

Etude et réduction d'ordre de modèles linéraires structurés : application à la dynamique du véhicule

Jérôme Guillet

▶ **To cite this version:**

Jérôme Guillet. Etude et réduction d'ordre de modèles linéraires structurés : application à la dynamique du véhicule. Autre. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2011. Français. NNT : 2011MULH4911 . tel-00807199

HAL Id: tel-00807199

https://theses.hal.science/tel-00807199

Submitted on 3 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UFR. des Sciences et Techniques

École doctorale JHL

Étude et réduction d'ordre de modèles linéaires structurés

Application à la dynamique du véhicule

THÈSE de DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 27 octobre 2011

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université de Haute-Alsace

spécialité : automatique

par

Jérôme GUILLET

Composition du jury

Président :
Y. CHAMAILLARD — Professeur (Université d'Orléans, Orléans, France)

Rapporteurs :
M. BOUTAYEB — Professeur (Université Henri Poincaré, Nancy, France)
H. MOUNIER — Professeur (Université Paris Sud XI, Orsay, France)

Examinateurs :
S. DJENNOUNE — Professeur (Université M. Mammeri, Tizi Ouzou, Algérie)

Directeur de thèse :
M. BASSET — Professeur (Université de Haute-Alsace, Mulhouse, France)

Co-encadrant de thèse :
B. MOURLLION — Maître de conférences (Université de Haute-Alsace, Mulhouse, France)

Invité :
C. SCHERRER — Responsable Projets (CLEMESSY)

Laboratoire Modélisation Intelligence Processus Systèmes EA 2332

Remerciements

Quatre années écoulées au sein du laboratoire Modélisation, Intelligence, Processus, Systèmes de l'Université de Haute-Alsace me permettent de clôturer ma thèse par cette page de remerciements.

Mes premiers remerciements vont à l'ensemble des mes collègues du laboratoire MIPS qui m'ont accompagné durant ces quatre années. Je tiens à remercier également l'ensemble du personnel de mon UFR d'accueil, l'ENSISA, pour l'aide apportée tout au long de cette thèse et lors de mes enseignements.

Je remercie Monsieur Michel Basset qui m'a permis de mettre en œuvre le couple pratique et théorique au sein de mes travaux.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Benjamin Mourllion qui a su initier mes travaux et me guider durant mon parcours avec une grande patience.

Je remercie Monsieur Mohamed Boutayeb et Monsieur Hugues Mounier pour avoir accepté de rapporter mes travaux.

Mes remerciements vont également à Monsieur Saïd Djennoune pour avoir examiné avec tant de soin mon manuscrit.

Et ma profonde gratitude va à Monsieur Yann Chamaillard pour avoir présidé le jury de ma soutenance de thèse.

Mes remerciements vont aussi aux personnes qui me sont chères.

En premier lieu, mes parents, qui m'ont toujours soutenus et qui ont su m'accompagner dans les moments de doutes.

Mon frère et ma sœur, sur qui je peux toujours compter pour de l'aide, un conseil ou s'occuper de me changer les idées.

Les valeurs ajoutées de la famille qui défient les mathématiques ; en effet grâce à eux 2+2=5.

Puisqu'on parle d'elle, ma nièce qui, sans le savoir, m'apporte des petits moments de bonheur.

Mes grands-parents, avec qui s'est toujours un plaisir d'échanger.

Et pour finir, mes tantes et mes oncles, mes cousins et mes cousines qui m'accueillent à bras ouvert à chacune de nos rencontres.

L'ensemble de ces travaux n'auraient pas vu le jour sans les personnes suivantes, qui ont toute ma reconnaissance :

-  Benjamin, qui a trouvé le moyen de me dompter pendant toutes ces années et qui, par ses blagues inégalées, a permis de conserver une ambiance sereine au sein du laboratoire.
-  Jérémie, mon colocataire de bureau qui a su me supporter, mêmes dans mes heures les plus grognonnes, et qui fait ce qu'il faut pour conserver un climat adéquat à notre épanouissement.
-  Floriane, pour sa gentillesse et la « zen attitude » qui la caractérise, même quand tout part à vau l'eau.
-  Abderazik, pour l'aide apportée lorsque j'en avais besoin et pour ses nombreux conseils scientifiques qui m'ont permis de résoudre mes problématiques.
-  Joël, pour ces conseils concernant les montages mécaniques et le plaisir que j'ai eu à lui confectionner des cahiers des charges inutiles.
-  Jean-Philippe, pour la mise en place de la filière Indienne, grande pourvoyeuse de moments inoubliables et pour les critiques acerbes de nos montages dans Nadine.
-  Rodolfo, pour les projets menés ensemble, ses conseils bibliographiques et pour me faire aimer d'autant plus la viande.
-  Aurélia, pour l'aide administrative, les restes des pots et la bonne humeur instaurée lors des repas.
-  Gaëtan, pour les soirées inoubliables de mise au point de ces contrôleurs et ses précieux conseils quant au management d'équipe avec la création du FLT3C.
-  Christophe, pour les soirées inoubliables, non pas de mise au point, mais de détente autour de quelques verres (**quelque** Adj. indéf. : marque l'ignorance réelle ou feinte sur la quantité de la chose désignée).
-  Guillaume, pour sa bonne humeur et ses conseils.
-  Sacha pour tous les bons moments,... et pour la tireuse.
-  La relève, Rachid, Oussama et Laura, en espérant qu'ils passent d'aussi bons moments que moi en thèse, et un peu moins de mauvais.
-  Nadine et Orange Mécanique, pour avoir résisté à nos idées les plus folles et m'avoir fait gouter la joie des nuits blanches au laboratoire.

À mes parents pour m'avoir emmenés jusqu'ici,
à mon frère et à ma sœur pour m'avoir toujours accompagné.

Table des matières

Table des figures ix

Liste des tableaux xiii

Liste des algorithmes xv

Liste des acronymes xvii

Introduction générale 1

Chapitre 1
Représentation et étude des systèmes LTI 5

Notations . . . 6
1.1 Introduction . . . 7
1.2 Rappels sur les systèmes LTI du première ordre . . . 9
1.2.1 Fonction de transfert . . . 9
1.2.2 Matrice de transformation et base modale . . . 10
1.2.3 Réponses temporelles . . . 10
1.2.4 Propriétés des systèmes linéaires du premier ordre . . . 11
1.3 Systèmes LTI structurés en second ordre . . . 20
1.3.1 Description des systèmes . . . 20
1.3.2 Conditions *structurelles* . . . 21
1.3.3 Transformation entre représentation d'état et MSSO . . . 21
1.3.4 Réponses temporelles . . . 35
1.3.5 Propriétés des modèles structurés en second ordre . . . 39
1.4 Conclusion . . . 48

Chapitre 2
Méthodes de réduction de l'ordre des modèles 51

Notations . . . 52
2.1 Introduction . . . 52

2.2 Réduction des modèles linéaires du premier ordre 55
2.2.1 Méthodes d'agrégation 56
2.2.2 Réalisation équilibrée 58
2.2.3 Conclusion 60
2.3 Réduction des modèles structurés en second ordre par condensation 60
2.3.1 Degrés de liberté maîtres et esclaves 61
2.3.2 Réduction de Guyan, réduction dynamique 62
2.3.3 Méthodes IRS 63
2.3.4 SEREP et Craig-Bampton 66
2.3.5 Conclusion 67
2.4 Réduction des modèles linéaire du second ordre 68
2.4.1 Troncature modale et préservation des conditions *structurelles* 69
2.4.2 Troncature de la base équilibrée d'un modèle structuré en second ordre . 71
2.4.3 Troncature de la base équilibrée et préservation des conditions *structurelles* 76
2.5 Conclusion 77

Chapitre 3
Modélisation de la dynamique du véhicule **79**

Notations 80
3.1 Introduction 83
3.2 Présentation du modèle 84
3.2.1 Modèle bicyclette 85
3.2.2 Modèle quart de véhicule 87
3.2.3 Modèle complet de véhicule 88
3.2.4 Référentiel, repères et matrices de changement de repère 90
3.3 Modèle complet 92
3.3.1 Direction 92
3.3.2 Caisse 96
3.3.3 Suspensions et barres anti-roulis 101
3.3.4 Roues 104
3.3.5 Contacts roue-sol 107
3.4 Linéarisation du modèle 116
3.4.1 Modèle linéaire de la direction 116
3.4.2 Modèle linéaire de la caisse 118
3.4.3 Modèle linéaire de la masse non-suspendue 121
3.4.4 Modèle linéaire et semi-linéaire du véhicule complet 122
3.5 Conclusion 123

Chapitre 4
Identification et réduction du modèle de véhicule **125**

Notations . . . 126
4.1 Introduction . . . 126
4.2 Présentation des moyens d'essai . . . 128
4.2.1 Véhicule d'essai . . . 128
4.2.2 Banc de test . . . 130
4.3 Identification des modèles . . . 134
4.3.1 Méthode d'identification . . . 135
4.3.2 Interconnexion de sous-systèmes . . . 137
4.3.3 Identification de la direction . . . 139
4.3.4 Identification de la caisse . . . 144
4.3.5 Identification de la masse non-suspendue . . . 147
4.3.6 Validation des modèles . . . 153
4.4 Réductions des modèles . . . 156
4.4.1 Commandes du modèle véhicule . . . 156
4.4.2 Création de routes . . . 157
4.4.3 Nécessité de la réduction de l'ordre des modèles . . . 158
4.4.4 Réduction du modèle linéaire . . . 160
4.4.5 Réduction du modèle semi-linéaire . . . 168
4.4.6 Validation des modèles réduits . . . 175
4.4.7 Exécution en temps réel des modèles . . . 180
4.4.8 Co-simulation HIL . . . 188
4.5 Conclusion . . . 191

Conclusion générale **193**

Annexes **197**

Annexe A Discrétisation . . . 198
A.1 Description des MSSO discrets . . . 198
A.2 Discrétisation d'un MSSO . . . 198
A.3 Réponse discrète à une entrée . . . 200
A.4 Réponse discrète à une impulsion . . . 201
Annexe B Analyse de sensibilité . . . 203
Annexe C Mesure de l'empattement . . . 205

Bibliographie **207**

Table des figures

1.1 Représentation entrées-sorties-états d'un système 8
1.2 Illustration d'un point d'équilibre 11
1.3 Illustration de la stabilité d'un système et allure de la réponse impulsionnelle . . 12

2.1 Diagramme de Bode d'un modèle d'immeuble : l'hôpital universitaire de Los-Angeles 56
2.2 Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et des modèles obtenus par troncature de la base modale et troncature de la base équilibrée 61
2.3 Degrés de liberté d'appui (j), interne et maître (m), interne et esclave (s) 62
2.4 Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et des modèles obtenus par réduction de Guyan et par réduction dynamique 63
2.5 Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et des modèles obtenus par les méthodes IRS (IRS, IRS dynamique, IRS itérative) 65
2.6 Diagramme de Bode du modèle initial d'immeuble et des modèles réduits par la méthode SEREP et par la méthode de Craig-Bampton 67
2.7 Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et du modèle réduit par troncature modale du MSSO 72
2.8 Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et des modèles réduits par les méthodes SOBT, SOBTp, SOBTpv 75

3.1 Modèle bicyclette 85
3.2 Modèle quart de véhicule 88
3.3 Les différentes sous-parties du modèle véhicule et leurs dynamiques associées . . 90
3.4 Repère sol et repère intermédiaire 91
3.5 Repère véhicule 91
3.6 Virage à rayon constant 93
3.7 Montage en épure de Jeantaud 93
3.8 Repérage du volant et de la colonne de direction 94
3.9 Repérage de la crémaillère 94
3.10 Repérage des porte-fusées 95
3.11 Le modèle de direction, ses entrées-sorties et ses paramètres 97
3.12 Repérage de la caisse 97
3.13 Orientation du repère véhicule dans le repère sol, due à la pente et au dévers . . 98
3.14 Le modèle de caisse, ses entrées-sorties et ses paramètres 101
3.15 Architecture Mc Pherson (a) et pseudo-Mc Pherson (b) 102
3.16 Repérage des suspensions 103
3.17 Modèle de suspension, ses entrées-sorties et ses paramètres 104
3.18 Repérage de la roue 105

3.19 Le modèle de roue, ses entrées-sorties et ses paramètres . . . 107
3.20 Repérage du contact roue-sol . . . 108
3.21 Les différentes zones d'adhérence du pneumatique . . . 109
3.22 Détermination des paramètres de la formule magique . . . 112
3.23 Variation de la force latérale en fonction de la charge verticale . . . 113
3.24 Variation de la force longitudinale en fonction de la charge verticale . . . 114
3.25 Variation du moment d'auto-alignement en fonction de la charge verticale . . . 115
3.26 Modèle du contact roue-sol, ses entrées-sorties et ses paramètres . . . 115
3.27 Approximation de l'angle de braquage des roues . . . 117
3.28 Modèle linéaire, ses sous-parties et ses entrées-sorties . . . 123

4.1 Procédure d'identification par erreur de sortie . . . 128
4.2 Véhicule d'essai Renault Scénic . . . 129
4.3 Banc de test de la dynamique verticale d'un demi-train avant de véhicule . . . 130
4.4 Ensemble mécanique du banc de test . . . 131
4.5 Mouvements et points de mesure du banc de test . . . 132
4.6 Représentation d'un modèle avec bruits de mesure . . . 135
4.7 Exemple de système interconnecté . . . 138
4.8 Position de la crémaillère en fonction de l'angle au volant . . . 140
4.9 Sensibilité des paramètres de la crémaillère . . . 142
4.10 Sorties réelles et estimées du modèle de direction . . . 143
4.11 Angle de braquage excitant le véhicule . . . 145
4.12 Raideurs latérales des pneumatiques identifiées et estimées par régressions linéaires, en fonction de la vitesse . . . 147
4.13 Sorties réelles et estimées du modèle transversal de la caisse . . . 148
4.14 Efforts générés par le pneumatique en fonction de son écrasement . . . 150
4.15 Efforts générés par la suspension en fonction de son écrasement . . . 151
4.16 Vitesses verticales des points hauts de suspension réelles et estimées . . . 153
4.17 Comparaison des sorties des différents modèles avec un jeu de données expérimental 155
4.18 Stratégie de commande du véhicule du type « Follow the carot » . . . 157
4.19 Dimensions normalisées du test de l'élan . . . 158
4.20 Profil de route généré aléatoirement . . . 158
4.21 Angle de lacet du véhicule en simulation et en simulation temps réel . . . 159
4.22 Nombre de pas de calcul perdus lors de la simulation . . . 159
4.23 Comparaison des sorties pour un profil de route aléatoire (modèle linéaire) . . . 161
4.24 Dynamiques impliquées entre l'angle de roulis et l'angle au volant pour une impulsion (modèles L-Comp, L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC) . . . 163
4.25 Réponse impulsionnelle du modèle L-Comp et des modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC . . . 164
4.26 Comparaison des sorties pour le test de l'élan (modèle linéaire) . . . 164
4.27 Dynamiques impliquées entre l'angle de roulis et l'angle au volant pour une impulsion (modèles L-Simp, L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC) . . . 165
4.28 Réponse impulsionnelle du modèle L-Simp et des modèles L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC . . . 166
4.29 Représentation du modèle L-Comp . . . 167
4.30 Représentation physique à partir du MSSO L-Simp-BTPSC . . . 168
4.31 Comparaison des sorties pour un profil de route aléatoire (modèle semi-linéaire) . 169

4.32 Dynamiques impliquées entre l'angle de roulis et la hauteur d'une roue en réponse incidielle (modèles SL-Comp, SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC) 171
4.33 Réponse indicielle du modèle SL-Comp et des modèles SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC 171
4.34 Comparaison des sorties pour le test de l'élan (modèle semi-linéaire) 172
4.35 Dynamiques impliquées entre l'angle de roulis et l'excitation transversale d'une roue (modèles SL-Simp, SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC) 173
4.36 Réponse impulsionnelle du modèle SL-Simp et des modèles SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC 174
4.37 Représentation du modèle SL-Comp 175
4.38 Représentation physique à partir du MSSO SL-Simp-BTPSC 176
4.39 Comparaison des sorties entre le modèles L-Comp-BTPSC et SL-Comp-BTPSC . 177
4.40 Comparaison des sorties entre le modèle L-Comp et les modèles réduits L-Comp-MTPSC et SL-Comp-MTPSC 178
4.41 Comparaison des données mesurées avec les sorties estimées par les modèles L-Simp-BTPSC et SL-Simp-BTPSC 179
4.42 Comparaison des données mesurées avec les sorties estimées par les modèles L-Simp-MTPSC et SL-Simp-MTPSC 180
4.43 Boucle de régulation du banc de test 181
4.44 Comparaison des sorties mesurées sur le banc de test et estimées par le modèle L-Simp-BTPSC 183
4.45 Implentation du capteur filaire pour la mesure de l'écrasement du pneumatique . 184
4.46 Efforts mesurés et estimés entre le banc de test et le modèle L-Comp 184
4.47 Comparaison des sorties mesurées sur le banc de test et estimées par le modèle SL-Comp-BTPSC 186
4.48 Efforts mesurés et estimés pour le banc de test et le modèle SL-Comp 187
4.49 Boucle de régulation du banc de test en co-simulation HIL 188
4.50 Débattements simulés par le modèle NL-Comp et débattements mesurés en co-simulation 190
4.51 Efforts simulés par le modèle NL-Comp et efforts mesurés en co-simulation . . . 191

C.1 Repérage du véhicule pour la mesure de l'empattement 205

Liste des tableaux

1.1 Variables utilisées par un MSSO selon le domaine de la physique 20
1.2 Paramètres utilisées par un MSSO selon le domaine de la physique 21
1.3 Propriétés du triplet matriciel (M, C, K) et propriétés spectrales 40

2.1 Méthodes de réduction de modèles 55
2.2 MSSO proposés par le Benchmark du projet NICORET 55
2.3 Comparaison de l'erreur relative des modèles réduits de l'immeuble obtenus par troncature modale et troncature de la base équilibrée 60
2.4 Erreurs relatives des modèles d'immeuble réduits par les méthodes de condensation 68
2.5 Erreurs relatives des modèles d'immeuble réduits par les méthodes SOBT 75

3.1 Macro-coefficients du modèle de Pacejka pour le mode latéral 113
3.2 Macro-coefficients du modèle de Pacejka pour le mode longitudinal 113
3.3 Macro-coefficients du modèle de Pacejka pour le moment d'auto-alignement . . . 114
3.4 Hypothèses simplificatrices nécessaires à la conception des modèles 124

4.1 Rayon de la crémaillère identifié 140
4.2 Raideur, amortissement et masse de la colonne identifiés 141
4.3 Valeurs du RMSE sur le jeu de données de validation pour deux valeurs de masse de crémaillère 142
4.4 Paramètres de la colonne de direction 143
4.5 Masses et empattements du véhicule 144
4.6 Nombre d'essais par vitesse du véhicule pour l'identification du modèle bicyclette 145
4.7 Inertie autour de l'axe vertical et coefficients de raideur latérale du pneumatique identifiés 146
4.8 RMSE du modèle bicyclette pour deux valeurs de l'inertie sur le jeu de données de validation 146
4.9 Paramètres du modèle de la dynamique transversale de la caisse 147
4.10 Paramètres du modèle de la dynamique transversale de la roue 148
4.11 Masse suspendue et masses non-suspendues du banc de test 149
4.12 Raideur et amortissement estimés du pneumatique 151
4.13 Raideur et amortissement estimés de la suspension 152
4.14 Raideur de la barre anti-roulis et inertie autour de $\vec{X}_V$ estimées 152
4.15 Ensemble des paramètres des masses non-suspendue 152
4.16 RMSE de cinq sorties du modèle pour un jeu de données expérimentales 153
4.17 RMSE entre les sorties du modèle L-Comp et des modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC 161

4.18 Raideurs et amortissements du modèle L-Comp et des modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC . . . 162
4.19 Normes $\mathcal{H}_\infty$ relatives des modèles erreurs (modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC) . . . 162
4.20 RMSE entre les sorties du modèle L-Simp et des modèles L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC . . . 164
4.21 Raideurs et amortissements du modèle L-Simp et des modèles L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC . . . 165
4.22 Normes $\mathcal{H}_\infty$ relatives des modèles erreur (modèles L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC) . . . 166
4.23 Raideurs et amortissements du modèle L-Simp-BTPSC . . . 168
4.24 Raideurs et amortissements du modèle SL-Comp et des modèles SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC . . . 170
4.25 RMSE entre les sorties du modèle SL-Simp et des modèles SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC . . . 172
4.26 Raideurs et amortissements du modèle SL-Simp et des modèles SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC . . . 172
4.27 Raideurs et amortissements du modèle SL-Simp-BTPSC . . . 175
4.28 RMSE des 6 sorties des modèles complets réduits comparées avec un jeu de données expérimentales . . . 177
4.29 RMSE de 3 sorties des modèles réduits, pour une route plane, comparées avec un jeu de données expérimentales . . . 181
4.30 RMSE entre les sorties mesurées par le banc de test et celles estimées par le modèle L-Simp-BTPSC . . . 182
4.31 RMSE entre les efforts verticaux mesurés par le banc de test et ceux estimés par le modèle L-Comp . . . 185
4.32 RMSE entre les sorties estimées par le banc de test et le modèle SL-Comp-BTPSC 185
4.33 RMSE entre les efforts estimés par le banc de test et le modèle SL-Comp . . . 188
4.34 RMSE des positions entre la co-simulation HIL et le modèle complet . . . 189
4.35 RMSE des efforts entre la co-simulation HIL et le modèle NL-Comp . . . 189

Liste des algorithmes

1.1 Transformation d'une réalisation d'état simple entrée en MSSO (SSSI2MSSO) . . 30
1.2 Transformation d'une réalisation d'état en MSSO (SS2MSSO) 31
1.3 Diagonalisation d'un MSSO (DIAGMSSO) 33

2.1 Troncature de la base modale avec préservation des conditions *structurelles* (MTPSC) 70
2.2 Troncature de la base équilibrée en position d'un modèle structuré en second ordre (SOBTp) 74
2.3 Troncature de la base équilibrée en position et en vitesse d'un modèle structuré en second ordre (SOBTpv) 74
2.4 Troncature de la base équilibrée avec préservation des conditions *structurelles* (BTPSC) 76

Liste des acronymes

A2PNUM	· Architecture Process Produit dans un environnement collaboratif et NUMérique
BTPSC	· Troncature de la base équilibrée avec préservation des conditions *structurelles* (*Balanced Truncation with the Preservation of Structural Conditions*)
CEP	· Problème aux valeurs propres classiques (*Classic Eigenvalue Problem*)
CAN	· Réseau dédié pour les contrôleurs (*Controller Aera Network*)
EEE	· Équipements Électriques et Électroniques embarqués
GEP	· Problème aux valeurs propres généralisées (*Generalized Eigenvalue Problem*)
GPS	· Système de positionnement global (*Global Positioning System*)
HIL	· Matériel dans le cycle de conception (*Hardware in the Loop*)
IRS	· Méthode améliorée de réduction des systèmes (*Improved Reduction System method*)
LTI	· Linéaire Invariant dans le Temps (*Linear Time Invariant*)
MIL	· Modèle dans le cycle de conception (*Model In the Loop*)
MSSO	· Modèle Structuré en Second Ordre
MTPSC	· Troncature de la base modale avec préservation des conditions *structurelles* (*Modal Truncation with the Preservation of Structural Conditions*)
PFD	· Principe Fondamental de la Dynamique
PID	· Proportionnel-Intégral-Dérivée
PIL	· Processeur dans le cycle de conception (*Processor In the Loop*)
PRIMA	· Algorithme de réduction de l'ordre des macro-modèles inter-connectés passifs (*Passive Reduced-Order Interconnect Macromodeling Algorithm*)
QEP	· Problème aux valeurs propres quadratiques (*Quadratics Eingenvalues Problem*)
QIEP	· Problème aux valeurs propres quadratiques inverse (*Quadratic Inverse Eingenvalues Problem*)
RMSE	· Racine de la moyenne des erreurs aux carrés (*Root Mean Square Error*)
SEREP	· Réduction équivalente des systèmes par procédure d'expansion (*System Equivalent Reduction-Expansion Process*)
SI	· Simple entrée (*Simple Input*)
SIL	· Logiciel dans le cycle de conception (*Software in the Loop*)

SMPA	· Séquence Multi niveaux Pseudo Aléatoire
SOBT	· Troncature de la base équilibrée d'un modèle structuré en second ordre (*Second Order Balanced Truncation*)
SOBTp	· Troncature de la base équilibrée en position d'un modèle structuré en second ordre (*Second-order balanced truncation model reduction method with position balancing*)
SOBTpv	· Troncature de la base équilibrée en position et vitesse d'un modèle structuré en second ordre (*Second-order balanced truncation model reduction method with position-velocity balancing*)
SOAR	· Procédure d'Arnoldi pour les modèles structurés en second ordre (*Second Order Arnoldi Pocedure*)
SPRIM	· Préservation de la structure lors de la réduction des macro-modèles interconnectés (*Structure-Preserving Reduced-Order Interconnect Macromodeling*)
TIV	· TestInView
VETESS	· Vérification de systèmes embarqués VÉhicules par génération automatique de TESts à partir des Spécifications
VLSI	· Intégration de très grande dimension (*Very Large Scale Integration*)
xIL	· Modèle, processeur, logiciel et matériel dans le cycle de conception (*Model, Processor, Software and Hardware in the Loop*)

Introduction générale

> *[...]by speeding up and simultaneously reducing the cost of design iterations, developers can increase the frequency of problem-solving cycles while reducing the total amount of time and money spent on the R&D process [THOMKE, 1998].*

La diminution des temps de Recherche et Développement (R&D) est un enjeu économique important pour l'industrie. Ces 30 dernières années, l'émergence de la modélisation et de la simulation numérique a permis de diminuer fortement le coût et le temps consacré aux phases de conception. En revanche, les phases de validation des systèmes restent critiques car elles arrivent tard dans le cycle de conception. Les chiffres précis diffèrent en fonction des études, mais le coût de correction d'une erreur détectée au stade des tests est très largement supérieur au coût de correction d'une erreur lors des phases de spécification. Au delà de la problématique de coût liée à la détection tardive des erreurs, la non détection de ces dernières peut entraîner une catastrophe telle que celle médiatisée du lanceur Arianne 5 qui s'est auto détruit le 04 juin 1996 après 40 secondes de vol. Le rapport de la commission d'enquête a montré qu'une suite d'erreurs dans le cycle de conception du système inertiel, servant au contrôle de la trajectoire, a conduit à la catastrophe [LIONS, 1996]. La défaillance du système, repris d'Arianne 4, est due à des erreurs de spécification conduisant à des fautes lors de la conception (un modèle de détection de fautes inadapté au nouveau lanceur) et à des fautes lors de l'implémentation (un code générant des erreurs dues à une conversion de données). Lors des tests de validation, seule l'interface du système a été testée car le comportement fonctionnel avait été validé avec Arianne 4. Ainsi les tests intégrés ont été incomplets, conduisant à la non détection de cette anomalie.

La difficulté de la validation du système présenté dans cet exemple issu du domaine spatial, se retrouve dans d'autres industries, telles que l'aéronautique et l'automobile. Dans ces secteurs industriels, les ingénieurs sont confrontés chaque jour à des problématiques de validation de plus en plus complexes comme, par exemple, la validation des systèmes mécatroniques qui associent des systèmes mécaniques avec des systèmes électriques et des systèmes électroniques programmables. Ces nouveaux systèmes nécessitent de concevoir de nouvelles méthodes et de nouveaux outils de validation qui intègrent les différents métiers concernés dans une approche unifiée.

Dans un objectif de diminution des temps de conception d'un système, les industriels cherchent à faire intervenir les phases de validation de plus en plus tôt dans le cycle de conception. Cependant, dans les premières phases de conception, les systèmes sont modélisés sur des plateformes de simulation spécifiques au métier. Aussi, la validation d'un système mécatronique nécessite de simuler simultanément des environnements hétérogènes de modélisation. Ces nouveaux challenges sont à la naissance d'outil de co-simulation permettant de faire intervenir, lors de phases de validation, aussi bien des modèles de natures différentes, que des systèmes physiques. Les co-simulateurs sont des logiciels de supervision de tests qui assurent la cohérence et la synchro-

nisation des données échangées entre les différentes plateformes de simulation. La création d'un superviseur capable de piloter des plateformes logicielles hétérogènes et des moyens d'essai est à l'origine du projet *TestInView* (la vision globale sur les tests).

L'objectif du projet *TestInView* est de concevoir un logiciel de pilotage multi-environnement de tests et de validations d'Équipements Électriques et Électroniques embarqués (EEE) pour les bancs de test xIL : HIL (Hardware In the Loop), PIL (Processor In the Loop), SIL (Software In the Loop) et MIL (Model In the Loop).

Ce projet regroupe deux acteurs du domaine du test et de la validation, Clemessy et National Instrument, un constructeur automobile, Renault et l'Université de Haute-Alsace, au travers du laboratoire MIPS (Modélisation Intelligence Processus Systèmes). Le besoin spécifié par Renault est de concevoir un produit de test permettant de réduire les coûts et de fiabiliser les développements d'EEE de plus en plus présents au niveau de leurs produits. National Instrument, entreprise leader au niveau de l'instrumentation virtuelle, des plateformes de simulation et de validation, fournit le matériel nécessaire au projet. Clemessy, entreprise spécialisée, entre autres, dans le test automobile et aéronautique, veut utiliser la synergie des deux activités pour développer une nouvelle activité de concepteur de banc de validation d'EEE. Le laboratoire MIPS et plus particulièrement l'équipe MIAM (Modélisation et Identification en Automatique et Mécanique) intervient dans la modélisation, l'identification et le contrôle de systèmes complexes. Dans le cadre de ses projets, l'équipe est confrontée à la complexité liée aux nouvelles technologies d'architectures distribuées. Elle exprime le besoin de développer des outils de conception de modèle multi-environnement appliqués aux domaines de l'automobile et de l'aéronautique, avec pour principal objectif l'amélioration du comportement du véhicule. Ainsi, le besoin de construire un modèle générique et évolutif du comportement dynamique du véhicule a aussi été identifié.

Le projet *TestInView*, financé par la région Alsace, est un projet labellisé par le pôle Véhicule du Futur et se place à l'intersection de deux thématiques du pôle, « Véhicules et Réseaux Intelligents » pour les applications visées et « Excellence de la filière » programme « Ingénierie innovante » pour les techniques mises en œuvre. Ce projet s'inscrit immédiatement en aval du projet VETESS (Vérification de systèmes embarqués VÉhicules par génération automatique de TESts à partir des Spécifications) et est en cohérence avec le projet A2PNUM (Architecture Process Produit dans un environnement collaboratif et NUMérique).

Les objectifs techniques du projet *TestInView* sont de proposer un nouveau concept de co-simulation supervisée. Dans ce contexte, les principaux points traités sont :

- L'aspect multi-environnement, avec la prise en compte d'un ensemble d'environnements de simulation existants, afin de mettre en place et de valider un « atelier de co-simulation ».
- L'aspect multi-métier, avec la prise en compte dans l'atelier de co-simulation des principaux environnements « métier » afin d'obtenir un ensemble cohérent. Les environnements « métier » décrivent les modèles physiques des systèmes électriques, mécaniques, hydrauliques, électrotechniques et d'électroniques de puissance.
- L'aspect générique, en concevant l'atelier de co-simulation de façon modulaire et générique. L'objectif est de pouvoir faire évoluer l'environnement de modélisation-simulation au fur et à mesure de l'évolution de la pertinence des modèles des différents composants, matériels et logiciels.
- L'aspect distribué, avec l'analyse des différents modes d'échanges de bus automobiles et

la prise en compte dans l'étude de la stabilité globale de l'ensemble supervisé.

Lors du projet *TestInView*, un logiciel éponyme a été créé pour pouvoir mettre en œuvre l'ensemble des objectifs techniques présentés précédemment. Cependant, la connexion de matériels physiques avec des plateformes de modélisation nécessite d'effectuer les simulations en temps réel. La contrainte temps réel impose aux simulations de délivrer des résultats aussi exacts que possibles dans des délais imposés. Or, un modèle dont la complexité est élevée peut nécessiter des temps de calculs supérieurs au temps disponible. Si l'augmentation des capacités de calculs peut être une solution, les contraintes de coût amènent généralement à préférer l'utilisation de méthode de simplification des modèles. Lorsque le système est décrit par des équations différentielles linéaires, la simplification peut alors s'effectuer par la réduction de l'ordre des modèles. La réduction de l'ordre des modèles permet de diminuer la complexité de ces derniers tout en préservant au mieux leur comportement entrée-sortie.

En conséquence et en considérant les objectifs techniques, les objectifs scientifiques du projet *TestInView* sont de :

- définir un environnement de modélisation multi-métier ;
- proposer des méthodes de réduction de modèle afin de pouvoir co-simuler des modèles complexes ;
- proposer des outils théoriques permettant de prendre en compte les interconnexions ;
- valider les points précédents sur un démonstrateur.

Ainsi, dans le cadre du projet, le but de cette thèse est de développer un modèle du comportement dynamique du véhicule dans un environnement multi-métier et de réduire ce dernier afin qu'il puisse être utilisé en simulation temps réel et en co-simulation.

Pour répondre aux objectifs, un environnement de modélisation multi-métier doit être proposé. La classe de modèles sélectionnée est celle des Modèles Structurés en Second Ordre (MSSO). Ils permettent de modéliser différents domaines de la physique tels que des systèmes électriques, mécaniques ou thermiques. En plus de décrire des systèmes de nature différente, cette classe de modèle assure une cohérence physique du modèle, à condition que ce dernier respecte les conditions dites *structurelles*. En effet, les conditions *structurelles* assurent différentes propriétés du modèle telles que sa causalité, sa stabilité et en fonction des sorties considérés, sa passivité. Or, un système physique sans source d'énergie vérifie toujours ces propriétés.

Cependant, les méthodes de réduction d'ordre appliquées à cette classe de modèle, ne préservent généralement pas ces conditions *structurelles*. Ainsi, des méthodes de réduction préservant le modèle sous forme d'un MSSO d'une part et préservant les conditions *structurelles* d'autre part, doivent être développées.

Cette classe de modèle est utilisée pour créer un modèle générique et évolutif de la dynamique du véhicule. Un modèle évolutif permet de proposer différents niveaux d'abstraction d'un sous-système ou d'en améliorer la représentativité. Le concept de modèle générique permet de modifier l'architecture du modèle ou de réutiliser des composants pour d'autres modélisations. Par exemple, en modifiant l'architecture d'un modèle de véhicule qui utilise quatre fois la modélisation du sous-système roues-suspensions, il est envisageable de créer un modèle à trois roues-suspensions (dynamique d'un avion lorsque ce dernier roule sur la piste) ou à deux roues-suspensions (modèle bicyclette du véhicule). Le modèle développé permet de valider les développements réalisés dans le cadre de l'étude et de la réduction d'ordre des MSSO.

La mise en œuvre de l'ensemble des points précédents est présentée en 4 chapitres.

Le Chapitre 1 propose un rappel des principales propriétés des modèles à temps continu mis sous forme de réalisation d'état. Ensuite, les relations qui existent entre un modèle formulé en représentation d'état et en MSSO sont explorées. Basées sur ces relations, les propriétés bien connues pour les réalisations d'état (stabilité, commandabilité,...) sont étendues aux MSSO.

Le Chapitre 2 présente les méthodes de réduction de modèle. En particulier, il est montré que les méthodes conçues dans le domaine de l'automatique sont efficaces en termes d'erreur d'approximation. Mais, dans le cas des MSSO, une perte de la structure est à noter. Des méthodes permettent de préserver la structure et plus particulièrement les conditions *structurelles* existent, mais généralement au prix de l'augmentation de l'erreur d'approximation. Dans ce chapitre sont développées deux méthodes de réduction de modèle basées sur les propriétés des MSSO développées précédemment. Ces méthodes permettent de préserver les conditions *structurelles* et présentent une bonne erreur d'approximation.

Le modèle de la dynamique du véhicule est développé au Chapitre 3. Pour être générique et évolutif, le modèle proposé est un modèle par bloc définissant des sous-systèmes. Chaque bloc est défini en termes de dynamiques modélisées, d'entrées-sorties considérées et de paramètres utilisés pour représenter au mieux un organe ou une dynamique du véhicule. De nombreux principes d'automatique sont développés dans le cadre des systèmes linéaires invariants dans le temps. De même, les méthodes de réduction de modèle, développées au Chapitre 2, nécessitent la linéarisation du modèle. Ainsi, à partir du modèle par bloc de la dynamique du véhicule, un modèle linéaire est extrait.

Le Chapitre 4 présente l'identification du modèle. De par sa structure par bloc, l'identification est effectuée par sous-système du véhicule. Une méthode d'interconnexion des sous-systèmes est ensuite proposée pour créer automatiquement une représentation monobloc du modèle, à partir de l'ensemble des sous-modèles identifiés. Le modèle développé est validé avec des signaux mesurés sur le véhicule d'essai du laboratoire et peut être simulé pour étudier le comportement du véhicule routier lors de suivi de trajectoires. En revanche, la complexité du modèle empêche de simuler ce dernier en temps réel. Ainsi, les méthodes de réduction de modèle proposées au Chapitre 2 sont utilisées pour simplifier le modèle tout en préservant les conditions *structurelles*. Les modèles réduits sont validés expérimentalement sur un banc de test de la dynamique verticale du train avant d'un véhicule. La capacité à simuler en temps réel les modèles et la validation comportementale de ces derniers permettent de mettre en œuvre la co-simulation HIL. Cette dernière est effectuée en interconnectant le banc de test avec un modèle simulant les parties qui ne sont pas présentes physiquement sur le moyen d'essai. L'ensemble de ces résultats sont présentés dans la seconde partie du Chapitre 4.

Chapitre 1

Représentation et étude des systèmes linéaires invariants dans le temps

Sommaire

Notations **6**
1.1 Introduction **7**
1.2 Rappels sur les systèmes LTI du première ordre **9**
1.2.1 Fonction de transfert 9
1.2.2 Matrice de transformation et base modale 10
1.2.3 Réponses temporelles 10
1.2.4 Propriétés des systèmes linéaires du premier ordre 11
1.3 Systèmes LTI structurés en second ordre **20**
1.3.1 Description des systèmes 20
1.3.2 Conditions *structurelles* 21
1.3.3 Transformation entre représentation d'état et MSSO 21
1.3.4 Réponses temporelles 35
1.3.5 Propriétés des modèles structurés en second ordre 39
1.4 Conclusion **48**

Notations

Générales

x	- un scalaire ou un vecteur ;
X	- une matrice ;
x et x^T	- respectivement un vecteur colonne et son transposé (vecteur ligne) ;
X^T, X^{-1} et X^{-T}	- respectivement la transposée, l'inverse et la transposée inverse d'une matrice X ;
X^+	- pseudo-inverse de Moore-Penrose de X ;
$\bar{x}$ et $\|x\|$	- respectivement le conjugué et le module de x ;
X^* et X^{-*}	- respectivement la transposée conjuguée et la transposée conjuguée inverse d'une matrice complexe X ;
$\dot{x}$ et $\ddot{x}$	- la dérivée première et la dérivée seconde de $x(t)$ par rapport au temps ;
$X > 0$ et $X \geq 0$	- respectivement une matrice définie positive et une matrice semi-définie positive ;
$X < 0$ et $X \leq 0$	- respectivement une matrice définie négative et une matrice semi-définie négative ;
$Re(x)$	- partie réelle de x ;
$Im(x)$	- partie imaginaire de x ;
$\lambda(X)$	- valeurs propres de la matrice X ;
$\mathrm{sp}(X)$	- spectre de la matrice X ;
$\chi_X(s)$	- polynôme caractéristique en s de la matrice X ;
$\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{N}$	- respectivement l'ensemble des nombres réels et des entiers positifs ;
$\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{Z}^-$	- respectivement l'ensemble des nombres réels et des entiers négatifs ;
$\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{Z}^*$	- respectivement l'ensemble des nombres réels et des entiers, 0 exclu ;
$\mathbb{C}^+$	- ensemble des nombres complexes à partie réelle positive ;
$\mathbb{C}^-$	- ensemble des nombres complexes à partie réelle négative ;
$\mathbb{I}$ et $\mathbb{O}$	- respectivement la matrice identité et la matrice nulle aux dimensions appropriées ;
$\mathbb{1}$	- vecteur colonne de coefficients égaux à 1 à la dimension appropriée ;
s	- variable de Laplace ;
z	- variable de la transformée en Z ;
$\delta(t - t_0)$	- impulsion de Dirac ;
$[x * y](t)$	- produit de convolution.

Représentations d'état

x	- vecteur d'état ;
n	- nombre d'états ;
x_0	- conditions initiales ;
$\tilde{x}$	- vecteur d'état en fréquentiel ;
A, B, C et D	- matrices des dynamiques, de commande, d'observation et d'action directe ;
Wc, Wo, Wa et Wn	- respectivement les grammiens de commandabilité, d'observabilité, d'atteignabilité et de constructibilité.

Modèles du second ordre

q	- vecteur des coordonnées généralisées ;
n_q	- nombre de coordonnées généralisées ;
$\tilde{q}$	- vecteur des coordonnées généralisées en fréquentiel ;
M, C et K	- matrices des masses, des amortissements et des raideurs généralisées ;
F	- matrice de commande ;
G_p, G_v et G_a	- matrices d'observation respectivement des positions, des vitesses et des accélérations généralisées ;
Wc_p, Wo_p, Wa_p et Wn_p	- respectivement les grammiens de commandabilité, d'observabilité, d'atteignabilité et de constructibilité en position ;
Wc_v, Wo_v, Wa_v et Wn_v	- respectivement les grammiens de commandabilité, d'observabilité, d'atteignabilité et de constructibilité en vitesse ;
$Q(\lambda)$	- polynôme quadratique matriciel $M\lambda^2 + C\lambda + K$;
Λ	- ensemble des valeurs propres solution de $Q(\lambda)$;
P_1 et P_2	- matrices des racines du polynôme quadratique matriciel $Q(\lambda)$;
S	- matrices solution de l'équation de Sylvester $P_1 S - S P_2 + \mathbb{I} = \mathbb{0}$.

