



**HAL**  
open science

# Méthodes variationnelles pour l'étude de milieux dissipatifs : applications en rupture, endommagement et plasticité

Jean-François Babadjian

► **To cite this version:**

Jean-François Babadjian. Méthodes variationnelles pour l'étude de milieux dissipatifs : applications en rupture, endommagement et plasticité. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013. tel-00804504

**HAL Id: tel-00804504**

**<https://theses.hal.science/tel-00804504>**

Submitted on 25 Mar 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598  
Université Pierre et Marie Curie – Paris 6 & CNRS

Habilitation à diriger les recherches en mathématiques

# Méthodes variationnelles pour l'étude de milieux dissipatifs : applications en rupture, endommagement et plasticité

*Jean-François Babadjian*

*Rapporteurs :*

**Antonin Chambolle**  
*CNRS, Ecole Polytechnique*  
**Gianni Dal Maso**  
*SISSA*  
**Irene Fonseca**  
*Carnegie Mellon University*

*Soutenance le 25 mars 2013 devant le jury :*

**Grégoire Allaire**  
*Ecole Polytechnique*  
**Pierre Cardaliaguet**  
*Université Paris-Dauphine*  
**Antonin Chambolle**  
*CNRS, Ecole Polytechnique*

**Gilles Francfort**  
*Université Paris-Nord*  
**François Murat**  
*CNRS, Université Pierre et Marie Curie*  
**Sylvia Serfaty**  
*Université Pierre et Marie Curie*



# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire sont majoritairement le fruit de collaborations scientifiques. Je remercie donc, en premier lieu, chacun de mes collaborateurs avec qui j'ai eu un grand plaisir à travailler : Gilles Francfort, Margarida Baía, Nadia Ansini, Caterina Zeppieri, Pedro Santos, Marco Barchiesi, Elvira Zappale, Hamdi Zorgati, Vincent Millot, Eric Bonnetier, Faouzi Triki, Francesca Prinari, Maria Giovanna Mora, Alessandro Giacomini, Duvan Henao, Blaise Bourdin, Andres Leon Baldelli et Corrado Maurini.

J'adresse des remerciements tout particuliers à mon directeur de thèse, Gilles Francfort, pour m'avoir fait partager sa vision de la recherche tout au long de ces années. C'est toujours passionnant d'échanger des idées avec lui et de suivre ses cheminements de pensée : sa permanente remise en question de toute forme d'acquis scientifique est une formidable source d'idées originales.

Je suis extrêmement honoré qu'Antonin Chambolle, Gianni Dal Maso et Irene Fonseca aient accepté de consacrer du temps à lire ce mémoire et à en rédiger un rapport. Je les en remercie d'autant plus que chacun d'entre eux a toujours suivi (de près ou de loin) mes travaux depuis mes premiers pas dans le monde de la recherche. Je remercie Grégoire Allaire pour m'avoir accueilli pendant un an au CMAP et pour avoir joué un rôle catalyseur dans le processus de préparation de l'habilitation à diriger les recherches. Merci également à François Murat qui a toujours répondu à mes questions et sans qui ma présence actuelle au laboratoire Jacques-Louis Lions aurait certainement été compromise. Je suis également extrêmement reconnaissant envers Pierre Cardaliaguet et Sylvia Serfaty d'avoir accepté de participer à mon jury.

J'adresse un grand merci à Habib Ammari, Eric Bonnetier et François Jouve pour leurs encouragements et leurs soutiens pendant une période où les choses n'étaient pas forcément au beau fixe. Merci à Vincent Millot pour ses précieux conseils et pour m'inciter à pousser dans les retranchements ma curiosité envers des questions mathématiques qui souvent me dépassent.

Je remercie le laboratoire Jacques-Louis Lions qui constitue un environnement scientifique stimulant pour travailler et, tout particulièrement, le "BurEx" 2D24<sup>1</sup> (ainsi que les membres du bureau élargi) pour l'accueil et la bonne ambiance permanente.

Merci enfin (et d'abord !) à Claire pour m'avoir patiemment accompagné durant toutes ces années en acceptant la distance qui nous a parfois séparée.

---

1. Selon la terminologie employée dans [25, 125] (voir également [135]).



# Table des matières

<b>Préambule</b>	<b>7</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>9</b>
<b>1 Introduction et modélisation des milieux dissipatifs</b>	<b>11</b>
1.1 Mécanique des milieux continus	11
1.1.1 Conservation de la masse	11
1.1.2 Bilan de la quantité de mouvement	12
1.1.3 Equations du mouvement	12
1.1.4 Elasticité non linéaire	13
1.1.5 Hypothèse des petites transformations	13
1.2 Thermodynamique	14
1.2.1 Conservation d'énergie	14
1.2.2 Inégalité de dissipation	15
1.3 Modélisation de milieux dissipatifs à l'aide de variables internes	16
1.3.1 Matériaux standards généralisés	16
1.3.2 Formulation énergétique pour les processus indépendants des vitesses	16
1.4 Quelques exemples	17
1.4.1 Elasticité	17
1.4.2 Visco-élasticité	18
1.4.3 Elasto-plasticité	18
1.4.4 Visco-plasticité	19
1.4.5 Endommagement	19
1.4.6 Rupture	20
<b>2 Mécanique de la rupture</b>	<b>21</b>
2.1 Formulation variationnelle du modèle de Griffith	21
2.2 Existence de solutions fortes	23
2.2.1 Régularité de type Ahlfors pour les minimiseurs de la fonctionnelle de Mumford-Shah	23
2.2.2 Application à l'existence de solutions fortes en croissance quasi-statique de fissures	25
2.3 Fracture dans les films minces	27
2.3.1 Modèles de membranes	28
2.3.2 Le cas statique par $\Gamma$ -convergence	31
2.3.3 Le cas quasi-statique	34
2.4 Fracture et délamination	37
2.4.1 Modélisation du décollement à partir d'une microstructure dégénérée	38
2.4.2 Modélisation du décollement par une remise à l'échelle	40

<b>3</b>	<b>Endommagement</b>	<b>43</b>
3.1	Quelques digressions sur l'homogénéisation . . . . .	43
3.1.1	Résultats généraux . . . . .	43
3.1.2	Approche par mesures de Young . . . . .	45
3.1.3	Homogénéisation de matériaux composites . . . . .	47
3.2	Evolution quasi-statique de l'endommagement . . . . .	49
3.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	49
3.2.2	Etude du modèle d'endommagement . . . . .	51
3.2.3	Couplage de l'endommagement avec la rupture . . . . .	54
3.3	Flot gradient pour un modèle d'endommagement non local . . . . .	55
3.3.1	La fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli . . . . .	55
3.3.2	Flot gradient unilatéral de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli . . . . .	56
3.3.3	Mouvements minimisants unilatéraux de la fonctionnelle de Mumford-Shah . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Plasticité</b>	<b>61</b>
4.1	Plasticité des métaux . . . . .	61
4.2	Plasticité des sols : le cas associé . . . . .	64
4.2.1	Formulation du modèle . . . . .	64
4.2.2	Le modèle dynamique . . . . .	67
4.2.3	Le modèle quasi-statique . . . . .	71
4.3	Plasticité des sols : le cas non-associé . . . . .	74
4.3.1	Une formulation variationnelle en plasticité non-associée . . . . .	74
4.3.2	Approximation visco-plastique . . . . .	77
4.3.3	Existence de solutions en temps remis à l'échelle . . . . .	78
	<b>Annexe</b>	<b>83</b>
A.1	Fonctions à variation bornée . . . . .	83
A.2	Fonctions à déformation bornée . . . . .	84
A.3	$\Gamma$ -convergence . . . . .	84
	<b>Bibliographie générale</b>	<b>87</b>

# Préambule

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur l'analyse mathématique de modèles dissipatifs en mécanique des milieux continus. Une attention est portée sur des modèles variationnels de mécanique de la rupture, d'endommagement et de plasticité. Par un souci d'unité, nous avons sélectionné le sous-ensemble maximal de nos travaux liés à ces sujets, en mettant ostensiblement de côté les articles [B9, B10, B11, B13, B15] dont les domaines d'application diffèrent peu ou prou de ceux présentés ici. En particulier, les articles [B10, B11] en collaboration avec V. MILLOT qui portent sur l'homogénéisation de fonctionnelles intégrales avec contrainte dans une variété relèvent plutôt de modèles de micromagnétisme. L'article [B13] en collaboration avec E. BONNETIER et F. TRIKI traite de la diffraction d'ondes électromagnétiques sur des surfaces rugueuses par des méthodes d'équations intégrales et d'analyse spectrale. Enfin les articles [B9] avec E. ZAPPALE et H. ZORGATI, et [B15] avec F. PRINARI et E. ZAPPALE ont trait à l'étude de problèmes de réduction de dimension pour des énergies à croissance critique. Le cas d'énergies à croissance linéaire dans [B9] relève d'une analyse dans l'espace des fonctions à variation bornée. Le cas d'énergies à croissance infinie dans [B15] donne lieu à l'étude de fonctionnelles suprémales, liées au Laplacien infini, et est motivé par des modèles de rupture diélectrique.

Dans le chapitre 1, il nous a semblé approprié de rappeler les notions de thermomécanique des milieux continus pour aboutir à la modélisation de milieux dissipatifs. Nous insistons plus particulièrement sur les milieux standards généralisés et les processus indépendants des vitesses. Ce chapitre est le dénominateur commun de la plupart des modèles d'élasticité, d'endommagement, de visco-plasticité, d'élasto-plasticité et de fracture évoqués dans la suite de ce mémoire.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude d'un modèle de mécanique de la rupture initialement introduit par Griffith et reformulé variationnellement par Francfort et Marigo. Nous présentons tout d'abord un résultat d'existence de solutions fortes dans le cas 2D antiplan. Nous nous concentrons ensuite sur l'étude d'une classe de matériaux particuliers que sont les films minces. Dans un premier temps, nous montrons comment divers modèles de membranes hétérogènes peuvent être obtenus à l'aide d'une analyse asymptotique par  $\Gamma$ -convergence. Ensuite, nous nous intéressons à la croissance quasi-statique des fissures dans les films minces et établissons que les fissures sont asymptotiquement invariantes dans la direction de l'épaisseur. Enfin, nous étudions le décollement et la délamination de couches minces dont la modélisation repose soit sur la présence de défauts internes au milieu, soit sur un choix approprié de lois d'échelles sur la rigidité et la ténacité du milieu.

Le chapitre 3 concerne l'étude de modèles d'endommagement. Une première partie est consacrée à la théorie de l'homogénéisation de fonctionnelles intégrales sur laquelle repose la compréhension de certains de ces modèles. A cet effet, nous rappelons les résultats classiques et exposons une approche par mesures de Young multi-échelles. Nous nous consacrons ensuite à l'étude des matériaux composites ainsi qu'à une propriété de localité pour cette classe de milieux homogénéisés. Dans une seconde partie, nous présentons un modèle d'évolution quasi-statique en endommagement brutal introduit par Francfort et Marigo, ainsi qu'un modèle de couplage entre l'endommagement et la rupture introduit par Fonseca et Francfort. Tels quels, ces modèles s'avèrent être mal posés, ce qui nécessite de définir une notion de solutions relaxées. A cet effet, nous établissons des résultats d'existence d'évolutions quasi-statiques homogénéisées. Dans une troisième partie, nous étudions une évolution par flot gradient d'un modèle d'endommagement non local. L'existence d'un flot gradient unilatéral pour la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli est démontrée

à l'aide de la méthode des mouvements minimisants et la convergence vers les mouvements minimisants unilatéraux de la fonctionnelle de Mumford-Shah est établie.

Le quatrième et dernier chapitre traite de modèles d'élasto-plasticité. Après avoir rappelé des résultats classiques sur la plasticité des métaux et des alliages, nous nous concentrons sur la plasticité des matériaux granulaires en mécanique des sols. Nous étudions tout d'abord un modèle de plasticité associée avec cap et une loi d'écroutissage sur celui-ci. En régime dynamique, nous montrons le caractère bien posé de ce modèle ainsi que la convergence vers un modèle de plasticité parfaite lorsque l'on fait tendre le cap à l'infini. En régime quasi-statique, nous établissons un résultat d'existence où le principe de travail maximal de Hill est remplacé par une identité d'énergie. Enfin nous étudions un modèle d'élasto-plasticité non-associée avec cap, pour lequel la loi de normalité n'est plus valable, en régime quasi-statique. Comme les solutions semblent présenter des discontinuités temporelles, nous établissons un résultat d'existence pour des temps convenablement remis à l'échelle.

En annexe, nous regroupons l'ensemble des notations utilisées dans ce mémoire. Nous rappelons également un certain nombre de résultats classiques concernant notamment les fonctions à dérivées mesurées et la  $\Gamma$ -convergence.

# Liste des publications

## Articles publiés ou acceptés

- [B1] J.-F. BABADJIAN, G. A. FRANCFORT : Spatial heterogeneity in 3D-2D dimensional reduction, *ESAIM Control, Optim. Calc. Var.*, **11**, no. 1 (2005), 139–160.
- [B2] J.-F. BABADJIAN : Quasi-static evolution of a brittle thin film, *Calc. Var. PDEs*, **26**, no. 1 (2006), 69–118.
- [B3] J.-F. BABADJIAN, M. BAÍA : 3D-2D analysis of a thin film with periodic microstructure, *Proc. Royal Soc. Ed. Sect. A*, **136**, no. 2 (2006), 223–243.
- [B4] J.-F. BABADJIAN, M. BAÍA : Multiscale nonconvex relaxation and application to thin films, *Asymptotic Anal.*, **48**, no. 3 (2006), 173–218.
- [B5] N. ANSINI, J.-F. BABADJIAN, C. I. ZEPPIERI : The Neumann sieve problem and dimensional reduction : a multiscale approach, *M3AS*, **17**, no. 5 (2007), 681–735.
- [B6] J.-F. BABADJIAN, M. BAÍA, P. M. SANTOS : Characterization of two-scale gradient Young measures and application to homogenization, *Appl. Math. Optim.*, **57**, no. 1 (2008), 69–97.
- [B7] J.-F. BABADJIAN : Lower semicontinuity of quasiconvex bulk energies in *SBV* and integral representation in dimension reduction, *SIAM J. Math. Anal.*, **39**, no. 6 (2008), 1921–1950.
- [B8] J.-F. BABADJIAN, M. BARCHIESI : A variational approach to the local character of  $G$ -closure : the convex case, *Annales Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, **26**, no. 2 (2009) 351–373.
- [B9] J.-F. BABADJIAN, E. ZAPPALE, H. ZORGATI : Dimensional reduction for energies with linear growth involving the bending moment, *J. Math. Pures Appl.*, **90**, no. 6 (2008), 520–549.
- [B10] J.-F. BABADJIAN, V. MILLOT : Homogenization of variational problems in manifold valued Sobolev spaces, *ESAIM Control, Optim. Calc. Var.*, **16**, no. 4 (2010), 833–855.
- [B11] J.-F. BABADJIAN, V. MILLOT : Homogenization of variational problems in manifold valued  $BV$ -spaces, *Calc. Var. PDEs*, **36**, no. 1 (2009), 7–47.
- [B12] J.-F. BABADJIAN : Stability of quasi-static crack evolution through dimensional reduction, *Proceedings of the IUTAM Symposium on variational concepts and application to the mechanics of materials*, IUTAM Bookseries **21**, Springer, Netherlands (2010), 1–13.
- [B13] J.-F. BABADJIAN, E. BONNETIER, F. TRIKI : Enhancement of electromagnetic fields caused by interacting subwavelength cavities, *SIAM Mult. Model. Simul.*, **8**, no. 4 (2010), 1383–1418.
- [B14] J.-F. BABADJIAN : A quasi-static evolution model for the interaction between fracture and damage, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **200**, no. 3 (2011), 945–1002.
- [B15] J.-F. BABADJIAN, F. PRINARI, E. ZAPPALE : Dimensional reduction for supremal functionals, *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*, **32**, no. 5 (2012), 1503–1535.
- [B16] J.-F. BABADJIAN, G. A. FRANCFORT, M. G. MORA : Quasi-static evolution in non-associative plasticity – the cap model, *SIAM J. Math. Anal.* **44**, no. 1 (2012), 245–292.
- [B17] J.-F. BABADJIAN, A. GIACOMINI : Existence of strong solutions for quasi-static evolution in brittle fracture, accepté dans *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)*.

## Articles soumis

- [B18] J.-F. BABADJIAN, V. MILLOT : Unilateral gradient flow of the Ambrosio-Tortorelli functional by minimizing movements.
- [B19] J.-F. BABADJIAN, M. G. MORA : Approximation of dynamic and quasi-static evolution problems in elasto-plasticity by cap models.

## Article en préparation

- [B20] A. A. LEON BALDELLI, J.-F. BABADJIAN, B. BOURDIN, D. HENAO, C. MAURINI : A variational model for fracture and delamination of thin films.

Les articles [B9, B10, B11, B13, B15] ne sont pas présentés dans ce mémoire.

# Chapitre 1

## Introduction et modélisation des milieux dissipatifs

L'objet de ce chapitre est de rappeler les bases de la thermomécanique des milieux dissipatifs dans le but de justifier les divers modèles qui seront étudiés tout le long de ce mémoire. Nous renvoyons au livre de GURTIN, FRIED & ANAND [92] pour une étude approfondie de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus.

### 1.1 Mécanique des milieux continus

Désignons par  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  la configuration de référence d'un milieu continu. Sous l'effet du chargement auquel il est soumis, le corps occupe après déformation l'ensemble  $\varphi(\Omega)$ , où  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est le champ des déformations. L'orientation de l'espace devant être préservée, la condition  $\det \nabla \varphi > 0$  est également requise. Toute courbe dans la configuration d'origine subit, par cette déformation, un changement de longueur qui est mesuré à l'aide du gradient de déformation  $F := \nabla \varphi$ , où plus précisément par le *tenseur de Cauchy-Green* noté  $C := (\nabla \varphi^T) \nabla \varphi$ . Il est commode d'introduire le champ des déplacements  $u(x) := \varphi(x) - x$  de sorte que  $C = I + \nabla u + \nabla u^T + (\nabla u^T) \nabla u$ . On définit alors le *tenseur de déformations de Green-Saint Venant* par

$$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{\nabla u + \nabla u^T + (\nabla u^T) \nabla u}{2}. \quad (1.1.1)$$

Au cours d'un mouvement, les interactions entre les parties du corps ou entre le corps et son environnement extérieur sont décrites par des forces. Le milieu est soumis à trois types d'efforts extérieurs :

- (i) des forces de contact  $T$  séparant des parties internes du corps ;
- (ii) des forces de contact  $g$  sur une partie du bord exercées par l'environnement extérieur sur le milieu ;
- (iii) des forces volumiques  $f$  à l'intérieur du corps exercées par l'environnement extérieur.

Un des axiomes fondamentaux de la mécanique des milieux continus concerne les forces internes de contacts : si  $y$  est un point de la configuration déformée  $\varphi(\Omega)$  et  $S$  une surface régulière passant par  $y$  et séparant  $\varphi(\Omega)$  en deux parties  $P_1$  et  $P_2$ , on suppose que  $P_2$  exerce sur  $P_1$  une force par unité de surface notée  $T$ . L'*hypothèse de Cauchy* affirme que  $T$  est un champ vectoriel dépendant uniquement du point et de la normale  $\nu$  à  $S$  (orientée de  $P_1$  vers  $P_2$ ).

#### 1.1.1 Conservation de la masse

Les milieux continus possèdent une masse qui doit être conservée au cours d'un mouvement. Désignons par  $\rho_0$  la masse volumique du milieu à l'instant initial dans la configuration de référence  $\Omega$ . Etant donnée une famille de déformations  $\varphi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  paramétrées par le temps  $t$ , nous notons  $\rho(t, \cdot)$  la masse

volumique de la configuration déformée  $\varphi_t(\Omega)$  au temps  $t$ . Le principe de conservation de masse assure que pour toute sous-partie  $\omega \subset \Omega$ ,

$$\int_{\varphi_t(\omega)} \rho(t, y) dy = \int_{\omega} \rho_0(x) dx,$$

et par la formule de changement de variable, il vient que  $\rho(t, \varphi_t(x)) \det \nabla \varphi_t(x) = \rho_0(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ . En posant  $\varphi(t, x) := \varphi_t(x)$  et en définissant la vitesse dans la configuration déformée par  $v(t, \varphi(t, x)) := \dot{\varphi}(t, x)$ , on obtient la version locale de la *conservation de la masse*

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad \text{dans } \varphi(t, \Omega).$$

### 1.1.2 Bilan de la quantité de mouvement

Le *bilan de la quantité de mouvement* exprime le fait que, pour un système quelconque, la variation temporelle du tenseur cinétique est égale au tenseur des efforts extérieurs. On a pour toute famille de déformations  $\varphi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et pour toute sous-partie  $\omega \subset \Omega$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(\omega)} \rho v dy = \int_{\varphi_t(\omega)} f dy + \int_{\partial \varphi_t(\omega)} T d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad (1.1.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(\omega)} \rho v \wedge y dy = \int_{\varphi_t(\omega)} f \wedge y dy + \int_{\partial \varphi_t(\omega)} T \wedge y d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad (1.1.3)$$

où  $\wedge$  désigne le produit vectoriel. Notons que d'après le principe de conservation de la masse, on peut dériver sous le signe intégral dans les membres de gauche de (1.1.2) et (1.1.3). On obtient alors l'équivalence des tenseurs des efforts extérieurs et des forces d'inerties, ce qui correspond au *principe fondamental de la dynamique*. Le théorème de Cauchy assure que l'application  $\nu \mapsto T(t, y, \nu)$  est linéaire et symétrique, d'où l'existence du *tenseur des contraintes de Cauchy*,  $\sigma(t, y)$  tel que

$$T(t, y, \nu) = \sigma(t, y)\nu, \quad \sigma(t, y)^T = \sigma(t, y) \quad \text{pour tout } y \in \varphi_t(\Omega).$$

Le tenseur de Cauchy  $\sigma$ , qui mesure les forces de contact par unité d'aire, est défini dans la configuration déformée. Pour cette raison, il n'est pas toujours commode de travailler avec  $\sigma$ , mais plutôt avec sa *transformée de Piola* donnée par

$$\Sigma(t, x) := \sigma(t, \varphi_t(x)) \operatorname{cof} \nabla \varphi_t(x),$$

où  $\operatorname{cof} F$  est la matrice des cofacteurs de  $F$ . Le nouveau tenseur  $\Sigma$  est à présent défini dans la configuration de référence et est appelé *tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff*. Notons qu'il ne s'agit plus d'un tenseur symétrique, mais qu'en revanche, il satisfait la relation suivante héritée de la symétrie de  $\sigma$  :

$$\Sigma F^T = F \Sigma^T.$$

### 1.1.3 Equations du mouvement

L'accélération dans la configuration de référence est donnée par  $\ddot{\varphi}(t, x) = \ddot{u}(t, x)$ . Le principe de conservation de la masse permettant de dériver sous le signe intégral dans le membre de gauche de (1.1.2), on obtient après changement de variable les *équations du mouvement*

$$\rho_0 \ddot{u} = \operatorname{div} \Sigma + f_\varphi \quad \text{dans } \Omega \times [0, T],$$

auxquelles on adjoint les conditions limites

$$\Sigma \nu = g_\varphi \quad \text{sur } \partial_N \Omega \times [0, T], \quad \varphi = \psi \quad \text{sur } \partial_D \Omega \times [0, T].$$

Dans les expressions précédentes, les fonctions  $f_\varphi$  et  $g_\varphi$  désignent respectivement des densités de forces volumiques et surfaciques (sur une partie du bord  $\partial_N\Omega \subset \partial\Omega$ ) dans la configuration de référence. Elles sont obtenues à partir de  $f$  et  $g$ , définies dans la configuration déformée, par le changement de variable  $y = \varphi(t, x)$ . En particulier,  $f_\varphi$  et  $g_\varphi$  dépendent *a priori* de la déformation. La fonction  $\psi$  désigne une déformation imposée sur le complémentaire  $\partial_D\Omega := \partial\Omega \setminus \partial_N\Omega$ .

Lorsque le mouvement est suffisamment lent, on peut négliger les effets d'inertie et les *équations d'équilibre* s'obtiennent à partir des équations du mouvement en négligeant le terme d'accélération :

$$\operatorname{div}\Sigma + f_\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T].$$

On a alors à faire à une évolution quasi-statique où le milieu cherche en chaque instant un état d'équilibre.

A ce stade de la modélisation, les équations du mouvement (ou d'équilibre), ne forment pas un système fermé. Il manque des relations liant le tenseur des contraintes et les déformations : c'est la *loi de comportement* traduisant les propriétés physiques du matériau. Nous verrons à cet effet un certain nombre d'exemples dans la section 1.4.

### 1.1.4 Elasticité non linéaire

Nous nous proposons à présent de décrire la modélisation des milieux élastiques non linéaires en grandes déformations. On dit qu'un matériau est *hyperélastique* si le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff dérive d'un potentiel. Autrement dit, il existe une densité d'énergie élastique  $W : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty]$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\Sigma(t, x) = \frac{\partial W}{\partial F}(t, x, \nabla\varphi(t, x)).$$

De façon similaire, on dit que les *forces sont conservatives* si elles dérivent d'un potentiel de force : il existe deux fonctions  $F : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G : [0, T] \times \partial_N\Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que

$$f_\varphi(t, x) = \frac{\partial F}{\partial \varphi}(t, x, \varphi(t, x)), \quad g_\varphi(t, x) = \frac{\partial G}{\partial \varphi}(t, x, \varphi(t, x)).$$

Un exemple important de forces conservatives sont les *forces mortes* qui sont indépendantes de la déformation. L'énergie élastique du système au temps  $t$  est donnée par

$$\mathcal{W}(t, \varphi) := \int_{\Omega} W(t, x, \nabla\varphi(t, x)) \, dx$$

et le travail des forces extérieures au temps  $t$  est défini par

$$\mathcal{F}(t, \varphi) := \int_{\Omega} F(t, x, \varphi(t, x)) \, dx + \int_{\partial_N\Omega} G(t, x, \varphi(t, x)) \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Le lien entre l'énergie et les équations d'équilibre réside dans le fait que (au moins formellement) tout point critique de l'énergie potentielle  $\mathcal{E} := \mathcal{W} - \mathcal{F}$  sur l'ensemble des déformations telles que  $\varphi = \psi$  sur  $\partial_D\Omega$  est solution des équations d'équilibre sous forme faible.

### 1.1.5 Hypothèse des petites transformations

Dans la suite de ce mémoire, nous nous placerons souvent sous l'hypothèse des petites transformations : nous supposerons que le déplacement  $u$  et son gradient  $\nabla u$  restent petits. Des conséquences importantes découlent de cette simplification. Tout d'abord, nous pouvons identifier la configuration déformée du milieu à sa configuration de référence : autrement dit, on peut raisonnablement supposer que le milieu

reste fixe au cours du temps. Ensuite, la relation entre le tenseur des déformations  $E$  et le déplacement  $u$  est réduite à la relation linéaire

$$\epsilon := \epsilon(u) := \frac{\nabla u^T + \nabla u}{2},$$

où l'on a négligé les termes quadratiques dans l'expression (1.1.1) de  $E$ . Le tenseur  $\epsilon$  est appelé *tenseur des déformations linéarisées*. Le principe de conservation de la masse assure que la masse volumique du corps  $\rho(t, x) = \rho_0(x)$  est indépendante du temps. Enfin, nous pouvons identifier les tenseurs des contraintes de Cauchy et Piola-Kirchhoff.

Sous cette hypothèse, les équations du mouvement (ou d'équilibre) s'écrivent

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} = \operatorname{div} \sigma + f & (\text{ou } \operatorname{div} \sigma + f = 0) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \sigma^T = \sigma & & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \sigma \nu = g & & \text{sur } \partial_N \Omega \times [0, T], \\ u = w & & \text{sur } \partial_D \Omega \times [0, T], \end{cases}$$

où  $w : \partial_D \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un déplacement prescrit associé à la déformation  $\psi$  par la relation  $\psi(t, x) = x + w(t, x)$ . L'analyse des équations aux dérivées partielles repose souvent sur une formulation faible du problème. Pour le système précédent, cette formulation correspond au *principe des puissances virtuelles* assurant que la puissance des forces d'inertie compense la puissance des efforts internes et externes. Autrement dit, pour tout champ de vitesse virtuel  $v^*$  et toute sous-partie  $\omega \subset \Omega$ ,

$$\mathcal{P}_a(v^*, \omega) = \mathcal{P}_i(v^*, \omega) + \mathcal{P}_e(v^*, \omega), \quad (1.1.4)$$

où

$$\mathcal{P}_a(v^*, \omega) := \int_{\omega} \rho \ddot{u} \cdot v^* \, dx$$

est la puissance virtuelle des forces d'inertie et

$$\mathcal{P}_i(v^*, \omega) := - \int_{\omega} \sigma : \epsilon(v^*) \, dx, \quad \mathcal{P}_e(v^*, \omega) := \int_{\omega} f \cdot v^* \, dx + \int_{\partial \omega} (\sigma \nu) \cdot v^* \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

désignent la puissance virtuelle des efforts internes et externes, respectivement.

Dans la section 1.1.4, nous avons décrit un modèle de matériaux non linéairement élastiques en grandes déformations. En petites déformations, la modélisation repose sur l'existence d'une densité d'énergie volumique  $W : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , dépendant du tenseur des déformations  $\epsilon$ . La loi de comportement est donnée par la relation

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}(\epsilon).$$

On retrouve en particulier le modèle d'élasticité linéaire quand  $W(\epsilon) = \frac{1}{2} \mathbb{C} \epsilon : \epsilon$ , où  $\mathbb{C}$  est un tenseur d'ordre 4 symétrique et coercif.

## 1.2 Thermodynamique

La déformation d'un milieu continu est une transformation thermodynamique particulière qui doit s'opérer en accord avec les deux principes de la thermodynamique.

### 1.2.1 Conservation d'énergie

Le premier principe de la thermodynamique affirme que dans chaque sous-partie du milieu, la variation en temps de l'énergie totale (énergie interne et énergie cinétique) compense l'apport énergétique des forces extérieures et de chaleur. En d'autres termes, pour toute sous-partie  $\omega \subset \Omega$ , on a

$$\dot{\mathcal{K}}(\omega) + \dot{\mathcal{E}}(\omega) = \mathcal{P}_e(\omega) + \mathcal{Q}(\omega), \quad (1.2.1)$$

où  $\mathcal{E}(\omega)$  désigne l'énergie interne,  $\mathcal{K}(\omega)$  est l'énergie cinétique,  $\mathcal{P}_e(\omega)$  est la puissance des efforts extérieurs et  $\mathcal{Q}(\omega)$  est la puissance calorifique reçue. En notant  $e$  la densité massique d'énergie interne, on a

$$\mathcal{E}(\omega) = \int_{\omega} \rho e \, dx, \quad \mathcal{K}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho v \cdot v \, dx,$$

où  $v = \dot{u}$ . Pour un milieu continu, nous avons déjà vu que

$$\mathcal{P}_e(\omega) = \int_{\omega} f \cdot v \, dx + \int_{\partial\omega} (\sigma\nu) \cdot v \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

$f$  désignant les efforts massiques,  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\nu$  la normale extérieure à  $\omega$ . On suppose que l'apport de chaleur est décrit par une densité volumique  $r$  de taux de chaleur reçue, ainsi qu'une densité surfacique  $h$  d'échange de chaleur entre  $\omega$  et son complémentaire  $\Omega \setminus \omega$ , de sorte que

$$\mathcal{Q}(\omega) = \int_{\omega} r \, dx - \int_{\partial\omega} h \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

On suppose que  $h$  ne dépend que de la normale (extérieure)  $\nu$  à  $\omega$ . Le théorème de Cauchy assure que cette dépendance est linéaire ce qui nous conduit à écrire  $h(\nu) = q \cdot \nu$ , où  $q$  est le vecteur flux de chaleur.

Pour localiser ce bilan énergétique, on prend  $v^* = v$  dans le principe des puissances virtuelles (1.1.4) et on obtient une écriture locale de la première loi de la thermodynamique

$$\rho \dot{e} = \sigma : \dot{\epsilon} + r - \operatorname{div} q, \quad (1.2.2)$$

exprimant la possibilité de transformation de chaleur en énergie mécanique et *vice versa*.

### 1.2.2 Inégalité de dissipation

Le deuxième principe de la thermodynamique fait intervenir non seulement la notion de chaleur, qui représente un transfert d'énergie supplémentaire dû aux fluctuations d'atomes et/ou de molécules, mais aussi l'entropie qui mesure le degré de désordre dans le système engendré par ces fluctuations. Désignons par  $\mathcal{S}(\omega)$  l'entropie interne d'une sous-partie  $\omega$  de  $\Omega$  et par  $\mathcal{J}(\omega)$  le taux d'apport extérieur d'entropie, *i.e.* la vitesse à laquelle l'entropie est transférée à  $\omega$ . Le fait que le système tend à accroître son degré de désordre se manifeste par le fait que l'entropie est une quantité non conservative, soit

$$\dot{\mathcal{S}}(\omega) \geq \mathcal{J}(\omega).$$

Désignons par  $\eta$  la densité massique d'entropie, par  $q/\theta$  le flux d'entropie et par  $r/\theta$  la densité volumique d'entropie, où  $\theta > 0$  désigne la température absolue. On a alors les expressions suivantes

$$\mathcal{S}(\omega) = \int_{\omega} \rho \eta \, dx, \quad \mathcal{J}(\omega) = \int_{\omega} \frac{r}{\theta} \, dx - \int_{\partial\omega} \frac{q}{\theta} \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Après intégration par parties et localisation, nous obtenons une version locale du deuxième principe de la thermodynamique :

$$\rho \theta \dot{\eta} + \operatorname{div} q - \frac{q}{\theta} \cdot \nabla \theta - r \geq 0.$$

L'énergie libre de Helmholtz par unité de masse est définie par  $\Psi := e - \theta \eta$ . En éliminant le terme  $\operatorname{div} q - r$  de l'expression précédente grâce à (1.2.2), on obtient l'*inégalité de Clausius-Duhem* :

$$\sigma : \dot{\epsilon} - \rho \dot{\Psi} - \rho \eta \dot{\theta} - \frac{q}{\theta} \cdot \nabla \theta \geq 0.$$

Dans la suite, nous nous intéresserons à des évolutions isothermes pour lesquelles la température  $\theta(x, t) = \theta_0$  est constante en espace et en temps. Par conséquent, les effets de chaleur ne dissipent pas d'énergie. Comme la masse volumique est indépendante du temps par la conservation de la masse, on peut définir la densité volumique d'énergie  $W = \rho \Psi$ , et on obtient alors l'inégalité de dissipation mécanique

$$\Delta = \sigma : \dot{\epsilon} - \dot{W} \geq 0.$$

### 1.3 Modélisation de milieux dissipatifs à l'aide de variables internes

Nous supposons dorénavant que l'énergie libre  $W : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  dépendant de la déformation  $\epsilon \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  et d'autres variables internes notées  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ . Nous notons  $\sigma^r$  (pour *contrainte réversible*) l'opposé de la force thermodynamique associée à la déformation  $\epsilon$  :

$$\sigma^r := \frac{\partial W}{\partial \epsilon}$$

et  $\sigma^i$  (pour *contrainte irréversible*) la quantité

$$\sigma^i := \sigma - \sigma^r.$$

La force thermodynamique associée à la variable interne  $\alpha$  est définie par

$$A := -\frac{\partial W}{\partial \alpha}.$$

Nous avons alors que  $\dot{W} = \sigma^r : \dot{\epsilon} - A \cdot \dot{\alpha}$ , et l'inégalité de dissipation mécanique devient

$$\Delta = \sigma^i : \dot{\epsilon} + A \cdot \dot{\alpha} \geq 0.$$

#### 1.3.1 Matériaux standards généralisés

A ce stade, nous avons besoin de *lois complémentaires* liant les vitesses  $(\dot{\epsilon}, \dot{\alpha})$  et les forces  $(\sigma^i, A)$ . Pour les *matériaux standards généralisés* (voir HALPHEN & NGUYEN [93]), nous faisons l'hypothèse de l'existence d'un *potentiel de dissipation*  $D : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  convexe, minimal et nul en 0 tel que

$$(\sigma^i, A) \in \partial D(\dot{\epsilon}, \dot{\alpha}).$$

Si l'on note  $D^*$  la transformée de Legendre-Fenchel de  $D$ , l'inégalité de dissipation devient pour les matériaux standards généralisés

$$\Delta = D(\dot{\epsilon}, \dot{\alpha}) + D^*(\sigma^i, A) \geq 0.$$

#### 1.3.2 Formulation énergétique pour les processus indépendants des vitesses

Dans [109], MAINIK & MIELKE ont introduit une formulation énergétique (ou faible) pour des modèles d'évolution quasi-statique de milieux dissipatifs dont la réponse est indépendante des vitesses de sollicitation. Pour cela, il convient de se restreindre à une sous-classe de matériaux standards généralisés pour lesquels la contrainte irréversible  $\sigma^i$  est nulle, *i.e.*,  $D(\dot{\epsilon}, \dot{\alpha}) = D(\dot{\alpha})$  et le potentiel de dissipation  $D$  est positivement homogène de degré 1. Dans ce cas, nous avons vu que pour tout  $t \in [0, T]$ , le couple  $(u(t), \alpha(t))$  est solution dans  $\Omega$  du système

$$\begin{cases} \sigma(t) = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}(\epsilon(t), \alpha(t)), \\ A(t) = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}(\epsilon(t), \alpha(t)) \in \partial D(\dot{\alpha}(t)), \\ \operatorname{div} \sigma(t) + f(t) = 0, \end{cases}$$

auquel on adjoint des conditions limites et initiales

$$\begin{cases} u(t) = w(t) & \text{sur } \partial_D \Omega, \\ \sigma(t)\nu = g(t) & \text{sur } \partial_N \Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad (u(0), \alpha(0)) = (u_0, \alpha_0).$$

Ce problème peut être formulé de façon énergétique en s'affranchissant de faire appel à toute notion de dérivée temporelle. Pour  $(u, \alpha) \in \mathcal{U} \times \mathcal{A}$  dans une certaine classe de déplacements et variables internes admissibles, nous définissons l'énergie potentielle par

$$\mathcal{E}(t, u, \alpha) := \int_{\Omega} W(\epsilon(u)(x), \alpha(x)) dx - \int_{\Omega} f(t, x) \cdot u(x) dx - \int_{\partial_N \Omega} g(t, x) \cdot u(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

et l'énergie de dissipation par

$$\mathcal{D}(\alpha) := \int_{\Omega} D(\alpha(x)) dx.$$

La dissipation totale est donnée, pour toute application  $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathcal{A}$ , par la formule de type variation totale

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}}(\alpha; [a, b]) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{D}(\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)) : N \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b \right\}.$$

Notons que si  $t \mapsto \alpha(t)$  est suffisamment régulière, comme  $\mathcal{D}$  est positivement homogène de degré 1, la définition précédente de la dissipation totale se réduit à une intégrale en temps :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}}(\alpha; [a, b]) = \int_a^b \mathcal{D}(\dot{\alpha}(t)) dt.$$

Nous définissons alors une solution énergétique comme une application  $t \mapsto (u(t), \alpha(t)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{A}$  satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(i) **Stabilité** : pour tout  $t \in [0, T]$ , et tout  $(\hat{u}, \hat{\alpha}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{A}$ , on a

$$\mathcal{E}(t, u(t), \alpha(t)) \leq \mathcal{E}(t, \hat{u}, \hat{\alpha}) + \mathcal{D}(\hat{\alpha} - \alpha(t));$$

(ii) **Egalité d'énergie** : pour tout  $t \in [0, T]$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t, u(t), \alpha(t)) + \mathcal{V}_{\mathcal{D}}(\alpha; [0, t]) &= \mathcal{E}(0, u(0), \alpha(0)) \\ &\quad - \int_0^t \int_{\Omega} \dot{f}(s, x) \cdot u(s, x) dx ds - \int_0^t \int_{\partial_N \Omega} \dot{g}(s, x) \cdot u(s, x) d\mathcal{H}^{n-1}(x). \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Cette approche est bien adaptée à la résolution du problème de façon incrémentale, où l'intervalle de temps  $[0, T]$  est subdivisé :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T.$$

Le couple  $(u_0, \alpha_0)$  étant déterminé par la donnée initiale, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on cherche  $(u_i, \alpha_i)$  comme solution du problème de minimisation

$$\min_{(\hat{u}, \hat{\alpha}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{A}} \{ \mathcal{E}(t_i, \hat{u}, \hat{\alpha}) + \mathcal{D}(\hat{\alpha} - \alpha_{i-1}) \}.$$

La solution  $t \mapsto (u(t), \alpha(t))$  est obtenue comme limite de l'interpolation constante par morceaux de la suite  $\{(u_i, \alpha_i)\}_{0 \leq i \leq N}$ , lorsque le pas de temps tend vers zéro.

## 1.4 Quelques exemples

### 1.4.1 Elasticité

Un solide élastique a un comportement réversible : il revient précisément dans sa configuration de référence après un processus de charge-décharge. Nous avons vu précédemment que la modélisation de milieux élastiques repose sur l'existence d'une densité d'énergie  $W$  dépendant uniquement de  $F$  en grandes déformations ou de  $\epsilon$  en petites déformations. En particulier, il n'y a pas de variable interne supplémentaire de sorte que le potentiel de dissipation  $D = 0$ . Par conséquent, la dissipation mécanique  $\Delta = 0$  ce qui traduit le fait que le modèle est non dissipatif.

