HAL open science

Méthode de type Galerkin discontinu en maillages multi-éléments (et non-conformes) pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires

Clément Durochat

▶ **To cite this version:**

Clément Durochat. Méthode de type Galerkin discontinu en maillages multi-éléments (et non-conformes) pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Nice Sophia Antipolis, 2013. Français. NNT : . tel-00805935

HAL Id: tel-00805935

https://theses.hal.science/tel-00805935v1

Submitted on 2 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS

ÉCOLE DOCTORALE SFA
SCIENCES FONDAMENTALES
ET APPLIQUÉES

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université de Nice - Sophia Antipolis
Mention : MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue par

Clément DUROCHAT

Méthode de type Galerkin discontinu en maillages multi-éléments pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires

Thèse dirigée par Stéphane LANTERI

préparée à l'INRIA Sophia Antipolis

soutenue le 30 Janvier 2013

Jury :

Rapporteurs :	Xavier FERRIÈRES	-	Ingénieur de Recherche HDR, ONERA
	Philippe HELLUY	-	Professeur, Université de Strasbourg
Président :	Jean-Yves DAUVIGNAC	-	Professeur, Université de Nice-Sophia Antipolis
Examinateurs :	André NICOLET	-	Professeur, Université d'Aix-Marseille
	Yoann VENTRIBOUT	-	Ingénieur de Recherche, Nuclétudes
Invité :	Mark LORIOT	-	Président de Distene
Directeur :	Stéphane LANTERI	-	Directeur de Recherche INRIA

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma sincère reconnaissance et mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Stéphane Lanteri. Stéphane, je te remercie pour m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant dans la suite de mon stage de Master. Merci pour la confiance que tu m'as accordée lors de chaque nouvelle étude entreprise et en me permettant de présenter ces travaux dans plusieurs conférences internationales ; cette confiance, dont tu m'as toujours fait part tout au long de ces années, a été pour moi très importante et rassurante. Je te remercie pour ton enthousiasme, ton humilité, ta disponibilité et pour la réactivité exemplaire dont tu as toujours fait preuve pour répondre à mes nombreuses questions. Merci pour le souci avec lequel tu as veillé non seulement sur mon travail de thèse, mais aussi d'une manière plus générale, sur ma future carrière, notamment lors de ma recherche post-doc dans laquelle tu m'as été d'une grande aide. Enfin, je tiens à te dire que j'ai beaucoup apprécié les différentes discussions plus personelles, au delà du simple rapport directeur / doctorant, que l'on a pu échanger.

Je souhaiterais remercier avec gratitude Monsieur Xavier Ferrières et Monsieur Philippe Helluy pour avoir rapporté ce manuscrit de thèse. Leurs remarques ont été à la fois constructives et encourageantes. Je remercie Monsieur Jean-Yves Dauvignac pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, ainsi que Messieurs Yoann Ventribout, André Nicolet et Mark Loriot pour avoir accepté de faire partie de ce jury. Merci à tous les membres du jury pour le regard avisé qu'ils ont porté sur ce travail, j'ai sincèrement apprécié tout le déroulement de la soutenance.

Je tiens à remercier la Région Île-de-France pour son soutien financier à cette étude, qui s'inscrit dans le cadre du projet MIEL3D-MESHER du cluster Systematic Paris-Région.

Je remercie toute l'équipe-projet NACHOS dans laquelle j'ai pu mener à bien ces travaux de thèse. Merci tout d'abord à Cheikh Docteur Mohamed El Bouajaji avec qui nous avons débuté ensemble dans l'équipe alors que nous n'étions qu'en stage, merci pour ton amitié, ta générosité, pour les points de vue et surtout les fous rires que l'on a échangé. Merci à Joseph Charles avec qui nous avons également partagé nos premiers pas dans le monde de la recherche, bravo pour ta réussite post-thèse et merci pour ta sympathie, pour la "Bamba triste" et tous nos délires échangés. Merci à Raphaël Léger avec qui nous avons travaillé ensemble sur une partie importante de cette thèse, cette collaboration a été idéale tant sur le plan humain que professionnel, je te suis très reconnaissant pour ton aide, et notamment pour avoir pris en compte le timing serré de ma thèse en travaillant à un rythme très soutenu dès le début de ton post-doc. Je remercie Claire Scheid pour qui j'ai beaucoup de sympathie et qui m'a encadré dans l'étude théorique que nous avons mené, merci pour ton écoute, ta patience, et pour m'avoir fait profiter de ton recul sur les aspects plus théoriques de ce thème de recherche. Je remercie évidemment Ludovic Moya qui était mon collègue de bureau dans la dernière année de cette thèse, merci pour ta compagnie plus qu'agréable, nos échanges sur le travail toujours enrichissants et motivants, j'ai beaucoup apprécié ton écoute, ton humour et tous les moments de détente que l'on a partagé. Merci à Nathalie Glinsky pour nos discussions sur des sujets en tout genre, pour tes conseils, ta compréhension, et aussi pour avoir lu attentivement une grande partie de ce manuscrit, suivi de corrections à la fois claires et pertinentes. Merci à Montserrat Argente pour s'être occupée des taches administratives liées à cette thèse, merci aussi pour ta complicité et ta gentillesse. Merci également à Tristan Cabel et nos séances de "coaching", à Hassan Fahs, Liang Li, Riad Sanchez, Stéphane Descombes, Caroline Girard, Nora Aissiouene, Jonathan Viquerat, et à tous les autres

membres, anciens et actuels, que j'ai pu rencontrer dans l'équipe. Enfin, je remercie mon collègue et ami Fabien Peyrusse, avec qui nous nous sommes rencontrés en Master 1, pour se retrouver en thèse dans la même équipe ; je suis très heureux et fier d'avoir partagé ce parcours et ces années d'études avec toi, merci, entre autres, pour ton intégrité et ton soutien dans toutes les situations de cette thèse.

Merci à Thierry Vieville avec qui j'ai pu mener une activité de vulgarisation scientifique. Je remercie également Abderrahmane Habbal pour ses différents conseils, notamment concernant l'enseignement des TD dont j'étais chargé et merci à mon collègue Hubert Alcin avec qui j'ai préparé ces TD. Je remercie les autres personnes du bâtiment Galois avec qui j'ai pu discuter et passer d'agréables moments durant ces années de thèse : Dalia Ibrahim, Nicolas Perrin, Adrien Zerbinati, Julia Charrier et bien sûr mon cher Julien Claisse.

J'adresse maintenant un grand merci à mes amis musiciens avec qui j'ai eu le grand plaisir de former un groupe (dont je tairai le nom) et de partager avec eux les joies (et les peines) des premiers concerts : merci à Luc, Aurélie et Maxime. Je vous remercie également pour toutes les pauses et les autres moments de complicité et de rigolades passés ensemble. Merci de plus à Fabien et aux autres musiciens de l'INRIA avec qui j'ai pu avoir l'occasion de jammer.

Cette thèse est l'aboutissement de huit années d'études durant lesquelles j'ai rencontré de nombreuses personnes, et qui ont contribué chacune à leur manière, au bon déroulement de celles-ci. Je les en remercie avec toute ma gratitude. Je pense en particulier à Alvinice pour tous les services rendus, Lucile, Jordi "il liberatore", Toto "Cobox", Malory, Nathalie, Gégé, Diane, David, Mariana et Eve. Je pense bien sûr également à mes amis rencontrés pendant mes années toulousaines : Zahra, Célia, Elie, Emilie, et tous les autres. Enfin, je remercie très sincèrement mes chers acolytes et amis proches Florian, Vladimir, Georges, Stéphane et Karim, présents dans toutes les situations, et avec qui nous partageons toutes les péripéties de notre quotidien, merci pour tout.

Je voudrais à présent remercier profondément, mes deux plus vieux amis, Benjamin et Christophe. Merci pour votre amitié qui m'est si chère, merci pour votre soutien inconditionnel dans tous les moments difficiles, et merci pour tout ce que l'on partage depuis tant d'années.

Pour conclure ces remerciements, je remercie chaleureusement toute ma famille. Je commencerais par une pensée toute particulière pour mes grands-parents paternels. Merci à ma chère Swann, et à tous mes autres cousins et cousines. Merci à mes oncles et tantes, ainsi qu'aux amis de la famille qui m'ont fait le plaisir de venir à ma soutenance.

Enfin, je remercie du fond du cœur, ma mère, mon père, ma grand-mère, mon grand-père, et ma sœur et mon beau-frère qui m'ont donné l'immense joie d'être l'heureux tonton de Raphaël depuis bientôt deux ans. Quelques lignes, ni même un manuscrit entier ne suffiraient pas à exprimer tout ce que je vous dois. Merci pour votre soutien constant et sans limite, pour l'intérêt que vous portez, toujours avec une immense ouverture d'esprit, à tous mes projets. Merci pour tout ce que vous m'apportez, et merci tout simplement, pour votre amour.
Cette thèse est aussi la vôtre.

"L'imagination est plus importante que la connaissance."

Albert Einstein

Table des matières

1 Introduction générale **1**
1.1 Électromagnétisme numérique et méthodes de type Galerkin discontinu 1
1.1.1 Électromagnétisme numérique : modélisation et applications 1
1.1.2 Simulation des ondes électromagnétiques et résolution numérique des équations de Maxwell 2
1.1.3 L'intérêt croissant pour les méthodes de type Galerkin discontinu 3
1.2 Le but des méthodes hybrides 4
1.3 Objectif, contributions, et plan de la thèse 5
1.4 Liste des publications et communications issues de la thèse 7
1.4.1 Publications 7
1.4.2 Communications 8

2 Résolution des équations de Maxwell par une méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ **9**
2.1 Équations de Maxwell tridimensionnelles 9
2.1.1 Aspects historiques et équivalence des formulations intégrales et E.D.P. . . 9
2.1.2 Présentation des équations de Maxwell et matériaux diélectriques 11
2.1.3 Réécriture des équations et conditions aux limites 13
2.2 Discrétisation spatiale en maillage hybride par une méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ 15
2.2.1 Formulation faible avec fonctions tests scalaires 17
2.2.2 Formulation faible équivalente avec fonction test vectorielle 20
2.2.3 Equations semi-discrétisées pour les cellules tétraédriques 22
2.2.4 Equations semi-discrétisées pour les cellules hexaédriques 24
2.3 Discrétisation en temps 27
2.3.1 Schéma saute-mouton d'ordre 2 29
2.3.2 Schéma saute-mouton d'ordre 4 30

3 Analyse mathématique **31**
3.1 Étude de stabilité 31
3.1.1 Théorème de Poynting et déroulement de l'étude 31
3.1.2 Résultats connus, notations et hypothèses 32
3.1.3 Conservation d'une énergie discrète 34
3.1.4 Condition suffisante de stabilité 37
3.2 Étude de convergence 46
3.2.1 Propositions, lemmes, hypothèses et notations 46
3.2.2 Convergence du problème semi-discret 52
3.2.3 Convergence du problème totalement discret 62

4 Expériences numériques 2D **67**
4.1 Préambule et spécifications 67
4.1.1 Équations de Maxwell 2D 67
4.1.2 Quelques précisions mathématiques et algorithmiques 68
4.2 Description des cas tests considérés 74

4.2.1 Cas test n°1 : mode $(1,1)$ dans une cavité métallique carrée 74
4.2.2 Cas test n°2 : résonateur circulaire métallique 74
4.2.3 Cas test n°3 : diffraction d'une onde plane par un profil d'aile d'avion . . . 74
4.2.4 Cas test n°4 : diffraction d'une onde plane par un disque diélectrique 75
4.2.5 Cas test n°5 : source Gaussienne modulée et localisée 76
4.3 Tests préliminaires 77
4.3.1 Tests sur maillages quadrangulaires 77
4.3.2 Pas de temps et validation de l'étude de stabilité 79
4.4 Tests de convergence numérique : comparaison LF2 / LF4 82
4.4.1 Convergence en h des schémas LF2 et LF4 83
4.4.2 Comparaison des performances des schémas LF2 et LF4 84
4.5 Tests d'efficacité et de précision de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ 86
4.5.1 Résonateur circulaire métallique 86
4.5.2 Mode $(1,1)$ dans une cavité métallique 88
4.5.3 Onde plane diffractée par un profil d'aile d'avion 93
4.5.4 Onde plane diffractée par un disque diélectrique 99
4.5.5 Source Gaussienne modulée 107

5 Mise en œuvre 3D de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ 115
5.1 Précisions mathématiques et algorithmiques 115
5.1.1 Fonctions de base, degrés de liberté, éléments de référence et application affine 115
5.1.2 Matrices d'interfaces non-conformes, n_{raf}, pas de temps et calcul des flux . 117
5.2 Description des cas tests considérés 118
5.2.1 Cas test n°1 : mode $(1,1,1)$ dans une cavité métallique cubique 118
5.2.2 Cas test n°2 : pulse Gaussien 118
5.2.3 Cas test n°3 : onde plane diffractée par une sphère métallique 119
5.2.4 Cas test n°4 : propagation d'une source dans un modèle hétérogène de tête humaine 119
5.3 Test de convergence numérique en h 120
5.4 Mise en évidence de réflexions parasites 122
5.5 Tests d'efficacité et de précision de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ 125
5.5.1 Mode $(1,1,1)$ dans une cavité métallique 125
5.5.2 Diffraction d'une onde plane par un obstacle 127
5.5.3 Propagation d'un terme source dans une tête humaine 132

6 Conclusion : apports et perspectives 139
6.1 Synthèse des résultats et apports de la méthode hybride GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ 139
6.2 Travaux en cours et perspectives 141

A Fonctions de bases et nœuds des degrés de liberté 143
A.1 Fonctions de bases 2D 143
A.1.1 Fonctions de bases sur le triangle de référence 143
A.1.2 Fonctions de bases sur le quadrangle de référence 145
A.2 Fonctions de bases 3D 149
A.2.1 Fonctions de bases sur le tétraèdre de référence 149

A.2.2 Fonctions de bases sur l'hexaèdre de référence 150

Bibliographie **159**

CHAPITRE 1

Introduction générale

Sommaire

1.1 Électromagnétisme numérique et méthodes de type Galerkin discontinu **1**
1.1.1 Électromagnétisme numérique : modélisation et applications 1
1.1.2 Simulation des ondes électromagnétiques et résolution numérique des équations de Maxwell 2
1.1.3 L'intérêt croissant pour les méthodes de type Galerkin discontinu 3
1.2 Le but des méthodes hybrides **4**
1.3 Objectif, contributions, et plan de la thèse **5**
1.4 Liste des publications et communications issues de la thèse **7**
1.4.1 Publications 7
1.4.2 Communications 8

1.1 Électromagnétisme numérique et méthodes de type Galerkin discontinu

1.1.1 Électromagnétisme numérique : modélisation et applications

Les modèles mathématiques ont la capacité de décrire des phénomènes de nature très variées, qui peuvent être tout aussi bien physiques, que biologiques, économiques, ou encore démographiques, géologiques, etc. Il existe un nombre considérable de modèles, de différentes familles, parfois établis bien avant la naissance des premiers ordinateurs. Certains sont stochastiques (avec prise en compte de l'aléatoire, pouvant également s'appliquer au traitement du signal et de l'image), d'autres déterministes (prenant par exemple la forme d'une équation différentielle ordinaire ou d'un système d'équations aux dérivées partielles), et permettent de simuler des phénomènes du monde réel, pouvant ainsi jouer un rôle de prédiction. À l'ère numérique, l'étude et l'exploitation de ces modèles est essentielle pour l'ingénieur. L'importance de la modélisation numérique n'a cessé de croître avec l'augmentation des capacités de calcul et de stockage des ordinateurs et notamment avec l'avènement des calculateurs parallèles. Ceci a d'autant plus été ressenti dans le domaine de l'électromagnétisme avec la mise au point de nouvelles méthodes numériques adaptées à ce type d'architecture de calcul. La simulation numérique dans ce domaine, traditionnellement réservée aux applications militaires comme la furtivité radar ou la vulnérabilité des systèmes d'arme, s'est aussi ouverte à un large spectre d'applications civiles.

Ainsi, l'électromagnétisme numérique est aujourd'hui une discipline en plein essor et on constate que son champ d'application s'est élargi à des contextes aussi variés que l'électronique, les accélérateurs de particules, la magnétohydrodynamique, l'optimisation de forme d'antennes, la

conception de dispositifs hyperfréquences ou la compatibilité électromagnétique. Ce dernier est particulièrement crucial car les nouveaux matériaux qui composent les aéronefs, les bâtiments ou les voitures, n'assurent plus la protection des nombreux composants électroniques contre la foudre ou d'autres sources électromagnétiques. La santé au sens large est un autre contexte d'application de l'électromagnétisme numérique. Il s'agit essentiellement de quantifier numériquement l'absorption d'un champ électromagnétique dans des tissus biologiques, soit pour évaluer les éventuels effets nocifs de l'exposition à ces champs [Bernardi *et al.* 2001, Scarella *et al.* 2006], soit pour des besoins de planification du traitement par hyperthermie (échauffement local des tissus biologiques) de tumeurs cancéreuses [Lin *et al.* 2000, Siauve *et al.* 2003].

Les équations qui modélisent (i.e. le modèle mathématique) les problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques est un système d'équations aux dérivées partielles appelées équations de Maxwell. Celles-ci suscitent un engouement tant de la part des physiciens que de la part des mathématiciens, en raison notamment des applications industrielles pressenties. La simulation numérique a contribué à une meilleure compréhension des phénomènes physiques sous-jacents, motivant de nombreuses recherches afin de parvenir à des méthodes qui restituent au mieux les caractéristiques mathématiques de ces équations et l'universalité de leur application, avec à la clef un souci de performance.

1.1.2 Simulation des ondes électromagnétiques et résolution numérique des équations de Maxwell

Ces vingt dernières années ont vu de nombreuses avancées méthodologiques concernant la résolution numérique des équations de Maxwell, qui reste malgré cela une tâche difficile, en particulier lorsqu'il s'agit de prendre en compte des structures géométriques complexes ou lorsque les milieux de propagation sont hétérogènes. C'est pourquoi plusieurs applications de l'électromagnétisme numérique restent hors de portée des capacités des méthodes numériques pour la résolution du système de Maxwell (dont un état de l'art est proposé dans l'article [Reitich & Tamma 2004]).

Plusieurs difficultés émergent lorsque l'on tente de modéliser et de développer des méthodes de calcul pour simuler numériquement des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques :

- la plupart des phénomènes électromagnétiques à modéliser requièrent un domaine de calcul non borné ;
- la précision des méthodes d'approximation des équations d'une part, et la discrétisation du domaine de calcul d'autre part, doivent être compatibles avec le caractère ondulatoire des phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques ;
- les nouveaux matériaux constituant les objets étudiés possèdent des caractéristiques électromagnétiques de plus en plus complexes où, par exemple, les hypothèses de linéarité et d'isotropie ne s'appliquent pas. Ces matériaux nécessitent donc des algorithmes robustes pour la résolution des équations de Maxwell ;
- les applications d'intérêt industriel conduisent à la résolution numérique de systèmes discrets dont la taille, évaluée en termes du nombre d'inconnues pour atteindre une précision donnée, est très grande. Par exemple, les longueurs caractéristiques sont généralement de l'ordre de quelques dizaines de longueur d'onde mais peuvent dépasser la centaine,

conduisant à des maillages qui peuvent contenir jusqu'à dix millions de mailles pour des maillages volumiques. La résolution numérique de problèmes de cette taille ne peut se faire qu'en exploitant pleinement les possibilités des calculateurs parallèles. L'algorithme généré par la méthode doit donc avoir un haut degré de parallélisme.

Ce travail de thèse porte sur la résolution numérique des équations de Maxwell en domaine temporel. Comme mentionné plus haut, différentes familles de stratégies de résolution, ont été développées pour résoudre numériquement ces équations mais il semble qu'aucune méthode ne soit prédominante, le choix étant déterminé essentiellement par le type d'application considéré. Ces méthodes peuvent être regroupées en plusieurs classes, suivant que l'on souhaite traiter les équations de Maxwell en domaine temporel en regardant l'évolution en temps du champ électromagnétique, ou les équations de Maxwell en domaine fréquentiel (ou régime harmonique) en regardant cette fois-ci le comportement du champ électromagnétique lorsque le terme source suit une dépendance harmonique en temps. Bien que ces deux formulations aient un lien physique étroit (voir par exemple [Helluy 1994]), les méthodes numériques développées pour leur approximation peuvent s'attaquer indistinctement aux deux systèmes d'équations ou au contraire être spécifiques à chacun. Les méthodes mises au point pour la résolution des équations en domaine temporel utilisent le plus souvent une formulation des équations au premier ordre, alors que les méthodes conçues pour la résolution des équations de Maxwell en domaine fréquentiel s'appuient habituellement sur la formulation des équations du deuxième ordre dans laquelle on élimine le champ électrique ou le champ magnétique, afin de réduire la taille des systèmes algébriques résultants.

Malgré d'importants progrés dans ces méthodes numériques, la méthode DFDT (Différences Finies en Domaine Temporel) basée sur le très répandu schéma de Yee [Yee 1966] (une des premières méthodes proposée par K.S. Yee en 1966) et [Taflove & Hagness 2005], reste l'approche proéminente pour le traitement de problèmes d'électromagnétisme numérique réalistes en domaine temporel, grâce en particulier à la facilité d'implémentation et aux faibles temps de calcul. Dans la méthode DFDT, le domaine de calcul entier est discrétisé par un maillage structuré (Cartésien), simplifiant ainsi le processus de discrétisation mais représentant aussi la principale limitation de cette méthode lorsque des objets à géométrie complexe rentrent en jeu. Les méthodes EFDT (Éléments Finis en Domaine Temporel) nodaux classiques sont connues pour générer des modes parasites faussant les simulations numériques. Les éléments finis d'arêtes [Nedelec 1980, Nedelec 1986] ont été développés notamment pour s'affranchir de ces problèmes mais sont pénalisés par la complexité de mise en oeuvre et les coûts des calculs. Les méthodes de VFDT (Volumes Finis en Domaine Temporel) en maillages non-structurés [Cioni *et al.* 1993, Piperno *et al.* 2002] sont plus flexibles vis-à-vis de la prise en compte des hétérogénéités du milieu de propagation et de formes géométriques irrégulières, mais sont néanmoins de précision limitée.

1.1.3 L'intérêt croissant pour les méthodes de type Galerkin discontinu

Depuis ces dix dernières années, des méthodes d'éléments finis discontinus, plus connues sous le nom de méthodes GDDT (Galerkin Discontinu en Domaine Temporel) sont apparues et semblent offrir un cadre propice à la construction de méthodes de discrétisation de précision élevée. Grâce à l'utilisation d'espaces éléments finis discontinus, les méthodes GDDT peuvent facilement être

traitées avec des éléments de différents types et formes. De plus, aucune continuité n'est imposée aux interfaces entre les éléments et le degré du polynôme d'interpolation peut aussi varier localement, permettant ainsi d'offrir une grande flexibilité dans la conception des maillages (qui peuvent être non-structurés, non-conformes, etc.). Les méthodes GDDT ont été dévéloppées sur des maillages quadrangulaires en deux dimensions d'espace (2D) ou hexaédriques en trois dimensions (3D) [Cohen *et al.* 2006, Pernet *et al.* 2006, Montseny *et al.* 2008], aussi bien que sur des maillages triangulaires (cas 2D) ou tétraédriques (cas 3D) [Hesthaven & Warburton 2002, Fezoui *et al.* 2005, Fahs 2009a, Fahs & Lanteri 2010, Dosopoulos & Lee 2010a]. Les méthodes de type Galerkin discontinu présentent plusieurs avantages parmi lesquels :

- elles sont naturellement adaptées à la discrétisation de fonctions discontinues et à la prise en compte d'hétérogénéités (par exemple du milieu dans le cas d'un problème de propagation d'ondes),
- elles se prêtent bien à l'utilisation de maillages non-structurés pour la discrétisation de géométries complexes,
- elles autorisent un raffinement local non-conforme du maillage et un degré d'interpolation variable en espace (en d'autres termes, elles définissent un cadre idéal pour la mise au point de méthodes auto-adaptatives),
- elles sont naturellement parallélisables.

Ce caractère discontinu de l'approximation impose d'avoir recours à une formulation faible locale c'est-à-dire dont le support d'intégration est l'élément (un triangle ou un quadrangle en 2D, un tétraèdre ou un hexaèdre en 3D). Une intégration par parties fait alors apparaître un terme de bord dont le calcul conduit à l'introduction d'une fonction de flux numérique (similairement à ce qui est réalisé dans les méthodes VFDT [Cioni *et al.* 1993, Piperno *et al.* 2002]). Une particularité de la méthode GDDT est d'utiliser une fonction de flux numérique centrée. Par ailleurs, ces méthodes ont aujourd'hui atteint une certaine maturité et permettent de s'adapter à des contextes de modélisation de plus en plus complexes, comme [Dosopoulos & Lee 2010a, Dosopoulos & Lee 2010b, König *et al.* 2010, Niegemann *et al.* 2009, Stannigel *et al.* 2009] entre autres ; elles ont alors réussi à s'intégrer dans plusieurs communautés scientifiques et technologiques. Nous pouvons aussi relever que cette méthode a été pour la premiere fois choisie pour un logiciel commercial comme alternative en domaine temporel d'un outil bien connu de simulation d'ondes électromagnétiques [Songoro *et al.* 2010]. Dans tous les travaux cités précédemment sur les méthodes GDDT, le premier ordre, ou mixte, des équations de Maxwell instationnaires est considéré ainsi qu'à travers chaque élément le champ électromagnétique est approché par un polynôme d'interpolation nodal d'ordre arbitraire.

1.2 Le but des méthodes hybrides

Par la suite, plusieurs essais ont été réalisés pour développer et combiner des méthodes en domaine temporel sur des maillages structurés avec des formulations VFDT (qui peut être vue comme le plus bas ordre de la méthode GDDT), EFDT ou encore GDDT sur des maillages non-structurés. Une stratégie de bas ordre allant dans ce sens est présentée dans [Ferrieres *et al.* 2004, Yang *et al.* 2000] ou [Edelvik & Ledfelt 2000] sous la forme d'une combinaison de DFDT avec VFDT . Une hybridation VFDT avec une méthode DFTD d'ordre élevé est également étudiée dans l'article [Nordström & Gong 2006] pour des problèmes hyperboliques où la procédure de couplage est basée sur une estimation de l'énergie. Une méthode hybride mixant DFDT avec

GDDT est décrite dans [Garcia *et al.* 2008] pour des problèmes 2D. Le principal objectif, comme dans la plupart des méthodes hybrides de ce type, est de modéliser avec précision les détails géométriques d'objets courbes, tout en maintenant la simplicité et la rapidité de DFDT pour le reste du domaine de calcul. Ces stratégies reposent sur un schéma couplé simple, une couche intermédiaire (i.e. un recouvrement) d'éléments quadrangulaires est introduite entre la grille Cartésienne (de la méthode DFDT) et le maillage triangulaire (de la méthode GDDT). A l'intérieur de cette couche, DFDT est alors considéré comme un cas particulier (plus précisément d'ordre 0) de GDDT et vice versa. Un flux centré est choisi pour la méthode GDDT et les deux méthodes utilisent un schéma saute-mouton d'ordre 2 pour la discrétisation en temps. Un autre couplage GDDT-DFDT, utilisant également une couche intermédiaire, a été développé pour les équations de l'aéroacoustique dans [Léger 2011], traitant de problèmes à la fois 2D et 3D.

Dans un esprit similaire, des hybridations EFDT-DFDT ont été proposées comme par exemple dans [Beilina & Grote 2010] où un estimateur d'erreur a-posteriori est dégagé. Ces combinaisons font souvent appel à une stratégie hybride également pour l'intégration en temps, où un schéma explicite est appliqué sur la grille Cartésienne (utilisant DFDT) et un schéma implicite, ou implicite/explicite, est employé sur la partie non-structurée (utlisant EFDT) du maillage [Zhu *et al.* 2012, Halleröd & Rylander 2008, Venkatarayalu *et al.* 2007, Degerfeldt & Rylander 2006]. Cette méthode hybride EFDT-DFDT peut être de plus parallélisée [Xie *et al.* 2009]. Une comparaison entre un solveur hybride VFDT-DFDT et un autre solveur hybride implicite/explicite EFDT-DFDT a été réalisée pour des problèmes complexes de diffraction [Edelvik & Ledfelt 2002] ; il apparaît que la méthode EFDT-DFDT converge plus rapidement, est plus efficace et donne des résultats plus précis. Par ailleurs, une autre approche, moins générale, est proposée dans [Schnepp *et al.* 2010]. Il s'agit d'un schéma combinant une méthode VFDT avec la technique d'intégration finie ; un seul type de maillage est utilisé (Cartésien) et cette hybridation vise à améliorer les propriétés de dispersion le long d'une direction.

Une hybridation d'ordre élevé a récemment été étudiée dans [Davies *et al.* 2009] qui combine une méthode d'éléments finis spectraux sur un maillage quadrangulaire avec une méthode GDDT sur un maillage triangulaire. Le couplage des deux méthodes est obtenu en utlisant un flux numérique décentré sur la frontière interne (c'est-à-dire entre les maillages triangulaires et quadrangulaires). Dans les deux méthodes, un schéma Runge-Kutta d'ordre 4 est choisi pour l'intégration en temps. La précision de cette méthode hybride EFDT-GDDT est clairement démontrée pour des problèmes en 2D mais il ne figure pas de comparaison avec des maillages complètement triangulaires. Enfin, une méthode hybride proposée dans l'article [Hermann *et al.* 2010], considère un schéma GDDT en maillages hybrides triangulaires/quadrangulaires pour la propagation des ondes sismiques en 2D, cette approche rejoint davantage ce que nous allons maintenant proposer.

1.3 Objectif, contributions, et plan de la thèse

Comme pour les méthodes hybrides discutées plus haut, l'objectif général de notre étude est d'améliorer l'efficacité globale de la simulation numérique de scènes de propagation mettant en jeu des structures irrégulières entourées de zones de vide. Pour cela, on cherche à combiner l'usage de quadrangles (cas 2D)/hexaèdres (cas 3D) orthogonaux pour discrétiser les zones de vide et le recours à des triangles (cas 2D)/tétraèdres (cas 3D) pour une discrétisation fidèle des structures irrégulières. On imagine aussi que le fait d'utiliser deux types d'élément raccordés de

façon non-conforme, va permettre de simplifier la construction du maillage de telles scènes de propagation en envisageant un processus de discrétisation par zone avec des interfaces planaires entre zones. Contrairement aux travaux similaires réalisés jusqu'ici, on vise dans notre étude l'utilisation d'un schéma unique, de type Galerkin discontinu, et on cherche à exploiter pleinement les possibilités de ce type de schéma, notamment la non-conformité de la discrétisation (i.e. en autorisant la présence de nœuds flottants) et de l'approximation (i.e. en réglant localement le degré de la représentation polynomiale de la solution). L'adoption d'un schéma unique va aussi permettre de réaliser une analyse rigoureuse, de stabilité et convergence a-priori, du schéma Galerkin discontinu résultant en offrant un cadre variationnel adapté.

Danas ce contexte, les principales contributions de ce travail de thèse sont les suivantes :

- La formulation d'une méthode Galerkin discontinue en domaine temporel, que nous notons GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, combinant une interpolation polynomiale nodale de degré p en triangle (cas 2D)/tétraèdre (cas 3D) et une interpolation polynomiale nodale de degré k en quadrangle (cas 2D)/hexaèdre (cas 3D) pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires 2D et 3D. Cette méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ repose sur l'utilisation de flux centrés pour l'évaluation des intégrales aux frontières entre éléments voisins et sur des schémas d'intégration en temps explicites de type saute-mouton.
- L'analyse mathématique de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$. Du fait de l'utilisation de flux centrés et de schémas d'intégration en temps de type saute-mouton, la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ résultante est non-dissipative. On étudie tout d'abord la stabilité de cette méthode par une approche énergétique et on prouve que la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ est stable sous une condition de type CFL simple. On produit aussi une estimation a-priori de l'ordre de convergence de la méthode.
- Une étude numérique détaillée de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en 2D. On peut alors utiliser des maillages hybrides triangulaires/quadrangulaires conformes ou non-conformes, et donc évaluer l'impact de la non-conformité, principalement sur la précision des calculs. On vérifie numériquement les estimations théoriques (stabilité et convergence) en considérant un problème test académique. On présente aussi des résultats de simulations numériques portant sur des problèmes de propagation en milieux homogènes et hétérogènes.
- Une mise en œuvre en 3D de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ sur la base de maillages hybrides tétraédriques/hexaédriques non-conformes d'un certain type. On présente des résultats de simulations numériques portant sur un problème test simple permettant de valider une fois de plus les propriétés théoriques de la méthode, ainsi que sur deux autres problèmes tests afin d'étudier le comportement numérique (notamment l'existence de réflexions parasites aux interfaces non-conformes) de la méthode et ses performances computationnelles.

Ce mémoire de thèse est organisé de la façon suivante :

- Dans le Chapitre 2, nous commençons par positioner de problème de Maxwell : après quelques rappels historiques et physiques (sur la modélisation des phénomènes électromagnétiques), nous présentons le système des équations de Maxwell en domaine temporel. Nous formulons ensuite, en détaillant les différentes étapes, la méthode de type Galerkin discontinu GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en maillages multi-éléments tétraédriques / hexaédriques en trois dimensions d'espaces. Enfin, nous exposons les schémas explicites de discrétisation en temps de type saute-mouton d'ordre 2 et d'ordre 4.

- Le Chapitre 3 a pour objet d'analyser mathématiquement la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ proposée. Premièrement, nous étudions la stabilité L^2 théorique de ce schéma : aprés avoir démontré qu'il conserve une énergie discrète, nous exhibons une condition suffisante de stabilité de type CFL. La seconde analyse consiste à prouver la convergence en h de ce schéma conduisant à un estimateur d'erreur a-priori théorique.
- Le Chapitre 4 est conscacré à plusieurs expériences et tests numériques en deux dimensions d'espace. Nous exposons tout d'abord le système des équations de Maxwell 2D et donnons des indications sur l'implémentation de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en maillages hybrides triangulaires / quadrangulaires visant à la résolution numérique de ce système. Plusieurs cas tests sont mis en œuvre afin de montrer différentes propriétés et caractéristiques de la méthode : convergence numérique, performance, comparaison avec des maillages triangulaires, etc.
- Dans le chapitre 5, nous présentons, dans un esprit similairs au chapitre 4, les expériences numériques en trois dimensions d'espace. Nous donnons ici aussi des explications sur l'implémentation de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ où de nouvelles difficultés sont en jeu. Après avoir décrit les problèmes tests considérés, nous commentons et discutons les résultats obtenus au cours des différentes expérimentation et montrons d'autres particularités de la méthode hybride.
- Enfin, dans le chapitre 6 nous résumons et synthétisons l'ensemble des résultats obtenus, ainsi que les apports de cette méthode de type Galerkin discontinu en maillages hybrides. Nous terminons par énoncer les perspectives à court et à long termes.

1.4 Liste des publications et communications issues de la thèse

1.4.1 Publications

Proceedings

[P1] C. Durochat, S. Lanteri et C. Scheid, *High order non-conforming multi-element discontinuous Galerkin method for time-domain electromagnetics*, in proc. of the 2012 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA '12), pp. 379–382.

[P2] C. Durochat et C. Scheid, *A-priori convergence analysis of a Discontinuous Galerkin Time-Domain method to solve Maxwell's equations on hybrid meshes*, in proc. of the European NUmerical MATHematics and advanced applications (ENUMATH 2011).

[P3] C. Durochat, *Non-conforming discontinuous Galerkin time-domain method for solving Maxwell's equations on hybrid meshes*, in proc. of the Fifth International Conference on Advanced COmputational Methods in ENgineering (ACOMEN 2011).

[P4] C. Durochat et S. Lanteri, *DGTD method on hybrid meshes for time domain electromagnetics*, in proc. of the ElectroMagnetic Theory, 20th URSI international Symposium on (EMTS 2010), pp. 992–995.

Rapports de Recherche INRIA

[R1] C. Durochat et C. Scheid, *Étude de convergence a-priori d'une méthode Galerkin Discontinue en maillage hybride et non-conforme pour résoudre les équations de Maxwell instationnaires*, Rapport de Recherche INRIA no. 7933 (2012).

[R2] C. Durochat et S. Lanteri, *Méthode Galerkin discontinue en maillage hybride triangulaire / quadrangulaire pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires*, Rapport de Recherche INRIA no. 7253 (2010).

Articles soumis

[A1] C. Durochat et S. Lanteri, *DGTD method on hybrid structured-unstructured meshes for time domain electromagnetics*, soumis à la revue : Journal of Computational and Applied Mathematics.

Articles en préparation

[A2] C. Durochat, S. Lanteri et C. Scheid, *High order Non-Conforming Multi-Element Discontinuous Galerkin method domain electromagnetics*.

1.4.2 Communications

Communications orales dans des conférences internationales et workshops

2 – 7 Septembre 2012 : ICEAA '12 (2012 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications), Le Cap, Afrique du Sud.

25 – 27 Juillet 2012 : 1st Brazil-France workshop (CNPq/INRIA meeting), Biot, France.

14 – 17 Novembre 2011 : ACOMEN 2011 (5th international conference on Advanced COmputational Methods in ENgineering), Liège, Belgique.

5 – 9 Septembre 2011 : ENUMATH 2011 (European NUmerical MATHematics and advanced applications), Leicester, Royaume-Uni.

16 – 19 Août 2010 : EMTS 2010 (ElectroMagnetic Theory, 20th URSI international Symposium on), Berlin, Allemagne.

Communications orales dans des colloques et séminaires nationaux

20 Décembre 2012 : Séminaire au CERFACS, Toulouse.

5 – 6 Juillet 2011 : Journées du groupe (GdR) Calcul du CNRS, Paris.

25 Mai 2011 : 6ème colloque de doctorants de l'ED SFA (École Doctorale en Sciences Fondamentales et Appliquées), Nice.

Communications murales dans des conférences nationales

31 Mai – 4 Juin 2010 : CANUM 2010 (40ème Congrès national d'Analyse NUMérique), Carcans-Maubuisson.

CHAPITRE 2

Résolution des équations de Maxwell par une méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$

Sommaire

2.1 Équations de Maxwell tridimensionnelles **9**
2.1.1 Aspects historiques et équivalence des formulations intégrales et E.D.P. . . . 9
2.1.2 Présentation des équations de Maxwell et matériaux diélectriques 11
2.1.3 Réécriture des équations et conditions aux limites 13
2.2 Discrétisation spatiale en maillage hybride par une méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ **15**
2.2.1 Formulation faible avec fonctions tests scalaires 17
2.2.2 Formulation faible équivalente avec fonction test vectorielle 20
2.2.3 Equations semi-discrétisées pour les cellules tétraédriques 22
2.2.4 Equations semi-discrétisées pour les cellules hexaédriques 24
2.3 Discrétisation en temps **27**
2.3.1 Schéma saute-mouton d'ordre 2 29
2.3.2 Schéma saute-mouton d'ordre 4 30

Ce chapitre est destiné à exposer le contexte physique et méthodologique de cette étude. Nous positionnons le problème de Maxwell, en rappelant les origines du phénomène ondulatoire (électromagnétique), et en expliquant la modélisation de ce problème aboutissant à un système d'équations aux dérivées partielles instationnaires. Nous présentons ensuite la méthode Galerkin discontinue en maillages multi-éléments tétraédriques / hexaédriques en trois dimensions d'espace, que nous appelons méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$. Nous formulons enfin des schémas d'intégration en temps de type saute-mouton du deuxème ou du quatrième ordre.

2.1 Équations de Maxwell tridimensionnelles

2.1.1 Aspects historiques et équivalence des formulations intégrales et E.D.P.

Rappelons l'aspect historique de ces équations. Les équations de Maxwell sont des lois fondamentales de la physique qui constituent les postulats de base de l'électromagnétisme. Ces équations représentent une synthèse harmonieuse des diverses lois expérimentales découvertes (lois de l'électrostatique, du magnétostatique, de l'induction, etc.) par les prédécesseurs de James Clerk Maxwell, qui régissaient l'électromagnétisme avant que ce dernier ne les réunisse. Elles donnent ainsi un modèle mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Michael Faraday dans les années 1830. Cette synthèse n'a été possible que parce

que Maxwell a su dépasser les travaux existants, en ajoutant dans une équation un "chaînon manquant", appelé le courant de déplacement, dont la présence assure la cohérence de l'édifice unifié. De plus, les équations de Maxwell montrent notamment qu'en régime stationnaire, les champs électrique et magnétique sont indépendants l'un de l'autre (totalement découplés), alors qu'ils ne le sont pas en régime variable (i.e. instationnaire). Dans le cas le plus général, il faut donc parler du champ électromagnétique, la dichotomie électrique/magnétique n'étant plus valable. Ces travaux de Maxwell ont permis ultérieurement les deux plus grandes avancées de la physique moderne, à savoir la théorie de la relativité restreinte et la physique quantique.

Trois publications de James Clerk Maxwell furent essentielles lors de ses travaux sur ces équations. La première est un papier en quatre parties, publié entre 1861 et 1862 [Maxwell 1862] (Maxwell était alors agé de 30 ans) et intitulé *On Physical Lines of Force* dans lequel apparaissent d'ores et déjà individuellement (i.e. de façon séparées) chacune des équations de Maxwell modernes. C'est dans ce papier que Maxwell introduit le concept de courant de déplacement pour étendre aux régimes instationnaires le théorème d'Ampère, alors valide en magnétostatique. Le document a inauguré une nouvelle ère de l'électrodynamique classique et a déclenché également de nouveaux progrès mathématiques dans le domaine du calcul vectoriel. Pour cette raison, il est considéré comme l'une des publications les plus importantes historiquement dans le domaine de la physique et de la science en général. Dans l'article *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* [Maxwell 1865], plus précisément dans la partie III intitulée *General Equations of the Electromagnetic Field*, Maxwell présente vingt équations à vingt inconnues (il utilise alors la version modifiée du théorème d'Ampère en y ajoutant le courant de déplacement au terme de courant électrique). Dans ce papier, Maxwell propose de plus, pour la première fois, une vision de la lumière comme un phènomène (une onde) électromagnétique. C'est en 1873, dans son célèbre ouvrage *A treatise on Electricity and Magnetism* [Maxwell 1873], que les équations apparaissent pour la première fois dans leur forme pleinement développée ; là aussi, vingt équations, déjà modifiées par rapport à la version de 1865, et écrites à l'aide de quaternions. Ce n'est que plus tard, dans les années 1880, que le physicien autodidacte Oliver Heaviside, réécrivit les équations de Maxwell dans leur forme actuelle. Il reformula alors les vingt équations en quatre équations écrites sous une forme vectorielle (huit équations au total, aux dérivées partielles, et en faisant intervenir, entre autres, la notation ∇).

Les équations de Maxwell actuelles sont connues sous deux formes différentes : formulations à l'aide d'équations intégrales et formulations à l'aide d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.). Nous nous intéressons, dans ce document, uniquement au système formulé par des E.D.P. (i.e. formulations locales), et nous ne retranscrirons donc pas les formulations intégrales. Cependant, il est important de rappeler que ces deux formulations sont équivalentes, ceci se démontre à l'aide de deux théorèmes majeurs en physique mathématique, que nous mentionnons brièvement. Le théorème de la divergence de Gauss (ou théorème de Gauss-Ostrogradsky, ou théorème de flux-divergence, ou encore théorème de Green-Ostrogradsky) s'énonce de la manière suivante : soit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs sur un volume $V \in \mathbb{R}^3$ dont la frontière est la surface fermée ∂V, alors on a :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, d\mathbf{x} = \oiint_{\partial V} (\mathbf{F} \cdot \check{\mathbf{n}})\; dS,$$

où "$\cdot$" désigne ici le produit scalaire usuel, $d\mathbf{x}$ est un élément de volume, dS un élément de surface infinitésimal de la frontière ∂V bornant V, et $\check{\mathbf{n}}$ la normale unitaire sortante à cette surface. Ce

théorème permet par ailleurs de déduire les formules d'integration par parties de Green. Le second théorème, nommé théorème de Kelvin-Stokes (ou théorème de Stokes), s'applique au même champ de vecteurs $\mathbf{F}$ et à une surface Σ dont le contour est $\partial\Sigma$, une courbe fermée orientée dans $\mathbb{R}^3$:

$$\iint_{\Sigma} (\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \check{\mathbf{n}})\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \left(\mathbf{F} \cdot \check{\mathbf{t}}\right)\, dl,$$

où dl est un élément de longueur infinitésimal de la courbe frontière $\partial\Sigma$, et $\check{\mathbf{t}}$ le vecteur tangent unitaire à $\partial\Sigma$. On peut alors déduire les formulations E.D.P. des équations de Maxwell à partir des formulations intégrales, en appliquant ces deux théorèmes et en prenant un volume (ou une surface) infinitésimal ; la réciproque se démontre facilement en appliquant également ces théorèmes. Aujourd'hui, les théorèmes de Kelvin-Stokes et de divergence de Gauss sont simplement des cas particuliers du théorème de Stokes généralisé, en géométrie différentielle. Nous concluons cette sous-section par une anecdote concernant le théorème de Kelvin-Stokes : ce dernier est apparu pour la première fois dans une lettre de William Thomson, plus connu sous le nom de Lord Kelvin, à Sir George Stokes, le 2 Juillet 1850. Stokes posa alors ce théorème comme une question à l'examen du Prix Smith en 1854, et le gagnant de ce prix (premier ex-æcquo), cette année là, n'était autre que James Clerk Maxwell.

2.1.2 Présentation des équations de Maxwell et matériaux diélectriques

Soit Ω un ouvert, borné et régulier de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$. Un champ électromagnétique dans Ω est décrit par un quadruple champ de vecteurs :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) & : \text{ champ électrique,} \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) & : \text{ champ magnétique,} \\ \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) & : \text{ induction électrique,} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) & : \text{ induction magnétique,} \end{cases}$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ et chacun de ces champs ont trois composantes. Une étude d'un phénomène électromagnétique consiste à déterminer à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$ et au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ les quatres champs de vecteurs ci-dessus. Ces derniers sont reliés à :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}, t) & : \text{ densité de charge électrique,} \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) & : \text{ densité de courant.} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : ρ est scalaire et $\mathbf{j}$ a trois composantes.

Les variations en espace et en temps de ces quantités sont alors régies par les <u>équations de Maxwell</u> :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{B} + \mathrm{rot}(\mathbf{E}) & = & 0 & : & \text{équation de Maxwell-Faraday,} \\ \partial_t \mathbf{D} - \mathrm{rot}(\mathbf{H}) + \mathbf{j} & = & 0 & : & \text{équation de Maxwell-Ampère,} \\ \mathrm{div}(\mathbf{D}) & = & \rho & : & \text{équation de Maxwell-Gauss,} \\ \mathrm{div}(\mathbf{B}) & = & 0 & : & \text{équation du flux magnétique,} \end{cases}$$

où $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$. L'équation de Maxwell-Faraday (trois équations au total) lie la force électromotrice à la variation de flux d'induction. L'équation de Maxwell-Ampère (forme locale du théorème d'Ampère assorti de la correction de Maxwell, trois équations au total) quant à elle relie le champ magnétique à ses sources et au champ électrique. L'équation de Maxwell-Gauss (une seule équation, qui sous sa forme intégrale est connue sous le nom de loi de Gauss) relie le champ électrique à ses sources. Enfin, l'équation du flux magnétique postule l'absence de charge magnétique (une seule équation). Nous avons alors ici un système de huit équations à douze inconnues (**B**, **D**, **E** et **H**).

Nous notons de plus que les densités ρ et **j** sont alors nécessairement reliées par la loi de conservation de la charge (en prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, en dérivant l'équation de Maxwell-Gauss et en ajoutant, membre à membre, les deux équations obtenues) :

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\mathbf{j}) = 0.$$

Or, ces équations ne suffisent pas à caractériser le champ élctromagnétique. Il convient alors de décrire les lois de comportement du matériau qui vont permettre de relier les champs **D** et **E** (resp. **B** et **H**) ainsi que de préciser les propriétés de conduction du matériau qui vont induire une relation entre la densité de courant **j** et le champ électrique **E**.

Nous nous contenterons ici de considérer des matériaux linéaires isotropes sans perte. Les lois de comportement de ces matériaux obéissent aux principes suivants :

- la loi reliant **D** (resp. **B**) à **E** (resp. **H**) est locale en espace et en temps : $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ ne dépend que de $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ (pour un même $\mathbf{x}$ et un même t),
- la loi reliant **D** à **E** est indépendante de la direction de **D** (hypothèse d'isotropie du mileu),
- la loi reliant **D** à **E** est linéaire : cette hypothèse est toujours justifée quand on considère des champs d'intensité suffisamment faible.

Ces considérations entraînent que **D** (resp. **B**) est proportionnel à **E** (resp. **H**). On introduit alors deux fonctions scalaires $\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ telles que l'on ait, en tout point et à tout instant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) & = & \varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) & = & \mu(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \end{array} \right.$$

où ε et μ sont respectivement la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu. Pour des raisons énergétiques, les quantités $\varepsilon(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ sont strictement positives. La dépendance en $\mathbf{x}$ de ces coefficients caractérise une éventuelle hétérogénéité du mileu de propagation. Dans le vide, qui est un milieu homogène particulier, ces quantités, notées alors ε_0 et μ_0, prennent les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varepsilon_0 & = & \left(36\pi.10^9\right)^{-1}, \\ \mu_0 & = & 4\pi.10^{-7}. \end{array} \right.$$

La vitesse de propagation c_0 des ondes dans le vide est donnée par :

$$\varepsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1,$$

cette égalité reste valable pour des valeurs de ε, μ et de la vitesse de propagation (notée alors c) relatives. Ceci donne alors numériquement la valeur bien connue de la vitesse de la lumière :

$$c_0 = 3.10^8\ m.s^{-1}.$$

Il nous reste enfin à présenter la modélisation des propriétés de conductivité. Il convient en général de diviser la densité de courant $\mathbf{j}$ en deux parties :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \mathbf{j_s}(\mathbf{x},t) + \mathbf{j_c}(\mathbf{x},t),$$

où $\mathbf{j_s}$ est un courant source, qui, dans la pratique, sera une donnée des problèmes que l'on aura à résoudre, courant imposé de façon "extérieure" et où $\mathbf{j_c}$ est le courant de conduction, dû aux mouvements des électrons libres dans le matériau. C'est la caractérisation de $\mathbf{j_c}$ qui fait intervenir les propriétés intrinsèques du matériau. Le plus souvent, $\mathbf{j_c}$ est relié au champ électrique par la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j_c}(\mathbf{x},t) = \sigma(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t),$$

où, dans un milieu isotrope, $\sigma(\mathbf{x})$ est une quantité scalaire et positive appelée conductivité électrique du matériau. Lorsque $\sigma \equiv 0$, le milieu est non conducteur. C'est, par exemple, le cas du vide. En général $\sigma > 0$ est synonyme de phénomènes d'absorption : une onde qui se propage dans un milieu conducteur est atténuée au cours de sa propagation.

2.1.3 Réécriture des équations et conditions aux limites

Nous pouvons à présent, réécrire un système d'équations où seuls les champs électrique et magnétique $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ vont intervenir. À partir de maintenant, les équations que nous présentons sont celles que nous étudions tout au long de ce document. Nous rappelons que Ω est un ouvert, borné et régulier de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$. Le système des équations de Maxwell tridimensionnelles est donné par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon\partial_t\mathbf{E} - \mathrm{rot}(\mathbf{H}) & = & -\sigma\mathbf{E} - \mathbf{j_s}, \\ \\ \mu\partial_t\mathbf{H} + \mathrm{rot}(\mathbf{E}) & = & 0, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{pmatrix} E_x(\mathbf{x},t) \\ E_y(\mathbf{x},t) \\ E_z(\mathbf{x},t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x},t) \equiv \begin{pmatrix} H_x(\mathbf{x},t) \\ H_y(\mathbf{x},t) \\ H_z(\mathbf{x},t) \end{pmatrix}.$$

Nous pourrions adjoindre les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{E}) & = & \rho, \\ \mathrm{div}(\mu\mathbf{H}) & = & 0, \end{array}\right.$$

mais ceci n'est pas utile car ces dernières sont considérées comme redondantes, en effet :

- l'équation $\mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho$ peut être considérée comme définissant le densité de charge $\rho(\mathbf{x},t)$,
- l'équation $\mathrm{div}(\mu\mathbf{H}) = 0$ est une conséquence, à une dérivation par rapport au temps près, de la seconde équation de (2.1).

Les équations (2.1), qui sont désormais un système de six équations (deux équations vectorielles de trois composantes chacune) à six inconnus ($\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$), ont été redimensionnées et ε et μ définissent des quantités relatives. Notre objectif est de résoudre le système (2.1) sur Ω de frontière $\partial\Omega = \partial\Omega^a \cup \partial\Omega^m$, en le complétant par les conditions aux limites suivantes, où $\mathbf{n}$ désigne la normale sortante à $\partial\Omega$:

- sur $\partial\Omega^m$: $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, qui est appelée condition aux limites métallique ;
- sur $\partial\Omega^a$: $\mathfrak{F}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathfrak{F}(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}})$ où $\mathfrak{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{n} \times \mathbf{X} - z\mathbf{n} \times (\mathbf{Y} \times \mathbf{n})$, avec $z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ et $(\mathbf{E}_{\text{inc}}, \mathbf{H}_{\text{inc}})$ un champ incident donné. Cette condition est dite absorbante, ou plus précisément condition de Silver-Müller qui est une approximation du premier ordre de la condition aux limites absorbante exacte. Le bord $\partial\Omega^a$, sur lequelle cette condition est appliquée, représente une troncature artificielle d'un domaine de calcul infini.

Ce problème est également muni de conditions initiales (i.e. pour $t = 0$) que nous explicitons en début de section 3.2. De cette manière, mathématiquement, seules les équations (2.1), munies des conditions aux limites et initiales, suffisent à déterminer de façon unique la solution $(\mathbf{E}, \mathbf{H})^{\mathrm{T}}$. Nous préciserons en détails dans quel cadre fonctionnel il convient de chercher la solution, en début de section 3.2.

Nous réécrivons le système (2.1) sous une forme condensée, appelée aussi forme pseudo-conservative :

$$Q(\partial_t \mathbf{W}) + \nabla \cdot F(\mathbf{W}) = \mathbf{J}, \tag{2.2}$$

où :

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{bmatrix} \varepsilon \mathrm{I}_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \mu \mathrm{I}_{3\times3} \end{bmatrix} \text{ une matrice de taille } 6 \times 6, \\
\mathbf{W} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \ \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma\mathbf{E} - \mathbf{j_s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \text{ et } F(\mathbf{W}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{W}) \\ F_2(\mathbf{W}) \\ F_3(\mathbf{W}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{18},
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
F_1(\mathbf{W}) &= \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & N_1 \\ -N_1 & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = \big(0,\ H_z,\ -H_y,\ 0,\ -E_z,\ E_y\big)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6, \\
F_2(\mathbf{W}) &= \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & N_2 \\ -N_2 & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = (-H_z,\ 0,\ H_x,\ E_z,\ 0,\ -E_x)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6, \\
F_3(\mathbf{W}) &= \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & N_3 \\ -N_3 & 0_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W} = \big(H_y,\ -H_x,\ 0,\ -E_y,\ E_x,\ 0\big)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6,
\end{aligned}$$

et N_1, N_2, N_3 sont les matrices (anti-symétriques) données par :

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est important de souligner que la notation "$\cdot$" est ici un abus de notation dans le sens où il ne s'agit pas là d'un produit scalaire. Nous définissons celle-ci, uniquement pour cette sous-section et pour les sous-sections 2.2.1 et 2.2.2, de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{18}$ dans $\mathbb{R}^6$: soit $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \mathbf{b_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{18}$ où $\mathbf{b_1}$ désigne les 6 premières composantes de $\mathbf{b}$, $\mathbf{b_2}$ les 6 suivantes et $\mathbf{b_3}$ les 6 dernières, on a alors : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1\mathbf{b_1} + a_2\mathbf{b_2} + a_3\mathbf{b_3}$.

Ainsi, dans le système (2.2) on a :

$$\nabla \cdot F(\mathbf{W}) = \partial_{x_1} F_1(\mathbf{W}) + \partial_{x_2} F_2(\mathbf{W}) + \partial_{x_3} F_3(\mathbf{W}) \ \in \mathbb{R}^6.$$

2.2 Discrétisation spatiale en maillage hybride par une méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$

Nous présentons dans cette section l'ensemble des étapes de la méthode Galerkin discontinue en trois dimensions, d'ordre arbitraire, en maillage hybride tétraédrique / hexaédrique (triangulaire / quadrangulaire en deux dimensions), que l'on appelle méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$.

Le domaine Ω est supposé discrétisé par $\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{N} c_i = \mathscr{T}_h \bigcup \mathscr{Q}_h$, où les c_i désignent des cellules qui sont des tétraèdres ($\in \mathscr{T}_h$) ou des hexaèdres ($\in \mathscr{Q}_h$) en 3D (des triangles ou des quadrangles en 2D).

Dans le cas 2D, le maillage obtenu peut être conforme, ou non-conforme (comme par exemple dans [Fahs 2009a, Fahs & Lanteri 2010]) i.e. comportant des noeuds flottants sur une face commune à deux éléments de différents types. D'autre part en 3D, pour obtenir un maillage hybride conforme, il faut faire appel à des éléments intermédiaires (car les faces des tétraèdres sont des triangles alors que celles des hexaèdres sont des quadrangles), prismes ou pyramides (cf [Bergot *et al.* 2010]), ce qui complique notablement le processus de construction du maillage. Dans le cadre d'une méthode de discrétisation Galerkin Discontinue, il n'est pas nécessaire d'imposer une telle conformité. Dans la présente étude, nous considérons des maillages hybrides et non-conformes, tout en nous limitant à un certain type de non-conformité schématisé sur la figure FIG. 2.1.

Autrement dit, on se limitera au cas où, sur une face hybride, l'ensemble des faces triangulaires (issues des tétraèdres) coïncide avec la face quadrangulaire de l'hexaèdre voisin. Nous schématisons sur la figure FIG. 2.2, un exemple de non-conformité quelconque ne correspondant pas à ce cadre.

Sous cette condition, nous pouvons de plus faire coïncider plusieurs faces triangulaires avec la face quadrangulaire de l'hexaèdre voisin. Ce nombre de faces est indicé par un entier que l'on note n_{raf} (cf FIG. 2.3). Par convention, $n_{raf} = 1$ correspond au cas, où une face quadrangulaire coïncide avec 2 faces triangulaires, $n_{raf} = 2$ lorsqu'elle coïncide avec 8 faces triangulaires, etc. Nous reviendrons sur cet indice de raffinement dans le chapitre 5.

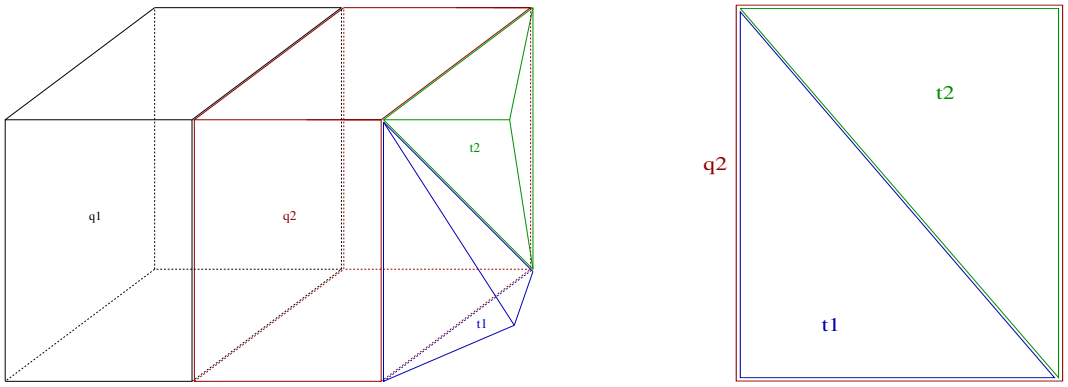


FIG. 2.1 – Gauche : Type de non-conformité considérée en 3D, entre un hexaèdre (q2) et deux tétraèdres (t1 et t2). – Droite : Vue 2D d'une face hybride non-conforme entre l'hexaèdre q2 et les deux tétraèdres t1 et t2.

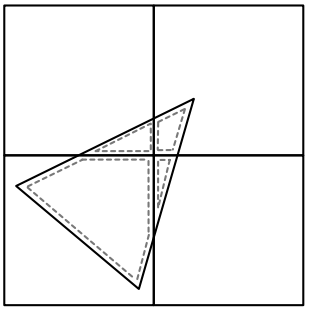


FIG. 2.2 – Exemple de non-conformité entre plusieurs éléments, sortant du cadre considéré.

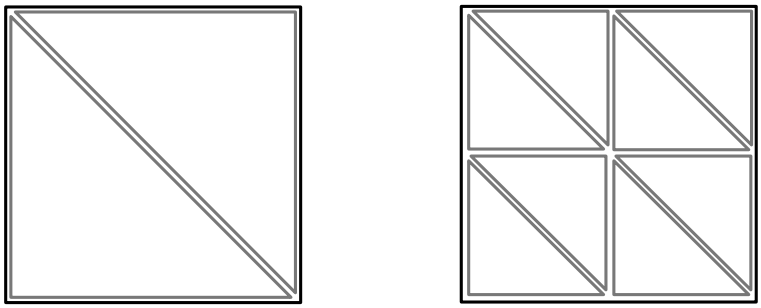


FIG. 2.3 – Exemples de non-conformités considérées. Gauche : $n_{raf} = 1$. – Droite : $n_{raf} = 2$.

2.2.1 Formulation faible avec fonctions tests scalaires

Pour la présentation des schémas de discrétisation, nous considérons uniquement des frontières métalliques (i.e. $\partial\Omega^a = \varnothing$) et nous supposons également $\mathbf{J} = 0$. Nous notons ψ une fonction test scalaire. En multipliant (2.2) par ψ et en intégrant sur c_i, nous obtenons :

$$\int_{c_i} Q(\partial_t \mathbf{W})\psi \, d\mathbf{x} + \int_{c_i} (\nabla \cdot F(\mathbf{W}))\psi \, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.3}$$

En utilisant une formule d'intégration par parties (Green), nous avons :

$$\int_{c_i} Q(\partial_t \mathbf{W})\psi \, d\mathbf{x} - \int_{c_i} \nabla\psi \cdot F(\mathbf{W}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial c_i} (\check{\mathbf{n}} \cdot F(\mathbf{W})) \, \psi \, dS = 0. \tag{2.4}$$

Soit $\mathbb{P}_p[c_i]$ l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus p sur $c_i \in \mathscr{T}_h$ (par exemple, les polynômes $\mathbb{P}_2$ en 2D sont de la forme $\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2$), muni de la base locale $\phi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{id_i})^{\mathrm{T}}$ avec d_i le nombre de degrés de liberté pour le tétraèdre c_i. Soit $\mathbb{Q}_k[c_i]$ l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus k par rapport chaque variable séparément sur $c_i \in \mathscr{Q}_h$ (par exemple, les polynômes $\mathbb{Q}_2$ en 2D sont de la forme $\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_1 x_2 + \gamma_4 x_1^2 + \gamma_5 x_2^2 + \gamma_6 x_1^2 x_2 + \gamma_7 x_1 x_2^2 + \gamma_8 x_1^2 x_2^2$), muni de la base locale $\theta_i = (\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2}, \ldots, \vartheta_{ib_i})^{\mathrm{T}}$ avec b_i le nombre de degrés de liberté pour l'hexaèdre c_i. Plus de détails sur les fonctions de base que nous utilisons sont donnés dans les sous-sections 4.1.2.1 (2D) et 5.1.1 (3D), ainsi que dans l'annexe A. Les degrés de liberté locaux sont notés $\mathbf{W}_{il} \in \mathbb{R}^6$ et $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^6$ définira la restriction de la solution approchée à la cellule c_i (i.e. $\mathbf{W}_i = \mathbf{W}_{h|c_i}$). Ainsi, $\mathbb{P}_p[c_i] = \mathrm{Vect}\left(\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{id_i}\right)$, $\mathbb{Q}_k[c_i] = \mathrm{Vect}\left(\vartheta_{i1}, \ldots, \vartheta_{ib_i}\right)$ et nous avons :

- Si $c_i \in \mathscr{T}_h$: $$\mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{W}_{il}\varphi_{il}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{E}_{il}\varphi_{il}(\mathbf{x}) \\ \sum_{l=1}^{d_i} \mathbf{H}_{il}\varphi_{il}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

- Si $c_i \in \mathscr{Q}_h$: $$\mathbf{W}_i(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{W}_{il}\vartheta_{il}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{E}_{il}\vartheta_{il}(\mathbf{x}) \\ \sum_{l=1}^{b_i} \mathbf{H}_{il}\vartheta_{il}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

<u>Remarque</u> : plus précisément, chaque composante de $\mathbf{W}_i(\mathbf{x})$ s'écrit dans la base ϕ_i ; ici, on écrit directement $\mathbf{W}_i(\mathbf{x})$ sous forme vectorielle. On ne se soucie pas, pour le moment, du type de base choisi (i.e. modale ou nodale, hirarchique ou non, orthogonale ou non, etc.).

Nous cherchons alors une solution approchée $\mathbf{W}_h$ dans l'espace d'approximation global V_h^6, défini par :

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall c_i \in \mathscr{T}_h,\ v_{h|c_i} \in \mathbb{P}_p[c_i] \\ \forall c_i \in \mathscr{Q}_h,\ v_{h|c_i} \in \mathbb{Q}_k[c_i] \end{array} \right\}. \tag{2.7}$$

Maintenant, notons $a_{ij} = c_i \cap c_j$ la face commune entre c_i et c_j et $\mathscr{V}_i = \{j | c_i \cap c_j \neq \varnothing\}$ l'ensemble des éléments voisins de c_i. Cette définition comprend également les faces a_{ij} se situant sur la frontière $\partial\Omega$ (c_i étant alors une cellule au bord du domaine) en introduisant dans ce cas c_j comme

une cellule fictive. On introduit également la notation $\check{\mathbf{n}}_{ij}$ qui est le vecteur normal unitaire à a_{ij} sortant dirigé de c_i vers c_j et $\check{\mathbf{n}}_{ij} = (\check{n}^1_{ij}, \check{n}^2_{ij}, \check{n}^3_{ij})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$; si a_{ij} est une face frontière (i.e. si $a_{ij} \in \partial\Omega$), issue d'un tétraèdre ou d'un hexèdre, $\check{\mathbf{n}}_{ij}$ est sortante au domaine Ω. On suppose enfin que les coefficients électromagnétiques ε et μ sont constants par élément. En injectant $\mathbf{W}_h$ dans l'équation 2.4 (et en remplaçant alors $\int_{\partial c_i}$ par $\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}}$), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{c_i} Q(\partial_t \mathbf{W}_h)\psi\, d\mathbf{x} - \int_{c_i} \nabla\psi \cdot F(\mathbf{W}_h)\, d\mathbf{x} + \sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_h)\right)\psi\, dS &= 0,\\
\iff\quad Q_i\int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi\, d\mathbf{x} - \int_{c_i} \nabla\psi \cdot F(\mathbf{W}_i)\, d\mathbf{x} + \sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_h)\right)\psi\, dS &= 0. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

avec $Q_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & \mu_i I_{3\times3} \end{bmatrix}$, où ε_i et μ_i sont des valeurs constantes sur c_i.

