



Réduction des modèles numériques en dynamique linéaire basse fréquence des automobiles

Adrien Arnoux

► To cite this version:

Adrien Arnoux. Réduction des modèles numériques en dynamique linéaire basse fréquence des automobiles. Autre. Université Paris-Est, 2012. Français. NNT : 2012PEST1019 . tel-00806508

HAL Id: tel-00806508

<https://theses.hal.science/tel-00806508>

Submitted on 1 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS-EST

Année 2012

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement

par

Adrien ARNOUX

le 03 octobre 2012

Titre :

**Réduction des modèles numériques en dynamique
linéaire basse fréquence des automobiles**

Directeur de thèse

Professeur Christian SOIZE

Jury

M. Denis AUBRY ,	professeur, <i>président</i>
M. Anas BATOU ,	maitre de conférence, <i>examineur</i>
M. Geert DEGRANDE ,	professeur , <i>rapporteur</i>
M. Laurent GAGLIARDINI ,	PSA Peugeot Citroën, <i>examineur</i>
M. Roger OHAYON ,	professeur, <i>rapporteur</i>
M. Christian SOIZE ,	professeur, <i>directeur de thèse</i>

Table des matières

Notations	vii
1 Introduction	1
1.1 Contexte de la recherche	2
1.2 Positionnement de la recherche	3
1.3 Objectifs et stratégie de la recherche	6
1.4 Plan de la thèse	7
2 Estimation des fréquences de coupure	9
2.1 Introduction	10
2.2 Détermination des fréquences de coupure pour les sous-domaines flexibles. .	11
2.3 Détermination des fréquences de coupure pour les corps creux (partie raide). .	12
2.4 Détermination de la fréquence de coupure pour la cavité acoustique	13
2.5 Conclusion	15
3 Construction du modèle réduit.	17
3.1 Contexte et étapes de la méthode	18
3.2 Problème aux limites et formulation variationnelle	19
3.2.1 Définition du problème	19
3.2.2 Forme faible du problème aux limites	20
3.2.3 Modes propres élastiques et analyse modale	21
3.3 Construction d'un modèle réduit	22
3.3.1 Décomposition de la forme bilinéaire de masse	22

TABLE DES MATIÈRES

3.3.2	Base des déplacements globaux et base des déplacements locaux . . .	25
3.3.3	Approximation par Eléments Finis	27
3.4	Application sur un modèle EF d'automobile	32
3.4.1	Présentation du modèle EF d'une structure automobile "nue" . . .	32
3.4.2	Réponses calculées avec le modèle nominal de référence	34
3.4.3	Calcul des vecteurs propres des déplacements globaux et des vecteurs propres des déplacements locaux	38
3.4.4	Calcul des fonctions de réponse en fréquence avec les différents modèles réduits	40
3.4.5	Calcul des fonctions de réponse en fréquence avec le modèle réduit des déplacements globaux avec correction d'amortissement	43
3.5	Influence du nombre de sous-domaines	47
3.6	Conclusion	49
4	Décomposition du domaine en sous-domaines par la Fast Marching Method	51
4.1	Principe de la Fast Marching Method	52
4.2	Algorithme de base de la FMM	54
4.2.1	L'algorithme	54
4.2.2	Calcul de la distance g	55
4.3	Validation de la version de base de la FMM sur un modèle simple 2D . . .	56
4.3.1	Modèle simple 2D avec des éléments QUA4	56
4.3.2	Modèle simple 2D avec éléments TRI3	58
4.4	FMM pour les éléments TRI3	58
4.4.1	Mise à jour de la distance pour des mailles triangulaire avec angle aigu	59

4.4.2	Mise à jour des valeurs de g pour un maillage triangulaire avec d'angles obtus	62
4.4.3	Application un domaine 2D avec angles aigus et angles obtus	63
4.5	Construction des sous-domaines	66
4.6	Décomposition en sous-domaines pour un modèle numérique de structure automobile "nue"	66
4.7	Conclusion	69
5	Modèle réduit stochastique	71
5.1	Introduction	72
5.2	Approche probabiliste non paramétrique	73
5.2.1	Principe de la méthode	73
5.2.2	Normalisation des matrices aléatoires et construction de la loi de probabilité	74
5.2.3	Générateur de réalisations indépendantes des matrices aléatoires . .	74
5.2.4	Loi de probabilité de la matrice aléatoire $[G]$	75
5.3	Réponse du modèle réduit stochastique	76
5.3.1	Équation aléatoire	76
5.3.2	Construction des statistiques sur les observations	76
5.4	Identification des paramètres de dispersion	77
5.4.1	Construction des observations stochastiques	77
5.4.2	Réduction statistique des observations aléatoires	78
5.4.3	Identification	79
5.5	Application à un modèle de structure automobile "nue"	79
5.5.1	Réponses aléatoires de référence pris pour valeurs expérimentales .	79

TABLE DES MATIÈRES

5.6	Réponse aléatoire en fréquence calculée avec le modèle réduit stochastique	82
5.7	Conclusion	86
6	Application à un modèle complet de voiture	87
6.1	Présentation du modèle élément finis complet du véhicule automobile . . .	88
6.2	Décomposition du domaine Ω en sous-domaines	89
6.3	Modèle nominal de référence et région de confiance de référence	89
6.3.1	Analyse modale	89
6.3.2	Réponse fréquentielle de référence	90
6.3.3	Région de confiance de référence	92
6.4	Vecteurs propres des déplacements globaux et des déplacements locaux . .	95
6.4.1	Fonctions de réponse en fréquence	96
6.4.2	Correction du modèle réduit	99
6.5	Réponse aléatoire en fréquence calculée avec le modèle réduit stochastique du modèle numérique complet.	103
6.6	Conclusion	107
A	Estimation des fréquences de coupure (Etude complète)	111
	Bibliographie	139

Notations

Notations générales

$[A]$	: matrice déterministe
$[\mathbb{A}]$	: matrice EF du modèle moyen en coordonnées généralisées
$[\mathbf{A}]$	: matrice aléatoire
$\mathbf{u}$	: vecteur déterministe
$\mathbf{U}$	: vecteur aléatoire
$\mathbf{x}$	: point de $\mathbb{R}^3$
$d\mathbf{x}$	: mesure de volume, $= dx_1 dx_2 dx_3$
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$	: déplacement de la structure
σ	: tenseur des contraintes
ε	: tenseur des déformations
$\mathbb{1}_B(\mathbf{x})$	: fonction indicatrice de B , $= 1$ si $\mathbf{x} \in B$, $= 0$ si $\mathbf{x} \notin B$
δ_{ij}	: symbole de Kronecker, $= 1$ si $i = j$, $= 0$ si $i \neq j$
E	: Espérance mathématique d'une variable aléatoire
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	: Produit scalaire euclidien pour $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $\mathbb{R}^n$, $= \sum_{i=1}^n u_i v_i$

Notations spécifiques

Ω	: domaine de la structure
Γ	: frontière entre la structure et l'extérieur
Γ_0	: partie de Γ où la structure est fixée
$\partial\Omega$	: frontière de la structure, $= \Gamma \cup \Gamma_0$
$\mathbf{n}$	: normale extérieur à la structure
$\mathbf{f}^{surf}$	: champ de forces surfaciques sur Γ
$\mathbf{f}^{vol}$	: champ de forces volumiques dans Ω
ρ	: masse volumique
$\mathcal{B}$	: bande fréquentielle d'analyse
ω	: fréquence angulaire
Ω_j	: sous-domaine de Ω
n	: nombre de modes élastiques de la structure
m	: nombre de degrés de liberté de la structure
N	: nombre de sous-domaines Ω_j
n_{obs}	: nombre de point d'observation
n_g	: nombre de vecteurs propres de déplacement globaux
n_ℓ	: nombre de vecteurs propres de déplacement locaux

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à **Laurent Gagliardini**, encadrant PSA, et **Christian Soize**, directeur de thèse pour ce sujet de recherche passionnant. Cet encadrement m'a permis de développer mes connaissances aussi bien sur le plan scientifique que sur le plan de la recherche. Leur disponibilité ainsi que leur enthousiasme ont largement contribué à l'avancement de cette thèse. Je les remercie également, pour les réunions où nous avons des discussions passionnantes sur la thèse mais aussi et surtout sur de nombreux autres sujets. Les avoir côtoyés durant ces années sera sans aucun doute un apport considérable pour mon futur personnel et professionnel.

Je remercie **Anas Batou** pour sa disponibilité et surtout l'aide qu'il m'a apporté au cours de cette thèse. Grâce à lui, la programmation n'a plus de secret pour moi. Je le remercie pour la patience qu'il a eu pour m'expliquer l'ensemble de la théorie nécessaire pour réaliser ce travail de recherche.

Grâce à cet encadrement (que tout doctorant aimerait avoir), nous avons pu obtenir les résultats demandés et même aller un peu plus loin dans cette recherche.

Je remercie sincèrement l'ensemble des membres du jury. Je remercie **Geert Degrande** et **Roger Ohayon** d'avoir accepté de rapporter ma thèse, pour l'intérêt qu'ils ont montré vis-à-vis de mon travail. Je remercie **Denis Aubry** pour avoir accepté de présider le jury.

Je remercie toute l'équipe d'ACV de PSA Peugeot Citroën notamment, **Laurent Di Valentin**, **Arnaud Jund**, **Olivier Sauvage**, **Denis Thenail**, **Philippe Vannier** pour le soutien scientifique qu'ils m'ont apporté et tout ces bons moments passés au sein de PSA. J'aimerai également remercier tous les membres du Laboratoire MSME de l'université Paris-Est pour leur bonne humeur ainsi que leur gentillesse qui fait de ce laboratoire un cadre de recherche très agréable. Je remercie notamment **Evangéline**, **Christophe**, **Johann**, **Julien** pour ces discussions passionnantes lors des repas... Je remercie **Isabelle Bressan** pour toute l'aide qu'elle m'a fournie lors de ces 3 ans de thèse.

Je tiens à remercier ma **famille** et plus particulièrement ma **femme** pour leur soutien moral et leur présence. Que tous trouvent ici ma profonde reconnaissance.

Enfin, je remercie tous ceux que j'ai oubliés...

1

Introduction

Sommaire

1.1	Contexte de la recherche	2
1.2	Positionnement de la recherche	3
1.3	Objectifs et stratégie de la recherche	6
1.4	Plan de la thèse	7

L'objectif de ce chapitre est l'introduction du sujet de la thèse. Dans un premier temps, on aborde le contexte de la recherche, puis le positionnement du problème d'un point de vue scientifique et industriel. Finalement, dans la dernière partie, le plan de la thèse sera détaillé.

1.1 Contexte de la recherche

Depuis des décennies, les constructeurs automobiles ne cessent d'améliorer leurs véhicules en terme de technologies, de matériaux, de procédés de fabrication... Plus récemment, une grande partie de ces améliorations concerne le confort des utilisateurs en terme d'acoustique et de vibration. Afin de prédire le comportement acoustique des véhicules, de nombreuses méthodes numériques ont été développées dans le domaine des basse, moyenne et haute fréquences (BF, MF, HF).

Dans ce travail, nous nous intéresserons au comportement vibratoire BF des véhicules automobiles. Dans le milieu de l'automobile, on parle de basse fréquences lorsque l'on est en dessous de 200 Hz. L'objectif de cette recherche est d'améliorer la prédictibilité des modèles de calcul vibro-acoustique pour les avant-projets automobiles, c'est-à-dire lorsque les panneaux flexibles et les équipements ne sont pas encore complètement définis. Les automobiles constituent des systèmes dynamiques complexes et la prévision de leur comportement vibratoire et acoustique nécessite des outils numériques très avancés.

La multiplication des équipements et le raffinement des maillages ont pour conséquence une forte augmentation de la taille des modèles numériques (plus de 7 millions de DDL). Il devient intéressant de construire des modèles réduits qui soient de faible dimension tout en restant prédictifs dans le domaine BF.

Classiquement la bande BF est caractérisée par une faible densité modale avec des résonances bien séparées. Cette bande BF se distingue des bandes MF et HF pour lesquelles la densité modale est plus élevée (voir figure 1.1) et les réponses en fréquence plus lisse.

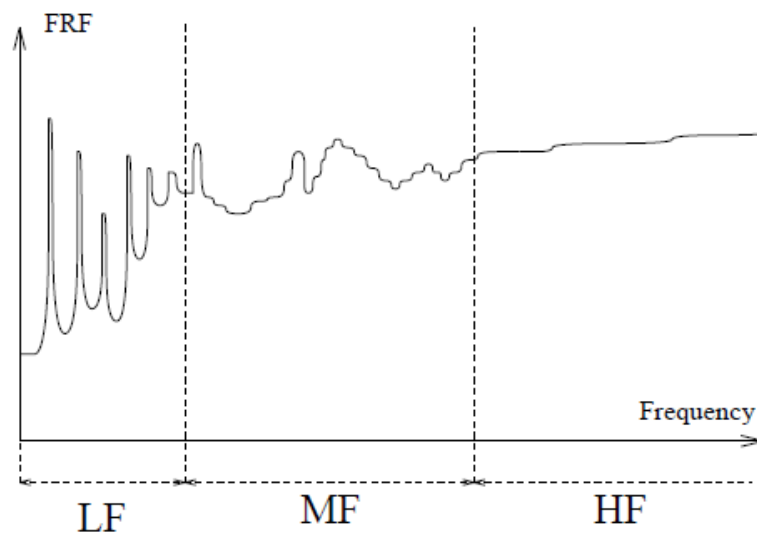


FIGURE 1.1 – Visualisation des bandes BF, MF et HF (extrait de Ohayon et Soize [75]).

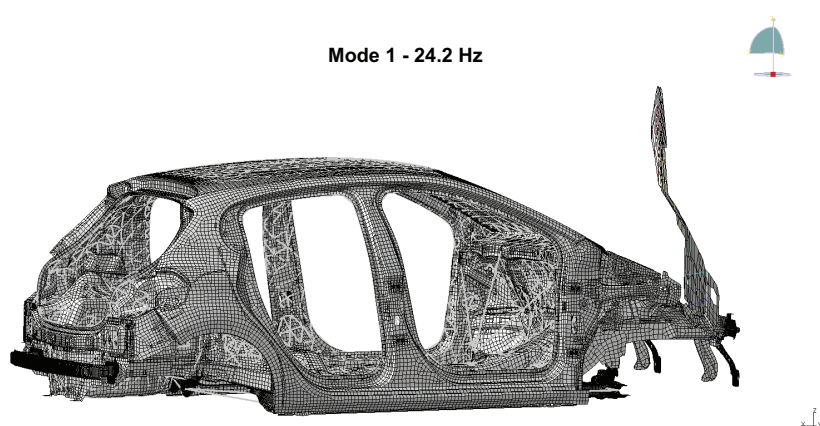


FIGURE 1.2 – Premier mode élastique (mode 1 à 24.2 Hz) : mode élastique local du pare choc.

La faible densité modale en BF permet l'utilisation de la méthode d'analyse modale pour construire efficacement des modèles réduits prédictifs.

La complexité accrue des véhicules automobiles change complètement le comportement BF. Ainsi, de nombreux modes locaux (induisant des déplacements sur une sous-partie du véhicule uniquement, voir figure 1.2) de panneaux et d'équipements viennent s'entrelacer et se coupler avec les modes globaux (induisant des déplacements sur l'ensemble du véhicule, voir figure 1.3) de l'ossature rigide ce qui augmentent fortement la densité modale en BF et ainsi les méthodes classiques permettant de construire un modèle réduit en BF sont moins efficaces. De plus, à cause du couplage entre les déplacements locaux et les déplacements globaux, il n'est pas possible de faire du tri modale car une partie des modes globaux ont des contributions locales et vice versa (voir figure 1.4). On ne peut donc pas trier les modes élastiques en modes globaux et modes locaux car il est difficile de définir un critère objectif permettant d'effectuer ce tri. Il est donc intéressant de développer une nouvelle méthode permettant de construire, pour les modèles complexes d'automobile, des modèles réduits de faible dimension, prédictifs (au moins pour les observations situées sur la partie rigide de la structure) en BF et robustes vis à vis des incertitudes.

1.2 Positionnement de la recherche

Le travail de cette thèse concerne la construction des modèles réduits BF pour les structures automobiles complexes en présence de nombreux modes locaux. Nous ne présenterons donc pas d'état de l'art concernant les méthodes de réduction de modèle et de résolution pour les bandes MF et HF. L'analyse vibratoire en BF a fait l'objet de nombreux travaux. Les bases fondamentales et en particulier la technique d'analyse modale

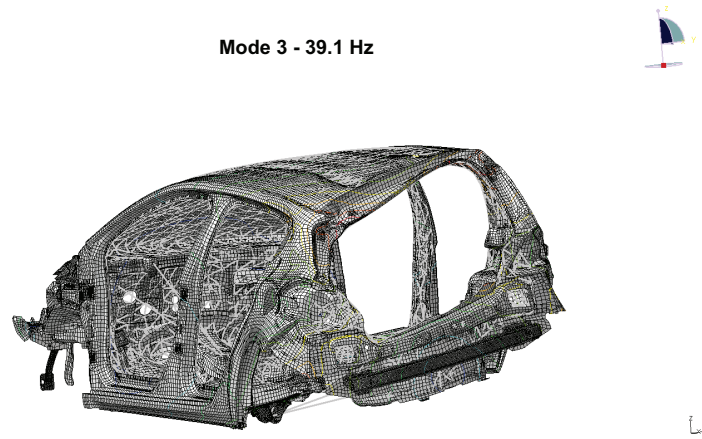


FIGURE 1.3 – Troisième mode élastique (mode 3 à 39.1 Hz) : mode élastique global.

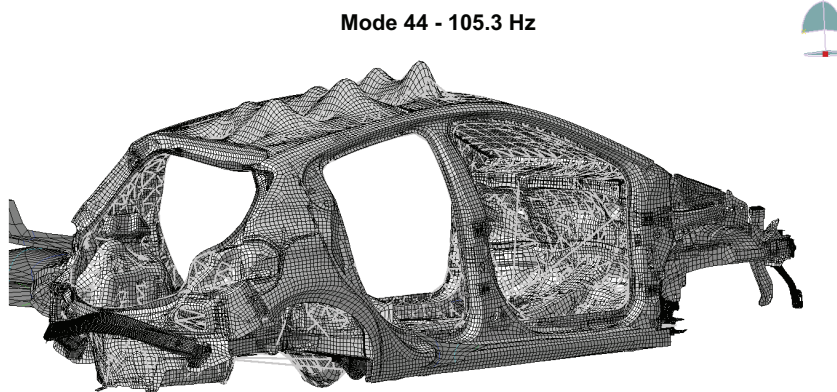


FIGURE 1.4 – Quarante-quatrième mode élastique (mode 44 à 105.3 Hz) : mode élastique global avec de forte contributions locales.

sont présentées dans les livres de [Argyris et Mlejnek](#) [1], [Craig et Kurdila](#) [15], [Meirovitch](#) [68], [Morand et Ohayon](#) [70] et [Ohayon et Soize](#) [75]. Les principales techniques de sous-structuration dynamique sont développées dans les livres et articles [Bampton et Craig Jr](#) [10], [Donders et al.](#) [20], [Farhat et Geradin](#) [27], [Hurty](#) [47], [Hong et al.](#) [46], [Mac Neal](#) [64], [Morand et Ohayon](#) [70], [Ohayon et al.](#) [74], [Ohayon et Soize](#) [75], [Rubin](#) [78, 79], [Shyu et al.](#) [87], [Wamsler](#) [96]. Toutes ces techniques sont très bien adaptées à l'analyse vibratoire BF lorsque les résonances sont relativement bien séparées (faible densité modale) et que l'on veut construire un modèle réduit de faible dimension.

Les problèmes réduits par les vibrations des structures et des systèmes couplés ont donné lieu à une multitude de recherches depuis de très nombreuses décennies. La complexité des problèmes posés est liée aux types de technologie : production d'énergie, industries mécaniques, génie civil, transports (automobiles, naval, trains à grande vitesse, aéronautique), espace (lanceurs, satellites), etc..., et à la nature des vibrations étudiées (transitoires, stationnaires dans les domaines BF, MF et HF). Parmi toutes ces problématiques, celles liées aux automobiles sont relativement difficiles ainsi que, par exemple, celles induites par les transports sur rail (voir par exemple [Degrande et Schillemans](#) [18], [Lombaert et Degrande](#) [62], [Lombaert et al.](#) [63]) ou pour les lanceurs spatiaux (voir par exemple [Morand et Ohayon](#) [69, 70], [Ohayon](#) [73]).

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux structures automobiles complexes pour lesquels il y a en BF des modes globaux couplés à de très nombreux modes locaux. A notre connaissance, l'extraction de bases des déplacements globaux, indépendamment de la bande de fréquence analysée, a fait l'objet de peu de recherches. La plupart d'entre elles sont basées sur un filtrage spatial des petites longueurs d'onde. Dans le domaine expérimental, ce filtrage est réalisé par des techniques de régularisation [Bucher et Braun](#) [13], par des techniques d'Eléments Finis (EF) basés sur images [Hahn et Kikuchi](#) [45], par extraction de vecteurs-propres de la matrice de mobilité fréquentielle [Guyader](#) [43]. En ce qui concerne l'extraction à partir d'un modèle numérique, les méthodes sont basées sur la technique des masses concentrées. Dans la méthode de condensation statique de Guyan [44], les masses sont concentrées en certains nœuds et l'inertie des nœuds voisins est négligée. Le choix des points de concentration est délicat [Bouhaddi et Fillod](#) [12], [Li](#) [61], [Ong](#) [76]. La technique des masses concentrées a fait l'objet d'autres recherches, notamment en ce qui concerne la convergence de cette méthode [Chan et al.](#) [14], [Jens](#) [49], [Jens](#) [50]. Dans [Langley et Bremner](#) [60], les auteurs proposent de construire une base des déplacements globaux à partir d'un modèle EF grossier, puis les contributions locales sont prises en compte par une approche de type SEA. Pour les structures élancées, une autre méthode consiste en la construction de modèles simplifiés équivalents poutre ou plaque [Noor et Anderson](#) [71], [Planchard](#) [77]; ces méthodes ne sont pas adaptées à des structures

aussi complexes que des automobiles. Enfin, dans [42], le problème de la forte densité modale dans la bande HF est résolue en extrapolant la réponse dynamique à partir du tri d'un faible nombre de modes. Ce travail est intéressant lorsqu'il existe une expression analytique des déformées modales, ce qui n'est pas notre cas.

Des travaux préliminaires sur ce sujet de thèse ont été effectués [94]. Ces travaux présentent une méthode permettant de construire un modèle stochastique réduit pour les structures présentant de nombreux modes locaux en BF. Cette méthode consiste en l'introduction de deux problèmes aux valeurs propres non classiques et dont les solutions fournissent une base de l'espace des déplacements globaux et une base de l'espace des déplacements locaux. Dans l'article [94], un modèle d'incertitude est implémenté sur les coordonnées généralisées associées aux déplacements locaux uniquement. Dans cette thèse, nous utilisons les résultats de ces travaux afin de construire une base de l'espace des déplacements globaux qui permettra de construire le modèle réduit stochastique.

1.3 Objectifs et stratégie de la recherche

L'objectif principal de ce travail est de construire un modèle réduit de faible dimension en dynamique BF adapté aux structures automobiles complexes. Cet objectif principal peut se décliner en 3 objectifs :

(1) **Le premier objectif** est la construction d'un modèle réduit déterministe BF en utilisant une base adaptée. Pour réaliser cet objectif, on utilise la méthode proposée dans [94] qui permet de construire une base de l'espace des déplacements globaux sur laquelle sera projetée les équations de la dynamique. La méthode de construction est basée sur une réduction cinématique de l'énergie cinétique (l'énergie élastique restant exacte). La réduction cinématique nécessite une décomposition du domaine de la structure en sous-domaines.

(2) **Le deuxième objectif** est de construire un modèle réduit stochastique pour prendre en compte les incertitudes des paramètres du système et les incertitudes de modèle induite par les erreurs liées à la non prise en compte des contributions des déplacements locaux et les erreurs de modélisation. Pour cela, le modèle réduit stochastique est construit en utilisant l'approche probabiliste non-paramétrique des incertitudes [91,92,93].

(3) **Le troisième objectif** concerne la construction efficace des sous-domaines évoquée dans le premier objectif pour un modèle numérique complexe. Pour cela, nous avons utilisé

la Fast Marching Method proposée par [Kimmel et Sethian \[59\]](#) et [Sethian et Vladimirovsky \[85\]](#). Cette méthode permet de propager un front sur un maillage complexe d'un modèle EF. A l'aide de cette méthode, nous pourrions construire des sous-domaines "uniformément" répartis dans le domaine de la structure nécessaire pour la construction de la base des déplacements globaux.

Les méthodes proposées dans cette thèse seront progressivement validées sur un modèle de structure automobile "nue". Une application sur un modèle complet sera ensuite présentée.

1.4 Plan de la thèse

⊙ Chapitre 2

L'objectif de ce chapitre est de résumer les résultats principaux d'une analyse visant à mettre en évidence l'existence d'une fréquence de coupure F_c à partir de laquelle la contribution des modes locaux devient non négligeable. Cette fréquence de coupure va donc nous permettre de mettre en évidence une limite de validité d'un modèle réduit construit avec une base des déplacements globaux et elle va notamment montrer que la validité de ce modèle réduit, s'il est bien construit, permet d'aller au-delà de la fréquence d'apparition des premiers modes locaux. Les détails de cette analyse sont présentés dans l'annexe [A](#).

⊙ Chapitre 3

Ce chapitre présente la construction du modèle EF et du modèle réduit par une analyse modale classique en utilisant les modes élastiques classés en fréquence propre croissante. Ensuite, ce chapitre présente la construction du modèle réduit à partir d'une base des déplacements globaux. Puis une correction du modèle d'amortissement sera faite afin de prendre en compte l'amortissement apparent dû à la présence de modes locaux. Enfin une application de cette méthode sera faite sur un modèle EF de structure automobile "nue".

⊙ Chapitre 4

Ce chapitre présente la méthode "Fast Marching Method (FMM)" utilisée pour décomposer le domaine en sous domaines nécessaires pour la mise en œuvre de la méthode proposée et permettant de construire un modèle réduit pour les structures complexes d'automobiles.

⊙ **Chapitre 5**

L'objectif de ce chapitre est d'introduire un modèle probabiliste des incertitudes dans le modèle réduit. Cette prise en compte des incertitudes de modélisation et des paramètres du modèle sera faite par l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes. La méthode sera validée sur un modèle de structure automobile "nue".

⊙ **Chapitre 6**

Dans ce chapitre, nous présentons l'application à un modèle complet d'automobile présentant la complexité maximum, sur lequel toutes les méthodes développées dans cette thèse seront appliquées.

2

Estimation des fréquences de coupure

Sommaire

2.1	Introduction	10
2.2	Détermination des fréquences de coupure pour les sous-domaines flexibles.	11
2.3	Détermination des fréquences de coupure pour les corps creux (partie raide).	12
2.4	Détermination de la fréquence de coupure pour la cavité acoustique	13
2.5	Conclusion	15

Ce chapitre résume les résultats d'une analyse pour mettre en évidence l'existence d'une fréquence de coupure F_c à partir de laquelle la contribution des modes locaux devient non négligeable. Cette fréquence de coupure va donc nous permettre de mettre en évidence une limite de validité d'un modèle réduit construit avec une base des déplacements globaux et elle va notamment montrer que la validité de ce modèle réduit, s'il est bien construit, permet d'aller bien au-delà de la fréquence d'apparition des premiers modes locaux.

2.1 Introduction

On va s'intéresser à la réponse dynamique des différents éléments d'un modèle de structure automobile "nue" (voir figure 2.1) c'est-à-dire un véhicule constitué que de la structure globale du véhicule c'est-à-dire que les éléments comme les sièges, le tableau de bord, les revêtements, etc... ne sont pas pris en compte dans le modèle. Il est très important de noter que les résultats présentés dans ce chapitre ne sont valables que pour ce modèle, car pour d'autres modèles les matériaux et la géométrie seront différents, ainsi que les points et les modes de fixation, par exemple.

Dans cette analyse, la méthodologie mise en œuvre pour estimer les fréquences de coupure des différentes parties du véhicule consiste à faire varier l'amortissement des composants flexibles tels que les panneaux et de regarder l'influence de cet amortissement sur la réponse des parties flexibles, des parties raides et de la cavité acoustique. Pour cela, la structure "nue" sera découpée en sous-ensembles et sur chaque sous-ensemble, la vitesse quadratique moyenne (VQM) définie par

$$V(\omega)^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} |Y_i(\omega)|^2 \quad , \quad (2-1)$$

où Y_i est la vitesse normale au $i^{\text{ème}}$ nœud du sous-ensemble considéré, sera calculée en fonction de l'amortissement des parties souples. Pour le calcul de la VQM, l'excitation correspond à deux forces ponctuelles situées sur les corps creux (un au niveau de la fixation gauche du moteur et l'autre sur la fixation de l'anti-couple du moteur), suivant la direction verticale et valant 1 N sur toute la bande d'analyse [0, 500] Hz. La VQM est calculée en utilisant un nombre limité ν de nœuds d'observation. La détermination pour la configuration optimale est détaillée en annexe A.

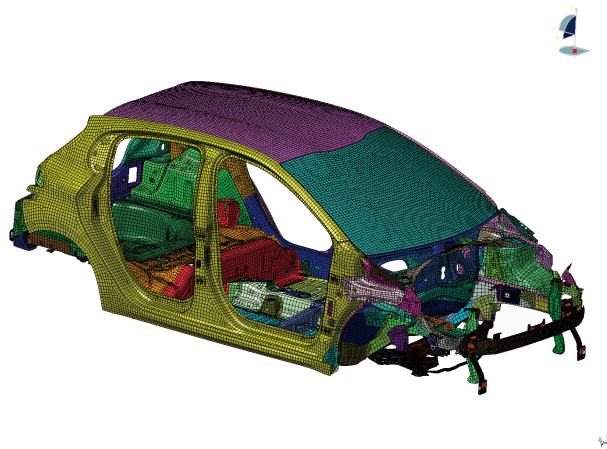


FIGURE 2.1 – Modèle de structure "nue" d'un véhicule automobile.

2.2 Détermination des fréquences de coupure pour les sous-domaines flexibles.

Dans cette section, nous allons faire varier le taux d'amortissement des matériaux des sous-ensembles flexibles uniquement. Cela permettra de mettre en évidence l'influence des modes locaux et donc de déterminer la fréquence de coupure à partir de laquelle les contributions locales ne peuvent plus être négligées. La méthode pour modifier l'amortissement est présentée dans l'annexe A.3. Nous avons simultanément fait varier le taux d'amortissement des matériaux des 9 sous-ensembles flexibles. Les valeurs des taux d'amortissement considérées sont 0.1, 0.15, 0.3 et 0.4. Pour la valeur 0.1, on utilise une configuration de référence et pour les autres valeurs on utilise les configurations optimales pour le calcul des VQM. Ensuite on trace l'écart relatif entre les VQM avec des taux d'amortissement valant respectivement 0.15, 0.3 et 0.4 et la VQM avec un taux d'amortissement de 0.1. Pour le pavillon, les courbes d'écart sont représentées sur la figure 2.2.

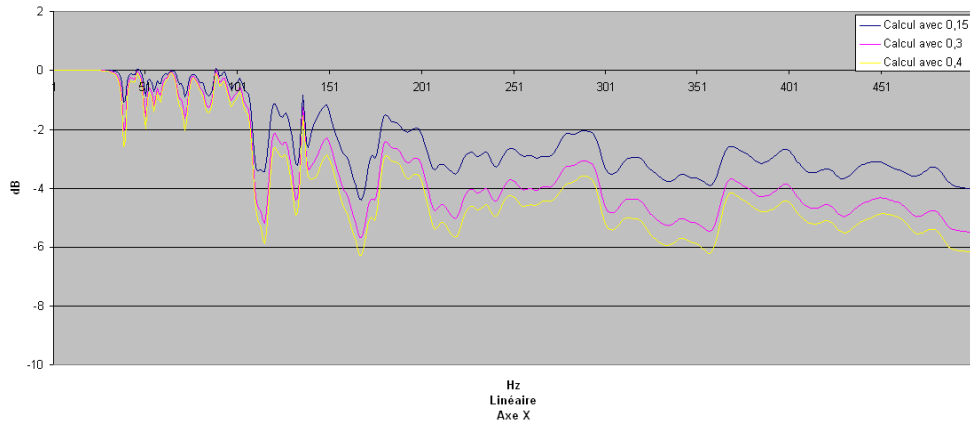


FIGURE 2.2 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le pavillon.

Sur cette figure, on voit clairement apparaître une fréquence de coupure à 107 Hz.

Le résumé des résultats des fréquences de coupure des sous-ensembles flexibles sont dans le tableau 2.1.

Sous-ensemble	Fréquences de coupure
Pavillon	107 Hz
Plancher AV 1	86 Hz
Plancher AV 2	117 Hz
Plancher AV 3	201 à 311 Hz puis au-delà de 408 Hz
Plancher AV 4	391 Hz
Plancher de charge	69 Hz
Plancher d'assise	121 Hz
Passage à talon	111 Hz
Tablier inférieur	155 à 190 Hz puis au-delà de 270 Hz
Tablier supérieur	151 Hz
Passage de roue	300 Hz
Pare Brise	48 Hz

TABLE 2.1 – Tableau de synthèse des fréquences de coupure des sous-ensembles flexibles

On obtient des fréquences de coupure qui sont en majorité (8 panneaux) entre 48 Hz et 151 Hz. Quelques fréquences de coupure (4 panneaux) sont présentes entre 201 et 438 Hz. On constate donc une forte variabilité de la fréquence de coupure sur les sous-ensembles flexibles.

2.3 Détermination des fréquences de coupure pour les corps creux (partie raide).

La détermination des fréquences de coupure pour les corps creux est réalisée avec des amortissements de 0.15, 0.3 et 0.4. La méthode de calcul des fréquences de coupure est similaire à celle utilisée au paragraphe précédent. Le tableau 2.2 présente la synthèse des fréquences de coupure pour les corps creux.

2.4. DÉTERMINATION DE LA FRÉQUENCE DE COUPURE POUR LA CAVITÉ ACOUSTIQUE

Panneau	Fréquences de coupure
Brancard	113 Hz
Coté gauche du pavillon	203 Hz
Traverse arrière	123 Hz
Traverse centrale du pavillon	104 Hz
Traverse inférieur de baie	448 Hz
Traverse avant de pavillon	111 Hz
Montant de baie gauche	176 Hz
Montant de baie droit	484 Hz

TABLE 2.2 – Tableau de synthèse des fréquences de coupure des corps creux.

Ainsi, sur ce tableau, on peut voir que toutes les fréquences de coupure sont supérieures à 104 Hz bien que les premiers modes locaux apparaissent dès 17 Hz leurs effets n'apparaissent qu'au-delà de 100 Hz. On peut donc espérer construire un modèle réduit utilisant des modes globaux et dont la validité irait légèrement au-delà de 100 Hz.

2.4 Détermination de la fréquence de coupure pour la cavité acoustique

Le but de ce paragraphe est d'estimer la fréquence de coupure sur la cavité acoustique, en faisant varier l'amortissement des sous-ensembles flexibles pour étudier l'impact sur la réponse acoustique de la cavité. Nous considérons 4 nœuds d'observation à l'intérieur de la cavité. Ils sont situés au niveau de l'oreille de chacun des passagers (voir la figure 2.3).

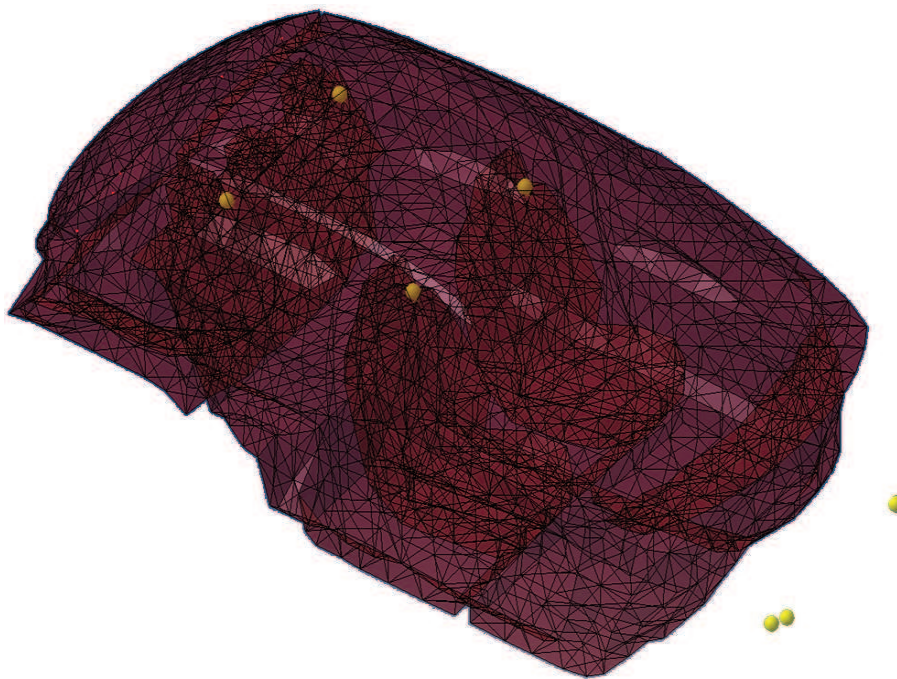


FIGURE 2.3 – Modélisation de la cavité du véhicule et 4 nœuds d'observation dans la cavité.

Dans l'annexe A.4, nous représentons les écarts pour la pression acoustique pour les 4 nœuds d'observation avec les taux d'amortissement 0.15, 0.3 et 0.4 (voir les courbes du nœud d'observation 4, nommé ARD, sur la figure 2.4).

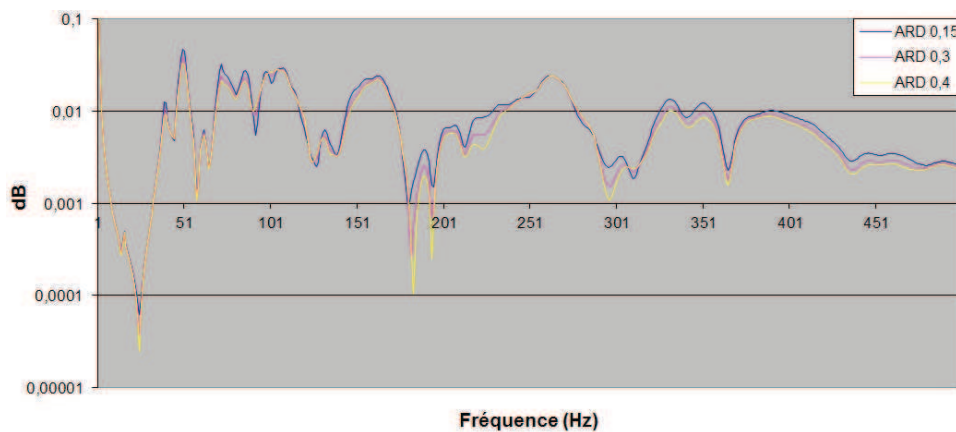


FIGURE 2.4 – Comparaison des écarts pour la réponse acoustique au point ARD avec un amortissement de 0.15 (bleu), 0.3 (magenta) et 0.4 (jaune).

Au vu de ces courbes, on peut constater que le taux d'amortissement des sous-ensembles flexibles a peu d'influence sur la réponse acoustique de la cavité. C'est donc surtout les

modes globaux qui contribuent au rayonnement acoustique dans la cavité.

2.5 Conclusion

Cette analyse a permis d'estimer les fréquences de coupure associées au début de l'influence significative des modes locaux, en étudiant l'influence du taux d'amortissement des parties souples sur la VQM des différents éléments du véhicule. Les fréquences de coupure obtenues permettent de conclure que jusqu'à 100 Hz, les modes locaux ont peu d'influence sur la réponse dynamique des corps creux et sur la réponse acoustique de la cavité. Ainsi, on peut raisonnablement espérer qu'un modèle vibroacoustique construit à partir de modes globaux pour la partie structure permettra de prédire de façon robuste la réponse dynamique des corps creux jusqu'à 100 Hz. Par contre, concernant les sous-ensembles flexibles, on constate que les fréquences de coupure sont faibles et donc que le modèle réduit ne permettra pas de prédire de façon robuste la réponse de ces sous-ensembles.

Ces résultats ne sont applicables que pour le modèle étudié ici. Pour un autre modèle de voiture il faudrait déterminer à nouveau les fréquences de coupure à l'aide de la méthodologie proposée.

3

Construction du modèle réduit.

Sommaire

3.1	Contexte et étapes de la méthode	18
3.2	Problème aux limites et formulation variationnelle	19
3.3	Construction d'un modèle réduit	22
3.4	Application sur un modèle EF d'automobile	32
3.5	Influence du nombre de sous-domaines	47
3.6	Conclusion	49

Ce chapitre présente une méthode permettant de construire un modèle réduit pour la dynamique BF des structures, pour les structures présentant de nombreux modes locaux dans cette bande BF. L'objectif est de construire un modèle réduit à partir d'une base de l'espace des déplacements globaux et qui sera valide jusqu'à une certaine fréquence de coupure au-delà de laquelle les contributions locales ne sont plus négligeables. Dans une première étape, cette base est construite. Ensuite, une correction du modèle obtenu sera faite afin de prendre en compte les effets des modes locaux. Enfin une application de cette méthode sera faite sur un modèle EF de la structure "nue" d'un véhicule.

3.1 Contexte et étapes de la méthode

Dans ce paragraphe on présente le contexte de l'utilisation de la méthode et les différentes étapes nécessaires à la construction du modèle réduit. Cette approche que nous avons développée au cours de ce travail a déjà fait l'objet des publications [Arnoux *et al.* \[2\], \[3\], \[4\], \[5\], \[6\], \[7\], \[8\]](#).

Un véhicule automobile est constitué de pièces rigides et de composants flexibles. En BF, ce type de structure est caractérisé par le fait qu'il présente, non seulement les modes élastiques globaux classiques, mais aussi de nombreux modes élastiques locaux dans la même bande BF. Le problème est que dans une telle structure complexe et hétérogène, les modes élastiques globaux ne peuvent pas être clairement séparés des modes élastiques locaux parce qu'il y a beaucoup de petites contributions locales dans les déformations des modes élastiques globaux et inversement. Ce couplage entre modes élastiques globaux et modes élastiques locaux induit un transfert d'une partie de l'énergie mécanique des modes élastiques globaux vers les modes élastiques locaux qui stockent et dissipent cette énergie et donc induit un amortissement apparent aux résonances associées aux modes élastiques globaux. Ce phénomène est analysé et expliquée dans [Soize \[88\]](#) et [\[89\]](#) dans le cadre de la théorie des *structures floues*. Afin de construire un modèle réduit BF qui permette de prévoir une bonne approximation des déplacements globaux et si nécessaire, de prendre en compte les effets des déplacements locaux dans la réponse totale, nous utilisons la nouvelle approche récemment proposée dans [\[94\]](#).

Dans un premier temps, une formulation et un algorithme qui permet de calculer séparément une base des déplacements globaux et une base des déplacements locaux sont présentés. Il est très important de noter que le but n'est pas d'extraire des modes élastiques. Le but ici est de construire une base de projection composée d'une famille de modes dominés par des déplacements globaux et d'une famille de modes dominés par des déplacements locaux tel que la réunion de ces deux familles constitue une base de l'espace des déplacements admissibles. Pour parvenir à ce but, l'idée est de construire un filtre spatial qui permet de filtrer les déplacements locaux en introduisant une longueur d'onde spatiale de coupure. L'énergie cinétique est alors réduite en utilisant ce filtre tandis que l'énergie élastique est laissée intacte. Cette idée s'inspire de la méthode classique des masses concentrées permettant d'extraire une base des déformations globales. Cependant, la méthode utilisée ici, permet d'obtenir une base des déformations globales de meilleure qualité et permet surtout de compléter cette base par une base des déformations locales calculée séparément. La prise en compte des effets des modes locaux sera réalisée à l'aide d'une correction de la matrice d'amortissement. Dans un premier temps, nous présentons le problème aux limites et la formulation variationnelle, puis nous présentons la construc-

tion du modèle réduit. Enfin nous appliquons la méthode sur un modèle de structure "nue".

3.2 Problème aux limites et formulation variationnelle

Un véhicule automobile est constitué d'une structure tridimensionnelle couplée à une cavité acoustique interne. Dans cette thèse, nous nous intéressons uniquement au comportement BF de la structure du modèle EF du véhicule automobile, pour lequel nous cherchons à construire un modèle réduit. Dans cette section, nous construisons la formulation variationnelle à partir du problème aux limites. Les principes généraux de cette construction peuvent être trouvés dans [17] par exemple.

3.2.1 Définition du problème

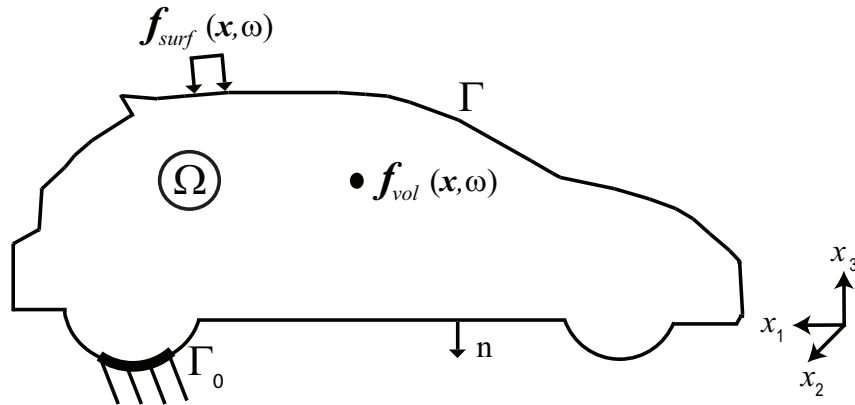


FIGURE 3.1 – Schéma du système mécanique.

Dans cette partie, nous définissons le problème aux limites et les notations utilisées dans ce chapitre.

– Géométrie et conditions aux limites :

Soit Ω le domaine borné représentant une structure tridimensionnelle à comportement linéaire et amorti. Ce domaine est fixé sur la partie Γ_0 de sa frontière $\partial\Omega$ et est libre sur l'autre partie Γ . La normale unitaire extérieure à la frontière est $\mathbf{n}$. Le déplacement du point de coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ appartenant à Ω sera noté $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

– **Domaine fréquentiel :**

Soit $\mathcal{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}]$ la bande de fréquence sur laquelle est calculée la fonction de réponse en fréquence, telle que $0 < \omega_{min} < \omega_{max}$. La transformée de Fourier du champs de déplacement est

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt \quad . \quad (3-1)$$

– **Champs de forces :**

Le champ des forces volumiques extérieures appliquées dans Ω et le champ des forces surfaciques appliquées sur Γ sont respectivement notés $\mathbf{f}_{vol}(\mathbf{x}, \omega)$ et $\mathbf{f}_{surf}(\mathbf{x}, \omega)$.

– **Loi de comportement :**

On prend les hypothèses d'un matériau viscoélastique à mémoire instantanée, anisotrope et non homogène. Le tenseur des contraintes σ_{jk} est alors relié au tenseur des déformations ϵ_{lh} par la relation

$$\sigma_{jk}(\mathbf{x}) = a_{jklh}(\mathbf{x}) \epsilon_{lh}(\mathbf{u}) + i\omega b_{jklh}(\mathbf{x}) \epsilon_{lh}(\mathbf{u}) \quad . \quad (3-2)$$

avec a_{jklh} et b_{jklh} les tenseurs réels du quatrième ordre ayant les propriétés usuelles de symétrie, de positivité et de bornitude en $\mathbf{x}$.

– **Problème aux limites :**

Le problème aux limites pour les équations linéarisées de la structure est

$$-\omega^2 \rho u_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_{vol, i} \text{ dans } \Omega \quad , \quad (3-3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = f_{surf, i} \text{ sur } \Gamma \quad , \quad (3-4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0 \quad , \quad (3-5)$$

avec $\mathbf{x} \mapsto \rho(\mathbf{x})$ est la masse volumique qui est positive et bornée.

3.2.2 Forme faible du problème aux limites

Soit $\mathbb{H}^{comp}$, l'espace complexe de toutes les fonctions de carré intégrable de Ω dans $\mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}$.

– **Espace admissible**

Soit $\mathbb{V}^{comp}$, l'espace des champs de déplacements admissibles tel que

$$\mathbb{V}^{comp} = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{H}^{comp}, \nabla u_j \in \mathbb{H}^{comp}, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0 \} \quad .$$

– **Formulation faible du problème aux limites**

La formulation variationnelle du problème aux limites définie avec les équations (3-5),(3-3) et (3-4) consiste à trouver pour tout ω dans $\mathcal{B}$ la fonction $\mathbf{u}(\omega)$ à valeur dans $\mathbb{V}^{comp}$ tel que $\forall \mathbf{v}$ dans $\mathbb{V}^{comp}$,

$$-\omega^2 m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + i\omega d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}; \omega) \quad . \quad (3-6)$$

Les formes sesquilinéaires et antilinéaires de l'équation (3-6) sont définies par :

Masse

La forme sesquilinéaire de masse m est définie sur $\mathbb{H}^{comp} \times \mathbb{H}^{comp}$ par

$$m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \quad . \quad (3-7)$$

Amortissement

La forme sesquilinéaire d'amortissement d est définie sur $\mathbb{V}^{comp} \times \mathbb{V}^{comp}$ par

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} b_{ijkh}(\mathbf{x}) \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\overline{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \quad . \quad (3-8)$$

Raideur

La forme sesquilinéaire de raideur k est définie sur $\mathbb{V}^{comp} \times \mathbb{V}^{comp}$ par

$$k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkh}(\mathbf{x}) \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\overline{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} \quad . \quad (3-9)$$

Forces extérieures

La forme antilinéaire g des forces extérieures est définie sur $\mathbb{V}^{comp}$ par

$$g(\mathbf{v}; \omega) = \int_{\Gamma} f_{surf, i}(\mathbf{x}, \omega) \overline{v_i}(\mathbf{x}) ds + \int_{\Omega} f_{vol, i}(\mathbf{x}, \omega) \overline{v_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad . \quad (3-10)$$

3.2.3 Modes propres élastiques et analyse modale

Soit $\mathbb{H}$ le sous-espace de $\mathbb{H}^{comp}$ composé de fonctions réelles et $\mathbb{V}$ le sous-espace de $\mathbb{V}^{comp}$ composé de fonctions réelles.

Le problème spectral associé à la partie conservative de la formulation variationnelle consiste à trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{V}$ tel que , $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$

$$-\lambda m(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) + k(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (3-11)$$

Pour ce problème spectral, il existe une suite de valeurs propres positives $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ auxquelles sont associées les vecteurs propres $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots\}$. Ces vecteurs propres appelés modes élastiques $\{\boldsymbol{\varphi}_\alpha, \alpha \geq 1\}$ forment une base de $\mathbb{V}$ et vérifie les propriétés

d'orthogonalité $m(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ et $k(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}$. Toute fonction $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{V}$ peut s'écrire

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} q_\alpha(\omega) \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \quad , \quad (3-12)$$

où les fonctions $q_\alpha(\omega)$ sont les coordonnées généralisées.

3.3 Construction d'un modèle réduit

Dans ce paragraphe, nous présentons la construction d'un modèle réduit basée sur la méthode présentée dans [89]. Dans un premier temps, nous présentons la décomposition de l'énergie cinétique en une énergie cinétique réduite et une énergie cinétique complémentaire, puis cette décomposition permettra d'introduire une base de l'espace des déplacements globaux et une base de l'espace des déplacements locaux. Le modèle réduit sera alors construit à partir de la base de l'espace des déplacements globaux.

3.3.1 Décomposition de la forme bilinéaire de masse

L'objectif est de décomposer la forme bilinéaire de masse en deux formes bilinéaires, une forme bilinéaire réduite de masse et une forme bilinéaire complémentaire de masse. La forme bilinéaire réduite de masse est obtenue en utilisant un projecteur sur un sous-espace des déplacements admissibles de dimension finie qui sera le sous-espace des déplacements globaux. Le problème aux valeurs propres généralisé associé à la forme bilinéaire de raideur et la projection de la forme bilinéaire de masse permettra de construire une base du sous-espace des déplacements admissibles globaux.

3.3.1.1 Décomposition du domaine en sous-domaines

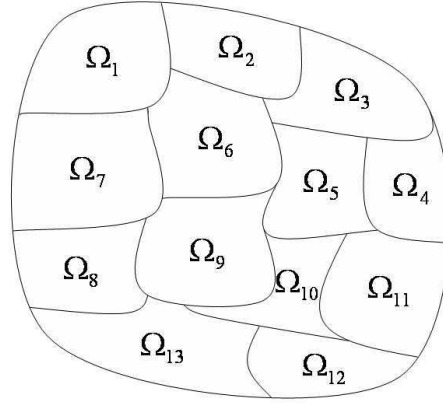


FIGURE 3.2 – Décomposition de Ω en sous-domaines.

