



HAL
open science

Construction d'un modèle de réseau de pores à partir d'une image 3D pour l'estimation de la perméabilité

Nicolas Combaret

► **To cite this version:**

Nicolas Combaret. Construction d'un modèle de réseau de pores à partir d'une image 3D pour l'estimation de la perméabilité. Autre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2012. Français. NNT : 2012BOR14696 . tel-00802468

HAL Id: tel-00802468

<https://theses.hal.science/tel-00802468>

Submitted on 19 Mar 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4696



THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES CHIMIQUES

Par Nicolas COMBARET

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Physico-chimie de la matière condensée

CONSTRUCTION D'UN MODÈLE DE RÉSEAU DE
PORES À PARTIR D'UNE IMAGE 3D POUR
L'ESTIMATION DE LA PERMÉABILITÉ

Directeur de thèse : Dominique BERNARD

Soutenue le : 12 décembre 2012

Devant la commission d'examen formée de :

M. Dominique BERNARD	Directeur de Recherche – ICMCB	Directeur de thèse
M. Pierre LEVITZ	Directeur de Recherche – PECSA	Rapporteur
M. Mario MAGLIONE	Directeur de Recherche – ICMCB	Président
M. Luc SALVO	Professeur – SIMaP	Rapporteur
M. Hugues TALBOT	Professeur associé – ESIEE Paris	Examineur
M. Gérard VIGNOLES	Professeur – LCTS	Examineur

Remerciements

Cette thèse a commencé le 1^{er} octobre 2006 à l'Institut de Chimie de la Matière Condensée de Bordeaux (ICMCB). Elle s'est achevée plus de six ans plus tard, le 12 décembre 2012. La raison principale de cette longévité est que j'ai été embauché par une entreprise méridionale, VSG (Visualization Sciences Group). Combiner vie professionnelle, écriture du manuscrit et vie personnelle s'est par la suite avéré être une situation plus complexe à gérer que je ne l'avais prévu. Mais tout s'est finalement bien terminé. Je souhaite profiter de ces quelques lignes pour remercier les personnes qui ont rendu cette fin possible.

Je remercie tout d'abord le directeur de l'ICMCB, Monsieur Claude DELMAS, de m'avoir accueilli et m'avoir renouvelé sa confiance chaque année pendant les trois années supplémentaires. Monsieur DELMAS a été remplacé au poste de directeur de l'ICMCB par Monsieur Mario MAGLIONE en août 2012 ; je le remercie également de m'avoir accepté à l'ICMCB et d'avoir bien voulu participer à mon jury de thèse, en tant que Président du Jury.

Je remercie également Messieurs Pierre LEVITZ, Luc SALVO, Hugues TALBOT et Gérard VIGNOLES, rapporteurs et examinateurs de mon jury de thèse, pour avoir lu mon manuscrit, assisté à ma soutenance, avoir donné leurs avis critiques, posé des questions constructives et m'avoir permis d'améliorer ma réflexion sur mon travail.

Je remercie particulièrement Dominique BERNARD, mon directeur de thèse, sans qui cette thèse n'aurait pas commencé, et ne se serait sans doute pas terminée non plus. Il a été pendant six ans un directeur de thèse dévoué et convaincant, m'amenant petit à petit à prendre confiance en ce que je faisais. Durant les trois dernières années, il a été un moteur, me faisant relever la tête quand des velléités d'abandon se faisaient trop présentes. Il a été disponible tout le temps, pour discuter, relire des brouillons de manuscrit, préparer des présentations. Ses encouragements et ses observations lors de nos réunions hebdomadaires du jeudi soir ont été une source de motivation qui m'a permis d'aller jusqu'au bout.

Je remercie Erwan PLOUGONVEN, qui a commencé sa thèse en même temps que

moi et qui l'a terminée dans les temps, pour les nombreuses discussions qui ont animé nos années passées à l'ICMCB. Ses travaux de thèse sont repris et discutés dans ce manuscrit, nos sujets respectifs portant sur des thématiques proches.

Je remercie l'ensemble des membres du groupe 4 de l'ICMCB, baptisé « Matériaux Ferroélectriques, Céramiques et Composites », plus particulièrement Jean-François SILVAIN, Jean-Marc HEINTZ, Amélie VEILLÈRE, Guillaume LACOMBE, Grégory HAUSS, ainsi que tous ceux qui sont passés et que je n'ai pas cité. Je n'oublie pas Julien LESSEUR, qui a repris et utilisé mes travaux pendant son stage de master.

Je remercie évidemment ma famille, mes parents et mes soeurs pour leur soutien quand j'en ai eu besoin. Un merci particulier à Alexandra, qui m'a supporté pendant toutes ces années ; toutes les vacances, week-ends et jours fériés passés à travailler n'auront pas servi à rien.

Merci enfin à tous ceux que j'ai oublié de citer ici. Ces quelques lignes ont été rédigées à la hâte, au dernier moment, comme à mon habitude. J'espère qu'ils me pardonneront.

Table des matières

Introduction	1
1 Perméabilité absolue et modèles de réseau	3
1.1 Perméabilité absolue	3
1.1.1 Échelle macroscopique : la loi phénoménologique de Darcy . . .	3
1.1.2 Échelle du pore : les équations de Stokes	6
1.1.3 Passage de l'échelle de Stokes à l'échelle de Darcy	8
1.1.4 Calcul numérique	20
1.2 Modélisation des milieux poreux sous forme de réseau	22
1.2.1 Modèles de réseaux structurés	22
1.2.2 Modèles de réseaux non structurés	24
1.2.3 Modèles de réseaux basés sur des images 3D	25
1.2.4 Positionnement des travaux présentés	28
2 Réseau basé sur un partitionnement de l'espace poral	31
2.1 Localisation des pores	32
2.1.1 Squelettisation de l'espace poral	33
2.1.2 Suppression des artefacts de discrétisation	36
2.1.3 Classification des points du squelette	38
2.1.4 Fusion des pores	40
2.2 Délimitation des pores	41
2.2.1 Ligne de partage des eaux	43
2.2.2 Amincissement des séparations	44
2.2.3 Maximisation des graines	45
2.3 Graphe d'interconnexion	46
2.3.1 Limites du graphe issu du squelette	46
2.3.2 Reconstruction d'un graphe d'interconnexion	48
2.4 Bilan & discussions	49

2.4.1	Conditions aux limites	51
2.4.2	Influence de la suppression des artefacts de binarisation	55
2.4.3	Modification du partitionnement	55
2.4.4	Définition d'un pore	56
3	Réseau de pores et perméabilité	59
3.1	Bilan de masse (équations 3.1a et 3.2a)	60
3.1.1	Intégration sur le volume d'un pore	60
3.1.2	Exemples de contacts entre pores	62
3.2	Bilan de la quantité de mouvement (équations 3.1b et 3.2b)	63
3.2.1	Intégration le long d'un chemin entre deux pores	63
3.2.2	Bilan de l'étude terme à terme	64
3.2.3	Exemples de contacts entre pores	65
3.3	Calcul des résistances	67
3.3.1	Présentation de l'approche	67
3.3.2	Extraction des couples de pores	68
3.3.3	Ajout des points d'entrée / sortie du fluide	71
3.3.4	Résolution numérique : algorithme ICMCB	72
3.3.5	Estimation du $\lambda_{H_i H_j}$	72
3.4	Construction et résolution du système linéaire	72
3.4.1	Construction de la matrice	72
3.4.2	Construction des seconds membres	74
3.4.3	Inversion de la matrice du système	75
3.4.4	Estimation de la perméabilité du milieu poreux	76
3.4.5	Estimation du tenseur de perméabilité effective	76
3.5	Bilan	77
4	Application à un matériau réel	79
4.1	Présentation de l'échantillon et de l'image	79
4.2	Préparation de l'image pour le partitionnement	81
4.2.1	Suppression des artefacts de binarisation	81
4.2.2	Suppression des composantes connexes isolées	81
4.3	Squelettisation	82
4.3.1	Carte de priorité	82
4.3.2	Squelettisation	83
4.3.3	Effet des pré-traitements sur le squelette	85
4.4	Classification des points du squelette	86
4.5	Fusion des nœuds	87
4.5.1	Suppression des nœuds à l'origine de pores de faible volume	89
4.5.2	Suppression des groupes de nœuds non débouchants	89
4.6	Ligne de partage des eaux	90
4.7	Calcul des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$	95
4.7.1	Cas traités automatiquement	95

4.7.2	Cas nécessitant une action manuelle	96
4.7.3	Bilan	100
4.8	Résolution du système	100
4.9	Bilan & discussions	101
Conclusion		105
A Éléments de topologie numérique pour la squelettisation		115
A.1	Définitions générales	115
A.2	Topologie numérique	116
Bibliographie		121

Table des figures

1.1	Montage de l'expérience de Darcy	4
1.2	Illustration du principe de changement d'échelle	10
1.3	Condition aux limites de périodicité	16
1.4	Positionnement des inconnues sur les maillages décalés	21
2.1	Empilement de billes utilisé pour valider le partitionnement	33
2.2	Suppression de points simples en parallèle	34
2.3	Exemple d'artefact de binarisation 1D	38
2.4	Squelette sans et avec suppression des artefacts de binarisation	39
2.5	Exemple d'agglomérat de points d'intersection de branches	41
2.6	Graphe d'interconnexion des pores avant et après fusion sur critère de recouvrement des boules maximales	42
2.7	Boules maximales et volume de recouvrement (intersection)	43
2.8	Visualisation du partitionnement de l'empilement de billes	45
2.9	Exemple de configuration où la connexion entre deux pores est repré- sentée par deux arêtes	47
2.10	Exemple de configuration où une connexion entre deux pores n'est pas représentée par le graphe issu du squelette	48
2.11	Graphe reconstruit en tenant compte des conditions aux limites pour un écoulement	52
2.12	Illustration de la périodicité du squelette dans une direction	53
3.1	Intégration du bilan de masse sur le volume d'un pore	61
3.2	Différentes configurations de chemins existant dans le graphe	66
3.3	Extraction des pores dans des cas de séparation simple	69
3.4	Extraction des pores dans un cas de séparation complexe	70
3.5	Positionnement de zones d'injection et sortie de fluide sur les géomé- tries extraites	73

TABLE DES FIGURES

4.1	Visualisation du volume utilisé pour l'application de la méthode complète	80
4.2	Effet de la condition aux limites sur la carte de distance	83
4.3	Différents squelettes sur la face d'entrée du volume en fonction de la carte de priorité et de la condition aux limites de la squelettisation . .	84
4.4	Surfaces présentes dans le squelette sans pré-traitements	86
4.5	Graphe directement issu du squelette	87
4.6	Critères généraux de fusion des nœuds	88
4.7	Fusion des pores non-débouchant	90
4.8	Exemple de pore après le partitionnement	92
4.9	Exemple d'arête manquante dans le graphe issu du squelette	93
4.10	Réseau reconstruit sur le bord de l'image : connexions avec l'extérieur	94
4.11	Exemple de géométrie simple impliquant deux pores seulement	96
4.12	Exemple de géométrie impliquant trois pores connectés par une même surface composée	97
4.13	Exemple de géométrie simple impliquant un pore connecté à l'extérieur	98
4.14	Exemple de géométrie locale de grande taille	98
4.15	Exemple de pore entouré	99
4.16	Représentation de la pression aux nœuds du graphe après résolution du système linéaire	101
4.17	Exemple de pores en contact avec seulement deux autres pores	112
A.1	Relations d'adjacence sur maille cubique	117

Les milieux poreux sont présents partout autour de nous : le sol sur lequel nous marchons, les filtres qui équipent les appareils de tous les jours, le papier sur lequel ces lignes sont écrites, et bien d'autres encore. Ces matériaux présentent des propriétés mécaniques et de transport qui sont parfois encore mal appréhendées. La cause principale de cette incompréhension est la structure fortement irrégulière de leur géométrie interne, qui les rend difficiles à modéliser.

Pour reproduire artificiellement la manière dont un ou plusieurs fluides se déplacent dans un milieu poreux, diverses approches existent. Une modélisation directe des phénomènes physiques est généralement très coûteuse. Les relations entre les différentes phases des fluides polyphasiques sont encore mal comprises et les simulations numériques d'écoulement de fluides requièrent des capacités de calcul immenses. C'est pourquoi le recours à des modèles de réseau s'est développé et continue à être source d'une quantité non négligeable de travaux scientifiques. Généralement, un modèle de réseau idéalise la structure du milieu poreux en créant des éléments, les pores, qui interagissent de manière simple. Toute la difficulté réside dans le contrôle de cette simplification, afin de ne pas trop s'éloigner de la réalité.

Parmi les propriétés de transport des milieux poreux, la perméabilité absolue est une caractéristique essentielle. Il est établi depuis longtemps que la perméabilité d'un matériau est régie par sa micro-structure. La quantité d'espace poral mais surtout la manière dont il est arrangé sont des paramètres fondamentaux pour la perméabilité. Cette relation a engendré nombre de travaux cherchant à corrélérer des paramètres mesurables (volume, surface spécifique, etc.) à la perméabilité, avec un succès souvent limité à quelques matériaux classiques (grès de Fontainebleau, de Béréa, etc.).

Une condition essentielle pour établir cette corrélation est de parvenir à visualiser cette micro-structure, afin de quantifier différents paramètres. Pour cela, observer en 2D n'est pas suffisant, parce que les milieux poreux réels sont intrinsèquement 3D. Les avancées récentes des moyens d'imagerie permettent de visualiser la micro-

géométrie des matériaux avec une précision sub-micronique. C'est le cas par exemple au synchrotron européen (ESRF à Grenoble), dont quelques lignes sont dédiées à la micro-tomographie à rayons X. Les images obtenues par tomographie, dont l'utilisation se répand, offrent des points de vue radicalement nouveaux sur les matériaux et sur leurs évolutions. Non-destructive, cette méthode permet maintenant de visualiser un même échantillon à différentes étapes de sa « vie » normale, en 3D.

Obtenir des images de matériaux d'excellente qualité est possible, mais ces images ne donnent pas directement de réponse. Il faut les analyser pour en tirer des caractéristiques pertinentes du réseau poral. Les travaux présentés dans cette thèse s'intéressent à cette étape d'analyse des images et visent à proposer une nouvelle approche pour modéliser un milieu poreux sous la forme d'un réseau pour le calcul de la perméabilité absolue. Son originalité vient de la manière de considérer les relations entre les pores. Elles ne sont pas idéalisées par des tubes de formes simples (cylindres, prismes triangulaires, etc.); au contraire la géométrie réelle est utilisée pour observer le comportement local de l'écoulement. Cette approche va à l'encontre de toutes les références bibliographiques auxquelles nous avons eu accès, qui considèrent que les relations entre les pores peuvent se résumer à un calcul sur une géométrie élémentaire.

Le premier chapitre introductif présente différents aspects de la perméabilité absolue et brosse le portrait des modèles de réseaux existants. La modélisation des milieux poreux sous forme de réseau part du postulat que l'espace poral peut être décomposé en éléments simples : les pores. Cette décomposition est loin d'être triviale, et le deuxième chapitre présente une méthode permettant d'obtenir un partitionnement de l'espace poral en pores. Une fois le partitionnement obtenu, un réseau d'interconnexion des pores est construit. Ce réseau sert de support à la résolution d'un système linéaire établi à partir des équations de Stokes. Le troisième chapitre justifie l'existence de ce système linéaire et propose une approche originale pour le calcul de coefficients apparus dans ce système linéaire. Enfin, le quatrième chapitre décrit en détail l'application de l'ensemble des étapes menant de l'image 3D à une valeur de perméabilité absolue calculée grâce au réseau construit en suivant les éléments des chapitres 2 et 3.

Perméabilité absolue et modèles de réseau

Ce chapitre a pour but d'introduire les deux éléments centraux de ce manuscrit : la perméabilité absolue et la modélisation des milieux poreux par des réseaux.

1.1 Perméabilité absolue

La perméabilité absolue est un paramètre fondamental de caractérisation des propriétés de transport des milieux poreux.

1.1.1 Échelle macroscopique : la loi phénoménologique de Darcy

La perméabilité absolue représente l'effet d'un milieu poreux sur l'écoulement d'un fluide monophasique qui le traverse. Elle est apparue pour la première fois dans la loi de Darcy, du nom de la personne qui l'a mise en évidence. Henry Darcy est historiquement connu pour être parvenu à alimenter en 1840 la ville de Dijon en eau potable, travaux dont il est question dans son ouvrage [Darcy 56]. Il étudie dans cet ouvrage les problèmes liés à cet approvisionnement. Le comportement d'un écoulement d'eau à travers des filtres constitués de plusieurs couches de sables différents l'intéresse particulièrement. Il cherche à quantifier et prévoir la perte de charge créée par ces filtres. Pour cela, il utilise un montage expérimental ressemblant à celui de la figure 1.1 afin de pouvoir établir une formule mathématique simple mettant en relation les différents paramètres qu'il peut mesurer.

Grâce à ce système, Darcy déduit que le débit de l'écoulement (volume par unité de temps) Q qui a lieu dans la colonne est :

- proportionnel à la section S de la tour dans laquelle l'écoulement se produit ;

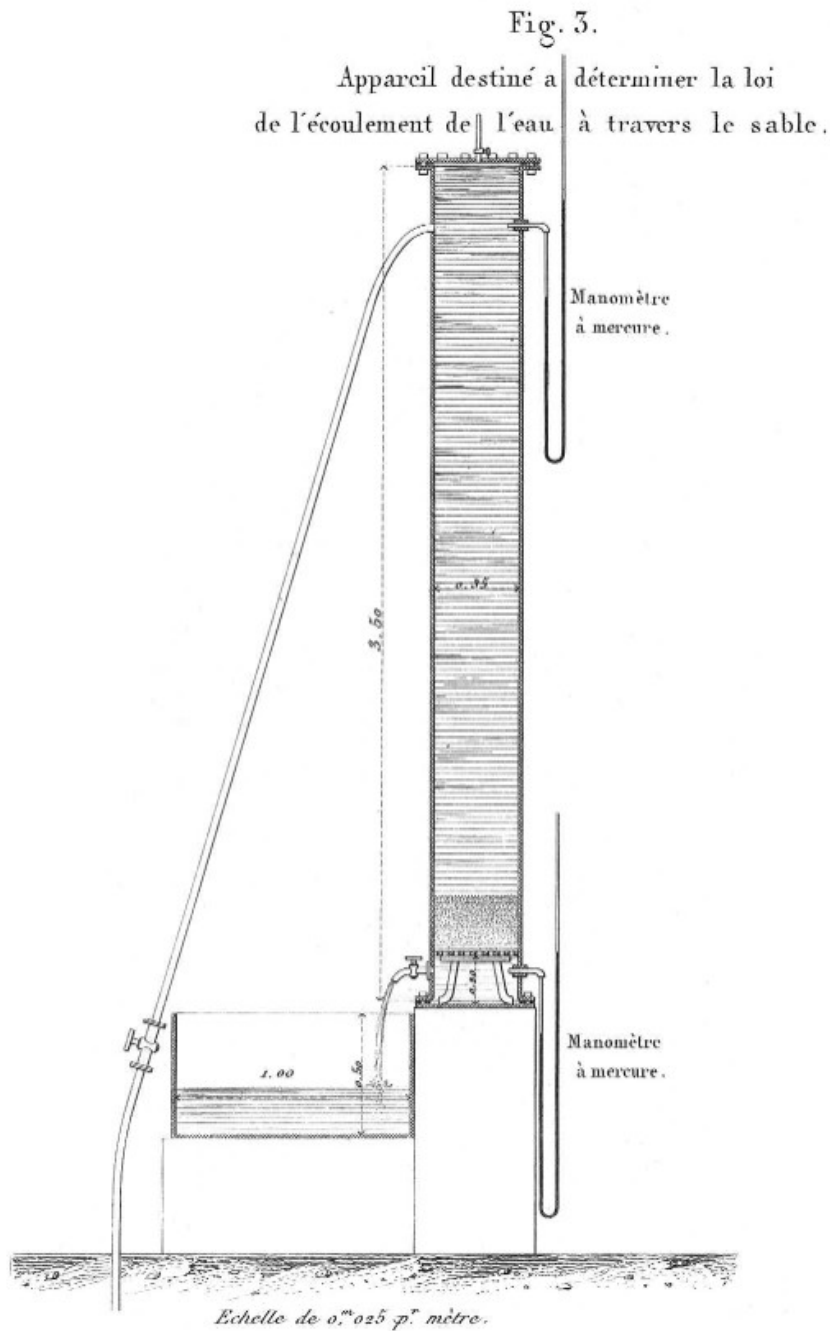


FIGURE 1.1 – Montage qu'Henry Darcy a utilisé pour étudier l'écoulement de l'eau à travers un filtre sableux. Il était constitué d'une colonne d'eau de 3m50 surplombant un échantillon du filtre à caractériser. La pression de l'eau pouvait être mesurée au dessus de la colonne et en dessous de l'échantillon à l'aide de manomètres à mercure. Le débit moyen en sortie du système était estimé par la vitesse de remplissage du bassin de jaugeage (en bas à gauche). Ce schéma est extrait de [Darcy 56].

- proportionnel à la différence de pression ΔP entre le sommet et la partie basse de la colonne d'eau ;
- inversement proportionnel à la longueur L de l'échantillon.

La relation qu'il écrit dans son livre ressemble à la suivante :

$$Q = -K \frac{S}{L} \Delta P \quad (1.1)$$

où K est considéré par Darcy comme un «*coefficient dépendant de la perméabilité*» du filtre et qu'il définit comme la conductivité hydraulique. En se permettant de regrouper certains termes de l'équation 1.1 afin d'en simplifier l'écriture, il est possible d'exprimer le débit par unité de surface $q = \frac{Q}{S}$ (qui a la même dimension qu'une vitesse et qui est couramment appelé *vitesse de Darcy*) et la différence de pression par unité de longueur $\Delta p = \frac{\Delta P}{L}$ (qui est une manière simplifiée d'écrire le gradient monodimensionnel de la pression). Ces éléments remplacent les termes de l'équation 1.1, qui s'écrit par conséquent sous la forme :

$$q = -K \Delta p \quad (1.2)$$

La loi 1.2, proposée par Darcy, relie directement le gradient de pression autour du filtre au débit de l'écoulement qui le traverse. Elle ressemble en cela à d'autres lois de phénomènes diffusifs. Cependant, le coefficient K n'est pas la perméabilité en tant que grandeur caractéristique du milieu poreux. D'un point de vue physique, il ne dépend pas uniquement du milieu dans lequel l'écoulement a lieu. Il représente la facilité avec laquelle *un* fluide donné (ici, l'eau) peut s'écouler dans la matrice poreuse et dépend par conséquent à la fois des propriétés du fluide et des propriétés géométriques et topologiques de l'espace poral.

Afin de caractériser un milieu poreux indépendamment du fluide qui s'écoule, il est préférable de déterminer la *perméabilité effective* k du matériau, qui dépend uniquement des propriétés du milieu. Elle s'exprime à partir de la conductivité hydraulique et de la viscosité μ du fluide qui a servi à l'estimer :

$$K = \frac{k}{\mu} \quad (1.3)$$

C'est cette grandeur k , qui ne dépend que de paramètres liés au matériau, dont il sera question par la suite. Elle a la dimension d'une surface et s'exprime en L^2 (avec L une unité de longueur ; m^2 en unités SI).

La loi telle que Darcy l'a écrite est vérifiée pour un écoulement monodimensionnel. Dans le cas d'un écoulement tridimensionnel, dans un matériau anisotrope, elle devient une équation vectorielle dans laquelle la perméabilité effective est transformée en tenseur d'ordre 2 :

$$\vec{q} = -\frac{1}{\mu} \vec{k} \cdot \vec{\nabla} p \quad (1.4)$$

où le symbole \vec{k} représente le tenseur de perméabilité.

La détermination expérimentale de ce tenseur n'a jamais, à notre connaissance, été réalisée. Son estimation numérique requiert que l'on étudie plus précisément le phénomène physique lié à l'écoulement.

1.1.2 Échelle du pore : les équations de Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires, qui décrivent le comportement des fluides dans l'approximation des milieux continus. Nous ne nous intéresserons ici qu'à un sous-ensemble de ces équations, construit à partir des équations de Navier-Stokes en imposant des contraintes sur le fluide et l'écoulement étudiés. Les équations de Stokes permettent de décrire l'écoulement d'un fluide lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

- le fluide est Newtonien : sa viscosité est constante ;
- le fluide est incompressible : sa masse volumique est constante ;
- les effets inertiels sont négligeables : la vitesse ne varie pas au cours du temps.

Ces conditions sont vérifiées par les écoulements présents dans une grande variété de problèmes, lorsqu'il est question d'écoulement laminaire, qui correspondent à des nombres de Reynolds¹ très faibles ($N_{Re} \ll 1$). L'écoulement des fluides dans les milieux poreux est un sujet d'étude dont les répercussions se retrouvent dans des domaines aussi variés que l'hydrologie (écoulements souterrains), le génie pétrolier (réservoirs pétroliers), l'agriculture (transport des polluants dans les sols), etc. Les équations de Stokes sont valables quels que soient le fluide et le milieu poreux, du moment que l'écoulement et le fluide respectent les conditions énoncées ci-dessus. Elles permettent d'établir les champs de vitesse et de pression du fluide dans le milieu et s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & (1.5a) \\ \mu \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{f} = 0 & (1.5b) \end{cases}$$

$$\text{C.L. :} \quad \vec{v} = 0 \quad \text{sur l'interface } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (1.5c)$$

avec \vec{v} la vitesse du fluide, p la pression du fluide, μ la viscosité dynamique du fluide, ρ la masse volumique du fluide et \vec{f} une force extérieure exercée sur le fluide. Les opérateurs de gradient $\vec{\nabla}$, laplacien ∇^2 et divergence $\vec{\nabla} \cdot$ sont aussi présents.

¹Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui caractérise le régime d'un écoulement : laminaire, transitoire ou turbulent. Dans un tube cylindrique par exemple, $N_{Re} = \frac{VD}{\nu}$ avec ν la viscosité cinématique du fluide, D le diamètre du tube et V la vitesse du fluide. Les valeurs faibles caractérisent les écoulements laminaires (la vitesse V est petite). Au-delà d'une certaine valeur du nombre de Reynolds (appelée Reynolds critique), l'écoulement devient turbulent. Avant la turbulence, il y a une partie non linéaire.

La condition aux limites 1.5c provient des conditions de l'écoulement : les forces visqueuses sont considérées comme les seules qui s'appliquent sur le fluide (les autres, notamment inertielles, ont été négligées). Par conséquent, à l'interface entre le fluide (noté β) et le solide (noté σ) $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$, le fluide adhère à la paroi à cause de cette force visqueuse ; sa vitesse est donc nulle.

1.1.2.1 Simplification de l'écriture

Afin de simplifier l'écriture de ces équations, le terme $\rho \vec{f}$ est intégré au gradient de pression. Il suffit pour cela de supposer que la seule force extérieure qui s'impose au système est la gravité. Le terme $\rho \vec{f}$ se réécrit donc sous la forme $\rho g \vec{z}$, avec g la constante de gravité et \vec{z} le vecteur directeur vertical (dans le sens de la gravité). Il suffit de transformer ce terme en $\rho g \vec{\nabla} z = \vec{\nabla}(\rho g z)$. Cette égalité est vraie puisque la densité est constante dans le volume considéré. Au final, la deuxième équation devient :

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla}(\rho g z) &= \mu \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla}(p - \rho g z) \\ &= \mu \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla} p' = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Le terme de pression qui découle de cette manipulation est donc la pression réelle du fluide modulée par la force de gravité. Dans la plupart des cas où les équations de Stokes sont résolues, les milieux sont suffisamment petits pour que la force de gravité puisse être négligée devant la pression du fluide, ce qui simplifie encore plus facilement l'écriture. L'écriture des équations de Stokes se transforme dans les deux cas :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & (1.7a) \\ \mu \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla} p = 0 & (1.7b) \end{cases}$$

1.1.2.2 Adimensionnement des équations de Stokes

Pour résoudre un système d'équations de la physique, il est recommandé d'utiliser un système métrique cohérent afin de rendre triviales les conversions d'un système d'unités à un autre. Mieux encore, la résolution peut être menée sur des grandeurs adimensionnelles qui permettent de s'affranchir des changements d'unités. Pour notre cas, une vitesse de référence V_{ref} et une taille caractéristique L_{ref} du domaine sont choisies arbitrairement. Ces valeurs de référence n'ont pas besoin d'être explicitement spécifiées. Ce sont des paramètres qui devront dépendre de l'écoulement considéré et du milieu dans lequel il aura lieu.

L'adimensionnement commence en introduisant les valeurs de référence :

$$\overrightarrow{v_{adim}} = \frac{\overrightarrow{v}}{V_{ref}} \quad x_{adim} = \frac{x}{L_{ref}} \quad y_{adim} = \frac{y}{L_{ref}} \quad z_{adim} = \frac{z}{L_{ref}} \quad (1.8)$$

L'opérateur différentiel ∇ est lui aussi rendu adimensionnel :

$$\nabla_{adim} = L_{ref} \nabla \quad (1.9)$$

En utilisant les notations 1.8 et 1.9 pour modifier le système 1.7, la forme adimensionnelle des équations de Stokes apparaît :

$$\begin{cases} \nabla_{adim} \cdot \overrightarrow{v_{adim}} = 0 & (1.10a) \\ \nabla_{adim}^2 \overrightarrow{v_{adim}} - \frac{L_{ref}}{\mu V_{ref}} \nabla_{adim} p = 0 & (1.10b) \end{cases}$$

Le terme $\frac{L_{ref}}{\mu V_{ref}}$ a la dimension de l'inverse d'une pression. La pression de référence $P_{ref} = \frac{\mu V_{ref}}{L_{ref}}$ apparaît donc naturellement et permet d'adimensionner le dernier terme des équations en posant :

$$p_{adim} = \frac{p}{P_{ref}} = \frac{p L_{ref}}{\mu V_{ref}} \quad (1.11)$$

Le système d'équations 1.10 s'écrit :

$$\begin{cases} \nabla_{adim} \cdot \overrightarrow{v_{adim}} = 0 & (1.12a) \\ \nabla_{adim}^2 \overrightarrow{v_{adim}} - \nabla_{adim} p_{adim} = 0 & (1.12b) \end{cases}$$

$$\text{C.L. :} \quad \overrightarrow{v_{adim}} = 0 \quad \text{sur l'interface } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (1.12c)$$

Le système 1.12 est entièrement adimensionnel. Cela permet de ne pas se soucier des unités par la suite. Pour revenir dans le monde physique, seules les grandeurs V_{ref} et L_{ref} devront être spécifiées. Par ailleurs, les notations indicées par *adim* ne seront plus utilisées par la suite, afin d'alléger les écritures.

1.1.3 Passage de l'échelle de Stokes à l'échelle de Darcy

Les équations de Stokes définissent le comportement d'un fluide s'écoulant dans un milieu poreux à l'échelle microscopique, souvent appelé échelle du pore. La loi de Darcy explicite la relation entre le gradient macroscopique de pression autour d'un milieu poreux et le débit de l'écoulement le traversant. Passer des unes à l'autre nécessite un changement d'échelle, du microscopique au macroscopique. Pour cela, il existe différentes manières de procéder.

La première consiste à résoudre localement les équations de Stokes, à l'intérieur du milieu poreux. Une fois les champs de vitesse et de pression déterminés, en imposant des conditions aux limites macroscopiques, il est possible d'établir la perte de charge autour du matériau (puisque l'on connaît la pression en tout point) et le débit de l'écoulement (puisque l'on connaît la vitesse du fluide en tout point). Il suffit ensuite d'appliquer la loi de Darcy pour estimer la valeur de perméabilité. Cette méthode est une imitation d'une expérience de perméamétrie. Son interprétation est directe, ce qui explique qu'elle est largement utilisée pour les estimations numériques de perméabilité. En revanche, il est nécessaire d'imposer certaines conditions aux limites du domaine afin de le fermer, notamment. Ces conditions peuvent avoir une influence non négligeable sur l'écoulement qui traverse le milieu poreux, puisqu'elles en modifient la géométrie.

La seconde approche repose sur une étude mathématique du problème de changement d'échelle. La version tensorielle (voir l'équation 1.4) de l'empirisme de Darcy est l'aboutissement de nombreux travaux théoriques. Ils reposent sur des approches variées, comme par exemple la prise de moyenne volumique ([Anderson 67], [Marle 67], [Slattery 67], [Whitaker 67]) et la théorie de l'homogénéisation ([Bensoussan 78], [Sanchez-Palencia 80], [Bakhvalov 89]).

La méthode de prise de moyenne volumique est une technique mathématique générale, qui permet de manipuler des équations de la physique classique afin de réaliser ce changement d'échelle. Elle est utilisée pour des problèmes aussi divers que le transfert de chaleur, la diffusion d'espèces chimiques, les écoulements de fluides, etc (voir [Whitaker 99] par exemple). Dans le cas des écoulements monophasiques, qui concerne cette étude, les équations des Stokes sont valides dans une seule des deux phases constituant le matériau : la phase fluide, celle où le fluide s'écoule. Elles peuvent être *lissées* spatialement pour devenir des équations qui sont vérifiées partout dans le milieu, y compris dans le solide.

1.1.3.1 Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)

La figure 1.2 schématise le chemin parcouru lors d'une telle opération. Le milieu poreux dans son ensemble (figure 1.2(a)) peut avoir la taille d'un aquifère sous-marin ou d'un réservoir de pétrole, par exemple. Ses dimensions sont telles qu'il est impossible de l'étudier dans son ensemble afin de caractériser ses propriétés physiques (telle que la perméabilité). Un volume plus petit est extrait (figure 1.2(b)), que l'on juge représentatif de l'ensemble : c'est un volume élémentaire représentatif (ou V.E.R.).

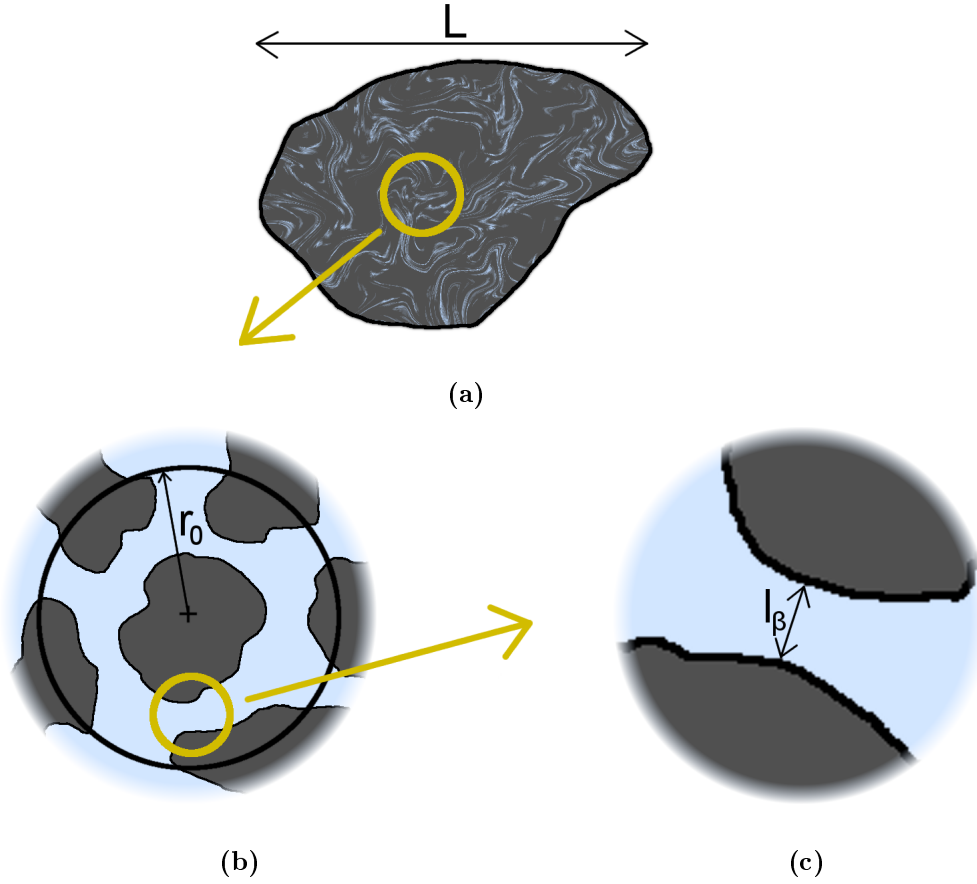


FIGURE 1.2 – (a) Milieu poreux macroscopique, de taille caractéristique L , trop grand pour être étudié dans son intégralité par les méthodes directes. (b) Extrait du milieu poreux, appelé V.E.R. (Volume Élémentaire Représentatif), d’une taille caractéristique r_0 , vérifiant certaines garanties vis-à-vis du changement d’échelle. (c) Echelle microscopique, de taille caractéristique l_β , à laquelle les équations de Stokes sont vérifiées.

Longueurs caractéristiques Le V.E.R. est atteint à condition que les longueurs caractéristiques du milieu répondent à la relation suivante :

$$l_\beta \ll r_0 \ll L \quad (1.13)$$

Cette relation d’ordre est dictée par les développements menés lors de la prise de moyenne volumique. Elle suggère que la taille r_0 caractéristique du V.E.R. \mathcal{V} doit à la fois :

- être assez grande pour inclure une quantité *suffisante* des différentes phases composant le milieu. Les moyennes des propriétés calculées sont ainsi représentatives vis-à-vis du milieu macroscopique ;
- être suffisamment petite pour que les moyennes des différentes grandeurs en jeu varient de manière négligeable dans le V.E.R..

Cette description rapide des longueurs caractéristiques est volontairement générale. Il existe des contraintes précises portant sur p_β et \vec{v}_β et leurs dérivées spatiales

première et seconde. Cependant, le détail de ces contraintes ne constitue pas l'objet de ce document. [Whitaker 99] les décrit et l'on pourra s'y référer pour plus de précisions à propos des longueurs caractéristiques. Le but ici est de pointer la difficulté qui existe à déterminer la taille idéale du V.E.R. dans des cas pratiques.

Décomposition du V.E.R. Certaines grandeurs sont indicées par β ou σ . Cet indice signifie qu'elles se rapportent au solide (phase σ) ou au fluide (phase β). À l'intérieur du V.E.R., il est important de distinguer :

- les volumes respectifs de la phase fluide \mathcal{V}_β (dans laquelle l'écoulement a lieu) et de la phase solide \mathcal{V}_σ . Elles forment le volume total $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\beta + \mathcal{V}_\sigma$ dans lequel la moyenne est calculée. La fraction du volume de phase fluide par rapport au volume entier s'écrit $\epsilon_\beta = \frac{\mathcal{V}_\beta}{\mathcal{V}}$ et la fraction du volume de phase solide par rapport au volume entier s'écrit $\epsilon_\sigma = \frac{\mathcal{V}_\sigma}{\mathcal{V}}$. ϵ_β sera souvent appelé *porosité*, tandis que \mathcal{V}_β sera souvent appelé *espace poral* ;
- les interfaces entre les phases fluide et solide $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$ et l'interface entre la phase fluide et l'extérieur $\mathcal{A}_{\beta e}$ qui servent notamment à définir les conditions aux limites ;
- les caractéristiques du fluide telles que sa viscosité μ_β , sa vitesse \vec{v}_β et sa pression p_β .

1.1.3.2 Moyenne des équations de Stokes

La prise de moyenne volumique consiste à étudier une moyenne sur un volume représentatif (V.E.R.) des équations auxquelles elle est appliquée. Cette prise de moyenne s'applique dans un premier temps aux équations de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \rangle = 0 \\ \langle \nabla^2 \vec{v} \rangle - \langle \vec{\nabla} p \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (1.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \rangle = 0 \\ \langle \nabla^2 \vec{v} \rangle - \langle \vec{\nabla} p \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (1.14b)$$

$$C.L. : \left\{ \begin{array}{ll} \vec{v} = 0 & \text{sur l'interface } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \\ \vec{v} = f(\vec{r}, t) & \text{sur l'interface } \mathcal{A}_{\beta e} \end{array} \right. \quad (1.14c)$$

$$(1.14d)$$

L'opérateur de moyenne qui est utilisé dans 1.14 est détaillé ci-après.

Complément 1 (Opérateurs de moyenne) :

L'opérateur de moyenne volumique de phase calcule la valeur moyenne d'une grandeur dans le volume complet du V.E.R.. Il est défini pour des grandeurs scalaires et vectorielles :

$$\langle p_\beta \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}_\beta} p_\beta dV \quad (1.15a)$$

$$\langle \vec{v}_\beta \rangle = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}_\beta} \vec{v}_\beta dV \quad (1.15b)$$

Un autre opérateur est défini : la moyenne intrinsèque de phase. Il s'agit de la valeur moyenne d'une grandeur dans le volume de l'une des phases du V.E.R.. Dans le cas qui nous intéresse, ce sera la phase fluide β . Il est défini pour des grandeurs scalaires et vectorielles :

$$\langle p_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{\mathcal{V}_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} p_\beta dV \quad (1.16a)$$

$$\langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = \frac{1}{\mathcal{V}_\beta} \int_{\mathcal{V}_\beta} \vec{v}_\beta dV \quad (1.16b)$$

Ces deux opérateurs de moyenne sont naturellement reliés par les fractions volumiques :

$$\langle p_\beta \rangle^\beta = \epsilon_\beta \langle p_\beta \rangle \quad (1.17a)$$

$$\langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = \epsilon_\beta \langle \vec{v}_\beta \rangle \quad (1.17b)$$

Afin de développer les équations 1.14, il est nécessaire d'utiliser un théorème qui est une généralisation tridimensionnelle de la règle de Leibniz permettant d'échanger intégrale et dérivation dans un même terme.

Complément 2 (Théorème de moyenne spatiale) :

Il s'exprime pour des quantités scalaires Ψ ou vectorielles $\vec{\Psi}$ de la manière suivante :

$$\langle \vec{\nabla} \Psi \rangle = \vec{\nabla} \langle \Psi \rangle + \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \vec{n}_{\beta\sigma} \Psi dA \quad (1.18a)$$

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{\Psi} \rangle + \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \vec{n}_{\beta\sigma} \cdot \vec{\Psi} dA \quad (1.18b)$$

où $\vec{n}_{\beta\sigma}$ est un vecteur normal à la surface $\mathcal{A}_{\beta\sigma}$, dirigé de la phase β vers la phase σ .

La démonstration de ce théorème pourra être trouvée dans différentes publications, dont [Whitaker 99]. Ce théorème a été démontré simultanément par plusieurs équipes de recherche travaillant sur des aspects différents des écoulements et publié la même année dans [Marle 67], [Anderson 67], [Slattery 67] et [Whitaker 67]. Ces références peuvent servir à comprendre l'origine de ce théorème, indispensable pour cette étude et pour développer des raisonnements similaires pour d'autres phénomènes de transfert.

En appliquant ce théorème à l'équation 1.14a, on obtient l'écriture suivante :

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta \rangle = \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle + \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \vec{n}_{\beta\sigma} \cdot \vec{v}_\beta dA = 0 \quad (1.19)$$

La condition d'adhérence à l'interface entre le fluide et le solide impose que la vitesse \vec{v}_β est nulle sur cette interface. L'intégrale de l'équation 1.19 est donc nulle.

Ensuite, la relation 1.17 entre les opérateurs de moyenne volumique et intrinsèque de phase est utilisé pour continuer le développement :

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle = 0 \quad (1.20a)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_\beta \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta) = 0 \quad (1.20b)$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_\beta \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta + \vec{\nabla} \epsilon_\beta \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (1.20c)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = -\epsilon_\beta^{-1} \vec{\nabla} \epsilon_\beta \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta \quad (1.20d)$$

En soustrayant l'équation 1.20d de sa forme avant la prise de moyenne (voir par exemple l'équation 1.12a), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta - \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = \epsilon_\beta^{-1} \vec{\nabla} \epsilon_\beta \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta \quad (1.21)$$

Afin de simplifier cette dernière équation, il est nécessaire d'introduire la décomposition de Gray, qui a été présentée dans [Gray 75].

Complément 3 (Décomposition de Gray) :

La décomposition de Gray propose de décomposer la pression et la vitesse locales en une somme de deux termes, ce qui est comparable à séparer les échelles :

$$p_\beta = \langle p_\beta \rangle^\beta + \tilde{p}_\beta \quad (1.22a)$$

$$\vec{v}_\beta = \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta + \vec{\tilde{v}}_\beta \quad (1.22b)$$

Le premier terme est la valeur moyenne intrinsèque de phase. Localement, à l'échelle du V.E.R., les variations subies par ces valeurs moyennes sont négligeables.

Le second terme représente la perturbation produite par la présence du solide. Au contraire de la valeur moyenne, cette perturbation varie fortement dans le V.E.R..

La somme de ces deux termes est exactement la valeur ponctuelle de la pression et de la vitesse.