Puisqu'aucune forme de continuité n'est assurée d'un élément à un autre pour le champ de vecteurs $\mathbf{W}_h$, un traitement particulier doit être introduit pour l'évaluation des intégrales de bord sur la face a_{ij}. Dans le contexte des méthodes volumes finis, on parle de flux numérique. Nous utilisons ici un flux numérique basé sur un schéma centré :

$$\mathbf{W}_h|_{a_{ij}} = \frac{\mathbf{W}_i|_{a_{ij}} + \mathbf{W}_j|_{a_{ij}}}{2}.$$

Par conséquent (en utilisant la linéarité de F) :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_h)\right)\psi\, dS &= \sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F\left(\frac{\mathbf{W}_i+\mathbf{W}_j}{2}\right)\right)\psi\, dS\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_i)\right)\psi\, dS + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_j)\right)\psi\, dS\\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial c_i} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_i)\right)\psi\, dS + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_j)\right)\psi\, dS.
\end{aligned}$$

A l'aide, une seconde fois, d'une intégration par parties appliquée au terme $\frac{1}{2}\int_{\partial c_i} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_i)\right)\psi\, dS$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_h)\right)\psi\, dS = \frac{1}{2}&\int_{c_i} \left((\nabla\cdot F(\mathbf{W}_i))\,\psi + \nabla\psi\cdot F(\mathbf{W}_i)\right)\, d\mathbf{x} +\\
\frac{1}{2}&\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_j)\right)\psi\, dS.
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

Ainsi, en remplaçant (2.9) dans l'équation (2.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Q_i\int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{c_i} \left((\nabla\cdot F(\mathbf{W}_i))\,\psi - \nabla\psi\cdot F(\mathbf{W}_i)\right) d\mathbf{x} +\\
\frac{1}{2}\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\int_{a_{ij}} \left(\check{\mathbf{n}}_{ij}\cdot F(\mathbf{W}_j)\right)\psi dS = 0,
\end{aligned}$$

ce qui peut être réécrit comme :

$$Q_i \int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{c_i} \left(\left(\sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} F_k(\mathbf{W}_i) \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) F_k(\mathbf{W}_i) \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathscr{V}_i} \int_{a_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{3} \breve{n}_{ij}^k F_k(\mathbf{W}_j) \right) \psi \, dS = 0. \tag{2.10}$$

Maintenant, nous définissons les matrices suivantes :

- $\mathcal{N}^k = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & N_k \\ -N_k & 0_{3\times3} \end{bmatrix}$,
- $\mathcal{M}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \breve{n}_{ij}^k \mathcal{N}^k = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & \breve{N}_{ij} \\ -\breve{N}_{ij} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}$, où $\breve{N}_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \breve{n}_{ij}^k N_k = \begin{bmatrix} 0 & \breve{n}_{ij}^3 & -\breve{n}_{ij}^2 \\ -\breve{n}_{ij}^3 & 0 & \breve{n}_{ij}^1 \\ \breve{n}_{ij}^2 & -\breve{n}_{ij}^1 & 0 \end{bmatrix}$,

et enfin l'équation (2.10) devient :

$$Q_i \int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{c_i} \left(\left(\sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathscr{V}_i} \int_{a_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{3} \breve{n}_{ij}^k \mathcal{N}^k \mathbf{W}_j \right) \psi \, dS = 0,$$

$$\iff Q_i \int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\int_{c_i} \left(\left(\sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathscr{V}_i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \psi \, dS = 0. \tag{2.11}$$

Remarques :

- $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ on a $\breve{N}_{ij}\mathbf{X} = \mathbf{X} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}$. De plus, $\breve{\mathbf{n}}_{ij} = -\breve{\mathbf{n}}_{ji}$ et donc $\breve{N}_{ij} = -\breve{N}_{ji}$.
- Les matrices N_k et $\breve{N}_{ij}$ sont de taille 3×3 et sont anti-symétriques ; les matrices $\mathcal{N}^k$ et $\mathcal{M}_{ij}$ sont de taille 6×6 et sont symétriques.

Pour le traitement numérique des conditions aux limites i.e. pour les interfaces a_{ij} localisées sur la discrétisation de $\partial\Omega^m$, nous considérons une cellule fictive c_j et nous établissons :

Sur $a_{ij} \in \partial\Omega^m$: $\mathbf{W}_j = \begin{bmatrix} -I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W}_i$, i.e. : $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_j \\ \mathbf{H}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{E}_i \\ \mathbf{H}_i \end{pmatrix}$. Donc : $\mathbf{W}_h|_{a_{ij}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{H}_i|_{a_{ij}} \end{pmatrix}$.

Ainsi, dans (2.11), si $a_{ij} \in \partial\Omega^m$, on obtient : $\mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j = \mathcal{M}_{ij} \begin{bmatrix} -I_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} \mathbf{W}_i = \mathcal{S}_{im}\mathbf{W}_i$,

avec $\mathcal{S}_{im} = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & \breve{N}_{ij} \\ \breve{N}_{ij} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}$, qui est une matrice 6×6 anti-symétrique.

Nous distinguerons par la suite deux cas différents :

- Cas (A) : $c_i \in \mathscr{T}_h$. c_i est un tétraèdre et les cellules voisines de c_i sont des tétraèdres ou des hexaèdres. Une face de l'élément fini c_i, est alors soit une face frontière métallique de tétraèdre (i.e. $a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i$), soit une face interne commune à deux tétraèdres (i.e. $a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i$), soit une face interne commune à un tétraèdre et un hexaèdre, dite hybride (i.e. $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i$). Autrement dit, pour $j \in \mathscr{V}_i$ on a $c_j \in \mathscr{T}_h \bigcup \mathscr{Q}_h$, et donc $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i \bigcup \mathscr{T}_d^i \bigcup \mathscr{T}_m^i$.

  En séparant alors dans l'équation (2.11) la somme pour $j \in \mathscr{V}_i$ en somme pour $a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i$, somme pour $a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i$ et somme pour $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i$, nous obtenons la formulation faible spécifique aux cellules tétraédriques (sous forme d'un système de 6 équations) suivante :

$$\begin{aligned} &2Q_i \int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \int_{c_i} \left(\left(\sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \\ &\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j \psi dS + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{S}_{im}\mathbf{W}_i \psi dS + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j \psi dS = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

  Remarque : dans chaque terme $\mathbf{W}_i \in \mathbb{P}_p[c_i]$ (resp. $\mathbf{W}_j \in \mathbb{P}_p[c_j]$), excepté dans la somme sur $\mathscr{H}_d^i$ où $\mathbf{W}_j \in \mathbb{Q}_k[c_j]$.

- Cas (B) : $c_i \in \mathscr{Q}_h$. c_i est un hexaèdre et les cellules voisines sont des hexaèdres ou des tétraèdres. Une face de l'élément fini c_i, est alors soit une face frontière métallique d'hexaèdre (i.e. $a_{ij} \in \mathscr{Q}_m^i$), soit une face interne commune à deux hexaèdres (i.e. $a_{ij} \in \mathscr{Q}_d^i$), soit une face interne commune à un hexaèdre et un tétraèdre, dite hybride (i.e. $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i$). Autrement dit, pour $j \in \mathscr{V}_i$ on a $c_j \in \mathscr{T}_h \bigcup \mathscr{Q}_h$, et donc $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i \bigcup \mathscr{Q}_d^i \bigcup \mathscr{Q}_m^i$.

  En séparant alors dans l'équation (2.11) la somme pour $j \in \mathscr{V}_i$ en somme pour $a_{ij} \in \mathscr{Q}_d^i$, somme pour $a_{ij} \in \mathscr{Q}_m^i$ et somme pour $a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i$, nous obtenons la formulation faible spécifique aux cellules hexaédriques (sous forme d'un système de 6 équations) suivante :

$$\begin{aligned} &2Q_i \int_{c_i} (\partial_t \mathbf{W}_i)\psi d\mathbf{x} + \int_{c_i} \left(\left(\sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right) \psi - \sum_{k=1}^{3} (\partial_{x_k}\psi) \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right) d\mathbf{x} + \\ &\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j \psi dS + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{S}_{im}\mathbf{W}_i \psi dS + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}_j \psi dS = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

  Remarque : ici, dans chaque terme $\mathbf{W}_i \in \mathbb{Q}_k[c_i]$ (resp. $\mathbf{W}_j \in \mathbb{Q}_k[c_j]$), excepté dans la somme sur $\mathscr{H}_d^i$ où $\mathbf{W}_j \in \mathbb{P}_p[c_j]$.

Remarque : des conditions initales sont associées à ces deux formulations faibles. Nous les explicitons dans la section 3.2.

2.2.2 Formulation faible équivalente avec fonction test vectorielle

Nous avons considéré en section précédente, une fonction test scalaire ψ afin d'aboutir aux formulations faibles (2.12) et (2.13), chacune obtenue sous forme d'un système de 6 équations. Or, certains aspects ou démonstrations théoriques relatifs à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ (comme l'analyse de convergence) peuvent nécessiter l'utilisation de formulations faibles sous forme d'une seule équation (dans le cas (A) et dans le cas (B)). Pour cela, nous notons $\vec{\psi} =$

$(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^6$ une fonction test vectorielle. En appliquant le produit scalaire (euclidien, noté $\langle . \, , \, . \rangle$) par $\vec{\psi}$ au système (2.2) et en intégrant sur c_i, nous obtenons :

$$\int_{c_i} \langle Q(\partial_t \mathbf{W}) \, , \, \vec{\psi} \rangle d\mathbf{x} + \int_{c_i} \langle \nabla \cdot F(\mathbf{W}) \, , \, \vec{\psi} \rangle d\mathbf{x} = 0. \tag{2.14}$$

Pour obtenir les formulations faibles, nous suivons les mêmes étapes que dans la sous-section 2.2.1 (en reprenant les mêmes notations, définitions, etc.). Ainsi, nous déduisons dans le cas (A) la formulation faible suivante, sous forme d'une seule équation :

$$\begin{aligned} &2Q_i \int_{c_i} \langle \partial_t \mathbf{W}_i \, , \, \vec{\psi} \rangle \, d\mathbf{x} + \int_{c_i} \left(\left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \, , \, \vec{\psi} \right\rangle - \sum_{k=1}^{3} \left\langle \partial_{x_k} \vec{\psi} \, , \, \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right\rangle \right) d\mathbf{x} + \\ &\sum_{a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \, , \, \vec{\psi} \rangle \, dS + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{S}_{im} \mathbf{W}_i \, , \, \vec{\psi} \rangle \, dS + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \, , \, \vec{\psi} \rangle \, dS = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De même dans le cas (B) :

$$\begin{aligned} &2Q_i \int_{c_i} \langle \partial_t \mathbf{W}_i \, , \, \vec{\psi} \rangle \, d\mathbf{x} + \int_{c_i} \left(\left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \, , \, \vec{\psi} \right\rangle - \sum_{k=1}^{3} \left\langle \partial_{x_k} \vec{\psi} \, , \, \mathcal{N}^k \mathbf{W}_i \right\rangle \right) d\mathbf{x} + \\ &\sum_{a_{ij} \in \mathscr{Q}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \, , \, \vec{\psi} \rangle \, dS + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{Q}_m^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{S}_{im} \mathbf{W}_i \, , \, \vec{\psi} \rangle \, dS + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij} \mathbf{W}_j \, , \, \vec{\psi} \rangle \, dS = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Remarque : les conditions initales associées à ces deux formulations faibles sont explicitées dans la section 3.2.

Enfin, l'utilisation de fonctions tests vectorielles nécessite d'introduire les $6d_i$ fonctions de base vectorielles $\vec{\varphi}_{i1}, \ldots, \vec{\varphi}_{i(6d_i)}$ qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^6$, composés des fonctions de base scalaires $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{id_i}$ de $\mathbb{P}_p[c_i]$ (pour d_i fonctions de base scalaires, on a $6d_i$ fonctions de base vectorielles associées) et de la forme :

$$
\begin{array}{llllllll}
\vec{\varphi}_{i1} & = \begin{pmatrix} \varphi_{i1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{\varphi}_{i2} & = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{i1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \ldots, & \vec{\varphi}_{i6} & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{i1} \end{pmatrix}, \\
\vec{\varphi}_{i7} & = \begin{pmatrix} \varphi_{i2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{\varphi}_{i8} & = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{i2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \ldots, & \vec{\varphi}_{i12} & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{i2} \end{pmatrix}, \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & \\
\vec{\varphi}_{i(6d_i-5)} & = \begin{pmatrix} \varphi_{id_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{\varphi}_{i(6d_i-4)} & = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{id_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \ldots, & \vec{\varphi}_{i(6d_i)} & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{id_i} \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Nous introduisons également les $6b_i$ fonctions de base vectorielles $\vec{\vartheta}_{i1}, \ldots, \vec{\vartheta}_{i(6b_i)}$ qui sont des vecteurs de $\mathbb{R}^6$, composés des fonctions de base scalaires $\vartheta_{i1}, \ldots, \vartheta_{ib_i}$ de $\mathbb{Q}_k[c_i]$ (pour b_i fonctions de base scalaires, on a $6b_i$ fonctions de base vectorielles associées) et de la forme :

$$
\begin{array}{llllll}
\vec{\vartheta}_{i1} & = \begin{pmatrix} \vartheta_{i1}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, & \ldots, \vec{\vartheta}_{i6} & = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \vartheta_{i1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
\vec{\vartheta}_{i(6b_i-5)} & = \begin{pmatrix} \vartheta_{ib_i}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, & \ldots, \vec{\vartheta}_{i(6b_i)} & = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \vartheta_{ib_i} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.
\end{array}
$$

2.2.3 Equations semi-discrétisées pour les cellules tétraédriques

A partir de maintenant, on suppose le nombre de degrés de liberté d_i identique pour tous les tétraèdres c_i. On introduit les notations suivantes :

$$
\Phi_i = \int_{c_i} \phi_i \phi_i^{\mathrm{T}} d\mathbf{x}, \;\; \Phi_i^{x_k} = \int_{c_i} \left(\phi_i \left(\partial_{x_k} \phi_i \right)^{\mathrm{T}} - \left(\partial_{x_k} \phi_i \right) \phi_i^{\mathrm{T}} \right) d\mathbf{x}, \;\; \Phi_{ij} = \int_{a_{ij}} \phi_i \phi_j^{\mathrm{T}} dS
$$

et :

$$
\Upsilon_{ij} = \int_{a_{ij}} \phi_i \theta_j^{\mathrm{T}} dS,
$$

où :

- ϕ_i est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{d_i}$ et ϕ_i^{T} (resp. ϕ_j^{T}) est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^{d_i}$ (resp. de $\mathbb{R}^{d_j}$).

- θ_j^{T} est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^{b_j}$.
- Φ_i est une matrice $d_i \times d_i$ symétrique définie positive et $\Phi_i^{x_k}$ une matrice $d_i \times d_i$ anti-symétrique.
- Φ_{ij} est une matrice $d_i \times d_i$ ($d_j = d_i$) symétrique positive.
- Υ_{ij} est une matrice rectangulaire de taille $d_i \times b_j$. L'ordre des indices (i puis j) est à respecter.

Posons $\overline{\mathbf{E}}_i$ et $\overline{\mathbf{H}}_i$, qui désignent les vecteurs de $\mathbb{R}^{3d_i}$ des degrés de liberté locaux $\mathbf{E}_{il}$ et $\mathbf{H}_{il}$ (qui sont chacun des vecteurs de $\mathbb{R}^3$) pour $l = 1, \ldots, d_i$, associés au tétraèdre c_i (notation spécifique aux tétraèdres). Posons $\widetilde{\mathbf{E}}_j$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_j$, qui désignent les vecteurs de $\mathbb{R}^{3b_j}$ des degrés de liberté locaux $\mathbf{E}_{jl}$ et $\mathbf{H}_{jl}$ pour $l = 1, \ldots, b_j$, associés à l'hexaèdre c_j (notation spécifique aux hexaèdres) :

$$\overline{\mathbf{E}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{id_i} \end{pmatrix}, \ \overline{\mathbf{H}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{id_i} \end{pmatrix}, \text{ et } \widetilde{\mathbf{E}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{j1} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{jb_j} \end{pmatrix}, \ \widetilde{\mathbf{H}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{j1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{jb_j} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Afin d'obtenir les <u>$6d_i$ équations semi-discrétisées</u>, on effectue plusieurs remplacements dans la formulation faible (2.12) (resp. (2.15)). Dans les intégrales sur c_i et sur a_{ij} pour $a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i$ et $a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i$, on remplace $\mathbf{W}_i$ (resp. $\mathbf{W}_j$) par son expression (cf (2.5)) dans la base ϕ_i (resp. ϕ_j) de $\mathbb{P}_p[c_i]$ (resp. $\mathbb{P}_p[c_j]$) ; en revanche pour le terme de somme sur $\mathscr{H}_d^i$ on remplace $\mathbf{W}_j$ par son expression (cf (2.6)) dans la base θ_j de $\mathbb{Q}_k[c_j]$. Enfin, on remplace ψ par φ_{il} pour $l = 1, \ldots, d_i$ (resp. $\vec{\psi}$ par $\vec{\varphi}_{il}$ pour $l = 1, \ldots, 6d_i$). Proposons ainsi une expression du système de $6d_i$ équations associé à la formulation hybride dans le cas (A) :

$$\forall c_i \in \mathscr{T}_h : \left\{ \begin{array}{rcl} 2\mathcal{X}_{\varepsilon,i} \dfrac{d\overline{\mathbf{E}}_i}{dt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathcal{X}_i^{x_k} \overline{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij} \overline{\mathbf{H}}_j + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i} \mathcal{X}_{im} \overline{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij} \widetilde{\mathbf{H}}_j & = & 0, \\ 2\mathcal{X}_{\mu,i} \dfrac{d\overline{\mathbf{H}}_i}{dt} - \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathcal{X}_i^{x_k} \overline{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij} \in \mathscr{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij} \overline{\mathbf{E}}_j + \sum_{a_{ij} \in \mathscr{T}_m^i} \mathcal{X}_{im} \overline{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij} \widetilde{\mathbf{E}}_j & = & 0, \end{array} \right. \tag{2.18}$$

avec :

$$
\begin{cases}
\mathcal{X}_{\varepsilon,i} = \begin{bmatrix} (\Phi_i)_{11}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{12}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{1d_i}(\varepsilon_i I_{3\times3}) \\ (\Phi_i)_{21}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{22}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{2d_i}(\varepsilon_i I_{3\times3}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_i)_{d_i1}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{d_i2}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{d_id_i}(\varepsilon_i I_{3\times3}) \end{bmatrix}, \\
\mathcal{X}_{\mu,i} = \begin{bmatrix} (\Phi_i)_{11}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{12}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{1d_i}(\mu_i I_{3\times3}) \\ (\Phi_i)_{21}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{22}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{2d_i}(\mu_i I_{3\times3}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_i)_{d_i1}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Phi_i)_{d_i2}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Phi_i)_{d_id_i}(\mu_i I_{3\times3}) \end{bmatrix}, \\
\mathcal{X}_i^{x_k} = \begin{bmatrix} (\Phi_i^{x_k})_{11}N_k & (\Phi_i^{x_k})_{12}N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{1d_i}N_k \\ (\Phi_i^{x_k})_{21}N_k & (\Phi_i^{x_k})_{22}N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{2d_i}N_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_i^{x_k})_{d_i1}N_k & (\Phi_i^{x_k})_{d_i2}N_k & \cdots & (\Phi_i^{x_k})_{d_id_i}N_k \end{bmatrix}, \\
\mathcal{X}_{ij} = \begin{bmatrix} (\Phi_{ij})_{11}\check{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{12}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{1d_i}\check{N}_{ij} \\ (\Phi_{ij})_{21}\check{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{22}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{2d_i}\check{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_{ij})_{d_i1}\check{N}_{ij} & (\Phi_{ij})_{d_i2}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Phi_{ij})_{d_id_i}\check{N}_{ij} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{X}_{im} = \begin{bmatrix} (\Phi_{ij})_{11}\check{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{12}\check{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{1d_i}\check{N}_{im} \\ (\Phi_{ij})_{21}\check{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{22}\check{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{2d_i}\check{N}_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_{ij})_{d_i1}\check{N}_{im} & (\Phi_{ij})_{d_i2}\check{N}_{im} & \cdots & (\Phi_{ij})_{d_id_i}\check{N}_{im} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{A}_{ij} = \begin{bmatrix} (\Upsilon_{ij})_{11}\check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{12}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{1b_j}\check{N}_{ij} \\ (\Upsilon_{ij})_{21}\check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{22}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{2b_j}\check{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Upsilon_{ij})_{d_i1}\check{N}_{ij} & (\Upsilon_{ij})_{d_i2}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Upsilon_{ij})_{d_ib_j}\check{N}_{ij} \end{bmatrix}.
\end{cases}
$$

où $\mathcal{X}_{\varepsilon,i}$ et $\mathcal{X}_{\mu,i}$ sont des matrices symétriques définies positives, $\mathcal{X}_i^{x_k}$ est une matrice symétrique, $\mathcal{X}_{ij}$ et $\mathcal{X}_{im}$ sont des matrices anti-symétriques. Toutes sont de taille $3d_i \times 3d_i$ sauf $\mathcal{A}_{ij}$ qui est une matrice rectangulaire (correspondant aux interfaces hybrides) de taille $3d_i \times 3b_j$ ($\widetilde{\mathbf{H}}_j$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_j$ étant des vecteurs de $\mathbb{R}^{3b_j}$, $\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j$ et $\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{3d_i}$ ce qui correspond bien au nombre d'équations du système).

2.2.4 Equations semi-discrétisées pour les cellules hexaédriques

Nous faisons ici la même hypothèse que pour les tétraèdres : on suppose b_i identique pour tous les hexaèdres c_i. On introduit les notations suivantes :

$$\Theta_i = \int_{c_i} \theta_i \theta_i^{\mathrm{T}} d\mathbf{x}, \;\; \Theta_i^{x_k} = \int_{c_i} \left(\theta_i \left(\partial_{x_k}\theta_i\right)^{\mathrm{T}} - \left(\partial_{x_k}\theta_i\right)\theta_i^{\mathrm{T}} \right) d\mathbf{x}, \;\; \Theta_{ij} = \int_{a_{ij}} \theta_i \theta_j^{\mathrm{T}} dS,$$

et on rappelle que :

$$\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}} = \int_{a_{ij}} \theta_i \phi_j^{\mathrm{T}} dS,$$

où :

- θ_i est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{b_i}$ et θ_i^{T} (resp. θ_j^{T}) est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^{b_i}$ (resp. de $\mathbb{R}^{b_j}$) ; ϕ_j^{T} est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^{d_j}$.
- Θ_i est une matrice symétrique définie positive, $\Theta_i^{x_k}$ une matrice anti-symétrique et Θ_{ij} une matrice symétrique positive, toutes trois de taille $b_i \times b_i$ ($b_j = b_i$).
- $\mathrm{Y}_{ji}^{\mathrm{T}}$ est une matrice rectangulaire de taille $b_i \times d_j$. L'ordre des indices (j puis i) est à respecter.

Nous rappelons les notations $\widetilde{\mathbf{E}}_i$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_i$ de vecteurs de degrés de liberté locaux spécifiques aux hexaèdres, et $\overline{\mathbf{E}}_j$ et $\overline{\mathbf{H}}_j$ pour ceux spécifiques aux tétraèdres.

Pour obtenir le système de $6b_i$ équations semi-discrétisées, on effectue plusieurs substitutions dans la formulation faible (2.13) (resp. (2.16)). Dans les intégrales sur c_i et sur a_{ij} pour $a_{ij} \in \mathscr{Q}_d^i$ et $a_{ij} \in \mathscr{Q}_m^i$, on remplace $\mathbf{W}_i$ (resp. $\mathbf{W}_j$) par son expression (cf (2.6)) dans la base θ_i (resp. θ_j) de $\mathbb{Q}_k[c_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[c_j]$) ; en revanche, pour le terme de somme sur $\mathscr{H}_d^i$, on remplace $\mathbf{W}_j$ par son expression dans la base ϕ_j de $\mathbb{P}_p[c_j]$ (cf (2.5)). Enfin, on substitue ψ par ϑ_{il} pour $l = 1, \ldots, b_i$ (resp. $\vec{\psi}$ par $\vec{\vartheta}_{il}$ pour $l = 1, \ldots, 6b_i$). Proposons ainsi une expression du système de $6b_i$ équations associé à la formulation hybride dans le cas (B) :

$$\forall c_i \in \mathscr{Q}_h : \left\{ \begin{array}{l} 2\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\dfrac{d\widetilde{\mathbf{E}}_i}{dt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{H}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j = 0, \\ 2\mathcal{W}_{\mu,i}\dfrac{d\widetilde{\mathbf{H}}_i}{dt} - \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{E}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j = 0. \end{array} \right. \tag{2.19}$$

avec :

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\mathcal{W}_{\varepsilon,i} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_i)_{11}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{12}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{1b_i}(\varepsilon_i I_{3\times3}) \\ (\Theta_i)_{21}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{22}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{2b_i}(\varepsilon_i I_{3\times3}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_i)_{b_i1}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{b_i2}(\varepsilon_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{b_ib_i}(\varepsilon_i I_{3\times3}) \end{bmatrix}, \\
\mathcal{W}_{\mu,i} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_i)_{11}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{12}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{1b_i}(\mu_i I_{3\times3}) \\ (\Theta_i)_{21}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{22}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{2b_i}(\mu_i I_{3\times3}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_i)_{b_i1}(\mu_i I_{3\times3}) & (\Theta_i)_{b_i2}(\mu_i I_{3\times3}) & \cdots & (\Theta_i)_{b_ib_i}(\mu_i I_{3\times3}) \end{bmatrix}, \\
\mathcal{W}_i^{x_k} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_i^{x_k})_{11}N_k & (\Theta_i^{x_k})_{12}N_k & \cdots & (\Theta_i^{x_k})_{1b_i}N_k \\ (\Theta_i^{x_k})_{21}N_k & (\Theta_i^{x_k})_{22}N_k & \cdots & (\Theta_i^{x_k})_{2b_i}N_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_i^{x_k})_{b_i1}N_k & (\Theta_i^{x_k})_{b_i2}N_k & \cdots & (\Theta_i^{x_k})_{b_ib_i}N_k \end{bmatrix}, \\
\mathcal{W}_{ij} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_{ij})_{11}\check{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{12}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{1b_i}\check{N}_{ij} \\ (\Theta_{ij})_{21}\check{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{22}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{2b_i}\check{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_{ij})_{b_i1}\check{N}_{ij} & (\Theta_{ij})_{b_i2}\check{N}_{ij} & \cdots & (\Theta_{ij})_{b_ib_i}\check{N}_{ij} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{W}_{im} & = & \begin{bmatrix} (\Theta_{ij})_{11}\check{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{12}\check{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{1b_i}\check{N}_{im} \\ (\Theta_{ij})_{21}\check{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{22}\check{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{2b_i}\check{N}_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Theta_{ij})_{b_i1}\check{N}_{im} & (\Theta_{ij})_{b_i2}\check{N}_{im} & \cdots & (\Theta_{ij})_{b_ib_i}\check{N}_{im} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{B}_{ij} & = & \begin{bmatrix} \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{11}\check{N}_{ij} & \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{12}\check{N}_{ij} & \cdots & \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{1d_j}\check{N}_{ij} \\ \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{21}\check{N}_{ij} & \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{22}\check{N}_{ij} & \cdots & \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{2d_j}\check{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{b_i1}\check{N}_{ij} & \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{b_i2}\check{N}_{ij} & \cdots & \left(\Upsilon_{ji}^{\mathrm{T}}\right)_{b_id_j}\check{N}_{ij} \end{bmatrix}.
\end{array}
\right.
$$

où, de même, $\mathcal{W}_{\varepsilon,i}$ et $\mathcal{W}_{\mu,i}$ sont des matrices symétriques définies positives, $\mathcal{W}_i^{x_k}$ est une matrice symétrique, $\mathcal{W}_{ij}$ et $\mathcal{W}_{im}$ sont des matrices anti-symétriques. Toutes sont de taille $3b_i \times 3b_i$ sauf $\mathcal{B}_{ij}$ qui est une matrice rectangulaire (correspondant aux interfaces hybrides) de taille $3b_i \times 3d_j$. Enfin, du fait que $\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}} = -\check{N}_{ji} = \check{N}_{ij}$, nous pouvons remarquer que :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{ji}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{11}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) & \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{21}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) & \cdots & \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{b_j1}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) \\ \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{12}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) & \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{22}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) & \cdots & \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{b_j2}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{1d_i}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) & \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{2d_i}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) & \cdots & \left(\mathrm{Y}_{ij}^{\mathrm{T}}\right)_{b_jd_i}\left(\check{N}_{ji}^{\mathrm{T}}\right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathrm{Y}_{ij})_{11}\check{N}_{ij} & (\mathrm{Y}_{ij})_{12}\check{N}_{ij} & \cdots & (\mathrm{Y}_{ij})_{1b_j}\check{N}_{ij} \\ (\mathrm{Y}_{ij})_{21}\check{N}_{ij} & (\mathrm{Y}_{ij})_{22}\check{N}_{ij} & \cdots & (\mathrm{Y}_{ij})_{2b_j}\check{N}_{ij} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathrm{Y}_{ij})_{d_i1}\check{N}_{ij} & (\mathrm{Y}_{ij})_{d_i2}\check{N}_{ij} & \cdots & (\mathrm{Y}_{ij})_{d_ib_j}\check{N}_{ij} \end{bmatrix} = \mathcal{A}_{ij},
\end{aligned}
$$

2.3 Discrétisation en temps

Le choix de la discrétisation en temps est une étape clé pour l'efficacité globale d'une méthode numérique. Nous adoptons ici des schémas explicites. Leur principal avantage est la facilité de mise en œuvre et il est aussi relativement aisé de construire des schémas explicites d'ordre élevé. En revanche, la stabilité de ces schémas est contrainte par une condition de stabilité (sur le pas de temps) qui peut s'avérer parfois restrictive pour des maillages localement raffinés lorsque l'on utilise un pas de temps global (qui est donc le même pour tout le maillage, et déterminé par la plus petite maille). Parmi les différents schémas explicites existant, deux types sont prédominants pour la résolution numérique des équations de Maxwell. Les schémas de type Runge-Kutta, introduits dans l'article [Carpenter & Kennedy 1994], sont les plus populaires pour l'intégration en temps du système de Maxwell semi-discrétisé en espace par une méthode Galerkin Discontinue, comme proposé par exemple dans [Hesthaven & Warburton 2002, Chen *et al.* 2005]. Les schémas de type saute-mouton (Leap-Frog), que nous choisissons alors d'utiliser, sont des schémas non-dissipatifs. Ceux-ci qui peuvent être formulés à des ordres élevés, comme intialement mis en avant par Young [Young 2001] et approfondi dans [Spachmann *et al.* 2002] ou encore dans [Fahs 2009b].

Commençons par écrire sous une forme différente les systèmes (2.18) et (2.19) de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ qui sont désormais des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) locaux :

- Cas (A) :

$$
\left\{
\begin{aligned}
2\mathcal{X}_{\mu,i}\frac{d\overline{\mathbf{H}}_i}{dt} &= \mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i}\,, \\
2\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\frac{d\overline{\mathbf{E}}_i}{dt} &= \mathbf{A}_{\mathbf{H}_h,i}\,,
\end{aligned}
\right.
\tag{2.20}
$$

avec :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i} &= \sum_{k=1}^{3}\mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{E}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{E}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j\,, \\
\mathbf{A}_{\mathbf{H}_h,i} &= -\sum_{k=1}^{3}\mathcal{X}_i^{x_k}\overline{\mathbf{H}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{H}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j.
\end{aligned}
\right.
$$

- Cas (B) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\mathcal{W}_{\mu,i}\dfrac{d\widetilde{\mathbf{H}}_i}{dt} & = & \mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i}\ , \\ 2\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\dfrac{d\widetilde{\mathbf{E}}_i}{dt} & = & \mathbf{B}_{\mathbf{H}_h,i}\ , \end{array}\right. \tag{2.21}$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathcal{Q}_d^i}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j - \sum_{a_{ij}\in\mathcal{Q}_m^i}\mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{E}}_i + \sum_{a_{ij}\in\mathcal{H}_d^i}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j\ , \\ \mathbf{B}_{\mathbf{H}_h,i} & = & \displaystyle-\sum_{k=1}^{3}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{H}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathcal{Q}_d^i}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j - \sum_{a_{ij}\in\mathcal{Q}_m^i}\mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{H}}_i - \sum_{a_{ij}\in\mathcal{H}_d^i}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j. \end{array}\right.$$

Maintenant, nous définissons les opérateurs suivants. Soient G_{el} et G_{mag} tels que :

$$\begin{array}{rccc} G_{el} & : & V_h^3 & \longrightarrow & V_h^3 \\ & & \mathbf{E}_h & \longmapsto & G_{el}(\mathbf{E}_h)\ , \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} G_{mag} & : & V_h^3 & \longrightarrow & V_h^3 \\ & & \mathbf{H}_h & \longmapsto & G_{mag}(\mathbf{H}_h)\ . \end{array}$$

Nous rappelons que pour un vecteur $\mathbf{X} \in V_h^3$, comme indiqué en sous-section 2.2.3 (cf (2.17)), la notation $\overline{\mathbf{X}}_i$, spécifique à un tétraèdre c_i que l'on note ici τ_i, représente un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{3d_i}$ dans lequel nous reportons les coordonnées de $\mathbf{X}$ dans la base ϕ_i (i.e. les degrés de libertés locaux). De même, la notation $\widetilde{\mathbf{X}}_i$, spécifique à un hexaèdre c_i noté ici q_i, est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{3b_i}$ dans lequel nous reportons les coordonnées de $\mathbf{X}$ dans la base θ_i. Afin de présenter les deux schémas en temps avec clarté, nous introduisons les notations $\overline{v}_{\tau_i}(\mathbf{X})$ et $\widetilde{v}_{q_i}(\mathbf{X})$, <u>équivalentes aux précédentes</u>, c'est-à-dire telles que : $\left\{\begin{array}{rcl} \overline{v}_{\tau_i}(\mathbf{X}) & = & \overline{\mathbf{X}}_i,\ \forall\,\mathbf{X}\in V_h^3, \tau_i\in\mathcal{T}_h, \\ \widetilde{v}_{q_i}(\mathbf{X}) & = & \widetilde{\mathbf{X}}_i,\ \forall\,\mathbf{X}\in V_h^3, q_i\in\mathcal{Q}_h. \end{array}\right.$

Ainsi, dans les cas (A) et (B), nous avons les définitions suivantes des opérateurs G_{el} et G_{mag} :

- Cas (A) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{v}_{\tau_i}\big(G_{el}(\mathbf{E}_h)\big) & = & \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{X}_{\mu,i}\right]^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i}\ , \\ \overline{v}_{\tau_i}\big(G_{mag}(\mathbf{H}_h)\big) & = & \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\right]^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{H}_h,i}\ . \end{array}\right.$$

- Cas (B) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widetilde{v}_{q_i}\big(G_{el}(\mathbf{E}_h)\big) & = & \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{W}_{\mu,i}\right]^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i}\ , \\ \widetilde{v}_{q_i}\big(G_{mag}(\mathbf{H}_h)\big) & = & \dfrac{1}{2}\left[\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\right]^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{H}_h,i}\ . \end{array}\right.$$

Nous formulons alors les schémas saute-mouton, du deuxième et du quatrième ordre. Nous notons $\Delta t > 0$ le pas de temps global pour $t \in [0, t_f]$ (t_f le temps final) et t_n une discrétisation du temps avec $t_n = n\Delta t$, où $n = 0, \ldots, n_f$ et donc $t_f = t_{n_f}$.

2.3.1 Schéma saute-mouton d'ordre 2

Des systèmes (2.20) et (2.21), nous déduisons les deux schémas saute-mouton d'ordre 2, où le champ électrique et le champ magnétique sont évalués sur une grille en temps décalée.

- Cas (A) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} & = & \overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t}{2} \left[\mathcal{X}_{\mu,i}\right]^{-1} \mathbf{A}^n_{\mathbf{E}_h,i} \,, \\ \overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} & = & \overline{\mathbf{E}}_i^{n} + \dfrac{\Delta t}{2} \left[\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\right]^{-1} \mathbf{A}^{n+\frac{1}{2}}_{\mathbf{H}_h,i} \,. \end{array} \right. \tag{2.22}$$

- Cas (B) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} & = & \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t}{2} \left[\mathcal{W}_{\mu,i}\right]^{-1} \mathbf{B}^n_{\mathbf{E}_h,i} \,, \\ \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} & = & \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n} + \dfrac{\Delta t}{2} \left[\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\right]^{-1} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}_{\mathbf{H}_h,i} \,. \end{array} \right. \tag{2.23}$$

Les notations $\mathbf{A}^n_{\mathbf{E}_h,i}$ et $\mathbf{B}^n_{\mathbf{E}_h,i}$ (resp. $\mathbf{A}^{n+\frac{1}{2}}_{\mathbf{H}_h,i}$ et $\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}_{\mathbf{H}_h,i}$) signifient que nous remplaçons dans les expressions de $\mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i}$ et $\mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i}$ (resp. $\mathbf{A}_{\mathbf{H}_h,i}$ et $\mathbf{B}_{\mathbf{H}_h,i}$), $\overline{\mathbf{E}}_i$, $\overline{\mathbf{E}}_j$, $\widetilde{\mathbf{E}}_i$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_j$ par leur valeur au temps $n\Delta t$: $\overline{\mathbf{E}}_i^n$, $\overline{\mathbf{E}}_j^n$, $\widetilde{\mathbf{E}}_i^n$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_j^n$ (resp. $\overline{\mathbf{H}}_i$, $\overline{\mathbf{H}}_j$, $\widetilde{\mathbf{H}}_i$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_j$ par par leur valeur au temps $(n + \dfrac{1}{2})\Delta t$: $\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}$, $\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}$, $\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}$).

Enfin, nous réécrivons les schémas (2.22) − (2.23) comme suit :

- Cas (A) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} & = & \overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t\, \overline{v}_{\tau_i} \Big(G_{el}\left(\mathbf{E}_h^n\right) \Big) \,, \\ \overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} & = & \overline{\mathbf{E}}_i^{n} + \Delta t\, \overline{v}_{\tau_i} \Big(G_{mag}\Big(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\Big) \Big) \,. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

- Cas (B) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} & = & \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t\, \widetilde{v}_{q_i} \Big(G_{el}\left(\mathbf{E}_h^n\right) \Big) \,, \\ \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} & = & \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n} + \Delta t\, \widetilde{v}_{q_i} \Big(G_{mag}\Big(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\Big) \Big) \,. \end{array} \right. \tag{2.25}$$

La condition initiale du schéma (2.24) (resp. (2.25)) est compatible avec le schéma saute-mouton, soit en $\overline{\mathbf{H}}_i^{\frac{1}{2}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{H}}_i^{\frac{1}{2}}$) et $\overline{\mathbf{E}}_i^0$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}_i^0$).

2.3.2 Schéma saute-mouton d'ordre 4

Toujours à partir des systèmes (2.20) et (2.21), nous formulons les deux schémas saute-mouton d'ordre 4, où les champs électrique et magnétique sont là aussi évalués sur une grille en temps décalée.

- Cas (A) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} & = & \overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t\ \overline{v}_{\tau_i}\Big(G_{el}\big(\mathbf{E}_h^n\big)\Big) + \dfrac{\Delta t^3}{24}\ \overline{v}_{\tau_i}\Big(G_{el}\circ G_{mag}\circ G_{el}\big(\mathbf{E}_h^n\big)\Big)\ , \\ \overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} & = & \overline{\mathbf{E}}_i^{n} + \Delta t\ \overline{v}_{\tau_i}\Big(G_{mag}\Big(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\Big)\Big) + \dfrac{\Delta t^3}{24}\ \overline{v}_{\tau_i}\Big(G_{mag}\circ G_{el}\circ G_{mag}\Big(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\Big)\Big)\ . \end{array}\right. \tag{2.26}$$

- Cas (B) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} & = & \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t\ \widetilde{v}_{q_i}\Big(G_{el}\big(\mathbf{E}_h^n\big)\Big) + \dfrac{\Delta t^3}{24}\ \widetilde{v}_{q_i}\Big(G_{el}\circ G_{mag}\circ G_{el}\big(\mathbf{E}_h^n\big)\Big)\ , \\ \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} & = & \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n} + \Delta t\ \widetilde{v}_{q_i}\Big(G_{mag}\Big(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\Big)\Big) + \dfrac{\Delta t^3}{24}\ \widetilde{v}_{q_i}\Big(G_{mag}\circ G_{el}\circ G_{mag}\Big(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\Big)\Big)\ . \end{array}\right. \tag{2.27}$$

La condition initiale du schéma (2.26) (resp. (2.27)) est également en $\overline{\mathbf{H}}_i^{\frac{1}{2}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{H}}_i^{\frac{1}{2}}$) et $\overline{\mathbf{E}}_i^0$ (resp. $\widetilde{\mathbf{E}}_i^0$).

Remarque : comme nous verrons par la suite, bien que ce schéma saute-mouton d'ordre 4 nécessite plus d'opérations, il permet en revanche de prendre un pas de temps plus grand qu'avec le schéma saute-mouton d'ordre 2, tout en préservant la stabilité du calcul.

CHAPITRE 3

Analyse mathématique

Sommaire

3.1 Étude de stabilité **31**
3.1.1 Théorème de Poynting et déroulement de l'étude 31
3.1.2 Résultats connus, notations et hypothèses 32
3.1.3 Conservation d'une énergie discrète 34
3.1.4 Condition suffisante de stabilité 37
3.2 Étude de convergence **46**
3.2.1 Propositions, lemmes, hypothèses et notations 46
3.2.2 Convergence du problème semi-discret 52
3.2.3 Convergence du problème totalement discret 62

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la validité mathématique (théorique) de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ proposée. Nous analysons dans un premier temps la stabilité L^2 de ce schéma en montrant qu'il conserve une énergie discrète et en exhibant une condition suffisante de stabilité de type CFL. Nous montrons ensuite la convergence en h de ce schéma, et dégageons un estimateur d'erreur a-priori.

3.1 Étude de stabilité

3.1.1 Théorème de Poynting et déroulement de l'étude

L'étude de stabilité se basera sur un théorème physique, le théorème de Poynting. Ce théorème stipule que l'énergie électromagnétique, dans le vide, en absence de charge et de courant, vérifie la relation :

$$\int_V (\partial_t \mathfrak{E}) d\mathbf{x} + \int_{\partial V} \mathbf{P}.\check{\mathbf{n}}\, dS = 0,$$

pour tout volume V fermé de frontière ∂V régulière, où $\mathfrak{E}$ est l'énergie électromagnétique et $\mathbf{P}$ est le vecteur de Poynting définis par :

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon \mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E} + \mu \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Pour des conditions aux limites de type métallique $\mathbf{E} \times \check{\mathbf{n}} = 0$, le théorème de Poynting montre que l'énergie est exactement conservée.

L'étude, que nous réalisons pour le schéma d'intégration en temps LF2, est alors divisée en deux parties :

- Nous proposons une formulation d'énergie électromagnétique discrète $\mathfrak{E}^n$, et nous vérifions, de façon â être cohérents avec le théorème de Poynting, qu'elle est exactement conservée.
- Nous cherchons ensuite à exhiber une condition suffisante de stabilité en démontrant que l'énergie discrète est une forme quadratique définie positive sous une condition de type CFL sur Δt. Nous pouvons alors conclure que notre schéma hybride est conditionnellement stable.

3.1.2 Résultats connus, notations et hypothèses

Pour présenter la méthode hybride, nous avons noté toutes les cellules c_i. Pour plus de clarté, nous adoptons dans cette étude de stabilité, la notation τ_i (ou τ_j) pour spécifier que la cellule en question est un tétraèdres et q_i (ou q_j) pour désigner un hexaèdre ; ces derniers restent bien sûr des cellules c_i (ou c_j) faisant partie d'un seul et même maillage Ω_h.

Afin de réaliser l'étude de stabilité de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, nous nous basons sur certaines étapes de l'étude de stabilité de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ en maillage tétraédrique proposée dans [Fezoui *et al.* 2005]. Nous exposons donc les résultats connexes déjà connus ; nous commençons par rappeler/présenter certains points, utilisés pour l'étude et permettant de comprendre ces résultats :

- Concernant les vecteurs normaux, $\breve{\mathbf{n}}_{ij}$ est le vecteur normal **unitaire** sortant à la face a_{ij}, dirigé de c_i vers c_j. On désigne alors par $\mathbf{n}_{ij} = \int_{a_{ij}} \breve{\mathbf{n}}_{ij}\, dS$ (et $\mathbf{n}_{ij} = (n^1_{ij}, n^2_{ij}, n^3_{ij})^{\mathrm{T}}$) le vecteur normal **non unitaire** correspondant. Le vecteur $\mathbf{n}_{ij}$ est normalisé en $\breve{\mathbf{n}}_{ij}$ c'est-à-dire que l'on a $\breve{\mathbf{n}}_{ij} = \dfrac{\mathbf{n}_{ij}}{\|\mathbf{n}_{ij}\|}$ ($\|.\|$ la norme euclidienne). Ceci implique que $\|\mathbf{n}_{ij}\| = \int_{a_{ij}} 1\, dS$, cette valeur correspond ainsi à la longueur de l'arête a_{ij} en 2D ou à l'aire de la face a_{ij} en 3D.

- On note par $|\tau_i| = \int_{\tau_i} 1 d\mathbf{x}$ le volume du tétraèdre (l'aire du triangle en 2D) τ_i et par $|q_i| = \int_{q_i} 1 d\mathbf{x}$ le volume de l'hexaèdre (l'aire du quadrangle en 2D) q_i. Enfin, on pose $p_i = \sum_{j \in \mathscr{V}_i} \|\mathbf{n}_{ij}\|$, qui correspond la valeur de l'aire totale (la somme de l'aire des faces) de l'élément c_i (tétrèadre ou hexaèdre) en 3D (et donc du périmètre en 2D).

- $\forall \mathbf{X} \in \left(\mathbb{P}_p[\tau_i]\right)^3$, on note dans cette étude de stabilité par $\|\mathbf{X}\|_{\tau_i}$ la norme L^2 du champ $\mathbf{X}$ sur τ_i (habituellement notée $\|\mathbf{X}\|_{0,\tau_i}$, nous simplifions la notation dans cette section), i.e. $\|\mathbf{X}\|^2_{\tau_i} = \int_{\tau_i} \|\mathbf{X}\|^2 d\mathbf{x}$. On utilise la même notation pour définir la norme L^2 du champ $\mathbf{X}$ sur la face a_{ij}. On admet alors les hypothèses suivantes.

  Hypothèses 1. *On suppose que pour tout tétraèdre τ_i, il existe des constantes α^τ_i et β^τ_{ij} ($j \in \mathscr{V}_i$), telles que :*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{X} \in \left(\mathbb{P}_p[\tau_i]\right)^3, \quad \|rot(\mathbf{X})\|_{\tau_i} &\leq \frac{\alpha^\tau_i p_i}{|\tau_i|} \|\mathbf{X}\|_{\tau_i}, \\ \forall \mathbf{X} \in \left(\mathbb{P}_p[\tau_i]\right)^3, \quad \|\mathbf{X}\|^2_{a_{ij}} &\leq \frac{\beta^\tau_{ij} \|\mathbf{n}_{ij}\|}{|\tau_i|} \|\mathbf{X}\|^2_{\tau_i}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Remarque : dans le cas d'un maillage conforme, les valeurs (calculées analytiquement) des constantes α_i^τ et β_{ij}^τ sont connues pour les ordres $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$. Pour $\mathbb{P}_0$, i.e. un schéma volume fini classique, $\forall i, \alpha_i^\tau = 0$ et $\forall i, \forall j \in \mathscr{V}_i, \beta_{ij}^\tau = 1$. Dans le cas $\mathbb{P}_1$, et pour des fonctions de base nodales linéaires, $\forall i, \alpha_i^\tau = 3$ et $\forall i, \forall j \in \mathscr{V}_i, \beta_{ij}^\tau = 3$. Pour des ordres plus élevés et pour des maillages non-conformes, l'évaluation analytique des valeurs de ces constantes est difficile dans la plupart des cas, elle peut néanmoins se réaliser dans certains cas en se restreignant par exemple à un maillage triangulaire orthogonal.

- $\forall \mathbf{X} \in (\mathbb{Q}_k[q_i])^3$, on note par $\|\mathbf{X}\|_{q_i}$ la norme L^2 du champ $\mathbf{X}$ sur q_i, i.e. $\|\mathbf{X}\|_{q_i}^2 = \int_{q_i} \|\mathbf{X}\|^2 d\mathbf{x}$. On utilise la même notation pour définir la norme L^2 du champ $\mathbf{X}$ sur la face a_{ij}. On admet alors les hypothèses suivantes.

  Hypothèses 2. *On suppose que pour tout hexaèdre q_i, il existe des constantes α_i^q et β_{ij}^q ($j \in \mathscr{V}_i$), telles que :*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{X} \in (\mathbb{Q}_k[q_i])^3, \quad \|\mathrm{rot}(\mathbf{X})\|_{q_i} &\leq \frac{\alpha_i^q p_i}{|q_i|} \|\mathbf{X}\|_{q_i}, \\ \forall \mathbf{X} \in (\mathbb{Q}_k[q_i])^3, \quad \|\mathbf{X}\|_{a_{ij}}^2 &\leq \frac{\beta_{ij}^q \|\mathbf{n}_{ij}\|}{|q_i|} \|\mathbf{X}\|_{q_i}^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat de l'étude de stabilité de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$. Premièrement, il a bien été démontré que l'énergie discrète $\mathfrak{E}_\tau^n$ est exactement conservée (i.e. $\Delta\mathfrak{E}_\tau = \mathfrak{E}_\tau^{n+1} - \mathfrak{E}_\tau^n = 0$). La condition suffisante de stabilité sur le pas de temps que nous notons ici Δt_τ est alors définie par :

$$\forall i, \forall j \in \mathscr{V}_i \ : \quad \Delta t_\tau \left[2\alpha_i^\tau + \beta_{ij}^\tau \max\left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}}, \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}} \right\} \right] < \frac{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{p_i}. \tag{3.3}$$

Sous cette condition (qui comprend également le traitement des faces frontières métalliques en remplaçant j par i), $\mathfrak{E}_\tau^n$ est une forme quadratique définie positive.

Dégageons enfin un pas de temps Δt_q, correspondant au schéma GDDT-$\mathbb{Q}_k$ en maillage hexaédrique. L'énergie discrète ($\mathfrak{E}_q^n$) est là aussi exactement conservée, et la condition suffisante de stabilité sur Δt_q est donnée par :

$$\forall i, \forall j \in \mathscr{V}_i \ : \quad \Delta t_q \left[2\alpha_i^q + \beta_{ij}^q \max\left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}}, \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}} \right\} \right] < \frac{4|q_i|\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{p_i}. \tag{3.4}$$

Sous cette condition (qui comprend également le traitement des faces frontières métalliques en remplaçant j par i), $\mathfrak{E}_q^n$ est une forme quadratique définie positive.

Le résultat souhaité pour le pas de temps global Δt, du schéma hybride, est : $\Delta t = \min\{\Delta t_\tau, \Delta t_q\}$.

3.1.3 Conservation d'une énergie discrète

Nous introduisons l'énergie discrète $\mathfrak{E}^n$ pour le schéma hybride. Soit N_τ le nombre de tétraèdres du maillage et N_q le nombre d'hexaèdres, le bilan global d'énergie est donné par :

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}^n &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\left(\overline{\mathbf{E}}_i^n\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^n + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + \right.\\ &\qquad \left.\sum_{i=1}^{N_q}\left(\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^n\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\mu,i}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nous évaluons alors la variation d'énergie au cours d'un pas de temps :

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{E} &= \mathfrak{E}^{n+1} - \mathfrak{E}^n\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\left(\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}}\right) - \right.\right.\\ &\qquad \left.\left(\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^{n} + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)\right) + \\ &\qquad \sum_{i=1}^{N_q}\left(\left(\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\mu,i}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}}\right) - \right.\\ &\qquad \left.\left.\left(\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n} + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\mu,i}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)\right)\right].\end{aligned} \tag{3.6}$$

En utilisant les propriétés élémentaires suivantes :

- Soient A une matrice $n \times m$ et B une matrice $m \times p$ ($n, m, p \in \mathbb{N}$), on a $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$,
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$ vecteurs colonne $\in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on a $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$,

ainsi que la symétrie de $\mathcal{X}_{\varepsilon,i}$ et $\mathcal{X}_{\mu,i}$, nous pouvons remarquer que :

- $\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} - \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^{n} = \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} - \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)$,
- $\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}} - \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}} - \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)$.

Par un raisonnement similaire avec les termes dans la somme pour $i = 1, .., N_q$, l'équation (3.6) devient :

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} - \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right) + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}} - \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\right) + \right.\\ \left.\sum_{i=1}^{N_q}\left(\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} - \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right) + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\mu,i}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{3}{2}} - \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)\right)\right],\end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{E} \;=\; \frac{\Delta t}{4}\Bigg[&\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{\mathbf{H}_h,i}^{n+\frac{1}{2}}+\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i}^{n+1}+\mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i}^{n}\right)\right)+\\ &\sum_{i=1}^{N_q}\left(\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\mathbf{H}_h,i}^{n+\frac{1}{2}}+\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i}^{n+1}+\mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i}^{n}\right)\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{3.7}$$

Nous allons maintenant remplacer dans (3.7) les termes de flux par leurs expressions explicitées dans (2.22) et (2.23). Toujours en utilisant les propriétés précédentes et la symétrie des matrices $\mathcal{X}_i^{x_k}$, on remarque que les termes de gradient s'annulent dans la somme pour $i = 1,..,N_\tau$. De la même manière, ceux dans la somme pour $i = 1,..,N_q$ s'annulent également. Il reste donc uniquement les termes de sommes sur les ensembles de faces, et nous pouvons réécrire (3.7) sous la forme :

$$\Delta\mathfrak{E} = \frac{\Delta t}{4}\left(R_{int}^{\tau}+R_{met}^{\tau}+R_{int}^{q}+R_{met}^{q}+R_{hyb}^{\tau}+R_{hyb}^{q}\right),$$

avec :

$$\begin{aligned}
R_{int}^{\tau} &= \sum_{i=1}^{N_\tau}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\left[-\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad + \quad \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{ij}\left(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_j^{n}\right)\right],\\
R_{met}^{\tau} &= \sum_{i=1}^{N_\tau}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\left[-\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{im}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \quad - \quad \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{im}\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\right],\\
R_{int}^{q} &= \sum_{i=1}^{N_q}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i}\left[-\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad + \quad \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{ij}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right)\right],\\
R_{met}^{q} &= \sum_{i=1}^{N_q}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i}\left[-\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{im}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} \quad - \quad \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{im}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)\right],\\
R_{hyb}^{\tau} &= \sum_{i=1}^{N_\tau}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\left[-\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad + \quad \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{ij}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right)\right],\\
R_{hyb}^{q} &= \sum_{i=1}^{N_q}\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\left[-\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1}+\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad + \quad \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{B}_{ij}\left(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1}+\overline{\mathbf{E}}_j^{n}\right)\right].
\end{aligned}$$

Nous introduisons maintenant de nouvelles notations : $\mathscr{T}_d$ désigne l'ensemble de toutes les faces internes communes à deux tétraèdres (du maillage $\mathcal{C}_h$) et $\mathscr{T}_m$ l'ensemble de toutes les faces métalliques issues des tétraèdres du maillage. Pareillement, $\mathscr{Q}_d$ désigne l'ensemble de toutes les faces internes du maillage communes à deux hexaèdres, et $\mathscr{Q}_m$ l'ensemble de toutes les faces métalliques issues des hexaèdres du maillage. Enfin, nous notons par $\mathscr{H}_d$ l'ensemble de toutes les faces hybrides (communes à un tétraèdre et un hexaèdre) du maillage $\mathcal{C}_h$.

Compte tenu de leurs formes respectives, nous pouvons exprimer R_{int}^{τ} comme une somme sur $\mathscr{T}_d$ (en faisant attention de prendre en considération, pour chaque a_{ij}, le tétraèdre τ_i et le tétraèdre τ_j), R_{int}^{q} comme une somme sur $\mathscr{Q}_d$ (en prenant en considération, pour chaque a_{ij}, l'hexaèdre q_i et l'hexaèdre q_j), R_{met}^{τ} comme une somme sur $\mathscr{T}_m$ et R_{met}^{q} comme une somme sur $\mathscr{Q}_m$:

$$
\begin{aligned}
R^{\tau}_{int} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d} \Big[\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{X}_{ij})\, \overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{ij} \left(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_j^{n}\right) + \\
&\qquad \left(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_j^{n}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{X}_{ji})\, \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + \left(\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{ji} \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big], \\
R^{q}_{int} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d} \Big[\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{W}_{ij})\, \widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_{ij} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right) + \\
&\qquad \left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{W}_{ji})\, \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_{ji} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big], \\
R^{\tau}_{met} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m} \Big[\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{X}_{im})\, \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{im} \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big], \\
R^{q}_{met} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m} \Big[\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{W}_{im})\, \widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} - \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_{im} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big].
\end{aligned}
$$

En utilisant les mêmes propriétés élémentaires, l'antisymétrie de $\mathcal{X}_{ij}$, $\mathcal{X}_{im}$, $\mathcal{W}_{ij}$ et $\mathcal{W}_{im}$, ainsi que les propriétés $\mathcal{X}_{ij} = -\mathcal{X}_{ji}$ et $\mathcal{W}_{ij} = -\mathcal{W}_{ji}$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
R^{\tau}_{int} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d} \Big[\left(\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{ij} \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right) + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{ij} \left(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_j^{n}\right) + \\
&\qquad \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{X}_{ij}) \left(\overline{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_j^{n}\right) + \left(\overline{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{X}_{ij}) \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big] = 0, \\
R^{q}_{int} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d} \Big[\left(\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_{ij} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right) + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_{ij} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right) + \\
&\qquad \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{W}_{ij}) \left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right) + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} (-\mathcal{W}_{ij}) \left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big] = 0, \\
R^{\tau}_{met} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m} \Big[\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{im} \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right) - \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{im} \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big] = 0, \\
R^{q}_{met} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m} \Big[\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_{im} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right) - \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_{im} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Il nous reste donc à considérer maintenant les termes R^{τ}_{hyb} et R^{q}_{hyb}. Compte tenu de leurs formes, nous pouvons exprimer R^{τ}_{hyb} et R^{q}_{hyb} comme une somme sur $\mathscr{H}_d$ en posant $R_{hyb} = R^{\tau}_{hyb} + R^{q}_{hyb}$ et en prenant en considération, pour chaque a_{ij}, le tetraèdre τ_i et l'hexaèdre q_j (ce choix est arbitraire, nous pourrions prendre l'hexaèdre q_i et le tétraèdre τ_j) :

$$
\begin{aligned}
R^{\tau}_{hyb} + R^{q}_{hyb} = R_{hyb} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d} \Big[-\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij} \widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij} \left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right) - \\
&\qquad \left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{B}_{ji} \overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{B}_{ji} \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right) \Big].
\end{aligned}
$$

En effectuant le même type de manipulation que précédemment, nous avons :

$$R_{hyb} = \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d} \Bigg[-\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right) - \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathcal{B}_{ji}^{\mathrm{T}}\right)\left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right) + \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathcal{B}_{ji}^{\mathrm{T}}\right)\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} \Bigg].$$

Or, nous rappelons que $\mathcal{B}_{ji}^{\mathrm{T}} = \mathcal{A}_{ij}$, alors :

$$R_{hyb} = \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d} \Bigg[-\left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right) - \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_j^{n+1} + \widetilde{\mathbf{E}}_j^{n}\right) + \left(\overline{\mathbf{E}}_i^{n+1} + \overline{\mathbf{E}}_i^{n}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n+\frac{1}{2}} \Bigg] = 0.$$

Ainsi, $R_{int}^{\tau} = R_{met}^{\tau} = R_{int}^{q} = R_{met}^{q} = R_{hyb} = R_{hyb}^{\tau} + R_{hyb}^{q} = 0$ et nous avons bien $\Delta\mathfrak{E} = 0$. Donc, dans le cas de conditons aux limites de type métallique, l'énergie est exactement conservée, ce qui est cohérent avec le théorème de Poynting.

3.1.4 Condition suffisante de stabilité

Nous allons donc maintenant chercher à minorer l'énergie électromagnétique. Réécrivons tout d'abord $\mathfrak{E}^n$ sous une forme différente :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}^n &= \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\left(\overline{\mathbf{E}}_i^n\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\varepsilon,i}\overline{\mathbf{E}}_i^n + \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right) + \sum_{i=1}^{N_q}\left(\left(\widetilde{\mathbf{E}}_i^n\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\varepsilon,i}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\mu,i}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}}\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\varepsilon_i\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \mu_i\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i}^n\right) + \sum_{i=1}^{N_q}\left(\varepsilon_i\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}^2 + \mu_i\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i}^n\right)\Bigg],
\end{aligned} \tag{3.8}$$

car :

$$\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\overline{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\left[\mathcal{X}_{\mu,i}\right]^{-1}\mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i}^n\right) = \mu_i\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{\mathbf{E}_h,i}^n,$$

et :

$$\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{\mu,i}\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n+\frac{1}{2}} = \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{X}_{\mu,i}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}\left[\mathcal{X}_{\mu,i}\right]^{-1}\mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i}^n\right) = \mu_i\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\mathbf{E}_h,i}^n.$$

Remarque : il ne faut pas confondre $\mathbf{E}_i^n$ dans $\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}$ (resp. $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}$ dans $\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}$) qui est la restriction de $\mathbf{E}_h$ au tétraèdre τ_i, au temps n (resp. de $\mathbf{H}_h$ au tétraèdre τ_i, au temps $n-\frac{1}{2}$) et appartenant à $\left(\mathbb{P}_p[\tau_i]\right)^3$ (donc un vecteur à trois composantes), avec $\mathbf{E}_i^n$ dans $\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}$ (resp. $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}$ dans $\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}$) qui est la restriction de $\mathbf{E}_h$ à l'hexaèdre q_i, au temps n (resp. de $\mathbf{H}_h$ à l'hexaèdre q_i, au temps $n-\frac{1}{2}$)

et appartenant à $(\mathbb{Q}_k[q_i])^3$ (un vecteur à trois composantes également). De même, il convient de distinguer ces derniers de $\overline{\mathbf{E}}_i^n$ (resp. $\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}$) qui est le vecteur des degrés de liberté locaux (de $3d_i$ composantes) associés au tétraèdre τ_i et de $\widetilde{\mathbf{E}}_i^n$ (resp. $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}$) qui est le vecteur des degrés de liberté locaux (de $3b_i$ composantes) associés à l'hexaèdre q_i. Nous devons bien considérer cette différence dans la suite de cette démonstration.
Nous nous intéressons aux termes $\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^n_{\mathbf{E}_h,i}$ et $\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^n_{\mathbf{E}_h,i}$ dans l'équation (3.8) :

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{A}^n_{\mathbf{E}_h,i} &= \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\sum_{k=1}^{3} \mathcal{X}_i^{x_k} \overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \mathcal{X}_{ij} \overline{\mathbf{E}}_j^n - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \mathcal{X}_{im} \overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \mathcal{A}_{ij} \widetilde{\mathbf{E}}_j^n \right) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_i^{x_k} \overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i \bigcup \mathscr{T}_m^i} \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{ij} \overline{\mathbf{E}}_j^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij} \widetilde{\mathbf{E}}_j^n,
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^n_{\mathbf{E}_h,i} &= \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\sum_{k=1}^{3} \mathcal{W}_i^{x_k} \widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i} \mathcal{W}_{ij} \widetilde{\mathbf{E}}_j^n - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i} \mathcal{W}_{im} \widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \mathcal{B}_{ij} \overline{\mathbf{E}}_j^n \right) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_i^{x_k} \widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i \bigcup \mathscr{Q}_m^i} \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{W}_{ij} \widetilde{\mathbf{E}}_j^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{B}_{ij} \overline{\mathbf{E}}_j^n.
\end{aligned}$$

Nous pouvons à présent vérifier que (démonstration longue, non détaillée ici) :

$$\sum_{k=1}^{3} \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_i^{x_k} \overline{\mathbf{E}}_i^n = -\int_{\tau_i} \left[\left(\mathrm{rot}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{E}_i^n + (\mathrm{rot}\mathbf{E}_i^n)^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} \right] d\mathbf{x},$$

$$\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{ij} \overline{\mathbf{E}}_j^n = \int_{a_{ij}} \left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \breve{N}_{ij} \mathbf{E}_j^n dS = \int_{a_{ij}} \left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{E}_j^n\right)^{\mathrm{T}} \breve{\mathbf{n}}_{ij} dS.$$

Ainsi, en utilisant principalement les hypothèses (3.1), l'inégalité triangulaire, de Cauchy-Schwarz et l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\| \|\mathbf{E}_j^n\| \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_j}} \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_i}} \|\mathbf{E}_j^n\|^2 \right), \tag{3.9}$$

(quels que soient i, j et la norme que l'on utilise), nous pouvons obtenir la minoration suivante de $\lambda^\tau = \sum_{k=1}^{3} \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_i^{x_k} \overline{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i \bigcup \mathscr{T}_m^i} \left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{X}_{ij} \overline{\mathbf{E}}_j^n$:

$$
\begin{aligned}
\lambda^\tau &\geq -|\lambda^\tau| \\
&\geq -\left|\int_{\tau_i}\left(\mathrm{rot}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_i^n d\mathbf{x}\right| - \left|\int_{\tau_i}(\mathrm{rot}\mathbf{E}_i^n)^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}d\mathbf{x}\right| - \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i}\int_{a_{ij}}\left\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\times\mathbf{E}_j^n\right\|\|\breve{\mathbf{n}}_{ij}\|dS \\
&\geq -\|\mathrm{rot}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i} - \|\mathrm{rot}\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i} - \\
&\quad \frac{1}{2}\left[\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i}\left(\sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{a_{ij}}^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{a_{ij}}^2\right)\right],
\end{aligned}
$$

et enfin :

$$
\lambda^\tau \geq -\frac{2\alpha_i^\tau p_i}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i} - \frac{1}{2}\left[\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i}\left(\frac{\|\mathbf{n}_{ij}\|\beta_{ij}^\tau\sqrt{\mu_i}}{|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\|\mathbf{n}_{ij}\|\beta_{ji}^\tau\sqrt{\varepsilon_j}}{|\tau_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{\tau_j}^2\right)\right].
$$

Remarque : nous pourrions décomposer la somme sur $\mathscr{T}_d^i\bigcup\mathscr{T}_m^i$ en une somme sur les faces internes (les termes dans la somme ne changeraient pas) et une somme sur les faces frontières métalliques dans laquelle nous poserions (par convention) : $\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_j} \equiv \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}$, $\|\mathbf{E}_j^n\|_{\tau_j} \equiv \|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}$, $|\tau_j| \equiv |\tau_i|$, $\beta_{ji} \equiv \beta_{ij}$, $\varepsilon_j \equiv \varepsilon_i$ et $\mu_j \equiv \mu_i$.

Maintenant, en vérifiant que (là aussi démonstration longue, non détaillée ici) :

$$
\sum_{k=1}^{3}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n = -\int_{q_i}\left[\left(\mathrm{rot}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{E}_i^n + (\mathrm{rot}\mathbf{E}_i^n)^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right]d\mathbf{x},
$$

$$
\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n = \int_{a_{ij}}\left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\breve{N}_{ij}\mathbf{E}_j^n dS = \int_{a_{ij}}\left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\times\mathbf{E}_j^n\right)^{\mathrm{T}}\breve{\mathbf{n}}_{ij}dS.
$$

Par le même raisonnement, en utilisant les hypothèses (3.2), nous déduisons la minoration de $\lambda^q = \sum_{k=1}^{3}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_i^{x_k}\widetilde{\mathbf{E}}_i^n + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i\bigcup\mathscr{Q}_m^i}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{W}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n$:

$$
\lambda^q \geq -\frac{2\alpha_i^q p_i}{|q_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i} - \frac{1}{2}\left[\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i\bigcup\mathscr{Q}_m^i}\left(\frac{\|\mathbf{n}_{ij}\|\beta_{ij}^q\sqrt{\mu_i}}{|q_i|\sqrt{\varepsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2 + \frac{\|\mathbf{n}_{ij}\|\beta_{ji}^q\sqrt{\varepsilon_j}}{|q_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}^2\right)\right].
$$

Remarque : nous pourrions ici aussi décomposer la somme sur $\mathscr{Q}_d^i\bigcup\mathscr{Q}_m^i$ en une somme sur $\mathscr{Q}_d^i$ et somme sur $\mathscr{Q}_m^i$ dans laquelle nous poserions par convention : $\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_j} \equiv \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}$, $\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j} \equiv \|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}$, $|q_j| \equiv |q_i|$, $\beta_{ji}^q \equiv \beta_{ij}^q$, $\varepsilon_j \equiv \varepsilon_i$ et $\mu_j \equiv \mu_i$.

