

Introduction

Dans cette thèse, nous étudions la réduction des variétés de Shimura de type PEL¹ modulo des nombres premiers de bonne réduction. Plus précisément, nous étudions la stratification de Newton de ces variétés modulo p . Les variétés de Shimura de type PEL sont des espaces de modules de variétés abéliennes avec certaines structures additionnelles de type PEL. La stratification de Newton des variétés de Shimura de type PEL consiste en des lieux où l'isocristal attaché aux variétés abéliennes est constant. Ces strates de Newton sont elles-mêmes des variétés et nous voulons comprendre leur cohomologie ℓ -adique.

1. Histoire et motivation

L'étude des strates de Newton a commencé avec Frans Oort, qui les a définies pour l'espace classique de Siegel. À son tour, il étend le travail de Grothendieck et aussi de Katz qui ont étudié le comportement des cristaux associés à des groupes p -divisibles dans les familles.

Pour l'espace de Siegel, Oort a déterminé les strates de Newton non vides, et a calculé les dimensions de ces strates [85]. Le premier résultat d'Oort (le fait que les strates sont non vides) est démontré dans [84] et a été conjecturé plus tôt par Grothendieck dans [42]. Oort a étudié en outre les orbites de Hecke dans les strates de Newton, et a introduit d'autres stratifications différentes de la stratification de Newton (que nous ne considérerons pas dans cette thèse).

La définition de la stratification de Newton a ensuite été étendue à toutes les variétés de Shimura de type PEL par Rapoport et Richarz [88]. Leur article est apparu après les travaux de Kottwitz sur les isocristaux avec des structures additionnelles [55] (voir aussi [60]).

Pour une discussion plus détaillée de l'histoire du sujet nous renvoyons le lecteur à l'article de Rapoport [87]; une autre référence utile est l'article de Mantovan [74].

2. La stratification de Newton

Avant d'énoncer les résultats de cette thèse, rappelons d'abord plus précisément la définition de la stratification de Newton.

Nous avons déjà expliqué brièvement ci-dessus que l'on étudie les variétés de Shimura de type PEL et que ces variétés ont une interprétation comme espaces de modules de variétés abéliennes avec certaines structures additionnelles de type PEL.

¹Polarization, Endomorphisms and Level structure.

Pourquoi est-ce que cette interprétation comme problème des modules est utile ? Nous l'utilisons pour réduire la variété de Shimura modulo p et définir la stratification de Newton : *A priori* une variété de Shimura S est définie seulement sur un certain corps des nombres E (le corps réflex), et donc "réduction modulo p " n'a aucun sens. Avant de pouvoir réduire la variété modulo un nombre premier p , nous avons besoin d'un modèle de S sur, disons, l'anneau $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Bien sûr, les modèles existent, mais ils ne sont pas uniques et leur réduction dépend du modèle que l'on choisit. Mais rappelons que nous avons supposé que S a une interprétation comme problème des modules de type PEL sur E , et donc les choses se simplifient. Le problème des modules peut être étendu à un problème des modules sur l'anneau $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, et le problème étendu est représentable par un champ de Deligne-Mumford [59, §5]. Sous des hypothèses naturelles, ce champ est un schéma quasi-projectif lisse sur $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Pour avoir la représentabilité par un schéma lisse il faut que le groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ soit suffisamment petit hors p et hyperspecial à p ; nous supposons, pour simplifier, que ce soit le cas. Ensuite, nous avons un choix canonique pour le modèle \mathcal{S} de E sur $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, et nous choisissons ce modèle. On remplace désormais S par son modèle \mathcal{S} sur $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.

La variété $S \otimes \mathbb{F}_p$ se décompose canoniquement en certaines pièces appelées *strates de Newton*. Pour définir précisément ces strates, on utilise de nouveau l'interprétation de S comme espace de modules : Pour chaque point $x \in S(\overline{\mathbb{F}}_p)$ on peut considérer le module de Dieudonné rationnel $\mathbb{D}(\mathcal{A}_x[p^\infty]) \otimes \mathbb{Q}$ de la variété abélienne \mathcal{A}_x correspondant au point x . Ces modules de Dieudonné sont des isocristaux et les structures additionnelles sur \mathcal{A}_x induisent des structures additionnelles sur l'isocristal $\mathbb{D}(\mathcal{A}_x[p^\infty]) \otimes \mathbb{Q}$. Lorsqu'il est équipé de ces structures, l'objet $\mathbb{D}(\mathcal{A}_x[p^\infty]) \otimes \mathbb{Q}$ est un *isocristal avec G -structure* (ici, G est le groupe de la donnée de Shimura de S). Nous sommes intéressés par cet objet à isomorphisme près. On note $B(G_{\mathbb{Q}_p})$ pour l'ensemble des isocristaux avec des G -structures additionnelles. Donc $\mathbb{D}(\mathcal{A}_x[p^\infty]) \otimes \mathbb{Q} \in B(G_{\mathbb{Q}_p})$.

Maintenant, pour chaque élément $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p})$ on note $S_b(\overline{\mathbb{F}}_p)$ le sous-ensemble de $S(\overline{\mathbb{F}}_p)$ constitué d'éléments $x \in S(\overline{\mathbb{F}}_p)$ tels que $b = \mathbb{D}(\mathcal{A}_x[p^\infty]) \otimes \mathbb{Q} \in B(G_{\mathbb{Q}_p})$. Le sous-ensemble $S_b(\overline{\mathbb{F}}_p) \subset S(\overline{\mathbb{F}}_p)$ provient d'un sous-schéma réduit et localement fermé S_b de S [88]. La collection des schémas $\{S_b\}_{b \in B(G_{\mathbb{Q}_p})}$ est la *stratification de Newton de S* , et les S_b sont les *strates de Newton*.

Les correspondances de Hecke sur la variété $S(\mathbb{C})$ sont algébriques, et définies sur le corps E . Elles s'étendent aussi au modèle de S sur $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, parce que leur action peut être décrite en termes de l'interprétation de S comme problème des modules. En particulier, nous avons les correspondances de Hecke sur $S \otimes \mathbb{F}_p$. Ces correspondances de Hecke respectent la stratification de Newton, de sorte qu'elles peuvent être restreintes aux différentes strates de Newton. Par conséquent les espaces de cohomologie $H_{\text{ét}}^i(S_b, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (avec $\ell \neq p$) sont des modules sur l'algèbre de Hecke de G . Ces espaces de cohomologie portent aussi une action

du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/k)$ (où k est un corps résiduel de $\mathcal{O}_E \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$) qui commute avec l'action de l'algèbre de Hecke.