En utilisant la décomposition 1.22b dans l'équation 1.21, la perturbation s'exprime :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta = \epsilon_\beta^{-1} \vec{\nabla} \epsilon_\beta \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta \quad (1.23)$$

Pour simplifier cette écriture, une étude des ordres de grandeurs des différents termes doit être menée. Le terme de gauche se développe à l'aide de la décomposition de Gray :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta}_{=0} - \vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = -\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = O\left(\frac{\langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta}{l_\beta}\right) \quad (1.24)$$

Le terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta$ est nul, c'est la forme initiale de l'une des équations de Stokes.

En considérant que la porosité est constante à l'échelle du V.E.R. (ce qui est une autre condition nécessaire pour que le volume considéré soit un V.E.R.), on écrit le terme de droite de la manière suivante :

$$\epsilon_\beta^{-1} \vec{\nabla} \epsilon_\beta \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = O\left(\epsilon_\beta^{-1} \frac{\epsilon_\beta}{L} \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta\right) = O\left(\frac{\langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta}{L}\right) \quad (1.25)$$

Les ordres de grandeurs établis en 1.24 et 1.25 permettent de simplifier l'écriture de l'équation 1.23, en tenant compte de la relation d'ordre existant entre les longueurs caractéristiques (voir l'équation 1.13) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta = 0 \quad (1.26)$$

Cette dernière écriture est la forme finale de la prise de moyenne volumique appliquée à la première équation de Stokes.

Une étude similaire de la seconde équation de Stokes doit être menée afin d'obtenir une fonction des perturbations des pressions et vitesses. En raison de la forme de l'équation, l'étude est plus longue, plus complexe et met en jeu d'autres longueurs caractéristiques que le V.E.R. doit vérifier. Les détails ne sont pas donnés ici, seulement le résultat :

$$\mu_\beta \nabla^2 \vec{v}_\beta - \vec{\nabla} \tilde{p}_\beta - \frac{1}{\mathcal{V}_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \vec{n}_{\beta\sigma} \cdot \left(\mu_\beta \vec{\nabla} \vec{v}_\beta - \vec{I} \tilde{p}_\beta \right) dA = 0 \quad (1.27)$$

Les conditions aux limites sont elles aussi transformées afin de s'appliquer aux variables présentes dans les équations. La décomposition de Gray 1.22b est appliquée à la condition d'adhérence, qui devient simplement :

$$\vec{v}_\beta = - \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \text{ (C.L.1)} \quad (1.28)$$

La seconde condition aux limites est pour le moment simplement reformulée pour spécifier la valeur de \vec{v}_β à l'interface entre la phase fluide et l'extérieur du V.E.R. :

$$\vec{v}_\beta = \overrightarrow{g(\vec{r}, t)} \quad \text{sur } \mathcal{A}_{\beta e} \text{ (C.L.2)} \quad (1.29)$$

L'application de l'opérateur de moyenne volumique sur le système 1.10 a permis de le transformer pour l'exprimer en fonction des quantités de perturbation engendrée sur l'écoulement moyen par la présence du solide :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta = 0 & (1.30a) \\ \mu_\beta \nabla^2 \vec{v}_\beta - \vec{\nabla} \tilde{p}_\beta - \frac{1}{\mathcal{V}_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \vec{n}_{\beta\sigma} \cdot \left(\mu_\beta \vec{\nabla} \vec{v}_\beta - \vec{I} \tilde{p}_\beta \right) dA = 0 & (1.30b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\beta = - \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta & \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \text{ (C.L.1)} & (1.30c) \\ \vec{v}_\beta = \overrightarrow{g(\vec{r}, t)} & \text{sur } \mathcal{A}_{\beta e} \text{ (C.L.2)} & (1.30d) \end{cases}$$

1.1.3.3 Fermeture du système

La fermeture du problème doit permettre d'exprimer ce système en fonction de variables dont le domaine de définition est le V.E.R.. En particulier, les conditions aux limites doivent être étudiées minutieusement puisqu'aucune des deux ne répond à cette contrainte.

Condition d'adhérence Telle qu'elle est présentée dans l'équation 1.30c, la condition d'adhérence a subi une transformation conséquente. En effet, au lieu d'indiquer que la vitesse est nulle à l'interface entre le fluide et la phase solide, elle stipule maintenant qu'il existe une *source* de perturbation à cette interface. La présence de cette source est primordiale. Elle est, pour le moment, une grandeur inconnue, mais il est évident que cette source n'est pas nulle. Si elle l'était, la solution au problème serait triviale : vitesse nulle et pression constante dans tout le volume. Cette source agit comme un générateur de perturbation de la vitesse et sa présence dans le problème est essentielle.

Condition aux limites du V.E.R. La seconde condition aux limites 1.30d est plus problématique. Elle implique en effet de connaître les valeurs de la perturbation de la vitesse à l'extérieur du V.E.R., ce qui est évidemment impossible. Étant donné que le V.E.R. respecte les conditions énoncées à l'équation 1.13, il est pertinent de remarquer que les valeurs extérieures aux V.E.R. ne contraignent que de façon *négligeable* les valeurs de \vec{v}_β . Leur influence serait mesurable sur une distance de l'ordre de l_β à l'intérieur du V.E.R., ce qui est petit par rapport à la taille r_0 du V.E.R.. La condition aux limites est donc remplacée par la périodicité des inconnues du problème. La figure 1.3 illustre cette transformation.

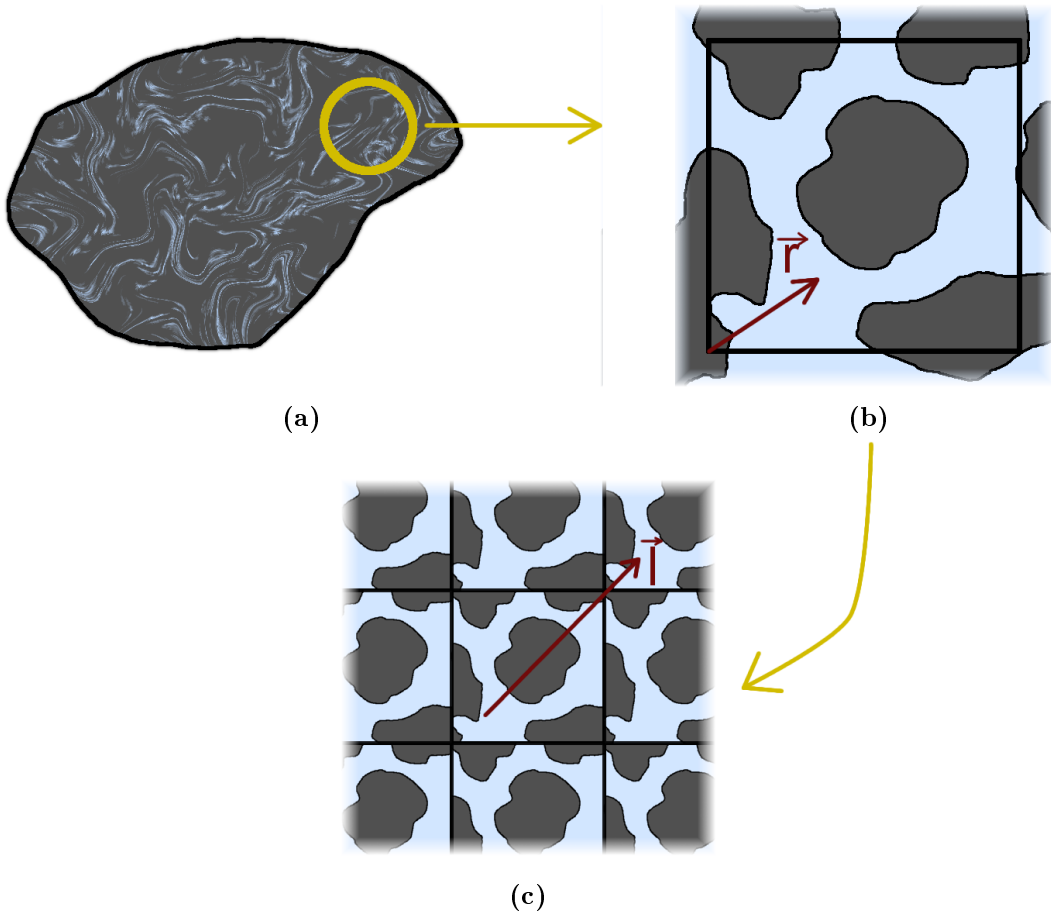


FIGURE 1.3 – (a) Milieu macroscopique que l'on souhaite étudier, duquel le V.E.R. (b) est extrait. Le V.E.R. est répété périodiquement dans l'espace afin de former (c) qui illustre ce principe. Les vecteurs \vec{r} permettent de situer un point dans un V.E.R., tandis que les vecteurs \vec{l} lient les points périodiquement identiques entre eux.

Cette *périodicité* de l'espace s'écrit dans le système d'équation :

$$\tilde{p}_\beta(\vec{r} + \vec{l}) = \tilde{p}_\beta(\vec{r}) \text{ et } \vec{v}_\beta(\vec{r} + \vec{l}) = \vec{v}_\beta(\vec{r}) \quad (1.31)$$

où \vec{r} est un vecteur indiquant une position à l'intérieur du V.E.R. et \vec{l} est un vecteur qui permet de retrouver une copie périodique spatiale du point désigné par

\vec{r} . La figure 1.3 montre un exemple de ces vecteurs. Cette condition de périodicité n'a de sens que si la source apparue dans la première condition aux limites est elle aussi périodique ou constante. Étant donné que la variation spatiale de $\langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta$ peut être considéré comme négligeable dans le V.E.R., la source est considérée constante dans ce volume.

Contrainte supplémentaire Le système tel qu'il apparaît maintenant n'est pas complètement défini. Il est essentiel d'ajouter une troisième contrainte sur la grandeur $\langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta$, de la forme :

$$\langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (\text{moyenne}) \quad (1.32)$$

Il s'agit donc d'imposer que la perturbation soit à moyenne nulle. Il n'est mathématiquement pas nécessaire d'imposer une contrainte similaire sur la grandeur \tilde{p}_β .

En tenant compte de ces éléments, le système à résoudre s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\beta = 0 & (1.33a) \\ \mu_\beta \nabla^2 \vec{v}_\beta - \vec{\nabla} \tilde{p}_\beta - \frac{1}{\mathcal{V}_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \vec{n}_{\beta\sigma} \cdot \left(\mu_\beta \vec{\nabla} \vec{v}_\beta - \vec{I} \tilde{p}_\beta \right) dA = 0 & (1.33b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\beta = -\langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta & \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \text{ (C.L.1)} & (1.33c) \\ \tilde{p}_\beta(\vec{r} + \vec{l}) = \tilde{p}_\beta(\vec{r}) \text{ et } \vec{v}_\beta(\vec{r} + \vec{l}) = \vec{v}_\beta(\vec{r}) & \text{(C.L.2)} & (1.33d) \\ \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = 0 & \text{(moyenne)} & (1.33e) \end{cases}$$

1.1.3.4 Solutions du système

Pour résoudre ce problème, les solutions suivantes sont proposées :

$$\begin{cases} \vec{v}_\beta = \vec{B}_\beta \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta + \vec{\Psi}_\beta & (1.34a) \\ \tilde{p}_\beta = \mu_\beta \vec{b}_\beta \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \xi_\beta & (1.34b) \end{cases}$$

En les injectant dans l'équation 1.33, une nouvelle expression du problème est formulée. Le vecteur $\vec{\Psi}_\beta$ doit être nul pour que la condition d'adhérence soit vérifiée. La fonction scalaire $\mu_\beta \xi_\beta$ est une constante arbitraire dont la valeur réelle importe peu puisqu'elle n'apparaît que dans un gradient, barrière qu'elle ne franchira pas. C'est une constante qui disparaît naturellement de l'écriture.

Intéressons-nous particulièrement à l'équation 1.33b :

$$\mu_\beta \nabla^2 \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta - \vec{\nabla} \langle p_\beta \rangle^\beta + \mu_\beta \left[\frac{1}{\mathcal{V}_\beta} \int_{\mathcal{A}_{\beta\sigma}} \vec{n}_{\beta\sigma} \cdot \left(\vec{\nabla} \vec{B}_\beta - \vec{I} b_\beta \right) dA \right] \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (1.35)$$

Le terme entre crochet est assimilé à $-\epsilon_\beta \vec{k}_\beta^{-1}$ où \vec{k}_β est le tenseur de perméabilité. Cette assimilation est justifiée par la suite de l'analyse :

$$\mu_\beta \nabla^2 \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta - \vec{\nabla} \langle p_\beta \rangle^\beta - \mu_\beta \epsilon_\beta \vec{k}_\beta^{-1} \cdot \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = 0 \quad (1.36)$$

$$\Leftrightarrow \mu_\beta \vec{k}_\beta^{-1} \cdot \epsilon_\beta \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta = \mu_\beta \nabla^2 \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta - \vec{\nabla} \langle p_\beta \rangle^\beta \quad (1.37)$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{v}_\beta \rangle = \vec{k}_\beta \nabla^2 \langle \vec{v}_\beta \rangle^\beta - \frac{\vec{k}_\beta}{\mu_\beta} \vec{\nabla} \langle p_\beta \rangle^\beta \quad (1.38)$$

Le premier terme à droite de la dernière équation est de l'ordre de $O\left(\frac{\epsilon_\beta^{-1} \langle \vec{v}_\beta \rangle}{k_\beta L^2}\right)$ ce qui le rend négligeable devant $\langle \vec{v}_\beta \rangle$. L'équation 1.36 se résume donc à :

$$\langle \vec{v}_\beta \rangle = -\frac{\vec{k}_\beta}{\mu_\beta} \vec{\nabla} \langle p_\beta \rangle^\beta \quad (1.39)$$

Cette dernière forme n'est pas sans rappeler la loi de Darcy (voir l'équation 1.4). Les développements qui ont été exposés permettent donc, sans faire d'hypothèse *a priori* sur son existence, de faire apparaître la loi de Darcy, écrite dans [Darcy 56].

Afin de pouvoir calculer ce tenseur de perméabilité, il faut tout de même résoudre le problème tensoriel suivant, obtenu en combinant les équations 1.33 et 1.34 :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_\beta = 0 & (1.40a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} b_\beta - \nabla^2 \vec{B}_\beta - \epsilon_\beta \vec{k}_\beta^{-1} = 0 & (1.40b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B}_\beta = -\vec{I} & \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \text{ (C.L.1)} & (1.40c) \\ b_\beta(\vec{r} + \vec{l}) = b_\beta(\vec{r}) \text{ et } \vec{B}_\beta(\vec{r} + \vec{l}) = \vec{B}_\beta(\vec{r}) & \text{(C.L.2)} & (1.40d) \\ \langle \vec{B}_\beta \rangle^\beta = 0 & \text{moyenne} & (1.40e) \end{cases}$$

De manière à présenter ce problème sous une forme plus facile à exploiter d'un point de vue numérique, deux nouveaux champs sont définis comme suit :

$$\vec{d}_\beta = \epsilon_\beta^{-1} b_\beta \cdot \vec{k}_\beta \quad \vec{D}_\beta = \epsilon_\beta^{-1} \left(\vec{B}_\beta + \vec{I} \right) \cdot \vec{k}_\beta \quad (1.41)$$

Ces nouvelles variables permettent de formuler le problème sous la forme que nous allons utiliser par la suite :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_\beta = 0 & (1.42a) \\ \nabla^2 \vec{D}_\beta - \vec{\nabla} d_\beta = -\vec{I} & (1.42b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{D}_\beta = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \text{ (C.L.1)(1.42c)} \\ d_\beta(\vec{r} + \vec{l}) = d_\beta(\vec{r}) \text{ et } \vec{D}_\beta(\vec{r} + \vec{l}) = \vec{D}_\beta(\vec{r}) & \text{(C.L.2) (1.42d)} \\ \langle \vec{D}_\beta \rangle^\beta = \epsilon_\beta^{-1} \vec{k}_\beta & \text{moyenne (1.42e)} \end{cases}$$

Le système 1.42 peut être décomposé en trois problèmes vectoriels de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_k = 0 & (1.43a) \\ \nabla^2 \vec{D}_k - \vec{\nabla} d_k = -\vec{I}_k & (1.43b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{D}_k = 0 & \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \text{ (C.L.1)(1.43c)} \\ d_k(\vec{r} + \vec{l}) = d_k(\vec{r}) \text{ et } \vec{D}_k(\vec{r} + \vec{l}) = \vec{D}_k(\vec{r}) & \text{périodicité (1.43d)} \\ \langle \vec{D}_k \rangle = \vec{k}_k & \text{moyenne (1.43e)} \end{cases}$$

Dans cette écriture, les notations indicées par k représentent :

- d_k est la k^e composante du vecteur représentant la perturbation de la pression \vec{d}_β ;
- \vec{D}_k est la k^e ligne du tenseur représentant la perturbation de la vitesse \vec{D}_β ;
- \vec{I}_k est la k^e ligne du tenseur identité \vec{I} , donc un vecteur unité ;
- \vec{k}_k est la k^e ligne du tenseur de perméabilité \vec{k}_β .

Le second membre de la seconde équation représente une force dirigée dans l'une des trois directions principales de l'espace et qui est imposée en chaque point du fluide. C'est cette force qui génère le mouvement du fluide et qui mène à une solution différente de la solution triviale (vitesse nulle et pression constante dans tout le volume). Les notations indicées par β ont été abandonnées afin d'alléger les équations.

Le système vectoriel 1.43 ressemble fortement au problème de Stokes 1.12. Les différences se situent au niveau du second membre de la seconde équation et des conditions aux limites.

1.1.4 Calcul numérique de l'écoulement de Stokes et du problème de fermeture

Les systèmes d'équations tels que 1.43 ne peuvent pas être représentés sous la forme d'une matrice qu'il faudrait inverser. Il existe de nombreuses manières de résoudre ce type de systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles. Divers ouvrages tels que [Farlow 92] ou [Glowinski 03] proposent une étude approfondie des méthodes existantes.

De son côté, l'ICMCB a développé un code de calcul résolvant les équations du type que nous avons exposées. L'application peut en être la résolution des équations de Stokes pour déterminer un écoulement local, ou la résolution du problème de fermeture afin d'obtenir le tenseur de perméabilité. Ce programme a été développé par Dominique Bernard en langage Fortran et il est maintenu à jour du fait de son utilisation dans ses travaux de recherche. Beaucoup d'éléments concernant ce code de calcul peuvent être trouvés dans [Anguy 93]. Il a servi dans le cadre de ces travaux, d'une part pour comparer les résultats obtenus avec les réseaux à ceux d'un calcul numérique direct, d'autre part pour réaliser des calculs locaux dans des volumes limités en taille.

Il s'agit d'un algorithme itératif, dont quelques éléments vont être donnés dans ce qui suit. Il nécessite l'existence d'une image numérique du matériau étudié. Les dimensions du milieu sur lequel le système d'équation est résolu influent fortement sur les temps de calcul et l'occupation mémoire.

1.1.4.1 Compressibilité artificielle

Afin de pouvoir résoudre itérativement les systèmes qui ont été exposés précédemment, [Chorin 67] a introduit la notion de compressibilité artificielle, qui permet de modifier les équations pour qu'une dérivée en temps apparaisse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} = 0 & (1.44a) \\ \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} + \nabla^2 \vec{\Psi} - \vec{\nabla} \psi = A & (1.44b) \end{cases}$$

où $\vec{\Psi}$ représente \vec{v} ou \vec{D}_k , ψ représente p ou d_k et A vaut soit 0, soit $-\vec{I}_k$.

Le temps qui apparaît n'a pas de signification physique mais il permet de construire une démarche itérative. Il s'agit d'une approche pseudo-transitoire : les solutions du problème de départ sont considérées comme étant atteintes quand les dérivées en temps tendent vers 0. La preuve que cette convergence est suffisante pour que les solutions trouvées soient celles du problème de fermeture peut être trouvées dans [Fortin 71].

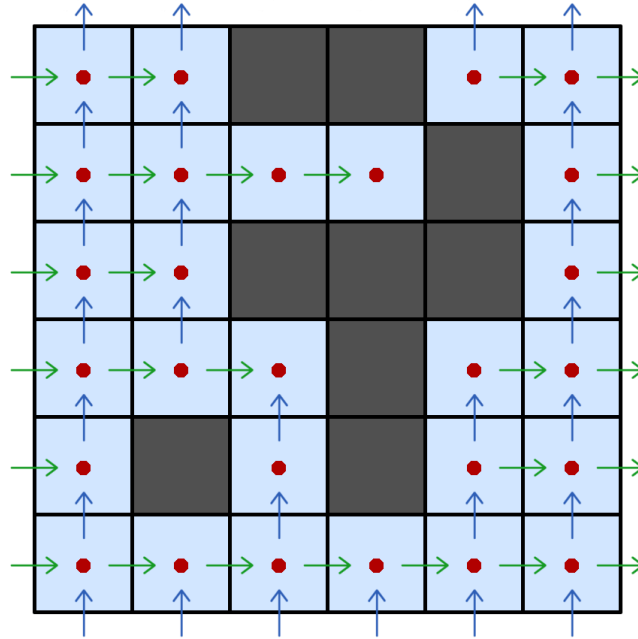


FIGURE 1.4 – Les variables correspondant à ψ (cercles rouges) sont situées au centre des pixels. Les composantes des vecteurs $\vec{\Psi}$ sont décomposées sur les arêtes à l'interface entre les pixels (flèches vertes et bleues). Les maillages carrés sur lesquels les inconnues ψ et les composantes de $\vec{\Psi}$ apparaissent sont par conséquent décalés d'un demi pixel. Il est à noter que dans ce schéma, seules les inconnues réelles ont été représentées. Il n'y a pas d'inconnue à proprement parler aux interfaces entre la phase fluide et la phase solide, puisque la composante correspondante de $\vec{\Psi}$ est alors nulle. De même, il n'y a pas d'inconnue liée au champ scalaire ψ à l'intérieur du solide, puisqu'il n'est pas défini à cet endroit.

1.1.4.2 Discrétisation des équations

La méthode numérique employée est celle des volumes finis : les équations sont intégrées sur un volume de contrôle déterminé et ce sont ces intégrales qui sont discrétisées. Cependant, la discrétisation des équations est faite sur des maillages décalés, qui ont été décrits dans [Harlow 65]. Le terme de *maillages décalés* signifie que les variables continues correspondant à $\vec{\Psi}$ et ψ ne sont pas positionnées sur les mêmes grilles. Les composantes de $\vec{\Psi}$ sont situées sur les interfaces entre les pixels de l'image, tandis que les inconnues liées à ψ sont positionnées au centre des pixels. La figure 1.4 illustre le positionnement sur un exemple élémentaire en 2D seulement, qui a été repris de [Anguy 93].

1.1.4.3 Inconvénient majeur de la résolution numérique directe

Le but ici n'est pas de faire une liste exhaustive et détaillée des avantages et inconvénients des méthodes numériques employées pour résoudre les systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles tels que celui qui est exposé depuis le début

de ce chapitre. En revanche, il est aisé de mettre en évidence l'un des aspects sur lesquels toutes les personnes qui s'intéressent à ce domaine semblent s'accorder.

Les temps de calcul et l'espace mémoire nécessaires croissent exponentiellement. Plus l'image sur laquelle le calcul est réalisé est grande (en nombre de pixels) et précise (en terme de taille de pixel), plus les inconnues sont nombreuses, ce qui implique des calculs longs et coûteux. Il s'agit là d'un problème épineux, étant donné que les procédés d'imagerie sont en plein essor et proposent des résolutions de plus en plus fines et des tailles d'images de plus en plus grandes. Il existe des moyens d'accélérer les calculs, en les parallélisant ou en utilisant des méthodes stochastiques mais la puissance informatique ne grandit pas assez vite pour combler les écarts qui se creusent et il n'est pas rare de calculer une propriété comme la perméabilité sur une portion d'image seulement.

Ce problème freine considérablement les études systématiques de perméabilité des matériaux. Proposer d'autres approches est une solution pertinente, et les approches de type réseaux de pores sont l'une d'entre elles.

1.2 Modélisation des milieux poreux sous forme de réseau

Jusqu'à la parution de [Fatt 56a], les modèles les plus évolués représentant les milieux poreux étaient constitués de faisceaux de tubes capillaires de sections éventuellement différentes. Une revue complète de ces modèles peut être trouvée dans [Bear 72]. De part la simplicité de leur structure, la plupart des propriétés d'un écoulement dans un tel système pouvait être déterminée analytiquement. Ils présentaient cependant un inconvénient majeur dans le sens où ils étaient parfaitement anisotropes, les tubes étant tous orientés dans la même direction. Par ailleurs, le fait que ces tubes étaient isolés les uns des autres ne permettait pas de reproduire le comportement des milieux poreux. Les différents degrés de complexité des tubes capillaires ainsi utilisés, avec une section variable le long du tube ou bien même une certaine tortuosité, n'étaient pas suffisants.

1.2.1 Modèles de réseaux structurés

Les travaux de [Fatt 56a] font apparaître le premier véritable réseau servant à modéliser un milieu poreux. L'auteur propose une forme simple : des tubes cylindriques sont positionnés sur une grille régulière à maille triangulaire, carrée ou hexagonale. Les nœuds de la grille ne possèdent pas de caractéristiques propres. Les jonctions sont droites et leurs sections sont réparties aléatoirement. La complexité de ce modèle est suffisante pour permettre de reproduire des courbes de perméabilité relative dans [Fatt 56b, Fatt 56c]. L'auteur utilise pour cela le fait que les tubes cylindriques se comportent comme des *conductances* dans un circuit électrique, qu'il peut dé-

terminer par la loi de Poiseuille. Il obtient un système linéaire suffisamment simple pour être résolu à la main, les calculateurs informatiques n'étant à cette époque pas aussi répandus que maintenant.

D'autres modèles du même genre apparaissent ensuite, avec des géométries simples mais variées. Les jonctions ont parfois des sections triangulaires ou carrées. Le principal intérêt des réseaux structurés réside dans le fait que l'estimation de la propriété locale est simple. Les géométries sont élémentaires parce que le comportement des fluides monophasiques ou polyphasiques dans ces géométries est plus facile à concevoir.

La publication de [Chatzis 77] apparaît comme un tournant dans la modélisation des milieux poreux. Plusieurs points sont abordés dans cet article, qui marquent une avancée décisive pour les modèles de réseau. Tout d'abord, les auteurs mettent définitivement en évidence le fait que les modèles 2D utilisés jusqu'alors ne peuvent pas reproduire fidèlement la complexité d'un milieu poreux réel, 3D par essence. Pour cela, ils montrent notamment que la connectivité du réseau est une donnée primordiale. Par exemple, ils exposent une corrélation entre le nombre de coordination² et les propriétés de transport des milieux poreux. Plus important encore, ils montrent la nécessité de donner aux intersections des tubes des propriétés. Les nœuds de la grille régulière possèdent pour eux des caractéristiques propres, notamment un volume. Les jonctions, quant à elles, n'ont plus de volume, seulement une forme qui régit les échanges entre les pores.

Cette idée est formalisée dans [Koplik 82] et [Chandler 82], lesquels proposent un modèle encore une fois basé sur une grille régulière. Cependant, la grille est tri-dimensionnelle, à maille tétraédrique ou cubique. Les nœuds supportent des sphères, interconnectées par des tubes cylindriques. Plus tard, [Toledo 90] propose un modèle encore plus complexe. Les sphères sont remplacées par des cubes ; les connexions entre ces pores sont constituées de deux sections de cônes alignées sur le même axe et qui s'intersectent près de leur sommet. Leurs bases reposent sur les faces de deux cubes adjacents sur la grille. Cette idée est reprise dans [Acharya 04], avec une approche paramétrable pour faire correspondre le modèle à un matériau quelconque. Ces paramètres réglables sont la distance moyenne entre les pores, les rayons des étranglements, le nombre de coordination, les distributions de tailles de pores, etc. La principale difficulté pour calibrer ce modèle est que la distance entre les pores du modèle est constante, ce qui est difficilement concevable dans un matériau réel.

Les modèles structurés évoluent en fonction des observations faites sur des matériaux réels. Ainsi, les micro-modèles bi-dimensionnels permettent de montrer que les phases mouillantes se déplacent préférentiellement dans les angles des pores, tandis que les autres phases se trouvent plutôt au centre des pores ([Lenormand 83], [Kumar Gunda 11]). Cela impacte fortement les modèles utilisés pour ces écoule-

²Le nombre de coordination correspond au nombre de tubes en contact là où ils se connectent les uns aux autres.

ments. En effet, les modèles avec jonctions cylindriques semblent peu adaptés pour les écoulements polyphasiques. Les modèles évoluent donc pour s'adapter aux observations et leur diversité augmente, personne ne parvenant à trouver un modèle commun permettant de représenter plusieurs types de matériaux ou plusieurs phénomènes de transport. [Blunt 01] propose une revue complète des modèles de réseau et de leur application en écoulements polyphasiques.

Des réseaux structurés sont développés dans [Raouf 09], qui propose un réseau constitué de cubes pouvant être connectés à un nombre variable de leurs 26 voisins. Ce réseau régulier permet de construire des modèles de matériaux granulaires, mais ne semble pas avoir de résultats convaincants pour les matériaux plus complexes.

1.2.2 Modèles de réseaux non structurés

Les limitations des modèles de réseaux structurés sont connues : ils ne représentent pas correctement la connectivité de l'espace poral, et les formes géométriques simples ne sont pas représentatives de la complexité de la géométrie réelle.

Pour tenter de remédier au premier point, certains auteurs proposent de générer directement des maillages aléatoires. Les nœuds sont positionnés au hasard puis connectés par une tessellation de Voronoï ([Blunt 90]). Les nœuds sont ensuite remplacés par des sphères, les arêtes des triangles ou tétraèdres par des cylindres. Malgré cette évolution, la connectivité des réseaux non structurés reste en moyenne limitée à six voisins ou moins ([Fenwick 98], [Dixit 98]). [Jerauld 90] génère un réseau composé de sphères et de tubes cylindriques basé sur une tessellation de Voronoï. Les distributions des tailles de pores et d'étranglements sont ajustées de manière à contrôler la porosité du milieu. Le nombre de coordination est également variable, pouvant aller de 3 à 12, avec une valeur moyenne de 6. L'efficacité de ces réseaux dans la modélisation des phénomènes de transport est équivalente aux réseaux structurés.

Les auteurs de [Bryant 92, Bryant 93a, Bryant 93b] sont les premiers à parvenir à construire un réseau calqué sur la géométrie réelle d'un matériau poreux. Ils utilisent pour cela un empilement aléatoire de sphères ; connaissant la position des sphères de l'empilement, ils peuvent construire un réseau représentant l'espace poral. Un maillage tétraédrique avec pour sommets les centres des sphères est dessiné. Les pores sont donc contenus dans les tétraèdres et ont des formes plus complexes que dans les modèles structurés. D'autres études ont par la suite reproduit de tels réseaux à partir d'empilements idéaux de billes : [Thompson 97] ou [Hilpert 01]. Étant basés sur des empilements parfaits, ces modèles fonctionnent correctement pour des milieux poreux granulaires, mais se montrent peu efficaces pour les roches plus complexes.

Ces techniques de maillage élaborées se développent en même temps qu'une autre voie de modélisation des milieux poreux : les matériaux modèles. Ces matériaux modèles sont construits de telle sorte qu'ils reproduisent un certain nombre de statistiques des matériaux réels. La porosité et des fonctions de corrélation à deux points sont des critères pertinents ([Bakke 97] et [Biswal 99]). Les connais-

sances en diagenèse sont aussi injectées dans ces modèles. Les mesures permettant de connaître les statistiques à reproduire sont faites sur les milieux poreux réels. Des séries de micrographies sont utilisées pour reconstruire la structure 3D des milieux poreux (voir par exemple [Quiblier 84], [MacDonald 86a], [MacDonald 86b], [Vogel 98] et [Vogel 01]). L'observation de ces reconstructions permet de mieux observer les distributions de taille des pores et des étranglements entre les pores et de mieux appréhender la complexité de l'espace poral. [Ioannidis 00] utilise une technique de scan multi-orientation développée dans [Zhao 93]. Le même échantillon est observé sous différents angles, ce qui permet de recouper des informations visibles sous différents points de vue : distribution des tailles de pores, d'étranglements et des nombres de coordination.

Le couple matériaux modèles / observations bi-dimensionnelles permet de construire des images 3D qui s'approchent de la micro-géométrie réelle des milieux poreux. Les techniques d'imagerie 3D vont permettre d'accéder directement à cette information.

1.2.3 Modèles de réseaux basés sur des images 3D

Les procédés d'imagerie évoluent et permettent d'accéder à la micro-géométrie interne des matériaux sans les détruire, contrairement aux séries de micrographies. Les réseaux non structurés essaient d'en tirer partie en s'appuyant désormais directement sur la géométrie réelle du matériau. Les pores ne sont pas positionnés *a priori* mais sont définis à partir la géométrie du milieu poreux. Dans [Lindquist 96], les auteurs proposent d'utiliser l'axe médian ou squelette pour détecter les pores, en utilisant une définition simple : l'axe médian d'un objet est le squelette de l'objet positionné le long de son centre géométrique.

Avant d'aller plus loin dans l'analyse des différentes approches possibles, il est important de préciser les définitions suivantes, qui sont celles utilisées dans ce document.

Définition 1 (axe médian) :

*L'axe médian d'un objet X est l'ensemble des centres des boules maximales dans X . Une boule $B(r, x)$ est l'ensemble des points situés à une distance inférieure ou égale à r du point x . Une boule est dite **dans** X si tous les points qu'elle contient appartiennent à X . Une boule est **maximale** dans X si elle est dans X et il n'existe aucune autre boule dans X qui l'inclut totalement.*

Définition 2 (squelette) :

*Le **squelette** d'un objet X est un sous-ensemble de X homotope à X de dimension strictement inférieure. Deux ensembles X et Y sont **homotopes** s'il existe*

une transformation continue permettant de passer de l'un à l'autre.

Les notions de squelette et d'axe médian sont très souvent utilisées de manière confuse et interchangeable : [Thovert 93], [Lindquist 96], [Liang 00], [Lindquist 00], [Shin 02], [Al-Raoush 03], [Al-Raoush 05], [Prodanovic 07]. Cela peut s'expliquer par le fait que dans un espace continu, l'axe médian est un squelette de l'objet comme le montre [Lieutier 03]. Ceci est en général faux dans un espace discret, étant donné que l'axe médian ne garantit pas la conservation de la topologie ([Couprie 07]).

L'axe médian est centré dans l'objet et permet de le reconstruire complètement. [Remy 02, Remy 03, Remy 04] décrivent des processus aboutissant à l'axe médian exact pour les distances de chamfrein et euclidienne. Il existe par ailleurs des méthodes avancées de filtrage permettant de ne conserver que les centres de boules maximales ayant au moins deux contacts avec le complémentaire ([Couprie 07]). En revanche, l'axe médian n'est en général ni de dimension inférieure ni homotope à l'objet de départ.

Un squelette garantit de conserver la topologie de l'espace poral, mais pas son axe médian. Il est possible, par construction, de contraindre un squelette à contenir l'axe médian, mais il n'est alors plus forcément de dimension inférieure à l'objet de départ. Il n'existe par ailleurs pas un squelette unique pour un objet, mais une infinité.

Ces deux notions sont utilisées dans les modèles de réseau afin d'obtenir une représentation simplifiée de l'espace poral. Les méthodes utilisées pour calculer l'axe médian ou le squelette peuvent être séparées en quatre groupes :

- les diagrammes de Voronoï ([Delerue 99]) utilisés pour construire une sorte de *squelette* de l'espace poral. Des points sont échantillonnés sur l'interface entre l'espace poral et le solide. Ils servent de départ pour la construction d'un diagramme de Voronoï dans l'espace poral. Les éléments de ce diagramme situés à l'intérieur de l'espace poral forment son squelette. L'une des principales difficultés de cette approche est que l'objet construit n'est pas forcément connecté. Ce n'est ni un squelette, ni l'axe médian. Des traitements spécifiques sont appliqués pour reconnecter les éléments, mais ils ne fonctionnent pas correctement en 3D. Les pores sont positionnés sur les centres des plus grandes boules maximales non partiellement recouvertes par une plus grande boule maximale. Un algorithme de croissance de région permet ensuite de donner aux pores un volume, et aux canaux les reliant un rayon hydraulique équivalent.
- les ensembles de boules maximales ([Silin 06] et [Al-Kharusi 07]). Le principe est de construire l'axe médian de l'espace poral. Les boules maximales associées à cet axe médian sont ensuite classifiées en groupes qui correspondent à des critères de taille et de proximité. Ces groupes définissent les pores et les canaux. Un pore est finalement représenté par une seule sphère dont le volume est celui

de l'union des boules maximales du groupe dont le pore est issu. Un canal entre deux pores est un cylindre dont le volume est égal à celui de l'union des boules maximales du groupe dont le canal est issu. La longueur du canal est égale à la plus grande distance existant entre deux boules maximales du groupe dont il est issu.

- les approches morphologiques ([Lindquist 96], [Atwood 04], [Thompson 06]) de type « feu de prairie ». En partant des bords de l'objet, des couches successives de pixels sont supprimées itérativement, jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'avancer. L'objet ainsi constitué devrait pouvoir contenir des surfaces, mais il n'en est jamais question dans les différents documents que nous avons pu nous procurer. Les intersections entre trois lignes ou plus sont marquées comme centres de pores. Ces pores sont fusionnés si leurs centres sont situés à une distance inférieure à un critère imposé. Les canaux sont représentés par des tubes dont la section est carrée, triangulaire ou cylindrique.
- les approches topologiques, qui construisent le squelette en suivant les critères de la topologie numérique. Une référence commune est [Pudney 98], qui décrit une méthode de construction d'un squelette contraint par une carte de distance. La carte de distance associe à chaque point de l'objet sa distance au complémentaire. En supprimant itérativement les points les plus proches du complémentaire, on arrive à obtenir un squelette centré dans l'objet. Cette approche est utilisée dans [Youssef 07] pour estimer la perméabilité absolue. De même que précédemment, les intersections de branches sont révélatrices de la présence d'un pore. Les plus petits étranglements le long des branches reliant ces points sont ensuite marqués comme lieu de séparation des pores. Une ligne de partage des eaux est utilisée pour partitionner l'espace poral et le volume des éléments ainsi construit est attribué aux pores. Les étranglements sont déjà connus, seule leur longueur est calculée pour compléter le réseau.

Plusieurs méthodes de construction de modèles de réseaux ont été comparées dans [Al-Raoush 03] et [Bhattad 11], par exemple. Les conclusions sont proches : la représentativité et la validité des résultats obtenus avec les modèles de réseau dépendent assez peu de la méthode utilisée pour simplifier l'espace poral. En effet, cette étape modifie essentiellement le nombre de nœuds du réseau et la taille des canaux les reliant, si l'on prend soin de conserver la topologie. L'ensemble de paramètres retenus pour caractériser les pores et les canaux (volumes, longueurs, formes géométriques, rayons, etc.) influe bien d'avantage sur les propriétés déduites des réseaux.

Le point commun de tous ces modèles est leur construction : des sphères connectées par des canaux simples. La conductance équivalente d'un tube cylindrique est très simple à estimer par la loi de Poiseuille. De même, le comportement des fluides polyphasiques peut aussi être assez facilement analysé dans de telles géométries. Cependant, supposer que la géométrie irrégulière des matériaux poreux peut être simplifiée à ce point est une hypothèse très forte. C'est pourquoi des modèles tentent

de circonvenir à cette simplification en estimant les conductances sans faire une approximation aussi importante.

[Prodanovic 07] puis [Sholokhova 09] proposent par exemple une approche basée sur des calculs numériques. L'espace poral est simplifié en utilisant une approche morphologique. Les pores sont positionnés de la manière décrite pour les approches morphologiques. Les pores sont séparés en repérant les plus petits étranglements le long des branches. Pour estimer la conductance entre deux pores, une simulation locale d'un écoulement est utilisée. La géométrie de calcul est réduite à une petite portion autour de la surface de contact (six pixels de distance de chaque côté de la séparation). Un algorithme de type Lattice-Boltzmann est utilisé sur cette géométrie très simple en imposant un gradient de pression perpendiculaire à la surface de séparation. Le calcul est très rapide et permet d'obtenir de meilleures corrélations entre les résultats calculés et les valeurs expérimentales de perméabilité absolue sur des échantillons de grès de Fontainebleau. Cependant, en raison des conditions du calcul, un grand nombre de séparations n'est pas pris en compte : certains calculs locaux se terminent avec des valeurs négatives, d'autres sont considérés comme non significatifs parce que la surface de la séparation est trop petite.

1.2.4 Positionnement des travaux présentés

Dans cet ensemble de modèles de réseaux existants, le travail exposé dans ce document trouve sa place parmi ceux qui s'appuient sur une image 3D. Un partitionnement de l'espace est envisagé, en s'appuyant sur les travaux décrits dans [Plougouven 09, Plougouven 11]. Celui-ci recherche dans l'espace poral des sous-volumes, appelés *pores*, qui correspondent à une définition finalement assez complexe à énoncer précisément. Les interconnexions entre les pores apparaissent naturellement dans le partitionnement : deux pores sont en contact s'ils partagent une surface de contact. Un réseau de nœuds et d'arêtes montre les interconnexions entre les pores en positionnant un nœud par pore et une arête pour joindre deux pores adjacents. Ce graphe n'a pas besoin qu'on attribue des caractéristiques (telles que des volumes ou des sections) à ses éléments constitutifs. Les pores sont définies par le partitionnement et ont par conséquent des géométries quelconques. Toute l'information géométrique disponible dans l'image 3D est conservée et exploitée au maximum lors du calcul des conductances entre les pores. Elles sont déterminées par une approche originale utilisant un calcul numérique local résolvant directement les équations de Stokes dans la géométrie de quelques pores.

La définition mathématique d'un partitionnement comporte trois conditions à remplir pour qu'une famille de pores forme un partitionnement de l'espace poral. Ces conditions se résument comme suit :

Définition 3 (partitionnement) :

L'espace poral complet est noté Ω . Une famille de N pores $H = (H_1, \dots, H_N)$, $H_i \subset \Omega$, doit vérifier les conditions suivantes :

$$\textcircled{1} (\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket) H_i \neq \emptyset$$

$$\textcircled{2} \Omega = \bigcup_{i=1}^N H_i$$

$$\textcircled{3} (\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket) (\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket) i \neq j \Rightarrow H_i \cap H_j = \emptyset$$

Ces conditions s'expliquent en termes plus simples :

- la condition $\textcircled{1}$ signifie qu'aucun pore ne doit être de volume nul ;
- la condition $\textcircled{2}$ implique que l'ensemble des pores identifiés recouvre totalement l'espace poral. Il ne doit pas rester de zone de l'espace poral non étiquetée comme appartenant à un pore ;
- la condition $\textcircled{3}$ impose que deux pores ne doivent jamais se chevaucher, c'est-à-dire occuper une zone commune de l'espace poral. Le partitionnement doit générer des pores identifiés.

Cette définition mathématique convient parfaitement à la conception intuitive d'un partitionnement de l'espace poral : un ensemble de pores clairement identifiable et qui recouvre totalement l'espace poral. La définition de ce qu'est un pore est curieusement difficile à formuler. Ce problème est abordé en détail dans le chapitre suivant.

L'ensemble des travaux présentés dans ce manuscrit a été mené avec le souci de justifier les différentes étapes et paramètres, de mettre en évidence les problèmes et, le cas échéant, de proposer des solutions viables. L'objectif ici est de suivre pas à pas le cheminement permettant de passer d'une image 3D d'un milieu poreux à un réseau puis l'utilisation de ce réseau pour le calcul de la perméabilité. Il n'est pas fait mention de performance, de temps de calcul ou d'occupation mémoire. Cela fait sans aucun doute partie des suites à donner à cette thèse mais n'est pas du tout abordé dans ce document.

Réseau basé sur un partitionnement de l'espace poral

Intuitivement, l'espace poral se découpe naturellement en pores. Ces pores sont bornés par le solide d'une part et par des séparations érigées aux endroits où le rayon hydraulique est minimal. Ceci traduit presque mot à mot la définition donnée dans [Dullien 92] :

A “pore” is defined as a portion of pore space bounded by solid surface and by planes erected where the hydraulic radius of the pore space exhibits minima, analogously as a room is defined by its walls and the doors opening to it.

Cette définition sert de point de départ à ce chapitre. Il vise à décrire le cheminement menant d'une image 3D d'un matériau poreux au partitionnement de ce milieu en pores. Le but de partitionner l'espace poral est double :

- le partitionnement permet d'identifier les pores et définit leur géométrie interne. Celle-ci est indispensable pour estimer des paramètres locaux, afin de calculer une propriété macroscopique comme la perméabilité.
- les connexions existant entre les pores constituent le réseau sur lequel des équations discrètes sont résolues. Ces équations sont présentées dans le chapitre 3 ; la construction du réseau en lui-même est cependant traitée dans ce chapitre.

Le travail de thèse [Plougonven 09] est largement repris dans ce chapitre. L'auteur s'est intéressé précisément aux différentes étapes du processus de partitionnement. À chaque fois, plusieurs approches ont été confrontées et comparées, pour aboutir à une suite d'opérations comportant peu de paramètres *ad hoc*. Quelques-uns des problèmes pertinents soulevés dans [Plougonven 09] trouvent un écho particulier dans ce chapitre.