### 1.4.2 Visco-élasticité

La viscosité rend compte de l'échelle du temps et donc de la dépendance par rapport à la vitesse de chargement. Par conséquent, ce type de modèles ne rentre pas dans le cadre décrit dans la section 1.3.2. Il existe une grande variété de modèles visco-élastiques. Nous nous proposons de présenter ici le modèle de *Kelvin-Voigt* car celui-ci sera utilisé dans la section 4.2 pour approcher le comportement élasto-plastique d'une classe de matériaux en mécanique des sols. La densité d'énergie totale est donnée par

$$W(\epsilon) = \frac{1}{2} \mathbb{C} \epsilon : \epsilon.$$

Dans ce modèle, il n'y a pas de variable interne : la viscosité se manifeste dans le fait que le potentiel de dissipation est une fonction du taux de déformation :

$$D(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} \mathbb{C}_1 \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}.$$

Dans les expressions précédentes,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}_1$  désignent des tenseurs d'ordre 4, symétriques et coercifs. On a donc  $\sigma^r = \mathbb{C} \epsilon$ ,  $\sigma^i = \mathbb{C}_1 \dot{\epsilon}$ . La loi de comportement est donnée par

$$\sigma = \sigma^r + \sigma^i = \mathbb{C} \epsilon + \mathbb{C}_1 \dot{\epsilon},$$

et on obtient l'expression suivante de la dissipation mécanique

$$\Delta = \sigma^i : \dot{\epsilon} = \mathbb{C}_1 \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon} \geq 0.$$

### 1.4.3 Elasto-plasticité

L'élasto-plasticité est un phénomène typiquement *anelastique* qui se produit quand la force atteint un certain seuil, et où la contrainte irréversible est nulle. La variable interne est donc donnée par le couple  $(\epsilon^p, z)$ , où  $\epsilon^p$  est la déformation plastique et  $z \in \mathbb{R}^d$  est une (éventuelle) variable interne décrivant l'écroutissement du système. La densité d'énergie volumique

$$W(\epsilon, \epsilon^p, z) = \frac{1}{2} \mathbb{C} (\epsilon - \epsilon^p) : (\epsilon - \epsilon^p) + V(z)$$

est une fonction uniquement de la partie élastique (réversible) de la déformation, que nous prenons quadratique pour simplifier, ainsi que de la variable d'écroutissement. Nous supposons que  $\mathbb{C}$  est un tenseur d'ordre 4, symétrique, coercif et  $V$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a donc  $\sigma = \mathbb{C}(\epsilon - \epsilon^p)$ , ce qui correspond également à la force thermodynamique associée à  $\epsilon^p$ . Quant à la force thermodynamique  $\xi$  associée à  $z$ , elle est définie par

$$\xi = -V'(z).$$

En ce qui concerne le potentiel de dissipation, il convient de remarquer que les milieux plastiques sont caractérisés par l'existence dans l'espace des forces d'un convexe d'élasticité, noté  $K$ , dans lequel la force  $(\sigma, \xi)$  est astreinte à demeurer. Les lois secondaires assurent que  $(\dot{\epsilon}^p, \dot{z})$  est orienté dans la direction normale au convexe  $K$  en  $(\sigma, \xi)$ , autrement dit,

$$\begin{cases} (\sigma, \xi) \in K, \\ (\dot{\epsilon}^p, \dot{z}) \in \partial I_K(\sigma, \xi), \end{cases} \quad (1.4.1)$$

où  $I_K$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $K$ . Le potentiel de dissipation  $D$  est alors défini comme la fonction d'appui du convexe  $K$  (la transformée de Legendre-Fenchel de  $I_K$ ) :

$$D(\dot{\epsilon}^p, \dot{z}) := H(\dot{\epsilon}^p, \dot{z}) := \sup_{(\sigma, \xi) \in K} \{\sigma : \dot{\epsilon}^p + \xi \cdot \dot{z}\},$$

et on a alors

$$(\sigma, \xi) \in \partial H(\dot{\epsilon}^p, \dot{z}).$$

Finalement, la dissipation mécanique est donnée par l'expression

$$\Delta = \sigma : \dot{\epsilon}^p + \xi \cdot \dot{z} = H(\dot{\epsilon}^p, \dot{z}) \geq 0.$$

### 1.4.4 Visco-plasticité

En élasto-plasticité classique, le potentiel de dissipation – la transformée de Legendre-Fenchel de la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé – est fortement singulier. Un exemple de modèle visco-plastique consiste à régulariser le potentiel de dissipation par sa transformée de Yosida. Il s'agit du modèle de *Perzyna* dont nous verrons une application dans la section 4.3.2 pour une approximation d'un modèle d'élasto-plasticité non-associée. Supposons pour simplifier qu'il n'y a pas de phénomène d'écroutissage auquel cas l'ensemble  $K$  est sous-ensemble convexe fermé de  $\mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$ . Pour un paramètre de viscosité  $\varepsilon > 0$  fixé, nous définissons

$$D^*(\sigma) := \frac{|\sigma - P_K(\sigma)|^2}{2\varepsilon},$$

où  $P_K$  désigne la projection orthogonale sur  $K$ . Notons que cette fonction est différentiable et qu'elle converge vers la fonction indicatrice de  $K$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La loi d'écoulement (1.4.1) est alors remplacée par la loi régularisée de Perzyna

$$\dot{\varepsilon}^p = \partial D^*(\sigma) = \frac{\sigma - P_K(\sigma)}{\varepsilon}.$$

Nous obtenons le potentiel de dissipation  $D$  de ce modèle en calculant la transformée de Legendre-Fenchel de  $D^*$ , soit

$$D(\dot{\varepsilon}^p) = D^{**}(\dot{\varepsilon}^p) = \sup_{\sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}} \{\sigma : \dot{\varepsilon}^p - D^*(\sigma)\} = H(\dot{\varepsilon}^p) + \frac{\varepsilon}{2} |\dot{\varepsilon}^p|^2,$$

où  $H$  est la fonction d'appui de  $K$ . La dissipation mécanique est alors donnée par la formule

$$\Delta = D(\dot{\varepsilon}^p) + D^*(\sigma) = H(\dot{\varepsilon}^p) + \varepsilon |\dot{\varepsilon}^p|^2 = \sigma : \dot{\varepsilon}^p \geq 0.$$

### 1.4.5 Endommagement

L'endommagement décrit l'affaiblissement des propriétés élastiques d'un milieu au cours d'une série d'essais de charge-décharge. On considère un matériau à deux phases de densités d'énergie de volume  $W_1(\varepsilon)$  et  $W_2(\varepsilon)$ , des fonctions convexes et de classe  $\mathcal{C}^1$ , satisfaisant  $W_1(\varepsilon) \leq W_2(\varepsilon)$  ( $W_1$  est la densité de la partie endommagée du milieu, et  $W_2$  est celle de la partie saine). Nous allons prendre comme variable interne au processus d'endommagement une variable  $\chi \in [0, 1]$  de sorte que la densité d'énergie totale s'écrit comme

$$W(\varepsilon, \chi) = \chi W_1(\varepsilon) + (1 - \chi) W_2(\varepsilon) + I_{[0,1]}(\chi).$$

Le cas où  $\chi \in \{0, 1\}$  correspond à de l'endommagement brutal, alors que  $\chi \in [0, 1]$  correspond à de l'endommagement progressif. La force thermodynamique associée à  $\chi$  est donnée par

$$F \in W_2(\varepsilon) - W_1(\varepsilon) - \partial I_{[0,1]}(\chi).$$

Le potentiel de dissipation le plus simple, qui prend en compte le caractère irréversible du processus est défini par

$$D(\dot{\chi}) := \kappa \dot{\chi} + I_{[0,+\infty)}(\dot{\chi}),$$

où  $\kappa > 0$  est un paramètre caractéristique du matériau, d'où l'on déduit la loi d'évolution de la variable d'endommagement :

$$F \in \partial D(\dot{\chi}).$$

La dissipation mécanique est donnée ici par l'expression

$$\Delta := F \dot{\chi} = \kappa \dot{\chi} \geq 0.$$

Le modèle que nous venons de décrire est donné par système suivant :

$$\begin{cases} 0 \leq \chi \leq 1, & \dot{\chi} \geq 0, \\ W_2(\varepsilon) - W_1(\varepsilon) \leq \kappa & \text{si } 0 \leq \chi < 1 \\ (W_2(\varepsilon) - W_1(\varepsilon) - \kappa) \dot{\chi} = 0 & \text{si } 0 < \chi \leq 1. \end{cases}$$

### 1.4.6 Rupture

L'approche de la rupture que nous allons présenter est conceptuellement identique à celle de l'endommagement exposé au paragraphe précédent. Son analyse s'avère néanmoins plus délicate à cause des objets qu'il convient de manipuler. En particulier, contrairement aux exemples précédents où nous avons considéré des formulations locales en espace, il sera ici nécessaire de travailler dans le cadre d'une formulation globale.

Supposons par simplicité que le problème est planaire ( $n = 2$ ) et que le chemin de fissuration  $\hat{\Gamma} \subset \Omega \cup \partial_D \Omega$  est *a priori* connu. Par conséquent, sous l'hypothèse que la fissure est suffisamment régulière, celle-ci sera complètement déterminée par sa longueur  $\ell$ , et nous noterons  $\Gamma(\ell)$  la fissure de longueur  $\ell$  dans  $\hat{\Gamma}$ . Le phénomène de rupture sera donc modélisé par l'intermédiaire de la variable interne  $\ell$ . L'énergie totale s'écrit donc

$$\mathcal{W}(\epsilon, \ell) = \int_{\Omega \setminus \Gamma(\ell)} W(\epsilon) dx,$$

où  $W(\epsilon)$  est la densité d'énergie volumique, une fonction convexe et de classe  $\mathcal{C}^1$ . La force thermodynamique associée à  $\ell$  est le *taux de restitution d'énergie*

$$G := -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \ell}(\epsilon, \ell).$$

Tout comme dans le cas de l'endommagement, nous partons du principe que la rupture est un phénomène irréversible. Le potentiel de dissipation le plus simple prenant en compte cette propriété est

$$\mathcal{D}(\dot{\ell}) := G_c \dot{\ell} + I_{[0, +\infty)}(\dot{\ell}),$$

où  $G_c > 0$  est, de nouveau, un paramètre caractéristique du matériau appelé la *ténacité*. La loi d'évolution est alors donnée par

$$G \in \partial \mathcal{D}(\dot{\ell}),$$

et l'énergie mécanique dissipée a l'expression suivante :

$$\Delta := G \dot{\ell} = G_c \dot{\ell} \geq 0.$$

Le modèle que nous venons de présenter n'est autre que le *modèle de Griffith* [91] :

$$\begin{cases} \dot{\ell} \geq 0, \\ -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \ell}(\epsilon, \ell) \leq G_c, \\ \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \ell}(\epsilon, \ell) + G_c \right) \dot{\ell} = 0. \end{cases}$$

# Chapitre 2

## Mécanique de la rupture

### 2.1 Formulation variationnelle du modèle de Griffith

Revenons au modèle de Griffith introduit dans la section 1.4.6. Plaçons nous, dans un premier temps, dans un cadre bi-dimensionnel ( $n = 2$ ), où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert de frontière assez régulière. Le cas vectoriel correspond à l'élasticité planaire et le cas scalaire au cas antiplan. Sur une partie du bord  $\partial_D \Omega$ , nous imposons une condition en déplacement  $u = w(t)$ , où  $w(t) : \partial_D \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une donnée de Dirichlet. Par ailleurs, nous supposons que le milieu n'est soumis à aucune force extérieure : le complémentaire de la frontière  $\partial_N \Omega := \partial \Omega \setminus \partial_D \Omega$  est libre ( $g = 0$ ) et la densité volumique de forces est nulle ( $f = 0$ ).

Nous supposons que le matériau peut se fissurer et que le chemin de fissuration  $\hat{\Gamma} \subset \Omega \cup \partial_D \Omega$  est *a priori* connu, où  $\hat{\Gamma}$  est une courbe fermée de classe  $C^1$ . Si l'évolution est suffisamment régulière en temps et la fissure est par exemple connexe, celle-ci sera donc complètement déterminée par sa longueur  $\ell$ , et nous noterons  $\Gamma(\ell)$  la fissure de longueur  $\ell$  dans  $\hat{\Gamma}$ .

Si  $W(\epsilon(u))$  (ou de façon plus générale  $W(\nabla u)$ ) est la densité d'énergie élastique du matériau en dehors de la fissure, nous définissons l'énergie potentielle par

$$\mathcal{W}(u, \ell) := \int_{\Omega \setminus \Gamma(\ell)} W(\nabla u) \, dx.$$

A longueur de fissure  $\ell$  fixée, désignons par  $u(t, \ell)$  la solution du problème élastique dans  $\Omega \setminus \Gamma(\ell)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \operatorname{div} DW(\nabla u(t, \ell)) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Gamma(\ell), \\ u(t, \ell) = w(t) & \text{sur } \partial_D \Omega \setminus \Gamma(\ell), \\ DW(\nabla u(t, \ell))\nu = 0 & \text{sur } \partial_N \Omega \cup \Gamma(\ell). \end{cases}$$

La détermination de la (longueur de) fissure est basée sur le critère de Griffith présenté dans la section 1.4.6 : la solution du problème est donnée, pour tout  $t \in [0, T]$ , par  $\ell(t)$  et  $u(t) := u(t, \ell(t))$  satisfaisant

$$\begin{cases} \dot{\ell}(t) \geq 0, \\ -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \ell}(u(t), \ell(t)) \leq G_c, \\ \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \ell}(u(t), \ell(t)) + G_c \right) \dot{\ell}(t) = 0. \end{cases}$$

Dans le système précédent, une constante caractéristique du matériau intervient : il s'agit de la ténacité  $G_c > 0$  qui est une quantité mesurée expérimentalement. D'un point de vue microscopique, cette constante n'est autre que l'énergie locale qu'il faut fournir à un réseau pour rompre une liaison interatomique.

Dans [81] (voir également [26, Proposition 2.1]), FRANCFORT & MARIGO ont montré que le critère de Griffith est équivalent à un principe de stationnarité unilatérale couplé à un principe de conservation

d'énergie. Pour ce faire, définissons l'énergie totale du système par

$$\mathcal{E}(u, \ell) := \int_{\Omega \setminus \Gamma(\ell)} W(\nabla u) dx + G_c \ell = \int_{\Omega \setminus \Gamma(\ell)} W(\nabla u) dx + G_c \mathcal{H}^1(\Gamma(\ell)).$$

Le couple  $(u(t), \ell(t))$  satisfait le critère de Griffith si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

(i) **Stationnarité unilatérale** : le couple  $(u(t), \ell(t))$  est un point stationnaire de

$$(\hat{u}, \hat{\ell}) \mapsto \int_{\Omega \setminus \Gamma(\hat{\ell})} W(\nabla \hat{u}) dx + G_c(\hat{\ell} - \ell(t))$$

parmi tous les couples  $(\hat{u}, \hat{\ell})$  avec  $\hat{\ell} \geq \ell(t)$  et  $\hat{u} = w(t)$  sur  $\partial_D \Omega \setminus \Gamma(\hat{\ell})$ ;

(ii) **Irréversibilité** :  $\dot{\ell}(t) \geq 0$ ;

(iii) **Bilan d'énergie** :

$$\mathcal{E}(u(t), \ell(t)) = \mathcal{E}(u(0), \ell(0)) + \int_0^t \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma(\ell(s))} DW(\nabla u(s)) \nu \cdot \dot{w}(s) d\mathcal{H}^1(x) ds.$$

Pour des raisons liées à l'existence et l'unicité d'une solution régulière au modèle de Griffith, il s'avère pertinent de supposer que l'application  $\ell \mapsto \mathcal{E}(u, \ell)$  est strictement convexe (voir [26, Proposition 2.4]), auquel cas le principe de stationnarité unilatérale n'est autre que la condition d'optimalité d'ordre 1 d'un principe local de minimisation d'énergie. Il semble donc préférable d'adopter un principe unilatéral de moindre énergie en ne sélectionnant que les points critiques qui sont des minima locaux de la fonctionnelle d'énergie  $\mathcal{E}$ . Il sera en fait plus commode de ne garder que les minima globaux car la notion de minimum local par rapport à la fissure n'est pas clairement définie car il convient de munir d'une topologie la classe des fissures admissibles.

Ayant reformulé le critère de Griffith sous forme variationnelle, il est alors possible de donner une définition d'une évolution quasi-statique sans avoir à connaître *a priori* le chemin de fissuration. Notons que cette définition est indépendante de la dimension, nous nous placerons donc en dimension quelconque. Soit donc  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné suffisamment régulier. Pour tout  $\Gamma \subset \bar{\Omega}$  et  $u : \Omega \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ , on définit l'énergie totale par

$$\mathcal{E}(u, \Gamma) := \int_{\Omega \setminus \Gamma} W(\nabla u) dx + G_c \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma).$$

**Définition 2.1.1.** On dit que  $t \mapsto (u(t), \Gamma(t))$  est une évolution quasi-statique associée à la donnée sur le bord  $w$  et à la condition initiale  $(u_0, \Gamma_0)$ , si  $(u(0), \Gamma(0)) = (u_0, \Gamma_0)$  et les trois conditions suivantes sont réunies : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

(i) **Principe de moindre énergie** : pour tout couple  $(\hat{u}, \hat{\Gamma})$  avec  $\Gamma(t) \subset \hat{\Gamma}$  et  $\hat{u} = w(t)$  sur  $\partial_D \Omega \setminus \hat{\Gamma}$ ,

$$\mathcal{E}(u(t), \Gamma(t)) \leq \mathcal{E}(\hat{u}, \hat{\Gamma});$$

(ii) **Irréversibilité** : pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\Gamma(s) \subset \Gamma(t);$$

(iii) **Bilan d'énergie** :

$$\mathcal{E}(u(t), \Gamma(t)) = \mathcal{E}(u(0), \Gamma(0)) + \int_0^t \int_{\partial \Omega \setminus \Gamma(s)} DW(\nabla u(s)) \nu \cdot \dot{w}(s) d\mathcal{H}^{n-1}(x) ds.$$

Les principaux mérites de cette formulation, par rapport au modèle original de Griffith, résident dans le fait qu'il ne suppose pas la connaissance *a priori* du chemin de fissuration, qu'il permet de prédire le phénomène d'initiation de fissure dans des milieux sains (voir les travaux de CHAMBOLLE, GIACOMINI & PONSIGLIONE [39]), et qu'il autorise des évolutions temporelles discontinues de fissures.

Il convient à présent de trouver un bon cadre mathématique pour obtenir des solutions à ce modèle. Le premier résultat rigoureux a été établi par DAL MASO & TOADER dans [56] en petites déformations dans le cas scalaire anti-plan ( $n = 2$  et  $m = 1$ ), avec une énergie de volume quadratique  $W(\nabla u) = |\nabla u|^2$ , dans la classe des fissures compactes connexes. Cette dernière hypothèse d'ordre topologique sur les fissures est nécessaire pour avoir la (semi-)continuité des énergies de volume et de surface qui entrent en compétition dans l'énergie totale  $\mathcal{E}$ . En effet, la continuité de l'énergie de volume résulte d'un résultat obtenu par CHAMBOLLE & DOVERI [38] (voir également BUCUR & VARCHON [33]) sur la continuité du problème de Neumann posé sur des domaines variables. La semi-continuité inférieure de l'énergie de surface, provient quant à elle du Théorème de Golab assurant la semi-continuité inférieure de la mesure de Hausdorff uni-dimensionnelle  $\mathcal{H}^1$  par rapport à la convergence de Hausdorff. Ce résultat a par la suite été étendu par CHAMBOLLE dans [35] au cadre de l'élasticité planaire ( $n = m = 2$ ) avec toujours la même restriction topologique sur les fissures.

Par la suite, FRANCFORT & LARSEN [79] ont exploité une analogie que présente ce modèle avec le modèle de segmentation d'image de MUMFORD-SHAH [116]. Dans [59], DE GIORGI & AMBROSIO ont introduit une classe de *problèmes aux discontinuités libres* définis dans l'espace  $SBV$  des *fonctions spéciales à variation bornée* dans lequel la fonctionnelle de Mumford-Shah est coercive et semi-continue inférieurement (voir AMBROSIO [4, 5]). En s'inspirant de ces travaux, une formulation faible du modèle de croissance de fissures a été introduite dans [79] grâce à laquelle les précédentes restrictions sur la dimension et sur la topologie des fissures ont été levées. Dans cette formulation faible, le champ des déplacements est interprété comme une fonction  $SBV$  et la fissure comme un ensemble  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiable contenant l'ensemble des sauts du déplacement. La contribution principale de [79] est un théorème de transfert de saut assurant la stabilité du principe de minimalité unilatérale par convergence faible dans  $SBV$ .

Grâce à cette approche par formulation faible, le cas vectoriel de l'élasticité non linéaire a pu être traité par DAL MASO, FRANCFORT & TOADER dans [51, 52] pour des énergies de volume quasiconvexes. Le cas de l'hyperélasticité a été étudié par DAL MASO & LAZZARONI dans [53] avec des énergies polyconvexes compatibles avec la non-interpénétration de la matière ainsi que le fait que l'énergie doit exploser lorsque le déterminant de la transformation tend vers zéro.

## 2.2 Existence de solutions fortes

La formulation faible permet donc de démontrer l'existence de solutions dans des contextes très généraux, le prix à payer étant de travailler avec des objets plus abstraits. En particulier, l'existence de solutions fortes (des fissures fermées et des déplacements de classe  $\mathcal{C}^1$  ou Sobolev en dehors de la fissure) est restée jusque là un problème ouvert. Dans le cadre de la minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah, un résultat obtenu par DE GIORGI, CARRIERO & LEACI dans [60] (voir également CARRIERO & LEACI [34], FONSECA & FUSCO [71] et AMBROSIO & PALLARA [10]) assure que tout minimiseur dans  $SBV$  a un ensemble de sauts essentiellement fermé.

En nous inspirant de ces résultats, en collaboration avec A. GIACOMINI, nous avons établi dans [B16] l'existence de solutions fortes en petites déformations dans le cas anti-plan ( $n = 2$  et  $m = 1$ ). Ce résultat est basé sur une généralisation des résultats [60, 34, 71]. Il s'agit de démontrer une propriété de *régularité de type Ahlfors* pour les quasi-minimiseurs de la fonctionnelle de Mumford-Shah avec condition de Dirichlet homogène sur une partie du bord.

### 2.2.1 Régularité de type Ahlfors pour les minimiseurs de la fonctionnelle de Mumford-Shah

**Configuration de référence.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert désignant la configuration de référence d'un milieu élastique pouvant se fissurer. On suppose que sa frontière est Lipschitzienne et qu'elle se décompose en l'union d'une partie de Dirichlet  $\partial_D \Omega$  qui est ouverte pour la topologie relative et de classe  $\mathcal{C}^1$ , et une partie Neumann  $\partial_N \Omega = \partial \Omega \setminus \partial_D \Omega$ . Considérons un ouvert artificiel  $\Omega'$  tel que  $\Omega \subset \Omega'$ ,  $\Omega' \cap \partial \Omega = \partial_D \Omega$ .

**Densité d'énergie élastique.** Soit  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la densité d'énergie élastique du milieu. On suppose que  $W$  est une fonction continue satisfaisant les propriétés suivantes :

- *Croissance* : il existe des constantes  $L > 0$  et  $p > 1$  telles que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$L^{-1}|\xi|^p \leq W(\xi) \leq L|\xi|^p;$$

- *Uniforme convexité* : il existe  $\mu > 0$  tel que pour tout  $\xi$  et  $\xi' \in \mathbb{R}^n$ ,

$$W\left(\frac{\xi + \xi'}{2}\right) \leq \frac{1}{2}W(\xi) + \frac{1}{2}W(\xi') - \mu(|\xi|^2 + |\xi'|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\xi - \xi'|^2;$$

- *Homogénéité* : pour tout  $t > 0$  et  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,

$$W(t\xi) = t^p W(\xi).$$

**Densité d'énergie de surface.** Soit  $\kappa : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une norme satisfaisant la condition suivante : il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $\nu \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\beta^{-1}|\nu| \leq \kappa(\nu) \leq \beta|\nu|.$$

Nous considérons ici des déplacements scalaires ( $m = 1$ ). Pour tout ouvert  $A \subset \Omega'$  et  $u \in SBV^p(A)$ , nous définissons la fonctionnelle de Mumford-Shah avec donnée de Dirichlet homogène sur  $\partial_D \Omega$  par

$$F(u, A) := \begin{cases} \int_A W(\nabla u) dx + \int_{J_u \cap A} \kappa(\nu_u) d\mathcal{H}^{n-1} & \text{si } u = 0 \text{ p.p. dans } A \cap (\Omega' \setminus \bar{\Omega}), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que la présence de l'ouvert artificiel  $\Omega'$  sert simplement à écrire la condition limite de Dirichlet. Il s'agit en fait d'une condition portant sur la trace externe de  $u$  sur  $\partial_D \Omega$  de sorte que  $u$  peut sauter en un point de la partie Dirichlet du bord. On définit également la valeur minimale par

$$\mathbf{m}(u, A) := \inf\{F(v, A) : v \in SBV^p(A), \{v \neq u\} \subset\subset A\}$$

et, si  $\mathbf{m}(u, A) < \infty$ , la déviation de la minimalité par

$$\text{Dev}(u, A) := F(u, A) - \mathbf{m}(u, A).$$

**Définition 2.2.1.** Soit  $A \subset \Omega'$  un ouvert. On dit que  $u \in SBV^p(A)$  est un *quasi-minimiseur* de  $F(\cdot, A)$  s'il existe des constantes  $\omega > 0$  et  $s \in (0, 1)$  telles que pour toute boule  $B_\rho(x) \subset A$ ,

$$\text{Dev}(u, B_\rho(x)) \leq \omega \rho^{n-1+s}.$$

Notons, en particulier, que tout minimiseur  $u$  de  $F(\cdot, A)$  est également un quasi-minimiseur car dans ce cas  $\text{Dev}(u, B_\rho(x)) = 0$  pour toute boule  $B_\rho(x) \subset A$ .

Le résultat suivant, obtenu dans [B16], établit une propriété de régularité de type Ahlfors pour les quasi-minimiseurs de la fonctionnelle de Mumford-Shah avec une condition de Dirichlet homogène sur  $\partial_D \Omega$ .

**Théorème 2.2.2.** Soit  $A \subset \Omega'$  un ouvert et  $u \in SBV^p(A)$  un quasi-minimiseur de  $F(\cdot, A)$  pour des constantes  $\omega > 0$  et  $s \in (0, 1)$ . Alors, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\vartheta_0 > 0$  et  $\varrho_0 > 0$  (dépendant uniquement de  $n, p, L, \mu, \beta, s, \omega$  et  $\eta$ ) tels que

$$\mathcal{H}^{n-1}(J_u \cap B_\rho(x)) \geq \vartheta_0 \rho^{n-1}$$

pour toute boule  $B_\rho(x) \subset A$  centrée en  $x \in \bar{J}_u$ , de rayon  $\rho \leq \varrho_0$  et telle que  $\text{dist}(B_\rho(x), \partial_N \Omega) > \eta$ .

Le paramètre de sécurité  $\eta$  est introduit pour des raisons techniques liées au fait que seule la partie Dirichlet du bord est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ce paramètre assure que les boules prises en compte sont bien distantes de la partie Neumann qui est seulement Lipschitz. Notons que si tout le bord était de classe  $\mathcal{C}^1$ , il serait inutile d'introduire  $\eta$ .

L'originalité par rapport aux précédents travaux à ce sujet [60, 34, 71] réside dans le fait que l'on regarde la densité de saut sur des boules centrées sur  $\Omega \cup \partial_D \Omega$  pouvant intersecter le bord  $\partial_D \Omega$  du domaine. Il est nécessaire de considérer de telles situations car il n'est pas exclu qu'une fissure sur le bord peut être obtenue comme la "limite" (temps discret vers temps continu) d'une suite de fissures internes au milieu.

La démonstration de ce résultat repose sur une propriété de monotonie de l'énergie qui assure que tout quasi-minimiseur  $u$  de la fonctionnelle de Mumford-Shah avec une donnée de Dirichlet homogène sur  $\partial_D \Omega$ , et dont l'ensemble des sauts est suffisamment petit, est proche d'être un minimum local de l'énergie de volume avec la même condition limite. Nous avons par ailleurs étudié la régularité des minima locaux de l'énergie de volume. En particulier, à l'aide de l'approche de De Giorgi sur la régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, nous avons établi une estimation uniforme sur le gradient d'un tel minimum local, assurant que son énergie sur une boule de rayon  $\rho$  est d'ordre  $\rho^n$ . La combinaison de ces informations implique que la fonctionnelle de Mumford-Shah  $F(u, B_\rho(x))$  localisée sur une boule  $B_\rho(x)$  de rayon  $\rho$  se comporte en  $o(\rho^{n-1})$  et donc, que le centre  $x$  de la boule ne peut pas être un point de saut de  $u$ . Par contraposée, nous en déduisons que la densité de  $J_u$  sur toute boule centrée en un point de  $J_u$  doit être forcément uniformément minorée par une constante positive  $\vartheta_0 > 0$ .

### 2.2.2 Application à l'existence de solutions fortes en croissance quasi-statique de fissures

Revenons à présent au modèle de croissance quasi-statique de fissure. Nous nous plaçons dans le cadre scalaire bi-dimensionnel ( $n = 2$  et  $m = 1$ ) de l'élasticité anti-plane. Nous effectuerons les hypothèses supplémentaires décrites ci-dessous :

**Densité d'énergie élastique.** Nous supposons que la densité d'énergie élastique  $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ .

**Donnée de Dirichlet.** Nous supposons que la donnée de Dirichlet est la trace sur  $\partial_D \Omega \times [0, T]$  d'une fonction

$$w \in AC([0, T]; W^{1, \infty}(\Omega)).$$

**Données initiales.** Donnons-nous un couple  $(u_0, \Gamma_0)$  construit comme suit : soit  $u_0 \in SBV^p(\Omega')$  une solution du problème de minimisation

$$\min \left\{ \int_{\Omega} W(\nabla v) dx + \int_{J_v} \kappa(\nu_v) d\mathcal{H}^1 : v \in SBV^p(\Omega'), v = w(0) \text{ p.p. dans } \Omega' \setminus \overline{\Omega} \right\},$$

dont l'existence est garantie par une application du théorème de compacité et de semi-continuité inférieure d'Ambrosio (voir [4]). Nous définissons alors la fissure initiale par  $\Gamma_0 = J_{u_0}$ . Nous démontrons que  $u_0 - w(0)$  est en fait un quasi-minimiseur de la fonctionnelle de Mumford-Shah avec donnée de Dirichlet homogène sur  $\partial_D \Omega$  (au sens de la Définition 2.2.1) avec  $s = 1/p$  et  $\omega$  dépendant seulement de  $p, L, \mu, \beta, w$  et  $\Omega$ . Nous pouvons donc appliquer le Théorème 2.2.2 qui donne l'existence, pour tout  $\eta > 0$ , de  $\vartheta_0 > 0$  et  $\varrho_0 > 0$  (dépendant uniquement de  $p, L, \mu, \beta, w, \Omega$  et  $\eta$ ) tels que

$$\mathcal{H}^1(J_{u_0} \cap B_\rho(x)) \geq \vartheta_0 \rho^{n-1}$$

pour toute boule  $B_\rho(x) \subset \Omega'$  centrée en  $x \in \overline{J_{u_0}}$  de rayon  $\rho \leq \varrho_0$  et telle que  $\text{dist}(B_\rho(x), \partial_N \Omega) > \eta$ . En particulier, la fissure initiale  $\Gamma_0$  est essentiellement fermée et nous pouvons donc supposer, sans restreindre la généralité, que  $\Gamma_0$  est fermé.

L'obtention de solutions est basée sur une approche par discrétisation temporelle similaire à celle décrite dans la section 1.3.2 : on considère une discrétisation de l'intervalle  $[0, T]$  du type

$$0 = t_k^0 < t_k^1 < \dots < t_k^{N_k} = T, \quad \delta_k := \sup_{0 \leq i \leq N_k - 1} (t_k^{i+1} - t_k^i) \rightarrow 0.$$

Nous définissons  $(u_k^0, \Gamma_k^0) := (u_0, \Gamma_0)$ , où  $(u_0, \Gamma_0)$  est la donnée initiale, et pour  $i \geq 1$ , on prend  $u_k^i$  une solution de

$$\min \left\{ \int_{\Omega} W(\nabla v) dx + \int_{J_v \setminus \Gamma_k^{i-1}} \kappa(\nu_v) d\mathcal{H}^1 : v \in SBV^p(\Omega') : v = w(t_k^i) \text{ p.p. dans } \Omega' \setminus \overline{\Omega} \right\}.$$

De nouveau, l'existence de solutions est assurée par le théorème de compacité et de semi-continuité inférieure d'Ambrosio et nous définissons la fissure au temps  $t_k^i$  par

$$\Gamma_k^i := \Gamma_k^{i-1} \cup J_{u_k^i}.$$

Nous démontrons que  $u_k^i - w(t_k^i)$  est un quasi-minimiseur de  $F(\cdot, \Omega' \setminus \Gamma_k^{i-1})$  avec condition de Dirichlet homogène sur  $\partial_D \Omega$  (au sens de la définition 2.2.1) avec  $s = 1/p$  et  $\omega$  dépendant seulement de  $p, L, \mu, \beta, w$  et  $\Omega$ . Une application du Théorème 2.2.2 assure donc, pour tout  $\eta > 0$ , l'existence de  $\vartheta_0 > 0$  et  $\varrho_0 > 0$  (dépendant uniquement de  $p, L, \mu, \beta, w, \Omega$  et  $\eta$ ) tels que

$$\mathcal{H}^1(J_{u_k^i} \cap B_\rho(x)) \geq \vartheta_0 \rho \quad (2.2.1)$$

pour toute boule  $B_\rho(x) \subset \Omega' \setminus (\Gamma_k^{i-1} \cup \partial_N \Omega)$  centrée en  $x \in \overline{J_{u_k^i}}$ , de rayon  $\rho \leq \varrho_0$  et telle que  $\text{dist}(B_\rho(x), \partial_N \Omega) > \eta$ .

Par récurrence et par un argument géométrique basé sur la sous-linéarité de l'application  $\rho \mapsto \mathcal{H}^1(\partial B_\rho(x))$  (et c'est justement la raison pour laquelle nous nous sommes restreints au cas bi-dimensionnel!), nous montrons que la fissure  $\Gamma_k^i$  satisfait également une propriété de régularité de type Ahlfors uniformément en  $k$  et  $i$ . Soit, en effet,  $x \in \Gamma_k^i$  et  $\rho \leq \varrho_0$  tel que  $B_\rho(x) \subset \Omega' \setminus \partial_N \Omega$  et  $\text{dist}(B_\rho(x), \partial_N \Omega) > \eta$ . Alors,

– si  $x \in \Gamma_k^{i-1}$ , d'après l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_k^i \cap B_\rho(x)) \geq \mathcal{H}^1(\Gamma_k^{i-1} \cap B_\rho(x)) \geq \vartheta_0 \rho.$$

– si  $x \in J_{u_k^i} \setminus \Gamma_k^{i-1}$ , soit  $\delta > 0$  et  $y \in \Gamma_k^{i-1}$  tels que  $\delta := \text{dist}(x, \Gamma_k^{i-1}) = |x - y|$ . Alors  $B_\rho(x) \supset B_\delta(x) \cup B_{\rho-\delta}(y)$ , avec  $B_\delta(x) \subset \Omega' \setminus (\Gamma_k^{i-1} \cup \partial_N \Omega)$ . Donc, d'après (2.2.1),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(\Gamma_k^i \cap B_\rho(x)) &= \mathcal{H}^1(\Gamma_k^{i-1} \cup (J_{u_k^i} \setminus \Gamma_k^{i-1})) \cap B_\rho(x) \\ &\geq \mathcal{H}^1(\Gamma_k^{i-1} \cap B_{\rho-\delta}(y)) + \mathcal{H}^1(J_{u_k^i} \cap B_\delta(x)) \geq \vartheta_0(\rho - \delta) + \vartheta_0 \delta = \vartheta_0 \rho. \end{aligned}$$

De cette propriété, nous en déduisons de la compacité pour les interpolations constantes par morceaux définies par

$$u_k(t) := u_k^i, \quad \Gamma_k(t) := \Gamma_k^i \quad \text{pour tout } t \in [t_k^i, t_k^{i+1}).$$

En effet,  $\Gamma_k(t)$  converge vers un certain  $\Gamma(t)$  au sens de Hausdorff et au sens de la  $\sigma^p$ -convergence (pour une sous-suite indépendante de  $t$ ) et  $u_k(t) \rightharpoonup u(t)$  faiblement dans  $SBV^p(\Omega')$ , où  $\Gamma(t) \subset \Omega \cup \partial_D \Omega$  est fermé et  $u(t) \in SBV^p(\Omega')$  avec  $J_{u(t)} \subset \Gamma(t)$  et  $u(t) = w(t)$  p.p. dans  $\Omega' \setminus \overline{\Omega}$ . En particulier,  $u(t) \in W^{1,p}(\Omega \setminus \Gamma(t))$  et  $u(t) = w(t)$  au sens des traces sur  $\partial_D \Omega \setminus \Gamma(t)$ . On a donc démontré le résultat suivant d'existence de solutions fortes pour le modèle de croissance quasi-statique de fissures de Francfort-Marigo.

**Théorème 2.2.3.** *Pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe un couple  $(u(t), \Gamma(t))$  satisfaisant*

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &\subset \Omega \cup \partial_D \Omega \text{ est fermé et } \mathcal{H}^1\text{-rectifiable,} \\ u(t) &\in W^{1,p}(\Omega \setminus \Gamma(t)), \quad u(t) = w(t) \text{ } \mathcal{H}^1\text{-p.p. sur } \partial_D \Omega \setminus \Gamma(t), \\ (u(0), \Gamma(0)) &= (u_0, \Gamma_0), \end{aligned}$$

tel que les propriétés suivantes sont satisfaites : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

(i) Principe de moindre énergie : pour tout  $\hat{\Gamma} \supset \Gamma(t)$  fermé et  $\mathcal{H}^1$ -rectifiable et tout  $\hat{u} \in W^{1,p}(\Omega \setminus \hat{\Gamma})$  tel que  $\hat{u} = w(t)$   $\mathcal{H}^1$ -p.p. sur  $\partial_D \Omega \setminus \hat{\Gamma}$ ,

$$\mathcal{E}(u(t), \Gamma(t)) \leq \mathcal{E}(\hat{u}, \hat{\Gamma});$$

(ii) Irréversibilité : pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\Gamma(s) \subset \Gamma(t);$$

(iii) Bilan d'énergie :

$$\mathcal{E}(u(t), \Gamma(t)) = \mathcal{E}(u(0), \Gamma(0)) + \int_0^t \int_{\Omega \setminus \Gamma(s)} DW(\nabla u(s)) \cdot \dot{w}(s) \, dx \, ds.$$

Si de plus  $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  et satisfait

– il existe  $\lambda > 0$  tel que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,

$$|D^2W(\xi)| \leq \lambda |\xi|^{p-2};$$

– il existe  $\nu > 0$  tel que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et  $\eta \in \mathbb{R}^2$ ,

$$D^2W(\xi)\eta \cdot \eta \geq \nu |\xi|^{p-2} |\eta|^2;$$

alors  $u(t) \in \mathcal{C}^0((\Omega \cup \partial_D \Omega) \setminus \Gamma(t)) \cap \mathcal{C}^1(\Omega \setminus \Gamma(t))$ ,  $u(t) = w(t)$  sur  $\partial_D \Omega \setminus \Gamma(t)$ , et les compétiteurs dans le principe de moindre énergie (i) peuvent être choisis dans cette même classe de fonctions.

## 2.3 Fracture dans les films minces

Nous nous intéressons à présent aux films minces qui sont des matériaux dont l'une des dimensions, l'épaisseur, est beaucoup plus petite que les autres. Nous supposons qu'un tel milieu occupe dans sa configuration de référence un cylindre  $n$ -dimensionnel ( $n = 2, 3$ )  $\Omega_\varepsilon := \omega \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$  de base  $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , un ouvert borné. Le petit paramètre sans dimension  $\varepsilon > 0$  représente le rapport entre l'épaisseur du film et son diamètre (voir Figure 2.1).

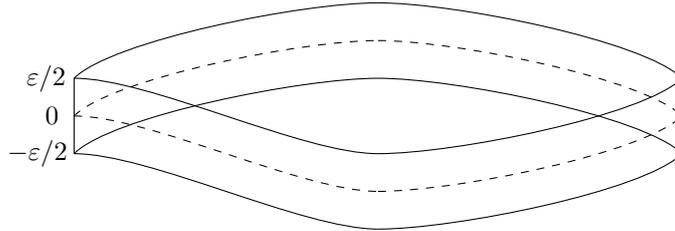


FIGURE 2.1 – Le cylindre  $\Omega_\varepsilon$

Nous nous plaçons ici en grandes déformations dans un cadre d'élasticité non linéaire. La densité d'énergie élastique est donnée par une fonction de Carathéodory  $W_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \times \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$ , dépendant de la variable spatiale  $x \in \Omega_\varepsilon$  et du gradient de déformation  $F = \nabla \phi$ , que nous supposons à croissance  $1 < p < \infty$  par rapport à cette deuxième variable  $F$ . Notons que cette hypothèse de croissance est *a priori* incompatible avec le fait que  $W_\varepsilon$  puisse prendre la valeur  $+\infty$  pour des déformations extrêmes. Nous pouvons cependant penser que, pour de telles déformations, le milieu devrait assez naturellement sortir du régime de l'élasticité de sorte que notre hypothèse de croissance polynômiale demeure raisonnable pour des déformations pas trop grandes. Pour des déformations plus conséquentes, il conviendrait de changer de

modèle en prenant en compte, par exemple, des phénomènes de plasticité ou d'endommagement précédant la rupture.

Décrivons maintenant le chargement extérieur : le milieu est soumis à des forces mortes volumiques  $f_\varepsilon \in L^{p'}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^n)$  et surfaciques  $g_\varepsilon \in L^{p'}(\Sigma_\varepsilon; \mathbb{R}^n)$  sur les parois extrêmes  $\Sigma_\varepsilon := \omega \times \{-\varepsilon/2, \varepsilon/2\}$  du cylindre ( $p' = p/(p-1)$  désigne l'exposant conjugué de  $p$ ). Nous supposons par ailleurs que le corps est encastré sur le bord latéral  $\partial\omega \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ . En l'absence de fissure, l'ensemble des déformations cinématiquement admissibles est donc donné par

$$\mathcal{C}_\varepsilon := \{\phi \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^n) : \phi(x) = x \text{ } \mathcal{H}^{n-1}\text{-p.p. tout } x \in \partial\omega \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)\},$$

et, pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_\varepsilon$ , l'énergie potentielle est définie par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\phi) := \int_{\Omega_\varepsilon} W_\varepsilon(x, \nabla\phi) dx - \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \cdot \phi dx - \int_{\Sigma_\varepsilon} g_\varepsilon \cdot \phi d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.3.1)$$

En régime statique, le problème consiste alors à trouver les configurations d'équilibre de ce système, autrement dit, de résoudre le problème de minimisation

$$\inf_{\phi \in \mathcal{C}_\varepsilon} \mathcal{E}_\varepsilon(\phi). \quad (2.3.2)$$

La première difficulté concerne l'existence de solutions au problème de minimisation (2.3.2). Il se trouve qu'en l'absence d'hypothèse supplémentaire de type convexité sur le potentiel élastique  $W_\varepsilon$ , on ne peut pas espérer, en général, l'existence de solutions. Pour l'énergie à croissance polynomiale que nous considérons, une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle (2.3.1) admette un minimiseur sur  $\mathcal{C}_\varepsilon$  est que la densité  $W_\varepsilon$  soit quasiconvexe en la variable  $F$  (voir ACERBI & FUSCO [1], BALL & MURAT [18] et DACOROGNA [41]). Une condition plus naturelle est celle dite de polyconvexité : il s'agit d'une notion plus restrictive que la quasiconvexité mais qui a le mérite d'être compatible avec la propriété, requise en hyperélasticité, que l'énergie doit exploser quand le Jacobien de la transformation tend vers zéro (voir BALL [16]).