Nous en déduisons la minoration de l'énergie suivante :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}^n \;\geq\; & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_\tau}\Bigg[\frac{\varepsilon_i}{p_i}\left(\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2+\frac{\mu_i}{p_i}\left(\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2+\\
& \frac{\Delta t}{2}\Bigg(-\frac{2\alpha_i^\tau}{|\tau_i|}\left(\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}-\\
& \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i\cup\mathscr{T}_m^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\beta_{ij}^\tau\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2+\frac{\beta_{ji}^\tau\sqrt{\varepsilon_j}}{2|\tau_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{\tau_j}^2\right)\Bigg)+\\
& \frac{\Delta t}{2}\left(\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n\right)\Bigg]+\\
& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_q}\Bigg[\frac{\varepsilon_i}{p_i}\left(\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}^2+\frac{\mu_i}{p_i}\left(\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2+\\
& \frac{\Delta t}{2}\Bigg(-\frac{2\alpha_i^q}{|q_i|}\left(\sum_{j\in\mathscr{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}-\\
& \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i\cup\mathscr{Q}_m^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\beta_{ij}^q\sqrt{\mu_i}}{2|q_i|\sqrt{\varepsilon_j}}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}^2+\frac{\beta_{ji}^q\sqrt{\varepsilon_j}}{2|q_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}^2\right)\Bigg)+\\
& \frac{\Delta t}{2}\left(\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

<u>Remarque</u> :

- Dans la somme pour $i = 1, .., N_\tau$ qui concerne les tétraèdres,

$$p_i = \sum_{j\in\mathscr{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\| = \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i}\|\mathbf{n}_{ij}\| + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i}\|\mathbf{n}_{ij}\| + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|,$$

- Dans la somme pour $i = 1, .., N_q$ qui concerne les hexaèdres,

$$p_i = \sum_{j\in\mathscr{V}_i}\|\mathbf{n}_{ij}\| = \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d^i}\|\mathbf{n}_{ij}\| + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m^i}\|\mathbf{n}_{ij}\| + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i}\|\mathbf{n}_{ij}\|.$$

Nous réécrivons la minoration (3.10) de $\mathfrak{E}^n$ sous la forme :

$$\mathfrak{E}^n \;\geq\; \frac{1}{2}\left(S_{int}^\tau + S_{met}^\tau + S_{int}^q + S_{met}^q + S_{hyb}^\tau + S_{hyb}^q\right),$$

avec :

$$
\begin{aligned}
S^{\tau}_{int} &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left[\frac{\varepsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{\tau_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{\tau_i} - \right. \\
&\qquad \left. \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ji}\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{4|\tau_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|^2_{\tau_j}\right], \\
S^{\tau}_{met} &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left[\frac{\varepsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{\tau_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{\tau_i} - \right. \\
&\qquad \left. \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{\tau_i}\right], \\
S^{q}_{int} &= \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{D}_d^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left[\frac{\varepsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{q_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|q_i|\sqrt{\varepsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{q_i} - \right. \\
&\qquad \left. \frac{\alpha^{q}_i\Delta t}{|q_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i} - \frac{\beta^{q}_{ji}\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{4|q_j|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_j^n\|^2_{q_j}\right], \\
S^{q}_{met} &= \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{D}_m^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left[\frac{\varepsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{q_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|q_i|\sqrt{\varepsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{q_i} - \right. \\
&\qquad \left. \frac{\alpha^{q}_i\Delta t}{|q_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|q_i|\sqrt{\mu_i}}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{q_i}\right], \\
S^{\tau}_{hyb} &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left(\frac{\varepsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{\tau_i} + \frac{\mu_i}{p_i}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{\tau_i} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}_j^n, \\
S^{q}_{hyb} &= \sum_{i=1}^{N_q} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d^i} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left(\frac{\varepsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}_i^n\|^2_{q_i} + \frac{\mu_i}{p_i}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|^2_{q_i} - \frac{\alpha^{q}_i\Delta t}{|q_i|}\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{q_i}\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{B}_{ij}\overline{\mathbf{E}}_j^n.
\end{aligned}
$$

Maintenant, en appliquant l'inégalité (3.9) à $\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}$ dans S^{τ}_{int} et S^{τ}_{met}, et en sommant sur $\mathscr{T}_d$ et $\mathscr{T}_m$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
S^{\tau}_{int} &\geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d} \|\mathbf{n}_{ij}\| T^{\tau}_{int}, \\
S^{\tau}_{met} &\geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m} \|\mathbf{n}_{ij}\| T^{\tau}_{met},
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
T^{\tau}_{int} &= \left(\frac{\varepsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_j}} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{\tau_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_j}} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{\tau_i} + \\
&\quad \left(\frac{\varepsilon_j}{p_j} - \frac{\beta^{\tau}_{ji}\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{4|\tau_j|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^{\tau}_j\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{2|\tau_j|\sqrt{\mu_j}}\right)\|\mathbf{E}^n_j\|^2_{\tau_j} + \left(\frac{\mu_j}{p_j} - \frac{\beta^{\tau}_{ji}\Delta t\sqrt{\mu_j}}{4|\tau_j|\sqrt{\varepsilon_i}} - \frac{\alpha^{\tau}_j\Delta t\sqrt{\mu_j}}{2|\tau_j|\sqrt{\varepsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_j\|^2_{\tau_j}, \\
T^{\tau}_{met} &= \left(\frac{\varepsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{\tau_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{\tau}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i}} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{\tau_i}.
\end{aligned}
$$

Et en appliquant une nouvelle fois (3.9) à $\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|_{q_i}\|\mathbf{E}^n_i\|_{q_i}$ dans S^q_{int} et S^q_{met}, et en sommant sur $\mathscr{Q}_d$ et $\mathscr{Q}_m$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
S^q_{int} &\geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T^q_{int}, \\
S^q_{met} &\geq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m}\|\mathbf{n}_{ij}\|T^q_{met},
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
T^q_{int} &= \left(\frac{\varepsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|q_i|\sqrt{\mu_j}} - \frac{\alpha^{q}_i\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{2|q_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{q_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|q_i|\sqrt{\varepsilon_j}} - \frac{\alpha^{q}_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|q_i|\sqrt{\varepsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{q_i} + \\
&\quad \left(\frac{\varepsilon_j}{p_j} - \frac{\beta^{q}_{ji}\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{4|q_j|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^{q}_j\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{2|q_j|\sqrt{\mu_j}}\right)\|\mathbf{E}^n_j\|^2_{q_j} + \left(\frac{\mu_j}{p_j} - \frac{\beta^{q}_{ji}\Delta t\sqrt{\mu_j}}{4|q_j|\sqrt{\varepsilon_i}} - \frac{\alpha^{q}_j\Delta t\sqrt{\mu_j}}{2|q_j|\sqrt{\varepsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_j\|^2_{q_j}, \\
T^q_{met} &= \left(\frac{\varepsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|q_i|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^{q}_i\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{2|q_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{q_i} + \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^{q}_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|q_i|\sqrt{\varepsilon_i}} - \frac{\alpha^{q}_i\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|q_i|\sqrt{\varepsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{q_i}.
\end{aligned}
$$

Enfin, compte tenu de leurs formes, nous pouvons exprimer S^{τ}_{hyb} et S^q_{hyb} comme une somme sur $\mathscr{H}_d$, en les additionnant et en prenant en considération par choix arbitraire, pour chaque a_{ij}, le tetraèdre τ_i et l'hexaèdre q_j (nous pourrions prendre l'hexaèdre q_i et le tétraèdre τ_j) :

$$
\begin{aligned}
S^{\tau}_{hyb} + S^q_{hyb} &= \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d}\Bigg[\|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\varepsilon_i}{p_i}\|\mathbf{E}^n_i\|^2_{\tau_i} + \frac{\mu_i}{p_i}\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|^2_{\tau_i} - \frac{\alpha^{\tau}_i\Delta t}{|\tau_i|}\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_i\|_{\tau_i}\|\mathbf{E}^n_i\|_{\tau_i}\right) + \\
&\quad \frac{\Delta t}{2}\left(\overline{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{ij}\widetilde{\mathbf{E}}^n_j + \\
&\quad \|\mathbf{n}_{ij}\|\left(\frac{\varepsilon_j}{p_j}\|\mathbf{E}^n_j\|^2_{q_j} + \frac{\mu_j}{p_j}\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_j\|^2_{q_j} - \frac{\alpha^{q}_j\Delta t}{|q_j|}\|\mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}_j\|_{q_j}\|\mathbf{E}^n_j\|_{q_j}\right) + \\
&\quad \frac{\Delta t}{2}\left(\widetilde{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_j\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{B}_{ji}\overline{\mathbf{E}}^n_i\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Ensuite, en remarquant que :

$$\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij} \widetilde{\mathbf{E}}_j^n = \int_{a_{ij}} \left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \breve{N}_{ij} \mathbf{E}_j^n dS = \int_{a_{ij}} \left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{E}_j^n\right)^{\mathrm{T}} \breve{\mathbf{n}}_{ij} dS,$$

où ici $\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{h|_{\tau_i}}^{n-\frac{1}{2}} \in \left(\mathbb{P}_p[\tau_i]\right)^3$ alors que $\mathbf{E}_j^n = \mathbf{E}_{h|_{q_j}}^n \in \left(\mathbb{Q}_k[q_j]\right)^3$. En se servant principalement de l'inégalité triangulaire, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, de (3.9), ainsi que de (3.1) et (3.2), nous avons :

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij} \widetilde{\mathbf{E}}_j^n &\geq -\left| \int_{a_{ij}} \left(\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{E}_j^n\right)^{\mathrm{T}} \breve{\mathbf{n}}_{ij} dS \right| \\
&\geq -\int_{a_{ij}} \left\| \mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} \times \mathbf{E}_j^n \right\| \|\breve{\mathbf{n}}_{ij}\| dS \\
&\geq -\int_{a_{ij}} \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\| \|\mathbf{E}_j^n\| dS \\
&\geq -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_j}} \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{a_{ij}}^2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_j}{\mu_i}} \|\mathbf{E}_j^n\|_{a_{ij}}^2 \right) \\
&\geq -\frac{1}{2} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left(\frac{\beta_{ij}^{\tau} \sqrt{\mu_i}}{|\tau_i| \sqrt{\varepsilon_j}} \|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ji}^{q} \sqrt{\varepsilon_j}}{|q_j| \sqrt{\mu_i}} \|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}^2 \right).
\end{aligned}$$

De plus, en remarquant que :

$$\left(\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{B}_{ji} \overline{\mathbf{E}}_i^n = \left(\mathcal{B}_{ji} \overline{\mathbf{E}}_i^n\right)^{\mathrm{T}} \widetilde{\mathbf{H}}_j^{n-\frac{1}{2}} = \left(\overline{\mathbf{E}}_i^n\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_{ij} \widetilde{\mathbf{H}}_j^{n-\frac{1}{2}} = \int_{a_{ij}} \left(\mathbf{E}_i^n \times \mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \breve{\mathbf{n}}_{ij} dS,$$

où ici $\mathbf{E}_i^n = \mathbf{E}_{h|_{\tau_i}}^n \in \left(\mathbb{P}_p[\tau_i]\right)^3$ alors que $\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{h|_{q_j}}^{n-\frac{1}{2}} \in \left(\mathbb{Q}_k[q_j]\right)^3$. Par un raisonnement similaire, nous obtenons aussi :

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\mathbf{H}}_j^{n-\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}} \mathcal{B}_{ji} \overline{\mathbf{E}}_i^n &\geq -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\mu_j}} \|\mathbf{E}_i^n\|_{a_{ij}}^2 + \sqrt{\frac{\mu_j}{\varepsilon_i}} \|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{a_{ij}}^2 \right) \\
&\geq -\frac{1}{2} \|\mathbf{n}_{ij}\| \left(\frac{\beta_{ij}^{\tau} \sqrt{\varepsilon_i}}{|\tau_i| \sqrt{\mu_j}} \|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2 + \frac{\beta_{ji}^{q} \sqrt{\mu_j}}{|q_j| \sqrt{\varepsilon_i}} \|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_j}^2 \right).
\end{aligned}$$

Nous utilisons alors ces deux dernières minorations dans (3.11) où nous appliquons également l'inégalité (3.9) à $\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i} \|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}$ et $\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_j} \|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}$, ce qui nous donne ainsi :

$$S_{hyb}^{\tau} + S_{hyb}^{q} \geq \sum_{a_{ij} \in \mathscr{H}_d} \|\mathbf{n}_{ij}\| T_{hyb},$$

avec :

$$
\begin{aligned}
T_{hyb} \;=\; & \left(\frac{\varepsilon_i}{p_i} - \frac{\beta_{ij}^{\tau}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_j}} - \frac{\alpha_i^{\tau}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}}\right)\|\mathbf{E}_i^n\|_{\tau_i}^2 \;+\; \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta_{ij}^{\tau}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_j}} - \frac{\alpha_i^{\tau}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i}}\right)\|\mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{\tau_i}^2 + \\
& \left(\frac{\varepsilon_j}{p_j} - \frac{\beta_{ji}^{q}\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{4|q_j|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha_j^{q}\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{2|q_j|\sqrt{\mu_j}}\right)\|\mathbf{E}_j^n\|_{q_j}^2 \;+\; \left(\frac{\mu_j}{p_j} - \frac{\beta_{ji}^{q}\Delta t\sqrt{\mu_j}}{4|q_j|\sqrt{\varepsilon_i}} - \frac{\alpha_j^{q}\Delta t\sqrt{\mu_j}}{2|q_j|\sqrt{\varepsilon_j}}\right)\|\mathbf{H}_j^{n-\frac{1}{2}}\|_{q_j}^2.
\end{aligned}
$$

Finalement, nous déduisons la minoration de l'énergie électromagnétique suivante :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{E}^n \;\geq\; & \frac{1}{2}\left(\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T_{int}^{\tau} + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m}\|\mathbf{n}_{ij}\|T_{met}^{\tau} + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T_{int}^{q} + \sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m}\|\mathbf{n}_{ij}\|T_{met}^{q} + \right. \\
& \left. \sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d}\|\mathbf{n}_{ij}\|T_{hyb}\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour avoir $\mathfrak{E}^n > 0$, il suffit que T_{int}^{τ}, T_{met}^{τ}, T_{int}^{q}, T_{met}^{q} et T_{hyb} soient strictement positifs (en supposant $\overline{\mathbf{E}}_i^n$ et $\overline{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}$ non tous nuls pour $i = 1, 2, .., N_\tau$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_i^n$ et $\widetilde{\mathbf{H}}_i^{n-\frac{1}{2}}$ non tous nuls pour $i = 1, 2, .., N_q$) :

- Pour T_{int}^{τ} et T_{met}^{τ}, il suffit que Δt soit tel que :

$$
\forall i,\ \forall j \in \mathscr{V}_i \ :\ \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_i}{p_i} - \dfrac{\beta_{ij}^{\tau}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_j}} - \dfrac{\alpha_i^{\tau}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}} > 0, \\[2ex] \dfrac{\mu_i}{p_i} - \dfrac{\beta_{ij}^{\tau}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_j}} - \dfrac{\alpha_i^{\tau}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i}} > 0, \end{cases}
$$

$$
\iff \forall i,\ \forall j \in \mathscr{V}_i \ :\ \begin{cases} \dfrac{4|\tau_i|}{p_i} > \dfrac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}}\left(\beta_{ij}^{\tau}\sqrt{\dfrac{\mu_i}{\mu_j}} + 2\alpha_i^{\tau}\right), \\[2ex] \dfrac{4|\tau_i|}{p_i} > \dfrac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}}\left(\beta_{ij}^{\tau}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}} + 2\alpha_i^{\tau}\right), \end{cases}
$$

  et enfin, nous appelons Δt_τ le pas de temps (noté Δt ci-dessus) satisfaisant ces inégalités, qui est alors défini de la façon suivante :

$$
\forall i,\ \forall j \in \mathscr{V}_i \ :\quad \Delta t_\tau\left[2\alpha_i^{\tau} + \beta_{ij}^{\tau}\max\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}}, \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}}\right\}\right] \;<\; \frac{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}}{p_i}.
$$

  Remarque : cette condition reste valable dans le cas des faces frontières métalliques ($T_{met}^{\tau} > 0$) avec la convention que j est remplacé par i.

  Donc, si nous prenons un tel Δt_τ, nous aurons $T_{int}^{\tau} > 0$ et $T_{met}^{\tau} > 0$. Nous pouvons remarquer que ce pas de temps Δt_τ correspond à celui de l'étude de stabilité de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ en maillage tétraédrique défini par (3.3).

- De la même manière pour T^q_{int} et T^q_{met}, il suffit que le pas de temps, que nous appelons Δt_q, soit tel que :

$$\forall i,\ \forall j \in \mathscr{V}_i \ :\quad \Delta t_q \left[2\alpha^q_i + \beta^q_{ij} \max\left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}}, \sqrt{\frac{\mu_i}{\mu_j}} \right\} \right] \ < \ \frac{4|q_i|\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}}{p_i}.$$

  Remarque : cette condition reste valable dans le cas des faces frontières métalliques ($T^q_{met} > 0$) avec la convention que j est remplacé par i.

  Donc, si nous prenons un tel Δt_q, nous aurons $T^q_{int} > 0$ et $T^q_{met} > 0$. Nous pouvons remarquer que ce pas de temps Δt_q correspond à celui de la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_k$ en maillage hexaédrique défini par (3.4).

- Maintenant, pour T_{hyb} il suffit de trouver Δt tel que les expressions :

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{p_i} - \frac{\beta^\tau_{ij}\Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\mu_j}} - \frac{\alpha^\tau_i \Delta t\sqrt{\varepsilon_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\mu_i}} \right) \quad , \quad \left(\frac{\mu_i}{p_i} - \frac{\beta^\tau_{ij}\Delta t\sqrt{\mu_i}}{4|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_j}} - \frac{\alpha^\tau_i \Delta t\sqrt{\mu_i}}{2|\tau_i|\sqrt{\varepsilon_i}} \right),$$
$$\left(\frac{\varepsilon_j}{p_j} - \frac{\beta^q_{ji}\Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{4|q_j|\sqrt{\mu_i}} - \frac{\alpha^q_j \Delta t\sqrt{\varepsilon_j}}{2|q_j|\sqrt{\mu_j}} \right) \quad , \quad \left(\frac{\mu_j}{p_j} - \frac{\beta^q_{ji}\Delta t\sqrt{\mu_j}}{4|q_j|\sqrt{\varepsilon_i}} - \frac{\alpha^q_j \Delta t\sqrt{\mu_j}}{2|q_j|\sqrt{\varepsilon_j}} \right),$$

  soient strictement positives. Nous remarquons que l'on retrouve les deux premières dans T^τ_{int}, donc pour que celles-ci soient strictement positives il suffit de prendre Δt défini comme Δt_τ. Regardons les deux suivantes, nous voyons clairement qu'il suffit de prendre Δt défini comme Δt_q ($\forall j,\ \forall i \in \mathscr{V}_j$) pour que ces deux expressions soient strictement positives. Ainsi pour que T_{hyb} soit strictement positif, il suffit de prendre un pas de temps égal au minimum entre Δt_τ et Δt_q.

Pour conclure, en notant Δt le pas de temps global, la condition suffisante de stabilité est définie par :

$$\Delta t = \min\{\Delta t_\tau, \Delta t_q\}. \tag{3.12}$$

Sous cette condition et sous les hypothèses définies dans (3.1) et (3.2), $\mathfrak{E}^n$ est une forme quadratique définie positive, c'est-à-dire que nous avons bien :

$\mathfrak{E}^n \ \geq \ 0 \ \ (\forall\, \overline{\mathbf{E}}^n_i,\ \overline{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i,\ i = 1,..,N_\tau \ \text{ et } \ \forall\, \widetilde{\mathbf{E}}^n_i,\ \widetilde{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i,\ i = 1,..,N_q$ et

$\mathfrak{E}^n = 0 \Longrightarrow (\forall\, i = 1,..,N_\tau,\ \overline{\mathbf{E}}^n_i = 0,\ \overline{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i = 0 \ \text{ et } \ \forall\, i = 1,..,N_q,\ \widetilde{\mathbf{E}}^n_i = 0,\ \widetilde{\mathbf{H}}^{n-\frac{1}{2}}_i = 0).$

Remarques :

- une généralisation (que nous ne présenterons pas) de cette étude de stabilité, prenant en compte à la fois les schémas en temps LF2 et LF4, est à soumettre prochainement (article en préparation [A2], cf sous-section 1.4).
- cette condition (3.12) de stabilité est une condition suffisante, à ne pas confondre avec une condition nécessaire. Cette condition dit ici que, si nous prenons un tel pas de temps, alors nous avons la garantie d'un calcul stable ; mais celle-ci n'affirme en aucun cas la réciroque, qui serait : prendre un pas de temps différent de (3.12) (i.e. plus grand) implique l'instabilité du schéma (réciroque contraposée). Autrement dit, en pratique il n'est pas exclu, par

exemple, de conserver un calcul stable en prenant une valeur du pas de temps se situant entre Δt_τ et Δt_q.

- Dans [Fahs 2008], il est démontré pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ maillages tétraédriques, que le schéma LF4, préserve la stabilité tout en pouvant multipilier la valeur du pas de temps correspondant au schéma LF2, par : $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \simeq 2.847$.

3.2 Étude de convergence

Nous continuons l'analyse mathématique de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ et nous nous intéressons à présent à la convergence en h de ce schéma, afin de dégager un estimateur d'erreur a-priori [Fezoui *et al.* 2005] (ou encore [Pernet & Ferrieres 2007, Lanteri & Scheid 2011]). Pour étudier cette convergence, commençons tout d'abord par bien resituer le problème (2.1). On rappelle que (2.1) (cf [Fezoui *et al.* 2005]) admet une unique solution (exacte) $\mathbf{W}$ dans l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathbf{W} \in \mathcal{C}^1([0,t_f],(L^2(\Omega))^6) \bigcap \mathcal{C}^0([0,t_f],(H(\mathrm{rot},\Omega))^6), \tag{3.13}$$

pour toute condition initiale $\mathbf{W}_0 \in (H(\mathrm{rot},\Omega))^6$ satisfaisant les conditions aux limites décrites dans la section 2.1. De plus, on associe ainsi aux formulations faibles (2.15) et (2.16) (d'inconnue $\mathbf{W}_h(t)$) la condition initiale : $\mathbf{W}_h(0) = P_h(\mathbf{W}_0)$ où $P_h : (L^2(\Omega))^6 \to V_h^6$ désigne le projecteur orthogonal sur V_h^6 selon le produit scalaire $(L^2(\Omega))^6$ (dans un abus de notation, nous utiliserons également P_h quand nécessaire pour la projection orthogonale sur V_h^3). Nous faisons maintenant plusieurs hypothèses et introduisons quelques notations.

3.2.1 Propositions, lemmes, hypothèses et notations

Dans ce qui suit, h_{c_i} désigne le diamètre de la cellule (tétraèdre ou hexaèdre) c_i. On considère une famille de grilles non-structurées $(\mathscr{C}_h)_h$ (hybrides et non-conformes), où h est le paramètre de maillage de chaque grille, défini par $h = \max_{c_i \in \mathscr{C}_h} h_{c_i}$. Les maillages $\mathscr{C}_h$ sont supposés compatibles avec la frontière du domaine $\partial\Omega$, i.e. le volume discrétisé $\Omega_h = \bigcup_{c_i \in \mathscr{C}_h} c_i$ tend vers Ω.

Nous faisons les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 1. *Les grilles non-strucutrées $\mathscr{C}_h$ sont uniformément "shape regular" : il existe une constante $\eta > 0$ telle que :*

$$\forall h,\ \forall c_i \in \mathscr{C}_h,\ \ h_{c_i}/\rho_{c_i} \ \leq\ \eta, \tag{3.14}$$

où ρ_{c_i} est le diamètre de la plus grande boule incluse dans l'élément fini c_i.

Hypothèse 2. *Nous admettons l'hypothèse suivante, dite "inverse assumption" : il existe une constante $\gamma > 0$ (indépendante de h) telle que :*

$$\forall h,\ \forall c_i \in \mathscr{C}_h,\ \forall j \in \mathscr{V}_i,\ \ h_{c_i}/h_{c_j} \ \leq\ \gamma. \tag{3.15}$$

Nous supposons également que les coefficients électromagnétiques ε et μ sont uniformément bornés et constants par morceaux et on note Ω_j les sous-domaines de Ω où ε et μ sont constants.

On introduit ensuite les espace de Sobolev morcelés $PH^{s+1}(\Omega) = \{v \mid \forall j, v_{|\Omega_j} \in H^{s+1}(\Omega_j)\}$ munis de la norme $\|v\|_{PH^{s+1}(\Omega)} = \left(\sum_j \|v_{|\Omega_j}\|^2_{s+1,\Omega_j}\right)^{1/2}$, où $\|.\|_{s+1,\Omega_j}$ désigne la norme H^{s+1} standard sur Ω_j.

Enfin, nous présentons les trois formes bilinéaires suivantes (utilisées dans toute cette analyse de convergence) :

$$
\begin{aligned}
m(\mathbf{T},\mathbf{T}') &= 2\int_\Omega \langle Q\mathbf{T}\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x},\\
a(\mathbf{T},\mathbf{T}') &= \int_\Omega \left(\left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial^h_{x_k}\mathcal{N}^k\mathbf{T}\ ,\ \mathbf{T}'\right\rangle - \sum_{k=1}^{3}\langle \partial^h_{x_k}\mathbf{T}'\ ,\ \mathcal{N}^k\mathbf{T}\rangle\right) d\mathbf{x},\\
b(\mathbf{T},\mathbf{T}') &= \int_{\mathscr{F}_d} \left(\ \langle\ \{\mathbf{V}\}\ ,\ [\![\mathbf{U}']\!]\ \rangle - \langle\{\mathbf{U}\}\ ,\ [\![\mathbf{V}']\!]\rangle - \langle\{\mathbf{V}'\}\ ,\ [\![\mathbf{U}]\!]\rangle + \langle\{\mathbf{U}'\}\ ,\ [\![\mathbf{V}]\!]\rangle\ \right)\ dS +\\
&\quad \int_{\mathscr{F}_m} \left(\ \langle \mathbf{U}\ ,\ \check{\mathbf{n}}\times\mathbf{V}'\rangle + \langle \mathbf{V}\ ,\ \check{\mathbf{n}}\times\mathbf{U}'\rangle\ \right)\ dS,
\end{aligned}
$$

avec :

- $\mathbf{T} = \begin{pmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{V}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ et $\mathbf{T}' = \begin{pmatrix}\mathbf{U}'\\ \mathbf{V}'\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ (et $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}'$ et $\mathbf{V}'$ appartiennent chacun à $\mathbb{R}^3$).
- $[\![\mathbf{U}_h]\!]_{ij} = \left(\mathbf{U}_j|_{a_{ij}} - \mathbf{U}_i|_{a_{ij}}\right) \times \check{\mathbf{n}}_{ij}$ et $\{\mathbf{U}_h\}_{ij} = \dfrac{\mathbf{U}_i|_{a_{ij}} + \mathbf{U}_j|_{a_{ij}}}{2}$ sont respectivement le saut et le flux de $\mathbf{U}_h$ sur la face a_{ij}.
- $\mathscr{F}_d$ désigne l'ensemble de toutes les faces internes et $\mathscr{F}_m$ l'ensemble de toutes les faces métalliques du maillage.
- $(\partial^h_{x_k}\mathbf{T})|_{c_i} = \partial_{x_k}(\mathbf{T}_{|c_i})$ pour $k = 1,2,3$.
- Dans l'intégrale sur $\mathscr{F}_m$, sur chaque face a_{ij}, $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont $\mathbf{U}_{|c_i}$ et $\mathbf{V}_{|c_i}$.

Maintenant, en réalisant la somme de (2.15) sur chaque cellule $c_i \in \mathscr{T}_h$ et de (2.16) sur chaque cellule $c_i \in \mathscr{Q}_h$, on obtient que la solution discrète $\mathbf{W}_h \in V_h^6$ satisfait :

$$m(\partial_t\mathbf{W}_h,\mathbf{T}') + a(\mathbf{W}_h,\mathbf{T}') + b(\mathbf{W}_h,\mathbf{T}') = 0,\ \ \forall\mathbf{T}' \in V_h^6. \tag{3.16}$$

On montre alors, dans la Proposition 1, que la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ est consistante avec le système (2.1) :

Proposition 1. *Soit* $\mathbf{W}$ *la solution exacte de* (2.1) *(et satisfaisant* (3.13)*), on a :*

$$m(\partial_t\mathbf{W},\mathbf{T}') + a(\mathbf{W},\mathbf{T}') + b(\mathbf{W},\mathbf{T}') = 0,\ \ \forall\mathbf{T}' \in V_h^6. \tag{3.17}$$

Démonstration. Dans un premier temps, regardons $m(\partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}')$:

$$m(\partial_t \mathbf{W}, \mathbf{T}') = 2 \sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \left\langle Q \partial_t \mathbf{W} \ , \ \mathbf{T}' \right\rangle \ d\mathbf{x}.$$

Deuxièmement, on s'intéresse à $b(\mathbf{W}, \mathbf{T}')$:

$$\begin{aligned} b(\mathbf{W}, \mathbf{T}') \ &= \ \int_{\mathscr{F}_d} \left(\left\langle \{\mathbf{H}\} \ , \ [\![\mathbf{U}']\!] \right\rangle - \left\langle \{\mathbf{E}\} \ , \ [\![\mathbf{V}']\!] \right\rangle - \left\langle \{\mathbf{V}'\} \ , \ [\![\mathbf{E}]\!] \right\rangle + \left\langle \{\mathbf{U}'\} \ , \ [\![\mathbf{H}]\!] \right\rangle \right) \ dS + \\ &\quad \int_{\mathscr{F}_m} \left(\left\langle \mathbf{E} \ , \ \breve{\mathbf{n}} \times \mathbf{V}' \right\rangle + \left\langle \mathbf{H} \ , \ \breve{\mathbf{n}} \times \mathbf{U}' \right\rangle \right) \ dS \\ &= \ \sum_{a_{ij} \in \mathscr{F}_d} \int_{a_{ij}} \Big(\Big\langle \{\mathbf{H}\}_{ij} \ , \ [\![\mathbf{U}']\!]_{ij} \Big\rangle - \Big\langle \{\mathbf{E}\}_{ij} \ , \ [\![\mathbf{V}']\!]_{ij} \Big\rangle - \\ &\qquad \Big\langle \{\mathbf{V}'\}_{ij} \ , \ [\![\mathbf{E}]\!]_{ij} \Big\rangle + \Big\langle \{\mathbf{U}'\}_{ij} \ , \ [\![\mathbf{H}]\!]_{ij} \Big\rangle \Big) \ dS + \\ &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathscr{F}_m} \int_{a_{ij}} \left(\left\langle \mathbf{E}_{|c_i} \ , \ \breve{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{V}'_i \right\rangle + \left\langle \mathbf{H}_{|c_i} \ , \ \breve{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{U}'_i \right\rangle \right) \ dS. \end{aligned}$$

Du fait que les composantes $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ appartiennent à $H(\mathrm{rot}, \Omega)$, leur trace tangentielle est continue. Autrement dit, sur $a_{ij} \in \mathscr{F}_d$, on a : $\mathbf{E}_{|c_i} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{E}_{|c_j} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}$ et $\mathbf{H}_{|c_i} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{H}_{|c_j} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}$ et donc :

- $[\![\mathbf{E}]\!]_{ij} = [\![\mathbf{H}]\!]_{ij} = 0$.
- $\{\mathbf{H}\}_{ij} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{H} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}$ et $\{\mathbf{E}\}_{ij} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} = \mathbf{E} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}$.

Par ailleurs, toujours dans l'intégrale sur $a_{ij} \in \mathscr{F}_d$, on remarque les égalités suivantes (propriétés du produit mixte) :

- $\Big\langle \{\mathbf{H}\}_{ij} \ , \ [\![\mathbf{U}']\!]_{ij} \Big\rangle = \Big\langle \{\mathbf{H}\}_{ij} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{U}'_i - \mathbf{U}'_j \Big\rangle$.
- $\Big\langle \{\mathbf{E}\}_{ij} \ , \ [\![\mathbf{V}']\!]_{ij} \Big\rangle = \Big\langle \{\mathbf{E}\}_{ij} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{V}'_i - \mathbf{V}'_j \Big\rangle$.

Enfin, dans l'intégrale sur $a_{ij} \in \mathscr{F}_m$, on a :

- $\left\langle \mathbf{E}_{|c_i} \ , \ \breve{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{V}'_i \right\rangle = \left\langle \mathbf{E}_{|c_i} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{V}'_i \right\rangle = \left\langle \mathbf{E} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{V}'_i \right\rangle$.
- $\left\langle \mathbf{H}_{|c_i} \ , \ \breve{\mathbf{n}}_{ij} \times \mathbf{U}'_i \right\rangle = \left\langle \mathbf{H}_{|c_i} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{U}'_i \right\rangle = \left\langle \mathbf{H} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{U}'_i \right\rangle$.

Ainsi, nous arrivons à la forme de $b(\mathbf{W}, \mathbf{T}')$ suivante :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{W}, \mathbf{T}') \ &= \ \sum_{a_{ij} \in \mathscr{F}_d} \int_{a_{ij}} \Big(\left\langle \mathbf{H} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{U}'_i - \mathbf{U}'_j \right\rangle - \left\langle \mathbf{E} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{V}'_i - \mathbf{V}'_j \right\rangle \Big) \ dS + \\ &\quad \sum_{a_{ij} \in \mathscr{F}_m} \int_{a_{ij}} \left(\left\langle \mathbf{E} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{V}'_i \right\rangle + \left\langle \mathbf{H} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij} \ , \ \mathbf{U}'_i \right\rangle \right) \ dS. \end{aligned}$$

Pour finir, on traite $a(\mathbf{W},\mathbf{T}')$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{W},\mathbf{T}') &= \int_\Omega \left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial^h_{x_k}\mathcal{N}^k\mathbf{W}\ ,\ \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} - \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \left\langle \partial^h_{x_k}\mathbf{T}'\ ,\ \mathcal{N}^k\mathbf{W} \right\rangle d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k}\mathcal{N}^k\mathbf{W}\ ,\ \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \sum_{k=1}^{3} \left\langle \partial_{x_k}\mathbf{T}'\ ,\ \mathcal{N}^k\mathbf{W} \right\rangle d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par partie ci-dessous :

$$\int_{c_i} \sum_{k=1}^{3} \langle \partial_{x_k}\mathbf{T}'\ ,\ \mathcal{N}^k\mathbf{W}\rangle d\mathbf{x} = -\int_{c_i} \left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k}\mathcal{N}^k\mathbf{W}\ ,\ \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} + \int_{\partial c_i} \sum_{k=1}^{3} \langle \mathbf{T}'\ ,\ \breve{\mathbf{n}}^k \left(\mathcal{N}^k\mathbf{W}\right) \rangle dS,$$

on obtient, en définissant $\mathscr{F}^i_d$ comme l'ensemble de toutes les faces internes de la cellule c_i et $\mathscr{F}^i_m$ comme l'ensemble de toutes ses faces métalliques :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{W},\mathbf{T}') &= 2\sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k}\mathcal{N}^k\mathbf{W}\ ,\ \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial c_i} \sum_{k=1}^{3} \langle \mathbf{T}'\ ,\ \breve{\mathbf{n}}^k \left(\mathcal{N}^k\mathbf{W}\right) \rangle dS \\ &= 2\sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \langle \nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\mathscr{V}_i} \int_{a_{ij}} \sum_{k=1}^{3} \langle \mathbf{T}'\ ,\ \breve{\mathbf{n}}^k_{ij} \left(\mathcal{N}^k\mathbf{W}\right) \rangle dS \\ &= 2\sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \langle \nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\mathscr{V}_i} \int_{a_{ij}} \left\langle \sum_{k=1}^{3} \breve{\mathbf{n}}^k_{ij}\mathcal{N}^k\mathbf{W}\ ,\ \mathbf{T}' \right\rangle dS \\ &= 2\sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \langle \nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\mathscr{V}_i} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}\ ,\ \mathbf{T}'\rangle dS \\ &= 2\sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \langle \nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x} - \\ &\quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}^i_d} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}\ ,\ \mathbf{T}'\rangle dS - \sum_{i=1}^{N} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}^i_m} \int_{a_{ij}} \langle \mathcal{M}_{ij}\mathbf{W}\ ,\ \mathbf{T}'\rangle dS, \end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{W},\mathbf{T}') &= 2\sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} \langle \nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x} - \\ &\quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}^i_d} \int_{a_{ij}} \left(\left\langle \mathbf{H}_{|c_i} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{U}'_i \right\rangle - \left\langle \mathbf{E}_{|c_i} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{V}'_i \right\rangle \right) dS - \\ &\quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}^i_m} \int_{a_{ij}} \left(\left\langle \mathbf{H}_{|c_i} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{U}'_i \right\rangle - \left\langle \mathbf{E}_{|c_i} \times \breve{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{V}'_i \right\rangle \right) dS. \end{aligned}$$

On réalise à présent la somme sur toutes les faces internes et sur toutes les faces métalliques, $a(\mathbf{W},\mathbf{T}')$ devient alors :

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{W},\mathbf{T}') &= 2\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i}\langle\nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x}- \\
&\quad \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}_d}\int_{a_{ij}}\Big(\langle\mathbf{H}_{|c_i}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{U}_i'\rangle-\langle\mathbf{E}_{|c_i}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{V}_i'\rangle+ \\
&\qquad \langle\mathbf{H}_{|c_j}\times\check{\mathbf{n}}_{ji}\ ,\ \mathbf{U}_j'\rangle-\langle\mathbf{E}_{|c_j}\times\check{\mathbf{n}}_{ji}\ ,\ \mathbf{V}_j'\rangle\Big)\,dS- \\
&\quad \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}_m}\int_{a_{ij}}\Big(\langle\mathbf{H}_{|c_i}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{U}_i'\rangle-\langle\mathbf{E}_{|c_i}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{V}_i'\rangle\Big)\,dS \\
&= 2\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i}\langle\nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x}- \\
&\quad \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}_d}\int_{a_{ij}}\Big(\langle\mathbf{H}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{U}_i'-\mathbf{U}_j'\rangle-\langle\mathbf{E}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{V}_i'-\mathbf{V}_j'\rangle\Big)\,dS- \\
&\quad \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}_m}\int_{a_{ij}}\Big(\langle\mathbf{H}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{U}_i'\rangle-\langle\mathbf{E}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{V}_i'\rangle\Big)\,dS.
\end{aligned}$$

On obtient donc la somme des trois formes $m(\partial_t\mathbf{W},\mathbf{T}')$, $a(\mathbf{W},\mathbf{T}')$ et $b(\mathbf{W},\mathbf{T}')$ suivante :

$$\begin{aligned}
m(\partial_t\mathbf{W},\mathbf{T}')+a(\mathbf{W},\mathbf{T}')+b(\mathbf{W},\mathbf{T}') &= 2\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i}\langle Q(\partial_t\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x}+2\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i}\langle\nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x}+ \\
&\quad 2\sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}_m}\int_{a_{ij}}\langle\mathbf{E}\times\check{\mathbf{n}}_{ij}\ ,\ \mathbf{V}_i'\rangle dS.
\end{aligned}$$

Or, si l'on prend $\mathbf{T}'$ la fonction test vectorielle dans (2.14) et que l'on somme pour chaque $c_i\in\Omega_h$, cela implique que :

$$2\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i}\langle Q(\partial_t\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x}+2\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i}\langle\nabla\cdot F(\mathbf{W})\ ,\ \mathbf{T}'\rangle d\mathbf{x}=0,$$

et, pour finir, en appliquant la condition aux limites sur le bord métallique $\partial\Omega^m$, qui nous est donnée par : $\mathbf{E}\times\check{\mathbf{n}}=0$, on obtient ainsi :

$$m(\partial_t\mathbf{W},\mathbf{T}')+a(\mathbf{W},\mathbf{T}')+b(\mathbf{W},\mathbf{T}')=0,\ \ \forall\mathbf{T}'\in V_h^6 \text{ et pour } \mathbf{W} \text{ solution exacte.}$$

□

Dans la suite, nous nous servons du lemme de stabilité suivant :

Lemme 1. *Pour tout* $\mathbf{T}'\in V_h^6$, *on a :*

$$a(\mathbf{T}',\mathbf{T}')+b(\mathbf{T}',\mathbf{T}')=0. \tag{3.18}$$

Démonstration. On constate pour $a(\mathbf{T}', \mathbf{T}')$ que :

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{T}', \mathbf{T}') &= \int_\Omega \left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial^h_{x_k} \mathcal{N}_k \mathbf{T}' \ , \ \mathbf{T}' \right\rangle d\mathbf{x} - \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \partial^h_{x_k} \mathbf{T}' \ , \ \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \partial^h_{x_k} \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \ , \ \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \partial^h_{x_k} \mathbf{T}' \ , \ \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \mathcal{N}^k \left(\partial^h_{x_k} \mathbf{T}' \right) \ , \ \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \partial^h_{x_k} \mathbf{T}' \ , \ \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \partial^h_{x_k} \mathbf{T}' \ , \ \left(\mathcal{N}^k \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \partial^h_{x_k} \mathbf{T}' \ , \ \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \partial^h_{x_k} \mathbf{T}' \ , \ \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} - \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \langle \partial^h_{x_k} \mathbf{T}' \ , \ \mathcal{N}^k \mathbf{T}' \rangle d\mathbf{x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De même pour $b(\mathbf{T}', \mathbf{T}')$:

$$\begin{aligned}
b(\mathbf{T}', \mathbf{T}') &= \int_{\mathscr{F}_d} \left(\langle \{\mathbf{V}'\} \ , \ [\![\mathbf{U}']\!] \rangle - \langle \{\mathbf{U}'\} \ , \ [\![\mathbf{V}']\!] \rangle - \langle \{\mathbf{V}'\} \ , \ [\![\mathbf{U}']\!] \rangle + \langle \{\mathbf{U}'\} \ , \ [\![\mathbf{V}']\!] \rangle \right) \ dS + \\
&\quad \int_{\mathscr{F}_m} \left(\langle \mathbf{U}' \ , \ \breve{\mathbf{n}} \times \mathbf{V}' \rangle + \langle \mathbf{V}' \ , \ \breve{\mathbf{n}} \times \mathbf{U}' \rangle \right) \ dS \\
&= \int_{\mathscr{F}_m} \left(\langle \mathbf{U}' \ , \ \breve{\mathbf{n}} \times \mathbf{V}' \rangle - \langle \mathbf{U}' \ , \ \breve{\mathbf{n}} \times \mathbf{V}' \rangle \right) \ dS = 0.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$a(\mathbf{T}', \mathbf{T}') + b(\mathbf{T}', \mathbf{T}') = 0, \ \ \forall \mathbf{T}' \in V_h^6.$$

<u>Remarque</u> : on peut montrer de façon similaire que a et b sont anti-symétriques.

□

Ceci implique, en remplaçant dans (3.16), $\mathbf{T}'$ par $\mathbf{W}_h \in V_h^6$ la solution approchée :

$$m(\partial_t \mathbf{W}_h, \mathbf{W}_h) = 0.$$

On définit l'énergie semi-discrète par : $\mathfrak{E}_h(t) = \dfrac{1}{2} m(\mathbf{W}_h, \mathbf{W}_h)$. Elle est constante car $\dfrac{d}{dt}\mathfrak{E}_h(t) = m(\partial_t \mathbf{W}_h, \mathbf{W}_h) = 0$.

Nous terminons cette sous-section en rappelant deux résultats déjà connus dans les méthodes d'éléments finis, où $|.|_{r,c_i}$ désigne la semi-norme standard H^r sur c_i et $\|.\|_{0,\partial c_i}$ la norme standard L^2 sur ∂c_i :

Lemme 2. *(cf [Ciarlet 1978]) Soit $\tau_i \in \mathscr{T}_h$ (resp. $q_i \in \mathscr{Q}_h$) et $u \in H^{s+1}(\tau_i)$ (resp. $u \in H^{s+1}(q_i)$) pour $s \geq 0$. Soit Π un opérateur linéaire de $H^{s+1}(\tau_i)$ (resp. $H^{s+1}(q_i)$) dans $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[q_i]$) tel que $\Pi(u) = u$, pour tout $u \in \mathbb{P}_p[\tau_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[q_i]$). Alors, on a :*

$$|\Pi(u) - u|_{r,\tau_i} \leq C\, h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+1-r} \|u\|_{s+1,\tau_i}, \quad r = 0, 1, \tag{3.19}$$

$$\|\Pi(u) - u\|_{0,\partial\tau_i} \leq C\, h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+1/2} \|u\|_{s+1,\tau_i}, \tag{3.20}$$

et respectivement :

$$|\Pi(u) - u|_{r,q_i} \leq C\, h_{q_i}^{\min\{s,k\}+1-r} \|u\|_{s+1,q_i}, \quad r = 0, 1, \tag{3.21}$$

$$\|\Pi(u) - u\|_{0,\partial q_i} \leq C\, h_{q_i}^{\min\{s,k\}+1/2} \|u\|_{s+1,q_i}, \tag{3.22}$$

où C est une constante strictement positive dépendant uniquement de p (resp. k), s et du paramètre de régularité du maillage η.

Lemme 3. *(cf [Ciarlet 1978]) Pour tout $v \in \mathbb{P}_p[\tau_i]$ (resp. $v \in \mathbb{Q}_k[q_i]$), on a :*

$$\|v\|_{0,\partial\tau_i} \leq \hat{C}\, h_{\tau_i}^{-1/2} \|v\|_{0,\tau_i}, \tag{3.23}$$

$$\|v\|_{1,\tau_i} \leq \hat{C}\, h_{\tau_i}^{-1} \|v\|_{0,\tau_i}, \tag{3.24}$$

et respectivement :

$$\|v\|_{0,\partial q_i} \leq \hat{C}\, h_{q_i}^{-1/2} \|v\|_{0,q_i}, \tag{3.25}$$

$$\|v\|_{1,q_i} \leq \hat{C}\, h_{q_i}^{-1} \|v\|_{0,q_i}, \tag{3.26}$$

où $\hat{C}$ est une constante strictement positive dépendant uniquement de p (resp. k), s et du paramètre de régularité du maillage η.

3.2.2 Convergence du problème semi-discret

Nous démontrons dans ici le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $(\mathscr{C}_h)_h$ une famille de maillages non-structurés (hybrides et non-conformes) satisfaisant (3.14) et (3.15). Soit ε et μ uniformément bornés et constants par morceaux. V_h est donné par (2.7).*

Soit $\mathbf{W}$ la solution exacte de (2.1) vérifiant (3.13) et appartenant de plus à $\mathcal{C}^0([0,t_f],(PH^{s+1}(\Omega))^6)$ pour $s \geq 0$, soit $\mathbf{W}_h \in \mathcal{C}^1([0,t_f],V_h^6)$ la solution semi-discrète satisfaisant (2.15)-(2.16) (et $\mathbf{W}$ et $\mathbf{W}_h$ satisfont les conditions initiales énoncées en début de cette section). Soit $\xi_h = \max\left\{h_\tau^{\min\{s,p\}}, h_q^{\min\{s,k\}}\right\}$ avec $h_\tau = \max\limits_{\tau_i \in \mathscr{T}_h}(h_{\tau_i})$ et $h_q = \max\limits_{q_i \in \mathscr{Q}_h}(h_{q_i})$, alors il existe une contante $C > 0$ (utilisée de façon générique dans toute cette étude) indépendante de h telle que :

$$\max_{t\in[0,t_f]} \left(\|P_h(\mathbf{W}(t)) - \mathbf{W}_h(t)\|_{0,\Omega}\right) \leq C\xi_h t_f \, \|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))}\,. \tag{3.27}$$

Démonstration. Notons $\mathbf{w}(t) = \mathbf{W}(t) - \mathbf{W}_h(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(t) - \mathbf{E}_h(t) \\ \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{h}(t) \end{pmatrix}$ l'erreur au temps $t \in [0, t_f]$ et $\underline{\zeta}$ la valeur minimale de ε et μ. Notons également $\mathfrak{E}_{P_h}(t) = \dfrac{1}{2} m(P_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t))$, ainsi :

$$\mathfrak{E}_{P_h}(t) = \int_\Omega \Big\langle QP_h(\mathbf{w}(t)) \, , \, P_h(\mathbf{w}(t)) \Big\rangle \, d\mathbf{x} \geq \underline{\zeta} \int_\Omega \Big\langle P_h(\mathbf{w}(t)) \, , \, P_h(\mathbf{w}(t)) \Big\rangle \, d\mathbf{x},$$

et :

$$\begin{aligned} \underline{\zeta} \int_\Omega \Big\langle P_h(\mathbf{w}(t)) \, , \, P_h(\mathbf{w}(t)) \Big\rangle \, d\mathbf{x} &= \underline{\zeta} \int_\Omega \Big(\Big\langle P_h(\mathbf{e}(t)) \, , \, P_h(\mathbf{e}(t)) \Big\rangle + \\ &\qquad \Big\langle P_h(\mathbf{h}(t)) \, , \, P_h(\mathbf{h}(t)) \Big\rangle \Big) \, d\mathbf{x} \\ &= \underline{\zeta} \left(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 \right). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Donc :

$$\mathfrak{E}_{P_h}(t) \geq \underline{\zeta} \left(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 \right). \tag{3.29}$$

En tenant compte des conditions initiales discrètes, on a $\mathfrak{E}_{P_h}(0) = 0$, et pour $t \in [0, t_f]$:

$$\mathfrak{E}_{P_h}(t) = \int_0^t \frac{d}{d\varsigma} \mathfrak{E}_{P_h}(\varsigma) \, d\varsigma = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{d\varsigma} m(P_h(\mathbf{w}(\varsigma)), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \, d\varsigma = \int_0^t m(\partial_\varsigma P_h(\mathbf{w}(\varsigma)), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \, d\varsigma,$$

du fait que $P_h(\mathbf{w}(t)) \in V_h^6$ on a aussi $a(P_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t))) + b(P_h(\mathbf{w}(t)), P_h(\mathbf{w}(t))) = 0$, et donc :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{P_h}(t) = \int_0^t \Big(& m(\partial_\varsigma P_h(\mathbf{w}(\varsigma)), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) + a(P_h(\mathbf{w}(\varsigma)), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) + \\ & b(P_h(\mathbf{w}(\varsigma)), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \Big) \, d\varsigma. \end{aligned} \tag{3.30}$$

D'autre part, si l'on soustrait (3.16) à (3.17) en prenant $\mathbf{T}' = P_h(\mathbf{w}(t))$, la bilinéarité de m, a et b nous donne :

$$\begin{aligned} & m\left(\partial_t \mathbf{W}(t) - \partial_t \mathbf{W}_h(t), P_h(\mathbf{w}(t))\right) + a\left(\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}_h(t), P_h(\mathbf{w}(t))\right) + \\ & b\left(\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}_h(t), P_h(\mathbf{w}(t))\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

On remarque dans (3.30) que (P_h linéaire et $\mathbf{W}_h \in V_h^6$) : $P_h(\mathbf{w}(t)) = P_h(\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}_h(t)) = P_h(\mathbf{W}(t)) - \mathbf{W}_h(t)$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{P_h}(t) = \int_0^t \Big(& m(\partial_\varsigma P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \partial_\varsigma \mathbf{W}_h(\varsigma)), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) + a(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}_h(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) + \\ & b(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}_h(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \Big) \, d\varsigma. \end{aligned} \tag{3.32}$$

En intégrant alors (3.31) sur $[0, t]$ et en soustrayant à (3.32), on obtient (en utilisant la bilinéarité de m, a et b) :

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{P_h}(t) &= \int_0^t \big(m(\partial_\varsigma P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \; + \; a(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) + \\ &\qquad b(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \big) \, d\varsigma.\end{aligned}$$

Donc (cf (3.29)) :

$$\begin{aligned}\underline{\zeta} \big(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 \big) \;\leq\; & \int_0^t \big(m(\partial_\varsigma P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma)), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) + \\ & a(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) + \\ & b(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \big) \, d\varsigma.\end{aligned}$$

De plus, P_h étant linéaire, indépendant du temps et défini de façon unique, on trouve :

$$\begin{aligned}m(\partial_\varsigma P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) &= m(P_h(\partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma)) - \partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \\ &= 2 \int_\Omega \Big\langle Q\,[P_h(\partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma)) - \partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma)] \;,\; P_h(\mathbf{w}(\varsigma)) \Big\rangle d\mathbf{x} \\ &= 2 \int_\Omega \Big\langle P_h(\partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma)) - \partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma) \;,\; Q^{\mathrm{T}} P_h(\mathbf{w}(\varsigma)) \Big\rangle d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Or, P_h est le projecteur orthogonal de $(L^2(\Omega))^6$ dans le sous-espace vectoriel V_h^6, du fait que $\partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma) \in (L^2(\Omega))^6$, que $P_h(\partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma)) \in V_h^6$ soit son projeté orthogonal et que $Q^{\mathrm{T}} P_h(\mathbf{w}(\varsigma)) \in V_h^6$ (ε et μ constants sur chaque c_i), on a, par définition (théorème de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel) :

$$m(\partial_\varsigma P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \partial_\varsigma \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) = 0,$$

ainsi :

$$\begin{aligned}\underline{\zeta} \big(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|_{0,\Omega}^2 + \|P_h(\mathbf{h}(t))\|_{0,\Omega}^2 \big) \;\leq\; & \int_0^t \big(a(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) + \\ & b(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma))) \big) \, d\varsigma.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Nous nous intéressons à présent aux deux termes restant dans cette intégrale sur $[0, t]$. A partir de maintenant, nous omettons la variable temporelle afin d'alléger la notation et nous notons τ_i les tétraèdres et q_i les hexaèdres. Commençons par $a(P_h(\mathbf{W}(\varsigma)) - \mathbf{W}(\varsigma), P_h(\mathbf{w}(\varsigma)))$:

$$
\begin{aligned}
a(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &= \int_\Omega \left(\left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial^h_{x_k} \mathcal{N}^k \left[P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \right] \ , \ P_h(\mathbf{w}) \right\rangle - \right. \\
&\qquad \left. \sum_{k=1}^{3} \left\langle \partial^h_{x_k} P_h(\mathbf{w}) \ , \ \mathcal{N}^k \left[P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \right] \right\rangle \right) d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \left(\left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial^h_{x_k} \mathcal{N}^k \left[P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \right] \ , \ P_h(\mathbf{w}) \right\rangle - \right. \\
&\qquad \left. \sum_{k=1}^{3} \left\langle P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \ , \ \underbrace{\left(\mathcal{N}^k\right)^{\mathrm{T}} \partial^h_{x_k} P_h(\mathbf{w})}_{\in V_h^6} \right\rangle \right) d\mathbf{x} \\
&= \int_\Omega \left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial^h_{x_k} \mathcal{N}^k \left[P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \right] \ , \ P_h(\mathbf{w}) \right\rangle d\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^{N_\tau} \int_{\tau_i} \left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \left[P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \right] \ , \ P_h(\mathbf{w}) \right\rangle d\mathbf{x} + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N_q} \int_{q_i} \left\langle \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \left[P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \right] \ , \ P_h(\mathbf{w}) \right\rangle d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$
\begin{aligned}
a(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) &\leq \left| \, a(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) \, \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} \left\| \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \left[P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \right] \right\|_{0,\tau_i} \left\| P_h(\mathbf{w}) \right\|_{0,\tau_i} + \\
&\quad \sum_{i=1}^{N_q} \left\| \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \left[P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W} \right] \right\|_{0,q_i} \left\| P_h(\mathbf{w}) \right\|_{0,q_i}.
\end{aligned} \tag{3.34}
$$

On pose $u(\mathbf{x},t) \equiv P_h(\mathbf{W}(\mathbf{x},t)) - \mathbf{W}(\mathbf{x},t) \ \in \mathbb{R}^6$, d'où :

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \ u \right\|_{0,\tau_i} &= \left\| \begin{pmatrix} \partial_{x_3} u_5 - \partial_{x_2} u_6 \\ \partial_{x_1} u_6 - \partial_{x_3} u_4 \\ \partial_{x_2} u_4 - \partial_{x_1} u_5 \\ \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2 \\ \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3 \\ \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \end{pmatrix} \right\|_{0,\tau_i} \\
&\leq \left\| \partial_{x_3} u_5 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_2} u_6 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_1} u_6 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_3} u_4 \right\|_{0,\tau_i} + \\
&\quad \left\| \partial_{x_2} u_4 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_1} u_5 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_2} u_3 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_3} u_2 \right\|_{0,\tau_i} + \\
&\quad \left\| \partial_{x_3} u_1 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_1} u_3 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_1} u_2 \right\|_{0,\tau_i} + \left\| \partial_{x_2} u_1 \right\|_{0,\tau_i},
\end{aligned}
$$

or, pour chaque u_l ($l = 1, \ldots, 6$), on a : $\|\partial_{x_k} u_l\|_{0,\tau_i} \leq \|\nabla u_l\|_{0,\tau_i}$ pour $k = 1, 2, 3$. De plus, la définition de la semi-norme $H^1(\tau_i)$ étant $|u_l|_{1,\tau_i} = \|\nabla u_l\|_{0,\tau_i}$, on obtient en utlisant l'inégalité (3.19) (avec $r = 1$) du Lemme 2 :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \, u \right\|_{0,\tau_i} \leq 2 \sum_{l=1}^{6} |u_l|_{1,\tau_i} &= 2 \sum_{l=1}^{6} |\, (P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W})_l \,|_{1,\tau_i} \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{6} C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \, \|(\mathbf{W})_l\|_{s+1,\tau_i} \\
&= 2C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \Big(\|E_x\|_{s+1,\tau_i} + \|E_y\|_{s+1,\tau_i} + \|E_z\|_{s+1,\tau_i} + \\
&\qquad \|H_x\|_{s+1,\tau_i} + \|H_y\|_{s+1,\tau_i} + \|H_z\|_{s+1,\tau_i} \Big) \\
&\leq 2C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \Big(3 \, \|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i} + 3 \, \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \Big) \\
&\leq C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \Big(\|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i} + \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \Big) .
\end{aligned}$$

On applique maintenant l'inégalité : $|m + n| \leq \sqrt{2m^2 + 2n^2}$, $\forall m, n \in \mathbb{R}$ à $\|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i}$ et $\|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i}$ (tous deux positifs) :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} \mathcal{N}^k \, [P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}] \right\|_{0,\tau_i} &\leq C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \Big(\|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i} + \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \Big) \\
&\leq C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \Big(2 \, \|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i}^2 + 2 \, \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \Big(\|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Également, on remarque que (cf (3.28)) : $\|P_h(\mathbf{w})\|_{0,\tau_i} = \big(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\tau_i}^2 \big)^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, en adoptant un raisonnement similaire sur q_i (on utilise notamment l'inégalité (3.21) du Lemme 2), l'inégalité (3.34) devient :

$$\begin{aligned}
a(P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) \leq & \sum_{i=1}^{N_\tau} C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \Big(\|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \big(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\tau_i}^2 \big)^{\frac{1}{2}} + \\
& \sum_{i=1}^{N_q} C h_{q_i}^{\min\{s,k\}} \Big(\|\mathbf{E}\|_{s+1,q_i}^2 + \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_i}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_i}^2 + \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,q_i}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

À partir de maintenant, la notation " $\cdot$ " désigne, quand nécessaire (et dans cette démonstration), la multiplication (classique). Enfin, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\|\mathbf{E}\|^2_{s+1,\tau_i}+\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_i}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_i}+\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\tau_i}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\|\mathbf{E}\|^2_{s+1,\tau_i}+\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_i}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \left(\sum_{i=1}^{N_\tau}\left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_i}+\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\tau_i}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant cette même inégalité à la somme sur les hexaèdres et ayant utilisé h_τ, h_q et ξ_h (se reporter au Théorème 1 pour leurs définitions), on obtient :

$$\begin{aligned} a(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W},P_h(\mathbf{w})) &\leq Ch_\tau^{\min\{s,p\}}\left(\|\mathbf{E}\|^2_{PH^{s+1}(\mathscr{T}_h)}+\|\mathbf{H}\|^2_{PH^{s+1}(\mathscr{T}_h)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\ &\qquad \left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\mathscr{T}_h}+\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\mathscr{T}_h}\right)^{\frac{1}{2}}+ \\ &\quad Ch_q^{\min\{s,k\}}\left(\|\mathbf{E}\|^2_{PH^{s+1}(\mathscr{Q}_h)}+\|\mathbf{H}\|^2_{PH^{s+1}(\mathscr{Q}_h)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\ &\qquad \left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\mathscr{Q}_h}+\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\mathscr{Q}_h}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\xi_h\left(\|\mathbf{E}\|^2_{PH^{s+1}(\Omega)}+\|\mathbf{H}\|^2_{PH^{s+1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\ &\qquad \left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\Omega}+\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Maintenant, on examine le terme $b(P_h(\mathbf{W}(\varsigma))-\mathbf{W}(\varsigma),P_h(\mathbf{w}(\varsigma))$ dans (3.33) :

$$\begin{aligned} b(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W},P_h(\mathbf{w})) &\leq \left|\, b(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W},P_h(\mathbf{w}))\,\right| \\ &\leq \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}_d}\left(\left|\int_{a_{ij}}\left\langle\{P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}\}_{ij}\,,\,[\![P_h(\mathbf{e})]\!]_{ij}\right\rangle dS\right|+\right. \\ &\qquad \left|\int_{a_{ij}}\left\langle\{P_h(\mathbf{E})-\mathbf{E}\}_{ij}\,,\,[\![P_h(\mathbf{h})]\!]_{ij}\right\rangle dS\right|+ \\ &\qquad \left|\int_{a_{ij}}\left\langle\{P_h(\mathbf{h})\}_{ij}\,,\,[\![P_h(\mathbf{E})-\mathbf{E}]\!]_{ij}\right\rangle dS\right|+ \\ &\qquad \left.\left|\int_{a_{ij}}\left\langle\{P_h(\mathbf{e})\}_{ij}\,,\,[\![P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}]\!]_{ij}\right\rangle dS\right|\right)+ \\ &\quad \sum_{a_{ij}\in\mathscr{F}_m}\left(\left|\int_{a_{ij}}\left\langle[P_h(\mathbf{E})-\mathbf{E}]\,|_{c_i}\,,\,\breve{\mathbf{n}}_{ij}\times P_h(\mathbf{h})|_{c_i}\right\rangle dS\right|+\right. \\ &\qquad \left.\left|\int_{a_{ij}}\left\langle[P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}]\,|_{c_i}\,,\,\breve{\mathbf{n}}_{ij}\times P_h(\mathbf{e})|_{c_i}\right\rangle dS\right|\right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dans la somme sur les faces internes (i.e. $a_{ij} \in \mathscr{F}_d$), a_{ij} peut être une face hybride, dans ce cas on considère (arbitrairement) le tétraèdre τ_i et l'hexaèdre q_j. On se sert à nouveau de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi que des inégalités (3.20) et (3.22) du lemme (2), et (3.23) et (3.25) du lemme (3) :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}\}_{ij} \ , \ [\![P_h(\mathbf{e})]\!]_{ij} \right\rangle dS \right| &\leq \left\| \frac{[P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]\,|_{\tau_i} + [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]\,|_{q_j}}{2} \right\|_{0,a_{ij}} \cdot \\
&\quad \left\| \left(P_h(\mathbf{e})|_{q_j} - P_h(\mathbf{e})|_{\tau_i} \right) \times \check{\mathbf{n}}_{ij} \right\|_{0,a_{ij}} \\
&\leq \left(\left\| [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]\,|_{\tau_i} \right\|_{0,a_{ij}} + \left\| [P_h(\mathbf{H}) - \mathbf{H}]\,|_{q_j} \right\|_{0,a_{ij}} \right) \cdot \\
&\quad \left(\left\| P_h(\mathbf{e})|_{\tau_i} \right\|_{0,a_{ij}} + \left\| P_h(\mathbf{e})|_{q_j} \right\|_{0,a_{ij}} \right) \\
&\leq \left(C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}} \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} + C h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j} \right) \cdot \\
&\quad \left(C h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i} + C h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j} \right) \\
&\leq C \cdot \max\left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max\left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} \cdot \\
&\quad \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} + \|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j} \right) \cdot \left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i} + \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j} \right).
\end{aligned}$$

Cherchons alors à majorer $\max\left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max\left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\}$. Les puissances de h_{τ_i} et h_{q_j} étant différentes, nous avons quatres possibilités :

- $$\begin{aligned}
\max\left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max\left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} &= h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}} h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}} = h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \\
&\leq h_{\tau}^{\min\{s,p\}} \leq \xi_h,
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\max\left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max\left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} &= h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} = h_{q_j}^{\min\{s,k\}} \\
&\leq h_{q}^{\min\{s,k\}} \leq \xi_h,
\end{aligned}$$

- En utilisant (3.15), avec $c_i = \tau_i$ et $c_j = q_j$ (et le paramètre de régularité γ) , on a :

$$\begin{aligned}
\max\left\{ h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} \right\} \cdot \max\left\{ h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \right\} = h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}} h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} &\leq h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}} \sqrt{\gamma}\, h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\gamma}\, h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \\
&\leq \sqrt{\gamma}\, h_{\tau}^{\min\{s,p\}} \\
&\leq \sqrt{\gamma}\, \xi_h,
\end{aligned}$$

- En utilisant (3.15), avec $c_i = q_j$ et $c_j = \tau_i$, on a :

$$\begin{aligned}
\max\left\{h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}}\right\}\cdot\max\left\{h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}}\right\} = h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}} h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}} &\leq h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}}\sqrt{\gamma}\, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\gamma}\, h_{q_j}^{\min\{s,k\}} \\
&\leq \sqrt{\gamma}\, h_{q}^{\min\{s,k\}} \\
&\leq \sqrt{\gamma}\, \xi_h.
\end{aligned}$$

Dans les quatres cas de figure on obtient donc :

$$\max\left\{h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{\min\{s,k\}+\frac{1}{2}}\right\}\cdot\max\left\{h_{\tau_i}^{-\frac{1}{2}}, h_{q_j}^{-\frac{1}{2}}\right\} \leq C\,\xi_h.$$

Ainsi, si a_{ij} est une face interne hybride (on note $\mathscr{H}_d$ l'ensemble de toutes les faces hybrides du maillage) :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_{ij}}\left\langle\{P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}\}_{ij}\ ,\ [\![P_h(\mathbf{e})]\!]_{ij}\right\rangle dS\right| &\leq C\xi_h\left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i}+\|\mathbf{H}\|_{s+1,q_j}\right)\left(\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i}+\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_j}\right) \\
&\leq C\xi_h\left(\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_i}+\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,q_j}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\
&\qquad\left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_i}+\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,q_j}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Si a_{ij} est une face interne commune à deux tétraèdres (on considère les tétraèdres τ_i et τ_j, et on note $\mathscr{T}_d$ l'ensemble de toutes les faces communes à deux tétraèdres du maillage) :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_{ij}}\left\langle\{P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}\}_{ij}\ ,\ [\![P_h(\mathbf{e})]\!]_{ij}\right\rangle dS\right| &\leq Ch_{\tau}^{\min\{s,p\}}\left(\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_i}+\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\
&\qquad\left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_i}+\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\xi_h\left(\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_i}+\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\
&\qquad\left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_i}+\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_j}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Si a_{ij} est une face interne commune à deux hexaèdres (on considère les hexaèdres q_i et q_j, et on note $\mathscr{Q}_d$ l'ensemble de toutes les faces communes à deux hexaèdres du maillage) :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_{ij}}\left\langle\{P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}\}_{ij}\ ,\ [\![P_h(\mathbf{e})]\!]_{ij}\right\rangle dS\right| &\leq Ch_{q}^{\min\{s,k\}}\left(\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,q_i}+\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,q_j}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\
&\qquad\left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,q_i}+\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,q_j}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\xi_h\left(\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,q_i}+\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,q_j}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot \\
&\qquad\left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,q_i}+\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,q_j}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

On obtient les mêmes inégalités pour le terme $\left|\int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{e})\}_{ij}\ ,\ [\![P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}]\!]_{ij}\right\rangle dS\right|$ (cf (3.36)), et des inégalités similaires (mais faisant intervenir les normes de $\mathbf{E}$ et de $P_h(\mathbf{h})$) pour les termes $\left|\int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{E})-\mathbf{E}\}_{ij}\ ,\ [\![P_h(\mathbf{h})]\!]_{ij}\right\rangle dS\right|$ et $\left|\int_{a_{ij}} \left\langle \{P_h(\mathbf{h})\}_{ij}\ ,\ [\![P_h(\mathbf{E})-\mathbf{E}]\!]_{ij}\right\rangle dS\right|$.