3. Cette thèse

Nous donnons un bref aperçu des nos résultats.

Dans cette thèse, on étudie la stratification de Newton des variétés de Shimura de type PEL, en des places de bonne réduction. Nous introduisons une nouvelle méthode pour étudier les strates de Newton. Notre méthode utilise (la restriction de) la formule de Kottwitz et des formes automorphes. En utilisant cette méthode nous répondrons à certaines questions classiques.

Nous nous posons quatre questions générales sur les strates de Newton S_b (cf. §1) :

- (1) Pour quels éléments $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p})$, la strate $S_b \subset S$ correspondante est-elle non vide ?
- (2) Pour $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p})$ donné, peut-on calculer la dimension de la variété S_b ?
- (3) Peut-on décrire la fonction zêta de S_b ?
- (4) Peut-on décrire le cohomologie ℓ -adique de S_b en tant que module de Galois/Hecke ?

Nous avons numéroté les questions en difficulté croissante. Souvent, une réponse satisfaisante à la question (i) donne également une réponse satisfaisante à la question $(i - 1)$.

Dans cette thèse, nous répondrons partiellement aux quatre questions ci-dessus. Maintenant nous écrivons quelques énoncés imprécis afin de donner une idée des résultats. Nous préciserons nos théorèmes principaux dans la section suivante.

Question (1). Kottwitz a introduit l'ensemble des isocristaux μ -admissibles $B(G, \mu) \subset B(G)$, où μ est défini par la variété de Shimura. Pour tout point $x \in S(\overline{\mathbb{F}}_p)$ l'isocrystal associé se trouve dans le sous-ensemble $B(G, \mu) \subset B(G)$ (Rapoport-Richarz). Ainsi, les strates de Newton associées aux isocristaux non-admissibles sont vides. Récemment Wedhorn et Viehmann ont établi, pour les variétés de PEL de type (A) et (C), qu'inversement, pour b un isocrystal μ -admissible donné, il existe un point $x \in S(\overline{\mathbb{F}}_p)$ dont l'isocrystal est b . Nous établissons le résultat de Wedhorn et Viehmann dans le Chapitre 4 pour les variétés de type (A). Même si notre résultat n'est pas nouveau, notre preuve est complètement différente : la formule des traces remplace des arguments délicats de géométrie algébrique.

Question (2). Dans le Chapitre 2 on établit une formule pour la dimension de la strate basique d'une variété de Kottwitz, sous des conditions simplificatrices. Dans le Chapitre 3 on établit des résultats partiels qui vont en direction d'une formule pour la dimension de la strate basique d'une variété de Kottwitz, dans des conditions beaucoup plus légères. Une *variété de Kottwitz* est une variété de Shimura de type PEL de type (A), et est associée à une algèbre de division avec une involution de seconde espèce. Ces variétés sont nettement plus simples que toute la classe des variétés de PEL de type (A), où l'endoscopie joue un rôle.

Question (3). Considérons à nouveau la strate basique des variétés de Kottwitz en des places de bonne réduction. Nous supposons maintenant que p est complètement déployé dans le centre de l’algèbre à division D qui vient avec la variété de Kottwitz. Au Chapitre 3, sous ces hypothèses, nous répondons à la question (4) par “oui” et on obtient, comme corollaire, la réponse “oui” à la question (3).

Question (4). Dans le chapitre 3, nous calculons l’objet $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i H_{\text{ét}}^i(B_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \iota^* \mathcal{L})$ comme élément du groupe de Grothendieck de $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p)) \times \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}[\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/k)]$ -modules². Ici, B est la strate basique d’une variété de Kottwitz (associé à une algèbre à division D) en un nombre premier p tel que $D \otimes \mathbb{Q}_p$ est isomorphe à un produit d’algèbres de la forme $M_n(\mathbb{Q}_p)$. L’objet s’exprime en fonction de formes automorphes sur le groupe G et certains polynômes de nature combinatoire (voir la réponse à la question (3)).

Méthode. Nous allons maintenant expliquer la nouvelle méthode que nous utilisons dans cette thèse. Nous commençons avec la formule de Kottwitz pour le nombre de points d’une variété de Shimura de type PEL-sur un corps fini (cf. [57, 59]) :

$$(3.1) \quad \sum_{x' \in \text{Fix}_{\Phi_p^{\alpha} \times f^{\infty p}}(\overline{\mathbb{F}}_p)} \text{Tr}(\Phi_p^{\alpha} \times f^{\infty p}, \mathcal{L}_x) = |\ker^1(\mathbb{Q}, G)| \sum_{(\gamma_0; \gamma, \delta)} c(\gamma_0; \gamma, \delta) O_{\gamma}(f^{\infty p}) TO_{\delta}(\phi_{\alpha}) \text{Tr} \xi_{\mathbb{C}}(\gamma_0).$$

Cette introduction n’est pas le lieu pour définir toutes les notations et définitions impliquées dans cette formule. Nous n’expliquerons ici que certains des éléments principaux. Il convient de mentionner d’abord que Kottwitz a uniquement prouvé cette formule pour les variétés S de type PEL, lorsque le groupe est de type (A) ou (C). Pour les variétés de type PEL de type (D), Kottwitz ne prouve ni ne conjecture une telle formule³.

- $f^{\infty p}$ est un opérateur de Hecke quelconque dans l’algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p))$ des fonctions localement constantes sur $G(\mathbb{A}_f^p)$ (où G est le groupe qui intervient dans la donnée de Shimura) ;
- Φ_p est l’élément de Frobenius géométrique dans le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/k)$;
- α est un entier positif ;
- ξ est une représentation complexe irréductible de $G_{\mathbb{C}}$, et \mathcal{L} est le système local ℓ -adique associé à la représentation ξ (ℓ est un nombre premier fixé différent de p , et nous avons fixé, et supprimé, un isomorphisme entre \mathbb{C} et $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$) ;
- La somme du côté droit de l’Équation (3.1) porte sur les triplets de Kottwitz $(\gamma_0; \gamma, \delta)$. Ces triplets sont associés aux classes d’isogénie des variétés abéliennes virtuelles. L’élément γ_0 parcourt les classes de conjugaison stables \mathbb{R} -elliptiques de $G(\mathbb{Q})$.

²Il faut dire que l’on doit fixer un isomorphisme de \mathbb{C} avec $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ pour avoir une action de l’algèbre de Hecke sur la cohomologie ℓ -adique.