Un deuxième problème concerne le comportement asymptotique des minimiseurs (ou des "presque minimiseurs") de  $\mathcal{E}_\varepsilon$  lorsque l'épaisseur  $\varepsilon$  tend vers zéro. Nous nous concentrerons ici sur cette deuxième problématique à l'aide de méthodes de type  $\Gamma$ -convergence qui nous permettront d'identifier des modèles réduits dans diverses situations.

### 2.3.1 Modèles de membranes

Avant de considérer des films minces susceptibles de se fissurer, regardons plus en détail le cas de milieux purement élastiques. La dépendance du domaine d'intégration en  $\varepsilon$  nous suggère d'effectuer un changement d'échelle afin d'étudier un problème équivalent formulé sur un domaine fixe  $\Omega := \omega \times I$ , où  $I = (-1/2, 1/2)$  (voir Figure 2.2).

On définit l'ensemble des déformations cinématiquement admissibles remis à l'échelle par

$$\mathcal{C}^\varepsilon := \{\varphi \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n) : \varphi(x) = (x', \varepsilon x_n) \text{ } \mathcal{H}^{n-1}\text{-p.p. tout } x \in \partial\omega \times I\}.$$

Pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_\varepsilon$ , on pose  $\varphi(x', x_n) := \phi(x', \varepsilon x_n)$ , où  $x' := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \omega$  désigne la variable du plan, de sorte que  $\varphi \in \mathcal{C}^\varepsilon$ . En remplaçant  $\phi$  par  $\varphi$  dans l'expression (2.3.1) de l'énergie, on obtient après changement de variable

$$\mathcal{E}_\varepsilon(\phi) = \varepsilon \int_{\Omega} W^\varepsilon \left( x, \nabla' \varphi \Big| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi \right) dx - \varepsilon \int_{\Omega} f^\varepsilon \cdot \varphi dx - \int_{\Sigma} g^\varepsilon \cdot \varphi d\mathcal{H}^{n-1},$$

où  $\Sigma := \omega \times \{-1/2, 1/2\}$ ,  $\nabla'$  désigne le gradient par rapport à la variable  $x'$ ,  $\nabla_n$  la dérivée partielle par rapport à  $x_n$ , et

$$\begin{cases} W^\varepsilon(x, F) := W_\varepsilon(x', \varepsilon x_n, F), \\ g^\varepsilon(x) := g_\varepsilon(x', \varepsilon x_n), & g^\varepsilon \in L^{p'}(\Sigma; \mathbb{R}^n), \\ f^\varepsilon(x) := f_\varepsilon(x', \varepsilon x_n), & f^\varepsilon \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n). \end{cases} \quad (2.3.3)$$

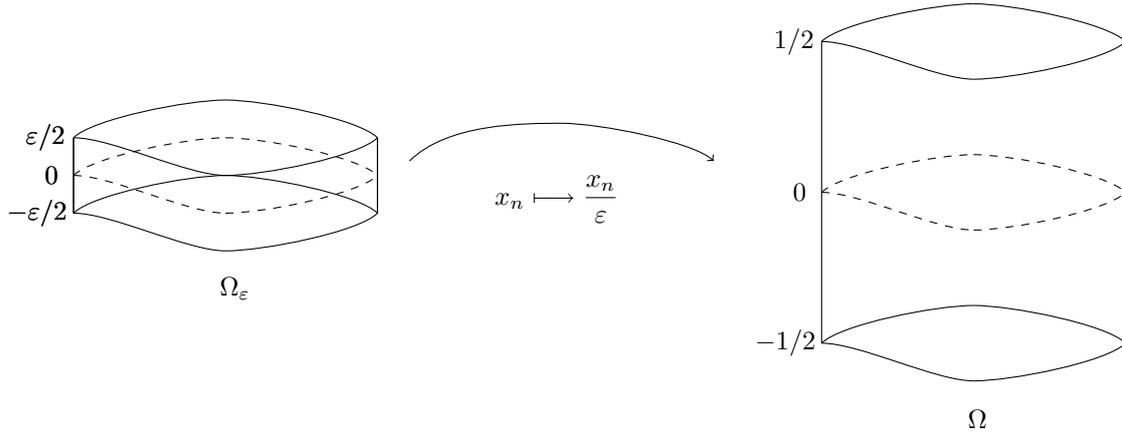


FIGURE 2.2 – Changement d'échelle

Nous nous intéressons ici à des modèles de membranes, c'est-à-dire, ne rendant compte que des effets d'étirement du matériau (il s'agit typiquement d'une toile de tente). Une hiérarchie formelle des divers modèles de plaques a été obtenue par FOX, RAOULT & SIMO dans [76] à l'aide de la méthode des développements asymptotiques (voir également LE DRET & RAOULT [104] et FRIESECKE, JAMES & MÜLLER [84, 85, 86] pour des justifications rigoureuses en terme de  $\Gamma$ -convergence). En particulier, il a été montré que les effets d'étirement apparaissent à l'ordre  $\varepsilon$  pour des forces de surface d'ordre  $\varepsilon$  et des forces de volume d'ordre 1. Autrement dit, dans le but de capturer un modèle de membrane, il convient de supposer que  $f^\varepsilon = f$  et  $g^\varepsilon = g_0 + \varepsilon g$ , où  $g_0$  est de résultante nulle :  $g_0(x', 1/2) + g_0(x', -1/2) = 0$ . Nous sommes donc amenés à étudier l'énergie remise à l'échelle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\varepsilon(\varphi) := \frac{\mathcal{E}_\varepsilon(\phi)}{\varepsilon} &= \int_{\Omega} W^\varepsilon \left( x, \nabla' \varphi \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi \right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx - \int_{\Sigma} g \cdot \varphi \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\omega} g_0 \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_I \nabla_n \varphi(x', s) \, ds \right) dx', \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

où  $g_0 := g_0(\cdot, 1/2) = -g_0(\cdot, -1/2)$ .

Supposons que  $W^\varepsilon : \Omega \times \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$  est une fonction de Carathéodory satisfaisant la propriété de croissance et coercivité : il existe  $1 < p < \infty$  et  $L > 0$  tels que

$$L^{-1}|F|^p \leq W^\varepsilon(x, F) \leq L(1 + |F|^p), \quad (2.3.5)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $F \in \mathbb{M}^{n \times n}$  et p.p. tout  $x \in \Omega$ .

Si  $g_0 = 0$ ,  $\mathcal{E}^\varepsilon$  n'est autre qu'une perturbation continue (pour la convergence faible de  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ) de la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$  définie par

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi) := \int_{\Omega} W^\varepsilon \left( x, \nabla' \varphi \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi \right) dx.$$

Il semble alors naturel d'étudier le comportement asymptotique de la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\varepsilon$  en terme des déformations limites. Le résultat suivant de compacité et de représentation intégrale de la  $\Gamma$ -limite a été établi dans [31] par BRAIDES, FONSECA & FRANCFORT.

**Théorème 2.3.1.** *Il existe une sous-suite  $(\varepsilon_k)$  et une fonction de Carathéodory  $\overline{W} : \omega \times \mathbb{M}^{n \times (n-1)} \rightarrow [0, +\infty)$  telles que la suite de fonctionnelles  $(\mathcal{F}_{\varepsilon_k})$   $\Gamma$ -converge (pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ )*

vers la fonctionnelle  $\mathcal{F} : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$\mathcal{F}(\varphi) := \begin{cases} \int_{\omega} \overline{W}(x', \nabla' \varphi(x')) dx' & \text{si } \varphi \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^n), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce résultat montre que le domaine de la  $\Gamma$ -limite est donné par des déformations indépendantes de la variable transverse  $x_n$ . Le modèle asymptotique est donc  $(n-1)$ -dimensionnel car il est posé sur la surface moyenne  $\omega$  du cylindre.

Dans les travaux [B1, B3, B4], nous avons identifié la densité de volume  $\overline{W}$  dans le cas où le matériau présente des hétérogénéités macro et/ou microscopiques. En présence d'hétérogénéités macroscopiques, *i.e.*, quand  $W^\varepsilon(x, F) = W(x, F)$  est indépendant de  $\varepsilon$ , nous avons établi en collaboration avec G. FRANCFORT dans [B1] que pour tout  $\overline{F} \in \mathbb{M}^{n \times (n-1)}$  et p.p. tout  $x' \in \omega$ , on a

$$\overline{W}(x', \overline{F}) := \inf_{\lambda, \phi} \left\{ \int_{(0,1)^{n-1} \times I} W(x', y_n, \overline{F} + \nabla' \phi(y)) |\lambda \nabla_n \phi(y)| dy : \lambda > 0, \right. \\ \left. \phi \in W^{1,p}((0,1)^{n-1} \times I; \mathbb{R}^n), \phi = 0 \text{ sur } \partial(0,1)^{n-1} \times I \right\}.$$

**Remarque 2.3.2.** Ce résultat généralise celui obtenu dans [104] par LE DRET & RAOULT pour des densités d'énergie homogènes de la forme  $W^\varepsilon(x, F) = W(F)$ , *i.e.*, indépendantes de  $x$  et  $\varepsilon$ . Dans ce cas, la formule précédente se réduit à  $\overline{W} = QW_0$  : c'est l'enveloppe quasiconvexe de la fonction  $W_0 : \mathbb{M}^{n \times (n-1)} \rightarrow [0, +\infty)$  définie par  $W_0(\overline{F}) := \min\{W(\overline{F}|z) : z \in \mathbb{R}^n\}$ .

En collaboration avec M. BAÍA, nous avons considéré dans [B3, B4] des hétérogénéités microscopiques périodiquement distribuées. Entre autres résultats, nous avons pris en compte des potentiels élastiques de la forme  $W^\varepsilon(x, F) := W(x, x/\varepsilon, F)$ , où  $W : \Omega \times (0,1)^n \times \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$  est 1-périodique par rapport à la seconde variable. Dans ce cas, la densité  $\overline{W}$  est obtenue en deux temps : on définit d'abord  $W_\# : \Omega \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$  par

$$W_\#(x, y', F) := \inf_{T \in \mathbb{N}} \inf_{\phi} \left\{ \frac{1}{T^n} \int_{(0,T)^n} W(x, y', z_n, F + \nabla \phi(z)) dz : \phi \in W_0^{1,p}((0,T)^n; \mathbb{R}^n) \right\},$$

qui n'est autre que la densité d'énergie homogénéisée pour le problème d'homogénéisation périodique dans la variable transverse  $x_n$ , puis pour tout  $\overline{F} \in \mathbb{M}^{n \times (n-1)}$  et p.p. tout  $x' \in \omega$ ,

$$\overline{W}(x', \overline{F}) := \inf_{T \in \mathbb{N}} \inf_{\phi} \left\{ \frac{1}{T^{n-1}} \int_{(0,T)^{n-1} \times I} W_\#(x', y_n, y', \overline{F} + \nabla' \phi(y)) |\nabla_n \phi(y)| dy : \right. \\ \left. \phi \in W^{1,p}((0,T)^{n-1} \times I; \mathbb{R}^n), \phi = 0 \text{ sur } \partial(0,T)^{n-1} \times I \right\}.$$

Ce résultat étend celui obtenu par BRAIDES, FONSECA & FRANCFORT dans [31] pour des densités d'énergie élastique du type  $W^\varepsilon(x, F) = W(x'/\varepsilon, x_3, F)$ .

Dans [B7], nous avons étendu le Théorème 2.3.1 de représentation intégrale au cas où les forces surfaciques d'ordre 1 ne sont pas nulles :  $g_0 \neq 0$ . En effet, d'après l'expression du travail des forces extérieures dans (2.3.4), il convient dans ce cas de calculer une  $\Gamma$ -limite plus riche en terme non seulement des déformations limites, mais aussi des limites des suites  $\frac{1}{\varepsilon} \int_I \nabla_n \varphi_\varepsilon(\cdot, s) ds$ . Aux vues des résultats de LE DRET & RAOULT [105] et BOUCHITTÉ, FONSECA & MASCARENHAS [22, 23] le champ limite, noté  $b$ , n'est autre que la composante antiplane du champ de déformation optimal pour le calcul de la  $\Gamma$ -limite. Cette observation doit être confrontée à l'une des théories de Cosserat selon laquelle les déformations

sont affines suivant la variable transverse  $x_n$ . Autrement dit, tout champ de déformation  $\varphi_\varepsilon$  peut se décomposer sous forme

$$\varphi_\varepsilon(x', x_n) = \varphi(x') + \varepsilon x_n b(x'), \quad (2.3.6)$$

lorsque l'épaisseur  $\varepsilon$  est suffisamment petite. Notre approche permet donc de justifier variationnellement l'hypothèse cinématique de Cosserat (2.3.6). Le champ  $b$  est interprété comme une densité de moment fléchissant car il modélise la déformation du film à l'ordre supérieur, qui correspond à la direction suivant laquelle les fibres orthogonales à la surface moyenne sont déformées.

On définit alors la fonctionnelle  $\mathcal{G}_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n) \times L^p(\omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  par

$$\mathcal{G}_\varepsilon(\varphi, b) := \begin{cases} \int_{\Omega} W^\varepsilon \left( x, \nabla' \varphi \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi \right. \right) dx & \text{si } b = \frac{1}{\varepsilon} \int_I \nabla_n \varphi(\cdot, s) ds, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons obtenu dans [B7] le résultat de représentation intégrale suivant avec moment fléchissant :

**Théorème 2.3.3.** *Il existe une sous-suite  $(\varepsilon_k)$  et une fonction de Carathéodory  $\widehat{W} : \omega \times \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$  telles que la suite de fonctionnelles  $(\mathcal{G}_{\varepsilon_k})$   $\Gamma$ -converge (pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n) \times L^p(\omega; \mathbb{R}^n)$ ) vers la fonctionnelle  $\mathcal{G} : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n) \times L^p(\omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par*

$$\mathcal{G}(\varphi) := \begin{cases} \int_{\omega} \widehat{W}(x', \nabla' \varphi(x') | b(x')) dx' & \text{si } \varphi \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^n), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, on a pour tout  $\overline{F} \in \mathbb{M}^{n \times (n-1)}$ ,

$$\overline{W}(\overline{F}) = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \widehat{W}(\overline{F} | z).$$

De nouveau, un résultat obtenu avec G. FRANCFORT dans [B1] nous permet d'identifier  $\widehat{W}$  en présence d'hétérogénéités macroscopiques, *i.e.*, quand  $W^\varepsilon(x, F) = W(x, F)$  est indépendant de  $\varepsilon$  : nous avons alors démontré que

$$\widehat{W}(x', \overline{F} | z) = \inf_{\lambda > 0, \phi} \left\{ \int_{(0,1)^{n-1} \times I} W(x', y_n, \overline{F} + \nabla' \phi(y) | \lambda \nabla_n \phi(y)) dy : \phi \in W^{1,p}((0,1)^{n-1} \times I; \mathbb{R}^n), \right. \\ \left. \phi(\cdot, y_n) \text{ est 1-périodique p.p. tout } y_n \in I \text{ et } \lambda \int_{(0,1)^{n-1} \times I} \nabla_n \phi(y) dy = z \right\}.$$

Ce résultat a étendu le cas homogène traité par BOUCHITTÉ, FONSECA & MASCARENHAS dans [22].

### 2.3.2 Le cas statique par $\Gamma$ -convergence

On suppose désormais que le film mince occupant dans sa configuration de référence le cylindre  $\Omega_\varepsilon$  peut se fissurer. La présence d'une fissure est alors pénalisée par l'ajout à l'énergie totale d'une énergie de surface de type Griffith, *i.e.* proportionnelle à l'aire de la fissure. Autrement dit, nous sommes amenés à étudier une énergie donnée par la somme de deux termes antagonistes en compétition : l'énergie élastique volumique et l'énergie de Griffith surfacique. Etant donné que le champ des déformations peut être discontinu à travers la fissure, il est commode de considérer la formulation faible de ce problème où la fissure est assimilée à l'ensemble des sauts de la déformation, engendrant un problème dans l'espace des fonctions (spéciales) à variation bornée. Nous considérons donc des énergies du type :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} W_\varepsilon(x, \nabla \phi) dx + \mathcal{H}^{n-1}(J_\phi), \quad \phi \in SBV^p(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^n),$$

où  $\nabla\phi$  représente maintenant le gradient approché de  $\phi$  et  $J_\phi$  est l'ensemble de ses points de saut. Cette énergie est de nouveau remise à l'échelle dans la configuration  $\Omega$  en posant  $\varphi(x', x_n) := \phi(x', \varepsilon x_n)$  pour  $x = (x', x_n) \in \Omega$ , puis en divisant le résultat obtenu par  $\varepsilon$  afin de capturer précisément les effets membranaires. Nous obtenons

$$\int_{\Omega} W^\varepsilon \left( x, \nabla' \varphi \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi \right) dx + \int_{J_\varphi} \left| \left( (\nu_\varphi)' \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_\varphi)_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1}, \quad \varphi \in SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Dans l'expression précédente,  $\nabla'$  (resp.  $\nabla_n$ ) désigne le gradient approché par rapport à  $x'$  (resp.  $x_n$ ), et  $\nu_\varphi = ((\nu_\varphi)', (\nu_\varphi)_n)$  est la normale approchée à  $J_\varphi$  où  $(\nu_\varphi)' = ((\nu_\varphi)_1, \dots, (\nu_\varphi)_{n-1})$  est la composante planaire. La nouvelle densité d'énergie élastique  $W^\varepsilon$  est obtenue à partir de  $W_\varepsilon$  par la formule (2.3.3). Nous supposons toujours que  $W^\varepsilon$  satisfait les propriétés (2.3.5) de croissance et de coercivité. De nouveau, la question se pose de déterminer le comportement asymptotique de cette énergie lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  selon la nature des forces appliquées.

Lorsque la force de surface  $g_0$  est identiquement nulle, nous avons vu qu'il convient de rechercher une  $\Gamma$ -limite uniquement en terme du champ de déformation limite. Pour ce faire, définissons la fonctionnelle  $\mathcal{I}_\varepsilon : SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty)$  par

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\varphi) := \int_{\Omega} W^\varepsilon \left( x, \nabla' \varphi \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi \right) dx + \int_{J_\varphi} \left| \left( (\nu_\varphi)' \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_\varphi)_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dans [B7], nous avons démontré un résultat de compacité pour la  $\Gamma$ -convergence et de représentation intégrale de la  $\Gamma$ -limite :

**Théorème 2.3.4.** *Il existe une sous-suite  $(\varepsilon_k)$  telle que la suite de fonctionnelles  $(\mathcal{I}_{\varepsilon_k})$   $\Gamma$ -converge (pour la topologie faible\* de  $BV(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ) vers la fonctionnelle  $\mathcal{I} : SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par*

$$\mathcal{I}(\varphi) := \begin{cases} \int_{\omega} \overline{W}(x', \nabla' \varphi(x')) dx' + \mathcal{H}^{n-2}(J_\varphi) & \text{si } u \in SBV^p(\omega; \mathbb{R}^n), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\overline{W} : \omega \times \mathbb{M}^{n \times (n-1)} \rightarrow [0, +\infty)$  est la fonction de Carathéodory obtenue dans le Théorème 2.3.1.

Notons qu'un résultat de représentation intégrale pour des problèmes de réduction dimensionnelle dans  $SBV$  existait déjà (voir BRAIDES & FONSECA [30] et BOUCHITTÉ, FONSECA, LEONI & MASCARENHAS [24]). Néanmoins, même si les résultats de ces références peuvent sembler plus généraux du point de vue des hypothèses, il ne contient pas comme cas particulier notre Théorème 2.3.4. En effet, dans [30, 24], les auteurs considèrent une énergie de surface qui croît linéairement par rapport au saut de déformation  $[\varphi] := \varphi^+ - \varphi^-$ .

En présence d'une force surfacique  $g_0$  non triviale mais de résultante nulle, nous avons vu qu'il est nécessaire de prendre également en compte le moment fléchissant. Définissons alors la fonctionnelle  $\mathcal{J}_\varepsilon : SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^n) \times L^p(\omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  par

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\varphi, b) := \begin{cases} \int_{\Omega} W_\varepsilon \left( x, \nabla' \varphi \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi \right) dx + \int_{J_\varphi} \left| \left( (\nu_\varphi)' \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_\varphi)_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1} & \text{si } b = \frac{1}{\varepsilon} \int_I \nabla_n \varphi(\cdot, s) ds, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons également obtenu dans [B7] le résultat suivant de compacité et de représentation intégrale :

**Théorème 2.3.5.** *Il existe une sous-suite  $(\varepsilon_k)$  telle que la suite de fonctionnelles  $(\mathcal{J}_{\varepsilon_k})$   $\Gamma$ -converge (pour la topologie faible\* de  $BV(\Omega; \mathbb{R}^n) \times L^p(\omega; \mathbb{R}^n)$ ) vers la fonctionnelle  $\mathcal{J} : SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^n) \times L^p(\omega; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par*

$$\mathcal{J}(\varphi, b) := \begin{cases} \int_{\omega} \widehat{W}(x', \nabla' \varphi(x') | b(x')) dx' + \mathcal{H}^{n-2}(J_\varphi) & \text{si } u \in SBV^p(\omega; \mathbb{R}^n), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\widehat{W} : \omega \times \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$  est la fonction de Carathéodory obtenue dans le Théorème 2.3.3.

Aux vues des Théorèmes 2.3.4 et 2.3.5, nous constatons que les  $\Gamma$ -limites  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$  sont finies pour des déformations définies sur la surface moyenne  $\omega$  de la plaque. Autrement dit, le domaine des  $\Gamma$ -limites est donné par les déformations  $\varphi$  invariantes dans la direction transverse  $x_n$ , et il en est donc de même pour l'ensemble des sauts  $J_\varphi$ . Celui-ci étant assimilé à la fissure, on obtient donc des modèles effectifs réduits où les seules fissures admissibles sont des fissures verticales. Ceci est dû au fait que nous avons choisi une densité d'énergie de volume et de surface de l'ordre de l'épaisseur  $\varepsilon$ . Nous verrons plus loin dans la section 2.4 comment un autre choix des ordres de grandeur de la rigidité et la ténacité (en terme de l'épaisseur) rend possible de mettre en évidence des fissures horizontales modélisant ainsi les phénomènes de délamination.

Notons également que les énergies de volume sont identiques à celles obtenues en l'absence de fissures (voir Théorèmes 2.3.1 et 2.3.3) : autrement dit, il n'y a pas d'interaction entre les parties volumes et surfaces de l'énergie. Ce phénomène était connu dans le cadre de la relaxation et de l'homogénéisation (voir par exemple BOUCHITTÉ, FONSECA, LEONI & MASCARENHAS [24]). Notre étude dans [B7] a permis d'étendre cette propriété au cadre de la réduction dimensionnelle.

Les Théorèmes 2.3.4 et 2.3.5 se démontrent en identifiant séparément les parties volumes et saut de la  $\Gamma$ -limite à l'aide de la méthode de blow-up introduite par FONSECA & MÜLLER [73, 74]. Cette méthode consiste à localiser l'énergie sur une boule centrée en un point de Lebesgue convenablement choisi, et à ramener le problème par changement de variable à la boule unité. Pour identifier la partie volume de la  $\Gamma$ -limite, les suites minimisantes après changement de variable ont la propriété supplémentaire d'avoir une énergie de surface infinitésimale et une limite  $W^{1,p}$  (au lieu de  $SBV^p$ ). L'outil principal repose alors sur le lemme de décomposition suivant démontré dans [B7] qui permet de se ramener à un problème dans un cadre Sobolev.

**Théorème 2.3.6.** *Supposons que  $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  est un ouvert borné à frontière Lipschitzienne et que  $p > 1$ . Soit  $(\varphi_\varepsilon) \subset SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  une suite telle que*

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left\{ \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)} + \int_{\Omega} \left| \left( \nabla' \varphi_\varepsilon \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi_\varepsilon \right) \right|^p dx \right\} < +\infty,$$

$$\int_{J_{\varphi_\varepsilon}} \left| \left( (\nu_{\varphi_\varepsilon})' \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_{\varphi_\varepsilon})_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1} \rightarrow 0,$$

et satisfaisant

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \text{ faiblement dans } SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^n), \\ \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi_\varepsilon \rightharpoonup b \text{ faiblement dans } L^p(\Omega; \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

où  $\varphi \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^n)$  et  $b \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Alors il existe une sous-suite  $(\varepsilon_k)$  et une suite  $(z_k) \subset W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  telles que

$$\begin{cases} z_k \rightharpoonup \varphi \text{ faiblement dans } W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n), \\ \frac{1}{\varepsilon_k} \nabla_n z_k \rightharpoonup b \text{ faiblement dans } L^p(\Omega; \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \text{la suite } \left( \left| \left( \nabla' z_k \middle| \frac{1}{\varepsilon_k} \nabla_n z_k \right) \right|^p \right) & \text{ est équi-intégrable,} \\ \mathcal{L}^n(\{z_k \neq \varphi_{\varepsilon_k}\} \cup \{\nabla z_k \neq \nabla \varphi_{\varepsilon_k}\}) & \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ce résultat affirme que toute suite de déformations dans  $SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.3.6, peut se décomposer en la somme de deux déformations : l'une portant les effets de concentrations qui converge en mesure, et l'autre portant les effets d'oscillations qui est équi-intégrable. Il a pour conséquence importante le fait que toute suite optimale pour la  $\Gamma$ -limite peut être choisie Lipschitzienne après localisation au voisinage d'un point bien choisi. Les Théorèmes 2.3.1 et 2.3.3 permettent alors de montrer que la partie volume de la  $\Gamma$ -limite  $\mathcal{I}$  (resp.  $\mathcal{J}$ ) est identique à  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ).

Le Théorème 2.3.6 généralise un résultat similaire de BOCEA & FONSECA [21] (voir également BRAIDES & ZEPPIERI [32]) pour des déformations  $W^{1,p}$ . Cette idée de décomposition des effets de concentration et d'oscillation trouve ses germes dans les travaux de FONSECA, MÜLLER & PEDREGAL [75] dans le cadre Sobolev et LARSEN [101] dans le cadre  $BV$ .

### 2.3.3 Le cas quasi-statique

Nous nous intéressons désormais au modèle de d'évolution quasi-statique de fissures de Francfort-Marigo dans des films minces. Plus précisément, nous montrons que, dans le cas d'un film mince homogène, les solutions du modèle d'évolution quasi-statique 3D – dont l'existence est assurée par les résultats de DAL MASO, FRANCFORT & TOADER [51, 52] – convergent en un certain sens vers les solutions du modèle d'évolution quasi-statique 2D réduit obtenu par  $\Gamma$ -convergence (voir les Théorèmes 2.3.1 et 2.3.4 ainsi que la Remarque 2.3.2).

**Configuration de référence.** Soit  $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  un ouvert borné Lipschitzien et  $I := (-1/2, 1/2)$ . On désigne par  $\Omega := \omega \times I$  la configuration de référence d'un film mince (remis à l'échelle) occupé par un matériau non linéairement élastique et pouvant se fissurer.

**Densité d'énergie élastique.** Nous supposons que le matériau est homogène et qu'il possède une densité d'énergie élastique  $W : \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  quasiconvexe, de classe  $\mathcal{C}^1$ , satisfaisant la propriété de croissance et de coercivité (2.3.5).

**Condition limite.** Nous allons imposer au milieu une condition de Dirichlet sur le bord latéral du cylindre. Pour ce faire on étend  $\Omega$  en un cylindre légèrement plus large  $\Omega' := \omega' \times I$ , où  $\omega' \supset \bar{\omega}$ . On suppose que le matériau est soumis à une déformation imposée  $\psi_\varepsilon \in AC([0, T]; W^{1,p}(\Omega'; \mathbb{R}^n))$  satisfaisant

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega' \times [0, T]; \mathbb{R}^n)} \leq M,$$

où  $M > 0$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ . On suppose de plus, qu'il existe deux fonctions  $\psi \in AC([0, T]; W^{1,p}(\omega'; \mathbb{R}^n))$  et  $b \in AC([0, T]; L^p(\Omega'; \mathbb{R}^n))$  telles que

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon &\rightarrow \psi \text{ fortement dans } AC([0, T]; W^{1,p}(\Omega'; \mathbb{R}^n)), \\ \frac{1}{\varepsilon} \nabla_3 \psi_\varepsilon &\rightarrow b \text{ fortement dans } AC([0, T]; L^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

**Donnée initiale.** Nous supposons que le milieu ne contient pas de fissure pré-existante et l'on se donne une déformation initiale  $\varphi_{0,\varepsilon} \in SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$  telle que  $\varphi_{0,\varepsilon} = \psi_\varepsilon(0)$  p.p. dans  $(\omega' \setminus \bar{\omega}) \times I$  qui minimise

$$v \mapsto \int_{\Omega} W \left( \nabla' v \left| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n v \right. \right) dx + \int_{J_v} \left| \left( \nu_v \right)' \left| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_v)_n \right. \right| d\mathcal{H}^{n-1}$$

parmi toutes les déformations  $v \in SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$  satisfaisant  $v = \psi_\varepsilon(0)$  p.p. dans  $(\omega' \setminus \bar{\omega}) \times I$ .

**Déformations cinématiquement admissibles.** Soit  $\Gamma \subset \Omega'$  un ensemble  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiable tel que  $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma) < \infty$ . L'ensemble des déformations cinématiquement admissibles au temps  $t$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\psi_\varepsilon(t), \Gamma) &:= \{\varphi \in SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega'; \mathbb{R}^n)} \leq M, \\ &\quad \varphi = \psi_\varepsilon(t) \text{ p.p. dans } (\omega' \setminus \bar{\omega}) \times I, \text{ et } J_\varphi \tilde{\subset} \Gamma\}, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

où la notation  $\tilde{\subset}$  (resp.  $\tilde{=}$ ) désigne l'inclusion (resp. l'égalité) entre deux ensembles, à un ensemble de mesure  $\mathcal{H}^{n-1}$  nulle près. La raison de la borne  $L^\infty$  est purement technique : elle permet de travailler dans un cadre fonctionnel plus simple. D'un point de vue mécanique, cette hypothèse traduit le fait que le matériau reste dans une boîte fixe ce qui est physiquement raisonnable. Nous verrons toutefois plus loin qu'il est possible de lever cette hypothèse.

Nous sommes à présent en mesure d'appliquer le résultat de DAL MASO, FRANCFORT & TOADER [52] qui assure, à  $\varepsilon > 0$  fixé, l'existence d'une évolution quasi-statique pour le problème 3D.

**Théorème 2.3.7.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $t \in [0, T]$ , il existe un couple  $(\varphi_\varepsilon(t), \Gamma_\varepsilon(t))$  tel que  $\Gamma_\varepsilon(t) \subset \Omega'$  est  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiable,  $\varphi_\varepsilon(t) \in \mathcal{A}(\psi_\varepsilon(t), \Gamma_\varepsilon(t))$  et les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- Condition initiale :  $(\varphi_\varepsilon(0), \Gamma_\varepsilon(0)) = (\varphi_{0,\varepsilon}, J_{\varphi_{0,\varepsilon}})$  ;
- Irréversibilité : pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$\Gamma_\varepsilon(s) \tilde{\subset} \Gamma_\varepsilon(t);$$

- Minimalité unilatérale : pour tout  $t \in (0, T]$ ,  $(\varphi_\varepsilon(t), \Gamma_\varepsilon(t))$  minimise

$$(\hat{\varphi}, \hat{\Gamma}) \mapsto \int_{\Omega} W \left( \nabla' \hat{\varphi} \Big|_{\frac{1}{\varepsilon}} \nabla_n \hat{\varphi} \right) dx + \int_{\hat{\Gamma}} \left| \left( (\nu_{\hat{\Gamma}})' \Big|_{\frac{1}{\varepsilon}} (\nu_{\hat{\Gamma}})_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1}$$

parmi tous les ensembles  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiables  $\Omega' \supset \hat{\Gamma} \tilde{\supset} \Gamma_\varepsilon(t)$ , et tous les  $\hat{\varphi} \in \mathcal{A}(\psi_\varepsilon(t), \hat{\Gamma})$  ;

- Bilan d'énergie : l'énergie totale définie, pour tout  $t \in [0, T]$ , par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(t) := \int_{\Omega} W \left( \nabla' \varphi_\varepsilon(t) \Big|_{\frac{1}{\varepsilon}} \nabla_n \varphi_\varepsilon(t) \right) dx + \int_{\Gamma_\varepsilon(t)} \left| \left( (\nu_{\Gamma_\varepsilon(t)})' \Big|_{\frac{1}{\varepsilon}} (\nu_{\Gamma_\varepsilon(t)})_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1}$$

est absolument continue en temps et

$$\mathcal{E}_\varepsilon(t) = \mathcal{E}_\varepsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega} DW \left( \nabla' \varphi_\varepsilon(s) \Big|_{\frac{1}{\varepsilon}} \nabla_n \varphi_\varepsilon(s) \right) : \left( \nabla' \dot{\psi}_\varepsilon(s) \Big|_{\frac{1}{\varepsilon}} \nabla_n \dot{\psi}_\varepsilon(s) \right) dx ds.$$

Nous avons démontré dans [B2] un résultat de convergence de ce modèle d'évolution quasi-statique lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Avant d'énoncer ce résultat, il nous faut définir un mode de convergence pour les fissures. La définition suivante a été donnée dans [B2] et est inspirée de la  $\sigma^p$ -convergence introduite par DAL MASO, FRANCFORT & TOADER dans [51] pour les ensembles rectifiables.

**Définition 2.3.8.** Soit  $\Gamma_\varepsilon \subset \Omega'$  une famille d'ensembles  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiables satisfaisant

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\Gamma_\varepsilon(t)} \left| \left( (\nu_{\Gamma_\varepsilon(t)})' \Big|_{\frac{1}{\varepsilon}} (\nu_{\Gamma_\varepsilon(t)})_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1} < \infty,$$

et  $\gamma \subset \omega'$  un ensemble  $\mathcal{H}^{n-2}$ -rectifiable. On dit que  $\Gamma_\varepsilon$  converge vers  $\gamma$  si les deux conditions suivantes sont réunies :

- (i) si, pour une sous-suite  $(\varepsilon_k) \searrow 0^+$ ,  $\varphi_k \rightharpoonup \varphi$  faiblement dans  $SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$ ,  $J_{\varphi_k} \tilde{\subset} \Gamma_{\varepsilon_k}$ , et

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} \left| \left( \nabla' \varphi_k \Big|_{\frac{1}{\varepsilon_k}} \nabla_n \varphi_k \right) \right|^p dx < \infty,$$

alors  $\varphi \in SBV^p(\omega'; \mathbb{R}^n)$  et  $J_\varphi \tilde{\subset} \gamma$  ;

- (ii) il existe une fonction  $\varphi \in SBV^p(\omega'; \mathbb{R}^n)$  et une famille  $(\varphi_\varepsilon) \subset SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$  telles que  $\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi$  faiblement dans  $SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$ ,  $J_{\varphi_\varepsilon} \tilde{\subset} \Gamma_\varepsilon$ ,

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\Omega} \left| \left( \nabla' \varphi_\varepsilon \Big|_{\frac{1}{\varepsilon}} \nabla_n \varphi_\varepsilon \right) \right|^p dx < \infty$$

et  $J_\varphi \tilde{=} \gamma$ .

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat démontré dans [B2] concernant la convergence des solutions du modèle de croissance quasi-statique de fissures.

**Théorème 2.3.9.** *Il existe une sous-suite (toujours notée  $\varepsilon$ ) et, pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe un couple  $(\varphi(t), \gamma(t))$  tel que  $\gamma(t) \subset \bar{\omega}$  est  $\mathcal{H}^{n-2}$ -rectifiable,  $\varphi(t) \in SBV^p(\omega'; \mathbb{R}^n)$ ,  $J_{\varphi(t)} \tilde{\subset} \gamma(t)$  et  $\varphi(t) = \psi(t)$  p.p. dans  $\omega' \setminus \bar{\omega}$  satisfaisant :*

- $\Gamma_\varepsilon(t)$  converge vers  $\gamma(t)$  ;

- pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe une sous-suite  $\varepsilon_t \searrow 0^+$  telle que  $\varphi_{\varepsilon_t}(t) \rightharpoonup \varphi(t)$  faiblement dans  $SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$ ;
- pour tout  $t \in [0, T]$ , les énergies de volume et de surface convergent :

$$\int_{\Omega} W \left( \nabla' \varphi_{\varepsilon}(t) \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi_{\varepsilon}(t) \right) dx \rightarrow \int_{\omega} QW_0(\nabla' \varphi(x')) dx',$$

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}(t)} \left| \left( (\nu_{\Gamma_{\varepsilon}(t)})' \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_{\Gamma_{\varepsilon}(t)})_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1} \rightarrow \mathcal{H}^{n-2}(\gamma(t)).$$

De plus le couple  $(u(t), \gamma(t))$  est une évolution quasi-statique associée au modèle réduit  $(n-1)D$  :

- Irréversibilité : pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,

$$\gamma(s) \tilde{\subset} \gamma(t);$$

- Minimalité unilatérale : pour tout  $t \in (0, T]$ ,  $(\varphi(t), \gamma(t))$  minimise

$$(\hat{\varphi}, \hat{\gamma}) \mapsto \int_{\omega} QW_0(\nabla' \hat{\varphi}(x')) dx' + \mathcal{H}^{n-2}(\hat{\gamma})$$

parmi tous les ensembles  $\mathcal{H}^{n-2}$ -rectifiables  $\omega' \supset \hat{\gamma} \supset \gamma(t)$ , et tous les  $\hat{\varphi} \in SBV^p(\omega'; \mathbb{R}^n)$  satisfaisant  $\hat{\varphi} = \psi(t)$  p.p. dans  $\omega' \setminus \bar{\omega}$  et  $J_{\hat{\varphi}} \tilde{\subset} \hat{\gamma}$ ;

- Bilan d'énergie : l'énergie totale définie, pour tout  $t \in [0, T]$ , par

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\Omega} QW_0(\nabla' \varphi(t)) dx' + \mathcal{H}^{n-2}(\gamma(t))$$

est absolument continue en temps et

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \int_{\omega} D(QW_0)(\nabla' \varphi_{\varepsilon}(s)) : \nabla' \dot{\psi}(s) dx' ds.$$

Rappelons que d'après les Théorèmes 2.3.1 et 2.3.4 ainsi que la Remarque 2.3.2, la fonction  $QW_0$  – i.e. l'enveloppe quasiconvexe de la fonction  $W_0 : \mathbb{M}^{n \times (n-1)} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $W_0(\bar{F}) := \inf\{W(\bar{F}|z) : z \in \mathbb{R}^n\}$  – est la densité d'énergie de volume de la  $\Gamma$ -limite de la fonctionnelle d'énergie

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} W \left( \nabla' \varphi \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi \right) dx + \int_{J_{\varphi}} \left| \left( (\nu_{\varphi})' \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_{\varphi})_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Nous avons donc établi que le mode de convergence variationnelle qu'est la  $\Gamma$ -convergence est bien compatible avec le modèle variationnel d'évolution quasi-statique de fissure dans le cadre de la réduction dimensionnelle. Une propriété analogue a été établie par GIACOMINI & PONSIGLIONE dans [88] dans le cadre de l'homogénéisation. Par la suite, MIELKE, ROUBICEK & STEFANELLI ont proposé dans [113] une approche générale de la  $\Gamma$ -convergence des modèles d'évolution quasi-statique à paramètre pour les processus indépendants des vitesses.

La difficulté principale de ce résultat réside dans le fait que le principe de moindre énergie satisfait par le couple  $(\varphi_{\varepsilon}(t), \Gamma_{\varepsilon}(t))$  est *unilatéral*, au sens où la fonctionnelle à minimiser dépend de la solution. En effet, on peut récrire de façon équivalente le principe de minimalité du Théorème 2.3.7 de la façon suivante :  $u_{\varepsilon}(t)$  minimise

$$\hat{\varphi} \mapsto \int_{\Omega} W \left( \nabla' \hat{\varphi} \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \hat{\varphi} \right) dx + \int_{J_{\hat{\varphi}} \setminus \Gamma_{\varepsilon}(t)} \left| \left( (\nu_{\hat{\varphi}})' \middle| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_{\hat{\varphi}})_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1}$$

parmi tous les  $\hat{\varphi} \in SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$  satisfaisant  $\hat{\varphi} = \psi_{\varepsilon}(t)$  p.p. dans  $(\omega' \setminus \bar{\omega}) \times I$ . Par conséquent le passage à la limite dans ce problème de minimisation n'est pas trivial et repose sur un théorème de transfert de

saut dont l'idée originale a été introduite par FRANCFORT & LARSEN dans [79] : il s'agit de transférer la partie du saut, de n'importe quelle fonction test, qui se trouve sur le saut de  $\varphi(t)$  sur celui de la suite  $\varphi_\varepsilon(t)$ . Ce faisant, à partir de n'importe quelle fonction test pour le problème limite  $(n-1)D$ , nous construisons une suite de fonctions tests pour le problème  $nD$  de telle sorte que l'énergie  $nD$  associée converge vers l'énergie limite  $(n-1)D$ . Pour ce faire nous avons adapté le résultat de FRANCFORT & LARSEN [79] au cas du passage  $nD$ - $(n-1)D$  pour obtenir le résultat suivant démontré dans [B2] :

**Théorème 2.3.10.** *Soit  $(\varphi_\varepsilon) \subset SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$  et  $\varphi \in SBV^p(\omega'; \mathbb{R}^n)$  tels que  $J_{\varphi_\varepsilon} \subset \bar{\omega} \times I$ ,  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$  fortement dans  $L^1(\Omega'; \mathbb{R}^n)$  et*

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\Omega'} \left| \left( \nabla' \varphi_\varepsilon \Big| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi_\varepsilon \right) \right|^p dx < \infty.$$

Alors, pour tout  $\hat{\varphi} \in SBV^p(\omega'; \mathbb{R}^n)$ , il existe une famille  $(\hat{\varphi}_\varepsilon) \subset SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$  satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_\varepsilon &\rightarrow \hat{\varphi} \text{ fort dans } L^1(\Omega'; \mathbb{R}^n), \\ \hat{\varphi}_\varepsilon &= \hat{\varphi} \text{ p.p. dans } (\omega' \setminus \bar{\omega}) \times I, \\ \left( \nabla' \hat{\varphi}_\varepsilon \Big| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \hat{\varphi}_\varepsilon \right) &\rightarrow (\nabla' \hat{\varphi} | 0) \text{ fort dans } L^p(\Omega'; \mathbb{M}^{n \times n}), \\ \int_{[J_{\hat{\varphi}_\varepsilon} \setminus J_{\varphi_\varepsilon}] \setminus [(J_{\hat{\varphi}} \setminus J_\varphi) \times I]} \left| \left( (\nu_{\hat{\varphi}_\varepsilon})' \Big| \frac{1}{\varepsilon} (\nu_{\hat{\varphi}_\varepsilon})_3 \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Le résultat que nous avons obtenu est limité aux champs de déformations bornés dans  $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$  par une constante fixe  $M > 0$  (voir (2.3.7)), ce qui est crucial pour obtenir de la compacité dans  $SBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$ . Il est toutefois possible de lever cette restriction en procédant comme dans DAL MASO, FRANCFORT & TOADER [51] en rajoutant des forces de volume et de surface de rappel de type conservatives. Nous avons vu dans la section 2.3.1 que si l'on veut rendre compte de modèles de membrane, il suffit de prendre des forces volumiques d'ordre 1 ( $F_\varepsilon(\varphi) = F(\varphi)$ ) et des forces surfaciques (sur les parois extrêmes  $\Sigma_\varepsilon$ ) d'ordre  $\varepsilon$  ( $G_\varepsilon(\varphi) = \varepsilon G(\varphi)$ ) dans la configuration  $\Omega_\varepsilon$ . Sous cette hypothèse, nous avons démontré dans [B12] l'analogie du Théorème 2.3.9 dans un cadre plus général où le champ des déformations appartient alors à un sous-espace adéquat de  $GSBV^p(\Omega'; \mathbb{R}^n)$ .