Par ailleurs, toujours dans (3.36), regardons la somme sur les faces métalliques (i.e. $a_{ij} \in \mathscr{F}_m$), si a_{ij} est la face d'un tétraèdre (on note $\mathscr{T}_m$ l'ensemble de toutes les faces métalliques du maillage issues de tétraèdres) :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_{ij}} \left\langle [P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}]\,|_{\tau_i}\ ,\ \breve{\mathbf{n}}_{ij}\times P_h(\mathbf{e})|_{\tau_i}\right\rangle dS\right| &\leq \left\|[P_h(\mathbf{H})-\mathbf{H}]\,|_{\tau_i}\right\|_{0,a_{ij}} \left\|P_h(\mathbf{e})|_{\tau_i}\right\|_{0,a_{ij}} \\
&\leq C h_{\tau_i}^{\min\{s,p\}} \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i} \\
&\leq C\xi_h \|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i}\,.
\end{aligned}$$

On a la même inégalité pour le terme $\left|\int_{a_{ij}} \left\langle [P_h(\mathbf{E})-\mathbf{E}]\,|_{\tau_i}\ ,\ \breve{\mathbf{n}}_{ij}\times P_h(\mathbf{h})|_{\tau_i}\right\rangle dS\right|$, et des inégalités similaires si $a_{ij} \in \mathscr{Q}_m$ (avec $\mathscr{Q}_m$ l'ensemble de toutes les faces métalliques du maillage issues d'hexaèdres).

Ce qui entraine la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
b(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W}, P_h(\mathbf{w})) \leq C\xi_h \Bigg(&\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_d} \Bigg(\left(\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_i} + \|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_j}\right)^{\frac12} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_i} + \|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_j}\right)^{\frac12} + \\
&\qquad \left(\|\mathbf{E}\|^2_{s+1,\tau_i} + \|\mathbf{E}\|^2_{s+1,\tau_j}\right)^{\frac12} \left(\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\tau_i} + \|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\tau_j}\right)^{\frac12} \Bigg) + \\
&\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_d} \Bigg(\left(\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,q_i} + \|\mathbf{H}\|^2_{s+1,q_j}\right)^{\frac12} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,q_i} + \|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,q_j}\right)^{\frac12} + \\
&\qquad \left(\|\mathbf{E}\|^2_{s+1,q_i} + \|\mathbf{E}\|^2_{s+1,q_j}\right)^{\frac12} \left(\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,q_i} + \|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,q_j}\right)^{\frac12} \Bigg) + \\
&\sum_{a_{ij}\in\mathscr{H}_d} \Bigg(\left(\|\mathbf{H}\|^2_{s+1,\tau_i} + \|\mathbf{H}\|^2_{s+1,q_j}\right)^{\frac12} \left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\tau_i} + \|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,q_j}\right)^{\frac12} + \\
&\qquad \left(\|\mathbf{E}\|^2_{s+1,\tau_i} + \|\mathbf{E}\|^2_{s+1,q_j}\right)^{\frac12} \left(\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\tau_i} + \|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,q_j}\right)^{\frac12} \Bigg) + \\
&\sum_{a_{ij}\in\mathscr{T}_m} \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,\tau_i} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\tau_i} + \|\mathbf{E}\|_{s+1,\tau_i} \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\tau_i}\right) + \\
&\sum_{a_{ij}\in\mathscr{Q}_m} \left(\|\mathbf{H}\|_{s+1,q_i} \|P_h(\mathbf{e})\|_{0,q_i} + \|\mathbf{E}\|_{s+1,q_i} \|P_h(\mathbf{h})\|_{0,q_i}\right) \Bigg).
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant l'inégalité : $\sum_l m_l n_l \leq \left(\sum_l m_l^2\right)^{\frac12} \left(\sum_l n_l^2\right)^{\frac12}$, $\forall m_l, n_l \in \mathbb{R}^+$ (ingalité de Cauchy-Schwarz discrète), on peut déduire à la majoration de $b(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W}, P_h(\mathbf{w}))$:

$$
\begin{aligned}
b(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W},P_h(\mathbf{w})) &\leq C\xi_h\left(\|\mathbf{H}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}\|P_h(\mathbf{e})\|_{0,\Omega}+\|\mathbf{E}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}\|P_h(\mathbf{h})\|_{0,\Omega}\right)\\
&\leq C\xi_h\left(\|\mathbf{E}\|^2_{PH^{s+1}(\Omega)}+\|\mathbf{H}\|^2_{PH^{s+1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|P_h(\mathbf{e})\|^2_{0,\Omega}+\|P_h(\mathbf{h})\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Nous pouvons ainsi revenir à l'inégalité (3.33). En exploitant alors la majoration (3.35) du terme $a(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W},P_h(\mathbf{w}))$, la majoration (3.37) de $b(P_h(\mathbf{W})-\mathbf{W},P_h(\mathbf{w}))$ et en introduisant la notation suivante : $\|\mathbf{W}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}=\left(\|\mathbf{E}\|^2_{PH^{s+1}(\Omega)}+\|\mathbf{H}\|^2_{PH^{s+1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$, on obtient ainsi :

$$
\underline{\zeta}\left(\|P_h(\mathbf{e}(t))\|^2_{0,\Omega}+\|P_h(\mathbf{h}(t))\|^2_{0,\Omega}\right)\leq\int_0^t C\xi_h\|\mathbf{W}(\varsigma)\|_{PH^{s+1}(\Omega)}\left(\|P_h(\mathbf{e}(\varsigma))\|^2_{0,\Omega}+\|P_h(\mathbf{h}(\varsigma))\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}d\varsigma.
$$

On note $\Lambda(t)=\|P_h(\mathbf{e}(t))\|^2_{0,\Omega}+\|P_h(\mathbf{h}(t))\|^2_{0,\Omega}=\|P_h(\mathbf{E}(t))-\mathbf{E}_h(t)\|^2_{0,\Omega}+\|P_h(\mathbf{H}(t))-\mathbf{H}_h(t)\|^2_{0,\Omega}$ et on déduit de l'inégalité précédente, $\forall t\in[0,t_f]$:

$$
\Lambda(t)\ \leq\ C\xi_h\int_0^t\|\mathbf{W}(\varsigma)\|_{PH^{s+1}(\Omega)}\Lambda(\varsigma)^{\frac{1}{2}}\,d\varsigma\ \leq\ C\xi_h\int_0^{t_f}\|\mathbf{W}(\varsigma)\|_{PH^{s+1}(\Omega)}\Lambda(\varsigma)^{\frac{1}{2}}\,d\varsigma. \tag{3.38}
$$

Maintenant, on rappelle que l'on a : $\|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))}=\max\limits_{t\in[0,t_f]}\left(\|\mathbf{W}(t)\|_{PH^{s+1}(\Omega)}\right)=\sup\limits_{t\in[0,t_f]}\left(\|\mathbf{W}(t)\|_{PH^{s+1}(\Omega)}\right)$. Donc (3.38) devient :

$$
\begin{aligned}
\max_{t\in[0,t_f]}(\Lambda(t)) &\leq C\xi_h\int_0^{t_f}\|\mathbf{W}(\varsigma)\|_{PH^{s+1}(\Omega)}\Lambda(\varsigma)^{\frac{1}{2}}\,d\varsigma\\
&\leq C\xi_h\int_0^{t_f}\|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))}\max_{\varsigma\in[0,t_f]}\left(\Lambda(\varsigma)^{\frac{1}{2}}\right)d\varsigma.
\end{aligned}
$$

Du fait que $\max\limits_{t\in[0,t_f]}\left(\Lambda(t)^{\frac{1}{2}}\right)=\left[\max\limits_{t\in[0,t_f]}(\Lambda(t))\right]^{\frac{1}{2}}$, on a la majoration suivante :

$$
\left[\max_{t\in[0,t_f]}\left(\|P_h(\mathbf{E}(t))-\mathbf{E}_h(t)\|^2_{0,\Omega}+\|P_h(\mathbf{H}(t))-\mathbf{H}_h(t)\|^2_{0,\Omega}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\ \leq\ C\xi_h t_f\|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))},
$$

et du fait que $\|P_h(\mathbf{W}(t))-\mathbf{W}_h(t)\|_{0,\Omega}=\left(\|P_h(\mathbf{E}(t))-\mathbf{E}_h(t)\|^2_{0,\Omega}+\|P_h(\mathbf{H}(t))-\mathbf{H}_h(t)\|^2_{0,\Omega}\right)^{\frac{1}{2}}$, on obtient enfin :

$$
\max_{t\in[0,t_f]}\left(\|P_h(\mathbf{W}(t))-\mathbf{W}_h(t)\|_{0,\Omega}\right)\ \leq\ C\xi_h t_f\|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))}.
$$

□

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du Théorème 1, il existe une constante générique $C > 0$ indépendante de h telle que l'erreur $\mathbf{w} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_h$ satisfait l'estimation a-priori suivante :*

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],L^2(\Omega))} \leq C\xi_h t_f \|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))}. \tag{3.39}$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Minkowski :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}\|_{0,\Omega} = \|\mathbf{W} - \mathbf{W}_h\|_{0,\Omega} &= \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W}) + P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}_h\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,\Omega} + \|P_h(\mathbf{W}) - \mathbf{W}_h\|_{0,\Omega}.\end{aligned}$$

Or, en se servant une nouvelle fois des inégalités (3.19) − (3.21) (pour $r = 0$) du Lemme 2, et pour h_τ et h_q proches de 0, on a :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{i=1}^{N_\tau} \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,\tau_i}^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,q_i}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} \left(Ch_{\tau_i}^{\min\{s,p\}+1} \|\mathbf{W}\|_{s+1,\tau_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \left(Ch_{q_i}^{\min\{s,k\}+1} \|\mathbf{W}\|_{s+1,q_i}\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} \left(Ch_{\tau}^{\min\{s,p\}+1} \|\mathbf{W}\|_{s+1,\tau_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \left(Ch_{q}^{\min\{s,k\}+1} \|\mathbf{W}\|_{s+1,q_i}\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_\tau} \left(Ch_{\tau}^{\min\{s,p\}} \|\mathbf{W}\|_{s+1,\tau_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \left(Ch_{q}^{\min\{s,k\}} \|\mathbf{W}\|_{s+1,q_i}\right)^2 \\ &\leq (C\xi_h)^2 \left(\sum_{i=1}^{N_\tau} \|\mathbf{W}\|_{s+1,\tau_i}^2 + \sum_{i=1}^{N_q} \|\mathbf{W}\|_{s+1,q_i}^2\right) \\ &\leq (C\xi_h)^2 \|\mathbf{W}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

On obtient ainsi : $\|\mathbf{W} - P_h(\mathbf{W})\|_{0,\Omega} \leq C\xi_h \|\mathbf{W}\|_{PH^{s+1}(\Omega)} \leq Ct_f\xi_h \|\mathbf{W}\|_{PH^{s+1}(\Omega)}$, ce qui entraine finalement :

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],L^2(\Omega))} \leq C\xi_h t_f \|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^0([0,t_f],PH^{s+1}(\Omega))}.$$

□

En conclusion, on obtient une erreur pour le schéma semi-discret d'ordre $\mathcal{O}(\xi_h)$ (où $\mathcal{O}$ est le grand $\mathcal{O}$ de Landau).

3.2.3 Convergence du problème totalement discret

Nous étudions à présent la convergence du problème totalement discretisé. Nous détaillons les étapes pour le schéma d'intégration en temps saute-mouton d'ordre 2 et exposons le résultat ainsi que quelques étapes clef pour le schéma saute-mouton d'ordre 4 (la démonstration complète pour le schéma LF4 est à soumettre prochainement (article en préparation [A2], cf sous-section 1.4).

Le schéma complétement discrétisé (2.22) − (2.23) peut être vu comme la discrétisation en temps d'un système d'équations différentielles ordinaires.

La formulation globale (3.16) donne :

$$m(\partial_t \mathbf{W}_h(t), \mathbf{T}') = -\left[a(\mathbf{W}_h(t), \mathbf{T}') + b(\mathbf{W}_h(t), \mathbf{T}')\right], \ \forall \mathbf{T}' \in V_h^6.$$

Cette dernière équation peut être évaluée aux temps t_n et $t_{n+\frac{1}{2}}$ et on déduit que :

$$m\left(\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{E}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \\ \partial_t \mathbf{H}_h(t_n) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) = -\left[a\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) + b\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)\right]. \quad (3.40)$$

Le schéma totalement discret quant à lui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) &= m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n} \\ \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) - \\ &\quad \Delta t\left[a\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n} \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) + b\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n} \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

<u>Remarque</u> : pour le schéma LF4, nous avons à ce stade :

$$\begin{aligned} m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) &= m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h^{n} \\ \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) + \\ &\quad \Delta t\left[m\left(\begin{pmatrix} G_{mag}\left(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ G_{el}\left(\mathbf{E}_h^{n}\right) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)\right] + \\ &\quad \frac{\Delta t^3}{24}\left[m\left(\begin{pmatrix} G_{mag} \circ G_{el} \circ G_{mag}\left(\mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ G_{el} \circ G_{mag} \circ G_{el}\left(\mathbf{E}_h^{n}\right) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)\right]. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on étudie l'erreur de consistance du schéma. Pour cela, on définit $\widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1}$ et $\widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}}$ par :

$$\begin{aligned} m\left(\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} \\ \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) &= m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) - \\ &\quad \Delta t\left[a\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) + b\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)\right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

et $\left(\|\widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h(t_{n+1})\|_{0,\Omega}^2 + \|\widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}})\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ caractérise alors l'erreur de consistance, que l'on cherche à majorer en fonction de Δt. Dans (3.42), en soustrayant $m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)$ et en utilisant (3.40), on obtient :

$$m\left(\begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h(t_{n+1}) \\ \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) = m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) - \mathbf{E}_h(t_{n+1}) \\ \mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) + \Delta t\left[m\left(\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{E}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \\ \partial_t \mathbf{H}_h(t_n) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)\right].$$

Ainsi, en supposant $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^3([0,t_f],(L^2(\Omega))^6)$ et en faisant usage de deux développements de Taylor-Lagrange, on trouve :

$$\left(\|\widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h(t_{n+1})\|_{0,\Omega}^2 + \|\widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}})\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\Delta t^3 \|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^3([0,t_f],(L^2(\Omega)))}. \tag{3.43}$$

<u>Remarque</u> : pour le schéma LF4, nous supposons $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^5([0,t_f],(L^2(\Omega))^6)$ et trouvons :

$$\left(\|\widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} - \mathbf{E}_h(t_{n+1})\|_{0,\Omega}^2 + \|\widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}})\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\Delta t^5 \|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^5([0,t_f],(L^2(\Omega)))}.$$

Maintenant, nous nous intéressons à l'erreur globale du schéma. Autrement dit, on cherche à évaluer :

$$\max_{n\in\{0,\ldots,n_f\}} \left(\|\mathbf{E}(t_n) - \mathbf{E}_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}(t_{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On commence alors par étudier :

$$\|\mathbf{E}_h(t_n) - \mathbf{E}_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,\Omega}^2.$$

On additionne $m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)$ à (3.42), on a :

$$\begin{aligned} m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) - \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) = -\Delta t\Bigg[a\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right) + \\ b\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_n) \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right)\Bigg] + \\ m\left(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_h(t_{n+1}) - \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1} \\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) - \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{T}'\right). \end{aligned} \tag{3.44}$$

En posant $\mathfrak{e}_h^n = \mathbf{E}_h(t_n) - \mathbf{E}_h^n$ et $\mathfrak{h}_h^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_h(t_{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{H}_h^{n-\frac{1}{2}}$ et en soustrayant (3.41) à (3.44), on peut écrire :

$$m\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{e}_h^{n+1}\\ \mathfrak{h}_h^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right) = m\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{e}_h^{n}\\ \mathfrak{h}_h^{n-\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right) - \Delta t\left[a\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{e}_h^{n}\\ \mathfrak{h}_h^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right) + b\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{e}_h^{n}\\ \mathfrak{h}_h^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right)\right] + m\left(\begin{pmatrix}\mathbf{E}_h(t_{n+1}) - \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1}\\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) - \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right).$$

Remarque : pour le schéma LF4, nous obtenons à cette étape :

$$\begin{aligned} m\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{e}_h^{n+1}\\ \mathfrak{h}_h^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right) &= m\left(\begin{pmatrix}\mathfrak{e}_h^{n}\\ \mathfrak{h}_h^{n-\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right) + \\ &\Delta t\left[m\left(\begin{pmatrix}G_{mag}\left(\mathfrak{h}_h^{n+\frac{1}{2}}\right)\\ G_{el}\left(\mathfrak{e}_h^{n}\right)\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right)\right] + \\ &\frac{\Delta t^3}{24}\left[m\left(\begin{pmatrix}G_{mag}\circ G_{el}\circ G_{mag}\left(\mathfrak{h}_h^{n+\frac{1}{2}}\right)\\ G_{el}\circ G_{mag}\circ G_{el}\left(\mathfrak{e}_h^{n}\right)\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right)\right] + \\ &m\left(\begin{pmatrix}\mathbf{E}_h(t_{n+1}) - \widehat{\mathbf{E}}_h^{n+1}\\ \mathbf{H}_h(t_{n+\frac{1}{2}}) - \widehat{\mathbf{H}}_h^{n+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\mathbf{T}'\right). \end{aligned}$$

On définit ensuite l'énergie :

$$\mathfrak{N}^n = \sum_{i=1}^{N}\mathfrak{N}_i^n, \quad \text{avec } \mathfrak{N}_i^n = \|\mathfrak{e}_i^n\|_{0,c_i}^2 + \int_{c_i}\left\langle \mathfrak{h}_i^{n-\frac{1}{2}}\,,\,\mathfrak{h}_i^{n+\frac{1}{2}}\right\rangle d\mathbf{x} \text{ où } \mathfrak{e}_i = \mathfrak{e}_h|_{c_i} \text{ et } \mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_h|_{c_i}.$$

De façon similaire à ce qui a été fait pour l'étude de stabilité dans la section précédente (et dans le même esprit que [Lanteri & Scheid 2011]), on peut montrer que sous une condition CFL du même type on a :

$$\left(\|\mathfrak{e}_i^n\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathfrak{h}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\Delta t^2\|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^3([0,t_f],L^2(\Omega))}. \tag{3.45}$$

Remarque : dans le cas du schéma LF4 :

$$\left(\|\mathfrak{e}_i^n\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathfrak{h}_i^{n-\frac{1}{2}}\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\Delta t^4\|\mathbf{W}\|_{\mathcal{C}^5([0,t_f],L^2(\Omega))}.$$

Ainsi, l'erreur due au schéma en temps saute-mouton d'ordre 2 est en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ et nous pouvons donc conclure par l'inégalité triangulaire et le Corollaire 1 que nous obtenons une erreur, pour le schéma totalement discret dans le cas LF2, d'ordre :

$$\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\xi_h). \tag{3.46}$$

Enfin, l'erreur due au schéma en temps saute-mouton d'ordre 4 est donc en $\mathcal{O}(\Delta t^4)$, nous obtenons ainsi une erreur, pour le schéma totalement discret dans le cas LF4, d'ordre :

$$\mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\xi_h). \tag{3.47}$$

CHAPITRE 4

Expériences numériques 2D

Sommaire

4.1 Préambule et spécifications **67**
4.1.1 Équations de Maxwell 2D 67
4.1.2 Quelques précisions mathématiques et algorithmiques 68
4.2 Description des cas tests considérés **74**
4.2.1 Cas test n°1 : mode $(1,1)$ dans une cavité métallique carrée 74
4.2.2 Cas test n°2 : résonateur circulaire métallique 74
4.2.3 Cas test n°3 : diffraction d'une onde plane par un profil d'aile d'avion 74
4.2.4 Cas test n°4 : diffraction d'une onde plane par un disque diélectrique 75
4.2.5 Cas test n°5 : source Gaussienne modulée et localisée 76
4.3 Tests préliminaires **77**
4.3.1 Tests sur maillages quadrangulaires 77
4.3.2 Pas de temps et validation de l'étude de stabilité 79
4.4 Tests de convergence numérique : comparaison LF2 / LF4 . . . . . **82**
4.4.1 Convergence en h des schémas LF2 et LF4 83
4.4.2 Comparaison des performances des schémas LF2 et LF4 84
4.5 Tests d'efficacité et de précision de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ **86**
4.5.1 Résonateur circulaire métallique 86
4.5.2 Mode $(1,1)$ dans une cavité métallique 88
4.5.3 Onde plane diffractée par un profil d'aile d'avion 93
4.5.4 Onde plane diffractée par un disque diélectrique 99
4.5.5 Source Gaussienne modulée 107

Nous présentons dans ce chapitre les expériences numériques en deux dimensions d'espace. Nous commençons par exposer le système des équations de Maxwell 2D, en donnant certaines explications sur l'implémentation et la résolution numérique de celui-ci. Nous présentons ensuite les différents cas tests étudiés dans ce chapitre ; enfin, nous montrons, commentons et discutons les résultats obtenus dans les différents tests réalisés.

4.1 Préambule et spécifications

4.1.1 Équations de Maxwell 2D

Nous considérons dans cette étude le cas des ondes transverses magnétiques TM_z, pour lesquelles :

$$\mathbf{E}(x_1, x_2, t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z(x_1, x_2, t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(x_1, x_2, t) \equiv \begin{pmatrix} H_x(x_1, x_2, t) \\ H_y(x_1, x_2, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(différentes des ondes transverses électriques TE_z, pour lesquelles seuls E_x, E_y et H_z sont non nuls). Ainsi, nous résolvons les équations de Maxwell 2D en mode TM_z, qui s'écrivent alors en supposant $\sigma \equiv 0$ et en notant $j_{\mathbf{s}}^z$ la troisième composante de $\mathbf{j_s}$:

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t E_z - \partial_{x_1} H_y + \partial_{x_2} H_x &= -j_{\mathbf{s}}^z, \\ \mu \partial_t H_x + \partial_{x_2} E_z &= 0, \\ \mu \partial_t H_y - \partial_{x_1} E_z &= 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

4.1.2 Quelques précisions mathématiques et algorithmiques

4.1.2.1 Fonctions de base, degrés de liberté, éléments de référence et application affine

Pour l'approximation des composantes du champ électromagnétique dans un élément du maillage, nous utilisons une interpolation de Lagrange classique. Les fonctions de base (locale) $\mathbb{P}_p[\tau_i]$ (resp. $\mathbb{Q}_k[q_i]$) sont définies par $\varphi_{il}(\mathbf{x}^m) = \delta_{lm}$ (resp. $\vartheta_{il}(\mathbf{x}^m) = \delta_{lm}$) pour $1 \leq l, m \leq d_i$ (resp. $1 \leq l, m \leq b_i$), où δ_{lm} est le symbole de Kronecker et $\mathbf{x}^m$ le m-ième nœud du triangle τ_i (resp. quadrangle q_i). Ces fonctions de bases sont explicitées en détails dans l'annexe A (cf A.1).

Le nombre de degrés de liberté par élément dépend de la géométrie de celui-ci et de l'ordre d'interpolation. Pour un triangle (en 2D donc) sur lequel on applique l'interpolation $\mathbb{P}_p$, le nombre de degrés de liberté (ou le nombre de fonctions de base, ou encore la dimension de $\mathbb{P}_p$) est égal à : $C_{p+2}^p = \dfrac{(p+2)!}{2\,p!}$. Pour un quadrangle (2D) sur lequel on applique l'interpolation $\mathbb{Q}_k$, le nombre de degrés de liberté est égal à : $(k+1)^2$.

Dans cette mise en œuvre 2D de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, et dans le cas d'un maillage conforme (hybride, triangulaire, ou quadrangulaire), nous stockons toutes les matrices élémentaires (matrices de masse, de gradient et de surface) sur un élément de référence. Pour la partie triangulaire du maillage, l'élément de référence est le triangle isocèle rectangle dont les sommets sont : $\widehat{S1} = \begin{pmatrix} \widehat{S1}_1 \\ \widehat{S1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S2} = \begin{pmatrix} \widehat{S2}_1 \\ \widehat{S2}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S3} = \begin{pmatrix} \widehat{S3}_1 \\ \widehat{S3}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour la partie quadrangulaire du maillage, l'élément de référence est le carré de sommets : $\widehat{S1} = \begin{pmatrix} \widehat{S1}_1 \\ \widehat{S1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{S2} = \begin{pmatrix} \widehat{S2}_1 \\ \widehat{S2}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S3} = \begin{pmatrix} \widehat{S3}_1 \\ \widehat{S3}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S4} = \begin{pmatrix} \widehat{S4}_1 \\ \widehat{S4}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nous définissons ensuite une application qui associe l'élément de référence à un élément du maillage (i.e. à un élément physique). Nous déduisons alors les coefficients des matrices (i.e. des intégrales) sur les éléments physiques à partir des coefficients des matrices sur l'élément de référence, en établissant un lien par une formule de changement de variable. Pour utiliser efficacement ce lien dans notre implémentation, le déterminant de la matrice Jacobienne (le Jacobien) de

l'application doit être constant. De cette façon, nous pourrons calculer les fonctions de base et les intégrales correspondantes uniquement sur l'élément de référence.

Concernant la partie triangulaire, l'application qui associe (FIG. 4.1) le triangle de référence $\widehat{T}$ à un triangle physique T de sommets $S1 = \begin{pmatrix} S1_1 \\ S1_2 \end{pmatrix}$, $S2 = \begin{pmatrix} S2_1 \\ S2_2 \end{pmatrix}$, $S3 \begin{pmatrix} S3_1 \\ S3_2 \end{pmatrix}$, est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}_{\widehat{T}} & : & \widehat{T} & \longrightarrow & T \\ & & \widehat{\mathbf{x}} & \longmapsto & \mathrm{A}_{\widehat{T}}\,\widehat{\mathbf{x}} + \mathrm{B}_{\widehat{T}} \end{array}$$

avec :

$$\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{pmatrix},\ \mathrm{A}_{\widehat{T}} = \begin{bmatrix} S2_1 - S1_1 & S3_1 - S1_1 \\ S2_2 - S1_2 & S3_2 - S1_2 \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{B}_{\widehat{T}} = \begin{pmatrix} S1_1 \\ S1_2 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que cette application s'exprime en fonction des coordonnées des sommets du triangle T et qu'elle est affine (son Jacobien est donc bien constant).

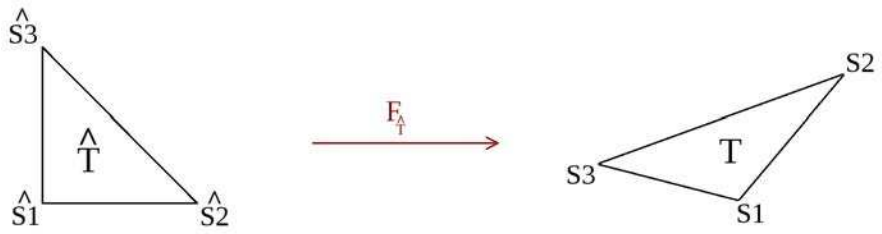


FIG. 4.1 – Application (affine) $\mathrm{F}_{\widehat{T}}$ qui au triangle de référence $\widehat{T}$, associe un triangle quelconque T.

Concernant la partie quadrangulaire, l'application qui associe (FIG. 4.2) le carré de référence $\widehat{Q}$ à un quadrangle physique Q de sommets $S1 = \begin{pmatrix} S1_1 \\ S1_2 \end{pmatrix}$, $S2 = \begin{pmatrix} S2_1 \\ S2_2 \end{pmatrix}$, $S3 = \begin{pmatrix} S3_1 \\ S3_2 \end{pmatrix}$, $S4 = \begin{pmatrix} S4_1 \\ S4_2 \end{pmatrix}$, dans le cas général est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}_{\widehat{Q}} & : & \widehat{Q} & \longrightarrow & Q \\ & & \widehat{\mathbf{x}} & \longmapsto & \mathrm{F}_{\widehat{Q}}(\widehat{\mathbf{x}}) \end{array}$$

avec :

$$\mathrm{F}_{\widehat{Q}}(\widehat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} (S3_1 - S2_1)\,\widehat{x}_1 + (S1_1 - S2_1)\,\widehat{x}_2 + (S2_1 - S1_1 + S4_1 - S3_1)\,\widehat{x}_1\widehat{x}_2 + S2_1 \\ (S3_2 - S2_2)\,\widehat{x}_1 + (S1_2 - S2_2)\,\widehat{x}_2 + (S2_2 - S1_2 + S4_2 - S3_2)\,\widehat{x}_1\widehat{x}_2 + S2_2 \end{pmatrix}.$$

Cette application s'exprime en fonction des coordonnées des sommets du quadrangle Q, et son Jacobien n'est ici pas constant.

Or, si l'on impose que le quadrangle quelconque Q soit un rectangle, numéroté de manière à répondre aux égalités suivantes :

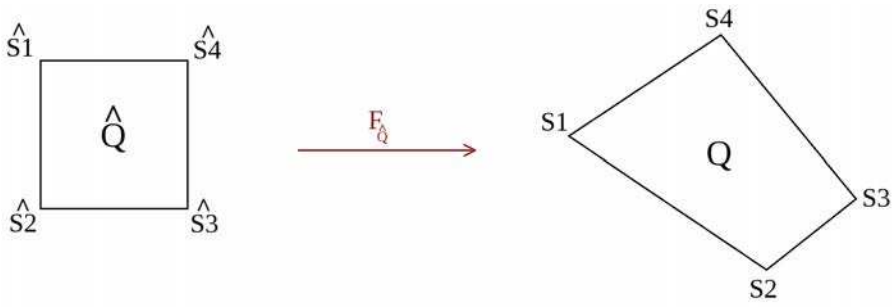


FIG. 4.2 – Application $F_{\widehat{Q}}$ qui au carré de référence $\widehat{Q}$, associe un quadrangle quelconque Q.

$$\begin{cases} S1_1 & = & S2_1 \\ S4_1 & = & S3_1 \\ S3_2 & = & S2_2 \\ S4_2 & = & S1_2 \end{cases},$$

l'application $F_{\widehat{Q}}$, qui au carré de référence associe un tel rectangle, devient (FIG. 4.3) :

$$\begin{array}{rccc} F_{\widehat{Q}} & : & \widehat{Q} & \longrightarrow & Q \\ & & \widehat{\mathbf{x}} & \longmapsto & A_{\widehat{Q}}\,\widehat{\mathbf{x}} + B_{\widehat{Q}} \end{array}$$

avec :

$$A_{\widehat{Q}} = \begin{bmatrix} S3_1 - S2_1 & 0 \\ 0 & S1_2 - S2_2 \end{bmatrix} \text{ et } B_{\widehat{Q}} = \begin{pmatrix} S2_1 \\ S2_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'application $F_{\widehat{Q}}$ est là aussi affine et son Jacobien constant.

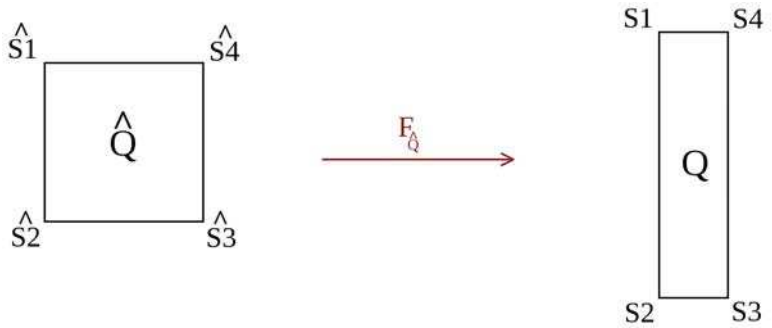


FIG. 4.3 – Application (affine) $F_{\widehat{Q}}$ qui au carré de référence $\widehat{Q}$, associe un rectangle Q.

4.1.2.2 Matrices de surface et particularité des maillages non-conformes

Un des avantages de la méthode Galerkin discontinue est de pouvoir l'appliquer sur des maillages non-conformes. Lorsque le traitement d'un problème conduit à la construction de maillages ayant des différences prononcées entre la taille de ses éléments, le raccordement entre

les éléments de petite et de grande taille peut être facilité par la non-conformité ; ce que l'on constate clairement sur la figure FIG. 4.4 pour la jonction entre des triangles de petite dimension et des quadrangles de grande taille.

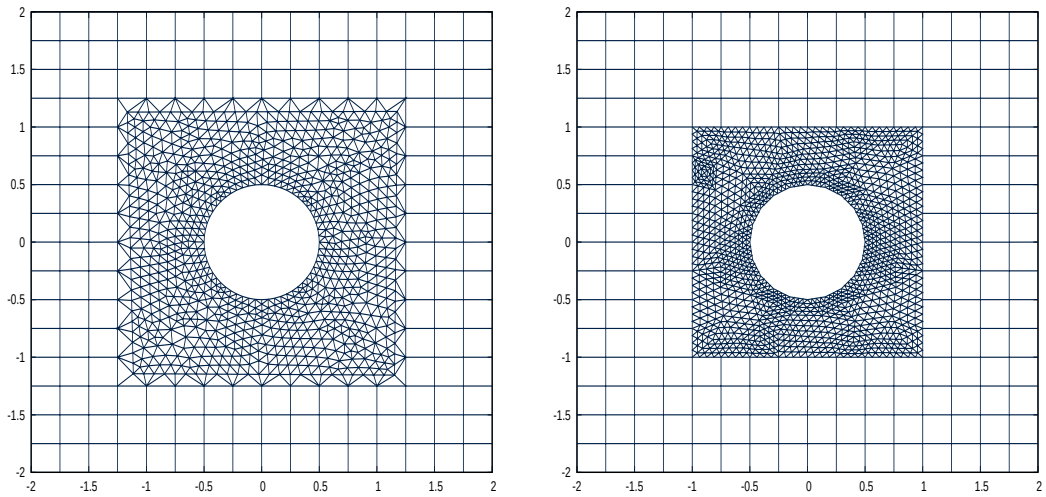


FIG. 4.4 – Maillages hybrides triangulaires / quadrangulaires. Gauche : maillage conforme. – Droite : maillage non-conforme.

Comme nous avons pu le voir dans la sous-section précédente, dans le cas d'un maillage conforme, pour calculer les matrices sur les interfaces (communes à deux triangles, communes ̀deux quadrangles, ou hybrides), nous utilisons la combinaison : matrice stockée (calculée au préalable sur une arête de référence) - application affine. Cette matrice précalculée ne dépend aucunement du maillage, mais son utilisation nécessite en revanche que la conformité soit assurée entre les deux éléments adjacents à la face traitée.

Ainsi, si l'agencement de deux éléments est non-conforme (exemple : FIG. 4.5), nous ne pouvons plus utiliser cette matrice stockée. Nous ne pouvons pas non plus précalculer d'autres types de matrices stockées, car, l'utilisation de matrices de surface précalculées nécessite de connaître, au préalable (et indépendamment du maillage), pour toute face traitée de cette façon, la disposition exacte entre ses deux éléments adjacents. Or, l'agencement non-conforme entre deux éléments varie pour chaque maillage et ne peut donc être anticipé.

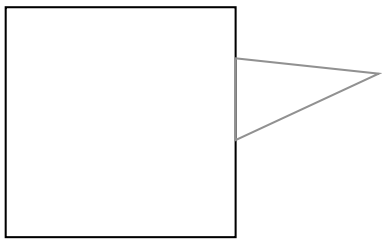


FIG. 4.5 – Exemple de non-conformité entre deux éléments

En d'autres termes, dans le cas d'un maillage non-conforme, nous devons calculer numériquement la matrice de surface associée à chaque interface non-conforme. Nous calculons donc ces matrices lors du calcul, dans une phase de prétraitement après lecture du maillage (une seule fois), par une formule de cubature numérique [Cools 2003] basée sur les zéros des polynômes de Legendre i.e. les noeuds de la formule de cubature de Gauss-Legendre. Nous expliquons alors la méthode que nous utilisons pour calculer la matrice associée à une interface non-conforme entre un triangle τ_i et un quadrangle q_j (la méthode est exactement la même pour une interface non-conforme entre deux triangles τ_i et τ_j ou entre deux quadrangles q_i et q_j). Comme présentée en sous-section 2.2.3, la matrice d'interface entre τ_i et q_j est définie par : $\left(\Upsilon_{ij}\right)_{lm} = \int_{a_{ij}} \varphi_{il}\theta_{jm} dS$, pour $1 \leq l \leq d_i$ et $1 \leq m \leq b_j$. On note N_{GL} le nombre minimal de points et poids de Gauss nécessaires pour obtenir une intégration exacte des polynômes de degré $\leq 2N_{GL} - 1$. Donnons une représentation matricielle des opérations à effectuer :

$$\Upsilon_{ij} \simeq P^1 B \left(P^2\right)^{\mathrm{T}},$$

où les matrices P^1 et P^2 sont respectivement de dimension $d_i \times N_{GL}$ et $b_j \times N_{GL}$, et la matrice B est diagonale et de dimension $N_{GL} \times N_{GL}$. Les coefficients de ces matrices sont définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} \left(P^1\right)_{lm} &= \varphi_{il}(\mathbf{x}^m), \text{ pour } 1 \leq l \leq d_i \text{ et } 1 \leq m \leq N_{GL}, \\ \left(P^2\right)_{lm} &= \vartheta_{jl}(\mathbf{x}^m), \text{ pour } 1 \leq l \leq b_j \text{ et } 1 \leq m \leq N_{GL}, \\ (B)_{mm} &= \omega_m \text{ pour } 1 \leq m \leq N_{GL}, \text{ et } (B)_{lm} = 0 \text{ si } l \neq m \text{ pour } 1 \leq l, m \leq N_{GL}, \end{cases}$$

où les paramètres $\mathbf{x}^m$ et ω_m sont ici respectivement les points et poids de la méthode de Gauss-Legendre.

4.1.2.3 Initialisation et calcul du pas de temps

Conformément aux schémas d'intégration en temps adoptés dans la section 2.3, nous initialisons H_x et H_y à $t = \dfrac{\Delta t}{2}$, et E_z à $t = 0$.

Le pas de temps global, dans notre implémentation, est calculé de la manière suivante :

- On calcule la quantité géométrique suivante, dépendant uniquement de la partie triangulaire du maillage : $\mathfrak{G}_\tau = \min\limits_{\tau_i \in \mathscr{T}_h} \left(\dfrac{4|\tau_i|}{p_i}\right)$, où $|\tau_i|$ est l'aire du triangle τ_i et p_i son périmètre.
- On calcule la quantité géométrique suivante, dépendant uniquement de la partie quadrangulaire du maillage : $\mathfrak{G}_q = \min\limits_{q_i \in \mathscr{Q}_h} \left(\dfrac{4|q_i|}{p_i}\right)$, où $|q_i|$ est l'aire du quadrangle q_i et p_i son périmètre.
- On calcule le pas de temps correspondant à $\mathscr{T}_h$: $\Delta t_\tau = \mathrm{CFL}_\tau \cdot \mathfrak{G}_\tau$, où CFL_τ est le coefficient CFL spécifique à la partie triangulaire du maillage, choisi par l'utilisateur.
- On calcule le pas de temps correspondant à $\mathscr{Q}_h$: $\Delta t_q = \mathrm{CFL}_q \cdot \mathfrak{G}_q$, où CFL_q est le coefficient CFL spécifique à la partie quadrangulaire du maillage, choisi par l'utilisateur.

- On en déduit Δt, le pas de temps global : $\Delta t = \min\{\Delta t_\tau, \Delta t_q\}$.
- Si le schéma en temps utilisé est le schéma LF4, nous multiplions ce pas de temps par 2.847.

$\mathfrak{G}_\tau$ (resp. $\mathfrak{G}_q$) est ainsi toujours évalué directement dans le code de calcul et dépend uniquement du maillage, CFL_τ (resp. CFL_q) est quant à lui imposé par l'utilisateur et dépend de l'ordre d'interpolation. Afin de connaître la valeur limite (i.e. la plus grande valeur préservant la stabilité du calcul) de Δ_τ pour tout maillage triangulaire (ou toute partie triangulaire d'un maillage hybride), nous testons différentes valeurs de CFL_τ sur un maillage triangulaire donné pour chaque ordre d'interpolation $\mathbb{P}_p$; et ainsi pour tout maillage, nous pouvons fixer la valeur de CFL_τ et obtenir alors le Δ_τ limite. Nous appliquons le même raisonnement pour Δ_q.

Nous analyserons les valeurs numériques des pas de temps Δt_τ, Δt_q et Δt pour les différents ordres d'interpolation, dans la sous-section 4.3.2.

4.1.2.4 Calcul numérique des flux

Présentons enfin l'algorithme d'évaluation des flux qui suit les cinq étapes suivantes :

- Dans la première étape, nous faisons deux boucles sur les faces triangle-triangle, une sur les conformes et une sur les non-conformes. Et nous faisons de même pour les faces quadrangle-quadrangle. La contribution des flux sur ces faces est assurée en multipliant les matrices de surface (stockées pour les faces conformes, calculées numériquement pour les faces non-conformes) par les vecteurs des degrés de liberté. Notons que nous respectons les schémas (2.18) et (2.19) dans lesquels les flux centrés sont séparés, i.e. l'expression de la solution approchée $\mathbf{W}_h$ sur une face a_{ij} : $\mathbf{W}_h|_{a_{ij}} = \dfrac{\mathbf{W}_i|_{a_{ij}} + \mathbf{W}_j|_{a_{ij}}}{2}$, n'apparaît plus sous cette forme dans les équations semi-discrétisées, conséquence de la double intégration par parties, explicitée en sous-section 2.2.1. Nous évaluons alors séparément le flux du côté de la cellule c_i et le flux du côté de la cellule c_j, ce qui est nécessaire lors du parcours des faces non-conformes ainsi que des faces hybrides.
- La deuxième étape suit le même principe que la précédente, en parcourant les faces hybrides conformes (en appliquant les matrices hybrides précalculées) et les faces hybrides non-conformes (en appliquant les matrices hybrides calculées numériquement).
- La troisième étape consiste à évaluer la contribution des flux pour les faces situées sur la frontière physique du domaine de calcul, et appliquer les conditions aux bords.
- Dans la quatrième étape, nous parcourons toutes les cellules triangulaires, et toutes les cellules quadrangulaires. Ainsi, la contribution des flux est ici assurée en multipliant les matrices faisant intervenir les termes de gradients (contenant les intégrales volumiques) par les vecteurs des degrés de liberté.
- L'étape finale nécessite, conformément aux schémas d'intégration en temps (section 2.3), de multiplier l'ensemble de ces contributions, par la matrice de masse inverse.

4.2 Description des cas tests considérés

Nous utilisons plusieurs cas tests durant cette étude numérique, certains simples disposant d'une solution exacte, d'autres plus complexes. Nous consacrons cette section à leur présentation et à leur description. Dans les sections suivantes, pour chaque test réalisé nous préciserons alors quel cas test est exploité. Notons dès lors que pour les cas tests n°1, 2, 3 et n°5, le milieu de propagation est le vide (homogène), pour le cas test n°4 le milieu est hétérogène.

4.2.1 Cas test n°1 : mode $(1,1)$ dans une cavité métallique carrée

Ce premier cas test est celui de l'évolution d'un mode dans une cavité métallique carrée et unitaire, i.e. le domaine de calcul $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. L'énergie de la solution est ici conservée et ce problème test présente également l'intérêt que la solution exacte est connue (i.e. nous permettant de calculer une erreur), et donnée par :

$$\begin{cases} E_z(x_1,x_2,t) &= \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\cos(\omega t), \\ H_x(x_1,x_2,t) &= -\dfrac{\pi}{\omega}\sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2)\sin(\omega t), \\ H_y(x_1,x_2,t) &= \dfrac{\pi}{\omega}\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\omega t), \end{cases}$$

où $\omega = 2\pi f$ désigne la pulsation, et f la fréquence qui est ici égale à $f = 212$ MHz.

4.2.2 Cas test n°2 : résonateur circulaire métallique

Nous considérons ici un résonateur circulaire métallique ; le domaine Ω est un disque de rayon $R = 0.5$ m et centré en $(0,0)$. La solution exacte du problème, obtenue à partir de la condition au bord métallique $E_z = 0$ sur le cercle de rayon R, est donnée par (cf [Turkel & Yefet 2000] pour plus de détails) :

$$\begin{cases} E_z(x_1,x_2,t) &= J_1(\omega r)\sin(\omega t+\theta), \\ H_x(x_1,x_2,t) &= \dfrac{x_2}{2r}[J_0(\omega r)-J_2(\omega r)]\cos(\omega t+\theta) - \dfrac{x_1}{\omega r^2}E_z, \\ H_y(x_1,x_2,t) &= -\dfrac{x_1}{2r}[J_0(\omega r)-J_2(\omega r)]\cos(\omega t+\theta) - \dfrac{x_2}{\omega r^2}E_z, \end{cases}$$

où $\omega = 2\pi f$ avec $f = 670$ MHz ; (r,θ) représente les coordonées polaires usuelles. J_n (n un entier positif) désigne les fonctions de Bessel d'ordre n de première espèce, qui peuvent être définies, par exemple, par la série entière (de rayon de convergence infini) : $J_n(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^n \displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} x^{2l}\frac{(-1)^l}{2^{2l}\, l!(n+l)!}$, ou encore par l'intégrale : $J_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}\,(n\nu - x\sin\nu)}\,d\nu$ (où $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ est l'unité imaginaire).

4.2.3 Cas test n°3 : diffraction d'une onde plane par un profil d'aile d'avion

Dans ce problème test, nous simulons la diffraction d'une onde plane par un profil d'aile d'avion métallique. Le domaine de calcul est artificiellement délimité par un rectangle $\Omega = [-1,2] \times$

$[-1,1]$, sur lequel on impose la condition absorbante de Silver-Müller. Nous avons ici un champ incident, donné par :

$$\begin{cases} E_{z,\text{inc}}(x_1,x_2,t) &= \cos(\omega t - \kappa x_1), \\ H_{x,\text{inc}}(x_1,x_2,t) &= 0, \\ H_{y,\text{inc}}(x_1,x_2,t) &= -\dfrac{\kappa}{\omega}\cos(\omega t - \kappa x_1), \end{cases}$$

où le vecteur d'onde $\mathbf{k} = (\kappa, 0)^{\mathrm{T}}$ avec $\kappa = \omega/c_0$ (c_0 la vitesse de la lumière dans le vide et $\omega = 2\pi f$). La fréquence est égale à $f = 600$ MHz et nous ne disposons pas de solution exacte pour ce problème.

4.2.4 Cas test n°4 : diffraction d'une onde plane par un disque diélectrique

Nous présentons maintenant le cas test de la diffraction d'une onde plane par un disque diélectrique dans le vide. Ce problème test a pour particularité de simuler un scénario de propagation en milieu hétérogène. Le disque est de rayon $R = 0.002$ m centré en $(0,0)$ et le domaine de calcul est artificiellement borné par un carré $\Omega = [-0.045, 0.045] \times [-0.045, 0.045]$ sur lequel est imposée la condition absorbante de Silver-Müller. Nous supposons que le disque est illuminé par une onde plane harmonique de la forme :

$$E_{z,inc} = e^{-\mathrm{i}(\kappa_1 x - \omega t)}, \quad H_{y,inc} = -e^{-\mathrm{i}(\kappa_1 x - \omega t)},$$

où $\kappa_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ $(= \omega/c_1)$ et $\omega = 2\pi f$ (nous prenons dans notre implémentation la partie réelle de ces champs). Dans ce cas, la solution exacte du problème est donnée par (cf par exemple [Cai & Deng 2003]) :

$$E_z(x_1,x_2,t) = E_z(r,\theta,t) = e^{\mathrm{i}\omega t}\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{\text{tot}} J_n(\kappa_2 r) e^{\mathrm{i}n\theta}, & r \le R, \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}^{-n} J_n(\kappa_1 r) + C_n^{\text{diff}} H_n^{(2)}(\kappa_1 r)) e^{\mathrm{i}n\theta}, & r > R, \end{cases}$$

$$H_\theta(r,\theta,t) = -e^{\mathrm{i}\omega t}\begin{cases} \dfrac{-\mathrm{i}\kappa_2}{\omega\mu_2}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{\text{tot}} J_n'(\kappa_2 r) e^{\mathrm{i}n\theta}, & r \le R, \\ \dfrac{-\mathrm{i}\kappa_1}{\omega\mu_1}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}^{-n} J_n'(\kappa_1 r) + C_n^{\text{diff}} H_n^{(2)'}(\kappa_1 r)) e^{\mathrm{i}n\theta}, & r > R, \end{cases}$$

$$H_r(r,\theta,t) = -e^{\mathrm{i}\omega t}\begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}}{\omega\mu_2 r}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}n\, C_n^{\text{tot}} J_n(\kappa_2 r) e^{\mathrm{i}n\theta}, & r \le R, \\ \dfrac{\mathrm{i}}{\omega\mu_1 r}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}n(\mathrm{i}^{-n} J_n(\kappa_1 r) + C_n^{\text{diff}} H_n^{(2)}(\kappa_1 r)) e^{\mathrm{i}n\theta}, & r > R, \end{cases}$$

où (r,θ) sont les coordonées polaires usuelles, H_θ et H_r désignent les composantes angulaire et radiale du champ magnétique total. J_n et $H_n^{(2)}$ (n un entier positif) représentent les fonctions de Bessel de première espèce et les fonctions de Hankel du deuxième type d'ordre n. Les fonctions de Hankel (aussi nommées fonctions de Bessel de troisième espèce) peuvent s'exprimer en fonction des Bessels de première espèce, ainsi : $H_n^{(2)}(x) = \dfrac{J_{-n}(x) - e^{\mathrm{i}n\pi} J_n(x)}{-\mathrm{i}\sin(n\pi)}$. Enfin, $\kappa_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ est

la constante de propagation en milieu diélectrique, et les coefficients d'expansion pour le champ total à l'intérieur du disque et pour le champ diffracté sont donnés par :

$$C_n^{\text{tot}} = \mathrm{i}^{-n} \frac{(\kappa_1/\mu_1) J_n'(\kappa_1 R) H_n^{(2)}(\kappa_1 R) - (\kappa_1/\mu_1) H_n^{(2)'}(\kappa_1 R) J_n(\kappa_1 R)}{(\kappa_2/\mu_2) J_n'(k_2 R) H_n^{(2)}(\kappa_1 R) - (\kappa_1/\mu_1) H_n^{(2)'}(\kappa_1 R) J_n'(\kappa_2 R)},$$

et

$$C_n^{\text{diff}} = \mathrm{i}^{-n} \frac{(\kappa_1/\mu_1) J_n'(\kappa_1 R) J_n(\kappa_2 R) - (\kappa_2/\mu_2) J_n'(\kappa_2 R) J_n(\kappa_1 R)}{(\kappa_2/\mu_2) J_n'(\kappa_2 R) H_n^{(2)}(\kappa_1 R) - (\kappa_1/\mu_1) H_n^{(2)'}(\kappa_1 R) J_n'(\kappa_2 R)}.$$

Donnons enfin les coefficients caractérisant à ce milieu hétérogène. Les quantités ε_2 et μ_2 concernent le disque diélectrique de rayon R, à l'intérieur duquel la permittivité relative du matériau (après redimensionnement des équations) vaut $\varepsilon_2 = 7$ et la perméabilité relative est de $\mu_2 = 1$ (matériau non magnétique). Les quantités ε_1 et μ_1 concernent le reste du domaine (extérieur au disque diélectrique) où le milieu est le vide, i.e. $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ (et c_1 est donc égal à c_0). Enfin, la fréquence est ici réglée à $f = 30$ GHz.

4.2.5 Cas test n°5 : source Gaussienne modulée et localisée

Le domaine de calcul est ici un carré $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$ contenant deux obstacles métalliques : un cercle de rayon $R_c = 0.1$ m et un demi-cercle de rayon $R_d = 0.2$ m (cf FIG. 4.33). On applique la condition absorbante de Silver-Müller sur la frontière artificielle carrée du domaine Ω. Le champ électromagnétique est stimulé par un terme source localisé :

$$j_{\mathbf{s}}^z(x_1, x_2, t) = \mathfrak{f}(t) \, \frac{g(x_1, x_2)}{\|g\|_{0,\Omega}},$$

où $\mathfrak{f}$ est une fonction dépendante du temps dont la courbe est tracée sur la figure FIG. 4.6 ; et g une fonction Gaussienne de dimension deux centrée en $(x_1^{cg}, x_2^{cg}) = (-1.0, 0.0)$ (cf FIG. 4.6), dépendante de x_1 et x_2 et définie par :

$$g(x_1, x_2) = e^{-\beta\left(\left(x_1 - x_1^{cg}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{cg}\right)^2\right)}$$

avec $\beta = 2 \times 10^4$. La fréquence est ici de 1 GHz et nous ne bénéficions pas de solution exacte pour la simulation de ce phénomène.

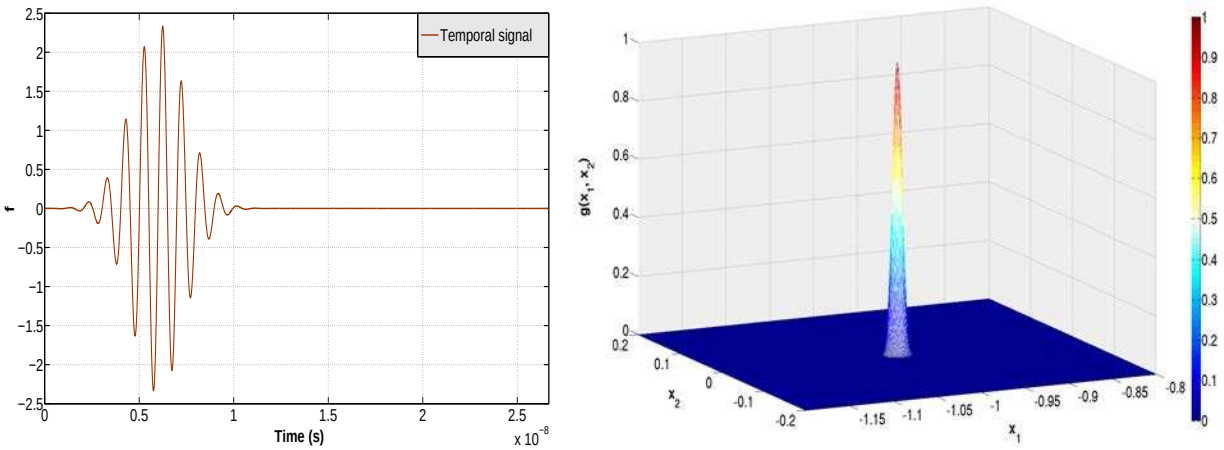


FIG. 4.6 – Gauche : Signal temporel $\mathfrak{f}(t)$ pour $t \in [0, 2.667 \times 10^{-8}]$. – Droite : fonction Gaussienne de dimension deux $g(x_1, x_2)$ représentée pour $(x_1, x_2) \in [-1.2, -0.8] \times [-0.2, 0.2]$.

4.3 Tests préliminaires

Commençons à présent par exposer les premiers tests numériques. Pour les deux sous-sections, nous exploitons le cas test du mode propre dans la cavité métallique carrée (cas test n°1, sous-section 4.2.1) et nous utilisons le schéma en temps saute-mouton d'ordre 2. Le temps physique de simulation est de 6.67×10^{-7} s, et son équivalent en mètres (après redimensionnement, i.e. après multiplication par c_0) est de 200 m.

4.3.1 Tests sur maillages quadrangulaires

Lors de la construction d'un maillage hybride, nous sommes amenés à nous poser la question suivante : est-il préférable de construire des quadrangles de petite taille (pour y appliquer un ordre d'interpolation faible) ou de de grande taille (et y appliquer un ordre d'interpolation élevé) ? Pour répondre à cette question, nous réalisons quatre tests sur des maillages cartésiens totalement quadrangulaires. On applique la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_1$ sur un maillage de 49×49 points, la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_2$ sur un maillage de 25×25 points, la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_3$ sur un maillage de 17×17 points et la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_4$ sur un maillage de 13×13 points (FIG. 4.7).

Lors de la construction des maillages, nous faisons en sorte que les nœuds des degrés de liberté soient répartis exactement de la même manière dans le domaine Ω pour les quatre cas, comme nous pouvons le voir sur la figure FIG. 4.7. Nous pouvons alors comparer ces différentes situations, dont nous résumons les résultats dans le tableau TAB. 4.1.

Dans une méthode Galerkin discontinue, le nombre total de degrés de liberté (# *ddl* dans TAB. 4.1) est comptabilisé par élément (i.e. par exemple pour GDDT-$\mathbb{Q}_1$ sur un maillage de N_q éléments, # $ddl = 4 \times N_q$), ainsi celui-ci est différent dans les quatres cas (à cause des points doubles sur les faces ou quadruples sur les sommets) malgré que les noeuds des degrés de libertés coïncident spatialement.

Nous constatons que nous avons une meilleure précision pour la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_2$ que pour

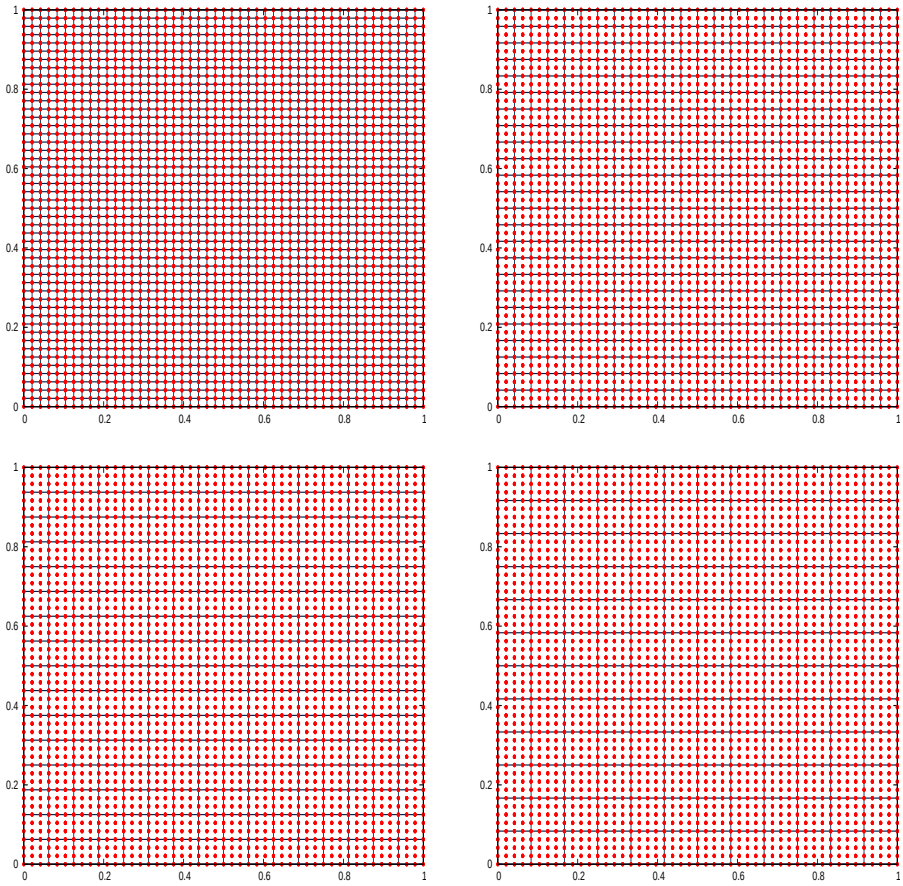


FIG. 4.7 – Maillages quadrangulaires cartésiens et noeuds des degrés de liberté de la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_k$ associée. En-haut à gauche : maillage 49×49 points et méthode GDDT-$\mathbb{Q}_1$. – En-haut à droite : maillage 25×25 points et méthode GDDT-$\mathbb{Q}_2$. – En-bas à gauche : maillage 17×17 points et méthode GDDT-$\mathbb{Q}_3$. – En-bas à droite : maillage 13×13 points et méthode GDDT-$\mathbb{Q}_4$.

TAB. 4.1 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale, pour chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps CPU	# *ddl*	Erreur L^2 max
Quadrangulaire	GDDT-$\mathbb{Q}_1$	40.0 s	9216	5.87×10^{-2}
	GDDT-$\mathbb{Q}_2$	28.9 s	5184	1.64×10^{-2}
	GDDT-$\mathbb{Q}_3$	26.1 s	4096	1.43×10^{-2}
	GDDT-$\mathbb{Q}_4$	33.2 s	3600	1.25×10^{-2}

GDDT-$\mathbb{Q}_1$ ainsi qu'un meilleur temps de calcul. Le schéma GDDT-$\mathbb{Q}_3$ donne également un résultat plus précis et plus rapide que GDDT-$\mathbb{Q}_1$ (et plus précis et plus rapide que GDDT-$\mathbb{Q}_2$, dans une moindre mesure). La meilleure précision est obtenue avec le schéma GDDT-$\mathbb{Q}_4$, qui présente cependant un temps de calcul légèrement plus long que GDDT-$\mathbb{Q}_2$ et GDDT-$\mathbb{Q}_3$ (mais plus petit que GDDT-$\mathbb{Q}_1$). Ainsi, la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_1$ donne ici la solution la moins précise pour le temps de calcul le plus long. Compte tenu de ces observations, nous préfèrerons ainsi choisir lors de la construction des maillages hybrides, une taille plus grande pour les quadrangles, afin d'y appliquer les méthodes GDDT-$\mathbb{Q}_3$ ou GDDT-$\mathbb{Q}_4$ (ou éventuellement GDDT-$\mathbb{Q}_2$). Nous notons enfin sur la figure FIG. 4.8 que pour ces quatres ordres d'interpolation, la norme L^2 de l'erreur est croissante et évolue régulièrement au cours du temps.

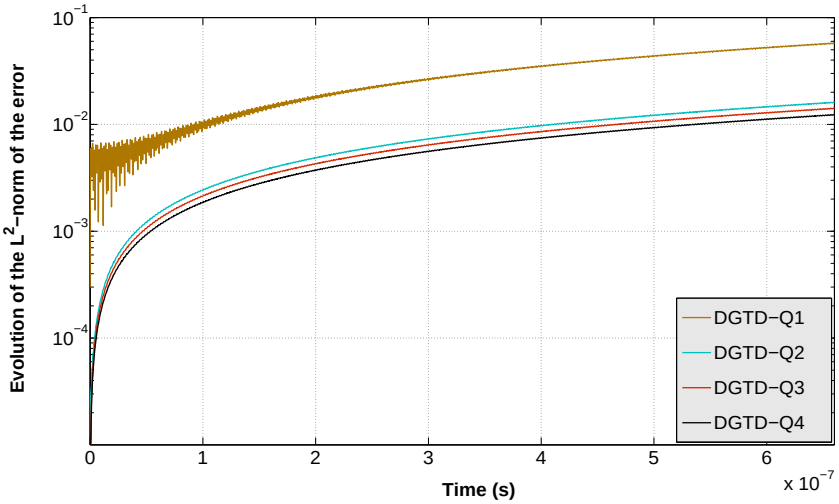


FIG. 4.8 – Evolution en temps de la norme L^2 de l'erreur globale, pour chaque ordre d'interpolation.

4.3.2 Pas de temps et validation de l'étude de stabilité

Nous voulons à présent valider numériquement l'étude de stabilité théorique de la section 3.1. Nous faisons des tests avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ sur un maillage totalement triangulaire (FIG. 4.9, maillage de gauche), ainsi qu'avec la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_k$ sur un maillage totalement quadrangulaire (FIG. 4.9, maillage du milieu), et nous reportons les pas de temps limites (i.e. la plus grande valeur préservant la stabilité) dans le tableau TAB. 4.2 pour chaque ordre d'interpolation.

Nous réalisons ensuite des tests avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ sur un maillage hybride, conforme, dont la partie triangulaire et la partie quadrangulaire ont exactement la même forme que les deux précédents maillages (FIG. 4.9, maillage de droite). Pour chaque hybridation GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, le pas de temps global considéré (comme indiqué en sous-section 4.1.2.3) est le minimum (cf TAB. 4.2) entre les pas de temps limites des méthodes GDDT-$\mathbb{P}_p$ (utilisé sur le maillage triangulaire) et GDDT-$\mathbb{Q}_k$ (utilisé sur le maillage quadrangulaire). La stabilité est alors obtenue pour chaque hybridation, ce qui nous donne une validation de la condition suffisante de stabilité théorique (3.12). Nous montrons enfin sur la figure FIG. 4.10 l'évolution temporelle de l'énergie (cf

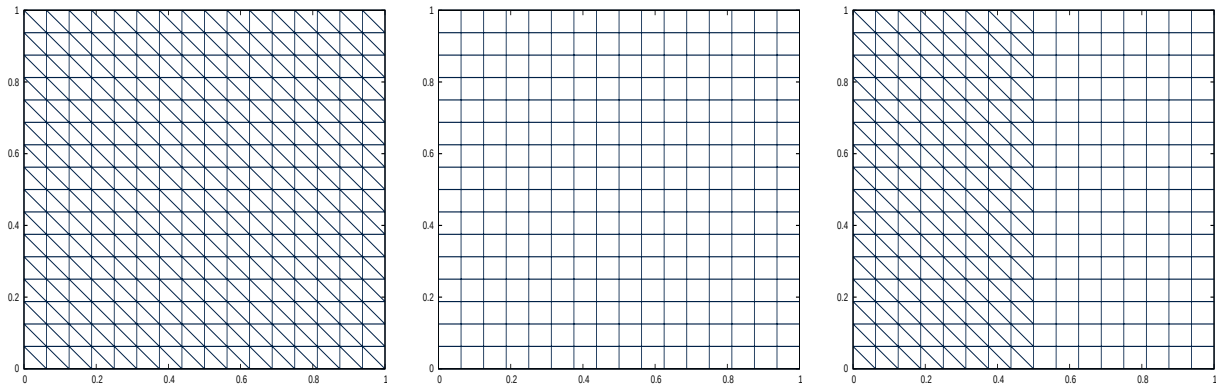


FIG. 4.9 – Maillages structurés basés sur 17×17 points. Gauche : maillage triangulaire. – Milieu : maillage quadrangulaire . – Droite : maillage hybride (conforme).