³Dans l’article [57] il ne conjecture une formule que pour les groupes connexes ; dans l’article [59] il définit les variétés de type (D), mais, quand les preuves commencent, il exclut ce cas.

- Pour la description des points x' est du point associé $x \in \text{Sh}_K(\overline{\mathbb{F}}_p)$, voir l'Équation (2.3.3).

L'énoncé précis du résultat se trouve dans l'article de Kottwitz [59], voir en particulier §19 et l'introduction de cet article.

En regardant la formule de l'Équation (3.1) nous pouvons expliquer l'idée principale de notre méthode. La formule de Kottwitz concerne le nombre de points dans toute la variété de Shimura Sh_K modulo un nombre premier \mathfrak{p} du corps réflex E . L'idée principale est de restreindre le côté droit de l'Équation (3.1) en comptant seulement les points dans une strate de Newton donnée. Ainsi, nous fixons un isocrystal $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p})$ avec des G -structures additionnelles. Cet élément correspond à une classe de σ -conjugaison dans le groupe $G(L)$, où L est la complétion de l'extension maximale non ramifiée de \mathbb{Q}_p , et σ est l'élément de Frobenius de la complétion du corps réflex E en la place \mathfrak{p} . Alors b définit une strate $\text{Sh}_{K,\mathfrak{p}}^b$ de Sh_K modulo \mathfrak{p} . Nous restreignons la somme dans l'Équation (3.1) sur les triplets de Kottwitz $(\gamma_0; \gamma, \delta)$ tels que δ définit l'isocrystal b . Le côté gauche doit alors être limité aux points fixes de la correspondance $f^{p^\infty} \times \Phi_{\mathfrak{p}}^\alpha$ agissant sur la b -ième strate de Newton $\text{Sh}_{K,\mathfrak{p}}^b$ de $\text{Sh}_{K,\mathfrak{p}}$. Les restrictions des deux côtés de l'Équation (3.1) sont égales, et nous obtenons une version b -restreinte de la formule de Kottwitz.

Dans son article de la conférence de Ann Arbor, Kottwitz montre comment (le côté droit de) l'Équation (3.1) se stabilise. Cet argument de stabilisation est également valable pour notre formule b -restreinte. Donc nous pouvons encore comparer la formule b -restreinte avec la formule des traces. Ce faisant, nous arrivons à une somme de traces sur des représentations automorphes des groupes endoscopiques de G . Notre méthode consiste à traduire une question donnée sur une strate de Newton, par la formule restreinte de Kottwitz, en une question sur les représentations automorphes, et de voir si nous pouvons répondre à cette question traduite. Nous montrons dans cette thèse que nous pouvons répondre à la question traduite dans certains cas. Par exemple, pour répondre à la question (1) ci-dessus, on doit montrer qu'une somme de traces de certains opérateurs de Hecke (transférés) agissant sur les représentations automorphes de groupes endoscopiques de G est non nulle (Chapitre 4, voir ci-dessous).

Il se trouve que les questions traduites sont souvent des problèmes combinatoires. Essayons d'expliquer un de ces problèmes combinatoires, et comment nous le résolvons. À l'exception du Chapitre 4, nous avons restreint notre attention à la strate basique dans cette thèse. Dans cette section, nous limitons aussi notre attention à la strate basique. En outre, nous considérons une variété de Shimura "de Kottwitz". Nous restreignons l'Équation (3.1) à la strate basique. Par les arguments que nous avons esquissés ci-dessus, le côté droit de cette équation restreinte peut être comparé à une formule des traces. Une caractéristique des variétés de Kottwitz est que l'endoscopie ne joue pas de rôle. C'est pourquoi nous allons obtenir simplement une trace de la forme $\text{Tr}((\chi_c^{G(\mathbb{Q}_p)} f_\alpha) f^p, \mathcal{A}(G))$. Ici $\mathcal{A}(G)$ est l'espace des formes automorphes sur le groupe G , f^p est l'opérateur de Hecke en dehors de p , et en p nous avons l'opérateur de Hecke $\chi_c^{G(\mathbb{Q}_p)} f_\alpha$. La fonction f_α est la *fonction de Kottwitz* [54]. Cette fonction est fondamentale, et Kottwitz

a montré que l'on doit prendre cette fonction en p , si l'on veut que la trace $\mathrm{Tr}(f_\alpha f^p, \mathcal{A}(G))$ soit égale au côté gauche de l'Équation (3.1). Une fois que cela est établi, on peut faire appel aux théorèmes de Fujiwara et Grothendieck-Lefschetz afin de trouver l'identité :

$$\mathrm{Tr}(f_\alpha f^p, \mathcal{A}(G)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Tr} \left(f^{p^\infty} \times \Phi_{\mathfrak{p}}^\alpha, H_{\mathrm{ét}}^i(\mathrm{Sh}_{K, \overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \right).$$

C'est l'identité que Kottwitz utilise pour associer une représentation galoisienne à certaines formes automorphes pour le groupe G dans l'article [58]. Nous avons restreint la formule à la strate basique, ce qui donne l'identité

$$\mathrm{Tr}((\chi_c^{G(\mathbb{Q}_p)} f_\alpha) f^p, \mathcal{A}(G)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Tr} \left(f^{p^\infty} \times \Phi_{\mathfrak{p}}^\alpha, H_{\mathrm{ét}}^i(B_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \right),$$

où B est la strate basique. Le problème combinatoire que nous avons mentionné ci-dessus est le calcul des traces compactes $\mathrm{Tr}(\chi_c^{G(\mathbb{Q}_p)} f_\alpha, \pi_p)$ pour toute représentation automorphe π contenue dans l'espace de formes automorphes $\mathcal{A}(G)$.

Dans son article sur le lemme fondamental [22], Clozel a donné une formule pour la trace compacte d'une fonction de Hecke sur les représentations irréductibles lisses des groupes réductifs p -adiques :

$$\mathrm{Tr}(\chi_c^{G(\mathbb{Q}_p)} f, \pi_p) = \sum_{P=MN} \varepsilon_P \mathrm{Tr} \left(\widehat{\chi}_N \overline{f}^{(P)}, \pi_N(\delta_P^{-1/2}) \right),$$

(la somme s'étend sur les sous-groupes paraboliques standard ; pour les autres notations, nous renvoyons le lecteur à la Proposition 2.1.2). Cependant, cette formule est une somme alternée impliquant tous les modules de Jacquet de la représentation. Il n'est pas facile d'évaluer la formule pour une représentation arbitraire d'une manière satisfaisante (du moins, l'auteur ne sait pas comment), pour deux raisons : (1) les modules de Jacquet sont très compliqués, (2) la somme est très redondante et beaucoup des termes s'annulent.