Dans un premier temps, le domaine Ω est décomposé en N sous-domaines Ω_j , avec j appartenant à $1, \dots, N$ (voir figure 3.2). La construction des sous-domaines est complexe et nécessite des méthodes spécifiques qui seront présentées en détail dans le chapitre 4.

3.3.1.2 L'opérateur de projection

Dans ce paragraphe, nous décrivons le projecteur utilisé pour projeter la forme bilinéaire de masse. Soit $\mathbb{H}_r$, le sous espace de $\mathbb{H}$, de dimension $3N$ définie comme l'ensemble des fonctions qui sont constantes sur chaque Ω_j . On définit alors l'opérateur de projection $\mathbf{u} \mapsto h^r(\mathbf{u})$ à valeurs dans $\mathbb{H}_r$ par

$$\{h^r(\mathbf{u})\}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \frac{1}{m_j} \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' , \quad (3-13)$$

avec $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{I}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x}$ est dans Ω_j et égal à 0 sinon. La masse locale m_j est définie, pour tout j dans $\{1, \dots, N\}$, par $m_j = \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, où $\mathbf{x} \mapsto \rho(\mathbf{x})$ est la masse volumique. L'équation (3-13) peut se réécrire,

$$\{h^r(\mathbf{u})\}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_j} \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \frac{1}{m_j} \rho(\mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \int_{\Omega_j} H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' , \quad (3-14)$$

avec $H(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{\Omega_j}(\mathbf{x}) \frac{1}{m_j} \rho(\mathbf{x}')$.

Soit $\mathbb{H}_c$ le sous espace de $\mathbb{H}$ constitué de toutes les fonctions $\mathbf{u} - h^r(\mathbf{u})$ avec $\mathbf{u}$ appartenant

CHAPITRE 3. CONSTRUCTION DU MODÈLE RÉDUIT.

à $\mathbb{H}$. On définit un autre l'opérateur de projection $\mathbf{u} \mapsto h^c(\mathbf{u})$, de $\mathbb{H}$ à $\mathbb{H}_c$ tel que

$$h^c(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - h^r(\mathbf{u}) \quad . \quad (3-15)$$

On notera $\mathbf{u}^r = h^r(\mathbf{u})$ et $\mathbf{u}^c = h^c(\mathbf{u})$. Les opérateurs h^r et h^c possèdent les propriétés importantes suivantes :

1. Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$, on a $h^r(h^r(\mathbf{u})) = h^r(\mathbf{u})$ et $h^c(h^r(\mathbf{u})) = h^r(h^c(\mathbf{u})) = 0$.
2. Pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$, on a $m(h^r(\mathbf{u}), h^c(\mathbf{v})) = \int_{\Omega_j} \rho(\mathbf{x}) \{h^r(\mathbf{u})\}(\mathbf{x}) \{h^c(\mathbf{v})\}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$.

L'opérateur h^r réalise un moyennage sur chaque sous-domaine par rapport à la densité de masse et permet ainsi de réaliser une réduction cinématique sur chaque sous-domaine.

3.3.1.3 Forme bilinéaire réduite de masse et forme bilinéaire complémentaire de masse

Dans ce paragraphe, nous utilisons l'opérateur de projection h^r précédemment défini pour réduire la forme bilinéaire de masse et donc l'énergie cinétique. Pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ appartenant à $\mathbb{H}$, la forme bilinéaire réduite de masse $m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est définie par

$$m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = m(h^r(\mathbf{u}), h^r(\mathbf{v})) \quad . \quad (3-16)$$

On démontre que pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $\mathbb{H}$,

$$m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = m(\mathbf{u}, h^r(\mathbf{v})) = m(h^r(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \quad . \quad (3-17)$$

Pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ appartenant à $\mathbb{H}$, la forme bilinéaire complémentaire de masse $m^c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est définie par :

$$m^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = m(h^c(\mathbf{u}), h^c(\mathbf{v})) \quad . \quad (3-18)$$

On démontre que pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $\mathbb{H}$,

$$m^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = m(\mathbf{u}, h^c(\mathbf{v})) = m(h^c(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \quad . \quad (3-19)$$

En sommant les équation (3-17) et (3-19) on obtient

$$m(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + m^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad . \quad (3-20)$$

Les propriétés de la forme bilinéaire réduite de masse et de la forme bilinéaire complémentaire de masse sont les suivantes :

1. *Noyaux des opérateurs associés aux formes bilinéaire m_r et m_c :*

Le noyau de l'opérateur associé à la forme bilinéaire m_r est $\mathbb{H}_c$. Le noyau de l'opérateur associé à la forme bilinéaire m_c est $\mathbb{H}_r$.

2. *Positivité :*

Les formes bilinéaires $m^r(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $m^c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sont semi-définies positives.

3. *Conservation de la masse :*

La masse totale du système dynamique s'écrit,

$$M = m(\mathbf{1}, \mathbf{1})/3 \quad , \quad (3-21)$$

avec $\mathbf{1}$ la fonction de $\mathbb{H}$ tel que $\mathbf{1}(\mathbf{x}) = (1, 1, 1)$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$.

De même, on peut écrire la masse réduite totale M^r et la masse complémentaire M^c comme,

$$M^r = m^r(\mathbf{1}, \mathbf{1})/3 \quad \text{et} \quad M^c = m^c(\mathbf{1}, \mathbf{1})/3 \quad . \quad (3-22)$$

On a alors

$$M^r = M \quad \text{et} \quad M^c = 0 \quad . \quad (3-23)$$

Cette troisième propriété permet de conclure que l'opérateur h^r réalise une réduction cinématique de l'énergie cinétique, la masse totale M étant conservée dans le sous-espace $\mathbb{H}_r$.

3.3.2 Base des déplacements globaux et base des déplacements locaux

Dans ce paragraphe, nous allons construire une base de l'espace des déplacements globaux et une base de l'espace des déplacements locaux. Pour ce faire, nous utilisons la forme bilinéaire réduite de masse et la forme bilinéaire complémentaire de masse introduites dans le paragraphe précédent. Les fonctions de la base des déplacements globaux sont obtenues en remplaçant dans l'équation (3-11) la forme bilinéaire de masse m par la forme bilinéaire réduite de masse m^r . De même, les fonctions de la base des déplacements locaux sont obtenus en remplaçant dans l'équation (3-11) la forme bilinéaire de masse m par la forme bilinéaire complémentaire de masse m^c . Il est important de noter que la forme bilinéaire de raideur est non modifiée afin de ne pas dégrader l'énergie de déformation. Ainsi, les deux nouveaux problèmes aux valeurs propres qui sont introduits ne correspondent pas à une projection du problème aux valeurs propres défini par l'équation (3-11).

3.3.2.1 Base de l'espace des déplacements globaux

Les fonctions propres des déplacements globaux sont définis comme les fonctions φ^g de $\mathbb{V}$ associées aux valeurs propres λ^g solutions du problème aux valeurs propres suivant,

$$-\lambda^g m^r(\varphi^g, \mathbf{v}) + k(\varphi^g, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}. \quad (3-24)$$

Ce problème aux valeurs propres admet une famille finie de valeurs propres positives telles que $0 < \lambda_1^g \leq \lambda_2^g \leq \dots \leq \lambda_{3N}^g$, et telles que les fonctions propres associés $\{\varphi_1^g, \varphi_2^g, \dots, \varphi_{3N}^g\}$ vérifient les propriétés usuelles d'orthogonalité,

$$k(\varphi_\alpha^g, \varphi_\beta^g) = \lambda_\alpha^g \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad m^r(\varphi_\alpha^g, \varphi_\beta^g) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (3-25)$$

et pour tous $\alpha = 1, 2, \dots, 3N$ et pour tous $\mathbf{v}^c$ appartenant $\mathbb{H}_c$, on a,

$$m^r(\varphi_\alpha^g, \mathbf{v}^c) = 0, \quad (3-26)$$

dans laquelle $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$ et $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$). La base des déplacements globaux est constituée des fonctions $\varphi_1^g, \varphi_2^g, \dots, \varphi_{3N}^g$.

3.3.2.2 Base de l'espace des déplacements locaux

Les fonctions propres des déplacements locaux sont définis comme les fonctions φ^l de $\mathbb{V}$ associées aux valeurs propres λ^l solutions du problème aux valeurs propres suivant,

$$-\lambda^l m^c(\varphi^l, \mathbf{v}) + k(\varphi^l, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}. \quad (3-27)$$

Ce problème aux valeurs propres admet une famille infinie dénombrable de valeurs propres positives telles que $0 < \lambda_1^l \leq \lambda_2^l \leq \lambda_3^l \leq \dots$, et telle que les fonctions propres associés $\{\varphi_1^l, \varphi_2^l, \varphi_3^l, \dots\}$ vérifient les propriétés usuelles d'orthogonalité,

$$k(\varphi_\alpha^l, \varphi_\beta^l) = \lambda_\alpha^l \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad m^c(\varphi_\alpha^l, \varphi_\beta^l) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (3-28)$$

et pour tous $\alpha = 1, 2, \dots$ et pour tous $\mathbf{v}^r$ appartenant $\mathbb{H}_r$, on a,

$$m^c(\varphi_\alpha^l, \mathbf{v}^r) = 0. \quad (3-29)$$

La base des déplacements locaux est constituée des fonctions $\varphi_1^l, \varphi_2^l, \varphi_3^l, \dots$

3.3.2.3 Base de l'espace admissible

La base de l'espace des déplacements globaux permettra de construire une approximation de la réponse pour les points situés sur la partie rigide de la structure étudiée lorsque

l'excitation sera elle même appliquée sur la partie rigide. Si besoin est, pour prendre en compte les fluctuations locales des déplacements, il sera possible de compléter cette base en utilisant la base des déplacements locaux.

Il est prouvé que la famille $\{\varphi_1^g, \dots, \varphi_{3N}^g, \varphi_1^l, \varphi_2^l, \dots\}$, composée de la réunion de la base de l'espace des déplacements globaux et de la base de l'espace des déplacements locaux, est une base de $\mathbb{V}$. Ainsi pour tout $\mathbf{u}(\omega)$ appartenant à $\mathbb{V}_{comp}$, on peut écrire

$$\mathbf{u}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{3N} q_{\alpha}^g(\omega) \varphi_{\alpha}^g + \sum_{\alpha'=1}^{+\infty} q_{\alpha'}^l(\omega) \varphi_{\alpha'}^l, \quad (3-30)$$

où $q_{\alpha'}^l(\omega)$ sont des coordonnées généralisées "locales" et $q_{\alpha}^g(\omega)$ sont des coordonnées généralisées "globales".

3.3.3 Approximation par Eléments Finis

Dans ce paragraphe, nous présentons comment calculer la base des déplacements globaux et la base des déplacements locaux à partir d'un modèle discrétisé par la Méthode des Eléments Finis (voir par exemple [97]).

3.3.3.1 Modèle nominal de référence

Le modèle nominal de référence est construit en utilisant la méthode des éléments finis pour discrétiser l'équation (3-6). Soit $\mathbb{U}(\omega) \in \mathbb{C}^m$, où m est le nombre de degrés de liberté (DDL), la discrétisation du champ de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \omega)$. Pour ω fixé, le vecteur complexe $\mathbb{U}(\omega)$ satisfait l'équation complexe matricielle suivante

$$(-\omega^2 [\mathbb{M}] + i\omega [\mathbb{D}] + [\mathbb{K}])\mathbb{U}(\omega) = \mathbf{f}(\omega), \quad (3-31)$$

dans laquelle $[\mathbb{M}]$ est la matrice de masse, $[\mathbb{D}]$ est la matrice d'amortissement et $[\mathbb{K}]$ est la matrice de raideur. Ces matrices sont symétriques définies positives et de dimension $(m \times m)$. Le vecteur $\mathbf{f}(\omega)$ est relatif à la discrétisation des forces externes.

La discrétisation du problème spectral (3-11) consiste à chercher les valeurs propres $\lambda_{\alpha} = \omega_{\alpha}^2$ (carré de la pulsation propre ω_{α}) et les modes élastiques associés ϕ_{α} qui sont solutions du problème généralisé aux valeurs propres suivant,

$$[\mathbb{K}] \phi_{\alpha} = \lambda_{\alpha} [\mathbb{M}] \phi_{\alpha}. \quad (3-32)$$

La construction du modèle nominal de référence consiste à introduire une approximation d'ordre n de $\mathbb{U}(\omega)$, avec $n \ll m$, qui s'écrit

$$\mathbb{U}(\omega) \simeq \mathbb{U}^n(\omega) = \sum_{\alpha=1}^n q_{\alpha}(\omega) \phi_{\alpha} = [\Phi] \mathbf{q}(\omega), \quad (3-33)$$

CHAPITRE 3. CONSTRUCTION DU MODÈLE RÉDUIT.

avec $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, le vecteur complexe des n coordonnées généralisées et où $[\Phi] = [\phi_1 \dots \phi_n]$ est la matrice $(m \times n)$ réelle des modes élastiques associée aux n premières valeurs propres.

Dans la suite, on appellera modèle nominal de référence, le modèle réduit classique obtenu avec la projection sur les modes élastiques, définie par l'équation (3-33), et pour lequel le nombre n de modes élastiques est déterminé pour avoir une convergence fixée vers la solution de l'équation (3-31).

Il est à noter que le modèle nominal de référence permettra de valider le modèle réduit des déplacements globaux construit avec une base de vecteurs adaptée que nous allons présenter par la suite.

3.3.3.2 Matrice de masse réduite et matrice de masse complémentaire

Soit $[H]^r$ la matrice $(m \times m)$ de l'opérateur de projection h^r relative à la discrétisation EF. Le vecteur de déplacement $\mathbb{U}$ s'écrit

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}^r + \mathbb{U}^c, \quad (3-34)$$

où

$$\mathbb{U}^r = [H^r] \mathbb{U} \quad \text{et} \quad \mathbb{U}^c = [H^c] \mathbb{U} = \mathbb{U} - \mathbb{U}^r, \quad (3-35)$$

avec $[H^c] = [I_m] - [H^r]$ où $[I_m]$ est la matrice $(m \times m)$ unité. Alors, la matrice $(m \times m)$ de masse réduite, $[\mathbb{M}^r]$, et la matrice $(m \times m)$ de masse complémentaire, $[\mathbb{M}^c]$, sont respectivement définies par

$$[\mathbb{M}^r] = [H^r]^T [\mathbb{M}] [H^r] \quad \text{et} \quad [\mathbb{M}^c] = [H^c]^T [\mathbb{M}] [H^c]. \quad (3-36)$$

De l'équation (3-16), on déduit que

$$[\mathbb{M}^r] = [H^r]^T [\mathbb{M}] = [\mathbb{M}] [H^r], \quad (3-37)$$

et de l'équation (3-20), que

$$[\mathbb{M}^c] = [\mathbb{M}] - [\mathbb{M}^r]. \quad (3-38)$$

Les matrices $[\mathbb{M}^r]$ et $[\mathbb{M}^c]$ sont symétriques et positives mais ne sont pas définies positives (matrices semi-définies positives). Les rangs des matrices $[\mathbb{M}^r]$ et $[\mathbb{M}^c]$ sont respectivement $3N$ et $m - 3N$. Il est à noter que les matrices $[\mathbb{M}^r]$ et $[\mathbb{M}^c]$ sont pleines. Cependant ces matrices ne seront pas assemblées.

3.3.3.3 Base de l'espace des déplacements globaux et base de l'espace des déplacements locaux

Deux méthodes permettent de calculer la base des déplacements globaux et la base des déplacements locaux qui seront utilisées pour réduire l'équation matricielle.

– *Méthode directe*

Dans cette méthode, la base des déplacements globaux et la base des déplacements locaux du problème discrétisé par EF des deux problèmes généralisés aux valeurs propre définis par les équations (3-24) et (3-27) respectivement. Les vecteurs propres des déplacements globaux $\phi^g \in \mathbb{R}^m$ sont solutions du problème généralisé aux valeurs propres suivant

$$[\mathbb{K}]\phi^g = \lambda^g[\mathbb{M}^r]\phi^g \quad . \quad (3-39)$$

Ce problème admet une famille de $3N$ valeurs propres positives finis $0 < \lambda_1^g \leq \dots \leq \lambda_{3N}^g$, associée à la famille finie des vecteurs algébriquement indépendants $\{\phi_1^g, \dots, \phi_{3N}^g\}$, définie comme la famille des vecteurs propres des déplacements globaux qui ne coïncident pas en général avec des modes élastiques.

Les vecteurs propres des déplacements locaux $\phi^\ell \in \mathbb{R}^m$ sont solutions du problème généralisé aux valeurs propres

$$[\mathbb{K}]\phi^\ell = \lambda^\ell[\mathbb{M}^c]\phi^\ell \quad . \quad (3-40)$$

Ce problème admet une famille de valeurs propres positives $0 < \lambda_1^\ell \leq \dots \leq \lambda_{m-3N}^\ell$, associée à la famille finie des vecteurs $\{\phi_1^\ell, \dots, \phi_{m-3N}^\ell\}$ qui est définie comme la famille des vecteurs propres des déplacements locaux et qui, en général, ne coïncident pas avec des modes élastiques.

– *Méthode de double projection*

La résolution des problèmes aux valeurs propres (3-39) et (3-40) requiert la construction des matrices $[\mathbb{M}^r]$ et $[\mathbb{M}^c]$, et donc de la matrice de masse, ce qui correspond, en général, à des opérations intrusives vis-à-vis des logiciels commerciaux. Nous proposons donc une méthode dite de double projection, qui n'est pas intrusive et qui est moins coûteuse en temps de calcul que la méthode directe. Cette méthode consiste à approximer les fonctions propres ϕ^g et ϕ^ℓ , en utilisant l'équation (3-33), par

$$\phi^g = [\Phi]\tilde{\phi}^g \quad \text{et} \quad \phi^\ell = [\Phi]\tilde{\phi}^\ell \quad . \quad (3-41)$$

En utilisant les équations (3-35) et (3-36), les équations (3-39) et (3-40) peuvent se réécrire

$$[\tilde{K}]\tilde{\phi}^g = \lambda^g[\tilde{M}^r]\tilde{\phi}^g \quad \text{et} \quad [\tilde{K}]\tilde{\phi}^\ell = \lambda^\ell[\tilde{M}^c]\tilde{\phi}^\ell \quad , \quad (3-42)$$

où $[\tilde{M}^r] = [\Phi^r]^T[\mathbb{M}][\Phi^r]$ et $[\tilde{K}] = [\Phi]^T[\mathbb{K}][\Phi]$, avec $[\Phi^r]$ la matrice réelle $(m \times n)$ telle que $[\Phi^r] = [H^r][\Phi]$ et où $[\tilde{M}^c] = [\Phi^c]^T[\mathbb{M}][\Phi^c]$ avec $[\Phi^c]$ la matrice réelle $(m \times n)$ telle que $[\Phi^c] = [H^c][\Phi] = [\Phi] - [\Phi^r]$.

3.3.3.4 Construction du modèle réduit

Dans ce paragraphe, on présente d'une part, le modèle réduit général dont la solution converge vers la solution du problème et, d'autre part, le modèle réduit de dimension minimale, adapté à l'approximation de la solution dans le domaine BF.

• Modèle réduit général

La famille $\{\phi_1^g, \dots, \phi_{3N}^g, \phi_1^\ell, \dots, \phi_{m-3N}^\ell\}$ est une base de $\mathbb{R}^m$. Le modèle réduit moyen est obtenu par la projection de $\mathbb{U}(\omega)$ sur la famille $\{\phi_1^g, \dots, \phi_{n_g}^g, \phi_1^\ell, \dots, \phi_{n_\ell}^\ell\}$ de vecteurs réels constitués des n_g premiers vecteurs propres des déplacements globaux, tel que $n_g \leq 3N$, et des n_ℓ premiers vecteurs propres des déplacements locaux, tel que $n_\ell \leq m - 3N < m$. Il convient de noter que, si la méthode de double projection est utilisée, alors nous devons avoir $n_g < n$ et $n_\ell < n$ avec $n_t = n_g + n_\ell \leq n$. Alors, l'approximation $\mathbb{U}^{(n_g, n_\ell)}(\omega)$ de $\mathbb{U}(\omega)$ à l'ordre (n_g, n_ℓ) s'écrit

$$\mathbb{U}^{(n_g, n_\ell)}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n_g} q_\alpha^g(\omega) \phi_\alpha^g + \sum_{\beta=1}^{n_\ell} q_\beta^\ell(\omega) \phi_\beta^\ell . \quad (3-43)$$

Soit $\mathbf{q}(\omega) \in \mathbb{C}^n$ le vecteur des coordonnées généralisées défini par

$$\mathbf{q}(\omega) = (\mathbf{q}^g(\omega), \mathbf{q}^\ell(\omega)) , \quad (3-44)$$

avec $\mathbf{q}^g(\omega) = (q_1^g(\omega), \dots, q_{n_g}^g(\omega))$ et $\mathbf{q}^\ell(\omega) = (q_1^\ell(\omega), \dots, q_{n_\ell}^\ell(\omega))$.

Les coordonnées généralisées vérifient alors l'équation matricielle réduite suivante,

$$(-\omega^2[M] + i\omega[D] + [K])\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) , \quad (3-45)$$

où $[M]$, $[D]$ et $[K]$ sont des matrices $(n_t \times n_t)$ de masse, d'amortissement et de raideur généralisées, définies par

$$[M] = \begin{bmatrix} M^{gg} & M^{g\ell} \\ (M^{g\ell})^T & M^{\ell\ell} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D^{gg} & D^{g\ell} \\ (D^{g\ell})^T & D^{\ell\ell} \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} K^{gg} & K^{g\ell} \\ (K^{g\ell})^T & K^{\ell\ell} \end{bmatrix} . \quad (3-46)$$

Les blocs sont définis par

$$[M]_{\alpha\beta}^{gg} = (\phi_\alpha^g)^T [\mathbb{M}] \phi_\beta^g , \quad [M]_{\alpha\beta}^{g\ell} = (\phi_\alpha^g)^T [\mathbb{M}] \phi_\beta^\ell , \quad [M]_{\alpha\beta}^{\ell\ell} = (\phi_\alpha^\ell)^T [\mathbb{M}] \phi_\beta^\ell , \quad (3-47)$$

$$[D]_{\alpha\beta}^{gg} = (\phi_\alpha^g)^T [\mathbb{D}] \phi_\beta^g , \quad [D]_{\alpha\beta}^{g\ell} = (\phi_\alpha^g)^T [\mathbb{D}] \phi_\beta^\ell , \quad [D]_{\alpha\beta}^{\ell\ell} = (\phi_\alpha^\ell)^T [\mathbb{D}] \phi_\beta^\ell , \quad (3-48)$$

$$[K]_{\alpha\beta}^{gg} = (\phi_\alpha^g)^T [\mathbb{K}] \phi_\beta^g , \quad [K]_{\alpha\beta}^{g\ell} = (\phi_\alpha^g)^T [\mathbb{K}] \phi_\beta^\ell , \quad [K]_{\alpha\beta}^{\ell\ell} = (\phi_\alpha^\ell)^T [\mathbb{K}] \phi_\beta^\ell . \quad (3-49)$$

Le vecteur des forces généralisées est un vecteur de $\mathbb{C}^{n_t}$ que l'on peut écrire sous la forme $\mathbf{f}(\omega) = (\mathbf{f}^g(\omega), \mathbf{f}^\ell(\omega))$ avec $\mathbf{f}_\alpha^g(\omega) = (\phi_\alpha^g)^T \mathbb{f}(\omega)$ et $\mathbf{f}_\alpha^\ell(\omega) = (\phi_\alpha^\ell)^T \mathbb{f}(\omega)$.

3.3. CONSTRUCTION D'UN MODÈLE RÉDUIT

Les deux familles de valeurs propres λ^g et λ^ℓ solutions des problèmes aux valeurs propres donnés par les équations (3-39) et (3-40) sont strictement positives. Les matrices de masse, d'amortissement et de raideur généralisées sont définies positives.

- *Modèle réduit de dimension minimale pour le domaine BF*

Comme nous l'avons expliqué, le modèle réduit de dimension minimale pour le domaine BF, est construit par projection sur le sous-espace engendré par les vecteurs propres des déplacements globaux. L'approximation $\mathbb{U}^{(n_g)}(\omega)$ de $\mathbb{U}(\omega)$ à l'ordre n_g s'écrit alors

$$\mathbb{U}^{(n_g)}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n_g} q_\alpha^g(\omega) \phi_\alpha^g . \quad (3-50)$$

Il est à noter que, pour $3N < m$, $\mathbb{U}^{(3N)}(\omega)$ n'est pas égal à $\mathbb{U}(\omega)$ car la famille $\{\phi_1^g, \dots, \phi_{3N}^g\}$, qui est la base des vecteurs propres des déplacements globaux, n'est pas alors une base de $\mathbb{R}^m$. Toute fois, l'objectif sera bien de démontrer que l'approximation ainsi construite sera suffisante pour la bande basse fréquence $\mathcal{B}$. De plus et en général, pour les applications visées, nous montrerons qu'il ne sera pas nécessaire d'utiliser les $3N$ vecteurs propres mais seulement $n_g < 3N$. Dans ces conditions, la convergence de $\mathbb{U}^{(n_g)}(\omega)$ peut être analysée pour n_g tendant vers $3N$. Il est à noter que l'approximation $\mathbb{U}^{(n_g)}(\omega)$ converge vers la réponse $\mathbb{U}(\omega)$ si $3N$ tend vers m , c'est à dire si le nombre N de sous-domaines augmente et tend vers le nombre d'éléments finis du modèle. Donc, l'efficacité de la méthode dépend directement de la décomposition du domaine en sous-domaines qui sera réalisée en vue d'obtenir un modèle réduit de faible dimension et précis pour prédire les réponses des déplacements globaux dans $\mathcal{B}$.

Le modèle réduit construit avec l'équation (3-50) se déduit directement de l'équation (3-45) et s'écrit

$$(-\omega^2[M^{gg}] + i\omega[D^{gg}] + [K^{gg}])\mathbf{q}^g = \mathbf{f}^g . \quad (3-51)$$

3.3.3.5 Correction du modèle réduit des déplacements globaux

Comme il a été expliqué dans la section 3.1, il y a de nombreux modes élastiques dans $\mathcal{B}$ et donc, une partie de l'énergie mécanique est transférée des modes élastiques globaux des parties rigides vers les modes élastiques locaux des parties souples qui emmagasinent puis dissipent cette énergie, ce qui induit un amortissement apparent pour le modèle réduit associé aux déplacements globaux (le présent raisonnement doit être lu dans un contexte de sous-structuration dynamique). Cet amortissement apparent est visible au voisinage des résonances associées aux coordonnées généralisées globales du modèle réduit associé aux déplacements globaux (voir [90]). Nous allons donc modifier l'équation (3-51),

pour prendre en compte la présence de cet amortissement apparent afin d'améliorer la prédictibilité du modèle réduit dans $\mathcal{B}$. On introduit une matrice d'amortissement réduite modifiée notée $[D^{gg,mod}]$ qui doit être identifiée dans le but de minimiser la distance entre la réponse donnée par le modèle réduit des déplacements globaux et la réponse donnée par le modèle de référence. On introduit une représentation paramétrique de la matrice $[D^{gg,mod}]$ avec n_g paramètres positifs inconnus $a_1, \dots, a_{n_g}$. Soit $[A]$ la matrice diagonale telle que $[A]_{jj} = a_j$. La décomposition de Cholesky de la matrice $[D^{gg}]$ s'écrit $[D^{gg}] = [L^{gg}][L^{gg}]^T$. La matrice $[D^{gg,mod}]$ est alors construite telle que

$$[D^{gg,mod}](\mathbf{a}) = [L^{gg}][A][L^{gg}]^T \quad , \quad (3-52)$$

où $\mathbf{a}$ est le vecteur de composantes $a_1, \dots, a_{n_g}$. Par conséquence, pour n_g fixé, l'identification de la matrice $[D^{gg,mod}]$ consiste à identifier le vecteur $\mathbf{a}$. Pour cela, on doit résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\mathbf{a}^{opt} = \arg \min_{a_1 > 0, \dots, a_{n_g} > 0} \int_{\mathcal{B}} \|\mathbb{U}(\omega) - \mathbb{U}_{mod}(\omega; \mathbf{a})\|^2 d\omega \quad , \quad (3-53)$$

dans laquelle $\|\cdot\|$ est la norme Hermitienne, où $\mathbb{U}(\omega)$ est la solution de référence calculée avec l'équation (3-31) et où $\mathbb{U}_{mod}(\omega; \mathbf{a})$ est solution du modèle réduit des déplacements globaux suivant,

$$\mathbb{U}_{mod}(\omega; \mathbf{a}) = \sum_{\alpha=1}^{n_g} q_{\alpha}^{g,mod}(\omega; \mathbf{a}) \phi_{\alpha}^g \quad , \quad (3-54)$$

$$(-\omega^2[M^{gg}] + i\omega[D^{gg,mod}(\mathbf{a})] + [K^{gg}]) \mathbf{q}^{g,mod}(\omega; \mathbf{a}) = \mathbf{f}^g(\omega) \quad . \quad (3-55)$$

Le problème d'optimisation (3-53), est résolu en utilisant les algorithmes d'optimisation sous contraintes classiques.

3.4 Application sur un modèle EF d'automobile

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la méthode présentée précédemment sur un modèle EF de structure "nue" d'automobile.

3.4.1 Présentation du modèle EF d'une structure automobile "nue"

Le système dynamique est celui de la structure "nue" d'une automobile, c'est-à-dire la structure principale de la voiture (sans le moteur, sans le train avant et arrière, sans le capot, sans les portières, sans les sièges, sans les revêtements intérieurs, sans la planche de bord et la planche arrière, et sans l'échappement). Le maillage est composé de 243 783

3.4. APPLICATION SUR UN MODÈLE EF D'AUTOMOBILE

nœuds (voir la figure 3.3) et contient des éléments finis de type volumique, de type poutre, de type coque, ainsi que des corps rigides (voir la figure 3.4). Le modèle EF a 1 462 698 DDL. La structure a des parties rigides et des parties souples. Les parties rigides sont les corps creux qui constituent l'ossature de la voiture. Les parties souples sont toutes les autres parties de la structure rattachées aux parties rigides.

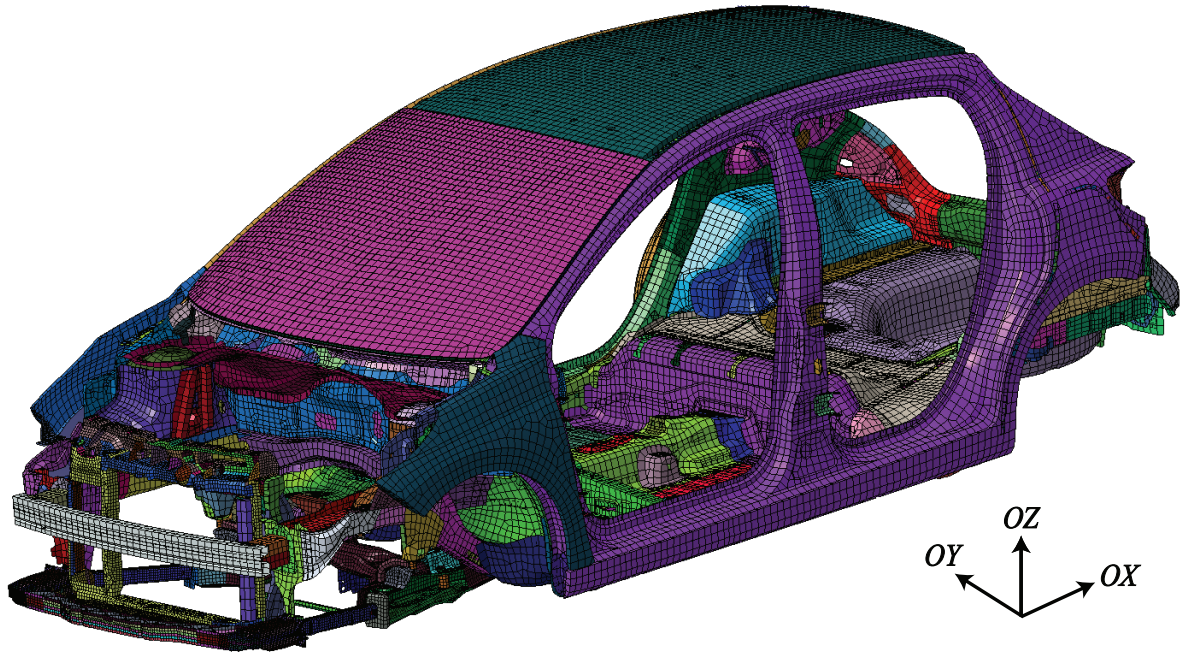


FIGURE 3.3 – Maillage du modèle de véhicule automobile "nu".

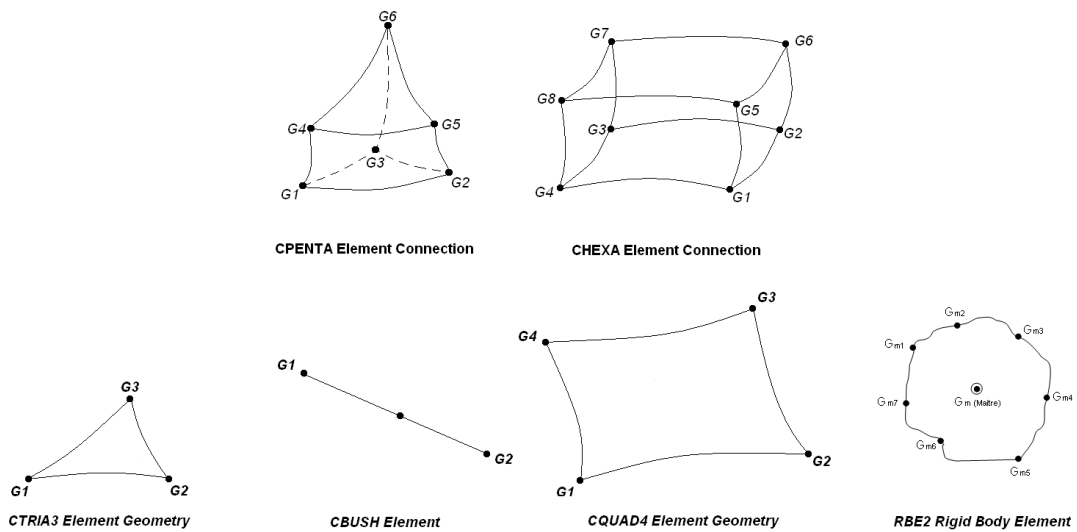


FIGURE 3.4 – Schéma des différents types d'éléments.

3.4.2 Réponses calculées avec le modèle nominal de référence

3.4.2.1 Calcul des modes élastiques

Les modes élastiques sont calculés en résolvant l'équation (3-32) avec le logiciel Nastran. Les modes propres sont normalisés de sorte que les masses généralisées soient égales à 1, c'est-à-dire,

$$\{\phi_i\}^T [\mathbb{M}] \{\phi_i\} = 1 \quad , \quad \forall i \in \{1 \dots n\}. \quad (3-56)$$

Les 300 premiers modes propres élastiques sont calculés. La fréquence du mode élastique la plus élevée est 260.6 Hz. Une étude de convergence vis-à-vis du nombre de modes élastiques sera réalisée pour estimer la réponse dans la bande d'analyse $\mathcal{B} = [0, 120]$ Hz, ce qui permettra de calculer une valeur optimale de n . Le premier mode élastique ϕ_1 et le troisième mode élastique ϕ_3 sont montrés respectivement sur les figures 3.5 et 3.6. On peut voir que le premier mode élastique ϕ_1 est un mode élastique local du pare-choc alors que le troisième mode élastique ϕ_3 est un mode élastique globale. Le mode ϕ_3 correspond en fait au premier mode global du modèle c'est-à-dire au mode de torsion de caisse.

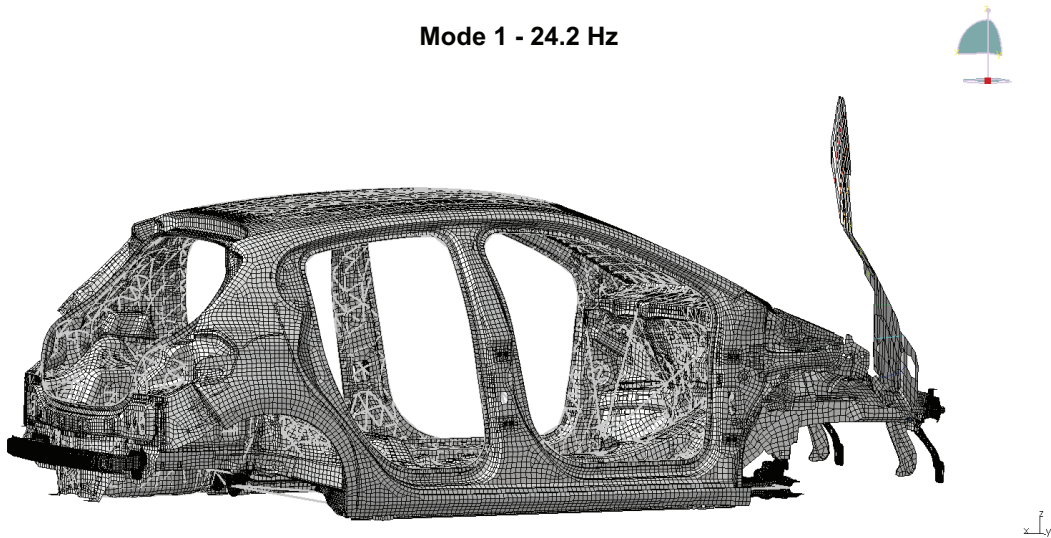


FIGURE 3.5 – Premier mode élastique (mode 1 à 24.2 Hz).

Mode 3 - 39.1 Hz

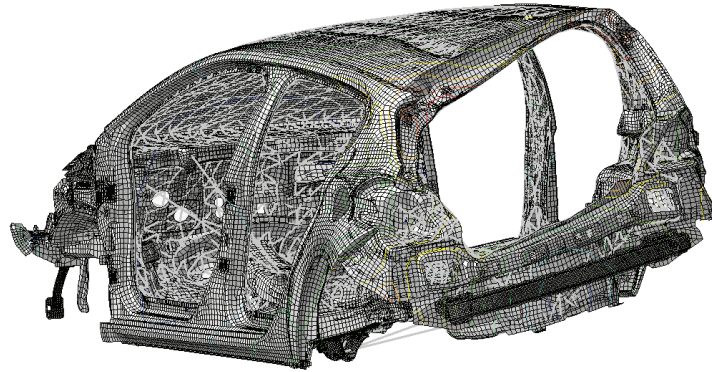


FIGURE 3.6 – Troisième mode élastique (mode 3 à 39.1 Hz).

Il est très difficile de classer les modes propres élastiques en modes élastiques globaux et en modes élastiques locaux. En effet, beaucoup de modes élastiques à dominante globale ont des contributions locales et inversement. Par exemple, le 11^{ème} mode élastique ϕ_{11} (figure 3.7) est un mode élastique global avec un déplacement locale important sur le toit.

Mode 11 - 48.9 Hz

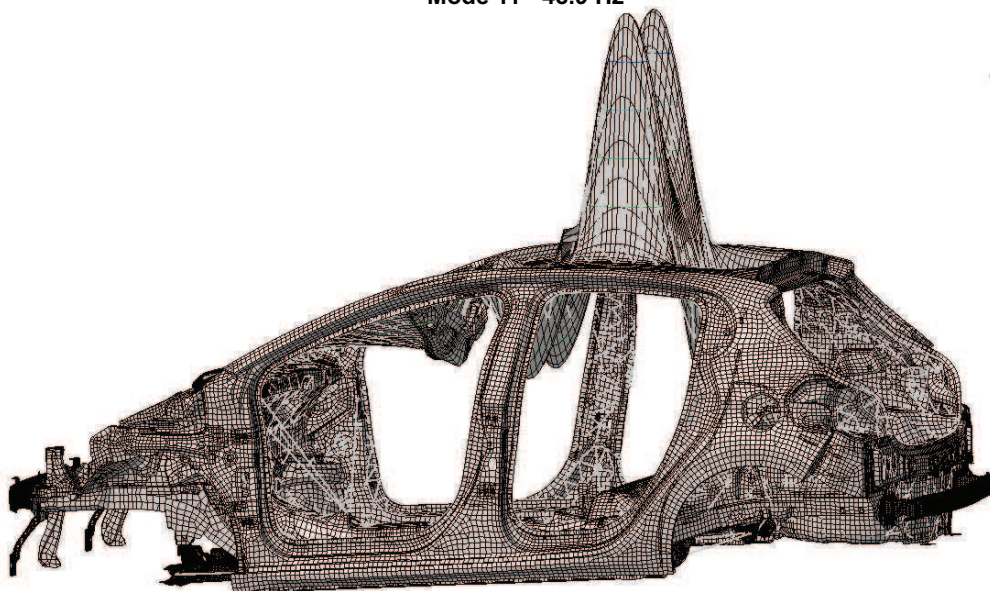


FIGURE 3.7 – Onzième mode élastique (mode 11 à 48.9 Hz) avec des déplacements globaux et présentant des déplacements locaux sur le toit.

3.4.2.2 Réponse fréquentielle calculée avec le modèle nominal de référence

Le modèle nominal de référence est le modèle réduit construit avec les modes élastiques, défini au paragraphe 3.3.3.1. Nous nous intéressons au calcul de la réponse fréquentielle dans la bande d'analyse $\mathcal{B} = [0, 120]$ Hz. La structure est soumise à deux forces égales à 1 N appliquées selon les axes OX et OZ (voir figure 3.3) sur les nœuds *Exc1* et *Exc2* (voir figure 3.8) et à deux moments égaux à 1 N×m autour des axes OX et OY sur les nœuds *Exc1* et *Exc2*. Ces forces et moments sont constant sur la bande de fréquence $\mathcal{B}$. Ces nœuds d'excitation sont sur une partie rigide. La réponse est calculée en quatre points d'observation situés sur des parties rigides (voir figure 3.8) (dans le langage de l'ingénierie de l'industrie automobile, le point *Obs1* est situé au milieu du tunnel, le point *Obs2* est situé sur le bas du tunnel (coté droit), le point *Obs3* est situé sur le bas du tunnel (coté gauche) et le point *Obs4* est situé sur le support pieds coté droit).

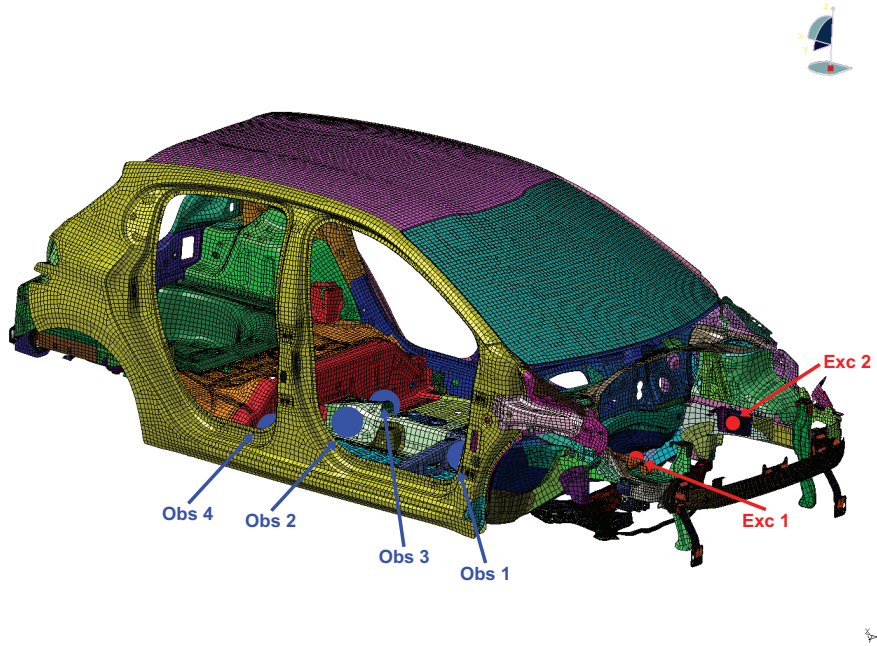


FIGURE 3.8 – Points d'observation (*Obs1*, *Obs2*, *Obs3* et *Obs4*) et points d'excitation (*Exc1* et *Exc2*).

La convergence de la réponse fréquentielle dans la bande $\mathcal{B}$, vis-à-vis du nombre de modes élastiques, est analysée en étudiant la fonction $n \rightarrow \text{Conv}(n)$ telle que

$$n \rightarrow \text{Conv}(n) = \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}} \|\mathbf{U}_i(\omega)\|^2 d\omega \quad \text{pour } \omega \in \mathcal{B} = [\omega_{\min}, \omega_{\max}] , \quad (3-57)$$

$\mathbf{U}_i = (\mathbb{U}_{x,i}^n, \mathbb{U}_{y,i}^n, \mathbb{U}_{z,i}^n)$ où $\mathbb{U}_{x,i}^n$, $\mathbb{U}_{y,i}^n$ et $\mathbb{U}_{z,i}^n$ sont respectivement les déplacements suivant OX , OY et OZ pour le nœud d'observation $Obs\ i$, n est le nombre de modes élastiques et avec $\|\mathbf{u}\|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ et où n_{obs} est le nombre de nœud d'observation ($n_{\text{obs}} = 4$). La figure 3.9 montre le graphe de la fonction $n \rightarrow \text{Conv}(n)$.

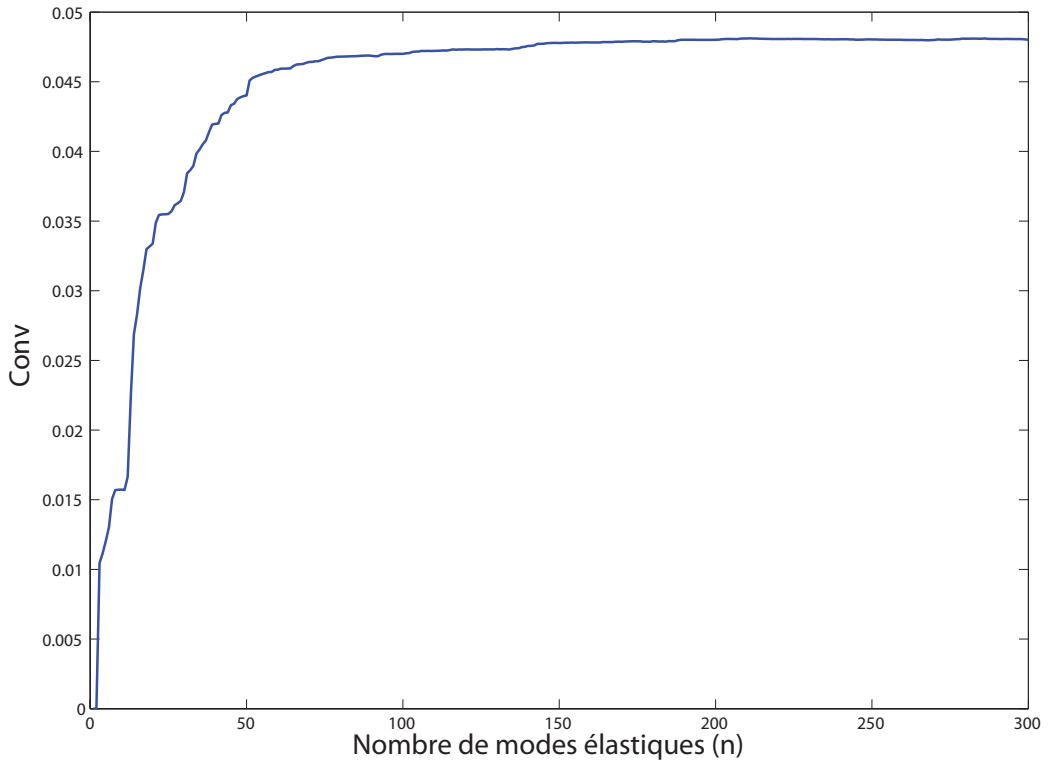


FIGURE 3.9 – Analyse de convergence vis-à-vis du nombre de modes élastiques sur $[0, 120]$ Hz. Graphe de la fonction $n \rightarrow \text{Conv}(n)$.

La figure 3.9 montre que la convergence est atteinte pour $n = 160$. Pour la suite de l'étude, les analyses sur la bande $[0, 120]$ Hz seront menées avec $n = 160$.

Les réponses fréquentielles sont calculées avec un taux de dissipation de 4%, aux 4 points d'observation $Obs\ 1$, $Obs\ 2$, $Obs\ 3$ et $Obs\ 4$, pour le déplacement vertical suivant OZ , sont représentées sur la figure 3.10.

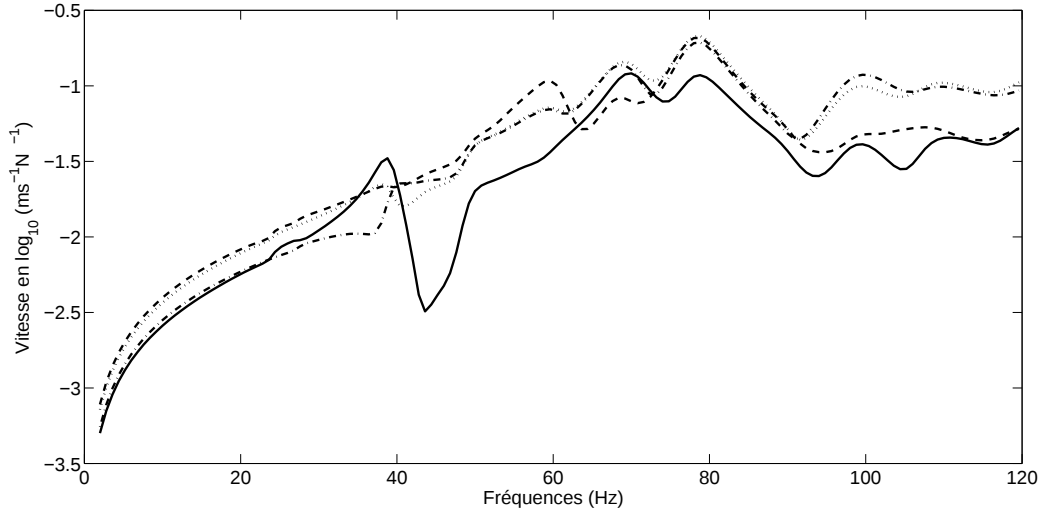


FIGURE 3.10 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse pour les 4 points d'observations : *Obs 1* en tirets, *Obs 2* en pointillés, *Obs 3* en trait alterné et *Obs 4* en trait continu.

3.4.3 Calcul des vecteurs propres des déplacements globaux et des vecteurs propres des déplacements locaux

Les vecteurs propres des déplacements locaux et les vecteurs propres des déplacements globaux sont construits en utilisant la méthode de double projection présentée dans le paragraphe 3.3.3.3. La matrice $[H^r]$ relative à la discrétisation de l'opérateur h^r est construite avec une décomposition en sous-domaines faite par la méthode de la Fast Marching Method (présenté dans le chapitre 4). Nous avons utilisés une décomposition du domaines en 90 sous-domaines. La figure 3.11 présente les sous-domaines du modèle EF de la structure "nue". Une analyse de la convergence vis-à-vis du nombre n_g de vecteurs propres des déplacements globaux pour la bande de fréquence $[0, 120]$ Hz a été réalisée en étudiant la fonction $n_g \rightarrow Erreur(n_g)$ telle que

$$n_g \rightarrow Erreur(n_g) = \frac{\int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}} \|\mathbf{U}_i^{(n_g)}(\omega) - \mathbf{U}_i^n(\omega)\|^2 d\omega}{\int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}} \|\mathbf{U}_i^n(\omega)\|^2 d\omega} \quad , \quad (3-58)$$

où $\mathbf{U}_i^n(\omega)$ est relative à la réponse en fréquence de référence calculée avec les n modes élastiques pour l'observation *Obs i* et $\mathbf{U}_i^{(n_g)}(\omega)$ est la réponse calculée avec les n_g vecteurs propres des déplacements globaux.

La figure 3.12 montre le graphe de la fonction d'erreur $n_g \rightarrow Erreur(n_g)$.

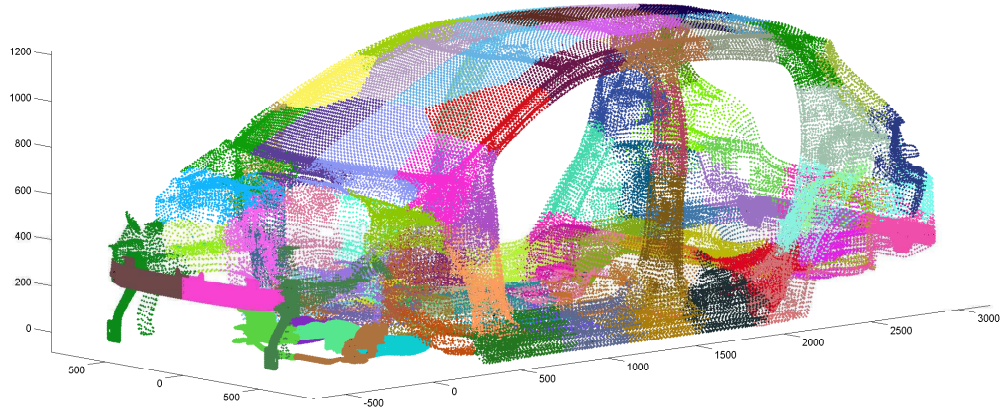


FIGURE 3.11 – 90 sous-domaines (un par couleur) sur le modèle EF de la structure "nue".