Communes aux représentations d'état et aux modèles du second ordre

m et p	- respectivement la dimension du vecteur d'entrée et la dimension du vecteur de sortie du modèle ;
u	- vecteurs des entrées ;
$\tilde{u}$	- vecteur des entrées en fréquentiel ;
y	- vecteur des sorties ;
$\tilde{y}$	- vecteur des sorties en fréquentiel ;
$\mathsf{\Sigma}$	- système ;
$\mathsf{H}(s)$	- fonction de transfert ;
$\mathsf{H}(s)^T$	- fonction de transfert du système dual ;
$\mathcal{C}$	- matrice de commandabilité ;
$\mathcal{O}$	- matrice d'observabilité ;
$\mathcal{H}$	- matrice de Hankel ;
h	- paramètres de Markov ;
$h(t)$	- réponse impulsionnelle.

1.1 Introduction

La modélisation des phénomènes (physiques, chimiques, problèmes de trafic ou de flux ...) se fait en les isolant du monde extérieur. Les modèles résultants sont composés d'un ensemble de relations causales entre des grandeurs d'entrée (causes) et des grandeurs de sortie (effets). La délimitation du système fixe ses liens d'entrée et de sortie avec son environnement. Les entrées sont les variables qui influent sur le système, elles sont mesurées. Les sorties sont les variables produites par le système, elles aussi sont mesurées. Le système possède des variables internes dont l'action sur l'environnement n'est pas directement perceptible. Ces dernières régissent l'évolution du système et elles sont appelées variables d'état. La notion de système d'un point de vue entrées-sorties-états est présentée à la FIGURE 1.1 (page suivante).

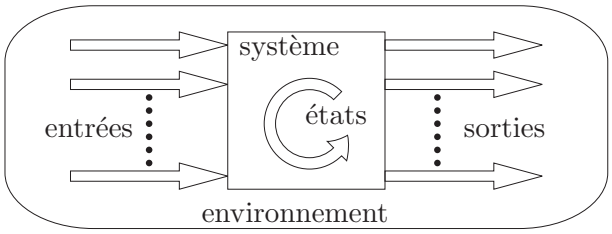


FIGURE 1.1 – Représentation entrées-sorties-états d'un système

Les systèmes considérés dans cette thèse sont décrits par des équations différentielles linéaires à paramètres invariants dans le temps (LTI). Un modèle linéaire obéit au principe de superposition, c'est-à-dire qu'à toute combinaison linéaire des entrées correspond la même combinaison linéaire en sorties. Ces modèles sont régis par des équations différentielles, et nous nous intéressons plus particulièrement aux équations différentielles du premier et du second degré. Les équations du premier degré sont très utilisées en automatique car elles ont été très largement étudiées depuis cinquante ans. Les équations du second degré sont issues des théories de la physique, et sont utilisées dans de nombreux domaines (mécanique, électrique,...). Comme les équations du second degré sont issues de lois physiques, leurs paramètres peuvent être reliés à des grandeurs physiques telles qu'une masse, une raideur, une résistance... La formulation des équations différentielles du premier et du second degré sont :

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + bu(t) \qquad \text{équation différentielle du premier degré,} \tag{1.1}$$

$$m\frac{d^2q(t)}{dt^2} + c\frac{dq(t)}{dt} + kq(t) = fu(t) \qquad \text{équation différentielle du second degré.} \tag{1.2}$$

Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté et en considérant les sorties, l'équation (1.1) peut être écrite sous forme matricielle. Le système est alors décrit par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \mathsf{A}x(t) + \mathsf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathsf{C}x(t) + \mathsf{D}u(t) \end{cases} \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.3}$$

où $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ est le vecteur des entrées du système, $y(t) \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ le vecteur des sorties, $x(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ le vecteur des états du système et $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ les conditions initiales. La matrice $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ est la matrice de commande, la matrice $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice d'état, la matrice $\mathsf{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ est la matrice d'observation et la matrice $\mathsf{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ est la matrice d'action directe. Ce modèle est appelé réalisation ou représentation d'état.

De même l'équation (1.2) peut être écrite sous forme matricielle. Le système est alors décrit par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = Fu(t) & q(t_0) = q_0, \\ y(t) = G_a\ddot{q}(t) + G_v\dot{q}(t) + G_pq(t) & \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

où $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ est le vecteur des entrées du système, $y(t) \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ le vecteur des sorties, $q(t) \in \mathbb{R}^{n_q\times 1}$ le vecteur des coordonnées du système et q_0, $\dot{q}_0 \in \mathbb{R}^{n_q\times 1}$ les conditions initiales. La matrice $F \in \mathbb{R}^{n_q\times m}$ est la matrice de commande, les matrices M, C et $K \in \mathbb{R}^{n_q\times n_q}$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur et les matrices G_p, G_v, G_a

$\in \mathbb{R}^{p\times n_q}$ sont les matrices d'observation des positions, vitesses et accélérations. Ce modèle est appelé Modèle Structuré en Second Ordre (MSSO).

L'utilisation des MSSO afin d'analyser un système linéaire demande de développer différents outils pour caractériser le système. En particulier, nous nous intéressons à :

- la stabilité ;
- la commandabilité ;
- l'observabilité ;
- la passivité.
- les paramètres de Markov ;
- les grammiens d'atteignabilité et d'observabilité.

La première section de ce chapitre est consacrée aux rappels des théorèmes et définitions permettant d'étudier ces propriétés dans le cas d'un modèle formulé en réalisation d'état. L'objectif étant l'étude des MSSO, une seconde section décrit la formulation de tels modèles puis les relations entre réalisation d'état et MSSO. Enfin, l'ensemble des critères formulé pour les réalisations d'état est transposé dans le cas des MSSO afin de fournir les outils nécessaires à la réduction de l'ordre de tels modèles.

1.2 Rappels sur les systèmes LTI du première ordre

1.2.1 Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système, est le rapport entre la transformée de Laplace du signal de sortie et la transformée de Laplace du signal d'entrée. Elle permet de transformer une équation différentielle linéaire à coefficients constants en une équation algébrique de la variable s. Sur le système d'équation (1.3), noté :

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \hline \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+m)},$$

la transformée de Laplace permet d'obtenir, avec $x_0 = 0$,

$$\left\{\begin{array}{rl} sX(s) & = \mathsf{A}X(s) + \mathsf{B}U(s), \\ Y(s) & = \mathsf{C}X(s) + \mathsf{D}U(s), \end{array}\right.$$

Ainsi, la fonction de transfert du système est donnée par

$$\mathsf{H}(s) = \mathsf{C}(sI - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B} + \mathsf{D} \qquad \text{et} \qquad Y(s) = \mathsf{H}(s)U(s). \tag{1.5}$$

Une notion important pour l'étude des systèmes LTI est la dualité qui se définit de la manière suivante :

Définition 1.2.1 *Un système dual associé au système Σ est défini par :*

$$\Sigma^T \quad : \begin{cases} \dot{x}(t) & = \mathsf{A}^T x(t) + \mathsf{C}^T u(t), \\ y(t) & = \mathsf{B}^T x(t) + \mathsf{D}^T u(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

On en déduit directement la fonction de transfert duale d'un système

$$\mathsf{H}(s)^T = \mathsf{B}^T(sI - \mathsf{A}^T)^{-1}\mathsf{C}^T + \mathsf{D}^T \qquad \text{et} \qquad Y(s) = \mathsf{H}(s)^T U(s).$$

1.2.2 Matrice de transformation et base modale

En définissant une matrice T non singulière de transformation d'état telle que

$$\tilde{x} = Tx,$$

alors la matrice de transformation permet de réécrire la représentation d'état Σ sans modifier le comportement entrée-sortie du modèle avec :

$$\tilde{\Sigma} = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1}\mathsf{A}T & T^{-1}\mathsf{B} \\ \hline \mathsf{C}T & \mathsf{D} \end{array}\right].$$

En effet, la fonction de transfert $\tilde{\mathsf{H}}(s)$ de la représentation d'état $\tilde{\Sigma}$ est défini par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathsf{H}}(s) &= \mathsf{C}T(s\mathbb{I} - T^{-1}\mathsf{A}T)^{-1}T^{-1}\mathsf{B} + \mathsf{D}, \\ &= \mathsf{C}T\left(T^{-1}(TsT^{-1} - \mathsf{A})T\right)^{-1}T^{-1}\mathsf{B} + \mathsf{D}, \\ &= \mathsf{C}(s\mathbb{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B} + \mathsf{D}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour une même réalisation d'état, il existe une infinité de matrices $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}$. En particulier, en définissant la matrice de transformation comme étant les vecteurs propres de la matrice A ($\mathsf{A}\phi = \Lambda\phi$), il est possible de trouver une réalisation $\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A}_d & \mathsf{B}_d \\ \hline \mathsf{C}_d & \mathsf{D}_d \end{array}\right]$ dont la matrice d'état A_d est diagonale ou bloc diagonale.

$$\mathsf{A}_d = \phi^{-1}\mathsf{A}\phi = \Lambda, \qquad \mathsf{B}_d = \phi^{-1}\mathsf{B}, \qquad \mathsf{C}_d = \mathsf{C}\phi \qquad \text{et} \qquad \mathsf{D}_d = \mathsf{D}. \tag{1.7}$$

La réalisation $\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A}_d & \mathsf{B}_d \\ \hline \mathsf{C}_d & \mathsf{D}_d \end{array}\right]$ est la projection du système Σ dans la base modale.

1.2.3 Réponses temporelles

1.2.3.1 Réponse impulsionnelle

La réponse du système à l'impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle $h(t)$. La particularité de l'impulsion de Dirac est de constituer l'unité du produit de convolution, et par le principe de superposition, la sortie du système $y(t)$ à une entrée $u(t)$ est donnée par [D'ANDRÉA-NOVEL et CHOEN DE LARA, 2000]

$$y(t) = \int_{t_0}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = [h * u](t).$$

Ainsi, la fonction de transfert permet de calculer la réponse d'un système à une entrée en fréquentielle et la réponse impulsionnelle permet de calculer la réponse en temporelle. Pour une représentation d'état, la réponse impulsionnelle est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.2.2 *La réponse impulsionnelle d'une représentation d'état pour $t \geq t_0$, est déterminée par :*

$$y(t) = \mathsf{C}e^{\mathsf{A}(t-t_0)}\mathsf{B} + \mathsf{D}\delta(t-t_0).$$

La fonction de transfert d'une représentation d'état est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. A noter que pour une réalisation d'état dont la matrice directe est non nulle ($\mathsf{D} \neq \mathbb{O}$), la réponse est infinie à $t = t_0$. Si la matrice D est nulle, la réponse impulsionnelle d'un système simple entrée correspond à la réponse libre ($u(t) = 0$) avec les conditions initiales $x_0 = \mathsf{B}$.

Pour un système multi entrées, les réponses impulsionnelles du modèle sont les réponses obtenues pour des conditions initiales valant alternativement chacune des colonnes de la matrice B.

1.2.3.2 Réponse à une entrée

La réponse impulsionnelle permet de décrire la réponse libre d'un système. Pour calculer la réponse d'un système à une entrée $u(t) \neq 0$, il faut résoudre analytiquement l'équation différentielle (1.3).

Proposition 1.2.3 *Soit x_0 une condition initiale et $u(t)$ une entrée, les réponses dynamiques $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \geq t_0$ peuvent être déterminées par :*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\mathsf{A}(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\mathsf{A}(t-\tau)}\mathsf{B}u(\tau)\,d\tau, \\ y(t) &= \mathsf{C}x(t) + \mathsf{D}u(t). \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.2.4 Propriétés des systèmes linéaires du premier ordre

1.2.4.1 Stabilité

La stabilité d'un système est une notion qui permet d'assurer la non divergence du système. Il existe différentes notions de stabilité qui dépendent de la structure du modèle étudié.

Pour les systèmes modélisés sous forme de représentation d'état, la stabilité est définie en utilisant les points d'équilibre [D'ANDRÉA-NOVEL et CHOEN DE LARA, 2000].

Définition 1.2.4 *L'état x_e est appelé état d'équilibre ou point d'équilibre pour Σ si lorsque $x_0 = x_e$ alors $x(t) = x_e, \quad \forall t \geq 0$ avec $u(t) = 0$.*

La FIGURE 1.2 illustre la notion de point d'équilibre pour une bille posée sur différentes surfaces.

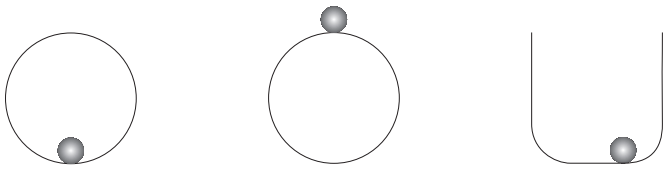


FIGURE 1.2 – Illustration d'un point d'équilibre

Comme tout point d'équilibre peut être ramené à l'origine par le changement de variable $\tilde{x} = x - x_e$, sans perte de généralité, les définitions et théorèmes ci-dessous sont établis pour $x_e = 0$.

La notion de stabilité pour les systèmes dynamiques est définie par le comportement du système à proximité d'un point d'équilibre

Définition 1.2.5 *L'état d'équilibre $x_e = 0$ est*
- *stable si $\forall R > 0$, $\exists r > 0$, tel que*

$$||x_0|| < r \quad \Rightarrow \quad ||x(t)|| < R \quad \forall t \geq 0.$$

- *asymptotiquement stable si r peut être choisi tel que*

$$||x_0|| < r \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

- *marginalement stable s'il est stable sans être asymptotiquement stable.*
- *instable s'il n'est pas stable ;*

L'exemple d'une bille posée sur différentes surfaces permet d'illustrer la stabilité d'un système en écartant la bille de son point d'équilibre (*cf.* FIGURE 1.3).

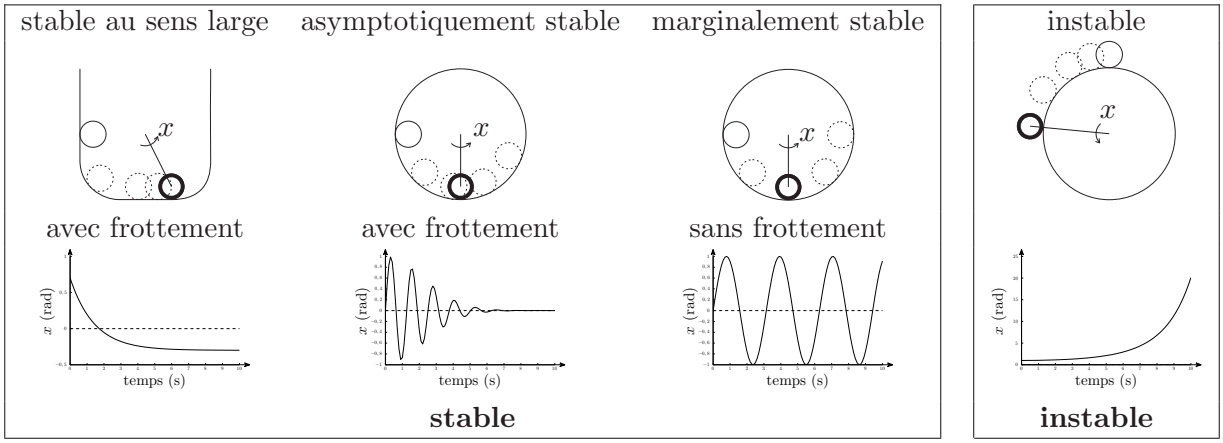


FIGURE 1.3 – Illustration de la stabilité d'un système et allure de la réponse impulsionnelle

Pour un modèle linéaire à temps continu, l'étude des pôles permet de définir la stabilité d'un système. Les pôles d'un système sous forme de représentation d'état sont donnés par les racines du polynôme caractéristique $\chi_{\mathsf{A}}(s) = \det(sI - \mathsf{A})$. Substituer s par λ, permet de constater que les pôles d'un modèle sont donnés par les valeurs propres de la matrice A.

Théorème 1.2.6 *Un système linéaire Σ est*
- *stable ssi les valeurs propres de la matrice d'état sont à parties réelles négatives*

$$Re(\lambda_i(\mathsf{A})) \leq 0 \qquad \textit{pour} \qquad i = 1, \ldots, n,$$

  et si les pôles à parties réelles nulles sont simples ;
- *asymptotiquement stable ssi les valeurs propres de la matrice d'état sont à parties réelles strictement négatives*

$$Re(\lambda_i(\mathsf{A})) < 0 \qquad \textit{pour} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Une matrice A avec ces propriétés est dite Hurwitz. Un second critère de stabilité asymptotique est la stabilité de Lyapunov.

Théorème 1.2.7 *Un système linéaire Σ est*

– *stable ssi, pour toute matrice symétrique semi-définie positive Q, il existe une matrice symétrique définie positive P satisfaisant l'équation*

$$\mathsf{A}^T P + P\mathsf{A} + Q = \mathbb{0}$$

et la paire (Q, A) est observable.
– *asymptotiquement stable ssi, pour toute matrice symétrique définie positive Q, il existe une matrice symétrique définie positive P satisfaisant l'équation*

$$\mathsf{A}^T P + P\mathsf{A} + Q = \mathbb{0}.$$

1.2.4.2 Passivité

Dans le cas des systèmes interconnectés, la stabilité de chacun des sous-systèmes ne garantit pas la stabilité du système global. Ainsi, est apparue la notion de passivité d'un système avec la propriété qu'un système créé par l'interconnexion de deux systèmes passifs est passif. De plus, un système passif est stable, ainsi l'interconnexion de deux systèmes passifs garantit que le système global est stable. Le concept de passivité pour les systèmes linéaires a été introduit par [WILLEMS, 1976]. Une interprétation physique d'un système passif est que la quantité d'énergie possédée par un système passif n'excède pas la quantité d'énergie fournie par les sources externes. D'un point de vue entrée-sortie, en définissant l'énergie instantanée d'un système par $u^T y$ si $m = p$, on peut définir la passivité par la définition suivante :

Définition 1.2.8 *Une réalisation est passive si $\int_0^t u^T(\tau) y(\tau)\, d\tau \geq 0$ pour toutes entrées $u(.)$.*

De part sa définition, la passivité n'est définie que pour les systèmes carrés, *i.e.* $m = p$.

Dans le cas d'une représentation d'état, la passivité peut être caractérisée à l'aide de la fonction de transfert $\mathsf{H}(s)$ [CURTAIN, 1999].

Lemme 1.2.9 *Soit $\mathsf{H}(s)$ une fonction de transfert d'un système stable, alors le système est passif ssi*

$$\mathsf{H}(iw) + \mathsf{H}^*(iw) \geq 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Il peut être montré qu'un système est passif ssi il est stable et que sa fonction de transfert est positive réelle [BAI et FREUND, 2000].

Définition 1.2.10 *La fonction de transfert carrée $\mathsf{H}(s)$ est positive réelle si*

1. $\mathsf{H}(s)$ *est analytique sur* $\mathbb{C}^+$;
2. $\mathsf{H}(\bar{s}) = \bar{\mathsf{H}}(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}$;
3. $Re(\mathsf{H}(s)) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{C}^+$.

Le théorème suivant permet de lier les systèmes positifs réels avec leur stabilité.

Théorème 1.2.11 *Si la fonction de transfert $\mathsf{H}(s)$ est positive réelle, alors $\mathsf{H}(s)$ n'a ni pôle ni zéro dans $\mathbb{C}^+$ et tous les pôles ou zéros imaginaires purs sont simples.*

Ce théorème permet d'affirmer qu'un système positif réel (ou passif) est stable mais les conditions sur les zéros empêchent d'assurer qu'un système stable soit réel positif.

Le lemme de Kalman - Yakubovich - Popov permet de définir un critère garantissant qu'un système est réel positif et donc passif.

Lemme 1.2.12 *(Generalized Positive-Real lemma ou KYP lemma) Soit une réalisation* $\mathsf{H}(s)$ *stable et minimale, alors le système est réel positif ssi il existe des matrices* $P = P^T > 0$, W *et* L *telles que les équations de Lure suivantes soient satisfaites :*

$$P\mathsf{A} + \mathsf{A}^T P = -L^T L, \tag{1.10}$$

$$P\mathsf{B} - \mathsf{C}^T = -L^T W, \tag{1.11}$$

$$\mathsf{D} + \mathsf{D}^T = WW^T. \tag{1.12}$$

Dans [CURTAIN, 1999], une formulation des équations (1.10)-(1.12) sous forme d'équation de Riccati est donnée. En effet, les équations de Lure peuvent être transformées en une inégalité matricielle linéaire :

$$\begin{bmatrix} \mathsf{A}^T P + P\mathsf{A} & P\mathsf{B} - \mathsf{C}^T \\ \mathsf{B}^T P - \mathsf{C} & -\mathsf{D}^T - \mathsf{D} \end{bmatrix} \leq 0.$$

Dans le cas où la matrice $\mathsf{D} + \mathsf{D}^T$ est non singulière, résoudre les équations de Lure revient à résoudre l'équation de Riccati algébrique

$$P\mathsf{A} + \mathsf{A}^T P = -(P\mathsf{B} - \mathsf{C}^T)R^{-1}(\mathsf{B}^T P - \mathsf{C}), \tag{1.13}$$

où $R = \mathsf{D} + \mathsf{D}^T$.

Dans le cas des systèmes ne possédant pas de matrice directe D, il est impossible de calculer l'équation de Riccati (1.13).

Par contre, si le système est minimal, une version singulière ($\mathsf{D} = 0$) du lemme 1.2.12 permet de s'affranchir de cette problématique.

Lemme 1.2.13 *Soit* $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C})$ *une réalisation minimale, alors la fonction de transfert* $\mathsf{H}(s) = \mathsf{C}(sI - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B}$ *est réelle positive ssi il existe une matrice* $P = P^T > 0$ *telle que*

$$\mathsf{A}^T P + P\mathsf{A} \leq 0,$$
$$\mathsf{B}^T P = \mathsf{C}.$$

1.2.4.3 Atteignabilité

Un système est dit atteignable s'il existe une loi de commande permettant de transférer le système d'un état initial à tout état final. Cette propriété est définit de la manière suivante :

Définition 1.2.14 *Une représentation d'état est atteignable sur* $[t_0, t_f]$ *si pour tout état initial* $x(t_0) = 0$ *et pour tout état final* $x(t_f) = x_f$*, il existe une entrée* $u(.)$ *telle que la solution de* (1.3) *satisfait* $x(t_f) = x_f$ *en un temps* $t_f - t_0 > 0$ *fini.*

À la place de l'atteignabilité, il est courant d'utiliser la notion de commandabilité et de présenter par dualité l'observabilité. Mais d'un point de vue formel, le dual de l'observabilité est l'atteignabilité comme nous le verrons à la Section 1.2.4.6.

Théorème 1.2.15 *Les propositions suivantes sont équivalentes*

- *la paire* (A, B) *est atteignable ;*
- *le grammien d'atteignabilité (cf. Section 1.2.4.6)*

$$\mathsf{Wa}(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathsf{A}(t_f - t)} \mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{\mathsf{A}^T(t_f - t)}\, dt,$$

est positif pour tout $t > 0$ *;*

– *critère de Kalman : la matrice*

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{AB} & \dots & \mathsf{A}^{n-1}\mathsf{B} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

est de rang plein ;
– *critère de Hautus : la matrice de commandabilité*

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} - \lambda I & \mathsf{B} \end{pmatrix},$$

a l'ensemble de ses colonnes linéairement indépendantes pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.2.4.4 Observabilité

On peut constater que l'observabilité d'un système est la notion duale de la commandabilité. Ainsi, l'observabilité d'un système correspond à la commandabilité du système dual ou système transposé [ZHOU *et al.*, 1995].

Définition 1.2.16 *Un système décrit par l'équation (1.3) est observable sur* $[t_0, t_f]$ *si tout état initial* $x(0) = x_0$ *peut être déterminé grâce aux sorties* $y(t)$ *du système dans l'intervalle* $[t_0, t_f]$.

Théorème 1.2.17 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
– *la paire* (C, A) *est observable ;*
– *le grammien d'observabilité*

$$\mathsf{Wo}(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{\mathsf{A}(t-t_0)} \mathsf{C}\mathsf{C}^T e^{\mathsf{A}^T(t-t_0)}\, dt,$$

est positif pour au moins un $t > 0$ *;*
– *critère de Kalman : la matrice d'observabilité*

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathsf{C} \\ \mathsf{CA} \\ \vdots \\ \mathsf{CA}^{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

est de rang plein.
– *critère de Hautus : la matrice*

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} - \lambda I \\ \mathsf{C} \end{pmatrix},$$

a l'ensemble de ses colonnes linéairement indépendantes pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ *;*

1.2.4.5 Paramètres de Markov

L'expansion en série de Neumann de la réalisation $\mathsf{H}(s)$ donne

$$\mathsf{H}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{C}\mathsf{A}^{i-1}\mathsf{B}s^{-i} + \mathsf{D} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{h}_i s^{-i} + \mathsf{h}_0,$$

où les h_i sont appelés les paramètres de Markov [BOLEY, 1994].

Démonstration
La série de Neumann nous permet d'écrire :

$$(I - X)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} X^i.$$

Ainsi la réalisation $\mathsf{H}(s)$ satisfait :

$$\begin{aligned}\mathsf{H}(s) &= \mathsf{C}(sI - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B} + \mathsf{D},\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{C}\mathsf{A}^{i-1}\mathsf{B}s^{-i} + \mathsf{D},\\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{h}^i s^{-i} + \mathsf{h}_0.\end{aligned}$$

□

On associe aux paramètres de Markov la matrice de Hankel définie par :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{h}_1 & \mathsf{h}_2 & \mathsf{h}_3 & \dots & \mathsf{h}_n \\ \mathsf{h}_2 & \mathsf{h}_3 & \ddots & \ddots & \mathsf{h}_{n+1} \\ \mathsf{h}_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \mathsf{h}_{n+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{h}_n & \mathsf{h}_{n+1} & \mathsf{h}_{n+2} & \dots & \mathsf{h}_{2n} \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

D'après les équations (1.14) et (1.15), il est aisé de voir le lien entre la matrice de Hankel et les matrices de commandabilité et d'observabilité

$$\mathcal{H} = \mathcal{O}\mathcal{C}. \tag{1.17}$$

1.2.4.6 Grammiens

Aux Section 1.2.4.3 et 1.2.4.4 ont été présentés les grammiens d'atteignabilité (Wa) et d'observabilité (Wo). Deux autres grammiens sont définis, les grammiens de commandabilité (Wc) et de constructibilité (Wn). La définition de la commandabilité est la suivante :

Définition 1.2.18 *Un système décrit par l'équation 1.3 est commandable sur $[t_0, t_f]$, si pour tout état initial $x(t_0) =\neq 0$ il existe une entrée $u(t)$ telle que $x(t_f) = 0$.*

Et la définition de la constructibilité est la suivante :

Définition 1.2.19 *Un système décrit par l'équation 1.3 est constructible sur $[t_0, t_f]$, si l'état final $x(t_f) = x_f$ peut être déterminé grâce aux sorties $y(.)$ du système dans l'intervalle $[t_0, t_f]$.*

Dans le cas général, ces quatre grammiens sont définis par

$$\begin{aligned}
\mathsf{Wc}(t_0,t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0,t)\mathsf{B}(t)\mathsf{B}^T(t)\Phi(t_0,t)^T\,dt,\\
\mathsf{Wa}(t_0,t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f,t)\mathsf{B}(t)\mathsf{B}^T(t)\Phi(t_f,t)^T\,dt,\\
\mathsf{Wn}(t_0,t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t,t_f)\mathsf{C}^T(t)\mathsf{C}(t)\Phi(t,t_f)^T\,dt,\\
\mathsf{Wo}(t_0,t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t,t_0)\mathsf{C}^T\mathsf{C}(t)(t)\Phi(t,t_0)^T\,dt,
\end{aligned}$$

où $\Phi(t,t_0)$ est la matrice de transition état.

Dans le cas des systèmes LTI, la matrice de transition état est

$$\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}. \tag{1.18}$$

Les grammiens ainsi définis sont des fonctions dépendantes du temps. Il est aussi possible de définir des grammiens asymptotiques qui ne dépendent plus du temps.

Théorème 1.2.20 *Soit le système LTI donnée par* (1.3) *supposé asymptotiquement stable, alors le grammien asymptotique*

- *de commandabilité est*

$$\mathsf{Wc} = -\int_0^{\infty} e^{At}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{A^T t}\,dt$$

- *d'atteignabilité est*

$$\mathsf{Wa} = \int_0^{\infty} e^{At}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{A^T t}\,dt$$

- *de constructibilité est*

$$\mathsf{Wn} = -\int_0^{\infty} e^{A^T t}\mathsf{C}^T\mathsf{B}e^{At}\,dt$$

- *d'observabilité est*

$$\mathsf{Wo} = \int_0^{\infty} e^{A^T\tau}\mathsf{C}^T\mathsf{C}e^{A\tau}\,d\tau.$$

Démonstration
Pour le grammien de commandabilité.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Wc}(t_0,t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-t)}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{A^T(t_0-t)}\,dt,\\
&= \int_0^{t_f-t_0} e^{-A\tau}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{-A^T\tau}\,d\tau, \qquad \text{en posant } \tau = t - t_0
\end{aligned}$$

et donc le grammien asymptotique ($t_f = -\infty$)

$$\mathsf{Wc} = -\int_0^{\infty} e^{A\tau}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{A^T\tau}\,d\tau.$$

Pour le grammien d'atteignabilité.

$$\begin{aligned}\mathsf{Wa}(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-t)}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{A^T(t_f-t)}\, dt, \\ &= \int_0^{t_f-t_0} e^{A\tau}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{A^T\tau}\, d\tau, \qquad \text{en posant } \tau = t_f - t\end{aligned}$$

et donc le grammien asymptotique ($t_f = \infty$)

$$\mathsf{Wa} = \int_0^{\infty} e^{A\tau}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{A^T\tau}\, d\tau.$$

Pour le grammien de constructibilité.

$$\begin{aligned}\mathsf{Wn}(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(t-t_f)}\mathsf{C}^T\mathsf{C}e^{A(t-t_f)}\, dt, \\ &= \int_0^{t_f-t_0} e^{-A^T\tau}\mathsf{C}^T\mathsf{C}e^{-A\tau}\, d\tau, \qquad \text{en posant } \tau = t_f - t\end{aligned}$$

et donc le grammien asymptotique ($t_f = -\infty$)

$$\mathsf{Wn} = -\int_0^{\infty} e^{A^T\tau}\mathsf{C}^T\mathsf{C}e^{A\tau}\, d\tau.$$

Pour le grammien d'observabilité.

$$\begin{aligned}\mathsf{Wo}(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(t-t_0)}\mathsf{C}^T\mathsf{C}e^{A(t-t_0)}\, dt, \\ &= \int_0^{t_f-t_0} e^{A^T\tau}\mathsf{C}^T\mathsf{C}e^{A\tau}\, d\tau, \qquad \text{en posant } \tau = t - t_0\end{aligned}$$

et donc le grammien asymptotique ($t_f = \infty$)

$$\mathsf{Wo} = \int_0^{\infty} e^{A^T\tau}\mathsf{C}^T\mathsf{C}e^{A\tau}\, d\tau.$$

□

Il apparait clairement que la commandabilité et la constructibilité d'une part et que l'atteignabilité et l'observabilité d'autre part, sont des notions duales. Les grammiens sont aussi définis par la réponse des états du système à une impulsion de Dirac. Pour cette définition nous ne particularisons pas le type de grammien.

Définition 1.2.21 *Un grammien infini est défini par*

$$\mathsf{W} = \int_{t_0}^{+\infty} xx^T\, dt,$$

où x est la réponse impulsionnelle du système. Avec le théorème de Parseval, le grammien peut aussi être exprimé dans le domaine fréquentiel

$$\mathsf{W} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(iw)\tilde{x}^*(iw)\, dw,$$

où $\hat{x}$ est la transformée fréquentielle du signal temporel x.

En remplaçant x par la solution temporelle du système (1.3) ($x(t) = e^{\mathsf{A}(t-t_0)}\mathsf{B}$), on constate que Wa et Wo sont les grammiens du système et du système dual définis par la réponse impulsionnelle sur l'intervalle $[0, \infty[$. En posant $\tau = -t$, les grammiens de commandabilité et de constructibilité sont

$$\mathsf{Wc} = \int_{-\infty}^{0} e^{A\tau}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{A^T\tau}\, d\tau,$$
$$\mathsf{Wn} = \int_{-\infty}^{0} e^{A^T\tau}\mathsf{C}^T\mathsf{C} e^{A\tau}\, d\tau.$$

Ainsi Wc et Wn sont définis par la réponse impulsionnelle sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

Il est possible de calculer les grammiens grâce à l'équation de Lyapunov.

$$\frac{d}{dt}\mathsf{Wc}(t,0) = \frac{d}{dt}\int_t^0 e^{\mathsf{A}(t-\tau)}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{\mathsf{A}^T(t-\tau)}\, d\tau, \tag{1.19}$$
$$= \int_t^0 \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\mathsf{A}(t-\tau)}\mathsf{B}\mathsf{B}^T e^{\mathsf{A}^T(t-\tau)}\right) d\tau - \mathsf{B}\mathsf{B}^T, \tag{1.20}$$
$$= \mathsf{A}\mathsf{Wc}(t,0) + \mathsf{Wc}(t,0)\mathsf{A}^T - \mathsf{B}\mathsf{B}^T. \tag{1.21}$$

Or dans le cas où le système est asymptotiquement stable, pour $t \to \infty$, $\frac{d}{dt}\mathsf{Wc}(t,0) = 0$ donc le grammien de commandabilité asymptotique est solution de l'équation de Lyapunov $\mathsf{A}\mathsf{Wc} + \mathsf{Wc}\mathsf{A}^T - \mathsf{B}\mathsf{B}^T = 0$. De même, les trois autres grammiens sont solutions des trois équations de Lyapunov suivantes :

$$\mathsf{Wa}\mathsf{A}^T + \mathsf{A}\mathsf{Wa} = -\mathsf{B}\mathsf{B}^T, \quad \mathsf{Wo}\mathsf{A} + \mathsf{A}^T\mathsf{Wo} = \mathsf{C}^T\mathsf{C}, \quad \text{et} \quad \mathsf{A}^T\mathsf{Wn} + \mathsf{Wn}\mathsf{A} = -\mathsf{C}^T\mathsf{C} \tag{1.22}$$

Une interprétation des grammiens est que ces derniers quantifient l'énergie nécessaire pour commander ou observer un état du système. En posant

$$J(v(t), a, b) = \int_a^b v(t)^T v(t)\, dt, \tag{1.23}$$

l'énergie de $v(t)$, une fonction vectorielle dans l'intervalle $[a, b]$, dans [GLOVER, 1984], il est montré que

$$\min_{u\in\mathcal{L}(-\infty,0)} J(u(t), -\infty, 0) = x_0^T \mathsf{Wc}^{-1} x_0.$$

Ainsi, le grammien de commandabilité quantifie le minimum d'énergie nécessaire en entrée pour amener un état quelconque à la valeur nulle. Le grammien d'atteignabilité minimise

$$\min_{u\in\mathcal{L}(0,\infty)} J(u(t), 0, \infty) = x_0^T \mathsf{Wa}^{-1} x_0,$$

ce qui quantifie le minimum d'énergie nécessaire en entrée pour amener un état à une valeur quelconque. Pour le système transposé, le grammien d'observabilité minimise

$$\min_{u\in\mathcal{L}(0,\infty)} J(y(t), 0, \infty) = x_0^T \mathsf{Wo} x_0,$$

ce qui quantifie l'énergie minimale fournie par un état amené à une valeur quelconque. Pour finir, le grammien de constructibilité minimise

$$\min_{u\in\mathcal{L}(-\infty,0)} J(y(t), -\infty, 0) = x_0^T \mathsf{Wn} x_0$$

et donc quantifie l'énergie minimale fournie par un état amené à la valeur nulle.

1.3 Systèmes linéaires invariant dans le temps structurés en second ordre

La section précédente a permis de définir un ensemble de propriétés d'un modèle. Ces propriétés sont formulées pour un modèle décrit par une représentation d'état. Dans cette seconde section, nous allons étendre ces propriétés aux Modèles Structurés en Second Ordre (MSSO). Une première étape consiste à étudier les relations qui existent entre ces deux représentations. Cette étude permet de reformuler la fonction de transfert des MSSO. Basée sur cette réécriture, il sera possible d'étendre les propriétés développées précédemment aux MSSO.

1.3.1 Description des systèmes

Les systèmes linéaires considérés sont les systèmes modélisés par les équations différentielles ordinaires du second degré à paramètres invariants dans le temps

$$\Sigma: \begin{cases} M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = Fu(t) & q(0) = q_0, \\ y(t) = G_a\ddot{q}(t) + G_v\dot{q}(t) + G_pq(t) & \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \end{cases} \tag{1.24}$$

où $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ est le vecteur des entrées du système, $y(t) \in \mathbb{R}^{p\times 1}$ le vecteur des sorties, $q(t) \in \mathbb{R}^{n_q\times 1}$ le vecteur des coordonnées du système et $q_0, \dot{q}_0 \in \mathbb{R}^{n_q\times 1}$ les conditions initiales. La matrice $F \in \mathbb{R}^{n_q\times m}$ est la matrice de commande, les matrices M, C, $K \in \mathbb{R}^{n_q\times n_q}$ sont respectivement les matrices de masses, des amortissements et des raideurs et les matrices $G_p, G_v, G_a \in \mathbb{R}^{p\times n_q}$ sont respectivement les matrices d'observation des positions, vitesses et accélérations.

La transformée de Laplace permet d'écrire la fonction de transfert d'un MSSO.

$$\mathsf{H}(s) = (s^2G_a + sG_v + G_p)(Ms^2 + Cs + K)^{-1}F \qquad \text{et} \quad Y(s) = \mathsf{H}(s)U(s). \tag{1.25}$$

Les modèles du second ordre peuvent modéliser différents domaines de la physique tels que des systèmes électriques, mécaniques ou thermiques [DORF et BISHOP, 2008].

Domaine	**Efforts généralisés**		**Vitesses généralisées**		**Déplacements généralisés**	
Mécanique de translation	Effort	[N]	Vitesse	[m.s^{-1}]	Position	[m]
Mécanique de rotation	Couple	[Nm]	Vitesse	[rad.s^{-1}]	Angle	[rad]
Électrique	Tension	[V]	Courant	[A]	Charge	[A.s]
Hydraulique	Pression	[Pa]	Débit volumique	[m^3.s^{-1}]	Volume	[m^3]
Thermo -dynamique	Température	[K]	Flux de chaleur	[J.s^{-1}]		
Acoustique	Pression	[Pa]	Débit acoustique	[m^3.s^{-1}]	Volume	[m^3]

TABLEAU 1.1 – Variables utilisées par un MSSO selon le domaine de la physique

Le TABLEAU 1.1 donne les variables physiques à prendre en compte afin de pouvoir déterminer un modèle structuré en second ordre selon le domaine physique considéré. Pour l'ensemble de ces domaines, trois matrices seront ainsi définies, qui peuvent être liées à des paramètres physiques donnés au tableau TABLEAU 1.2 (page ci-contre).

Domaine	**Masses généralisées**	**Amortissements généralisés**	**Raideurs généralisées**
Mécanique de translation	Masse [N.m^{-1}s^2]	Amortissement [N.m^{-1}.s]	Raideur [N.m^{-1}]
Mécanique de rotation	Inertie [N.m.s^2]	Amortissement angulaire [N.rad^{-1}.s]	Raideur angulaire [N.rad^{-1}]
Électrique	Inductance électrique [V.A^{-1}.s]	Résistance électrique [V.A^{-1}]	Capacité électrique [V^{-1}.A.s]
Hydraulique	Inertance hydraulique [Pa.m^{-3}.s^2]	Résistance hydraulique [Pa.m^{-3}.s]	Capacité hydraulique [Pa^{-1}.m^3]
Thermo -dynamique	Inductance thermique[1] [K.J^{-1}.s^2]	Résistance thermique [K.J^{-1}.s]	Capacité thermique [J.K^{-1}]
Acoustique[2]	Inertance acoustique [Pa.m^{-2}]	Résistance acoustique [Pa.m^{-2}.s^{-1}]	Capacité acoustique [Pa^{-1}.m^2.s^2]

Tableau 1.2 – Paramètres utilisées par un MSSO selon le domaine de la physique

1.3.2 Conditions *structurelles*

Lors de la modélisation d'un système par un MSSO, les conditions suivantes, appelées conditions *structurelles* assurent que le système est stable et que le système a une cohérence avec les lois de la mécanique :

$$\begin{cases} M = M^T > 0 & \text{éléments inertiels généralisés} \\ K = K^T \geq 0 & \text{éléments capacitifs généralisés} \\ C = C_1 + C_2 & \text{avec } C_1 = C_1^T \geq 0 \quad \text{éléments dissipatifs généralisés} \\ & \text{et } C_2 = -C_2^T \quad \text{éléments conservatifs généralisés} \end{cases}$$

Les conditions structurelles sont déduites de considérations énergétiques sur le système. En examinant l'énergie cinétique définie par $E_c = \frac{1}{2}\dot{q}(t)^T M\dot{q}(t)$, on se rend compte que la matrice M est symétrique d'une part, et semi-définie positive d'autre part. Dans le cas des conditions structurelles, la matrice M est définie positive car il est fréquent de ne considérer que les systèmes dont chaque coordonnée généralisée est liée à une masse généralisée. Pour les mêmes raisons, en examinant l'énergie potentielle élastique $E_{pe} = \frac{1}{2}q(t)^T Kq(t)$ la matrice K est symétrique et semi-définie positive. La symétrie des matrices peut aussi être constatée par le fait que l'action entre deux coordonnées généralisées est réciproque (principe d'action-réaction). Pour finir, comme les éléments dissipatifs n'apportent jamais d'énergie au système, alors $C_1 \geq 0$ [HUGHES et SKELTON, 1980].

1.3.3 Transformation entre représentation d'état et MSSO

Afin d'étudier les propriétés des MSSO, il est intéressant de pouvoir transformer un MSSO en modèle d'état. Cette transformation permet de transformer l'ensemble des MSSO non singuliers en modèle d'état non singulier.

[1] La proposition de l'existence d'une inductance thermique est faite par analogie aux domaines mécanique et électrique mais il n'y a pas de phénomène thermique connu à température ordinaire qui le confirme (voir [BREEDVELD, 1982] pour une discussion à ce propos).

[2] L'analogie entre l'acoustique, la mécanique et l'électrique a été initialement proposée par [OLSON, 1943].