## 2.4 Fracture et délamination

Sous l'effet de contraintes internes, un film mince collé sur un substrat infini peut vouloir se détacher : l'énergie élastique tend alors vers zéro, mais la surface libre engendrée par le décollement va coûter une énergie interfaciale. Il est donc naturel d'essayer de modéliser des fissures horizontales dans les films minces, *i.e.*, orthogonales à la direction de l'épaisseur. Le modèle de fracture que nous avons étudié dans la section 2.3 ne rend compte asymptotiquement que de fissures uniquement verticales, *i.e.*, invariantes dans la direction de l'épaisseur. Ce modèle, ou plus précisément, la mise à l'échelle effectuée, n'est par conséquent pas adapté pour modéliser le phénomène de décollement entre des films minces.

Une approche phénoménologique du décollement a été développée dans [20] par BHATTACHARYA, FONSECA & FRANCFORT. Ces auteurs ont considéré deux films minces  $\Omega_\varepsilon^+ := \omega \times (0, \varepsilon/2)$  et  $\Omega_\varepsilon^- := \omega \times (-\varepsilon/2, 0)$  de base commune  $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  (un ouvert borné) superposés l'un sur l'autre et constitués de matériaux homogènes non linéairement élastiques. Nous supposons pour simplifier que les deux films ont les mêmes propriétés élastiques, et nous désignons par  $W : \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  la densité d'énergie élastique qui est une fonction continue à croissance  $p > 1$  satisfaisant (2.3.5). Ils ont postulé l'existence d'une énergie interfaciale  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pénalisant l'éventuelle présence d'une surface de discontinuité libre entre les deux films. L'énergie totale du film sous l'action d'une déformation  $\phi^\pm \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon^\pm; \mathbb{R}^n)$  est donnée par

$$\int_{\Omega_\varepsilon^+} W(\nabla \phi^+) dx + \int_{\Omega_\varepsilon^-} W(\nabla \phi^-) dx + \varepsilon^\alpha \int_\omega \Psi(\phi^+ - \phi^-) dx',$$

ou encore, après remise à l'échelle en régime membranaire, pour tout  $\varphi^\pm \in W^{1,p}(\Omega^\pm; \mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_{\Omega^+} W\left(\nabla' \varphi^+ \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi^+\right) dx + \int_{\Omega^-} W\left(\nabla' \varphi^- \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi^-\right) dx + \varepsilon^{\alpha-1} \int_{\omega} \Psi(\varphi^+ - \varphi^-) dx',$$

où  $\Omega^\pm := \Omega_1^\pm$ . Suivant l'ordre de grandeur de l'énergie interfaciale, ils ont démontré que le comportement asymptotique de l'énergie précédente pouvait prendre trois formes différentes :

- si  $\alpha > 1$ , l'interface est faible et on obtient un modèle découplé où les films n'entrent pas en interaction ;
- si  $\alpha < 1$ , l'interface est forte et on n'observe asymptotiquement aucun phénomène de décollement : les déformations limites sont continues à l'interface ;
- si  $\alpha = 1$ , l'interface est forte mais le décollement se fait sentir car les films rentrent en interaction.

### 2.4.1 Modélisation du décollement à partir d'une microstructure dégénérée

Dans [B5], en collaboration avec N. ANSINI et C. ZEPPIERI nous nous sommes intéressés à une justification possible de l'approche phénoménologique précédente. Nous avons considéré deux films superposés et connectés par l'intermédiaire d'inclusions d'épaisseur nulle périodiquement distribuées. Le matériau occupe donc dans sa configuration de référence l'ouvert (voir la figure 2.3)

$$\Omega_{\delta,r,\varepsilon} := \Omega_\varepsilon^- \cup [\omega_{\delta,r} \times \{0\}] \cup \Omega_\varepsilon^+,$$

où

$$\omega_{\delta,r} := \omega \cap \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^{n-1}} B_r(i\delta)$$

correspond aux zones de connexion entre les deux films,  $B_r(i\delta)$  désigne la boule ouverte de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de centre  $i\delta$  et de rayon  $r$ . L'énergie élastique remise à l'échelle dans un régime de membrane s'écrit alors, pour tout  $\varphi \in W^{1,p}(\Omega_{\delta,r}; \mathbb{R}^n)$ ,

$$\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta,r}(\varphi) := \int_{\Omega_{\delta,r}} W\left(\nabla' \varphi \middle| \frac{1}{\varepsilon} \nabla_n \varphi\right) dx,$$

où  $\Omega_{\delta,r} := \Omega^- \cup [\omega_{\delta,r} \times \{0\}] \cup \Omega^+$ . Il s'agit d'un problème de type "passoire de Neumann" (voir MURAT [117]) multi-échelle où rentrent en compétition trois paramètres : l'épaisseur des films minces  $\varepsilon$ , la période de distribution des zones de connexion  $\delta$  et le rayon des zones de connexion  $r$ . On s'attend à ce que le décollement soit l'effet asymptotique de l'interaction entre les zones de contact. Il est naturel de supposer que  $r \ll \delta$  car sinon les zones de contact risqueraient de s'intersecter. Nous supposons par ailleurs que  $\varepsilon \ll \delta$  (le cas  $\delta \sim \varepsilon$  ayant été traité par ANSINI dans [14]). Il reste encore à fixer le comportement de  $r$  vis à vis de  $\varepsilon$ , ce qui donne lieu à l'étude de trois régimes différents.

Nous avons tout d'abord établi dans [B5] le résultat de  $\Gamma$ -convergence suivant :

**Théorème 2.4.1.** *Supposons que  $\omega$  est un ouvert borné Lipschitzien de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et  $W : \mathbb{M}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty)$  est une fonction Borélienne satisfaisant  $W(0) = 0$  et la propriété de croissance et de coercivité (2.3.5). Soient  $(\varepsilon_j)$ ,  $(\delta_j)$  et  $(r_j)$  des suites de nombres positifs tendant vers zéro telles que*

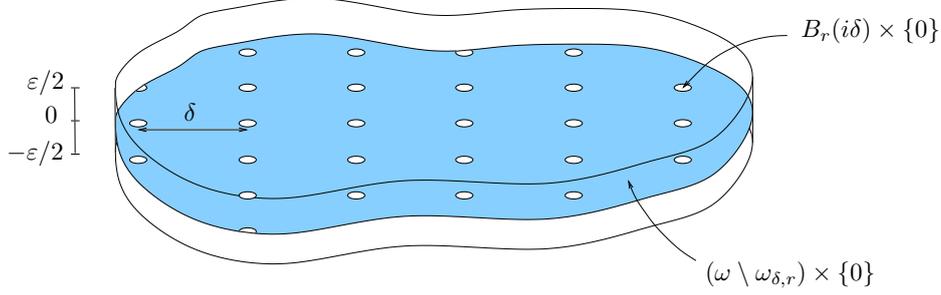
$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_j}{\delta_j} = 0 \quad \ell := \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r_j}{\varepsilon_j}.$$

Si

$$\ell \in (0, +\infty], \quad \text{et} \quad 0 < R^{(\ell)} := \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r_j^{n-1-p}}{\delta_j^{n-1}} < \infty$$

ou bien si

$$\ell = 0, \quad \text{et} \quad 0 < R^{(0)} := \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r_j^{n-p}}{\varepsilon_j \delta_j^{n-1}} < \infty,$$

FIGURE 2.3 – Représentation du domaine  $\Omega_{\delta, r, \varepsilon}$ 

alors, pour une sous-suite, la suite  $\mathcal{E}_j : L^p(\omega \times I; \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$\mathcal{E}_j(\varphi) := \begin{cases} \int_{\Omega_{\delta_j, r_j}} W\left(\nabla' \varphi \middle| \frac{1}{\varepsilon_j} \nabla_n \varphi\right) dx & \text{si } \varphi \in W^{1,p}(\Omega_{\delta_j, r_j}; \mathbb{R}^n), \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Gamma$ -converge vers

$$\mathcal{E}^{(\ell)}(\varphi^+, \varphi^-) = \int_{\omega} QW_0(\nabla' \varphi^+) dx' + \int_{\omega} QW_0(\nabla' \varphi^-) dx' + R^{(\ell)} \int_{\omega} \Psi^{(\ell)}(\varphi^+ - \varphi^-) dx'$$

sur  $W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^n)$  (pour la convergence faible de  $W^{1,p}(\Omega^+; \mathbb{R}^n) \times W^{1,p}(\Omega^-; \mathbb{R}^n)$ ), où  $\Psi^{(\ell)} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  est une fonction localement Lipschitzienne pour tout  $\ell \in [0, +\infty]$ .

Le Théorème 2.4.1 montre bien l'apparition à la limite d'un terme d'énergie interfaciale intervenant comme mémoire asymptotique de la microstructure dégénérée du film original. Il permet ainsi de justifier l'approche phénoménologique du décollement par BATTACHARYA, FONSECA & FRANCFORT [20]. Ce terme énergétique supplémentaire peut être vu comme l'analogue du "terme étrange venu d'ailleurs" obtenu par CIORANESCU & MURAT dans [40] dans le cadre des milieux perforés. Nous avons enfin obtenu des formules de type capacité non linéaire décrites dans le résultat qui suit.

**Théorème 2.4.2.** Soit  $p^* = (n-1)p/(n-1-p)$  l'exposant de Sobolev en dimension  $(n-1)$ . Alors, pour une sous-suite, la limite

$$g(F) := \lim_{j \rightarrow \infty} r_j^p QW(r_j^{-1} F)$$

existe pour tout  $F \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , où  $QW$  désigne l'enveloppe quasiconvexe de  $W$ . De plus, pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$  :

- si  $\ell \in (0, +\infty)$ ,

$$\Psi^{(\ell)}(z) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times I} g(\nabla' \zeta | \ell \nabla_n \zeta) dx : \zeta \in W_{\text{loc}}^{1,p}((\mathbb{R}^{n-1} \times I) \setminus C_{1,\infty}; \mathbb{R}^n), \right. \\ \left. \nabla \zeta \in L^p(\mathbb{R}^{n-1} \times I; \mathbb{R}^n), \zeta - z \in L^p(I^+; L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n)), \zeta \in L^p(I^-; L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n)) \right\},$$

où  $I^+ = (0, 1/2)$ ,  $I^- = (-1/2, 0)$ ,  $I := (-1/2, 1/2)$  et  $C_{1,\infty} := \{(x', 0) \in \mathbb{R}^n : |x'| \geq 1\}$ ;

- si  $\ell = +\infty$

$$\Psi^{(\infty)}(z) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( Qg_0(\nabla' \zeta^+) + Qg_0(\nabla' \zeta^-) \right) dx' : \zeta^\pm \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n), \right. \\ \left. \zeta^+ = \zeta^- \text{ sur } B_1(0), \nabla' \zeta^\pm \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{M}^{n \times (n-1)}) \text{ et } (\zeta^+ - z), \zeta^- \in L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n) \right\},$$

où  $g_0(\bar{F}) := \inf\{g(\bar{F}|z) : z \in \mathbb{R}^n\}$  et  $Qg_0$  est l'enveloppe quasiconvexe de  $g_0$ ;

- si  $\ell = 0$

$$\Psi^{(0)}(z) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n \setminus C_{1,\infty}} g(\nabla \zeta) dx : \zeta \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n \setminus C_{1,\infty}; \mathbb{R}^n), D\zeta \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus C_{1,\infty}; \mathbb{M}^{n \times n}), \right. \\ \left. \zeta - z \in L^p(\mathbb{R}^+; L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n)) \text{ et } \zeta \in L^p(\mathbb{R}^-; L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R}^n)) \right\}.$$

Notons que quelque soit le régime  $\ell \in [0, +\infty]$  considéré, l'énergie interfaciale  $\Psi^{(\ell)}$  est de type cohésive, *i.e.*, elle croît continûment par rapport au saut de déformation à travers l'interface.

Le régime  $\ell = +\infty$  correspond au cas  $\varepsilon \ll r \ll \delta$  et on s'attend donc à ce que  $r$  ne dépende que de  $\delta$ . Dans ce cas il y a un effet de séparation des échelles : on considère d'abord  $r$  et  $\delta$  "fixés" et on fait tendre l'épaisseur  $\varepsilon$  des films vers zéro comme si l'on considérait deux problèmes de réduction dimensionnelle purs. Comme les deux déformations limites correspondantes  $\varphi^\pm$  doivent coïncider à l'intérieur des zones de connexion, les deux termes ne sont pas découplés et nous nous retrouvons dans le cadre de milieux perforés  $(n-1)$ -dimensionnels similaires à ceux étudiés par ANSINI & BRAIDES dans [13] pour le modèle réduit de LE DRET & RAOULT [104]. Cette séparation entre les effets de réduction de dimension et de perforation se constate sur la formule capacitaire donnant la densité  $\Psi^{(\infty)}$  qui est une formule  $(n-1)$ -dimensionnelle.

Le régime  $\ell = 0$  correspond au cas  $r \ll \varepsilon \ll \delta$  où les rayons critiques dépendent à la fois de  $\varepsilon$  et  $\delta$ . Contrairement au cas précédent, les effets de réduction dimensionnelle et de perforation sont mélangés ce qui se traduit par une énergie interfaciale  $\Psi^{(0)}$  donnée par une formule capacitaire  $n$ -dimensionnelle.

Le régime intermédiaire  $\ell \in (0, +\infty)$  correspond à  $r \sim \varepsilon \ll \delta$ . Dans ce cas il n'y a pas non plus d'effet de séparation des échelles. La mémoire du phénomène de réduction de dimension se manifeste par le fait que la formule capacitaire définissant l'énergie interfaciale  $\Psi^{(\ell)}$  est posé sur une plaque infinie de dimension  $n$ .

## 2.4.2 Modélisation du décollement par une remise à l'échelle

En collaboration avec B. BOURDIN, D. HENAO, A. LEON BALDELLI & C. MAURINI, nous avons étudié dans [B20] un modèle simplifié de décollement de films minces vu comme le résultat d'une remise à l'échelle particulière de l'énergie élastique et de l'énergie de fissuration. Nous considérons un film mince posé sur un substrat par l'intermédiaire d'une couche assimilée à de la colle. Nous supposons que le film occupe le cylindre  $\Omega_\varepsilon := \omega \times (0, \varepsilon)$  de base  $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$  (un ouvert borné) et d'épaisseur  $\varepsilon > 0$  dans sa configuration de référence. La colle est modélisée par le cylindre  $\Omega'_\varepsilon := \omega \times [-\varepsilon, 0]$  et le substrat occupe la région de l'espace  $\Omega''_\varepsilon := \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, -\varepsilon)$ . Nous supposons que le matériau formé par le film et la colle peut se fissurer et qu'il est encastré sur le substrat.

Par simplicité, nous considérons un modèle pour des déplacements scalaires  $v \in SBV^2(\Omega_\varepsilon \cup \Omega'_\varepsilon \cup \Omega''_\varepsilon)$  satisfaisant  $v = 0$  p.p. dans  $\Omega''_\varepsilon$  et pour lesquels l'énergie totale se décompose en la somme de l'énergie élastique et de l'énergie de fissuration de type Griffith :

$$E_\varepsilon(v) := \int_{\Omega_\varepsilon \cup \Omega'_\varepsilon} \mu_\varepsilon |\nabla v|^2 dx + \int_{(\Omega_\varepsilon \cup \Omega'_\varepsilon) \cap J_v} \kappa_\varepsilon d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Dans l'expression précédente, les paramètres  $\mu_\varepsilon$  et  $\kappa_\varepsilon$  représentent la rigidité et la ténacité du matériau formé par le film et la colle, et sont donnés par

$$\mu_\varepsilon := \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \varepsilon^2 & \text{dans } \Omega'_\varepsilon, \end{cases} \quad \kappa_\varepsilon := \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \varepsilon & \text{dans } \Omega'_\varepsilon. \end{cases}$$

Les lois d'échelle que nous adaptions traduisent le fait que la colle est beaucoup moins rigide et tenace que le film. Pour des raisons techniques liées à l'espace fonctionnel du problème, nous supposons que le film reste confiné à l'intérieur d'une boîte fixe. En d'autres termes, nous demandons à ce que les déplacements admissibles  $v$  restent bornés par une constante fixe  $M > 0$  :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M.$$

De façon classique, nous remettons cette énergie à l'échelle. Pour ce faire, nous posons  $\Omega := \Omega_1$ ,  $\Omega' := \Omega'_1$ ,  $\Omega'' := \Omega''_1$  et pour  $u \in SBV^2(\Omega \cup \Omega' \cup \Omega'')$  satisfaisant  $u = 0$  p.p. dans  $\Omega''$ , nous définissons

$$v(x', x_n) := u(x', x_n/\varepsilon) \quad \text{pour } (x', x_n) \in \Omega_\varepsilon \cup \Omega'_\varepsilon \cup \Omega''_\varepsilon.$$

En reportant dans l'énergie totale et en tenant compte de l'expression de la rigidité et de la ténacité, il vient après changement de variable que

$$\begin{aligned} E^\varepsilon(u) &:= \frac{E_\varepsilon(v)}{\varepsilon} = \int_\Omega \left( |\nabla' u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla_n u|^2 \right) dx + \int_{\Omega'} (\varepsilon^2 |\nabla' u|^2 + |\nabla_n u|^2) dx \\ &\quad + \int_{\Omega \cap J_u} \left| \left( (\nu_u)', \frac{1}{\varepsilon} (\nu_u)_n \right) \right| d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Omega' \cap J_u} |(\varepsilon(\nu_u)', (\nu_u)_n)| d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Nous définissons à présent les énergies  $\mathcal{E}^\varepsilon$  et  $\mathcal{E} : L^2(\Omega \cup \Omega' \cup \Omega'') \rightarrow [0, +\infty]$  par

$$\mathcal{E}^\varepsilon(u) := \begin{cases} E^\varepsilon(u) & \text{si } \begin{cases} u \in SBV^2(\Omega \cup \Omega' \cup \Omega''), \\ u = 0 \text{ p.p. dans } \Omega'', \\ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \end{cases} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$\mathcal{E}(u) := \begin{cases} \int_\omega |\nabla' u|^2 dx' + \int_{\{|u| \leq 1\}} |u|^2 dx' \\ \quad + \mathcal{H}^{n-2}(J_u) + \mathcal{H}^{n-1}(\{|u| > 1\}) & \text{si } \begin{cases} u \in SBV(\omega), \\ \|u\|_{L^\infty(\omega)} \leq M, \end{cases} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'énergie  $\mathcal{E}$  s'avère être une bonne approximation variationnelle de  $\mathcal{E}_\varepsilon$ . En effet, nous avons établi dans [B20] le résultat suivant de type  $\Gamma$ -convergence qui implique la convergence du minimiseur de  $\mathcal{E}^\varepsilon$  vers celui de  $\mathcal{E}$ , ainsi que la convergence la valeur minimale.

**Théorème 2.4.3.** *Pour tout  $u \in L^2(\Omega \cup \Omega' \cup \Omega'')$ , on a :*

– *pour toute suite  $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega \cup \Omega' \cup \Omega'')$  telle que  $u_\varepsilon \rightarrow u$  fort dans  $L^2(\Omega)$ , alors*

$$\mathcal{E}(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}^\varepsilon(u_\varepsilon);$$

– *il existe une suite  $(\bar{u}_\varepsilon) \subset L^2(\Omega \cup \Omega' \cup \Omega'')$  telle que  $\bar{u}_\varepsilon \rightarrow u$  fort dans  $L^2(\Omega)$  et*

$$\mathcal{E}(u) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}^\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon).$$

Le modèle réduit étant  $(n - 1)$ -dimensionnel, l'énergie  $\mathcal{H}^{n-2}(J_u)$  est bien une énergie de fissuration transverse, tout comme dans la section 2.3.1, correspondant à des fissures verticales. Par contre, nous voyons apparaître le terme supplémentaire  $\mathcal{H}^{n-1}(\{|u| \geq 1\})$  pénalisant le fait qu'un saut de déplacement non nul à l'interface entre le film et le substrat peut se produire. Ceci correspond effectivement à une zone de délamination, en d'autres termes à une fissure horizontale. Notons que cette énergie n'est activée que si le déplacement  $u$  est suffisamment conséquent, *i.e.*, si  $|u| \geq 1$ . Si ce seuil n'est pas atteint, cette énergie de délamination n'est pas activée, néanmoins, nous payons une énergie de décohésion

$$\int_{\{|u| \leq 1\}} |u|^2 dx'$$

qui est une mémoire asymptotique de l'énergie élastique dans la colle.

L'identification de l'énergie

$$\int_{\omega} |\nabla' u|^2 dx' + \mathcal{H}^{n-2}(J_u)$$

provenant du film est standard et la difficulté principale concerne la contribution énergétique de la colle. Pour la borne inférieure, nous définissons l'ensemble de délamination comme l'ensemble des points de la section moyenne  $\omega$  dont la section verticale intersecte l'ensemble des sauts :

$$\Delta_\varepsilon := \{x' \in \omega : \exists x_n \in (-2, 1) \text{ tel que } (x', x_n) \in J_{u_\varepsilon}\},$$

où  $(u_\varepsilon)$  est une suite minimisante admissible convergeant vers une limite  $u$  dans le domaine de  $\mathcal{E}$ . La fonction caractéristique de cet ensemble converge alors faible\* dans  $L^\infty(\omega; [0, 1])$  vers une densité limite  $\theta \in L^\infty(\omega; [0, 1])$  qui n'est plus forcément une fonction caractéristique. Nous démontrons cependant la borne inférieure suivante sur l'énergie de la colle :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega'} (\varepsilon^2 |\nabla' u_\varepsilon|^2 + |\nabla_n u_\varepsilon|^2) dx + \int_{\Omega' \cap J_{u_\varepsilon}} |(\varepsilon(\nu_{u_\varepsilon})', (\nu_{u_\varepsilon})_n)| d\mathcal{H}^{n-1} \right\} \geq \int_{\omega} (1-\theta)|u|^2 dx' + \int_{\omega} \theta dx'.$$

En minimisant par rapport à toutes les fonctions  $\theta$ , nous démontrons qu'en fait  $\theta = \chi_{\{|u| > 1\}}$  ce qui conclut la preuve de la borne inférieure. La borne supérieure est quant à elle obtenue en considérant une régularisation adéquate de la fonction

$$\bar{u}(x', x_n) := \begin{cases} u(x') & \text{si } (x', x_n) \in \Omega, \\ (x_n + 1)u(x') & \text{si } (x', x_n) \in \Omega' \text{ et } |u(x')| \leq 1, \\ 0 & \text{si } (x', x_n) \in \Omega'' \text{ ou } (x', x_n) \in \Omega' \text{ et } |u(x')| > 1. \end{cases}$$

Nous remarquons que cette fonction varie continûment par rapport à  $x_n$  entre les valeurs 0 (dans le substrat) et  $u(x')$  (dans le film) si  $|u(x')|$  ne dépasse pas le seuil 1. Si, en revanche, ce seuil est atteint, la fonction  $\bar{u}$  saute brutalement de la valeur 0 (dans la colle et le substrat) à la valeur  $u(x')$  (dans le film).

# Chapitre 3

## Endommagement

### 3.1 Quelques digressions sur l'homogénéisation

La théorie de l'homogénéisation joue un rôle particulièrement important pour comprendre le modèle d'endommagement décrit à la section 3.2.2. C'est pourquoi nous allons consacrer une section à part entière pour rappeler un certain nombre de résultats à ce sujet et exposer des contributions que nous avons pu y apporter.

#### 3.1.1 Résultats généraux

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné,  $p > 1$  et  $0 < \alpha < \beta < \infty$ . On définit la classe d'intégrandes  $\mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  comme l'ensemble des fonctions continues  $W : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow [0, +\infty)$  satisfaisant les conditions de croissance et coercivité :

$$\alpha|\xi|^p \leq W(\xi) \leq \beta(1 + |\xi|^p), \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{M}^{m \times n}.$$

Nous définissons également l'ensemble  $\mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  des fonctions de Carathéodory  $W : \Omega \times \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow [0, +\infty)$  telles que  $W(x, \cdot) \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  p.p. tout  $x \in \Omega$ .

Nous modélisons une microstructure fine dans  $\Omega$  par un petit paramètre sans dimension  $\varepsilon > 0$ , portant sur la densité d'énergie élastique, qui correspond au rapport entre la taille caractéristique de la microstructure et la taille du milieu. Nous supposons que  $W_\varepsilon \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  est une famille de densités dont les énergies associées sont données par la famille de fonctionnelles  $F_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty)$  définies par

$$F_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} W_\varepsilon(x, \nabla u) dx.$$

Lorsque la dépendance par rapport à  $\varepsilon$  est trop complexe, il est souhaitable de remplacer ce modèle par un modèle effectif plus simple au moyen d'une analyse asymptotique lorsque la taille de la microstructure  $\varepsilon$  tend vers zéro. Comme nous travaillons dans un cadre variationnel, le mode de convergence naturel est celui de la  $\Gamma$ -convergence (voir la Définition A.3.1). Le théorème suivant est un résultat de compacité et de représentation intégrale de la  $\Gamma$ -limite (voir par exemple BRAIDES & DEFRANCESCHI [29]).

**Théorème 3.1.1.** *Il existe une sous-suite  $(\varepsilon_k)$  et une densité  $W^* \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  telles que  $(F_{\varepsilon_k})$   $\Gamma$ -converge (pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ) vers la fonctionnelle  $F : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty)$  définie par*

$$F(u) := \int_{\Omega} W^*(x, \nabla u) dx.$$

En l'absence d'information supplémentaire sur la dépendance en  $\varepsilon$ , par exemple de type ergodicité, il est peine perdue de s'attendre à obtenir un résultat plus précis. Dans le cas de l'homogénéisation périodique, le résultat qui suit a été obtenu indépendamment par BRAIDES [27] et MÜLLER [114].

Dans la suite nous noterons  $Q := (0, 1)^n$  la cellule unité de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $W \in \mathcal{F}(Q, \alpha, \beta, p)$ , on appelle *densités cellulaires* et *homogénéisées* de  $W$  les fonctions  $W_{\text{cell}}$  et  $W_{\text{hom}} \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  définies, pour tout  $\xi \in \mathbb{M}^{m \times n}$ , par

$$W_{\text{cell}}(\xi) := \inf \left\{ \int_Q W(y, \xi + \nabla \varphi(y)) dy : \varphi \in W_{\text{per}}^{1,p}(Q; \mathbb{R}^m) \right\} \quad (3.1.1)$$

et

$$W_{\text{hom}}(\xi) := \inf_{T \in \mathbb{N}} \inf \left\{ \frac{1}{T^n} \int_{(0,T)^n} W(\langle y \rangle, \xi + \nabla \varphi(y)) dy : \varphi \in W_{\text{per}}^{1,p}((0,T)^n; \mathbb{R}^m) \right\}. \quad (3.1.2)$$

La notation  $\langle y \rangle$  désigne la partie fractionnaire de  $y \in \mathbb{R}^n$ , i.e.,  $\langle y \rangle \in [0, 1)^n$  et  $y - \langle y \rangle \in \mathbb{Z}^n$ . Il s'agit d'un moyen commode d'exprimer le fait que la densité  $W(\langle \cdot \rangle, \xi)$  est 1-périodique pour tout  $\xi \in \mathbb{M}^{m \times n}$ .

**Théorème 3.1.2.** *Soit  $W \in \mathcal{F}(Q, \alpha, \beta, p)$ . Alors la famille de fonctionnelles  $F_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty)$  définies par*

$$F_\varepsilon(u) := \int_\Omega W\left(\left\langle \frac{x}{\varepsilon} \right\rangle, \nabla u\right) dx \quad (3.1.3)$$

$\Gamma$ -converge (pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ ) vers la fonctionnelle  $F_{\text{hom}} : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty)$  définie par

$$F_{\text{hom}}(u) := \int_\Omega W_{\text{hom}}(\nabla u) dx.$$

En particulier,  $W_{\text{hom}}$  est une fonction quasiconvexe. Si, de plus,  $W$  est convexe en la seconde variable et/ou  $m = 1$ , alors on a  $W_{\text{hom}} = W_{\text{cell}}$ .

Un exemple obtenu par MÜLLER dans [114] montre, qu'en général, il n'y a pas égalité entre  $W_{\text{cell}}$  et  $W_{\text{hom}}$ . En collaboration avec M. BARCHIESI, nous avons construit dans [B8] un autre contre-exemple quand  $m = n = 2$ . En effet, on considère les matrices (voir la Figure 3.1)

$$O := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On construit alors deux fonctions quasiconvexes  $W_1$  et  $W_2 \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  (avec  $p > 1$  arbitraire) telles que

$$W_1(O) = W_1(A) = 0 \quad \text{et} \quad W_2(O) = W_2(I) = 0.$$

Enfin, on se donne la géométrie du mélange entre  $W_1$  et  $W_2$  par l'ensemble  $E := (0, 1/2) \times (0, 1) \subset Q$ , et on définit la densité du mélange par

$$W(x, \xi) := \chi_E(x)W_1(\xi) + \chi_{Q \setminus E}(x)W_2(\xi).$$

On montre alors que  $W_{\text{cell}}(O) = W_{\text{hom}}(O) = 0$  et  $W_{\text{cell}}(B) = W_{\text{hom}}(B) = 0$ . Comme  $W_{\text{hom}}$  est quasiconvexe, elle est en particulier rang-un-convexe et par conséquent,  $W_{\text{hom}}(C) = 0$ . Par ailleurs, si  $W_{\text{cell}}(C) = 0$ , toute solution  $\varphi \in W_{\text{per}}^{1,p}(Q; \mathbb{R}^m)$  du problème de cellule (3.1.1) définissant  $W_{\text{cell}}(C)$  devrait satisfaire

$$C + \nabla \varphi(y) \in \begin{cases} \{O, A\} & \text{p.p. dans } E, \\ \{O, I\} & \text{p.p. dans } Q \setminus E. \end{cases}$$

Comme  $I$  et  $A$  sont des matrices de rang 2, des résultats classiques de rigidité montrent que soit  $C + \nabla \varphi(y) = O$ , soit  $C + \nabla \varphi(y) = A\chi_E(y) + I\chi_{Q \setminus E}(y)$  p.p. dans  $Q$ , ce qui est en contradiction avec la périodicité de  $\varphi$ . Par conséquent  $W_{\text{cell}}(C) > 0$ .

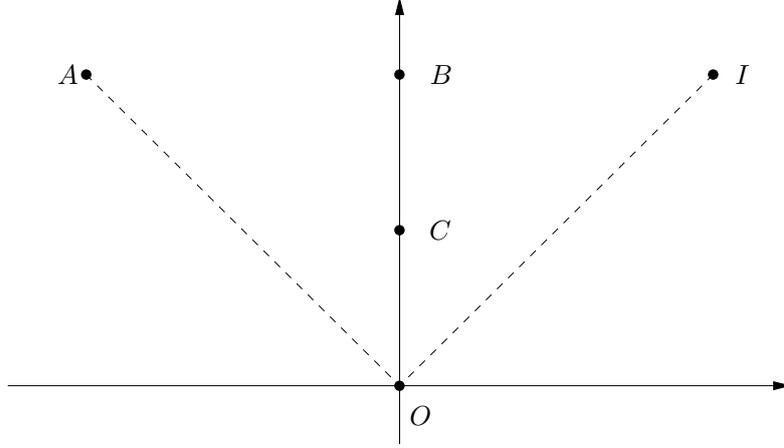


FIGURE 3.1 – Représentation des matrices  $O$ ,  $I$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans  $\mathbb{R}^2$  identifié à l'ensemble des matrices diagonales

### 3.1.2 Approche par mesures de Young

Le fait que la densité d'énergie homogénéisée  $W_{\text{hom}}$  définie par (3.1.2) soit une formule asymptotique rend d'autant plus compliqué son calcul explicite et même numérique. Par ailleurs, comme nous venons de le voir, il n'y a aucun espoir pour que cette formule se réduise en la formule uni-cellulaire donnée par (3.1.1). Une autre route que nous avons suivie en collaboration avec M. BAÍA & P. SANTOS dans [B6] consiste à formuler le problème en terme de mesures de Young. Pour ce faire, si l'on considère une suite minimisante  $(u_\varepsilon) \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  convergeant faiblement dans cet espace vers un certain  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , on peut se demander comment passer à la limite dans l'expression suivante

$$\int_{\Omega} W \left( \left\langle \frac{x}{\varepsilon} \right\rangle, \nabla u_\varepsilon \right) dx,$$

pour une densité  $W \in \mathcal{F}(Q, \alpha, \beta, p)$ . Les mesures de Young ont justement été introduites dans le but de faire commuter les limites faibles avec des expressions non linéaires (voir YOUNG [136], Tartar [132] et BALL [17]). Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{P}(\mathbb{M}^{m \times n})$  l'espace des mesures de probabilité sur  $\mathbb{M}^{m \times n}$  et  $L_w^\infty(\Omega \times Q; \mathcal{M}(\mathbb{M}^{m \times n}))$  est l'espace des applications  $\mu : \Omega \times Q \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{M}^{m \times n})$  telles que

- $(x, y) \mapsto \mu_{(x,y)}$  est faible\* mesurable;
- $(x, y) \mapsto \|\mu_{(x,y)}\|_1 \in L^\infty(\Omega \times Q)$ .

Cet espace peut être identifié au dual topologique de  $L^1(\Omega \times Q; \mathcal{C}_0(\mathbb{M}^{m \times n}))$ , des applications fortement mesurables  $\varphi : \Omega \times Q \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{M}^{m \times n})$  et intégrables au sens de Bochner (voir FONSECA & LEONI [72]).

**Définition 3.1.3.** Soit  $\mu \in L_w^\infty(\Omega \times Q; \mathcal{M}(\mathbb{M}^{m \times n}))$ . On dit que la famille  $\{\mu_{(x,y)}\}_{(x,y) \in \Omega \times Q}$  est une *mesure de Young à double échelle engendrée par une suite de gradients* si  $\mu_{(x,y)} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}^{m \times n})$  p.p. tout  $(x, y) \in \Omega \times Q$  et s'il existe une famille  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} z(x) \varphi \left( \left\langle \frac{x}{\varepsilon} \right\rangle, \nabla u_\varepsilon(x) \right) dx = \int_{\Omega} \int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} z(x) \varphi(y, \xi) d\mu_{(x,y)}(\xi) dy dx.$$

pour tout  $z \in L^1(\Omega)$  et tout  $\varphi \in L^1(Q; \mathcal{C}_0(\mathbb{M}^{m \times n}))$ . On dit alors que  $\{\mu_{(x,y)}\}_{(x,y) \in \Omega \times Q}$  est la mesure de Young à double échelle engendrée par la famille  $(\nabla u_\varepsilon)$ .

Avec M. BAÍA & P. SANTOS, nous avons obtenu dans [B6] une caractérisation complète de cette classe de mesures de Young dans le même esprit que KINDERLEHRER & PEDREGAL [96]. Pour ce faire, il convient d'introduire l'espace de Banach séparable  $\mathcal{F}_p$  des fonctions continues  $W : [0, 1]^n \times \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que la limite

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{W(y, \xi)}{1 + |\xi|^p}$$

existe uniformément en  $y \in [0, 1]^n$ . On a alors la caractérisation suivante :

**Théorème 3.1.4.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné Lipschitzien et soit  $\mu \in L_w^\infty(\Omega \times Q; \mathcal{M}(\mathbb{M}^{m \times n}))$  telle que  $\mu_{(x,y)} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}^{m \times n})$  p.p. tout  $(x, y) \in \Omega \times Q$ . La famille  $\{\mu_{(x,y)}\}_{(x,y) \in \Omega \times Q}$  est une mesure de Young à double échelle engendrée par une suite de gradients si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies :*

(i) *il existe deux fonctions  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  et  $u_1 \in L^p(\Omega; W_{\text{per}}^{1,p}(Q; \mathbb{R}^m))$  telles que*

$$\int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \xi \, d\mu_{(x,y)}(\xi) = \nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y) \quad \text{p.p. tout } (x, y) \in \Omega \times Q;$$

(ii) *pour tout  $W \in \mathcal{F}_p$ ,*

$$\int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} W(y, \xi) \, d\mu_{(x,y)}(\xi) \, dy \geq W_{\text{hom}}(\nabla u(x)) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega,$$

où  $W_{\text{hom}}$  est définie par (3.1.2) ;

(iii)

$$(x, y) \mapsto \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} |\xi|^p \, d\mu_{(x,y)}(\xi) \in L^1(\Omega \times Q).$$

Ce résultat permet de faire le lien entre trois approches voisines de l'homogénéisation, à savoir la convergence à double échelle (voir NGUETSENG [118] et ALLAIRE [2]), la  $\Gamma$ -convergence et les mesures de Young. En effet, la propriété (i) assure que le moment d'ordre 1 de la mesure  $\mu_{(x,y)}$  n'est autre que la limite double échelle de la suite de gradients qui engendre la mesure de Young. La propriété (ii) peut être réécrite de la façon suivante : par intégration de (i) par rapport à  $y \in Q$ , il vient pour tout  $W \in \mathcal{F}_p$ ,

$$\int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} W(y, \xi) \, d\mu_{(x,y)}(\xi) \, dy \geq W_{\text{hom}} \left( \int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \xi \, d\mu_{(x,y)}(\xi) \, dy \right) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega.$$

Il s'agit d'une inégalité de type Jensen faisant intervenir la densité d'énergie homogénéisée obtenue par  $\Gamma$ -convergence. Quant à la propriété (iii), elle indique que le moment d'ordre  $p$  est fini, autrement dit, que l'espace de Sobolev associé n'est autre que  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ .

Pour démontrer ce résultat, nous commençons par localiser le problème, ce qui nous permet de nous ramener à des mesures de Young homogènes, *i.e.*, indépendantes de la variable  $x$ . Ensuite l'argument repose sur une application du Théorème de Hahn-Banach : celui-ci assure l'impossibilité de séparer une application  $\mu \in L_w^\infty(Q; \mathcal{M}(\mathbb{M}^{m \times n}))$  satisfaisant

$$\begin{aligned} \int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \xi \, d\mu_y(\xi) \, dy &= \xi_0, \\ \int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} W(y, \xi) \, d\mu_y(\xi) \, dy &\geq W_{\text{hom}}(\xi_0) \quad \text{pour tout } W \in \mathcal{F}_p, \\ \int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} |\xi|^p \, d\mu_y(\xi) \, dy &< \infty \end{aligned}$$

de l'ensemble

$$M_{\xi_0} := \left\{ \mu \in L_w^\infty(Q; \mathcal{M}(\mathbb{M}^{m \times n})) : \{\mu_y\}_{y \in Q} \text{ est une mesure de Young homogène à double échelle} \right. \\ \left. \text{engendrée par une suite de gradients telle que } \int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} \xi \, d\mu_y(\xi) \, dy = \xi_0 \right\},$$

qui est un sous-ensemble convexe et faiblement\* fermé dans le dual  $(\mathcal{F}_p)'$  de  $\mathcal{F}_p$ .

Le Théorème 3.1.4 est utile pour obtenir une représentation de la densité d'énergie homogénéisée (3.1.2) en terme de mesures de Young à double échelle engendrées par une suite de gradients.

**Théorème 3.1.5.** *Pour tout  $W \in \mathcal{F}(Q, \alpha, \beta, p)$  et pour tout  $\xi_0 \in \mathbb{M}^{m \times n}$ , on a*

$$W_{\text{hom}}(\xi_0) = \min_{\mu \in M_{\xi_0}} \int_Q \int_{\mathbb{M}^{m \times n}} W(y, \xi) \, d\mu_y(\xi) \, dy. \quad (3.1.4)$$

L'intérêt du Théorème 3.1.5 est qu'il permet d'obtenir une formule pour la densité d'énergie homogénéisée qui n'est plus une formule asymptotique. En effet, (3.1.4) permet de calculer  $W_{\text{hom}}$  en résolvant un seul problème de minimisation (possédant toujours des solutions) posé sur la cellule unité  $Q$ , au lieu d'une infinité de problèmes de minimisation (n'admettant en général pas de solution) posés sur des cellules de taille de plus en plus grande dans (3.1.2). Bien entendu, le prix à payer est de travailler avec des objets plus compliqués, à savoir des mesures de Young, en lieu et place de fonctions de Sobolev.

### 3.1.3 Homogénéisation de matériaux composites

Nous nous intéressons à présent à une classe particulière de matériaux : les composites obtenus par homogénéisation de mélanges entre deux matériaux (ou plus). Considérons deux milieux de densités d'énergie respectives données par des fonctions  $W_1$  et  $W_2 \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  et donnons-nous une géométrie du mélange par l'intermédiaire d'une fonction caractéristique  $\chi \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$ . L'ensemble  $\{\chi = 1\}$  représente la géométrie du matériau 1 (de densité  $W_1$ ) et son complémentaire  $\{\chi = 0\}$  celle du matériau 2 (de densité  $W_2$ ). La densité d'énergie du mélange entre ces deux matériaux pour une telle géométrie est donnée par la fonction

$$W_\chi := \chi W_1 + (1 - \chi) W_2 \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p), \quad (3.1.5)$$

et l'énergie associée est la fonctionnelle  $F_\chi : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty)$  définie par

$$F_\chi(u) = \int_\Omega W_\chi(x, \nabla u) \, dx, \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

En présence d'une microstructure de plus en plus fine, modélisée par la présence d'un paramètre  $\varepsilon$ , il convient de rechercher le matériau composite associé à ce mélange. Autrement dit, si  $(\chi_\varepsilon) \subset L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  est une famille de fonctions caractéristiques représentant la géométrie fine (ou la micro-structure) du mélange, on s'intéresse à la recherche du milieu homogénéisé, ou encore aux  $\Gamma$ -limites de la famille de fonctionnelles  $F_{\chi_\varepsilon}$ . D'après le Théorème 3.1.1, nous avons vu que, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer sans restreindre la généralité que  $F_{\chi_\varepsilon}$   $\Gamma$ -converge vers une fonctionnelle intégrale  $F : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty)$  du type

$$F(u) = \int_\Omega W^*(x, \nabla u) \, dx, \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m),$$

où  $W^* \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$ .

