u} = (1, 0)$  en  $x = 3$ ), et des conditions de bord libre partout ailleurs ( $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = (0, 0)$ ) où  $\mathbf{n}$  représente la normale sortante unitaire. Le forçage est nul ( $\mathbf{f} = (0, 0)$ ).

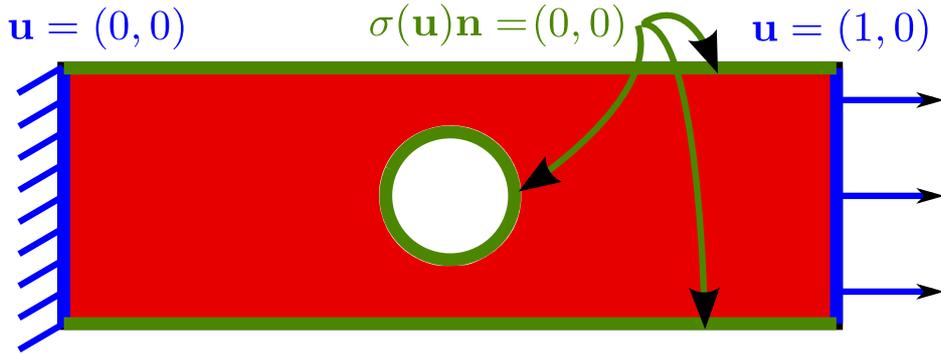


FIGURE E.1.6 – Barreau homogène et conditions de bord.

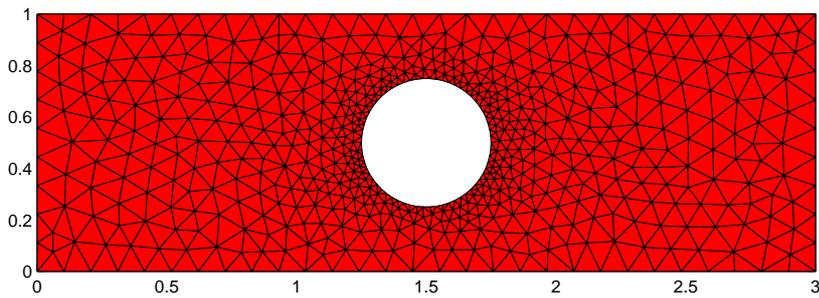


FIGURE E.1.7 – Maillage GMSH.

### E.1.8 Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou

Afin d'illustrer le fait que les coefficients peuvent être discontinus, on va élargir l'exemple précédent à un exemple de matériau « bidomaine », c'est-à-dire qui présente des coefficients de Lamé discontinus. En pratique, on peut imaginer deux matériaux différents soudés entre eux. Pour ce faire, on considère le barreau non homogène percé d'un trou présenté à la Figure E.1.8, constitué d'un rectangle avec trou identique à l'exemple précédent, auquel est soudé un carré de côté 1. Les deux matériaux considérés sont l'acier et l'aluminium, et leurs paramètres de Lamé sont donnés par Ciarlet [25]. Le maillage, tracé en Figure E.1.9 avec 2204 triangles, plus fin près du trou, prend compte de la géométrie.

$$Acier \begin{cases} \lambda = 100 \cdot 10^9 & (Pa) \\ \mu = 80 \cdot 10^9 & (Pa) \end{cases}, \quad Aluminium \begin{cases} \lambda = 56 \cdot 10^9 & (Pa) \\ \mu = 26 \cdot 10^9 & (Pa) \end{cases}.$$

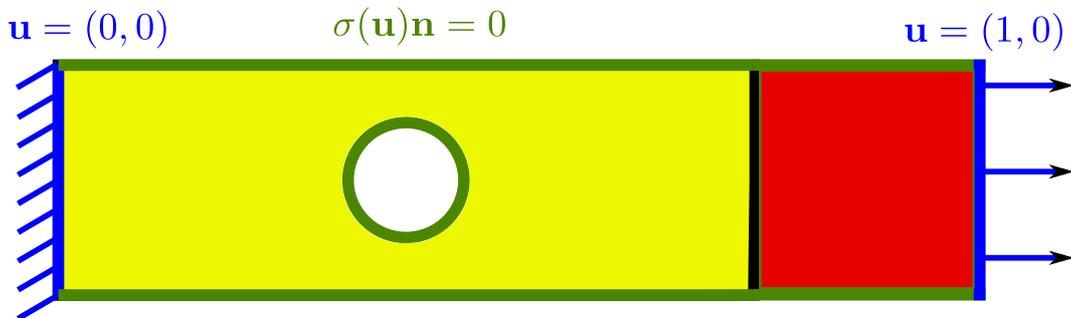


FIGURE E.1.8 – Barreau non homogène et conditions de bord.