Proposition 1.3.1 *À un modèle du second ordre de la forme (1.24), avec M non singulière, on peut associer la représentation d'état*

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C & M^{-1}F \\ \hline G_p - G_aM^{-1}K & G_v - G_aM^{-1}C & G_aM^{-1}F \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+p)}, \tag{1.26}$$

avec le vecteur d'état $x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix}$ *et les conditions initiales* $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{pmatrix}$.

Démonstration
À partir du système d'équation (1.24), on peut écrire

$$\left\{\begin{array}{ll} \ddot{q}(t) & = -M^{-1}C\dot{q}(t) - M^{-1}Kq(t) + M^{-1}Fu(t), \\ y(t) & = -G_aM^{-1}C\dot{q}(t) - G_aM^{-1}Kq(t) + G_aM^{-1}Fu(t) + G_v\dot{q}(t) + G_pq(t) \end{array}\right.$$

et en posant le vecteur d'état

$$x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix},$$

la formulation (1.26) d'un MSSO sous forme d'état est immédiate. □

Dans le cas d'un modèle singulier (ou modèle descripteur), c'est-à-dire si la matrice M est non inversible, on peut transformer le MSSO en représentation d'état singulière par

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathsf{E}\dot{x}(t) & = \mathsf{A}x(t) + \mathsf{B}u(t), \\ y(t) & = \mathsf{C}x(t) + \mathsf{D}u(t). \end{array}\right.$$

Ainsi, une représentation d'état singulière d'un MSSO singulier peut être de la forme suivante [SALIMBAHRAMI, 2005] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} N & O \\ O & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} O & N \\ -K & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ F \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) & = & \begin{pmatrix} G_p - G_aK & G_v - G_aC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} + G_aF\, u(t). \end{array}\right.$$

Le choix de la matrice N est optionnel et n'a pas d'influence sur les résultats. Elle doit seulement être non singulière. En général, on la choisit égale à l'identité. Dans certains cas, il est intéressant de transformer un MSSO en représentation d'état symétrique. Pour cela il suffit de poser $N = -K$.

Si la transformation d'un modèle d'état en MSSO est simple, la transformée inverse demande plus d'attention. La recherche d'un MSSO équivalent à un modèle d'état se base sur la représentation d'état d'un MSSO (*cf.* proposition 1.3.1).

1.3.3.1 Approche considérée

Plusieurs algorithmes de transformation d'un modèle d'état en MSSO ont été développés. Ils se basent sur la méthodologie suivante : trouver une matrice de transformation T telle que

$$T^{-1}\mathsf{A}T = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathsf{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{C}T = \begin{pmatrix} \mathsf{C}_1 & \mathsf{C}_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{D} = \mathsf{D}. \tag{1.27}$$

Grâce à la structure de cette représentation d'état, il est possible d'identifier un MSSO.

En effet, sans perte de généralité, en posant $M = \mathbb{I}$, les matrices du MSSO sont

$$\begin{array}{llll} M = \mathbb{I}, & C = -\mathsf{A}_2, & K = -\mathsf{A}_1, & F = \mathsf{B}_2, \\ G_p = C_1 + G_a K, & G_v = C_2 + G_a C \quad \text{et} & G_a = \mathsf{D} F^{+} M. & \end{array}$$

Clairement, une première hypothèse pour qu'une représentation d'état puisse être transformée en MSSO est la parité de la dimension du modèle d'état (*i.e.* $n = 2n_q$). De plus, si D est non nulle, la pseudo-inverse de F doit exister, *i.e.* le déterminant de $F^T F$ doit être non nul.

Dans la littérature, les algorithmes proposés se basent sur le constat suivant

$$X\mathsf{A} \begin{pmatrix} X \\ X\mathsf{A} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & I \end{pmatrix},$$

avec X une matrice de rang plein, de dimension $n_q \times n$. Ainsi, la matrice

$$T = \begin{pmatrix} X \\ X\mathsf{A} \end{pmatrix}^{-1}, \tag{1.28}$$

permet de transformer la matrice A en une matrice dont la structure respecte l'équation (1.26). La matrice X pouvant être quelconque, on utilise le fait que la matrice B doit respecter la structure de l'équation pour la déterminer.

1. Dans [MEYER et SIRNIVASAN, 1996], la matrice X est la matrice qui annule à gauche la matrice B

$$X\mathsf{B} = \mathbb{O}.$$

2. Dans [SALIMBAHRAMI, 2005], la matrice X est déterminée par la décomposition QR de la matrice $\begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{C}^T \end{pmatrix}$ car l'auteur utilise des MSSO où seule l'observation en position généralisée est considérée, *i.e.* $G_a = G_v = \mathbb{O}$. Dans ce cas, une hypothèse à ajouter est la nullité du premier paramètre de Markov du système. En effet, si les matrices d'observation en vitesses et accélérations généralisées sont nulles, les matrices de commande et d'observation de la représentation d'état sont

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ M^{-1} F \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} G_p & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

d'où le premier paramètre de Markov

$$\mathsf{h}_1 = \mathsf{B}\mathsf{C} = \mathbb{O}.$$

La matrice X peut être décomposée en

$$X = \begin{pmatrix} \mathsf{C} \\ R \end{pmatrix}.$$

En considérant la factorisation QR de $\begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{C}^T \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{C}^T \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ \mathbb{O} & R_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{C}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ \mathbb{O} & R_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = Q^T \text{car } Q \text{ est orthogonal.}$$

Ainsi $n_q - p$ lignes de Q_2 peuvent être choisies pour matrice R.

3. Dans [HOULSTON, 2006], la matrice X est déterminée par la décomposition QR de la matrice B.

$$B = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

d'où

$$X = YQ_2^T,$$

avec Y une matrice quelconque de rang plein permettant de modifier la transformation.

Comme il existe différentes possibilités pour déterminer la matrice X (ou Y), il existe plusieurs matrices M, C et K solutions. Or, si les méthodes proposées ci-dessus permettent de transformer une représentation d'état de dimension paire en MSSO, elles ne garantissent pas la préservation des conditions *structurelles*.

Ainsi, se pose la question du lien entre représentation d'état et MSSO avec conditions *structurelles*. Afin de déterminer ce lien, nous étudions les valeurs propres quadratiques du triplet matriciel (M, C, K).

1.3.3.2 Problème aux valeurs propres quadratiques

Définition 1.3.2 *Les valeurs propres quadratiques du triplet matriciel $M, C, K \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ sont l'ensemble Λ des scalaires λ tels que*

$$\begin{gathered} Q(\lambda)x = 0 \;\; et \quad y^* Q(\lambda) = 0, \\ avec \quad Q(\lambda) = M\lambda^2 + C\lambda + K \quad et \quad x \neq \mathbb{O}, \quad y \neq \mathbb{O}. \end{gathered} \tag{1.29}$$

x est appelé vecteur propre à droite et y est appelé vecteur propre à gauche de $Q(\lambda)$.

La résolution de l'équation (1.29) est le problème aux valeurs propres quadratiques (QEP pour *Quadratic Eingenvalue Problem*).

Parmi l'ensemble des méthodes permettant de résoudre le QEP, nous considérons la méthode par linéarisation qui est équivalente à la transformation d'un MSSO en représentation d'état. En

posant $z = \lambda x$ dans l'équation (1.29) et en réécrivant $Q(\lambda)$, on obtient un problème aux valeurs propres généralisées (GEP pour *Generalized Eigenvalue Probleme*)

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -K & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & M \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Comme M est inversible par les conditions structurelles, on obtient un problème aux valeurs propres classiques (CEP pour *Classic Eigenvalue Probleme*)

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}.$$

Comme par transformation, le spectre d'une représentation d'état est invariant, il est clair que les valeurs propres quadratiques du triplet matriciel (M, C, K) et les valeurs propres de la matrice des dynamiques A de la réalisation d'état décrivant le MSSO sont égales.

Dans [TISSEUR et MEERBERGEN, 2001], un état de l'art complet sur le QEP et ses applications est proposé. Dans cet article, les propriétés des valeurs propres quadratiques en fonction des propriétés des matrices M, C et K sont donnés. En particulier, il est possible de déterminer les conditions sur les valeurs propres pour respecter les conditions structurelles. Les valeurs propres de la matrice A doivent être réelles ou en paires $(\lambda, \bar{\lambda})$ afin que le triplet matriciel (M, C, K) soit réel. De plus, pour que M soit définie positive et C et K soient semi-définies positives, les valeurs propres de A doivent être à partie réelle négative ou nulle. Enfin, si une valeur propre est à partie réelle nulle, alors le MSSO ne possède pas d'élément dissipatif.

Grâce à cette analyse, nous savons que des conditions nécessaires pour qu'une représentation d'état puisse être transformée en un MSSO respectant les conditions *structurelles* sont :

– la matrice A a des valeurs propres réelles ou en paires $(\lambda, \bar{\lambda})$;
– la matrice A a des valeurs propres à partie réelle négative ou nulle.

Or une propriété des matrices à coefficients réels est d'avoir ses valeurs propres réelles ou en paires $(\lambda, \bar{\lambda})$. De plus, la stabilité d'une représentation d'état assure que la partie réelle des valeurs propres de la matrice A est négative ou nulle. Au final, une représentation d'état peut être transformée en MSSO respectant les conditions *structurelles* si elle est à coefficients réels et si elle est stable.

Nous venons de montrer que si le MSSO respecte les conditions structurelles alors la représentation d'état associée est stable et à coefficients réels. La prochaine étape consiste à montrer que cette condition nécessaire est suffisante, c'est-à-dire que pour toute matrice d'état stable à coefficients réels, il existe un triplet de matrice (M, C, K) respectant les conditions structurelles. Cette problématique est le problème aux valeurs propres quadratiques inverse.

1.3.3.3 Problème aux valeurs propres quadratiques inverse

Le problème aux valeurs propres quadratiques inverse (QIEP pour *Quadratic Inverse Eingenvalue Problem*) consiste à construire un triplet de matrices (M, C, K) tel que les valeurs propres quadratiques de ce triplet égalisent un jeu prédéfini de valeurs propres Λ.

Différents auteurs ont étudié la solvabilité du QIEP [CAI *et al.*, 2009, LIN *et al.*, 2009]. Dans [LANCASTER, 2005], les auteurs présentent une solution générale qui ne respecte pas les conditions structurelles et une solution particulière respectant les conditions structurelles. Cette solution particulière demande de déterminer quatre matrices qui permettent de définir l'ensemble des solutions du QIEP mais cette solution est conditionnée par l'existence et la capacité à trouver ces quatre matrices.

Dans le cas où les valeurs propres respectent les conditions *structurelles*, il est aisé de montrer que l'on peut déterminer un triplet matriciel (M, C, K) possédant les mêmes valeurs propres quadratiques.

Théorème 1.3.3 *Soit* $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n_q \times 2n_q}$ *la matrice diagonale des valeurs propres respectant les conditions* structurelles *telles que*

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_c & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_{r1} \end{pmatrix} \qquad et \qquad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_c & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_{r2} \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

où

- $\Lambda_c \in \mathbb{C}^{n_c \times n_c}$ *et* $\bar{\Lambda}_c \in \mathbb{C}^{n_c \times n_c}$ *sont les matrices diagonales des valeurs propres complexes (*$2n_c$ *nombres de valeurs propres complexes),*
- $\Lambda_{r1} \in \mathbb{R}^{(n_q - n_c)\times(n_q - n_c)}$ *et* $\Lambda_{r2} \in \mathbb{R}^{(n_q - n_c)\times(n_q - n_c)}$ *sont deux matrices diagonales des valeurs propres réelles.*

alors

$$M = \mathbb{I}, \qquad C = -\Lambda_1 - \Lambda_2 \qquad et \qquad K = \Lambda_1\Lambda_2, \tag{1.31}$$

est un triplet matriciel qui respecte les conditions structurelles et qui a pour valeurs propres quadratiques Λ *.*

Démonstration

– En posant $X = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix}$ dans l'équation (1.28), on a

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

et donc par transformation la matrice Λ devient

$$T^{-1}\Lambda T = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} + (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1} \\ -(\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1}\Lambda_1 & (\Lambda_2 - \Lambda_1)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{1.33}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\Lambda_1\Lambda_2 & \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\Lambda_1\Lambda_2 & \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres Λ et par identification avec l'équation (1.26), en posant $M = \mathbb{I}$ sans perte de généralité, on obtient $C = -\Lambda_1 - \Lambda_2$ et $K = \Lambda_1\Lambda_2$.

– Le triplet matriciel (M, C, K) respecte les conditions *structurelles* car

$$\Lambda_1\Lambda_2 = \begin{pmatrix} |\Lambda_c|^2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_{r1}\Lambda_{r2} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad -\Lambda_1 - \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -\Lambda_c - \bar{\Lambda}_c & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\Lambda_{r1} - \Lambda_{r2} \end{pmatrix}.$$

Comme les valeurs propres sont à partie réelle négative ou nulle, $|\Lambda_c|^2$, $\Lambda_{r1}\Lambda_{r2}$, $-\Lambda_c - \bar{\Lambda}_c$ et $-\Lambda_{r1} - \Lambda_{r2}$ sont des matrices diagonales à coefficients positifs ou nuls donc semi-définies positives. De plus, comme Λ_c, Λ_{r1} et Λ_{r2} sont diagonales, les matrices C et K sont diagonales et donc symétriques. (M vaut l'identité, donc c'est une matrice symétrique définie positive). □

Le QEP et le QIEP permettent de définir les conditions nécessaires et suffisantes sur la matrice d'état A de la représentation d'état pour que cette dernière puisse être transformée en un triplet matriciel (M, C, K) respectant les conditions structurelles.

Pour cela, il faut projeter la réalisation d'état dans la base modale (*cf.* Section 1.2.2) avec

$$\mathsf{A}_d = \Phi^{-1}\mathsf{A}\Phi = \Lambda, \qquad \mathsf{B}_d = \Phi^{-1}\mathsf{B}, \qquad \mathsf{C}_d = \mathsf{C}\Phi \qquad \text{et} \qquad \mathsf{D}_d = \mathsf{D}, \tag{1.35}$$

puis appliquer la matrice de transformation T.

En revanche, lorsque nous appliquons la matrice de transformation T^{-1} à la matrice de commande B_d, il n'y a aucune raison pour que cette dernière ait la structure voulue. (*i.e.* $T^{-1}\mathsf{B}_d \neq \begin{pmatrix} \mathbb{O} & F^T \end{pmatrix}^T$).

1.3.3.4 Transformation de la matrice de commande

La décomposition par blocs de l'ensemble des matrices de la représentation d'état projetée dans la base modale permet d'écrire la fonction de transfert sous la forme

$$\mathsf{H}(s) = \begin{pmatrix} \mathsf{C}\Phi_1 & \mathsf{C}\Phi_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} s\mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & s\mathbb{I} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \Phi i_1 \mathsf{B} \\ \Phi i_2 \mathsf{B} \end{pmatrix} + \mathsf{D},$$

avec Φ et Φ^{-1} partitionnées par blocs tels que

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi i_1 \\ \Phi i_2 \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Appliquer la matrice de transformation T^{-1} définie dans l'équation (1.32) sur la matrice d'entrée donne

$$T^{-1}\mathsf{B}_d = \begin{pmatrix} \Phi i_1 \mathsf{B} + \Phi i_2 \mathsf{B} \\ \Lambda_1 \Phi i_1 \mathsf{B} + \Lambda_2 \Phi i_2 \mathsf{B} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathsf{B}_2 \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

Ainsi, pour respecter la structure recherchée de l'équation (1.27), il est nécessaire de trouver une nouvelle réalisation d'état de la base modale telle que $\Phi i_1 \mathsf{B} + \Phi i_2 \mathsf{B} = \mathbb{O}$ tout en conservant la structure de la matrice $T^{-1}\mathsf{A}T$.

Une solution à cette problématique peut être trouvée dans le cas des systèmes simple entrée (*i.e.* $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$). En posant

$$\begin{aligned} \Phi i_1 \mathsf{B} &= -X_1 \mathbb{1}, \\ \Phi i_2 \mathsf{B} &= X_2 \mathbb{1}, \end{aligned} \tag{1.38}$$

où $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n_q \times 1}$ est un vecteur colonne avec des coefficients égaux à 1 et

$$\begin{cases} X_1 = -\mathrm{diag}\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \ldots, & b_{n_q} \end{pmatrix}, \\ X_2 = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} b_{n_q+1}, & b_{n_q+2}, & \ldots, & b_n \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{1.39}$$

où b_i la i^{e} composante du vecteur $\Phi^{-1}\mathsf{B}$.

Ainsi, la fonction de transfert de la représentation d'état peut être réécrite sous la forme

$$\mathsf{H}(s) = \begin{pmatrix} \mathsf{C}\Phi_1 X_1 & \mathsf{C}\Phi_2 X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s\mathbb{I} - \Lambda_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & s\mathbb{I} - \Lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} + \mathsf{D}, \tag{1.40}$$

puisque les matrices Λ_1, Λ_2, X_1 et X_2 sont diagonales.

En appliquant les matrices T et T^{-1} sur la fonction de transfert définie par (1.40), on obtient une nouvelle représentation d'état $\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A}_T & \mathsf{B}_T \\ \hline \mathsf{C}_T & \mathsf{D}_T \end{array}\right]$ équivalente à $\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \hline \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{array}\right]$ telle que

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}_T &= \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\Lambda_1\Lambda_2 & \Lambda_1+\Lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{selon l'équation (1.34)},\\
\mathsf{B}_T &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix},\\
&= \begin{pmatrix} \Lambda_2-\Lambda_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_2-\Lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix},\\
\mathsf{C}_T &= \begin{pmatrix} \mathsf{C}\Phi_1X_1 & \mathsf{C}\Phi_2X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}+(\Lambda_2-\Lambda_1)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_2-\Lambda_1)^{-1} \\ -(\Lambda_2-\Lambda_1)^{-1}\Lambda_1 & (\Lambda_2-\Lambda_1)^{-1} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \mathsf{C}\Phi_1X_1\Lambda_2-\mathsf{C}\Phi_2X_2\Lambda_1 & -\mathsf{C}\Phi_1X_1+\mathsf{C}\Phi_2X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Lambda_2-\Lambda_1)^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\Lambda_2-\Lambda_1)^{-1} \end{pmatrix},\\
\mathsf{D}_T &= \mathsf{D}_d = \mathsf{D}.
\end{aligned}
$$

La structure de la matrice $T^{-1}\mathsf{A}_dT$ est préservée et la matrice B_T a la structure voulue mais les coefficients des matrices B_T et C_T sont à coefficients complexes car $(\Lambda_2-\Lambda_1)$ est une matrice diagonale à coefficients complexes.

En utilisant une seconde matrice de transformation

$$
U = \begin{pmatrix} (\Lambda_2-\Lambda_1) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & (\Lambda_2-\Lambda_1) \end{pmatrix},
$$

la représentation d'état $\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A}_T & \mathsf{B}_T \\ \hline \mathsf{C}_T & \mathsf{D}_T \end{array}\right]$ devient

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}_F &= U^{-1}\mathsf{A}_TU = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\Lambda_1\Lambda_2 & \Lambda_1+\Lambda_2 \end{pmatrix},\\
\mathsf{B}_F &= U^{-1}\mathsf{B}_T = \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix},\\
\mathsf{C}_F &= \mathsf{C}_TU = \mathsf{C}\begin{pmatrix} \Phi_1X_1\Lambda_2-\Phi_2X_2\Lambda_1 & -\Phi_1X_1+\Phi_2X_2 \end{pmatrix},\\
\mathsf{D}_F &= \mathsf{D}_T = \mathsf{D}_d = \mathsf{D}.
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

Clairement les matrices A_F, B_F et D_F sont à coefficients réels.

Afin de démontrer que la matrice C_F est à coefficients réels, le partitionnement en blocs de Φ_1, Φ_2, Φi_1 et Φi_2 permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1 = \begin{pmatrix} \Phi_c & \Phi_{r1} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}_c & \Phi_{r2} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \Phi_c, \bar{\Phi}_c \in \mathbb{C}^{n_q\times n_c} \quad \text{et} \quad \Phi_{r1}, \Phi_{r2} \in \mathbb{R}^{n_q\times(n_q-n_c)},\\
&\Phi i_1 = \begin{pmatrix} \Phi i_c \\ \Phi i_{r1} \end{pmatrix}, \quad \Phi i_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Phi} i_c \\ \Phi i_{r2} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \Phi i_c, \bar{\Phi} i_c \in \mathbb{C}^{n_c\times n_q} \quad \text{et} \quad \Phi i_{r1}, \Phi i_{r2} \in \mathbb{R}^{(n_q-n_c)\times n_q}.
\end{aligned}
$$

où l'indice c fait référence à la partie complexe et l'indice r à la partie réelle des matrices. Comme les coefficients des matrices diagonales X_1 et X_2 sont respectivement les coefficients des deux vecteurs colonnes $-\Phi_{i1}B$ et $\Phi_{i2}B$, alors les n_c premières lignes de Φ_1X_1 sont les conjuguées des n_c premières lignes de Φ_2X_2 et les n_q-n_c dernières lignes de Φ_1X_1 et de Φ_2X_2 sont réelles. Ainsi, $-\Phi_1X_1+\Phi_2X_2$ est une matrice à coefficients réels.

De même, en partitionnant en blocs Λ_1 and Λ_2

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_c & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_{r1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_q \times n_q} \qquad \text{et} \qquad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_c & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_{r2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_q \times n_q}, \tag{1.42}$$

alors les n_c premières lignes de $\Phi_1 X_1 \Lambda_2$ sont les conjuguées des n_c premières lignes de $\Phi_2 X_2 \Lambda_1$ et les $n_q - n_c$ dernières colonnes de $\Phi_1 X_1 \Lambda_2$ et $\Phi_2 X_2 \Lambda_1$ sont réelles. Ainsi, $\Phi_1 X_1 \Lambda_2 - \Phi_2 X_2 \Lambda_1$ est une matrice à coefficients réels, ce qui implique que C_f est une matrice à coefficients réels.

Au final il est possible d'extraire de la réalisation d'état $\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A}_F & \mathsf{B}_F \\ \hline \mathsf{C}_F & \mathsf{D}_F \end{array}\right]$ un MSSO respectant les conditions *structurelles* [GUILLET *et al.*, 2011]. Cette méthode permet de proposer l'algorithme d'extraction d'un MSSO depuis une réalisation d'état, présentée à la section suivante.

1.3.3.5 Algorithme de transformation simple entrée

Afin d'extraire de la réalisation d'état (1.41) les matrices du second ordre, nous devons extraire de la matrice D_F la matrice G_a selon l'équation $G_a F = \mathsf{D}_F$. Comme $F = \mathbb{1}$ un vecteur colonne, en utilisant la pseudo inverse $F^+ = (F^T F)^{-1} F^T$ de F on a directement

$$G_a = \mathsf{D}_F F^+ = \mathsf{D}_F \frac{1}{n_q} F^T \quad \text{car} \quad F^T F = \mathbb{1}\mathbb{1}^T = n_q.$$

Au final, un MSSO est extrait d'une réalisation d'état de dimension paire et stable avec

$$\begin{cases} M &= \mathbb{I}, \\ C &= -\Lambda_1 - \Lambda_2, \\ K &= \Lambda_1 \Lambda_2, \\ F &= \mathbb{1}, \\ G_a &= \mathsf{D} \frac{1}{n_q} F^T, \\ G_v &= \mathsf{C}(-\Phi_1 X_1 + \Phi_2 X_2) + G_a C, \\ G_p &= \mathsf{C}(\Phi_1 X_1 \Lambda_2 - \Phi_2 X_2 \Lambda_1) + G_a K. \end{cases} \tag{1.43}$$

Du système d'équations (1.43) l'Algorithme 1.1 (page suivante) de transformation d'une représentation d'état en MSSO est proposé.

À noter que l'algorithme présenté doit résoudre un problème aux valeurs propres. Les autres étapes sont des étapes de tris et de multiplications de matrices. Ainsi, l'algorithme échoue seulement si le calcul des valeurs et vecteurs propres échoue.

À noter également que l'algorithme proposé ci-dessus ne fonctionne que dans le cas simple entrée. Or une représentation d'état mutli entrées peut être considérée comme la concaténation d'un ensemble de réalisations d'état simple entrée. La transformation d'un MSSO multi entrées fait donc l'objet de la prochaine section.

1.3.3.6 Algorithme de transformation multi entrées

Pour transformer en MSSO une réalisation d'état multi entrées, l'apport de chacune des entrées est considérée séparément :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathsf{C}(sI - \mathsf{A})^{-1} \mathsf{B} U(s) + \mathsf{D} U(s), \\ &= \sum_{i=0}^{m} \mathsf{C}(sI - \mathsf{A})^{-1} \mathsf{B}_i U_i(s) + \mathsf{D} U(s), \end{aligned}$$

Algorithme 1.1 Transformation d'une réalisation d'état simple entrée en MSSO (SSSI2MSSO)

Entrées: $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{2n_q \times 2n_q}, \mathsf{B} \in \mathbb{R}^{2n_q \times 1}, \mathsf{C} \in \mathbb{R}^{p \times 2n_q}, \mathsf{D} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$.
Sorties: $M, C, K, F, G_p, G_v, G_a$.
résoudre $\Phi\mathsf{A} = \Lambda\Phi$;
poser $\Lambda_1 = -\text{diag}(\Lambda_c, \Lambda_{r1})$, $\Lambda_2 = \text{diag}(\bar{\Lambda}_c, \Lambda_{r2})$ selon le théorème 1.3.3 (page 26)
et les matrices associées Φ_1, Φ_2 , Φi_1 et Φi_2 selon l'équation (1.36) ;
calculer $\mathsf{B}_d = \begin{pmatrix} \Phi i_1 & \Phi i_2 \end{pmatrix} \mathsf{B}$;
poser $X_1 = \text{diag}(b_{d1}, \ldots, b_{dn_q})$ et $X_2 = \text{diag}(b_{dn_q+1}, \ldots, b_{dn})$;
poser $M = \mathbb{I}$;
calculer $C = \Lambda_1\Lambda_2$;
calculer $K = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$;
poser $F = \mathbb{1}$;
calculer $G_a = \mathsf{D}\frac{1}{n_q}F^T$;
calculer $G_p = \mathsf{C}\left(\Phi_1 X_1 \Lambda_2 - \Phi_2 X_2 \Lambda_1\right) + G_a K$;
calculer $G_v = \mathsf{C}\left(\Phi_2 X_1 - \Phi_1 X_1\right) + G_a C$.

où $U_i(s)$ est la i^{e} entrée et B_i est la i^{e} colonne de B. En utilisant le système d'équations (1.43) sur chaque couple $(\mathsf{C}, \mathsf{B}_i)$ afin d'obtenir les matrices de sorties (G_{p_i}, G_{vi}), le MSSO multi entrées est

$$M = \mathbb{I} \in \mathbb{R}^{(n_q \times m) \times (n_q \times m)},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 - \Lambda_2 & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\Lambda_1 - \Lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & -\Lambda_1 - \Lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_q m \times n_q m},$$

$$K = \begin{pmatrix} \Lambda_1\Lambda_2 & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \Lambda_1\Lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \Lambda_1\Lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_q m \times n_q m}, \tag{1.44}$$

$$F = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n_q m},$$

$$G_p = \begin{pmatrix} G_{p_1} & G_{p_2} & \cdots & G_{p_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n_q m},$$

$$G_v = \begin{pmatrix} G_{v1} & G_{v2} & \cdots & G_{vm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n_q m},$$

Algorithme 1.2 Transformation d'une réalisation d'état en MSSO (SS2MSSO)

Entrées: $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}$.
Sorties: $M, C, K, F, G_p, G_v, G_a$.

si A est de dimension impaire, ajouter un état non nul, non observable, non commandable ;
résoudre $\Phi\mathsf{A} = \Lambda\Phi$;
poser $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\Lambda_c, \Lambda_{r1})$, $\Lambda_2 = \mathrm{diag}(\bar{\Lambda}_c, \Lambda_{r2})$ selon le théorème 1.3.3 (page 26)
et les matrices associées Φ_1, Φ_2 selon l'équation (1.36) ;
calculer $\mathsf{B}_d = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{pmatrix} \mathsf{B}$;
poser $M_1 = \mathbb{I}$;
calculer $C_1 = \Lambda_1\Lambda_2$;
calculer $K_1 = -(\Lambda_1 + \Lambda_2)$;
poser $F_1 = \mathbb{1}$;
calculer $G_{a1} = \mathsf{D}\frac{1}{n_q}F^T$;
pour $j = 1$ à m **faire**
  poser $X_1 = -\mathrm{diag}(b_{d(1,j)}, \ldots, b_{d(n_q,j)})$ et $X_2 = \mathrm{diag}(b_{d(n_q+1,j)}, \ldots, b_{d(n,j)})$;
  calculer $G_{pj} = \mathsf{C}\left(\Phi_1 X_1 \Lambda_2 - \Phi_2 X_2 \Lambda_1\right) + G_{a1}K_1$;
  calculer $G_{vj} = \mathsf{C}\left(\Phi_2 X_2 - \Phi_1 X_1\right) + G_{a1}C_1$;
  poser $M = \begin{pmatrix} M & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & M_1 \end{pmatrix}$;
  poser $C = \begin{pmatrix} C & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & C_1 \end{pmatrix}$;
  poser $K = \begin{pmatrix} K & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & K_1 \end{pmatrix}$;
  poser $F = \begin{pmatrix} F & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & F_1 \end{pmatrix}$;
  poser $G_p = \begin{pmatrix} G_p & G_{pj} \end{pmatrix}$;
  poser $G_v = \begin{pmatrix} G_v & G_{vj} \end{pmatrix}$;
  poser $G_a = \begin{pmatrix} G_a & G_{aj} \end{pmatrix}$.
fin pour

$$G_a = \begin{pmatrix} G_a & G_a & \cdots & G_a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n_q m}.$$

L'Algorithme 1.2 (page précédente) permet de transformer une réalisation d'état en un MSSO diagonal. Mais cet algorithme multiplie la dimension du modèle par le nombre d'entrée. Pour un modèle de dimension n_q à m entrées, l'Algorithme 1.2 (page précédente) construit un modèle de dimension $n_q \times m$ à m entrées. Ainsi les équations de la dynamique sont répétées pour chaque entrée et, dans le cas générale, cet algorithme construit une réalisation non minimale d'un MSSO. Basé sur la structure diagonale du MSSO déduit, un algorithme d'élimination des équations redondantes peut être proposé. La solution permet d'éliminer certaines équations redondantes mais ce n'est pas un algorithme de réalisation minimal [GUILLET et MOURLLION, 2011]. Pour finir, comme tout MSSO non singulier peut être mis sous forme d'état, il est possible de proposer alors un algorithme permettant de diagonaliser les MSSO sans équation redondante.

1.3.3.7 Diagonalisation d'un MSSO

La diagonalisation d'un MSSO permet de découpler chacune des équations le constituant. Ainsi, chaque équation peut être considérée séparément. La recherche des équations à éliminer est effectuée en deux étapes. La première étape élimine les équations structurellement non-observables et non-commandables. La seconde étape associe les équations redondantes.

Pour la première étape, la structure particulière de la matrice F assure que toutes les coordonnées sont commandables. Ainsi, les coordonnées non-minimales sont directement données par les coordonnées qui ne peuvent pas être observées. Comme les matrices des dynamiques sont diagonales, les coordonnées non-observables sont données par les colonnes nulles de la matrice de sortie.

En examinant l'équation (1.44), il peut être noté que chaque bloc $-\Lambda_1 - \Lambda_2$ et $\Lambda_1\Lambda_2$ sont répétés et donc redondant. Afin d'associer certaines équations dans la second étape, les sorties doivent être combinées. Ceci peut être effectué si les vecteurs colonnes des matrices de sortie correspondant aux équations redondantes sont linéairement dépendantes. Pour déterminer les dépendances entre les colonnes, ces dernières doivent être normalisées avant d'effectuer un produit vectoriel entre chacune des colonnes. Par le principe de superposition, le scalaire qui normalise un vecteur de sortie doit être utilisé pour multiplier la ligne de la matrice d'entrée correspondante. Un produit vectoriel entre deux vecteurs de sortie égales à 1 ou -1 signifie que ces colonnes sont linéairement dépendantes et que les équations de la dynamique associées peuvent-être combinées par addition ou soustraction des lignes de la matrice d'entrée correspondantes aux sorties considérées.

Au final, en ajoutant l'élimination des équations redondantes, il est possible de diagonaliser un MSSO multi entrée. Pour cela, il est nécessaire de transformer le MSSO en représentation d'état grâce à la proposition 1.3.1 (page 22) puis d'appliquer l'Algorithme 1.2 (page précédente) et enfin d'éliminer les équations non-observables et d'associer les équations redondantes. Ces trois étapes permettent de définir l'Algorithme 1.3 (page ci-contre). Cet algorithme permet de diagonaliser l'ensemble des MSSO ne possédant pas de pôles nuls d'une multiplicité supérieure ou égale à 2.

La formulation des MSSO sous leur forme initiale ne permet pas leur étude d'une manière similaire au modèle d'état. Mais, grâce à la diagonalisation, il est possible de reformuler la fonction de transfert d'un MSSO.

Algorithme 1.3 Diagonalisation d'un MSSO (DIAGMSSO)

Entrées: $M, C, K, F, G_p, G_v, G_a$
Sorties: $M, C, K, F, G_p, G_v, G_a$

poser $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}$
poser $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ M^{-1}F \end{pmatrix}$
poser $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} G_p - G_aM^{-1}K & G_v - G_aM^{-1}C \end{pmatrix}$
poser $\mathsf{D} = G_aM^{-1}F$
calculer $(M, C, K, F, G_p, G_v, G_a) = \text{SS2MSSO}(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D})$
construire $G = \begin{pmatrix} G_p & G_v & G_a \end{pmatrix}^T$
pour $j = 1$ à p **faire**
  calculer $\alpha = ||G_j||$ la norme de la j$^{\text{e}}$ colonne de G
  si $\alpha == 0$ **alors**
    retirer la j^{e}équation du MSSO
  fin si
  calculer $G_{aj} = \frac{G_{aj}}{\alpha}$, $G_{vj} = \frac{G_{vj}}{\alpha}$ and $G_{pj} = \frac{G_{pj}}{\alpha}$
    où j se réfère à la j^{e} colonne
  calculer $F_j = F_j\alpha$ où j se réfère à la j^{e} ligne de F
fin pour
construire $G = \begin{pmatrix} G_p & G_v & G_a \end{pmatrix}^T$
calculer $P = G^TG$ le produit vectoriel des vecteurs de sortie
pour $j = 1$ à p **faire**
  pour $i = j + 1$ à p **faire**
    si abs$(P_{ji}) == 1$ (où ji se réfère à la j^{e} ligne et i^{e} colonne de P) **alors**
      calculer $F_j = F_j + P_{ji}F_i$
      supprimer la j^{e}équation du MSSO
    fin si
  fin pour
fin pour

1.3.3.8 Autre formulation de la fonction de transfert d'un MSSO

Lors de l'étude des modèles, l'outil de la transformée de Laplace est couramment utilisé. Si la transformée de Laplace d'un MSSO peut aisément être calculée, la transformée de Laplace inverse d'une équation du second ordre demande une première étape de décomposition en éléments matriciels simples de la fonction de transfert. La décomposition en éléments matriciels simples d'un MSSO permet de réécrire la fonction de transfert comme une addition de deux termes inverses du premier ordre.

Théorème 1.3.4 *[MEYER et SIRNIVASAN, 1996] Soient P_1 et $P_2 \in \mathbb{C}^{n_q \times n_q}$ les « racines » du polynôme matriciel $Ms^2 + Cs + K$, telles que $sp(P_1) \cap sp(P_2) = \emptyset$. Alors :*

$$(Ms^2 + Cs + K)^{-1} = \left((s\mathbb{I} - P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right) M^{-1}, \tag{1.45}$$

avec

$$-P_1 - P_2 = M^{-1}C \quad et \quad P_1P_2 = M^{-1}K,$$

où S est la solution de l'équation de Sylvester :

$$SP_1 - P_2S + \mathbb{I} = \mathbb{O}. \tag{1.46}$$

Démonstration
Premièrement, l'unicité de la solution de l'équation de Sylvester (1.46) est garantie par $\mathrm{sp}(P_1) \cap \mathrm{sp}(P_2) = \emptyset$. Ensuite, en développant l'équation (1.45) nous obtenons

$$\begin{aligned}(Ms^2 + Cs + K)^{-1} &= (s\mathbb{I} - P_2)^{-1}(S(s\mathbb{I} - P_1) - (s\mathbb{I} - P_2)S)(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}M^{-1},\\ &= (s\mathbb{I} - P_2)^{-1}(Ss - SP_1 - sS + P_2S)(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}M^{-1}.\end{aligned}$$

Or selon (1.46) $-SP_1 + P_2S = \mathbb{I}$. Donc

$$(Ms^2 + Cs + K)^{-1} = (s\mathbb{I} - P_2)^{-1}(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}M^{-1},$$

et en inversant les deux membres de l'équation on a

$$(Ms^2 + Cs + K) = M(s\mathbb{I} - P_1)(s\mathbb{I} - P_2).$$

On constate que P_1 et P_2 sont les racines du polynôme matriciel $(Ms^2 + Cs + K)$. De plus, en développant

$$\begin{aligned}(Ms^2 + Cs + K) &= (Ms^2 - M(P_1 + P_2)s + MP_1P_2),\\ (s^2 + M^{-1}Cs + M^{-1}K) &= (s^2 - (P_1 + P_2)s + P_1P_2),\end{aligned}$$

l'identification termes à termes permet d'obtenir

$$-P_1 - P_2 = M^{-1}C \quad \text{et} \quad P_1P_2 = M^{-1}K.$$

□

Le théorème 1.3.4 est général et ne précise pas comment déterminer les matrices P_1 et P_2. Il est évident que deux matrices candidates sont les matrices Λ_1 et Λ_2. De plus, l'utilisation de ces deux matrices permet d'éviter de résoudre l'équation de Sylvester car comme Λ_1 et Λ_2 sont diagonales, alors

$$S = (P_2 - P_1)^{-1}.$$

Comme pour la diagonalisation des MSSO, on retrouve l'hypothèse de l'absence de valeurs propres nulles de multiplicité supérieure ou égale à deux.

Avec cette nouvelle formulation et avec l'équation (1.25) le théorème suivant est immédiat.

Proposition 1.3.5 *La fonction de transfert d'un MSSO peut être exprimée par :*

$$H = \left(s^2 G_a + sG_v + G_p\right)\left((s\mathbb{I} - P_2)^{-1} S - S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right) M^{-1} F, \tag{1.47}$$

avec P_1 *et* $P_2 \in \mathbb{C}^{n_q \times n_q}$ *les racines du polynôme matriciel* $Ms^2 + Cs + K$ *et* S *la solution de l'équation de Sylvester :*

$$SP_1 - P_2 S + \mathbb{I} = \mathbb{0}.$$

Avec la décomposition en éléments matriciels simples, il est possible d'utiliser la transformée de Laplace inverse pour calculer la réponse à une entrée d'un MSSO.

1.3.4 Réponses temporelles

1.3.4.1 Réponse à une entrée quelconque

Le théorème 1.3.4 (page ci-contre) permet de donner la solution analytique de l'équation d'un MSSO.

Proposition 1.3.6 *Soient* $q_0 = q(t_0)$ *les positions initiales,* $\dot{q}_0 = \dot{q}(t_0)$ *les vitesses initiales et une entrée* $u(t)$*, les réponses dynamiques* $q(t)$*,* $\dot{q}(t)$*,* $\ddot{q}(t)$ *et* $y(t)$ *du MSSO peuvent être déterminées par :*

$$\begin{aligned} y(t) = \left(\mathcal{G}_2 e^{P_2(t-t_0)} - \mathcal{G}_1 e^{P_1(t-t_0)}\right)\dot{q}_0 - \left(\mathcal{G}_2 e^{P_2(t-t_0)} P_1 - \mathcal{G}_1 e^{P_1(t-t_0)} P_2\right) q_0 \\ + \int_0^t \left(\mathcal{G}_2 S e^{P_2(t-\tau)} - \mathcal{G}_1 S e^{P_1(t-\tau)}\right) F u(\tau)\, d\tau + G_a F u(t), \end{aligned} \tag{1.48}$$

avec

$$\mathcal{G}_1 = G_p + G_v P_1 + G_a {P_1}^2,\ \mathcal{G}_2 = G_p + G_v P_2 + G_a {P_2}^2 \text{ et } SP_1 - P_2 S + \mathbb{I} = \mathbb{0}.$$

Démonstration
En rappelant que la transformée de Laplace de la dérivée n^{e} d'une fonction est

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(t_0) - s^{n-2} \left.\frac{df}{dt}\right|_{(t_0)} - \cdots - s^0 \left.\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right|_{(t_0)}, \tag{1.49}$$

l'équation (1.49) permet de calculer la transformée de Laplace de la primitive d'une fonction en posant $f(t) = \int g(t)\, dt$. Ainsi,

$$\mathcal{L}\left[\int g(t)\, dt\right] = s^{-1}\mathcal{L}\left[g(t)\right] + s^{-1} \int g(t_0)\, dt \tag{1.50}$$

et

$$\mathcal{L}\left[\iint g(t)\, dt\, dt\right] = s^{-2}\mathcal{L}\left[g(t)\right] + s^{-1} \iint g(t_0)\, dt\, dt + s^{-2} \int g(t_0)\, dt. \tag{1.51}$$

De même que pour la dérivée, la notation $\int g(t_0)\, dt$ fait référence à la primitive de la fonction $g(t)$ évaluée en t_0.
Soit un MSSO décrit par l'équation (1.24)

$$\begin{cases} M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq = Fu, \\ y(t) = G_p q + G_v \dot{q}(t) + G_a \ddot{q}(t). \end{cases}$$

La réponse temporelle du système est la somme pondérée par les matrices G_p, G_v et G_a de la réponse en position, en vitesse et en accélération généralisée. Pour calculer ces réponses, le système est transformé dans le domaine fréquentiel (étape 1 de la démonstration) afin d'utiliser le théorème 1.3.4 (page 34) (étape 2 de la démonstration) et ainsi pouvoir calculer la transformée de Laplace inverse (étape 3 de la démonstration).