Les matériaux composites sont caractérisés par trois principales quantités : les différents constituants (ou phases), la géométrie du mélange et enfin la proportion (ou fraction volumique) de chaque phase. Une question se pose alors : étant donnés deux constituants ainsi que leur fraction volumique, est-il possible de caractériser l'ensemble des comportements effectifs ? En terme de  $\Gamma$ -convergence, ce problème se formule

de la façon suivante : étant données deux densités  $W_1$  et  $W_2 \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  et une fraction volumique  $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ , on cherche l'ensemble des densités effectives  $W^* \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  telles qu'il existe une famille de fonctions caractéristiques  $(\chi_\varepsilon) \subset L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  satisfaisant

$$\begin{cases} \chi_\varepsilon \rightharpoonup \theta \text{ faible* dans } L^\infty(\Omega; [0, 1]) \\ F_{\chi_\varepsilon} \text{ } \Gamma\text{-converge vers } W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \ni u \mapsto \int_{\Omega} W^*(x, \nabla u) dx. \end{cases}$$

On note  $\mathcal{G}_\theta(W_1, W_2)$  l'ensemble des densités  $W^*$  ainsi définies qui est appelé la *G-fermeture* de l'ensemble  $\{W_1, W_2\}$ . Une sous-classe importante de  $\mathcal{G}_\theta(W_1, W_2)$  est donnée par l'ensemble des densités  $W^*$  obtenues à partir d'une micro-structure périodique, *i.e.*, quand  $\chi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)$ , où  $\chi$  est une fonction caractéristique 1-périodique sur  $\mathbb{R}^n$ . Le Théorème de Riemann-Lebesgue assure que la limite faible\* dans  $L^\infty(\Omega; [0, 1])$  d'une telle suite est la constante donnée par sa moyenne  $\int_Q \chi(y) dy$ , et le Théorème 3.1.2 implique que la densité de la  $\Gamma$ -limite est homogène (indépendante de  $x$ ). On définit donc, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , l'ensemble

$$P_\lambda(W_1, W_2) := \left\{ W^* \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p) : \exists \chi \in L^\infty(Q; \{0, 1\}) \text{ telle que } \int_Q \chi(y) dy = \lambda \text{ et } W^* = (W_\chi)_{\text{hom}} \right\},$$

où  $(W_\chi)_{\text{hom}}$  est la densité d'énergie homogénéisée, donnée par (3.1.2), de la fonction  $W_\chi$  définie par (3.1.5). Comme l'ensemble  $P_\lambda(W_1, W_2)$  n'est en général pas fermé pour la convergence simple, il convient aussi d'introduire sa fermeture pour la convergence simple notée

$$G_\lambda(W_1, W_2) := \overline{P_\lambda(W_1, W_2)}.$$

Définissons l'espace de Banach séparable  $\mathcal{E}_p$  des fonctions continues  $W : \mathbb{M}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{W(\xi)}{1 + |\xi|^{p+1}} = 0,$$

muni de la norme

$$\|W\| := \sup_{\xi \in \mathbb{M}^{m \times n}} \frac{|W(\xi)|}{1 + |\xi|^{p+1}}.$$

Comme les fonctions quasiconvexes de  $\mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  sont localement Lipschitz et à croissance  $p$ , il s'avère que si  $W_1$  et  $W_2$  sont quasiconvexes, alors l'ensemble  $G_\lambda(W_1, W_2)$  coïncide avec la fermeture de  $P_\lambda(W_1, W_2)$  dans  $\mathcal{E}_p$ .

En collaboration avec M. BARCHIESI, nous avons démontré dans [B8] une propriété de localité assurant que la classe des densités d'énergie périodiquement homogénéisées capturent localement tous les effets possibles d'homogénéisation dans le cas des mixtures à fraction volumique prescrite. Plus précisément, nous avons établi le résultat suivant de localité de la *G-fermeture*.

**Théorème 3.1.6.** *Supposons que les fonctions  $W_1$  et  $W_2 \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  sont convexes. Alors pour tout  $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ ,*

$$\mathcal{G}_\theta(W_1, W_2) = \{W^* \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p) : W(x, \cdot) \in G_{\theta(x)}(W_1, W_2) \text{ p.p. tout } x \in \Omega\}.$$

En d'autres termes, dans le cadre des mélanges à fraction volumique prescrite, l'ensemble des densités d'énergie périodiquement homogénéisées forme localement une classe dense de densités d'énergie homogénéisées. Il s'agit effectivement d'un résultat de densité car nous avons obtenu dans [B8] un contre-exemple basé sur le carré de Tartar affirmant que l'inclusion  $P_\lambda(W_1, W_2) \subset \mathcal{G}_\lambda(W_1, W_2)$  est en général stricte : il existe des densités d'énergie homogénéisées qui ne sont pas exactement obtenues par des mélanges périodiques.

Un tel résultat trouve sa source dans les travaux de TARTAR [133] et LURIE & CHERKAEV [108] qui ont obtenu un résultat similaire dans le cadre de la conduction thermique en dimension 2 dans [108] et

en dimension quelconque dans [133], pour des conducteurs isotropes. Leur but initial était de trouver des bornes optimales et une description analytique de la  $G$ -fermeture par  $H$ -convergence. Ce résultat a par la suite été étendu par DAL MASO & KOHN dans un travail non publié pour des conducteurs non nécessairement isotropes (voir ALLAIRE [3] pour une démonstration). Une dernière généralisation a été obtenue par RAITUMS dans [119] dans le contexte des équations aux dérivées partielles non linéaires sous forme divergence pour des opérateurs monotones.

Notons que notre résultat est restreint à des densités convexes (l'analogie de la condition de monotonie dans [119]). La raison est liée au fait que, d'après le Théorème 3.1.2, la formule de la densité d'énergie homogénéisée (3.1.2) se réduit à la simple formule de cellule (3.1.1) dans le cas convexe. La difficulté à étendre ce résultat au cadre non convexe est due au fait que la formule de la densité d'énergie homogénéisée (3.1.2) est une formule asymptotique en ce sens qu'elle est donnée par une limite de problèmes de minimisation posés sur des cellules de taille  $T$  de plus en plus grande. L'obtention d'un résultat de localité de la  $G$ -fermeture pour des énergies non convexes nécessiterait d'être capable de permuter la limite quand la taille de la microstructure  $\varepsilon \rightarrow 0$  et quand la taille de la cellule de référence  $T \rightarrow \infty$ . Des résultats partiels ont été récemment obtenus par GLORIA & NEUKAMM dans [89].

Dans [B14], nous avons également obtenu un résultat plus précis sur la structure des ensembles  $G_\lambda(W_1, W_2)$  en tant que sous ensembles de  $\mathcal{E}_p$ .

**Proposition 3.1.7.** *Soient  $W_1$  et  $W_2 \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  des fonctions convexes et  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors les ensembles  $G_\lambda(W_1, W_2)$  sont fermés et bornés dans  $\mathcal{E}_p$ . De plus, l'application  $\lambda \mapsto G_\lambda(W_1, W_2)$  est continue pour la distance de Hausdorff dans  $\mathcal{E}_p$ .*

La démonstration de la Proposition 3.1.7 repose sur un résultat de régularité de type Meyers, démontré dans [B14], pour les solutions du problème de minimisation (3.1.1) définissant la densité cellulaire : le gradient des solutions de (3.1.1) a une intégrabilité légèrement meilleure que  $L^p(Q; \mathbb{M}^{m \times n})$ . Ce résultat sera essentiel pour l'étude du modèle d'évolution quasi-statique en endommagement détaillé dans la section 3.2.2 suivante. Il permettra en particulier de définir un problème incrémental homogénéisé.

## 3.2 Evolution quasi-statique de l'endommagement

### 3.2.1 Formulation variationnelle

Dans la section 1.4.5, nous avons introduit un modèle thermomécaniquement consistant d'évolution quasi-statique en endommagement. Celui-ci est basé sur un matériau, occupant l'ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  dans sa configuration de référence, et comprenant deux phases distinctes : une phase endommagée et une phase saine, de densités d'énergie élastique respectives  $W_1$  et  $W_2 : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui sont des fonctions convexes et de classe  $C^1$  satisfaisant  $W_1 \leq W_2$ . Nous nous intéressons ici, du moins dans un premier temps, à de l'*endommagement brutal*, *i.e.*, où chaque point du milieu est soit sain soit endommagé. La variable interne naturelle est alors la fonction caractéristique  $\chi : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  de la partie endommagée du matériau. Pour un état d'endommagement fixé  $\chi$ , la densité totale d'énergie élastique du matériau à deux phases est donnée par  $\chi W_1 + (1 - \chi) W_2$ .

Nous avons vu dans la section 1.4.5 que  $\chi$  doit obéir au système d'équations suivant

$$\begin{cases} \chi \in \{0, 1\}, & \dot{\chi} \geq 0, \\ W_2(\epsilon) - W_1(\epsilon) \leq \kappa & \text{si } \chi = 0 \\ (W_2(\epsilon) - W_1(\epsilon) - \kappa)\dot{\chi} = 0 & \text{si } \chi = 1, \end{cases}$$

où  $\kappa > 0$  est un paramètre caractéristique du matériau qui représente la restitution d'énergie élastique nécessaire pour faire décroître la rigidité de la structure lorsque le tenseur des déformations est critique.

Supposons que le milieu n'est soumis à aucune force externe (surfactive ou volumique) et que le seul mécanisme évolutif est une donnée de Dirichlet en déplacement  $w(t)$  sur une partie de la frontière  $\partial_D \Omega \subset \partial \Omega$ . Dans [80], FRANCFORT & MARIGO ont proposé une formulation variationnelle du modèle

d'endommagement en temps discrétisé. Pour ce faire, on subdivise l'intervalle de temps  $[0, T]$  en temps discrets

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T.$$

Si l'on suppose que le milieu est initialement non endommagé, on a  $\chi_0 = 0$ , et on se donne un déplacement initial  $u_0$  solution du système

$$\begin{cases} 2\epsilon_0 = \nabla u_0 + (\nabla u_0)^T \text{ dans } \Omega, & u_0 = w(0) \text{ sur } \partial_D \Omega, \\ \sigma_0 = DW_2(\epsilon_0) \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \sigma_0 = 0 \text{ dans } \Omega, & \sigma_0 \nu = 0 \text{ sur } \partial_N \Omega := \partial \Omega \setminus \partial_D \Omega. \end{cases}$$

Pour les temps ultérieurs  $t_i$ , avec  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on cherche un couple  $(u_i, \chi_i)$  solution de

$$\begin{cases} 2\epsilon_i = \nabla u_i + (\nabla u_i)^T \text{ dans } \Omega, & u_i = w(t_i) \text{ sur } \partial_D \Omega, \\ \sigma_i = \chi_i DW_1(\epsilon_i) + (1 - \chi_i) DW_2(\epsilon_i) \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \sigma_i = 0 \text{ dans } \Omega, & \sigma_i \nu = 0 \text{ sur } \partial_N \Omega, \end{cases}$$

et

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi_{i-1}(x) = 0 \text{ et } W_2(\epsilon_i(x)) - W_1(\epsilon_i(x)) < \kappa, \\ 1 & \text{si } \chi_{i-1}(x) = 1 \text{ ou } W_2(\epsilon_i(x)) - W_1(\epsilon_i(x)) > \kappa, \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème précédent est alors équivalent à un problème de minimisation partielle à deux champs de la fonctionnelle

$$(v, \chi) \mapsto \mathcal{L}(v, \chi) := \int_{\Omega} [\chi(x) W_1(\epsilon(v)(x)) + (1 - \chi(x)) W_2(\epsilon(v)(x))] dx + \kappa \int_{\Omega} \chi(x) dx.$$

En effet,  $(u_i, \chi_i)$  est solution du problème précédent si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_i, \chi_i) &\leq \mathcal{L}(v, \chi_i), & \text{pour tout } v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tel que } v = w(t_i) \text{ sur } \partial_D \Omega, \\ \mathcal{L}(u_i, \chi_i) &\leq \mathcal{L}(u_i, \chi), & \text{pour tout } \chi : \Omega \rightarrow \{0, 1\} \text{ tel que } \chi \geq \chi_{i-1} \text{ dans } \Omega. \end{aligned}$$

Il s'avère que le problème de minimisation alternée défini précédemment est mal posé en ce sens qu'il possède en général beaucoup trop de solutions (voir FRANCFORT & MURAT [82] pour un exemple en 1D). Il semble donc raisonnable d'introduire un critère qui puisse éliminer les solutions indésirables. Dans [80], FRANCFORT & MARIGO ont introduit un critère de stabilité en ne sélectionnant que les solutions dites "stables" au sens suivant : pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on cherche  $(u_i, \chi_i)$  comme solution du problème de minimisation globale

$$\inf \mathcal{L}(v, \chi),$$

parmi tous les déplacements  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaisant  $v = w(t_i)$  sur  $\partial_D \Omega$  et toutes les fonctions caractéristiques  $\chi : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  telles que  $\chi \geq \chi_{i-1}$ . Malheureusement, dès le premier pas de temps, l'existence de solutions n'est pas garantie car les suites minimisantes de fonctions caractéristiques convergent seulement faible\* dans  $L^\infty(\Omega; [0, 1])$  vers une densité  $\theta$  pouvant *a priori* prendre ses valeurs dans tout l'intervalle fermé  $[0, 1]$ . Un processus d'homogénéisation intervient alors, dont l'interprétation mécanique est la suivante : pour des raisons énergétiques, le milieu préfère créer des microstructures pour former un matériau composite composé des deux phases saines et endommagées à fraction volumique locale  $\theta(x)$  prescrite. Autrement dit, le modèle initial d'endommagement brutal n'est pas bien posé et il convient de le relaxer au profit d'un modèle d'*endommagement progressif* où certains points du matériau résulteront d'un mélange fin entre les parties saines et endommagées. La théorie de l'homogénéisation des matériaux composites exposée à la section 3.1.3 s'avère d'une importance capitale pour comprendre ce modèle d'endommagement.

### 3.2.2 Etude du modèle d'endommagement

L'étude mathématique de ce modèle dans le cadre de l'élasticité linéaire a été entreprise par FRANC-FORT & GARRONI dans [77]. Nous nous proposons ici d'étudier ce modèle d'endommagement toujours dans un cadre de petites déformations, mais pour une loi de comportement non linéaire. Nous nous placerons par la suite dans le cadre de déplacements  $u$  scalaires ( $m = 1$ ). Le cadre cinématique adéquat est donc celui des déplacements anti-plans en dimension 2. Toutefois, comme notre étude est valable quelle que soit la dimension, nous nous placerons en dimension  $n$ .

**Configuration de référence.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné désignant la configuration de référence d'un milieu élastique pouvant s'endommager et éventuellement se fissurer. Nous supposons que sa frontière est Lipschitzienne et qu'elle se décompose en l'union d'une partie de Dirichlet  $\partial_D\Omega$  qui est ouverte pour la topologie relative, et d'une partie Neumann  $\partial_N\Omega = \partial\Omega \setminus \partial_D\Omega$ . Considérons un ouvert artificiel  $\Omega'$  tel que  $\Omega \subset \Omega'$ ,  $\Omega' \cap \partial\Omega = \partial_D\Omega$ .

**Densités d'énergie élastique.** Soient  $W_1$  et  $W_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  les densités d'énergie élastique des phases endommagées et saines ( $W_1 \leq W_2$ ). On suppose que  $W_1$  et  $W_2 \in \mathcal{F}(\alpha, \beta, p)$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  et uniformément convexes : il existe une constante  $\mu > 0$  telle que

$$W_i \left( \frac{\xi + \xi'}{2} \right) \leq \frac{1}{2} W_i(\xi) + \frac{1}{2} W_i(\xi') - \mu(1 + |\xi|^2 + |\xi'|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\xi - \xi'|^2$$

pour tout  $\xi$  et  $\xi' \in \mathbb{R}^n$  et  $i = 1, 2$ . Pour un état d'endommagement fixé  $\chi \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$ , la densité totale d'énergie élastique du matériau à deux phases est donnée par

$$W_\chi(x, \xi) := \chi(x)W_1(\xi) + (1 - \chi(x))W_2(\xi) \quad \text{pour } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n.$$

**Conditions limites.** On suppose que la partie de Neumann  $\partial_N\Omega$  de la frontière est libre et que la partie Dirichlet  $\partial_D\Omega$  est soumise à un déplacement,  $w(t)$ , dépendant du temps, où  $w \in AC([0, T]; W^{1,p}(\Omega))$ . L'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles au temps  $t$  est alors donné par

$$\mathcal{A}(t) := \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v = w(t) \mathcal{H}^{n-1}\text{-p.p. sur } \partial_D\Omega\}.$$

Dans [B14] nous avons obtenu le résultat suivant d'existence d'une évolution quasi-statique homogénéisée pour ce modèle d'endommagement.

**Théorème 3.2.1.** *Pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe  $u(t) \in \mathcal{A}(t)$ ,  $\Theta(t) \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  et  $W(t) \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  tels que  $W(t)(x, \cdot) \in G_{1-\Theta(t)(x)}(W_1, W_2)$  p.p. tout  $x \in \Omega$  et les trois propriétés suivantes sont réunies :*

- Irréversibilité : les applications  $t \mapsto \Theta(t)$  et  $t \mapsto W(t)$  sont décroissantes ;
- Principe de moindre énergie : pour tout  $\hat{v} \in \mathcal{A}(t)$ ,  $\hat{\theta} \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  et tout  $\hat{W} \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  tels que  $\hat{W}(x, \cdot) \in G_{\hat{\theta}(x)}(W_1, W(t)(x, \cdot))$  p.p. tout  $x \in \Omega$ , on a

$$\int_{\Omega} W(t)(x, \nabla u(t)) dx \leq \int_{\Omega} \hat{W}(x, \nabla \hat{v}) dx + \kappa \int_{\Omega} \Theta(t) \hat{\theta} dx;$$

- Bilan d'énergie : l'énergie totale définie, pour tout  $t \in [0, T]$ , par

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\Omega} W(t)(x, \nabla u(t)) dx + \kappa \int_{\Omega} (1 - \Theta(t)) dx$$

est absolument continue en temps et

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \int_{\Omega} DW(s)(x, \nabla u(s)) \cdot \nabla \dot{w}(s) dx ds.$$

Avant de donner une idée de la preuve du Théorème 3.2.1, nous allons effectuer un certain nombre de commentaires. Tout d'abord,  $\Theta(t)$  représente la fraction volumique de matériau sain au temps  $t$ . Le fait que cette application est décroissante en temps manifeste bien le principe d'irréversibilité du processus d'endommagement : l'état d'endommagement ne peut qu'empirer avec le temps. Par ailleurs, le modèle initial d'endommagement brutal, dont la variable interne était la fonction caractéristique de la zone endommagée, a été relaxé en un modèle d'endommagement progressif homogénéisé où la nouvelle variable interne est le couple  $(\theta(t), W(t))$ . La fonction  $\theta(t) = 1 - \Theta(t) \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  est la fraction volumique de la zone endommagée : c'est une fonction prenant ses valeurs dans tout l'intervalle  $[0, 1]$  et non plus dans  $\{0, 1\}$ . La densité  $W(t) \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, \Omega)$  est la densité d'énergie élastique d'un matériau composite obtenu comme le résultat d'un processus d'homogénéisation entre les parties endommagées et saines du milieu à fractions volumiques  $\theta(t)$  et  $1 - \theta(t)$  prescrites. Il s'agit donc d'un élément de l'ensemble de la  $G$ -fermeture  $\mathcal{G}_{\theta(t)}(W_1, W_2)$  et, d'après le caractère local de la  $G$ -fermeture (voir le Théorème 3.1.6), on a que  $W(t)(x, \cdot) \in G_{\theta(t)(x)}(W_1, W_2)$  pour p.p.  $x \in \Omega$ . Enfin, le fait que l'application  $t \mapsto W(t)$  est décroissante traduit effectivement le fait que la rigidité du matériau composite décroît avec le temps, ce qui est la définition même de l'endommagement.

L'énergie totale au temps  $t$  est la somme de l'énergie élastique

$$\int_{\Omega} W(t)(x, \nabla u(t)) \, dx$$

et de l'énergie dissipée

$$\kappa \int_{\Omega} \theta(t) \, dx.$$

Le principe de moindre énergie affirme que  $\mathcal{E}(t)$  est minimale parmi tous les déplacements  $\hat{v}$  admissibles au temps  $t$ , et tous les états d'endommagement  $(\hat{\theta}, \hat{W})$  "pires" que  $(\theta(t), W(t))$ . Cette dernière contrainte est compatible avec le principe d'irréversibilité qui impose de ne faire que des variations unilatérales par rapport au couple  $(\hat{\theta}, \hat{W})$ . Si l'on choisit, en particulier,  $(\hat{\theta}, \hat{W}) = (\theta(t), W(t))$ , on obtient que  $u(t)$  est la solution faible du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} DW(t)(\nabla u(t)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u(t) = w(t) & \text{sur } \partial_D \Omega, \\ DW(t)(\nabla u(t)) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial_N \Omega. \end{cases}$$

Par conséquent, le bilan d'énergie peut être réécrit de la façon suivante

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \int_{\partial_D \Omega} (DW(s)(x, \nabla u(t)) \cdot \nu) \dot{w}(t) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

ce qui exprime bien le fait que la variation temporelle d'énergie totale est égale à la puissance des efforts extérieurs.

La démonstration du Théorème 3.2.1 repose sur une discrétisation temporelle de l'intervalle de temps  $[0, T]$  similaire à celle employée dans la section 1.3.2 :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T.$$

Au temps initial, on cherche à résoudre le problème de minimisation

$$m_0 := \inf_{(v, \chi) \in \mathcal{A}(0) \times L^\infty(\Omega; [0, 1])} \int_{\Omega} [\chi W_1(\nabla v) + (1 - \chi) W_2(\nabla v) + \kappa \chi] \, dx.$$

En minimisant d'abord par rapport à  $\chi$ , on est ramené au problème de minimisation en  $v$

$$m_0 = \inf_{v \in \mathcal{A}(0)} \int_{\Omega} \psi_0(\nabla v) \, dx,$$

où  $\psi_0(\xi) = \min\{W_1(\xi) + \kappa, W_2(\xi)\}$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . La nouvelle densité  $\psi_0$  est manifestement non convexe (voir la Figure 3.2) et le problème de minimisation précédent doit être relaxé : la fonction  $\psi_0$  doit être remplacée par son enveloppe (quasi)convexe  $Q\psi_0$  dont on démontre, à l'aide de la Proposition 3.1.7, qu'elle admet l'expression suivante :

$$Q\psi_0(\xi) = \min_{\lambda \in [0,1]} \left[ \min_{W^* \in G_\lambda(W_1, W_2)} W^*(\xi) + \kappa\lambda \right].$$

Par un argument de sélection mesurable, on peut alors trouver trois fonctions  $\theta_0 \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ ,  $W_0 \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  avec  $W_0(x, \cdot) \in G_{\theta_0(x)}(W_1, W_2)$  p.p. tout  $x \in \Omega$  et  $u_0 \in \mathcal{A}(0)$  telles que

$$m_0 = \int_{\Omega} Q\psi_0(\nabla u_0) dx = \int_{\Omega} [W_0(x, \nabla u_0) + \kappa\theta_0] dx.$$

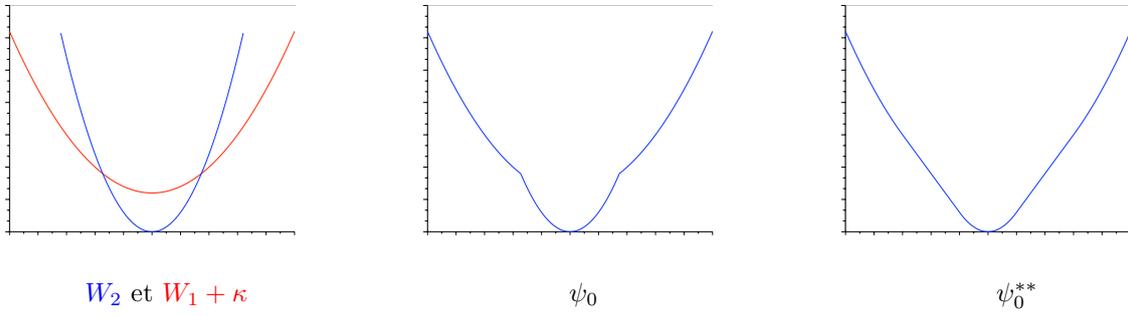


FIGURE 3.2 – Représentation des fonctions  $W_1 + \kappa$ ,  $W_2$ ,  $\psi_0$  et  $\psi_0^{**}$ .

Aux temps ultérieurs  $t_i$ , avec  $i \in \{1, \dots, N\}$ , nous utilisons un argument introduit par FRANCFORT & GARRONI dans [77] pour tenir compte de l'irréversibilité en temps. Soit  $(u_{i-1}, \theta_{i-1}, W_{i-1})$  un triplet obtenu au pas de temps précédent. En ce qui concerne la partie élastique de l'énergie, nous cherchons un mélange optimal entre la partie endommagée, de densité d'énergie élastique  $W_1$ , et le matériau composite obtenu au temps précédent, de densité d'énergie élastique  $W_{i-1}$ . Pour la partie dissipation de l'énergie, jusqu'au temps  $t_{i-1}$ , nous avons déjà localement payé  $\kappa\theta_{i-1}(x)$  d'énergie dissipée. Par irréversibilité, nous sommes donc face à l'alternative suivante : soit le matériau ne change pas d'état en ce point  $x$ , auquel cas l'énergie dissipée est nulle ; soit le matériau change d'état, auquel cas le prix à payer est ce qu'il reste d'énergie à dissiper à savoir  $\kappa(1 - \theta_{i-1}(x))$ . Autrement dit, on cherche à résoudre le problème de minimisation

$$m_i := \inf_{(v, \chi) \in \mathcal{A}(t_i) \times L^\infty(\Omega; [0,1])} \int_{\Omega} [\chi W_1(\nabla v) + (1 - \chi)W_{i-1}(x, \nabla v) + \kappa(1 - \theta_{i-1})\chi] dx.$$

En raisonnant comme précédemment, nous pouvons alors trouver trois fonctions  $\theta_i \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ ,  $W_i \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  avec  $W_i(x, \cdot) \in G_{\theta_i(x)}(W_1, W_{i-1}(x, \cdot))$  p.p. tout  $x \in \Omega$  et  $u_i \in \mathcal{A}(t_i)$  telles que

$$m_i = \int_{\Omega} [W_i(x, \nabla u_i) + \kappa\theta_i] dx.$$

La construction précédente assure les propriétés de monotonie suivantes :

$$\theta_{i-1} \leq \theta_i, \quad W_{i-1} \geq W_i, \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Le passage des temps discrets aux temps continus s'effectue par passage à la limite sur les interpolations constantes par morceaux de  $\{(u_i, \theta_i, W_i)\}_{0 \leq i \leq N}$  lorsque le pas de temps tend vers zéro. L'ingrédient principal est un théorème de type Helly par  $\Gamma$ -convergence (démontré dans [B14]) pour des fonctionnelles dépendant du temps de façon monotone.

**Remarque 3.2.2.** Nous avons présenté ici un modèle pour des déplacements scalaires. Il n'y cependant aucun obstacle à considérer des déplacements vectoriels qui pourraient être un premier pas vers un modèle en élasticité non linéaire, à condition de garder des densités  $W_1$  et  $W_2$  uniformément convexes. Toutefois, il est bien connu dans le cas vectoriel que la notion naturelle de convexité serait plutôt la quasiconvexité. Comme le Théorème 3.2.1 repose de façon fondamentale sur le caractère local de la  $G$ -fermeture (voir le Théorème 3.1.6), il nous faudrait établir un tel résultat de localité dans le cas quasiconvexe ce qui reste, jusqu'à présent, toujours un problème ouvert.

### 3.2.3 Couplage de l'endommagement avec la rupture

Dans [70], FONSECA & FRANCFORT ont introduit un modèle d'interaction entre les phénomènes d'endommagement et de rupture. L'idée consiste à reprendre le modèle décrit dans la section précédente 3.2.2 en rajoutant une énergie de surface de type Griffith

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma),$$

pénalisant la présence d'une fissure  $\Gamma \subset \Omega \cup \partial_D \Omega$  dans le milieu, tout comme dans le Chapitre 2. Dans ce cas, nous avons vu que les déplacements peuvent présenter des discontinuités : ils ne peuvent donc plus être décrits par une fonction de Sobolev mais plutôt par une fonction spéciale à variation bornée. Par conséquent, l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles au temps  $t$  est donné par

$$\mathcal{A}(t) := \{v \in SBV^p(\Omega') : v = w(t) \text{ p.p. dans } \Omega' \setminus \overline{\Omega}\}.$$

Nous faisons ici les mêmes hypothèses que dans la section 3.2.2 et nous supposons de plus que la donnée sur le bord  $w \in L^\infty(\Omega' \times [0, T]) \cap AC([0, T]; W^{1,p}(\Omega'))$ .

**Théorème 3.2.3.** *Pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe  $u(t) \in \mathcal{A}(t)$ ,  $\Theta(t) \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ ,  $W(t) \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  tels que  $W(t)(x, \cdot) \in G_{1-\Theta(t)(x)}(W_1, W_2)$  p.p. tout  $x \in \Omega$ , et un ensemble  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiable  $\Gamma(t) \subset \Omega \cup \partial_D \Omega$  satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

- *Irréversibilité :  $t \mapsto \Theta(t)$  et  $t \mapsto W(t)$  sont décroissantes et  $t \mapsto \Gamma(t)$  est croissante au sens de l'inclusion ;*
- *Principe de moindre énergie : pour tout ensemble  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiable  $\hat{\Gamma} \subset \Omega \cup \partial_D \Omega$  tel que  $\Gamma(t) \tilde{\subset} \hat{\Gamma}$ , tout  $\hat{v} \in \mathcal{A}(t)$  tel que  $J_{\hat{v}} \tilde{\subset} \hat{\Gamma}$ , tout  $\hat{\theta} \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$  et tout  $\hat{W} \in \mathcal{F}(\Omega, \alpha, \beta, p)$  tels que  $\hat{W}(x, \cdot) \in G_{\hat{\theta}(x)}(W_1, W(t)(x, \cdot))$  p.p. tout  $x \in \Omega$ , on a*

$$\int_{\Omega} W(t)(x, \nabla u(t)) dx + \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(t)) \leq \int_{\Omega} \hat{W}(x, \nabla \hat{v}) dx + \mathcal{H}^{n-1}(\hat{\Gamma}) + \kappa \int_{\Omega} \Theta(t) \hat{\theta} dx;$$

- *Bilan d'énergie : l'énergie totale définie, pour tout  $t \in [0, T]$ , par*

$$\mathcal{E}(t) := \int_{\Omega} W(t)(x, \nabla u(t)) dx + \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(t)) + \kappa \int_{\Omega} (1 - \Theta(t)) dx$$

*est absolument continue en temps et*

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \int_{\Omega} DW(s)(x, \nabla u(s)) \cdot \nabla \dot{w}(s) dx ds.$$

De nouveau la démonstration de ce résultat repose sur une discrétisation temporelle similaire à celle employée dans la preuve du Théorème 3.2.1. L'existence de solutions homogénéisées  $(u_i, \theta_i, W_i, \Gamma_i)$  pour le problème incrémental est le résultat d'un argument similaire couplé au théorème de compacité et de semi-continuité inférieure dans  $SBV$  dû à Ambrosio (voir [4]). Pour le passage à la limite des temps discrets vers les temps continus, nous utilisons un mode de convergence faible pour les ensembles rectifiables introduit par GIACOMINI & PONSIGLIONE dans [88] appelé  $\sigma$ -convergence. Contrairement à la  $\sigma^p$ -convergence (introduite par DAL MASO, FRANCFORT & TOADER dans [51]) qui est basée sur la convergence faible dans  $SBV^p$ , la  $\sigma$ -convergence repose quant à elle sur la  $\Gamma$ -convergence d'énergies de surface. Elle a justement été introduite dans [88] pour passer à la limite dans des problèmes d'homogénéisation d'évolution quasi-statique en rupture.

### 3.3 Flot gradient pour un modèle d'endommagement non local

#### 3.3.1 La fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli

Dans cette section, nous nous intéressons à un modèle d'endommagement non local (avec gradient) où la densité d'énergie dépend du tenseur des déformations (ou plus généralement du gradient du déplacement  $\nabla u$ ), de la variable d'endommagement, notée  $\rho$ , et de son gradient  $\nabla \rho$ . Plus précisément, nous considérons une énergie  $\mathcal{E}_\varepsilon : L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u, \rho) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\eta_\varepsilon + \rho^2) |\nabla u|^2 dx & \text{si } (u, \rho) \in H^1(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega), \\ + \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} |\nabla \rho|^p + \frac{\alpha}{p'\varepsilon} |1 - \rho|^p \right) dx & \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné,  $p > 1$ ,  $\varepsilon > 0$ , et  $\eta_\varepsilon > 0$  et  $\alpha > 0$  sont des constantes de normalisation que nous précisons ultérieurement. Par simplicité, nous considérons des champs de déplacement  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  scalaires (ce qui est licite dans le cadre 2D anti-plan) et  $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$  est la variable interne d'endommagement. Les points  $x$  de  $\Omega$  pour lesquels  $\rho(x) = 1$  sont sains alors que ceux pour lesquels  $\rho(x) = 0$  sont complètement endommagés. Par conséquent, lors d'une évolution temporelle, cette variable d'endommagement doit nécessairement décroître en temps pour assurer la décroissance de la rigidité de la structure (par définition de l'endommagement) ainsi que le caractère irréversible du processus. Le terme

$$\frac{\alpha}{p'\varepsilon} |1 - \rho|^p$$

peut être interprété comme la densité d'énergie dissipée par le milieu lors d'un processus d'endommagement homogène (*i.e.* un processus satisfaisant  $\nabla \rho = 0$ ) durant lequel la variable d'endommagement décroît de 1 vers  $\rho$ . Le terme

$$\frac{\varepsilon^{p-1}}{p} |\nabla \rho|^p$$

est la partie "non locale" de l'énergie qui joue un rôle régularisant en limitant les possibilités de localisation du champ d'endommagement. Le petit paramètre sans dimension  $\varepsilon > 0$  correspond au rapport entre la longueur caractéristique de la zone d'endommagement et le diamètre du milieu.

D'un point de vue mathématique, la fonctionnelle  $\mathcal{E}_\varepsilon$  a été introduite par AMBROSIO & TORTORELLI dans [11, 12] comme une régularisation elliptique de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Ils ont établi le résultat suivant de  $\Gamma$ -convergence (voir également FOCARDI [69], BRAIDES, CHAMBOLLE & SOLCI [28] et CHAMBOLLE [36]).

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $\alpha := (p/2)^{p/(p-1)}$  et supposons que  $\eta_\varepsilon/\varepsilon \rightarrow 0$ . Alors la famille de fonctionnelles  $(\mathcal{E}_\varepsilon)_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge (pour la topologie forte de  $L^2(\Omega) \times L^p(\Omega)$ ) vers  $\mathcal{E}_0 : L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par*

$$\mathcal{E}_0(u, \rho) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(J_u) & \text{si } u \in GSBV^2(\Omega) \text{ et } \rho = 1 \text{ p.p. dans } \Omega, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous renvoyons également aux travaux de FRANCFORT, LE & SERFATY [83] et LE [103] sur la convergence des points critiques de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli vers ceux de la fonctionnelle de Mumford-Shah en 1D. Concernant les problèmes d'évolution, le cas quasi-statique a été traité par GIACOMINI [87] qui, après avoir défini et démontré l'existence d'une évolution quasi-statique pour la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli sous une contrainte d'irréversibilité par rapport à la variable d'endommagement, a prouvé la convergence vers une solution du modèle de croissance quasi-statique de fissure de Francfort-Marigo. Enfin, un modèle d'évolution dynamique de l'énergie d'Ambrosio-Tortorelli toujours sous une contrainte d'irréversibilité a été introduit et étudié par LARSEN, ORTNER & SÜLI [102] dans le cadre hyperbolique.

### 3.3.2 Flot gradient unilatéral de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli

Dans [B18], en collaboration avec V. MILLOT, nous nous sommes intéressés à une évolution parabolique du modèle d'endommagement à gradient décrit ci-dessus, sous une contrainte d'irréversibilité du processus. Plus précisément, nous cherchons les descentes de pente maximale de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli par rapport à la variable  $u$  dans la direction des  $\rho$  décroissants. Pour ce faire, nous avons introduit une notion de *flot gradient unilatéral* pour la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli. Le terme "unilatéral" souligne le fait que l'évolution parabolique n'a lieu que pour le déplacement  $u$ ; la variable d'endommagement  $\rho$  n'évoluant que suivant une contrainte d'irréversibilité.

Motivés par les travaux de DAL MASO & TOADER [57] qui ont défini une notion de pente unilatérale pour la fonctionnelle de Mumford-Shah, nous avons adopté le cadre général des flots gradients dans les espaces métriques introduit par DE GIORGI, MARINO & TOSQUES dans [61] (voir également AMBROSIO, GIGLI & SAVARÉ [9]) où la notion de gradient est remplacée par celle de *pente* et l'équation du flot gradient est reformulée en terme de *courbe de pente maximale*.

**Définition 3.3.2.** La *pente unilatérale* de  $\mathcal{E}_\varepsilon$  en  $(u, \rho) \in H^1(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$  est définie par

$$|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|(u, \rho) := \limsup_{v \rightarrow u} \sup_{\hat{\rho}} \left\{ \frac{(\mathcal{E}_\varepsilon(u, \rho) - \mathcal{E}_\varepsilon(v, \hat{\rho}))^+}{\|v - u\|_{L^2(\Omega)}} : \hat{\rho} \in W^{1,p}(\Omega), \hat{\rho} \leq \rho \text{ p.p. dans } \Omega \right\},$$

où la convergence  $v \rightarrow u$  a lieu dans  $L^2(\Omega)$ .

Dans [B18], nous démontrons que la fonctionnelle  $|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|$  est semi-continue inférieurement pour la topologie forte de  $L^2(\Omega) \times L^p(\Omega)$ . Par ailleurs, nous avons obtenu une caractérisation du domaine de la pente unilatérale ainsi qu'une expression explicite. Le résultat suivant repose sur un argument de régularité elliptique pour des équations sous forme divergence ayant des coefficients dans  $W^{1,p}$  (avec  $p > n$ ).

**Proposition 3.3.3.** *Supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné ayant une frontière  $\mathcal{C}^{1,1}$  et que  $p > n$ . Alors le domaine  $D(|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|)$  de  $|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|$  est donné par*

$$D(|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|) = \left\{ (u, \rho) \in H^2(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ dans } H^{1/2}(\partial\Omega), \text{ et } \mathcal{E}_\varepsilon(u, \rho) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(u, \hat{\rho}) \text{ pour tout } \hat{\rho} \in W^{1,p}(\Omega) \text{ tel que } \hat{\rho} \leq \rho \text{ dans } \Omega \right\}.$$

De plus, si  $(u, \rho) \in D(|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|)$ , alors

$$|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|(u, \rho) = \|\operatorname{div}((\eta_\varepsilon + \rho^2)\nabla u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cette définition est motivée par le fait que si l'énergie et l'évolution sont suffisamment régulières, alors la pente coïncide précisément avec la norme de la différentielle de l'énergie.

**Définition 3.3.4.** On dit qu'un couple  $(u, \rho) : (a, b) \rightarrow H^1(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$  est une *courbe de pente unilatérale maximale* pour  $\mathcal{E}_\varepsilon$  si  $u \in H^1([a, b]; L^2(\Omega))$ ,  $t \mapsto \rho(t)$  est décroissante et s'il existe une fonction décroissante  $\lambda : (a, b) \rightarrow [0, +\infty)$  telle que

$$\lambda(t) = \mathcal{E}_\varepsilon(u(t), \rho(t)) \quad \text{et} \quad \dot{\lambda}(t) \leq -\frac{1}{2}\|\dot{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|^2(u(t), \rho(t)) \quad \text{p.p. tout } t \in (a, b). \quad (3.3.1)$$

L'interprétation de cette définition repose sur le fait que si l'énergie et l'évolution sont suffisamment régulières, alors la pente coïncide également avec la norme de la vitesse le long d'une courbe de pente maximale. D'après la Proposition 3.3.3, la vitesse et la différentielle de l'énergie ont donc même norme. Par ailleurs, en intégrant (3.3.1) et en utilisant l'inégalité de Young, il vient que la différentielle de l'énergie et la vitesse ont de plus même direction, ce qui permet de retrouver l'équation du flot gradient.

L'existence de courbes de pente unilatérale maximale est obtenue grâce à la méthode des *mouvements minimisants* comme suit (voir AMBROSIO [6] et DE GIORGI [58]). Introduisons une discrétisation  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  de  $[0, T]$ . Pour une donnée initiale

$$u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ et } \rho_0^\varepsilon = \operatorname{argmin} \left\{ \mathcal{E}_\varepsilon(u_0, \rho) : \rho \in W^{1,p}(\Omega) \right\},$$

nous définissons  $(u_i, \rho_i) \in H^1(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$ , pour tout  $i \geq 1$ , comme une solution de

$$\min \left\{ \mathcal{E}_\varepsilon(u, \rho) + \frac{\|u - u_{i-1}\|_{L^2(\Omega)}^2}{2(t_i - t_{i-1})} : (u, \rho) \in H^1(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega), \rho \leq \rho_{i-1} \text{ dans } \Omega \right\}.$$

Notons que la minimisation en la variable  $\rho$  est une minimisation sous contrainte qui contient le caractère irréversible du processus d'endommagement. Le but consiste alors à passer à la limite lorsque le pas de temps tend vers zéro. Une première difficulté concerne le passage à la limite dans le problème de type obstacle par rapport à  $\rho$ . Il est en effet connu que ces problèmes ne sont en général pas stables par convergence faible et qu'un "terme étrange" de type capacitaire peut apparaître à la limite (voir CIORANESCU & MURAT [40] et DAL MASO & LONGO [54]). C'est précisément pour cette raison que nous avons choisi de considérer des énergies à croissance  $p > n$  en la variable  $\nabla \rho$ . En effet, l'injection de Sobolev implique la convergence uniforme de l'obstacle, assurant la stabilité du problème de minimisation qui lui est associé.

La suite des trajectoires discrètes  $\{(u_i, \rho_i)\}_{i \geq 0}$  étant ainsi définie, nous démontrons qu'elle converge, lorsque le pas de temps tend vers zéro, vers une évolution continue  $t \mapsto (u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t))$  que nous appelons *mouvements minimisants unilatéraux*. Cette évolution n'est autre qu'une descente de gradient de la fonctionnelle  $\mathcal{E}_\varepsilon$  par rapport à  $u$  dans la direction des  $\rho$  décroissants.