Les différentes étapes sont donc succinctement reprises ici, le but n'étant bien évidemment pas de plagier [Plougonven 09]. Certains éléments sont plus détaillés,

afin de préciser les apports des présents travaux sur ceux de [Plougonven 09]. Il est à noter que les deux thèses ont commencé en même temps, dans le même laboratoire, sous la direction de la même personne et sur des thématiques très proches. La reprise de quelques éléments n'est par conséquent pas illogique.

Le partitionnement de l'espace poral est composé de deux étapes : la localisation des pores et leur délimitation. La localisation des pores définit dans un premier temps des points particuliers de l'espace poral où l'on s'attend, selon la définition proposée ci-dessus, à trouver un pore. L'outil principal est un squelette de l'espace poral, sur lequel plusieurs opérations se succèdent. Le squelette doit être composé de branches et d'intersections de branches ; les intersections sont proposées pour situer les pores, tandis que les branches représentent les connexions entre les pores. Il est dans un premier temps envisagé d'utiliser le squelette comme support pour la résolution des équations menant à la perméabilité.

Cette localisation reste cependant ponctuelle et la seconde étape utilise ces points de départ pour donner une extension volumique aux pores, dans la limite de l'espace poral. Il ressort de [Plougonven 09] que la ligne de partage des eaux semble être la meilleure approche. Il est cependant nécessaire de procéder à certains prétraitements pour ne pas tomber dans des cas pathologiques.

Une fois les pores complètement délimités, il reste à construire un réseau représentant leurs interconnexions. La proposition faite dans [Plougonven 09] d'utiliser le squelette en le modifiant est écartée pour plusieurs raisons et une autre est proposée.

2.1 Localisation des pores

Le positionnement des pores dans l'espace poral est une première étape complexe. Il s'agit, partant d'un volume 3D complet, de décider à quels endroits les pores se trouvent. Dans cette section, le matériau présenté par la figure 2.1 est utilisé pour présenter les différentes étapes. Il s'agit d'un empilement synthétique généré à l'aide d'un logiciel informatique. Il est constitué de boules pleines qui sont en limite de contact. Le but est bien évidemment de parvenir à faire correspondre les pores estimés par la méthode présentée avec les boules de l'image.

Il est classique d'utiliser comme première étape une représentation simplifiée de l'espace poral appelée un *squelette*. Le squelette présente l'intérêt de conserver la topologie de l'objet : la connectivité de l'espace poral est conservée, ainsi que les éventuelles cavités et tunnels. Par ailleurs, des techniques existent pour positionner le squelette *le plus au centre possible* du milieu poreux. Les branches qui le composent sont ainsi représentatives de la géométrie de l'objet.

Les intersections des branches contribuent à une première localisation des pores. Les branches joignent les pores entre eux, mettant en évidence la connectivité du réseau poreux. Cette première hypothèse est utilisée, mais la sensibilité du squelette au bruit produit de nombreux artefacts. La méthode décrite dans [Plougonven 09] est utilisée afin de les éliminer. Il reste cependant un nombre beaucoup trop important

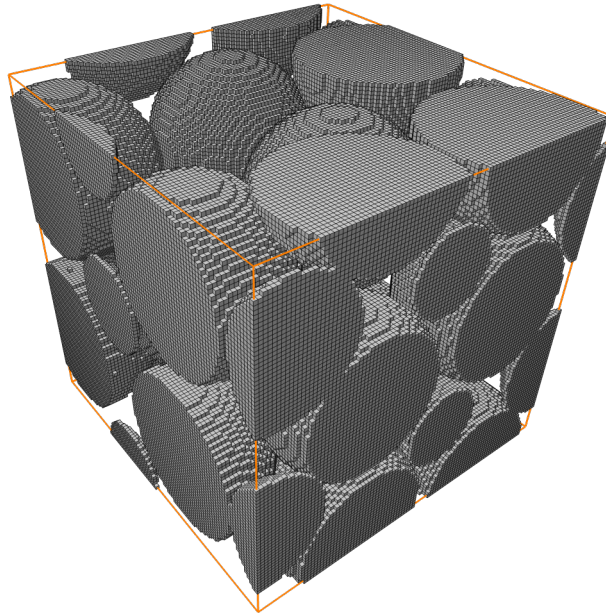


FIGURE 2.1 – *Le milieu que l'on cherche à partitionner est constitué de sphères affleurantes de diamètres identiques. Il s'agit d'un milieu synthétique, généré dans un but de validation.*

de centres de pores. Il devient nécessaire de les fusionner et des méthodologies sont proposées pour contrôler cette réduction du nombre de marqueurs de pores.

2.1.1 Squelettisation de l'espace poral

La notion de squelette a été introduite par [Blum 61]. La définition 2 précise ce qu'est cet objet. Cette définition simple met en évidence plusieurs points :

- *un squelette* n'est pas unique ; d'après cette définition, il en existe une infinité dans un espace continu. La manière de le construire influe forcément sur sa forme finale.
- *le squelette est homotope à l'objet de départ*. L'homotopie est une propriété permettant d'assurer que l'objet et le squelette ont, entre autres, le même nombre de composantes connexes, de cavités et de tunnels.
- *le squelette est au plus de dimension directement inférieure à la dimension de l'objet*. Ainsi, un squelette d'un objet 2D ne peut être composé que d'éléments de courbes (1D) et de points (0D). Un squelette d'un objet 3D peut comporter des éléments de surface (2D).

Le problème potentiel de la présence de surface dans le squelette peut être écarté en prenant une simple précaution. Il faut s'assurer qu'aucune particule solide n'est isolée dans l'espace poral. L'étape de segmentation doit impérativement éviter ces configurations. Dans le cas contraire, le squelette aurait des surfaces fermées entourant ces particules flottantes, et la suite des traitements serait rendue impossible. Les surfaces ne sont pas aberrantes en elles-mêmes ; le problème vient du fait que nous ne

savons pas comment les considérer. Elles ne permettent ni de localiser précisément un pore, ni de connaître la véritable connectivité des pores entre eux. La présence de surface dans le squelette nécessiterait un traitement particulier, qui n'apparaît pas évident. Nous supposons donc à partir de maintenant que le squelette de l'espace poral est de dimension $d = 1$.

L'homotopie reste dans tous les cas assurée. Cependant, rien n'indique dans cette définition que le squelette soit unique. Il existe en réalité une infinité de squelettes distincts pour un objet donné. C'est pourquoi nous forçons le squelette à répondre à un certain nombre de critères en plus de l'homotopie. Il doit notamment être centré par rapport à l'espace poral, c'est-à-dire passer à proximité du centre de l'espace poral. Ceci est assuré par l'utilisation d'une transformée ou carte de distance. Des détails concernant ces traitements sont abordés dans ce qui suit.

Il existe une multitude de manières d'obtenir le squelette d'un objet. La notion de *point simple* est la plus intuitive d'entre elles : un point simple est généralement défini comme étant un point dont la suppression ne modifie ni la topologie de l'objet, ni celle de son complémentaire. Une caractérisation telle que la définition 11 (cf. annexe A p.115) permet de déterminer localement la simplicité d'un point. Sur la figure 2.2(a), l'objet forme une boucle 6-connective, qui enferme une composante 26-connective de son complémentaire. Les pixels gris clairs avec un cadre plus épais de la figure 2.2(b) sont tous individuellement simples, selon la définition 11. La suppression individuelle de l'un de ces points ne modifie pas la topologie de l'objet.

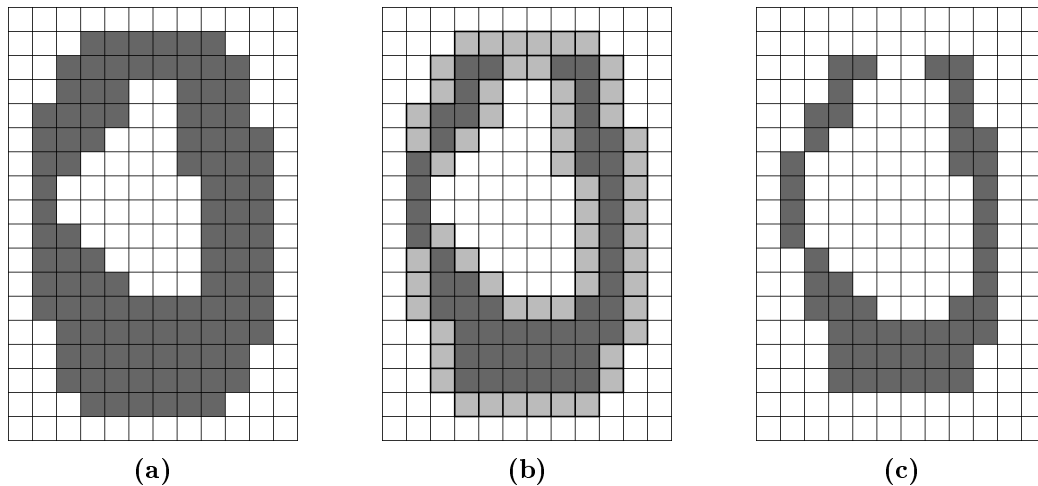


FIGURE 2.2 – (a) L'objet est en gris foncé, le complémentaire en blanc. (b) Les points simples de l'objet sont mis en évidence (gris clair et cadre épais). (c) Tous les points simples sont supprimés simultanément : la topologie de l'objet et du complémentaire est modifiée.

Le fait que la caractérisation des points simples soit locale permet de mettre en place des algorithmes performants du point de vue du temps de calcul. Il reste malgré tout obligatoire de supprimer de tels points de manière itérative, car la suppression simultanée de plusieurs points simples ne garantit aucunement la conservation de la topologie. Par exemple, si tous les points simples de la figure 2.2(b) sont supprimés en

même temps, la figure 2.2(c) est obtenue. L'objet initial est coupé en trois morceaux qui ne sont pas 6-connectés entre eux, et le complémentaire est par contre maintenant connecté. La topologie de l'objet et de son complémentaire a changé.

Des moyens ont été développés pour supprimer simultanément plusieurs points, en se basant sur des contraintes plus fortes que la simplicité d'un pixel. [Ronse 88] a proposé la notion d'ensembles minimaux non-simples afin de pouvoir supprimer des points simples en parallèle en 2D. Des implémentations de tels principes sont données dans [Ronse 88] et [Hall 92]. Par la suite, la même idée a été reprise en 3D, par [Ma 94] ou [Xie 03] par exemple. Une autre approche a également été développée, les points P-simples, qui permet également de supprimer plusieurs points simples en garantissant la conservation de la topologie (dans [Bertrand 95]).

Les recherches actuelles en analyse d'image s'orientent vers les complexes cubiques. Dans ce cadre mathématique, une image n'est plus uniquement constituée de pixels, mais doit être considérée comme un ensemble d'éléments de dimensions différentes : des cubes, des carrés, des segments et des points. Ces éléments sont liés entre eux selon un certain nombre de règles. Détailler ces règles ne fait pas partie des objectifs de ce document et le lecteur courageux trouvera une mine de renseignements et références dans [Bertrand 09]. L'auteur présente ce nouveau cadre mathématique en détail et démontre qu'il permet de généraliser toutes les méthodes de squelettisation évoquées ci-dessus.

Néanmoins, l'objectif de l'étude présente est de parvenir à calculer un squelette d'un objet de manière contrôlée. C'est pourquoi nous nous sommes limités à un algorithme séquentiel basé sur les points simples. En effet, s'il existe de nombreuses publications portant sur des algorithmes de squelettisation parallèle, certains auteurs ont proposé des algorithmes incorrects, même en 2D. [Couprie 06] en a étudié quinze et a montré que cinq ne donnaient pas dans tous les cas un résultat topologiquement identique à l'objet de départ. Étant donné que la squelettisation n'est qu'un outil pour ce travail de thèse, il était difficilement envisageable de passer beaucoup de temps à implémenter des algorithmes qui risquaient de poser problème.

2.1.1.1 Algorithme de squelettisation

Bien que le principe général permettant d'obtenir le squelette soit décidé, il faut tout de même imposer des contraintes qui vont influencer la manière dont le squelette va se construire. En effet, il est facile de se rendre compte que, dans le cadre d'une suppression itérative de points simples, le choix de l'ordre de suppression des pixels est primordial. C'est cet ordre qui va définir la forme générale du squelette par rapport à l'objet d'origine.

Dans notre cas, nous souhaitons avoir un squelette représentatif de la géométrie de l'espace poral. Il serait intéressant que le squelette se rapproche le plus possible du centre de l'espace poral. Ce problème a déjà été résolu par l'utilisation d'une carte de distance. Une carte de distance peut être définie très simplement : il s'agit d'une application qui associe à chaque pixel x de l'objet X la plus petite distance

séparant x de \bar{X} . La distance euclidienne est la meilleure candidate pour ce type d'application. Des implémentations très efficaces permettent d'ailleurs de l'utiliser facilement (voir par exemple [Saito 94] et [Meijster 00]).

La lecture de [Pudney 98] permet d'obtenir des détails concernant l'algorithme de suppression itérative de points simples guidée par la carte de distance. Il s'agit simplement de supprimer prioritairement les plus petites valeurs de la carte de distance, qui correspondent aux pixels les plus proches du complémentaire.

Quelle que soit l'application visée, nous avons choisi d'utiliser un *squelette ultime*, c'est-à-dire dans lequel il ne reste plus de point simple. Il est courant d'avoir à faire à des *squelettes curvilignes* dans lequel il subsiste des points simples. Ils forment des branches qui ne sont connectées qu'à une seule de leurs extrémités. Ce type de branche provient souvent du principal inconvénient du squelette : sa sensibilité au bruit. Il existe des techniques de filtrage qui permettent de ne conserver que des branches significatives, c'est-à-dire qui ne sont pas liées au bruit. Par exemple, [Couprie 07] présente les fonctions bissectrices discrètes. Elles permettent de filtrer les branches du squelette en fonction d'un critère précis. Ce critère mesure l'angle maximal formé par les segments joignant un point x du squelette et les points du complémentaire les plus proches de x . L'idée étant que si cet angle est trop faible, alors x n'est pas significatif.

Cependant, dans le cas qui nous intéresse, ce type de branche, une fois filtré, correspondrait idéalement à des pores non débouchants, c'est-à-dire qui ne sont connectés qu'à un seul autre pore. De tels pores ne participent pas à l'écoulement. Le pore étant fermé partout ailleurs, le flux entrant est nul. Il est donc inutile de les prendre en compte individuellement. L'information qu'ils contiennent est conservée dans un pore de volume plus important.

2.1.2 Suppression des artefacts de discrétisation

L'un des principaux inconvénients connus de la squelettisation est sa sensibilité au bruit. La modification d'un seul pixel de l'image peut avoir des répercussions désastreuses, notamment lorsque cette modification fait apparaître des particules solides flottantes ; une surface fermée autour de cette particule apparaît alors dans le squelette, le rendant inutilisable pour notre application. Il existe différentes sources possibles à ce bruit.

Si l'image est issue de l'imagerie, il survient généralement dès la phase d'acquisition. Les dispositifs sont soumis à du bruit thermique, impulsionnel, des dérives des capteurs au cours du temps, etc. Tout ceci génère des imprécisions qui sont parfois impossibles à corriger parfaitement. Elles se retrouvent ensuite lors de la manipulation des images, et la binarisation les fait apparaître de manière plus évidente encore.

Si l'image est synthétique, il existe d'autres problèmes. Par exemple, les modèles sont très souvent continus alors que les images sont discrètes. Lors de la discrétisa-

tion, il faut parfois faire des choix pour déterminer si un pixel doit être à l'intérieur de l'objet ou non.

Dans les deux cas, des artefacts apparaissent. Ils ont en commun d'être d'une taille limitée à quelques pixels à chaque fois, mais la squelettisation y est très sensible. Il est par conséquent nécessaire de traiter les images binaires avant de les squelettiser. De nombreuses méthodes ont été proposées afin de s'en prémunir, avec des réussites mitigées. [Plougonven 09, Plougonven 11] en fait une revue assez complète et propose un nouveau procédé permettant de supprimer les configurations de pixels qui génèrent des artefacts de manière sélective.

Parmi les filtres classiques qui essaient de réduire le niveau de bruit dans les images binaires se trouvent :

- le filtre médian, qui consiste à remplacer la valeur d'un pixel par la valeur médiane d'un certain nombre de ses voisins ;
- le filtre majoritaire [Shin 02], qui n'est autre qu'un cas particulier du filtre médian, où seuls les pixels du complémentaire sont traités ;
- les ouvertures et fermetures morphologiques, qui utilisent des éléments structurants généralement sphériques pour tenter de lisser les contours des objets.

Toutes ces méthodes modifient un très grand nombre de pixels de l'image et ne garantissent pas que toutes les configurations qui génèrent les artefacts de squelettisation seront corrigées.

Partant de ce constat, [Plougonven 09, Plougonven 11] a proposé une détection des sources d'artefacts basée sur des critères topologiques. Il a distingué trois sortes d'artefacts, classés en fonction de leur dimensionnalité. La dimension maximale du squelette d'un objet 3D étant 2, il existe donc trois types d'artefacts :

0D ce sont des pixels de l'espace poral qui sont enfermés dans le solide. Ils génèrent, dans le squelette, des points isolés. Ces éléments de l'espace poral ne participent pas à l'écoulement, puisqu'ils sont complètement fermés. La solution la plus efficace consiste simplement à détecter les composantes connexes isolées de l'espace poral et à les supprimer ;

1D ce sont les configurations les plus difficiles à appréhender, tout en étant celles qui génèrent les artefacts les plus gênants. Elles génèrent des branches supplémentaires dans le squelette. Par exemple, dans le cas de deux sphères en contact proche, comme l'illustre la figure 2.3(a), la squelettisation directe donne lieu à de multiples branches reliant les deux billes (figure 2.3(b)). Ce n'est pas ce que nous attendons ; soit les sphères sont en contact, et une seule branche doit apparaître, soit elles ne le sont pas et elles ne doivent pas être jointes. La détection se fait en recherchant les jonctions en bleu sur la figure 2.3(c). Les pixels en bleus sont supprimés ; les deux sphères sont séparées, étant donné que tous leurs contacts existant ne se font que par des sommets de pixels. Il existe d'autres types d'artefact 1D, qui sont présentés en détail dans [Plougonven 11].

2D ce sont des pixels du solide qui sont enfermés dans l'espace poral. Dans le

squelette, ils prennent la forme de surfaces fermées. Ce sont généralement des ensembles de quelques pixels, qui sont engendrés par le bruit de l'image. La solution qui est adoptée est de les éliminer, en les réassignant à l'espace poral. Il faut cependant être vigilant pour que cela soit cohérent avec le type de matériau qui est étudié.

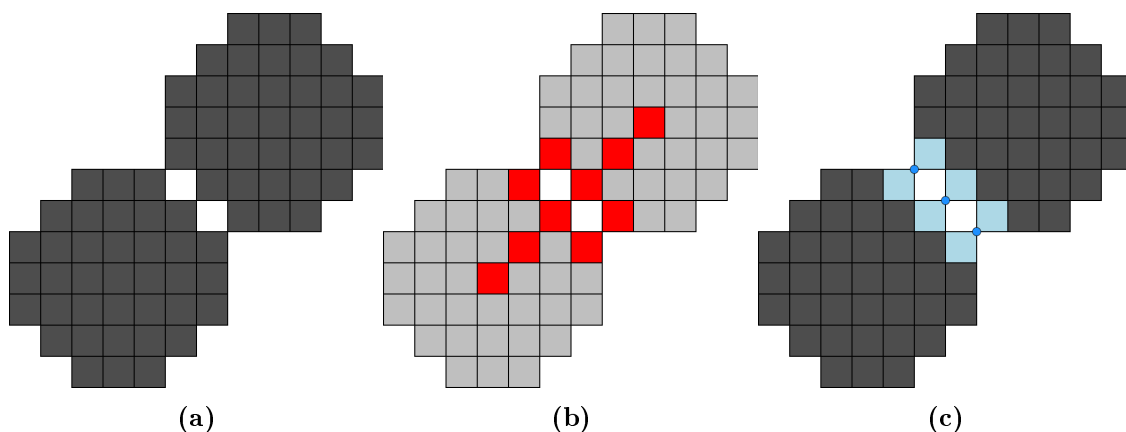


FIGURE 2.3 – (a) Deux sphères sont en limite de contact. (b) Le squelette (en rouge) n'est pas celui qui est attendu. Deux sphères en contact devrait générer une branche. Ici, plusieurs branches existent, du fait que la zone de contact n'est pas clairement définie. (c) Les pixels bleus ne se touchent que par un de leurs sommets. Ce type de configuration est facilement détecté, et les pixels concernés sont supprimés.

Ceci n'est qu'un exposé rapide de la méthode détaillée dans [Plougonven 09] et [Plougonven 11]. Il existe d'autres configurations qui créent des artefacts et qui ont leur parade. Des comparaisons ont été faites entre les différentes méthodes évoquées, et il apparaît que celle qui a été développée modifie beaucoup moins de pixels que les autres. Par ailleurs, elle supprime tous les problèmes qui apparaissent dans le squelette, puisqu'elle détecte directement les sources de ces problèmes. Tout son intérêt réside donc dans sa capacité à résoudre les problèmes sans modifier fortement les images.

La figure 2.4 illustre l'intérêt de cette approche sur un exemple synthétique d'empilement de billes, en comparant le squelette avec et sans application de ce filtrage.

2.1.3 Classification des points du squelette

Les deux étapes précédentes permettent d'obtenir un squelette utilisable pour la suite. L'image binaire de départ a été nettoyée des artefacts liés à sa binarisation avant le processus de squelettisation. Dans notre cas, le squelette ne devrait comporter que des courbes et des intersections de courbes ; les centres des pores se situent, dans une première approximation, à l'intersection des branches. Cependant, afin de rester dans un cadre général et aussi rigoureux que possible, une classification systématique des points du squelette est réalisée. Le fait qu'il ne reste que des courbes

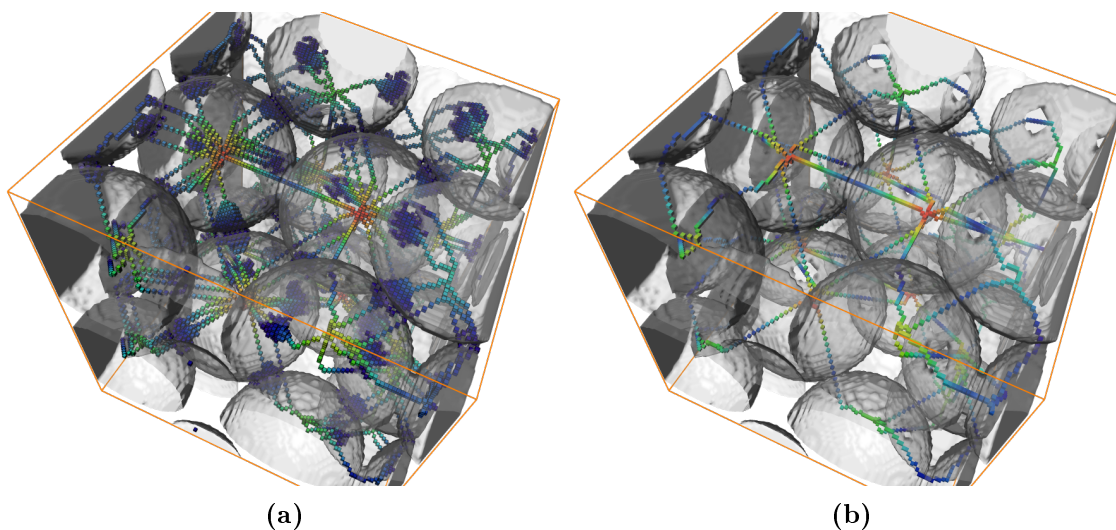


FIGURE 2.4 – (a) La squelettisation directe de l'empilement synthétique de billes de la figure 2.1 crée un squelette comportant des surfaces et des branches multiples reliant deux centres de sphères. Ce résultat n'est pas satisfaisant pour permettre la localisation des centres des sphères. (b) En utilisant la méthode de réparation topologique proposée dans [Plougouven 09] sur l'image de départ, puis en squelettisant le résultat, le squelette obtenu ne comporte que des branches et des intersections de branches.

et intersections de courbes peut donc être vérifié selon des critères topologiques, pas seulement selon des hypothèses de nettoyage de l'image binaire.

Il faut parvenir à étiqueter chacun des points du squelette. Pour cela, les travaux [Malandain 93] et [Bertrand 94] sont utilisés. Différents types de points sont distingués :

- les points *intérieurs* (entièrement entourés par d'autres points de l'objet) et *isolés* (aucun voisin dans l'objet) ;
- les points de *branche*, d'*intersection de branches* et d'*extrémités de branche* ;
- les points de *surface* et de *bord de surface* ;
- les points d'*intersection entre une branche et une surface* et d'*intersection entre deux surfaces*.

Pour cela, les auteurs de ces travaux proposent d'utiliser trois passes sur les points du squelette afin de réaliser une classification correcte. Deux nombres de connexité ($T_{26}(x, X)$ et $T_6(x, \bar{X})$) sont évalués, ainsi que le nombre de voisins de x dans X ($|\Gamma_{26}^*(x) \cap X|$). Ces nombres sont définis dans l'annexe A.

La première passe permet de classifier la plupart des points. La deuxième passe regarde seulement les points initialement marqués comme faisant partie d'une surface. Ceux-ci sont reclassifiés en point d'intersection de branches s'ils n'ont pas de voisins identifiés comme étant de surface également. Enfin, la troisième passe permet de corriger certaines configurations particulières. Les points d'intersection branche/surface et surface/surface ainsi que les points de bord de surface deviennent des points de surface s'ils n'ont pas de points semblables dans leur voisinage direct.

À l'issue de cette étape, l'ensemble des points du squelette est classifié ; seuls des points de branche et d'intersection de branches devraient apparaître. Dans le cas contraire, la suite des traitements ne sera pas possible. Cependant, les précautions prises jusqu'à maintenant (élimination des composantes flottantes du solide et de l'espace poral, nettoyage de l'image binaire des artefacts de binarisation) rendent la présence d'autres points très improbable.

Cette classification permet de proposer une première approximation pour le positionnement des pores. Le squelette a été utilisé parce qu'il représente de manière synthétique l'espace poral. Il est constitué de branches et d'intersections de branches, ce qui correspond à la conception intuitive d'un réseau poreux : des pores reliés entre eux par des étranglements. Les points classifiés comme intersection de branches sont donc utilisés comme marqueurs initiaux pour positionner les pores. Les branches qui les relient peuvent quant à elles représenter les interconnexions existant dans le réseau de pores.

Cette première représentation est cependant souvent trop riche. En effet, la squelettisation dans un espace discret tel qu'une image comporte souvent un très grand nombre de pores si l'on s'en tient à cette définition. Les intersections de branches ne sont pas localisées en un seul point mais étalées sur plusieurs. Il est par conséquent indispensable de fusionner certains pores initiaux, en suivant des critères à définir.

2.1.4 Fusion des pores

Plusieurs opérations se succèdent pour parvenir à un nombre raisonnable de pores. Par *raisonnable*, il est entendu *qui correspond à ce qu'on attend intuitivement* dans des cas simples, comme par exemple l'empilement de billes de la figure 2.1.

La première fusion est due à la squelettisation, qui produit souvent plusieurs points d'intersection de branches adjacents. La figure 2.5 représente un extrait de la figure 2.4(b) dans laquelle plusieurs branches s'intersectent. Plusieurs points du squelette sont étiquetés comme points d'intersection, alors qu'ils représentent tous le même pore. Ils sont donc fusionnés.

Le premier critère de fusion peut s'énoncer comme ceci : les points classifiés *intersection de branches* adjacents sont représentés par un seul et même identifiant.

Dans les différents processus de fusion de nœuds du squelette, l'information portée par le squelette n'est pas perdue. Chaque nœud correspond au départ à un point du squelette. La fusion de deux nœuds consiste simplement à leur attribuer le même identifiant. Cette opération permet de conserver l'information au niveau voxel de l'image dans le graphe.

2.1.4.1 Fusion par volume de recouvrement

La première opération de réduction du nombre de pores n'est pas suffisante. Sur l'exemple de la figure 2.6, qui est encore un extrait du squelette de la figure 2.4(b), le résultat de cette étape initiale mène au graphe 2.6(a). Sur cette figure, on constate

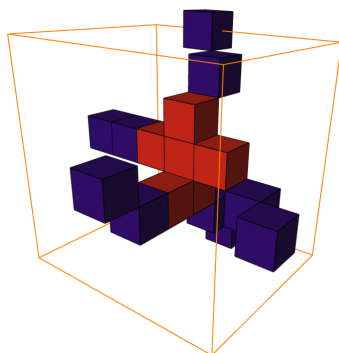


FIGURE 2.5 – Cette figure est un extrait de la figure 2.4(b). Plusieurs branches se croisent dans ce petit volume. Pourtant, tous les points rouges sont classifiés comme points d'intersection de branches, d'après les critères topologiques de [Malandain 93] et [Bertrand 94]. Or, tous ces points sont adjacents et représentent la même intersection, qui s'est agrandie du fait de la discrétisation. Ils sont donc tous fusionnés en un seul nœud du graphe.

que plusieurs nœuds du graphe existent au centre des sphères, ce qui n'est pas satisfaisant pour localiser correctement les billes.

Plusieurs critères de fusion présentés dans la littérature ont été analysés et comparés dans [Plougouven 09]. Celui qui semble avoir les meilleurs résultats repose sur les volumes de recouvrement des boules maximales centrées sur les nœuds existants.

Cela signifie que pour chacun des nœuds présents dans le graphe, la boule maximale est déterminée. Puis, le volume de recouvrement entre les boules maximales de chaque couple de nœuds est calculé (voir la figure 2.7). S'il dépasse un certain pourcentage du plus petit des deux pores, les nœuds sont fusionnés. Ce critère repose sur le fait que si deux pores partagent une *trop grande quantité* du même volume, alors ils représentent la même portion de l'espace poral. Toute la difficulté consiste à déterminer le seuil de volume partagé au-delà duquel les pores doivent être fusionnés. [Plougouven 09] propose de fixer ce rapport à 30%, après une étude expérimentale. Il faudra garder à l'esprit que cette valeur est arbitraire ; bien qu'elle donne des résultats satisfaisants *dans la plupart des cas*, elle dépend de la géométrie du milieu poreux et peut être modifiée en fonction de celui-ci.

Appliqué à notre exemple, ce critère de fusion permet d'obtenir la figure 2.6(b), pour laquelle le graphe place un identifiant par bille.

2.2 Délimitation des pores

La section précédente décrit la succession de traitements nécessaires pour obtenir une localisation correcte des pores qui constituent l'espace poral. Le résultat obtenu est un graphe issu du squelette, dans lequel chaque pore est identifié par un nœud et chaque contact entre deux pores par une branche. On pourrait se contenter de ce résultat, en associant à chaque nœud le volume de sa boule maximale. Il serait toutefois dommage de perdre toute l'information de la micro-géométrie locale. En

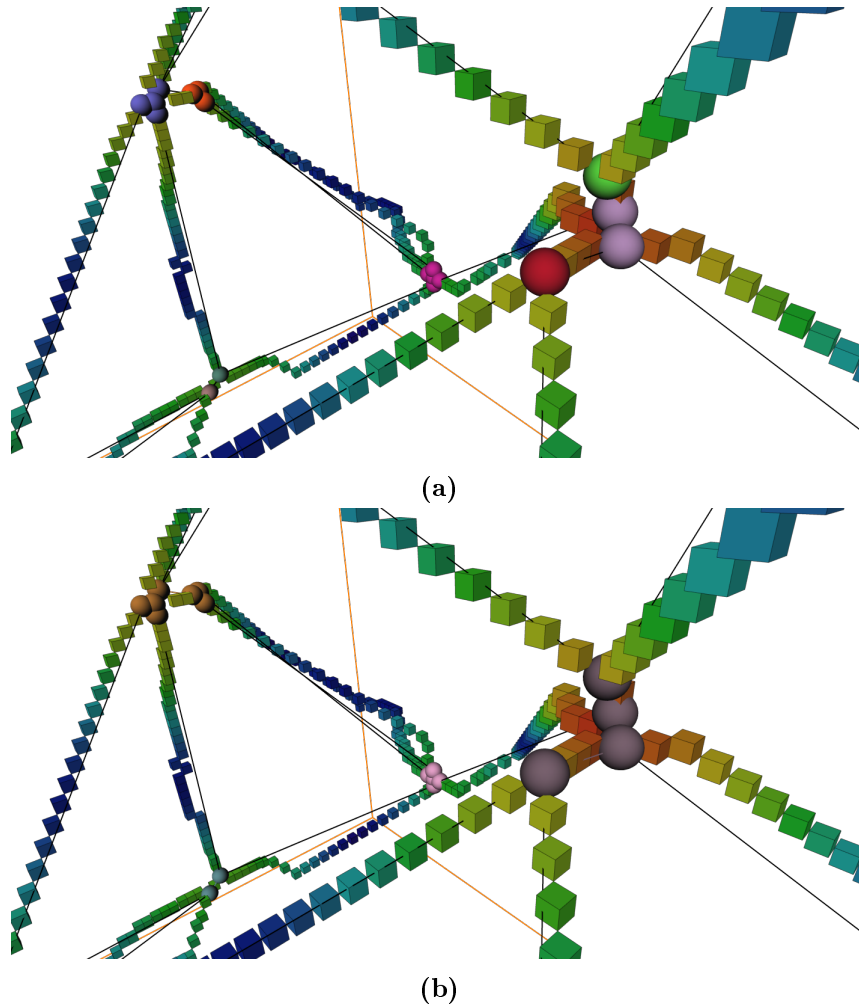


FIGURE 2.6 – Dans cette figure, un zoom a été fait sur une partie du squelette de la figure 2.4(b). Les points ont été classifiés selon l’approche topologique décrite. (a) Le premier critère de fusion des intersections de branches adjacentes a été appliqué. Les nœuds sont colorés en fonction de leur identifiant. Comme le montre la figure, il subsiste des nœuds porteurs d’identifiants différents situés aux centres des boules qui constituent le matériau. Or, il faut un seul marqueur par bille. (b) Le second critère de fusion, basé sur les volumes de recouvrement des boules maximales centrées aux nœuds, permet de fusionner les nœuds positionnés aux intersections des branches du squelette. Ils portent désormais le même identifiant, symbolisé par la même couleur d’affichage.

effet, la corrélation entre la micro-géométrie interne des milieux poreux et leurs propriétés macroscopiques est avérée. Si l’information retirée de l’échelle du pore est fortement tronquée, la valeur macroscopique estimée s’en ressentira. Un réseau de sphères interconnectées perd beaucoup d’informations et il serait frustrant de s’en contenter.

L’idée permettant de conserver un maximum d’informations liées à la micro-géométrie dans le réseau est d’attribuer à chaque nœud du graphe un sous-ensemble de l’espace poral. Pour cela, plusieurs approches sont possibles. Deux types principaux se dessinent :

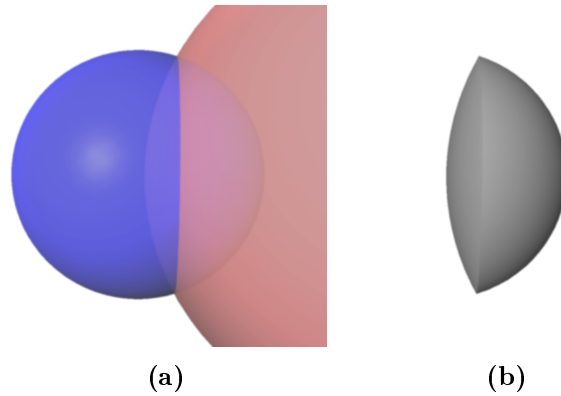


FIGURE 2.7 – (a) Deux boules maximales sont représentées en rouge et en bleu, chacune étant centrée sur un nœud du graphe. (b) Le volume de recouvrement entre ces deux boules est dessiné en gris. Si le volume gris est plus grand que 30% du volume de la boule bleue, alors le nœud associé à la boule bleue est fusionné avec le nœud associé à la boule rouge. Dans le cas contraire, les deux nœuds occupent un espace suffisamment distinct pour représenter deux pores différents.

- partant d'un marqueur pour chaque pore, les points de l'espace poral sont petit à petit attribués aux marqueurs, jusqu'à recouvrir complètement l'espace poral. De cette manière, les pores sont automatiquement séparés quand ils rentrent en contact.
- à l'inverse, le second type de méthode place directement les séparations existant entre les pores. Pour cela, un rayon hydraulique minimal est recherché le long des branches du squelette, afin de positionner un plan qui servira à fermer les pores.

La seconde approche présente des failles dès que la géométrie des pores devient complexe. [Plougonven 09] a implémenté et testé plusieurs méthodes de ce type et aucune n'a permis d'obtenir des résultats cohérents sur les exemples testés. Par conséquent, il semble que les approches faisant croître des marqueurs sont les plus à même de fournir un résultat. Parmi celles-ci, la ligne de partage des eaux semble être une bonne candidate, de par sa rigueur mathématique.

2.2.1 Ligne de partage des eaux

La ligne de partage des eaux fait partie des outils classiques de traitement d'images. Elle est utilisée pour séparer des objets, en se basant sur des informations contenues dans l'intensité des points de l'image. Elle est généralement présentée comme l'ensemble des lignes de crête qui sépare les bassins versants lors de la montée des eaux dans un relief topographique ([Lantuéjoul 78], [Vincent 91]).

Le relief est une image en niveau de gris dans laquelle l'intensité des points est considérée comme une altitude. La montée des eaux se fait par étapes successives, en partant de la plus petite altitude et en montant progressivement. Tout minimum régional est envahi dès que la hauteur de l'eau atteint son altitude, créant ainsi un

nouveau bassin versant. En revanche, la fusion de deux bassins versants est interdite : une *digue* ou *ligne de crête* est construite pour l'empêcher. La ligne de partage des eaux est constituée de l'ensemble des digues et lignes de crête nécessaires à éviter cette fusion des bassins versants.

L'algorithme qui a été utilisé et implémenté s'inspire de ce processus d'inondation. Il s'agit de la ligne de partage des eaux topologique. Au lieu de ne regarder que le voisinage des marqueurs pour décider si un point doit être rattaché au bassin versant, cet algorithme vérifie des critères de conservation de la topologie des coupes, menant à une ligne de partage des eaux qui conserve au mieux les contours significatifs de l'image. Il a été présenté dans [Bertrand 05] pour la première fois.

L'un des problèmes majeurs de la ligne de partage des eaux est qu'elle mène souvent à une sur-segmentation de l'image. À cause de la discrétisation, la carte topographique (souvent une carte de distance inversée) comporte généralement bien plus de minima locaux que d'objets à séparer. Il existe des techniques de filtrage des minima locaux permettant de réduire ces effets, mais ils ne donnent pas toujours de bons résultats et sont difficiles à généraliser. Par ailleurs, dans notre application, le nombre et la position initiale des objets à séparer est connue : il s'agit d'obtenir un pore par nœud du graphe précédemment construit.

Au lieu de laisser la ligne de partage des eaux partir des minima locaux, on lui impose d'utiliser des marqueurs prédéfinis comme points de départ. Ils sont considérés artificiellement comme des points bas du relief utilisé pour la propagation. Ce relief est la carte de distance dans l'espace poral, inversée de telle sorte que les points les plus hauts soient proches du solide. Les marqueurs sont donc abaissés au niveau le plus bas.

Une fois la ligne de partage des eaux construite, tous les pores sont séparés les uns des autres par celle-ci. Il est donc facile de les identifier et de les distinguer les uns des autres en leur attribuant à chacun un label unique. Étant donné qu'ils sont tous en correspondance avec un nœud du graphe, on dispose maintenant, pour chaque pore, de sa localisation et d'un sous-ensemble de l'espace poral.

2.2.2 Amincissement des séparations

La ligne de partage des eaux topologique est un ensemble de lignes de crête qui sépare les bassins les uns des autres. Elle a par conséquent une épaisseur non nulle, d'un pixel. En 3D, il s'agit d'une surface épaisse d'un pixel qui sépare les bassins les uns des autres. Ceci pose un problème, parce que nous avons besoin que les pores occupent complètement l'espace poral.

Pour régler cet écueil, chaque point de la ligne de partage des eaux est attribué à l'un ou l'autre des pores qui l'entourent. Le choix se fait aléatoirement. Cette méthode permet aux pores d'occuper complètement l'espace poral.

2.2.3 Maximisation des graines

Lors de la validation de [Plougonven 09], l'auteur a rencontré des cas où plusieurs marqueurs distincts se trouvaient dans une zone de maximum de la carte de distance. La ligne de partage des eaux finissait par conséquent par entourer l'un des deux pores, l'enfermant finalement dans l'autre. Ce comportement s'explique par le fait que la ligne de partage des eaux doit parfois choisir arbitrairement le prochain voxel à envahir. Dans notre cas, les deux pores pouvaient envahir le terrain autour d'eux, mais l'un des deux a été choisi arbitrairement, ce qui a pour effet d'enfermer l'autre.

Afin de prévenir ce genre de comportement, la solution proposée est de maximiser les marqueurs utilisés comme points de départ pour la ligne de partage des eaux. Pour cela, au lieu de partir des nœuds uniquement, la boule maximale associée à chacun d'entre eux est utilisée comme marqueur. Pour un identifiant de pore, chaque nœud en faisant partie (suite aux étapes de fusions) est maximisé de la sorte et l'union des boules maximales est prise comme graine. En cas d'intersection avec une autre boule maximale (associée à un autre pore), le volume d'intersection est réparti entre les deux pores.

Le fait d'étendre les marqueurs semble logique avec ce qui a été dit précédemment. En effet, les pores sont souvent considérés comme des sphères en contact les unes avec les autres. Cette maximisation des pores permet d'envahir ce que l'on considère comme étant dans la zone d'influence du nœud associé au pore : l'intérieur de la sphère maximale centrée sur lui.

Tous ces éléments étant pris en compte, le partitionnement de l'espace poral obtenu est présenté par la figure 2.8.

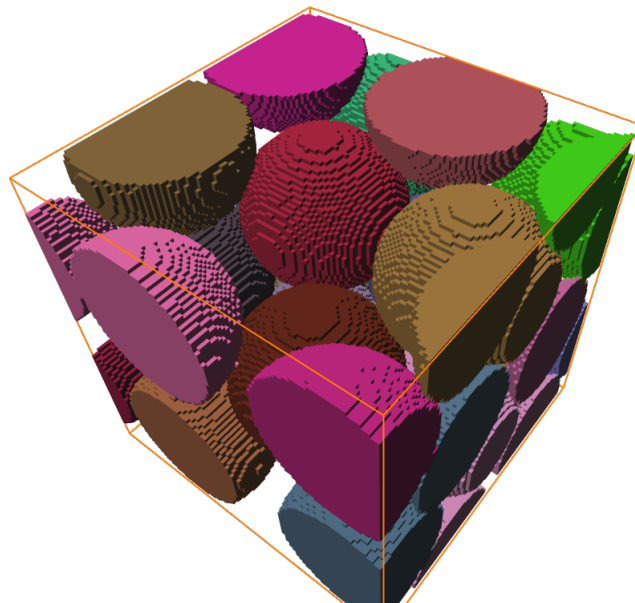


FIGURE 2.8 – *Partitionnement des pores obtenu avec la ligne de partage des eaux, en attribuant arbitrairement les pixels de la ligne de partage des eaux aux pores l'entourant et en maximisant les marqueurs initiaux.*

2.3 Graphe d'interconnexion

Les deux sections précédentes permettent de définir les pores dans l'espace poral. Jusqu'à présent, le graphe issu du squelette a été considéré comme étant représentatif des interconnexions entre les pores. Cependant, il a été construit sans que les pores n'aient de consistance physique. Il l'a été à partir du squelette, en désignant les points d'intersection de branches, moyennant certains critères de fusion, comme centres des pores et les branches elles-mêmes comme interconnexions entre les pores. Maintenant qu'ils ont un volume et une géométrie issus de l'espace poral, il est nécessaire de s'assurer que le graphe est bien représentatif.

Le graphe doit représenter les relations existant entre les pores. Un nœud représente un pore ; le nombre de nœuds du graphe doit donc être égal au nombre de pores. Une branche représente un contact entre deux pores ; chaque contact doit donc être représenté par une et une seule arête du graphe.

2.3.1 Limites du graphe issu du squelette

Plusieurs éléments tendent à imposer l'idée que le graphe issu du squelette n'est pas correct. Au moins trois ont été trouvés à plusieurs reprises sur les différents exemples traités.

2.3.1.1 Plusieurs arêtes connectant le même couple de pores

Ce premier problème concerne des couples de pores qui sont reliés par plus d'une arête. Cela provient de configurations particulières, telle que celle schématisée par la figure 2.9. Dans un tel cas, le squelette conserve deux branches entre les deux pores, ce qui mène à avoir deux arêtes dans le graphe. Or, une seule arête est nécessaire dans le graphe. La solution la plus simple pour régler ce problème est de supprimer arbitrairement l'une des arêtes.