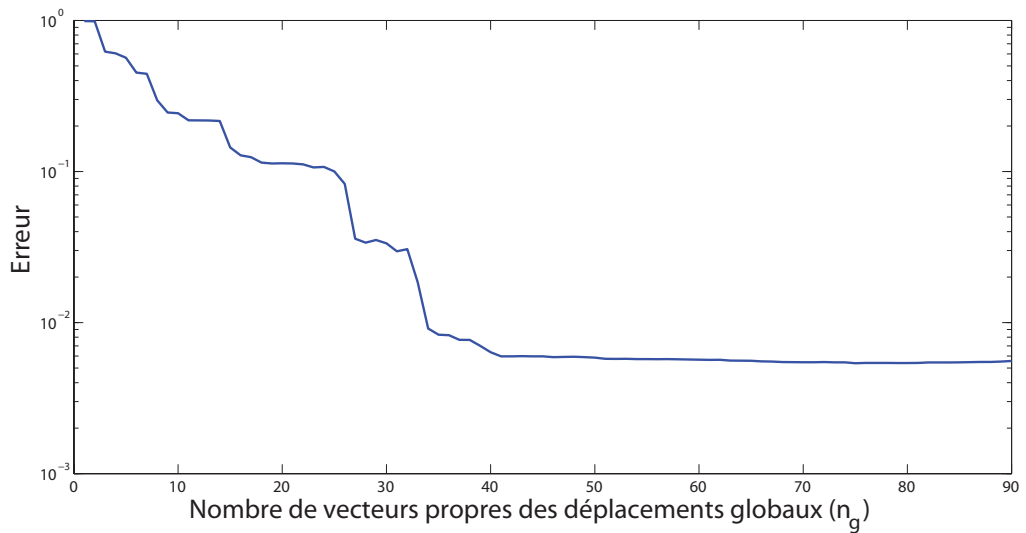


FIGURE 3.12 – Graphe de la fonction $n_g \mapsto Erreur(n_g)$.

La figure 3.12 montre qu'il faut $n_g = 36$ vecteurs propres des déplacements globaux pour la bande d'analyse $[0, 120]$ Hz. On prend $n_\ell = 124$ vecteurs propres des déplacements locaux sachant qu'il y en a 56 dans la bande $[0, 120]$ Hz. Les distributions des valeurs propres des déplacements globaux et des valeurs propres des déplacements locaux en fonction de

la fréquence en Hz, sont présentées à la figure 3.13.

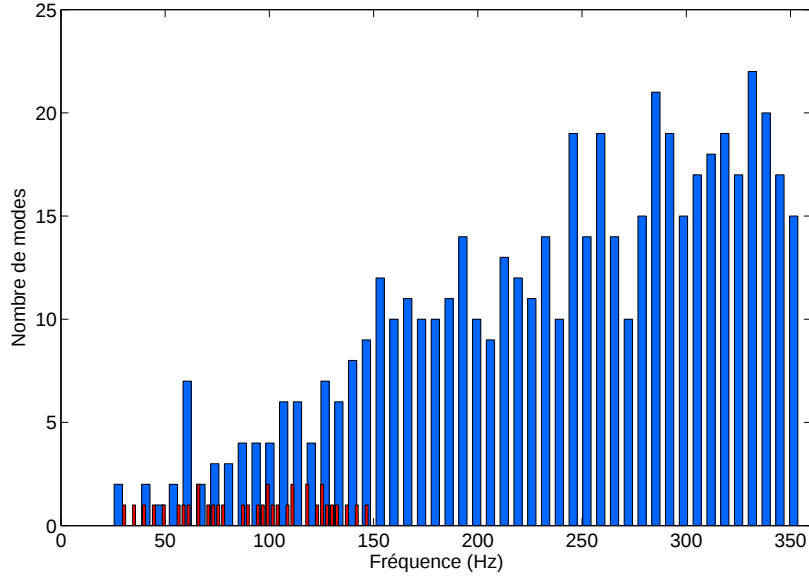


FIGURE 3.13 – Distributions des valeurs propres des déplacements globaux (histogramme rouge) et des valeurs propres des déplacements locaux (histogramme bleu) en fonction de la fréquence en Hz.

3.4.4 Calcul des fonctions de réponse en fréquence avec les différents modèles réduits

Nous comparons les réponses en fréquence calculées pour les différents modèles réduits associés aux différentes bases de projection. Les modèles réduits sont : (1) le modèle nominal de référence présenté au paragraphe 3.4.2 avec n modes élastiques ($\mathbb{U}^n$, $n = 160$), (2) le modèle réduit (équations (3-50) et (3-51)) construit avec n_g vecteurs propres des déplacements globaux ($\mathbb{U}^{(n_g)}$, $n_g = 36$ et $n_\ell = 0$), (3) le modèle réduit (équations (3-43) et (3-45)) construit avec les n_ℓ vecteurs propres des déplacements locaux uniquement ($\mathbb{U}^{(n_g, n_\ell)}$, $n_g = 0$ et $n_\ell = 124$), et enfin, (4) le modèle réduit défini par les équations (3-43) et (3-45) utilisant les n_g vecteurs propres des déplacements globaux et les n_ℓ locaux ($\mathbb{U}^{(n_g, n_\ell)}$, $n_g = 36$ et $n_\ell = 124$). Les modules en échelle logarithmique des réponses en vitesse aux points d'observation *Obs 1*, *Obs 2*, *Obs 3* et *Obs 4* sont représentés respectivement aux figures 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17.

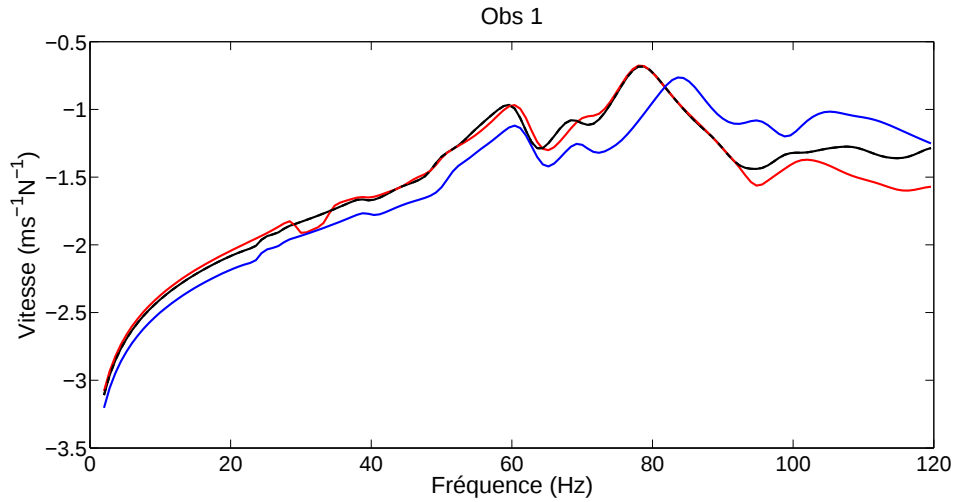


FIGURE 3.14 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 1*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements locaux uniquement (en bleu), vecteurs propres des déplacements globaux et locaux (trait mince continu noir superposé au trait épais noir).

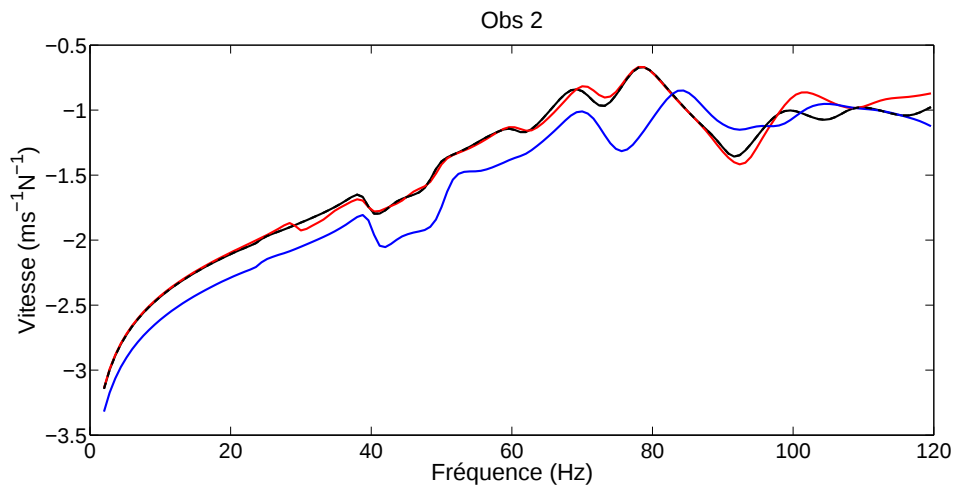


FIGURE 3.15 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 2*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements locaux uniquement (en bleu), vecteurs propres des déplacements globaux et locaux (trait mince continu noir superposé au trait épais noir).

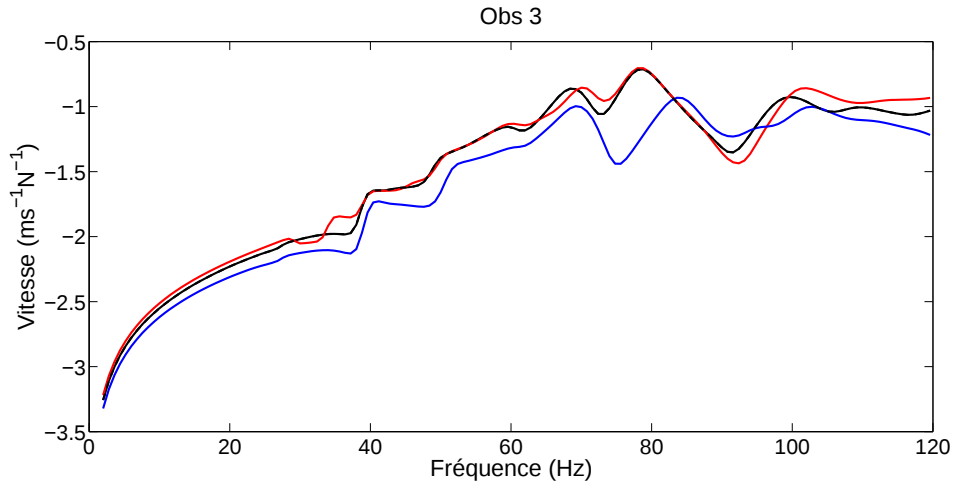


FIGURE 3.16 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 3*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements locaux uniquement (en bleu), vecteurs propres des déplacements globaux et locaux (trait mince continu noir superposé au trait épais noir).

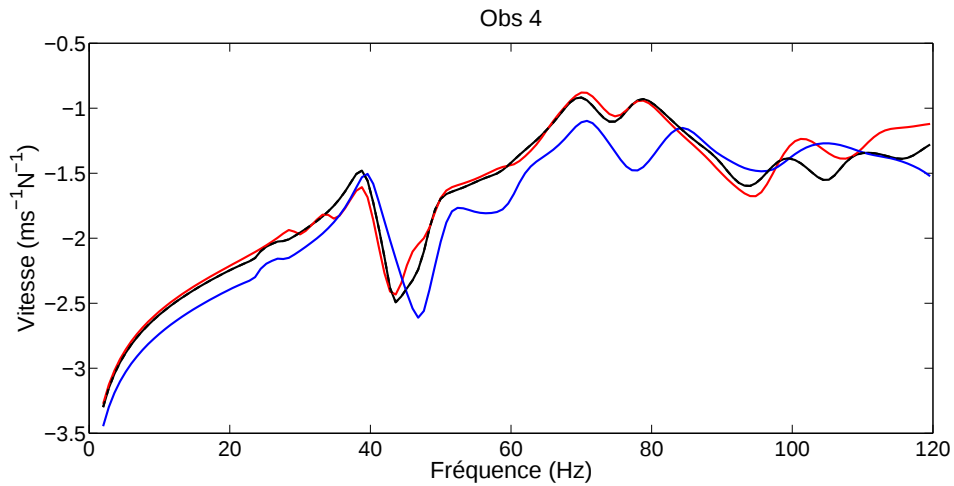


FIGURE 3.17 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 4*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements locaux uniquement (en bleu), vecteurs propres des déplacements globaux et locaux (trait mince continu noir superposé au trait épais noir).

On peut constater que les réponses calculées à l'aide des vecteurs propres des déplacements globaux et des vecteurs propres des déplacements locaux sont exactement les mêmes que

les réponses calculées en utilisant les modes élastiques (solution de référence). L'analyse de ces quatre résultats pour ces quatre points d'observation nous permet de confirmer qu'avec les 36 vecteurs propres des déplacements globaux nous obtenons à une bonne approximation de la fonction de réponse de référence (calculée avec les 160 modes élastiques).

3.4.5 Calcul des fonctions de réponse en fréquence avec le modèle réduit des déplacements globaux avec correction d'amortissement

Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 3.3.3.5, afin de réduire l'écart entre la réponse du modèle nominal de référence et la réponse du modèle réduit des déplacements globaux, nous utilisons maintenant le modèle réduit des déplacements globaux avec correction de l'amortissement. Le problème d'optimisation sous contrainte (3-53) est résolu à l'aide de Matlab (fonction lsqnonlin), afin d'identifier le vecteur $\mathbf{a}^{\text{opt}}$ nécessaire à la construction de la matrice $D^{gg,mod}$. Les modules en échelle logarithmique des réponses en vitesse, avec et sans correction d'amortissement, pour les points d'observation *Obs 1*, *Obs 2*, *Obs 3* et *Obs 4*, sont présentés respectivement aux figures 3.18, 3.20, 3.22 et 3.24. Les écarts en dB par rapport à la réponse nominale de référence, avec et sans correction d'amortissement, sont tracés sur les figures 3.19, 3.21, 3.23 et 3.25.

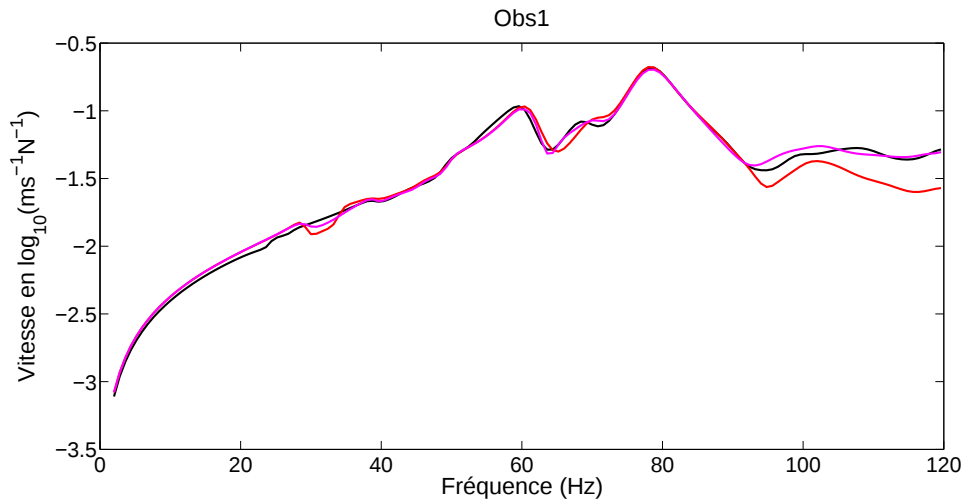


FIGURE 3.18 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 1*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction de l'amortissement (en magenta).

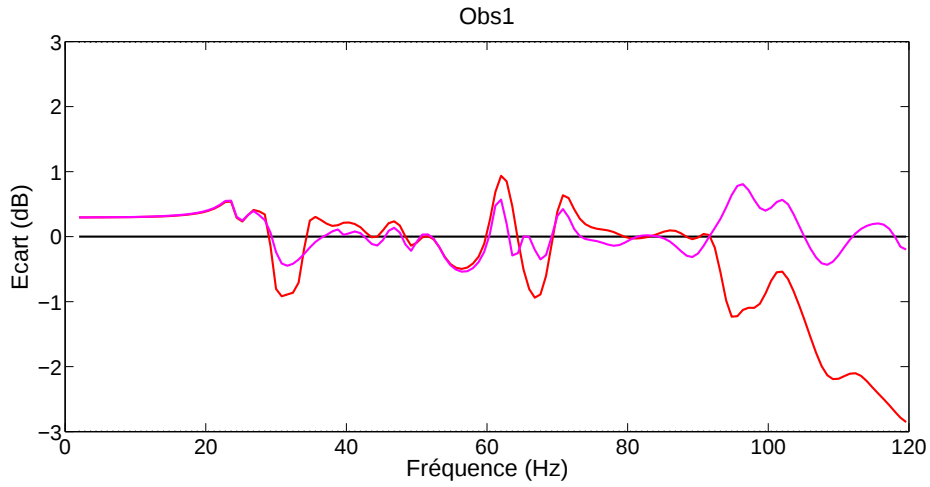


FIGURE 3.19 – Ecart en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction pour *Obs1*. Comparaisons entre différentes bases de projection : vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction de l'amortissement (en magenta).

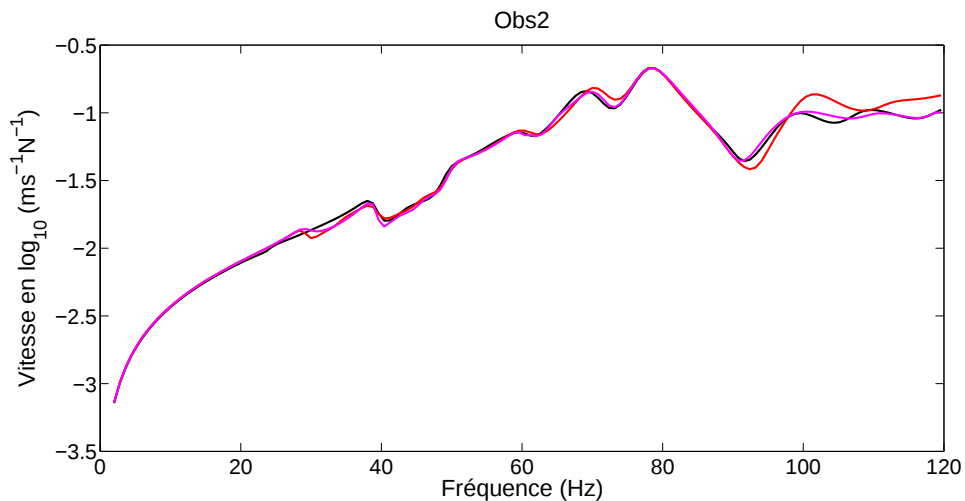


FIGURE 3.20 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs2*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction de l'amortissement (en magenta).

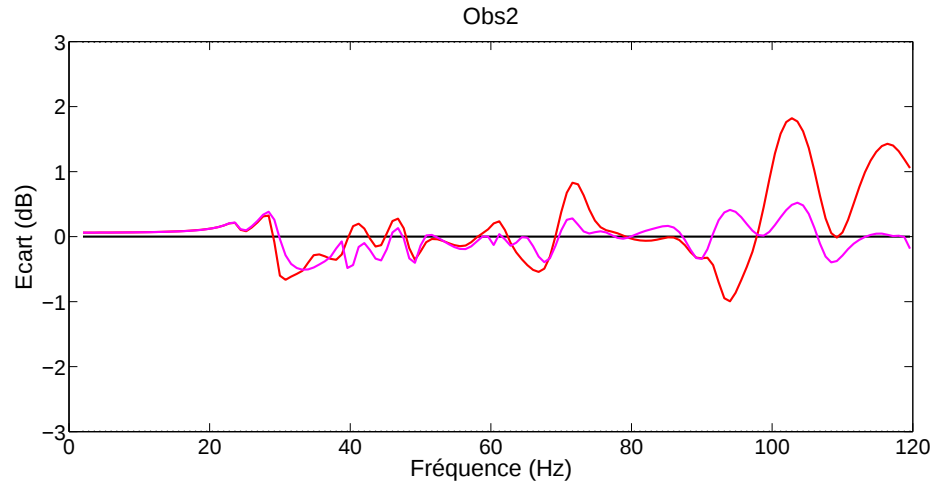


FIGURE 3.21 – Ecart en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction pour *Obs 2*. Comparaisons entre différentes bases de projection : vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction de l'amortissement (en magenta).

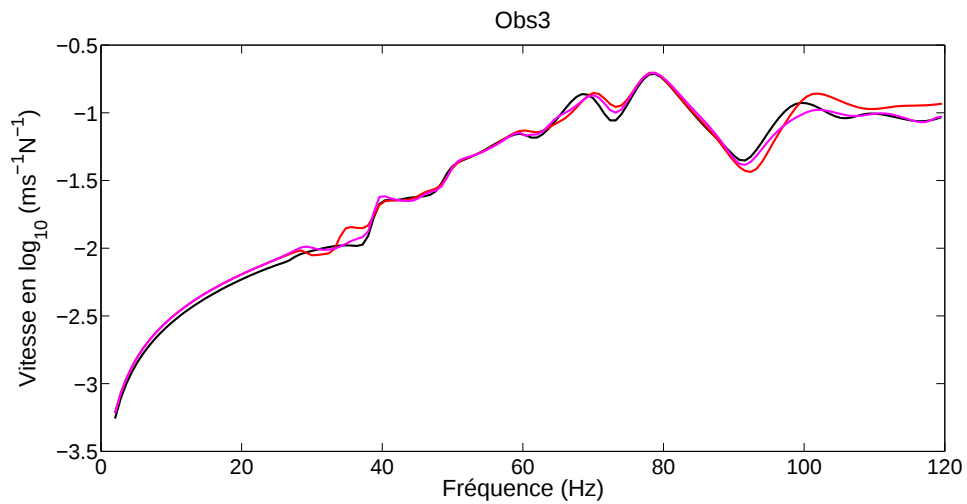


FIGURE 3.22 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 3*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction de l'amortissement (en magenta).

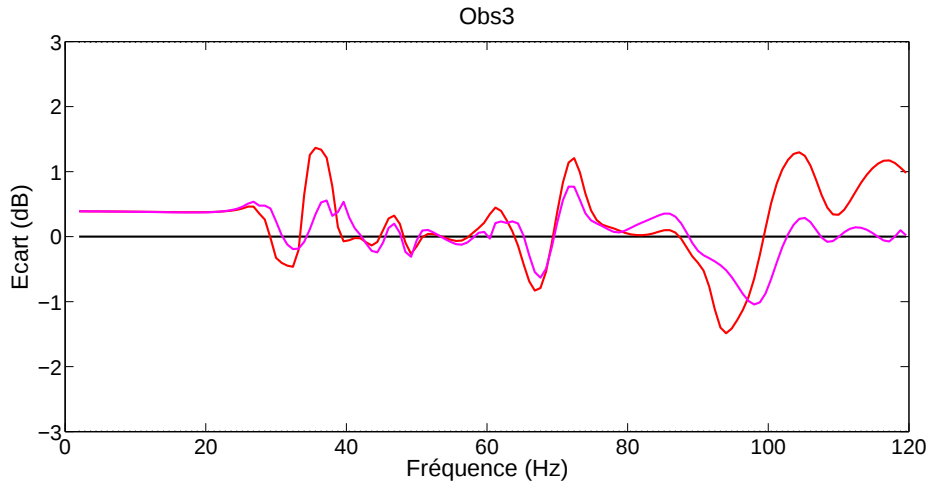


FIGURE 3.23 – Ecart en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction pour *Obs 3*. Comparaisons entre différentes bases de projection : vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction de l’amortissement (en magenta).

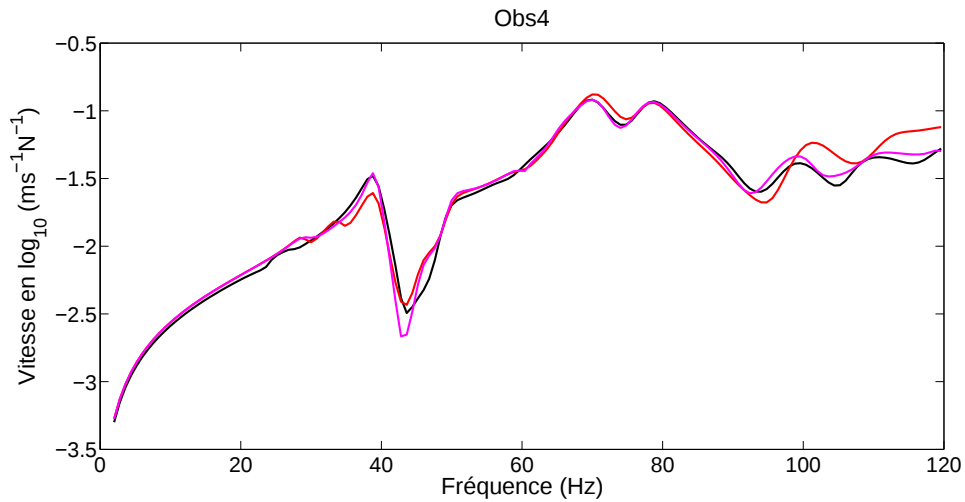


FIGURE 3.24 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 4*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction de l’amortissement (en magenta).

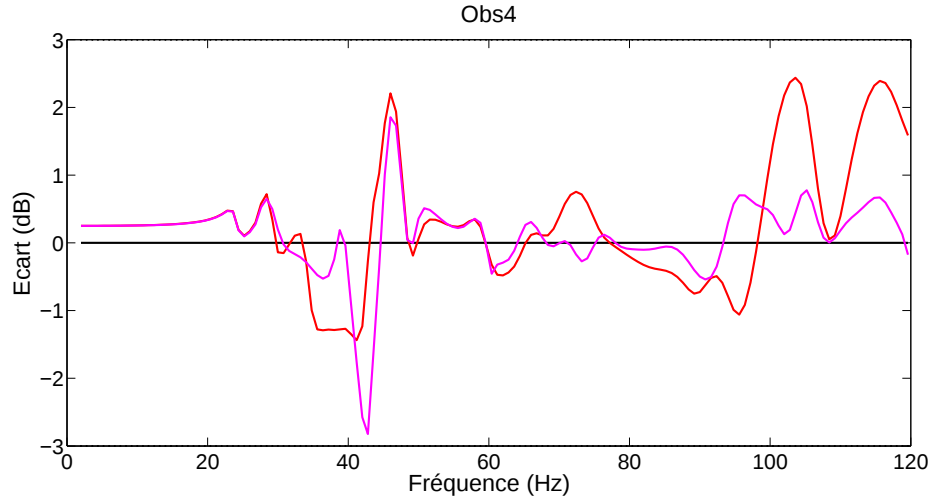


FIGURE 3.25 – Ecart en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction pour *Obs4*. Comparaisons entre différentes bases de projection : vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction de l'amortissement (en magenta).

Sur ces figures, on peut constater que la correction de l'amortissement permet de diminuer l'écart entre le modèle réduit des déplacements globaux avec correction de l'amortissement et le modèle nominal de référence. Cela permet d'améliorer la prévision du modèle réduit des déplacements globaux construit avec 36 vecteurs propres globaux seulement.

3.5 Influence du nombre de sous-domaines

Nous considérons le modèle EF de structure "nue" introduit dans le paragraphe 3.4.1 (voir figure 3.3). Le but de ce paragraphe est d'étudier l'influence du nombre de sous-domaines sur la dimension et la précision du modèle réduit des déplacements globaux sans correction d'amortissement. En effet, plus le nombre de sous-domaines est élevé, plus la dimension de ces derniers est petite et donc plus la longueur d'onde spatiale de coupure est petite. Les points de contrôle qui sont aux centres des sous-domaines sont répartis "uniformément" sur les parties raides de la structure "nue". L'étude est réalisée avec un nombre de sous-domaines N égale à 37, 52 et 90.

La figure 3.26 représente les répartitions des 37 sous-domaines (a), des 52 sous-domaines (b), et des 90 sous-domaines (c) sur la structure "nue" du véhicule. La figure 3.27 représente la fonction d'erreur $n_g \rightarrow \text{Erreur}(n_g)$ pour les 3 configurations. Pour $N = 37$ et

CHAPITRE 3. CONSTRUCTION DU MODÈLE RÉDUIT.

$N = 52$, on constate que la stabilisation du niveau d'erreur est atteinte pour $n_g = 22$, alors que pour $N = 90$, elle est atteinte pour $n_g = 36$. Cette même figure montre que la meilleure convergence par rapport à la solution de référence est obtenue pour $N = 90$.

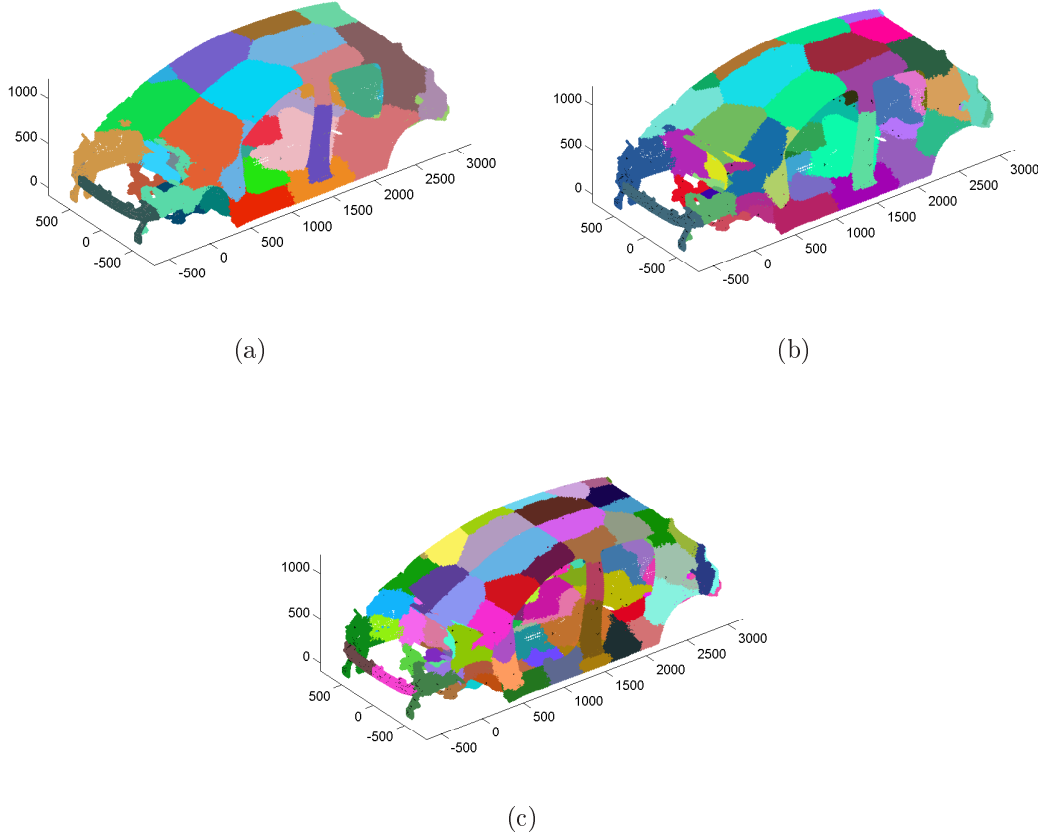


FIGURE 3.26 – Configurations étudiées : 37 sous-domaines générés (a), 52 sous-domaines générés (b) et 90 sous-domaines générés (c).

Enfin, la figure 3.28 représente, pour le point d'observation *Obs 1*, les écarts en dB entre la réponse nominale de référence et la réponse calculée avec le modèle réduit des déplacements globaux sans correction d'amortissement. On remarque, comme attendu, que plus le nombre de sous-domaine est élevé, plus la précision du modèle réduit est élevée.

Pour un niveau d'erreur fixée à 3 dB, il faut donc choisir le meilleur compromis du modèle réduit des déplacements globaux entre une faible dimension de ce modèle réduit et une bonne précision de la réponse calculée avec celui-ci. Pour l'exemple de la structure "nue", le meilleur compromis trouvé est $N = 90$ et $n_g = 36$.

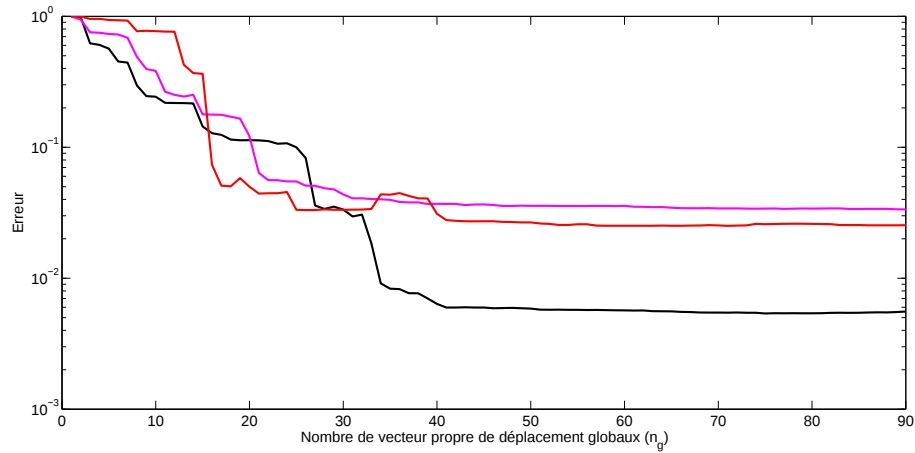


FIGURE 3.27 – Graphe de la fonction $n_g \rightarrow \text{Erreur}(n_g)$: configuration $N = 37$ (rouge), configuration $N = 52$ (magenta) et configuration $N = 90$ (noir).

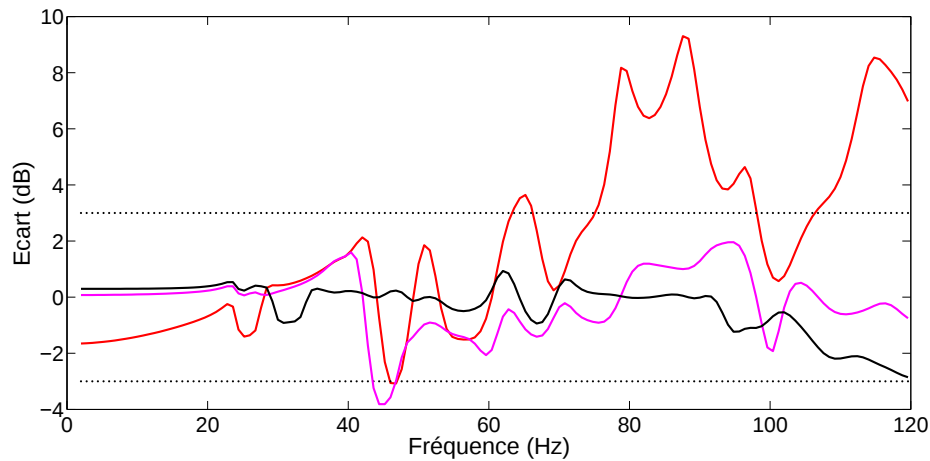


FIGURE 3.28 – Ecart en dB par rapport à la réponse nominale de référence pour $N = 37$ et $n_g = 22$ (rouge), pour $N = 52$ et $n_g = 22$ (magenta) et pour $N = 90$ et $n_g = 36$ (noir).

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthodologie permettant de construire un modèle réduit des déplacements globaux avec et sans correction d'amortissement. Nous avons validé la méthodologie sur un modèle EF de structure "nue" d'un véhicule automobile. Avec 90 sous-domaines, l'analyse de convergence du modèle réduit des déplacements globaux conduit à retenir $n_g = 36$ vecteurs propres des déplacements globaux qu'il faut comparer au $n = 160$ modes élastiques qu'il est nécessaire d'utiliser pour synthétiser la réponse en fréquence sur la bande de fréquence considérée. Il y a donc un gain très important sur la

CHAPITRE 3. CONSTRUCTION DU MODÈLE RÉDUIT.

dimension du modèle réduit pour prévoir les réponses des parties raides de la structure. Avec ces 36 vecteurs propres des déplacements globaux, les écarts entre la réponse du modèle réduit des déplacements globaux et la réponse nominale de référence sont inférieurs à ± 3 dB. La correction d'amortissement permet de réduire encore cet écart. Afin de prendre en compte les incertitudes induites par les erreurs irréductibles, un modèle d'incertitude sera implémenté sur ce modèle réduit des déplacements globaux dans le chapitre 5.

Décomposition du domaine en sous-domaines par la Fast Marching Method

Sommaire

4.1	Principe de la Fast Marching Method	52
4.2	Algorithme de base de la FMM	54
4.3	Validation de la version de base de la FMM sur un modèle simple 2D	56
4.4	FMM pour les éléments TRI3	58
4.5	Construction des sous-domaines	66
4.6	Décomposition en sous-domaines pour un modèle numérique de structure automobile "nue"	66
4.7	Conclusion	69

Dans le chapitre 3, nous avons présenté une méthodologie permettant de construire un modèle réduit adapté à la prévision des déplacements globaux sur les parties raides d'une structure hétérogène, dans le domaine BF. La construction de ce modèle réduit nécessite de décomposer le domaine initial en sous-domaines dont les dimensions sont contrôlées. En effet, le nombre de vecteurs propres des déplacements globaux, et donc la dimension du modèle réduit, dépende de cette décomposition et notamment l'introduction d'une dimension caractéristique des sous-domaines permet d'introduire une longueur d'onde de coupure au dessous de laquelle les déplacements locaux sont filtrés et au dessus de laquelle on extrait les déplacements globaux. L'objectif de ce chapitre, est de présenter une méthode permettant de décomposer automatiquement le domaine de la structure en imposant une dimension caractéristique des sous-domaines et donc une longueur d'onde de coupure. Pour un modèle numérique EF d'une structure aussi complexe que celle d'une structure d'automobile, la décomposition du domaine n'est pas facile à réaliser car la

CHAPITRE 4. DÉCOMPOSITION DU DOMAINE EN SOUS-DOMAINES PAR LA FAST MARCHING METHOD

géométrie est très complexe et courbe. La méthode que nous proposons pour construire une telle décomposition est basée sur la Fast Marching Method (FMM) présentée dans [Sethian et Vladimirovsky \[85\]](#). Cette méthode permet, à partir d'un point du maillage EF, de propager un front (la notion de front sera définie par la suite) dans le maillage EF de la géométrie du domaine et notamment sur des surfaces courbes.

Le maillage EF d'une structure d'automobile est très complexe. Il est constitué de nombreux éléments : segment, triangle, quadrilatère, pentaèdre, hexaèdre, etc (voir la figure 4.1). La complexité du modèle est renforcée par la présence d'éléments rigides. Ces derniers sont, le plus souvent, générés automatiquement par les logiciels tel que Nastran, en générant des équations de contraintes entre les DDL du modèle EF. Il est à noter, que la méthode de base de la FMM n'est pas adaptée aux maillages considérés dans ce travail de par la présence d'éléments géométriques de type très différents et d'équations de contraintes. Nous avons donc dû implémenter des extensions proposées dans la littérature de la FMM. On commencera par présenter la version de base de la FMM et on l'appliquera sur un exemple simple. Puis, on introduira des modèles plus compliqués entraînant des difficultés que nous résoudrons au fur et à mesure grâce aux extensions de la FMM.

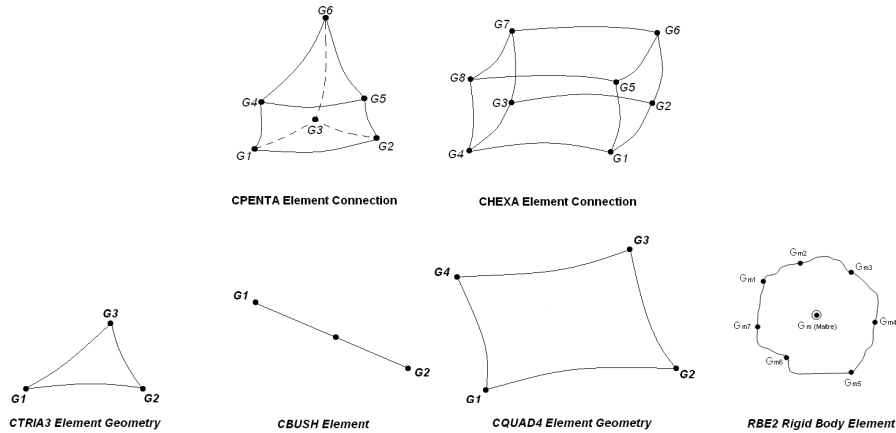


FIGURE 4.1 – Schéma des différents types d'éléments.

4.1 Principe de la Fast Marching Method

Soit $\mathbf{x}$ le point générique de $\mathbb{R}^3$ appartenant au domaine Ω (géométrie complexe). Soit $\mathbf{x}_0$, un point fixe appartenant à Ω . Soit $g(\mathbf{x})$ une distance géodésique entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_0$, adaptée à la géométrie. Il est à noter que pour un domaine volumique 3D "simple", cette distance géodésique serait la distance euclidienne $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne, alors

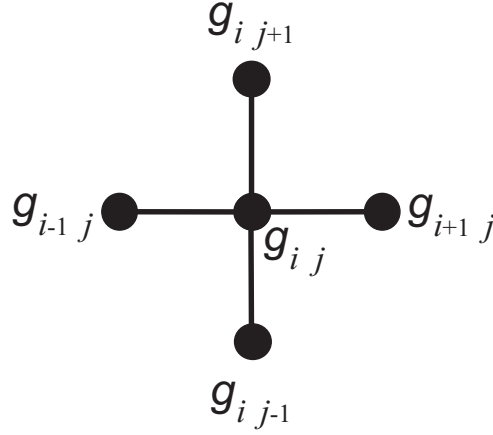


FIGURE 4.2 – Discrétisation spatiale pour l'équation Eikonale.

que pour un domaine 2D (surface 2D dans $\mathbb{R}^3$), la distance géodésique entre deux points sur la surface est la plus courte distance entre eux deux, en restant sur la surface. Le front associé à $\mathbf{x}_0$ est défini comme le sous-ensemble de tous les $\mathbf{x}$ tel que $g(\mathbf{x})$ a une valeur fixée. La FMM [Sethian et Vladimirsky \[85\]](#) permet de faire propager numériquement un front dans le domaine Ω à partir du point de départ $\mathbf{x}_0$. Nous devons alors calculer $g(\mathbf{x})$ qui vérifie l'équation Eikonale non linéaire suivante :

$$\|\nabla g(\mathbf{x})\| = s(\mathbf{x}) \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad , \quad (4-1)$$

où ∇ est le gradient par rapport à $\mathbf{x}$, et $s(\mathbf{x})$ est une fonction arbitraire à valeur positive. La condition aux limites est décrite par $g(\mathbf{x}) = 0$ sur γ_0 qui est, soit une courbe, soit une surface de Ω , contenant $\mathbf{x}_0$.

L'équation (4-1) est discrétisée en utilisant un schéma numérique adapté (voir [Sethian et Vladimirsky \[85\]](#)). Dans la version de base de la FMM, on considère un maillage EF rectangulaire régulier plan. La dimension de la maille est h et les nœuds du maillage sont notés $\mathbf{x}_{ij}$. On doit alors chercher $g_{ij} = g(\mathbf{x}_{ij})$ qui satisfait l'équation suivante (voir la figure 4.2)

$$\{\max(g_{ij} - g_{i-1,j}, g_{ij} - g_{i+1,j}, 0)\}^2 + \{\max(g_{ij} - g_{i,j-1}, g_{ij} - g_{i,j+1}, 0)\}^2 = h^2 s_{ij}^2, \quad (4-2)$$

où $s_{ij} = s(\mathbf{x}_{ij})$. Cette équation permet de faire avancer un front, en partant du point de départ $\mathbf{x}_0$. La Fast Marching Method fait avancer un front dans le but de produire la solution g_{ij} . La clef de cette méthode réside dans le fait que dans la FMM, le front ne peut qu'avancer. L'algorithme construit la solution en utilisant les plus petites valeurs de g_{ij} . L'utilisation du mot *Fast* dans FMM est dû au fait que les nœuds associés aux g_{ij} , calculés avec l'équation (4-2), appartiennent à un petit domaine qui est appelé la "Narrow Band" (Bande étroite). Le principe est (1) de créer une zone autour du front

(ligne en 2D ou surface en 3D) qui est composée des nœuds du maillage connectés à ce front par les éléments finis (c'est la Narrow Band), (2) de calculer pour ces nœuds la valeur temporaire de la distance g_{ij} , (3) de fixer les valeurs de g_{ij} pour les nœuds sélectionnés, et enfin, (4) d'incorporer de nouveaux nœuds dans la Narrow Band (NB) (cette méthode est développée ci-dessous). Dans la Fast Marching Method, l'algorithme introduit trois groupes de nœuds :

- (1) les nœuds *alive* $\mathbf{x}_{ij}$ pour lesquels la valeur de g_{ij} est fixée et ne change pas.
- (2) les nœuds *trial* $\mathbf{x}_{ij}$ pour lesquels la valeur de g_{ij} est donnée mais doit être mise à jour (seulement à partir de nœuds *alive*) jusqu'à ce qu'ils deviennent *alive*. L'ensemble des nœuds *trial* constituent la Narrow Band.
- (3) les nœuds *far* $\mathbf{x}_{ij}$ qui n'ont pas été atteints par le front et, par conséquent sont tels que $g_{ij} = +\infty$.

Nous allons dans un premier temps, présenter l'algorithme sur une grille rectangulaire 2D. C'est le cas le plus simple et cela permet de bien comprendre le principe de l'algorithme de base de la FMM.

4.2 Algorithme de base de la FMM

4.2.1 L'algorithme

L'algorithme de la Fast Marching Method peut être décomposé en deux étapes : l'initialisation et une boucle d'itération. Le front est propagé en utilisant l'algorithme suivant :

Initialisation

- Choisir un nœud de départ $\mathbf{x}_0$, renomé sous la forme $\mathbf{x}_{0,0}$, qui est un nœud *alive* et tel que $g_{0,0} = g(\mathbf{x}_{0,0}) = 0$ (voir la figure 4.3 -(a)).
- Les 4 nœuds voisins $\mathbf{x}_{ij}$ de $\mathbf{x}_{0,0}$ deviennent des nœuds *trial* et la valeur associée de g est hs_{00} .
- Tous les autres nœuds $\mathbf{x}_{kl}$ sont des nœuds *far* avec la valeur associée de g égale à l'infini.

Boucle

- Rechercher parmi les nœuds *trial*, le nœud $\mathbf{x}_{ij}$ avec la plus petite valeur de g_{ij} .
- Supprimer $\mathbf{x}_{ij}$ des nœuds *trial* et ajouter $\mathbf{x}_{ij}$ aux nœuds *alive* (voir la figure 4.3 -(b)).
- Pour chaque nœud voisin $\mathbf{x}_{kl}$ du nœud $\mathbf{x}_{ij}$, il y a deux cas possibles :
 - si le nœud voisin est un nœud *far*, l'ajouter aux nœuds *trial* et lui attribuer une distance $g = g_{ij} + hs_{ij}$.

- si le nœud voisin est un nœud *trial*, sa valeur de g est mise à jour en résolvant l'équation (4-2).

La boucle est répétée jusqu'à ce que tous les nœuds soient *alive* (voir la figure 4.3 -(d)).

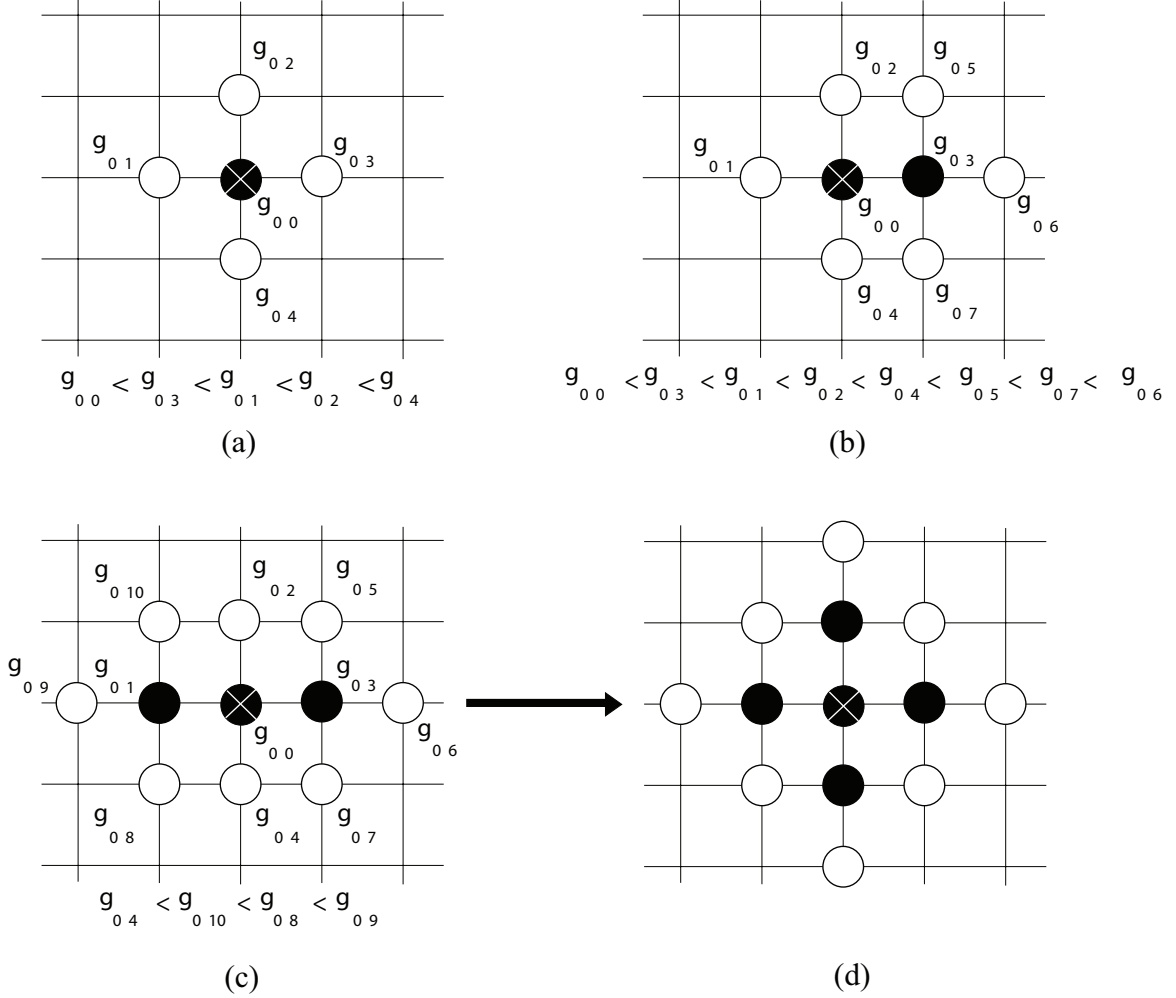


FIGURE 4.3 – Schéma des différentes étapes de la Fast Marching Method.

4.2.2 Calcul de la distance g

Pour mettre à jour la valeur de g , on doit résoudre l'équation (4-2) en ne prenant en compte que les nœuds *alive*. Soit $\mathbf{x}_{ij}$ un nœud ayant 4 connectivités (4 nœuds *alive*). Les deux couples de voisins opposés $\{\mathbf{x}_{i-1j}, \mathbf{x}_{i+1j}\}$ et $\{\mathbf{x}_{ij-1}, \mathbf{x}_{ij+1}\}$ sont tels que :

- $g(\mathbf{x}_{i-1j}) \leq g(\mathbf{x}_{i+1j})$
- $g(\mathbf{x}_{ij-1}) \leq g(\mathbf{x}_{ij+1})$
- $g(\mathbf{x}_{i-1j}) \leq g(\mathbf{x}_{ij-1})$

En considérant $g(\mathbf{x}_{ij}) \geq g(\mathbf{x}_{ij-1}) \geq g(\mathbf{x}_{i-1j})$, on obtient

$$(g(\mathbf{x}_{ij}) - g(\mathbf{x}_{i-1j}))^2 + (g(\mathbf{x}_{ij}) - g(\mathbf{x}_{ij-1}))^2 = h^2 s_{ij}^2, \quad (4-3)$$

L'étude du discriminant de l'équation (4-3) conduit à considérer deux cas :

- si $h^2 s_{ij}^2 > (g(\mathbf{x}_{ij-1}) - g(\mathbf{x}_{i-1j}))^2$ alors

$$g(\mathbf{x}_{ij}) = \frac{g(\mathbf{x}_{ij-1}) + g(\mathbf{x}_{i-1j}) + \sqrt{2h^2 s_{ij}^2 - (g(\mathbf{x}_{ij-1}) - g(\mathbf{x}_{i-1j}))^2}}{2}, \quad (4-4)$$

- sinon $g(\mathbf{x}_{ij}) = g(\mathbf{x}_{i-1j}) + h^2 s_{ij}^2$

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous vérifierons l'algorithme sur un modèle simple 2D, puis sur un modèle complexe de structure automobile "nue".