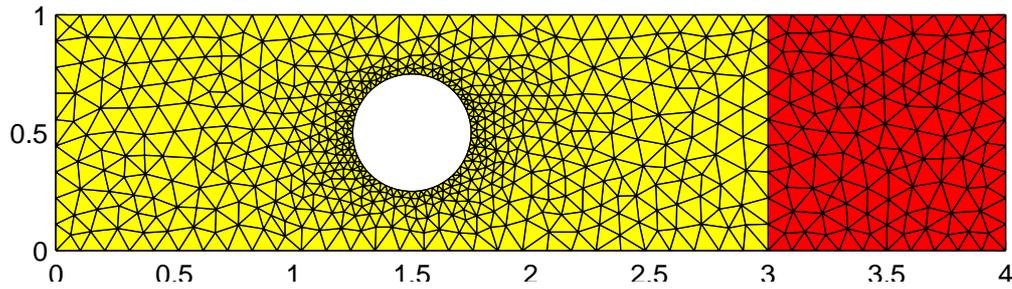


FIGURE E.1.9 – Maillage GMSH.

Les conditions de bord sont les mêmes que pour le barreau homogène, à savoir un forçage nul, et on impose un encastrement à gauche ( $\mathbf{u} = (0, 0)$  en  $x = 0$ ), un déplacement unitaire à droite ( $\mathbf{u} = (1, 0)$  en  $x = 4$ ), et des conditions de bord libre partout ailleurs ( $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$ ).

## E.2 Description des cas test numériques en dimension 3

### E.2.1 Déformation d'un cube homogène

On considère un cube homogène de côté 1 présenté en Figure E.2.1, dont le module d'Young et le coefficient de Poisson sont  $E = 5.10^9$  (Pa) et  $\nu = 0.3$ .

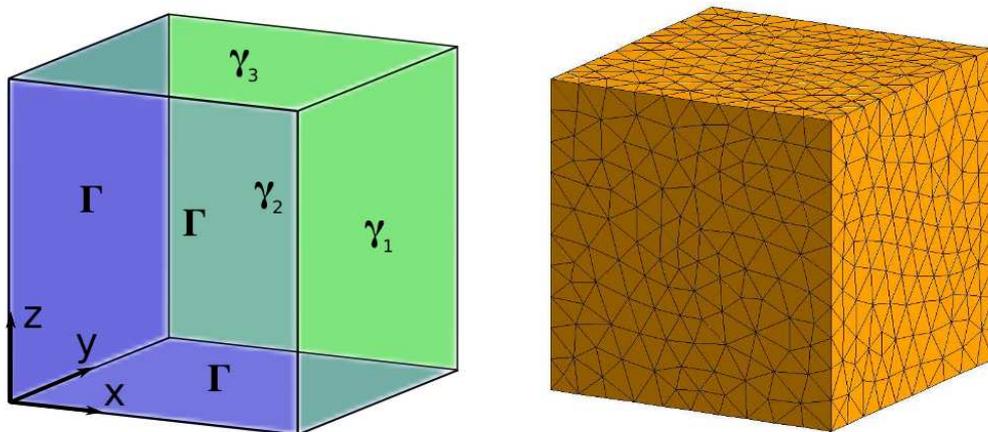


FIGURE E.2.1 – Domaine, repérage des bords et maillage.

Le forçage, correspondant au second membre de l'équation, est le suivant :

$$\mathbf{f} = \begin{cases} 2(y + 2z).10^{-2} & (N.m^{-3}) \\ (x - z).10^{-2} & (N.m^{-3}) \\ (2x - y).10^{-2} & (N.m^{-3}). \end{cases}$$

On impose un encastrement sur le bord de Dirichlet  $\Gamma$  à gauche, en bas et devant, c'est-à-dire  $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$  sur les plans  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $z = 0$ . Les conditions de Neumann sont imposées en

$\gamma_1$  (correspondant à la face de droite en  $x = 1$ ),  $\gamma_2$  (correspondant à la face du fond en  $y = 1$ ) et  $\gamma_3$  (correspondant à la face en haut en  $z = 1$ ), et sont telles que

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} (2\mu yz + \lambda(yz - 2z - y)).10^{-2} & (N.m^{-2}) \\ \mu(1 - 2y).10^{-2} & (N.m^{-2}) \\ -\mu y(1 - z).10^{-2} & (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_1,$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} \mu z(x - 2).10^{-2} & (N.m^{-2}) \\ (-4\mu xy + \lambda(z - 2xy - x)).10^{-2} & (N.m^{-2}) \\ -\mu x(2 + z).10^{-2} & (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_2,$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \begin{cases} \mu y(x - 1).10^{-2} & (N.m^{-2}) \\ -\mu x(2y + 1).10^{-2} & (N.m^{-2}) \\ (-2\mu xy + \lambda(y - 2x - xy)).10^{-2} & (N.m^{-2}) \end{cases} \quad \text{sur } \gamma_3.$$