Avec seulement le formule de Clozel, nous ne pensons pas avoir assez d'information pour dire quelque chose d'intéressant. Dans cette thèse, nous travaillons souvent avec l'hypothèse supplémentaire que le centre de F de l'algèbre à division D se déploie en un compositum $F = \mathcal{K}F^+$, où F^+ est un corps de nombres totalement réel, et \mathcal{K} est quadratique imaginaire. Nous supposons également que le nombre premier p de réduction est déployé dans l'extension \mathcal{K}/\mathbb{Q} . Ces hypothèses nous permettent d'utiliser le changement de base quadratique. En appliquant le changement de base du groupe G au groupe $G^+ = \mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}} G_{\mathcal{K}}$, nous pouvons comparer les représentations automorphes $\pi \subset \mathcal{A}(G)$ avec des représentations automorphes du groupe général linéaire. Ces représentations automorphes sont discrètes, et Mœglin et Waldspurger ont classifié le spectre discret du groupe général linéaire. Cela nous donne une liste explicite de représentations possibles π_p en p , et il suffit pour nos besoins de calculer les traces $\mathrm{Tr}(\chi_c^{G(\mathbb{Q}_p)} f_\alpha, \pi_p)$ pour ces représentations π_p . Les représentations sont, à induction parabolique près, des représentations de Speh. Tadic a trouvé une expression explicite des représentations de Speh dans le groupe de Grothendieck des représentations lisses. Il prouve

une formule explicite qui exprime toute représentation de Sp $_g$ donnée en un somme alternée des représentations standard. Nous savons comment calculer les traces compactes sur les représentations standard. Ainsi, il ne reste plus qu'à calculer la somme alternée.

Malheureusement, il se trouve que la somme alternée restante n'est pas facile à calculer en général. Dans le Chapitre 2, nous avons travaillé avec des conditions choisies de sorte que la somme est facile (triviale) à calculer (donc nous évitons ce problème dans le Chapitre 2). Dans le Chapitre 3 nous travaillons sous l'hypothèse que p est complètement déployée dans le corps F^+ , la somme est alors aussi plus simple, mais non-triviale. Nous interprétons la somme comme une somme sur les polynômes associés à certains chemins dans \mathbb{Q}^2 , et nous montrons, en utilisant le Lemme de Lindström-Gessel-Viennot bien connu en combinatoire, que la somme se réduit à une certaine somme sur des *chemins sans intersection*. Puis nous déterminons les représentations qui contribuent à la (somme alternée des espaces de) cohomologie de la strate basique.

4. Les résultats de cette thèse

Nous indiquons chapitre par chapitre les résultats principaux de cette thèse.

Chapitre 1 : La courbe modulaire. Ce chapitre d'introduction ne contient pas de nouveaux résultats. Le théorème principal que nous prouvons est classique et peut être déduit facilement des travaux de Deligne et Rapoport [34].

Nous avons écrit ce Chapitre comme un exemple de la méthode que nous avons esquissé dans la section précédente. Nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME (Deligne-Rapoport). *Soit N un entier avec $N \geq 4$ et considérons la courbe modulaire $Y_1(N)$. Soit p un nombre premier qui ne divise pas N . Nous écrivons $Y_1(N)_{\text{ss}}$ pour le lieu supersingulier de $Y_1(N) \otimes \mathbb{F}_p$. Soit $X'(N)$ la compactification de la courbe correspondant au groupe $\Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$. Soit α un entier positif. Si α est pair, nous avons*

$$\#Y_1(N)_{\text{ss}}(\mathbb{F}_{p^\alpha}) = 1 + \text{genre}(X'(N)) - 2 \cdot \text{genre}(X_1(N)).$$

Si α est impair, nous avons

$$\#Y_1(N)_{\text{ss}}(\mathbb{F}_{p^\alpha}) = 1 + \sum_{\pi} \dim(\pi_{\mathfrak{f}})^{K'} \cdot \varepsilon(\pi_p),$$

où π porte sur les représentations suivantes de $\text{GL}_2(\mathbb{A})$. Nous écrivons $Z(\mathbb{R})^+$ pour l'ensemble des matrices diagonales dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\text{diag}(x, x)$ avec $x \in \mathbb{R}_{>0}^\times$, et nous écrivons $L_0^2(\text{GL}_2(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})^+ \backslash \text{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathfrak{f}}))$ pour l'espace des formes paraboliques muni de l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{A})$ par translations à droite. Alors π porte sur les sous-espaces irréductibles de $L_0^2(\text{GL}_2(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R})^+ \backslash \text{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathfrak{f}}))$ avec

– π_∞ est la série discrète holomorphe de poids 2 ;

– π_p est un twist par un caractère non ramifié de la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $\varepsilon(\pi_p) = 1$ si $\pi_p \cong \mathrm{St}$ et $\varepsilon(\pi_p) = -1$ si $\pi_p \cong \mathrm{St} \otimes \varphi$ avec φ le caractère quadratique non-ramifié.

Chapitre 2 : La strate basique de quelques variétés de Shimura simples. Nous considérons une classe restreinte de certaines variétés de Shimura simples de type PEL, et nous considérons la strate de Newton en une place déployée de bonne réduction. Nous établissons une relation entre la cohomologie de la strate basique de la variété de Shimura et l'espace des formes automorphes sur le groupe G . Nous montrons que l'espace des formes automorphes décrit complètement la cohomologie de la strate basique comme module de Hecke, ainsi que l'action de l'élément de Frobenius.