(3.5)) pour quelques ordres d'interpolation $\mathbb{P}_p$, $\mathbb{Q}_k$ et $\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, nous vérifions que celle-ci est bien constante (donc conservée) dans chacun des cas.

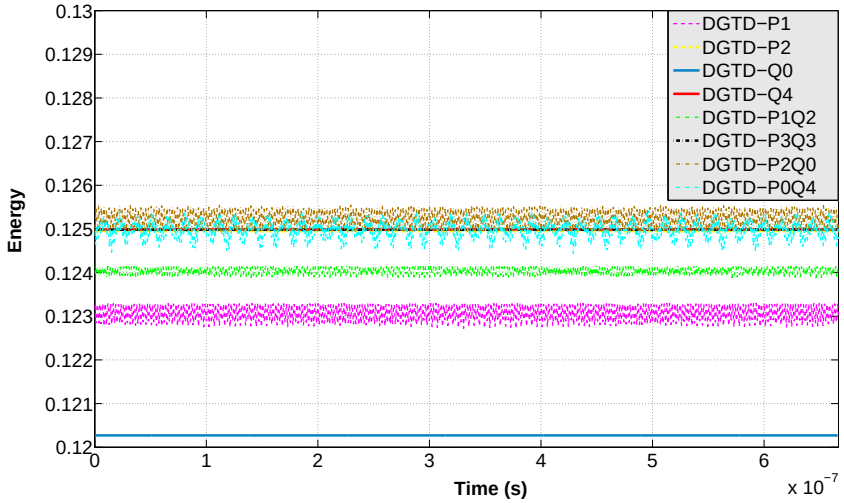


FIG. 4.10 – Evolution en temps de l'énergie, pour quelques ordres d'interpolation.

La stabilité reste acquise lorsque l'on multiplie le minimum des deux pas de temps par 2.847 en utilisant le schéma LF4. Précisons enfin que pour des maillages non-conformes, les pas de temps limites sont (très) légèrement plus petits. Ceci est uniquement dû à la non-conformité, et non à l'hybridation (la condition suffisante de stabilité reste inchangée).

TAB. 4.2 – Pas de temps globaux (en picosecondes). En-haut à gauche : méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ sur le maillage triangulaire. – En-haut à droite : méthode GDDT-$\mathbb{Q}_k$ sur le maillage quadrangulaire . – Bas : GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ sur le maillage hybride.

Ordre d'interpolation	Δt
GDDT-$\mathbb{P}_0$	146.4 ps
GDDT-$\mathbb{P}_1$	53.7 ps
GDDT-$\mathbb{P}_2$	29.3 ps
GDDT-$\mathbb{P}_3$	18.3 ps
GDDT-$\mathbb{P}_4$	12.2 ps

Ordre d'interpolation	Δt
GDDT-$\mathbb{Q}_0$	293.8 ps
GDDT-$\mathbb{Q}_1$	72.9 ps
GDDT-$\mathbb{Q}_2$	35.4 ps
GDDT-$\mathbb{Q}_3$	20.8 ps
GDDT-$\mathbb{Q}_4$	14.6 ps

Ordre d'interpolation	Δt
GDDT-$\mathbb{P}_0\mathbb{Q}_0$	146.4 ps
GDDT-$\mathbb{P}_0\mathbb{Q}_1$	72.9 ps
GDDT-$\mathbb{P}_0\mathbb{Q}_2$	35.4 ps
GDDT-$\mathbb{P}_0\mathbb{Q}_3$	20.8 ps
GDDT-$\mathbb{P}_0\mathbb{Q}_4$	14.6 ps
GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_0$	53.7 ps
GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_1$	53.7 ps
GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	35.4 ps
GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$	20.8 ps
GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$	14.6 ps
GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_0$	29.3 ps
GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_1$	29.3 ps
GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$	29.3 ps

Ordre d'interpolation	Δt
GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$	20.8 ps
GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$	14.6 ps
GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_0$	18.3 ps
GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_1$	18.3 ps
GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$	18.3 ps
GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_3$	18.3 ps
GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$	14.6 ps
GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_0$	12.2 ps
GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_1$	12.2 ps
GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_2$	12.2 ps
GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_3$	12.2 ps
GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$	12.2 ps

4.4 Tests de convergence numérique : comparaison LF2 / LF4

Nous étudions dans cette section la convergence numérique en h de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, et comparons les schémas saute-mouton (Leap-Frog) d'ordres 2 (noté LF2) et 4 (noté LF4). Nous travaillons sur le cas du mode propre dans la cavité métallique carrée (cas test n°1, sous-section 4.2.1).

Nous utilisons quatre maillages hybrides et non-conformes, basés respectivement sur 7×7, 13×13, 19×19 et 25×25 (FIG. 4.11) points. Ces maillages sont obtenus en prenant des maillages hybrides et conformes et en raffinant deux fois (par raffinement non-conforme) la partie triangulaire.

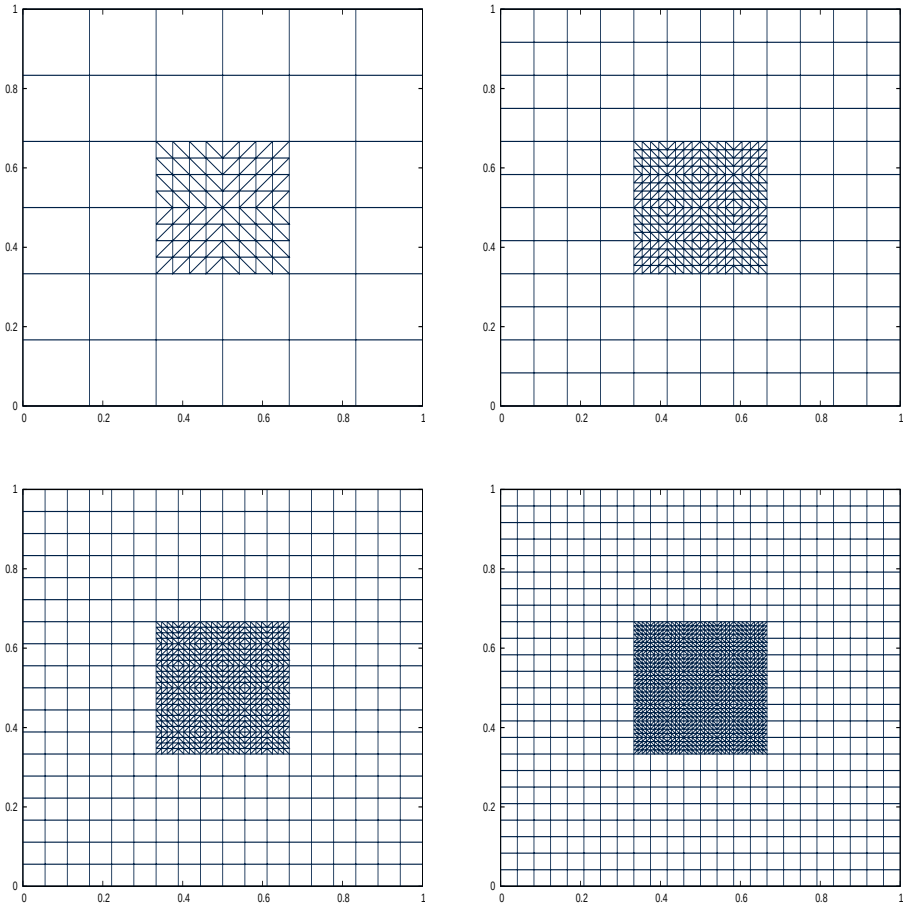


FIG. 4.11 – Maillages hybrides et non-conformes (les interfaces hybrides correspondent aux interfaces non-conformes). En-haut à gauche : maillage basé sur 7×7 points. – En-haut à droite : maillage basé sur 13×13 points. – En-bas à gauche : maillage basé sur 19×19 points. – En-bas à droite : maillage basé sur 25×25 points.

4.4.1 Convergence en h des schémas LF2 et LF4

Nous montrons la convergence en h de certaines hybridations et vérifions que nous trouvons des ordres de convergence conformes au résultat théorique (3.46). Le temps physique de simulation est ici de 3.33×10^{-8} s (équivalent en mètres : 10 m).

Pour chaque résolution, et pour chaque hybridation, on mesure le maximum au cours du temps de la norme L^2 de l'erreur en fonction de la racine carrée du nombre total de degrés de liberté, et nous calculons les pentes (en échelle dite *loglog*) correspondantes (cf FIG. 4.12). Compte tenu de la régularité de la solution exacte pour ce cas test, du résultat de l'étude de convergence théorique (3.46) et de l'échelle *loglog* choisie, la valeur de la pente (correspondant à l'ordre de convergence) attendue pour une hybridation GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ est ici, pour le schéma LF2 égale à : $\min\{2, p, k\}$, et pour le schéma LF4 (compte tenu de l'estimateur (3.47)) égale à : $\min\{4, p, k\}$.

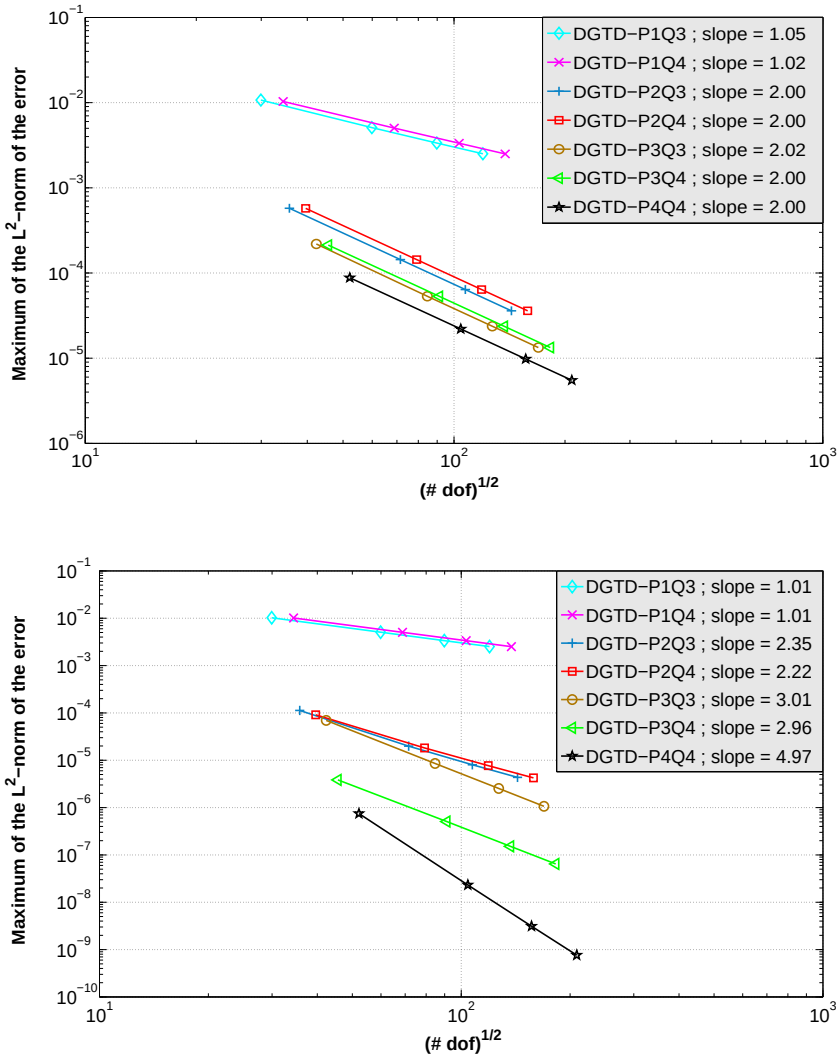


FIG. 4.12 – Maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale en fonction de la racine carrée du nombre total de degrés de liberté, et pentes correspondantes. Haut : schéma LF2. – Bas : schéma LF4.

Pour le schéma LF2, on observe sur la figure FIG. 4.12 que l'on obtient les valeurs de pentes attendues : pour GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$ la pente est bien approximativement égale à 1 ; pour les autres hybridations d'ordres plus élevés, ont voit que l'on est toujours limité, comme escompté, par l'ordre 2 du schéma temporel. Concernant le schéma LF4, on obtient les bons ordres pour GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$ (pentes égales à 1.01), ainsi que pour GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$ (pentes très proches de 3). Pour les hybridations GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$, les valeurs des pentes obtenues sont légèrement plus grandes (i.e. meilleures) que celles attendues (i.e. 2). Enfin, pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$, on observe une super convergence, la pente obtenue étant égale approximativement à 5, au lieu de 4. Pour des ordres d'interpolation élevés, le schéma LF4 permet conformément à la théorie, une plus grande vitesse de convergence.

En conclusion, la convergence numérique en h est ainsi acquise dans chacun des cas, et nous obtenons des ordres de convergence en accord avec les résultats théoriques.

4.4.2 Comparaison des performances des schémas LF2 et LF4

Nous utilisons à présent les quatres même maillages hybrides et non-conformes (FIG. 4.11), pour un temps physique de simulation de 3.33×10^{-7} s (équivalent en mètres : 100 m).

Afin de comparer l'efficacité et la précision des deux schémas de discrétisation en temps, nous mesurons pour chaque résolution et chaque hybridation, le maximum en temps de la norme L^2 de l'erreur en fonction du temps de calcul (cf FIG. 4.13). Autrement dit, pour réaliser ces comparaisons correctement, nous nous fixons un maillage, une hybridation, et nous regardons les différences d'erreur et de temps CPU entre les schémas LF2 et LF4 ; nous pouvons ensuite réitérer ceci pour chaque maillage et chaque hybridation.

Pour les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$, nous ne notons pas une nette diminution de l'erreur entre les schémas LF2 et LF4, et voyons une légère amélioration du temps de calcul. Pour les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$, GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$ et GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_3$, nous constatons une importante diminution de l'erreur sur chaque maillage avec le schéma LF4 (d'un facteur allant de 30 à 100) par rapport au schéma LF2), pour des temps CPU légèrement plus faibles. La réduction de l'erreur due au schéma LF4 par rapport au LF2, est encore plus marquée avec l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$ (d'un facteur 500 pour le maillage 7×7 et d'un facteur d'environ 2000 pour le maillage 25×25), pour des temps de calcul là aussi légèrement diminués. La méthode GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$, qui bénéficie pleinement de l'ordre élevé de convergence du schéma LF4, voit avec ce dernier, une amélioration de sa précision (par rapport au schéma LF2) d'un facteur d'environ 1000 pour le maillage le plus grossier et d'environ 7×10^4 pour le maillage le plus fin. Ainsi, pour des ordres d'interpolation élevés, nous voyons clairement que le schéma LF4 offre un avantage en termes d'efficacité, mais surtout de précision.

Les courbes de la figure FIG. 4.13 nous permettent également de faire des comparaisons, pour un schéma en temps fixé, entre les différentes hybridations GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$. Par exemple, pour le schéma LF2, nous pouvons voir qu'avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$ sur le maillage 13×13 (deuxième point sur la courbe), nous obtenons une erreur plus faible d'un facteur d'environ 6 par rapport à GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$ sur le maillage 19×19 (troisième point sur la courbe), avec un temps CPU réduit de moitié. Autre exemple, pour le schéma LF4 et l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$ sur le maillage 13×13, nous avons une réduction du temps CPU d'un facteur approximativement égal

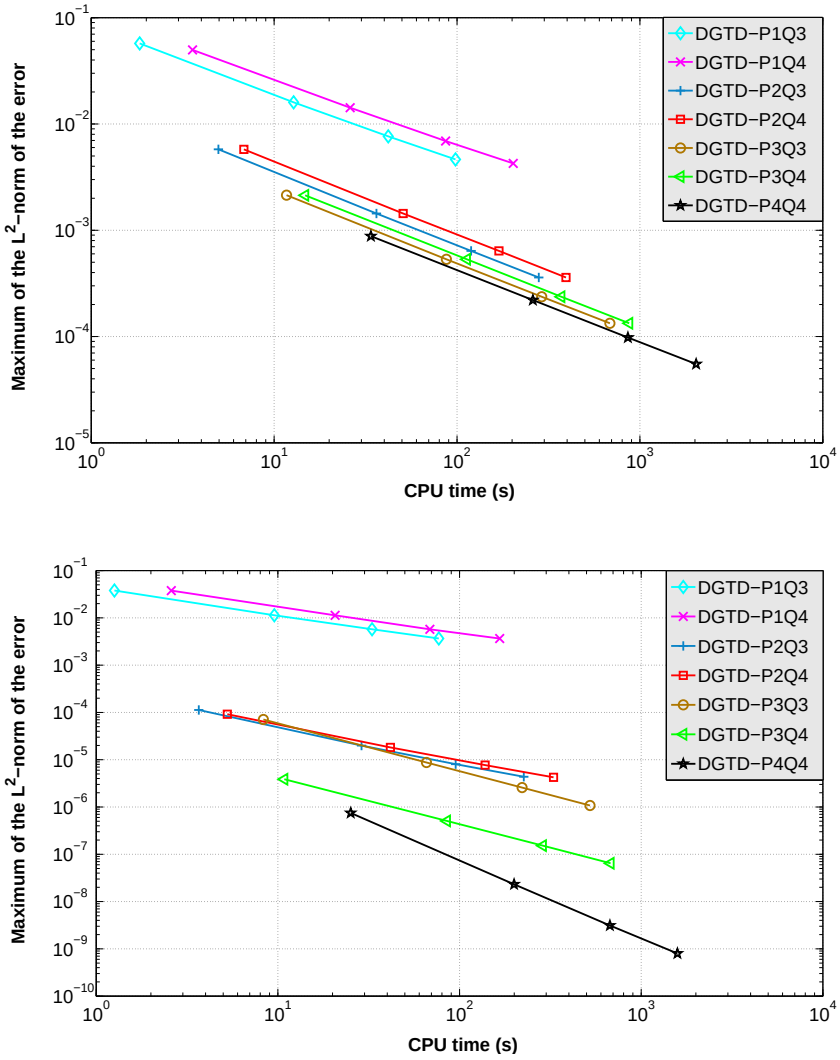


FIG. 4.13 – Maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale, en fonction du temps de calcul. Haut : schéma LF2. – Bas : schéma LF4.

à 2.5 et une réduction de l'erreur L^2 d'un facteur d'environ 50, par rapport à GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_3$ sur le maillage 25×25 (quatrième point sur la courbe).

Plus généralement, ces courbes permettent de se fixer un temps CPU et regarder les niveaux d'erreurs atteints par chaque combinaison. Ou inversement, on peut fixer une erreur et constater la différence de temps CPU pour l'atteindre.

4.5 Tests d'efficacité et de précision de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$

L'objectif de cette section est de comparer des simulations avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ sur des maillages tout triangulaire, à des simulations avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ sur un maillage hybride et non-conforme afin de montrer les améliorations en termes de précision et de temps de calcul que cette dernière peut apporter.

4.5.1 Résonateur circulaire métallique

Nous commençons donc par le cas test n°2 (sous-section 4.2.2), et nous travaillons sur deux maillages (FIG. 4.14) : un maillage triangulaire composé de 3840 triangles, ayant une arête minimale de longueur égale à 6.12×10^{-3} m, et un maillage hybride non-conforme composé de 4704 triangles et de 196 quadrangles (i.e. 4900 éléments), avec une arête minimale de longueur égale à 6.23×10^{-3} m et comportant 112 interfaces hybrides et non-conformes (comme nous pouvons le voir sur la figure FIG. 4.14, les interfaces hybrides correspondent aux interfaces non-conformes).

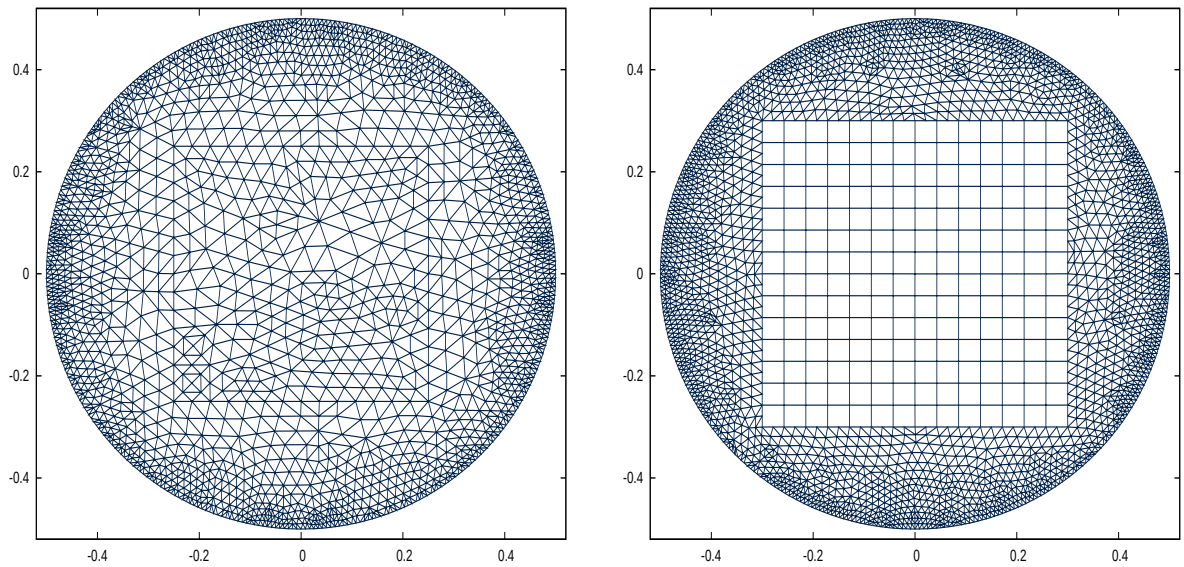


FIG. 4.14 – Gauche : maillage triangulaire (non-structuré). – Droite : maillage hybride (non-structuré / structuré) et non-conforme.

Le temps physique de simulation de 6.67×10^{-8} s (équivalent en mètres : 20 m) et le schéma en temps utilisé est le schéma LF2. Nous testons les ordres d'interpolation GDDT-$\mathbb{P}_1$ et GDDT-$\mathbb{P}_3$ sur le maillage triangulaire, que nous confronterons ainsi aux hybridations GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$ testées sur le maillage hybride. Pour faire des comparaisons pertinentes, nous nous

donnons ici la contrainte d'analyser conjointement trois critères : le temps de calcul, le nombre total de degrés de liberté et le maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale (cf TAB. 4.3). Nous montrons sur la figure FIG. 4.15 l'évolution temporelle de l'erreur L^2.

TAB. 4.3 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps CPU	# *ddl*	Erreur L^2 max
Triangulaire	GDDT-$\mathbb{P}_1$	125.6 s	11520	1.96×10^{-1}
	GDDT-$\mathbb{P}_3$	1318.9 s	38400	7.18×10^{-3}
Hybride	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	163.6 s	15876	2.78×10^{-2}
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$	626.1 s	31360	7.52×10^{-3}

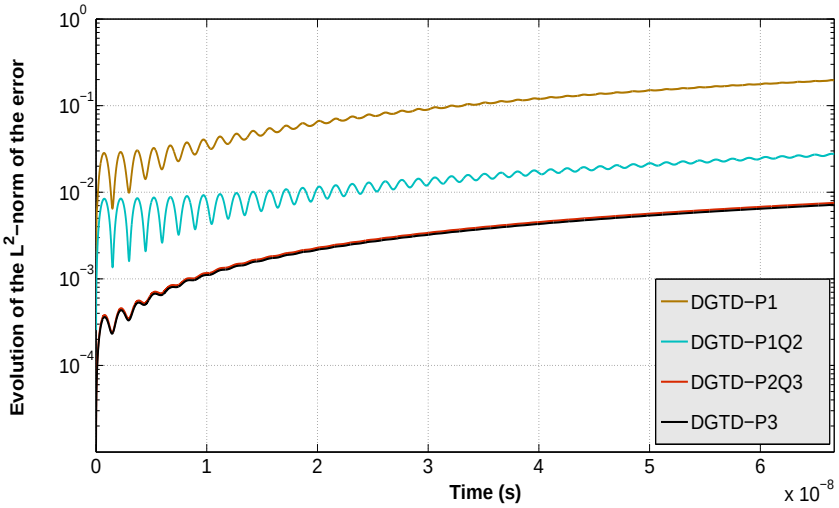


FIG. 4.15 – Evolution en temps de la norme L^2 de l'erreur globale, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Nous comparons alors les méthodes deux à deux et nous calculons dans le tableau TAB. 4.4 les rapports de ces différents critères. En confrontant les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_1$, nous pouvons voir que l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ engendre une erreur L^2 globale 7 fois plus faible pour un temps de calcul et un nombre total de degrés de liberté très proche de GDDT-$\mathbb{P}_1$. Toujours avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$, nous obtenons une erreur 4 fois plus importante qu'avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$ mais un temps de calcul 8 fois plus faible (et nombre de degrés de liberté plus petit également). La méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$ a un temps de calcul 5 fois plus important GDDT-$\mathbb{P}_1$ mais une erreur 26 fois plus faible. Enfin, pour une dernière comparaison significative, l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$ donne quasiment la même erreur L^2 que la méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$ pour un nombre total de degrés de liberté très proche, et un temps CPU diminué d'un facteur 2.11. Ainsi, pour ce cas test, nous obtenons avec la méthode hybride, de meilleurs compromis entre précision et temps de calcul.

TAB. 4.4 – Différentes comparaisons entre méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ et méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$: rapport des temps de calcul, rapport des degrés de liberté et rapport des maximums (en temps) de l'erreur L^2 globale.

Comparaison		$\frac{\text{Temps CPU}_{(a)}}{\text{Temps CPU}_{(b)}}$	$\frac{\#\, ddl_{(a)}}{\#\, ddl_{(b)}}$	$\frac{\text{Erreur } L^2 \max_{(a)}}{\text{Erreur } L^2 \max_{(b)}}$
Méthode (a)	Méthode (b)			
GDDT-$\mathbb{P}_1$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	0.77	0.73	7.05
GDDT-$\mathbb{P}_3$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	8.06	2.42	0.26
GDDT-$\mathbb{P}_1$	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$	0.20	0.37	26.06
GDDT-$\mathbb{P}_3$	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$	2.11	1.22	0.95

Enfin, nous traçons, sur la figure FIG. 4.16, l'évolution en temps des composantes H_y et E_z en un point du domaine de calcul (se situant sur une interface entre un triangle et un quadrangle) et nous présentons les lignes de contour (FIG. 4.18 et FIG. 4.17) pour la composantes H_x à deux temps distincts. Nous remarquons que les courbes en temps ainsi que les lignes de contour correspondant aux méthodes GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_3$, coïncident avec celles de la solution exacte. En revanche, l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ montre des différences avec la solution exacte, et de façon plus marquée, la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1$ en présente également (conformément aux niveaux d'erreurs trouvés, TAB. 4.3).

4.5.2 Mode $(1,1)$ dans une cavité métallique

Nous revenons ici une ultime fois sur le cas test n°1 (sous-section 4.2.1), avec un temps (physique) de simulation de 3.33×10^{-7} s (équivalent en mètres : 100 m) et en utilisant le schéma en temps LF2.

Nous travaillons sur deux maillages (FIG. 4.19). Le premier maillage est triangulaire composé de 3778 triangles, avec une arête minimale de longueur 8.69×10^{-3} m. Le second maillage est un maillage hybride non-conforme composé de 896 triangles et de 32 quadrangles (i.e. 928 éléments), avec une arête minimale de longueur 1.17×10^{-2} m, et comportant 64 interfaces hybrides et non-conformes (on peut voir sur la figure FIG. 4.19 que les interfaces hybrides correspondent aux interfaces non-conformes). Ce dernier est obtenu en prenant un maillage hybride et conforme, et en raffinant trois fois (raffinement non-conforme) la partie triangulaire.

Nous testons alors plusieurs ordres d'interpolation pour les deux maillages, et nous résumons les résultats dans le tableau TAB. 4.5. Nous comparons ici conjointement les trois critères suivants : le temps de calcul, le maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale et le pas de temps global (cf TAB. 4.6).

Nous pouvons tout d'abord constater que dans toutes les comparaisons considérées, les pas de temps globaux ne présentent pas d'importantes différences (facteurs de comparaisons proches de 1) ; ainsi, ce critère ne sera pas déterminant dans les éventuels écarts de temps de calcul. Regardons alors les deux critères restants, et discutons de certaines comparaisons. En opposant la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1$ aux hybridations GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$, nous obtenons des temps

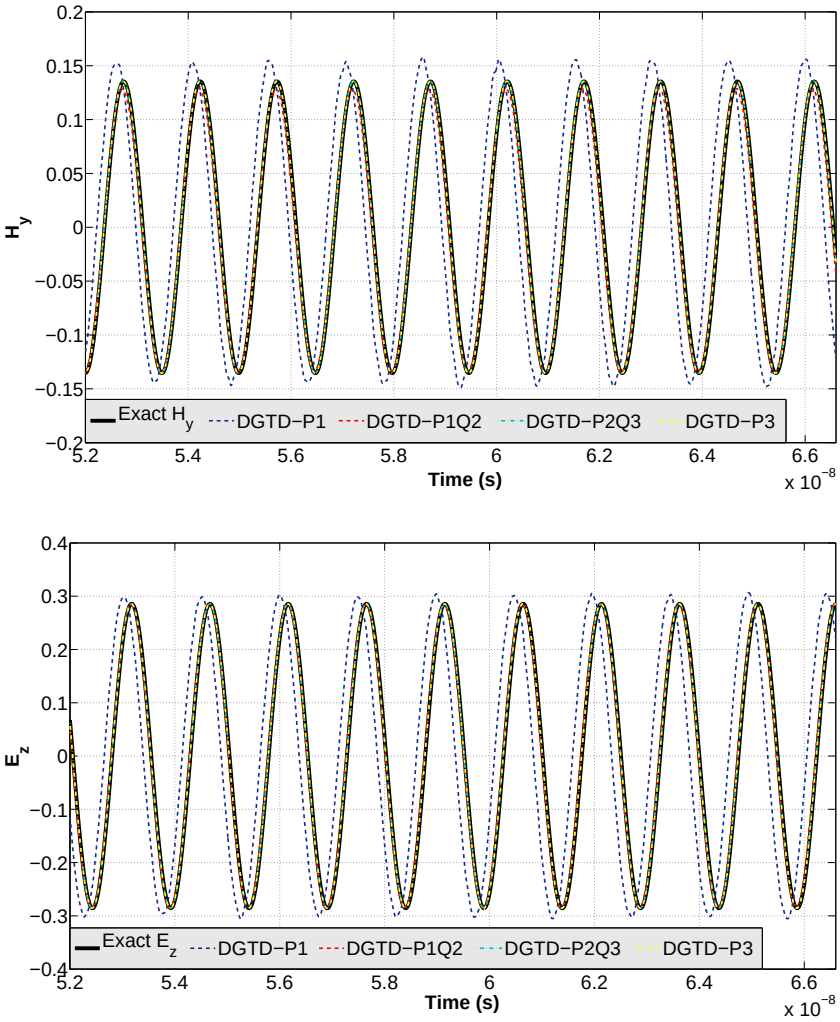
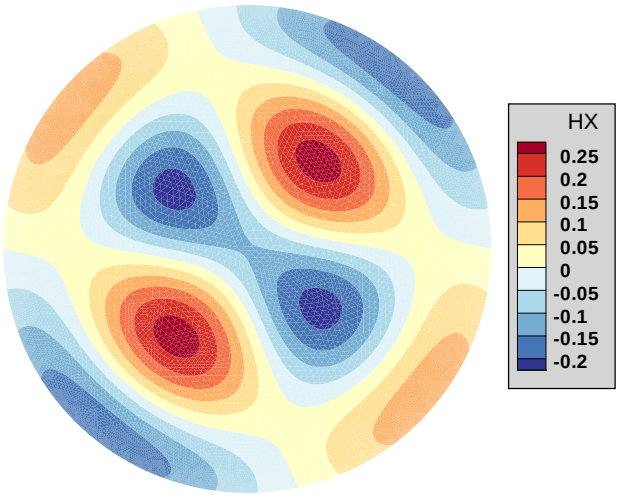
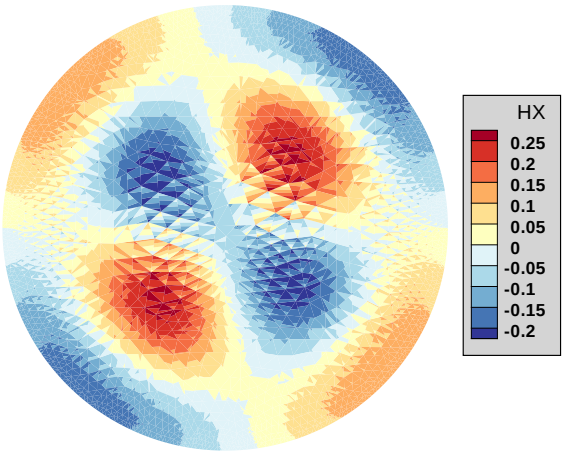


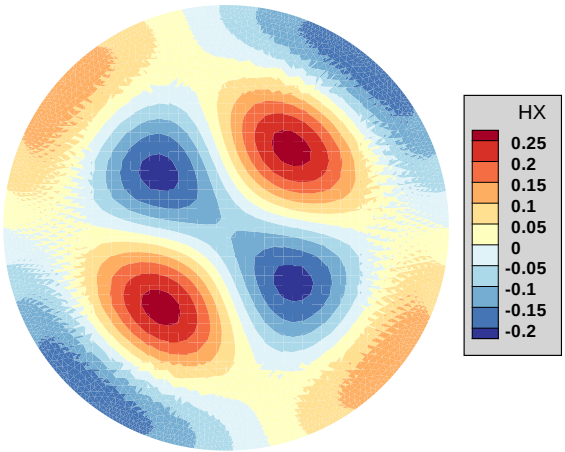
FIG. 4.16 – Evolution en temps de deux composantes des solutions exactes et approchées (en fin de simulation et pour chaque ordre d'interpolation) au point $(0.3, 0.3)$ du domaine de calcul. Haut : H_y. – Bas : E_z.



Solution exacte

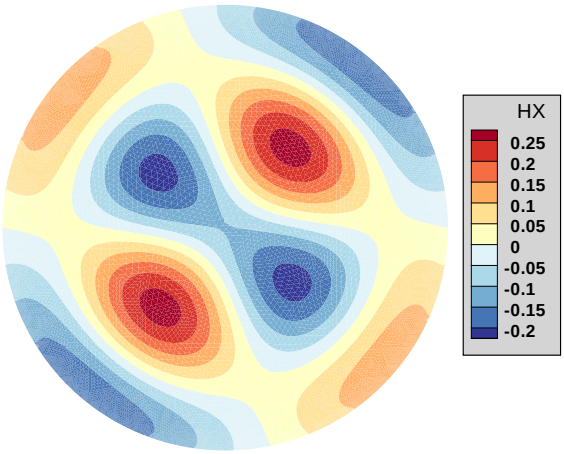


Méthode GDDT-$\mathbb{P}_1$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$

Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$

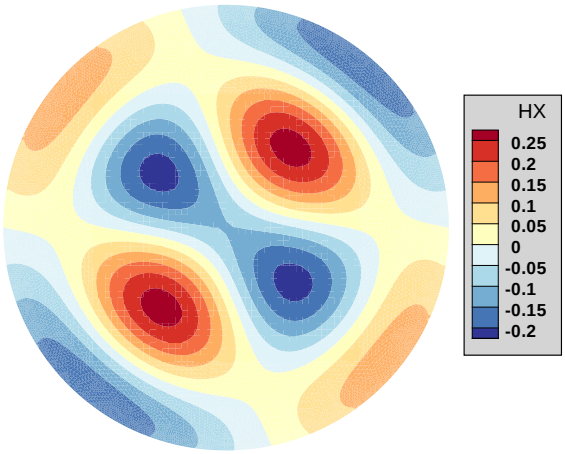
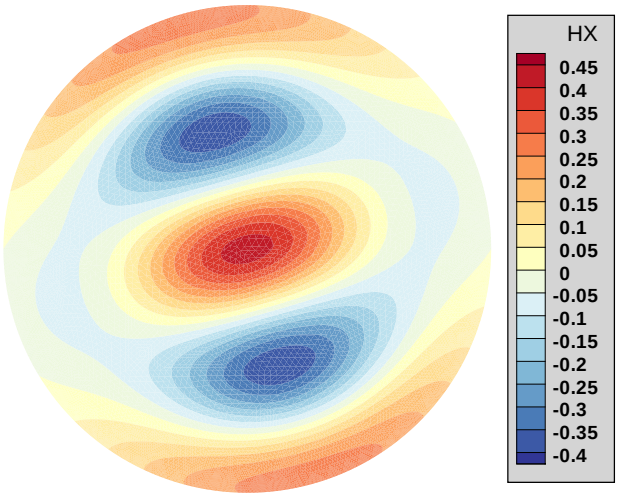
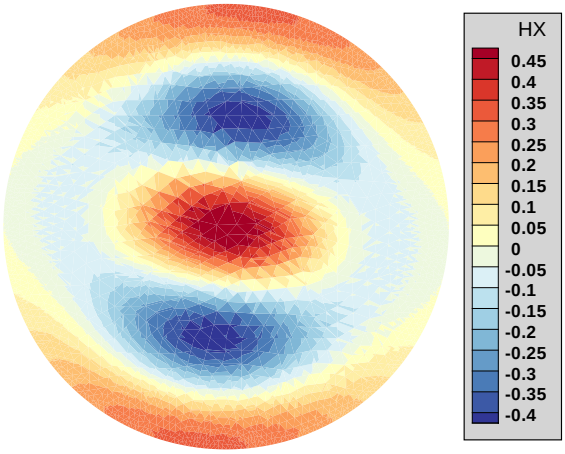


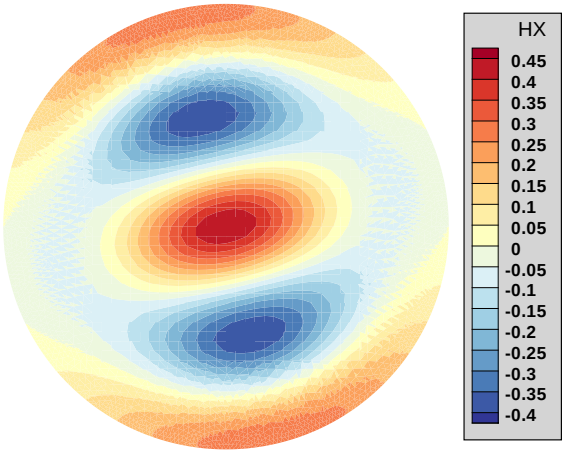
FIG. 4.17 – Lignes de contour de la composante H_x des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation) au temps $t = 6.667 \times 10^{-9}$ s (équivalent en mètres : 2 m).



Solution exacte

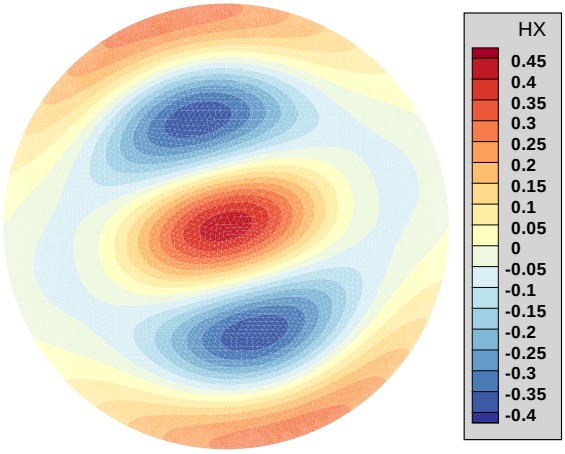


Méthode GDDT-$\mathbb{P}_1$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$

Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$

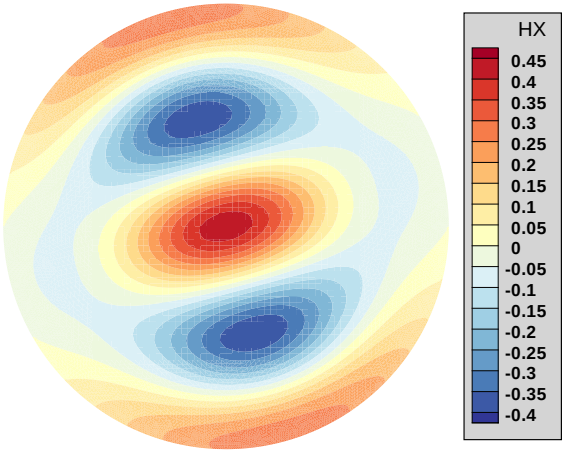


FIG. 4.18 – Lignes de contour de la composante H_x des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation) au temps $t = 6.667 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 20 m).

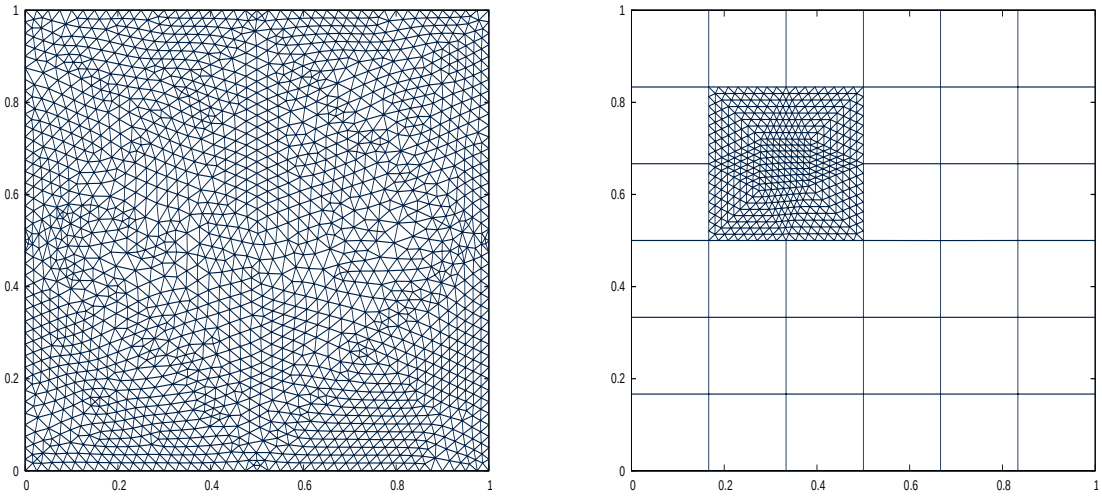


FIG. 4.19 – Gauche : maillage triangulaire (non-structuré). – Droite : maillage hybride triangulaire / quadrangulaire (non-structuré / structuré) et non-conforme.

TAB. 4.5 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté, maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale et pas de temps global (en picosecondes), pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps CPU	# *ddl*	Erreur L^2 max	Δt
Triangulaire	GDDT-$\mathbb{P}_1$	71.4 s	11334	3.91×10^{-2}	8.14 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_2$	322.8 s	22668	3.18×10^{-4}	4.36 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_3$	918.7 s	37780	1.33×10^{-4}	2.84 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_4$	2574.1 s	56670	5.90×10^{-5}	1.89 ps
Hybride	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$	16.2 s	3200	5.68×10^{-3}	11.07 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$	64.6 s	5888	5.84×10^{-4}	5.92 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_3$	174.6 s	9472	2.60×10^{-4}	3.86 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$	19.7 s	3488	5.68×10^{-3}	11.07 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$	71.8 s	6176	5.76×10^{-4}	5.92 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$	187.5 s	9760	2.45×10^{-4}	3.86 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$	492.2 s	14240	1.09×10^{-4}	2.57 ps

TAB. 4.6 – Différentes comparaisons entre méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ et méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$: rapport des temps de calcul, rapport des maximums (en temps) de l'erreur L^2 globale et rapport des pas de temps globaux.

Comparaison		$\frac{\text{Temps CPU}_{(a)}}{\text{Temps CPU}_{(b)}}$	$\frac{\text{Erreur } L^2 \max_{(a)}}{\text{Erreur } L^2 \max_{(b)}}$	$\frac{\Delta t_{(a)}}{\Delta t_{(b)}}$
Méthode (a)	Méthode (b)			
GDDT-$\mathbb{P}_1$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$	4.41	6.88	0.74
GDDT-$\mathbb{P}_1$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$	3.62	6.88	0.74
GDDT-$\mathbb{P}_1$	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_3$	1.10	66.95	1.37
GDDT-$\mathbb{P}_1$	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$	0.99	67.88	1.37
GDDT-$\mathbb{P}_2$	GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_3$	1.85	1.22	1.12
GDDT-$\mathbb{P}_2$	GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$	1.72	1.30	1.12
GDDT-$\mathbb{P}_3$	GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$	1.87	1.22	1.10
GDDT-$\mathbb{P}_4$	GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$	5.23	0.54	0.74

CPU plus petits (d'un facteur d'environ 4) pour des solutions plus précis (d'un facteur d'environ 7) avec les deux méthode hybrides. Nous comparons également, toujours à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1$, l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$; nous obtenons les même temps de calcul pour une amélioration très importante de la précision (d'un facteur d'environ 68) avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$. En confrontant les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$, ainsi que les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$, nous observons que là aussi, le calcul effectué avec les méthodes hybrides est plus efficace et plus précis. La meilleure précision est obtenue avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_4$ sur le maillage triangulaire, cependant nous avons une précision comparable avec l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$ (erreur 2 fois plus importante) pour un temps de CPU diminué d'un facteur 5.

Ainsi, pour ce cas test, les hybridations présentées donnent de très avantageux compromis entre temps de calcul et précision.

4.5.3 Onde plane diffractée par un profil d'aile d'avion

Nous nous intéressons au cas test n°3 (décrit en sous-section 4.2.3). Nous faisons des simulations pour un temps physique de 1.67×10^{-8} s (équivalent en mètres : 5 m) et avec le schéma en temps LF2.

Nous présentons sur la figure FIG. 4.20 les deux maillages utilisés. Le maillage triangulaire est composé de 8444 triangles, et la longueur de l'arête minimale est de 1.82×10^{-3} m. Le maillage hybride non-conforme est composé de 11584 triangles et de 172 quadrangles (i.e. 11756 éléments) pour une arête minimale de longueur égale à 1.57×10^{-3} m et 120 faces hybrides et non-conformes (les faces hybrides correspondent aux faces non-conformes).

Ce problème test ne disposant pas d'une solution exacte, nous regardons les solutions approchées (sous différents aspects) et comparons simultanément les deux critères : le temps de calcul, le nombre total de degrés de liberté. Nous expérimentons divers ordres d'interpolation pour les deux maillages, dont les résultats sont reportés dans le tableau TAB. 4.7, et nous traçons pour

chacun des cas l'évolution en temps de la composante E_z en deux point du domaine de calcul (cf FIG. 4.21 où le point est dans la partie quadrangulaire du maillage hybride et FIG. 4.22 le point est situé près de l'aile dans la partie triangulaire pour les deux maillages). De plus, nous calculons une transformée de Fourier discrète au cours de la dernière période de la simulation et nous représentons les lignes de contour de sa partie réelle (pour chaque ordre d'interpolation testé) sur les figures FIG. 4.23 et FIG. 4.24.

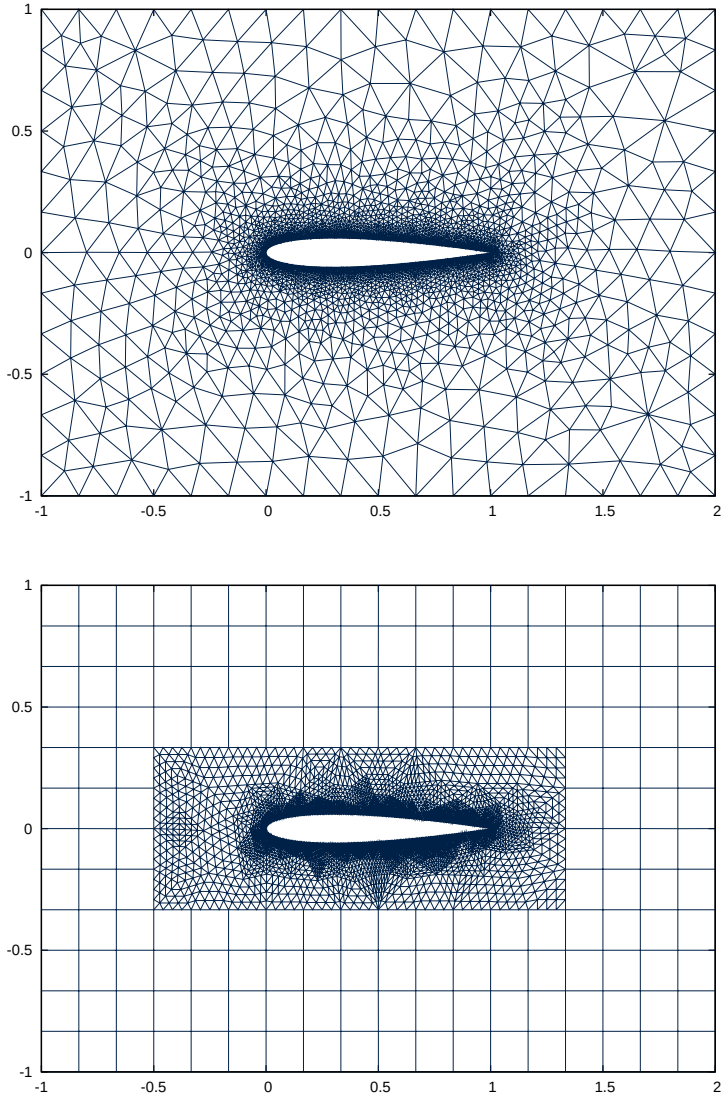


FIG. 4.20 – Maillages modélisant le profil d'une aile d'avion. Haut : triangulaire. - Bas : hybride et non-conforme.

Le tableau TAB. 4.8 met en évidence plusieurs comparaisons, commentons quelques unes d'entre elles. Les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ ont un rapport des nombres de degrés de liberté proche de 1, alors que le calcul effectué avec l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ est 4 fois plus rapide. De plus, nous pouvons voir que les courbes d'évolution en temps (en les deux points considérés, FIG. 4.21 et FIG. 4.22) coïncident pour ces deux méthodes ; on observe aussi que les lignes de

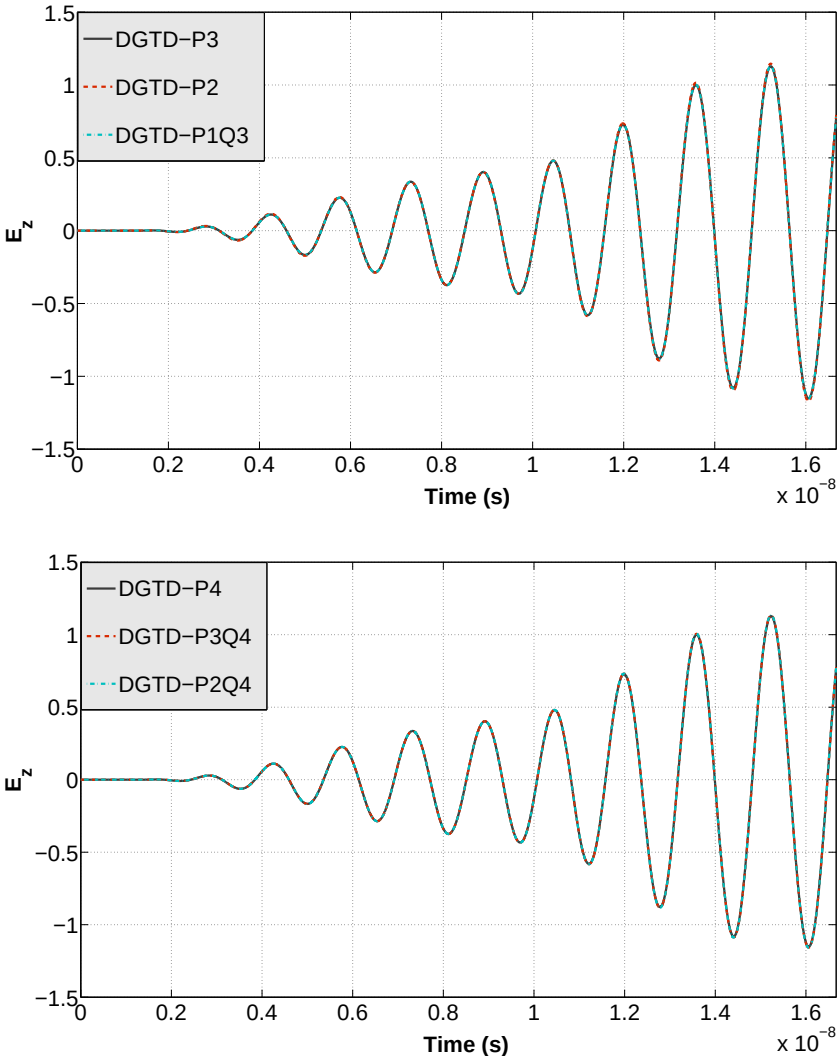


FIG. 4.21 – Evolution en temps de la composante E_z de la solution approchée pour les six ordres d'interpolation testés (séparés en deux graphiques) au point $(1.6, -0.6)$ du domaine de calcul.

TAB. 4.7 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et pas de temps global, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps CPU	# *ddl*
Triangulaire	GDDT-$\mathbb{P}_2$	132.8 s	50664
	GDDT-$\mathbb{P}_3$	379.9 s	84440
	GDDT-$\mathbb{P}_4$	1201.9 s	126660
Hybride	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$	32.5 s	37504
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$	152.0 s	73804
	GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$	437.2 s	120140

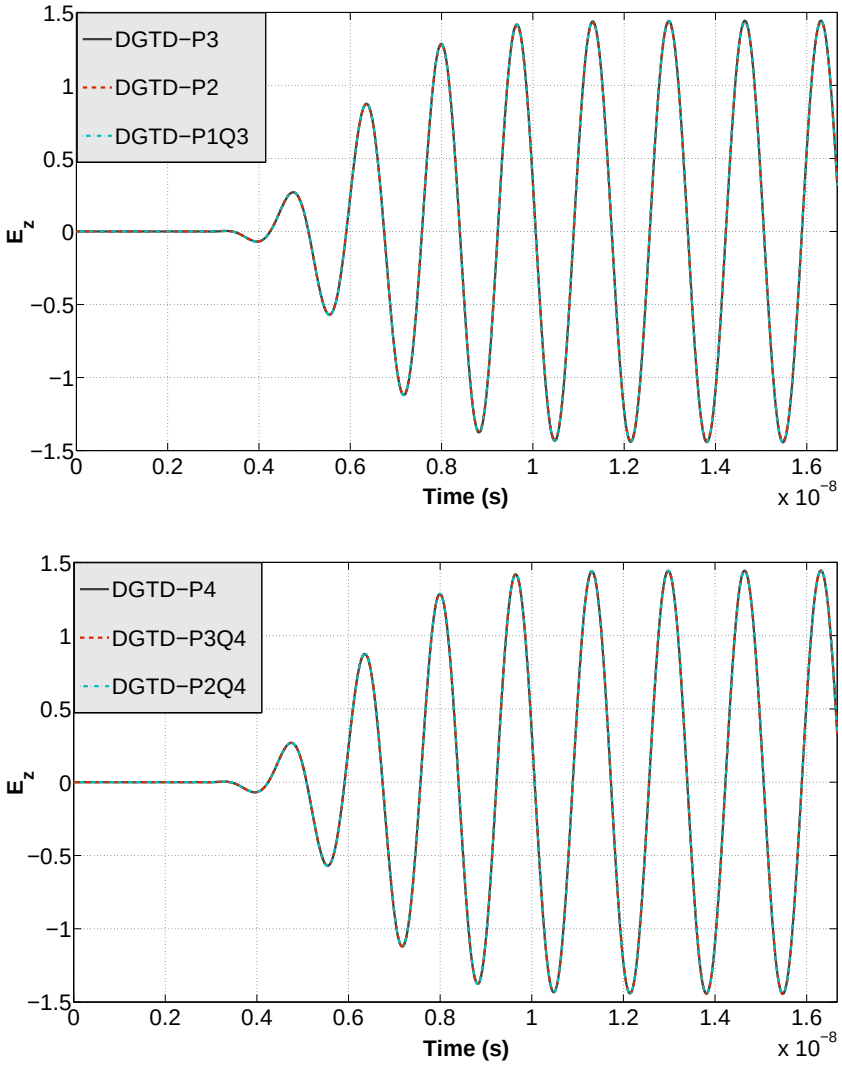
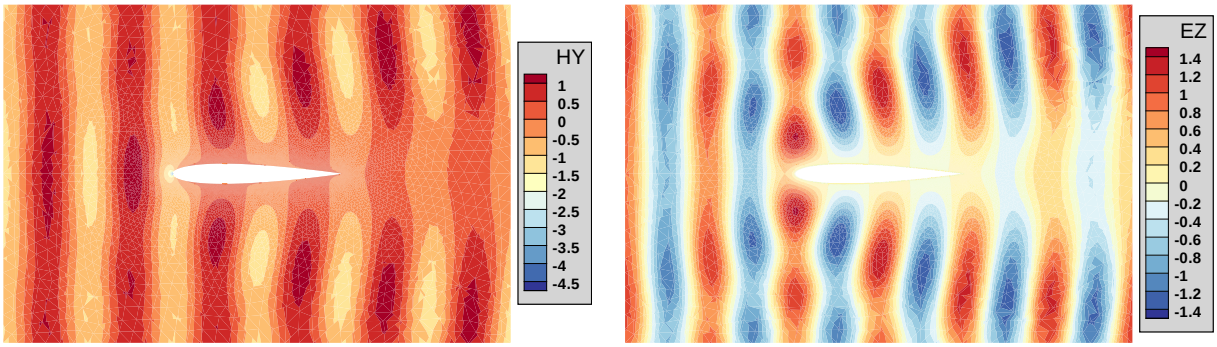


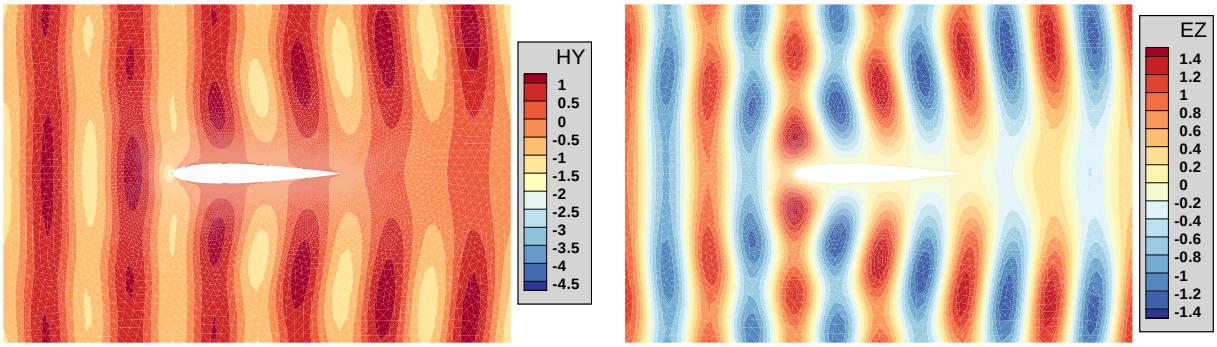
FIG. 4.22 – Evolution en temps de la composante E_z de la solution approchée pour les six ordres d'interpolation testés (séparés en deux graphiques) au point $(-0.1, 0.0)$ du domaine de calcul.

TAB. 4.8 – Différentes comparaisons entre méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ et méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$: rapport des temps de calcul et rapport des degrés de liberté.

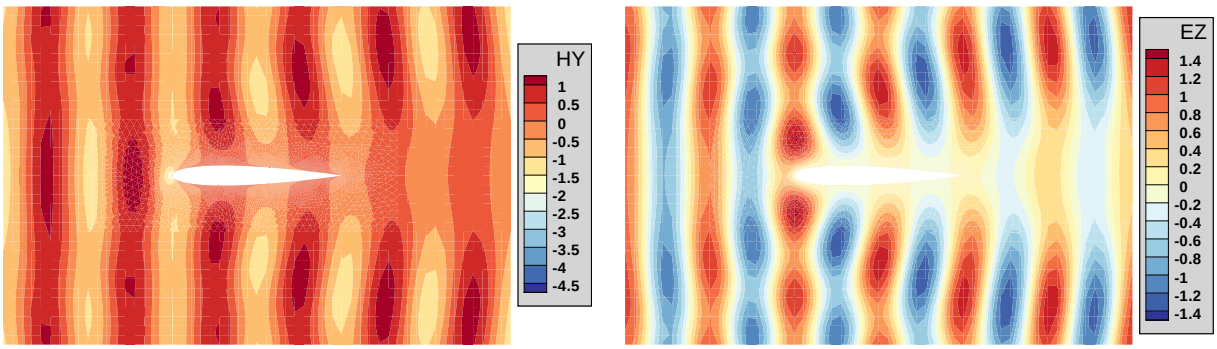
Comparaison		$\frac{\text{Temps CPU}_{(a)}}{\text{Temps CPU}_{(b)}}$	$\frac{\#\, ddl_{(a)}}{\#\, ddl_{(b)}}$
Méthode (a)	Méthode (b)		
GDDT-$\mathbb{P}_2$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$	4.09	1.35
GDDT-$\mathbb{P}_3$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$	11.69	2.25
GDDT-$\mathbb{P}_3$	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$	2.50	1.14
GDDT-$\mathbb{P}_4$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$	36.98	3.38
GDDT-$\mathbb{P}_4$	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$	7.9	1.72
GDDT-$\mathbb{P}_4$	GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$	2.75	1.05



GDDT-$\mathbb{P}_2$

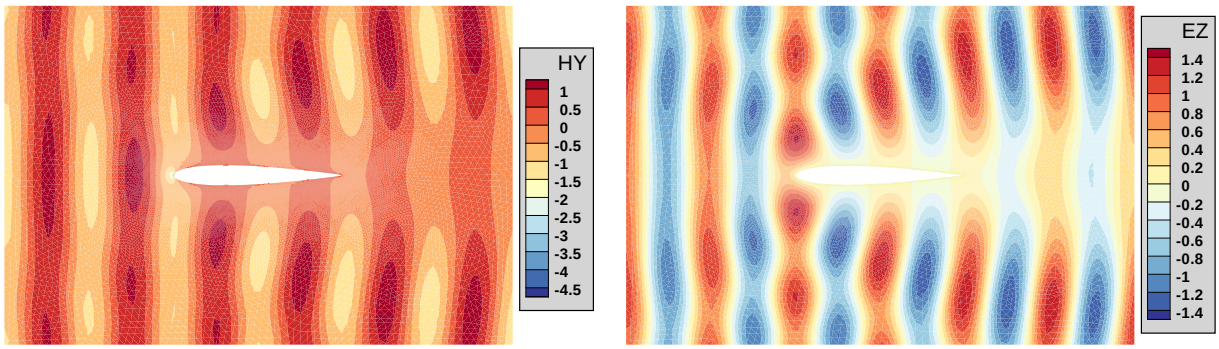


GDDT-$\mathbb{P}_3$

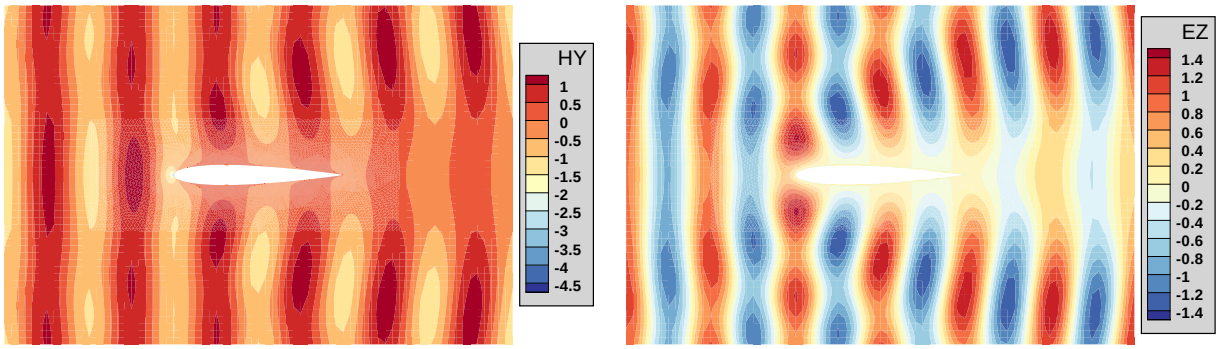


GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$

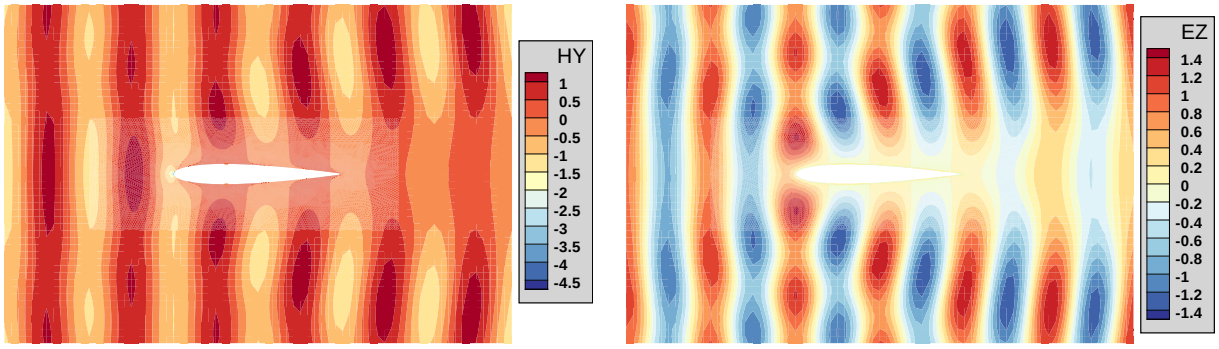
FIG. 4.23 – Lignes de contour de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (calculée durant la dernière période de la simulation) de deux composantes de la solution approchée pour trois ordres d'interpolation. Gauche : H_y. – Droite : E_z.



GDDT-$\mathbb{P}_4$



GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$



GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$

FIG. 4.24 – Lignes de contour de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (calculée durant la dernière période de la simulation) de deux composantes de la solution approchée pour trois ordres d'interpolation. Gauche : H_y. – Droite : E_z.

contour (FIG. 4.23) présentent le même aspect, avec plus de netteté (moins de bruit) pour celles de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$. En opposant les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$, nous avons avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$ un nombre de degrés de liberté environ 2 fois plus important pour un temps de calcul multiplié par un facteur d'environ 12 par rapport à l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$; les courbes d'évolution en temps (FIG. 4.21 et FIG. 4.22) coïncident pour ces deux méthodes et les lignes de contour (FIG. 4.23) ont aussi quasiment la même allure (légèrement plus de bruit pour celles de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$). En opposant également les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_4$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$, le nombre total des degrés de liberté est environ 1.7 fois plus grand pour GDDT-$\mathbb{P}_4$ avec un temps CPU multiplié par facteur d'environ 8 par rapport à GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$; les courbes d'évolution en temps (FIG. 4.21 et FIG. 4.22) coïncident pour ces deux méthodes et les lignes de contour (FIG. 4.24) présentent le même aspect. Enfin, en confrontant la méthode GDDT-$\mathbb{P}_4$ à la méthode hybride GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$, nous observons que pour le pour même nombre de degrés de liberté et pour le même aspect de la solution (courbes d'évolution en temps et lignes de contour), le temps de calcul est environ 3 fois plus important avec GDDT-$\mathbb{P}_4$.

En conclusion, dans ces diverses comparaisons deux à deux, nous obtenons grâce aux hybridations, des temps de calcul largement diminués par rapport à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ sur le maillage triangulaire, tout en gardant des solutions numériques identiques (ou proches).

4.5.4 Onde plane diffractée par un disque diélectrique

Nous réalisons à présent des tests avec le cas test n°4 (cf sous-section 4.2.4), un temps physique de simulation de 6.67×10^{-10} s (équivalent en mètres : 0.2 m) et le schéma en temps LF2.