Ceci conduit à la solution exacte

$$\mathbf{u}_{Exact} = xyz(1, -2, -1) 10^{-2}.$$

## E.2.2 Déformation d'un barreau homogène percé d'un trou

On considère un barreau homogène percé d'un trou de longueur 3, de largeur 1 et d'épaisseur 0.3, avec en son centre un trou cylindrique de diamètre 0.5, représenté en Figure E.2.2. Le maillage, tracé en Figure E.2.3 avec 4840 tétraèdres, plus fin près du trou, prend compte de la géométrie. Les paramètres de Lamé utilisés correspondent à ceux de l'acier (voir le cas E.1.7). Pour les conditions de bord, on impose un encastrement à gauche ( $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$  en  $x = 0$ ), un déplacement unitaire à droite ( $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$  en  $x = 3$ ), et des conditions de bord libre partout ailleurs ( $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$ ) où  $\mathbf{n}$  représente la normale sortante unitaire. Le forçage est nul ( $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ).

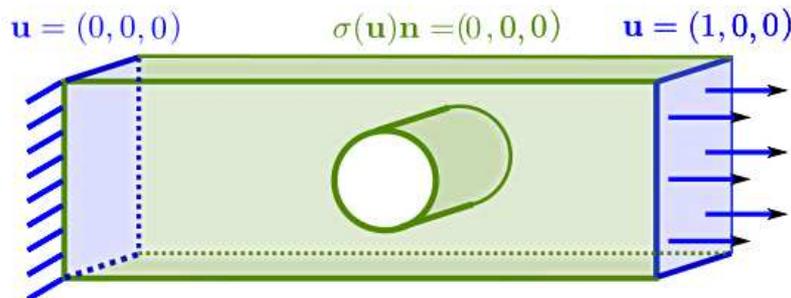


FIGURE E.2.2 – Monodomaine et conditions de bord.

## E.2.3 Déformation d'un barreau non homogène percé d'un trou

Étendons l'exemple précédent en soudant deux matériaux entre eux, pour former un « bido-main », qui est l'équivalent en 3d du bidomaine étudié en section E.1.8. Les paramètres de Lamé sont toujours ceux de l'acier et de l'aluminium. On considère donc le barreau non homogène percé d'un trou illustré par la Figure E.2.4, de longueur 4, de largeur 1 et d'épaisseur 0.3, avec en  $(x, z) = (1.5, 0.5)$  un trou cylindrique de diamètre 0.5. Le maillage, tracé en Figure E.2.5 avec 5720 tétraèdres, plus fin près du trou, prend compte de la géométrie.

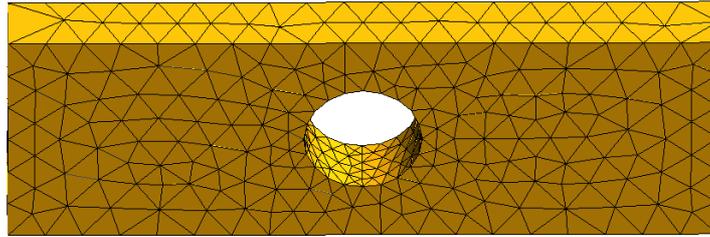


FIGURE E.2.3 – Maillage GMSH.

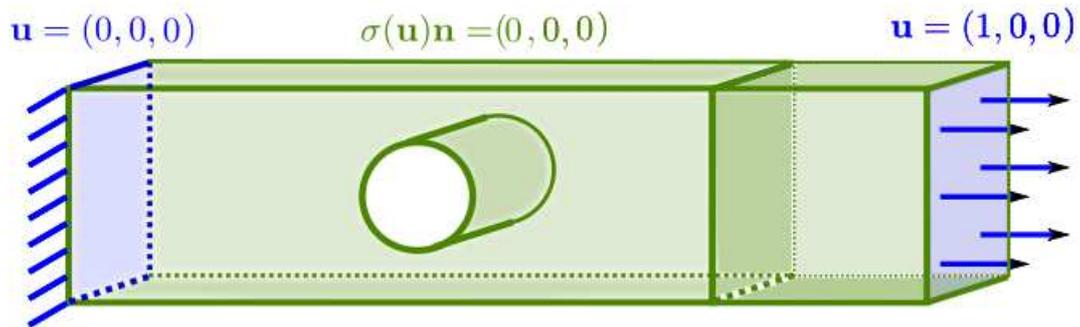


FIGURE E.2.4 – Bidomain et conditions de bord.