**Théorème 3.3.5.** *Supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné ayant une frontière  $\mathcal{C}^{1,1}$  et que  $p > n$ . Alors, l'application  $t \mapsto (u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t))$  est une courbe de pente unilatérale maximale telle que*

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in H^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)), \\ \rho_\varepsilon &\in L^\infty(0, T; W^{1,p}(\Omega)), \quad 0 \leq \rho_\varepsilon(t) \leq \rho_\varepsilon(s) \leq 1 \text{ pour tout } 0 \leq s \leq t \leq T, \end{aligned}$$

et les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \dot{u}_\varepsilon - \operatorname{div}((\eta_\varepsilon + \rho_\varepsilon^2) \nabla u_\varepsilon) = 0 & \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{dans } L^2(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega)), \\ u_\varepsilon(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t)) \leq \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t), \rho) \quad \forall t \in [0, T] \text{ et } \rho \in W^{1,p}(\Omega) \text{ tels que } \rho \leq \rho_\varepsilon(t) \text{ dans } \Omega, \\ \rho_\varepsilon(0) = \rho_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

De plus,  $t \mapsto \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t))$  a une variation totale ponctuelle bornée sur  $[0, T]$  et il existe un ensemble au plus dénombrable  $\mathcal{N}_\varepsilon \subset (0, T]$  tel que

- (i)  $(u_\varepsilon, \rho_\varepsilon) : [0, T] \setminus \mathcal{N}_\varepsilon \rightarrow H^1(\Omega) \times W^{1,p}(\Omega)$  est fortement continue ;
- (ii) pour tout  $t_1 \in [0, T] \setminus \mathcal{N}_\varepsilon$  et tout  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ,

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t_2), \rho_\varepsilon(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{u}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t_1), \rho_\varepsilon(t_1)). \quad (3.3.4)$$

La compacité de la suite des trajectoires discrètes est obtenue à l'aide d'estimations *a priori* assurant que le couple limite  $(u_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$  appartient à l'espace d'énergie. La régularité  $H^2$  en espace de  $u_\varepsilon$  est une conséquence de la Proposition 3.3.3 couplée au fait que  $(u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t)) \in D(|\partial\mathcal{E}_\varepsilon|)$  p.p. tout  $t \in [0, T]$ .

Nous établissons que  $u_\varepsilon$  est solution de l'équation de la chaleur (3.3.2) par passage à la limite dans la condition d'optimalité d'ordre 1 du problème de minimisation en  $u$ . En exploitant une propriété de type semi-groupe pour la solution de cette équation, nous montrons alors que l'énergie élastique

$$t \mapsto \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\eta_\varepsilon + \rho_\varepsilon(t)^2) |\nabla u_\varepsilon(t)|^2 dx$$

est décroissante et donc continue en dehors d'un ensemble dénombrable de temps. Cette propriété nous permet de démontrer la forte continuité dans  $H^1(\Omega)$  de  $t \mapsto u_\varepsilon(t)$ .

Par passage à la limite dans le problème de minimisation en la variable d'endommagement  $\rho$ , nous démontrons que  $\rho_\varepsilon$  satisfait le principe de minimisation (3.3.3) et que l'énergie d'endommagement

$$t \mapsto \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} |\nabla \rho_\varepsilon(t)|^p + \frac{\alpha}{p'\varepsilon} (1 - \rho_\varepsilon(t))^p \right) dx$$

est croissante et donc continue en dehors d'un ensemble dénombrable de temps. Cette propriété assure également la forte continuité dans  $W^{1,p}(\Omega)$  de  $t \mapsto \rho_\varepsilon(t)$ .

Nous utilisons ensuite les équations sur le déplacement en temps discrets et continus pour établir la convergence forte dans l'espace d'énergie des trajectoires discrètes vers les trajectoires continues, impliquant la convergence de l'énergie en dehors d'un ensemble au plus dénombrable de temps.

La preuve de l'inégalité d'énergie (3.3.4) repose quant à elle sur une égalité d'énergie en temps discrets obtenue en considérant une interpolation de type De Giorgi pour le champ des déplacements. Le passage à la limite en temps continus résulte de la convergence de l'énergie en dehors d'un ensemble au plus dénombrable de temps.

Notons que l'inégalité d'énergie (3.3.4) se réduit en une égalité quand le flot est suffisamment régulier, en particulier quand l'énergie totale  $t \mapsto \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t))$  est absolument continue. Dans notre cas, l'énergie totale est seulement à variation totale ponctuelle bornée. Par conséquent, nous n'avons pas pu montrer l'inégalité opposée qui pourrait être obtenue grâce à une "chain rule" généralisée dans l'esprit des travaux de ROSSI & SAVARÉ [122]. En effet, une dérivation formelle en temps de l'énergie totale donne que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t)) = \langle \partial_u \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t)), \dot{u}_\varepsilon(t) \rangle + \langle \partial_\rho \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t)), \dot{\rho}_\varepsilon(t) \rangle.$$

L'égalité d'énergie est alors formellement équivalente à

$$\langle \partial_\rho \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon(t), \rho_\varepsilon(t)), \dot{\rho}_\varepsilon(t) \rangle = 0, \quad (3.3.5)$$

qui semble également être une condition nécessaire d'optimalité pour le problème de minimisation unilatérale (3.3.3). Notons que (3.3.5) est précisément une version régularisée du critère de Griffith qui assure que l'état d'endommagement croît si et seulement le taux de restitution d'énergie (ou la force thermodynamique associée à  $\rho_\varepsilon$ ) est critique, autrement dit si la restitution d'énergie élastique est compensée par l'accroissement d'énergie d'endommagement.

### 3.3.3 Mouvements minimisants unilatéraux de la fonctionnelle de Mumford-Shah

Les mouvements minimisants de la fonctionnelle de Mumford-Shah ont été introduits dans [7] par AMBROSIO & BRAIDES et ont par la suite été étudiés plus en détails par CHAMBOLLE & DOVERI [37]. Motivés par un modèle de croissance de fissures, ils ont établi l'existence de mouvements minimisants unilatéraux, où le champ des déplacements est solution d'une équation de la chaleur généralisée et pour lequel une inégalité d'énergie a lieu.

Dans [B18], nous nous sommes également intéressés à l'analyse asymptotique lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  des mouvements minimisants unilatéraux  $(u_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$  de la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli. Motivés par le

résultat de  $\Gamma$ -convergence dans le cas statique (voir Théorème 3.3.1), nous nous attendons à ce que  $(u_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$  converge en un certain sens vers des mouvements minimisants unilatéraux de la fonctionnelle de Mumford-Shah obtenus dans [7, 37]. Notons que la théorie générale de la  $\Gamma$ -convergence des flots gradients introduite par SANDIER & SERFATY dans [124] et développée par SERFATY dans [127] ne s'applique pas ici car celle-ci requiert une structure de gradient pour le problème  $\Gamma$ -limite, ce qui n'est pas notre cas.

**Théorème 3.3.6.** *Supposons que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné à frontière  $\mathcal{C}^{1,1}$  et soit  $(u_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$  un mouvement minimisant unilatéral pour la fonctionnelle d'Ambrosio-Tortorelli  $\mathcal{E}_\varepsilon$  donné par le Théorème 3.3.5. Alors il existe une sous-suite  $(\varepsilon_k) \searrow 0^+$  et une fonction  $u \in H^1([0, T]; L^2(\Omega))$  telles que*

$$\begin{cases} \rho_{\varepsilon_k}(t) \rightarrow 1 \text{ fortement dans } L^p(\Omega) \text{ pour tout } t \in [0, T], \\ u_{\varepsilon_k}(t) \rightarrow u(t) \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \text{ pour tout } t \in [0, T], \\ \dot{u}_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \dot{u} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (3.3.6)$$

De plus, pour tout  $t \in [0, T]$ , on a  $u(t) \in SBV^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et  $\nabla u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$ ,  $u$  est solution de l'équation

$$\begin{cases} \dot{u} - \operatorname{div} \nabla u = 0 & \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \nabla u \cdot \nu = 0 & \text{dans } L^2(0, T; H^{-1/2}(\partial\Omega)), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

et il existe une famille  $\{\Gamma(t)\}_{t \in [0, T]}$  d'ensembles  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiables dans  $\bar{\Omega}$  telle que

- (i)  $\Gamma(s) \subset \Gamma(t)$  pour tout  $0 \leq s \leq t \leq T$ ;
- (ii)  $J_{u(t)} \tilde{\subset} \Gamma(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ ;
- (iii) pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \mathcal{H}^{n-1}(\Gamma(t)) + \int_0^t \|\dot{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx. \quad (3.3.8)$$

La démonstration de la compacité (3.3.6) résulte d'une application du Théorème d'Ascoli couplé à la compacité des suites dont l'énergie d'Ambrosio-Tortorelli est uniformément bornée par rapport à  $\varepsilon$ . Par passage à la limite dans l'équation de la chaleur (3.3.2) satisfaite par  $u_\varepsilon$  on obtient que  $u$  est solution de l'équation de la chaleur généralisée (3.3.7), où  $\nabla u$  est le gradient (spatial) approché de  $u$ . La partie la plus délicate de la preuve concerne la définition de la famille croissante de fissures  $\{\Gamma(t)\}_{t \in [0, T]}$ . La construction repose de façon essentielle sur le fait que l'énergie d'endommagement

$$t \mapsto \int_{\Omega} \left( \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} |\nabla \rho_\varepsilon(t)|^p + \frac{\alpha}{p' \varepsilon} (1 - \rho_\varepsilon(t))^p \right) dx$$

est une fonction croissante du temps. On démontre alors que, à extraction d'une sous-suite près, la mesure de Radon

$$\mu_\varepsilon(t) := \left( \frac{\varepsilon^{p-1}}{p} |\nabla \rho_\varepsilon(t)|^p + \frac{\alpha}{p' \varepsilon} (1 - \rho_\varepsilon(t))^p \right) \mathcal{L}^n$$

converge faible\* dans  $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$  vers une mesure  $\mu(t)$  croissante par rapport à  $t$ . L'ensemble  $\Gamma(t)$  est alors défini comme étant le plus grand ensemble  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiable contenant les points de densité 1 de la mesure  $\mu(t)$ . Par construction, la famille  $\{\Gamma(t)\}_{t \in [0, T]}$  est croissante en temps et par une application de la borne inférieure dans le Théorème 3.3.1, on en déduit que  $J_{u(t)} \tilde{\subset} \Gamma(t)$  pour tout  $t \geq 0$  ainsi que l'inégalité d'énergie (3.3.8).



# Chapitre 4

## Plasticité

### 4.1 Plasticité des métaux

Les modèles d'élasto-plasticité ont la capacité de prédire l'apparition de déformations permanentes dans un milieu lorsque qu'une contrainte critique est atteinte. D'un point de vue microscopique, ces déformations dites *plastiques* sont le résultat de défauts dus à des glissements inter-cristallins à l'intérieur d'un réseau, appelés *dislocations*. Il a été expérimentalement observé que des déformations plastiques apparaissent sur des zones minces appelées *bandes de cisaillement*, sur lesquelles on constate un phénomène de localisation des déformations. D'un point de vue macroscopique, ces zones sont interprétées comme des surfaces de discontinuité du champ de déplacement. Nous renvoyons aux livres de HILL [94] et LUBLINER [107] pour une présentation détaillée.

L'une des difficultés des modèles de plasticité réside dans leur caractère non linéaire. Il est cependant possible d'en donner une formulation variationnelle : il s'agit des principes de Hodge-Prager pour le taux de contrainte et de Greenberg pour la vitesse qui permettent de formuler le problème sous une forme mieux adaptée à l'analyse tant théorique que numérique. En particulier, le développement de l'analyse convexe et l'interprétation du modèle d'élasto-plasticité comme un processus de raffle par un convexe variable a permis à MOREAU dans [114] de montrer l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème en contrainte. D'autres résultats ont été obtenus par DUVAUT & LIONS dans [67] à l'aide de théories constructives en équations aux dérivées partielles comme les approximations de Galerkin, les méthodes de régularisation et de pénalisation. Bien que le caractère bien posé du problème en contrainte ait été résolu de façon satisfaisante, le problème en vitesse (ou en déplacement) a fait face à de nombreuses difficultés liées à la régularité du tenseur des déformations linéarisées. Ce problème a été évité par JOHNSON dans [95] au moyen d'une formulation faible qui était cependant trop faible pour obtenir des informations complètes sur le tenseur des déformations. Dans la continuité de ces travaux, le modèle quasi-statique a été étudié par SUQUET dans [128, 129] et le modèle dynamique par ANZELLOTTI & LUCKHAUS dans [15] à l'aide d'une approximation par des modèles visco-plastiques. La difficulté principale était liée à la définition de l'espace fonctionnel correct pour les champs de déplacements cinématiquement admissibles. Ceci a été rendu possible par l'introduction de l'espace  $BD$  des fonctions à déformations bornées par MATTHIES, STRANG & CHRISTIANSEN dans [110] et SUQUET dans [130]. Nous renvoyons à la thèse de SUQUET [131] pour une bibliographie plus complète concernant l'analyse mathématique des modèles d'élasto-plasticité.

Dans la section 1.4.3, nous avons donné une formulation thermomécaniquement consistante du modèle d'élasto-plasticité standard que nous allons à présent étudier plus en détail. Pour simplifier nous supposons (du moins dans un premier temps) qu'il n'y a pas de variable interne d'érouissage. Nous désignons par  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné (suffisamment régulier) qui représente la configuration de référence d'un milieu élasto-plastique. Donnons-nous une densité volumique de forces  $f$  et un déplacement imposé  $w$  sur toute la frontière  $\partial\Omega$ . Le modèle d'élasto-plasticité en petites déformations repose sur la variable cinématique du champ des déplacements  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (ou le champ des vitesses  $v = \dot{u}$ ). Le tenseur des

déformations linéarisées  $Eu := (Du + Du^T)/2$  se décompose additivement sous la forme

$$Eu = e + p,$$

où  $e$  et  $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  désignent respectivement les tenseurs de déformations élastiques et plastiques. Le tenseur des contraintes  $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  est lié à la déformation élastique par la *loi de Hooke*

$$\sigma = \mathbb{C}e,$$

où  $\mathbb{C}$  est un tenseur d'ordre 4 symétrique et coercif. En régime dynamique, l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{u} - \operatorname{div} \sigma = f \text{ dans } \Omega \times [0, T],$$

et dans le cas quasi-statique, celle-ci se réduit à l'équation d'équilibre

$$-\operatorname{div} \sigma = f \text{ dans } \Omega \times [0, T].$$

Le tenseur des contraintes est astreint à demeurer dans un ensemble convexe et fermé  $K \subset \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  (le *convexe d'élasticité*) de sorte que

$$\sigma \in K.$$

Si  $\sigma$  se trouve à l'intérieur de  $K$ , le milieu se comporte de façon élastique : il revient à sa configuration d'origine s'il est totalement déchargé en contrainte et donc  $p = 0$ . En revanche, si  $\sigma$  atteint le bord de  $K$ , un flot plastique commence à se développer et une déformation résiduelle demeurera à l'issue d'un processus de déchargement. La loi d'évolution est décrite à l'aide de la *loi d'écoulement de Prandtl-Reuss* :

$$\dot{p} = N_K(\sigma),$$

où  $N_K(\sigma)$  désigne le cône normal à  $K$  en  $\sigma$ . En résumé, nous cherchons un triplet  $(u, e, p) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  satisfaisant le système d'équations

$$\begin{cases} Eu = e + p \text{ dans } \Omega \times [0, T], & u = w \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \sigma = \mathbb{C}e, & \sigma \in K \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ \ddot{u} - \operatorname{div} \sigma = f \text{ (ou } -\operatorname{div} \sigma = f) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ \dot{p} \in N_K(\sigma) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ (u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0) \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où  $(u_0, e_0, p_0)$  est une donnée initiale. En dynamique, nous rajoutons également une condition initiale sur la vitesse  $\dot{u}(0) = v_0$  dans  $\Omega$ .

Par des résultats standards d'analyse convexe, nous savons que  $N_K(\sigma) = \partial I_K(\sigma)$ , *i.e.*, le sous-différentiel de la fonction indicatrice  $I_K$  de  $K$ , définie par  $I_K(\sigma) = 0$  si  $\sigma \in K$  et  $+\infty$  sinon. Par conséquent, la loi d'écoulement peut être réécrite de façon équivalente comme suit :

$$\sigma : \dot{p} = \max_{\tau \in K} \tau : \dot{p} =: H(\dot{p}), \quad (4.1.2)$$

où  $H : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$  désigne la fonction d'appui de  $K$ . Cette dernière formulation n'est autre que le *principe de travail plastique maximal de Hill*.

Les métaux et la plupart des alliages ont un comportement plastique particulier : ils sont insensibles aux pressions hydrostatiques. Une conséquence importante de cette propriété est que le convexe d'élasticité  $K$  est invariant dans la direction des matrices hydrostatiques. Il est parfois commode d'exprimer l'ensemble  $K$  en terme d'une *fonction de chargement*  $F : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  (une fonction convexe et semi-continue inférieurement) de sorte que

$$K = \{\sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} : F(\sigma) \leq 0\}.$$

L'invariance de  $K$  par rapport à  $\text{tr}\sigma$  se traduit par le fait que la fonction de chargement  $F$  associée à  $K$  ne dépend que de la partie déviatorique  $\sigma_D$  du tenseur des contraintes  $\sigma$ . C'est en particulier le cas des modèles de Von Mises et Tresca pour lesquels  $\sigma_D$  est borné. Une autre conséquence importante de cette insensibilité aux contraintes hydrostatiques réside dans le fait que le taux de déformation plastique  $\dot{p}$  est une matrice déviatorique. Ceci traduit le fait que le milieu n'a pas de changement de volume irréversible et que les déformations plastiques n'ont lieu qu'en cisaillement.

Grâce à cette propriété, des résultats mathématiques plus précis ont pu être obtenus pour cette classe de matériaux. La difficulté principale consiste à donner un sens rigoureux à la loi d'écoulement, ou de façon équivalente, au principe de Hill. En régime quasi-statique, la résolution du problème en contrainte assure l'existence et l'unicité du tenseur des contraintes  $\sigma(t) \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  (et donc aussi  $e(t) \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ ) satisfaisant  $\sigma_D(t) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  et  $\text{div } \sigma(t) \in L^n(\Omega; \mathbb{R}^n)$  (pour une force volumique  $f$  suffisamment régulière), alors que la résolution du problème en déplacement donne l'existence (et l'unicité dans le cas dynamique) d'une vitesse  $\dot{u}(t) \in BD(\Omega)$ . En particulier, le tenseur des taux de déformations plastiques  $\dot{p}(t) \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_D^{n \times n})$  est une mesure de Radon bornée et le produit  $\sigma(t) : \dot{p}(t)$  n'a *a priori* pas de sens. Cependant, pour un domaine  $\Omega$  assez régulier, il est possible de définir le produit de dualité  $\sigma(t) : \dot{p}(t)$  comme une mesure à l'aide de la formule d'intégration par parties grâce aux travaux de KOHN & TEMAM [97] (voir également FRANCFORT & GIACOMINI [78]). Par ailleurs, la théorie des fonctions convexes d'une mesure (voir GOFFMAN & SERRIN [90] et DEMENGEL & TEMAM [62, 63]) permet de donner un sens à l'expression  $H(\dot{p}(t))$ . La combinaison de ces propriétés permet finalement d'interpréter le principe de Hill (4.1.2) au sens de la théorie de la mesure.

En régime quasi-statique, DAL MASO, DE SIMONE & MORA [45] ont utilisé le cadre général des problèmes variationnels d'évolution quasi-statique pour les processus indépendants des vitesses introduit par MAINIK & MIELKE dans [109]. La contribution principale de cet article est le fait de récrire de façon équivalente la loi d'écoulement comme une identité d'énergie assurant que la variation temporelle d'énergie potentielle et d'énergie dissipée (cette dernière étant interprétée au sens de la théorie de la mesure) est compensée par le travail des efforts internes et externes :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = \int_{\partial\Omega} (\sigma(t)\nu) \cdot \dot{w}(t) d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\Omega} f(t) \cdot \dot{u}(t) dx,$$

où

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{C}e(t) : e(t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} H(\dot{p}(s)) dx ds.$$

Le régime dynamique, traité par ANZELLOTTI & LUCKHAUS dans [15], repose quant à lui sur une approximation visco-plastique de type Kelvin-Voigt. Dans ce cas aussi, le principe de Hill (4.1.2) est satisfait au sens des mesures.

Le modèle décrit jusqu'à présent est qualifié de *plasticité parfaite* en ce sens que le convexe d'élasticité reste fixe au cours du temps. Des modèles plus sophistiqués avec écrouissage ou adoucissement peuvent être considérés. Le domaine d'élasticité varie alors au cours du temps ce qui est modélisé par une variable interne supplémentaire décrivant la position du convexe dans l'espace des contraintes.

Dans le cas d'écrouissage (positif), le domaine d'élasticité croît avec le temps. Des exemples typiques sont l'écrouissage isotrope représentant une expansion uniforme du domaine élastique dans toutes les directions et sans changement de forme, ou encore l'écrouissage cinématique représentant une translation du domaine élastique. En présence d'écrouissage, la résolution du problème en déplacement est généralement simplifiée car l'analyse a lieu cette fois dans les espaces de Sobolev.

D'autres travaux ont été menés par DAL MASO, DE SIMONE, MORA & MORINI autour de l'étude d'un modèle d'élasto-plasticité avec adoucissement. Dans ces modèles, le convexe d'élasticité se rétracte lorsque le flot plastique se développe. Le problème variationnel engendré devient alors non convexe ce qui rend l'analyse mathématique beaucoup plus délicate. Dans [46, 47], une notion de solution en terme de mesures de Young généralisées dépendant du temps a été introduite, et dans [48] les mêmes auteurs ont défini une notion d'évolution quasi-statique relaxée pour ce modèle.

## 4.2 Plasticité des sols : le cas associé

### 4.2.1 Formulation du modèle

Nous nous intéressons ici plus en détail à la plasticité des sols qui, contrairement aux métaux, sont sensibles aux pressions hydrostatiques qui engendrent des dilatations plastiques. Il est donc nécessaire de prendre en compte des modèles pour lesquels le convexe d'élasticité n'est pas invariant dans la direction des contraintes hydrostatiques. Une étude à ce sujet a été entreprise par DAL MASO, DEMYANOV & DE SIMONE dans [43] pour un convexe  $K$  borné dans toutes les directions. Nous considérons ici un convexe d'élasticité dont la fonction de chargement est donnée, pour tout  $\sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$ , par

$$F(\sigma) := \alpha \operatorname{tr} \sigma + \kappa(\sigma_D) - k, \quad (4.2.1)$$

où

$$\alpha = \sin \varphi \quad \text{et} \quad k = 2c \cos \varphi \quad (4.2.2)$$

sont des constantes liées au coefficient de cohésion  $c > 0$  et à l'angle de friction interne  $\varphi \in (0, \pi/2)$  du matériau, et

$$\kappa : \mathbb{M}_D^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

est une fonction convexe, positivement homogène de degré 1 satisfaisant  $\kappa(0) = 0$ . Notons que ce modèle ne rentre pas dans le cadre de [43] car le convexe d'élasticité associé est non borné dans la direction des contraintes hydrostatiques. Il s'agit en fait d'un cône convexe fermé dont le sommet se situe sur l'axe des matrices hydrostatiques.

Ces fonctions de chargement dépendant de la contrainte moyenne  $\operatorname{tr} \sigma$  sont bien adaptées à la plasticité des matériaux granulaires comme les sols, les roches ou le béton (voir DRUCKER & PRAGER [66] et le livre de SALENÇON [123]). En effet, de tels matériaux ont la propriété d'être composés de beaucoup de petites particules. Par conséquent, les déformations plastiques apparaissent dans un premier temps en cisaillement lorsque ces particules glissent les unes le long des autres. Cependant, une différence fondamentale avec les métaux réside dans le fait que la force de cisaillement est influencée par la contrainte normale en compression agissant sur le plan de cisaillement, et donc par la pression hydrostatique. La raison physique de ce phénomène est liée au fait que le vide entre les particules est composé d'air et d'eau. Quand le matériau est chargé en compression, la quantité de vide varie de façon irréversible engendrant des changements de volumes permanents. Les interactions inter-granulaires sont donc gouvernées par une loi de frottement de type Coulomb où les contraintes normales et en cisaillement doivent atteindre une combinaison critique sur le plan de cisaillement.

Un certain nombre de modèles classiques est pris en compte ici comme le *modèle de Drucker-Prager* correspondant à

$$\kappa(\sigma_D) = |\sigma_D|,$$

ou encore le *modèle de Mohr-Coulomb* pour lequel

$$\kappa(\sigma_D) = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{(\sigma_D)_i - (\sigma_D)_j\},$$

où  $(\sigma_D)_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  désignent les valeurs propres de  $\sigma_D$ .

Pour certains géomatériaux, ces modèles surestiment les contraintes critiques et ne prédisent pas convenablement la dilatation plastique qui excède ce qui est observé expérimentalement. Pour remédier à ce problème, un modèle modifié a été introduit par DI MAGGIO & SANDLER dans [65] où le cône  $K$  est "coupé" dans la direction des contraintes hydrostatiques par une surface appelée "cap".

Dans [121], RESENDE & MARTIN ont étudié le modèle de Drucker-Prager avec cap sur lequel une loi d'écroutissage est introduite : si  $\sigma$  atteint le cap, celui-ci est poussé vers l'extérieur de sorte que si  $\sigma$  revient à la même position en un temps ultérieur, cette position sera alors un point intérieur du nouveau domaine élastique. Afin de modéliser ce phénomène, nous introduisons une nouvelle variable interne notée  $\xi$  (et  $z$  sa variable duale), liée à la position du cap (voir Figure 4.1).

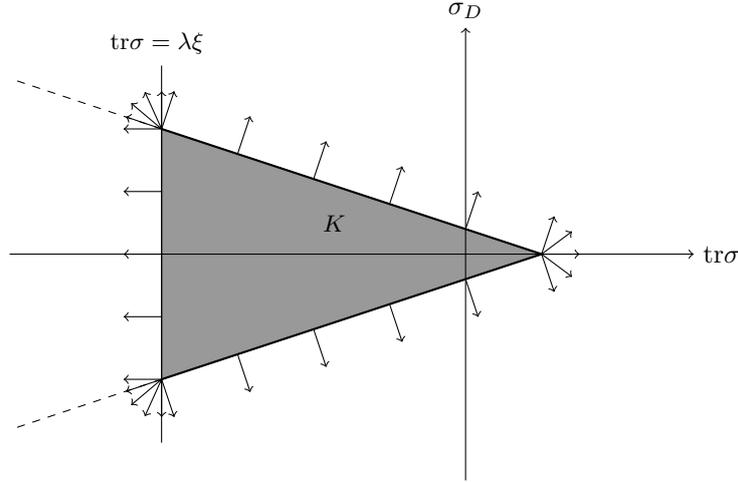


FIGURE 4.1 – Modèle associé avec une loi de normalité.

Nous considérons les ensembles convexes fermés  $K_\lambda \subset \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R}$  définis par

$$K_\lambda := \{(\sigma, \xi) \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R} : F(\sigma) \leq 0, \xi \leq 0 \text{ et } \text{tr} \sigma \geq \lambda \xi\}.$$

Le modèle avec écoulement sur le cap est le suivant : trouver un quadruplet  $(u, e, p, z) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R}$  satisfaisant

$$\begin{cases} Eu = e + p \text{ dans } \Omega \times [0, T], & u = w \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \sigma = \mathbb{C}e, \xi = -z, & (\sigma, \xi) \in K_\lambda \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ \ddot{u} - \text{div} \sigma = f \text{ (ou } -\text{div} \sigma = f) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ (\dot{p}, \dot{z}) \in N_{K_\lambda}(\sigma, \xi) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ (u(0), e(0), p(0), z(0)) = (u_0, e_0, p_0, z_0), & \text{(et, dans le cas dynamique, } \dot{u}(0) = v_0) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Tout comme nous l'avons expliqué dans la section 4.1, la loi d'écoulement  $(\dot{p}, \dot{z}) \in N_{K_\lambda}(\sigma, \xi)$  (qui porte maintenant sur la force thermodynamique  $(\sigma, \xi)$  et la vitesse  $(\dot{p}, \dot{z})$ ) est équivalente au principe de travail plastique maximal de Hill :

$$\sigma : \dot{p} + \xi z = \max_{(\tau, \zeta) \in K_\lambda} \{\tau : \dot{p} + \zeta \dot{z}\} =: H_\lambda(\dot{p}, \dot{z}), \quad (4.2.4)$$

où  $H_\lambda : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  est la fonction d'appui de  $K_\lambda$ .

Définissons à présent de façon précise les données du problème.

**Configuration de référence.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné, connexe à frontière Lipschitzienne désignant la configuration de référence d'un milieu élasto-plastique. Nous désignons par  $\nu$  la normale extérieure unitaire à  $\partial\Omega$ .

**Chargement extérieur.** Nous supposons que le milieu est soumis à une densité volumique de forces notée  $f \in AC([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$ , ainsi qu'à un déplacement imposé sur le bord qui est la trace sur  $\partial\Omega \times [0, T]$  d'une fonction  $w \in AC([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}^n))$ .

**L'énergie élastique.** Soit  $\mathbb{C}$  un tenseur d'ordre 4 satisfaisant les propriétés de symétries

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} = \mathbb{C}_{jikl} \quad \text{pour tout } i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}.$$

Nous supposons qu'il existe des constantes  $0 < \alpha_{\mathbb{C}} \leq \beta_{\mathbb{C}} < \infty$  telles que

$$\alpha_{\mathbb{C}}|e|^2 \leq \mathbb{C}e : e \leq \beta_{\mathbb{C}}|e|^2 \quad \text{pour tout } e \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}.$$

L'énergie élastique est alors définie, pour tout  $e \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ , par

$$\mathcal{Q}(e) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{C}e(x) : e(x) dx.$$

**Convexes d'élasticité.** Soient  $\alpha > 0$ ,  $k > 0$  et  $\kappa : \mathbb{M}_D^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction convexe, positivement homogène de degré 1 telle que  $\kappa(0) = 0$ . On définit les ensembles convexes fermés

$$K := \{ \sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} : \alpha \text{tr} \sigma + \kappa(\sigma_D) - k \leq 0 \}, \quad (4.2.5)$$

et, pour tout  $\lambda \geq 1$ ,

$$K_{\lambda} := \{ (\sigma, \xi) \in K \times \mathbb{R}^- : \lambda \xi - \text{tr} \sigma \leq 0 \}. \quad (4.2.6)$$

**Les énergies de dissipation.** On définit les fonctions d'appui  $H : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow [0, +\infty]$  et  $H_{\lambda} : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  de  $K$  et  $K_{\lambda}$  par

$$H(p) := \sup_{\sigma \in K} \sigma : p \quad \text{et} \quad H_{\lambda}(p, z) := \sup_{(\sigma, \xi) \in K_{\lambda}} \{ \sigma : p + \xi z \}.$$

Il s'agit de fonctions convexes, semi-continues inférieurement et positivement homogènes de degré 1 qui vérifient les propriétés de coercivité suivantes : il existe  $\alpha_H > 0$  tel que

$$\alpha_H |p| \leq H(p), \quad \alpha_H |p| - \alpha_H z \leq H_{\lambda}(p, z) \quad \text{pour tout } (p, z) \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R}^+.$$

Ces fonctions peuvent également prendre la valeur  $+\infty$  et, en particulier, on a

$$z < 0 \text{ implique que } H_{\lambda}(p, z) = +\infty. \quad (4.2.7)$$

Tout comme dans le cas des métaux, l'espace d'énergie du champ des vitesses est l'espace  $BD(\Omega)$  des fonctions à déformation bornée et, par conséquent, le taux de déformation plastique est une mesure de Radon. Il nous faut donc définir les énergies de dissipation au sens de la théorie de la mesure. En effet, selon l'approche de GOFFMAN & SERRIN [90], nous introduisons pour tout  $(p, z) \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times L^2(\Omega)$  les mesures de Borel positives

$$H(p)(B) := \int_B H \left( \frac{dp}{d\mathcal{L}^n}(x) \right) dx + \int_B H \left( \frac{dp}{d|p^s|}(x) \right) d|p^s|(x)$$

et

$$H_{\lambda}(p, z)(B) := \int_B H_{\lambda} \left( \frac{dp}{d\mathcal{L}^n}(x), z(x) \right) dx + \int_B H_{\lambda} \left( \frac{dp}{d|p^s|}(x), 0 \right) d|p^s|(x)$$

pour tout ensemble Borélien  $B \subset \bar{\Omega}$ . Ces mesures ne sont en général pas finies (ni même localement finies). Cependant si  $H(p)$  et  $H_{\lambda}(p, z) \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$ , on peut alors définir les énergies de dissipation par

$$\mathcal{H}(p) := H(p)(\bar{\Omega}), \quad \mathcal{H}_{\lambda}(p, z) := H_{\lambda}(p, z)(\bar{\Omega}).$$

**Dualité entre la contrainte et la déformation plastique.** Le produit de dualité entre le tenseur des contraintes et le tenseur des (taux de) déformations plastiques n'est *a priori* pas bien défini car  $\sigma$  est seulement une fonction de carré Lebesgue-intégrable et  $\dot{p}$  est une mesure pouvant être singulière. Cependant, il est possible d'en justifier le produit à l'aide de la formule d'intégration par parties tout comme dans KOHN & TEMAM [97] et FRANCFORT & GIACOMINI [78].

**Définition 4.2.1.** Soit  $\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  avec  $\operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , et  $p \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  tel qu'il existe un triplet  $(u, e, w) \in (BD(\Omega) \cap L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)) \times L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  satisfaisant  $Eu = e + p$  dans  $\Omega$  et  $p = (w - u) \odot \nu \mathcal{H}^{n-1}$  sur  $\partial\Omega$ . On définit la distribution  $[\sigma : p]$  sur  $\mathbb{R}^n$  (à support compact dans  $\bar{\Omega}$ ) par

$$\langle [\sigma : p], \varphi \rangle = \int_{\Omega} \varphi(w - u) \cdot \operatorname{div} \sigma \, dx + \int_{\Omega} \sigma : [(w - u) \odot \nabla \varphi] \, dx + \int_{\Omega} \sigma : (Ew - e) \varphi \, dx$$

pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Notons que, contrairement à [97, 78], il semble difficile de montrer à ce stade que la distribution  $[\sigma : p]$  est en fait une mesure. Cette propriété sera cependant obtenue pour les solutions des divers modèles d'élasto-plasticité qui suivent (voir les Théorèmes 4.2.4, 4.2.7, 4.2.8 et 4.2.9).

**Remarque 4.2.2.** Si  $p$  est associé à un déplacement  $u \in BD(\Omega) \setminus L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , on peut toujours définir la distribution  $[\sigma : p]$  pour  $\sigma \in L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  avec  $\operatorname{div} \sigma \in L^n(\Omega; \mathbb{R}^n)$  grâce à l'injection de  $BD(\Omega)$  dans  $L^{n/(n-1)}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Si, de plus,  $\sigma \in L^\infty(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ , il est alors possible de démontrer que  $[\sigma : p]$  est une mesure de Radon bornée absolument continue par rapport à  $p$  et que

$$|[\sigma : p]| \leq \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})} |p|$$

au sens des mesures (voir [B16]).

Une conséquence importante de cette définition réside dans le fait qu'il est possible d'établir des formules de dualité pour l'énergie de dissipation dans l'esprit de DEMENGEL & TEMAM [62, 63]. En effet, si  $p \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  et  $\mathcal{H}(p) < +\infty$  alors on a pour tout  $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  avec  $\varphi \geq 0$ ,

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d[H(p)] = \sup \left\{ \langle [\sigma : p], \varphi \rangle : \sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \text{ avec } \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \right. \\ \left. \text{et } \sigma(x) \in K \text{ p.p. tout } x \in \Omega \right\}. \quad (4.2.8)$$

De façon similaire si  $p \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ ,  $z \in L^2(\Omega)$  et  $\mathcal{H}_\lambda(p, z) < +\infty$ , on a

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d[H_\lambda(p, z)] = \sup \left\{ \langle [\sigma : p], \varphi \rangle + \int_{\Omega} \xi z \varphi \, dx : (\sigma, \xi) \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times L^2(\Omega) \text{ avec} \right. \\ \left. \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \text{ et } (\sigma(x), \xi(x)) \in K_\lambda \text{ p.p. tout } x \in \Omega \right\}. \quad (4.2.9)$$

**Remarque 4.2.3.** Notons que si  $p$  est associé à un déplacement  $u \in BD(\Omega) \setminus L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et si  $\sigma \in L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  avec  $\operatorname{div} \sigma \in L^n(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , les formules (4.2.8)-(4.2.9) sont toujours valides à condition de prendre des supremum parmi toutes les fonctions  $\sigma \in L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  satisfaisant  $\operatorname{div} \sigma \in L^n(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

## 4.2.2 Le modèle dynamique

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le caractère bien posé du modèle dynamique d'élasto-plasticité avec cap établi dans [B19] en collaboration avec M. G. MORA.

**Donnée initiale.** Considérons une donnée initiale  $(u_0, e_0, p_0) \in (BD(\Omega) \cap L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)) \times L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  et  $v_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  satisfaisant la compatibilité cinématique

$$Eu_0 = e_0 + p_0 \text{ dans } \Omega, \quad p_0 = (w(0) - u_0) \odot \nu \mathcal{H}^{n-1} \text{ sur } \partial\Omega, \\ v_0 = \dot{w}(0) \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-p.p. sur } \partial\Omega,$$

ainsi que l'admissibilité statique et plastique du tenseur des contraintes

$$\sigma_0 := \mathbb{C}e_0 \in K, \quad -\operatorname{div} \sigma_0 = f(0) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Nous considérons également une donnée initiale pour la variable d'écroissage définie, par exemple, par  $\xi_0 := \text{tr}\sigma_0 - |\text{tr}\sigma_0|$  et  $z_0 := -\xi_0$ . On a alors par (4.2.6) que  $\xi_0, z_0 \in L^2(\Omega)$  et

$$(\sigma_0, \xi_0) \in K_1 \subset K_\lambda \text{ p.p. dans } \Omega \text{ pour tout } \lambda \geq 1.$$

**Théorème 4.2.4.** *Supposons de plus que  $w \in H^2([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)) \cap H^3([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$ . Pour tout  $\lambda \geq 1$ , il existe un unique quadruplet  $(u_\lambda, e_\lambda, p_\lambda, z_\lambda)$  satisfaisant*

$$\begin{cases} u_\lambda \in AC([0, T]; BD(\Omega)) \cap W^{2,\infty}([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)), \\ e_\lambda \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ p_\lambda \in AC([0, T]; \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ z_\lambda \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega)), \end{cases} \quad (4.2.10)$$

et tel que les propriétés suivantes sont réunies :

Condition initiale :  $(u_\lambda(0), e_\lambda(0), p_\lambda(0), z_\lambda(0)) = (u_0, e_0, p_0, z_0)$  et  $\dot{u}(0) = v_0$  ;

Compatibilité cinématique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} Eu_\lambda(t) = e_\lambda(t) + p_\lambda(t) \text{ dans } \Omega, \\ p_\lambda(t) = (w(t) - u_\lambda(t)) \odot \nu \mathcal{H}^{n-1} \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Loi de comportement : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(\sigma_\lambda(t), \xi_\lambda(t)) = (\mathbb{C}e_\lambda(t), -z_\lambda(t));$$

Equation du mouvement :

$$\ddot{u}_\lambda - \text{div}\sigma_\lambda = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, T); \quad (4.2.12)$$

Admissibilité plastique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(\sigma_\lambda(t), \xi_\lambda(t)) \in K_\lambda \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Principe de travail maximal : p.p. tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{z}_\lambda(t) \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

et la distribution  $[\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)] \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$  satisfait

$$H_\lambda(\dot{p}_\lambda(t), \dot{z}_\lambda(t)) = [\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)] + \xi_\lambda(t)\dot{z}_\lambda(t) \quad \text{dans } \mathcal{M}(\bar{\Omega}). \quad (4.2.13)$$

**Remarque 4.2.5.** Notons que l'application  $t \mapsto \xi_\lambda(t)$  est décroissante. Comme  $\xi_\lambda$  est la variable interne décrivant la position du cap (voir (4.2.6)), cette propriété signifie que le cap se déplace vers l'extérieur du domaine élastique au cours du temps, ce qui est précisément le phénomène d'écroissage du cap que nous souhaitons modéliser.

La démonstration de ce théorème repose sur une approximation visco-plastique tout comme dans ANZELLOTTI & LUCKHAUS [15]. Pour ce faire, nous introduisons un paramètre de viscosité  $\varepsilon > 0$  et remplaçons la loi de comportement par une loi du type Kelvin-Voigt :  $\sigma_\varepsilon = \mathbb{C}e_\varepsilon + \varepsilon E\dot{u}_\varepsilon$ . Le terme  $\mathbb{C}e_\varepsilon$  est la partie réversible du tenseur des contraintes et correspond à la réaction élastique à la déformation. Le deuxième terme  $\varepsilon E\dot{u}_\varepsilon$  est la partie irréversible du tenseur des contraintes correspondant à un terme d'amortissement dû à la viscosité (voir section 1.4.2). Le caractère bien posé du problème visco-plastique démontré dans [B19] est établi dans les espaces de Sobolev à l'aide d'une méthode de discrétisation en temps.

**Théorème 4.2.6.** *Supposons que  $u_0 \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $v_0 \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et  $w \in H^2([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)) \cap H^3([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $\lambda \geq 1$ , il existe un unique quadruplet  $(u_\varepsilon, e_\varepsilon, p_\varepsilon, z_\varepsilon)$  satisfaisant*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in W^{2,\infty}([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)) \cap H^2([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)), \\ e_\varepsilon \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ p_\varepsilon \in H^1([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ z_\varepsilon \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega)), \end{cases} \quad (4.2.14)$$

et tel que les propriétés suivantes sont réunies :

Condition initiale :  $(u_\varepsilon(0), e_\varepsilon(0), p_\varepsilon(0), z_\varepsilon(0)) = (u_0, e_0, p_0, z_0)$  et  $\dot{u}_\varepsilon(0) = v_0$  ;  
Compatibilité cinématique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} Eu_\varepsilon(t) = e_\varepsilon(t) + p_\varepsilon(t) \text{ p.p. dans } \Omega, \\ u_\varepsilon(t) = w(t) \mathcal{H}^{n-1}\text{-p.p. sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

Loi de comportement : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(\sigma_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)) = (\mathbb{C}e_\varepsilon(t) + \varepsilon E\dot{u}_\varepsilon(t), -z_\varepsilon(t)) \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Equation du mouvement :

$$\ddot{u}_\varepsilon - \operatorname{div} \sigma_\varepsilon = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, T);$$

Admissibilité plastique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(\mathbb{C}e_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)) \in K_\lambda \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Loi d'écoulement : p.p. tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{z}_\varepsilon(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad (\dot{p}_\varepsilon(t), \dot{z}_\varepsilon(t)) \in N_{K_\lambda}(\mathbb{C}e_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon(t)) \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

La difficulté principale consiste à démontrer la propriété de régularité (4.2.14). Ceci repose sur la technique des quotients différentiels de Nirenberg qui s'adapte bien au modèle que nous considérons car, même s'il est fortement non linéaire, il possède de bonnes propriétés de monotonie.