2.3.1.2 Nœuds excentrés

Les nœuds sont le résultat de plusieurs étapes successives : squelettisation, fusion des nœuds adjacents, fusion suivant le critère de volume de recouvrement. Bien que la squelettisation soit guidée par une carte de distance, rien ne garantit que les nœuds se situent au centre (barycentre ou maximum de la carte de distance) des pores, à cause des opérations de fusion. Par ailleurs, la ligne de partage des eaux peut également être bloquée par le relief dans une direction. Le nœud peut se trouver éloigné du barycentre géométrique du volume qui lui est attribué.

Dans les utilisations possibles du modèle de réseau, il est souvent préférable d'avoir des nœuds bien centrés dans le volume qu'ils représentent, pour respecter des hypothèses de quasi-staticité des paramètres. Les géométries simples, notamment les sphères, permettent d'imposer ces hypothèses facilement. Pour la perméabilité par exemple, un nœud bien centré permet d'émettre l'hypothèse que la pression

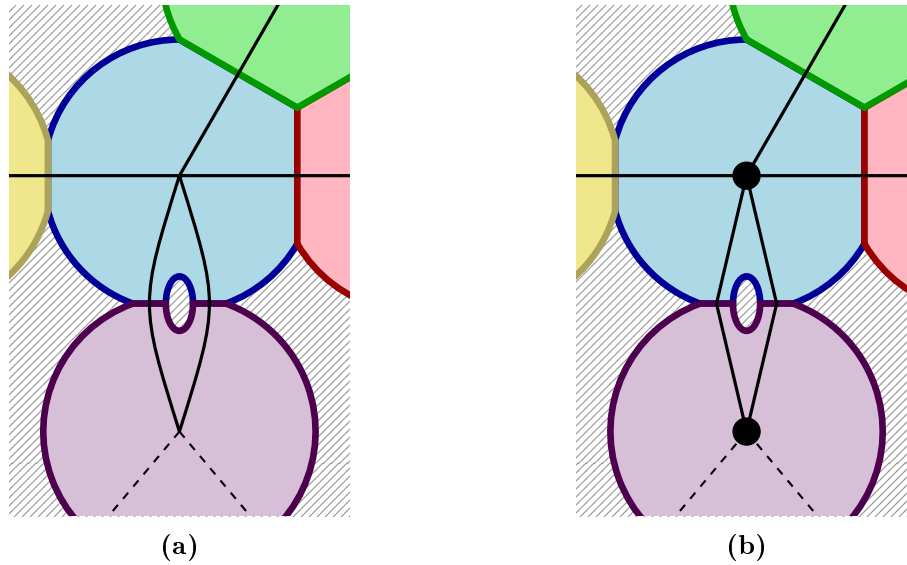


FIGURE 2.9 – (a) Dans cette configuration, une particule solide oblige le squelette à contenir deux branches pour conserver la topologie de l'espace poral. (b) Lors de la conversion du squelette en graphe, les deux branches ont été transformées en deux arêtes. L'une ou l'autre peut être supprimée pour résoudre ce problème.

du fluide *varie faiblement* dans le voisinage du nœud. S'il est près de la séparation avec un autre pore, cette hypothèse devient difficilement admissible. Une solution peut être de déplacer les nœuds près du barycentre ou au maximum de la carte de distance présent dans le pore.

2.3.1.3 Arêtes manquantes

Jusque-là, une hypothèse forte voulait que le squelette soit une représentation correcte des connexions entre les pores. Cela pouvait se justifier jusqu'à l'utilisation de la ligne de partage des eaux pour attribuer une géométrie aux pores. En effet, la ligne de partage des eaux ne garantit pas que les contacts entre les pores sont limités à ceux que présentent le squelette.

L'exemple de la figure 2.10 est un cas simple d'arête manquante dans le graphe. Un squelette centré de cette géométrie est représenté dans la figure 2.10(a). Il est homotope à la géométrie de départ. Le graphe qui en est issu est dessiné dans la figure 2.10(b). Cependant, on constate que ce graphe ne représente pas les interconnexions entre les pores. Notamment, la connexion entre les pores vert et rouge n'est pas représentée.

[Plougouven 09] propose d'ajouter l'arête rouge de la figure 2.10(b) pour réparer ce problème. C'est une solution possible et qui fonctionne. Il faut noter qu'en ajoutant cette arête, la topologie du graphe et celle du milieu poreux ne sont plus identiques. C'est une entorse au principe de conservation de la topologie par le graphe qui semble inévitable. Il n'est cependant pas possible de considérer un graphe qui *oublie* des connexions entre des pores.

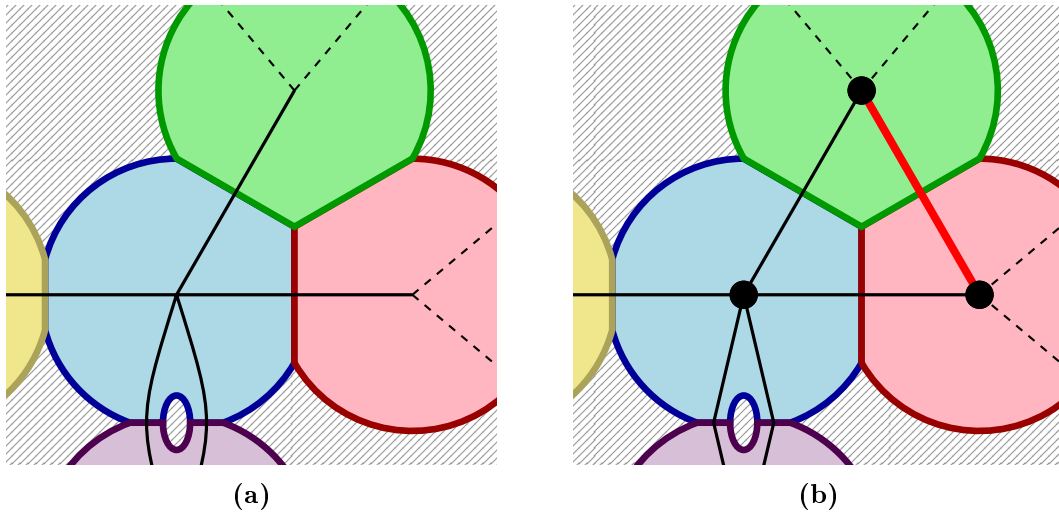


FIGURE 2.10 – (a) Le squelette de cette configuration conserve la topologie : il n’y a donc pas de branche entre les pores vert et rouge. (b) Le graphe issu de ce squelette n’a donc pas d’arête entre ces deux pores. Pourtant, le contact entre eux existe. Il faut donc qu’une arête la symbolise dans le graphe. C’est pourquoi l’arête rouge devrait exister.

2.3.2 Reconstruction d’un graphe d’interconnexion

Le graphe issu du squelette pose donc plusieurs problèmes, que l’on pourrait résoudre en ajoutant ou supprimant des arêtes, et en déplaçant les nœuds. Ce type de post-traitement est souvent délicat à réaliser, notamment parce qu’il existe toujours des cas extrêmes qui ne permettent pas de proposer une approche générale fiable. La solution la plus simple et directe pour pallier les manquements du graphe issu du squelette est de tout simplement s’en débarrasser et d’en construire un qui réponde aux besoins. Il suffit pour cela de positionner les nœuds au centre des pores et de les relier entre eux si un contact existe.

2.3.2.1 Positionnement des nœuds

Comme cela a été évoqué auparavant, il est souvent préférable d’avoir les nœuds positionnés à proximité du centre des pores. La procédure suivante est proposée.

1. Une carte de distance interne à chaque pore est calculée, c’est-à-dire qu’on associe à chaque point du pore la plus petite distance qui le sépare du solide ou des autres pores.
2. Les maxima locaux sont repérés. Si un seul maximum local existe, il est sélectionné pour positionner le nœud.
3. Sinon, le barycentre des maxima locaux de la carte de distance est calculé. S’il se trouve dans le volume du pore, il est sélectionné pour positionner le nœud.
4. Sinon, à défaut de bonne solution, un des maxima locaux est choisi arbitrairement comme position du nœud.

Cette procédure permet d'assurer une position acceptable proche du centre du pore dans tous les cas. Les critères de placement des nœuds peuvent cependant être différents d'une application à l'autre. Pour la perméabilité, ce placement semble être idéal, mais il est tout à fait possible d'adapter ce positionnement à d'autres cas si cela s'avère nécessaire.

2.3.2.2 Détection des arêtes

L'ajout des arêtes est une opération très simple. Un nœud existe dans chaque pore, quel que soit le positionnement de celui-ci. Il suffit donc de parcourir le partitionnement et de détecter les surfaces de contact. Une arête unique est ajoutée pour chaque couple de pores en contact ; elle joint les deux nœuds correspondant au couple de pores. Si un couple de pores est en contact à travers plusieurs surfaces isolées, une seule arête est générée. Cette reconstruction est très simple et permet de régler facilement tous les écueils du graphe issu du squelette.

2.4 Bilan & discussions

Ce chapitre a permis de décrire les différentes étapes permettant de construire un réseau à partir d'une image 3D. Au final, différentes étapes doivent s'enchaîner pour parvenir à un résultat utilisable.

1. Il faut tout d'abord supprimer les artefacts liés à la discrétisation de l'image. Pour cela, la méthode basée sur la caractérisation topologique des pixels qui créent ces artefacts a été proposée dans [Plougonven 09]. Celle-ci présente l'intérêt de supprimer tous les pixels qui créent des problèmes et de ne supprimer que ceux-ci. L'impact sur l'image est minimal.
2. Une fois l'image nettoyée de ses artefacts, un processus de squelettisation par suppression itérative de points simples contraint par la carte de distance est réalisé. Celui-ci permet d'obtenir un squelette de l'espace poral, c'est-à-dire une représentation simplifiée mais homotope à celui-ci. De plus, la contrainte apportée par la carte de distance permet de positionner le squelette près du centre de l'espace poral.
3. Les pixels de ce squelette sont caractérisés topologiquement afin de distinguer les points de branche des points d'intersection de branches. Les points d'intersection de branches sont remplacés par des nœuds du graphe tandis que les composantes connexes de points de branche forment les arêtes du graphe. Cela permet d'obtenir une première version du graphe d'interconnexion.
4. La visualisation de ce premier graphe permet de comprendre immédiatement qu'il comporte beaucoup plus de nœuds qu'attendu. Tout d'abord, les nœuds directement adjacents sont fusionnés. En effet, plusieurs points d'intersection de branches peuvent être adjacents, ce qui crée des amas de nœuds qui ne

sont pas significatifs. Ils n'existent qu'à cause du caractère discret de l'image, qui empêche une superposition parfaite des intersections et impose des choix arbitraires lors de la squelettisation. Par conséquent, tous les nœuds qui sont directement adjacents sont fusionnés sous le même identifiant.

5. Cette première fusion permet de diminuer le nombre de nœuds de manière importante. Il reste cependant des nœuds qui sont proches les uns des autres, séparés de quelques pixels et qui semblent tous appartenir au même pore. Un second critère de fusion est alors utilisé afin de simplifier ce graphe. Il est basé sur le volume de recouvrement des boules maximales qui peuvent être centrées sur les nœuds. Si ce volume est supérieur à un certain pourcentage du volume de la plus petite des deux boules, alors les deux nœuds sont fusionnés. Expérimentalement, la valeur de 30% s'est révélée être la plus efficace pour minimiser les effets liés à des fusions trop ou trop peu importantes.
6. Plutôt que de ne conserver que l'information de la boule maximale pour le volume occupé par un pore, une ligne de partage des eaux permet de diviser l'espace poral en éléments attribués à chaque pore. Les nœuds du graphe restant après les fusions servent de marqueur pour délimiter les pores. Une ligne de partage des eaux est construite, en utilisant comme graines les boules maximales centrées aux nœuds du graphe. La ligne de partage permet d'envahir l'intégralité de l'espace poral et de séparer celui-ci en autant de parties qu'il y a de nœuds. Ainsi, le partitionnement de l'espace poral en pores est construit.
7. Enfin, étant données les limitations du graphe jusqu'ici utilisé, un nouveau graphe est construit à partir du partitionnement. Les nœuds de ce graphe sont positionnés au centre des pores, et une arête est construite pour tout contact entre deux pores.

Dans cette étude, qui est fortement liée à celle décrite dans [Plougonven 09], le squelette a donc un rôle limité au positionnement des pores. Le graphe qui en découle n'est pas représentatif des interconnexions entre les pores. Le nouveau graphe reconstruit n'est en revanche pas topologiquement identique à l'espace poral. Cela ne pose *a priori* pas de problème, puisque les interconnexions entre les pores sont l'information que doit porter le graphe. Le partitionnement permet d'associer à chaque pore un volume, une géométrie, des surfaces de contact avec les autres pores, etc. L'association de ces deux éléments forme le réseau sur lequel des calculs pourront être effectués afin de prédire une propriété du milieu poreux complet.

Il reste cependant des points à améliorer ou à discuter, des questions posées qui n'ont pas toutes leurs réponses. Les sections qui suivent proposent d'ouvrir des perspectives, de discuter de problèmes ou limitations rencontrés au cours des développements et des idées d'améliorations à creuser.

2.4.1 Conditions aux limites

Tout au long des différentes étapes exposées dans cette section, le problème des conditions aux limites de l'image n'a pas été évoqué. Elles sont pourtant omniprésentes : depuis la squelettisation jusqu'à la reconstruction du graphe d'interconnexion à partir du partitionnement, il est à chaque fois indispensable de les gérer correctement pour l'application ciblée.

La plupart des applications utilisant la squelettisation considère que l'objet à traiter est entièrement contenu dans l'image. C'est pour cette raison qu'il est rare que le problème des conditions aux limites de l'image soit posé. Dans le cas de la figure 2.1 pourtant, la plupart des billes touche le bord de l'image. Comme indiqué dans l'annexe A, la caractérisation locale des points simples nécessite la connaissance complète du 26-voisinage des points. Que se passe-t-il aux bords de l'image, là où le 26-voisinage est, par définition, incomplet ?

Par ailleurs, dans les applications visées dans cette thèse, les conditions aux limites ont une importance non négligeable. Si le graphe ne tient pas compte des conditions aux limites, il faudra le modifier pour injecter du fluide dans le cas de la résolution des équations de Stokes. Pire encore, il faudra trouver un moyen de le rendre périodique pour rentrer dans les conditions de résolution du problème de fermeture.

Ces modifications *a posteriori* du graphe, du partitionnement ou de tout autre élément posent très souvent des problèmes, parce qu'il faut que tous ces éléments restent cohérents. C'est pourquoi nous avons essayé d'en tenir compte le plus tôt possible, afin d'avoir à faire le moins possible de traitements particuliers. Deux critères permettent d'influer sur la forme du squelette : la condition de remplissage du 26-voisinage sur les bords de l'image et la carte de priorité utilisée pour guider la squelettisation.

2.4.1.1 Écoulement de Stokes

Il semblait au départ nécessaire de conserver des points du squelette sur les faces d'injection et de sortie du fluide afin de pouvoir les retrouver sur le graphe. Cette contrainte n'a pas trouvé de solution convaincante, malgré toutes les tentatives imaginées de carte de priorité et de voisinage aux bords de l'image.

Par la suite, quand il s'est avéré que le graphe découlant du squelette nécessitait un post-traitement, et qu'il valait finalement mieux le reconstruire, une solution plus simple s'est imposée. Les pores présents sur les bords de l'image sont, quel que soit le soin qu'on apporte aux différentes étapes, toujours problématiques. Les critères que l'on impose ne permettent jamais de les isoler correctement.

La condition aux limites « extérieur solide » est celle qui permet d'obtenir les meilleurs résultats. Elle consiste à compléter le 26-voisinage des points au bord par du solide (donc du complémentaire de l'objet qui nous intéresse). La carte de distance est elle aussi calculée en considérant que l'extérieur de l'image est constitué

de solide. Cela signifie notamment que tous les points sur les bords de l'image ont une haute priorité pour la squelettisation. Cela donne par exemple le squelette de la figure 2.4(b).

L'effet principal de cette condition aux limites est que le squelette de l'espace poral se détache complètement des bords de l'image avec cette conditions à la limite. Il n'a pas d'attache sur les faces d'injection. En revanche, les intersections de branches présentes à l'intérieur de l'espace poral correspondent bien à des lieux de rencontre de chemins existants.

La conversion en graphe et les étapes de fusion ne posent pas de problèmes supplémentaires avec cette condition aux limites. La reconstruction du graphe est l'occasion de rajouter les éléments nécessaires pour que l'écoulement puisse être facilement mis en place. Tous les pores qui sont en contact avec la face d'injection ou de sortie sont connectés à un pore *virtuel* situé à l'extérieur de l'espace poral. Il suffit d'imposer la pression en ces nœuds pour que l'écoulement soit mis en place. Cette solution permet d'assurer que l'injection se fait correctement dans les pores en contact avec le bord et à travers la face d'entrée. La figure 2.11 montre le résultat de la reconstruction du graphe après ajout des connexions à l'extérieur.

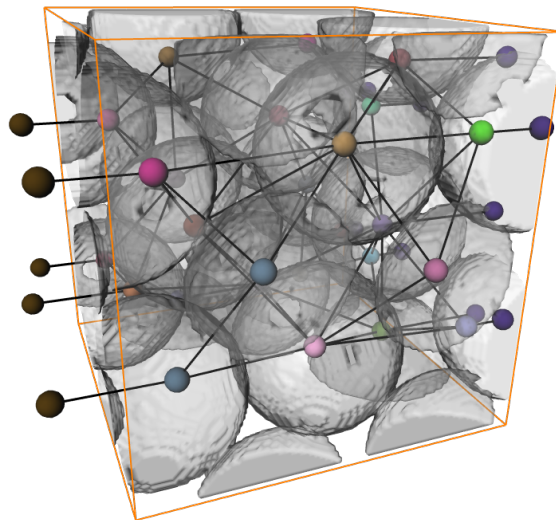


FIGURE 2.11 – Exemple de reconstruction de graphe après partitionnement, avec des conditions aux limites adaptées pour simuler un écoulement. Des nœuds sont ajoutés à l'extérieur du volume, afin de connecter les nœuds représentant un pore touchant le bord de l'image.

2.4.1.2 Problème de fermeture

Le problème de fermeture nécessite, comme nous l'avons vu dans la partie 1.1, des conditions aux limites périodiques dans toutes les directions de l'espace. C'est un cas plus simple à gérer que le cas précédent. En effet, il suffit simplement d'utiliser

la périodicité au bord de l'image pour compléter le 26-voisinage des points pour la squelettisation. Les éléments manquants sont récupérés sur les faces opposées, comme si le milieu poreux pavait l'espace. La carte de distance est construite de la même manière, en considérant que le milieu poreux est un pavage de l'espace. Ces éléments permettent de construire facilement un squelette périodique. La classification des points du squelette peut se faire en considérant la même condition de périodicité, ce qui amène à la création d'un graphe périodique. Le premier critère de fusion s'applique de la même manière. Pour le second, il faut prendre garde à remplacer les boules maximales *côte à côte* avant d'estimer le volume de recouvrement. La figure 2.12 montre le squelette sur un des bords de l'image. La périodicité du squelette est parfaitement respectée.

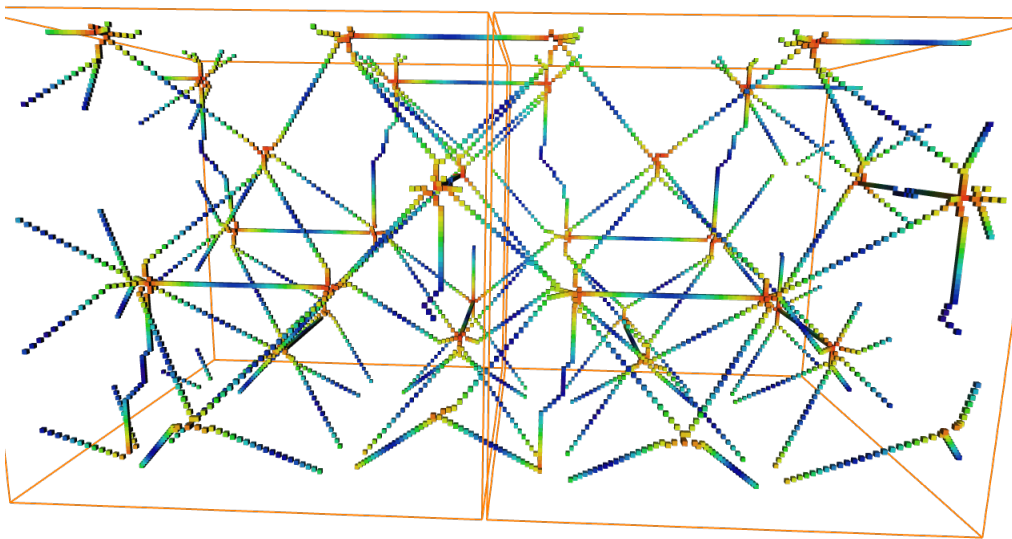


FIGURE 2.12 – Représentation du squelette de l'espace poral (à gauche) et de sa copie périodique dans une direction (à droite). Les branches du squelette en vis-à-vis se reconnectent parfaitement.

Seule la ligne de partage des eaux n'utilise pas de condition aux limites périodiques. Cela est dû à une perception physique du pore que nous avons au départ. Un pore occupant un volume réparti sur deux faces opposées de l'image n'aurait pas de sens. Un pore est borné par l'image ; il doit avoir une consistance physique et ne pas être séparé en plusieurs parties. Cette restriction est longtemps restée comme un axiome inébranlable, qui a évolué tardivement.

Une généralisation totalement périodique aurait mérité d'être regardée, incluant la ligne de partage des eaux. Il aurait cependant fallu être capable de construire une ligne de partage des eaux périodiques, ce qui n'est pas directement réalisable avec les outils à notre disposition. Cet outil pourrait permettre d'obtenir de meilleurs partitionnements dans le cas périodique. Une des pistes d'amélioration de ces travaux se trouve peut être ici.

2.4.1.3 Différences avec [Plougonven 09]

Dans ce qui précède il a été souvent fait référence aux résultats de [Plougonven2009]. Leur utilisation pour différentes géométries issues de cas réels nous a amené à préciser ou modifier plusieurs de ces résultats. Nous rappelons ces points dans ce chapitre.

Tout d'abord, [Plougonven 09] propose d'utiliser un squelette 26-connexes dans la chaîne de traitement, parce qu'un tel squelette est plus compact. Il s'avère que cette incohérence avec les autres traitements, qui sont tous réalisés en considérant les pores comme des objets 6-connexes, peut faire apparaître des problèmes lors du partitionnement. Les marqueurs sont composés d'éléments du squelette, donc potentiellement non 6-connexes. Or, dans certains cas pathologiques, il se trouve que certains marqueurs non 6-connexes génèrent des pores non 6-connexes lors du partitionnement par la ligne de partage des eaux. Ceci ne correspond pas à ce qui est attendu du partitionnement et est inexploitable par la suite. L'utilisation de la 6-connexité s'impose donc naturellement tout au long du processus menant au partitionnement.

Ensuite, les conditions aux limites pour la squelettisation ne sont pas clairement posées dans [Plougonven 09]. La périodicité semble s'imposer pour le calcul du tenseur de perméabilité ; en revanche, pour l'écoulement de Stokes, aucune des solutions envisagées n'est satisfaisante pour garantir l'existence de points d'entrée pour le fluide sur les faces de l'image (voir la section 4.3.2 qui présente un exemple concret). Le choix est donc de ne pas faire intervenir l'extérieur de l'image, en considérant qu'il n'y a pas du tout d'objet hors de l'image.

L'impossibilité de trouver des conditions aux limites satisfaisantes a mené à une autre modification de l'approche décrite dans [Plougonven 09]. L'auteur propose en effet de corriger le graphe issu du squelette pour ajouter les arêtes manquantes. Il ne traite pas des autres erreurs présentes dans ce graphe, comme la redondance de connexions entre deux pores par exemple. L'approche proposée ici consiste à créer un nouveau graphe à partir du partitionnement. Cela permet non seulement de corriger toutes les erreurs du graphe issu du squelette, mais aussi de gérer correctement les conditions aux limites.

Enfin, d'autres critères de fusion des nœuds du graphe issu du squelette ont été ajoutés par rapport à ceux décrits dans [Plougonven 09]. Il s'agit de critères adaptés au calcul de la perméabilité. La suppression des pores de faible volume est rendue nécessaire du fait que le calcul des $\lambda_{H_i H_j}$ associés à ces pores n'est pas possible dans notre approche. La fusion des branches non débouchantes permet de ne conserver que des pores « utiles », dans le sens où le flux entrant dans les pores restants n'est pas nul.

Ces modifications ont été rendues nécessaires du fait de l'application de l'ensemble des traitements à des matériaux réels, ce qui n'avait pas été présenté dans [Plougonven 09]. Elles sont adaptées à la construction d'un réseau permettant le calcul de la perméabilité, mais peuvent ne pas l'être pour d'autres applications.

2.4.2 Influence de la suppression des artefacts de binarisation

La première étape de la suite de traitement proposée dans ce chapitre est une opération qui consiste à supprimer les artefacts de binarisation. Pour cela, un certain nombre de points sont changés de phase, c'est-à-dire passés du solide à l'espace poral ou inversement. Dans l'empilement de billes présenté tout au long de différentes sections, la majeure partie de points modifiés l'a été à proximité des zones de contact entre les sphères. Cela semble cohérent avec le fait que ces points génèrent des surfaces ou des branches multiples entre les pores.

Les zones de contact entre les sphères sont des étranglements, qui sont les lieux de contrôle de la perméabilité. Dès lors se pose la question de l'influence des changements opérés dans ces zones sur le résultat final. Afin de pallier ce problème, il faudrait être capable de revenir à l'image de départ (avant suppression des artefacts de binarisation) pour le partitionnement.

Une solution envisagée est d'utiliser la carte de distance dans cette image de départ pour construire la ligne de partage des eaux. Cela permettrait de séparer les pores dans la géométrie de départ et donc de conserver l'information disponible autour des zones de contact. L'étape de squelettisation aurait donc lieu dans une géométrie particulière, afin d'éviter que le squelette ne soit trop complexe et inexploitable. Les fusions de nœuds se font sans avoir recours à la géométrie de l'espace poral.

Il faudrait cependant prendre garde à d'éventuelles connexions qui apparaîtraient lors du partitionnement. Des pores, séparés lors de la squelettisation, pourraient se retrouver de nouveau connectés dans le partitionnement. Puisque le graphe est reconstruit à partir du partitionnement, cela ne devrait pas poser de problème, si ce n'est que ces nouvelles connexions ont de fortes chances d'être de toute petite taille, un ou quelques pixels. C'est une piste à explorer.

2.4.3 Modification du partitionnement

La question se pose de la manière suivante : est-il possible d'envisager une bifurcation dans la démarche qui mènerait à un autre partitionnement ? La réponse est assurément oui. Il suffit de modifier le second critère de fusion des nœuds, ou d'introduire une ligne de partage des eaux périodique. Encore plus généralement, le critère de localisation des pores par les points d'intersection de branches du squelette n'est pas unique et pourrait être remplacé par un autre. Cependant, il n'existe à notre connaissance pas de critère objectif permettant de comparer deux partitionnements. Définir un degré de qualité d'un partitionnement est une question ouverte.

Si l'on précise légèrement la question initiale, elle peut devenir : est-il possible d'avoir un partitionnement sans surfaces incomplètes (comme celle de la figure 2.10) ? Le fait que de telles configurations peuvent avoir lieu dans des géométries aussi simples que des empilements de billes semble appuyer la réponse non. Nous n'avons cependant pas de preuve formelle que ces surfaces sont obligatoirement présentes

dans tout partitionnement. Là encore, cette question mériterait qu'on s'y attarde.

2.4.4 Définition d'un pore

Ce chapitre s'est ouvert sur la définition d'un pore donnée par [Dullien 92] :

A "pore" is defined as a portion of pore space bounded by solid surface and by planes erected where the hydraulic radius of the pore space exhibits minima, analogously as a room is defined by its walls and the doors opening to it.

Dans [Plougonven 09], une autre définition a été proposée :

A pore is a part of the pore space, homotopic to a ball, bounded by the solid, and connected to other pores by throats of minimal surface area.

Le point commun évident entre ces deux définitions est le fait qu'un pore est une partie de l'espace poral. Cela semble naturel et difficile à remettre en cause. Il est intéressant d'ajouter qu'un pore est un morceau de l'espace poral, si possible plus petit que lui. Partitionner l'espace poral en pores n'a d'intérêt que si les pores sont de *petits éléments* plus faciles à manipuler que l'espace poral complet. L'application nécessitant le partitionnement peut donner des informations sur la taille ou la forme des pores à construire.

Le fait qu'un pore soit, au moins partiellement, limité par le solide est un point commun plus pertinent. Un pore ne remplissant pas cette condition serait complètement isolé du solide, donc totalement entouré par un ou plusieurs autres pores. Il est difficile de concevoir l'intérêt d'un élément qui ne mettrait pas en relation la phase solide et l'espace poral. Cela constitue l'essence même des milieux poreux. Construire de tels pores est possible techniquement, mais leur trouver une application et une utilité n'est pas facile. Là encore, l'application visée pour le partitionnement peut donner des indications.

La première différence entre les deux définitions apparaît sur les séparations directes entre pores. La première définition impose des *plans* de séparation tandis que la seconde évoque des *surfaces*. Cette deuxième solution est plus souple et correspond mieux à ce qui a été observé dans cette étude. Contraindre les séparations à être des plans est très restrictif et difficile à tenir dans un matériau réel. La généralisation à des surfaces quelconques semble cohérente.

La seconde différence concerne l'imposition de l'homotopie d'un pore à une boule, qui fait partie de la seconde définition mais n'apparaît pas dans la première. Cette contrainte est forte, elle force un pore à avoir une géométrie simple. Cette condition n'est d'ailleurs pas nécessairement vérifiée dans l'application présentée dans ce document. Il est tout à fait possible qu'un pore comporte une « anse », une sorte d'anneau qui casse l'homotopie avec une boule. La ligne de partage des eaux ne donne pas de garantie sur la topologie des objets qu'elle construit.

Définir la notion de pore de manière générale est un exercice difficile. La définir par construction l'est tout autant, étant donné les opérations successivement appliquées pour aboutir au partitionnement. En effet, la présence d'un pore était au départ définie par la présence d'une intersection de branches du squelette. Mais cette présence ne définit pas le pore. Il n'est complètement défini qu'au moment où la ligne de partage des eaux lui attribue une portion de l'espace poral.

Il semble qu'une définition générale et synthétique, adaptée à tous les cas de figure, soit difficile sinon impossible à formuler. L'utilisation qui doit être faite du réseau de pores a une grande influence sur la définition de son élément constitutif. Pour le calcul de perméabilité, quelques éléments peuvent être avancés :

- un pore est une partie de l'espace poral ;
- un pore est limité au moins partiellement par le solide. Il ne doit pas être enfermé par d'autres pores ;
- un pore est constitué d'une seule composante connexe. Sa topologie n'est pas obligatoirement celle d'une boule ;
- un pore est en contact avec d'autres pores à travers des surfaces fermées ou ouvertes. Ce contact peut avoir lieu par des étranglements, mais ce n'est pas une obligation.

Réseau de pores et perméabilité

Ce chapitre s'appuie sur le précédent en supposant que l'espace poral est partitionné en pores et qu'un réseau d'interconnexion existe. À partir de ces éléments, le but est d'établir les équations à résoudre pour calculer la perméabilité du milieu poreux. Pour cela, il faut aboutir à un système discret sur les nœuds du réseau et leurs interconnexions.

Dans un premier temps, les équations présentées dans la section 1.1 sont manipulées pour faire apparaître le système linéaire discret à résoudre. Pour rappel, les systèmes continus à transformer sont les suivants :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 & (3.1a) \\ \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla} p = \vec{0} & (3.1b) \end{cases}$$

$$\text{C.L. :} \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \text{sur l'interface } \mathcal{A}_{\beta\sigma} \quad (3.1c)$$

et

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_k = 0 & (3.2a) \\ \vec{\nabla} d_k - \nabla^2 \vec{D}_k = \vec{I}_k & (3.2b) \end{cases}$$

$$\text{C.L. :} \begin{cases} \vec{D}_k = \vec{0} & \text{sur } \mathcal{A}_{\beta\sigma} & (3.2c) \\ d_k(\vec{r} + \vec{l}) = d_k(\vec{r}) \text{ et } \vec{D}_k(\vec{r} + \vec{l}) = \vec{D}_k(\vec{r}) & \text{périodicité} & (3.2d) \\ \langle \vec{D}_k \rangle = \vec{k}_k & & (3.2e) \end{cases}$$

Les intégrations (sur un volume ou le long d'un chemin) de ces équations font apparaître un coefficient de proportionnalité entre un débit et une différence de

potentiel. Pour chaque arête du réseau, un calcul numérique local, sur une géométrie réduite à quelques pores, est envisagé afin de déterminer la valeur de ces coefficients. Avec la solution du système linéaire, la perméabilité est estimée en utilisant la loi de Darcy. Pour le tenseur de perméabilité, une solution est esquissée pour obtenir le tenseur complet.

3.1 Bilan de masse (équations 3.1a et 3.2a)

Les deux équations 3.1a et 3.2a ont une forme identique. Dans cette section, les variables sont remplacées par $\vec{\Psi}$ qui remplace \vec{v} et \vec{D}_k . Ceci permet de traiter les deux équations en même temps.

3.1.1 Intégration sur le volume d'un pore

Considérons un pore H_i appartenant à l'espace poral. Le pore bleu de la figure 3.1(a) représente, en 2D, un pore dans un sous-volume d'un espace poral. L'intégration de l'équation de bilan de la masse sur le volume \mathcal{V}_{H_i} du pore H_i s'écrit de cette manière :

$$\int_{\mathcal{V}_{H_i}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} dV = 0 \quad (3.3)$$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, cette intégrale sur le volume \mathcal{V}_{H_i} du pore H_i se réduit à une intégrale sur la surface extérieure \mathcal{A}_{H_i} du pore H_i , comme l'illustre la figure 3.1(b). L'intégrale s'écrit donc :

$$\int_{\mathcal{A}_{H_i}} \vec{\Psi} \cdot \vec{n}_{H_i} dS = 0 \quad (3.4)$$

Sur les portions de cette surface qui sont en contact avec la phase solide, la vitesse est nulle, d'après la condition d'adhérence. Il est par conséquent suffisant de considérer les éléments $\mathcal{A}_{H_i H}$ de la surface \mathcal{A}_{H_i} séparant le pore H_i des pores H avec lesquels il est en contact. La figure 3.1(c) met en évidence les éléments de surface qu'il suffit de conserver dans l'intégrale, qui s'exprime de cette manière :

$$\int_{\mathcal{A}_{H_i H}} \vec{\Psi} \cdot \vec{n}_{H_i H} dS = 0 \quad (3.5)$$

Pour finir, la surface $\mathcal{A}_{H_i H}$ peut être divisée en une somme de M surfaces $\mathcal{A}_{H_i H_j}$, correspondant aux M surfaces séparant le pore H_i de ses M voisins H_j . Ce découpage est illustré dans la figure 3.1(d) et s'exprime ainsi :

$$\sum_{j=1}^M \left[\int_{\mathcal{A}_{H_i H_j}} \vec{\Psi} \cdot \vec{n}_{H_i H_j} dS \right] = 0 \quad (3.6)$$

L'intégrale présente dans l'équation 3.6 est celle d'un champ de vecteur traversant

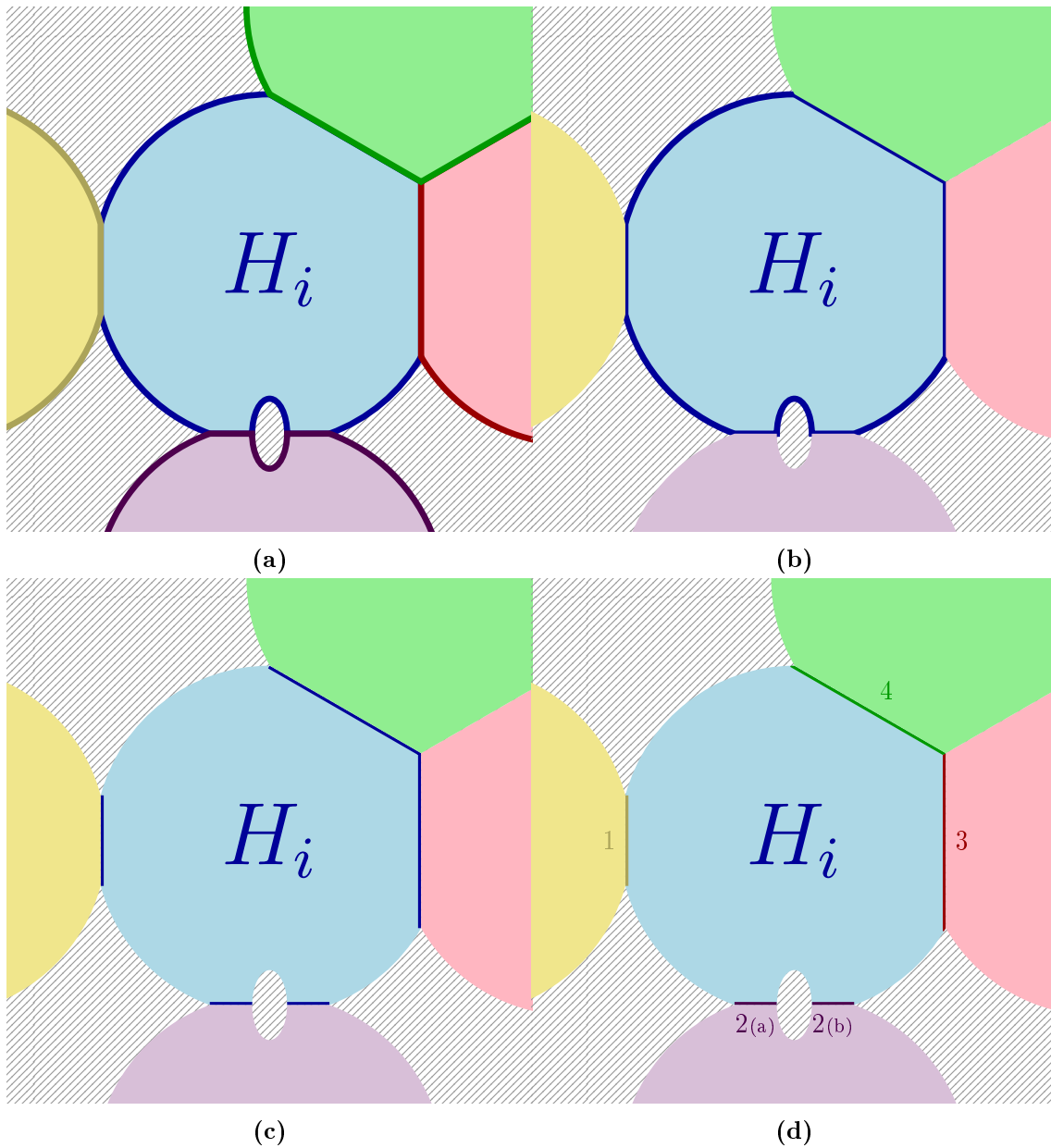


FIGURE 3.1 – Sur l'ensemble de ces quatre images, les pores sont séparés et identifiés par des couleurs différentes. Le pore H_i est en bleu clair, les autres couleurs représentent les pores voisins qui ont un contact avec lui. (a) Dans un premier temps, l'intégration se fait sur le volume du pore (en bleu clair). (b) Le théorème de Green-Ostrogradski permet de ne considérer que la surface extérieure du pore (en bleu foncé). (c) La surface extérieure peut être réduite à la surface en contact avec d'autres pores puisque la condition d'adhérence indique que la vitesse est nulle sur l'interface fluide-solide. (d) Finalement, chacune des surfaces séparatrices peut être considérée individuellement.

une surface : c'est le débit du fluide passant du pore H_i au pore H_j à travers la surface $\mathcal{A}_{H_i H_j}$. En notant $Q_{H_i H_j}$ ce débit, l'équation 3.6 devient finalement :

$$\sum_{j=1}^M Q_{H_i H_j} = 0 \quad (3.7)$$

3.1.2 Exemples de contacts entre pores

Plusieurs configurations de contacts entre pores ont été exposées par la figure 3.1. L'équation 3.7 peut s'écrire pour ce cas précis :

$$Q_{H_i H_j}^1 + Q_{H_i H_j}^2 + Q_{H_i H_j}^3 + Q_{H_i H_j}^4 = 0 \quad (3.8)$$

où se trouvent en exposant les numéros des surfaces à travers lesquelles les débits passent.

Le plus simple des cas se situe entre le pore bleu et le pore jaune, repéré par le numéro 1 dans la figure 3.1(d). Il s'agit d'une surface simple qui sépare exactement deux pores. Elle s'appuie entièrement sur le solide et le flux $Q_{H_i H_j}^1$ qui la traverse est bien un débit s'écoulant d'un pore à l'autre. Ce type de surface ne pose pas de problème particulier ; c'est un cas classique que l'on rencontre dans la plupart des modèles de réseau.

La séparation entre les pores bleu et violet, repérée par les numéros 2(a) et 2(b) dans la figure 3.1(d), est composée de deux morceaux indépendants. Chacun des deux morceaux de cette séparation sépare exactement les deux mêmes pores. Le débit $Q_{H_i H_j}^2$ passant d'un pore à l'autre est donc la somme des débits $Q_{H_i H_j}^{2(a)}$ et $Q_{H_i H_j}^{2(b)}$ passant à travers les deux morceaux de la séparation. Ce cas est intéressant parce que l'équation 3.8 indique que seul le débit $Q_{H_i H_j}^2$ intervient dans le modèle de réseau. Les valeurs individuelles $Q_{H_i H_j}^{2(a)}$ et $Q_{H_i H_j}^{2(b)}$ ne sont pas prises en compte. La surface associée à ce type de séparation est donc l'union des deux surfaces 2(a) et 2(b). Ce cas permet de bien comprendre que la forme de la surface séparant deux pores n'a pas d'importance, seul compte le débit qui la traverse.

Les deux autres configurations, repérées par les numéros 3 et 4 sur la figure 3.1(d), concernent des séparations différentes des précédentes. La surface 3 sépare les pores bleu et rouge, tandis que la surface 4 isole le pore bleu du pore vert. L'union de ces deux surfaces ferme le pore H_i mais ce sont les deux débits $Q_{H_i H_j}^3$ et $Q_{H_i H_j}^4$ qui apparaissent dans l'équation 3.8.

Contrairement aux cas précédents, ces deux débits sont calculés sur des surfaces qui ne reposent pas entièrement sur le solide. Dès lors, une contrainte apparaît naturellement : au cours des traitements à venir, il est indispensable que les surfaces séparant les pores ne changent pas, sous peine de modifier les débits apparaissant dans l'équation 3.7. Ce point est primordial pour la suite du raisonnement : la forme des surfaces importe peu (un ou plusieurs éléments, s'appuyant sur le solide ou non),

leur position ne doit en revanche pas changer.

3.2 Bilan de la quantité de mouvement (équations 3.1b et 3.2b)

Les deux équations 3.1b et 3.2b ont une forme identique. Dans cette section, les variables sont remplacées par $\vec{\Psi}$ pour \vec{v} et \vec{D}_k , et Φ , pour p et d_k . Le second membre est remplacé par $\vec{\Upsilon}$, pour $\vec{0}$ et \vec{I}_k . Ceci permet de traiter les deux équations en même temps.

3.2.1 Intégration le long d'un chemin entre deux pores

Considérons deux pores H_i et H_j connectés. Il existe entre ces deux pores au moins un chemin $C_{H_i H_j}$ permettant de passer d'un pore à l'autre. L'intégration de l'équation de conservation de quantité de mouvement le long d'un de ces chemins $C_{H_i H_j}$ s'écrit :

$$\underbrace{\int_{C_{H_i H_j}} \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{c} dC}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\int_{C_{H_i H_j}} \nabla^2 \vec{\Psi} \cdot \vec{c} dC}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\int_{C_{H_i H_j}} \vec{\Upsilon} \cdot \vec{c} dC}_{\textcircled{3}} \quad (3.9)$$

avec \vec{c} le vecteur directeur unitaire du chemin $C_{H_i H_j}$ sur lequel la circulation est calculée. Les trois termes de cette intégrale sont étudiés un à un dans la suite.