4.3 Validation de la version de base de la FMM sur un modèle simple 2D

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats obtenus par la FMM sur le maillage rectangulaire régulier d'un domaine simple 2D (carré). Le carré a 10 cm de coté et son maillage est composé de 10 000 éléments QUA4 (voir la figure 4.4). Dans ce chapitre, nous noterons ϵ la dimension caractéristique qui correspond à la distance maximale entre le nœud de départ ($\mathbf{x}_{0,0}$) et le front (la Narrow Band) arrêté dans sa configuration finale.

4.3.1 Modèle simple 2D avec des éléments QUA4

Nous allons faire varier ϵ de 1 à 3 cm afin de voir comment se propage le front sur ce maillage. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.5. Pour cet exemple, la distance géodésique correspond à la distance euclidienne. Le front doit donc correspondre à un cercle, ce qui est bien le cas sur la figure 4.5. On peut donc conclure, que pour un maillage rectangulaire régulier la version de base de la FMM fonctionne parfaitement. Par contre, pour un maillage complexe tel qu'un maillage EF d'une structure automobile "nue", le maillage est composé de plusieurs types d'éléments dont des éléments triangulaires pour mailler des surfaces. On va donc s'intéresser au comportement de cette version de base de la FMM sur un modèle 2D avec un maillage TRI3.

4.3. VALIDATION DE LA VERSION DE BASE DE LA FMM SUR UN MODÈLE SIMPLE 2D

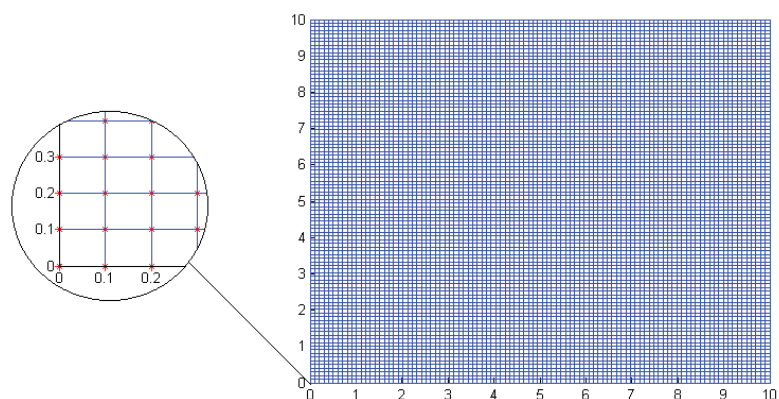


FIGURE 4.4 – Plaque simple de 10 cm $\times$ 10 cm avec maillage rectangulaire régulier.

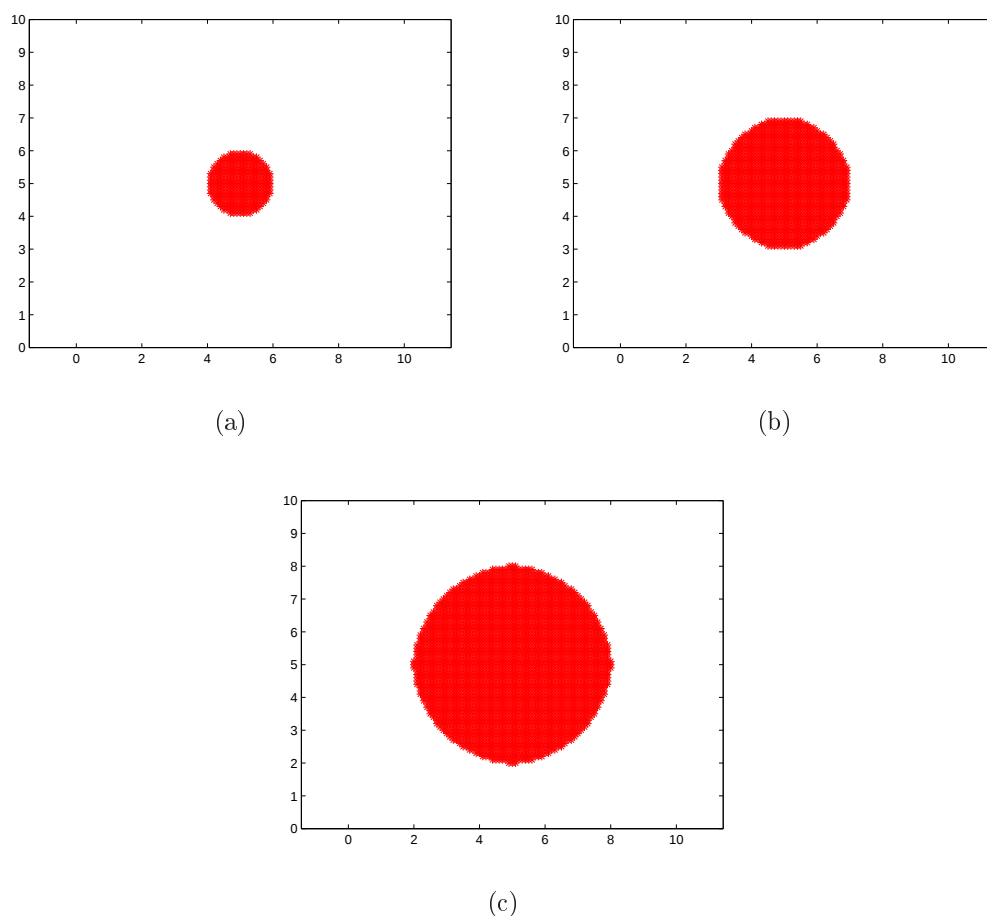


FIGURE 4.5 – Propagation du front sur la plaque simple avec maillage rectangulaire régulier : $\epsilon = 1$ cm (a), $\epsilon = 2$ cm (b), $\epsilon = 3$ cm (c).

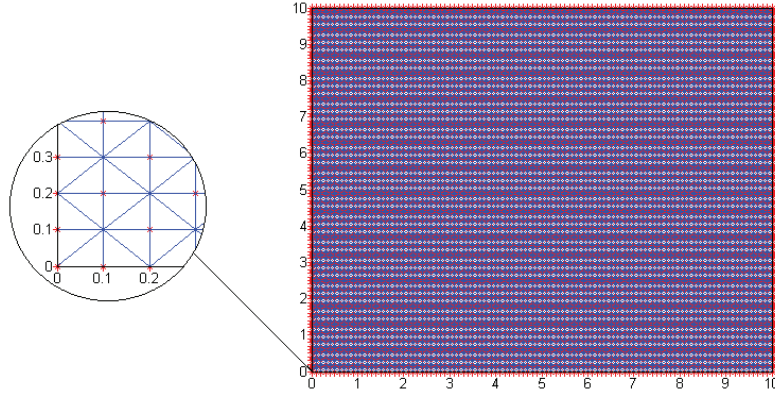


FIGURE 4.6 – Domaine simple de 10 cm $\times$ 10 cm avec maillage triangulaire.

4.3.2 Modèle simple 2D avec éléments TRI3

Nous allons tester la version de base de la FMM sur un modèle simple 2D avec des éléments TRI3. Ce modèle est de dimension 10 cm $\times$ 10 cm et est composé de 20 000 éléments triangulaires (voir figure 4.6). Nous faisons varier ϵ de 1 à 3 cm. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.7. La figure 4.7 montre que la version de base de la FMM ne permet pas d'avoir un front circulaire. De plus, la taille du sous-domaine construit pour chaque ϵ est supérieure à ϵ , c'est-à-dire à la dimension maximale demandée. Donc la version de base de la FMM, qui est prévue pour des éléments QUA4, ne fonctionne pas pour des éléments TRI3. Dans le paragraphe suivant, nous présentons une version de la FMM adaptée aux éléments TRI3.

4.4 FMM pour les éléments TRI3

Par rapport à QUA4, le problème pour TRI3 vient de la mise à jour de la distance à l'aide de l'équation (4-2). Dans Kimmel et Sethian [59] et Sethian et Vladimirovsky [85], les auteurs proposent une amélioration de la mise à jour de la distance adaptée au maillage triangulaire. La version de base de cette amélioration est valide uniquement lorsque les angles de ce maillage sont aigus. Nous verrons par la suite comment on traite le cas des angles obtus.

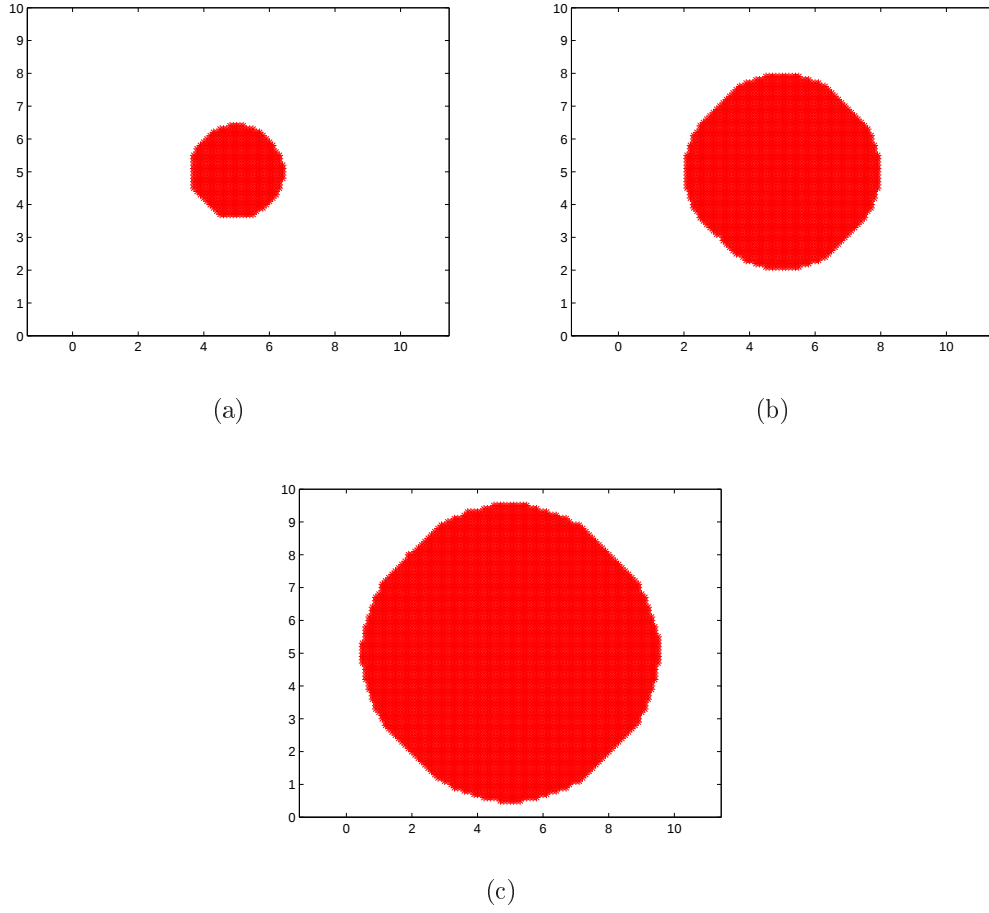


FIGURE 4.7 – Propagation du front sur la plaque simple avec maillage triangulaire : $\epsilon = 1$ cm (a), $\epsilon = 2$ cm (b), $\epsilon = 3$ cm (c).

4.4.1 Mise à jour de la distance pour des mailles triangulaire avec angle aigu

4.4.1.1 Méthodologie

Il existe plusieurs méthodes pour mettre à jour la distance pour un maillage triangulaire avec des angles aigus. Dans [Kimmel et Sethian \[59\]](#), les auteurs utilisent des identités trigonométriques. En revanche, dans [Sethian et Vladimirovsky \[85\]](#), les auteurs proposent une méthode de calcul du gradient en dimension arbitraire. Nous avons choisis la deuxième méthode car elle est plus performante numériquement. Pour les maillages triangulaires, l'algorithme décrit dans le paragraphe 4.2.1 est inchangé, mais l'équation (4-2) doit être adaptée. Nous considérons le cas représenté sur la figure 4.8 pour lequel la valeur $g_c = g(\mathbf{x}_c)$ de g du nœud $\mathbf{x}_c$ doit être mise à jour en utilisant la valeur $g_a = g(\mathbf{x}_a)$ du nœud $\mathbf{x}_a$ et

la valeur $g_b = g(\mathbf{x}_b)$ du nœud $\mathbf{x}_b$, qui sont des nœuds *alive*. Nous avons alors à résoudre

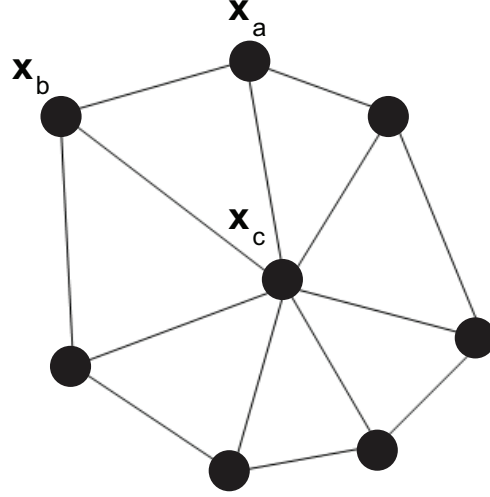


FIGURE 4.8 – Maillage triangulaire (avec des angles aigus) autour du nœud $\mathbf{x}_c$.

l'équation suivante [Sethian et Vladimirovsky \[85\]](#)

$$(\mathbf{a}^T[Q]\mathbf{a}) g_c^2 + (2\mathbf{a}^T[Q]\mathbf{b}) g_c + (\mathbf{b}^T[Q]\mathbf{b}) = s_c^2, \quad (4-5)$$

où $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (-g_a, -g_b)$ et où la matrice $[Q]$ est telle que $[Q] = ([P][P]^T)^{-1}$ avec $[P]$ défini par

$$[P] = \begin{bmatrix} x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \\ x_c - x_b & y_c - y_b & z_c - z_b \end{bmatrix}, \quad (4-6)$$

dans laquelle (x_a, y_a, z_a) , (x_b, y_b, z_b) et (x_c, y_c, z_c) sont les coordonnées des nœuds $\mathbf{x}_a$, $\mathbf{x}_b$ et $\mathbf{x}_c$. On peut montrer [\[85\]](#) que l'équation (4-5) admet deux solutions positives si l'angle $\widehat{\mathbf{x}_a \mathbf{x}_c \mathbf{x}_b}$ est aigu. Si le maillage contient des angles obtus, alors la méthode doit être adaptée en utilisant les variantes présentées dans [Kimmel et Sethian \[59\]](#) et que nous présenterons dans la section 4.4.2.

4.4.1.2 Application sur un domaine carré 2D avec angles aigus

Nous reprenons le même exemple que celui de la section 4.3.2 (voir la figure 4.6) mais nous utilisons la méthode de mise à jour des distances introduite dans le paragraphe précédent. Les résultats sont reportés sur la figure 4.9.

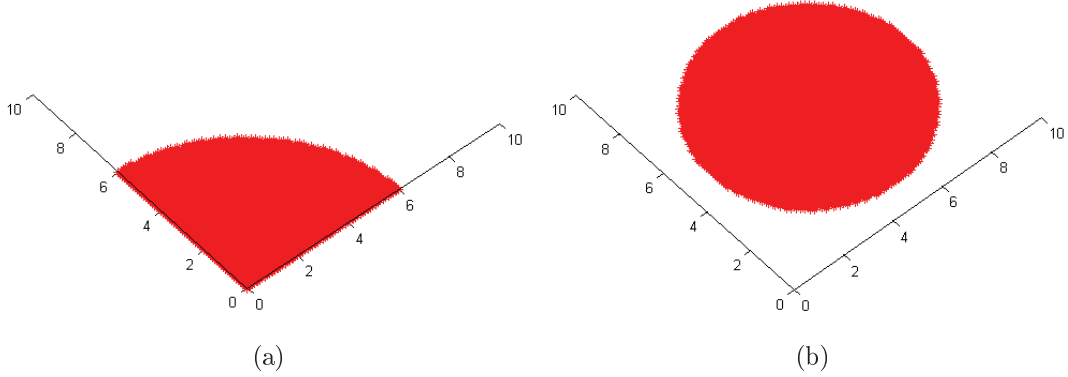


FIGURE 4.9 – Propagation d’un front sur une plaque de 10 cm $\times$ 10 cm avec un maillage triangulaire aigu : à partir d’un coin du carré avec $\epsilon = 6$ cm (a) et à partir du centre du carré avec $\epsilon = 4$ cm (b).

Les modifications apportées sur la mise à jour du g permettent d’avoir un front parfaitement circulaire. Nous allons maintenant appliquer cette méthode en présence d’angles obtus.

4.4.1.3 Application sur un domaine plan 2D avec d’angles obtus

Le domaine plan 2D correspond à la transformation suivante d’un domaine carré plan (voir figure 4.10). Les coordonnées $(x(i), y(i))$ du domaine carré sont transformées en coordonnées $(x'(i), y'(i))$ telles que

$$x'(i) = x(i) + \frac{y(i) x(i)}{10} \quad y'(i) = y(i) \quad . \quad (4-7)$$

Nous faisons partir le front du nœud de coordonnées $(10, 0)$ car c’est la région où les triangles sont le plus aplatis (voir figure 4.10) et cela permet de mettre en évidence les limites de la méthode présentée au paragraphe 4.4.1. Sur la figure 4.11, nous voyons clairement que le front n’est pas circulaire. Pour palier cette pathologie, une amélioration est présentée dans [Sethian et Vladimirovsky \[85\]](#). Nous résumons cette amélioration dans le paragraphe suivant.

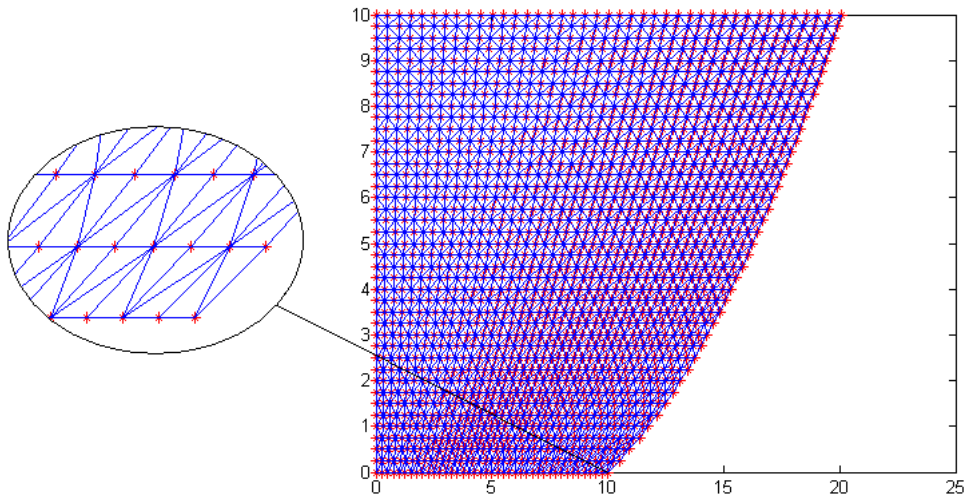


FIGURE 4.10 – Plaque simple déformée.

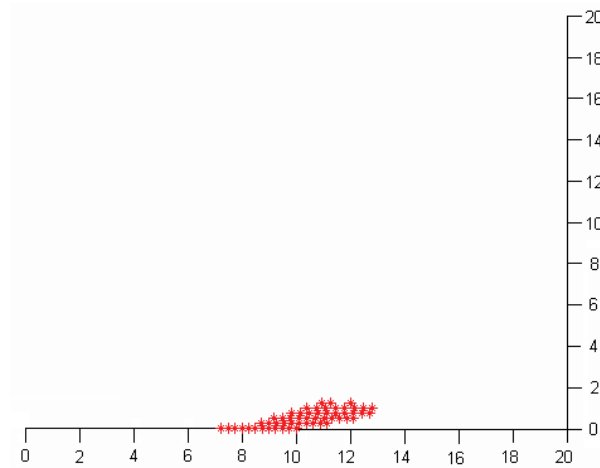


FIGURE 4.11 – Propagation d'un front sur la plaque simple déformée à partir du nœud de coordonnées $[10; 0]$ avec $\epsilon = 1.5$ cm.

4.4.2 Mise à jour des valeurs de g pour un maillage triangulaire avec d'angles obtus

4.4.2.1 Méthodologie

En présence d'angles obtus dans le maillage, nous appliquons la méthode de dépliage présentée dans [Sethian et Vladimirovsky \[85\]](#). Le but est de trouver parmi les nœuds *alive*, un nœud intermédiaire qui permet d'avoir un angle aigu. Par soucis de compréhension, nous choisirons d'expliquer la méthode à l'aide d'un exemple. L'exemple est un triangle $\mathbf{x}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ dont on veut mettre à jour la valeur g pour le nœud $\mathbf{x}$ situé sur un des sommets

de ce triangle. L'angle de ce sommet est obtus (voir figure 4.12). La première étape est

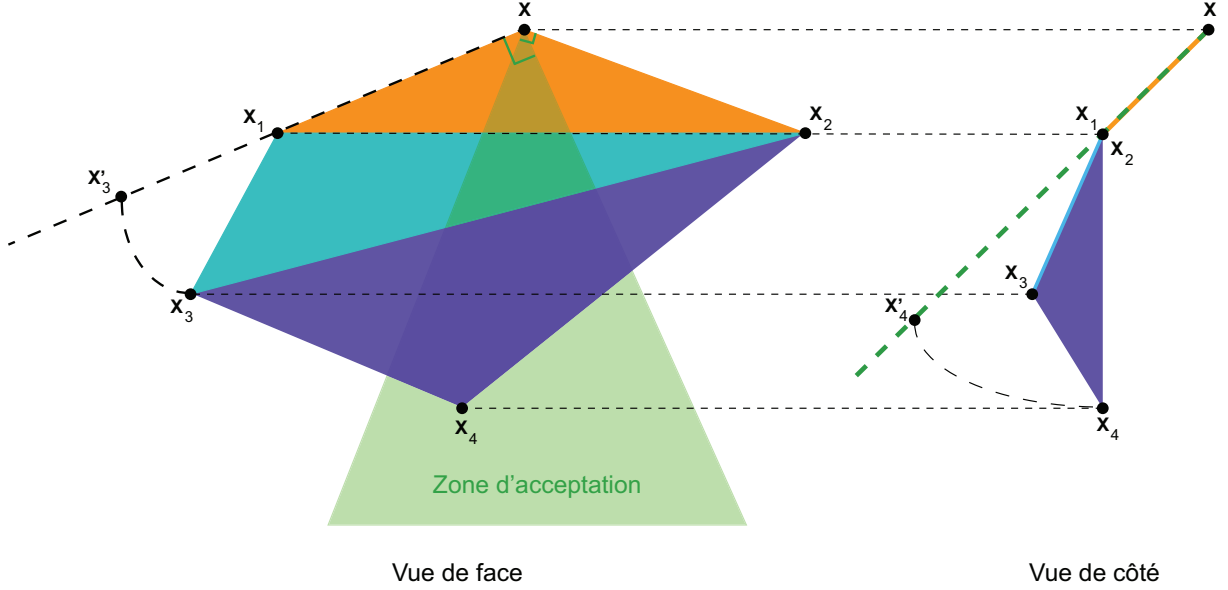


FIGURE 4.12 – Schéma de la méthode de dépliage d'un triangle quelconque.

de construire une région qui sera nommée "la zone d'acceptation". Cette zone (en verte dans la figure 4.12) est construite à partir de la perpendiculaire à $\mathbf{x}\mathbf{x}_1$ passant par $\mathbf{x}$ dans le plan du triangle $\mathbf{x}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ et de la perpendiculaire à $\mathbf{x}\mathbf{x}_2$ passant par $\mathbf{x}$ dans le plan du triangle $\mathbf{x}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$. La deuxième étape est de regarder les nœuds connectés à $\mathbf{x}_1$ qui sont des nœuds *alive*. Dans cet exemple, il n'y a que $\mathbf{x}_3$ qui est connecté et qu'on supposera *alive*. On projette donc le nœud $\mathbf{x}_3$ (la projection est nommée $\mathbf{x}'_3$) dans le plan du triangle $\mathbf{x}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ et on regarde si cette projection appartient à "la zone d'acceptation". Dans notre exemple, le nœud $\mathbf{x}_3$ ne peut pas être accepté. Une fois tous les nœuds connectés au nœud $\mathbf{x}_1$ vérifiés (et que aucun n'est accepté), nous regardons les nœuds *alive* connectés à $\mathbf{x}_3$. Le seul, dans notre exemple, est le nœud $\mathbf{x}_4$. On le projette dans le plan du triangle $\mathbf{x}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ (projection nommée $\mathbf{x}'_4$) et on regarde s'il appartient à la zone d'acceptation. Étant donné qu'il est accepté, la mise à jour de g pour le nœud $\mathbf{x}$ sera faite avec la valeur de g pour le nœud $\mathbf{x}_4$.

4.4.3 Application un domaine 2D avec angles aigus et angles obtus

Nous réutilisons le domaine plan 2D dont sa géométrie et son maillage sont définis au paragraphe 4.4.1.3. Sur la figure 4.13 on peut voir que la méthode de dépliage permet d'avoir un front beaucoup plus circulaire. On peut voir sur la figure 4.14 la propagation

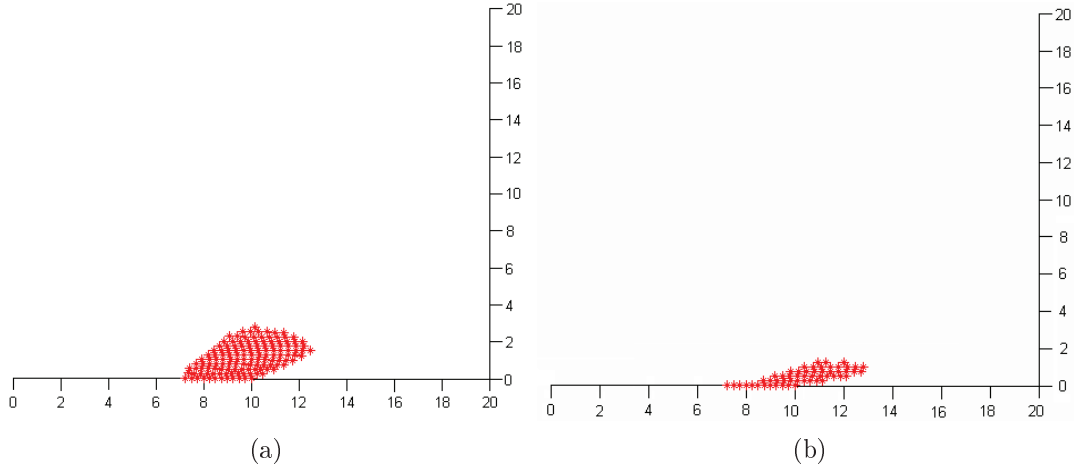


FIGURE 4.13 – Propagation d’un front sur un maillage triangulaire à partir du nœud de coordonnées $(10, 0)$ avec $\epsilon = 1.5$ cm : avec méthode de dépliage (a) et sans méthode de dépliage (b).

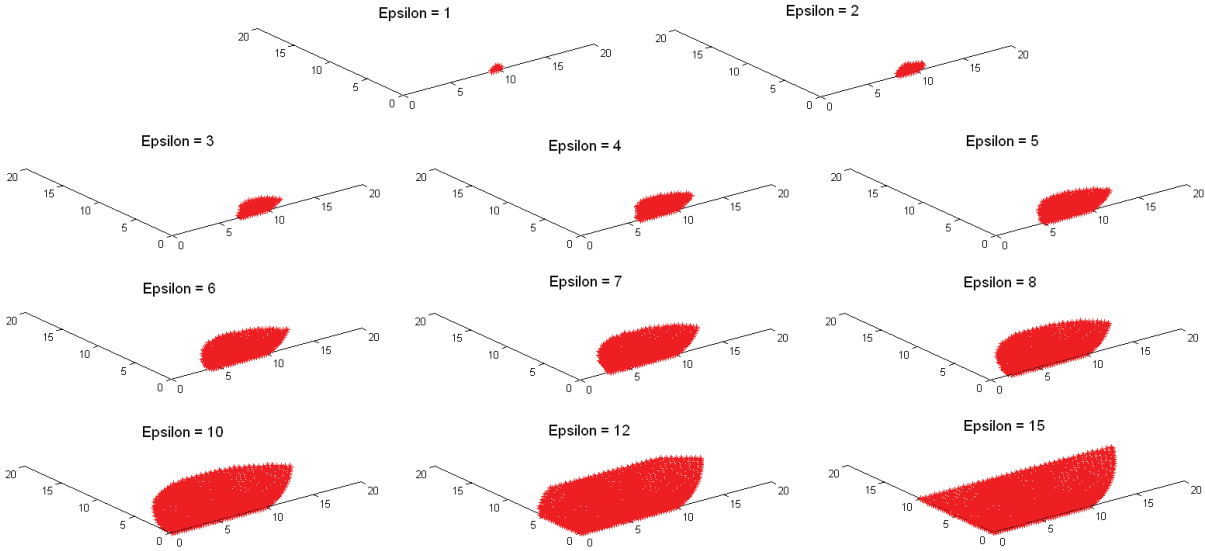


FIGURE 4.14 – Propagation d’un front sur un domaine plan 2D avec un maillage triangulaire quelconque (angles aigus et angles obtus).

totale à partir du même nœud de départ. La méthode de dépliage permet donc de faire propager un front circulaire sur des maillages triangulaires quelconque.

4.4.3.1 Application en présence EF QUA4

Il est nécessaire d’avoir une seule méthode de mise à jour pour l’ensemble des éléments finis d’un maillage d’une géométrie complexe. Nous allons tester la méthode adaptée aux

éléments finis TRI3 d'un maillage EF possédant des éléments finis QUA4. Pour ce faire, nous considérons le domaine et son maillage d'écrit au paragraphe 4.3.1. Puis nous utilisons la méthode de mise à jour de la distance développée dans le paragraphe précédent et qui est adaptée au maillage triangulaire. Sur la figure 4.15 (a), on peut voir que le front obtenu n'est pas circulaire. Pour palier ce problème, nous avons ajouté des connec-

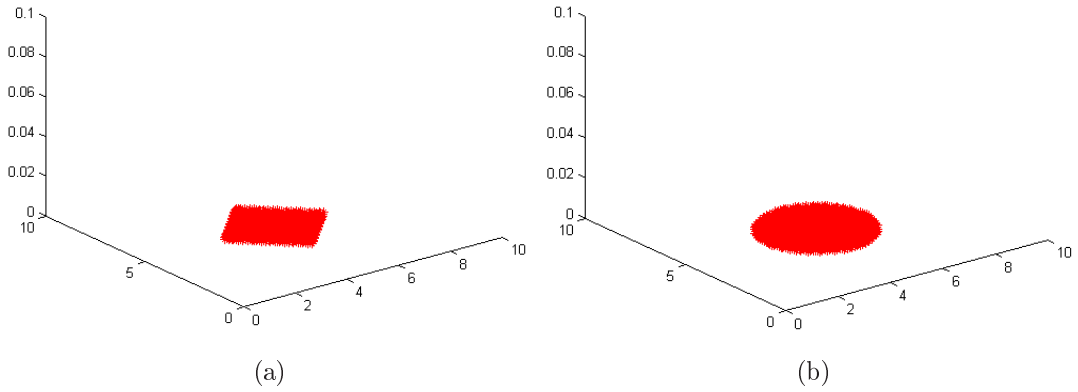


FIGURE 4.15 – Propagation d'un front sur un maillage rectangulaire régulier normal (a) et sur un maillage rectangulaire régulier modifié (avec des connectivités en plus) (b).

tivités fictives afin que tous les éléments finis soient triangulaires (voir figure 4.16). La figure 4.15 (b), présente la propagation du front avec ajout de connectivités fictives pour modifier les QUA4 en TRI3. Sur cette figure, on peut constater que le front se propage correctement.

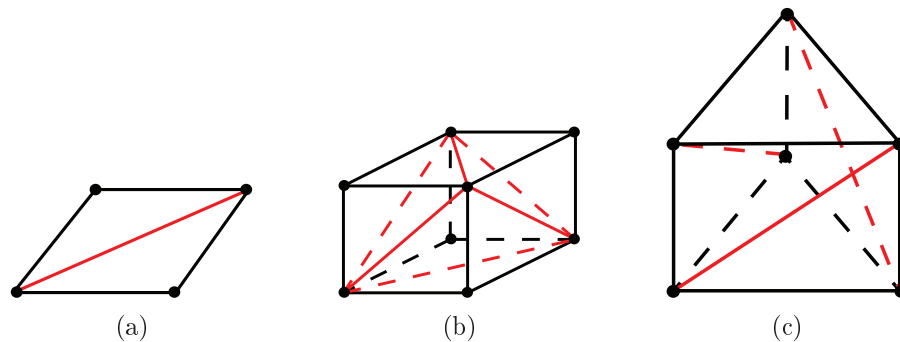


FIGURE 4.16 – Ajout de connectivités fictives en rouge sur un élément QUA4 (a), un élément CUB8 (b) et un élément PENTA (c).

4.5 Construction des sous-domaines

Nous rappelons que l'objectif est de décomposer le domaine Ω en N sous-domaines Ω_j (voir Section 3.3.1.1). Cette décomposition à l'aide de la FMM en sous-domaines est réalisée en deux étapes. La première consiste à introduire des points maîtres qui seront définis comme les points qui seront les centres des sous-domaines. La deuxième consiste à générer les sous-domaines en utilisant les points maîtres comme points de départ.

(i) *Sélection des points maîtres*

Dans le contexte de ce travail, nous considérons des structures qui présentent des parties rigides et des parties souples, et nous voulons construire un modèle réduit des déplacements globaux permettant de prévoir les déplacements des parties rigides. Les points maîtres sont donc choisis sur des parties rigides. Les points maîtres sont "répartis uniformément" sur la partie rigide de la structure et sont tels que la distance entre deux points maîtres voisins est de l'ordre de la plus petite longueur d'onde que l'on souhaite garder pour les vecteurs propres globaux.

(ii) *Génération des sous-domaines*

Pour construire les sous-domaines Ω_j , N fronts sont propagés simultanément à partir de N points maîtres jusqu'à ce que tous les nœuds du maillage EF deviennent des nœuds *alive*. Les frontières des sous-domaines générés correspondent alors aux lignes d'intersection des fronts.

4.6 Décomposition en sous-domaines pour un modèle numérique de structure automobile "nue"

Dans ce paragraphe, nous reprenons le modèle de structure automobile "nue" introduit dans le chapitre 2 (voir figure 4.17). Pour ce modèle, le maillage est très complexe. Les types d'éléments utilisés dans modèle EF Nastran sont : CBUSH, CELAS1, CELAS2, CHEXA, CPENTA, CQUAD4, CTRIA3, PLOTTEL, RBE2 et RBE3. Des connectivités fictives ont été ajoutées automatiquement sur les éléments CHEXA, CPENTA et CQUAD4.

4.6. DÉCOMPOSITION EN SOUS-DOMAINES POUR UN MODÈLE NUMÉRIQUE DE STRUCTURE AUTOMOBILE "NUÉ"

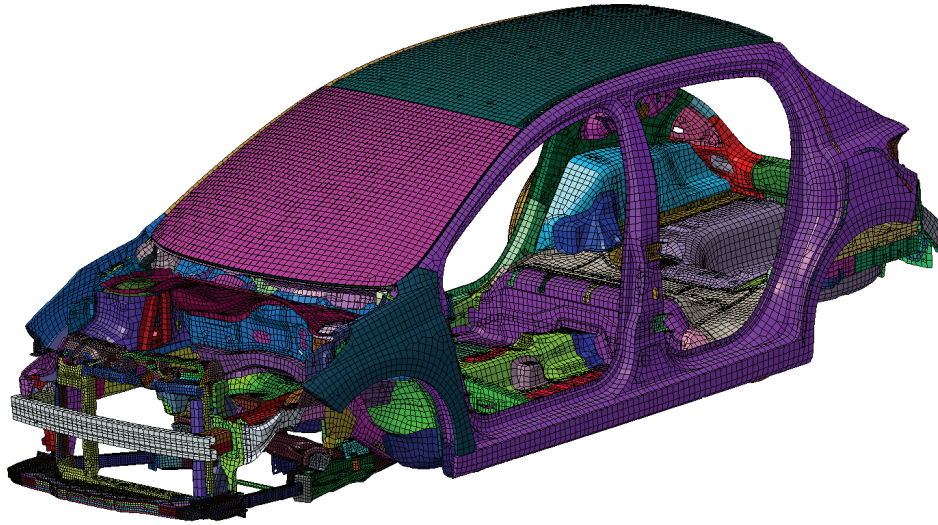


FIGURE 4.17 – Maillage du modèle de structure automobile "nue".

Dans un premier temps, afin de valider l'implémentation de la FMM, nous avons fait propager plusieurs fronts à partir de différents nœuds de la voiture. Sur la figure 4.18, on peut voir que les fronts se propagent correctement.

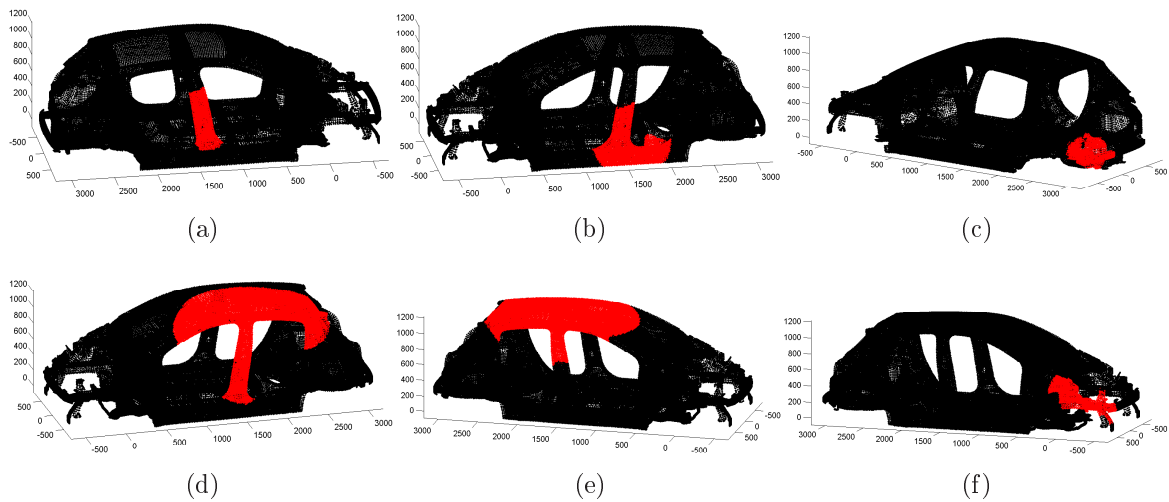


FIGURE 4.18 – Plusieurs propagations de la FMM à partir de différents points maîtres : centre côté droit (a), bas côté gauche (b), pare choc arrière (c), haut côté gauche (d), centre têt (e) et pare choc avant (f).

Dans un second temps, on prend un nombre de points de maîtres $N = 90$ (résultat de l'analyse du paragraphe 3.5). Par conséquence, il y aura 90 sous-domaines. Les points

CHAPITRE 4. DÉCOMPOSITION DU DOMAINE EN SOUS-DOMAINES PAR LA FAST MARCHING METHOD

de maîtres sont approximativement répartis uniformément sur les parties rigides de la structure (voir la figure 4.19). Les sous-domaines obtenus à partir de ces points maîtres sont représentés sur la figure 4.20. Sur cette figure, on peut voir que la dimension de ces sous-domaines est approximativement homogène.

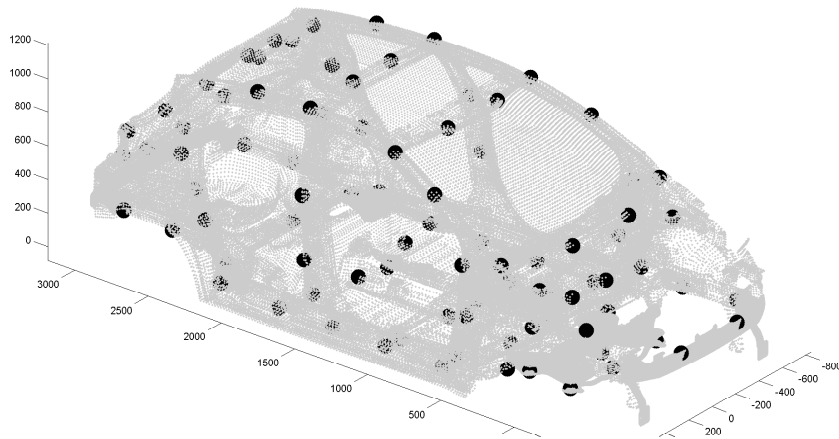


FIGURE 4.19 – Points maîtres comme centres des sous-domaines.

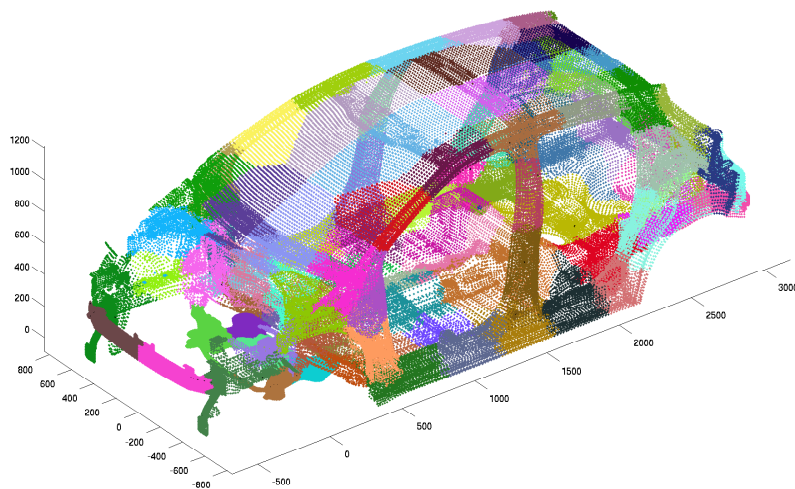


FIGURE 4.20 – Sous-domaines générés (un par couleur).

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode de construction de sous-domaines de dimensions homogènes à l'aide de la Fast Marching Method. L'implémentation de la méthode a été faite de sorte qu'elle puisse être utilisée pour tous types d'éléments finis présents dans un modèle de véhicule automobile. Cette décomposition permet d'extraire une base de l'espace des déplacements globaux définie en induisant une longueur d'onde spatiale de coupure du même ordre de grandeur que la dimension caractéristique des sous-domaines.

5

Modèle réduit stochastique

Sommaire

5.1	Introduction	72
5.2	Approche probabiliste non paramétrique	73
5.3	Réponse du modèle réduit stochastique	76
5.4	Identification des paramètres de dispersion	77
5.5	Application à un modèle de structure automobile "nue"	79
5.6	Réponse aléatoire en fréquence calculée avec le modèle réduit stochastique	82
5.7	Conclusion	86

L'objectif de ce chapitre est de construire un modèle réduit stochastique afin de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle, les incertitudes de modélisation et les incertitudes engendrées par l'utilisation d'un modèle réduit des déplacements globaux (avec ou sans correction d'amortissement). Ce modèle est construit en utilisant l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes. Le modèle stochastique étant construit, les paramètres du modèle probabiliste des incertitudes sont alors identifiés. L'approche développée est appliquée au modèle de structure automobile "nue" dont le modèle réduit des déplacements globaux avec correction d'amortissement est celui qui a été présenté au chapitre 3.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons et identifions un modèle probabiliste d'incertitudes pour le modèle réduit construit avec les vecteurs propres des déplacements globaux et avec correction de l'amortissement. Plusieurs sources d'incertitudes affectent ce modèle réduit. La première source d'incertitude sont les incertitudes sur les paramètres du modèle, tel que les propriétés des matériaux par exemple. La deuxième source d'incertitude concerne les incertitudes de modèle induites par les erreurs de modélisation lors de la construction du modèle EF de la structure. Enfin, la troisième source d'incertitude est due à l'introduction du modèle réduit des déplacements globaux avec correction d'amortissement qui introduit une erreur irréductible pour un nombre fixé de sous-domaine (cette erreur irréductible décroissant avec le nombre croissant de sous-domaines).

Pour prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle, l'approche probabiliste paramétrique est une méthodologie efficace. Elle consiste à modéliser les paramètres incertains par des variables aléatoires et des champs stochastiques. La première étape consiste à construire les modèles probabilistes *a priori* de ces paramètres, puis à résoudre les équations stochastiques par une méthode d'échantillonnage (telle que la méthode de Monte Carlo) ou par une méthode spectrale (telle que les chaos polynomiaux), et enfin, si des données expérimentales sont disponibles, les modèles probabilistes *a posteriori* des paramètres incertains en utilisant les méthodes statistiques inverses (telles que la méthode de Bayes (voir par exemple [Nouy et al. \[72\]](#), [Ghanem et Spanos \[40\]](#), [Schueller et Pradlwarter \[82\]](#), [Schueller et Pradlwarter \[83\]](#), [Mace et al. \[65\]](#), [Schueller \[81\]](#)). Concernant la construction d'une représentation adaptée basée sur une décomposition en chaos polynomiaux on réfère, par exemple, le lecteur à [Desceliers et al. \[19\]](#), [Ghanem et Ghosh \[37\]](#), [Ghanem et Red-Horse \[39\]](#), [Ghanem et Spanos \[40\]](#), [Ghosh et Farhat \[41\]](#), [Maitre et Knio \[66\]](#), [Arnst et al. \[9\]](#), [Maitre et al. \[67\]](#), [Ghanem et al. \[38\]](#), [Das et al. \[16\]](#), [Schueller \[81\]](#) et [Soize et Ghanem \[95\]](#). Concernant la construction des modèles probabilistes *a priori* en utilisant l'information disponible et le principe du Maximum d'Entropie (MaxEnt) introduit par Jaynes [48] dans le contexte de la Théorie de l'Information développée par Shannon [86], nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [Kapur et Kesavan \[52\]](#) et concernant les problèmes statistiques inverses à [Beck et Katafygiotis \[11\]](#) et [Kaipo et Somersalo \[51\]](#).

Concernant les incertitudes de modèle induites par les erreurs de modélisation, il est aujourd'hui clairement établi que celles-ci ne peuvent être prises en compte par les approches probabilistes paramétriques (voir [Beck et Katafygiotis \[11\]](#) et [Soize \[91\]](#)). Dans la litté-

rature, il existe deux principales méthodes pour prendre en compte les incertitudes de modèle. Si des données expérimentales sont disponibles, la première consiste à introduire un modèle probabiliste de l'erreur de prédiction en sortie de modèle (voir Beck et Katafygiotis [11]), mais ce type d'approche peut difficilement être utilisée par exemple dans le cadre de l'optimisation robuste de conception.

S'il n'y a pas de données expérimentales disponibles, ou s'il y en a de disponible, la deuxième méthode qui est celle que nous utiliserons ici, est l'approche probabiliste non paramétrique (voir Soize [92], [91]) qui permet de prendre en compte à la fois les incertitudes liées aux paramètres du modèle et les incertitudes induites par les erreurs de modélisation. Dans cette approche, le modèle d'incertitude est directement implémenté au niveau des opérateurs du modèle numérique et non pas sur la sortie du modèle numérique comme dans la première approche. L'approche probabiliste non paramétrique permet par exemple de faire de l'optimisation robuste de conception.

Pour un véhicule automobile, les modèles numériques sont entachés d'incertitudes sur les paramètres du modèle et d'erreurs de modélisation, et ce, même en BF. Ce fait a été clairement établi dans des travaux précédents (voir travaux Durand [21], Durand *et al.* [22], [23], [24], [25], [26], Fernandez [28], Fernandez *et al.* [29], [30], [31], [32], [33], [34], Gagliardini *et al.* [35], Gagliardini *et al.* [36], Kassem [53] Kassem *et al.* [54], [55], [56], [57], [58]). Dans ces travaux, l'approche probabiliste non paramétrique a été utilisée avec succès et les paramètres du modèle probabiliste non paramétrique ont pu être identifiés en utilisant des réponses expérimentales.

Dans un premier temps, nous allons résumer l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes. Puis dans un second temps, nous allons mettre en place une méthode d'identification des paramètres de ce modèle probabiliste. Enfin, la méthode sera appliquée au modèle EF de la structure automobile "nue" du chapitre 3.

5.2 Approche probabiliste non paramétrique

5.2.1 Principe de la méthode

L'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes consiste à remplacer les matrices réduites de masse $[M^{gg}]$, d'amortissement $[D^{gg,mod}]$ et de raideur $[K^{gg}]$ du modèle réduit des déplacements globaux avec correction d'amortissement par des matrices aléatoires $[M^{gg}]$, $[D^{gg,mod}]$ et $[K^{gg}]$ dont la loi de probabilité est construite par le principe

du MaxEnt. Cette loi de probabilité utilise l'information disponible qui est à définir pour chacune des matrices aléatoires.

Dans ce chapitre, par soucis de lisibilité, nous introduisons la matrice $[A]$ (ou $[\mathbf{A}]$) qui représentera soit $[M^{gg}]$, $[D^{gg,mod}]$ ou $[K^{gg}]$ (ou $[\mathbf{M}^{gg}]$, $[\mathbf{D}^{gg,mod}]$ ou $[\mathbf{K}^{gg}]$). L'information disponible pour la matrice aléatoire $[\mathbf{A}]$ est définie par :

- $[\mathbf{A}]$ est symétrique définie positive presque sûrement.
- $E\{[\mathbf{A}]\} = [A]$ où E désigne l'espérance mathématique et $[A]$ la valeur nominale.
- $E\{\|[\mathbf{A}]^{-1}\|^2\} < +\infty$.

5.2.2 Normalisation des matrices aléatoires et construction de la loi de probabilité

Afin de faciliter la construction de la représentation algébrique de la matrice aléatoire $[\mathbf{A}]$, celle-ci est normalisée. Pour cela, la décomposition de Cholesky de la matrice positive $[A]$ est introduite :

$$[A] = [L_A]^T [L_A] \quad , \quad (5-1)$$

où $[L_A]$ est une matrice triangulaire supérieure de dimension $(n_g \times n_g)$. La matrice aléatoire $[\mathbf{A}]$ peut alors se réécrire

$$[\mathbf{A}] = [L_A]^T [\mathbf{G}] [L_A] \quad , \quad (5-2)$$

où $[\mathbf{G}]$ est une matrice aléatoire, appelée matrice aléatoire germe, dont la loi de probabilité est construite en utilisant le principe du MaxEnt et l'information disponible suivante

- $[\mathbf{G}]$ est symétrique définie positive presque sûrement.
- $E\{[\mathbf{G}]\} = [I_{n_g}]$ où $[I_{n_g}]$ est la matrice unité $(n_g \times n_g)$.
- $E\{\|[\mathbf{G}]^{-1}\|^2\} < +\infty$.

Ainsi construite, la matrice aléatoire $[\mathbf{A}]$ vérifie les relations de l'information disponible définie dans le paragraphe précédent.

5.2.3 Générateur de réalisations indépendantes des matrices aléatoires

La loi de probabilité de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ est construite en utilisant le principe de maximum d'entropie avec l'information disponible définie au paragraphe 5.2.2. Il est alors démontré (voir [91][93]) que la fonction de densité de probabilité de la matrice $[\mathbf{G}]$, notée

$p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$, est définie par

$$p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}]) = \mathbb{I}_{\mathbb{M}_{n_g}^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}]) \times C_{\mathbf{G}} \times (\det[\mathbf{G}])^{(n_g+1)\frac{1-\delta^2}{2\delta^2}} \times \exp\left\{-\frac{n_g+1}{2\delta^2}\text{tr}[\mathbf{G}]\right\} \quad , \quad (5-3)$$

où $\det$ et tr sont le déterminant et la trace. L'ensemble $\mathbb{M}_{n_g}^+(\mathbb{R})$ représente l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives de dimension $(n_g \times n_g)$. La fonction indicatrice $\mathbb{I}_{\mathbb{M}_{n_g}^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}])$ est égale à 1 si $[\mathbf{G}]$ est dans $\mathbb{M}_{n_g}^+(\mathbb{R})$ et est égale à 0 sinon. La constante positive $C_{\mathbf{G}}$ est définie par

$$C_{\mathbf{G}} = \frac{(2\pi)^{-n_g(n_g-1)/4} \left(\frac{n_g+1}{2\delta^2}\right)^{n_g(n_g+1)(2\delta^2)^{-1}}}{\prod_{j=1}^{n_g} \Gamma\left(\frac{n_g+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right)} \quad , \quad (5-4)$$

où $\Gamma(z)$ est la fonction gamma définie pour $z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad . \quad (5-5)$$

Le paramètre de dispersion δ est défini par

$$\delta = \left\{ \frac{1}{n_g} E\{\|[\mathbf{G}] - [I_{n_g}]\|_F^2\} \right\}^{1/2} \quad , \quad (5-6)$$

où $\|\bullet\|_F$, est la norme de Frobénius et doit être telle que

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{n_g+1}{n_g+5}} \quad . \quad (5-7)$$

Ce paramètre de dispersion contrôle le niveau de fluctuations statistiques de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ et donc contrôle le niveau d'incertitude de la matrice aléatoire $[\mathbf{A}]$.