Par suite, le Théorème 4.2.4 est obtenu à partir du Théorème 4.2.6 à l'aide d'une analyse asymptotique lorsque le paramètre de viscosité  $\varepsilon \rightarrow 0$  (qui requiert une régularisation des données initiales en déplacement et en vitesse). Des estimations d'énergies impliquent la convergence faible dans l'espace d'énergie de la solution du modèle visco-plastique vers un quadruplet  $(u_\lambda, e_\lambda, p_\lambda, \xi_\lambda)$  ayant la régularité annoncée dans (4.2.10), ainsi que la convergence forte des vitesses et des contraintes. En particulier, le fait que l'application  $t \mapsto z_\lambda(t)$  est croissante résulte du fait que l'énergie de dissipation est finie,

$$\mathcal{H}_\lambda(\dot{p}_\lambda(t), \dot{z}_\lambda(t)) < \infty$$

p.p. tout  $t \in [0, T]$  assurant, d'après (4.2.7), que  $\dot{z}_\lambda(t) \geq 0$ . Le point délicat est la preuve du principe de travail maximal exprimé par la relation (4.2.13). La régularité obtenue dans (4.2.10) couplée à la compatibilité cinématique (4.2.11) et à l'équation du mouvement (4.2.12) assurent que, p.p. tout  $t \in [0, T]$ , la distribution  $[\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)]$  est bien définie au sens de la Définition 4.2.1. Par ailleurs la formule de dualité (4.2.9) implique que l'inégalité

$$H_\lambda(\dot{p}_\lambda(t), \dot{z}_\lambda(t)) \geq [\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)] + \xi_\lambda(t)\dot{z}_\lambda(t)$$

a lieu au sens des distributions. Par conséquent, la distribution  $H_\lambda(\dot{p}_\lambda(t), \dot{z}_\lambda(t)) - [\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)] - \xi_\lambda(t)\dot{z}_\lambda(t)$  est une mesure positive et par suite, la distribution  $[\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)]$  est une mesure de Borel. Par ailleurs, la continuité des énergies élastiques  $\mathcal{Q}$  et cinétiques couplée à la semi-continuité inférieure de l'énergie

de dissipation  $\mathcal{H}_\lambda$  (en conséquence du théorème de Reshetnyak) aboutit à l'inégalité d'énergie suivante entre deux temps  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(e_\lambda(t_2)) + \frac{1}{2} \|z_\lambda(t_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{H}_\lambda(\dot{p}_\lambda(s), \dot{z}_\lambda(s)) ds + \frac{1}{2} \|\dot{u}_\lambda(t_2)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)}^2 \\ \leq \mathcal{Q}(e_\lambda(t_1)) + \frac{1}{2} \|z_\lambda(t_1)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\dot{u}_\lambda(t_1)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)}^2 \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (\sigma_\lambda : E\dot{w} + \ddot{u}_\lambda \cdot \dot{w}) dx ds + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} f \cdot (\dot{u}_\lambda - \dot{w}) dx ds. \end{aligned}$$

En dérivant cette inégalité par rapport au temps on en déduit que p.p. tout  $t \in [0, T]$

$$\mathcal{H}_\lambda(\dot{p}_\lambda(t), \dot{z}_\lambda(t)) \leq \int_{\Omega} \sigma_\lambda(t) : (E\dot{w}(t) - \dot{e}_\lambda(t)) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma_\lambda(t) \cdot (\dot{w}(t) - \dot{u}_\lambda(t)) dx + \int_{\Omega} \xi_\lambda(t) \dot{z}_\lambda(t) dx$$

ce qui, au vu de la Définition 4.2.1, n'est autre que le fait que la mesure  $H_\lambda(\dot{p}_\lambda(t), \dot{z}_\lambda(t)) - [\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)] - \xi_\lambda(t) \dot{z}_\lambda(t)$  est de masse totale nulle.

Nous nous sommes ensuite intéressés dans [B19] à l'analyse asymptotique lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ , *i.e.* quand le cap est envoyé à l'infini, des solutions obtenues dans le Théorème 4.2.4.

**Théorème 4.2.7.** *Supposons que  $w \in H^2([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)) \cap H^3([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$ . Il existe un unique triplet  $(u, e, p)$  tel que*

$$\begin{cases} u \in AC([0, T]; BD(\Omega)) \cap W^{2,\infty}([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)), \\ e \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ p \in AC([0, T]; \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \end{cases}$$

satisfaisant pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} u_\lambda(t) &\rightharpoonup u(t) \text{ faible* dans } BD(\Omega), \\ e_\lambda(t) &\rightharpoonup e(t) \text{ faible dans } L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}), \\ p_\lambda(t) &\rightharpoonup p(t) \text{ faible* dans } \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_\lambda &\rightarrow u \text{ fort dans } W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)), \\ e_\lambda &\rightarrow e \text{ fort dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \end{aligned}$$

quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ . De plus, les propriétés suivantes sont réunies :

Condition initiale :  $(u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0)$  et  $\dot{u}(0) = v_0$  ;

Compatibilité cinématique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} Eu(t) = e(t) + p(t) \text{ dans } \Omega, \\ p(t) = (w(t) - u(t)) \odot \nu \mathcal{H}^{n-1} \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

Loi de comportement : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\sigma(t) = \mathbb{C}e(t) \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Equation du mouvement :

$$\ddot{u} - \operatorname{div} \sigma = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, T);$$

Admissibilité plastique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\sigma(t) \in K \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Principe de travail maximal : p.p. tout  $t \in [0, T]$ , alors  $[\sigma(t) : \dot{p}(t)] \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$  et

$$H(\dot{p}(t)) = [\sigma(t) : \dot{p}(t)] \text{ dans } \mathcal{M}(\overline{\Omega}). \quad (4.2.15)$$

De nouveau, la difficulté principale consiste à démontrer la relation (4.2.15) décrivant le principe de travail plastique maximal de Hill au sens des mesures. La démonstration est similaire à celle employée dans la preuve du Théorème 4.2.4 couplé au fait que

$$\sup_{\lambda \geq 1} H_\lambda(p, z) = H(p) + I_{\mathbb{R}^+}(z) \quad \text{pour tout } (p, z) \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{R},$$

où  $I_{\mathbb{R}^+}$  est la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}^+$  définie par  $I_{\mathbb{R}^+}(z) = 0$  si  $z \geq 0$  et  $+\infty$  sinon.

### 4.2.3 Le modèle quasi-statique

Le cas quasi-statique pour la plasticité des sols contraste fortement avec celle des métaux. En effet, dans notre cas, le convexe d'élasticité  $K$  (ou  $K_\lambda$  pour le modèle avec cap) n'est borné dans aucune direction, et par conséquent le tenseur des contraintes n'est pas mieux que dans l'espace d'énergie  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ . En dynamique, le contrôle de l'énergie cinétique nous donne par ailleurs une borne naturelle sur le champ des vitesses dans  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , ce qui permet de définir la dualité entre le tenseur des contraintes et le taux des déformations plastiques (voir la Définition 4.2.1) sans laquelle nous serions incapables de donner un sens au principe de travail plastique maximal de Hill. En revanche, en quasi-statique, la vitesse n'est en général qu'un champ à déformation bornée et donc, par injection de Sobolev, au plus dans l'espace de Lebesgue  $L^{n/(n-1)}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Par conséquent, sans propriété de régularité supplémentaire du type  $\sigma \in L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  ou  $\dot{u} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , la dualité peut ne pas être bien définie (voir la Remarque 4.2.2). Notons que ces deux propriétés sont clairement satisfaites dans le cas de l'élasto-plasticité planaire ( $n = 2$ ), cependant le cas tri-dimensionnel demanderait d'établir des résultats de régularité des solutions. Ce problème rend l'étude du modèle quasi-statique plus délicat. Dans [B19], nous avons néanmoins pu donner une formulation "faible" du modèle quasi-statique en interprétant la loi d'écoulement (ou le principe de Hill) en terme d'une identité d'énergie tout comme dans DAL MASO, DE SIMONE & MORA [45]. Celle-ci se réduit au principe de Hill (au sens de la théorie de la mesure) pour des solutions suffisamment régulières.

Nous avons tout d'abord besoin de faire un certain nombre d'hypothèses supplémentaires sur les forces extérieures de volume ainsi que sur les données initiales.

**Force volumique.** Nous considérons une densité volumique de forces  $f \in AC([0, T]; L^n(\Omega; \mathbb{R}^n))$  satisfaisant la condition de sécurité : il existe un potentiel de forces  $\chi \in AC([0, T]; L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}))$  et une constante  $\alpha_0 > 0$  tels que pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \chi(t) = f(t) & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \chi(t) + \tau \in K & \text{p.p. dans } \Omega \end{cases} \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \text{ avec } |\tau| \leq \alpha_0.$$

Nous posons  $\vartheta := \operatorname{tr} \chi - |\operatorname{tr} \chi| - \alpha_0 \in AC([0, T]; L^2(\Omega))$  de sorte que pour tout  $\lambda \geq 1$ ,

$$(\chi(t) + \tau, \vartheta(t)) \in K_\lambda \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \text{ avec } |\tau| \leq \alpha_0.$$

Cette hypothèse de sécurité est classique en élasto-plasticité en régime quasi-statique (voir *e.g.* SUQUET [131]). D'un point de vue mécanique, elle assure que le milieu n'est pas en écoulement libre et d'un point de vue mathématique, elle est essentielle pour obtenir des estimations *a priori* sur les solutions. En régime dynamique, elle n'est pas nécessaire grâce à la présence de l'énergie cinétique (qui est quadratique en  $\dot{u}$ ) qui permet d'absorber le travail des forces volumiques (qui est linéaire en  $\dot{u}$ ).

**Donnée initiale.** Nous considérons une donnée initiale  $(u_0, e_0, p_0, z_0) \in BD(\Omega) \times L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times L^2(\Omega)$  tout comme dans le cas dynamique. Nous supposons de plus que soit  $u_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , soit  $\sigma_0 \in L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ . Cette intégrabilité supplémentaire est requise pour être en mesure de montrer que l'admissibilité statique et plastique est équivalente à un principe de minimisation qui repose sur la dualité entre les contraintes et les déformations plastiques (voir la Définition 4.2.1 et la Remarque 4.2.2).

A l'aide d'une approche par discrétisation temporelle pour les problèmes d'évolutions quasi-statiques similaires à celle décrite dans la section 1.3.2 (voir DAL MASO, DE SIMONE & MORA [45]), nous avons démontré dans [B19] le résultat suivant d'existence de solutions pour le modèle d'évolution quasi-statique avec une loi d'écrouissage sur le cap.

**Théorème 4.2.8.** *Pour tout  $\lambda \geq 1$ , il existe un quadruplet  $(u_\lambda, e_\lambda, p_\lambda, \xi_\lambda)$  satisfaisant*

$$\begin{cases} u_\lambda \in AC([0, T]; BD(\Omega)), \\ e_\lambda \in AC([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ p_\lambda \in AC([0, T]; \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ \xi_\lambda \in AC([0, T]; L^2(\Omega)), \end{cases}$$

et tel que les propriétés suivantes sont réunies :

Condition initiale :  $(u_\lambda(0), e_\lambda(0), p_\lambda(0), z_\lambda(0)) = (u_0, e_0, p_0, z_0)$  ;

Compatibilité cinématique : pour tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} Eu_\lambda(t) = e_\lambda(t) + p_\lambda(t) \text{ dans } \Omega, \\ p_\lambda(t) = (w(t) - u_\lambda(t)) \odot \nu \mathcal{H}^{n-1} \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

Loi de comportement : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(\sigma_\lambda(t), \xi_\lambda(t)) = (\mathbb{C}e_\lambda(t), -z_\lambda(t)) \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Equation d'équilibre : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$-\operatorname{div} \sigma_\lambda(t) = f(t) \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Admissibilité plastique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(\sigma_\lambda(t), \xi_\lambda(t)) \in K_\lambda \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Identité d'énergie : p.p. tout  $t \in [0, T]$

$$\dot{z}_\lambda(t) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

et l'identité d'énergie suivante a lieu pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(e_\lambda(t)) + \frac{1}{2} \|z_\lambda(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \mathcal{H}_\lambda(\dot{p}_\lambda(s), \dot{z}_\lambda(s)) ds &= \mathcal{Q}(e_0) + \frac{1}{2} \|z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \int_0^t \int_\Omega \sigma_\lambda(s) : E\dot{w}(s) dx ds - \int_0^t \int_\Omega f(s) \cdot (\dot{w}(s) - \dot{u}_\lambda(s)) dx ds. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Si de plus  $\sigma_\lambda(t) \in L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  ou  $\dot{u}_\lambda(t) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  p.p. tout  $t \in [0, T]$ , alors la distribution  $[\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)]$  est bien définie et c'est une mesure dans  $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$  satisfaisant le principe de travail maximal :

$$H_\lambda(\dot{p}_\lambda(t), \dot{z}_\lambda(t)) = [\sigma_\lambda(t) : \dot{p}_\lambda(t)] + \xi_\lambda(t) z_\lambda(t) \text{ dans } \mathcal{M}(\bar{\Omega}). \quad (4.2.17)$$

Dans ce cas, la contrainte  $\sigma_\lambda$  et la variable d'écrouissage  $\xi_\lambda$  sont uniques.

Tout comme dans le cas dynamique, nous avons également étudié dans [B19] le comportement asymptotique des solutions données par le Théorème 4.2.8 lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 4.2.9.** *Il existe un triplet  $(u, e, p)$  tel que*

$$\begin{cases} u \in AC([0, T]; BD(\Omega)), \\ e \in AC([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ p \in AC([0, T]; \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \end{cases}$$

et satisfaisant, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} u_\lambda(t) &\rightharpoonup u(t) \text{ faible* dans } BD(\Omega), \\ e_\lambda(t) &\rightarrow e(t) \text{ fort dans } L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}), \\ p_\lambda(t) &\rightharpoonup p(t) \text{ faible* } \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}), \end{aligned}$$

quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ . De plus les conditions suivantes sont réunies :

Donnée initiale :  $(u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0)$  ;

Compatibilité cinématique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} Eu(t) = e(t) + p(t) \text{ dans } \Omega, \\ p(t) = (w(t) - u(t)) \odot \nu \mathcal{H}^{n-1} \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

Loi de comportement : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\sigma(t) = \mathbb{C}e(t) \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Equation d'équilibre : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$-\operatorname{div}\sigma(t) = f(t) \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Admissibilité plastique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\sigma(t) \in K \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Identité d'énergie : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\mathcal{Q}(e(t)) + \int_0^t \mathcal{H}(\dot{p}(s)) ds = \mathcal{Q}(e_0) + \int_0^t \int_\Omega \sigma(s) : E\dot{w}(s) dx ds - \int_0^t \int_\Omega f(s) \cdot (\dot{w}(s) - \dot{u}(s)) dx ds. \quad (4.2.18)$$

Si de plus  $\sigma(t) \in L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  ou  $\dot{u}(t) \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  p.p. tout  $t \in [0, T]$ , alors la distribution  $[\sigma(t) : \dot{p}(t)]$  est bien définie et c'est une mesure dans  $\mathcal{M}(\bar{\Omega})$  satisfaisant le principe de travail maximal :

$$H(\dot{p}(t)) = [\sigma(t) : \dot{p}(t)] \text{ dans } \mathcal{M}(\bar{\Omega}). \quad (4.2.19)$$

Dans ce cas, la contrainte  $\sigma$  est unique.

Les Théorèmes 4.2.8 et 4.2.9 sont assez satisfaisants en élasto-plasticité planaire ( $n = 2$ ) car, dans ce cas, les propriétés d'intégrabilité du tenseur des contraintes et du champ des vitesses sont automatiquement satisfaites. Le cas tri-dimensionnel reste cependant fortement dépendant d'un résultat auxiliaire de régularité. Notons que cette obstruction sur la dimension était déjà présente dans d'autres travaux sur ce sujet. Tout d'abord, dans [120], REPIN & SEREGIN ont formulé le modèle de plasticité de type Hencky pour le convexe d'élasticité de Drucker-Prager dans le cadre d'un problème de minimax. Le lagrangien qu'ils ont introduit étant défini dans un espace de Sobolev non-réflexif, l'existence de points selles n'est *a priori* pas assurée. Ils ont donc été amenés à relaxer le lagrangien, ce qui s'avère n'être possible que

sous l'hypothèse de l'existence d'un tenseur des contraintes statiquement et plastiquement admissible appartenant à l'espace de Lebesgue  $L^n(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ . Dans la continuité, SEREGIN s'est intéressé dans [126] à la régularité de type  $H_{loc}^1(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  du tenseur des contraintes. Notons que cette régularité est bien connue dans le cas de la plasticité des métaux (voir BENSOUSSAN & FREHSE [19] et DEMYANOV [64]). Afin de démontrer cette même propriété dans le cas du modèle de Drucker-Prager, SEREGIN a régularisé le problème à l'aide d'un modèle visco-plastique de type Kelvin-Voigt. Il montre une estimation de la norme  $H_{loc}^1(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  du tenseur des contraintes visco-plastique en fonction de la norme  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  du déplacement visco-plastique. Or cette estimation n'est uniforme par rapport au paramètre de viscosité que si la dimension  $n = 2$ .

Pour finir cette section, nous nous proposons de commenter quelque peu notre choix de condition limite de Dirichlet sur la totalité du bord. D'un point de vue mécanique, il serait souhaitable d'être en mesure de considérer des conditions aux limites mixtes de type Dirichlet sur une partie  $\partial_D \Omega$  du bord et de type Neumann sur le complémentaire  $\partial_N \Omega := \partial \Omega \setminus \partial_D \Omega$ . En plasticité des métaux ceci ne pose pas de problème à condition d'avoir suffisamment de régularité sur l'ouvert  $\Omega$  (voir *e.g.* KOHN & TEMAM [97] et FRANCFORT & GIACOMINI [78]). Dans notre cas, la prise en compte d'une condition de Neumann sur une partie du bord semble plus difficile à traiter toujours en raison de manque de régularité du tenseur des contraintes. En effet, nous savons que  $\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  avec  $\operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  ( $\operatorname{div} \sigma \in L^n(\Omega; \mathbb{R}^n)$  en quasi-statique) de sorte que la contrainte normale  $\sigma \nu$  est *a priori* définie comme un élément de  $H^{-1/2}(\partial \Omega; \mathbb{R}^n)$ . D'un autre côté, le théorème de trace dans  $BD$  assure que tout déplacement cinématiquement admissible a une trace sur le bord dans l'espace  $L^1(\partial \Omega; \mathbb{R}^n)$  qui n'est pas en dualité avec  $H^{-1/2}(\partial \Omega; \mathbb{R}^n)$ .

## 4.3 Plasticité des sols : le cas non-associé

### 4.3.1 Une formulation variationnelle en plasticité non-associée

Des résultats expérimentaux montrent que le principe de travail plastique maximal est valide pour des matériaux dont le critère de chargement plastique est indépendant de la pression hydrostatique, *i.e.* les matériaux pour lesquels les déformations plastiques apparaissent sans changement de volume. En effet, l'application du principe de Hill à un milieu dont la fonction de chargement dépend de la pression engendrerait une dilatation plastique bien plus conséquente que celle réellement observée expérimentalement (voir SALENÇON [123] et LUBLINER [107]). C'est tout particulièrement le cas des matériaux granulaires pour lesquels il convient donc de changer le modèle de plasticité standard. Les mécaniciens ont proposé de modifier la loi d'écoulement (ou loi de normalité)  $\dot{p} \in N_K(\sigma)$  par une *loi non-associée* du type

$$\dot{p} \in \mathcal{A}\sigma, \quad (4.3.1)$$

où  $\mathcal{A} : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow 2^{\mathbb{M}_{sym}^{n \times n}}$  est une application multivoque satisfaisant  $\mathcal{A}\sigma = \{0\}$  si  $\sigma \in \operatorname{int}K$ , et  $\mathcal{A}\sigma$  est le cône normal à une certaine surface si  $\sigma \in \partial K$ . A ce stade de la modélisation, il convient d'introduire le *potentiel plastique*  $G : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que

$$\mathcal{A}\sigma = \{\lambda \xi : \lambda \geq 0 \text{ et } \xi \in \partial G(\sigma)\} \quad \text{si } \sigma \in \partial K.$$

Les directions  $\mathcal{A}\sigma$  sont donc données par la normale à la surface de niveau de  $G$  passant par  $\sigma$ . Quand  $G = F$ , alors  $\mathcal{A}\sigma = N_K(\sigma)$  et on revient au modèle d'élasto-plasticité associé standard décrit jusqu'ici. En revanche, quand  $G \neq F$ , la plasticité est qualifiée de non-standard, ou encore de non-associée, et c'est précisément ce cas qui nous intéresse dans cette section.

Les premiers travaux mathématiques à ce sujet ont été entrepris par LABORDE dans [98, 99] (voir également [100]) qui a étudié le cas homogène en espace. Sous des hypothèses de compatibilité entre la fonction de chargement  $F$  et le potentiel plastique  $G$ , il a introduit une notion de projection sur le domaine d'élasticité dans la direction des normales aux ensembles de niveau de  $G$ . Grâce à cette projection il a pu proposer une régularisation visco-plastique du modèle initial, puis par passage à la limite lorsque le

paramètre de viscosité tend vers zéro, établir l'existence d'un chemin de contrainte  $t \mapsto \sigma(t)$  absolument continu en temps.

Les potentiels plastiques couramment utilisés (voir SALENÇON [123]) sont donnés par

$$G(\sigma) := \tilde{\alpha} \operatorname{tr} \sigma + \kappa(\sigma_D) - \tilde{k},$$

où  $\kappa : \mathbb{M}_D^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est la même fonction – convexe, semi-continue inférieurement et positivement homogène de degré 1 satisfaisant  $\kappa(0) = 0$  – que celle apparaissant dans l'expression (4.2.1) de la fonction de chargement  $F$ . Les constantes apparaissant dans l'expression de  $G$  sont données par

$$\tilde{\alpha} = \sin \psi, \quad \tilde{k} = 2c \cos \psi,$$

où  $c > 0$  est de nouveau la constante de cohésion et  $\psi \in (0, \varphi)$  est l'angle de dilatation (voir (4.2.2)). Pour les mêmes raisons que celles évoquées dans la section précédente, il est souhaitable de considérer des modèles d'élasto-plasticité non-associée avec cap. De nouveau le domaine d'élasticité est coupé dans la direction des contraintes hydrostatiques par une surface appelée cap. Le nouveau domaine d'élasticité, toujours noté  $K$ , est alors donné, pour  $R > 0$  assez grand, par

$$K := \{\sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} : F(\sigma) \leq 0 \text{ et } \operatorname{tr} \sigma \geq -R\}.$$

Selon les travaux de LUBARDA, MASTILOVIC & KNAP [106], sur la portion du bord  $\{\sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} : F(\sigma) = 0 \text{ et } \operatorname{tr} \sigma \geq -R\}$ , nous gardons la loi non-associée et sur la nouvelle surface créée  $\{\sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} : F(\sigma) \leq 0 \text{ et } \operatorname{tr} \sigma = -R\}$ , nous adoptons une loi associée, *i.e.*, le taux de déformation plastique évolue suivant la normale à cette surface (voir la Figure 4.2). Contrairement à la section précédente où, dans le cas de la plasticité associée, nous avons considéré une loi d'écroûissage sur le cap, nous supposons ici que la position du cap (et donc  $R$ ) reste fixée.

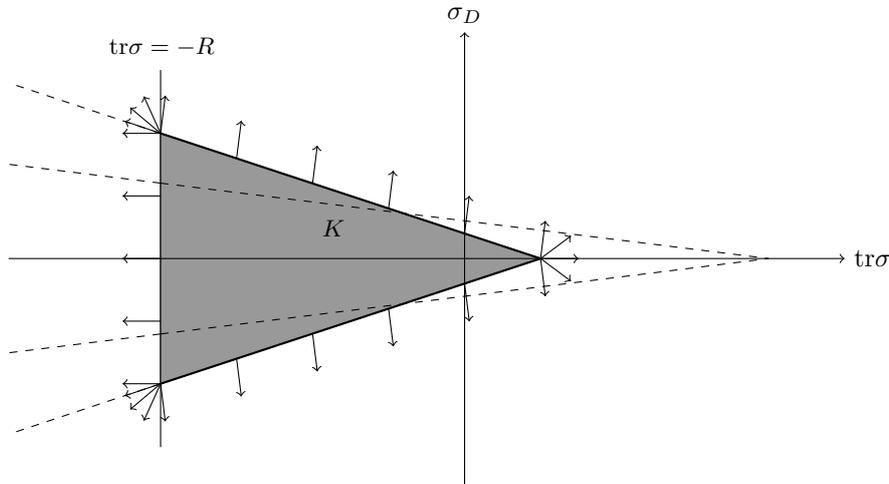


FIGURE 4.2 – Modèle non-associé avec une loi de normalité sur le cap.

La difficulté de ce type de modèles réside dans le fait qu'ils sont connus pour ne pas avoir de structure variationnelle. Dans [B16], en collaboration avec G. FRANCFORT & M. G. MORA nous avons toutefois proposé une formulation variationnelle de ce modèle grâce à des résultats obtenus par LABORDE dans [98, 99]. Pour ce faire, considérons une fonction auxiliaire  $h : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant

$$\begin{cases} h(\tau) = G(\tau) & \text{si } F(\tau) = 0, \\ h(\tau) > G(\tau) & \text{si } F(\tau) < 0, \\ h(\tau) < G(\tau) & \text{si } F(\tau) > 0. \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Pour tout  $\sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$ , nous définissons les ensembles convexes fermés

$$K(\sigma) := \{\tau \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} : G(\tau) \leq h(\sigma)\}.$$

Des résultats de LABORDE dans [98, 99] assurent que  $\sigma \in K$  si et seulement si  $\sigma \in K(\sigma)$  et, dans ce cas,  $\dot{p} \in \mathcal{A}\sigma$  si et seulement si  $\dot{p} : (\tau - \sigma) \leq 0$  quelque soit  $\tau \in K(\sigma)$ . Comme  $K(\sigma)$  est un convexe fermé dans  $\mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$ , cette dernière propriété n'est autre que la loi de normalité

$$\dot{p} \in N_{K(\sigma)}(\sigma). \quad (4.3.3)$$

Par conséquent, nous avons reformulé le problème d'évolution quasi-statique en élasto-plasticité non-associée sous la forme suivante : étant donné un déplacement sur le bord  $w : \partial\Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (nous supposons pour simplifier qu'il n'y a ni densité volumique ni surfacique de force), trouver un triplet  $(u, e, p) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  tel que

$$\begin{cases} Eu = e + p \text{ dans } \Omega \times [0, T], & u = w \text{ sur } \partial\Omega \times [0, T], \\ \sigma = \mathbb{C}e, & \sigma \in K(\sigma) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ -\operatorname{div}\sigma = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ \dot{p} \in N_{K(\sigma)}(\sigma) \text{ dans } \Omega \times [0, T], \\ (u(0), e(0), p(0)) = (u_0, e_0, p_0) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous avons donc reformulé la loi d'écoulement non-associée (4.3.1) en une loi associée où le nouveau convexe d'élasticité  $K(\sigma)$  dépend désormais de l'état de contraintes.

Afin de reformuler la nouvelle loi d'écoulement (4.3.3) en terme de principe de travail maximal, nous définissons le potentiel de dissipation  $H : \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  comme la fonction d'appui de  $K(\sigma)$  :

$$H(\sigma, p) = \max_{\tau \in K(\sigma)} \tau : p,$$

et notons que, pour  $\sigma \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  fixé,  $H(\sigma, \cdot)$  est convexe, semi-continue inférieurement et positivement homogène de degré 1. Par des arguments standards d'analyse convexe, la loi d'écoulement (4.3.3) est équivalente à

$$\sigma : \dot{p} = H(\sigma, \dot{p}) = \max_{\tau \in K(\sigma)} \tau : \dot{p},$$

ou encore

$$\sigma \in \partial H(\sigma, \dot{p}).$$

Dans l'expression précédente, nous avons noté  $\partial H(\sigma, \dot{p})$  le sous-différentiel de  $H(\sigma, \cdot)$  en  $\dot{p}$ .

Dans cette formulation, il est laissé toute liberté quant au choix de la fonction auxiliaire  $h$ . Il est cependant possible de choisir  $h$  de sorte que

$$B(0, \alpha_H) \subset K(\sigma) \subset B(0, \beta_H) \quad (4.3.4)$$

où  $0 < \alpha_H < \beta_H < \infty$  sont deux constantes indépendantes de  $\sigma$ . En particulier, nous avons que

$$\alpha_H |p| \leq H(\sigma, p) \leq \beta_H |p|, \quad \text{pour tout } (\sigma, p) \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n} \times \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}. \quad (4.3.5)$$

Notons que la fonction  $H$  n'a aucune propriété de type convexité en sa première variable. Par conséquent, même si nous avons pu donner une formulation variationnelle de ce modèle d'élasto-plasticité non-associée, celle-ci ne rentre pas pour autant dans le cadre des matériaux standards généralisés (voir la section 1.3.1).

Reformulé ainsi, ce modèle d'évolution quasi-statique en élasto-plasticité non-associée présente de grandes similitudes avec le modèle de Cam-Clay utilisé pour la description de la plasticité des sols ayant une granularité fine. Selon la nature des forces appliquées, ce modèle exhibe des phénomènes d'écrouissage et d'adoucissement. Ceci se traduit par la présence d'une variable interne supplémentaire  $z$  décrivant la

position du domaine d'élasticité. La loi d'écoulement en la variable déformation plastique  $p$  est une loi associée, mais la difficulté principale réside dans le fait que la loi d'écoulement en la variable  $z$  est non-associée. L'étude du problème homogène en espace a été entreprise par DAL MASO & DE SIMONE dans [44] qui ont montré sur des exemples que les solutions peuvent présenter des discontinuités temporelles en régime d'adoucissement. L'étude générale du cas homogène en espace a été traitée par DAL MASO & SOLOMBRINO dans [55] et le cas incluant une dépendance en la variable spatiale a été étudié par DAL MASO, DE SIMONE & SOLOMBRINO dans [49, 50] au moyen d'une approximation visco-plastique. Par passage à la limite lorsque le paramètre de viscosité tend vers zéro, ils ont démontré l'existence de solutions en temps convenablement remis à l'échelle permettant de mettre en évidence les discontinuités temporelles observées dans [44, 55] en revenant au temps original.

### 4.3.2 Approximation visco-plastique

Dans un premier temps, nous étudions une approximation visco-plastique du modèle d'élasto-plasticité non-associée décrit précédemment. Nous introduisons ici une visco-plasticité de type Perzyna qui consiste à régulariser la loi d'écoulement (voir SUQUET [128, 129]) : pour ce faire, nous remplaçons la fonction indicatrice  $I_{K(\sigma)}$  de l'ensemble  $K(\sigma)$  par sa transformée de Yosida

$$H_\varepsilon^*(\sigma, \tau) := \frac{|\tau - P_{K(\sigma)}(\tau)|^2}{2\varepsilon},$$

où  $\varepsilon > 0$  est le paramètre de viscosité et  $P_{K(\sigma)}$  désigne la projection orthogonale sur  $K(\sigma)$ , qui converge vers  $I_{K(\sigma)}(\tau)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Notons que la fonction régularisée  $H_\varepsilon^*$  est dérivable par rapport à sa deuxième variable et sa dérivée partielle est donnée par l'expression

$$\partial H_\varepsilon^*(\sigma, \tau) = \frac{\tau - P_{K(\sigma)}(\tau)}{\varepsilon}. \quad (4.3.6)$$

Dans la suite, il sera parfois plus commode de considérer des notions globales plutôt que locales. En particulier, si  $\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ , nous désignons par

$$\mathcal{K}(\sigma) := \{\tau \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) : \tau(x) \in K(\sigma(x)) \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

le convexe fermé de  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ . Nous notons  $\text{dist}_2(\cdot, \mathcal{K}(\sigma))$  la distance  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  à l'ensemble  $\mathcal{K}(\sigma)$  et  $P_{\mathcal{K}(\sigma)}$  la projection orthogonale dans  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  sur  $\mathcal{K}(\sigma)$ . Par ailleurs, pour un couple  $(\sigma, p) \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ , nous définissons l'énergie de dissipation par

$$\mathcal{H}(\sigma, p) := \int_{\Omega} H(\sigma(x), p(x)) dx. \quad (4.3.7)$$

**Chargement extérieur.** Pour simplifier, nous supposons que le milieu n'est soumis à aucune force (volumique ou surfacique). Le seul mécanisme évolutif du système est la donnée d'un déplacement sur le bord du domaine qui est la trace sur  $\partial\Omega \times [0, T]$  d'une fonction  $w \in H^1([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}^n))$ .

**Donnée initiale.** Soit  $(u_0, e_0, p_0) \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \times L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  satisfaisant les conditions de compatibilité cinématique

$$Eu_0 = e_0 + p_0 \text{ p.p. dans } \Omega \quad \text{et} \quad u_0 = w(0) \text{ } \mathcal{H}^{n-1}\text{-p.p. sur } \partial\Omega,$$

ainsi que l'admissibilité statique et plastique du tenseur des contraintes :

$$\sigma_0 := \mathbb{C}e_0 \in K(\sigma_0), \quad -\text{div}\sigma_0 = 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Nous avons démontré dans [B16] le caractère bien posé du modèle visco-plastique.

**Théorème 4.3.1.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un unique triplet  $(u_\varepsilon, e_\varepsilon, p_\varepsilon)$  satisfaisant*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H^1([0, T]; H^1(\Omega; \mathbb{R}^n)), \\ e_\varepsilon \in H^1([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \\ p_\varepsilon \in W^{1, \infty}([0, T]; L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})), \end{cases}$$

et tel que les conditions suivantes sont vérifiées :

Condition initiale :  $(u_\varepsilon(0), e_\varepsilon(0), p_\varepsilon(0)) = (u_0, e_0, p_0)$  ;

Compatibilité cinématique : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{cases} Eu_\varepsilon(t) = e_\varepsilon(t) + p_\varepsilon(t) \text{ p.p. dans } \Omega, \\ u_\varepsilon(t) = w(t) \mathcal{H}^{n-1}\text{-p.p. sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

Loi de comportement : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\sigma_\varepsilon(t) = \mathbb{C}e_\varepsilon(t) \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Equation d'équilibre : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\operatorname{div} \sigma_\varepsilon(t) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Loi d'écoulement non-associée régularisée : p.p. tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{p}_\varepsilon(t) = \partial H_\varepsilon^*(\sigma_\varepsilon(t), \sigma_\varepsilon(t)) \text{ p.p. tout } x \in \Omega,$$

ou de façon équivalente,

$$\sigma_\varepsilon(t) - \varepsilon \dot{p}_\varepsilon(t) \in \partial H(\sigma_\varepsilon(t), \dot{p}_\varepsilon(t)) \text{ p.p. tout } x \in \Omega. \quad (4.3.8)$$

En particulier, d'après (4.3.6), on obtient que

$$\varepsilon \|\dot{p}_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})} = \operatorname{dist}_2(\sigma_\varepsilon(t), \mathcal{K}(\sigma_\varepsilon(t))).$$

Autrement dit, la contrainte visco-plastique  $\varepsilon \dot{p}_\varepsilon(t)$  mesure la distance  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  du tenseur des contraintes  $\sigma_\varepsilon(t)$  au domaine d'élasticité  $\mathcal{K}(\sigma_\varepsilon(t))$ .

**Remarque 4.3.2.** La loi d'écoulement non-associée régularisée dans le Théorème 4.3.1 peut être réécrite de façon équivalente sous la forme d'une identité d'énergie : pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(e_\varepsilon(t)) + \int_0^t \mathcal{H}(\sigma_\varepsilon(s), \dot{p}_\varepsilon(s)) ds + \int_0^t \|\dot{p}_\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})} \operatorname{dist}_2(\sigma_\varepsilon(s), \mathcal{K}(\sigma_\varepsilon(s))) ds \\ = \mathcal{Q}(e_0) + \int_0^t \int_\Omega \sigma_\varepsilon(s) : E\dot{w}(s) dx ds. \end{aligned}$$

### 4.3.3 Existence de solutions en temps remis à l'échelle

Nous nous intéressons à présent à l'analyse asymptotique de la solution  $(u_\varepsilon, e_\varepsilon, p_\varepsilon)$  du modèle visco-plastique donnée par le Théorème 4.3.1 lorsque le paramètre de viscosité  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Des estimations *a priori* obtenues en conséquence de l'égalité d'énergie (voir la Remarque 4.3.2) assurent que les bornes suivantes sont satisfaites :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\sigma_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})}^2 + \int_0^T \|\dot{p}_\varepsilon(t)\|_{L^1(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})} dt \leq C, \quad (4.3.9)$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ . Nous nous attendons donc à obtenir un tenseur des contraintes limite dans  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  et un tenseur des déformations plastiques dans  $\mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ . Ceci

pose un premier problème quant à la définition de l'énergie de dissipation car la fonction  $H$  n'a *a priori* aucune propriété de convexité dans la première variable et donc, la théorie des fonctions convexes d'une mesure de GOFFMAN & SERRIN [90] et DEMENGEL & TEMAM [62, 63] ne s'applique pas. Il semble nécessaire de considérer des tenseurs de contraintes continus en espace mais malheureusement, nous n'avons pas de tel résultat de régularité à notre disposition.

Afin de surmonter ce problème, nous introduisons un modèle non local où la loi d'écoulement visco-plastique (4.3.8) est remplacée par la loi non locale suivante :

$$\sigma_\varepsilon(t) - \varepsilon \dot{p}_\varepsilon(t) \in \partial H(\tilde{\sigma}_\varepsilon(t), \dot{p}_\varepsilon(t)) \text{ p.p. tout } x \in \Omega, \quad (4.3.10)$$

avec

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon(x, t) := [\sigma_\varepsilon(t) * \varrho](x) = \int_{\Omega} \varrho(x - y) \sigma_\varepsilon(y, t) dy$$

et  $\varrho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est un noyau de convolution standard. Dans ce nouveau modèle, la loi d'écoulement en un point de  $\Omega$  dépend de l'état de contrainte dans un voisinage de ce point par l'intermédiaire de la fonction  $\varrho$ . Notons que l'existence et l'unicité d'une solution pour ce modèle visco-plastique non local (*i.e.* avec la loi d'écoulement (4.3.10) en lieu et place de (4.3.8)) est assurée par des arguments similaires à ceux employés pour la démonstration du Théorème 4.3.1. Un modèle semblable a été introduit et étudié par LABORDE dans [100] dans le cadre de la plasticité non-associée de type Hencky. C'est également le parti pris par DAL MASO, DE SIMONE & SOLOMBRINO [49, 50] pour traiter la non-associativité en la variable interne d'écroutissage.

Grâce à cet artifice, le tenseur des contraintes fictif  $\tilde{\sigma}_\varepsilon(t)$  est une fonction continue sur  $\bar{\Omega}$  ce qui nous suggère de définir l'énergie de dissipation de la façon suivante : pour  $\sigma \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  et  $p \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ , nous définissons la mesure de Radon positive

$$H(\sigma, p)(B) := \int_B H\left(\sigma(x), \frac{dp}{d|p|}(x)\right) d|p|(x)$$

pour tout ensemble Borélien  $B \subset \bar{\Omega}$ . Notons que, contrairement à la section 4.2, la mesure  $H(\sigma, p)$  est maintenant bornée en vertu de la propriété de croissance (4.3.5) sur  $H$ . On peut donc toujours définir la fonctionnelle de dissipation

$$\mathcal{H}(\sigma, p) := H(\sigma, p)(\bar{\Omega}).$$

De plus, il est possible de démontrer que pour tout  $\tau \in \mathcal{K}(\sigma)$  tel que  $\text{div} \tau \in L^n(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , on a

$$H(\sigma, p) \geq [\tau : p] \quad (4.3.11)$$

au sens des distributions dans  $\mathbb{R}^n$ , où  $[\tau : p]$  est la distribution introduite dans la Définition 4.2.1 (voir également la Remarque 4.2.3). Notons que, d'après (4.3.4), les ensembles  $K(\sigma)$  sont bornés dans  $\mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  uniformément par rapport à  $\sigma$ , et par conséquent le tenseur des contraintes  $\tau \in \mathcal{K}(\sigma)$  appartient à  $L^\infty(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ . D'après la Remarque 4.2.3, la distribution  $[\tau : p]$  est donc une mesure de Radon bornée absolument continue par rapport à  $p$  et l'inégalité (4.3.11) a lieu au sens des mesures de Radon.

Un deuxième problème lié à la régularité en temps des champs limites se pose ensuite. D'après les estimations (4.3.9), nous nous attendons à ce que le tenseur des contraintes limite (même régularisé en espace à l'aide du noyau de convolution  $\varrho$ ) soit seulement essentiellement borné et que le tenseur des déformations plastiques limite soit à variation bornée. En élasto-plasticité associée, un argument de monotonie basé sur la convexité du potentiel de dissipation assure que les solutions sont absolument continues en temps. Ici le potentiel de dissipation est bien convexe en sa deuxième variable mais il ne possède aucune propriété de ce type par rapport à la première variable. Nous ne pouvons donc pas exclure des solutions présentant des discontinuités temporelles.

Ce problème est résolu à l'aide d'une remise à l'échelle en temps similaire à celle employée par DAL MASO, DE SIMONE & SOLOMBRINO dans [49, 50] pour l'étude du modèle de Cam-Clay. L'idée de formuler le problème dans une autre échelle de temps pour rendre compte des phénomènes de discontinuité

temporelle a été introduite par EFENDIEV & MIELKE dans [68] pour l'étude d'un problème de friction obéissant à une loi de Coulomb. Cette idée a par la suite été développée par MIELKE, ROSSI & SAVARÉ [112, 113] dans le cadre plus général des problèmes d'évolution quasi-statique pour des processus indépendants des vitesses ayant des solutions à variation bornée en temps. L'idée consiste à assurer une propriété de Lipschitzianité en temps pour le tenseur des déformations plastiques (la variable interne du problème) par un changement de variable :

$$s_\varepsilon^\circ(t) := \int_0^t (1 + \|\dot{p}_\varepsilon(s)\|_{L^1(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})} + \|E\dot{w}(s)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})}) ds. \quad (4.3.12)$$

Par construction, l'application  $s \mapsto t_\varepsilon^\circ(s) := (s_\varepsilon^\circ)^{-1}(s)$  est strictement monotone et équi-Lipschitz sur  $\mathbb{R}^+$  de sorte que, pour une sous-suite,

$$t_\varepsilon^\circ \rightarrow t^\circ \text{ localement uniformément sur } \mathbb{R}^+$$

en vertu du théorème d'Ascoli. C'est dans la nouvelle échelle de temps, notée  $s$  et donnée par le changement de variable  $t = t^\circ(s)$ , que nous allons établir l'existence de solutions. Formellement les temps de discontinuités du tenseur des déformations plastiques (à valeurs dans  $\mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ ) correspondent aux temps remis à l'échelle en lesquels la fonction  $t^\circ$  est constante.