Donnons maintenant l'énoncé précis. Soit D une algèbre de division sur \mathbb{Q} équipée d'un anti-involution $*$. On note F le centre de l'algèbre D . Nous supposons que F est un corps de multiplication complexe, que $*$ induit la conjugaison complexe sur le centre F et que $D \neq F$. Nous supposons que F est un compositum d'une extension quadratique imaginaire \mathcal{K} de \mathbb{Q} et du sous-corps totalement réel F^+ de F . Nous choisissons un morphisme h_0 de \mathbb{R} -algèbres de \mathbb{C} dans $D_{\mathbb{R}}$ tel que $h_0(z)^* = h_0(\bar{z})$ pour tout nombre complexe z , et nous supposons que l'involution $x \mapsto h_0(i)^{-1}x^*h_0(i)$ sur $D_{\mathbb{R}}$ est positive (cf. Deligne [31, (2.1.1.2)]). Alors (D, h) induit une donnée de Shimura (G, X, h^{-1}) . Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert de G et p un nombre premier tel que nous avons bonne réduction en p (dans le sens de [59, §6]) et tel que le groupe K se décompose en un produit $K_p K^p$ où $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ est hyperspécial et le groupe hors p , K^p , est suffisamment petit, pour qu'on puisse prendre Sh_K la variété de Shimura qui représente le problème des modules de variétés abéliennes de type PEL définie chez Kottwitz [59, §6]. Nous notons $\mathcal{A}(G)$ l'espace des formes automorphes sur G . Soit ξ une représentation irréductible complexe algébrique de $G(\mathbb{C})$. Soit f_{∞} une fonction (quelconque) sur le groupe $G(\mathbb{R})$ ayant les intégrales orbitales stables prescrites par les identités dans [54]. Pour f_{∞} nous pouvons prendre une fonction d'Euler-Poincaré [58, Lemma 3.2] (modulo un certain scalaire explicite, cf. [loc. cit.]). Nous supposons que le nombre premier p est déployé dans l'extension \mathcal{K}/\mathbb{Q} . Soit B la strate basique de la réduction de la variété Sh_K modulo une place \mathfrak{p} du corps réflex E au-dessus de p , et soit \mathbb{F}_q le corps résiduel de E en \mathfrak{p} . Nous notons $\Phi_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{F}_q)$ pour le Frobenius géométrique $x \mapsto x^{q^{-1}}$. Soit \mathcal{L} la restriction en $B_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}, \text{ét}}$ du système local ℓ -adique associé à ξ sur $\mathrm{Sh}_{K, \overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}, \text{ét}}$ [59, §6]. Soit $f^{\infty p}$ un opérateur de Hecke K^p -sphérique dans l'algèbre $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p))$, où \mathbb{A}_f^p est l'anneau des adèles finies dont la composante en p est triviale.

Enfin, nous supposons une condition simplificatrice sur l'isocrystal basique μ -admissible. Soit $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu)$ l'isocrystal avec des G -structures additionnelles correspondant à la strate basique. Le groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ est égal à $\mathbb{Q}_p^{\times} \times \mathrm{GL}_n(F^+ \otimes \mathbb{Q}_p)$, et l'ensemble $B(G_{\mathbb{Q}_p})$ se décompose suivant les facteurs irréductibles de l'algèbre de $F^+ \otimes \mathbb{Q}_p$. Par conséquent, nous avons pour chaque F^+ -place φ au-dessus de p un isocrystal $b_{\varphi} \in B(\mathrm{GL}_n(F_{\varphi}^+))$. La condition simplificatrice

sur l'isocrystal b est, pour chaque \wp , la seule pente de b_\wp avec multiplicité > 1 est la pente 0. Sous ces conditions, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. *La trace de la correspondance $f^{p\infty} \times \Phi_p^\alpha$ agissant sur la somme alternée des espaces de cohomologie $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i H_{\text{ét}}^i(B_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \iota^* \mathcal{L})$ est égale à*

$$(4.1) \quad |\text{Ker}^1(G : \mathbb{Q})| P(q^\alpha) \left(\sum_{\substack{\pi \subset \mathcal{A}(G) \\ \dim(\pi)=1, \pi_p \text{ nr.}}} \zeta_\pi^\alpha \cdot \text{Tr}(f^p, \pi^p) + \varepsilon \sum_{\substack{\pi \subset \mathcal{A}(G) \\ \pi_p \text{ type St.}}} \zeta_\pi^\alpha \cdot \text{Tr}(f^p, \pi^p) \right).$$

pour tous les entiers positifs α . La condition “ π_p de type Steinberg” dans l'Équation (4.1) signifie que, pour chaque F^+ -place \wp au-dessus de p on a les conditions suivantes :

- (1) si le composant en \wp de l'isocrystal basique n'est pas étale (i.e. a des pentes non nulles), alors π_\wp est un twist par un caractère non ramifié de la représentation de Steinberg de $\text{GL}_n(F_\wp^+)$;
- (2) si le composant en \wp est étale (toutes les pentes sont nulles), alors la représentation π_\wp est non ramifiée et générique.

Le symbole $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ dans l'Équation (4.1) est égal à $(-1)^{(n-1)\#\text{Ram}_p^+}$ où Ram_p^+ est l'ensemble des F^+ -places \wp divisant p telles que l'isocrystal b_\wp n'est pas étale. Le nombre ζ_π est un certain q -nombre de Weil dont le poids dépend de ξ (voir Lemme 2.3.11). Le symbole $P(q^\alpha)$ est une certaine fonction polynomiale, voir la Définition 2.3.12 et la discussion qui suit cette définition.

Pour donner un idée de sa forme nous donnons dans cette introduction la fonction $P(q^\alpha)$ sous deux autres hypothèses simplificatrices (pour l'énoncé complet nous devons nous référer au Chapitre 2). Soit n l'entier positif tel que n^2 est la dimension de l'algèbre de D sur le corps F . Par la classification des groupes unitaires sur les nombres réels, le groupe $G(\mathbb{R})$ induit pour chaque F^+ -place infinie v un ensemble de nombres non-négatifs $\{p_v, q_v\}$ tels que $p_v + q_v = n$. Supposons dans cette introduction que $p_v = 0$ pour toute place v , sauf pour une unique F^+ -place infinie v_0 . Deuxièmement, nous supposons que p est complètement déployé dans le corps F^+ . Alors il existe un polynôme $\text{Pol} \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(q^\alpha)$ est égal à $\text{Pol}|_{X=q^\alpha}$. Notre condition sur l'isocrystal basique correspond à la condition que le nombre p_{v_0} soit premier avec n (voir paragraphe §2.3.2). Nous noterons s pour la signature p_{v_0} . Alors, le polynôme $P(q^\alpha)$ est égal à l'évaluation du polynôme

$$(4.2) \quad X \sum X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_s} \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}],$$

au point $X = q^{\alpha \frac{s(n-s)}{2}}$, $X_1 = q^{\alpha \frac{1-n}{2}}$, $X_2 = q^{\alpha \frac{3-n}{2}}$, \dots , $X_n = q^{\alpha \frac{n-1}{2}}$. Dans la somme de l'Équation (4.2) les indices i_1, i_2, \dots, i_s portent sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et satisfont aux conditions

- $i_1 < i_2 < i_3 < \dots < i_s$;
- $i_1 = 1$;

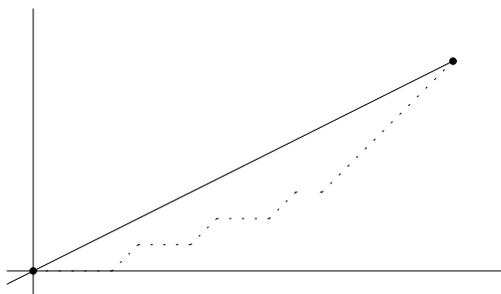


FIG. 1. Calculer la trace compact de la fonction de Kottwitz $f_{n\alpha s}$ sur la représentation de Steinberg.