1. **Transformée de Laplace avec les équations (1.49) et (1.50)**

   -réponse en position généralisée :

$$(Ms^2 + Cs + K)\mathcal{L}\left[q(t)\right] = FU(s) + M\dot{q}(t_0) + Msq(t_0) + Cq(t_0),$$
$$\mathcal{L}\left[q(t)\right] = \left(\mathbb{I}s^2 + M^{-1}Cs + M^{-1}K\right)^{-1}\left(M^{-1}FU(s) + \dot{q}(t_0) + sq(t_0) + M^{-1}Cq(t_0)\right).$$

   -réponse en vitesse généralisée :

$$(Ms + C + Ks^{-1})\mathcal{L}\left[\dot{q}(t)\right] = FU(s) + M\dot{q}(t_0) - s^{-1}Kq(t_0),$$
$$\mathcal{L}\left[\dot{q}(t)\right] = \left(\mathbb{I}s^2 + M^{-1}Cs + M^{-1}K\right)^{-1} s\left(M^{-1}FU(s) + \dot{q}(t_0) - s^{-1}M^{-1}K\dot{q}(t_0)\right).$$

   -réponse en accélération généralisée :

$$(M + Cs^{-1} + Ks^{-2})s^{-2}\mathcal{L}\left[\ddot{q}(t)\right] = FU(s) - s^{-1}C\dot{q}(t_0) - s^{-1}Kq(t_0) - Ks^{-2}K\dot{q}(t_0),$$
$$\mathcal{L}\left[\ddot{q}(t)\right] = \left(\mathbb{I}s^2 + M^{-1}Cs + M^{-1}K\right)^{-1} s^2,$$
$$\times\left(M^{-1}FU(s) - s^{-1}M^{-1}C\dot{q}(t_0) - s^{-1}M^{-1}Kq(t_0) - M^{-1}Ks^{-2}K\dot{q}(t_0)\right).$$

2. **Décomposition en éléments simples grâce au théorème 1.3.4 (page 34)**

   -réponse en position généralisée :

$$\mathcal{L}\left[q(t)\right] = \left((s\mathbb{I} - P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right)\left(FU(s) + \dot{q}(t_0) + sq(t_0) - (P_1 + P_2)q(t_0)\right).$$

   -réponse en vitesse généralisée :

$$\mathcal{L}\left[\dot{q}(t)\right] = \left((s\mathbb{I} - P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right) s\left(FU(s) + \dot{q}(t_0) - s^{-1}(P_1P_2)q(t_0)\right).$$

   -réponse en accélération généralisée :

$$\mathcal{L}\left[\ddot{q}(t)\right] = \left((s\mathbb{I} - P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right) s^2$$
$$\times\left(FU(s) + s^{-1}(P_1 + P_2)\dot{q}(t_0) - s^{-1}(P_1P_2)q(t_0) - s^{-2}(P_1P_2)\dot{q}(t_0)\right).$$

3. **Transformée de Laplace inverse**

   Les résultats préliminaires suivants permettent de calculer la transformée de Laplace inverse des réponses en position, vitesse et accélération.

   – La transformée de Laplace inverse de $\left((s\mathbb{I} - P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right)$ est

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left((s\mathbb{I} - P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right)\right] = \left(e^{P_2(t-t_0)}S - Se^{P_1(t-t_0)}\right).$$

– En utilisant les deux résultats suivants

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\tfrac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(t_0) \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[sF(s)\right] = \tfrac{df(t)}{dt} + \delta(t)f(t_0),\\ \mathcal{L}\left[\tfrac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(t_0) - \left.\tfrac{df(t)}{dt}\right|_{(t_0)} \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[s^2F(s)\right] = \tfrac{d^2f(t)}{dt^2} + f(t_0) + \\ &\qquad \delta(t)\left.\tfrac{df(t)}{dt}\right|_{(t_0)},\end{aligned}$$

et en constatant que

$$\begin{aligned}f(t_0) &= e^{P_2(t_0-t_0)}S - Se^{P_1(t_0-t_0)} = 0,\\ \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{(t_0)} &= P_2e^{P_2(t_0-t_0)}S - SP_1e^{P_1(t_0-t_0)} = \mathbb{I},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\left((s\mathbb{I}-P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I}-P_1)^{-1}\right)s\right] &= \left(P_2e^{P_2(t-t_0)}S - SP_1e^{P_1(t-t_0)}\right),\\ \mathcal{L}^{-1}\left[\left((s\mathbb{I}-P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I}-P_1)^{-1}\right)s^2\right] &= \left({P_2}^2e^{P_2(t-t_0)}S - S{P_1}^2e^{P_1(t-t_0)}\right) + \delta(t).\end{aligned}$$

– La transformée de Laplace inverse d'un produit de fonctions fréquentielles est le produit de convolution des fonctions temporelles

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right] = [fg](t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d(\tau).$$

– L'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution

$$[\delta * g](t) = g(t).$$

Avec les trois résultats préliminaires données ci-dessus, il est possible d'appliquer la transformée de Laplace inverse.

-réponse en position généralisée :

$$\begin{aligned}q(t) = &\left(e^{P_2(t-t_0)}S - Se^{P_1(t-t_0)}\right)\left(\dot{q}(t_0) - (P_1+P_2)q(t_0)\right),\\ &+ \left(P_2e^{P_2(t-t_0)}S - SP_1e^{P_1(t-t_0)}\right)q(t_0),\\ &+ \int_{t_0}^t \left(e^{P_2(t-\tau)}S - Se^{P_1(t-\tau)}\right)Fu(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

-réponse en vitesse généralisée :

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) = &\left(P_2e^{P_2(t-t_0)}S - SP_1e^{P_1(t-t_0)}\right)\dot{q}(t_0) - \left(e^{P_2(t-t_0)}S - Se^{P_1(t-t_0)}\right)P_1P_2q(t_0),\\ &+ \int_{t_0}^t \left(P_2e^{P_2(t-\tau)}S - SP_1e^{P_1(t-\tau)}\right)Fu(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

-réponse en accélération généralisée :

$$\begin{aligned}\ddot{q}(t) = &\left(P_2e^{P_2(t-t_0)}S - SP_1e^{P_1(t-t_0)}\right)\left((P_1+P_2)\dot{q}(t_0) - P_1P_2q(t_0)\right),\\ &- \left(e^{P_2(t-t_0)}S - Se^{P_1(t-t_0)}\right)P_1P_2\dot{q}(t_0),\\ &+ \int_{t_0}^t \left({P_2}^2e^{P_2(t-\tau)}S - S{P_1}^2e^{P_1(t-\tau)}\right)Fu(\tau)\,d\tau + Fu(t).\end{aligned}$$

En utilisant ces trois équations, il est possible de déterminer la réponse temporelle d'un MSSO $y(t) = G_p q(t) + G_v \dot{q}(t) + G_a \ddot{q}(t)$.
La formulation de ce résultat est complexe mais comme le triplet (P_1, P_2, S) est diagonal, on obtient :

$$\begin{aligned}
q(t) &= \left(e^{P_2(t-t_0)}S - Se^{P_1(t-t_0)}\right)\dot{q}_0 - \left(P_1 e^{P_2(t-t_0)}S - SP_2 e^{P_1(t-t_0)}\right)q_0 \\
&\quad + \int_{t_0}^{t}\left(e^{P_2(t-\tau)}S - Se^{P_1(t-\tau)}\right)Fu(\tau)\,d\tau, \\
\dot{q}(t) &= \left(P_2 e^{P_2(t-t_0)}S - SP_1 e^{P_1(t-t_0)}\right)\dot{q}_0 - \left(P_1P_2 e^{P_2(t-t_0)}S - SP_1P_2 e^{P_1(t-t_0)}\right)q_0 \\
&\quad + \int_{t_0}^{t}\left(P_2 e^{P_2(t-\tau)}S - SP_1 e^{P_1(t-\tau)}\right)Fu(\tau)\,d\tau, \\
\ddot{q}(t) &= \left({P_2}^2 e^{P_2(t-t_0)}S - S{P_1}^2 e^{P_1(t-t_0)}\right)\dot{q}_0 - \left(P_1{P_2}^2 e^{P_2(t-t_0)}S - SP_2{P_1}^2 e^{P_1(t-t_0)}\right)q_0 \\
&\quad + \int_{t_0}^{t}\left({P_2}^2 e^{P_2(t-\tau)}S - S{P_1}^2 e^{P_1(t-\tau)}\right)Fu(\tau)\,d\tau + Fu(t), \\
y(t) &= G_p q(t) + G_v \dot{q}(t) + G_a \ddot{q}(t).
\end{aligned} \tag{1.52}$$

En posant $\mathcal{G}_1 = G_p + G_v P_1 + G_a {P_1}^2$ et $\mathcal{G}_2 = G_p + G_v P_2 + G_a {P_2}^2$ on obtient la forme condensée de la réponse temporelle d'un MSSO

$$\begin{aligned}
y(t) &= \left(\mathcal{G}_2 S e^{P_2(t-t_0)} - \mathcal{G}_1 S e^{P_1(t-t_0)}\right)\dot{q}_0 - \left(\mathcal{G}_2 S e^{P_2(t-t_0)}P_1 - \mathcal{G}_1 S e^{P_1(t-t_0)}P_2\right)q_0 \\
&\quad + \int_{t_0}^{t}\left(\mathcal{G}_2 S e^{P_2(t-\tau)} - \mathcal{G}_1 S e^{P_1(t-\tau)}\right)Fu(\tau)\,d\tau + G_a F u(t).
\end{aligned} \tag{1.53}$$

□

La réponse à une entrée d'un MSSO définie par l'équation (1.53) permet de déterminer une nouvelle représentation d'état d'un MSSO

$$\begin{cases}
\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} P_2 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & P_1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} F \\ F \end{pmatrix} u(t), \\
y(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_2 S & -\mathcal{G}_1 S \end{pmatrix} x(t) + G_a F u(t).
\end{cases} \tag{1.54}$$

1.3.4.2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un modèle simple entrée est obtenue en appliquant une impulsion de Dirac sur le modèle en l'absence de conditions initiales ($q_0 = 0$ et $\dot{q}_0 = 0$). En raison de la présence du terme $G_a F u(t)$ dans la réponse en accélération généralisée, si $G_a \neq \mathbb{0}$ alors la réponse impulsionnelle est infinie en $t = t_0$.

Théorème 1.3.7 *La réponse impulsionnelle d'un MSSO pour $t \geq t_0$ est déterminée par :*

$$\begin{aligned}
y(t) &= \left(\mathcal{G}_2 S e^{P_2(t-t_0)} - \mathcal{G}_1 S e^{P_1(t-t_0)}\right)F + G_a F \delta(t-t_0), \\
\textit{avec} \qquad & \mathcal{G}_1 = G_p + G_v P_1 + G_a {P_1}^2 \quad \textit{et} \quad \mathcal{G}_2 = G_p + G_v P_2 + G_a {P_2}^2.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Comme dans le cas des modèles en représentation d'état, les réponses impulsionnelles d'un modèle multi entrées sont données par la réponse libre du modèle ($u(t) = 0$) avec les conditions initiales valant alternativement chacune des colonnes de F.

Démonstration
Pour $t = t_0$, avec $q_0 = 0$ et $\dot{q}_0 = 0$, les équations (1.3.6) donnent

$$q(t_0) = 0, \qquad \text{car} \qquad \int_{t_0}^{t_0} \left(e^{P_2(t-\tau)}S - Se^{P_1(t-\tau)}\right) F\delta(\tau)\, d\tau = 0 \quad \text{et}$$

$$\dot{q}(t_0) = F, \qquad \text{car} \qquad \int_{t_0}^{t_0} \left(P_2e^{P_2(t-\tau)}S - SP_1e^{P_1(t-\tau)}\right) F\delta(\tau)\, d\tau = F.$$

Donc,

$$y(t) = \Big[G_p\left(e^{P_2(t-t_0)}S - Se^{P_1(t-t_0)}\right) + G_v\left(P_2e^{P_2(t-t_0)}S - SP_1e^{P_1(t-t_0)}\right) + G_a\left(P_2{}^2e^{P_2(t-t_0)}S - SP_1{}^2e^{P_1(t-t_0)}\right)\Big] F + G_aF\delta(t),$$

soit

$$y(t) = \left(\mathcal{G}_2Se^{P_2(t-t_0)} - \mathcal{G}_1Se^{P_1(t-t_0)}\right) F + G_aF\delta(t),$$
$$\text{avec} \quad \mathcal{G}_1 = G_p + G_vP_1 + G_aP_1{}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2 = G_p + G_vP_2 + G_aP_2{}^2.$$

□

Le calcul des réponses d'un système dans le cas continu nécessite de résoudre une intégrale. Afin de s'affranchir de ce calcul, il est généralement préférable de travailler avec un modèle à temps discrétisé car l'intégrale est remplacé par une somme. La discrétisation d'un MSSO est donnée en Annexe A ainsi que la réponse discrète à une entrée et à une impulsion.

1.3.5 Propriétés des modèles structurés en second ordre

1.3.5.1 Stabilité

Les pôles d'un MSSO sont donnés par les racines du polynôme matriciel $(Ms^2+Cs+K) = \mathbb{0}$ qui se résout par le problème aux valeurs propres quadratiques. Comme la stabilité asymptotique du système impose que les pôles du système soient situés dans le demi-plan complexe gauche, les valeurs propres quadratiques de $(Ms^2 + Cs + K)$ doivent être à parties réelles négatives.

Théorème 1.3.8 *Un système linéaire du second ordre est stable si et seulement si les valeurs propres quadratiques du polynôme matriciel $Ms^2 + Cs + K$ sont à parties réelles négatives*

$$Re(Q(\lambda_i)) < 0, \qquad \forall \lambda_i \in \Lambda. \tag{1.56}$$

Le calcul des valeurs propres quadratiques d'un polynôme du second ordre est donné à la Section 1.3.3.2.

Il est possible d'exploiter les conditions *structurelles* pour s'assurer de la stabilité d'un système. Pour cela, introduisons la définition d'un polynôme matriciel autoadjoint.

Définition 1.3.9 *Le polynôme matriciel $Q(\lambda)$ est autoadjoint si $Q(\lambda) = Q(\bar{\lambda})^*$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ ce qui est équivalent à M, C et K hermitiennes.*

Propriétés des matrices	**Propriétés des valeurs propres**	**Propriétés des vecteurs propres**
M singulière	Valeurs propres finies et infinies	
M non singulière	$2n_q$ valeurs propres finies	
M, C, K réelles	Valeurs propres réelles ou en paires $(\lambda, \bar{\lambda})$	Si x est un vecteur propre à droite de λ alors $\bar{x}$ est un vecteur propre à droite de $\bar{\lambda}$
M, C, K hermitiennes	Valeurs propres réelles ou en paires $(\lambda, \bar{\lambda})$	Si x est un vecteur propre à droite de λ alors x est un vecteur propre à gauche de $\bar{\lambda}$
M hermitienne définie positive C, K hermitiennes semi définies positives	$\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$	
M, K hermitiennes, M définie positive, $C = -C^*$	Valeurs propres purement imaginaires ou en paires $(\lambda, -\bar{\lambda})$	Si x est un vecteur propre à droite de λ alors x est un vecteur propre à gauche de $-\bar{\lambda}$
M, K réelles symétriques et définies positives, $C = -C^T$	Valeurs propres purement imaginaires	

TABLEAU 1.3 – Propriétés du triplet matriciel (M, C, K) et propriétés spectrales selon [TISSEUR et MEERBERGEN, 2001]

À partir de cette définition les deux théorèmes suivants peuvent être démontrés [TISSEUR et MEERBERGEN, 2001].

Théorème 1.3.10 *Les valeurs propres d'un polynôme matriciel autoadjoint $Q(\lambda)$ sont réelles ou se présentent en paires complexes conjuguées*

$$Q(\lambda)x = 0 \Leftrightarrow x^* Q(\bar{\lambda}) = 0.$$

Ainsi, x est un vecteur propre à droite de λ et un vecteur propre à gauche de $\bar{\lambda}$. Il s'en suit que si les matrices sont réelles, l'ensemble des vecteurs propres à gauche et à droite coïncide.

Théorème 1.3.11 *Les valeurs propres d'un polynôme matriciel autoadjoint $Q(\lambda)$ dont les matrices sont positives, sont à parties réelles négatives*

$$Re(\lambda) < 0, \qquad pour \quad \lambda \in \Lambda.$$

et le système est donc stable.

Les relations entre les propriétés des matrices du polynôme matriciel et les propriétés des valeurs propres sont données dans le TABLEAU 1.3.

En plus des conditions *structurelles* présentées à la Section 1.3.2, la condition que C soit hermitienne est nécessaire, c'est-à-dire que la matrice C_2 soit nulle. Cette condition est vérifiée si le système ne possède pas d'éléments conservatifs généralisés.

1.3.5.2 Atteignabilité

La définition de l'atteignabilité pour un MSSO est équivalente à la définition de l'atteignabilité d'un modèle du première ordre (*cf.* définition 1.2.14 (page 14)).

Définition 1.3.12 *Un système décrit par l'équation* (1.24) *est atteignable si pour toutes coordonnées généralisées initiales en position* $q(t_0) = 0$ *et en vitesse* $\dot{q}(t_0) = 0$ *et pour toutes coordonnées généralisées finales* q_f*, il existe une entrée* $u(.)$ *telle que la solution du MSSO d'écrit par l'équation* (1.24) *satisfait* $q(t_f) = q_f$ *en un temps* $t_f > 0$ *fini.*

De cette définition, différentes caractérisations algébriques de l'atteignabilité ont été proposées. Une première approche consiste à utiliser la représentation d'état d'un MSSO [BENDER et LAUB, 1985, GARCIA-PLANAS, 2007]. Dans [LOSSE et MEHRMANN, 2009], une étude complète de l'atteignabilité des MSSO est présentée, en particulier l'atteignabilité totale ou partielle. Cette étude est basée sur un critère de Hautus pour les MSSO, défini par [LAUB et ARNOLD, 1984]. Ce critère est repris dans le quatrième item du théorème 1.3.13.

Si ces solutions permettent d'étudier l'atteignabilité, elles ne permettent pas de définir une matrice pour les MSSO similaire à la matrice de Hankel des modèles du premier ordre. Pour le cas où la matrice de masse vaut l'identité et la matrice de raideur est nulle, [SHARMA et GEORGE, 2007] ont pu définir une telle matrice. Par ailleurs une étude basée sur la réponse impulsionnelle a permis à [CLAEYSSEN, 1999] de définir une matrice similaire à la matrice de Hankel pour les MSSO. La matrice de Hankel proposée est basée sur les réponses impulsionnelles du modèle et non sur les matrices de définition de ce dernier. De plus, le produit des matrices d'atteignabilité et d'observabilité ainsi défini ne permet pas d'obtenir la matrice de Hankel.

L'approche proposée est d'utiliser la factorisation des MSSO afin d'obtenir une nouvelle représentation d'état qui permet de définir une matrice similaire à la matrice de Hankel pour les MSSO.

Théorème 1.3.13 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'ensemble* (M, C, K, F) *est atteignable ;*
2. *la matrice*

$$\mathsf{Wa}(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \left(e^{P_2(t_f - t)} S - S e^{P_1(t_f - t)} \right) F F^T \left(S^T e^{{P_2}^T (t_f - t)} - e^{{P_1}^T (t_f - t)} S^T \right) dt,$$

   est définie positive pour tout $t \in [t_0, t_f]$ *;*

3. *la matrice*

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} F & P_2 F & {P_2}^2 F & \dots & {P_2}^{2n_q - 1} F \\ F & P_1 F & {P_1}^2 F & \dots & {P_1}^{2n_q - 1} F \end{pmatrix}, \tag{1.57}$$

   est de rang plein $(= 2n_q)$ *;*

4. *la matrice* $\begin{pmatrix} \lambda^2 M + \lambda C + K & F \end{pmatrix}$ *est de rang plein* $(= n_q)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$

La preuve de la proposition 2. est la généralisation des développements faits dans [ZHOU *et al.*, 1995] aux MSSO. La proposition 4. a été démontrée dans [LAUB et ARNOLD, 1984].

Démonstration

1. $\Leftrightarrow$ 2. : Si nous supposons que $\mathsf{Wc}(t_0, t_f) > 0$, quelque soit $t_f > t_0$, et si nous définissons l'entrée comme

$$\begin{aligned} u(\tau) = &- F^T \left(S^* e^{{P_2}^*(t-\tau)} - e^{{P_1}^*(t-\tau)} S^* \right) \mathsf{Wc}^{-1}(0,t) \\ &\times \left[\left(e^{P_2(t-t_0)} S - S e^{P_1(t-t_0)} \right) \dot{q}_0 - \left(P_1 e^{P_2(t-t_0)} S - S P_2 e^{P_1(t-t_0)} \right) q_0 - q_f \right], \end{aligned}$$

il est facile de vérifier en utilisant la réponse temporelle en position (*cf.* equation (1.52)) que $q(t_f) = q_f$. Comme q_f est arbitraire, l'ensemble (M, C, K, F) est contrôlable.

Pour montrer que l'atteignabilité de (M, C, K, F) implique $\mathsf{Wc}(t_0, t_f) > 0$, pour tout $t \in [t_0, t_f]$, nous utilisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que (M, C, K, F) est atteignable mais que $\mathsf{Wc}(t_0, t_f)$ est singulière pour au moins un t.
Comme $(e^{P_2(t-t_0)} S - S e^{P_1(t-t_0)}) F F^T (S^T {e^{P_2}}^T(t-t_0) - {e^{P_1}}^T(t-t_0) S^T) \geq 0$ pour tout t, il existe un vecteur $v \neq 0 \in \mathbb{R}^{n_q}$ tel que

$$v^T (e^{P_2(t-t_0)} S - S e^{P_1 t}) F = 0 \qquad\qquad t \in [t_0, t_f].$$

Si nous annulons l'état final $q(t_1)$ $(q(t_1) = 0)$, avec l'équation (1.52), nous avons :

$$\begin{aligned} 0 = &\left(e^{P_2(t-t_0)} S - S e^{P_1(t-t_0)} \right) \dot{q}_0 - \left(P_1 e^{P_2(t-t_0)} S - S P_2 e^{P_1(t-t_0)} \right) q_0, \\ &+ \int_0^{t_1} \left(e^{P_2(t-\tau)} S - S e^{P_1(t-\tau)} \right) F u \, d\tau, \end{aligned}$$

et en pré-multipliant chaque membre par v^T nous avons

$$0 = v^T \left(e^{P_2(t-t_0)} S - S e^{P_1(t-t_0)} \right) \dot{q}_0 - v^T \left(P_1 e^{P_2(t-t_0)} S - S P_2 e^{P_1(t-t_0)} \right) q_0.$$

Si nous choisissons les coordonnées initiales

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= \left(e^{P_2(t-t_0)} S - S e^{P_1(t-t_0)} \right)^{-1} v, \\ q_0 &= \left(P_1 e^{P_2(t-t_0)} S - S P_2 e^{P_1(t-t_0)} \right)^{-1} v, \end{aligned}$$

nous trouvons

$$2 v^T v = 0.$$

Ainsi, v est nul, ce qui est une contradiction. Finalement, $\mathsf{Wc}(t_0, t_f) > 0$ pour tout $t \in [t_0, t_f]$.

1. $\Leftrightarrow$ 3. : La définition de la matrice d'atteignabilité d'une réalisation d'état (*cf.* définition 1.2.14 (page 14)) permet d'écrire directement la matrice d'atteignabilité de la représentation d'état diagonale d'un MSSO définie par l'équation (1.54)

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} F & P_2 F & {P_2}^2 F & \dots & {P_2}^{2n_q - 1} F, \\ F & P_1 F & {P_1}^2 F & \dots & {P_1}^{2n_q - 1} F. \end{pmatrix}$$

1. $\Leftrightarrow$ 4. : un système d'état est atteignable si et seulement si

$$\begin{aligned} n &= rang\begin{pmatrix} \mathsf{A}-\lambda\mathbb{I} & \mathsf{B} \end{pmatrix} \qquad \forall\lambda\in\mathbb{C}, \\ &= rang\begin{pmatrix} -\lambda\mathbb{I} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ -M^{-1}K & M^{-1}C\lambda & M^{-1}F \end{pmatrix} \qquad \text{selon (1.26)}, \\ &= rang\left(\begin{pmatrix} M\lambda+C & M \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda\mathbb{I} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ -M^{-1}K & M^{-1}C\lambda & M^{-1}F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ -\lambda\mathbb{I} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix}\right), \\ &= rang\begin{pmatrix} \lambda^2M+\lambda C+K & \mathbb{O} & F \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est vrai si et seulement si

$$n_q = rang\begin{pmatrix} \lambda^2M+\lambda C+K & F \end{pmatrix}.$$

□

1.3.5.3 Système dual

La représentation d'état (1.54) d'un MSSO et le théorème 1.2.1 (page 9) d'un système d'état dual permettent de définir le système dual d'un MSSO

$$\Sigma^T = \left(\begin{array}{cc|c} {P_2}^T & \mathbb{O} & S^T\mathcal{G}_2^T \\ \mathbb{O} & {P_1}^T & -S^T\mathcal{G}_1^T \\ \hline F^T & F^T & \mathbb{O} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{(2n_q+m)\times(2n_q+p)}. \tag{1.58}$$

Il est possible de définir la fonction de transfert dual d'un système du second ordre

$$H^T = F^T\left((s\mathbb{I}-{P_2}^T)^{-1}S^T\mathcal{G}_2^T-(s\mathbb{I}-{P_1}^T)^{-1}S^T\mathcal{G}_1^T\right). \tag{1.59}$$

1.3.5.4 Observabilité

À nouveau, la définition de l'observabilité pour un MSSO est équivalente à la définition de l'observabilité d'un modèle du premier ordre (*cf.* définition 1.2.16 (page 15)).

Définition 1.3.14 *Un système décrit par l'équation (1.24) est observable sur $[t_0,t_f]$ si les états initiaux $q(0)=q_0$ et $\dot{q}(0)=\dot{q}_0$ peuvent être déterminés grâce aux sorties $y(t)$ du système dans l'intervalle $[t_0,t_f]$.*

Théorème 1.3.15 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'ensemble (G_p,G_v,G_a,M,C,K) est observable ;*
2. *la matrice*

$$\mathsf{Wo}(t_0,t_f) = \int_{t_0}^{t_f}(e^{{P_2}^T(t-t_0)}S^T\mathcal{G}_2^T-e^{{P_1}^T(t-t_0)}S^T\mathcal{G}_1^T)(\mathcal{G}_2Se^{P_2(t-t_0)}-\mathcal{G}_1Se^{P_1(t-t_0)})\,dt, \tag{1.60}$$

est positive pour tout $t\in[t_0,t_f]$;

3. *la matrice d'observabilité*

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_2 S & -\mathcal{G}_1 S \\ \mathcal{G}_2 S P_2 & -\mathcal{G}_1 S P_1 \\ \mathcal{G}_2 S {P_2}^2 & -\mathcal{G}_1 S {P_1}^2 \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{G}_2 S {P_2}^{2n_q-1} & -\mathcal{G}_1 S {P_1}^{2n_q-1} \end{pmatrix}, \tag{1.61}$$

est de rang plein (= $2n_q$) ;

4. *la matrice* $\begin{pmatrix} \lambda G_v + G_p \\ \lambda^2 M + \lambda C + K \end{pmatrix}$ *est de rang plein (= n_q) pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$

Démonstration

$1 \Leftrightarrow 2., 3.$: directe par dualité

$1 \Leftrightarrow 4.$: un système d'état est observable ssi

$$\begin{aligned} n &= rang \begin{pmatrix} \mathsf{C} \\ \mathsf{A} - \lambda \mathbb{I} \end{pmatrix} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \\ &= rang \begin{pmatrix} G_p & G_v \\ -\lambda \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ -K & -C - \lambda M \end{pmatrix} \qquad \text{selon (1.26)}, \\ &= rang \left(\begin{pmatrix} \mathbb{I} & -G_v & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & -\lambda M - C & -\mathbb{I} \\ \mathbb{0} & \mathbb{I} & \mathbb{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_p & G_v \\ -\lambda \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ -K & -C - \lambda M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{0} \\ -\lambda \mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \right), \\ &= rang \begin{pmatrix} \lambda G_v + G_p & \mathbb{0} \\ \lambda^2 M + \lambda C + K & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui est vrai ssi

$$n_q = rang \begin{pmatrix} \lambda G_v + G_p \\ \lambda^2 M + \lambda C + K \end{pmatrix}.$$

□

1.3.5.5 Paramètres de Markov

Par une expansion de Neumann similaire au modèle d'état, nous pouvons définir les paramètres de Markov pour un MSSO.

Définition 1.3.16 *Les paramètres de Markov d'un MSSO sont définis par :*

$$\mathsf{h}_i = \left(\mathcal{G}_2 S {P_2}^i - \mathcal{G}_1 S {P_1}^i \right) F \quad \text{pour} \quad i = 0, \ldots, \infty, \tag{1.62}$$

avec

$$\mathcal{G}_1 = G_p + G_v P_1 + G_a {P_1}^2 \quad \textit{et} \quad \mathcal{G}_2 = G_p + G_v P_2 + G_a {P_2}^2. \tag{1.63}$$

Démonstration
En utilisant une expansion en série de Neumann de la fonction de transfert donnée par le théorème 1.3.5 (page 35) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
H &= (G_p + G_v s + G_a s^2)\left((s\mathbb{I} - P_2)^{-1}S - S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right)F,\\
&= \left((G_p + G_v s + G_a s^2)(s\mathbb{I} - P_2)^{-1}S - (G_p + G_v s + G_a s^2)S(s\mathbb{I} - P_1)^{-1}\right)F,\\
&= \left((G_p + G_v s + G_a s^2)\sum_{i=0}^{\infty} s^{-i-1}({P_2}^i S - S{P_1}^i)\right)F,\\
&= \left(G_p\sum_{i=0}^{\infty} s^{-i-1}({P_2}^i S - S{P_1}^i) + G_v\sum_{i=-1}^{\infty} s^{-i-1}({P_2}^{i+1} S - S{P_1}^{i+1})\right.\\
&\qquad\left. + G_a\sum_{i=-2}^{\infty} s^{-i-1}({P_2}^{i+2} S - S{P_1}^{i+2})\right)F,
\end{aligned}$$

en constatant que

$$\begin{array}{lllll}
 & \text{pour} & i=-1, & ({P_2}^{i+1}S - S{P_1}^{i+1}) = \mathbb{0}, & ({P_2}^{i+2}S - S{P_1}^{i+2}) = \mathbb{I},\\
\text{et} & \text{pour} & i=-2, & ({P_2}^{i+2}S - S{P_1}^{i+2}) = \mathbb{0}, &
\end{array}$$

alors,

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} s^{-i-1}\left(G_p({P_2}^i S - S{P_1}^i) + G_v({P_2}^{i+1}S - S{P_1}^{i+1}) + G_a({P_2}^{i+2}S - S{P_1}^{i+2})\right)F + G_a F.$$

De même que pour la réponse temporelle, en posant $\mathcal{G}_1 = G_p + G_v P_1 + G_a {P_1}^2$ et $\mathcal{G}_2 = G_p + G_v P_2 + G_a {P_2}^2$, on obtient l'expression condensée

$$H = \sum_{i=0}^{\infty} s^{-i-1}\left(\mathcal{G}_2 S{P_2}^i - \mathcal{G}_1 S{P_1}^i\right)F + G_a F.$$

□

Comme pour une réalisation d'état, le lien entre la matrice de Hankel et les matrices de commandabilité et d'observabilité est

$$\mathcal{H} = \mathcal{O}\mathcal{C}.$$

1.3.5.6 Grammiens du second ordre

Dans le cas des systèmes du second ordre, deux grammiens d'atteignabilité sont définis [SORENSEN et ANTOULAS, 2004].

Définition 1.3.17 *D'un système décrit par l'équation (1.24), le grammien d'atteignabilité en position* Wa_p *est défini par*

$$\mathsf{Wa}_p = \int_0^{\infty} q(t)q^T(t)\,dt$$

et le grammien d'atteignabilité en vitesse Wa_v *est défini par*

$$\mathsf{Wa}_v = \int_0^{\infty} \dot{q}(t)\dot{q}^T(t)\,dt.$$

Par dualité, les grammiens d'observabilité en position Wo_p et en vitesse Wo_v sont définis par le vecteur des coordonnées généralisées du système dual.

Avec le théorème de Parseval, les grammiens peuvent aussi être exprimés dans le domaine fréquentiel :

$$\mathsf{Wa}_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(iw)\tilde{q}^*(iw)\,dw,$$
$$\mathsf{Wa}_v = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\tilde{q}}(iw)\dot{\tilde{q}}^*(iw)\,dw,$$

avec $\tilde{q}$ la transformée de Fourrier du signal temporel q.

Les grammiens ainsi calculés permettent de minimiser l'énergie nécessaire pour atteindre ou observer un état.

Définition par la minimisation d'énergie : Pour calculer les grammiens en position d'un MSSO, la fonction d'énergie (1.23) est minimisée indépendamment de la vitesse [MEYER et SIRNIVASAN, 1996, CHAHLAOUI *et al.*, 2002, SORENSEN et ANTOULAS, 2004] :

$$\min_{\dot{q}_0\in\mathbb{R}^{n_q}} \min_{u(t)\in\mathcal{L}(-\infty,0)} J(u(t),-\infty,0),$$

sous la contrainte

$$M\ddot{q}(t) + G\dot{q}(t) + Kq = Du, \qquad q(0) = q_0.$$

pour le grammien d'atteignabilité et

$$\min_{\dot{q}_0\in\mathbb{R}^{n_q}} \min_{u(t)\in\mathcal{L}(0,\infty)} J(u(t),0,\infty),$$

sous la contrainte

$$M\ddot{q}(t) + G\dot{q}(t) + Kq = Du, \qquad q(0) = q_0.$$

pour le grammien d'observabilité.

Par analogie, les grammiens en vitesse sont les solutions de la minimisation de l'énergie indépendamment de la position :

$$\min_{q_0\in\mathbb{R}^{n_q}} \min_{u(t)\in\mathcal{L}(-\infty,0)} J(u(t),-\infty,0),$$

sous la contrainte

$$M\ddot{q}(t) + G\dot{q}(t) + Kq = Du, \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}_0.$$

pour le grammien d'atteignabilité et

$$\min_{q_0\in\mathbb{R}^{n_q}} \min_{u(t)\in\mathcal{L}(0,\infty)} J(u(t),0,\infty),$$

sous la contrainte

$$M\ddot{q}(t) + G\dot{q}(t) + Kq = Du, \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}_0.$$

pour le grammien d'observabilité.

Avec la mise sous forme d'état d'un MSSO (*cf.* Section 1.3.3), il est possible de calculer les grammiens d'atteignabilité et d'observabilité d'un MSSO à partir de la formulation de ce dernier en représentation d'état [CHAHLAOUI *et al.*, 2006, REIS et STYKEL, 2007].

Les grammiens d'atteignabilité et d'observabilité en position et en vitesse sont définis par le partitionnement des grammiens de la représentation d'état

$$\mathsf{Wa} = \begin{pmatrix} \mathsf{Wa}_p & \mathsf{Wa}_{12} \\ \mathsf{Wa}_{12}^T & \mathsf{Wa}_v \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Wo} = \begin{pmatrix} \mathsf{Wo}_p & Wo_{12} \\ \mathsf{Wo}_{12}^T & \mathsf{Wo}_v \end{pmatrix}. \tag{1.64}$$

Ce calcul des grammiens du second ordre nécessitent de transformer le MSSO en une réalisation d'état. Mais à la Section 1.3.4.2, la réponse impulsionnelle d'un MSSO a été développée. Basé sur cette réponse, il est possible de donner l'expression analytique des gramiens du second ordre en temporelle.

Définition par la réponse impulsionnelle : La réponse impulsionnelle en position d'un MSSO utilise les racines P_1 et P_2 du polynôme $Ms^2 + Cs + K = \mathbb{0}$. La réponse impulsionnelle en position de l'équation du second ordre est $(e^{P_2 t}S - Se^{P_1 t})F$. La réponse impulsionnelle d'un MSSO en vitesse est $(P_2 e^{P_2}S - SP_1 e^{P_1})F$.

Ainsi les grammiens en position sont

$$\begin{aligned} \mathsf{Wa}_p &= \int_0^\infty (e^{P_2 t}S - Se^{P_1 t})FF^T(S^T e^{{P_2}^T t} - e^{{P_1}^T t}S^T)\, dt, \\ \mathsf{Wo}_p &= \int_0^\infty (S^T e^{{P_2}^T t}\mathcal{G}_2^T - e^{{P_1}^T t}S^T\mathcal{G}_1^T)(\mathcal{G}_2 e^{P_2 t}S - \mathcal{G}_1 S e^{P_1 t})\, dt, \end{aligned}$$

et les grammiens en vitesse sont :

$$\begin{aligned} \mathsf{Wa}_v &= \int_0^\infty (P_2 e^{P_2 t}S - SP_1 e^{P_1 t})FF^T(S^T {P_2}^T e^{{P_2}^T t} - {P_1}^T e^{{P_1}^T t}S^T)\, dt, \\ \mathsf{Wo}_v &= \int_0^\infty (S^T e^{{P_2}^T t}{P_2}^T\mathcal{G}_2^T - e^{{P_1}^T t}{P_1}^T S^T\mathcal{G}_1^T)(\mathcal{G}_2 P_2 e^{P_2 t}S - \mathcal{G}_1 S P_1 e^{P_1 t})\, dt. \end{aligned}$$

En utilisant ces nouvelles expressions analytiques des grammiens, il est possible de les calculer directement sans passer par la réalisation d'état.

Calcul direct des grammiens : Grâce à la factorisation d'un MSSO, [MEYER et SIRNIVASAN, 1996] proposent une méthode pour calculer directement les grammiens.

En effet, il est possible de résoudre les deux intégrales suivantes

$$\begin{aligned} \mathsf{Wa}_p &= \int_0^\infty (e^{P_2 t}S - Se^{P_1 t})FF^T(S^T e^{{P_2}^T t} - e^{{P_1}^T t}S^T)\, dt, \\ \mathsf{Wo}_p &= \int_0^\infty (S^T e^{{P_2}^T t}\mathcal{G}_2 - e^{{P_1}^T t}S^T\mathcal{G}_1)(e^{P_2 t}S\mathcal{G}_2 - Se^{P_1 t}\mathcal{G}_1)\, dt. \end{aligned}$$

Les grammiens d'atteignabilité et d'observabilité en position sont donc :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Wa}_{p1} \quad &\text{solution de} \quad P_2\mathsf{Wa}_{p1} + \mathsf{Wa}_{p1}{P_2}^T - SF{F}^T{S}^T = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wa}_{p2} \quad &\text{solution de} \quad P_2\mathsf{Wa}_{p2} + \mathsf{Wa}_{p2}{P_1}^T - SF{F}^T{S}^T = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wa}_{p3} \quad &\text{solution de} \quad P_1\mathsf{Wa}_{p3} + \mathsf{Wa}_{p3}{P_2}^T - SF{F}^T{S}^T = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wa}_{p4} \quad &\text{solution de} \quad P_1\mathsf{Wa}_{p4} + \mathsf{Wa}_{p4}{P_1}^T - SF{F}^T{S}^T = \mathbb{0},\\
\text{finalement,} \quad &\mathsf{Wa}_p = W_1 - \mathsf{Wa}_{p2} - \mathsf{Wa}_{p3} + \mathsf{Wa}_{p4}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathsf{Wo}_{p1} \quad &\text{solution de} \quad {P_2}^T\mathsf{Wo}_{p1} + \mathsf{Wo}_{p1}P_2 - \mathcal{G}_2^T\mathcal{G}_2 = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wo}_{p2} \quad &\text{solution de} \quad {P_2}^T\mathsf{Wo}_{p2} + \mathsf{Wo}_{p2}P_1 - \mathcal{G}_2^T\mathcal{G}_1 = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wo}_{p3} \quad &\text{solution de} \quad {P_1}^T\mathsf{Wo}_{p3} + \mathsf{Wo}_{p3}P_2 - \mathcal{G}_1^T\mathcal{G}_2 = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wo}_{p4} \quad &\text{solution de} \quad {P_1}^T\mathsf{Wo}_{p4} + \mathsf{Wo}_{p4}P_1 - \mathcal{G}_1^T\mathcal{G}_1 = \mathbb{0},\\
\text{finalement,} \quad &\mathsf{Wo}_p = {S}^T\mathsf{Wo}_{p1}S - {S}^T\mathsf{Wo}_{p2}S - {S}^T\mathsf{Wo}_{p3}S + {S}^T\mathsf{Wo}_{p4}S.
\end{aligned}$$

D'une manière analogue, il est possible de calculer directement les grammiens en vitesse

$$\begin{aligned}
\mathsf{Wa}_{v1} \quad &\text{solution de} \quad P_2\mathsf{Wa}_{v1} + \mathsf{Wa}_{v1}{P_2}^T - SF{F}^T{S}^T{P_2}^T = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wa}_{v2} \quad &\text{solution de} \quad P_2\mathsf{Wa}_{v2} + \mathsf{Wa}_{v2}{P_1}^T - SF{F}^T{P_1}^T = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wa}_{v3} \quad &\text{solution de} \quad P_1\mathsf{Wa}_{v3} + \mathsf{Wa}_{v3}{P_2}^T - F{F}^T{S}^T{P_2}^T = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wa}_{v4} \quad &\text{solution de} \quad P_1\mathsf{Wa}_{v4} + \mathsf{Wa}_{v4}{P_1}^T - F{F}^T{P_1}^T = \mathbb{0},\\
\text{finalement,} \quad &\mathsf{Wa}_v = {P_2}^TW_1 - \mathsf{Wa}_{v2}{S}^T - SP_1\mathsf{Wa}_{v3} + SP_1\mathsf{Wa}_{v4}{S}^T.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathsf{Wo}_{v1} \quad &\text{solution de} \quad {P_2}^T\mathsf{Wo}_{v1} + \mathsf{Wo}_{v1}P_2 - {P_2}^T\mathcal{G}_2^T\mathcal{G}_2P_2 = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wo}_{v2} \quad &\text{solution de} \quad {P_2}^T\mathsf{Wo}_{v2} + \mathsf{Wo}_{v2}P_1 - {P_2}^T\mathcal{G}_2^T\mathcal{G}_1SP_1 = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wo}_{v3} \quad &\text{solution de} \quad {P_1}^T\mathsf{Wo}_{v3} + \mathsf{Wo}_{v3}P_2 - {P_1}^T{S}^T\mathcal{G}_1^T\mathcal{G}_2P_2 = \mathbb{0},\\
\mathsf{Wo}_{v4} \quad &\text{solution de} \quad {P_1}^T\mathsf{Wo}_{v4} + \mathsf{Wo}_{v4}P_1 - {P_1}^T{S}^T\mathcal{G}_1^T\mathcal{G}_1SP_1 = \mathbb{0},\\
\text{finalement,} \quad &\mathsf{Wo}_v = {S}^T\mathsf{Wo}_{v1}S - {S}^T\mathsf{Wo}_{v2}S - \mathsf{Wo}_{v3}S + \mathsf{Wo}_{v4}S.
\end{aligned}$$

Au final, le calcul direct des 4 gramiens d'un MSSO nécessite la résolution de 16 équations de Sylvester de dimension n_q. Le calcul des grammiens en utilisant la réalisation d'état nécessite de résoudre 2 équations de Lyapunov de dimension $2n_q$. La résolution d'une équation de Sylvester ou de Lyapunov a une complexité algorithmique de $o(n^3)$, ainsi les deux méthodes ont une complexité algorithmique équivalente. En revanche, la méthode directe nécessite de diagonaliser le MSSO ce qui rend la méthode de calcul par la réalisation d'état plus intéressante.