3.2.1.1 Termes $\textcircled{1}$ et $\textcircled{3}$

Le théorème du gradient stipule que l'intégrale curviligne d'un champ de vecteur dérivant d'un potentiel est égale à la différence de potentiel entre les extrémités du chemin. $\vec{\nabla} \Phi$ entre dans ce cadre : c'est un champ vectoriel dérivant d'un potentiel.

$$\int_{C_{H_i H_j}} \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{c} dC = \Phi(H_j) - \Phi(H_i) \quad (3.10)$$

Il suffit de remarquer que $\vec{\Upsilon}$ dérive d'un potentiel pour le traiter de la même manière. Le cas $\vec{\Upsilon} = \vec{0}$ est trivial puisque dans ce cas, le terme $\textcircled{3}$ vaut 0. Intéressons-nous plutôt à l'autre cas : $\vec{\Upsilon} = \vec{I}_k$. C'est un vecteur constant que l'on peut considérer comme étant le gradient du potentiel que constitue la k^e coordonnée spatiale :

$$\vec{\nabla} x = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{I}_x \quad \vec{\nabla} y = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{I}_y \quad \vec{\nabla} z = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{I}_z \quad (3.11)$$

Comme pour le terme $\textcircled{1}$, le théorème du gradient permet de transformer le terme

③ :

$$\int_{C_{H_i H_j}} \vec{I}_k \cdot \vec{c} dC = \int_{C_{H_i H_j}} \vec{\nabla} x_k \cdot \vec{c} dC = x_k(H_j) - x_k(H_i) \quad (3.12)$$

L'étude de ces deux termes révèle que l'intégrale calculée ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des extrémités de ce chemin. Cette hypothèse est primordiale pour l'étude du terme ②.

3.2.1.2 Terme ②

Cette intégrale n'est pas évaluée directement. C'est un calcul complexe qui n'a de solution analytique que dans des cas simples.

En revanche, la valeur de cette intégrale ne dépend pas de la forme du chemin $C_{H_i H_j}$ mais seulement des extrémités de ce chemin, d'après les indications données par les termes ① et ③. De plus, deux observations simples peuvent être faites. Soit λ une valeur réelle quelconque :

- le laplacien ∇^2 d'un champ de vecteur $\vec{\Psi}$ varie proportionnellement à ce champ de vecteur :

$$\nabla^2 (\lambda \vec{\Psi}) = \lambda \nabla^2 \vec{\Psi} \quad (3.13)$$

- de la même manière, le flux Q d'un champ de vecteur $\vec{\Psi}$ à travers une surface \mathcal{A} varie proportionnellement à ce champ de vecteur :

$$\int_{\mathcal{A}} (\lambda \vec{\Psi}) \cdot \vec{n}_{\mathcal{A}} dS = \lambda \left(\int_{\mathcal{A}} \vec{\Psi} \cdot \vec{n}_{\mathcal{A}} dS \right) = \lambda Q \quad (3.14)$$

En partant de ces deux observations, nous écrivons simplement que le terme ② est proportionnel au flux passant du pore H_i vers le pore H_j :

$$\int_{C_{H_i H_j}} \nabla^2 \vec{\Psi} \cdot \vec{c} dC = \lambda_{H_i H_j} Q_{H_i H_j} \quad (3.15)$$

Cette écriture fait apparaître un nouveau terme $\lambda_{H_i H_j}$. L'existence de ce coefficient de proportionnalité entre le champ $\nabla^2 \vec{\Psi}$ et le débit $Q_{H_i H_j}$ semble évidente d'après les éléments exposés ci-dessus. En revanche, son unicité est une question qui reste ouverte. Dans la suite de ce chapitre, les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ sont considérés comme uniques. Nous y reviendrons dans une section de discussion, plus loin dans ce document.

3.2.2 Bilan de l'étude terme à terme

L'équation 3.1b intégrée sur un chemin joignant deux pores H_i et H_j s'écrit :

$$p(H_j) - p(H_i) - \lambda_{H_i H_j} Q_{H_i H_j} = 0 \quad (3.16)$$

L'équation 3.2b, quant à elle, devient :

$$d_k(H_j) - d_k(H_i) - \lambda_{H_i H_j} Q_{H_i H_j} = x_k(H_j) - x_k(H_i) \quad (3.17)$$

Elle peut être réécrite pour obtenir une forme similaire des deux équations :

$$[d_k(H_j) - x_k(H_j)] - [d_k(H_i) - x_k(H_i)] - \lambda_{H_i H_j} Q_{H_i H_j} = 0 \quad (3.18)$$

3.2.3 Exemples de contacts entre pores

Étant donné l'importance de la position des extrémités des chemins utilisés pour intégrer cette équation, il est évident que leur position ne devra pas changer au cours de traitements qui suivront. Dans le cas contraire, les valeurs des grandeurs présentes dans cette seconde équation seraient modifiées. Il est naturel de prendre ces extrémités aux nœuds du graphe : leur position géométrique est connue et fixe. Puisque les chemins en eux-mêmes n'ont pas d'importance, les arêtes joignant les nœuds représenteront ces chemins. Le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ et le débit $Q_{H_i H_j}$ qui sont apparus amènent cependant à quelques réflexions supplémentaires. La figure 3.2 présente trois configurations qui permettent d'illustrer différents types de contact qui existent entre des pores.

La première configuration 3.2(a) correspond à un contact entre exactement deux pores. Le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ représente la conductance induite par la présence du solide à l'écoulement d'un fluide entre les deux pores. Il est associé à la surface séparatrice. Le débit $Q_{H_i H_j}$ est celui qui traverse la surface séparant les deux pores, qui s'appuie entièrement sur le solide. L'intégration de la seconde équation ne pose pas de problème dans ce cas.

La deuxième configuration 3.2(b) est composée de deux éléments de surface. Le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ représente l'effet du solide autour des deux éléments de surface. Il pourrait paraître naturel de diviser le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ en deux coefficients qui seraient associés à chacun des éléments de surface. Cependant, ces deux coefficients n'apparaissent pas dans le développement et ne sont pas nécessaires à la résolution du problème. Il est tout à fait acceptable de ne connaître que le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ associé à l'union des deux éléments de surface. De même, le débit $Q_{H_i H_j}$ est le débit traversant l'union des deux éléments de surface.

La troisième configuration 3.2(c) est de nouveau composée de deux éléments de surface, mais connectés entre eux et séparant le pore bleu de deux pores différents. La même observation que pour la première équation peut être immédiatement formulée : les surfaces ne doivent pas être modifiées afin que les débits $Q_{H_i H_j}$ restent les mêmes. Par ailleurs, les deux coefficients $\lambda_{H_i H_j}$, associés aux deux éléments de surface, doivent rester distincts et doivent donc être eux-mêmes calculés séparément. Dans le cas contraire, la seconde équation ne peut pas être résolue.

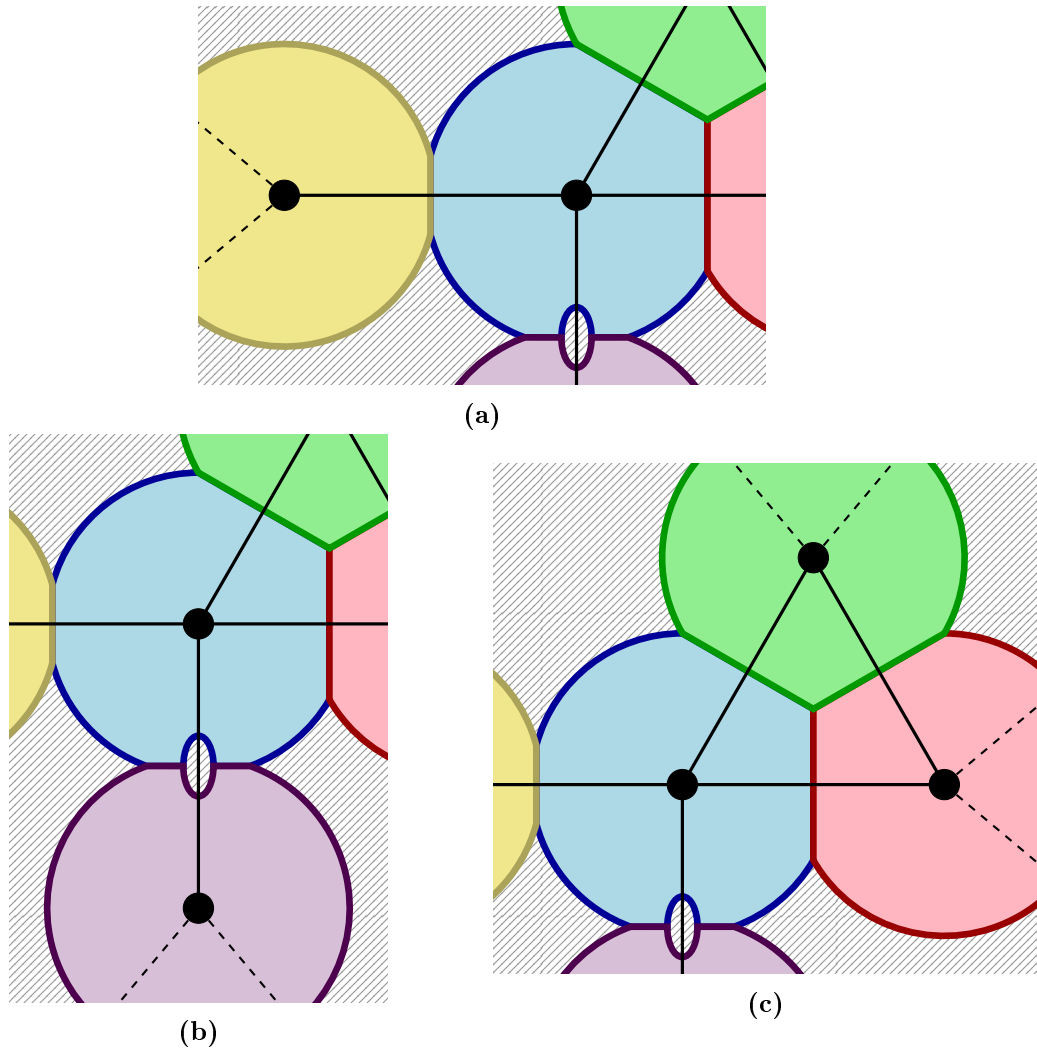


FIGURE 3.2 – Ces trois images représentent trois cas particuliers de contacts entre pores. Les chemins sur lesquels les équations 3.1b et 3.2b sont intégrées sont dessinés en trait continu noir. Puisque seules les extrémités sont importantes pour le calcul, les chemins sont droits et joignent simplement les centres des pores. (a) Dans le cas d'un contact entre deux pores à travers une surface unique, le débit apparaissant dans le développement est simplement celui qui traverse cette surface. (b) Si la surface est déconnectée mais sépare exactement deux pores, le débit est celui qui traverse l'ensemble des morceaux de surface. Les débits individuels traversant les morceaux n'apparaissent pas dans l'équation. (c) Si la surface n'est pas bordée de solide, elle ne sépare pas exactement deux pores. Cependant, le débit $Q_{H_i H_j}$ est bien celui qui la traverse. Cette surface, bien que flottante puisque non entièrement connectée au solide, ne doit pas être modifiée dans la suite des traitements à venir.

3.3 Calcul des résistances

Les développements réalisés dans les sections précédentes ont permis d'écrire les équations 3.2 et 3.1 sous une forme discrétisée qui peut être résolue sur le réseau :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^M Q_{H_i H_j} = 0 \\ p(H_j) - p(H_i) - \lambda_{H_i H_j} Q_{H_i H_j} = 0 \end{array} \right. \quad (3.19a)$$

$$(3.19b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^M Q_{H_i H_j} = 0 \\ [d_k(H_j) - x_k(H_j)] - [d_k(H_i) - x_k(H_i)] - \lambda_{H_i H_j} Q_{H_i H_j} = 0 \end{array} \right. \quad (3.20a)$$

$$(3.20b)$$

Les deux systèmes linéaires sont semblables mais contiennent pour le moment trois inconnues. Les inconnues p et d_k d'une part et $Q_{H_i H_j}$ d'autre part sont les vraies inconnues du problème, qui permettent l'estimation de la perméabilité. Il faut déterminer les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ pour pouvoir résoudre ces systèmes.

Le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ est un coefficient de proportionnalité entre le débit $Q_{H_i H_j}$ et la différence de pression $p(H_j) - p(H_i)$ (ou le terme correspondant dans l'autre système, $[d_k(H_j) - x_k(H_j)] - [d_k(H_i) - x_k(H_i)]$) au centre de ces pores. Comme indiqué précédemment, les $\lambda_{H_i H_j}$ sont considérés uniques pour chaque contact entre deux H_i et H_j ; ils ne dépendent que de la géométrie locale. Par conséquent, n'importe quel couple $\{\vec{v}_1, p_1\}$ ou $\{\vec{D}_1, d_1\}$ solution des équations 3.1 ou 3.2 permet de calculer le coefficient de proportionnalité. Il suffit pour cela d'estimer le débit à travers la surface séparant les deux pores et de mesurer les pressions aux centres des pores.

3.3.1 Présentation de l'approche

Partant des éléments présentés dans le paragraphe précédent, la méthode proposée pour estimer les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ utilise la résolution locale des équations de Stokes 3.1 dans la géométrie réduite au minimum autour de la surface sur laquelle le débit doit être estimé.

À cette fin, trois étapes se succèdent pour chaque élément de surface séparant deux pores, ou chaque arête du graphe, puisqu'à chaque arête correspond un contact entre deux pores. La première étape est l'extraction de la géométrie nécessaire pour le calcul local. Plusieurs cas se présentent et les surfaces non fermées posent un problème conceptuel à cette étape. Une fois la géométrie des pores isolée, il faut positionner des points d'entrée et de sortie du fluide, afin qu'un écoulement puisse se mettre en place. Enfin, un code de résolution direct des équations de Stokes, utilisant des conditions aux limites particulières, a été utilisé pour trouver le couple solution $\{\vec{v}_1, p_1\}$ qui permet de calculer le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$.

La résolution du système 3.1 est préférée au 3.2 pour l'estimation des $\lambda_{H_i H_j}$ parce qu'il semble difficile de s'assurer que la condition de périodicité permettra à un écoulement de se mettre en place dans la géométrie. Elle a été choisie dans le développement de la prise de moyenne volumique parce que le fait de se placer dans un V.E.R. assure que la périodicité ne perturbera pas l'écoulement global. Dans une géométrie réduite à un couple de pores, ou bien même à quelques pores, les conditions du V.E.R. ne sont pas remplies et il est plus que probable que cette condition de périodicité aura des conséquences importantes sur l'écoulement.

3.3.2 Extraction des couples de pores

Différentes configurations ont déjà été présentées sur la figure 3.2. Nous allons les reprendre ici pour illustrer la démarche d'extraction de la géométrie nécessaire à l'estimation du coefficient $\lambda_{H_i H_j}$.

3.3.2.1 Surface de contact fermée

Nous nous intéressons ici aux cas présentés dans les figures 3.2(a) et 3.2(b). Ces cas sont très simples. La surface s'appuie entièrement sur le solide, qu'elle soit formée d'une ou plusieurs composantes connexes. Par conséquent, la géométrie suffisante pour le calcul local est constituée des deux pores et eux uniquement. D'après notre hypothèse d'unicité du $\lambda_{H_i H_j}$, seule la géométrie de ces deux pores influe sur sa valeur. Il suffit donc d'extraire les deux pores en conservant la surface de contact et en fermant tous les autres contacts par du solide, afin d'isoler la géométrie de l'extérieur. La figure 3.3 montre les géométries extraites dans les deux cas évoqués ci-dessus. Seule la géométrie des deux pores est nécessaire, les autres contacts avec d'autres pores (comme par exemple le pore bleu) sont fermés avec du solide.

3.3.2.2 Surface de contact ouverte

C'est le cas de la figure 3.2(c) dont il est question maintenant. Le premier réflexe pour aborder ce type d'arête est d'adopter la même démarche que précédemment, comme le montre la figure 3.4(a). Cependant, l'écoulement est fortement contraint par l'absence du pore vert (figure 3.4(b)). Cette contrainte est artificielle, due à l'extraction des pores bleu et rouge uniquement. Dans un écoulement réel dans le milieu poreux complet, cette contrainte n'existe pas. Par conséquent, un $\lambda_{H_i H_j}$ calculé à partir de cette géométrie ne représenterait pas le coefficient de proportionnalité entre le débit à travers la surface et la différence de pression dans le cas réel.

Afin d'éviter ce problème, la solution utilisée est d'extraire la géométrie présentée dans la figure 3.4(c). Le pore vert est conservé, afin que l'écoulement local soit représentatif de ce qu'il se passe dans la géométrie complète (figure 3.4(d)).

En pratique, une heuristique de recherche des pores à extraire est mise en place. Cette heuristique utilise le fait qu'un voxel peut être décomposé en un volume élé-

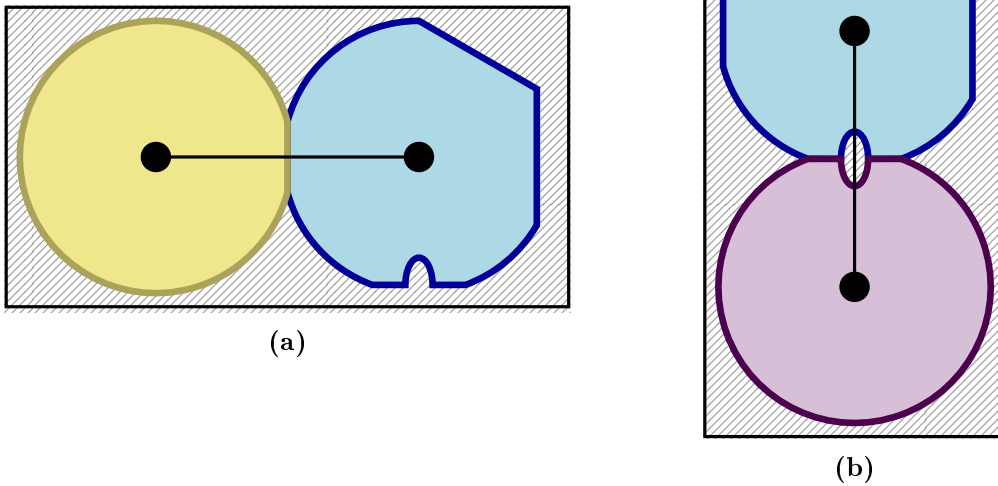


FIGURE 3.3 – Extraction de la géométrie des pores dans des cas simples. (a) La géométrie extraite dans le cas d'une surface s'appuyant sur le solide séparant exactement deux pores correspond à celle des deux pores et uniquement eux. Toute l'information nécessaire est contenue dans cette image pour déterminer le $\lambda_{H_i H_j}$ correspondant à la surface. (b) De même, si la surface comporte plusieurs composantes connexes, seuls les deux pores sont nécessaires. Le débit qui sert à déterminer le $\lambda_{H_i H_j}$ est la somme des débits traversant les éléments de la surface. Il est inutile de les traiter séparément. Notons que dans les deux cas, les autres contacts (avec d'autres pores) sont fermés par du solide.

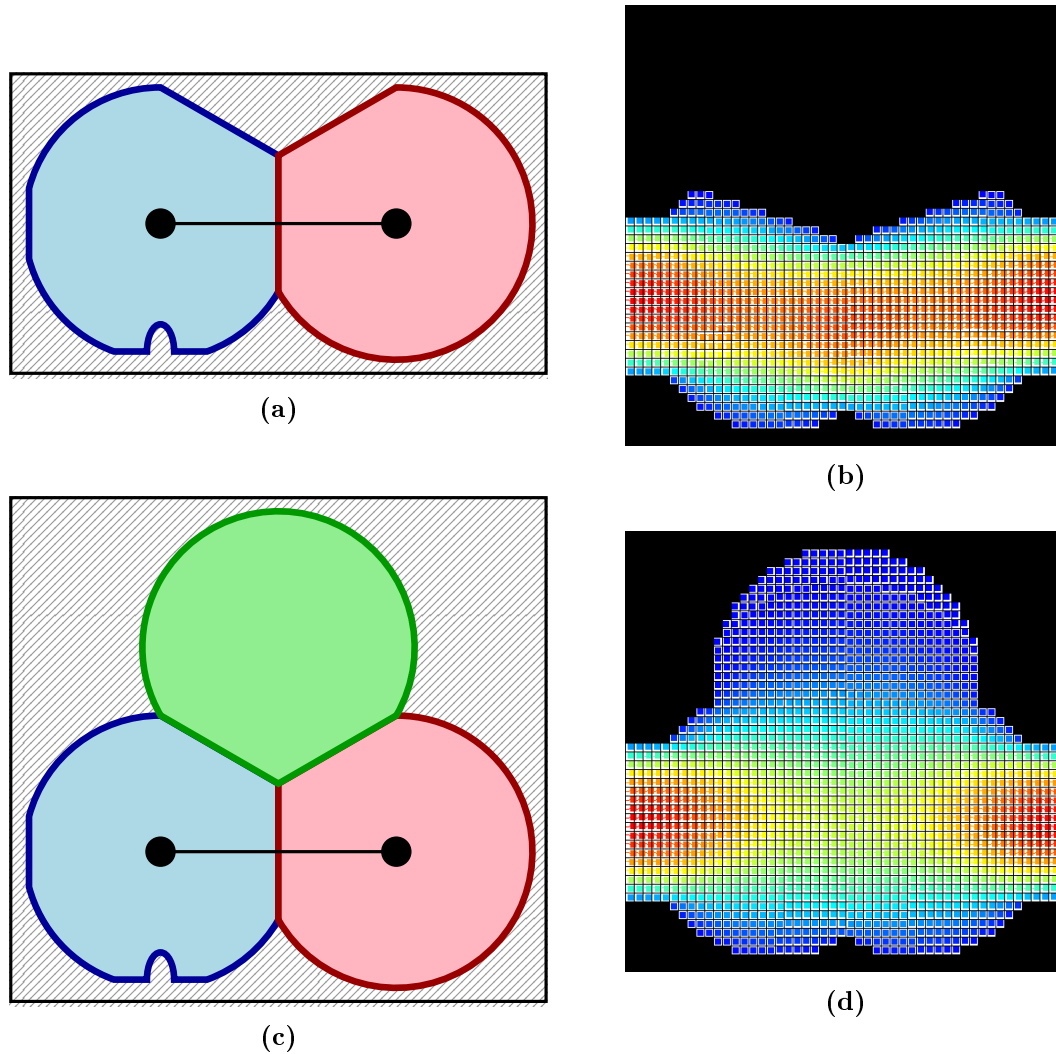


FIGURE 3.4 – Extraction de la géométrie des pores dans le cas d'une surface ouverte. (a) Seules les géométries des deux pores sont extraites. Tout écoulement dans cette géométrie sera fortement contraint par l'absence du pore vert. (b) Exemple d'écoulement dans une géométrie proche du (a). L'étranglement existant entre les deux pores est fortement accentué par l'absence de celui du haut, comme l'indique les couleurs chaudes à cet endroit (bleu : faible vitesse, rouge : vitesse élevée). La valeur de $\lambda_{H_i H_j}$ découlant d'un tel écoulement sera différente de celle qui pourrait être calculée dans un écoulement global dans la géométrie complète de l'espace poral. (c) La solution proposée pour pallier ce problème est d'extraire tous les pores qui peuvent influencer l'écoulement. (d) Dans cet exemple, le pore vert est conservé dans le calcul local, afin que l'écoulement simulé soit contraint de la même manière dans la géométrie qui sert à estimer $\lambda_{H_i H_j}$ et dans la géométrie complète.

mentaire, six facettes, douze arêtes et huit sommets. Considérons une arête $C_{H_i H_j}$ du graphe, connectée aux pores H_i et H_j . Le but est de retrouver la surface complète attachée à la séparation entre les deux pores.

1. La liste de toutes les facettes partagées par un voxel du pore H_i d'une part et un voxel du pore H_j d'autre part est dressée. Ces facettes constituent la surface primordiale, qui sépare exactement et uniquement les deux pores H_i et H_j .
2. Une recherche de toutes les facettes connectées à la surface primordiale est effectuée. Ces nouvelles facettes sont ajoutées à la surface primordiale si et seulement si elles séparent exactement deux pores distincts, qui peuvent éventuellement être différents de H_i et H_j . Si c'est le cas, le ou les pores correspondants doivent être extraits pour le calcul lié à $C_{H_i H_j}$.
3. La recherche effectuée à l'étape précédente est relancée, en prenant comme surface de départ la surface primordiale augmentée des facettes vérifiant la condition énoncée.
4. L'heuristique itère ainsi jusqu'à ce qu'aucune nouvelle facette ne soit ajoutée.

Cette heuristique converge lorsque la surface calculée repose entièrement sur le solide. Tous les pores rencontrés lors du parcours doivent participer à l'écoulement permettant d'estimer le $\lambda_{H_i H_j}$ associé à l'arête $C_{H_i H_j}$.

Dans l'exemple de la figure 3.4, les pores bleu, rouge et vert sont bien extraits. Nous verrons que cela peut concerner bien plus de pores dans le chapitre suivant.

Il est intéressant de noter que l'heuristique fonctionne pour toutes les configurations (surface de contact fermée ou ouverte). Elle s'applique directement à toutes les arêtes du graphe et permet d'extraire exactement les pores nécessaires.

3.3.3 Ajout des points d'entrée / sortie du fluide

La géométrie telle que nous l'avons extraite est fermée ; il est impossible de faire circuler un fluide. Pour pouvoir simuler un écoulement, il est indispensable d'ajouter deux connections avec l'extérieur. Pour cela, des embouchures sont dessinées dans la géométrie.

Une embouchure est un simple parallélépipède rectangle à base carrée creusé dans le solide, qui permet d'injecter ou de faire sortir le fluide servant à l'écoulement. La géométrie extraite dans la première étape est contenue dans un parallélépipède rectangle. Une embouchure part de l'un des bords de ce pavé et doit atteindre un des deux pores sans toucher ou en traverser un autre.

Par ailleurs, le but est de simuler un écoulement qui traverse la surface séparatrice des deux pores dont on veut calculer le $\lambda_{H_i H_j}$. Il est donc préférable que l'une des embouchures atteigne le pore H_i tandis que l'autre atteint le pore H_j . Notons que cela n'est pas indispensable d'après l'hypothèse d'unicité du $\lambda_{H_i H_j}$. En effet, n'importe quel écoulement permet de l'estimer à partir du moment où il contient

les deux pores en question. Cependant, les autres pores éventuellement présents ne le sont que pour éviter des contraintes géométriques sur l'écoulement. Il paraît naturel d'observer un écoulement entre ces deux pores, afin d'éviter des problèmes de précision numérique si le débit ou la différence de pression sont trop faibles.

La figure 3.5 montre des exemples d'embouchures positionnées sur les configurations déjà rencontrées.

3.3.4 Résolution numérique : algorithme ICMCB

La géométrie des pores entrants associée aux embouchures permet d'utiliser une variante d'un code de calcul numérique de résolution des équations de Stokes développé à l'ICMCB. Il s'agit d'une méthode itérative en volume fini, avec des conditions aux limites de pression imposée en entrée et de périodicité sur la vitesse. Il a été utilisé dans de nombreuses études menées par l'ICMCB, comme par exemple [Flukiger 09]. Il fournit en sortie les solutions $\{\vec{v}_1, p_1\}$ des équations de Stokes.

3.3.5 Estimation du $\lambda_{H_i H_j}$

Les solutions obtenues par le calcul local permet de déterminer la pression au centre des pores et le débit traversant la surface séparant les deux pores. Il suffit donc d'appliquer l'équation 3.19b pour déterminer le $\lambda_{H_i H_j}$ associé à l'arête du graphe. L'unicité supposée du $\lambda_{H_i H_j}$ permet de justifier cette opération.

3.4 Construction et résolution du système linéaire

Deux systèmes linéaires différents avaient été obtenus suite à la discrétisation des équations de Stokes et du problème de fermeture sur le réseau (équations 3.19 et 3.20). Dans les deux cas, le calcul de tous les $\lambda_{H_i H_j}$ est préalablement nécessaire. Il est réalisé en appliquant le processus décrit dans la section précédente à toutes les arêtes du réseau, c'est-à-dire à tous les contacts entre deux pores. Une fois ces calculs faits, les matrices et les seconds membres du système peuvent être construits.

3.4.1 Construction de la matrice

La matrice est construite de la même manière pour les deux systèmes linéaires. Chaque nœud du réseau est identifié par un indice compris entre 1 et N , N étant le nombre de nœuds du réseau. La matrice A du système est d'ordre N et est construite en deux étapes :

- chaque élément (i, i) de la diagonale est la somme des inverses des $\lambda_{H_i H_j}$, pour

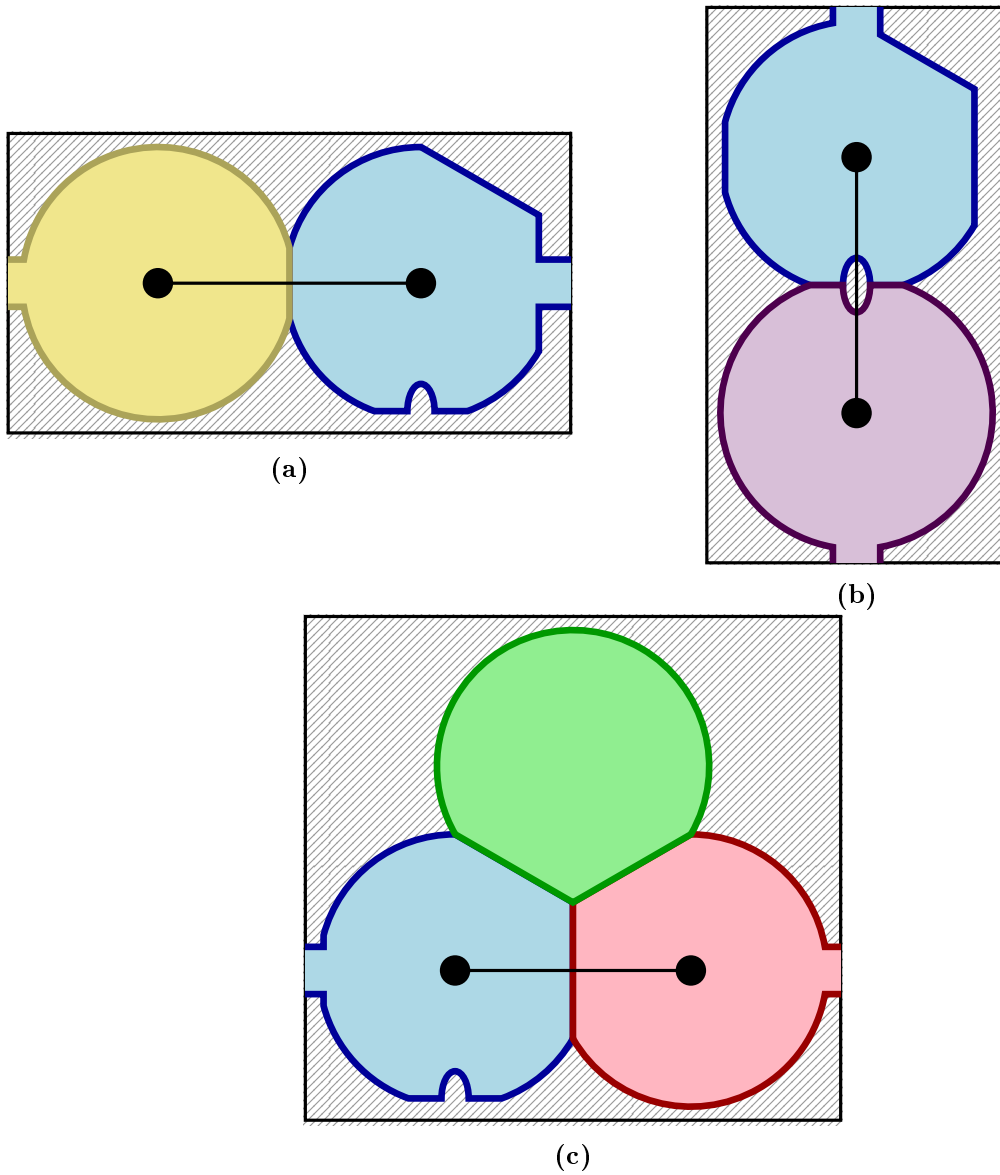


FIGURE 3.5 – Placement des embouchures sur les géométries extraites. Les embouchures sont placées de part et d'autre de la surface séparatrice dans les cas (a), (b) et (c), afin de maximiser le débit et la différence de pression. Ce positionnement n'est pas obligatoire : l'hypothèse d'unicité de $\lambda_{H_i H_j}$ signifie que tout écoulement dans lequel la pression aux centres des pores et le débit $Q_{H_i H_j}$ peuvent être mesurés permet de calculer $\lambda_{H_i H_j}$.

tout pore H_j connecté au pore H_i :

$$A(i, i) \leftarrow \sum_{\substack{j / \exists \text{ contact} \\ \text{entre } H_i \text{ et } H_j}} \frac{1}{\lambda_{H_i H_j}}$$

- chaque élément (i, j) (avec $i \neq j$) est l'opposé de l'inverse du $\lambda_{H_i H_j}$ existant entre les pores H_i et H_j , ou 0 s'il n'y a pas de connexion entre ces deux pores :

$$i \neq j : A(i, j) \leftarrow \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_{H_i H_j}} & \text{si } H_i \text{ et } H_j \text{ sont connectés} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ceci implique l'obligation de ne pas avoir de nœud isolé dans le réseau, ni de composante connexe isolée de l'extérieur. En effet, de tels éléments rendent la matrice singulière. Cependant, la présence de nœuds ou groupe de nœuds isolés ne peut provenir que de composantes connexes isolées de l'espace poral. Celles-ci ont été aisément filtrées avant de commencer le processus de partitionnement.

3.4.2 Construction des seconds membres

Les seconds membres des systèmes ne sont pas les mêmes dans les deux systèmes que l'on cherche à résoudre. Ils dépendent des conditions aux limites appliquées sur le domaine.

3.4.2.1 Second membre du système 3.19

Les conditions aux limites pour ce système sont des pressions imposées à l'extérieur du domaine. Ces pressions p_{ext_1} et p_{ext_2} sont fixées sur les nœuds qui ont été ajoutés lors de l'étape décrite dans la section 2.4.1.1.

Le vecteur second membre B est de taille N . Les éléments qui ne sont pas nuls sont ceux qui correspondent à des nœuds en contact avec les bords du domaine. La valeur de ces éléments est alors la somme des pressions extérieures divisée par le $\lambda_{H_i H_j}$ associé au contact avec l'extérieur :

$$B(i) \leftarrow \begin{cases} \sum_{j \in \{1,2\}} \frac{p_{\text{ext}_j}}{\lambda_{H_i H_j}} & \text{si le pore } H_i \text{ est connecté à l'extérieur } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans notre réseau, un pore peut être en contact avec les deux faces libres de l'image, ce qui explique la présence de la somme dans l'expression précédente. Cependant, ce cas se présente uniquement si le pore traverse complètement le volume. Le pore serait alors très étendu, et, bien que rien n'indique que ce soit impossible, ce cas devrait être extrêmement rare.

3.4.2.2 Second membre du système 3.20

La condition aux limites pour ce calcul est la périodicité, qui est assurée par le réseau construit dans le chapitre précédent. C'est le gradient de potentiel exprimé dans l'équation 3.12 qui forme le second membre de ce système.

Le vecteur second membre B est également de taille N , le nombre de nœuds du réseau. La différence de position $x_k(H_j) - x_k(H_i)$ ne doit être calculée que pour une coordonnée, celle qui correspond à la ligne du tenseur que l'on est en train de calculer. Si l'on calcule la première ligne du tenseur, la différence portera sur la coordonnée x des nœuds du réseau ; s'il s'agit de la deuxième ligne, la coordonnée y et pour la troisième ligne, la coordonnée z .

Il faut cependant prendre en compte la périodicité dans le calcul de cette différence. Si par exemple, notre image fait 100 dans la direction qui nous intéresse et qu'un nœud situé à la coordonnée 5 est périodiquement connecté à un nœud situé à la coordonnée 95, la distance qui les sépare n'est pas $95 - 5 = 90$. Puisque le réseau est périodique, il faut considérer que l'un des nœuds possède une copie de lui-même situé en 105 pour le premier et en -5 pour le second. Ce qui réduit leur distance à $5 - (-5) = 105 - 95 = 10$.

Cette mesure de distance périodique est très importante et permet de remplir le second membre correctement.

$$B(i) \leftarrow \sum_{\substack{j / \exists \text{ contact} \\ \text{entre } H_i \text{ et } H_j}} \frac{\text{distance périodique}(x_k(H_j), x_k(H_i))}{\lambda_{H_i H_j}}$$

3.4.3 Inversion de la matrice du système

Le système linéaire final est simple : n équations à n inconnues, n étant le nombre de sommets du graphe. Il n'est pas nécessaire de développer une approche particulière, les méthodes classiques sont tout à fait adaptées à sa résolution. La matrice du système présente par ailleurs certaines caractéristiques qui peuvent guider vers une méthode plutôt que d'autres :

- la matrice est symétrique : si le contact entre le pore H_i et le pore H_j existe, le contact inverse existe également ;
- la matrice est creuse : un pore H_i est en contact avec un nombre limité d'autres pores. Ce nombre varie d'un pore à un autre et dépend principalement de la nature du matériau. Il reste cependant très inférieur au nombre de pores qui constituent le milieu poreux.
- la matrice est à diagonale dominante : la valeur diagonale vaut exactement l'opposé de la somme des valeurs extradiagonales.

L'implémentation actuelle utilise une simple décomposition LU pour résoudre le système, directement reprise du livre [Press 92]. Cette solution a été choisie parce que la résolution des systèmes linéaires est un problème général et totalement dissocié de

celui que ce document essaie de traiter. Bien que non-optimale, cette implémentation a permis de vérifier que l'approche adoptée pour estimer la perméabilité dans un réseau de pores était viable. Il existe certainement des méthodes de calcul plus performantes, mieux adaptées au type de matrice du problème.

3.4.4 Estimation de la perméabilité du milieu poreux

La méthode la plus couramment utilisée pour déduire cette valeur du réseau consiste à appliquer directement la loi de Darcy. Quand le système d'équations sur le réseau est résolu, la pression sur tous les nœuds du réseau et le flux sur toutes les arêtes sont connus. Il est alors aisé de déterminer le flux total traversant le milieu poreux : il suffit de faire la somme des débits sur l'une des faces d'entrée ou de sortie. Les pressions d'entrée et de sortie étant imposées, la perméabilité apparente se calcule simplement :

$$k = -\frac{LQ}{S(p_{\text{ext}_1} - p_{\text{ext}_2})} \quad (3.21)$$

avec L la longueur du milieu poreux dans la direction principale de l'écoulement, Q le flux total sommé sur l'une des faces d'entrée ou de sortie, S la surface du milieu (perpendiculairement à la direction principale de l'écoulement) et $p_{\text{ext}_1} - p_{\text{ext}_2}$ la différence de pression (positive) imposée entre l'entrée et la sortie.

3.4.5 Estimation du tenseur de perméabilité effective

La démarche proposée dans les paragraphes précédents permet de construire un partitionnement et un réseau tenant compte de la périodicité. Elle définit en outre les équations permettant de résoudre le problème de fermeture sur le réseau. Il reste cependant le problème du calcul du tenseur à partir du calcul sur le réseau.

Les équations continues indiquent que le tenseur de perméabilité est égal à la moyenne volumique de phase de \vec{D}_k (cf. l'équation 3.2e). Ce calcul est impossible sur le réseau, parce que la grandeur \vec{D}_k a disparu des équations 3.20 pour laisser apparaître le débit $Q_{H_i H_j}$. Il faut donc trouver un moyen de calculer cette valeur moyenne à partir des éléments à notre disposition.

Trois systèmes linéaires doivent être résolus pour avoir accès au tenseur complet. Ces trois systèmes diffèrent uniquement par leur second membre, la matrice restant la même. Le second membre dépend de la variable x_k utilisée lors de l'écriture du système linéaire. Chaque système donne une solution différente pour les pressions aux nœuds et devrait permettre de calculer une ligne du tenseur.

Connaissant la solution de l'un des systèmes linéaires, la pression en chaque nœud est connue. Il est donc possible, en utilisant l'équation 3.20b, de déterminer les $Q_{H_i H_j}$ associés aux arêtes du réseau. Il s'agit des « débits » du vecteur \vec{D}_k à travers les surfaces séparant les pores.

Considérons l'une face de l'image, par exemple le plan XY situé en $Z = 0$, sa normale \vec{n} et sa surface S . En calculant la somme des débits le long des arêtes du

réseau qui traversent la face considérée, on obtient le *débit total* traversant le volume dans la direction \vec{n} . Cette somme divisée par S est égale à une *vitesse moyenne* du fluide traversant le volume dans la direction \vec{n} . Nous avons l'intuition que cette vitesse moyenne peut être utilisée comme composante de la ligne du tenseur. Il n'y a pas de démonstration ni de vérification numérique de cette hypothèse à ce jour. Ceci reste cependant une idée originale qui demande à être étudiée.

3.5 Bilan

Ce chapitre a permis de mettre en place les équations à résoudre sur le réseau construit dans le chapitre précédent. Les deux calculs envisagés, la simulation d'un écoulement de Stokes et le calcul de tenseur de perméabilité, ont abouti à deux systèmes linéaires semblables. Ils font notamment apparaître des coefficients de proportionnalité entre le débit traversant la surface de contact entre deux pores et la différence de potentiel entre les centres de deux pores, notés $\lambda_{H_i H_j}$. Une méthode requérant un calcul numérique local a été proposée pour déterminer ces coefficients de manière la plus précise possible. Une fois ces $\lambda_{H_i H_j}$ calculés, la résolution des systèmes d'équation est simple.

Un certain nombre de contraintes est par ailleurs apparu quant au réseau sur lequel les systèmes d'équations doivent être résolus. Les nœuds du réseau, porteurs des inconnues de potentiel, doivent être fixes dans l'espace. Les surfaces associées aux contacts entre pores doivent également ne pas changer dans les différentes étapes du traitement.

En revanche, aucune contrainte sur la forme des pores (convexité, bordés par des étranglements, volume) ou sur les contacts entre les pores (séparation sur les étranglements, séparations bordées par le solide, nombre de contacts) n'a été nécessaire.

L'hypothèse qui a permis le développement du processus de calcul des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ porte sur leur unicité, elle-même basée sur l'hypothèse que seule la géométrie des pores influe sur la valeur de ce coefficient. On pourrait se convaincre de la véracité de cette hypothèse en suivant le raisonnement suivant. Dans la relation décrite par l'équation 3.15, l'intégrale dépend des extrémités du chemin sur lequel elle est calculée, mais pas du chemin lui-même. Le flux $Q_{H_i H_j}$ est, lui aussi, indépendant de ce chemin. Par conséquent, la valeur de $\lambda_{H_i H_j}$ est dépendante uniquement des extrémités du chemin. Bien qu'incomplète d'un point de vue mathématique, cette réflexion tend à confirmer, au moins intuitivement, que si les extrémités de la courbe ne changent pas, la valeur du coefficient est unique.

Application à un matériau réel

Les éléments théoriques et pratiques de construction et d'exploitation du réseau ont été donnés dans les deux chapitres précédents. Les exemples qui ont été montrés jusqu'à maintenant étaient basés sur des géométries synthétiques : un empilement de billes en limite de contact et des illustrations en 2D permettant de visualiser clairement les problèmes. Ce chapitre propose d'appliquer pas à pas l'ensemble des opérations exposées précédemment à un échantillon réel en partant d'une image 3D.

4.1 Présentation de l'échantillon et de l'image

L'échantillon est un isolant phonique biphasique. L'image 3D a été obtenue par tomographie à rayons X à l'ESRF¹ à une résolution de $5\mu m \times 5\mu m \times 5\mu m$. La phase solide et l'espace poral sont facilement séparables. L'image a été binarisée par un simple seuillage, le contraste entre les deux phases en présence étant très marqué. Un volume cubique de dimension $500 \times 500 \times 500$ a été découpé à l'intérieur du volume complet. Après binarisation, l'objet (l'espace poral pour notre cas) est généralement associé à la valeur 1, tandis que le complémentaire (le solide) est associé à la valeur 0.

L'espace poral est constitué de bulles quasi-sphériques interconnectées. Il existe plusieurs tailles de bulles, mais elles restent malgré tout distinctes. La figure 4.1 montre quelques éléments de la géométrie de l'espace poral.