**Donnée initiale.** Soit  $(u_0, e_0, p_0) \in BD(\Omega) \times L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \times \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  satisfaisant les conditions de compatibilité cinématique

$$Eu_0 = e_0 + p_0 \text{ dans } \Omega, \quad p_0 = (w(0) - u_0) \odot \nu \mathcal{H}^{n-1} \text{ sur } \partial\Omega$$

et l'admissibilité plastique et statique du tenseur des contraintes associé

$$\sigma_0 := \mathbb{C}e_0, \quad \tilde{\sigma}_0 := \sigma_0 * \varrho, \quad \sigma_0 \in \mathcal{K}(\tilde{\sigma}_0) \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \sigma_0 = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

**Remise à l'échelle.** Soit  $S > 0$  un temps final remis à l'échelle satisfaisant  $t^\circ(S) \geq T$ . Nous définissons, pour tout  $s \in [0, S]$ ,

$$u_\varepsilon^\circ(s) := u_\varepsilon(t_\varepsilon^\circ(s)), \quad e_\varepsilon^\circ(s) := e_\varepsilon(t_\varepsilon^\circ(s)), \quad \sigma_\varepsilon^\circ(s) := \sigma_\varepsilon(t_\varepsilon^\circ(s)), \quad p_\varepsilon^\circ(s) := p_\varepsilon(t_\varepsilon^\circ(s)).$$

Dans [B16], nous avons établi le résultat suivant de convergence des solutions du modèle visco-plastique non-local vers des solutions du modèle plastique.

**Théorème 4.3.3.** *Il existe un quadruplet  $(u^\circ, e^\circ, p^\circ, t^\circ)$  satisfaisant*

$$\begin{cases} u^\circ : [0, S] \rightarrow BD(\Omega) \text{ est fortement continue et faiblement* p.p. dérivable,} \\ e^\circ : [0, S] \rightarrow L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \text{ est fortement continue et fortement p.p. dérivable,} \\ p^\circ : [0, S] \rightarrow \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \text{ est 1-Lipschitz,} \\ t^\circ : [0, S] \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ est croissante et 1-Lipschitz avec } t^\circ(S) \geq T \end{cases}$$

et tel que, pour une sous-suite  $(\varepsilon_k) \searrow 0^+$  indépendante du temps, et pour tout  $s \in [0, S]$ ,

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_k}^\circ(s) &\rightharpoonup u^\circ(s) \text{ faible* dans } BD(\Omega), \\ e_{\varepsilon_k}^\circ(s) &\rightarrow e^\circ(s) \text{ fort dans } L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}), \\ p_{\varepsilon_k}^\circ(s) &\rightharpoonup p^\circ(s) \text{ faible* dans } \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}). \end{aligned}$$

De plus les propriétés suivantes sont réunies :

Condition initiale :  $(u^\circ(0), e^\circ(0), p^\circ(0), t^\circ(0)) = (u_0, e_0, p_0, 0)$  ;

Compatibilité cinématique : pour tout  $s \in [0, S]$ ,

$$\begin{cases} Eu^\circ(s) = e^\circ(s) + p^\circ(s) \text{ dans } \Omega, \\ p^\circ(s) = (w(t^\circ(s)) - u^\circ(s)) \odot \nu \mathcal{H}^{n-1} \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

Loi de comportement : pour tout  $s \in [0, S]$ ,

$$\sigma^\circ(s) = \mathbb{C}e^\circ(s) \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Equation d'équilibre : pour tout  $s \in [0, S]$ ,

$$\operatorname{div}\sigma^\circ(s) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega;$$

Admissibilité plastique partielle : pour tout  $s \in [0, S] \setminus U^\circ$ ,

$$\sigma^\circ(s) \in \mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s)),$$

où  $\tilde{\sigma}^\circ(s) := \sigma^\circ(s) * \varrho$  et  $U^\circ := \{s \in (0, S] : t^\circ \text{ est constante dans un voisinage de } s\}$ ;

Principe de travail maximal : p.p. tout  $s \in [0, S]$  avec  $\sigma^\circ(s) \in \mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))$ , alors  $[\sigma^\circ(s) : \dot{p}^\circ(s)] \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$  et

$$H(\tilde{\sigma}^\circ(s), \dot{p}^\circ(s)) = [\sigma^\circ(s) : \dot{p}^\circ(s)] \text{ dans } \mathcal{M}(\overline{\Omega}).$$

De plus, p.p. tout  $s \in [0, S]$  avec  $\sigma^\circ(s) \notin \mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))$ , on a  $\dot{p}^\circ(s) \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  et

$$(\sigma^\circ(s) - P_{\mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))}(\sigma^\circ(s))) : \dot{p}^\circ(s) + H(\sigma^\circ(s), \dot{p}^\circ(s)) = \sigma^\circ(s) : \dot{p}^\circ(s) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Nous donnons à présent une idée de la preuve de ce théorème. Pour ce faire, considérons la solution  $(u_\varepsilon, e_\varepsilon, p_\varepsilon)$  du modèle visco-plastique non local obtenue en régularisant la donnée initiale du modèle plastique. Par construction du changement de variable (4.3.12), l'application  $s \mapsto p_\varepsilon^\circ(s)$  est 1-Lipschitz à valeurs dans  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ , ce qui assure par le théorème d'Ascoli la faible\* convergence au sens des mesures de Radon d'une sous-suite vers une application  $s \mapsto p^\circ(s)$  également 1-Lipschitz. Les autres convergences faibles sont obtenues à l'aide d'estimations *a priori* standards. Par suite, il est immédiat de passer à la limite dans la condition initiale, la compatibilité cinématique, la loi de comportement et l'équation d'équilibre.

Pour montrer l'admissibilité plastique partielle, nous remarquons que, formellement,  $t^\circ$  est inversible en dehors de  $U^\circ$ . En notant  $s^\circ$  son inverse en ces points, nous montrons alors que pour tout  $t$  tel que  $s^\circ(t) \notin U^\circ$ ,  $\sigma_{\varepsilon_k}(t) \rightharpoonup \sigma^\circ(s^\circ(t))$  faible dans  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  et par suite,  $\tilde{\sigma}_{\varepsilon_k}(t) \rightharpoonup \tilde{\sigma}^\circ(s^\circ(t))$  fort dans  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ . Par un argument standard d'analyse convexe, la relation (4.3.10) implique que  $\sigma_\varepsilon(t) - \varepsilon \dot{p}_\varepsilon(t) \in \partial H(\tilde{\sigma}_\varepsilon(t), 0)$  et par passage à la limite dans cette inclusion, on en déduit que

$$\sigma^\circ(s^\circ(t)) \in \partial H(\tilde{\sigma}^\circ(s^\circ(t)), 0) = K(\tilde{\sigma}^\circ(s^\circ(t))) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

La loi d'écoulement est obtenue par l'intermédiaire de l'égalité d'énergie : pour tout  $s \in [0, S]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(e^\circ(s)) + \int_0^s \mathcal{H}(\tilde{\sigma}^\circ(s'), \dot{p}^\circ(s')) ds' + \int_0^s \|\dot{p}^\circ(s')\|_{L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})} \operatorname{dist}_2(\sigma^\circ(s'), \mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s'))) ds' \\ = \mathcal{Q}(e_0) + \int_0^s \int_\Omega \sigma^\circ(s') : E \dot{w}^\circ(s') dx ds'. \end{aligned}$$

L'inégalité inférieure  $\leq$  résulte de l'égalité d'énergie pour le modèle visco-plastique (voir la Remarque 4.3.2) et de la semi-continuité inférieure des énergies. L'inégalité supérieure  $\geq$  est quant à elle obtenue à l'aide de résultats d'approximation de l'intégrale de Bochner par des sommes de Riemann convenablement choisies démontrés par DAL MASO, DE SIMONE & SOLOMBRINO dans [49] (voir également DAL MASO, FRANCFORT & TOADER [51]). Une conséquence de cette identité d'énergie réside dans le fait que p.p.

tout  $s \in [0, S]$  avec  $\sigma^\circ(s) \notin \mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))$ , on a  $p^\circ(s) \in L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ . Grâce à (4.3.11) et les propriétés déjà établies sur  $\sigma^\circ$  et  $\dot{p}^\circ$ , on a l'inégalité

$$H(\tilde{\sigma}^\circ(s), \dot{p}^\circ(s)) \geq [\sigma^\circ(s) : \dot{p}^\circ(s)]$$

au sens des mesures dans  $\overline{\Omega}$  et p.p.  $s \in [0, S]$  pour lesquels  $\sigma^\circ(s) \in \mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))$ . L'égalité provient de l'identité d'énergie qui assure que la mesure positive  $H(\tilde{\sigma}^\circ(s), \dot{p}^\circ(s)) - [\sigma^\circ(s) : \dot{p}^\circ(s)]$  a une masse nulle.

Nous procédons de même pour les temps  $s \in [0, S]$  en lesquels  $\sigma^\circ(s) \notin \mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))$ . Notons qu'en ces temps  $s \in [0, S]$  (les temps de saut en échelle de temps original) la loi d'écoulement n'est pas satisfaite *stricto sensu*. En terme de bilan d'énergie, ceci est dû à la présence de l'énergie de dissipation visqueuse. Il est cependant possible de démontrer grâce à l'identité d'énergie que p.p. tout  $x \in \Omega$  et p.p. tout  $s \in [0, S]$  satisfaisant  $\sigma^\circ(s) \notin \mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))$ , on a

$$(\sigma^\circ(s) - P_{\mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))}(\sigma^\circ(s))) : \dot{p}^\circ(s) = |\sigma^\circ(s) - P_{\mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))}(\sigma^\circ(s))| |\dot{p}^\circ(s)|.$$

Cette propriété assure que  $\dot{p}^\circ(s)$  et  $\sigma^\circ(s) - P_{\mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))}(\sigma^\circ(s))$  ont la même direction, et donc le taux de déformation plastique  $\dot{p}^\circ(s)$  est orienté dans une direction de  $L^2(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  normale au convexe  $\mathcal{K}(\tilde{\sigma}^\circ(s))$  en  $\sigma^\circ(s)$ . Par conséquent, même aux temps où l'admissibilité plastique n'est pas satisfaite, le taux de déformation plastique satisfait toujours une loi de normalité par rapport au convexe d'élasticité.

Pour finir, notons que dans le cas homogène en espace, les résultats de Laborde dans [99] assurent que les solutions de notre modèle sont toujours absolument continues en temps contrairement au modèle de Cam-Clay pour lequel les solutions sont effectivement discontinues en temps (voir DAL MASO & SOLOMBRINO [55]). Ceci suggère la possibilité de montrer que les solutions données par le Théorème 4.3.1 ne présentent pas de temps de discontinuité, autrement dit que le changement de variable  $s \mapsto t = t^\circ(s)$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

# Annexe

**Espaces fonctionnels.** Nous utilisons des notations standards pour les espaces  $\mathcal{C}^k$  (resp.  $\mathcal{C}_c^k$ ) de fonctions continûment différentiables (resp. à support compact) ( $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ), les espaces de Lebesgue  $L^p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) et les espaces de Sobolev  $W^{1,p}$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) et  $H^s$  ( $s \in \mathbb{R}$ ).

**Mesures.** La mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$  et la mesure de Hausdorff  $k$ -dimensionnelle sont notées respectivement  $\mathcal{L}^n$  et  $\mathcal{H}^k$ . Etant donné un ensemble localement compact  $E \subset \mathbb{R}^n$  et un espace Euclidien  $X$ ,  $\mathcal{M}(E; X)$  (ou simplement  $\mathcal{M}(E)$  si  $X = \mathbb{R}$ ) désigne l'espace des mesures de Radon bornées à valeurs dans  $X$  muni de la norme  $\|\mu\|_1 := |\mu|(E)$ , où  $|\mu| \in \mathcal{M}(E)$  est la mesure variation de  $\mu$ . Pour tout  $\mu \in \mathcal{M}(E; X)$ , le théorème de décomposition de Lebesgue assure que  $\mu = \mu^a + \mu^s$ , où  $\mu^a$  est une mesure absolument continue et  $\mu^s$  est une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Si  $\nu$  est une mesure de Radon positive sur  $E$ , nous désignons par  $\frac{d\mu}{d\nu}$  la dérivée de Radon-Nikodým de  $\mu$  par rapport à  $\nu$ . Si  $B \subset E$  est un ensemble Borélien, la mesure  $\mu \llcorner B$  est la restriction de  $\mu$  à  $B$ . Par le théorème de représentation de Riesz, l'espace de Banach  $\mathcal{M}(E; X)$  peut être identifié au dual topologique de l'espace  $\mathcal{C}_0(E; X)$  des fonctions continues  $\varphi : E \rightarrow X$  s'annulant sur le bord de  $E$ , *i.e.*, telles que  $\{|\varphi| \geq \varepsilon\}$  est compact pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**Matrices.** Nous notons  $\mathbb{M}^{m \times n}$  l'ensemble des matrices  $m \times n$  à coefficients réels. Le produit scalaire Euclidien est noté  $\cdot$  et la norme Euclidienne associée est notée  $|\cdot|$ . Le sous-ensemble  $\mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  désigne les matrices carrées  $n \times n$  symétriques et  $\mathbb{M}_D^{n \times n}$  représente les matrices  $n \times n$  symétriques et déviatoriques.

Si  $a \in \mathbb{R}^m$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ , on note  $a \otimes b \in \mathbb{M}^{m \times n}$  le produit tensoriel de  $a$  et  $b$  défini par  $(a \otimes b)_{ij} := a_i b_j$  pour tout entiers  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$ . Enfin si  $m = n$ ,  $a \odot b \in \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$  désigne le produit tensoriel symétrique défini par  $a \odot b := (a \otimes b + b \otimes a)/2$ .

## A.1 Fonctions à variation bornée

Etant donné un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $u$  est une *fonction à variation bornée*, et l'on note  $u \in BV(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , si  $u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$  et si sa dérivée distributionnelle  $Du \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{M}^{m \times n})$  est une mesure de Radon bornée. Dans ce cas,  $Du$  se décompose en la somme de trois mesures mutuellement étrangères

$$Du = \nabla u \mathcal{L}^n + (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_u + D^c u.$$

Dans l'expression précédente,  $\nabla u$  est la partie absolument continue de  $Du$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  et coïncide avec le gradient approché de  $u$ . L'ensemble  $J_u$  est l'ensemble des sauts de  $u$  : c'est un ensemble  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rectifiable sur lequel on peut définir  $\mathcal{H}^{n-1}$ -p.p. une normale généralisée unitaire, notée  $\nu_u$ , ainsi que des traces supérieures et inférieures  $u^\pm$ . Enfin  $D^c u$  désigne la partie Cantorienne.

On dit que  $u \in SBV(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , l'ensemble des *fonctions spéciales à variation bornée*, si  $D^c u = 0$ . Un espace plus grand que  $SBV(\Omega; \mathbb{R}^m)$  est l'espace  $GSBV(\Omega; \mathbb{R}^m)$  des *fonctions spéciales à variation bornée généralisées* défini comme l'ensemble des applications mesurables  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  telles que  $\Psi \circ u \in SBV_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , quelque soit  $\Psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$  tel que  $\text{supp}(\nabla \Psi)$  est compact dans  $\mathbb{R}^m$ . Notons qu'il est toujours possible de définir une notion de gradient approché et d'ensemble de saut pour des fonctions dans cet espace (voir DAL MASO, FRANCFORT & TOADER [51]). Pour  $p > 1$ , on définit enfin les espaces

$$SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m) := \{u \in SBV(\Omega; \mathbb{R}^m) : \nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{M}^{m \times n}), \mathcal{H}^{n-1}(J_u) < \infty\}$$

et

$$GSBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m) := \{u \in GSBV(\Omega; \mathbb{R}^m) : \nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{M}^{m \times n}), \mathcal{H}^{n-1}(J_u) < \infty\}.$$

Remarquons que  $SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \subset GSBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$  et que  $GSBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m) \subset SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . On munit l'espace  $SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$  d'une notion de "convergence faible" compatible avec le type de convergence obtenue en conclusion du théorème de compacité d'Ambrosio dans [4]. Notons qu'il ne s'agit en rien de convergence faible au sens de l'analyse fonctionnelle, mais seulement d'un mode de convergence naturel pour les problèmes aux discontinuités libres.

**Définition A.1.1.** Soient  $(u_k) \subset SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$  et  $u \in SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . On dit que  $(u_k)$  converge faiblement vers  $u$  dans  $SBV^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$  si

$$\begin{aligned} u_k &\rightarrow u \text{ fortement dans } L^1(\Omega; \mathbb{R}^m), \\ u_k &\rightharpoonup u \text{ faible* dans } L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m), \\ \nabla u_k &\rightharpoonup \nabla u \text{ faiblement dans } L^p(\Omega; \mathbb{M}^{m \times n}), \\ \text{la suite } &(\mathcal{H}^{n-1}(J_{u_k}))_{k \in \mathbb{N}} \text{ est uniformément bornée.} \end{aligned}$$

Nous renvoyons au livre d'AMBROSIO, FUSCO & PALLARA [8] pour un exposé détaillé de ce sujet.

## A.2 Fonctions à déformation bornée

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. L'espace  $BD(\Omega)$  des *fonctions à déformation bornée* est l'espace des fonctions  $u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  dont le gradient symétrisé  $Eu := (Du + Du^T)/2 \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$  est une mesure de Radon bornée à valeurs dans  $\mathbb{M}_{sym}^{n \times n}$ . Il s'agit d'un espace de Banach, muni de la norme  $\|u\|_{L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)} + \|Eu\|_1$ , qui est identifiable au dual d'un espace normé. La convergence faible\* est définie selon cette dualité et elle est équivalente à la convergence définie ci-dessous.

**Définition A.2.1.** Une suite  $(u_k) \subset BD(\Omega)$  converge faible\* vers  $u \in BD(\Omega)$  si et seulement si  $u_k \rightarrow u$  fortement dans  $L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et  $Eu_k \rightharpoonup Eu$  faible\* dans  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ .

Supposons désormais que  $\Omega$  est borné à frontière Lipschitzienne. L'espace  $BD(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $L^{n/(n-1)}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et compactement dans  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  pour tout  $p < n/(n-1)$ . Par ailleurs, toute fonction  $u \in BD(\Omega)$  a une trace, que nous notons  $u$ , qui appartient à l'espace  $L^1(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$  et pour laquelle la formule d'intégration par parties suivante a lieu : pour tout  $\sigma \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{M}_{sym}^{n \times n})$ ,

$$\int_{\Omega} \sigma : dEu = - \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{div} \sigma \, dx + \int_{\partial\Omega} u \cdot (\sigma \nu) \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

où  $\nu$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Omega$ .

Nous renvoyons au livre de TEMAM [134] pour de plus amples informations sur cet espace.

## A.3 $\Gamma$ -convergence

Nous rappelons ici la définition de la  $\Gamma$ -convergence dans un espace métrique. Pour une présentation complète, nous renvoyons au livre de DAL MASO [42]. Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $F, F_\varepsilon : X \rightarrow [0, +\infty]$ .

**Définition A.3.1.** On dit que la famille  $(F_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$   $\Gamma$ -converge vers  $F$  si pour toute suite  $(\varepsilon_j) \searrow 0^+$  et pour tout  $u \in X$ , les deux propriétés suivantes sont réunies :

(i) pour toute suite  $u_j \rightarrow u$  dans  $X$

$$F(u) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_j}(u_j);$$

(ii) il existe une suite  $\bar{u}_j \rightarrow u$  dans  $X$  telle que

$$F(u) = \lim_{j \rightarrow \infty} F_{\varepsilon_j}(\bar{u}_j).$$

On dit alors que  $F$  est la  $\Gamma$ -limite de  $F_\varepsilon$ .

Cette notion est compatible avec les problèmes de minimisation car elle assure, sous une hypothèse de compacité des suites minimisantes, la convergence des minimiseurs ainsi que de la valeur minimale. Cette propriété est traduite par le théorème suivant qui représente le résultat fondamental de la théorie de la  $\Gamma$ -convergence :

**Théorème A.3.2.** *Soit  $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  une famille de fonctions qui  $\Gamma$ -converge vers  $F$ . S'il existe un compact  $K \subset X$  (indépendant de  $\varepsilon$ ) satisfaisant*

$$\inf_X F_\varepsilon = \inf_K F_\varepsilon,$$

alors

$$\exists \min_X F = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_X F_\varepsilon.$$

De plus, si  $(u_\varepsilon)$  est une suite telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_X F_\varepsilon,$$

alors tout point d'accumulation de  $(u_\varepsilon)$  est un minimiseur de  $F$ .



# Bibliographie générale

- [1] E. ACERBI, N. FUSCO : Semicontinuity problems in the calculus of variations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **86** (1984) 125–145.
- [2] G. ALLAIRE : Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992) 1482–1518.
- [3] G. ALLAIRE : *Shape optimization by the homogenization method*, Springer, Berlin, (2002).
- [4] L. AMBROSIO : A compactness theorem for a new class of functions of bounded variation, *Boll. Un. Mat. Ital.* **3-B** (1989) 857–881.
- [5] L. AMBROSIO : Existence theory for a new class of variational problems, *Arch. Rational Mech. Anal.* **111** (1990) 291–322.
- [6] L. AMBROSIO : Minimizing Movements, *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* **19** (1995) 191–246.
- [7] L. AMBROSIO, A. BRAIDES : Energies in *SBV* and variational models in fracture mechanics, in *Homogenization and applications to material sciences* (Nice, 1995), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., Vol. 9 (Gakkotosho, 1995) 1–22.
- [8] L. AMBROSIO, N. FUSCO, D. PALLARA : *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, New York (2000).
- [9] L. AMBROSIO, N. GIGLI, G. SAVARÉ : *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Second edition. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [10] L. AMBROSIO, PALLARA : Partial regularity of free discontinuity problems I, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **24** (1997) 1–38.
- [11] L. AMBROSIO, V. M. TORTORELLI : On the approximation of free discontinuity problems, *Boll. Un. Mat. Ital.* **7** (1992) 105–123.
- [12] L. AMBROSIO, V. M. TORTORELLI : Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals by  $\Gamma$ -convergence, *Comm. Pure Appl. Math.* **43** (1990) 999–1036.
- [13] N. ANSINI, A. BRAIDES : Asymptotic analysis of periodically-perforated nonlinear media, *J. Math. Pures Appl.* **81** (2002) 439–451. Erratum : *J. Math. Pures Appl.* **84** (2005) 147–148.
- [14] N. ANSINI : The nonlinear sieve problem and applications to thin films, *Asympt. Anal.* **39** (2004) 113–145.
- [15] G. ANZELLOTTI, S. LUCKHAUS : Dynamical evolution in elasto-perfectly plastic bodies, *Appl. Math. Opt.* **15** (1987) 121–140.
- [16] J. M. BALL : Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1977) 337–403.
- [17] J. M. BALL : A version of the fundamental theorem for Young measures, PDEs and continuum models for phase transitions, *Lect. Notes Phys.* **334** (1989) 207–215.
- [18] J. M. BALL, F. MURAT :  $W^{1,p}$ -quasiconvexity and variational problems for multiple integrals, *J. Funct. Anal.* **58** (1984) 225–253.

- [19] A. BENSOUSSAN, J. FREHSE : Asymptotic behaviour of the time dependent Norton-Hoff law in plasticity theory and  $H^1$  regularity, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **37** (1996) 285–304.
- [20] K. BHATTACHARYA, I. FONSECA, G. A. FRANCFORT : An asymptotic study of the debonding of thin films, *Arch. Rational Mech. Anal.* **161** (2002) 205–229.
- [21] M. BOCEA, I. FONSECA : Equi-integrability results for 3D-2D dimension reduction problems, *ESAIM Cont. Optim. Calc. Var.* **7** (2002) 443–470.
- [22] G. BOUCHITTÉ, F. FONSECA, L. MASCARENHAS : Bending moment in membrane theory, *J. Elasticity* **73** (2003) 75–99.
- [23] G. BOUCHITTÉ, F. FONSECA, L. MASCARENHAS : The Cosserat vector in membrane theory : a variational approach, *J. Convex Anal.* **16** (2009) 351–365.
- [24] G. BOUCHITTÉ, I. FONSECA, G. LEONI, L. MASCARENHAS : A global method for relaxation in  $W^{1,p}$  and in  $SBV_p$ , *Arch. Rational Mech. Anal.* **165** (2002) 187–242.
- [25] L. BOUDIN : *Modélisation cinétique et hydrodynamique pour la physique, la chimie et la santé, analyse mathématique et numérique*, Habilitation à diriger les recherches, Université Pierre et Marie Curie (2011).
- [26] B. BOURDIN, G. A. FRANCFORT, J.-J. MARIGO : *The variational approach to fracture*, Springer, Amsterdam (2008).
- [27] A. BRAIDES : Homogenization of some almost periodic coercive functionals, *Rend. Accad. Naz. Sci. Mem. Mat.* **9(5)** (1985) 313–321.
- [28] A. BRAIDES, A. CHAMBOLLE, M. SOLCI : A relaxation result for energies defined on pairs set-function and applications, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **13** (2007) 717–734.
- [29] A. BRAIDES, A. DEFRANCESCHI : *Homogenization of multiple integrals*, Clarendon press, Oxford (1998).
- [30] A. BRAIDES, I. FONSECA : Brittle thin films, *Appl. Math. Optim.* **44** (2001) 299–323.
- [31] A. BRAIDES, I. FONSECA, G. A. FRANCFORT : 3D-2D asymptotic analysis for inhomogeneous thin films, *Indiana Univ. Math. J.* **49** (2000) 1367–1404.
- [32] A. BRAIDES, C. I. ZEPPIERI : A note on equi-integrability in dimension reduction problems, *Calc. Var. Partial Diff. Eq.* **29** (2007) 231–238.
- [33] D. BUCUR, N. VARCHON : Boundary variation for a Neumann problem, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) **29** (2000) 807–821.
- [34] M. CARRIERO, A. LEACI : Existence theorem for a Dirichlet problem with free discontinuity set, *Nonlinear Anal.* **15** (1990) 661–677.
- [35] A. CHAMBOLLE : A density result in two-dimensional linearized elasticity and applications, *Arch. Rational Mech. Anal.* **167** (2003) 211–233.
- [36] A. CHAMBOLLE : An approximation result for special functions with bounded deformation, *J. Math. Pures Appl.* **83** (2004) 929–954.
- [37] A. CHAMBOLLE, F. DOVERI : Minimizing movements of the Mumford-Shah functional, *Disc. Cont. Dyn. Syst. A* **3** (1997) 153–174.
- [38] A. CHAMBOLLE, F. DOVERI : Continuity of Neumann linear elliptic problems on varying two-dimensional bounded open sets, *Comm. Partial Differential Equations* **22** (1997) 811–840.
- [39] A. CHAMBOLLE, A. GIACOMINI, M. PONSIGLIONE : Crack initiation in brittle materials, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **188** (2008) 309–349.
- [40] D. CIORANESCU, F. MURAT : Un terme étrange venu d'ailleurs, I and II. *Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications. Collège de France Seminar. Vol. II*, 98–138, and *Vol. III*, 154–178, Res. Notes in Math., **60** and **70**, Pitman, London, 1982 and 1983.
- [41] B. DACOROGNA : *Direct methods in the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin (1989).

- [42] G. DAL MASO : *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*, Birkhäuser, Boston (1993).
- [43] G. DAL MASO, A. DEMYANOV, A. DE SIMONE : Quasistatic evolution problems for pressure sensitive plastic materials, *Milan J. Maths.* **75** (2007) 114–134.
- [44] G. DAL MASO, A. DE SIMONE : Quasistatic evolution problems for Cam-Clay plasticity : examples of spatially homogeneous solutions, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **19** (2009) 1–69.
- [45] G. DAL MASO, A. DE SIMONE, M. G. MORA : Quasistatic evolution problems for linearly elastic–perfectly plastic materials, *Arch. Rational Mech. Anal.* **180** (2006) 237–291.
- [46] G. DAL MASO, A. DE SIMONE, M. G. MORA, M. MORINI : Time-dependent systems of generalized Young measures, *Netw. Heterog. Media* **2** (2007) 1–36.
- [47] G. DAL MASO, A. DE SIMONE, M. G. MORA, M. MORINI : A vanishing viscosity approach to quasistatic evolution in plasticity with softening, *Arch. Rational Mech. Anal.* **189** (2008) 469–544.
- [48] G. DAL MASO, A. DE SIMONE, M. G. MORA, M. MORINI : Globally stable quasistatic evolution in plasticity with softening, *Netw. Heterog. Media* **3** (2008) 567–614.
- [49] G. DAL MASO, A. DE SIMONE, F. SOLOMBRINO : Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity : a weak formulation via viscoplastic regularization and time rescaling, *Calc. Var. PDEs* **40** (2011) 125–181.
- [50] G. DAL MASO, A. DE SIMONE, F. SOLOMBRINO : Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity : properties of the viscosity solutions, *Calc. Var. PDEs.* **44** (2012) 495–541.
- [51] G. DAL MASO, G. A. FRANCFORT, R. TOADER : Quasistatic crack growth in nonlinear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **176** (2005) 165–225.
- [52] G. DAL MASO, G. A. FRANCFORT, R. TOADER : Quasi-static evolution in brittle fracture : the case of bounded solutions, *Calculus of Variations : Topics from the Mathematical Heritage of E. De Giorgi. Quaderni di Matematica* **14** (2005) 247–265.
- [53] G. DAL MASO, G. LAZZARONI : Quasistatic crack growth in finite elasticity with non-interpenetration, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **27** (2010) 257–290.
- [54] G. DAL MASO, P. LONGO :  $\Gamma$ -limits of obstacles, *Ann. Mat. Pura Appl.* **128** (1981) 1–50.
- [55] G. DAL MASO, F. SOLOMBRINO : Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity : the spatially homogeneous case, *Netw. Heterog. Media* **5** (2010) 97–132.
- [56] G. DAL MASO, R. TOADER : A model for the quasi-static growth of brittle fracture : existence and approximation results, *Arch. Rational Mech. Anal.* **162** (2002) 101–135.
- [57] G. DAL MASO, R. TOADER : On a notion of unilateral slope for the Mumford-Shah functional, *NoDEA* **13** (2007) 713–734.
- [58] E. DE GIORGI : New problems on minimizing movements, In : C. Baiocchi - J.-L. Lions (eds.), *Boundary Value Problems for PDE and Applications*, Masson, Paris (1993) 81–98
- [59] E. DE GIORGI, L. AMBROSIO : Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **82** (1988) 199–210.
- [60] E. DE GIORGI, M. CARRIERO, A. LEACI : Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set, *Arch. Rational Mech. Anal.* **108** (1989) 195–218.
- [61] E. DE GIORGI, A. MARINO, M. TOSQUES : Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **68** (1980) 180–187.
- [62] F. DEMENGEL, R. TEMAM : Convex function of a measure, *Indiana Univ. Math. J.* **33** (1984) 673–709.
- [63] F. DEMENGEL, R. TEMAM : Convex function of a measure : the unbounded case, FERMAT days 1985 : mathematics for optimization, 103–134, North-Holland (1986).
- [64] A. DEMYANOV : Regularity of stresses in Prandtl-Reuss perfect plasticity, *Calc. Var. PDEs* **34** (2009) 23–72.

- [65] F. L. DIMAGGIO, I. S. SANDLER : Material model for granular soils, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE **97** (1971) 935–950.
- [66] D. C. DRUCKER, W. PRAGER : Soil mechanics and plastic analysis of rock and concrete, *Quart. Appl. Math.* **10** (1952) 157–175.
- [67] G. DUVAUT, J.-L. LIONS : *Les inéquations en mécanique et en physique*, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21, Dunod, Paris, 1972.
- [68] M. EFENDIEV, A. MIELKE : On the rate-independent limit of systems with dry friction and small viscosity, *J. Convex Anal.* **13** (2006) 151–167.
- [69] M. FOCARDI : On the variational approximation of free discontinuity problems in the vectorial case, *Math Models Methods Appl. Sci.* **11** (2001) 663–684.
- [70] I. FONSECA, G. A. FRANCFORT : Relaxation in  $BV$  versus quasiconvexification in  $W^{1,p}$ ; a model for the interaction between fracture and damage, *Calc. Var. and PDEs* **3** (1995) 407–446.
- [71] I. FONSECA, N. FUSCO : Regularity results for anisotropic image segmentation models, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sc.* (4) **24** (1997) 463–499.
- [72] I. FONSECA, G. LEONI : *Modern methods in the calculus of variations :  $L^p$  spaces*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007.
- [73] I. FONSECA, S. MÜLLER : Quasiconvex integrands and lower semicontinuity in  $L^1$ , *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992) 1081–1098.
- [74] I. FONSECA, S. MÜLLER : Relaxation of quasiconvex functionals in  $BV(\Omega; \mathbb{R}^p)$  for integrands  $f(x, u, \nabla u)$ , *Arch. Rational Mech. Anal.* **123** (1993) 1–49.
- [75] I. FONSECA, S. MÜLLER, P. PEDREGAL : Analysis of concentration and oscillation effects generated by gradients, *SIAM J. Math. Anal.* **29** (1998) 736–756.
- [76] D. FOX, A. RAOULT, J.C. SIMO : A justification of nonlinear properly invariant plate theories, *Arch. Rational Mech. Anal.* **124** (1993) 157–199.
- [77] G. A. FRANCFORT, A. GARRONI : A variational view of partial brittle damage evolution, *Arch. Rational Mech. Anal.* **182** (2006) 125–152.
- [78] G. A. FRANCFORT, A. GIACOMINI : Small strain heterogeneous elasto-plasticity revisited, *Com. Pure Applied Math.* **65** (2012) 1185–1241.
- [79] G. A. FRANCFORT, C. J. LARSEN : Existence and convergence for quasi-static evolution in brittle fracture, *Comm. Pure Appl. Math.* **56** (2003) 1465–1500.
- [80] G. A. FRANCFORT, J.-J. MARIGO : Stable damage evolution in a brittle continuous medium, *European J. Mech. A Solids* **12** (1993) 149–189.
- [81] G. A. FRANCFORT, J.-J. MARIGO : Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, *J. Mech. Phys. Solids* **46** (1998) 1319–1342.
- [82] G. A. FRANCFORT, F. MURAT : Homogenization and optimal bounds in linear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* **94** (1986) 307–334.
- [83] G. A. FRANCFORT, N. Q. LE, S. SERFATY : Critical points of Ambrosio-Tortorelli converge to critical points of Mumford-Shah in the one-dimensional Dirichlet case, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **15** (2009) 576–598.
- [84] G. FRIESECKE, R. D. JAMES, S. MÜLLER : A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from three-dimensional elasticity, *Comm. Pure Appl. Math.* **55** (2002) 1461–1506.
- [85] G. FRIESECKE, R. D. JAMES, S. MÜLLER : The Föppl-von Kármán plate theory as a low energy  $\Gamma$ -limit of nonlinear elasticity. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002) 201–206.
- [86] G. FRIESECKE, R. D. JAMES, S. MÜLLER : A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by  $\Gamma$ -convergence, *Arch. Rational Mech. Anal.* **180** (2006) 183–236.

- [87] A. GIACOMINI : Ambrosio-Tortorelli approximation of quasi-static evolution of brittle fracture, *Calc. Var. PDEs* **22** (2005) 129–172.
- [88] A. GIACOMINI, M. PONSIGLIONE : A  $\Gamma$ -convergence approach to stability of unilateral minimality properties in fracture mechanics and applications, *Arch. Rational Mech. Anal.* **180** (2006) 399–447.
- [89] A. GLORIA, S. NEUKAMM : Commutability of homogenization and linearization at identity in finite elasticity and application, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **28** (2011) 941–964.
- [90] C. GOFFMAN, J. SERRIN : Sublinear functions of measures and variational integrals, *Duke Math. J.* **31** (1964) 159–178.
- [91] A. GRIFFITH : The phenomena of rupture and flow in solids, *Philos T. Roy. Soc. A* **221** (1920) 163–198.
- [92] M. E. GURTIN, E. FRIED, L. ANAND : *The mechanics and thermodynamics of continua*, Cambridge University Press (2009).
- [93] B. HALPHEN, Q. S. NGUYEN : Sur les matériaux standards généralisés, *J. Mécanique* **14** (1975) 39–63.
- [94] R. HILL : *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon press, Oxford, 1950.
- [95] C. JOHNSON : Existence theorems for plasticity problems, *J. Math. Pures Appl.* **55** (1976) 431–444.
- [96] D. KINDERLEHRER, P. PEDREGAL : Characterization of Young measures generated by gradients, *Arch. Rational Mech. Anal.* **115** (1991) 329–365.
- [97] R.V. KOHN, R. TEMAM : Dual spaces of stresses and strains, with applications to Hencky plasticity, *Appl. Math. Optim.* **10** (1983) 1–35.
- [98] P. LABORDE : A non-monotone differential inclusion, *Nonlin. Anal. Theory, Math. & Appl.* **11** (1986) 757–767.
- [99] P. LABORDE : Analysis of the strain-stress relation in plasticity with non-associative laws, *Int. J. Engrg Sci.* **25** (1987) 655–666.
- [100] P. LABORDE : *Analyse mathématique de problèmes en théorie de la plasticité*, Thèse de doctorat d'état, Université de Bordeaux 1 (1984).
- [101] C. J. LARSEN : On the representation of effective energy densities, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **5** (2000) 529–538.
- [102] C. LARSEN, C. ORTNER, E. SÜLI : Existence of solutions to a regularized model of dynamic fracture, *Math Models Methods Appl. Sci.* **20** (2010) 1021–1048.
- [103] N. Q. LE : Convergence results for critical points of the one-dimensional Ambrosio-Tortorelli functional with fidelity term, *Adv. Differential Equations* **15** (2010) 255–282.
- [104] H. LE DRET, A. RAOULT : The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, *J. Math. Pures Appl.* **74** (1995) 549–578.
- [105] H. LE DRET, A. RAOULT : Variational convergence for nonlinear shell models with directors and related semicontinuity and relaxation results, *Arch. Rational Mech. Anal.* **154** (2000) 101–134.
- [106] V. LUBARDA, S. MASTILOVIC, J. KNAP : Brittle-ductile transition in porous rocks by cap model, *J. Engrg Mech.* **122** (1996) 633–642.
- [107] J. LUBLINER : *Plasticity theory*, Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
- [108] K. A. LURIE, A. V. CHERKAEV : Exact estimates of the conductivity of a binary mixture of isotropic materials, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **104** (1986) 21–38.
- [109] A. MAINIK, A. MIELKE : Existence results for energetic models for rate-independent systems, *Calc. Var. PDEs* **22** (2005) 73–99.
- [110] H. MATTHIES, G. STRANG, E. CHRISTIANSEN : The saddle point of a differential program, *Energy methods in finite element analysis*, Ed. Rodin, Zienkiewicz, Glowinski, Wiley, New York, 1979.

- [111] A. MIELKE, R. ROSSI, G. SAVARÉ : Modeling solutions with jumps for rate-independent systems on metric spaces, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **25** (2009) 585–615.
- [112] A. MIELKE, R. ROSSI, G. SAVARÉ : BV solutions and viscosity approximations of rate-independent systems, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **18** (2012) 36–80.
- [113] A. MIELKE, T. ROUBICEK, U. STEFANELLI :  $\Gamma$ -limits and relaxations for rate-independent evolutionary problems, *Calc. Var. and PDEs* **31** (2008) 387–416.
- [114] J.-J. MOREAU : Application of convex analysis to the treatment of elasto-plastic systems, Springer lecture notes in math., no. 503, Ed. P. Germain and B. Nayroles (1975).
- [115] S. MÜLLER : Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, *Arch. Rational Mech. Anal.* **99** (1987) 189–212.
- [116] D. MUMFORD, J. SHAH : Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems, *Comm. Pure Appl. Math.* **42** (1989) 577–685.
- [117] F. MURAT : The Neumann sieve, *Nonlinear variational problems*, Eds. A. Marino *et al*, Res. Notes Math., **127**, Pitmann (1985) 24–32.
- [118] G. NGUETSENG : A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989) 608–623.
- [119] U. RAITUMS : On the local representation of  $G$ -closure, *Arch. Rational Mech. Anal.* **158** (2001) 213–234.
- [120] S. REPIN, G. SEREGIN : Existence of weak solution of the minimax problem arising in Coulomb-Mohr plasticity, *Amer. Math. Soc. Transl.* **164** (1995) 189–220.
- [121] L. RESENDE, J.B. MARTIN : Formulation of Drucker-Prager cap model, *J. Engrg. Mech.* **111** (1985) 855–881.
- [122] R. ROSSI, G. SAVARÉ : Gradient flows of non convex functionals in Hilbert spaces and applications, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **12** (2006) 564–614.
- [123] J. SALENÇON : *Application of the theory of plasticity to soil mechanics*, Wiley series in geotechnical engineering (1977).
- [124] E. SANDIER, S. SERFATY :  $\Gamma$ -convergence of gradient flows with applications to Ginzburg-Landau, *Comm. Pure Appl. Math* **57** (2004) 1627–1672.
- [125] N. SEGUIN : *Etude d'équations aux dérivées partielles hyperboliques en mécanique des fluides*, Habilitation à diriger les recherches, Université Pierre et Marie Curie (2011).
- [126] G. SEREGIN : On the differentiability of the stress tensor in the Coulomb-Mohr theory of plasticity, *St. Petersburg Math. J.* **4** (1993) 1257–1271.
- [127] S. SERFATY :  $\Gamma$ -convergence of gradient flows on Hilbert and metric spaces and applications, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **31** (2011) 1427–1451.
- [128] P. SUQUET : Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions, *J. Mécanique* **20** (1981) 3–39.
- [129] P. SUQUET : Evolution problems for a class of dissipative materials, *Quart. Appl. Math.* **38** (1981) 391–414.
- [130] P. SUQUET : Un espace fonctionnel pour les équations de la plasticité, *Ann. Fac. Sc. Toulouse* **1** (1979) 77–87.
- [131] P. SUQUET : *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de doctorat d'état, Université Pierre et Marie Curie (1982).
- [132] L. TARTAR : Compensated compactness and applications to partial differential equations, *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium*, vol IV, Res. Notes Math. **39** (1979) 136–212.
- [133] L. TARTAR : Estimations fines des coefficients homogénéisés, Ennio De Giorgi Colloquium, Res. Notes Math., vol 125, Pitmann, Boston (1985) 168–187.

- [134] R. TEMAM : *Mathematical problems in plasticity*, Gauthier-Villars, Paris (1985).
- [135] N. VAUCHELET : Habilitation à diriger les recherches, Université Pierre et Marie Curie, en préparation.
- [136] L. C. YOUNG : *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Saunders, Philadelphia (1969).