Les deux maillages considérés sont là aussi triangulaire pour l'un, hybride non-conforme pour le second. Le maillage triangulaire (cf FIG. 4.25) est composé de 22216 triangles pour une arête minimale d'une longueur égale à 5.40×10^{-5} m ; le maillage hybride (cf FIG. 4.26) comporte 9432

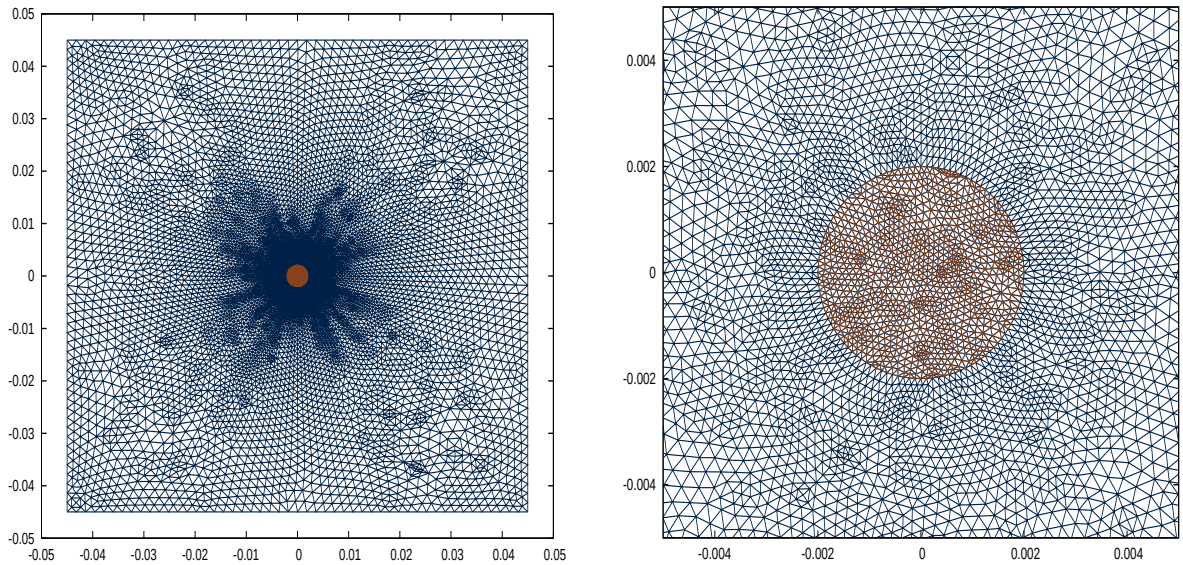


FIG. 4.25 – Maillage triangulaire d'un milieu hétérogène. Gauche : grossissement ×1. – Droite : grossissement ×10.

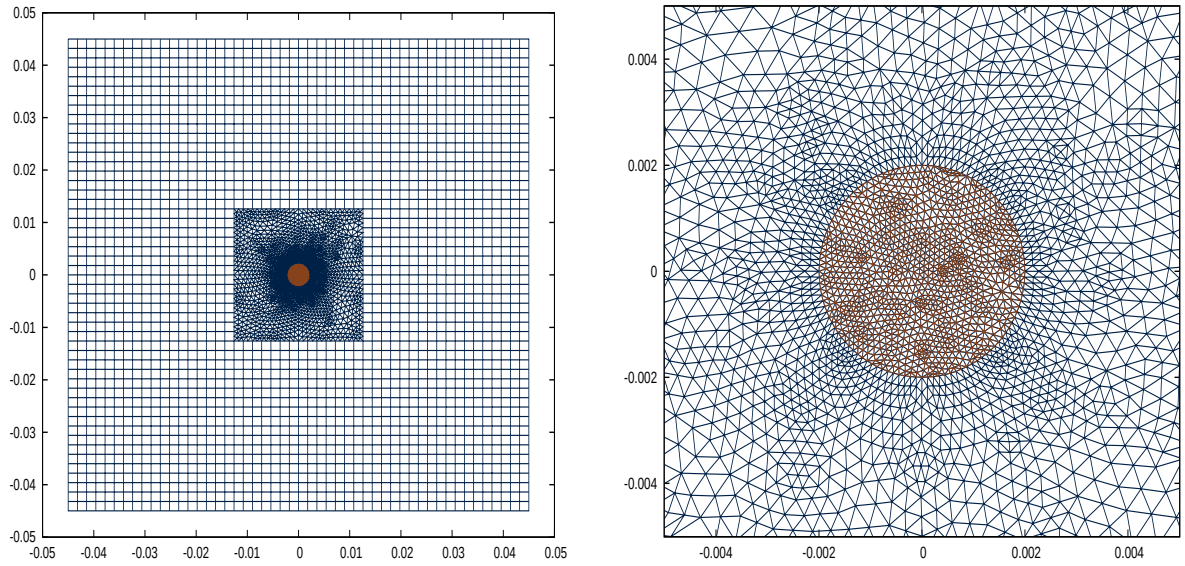


FIG. 4.26 – Maillage hybride et non-conforme d'un milieu hétérogène. Gauche : grossissement $\times 1$. – Droite : grossissement $\times 10$.

éléments (7128 triangles et 2304 quadrangles, 112 interfaces hybrides et non-conformes) avec une arête minimale identique à celle du maillage triangulaire.

Nous testons la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$ que nous souhaitons comparer avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$, ainsi que la méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$ que nous voulons confronter à l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$. Les résultats obtenus sont alors montrés dans le tableau TAB. 4.9. Une transformée de Fourier discrète est appliquée à la solution temporelle durant la dernière période de la simulation, l'erreur L^2 est ensuite calculée en fréquence sur la base de cette solution.

TAB. 4.9 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et norme L^2 de l'erreur globale de la transformée de Fourier discrète (de la solution approchée), pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps CPU	# *ddl*	Erreur L^2 Fourier
Triangulaire	GDDT-$\mathbb{P}_2$	391.1 s	133296	2.40×10^{-2}
	GDDT-$\mathbb{P}_3$	1351.0 s	222160	6.21×10^{-3}
Hybride	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$	165.6 s	63504	1.86×10^{-2}
	GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$	458.7 s	92016	4.88×10^{-3}

Nous constatons que la méthode hybride GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$ apporte un gain en temps de calcul d'un facteur 2.4 par rapport au schéma GDDT-$\mathbb{P}_2$ pour une précision légèrement meilleure. De même, l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$ donne une erreur plus faible que la méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$ avec un temps CPU diminué par un facteur 3. Une nouvelle fois, pour ce problème test, l'agencement du maillage hybride non-conforme sur lequel on applique la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ engendre une amélioration en termes à la fois de précision et d'efficacité. Les figures FIG. 4.27 et FIG. 4.28 illustrent la coupe 1D selon x_1 (x_2 fixé en 0.0) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète

des solutions exacte et approchées (composantes H_y et E_z), où l'on voit que les ordres GDDT-$\mathbb{P}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$ sont insuffisants pour que les courbes s'harmonisent précisément avec la solution exacte, ce qui est en revanche le cas pour les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$.

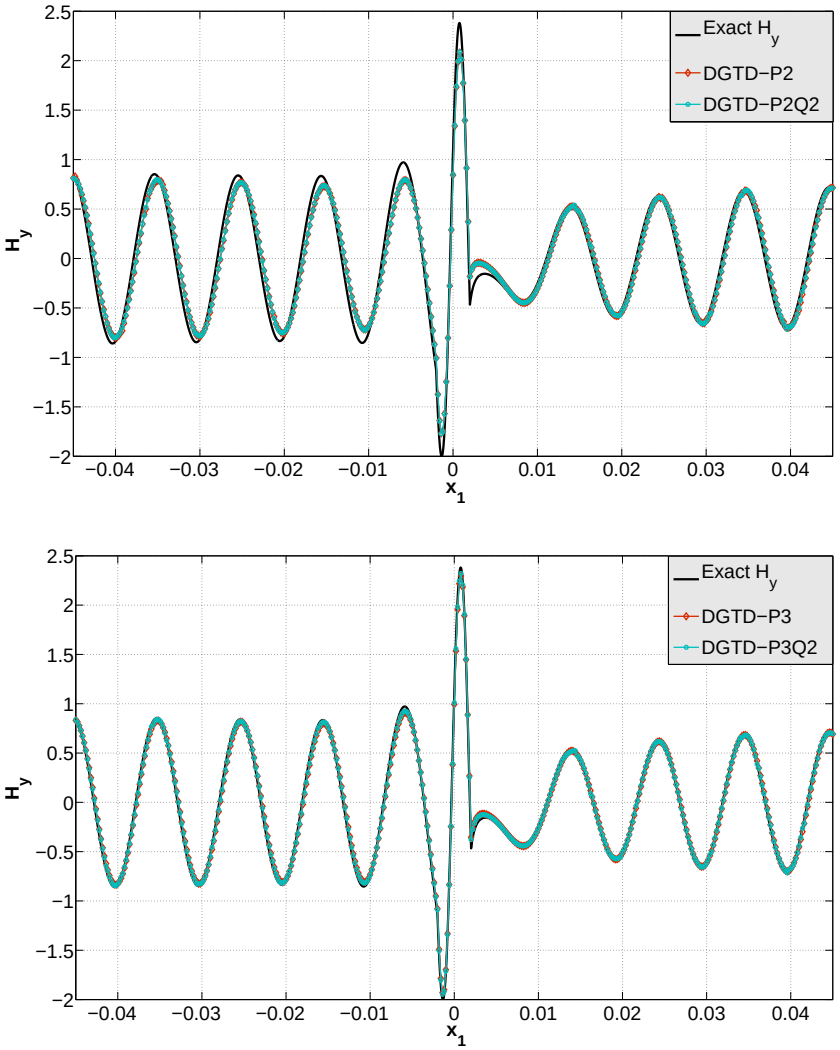


FIG. 4.27 – Coupe 1D selon x_1 (x_2 fixé en 0.0) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (calculée durant la dernière période de la simulation) de la composante H_y des solutions exacte et approchées, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Enfin, nous exposons les lignes de contour de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète des solutions exacte et approchées (composantes H_x et E_z) sur les figures FIG. 4.29, FIG. 4.30, FIG. 4.31 et FIG. 4.32. Nous pouvons vérifier (FIG. 4.30 et FIG. 4.32) que le cas affichant le plus de similitudes avec les lignes de contour de la solution exacte est l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$.

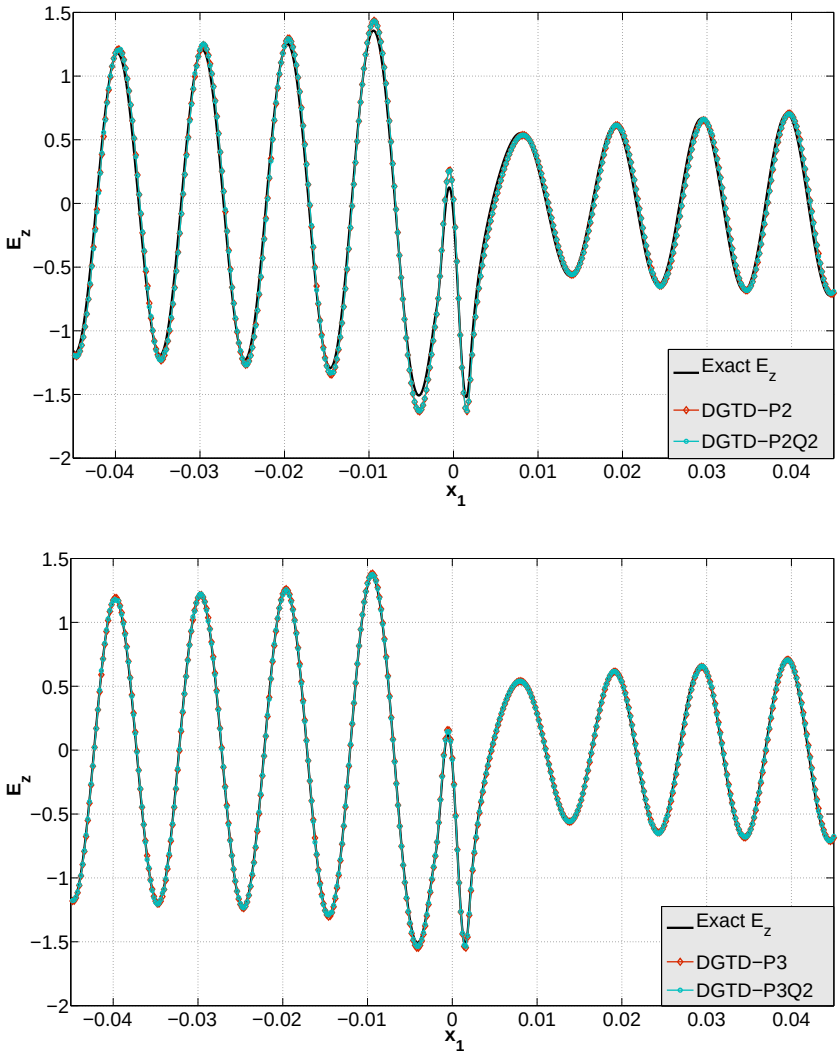
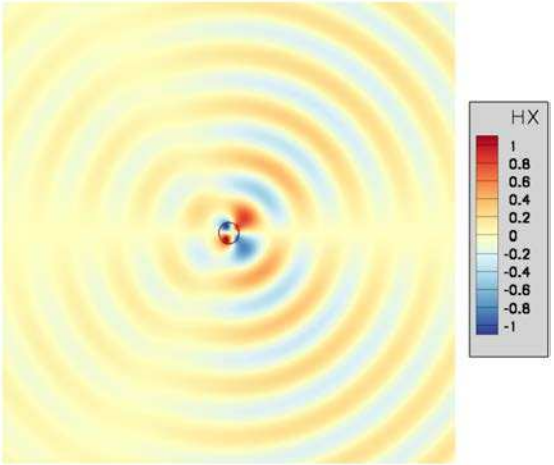
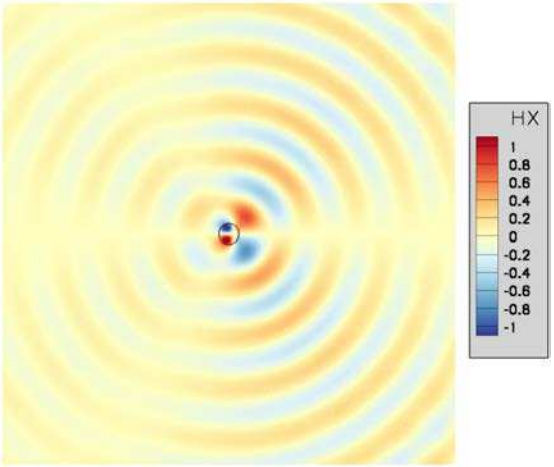


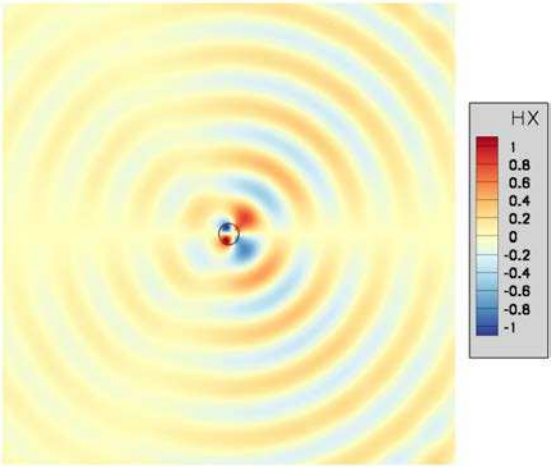
FIG. 4.28 – Coupe 1D selon x_1 (x_2 fixé en 0.0) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (calculée durant la dernière période de la simulation) de la composante E_z des solutions exacte et approchées, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.



Solution exacte

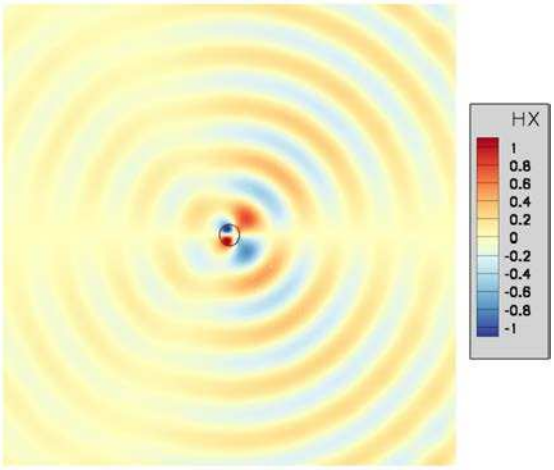


Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$

Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$

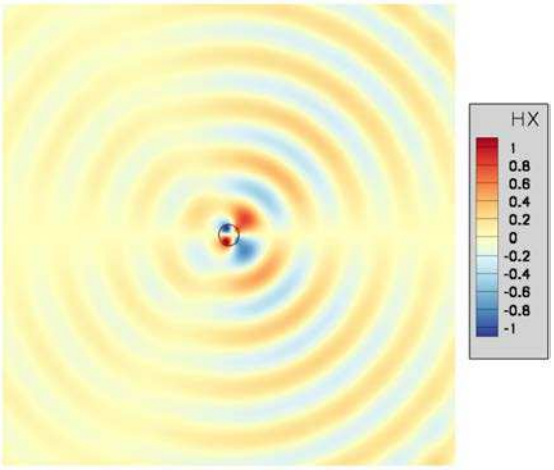
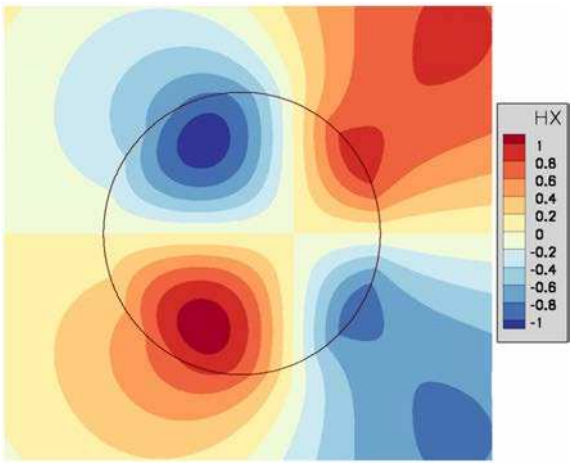
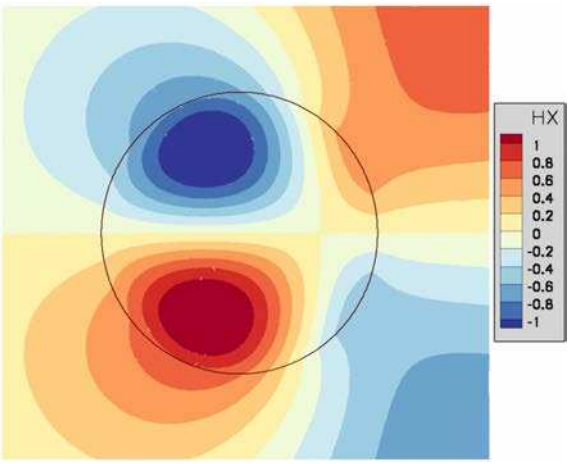


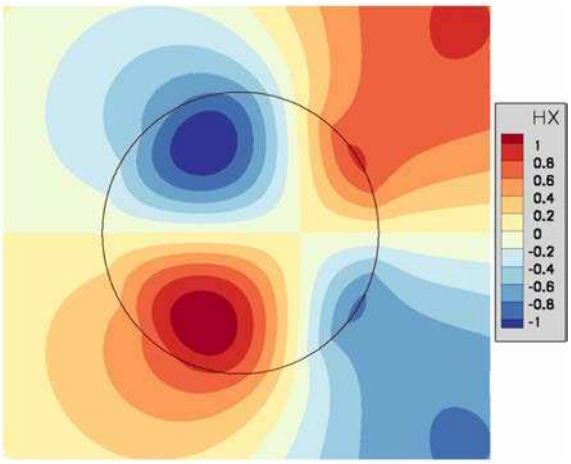
FIG. 4.29 – Lignes de contour (répartition continue des couleurs) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète de la composante H_x des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation).



Solution exacte

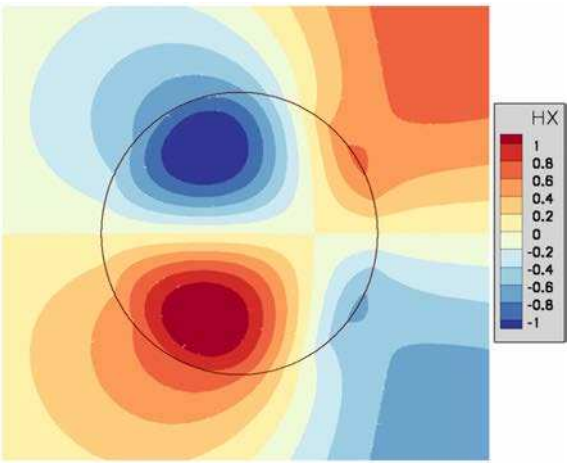


Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$

Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$

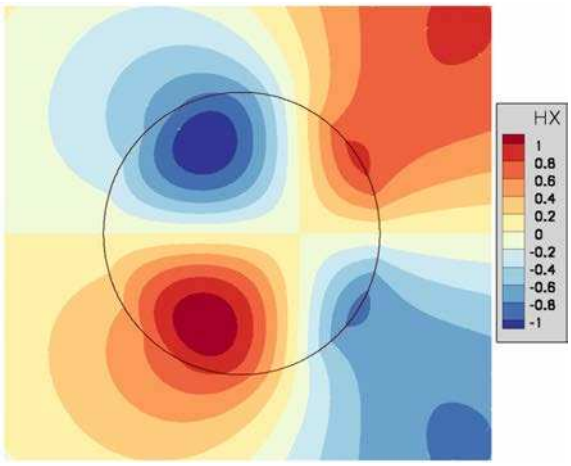
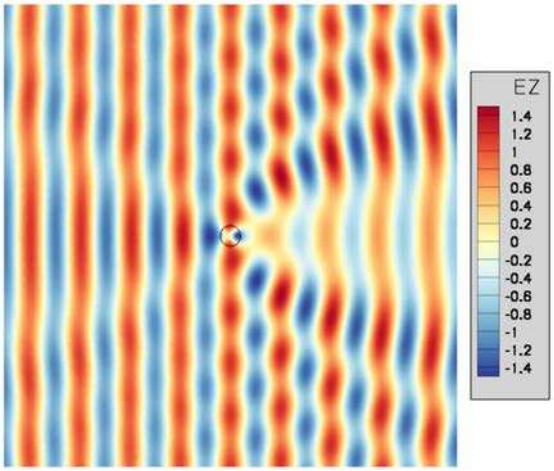
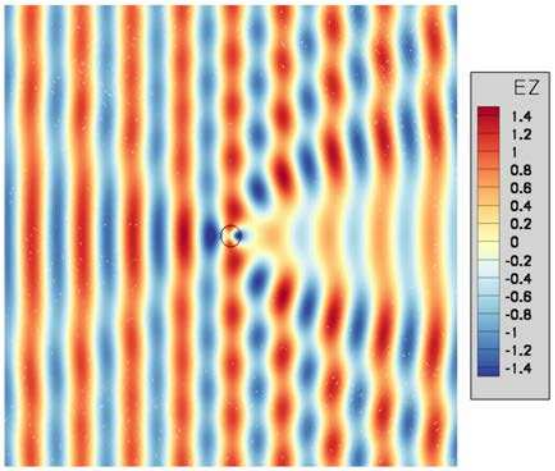


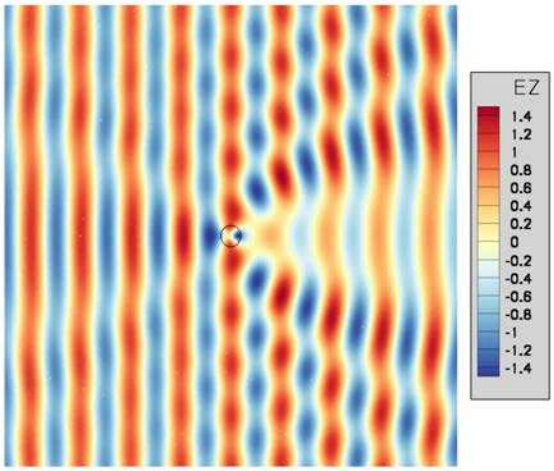
FIG. 4.30 – Zoom ($\times 14$) sur les lignes de contour (répartition des couleurs en bandes) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète de la composante H_x des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation).



Solution exacte

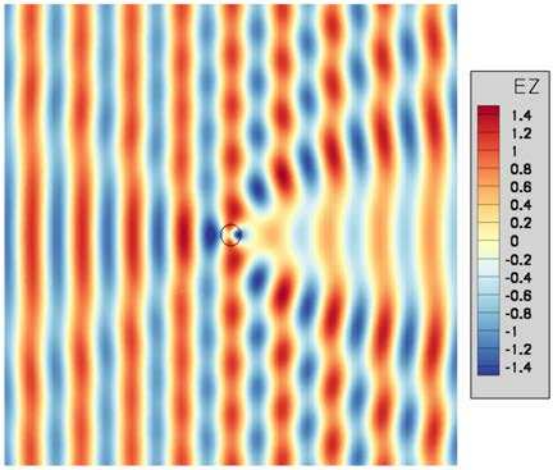


Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$

Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$

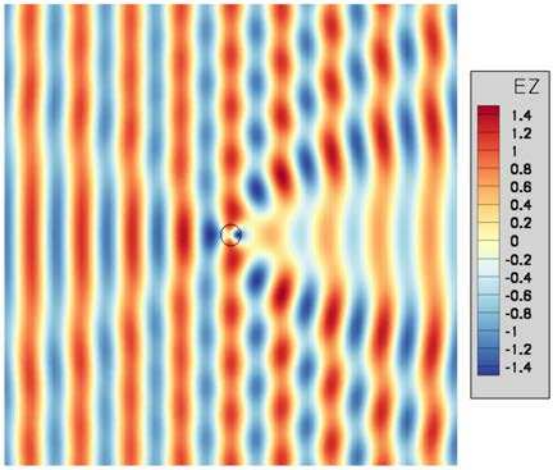
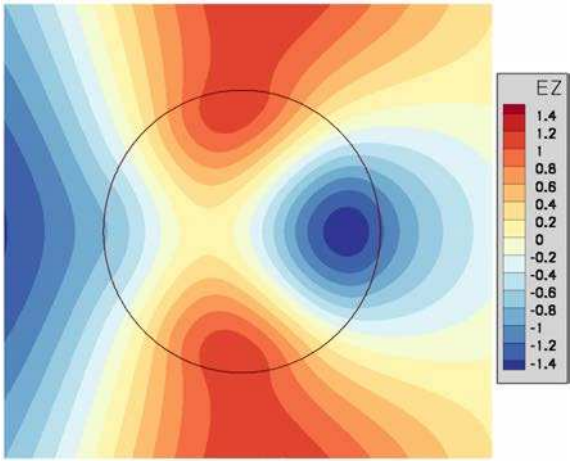
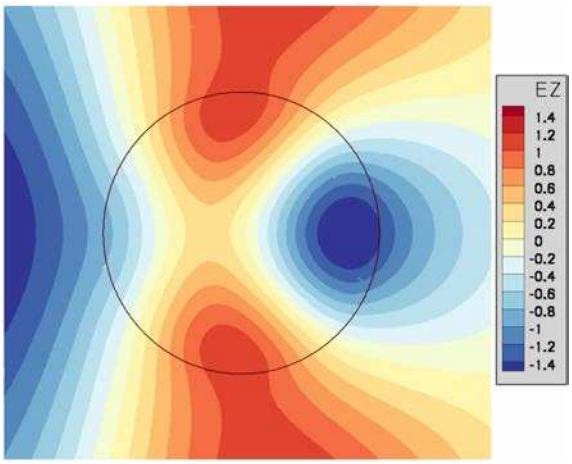


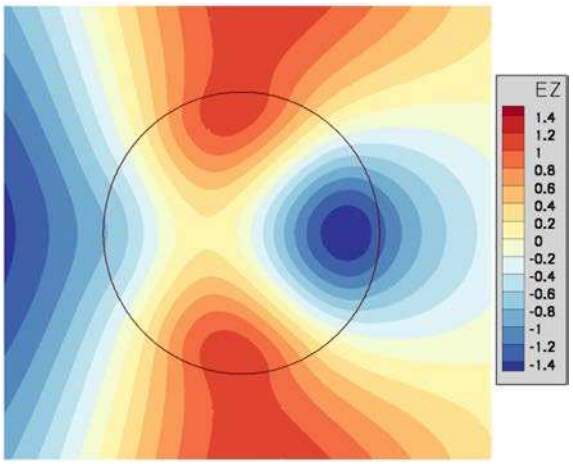
FIG. 4.31 – Lignes de contour (répartition continue des couleurs) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète de la composante E_z des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation).



Solution exacte

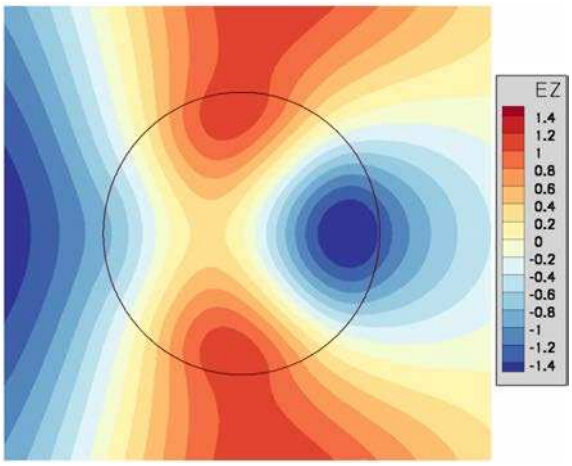


Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3$

Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_2$

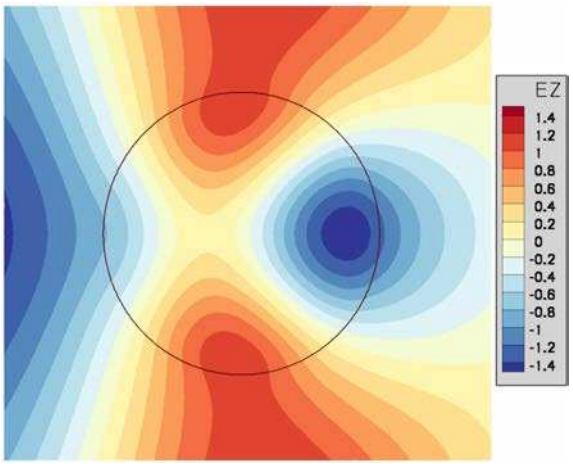


FIG. 4.32 – Zoom ($\times 14$) sur les lignes de contour (répartition des couleurs en bandes) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète de la composante E_z des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation).

4.5.5 Source Gaussienne modulée

Nous exploitons, dans cette sous-section, le cas test n°5 (sous-section 4.2.5), le temps physique de simulation est de 2.67×10^{-8} s (équivalent en mètres : 8 m) et le schéma en temps utilisé est le schéma LF4.

Afin d'opérer une nouvelle comparaison entre la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ en maillage triangulaire et la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en maillages hybrides et non-conformes, nous imposons ici d'avoir un maximum de similitudes géométriques entre les deux maillages étudiés. Nous les affichons sur la figure FIG. 4.33 et détaillons donc les statistiques de ces derniers.

Le maillage triangulaire a pour caractéristiques :

- Nombre de sommets : 13291
- Nombre d'éléments (uniquement triangulaires) : 26080
- Nombre d'arêtes internes (communes à deux triangles) : 38868
- Nombre d'arêtes frontières (issues de triangles) : 504, divisées en :
  - ➢ Nombre d'arêtes metalliques : 312
  - ➢ Nombre d'arêtes absorbantes : 192
- Arête minimale du maillage : 4.05×10^{-3} m.

Le maillage hybride a pour statistiques :

- Nombre de sommets : 13921
- Nombre d'éléments : 24736, divisés en :
  - ➢ Nombre de triangles : 22480
  - ➢ Nombre de quadrangles : 2256
- Nombre d'arêtes internes : 38142, divisées en :
  - ➢ Nombre d'arêtes conformes communes à deux triangles : 33366
  - ➢ Nombre d'arêtes conformes communes à deux quadrangles : 4328
  - ➢ Nombre d'arêtes non-conformes communes à deux quadrangles : 64
  - ➢ Nombre d'arêtes non-conformes et hybrides : 384
- Nombre d'arêtes frontières : 516, divisées en :
  - ➢ Nombre d'arêtes metalliques (issues de triangles) : 324
  - ➢ Nombre d'arêtes absorbantes (issues de quadrangles) : 192
- Arête minimale du maillage : 4.05×10^{-3} m.

Comme nous pouvons le constater, le nombre de sommets, d'éléments, d'arêtes internes et d'arêtes frontières sont très proches (quasi-identiques) pour les deux maillages, et les arêtes minimales sont égales. Nous remarquons aussi la présence d'arêtes non-conformes entre deux quadrangles (contrairement aux précédents tests) pour le maillage hybride. Nous faisons une simulation avec l'ordre d'interpolation GDDT-$\mathbb{P}_4$ sur le maillage triangulaire et testons quatre hybridations sur le maillage hybride et non-conforme ; nous calculons de plus, à la moitié du temps physique de simulation, l'erreur L^∞ relative à GDDT-$\mathbb{P}_4$ (plus précisément, cette erreur est linéique le long de x_1, x_2 étant fixé en -0.5). Nous récapitulons les résultats obtenus dans le tableau TAB. 4.10.

Nous comparons alors les solutions obtenues, en tenant compte de l'erreur L^∞, ainsi que les temps de calcul. Avant cela, pour bien comprendre ce phénomène de propagation, nous visualisons tout d'abord les lignes de contour de l'intensité du champ électrique à plusieurs temps

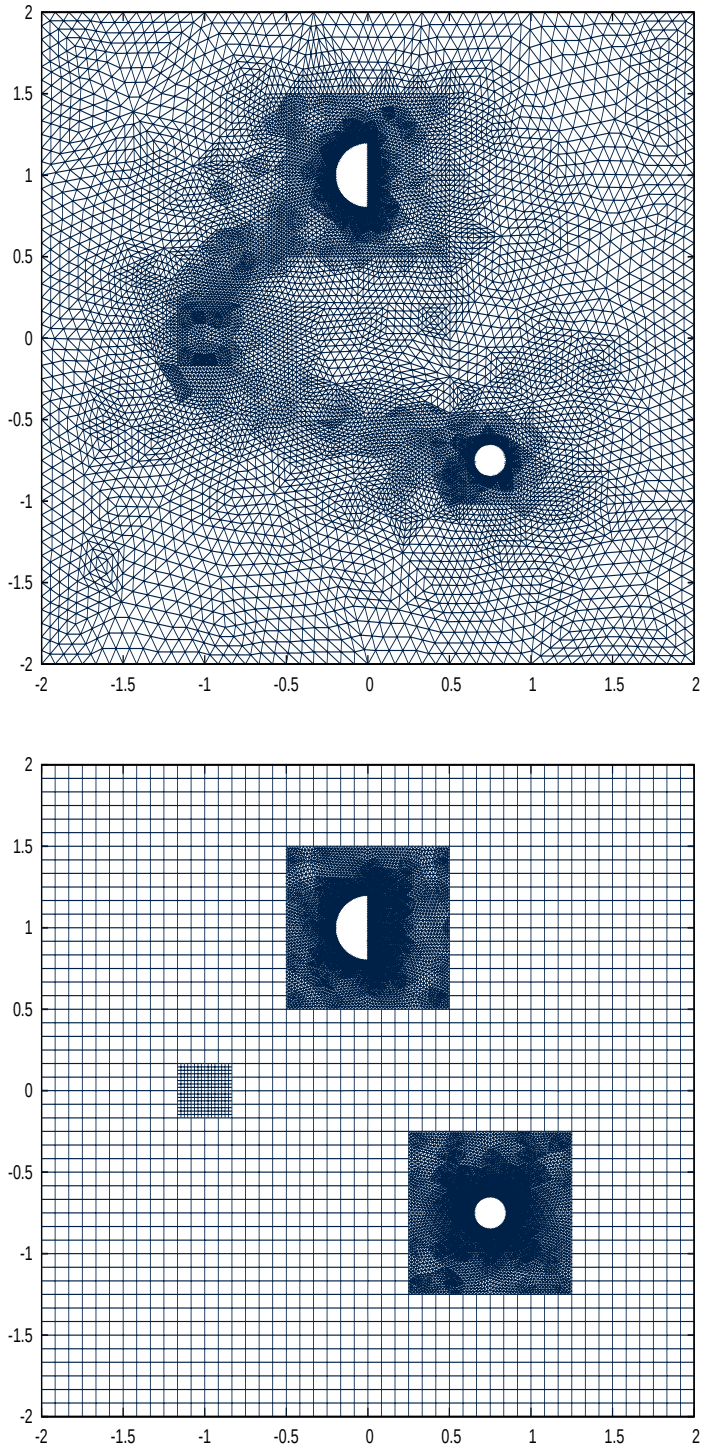


FIG. 4.33 – Maillages d'un domaine comportant deux obstacles métalliques. Haut : triangulaire. – Bas : hybride et non-conforme.

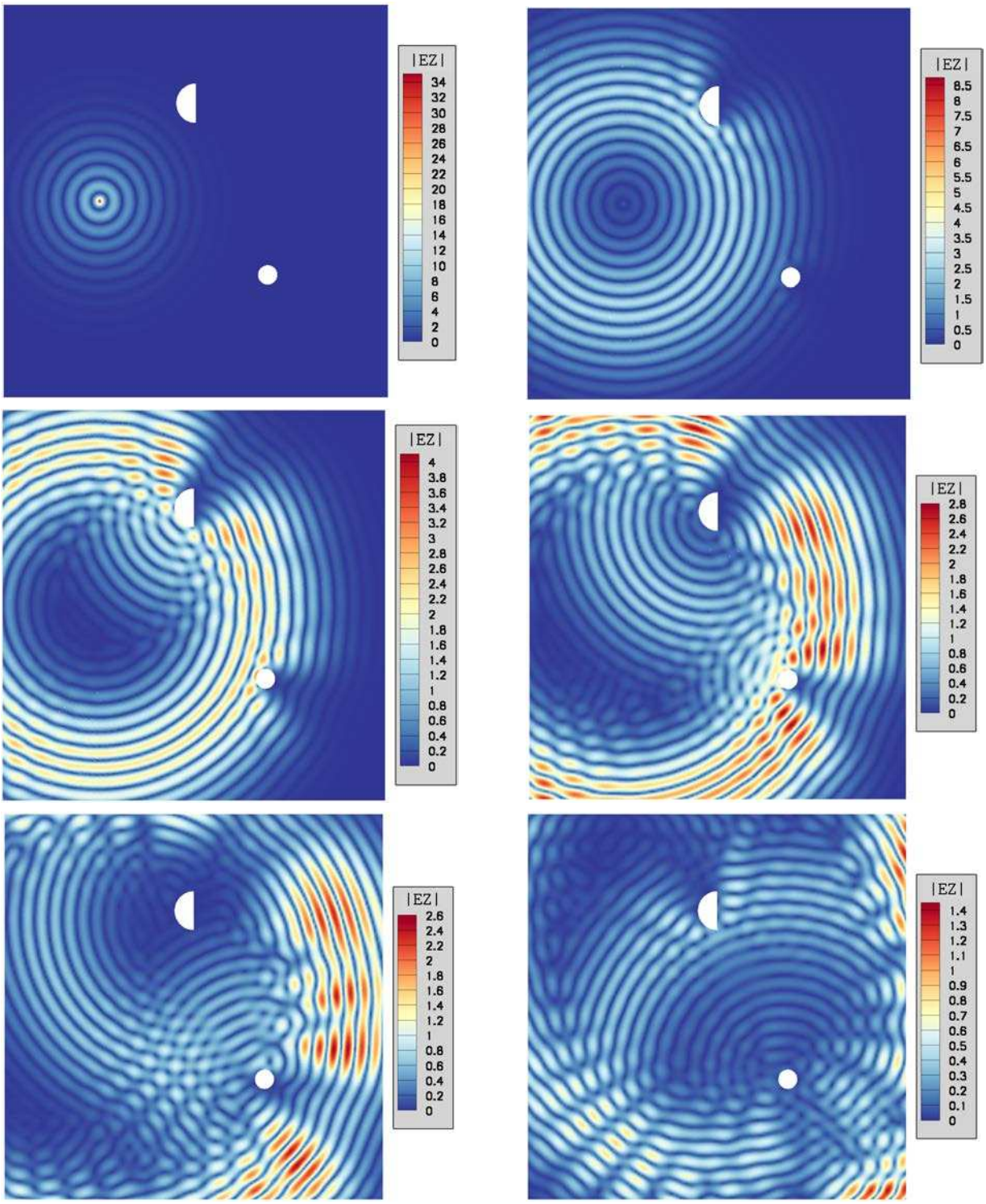


FIG. 4.34 – Lignes de contour de $|E_z|$ (i.e. intensité du champ électrique) pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$; aux temps, respectivement de gauche à droite et de haut en bas : $t = 6.667 \times 10^{-9}$ s, 1×10^{-8} s, 1.167×10^{-8} s, 1.333×10^{-8} s, 1.5×10^{-8} s, 1.833×10^{-8} s (équivalents en mètres : 2 m, 3 m, 3.5 m, 4 m, 4.5 m, 5.5 m).

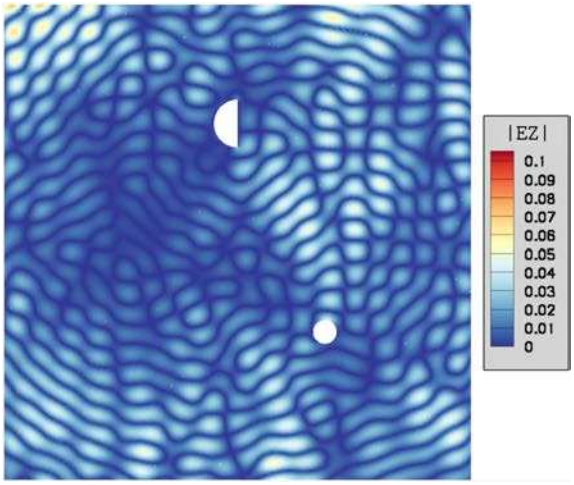


FIG. 4.35 – Lignes de contour de $|E_z|$ pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$, au temps final de la simulation : $t = 2.667 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 8 m).

TAB. 4.10 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et erreur L^∞ relative à GDDT-$\mathbb{P}_4$, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps CPU	# *ddl*	Erreur L^∞ rel.
Triangulaire	GDDT-$\mathbb{P}_4$	2624.4 s	391200	0
Hybride	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$	78.2 s	103536	9.45×10^{-2}
	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$	120.1 s	123840	9.31×10^{-2}
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$	347.9 s	191280	9.69×10^{-3}
	GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$	864.3 s	281200	7.95×10^{-3}

de la simulation ; nous choisissons la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$ sur le maillage hybride pour montrer ces visualisations (cf FIG. 4.34 et FIG. 4.35).

Maintenant, nous montrons (FIG. 4.36), l'évolution en temps de la composante H_x en trois points du domaine de calcul (le premier est dans la partie quadrangulaire du maillage hybride, les deux autres sont situés prêts des obstacles dans la partie triangulaire pour les deux maillages), nous voyons clairement que dans chacun des cas, les courbes sont confondues. Par ailleurs, en regardant les lignes de contour de $|E_z|$ à la moitié du temps physique de simulation (cf FIG. 4.37), nous constatons que celles obtenues avec les méthode hybrides GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$, GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$ et GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$ sont quasiment identiques à celles de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_4$. Les lignes de contour pour l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ sont aussi très similaires, bien que l'observe un faible bruit. Nous constatons que l'erreur L^∞ en ce même temps physique de simulation, est effectivement plus importante pour les méthodes hybrides GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$; ces erreurs restent cependant faibles pour les quatres hybridations. Si l'on compare à présent les temps de calcul, les hybridations GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$, GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$, GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$ sont environ et respectivement 3, 7.5, 22 et 33.5 fois plus rapides que la méthode GDDT-$\mathbb{P}_4$ sur le maillage triangulaire.

Ainsi, les hybridations permettent là aussi d'avoir des temps de calcul considérablement diminués, avec de faibles erreurs relatives et sans changement manifeste de la solution numérique.

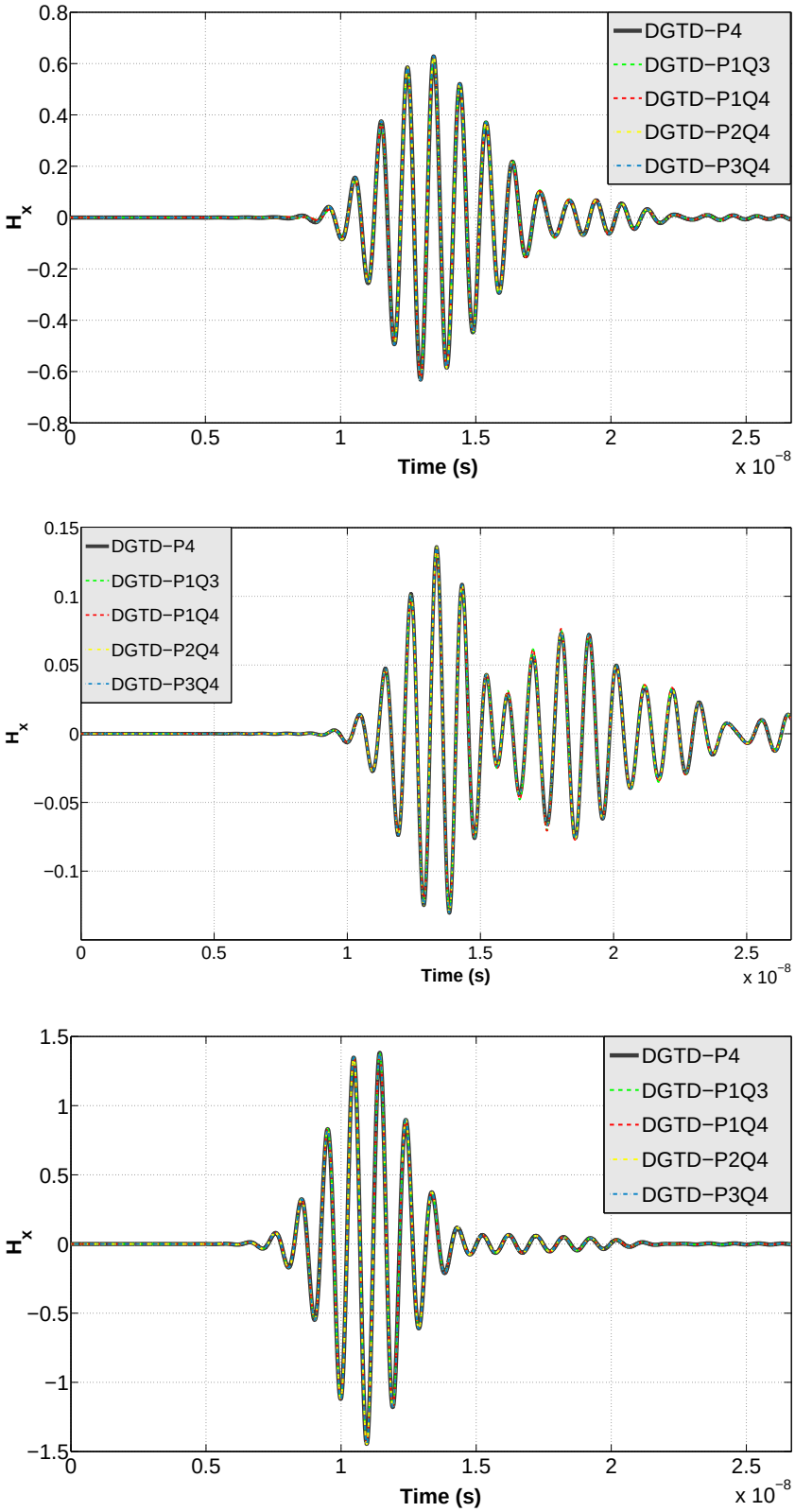
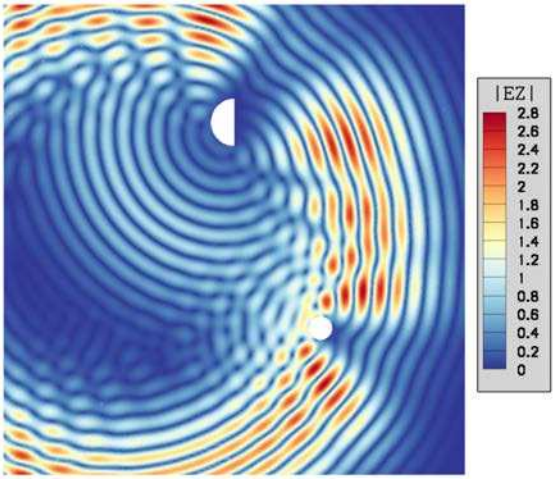
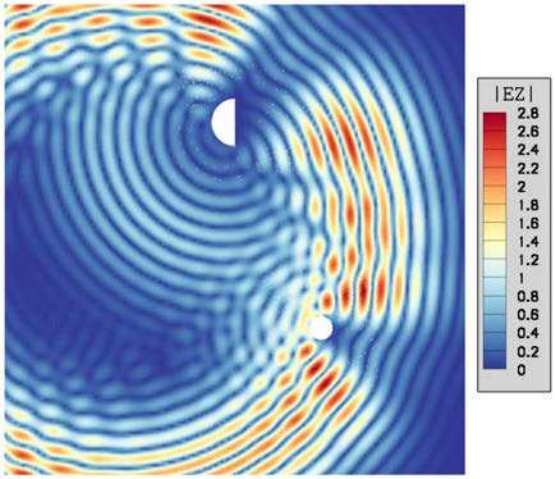


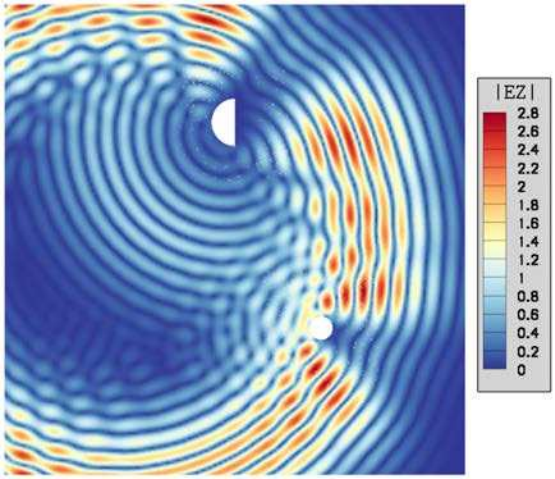
FIG. 4.36 – Evolution en temps de la composante H_x de la solution approchée pour chaque ordre d'interpolation en trois points du domaine de calcul. Haut : $(0.0, 0.0)$. – Milieu : $(1.0, -1.0)$. – Bas : $(-0.2, 1.25)$.



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_4$

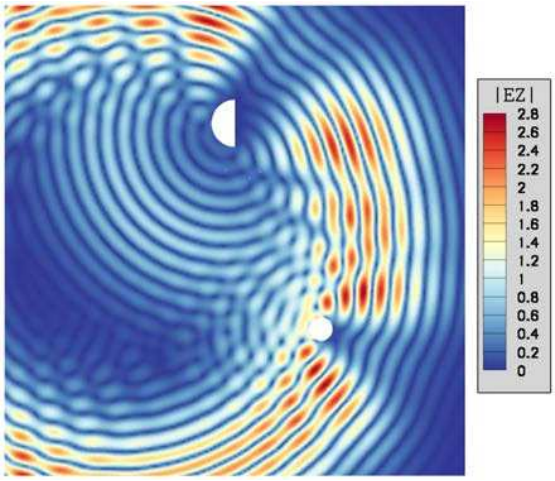


Méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_3$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_4$

Méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$



Méthode GDDT-$\mathbb{P}_3\mathbb{Q}_4$

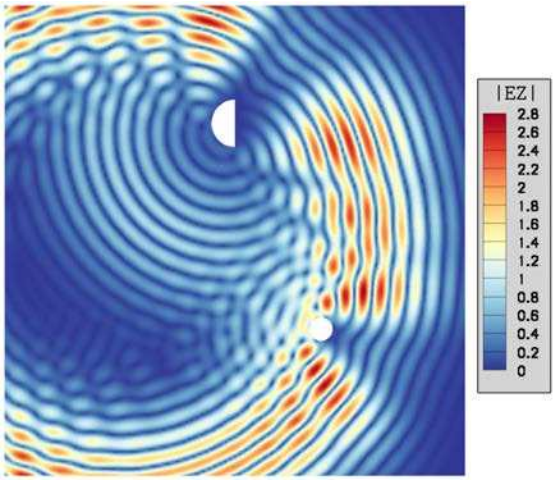


FIG. 4.37 – Lignes de contour de $|E_z|$ pour chaque ordre d'interpolation, au temps $t = 1.333 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 4 m).

CHAPITRE 5

Mise en œuvre 3D de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$

Sommaire

5.1 Précisions mathématiques et algorithmiques **115**
5.1.1 Fonctions de base, degrés de liberté, éléments de référence et application affine 115
5.1.2 Matrices d'interfaces non-conformes, n_{raf}, pas de temps et calcul des flux . . 117
5.2 Description des cas tests considérés **118**
5.2.1 Cas test n°1 : mode $(1,1,1)$ dans une cavité métallique cubique 118
5.2.2 Cas test n°2 : pulse Gaussien 118
5.2.3 Cas test n°3 : onde plane diffractée par une sphère métallique 119
5.2.4 Cas test n°4 : propagation d'une source dans un modèle hétérogène de tête humaine 119
5.3 Test de convergence numérique en h **120**
5.4 Mise en évidence de réflexions parasites **122**
5.5 Tests d'efficacité et de précision de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ **125**
5.5.1 Mode $(1,1,1)$ dans une cavité métallique 125
5.5.2 Diffraction d'une onde plane par un obstacle 127
5.5.3 Propagation d'un terme source dans une tête humaine 132

Nous présentons dans ce chapitre les expériences numériques en trois dimensions d'espace. Nous donnons quelques explications sur l'implémentation de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ visant à la résolution numérique des équations de Maxwell 3D. Nous décrivons ensuite les différents cas tests étudiés dans ce chapitre ; enfin, nous montrons, commentons et discutons les résultats obtenus dans les différents tests réalisés.

5.1 Précisions mathématiques et algorithmiques

5.1.1 Fonctions de base, degrés de liberté, éléments de référence et application affine

Pour l'approximation des composantes du champ électromagnétique dans un élément du maillage, nous utilisons comme en 2D une interpolation de Lagrange classique. Ces fonctions de bases utilisées sont explicitées en détails dans l'annexe A (cf A.2). Le nombre de degrés de liberté par élément est bien sur différent en 3D. Pour un tétraèdre sur lequel on applique l'interpolation $\mathbb{P}_p$, le nombre de degrés de liberté (ou le nombre de fonctions de base, ou encore la dimension de $\mathbb{P}_p$) est égal à : $C_{p+3}^{p} = \dfrac{(p+3)!}{3!\ p!}$. Pour un hexaèdre sur lequel on applique l'interpolation $\mathbb{Q}_k$, le nombre de degrés de liberté est égal à : $(k+1)^3$.

Dans cette mise en œuvre 3D de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, nous utilisons le même principe qu'en 2D (cf sous-section 4.1.2.1) de stockage des matrices élémentaires (matrices de masse, de gradient et matrices sur les faces conformes) sur un élément de référence. Pour la partie tétraédrique du maillage, l'élément de référence est le tétraèdre "rectangle" dont les sommets sont : $\widehat{S1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour la partie hexaédrique du maillage, l'élément de référence est le cube de sommets : $\widehat{S1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\widehat{S5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{S6} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{S7} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{S8} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Toujours en appliquant le même principe que celui adopté dans l'étude numérique 2D, nous définissons une application, à Jacobien constant, qui associe l'élément de référence à un élément du maillage (i.e. à un élément physique). Concernant la partie tétraédrique, l'application qui associe le tétraèdre de référence $\widehat{T}$ à un tétraèdre physique T de sommets $S1 = \begin{pmatrix} S1_1 \\ S1_2 \\ S1_3 \end{pmatrix}$, $S2 = \begin{pmatrix} S2_1 \\ S2_2 \\ S2_3 \end{pmatrix}$, $S3 = \begin{pmatrix} S3_1 \\ S3_2 \\ S3_3 \end{pmatrix}$, $S4 = \begin{pmatrix} S4_1 \\ S4_2 \\ S4_3 \end{pmatrix}$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{F}_{\widehat{T}} & : & \widehat{T} & \longrightarrow & T \\ & & \widehat{\mathbf{x}} & \longmapsto & \mathrm{A}_{\widehat{T}}\,\widehat{\mathbf{x}} + \mathrm{B}_{\widehat{T}} \end{array}$$

avec :

$$\widehat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \\ \widehat{x}_3 \end{pmatrix},\ \mathrm{A}_{\widehat{T}} = \begin{bmatrix} S2_1 - S1_1 & S3_1 - S1_1 & S4_1 - S1_1 \\ S2_2 - S1_2 & S3_2 - S1_2 & S4_2 - S1_2 \\ S2_3 - S1_3 & S3_3 - S1_3 & S4_3 - S1_3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{B}_{\widehat{T}} = \begin{pmatrix} S1_1 \\ S1_2 \\ S1_3 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que cette application s'exprime en fonction des coordonnées des sommets du tétraèdre T et qu'elle est affine (son Jacobien est donc bien constant).

Concernant la partie héxaédrique, le Jacobien de l'application qui associe le cube de référence $\widehat{Q}$ à un héxaèdre physique Q de sommets $S1 = \begin{pmatrix} S1_1 \\ S1_2 \\ S1_3 \end{pmatrix}$, $S2 = \begin{pmatrix} S2_1 \\ S2_2 \\ S2_3 \end{pmatrix}$, $S3 = \begin{pmatrix} S3_1 \\ S3_2 \\ S3_3 \end{pmatrix}$, $S4 = \begin{pmatrix} S4_1 \\ S4_2 \\ S4_3 \end{pmatrix}$, $S5 = \begin{pmatrix} S5_1 \\ S5_2 \\ S5_3 \end{pmatrix}$, $S6 = \begin{pmatrix} S6_1 \\ S6_2 \\ S6_3 \end{pmatrix}$, $S7 \begin{pmatrix} S7_1 \\ S7_2 \\ S7_3 \end{pmatrix}$, $S8 = \begin{pmatrix} S8_1 \\ S8_2 \\ S8_3 \end{pmatrix}$ n'est pas constant dans le cas général.

On impose alors que l'héxaèdre quelconque Q soit un pavé droit (i.e. un parallélépipède rectangle), numéroté de manière à répondre aux égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} S3_1 & = & S2_1 \\ S4_1 & = & S1_1 \\ S5_1 & = & S1_1 \\ S6_1 & = & S2_1 \\ S7_1 & = & S2_1 \\ S8_1 & = & S1_1 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{lcl} S2_2 & = & S1_2 \\ S4_2 & = & S3_2 \\ S5_2 & = & S1_2 \\ S6_2 & = & S1_2 \\ S7_2 & = & S3_2 \\ S8_2 & = & S3_2 \end{array}\right., \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} S2_3 & = & S1_3 \\ S3_3 & = & S1_3 \\ S4_3 & = & S1_3 \\ S6_3 & = & S5_3 \\ S7_3 & = & S5_3 \\ S8_3 & = & S5_3 \end{array}\right..$$

L'application $\mathrm{F}_{\widehat{Q}}$, qui au cube de référence associe un tel parallélépipède rectangle, est alors définie par :

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{F}_{\widehat{Q}} & : & \widehat{Q} & \longrightarrow & Q \\ & & \widehat{\mathbf{x}} & \longmapsto & \mathrm{A}_{\widehat{Q}}\,\widehat{\mathbf{x}} + \mathrm{B}_{\widehat{Q}} \end{array}$$

avec :

$$\mathrm{A}_{\widehat{Q}} = \begin{bmatrix} S2_1 - S1_1 & 0 & 0 \\ 0 & S3_2 - S1_2 & 0 \\ 0 & 0 & S5_3 - S1_3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{B}_{\widehat{Q}} = \begin{pmatrix} S1_1 \\ S1_2 \\ S1_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'application $\mathrm{F}_{\widehat{Q}}$ est là aussi affine et son Jacobien constant.

5.1.2 Matrices d'interfaces non-conformes, n_{raf}, pas de temps et calcul des flux

Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.2, en 3D, la jonction entre des éléments tétraédriques et des éléments hexaédriques est nécessairement non-conforme. De la même manière qu'en 2D, nous calculons numériquement (i.e. sans utiliser la matrice stockée et l'application affine) les matrices de surface associées aux interfaces non-conformes (et hybrides). Ces matrices sont là aussi calculées dans une phase de prétraitement du code de calcul, après lecture du maillage. Compte tenu de la définition d'une interface $a_{ij} = c_i \cap c_j$, et de la condition que nous avons imposé sur les maillages hybrides, à savoir que l'ensemble des faces triangulaires (issues des tétraèdres) coïncide avec la face quadrangulaire de l'hexaèdre voisin, toutes les faces hybrides non-conformes que nous aurons à traiter sont donc triangulaires. Ainsi, nous utilisons des formules de cubature pour les triangles, dont les points et poids de Gauss sont donnés dans l'article [Dunavant 1985]. Nous appliquons alors une méthode similaire que celle décrite en 2D, dans la sous-section 4.1.2.2.

Comme également introduit en section 2.2, le nombre de faces triangulaires pouvant coïncider avec la face quadrangulaire de l'hexaèdre voisin est indicé par un entier noté n_{raf} (cf FIG. 2.3). Nous définissons les valeurs de cet indice de la façon suivante :

- $n_{raf} = 1$: la face quadrangulaire coïncide 2 faces triangulaires,
- $n_{raf} = 2$: la face quadrangulaire coïncide 8 faces triangulaires,
- $n_{raf} = 3$: la face quadrangulaire coïncide 18 faces triangulaires,
- $n_{raf} = 4$: la face quadrangulaire coïncide 32 faces triangulaires.

Concernant l'initialisation et le calcul du pas de temps, nous initialisons pour la 3D également H_x, H_y et H_z à $t = \dfrac{\Delta t}{2}$, et E_x, E_y et E_z à $t = 0$. Le pas de temps est calculé selon le même principe (cf sous-section 4.1.2.3) que celui adopté pour l'étude numérique 2D (notons seulement

que dans les quantités $\mathfrak{G}_\tau$ et $\mathfrak{G}_q$, $|c_i|$ et p_i désignent alors respectivement le volume et la surface de l'élément c_i). Précisons que pour cette étude numérique 3D, nous utilisons uniquement le schéma d'intégration en temps LF2. Enfin, le calcul numérique des flux suit les mêmes étapes que celles présentées en sous-section 4.1.2.4.

5.2 Description des cas tests considérés

5.2.1 Cas test n°1 : mode $(1,1,1)$ dans une cavité métallique cubique

Nous considérons tout d'abord l'évolution d'un mode dans une cavité métallique cubique et unitaire, i.e. le domaine de calcul $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. L'énergie de la solution est ici conservée et ce problème test bénéficie d'une solution exacte (i.e. nous permettant de calculer une erreur), donnée par :

$$\begin{cases} H_x(x_1,x_2,x_3,t) &= -\dfrac{\pi}{\omega}\sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2)\cos(\pi x_3)\sin(\omega t), \\ H_y(x_1,x_2,x_3,t) &= \dfrac{2\pi}{\omega}\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\cos(\pi x_3)\sin(\omega t), \\ H_z(x_1,x_2,x_3,t) &= -\dfrac{\pi}{\omega}\cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2)\sin(\pi x_3)\sin(\omega t), \\ E_x(x_1,x_2,x_3,t) &= -\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3)\cos(\omega t), \\ E_y(x_1,x_2,x_3,t) &= 0, \\ E_z(x_1,x_2,x_3,t) &= \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\cos(\pi x_3)\cos(\omega t). \end{cases}$$

où $\omega = 2\pi f$ désigne la pulsation, et f la fréquence qui est ici égale à $f = 260$ MHz.

5.2.2 Cas test n°2 : pulse Gaussien

Ce deuxième cas test est celui de la propagation d'un pulse Gaussien selon une direction d'espace, plus précisément dans la direction des x_1 décroissants. Le domaine de calcul est parallélépipédique : $\Omega = [0,2] \times [0,1] \times [0,1]$. Ici, nous nous intéressons uniquement à la composante H_y du champ électromagnétique (et seuls H_y et E_z sont non nuls), dont l'expression analytique (i.e. la solution exacte) est :

$$H_y(x_1,x_2,x_3,t) = g(x_1,t),$$

où :

$$g(x_1,t) = e^{-\beta\left(x_1 - x_1^{cg} + c_0 t\right)^2},$$

avec $\beta = 20$, c_0 la vitesse de la lumière dans le vide et $x_1^{cg} = 1.5$. Cette fonction Gaussienne est centrée en $x_1 = x_1^{cg} = 1.5$ au temps initial ($t = 0$) et sera centrée en $x_1 = 0.5$ au temps final ($t = \frac{1}{c_0}$).

5.2.3 Cas test n°3 : onde plane diffractée par une sphère métallique

Nous prÃl'sentons maintenant le problème test de la diffraction d'une onde plane par une sphére métallique de rayon $R = 1$ m. Le domaine de calcul est délimité par un cube $\Omega = [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$, sur lequel on impose la condition absorbante de Silver-Müller. Nous avons ici un champ incident, donné par :

$$\begin{cases} H_{x,\text{inc}}(x_1, x_2, x_3, t) &= \cos(\omega t - \kappa x_3), \\ H_{y,\text{inc}}(x_1, x_2, x_3, t) &= 0, \\ H_{z,\text{inc}}(x_1, x_2, x_3, t) &= 0, \\ E_{x,\text{inc}}(x_1, x_2, x_3, t) &= 0, \\ E_{y,\text{inc}}(x_1, x_2, x_3, t) &= -\dfrac{\kappa}{\omega} \cos(\omega t - \kappa x_3), \\ E_{z,\text{inc}}(x_1, x_2, x_3, t) &= 0, \end{cases}$$

où le vecteur d'onde $\mathbf{k} = (0, 0, \kappa)^{\mathrm{T}}$ avec $\kappa = \omega / c_0$ (c_0 la vitesse de la lumière dans le vide et $\omega = 2\pi f$). La fréquence est égale à $f = 300$ MHz et nous ne fournissons pas de solution exacte pour ce problème.

5.2.4 Cas test n°4 : propagation d'une source dans un modèle hétérogène de tête humaine

Dans ce dernier cas test, nous simulons la propagation d'une onde électromagnétique, émise par une source, au travers d'une tête humaine modélisée de manière réaliste. Ce problème test a pour particularité de simuler un scénario de propagation dans un milieu présentant plusieurs hétérogénéités. À partir d'images médicales tirées du projet *Visible Human 2.0* [Ratiu *et al.* 2003], les tissus de la tête sont séparés en quatre milieux différents : la peau, le crâne, le liquide cérébro-spinal (ou liquide céphalo-rachidien) et le cerveau. À l'extérieur de la tête, le milieu considéré est l'air (ou le vide). Nous résumons les caractéristiques électromagnétiques de ces cinq milieux physiques dans le tableau TAB. 5.1.

TAB. 5.1 – Caractéristiques électromagnétiques des milieux considérés.