5.2.4 Loi de probabilité de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$

Il est démontré que la représentation de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ dont la loi de probabilité est définie aux paragraphes précédents, permet de construire des réalisations indépendantes pour la simulation numérique de Monte Carlo. La matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ à valeurs dans les matrices définies positives s'écrit (factorisation de Cholesky),

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{L}_G]^T [\mathbf{L}_G] \quad , \quad (5-8)$$

avec $[\mathbf{L}_G]$ est une matrice aléatoire triangulaire supérieure, telle que

- les variables aléatoires $\{[\mathbf{L}_G]_{jj'}, j \leq j'\}$ sont indépendantes,

- pour $j < j'$ la variable aléatoire à valeurs réelles $[\mathbf{L}]_{jj'}$ s'écrit,

$$[\mathbf{L}]_{jj'} = \sigma_{n_g} U_{jj'} \quad \text{avec} \quad \sigma_{n_g} = \delta(n_g + 1)^{-1/2} \quad ,$$

avec $U_{jj'}$ une variable aléatoire Gaussienne à valeurs réelles centrées de variance unité.

- pour $j = j'$, la variable aléatoire $[\mathbf{L}]_{jj}$ à valeurs réelles positives s'écrit,

$$[\mathbf{L}]_{jj} = \sigma_{n_g} \sqrt{2V_j} \quad ,$$

avec σ_{n_g} défini dans l'item précédent et où V_j est une variable aléatoire Gamma dont la fonction de densité de probabilité $p_{V_j}(v)$ par rapport à dv s'écrit,

$$p_{V_j}(v) = I_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{1}{\Gamma(\alpha_{n_g,j})} v^{\alpha_{n_g,j}-1} e^{-v} \quad \text{avec} \quad \alpha_{n_g,j} = \frac{n_g + 1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2} \quad .$$

5.3 Réponse du modèle réduit stochastique

5.3.1 Équation aléatoire

Comme nous l'avons expliqué précédemment, les matrices de masse, de raideur et d'amortissement du modèle réduit définies par les équations (3-54) et (3-55) sont remplacées par des matrices aléatoires. On introduit alors le vecteur aléatoire $\mathbf{U}^g$, qui est solution du modèle réduit stochastique suivant

$$\mathbf{U}^g(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{n_g} Q_{\alpha}^g(\omega) \phi_{\alpha}^g \quad , \quad (5-9)$$

$$(-\omega^2 [\mathbf{M}^{gg}(\delta_M)] + i\omega [\mathbf{D}^{gg,mod}(\delta_D)] + [\mathbf{K}^{gg}(\delta_K)]) \mathbf{Q}^g(\omega) = \mathbf{f}^g(\omega) \quad , \quad (5-10)$$

où $\mathbf{Q}^g(\omega)$ est le vecteur aléatoire des coordonnées globales. Cette équation est résolue par la méthode de simulation de Monte Carlo (voir Rubinstein [80]).

5.3.2 Construction des statistiques sur les observations

Les régions de confiance des observations sont construites par la méthode des quantiles (voir Serfling [84]).

Soit $V(\omega)$ la variable aléatoire dans $\mathbb{R}$ représentant une observation aléatoire construite à l'aide du modèle réduit stochastique. Nous cherchons la région de confiance associée à un niveau de probabilité P_c tel que $P\{v^-(\omega) < V(\omega) \leq v^+(\omega)\} = P_c$ pour tout ω de $\mathcal{B}$. L'enveloppe inférieure ($v^-(\omega)$) et l'enveloppe supérieure ($v^+(\omega)$) délimitent la région de

confiance pour P_c fixé.

Soit $F_{V(\omega)}(v) = P(V(\omega) \leq v)$, la fonction de répartition de la variable aléatoire $V(\omega)$. Pour $0 < p < 1$, le $p^{\text{ième}}$ quantile de $F_{V(\omega)}(v)$ est tel que

$$\zeta(p) = \inf_{F_{V(\omega)}(v) \geq p} \{v\} \quad . \quad (5-11)$$

On définit l'enveloppe supérieure $v^+(\omega)$ et l'enveloppe inférieure $v^-(\omega)$ de la région de confiance par

$$v^+(\omega) = \zeta\left(\frac{1+P_c}{2}\right) \quad \text{et} \quad v^-(\omega) = \zeta\left(\frac{1-P_c}{2}\right) \quad . \quad (5-12)$$

L'estimation des enveloppes est effectuée en utilisant n_{sim} réalisations indépendantes notées $v_i = V(\omega, \theta_i)$, pour $i = 1, \dots, n_{\text{sim}}$. Soit $\tilde{v}_1(\omega) < \dots < \tilde{v}_{n_{\text{sim}}}(\omega)$ la statistique ordonnée associée à $v_1(\omega), \dots, v_{n_{\text{sim}}}(\omega)$. Si $\text{fix}(z)$ est la partie entière du nombre réel z , on a l'estimation suivante

$$v^+(\omega) \simeq \tilde{v}_{j^+}(\omega), \quad j^+ = \text{fix}\left(n_{\text{sim}} \left(\frac{1+P_c}{2}\right)\right) \quad , \quad (5-13)$$

et

$$v^-(\omega) \simeq \tilde{v}_{j^-}(\omega), \quad j^- = \text{fix}\left(n_{\text{sim}} \left(\frac{1-P_c}{2}\right)\right) \quad . \quad (5-14)$$

5.4 Identification des paramètres de dispersion

L'objectif de ce paragraphe est d'identifier les paramètres de dispersion introduit dans le modèle stochastique. Soit δ_M , δ_D et δ_K les paramètres de dispersion contrôlant les niveaux de dispersion des matrices $\mathbf{M}^{gg}$, $\mathbf{D}^{gg,mod}$ et $\mathbf{K}^{gg}$, et soit $\boldsymbol{\delta} = (\delta_M, \delta_D, \delta_K)$. L'objectif est donc d'identifier le paramètre $\boldsymbol{\delta}$. Nous allons identifier ce paramètre en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance et des observations expérimentales (obtenues numériquement dans le cas de cette thèse).

5.4.1 Construction des observations stochastiques

On suppose que n_{obs} DDL sont observés pour n_{freq} pulsations $\omega_1, \dots, \omega_{n_{\text{freq}}}$ appartenant à la bande d'analyse $\mathcal{B}$. Pour tous $\omega \in \mathcal{B}$, on introduit le vecteur aléatoire $\mathbf{U}_{\text{obs}}^{\mathbf{g}}(\omega) = (|\mathbf{U}_{j=1}^{\mathbf{g}}(\omega)|, \dots, |\mathbf{U}_{j=n_{\text{obs}}}^{\mathbf{g}}(\omega)|)$ à valeur dans $\mathbb{R}^{n_{\text{obs}}}$. Le vecteur aléatoire d'observation $\mathbb{W}^{\text{obs}}$ est alors défini par $\mathbb{W}^{\text{obs}} = (\log_{10}(\mathbf{U}_{\text{obs}}^{\mathbf{g}}(\omega_1)), \dots, \log_{10}(\mathbf{U}_{\text{obs}}^{\mathbf{g}}(\omega_{n_{\text{freq}}}))$, à valeur dans $\mathbb{R}^d$, avec $d = n_{\text{freq}} \times n_{\text{obs}}$. L'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance nécessite la construction de la loi de probabilité du vecteur aléatoire $\mathbb{W}^{\text{obs}}$, pour lequel les composantes ne sont pas statistiquement indépendantes. Donc, si la dimension d du vecteur $\mathbb{W}^{\text{obs}}$ est

grande, la construction de la loi est d'un coût numérique prohibitif. Il est donc nécessaire d'effectuer une réduction statistique du vecteur $\mathbb{W}^{\text{obs}}$.

5.4.2 Réduction statistique des observations aléatoires

Afin de diminuer la dimension stochastique, une réduction statistique du vecteur aléatoire $\mathbb{W}^{\text{obs}}$ est faite en utilisant l'analyse en composantes principales. Pour chaque valeur fixée de δ , la moyenne $\mathbb{m}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta) \in \mathbb{R}^d$ et la matrice de covariance $[C_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta)]$ de dimension $(d \times d)$ du vecteur aléatoire $\mathbb{W}^{\text{obs}}$ sont telles que

$$\mathbb{m}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta) = E\{\mathbb{W}^{\text{obs}}\} \quad , \quad (5-15)$$

$$[C_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta)] = E\{(\mathbb{W}^{\text{obs}} - \mathbb{m}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta))(\mathbb{W}^{\text{obs}} - \mathbb{m}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta))^T\} \quad , \quad (5-16)$$

et sont estimées en utilisant le modèle réduit stochastique et la méthode de Monte Carlo. On introduit le problème aux valeurs propres suivant

$$[C_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta)] \mathbb{x}(\delta) = \mu(\delta) \mathbb{x}(\delta) \quad , \quad (5-17)$$

dans lequel les valeurs propres sont telles que $\mu_1(\delta) \geq \mu_2(\delta) \geq \dots$. Les vecteurs propres correspondants, $\mathbb{x}_1(\delta), \mathbb{x}_2(\delta), \dots$ appartiennent à $\mathbb{R}^d$ et constituent une famille de vecteurs orthonormaux.

Soit n_{trunc} un entier tel que $1 \leq n_{\text{trunc}} < d$. L'approximation $\mathbb{W}_{n_{\text{trunc}}}^{\text{obs}}$ de $\mathbb{W}^{\text{obs}}$ est donc :

$$\mathbb{W}_{n_{\text{trunc}}}^{\text{obs}} = \mathbb{m}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta) + \sum_{j=1}^{n_{\text{trunc}}} \sqrt{\mu_j(\delta)} Z_j(\delta) \mathbb{x}_j(\delta) \quad , \quad (5-18)$$

avec $Z_1(\delta), \dots, Z_{n_{\text{trunc}}}(\delta)$ des variables aléatoires à valeurs réelles telles que

$$Z_j(\delta) = \frac{1}{\sqrt{\mu_j(\delta)}} \langle \mathbb{W}^{\text{obs}} - \mathbb{m}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta), \mathbb{x}_j(\delta) \rangle \quad , \quad (5-19)$$

qui sont centrées, du second ordre, décorréliées et de variance unité, c'est-à-dire, qui sont telles que

$$E\{Z_j(\delta) Z_k(\delta)\} = \delta_{jk} \quad . \quad (5-20)$$

L'ordre n_{trunc} de la réduction statistique est calculé pour avoir une approximation avec une précision donnée η indépendante de n_{trunc} et δ , telle que,

$$E\{\|\mathbb{W}^{\text{obs}} - \mathbb{W}_{n_{\text{trunc}}}^{\text{obs}}\|^2\} = \eta E\{\|\mathbb{W}^{\text{obs}}\|^2\} \quad . \quad (5-21)$$

On définit la fonction d'erreur de troncature $n_{\text{trunc}} \mapsto \text{err}_{\text{trunc}}(n_{\text{trunc}}; \delta)$ par

$$\text{err}_{\text{trunc}}(n_{\text{trunc}}; \delta) = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{n_{\text{trunc}}} \mu_j(\delta)}{\text{tr}[C_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\delta)]} \quad . \quad (5-22)$$

On choisit alors n_{trunc} tel que

$$\text{criter}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(n_{\text{trunc}}) \leq \eta \quad , \quad \text{criter}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(n_{\text{trunc}}) = \max_{\delta} (\text{err}_{\text{trunc}}(n_{\text{trunc}}; \delta)) \quad . \quad (5-23)$$

5.5. APPLICATION À UN MODÈLE DE STRUCTURE AUTOMOBILE "NUE"

5.4.3 Identification

Soit $\mathbb{w}^{\text{exp},1}, \dots, \mathbb{w}^{\text{exp},\nu}$ les ν vecteurs aléatoires des observations expérimentales correspondant au vecteur aléatoire $\mathbb{W}^{\text{obs}}$ des observations calculés avec le modèle réduit stochastique. Soient $z_1^{\text{exp},i}(\boldsymbol{\delta}), \dots, z_{n_{\text{trunc}}}^{\text{exp},i}(\boldsymbol{\delta})$ les valeurs expérimentales correspondant à $Z_1(\boldsymbol{\delta}), \dots, Z_{n_{\text{trunc}}}(\boldsymbol{\delta})$ telles que

$$z_j^{\text{exp},i}(\boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{\sqrt{\mu_j(\boldsymbol{\delta})}} \langle \mathbb{w}^{\text{exp},i} - \mathbb{m}_{\mathbb{W}^{\text{obs}}}(\boldsymbol{\delta}), \mathbb{x}_j(\boldsymbol{\delta}) \rangle \quad . \quad (5-24)$$

On estime $\boldsymbol{\delta}$ en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance pour les variables aléatoires $Z_1(\boldsymbol{\delta}), \dots, Z_{n_{\text{trunc}}}(\boldsymbol{\delta})$. Afin de faciliter l'identification des paramètres de dispersion, on introduit l'approximation suivante de la fonction log vraisemblance des variables aléatoires $Z_1(\boldsymbol{\delta}), \dots, Z_{n_{\text{trunc}}}(\boldsymbol{\delta})$ qui sont centrées, décorréllées et statistiquement dépendantes,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\delta}) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n_{\text{trunc}}} \log(p_{Z_j}(z_j^{\text{exp},i}; \boldsymbol{\delta})) \quad , \quad (5-25)$$

avec $p_{Z_j}(z_j^{\text{exp},i}; \boldsymbol{\delta})$ la valeur en $z_j^{\text{exp},i}$ de la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z_j(\boldsymbol{\delta})$. Dans l'équation (5-25), la fonction de densité de probabilité $z_j \mapsto p_{Z_j}(z_j; \boldsymbol{\delta})$ est estimée en utilisant le modèle réduit stochastique, la méthode de simulation de Monte Carlo et la méthode des noyaux gaussiens pour l'estimation statistique non paramétrique de la densité de probabilité. La valeur optimal de $\boldsymbol{\delta}$, notée $\boldsymbol{\delta}^{\text{opt}}$, est solution du problème d'optimisation suivant

$$\boldsymbol{\delta}^{\text{opt}} = \arg \max_{\boldsymbol{\delta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\delta}) \quad , \quad (5-26)$$

où le domaine d'admissibilité du paramètre $\boldsymbol{\delta}$ est défini pour chacune de ses composantes par l'équation (5-7).

5.5 Application à un modèle de structure automobile "nue"

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer les méthodes présentées au modèle EF de la structure automobile "nue" présenté au chapitre 3.

5.5.1 Réponses aléatoires de référence pris pour valeurs expérimentales

Pour identifier le paramètre de dispersion $\boldsymbol{\delta}$ du modèle réduit stochastique, nous avons introduit des valeurs expérimentales des observations. En faite, nous allons prendre pour ces

ν valeurs expérimentales, les n_{sim} simulations numériques indépendantes du modèle stochastique de référence. Le modèle stochastique de référence est celui présenté dans Durand *et al.* [26]. Il est défini d'une part, à l'aide du modèle de référence nominal (équations 3-31 et 3-33 avec réduction sur les modes élastiques classiques), et d'autre part, avec l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes afin de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle et les erreurs de modélisation. Les valeurs des paramètres de dispersion pour ces incertitudes sont celles qui ont été identifiées dans [26]. Il est montré dans ce travail que l'influence des incertitudes sur la matrices d'amortissement sont faibles. En conséquence, on a pris une dispersion nulle pour la matrice d'amortissement. On a donc utilisé les paramètres de dispersion δ_M^{exp} et δ_K^{exp} qui contrôle les niveaux de fluctuation des matrices de masse et de raideur ont été identifiés dans [26] en utilisant des réponses expérimentales mesurées sur des véhicules nominalement identiques. Pour des raisons de confidentialité, les valeurs de δ_M^{exp} et δ_K^{exp} ne peuvent pas être communiquées. Les statistiques sur la réponse aléatoire du modèle stochastique de référence sont estimées par la méthode de Monte Carlo avec 1000 réalisations indépendantes. Les régions de confiance correspondant à un niveau de probabilité de 0.95 ont été estimées pour les points d'observation *Obs 1*, *Obs 2*, *Obs 3* et *Obs 4* et sont présentées aux figures 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4 (région grise).

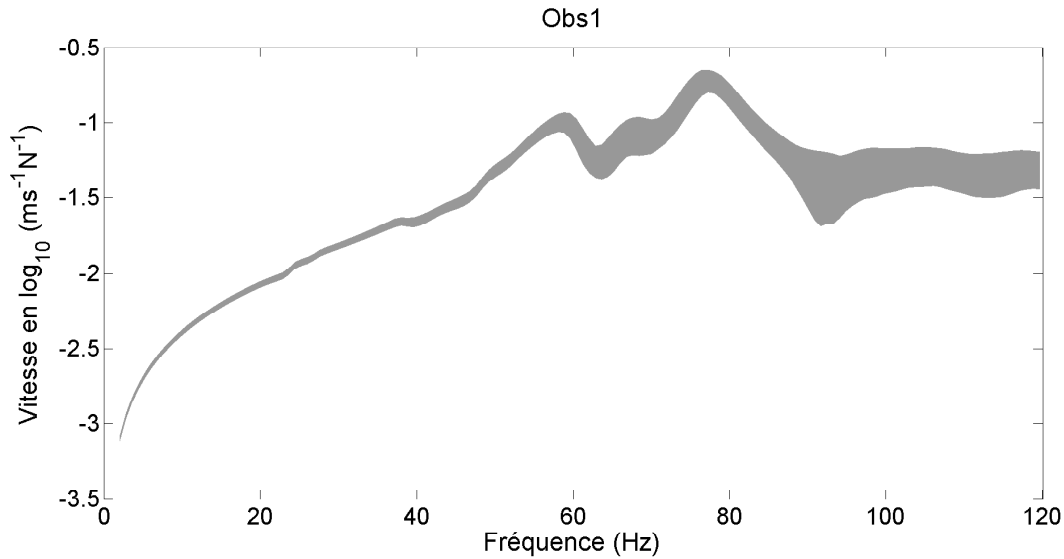


FIGURE 5.1 – Valeurs expérimentales : Réponse aléatoire de référence au point d'observation *Obs 1*. Région de confiance de référence (région grise).

5.5. APPLICATION À UN MODÈLE DE STRUCTURE AUTOMOBILE "NUE"

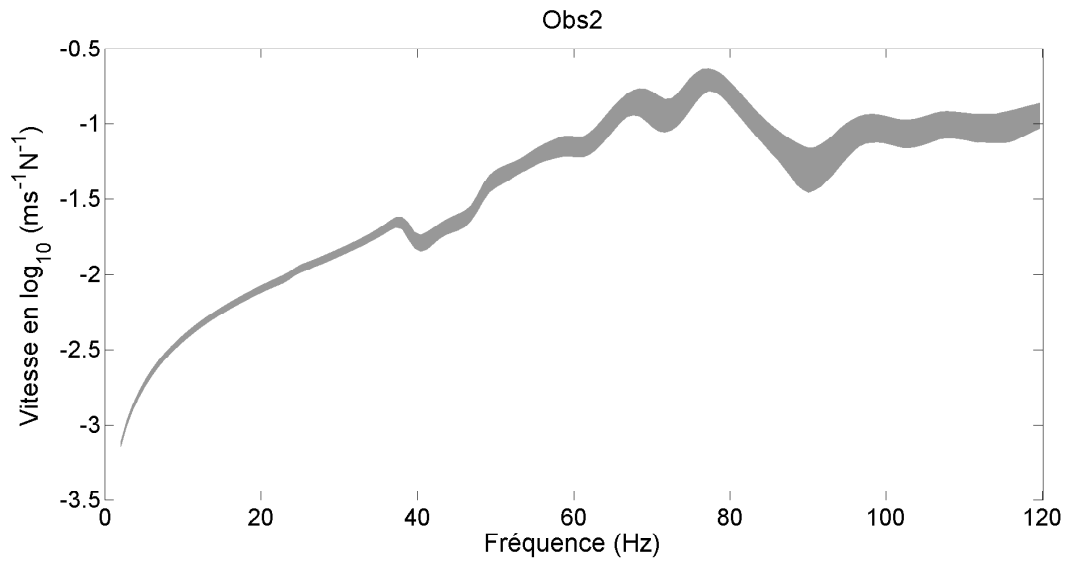


FIGURE 5.2 – Valeurs expérimentales : Réponse aléatoire de référence au point d'observation *Obs 2*. Région de confiance de référence (région grise).

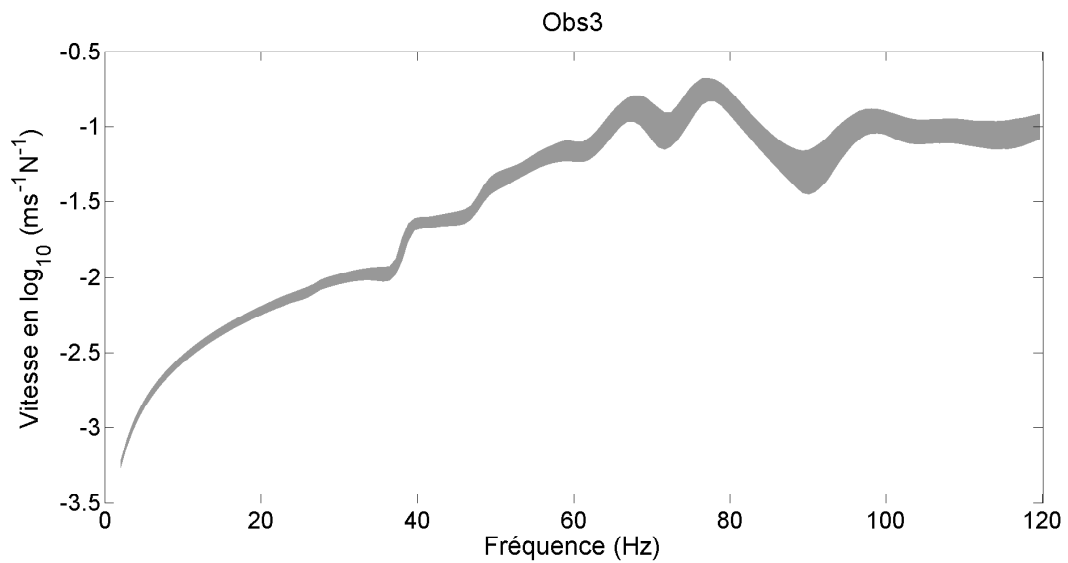


FIGURE 5.3 – Valeurs expérimentales : Réponse aléatoire de référence au point d'observation *Obs 3*. Région de confiance de référence (région grise).

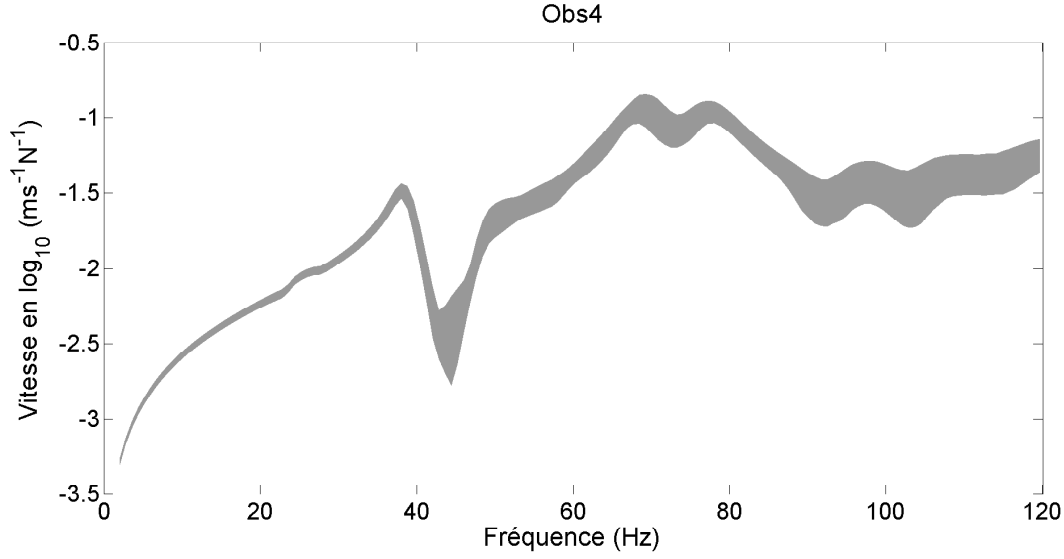


FIGURE 5.4 – Valeurs expérimentales : Réponse aléatoire de référence au point d’observation *Obs 4*. Région de confiance de référence (région grise).

5.6 Réponse aléatoire en fréquence calculée avec le modèle réduit stochastique

Comme pour le modèle stochastique de référence, la matrice d’amortissement corrigée du modèle réduit est laissée déterministe. La première étape a été de calculer les valeurs optimales des paramètres de dispersion δ_{Mgg}^{opt} et δ_{Kgg}^{opt} en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance présentée au paragraphe 5.4. La fonction de vraisemblance $(\delta_{Mgg}, \delta_{Kgg}) \mapsto \mathcal{L}(\delta_{Mgg}, \delta_{Kgg})$ est représentée à la figure 5.5. Le maximum de la fonction de vraisemblance est noté sur la figure par les coordonnées du point optimal δ_{Mgg}^{opt} et δ_{Kgg}^{opt} . Là encore ces valeurs optimales ne peuvent être communiquées pour des raisons de confidentialité. L’indice de troncature est $n_{trunc} = 80$. Cet indice a été déterminé en visualisant la courbe $n_{trunc} \mapsto err_{trunc}(n_{trunc}; \delta)$, défini par l’équation (5-22), pour plusieurs valeurs de δ . L’erreur de troncature a été fixée à $\eta = 0.015$. La figure 5.6, représente la fonction $n_{trunc} \mapsto err_{trunc}(n_{trunc}; \delta^{opt})$. Dans une seconde étape, nous avons calculé, avec cette valeur optimale du paramètre de dispersion, les régions de confiance correspondant à un niveau de probabilité $Pc = 0.95$ pour les points d’observation *Obs 1*, *Obs 2*, *Obs 3* et *Obs 4*. Ces régions de confiance sont présentées aux figures 5.7, 5.8, 5.9 et 5.10 (région magenta). La région de confiance de référence est incluse dans la région de confiance du modèle réduit stochastique pour la majeure partie des fréquences de la bande $\mathcal{B}$. Ces résultats constituent une validation du nouveau modèle réduit stochastique pour un modèle

5.6. RÉPONSE ALÉATOIRE EN FRÉQUENCE CALCULÉE AVEC LE MODÈLE RÉDUIT STOCHASTIQUE

de structure automobile "nue" possédant de nombreux modes élastiques locaux qui ne peuvent pas être séparés facilement des modes élastiques globaux en BF.

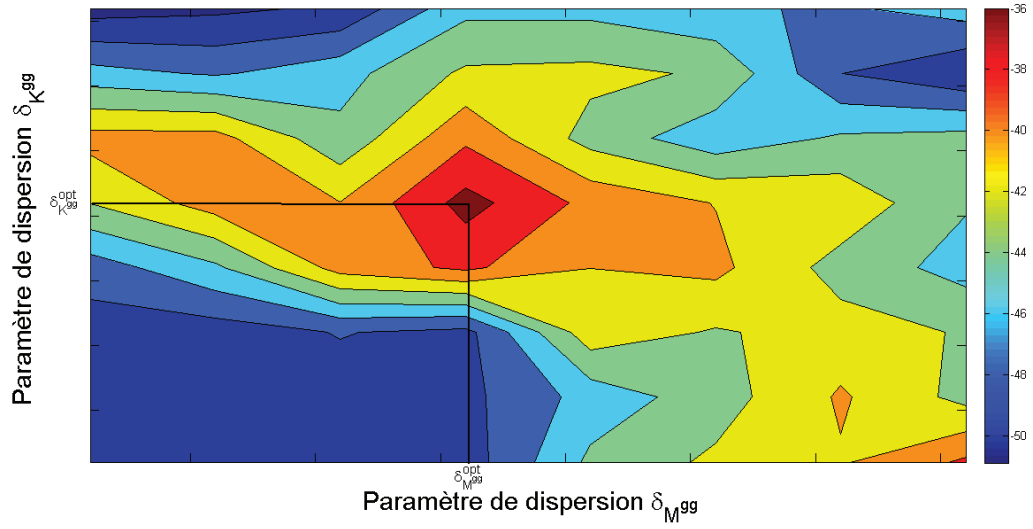


FIGURE 5.5 – Fonction de vraisemblance $(\delta_{M^{gg}}, \delta_{K^{gg}}) \mapsto \mathcal{L}(\delta_{M^{gg}}, \delta_{K^{gg}})$. Les valeurs optimales sont notées $\delta_{M^{gg}}^{opt}$ et $\delta_{K^{gg}}^{opt}$.

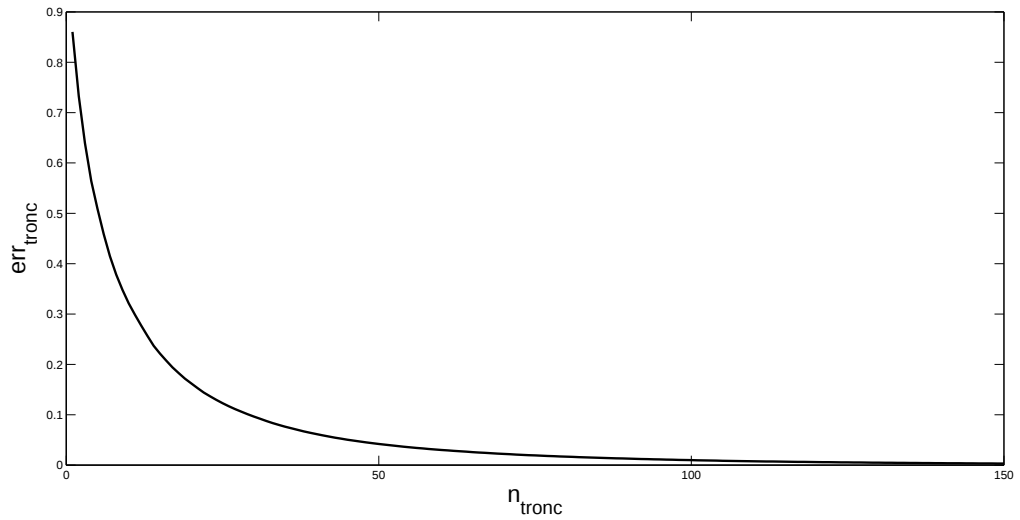


FIGURE 5.6 – Fonction $n_{trunc} \mapsto err_{trunc}(n_{trunc}; \delta^{opt})$.

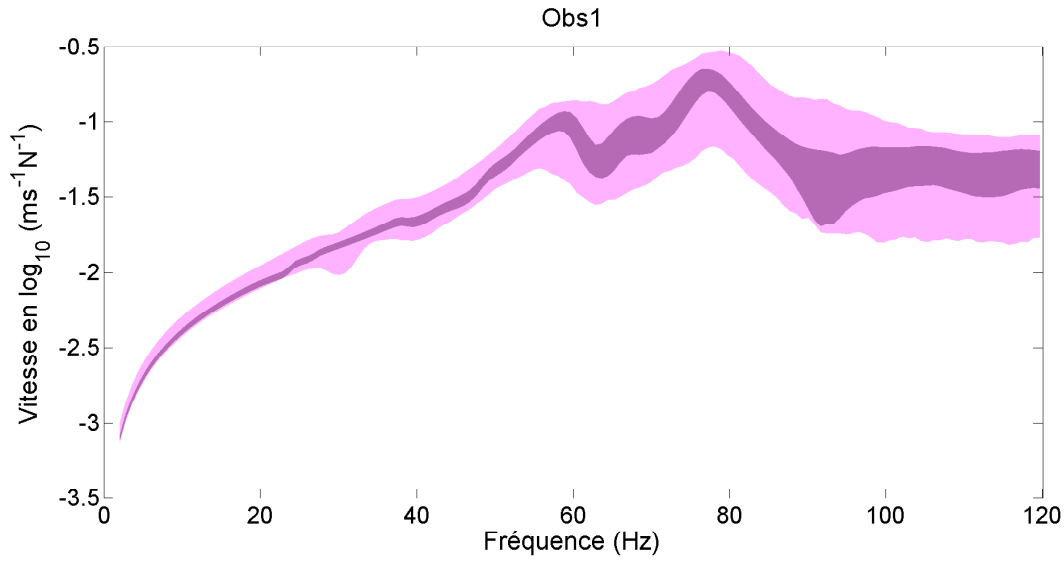


FIGURE 5.7 – Réponse aléatoire en fréquence du point d'observation *Obs1*. Région de confiance de référence (région grise). Région de confiance construite avec le modèle réduit stochastique avec la base des vecteurs propres des déplacements globaux avec correction d'amortissement (région magenta).

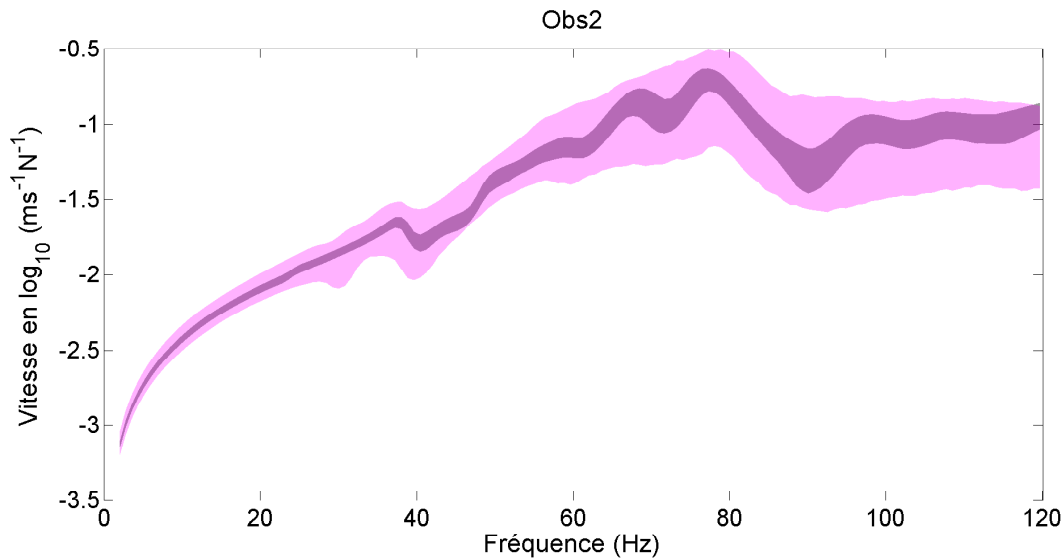


FIGURE 5.8 – Réponse aléatoire en fréquence du point d'observation *Obs2*. Région de confiance de référence (région grise). Région de confiance construite avec le modèle réduit stochastique avec la base des vecteurs propres des déplacements globaux avec correction d'amortissement (région magenta).

5.6. RÉPONSE ALÉATOIRE EN FRÉQUENCE CALCULÉE AVEC LE MODÈLE RÉDUIT STOCHASTIQUE

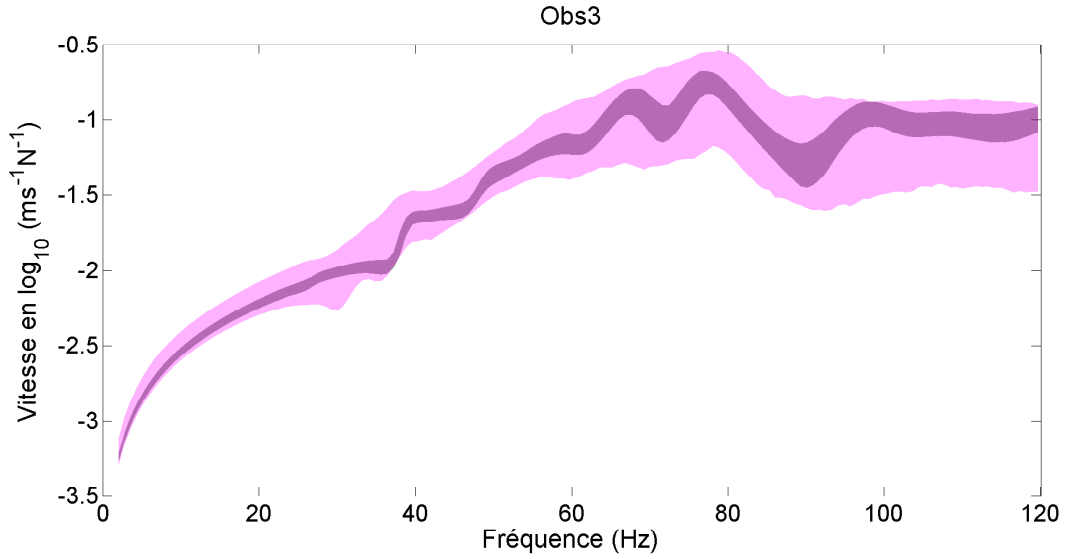


FIGURE 5.9 – Réponse aléatoire en fréquence du point d'observation *Obs3*. Région de confiance de référence (région grise). Région de confiance construite avec le modèle réduit stochastique avec la base des vecteurs propres des déplacements globaux avec correction d'amortissement (région magenta).

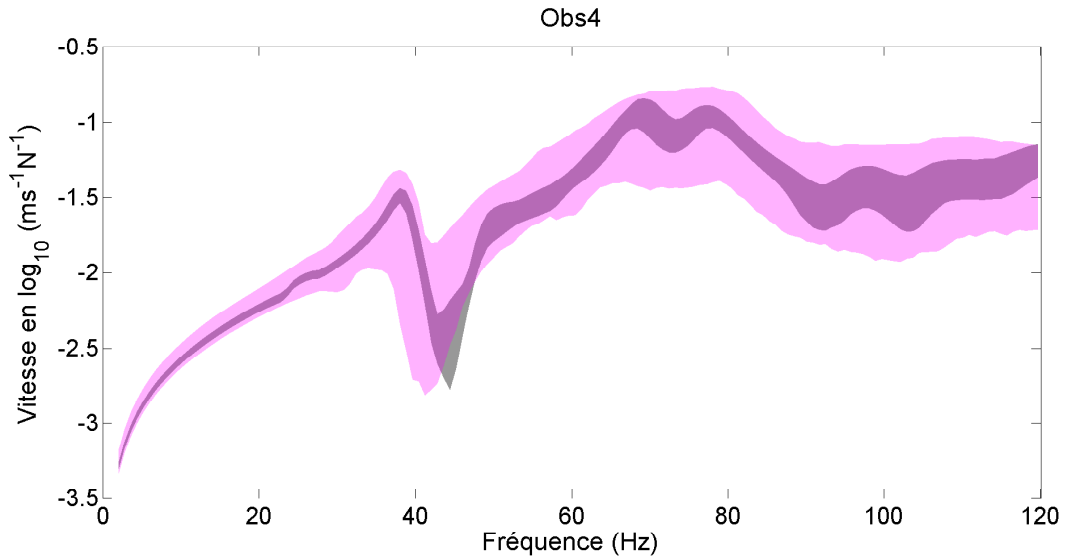


FIGURE 5.10 – Réponse aléatoire en fréquence du point d'observation *Obs4*. Région de confiance de référence (région grise). Région de confiance construite avec le modèle réduit stochastique avec la base des vecteurs propres des déplacements globaux avec correction d'amortissement (région magenta).

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la construction du modèle réduit stochastique en utilisant le modèle réduit (construit à l'aide des vecteurs propres globaux et correction de l'amortissement) et l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes. Les paramètres de dispersion ont été identifiés en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance et la réponse stochastique du modèle de référence qui contient les informations expérimentales mesurées sur des voitures en sortie de chaîne. La méthodologie a été validée sur un modèle de structure automobile "nue". Le modèle réduit stochastique ainsi construit pour le domaine BF peut ainsi être utilisé pour une validation robuste de conception "Avant Projets".

6

Application à un modèle complet de voiture

Sommaire

6.1	Présentation du modèle élément finis complet du véhicule automobile	88
6.2	Décomposition du domaine Ω en sous-domaines	89
6.3	Modèle nominal de référence et région de confiance de référence	89
6.4	Vecteurs propres des déplacements globaux et des déplacements locaux	95
6.5	Réponse aléatoire en fréquence calculée avec le modèle réduit stochastique du modèle numérique complet.	103
6.6	Conclusion	107

Ce chapitre est consacré à l'application des théories présentées dans les chapitres 3 à 5 à un modèle EF du modèle complet de voiture.

6.1 Présentation du modèle élément finis complet du véhicule automobile

Le modèle élément finis complet du véhicule automobile est présenté à la figure 6.1. Par rapport au modèle de structure automobile "nue" qui a servi de validation dans les chapitres précédents, ce modèle est bien plus compliqué et contient notamment les sièges, le tableau de bord, les rétroviseurs, les revêtements intérieurs, les portes, les planches avant et arrière, etc... De plus, le maillage du modèle EF est très dense et est composé de 1 312 024 nœuds (voir la figure 6.1) et contient de nombreux éléments volumique, surfacique et poutre. Le modèle E.F de cette voiture a 7 872 583 DDL. Comme pour le modèle de structure automobile "nue", on se trouve dans une configuration où l'on a des parties rigides et des parties souples. Sur ce véhicule les parties rigides correspondent aux corps creux qui constituent l'ossature de la voiture. En revanche, pour ce modèle, les parties souples sont beaucoup plus nombreuses que celles du modèle de structure automobile "nue". Ainsi on s'attend à ce que ce modèle présente beaucoup plus de modes élastiques locaux en BF.

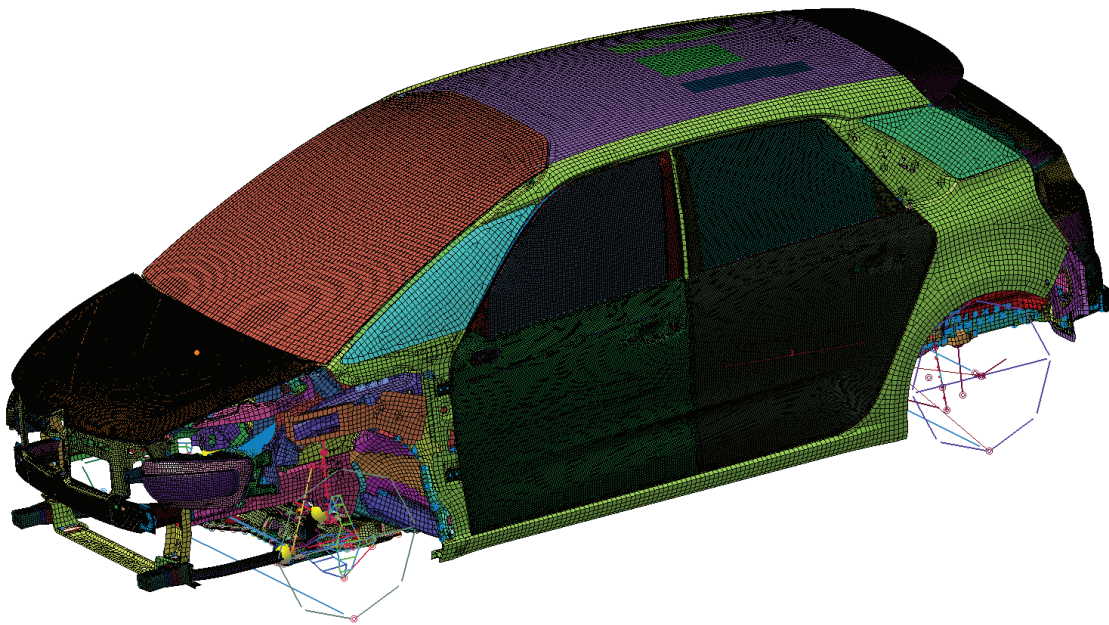


FIGURE 6.1 – Maillage EF d'un véhicule automobile complet.

6.2 Décomposition du domaine Ω en sous-domaines

Dans ce paragraphe, la Fast Marching Method présentée dans le chapitre 4 est utilisée pour décomposer le domaine Ω en N sous-domaines Ω_j (voir 3.3.1). Dans cette décomposition, tout comme pour la structure automobile "nue", le nombre de sous-domaine retenu est $N = 90$. Les points maîtres sont répartis "uniformément" sur les parties rigides de la structure (voir figure 6.2). Les sous-domaines construits par la FMM à partir de ces points maîtres sont représentés sur la figure 6.3. Là encore, la FMM permet d'obtenir des sous-domaines de dimension homogène.

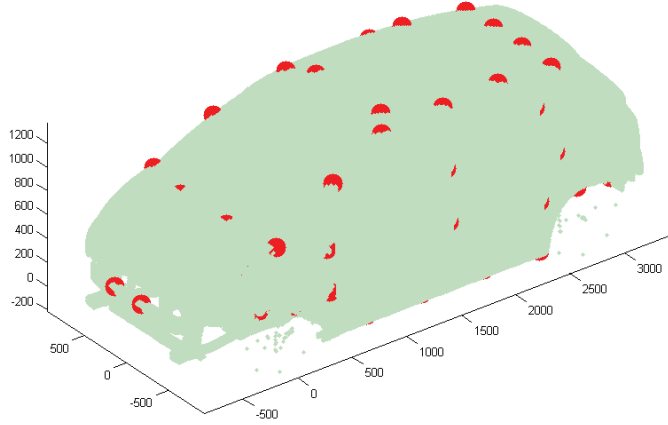


FIGURE 6.2 – Centres des sous-domaines.

6.3 Modèle nominal de référence et région de confiance de référence

6.3.1 Analyse modale

Les modes élastiques du modèle EF sont calculés à l'aide du logiciel Nastran.

Dans un premier temps, on a calculé les 2165 premiers modes élastiques. La fréquence du mode élastique le plus élevé est 365 Hz. L'étude de convergence vis-à-vis de ces modes élastiques est faite dans le paragraphe suivant et permet de déterminer le nombre de modes élastiques qu'il est nécessaire de prendre en compte pour synthétiser la réponse

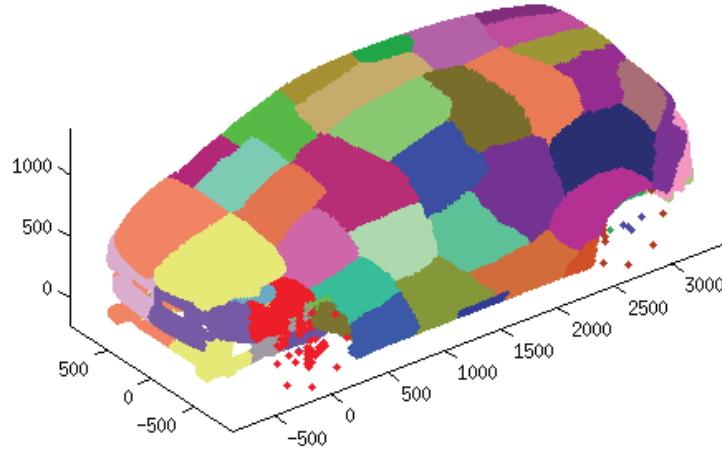


FIGURE 6.3 – Sous-domaines construit par la FMM (un sous-domaine par couleur).

dans la bande d'analyse $\mathcal{B} = [0, 120]$ Hz.

6.3.2 Réponse fréquentielle de référence

Nous nous intéressons au calcul de la réponse fréquentielle de la bande d'analyse $[0, 120]$ Hz. La structure est soumise à deux forces égale à 1 N appliquée selon les axes OX et OZ sur les nœuds $Exc1$ et $Exc2$ et à deux moments égale à 1 N×m autour des axes OX et OY sur les noeuds $Exc1$ et $Exc2$. Ces nœuds sont localisés sur une partie rigide. La réponse est calculée en quatre points d'observation qui sont situés sur des parties rigides. Le point $Obs1$ est situé à l'avant gauche du véhicule, le point $Obs2$ à l'avant droit, le point $Obs3$ à l'arrière gauche et le point $Obs4$ sur le bord du coffre. Tous ces points sont représentés sur la figure 6.4.

6.3. MODÈLE NOMINAL DE RÉFÉRENCE ET RÉGION DE CONFIANCE DE RÉFÉRENCE

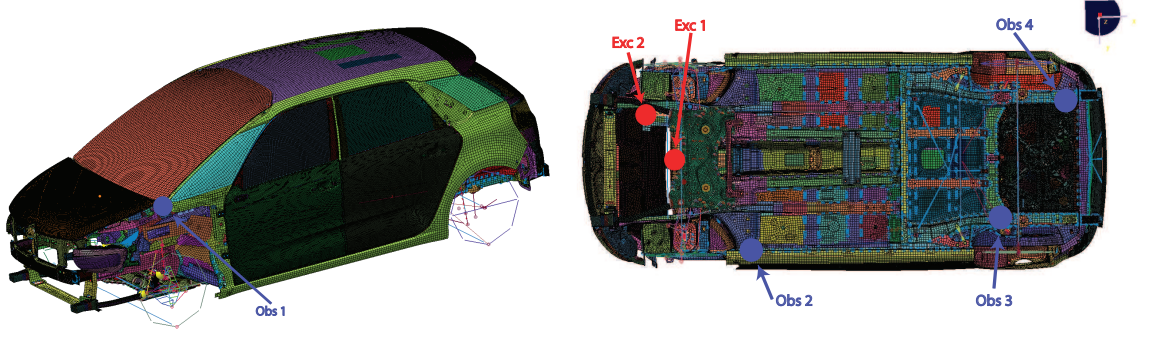


FIGURE 6.4 – Points d’observation ($Obs\ 1$, $Obs\ 2$, $Obs\ 3$ et $Obs\ 4$) et points d’excitation ($Exc\ 1$ et $Exc\ 2$).

La figure 6.5 montre le graphe de la fonction de convergence $Conv(n)$ où n est le nombre de modes élastiques nécessaire pour construire le modèle réduit de référence à convergence dans la bande $\mathcal{B}$.

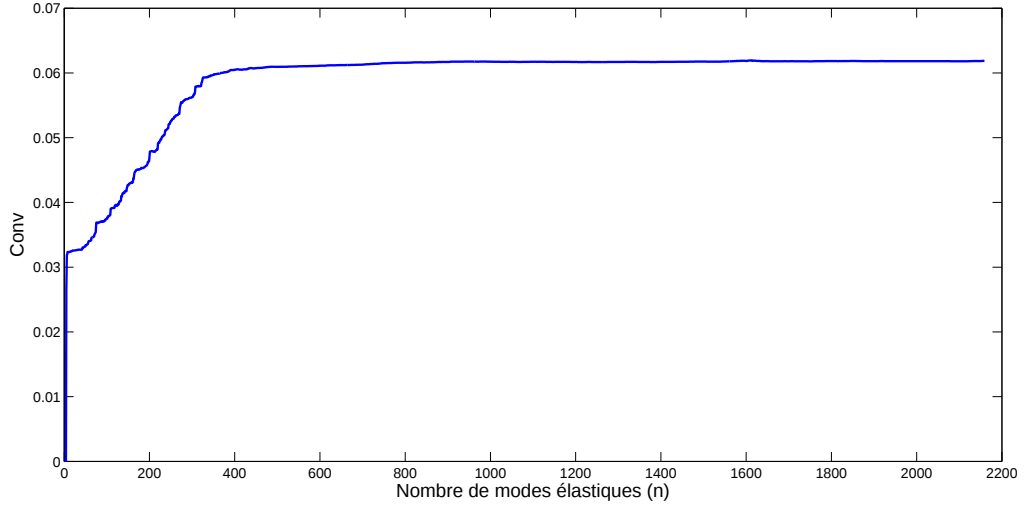


FIGURE 6.5 – Analyse de convergence vis-à-vis du nombre de modes élastiques sur $[0, 120]$ Hz. Graphe de la fonction $n \rightarrow Conv(n)$.

La figure 6.5 montre que la convergence est atteinte pour $n = 907$ modes élastiques. La fréquence du 907^{ième} mode élastique est 205.0 Hz. Les analyses qui suivent sont donc faites dans la bande $[0, 120]$ Hz avec 907 modes élastiques.

Les réponses fréquentielles calculées aux 4 points d’observation $Obs\ 1$, $Obs\ 2$, $Obs\ 3$ et $Obs\ 4$, pour le déplacement vertical, sont présentées à la figure 6.6 pour la bande de fréquence $[0, 120]$ Hz.