Suite à l'opération de binarisation, la porosité² totale du volume est de 61,06%. Dans l'ensemble des traitements à suivre, l'espace poral sera toujours considéré avec la relation de 6-adjacence. Par conséquent, le complémentaire sera toujours considéré

¹European Synchrotron Radiation Facility, situé à Grenoble

²La porosité est le rapport entre le volume de l'espace poral et le volume total de l'image

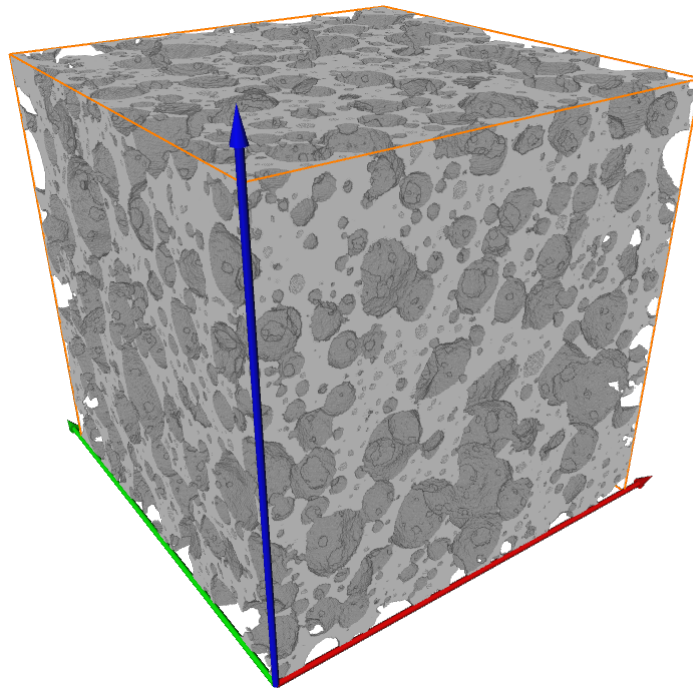


FIGURE 4.1 – *Le volume proposé a des dimensions de $500 \times 500 \times 500$. Il est constitué d'une phase solide, visible en gris sur cette image. L'espace poral est formé de bulles quasi-sphériques connectées entre elles. La distribution de tailles des bulles est assez large.*

avec la relation duale : la 26-adjacence. La justification principale pour cela est numérique. Un écoulement ne peut avoir lieu qu'entre deux cellules élémentaires (les voxels) qui partagent au moins une facette. En effet, rien ne peut physiquement passer par une arête (1D donc infiniment fine) ou par un sommet (0D donc ponctuel). Les pores, par exemple, doivent être 6-connectés avec leurs voisins pour qu'un contact existe et qu'un échange puisse avoir lieu entre eux.

Seule une partie de la porosité est intéressante. En effet, tous les éléments non percolants³ ne permettent pas à un écoulement de se mettre en place. On peut donc les faire passer dans le complémentaire sans affecter la perméabilité du matériau, ni les propriétés de l'écoulement. Cette porosité non percolante est de 0,74%, ce qui ramène la porosité percolante à 60,32%.

Il s'agit d'un exemple idéal pour étalonner les différentes étapes du partitionnement, puisqu'il devrait être (en théorie) simple : un réseau de billes interconnectées constitue un cas d'école pour ce genre de problématique.

³Par percolant, il est entendu : qui contient au moins un chemin permettant de traverser l'image de la face d'injection à la face de sortie.

4.2 Préparation de l'image pour le partitionnement

Comme cela a été indiqué dans les étapes du chapitre 2, certaines opérations préliminaires sont nécessaires afin de s'assurer que les traitements pourront s'enchaîner dans de bonnes conditions. La suppression des artefacts de binarisation, décrite brièvement et issue de la thèse [Plougouven 09], doit être combinée à une suppression des composantes connexes isolées de l'espace poral et du solide, afin que la squelettisation soit utilisable pour la suite.

Pour le cas de l'écoulement de Stokes, l'image est cependant modifiée avant de procéder à ces traitements. En effet, afin de garantir que seuls des pores en contact avec les faces d'injection et de sortie seront connectés avec l'extérieur, quatre plans sont ajoutés à la géométrie, dans les directions parallèles à l'écoulement. Par exemple, pour un écoulement dans l'axe X , les quatre faces XY et XZ de l'image sont bouchées avec des plans *solides*, c'est-à-dire ayant la même valeur que le complémentaire de l'objet, la valeur 0 dans notre cas. Ceci a pour effet d'agrandir les dimensions de l'image à $500 \times 502 \times 502$.

4.2.1 Suppression des artefacts de binarisation

Cette opération fait passer certains points de l'objet dans le complémentaire et inversement, suivant des critères de sélection basés sur le voisinage topologique des voxels. Le point le plus intéressant est que cette méthode ne modifie, dans notre exemple, que 8 666 points, parmi lesquels 7 350 passent de l'objet dans le complémentaire et 1 316 passent du complémentaire à l'objet. Ces nombres sont extrêmement faibles par rapport au volume considéré. Cependant, ils sont suffisants pour écarter tous les problèmes liés à la squelettisation.

La visualisation de ces points permet de signaler qu'ils semblent répartis uniformément dans le volume. Ils semblent néanmoins se concentrer sur les zones de contacts entre les sphères, comme on pourrait s'y attendre. On peut également noter une concentration plus élevée des artefacts le long de l'axe de rotation de l'échantillon (axe de rotation de la tomographie). Cette irrégularité peut s'expliquer du fait que l'axe de rotation de l'échantillon est un lieu singulier pour la reconstruction tomographique.

4.2.2 Suppression des composantes connexes isolées

La phase précédente a modifié des points de l'image. Il faut éliminer les composantes connexes isolées de l'objet et du complémentaire qui ont pu être générées par l'opération précédente.

Dans un premier temps, les composantes connexes de l'espace poral isolées dans le complémentaire sont supprimées. 17 sont dénombrées, qui représentent 477 pixels à modifier, passant de la valeur 1 à 0. Elles sont de tailles réduites, et n'ont pas d'influence réelle sur l'écoulement ou la perméabilité. En effet, de telles composantes

connexes sont supprimées uniquement parce qu'elles ne participent pas à l'écoulement, puisqu'elles ne traversent pas le solide de part en part. Il est donc inutile de s'en encombrer.

Ensuite, les composantes connexes du complémentaire isolées dans l'espace poral sont éliminées. 13 sont comptées, soit 147 pixels qui passent de 0 à 1. Celles-ci sont potentiellement problématiques en revanche. Elles représentent en effet des morceaux de solide qui flottent. Cela n'a aucun sens physique, mais ne pas en tenir compte revient à modifier la géométrie dans laquelle l'écoulement a lieu, et par conséquent ses propriétés. Le fait qu'aussi peu de pixels soient modifiés pourrait laisser penser que leur suppression aura une influence négligeable.

Au total, l'ensemble de ces opérations touche 9 290 pixels de l'image, si l'on exclut la suppression initiale de la porosité non percolante. Il s'agit d'une quantité infime des pixels de l'image. Cette modification, comme l'exemple 2.4 le montrait, a des répercussions conséquentes sur le squelette.

4.3 Squelettisation

Pour choisir une carte de priorité et une condition aux limites adaptées, plusieurs tests ont été réalisés. L'idée initiale était de conserver des nœuds accrochés sur les faces d'injection et de sortie. Le but était de pouvoir imposer des conditions aux limites pour l'écoulement de manière naturelle, sur les nœuds en contact avec l'extérieur.

Pour tenter d'ajuster le squelette, deux paramètres peuvent être utilisés : la carte de priorité et la condition aux limites.

4.3.1 Carte de priorité

Le squelette doit être centré dans l'espace. La carte de distance s'impose donc naturellement, puisqu'elle permet, en érodant en premier les couches de pixels en contact avec le complémentaire, d'aboutir à un squelette centré.

La condition aux limites utilisée pour calculer la carte de distance a une influence sur ses valeurs et donc sur le squelette qui en découlera. Plusieurs sont envisageables :

1. l'extérieur de l'image est constitué uniquement de complémentaire ;
2. l'extérieur de l'image est constitué uniquement d'objet ;
3. l'image se répète périodiquement dans l'espace ;
4. l'image se répète dans l'espace sous la forme d'un miroir d'elle-même.

La condition aux limites de périodicité est écartée parce qu'elle ne correspond pas à une condition correcte pour l'écoulement. Les conditions aux limites 2 et 4 mènent au même résultat pour la carte de distance. Cette équivalence a été constatée expérimentalement et devrait être prouvable analytiquement. Cela laisse donc deux

conditions aux limites différentes pour la carte de distance. La figure 4.2 montre un exemple des deux conditions aux limites considérées pour la suite.

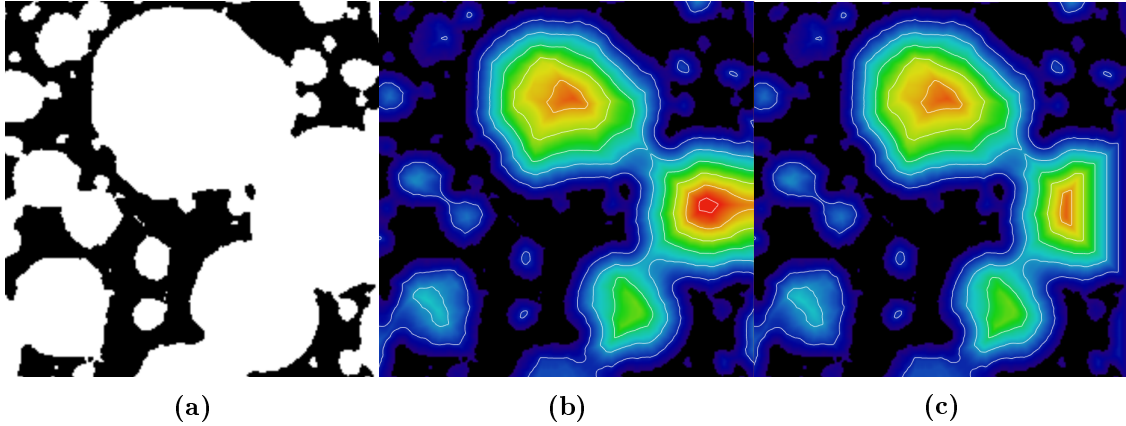


FIGURE 4.2 – (a) La géométrie dont on cherche à calculer la carte de distance est extraite du volume complet. Pour plus de facilité, on observe une section YZ seulement, et plus particulièrement une bulle en contact (à droite) avec l’extérieur. (b) Si l’on considère que l’extérieur du volume est entièrement constitué du même matériau que l’objet, des valeurs hautes sont présentes sur le bord de la carte de distance. Les hautes valeurs ont une plus faible priorité dans l’ordre de suppression des points simples lors de la squelettisation. (c) Au contraire, si l’on considère que l’extérieur du volume est entièrement constitué de complémentaire, les valeurs au bord sont faibles puis grandissent vers l’intérieur de l’image. Sur (b) et (c), les lignes blanches représentent des isovalues de la carte de distance.

4.3.2 Squelettisation

Les mêmes conditions aux limites peuvent s’appliquer à la squelettisation. De la même manière que pour la carte de distance, la condition de périodicité est écartée. En effet, tenir compte de ce qu’il se passe périodiquement n’a pas de sens dans le cas de l’écoulement. Il n’y a pas de raison que le squelette, et par la suite le positionnement des pores, tiennent compte de la périodicité.

Il reste donc trois conditions aux limites envisagées pour la squelettisation. Combinées aux deux cartes de distance, cela mène à comparer six squelettes différents. Pour cette étude, nous sommes intéressés par la présence et la forme du squelette sur les faces d’entrée et de sortie de l’image, comme le montre la figure 4.3.

Cette figure est un tableau dans lequel chaque cellule représente le squelette sur une des faces d’injection du volume étudié, calculé avec des conditions aux limites particulières pour la carte de distance et le squelette. Les squelettes, tout comme les cartes de distance, ont été calculés en 3D sur le volume complet. La figure 4.3 ne présente que des extraits de la section à laquelle on s’intéresse pour déterminer s’il est possible d’obtenir un squelette possédant les propriétés recherchées.

L’observation de ces six images permet d’affirmer qu’aucune de ces combinaisons n’atteint l’objectif d’avoir des points d’accroche directement utilisables pour imposer une différence de potentiel sur le réseau. Les images 4.3(b), 4.3(c) et 4.3(f)

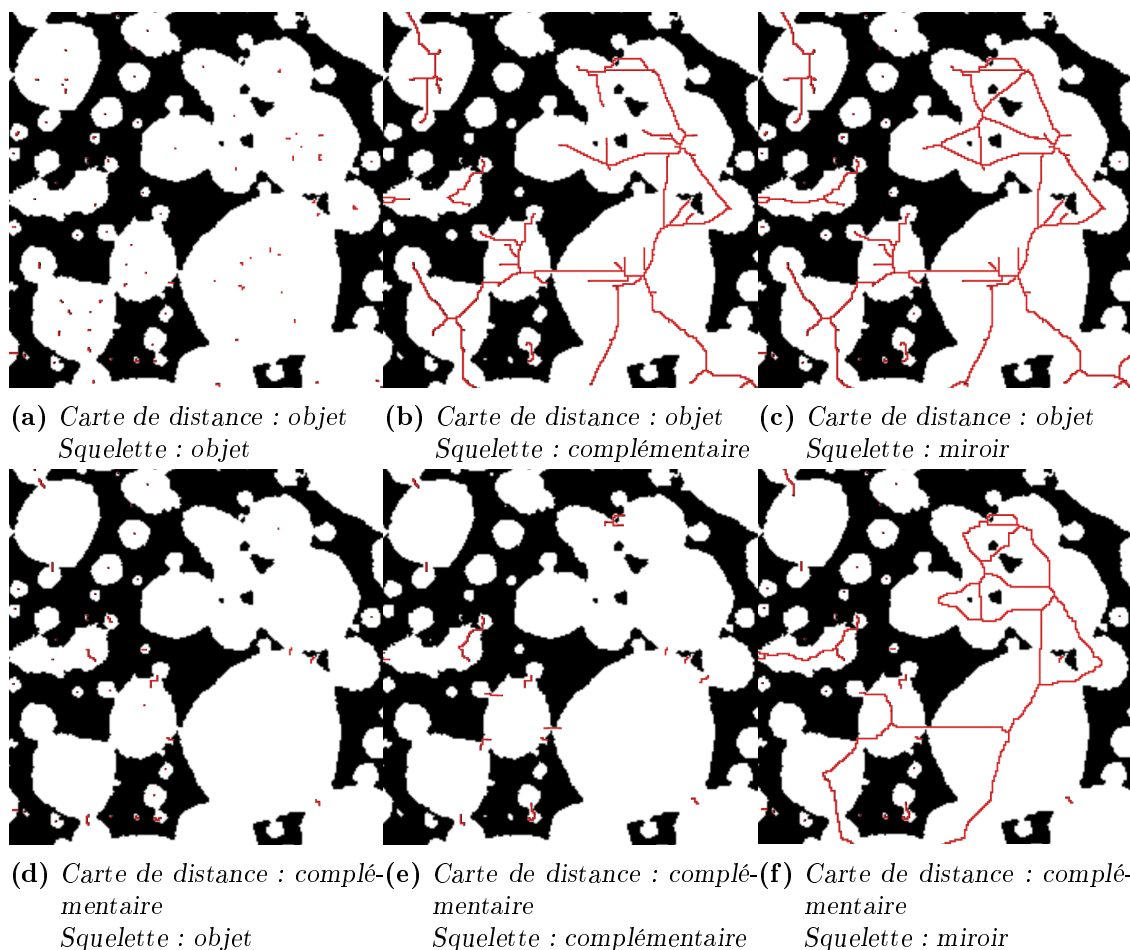


FIGURE 4.3 – Chacune des six images de cette figure représente un morceau de la géométrie de l'une des face d'injection du volume (en noir pour le complémentaire et blanc pour l'objet) avec le squelette de cette section en rouge. Chaque ligne de cette figure correspond à une carte de priorité différente : la première ligne (a), (b), (c) correspond à des squelettes calculés à partir de la carte de priorité 4.2(b), c'est-à-dire avec l'extérieur considéré comme étant de l'objet. La seconde ligne (d), (e), (f) correspond à des squelettes calculés en prenant l'image 4.2(c) pour carte de priorité. Chaque colonne de cette figure correspond à une condition aux limites différente pour la squelettisation : la première colonne (a), (d) correspond à l'extérieur complètement constitué d'objet, la deuxième colonne (b), (e) correspond à l'extérieur rempli de complémentaire, la troisième colonne (c), (f) correspond à la condition aux limites « miroir ».

comportent de grandes lignes sur la face connectée à l'extérieur. Il faudrait les réduire à quelques points pour ne pas trop compliquer le graphe. Les images 4.3(d) et 4.3(e) comportent de petites zones d'accroche, qui semblent positionnées à des endroits peu pertinents par rapport aux bulles que l'on suppose constituer les pores. Enfin, l'image 4.3(a) a des myriades de points d'accroche, pour lesquels un post-traitement serait aussi nécessaire afin de les filtrer.

Au final, aucune image n'est directement exploitable sans un traitement particulier. Le but de l'approche proposée dans [Plougouven 09] était justement d'éviter les traitements spéciaux pour les cas particuliers. Depuis le début, l'objectif est de

rester le plus général possible. Une solution demandant des traitements ponctuels et difficilement généralisables n'est pas acceptable.

En prenant un petit peu de recul, il semble par ailleurs difficile, en partant du squelette uniquement, de savoir positionner de manière raisonnable des points d'injection en nombre nécessaire et suffisant. Il faudrait pour cela connaître la position des pores, ce qui n'est pas encore le cas. Tout ceci confirme la direction qui a été donnée dans le chapitre 2, à savoir qu'il faut se débarrasser du squelette pour reconstruire un graphe d'interconnexion à partir du partitionnement de l'espace poral. De cette manière, les connexions à l'extérieur sont facilement détectées et ajoutées au graphe.

La solution adoptée pour la suite est de calculer la carte de distance et le squelette en considérant l'extérieur comme étant constitué de complémentaire. C'est la condition qui semble réduire au maximum l'influence de l'extérieur sur la forme du squelette. Les pores auront tendance, sauf cas particulier, à être centrés à l'intérieur de l'image, ce qui devrait avoir pour effet de limiter les pores potentiellement problématiques à la surface. Notons tout de même que ceci n'est qu'une hypothèse de travail et un choix de condition aux limites arbitraire.

4.3.3 Effet des pré-traitements sur le squelette

En utilisant la condition aux limites décrite ci-dessus, il est intéressant d'observer l'effet des pré-traitements imposés à l'image de départ en comparant les squelettes obtenus avec et sans ces filtrages. On constate la disparition des surfaces, ce qui est un résultat très important pour localiser les pores. La figure 4.4 permet de visualiser les surfaces présentes dans le squelette sans pré-traitement de l'image, qui sont absentes du squelette avec les pré-traitements. Ces surfaces sont causées par la présence de composantes connexes de l'objet isolées dans le complémentaire. Puisqu'elles sont isolées et non percolantes, elles ne participent pas à l'écoulement et leur suppression n'a pas d'influence sur la propriété visée.

Il est en revanche plus difficile de voir l'effet de la suppression des artefacts de binarisation. Ceux-ci apparaissent facilement lorsque la connectivité de l'objet est la 26-adjacence. C'est d'ailleurs pour cela que cette méthode a été élaborée. Il semble que la 6-adjacence ne pose pas les mêmes problèmes d'artefacts de binarisation lors de la squelettisation.

La 6-connectivité a été motivée par deux facteurs distincts. Le premier est la cohérence globale de la démarche, qui a déjà été évoquée : au niveau macroscopique, deux pores sont en contact s'ils sont connectés au moins par une facette de voxel. Dans tous les autres cas, un fluide ne peut pas passer de l'un à l'autre. Ceci correspond parfaitement à la notion de 6-adjacence. Cependant, puisque le squelette n'est qu'une étape dans la construction d'un partitionnement, l'utilisation d'un squelette 26-connexe a été essayée. Celui-ci présente l'avantage d'être de plus petite taille et plus *représentatif* dans le sens où il comporte moins de « marches d'escalier ».

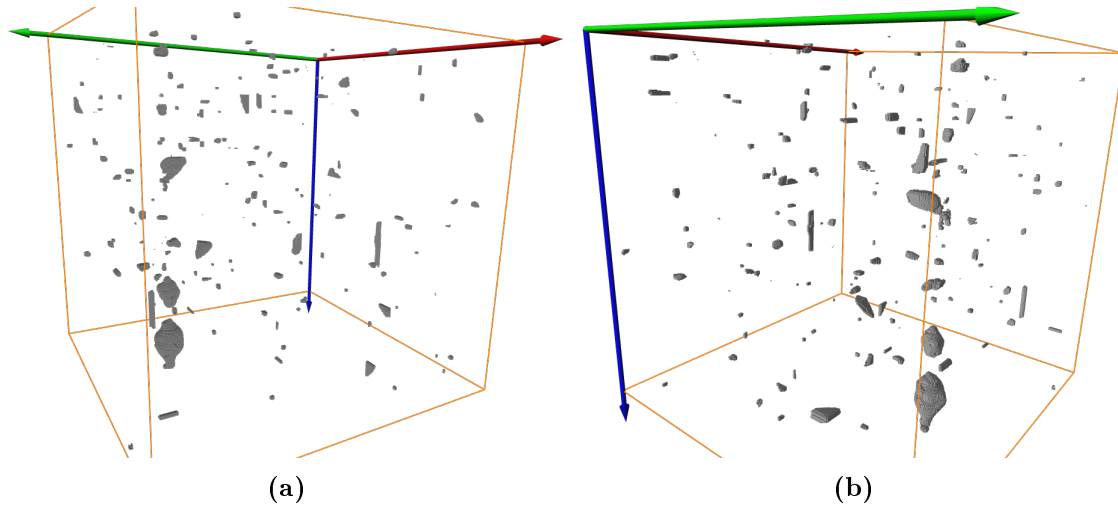


FIGURE 4.4 – Deux points de vue permettant de visualiser les surfaces présentes dans le squelette lorsque les composantes connexes de l'objet isolées ne sont pas supprimées avant la squelettisation.

L'inconvénient majeur de ce squelette intervient au moment du calcul de la ligne de partage des eaux. Pour rappel, on utilise les nœuds après fusion comme graines pour marquer les bassins que doit séparer la ligne de partage des eaux. Pour éviter que des pores soient enfermés dans d'autres pores, les graines sont maximisées : l'union des boules maximales centrées sur les nœuds appartenant à un pore est utilisée. Puisque le squelette est 26-connecté, il peut arriver que les graines utilisées pour définir les bassins de la ligne de partage des eaux ne soient pas 6-connectées. Plus grave, il arrive également que des pores définis par la ligne de partage des eaux ne soient pas 6-connectés. La graine de départ ne l'étant pas, il est possible que le processus d'envahissement de l'espace poral se termine sans que la graine n'ait été 6-reconnectée. Obtenir un pore qui n'est pas 6-connecté n'est pas acceptable et nous a poussé à choisir un squelette 6-connecté pour éviter cet écueil.

4.4 Classification des points du squelette

La classification des points du squelette permet de produire un premier graphe directement issu du squelette. Ce premier graphe comporte 18 381 nœuds, en respectant les critères définis dans le chapitre 2. Lors de cette étape, on vérifie que tous les points du squelette ont pu être convertis en nœud ou en élément de branche, ce qui est bien le cas dans notre exemple. La figure 4.5 montre un extrait de ce graphe. Chaque nœud est représenté par une sphère, les branches sont également dessinées.

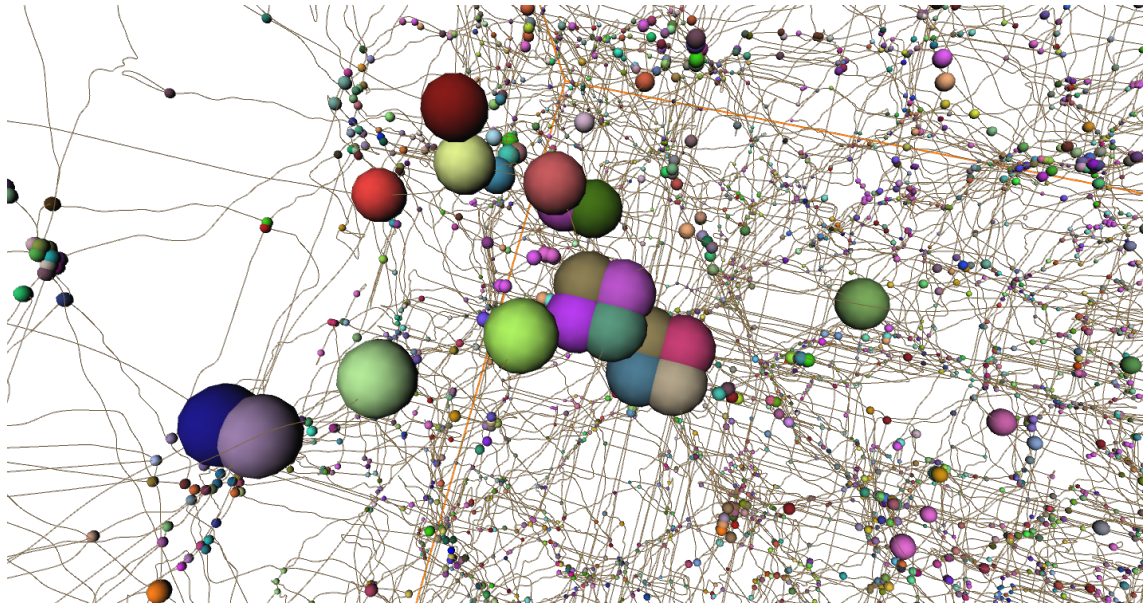


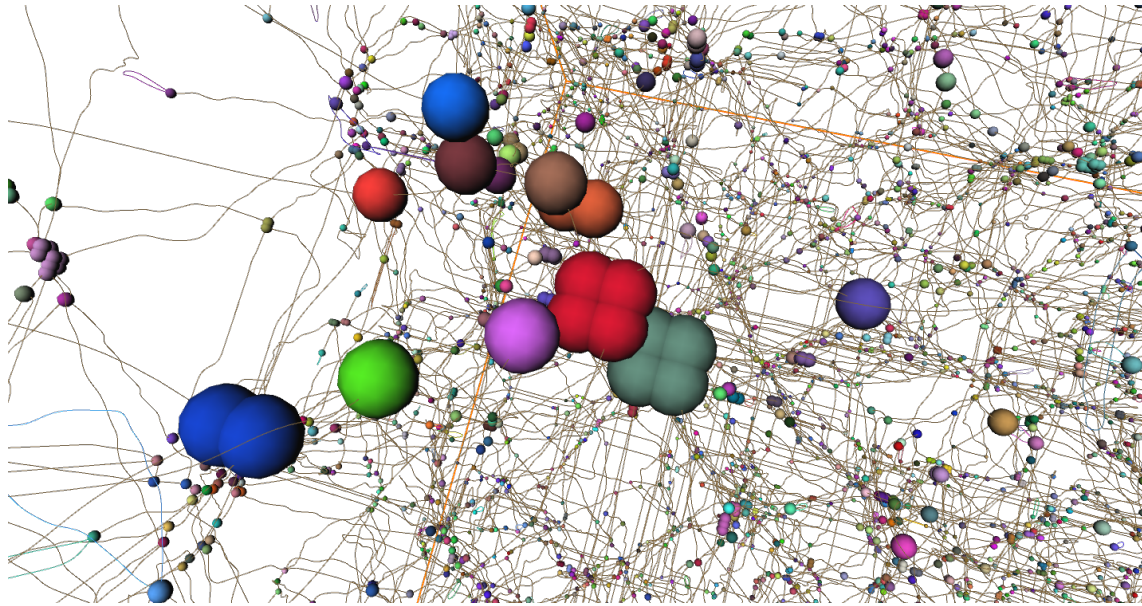
FIGURE 4.5 – Représentation du graphe directement issu du squelette après classification des points. Les nœuds sont représentés par des sphères colorées, les branches par des courbes reliant les nœuds. Bien que cela ne soit pas évident, tous les nœuds ont une couleur différente, qui correspond à leur identifiant de départ. Les étapes de fusion vont modifier ces identifiants, sans modifier le graphe. Ainsi, l'information est conservée d'étape en étape.

4.5 Fusion des nœuds

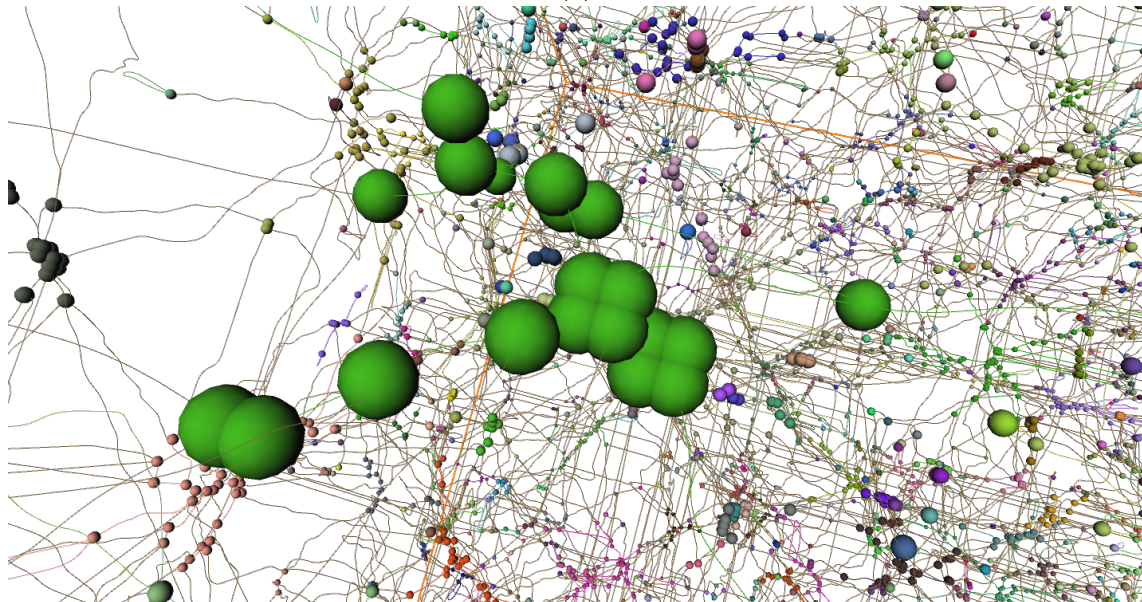
La première étape de fusion est rapidement appliquée pour réduire le nombre de nœuds du graphe. Pour cela, il faut se rappeler que chaque nœud correspond à un point du squelette, pour lequel on peut également connaître la valeur dans la carte de distance. Les nœuds adjacents sont donc fusionnés comme ceci : pour chaque couple de nœuds adjacents, celui qui porte la plus petite valeur dans la carte de distance reçoit l'identifiant de l'autre. De cette manière, c'est l'identifiant du plus grand qui reste présent dans le graphe. En appliquant cette simple procédure, on obtient un graphe dans lequel il ne reste plus que 15 135 identifiants différents. La figure 4.6(a) montre le résultat de ce premier filtrage des nœuds.

Le second critère de fusion est basé sur le volume de recouvrement de boules maximales. Pour chaque identifiant, qui regroupe potentiellement plusieurs nœuds, la boule maximale utilisée est centrée sur le nœud correspondant à la plus grande valeur dans la carte de distance. Une fois les boules maximales choisies, le calcul des volumes de recouvrement est une opération arithmétique simple. L'opération menée à son terme permet de réduire le graphe à 4914 identifiants différents. La figure 4.6(b) tente d'illustrer ce résultat.

On pourrait penser que les différents critères de fusion ont déjà réduit suffisamment le nombre de nœuds. Toutefois, un problème définitivement bloquant apparaît, malgré tous ces traitements. Lors du calcul de la ligne de partage des eaux, des pores de faible volume vont apparaître. Ils empêchent le calcul du coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ en fai-



(a)



(b)

FIGURE 4.6 – (a) Le premier critère de fusion identifie les nœuds adjacents et leur attribue le même identifiant, représenté par la même couleur. Les groupes de quatre nœuds sont ainsi regroupés sous le même identifiant : de manière évidente, ils représentent le même point d'intersection du squelette. Le fait qu'ils ne soient pas naturellement confondus est lié à la discrétisation de l'espace. (b) En appliquant le second critère de fusion, basé sur les volumes de recouvrement des boules maximales centrées sur les nœuds restants, la fusion est plus rapide et à plus grande échelle. Les deux groupes de nœuds se trouvaient donc à l'intérieur d'un même pore, ils ont maintenant la même couleur.

sant échouer toute tentative de connecter une embouchure. Un critère de fusion de nœuds permettant de prévenir leur apparition dans le partitionnement est proposé.

Il semble par ailleurs possible d'imposer un autre critère de fusion afin de réduire

la quantité de calcul de $\lambda_{H_i H_j}$. Il s'agit de détecter des groupes de nœuds non-débouchant. Ces groupes ne participent pas à l'écoulement, mais requièrent tout de même le calcul du $\lambda_{H_i H_j}$ associé à leur contact avec le reste de l'espace poral. Le critère de fusion proposé permet de les faire disparaître du partitionnement.

Ces deux nouvelles opérations de fusion sont donc ajoutées aux précédentes. Elles sont imposées par le problème que l'on cherche à résoudre. Contrairement aux deux premiers critères, qui se veulent généraux, ceux qui sont décrits maintenant sont spécifiques à notre application.

4.5.1 Suppression des nœuds à l'origine de pores de faible volume

Les pores de faible volume posent un véritable problème lors du calcul des $\lambda_{H_i H_j}$. En effet, après que la géométrie des pores nécessaires a été extraite de l'espace poral, il est indispensable de connecter des embouchures afin de réaliser une simulation numérique d'écoulement de Stokes. Pour éviter que ces embouchures n'aient trop d'influence sur l'écoulement, en le contraignant trop fortement, il a été décidé que les embouchures devaient avoir une section carrée d'au moins dix pixels d'arête. Or, les pores de faible volume ne permettent pas de connecter un tel objet.

Pour illustrer cela, prenons un exemple extrême : un pore de volume unitaire, composé d'un seul voxel. Il est impossible, quel que soit l'angle sous lequel on essaie, de lui adjoindre une embouchure telle qu'elles sont définies ci-dessus. Sans aller jusqu'à un cas aussi extrême, il existe de nombreuses formes géométriques qui bloquent notre démarche.

Afin de prévenir ce genre de configuration, le critère qui est proposé repose sur la valeur associée aux nœuds dans la carte de distance. Un volume minimal de 1 000 voxels par pore est arbitrairement choisi. Cela correspond à une sphère de rayon de $R_{min} = \sqrt[3]{1000 \frac{3}{4\pi}} \approx 6,204$ pixels. Tous les nœuds associés à des valeurs de distance inférieures à cette valeur R_{min} sont fusionnés à leur plus proche voisin de taille supérieure à R_{min} .

À l'issue de cette opération de fusion de pores, il reste 1 666 identifiants dans le graphe. Cette étape aurait pu être réalisée après la ligne de partage des eaux. Le volume exact des pores aurait alors été connu et le critère aurait peut-être été plus précis. Un autre critère aurait d'ailleurs pu être utilisé : un test pour savoir s'il est possible de connecter une embouchure sur le pore. Cette discussion est ouverte et pourrait donner lieu à une amélioration dans la résolution du problème des pores de faible volume.

4.5.2 Suppression des groupes de nœuds non débouchants

Le squelette a été construit de telle sorte qu'il n'existe pas de branche non-débouchante dans le graphe. En effet, dans le squelette ultime qui a été construit, il ne

subsiste pas de point d'extrémité de branche. En revanche, il est tout à fait possible de rencontrer des structures plus complexes, qui ne permettent pas à un écoulement de s'établir (elles ne débouchent pas sur l'espace poral) mais qui ne peuvent pas être fusionnées par les critères généraux. La figure 4.7 montre un exemple extrait de la géométrie complète.

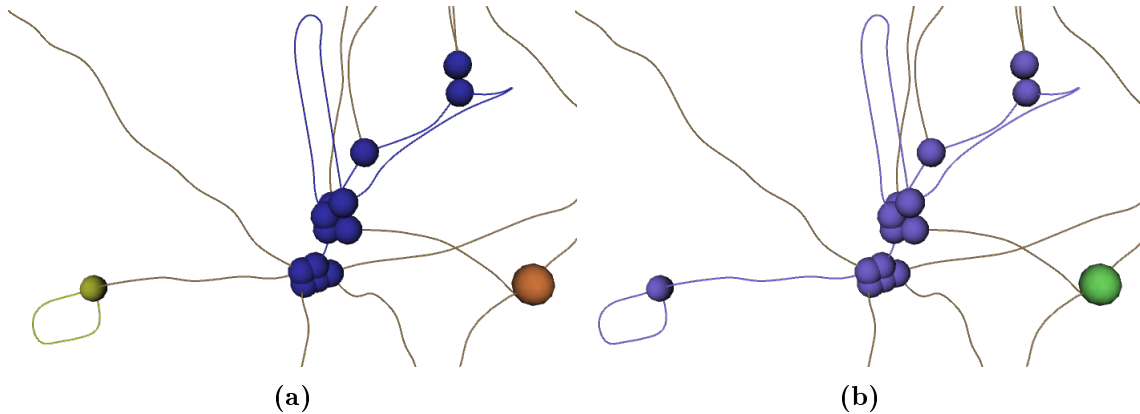


FIGURE 4.7 – (a) Le groupe jaune connecté au groupe de nœuds bleus n'a pas d'autres connections avec le reste du graphe. Il est non-débouchant. (b) Il est donc possible de le rattacher au groupe bleu, afin qu'ils forment un seul et unique pore.

La présence de la boucle a fait que le squelette a conservé cette branche. Pourtant, la fusionner avec le pore auquel elle est connectée a du sens : il n'y aura pas d'écoulement dans le pore qu'elle représentait auparavant, puisque celui-ci ne pourra pas trouver de chemin de sortie. La détection de ces groupes de nœuds non-débouchants est une opération simple dans un graphe. Il suffit de détecter les isthmes, c'est-à-dire les arêtes du graphe qui, si elles sont enlevées, augmente le nombre de composantes connexes du graphe. Lorsqu'une de ces arêtes est détectée, il suffit de fusionner la plus petite composante connexe avec le nœud sur lequel elle est connectée. Suite à cette nouvelle opération de fusion, le graphe comporte 1 637 groupes de nœuds identifiés.

Ce critère revient à supprimer les pores non débouchants en les fusionnant aux autres. Cette fusion aurait pu être faite après la ligne de partage des eaux, les pores et leurs interconnexions n'étant clairement délimités qu'à cette étape. Il n'y a cependant pas de raison que les pores impactés soient différents entre les deux étapes. Il a été décidé de la faire en amont, afin de regrouper les étapes de fusion de nœuds.

4.6 Ligne de partage des eaux

La ligne de partage des eaux est calculée comme décrit dans le chapitre 2. Les marqueurs de bassins sont construits à partir des groupes de pores restants. L'union des boules maximales centrées sur les nœuds portant le même identifiant est utilisée.

Ensuite se pose la question de topographie de propagation de la ligne de partage des eaux. Il est classique d'utiliser l'inverse de la carte de distance. Nous avons donc repris la carte de distance calculée pour le squelette (après suppression des artefacts de binarisation et des composantes connexes isolées). On obtient avec ces éléments un pore par identifiant restant suite aux opérations de fusion de nœuds.

La figure 4.8 montre un exemple de pore issu du résultat du partitionnement. Il s'agit d'un volume ressemblant à une boule, mais dont les contours sont très irréguliers (figure 4.8(a)). Dans la figure 4.8(b), les pores en contact avec le premier sont aussi dessinés. Cela permet de se rendre compte de la variabilité des formes et des volumes des pores qui existent dans le partitionnement. Le pore violet, petit et au centre de la figure 4.8(b), est une boule quasi parfaite de faible volume. Le pore vert clair, à gauche, a un volume beaucoup plus important et comporte plusieurs protubérances qui rendent sa surface extérieure chaotique.

La reconstruction du réseau d'interconnexion des pores est nécessaire du fait que le graphe issu du squelette ne rend généralement pas compte de ces interconnexions. Les différents problèmes de ce graphe, évoqués au chapitre 2, ne se retrouvent pas tous dans notre exemple. Ainsi, le problème des pores excentrés n'a pas été détecté. En revanche, la figure 4.9 montre un exemple d'une arête manquante dans le graphe issu du squelette. La reconstruction du graphe permet de la faire apparaître et par conséquent de tenir compte de la connexion existant entre les deux pores.

Plusieurs exemples peuvent être trouvés dans notre partitionnement, bien que les pores soient dans l'ensemble assez réguliers et morphologiquement proches d'une sphère. Cela semble confirmer l'hypothèse que ces configurations font partie du cas général et apparaissent sans doute dans tout partitionnement utilisant une ligne de partage des eaux. C'est pourquoi la reconstruction du graphe est préférée à sa correction par ajout ou suppression d'arête, suivant les cas rencontrés. Le graphe obtenu n'a pas la même topologie que l'espace poral, mais il représente bien les interconnexions entre les pores, et les nœuds qui les représentent sont positionnés de manière contrôlée. Dans notre cas, ils sont situés sur un maximum de la carte de distance au complémentaire, qui est un lieu pertinent pour notre application. En effet, cet endroit est généralement un lieu de stabilité locale pour la pression du fluide. Bien que la position des nœuds n'a pas d'importance en théorie, il est préférable de tout de même les placer au mieux, pour réduire les effets d'erreurs numériques.

Le volume étudié dans ce chapitre doit permettre d'évaluer la perméabilité en utilisant la loi de Darcy. Pour cela, on a besoin de pouvoir imposer des conditions aux limites qui permettent de simuler un écoulement de Stokes. Pour cela, deux ensembles de nœuds ont été ajoutés au réseau, afin de simplifier l'application de cette condition aux limites. L'un d'entre eux est visible sur la figure 4.10, l'autre ensemble se situant sur la face opposée de l'image. La présence de ces nœuds *virtuels* (ils ne correspondent pas à un pore réel) permet d'estimer les $\lambda_{H_i H_j}$ entre l'extérieur et les pores connectés au bord de la même manière que pour les nœuds internes.