Milieu de propagation	ε_r	σ
Air (ou vide)	1.00	0
Peau	43.85	1.23
Crâne	15.56	0.43
Liquide cérébro-spinal	67.20	2.92
Cerveau	43.55	1.15

L'onde électromagnétique est donc ici émise par un terme source de type dipole, localisé près de l'oreille droite de la tête. Ce terme source, imposé à l'équation pour la composante E_z, est défini par :

$$j_{\mathbf{s}}^{z}(\mathbf{x},t) = z_0\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\mathrm{cs}})\;\mathfrak{f}(t),$$

où z_0 est l'impédance du vide, δ est la distribution de Dirac en 0, $\mathbf{x}^{\mathrm{cs}}$ est le centre de la source et le signal temporel $\mathfrak{f}(t)$ est une fonction sinusoïdale.

Enfin, pour ce cas test, le domaine entier Ω_{t}, maillé entièrement par des tétraèdres, est délimité par une sphére de rayon $R = 0.3$ m. En revanche, le domaine délimitant le maillage hybride non-conforme est plus volumineux, et cubique : $\Omega_{\mathrm{h}} = [-0.3, 0.3] \times [-0.3, 0.3] \times [-0.3, 0.3]$. Aux bords de ces deux domaines, nous imposons la condition absorbante de Silver-Müller ; la fréquence est ici réglée à $f = 1.8$ GHz et bien sûr, nous ne disposons pas de solution analytique pour ce problème.

5.3 Test de convergence numérique en h

Nous étudions dans cette section la convergence numérique en h de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, mais aussi des méthodes GDDT-$\mathbb{P}_p$ et GDDT-$\mathbb{Q}_k$, pour le schéma saute-mouton d'ordre 2 (LF2). Nous travaillons sur le cas du mode propre dans la cavité métallique cubique (cas test n°1, sous-section 5.2.1). Le temps physique de simulation est ici de 6.67×10^{-8} s (équivalent en mètres : 20 m).

Nous réalisons des tests sur quatre maillages tétraédriques (pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$), quatre maillages hexaédriques (pour la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_k$) et sur quatre maillages hybrides et non-conformes (pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$) en prenant $n_{raf} = 1$, basés respectivement sur $5 \times 5 \times 5$, $9 \times 9 \times 9$, $17 \times 17 \times 17$ et $33 \times 33 \times 33$ points (exemple sur la figure FIG. 4.11).

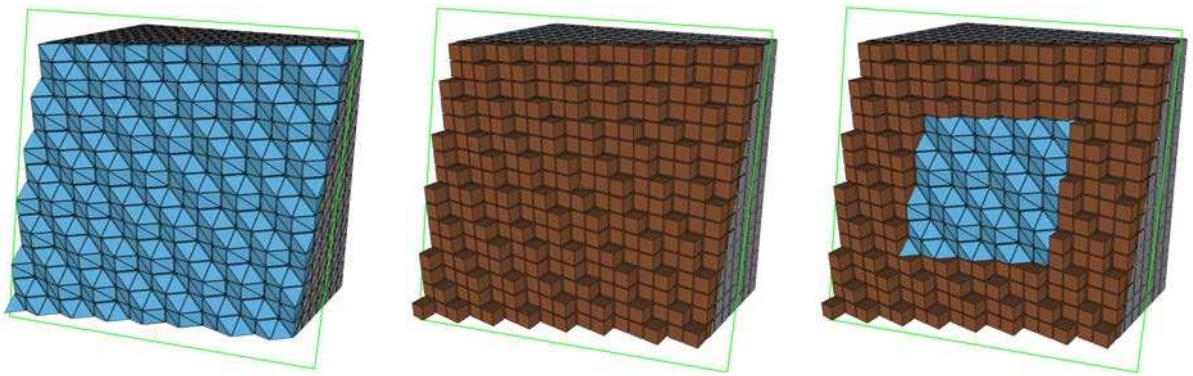


FIG. 5.1 – Coupe transversale de maillages volumiques, utilisés pour l'étude de convergence et basés sur une discrétisation $17 \times 17 \times 17$ points (les autres maillages basés sur $5 \times 5 \times 5$, $9 \times 9 \times 9$ et $33 \times 33 \times 33$ points, ont le même aspect). Gauche : tétraédrique. – Milieu : hexaédrique. – Droite : hybride et non-conforme ($n_{raf} = 1$).

Nous montrons la convergence en h de certaines hybridations (dont des combinaisons avec l'ordre 0) et vérifions que nous trouvons des ordres de convergence conformes au résultat théorique (3.46). Pour chaque résolution, et pour chaque ordre d'interpolation, on mesure le maximum au cours du temps de la norme L^2 de l'erreur en fonction de $1/h$, avec h correspondant à

sa définition en sous-section 3.2.1 ; nous calculons ensuite les pentes (en échelle *loglog*) correspondantes et nous reportons ces résultats sur les figures FIG. 5.2 et FIG. 5.3. Compte tenu de la régularité de la solution exacte pour ce cas test, du résultat de l'étude de convergence théorique (3.46), du schéma LF2 utilisé et de l'échelle *loglog* choisie, la valeur de la pente (correspondant à l'ordre de convergence) attendue pour une hybridation GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ est ici égale à : $\min\{2, p, k\}$, et pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ (resp. méthode GDDT-$\mathbb{Q}_k$) égale à : $\min\{2, p\}$ (resp. $\min\{2, k\}$).

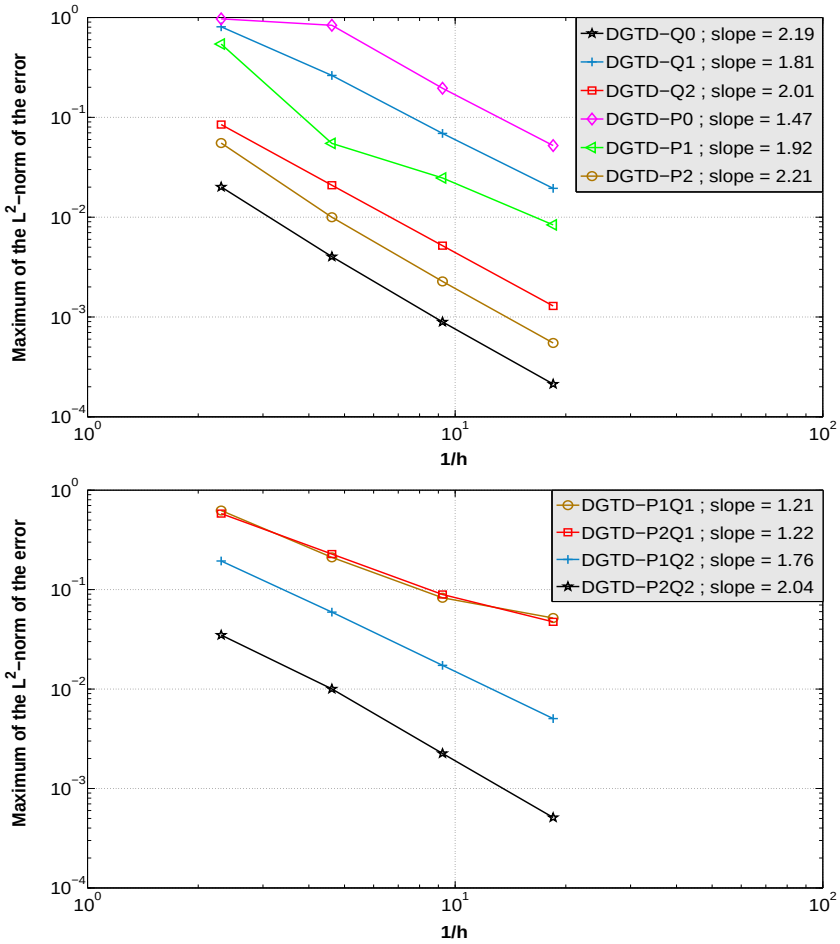


FIG. 5.2 – Maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale en fonction de $1/h$, et pentes correspondantes. Haut : méthodes DGTD-$\mathbb{P}_p$ et DGTD-$\mathbb{Q}_k$. – Bas : méthode DGTD-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$.

Nous observons sur la figure FIG. 5.2 que l'on obtient les valeurs de pentes escomptées. Pour les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_2$, GDDT-$\mathbb{Q}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$, les pentes sont bien proches de 2. Pour les hybridations GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_1$, GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_1$ et GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$, les valeurs des pentes obtenues sont plus grandes (i.e. meilleures) que celles attendues (i.e. 1). Concernant les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_1$ et GDDT-$\mathbb{Q}_1$, les valeurs des pentes sont là aussi bien meilleures que celles estimées (i.e. 1), et nous constatons de plus une super convergence pour le schéma GDDT-$\mathbb{P}_0$. Enfin, nous observons une super convergence et une réduction d'erreur pour la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_0$ (sur le maillage hexaédrique cartésien).

Maintenant, nous analysons les résultats obtenus pour les différentes hybridations faisant inter-

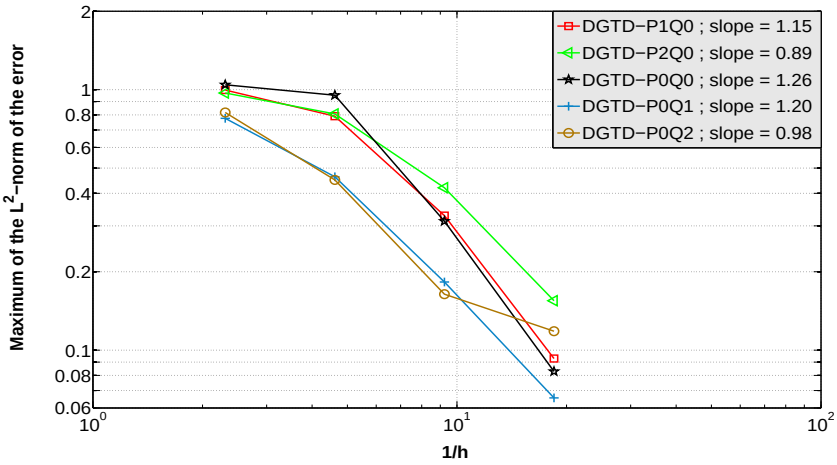


FIG. 5.3 – Maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale en fonction de $1/h$ et pentes correspondantes, pour des hybridations DGTD-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ (échelle ici différente de celles en FIG. 5.2) faisant intervenir l'ordre 0.

venir l'ordre 0 (i.e. méthode Volumes Finis). Nous remarquons que ces méthodes convergent, avec un ordre plus élevé que celui prévu théoriquement (i.e. 0). Nous voyons en revanche, que malgré le caractère structuré des maillages utilisés et contrairement aux autres hybridations, nous obtenons des pentes irrégulières et des niveaux d'erreurs élevés.

En conclusion, la convergence numérique en h est ainsi acquise dans chacun des cas, avec des ordres de convergence en accord avec les résultats théoriques. Il est également mis en évidence que pour le cas des méthodes hybrides, le couplage avec l'ordre 0 ne donne pas des résultats convenables.

5.4 Mise en évidence de réflexions parasites

Nous utilisons ici le cas test de la propagation d'un pulse Gaussien selon une dimension (cas test n°2, sous-section 5.2.2), le temps physique de simulation est égal à 3.33×10^{-9} s (équivalent en mètres : 1 m).

Nous considérons deux discrétisations du domaine de calcul : une basée sur $17 \times 9 \times 9$ points et une basée sur $65 \times 33 \times 33$ points. Pour chacune de ces deux discrétisations, nous construisons quatre maillages : un maillage tétraédrique, un maillage hexaédrique et deux types de maillages hybrides (en prenant $n_{raf} = 1$) où le domaine de calcul est séparé en deux parties par le plan $x_1 = 1$ (sur lequel sont disposées les interfaces hybrides non-conformes), dans le premier type les tétraèdres sont situés sur la partie $x_1 \geq 1$ du domaine et les hexaèdres sur la partie $x_1 \leq 1$, le deuxième type répartit les tétraèdres sur la partie $x_1 \leq 1$ du domaine et les hexaèdres sur la partie $x_1 \geq 1$ (FIG. 5.4).

Nous cherchons dans ce test à observer si des réflexions parasites apparaîssent lors du passage du pulse Gaussien à travers les interfaces hybrides et non-conformes, comme il a pu être étudié pour le passage d'interfaces non-conformes dans [Canouet 2003] ou aussi pour la méthode

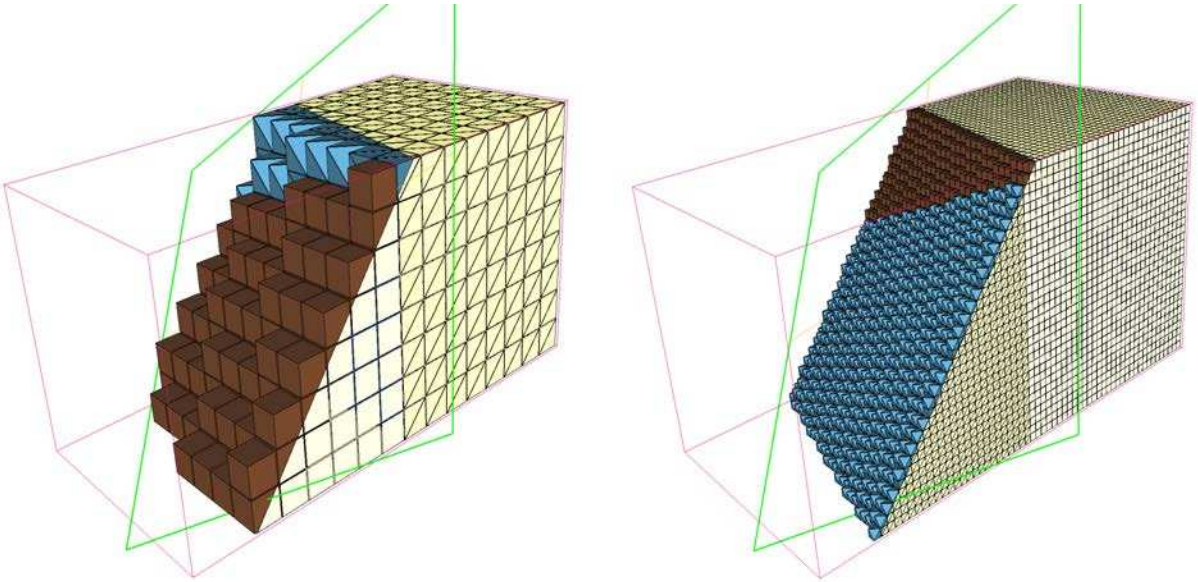


FIG. 5.4 – Coupe transversale de maillages volumiques, hybrides et non-conforme ($n_{raf} = 1$), et boîte délimitant le domaine de calcul. Gauche : basé sur $17 \times 9 \times 9$ points, partie tétraédrique pour $x_1 \geq 1$ et partie hexaédrique pour $x_1 \leq 1$.– Droite : basé sur $65 \times 33 \times 33$ points, partie tétraédrique pour $x_1 \leq 1$ et partie hexaédrique pour $x_1 \geq 1$.

hybride GDDT / DFDT lors du passage d'un schéma à l'autre (pour l'équation des ondes) dans [Léger 2011]. Nous expérimentons plusieurs ordres d'interpolation pour chacun des maillages, et comparons les résultats obtenus sur les maillages tétraédriques, hexaédriques et hybrides non-conformes, en traçant sur la figure FIG. 5.5 la coupe 1D de la composante H_y des solutions exacte et approchées. Avec les deux types de maillages hybrides considérés, le pulse Gaussien peut se déplacer de la partie tétraédrique (sur laquelle est appliquée l'interpolation $\mathbb{P}_p$) vers la partie hexaédrique (sur laquelle est appliquée l'interpolation $\mathbb{Q}_k$), ou inversement.

Nous remarquons (FIG. 5.5) que lorsque l'ordre 1 est appliqué sur tout le domaine, le cas $\mathbb{P}_1$ vers $\mathbb{Q}_1$ (des tétraèdres vers les hexaèdres) présente le plus de réflexions parasites (que ce soit pour la discrétisation $17 \times 9 \times 9$ ou pour la discrétisation $65 \times 33 \times 33$). Les cas $\mathbb{P}_1$ (en maillages tout tétraédriques), $\mathbb{Q}_1$ (en maillages tout hexaédriques) ou $\mathbb{Q}_1$ vers $\mathbb{P}_1$ (des hexaèdres vers les tétraèdres) se comportent approximativement de la même manière et coïncident quasiment avec la solution exacte pour la discrétisation $65 \times 33 \times 33$. Lorsque l'ordre 2 est appliqué sur tout le domaine, pour la discrétisation $17 \times 9 \times 9$, c'est là aussi le cas $\mathbb{P}_2$ vers $\mathbb{Q}_2$ (des tétraèdres vers les hexaèdres) qui présente le plus de réflexions parasites. Les cas $\mathbb{P}_2$ (maillage tout tétraédrique), $\mathbb{Q}_2$ (maillage tout hexaédrique) ou $\mathbb{Q}_2$ vers $\mathbb{P}_2$ (des hexaèdres vers les tétraèdres) se comportent approximativement de la même manière en présentant peu de réflexions parasites (pour la discrétisation $17 \times 9 \times 9$). En revanche, pour la discrétisation $65 \times 33 \times 33$, dans ces quatre cas ($\mathbb{P}_2$, $\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{P}_2$ vers $\mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{Q}_2$ vers $\mathbb{P}_2$) la solution approchée est confondue avec la solution exacte. Enfin, dans les cas $\mathbb{P}_1$ vers $\mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{P}_2$ vers $\mathbb{Q}_1$ pour la discrétisation $17 \times 9 \times 9$, nous ne voyons pas de différence majeure avec les cas $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_1$ vers $\mathbb{P}_1$, et les réflexions parasites sont plus importantes que celles observées avec l'ordre 2. Sur le maillage de $65 \times 33 \times 33$ points, le cas $\mathbb{P}_1$ vers $\mathbb{Q}_2$ présente de petites réflexions parasites, contrairement au cas $\mathbb{P}_2$ vers $\mathbb{Q}_1$ qui coïncide bien avec

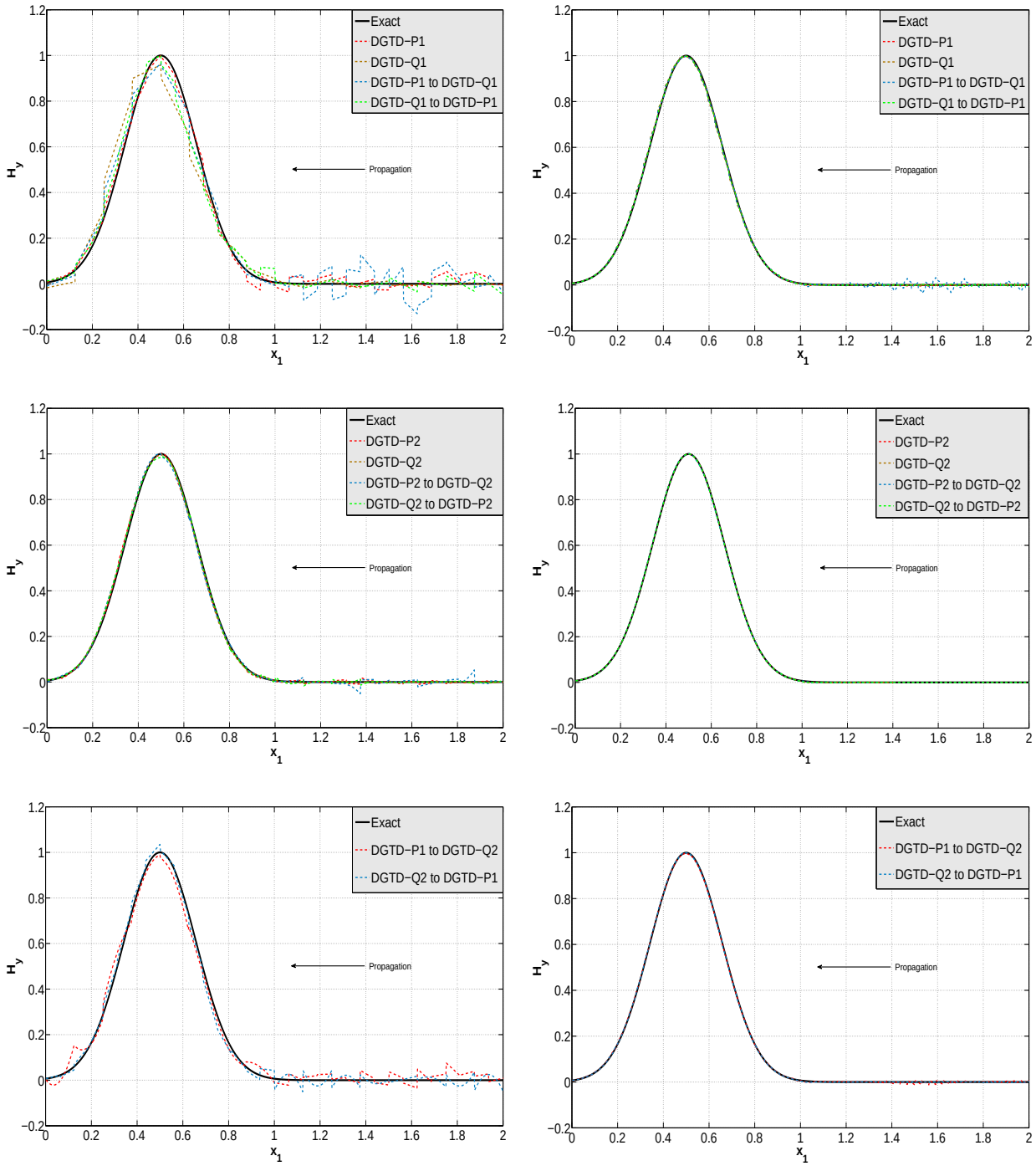


FIG. 5.5 – Coupe 1D selon x_1 (x_2 et x_3 fixés en 0.5) de la composante H_y des solutions exacte et approchées, au temps final de la simulation : $t = 3.33 \times 10^{-9}$ s (équivalent en mètres : 1 m), pour chaque maillage et chaque ordre d'interpolation. Gauche : tests sur les maillages basés de $17 \times 9 \times 9$ points. – Droite : tests sur les maillages de $65 \times 33 \times 33$ points.

la solution exacte.

Ainsi, lorsque le pulse Gaussien traverse les interfaces non-conformes en passant des hexaèdres aux tétraèdres, il semble ici que ce passage ne génère pas davantage de réflexions parasites (ou très peu) par rapport à une propagation en maillages tout tétraédriques ou tout hexaédriques. En revanche, le passage des tétraèdres aux hexaèdres crée des réflexions parasites supplémentaires pour des ordres d'interpolation et des raffinements de maillages peu élevés. Cependant, nous montrons de plus que pour des ordres d'interpolation et des raffinements de maillages suffisament élevés, ces réflexions parasites disparaîssent (dans les cas hybrides également) et la solution approchée coïncide avec la solution exacte.

5.5 Tests d'efficacité et de précision de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$

5.5.1 Mode $(1,1,1)$ dans une cavité métallique

Nous revenons ici sur le cas test n°1 (sous-section 4.2.1, avec un temps (physique) de simulation de 6.67×10^{-8} s (équivalent en mètres : 20 m).

Nous travaillons sur deux maillages (FIG. 5.6). Le premier maillage est tétraédrique composé de 196608 éléments, avec une arête minimale de longueur 3.125×10^{-2} m. Le second maillage est un maillage hybride non-conforme, tel que $n_{raf} = 4$, composé de 24576 tétraèdres et de 448 hexaèdres (i.e. 25024 éléments), avec une arête minimale là aussi de longueur 3.125×10^{-2} m, et comportant 3072 interfaces hybrides et non-conformes (on peut voir sur la figure FIG. 5.6 que les interfaces hybrides correspondent aux interfaces non-conformes).

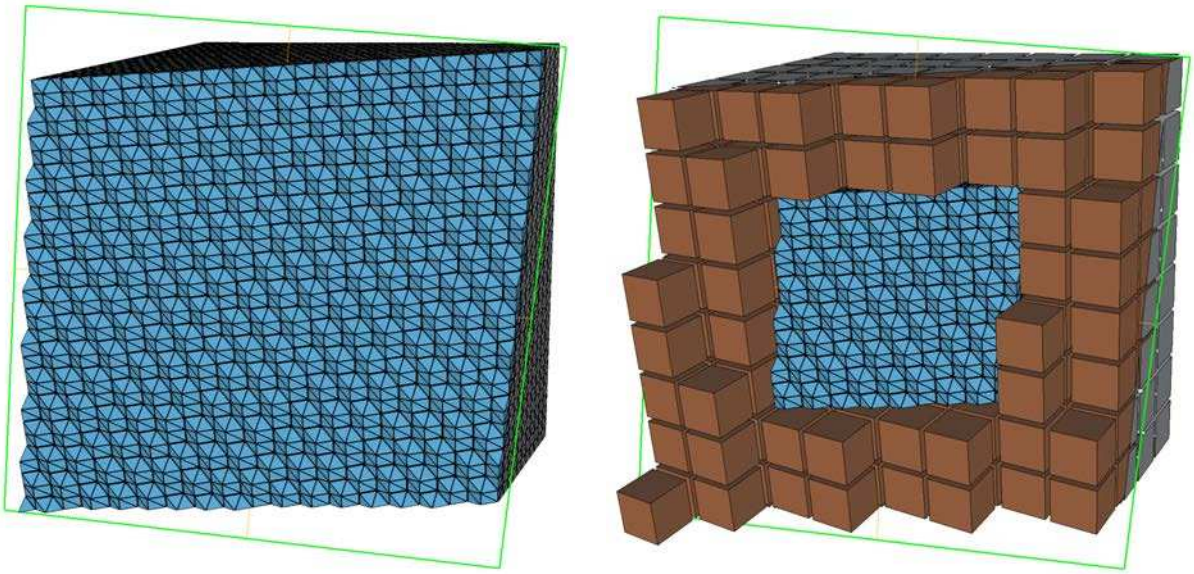


FIG. 5.6 – Coupe transversale de maillages volumiques. Gauche : tétraédrique. – Droite : hybride et non-conforme ($n_{raf} = 4$).

Nous testons alors plusieurs ordres d'interpolation pour les deux maillages et nous résumons les résultats dans le tableau TAB. 5.2. Nous montrons de plus sur la figure FIG. 5.7 l'évolution tempo-

relle de l'erreur L^2 et vérifions que celle-ci croît progressivement au cours du temps. Nous faisons alors des comparaisons entre les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_p$ et GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en se fixant la contrainte de comparer conjointement les deux critères suivants : le temps de calcul, le maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale (cf TAB. 5.3).

TAB. 5.2 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps de calcul	# *ddl*	Erreur L^2 max
Tétraédrique	GDDT-$\mathbb{P}_1$	26 min et 9 s	786432	8.37×10^{-3}
	GDDT-$\mathbb{P}_2$	150 min et 56 s	1966080	5.50×10^{-4}
Hybride	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_1$	3 min et 33 s	101888	2.19×10^{-1}
	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	4 min et 37 s	110400	4.23×10^{-3}
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_1$	20 min et 23 s	249344	2.30×10^{-1}
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$	22 min et 55 s	257856	1.92×10^{-3}

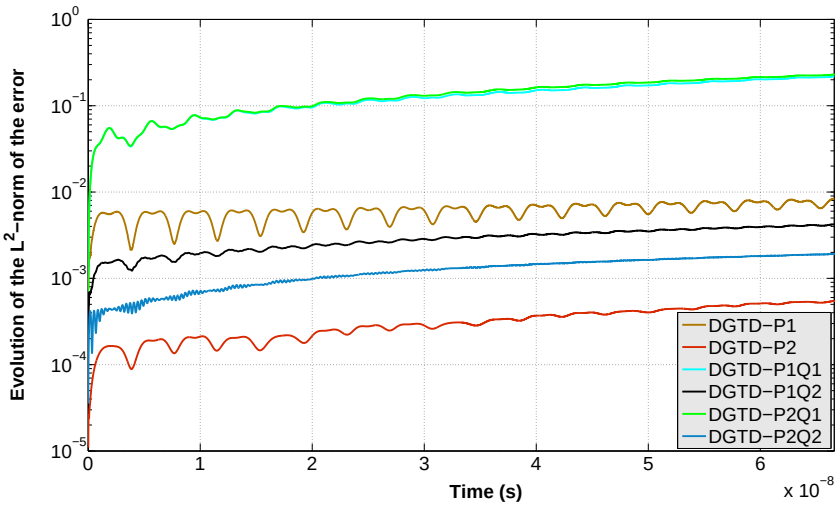


FIG. 5.7 – Evolution en temps de la norme L^2 de l'erreur globale, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Nous pouvons tout d'abord constater que les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_1$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_1$ ne donnent pas des erreurs convenables, ce qui est dû au fait que l'interpolation $\mathbb{Q}_1$ n'est pas suffisante sur des hexaèdres de taille si importante. En opposant la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1$ à l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$, on obtient une erreur 2 fois plus faible avec la méthode hybride pour un temps CPU diminué d'un facteur 5.66. Toujours comparée à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1$, l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ donne une erreur L^2 plus faible d'un facteur 4.36 pour un temps de calcul proche. La méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$ donne l'erreur L^2 la plus petite, mais nous obtenons tout de même de meilleurs compromis entre la précision et le temps de calcul avec les méthodes hybrides GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. En effet, l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ (resp. GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$) est moins précise par un facteur

TAB. 5.3 – Différentes comparaisons entre méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ et méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$: rapport des temps de calcul et rapport des maximums (en temps) de l'erreur L^2 globale.

Comparaison		$\frac{\text{Temps CPU}_{(a)}}{\text{Temps CPU}_{(b)}}$	$\frac{\text{Erreur } L^2 \max_{(a)}}{\text{Erreur } L^2 \max_{(b)}}$
Méthode (a)	Méthode (b)		
GDDT-$\mathbb{P}_1$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	5.66	1.98
GDDT-$\mathbb{P}_1$	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$	1.14	4.36
GDDT-$\mathbb{P}_2$	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	32.69	0.13
GDDT-$\mathbb{P}_2$	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$	6.59	0.29

d'environ 7.5 (resp. d'environ 3.5) mais est plus efficace par un facteur d'environ d'environ 33 (resp. d'environ 6.5).

Ainsi, pour ce cas test, les hybridations considérées présentent de très avantageux compromis entre temps de calcul et précision.

5.5.2 Diffraction d'une onde plane par un obstacle

Nous travaillons sur le cas test n°3 (décrit en sous-section 5.2.3). Nous faisons des simulations pour un temps physique de simulation de $t = 3.33 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 10 m). Nous pouvons voir les deux maillages utilisés sur la figure FIG. 5.8. Le maillage tétraédrique est composé de 873483 tétraèdres, et la longueur de l'arête minimale est de 2.90×10^{-2} m. Le maillage hybride non-conforme est composé de 247363 tétraèdres et de 35208 hexaèdres (i.e. 282571 éléments), ayant une arête minimale de longueur égale à 2.67×10^{-2} m et comportant 12288 faces hybrides et non-conformes ($n_{raf} = 2$, les faces hybrides correspondent aux faces non-conformes).

Comme nous n'utilisons pas de solution exacte dans ce problème test, nous regardons les solutions approchées (sous différents aspects) et comparons les temps de calcul obtenus. Nous appliquons la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$ sur le maillage tétraédrique et les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$ sur le maillage hybride, les résultats sont reportés dans le tableau TAB. 5.4. Nous traçons pour chacun des cas l'évolution en temps des composantes H_x et E_y en trois points du domaine de calcul (FIG. 5.9), le premier étant situé près de la sphère dans la partie tétraédrique pour les deux maillages, les deux autres dans la partie hexaédrique pour le maillage hybride. De plus, nous représentons les lignes de contour (pour chaque ordre d'interpolation testé) des composantes H_x, H_z et E_z (FIG. 5.10, FIG. 5.11 et FIG. 5.12) au temps final de la simulation.

Nous voyons sur la figure FIG. 5.9 que pour le premier point de visualisation, la courbe obtenue avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$ présente des irrégularités contrairement à celles obtenues avec les méthodes hybrides GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$ (qui coïncident entre elles), ce qui laisse penser que les solutions obtenues avec ces hybridations en ce point sont meilleures. Pour les deux autres points de visualisation, les courbes sont confondues pour les trois ordres d'interpolation. Nous constatons également que les lignes de contour (FIG. 5.10, FIG. 5.11 et FIG. 5.12) des trois composantes présentées ont le même aspect pour chaque ordre d'interpolation. Ainsi, pour des solutions quasi-identiques (et davantage régulières pour les hybridations au premier point de

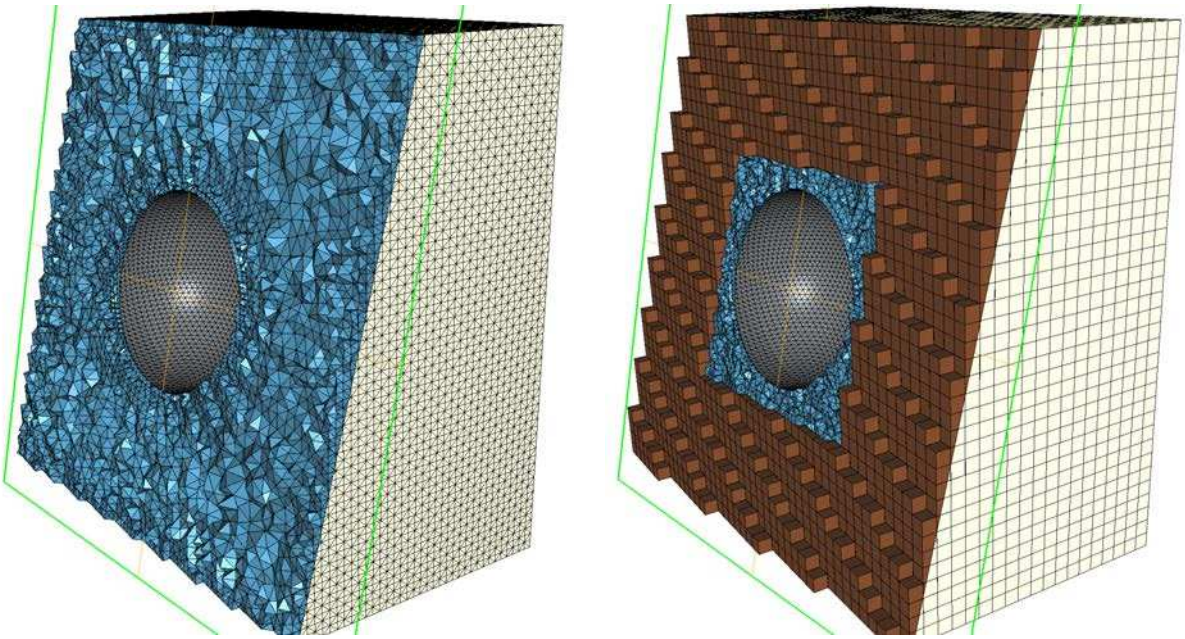


FIG. 5.8 – Coupe transversale de maillages volumiques. Gauche : tétraédrique. – Droite : hybride et non-conforme ($n_{raf} = 2$).

TAB. 5.4 – Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et pas de temps global (en picosecondes), pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps CPU	# *ddl*	Δt
Tétraédrique	GDDT-$\mathbb{P}_2$	8 h et 7 min	8734830	10.81 ps
Hybride	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	1 h et 20 min	1940068	12.89 ps
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$	4 h et 19 min	3424246	7.73 ps

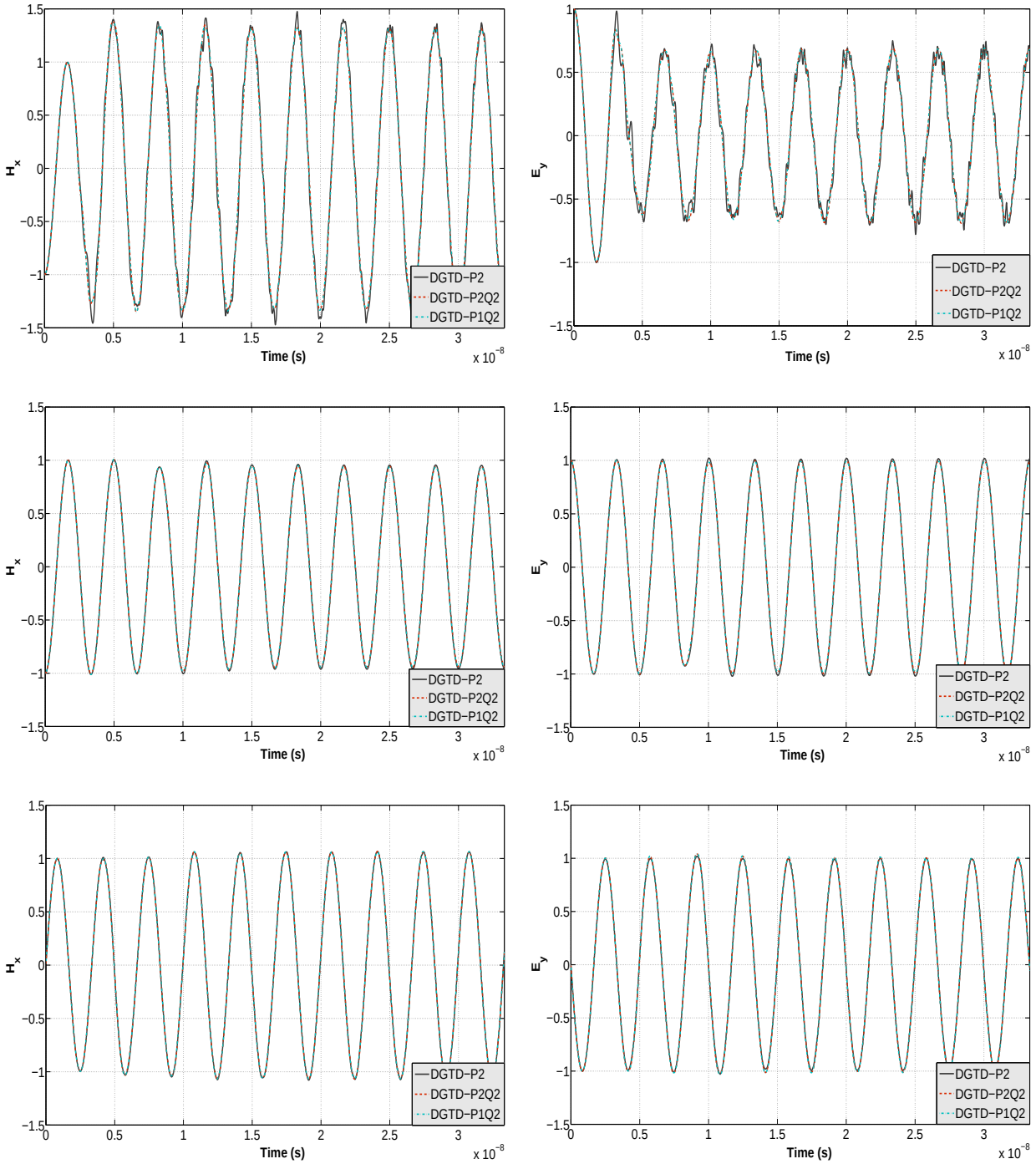


FIG. 5.9 – Evolution en temps des composante H_x (gauche) et E_y (droite) de la solution approchée pour chaque ordre d'interpolation en trois points du domaine de calcul. Haut : $(0.0, 1.1, 0.0)$. – Milieu : $(2.0, 2.0, 2.0)$. – Bas : $(0.0, 1.75, -1.75)$.

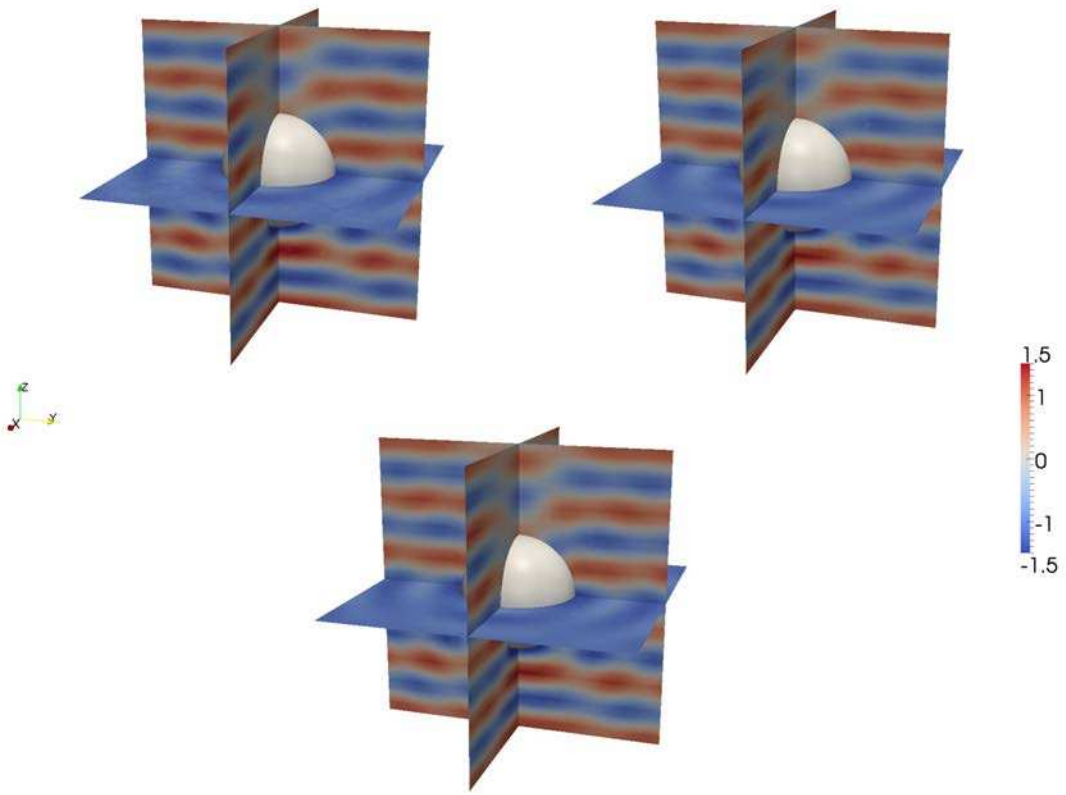


FIG. 5.10 – Lignes de contour de la composante H_x de la solution approchée (pour chaque ordre au temps final de la simulation : $t = 3.33 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 10 m). En-haut à gauche : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$. – En-haut à droite : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. – Bas : méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$.

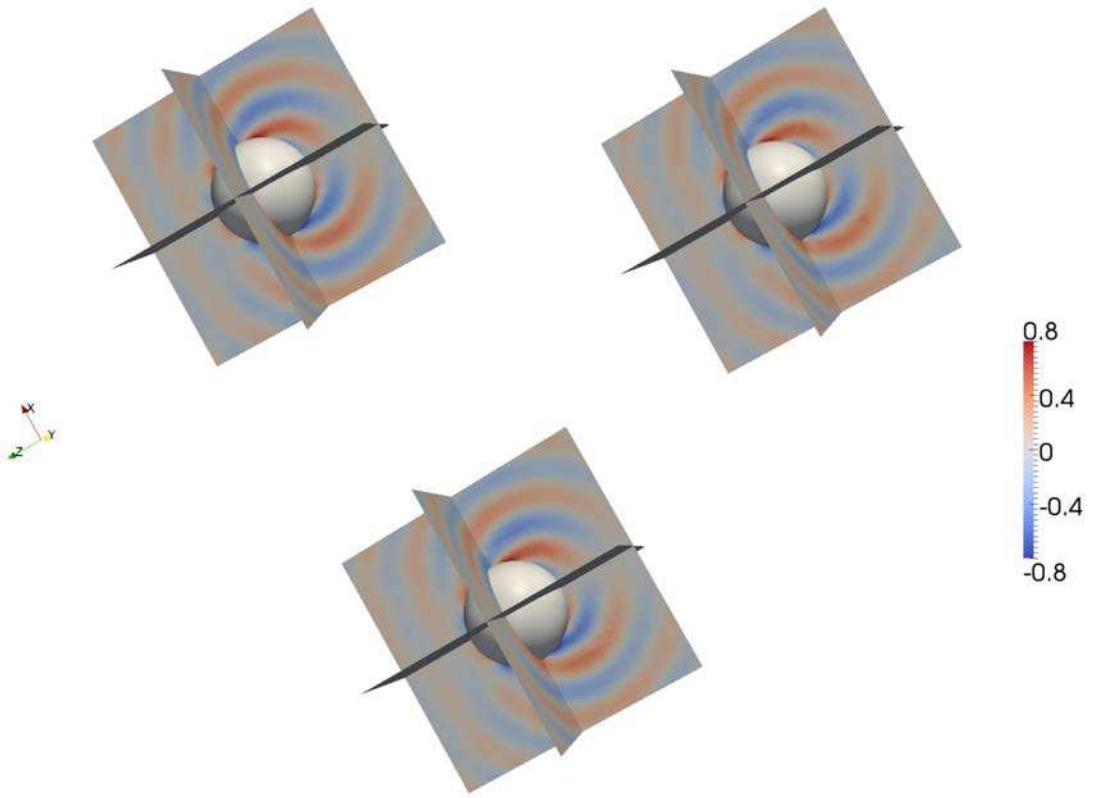


FIG. 5.11 – Lignes de contour de la composante H_z de la solution approchée (pour chaque ordre au temps final de la simulation : $t = 3.33 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 10 m). En-haut à gauche : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$. – En-haut à droite : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. – Bas : méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$.

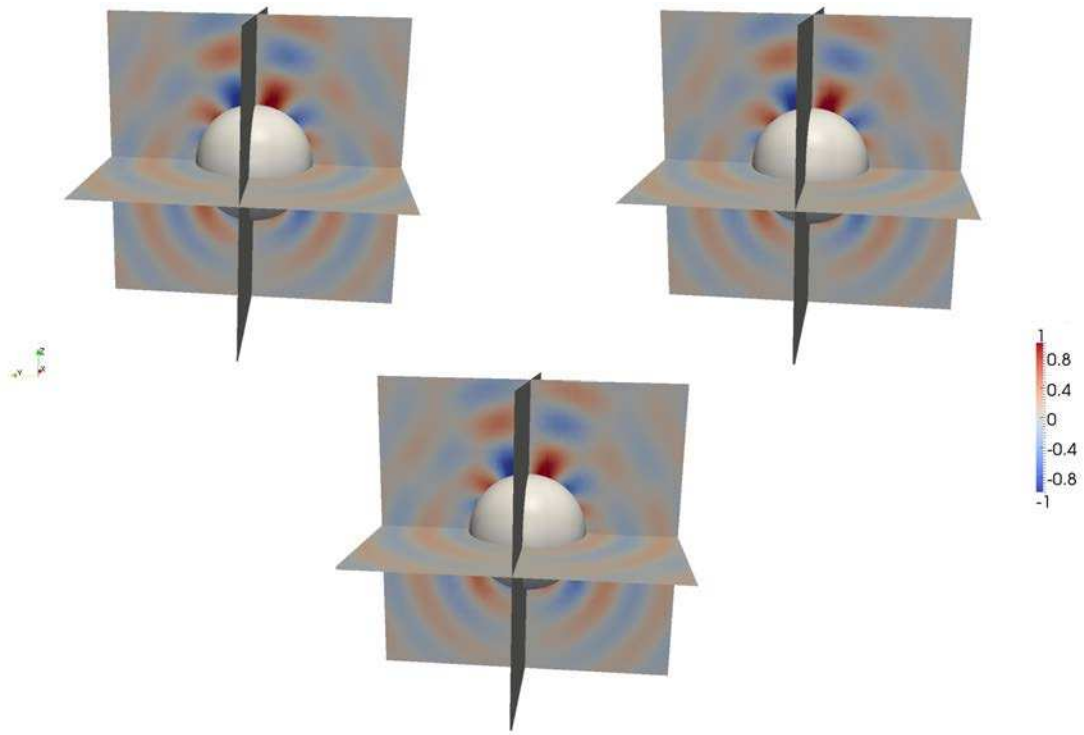


FIG. 5.12 – Lignes de contour de la composante E_z de la solution approchée (pour chaque ordre au temps final de la simulation : $t = 3.33 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 10 m). En-haut à gauche : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$. – En-haut à droite : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. – Bas : méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$.

visualisation), nous obtenons en comparaison à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$, un temps CPU, 2 fois plus faible avec l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$ (utilisant un pas de temps légèrement plus petit) et 6 fois plus faible avec l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ (utilisant un pas de temps légèrement plus grand).

En conclusion, ces comparaisons montrent ici que ces hybridations offrent des temps de calcul clairement diminués par rapport à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$ sur le maillage tétraédrique, tout en gardant des solutions numériques très proches.

5.5.3 Propagation d'un terme source dans une tête humaine

Nous exploitons enfin le cas test n°4 (décrit en sous-section 5.2.4). Nous faisons des simulations pour un temps physique de simulation de $t = 2.78 \times 10^{-9}$ s (équivalent en mètres : 0.83 m). Pour les deux maillages considérés, tétraédrique et hybride non-conforme, le maillage à la surface et à l'intérieur de la tête est le même, nous le montrons sur la figure FIG. 5.13. Nous pouvons également voir les deux maillages utilisés (en domaine donc sphérique pour le maillage tétraédrique et en domaine cubique pour le maillage hybride et non-conforme) sur la figure FIG. 5.14, où les milieux de propagation sont mis en évidence par différentes couleurs. Le maillage tétraédrique est composé de 361848 tétraèdres, et la longueur de l'arête minimale est de 1.85×10^{-3} m. Le maillage hybride non-conforme est composé de 288604 tétraèdres et de 8532 hexaèdres (i.e. 297136 éléments), ayant une arête minimale de longueur égale aussi à 1.85×10^{-3} m et comportant 8748 faces hybrides et non-conformes ($n_{raf} = 3$, et les faces hybrides correspondent aux faces non-conformes).

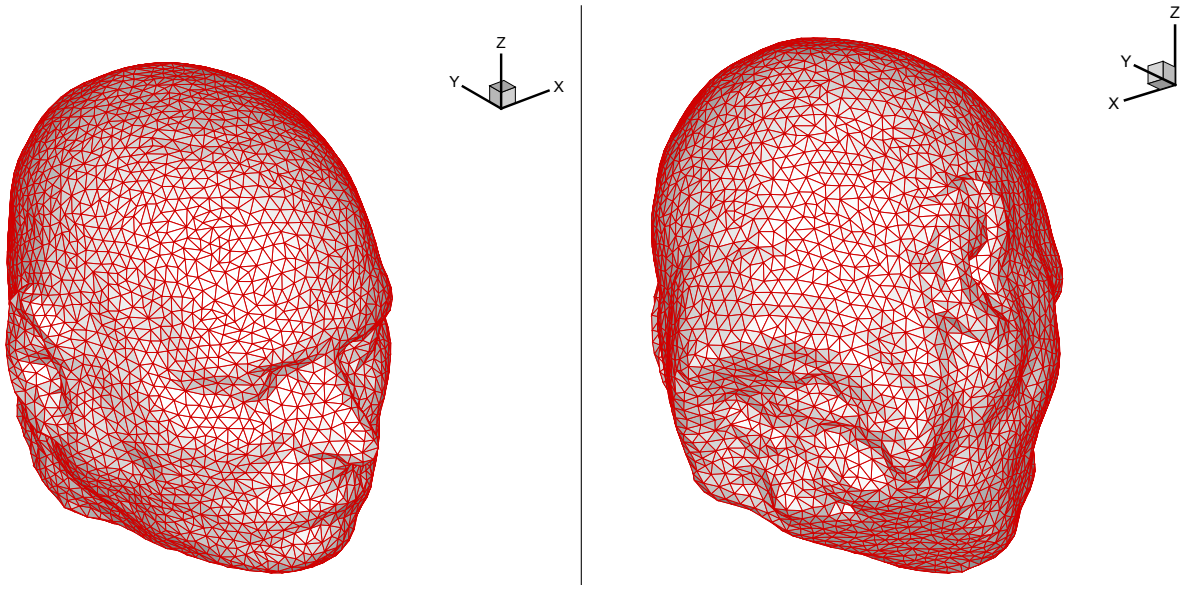


FIG. 5.13 – Maillage surfacique de la tête, de deux points de vue différents.

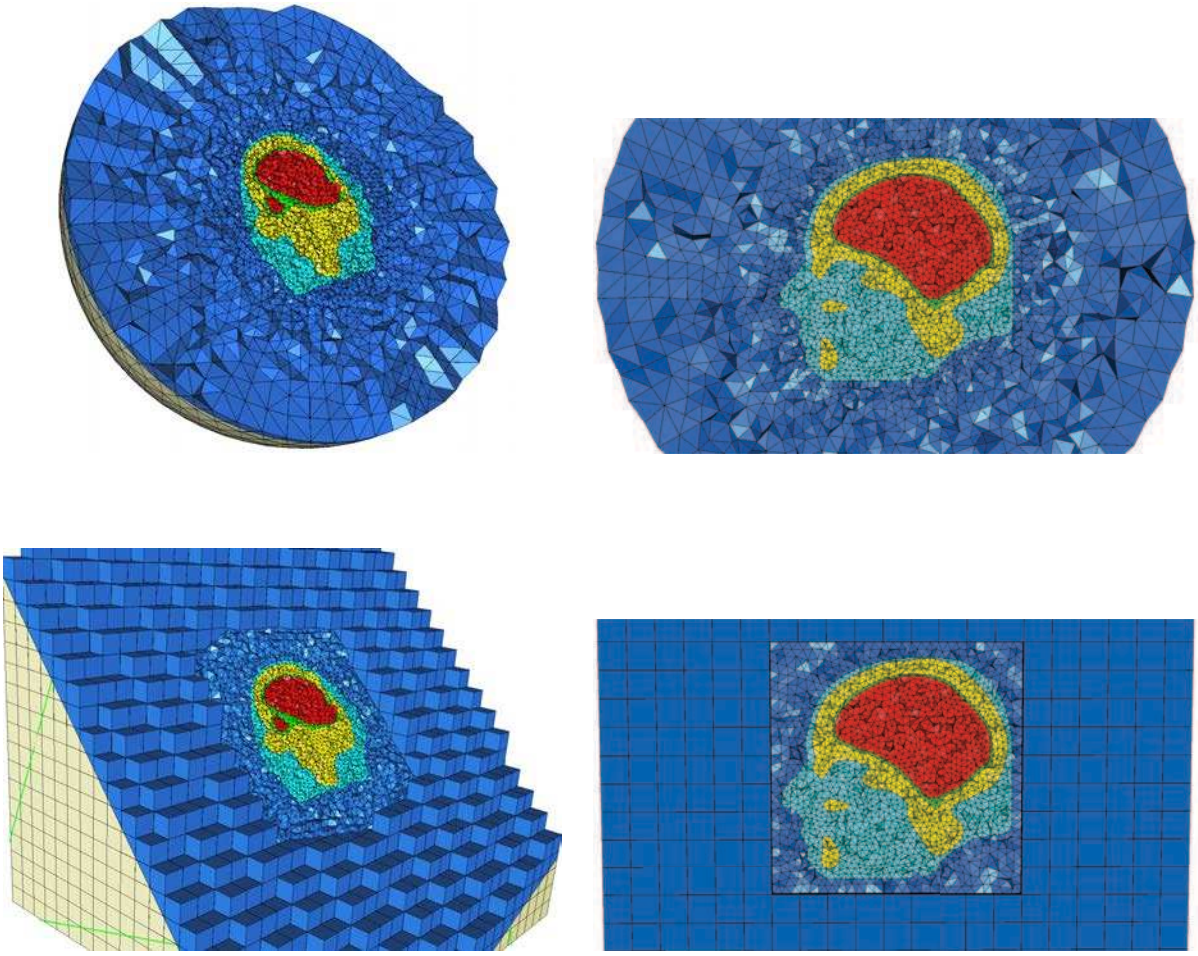


FIG. 5.14 – Deux coupes transversales de maillages volumiques. Haut : tétraédrique. – Bas : hybride et non-conforme ($n_{raf} = 3$). Chaque couleur représente un milieu de propagation.

Nous regardons les solutions approchées sous différents aspects, et comparons les temps de calcul obtenus. Nous adoptons la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$ sur le maillage tétraédrique et les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$ sur le maillage hybride, nous résumons les résultats dans le tableau TAB. 5.5. Nous traçons pour chacun des cas l'évolution en temps des composantes H_y et E_z en quatre points du domaine de calcul : les deux premiers se situant à l'extérieur de la tête (un point au centre de la source, l'autre point étant de l'autre côté de la tête, dans la partie hexaédrique du maillage hybride), cf FIG. 5.15 ; les deux suivants sont à l'intérieur de la tête (un point proche de l'oreille, l'autre point, au milieu de la tête), cf FIG. 5.16. De plus, nous calculons une transformée de Fourier discrète du champ électrique au cours de la dernière période de la simulation, nous prenons ensuite le module (i.e. la norme 2) de la partie réelle de cette transformée, i.e. $\sqrt{E_{x,\text{four}}^2 + E_{y,\text{four}}^2 + E_{z,\text{four}}^2}$, dont nous représentons les lignes de contour (pour chaque ordre d'interpolation testé) sur la figure FIG. 5.17.

TAB. 5.5 – Temps de calcul et nombre total de degrés de liberté, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation.

Type de maillage	Ordre d'interpolation	Temps CPU	# *ddl*
Tétraédrique	GDDT-$\mathbb{P}_2$	4 h et 55 min	3618480
Hybride	GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$	0 h et 38 min	1384780
	GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$	3 h et 0 min	3116404

Nous constatons, sur les figures FIG. 5.15 et FIG. 5.16, que pour les quatre points de visualisation, les courbes obtenues avec les méthodes GDDT-$\mathbb{P}_2$ et GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$ coïncident pour les deux composantes (mis à part pour la composante E_z au second point de la figure FIG. 5.15, où l'amplitude est très faible : de l'ordre de 10^{-4}), et nous voyons de légères différences avec l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$ dans certains cas. Les lignes de contour (FIG. 5.17) présentées, ont le même aspect pour GDDT-$\mathbb{P}_2$ et pour GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$, elles montrent de très légères différences avec la méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$. Ainsi, nous obtenons en comparaison à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$, un temps CPU : 1.63 fois plus faible avec l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$, pour des solutions quasi-identiques et un nombre total de degré de liberté proche ; 7.69 fois plus faible avec l'hybridation GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$, pour des solutions assimilables.

Pour conclure, ces comparaisons démontrent, ici aussi, que ces hybridations offrent des temps de calcul clairement diminués par rapport à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$ sur le maillage tétraédrique, sans changement majeur de la solution approchée.

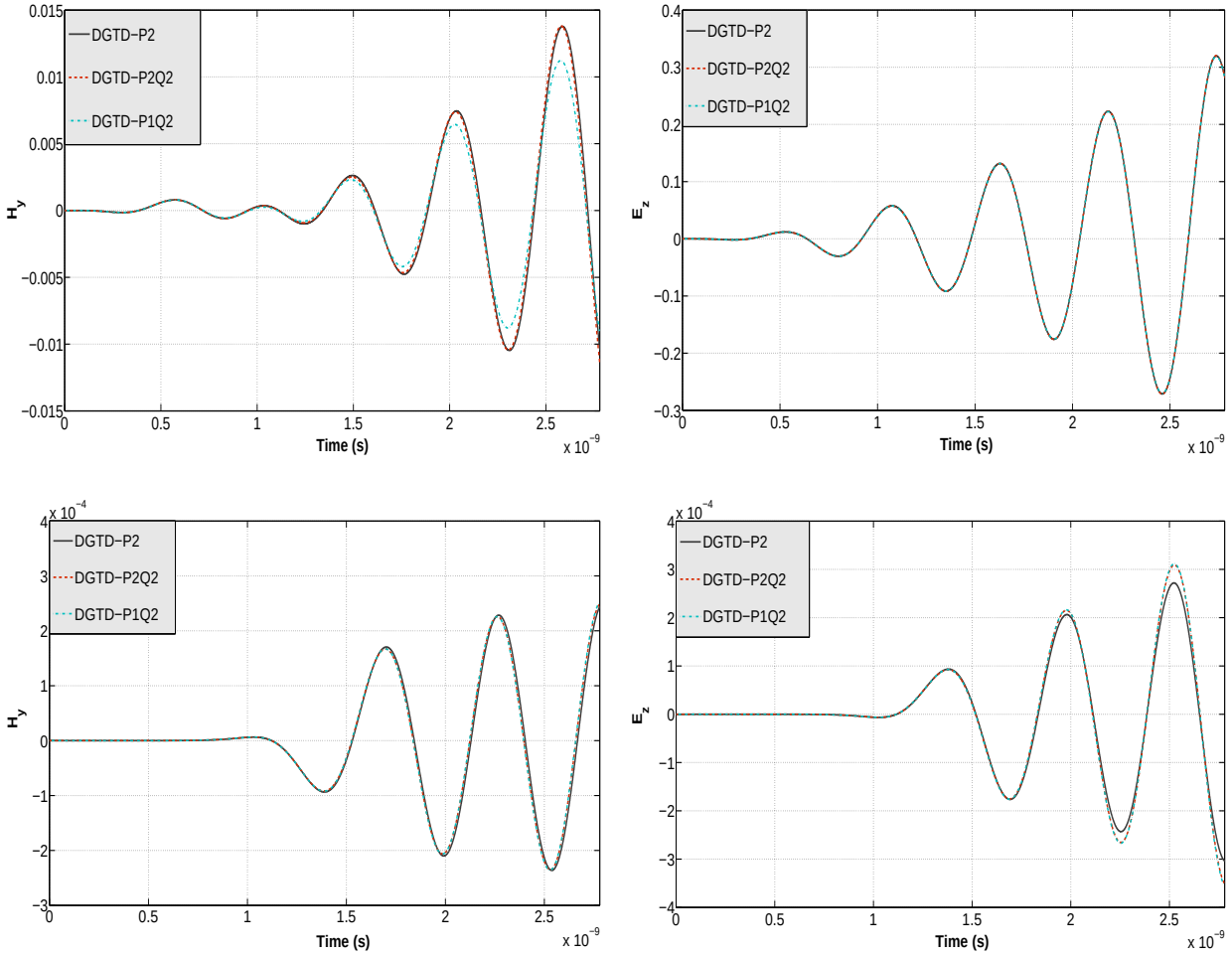


FIG. 5.15 – Evolution en temps des composante H_y (gauche) et E_z (droite) de la solution approchée pour chaque ordre d'interpolation en deux points du domaine de calcul, extérieurs à la tête. Haut : situé au centre du terme source. – Bas : situé de l'autre côté de la tête (dans la partie hexaédrique pour le maillage hybride).

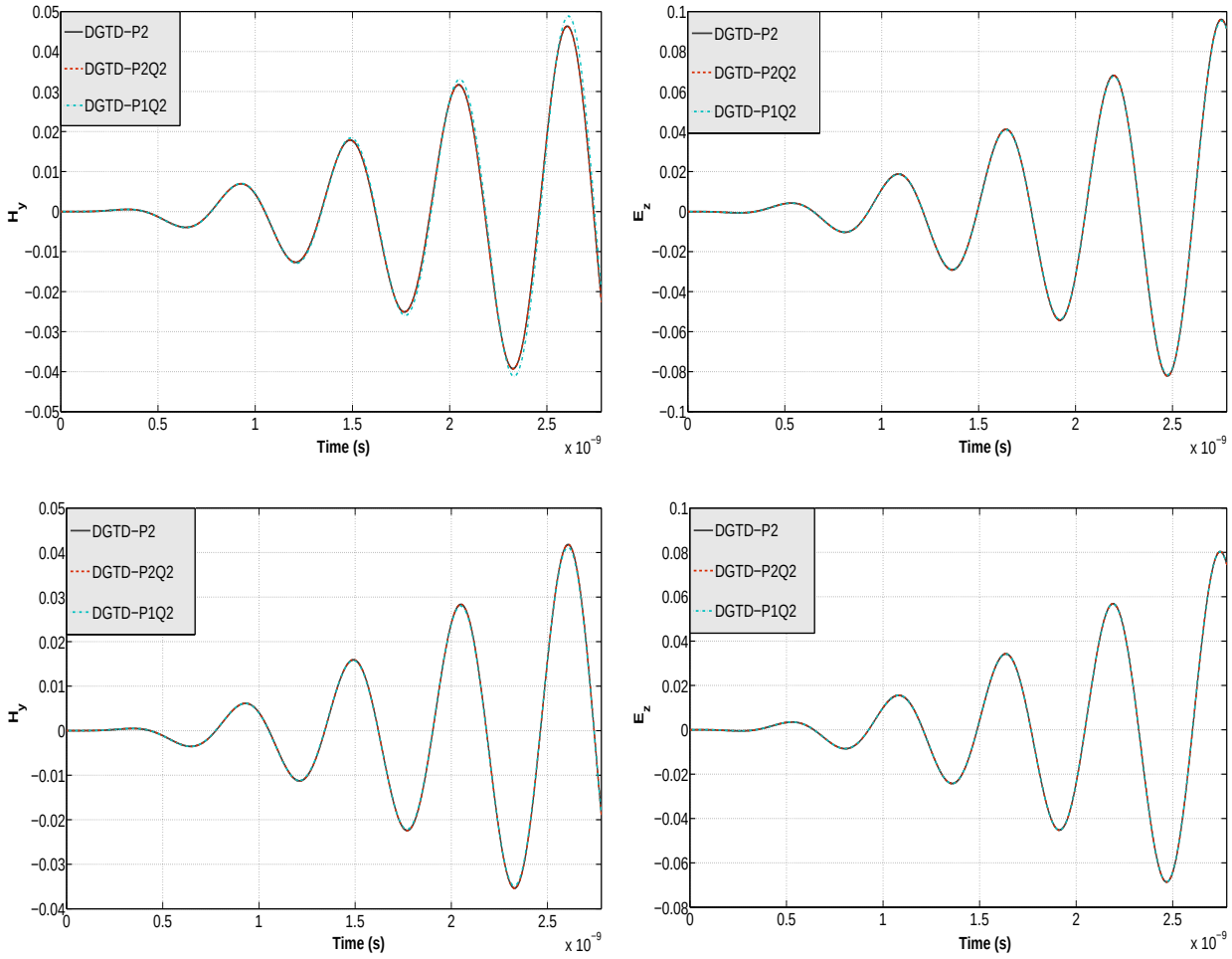


FIG. 5.16 – Evolution en temps des composante H_y (gauche) et E_z (droite) de la solution approchée pour chaque ordre d'interpolation en deux points du domaine de calcul, intérieurs à la tête. Haut : situé près de l'oreille. – Bas : situé au centre de la tête.