1.4 Conclusion

Pour la modélisation des phénomènes physiques, la structure d'un MSSO permet de lier les paramètres d'un modèle avec des paramètres physiques du système. En revanche, les équations issues des lois physiques constituants cette classe de modèle, sont des équations du second ordre. Or les propriétés des modèles LTI sont bien connues dans le cadre des modèles du première ordre, modélisés par une représentation d'état. Afin d'étendre ces propriétés aux MSSO, une

étape de factorisation des équations matricielles s'avère nécessaire. La factorisation est rendue possible par l'utilisation de deux matrices racines de l'équation du second ordre.

La recherche de ces deux matrices racines a permis de définir une méthode de transformation d'une représentation d'état en MSSO d'une part et une méthode de diagonalisation des MSSO sans condition sur la matrice d'amortissement d'autre part. Avec la reformulation du MSSO, les propriétés des modèles telles que la commandabilité, l'observabilité, la stabilité, etc... sont définies pour cette classe de modèle. De plus, l'utilisation de matrices diagonales permet de simplifier ces résultats.

La formulation de l'ensemble des ces propriétés et les algorithmes proposés sont un ensemble d'outils utilisé afin d'étudier les MSSO et permettent d'étendre les méthodes de réduction développées pour les réalisations d'état aux MSSO.

Chapitre 2

Méthodes de réduction de l'ordre des modèles

Sommaire

Notations **52**
2.1 Introduction **52**
2.2 Réduction des modèles linéaires du premier ordre **55**
2.2.1 Méthodes d'agrégation 56
2.2.2 Réalisation équilibrée 58
2.2.3 Conclusion 60
2.3 Réduction des modèles structurés en second ordre par condensation **60**
2.3.1 Degrés de liberté maîtres et esclaves 61
2.3.2 Réduction de Guyan, réduction dynamique 62
2.3.3 Méthodes IRS 63
2.3.4 SEREP et Craig-Bampton 66
2.3.5 Conclusion 67
2.4 Réduction des modèles linéaire du second ordre **68**
2.4.1 Troncature modale et préservation des conditions *structurelles* 69
2.4.2 Troncature de la base équilibrée d'un modèle structuré en second ordre 71
2.4.3 Troncature de la base équilibrée et préservation des conditions *structurelles* 76
2.5 Conclusion **77**

Notations

Nous complétons les notations présentées à la Section 1 avec les notations suivantes.

Représentation d'état

x_r	- vecteur d'état réduit ;
n_r	- nombre d'états du modèle réduit ;
x_{r0}	- conditions initiales du modèle réduit ;
$\tilde{x}_r$	- vecteur d'état réduit en fréquentiel ;
A_r, B_r, C_r et D_r	- matrices des dynamiques, de commande, d'observation et d'action directe réduites.

MSSO

q_r	- vecteur des coordonnées généralisées réduit ;
n_{qr}	- nombre de coordonnées généralisées du modèle réduit ;
$\tilde{q}_r$	- vecteur des coordonnées généralisées réduit en fréquentiel ;
M_r, C_r et K_r	- matrices des masses, des amortissements et des raideurs réduites ;
F_r	- matrice de commande réduite ;
G_{pr}, G_{vr} et G_{ar}	- matrices d'observation respectivement des positions, des vitesses et des accélérations réduites ;
P_{1r} et P_{2r}	- matrices des racines du polynôme quadratique matriciel $Q(\lambda)$ réduites ;
S_r	- matrices solution de l'équation de Sylvester $P_{1r}S_r - S_rP_{2r} + \mathbb{I} = \mathbb{0}$.

Notation commune à la représentation d'état et au modèle structuré du second ordre

$\hat{y}$	- sortie du modèle réduit ;
$\mathsf{\Sigma}_r$	- système réduit ;
H_r	- fonction de transfert réduite ;
$\|\|.\|\|_{\mathcal{H}_\infty}$	- norme $\mathcal{H}$-infini.

2.1 Introduction

Les méthodes de réduction de l'ordre des modèles ont été développées afin de réduire la complexité d'un modèle tout en préservant au mieux son comportement entrées-sorties. D'autres critères sont aussi utilisés afin de caractériser la méthode de réduction, telle que la conservation des caractéristiques essentielles du modèle initial. Par exemple, la préservation de la stabilité dans le modèle réduit est fondamentale.

La réduction de la complexité des modèles se fait en éliminant des états de ce dernier. L'élimination des états implique, en pratique, une diminution de la dimension des matrices, ce qui constitue la réduction de l'ordre du modèle. Ainsi, la réduction de l'ordre est une réduction de la dimension, et non pas une diminution du degré de dérivation des équations différentiels définissant le modèle.

La complexité des systèmes est caractérisée par le nombre de coordonnés généralisées (ou

d'états), *i.e.* la dimension n_q (ou n) du vecteur des coordonnées généralisées (ou du vecteur d'états). La réduction de l'ordre des modèles est donc la tâche de réduction du nombre des coordonnées généralisées tout en préservant les relations entrées-sorties. En d'autres termes, nous recherchons un nouveau modèle de dimension n_{qr}

$$\Sigma: \begin{cases} M_r\ddot{q}_r(t) + C_r\dot{q}_r(t) + K_r q_r(t) = F_r u(t), & q_r(0) = q_{r0}, \\ \hat{y}(t) = G_{ar}\ddot{q}_r(t) + G_{vr}\dot{q}_r(t) + G_{pr}q_r(t), & \dot{q}_r(0) = \dot{q}_{r0}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où n_{qr} est inférieur à n_q tout en respectant :
- une faible erreur d'approximation ($e = y - \hat{y}$) ;
- la conservation des propriétés du système (commandabilité, observabilité, stabilité, passivité ...) ;

Intuitivement, le modèle réduit a un ordre n_{qr} tel que $m \leq n_{qr} \leq n_q$.

Les principales raisons d'obtenir un modèle d'ordre réduit sont [SCHILDERS, 2008] :
- simplifier l'étude du système ;
- diminuer les temps de calcul lors des simulations ;
- réduire les temps de calcul de manière à rendre la conception de commandes plus efficace ;
- obtenir des lois de commande simplifiées.

Dans le cadre de la réduction de l'ordre des modèles, plusieurs communautés ont développé des algorithmes de réduction. Pour les MSSO, les premières méthodes développées sont issues de la dynamique des structures. Ensuite, la problématique a été étudiée par la communauté automaticienne et mathématicienne.

Les méthodes issues de la dynamique des structures s'attachent particulièrement à conserver les propriétés *structurelles* du modèle, au détriment de la qualité d'approximation. Ces méthodes utilisent principalement une décomposition du modèle basée sur des considérations sur les coordonnées du système. La première méthode ainsi développée est la méthode de Guyan. Cette méthode, dite statique, a été améliorée par la réduction dynamique. Ensuite sont apparues les méthodes IRS (pour Improved Reduction System) permettant d'améliorer les qualités d'approximation tout en préservant les conditions structurelles. Ces méthodes sont fondées sur un partitionnement des coordonnées généralisées du modèle afin de déterminer *a priori* les coordonnées à conserver. D'autres méthodes se basent sur les modes du système et sont plus proches des méthodes issues de la communauté automaticienne.

Dans le domaine de l'automatique, il existe un grand nombre de méthodes de réduction en fonction de la problématique traitée. Les liens entre les entrées-sorties sont recherchés sans s'attacher particulièrement aux états. Dans [FORTUNA *et al.*, 1992] une classification des méthodes relativement au domaine fréquentiel et au domaine temporel est présentée. Mais, comme le précise l'auteur, la classification des méthodes de ce point de vue n'est pas cruciale car on peut facilement changer le domaine de représentation du modèle. Une autre classification est possible en fonction des « quantités » préservées. Nous nous intéresserons principalement aux plus utilisées :
- valeurs propres ;
- valeurs singulières de Hankel.

La principale procédure de réduction fondée sur les valeurs propres est la troncature modale. Basés sur les valeurs singulières de Hankel, différents algorithmes ont été proposés tels que la perturbation et la troncature singulière ou les méthodes d'approximation de la norme de Hankel. L'algorithme le plus connu utilisant les valeurs singulières de Hankel est la troncature de la base équilibrée, introduite dans [MOORE, 1981]. Cette méthode a été largement étudiée d'un

point de vue numérique [LAUB *et al.*, 1987, VARGA, 1991, BENNER *et al.*, 2005] et étendue à d'autre forme de modèle tels que les systèmes discrets, les systèmes à commutation, les systèmes variants dans le temps ou les systèmes non-linéaire [OH et PARK, 1997, LALL *et al.*, 2002, STYKEL, 2004, SANDBERG, 2006, VERRIEST, 2008, BIROUCHE *et al.*, 2010].

Il existe une autre grande classe de méthodes basées sur les paramètres de Markov des modèles. La première méthode ainsi conçue est l'approximation de Padé ou *Moment Matching*, qui a ensuite été améliorée par les méthodes basées sur la procédure d'Arnoldi puis de Lanczos [ALEXANDRO, 1984, BREZINSKI, 1999, BAI et SU, 2004, ANTOULAS, 2005]. De ces méthodes, a été proposé l'algorithme de réduction de l'ordre des macro-modèles interconnectés passifs (PRIMA pour Passive Reduced-Order Interconnect Macromodeling Algorithm) [ODABASIOGLU *et al.*, 1998]. Ces méthodes sont particulièrement recommandées dans le cadre des systèmes de très grande dimension (VLSI pour *Very Large Scale Integration*) .

La généralisation des méthodes de réduction de modèles issues de l'automatique aux modèles structurés en second ordre est traitée depuis les années 1990. Citons [MEYER et SIRNIVASAN, 1996] qui ont proposé le premier algorithme de réduction d'un modèle du second ordre, basé sur la troncature de la base équilibrée. Depuis, la méthode a été améliorée par l'algorithme SOBT (pour Second Order Balanced Truncation) proposé par [CHAHLAOUI *et al.*, 2006] et par les algorithmes SOBTp et SOBTpv (respectivement pour Second Order Balanced Truncation Position and Position-Velocity) développés par [REIS et STYKEL, 2007]. Dans le cadre des méthodes de réduction fondées sur les paramètres de Markov, [BAI et SU, 2004] ont proposé l'algorithme SOAR (pour Second Order Arnoldi Pocedure). Toujours grâce aux paramètres de Markov, des algorithmes de préservation de structure ont été présentés tels que l'algorithme SPRIM (pour Structure-Preserving Reduced-Order Interconnect Macromodeling)[FREUND, 2005].

La FIGURE 2.1 (page ci-contre) présente différentes méthodes de réduction de modèles et leurs généralisations dans le cadre des MSSO. Les méthodes en gras sont les méthodes qui seront développées ici. Afin de montrer les qualités d'approximation de ces méthodes, nous allons les appliquer sur un modèle de référence. Dans le cadre du projet NICONET [3] un benchmark de modèle dédié à la réduction de l'ordre des modèles a été publié [CHAHLAOUI et DOOREN, 2002]. Dans ce Benchmark, trois MSSO sont ainsi mis à la disposition de la communauté. La taille des modèles, ainsi que le nombre d'entrées et de sorties sont donnés dans le TABLEAU 2.2 (page ci–contre). Parmi ces trois modèles, le modèle d'immeuble est utilisé pour simplifier la présentation des résultats (Modèle SISO donc un seul diagramme de Bode (*cf.* FIGURE 2.1 (page 56)) et un modèle réduit avec peu de coordonnées pour pouvoir présenter les matrices le cas échéant).

Le modèle d'immeuble décrit l'hôpital universitaire de Los-Angeles qui a 8 étages. Chaque étage possède 3 degrés de liberté (deux translations et une rotation). L'entrée est une force latérale sur le 8^{e} étage et la sortie est la vitesse suivant le même axe.

Les qualités d'approximation des méthodes sont comparées grâce à un critère utilisant l'erreur relative entre le modèle initial et le modèle réduit donné par

$$\frac{||\hat{\mathsf{H}} - \mathsf{H}||_{\mathcal{H}_\infty}}{||\mathsf{H}||_{\mathcal{H}_\infty}} \tag{2.2}$$

où $||\hat{\mathsf{H}} - \mathsf{H}||_{\mathcal{H}_\infty}$ est la norme $\mathcal{H}$-infini du modèle défini par la différence entre le modèle réduit et le modèle initial, et $||\mathsf{H}||_{\mathcal{H}_\infty}$ est la norme $\mathcal{H}$-infini du modèle initial.

3. NICONET est un projet du groupe de travail WGS (WGS pour Working Group of Soft-

	Valeurs propres	Valeurs singulières de Hankel	Paramètres de Markov ou moments
Représentation d'état	– **Agrégation par décomposition modale**	– Perturbation singulière de la réalisation équilibrée – Approximation de la norme de Hankel – **Troncature de la réalisation équilibrée**	– Procédure de Lanczos – Procédure d'Arnoldi – PRIMA
Modèle du second ordre	– **Réduction de Guyan** – **Craig Bampton et SERP** – **IRS, IRS dynamique, IRS itératif**	– **SOBT** – **SOBTp** – **SOBTpv**	– SOAR – SPRIM

Tableau 2.1 – Méthodes de réduction de modèles

Nom	Nombre de coordonnées	Nombre d'entrées	Nombre de sorties
Station spatiale internationale	270	3	3
Immeuble	48	1	1
Poutre	348	1	1

Tableau 2.2 – MSSO proposés par le Benchmark du projet NICORET

2.2 Réduction des modèles linéaires du premier ordre

De nombreuses méthodes ont été présentées dans le cadre de la réduction de l'ordre d'une réalisation d'état. Rappelons que l'approche de la réduction de modèle dans ce cadre ne se préoccupe pas du sens « physique » des états du modèle réduit. Elle cherche à approximer la relation entrée-sortie du modèle initial le plus fidèlement possible sans conserver de structure particulière dans le modèle.

ware), fondé par la communauté européenne dans le cadre du programme BRITE-EURAM III (http ://www.icm.tu-bs.de/NICONET/)

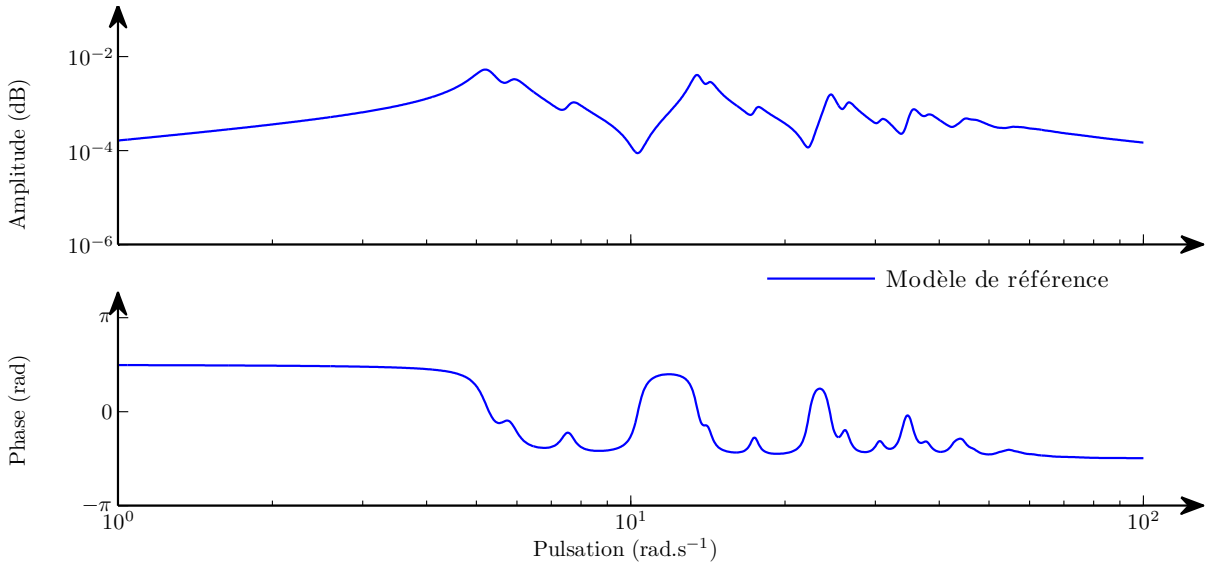


FIGURE 2.1 – Diagramme de Bode d'un modèle d'immeuble : l'hôpital universitaire de Los-Angeles

Les premières méthodes proposées sont issues des méthodes d'analyse modale. Parmi ces méthodes, citons la troncature d'état dans la base modale qui consiste à rechercher et à sélectionner des modes dominants du système par le biais des valeurs propres de la matrice d'état. Cette méthode est présentée à la Section 2.2.1.

Par ailleurs, dans les années 1960, une méthode basée sur les propriétés d'observabilité et d'atteignabilité du système a été proposée. Cette méthode, très utilisée pour la commande des systèmes, consiste à transformer le modèle initial en une réalisation dite équilibrée. Une réalisation équilibrée est une réalisation particulière qui minimise l'énergie nécessaire pour la commande et l'observation du système. La Section 2.2.2 est consacrée à cette méthode.

2.2.1 Méthodes d'agrégation

Les méthodes d'agrégation sont basées sur la projection de l'espace d'état dans une base de dimension inférieure. Elles se basent sur la connaissance *a priori* d'une matrice L telle que :

$$x_r = Lx, \tag{2.3}$$

où $L \in \mathbb{R}^{n_{qr} \times n_q}$ est une matrice de rang plein, appelée matrice d'agrégation [PETIT et PASQUETTI, 1990, RACHID et MEHDI, 1993].

En utilisant l'équation (2.3), l'équivalence entre le modèle initial et le modèle réduit implique que les conditions suivantes soient satisfaites

$$\begin{cases} \mathsf{A}_r L &= L\mathsf{A}, \\ \mathsf{B}_r &= L\mathsf{B}, \\ x_{r0} &= Lx_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Comme par hypothèse la matrice L est de rang plein, elle possède donc une pseudo-inverse. Les matrices A_r et B_r sont donc données par

$$\begin{cases} \mathsf{A}_r &= L\mathsf{A}L^+, \\ \mathsf{B}_r &= L\mathsf{B}. \end{cases} \tag{2.5}$$

La matrice de sortie C_r n'intervient pas directement dans les conditions d'agrégation. Toutefois, elle peut être déterminée par

$$\mathsf{C}_r = \mathsf{C}L^+.$$

Une seconde méthode d'agrégation consiste à rendre égaux les gains statiques du système avec

$$\mathsf{C}_r{\mathsf{A}_r}^{-1}\mathsf{B}_r = \mathsf{C}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}, \qquad \text{soit} \qquad \mathsf{C}_r = (\mathsf{C}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{B})({\mathsf{A}_r}^{-1}\mathsf{B}_r)^+.$$

Les méthodes d'agrégations permettent d'assurer les deux propriétés suivantes [RACHID et MEHDI, 1993] :
- le spectre de A_r est contenu dans A ;
- si (A, B) est commandable alors, $(\mathsf{A}_r, \mathsf{B}_r)$ est commandable.

Démonstration

- Soient λ_i les valeurs propres de A et v_i un vecteur propre associé alors

  $$L\mathsf{A}v_i = \mathsf{A}_r L v_i = \lambda_i L v_i,$$

  donc si $Lv_i \neq 0$, alors Lv_i est un vecteur propre de A_r avec la même valeur propre λ_i.
- Si (A, B) est commandable alors $\mathcal{C}$ est de rang plein et $L\mathcal{C}$ est de rang n_r avec $L\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathsf{B}_r & \mathsf{A}_r\mathsf{B}_r & \dots & {\mathsf{A}_r}^{n_r-1}\mathsf{B}_r \end{pmatrix}$. Finalement, $(\mathsf{A}_r, \mathsf{B}_r)$ est commandable.

□

Plusieurs solutions ont été développées dans la littérature pour le choix de la matrice L. Elles sont présentées ci-après.

2.2.1.1 Utilisation de la matrice d'atteignabilité

Soit $\mathcal{C}$ la matrice d'atteignabilité (cf. Section 1.2.4.3) d'un système d'ordre n, alors :

$$L\mathcal{C} = \begin{bmatrix} L\mathsf{B} & L\mathsf{A}\mathsf{B} & \dots & L\mathsf{A}^{(n-1)}\mathsf{B} \end{bmatrix},$$

et d'après (2.4)

$$L\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathsf{B}_r & \mathsf{A}_r\mathsf{B}_r & \dots & {\mathsf{A}_r}^{(n-1)}\mathsf{B}_r \end{bmatrix}.$$

Comme $\mathcal{C}$ est de rang plein, on a directement

$$L = \begin{bmatrix} \mathsf{B}_r & \mathsf{A}_r\mathsf{B}_r & \dots & {\mathsf{A}_r}^{(n-1)}\mathsf{B}_r \end{bmatrix} \mathcal{C}^+.$$

Cette méthode a comme principal défaut de devoir connaître *a priori* la matrice de commandabilité du système réduit.

2.2.1.2 Décomposition spectrale

La décomposition spectrale consiste à construire la matrice L à partir des valeurs propres de la matrice A. L est donc la matrice des vecteurs propres telle que

$$\Lambda = L\mathsf{A}L^{-1} \qquad \text{soit} \qquad \Lambda = T^{-1}\mathsf{A}T, \quad [4] \tag{2.6}$$

où Λ est la matrice diagonale des valeurs propres (λ_i) de A.

Il existe différents critères afin de sélectionner les valeurs propres conservées dans le modèle réduit. Une première méthode consiste à ordonner les valeurs propres et les vecteurs propres associés selon les parties réelles décroissantes de λ_i : $Re(\lambda_i) \geq Re(\lambda_{i+1})$. Cette méthode est connue sous le nom de troncature modale [SCHILDERS, 2008] et permet d'obtenir le modèle projeté suivant

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_{d1} \\ \dot{x}_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathsf{B}_{d1} \\ \mathsf{B}_{d2} \end{pmatrix} u, \\ y = \begin{pmatrix} \mathsf{C}_{d1} & \mathsf{C}_{d2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{d1} \\ x_{d2} \end{pmatrix} + \mathsf{D}_d u, \end{cases} \tag{2.7}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \mathsf{B}_{d1} \\ \mathsf{B}_{d2} \end{pmatrix} = T^{-1}\mathsf{B}, \qquad \begin{pmatrix} \mathsf{C}_{d1} & \mathsf{C}_{d2} \end{pmatrix} = \mathsf{C}T \qquad \text{et} \qquad \mathsf{D}_d = \mathsf{D}.$$

Choisir les valeurs propres dont les parties réelles sont les plus grandes se justifie par le fait que ces valeurs propres correspondent aux constantes de temps les plus grandes du système. Ainsi, les valeurs propres éliminées correspondent aux constantes de temps les plus faibles qui sont supposées atteindre leur régime asymptotique rapidement. D'autres solutions de sélection des valeurs propres ont été proposées. Par exemple, une méthode basée sur l'étude de la contribution énergétique de chaque mode [PETIT et PASQUETTI, 1990] ou une méthode basée sur l'étude des résidus [VARGA, 1995].

Une fois le modèle projeté selon l'équation (2.7), l'élimination des valeurs propres non retenues permet d'obtenir le modèle réduit suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_{d1} = \Lambda_1 x_{d1} + \mathsf{B}_{d1} u, \\ \hat{y} = \mathsf{C}_{d1} x_{d1} + \mathsf{D}_d u. \end{cases}$$

2.2.2 Réalisation équilibrée

La méthode de la réalisation équilibrée [MOORE, 1981, PERNEBO et SILVERMAN, 1982, LAUB *et al.*, 1987] ou symétrisassions interne fait appel aux grammiens d'atteignabilité (Wa) et d'observabilité (Wo) du système (*cf.* Section 1.2.4.6). À la Section 1.2.4.6 nous avons vu que le grammien d'atteignabilité quantifie l'énergie nécessaire pour amener un état à une valeur voulue. De même, le grammien d'observabilité quantifie la quantité d'énergie fournie par un état lors de son observation. Un critère pour réduire un modèle peut être basé sur l'élimination des états qui demandent le plus d'énergie pour atteindre une position et/ou qui fournissent le moins d'énergie lors de leur observation. Comme les grammiens d'atteignabilité et d'observabilité sont dépendants de la base dans laquelle est exprimée la réalisation d'état, la solution est de chercher

4. Les méthodes d'agrégation ont initialement été proposées avec le changement de variable $x_r = Lx$ mais les méthodes de projection font plus souvent appel à la formule inverse $x = Tx_r$.

une base où les deux grammiens sont équivalents. Cette base est dite base équilibrée et, dans ce cas, les grammiens vérifient $\mathsf{Wa} = \mathsf{Wo} = \Sigma = diag(\sigma_i)$ où σ_i sont appelées les valeurs singulières de Hankel et sont données par :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathsf{WaWo})}.$$

Par convention, les valeurs propres de Hankel sont triées telles que

$$\sigma_i \geq \sigma_{i+1}.$$

Une propriété de la réalisation équilibrée est que toute partition quelconque de cette réalisation est stable [RACHID et MEHDI, 1993]. Il existe différentes méthodes pour trouver les matrices de transformation T permettant d'équilibrer le système [VARGA, 1991]. Si certaines méthodes, basées directement sur les grammiens, permettent de trouver une réalisation équilibrée, la méthode utilisant les facteurs de Cholesky des grammiens est connue pour être la plus stable numériquement.

Soit R_a et R_o les facteurs de Cholesky des grammiens tels que

$$\mathsf{Wa} = R_a^T R_a, \qquad \mathsf{Wo} = R_o^T R_o,$$

alors la décomposition en valeurs singulières de la matrice $R_o R_a^T$ est

$$R_o R_a^T = U \Sigma V^T,$$

et la matrice de transformation T et son inverse sont

$$T = R_a^T V \Sigma^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad T^{-1} = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T R_o. \tag{2.8}$$

La procédure présentée ci-dessus permet de trouver une des transformations permettant d'équilibrer le système. Cette transformation permet aussi la transformation du grammien

$$\tilde{\mathsf{W}}a = T^{-1}\mathsf{Wa}T^{-T} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathsf{W}}o = T^T \mathsf{Wo} T.$$

Comme la transformation est basée sur les valeurs singulières de Hankel, une décomposition des grammiens équilibrés peut être définie par

$$\tilde{\mathsf{W}}a = \tilde{\mathsf{W}}o = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix},$$

où Σ_1 comporte les plus grandes valeurs propres de Hankel. De même en décomposant par blocs les matrices U et V telles que

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}^T,$$

les matrices de transformation

$$T^+ = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U_1^T R_o \qquad T = R_a^T V_1 \Sigma^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

appliquées à la représentation d'état donnent

$$\mathsf{A}_r = T^+ \mathsf{A} T \qquad \mathsf{B}_r = T^+ \mathsf{B} \qquad \mathsf{C}_r = \mathsf{C}T \qquad \mathsf{D}_r = \mathsf{D}.$$

Un critère pour déterminer le nombre de valeurs singulières à conserver est de trouver le plus petit r tel que [MOORE, 1981]

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i^2}.$$

De plus, si $\mathsf{H}(s)$ et $\mathsf{H}_r(s)$ sont respectivement les fonctions de transfert du modèle initial et réduit alors la norme infinie de l'erreur est bornée par

$$\|\mathsf{H}(j\omega) - \mathsf{H}_r(j\omega)\|_{\mathcal{H}\infty} \leq 2 \sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i, \qquad \text{pour tout } \omega.$$

2.2.3 Conclusion

Cette section a posé les bases théoriques afin de réduire un modèle grâce aux méthodes d'agrégation et à la troncature de la base équilibrée. La méthode de troncature équilibrée est une méthode efficace au sens du critère d'erreur relative comme le montrent les valeurs données dans le Tableau 2.3 (exemple de l'immeuble cité à la Section 2.1). La Figure 2.2 (page ci-contre) présente le diagramme de Bode du modèle d'état associé au modèle d'immeuble structuré en second ordre réduit à une dimension de 8 états ; ce qui correspond à un modèle du second ordre de dimension 4. Une limitation de ces méthodes est la non préservation de structure dans le modèle réduit.

méthodes de réduction	troncature modale	troncature de la base équilibrée
norme relative de l'erreur	0,319	0,144

Tableau 2.3 – Comparaison de l'erreur relative des modèles réduits de l'immeuble obtenus par troncature modale et troncature de la base équilibrée

2.3 Réduction des modèles structurés en second ordre par condensation

La réduction de MSSO a tout d'abord été proposée en dynamique des structures. La dynamique des structures modélise des objets de toute nature (un mât, un pont, un bâtiment, une caisse de voiture, un avion...) par une discrétisation spatiale de l'objet. À l'ensemble des points (ou nœuds) définis lors de la discrétisation est liée une masse, et les nœuds sont reliés entre eux par une liaison ressort-amortisseur. Cette représentation est un MSSO où chaque nœud représente une coordonnée généralisée. L'approche de la réduction de modèles dans le cadre de la dynamique des structures diffère en plusieurs points de l'approche automaticienne, mais le principal avantage de ces méthodes est la préservation des conditions *structurelles* lors de la construction du modèle réduit. L'ensemble de ces méthodes porte le nom générique de condensation.

La première méthode a avoir ainsi été développée est la réduction de Guyan qui est une méthode de réduction dite statique. Cette méthode a été améliorée par la réduction dynamique,

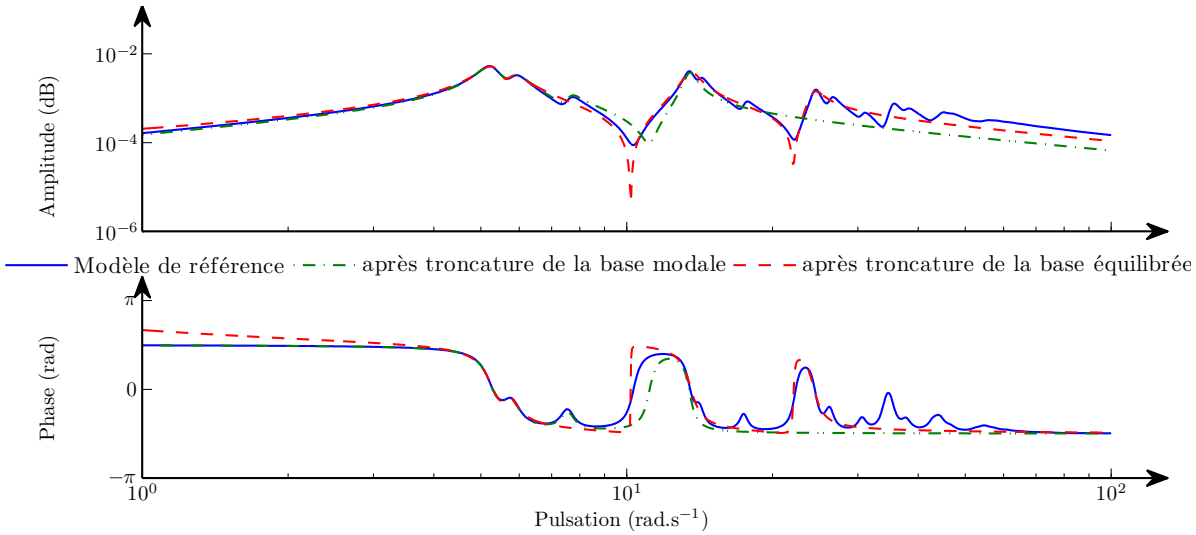


FIGURE 2.2 – Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et des modèles obtenus par troncature de la base modale et troncature de la base équilibrée

et par les méthodes IRS (pour Improved Reduction Synthesis method). Plus proches des méthodes de réduction connues en automatique, deux autres méthodes sont présentées : SEREP (pour System Equivalent Reduction-Expansion Process) et la méthode de Craig-Bampton, qui se basent sur les valeurs propres du modèle.

Avant de présenter ces méthodes, il est nécessaire de présenter les notions de degrés de liberté maîtres et esclaves.

2.3.1 Degrés de liberté maîtres et esclaves

À chaque masse généralisée est associée une ou plusieurs coordonnées qui définissent le ou les degrés de liberté de la masse. Chaque degré de liberté de la structure appartient à l'une des deux catégories exclusives suivantes :

- les degrés de liberté d'appui, appelés communément les conditions aux limites, liaisons ou interfaces ;
- les degrés de liberté internes qui ne sont pas impliqués dans les appuis.

Les degrés de liberté d'appui sont la partie de la structure immobilisée. Les degrés de liberté internes peuvent, quant à eux, être excités par une force et leurs réponses (un mouvement, une vitesse ou une accélération), peuvent être observées. Les degrés de liberté maîtres sont les degrés de liberté internes sur lesquels des forces sont appliquées ou des observations sont effectuées. Les degrés de liberté esclaves sont l'ensemble des degrés de liberté internes qui ne sont pas maîtres. La FIGURE 2.3 (page suivante) illustre les différents degrés de liberté.

Une réduction radicale d'un MSSO par une méthode de la dynamique des structures serait de ne conserver que les degrés de liberté maîtres. Mais généralement, une telle méthode n'approxime que très peu le modèle initial. Ajouter des degrés de liberté esclaves comme degrés de liberté maîtres est généralement nécessaire. Le choix des degrés de liberté esclaves conservés n'est pas trivial. L'objectif est de conserver les degrés représentant le comportement vibratoire du modèle. Une solution pour les choisir est d'éliminer les coordonnées relatives aux plus grands coefficients de la matrice K ou aux plus petits coefficients de la matrice M. Dans ce cas, les degrés éliminés

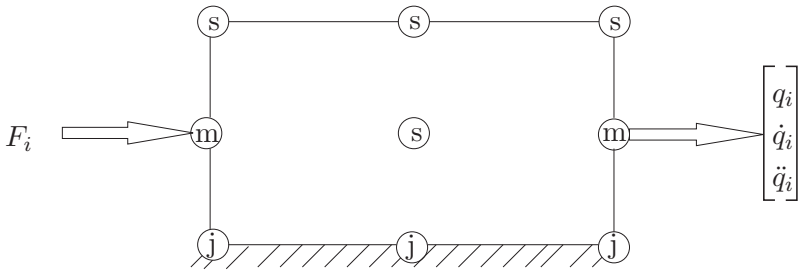


FIGURE 2.3 – Degrés de liberté d'appui (j), interne et maître (m), interne et esclave (s)

sont associés aux parties les moins flexibles du modèle. Une sélection automatique peut être basée sur la sélection des coordonnées de plus faible ratio $\frac{k_{ii}}{m_{ii}}(i = 1, \ldots, n_q)$ des éléments diagonaux des matrices de masse et de raideur.

Il est fréquent dans les méthodes de réduction issues de la dynamique des structures de ne pas considérer la matrice des amortissements et de travailler avec l'équation

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = \mathbb{O}.$$

Une fois le choix des coordonnées maîtres et esclaves effectué, le modèle peut être écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_m \\ \ddot{q}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_m \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

où l'indice m se réfère aux degrés de liberté maître et s se réfère aux degrés de liberté esclave.

Une fois la sélection des coordonnées maîtres et esclaves réalisée, les différentes méthodes présentées ci-dessous permettent de réduire l'ordre d'un MSSO. Contrairement aux méthodes utilisées avec des représentations d'état, le modèle réduit est trouvé en utilisant une matrice de réduction $T \in \mathbb{R}^{n_q \times n_{qr}}$ qui n'est pas une matrice de transformation :

$$M_r = T^T M T, \quad C_r = T^T C T, \quad K_r = T^T K T, \quad F_r = T^T F, \quad G_{p_r} = G_p T, \quad G_{vr} = G_v T, \quad G_{ar} = G_a T.$$

2.3.2 Réduction de Guyan, réduction dynamique

Dans [GUYAN, 1965], l'auteur propose d'éliminer les termes inertiels des coordonnées esclaves $M_{sm}\ddot{q}_m + M_{ss}\ddot{q}_s = \mathbb{O}$, ce qui permet d'écrire selon (2.10)

$$\mathbb{O} = M_{sm}\ddot{q}_m + M_{ss}\ddot{q}_s + K_{sm}q_m + K_{ss}q_s, \tag{2.11}$$

$$q_s = -K_{ss}^{-1}K_{sm}q_m. \tag{2.12}$$

Basée sur cette équation, la matrice de réduction T proposée est

$$T = \begin{pmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{pmatrix}.$$

La réduction dynamique calcule la matrice de transformation T_ω dépendant de la pulsation ω autour de laquelle l'approximation est faite. En appliquant la transformation de Laplace et en résolvant (2.10) pour les degrés de liberté maîtres, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{O} &= (-M_{sm}\omega^2 + K_{sm})q_m(\omega) + (-M_{ss}\omega^2 + K_{ss})q_s(\omega), \\ q_s(\omega) &= -(-M_{ss}\omega^2 + K_{ss})^{-1}(-M_{sm}\omega^2 + K_{sm})q_m(\omega). \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de réduction est

$$\begin{pmatrix} q_m \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ -(-M_{ss}\omega^2 + K_{ss})^{-1}(-M_{sm}\omega^2 + K_{sm}) \end{pmatrix} q_m = T q_m. \tag{2.13}$$

Si $\omega = 0$, la matrice de réduction devient

$$T = \begin{pmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1} K_{sm} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

ce qui est la réduction de Guyan, aussi appelée réduction statique.

Afin de montrer les qualités d'approximation de la méthode de Guyan et de la méthode de réduction dynamique, nous appliquons ces deux algorithmes sur le modèle d'immeuble. Le modèle réduit recherché ne conserve que quatre degrés de liberté. Le degré maître conservé est la coordonnée q_1 car c'est cette dernière qui est excitée et observée. Les trois degrés de liberté esclaves ajoutés au modèle réduit sont les coordonnées q_2, q_{14} et q_{19} correspondant au plus fort ratio $\frac{k_{ii}}{m_{ii}} (i = 1, \ldots, n_q)$ des éléments diagonaux des matrices de masses et de raideurs.

Alors que la réduction de Guyan approxime le modèle à la fréquence nulle, la réduction dynamique a été paramétrée pour approximer le modèle autour de $\omega = 13,5$ rad.s^{-1}, ce qui correspond au second pic du diagramme de Bode. La Figure 2.4 permet d'observer que le modèle réduit par la méthode de Guyan fait une bonne approximation statique mais qu'il n'approxime pas les dynamiques. Le modèle réduit par la méthode de réduction dynamique assure une bonne approximation à la dynamique désirée mais n'approxime ni la partie statique, ni les autres dynamiques.

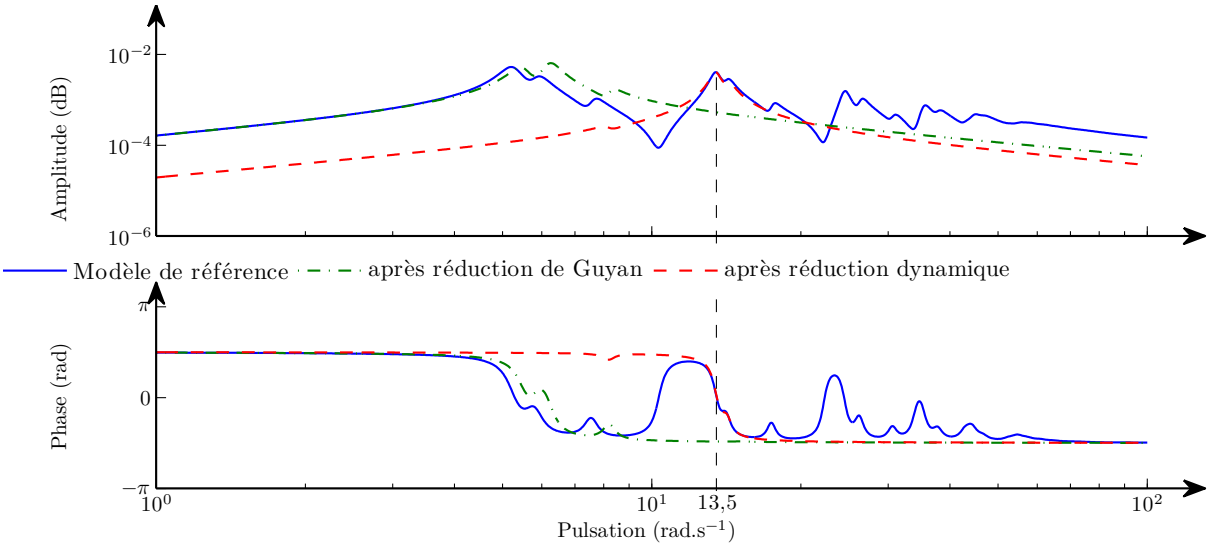


Figure 2.4 – Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et des modèles obtenus par réduction de Guyan et par réduction dynamique

2.3.3 Méthodes IRS

Par rapport aux méthodes présentées ci-dessus, les méthodes IRS (Improved Reduction System) tiennent aussi compte des termes inertiels de la partie esclave du modèle initial dans le modèle réduit [KOUTSOVASILIS et BEITELSCHMIDT, 2008].