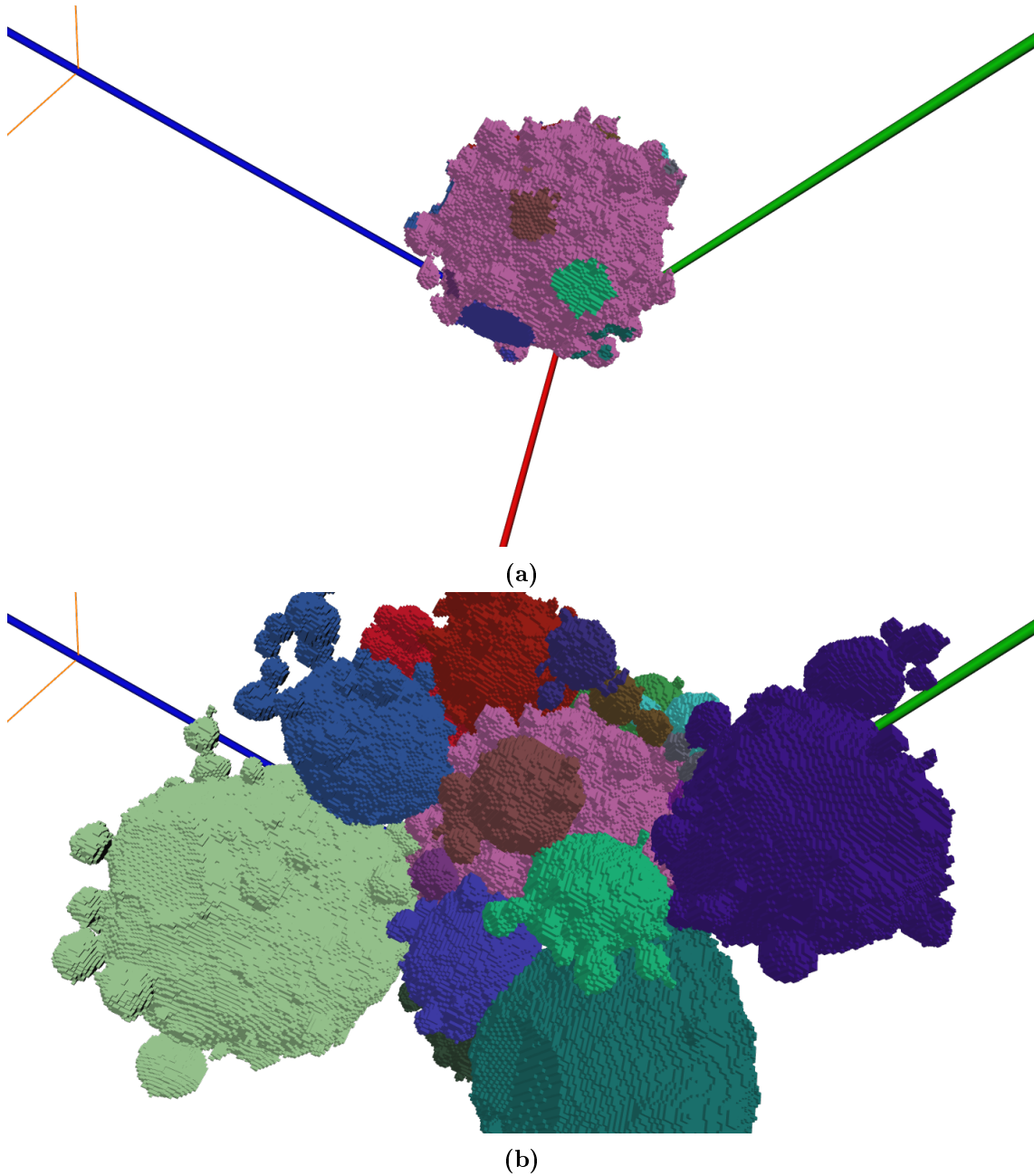
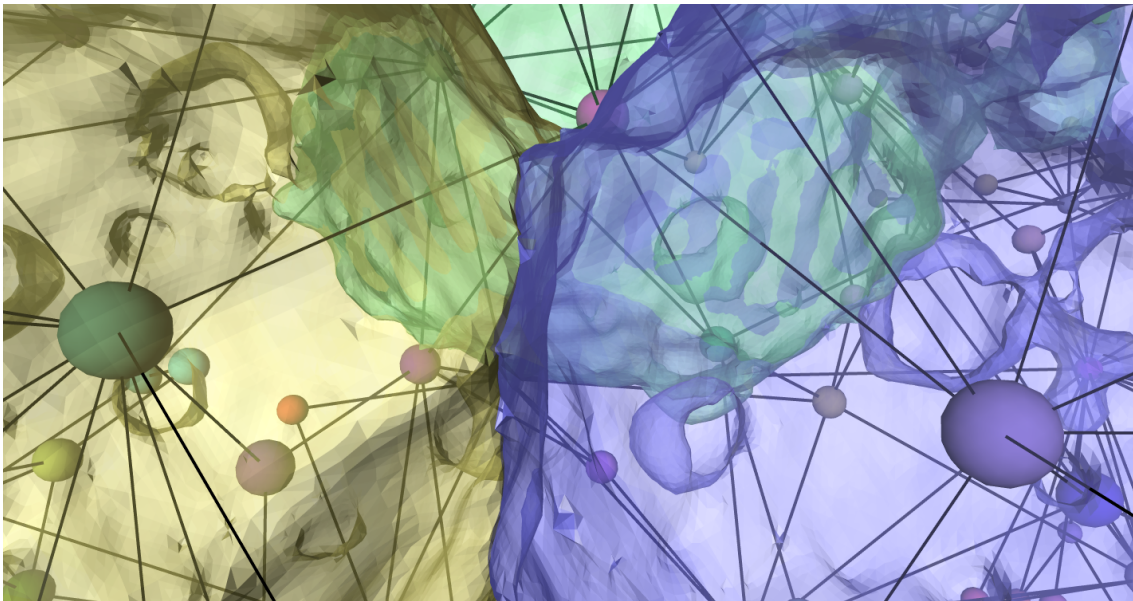
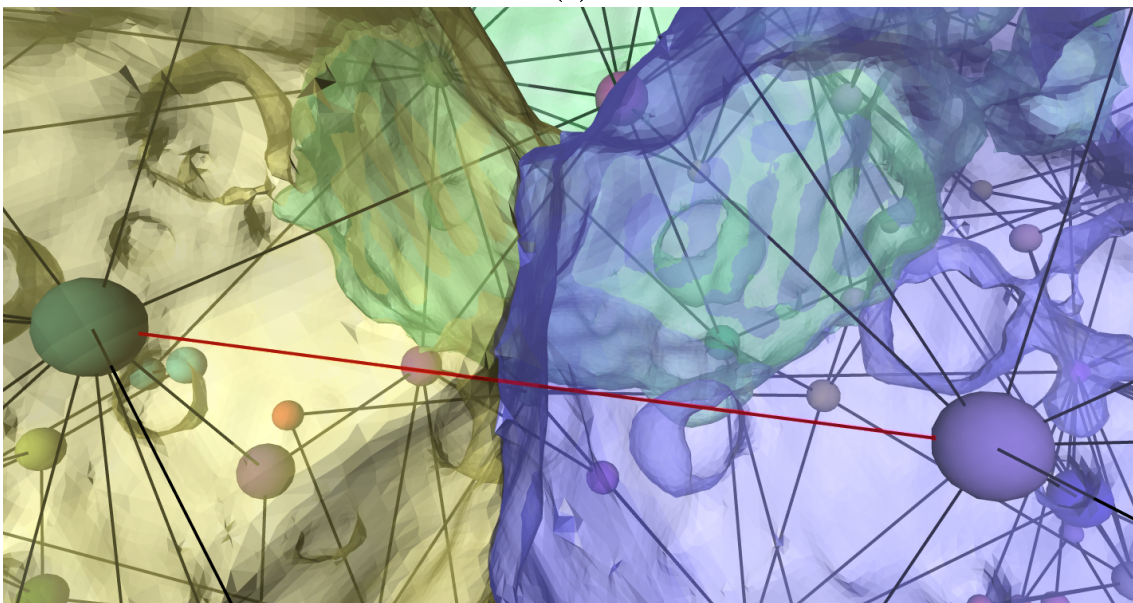


FIGURE 4.8 – (a) L'objet représenté ici est l'un des 1637 pores restants dans le graphe après les quatre opérations de fusion. Il est dessiné en rose. Les autres couleurs représentent les surfaces de contact avec ses voisins. De nombreuses cavités de forme sphérique apparaissent à la périphérie du pore, qui est par conséquent irrégulière. (b) Les voisins du pore précédemment exposé sont maintenant dessinés, chacun avec une couleur différente. On peut noter sur ce petit exemple la présence de pores de grande taille (le vert clair à gauche par exemple) et d'autres plus petits (le violet, à droite du vert clair). La disparité de taille et de forme des pores confirme l'idée de départ que ce matériau est un bon exercice pour tester notre démarche.



(a)



(b)

FIGURE 4.9 – Les deux images de cette figure présente le même point de vue, seul le graphe dessiné change. Trois pores sont visibles, en jaune et bleu au premier plan et vert à l'arrière plan. Les nœuds représentant ces pores sont également dessinés, ainsi que quelques arêtes en noir, qui joignent d'autres nœuds du graphe à ceux qui nous intéressent. La différence flagrante entre (a) et (b) est qu'une arête manque sur (a). Cette arête devrait symboliser la connexion existant entre les pores jaune et bleu. La reconstruction du graphe, visible dans (b), fait apparaître cette jonction.

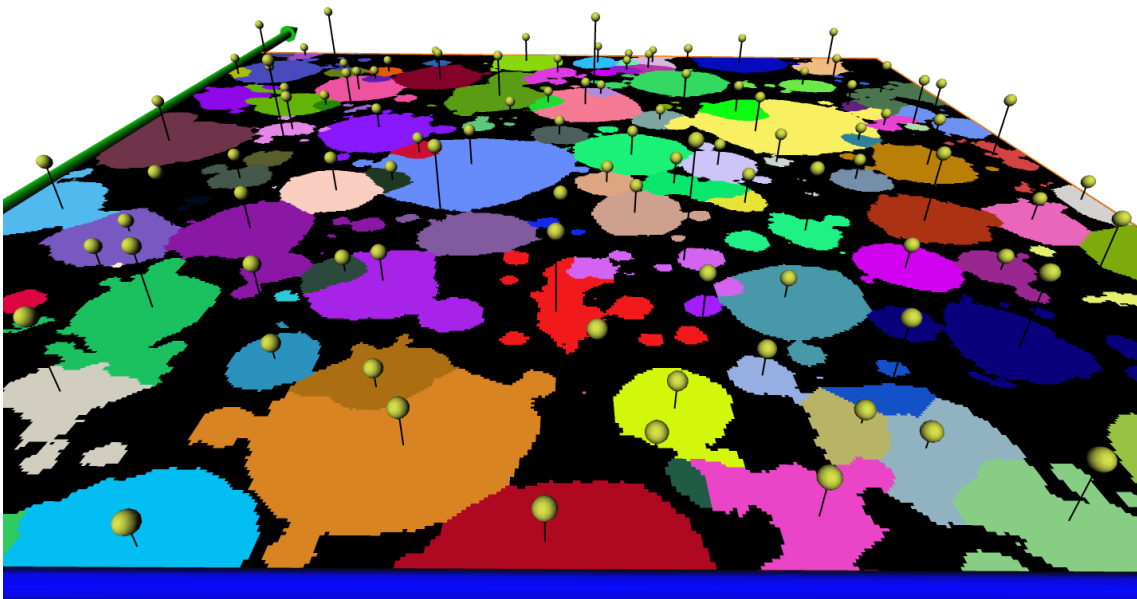


FIGURE 4.10 – Le plan dessiné sur cette figure est la première section YZ du volume, située en $X = 0$. Elle correspond à ce qui pourrait être la face d'entrée d'un fluide, lors d'un écoulement dans la géométrie du matériau. Les pores en contact avec l'extérieur sont coloriés afin de les distinguer du solide, qui est en noir. Les sphères reliées à des arêtes noires qui traversent le plan sont les nœuds et les arêtes du graphe qui ont été ajoutés afin de matérialiser les connexions des pores avec l'extérieur. Leur existence est justifiée par la nécessité de calculer le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ existant entre l'extérieur et un pore en contact avec celui-ci.

Chaque pore en contact avec l'extérieur a un nœud virtuel qui lui est associé. Un nœud virtuel est situé à égal distance du bord de l'image que le nœud auquel il est relié. L'*extérieur* est un pore infiniment grand, duquel on ne prendra qu'un extrait pour le calcul des $\lambda_{H_i H_j}$. Ce processus sera détaillé dans la section suivante.

4.7 Calcul des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$

Le graphe représentant les interconnexions entre les pores du matériau comporte 4 759 arêtes. Chaque arête correspond à un coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ à calculer. Pour chacune de ces arêtes, les trois étapes de la méthode présentée au paragraphe 3.3 s'appliquent successivement. Parmi les 4 759 arêtes du graphe, la plupart ne pose pas de problème particulier. Un traitement automatique est lancé pour extraire les pores nécessaires, placer les embouchures et simuler un écoulement local en résolvant les équations de Stokes. Certains cas sont malgré tout plus complexes que les autres, notamment sur les bords de l'image. Quelques cas nécessitent même un traitement manuel pour estimer leur coefficient $\lambda_{H_i H_j}$.

4.7.1 Cas traités automatiquement

Un exemple représentatif des configurations simples est montré par la figure 4.11. Il s'agit d'un couple de pore séparés par une surface simple, qui est entièrement bordée de solide. Dans un cas tel que celui-ci, seuls les deux pores en contact sont nécessaires pour l'estimation du coefficient $\lambda_{H_i H_j}$. Le calcul numérique local permet de déterminer les pressions à l'endroit des nœuds du graphe associé aux pores, et le débit traversant la surface qui sépare les deux pores. Le coefficient est alors facilement estimé d'après l'équation 3.19b.

La figure 4.12 représente également un cas que nous considérons comme normal, puisqu'il est pris en compte dans la théorie. Il s'agit d'un triplet de pores, qui partagent une surface commune les séparant deux à deux. Dans ce cas précis, trois pores sont regroupés pour calculer les trois coefficients correspondant aux trois surfaces de contact. Trois calculs locaux sont réalisés, bien que cela ne soit en théorie pas indispensable. En effet, puisque les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ sont uniques⁴, n'importe quel écoulement permet de les déterminer. Il aurait par exemple été possible de ne calculer qu'un seul écoulement dans la géométrie réduite aux trois pores. Connaissant les pressions aux nœuds et les débits traversant les différentes surfaces de contact, il aurait été possible de déterminer les trois coefficients directement. Cependant, la précision numérique aurait été moindre qu'en faisant les trois calculs. Cette affirmation mériterait toutefois une vérification numérique plus aboutie.

Enfin, la figure 4.13 présente le cas d'un pore en contact avec l'extérieur. La même règle s'applique concernant les pores nécessaires au calcul. Dans cet exemple, le pore est isolé sur le bord et il n'a pas de voisin impliqué dans un écoulement avec

⁴Rappel : c'est une hypothèse qui a été posée au chapitre 3.3

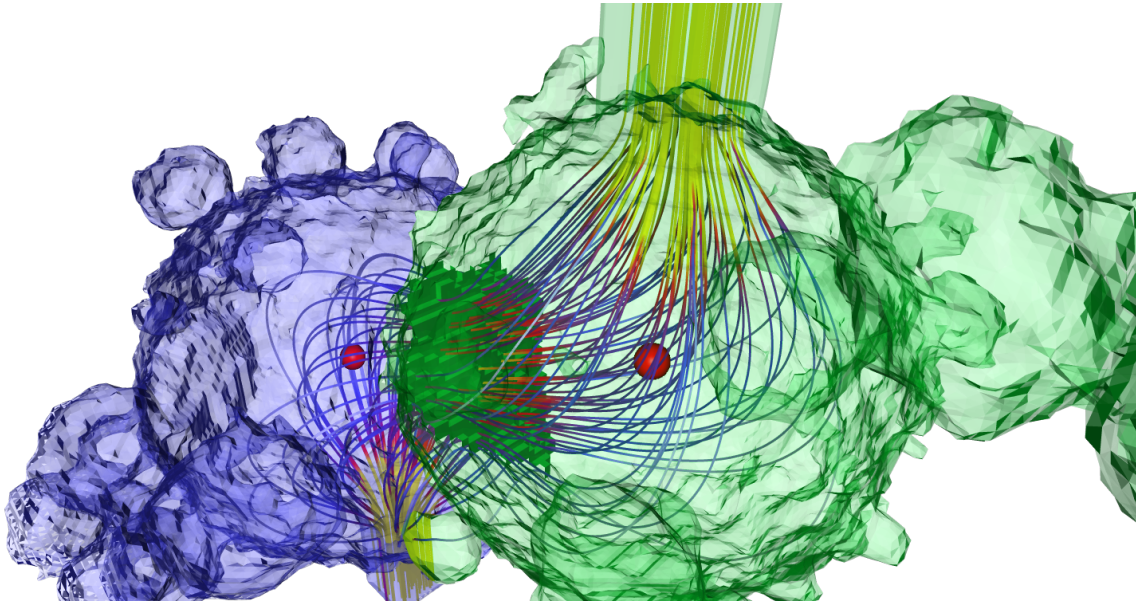


FIGURE 4.11 – Cette figure présente la géométrie nécessaire au calcul du coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ entre les pores bleu et vert transparents. La position des nœuds correspondant aux pores est donnée par les sphères rouges. Les pores sont en contact à travers une surface complètement bordée par le complémentaire. Le champ de vitesse de l'écoulement calculé localement est représenté sous forme de ligne de champ, visibles par transparence. L'embouchure visible en haut concentre les fortes intensités, ainsi que l'étranglement correspondant à la surface de contact. La différence de pression mesurée sur les nœuds et le débit à travers la surface de contact permettent de calculer le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$.

l'extérieur. Comme le montre la figure, un morceau de l'extérieur est extrait avec la géométrie du pore. Ceci permet d'obtenir une géométrie que l'on estime suffisante pour calculer le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ correspondant à l'entrée du fluide dans l'espace poral, à travers la surface séparant le pore de l'extérieur.

4.7.2 Cas nécessitant une action manuelle

Deux types de configurations ont été identifiés comme difficiles à traiter de manière automatique. Des solutions ont été trouvées pour chacun d'entre eux, mais elles ne sont pas complètement satisfaisantes.

4.7.2.1 Géométrie de grande taille

Le premier type de configuration est généré par notre manière d'extraire les pores nécessaires pour le calcul d'un coefficient $\lambda_{H_i H_j}$. Pour ne pas modifier la géométrie dans laquelle l'écoulement est simulé, l'ensemble des pores en contact avec la surface séparatrice considérée est extrait. Cela conduit parfois à un effet boule de neige, amenant à extraire un très grand nombre de pores pour compléter la géométrie. La figure 4.14 montre la géométrie qu'il a été nécessaire d'extraire pour calculer le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ existant entre l'extérieur et le pore rouge. Tous les pores qui

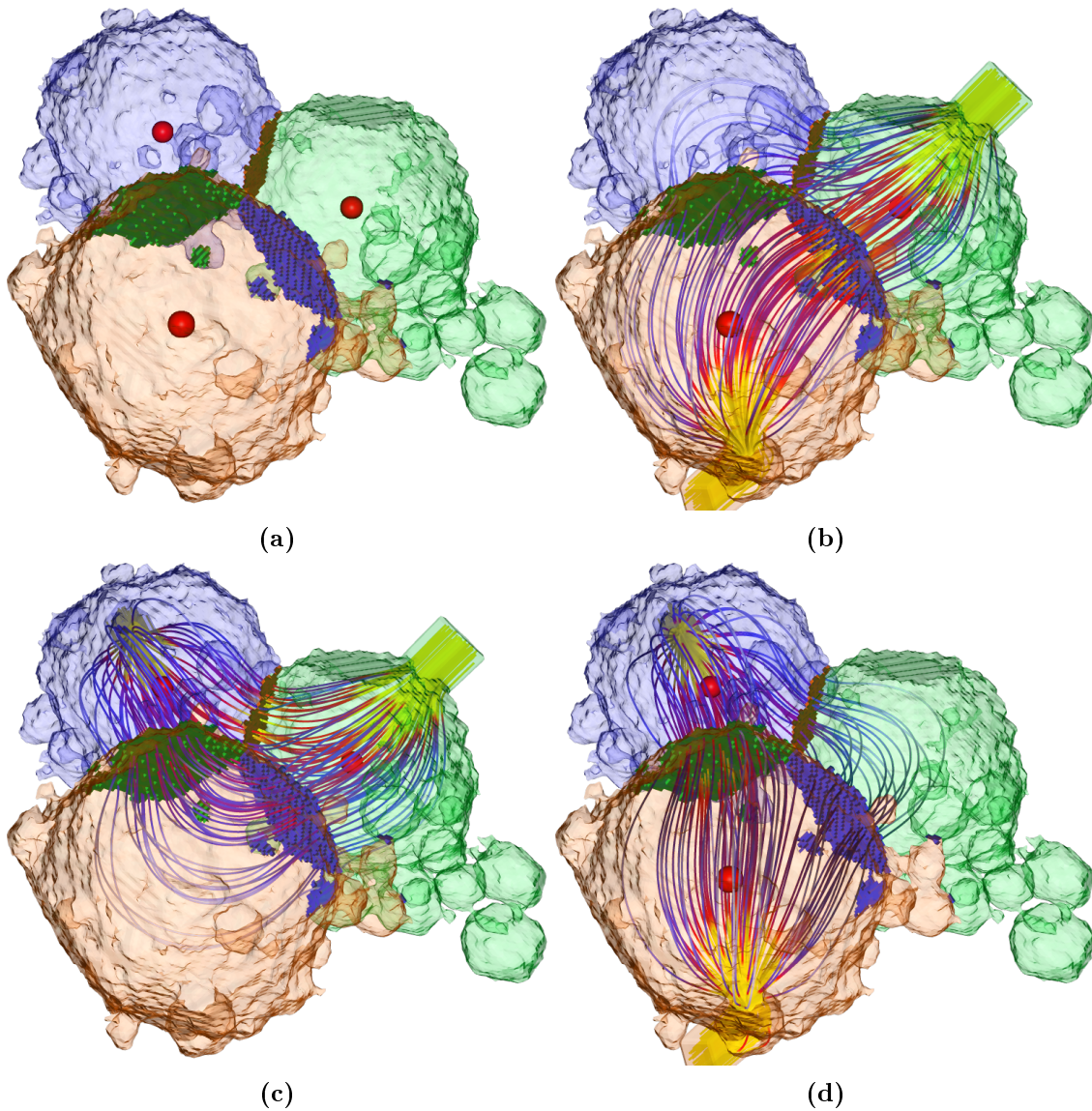


FIGURE 4.12 – (a) Représentation des trois pores en bleu, vert et orange transparents. Leurs nœuds associés sont les sphères rouges, et les surfaces de contacts sont opaques. La surface centrale est composée de trois morceaux. Chacun de ces morceaux sépare deux pores uniquement, mais n'est pas bordé uniquement par le complémentaire. (b) Le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ entre les pores orange et vert est calculé en réalisant un écoulement local entre ces deux pores. Des embouchures leur sont ajoutées à cette fin. Cependant, le pore bleu est tout de même gardé pour le calcul. Son absence modifierait la géométrie de l'écoulement et modifierait par conséquent arbitrairement la valeur $\lambda_{H_i H_j}$ calculée. (c) Un autre calcul est réalisé pour le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ entre les pores vert et bleu. Les embouchures changent de place, mais les trois pores sont toujours présents. (d) Le dernier calcul pour le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ entre les pores orange et bleu requiert les mêmes modifications que précédemment.

apparaissent en vert sont en contact avec la surface séparant les deux pores qui nous intéressent, et sont donc susceptibles d'influer sur l'écoulement entre les deux pores. Leur présence est donc requise pour le calcul du coefficient $\lambda_{H_i H_j}$.

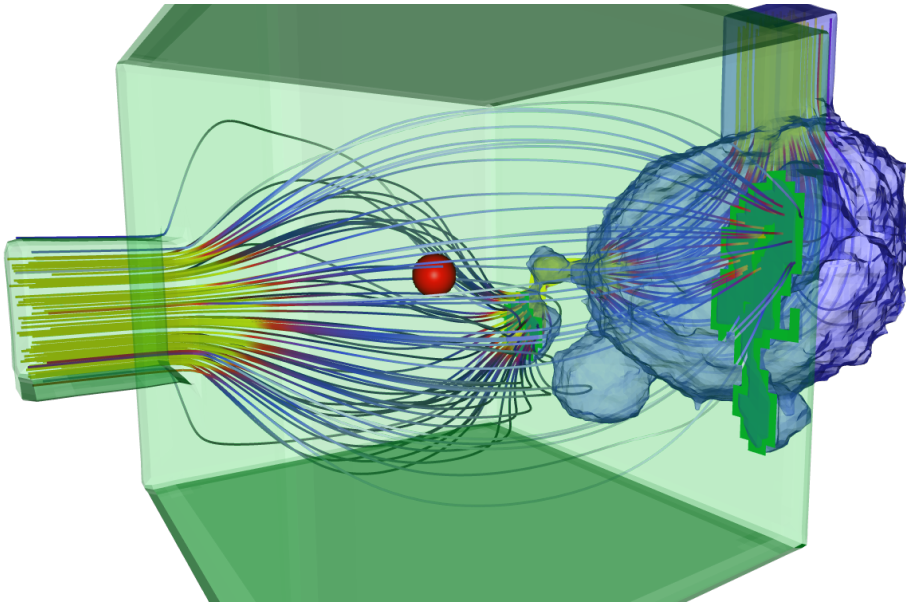


FIGURE 4.13 – Cette figure présente la géométrie utilisée pour le calcul du coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ entre un pore et l'extérieur. Le pore bleu fait partie de l'espace poral, tandis que le pore vert est une portion de l'extérieur. Il a le même volume que la boîte englobante du pore bleu. Le champ de vitesse représenté traverse de petite surfaces, impliquant un coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ faible. Déterminer les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ des pores situés sur le bord de l'image avec l'extérieur est donc pertinent. Ils permettent de préciser par quels pores l'écoulement entrera dans l'espace poral.

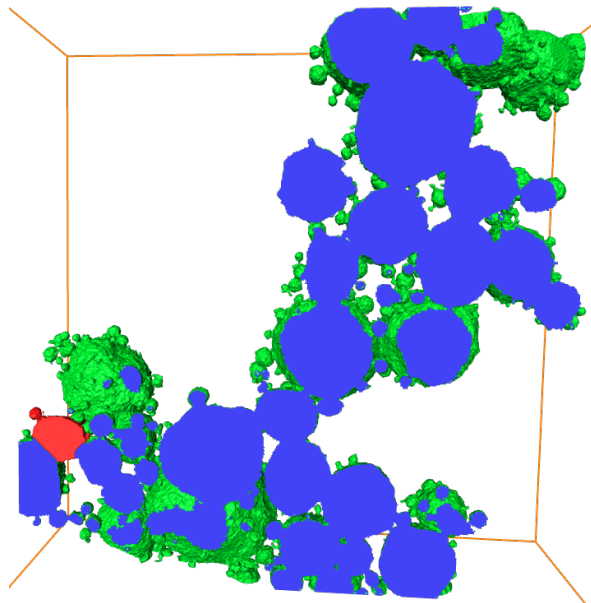


FIGURE 4.14 – Cette figure présente l'une des géométries de grande taille que l'on est obligé d'utiliser pour calculer le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ entre le pore rouge et l'extérieur. Tous les pores verts dessinés sont rendus nécessaires au calcul par le fait que les surfaces de contact qui les séparent de l'extérieur composent la surface en bleu. Celle-ci est une surface composée et regroupe toutes les surfaces de contact présentes. C'est la plus petite surface composée contenant le contact entre le pore rouge et l'extérieur et complètement bordée par le complémentaire.

Cette configuration ne pose pas intrinsèquement de véritable problème. C'est simplement ses dimensions qui sont gênantes, de par le temps et les ressources de calcul requises. Les dimensions du volume présenté dans la figure 4.14 sont de $294 \times 502 \times 502$, ce qui est proche des dimensions du volume initial. Il serait pertinent de vérifier que la présence de tous ces pores supplémentaires impacte significativement la valeur du coefficient calculé. Intuitivement, on pourrait penser que les pores les plus éloignés de celui qui nous intéresse ne sont pas indispensables à une estimation du coefficient. Toute la difficulté réside dans une définition rigoureuse de la nécessité d'extraire un pore ou non.

4.7.2.2 Pores entourés

La deuxième configuration qui pose problème concerne des pores qui sont entourés d'autres pores. Par exemple, la figure 4.15 montre un exemple d'une telle configuration. Le pore en bleu clair est complètement entouré d'autres pores (en rouge). Lorsqu'on essaie de connecter les embouchures pour permettre la simulation d'écoulement, il nous est impossible d'y accéder. Ceci empêche l'automatisation du calcul pour de telles configurations.

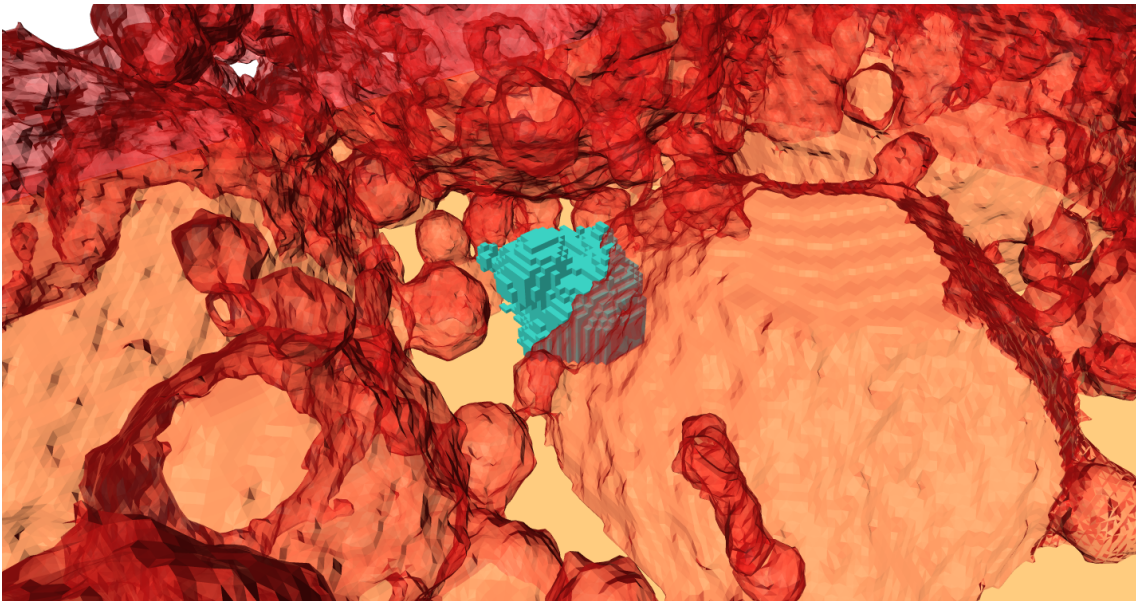


FIGURE 4.15 – Cette géométrie correspond à celle qui est nécessaire pour estimer le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ entre le pore bleu clair et l'extérieur (en jaune au fond). Le pore en bleu clair est totalement entouré par les pores en rouge, ce qui rend impossible de connecter une embouchure de section carrée. Pour les besoins du calcul numérique, il faut que les embouchures soient orientées selon les axes principaux de l'image (X , Y ou Z). Par conséquent, un écoulement secondaire (entre l'un des pores en rouge et l'extérieur par exemple) est réalisé.

La solution se situe au niveau de la théorie. L'hypothèse de l'unicité des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ nous permet d'affirmer que n'importe quel écoulement permet de le déterminer. Il suffit donc de réaliser un écoulement secondaire impliquant le pore

entouré. Il suffit alors de mesurer la pression aux extrémités de l'arête qui nous intéresse pour déterminer de manière détournée le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ correspondant. Pour les raisons de précisions numériques évoquées auparavant, cette solution n'est pas entièrement satisfaisante. Il n'existe cependant pas d'autre façon de procéder.

Dans le matériau étudié, tous les problèmes liés à des pores entourés concernent des pores de petite taille entourés de pores plus grands. Une solution plus simple et naturelle serait de les fusionner avec un de leurs voisins. Cependant, ils ont réussi à passer toutes les étapes de filtrage et de fusion de pores. Ils ont donc la même signification que les pores plus grands, et il n'y a pas de raison de les faire disparaître simplement parce qu'ils posent problème.

4.7.3 Bilan

Au final, l'ensemble des résistances a pu être calculé, moyennant quelques opérations manuelles. Seules sept arêtes n'ont pas pu être traitées automatiquement, à cause d'un pore sur lequel une embouchure ne pouvait pas être connectée (pore enfermé). Tous ces cas se situent sur les bords de l'image, en contact avec l'extérieur. Le fait que les pores soient plus difficilement définis sur les bords, à cause des troncatures arbitraires, semble générer ce genre de configuration.

Il semble pertinent de se poser la question de la précision et de l'unicité des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ ainsi calculés. Une idée pour vérifier ces points serait de résoudre les équations de Stokes dans le volume complet, en simulant une expérience. Il suffit d'effectuer le calcul à l'échelle de l'espace poral entier, en utilisant le même code de calcul que pour la résolution locale. En mesurant les pressions aux nœuds du graphe et en calculant les débits à travers les surfaces de contact entre les pores, nous aurions un deuxième ensemble de valeurs pour les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$, qui devraient être identiques à ceux calculés localement. La vérification de cette égalité ajouterait du poids à l'hypothèse d'unicité des $\lambda_{H_i H_j}$, sans toutefois en apporter une preuve formelle. Au contraire, si les deux ensembles de valeurs ne correspondent pas, notre hypothèse serait directement contredite.

4.8 Résolution du système

Une fois l'ensemble des $\lambda_{H_i H_j}$ calculé, le système linéaire est résolu très facilement. Il s'agit d'un système linéaire à n équations et n inconnues, n étant le nombre de nœuds du graphe. Tous les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ ont été déterminés. Il suffit donc de construire la matrice et le second membre du système pour les injecter dans un code de calcul déjà existant.

La figure 4.16 permet de visualiser les nœuds du graphe colorés en fonction de la valeur de pression. Cela permet de vérifier qualitativement les résultats : les pressions évoluent régulièrement dans la direction du gradient macroscopique imposé. Il aurait été intéressant de vérifier quantitativement les valeurs obtenues. De la même manière

que pour les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$, le calcul numérique global aurait permis de calculer les pressions et les débits localement, pour les comparer aux résultats du système linéaire.

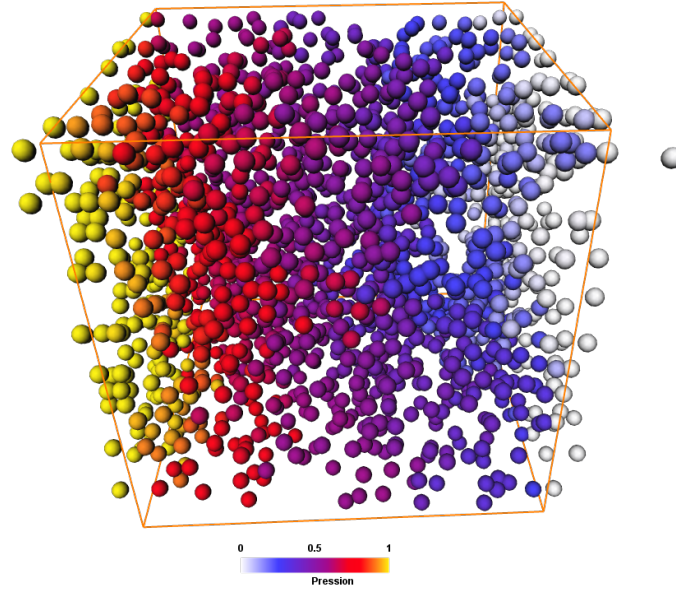


FIGURE 4.16 – La couleur des sphères représentant les nœuds est fonction de la valeur de pression calculée lors de la résolution du système linéaire. Les débits portés par les arêtes ne sont pas représentés.

Le résultat le plus intéressant, celui qui est l’objectif de toutes ces étapes successives, est la valeur de la perméabilité. La résolution du système linéaire permet d’appliquer la loi de Darcy, puisque le débit traversant l’espace poral peut être déterminé en sommant les débits des arêtes traversant un plan perpendiculaire au gradient macroscopique. Le calcul numérique direct réalisé sur le volume complet a été mené.

La valeur calculée avec le réseau est $88,26\mu\text{m}^2$, à comparer au résultat du calcul numérique direct, qui est de $92,62\mu\text{m}^2$. La différence relative est inférieure à 5%. Les comparaisons évoquées dans les paragraphes précédents devraient permettre d’identifier par exemple si les lignes principales de l’écoulement sont les mêmes dans les deux cas. Ce résultat est encourageant mais seules des vérifications précises et des validations pratiques et théoriques permettront de confirmer si le modèle proposé est valide.

4.9 Bilan & discussions

Ce chapitre a montré la mise en pratique des différentes étapes du processus décrit aux chapitres 2 et 3, permettant de passer d’une image binaire d’un matériau à la valeur de sa perméabilité en utilisant un modèle de réseau. L’échantillon est un matériau fortement poreux, dont l’espace poral est constitué de bulles sphériques

de diamètre variable. Un tel matériau constitue une opportunité pour tester une approche sous forme de réseau.

La suppression des artefacts de binarisation et des composantes connexes isolées a permis de construire un squelette 1D. Il ne contient pas de surface, ce qui est une condition indispensable pour la construction d'un premier graphe cohérent. Ce graphe est issu directement du squelette en classifiant ses points en *points de branche* et *points d'intersection de branches*. Il définit des nœuds que l'on considère initialement comme étant les indicateurs de la présence des pores.

Il y a cependant beaucoup trop de pores dans ce premier graphe, principalement parce que le squelette dans un espace discret est extrêmement sensible au bruit. Plusieurs étapes de fusion des nœuds se succèdent. Les deux premières sont générales et peuvent trouver leur place dans toute construction de réseau représentatif d'un espace poral, quelle que soit l'utilisation de ce réseau. Il s'agit de fusionner dans un premier temps les nœuds directement adjacents. L'hypothèse invoquée est qu'ils représentent en réalité la même intersection de branches du squelette, mais que la discrétisation de l'espace fait qu'ils sont distincts. Ensuite, en observant les nœuds restants, on se rend compte que certains ne sont séparés que de quelques voxels. Mais un critère basé seulement sur la distance entre les nœuds serait trop éloigné de la géométrie réelle de l'espace poral. C'est pourquoi le critère suivant est préféré : si la boule maximale associée à un nœud A est recouverte à plus de 30% par une autre boule maximale centrée sur un nœud B , alors le nœud A est fusionné dans le groupe du nœud B . La valeur de 30% a été proposée dans [Plougonven 09], mais il est possible qu'elle ne s'applique pas à tous les cas. C'est un paramètre sur lequel est possible d'agir pour augmenter ou diminuer l'effet de ce critère de fusion.

Deux étapes supplémentaires ont été ajoutées dans le cadre de ces travaux, afin de réduire encore le nombre de pores. Elles sont bien adaptées à notre application, le calcul de la perméabilité, mais peuvent ne pas l'être pour d'autres. Les pores de faible volume sont fusionnés avec leur plus grand voisin. L'absence de pore trop petit est nécessaire pour le calcul des $\lambda_{H_i H_j}$ telle qu'il est proposé par la suite. Ils gênent notre démarche et le seul moyen efficace est de les enlever préventivement. Enfin, les parties non débouchantes du graphe sont elles aussi évitées. Puisqu'elles ne participent pas à l'écoulement, il est inutile de calculer un $\lambda_{H_i H_j}$. Ce critère n'est pas indispensable, il permet simplement de s'affranchir de certains calculs.

Les étapes de fusion permettent de réduire le nombre de pores. En utilisant ceux-ci comme points de départ pour envahir l'espace poral, la ligne de partage attribue un volume à chaque pore. Le partitionnement ainsi obtenu nécessite la construction d'un graphe d'interconnexion adapté. En effet, le premier graphe, issu du squelette, n'est pas représentatif des contacts qui existent entre les pores. La solution la plus simple est d'en construire un nouveau. De cette manière, il est possible d'ajouter des informations, par exemple la manière de gérer les conditions aux limites correspondant au problème que l'on veut traiter.

Le calcul des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ est l'étape la plus difficile du processus. Chaque

groupe de pores en contact est extrait et le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$ lié à chaque contact individuel est calculé en résolvant localement les équations de Stokes. La plupart des configurations peut être traité automatiquement, mais il en reste un petit nombre qui requiert une intervention manuelle. Une fois ces coefficients connus, la résolution du système linéaire est triviale et la loi de Darcy amène à la valeur de perméabilité recherchée.

Différents points de discussions ont été abordés au cours du chapitre. Les principaux concernent la validation des valeurs des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ obtenus. Pour cela, un calcul numérique sur le volume complet est envisagé. Les champs de pression et de vitesse étant alors connus, déterminer les pressions aux nœuds et les débits à travers les surfaces de contact permettra de les comparer avec celles du réseau. Ce point est crucial pour confirmer ou infirmer notre hypothèse forte d'unicité des $\lambda_{H_i H_j}$.

Conclusion

L'objectif de ce travail était de proposer une nouvelle approche pour modéliser un milieu poreux sous la forme d'un réseau de pores en vue du calcul de la perméabilité absolue.

Le premier chapitre a été l'occasion de présenter deux systèmes d'équation menant au calcul de la perméabilité absolue. Les équations de Stokes décrivent le comportement d'un fluide newtonien et incompressible lors d'un écoulement laminaire. La solution à ces équations permet d'estimer la perméabilité absolue en utilisant la loi de Darcy. La prise de moyenne des équations de Stokes sur un V.E.R. permet d'obtenir un système tensoriel qui mène directement au tenseur de perméabilité absolue sans supposer l'existence de la loi de Darcy.

Ces deux systèmes sont similaires ; ils ne diffèrent que par leurs conditions aux limites et la présence d'un second membre dans l'une des équations du second système. L'information donnée par le tenseur de perméabilité est plus riche que le scalaire obtenu par la loi de Darcy ; il est par exemple possible de détecter une éventuelle anisotropie avec cet objet. Il n'existe pas, à notre connaissance, de modèle de réseau cherchant à résoudre le problème de fermeture menant au tenseur de perméabilité. Pourtant, son intérêt est réel, ce qui nous a conduit à aborder ces deux systèmes d'équations en même temps dans l'ensemble des travaux présentés ci-après.

Le sujet du deuxième chapitre était de montrer, à partir d'une image 3D de la micro-géométrie interne du milieu poreux, une succession d'étapes aboutissant au partitionnement de l'espace poral en pores. Chacune des étapes a des paramètres propres, qui sont exposés et discutés de manière à estimer leur influence sur le déroulement du processus. Notamment, les conditions aux limites sont proposées afin de tenir compte des deux systèmes d'équations dont il est question un peu plus haut.

Tout d'abord, le traitement décrit dans [Plougonven 11] est appliqué sur l'image. Cette approche repose sur une analyse rigoureuse de la topologie locale et permet d'éviter des artefacts dans le squelette liés à la binarisation de l'image. Ensuite, les

composantes connexes isolées de l'espace poral et du solide sont supprimées. Les premières constituent en effet des pores isolés qui ne participent pas à un écoulement global dans le milieu poreux ; les conserver est inutile pour notre réseau. Les secondes sont gênantes pour la squelettisation, car elles génèrent des surfaces fermées. Cependant, ces particules peuvent avoir une influence non négligeable sur un écoulement, quelle que soit leur taille. L'influence de cette série de modifications de l'image 3D fait partie des éléments à étudier pour approfondir ces travaux.

Ces opérations préparent l'image pour la squelettisation de l'espace poral qui suit. Les précautions prises évitent l'apparition de surfaces et de composantes connexes isolées, notamment. La suppression itérative de points simples est guidée par une carte de distance, qui permet de centrer le squelette dans l'espace poral. Une connectivité de type 6-adjacence est utilisée pour l'espace poral, afin de garantir une cohérence dans la suite des traitements : un pore est un objet 6-connexe et deux pores sont en contact s'ils partagent au moins une facette d'un voxel. La squelettisation est menée jusqu'à son terme, de telle sorte qu'il ne reste plus de points simples à la fin du calcul. Les branches non-débouchantes, dont une extrémité est un voxel n'ayant qu'un seul voisin, n'existent pas dans le squelette obtenu. Ces éléments décriraient des pores non-débouchants, qui ne participent donc pas à un écoulement dans le milieu poreux.

Le squelette est converti en graphe en suivant une règle intuitive : l'endroit où plusieurs branches du squelette se rencontrent indique la présence d'un pore. Les points de branche successifs forment les arêtes d'un graphe, dont les sommets (ou nœuds) sont les points d'intersection de branches. Ce graphe donne donc la position des nœuds et leurs interconnexions. L'étape initiale de correction de l'image a permis d'empêcher l'apparition de surfaces dans le squelette, ce qui permet de classer tous les éléments du squelette en points de branche et d'intersection de branches.

Le premier constat est que le graphe issu du squelette comporte beaucoup trop de sommets par rapport au nombre de pores attendus. Les nœuds sont tout d'abord fusionnés en suivant deux critères généraux. Les nœuds adjacents sont rassemblés, parce qu'on considère qu'ils représentent la même intersection de branches, mais qu'ils ont été séparés à cause de la discrétisation de l'espace. Ensuite, un critère reposant sur les volumes de recouvrement des boules maximales centrées sur les nœuds est utilisé pour identifier les pores qui partagent suffisamment d'information pour être fusionnés. Ces deux critères généraux devraient pouvoir s'appliquer à tout type de modèle de réseau, quelle que soit l'utilisation qui en est faite.

Deux critères supplémentaires ont été par ailleurs ajoutés afin de faire disparaître des pores trop petits ou qui ne permettent pas à un écoulement de se mettre en place. Les pores de volume trop faible sont gênants pour la suite des traitements, lors du calcul des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$. Ceux qui sont non-débouchants, c'est-à-dire qui n'ont qu'une seule connexion avec l'espace poral, sont inutiles pour le calcul de la perméabilité, puisqu'aucun flux ne les traverse. Ils sont donc eux aussi fusionnés avec leurs voisins.

Les nœuds restants sont utilisés comme marqueurs pour une ligne de partage des eaux, qui permet d'attribuer aux pores un volume contenu dans l'espace poral. L'objet d'intérêt n'est pas la ligne de partage des eaux en elle-même, mais plutôt les bassins qu'elle délimite. Chaque bassin correspond à un pore, et le graphe qui nous intéresse devrait représenter leurs interconnexions. Un défaut majeur est alors constaté : le graphe initial issu du squelette comporte des erreurs par rapport au partitionnement. La plus grave de ces erreurs est qu'il ne représente pas toutes les connexions entre les pores. Les deux objets ne sont plus en correspondance, et l'un des deux doit être modifié. La conclusion de [Plougonven 09] indique que la ligne de partage des eaux est le meilleur outil de partitionnement de l'espace poral en pores. À défaut d'une meilleure approche pour réaliser cette opération, c'est le graphe issu du squelette qui est considéré comme insuffisant. Plutôt que de tenter de le modifier, un nouveau graphe est construit à partir du partitionnement. Le graphe reconstruit positionne les nœuds au centre des pores et les conditions aux limites sont adaptées au problème à résoudre. Pour l'écoulement, des nœuds sont ajoutés à l'extérieur de l'image, tandis que pour le calcul de tenseur, les arêtes connectent des nœuds en contact « périodiquement ».

Une fois le réseau de pores établi, les modèles classiques font l'hypothèse d'une relation simple entre deux pores connectés. Par exemple, le modèle de réseau de pores le plus répandu est composé de pores sphériques connectés par des tubes cylindriques, de longueurs et sections variables. La relation entre deux pores est donc décrite par un écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique, ce qui revient à calculer une conductance hydraulique ne dépendant que de ce tube. Notre partitionnement de l'espace poral ne permet pas d'imposer cette condition, parce qu'il existe des surfaces séparant deux pores qui ne reposent pas entièrement sur le solide. Dès lors, il n'est pas possible de représenter les interconnexions entre les pores par des cylindres, et de paramétrer ces cylindres en cohérence avec le partitionnement.

Afin de trouver les relations à résoudre sur le graphe issu du partitionnement, le chapitre 3 présente l'intégration des équations de Stokes et du problème de fermeture sur le volume d'un pore et le long d'un chemin entre deux pores. Ces intégrales mettent en évidence un système linéaire dans lequel un coefficient de proportionnalité entre le débit traversant la surface séparant deux pores et la différence de pression aux nœuds représentant ces deux pores apparaît. Ce terme de conductance entre deux pores, noté $\lambda_{H_i H_j}$, requiert d'être déterminé avant de pouvoir résoudre le système. L'hypothèse d'unicité de la conductance est posée parce qu'elle correspond à l'axiome couramment posé.