- Si $s > 1$ il y a une condition supplémentaire : Pour chaque sous-indice $j \in \{2, \dots, s\}$ on a $i_j < 1 + \frac{n}{s}(j-1)$.

Dans le cas de Harris et Taylor [45] le polynôme $\text{Pol}(q^\alpha)$ est égal à 1 (la strate basique est alors une variété *finie*).

La définition ci-dessus est courte, mais ne nous aide à comprendre ce qu'est ce polynôme. Dans la Figure 1, nous donnons une interprétation graphique pour $n = 16$ et $s = 8$. Nous traçons la ligne ℓ de pente $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ passant par l'origine. Nous marquons l'origine $(0, 0)$ et le point $(16, 8)$. On considère certains chemins qui vont de l'origine au point $(16, 8)$. Ces chemins se composent en deux types d'étapes : celles qui vont vers l'est de la forme $(a, b) \rightarrow (a+1, b)$ et celles qui vont vers le nord-est de la forme $(a, b) \rightarrow (a+1, b+1)$ (aucune autre étape n'est permise pour tracer les chemins). De plus les chemins doivent rester strictement sous de la ligne ℓ . Soit L un tel chemin, prenons le produit des puissances $p^{a\alpha}$ sur l'ensemble des étapes nord-est $(a, b) \rightarrow (a+1, b+1)$ qui font parti du chemin L . Ce produit est appelé *poids* de L ; on le note $\text{poids}(L)$. Le polynôme $P(q^\alpha)$ est égal à la somme des poids de tous les chemins qui vont de $(0, 0)$ vers le point $(16, 8)$.

Le lecteur remarquera que dans cet exemple nous avons mis de côté la condition selon laquelle s est premier avec n . Dans le cas où n et s ont des diviseurs en commun, la formule ci-dessus donne toujours la trace compacte de la fonction de Kottwitz agissant sur la représentation de Steinberg (au signe près : on a $\text{Tr}(\chi_c^{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} f_{n\alpha s}, \text{St}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}) = (-1)^{n-1} P(p^\alpha)$). La formule pour la trace compacte sur la représentation triviale est presque la même, la seule chose qui change, c'est que, pour la représentation triviale, les chemins se trouvent aussi sous de la droite ℓ , mais pas strictement : les chemins peuvent la toucher. Dans le cas où n et s sont premiers entre eux il n'y a pas de différence car il n'y a pas de point entier (x, y) sur ℓ avec $0 < x < n$.

Chapitre 3 : La strate basique et des exercices combinatoires. Ce chapitre est la suite du Chapitre 2. Nous enlevons une hypothèse du théorème principal du chapitre précédent. Dans le dernier chapitre, nous avons (essentiellement) supposé que le polygone de Newton associé à la strate basique n'avait pas de point intégral autre que le point de début

et le point final. Nous résolvons les problèmes combinatoires qui résultent de la suppression de cette condition simplificatrice dans le cas où le nombre premier p de réduction est complètement déployé dans le centre F de l'algèbre à division D qui définit la variété de Kottwitz.

Une conséquence de notre résultat final est une expression explicite de la fonction zêta de la strate basique. Les expressions sont en termes : (1) des formes automorphes sur le groupe G de la donnée de Shimura, (2) du déterminant du facteur en \mathfrak{p} de leur représentation galoisienne associée, et (3) des polynômes en q^α , associés à certains chemins non-intersectant dans les treillis du plan \mathbb{Q}^2 .

Avant que nous puissions donner l'énoncé du résultat nous avons besoin d'introduire trois classes de représentations.

Considérons le groupe général linéaire $G_n = \mathrm{GL}_n(F)$ sur un corps local non-archimédien F .

Soient x, y des entiers tels que $n = xy$. Nous définissons la représentation $\mathrm{Speh}(x, y)$ de G_n : C'est l'unique quotient irréductible de la représentation $|\det|^{\frac{y-1}{2}} \mathrm{St}_{G_x} \times |\det|^{\frac{y-3}{2}} \mathrm{St}_{G_x} \times \cdots \times |\det|^{-\frac{y-1}{2}} \mathrm{St}_{G_x}$ où les produits "×" signifient induction parabolique unitaire à partir du sous-groupe parabolique standard de G_n avec chaque bloc de taille x . Une *représentation de Speh semi-stable* de G_n est, par définition, une représentation isomorphe à $\mathrm{Speh}(x, y)$ pour des entiers positifs x, y avec $n = xy$. Nous soulignons que nous n'avons pas défini toutes les représentations de Speh, nous avons seulement introduit celles qui sont semi-stables (ce qui est suffisant pour nos besoins ici).

Une représentation π de G_n est appelée *représentation rigide (semi-stable)* si elle est égale à un produit de la forme

$$\prod_{a=1}^k \mathrm{Speh}(x_a, y)(\varepsilon_a),$$

où y est un diviseur de n et (x_a) est une partition de $\frac{n}{y}$, et les ε_a sont des caractères unitaires non-ramifiés.

Une représentation π du groupe $G(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^\times \times \prod_{\varphi|p} \mathrm{GL}_n(F_\varphi^+)$ est appelé *représentation rigide (semi-stable)* si pour chaque F^+ -place φ au-dessus de p , la composante π_φ est une représentation (semi-stable) rigide du groupe $\mathrm{GL}_n(F_\varphi^+)$ dans la sens précédent :

$$\pi_\varphi = \prod_{a=1}^k \mathrm{Speh}(x_{\varphi,a}, y_\varphi)(\varepsilon_{\varphi,a}),$$

où deux conditions supplémentaires devraient être vraies : (1) $y_\varphi = y_{\varphi'}$ pour tout $\varphi, \varphi'|p$, et (2) le facteur de similitude \mathbb{Q}_p^\times de $G(\mathbb{Q}_p)$ agit par un caractère non ramifié sur l'espace de π . Nous écrivons $y := y_\varphi$ et on appelle l'ensemble des données $(x_{\varphi,a}, \varepsilon_{\varphi,a}, y)$ les *paramètres* de π .