L'équation sans amortissement du modèle réduit est

$$\begin{aligned} M_r\ddot{q}_m + K_r q_m =& \mathbb{0}, \\ \text{ce qui permet d'exprimer} \quad \ddot{q}_m =& -M_r^{-1}K_r q_m. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Par ailleurs, la dérivation de l'équation (2.12) donne

$$\ddot{q}_s = -K_{ss}^{-1}K_{sm}\ddot{q}_m. \tag{2.16}$$

En substituant (2.15) et (2.16) dans (2.11), nous obtenons alors l'expression des coordonnées esclaves

$$q_s = \left(K_{ss}^{-1}\left(M_{sm} - M_{ss}K_{ss}^{-1}K_{sm}\right)M_r^{-1}K_r - K_{ss}^{-1}K_{sm}\right)q_m.$$

L'expression $K_{ss}^{-1}\left(M_{sm} - M_{ss}K_{ss}^{-1}K_{sm}\right)$ peut être remplacée par SMT_g avec

$$S = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & K_{ss}^{-1} \end{pmatrix},$$

et finalement la matrice de réduction est

$$T = T_g + SMT_g M_r^{-1}K_r, \tag{2.17}$$

où T_g est la matrice de réduction de la méthode de Guyan (*cf.* Section 2.3.2).

La matrice de réduction T de la méthode IRS dépend des matrices de masse et de raideur obtenues par la réduction de Guyan (*cf.* (2.15)). Afin de minimiser l'erreur induite par cette méthode, la méthode IRS peut être étendue à la méthode IRS itérative [FRISWELL *et al.*, 1995]. Une meilleure estimation des matrices de masse et de raideur réduites est utilisée dans la définition de T en utilisant les itérations suivantes

$$T_{i+1} = T_g + SMT_i M_{r_i}^{-1}K_{ri}$$

La convergence de la méthode itérative IRS n'est pas garantie, mais dans [FRISWELL *et al.*, 1995], les auteurs montrent qu'en cas de convergence, la transformation obtenue par IRS est exactement la même que celle produite par la méthode SEREP.

En outre, de façon similaire à la réduction de Guyan il est possible d'améliorer la méthode IRS avec la méthode IRS dynamique. Cette méthode approxime parfaitement le modèle autour d'une pulsation ω en posant

$$-M_r\omega^2 q_m + K_r q_m = \mathbb{0}. \tag{2.18}$$

En cherchant une approximation à une nouvelle pulsation $\Omega^2 - \omega^2$ du modèle réduit nous obtenons

$$\ddot{q}_m = {M_r}^{-1}D_r q_m, \tag{2.19}$$

avec $D_r = M_r\Omega^2 - K_r$. La dérivée de (2.13) donne

$$\ddot{q}_s = -D_{ss}^{-1}D_{sm}\ddot{q}_m, \tag{2.20}$$

avec $D_{ss} = (-M_{ss}\Omega^2 + K_{ss})$ et $D_{sm} = (-M_{sm}\Omega^2 + K_{sm})$.

Puis, en applicant la transformée de Laplace sur la partie esclave de (2.11) et en posant $s = j(\Omega^2 - \omega^2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{0} =& - M_{sm}(\Omega^2 - \omega^2)q_m - M_{ss}(\Omega^2 - \omega^2)q_s + K_{sm}q_m + K_{ss}q_s, \\ \mathbb{0} =& M_{sm}\ddot{q}_m + M_{ss}\ddot{q}_s + D_{sm}q_{sm} + D_{ss}q_{ss}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Substituer (2.19) et (2.20) dans (2.21) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{0} =& M_{sm}\ddot{q}_m + M_{ss}\ddot{q}_s + D_{sm}q_m + D_{ss}q_s, \\ q_s =& D_{ss}^{-1}\left((M_{sm} - M_{ss}D_{ss}^{-1}D_{sm}){M_r}^{-1}D_r + D_{sm}\right)q_m. \end{aligned}$$

L'équation $D_{ss}^{-1}(M_{sm} - M_{ss}D_{ss}^{-1}D_{sm})$ peut être remplacée par S_dMT_d avec :

$$S_d = \begin{pmatrix} \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & D_{ss}^{-1} \end{pmatrix},$$

où T_d est la matrice de réduction dynamique (2.13). Finalement, la matrice de réduction est

$$T = T_d + S_dMT_d{M_r}^{-1}D_r. \tag{2.22}$$

Afin de montrer les qualités d'approximation des méthodes IRS, nous reprenons l'exemple de l'immeuble utilisé dans les sections précédentes. Les degrés maîtres et esclaves conservés sont les mêmes que ceux de la réduction de Guyan. De manière identique, la réduction IRS dynamique est paramétrée pour approximer le modèle à la pulsation $\omega = 13,5$ rad.s^{-1}. La Figure 2.5 montre que la méthode IRS perd un peu de précision statique par rapport à la méthode de Guyan mais approxime correctement les premières dynamiques du système. La méthode de dynamique IRS permet de sélectionner la fréquence autour de laquelle l'approximation est faite. Pour finir, la méthode itérative quant à elle permet d'approximer une plus large bande de dynamique.

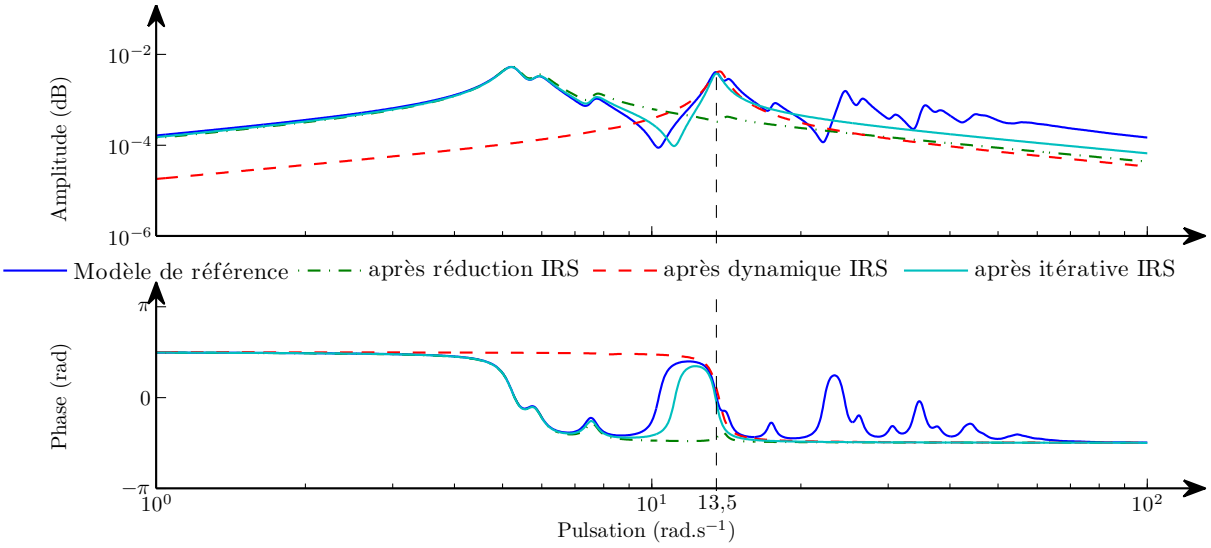


Figure 2.5 – Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et des modèles obtenus par les méthodes IRS (IRS, IRS dynamique, IRS itérative)

2.3.4 SEREP et Craig-Bampton

Comme pour les méthodes présentées précédemment, la méthode SEREP est basée sur la réduction modale du modèle sans amortissement [JUNG *et al.*, 2004].

En appliquant la transformation de Fourier sur la réponse libre sans amortissement, on obtient

$$(-M\omega^2 + K)q = 0,$$

ce qui est un problème aux valeurs propres généralisées

$$K\phi = M\phi\Lambda,$$

où ϕ et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{nq})$ sont les vecteurs et les valeurs propres.

Si les matrices M et K sont symétriques avec $\det(M) \neq 0$, alors les conditions d'orthogonalité sont

$$\phi^T K \phi = \Lambda, \tag{2.23}$$
$$\phi^T M \phi = I. \tag{2.24}$$

En se référant à l'équation (2.10), l'équation (2.23) peut être partitionnée en

$$\begin{pmatrix} \phi_{mm}^T & \phi_{sm}^T \\ \phi_{ms}^T & \phi_{ss}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{mm} & \phi_{ms} \\ \phi_{sm} & \phi_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{mm} & 0 \\ 0 & \Lambda_{ss} \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

De cette équation il est possible d'obtenir

$$\phi_{mm}^T K_{mm} \phi_{mm} + \phi_{sm}^T K_{sm} \phi_{mm} + \phi_{mm}^T K_{ms} \phi_{mm} + \phi_{sm}^T K_{ss} \phi_{sm} = \Lambda_{mm}.$$

En définissant la matrice de réduction T par :

$$\phi_{sm} = T\phi_{mm}, \tag{2.26}$$

et en substituant (2.26) dans (2.25) l'expression devient

$$\phi_{mm}^T (K_{mm} + T^T K_{sm} + K_{ms} T + T^T K_{ss} T)\phi_{mm} = \Lambda_{mm}. \tag{2.27}$$

En outre, en considérant les conditions d'orthogonalité pour la matrice de raideur réduite,

$$\phi_{mm}^T K_r \phi_{mm} = \Lambda_{mm} \tag{2.28}$$

par substitution entre (2.27) et (2.28) nous obtenons

$$K_r = K_{mm} + T^T K_{sm} + K_{ms} T + T^T K_{ss} T,$$
$$K_r = T_{mr}^T K T_{mr},$$

avec

$$T_{mr} = \begin{pmatrix} I \\ \phi_{sm}\phi_{mm}^{-1} \end{pmatrix}.$$

De façon identique pour la matrice de masse réduite, nous obtenons

$$M_r = T_{mr}^T M T_{mr}.$$

La méthode de Craig-Bampton [CRAIG et BAMPTON, 1968] aussi appelée Component Mode Synthesis (CMS), combine la méthode de la réduction de Guyan et la méthode SEREP [WAMSLER, 2005]. Plus particulièrement, cette méthode consiste à ajouter au modèle réduit des effets dynamiques de la partie esclave. Pour cela, nous partons du problème aux valeurs propres de la partie esclave

$$K_{ss}\phi = M_{ss}\phi\Lambda.$$

La partition de ϕ permettant de sélectionner les plus grandes valeurs de Λ s'exprime par

$$T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ G & \phi_r \end{pmatrix},$$

où $G = -(-M_{ss}\omega^2 + K_{ss})^{-1}(-M_{sm}\omega^2 + K_{sm})$ provient de la réduction dynamique et ϕ_r est la partie conservée de ϕ.

La FIGURE 2.6 montre une comparaison des diagrammes de Bode issue du modèle réduit par la méthode SEREP et par la méthode de Craig-Bampton. L'analyse des résultats obtenus montre que la méthode IRS itérative converge vers la méthode SEREP. La méthode de Craig-Bampton, quant à elle, est assez similaire à la méthode de Guyan en approximant correctement le gain statique mais ne donne pas de bons résultats pour approximer les dynamiques du système.

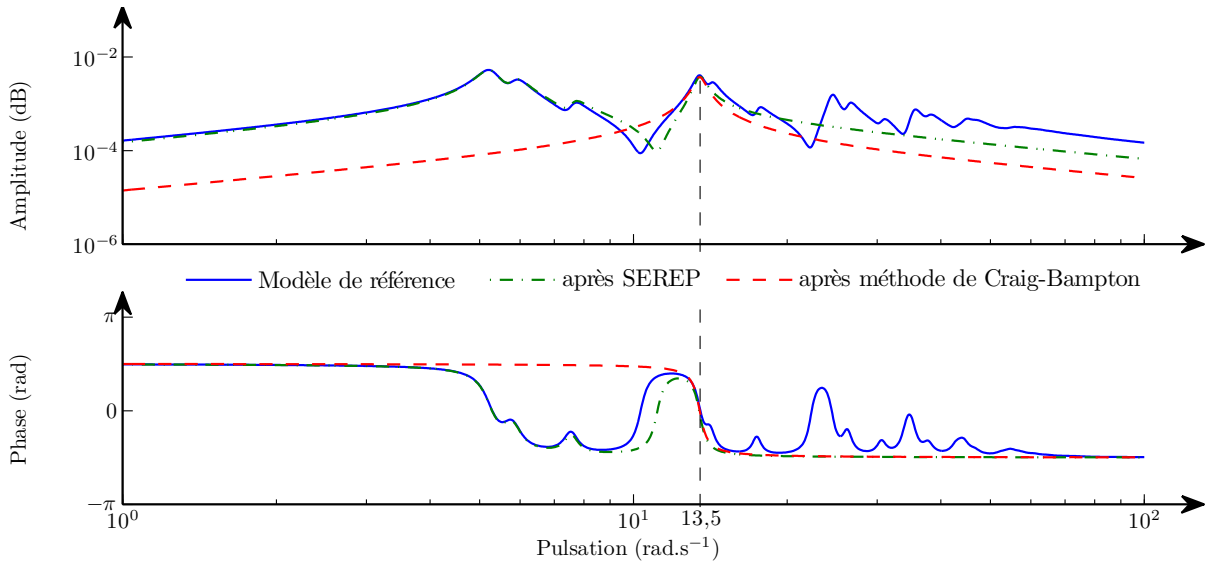


FIGURE 2.6 – Diagramme de Bode du modèle initial d'immeuble et des modèles réduits par la méthode SEREP et par la méthode de Craig-Bampton

2.3.5 Conclusion

L'approche de la réduction des modèles proposée par la dynamique des structures est une approche « physique » de la problématique dans le sens où le choix des degrés de liberté conservés est fait *a priori*. De plus, les matrices de réduction sont déduites du modèle libre sans amortissement. En effet, la dynamique des structures cherche à résoudre l'équation

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = \mathbb{O},$$

qui est solvable par un problème aux valeurs propres

$$K\phi = M\phi\Lambda,$$

seulement si la matrice des vecteurs propres ϕ utilisée comme matrice de transformation, diagonalise en même temps M, K et C, ce qui n'est vrai que sous certaines conditions. La condition la plus connue est donnée par les conditions de Rayleigh qui consistent à supposer que les amortissements sont proportionnels aux masses et/ou aux raideurs, c'est-à-dire qu'ils résultent d'une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur, exprimé par

$$C = \alpha M + \beta K. \tag{2.29}$$

Ainsi, dans le cas général, les méthodes de réduction ne prennent pas en compte l'apport des amortissements dans la dynamique du modèle réduit.

Par contre, ces méthodes ont l'avantage de préserver la cohérence physique des états du modèle réduit car ce dernier respecte les conditions *structurelles*. De plus, les matrices d'entrées et de sorties ne sont pas modifiées dans le sens où seuls des coefficients nuls ont été éliminés. À titre illustratif, voici les matrices obtenues par la réduction de Guyan pour le modèle d'immeuble

$$M = \begin{pmatrix} 2,425 & -0,016 & -0,182 & 0,107 \\ -0,016 & 1,692 & -0,477 & -0,282 \\ -0,182 & -0,477 & 2,735 & 0,039 \\ 0,107 & -0,282 & 0,039 & 2,254 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1,293 & -0,018 & -0,094 & 0,039 \\ -0,018 & 0,990 & -0,098 & -0,132 \\ -0,094 & -0,098 & 1,712 & 0,066 \\ 0,039 & -0,131 & 0,067 & 1,282 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 88,459 & -9,973 & -4,412 & -13,589 \\ -9,969 & 144,884 & 131,008 & 7,511 \\ -4,435 & 130,931 & 341,114 & 44,652 \\ -13,434 & 8,025 & 45,837 & 158,564 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 0,0137 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ G_p &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G_v &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G_a &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si les méthodes de réduction de l'ordre des MSSO issues de la dynamique des structures permettent de conserver les conditions *structurelles* du modèle lors de la réduction, l'approximation effectuée n'est généralement pas de bonne qualité. Le Tableau 2.4 donne une comparaison les erreurs relatives des modèles réduits issus des méthodes de condensation.

méthode de réduction	Guyan	Réduction dynamique	IRS	IRS dynamique	IRS itérative	SEREP	Craig-Bampton
norme relative de l'erreur	0,954	0,995	0,770	0,995	0,319	0,319	1,448

Tableau 2.4 – Erreurs relatives des modèles d'immeuble réduits par les méthodes de condensation

2.4 Réduction des modèles linéaire du second ordre

La Section 2.2 a montré que les méthodes issues de la science de l'automatique permettent de trouver des modèles réduits ayant une capacité d'approximation du modèle initial supérieure à celle permise par les méthodes de condensation. En revanche, ces méthodes ne préservent pas la structure du modèle.

La Section 2.3 donne les méthodes de réduction d'un MSSO tout en préservant les conditions *structurelles* proposées par la dynamique des structures. Nous avons vu que si les méthodes permettent de conserver les propriétés structurelles, ces dernières ne s'appliquent qu'aux systèmes simple entrée et les résultats pratiques montrent que la symétrie des matrices n'est pas parfaitement conservée.

Par ailleurs, à travers les développements du Chapitre 1 nous montrons la possibilité de transformer une représentation d'état en MSSO. Cette dernière section présente l'application de ces développements permettant de trouver des MSSO réduits combinant qualité d'approximation et préservation des conditions *structurelles*.

2.4.1 Troncature modale et préservation des conditions *structurelles*

Dans le cas d'un système linéaire du premier ordre, la troncature modale est effectuée en diagonalisant la représentation d'état avec un tri des valeurs propres afin d'éliminer les valeurs propres dont les parties réelles sont les plus faibles. À la Section 1.3.3.5 a été présenté l'Algorithme 1.1 (page 30) pour diagonaliser les MSSO simple entrée. Ainsi, il est possible d'utiliser cet algorithme pour effectuer une troncature modale sur un MSSO.

À la Section 1.3.3, il a été montré que pour reconstruire un MSSO respectant les conditions *structurelles* à partir d'une réalisation d'état, il est nécessaire d'effectuer un premier tri des valeurs propres de la matrice Λ. En effet, Λ doit être décomposée en (*cf.* théorème 1.3.3 (page 26))

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \Lambda_c & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \Lambda_{r1} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_c & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \Lambda_{r2} \end{pmatrix},$$

où Λ_c et $\bar{\Lambda}_c$ sont les matrices diagonales des valeurs propres complexes et Λ_{r1} et Λ_{r2} sont les deux matrices diagonales des valeurs propres réelles (*cf.* Section 1.3.3.3).

Ce tri a pour objectif d'assurer qu'à une valeur propre complexe dans la matrice Λ_1 est associée une valeur propre complexe dans la matrice Λ_2 de telle sorte que la somme et le produit de ces matrices soient réels. Ceci permet d'obtenir des matrices de raideur et d'amortissement à coefficients réelles avec

$$K = \Lambda_1\Lambda_2, \qquad C = -\Lambda_1 - \Lambda_2, \qquad (\textit{cf.} \text{ équation } (1.31)).$$

D'autres tris sont envisageables à condition de respecter l'association des valeurs propres complexes. En particulier, il est possible de trier les valeurs propres de telle sorte que leurs parties réelles apparaissent de manière décroissante dans l'une des matrices. Dans la seconde matrice, sont alors associées aux valeurs propres complexes leurs conjuguées, et aux valeurs propres réelles les valeurs propres décroissantes. Au final, la réduction d'un modèle du second ordre par troncature de la base modale est donnée dans l'Algorithme 2.1 (page suivante).

En effectuant ce tri, les matrices diagonales K_d et C_d sont triées de telle sorte que les coefficients d'amortissement et de raideur sont croissants le long de leurs diagonales. Ainsi en décomposant le MSSO diagonal sous la forme

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} M_{d1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & M_{d2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_{d1} \\ \ddot{q}_{d2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{d1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & C_{d2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{d1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & K_{d2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{d1} \\ F_{d2} \end{pmatrix} u, \\ \hat{y} = \begin{pmatrix} G_{pd1} & G_{pd2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{d1} \\ q_{d2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{vd1} & G_{vd2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{d1} \\ \dot{q}_{d2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{ad1} & G_{ad2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_{d1} \\ \ddot{q}_{d2} \end{pmatrix}, \end{cases}$$

Algorithme 2.1 Troncature de la base modale avec préservation des conditions *structurelles* (MTPSC)

Entrées: $M, C, K, F, G_p, G_v, G_a$
Sorties: $M_r, C_r, K_r, F_r, G_{pr}, G_{vr}, G_{ar}$
transformer le MSSO en une représentation d'état selon (1.3.3)
résoudre $\Phi A = \Lambda\Phi$
pour $j = 1$ à n_q **faire**
selectionner λ_i, la valeur propre de Λ de plus grande partie réelle
poser $\Lambda_1(j,j) = \lambda_i$
si λ_i est complexe **alors**
$\Lambda_2(j,j) = \bar{\lambda}_i$
sinon
selectionner λ_i réel de plus grande partie réelle
poser $\Lambda_2(j,j) = \lambda_i$
fin si
fin pour
calculer Φ et Φ^{-1} correspondant à Λ
éliminer un nombre pair de valeurs propres correspondant aux plus petites valeurs propres réelles
calculer $(M, C, K, F, G_p, G_v, G_a) = \text{SSSI2MSSO}(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D})$ avec l'Algorithme 1.1 (page 30)

et en éliminant les coordonnées généralisées q_{d2} selon le critère retenue, on ne conserve que les coefficients d'amortissement et de raideur les plus petite dans le MSSO. Le MSSO réduit est donné par

$$\begin{cases} M_{d1}\ddot{q}_{d1} + C_{d1}\dot{q}_{d1} + K_{d1}q_{d1} + F_{d1}u, \\ \hat{y} = G_{p_{d1}}q_{d1} + G_{v\,d1}\dot{q}_{d1} + G_{a\,d1}\ddot{q}_{d1}. \end{cases}$$

Le MSSO ainsi obtenu respecte parfaitement les conditions *structurelles* car il est diagonal et donc symétrique. En revanche, les matrices d'entrée est un vecteur dont tous les coefficients sont égaux à 1. Il peut être préférable d'avoir un vecteur d'entrée qui n'excite qu'une seule coordonnée généralisée. Par exemple pour représenter un système dont l'entrée est une force appliquée en un point. Pour cela, il est possible d'utiliser une méthode similaire à celle proposée par [HOULSTON, 2006] pour transformer une représentation d'état en MSSO (*cf.* Section 1.3.3.1).

En considérant la décomposition QR du vecteur F_{d1}

$$F_{d1} = QR = Q \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

où r est un coefficient, la matrice de transformation

$$T^T = \frac{f}{r} Q^T,$$

appliquée au MSSO réduit permet d'obtenir un MSSO respectant les conditions *structurelles*. Suite à cette transformation, la matrice F a tous ses coefficients nuls sauf le premier qui vaut f. En effet :

$$T^T F_{d1} = \frac{f}{r} Q^T F_{d1} = \frac{f}{r} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque la décomposition QR assure que la matrice Q est orthogonale, alors la transformation des éléments du MSSO est donnée par

$$\begin{cases} M_r &= T^T M_{d1} T, \\ C_r &= T^T C_{d1} T, \\ K_r &= T^T K_{d1} T, \end{cases} \qquad \begin{cases} F_r &= T^T F_{d1}, \\ G_p &= G_{p_{d1}} T, \\ G_v &= G_{v d1} T, \\ G_a &= G_{a d1} T, \end{cases}$$

et les matrices $(M_r, C_r K_r)$ sont symétriques.

La réduction du modèle d'immeuble, grâce à cette méthode, permet d'obtenir un MSSO dont la fonction de transfert est identique à celle issue de la méthode SERP ou à celle issue de la troncature modale. La FIGURE 2.7 (page suivante) illustre ce point avec le critère d'erreur qui vaut $0,319$.

Les matrices du modèle obtenu ont bien la structure voulue, c'est-à-dire qu'elles sont symétriques et définies positives. En outre, la matrice d'entrée est équivalente à la matrice d'entrée du modèle initial, où seuls les coefficients nuls ont été éliminés. En résumés, les matrices obtenues pour cet exemple sont

$$M_r = \begin{pmatrix} 4,69.10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,69.10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,69.10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,69.10^{-5} \end{pmatrix},$$

$$C_r = \begin{pmatrix} 2,70.10^{-5} & 6,12.10^{-7} & 2,82.10^{-8} & -3,02.10^{-6} \\ 6,12.10^{-7} & 2,51.10^{-5} & -5,13.10^{-8} & -1,07.10^{-6} \\ 2,82.10^{-8} & -5,13.10^{-8} & 2,59.10^{-5} & -1,26.10^{-6} \\ -3,02.10^{-6} & -1,07.10^{-6} & -1,26.10^{-6} & 2,99.10^{-5} \end{pmatrix},$$

$$K_r = \begin{pmatrix} 3,55.10^{-3} & 5,81.10^{-4} & 2,68.10^{-5} & -2,87.10^{-3} \\ 5,81.10^{-4} & 1,77.10^{-3} & -4,87.10^{-5} & -1,01.10^{-3} \\ 2,68.10^{-5} & -4,87.10^{-5} & 2,51.10^{-3} & -1,20.10^{-3} \\ -2,87.10^{-3} & -1,01.10^{-3} & -1,20.10^{-3} & 6,37.10^{-3} \end{pmatrix},$$

$$F_r = \begin{pmatrix} 0,0137 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$G_{pr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_{vr} = \begin{pmatrix} 2,25.10^{-5} & 5,47.10^{-6} & 1,12.10^{-5} & -4,16.10^{-5} \end{pmatrix},$$

$$G_{ar} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Troncature de la base équilibrée d'un modèle structuré en second ordre

À la Section 1.3.5.6, quatre grammiens pour les MSSO ont été définis. La difficulté de la réduction par troncature de la base équilibrée d'un MSSO réside dans l'impossibilité de diagonaliser simultanément les quatre grammiens. Ainsi, différentes techniques pour équilibrer un

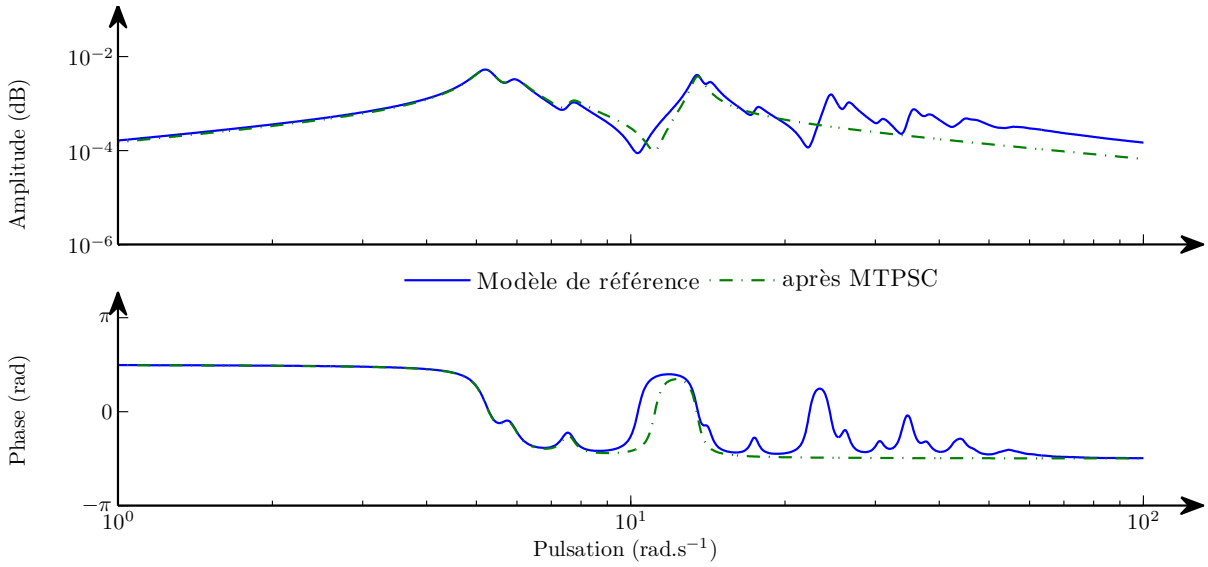


FIGURE 2.7 – Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et du modèle réduit par troncature modale du MSSO

MSSO ont été proposées.

Dans le cas où la préservation de la structure du second ordre n'est pas un objectif, il est possible, lors de la réduction, de réduire le MSSO en utilisant la représentation d'état associée. Basé sur ce constat, [CHAHLAOUI *et al.*, 2006] proposent d'utiliser les grammiens du second ordre sur la représentation d'état, tout en préservant la structure matricielle de la matrice d'état.

Afin d'utiliser les grammiens du second ordre sur le modèle d'état, ceux-ci sont concaténés de la manière suivante

$$\mathsf{Wa} = \begin{pmatrix} \mathsf{Wa}_p & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathsf{Wa}_v \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Wo} = \begin{pmatrix} \mathsf{Wo}_p & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathsf{Wo}_v \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Deux matrices de transformation T_p et T_v peuvent être calculées en utilisant l'équation (2.9)

$$T = \begin{pmatrix} T_p & 0 \\ 0 & T_v \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

de telle sorte que la matrice T rende les grammiens Wa et Wo égaux et diagonaux. L'utilisation de ces matrices sur la représentation d'état associée à un MSSO (*cf.* équation (1.26)) permet d'obtenir la nouvelle représentation d'état

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \mathbb{O} & T_p^{-1}T_v \\ -T_v^{-1}M^{-1}KT_p & -T_v^{-1}M^{-1}CT_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ T_v^{-1}M^{-1}F \end{pmatrix}, \\ y & = & \begin{pmatrix} G_pT_p & G_vT_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \tag{2.33}$$

De plus, la transformation des grammiens par la matrice T permet d'écrire

$$T^T W a T^{-T} = T^T W o T = \begin{pmatrix} \Sigma_p & 0 \\ 0 & \Sigma_v \end{pmatrix}.$$

Puisque $T_p^{-1}T_v$ n'égalise pas la matrice identité, cette représentation d'état n'est pas un MSSO. Pour outrepasser cette problématique, les auteurs proposent de partitionner $\tilde{x}$ en $\begin{pmatrix} [\tilde{x}_1^T]_+ & [\tilde{x}_1^T]_- & [\tilde{x}_2^T]_+ & [\tilde{x}_2^T]_+ \end{pmatrix}^T$ où $[\tilde{x}_1^T]_+$ et $[\tilde{x}_2^T]_+$ correspondent aux plus grandes valeurs singulières de Hankel de Σ_p et Σ_v. Ainsi le modèle réduit est

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{O} & [T_p^{-1}T_v]_+ \\ [-T_v^{-1}M^{-1}KT_p]_+ & [-T_v^{-1}M^{-1}CT_v]_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\tilde{x}_1]_+ \\ [\tilde{x}_2]_+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ [T_v^{-1}M^{-1}F]_+ \end{pmatrix}, \\ y &= \begin{pmatrix} [G_pT_p]_+ & [G_vT_v]_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\tilde{x}_1]_+ \\ [\tilde{x}_2]_+ \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Et en utilisant la matrice de transformation $T^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$, où $W = [T_p^{-1}T_v]_+$, cela permet d'écrire le modèle réduit suivant

$$\begin{cases} M &= I, \\ C &= W^{-1}[T_v^{-1}\mathcal{C}T_v]_+W, \\ K &= W^{-1}[T_v^{-1}\mathcal{K}]_+T_p, \\ F &= W^{-1}[T_v^{-1}\mathcal{M}^{-1}F]_+, \\ G_p &= [G_pT_p]_+, \\ G_v &= [G_vT_v]_+W. \end{cases}$$

Cette méthode est connue comme étant la méthode SOBT (pour Second Order Balanced Truncation). Elle permet de rendre égaux et diagonaux les quatre grammiens et reconstruit un MSSO ne respectant pas les conditions *structurelles*. En outre, l'erreur d'approximation est généralement supérieure à la troncature de la base équilibrée classique.

D'autres auteurs travaillent directement avec les matrices du MSSO sans utiliser la représentation d'état. Pour cela, il cherche à équilibrer directement le MSSO [STYKEL, 2006]. Le principe est décrit ci-après pour un MSSO ne possédant pas de matrice d'observation des accélérations ($G_a = \mathbb{O}$). Les deux matrices suivantes sont définies

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & W_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \qquad\qquad T = \begin{pmatrix} T_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & T_2 \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche par W, la représentation d'état associée à un MSSO dont la matrice G_a est nulle et en posant $T^{-1}x = \begin{pmatrix} x_1^T & x_2^T \end{pmatrix}^T$, on obtient le système

$$\begin{cases} W_1T_1\dot{x}_1 &= W_1T_2x_2, \\ W_2MT_2\dot{x}_2 &= -W_2CT_1x_1 - W_2KT_2x_2 + W_2Fu, \\ y &= G_pT_1x_1 + G_vT_2x_2. \end{cases} \tag{2.34}$$

En supposant les matrices W et T non singulières, alors $x_2 = (W_1T_2)^{-1}W_1T_1\dot{x}_1 = T_2^{-1}T_1\dot{x}_1$. Et si l'on substitue ce vecteur dans les deux dernières équations de (2.34), il est possible d'obtenir le MSSO suivant

$$\begin{cases} W_2MT_1\ddot{q}(t) + W_2CT_1\dot{q}(t) + W_2KT_1q(t) = W_2Fu(t), \\ \hat{y}(t) = G_pT_1 + G_vT_1. \end{cases} \tag{2.35}$$

Cette méthode permet d'équilibrer deux des quatre grammiens du MSSO. Ainsi dans [REIS et STYKEL, 2007], à partir du MSSO exprimé par l'équation (2.35), différentes réalisations équilibrées sont présentées en fonction des définitions suivantes :

1. un MSSO est équilibré en *position* si $\mathsf{Wc}_p = \mathsf{Wo}_p = \mathrm{diag}(\sigma_1^p, \ldots, \sigma_{n_q}^p)$ où σ_1^p sont les valeurs singulières en position ;
2. un MSSO est équilibré en *vitesse* si $\mathsf{Wc}_v = \mathsf{Wo}_v = \mathrm{diag}(\sigma_1^v, \ldots, \sigma_{n_q}^v)$ où σ_1^v sont les valeurs singulières en vitesse ;
3. un MSSO est équilibré en *position-vitesse* si $\mathsf{Wc}_p = \mathsf{Wo}_v = \mathrm{diag}(\sigma_1^{pv}, \ldots, \sigma_{n_q}^{pv})$ où $\sigma_1^p v$ sont les valeurs singulières en position-vitesse ;
4. un MSSO est équilibré en *vitesse-position* si $\mathsf{Wc}_v = \mathsf{Wo}_p = \mathrm{diag}(\sigma_1^{vp}, \ldots, \sigma_{n_q}^{vp})$ où $\sigma_1^v p$ sont les valeurs singulières en vitesse-position.

En utilisant les définition 1. et 3., dans [REIS et STYKEL, 2007] les auteurs proposent deux algorithmes, l'Algorithme 2.2 appelé SOBTp et l'Algorithme 2.3 appelé SOBTpv.

Algorithme 2.2 Troncature de la base équilibrée en position d'un modèle structuré en second ordre (SOBTp)

Entrées: $M, C, K, F, G_p, G_v, G_a$
Sorties: $M_r, C_r, K_r, F_r, G_{pr}, G_{vr}, G_{ar}$

calculer R_{ap}, R_{av}, R_{op} et R_{ov} respectivement les facteurs de Cholesky des grammiens d'atteignabilité en position et en vitesse et des grammiens d'observabilité en position et en vitesse

calculer $R_{ap}^T R_{op} = \begin{pmatrix} U_{p1} & U_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{p1} & \Sigma_{p2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{p1} & V_{p2} \end{pmatrix}^T$
calculer $R_{av}^T M^T R_{ov} = \begin{pmatrix} U_{v1} & U_{v2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{v1} & \Sigma_{v2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{v1} & V_{v2} \end{pmatrix}^T$
calculer le modèle réduit selon l'équation (2.35) avec

$$W_2 = \Sigma_{p1}^{-\frac{1}{2}} V_{v1}^T R_{ov}^T \qquad T_1 = R_{ap} U_{p1} \Sigma_{p1}^{-\frac{1}{2}}$$

Algorithme 2.3 Troncature de la base équilibrée en position et en vitesse d'un modèle structuré en second ordre (SOBTpv)

Entrées: $M, C, K, F, G_p, G_v, G_a$
Sorties: $M_r, C_r, K_r, F_r, G_{pr}, G_{vr}, G_{ar}$

calculer R_{ap} et R_{ov} respectivement les facteurs de Cholesky du grammien d'atteignabilité en position et du grammien d'observabilité en vitesse

calculer $R_{ap}^T M^T L_{ov} = \begin{pmatrix} U_{pv1} & U_{pv2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{pv1} & \Sigma_{pv2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{pv1} & V_{pv2} \end{pmatrix}^T$
calculer $R_{av}^T M^T R_{ov} = \begin{pmatrix} U_{v1} & U_{v2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{v1} & \Sigma_{v2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{v1} & V_{v2} \end{pmatrix}^T$
calculer le modèle réduit selon l'équation (2.35) avec

$$W_2 = \Sigma_{pv1}^{-\frac{1}{2}} V_{pv1}^T R_{ov}^T \qquad T_1 = R_{ap} U_{pv1} \Sigma_{p1}^{-\frac{1}{2}}$$

L'ensemble des trois algorithmes de troncature de la base équilibrée présentés (SOBT, SOBTp, SOBTpv), ne préserve pas les conditions *structurelles* dans le modèle réduit. Toutefois, si le modèle initial est symétrique alors le modèle réduit par la méthode SOBTpv est symétrique. Un

MSSO symétrique est un modèle respectant les conditions *structurelles* dont la matrice des entrées est la transposée de la matrice d'observation des positions, *i.e.* $G_v = \mathbb{0}$ et $F = {G_p}^T$. Sous ces conditions, [YAN *et al.*, 2008] proposent l'algorithme SBPOR (pour Second-Order Balanced Truncation for Passive Order Reduction) qui préserve les conditions *structurelles* si le modèle est symétrique. En revanche, dans le cas général, aucune des méthodes présentées ci-dessus ne préserve les conditions *structurelles* mais elles ont l'avantage de pouvoir être appliquées sur des modèles multi entrées.

En outre, deux des algorithmes (SOBTp, SOBTpv) utilisent les grammiens en position et vitesse qui sont calculés en annulant une partie des grammiens de la réalisation d'état associée au MSSO. Ainsi, les qualités d'approximation de ces modèles sont légèrement inférieures à la troncature de la base équilibrée classique d'une représentation d'état. En effet, l'approximation des dynamiques est quasi-similaire comme le montre la FIGURE 2.8, mais les critères d'approximation donnés au TABLEAU 2.5 sont plus élevées (pour la troncature de la base équilibrée classique, le critère est de 0.144).

Un des avantages de la troncature équilibrée classique est de posséder une borne de l'erreur basée sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ (*cf.* Section 2.2.2). En revanche, un tel critère n'existe pas pour les MSSO.

Pour finir, même si les grammiens sont équilibrés par ces méthodes, lorsque la troncature des coordonnées généralisées est réalisée, les grammiens ne sont plus équilibrés.

TABLEAU 2.5 – Erreurs relatives des modèles d'immeuble réduits par les méthodes SOBT

méthodes de réduction	SOBT	SOBTp	SOBTpv
norme relative de l'erreur	0,352	0,366	0,295

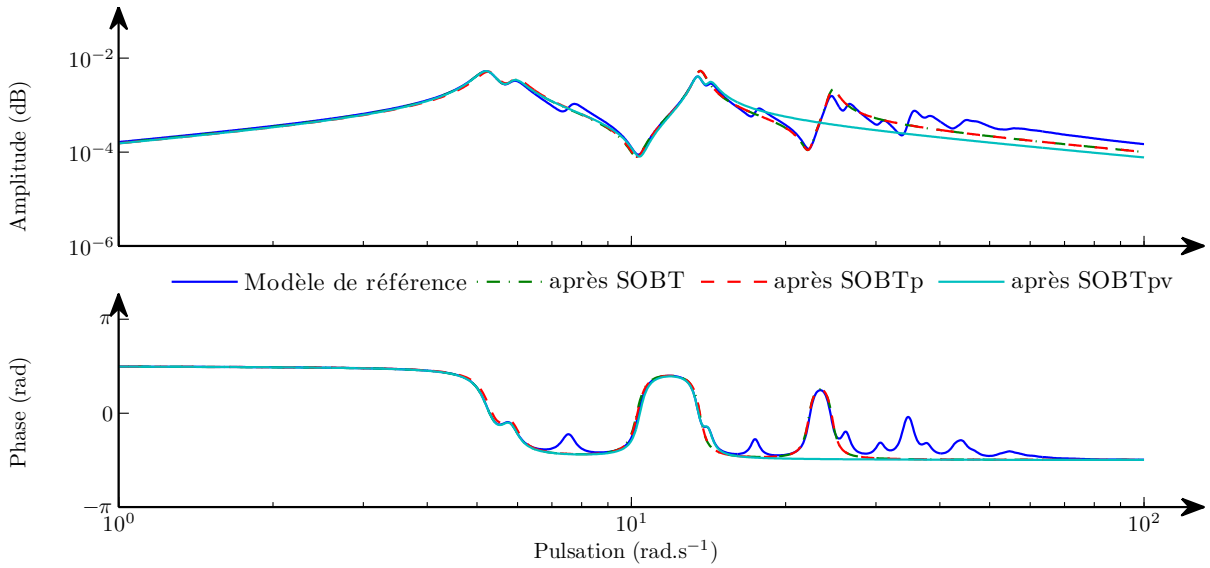


FIGURE 2.8 – Diagramme de Bode du modèle d'immeuble initial et des modèles réduits par les méthodes SOBT, SOBTp, SOBTpv

2.4.3 Troncature de la base équilibrée et préservation des conditions *structurelles*

Nous venons de voir que les algorithmes de troncature de la base équilibrée d'un MSSO présentés à la Section 2.4.2 présentent plusieurs désavantages par rapport à la troncature dans la base équilibrée d'une réalisation d'état. Ainsi, il semble plus avantageux d'utiliser la troncature de la base équilibrée classique afin de réduire un MSSO. En revanche le modèle d'état ainsi construit perd toute structure d'un MSSO. Nous avons vu à la Section 1.3.3.5 comment un modèle d'état pouvait être transformé en MSSO tout en préservant les conditions *structurelles*. Ainsi, il est possible de construire une méthode pour réduire un MSSO tout en préservant les conditions *structurelles* et en conservant les propriétés de la troncature de la base équilibrée classique. Cette méthode est décrite par l'Algorithme 2.4.