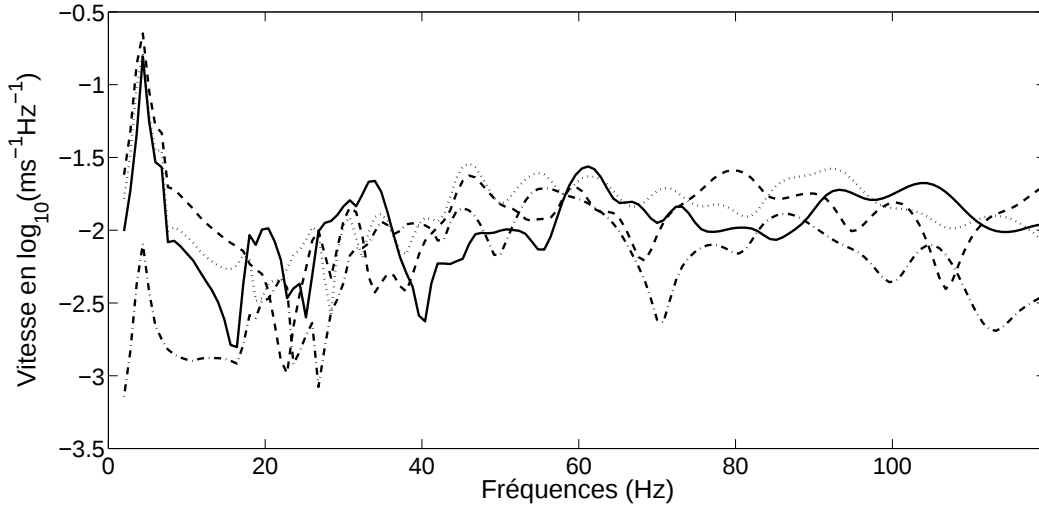


FIGURE 6.6 – Module en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse pour les 4 points d'observations : *Obs 1* en tirets, *Obs 2* en pointillés, *Obs 3* alternés et *Obs 4* en continu.

6.3.3 Région de confiance de référence

Le modèle de référence nominal est défini par les équations (3-31) et (3-33) (réduction sur les modes élastiques classiques) puis le modèle réduit stochastique de référence est construit en utilisant l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes afin de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle et les erreurs de modélisation. Dans ce modèle réduit stochastique, les matrices généralisées de masse et de raideur sont des matrices aléatoires. Par contre, comme il est expliqué dans [26], les réponses aléatoires du modèle stochastique de référence sont peu sensibles aux incertitudes sur l'amortissement et donc la matrice d'amortissement généralisée du modèle réduit stochastique de référence est laissée déterministe. Les paramètres de dispersion δ_M^{exp} et δ_K^{exp} qui contrôlent les niveaux de fluctuation des matrices de masse et de raideur généralisées ont été identifiés dans [26] en utilisant des réponses expérimentales mesurées sur des véhicules nominalement identiques. Pour des raisons de confidentialité, les valeurs de δ_M^{exp} et δ_K^{exp} ne peuvent pas être communiquées. Les statistiques sur les réponses aléatoires du modèle stochastique de référence sont estimées par la méthode de Monte Carlo avec 1 000 réalisations indépendantes. Les régions de confiance, correspondant à un niveau de probabilité de 0.95, ont été estimées pour les points d'observation *Obs 1*, *Obs 2*, *Obs 3* et *Obs 4* et sont présentées aux figures 6.7, 6.8, 6.9 et 6.10 (région grise). Ces réponses sont plus dispersées et moins régulières que celles de la structure "nue" présentées au chapitre 5.

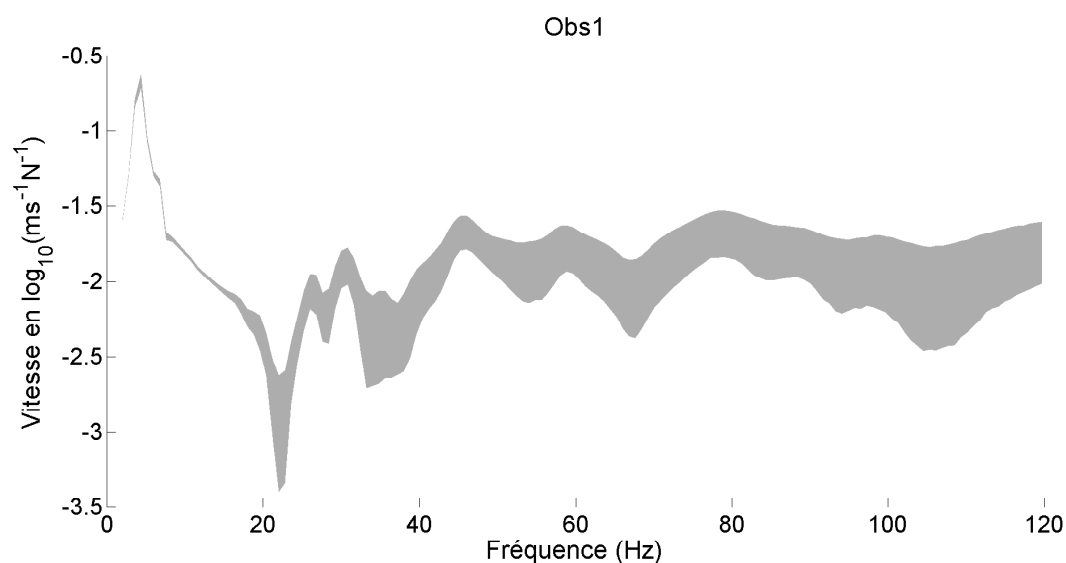


FIGURE 6.7 – Valeurs expérimentales : Réponse aléatoire de référence au point d'observation *Obs 1*. Région de confiance de référence (région grise).

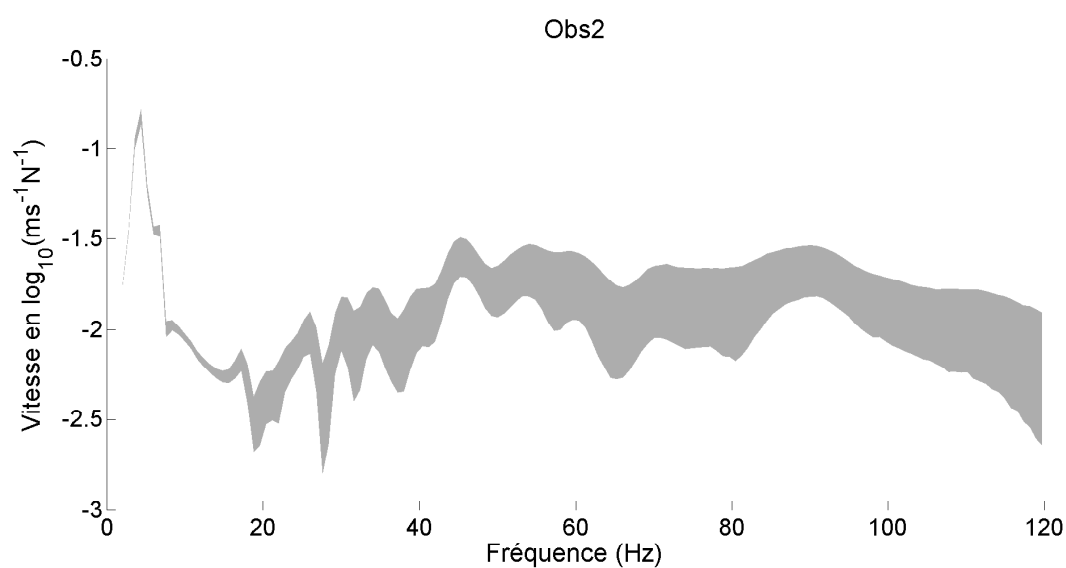


FIGURE 6.8 – Valeurs expérimentales : Réponse aléatoire de référence au point d'observation *Obs 2*. Région de confiance de référence (région grise).

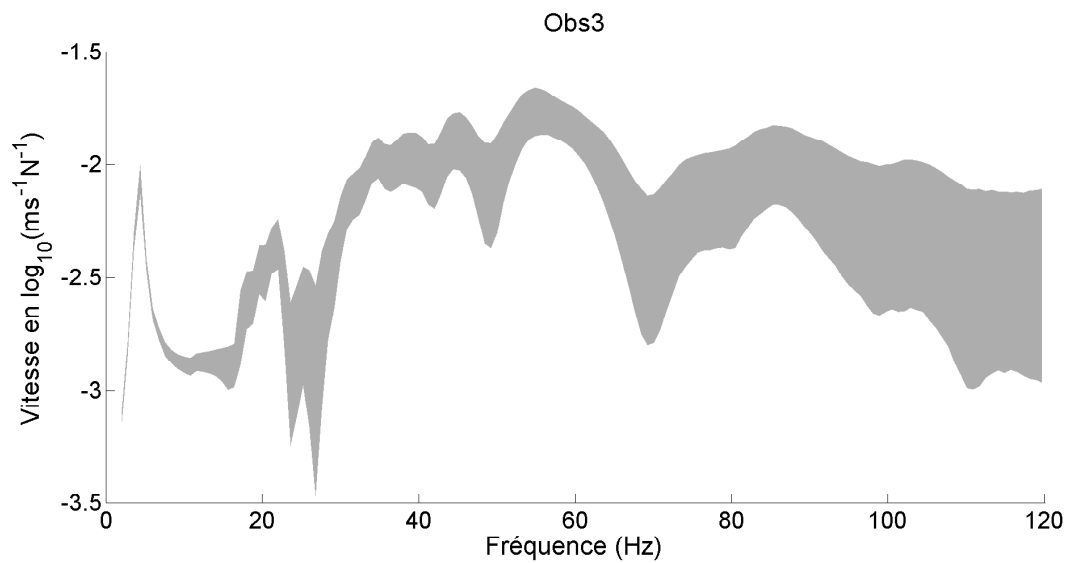


FIGURE 6.9 – Valeurs expérimentales : Réponse aléatoire de référence au point d’observation *Obs 3*. Région de confiance de référence (région grise).

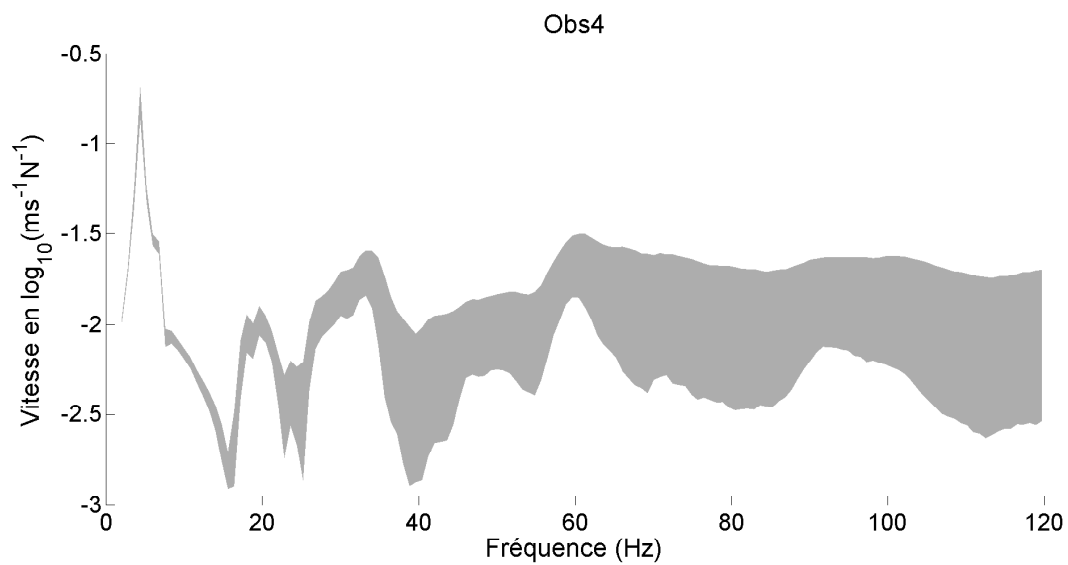


FIGURE 6.10 – Valeurs expérimentales : Réponse aléatoire de référence au point d’observation *Obs 4*. Région de confiance de référence (région grise).

6.4 Vecteurs propres des déplacements globaux et des déplacements locaux

Les vecteurs propres des déplacements locaux et les vecteurs propres des déplacements globaux sont construits en utilisant la méthode de double projection présentée au paragraphe 3.3.3.3. La matrice $[H^r]$ relative à la discrétisation de l'opérateur h^r est construite avec une décomposition en sous-domaines faite par la FMM avec $N = 90$ (présenté dans le chapitre 4). Une étude de la convergence des réponses en fréquence vis-à-vis du nombre de vecteurs propres des déplacements globaux sur la bande de fréquence $[0, 120]$ Hz a été réalisée.

La figure 6.11 représente la fonction d'erreur $n_g \rightarrow \text{Erreur}(n_g)$ et montre qu'il faut $n_g = 50$ vecteurs propres des déplacements globaux pour la bande d'analyse $[0, 120]$ Hz. Il y a $n_l = 382$ vecteurs propres des déplacements locaux dans la bande $[0, 120]$ Hz. Les distributions du nombre de valeurs propres des déplacements globaux et du nombre de valeurs propres des déplacements locaux, en fonction de la fréquence en Hz, sont présentées à la figure 6.12.

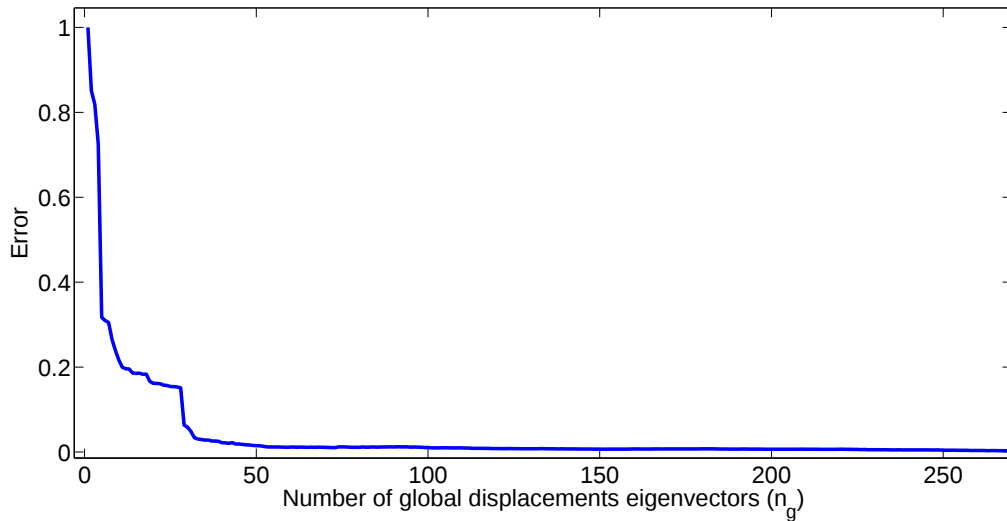


FIGURE 6.11 – Graphe de la fonction $n_g \mapsto \text{Erreur}(n_g)$.

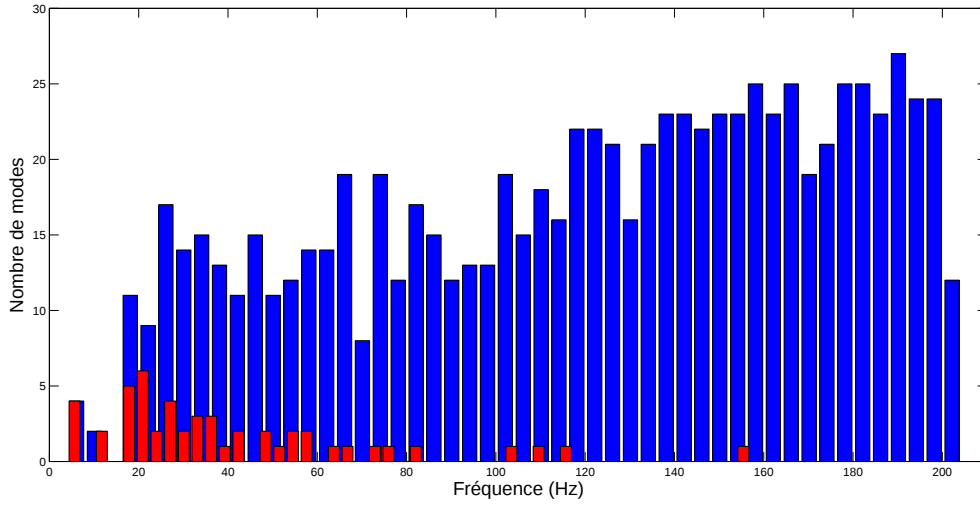


FIGURE 6.12 – Distribution du nombre de valeurs propres des déplacements globaux (histogramme rouges) et du nombre de valeurs propres des déplacements locaux (histogramme bleues) en fonction de la fréquence en Hz.

En comparaison avec les distributions du modèle de structure automobile "nue" données à la figure 3.13, on constate une densité plus élevée pour le modèle complet. Ceci est dû à un nombre plus important de valeurs propres des déplacements locaux induit par la présence d'un accroissement des parties souples.

6.4.1 Fonctions de réponse en fréquence

Nous comparons les réponses en fréquence calculées pour les différents modèles réduits associés aux différentes bases de projection. Les modèles réduits sont : (1) le modèle nominal de référence présenté aux paragraphe 3.4.2 avec n modes élastiques ($\mathbb{U}^n, n = 907$), (2) le modèle réduit (équations (3-50) et (3-51)) construit avec n_g vecteurs propres des déplacements globaux ($\mathbb{U}^{(n_g)}, n_g = 50$ et $n_\ell = 0$). Les modules en échelle logarithmique des réponses en vitesse aux points d'observation *Obs 1*, *Obs 2*, *Obs 3* et *Obs 4* sont représentés respectivement aux figures 6.13, 6.14, 6.15 et 6.16 ;

6.4. VECTEURS PROPRES DES DÉPLACEMENTS GLOBAUX ET DES DÉPLACEMENTS LOCAUX

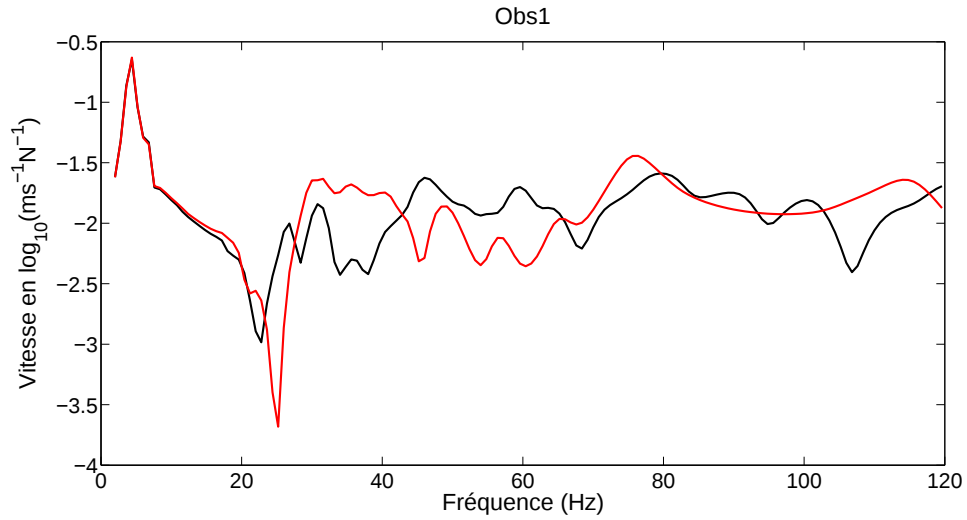


FIGURE 6.13 – Module en échelle logarithmique de la fonctions de réponse en vitesse pour l'observation *Obs 1*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge).

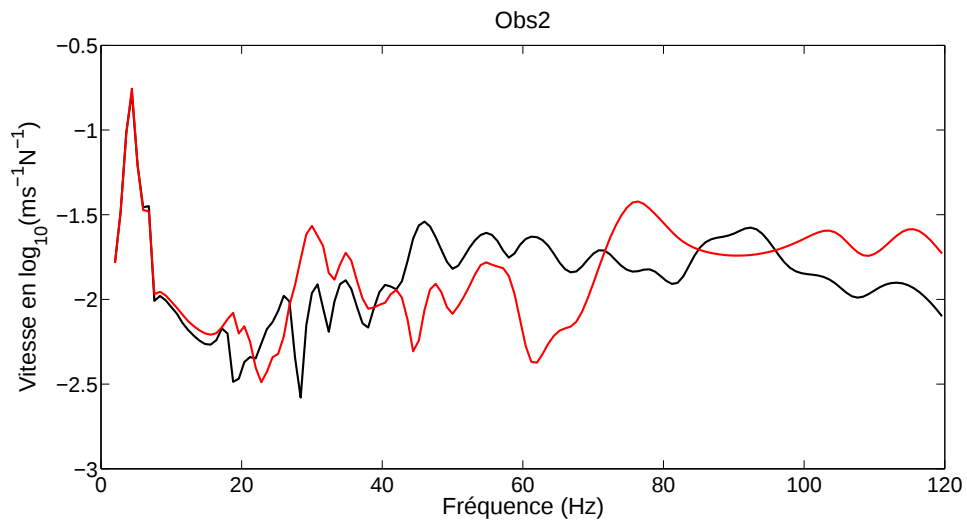


FIGURE 6.14 – Module en échelle logarithmique de la fonctions de réponse en vitesse pour l'observation *Obs 2*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge).

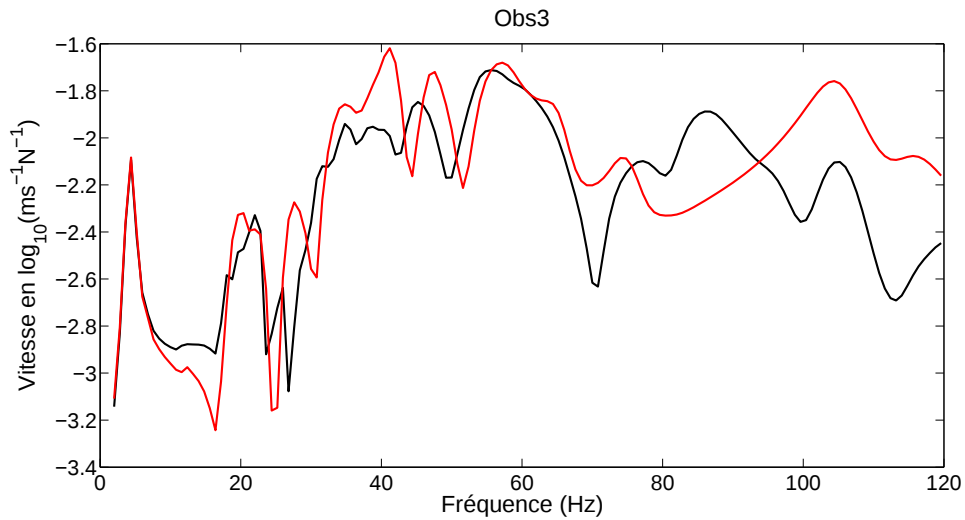


FIGURE 6.15 – Module en échelle logarithmique de la fonctions de réponse en vitesse pour l'observation *Obs 3*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge).

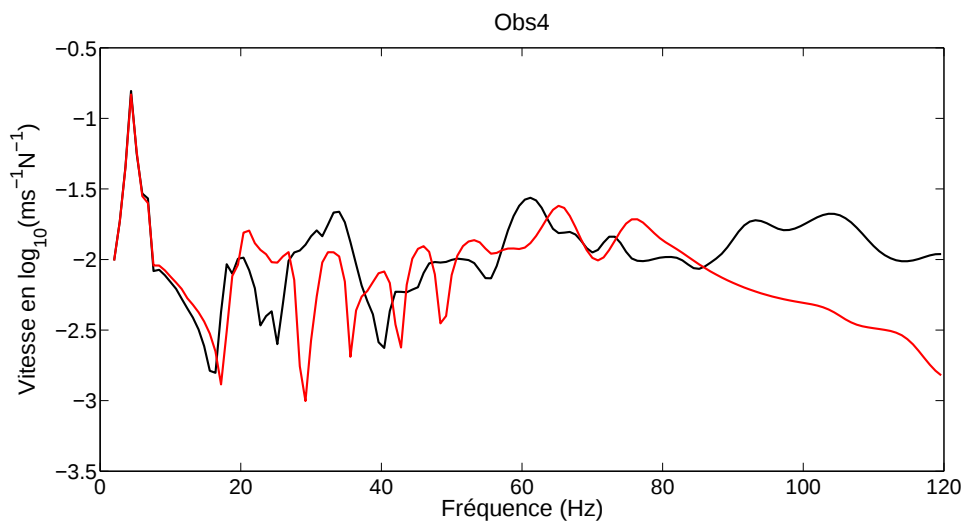


FIGURE 6.16 – Module en échelle logarithmique de la fonctions de réponse en vitesse pour l'observation *Obs 4*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge).

L'analyse des résultats pour ces quatre points d'observation montre que l'utilisation de 50 modes "globaux", au lieu de 907 modes élastiques, permet d'avoir une approximation correcte (en vue d'une utilisation pour une étude en "Avant Projet") de la fonction de réponse de référence. Lorsque l'on compare ces résultats à ceux du modèle de structure automobile "nue", on constate une légère dégradation dans les prévisions. Cette différence

est due au fait que les contributions des modes locaux sur la fin de la bande de fréquence $\mathcal{B}$ sont plus importantes pour le véhicule complet que pour la structure "nue". Notamment, pour le point d'observation *Obs 4*, la dégradation est plus grande ce qui s'explique par la localisation du point d'observation qui est situé au niveau de l'extrémité du coffre qui constitue une partie moins rigide que les autres corps creux. Ainsi, la réponse en ce point est plus impactée par les contributions locales.

6.4.2 Correction du modèle réduit

Le modèle réduit est construit uniquement avec les vecteurs propres des déplacements globaux. Comme nous l'avons indiqué au paragraphe 3.3.3.5, la matrice d'amortissement réduite D^{gg} est modifiée en la matrice $D^{gg,mod}$. Les modules, en échelle logarithmique, des réponses avec et sans correction d'amortissement, pour les points d'observation *Obs 1*, *Obs 2*, *Obs 3* et *Obs 4*, sont présentés sur les figures 6.17, 6.19, 6.21 et 6.23. Les écarts en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction sont montrés sur les figures 6.18, 6.20, 6.22 et 6.24. Sur ces figures, afin de mettre en évidence le gain de réduction apporté par l'utilisation d'une base de vecteurs propres globaux, nous avons aussi tracé les réponses avec les 50 premiers modes propres élastiques. Comme nous pouvons constater, ces 50 modes élastiques sont insuffisant pour bien synthétiser la réponse dans la bande d'analyse $\mathcal{B}$.

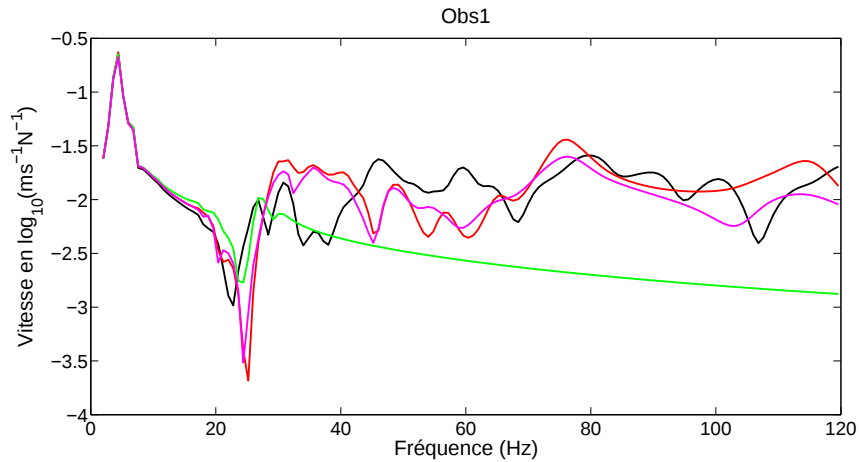


FIGURE 6.17 – Modules en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 1*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), 50 premiers modes élastiques (en vert), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction d'amortissement (en magenta).

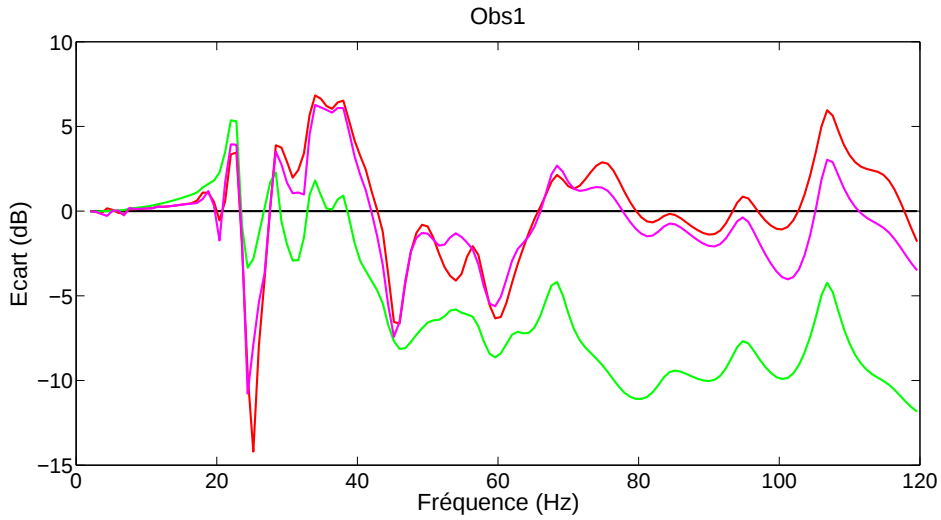


FIGURE 6.18 – Ecart en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction d’amortissement pour *Obs1*. Comparaisons entre différentes bases de projection : 50 premiers modes élastiques (en vert), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction d’amortissement (en magenta).

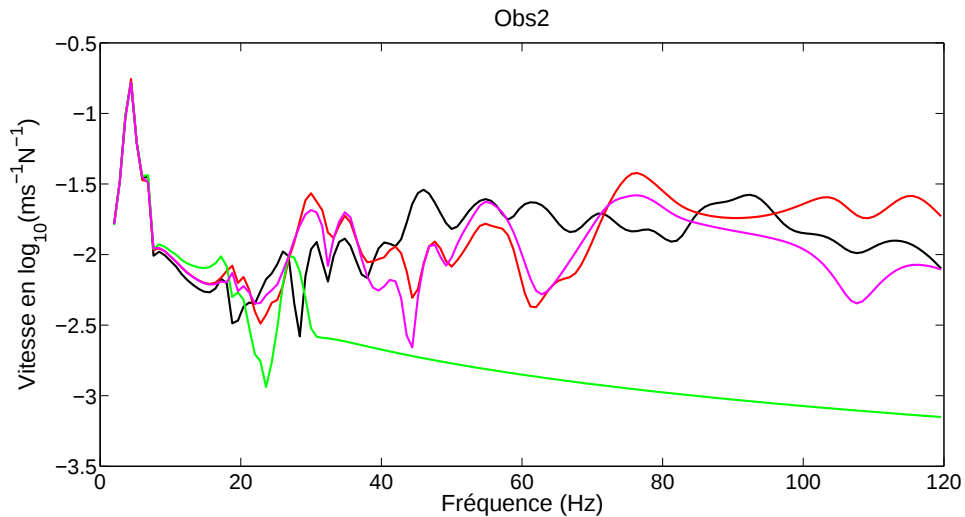


FIGURE 6.19 – Modules en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs2*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), 50 premiers modes élastiques (en vert), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction d’amortissement (en magenta).

6.4. VECTEURS PROPRES DES DÉPLACEMENTS GLOBAUX ET DES DÉPLACEMENTS LOCAUX

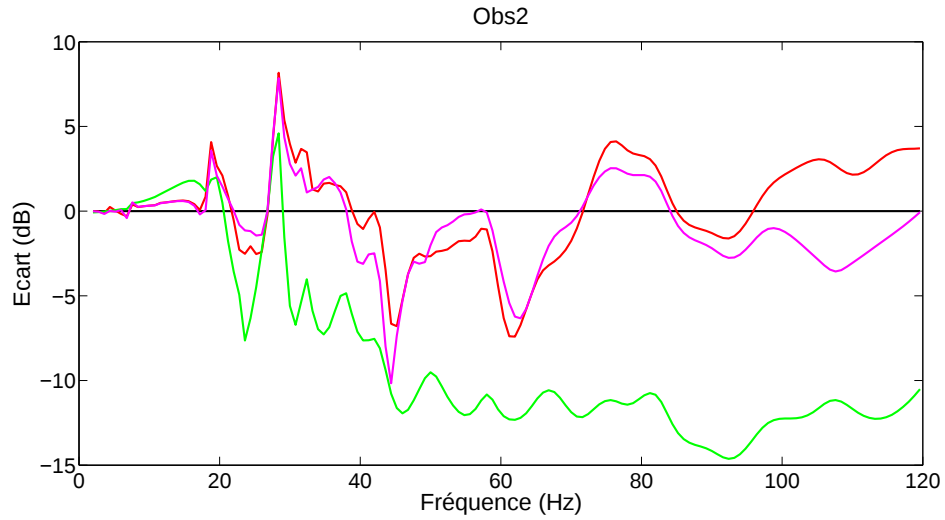


FIGURE 6.20 – Ecart en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction d'amortissement pour *Obs 2*. Comparaisons entre différentes bases de projection : 50 premiers modes élastiques (en vert), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction d'amortissement (en magenta).

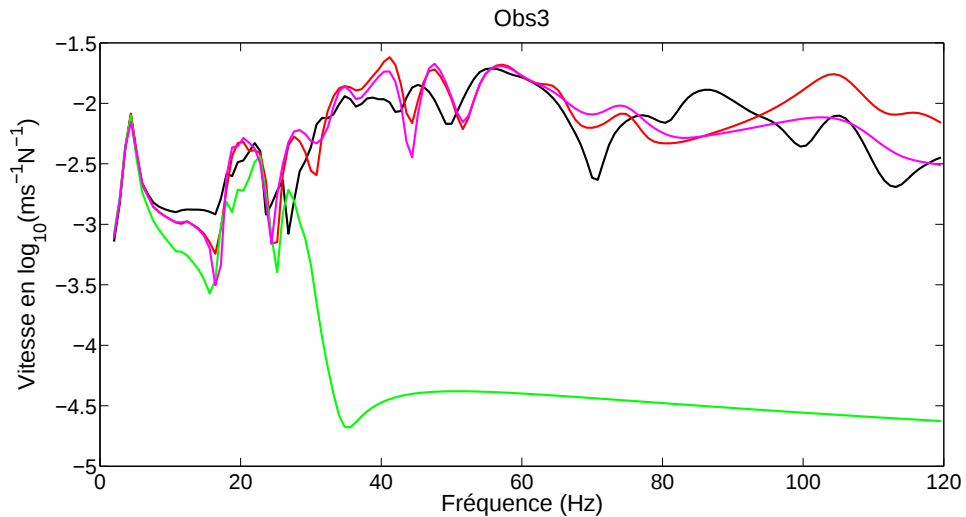


FIGURE 6.21 – Modules en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs 3*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), 50 premiers modes élastiques (en vert), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction d'amortissement (en magenta).

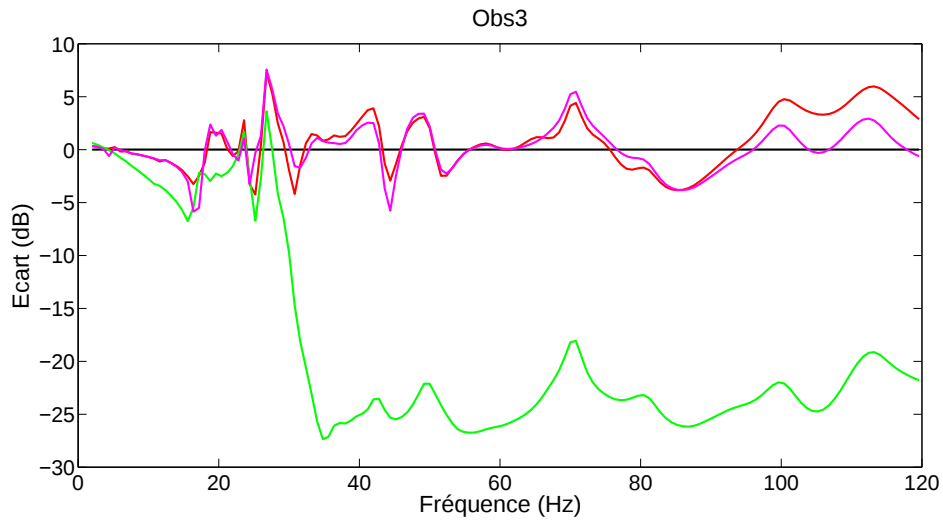


FIGURE 6.22 – Ecart en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction d'amortissement pour *Obs3*. Comparaisons entre différentes bases de projection : 50 premiers modes élastiques (en vert), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction d'amortissement (en magenta).

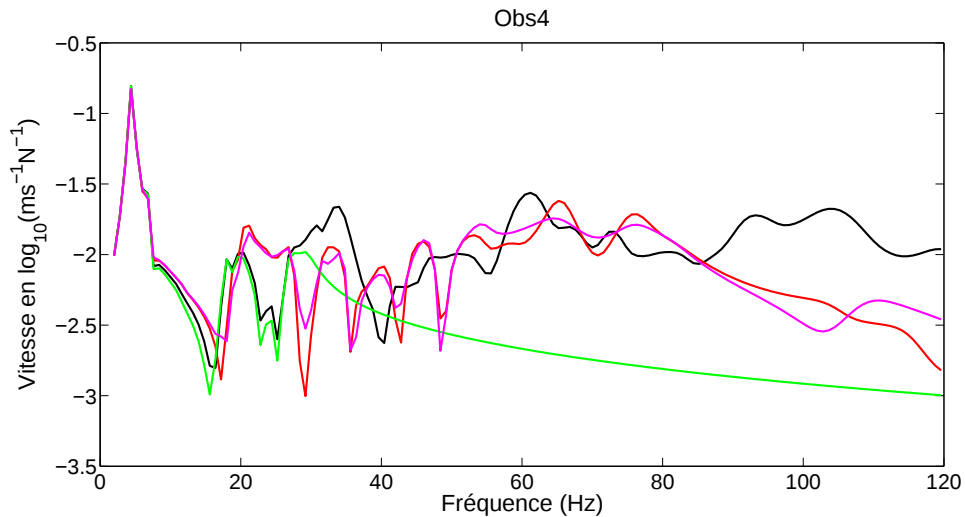


FIGURE 6.23 – Modules en échelle logarithmique des fonctions de réponse en vitesse de *Obs4*. Comparaisons entre différentes bases de projection : modes élastiques (trait épais noir), 50 premiers modes élastiques (en vert), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction d'amortissement (en magenta).

6.5. RÉPONSE ALÉATOIRE EN FRÉQUENCE CALCULÉE AVEC LE MODÈLE RÉDUIT STOCHASTIQUE DU MODÈLE NUMÉRIQUE COMPLET.

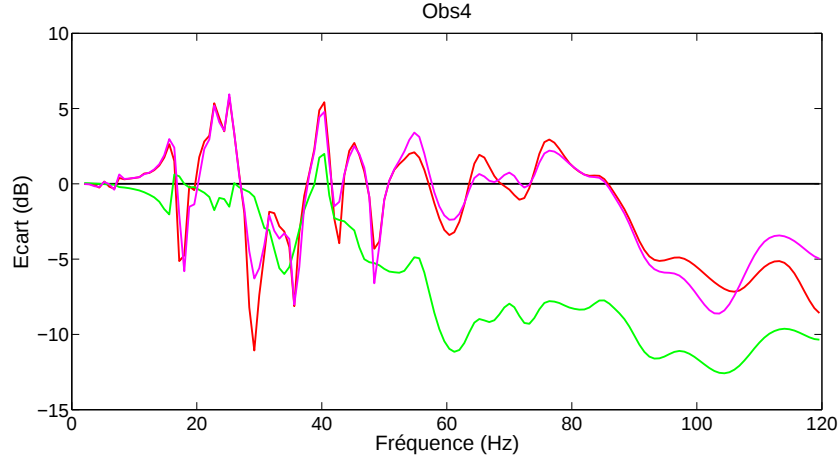


FIGURE 6.24 – Ecart en dB par rapport à la réponse de référence avec et sans correction d’amortissement pour *Obs 4*. Comparaisons entre différentes bases de projection : 50 premiers modes élastiques (en vert), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement (en rouge), vecteurs propres des déplacements globaux uniquement avec correction d’amortissement(en magenta).

Sur ces figures, on peut aussi constater que la modification de l’amortissement permet de diminuer l’écart entre la réponse fournie par le modèle réduit et la réponse fournie par le modèle de référence et permet donc d’améliorer la prédictibilité du modèle réduit construit avec 50 vecteurs propres globaux seulement.

6.5 Réponse aléatoire en fréquence calculée avec le modèle réduit stochastique du modèle numérique complet.

Comme pour le modèle stochastique de référence, la matrice d’amortissement est laissée déterministe. La première étape a été de calculer les valeurs optimales des paramètres de dispersion $\delta_{M^{gg}}^{opt}$ et $\delta_{K^{gg}}^{opt}$ en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance présentée au paragraphe 5.4. La fonction de vraisemblance $(\delta_{M^{gg}}, \delta_{K^{gg}}) \mapsto \mathcal{L}(\delta_{M^{gg}}, \delta_{K^{gg}})$ est représentée à la figure 6.25. Le maximum de la fonction de vraisemblance est noté sur la figure par les coordonnées du point optimal $\delta_{M^{gg}}^{opt}$ et $\delta_{K^{gg}}^{opt}$. Là encore ces valeurs optimales ne peuvent être communiquées pour des raisons de confidentialité. L’indice de troncature est $n_{\text{tronc}} = 80$ pour la réduction statistique. Cet indice a été déterminé en analysant la courbe $n_{\text{tronc}} \mapsto \text{err}_{\text{tronc}}(n_{\text{tronc}}; \delta)$, défini par l’équation (5-22), pour plusieurs valeurs de δ . L’erreur de troncature a été fixée à $\eta = 0.015$. La figure 6.26 représente la fonction

$n_{\text{tronc}} \mapsto \text{err}_{\text{tronc}}(n_{\text{tronc}}; \boldsymbol{\delta}^{\text{opt}})$. Il est à noter que $\delta_{M^{gg}}^{\text{opt}}$ est grand, ce qui s'explique par le fait que la méthode impacte directement l'énergie cinétique, en particulier pour les contributions liées aux inerties de rotation dans les éléments finis ayant une cinématique réduite telles que les poutres, les plaques et les coques. Dans une seconde étape, nous avons calculé, avec ces valeurs optimales des paramètres de dispersion, les régions de confiance correspondant à un niveau de probabilité $Pc = 0.95$ pour les points d'observation *Obs 1*, *Obs 2*, *Obs 3* et *Obs 4*. Ces régions de confiance sont présentées respectivement sur les figures 6.27, 6.28, 6.29 et 6.30 (région magenta).

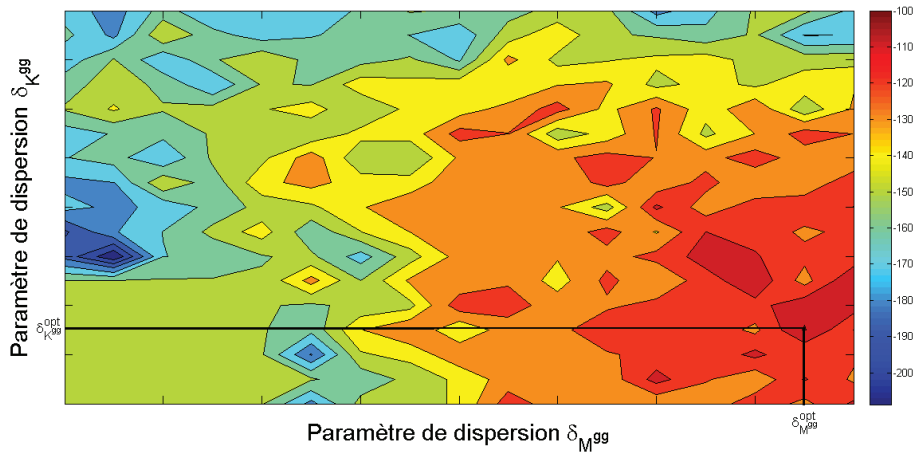


FIGURE 6.25 – Fonction de vraisemblance $(\delta_{M^{gg}}, \delta_{K^{gg}}) \mapsto \mathcal{L}(\delta_{M^{gg}}, \delta_{K^{gg}})$. Les valeurs optimales sont notées $\delta_{M^{gg}}^{\text{opt}}$ et $\delta_{K^{gg}}^{\text{opt}}$.

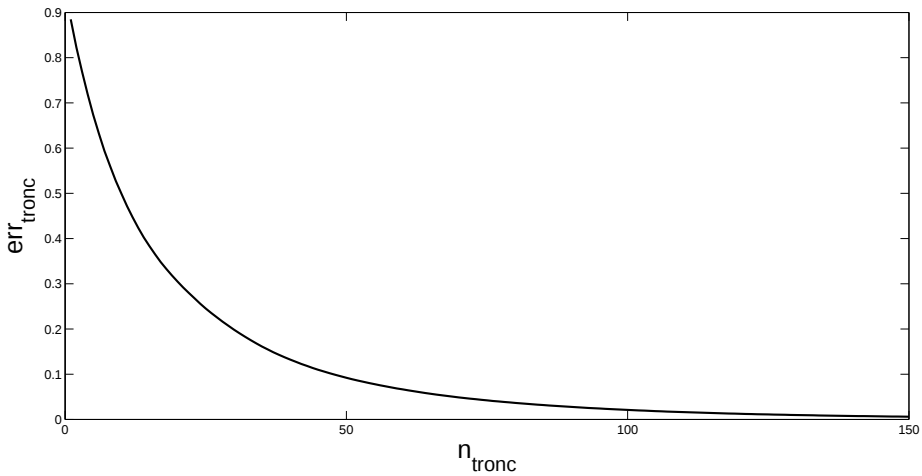


FIGURE 6.26 – Fonction $n_{\text{tronc}} \mapsto \text{err}_{\text{tronc}}(n_{\text{tronc}}; \boldsymbol{\delta}^{\text{opt}})$.

6.5. RÉPONSE ALÉATOIRE EN FRÉQUENCE CALCULÉE AVEC LE MODÈLE RÉDUIT STOCHASTIQUE DU MODÈLE NUMÉRIQUE COMPLET.

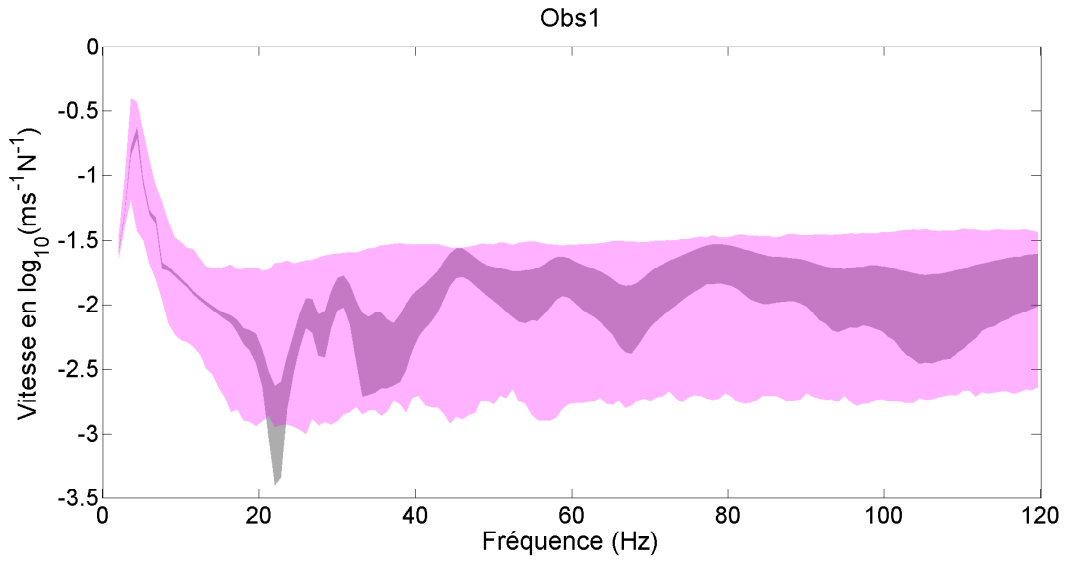


FIGURE 6.27 – Réponse aléatoire en fréquence du point d'observation *Obs1*. Région de confiance de référence (région grise). Région de confiance construite avec le modèle réduit stochastique avec la base des vecteurs propres des déplacements globaux avec correction d'amortissement (région magenta).

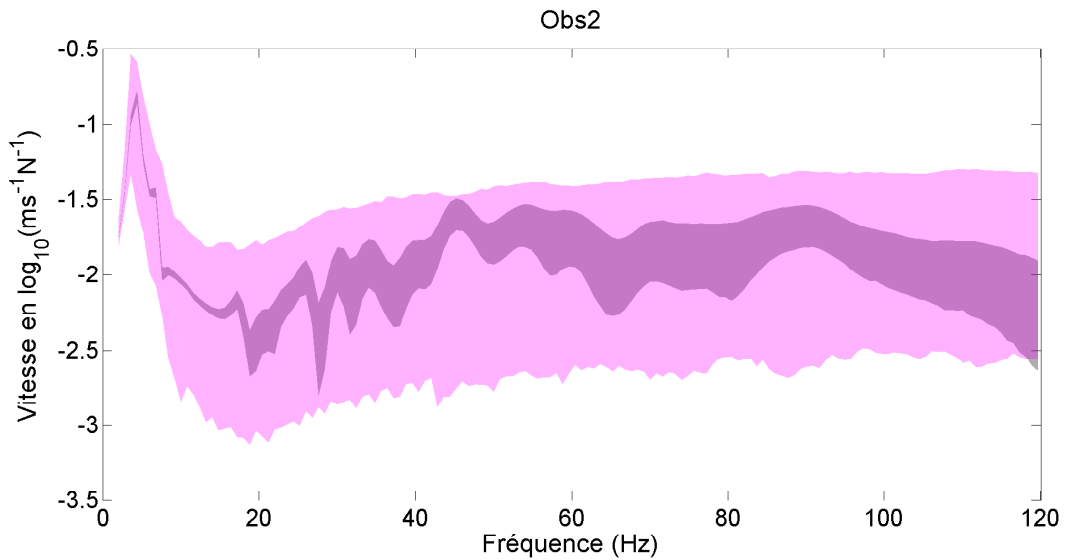


FIGURE 6.28 – Réponse aléatoire en fréquence du point d'observation *Obs2*. Région de confiance de référence (région grise). Région de confiance construite avec le modèle réduit stochastique avec la base des vecteurs propres des déplacements globaux avec correction d'amortissement (région magenta).

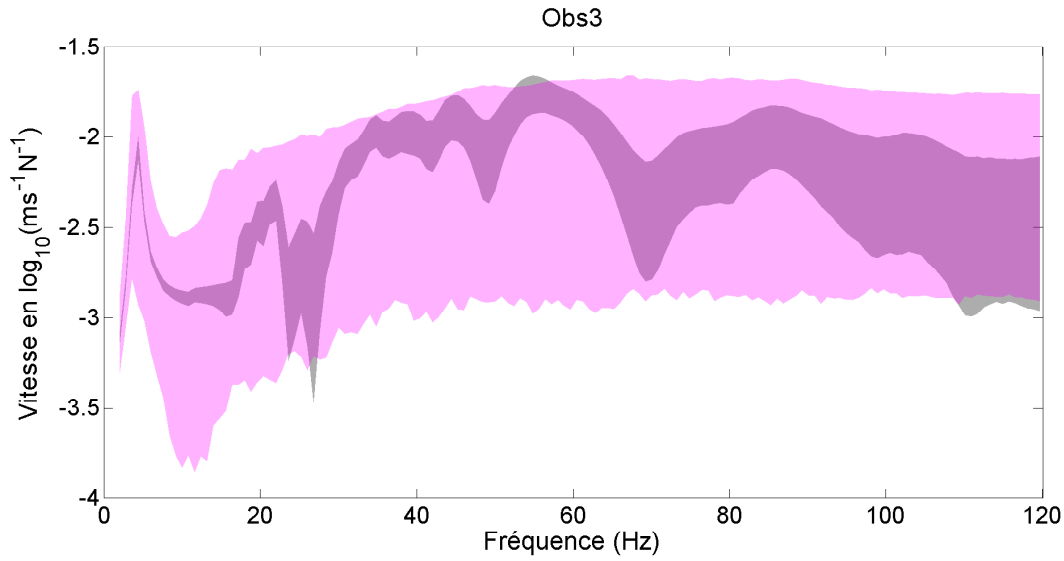


FIGURE 6.29 – Réponse aléatoire en fréquence du point d'observation *Obs 3*. Région de confiance de référence (région grise). Région de confiance construite avec le modèle réduit stochastique avec la base des vecteurs propres des déplacements globaux avec correction d'amortissement (région magenta).