Considérons une variété de Shimura de Kottwitz que nous avons introduit dans le paragraphe précédent. Cependant nous faisons deux changements :

- On oublie l'hypothèse sur les pentes de l'isocrystal basique ;

- On ajoute la condition que le nombre premier p est complètement déployé dans le centre de F de D .

Nous avons alors :

THÉORÈME. *Soit α un entier positif. Alors*

$$(4.3) \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{Tr}(f^{\infty p} \times \Phi_{\mathfrak{p}}^{\alpha}, H_{\text{ét}}^i(B_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \iota^* \mathcal{L})) = \sum_{\substack{\pi \subset \mathcal{A}(G) \\ \pi_p \text{ est rigide}}} \operatorname{Tr}(\chi_c^G f_{\alpha}, \pi_p) \cdot \operatorname{Tr}(f^p, \pi^p).$$

On pourrait penser que le théorème ci-dessus est le résultat principal de ce chapitre, mais le travail n'est pas fini ici. Le but de ce chapitre est de calculer la trace compacte $\operatorname{Tr}(\chi_c^G f_{\alpha}, \pi_p)$ pour toute représentation rigide. Nous trouvons des expressions tout à fait explicites pour ces traces compactes en termes de chemins qui se ne coupent pas. Malheureusement, la définition de ces polynômes est trop technique pour être énoncée ici : on consultera le corps du chapitre pour les définitions. Nous nous contenterons d'un exemple d'un polynôme typique.

Considérons la représentation $\pi_p = \operatorname{Speh}(20, 4)$ de $\operatorname{GL}_{80}(\mathbb{Q}_p)$. Prenons deux copies du plan \mathbb{Q}^2 et traçons la ligne ℓ de pente $\frac{1}{2} = \frac{40}{80}$ passant par l'origine (voir la Figure 2). Dans la Figure 2, appelons ℓ_A la ligne sur le plan à gauche et ℓ_B la ligne sur le plan à droite. Sur la droite ℓ_A nous avons placé quatre points définis par :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &:= (-8, -4) & \vec{y}_1 &:= (12, 6) \\ \vec{x}_3 &:= (-10, -5) & \vec{y}_3 &:= (10, 5) \end{aligned}$$

et sur ℓ_B quatre points définis par

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 &:= (-9, -4\frac{1}{2}) & \vec{y}_2 &:= (11, 5\frac{1}{2}) \\ \vec{x}_4 &:= (-11, -5\frac{1}{2}) & \vec{y}_4 &:= (9, 4\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Ces points sont déterminés par des formules explicites à partir des segments de Zelevinsky de π_p . La pente des droites ℓ_A et ℓ_B est déterminée par le cocaractère de Shimura μ . Les Figures 2A et 2B définiront chacune un polynôme ; voyons d'abord le définition du polynôme pour la Figure 2A (la définition du polynôme de la Figure 2B sera analogue). Comme le montre la figure, nous considérons des chemins qui relient le point \vec{x}_3 avec le point \vec{y}_1 et le point \vec{x}_1 avec le point \vec{y}_3 . Ces chemins se composent de deux types d'étapes, les étapes vers l'est de la forme $(a, b) \rightarrow (a+1, b)$ et les étapes vers le nord-est de la forme $(a, b) \rightarrow (a+1, b+1)$ (aucune autre étape n'est permise dans les chemins). En outre, il y a deux conditions que les chemins doivent satisfaire : (C1) les chemins doivent rester strictement en-dessous de la ligne ℓ_A et, (C2) les chemins ne doivent pas se croiser. Nous appelons *2-chemin* la donnée simultanée de deux chemins, l'un reliant les points \vec{x}_3 et \vec{y}_1 , et l'autre reliant \vec{x}_1 et \vec{y}_3 . Nous appelons *un 2-chemin de Dyck* un 2-chemin qui satisfait les conditions (C1) et (C2). A tout 2-chemin de Dyck L on associe une certaine puissance de p^{α} (α est un entier positif fixé). Nous notons $\operatorname{poids}(L)$ pour ce p^{α} -puissance et nous l'appelons *poids de L* . Ce poids est défini comme suit. Pour L donné, prenons le produit des p^{α} sur l'ensemble des étapes nord-est $(a, b) \rightarrow (a+1, b+1)$

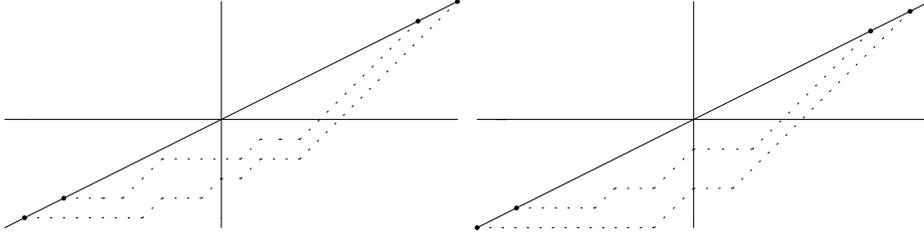


FIG. 2. Exemple de chemins non-intersectants.

qui font partie du 2-chemin L . Le polynôme P_A associée à la Figure 2A est alors la somme des poids de tous les 2-chemins de Dyck. Le polynôme associé à la Figure 2B est similaire; nous utilisons les points $\vec{x}_2, \vec{x}_4, \vec{y}_2, \vec{y}_4$. La trace compacte (de la fonction de Kottwitz $f_{n\alpha s}$) sur la représentation π_p est alors le produit de P_A avec P_B (multiplié par un certain facteur de normalisation, que nous ignorons ici).

Un autre résultat de ce chapitre est le calcul de la dimension de la strate basique.

Avant d'énoncer notre résultat nous avons besoin d'introduire les nombres s_v . Plongeons le corps F dans le corps \mathbb{C} . Considérons le sous-groupe U formé des éléments $g \in G$ dont le facteur de similitude est égal à 1. Ce sous-groupe est obtenu par restriction à \mathbb{Q} d'un groupe unitaire définie sur le corps F^+ . Donc on a $U(\mathbb{R}) = \prod_{v \in \text{Hom}(F^+, \mathbb{R})} U(s_v, n - s_v)$ pour des entiers $s_v \in \mathbb{Z}$ avec $0 \leq s_v \leq \frac{1}{2}n$.