Algorithme 2.4 Troncature de la base équilibrée avec préservation des conditions *structurelles* (BTPSC)

Entrées: $M, C, K, F, G_p, G_v, G_a$
Sorties: $M_r, C_r, K_r, F_r, G_{pr}, G_{vr}, G_{ar}$
transformer le MSSO en une représentation d'état selon (1.3.3)
équilibrer le modèle en utilisant la transformation (2.8)
éliminer un nombre pair d'états correspondant aux valeurs propres de Hankel les plus faibles
transformer le modèle d'état en MSSO avec l'Algorithme 1.1 (page 30)

Pour montrer l'intérêt de la méthode, elle est appliquée pour réduire le modèle d'immeuble. Cette méthode assure la conservation de l'ensemble des propriétés d'un MSSO tout en assurant une qualité d'approximation équivalente à la troncature équilibrée classique. Ainsi, les matrices M_r, C_r et K_r sont symétriques définies positives et nous obtenons le résultat suivant

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_r = \begin{pmatrix} 0,546 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,576 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,061 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,710 \end{pmatrix},$$

$$K_r = \begin{pmatrix} 3,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 592 \end{pmatrix}, \qquad F_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T,$$

$$G_p = \begin{pmatrix} -5,309.10^{-3} & 3,709.10^{-3} & -7,807.10^{-3} & -2,129.10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$G_v = \begin{pmatrix} 1,086.10^{-3} & 3,158.10^{-3} & 4,089.10^{-3} & 2,255.10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad G_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

À nouveau, si une structure particulière est recherchée dans le vecteur d'entrée, la décomposition QR de la matrice d'entrée F_r (*cf.* équation (2.30)) permet de modifier ce vecteur sans perdre les conditions *structurelles*. Le modèle réduit a alors la même fonction de transfert que

la troncature de la base équilibrée présentée à la FIGURE 2.2 (page 61) et la norme relative du modèle erreur vaut également $0,144$.

Afin de préserver les conditions *structurelles*, la méthode proposée pour réduire les MSSO d'une manière équivalente à la troncature de la base équilibrée d'une représentation d'état, fait appel à un algorithme nécessitant un modèle simple entrée. À la Section 1.3.3.6 a été présenté l'ALGORITHME 1.2 (page 31) valable pour les modèles multi entrées. Cet algorithme assure la préservation des conditions structurelles au détriment de la dimension du modèle. En effet, l'utilisation de cet algorithme sur un modèle d'état de dimension n_{qr} à m entrées calcule un MSSO de dimension $n_{qr} \times m$. Ceci résulte d'un accroissement artificiel de la taille du modèle réduit. Une recherche des équations redondantes dans le MSSO a été proposée, mais cette méthode n'assure pas une élimination suffisante des équations pour obtenir un modèle réduit de dimension n_{qr}, dans le cas général.

2.5 Conclusion

En fonction du domaine d'étude, les méthodes de réduction de l'ordre des modèles ne sont pas évaluées en fonction des mêmes critères. Dans le domaine de l'automatique, les critères généralement retenus sont la qualité d'approximation du modèle réduit, la préservation des propriétés du système et l'efficacité calculatoire de la méthode. Pour la dynamique des structures, si la qualité d'approximation est aussi recherchée, la préservation de la structure est un critère prépondérant.

Pour le domaine de l'automatique, deux méthodes ont été retenues afin de montrer la qualité d'approximation et la préservation des propriétés des modèles par ces méthodes. Ces méthodes sont efficaces en termes d'erreur d'approximation mais la structure du modèle initial est perdue. La perte de la structure ne permet pas de mettre en évidence les liens entre les paramètres des modèles réduits et les paramètres physiques du système étudié.

En revanche, les méthodes de réduction de modèle par les méthodes de la dynamique des structures permettent de préserver la structure. Mais ces méthodes, basées sur une sélection *a priori* des coordonnées préservées, empêchent d'obtenir des modèles réduits efficaces en terme d'erreur d'approximation.

Dans un objectif de préservation de la structure lors de la réduction de l'ordre des modèles, tout en conservant une efficacité de la méthode en terme d'erreur d'approximation, l'approche proposée consiste à reconstruire, à partir du modèle réduit par les méthodes du domaine de l'automatique, un modèle respectant les conditions *structurelles*. En comparaison à une approche qui consisterait à adapter chaque méthode de réduction au MSSO, cette approche permet d'utiliser, avec peu d'adaptation, l'ensemble des méthodes de réduction de l'ordre des modèles du domaine de l'automatique avec une préservation de la structure.

Pour montrer l'efficacité de cette méthode et l'intérêt de la préservation de la structure, les algorithmes proposés sont utilisés afin de réduire un modèle de la dynamique du véhicule que nous présentons au chapitre suivant.

Chapitre 3

Modélisation de la dynamique du véhicule

Sommaire

Notations **80**
3.1 Introduction **83**
3.2 Présentation du modèle **84**
3.2.1 Modèle bicyclette 85
3.2.2 Modèle quart de véhicule 87
3.2.3 Modèle complet de véhicule 88
3.2.4 Référentiel, repères et matrices de changement de repère 90
3.3 Modèle complet **92**
3.3.1 Direction 92
3.3.2 Caisse 96
3.3.3 Suspensions et barres anti-roulis 101
3.3.4 Roues 104
3.3.5 Contacts roue-sol 107
3.4 Linéarisation du modèle **116**
3.4.1 Modèle linéaire de la direction 116
3.4.2 Modèle linéaire de la caisse 118
3.4.3 Modèle linéaire de la masse non-suspendue 121
3.4.4 Modèle linéaire et semi-linéaire du véhicule complet 122
3.5 Conclusion **123**

Notations

La notation en dynamique véhicule fait l'objet de plusieurs normalisations. Dans ce document, la [NORME ISO 8855, 1991] est respectée. En revanche, cette norme n'est pas exhaustive et certaines notations seront donc propres à ce document. Les notations ainsi définies sont indiquées par les définitions en italiques.

De plus, de nombreuses variables sont fonctions de leur point d'application. Dans cette nomenclature, ces variables sont indicées par la lettre j qui remplace le nom du point d'application.

Pour les variables se rapportant aux roues, le numéro de la roue est porté en exposant. Dans cette nomenclature, ces variables ont pour exposant la lettre i.

Repères

$\vec{X}_E, \vec{Y}_E, \vec{Z}_E$ - repère sol : trièdre orthonormal direct lié à la surface de la terre, tel que $\vec{X}_E$ et $\vec{Y}_E$ définissent le plan du sol, et l'axe $\vec{Z}_E$ est dirigé vers le haut ;

$\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ - repère intermédiaire : trièdre orthonormal direct dont le plan $\vec{X}\vec{Y}$ coïncide avec le plan $\vec{X}_E\vec{Y}_E$. L'axe $\vec{X}$ est défini par l'intersection du plan de symétrie longitudinal du véhicule au repos et du sol. L'axe $\vec{Z}$ est dirigé vers le haut ;

$\vec{X}_V, \vec{Y}_V, \vec{Z}_V$ - repère véhicule : trièdre orthonormal direct lié au véhicule. L'axe $\vec{X}_V$ est dirigé vers l'avant du véhicule dans le plan de symétrie longitudinal, l'axe $\vec{Y}_V$ est perpendiculaire au plan de symétrie longitudinal et il est dirigé vers la gauche du conducteur. L'axe $\vec{Z}_V$ est dirigé vers le haut ;

$\vec{X}_W^{(i)}, \vec{Y}_W^{(i)}, \vec{Z}_W^{(i)}$ - repère roue : trièdre orthonormal direct dont le plan $\vec{X}_W^{(i)}\vec{Y}_W^{(i)}$ coïncide avec le plan $\vec{X}_E\vec{Y}_E$. L'axe $\vec{X}_W^{(i)}$ est défini par l'intersection du plan de la roue avec le plan $\vec{X}_E\vec{Y}_E$. $\vec{X}_W^{(i)}$ est orienté vers l'avant du véhicule et l'axe $\vec{Z}_W^{(i)}$ est orienté vers le haut ;

$\vec{Z}_H$ - *axe passant par le centre du volant. Il est perpendiculaire au plan du volant et est dirigé vers le conducteur.*

Dimensions [m]

$l^{(i)}$ - empattement ;

$b^{(i)}$ - voie ;

$r_{dyn}^{(i)}$ - rayon sous charge dynamique de la roue i ;

$r_{stat}^{(i)}$ - rayon sous charge statique de la roue i ;

$r^{(i)}$ - déport au sol i ;

h_{G_V} - distance du centre de gravité au plan défini par les quatre centres de rotation des roues ;

R - rayon de courbure de la trajectoire.

Angles [rad]

θ - angle de tangage ;

φ - angle de roulis ;
ψ - angle de lacet ;
β - angle de dérive du véhicule ;
$\delta^{(i)}$ - angle de braquage de la roue i ;
δ_H - angle au volant ;
$\alpha^{(i)}$ - angle de dérive de la roue i ;
$\delta_0^{(i)}$ - angle formé par le bras du porte-fusée support des pivots de direction et le plan de la roue i ;
θ_P - angle du pignon de la crémaillère.

Positions [m]

$O_W^{(i)}$ - *point conventionnel de contact de la roue i avec le sol* ;
$C_W^{(i)}$ - *intersection du plan de la roue et de l'axe de rotation de la roue i* ;
I_V - *centre instantané de rotation du virage* ;
X_j - *position suivant l'axe* $\vec{X}$ *d'un point dans le repère défini par le contexte* ;
Y_j - *position suivant l'axe* $\vec{Y}$ *d'un point dans le repère défini par le contexte* ;
Z_j - *position suivant l'axe* $\vec{Z}$ *d'un point dans le repère défini par le contexte* ;
G_V - *centre de gravité du véhicule* ;
$Y_M^{(i)}$ - *centre de la liaison entre la crémaillère et les porte-fusées de la roue i* ;
H - *centre de la liaison entre le volant et la colonne de direction* ;
P - *centre de la liaison entre la colonne de direction et le pignon de crémaillère* ;
$A^{(i)}$ - *centre de la liaison entre le point haut de la suspension i et la caisse* ;
$B^{(i)}$ - *centre de la liaison entre le bras de la suspension i et la caisse* .

Vitesses [$\mathbf{m.s^{-1}}$]

$\omega^{(i)}$ - vitesse de rotation de la roue i ;
$\vec{v}$ - vecteur vitesse du véhicule ;
v_X - projection du vecteur vitesse du véhicule sur l'axe $\vec{X}$;
v_Y - projection du vecteur vitesse du véhicule sur l'axe $\vec{Y}$;
v_Z - projection du vecteur vitesse du véhicule sur l'axe $\vec{Z}$;
$V_{x,j}$ - *vitesse suivant l'axe* $\vec{X}$ *d'un point dans le repère défini par le contexte* ;
$V_{y,j}$ - *vitesse suivant l'axe* $\vec{Y}$ *d'un point dans le repère défini par le contexte* ;
$V_{z,j}$ - *vitesse suivant l'axe* $\vec{Z}$ *d'un point dans le repère défini par le contexte* ;
$\vec{v}_{O_W^{(i)}}$ - *vitesse du point conventionnel de contact roue-sol* ;
$\lambda^{(i)}$ - *glissement longitudinal de la roue* ;
$f^{(i)}$ - *glissement latéral de la roue.*

Accélérations [m.s^{-2}]

g - accélération de la pesanteur ;
$\vec{a}$ - vecteur accélération du véhicule ;
$\vec{a}_j$ - vecteur accélération d'un point.

Masses [kg] et Inerties [kg.m^2]

M - *masse totale du véhicule* ;
m_s - *masse suspendue* ;
$m_{ns}^{(i)}$ - *masse non-suspendue liée à la roue* i ;
m_c - *masse de la crémaillère* ;
I_{xx} - *inertie de roulis de la masse suspendue* ;
I_{yy} - *inertie de tangage de la masse suspendue* ;
I_{zz} - *inertie de lacet de la masse suspendue* ;
$I_{r_{yy}}$ - *inertie de la roue autour de son axe de rotation.*

Forces [N] et Moments [N.m]

$F_{x,j}(A/B)$ - *force suivant l'axe* $\vec{X}$ *du système A sur le système B dans le repère défini par le contexte* ;
$F_{y,j}(A/B)$ - *force suivant l'axe* $\vec{Y}$ *du système A sur le système B dans le repère défini par le contexte* ;
$F_{z,j}(A/B)$ - *force suivant l'axe* $\vec{Z}$ *du système A sur le système B dans le repère défini par le contexte* ;
$M_{x,j}(A/B)$ - *moment autour de l'axe* $\vec{X}$ *généré par A sur le système B dans le repère défini par le contexte* ;
$M_{y,j}(A/B)$ - *moment autour de l'axe* $\vec{Y}$ *généré par A sur le système B dans le repère défini par le contexte* ;
$M_{z,j}(A/B)$ - *moment autour de l'axe* $\vec{Z}$ *généré par A sur le système B dans le repère défini par le contexte* ;
$P_{x,j}$ - *poids suivant l'axe* $\vec{X}$ *dans le repère défini par le contexte* ;
$P_{y,j}$ - *poids suivant l'axe* $\vec{Y}$ *dans le repère défini par le contexte* ;
$P_{z,j}$ - *poids suivant l'axe* $\vec{Z}$ *dans le repère défini par le contexte* ;
$\vec{p}_j$ - *force de gravité dans le repère considéré* ;
$C_m^{(i)}$ - *couple moteur imposé à la roue.*

Coefficients

$C_{alpha}^{(i)}$ - *coefficient d'adhérence latérale* [N.rad^{-1}] ;
$C_{aa}^{(i)}$ - *coefficient d'adhérence du moment d'auto-alignement* [Nm.rad^{-1}] ;
$K_t^{(i)}$ - *raideur verticale du pneumatique* [N.m^{-1}] ;
$C_t^{(i)}$ - *amortissement vertical du pneumatique* [N.m^{-1}.s] ;
$K_s^{(i)}$ - *raideur verticale de la suspension* [N.m^{-1}] ;
$C_s^{(i)}$ - *amortissement vertical de la suspension*[N.m^{-1}.s] ;

$K_c^{(i)}$ - *raideur de la colonne de direction* [N.m^{-1}] ;
$C_c^{(i)}$ - *amortissement de la colonne de direction* [N.m^{-1}.s] ;
$K_b^{(i)}$ - *raideur de la barre anti-roulis* [N.m^{-1}] ;
$\mu^{(i)}_{\vec{X}_W,bloquee}$ - adhérence longitudinale roue bloquée [N.m^{-1}.s] ;
$\mu^{(i)}_{\vec{Y}_W,bloquee}$ - adhérence latérale roue bloquée [N.m^{-1}.s] ;
$\mu^{(i)}_{\vec{X}_W}$ - *adhérence longitudinale roue bloquée avec glissement* [N.m^{-1}.s] ;
$\mu^{(i)}_{\vec{Y}_W}$ - *adhérence latérale roue bloquée avec glissement* [N.m^{-1}.s] ;
a_k - *paramètres primaires du modèle de Pacejka, mode latéral* ($k = 0, \ldots, 13$) ;
b_k - *paramètres primaires du modèle de Pacejka, mode longitudinal* ($k = 0, \ldots, 10$) ;
c_k - *paramètres primaires du modèle de Pacejka pour le moment d'auto-alignement* ($k = 0, \ldots, 13$).

Autres notations

$\frac{d^R}{dt}X$ - *dérivée dans le repère R de X* ;
ba - *barre anti-roulis.*
ca - *caisse ;*
cr - *crémaillère ;*
co - *colonne de direction ;*
pf - *porte-fusées.*
ro - *roue ;*
so - *sol ;*
su - *suspension ;*
vo - *volant ;*

3.1 Introduction

L'amélioration du comportement routier d'un véhicule nécessite un modèle de référence de dynamique de ce dernier. Quatre grandes classes de modèles sont considérées :

- modèles de dynamique latérale ;
- modèles de dynamique verticale ;
- modèles de dynamique longitudinale ;
- modèles complets.

Les modèles de dynamique latérale sont utilisés pour étudier le comportement en virage du véhicule et, par exemple, développer des lois de commande de la direction du véhicule telles que l'évitement de la sortie de voie [MINOIU ENACHE, 2008]. Les modèles de dynamique verticale, quant à eux, permettent d'étudier la réponse en pompage du véhicule pour améliorer le confort ou développer des systèmes de suspensions actives par exemple. Pour finir, les modèles longitudinaux sont développés pour l'étude de la chaîne de traction ou pour la conception de systèmes d'aide à la conduite tels que les régulateurs de vitesse. Ces modèles, généralement développés en adéquation avec une problématique, sont souvent simplistes et ne prennent pas en compte les effets de couplages entre les différentes dynamiques.

Les modèles complets sont développés par les constructeurs en vue de la conception assistée par ordinateur. Ces modèles très complexes posent un certain nombre de difficultés. Notamment, leurs niveaux de complexité imposent de connaître un nombre important de paramètres qui demandent des moyens importants pour les estimer. De plus, comme ces modèles sont des modèles d'aide à la conception, ils ne sont pas conçus pour être utilisés à des fins de synthèse de lois de commande, d'observation ou d'applications en temps réel. Pour finir, ils sont généralement développés sur des plateformes propriétaires et leur utilisation dans un cadre académique représente un coût prohibitif.

Pour obtenir un compromis entre les modèles complets et les modèles à dynamique découplée, nous allons développer un modèle par bloc. Ce dernier permettra d'une part de prendre en compte les couplages latéraux, verticaux et longitudinaux et d'autre part, sa modularité permettra d'avoir différents niveaux de complexité.

Dans le développement de ce modèle, les systèmes suivants, qui représente la chaîne de traction, ne sont pas modélisés :

- le moteur ;
- l'embrayage ;
- la boîte de vitesses ;
- le différentiel ;
- le système de freinage.

Si ces différents éléments permettent de contrôler l'accélération du véhicule, leurs modélisations représentent un domaine d'étude à part entière (groupe moto-propulseur), ils peuvent être non-continus (boîte de vitesses) et généralement il est impossible de les mettre sous la forme d'une représentation d'état ou d'un modèle structuré du second ordre. Leur influence sur la dynamique du véhicule se traduit par un couple imposé aux roues, qui constitue une entrée du modèle complet que nous allons présenter. Un modèle permettant d'exprimer le couple aux roues en fonction des entrées conducteurs est présenté dans [NOUVELIERE, 2002].

3.2 Présentation du modèle

Pour présenter les principes de bases qui régissent la dynamique du véhicule, nous allons développer les équations de deux modèles découplés fréquemment utilisés : le modèle bicyclette et le modèle quart de véhicule.

Le modèle bicyclette est un modèle de dynamique latérale qui permet de définir les phénomènes mis en jeu lors d'un virage. Le modèle quart de véhicule permet d'exprimer les mouvements de la caisse et de la roue verticalement.

Ils sont basés sur l'application du principe fondamental de la dynamique (PFD) que nous rappelons ici.

Le PFD s'exprime à partir des deux principes suivants :

- dans un référentiel galiléen, la masse M multipliée par l'accélération $\vec{a}$ d'un corps est égale à la somme des forces extérieures $\sum \vec{F}_{ext}$ appliquées sur lui

$$M\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}. \tag{3.1}$$

- dans un référentiel galiléen, l'inertie I multipliée par l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ d'un corps est égale à la somme des moments extérieurs $\sum \vec{M}_{ext}$ qu'il subit

$$I\vec{\alpha} = \sum \vec{M}_{ext}. \tag{3.2}$$

Afin de développer les équations de la dynamique du véhicule, le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen. Dans le référentiel terrestre est défini le repère sol R_E (pour Earth-fixed axis system).

3.2.1 Modèle bicyclette

Le modèle bicyclette est largement utilisé, notamment pour l'observation de la trajectoire en courbe d'un véhicule ou encore pour la commande active du volant [LUGNER, 1986, GULDNER *et al.*, 1995, ANDERSON et BEVLY, 2004]. Ce modèle simple a comme principal avantage d'être linéaire sous certaines conditions comme la vitesse longitudinale qui est considérée comme constante. Il permet d'étudier la trajectoire d'un véhicule en fonction de l'angle de braquage au volant en prenant en compte un phénomène important de la dynamique du véhicule : la dérive.

En virage, lorsque le vecteur vitesse n'est donc pas confondu avec l'axe longitudinal du véhicule, un angle de dérive β apparait. Au contact roue-sol, cet angle est l'angle de dérive du pneumatique et il est notée α^i. La FIGURE 3.1 donne une représentation graphique du modèle bicyclette avec les angles de dérive. Le modèle bicyclette est particulièrement utilisé pour l'observation ou l'estimation de cet angle important, car il permet de prévoir les pertes d'adhérence [BAFFET *et al.*, 2006, BEVLY *et al.*, 2002].

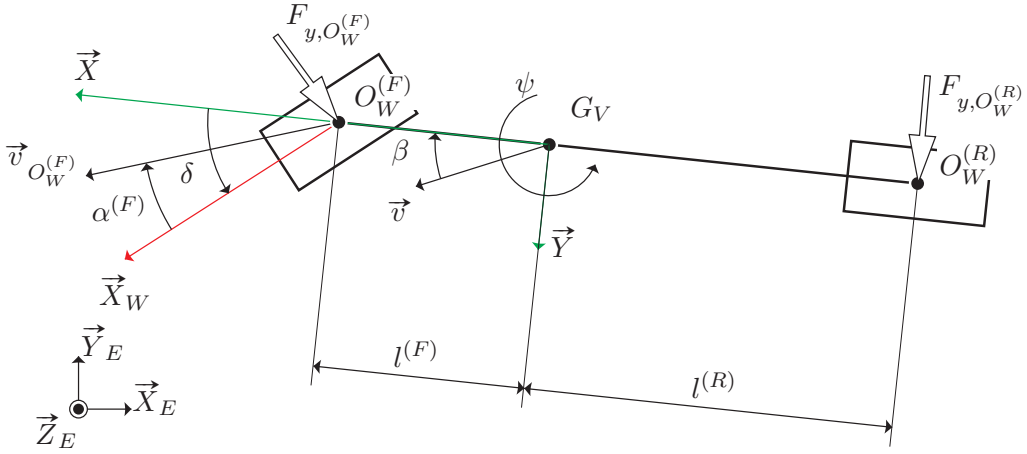


FIGURE 3.1 – Modèle bicyclette

Le modèle bicyclette permet de modéliser les mouvements transversaux du centre de gravité G_V du véhicule. Pour un véhicule à traction, le centre de gravité est déporté vers l'avant du véhicule à cause du poids du moteur placé sur l'essieu avant. Ainsi, la distance de l'essieu avant au centre de gravité l^F (pour Front) et la distance de l'essieu arrière au centre de gravité l^R (pour Rear) ne sont pas égales.

Le modèle bicyclette permet de décrire la trajectoire d'un véhicule, mais il n'est valable que sous les hypothèses suivantes [POULY, 2009] :

- la route est considérée comme horizontale ;
- les suspensions sont rigides, il n'y a donc ni roulis [5], ni tangage [6] ($\theta = 0$, $\varphi = 0$) ;

5. Le roulis est la rotation de la caisse autour d'un axe longitudinal. Cette rotation apparaît principalement lors d'une prise de virage.

6. Le tangage est la rotation de la caisse autour d'un axe transversal. Cette rotation apparaît principalement lors des phases d'accélération et de freinage.

- la position suivant $\vec{Z}$ du centre de gravité G_V est constante ;
- le véhicule est symétrique autour de l'axe longitudinal, les trains sont alors assimilés à une seule roue virtuelle centrale ;
- la vitesse longitudinale est « faible » afin de pouvoir négliger les phénomènes aérodynamiques ;
- le moteur et la direction ne sont pas pris en compte, ainsi les entrées correspondent à l'angle de braquage δ de la roue avant et à la vitesse longitudinale considérée comme constante ;
- les angles de braquages sont faibles, ainsi les efforts générés aux contacts roue-sol peuvent être linéarisés (*cf.* Section 3.3.4).

La position du véhicule est donnée par sa position X_{G_V}, Y_{G_V} dans le repère sol et par son angle de lacet. Comme la vitesse suivant $\vec{X}$ est constante, la position du centre de gravité est calculée par l'application du PFD suivant l'axe $\vec{Y}$ et autour de l'axe $\vec{Z}$.

Afin d'appliquer le PFD, nous allons faire le bilan des forces appliquées sur le système isolé et développer les équations cinématiques permettant de lier les vitesses des différents points du véhicule.

Système isolé, repère et point d'application Le système isolé est le véhicule. Le PFD est appliqué au centre de gravité du véhicule G_V. Sauf mention explicite, l'ensemble des forces, vitesses et accélérations est exprimé dans le repère intermédiaire.

Expressions des forces Les forces appliquées sur le véhicule sont les forces générées aux contacts roue-sol. Comme le PFD est appliqué suivant $\vec{Y}$, seules les forces transversales sont considérées. Avec l'hypothèse des faibles angles de braquage, les forces sont considérées comme proportionnelles à l'angle de dérive du pneumatique. Les coefficients de proportionnalité $C_\alpha^{(F)}$ et $C_\alpha^{(R)}$ sont respectivement les coefficients d'adhérence de la roue avant et de la roue arrière. Ils permettent d'exprimer les efforts avec [PACEJKA, 2005]

$$F_{y,O_W^{(F)}} = -2C_\alpha^{(F)}\alpha^{(F)} \qquad \text{et} \qquad F_{y,O_W^{(R)}} = -2C_\alpha^{(R)}\alpha^{(R)}, \tag{3.3}$$

où $F_{y,O_W^{(F)}}$ et $F_{y,O_W^{(R)}}$ sont les forces latérales générées respectivement à l'avant et à l'arrière du véhicule aux points conventionnels de contacts roue-sol nommés $O_W^{(F)}$ et $O_W^{(R)}$ (*cf.* Section 3.3.5).

Expressions cinématiques Les angles de dérive en un point sont déduits des vitesses longitudinales et latérales en ce point par la formule

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right).$$

Ainsi, pour calculer les angles de dérive aux roues, il faut calculer les composantes suivant $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ des vitesses des points $O_W^{(F)}$ et $O_W^{(R)}$ par

$$\vec{v}_{O_W^{(i)}} = \vec{v} + \dot{\psi} \wedge \overrightarrow{G_V O_W^{(i)}} = \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ O \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l^{(i)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y + \dot{\psi} l \\ 0 \end{pmatrix},$$

pour $i = F, R$. Ainsi, en considérant l'angle de braquage de la roue avant, l'expression des angles de dérives aux roues avant et arrière est

$$\alpha^{(F)} = -\delta + \arctan\left(\frac{v_y + \dot{\psi} l^{(F)}}{v_x}\right) \qquad \text{et} \qquad \alpha^{(R)} = \arctan\left(\frac{v_y - \dot{\psi} l^{(R)}}{v_x}\right).$$

Avec l'hypothèse des petits angles de braquage de la roue avant et avec l'hypothèse d'une vitesse longitudinale faible, les angles de dérives sont faibles et peuvent être approximés par

$$\alpha^{(F)} = \delta - \left(\frac{v_y + \dot{\psi} l^{(F)}}{v_x} \right) \qquad \text{et} \qquad \alpha^{(R)} = - \left(\frac{v_y - \dot{\psi} l^{(R)}}{v_x} \right).$$

Application du PFD Comme le repère d'écriture des vitesses du centre de gravité G_V diffère du repère dans lequel est appliqué le PFD, les accélérations du centre de gravité $\vec{a}$ sont données par

$$\vec{a} = \frac{d^{R_I}}{dt} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_I} \wedge \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I} = \begin{pmatrix} \dot{v}_X - \dot{\psi} v_Y \\ \dot{v}_Y + \dot{\psi} v_X \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I}. \tag{3.4}$$

Au final, en appliquant le PFD suivant $\vec{Y}$ et autour de l'axe $\vec{Z}$, les équations résultantes sont données par

$$\begin{cases} \dot{v}_Y &= -\dfrac{2C_\alpha^{(F)} + 2C_\alpha^{(R)}}{M v_X} v_Y - \left(\dfrac{2C_\alpha^{(F)} l^{(F)} - 2C_\alpha^{(R)} l^{(R)}}{M v_X} - v_X \right) \dot{\psi} + \dfrac{2C_\alpha^{(F)}}{M} \delta, \\ \ddot{\psi} &= \dfrac{-2C_\alpha^{(F)} l^{(F)} + 2C_\alpha^{(R)} l^{(R)}}{I_{zz} v_X} v_Y + \dfrac{-2C_\alpha^{(F)} {l^{(F)}}^2 - 2C_\alpha^{(R)} {l^{(R)}}^2}{I_{zz} v_X} \dot{\psi} + \dfrac{2C_\alpha^{(F)}}{I_{zz}} \delta, \end{cases} \tag{3.5}$$

où M est la masse du véhicule et I_{zz} l'inertie autour de l'axe $\vec{Z}$ du véhicule.

3.2.2 Modèle quart de véhicule

Le modèle quart de véhicule permet d'exprimer les mouvements verticaux de la suspension. Il permet, par exemple, d'étudier le confort du véhicule ou les lois de commande de suspensions actives [POUSSOT-VASSAL *et al.*, 2006]. Le modèle quart de véhicule est la mise en série de la caisse du véhicule (nommée masse suspendue) et de la représentation verticale de la roue (nommée masse non suspendue). Les liaisons sont modélisées par un ressort et un amortisseur mis en parallèle. En effet, la déformation verticale d'un pneumatique peut être modélisée par un ressort de coefficient K_t et un amortisseur de coefficient C_t (t pour *tire*). La suspension a pour coefficient de raideur K_s et pour coefficient d'amortissement C_s. La dénomination de ce modèle est trompeuse, car la partie de la caisse modélisée ne représente pas forcément le quart du poids du véhicule. La FIGURE 3.2 (page suivante) donne une représentation graphique de ce modèle.

Le point C_W est le centre de la liaison roue-suspension (*cf.* Section 3.3.3) et le point A est le centre de la liaison suspension-caisse.

Afin d'étudier l'influence d'une variation de hauteur du sol, les points O_W, C_W et A sont dotés d'une variation en hauteur, notés respectivement Z_{O_W}, Z_{C_W} et Z_A.

Système isolé, repère et point d'application Le système isolé est composé d'une roue du véhicule, d'une suspension et d'une masse représentant la partie de la masse suspendue supportée par la suspension. Le référentiel permettant d'utiliser le PFD est le référentiel terrestre repéré par le repère sol. Le PFD est appliqué aux deux points C_W et A. L'ensemble des forces, vitesses et accélérations est exprimé dans le repère intermédiaire.

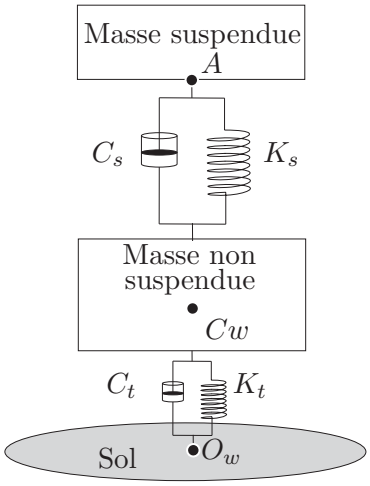


FIGURE 3.2 – Modèle quart de véhicule

Expressions des forces Les forces qui sont en jeu dans le modèle quart de véhicule sont les poids $P_{z,A}$ et P_{z,C_W}, la force du sol sur la roue $F_{z,C_W}(sol/ro)$ et la force de la roue sur la caisse $F_{z,A}(ro/ca)$. Elles sont exprimées par

$$\begin{cases} P_{z,A} & = m_s g, \\ P_{z,C_W} & = -m_{ns} g, \\ F_{z,C_W}(\text{so/ro}) & = (Z_{O_W} - Z_{C_W})K_t + (V_{z,O_W} - V_{z,C_W})C_t, \\ F_{z,A}(\text{ro/ca}) & = (Z_{C_W} - Z_A)K_s + (V_{z,C_W} - V_{z,A})C_s, \end{cases}$$

où m_s est la partie de la masse suspendue supportée par la suspension, m_{ns} la masse non-suspendue et g l'accélération de la pesanteur. Par le principe d'action-réaction, la force de la caisse sur la roue est $F_{z,C_W}(\text{ca/ro}) = -F_{z,A}(\text{ro/ca})$.

Application du PFD L'application du PFD permet d'obtenir

$$\begin{cases} m_{ns}\dot{V}_{z,C_W} & = Z_{C_W}(-K_t - K_s) + Z_A K_s - V_{z,C_W}(C_t + C_s) + V_{z,A}C_s + \ldots \\ & \qquad \ldots + V_{z,O_W}C_t + Z_{O_W}K_t - m_{ns}g \ , \\ m_s\dot{V}_{z,A} & = (Z_{C_W} - Z_A)K_s + (V_{z,C_W} - V_{z,A})C_s - m_s g. \end{cases} \tag{3.6}$$

Le système (3.6) permet de décrire les mouvements verticaux de la masse non-suspendue et de la masse suspendue.

3.2.3 Modèle complet de véhicule

Le modèle complet de véhicule considéré ici, est le modèle permettant de prendre en compte la totalité des dynamiques (verticales, longitudinales et transversales) ainsi que leur couplage. Pour pouvoir obtenir un modèle modulaire, le modèle complet du véhicule est un modèle construit par bloc où chaque bloc représente un organe du véhicule ou de son environnement responsable de sa dynamique. Le modèle véhicule est décomposé en cinq sous-parties principales :

– la caisse ;

– la direction ;
– les suspensions et les barres anti-roulis ;
– les roues ;
– le sol.

À ces sous-parties nous ajoutons les deux éléments responsables de l'excitation du modèle :
– le conducteur ;
– la route.

L'architecture du modèle est imposée par les dynamiques influencées par chacune des différentes sous-parties. Les trois dynamiques sont la dynamique longitudinale qui comprend les mouvements suivant $\vec{X}$, la dynamique latérale qui comprend les mouvements suivant $\vec{Y}$ et l'angle de lacet ψ, et la dynamique verticale qui comprend les mouvements suivant $\vec{Z}$, l'angle de tangage θ et l'angle de roulis φ.

Pour chacune des sous-parties, nous détaillons les dynamiques influencées :

le conducteur : la prise en compte du conducteur est aisée car il influence la dynamique du véhicule par la commande en angle du volant et par la commande en accélération des roues avant. Ainsi, le conducteur influe sur la dynamique latérale par le biais de la direction et sur la dynamique longitudinale par le biais des roues.

la route : l'influence de la route se divise en trois parties. La première partie est le profil de la route qui excite verticalement la roue comme nous l'avons vu pour le modèle quart de véhicule (*cf.* Section 3.2.2). La seconde partie est la pente et le dévers de la route. Ces deux grandeurs influencent le modèle au travers de la réaction du support qui ne compense plus le poids de la masse suspendue et des masses non-suspendues. Une pente et un dévers de la route imposent une résultante de la force de pesanteur suivant les trois axes du repère véhicule ou du repère roue. Ainsi, l'ensemble des dynamiques est mis en jeu entre ces trois éléments (route, masse suspendue et masse non-suspendue).

le contact roue-sol : il est à l'origine des efforts générés sur la roue. La liaison roue-sol est un contact plan sur plan qui influence les dynamiques longitudinales et latérales.

les roues : les roues avant sont munies d'un système de braquage, ainsi elles sont en liaison directe avec la direction et sont donc à l'origine des dynamiques latérales directement transmises à la caisse. De plus, le couple du moteur est transmis aux roues qu'elles transforment en dynamique longitudinale, à nouveau directement transmise à la caisse. Compte tenue de leur adhérence, les roues arrières influent sur la dynamique latérale de la caisse. De plus, les roues arrière étant munies de freins, elles influencent aussi la dynamique longitudinale. Dans notre représentation, les freins sont modélisés par un couple résistif sur les roues. Enfin, le modèle quart de véhicule a permis de montrer que les roues influent sur la dynamique verticale de la caisse au travers des suspensions.

les suspensions et barres anti-roulis : l'utilisation d'une liaison rotule pour fixer la suspension sur la caisse implique que les suspensions influent uniquement sur la dynamique verticale de la caisse. Les barres anti-roulis s'opposent aux mouvements en roulis de la caisse et influencent donc la dynamique verticale.

la caisse : elle est l'élément principal du véhicule dont nous recherchons à déterminer le mouvement selon les trois dynamiques. Ces mouvements sont déterminés en effectuant le PDF.

Au final, la description présentée ci-dessus permet de présenter la Figure 3.3 (page suivante) qui scinde le véhicule complet en sous-parties, qui donne les dynamiques mises en jeu et leurs couplages.

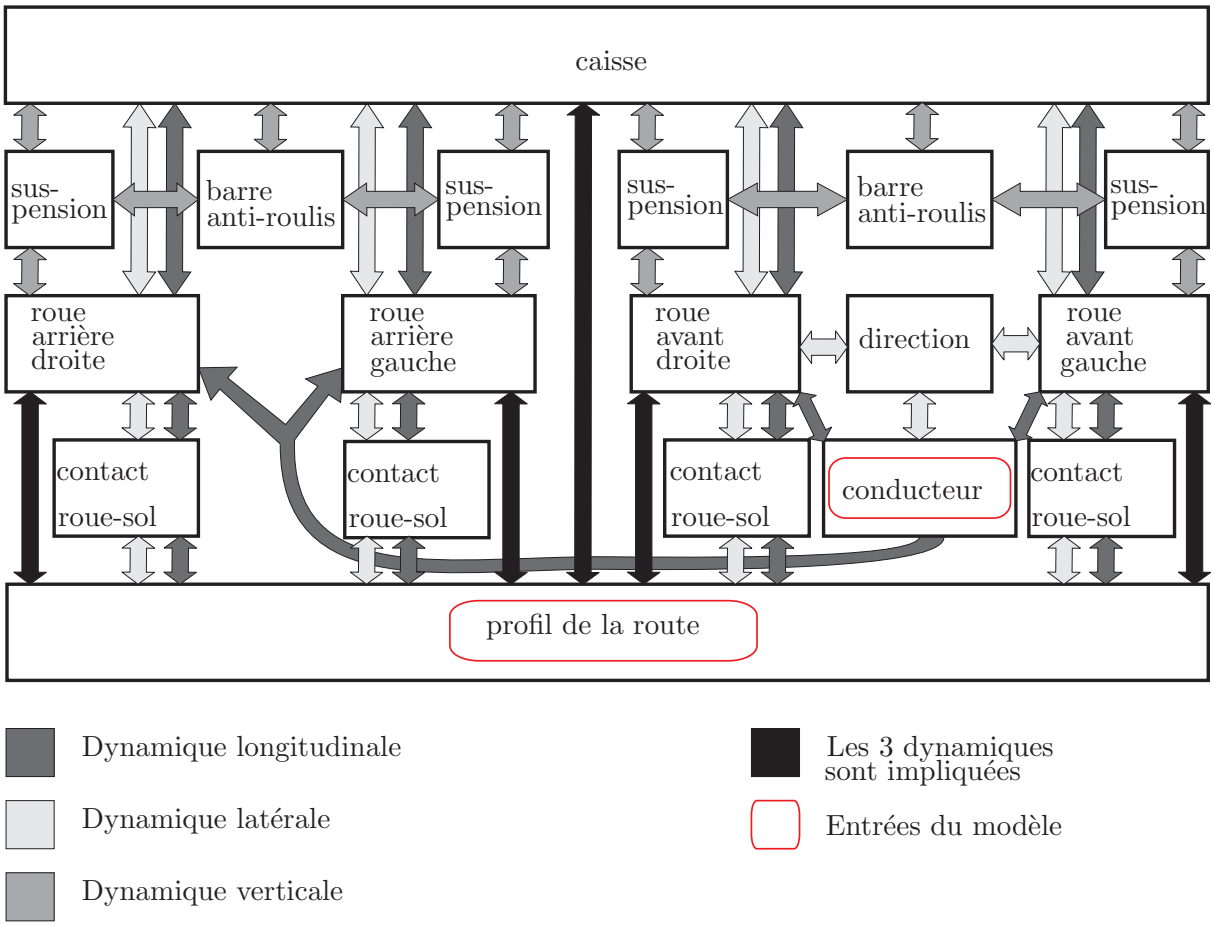


FIGURE 3.3 – Les différentes sous-parties du modèle véhicule et leurs dynamiques associées

Maintenant que l'architecture générale du modèle a été présentée, nous allons détailler chacune des sous-parties. Pour ce faire, nous commençons par présenter les repères utilisés et les matrices de changement de repère permettant d'exprimer l'ensemble des variables dans les repères adéquats.

3.2.4 Référentiel, repères et matrices de changement de repère

3.2.4.1 Repère sol et repère intermédiaire

Le repère sol R_E est un trièdre orthonormal direct $(\vec{X}_E, \vec{Y}_E, \vec{Z}_E)$ lié à la surface de la terre, tel que $\vec{X}_E$ et $\vec{Y}_E$ définissent le plan du sol et l'axe $\vec{Z}_E$ est dirigé vers le haut.

Dans ce référentiel la position du véhicule est repérée grâce au repère intermédiaire R_I. Le repère intermédiaire est un trièdre orthogonal direct $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ dont le plan $\vec{X}\vec{Y}$ coïncide avec le plan $\vec{X}_E\vec{Y}_E$. L'axe $\vec{X}$ est défini par l'intersection du plan de symétrie longitudinal du véhicule au repos et du sol. L'axe $\vec{Z}$ est dirigé vers le haut et passe par le centre de gravité G_V du véhicule.

Le repère intermédiaire est déduit au repos du repère sol par l'angle de lacet ψ autour de l'axe $\vec{Z}_E$ comme illustré à la FIGURE 3.4 (page ci-contre). Ce repère permet de positionner le

véhicule dans le repère sol.