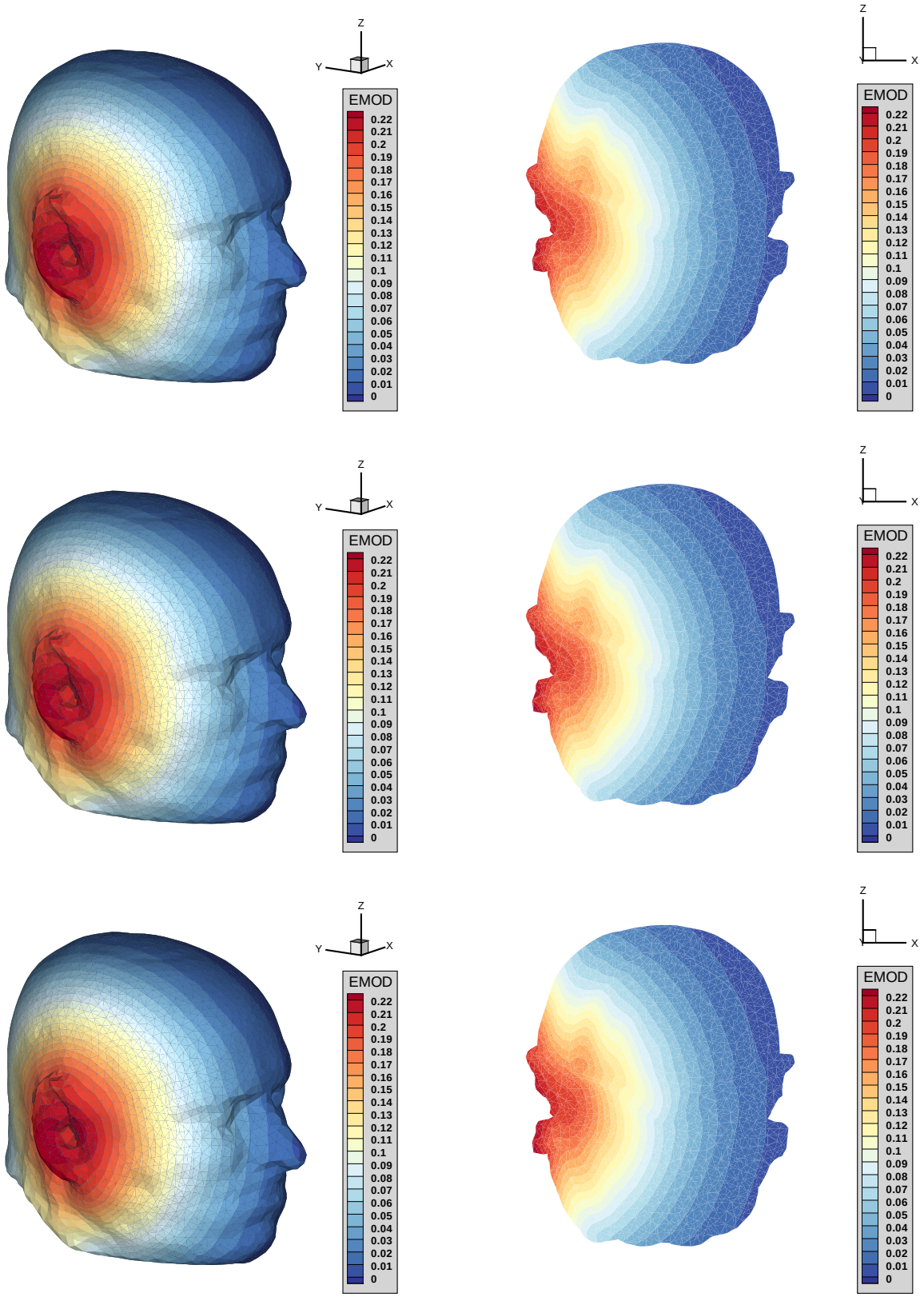


FIG. 5.17 – Lignes de contour, à la surface (gauche) et à l'intérieur (coupe tranversale, droite) de la tête, du module (en norme 2) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète du champ électrique approché (i.e. $\sqrt{E^2_{x,\text{four}} + E^2_{y,\text{four}} + E^2_{z,\text{four}}}$), pour les trois ordres d'interpolation. Haut : GDDT-$\mathbb{P}_2$. – Milieu : GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. – Bas : GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$.

CHAPITRE 6

Conclusion : apports et perspectives

Sommaire

6.1 Synthèse des résultats et apports de la méthode hybride GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ 139
6.2 Travaux en cours et perspectives 141

Je tiens à rappeler que cette thèse a été financée par la Région Île-de-France, dans le cadre du projet MIEL3D-MESHER du cluster Systematic Paris-Région.

Ce projet avait pour but de mettre au point des outils de maillages automatiques, hexaédriques ou hybrides hexaédriques/tétraédriques, visant à des applications comme la mécanique, la mécanique des fluides, et l'électromagnétisme. Notre contribution a été de montrer l'intérêt de tels maillages, dans notre cas hybrides et non-conformes, pour des problèmes de propagation d'ondes électromagnétiques.

6.1 Synthèse des résultats et apports de la méthode hybride GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$

L'objectif principal de cette thèse était de proposer une méthode de type Galerkin discontinu d'ordre élevé en maillages multi-éléments non-conformes pour résoudre numériquement le système des équations de Maxwell en domaine temporel.

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction générale, de nombreux travaux ont déjà été réalisés sur la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par, entre autres, des méthodes de type Galerkin discontinu en maillages structurés ou non-structurés, ainsi que par des méthodes hybrides s'appliquant sur des maillages structurés/non-structurés. Toutefois, la majorité des contributions passées visant à exploiter des maillages hybrides structurés/non-structurés ont proposé de combiner des méthodes différentes (DFTD et EFDT, ou DFDT et GDDT, etc.) et ont rarement considéré le cas 3D compte tenue la complexité de la mise en œuvre informatique des approches proposées (notamment pour la construction et gestion des maillages de calcul). De plus, parmi les méthodes hybrides proposées, peu offrent la possiblité de définir un ordre d'approximation élevé à la fois sur les parties structurées et non-structurées. Également, ces stratégies de résolution s'appuient rarement sur un cadre variationnel permettant une analyse mathématique fine des propriétés de stabilité et de convergence. Enfin, le caractère non-conforme de la discrétisation est rarement exploité.

Le point de départ de notre étude a été la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ non-dissipative en maillages triangulaires (cas 2D)/tétraédriques (cas 3D) conformes formulée et étudiée dans [Fezoui *et al.* 2005], ainsi que son adaptation au cas de maillages triangulaires non-conformes considérée dans [Fahs 2008] (cas 2D uniquement). Nous avons ici proposé une généralisation de cette méthode

permettant de traiter de maillages hybrides structurés/non-structurés non-conformes, combinant une interpolation polynomiale nodale de degré p en triangle (cas 2D)/tétraèdre (cas 3D) et une interpolation polynomiale nodale de degré k en quadrangle (cas 2D)/hexaèdre (cas 3D). La méthode résultante est nommée GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$. Malgré le caractère hybride du maillage, le fait d'avoir un seul schéma pour le couplage des parties tétraédrique et hexaédrique du maillage permet de définir un espace de discrétisation global. La méthode hybride GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ formulée ici repose sur une approximation centrée pour évaluer les flux numériques aux interfaces entre cellules et on a considéré un ordre d'interpolation arbitraire (aussi bien sur les tétraèdres que sur les hexaèdres) pour approcher le champ électromagnétique. De plus, nous avons fixé en 3D un type de non-conformité entre éléments tétraédriques et éléments hexaédriques, et nous utilisons des schémas de type saute-mouton, d'ordre 2 ou 4, pour l'intégration en temps de ces équations semi-discrétisées.

Toujours en 3D, nous avons ensuite chercher à analyser les propriétés mathématiques de cette méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en étudiant la stabilité L^2 et la convergence a-priori. L'analyse de stabilité, developpée pour le schéma en temps LF2, montre que la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ est non-dissipative et qu'il est suffisant de prendre un pas de temps égal au minimum entre le pas temps correspondant à la partie tétraédrique et celui correspondant à la partie hexaédrique pour assurer la stabilité. Par ailleurs, nous avons détaillé l'analyse de convergence en h pour le schéma en temps LF2, conduisant à un estimateur d'erreur a-priori ; nous avons également exposé (et donné quelques étapes de la démonstration) le résultat de cette analyse pour le schéma en temps LF4.

Nous avons ensuite réalisé une étude numérique complète en 2D en faisant de nombreuses expériences. En 2D, les maillages hybrides (conformes ou non) sont constitués de triangles et de quadrangles. Tout d'abord, lors d'un test préliminaire sur des maillages tout quadrangulaires, il a été mis en évidence que l'utilisation d'approximation d'ordre plus élevé améliore la précision, même avec un choix de maillages plus grossiers, ainsi que l'efficacité. Le résultat théorique obtenu dans l'étude de stabilité L^2 a été validé numériquement en vérifiant que pour chaque hybridation GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, le pas de temps global utilisé correspond au minimum entre les pas de temps des méthodes GDDT-$\mathbb{P}_p$ (en maillage triangulaire) et GDDT-$\mathbb{Q}_k$ (en maillage quadrangulaire). Les estimateurs d'erreur a-priori théoriques, pour les schémas en temps LF2 et LF4, résultant de l'analyse de convergence ont également été confirmés par les tests de convergence numérique en h et ce pour des maillages hybrides et non-conformes. De plus, nous avons pu constater que le schéma LF4 offre comme attendu de meilleures vitesses de convergence que le schéma LF2, particulièrement pour des ordres d'interpolation élevés. Nous avons alors examiné la norme L^2 de l'erreur en fonction du temps CPU, afin de comparer les schémas en temps LF2 et LF4, mais aussi les différentes hybridations GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ entre elles. Il est très clairement apparu que le schéma LF4 est dans quasiment tous les cas testés plus efficace et plus précis que le schéma LF2, de même, certaines hybridations sont préférables à d'autres au niveau à la fois de la précision et du temps CPU. Enfin, l'apport de la méthode hybride GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, au niveau du compromis entre précision et efficacité a été démontré grâce à plusieurs tests comparant la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ en maillages triangulaires à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ en maillages hybrides et non-conformes. La possibilité d'utiliser deux types d'élément, ainsi que des raffinements non-conformes, a permis des agencements de maillages adaptés aux diverses simulations considérées, offrant ainsi, en appliquant la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, une amélioration (par rapport à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$), considérable dans certains cas, en termes de précision et de temps de

calcul.

Ces résultats ont été confirmés dans des expérimentations numériques en 3D, où la convergence en h est là aussi démontrée, et le compromis entre la précision et le temps CPU est amélioré par la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ sur des maillages hybrides non-conformes par rapport à la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ en maillages tétraédriques. Il a été par ailleurs mis en évidence que le couplage avec l'ordre 0 (i.e. GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_0$ ou GDDT-$\mathbb{P}_0\mathbb{Q}_k$) converge mais ne donne pas de résultats suffisamment précis, ce qui est probablement dû au saut aux interfaces hybrides (plus important lorsque l'ordre élevé est couplé avec l'ordre 0). Enfin, nous avons relevé que des réflexions parasites peuvent s'ajouter avec le schéma hybride GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ pour des ordres d'interpolation peu élevés (et des maillages grossiers), i.e. la présence des interfaces non-conformes et hybrides n'est pas sans conséquence dans certains cas.

6.2 Travaux en cours et perspectives

Nous travaillons actuellement sur un développement plus complet du code de calcul pour les simulations en 3D. Dans des objectifs à court termes, nous étendrons l'interpolation en espace pour des ordres supérieurs GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$ (en allant par exemple jusqu'à GDDT-$\mathbb{P}_4\mathbb{Q}_4$ comme pour l'implémentation 2D) et nous ajouterons également l'implémentation du schéma d'intégration en temps saute-mouton d'ordre 4. De plus, les coûts en temps de calcul des simulations 3D nécessitent une parallélisation du schéma GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ (une des principales difficultés étant la prise en compte du cas de figure où les faces artificielles entre sous-domaines de calcul coïncident avec les faces hybrides entre tétraèdres et hexaèdres), qui fonctionne d'ores et déjà pour des cas simples et que nous continuerons à étendre. Enfin, comme nous l'avons déjà précisé, une extension des études théoriques de convergence et de stabilité (avec démonstration complète) traitant conjointement les schémas en temps LF2 et LF4, est à soumettre prochainement.

Dans des perspectives à plus long terme, nous chercherons tout d'abord à mettre en œuvre la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ pour des applications numériques en 3D plus complexes et réalistes (en milieu hétérogène, éventuellement conducteur, etc.). D'autre part, l'efficacité de calcul pourrait encore être améliorée tout en minimisant les erreurs de dispersion, grâce notamment à une stratégie de pas de temps local [Grote & Mitkova 2010] ou éventuellement en utilisant un schéma d'intégration en temps hybride implicite/explicite [Piperno 2006, Verwer 2010, Moya 2012]. On pourrait également exploiter d'autres types de fonctions de base, orthogonales [Bergot & Duruflé 2012], pour l'interpolation $\mathbb{Q}_k$ sur les hexaèdres. D'autres investigations théoriques seront aussi à envisager, comme des études de complexité ou encore analyser en détail les constantes dans les expressions des CFL théoriques, afin d'en dégager des valeurs et les comparer à celles que l'on obtiendrait numériquement. Enfin, nous pourrions aussi reconsidérer le type de non-conformité entre les éléments tétraédriques et hexaédriques en prenant en compte toutes les formes que cette non-conformité peut avoir, ainsi que traiter avec des éléments hexaédriques généraux (non orthogonaux).

ANNEXE A

Fonctions de bases et nœuds des degrés de liberté

Sommaire

A.1 Fonctions de bases 2D **143**
A.1.1 Fonctions de bases sur le triangle de référence 143
A.1.2 Fonctions de bases sur le quadrangle de référence 145
A.2 Fonctions de bases 3D **149**
A.2.1 Fonctions de bases sur le tétraèdre de référence 149
A.2.2 Fonctions de bases sur l'hexaèdre de référence 150

Nous présentons dans cette annexe les fonctions de base ainsi que les coordonnées des nœuds des degrés de liberté correspondants, utilisées dans le code de calcul, en 2D et en 3D. Celles-ci sont exprimées sur les éléments de référence explicités en sous-sections 4.1.2.1 (2D) et 5.1.1 (3D).

Remarque : Les fonctions de bases $\mathbb{P}_p$ pour $p > 1$ peuvent s'exprimer dans un premier temps en fonction des fonctions barycentriques (qui correspondent aux fonctions de bases $\mathbb{P}_1$). Nous donnons ici directement les expressions factorisées des fonctions de bases $\mathbb{P}_p$, en fonction de x_1 et x_2 (ainsi que x_3 en 3D).

A.1 Fonctions de bases 2D

A.1.1 Fonctions de bases sur le triangle de référence

A.1.1.1 Interpolation $\mathbb{P}_1$

Dans ce cas, les nœuds des degrés de liberté ont respectivement pour coordonnées : $(0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2) &= 1 - x_1 - x_2 \\ \varphi_2(x_1,x_2) &= x_1 \\ \varphi_3(x_1,x_2) &= x_2 \end{cases}$$

A.1.1.2 Interpolation $\mathbb{P}_2$

Dans ce cas, les nœuds des degrés de liberté ont respectivement pour coordonnées : $(0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2) &= (1-x_1-x_2)(1-2x_1-2x_2) \\ \varphi_2(x_1,x_2) &= x_1(2x_1-1) \\ \varphi_3(x_1,x_2) &= x_2(2x_2-1) \\ \varphi_4(x_1,x_2) &= 4x_1(1-x_1-x_2) \\ \varphi_5(x_1,x_2) &= 4x_1x_2 \\ \varphi_6(x_1,x_2) &= 4x_2(1-x_1-x_2) \end{cases}$$

A.1.1.3 Interpolation $\mathbb{P}_3$

Les nœuds des degrés de liberté ont dans ce cas respectivement pour coordonnées : $(0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/3,0)^{\mathrm{T}}$; $(2/3,0)^{\mathrm{T}}$; $(2/3,1/3)^{\mathrm{T}}$; $(1/3,2/3)^{\mathrm{T}}$; $(0,2/3)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/3)^{\mathrm{T}}$; $(1/3,1/3)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2) &= \frac{1}{2}(1-x_1-x_2)(2-3x_1-3x_2)(1-3x_1-3x_2) \\ \varphi_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{2}x_1(3x_1-1)(-2+3x_1) \\ \varphi_3(x_1,x_2) &= \frac{1}{2}x_2(3x_2-1)(3x_2-2) \\ \varphi_4(x_1,x_2) &= \frac{9}{2}x_1(1-x_1-x_2)(2-3x_1-3x_2) \\ \varphi_5(x_1,x_2) &= \frac{9}{2}x_1(1-x_1-x_2)(3x_1-1) \\ \varphi_6(x_1,x_2) &= \frac{9}{2}x_1x_2(3x_1-1) \\ \varphi_7(x_1,x_2) &= \frac{9}{2}x_1x_2(3x_2-1) \\ \varphi_8(x_1,x_2) &= \frac{9}{2}x_2(1-x_1-x_2)(3x_2-1) \\ \varphi_9(x_1,x_2) &= \frac{9}{2}x_2(1-x_1-x_2)(2-3x_1-3x_2) \\ \varphi_{10}(x_1,x_2) &= 27x_1x_2(1-x_1-x_2) \end{cases}$$

A.1.1.4 Interpolation $\mathbb{P}_4$

Les nœuds des degrés de liberté ont dans ce cas respectivement pour coordonnées :

$(0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,0)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(3/4,0)^{\mathrm{T}}$; $(3/4,1/4)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,3/4)^{\mathrm{T}}$; $(0,3/4)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/4)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,1/4)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/4)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,1/2)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la manière suivante :

$$\begin{cases}
\varphi_1(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}(-1+x_1+x_2)(-3+4x_1+4x_2)(-1+2x_1+2x_2)(-1+4x_1+4x_2)\\
\varphi_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}x_1(-1+4x_1)(-1+2x_1)(-3+4x_1)\\
\varphi_3(x_1,x_2) &= \frac{1}{3}x_2(4x_2-1)(2x_2-1)(4x_2-3)\\
\varphi_4(x_1,x_2) &= \frac{16}{3}x_1(1-x_1-x_2)(-3+4x_1+4x_2)(-1+2x_1+2x_2)\\
\varphi_5(x_1,x_2) &= 4(-1+x_1+x_2)x_1(-3+4x_1+4x_2)(-1+4x_1)\\
\varphi_6(x_1,x_2) &= \frac{16}{3}x_1(1-x_1-x_2)(-1+4x_1)(-1+2x_1)\\
\varphi_7(x_1,x_2) &= \frac{16}{3}x_1x_2(-1+4x_1)(-1+2x_1)\\
\varphi_8(x_1,x_2) &= 4x_1x_2(-1+4x_1)(4x_2-1)\\
\varphi_9(x_1,x_2) &= \frac{16}{3}x_1x_2(4x_2-1)(2x_2-1)\\
\varphi_{10}(x_1,x_2) &= \frac{16}{3}x_2(1-x_1-x_2)(4x_2-1)(2x_2-1)\\
\varphi_{11}(x_1,x_2) &= 4x_2(-1+x_1+x_2)(-3+4x_1+4x_2)(4x_2-1)\\
\varphi_{12}(x_1,x_2) &= \frac{16}{3}x_2(1-x_1-x_2)(-3+4x_1+4x_2)(-1+2x_1+2x_2)\\
\varphi_{13}(x_1,x_2) &= 32x_1x_2(-1+x_1+x_2)(-3+4x_1+4x_2)\\
\varphi_{14}(x_1,x_2) &= 32x_1x_2(1-x_1-x_2)(4x_1-1)\\
\varphi_{15}(x_1,x_2) &= 32x_1x_2(1-x_1-x_2)(4x_2-1)
\end{cases}$$

A.1.2 Fonctions de bases sur le quadrangle de référence

A.1.2.1 Interpolation $\mathbb{Q}_1$

Dans ce cas, les nœuds des degrés de liberté ont respectivement pour coordonnées : $(0,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \vartheta_1(x_1,x_2) &= x_2(1-x_1) \\ \vartheta_2(x_1,x_2) &= (1-x_1)(1-x_2) \\ \vartheta_3(x_1,x_2) &= x_1(1-x_2) \\ \vartheta_4(x_1,x_2) &= x_1x_2 \end{cases}$$

A.1.2.2 Interpolation $\mathbb{Q}_2$

Dans ce cas, les nœuds des degrés de liberté ont respectivement pour coordonnées : $(0,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vartheta_1(x_1,x_2) &= x_2(2x_1-1)(-1+x_1)(2x_2-1) \\ \vartheta_2(x_1,x_2) &= (2x_1-1)(-1+x_1)(2x_2-1)(-1+x_2) \\ \vartheta_3(x_1,x_2) &= x_1(2x_1-1)(-1+x_2)(2x_2-1) \\ \vartheta_4(x_1,x_2) &= x_1x_2(2x_1-1)(2x_2-1) \\ \vartheta_5(x_1,x_2) &= -4x_2(2x_1-1)(-1+x_1)(-1+x_2) \\ \vartheta_6(x_1,x_2) &= -4x_1(-1+x_1)(2x_2-1)(-1+x_2) \\ \vartheta_7(x_1,x_2) &= -4x_1x_2(2x_1-1)(-1+x_2) \\ \vartheta_8(x_1,x_2) &= -4x_1x_2(-1+x_1)(2x_2-1) \\ \vartheta_9(x_1,x_2) &= 16x_1x_2(-1+x_1)(-1+x_2) \end{cases}$$

A.1.2.3 Interpolation $\mathbb{Q}_3$

Les nœuds des degrés de liberté ont dans ce cas respectivement pour coordonnées : $(0,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,2/3)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/3)^{\mathrm{T}}$; $(1/3,0)^{\mathrm{T}}$; $(2/3,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1/3)^{\mathrm{T}}$; $(1,2/3)^{\mathrm{T}}$; $(2/3,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/3,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/3,2/3)^{\mathrm{T}}$; $(1/3,1/3)^{\mathrm{T}}$; $(2/3,2/3)^{\mathrm{T}}$; $(2/3,1/3)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la façon suivante :

$$\begin{cases}
\vartheta_1(x_1,x_2) &= -\frac{1}{4}x_2(3x_2-1)(3x_2-2)(x_1-1)(3x_1-1)(3x_1-2)\\
\vartheta_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{4}(x_2-1)(3x_2-1)(3x_2-2)(x_1-1)(3x_1-1)(3x_1-2)\\
\vartheta_3(x_1,x_2) &= -\frac{1}{4}x_1(x_2-1)(3x_2-1)(3x_2-2)(3x_1-1)(3x_1-2)\\
\vartheta_4(x_1,x_2) &= \frac{1}{4}x_1x_2(3x_2-1)(3x_2-2)(3x_1-1)(3x_1-2)\\
\vartheta_5(x_1,x_2) &= \frac{9}{4}x_2(3x_2-1)(x_2-1)(x_1-1)(3x_1-1)(3x_1-2)\\
\vartheta_6(x_1,x_2) &= -\frac{9}{4}x_2(3x_2-2)(x_2-1)(x_1-1)(3x_1-1)(3x_1-2)\\
\vartheta_7(x_1,x_2) &= -\frac{9}{4}x(x_2-1)(3x_2-1)(3x_2-2)(3x_1-2)(x_1-1)\\
\vartheta_8(x_1,x_2) &= \frac{9}{4}x_1(x_2-1)(3x_2-1)(3x_2-2)(3x_1-1)(x_1-1)\\
\vartheta_9(x_1,x_2) &= \frac{9}{4}x_1x_2(3x_2-2)(x_2-1)(3x_1-1)(3x_1-2)\\
\vartheta_{10}(x_1,x_2) &= -\frac{9}{4}x_1x_2(3x_2-1)(x_2-1)(3x_1-1)(3x_1-2)\\
\vartheta_{11}(x_1,x_2) &= -\frac{9}{4}x_1x_2(3x_2-1)(3x_2-2)(3x_1-1)(x_1-1)\\
\vartheta_{12}(x_1,x_2) &= \frac{9}{4}x_1x_2(3x_2-1)(3x_2-2)(3x_1-2)(x_1-1)\\
\vartheta_{13}(x_1,x_2) &= -\frac{81}{4}x_1x_2(3x_2-1)(x_2-1)(3x_1-2)(x_1-1)\\
\vartheta_{14}(x_1,x_2) &= \frac{81}{4}x_1x_2(3x_2-2)(x_2-1)(3x_1-2)(x_1-1)\\
\vartheta_{15}(x_1,x_2) &= \frac{81}{4}x_1x_2(3x_2-1)(x_2-1)(3x_1-1)(x_1-1)\\
\vartheta_{16}(x_1,x_2) &= -\frac{81}{4}x_1x_2(3x_2-2)(x_2-1)(3x_1-1)(x_1-1)
\end{cases}$$

A.1.2.4 Interpolation $\mathbb{Q}_4$

Les nœuds des degrés de liberté ont dans ce cas respectivement pour coordonnées : $(0,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,3/4)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/4)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,0)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(3/4,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1/4)^{\mathrm{T}}$; $(1,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1,3/4)^{\mathrm{T}}$; $(3/4,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,3/4)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1/4,1/4)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,3/4)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/4)^{\mathrm{T}}$; $(3/4,3/4)^{\mathrm{T}}$; $(3/4,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(3/4,1/4)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la manière suivante :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\vartheta_1(x_1,x_2) &= \frac{1}{9}x_2(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_2(x_1,x_2) &= \frac{1}{9}(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_3(x_1,x_2) &= \frac{1}{9}x_1(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_4(x_1,x_2) &= \frac{1}{9}x_1x_2(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_5(x_1,x_2) &= -\frac{16}{9}x_2(x_2-1)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_6(x_1,x_2) &= \frac{4}{3}x_2(x_2-1)(4x_2-3)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_7(x_1,x_2) &= -\frac{16}{9}x_2(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_8(x_1,x_2) &= -\frac{16}{9}x_1(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)\\
\vartheta_9(x_1,x_2) &= \frac{4}{3}x_1(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(4x_1-1)\\
\vartheta_{10}(x_1,x_2) &= -\frac{16}{9}x_1(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_{11}(x_1,x_2) &= -\frac{16}{9}x_1x_2(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_{12}(x_1,x_2) &= \frac{4}{3}x_1x_2(x_2-1)(4x_2-3)(4x_2-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_{13}(x_1,x_2) &= -\frac{16}{9}x_1x_2(x_2-1)(2x_2-1)(4x_2-1)(4x_1-3)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_{14}(x_1,x_2) &= -\frac{16}{9}x_1x_2(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_{15}(x_1,x_2) &= \frac{4}{3}x_1x_2(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(4x_1-1)\\
\vartheta_{16}(x_1,x_2) &= -\frac{16}{9}x_1x_2(4x_2-3)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)\\
\vartheta_{17}(x_1,x_2) &= \frac{256}{9}x_1x_2(x_2-1)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)\\
\vartheta_{18}(x_1,x_2) &= -\frac{64}{3}x_1x_2(x_2-1)(4x_2-3)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)\\
\vartheta_{19}(x_1,x_2) &= \frac{256}{9}x_1x_2(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(2x_1-1)\\
\vartheta_{20}(x_1,x_2) &= -\frac{64}{3}x_1x_2(x_2-1)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(4x_1-1)\\
\vartheta_{21}(x_1,x_2) &= 16x_1x_2(x_2-1)(4x_2-3)(4x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(4x_1-1)\\
\vartheta_{22}(x_1,x_2) &= -\frac{64}{3}x_1x_2(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(x_1-1)(4x_1-3)(4x_1-1)\\
\vartheta_{23}(x_1,x_2) &= \frac{256}{9}x_1x_2(x_2-1)(2x_2-1)(4x_2-1)(x_1-1)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_{24}(x_1,x_2) &= -\frac{64}{3}x_1x_2(x_2-1)(4x_2-3)(4x_2-1)(x_1-1)(2x_1-1)(4x_1-1)\\
\vartheta_{25}(x_1,x_2) &= \frac{256}{9}x_1x_2(x_2-1)(4x_2-3)(2x_2-1)(x_1-1)(2x_1-1)(4x_1-1)
\end{aligned}
\right.
$$

A.2 Fonctions de bases 3D

A.2.1 Fonctions de bases sur le tétraèdre de référence

A.2.1.1 Interpolation $\mathbb{P}_1$

Dans ce cas, les nœuds des degrés de liberté ont respectivement pour coordonnées : $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,x_3) &= 1 - x_1 - x_2 - x_3 \\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1 \\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3) &= x_2 \\ \varphi_4(x_1,x_2,x_3) &= x_3 \end{cases}$$

A.2.1.2 Interpolation $\mathbb{P}_2$

Les nœuds des degrés de liberté ont dans ce cas respectivement pour coordonnées : $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(0,0,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,x_3) &= (2x_1 - 1 + 2x_2 + 2x_3)(x_1 - 1 + x_2 + x_3) \\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1(-1 + 2x_1) \\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3) &= x_2(-1 + 2x_2) \\ \varphi_4(x_1,x_2,x_3) &= x_3(-1 + 2x_3) \\ \varphi_5(x_1,x_2,x_3) &= -4x_1(x_1 - 1 + x_2 + x_3) \\ \varphi_6(x_1,x_2,x_3) &= 4x_2x_1 \\ \varphi_7(x_1,x_2,x_3) &= -4x_2(x_1 - 1 + x_2 + x_3) \\ \varphi_8(x_1,x_2,x_3) &= 4x_1x_3 \\ \varphi_9(x_1,x_2,x_3) &= -4x_3(x_1 - 1 + x_2 + x_3) \\ \varphi_{10}(x_1,x_2,x_3) &= 4x_2x_3 \end{cases}$$

A.2.2 Fonctions de bases sur l'hexaèdre de référence

A.2.2.1 Interpolation $\mathbb{Q}_1$

Dans ce cas, les nœuds des degrés de liberté ont respectivement pour coordonnées : $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vartheta_1(x_1,x_2,x_3) &= x_2(2x_1-1)(-1+x_1)(2x_2-1) \\ \vartheta_2(x_1,x_2,x_3) &= (2x_1-1)(-1+x_1)(2x_2-1)(-1+x_2) \\ \vartheta_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1(2x_1-1)(-1+x_2)(2x_2-1) \\ \vartheta_4(x_1,x_2,x_3) &= x_1x_2(2x_1-1)(2x_2-1) \\ \vartheta_5(x_1,x_2,x_3) &= -4x_2(2x_1-1)(-1+x_1)(-1+x_2) \\ \vartheta_6(x_1,x_2,x_3) &= -4x_1(-1+x_1)(2x_2-1)(-1+x_2) \\ \vartheta_7(x_1,x_2,x_3) &= -4x_1x_2(2x_1-1)(-1+x_2) \\ \vartheta_8(x_1,x_2,x_3) &= 16x_1x_2(-1+x_1)(-1+x_2) \end{cases}$$

A.2.2.2 Interpolation $\mathbb{Q}_2$

Les nœuds des degrés de liberté ont dans ce cas respectivement pour coordonnées : $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,1,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0,0)^{\mathrm{T}}$; $(1,1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1,0)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/2,0)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0,1)^{\mathrm{T}}$; $(1,1/2,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2,1)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/2,1)^{\mathrm{T}}$; $(0,0,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(0,1,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(0,1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1,0,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1,1,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1,1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,0,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1,1/2)^{\mathrm{T}}$; $(1/2,1/2,1/2)^{\mathrm{T}}$.

Les fonctions de bases correspondant respectivement à ces nœuds sont alors définies de la façon suivante :

$$
\begin{cases}
\vartheta_1(x_1,x_2,x_3) & = & (-1+2x_3)(x_3-1)(-1+2x_2)(x_2-1)(-1+2x_1)(x_1-1) \\
\vartheta_2(x_1,x_2,x_3) & = & x_1(-1+2x_3)(x_3-1)(-1+2x_2)(x_2-1)(-1+2x_1) \\
\vartheta_3(x_1,x_2,x_3) & = & x_1x_2(-1+2x_3)(x_3-1)(-1+2x_2)(-1+2x_1) \\
\vartheta_4(x_1,x_2,x_3) & = & x_2(-1+2x_3)(x_3-1)(-1+2x_1)(x_1-1)(-1+2x_2) \\
\vartheta_5(x_1,x_2,x_3) & = & x_3(-1+2x_2)(x_2-1)(-1+2x_1)(x_1-1)(-1+2x_3) \\
\vartheta_6(x_1,x_2,x_3) & = & x_1x_3(-1+2x_2)(x_2-1)(-1+2x_3)(-1+2x_1) \\
\vartheta_7(x_1,x_2,x_3) & = & x_1x_2x_3(-1+2x_3)(-1+2x_2)(-1+2x_1) \\
\vartheta_8(x_1,x_2,x_3) & = & x_2x_3(-1+2x_1)(x_1-1)(-1+2x_3)(-1+2x_2) \\
\vartheta_9(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_1(-1+2x_3)(x_3-1)(-1+2x_2)(x_2-1)(x_1-1) \\
\vartheta_{10}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_1x_2(-1+2x_3)(x_3-1)(x_2-1)(-1+2x_1) \\
\vartheta_{11}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_1x_2(-1+2x_3)(x_3-1)(-1+2x_2)(x_1-1) \\
\vartheta_{12}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_2(-1+2x_3)(x_3-1)(-1+2x_1)(x_1-1)(x_2-1) \\
\vartheta_{13}(x_1,x_2,x_3) & = & 16x_1x_2(-1+2x_3)(x_3-1)(x_2-1)(x_1-1) \\
\vartheta_{14}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_1x_3(-1+2x_2)(x_2-1)(-1+2x_3)(x_1-1) \\
\vartheta_{15}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_1x_2x_3(-1+2x_3)(x_2-1)(-1+2x_1) \\
\vartheta_{16}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_1x_2x_3(-1+2x_3)(-1+2x_2)(x_1-1) \\
\vartheta_{17}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_2x_3(-1+2x_1)(x_1-1)(-1+2x_3)(x_2-1) \\
\vartheta_{18}(x_1,x_2,x_3) & = & 16x_1x_2x_3(-1+2x_3)(x_2-1)(x_1-1) \\
\vartheta_{19}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_3(-1+2x_2)(x_2-1)(-1+2x_1)(x_1-1)(x_3-1) \\
\vartheta_{20}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_2x_3(-1+2x_1)(x_1-1)(x_3-1)(-1+2x_2) \\
\vartheta_{21}(x_1,x_2,x_3) & = & 16x_2x_3(-1+2x_1)(x_1-1)(x_3-1)(x_2-1) \\
\vartheta_{22}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_1x_3(-1+2x_2)(x_2-1)(x_3-1)(-1+2x_1) \\
\vartheta_{23}(x_1,x_2,x_3) & = & -4x_1x_2x_3(x_3-1)(-1+2x_2)(-1+2x_1) \\
\vartheta_{24}(x_1,x_2,x_3) & = & 16x_1x_2x_3(x_3-1)(x_2-1)(-1+2x_1) \\
\vartheta_{25}(x_1,x_2,x_3) & = & 16x_1x_3(-1+2x_2)(x_2-1)(x_3-1)(x_1-1) \\
\vartheta_{26}(x_1,x_2,x_3) & = & 16x_1x_2x_3(x_3-1)(-1+2x_2)(x_1-1) \\
\vartheta_{27}(x_1,x_2,x_3) & = & -64x_1x_2x_3(x_3-1)(x_2-1)(x_1-1)
\end{cases}
$$

Table des figures

2.1 Gauche : Type de non-conformité considérée en 3D, entre un hexaèdre (q2) et deux tétraèdres (t1 et t2). – Droite : Vue 2D d'une face hybride non-conforme entre l'hexaèdre q2 et les deux tétraèdres t1 et t2. 16

2.2 Exemple de non-conformité entre plusieurs éléments, sortant du cadre considéré. . 16

2.3 Exemples de non-conformités considérées. Gauche : $n_{raf} = 1$. – Droite : $n_{raf} = 2$. . 16

4.1 Application (affine) $F_{\widehat{T}}$ qui au triangle de référence $\widehat{T}$, associe un triangle quelconque T. 69

4.2 Application $F_{\widehat{Q}}$ qui au carré de référence $\widehat{Q}$, associe un quadrangle quelconque Q. 70

4.3 Application (affine) $F_{\widehat{Q}}$ qui au carré de référence $\widehat{Q}$, associe un rectangle Q. 70

4.4 Maillages hybrides triangulaires / quadrangulaires. Gauche : maillage conforme. – Droite : maillage non-conforme. 71

4.5 Exemple de non-conformité entre deux éléments 71

4.6 Gauche : Signal temporel $\mathfrak{f}(t)$ pour $t \in [0, 2.667 \times 10^{-8}]$. – Droite : fonction Gaussienne de dimension deux $g(x_1, x_2)$ représentée pour $(x_1, x_2) \in [-1.2, -0.8] \times [-0.2, 0.2]$. 77

4.7 Maillages quadrangulaires cartésiens et noeuds des degrés de liberté de la méthode GDDT-$\mathbb{Q}_k$ associée. En-haut à gauche : maillage 49×49 points et méthode GDDT-$\mathbb{Q}_1$. – En-haut à droite : maillage 25×25 points et méthode GDDT-$\mathbb{Q}_2$. – En-bas à gauche : maillage 17×17 points et méthode GDDT-$\mathbb{Q}_3$. – En-bas à droite : maillage 13×13 points et méthode GDDT-$\mathbb{Q}_4$. 78

4.8 Evolution en temps de la norme L^2 de l'erreur globale, pour chaque ordre d'interpolation. 79

4.9 Maillages structurés basés sur 17×17 points. Gauche : maillage triangulaire. – Milieu : maillage quadrangulaire . – Droite : maillage hybride (conforme). 80

4.10 Evolution en temps de l'énergie, pour quelques ordres d'interpolation. 80

4.11 Maillages hybrides et non-conformes (les interfaces hybrides correspondent aux interfaces non-conformes). En-haut à gauche : maillage basé sur 7×7 points. – En-haut à droite : maillage basé sur 13×13 points. – En-bas à gauche : maillage basé sur 19×19 points. – En-bas à droite : maillage basé sur 25×25 points. 82

4.12 Maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale en fonction de la racine carrée du nombre total de degrés de liberté, et pentes correspondantes. Haut : schéma LF2. – Bas : schéma LF4. 83

4.13 Maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale, en fonction du temps de calcul. Haut : schéma LF2. – Bas : schéma LF4. 85

4.14 Gauche : maillage triangulaire (non-structuré). – Droite : maillage hybride (non-structuré / structuré) et non-conforme. 86

4.15 Evolution en temps de la norme L^2 de l'erreur globale, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 87

4.16 Evolution en temps de deux composantes des solutions exactes et approchées (en fin de simulation et pour chaque ordre d'interpolation) au point $(0.3, 0.3)$ du domaine de calcul. Haut : H_y. – Bas : E_z. 89
4.17 Lignes de contour de la composante H_x des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation) au temps $t = 6.667 \times 10^{-9}$ s (équivalent en mètres : 2 m). 90
4.18 Lignes de contour de la composante H_x des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation) au temps $t = 6.667 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 20 m). 91
4.19 Gauche : maillage triangulaire (non-structuré). – Droite : maillage hybride triangulaire / quadrangulaire (non-structuré / structuré) et non-conforme. 92
4.20 Maillages modélisant le profil d'une aile d'avion. Haut : triangulaire. - Bas : hybride et non-conforme. 94
4.21 Evolution en temps de la composante E_z de la solution approchée pour les six ordres d'interpolation testés (séparés en deux graphiques) au point $(1.6, -0.6)$ du domaine de calcul. 95
4.22 Evolution en temps de la composante E_z de la solution approchée pour les six ordres d'interpolation testés (séparés en deux graphiques) au point $(-0.1, 0.0)$ du domaine de calcul. 96
4.23 Lignes de contour de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (calculée durant la dernière période de la simulation) de deux composantes de la solution approchée pour trois ordres d'interpolation. Gauche : H_y. – Droite : E_z. 97
4.24 Lignes de contour de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (calculée durant la dernière période de la simulation) de deux composantes de la solution approchée pour trois ordres d'interpolation. Gauche : H_y. – Droite : E_z. 98
4.25 Maillage triangulaire d'un milieu hétérogène. Gauche : grossissement $\times 1$. – Droite : grossissement $\times 10$. 99
4.26 Maillage hybride et non-conforme d'un milieu hétérogène. Gauche : grossissement $\times 1$. – Droite : grossissement $\times 10$. 100
4.27 Coupe 1D selon x_1 (x_2 fixé en 0.0) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (calculée durant la dernière période de la simulation) de la composante H_y des solutions exacte et approchées, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 101
4.28 Coupe 1D selon x_1 (x_2 fixé en 0.0) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète (calculée durant la dernière période de la simulation) de la composante E_z des solutions exacte et approchées, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 102
4.29 Lignes de contour (répartition continue des couleurs) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète de la composante H_x des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation). 103
4.30 Zoom ($\times 14$) sur les lignes de contour (répartition des couleurs en bandes) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète de la composante H_x des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation). 104

4.31 Lignes de contour (répartition continue des couleurs) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète de la composante E_z des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation). 105
4.32 Zoom ($\times 14$) sur les lignes de contour (répartition des couleurs en bandes) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète de la composante E_z des solutions exactes et approchées (pour chaque ordre d'interpolation). 106
4.33 Maillages d'un domaine comportant deux obstacles métalliques. Haut : triangulaire. – Bas : hybride et non-conforme. 108
4.34 Lignes de contour de $|E_z|$ (i.e. intensité du champ électrique) pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$; aux temps, respectivement de gauche à droite et de haut en bas : $t = 6.667 \times 10^{-9}$ s, 1×10^{-8} s, 1.167×10^{-8} s, 1.333×10^{-8} s, 1.5×10^{-8} s, 1.833×10^{-8} s (équivalents en mètres : 2 m, 3 m, 3.5 m, 4 m, 4.5 m, 5.5 m). 109
4.35 Lignes de contour de $|E_z|$ pour la méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_4$, au temps final de la simulation : $t = 2.667 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 8 m). 110
4.36 Evolution en temps de la composante H_x de la solution approchée pour chaque ordre d'interpolation en trois points du domaine de calcul. Haut : $(0.0, 0.0)$. – Milieu : $(1.0, -1.0)$. – Bas : $(-0.2, 1.25)$. 112
4.37 Lignes de contour de $|E_z|$ pour chaque ordre d'interpolation, au temps $t = 1.333 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 4 m). 113

5.1 Coupe transversale de maillages volumiques, utilisés pour l'étude de convergence et basés sur une discrétisation $17 \times 17 \times 17$ points (les autres maillages basés sur $5 \times 5 \times 5$, $9 \times 9 \times 9$ et $33 \times 33 \times 33$ points, ont le même aspect). Gauche : tétraédrique. – Milieu : hexaédrique. – Droite : hybride et non-conforme ($n_{raf} = 1$). . . . 120
5.2 Maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale en fonction de $1/h$, et pentes correspondantes. Haut : méthodes DGTD-$\mathbb{P}_p$ et DGTD-$\mathbb{Q}_k$. – Bas : méthode DGTD-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$. 121
5.3 Maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale en fonction de $1/h$ et pentes correspondantes, pour des hybridations DGTD-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ (échelle ici différente de celles en FIG. 5.2) faisant intervenir l'ordre 0. 122
5.4 Coupe transversale de maillages volumiques, hybrides et non-conforme ($n_{raf} = 1$), et boîte délimitant le domaine de calcul. Gauche : basé sur $17 \times 9 \times 9$ points, partie tétraédrique pour $x_1 \geq 1$ et partie hexaédrique pour $x_1 \leq 1$.– Droite : basé sur $65 \times 33 \times 33$ points, partie tétraédrique pour $x_1 \leq 1$ et partie hexaédrique pour $x_1 \geq 1$. 123
5.5 Coupe 1D selon x_1 (x_2 et x_3 fixés en 0.5) de la composante H_y des solutions exacte et approchées, au temps final de la simulation : $t = 3.33 \times 10^{-9}$ s (équivalent en mètres : 1 m), pour chaque maillage et chaque ordre d'interpolation. Gauche : tests sur les maillages basés de $17 \times 9 \times 9$ points. – Droite : tests sur les maillages de $65 \times 33 \times 33$ points. 124
5.6 Coupe transversale de maillages volumiques. Gauche : tétraédrique. – Droite : hybride et non-conforme ($n_{raf} = 4$). 125
5.7 Evolution en temps de la norme L^2 de l'erreur globale, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 126
5.8 Coupe transversale de maillages volumiques. Gauche : tétraédrique. – Droite : hybride et non-conforme ($n_{raf} = 2$). 128

5.9 Evolution en temps des composante H_x (gauche) et E_y (droite) de la solution approchée pour chaque ordre d'interpolation en trois points du domaine de calcul. Haut : $(0.0, 1.1, 0.0)$. – Milieu : $(2.0, 2.0, 2.0)$. – Bas : $(0.0, 1.75, -1.75)$. 129
5.10 Lignes de contour de la composante H_x de la solution approchée (pour chaque ordre au temps final de la simulation : $t = 3.33 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 10 m). En-haut à gauche : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$. – En-haut à droite : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. – Bas : méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$. 130
5.11 Lignes de contour de la composante H_z de la solution approchée (pour chaque ordre au temps final de la simulation : $t = 3.33 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 10 m). En-haut à gauche : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$. – En-haut à droite : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. – Bas : méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$. 131
5.12 Lignes de contour de la composante E_z de la solution approchée (pour chaque ordre au temps final de la simulation : $t = 3.33 \times 10^{-8}$ s (équivalent en mètres : 10 m). En-haut à gauche : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2$. – En-haut à droite : méthode GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. – Bas : méthode GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$. 132
5.13 Maillage surfacique de la tête, de deux points de vue différents. 133
5.14 Deux coupes transversales de maillages volumiques. Haut : tétraédrique. – Bas : hybride et non-conforme ($n_{raf} = 3$). Chaque couleur représente un milieu de propagation. 133
5.15 Evolution en temps des composante H_y (gauche) et E_z (droite) de la solution approchée pour chaque ordre d'interpolation en deux points du domaine de calcul, extérieurs à la tête. Haut : situé au centre du terme source. – Bas : situé de l'autre côté de la tête (dans la partie hexaédrique pour le maillage hybride). 135
5.16 Evolution en temps des composante H_y (gauche) et E_z (droite) de la solution approchée pour chaque ordre d'interpolation en deux points du domaine de calcul, intérieurs à la tête. Haut : situé près de l'oreille. – Bas : situé au centre de la tête. . . 136
5.17 Lignes de contour, à la surface (gauche) et à l'intérieur (coupe tranversale, droite) de la tête, du module (en norme 2) de la partie réelle de la transformée de Fourier discrète du champ électrique approché (i.e. $\sqrt{E^2_{x,\text{four}} + E^2_{y,\text{four}} + E^2_{z,\text{four}}}$), pour les trois ordres d'interpolation. Haut : GDDT-$\mathbb{P}_2$. – Milieu : GDDT-$\mathbb{P}_2\mathbb{Q}_2$. – Bas : GDDT-$\mathbb{P}_1\mathbb{Q}_2$. 137

Liste des tableaux

4.1 Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale, pour chaque ordre d'interpolation. 78
4.2 Pas de temps globaux (en picosecondes). En-haut à gauche : méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ sur le maillage triangulaire. – En-haut à droite : méthode GDDT-$\mathbb{Q}_k$ sur le maillage quadrangulaire . – Bas : GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ sur le maillage hybride. 81
4.3 Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 87
4.4 Différentes comparaisons entre méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ et méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$: rapport des temps de calcul, rapport des degrés de liberté et rapport des maximums (en temps) de l'erreur L^2 globale. 88
4.5 Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté, maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale et pas de temps global (en picosecondes), pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 92
4.6 Différentes comparaisons entre méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ et méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$: rapport des temps de calcul, rapport des maximums (en temps) de l'erreur L^2 globale et rapport des pas de temps globaux. 93
4.7 Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et pas de temps global, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 95
4.8 Différentes comparaisons entre méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ et méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$: rapport des temps de calcul et rapport des degrés de liberté. 96
4.9 Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et norme L^2 de l'erreur globale de la transformée de Fourier discrète (de la solution approchée), pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 100
4.10 Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et erreur L^∞ relative à GDDT-$\mathbb{P}_4$, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 110

5.1 Caractéristiques électromagnétiques des milieux considérés. 119
5.2 Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et maximum (en temps) de la norme L^2 de l'erreur globale, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 126
5.3 Différentes comparaisons entre méthode GDDT-$\mathbb{P}_p$ et méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$: rapport des temps de calcul et rapport des maximums (en temps) de l'erreur L^2 globale. 127
5.4 Temps de calcul, nombre total de degrés de liberté et pas de temps global (en picosecondes), pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 128
5.5 Temps de calcul et nombre total de degrés de liberté, pour les deux maillages et chaque ordre d'interpolation. 134

Bibliographie

[Beilina & Grote 2010] L. Beilina et M. J. Grote. *Adaptive hybrid finite element/difference method for Maxwell's equations*. TWMS J. Pure Appl. Math., vol. 1, no. 2, pages 176–197, 2010. (Cité en page 5)

[Bergot & Duruflé 2012] M. Bergot et M. Duruflé. *Higher-order discontinuous Galerkin method for pyramidal elements using orthogonal bases*. Numer. Meth. Part. Differ. Equat., vol. 29, no. 1, pages 144–169, 2012. (Cité en page 141)

[Bergot *et al.* 2010] M. Bergot, G. Cohen et M. Duruflé. *Higher-order finite elements for hybrid meshes using new nodal pyramidal elements*. J. Sci. Comput., vol. 42, pages 345–381, 2010. (Cité en page 15)

[Bernardi *et al.* 2001] P. Bernardi, M. Cavagnaro, S. Pisa et E. Piuzzi. *Power absorption and temperature elevations induced in the human head by a dual-band monopole-helix antenna phone*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 49, no. 12, pages 2539–2546, 2001. (Cité en page 2)

[Cai & Deng 2003] W. Cai et S. Deng. *An upwinding embedded boundary method for Maxwell's equations in media with material interfaces : 2D case*. J. Comput. Phys., vol. 190, no. 1, pages 159–183, 2003. (Cité en page 75)

[Canouet 2003] N. Canouet. *Méthodes de Galerkin Discontinu pour la résolution du système de Maxwell sur des maillages localement raffinés non-conformes*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2003. (Cité en page 122)

[Carpenter & Kennedy 1994] M. H. Carpenter et C. A. Kennedy. *Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes*. NASA Langley Research center, vol. TM 109112, 1994. (Cité en page 27)

[Chen *et al.* 2005] M.-H. Chen, B. Cockburn et F. Reitich. *High-order RKDG Methods for Computational Electromagnetics*. J. Sci. Comput., vol. 22-23, pages 205–226, 2005. (Cité en page 27)

[Ciarlet 1978] P. Ciarlet. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North Holland-Elsevier Science Publisher, Amsterdam, New York, Oxford, 1978. (Cité en page 52)

[Cioni *et al.* 1993] J.-P. Cioni, L. Fezoui et H. Steve. *A parallel time-domain Maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes*. IMPACT Comput. Sci. Eng., vol. 5, no. 3, pages 215–247, 1993. (Cité en pages 3 et 4)

[Cohen *et al.* 2006] G. Cohen, X. Ferrieres et S. Pernet. *A spatial high order hexahedral discontinuous Galerkin method to solve Maxwell's equations in time-domain*. J. Comput. Phys., vol. 217, no. 2, pages 340–363, 2006. (Cité en page 4)

[Cools 2003] R. Cools. *An encyclopaedia of cubature formulas*. J. of Complexity, vol. 19, pages 445–453, 2003. (Cité en page 72)

[Davies *et al.* 2009] R. W. Davies, K. Morgan et O. Hassan. *A high order hybrid finite element method applied to the solution of electromagnetic wave scattering problems in the time domain*. Comput. Mech., vol. 44, pages 321–331, 2009. (Cité en page 5)

[Degerfeldt & Rylander 2006] D. Degerfeldt et T. Rylander. *A brick-tetrahedron finite-element interface with stable hybrid explicit-implicit time-stepping for Maxwell's equations*. J. Comput. Phys., vol. 220, pages 383–393, 2006. (Cité en page 5)

[Dosopoulos & Lee 2010a] S. Dosopoulos et J. F. Lee. *Interconnect and lumped elements modeling in interior penalty discontinuous Galerkin time-domain methods*. J. Comput. Phys., vol. 229, no. 2, pages 8251–8536, 2010. (Cité en page 4)

[Dosopoulos & Lee 2010b] S. Dosopoulos et J. F. Lee. *Interior penalty discontinuous Galerkin finite element method for the time-dependent first order Maxwell's equations*. IEEE Trans. on. Antennas and Propag., vol. 58, no. 12, pages 4085–4090, 2010. (Cité en page 4)

[Dunavant 1985] D. A. Dunavant. *High degree efficient symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle*. Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 21, pages 1129–1148, 1985. (Cité en page 117)

[Edelvik & Ledfelt 2000] F. Edelvik et G. Ledfelt. *Explicit Hybrid Time Domain Solver for the Maxwell Equations in 3D*. J. Sci. Comput., vol. 15, no. 1, pages 61–78, 2000. (Cité en page 4)

[Edelvik & Ledfelt 2002] F. Edelvik et G. Ledfelt. *A comparison of time-domain hybrid solver for complex scattering problems*. Int. J. Numer. Model., vol. 15, pages 475–487, 2002. (Cité en page 5)

[Fahs & Lanteri 2010] H. Fahs et S. Lanteri. *A high-order non-conforming discontinuous Galerkin method for time-domain electromagnetics*. J. Comput. Appl. Math., vol. 234, pages 1088–1096, 2010. (Cité en pages 4 et 15)

[Fahs 2008] H. Fahs. *Méthodes de type Galerkin discontinu d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires sur des maillages simplexes non-conformes*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2008. (Cité en pages 46 et 139)

[Fahs 2009a] H. Fahs. *Development of a hp-like discontinuous Galerkin time-domain method on non-conforming simplicial meshes for electromagnetic wave propagation*. Int. J. Numer. Anal. Mod., vol. 6, pages 193–216, 2009. (Cité en pages 4 et 15)

[Fahs 2009b] H. Fahs. *High-order Leap-Frog based discontinuous Galerkin method for the time-domain Maxwell equations on non-conforming simplicial meshes*. Numer. Math. Theor. Meth. Appl., vol. 2, no. 3, pages 275–300, 2009. (Cité en page 27)

[Ferrieres *et al.* 2004] X. Ferrieres, J.-P. Parmantier, S. Bertuol et A. R. Ruddle. *Application of a hybrid finite difference/finite volume method to solve an automotive EMC problem*. IEEE Trans. on. on Eletromag. Compatibility, vol. 46, no. 4, pages 624–634, 2004. (Cité en page 4)

[Fezoui *et al.* 2005] L. Fezoui, S. Lanteri, S. Lohrengel et S. Piperno. *Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes*. ESAIM : Math. Model. Numer. Anal., vol. 39, no. 6, pages 1149–1176, 2005. (Cité en pages 4, 32, 46 et 139)

[Garcia *et al.* 2008] S. G. Garcia, M. F. Pantoja, C. M. de Jong van Coevorden, A. R. Bretones et R. G. Martin. *A new hybrid DGTD/FDTD method in 2-D*. IEEE Microw. Wireless Compon. Lett., vol. 18, no. 12, pages 764–766, 2008. (Cité en page 5)

[Grote & Mitkova 2010] M. J. Grote et T. Mitkova. *Explicit local time-stepping methods for Maxwell's equations*. J. Comput. Appl. Math., vol. 234, pages 3283–3302, 2010. (Cité en page 141)

[Halleröd & Rylander 2008] T. Halleröd et T. Rylander. *Electric and magnetic losses modeled by a stable hybrid with explicit-implicit time-stepping for Maxwell's equations*. J. Comput. Phys., vol. 227, pages 4499–4511, 2008. (Cité en page 5)

[Helluy 1994] P. Helluy. *Résolution numérique des équations de Maxwell harmonique par une méthode d'éléments finis discontinus*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1994. (Cité en page 3)

[Hermann *et al.* 2010] V. Hermann, M. Käser et C. E. Castro. *Non-conforming hybrid meshes for efficient 2-D wave propagation using the Discontinuous Galerkin Method*. Geophys. J. Int., vol. 184, pages 746–758, 2010. (Cité en page 5)

[Hesthaven & Warburton 2002] J. S. Hesthaven et T. Warburton. *Nodal high-order methods on unstructured grids. I. Time-domain solution of Maxwell's equations*. J. Comput. Phys., vol. 181, no. 1, pages 186–221, 2002. (Cité en pages 4 et 27)

[König *et al.* 2010] M. König, K. Busch et J. Niegemann. *The discontinuous Galerkin time-domain method for Maxwell's equations with anisotropic materials*. Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications, vol. 8, no. 4, pages 303–309, 2010. (Cité en page 4)

[Lanteri & Scheid 2011] S. Lanteri et C. Scheid. *Convergence of a Discontinuous Galerkin scheme for the mixed time domain Maxwell's equations in dispersive media*. Rapport technique 7634, INRIA, 2011. (Cité en pages 46 et 65)

[Léger 2011] R. Léger. *Couplage pour l'aéroacoustique de schémas aux différences finies en maillage structuré avec des schémas de type éléments finis discontinus en maillage non structuré*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2011. (Cité en pages 5 et 123)

[Lin *et al.* 2000] J.C. Lin, S. Hirai, C.-L. Chiang, W.-L. Hsu, J.-L. Su et Y.-J.Wang. *Computer simulation and experimental studies of SAR distributions of interstitial arrays of sleeved-slot microwave antennas for hyperthermia treatment of brain tumors*. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 48, no. 11, pages 2191–2198, 2000. (Cité en page 2)

[Maxwell 1862] J. C. Maxwell. *On physical lines of force*. Phil. Mag. and J. of Sci., 1861–1862. (Cité en page 10)

[Maxwell 1865] J. C. Maxwell. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Phil. Trans. R. Soc. Lond., vol. 155, pages 459–512, 1865. (Cité en page 10)

[Maxwell 1873] J. C. Maxwell. A treatise on electricity and magnetism. Oxford : Clarendon Press, 1873. (Cité en page 10)

[Montseny *et al.* 2008] E. Montseny, S. Pernet, X. Ferrieres et G. Cohen. *Dissipative terms and local time-stepping improvements in a spatial high order discontinuous Galerkin scheme for the time-domain Maxwell's equations*. J. Comput. Phys., vol. 227, no. 14, pages 6795–6820, 2008. (Cité en page 4)

[Moya 2012] L. Moya. *Temporal convergence of a locally implicit discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations*. ESAIM : M2AN, vol. 46, no. 5, pages 1225–1246, 2012. (Cité en page 141)

[Nedelec 1980] J.-C. Nedelec. *Mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$. Numer. Math., vol. 35, pages 315–341, 1980. (Cité en page 3)

[Nedelec 1986] J.-C. Nedelec. *A new family of mixed finite elements in* $\mathbb{R}^3$. Numer. Math., vol. 50, pages 57–81, 1986. (Cité en page 3)

[Niegemann *et al.* 2009] J. Niegemann, M. König, K. Stannigel et K. Busch. *Higher-order time-domain methods for the analysis of nano-photonic systems*. Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications, vol. 7, no. 1, pages 2–11, 2009. (Cité en page 4)

[Nordström & Gong 2006] J. Nordström et J. Gong. *A stable hybrid method for hyperbolic problems*. J. Comput. Phys., vol. 212, pages 436–453, 2006. (Cité en page 4)

[Pernet & Ferrieres 2007] S. Pernet et X. Ferrieres. *Hp a-priori error estimates for a non-dissipative spectral discontinuous Galerkin method to solve the Maxwell equations in the time domain*. Math. Comput., vol. 76, pages 1801–1832, 2007. (Cité en page 46)

[Pernet *et al.* 2006] S. Pernet, X. Ferrieres et G. Cohen. *High spatial order finite element method to solve Maxwell's equations in time-domain*. IEEE Trans. on. Antennas and Propag., vol. 53, no. 9, pages 2889–2899, 2006. (Cité en page 4)

[Piperno *et al.* 2002] S. Piperno, M. Remaki et L. Fezoui. *A nondiffusive finite volume scheme for the three-dimensional Maxwell's equations on unstructured meshes*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 39, no. 6, pages 2089–2108, 2002. (Cité en pages 3 et 4)

[Piperno 2006] S. Piperno. *Symplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problem*. ESAIM : M2AN, vol. 40, no. 5, pages 815–841, 2006. (Cité en page 141)

[Ratiu *et al.* 2003] P. Ratiu, B. Hillen, J. Glaser et D. P. Jenkins. Medicine Meets Virtual Reality 11 - NextMed : Health Horizon, volume 11, chapitre Visible Human 2.0 - the next generation, pages 275–281. IOS Press, 2003. (Cité en page 119)

[Reitich & Tamma 2004] F. Reitich et K.K. Tamma. *State-of-the-art, trends and directions in computational electromagnetics*. CMES Comput. Model. Eng. Sci., vol. 5, no. 4, pages 287–294, 2004. (Cité en page 2)

[Scarella *et al.* 2006] G. Scarella, O. Clatz, S. Lanteri, G. Beaume, S. Oudot, J.-P. Pons, S. Piperno, P. Joly et J. Wiart. *Realistic numerical modelling of human head tissues exposure to electromagnetic waves from cellular phones*. Comptes Rendus Physique, vol. 7, no. 5, pages 501–508, 2006. (Cité en page 2)

[Schnepp *et al.* 2010] S. Schnepp, E. Gjonaj et T. Weiland. *A hybrid finite integration-finite volume scheme*. J. Comput. Phys., vol. 229, no. 11, pages 4075–4096, 2010. (Cité en page 5)

[Siauve *et al.* 2003] N. Siauve, L. Nicolas, C. Vollaire et C. Marchal. *3D modeling of electromagnetic fields in local hyperthermia*. Eur. Phys. J. AP, vol. 21, pages 243–250, 2003. (Cité en page 2)

[Songoro *et al.* 2010] H. Songoro, M. Vogel et Z. Cendes. *Keeping time with Maxwell's equations*. IEEE Microw. Mag., vol. 11, no. 2, pages 42–49, 2010. (Cité en page 4)

[Spachmann *et al.* 2002] H. Spachmann, R. Schuhmann et T. Weiland. *Higher order explicit time integration schemes for Maxwell's equations*. Int. J. Numer. Model., vol. 15, pages 419–437, 2002. (Cité en page 27)

[Stannigel *et al.* 2009] K. Stannigel, M. König, J. Niegemann et K. Busch. *Discontinuous Galerkin time-domain computations of metallic nanostructures*. Optics Express, vol. 17, no. 17, pages 14934–14947, 2009. (Cité en page 4)

[Taflove & Hagness 2005] A. Taflove et S. C. Hagness. Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method - 3rd ed. Artech House Publishers, 2005. (Cité en page 3)

[Turkel & Yefet 2000] E. Turkel et A. Yefet. *On the construction of a high order difference scheme for complex domains in a Cartesian grid*. Appl. Numer. Math., vol. 33, no. 1-4, pages 113–124, 2000. (Cité en page 74)

[Venkatarayalu *et al.* 2007] N. V. Venkatarayalu, R. Lee, Y. B. Gan et L. W. Li. *A stable FDTD subgridding method based on finite element formulation with hanging variables*. IEEE Trans. on. Antennas and Propag., vol. 55, no. 3, pages 907–915, 2007. (Cité en page 5)

[Verwer 2010] J. G. Verwer. *Component splitting for semi-discrete Maxwell equations*. BIT Numer. Math., vol. 51, no. 2, pages 427–445, 2010. (Cité en page 141)

[Xie *et al.* 2009] Z. Q. Xie, O. Hassan et K. Morgan. *A parallel implicit/explicit hybrid time domain method for computational electromagnetics*. Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 80, pages 1093–1109, 2009. (Cité en page 5)

[Yang *et al.* 2000] M. Yang, Y. Chen et R. Mittra. *Hybrid finite-difference/finite-volume time-domain analysis for microwave integrated circuits with curved PEC surfaces using a nonuniform rectangular grid*. IEEE Trans. on. Microwave Theor. and Tech., vol. 48, no. 6, pages 969–975, 2000. (Cité en page 4)

[Yee 1966] K. S. Yee. *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media*. IEEE Trans. on. Antennas and Propag., vol. 14, pages 302–307, 1966. (Cité en page 3)

[Young 2001] J. L. Young. *High-order, leapfrog methodology for the temporally dependent Maxwell's equations*. Radio Sci., vol. 36, no. 1, pages 9–17, 2001. (Cité en page 27)

[Zhu *et al.* 2012] B. Zhu, J. Chen, W. Zhong et Q. H. Liu. *A hybrid finite-element/finite-difference method with an implicit-explicit time-stepping scheme for Maxwell's equations*. Int. J. Numer. Model., vol. 25, pages 607–620, 2012. (Cité en page 5)

Résumé : Cette thèse porte sur l'étude d'une méthode de type Galerkin discontinu en domaine temporel (GDDT), afin de résoudre numériquement les équations de Maxwell instationnaires sur des maillages hybrides tétraédriques/hexaédriques en 3D (triangulaires/quadrangulaires en 2D) et non-conformes, que l'on note méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$. Comme dans différents travaux déjà réalisés sur plusieurs méthodes hybrides (par exemple des combinaisons entre des méthodes Volumes Finis et Différences Finies, Éléments Finis et Différences Finies, etc.), notre objectif principal est de mailler des objets ayant une géométrie complexe à l'aide de tétraèdres, pour obtenir une précision optimale, et de mailler le reste du domaine (le vide environnant) à l'aide d'hexaèdres impliquant un gain en terme de mémoire et de temps de calcul. Dans la méthode GDDT considérée, nous utilisons des schémas de discrétisation spatiale basés sur une interpolation polynomiale nodale, d'ordre arbitraire, pour approximer le champ électromagnétique. Nous utilisons un flux centré pour approcher les intégrales de surface et un schéma d'intégration en temps de type saute-mouton d'ordre deux ou d'ordre quatre. Après avoir introduit le contexte historique et physique des équations de Maxwell, nous présentons les étapes détaillées de la méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$. Nous réalisons ensuite une analyse de stabilité L^2 théorique, en montrant que cette méthode conserve une énergie discrète et en exhibant une condition suffisante de stabilité de type CFL sur le pas de temps, ainsi que l'analyse de convergence en h (théorique également), conduisant à un estimateur d'erreur a-priori. Ensuite, nous menons une étude numérique complète en 2D (ondes TMz), pour différents cas tests, des maillages hybrides et non-conformes, et pour des milieux de propagation homogènes ou hétérogènes. Nous faisons enfin de même pour la mise en œuvre en 3D, avec des simulations réalistes, comme par exemple la propagation d'une onde électromagnétique dans un modèle hétérogène de tête humaine. Nous montrons alors la cohérence entre les résultats mathématiques et numériques de cette méthode GDDT-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$, ainsi que ses apports en termes de précision et de temps de calcul.

Mots clés : équations de Maxwell, méthode de type Galerkin discontinu, méthode hybride, multi-éléments, maillage non-conforme, stabilité, convergence, précision d'ordre élevé, temps de calcul

High order non-conforming multi-element discontinuous Galerkin method for time-domain electromagnetics

Abstract : This thesis is concerned with the study of a Discontinuous Galerkin Time-Domain method (DGTD), for the numerical resolution of the unsteady Maxwell equations on hybrid tetrahedral/hexahedral in 3D (triangular/quadrangular in 2D) and non-conforming meshes, denoted by DGTD-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ method. Like in several studies on various hybrid time domain methods (such as a combination of Finite Volume with Finite Difference methods, or Finite Element with Finite Difference, etc.), our general objective is to mesh objects with complex geometry by tetrahedra for high precision and mesh the surrounding space by square elements for simplicity and speed. In the discretization scheme of the DGTD method considered here, the electromagnetic field components are approximated by a high order nodal polynomial, using a centered approximation for the surface integrals. Time integration of the associated semi-discrete equations is achieved by a second or fourth order Leap-Frog scheme. After introducing the historical and physical context of Maxwell equations, we present the details of the DGTD-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ method. We prove the L^2 stability of this method by establishing the conservation of a discrete analog of the eletromagnetic energy and a sufficient CFL-like stability condition is exhibited. The theoritical convergence of the scheme is also studied, this leads to a-priori error estimate that takes into account the hybrid nature of the mesh. Afterward, we perform a complete numerical study in 2D (TMz waves), for several test problems, on hybrid and non-conforming meshes, and for homogeneous or heterogeneous media. We do the same for the 3D implementation, with more realistic simulations, for example the propagation in a heterogeneous human head model. We show the consistency between the mathematical and numerical results of this DGTD-$\mathbb{P}_p\mathbb{Q}_k$ method, and its contribution in terms of accuracy and CPU time.

Keywords : Maxwell equations, discontinuous Galerkin method, hybrid method, multi-element, non-conforming mesh, stability, convergence, high order accuracy, CPU time