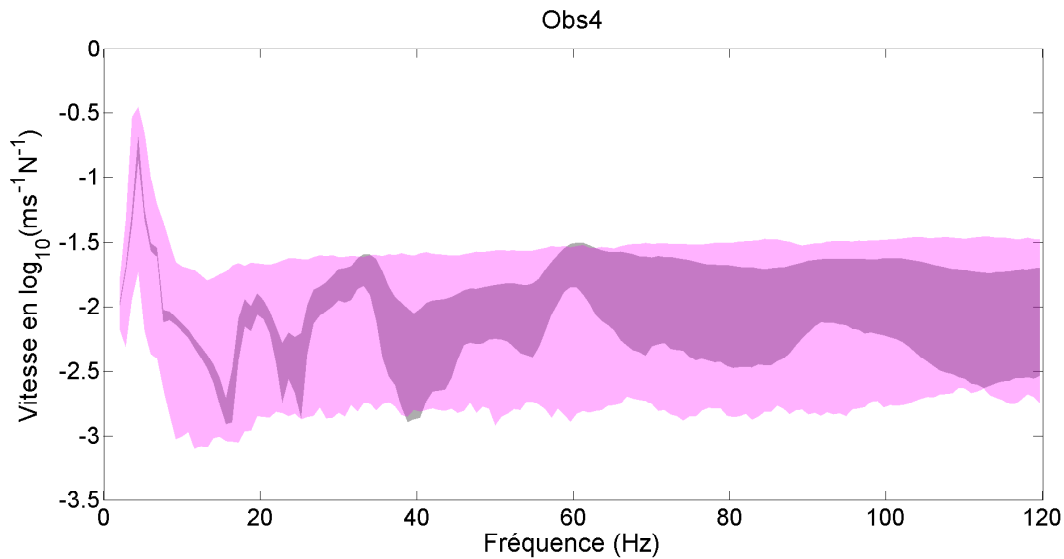


FIGURE 6.30 – Réponse aléatoire en fréquence du point d'observation *Obs 4*. Région de confiance de référence (région grise). Région de confiance construite avec le modèle réduit stochastique avec la base des vecteurs propres des déplacements globaux avec correction d'amortissement (région magenta).

La région de confiance de référence est incluse dans la région de confiance du modèle réduit

stochastique pour la bande $\mathcal{B}$. Ces résultats constituent donc une validation sur un modèle EF de modèle complet d'automobile possédant dans la bande BF de très nombreux modes locaux.

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons validé la construction du modèle réduit stochastique basé sur le modèle réduit (construit à l'aide des vecteurs propres globaux et une correction de l'amortissement) et sur l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes, pour un modèle EF d'un modèle complet de véhicule automobile. Il est à noter que la précision de la réponse calculée en utilisant une base de l'espace des déplacements globaux dépend du point d'observation, et notamment, lorsque la région d'observation n'est pas suffisamment rigide, les contributions locales ne sont plus négligeables. Cependant, pour une conception robuste "Avant Projet", la précision obtenue sur les points d'observation reste acceptable sachant que le modèle réduit est de dimension 50 au lieu de 907.

Conclusions et Perspectives

L'objectif de cette recherche était de proposer la construction d'un modèle réduit de petite dimension pour prévoir les réponses dynamiques dans une bande BF sur les parties rigides d'un véhicule automobile complet afin de disposer d'un modèle réduit "léger" pour faciliter la conception en "Avant Projet" de ces véhicules qui présentent de nombreux modes élastiques locaux en BF dues à la présence de nombreuses parties flexibles et d'équipements.

Pour construire un tel modèle réduit, nous avons introduit une base non-usuelle de l'espace admissible des déplacements globaux. La construction de cette base requiert la décomposition en sous-domaines du domaine de la structure qui est d'une très grande complexité géométrique pour les automobiles et dont les modèles EF font intervenir de très nombreux types d'éléments finis. Cette décomposition en sous-domaines a été réalisée par la Fast Marching Method que nous avons dû étendre pour pouvoir traiter la complexité des modèles EF des véhicules automobiles. Puis les équations matricielles du modèle EF ont été projetées sur cette base.

Afin de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres du modèle, les incertitudes de modèle induites par les erreurs de modélisation et enfin les incertitudes liées à la non prise en compte des contributions locales dans le modèle réduit des déplacements globaux, un unique modèle probabiliste non paramétrique de ces trois sources d'incertitudes a été implémenté sur le modèle réduit construit avec les vecteurs propres globaux. Les paramètres de dispersion de ce modèle probabiliste ont été identifiés en utilisant le principe du maximum de vraisemblance et des réponses obtenues à l'aide d'un modèle stochastique de référence qui inclut des informations expérimentales qui résultent de travaux précédents.

Le modèle réduit stochastique pour la prévision des déplacements globaux sur les parties rigides dans la bande BF qui a été développé a été validé sur un modèle de structure automobile "nue" puis a été appliqué avec succès sur un modèle complet de véhicule automobile.

Ce modèle réduit stochastique de petite dimension permet de prédire de façon robuste la réponse sur les parties raides du véhicule lorsque les excitations sont elles-même sur des parties raides. Ce modèle réduit n'est pas adapté à la prévision des réponses sur les parties souples par construction même. Ce type de modèle réduit stochastique pourrait se révéler très utile dans les phase de conception "Avant Projet", c'est-à-dire lorsque les parties flexibles et les équipements ne sont pas encore complètement définis.

Perspectives

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés uniquement à la réponse de la partie structure du véhicule automobile. Il serait intéressant de construire le modèle stochastique vibroacoustique complet du véhicule en réduisant la partie structure de ce modèle sur une base des déplacements globaux puis étudier la robustesse de ce modèle. Il serait notamment intéressant d'étudier le rayonnement stochastique des panneaux flexibles à l'aide d'un tel modèle.

Afin de montrer la robustesse de l'approche, il serait intéressant de réaliser cette étude sur le modèle d'un véhicule automobile complet mais avec des parties flexibles différentes, en nombre et en dimension, correspondant à des options différentes de voiture.

Une autre perspective à ces travaux concerne la réduction de l'écart entre la réponse de référence et la réponse fournie par le modèle réduit. Pour un nombre fixé de sous-domaines, même en ayant convergé vis-à-vis du nombre de vecteurs propres globaux il existera toujours un écart entre ces deux réponses, cet écart irréductible étant lié à la non prise en compte des contributions locales qui induisent un amortissement apparent même sur les parties rigides. Ainsi, il serait intéressant d'essayer de prendre en compte ces contributions par une approche statistique en introduisant quelques coordonnées supplémentaires construites à partir d'une méthode du type *structure floue*.



Estimation des fréquences de coupure (Etude complète)

Sommaire

A.1	Introduction	112
A.2	Recherche de la configuration optimale	113
A.3	Détermination des fréquences de coupure.	126
A.4	Analyse de l'effet de l'amortissement sur la réponse acoustique de la cavité	135
A.5	Conclusion de l'analyse menée	138

A.1 Introduction

Dans cette étude, nous présentons les résultats détaillés que nous avons résumé au chapitre 2 concernant l'estimation des fréquences de coupure F_c qui délimitent les effets des déformations locales pour différents composants de la structure d'un véhicule automobile. Cette fréquence de coupure va permettre de mettre en évidence une limite de validité d'un modèle réduit construit avec une base des déplacements globaux et elle va notamment montrer que la validité de ce modèle réduit, s'il est bien construit, permet d'aller bien au-delà de la fréquence d'apparition des premiers modes locaux.

On va s'intéresser à la réponse dynamique de différents éléments d'un modèle de structure automobile "nue" (voir figure A.1). Il est important de noter que les fréquences de coupure estimées ne sont valables que pour le modèle de structure "nue" étudiée.

Pour estimer la fréquence de coupure d'un sous-ensemble de la voiture, on fait varier l'amortissement de ce sous-ensemble. Pour cela, la structure automobile "nue" sera découpée en sous-ensembles et sur chaque sous-ensemble, la vitesse quadratique moyenne (VQM) définie par

$$V(\omega)^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} |Y_i(\omega)|^2 \quad , \quad (\text{A-1})$$

où Y_i est la vitesse normale au $i^{\text{ème}}$ nœud du sous-ensemble considéré, sera calculée en fonction de l'amortissement des parties souples. Pour le calcul de la VQM, l'excitation correspond à deux forces ponctuelles situées sur les corps creux (un au niveau de la fixation gauche du moteur et l'autre sur la fixation de l'anti-couple du moteur), suivant la direction verticale et valant 1 N sur toute la bande d'analyse [0, 500] Hz. La VQM est calculée en utilisant un nombre limité ν de nœuds d'observation. Dans une première étape, on cherche le nombre minimum de nœuds ainsi que leur localisation qui garantissent une bonne convergence de la VQM. Ces nœuds optimaux seront appelés "nœud d'observation" dans la suite. Dans une seconde étape, l'influence de l'amortissement des parties souples sur la VQM est analysée pour chaque sous-ensemble afin de déterminer leurs fréquences de coupure.

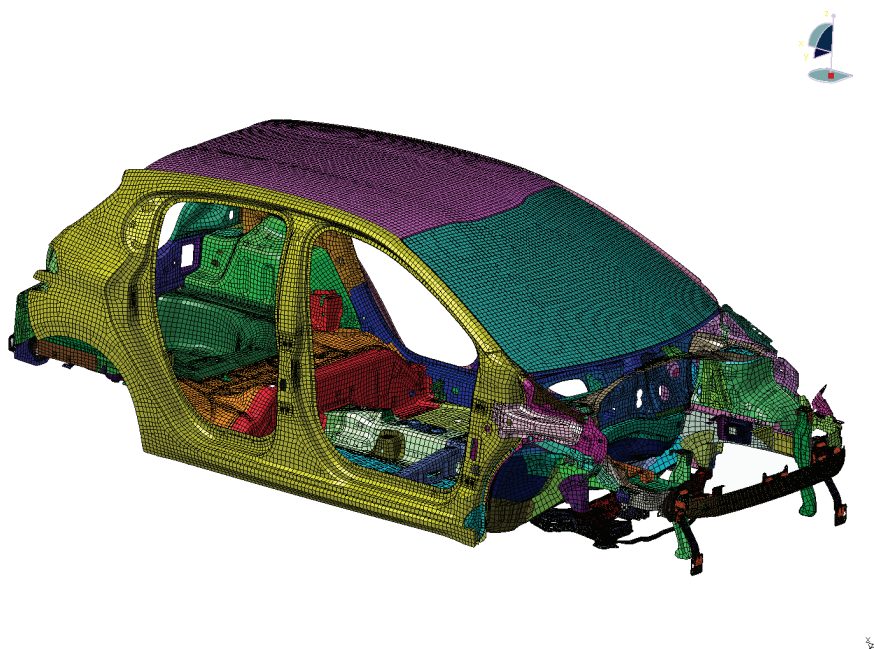


FIGURE A.1 – Modèle de structure automobile "nue".

A.2 Recherche de la configuration optimale

A.2.1 Description de la méthodologie

Lors du calcul de la VQM, la configuration optimale permet de réduire le nombre de points et donc de réduire considérablement le temps de traitement et la taille des fichiers des résultats. Pour rechercher la configuration optimale sur chaque sous-ensemble, deux méthodes sont utilisées en fonction de la complexité du sous-ensemble.

La première méthode est adaptée aux sous-ensembles dit "simples" (pièce homogène de géométrie simple). Pour ce type de pièce, les nœuds observés sont disposés sur un quadrillage du domaine de la pièce (voir figure A.2). Ce quadrillage sera raffiné jusqu'à l'obtention de la convergence de la VQM (discretisation de l'intégrale continue par une méthode de trapèze bidimensionnelle).

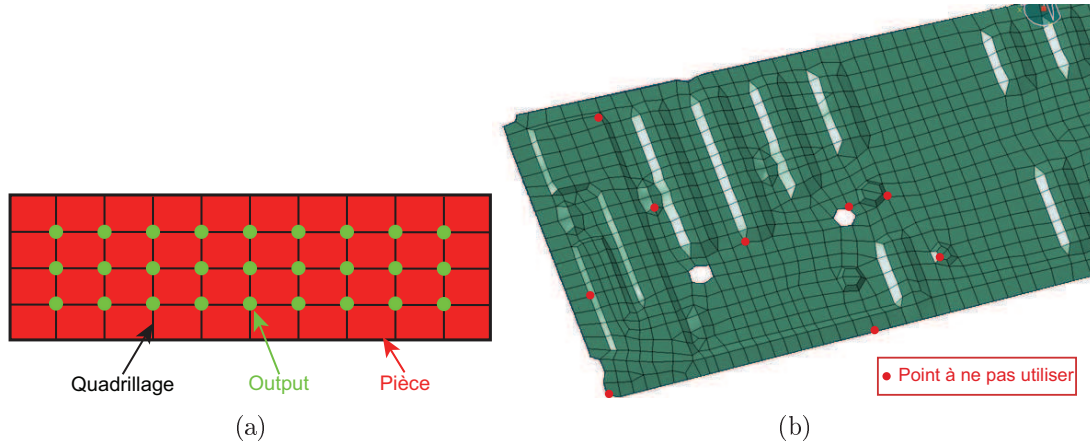


FIGURE A.2 – Sous-ensemble "simple" (a) et sous-ensemble complexe (b).

La deuxième méthode est adaptée aux sous-ensembles dits "complexes". Pour ces sous-ensembles, il est d'abord nécessaire d'éliminer les nœuds qui sont sur des bords, sur des angles vifs ou près des trous (voir figure A.2). En effet, en ces points, la détermination de la direction normale est ambiguë pour le calcul de la vitesse normale. Ensuite les nœuds d'observation sont choisis aléatoirement parmi les nœuds restants jusqu'à convergence de la VQM (calcul de type Monte Carlo d'une intégrale bidimensionnelle).

A.2.2 Recherche de la configuration optimale sur des sous-ensembles du modèle de structure automobile "nue"

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer la méthodologie présentée dans le paragraphe A.2.1 afin de trouver la configuration optimale sur les sous-ensembles du modèle de la structure d'automobile "nue". Dans un premier temps, le calcul de la vitesse quadratique moyenne "exacte" (utilisation de tous les nœuds) est réalisé pour tous les sous-ensembles du modèle. Ces courbes sont utilisées comme les courbes de référence. Ensuite, le calcul de la configuration optimale pour chaque sous-ensemble est déterminé. Dans cette deuxième partie, nous intéresserons aussi à la VQM calculée à partir de modèles filaires disponibles chez le constructeur.

A.2.2.1 Identification des panneaux de la structure automobile "nue" pour l'étude

Les sous-ensembles étudiés sont les suivants (voir figure A.3) : le pare brise, le plancher avant, le pavillon (toit), le plancher de charge, le plancher d'assise sous les sièges, le plancher à talon des passagers arrières, le tablier inférieur entre le conducteur et le moteur, le tablier supérieur derrière le tableau de bord, le passage de roue arrière droit et des corps creux.

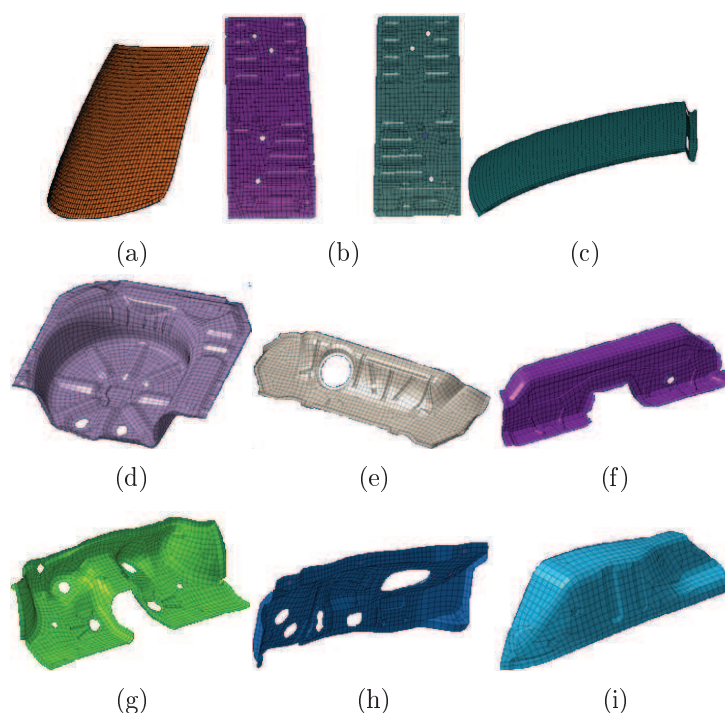


FIGURE A.3 – Sous-ensembles : (a) pare brise, (b) plancher avant, (c) pavillon, (d) plancher de charge, (e) plancher d'assise, (f) plancher à talon, (g) tablier inférieure, (h) tablier supérieur et (i) passage de roue.

A.2.2.2 Calcul de la vitesse quadratique moyenne de référence

La VQM est calculée sur la plage 0 à 500 Hz. Les VQM de référence pour les sous-ensembles souples sont représentées sur la figure A.4.

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

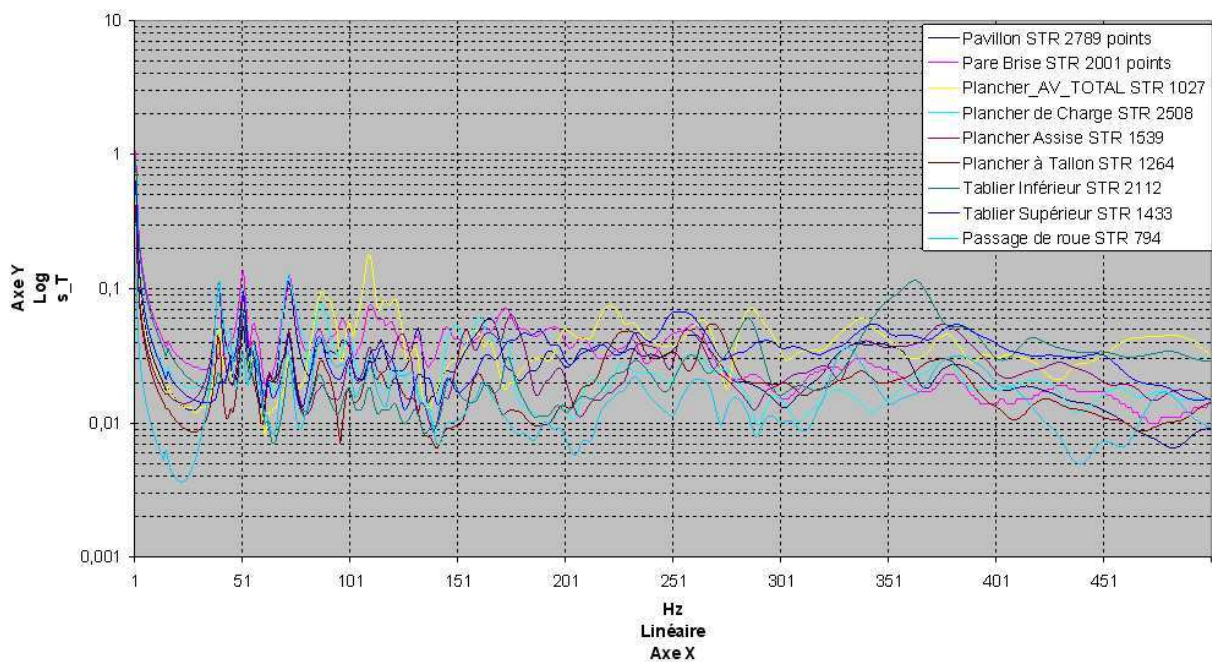


FIGURE A.4 – VQM obtenues avec les points de maillage définis par les nœuds d’observation sur les différents sous-ensembles.

A.2.2.3 Calcul des configurations optimales des sous-ensembles flexibles

Nous comparons la VQM calculée avec différentes configurations de nœud d’observation à la VQM de référence afin de trouver la configuration optimale des nœuds d’observation. Pour le pavillon, le pare brise et le plancher avant, des modèles filaires (ensemble de barres) sont disponibles. Dans la suite, les modèles avec nœuds d’observation seront notés MP et les modèles filaires seront notés F. Les VQM sont aussi calculées avec les modèles filaires disponibles.

Le tableau A.1 présente les différentes configurations étudiées pour chaque sous-ensemble.

A.2. RECHERCHE DE LA CONFIGURATION OPTIMALE

Sous-ensemble	Configurations						
	STR	F			MP		
Pavillon	2789 pts	143 pts	72 pts	136 pts	40 pts	68 pts	135 pts
Pare brise	2001 pts	110 pts			30 pts	50 pts	96 pts
Plancher avant	1267 pts	43 pts			40 pts	68 pts	135 pts
Plancher de charge	2508 pts				176 pts	566 pts	
Plancher d'assise	1539 pts				141 pts	476 pts	
Plancher à talon	1264 pts				110 pts	306 pts	
Tablier inférieur	2112 pts				189 pts	564 pts	
Tablier supérieur	1433 pts				123 pts	503 pts	
Passage de roue	794 pts				104 pts	330 pts	

TABLE A.1 – Nombre de nœuds d'observation pour chaque configuration étudiée.

Les VQM pour chaque configuration du pavillon, pare brise, plancher avant, plancher de charge, plancher d'assise, plancher à talon, tablier inférieure, tablier supérieur et passage de roue sont présentées respectivement sur les figures A.5, A.6, A.7, A.8, A.9, A.10, A.11, A.12 et A.13.

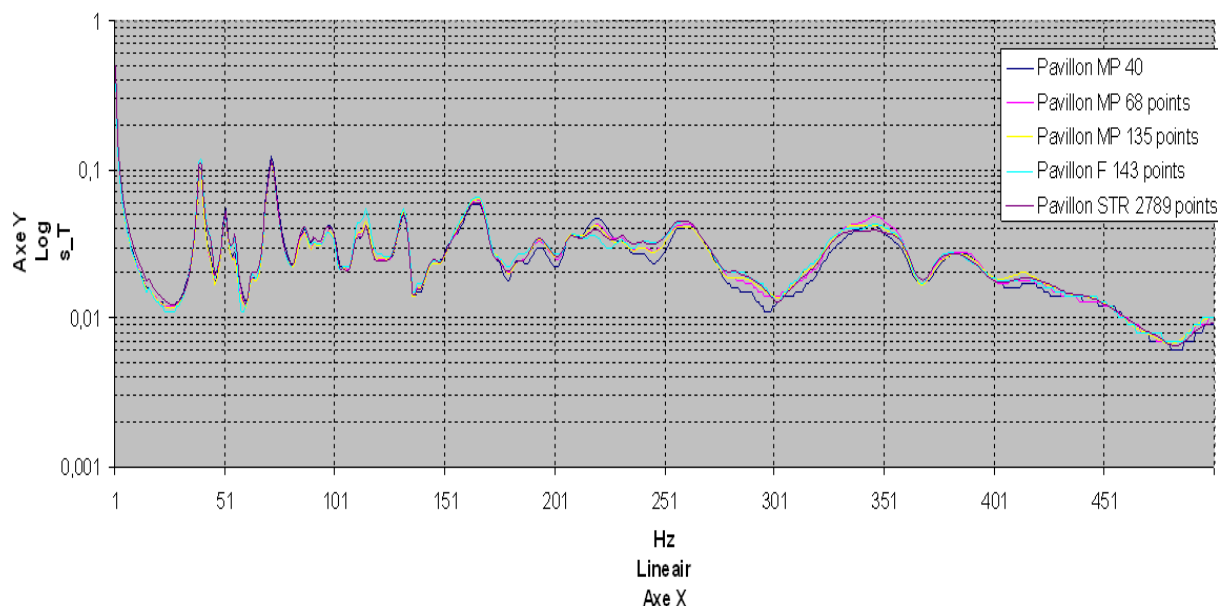


FIGURE A.5 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence), MP ou F) pour le pavillon.

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

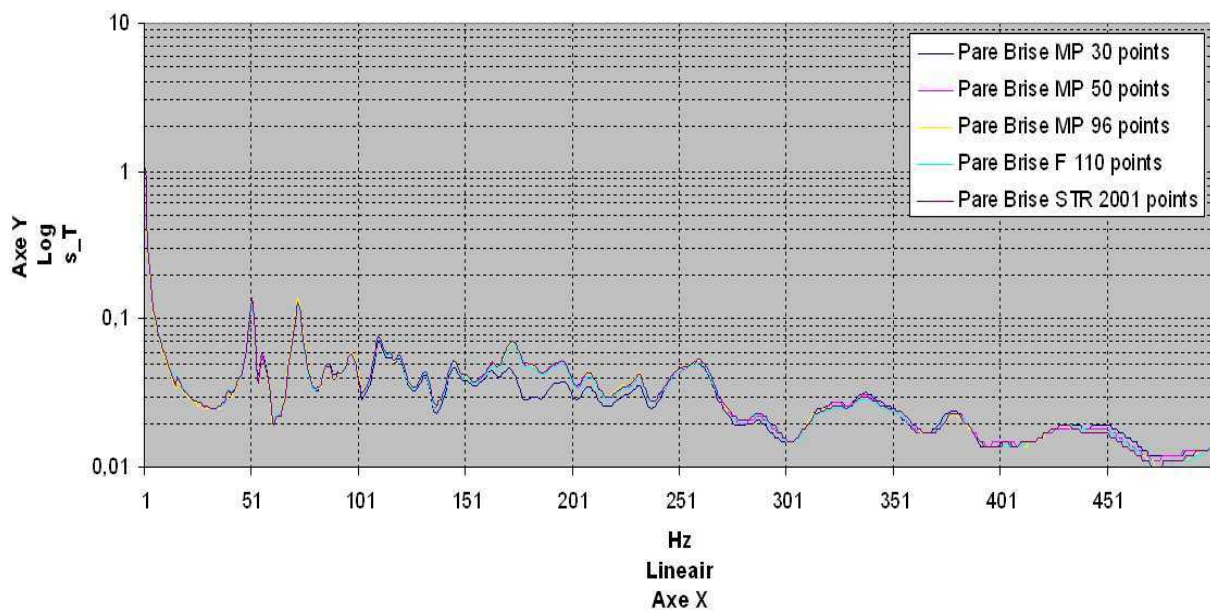


FIGURE A.6 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence), MP ou F) pour le pare brise.

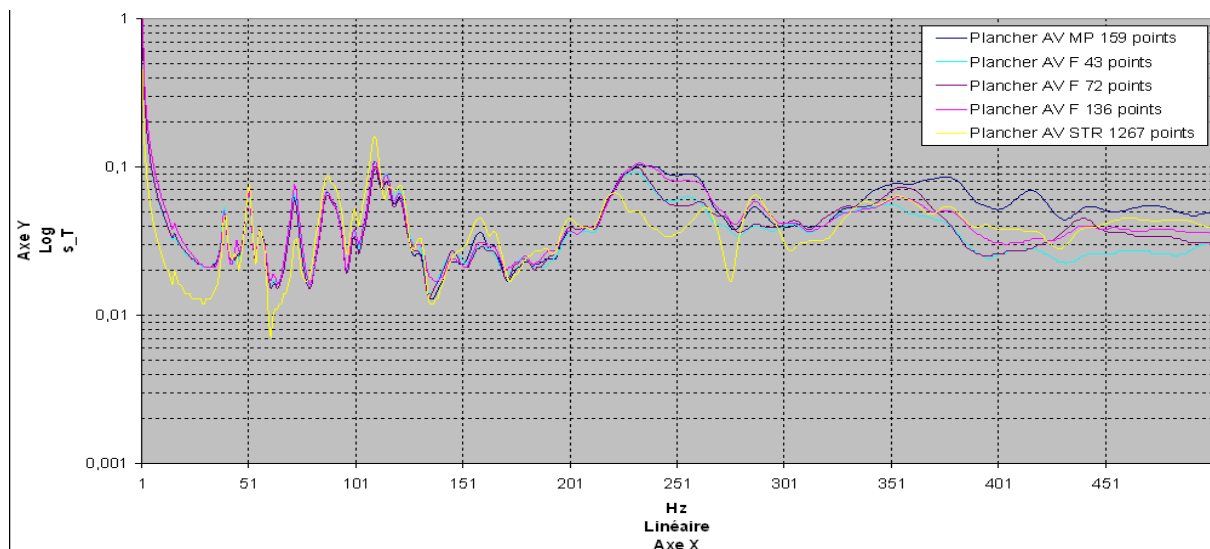


FIGURE A.7 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence), MP ou F) pour le plancher AV.

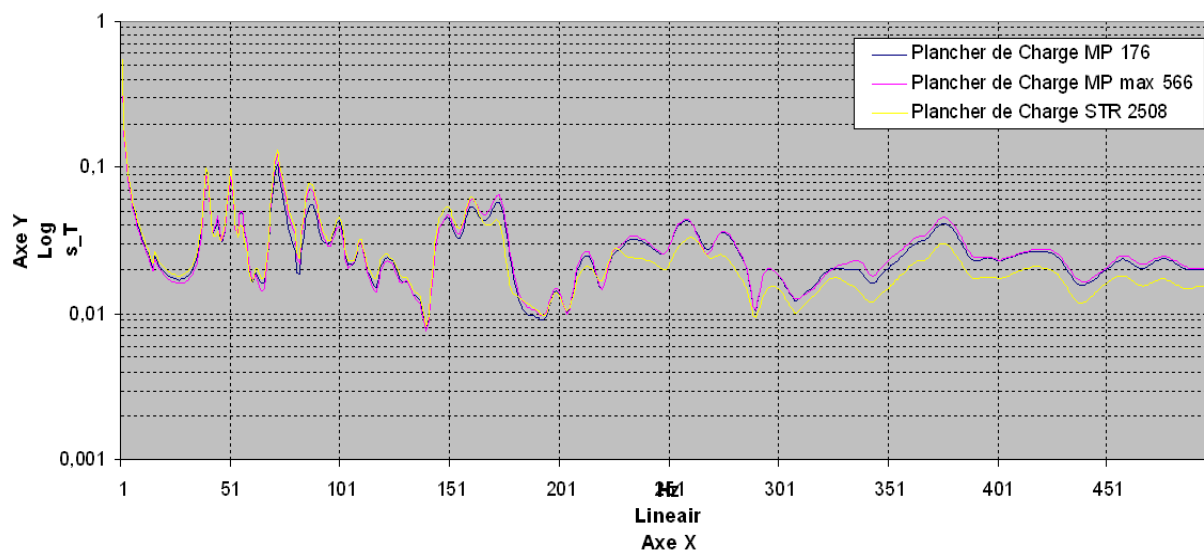


FIGURE A.8 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le plancher de charge.

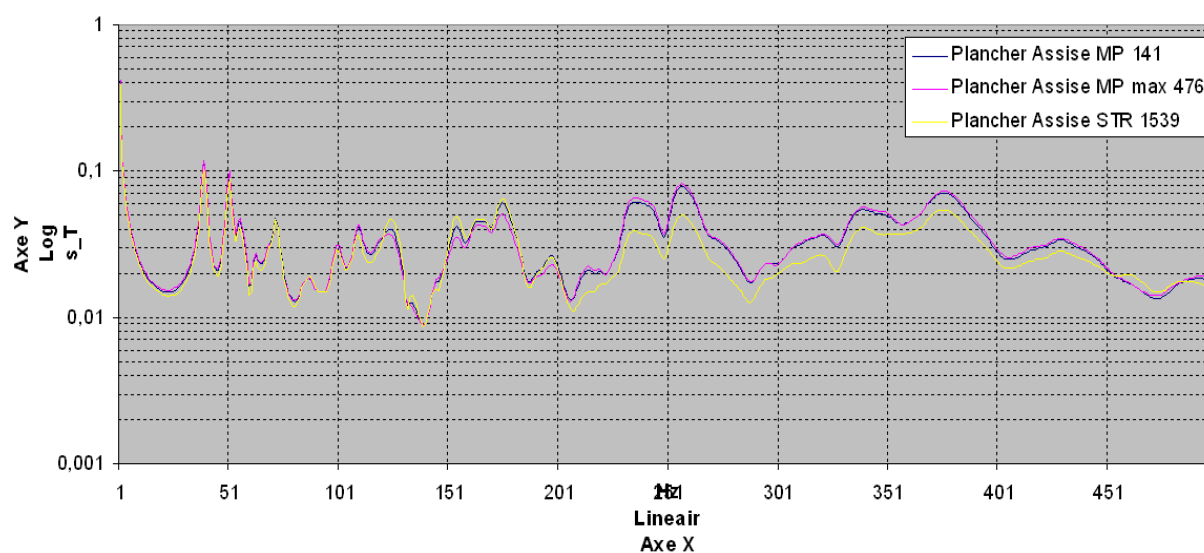


FIGURE A.9 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le plancher d'assise.

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

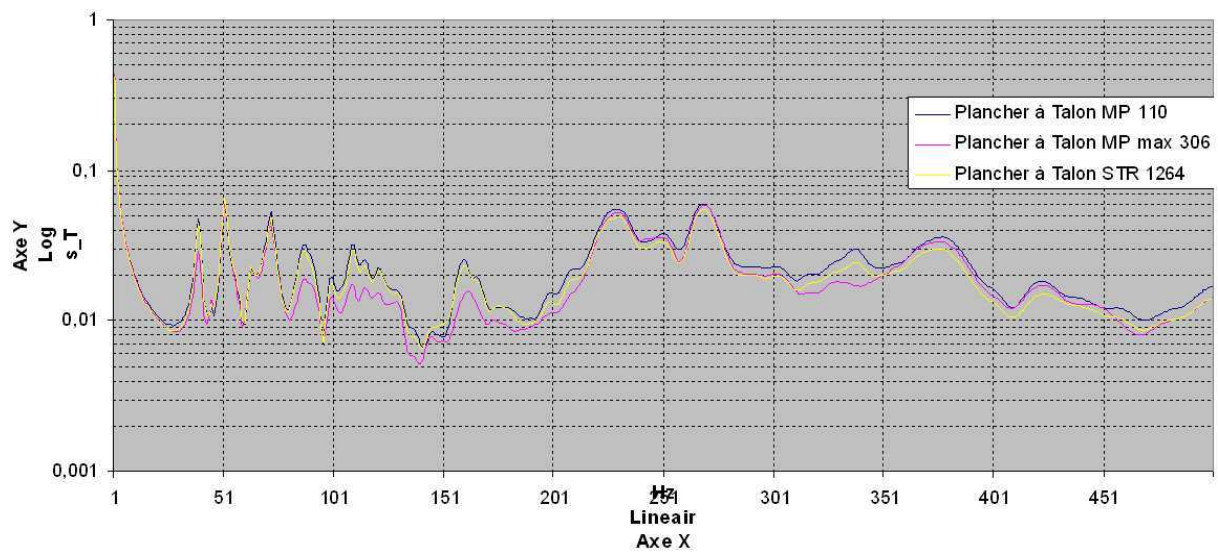


FIGURE A.10 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le plancher à talon.

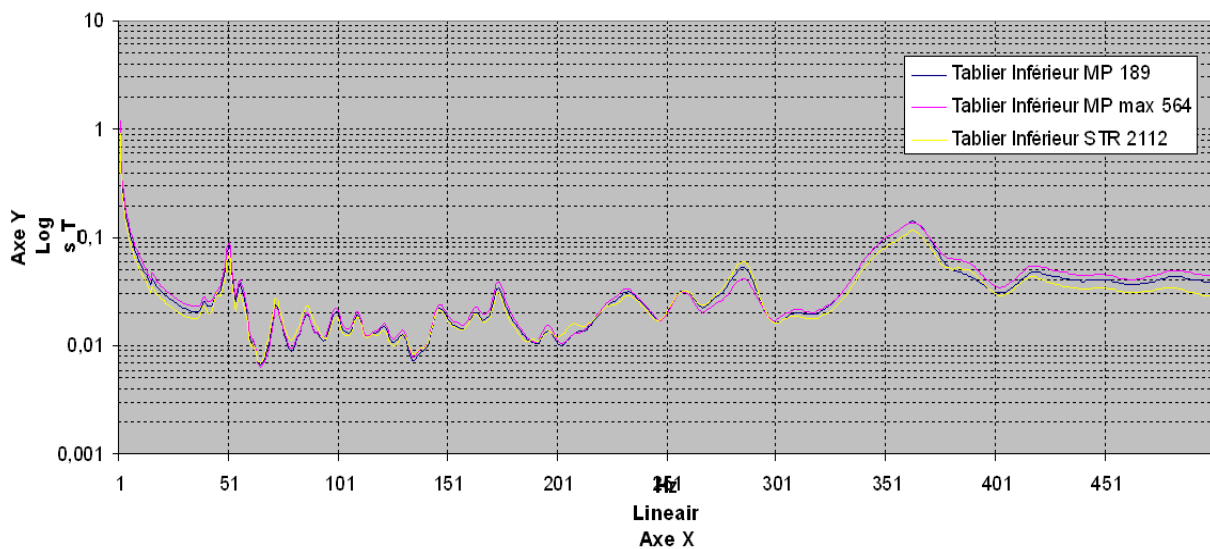


FIGURE A.11 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le tablier inférieur.

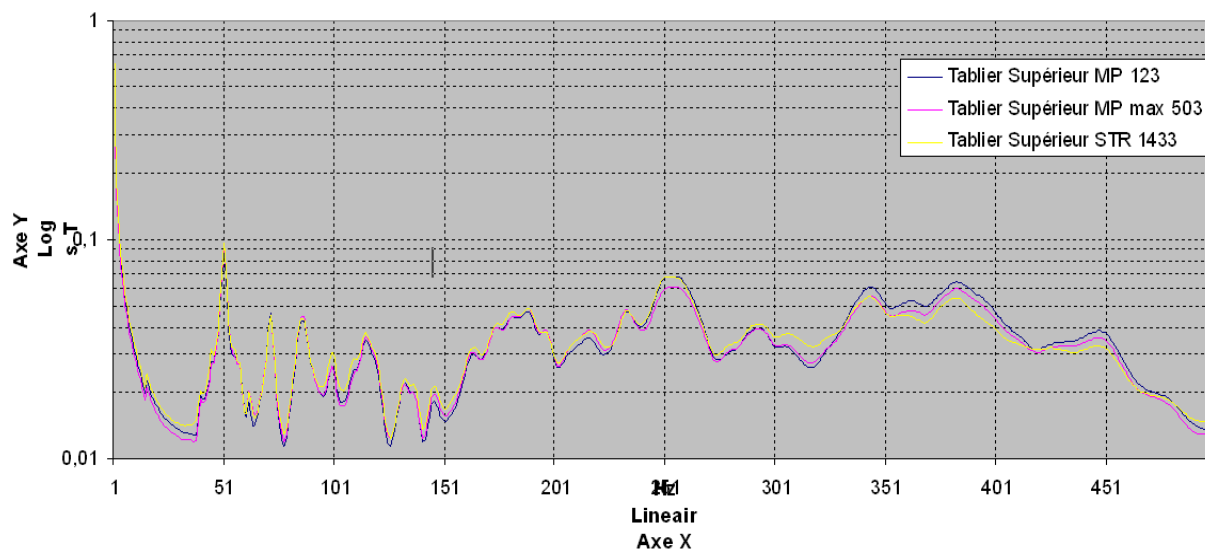


FIGURE A.12 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le tablier supérieur.

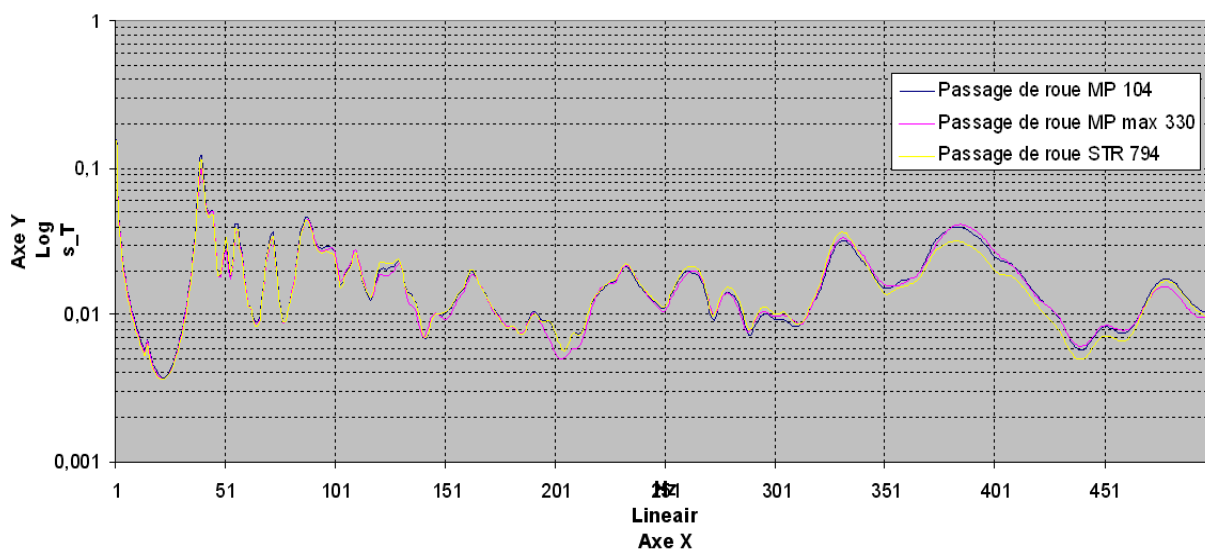


FIGURE A.13 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le passage de roue.

En analysant les figures [A.5](#), [A.6](#), [A.8](#), [A.9](#), [A.10](#), [A.11](#), [A.12](#) et [A.13](#), on peut identifier les configurations optimales en déterminant la configuration qui est la plus proche de la configuration de référence (STR). En revanche, la figure [A.7](#) montre que, pour le plancher

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

avant, la configuration optimale est difficile à identifier. Quelque soit la configuration, il reste un écart par rapport à la courbe de référence. Les résultats des 8 configurations optimales de tous les sous-ensembles, sauf le plancher avant, sont résumés dans le tableau A.2.

Sous-ensemble	Nombre d'Output
Pavillon	96 points
Pare brise	135 points
Plancher de charge	176 points
Plancher d'assise	141 points
Plancher à talon	110 points
Tablier inférieur	189 points
Tablier supérieur	123 points
Passage de roue	104 points

TABLE A.2 – Configurations optimales.

Pour le cas particulier du plancher avant, il est nécessaire de le re-découper en plusieurs sous-ensembles comme suit :

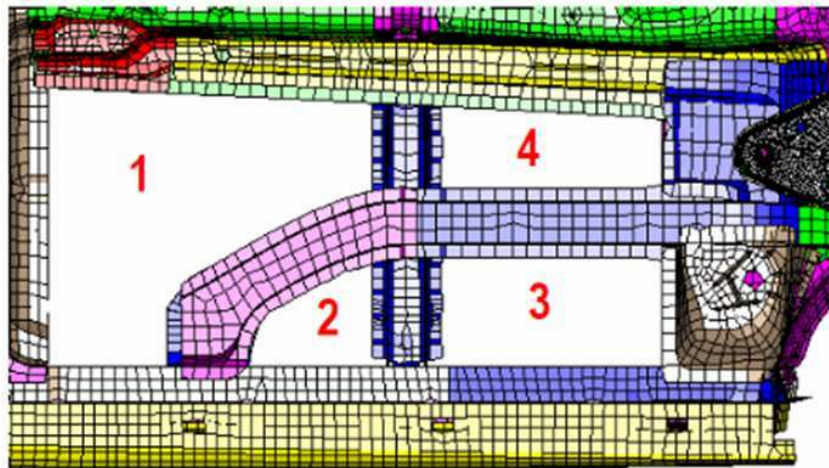


FIGURE A.14 – Découpage du plancher avant en sous-ensembles.

Les zones 1, 2, 3 et 4 seront appelées respectivement plancher avant 1, plancher avant 2, plancher avant 3 et plancher avant 4. La méthode d'analyse précédente est utilisée. Les différentes configurations étudiées pour chaque zone du plancher avant sont déclinées dans

A.2. RECHERCHE DE LA CONFIGURATION OPTIMALE

le tableau A.3.

Sous-ensembles	Configurations							
	STR	MP						
Plancher AV 1	536 pts	9 pts	25 pts	36 pts	75 pts	91 pts	114 pts	119 pts
Plancher AV 2	97 pts	4 pts	7 pts	8 pts	15 pts	16 pts	24 pts	26 pts
Plancher AV 3	235 pts	6 pts	15 pts	20 pts	27 pts	51 pts	53 pts	59 pts
Plancher AV 4	159 pts	6 pts	14 pts	15 pts	22 pts	24 pts	25 pts	40 pts

TABLE A.3 – Nombre de nœuds pour les configurations étudiées pour chaque zone du plancher AV.

Les VQM pour chaque configuration des planchers avant 1 à 4 sont représentées sur les figures A.15, A.16, A.17 et A.18.

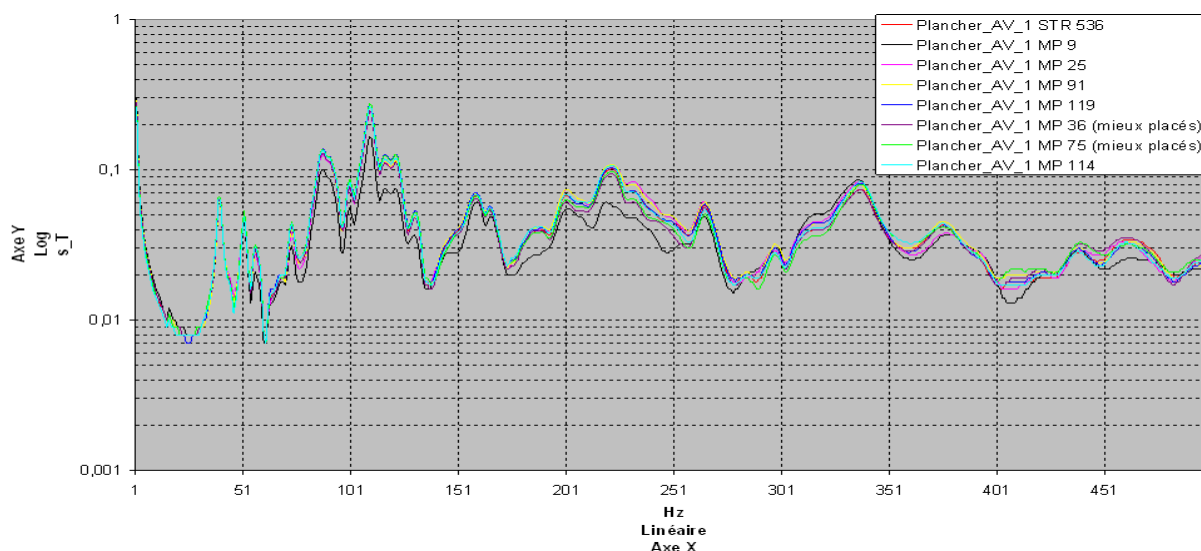


FIGURE A.15 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le plancher avant 1.

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

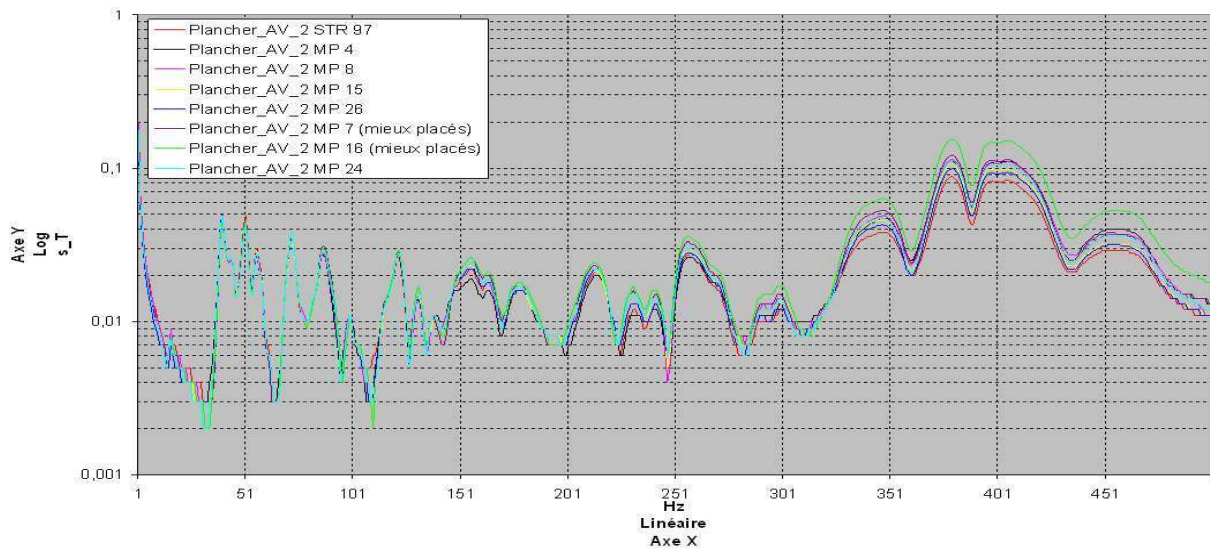


FIGURE A.16 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le plancher avant 2.

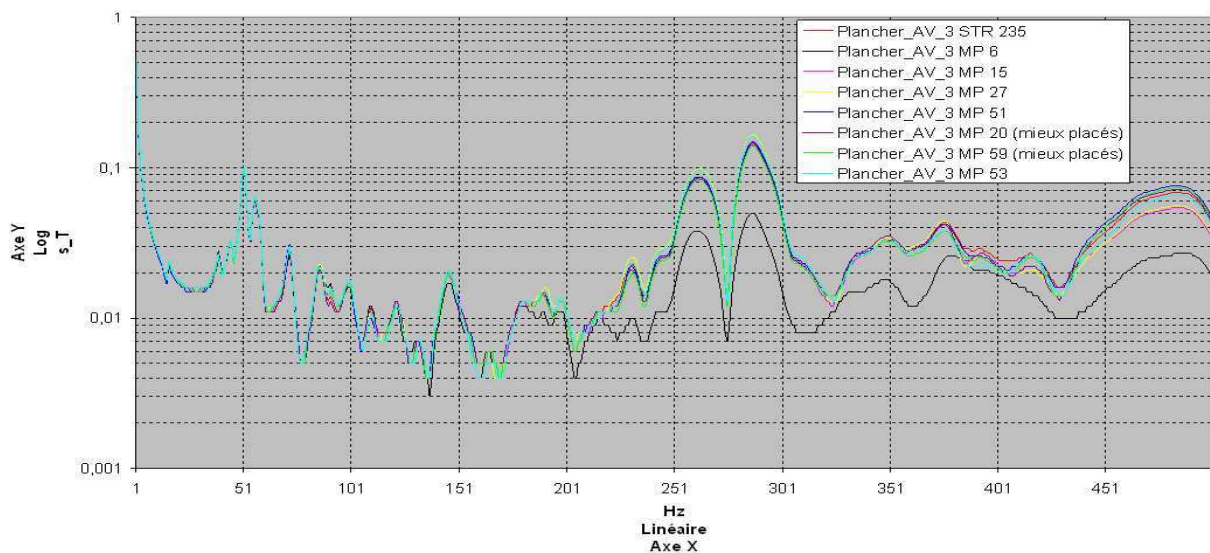


FIGURE A.17 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le plancher avant 3.

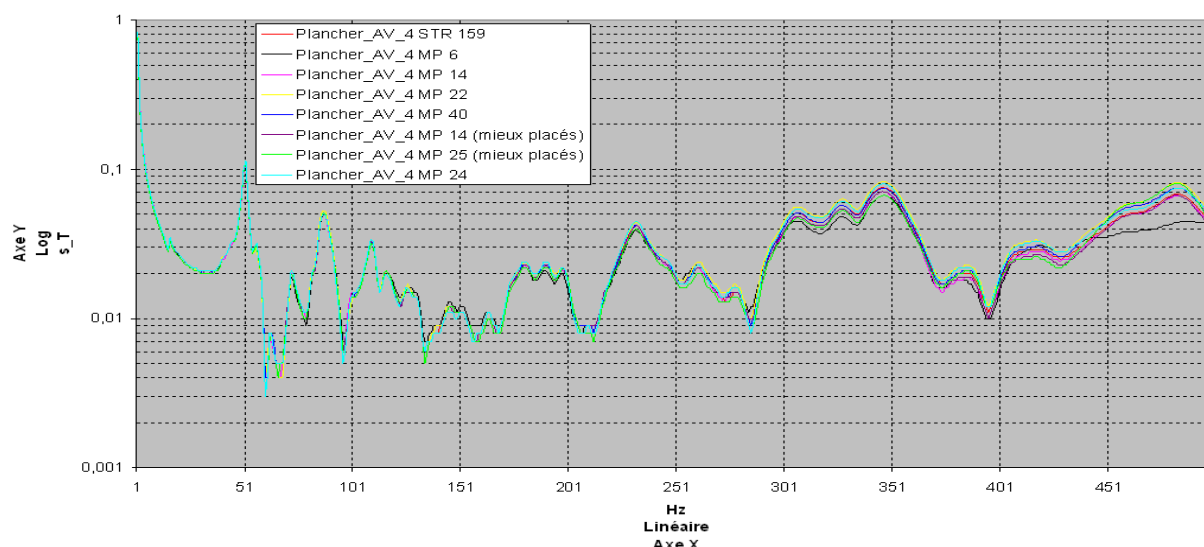


FIGURE A.18 – Comparaison des VQM des différentes configurations (STR (référence) ou MP) pour le plancher avant 4.