THÉORÈME. *La dimension de B est égal à :*

$$\sum_{v \in \text{Hom}(F^+, \mathbb{C})} \left(\frac{s_v(1 - s_v)}{2} + \sum_{j=0}^{s_v-1} \left[j \frac{n}{s_v} \right] \right).$$

Chapitre 4 : Les strates de Newton sont non vides. Considérons une variété de Shimura de type PEL et réduisons modulo un nombre premier p de bonne réduction. La variété de Shimura paramétrise des variétés abéliennes en caractéristique p avec certaines structures additionnelles de type PEL. À chaque variété abélienne nous pouvons associer son isocrystal de Dieudonné. Les structures PEL sur la variété abélienne donne des structures PEL sur l'isocrystal, et en tant que tels les isocristaux se situent dans la catégorie des "isocristaux avec structures additionnelles" (Kottwitz [55]). Nous regardons ces objets à isomorphisme près. Il n'est pas vrai que chaque G -isocrystal résulte d'un point géométrique sur cette variété. En fait, il y a seulement un nombre fini d'isocristaux possibles; depuis les travaux de Rapoport-Richarz et Kottwitz [60, 88] nous savons qu'ils se trouvent tous dans un certain ensemble fini $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu)$ d'isocristaux "admissibles", mais ils n'ont pas montré que $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu)$ est *exactement* l'ensemble des possibilités : Il n'était pas clair que pour chaque élément $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu)$ il existe une variété abélienne en caractéristique p avec structures additionnelles de type PEL dont

ce module de Dieudonné rationnel est égal à b . Récemment Wedhorn et Viehmann [104] ont prouvé par des moyens géométriques que c'est effectivement le cas si le groupe de la donnée de Shimura est de type (A) ou (C). Dans ce chapitre, nous allons montrer que l'on peut également démontrer ce résultat en utilisant les formes automorphes et la formule de trace dans le cas où le groupe est de type (A). Au moment de la rédaction de ce chapitre, Sug Woo Shin, dans une conférence de BIRS, a annoncé une démonstration de ce résultat différent de celle de Viehmann-Wedhorn et de la nôtre.

En ce moment, nous sommes en train d'écrire la preuve pour le cas (C). Nous pensons que notre méthode donne également une preuve à certains variétés de Shimura de type Hodge, au moins dans les cas où le groupe est classique, si l'on peut démontrer pour ces variétés la formule de Kottwitz.

Chapitre 5 : Équidistribution. Nous démontrons un résultat d'équidistribution pour les opérateurs de Hecke agissant sur la strate basique des variétés de Kottwitz dans les cas où cette strate est une variété finie. Nous pouvons montrer que le taux de convergence est aussi bon que la borne qui provient de la conjecture de Ramanujan.

Considérons une variété de Kottwitz comme dans le Chapitre 2, mais faisons l'hypothèse supplémentaire que la strate basique est une variété finie. Soit A l'espace vectoriel complexe sur l'ensemble des points géométriques de la strate basique. Fixons une norme $|\cdot|$ sur l'espace vectoriel A . L'espace A est un module sur l'algèbre de Hecke. Soit $T_{r,m}$ l'opérateur de Hecke dans l'algèbre $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p))$ qui est obtenu par changement de base, de l'opérateur de Hecke habituel $T_{r,m}$ du groupe $G(\mathbb{A}_f^p \otimes \mathcal{K})$ (qui est isomorphe à un produit de groupes linéaires généraux). Le lecteur peut trouver la définition précise de cette suite d'opérateurs de Hecke dans la Section 5.2. Sur l'espace A on définit l'endomorphisme "moyenne", Moy , qui à un vecteur v associe sa moyenne sur les fibres de la flèche $\text{Sh}_K(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow \pi_0(\text{Sh}_K)(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

Nous prouvons le résultat d'équidistribution ci-dessous :

THÉORÈME. *Soit $v \in A$ un élément. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ ayant la propriété suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier M , tel que pour tout entier $m > M$, sans facteur carré, et tout r avec $1 \leq r \leq n - 1$, nous avons*

$$\left| \frac{T_{r,m}(v)}{\deg(T_{r,m})} - \text{Moy}(v) \right| \leq C m^{\varepsilon - [F:\mathbb{Q}] \frac{r(n-r)}{2}}.$$

Le théorème peut être prouvé aussi pour d'autres suites d'opérateurs de Hecke, mais — bien sûr — le taux de convergence dépend du choix de la suite.

Nous avons aussi un résultat partiel pour une large classe de variétés de Shimura de type PEL unitaires, mais toujours dans l'hypothèse où la strate basique est finie. Nous prévoyons d'être en mesure de prouver un résultat d'équidistribution, avec probablement un taux de convergence similaire, mais nous avons encore à estimer certains termes dans les expressions.

Annexe A : Existence de représentations cuspidales. Dans cette annexe, nous montrons que tout groupe réductif connexe G sur un corps local non-archimédien a une représentation cuspidale complexe.

Nous n'avons pas utilisé ce résultat dans cette thèse, donc l'appendice est indépendant du reste de la thèse. Nous l'utilisons seulement pour le groupe général linéaire, pour lequel le résultat est bien connu. En fait, dans la littérature, il est souvent supposé que l'existence de représentations cuspidales est connue, mais nous n'avons pas trouvé de référence. Cette annexe pourrait combler cette lacune.

Nous avons besoin du résultat pour l'extension des résultats du chapitre 4 à certaines variétés de Shimura de type Hodge. Actuellement, nous travaillons sur ce résultat, et cette annexe sera nécessaire dans cette preuve.

Annexe B : Modules de Jacquet de représentations en échelle (avec Erez Lapid). Dans cette annexe, nous calculons explicitement la semi-simplification des modules de Jacquet de représentations en échelle (anglais : "ladder representations").

Ce résultat est nécessaire (et presque suffisant) si on veut étendre les résultats des Chapitres 2 et 3 aux autres strates de Newton. Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps de compléter ce travail. Nous avons donc choisi d'inclure le résultat sur les modules de Jacquet comme une annexe qui ne dépend pas du reste de la thèse.

L'énoncé précis du résultat n'est pas plus long que les premières pages de l'annexe B. Par conséquent, nous renvoyons le lecteur à l'annexe B pour le théorème.