Une approche originale est proposée afin de calculer ces coefficients $\lambda_{H_i H_j}$. Pour chaque arête du réseau, le couple de pores associé, ainsi que l'ensemble des pores partageant un morceau de surface ouverte avec eux, est extrait du volume. Dans cette géométrie, normalement de petite taille, une résolution numérique locale des équations de Stokes est réalisée. Celle-ci permet de connaître la pression aux nœuds du réseau et le débit traversant la surface séparant les deux pores aux extrémités

de l'arête considérée lors d'un écoulement dans la géométrie des pores. Du fait de l'unicité du $\lambda_{H_i H_j}$, cet écoulement local permet de le déterminer à faible coût.

L'ensemble des $\lambda_{H_i H_j}$ est calculé de cette manière. La majorité des cas peut être traité automatiquement, mais un certain nombre requiert des traitements manuels. Le système matriciel est construit puis résolu, en accord avec les équations établies à partir des équations continues. La solution à ce système matriciel est constituée de l'ensemble des pressions aux nœuds du graphe. Le débit global traversant le milieu poreux est déterminé, puis la loi de Darcy est utilisée pour calculer la perméabilité absolue du matériau.

Un exemple de grande taille a été montré dans le chapitre 4. Il a été choisi parce qu'il semblait être un exemple simple (l'espace poral est constitué de bulles presque sphériques) et suffisamment proche du V.E.R. pour obtenir des résultats significatifs. De nombreux écueils ont freinés l'aboutissement du calcul, parmi lesquels des calculs locaux dans des géométries presque aussi grandes que le volume initial et des configurations dans lesquelles le calcul direct était impossible. Malgré tout, le résultat final est encourageant, même s'il reste à l'étayer avec une étude comparative entre la solution obtenue par le réseau et celle calculée numériquement.

Perspectives

Les différents éléments présentés dans ce manuscrit forment une approche complète de construction d'un réseau de pores à partir d'une image 3D. Cependant, plusieurs points nécessitent d'aller plus loin, parce qu'ils ne sont pas entièrement satisfaisants en l'état.

Validation des calculs

Une méthode fiable de validation des résultats obtenus est un premier point à considérer. Pour cela, une démarche est proposée. Elle nécessite de résoudre le système d'équation de Stokes ou du problème de fermeture sur l'ensemble du domaine de deux manières : par un calcul numérique direct et par l'approche qui fait l'objet de ce manuscrit.

La solution obtenue par le calcul numérique direct est composée d'un champ de pression et d'un champ de vitesse correspondant aux inconnues du problème et définis en tout point de l'espace poral. Il est donc possible de connaître la pression aux lieux des nœuds du graphe et de les comparer avec les pressions aux nœuds calculées en résolvant le système linéaire sur le réseau. De la même manière, la vitesse étant définie en tout point de l'espace poral, il est possible d'en déduire les débits à travers les surfaces séparant les pores dans le partitionnement. Ces deux éléments mènent directement à la comparaison des $\lambda_{H_i H_j}$ déduits du calcul numérique direct et des calculs locaux.

L'estimation des coefficients $\lambda_{H_i H_j}$ constitue le cœur de toute la démarche exposée dans ce manuscrit. Notamment, l'hypothèse de leur unicité est très forte et nécessite une vérification scrupuleuse. La démonstration mathématique de cette hypothèse est complexe et nous n'avons pas pu la mener à son terme dans un cas général.

La comparaison complète entre le calcul numérique direct et l'approche réseau constituerait une base solide pour continuer l'étude. En effet, quelques points, décrit ci-après, méritent encore d'être approfondis. Mais cette comparaison permettrait avant tout de lever au moins en partie le voile sur l'hypothèse d'unicité des $\lambda_{H_i H_j}$. S'il s'avérait que cette hypothèse est fautive, il faudra alors trouver une autre manière de les estimer, en tenant compte de leur non-unicité.

Prise en compte de la géométrie initiale pour le partitionnement

Ce point a été évoqué dans la section 2.4.2. La première étape de la suite de traitements proposée est une opération qui consiste à supprimer les artefacts de binarisation et les composantes connexes isolées. Certains points passent de l'objet au complémentaire et inversement. Les zones les plus fortement modifiées sont situées à proximité des contacts entre les bulles du milieu poreux. Par ailleurs, certaines composantes connexes du solide isolées dans l'espace poral ont été supprimées ; leur présence pourrait influencer fortement un écoulement qui devrait les contourner.

La solution proposée consiste à conserver cette image modifiée pour la squelettisation, afin d'éviter que le squelette ne soit trop complexe et inexploitable. En revanche, la carte de distance de l'image de départ devrait être utilisée pour construire la ligne de partage des eaux. Cela permettrait de séparer les pores dans la géométrie de départ et donc de conserver toute l'information disponible, notamment les irrégularités autour des zones de contact et les composantes solides flottantes.

Ceci risque cependant de faire apparaître des connexions entre pores lors du partitionnement qui n'existaient pas dans l'image modifiée. Des pores, qui étaient séparés dans l'image utilisée pour la squelettisation, pourraient se retrouver connectés dans le partitionnement. Puisque le graphe est reconstruit à partir du partitionnement, cela ne devrait pas poser de problème. Ces nouvelles connexions ont en revanche de fortes chances d'être de toute petite taille, un ou quelques pixels ; le débit estimé numériquement à partir d'aussi peu d'élément risque d'être approximatif. De plus, l'apparition de composantes connexes du solide dans l'espace poral rendraient les pores non homotopes à une boule. La définition d'un pore proposée dans [Plougonven 09] imposait l'homotopie, mais elle ne serait alors pas garantie par cette correction.

Ligne de partage des eaux périodique

La cohérence de l'ensemble des éléments décrits dans ce manuscrit était un objectif clairement établi. Il reste au moins un élément qui n'est pas cohérent avec le reste des étapes du partitionnement : la ligne de partage des eaux pour le problème du calcul du tenseur.

En effet, dans toutes les étapes décrites pour le calcul du tenseur de perméabilité, la condition aux limites de périodicité a été utilisée. Seule la ligne de partage des eaux n'utilise pas ce critère. L'hypothèse de départ était qu'un pore est borné par l'image ; il doit avoir une consistance physique et ne pas être séparé en plusieurs parties, même connectées périodiquement. Or, cette hypothèse n'a pas besoin d'être posée si l'ensemble des traitements gère la périodicité.

Il n'existe pas, à notre connaissance, d'implémentation de la ligne de partage des eaux supportant cette condition aux limites. Il faudrait d'abord s'assurer que cela a un sens mathématique. L'utilisation d'une ligne de partage des eaux périodiques rendrait l'ensemble des étapes cohérentes, dans le sens où la même condition aux limites serait utilisée partout.

Calcul du tenseur de perméabilité

L'une des perspectives envisagées pour la suite de ces travaux est le calcul effectif du tenseur de perméabilité à partir d'un réseau de pores. Tous les éléments sont présentés dans ce manuscrit pour construire le réseau et estimer les coefficients $\lambda_{H_i H_j}$. La construction du système matriciel à résoudre est également donnée. Seule l'estimation du tenseur lui-même à partir de la solution du système linéaire n'est pas encore totalement établie.

Une proposition a été faite dans la section 3.4.5, qui est rappelée ici. Considérons une face de l'image, par exemple le plan XY situé en $Z = 0$, sa normale \vec{n} et sa surface S . En calculant la somme des débits le long des arêtes du réseau qui traversent la face considérée, on obtient le *débit total* traversant le volume dans la direction \vec{n} . Cette somme divisée par S est égale à une *vitesse moyenne* du fluide traversant le volume dans la direction \vec{n} . Nous avons l'intuition que cette vitesse moyenne peut être utilisée comme composante de la ligne du tenseur. Il n'y a pas de démonstration ni de vérification numérique de cette hypothèse à ce jour. Ceci reste cependant une idée originale qui demande à être étudiée.

Performance du calcul sur réseau

Les temps de calcul nécessaires pour mettre en place l'ensemble des éléments de la démarche n'ont pas été abordés au cours de ce manuscrit. Ce n'était pas l'objectif initial, qui était avant tout de vérifier que l'ensemble de la démarche était justifiée et cohérente. Il sera cependant pertinent de s'y intéresser malgré tout, après

que les points précédents auront été étudiés. Les différentes étapes qui constituent l'approche mériteraient que l'on s'intéresse à leur optimisation.

Les temps de calcul les plus importants se situent certainement au niveau de l'estimation des $\lambda_{H_i H_j}$. Notamment, les configurations de grande taille sont rédhibitoires, parce que leur dimension est proche de celle du volume complet. Il faudra avant tout répondre à la question suivante : l'ensemble de la géométrie extraite pour les configurations de grande taille est-elle indispensable pour estimer le coefficient $\lambda_{H_i H_j}$? On peut légitimement se demander si une géométrie plus petite ne serait pas suffisante. Le problème est de trouver un critère précis permettant de limiter le nombre de pores à extraire.

Discussions

Les points qui sont abordés ici reprennent quelques réflexions disséminées au cours du manuscrit. Ce sont des sujets de discussion ouverts, qui n'ont pas trouvé de réponse complète.

Partitionnement sans surfaces ouvertes

Le partitionnement de l'espace poral tel qu'il est proposé dans ce manuscrit comporte des surfaces de contact entre deux pores qui ne s'appuient pas entièrement sur le solide. Les modèles de réseau pour le calcul de la perméabilité utilisent l'hypothèse que la relation entre deux pores peut être modélisée par un écoulement dans un tube. Il est difficilement concevable d'assimiler l'écoulement d'un fluide entre deux pores séparés par une surface ouverte à un écoulement de Poiseuille. L'approche proposée dans cette étude pour le calcul des relations entre les pores permet d'éviter cette hypothèse simplificatrice.

Pour d'autres applications, comme par exemple la simulation d'une intrusion de mercure dans l'espace poral, ce type de surface pourrait s'avérer problématique. En effet, il ne sera pas possible de calculer la pression nécessaire au passage du mercure d'un pore à l'autre si la surface séparatrice ne s'appuie pas sur le solide.

La question se pose naturellement de savoir si, par une bifurcation dans le cheminement présenté, il serait possible de contraindre le partitionnement à ne pas avoir des surfaces de contact ouvertes. Cette question est ouverte et n'a pas de réponse définitive à notre connaissance.

Définition d'un pore

Cette définition a été discutée dans la section 2.4.4.

La définition générale d'un partitionnement proposée par la définition 3 (page 29) donne des indications générales sur ce qu'est un pore. Un pore est un élément de l'espace poral sans intersection avec d'autres pores. L'union de tous les pores forme

l'espace poral complet. Il est possible d'indiquer qu'un pore est en outre constitué d'une seule composante connexe (un pore composé de deux composantes connexes est trivialement divisé en deux pores distincts). Deux pores en contact le sont par une surface, quelle que soit sa forme.

À partir de ces éléments, un grand nombre de partitionnements de l'espace poral en pores sont possibles. Il semble bien qu'une définition plus fine d'un pore nécessite de préciser ce qui est attendu de lui. Par exemple, pour la perméabilité, il est nécessaire qu'un pore s'appuie au moins partiellement sur le solide. Un pore totalement entouré par un ou plusieurs pores n'a pas de sens, parce que la relation entre ce pore et ses voisins ne pourra pas être estimée. C'est pourquoi la ligne de partage des eaux utilise des graines maximisées comme point de départ : les marqueurs touchent le solide en au moins un point.

De même, il semble pertinent d'imposer à un pore d'être en contact avec au moins trois autres pores. Comme cela a déjà été évoqué, un pore en contact avec un seul autre pore ne participe pas directement à l'écoulement, le flux entrant étant nécessairement nul. Il s'agit d'un pore non débouchant, qui est supprimé par l'une des opérations de fusion des nœuds du graphe issu du squelette. Un pore en contact avec seulement deux pores ne fait que transmettre le flux entrant par la surface le séparant d'un pore à l'autre surface de contact avec l'autre pore. Il n'apporte pas d'information sur la répartition de l'écoulement à travers l'espace poral.

La figure 4.17 montre une chaîne de pores. Le pore rouge de la figure 4.17(a) est en contact avec seulement deux pores. S'il est fusionné avec l'un de ses voisins, comme le montre la figure 4.17(b), l'information sur la répartition des flux entre les différents éléments de l'espace poral est conservée.

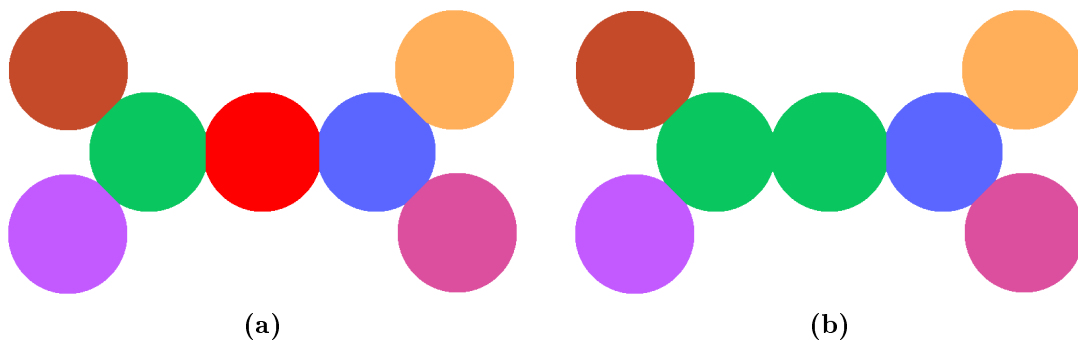


FIGURE 4.17 – Chaîne de pores issue de [Plougonven 09] (figure 2.25 page 33). (a) Toutes les sphères sont identifiées comme des pores. Ceci correspond à ce que l'on attendrait intuitivement du partitionnement : un découpage correspondant aux grains du système. (b) Résultat obtenu par la méthode présentée dans le chapitre 2. Du fait qu'il n'a que deux contacts, le pore rouge n'est pas marqué par une intersection de branches du squelette. Il n'apparaît donc jamais au cours des traitements.

Cependant, les traitements présentés dans ce manuscrit mène directement au partitionnement 4.17(b). Pour une autre application, il sera peut-être nécessaire de faire apparaître le pore rouge.

Donner une définition précise d'un pore semble au final dépendre de ce pour quoi il est créé. Les éléments généraux restent vrais quoi qu'il arrive, mais il faut affiner la définition en fonction de l'application visée.

 Éléments de topologie numérique pour la squelettisation

A.1 Définitions générales

Pour commencer, quelques définitions générales permettent de définir un objet et son complémentaire.

Définition 4 (objet et complémentaire) :

Un ensemble quelconque (fini ou infini) est noté E . Un **objet** étudié dans cet ensemble est noté $X \subset E$. Le **complémentaire** de X est noté $\bar{X} = E \setminus X$.

L'objet et son complémentaire sont deux entités de base pour la suite. Ces deux notions permettent d'introduire la définition d'une image et de ses éléments, les points ou pixels.

Définition 5 (image et point (pixel)) :

Une **image** de dimension d est une application définie par :

$$I : \begin{cases} E \subset \mathbb{Z}^d & \rightarrow \mathbb{C} \\ x \in E & \rightarrow I(x) \end{cases}$$

Les **points** ou **pixels** d'une image sont repérés par une liste de valeurs $x = (x_1, \dots, x_d)$ telle que $(\forall i \in \{1, \dots, d\}) x_i \in \mathbb{Z}$, qui correspondent aux coordonnées du point dans E , ou du pixel dans l'image.

Le domaine de définition E de l'image est souvent associé à ses dimensions en nombre de pixels. Une image de $1000 \times 1000 \times 1000$ pixels aura par exemple un

domaine de définition qui peut être noté mathématiquement $\llbracket 0, 999 \rrbracket \times \llbracket 0, 999 \rrbracket \times \llbracket 0, 999 \rrbracket$.

La valeur des pixels $I(x)$ peut être de toute nature. C'est pourquoi nous l'avons placée dans \mathbb{C} dans la définition 5. Les moyens d'acquisition de type tomographique génèrent des valeurs réelles qui correspondent à des valeurs de μ , le coefficient d'atténuation linéique. Dans notre étude, nous ne considérerons que des images binaires, c'est-à-dire dont les pixels ont des valeurs prises dans l'ensemble $\{0, 1\}$. Dans ce type d'image, l'espace poral dont l'étude est requise est clairement identifié par une valeur, tandis que la phase solide, son complémentaire, porte l'autre valeur.

Le cheminement permettant de passer des valeurs réelles du moyen d'acquisition à l'image binaire ne sera pas évoqué dans ce document. La segmentation des images n'est clairement pas le sujet de cette étude. Nous considérerons donc que ce problème est résolu par ailleurs et nous contenterons d'images déjà segmentées. Plusieurs méthodes sont analysées dans [Sezgin 04] et [Iassonov 09], qui permettent d'accomplir cette tâche.

Finalement, la dimension des images qui nous intéressent est évidemment $d = 3$. Des exemples seront souvent donnés dans ce document en dimension $d = 2$, pour des problèmes de visualisation. En effet, une image 3D sur un support papier n'est pas toujours très parlante.

A.2 Topologie numérique

Cette section définit quelques notions mathématiques menant à une méthode itérative de construction d'un squelette. L'objectif est de définir la notion de *point simple* qui est la base du processus d'amincissement homotopique. Un point simple peut se définir comme étant un point dont la suppression ne modifie ni la topologie de l'objet, ni celle du complémentaire de l'objet. Cette définition est trop générale pour être utilisée directement, puisqu'elle nécessite une vérification globale de la topologie de l'objet pour chaque point supprimé. Les éléments qui suivent permettent d'aboutir à une définition locale d'un point simple.

La topologie numérique, qui n'est pas une topologie au sens mathématique classique du terme, a été introduite par [Rosen 79] et est un cadre qui permet d'établir des propriétés topologiques dans un espace discret. Les notions abordées dans cette section sont issues de [Kong 89]. La topologie numérique repose avant tout sur la relation de voisinage qui existe entre les éléments d'un ensemble.

Définition 6 (n-adjacence) :

*Soit un point $x \in \mathbb{Z}^3$. Trois relations d'adjacence à x sur la maille cubique sont définies : la 6-, la 18- et la 26-adjacence (notées **n-adjacence**, $n \in \{6, 18, 26\}$).*

$$\begin{aligned}\Gamma_6(x) &= \{y \in \mathbb{Z}^3 / |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + |y_3 - x_3| \leq 1\} \\ \Gamma_{18}(x) &= \{y \in \mathbb{Z}^3 / (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \leq 2\} \\ \Gamma_{26}(x) &= \{y \in \mathbb{Z}^3 / \max(|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, |y_3 - x_3|) \leq 1\}\end{aligned}$$

La ***n*-adjacence stricte** est définie par $\Gamma_n^*(x) = \Gamma_n(x) \setminus \{x\}$. Le point y est ***n*-adjacent** au point x si $y \in \Gamma_n^*(x)$. Le point x est ***n*-adjacent** à l'ensemble X si x est *n*-adjacent à au moins un point de X . Deux ensembles X et Y sont ***n*-adjacents** s'il existe au moins un point de $x \in X$ qui est *n*-adjacent à Y .

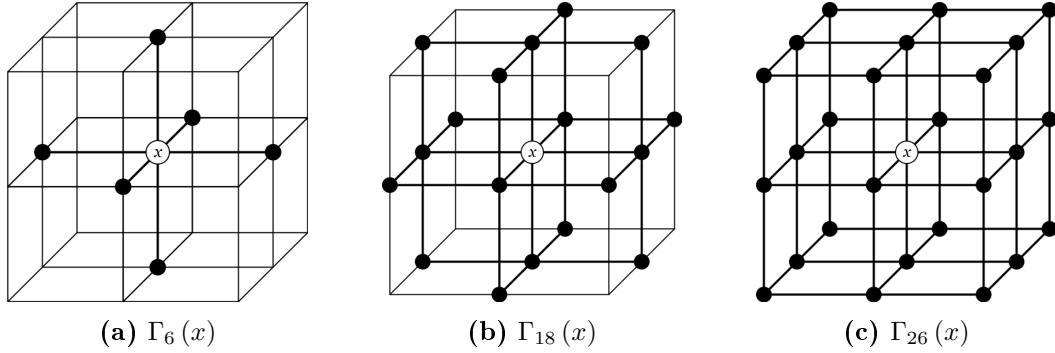


FIGURE A.1 – Représentation des trois relations d'adjacences sur une maille cubique. Le point x situé au centre est représenté avec (a) sa 6-adjacence, (b) sa 18-adjacence et (c) sa 26-adjacence.

La figure A.1 illustre graphiquement ces relations d'adjacence dans une grille à mailles cubiques. Ces relations sont absolument essentielles en topologie numérique. Elles permettent d'introduire la notion de composante connexe.

Définition 7 (n-chemin, n-connexion et composante connexe) :

Un ***n*-chemin** est une séquence de points $\langle x_0, \dots, x_i \rangle$ avec $(\forall i \in \{1, \dots, d\}) x_j$ *n*-adjacent à x_{j-1} . Un objet $X \subset E$ est ***n*-connexe** s'il existe un *n*-chemin entre chaque paire de points de X . Une **composante connexe** de X est un ensemble $Y \subseteq X$ qui est *n*-connecté et qui est maximal pour cette propriété. $C_n(X)$ est l'ensemble des composantes *n*-connexes de l'ensemble X .

Il faut encore exposer la solution à un problème fondamental que la topologie numérique a dû résoudre : respecter le théorème de Jordan, et sa généralisation à n dimensions (théorème de Jordan-Brouwer). Le théorème de Jordan stipule que, dans un plan, une courbe fermée sépare l'espace en deux zones non connectées : l'intérieur de la courbe et l'extérieur. Afin que ce théorème soit vérifié dans le cadre

de la topologie numérique, il est nécessaire et suffisant d'utiliser deux *relations de voisinage* différentes suivant que l'on considère l'objet ou son complémentaire. Ainsi, si la relation de voisinage utilisée pour l'objet est indiquée par n et celle utilisée pour son complémentaire par \bar{n} , les couples (n, \bar{n}) qui permettent de respecter le théorème de Jordan sont : $(6, 26)$, $(6^+, 18)$, $(26, 6)$ et $(18, 6^+)$. La 6^+ -adjacence doit être distinguée de la 6-adjacence.

Les relations de voisinage dont il est question sont construites à partir des n -voisinages géodésiques.

Définition 8 (n-voisinage géodésique) :

Soit $x \in X$ un pixel dans un objet. Le *n-voisinage géodésique* d'ordre k de x dans X est un ensemble défini récursivement par :

$$\begin{cases} G_n^1(x, X) &= \Gamma_n^*(x) \cap X \\ G_n^k(x, X) &= \bigcup_{y \in G_n^{k-1}(x, X)} \{\Gamma_n^*(y) \cap \Gamma_{26}^*(x) \cap X\} \end{cases}$$

Cette définition, un peu difficile à comprendre ainsi écrite, peut s'exprimer de cette manière : le voisinage géodésique d'ordre k de x dans X est l'ensemble des pixels y 26-adjacents à x tels qu'il existe un n -chemin de longueur inférieure ou égale à k reliant x à y , tous les pixels du chemin appartenant à X . Les n -voisinages utilisés pour l'objet et son complémentaire sont des cas particuliers des voisinages géodésiques :

Définition 9 (voisinages géodésiques particuliers) :

Les *n-voisinages géodésiques particuliers* qui sont utilisés afin de respecter le théorème de Jordan sont définis par :

$$\begin{aligned} G_6(x, X) &= G_6^2(x, X) \\ G_{6^+}(x, X) &= G_6^3(x, X) \\ G_{18}(x, X) &= G_{18}^2(x, X) \\ G_{26}(x, X) &= G_{26}^1(x, X) \end{aligned}$$

Les voisinages ainsi explicités permettent de calculer les nombres de connexité. Ceux-ci représentent le nombre de composantes n -connexes de l'objet X dans la 26-adjacence du pixel x . Ils sont définis de la manière suivante :

Définition 10 (nombre de n -connexité) :

Un nombre de n -connexité associé au pixel x dans X est défini par :

$$T_n(x, X) = |C_n(G_n(x, X))|, n \in \{6, 6^+, 18, 26\}$$

Ils sont directement utilisés pour déterminer localement si un pixel est simple ou non.

Définition 11 (point simple) :

Un point $x \in X \subset E$ est simple si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées : $T_n(x, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(x, \bar{X}) = 1$.

Cette condition permet de caractériser la simplicité d'un point en observant uniquement son 26-voisinage. Alors qu'auparavant la notion de point simple était très générale (un point qui ne modifie pas la topologie de l'objet et de son complémentaire), nous avons maintenant à notre disposition une caractérisation locale de la simplicité d'un point. Ceci va permettre de mettre en place des algorithmes efficaces de squelettisation par suppression itérative de points simples.

Bibliographie

- [Acharya 04] R.C. Acharya, S.E.A.T.M. van der Zee & A. Leijnse. *Porosity-permeability properties generated with a new 2-parameter 3D hydraulic pore-network model for consolidated and unconsolidated porous media*. *Advances in Water Resources*, vol. 27, pages 707–723, 2004.
- [Al-Kharusi 07] A.S. Al-Kharusi & M.J. Blunt. *Network extraction from sandstone and carbonate pore space images*. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, vol. 56, pages 219–231, 2007.
- [Al-Raoush 03] R. Al-Raoush, K. Thompson & C. S. Willson. *Comparison of Network Generation Techniques for Unconsolidated Porous Media*. *Soil Science Society of America Journal*, vol. 67, no. 6, pages 1687–1700, 2003.
- [Al-Raoush 05] R. Al-Raoush & C. S. Willson. *Extraction of physically realistic pore network properties from three-dimensional synchrotron X-ray microtomography images of unconsolidated porous media systems*. *Journal of Hydrology*, vol. 300, pages 44–64, 2005.
- [Anderson 67] T.B. Anderson & R. Jackson. *A fluid mechanical description of fluidized beds*. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, vol. 6, pages 527 – 538, 1967.
- [Anguy 93] Y. Anguy. *Application de la prise de moyenne volumique à l'étude de la relation entre le tenseur de perméabilité et la microgéométrie des milieux poreux naturels*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 1993.

- [Atwood 04] R.C. Atwood, J.R. Jones, P.D. Lee & L.L. Hench. *Analysis of pore interconnectivity in bioactive glass foams using X-ray microtomography*. Scripta Materialia, vol. 51, pages 1029–1033, 2004.
- [Bakhvalov 89] N.S. Bakhvalov & G. Panasenko. Homogenisation : Averaging processes in periodic media. Kluwer, 1989.
- [Bakke 97] S. Bakke & P.-E. Øren. *3-D pore-scale modelling of sandstones and flow simulations in the pore networks*. SPE Journal, vol. 2, no. 2, pages 136–149, 1997.
- [Bear 72] J. Bear. Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier, 1972.
- [Bensoussan 78] A. Bensoussan, J.L. Lions & G Papanicolaou. Asymptotic analysis for periodic structures. North-Holland, 1978.
- [Bertrand 94] Gilles Bertrand. *Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids*. Pattern Recognition Letters, vol. 15, no. 10, pages 1003–1011, 1994.
- [Bertrand 95] G. Bertrand. *On P-simple points*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série Math., vol. 321, pages 1077–1084, 1995.
- [Bertrand 05] G. Bertrand. *On Topological Watersheds*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 22, pages 217–230, 2005.
- [Bertrand 09] Gilles Bertrand & Michel Couprie. *On parallel thinning algorithms : minimal non-simple sets, P-simple points and critical kernels*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 35, no. 1, pages 23–35, 2009.
- [Bhattad 11] P. Bhattad, C.S. Willson & K.E. Thompson. *Effect of Network Structure on Characterization and Flow Modeling Using X-ray Micro-Tomography Images of Granular and Fibrous Porous Media*. Transport in Porous Media, vol. 90, pages 363–391, 2011.
- [Biswal 99] B. Biswal, C. Manwarta, R. Hilfer, S. Bakke & P.E. Øren. *Quantitative analysis of experimental and synthetic microstructures for sedimentary rock*. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, vol. 273, pages 452–475, 1999.

- [Blum 61] H. Blum. *An associative machine for dealing with the visual field and some of its biological implications*. Biological prototypes and synthetic systems, vol. 1, pages 244–260, 1961.
- [Blunt 90] M. Blunt & P. King. *Macroscopic parameters from simulations of pore scale flow*. Physical Review A, vol. 42, pages 4780–4787, 1990.
- [Blunt 01] M. J. Blunt. *Flow in Porous Media – Pore-Network Models and Multiphase Flow*. Current Opinion Colloid and Interface Sciences, vol. 6, pages 197 – 207, 2001.
- [Bryant 92] S.L. Bryant & M. Blunt. *Prediction of Relative Permeability in Simple Porous-Media*. Physical Review A, vol. 46, pages 2004–2011, 1992.
- [Bryant 93a] S.L. Bryant, P.R. King & D.W. Mellor. *Network model evaluation of permeability and spatial correlation in a real random sphere packing*. Transport in Porous Media, vol. 11, pages 53–70, 1993.
- [Bryant 93b] S.L. Bryant, D.W. Mellor & C.A. Cade. *Physically Representative Network Models of Transport in Porous-Media*. American Institute of Chemical Engineers Journal, vol. 39, pages 387–396, 1993.
- [Chandler 82] R. Chandler, J. Koplik, K. Lerman & J.F. Willemsen. *Capillary Displacement and Percolation in Porous Media*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 119, pages 249–267, 1982.
- [Chatzis 77] I. Chatzis & F.A.L. Dullien. *Modelling pore structures by 2-D and 3-D networks with application to sandstones*. Canadian Journal of Petroleum Technology, vol. 16, pages 97–108, 1977.
- [Chorin 67] Alexandre Joel Chorin. *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems*. Journal of Computational Physics, vol. 2, no. 1, pages 12 – 26, 1967.
- [Couprie 06] M. Couprie. *Note on Fifteen 2D Parallel Thinning Algorithms*. Rapport technique, Université de Marne-la-Vallée, 2006.
- [Couprie 07] M. Couprie, D. Coeurjolly & R. Zrou. *Discrete Bisector Function and Euclidean Skeleton in 2D and 3D*. Image and Vision Computing, vol. 25, no. 10, pages 1543–1556, 2007.

- [Darcy 56] H. Darcy. Les fontaines publiques de la ville de dijon. V. Dalmont, 1856.
- [Delerue 99] J.F. Delerue, E. Perrier, Z. Y. Yu & B. Velde. *New Algorithms in 3D Image Analysis and Their Application to the Measurement of a Spatialized Pore Size Distribution in Soils*. Phys. Chem. Earth (A), vol. 24, pages 639–644, 1999.
- [Dixit 98] A.B. Dixit, S.R. McDougall & K.S. Sorbie. *A Pore-Level Investigation of Relative-Permeability Hysteresis in Water-Wet Systems*. SPE Journal, vol. 3, pages 115–123, 1998.
- [Dullien 92] F.A.L. Dullien. Porous media : fluid transport and pore structure. Academic press, 1992.
- [Farlow 92] Stanley J. Farlow. Partial differential equations for scientists and engineers. Dover, 1992.
- [Fatt 56a] I. Fatt. *The network model of porous media I. Capillary characteristics*. Pet. Trans. AIME, vol. 207, pages 144–159, 1956.
- [Fatt 56b] I. Fatt. *The network model of porous media II. Dynamic properties of a single size tube network*. Pet. Trans. AIME, vol. 207, pages 160–163, 1956.
- [Fatt 56c] I. Fatt. *The network model of porous media III. Dynamic properties of networks with tube radius distribution*. Pet. Trans. AIME, vol. 207, pages 164–181, 1956.
- [Fenwick 98] D.H. Fenwick & M.J. Blunt. *Three-Dimensional Modeling of Three-Phase Imbibition and Drainage*. Advances in Water Resources, vol. 21, pages 121–143, 1998.
- [Flukiger 09] F. Flukiger & D. Bernard. *A new numerical model for pore scale dissolution of calcite due to CO₂ saturated water flow in 3D realistic geometry : Principles and first results*. Chemical Geology, vol. 265, pages 171–180, 2009.
- [Fortin 71] M. Fortin, R. Peyret & R. Temam. *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible*. Journal of Mechanics, vol. 10, pages 357 – 390, 1971.
- [Glowinski 03] R. Glowinski. Handbook of numerical analysis (part 3), volume 9. Elsevier Science B.V., 2003.

- [Gray 75] William G. Gray. *A derivation of the equations for multi-phase transport*. Chemical Engineering Science, vol. 30, no. 2, pages 229 – 233, 1975.
- [Hall 92] Richard W. Hall. *Tests for connectivity preservation for parallel reduction operators*. Topology and its Applications, vol. 46, no. 3, pages 199 – 217, 1992.
- [Harlow 65] F. H. Harlow & J. E. Welch. *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*. Physics of Fluids, vol. 8, pages 2182 – 2189, 1965.
- [Hilpert 01] M. Hilpert & C.T. Miller. *Pore-morphology-based simulation of drainage in totally wetting porous media*. Advances in Water Resources, vol. 24, pages 243–255, 2001.
- [Iassonov 09] P. Iassonov, T. Gebrenegus & M. Tuller. *Segmentation of X-ray computed tomography images of porous materials : A crucial step for characterization and quantitative analysis of pore structures*. Water Resour. Res., vol. 45, 2009.
- [Ioannidis 00] M.A. Ioannidis & I. Chatzis. *On the Geometry and Topology of 3D Stochastic Porous Media*. Journal of Colloid and Interface Science, vol. 229, no. 2, pages 323–334, 2000.
- [Jerauld 90] G.R. Jerauld & S.J. Salter. *The effect of pore-structure on hysteresis in relative permeability and capillary pressure : pore level modeling*. Transport in Porous Media, vol. 5, pages 103–151, 1990.
- [Kong 89] T. Y. Kong & A. Rosenfeld. *Digital topology : introduction and survey*. Comput. Vision Graph. Image Process., vol. 48, no. 3, pages 357–393, 1989.
- [Koplik 82] J. Koplik. *Creeping Flow in Two-Dimensional Networks*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 119, pages 219–247, 1982.
- [Kumar Gunda 11] N.S. Kumar Gunda, B. Bera, N.K. Karadimitriou, S.K. Mitra & S.M. Hassanizadeh. *Reservoir-on-a-Chip (ROC) : A new paradigm in reservoir engineering*. Lab Chip, vol. 11, pages 3785–3792, 2011.
- [Lantuéjoul 78] C. Lantuéjoul & H. Digabel. *Iterative algorithms*. In 2nd European Symp. Quantitative Analysis of Microstructures in Material Science, Biology and Medicine, pages 85–99, 1978.

- [Lenormand 83] R. Lenormand, C. Zarcone & A. Sarr. *Mechanisms of the displacement of one fluid by another in a network of capillary ducts*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 135, pages 337–353, 1983.
- [Liang 00] Z. Liang, M.A. Ioannidis & I. Chatzis. *Geometric and Topological Analysis of Three-Dimensional Porous Media : Pore space partitioning based on morphological skeletonization*. Journal of Applied Physics Colloid and Interface Sciences, vol. 221, pages 13–24, 2000.
- [Lieutier 03] A. Lieutier. *Any open bounded subset of \mathbb{R}^n has the same homotopy type than its medial axis*. In Proceedings of the eighth ACM symposium on Solid modeling and applications, pages 65–75, 2003.
- [Lindquist 96] W.B. Lindquist, S.-M. Lee, D.A. Coker, K.W. Jones & P. Spanne. *Medial axis analysis of void structure in three-dimensional tomographic images of porous media*. Journal of Geophysical Research, vol. 101, pages 8297–8310, 1996.
- [Lindquist 00] W.B. Lindquist, A. Venkatarangan, J. Dunsmuir & T.-F. Wong. *Pore and throat size distributions measured from synchrotron X-ray tomographic images of Fontainebleau sandstones*. Journal of Geophysical Research B : Solid Earth, vol. 105, pages 21509–21527, 2000.
- [Ma 94] C.M. Ma. *On topology preservation in 3D thinning*. Computer Vision and Graphical Image Processing : Image understanding, vol. 59, no. 3, pages 328–339, 1994.
- [MacDonald 86a] I.F. MacDonald, P. Kaufman & F.A.L. Dullien. *Quantitative image analysis of finite porous media. I. Development of genus and pore map software*. J. Microsc., vol. 144, pages 277–296, 1986.
- [MacDonald 86b] I.F. MacDonald, P. Kaufmann & F.A.L. Dullien. *Quantitative image analysis of finite porous media. II. Specific genus of cubic lattice models and Berea sandstone*. J. Microsc., vol. 144, pages 297–316, 1986.
- [Malandain 93] G. Malandain, G. Bertrand & N. Ayache. *Topological Segmentation of Discrete Surfaces*. International Journal of Computer Vision, vol. 10, no. 2, pages 183–197, 1993.

- [Marle 67] C. M. Marle. *Écoulements monophasiques en milieu poreux*. Rev. Inst. Français du pétrole, vol. 22, pages 1471 – 1509, 1967.
- [Meijster 00] A. Meijster, J.B.T.M. Roerdink & W.H. Hesselink. *A General Algorithm for Computing Distance Transforms in Linear Time*. Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing, vol. 1, pages 331–340, 2000.
- [Plougonven 09] E. Plougonven. *Link between transport properties of porous media and their microstructure*. PhD thesis, University of Bordeaux 1, 2009.
- [Plougonven 11] E. Plougonven & D. Bernard. *Optimal removal of topological artefacts in microtomographic images of porous materials*. Advances in Water Resources, vol. 34, pages 731–736, 2011.
- [Press 92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky & W. T. Vetterlin. Numerical recipes in C : The art of scientific computing, second edition. Cambridge University Press, 1992.
- [Prodanovic 07] M. Prodanovic, W.B. Lindquist & R.S. Seright. *3D Image-Based Characterization of Fluid Displacement in a Berea Core*. Advances in Water Resources, vol. 30, no. 2, pages 214–226, 2007.
- [Pudney 98] C. Pudney. *Distance-Ordered Homotopic Thinning : A Skeletonization Algorithm for 3D Digital Images*. Computer Vision and Image Understanding, vol. 72, no. 3, pages 404–413, 1998.
- [Quiblier 84] J.A. Quiblier. *A new three-dimensional modeling technique for studying porous media*. Journal of Colloid and Interface Science, vol. 98, no. 1, pages 84–102, 1984.
- [Raouf 09] A. Raouf & S.M. Hassanizadeh. *A New Method for Generating Pore-Network Models of Porous Media*. Transport in Porous Media, vol. 81, pages 391–407, 2009.
- [Remy 02] E. Remy & E. Thiel. *Medial axis for chamfer distances : computing look-up tables and neighbourhoods in 2D or 3D*. Pattern Recognition Letters, vol. 23, no. 6, pages 649–661, April 2002.
- [Remy 03] E. Remy & E. Thiel. *Look-up tables for medial axis on squared Euclidean distance transform*. Proceedings of 11th Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, vol. 1, pages 224–235, 2003.

- [Remy 04] E. Remy & E. Thiel. *Exact Medial Axis with Euclidean Distance*. Image and Vision Computing, vol. 23, pages 167–175, 2004.
- [Ronse 88] C. Ronse. *Minimal test patterns for connectivity preservation in parallel thinning algorithms for binary digital images*. Discrete Applied Mathematics, vol. 21, no. 1, pages 67–79, 1988.
- [Rosen 79] Rosen. *Digital Topology*. Amer. Math. Monthly, vol. 86, pages 621–630, 1979.
- [Saito 94] T. Saito & J.-I. Toriwaki. *New Algorithms for Euclidean Distance Transformation of an n-Dimensional Digitized Picture with Applications*. Pattern Recognition, vol. 27, no. 11, pages 1551–1565, 1994.
- [Sanchez-Palencia 80] E. Sanchez-Palencia. *Non-homogeneous media and vibration theory*. Springer Verlag, 1980.
- [Sezgin 04] M. Sezgin & B. Sankur. *Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation*. J. Electron. Imaging, vol. 13, pages 146–168, 2004.
- [Shin 02] H. Shin. *A throat finding algorithm for medial axis analysis of 3D images of vesiculated basalts*. PhD thesis, State University of New York at Stony Brook, 2002.
- [Sholokhova 09] Y. Sholokhova, D. Kim & W.B. Lindquist. *Network flow modeling via lattice-Boltzmann based channel conductance*. Advances in Water Resources, vol. 32, pages 205–212, 2009.
- [Silin 06] D. Silin & T.W. Patzek. *Pore space morphology analysis using maximal inscribed spheres*. Physica A, vol. 371, pages 336–360, 2006.
- [Slattery 67] J.C. Slattery. *Flow of viscoelastic fluids through porous media*. American Institute of Chemical Engineers Journal, vol. 13, pages 1066 – 1071, 1967.
- [Thompson 97] K.E. Thompson & H.S. Fogler. *Modeling flow in disordered packed beds from pore-scale fluid mechanics*. American Institute of Chemical Engineers Journal, vol. 43, pages 1377–1389, 1997.
- [Thompson 06] K. Thompson, C. S. Willson & W. Zhang. *Quantitative computer reconstruction of particulate materials from microtomography images*. Powder Technology, vol. 163, pages 169–182, 2006.

- [Thovert 93] J.F. Thovert, J. Salles & P.M. Adler. *Computerized characterization of the geometry of real porous media : Their discretization, analysis and interpretation*. Journal of Microscopy, vol. 170, no. 1, pages 65–79, 1993.
- [Toledo 90] P.G. Toledo, R.A. Novy, H.T. Davis & L.E. Scriven. *Hydraulic Conductivity of Porous Media at Low Water Content*. Soil Science Society of America Journal, vol. 54, pages 673–679, 1990.
- [Vincent 91] L. Vincent & P. Soille. *Watersheds in Digital Spaces : An Efficient Algorithm Based on Immersion Simulations*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 13, no. 6, pages 583–598, 1991.
- [Vogel 98] H. J. Vogel & K. Roth. *A new approach for determining effective soil hydraulic functions*. European Journal of Soil Science, vol. 49, pages 547–556, 1998.
- [Vogel 01] H.-J. Vogel & K. Roth. *Quantitative morphology and network representation of soil pore structure*. Advances in Water Resources, vol. 24, pages 233–242, 2001.
- [Whitaker 67] S. Whitaker. *Diffusion and dispersion in porous media*. American Institute of Chemical Engineers Journal, vol. 13, pages 420 – 427, 1967.
- [Whitaker 99] S. Whitaker. *The method of volume averaging*. Kluwer Academic Pub, 1999.
- [Xie 03] W. Xie, R.P. Thompson & R. Perucchio. *A topology-preserving parallel 3D thinning algorithm for extracting the curve skeleton*. Pattern Recognition, vol. 36, no. 7, pages 1529–1544, 2003.
- [Youssef 07] S. Youssef, E. Rosenberg, N. Gland, S. Bekri & O. Vizika. *Quantitative 3D characterisation of the pore space of real rocks : improved μ -CT resolution and pore extraction methodology*. In International Symposium of the Society of Core Analysts, 2007.
- [Zhao 93] H.Q. Zhao, I.F. MacDonald & M.J. Kwiecien. *Multi-Orientation Scanning : A Necessity in the Identification of Pore Necks in Porous Media by 3-D Computer Reconstruction from Serial Section Data*. Journal of Colloid and Interface Science, vol. 162, pages 390–401, 1993.

Titre

Construction d'un modèle de réseau de pores à partir d'une image 3D pour l'estimation de la perméabilité

Résumé

Cette thèse propose d'étudier en détail une méthode générale de construction d'un réseau de pores interconnectés à partir d'une image 3D d'un matériau poreux afin de calculer la perméabilité absolue. Un squelette de l'espace poral est tout d'abord utilisé pour définir la position des pores. Ce squelette est transformé en graphe, puis plusieurs étapes de fusion des nœuds sont réalisées pour obtenir un réseau exploitable. Une ligne de partage des eaux prenant comme marqueurs les nœuds du graphe permet d'attribuer une géométrie aux pores. Le système d'équation linéaire à résoudre est construit en intégrant les équations de Stokes sur des éléments de l'espace poral. Une méthode originale de calcul du coefficient de proportionnalité existant entre les pressions au centre de deux pores et le débit traversant la surface les séparant est proposée. Une application de l'intégralité de l'approche est également présentée sur un matériau réel.

Mots-clés : milieu poreux, modèle de réseau de pores, perméabilité, partitionnement de l'espace poral, écoulement de Stokes, imagerie 3D

Title

Building a pore network model from a 3D image for permeability estimation

Abstract

A general method to build a pore network model from a 3D image of a porous material is presented in this work in order to compute its permeability. A skeleton of the void space is first used to define pores position. This skeleton is converted to a first graph. Merging steps are necessary to obtain a relevant network. A volume is allocated to the pores using a watershed algorithm, starting with markers defined from the nodes of the graph. The linear system of equations to solve is deduced by integrating the Stokes equations on pore space partitioning elements. The proportionality coefficient linking the pressure drop between two pore centers and the flow going through the surface separating them is calculated with an original method. Application of the complete process to a real material is presented.

Keywords : porous media, pore network model, permeability, pore space partitioning, Stokes flow, 3D imaging