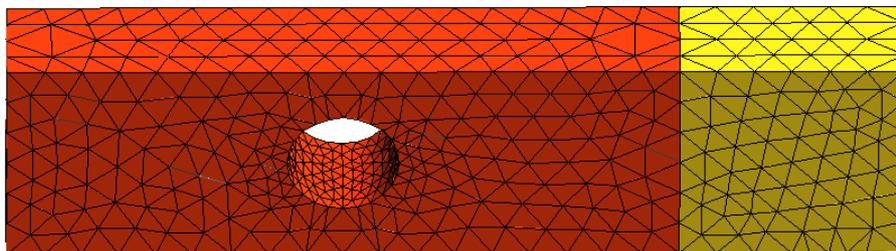


FIGURE E.2.5 – Maillage GMSH.

Les conditions de bord sont les mêmes que pour l'exemple précédent, à savoir un forçage nul, et on impose un encastrement à gauche ( $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$  en  $x = 0$ ), un déplacement unitaire à droite ( $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$  en  $x = 4$ ), et des conditions de bord libre partout ailleurs ( $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}$ ).



## Annexe F

# Comparaison des méthodes EF, Diamant et DDFV en dimension 2

Afin de comparer les schémas entre eux, on a tracé ensemble en Figure 1 les courbes d'erreurs pour le déplacement en norme  $L^\infty$  et  $L^2$  pour les méthodes éléments finis, diamant et DDFV pour le cas test E.1.3 avec une solution analytique. Pour le cas test E.1.7 du barreau homogène, on présente également en Figure 2 le tracé des courbes d'erreurs pour le déplacement obtenues en comparant avec les éléments finis la méthode diamant et la méthode DDFV, et ceci en norme  $L^\infty$  et norme  $L^2$ .

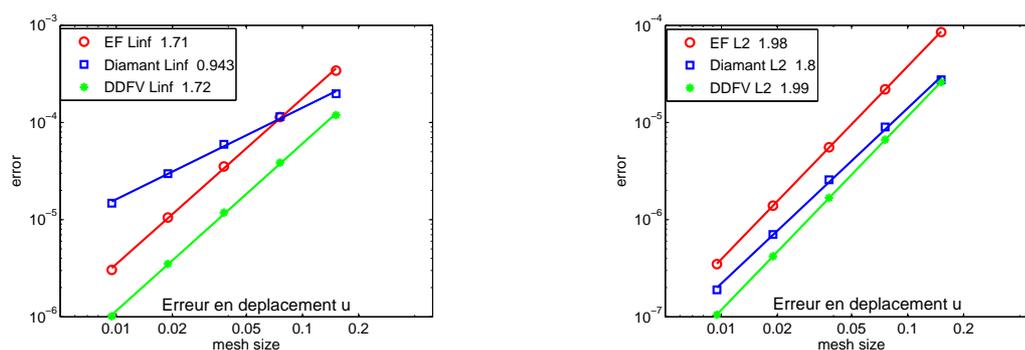


FIGURE 1 – Cas E.1.3 : Comparaison des courbes d'erreurs avec la solution analytique pour le déplacement en norme  $L^\infty$  (gauche) et  $L^2$  (droite)

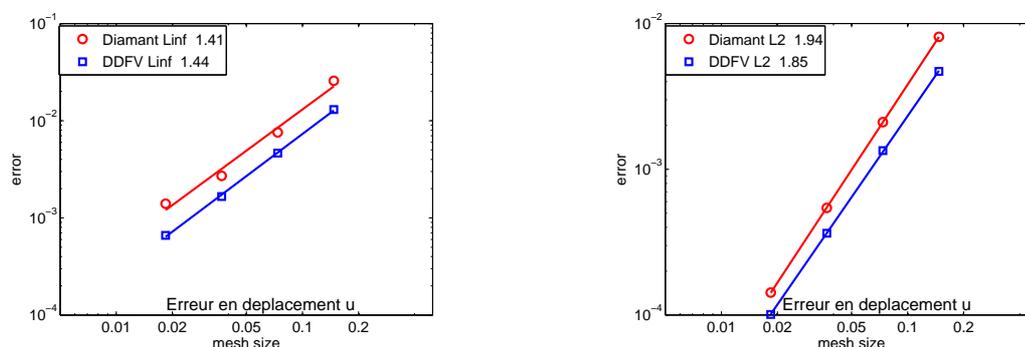


FIGURE 2 – Cas E.1.7 : Comparaison des courbes d'erreurs avec la solution éléments finis pour le déplacement en norme  $L^\infty$  (gauche) et  $L^2$  (droite)