En analysant les figures A.15, A.16, A.17 et A.18, les configurations optimales sont plus facilement identifiables. Les résultats sont résumés dans le tableau A.5.

Sous-ensemble	Nombre de point
Planche AV 1	129 points
Planche AV 2	27 points
Planche AV 3	65 points
Planche AV 4	32 points

TABLE A.4 – Configurations optimales retenues pour les différentes partitions du plancher avant.

A.2.2.4 Calcul des configurations optimales des corps creux

Le choix des nœuds d'observation sur les corps creux est fait suivant la même méthodologie que celle utilisée pour les sous-ensembles flexibles (voir figure A.19). Les différents corps creux étudiés sont le brancard (support moteur), le côté gauche du pavillon, la traverse arrière (renfort arrière de la voiture au niveau du pavillon), la traverse centrale du pavillon, la traverse inférieure de baie (pare brise), la traverse avant de pavillon, le montant de baie

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

gauche et le montant de baie droit. Le tableau A.5 résume les configurations optimales des corps creux.

Corps creux	Nombre de point
Brancard	62 points
Côté gauche du pavillon	47 points
Traverse arrière	55 points
Traverse centrale du pavillon	51 points
Traverse inférieure de baie	45 points
Traverse avant de pavillon	40 points
Montant de baie gauche	60 points
Montant de baie droit	59 points

TABLE A.5 – Configurations optimales retenues pour les corps creux.

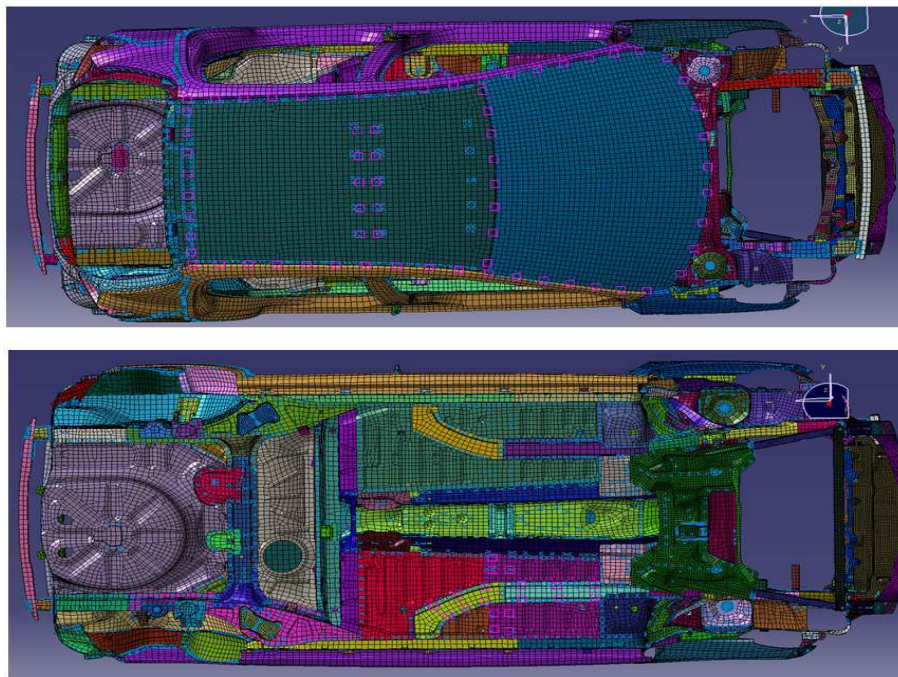


FIGURE A.19 – Définition des nœuds d'observation des corps creux.

A.3 Détermination des fréquences de coupure.

Comme nous l'avons expliqué, on fait varier le taux d'amortissement des matériaux des sous-ensembles flexibles uniquement. Cela permet de mettre en évidence l'influence des

A.3. DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE.

modes locaux des sous-ensembles flexibles et donc de déterminer la fréquence de coupure à partir de laquelle les contributions locales ne peuvent plus être négligées.

Pour modifier l'amortissement des sous-ensembles flexibles, nous avons simultanément fait varier le taux d'amortissement des matériaux des 9 sous-ensembles flexibles. Les valeurs des taux d'amortissement sont 0.1, 0.15, 0.3 et 0.4. Pour la valeur 0.1, on utilise la configuration de référence (STR) et pour les autres valeurs, on utilise les configurations optimales pour le calcul des VQM.

A.3.1 Calcul de la fréquence de coupure F_c des sous-ensembles flexibles

Afin de mettre en évidence l'influence de l'amortissement selon la fréquence, la fonction d'écart à la référence suivante est introduite :

$$dB(\omega) = 10 \times \log_{10} \left(\frac{V_{MP}(\omega; \xi)}{V_{STR}(\omega; 0.1)} \right) \quad , \quad (\text{A-2})$$

où

- $V_{MP}(\omega; \xi)$ est la VQM calculée avec la configuration optimale et avec un taux d'amortissement égal à ξ .
- $V_{STR}(\omega; 0.1)$ est la VQM de référence calculée avec un taux d'amortissement valant 0.1.

A.3.1.1 Pavillon

La figure [A.20](#) représente la fonction $dB(\omega)$ pour les différents taux d'amortissement.

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

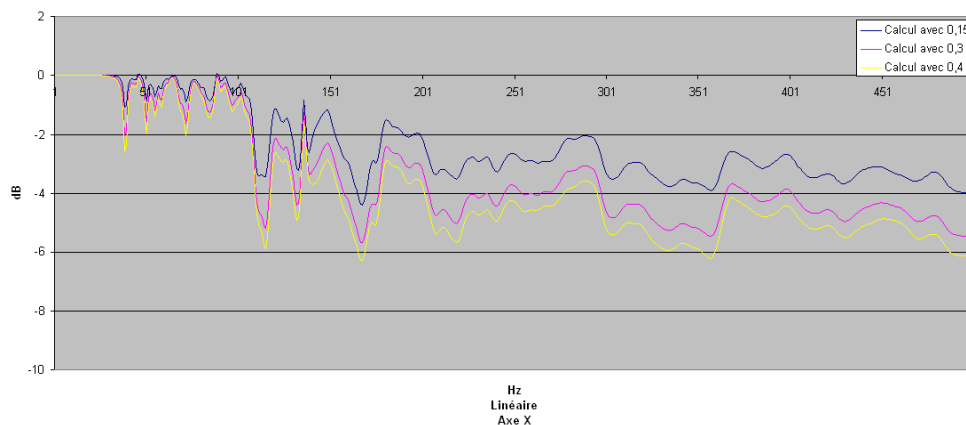


FIGURE A.20 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le pavillon.

La figure A.20 met en évidence la fréquence à partir de laquelle le changement d'amortissement induit un écart important avec la courbe de référence. Cette fréquence est de 107 Hz.

On utilise la même méthode pour les autres sous-ensembles flexibles de l'étude.

A.3.1.2 Plancher avant 1

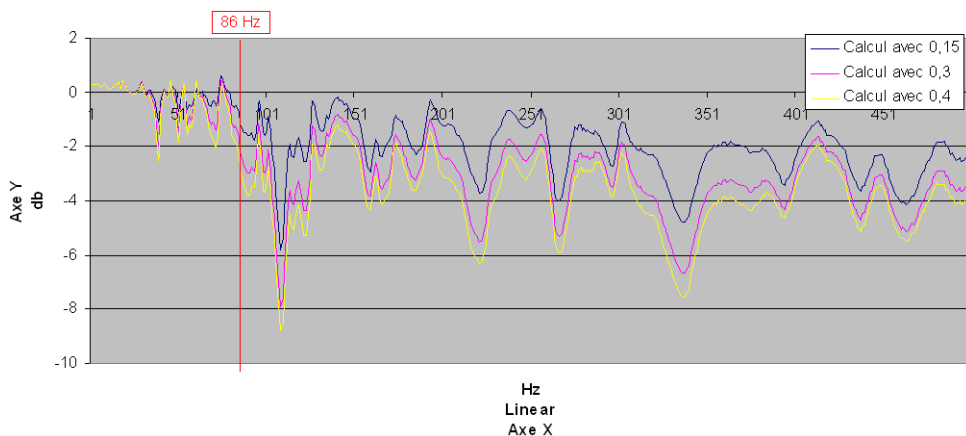


FIGURE A.21 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le plancher avant 1.

La figure A.21 permet de déterminer la fréquence de coupure du plancher avant 1 qui est de 86 Hz.

A.3. DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE.

A.3.1.3 Plancher avant 2

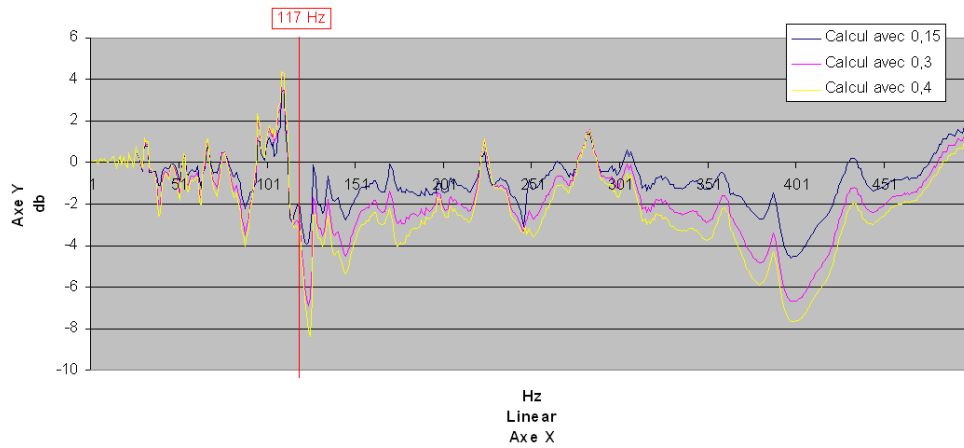


FIGURE A.22 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le plancher avant 2.

La figure A.22 montre une fréquence de coupure de 117 Hz.

A.3.1.4 Plancher avant 3

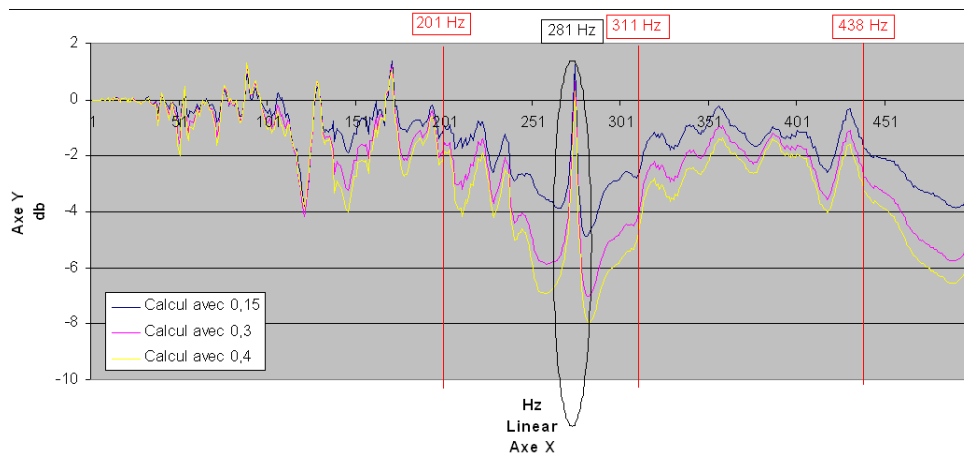


FIGURE A.23 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le plancher avant 3.

La situation est un peu différente que les précédentes. On peut voir l'apparition de modes locaux sur la plage fréquentielle de 201 Hz à 311 Hz et au-delà de 438 Hz. En revanche,

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

le pic à 281 Hz est insensible à l'amortissement.

A.3.1.5 Plancher avant 4

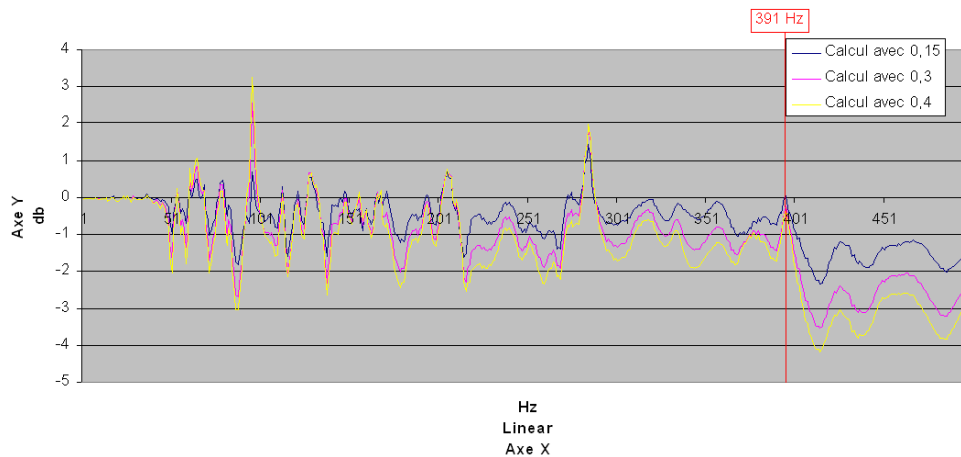


FIGURE A.24 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le plancher avant 4.

La figure A.24 montre que la fréquence de coupure est très élevée sur ce panneau et est de 391 Hz.

A.3.1.6 Plancher de charge

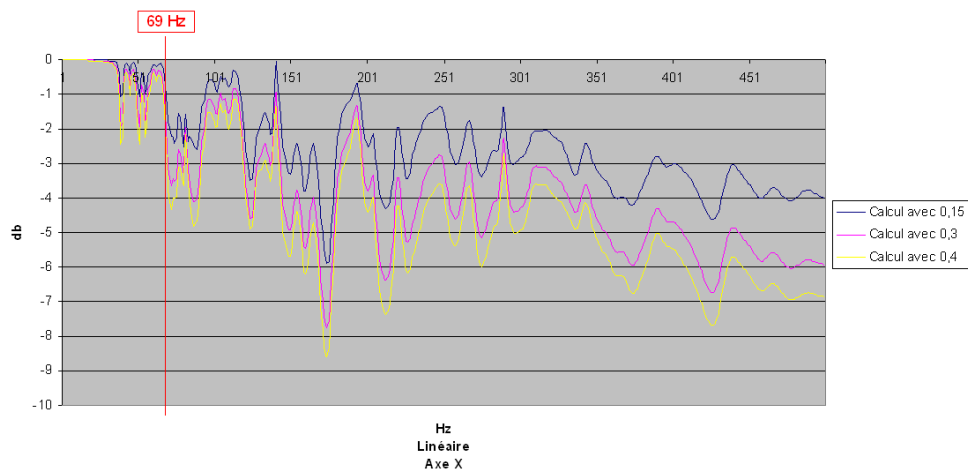


FIGURE A.25 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le plancher de charge.

A.3. DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE.

Sur le plancher de charge, la fréquence de coupure est de 69 Hz.

A.3.1.7 Plancher d'assise

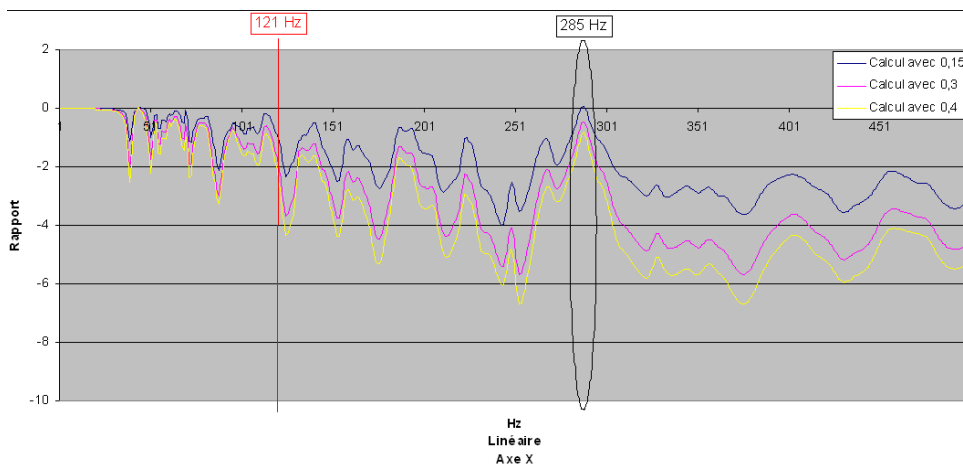


FIGURE A.26 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le plancher d'assise.

La figure A.26 met en évidence une fréquence de coupure égale à 121 Hz. Le pic à 285 Hz est insensible à l'amortissement.

A.3.1.8 Plancher à talon

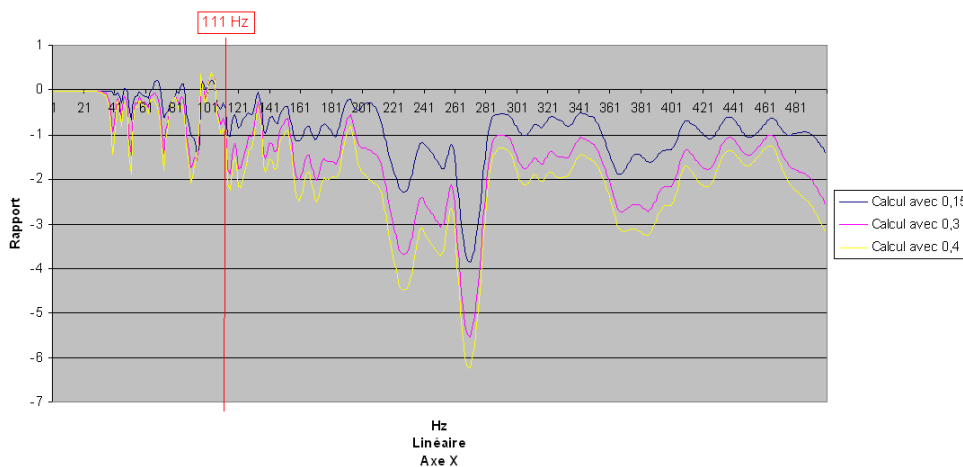


FIGURE A.27 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le plancher à talon.

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

La fréquence de coupure est de 111 Hz.

A.3.1.9 Tablier inférieur

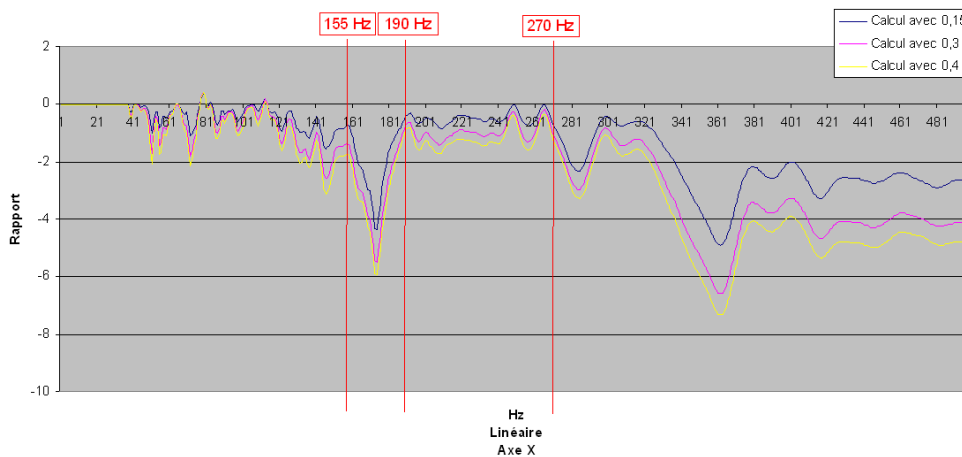


FIGURE A.28 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le tablier inférieur.

La figure A.28 montre deux plages de fréquence : la première entre 155 Hz et 190 Hz et la seconde à partir de 270 Hz.

A.3.1.10 Tablier supérieur

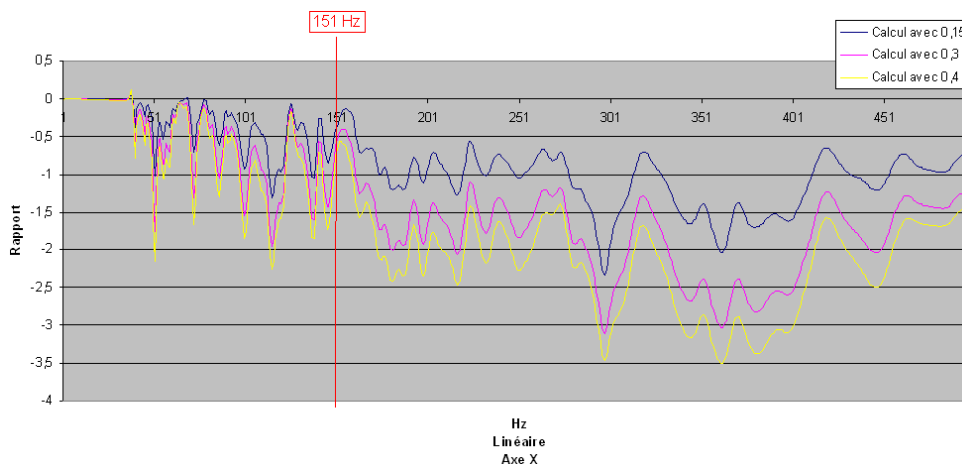


FIGURE A.29 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le tablier supérieur.

A.3. DÉTERMINATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE.

La figure A.29 montre une fréquence de coupure égale à 151 Hz.

A.3.1.11 Passage de roue

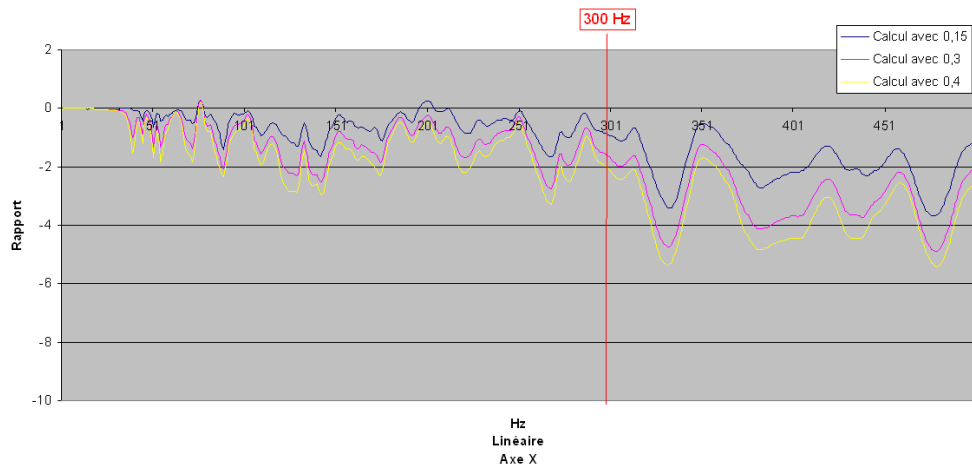


FIGURE A.30 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le passage de roue.

La fréquence de coupure est de 300 Hz.

A.3.1.12 Pare brise

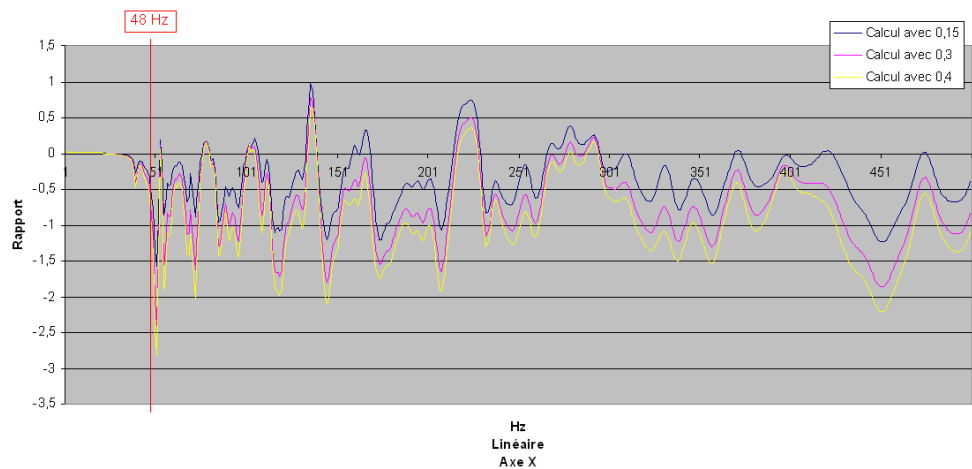


FIGURE A.31 – Comparaison des écarts avec un amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4 pour le pare brise.

ANNEXE A. ESTIMATION DES FRÉQUENCES DE COUPURE (ETUDE COMPLÈTE)

La fréquence de coupure est de 48 Hz.

A.3.1.13 Résumé

Sous-ensemble	Fréquences de coupure
Pavillon	107 Hz
Plancher AV 1	86 Hz
Plancher AV 2	117 Hz
Planche AV 3	201 à 311 Hz puis au-delà de 408 Hz
Plancher AV 4	391 Hz
Plancher de charge	69 Hz
Plancher d'assise	121 Hz
Passage à talon	111 Hz
Tablier inférieur	155 à 190 Hz puis au-delà de 270 Hz
Tablier supérieur	151 Hz
Passage de roue	300 Hz
Pare Brise	48 Hz

TABLE A.6 – Tableau de synthèse des fréquences de coupure des sous-ensembles flexibles

On obtient des fréquences de coupure qui sont en majorité (8 panneaux) entre 48 Hz et 151 Hz. Quelques fréquences de coupure (4 panneaux) sont présentes entre 201 et 438 Hz. On constate donc une forte variabilité de la fréquence de coupure sur les sous-ensembles flexibles.

A.3.2 Calcul de la fréquence de coupure F_c des corps creux

Les calculs des VQM et des écarts pour les corps creux sont réalisés avec des amortissements de 0.15, 0.3 et 0.4. La méthode de calcul des fréquences de coupure est similaire à celle utilisée au paragraphe [A.3.1](#). Pour cette raison, nous présentons directement le tableau de synthèse des fréquences de coupure (voir tableau [A.7](#)).

A.4. ANALYSE DE L'EFFET DE L'AMORTISSEMENT SUR LA RÉPONSE ACOUSTIQUE DE LA CAVITÉ

Panneau	Fréquences de coupure
Brancard	113 Hz
Coté gauche du pavillon	203 Hz
Traverse arrière	123 Hz
Traverse centrale du pavillon	104 Hz
Traverse inférieur de baie	448 Hz
Traverse avant de pavillon	111 Hz
Montant de baie gauche	176 Hz
Montant de baie droit	484 Hz

TABLE A.7 – Tableau de synthèse des fréquences de coupure des corps creux.

On peut voir que, bien que les premiers modes locaux apparaissent dès 17 Hz , leurs effets n'apparaissent qu'au-delà de 100 Hz. On peut donc espérer construire un modèle réduit utilisant la base des déplacements globaux et dont la validité irait légèrement au-delà de 100 Hz.

A.4 Analyse de l'effet de l'amortissement sur la réponse acoustique de la cavité

Le but de ce paragraphe est de voir si la variation de l'amortissement sur les sous-ensembles flexibles a une influence sur la réponse acoustique de la cavité. Quatre nœuds d'observation sont disposés à l'intérieur de la cavité au niveau de l'oreille des passagers (voir la figure A.32). On les nomme AVG, ARG, AVD et ARD.

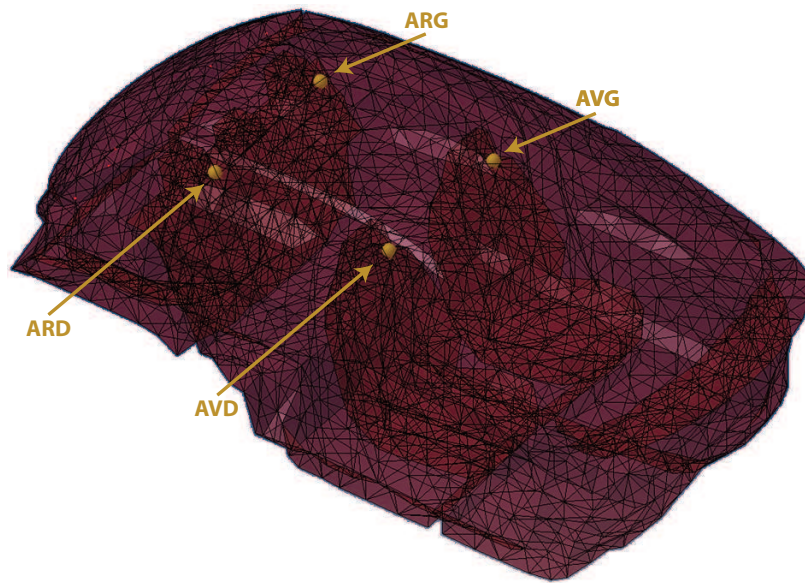


FIGURE A.32 – Modélisation de la cavité du véhicule et localisation des 4 nœuds d'observation dans la cavité acoustique.

Les figures A.33, A.34, A.35 et A.36 représentent les écarts pour la pression acoustique pour les 4 nœuds d'observation avec des taux d'amortissement de 0.15, 0.3 et 0.4.

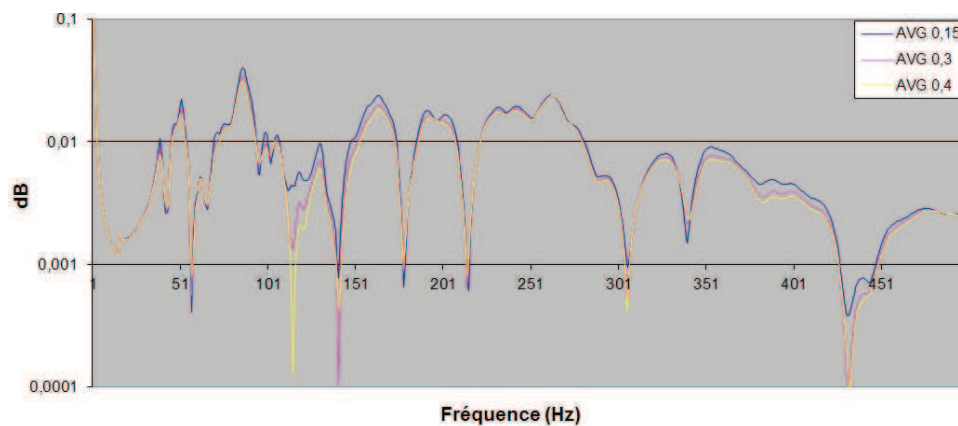


FIGURE A.33 – Comparaison des écarts pour la réponse acoustique au point AVG avec un amortissement de 0.15 (bleu), 0.3 (magenta) et 0.4 (jaune).

A.4. ANALYSE DE L'EFFET DE L'AMORTISSEMENT SUR LA RÉPONSE ACOUSTIQUE DE LA CAVITÉ

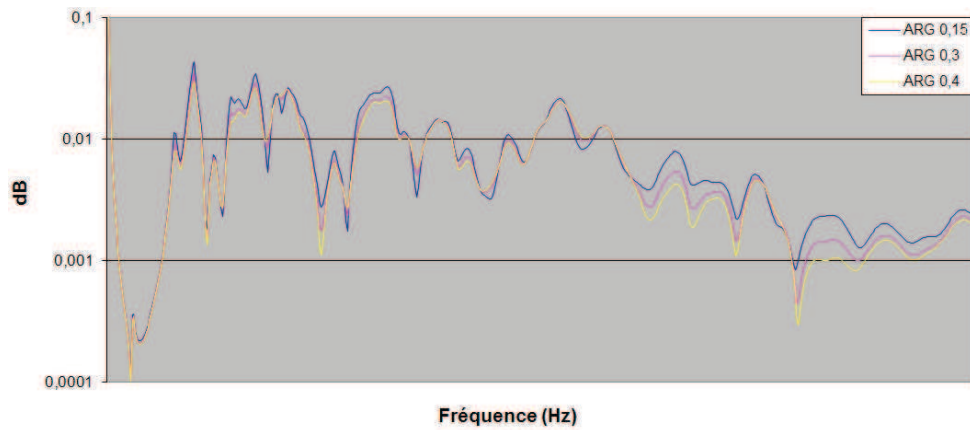


FIGURE A.34 – Comparaison des écarts pour la réponse acoustique au point ARG avec un amortissement de 0.15 (bleu), 0.3 (magenta) et 0.4 (jaune).

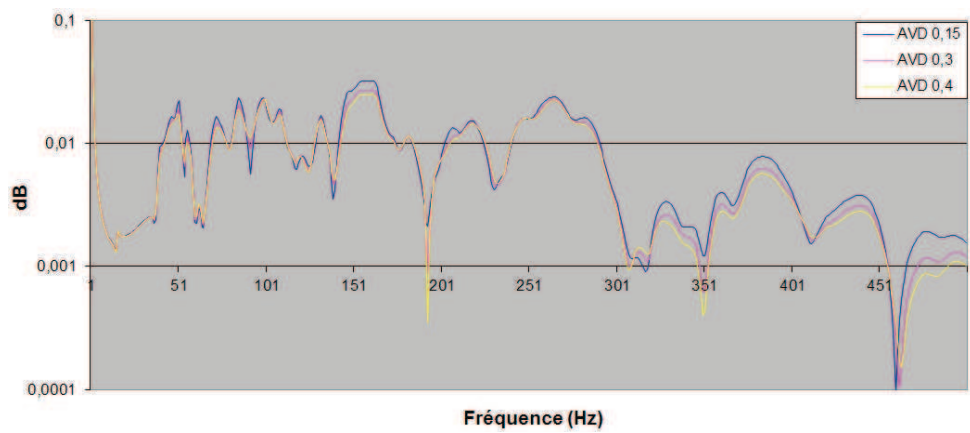


FIGURE A.35 – Comparaison des écarts pour la réponse acoustique au point AVD avec un amortissement de 0.15 (bleu), 0.3 (magenta) et 0.4 (jaune).

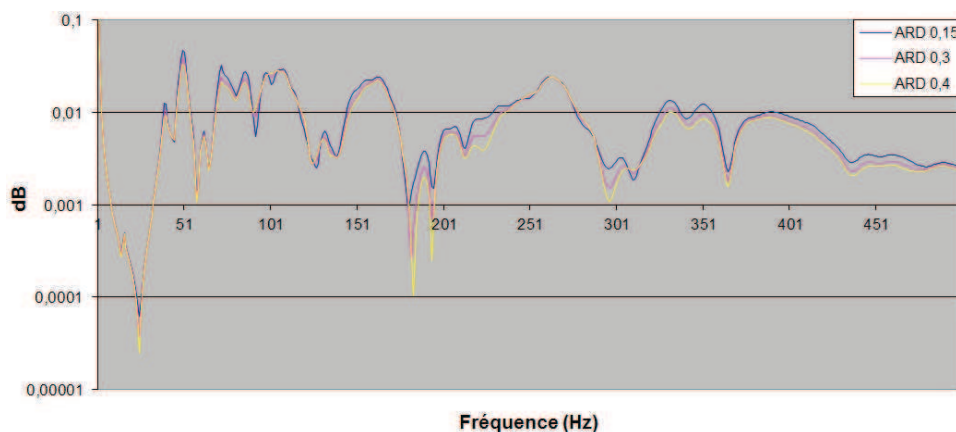


FIGURE A.36 – Comparaison des écarts pour la réponse acoustique au point ARD avec un amortissement de 0.15 (bleu), 0.3 (magenta) et 0.4 (jaune).

L'analyse de ces figures montre que le taux d'amortissement des sous-ensembles flexibles a peu d'influence sur la réponse acoustique de la cavité.

A.5 Conclusion de l'analyse menée

Les résultats obtenus permettent de mettre en évidence l'influence du taux d'amortissement des parties souples. Les fréquences de coupure obtenues permettent de conclure que jusqu'à 100 Hz, les modes locaux ont peu d'influence sur la réponse dynamique des corps creux et sur la réponse acoustique de la cavité. Ainsi, on peut espérer qu'un modèle vibroacoustique construit à partir des vecteurs de base des déplacements globaux pour la structure permettra de prédire de façon robuste la réponse vibroacoustique jusqu'à 100 Hz. Par contre, concernant les sous-ensembles flexibles, on constate que les fréquences de coupure sont faibles et donc le modèle réduit ne permettra pas de prédire de façon robuste la réponse de ces sous-ensembles flexibles.

Ces résultats ne sont applicables que pour le modèle étudié ici. Pour un autre modèle de voiture il faudrait déterminer les fréquences de coupure en utilisant la méthodologie suivie dans cette annexe.

Bibliographie

- [1] J. ARGYRIS et H. P. MLEJNEK : *Dynamics of Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [2] A. ARNOUX, A. BATOU, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Modèle réduit d'une structure dynamique ayant de nombreux modes locaux en basse fréquence. *In Journées Jeunes Chercheurs en VibroAcoustique et Bruit*, Nevers, France, 2011.
- [3] A. ARNOUX, A. BATOU, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Modèle réduit en dynamique d'une structure ayant de nombreux modes locaux en basse fréquence. *In CFM11*, Besançon, France, 2011.
- [4] A. ARNOUX, A. BATOU, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Modèle réduit en dynamique stochastique d'une structure ayant de nombreux modes locaux en basse fréquence. *In CSMA11*, Presqu'île de Giens, France, 2011.
- [5] A. ARNOUX, A. BATOU, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Reduced-order model for dynamical structures having numerous local modes in the low frequency range. *In EUROODYN11*, Leuven, Belgium, 2011.
- [6] A. ARNOUX, A. BATOU, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Stochastic reduced-order model for an automotive vehicle in presence of numerous local elastic modes in the low frequency range. *In ISMA*, Leuven, Belgium, 2012.
- [7] A. ARNOUX, A. BATOU, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Stochastic reduced-order model for dynamical structures having a high modal density in the low frequency range. *In International Symposium on the Computational Modelling and Analysis of Vehicle Body Noise and Vibration 2012*, Brighton, France, 2012.
- [8] A. ARNOUX, A. BATOU, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Stochastic reduced order computational model of structures having numerous local elastic modes in low frequency dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, soumis en déc 2011.
- [9] M. ARNST, R. GHANEM et C. SOIZE : Identification of bayesian posteriors for coefficients of chaos expansion. *Journal of Computational Physics*, 229(9):3134–3154, 2010.
- [10] M. BAMPTON et R. Craig JR : Coupling of substructures for dynamic analyses. *American Institue of Aeronautics and Astronautics Journal*, 6(7):1313–1319, 1968.

BIBLIOGRAPHIE

- [11] J. BECK et L. KATAFYGIOTIS : Updating models and their uncertainties. i : Bayesian statistical framework. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(4):455–461, 1998.
- [12] N. BOUHADDI et R. FILLOD : A method for selecting master dof in dynamic substructuring using the gyan condensation method. *Computers and Structures*, 45 (5-6):941–946, 1992.
- [13] I. BUCHER et S. G. BRAUN : Left eigenvectors : Extraction from measurements and physical interpretation. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 64(1):97–105, 1997.
- [14] H. CHAN, C. CAI et Y. CHEUNG : Convergence studies of dynamic analysis by using the finite element method with lumped mass matrix. *Journal of Sound and Vibration*, 165(2):193–207, 1993.
- [15] R. R. CRAIG et A. J. KURDILA : *Fundamentals of Structural Dynamics*. Wiley, 2nd Edition, John Wiley and Sons, New Jersey, 2006.
- [16] S. DAS, R. GHANEM et J. SPALL : Asymptotic sampling distribution for polynomial chaos representation from data : a maximum entropy and fisher information approach. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(5):2207–2234, 2007.
- [17] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS : *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992.
- [18] G. DEGRANDE et L. SCHILLEMANS : Free field vibrations during the passage of a thalys high-speed train at variable speed. *Journal of Sound and Vibration*, 247 (1):131–144, 2001.
- [19] C. DESCELIERS, R. GHANEM et C. SOIZE : Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(6):978–1001, 2006.
- [20] S. DONDEERS, R. HADJIT, M. BRUGHMANS, L. HERMANS et W. DESMET : A wave-based sub-structuring approach for fast vehicle body optimisation. *International Journal of Vehicle Design*, 43(1-4):100–115, 2007.
- [21] J.-F. DURAND : *Modélisation de Véhicules en Vibroacoustique Numérique avec Incertitudes de Modélisation et Validation Expérimentale*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 2007.

- [22] J.-F. DURAND, L. GAGLIARDINI et C. SOIZE : Nonparametric modeling of the variability of vehicle vibroacoustic behavior. *In SAE05*, Traverse City, Michigan, USA, 2004.
- [23] J.-F. DURAND, L. GAGLIARDINI et C. SOIZE : Random uncertainties modelling for vibroacoustic frequency response of cars. *In ISMA04*, Leuven, Belgium, 2004.
- [24] J.-F. DURAND, L. GAGLIARDINI et C. SOIZE : Nonparametric modeling of vibroacoustic coupling interface uncertainties. *In EURODYN05*, Paris, France, 2005.
- [25] J.-F. DURAND, L. GAGLIARDINI et C. SOIZE : Robustesse des modèles numériques du comportement vibroacoustique des véhicules vis-à-vis des incertitudes de modélisation. *In CFM05*, Troyes, Aube, France, 2005.
- [26] J.-F. DURAND, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 124(3):1513–1525, 2008.
- [27] C. FARHAT et M. GERADIN : On a component mode synthesis method and its application to incompatible substructures. *Computers and Structures*, 51(5):pp. 459473, 1994.
- [28] C. FERNANDEZ : *Modélisation et validation expérimentale des complexes insonorisants pour la prévision vibroacoustique numérique basse et moyenne fréquences des automobiles*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2008.
- [29] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Modeling sound-insulation layers in vibroacoustics systems. *In G. MANSON AND K. WORDEN*, éd. : *USD07*, Sheffield, United Kingdom, 2007.
- [30] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Probabilistic modeling sound-insulation layers in vibroacoustic systems with a non parametric model of uncertainties. *In USNCCM09, US National Congress on Computational Mechanics*, San Francisco, USA, 2007.
- [31] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Experimental identification of a stochastic computational model for an uncertain vibroacoustic system. *In WCCM8*, Venice, Italy, 2008.
- [32] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Identification of a sound-insulation layer modelled by fuzzy structure theory - experimental validation. *In ISMA08*, Leuven, Belgium, 2008.

- [33] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Stochastic computational dynamical model of uncertain structure coupled with an insulation layer modelled by a fuzzy structure - theory and experimental validation. *In EURODYN08*, Southampton, United Kingdom, 2008.
- [34] C. FERNANDEZ, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Fuzzy structure theory modeling of sound-insulation layers in complex vibroacoustic uncertain sytems - theory and experimental validation. *JASA*, 125(1):138–153, 2009.
- [35] L. GAGLIARDINI, C. FERNANDEZ et C. SOIZE : Sound-insulation layers low-frequency modeling using the fuzzy structure theory. *In SAE*, Detroit, Michigan, USA, 2009.
- [36] L. GAGLIARDINI, M. KASSEM et C. SOIZE : Energy density field approach for low- and medium-frequency vibroacoustic analysis of a car body using a probabilistic computational model. *In SAE*, Detroit, Michigan, USA, 2009.
- [37] R. GHANEM et D. GHOSH : Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 72(4):486–504, 2007.
- [38] R. GHANEM, S. MASRI et M. P. ET AL : Identification and prediction of stochastic dynamical systems in a polynomial chaos basis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1641–1654, 2005.
- [39] R. GHANEM et J. RED-HORSE : Propagation of probabilistic uncertainty in complex physical systems using a stochastic finite element approach. *Physica D*, 133(1-4):137–144, 1999.
- [40] R. GHANEM et P. SPANOS : *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Dover Publications, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [41] D. GHOSH et C. FARHAT : Strain and stress computation in stochastic finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(8):1219–1239, 2008.
- [42] J. L. GUYADER : Modal sampling method for the vibration study of systems of high modal density. *Journal of Acoustical Society of America*, 88(5):2269–2270, 1990.
- [43] J. L. GUYADER : Characterization and reduction of dynamical models of vibratiing systems with high modal density. *Journal of Sound and Vibration*, 328(4-5):488–506, 2009.

- [44] R. J. GUYADER : Reduction of stiffness and mass matrices. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 3:380–388, 1965.
- [45] Y. HAHN et N. KIKUCHI : Identification of global modeshape from a few nodal eigenvectors using simple free-form deformation. *Engineering with Computers*, 21(2):115–128, 2005.
- [46] S. HONG, B. EPUREANU, M. CASTANIER et D. GORSICH : Parametric reduced order models for predicting the vibration response of complex structures with component damage and uncertainties. *Journal of sound and vibration*, 330(6):1091–1110, 2011.
- [47] W. C. HURTY : Dynamic analysis of structural systems using component modes. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 3(4):pp. 678685, 1965.
- [48] E. T. JAYNES : Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106(4):620–630, 1957.
- [49] M. S. JENS : Flexural wave-propagation behavior of lumped mass approximations. *Computer and Structures*, 12(6):805–812, 1980.
- [50] M. S. JENS : High convergence order finite elements with lumped mass matrix. *Journal of Sound and Vibration*, 39(11):1879–1888, 1996.
- [51] J. KAIPO et E. SOMERSALO : *Statistical and Computational Inverse Problems*. Dover Publications, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [52] J. KAPUR et H. KESAVAN : *Entropy Optimization Principles with Applications*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [53] M. KASSEM : *Champ de densité d'énergie pour la vibroacoustique basse et moyenne fréquence des structures complexes utilisant un modèle numérique stochastique. Application à la partition structurale des automobiles*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 2009.
- [54] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : An energy-based method for vibroacoustic analysis of complex structures in the low- and medium-frequency ranges, a computational model with uncertainties. In *WCCM8-ECCOMAS*, Venice, Italy, 2008.
- [55] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : An energy-based automatic substructuring method in low-and medium-frequency ranges for uncertain computational vibroacoustic model. In *NOVEM*, Oxford, UK, 2009.

- [56] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : Energy density field approach for low- and medium-frequency vibroacoustic analysis of complex structures using a statistical computational model. *Journal of Sound and Vibration*, 323(1):849–863, 2009.
- [57] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : A sub-structuring method in low- and medium-frequency ranges based on an energy formulation and on astochastic vibroacoustic computational model. *In USD*, Sheffield, UK, 2009.
- [58] M. KASSEM, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI : A vibroacoustic energy density field approach for an automatic sub-structuring method of complex structures in low- and medium-frequency ranges. *In ICSV16*, Krakow, Poland, 2009.
- [59] R. KIMMEL et J. A. SETHIAN : Computing geodesic paths on manifolds. *Proc. Natational. Academy of Sciences*, 95:1–40, 1998.
- [60] R. LANGLEY et P. BREMNER : A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems. *Journal of Acoustical Society of America*, 105(3):1657–1671, 1999.
- [61] W. LI : A degree selection method of matrix condensations for eigenvalue problems. *Journal of Sound and Vibration*, 259(2):409–425, 2003.
- [62] G. LOMBAERT et G. DEGRANDE : Ground-borne vibration due to static and dynamic axle loads of intercity and high-speed trains. *Journal of Sound and Vibration*, 319 (3-5):1036–1066, 2009.
- [63] G. LOMBAERT, G. DEGRANDE et D. CLOUTEAU : Numerical modelling of free field traffic-induced vibrations. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 19(7):473–488, 2000.
- [64] R. Mac NEAL : A hybrid method of component mode synthesis. *Computers and Structures*, 1(4):pp. 581601, 1971.
- [65] R. MACE, W. WORDEN et G. MANSON : Uncertainty in structural dynamics. *Special issue of the Journal of Sound and Vibration*, 288(3):431–790, 2005.
- [66] O. L. MAITRE et O. KNIO : *Spectral Methods for Uncertainty Quantification with Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer, Heidelberg, 2010.
- [67] O. L. MAITRE, O. KNIO et H. N. ET AL : Uncertainty propagation using wiener-haar expansions. *Journal of Computational Physics*, 197(1):28–57, 2004.

- [68] L. MEIROVITCH : *Dynamics and Control of Structures*. Wiley, New York, 1990.
- [69] H. MORAND et R. OHAYON : Substructure variational analysis of the vibrations of coupled fluid structure systems - finite-element results. *International Journal for Numerical Method In Engineering*, 14(5):741–755, 1979.
- [70] H. J. P. MORAND et R. OHAYON : *Fluid Structure Interaction*. Wiley, New York, 1995.
- [71] A. K. NOOR et M. S. ANDERSON : Continuum models for beam- and platelike-lattice structures. *American Institue of Aeronautics and Astronautics Journal*, 16(2):1219–1228, 1978.
- [72] A. NOUY, A. CLEMENT et F. SCHOEFS : An extented stochastic finite element method for solving stochastic partial differential equations on random domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52):4663–4682, 2008.
- [73] R. OHAYON : Reduced symmetric models for modal analysis of internal structural-acoustic and hydroelastic-sloshing systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25):3009–3019, 2001.
- [74] R. OHAYON, R. SAMPAIO et C. SOIZE : Dynamic substructuring of damped structures using singular value decomposition. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 64(2):292–298, 1997.
- [75] R. OHAYON et C. SOIZE : *Structural Acoustics and Vibration*. Mechanical Models Variational Formulations and Discretization. Academic press, San Diego, USA, 1998.
- [76] J. H. ONG : Improved automatic masters for eigenvalue economization. *Finite Element in Analysis and Design*, 3:149–160, 1987.
- [77] J. PLANCHARD : Vibration of nuclear fuel assemblies : a simplified model. *Nuclear Engineering and Design*, 86(3):383–391, 1995.
- [78] S. RUBIN : *Dynamic Stiffness and Substructures*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [79] S. RUBIN : Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *American Institue of Aeronautics and Astronautics Journal*, 13(8):pp. 9951006, 1975.
- [80] R. RUBINSTEIN : *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley and Sons, 1980.

BIBLIOGRAPHIE

- [81] G. SCHUELLER : Computational methods in stochastic mechanics and reliability analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16): 1251–1795, 2005.
- [82] G. SCHUELLER et H. PRADLWARTER : Uncertain linear systems in dynamics : Retrospective and recent developments by stochastic approaches. *Engineering Structures*, 31(11):2507–2517, 2009.
- [83] G. SCHUELLER et H. PRADLWARTER : Uncertainty analysis of complex structural systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(6-7):881–913, 2009.
- [84] R. SERFLING : *Approximations Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, New York, USA, 1980.
- [85] J. A. SETHIAN et A. VLADIMIRSKY : Fast methods for the Eikonal and related Hamilton-Jacobi equations on unstructured meshes. *The Journal of Computational Physics*, 148:2–22, 1999.
- [86] C. SHANNON : A mathematical theory of communication. *Bell System Technology Journal*, 27:379–423 and 623–659, 1948.
- [87] W. SHYU, J. GU, G. HULBERT et Z.-D. MA : On the use of multiple quasi-static mode compensation sets for component mode synthesis of complex structure. *Finite Elements in Analysis and Design*, 35:119–140, 2000.
- [88] C. SOIZE : Probabilistic structural modeling in linear dynamic analysis of complexe mechanical systems, i - theoretical elements. *La recherche aérospatiale (English Edition)*, 5:23–48, 1986.
- [89] C. SOIZE : A model and numerical metho in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy. *J. Acoust. Soc. Am*, 94:849–866, 1993.
- [90] C. SOIZE : Vibration damping in low-frequency range due to structural complexity. a model based on the fuzzy structures and model parameters estimation. *Computers and Structures*, 58:901–915, 1995.
- [91] C. SOIZE : A nonparametric model of random uncertainties on reduced matrix model in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15:277–294, 2000.

- [92] C. SOIZE : Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *Journal of Acoustic Society of America*, 109(5):1979–1996, 2001.
- [93] C. SOIZE : Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1333–1366, 2005.
- [94] C. SOIZE et A. BATOU : Stochastic reduced-order model in low frequency dynamics in presence of numerous local elastic modes. *Journal of Applied Mechanics - Transaction of the ASME*, 78(6):061003, 2011.
- [95] C. SOIZE et R. GHANEM : Physical systems with random uncertainties : Chaos representation with arbitrary probability measure. *SIAM Journal On Scientific Computing*, 26(2):395–410, 2004.
- [96] M. WAMSLER : On the selection of the mode cut-off number in component mode reduction. *Engineering with Computers*, 25(2):139–146, 2009.
- [97] O. ZIENKIEWIEZ et R. TAYLOR : *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.