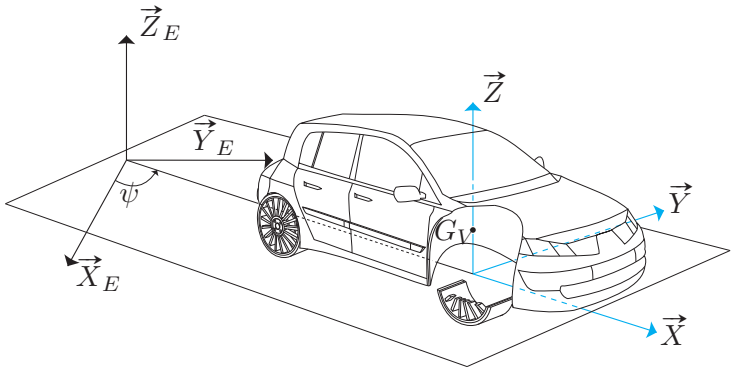


FIGURE 3.4 – Repère sol et repère intermédiaire

3.2.4.2 Repère véhicule

Le repère véhicule R_V est un trièdre orthonormal direct $(\vec{X}_V, \vec{Y}_V, \vec{Z}_V)$ lié au centre de gravité du véhicule. L'axe $\vec{X}_V$ est dirigé vers l'avant du véhicule dans le plan de symétrie longitudinal. L'axe $\vec{Y}_V$ est perpendiculaire au plan de symétrie longitudinal et est dirigé vers la gauche du conducteur. L'axe $\vec{Z}_V$ est dirigé vers le haut.

Le repère véhicule est déduit du repère intermédiaire par les angles de tangage θ et de roulis φ. L'angle de tangage est une rotation autour de l'axe $\vec{Y}$ et l'angle de roulis est une rotation autour de l'axe $\vec{X}_V$ comme illustré à la FIGURE 3.5.

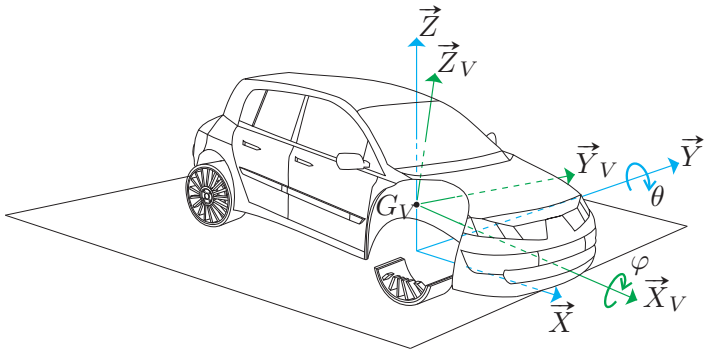


FIGURE 3.5 – Repère véhicule

3.2.4.3 Matrices de changement de repère

L'orientation du repère véhicule par rapport au repère sol est déterminée par la suite des angles d'Euler. Cette suite est définie par les trois rotations (ψ, θ, φ). Ainsi, les matrices $P_{x_1 \to x_2}$ (où x_1 et x_2 sont des repères) de changement de repère peuvent directement être déterminées. De manière générale, le PFD est écrit dans le repère intermédiaire. Or, les grandeurs vectorielles sont généralement projetées dans le repère véhicule. De plus, certaines équations demandent à

être projetées dans le repère sol. Les deux matrices permettant d'effectuer ces projections sont

$$P_{R_V \to R_I} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$P_{R_I \to R_E} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

On déduit de ces deux matrices le changement de repère suivant :

$$\begin{aligned} & P_{R_V \to R_E} \\ & = P_{R_I \to R_E} P_{R_V \to R_I} \\ & = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\sin\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\theta\sin\psi & -\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3 Modèle complet

Nous venons de définir l'ensemble des sous parties et l'ensemble des repères nécessaires pour concevoir un modèle de la dynamique du véhicule. Nous allons reprendre chacune des sous-parties, décrire leurs comportements et développer les équations permettant d'exprimer leurs mouvements respectifs.

Pour le modèle bicyclette présenté en introduction, les variables relatives à l'avant et à l'arrière du véhicule sont indicées respectivement avec F et R. Pour le modèle complet, les variables sont indexées par le numéro de la roue à laquelle elles font références :

roue avant gauche :	1	roue avant droite :	2
roue arrière gauche :	3	roue arrière droite :	4

Pour décrire la dynamique du véhicule complet, le référentiel galiléen permettant d'appliquer le PFD est le référentiel terrestre repéré par le repère sol.

Une des entrées du modèle est l'angle au volant. Cet angle est transmis à la roue par l'intermédiaire de la direction dont nous allons détailler le principe.

3.3.1 Direction

La direction a comme principale fonction de transformer l'angle au volant en un angle de braquage des roues. Lors d'une prise de virage par un véhicule, ce dernier décrit un virage de rayon de courbure R autour d'un centre instantané de rotation I_V. Comme les roues arrière ne sont pas directionnelles, le point I_V appartient à l'axe passant par l'essieu arrière. Les droites perpendiculaires aux droites $(I_v X^{(1)}_{O_W})$ et $(I_v X^{(2)}_{O_W})$ déterminent les angles de braquage idéaux des roues avant. Ces angles, illustrés dans la FIGURE 3.6 (page ci-contre), orientent idéalement les roues pour que leurs axes longitudinaux soient tangents à leurs trajectoires le long d'une courbe. Ces angles de braquage $\delta^{(1)}$ et $\delta^{(2)}$ sont les angles d'Ackerman.

Les véhicules routiers ne respectent généralement pas les angles d'Ackerman mais utilisent une bonne approximation de ces derniers (en dehors des manœuvres de parking) grâce à un montage en épure de Jeantaud. Elle est réalisée par quatre barres articulées formant un trapèze présenté à la FIGURE 3.7 (page ci-contre). Le trapèze est constitué de la tige de la crémaillère

et des bras des porte-fusées, supports des rotules de direction. Les bras des porte-fusées transforment le mouvement de translation de la crémaillère en une rotation différente appliquée à chaque roue.

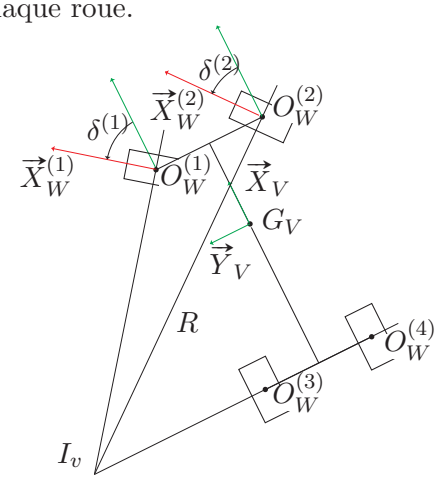


FIGURE 3.6 – Virage à rayon constant

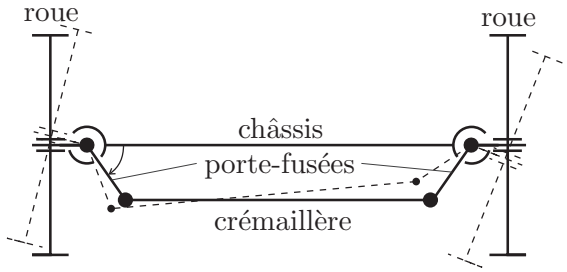
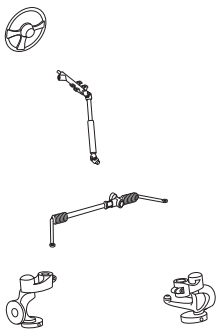


FIGURE 3.7 – Montage en épure de Jeantaud

Le déplacement de la crémaillère est assuré par un pignon relié au volant au travers de la colonne de direction. La colonne de direction est divisée en trois parties et transmet les mouvements du volant au pignon de la crémaillère via deux cardans.

Au final, les éléments constitutifs d'une direction sont :

- le volant
- la colonne de direction
- la crémaillère
- les porte-fusées



3.3.1.1 Le volant et la colonne de direction

L'orientation du volant est donnée par l'axe $\vec{Z}_H$ (*cf.* FIGURE 3.8 (page suivante)) qui permet de définir un sens de rotation positif. Cet axe est orienté vers le conducteur afin qu'un angle au volant δ_H positif se traduit par un angle de braquage des roues positif, *i.e.* positif vers la gauche.

La colonne de direction est modélisée par une barre de torsion, de raideur K_c et d'amortissement C_c, permettant d'exprimer les efforts générés en fonction de l'angle du volant et de l'angle du pignon.

La mise en équation permet d'obtenir le système suivant

$$\begin{cases} M_{z,P}(\text{co/cr}) & = (\delta_H - \theta_P)K_c + (\dot{\delta}_H - \dot{\theta}_P)C_c, \\ M_{z,H}(\text{co/vo}) & = -M_{z,P}(\text{co/cr}), \end{cases} \tag{3.10}$$

où $M_{z,H}(\text{co/vo})$ est le moment généré au point H par la colonne de direction sur le volant et $M_{z,P}(\text{co/cr})$ est le moment généré au point P par la colonne de direction sur la crémaillère.

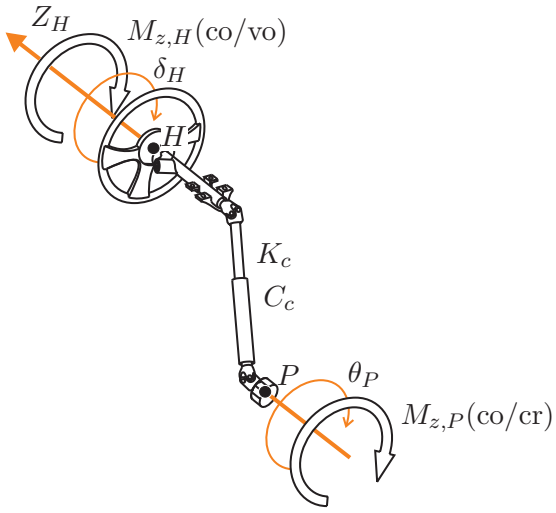


FIGURE 3.8 – Repérage du volant et de la colonne de direction

3.3.1.2 La crémaillère

La crémaillère convertit les forces appliquées par les roues et le moment appliqué par la colonne de direction en un déplacement et en une rotation. Les déplacements sont donnés par la position de la crémaillère Y_M et la rotation est donnée par l'angle du pignon de la crémaillère θ_P illustré à la figure FIGURE 3.9. La relation qui lie le déplacement de la crémaillère et l'angle de rotation de la colonne est le pas de la crémaillère. Selon le type de véhicule, ce rapport peut être fixe ou variable. Nous considérons ici un pas fixe qui peut être calculé par le rayon du pignon. Le dernier rôle de la crémaillère est de limiter le déplacement des roues.

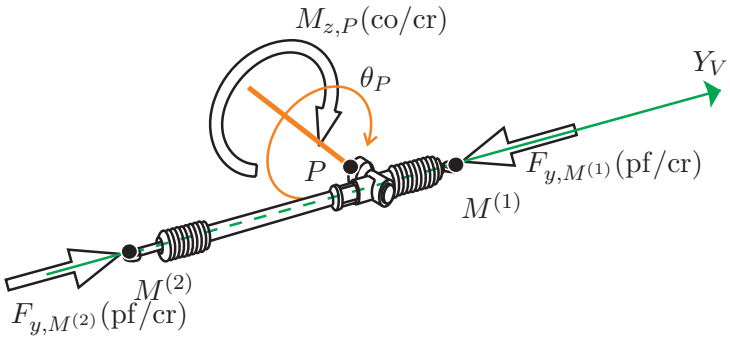


FIGURE 3.9 – Repérage de la crémaillère

Afin de lier les déplacements aux efforts, nous appliquons le PFD sur la masse mobile de la crémaillère dotée d'une masse m_c. Afin de limiter le déplacement, des saturations sont ajoutées.

Système isolé, repère et point d'application Le système isolé est la masse mobile de la crémaillère, et le point d'application du PFD est son centre de gravité. Comme le PFD est projeté suivant l'axe $\vec{Y}_V$ du véhicule, confondu avec l'axe de déplacement de la crémaillère, les déplacements des points $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$ et du centre de gravité sont égaux.

Expressions des forces La force de la colonne de direction sur la crémaillère est donnée par le moment généré au point P ($M_{z,P}(\text{co/cr})$). Ce moment est transformé en une force le long de l'axe Y_V grâce à la formule

$$F_{y,M}(\text{co/cr}) = -\frac{M_{z,P}(\text{co/cr})}{R_c}.$$

où R_c est le rayon du pignon. Les forces appliquées par les porte-fusées sur la crémaillère au centre de gravité de cette dernière sont

$$F_{y,M}(\text{pf/cr}) = F^{(1)}_{y,M}(\text{pf/cr}) + F^{(2)}_{y,M}(\text{pf/cr}).$$

Application du PFD L'application du PFD permet d'exprimer la position de la crémaillère en fonction des forces qui lui sont appliquées. Avec le rayon du pignon, les relations qui lient θ_P à Y_M et leurs dérivées peuvent aussi être données par

$$\begin{cases} m_c \dot{V}_{y,M} & = F^{(1)}_{y,M}(\text{pf/cr}) + F^{(2)}_{y,M}(\text{pf/cr}) - \frac{M_{z,P}(\text{co/cr})}{R_c}, \\ \theta_P & = -\frac{Y_M}{R_c}, \\ \dot{\theta}_P & = -\frac{V_{y,M}}{R_c}. \end{cases} \tag{3.11}$$

3.3.1.3 Les porte-fusées

La liaison de la crémaillère aux porte-fusées est assurée par deux biellettes. Ces biellettes permettent de transformer le déplacement rectiligne de la crémaillère en une rotation des bras des porte-fusées supports des pivots de direction. Dans la modélisation de la liaison, les biellettes garantissent que seule la composante suivant $\vec{Y}_V$ du déplacement des extrémités de la crémaillère (points $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$) entre en jeu pour le calcul de l'angle de braquage.

Les bras des porte-fusées sont paramétrés par leur longueur l_M et par l'angle δ_0 que forme le bras de levier avec le plan de jante comme l'illustre la FIGURE 3.10.

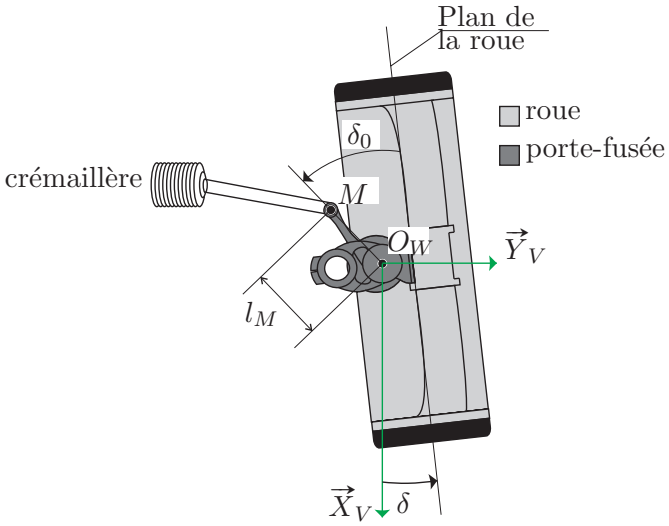


FIGURE 3.10 – Repérage des porte-fusées

Les relations qui lient les efforts appliqués aux points $M^{(i)}$ aux moments appliqués à la roue et les relations qui lient déplacements des points $M^{(i)}$ aux angles de braquage, sont des

relations cinématiques. Le développement des équations est équivalent pour les deux roues avant du véhicule ($i = 1, 2$). La différence entre le porte-fusée de la roue droite et celui de la roue gauche est repéré par le signe des angles $\delta_0^{(i)}$. Cet angle est positif pour la roue gauche ($i = 1$) et négatif pour la roue droite ($i = 2$).

Dans le repère véhicule ramené au centre de pivot de braquage de la roue, la position du point M pour un braquage nul est donnée par

$$Y_{M0}^{(i)} = l_M \sin(\delta_0^{(i)}).$$

Ainsi, les déplacements autour des positions $Y_{M0}^{(i)}$ sont donnés par

$$Y_M^{(i)} = l_M \left(\sin(\delta_0^{(i)}) - \sin(\delta^{(i)} + \delta_0^{(i)}) \right) \tag{3.12}$$

et donc l'angle de braquage en fonction de la position des points $M^{(i)}$ est

$$\delta^{(i)} = \arcsin \left(-\frac{Y_M^{(i)}}{l_M} + \sin \delta_0^{(i)} \right) - \delta_0^{(i)}. \tag{3.13}$$

Lors de l'étude de la roue (*cf.* Section 3.3.4), la connaissance de la vitesse angulaire de braquage est nécessaire. La vitesse peut être déduite en dérivant l'expression (3.13), mais si l'angle de braquage est connu, la dérivée de l'expression (3.12) est plus directe

$$\dot{\delta}^{(i)} = -\frac{V_{y,M^{(i)}}}{l_M \cos(\delta^{(i)} + \delta_0^{(i)})}. \tag{3.14}$$

Les forces appliquées par les porte-fusées sur la crémaillère sont données par le moment généré à la roue autour de son axe vertical ($M_{z,C_W^{(i)}}(\text{ro/pf})$) avec l'expression

$$F_{y,M^{(i)}}(\text{pf/cr}) = -l_M \cos(\delta^{(i)} + \delta_0^{(i)}) M_{z,C_W^{(i)}}(\text{ro/pf}). \tag{3.15}$$

3.3.1.4 Modèle de direction

Au final, le modèle de direction peut être décrit par les relations entrées/sorties de chacune des sous-parties constituant la direction. La FIGURE 3.11 (page ci-contre) illustre ces relations avec les paramètres à renseigner afin de concevoir un modèle de direction.

Le modèle de direction permet de définir les angles de braquages aux roues en fonction de l'angle au volant mais aussi le couple généré au volant par les roues. Après s'être intéressé à la direction, nous allons maintenant décrire la caisse, son repérage et les équations permettant de décrire son mouvement.

3.3.2 Caisse

La caisse du véhicule est composée du moteur, de l'habitacle, de tous les éléments fixes ou considérés comme fixes par rapport à la caisse. On entend par éléments considérés comme fixes les éléments mobiles de la caisse dont les dynamiques sont négligeables par rapport à la masse suspendue.

La caisse est liée aux suspensions via deux points de fixation par suspension. Le premier point, noté $A^{(i)}$ est le centre de la liaison entre les coupelles de suspension et la caisse. Les

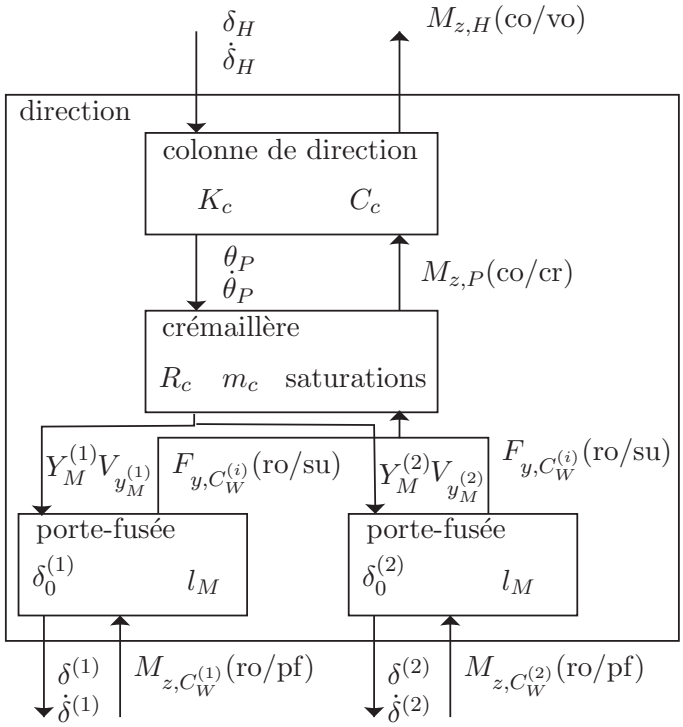


FIGURE 3.11 – Le modèle de direction, ses entrées-sorties et ses paramètres

coupelles de suspension sont situées sur la partie haute de la suspension et assurent une liaison rotule entre la suspension et la caisse. La seconde liaison entre la suspension et la caisse est le point de fixation des triangles de suspension noté $B^{(i)}$. Les points $A^{(i)}$ et $B^{(i)}$, liés à la caisse, sont les points où sont transmis les efforts entre la suspension et la caisse. Afin de limiter le nombre de paramètres à identifier sur le véhicule, nous effectuons l'hypothèse que ces points sont alignés sur un même axe vertical, *i.e.* repéré par les mêmes distances de voies et d'empattement.

Le repérage de ces points est donné à la FIGURE 3.12.

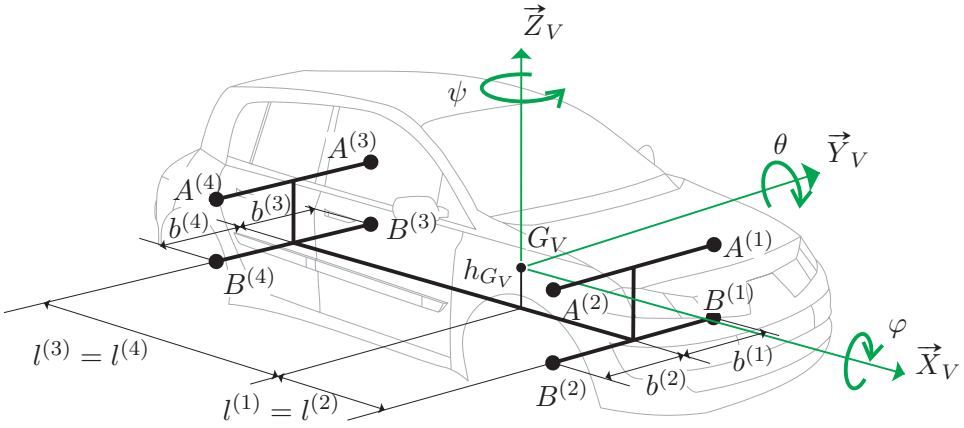


FIGURE 3.12 – Repérage de la caisse

Par rapport à la norme [NORME ISO 8855, 1991], l'empattement et la voie sont décomposés en deux distances qui permettent de positionner le centre de gravité du véhicule. Mais pour

simplifier la présentation des résultats, nous les décomposons en quatre distances afin de rendre génériques les équations liées aux roues. Ces quatre distances sont signées par rapport au repère véhicule. Ainsi, $l^{(1)} = l^{(2)}$ et $b^{(1)} = b^{(4)}$ sont des nombres positifs et $l^{(3)} = l^{(4)}$ et $b^{(2)} = b^{(3)}$ sont des nombres négatifs.

Pour décrire les mouvements de la caisse dans les trois dimensions nous appliquons le PFD.

Système isolé, repère et point d'application Le système isolé est la caisse, et le point d'application du PFD est son centre de gravité. Ainsi, les mouvements de rotation de la caisse se font autour de G_V. En réalité, la caisse possède plusieurs centres de rotation (en roulis et en tangage) qui ne sont pas confondus avec le centre de gravité mais qui dépendent de l'épure des suspensions. Les méthodes permettant de calculer la position de ces points sont très complexes car dépendantes de la position des suspensions. Ainsi, nous faisons l'hypothèse simplificatrice de rotation de la caisse autour de son centre de gravité.

Vu que l'ensemble des mouvements de la caisse est considéré, le PFD est appliqué selon les 3 axes et autour des 3 axes du repère véhicule R_V. En revanche, l'ensemble des vitesses et accélérations est exprimé dans le repère intermédiaire R_I.

Expressions des forces Comme nous le verrons à la Section 3.3.3, les efforts transmis aux points $A^{(i)}$ sont les efforts verticaux de la suspension, notés $F_{z,A^{(i)}}(\text{su/ca})$ et les efforts transmis aux points $B^{(i)}$ sont les efforts horizontaux, notés $F_{x,B^{(i)}}(\text{su/ca})$ et $F_{y,B^{(i)}}(\text{su/ca})$.

La dernière force à considérer dans l'application du PFD, est due au poids de la masse suspendue. Afin de prendre en compte la pente ρ et le dévers η de la route, le vecteur poids $\vec{p}_{G_V}$ n'est pas forcément porté par Z_V dans le repère véhicule comme le montre la figure FIGURE 3.13.

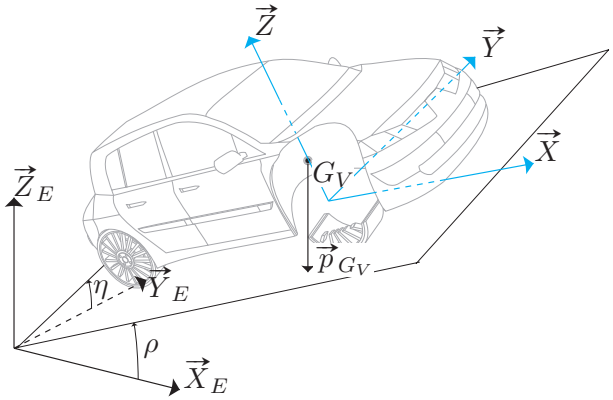


FIGURE 3.13 – Orientation du repère véhicule dans le repère sol, due à la pente et au dévers

La matrice de projection suivante permet d'exprimer le vecteur poids dans le repère intermédiaire

$$P_{R_E \mapsto R_I} = \begin{pmatrix} \cos\rho & 0 & -\sin\rho \\ \sin\rho\sin\eta & \cos\eta & \cos\rho\sin\eta \\ \sin\rho\cos\eta & \sin\eta & \cos\rho\cos\eta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'effort dû au poids de la masse suspendue est

$$\vec{p}_{G_V} = P_{R_E \mapsto R_I} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_s g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_s g \sin\rho \\ -m_s g \cos\rho\sin\eta \\ -m_s g \cos\rho\cos\eta \end{pmatrix},$$

où m_s est la masse suspendue et g la constante de gravité.

Application du PFD La matrice d'inertie de la caisse définie au centre de gravité de cette dernière est

$$I = \left[\begin{array}{ccc} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{array} \right]_{R_V}.$$

Les termes I_{xy} et I_{yz} sont nuls car le plan (X_V, Z_V) est dans le plan longitudinal de symétrie du véhicule. Le terme I_{xz} est négligé car il est petit devant les trois autres inerties (de l'ordre de 1 %).

Le moment cinématique de la caisse en G_V est donné par

$$\vec{\mu}(G_V \in R_V/R_E) = I\vec{\Omega}_{R_V/R_E} = \left(\begin{array}{c} I_{xx}\dot{\varphi} \\ I_{yy}\dot{\theta} \\ I_{zz}\dot{\psi} \end{array} \right)_{R_V}.$$

Le moment dynamique est la dérivée du moment cinétique

$$\vec{\delta}(G_V \in R_V/R_E) = \frac{d^{R_V}}{dt}\vec{\mu}(G_V \in R_V/R_E) + \vec{\Omega}_{R_V/R_E} \wedge \vec{\mu}(G_V \in R_V/R_E). \tag{3.16}$$

Le moment dynamique est donc

$$\vec{\delta}(G_V \in R_V/R_E) = \left(\begin{array}{c} I_{xx}\ddot{\varphi} \\ I_{yy}\ddot{\theta} \\ I_{zz}\ddot{\psi} \end{array} \right)_{R_V} + \left(\begin{array}{c} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I_{xx}\dot{\varphi} \\ I_{yy}\dot{\theta} \\ I_{zz}\dot{\psi} \end{array} \right)_{R_V} = \left(\begin{array}{c} I_{xx}\ddot{\varphi} + \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{yy}) \\ I_{yy}\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}(I_{xx} - I_{zz}) \\ I_{zz}\ddot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\varphi}(I_{yy} - I_{xx}) \end{array} \right)_{R_V}.$$

En utilisant l'expression du moment dynamique et l'équation de l'accélération du véhicule dans le repère sol, développés pour le modèle bicyclette (*cf.* équation (3.4)), l'application du PFD permet d'obtenir les différents mouvements de la caisse exprimés dans le repère intermédiaire par

$$\begin{aligned}
m_s(\dot{v}_X - \dot{\psi}v_Y) &= \sum_{i=1}^{4} F_{x,B^{(i)}}(\text{su/ca}) + m_s g \sin\rho && \text{composante longitudinale,} \\
m_s(\dot{v}_Y + \dot{\psi}v_X) &= \sum_{i=1}^{4} F_{y,B^{(i)}}(\text{su/ca}) - m_s g \cos\rho \sin\eta && \text{composante latérale,} \\
I_{zz}\ddot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\varphi}(I_{yy} - I_{xx}) &= \sum_{i=1}^{4} l^{(i)} F_{y,B^{(i)}}(\text{su/ca}) - b^{(i)} F_{x,B^{(i)}}(\text{su/ca}) && \text{lacet,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_s\dot{v}_Z &= \sum_{i=1}^{4} F_{z,A^{(i)}}(\text{su/ca}) - m_s g \cos\rho\cos\eta && \text{pompage,} \\
I_{yy}\ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\varphi}(I_{xx} - I_{zz}) &= \sum_{i=1}^{4} -l^{(i)} F_{z,A^{(i)}}(\text{su/ca}) - h_{G_V} \sum_{i=1}^{4} F_{x,B^{(i)}}(\text{su/ca}) && \text{tangage,} \\
I_{xx}\ddot{\varphi} + \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{yy}) &= \sum_{i=1}^{4} b^{(i)} F_{z,A^{(i)}}(\text{su/ca}) + h_{G_V} \sum_{i=1}^{4} F_{y,B^{(i)}}(\text{su/ca}) && \text{roulis.}
\end{aligned}$$

Expressions cinématiques Le PFD a permis d'écrire les équations permettant de déterminer la position du centre de gravité et l'orientation de la caisse. Or, pour exprimer les efforts dus aux suspensions, il est nécessaire de connaître la variation de hauteur des points $A^{(i)}$ dans le repère intermédiaire. En posant

$$\overrightarrow{G_V A^{(i)}} = \begin{pmatrix} l^{(i)} \\ b^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_V},$$

pour $i = 1, \ldots, 4$. La matrice de passage (3.7) permet d'obtenir

$$Z_{A^{(i)}} = Z_{G_V} - l^{(i)} \sin\theta + b^{(i)} \sin\varphi \cos\theta. \tag{3.17}$$

La formule de changement de point nous permet de connaitre les vitesses verticales de ces points exprimées dans le repère véhicule.

$$V_{z,A^{(i)}} \vec{e}_{Z_V} = (V_{z,G_V} - l^{(i)}\dot{\theta} + b^{(i)}\dot{\varphi}) \vec{e}_{Z_V},$$

pour $i = 1, \ldots, 4$, où $\vec{e}_{Z_V}$ est un vecteur unitaire porté par $\vec{Z}_V$.
Afin de connaître la vitesse dans le repère sol, il est nécessaire d'utiliser la matrice de projection (3.9), ce qui donne

$$V_{z,A^{(i)}} \vec{e}_{Z_E} = (V_{z,G_V} \cos\varphi\cos\theta - l^{(i)}\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta + b^{(i)}\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta) \vec{e}_{Z_E}, \tag{3.18}$$

où $\vec{e}_{Z_E}$ est un vecteur unitaire porté par $\vec{Z}_E$.

L'ensemble des expressions précédentes permet de déterminer la position de la caisse dans le repère intermédiaire. Il est également intéressant de connaître la trajectoire du véhicule dans le repère sol. Pour cela, il est nécessaire de projeter le vecteur vitesse du centre de gravité dans le repère sol avec

$$\begin{pmatrix} V_{x,G_V} \\ V_{y,G_V} \\ V_{z,G_V} \end{pmatrix}_{R_E} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{pmatrix}_{R_I}.$$

La trajectoire du véhicule est alors obtenue par intégration

$$\begin{cases} X_{G_V} = \int (\cos\psi V_{x,G_V} - \sin\psi V_{y,G_V})\ dt, \\ Y_{G_V} = \int (\sin\psi V_{x,G_V} + \cos\psi V_{y,G_V})\ dt, \\ Z_{G_V} = \int V_{z,G_V}\ dt. \end{cases}$$

Modèle de caisse L'ensemble des équations développées ci-dessus permet de définir le mouvement de la caisse dans le repère intermédiaire ainsi que la trajectoire du véhicule. La FIGURE 3.14 (page ci-contre) reprend les sous-blocs constitutifs de la dynamique de la caisse, les entrées-sorties et les paramètres nécessaires à sa modélisation.

Les mouvements du modèle de caisse sont exprimés en fonction des efforts transmis par les suspensions et les barres anti-roulis. Nous allons détailler maintenant leurs spécificités.

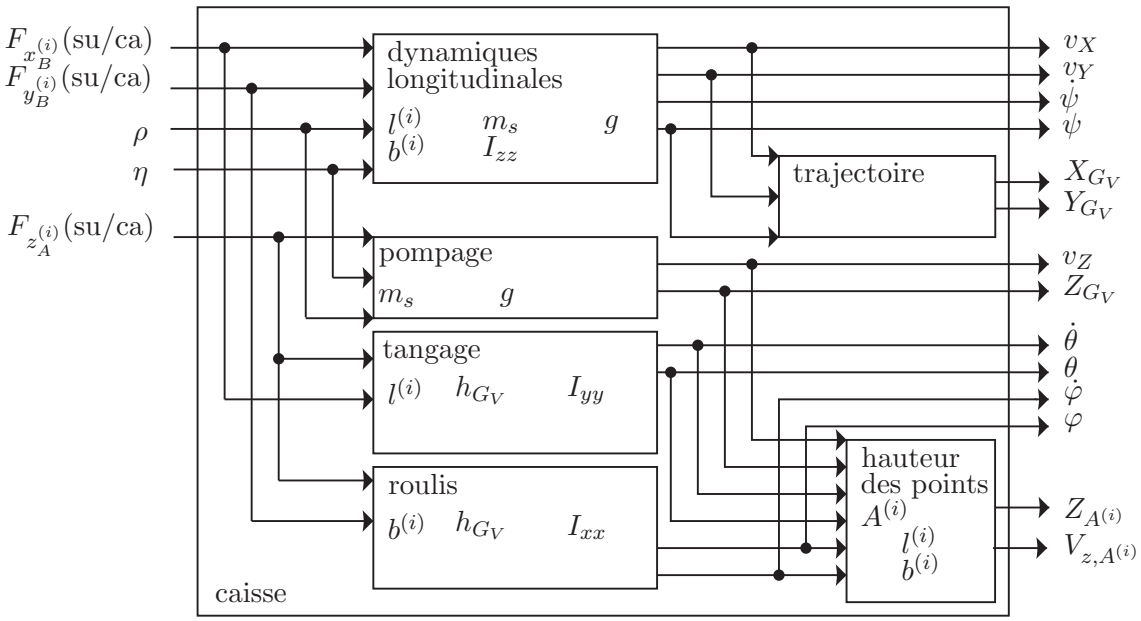


FIGURE 3.14 – Le modèle de caisse, ses entrées-sorties et ses paramètres

3.3.3 Suspensions et barres anti-roulis

La suspension a comme principale fonction d'amortir les variations de hauteur du profil de route (indispensable au confort) et de maintenir le contact roue-sol malgré son irrégularité (indispensable à la tenue de route). Historiquement, les premières suspensions étaient des ressorts à lames. Aujourd'hui, pour les véhicules de tourisme, les suspensions les plus courantes sont les suspensions couplant un ressort hélicoïdal et un amortisseur. Citons aussi les suspensions oléopneumatiques qui utilisent un vérin hydraulique et une chambre ressort à gaz. Le véhicule d'essai du laboratoire est équipé de suspensions à ressort hélicoïdal, ainsi le modèle se base sur ce type de suspensions.

Le bloc suspension est composé de l'ensemble mécanique suivant :

- ressort et amortisseur 
- le porte-fusée 
- la barre anti-roulis 
- le triangle de suspension 

Par l'intermédiaire du ressort et de l'amortisseur, les principaux efforts transmis sont les efforts verticaux. Cette assertion est d'autant plus vraie que la coupelle de suspension (point de fixation haut du couple ressort-amortisseur) assure une liaison rotule avec la caisse. Le triangle de suspension va, quant à lui, transmettre les efforts longitudinaux et latéraux à la caisse. Le porte-fusée est la pièce mécanique qui lie le triangle de suspension, la suspension et la roue. Il reçoit l'ensemble des efforts de la roue. Le dernier élément composant la suspension est la barre anti-roulis qui est une barre de torsion liée au triangle de suspension et à la caisse. Cette barre s'oppose au roulis du véhicule en créant un couple de rappel de la caisse.

Il existe différentes architectures de suspension. Idéalement, la suspension doit préserver, lors

de sa compression, un déplacement horizontal de l'axe de la roue. Une architecture respectant cette condition est l'architecture de Mc Pherson. Une suspension de Mc Pherson est composée de deux triangles de suspension superposés. Pour des raisons économiques, il est plus fréquent de trouver sur les véhicules des architectures type pseudo-Mc Pherson où le triangle de suspension haut est éliminé. Cette architecture induit un mouvement de rotation de l'axe de rotation de la roue comme le montre la FIGURE 3.15.

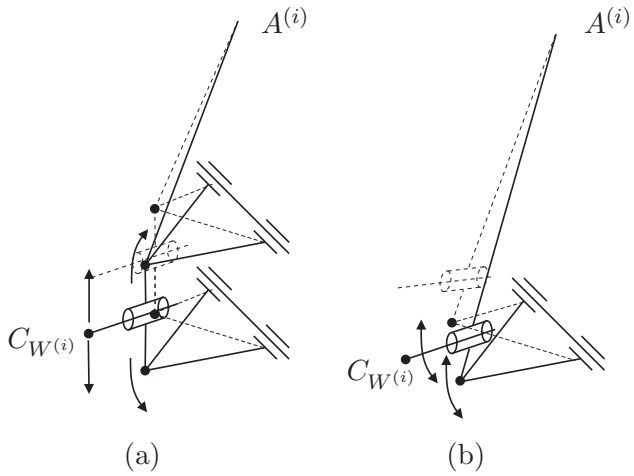


FIGURE 3.15 – Architecture Mc Pherson (a) et pseudo-Mc Pherson (b)

Les suspensions avant d'un véhicule sont des suspensions indépendantes liées par une barre de torsion, appelée barre anti-roulis. Pour le train arrière, il est courant d'utiliser une suspension à poutre de torsion. Dans ce cas il n'y a pas de porte-fusée et les moyeux, supports du roulement des roues, sont fixés aux extrémités d'une poutre en « U » dont la rigidité en torsion fait office de barre anti-roulis.

Pour avoir un modèle générique de suspension pour le train avant et le train arrière, nous considérons que les porte-fusées pour le train avant et les moyeux pour le train arrière ont un mouvement purement vertical. Nous considérons aussi que les suspensions arrière du véhicule sont indépendantes et liées par une barre de torsion. Ainsi, la modélisation des suspensions est équivalente au modèle quart de véhicule présenté à la Section 3.2.2, auquel on ajoute la barre anti-roulis. Pour le train avant, il faut aussi considérer que les efforts transmis par la roue aux porte-fusées sont exprimés dans le repère roue qui est en rotation par rapport au repère véhicule (angle de braquage). Aucune masse n'est mise en jeu dans le modèle de suspension, ainsi seules des équations cinématiques sont développées. Afin de développer ces équations, nous utilisons le repérage donné à la FIGURE 3.16 (page ci-contre).

Expressions cinématiques Les forces $F_{x,C_W^{(i)}}(\text{ro/su})$ et $F_{y,C_W^{(i)}}(\text{ro/su})$ sont les efforts transmis par les roues sur les porte-fusées à l'avant et les moyeux à l'arrière. Pour le train avant, ces forces sont projetées du repère roue au repère intermédiaire avec une matrice de projection due au braquage des roues avant. En revanche, pour le train arrière, ces forces sont transmises à la

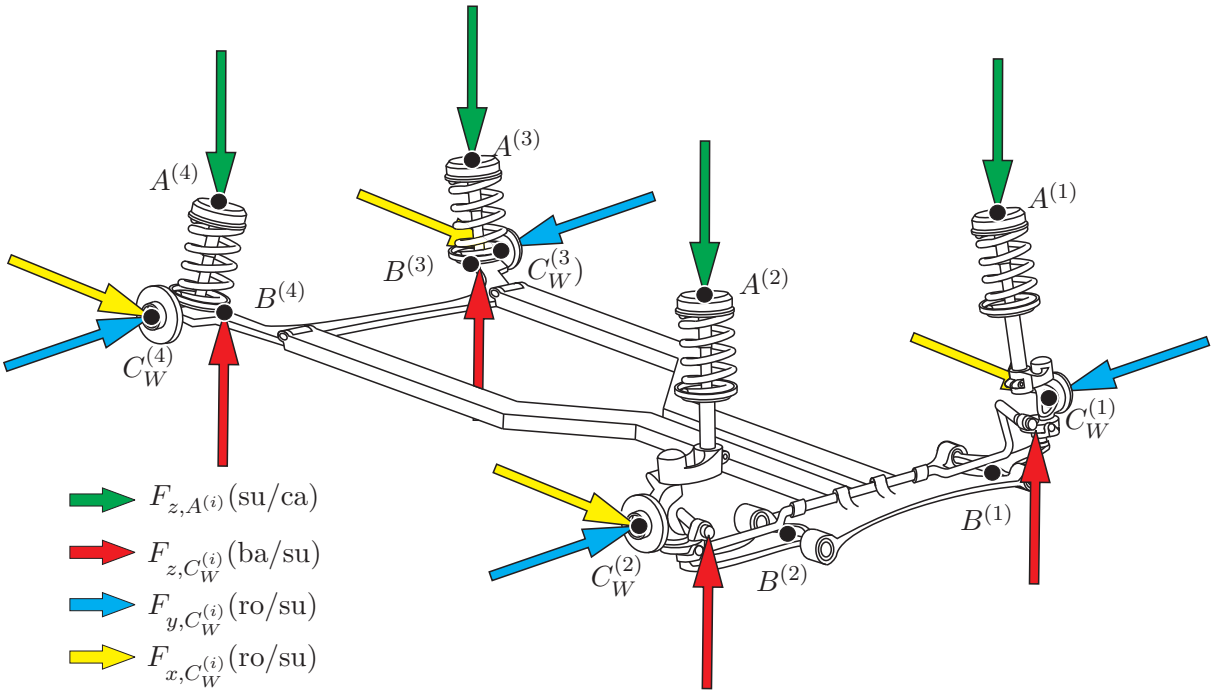


FIGURE 3.16 – Repérage des suspensions

caisse du véhicule sans être modifiées. Les équations de projections des forces sont données par :

$$\begin{cases} F_{x,B^{(i)}}(\text{su/ca}) = F_{x,C_W^{(i)}}(\text{ro/su})\cos\delta^{(i)} - F_{y,C_W^{(i)}}(\text{ro/su})\sin\delta^{(i)}, \\ F_{y,B^{(i)}}(\text{su/ca}) = F_{x,C_W^{(i)}}(\text{ro/su})\sin\delta^{(i)} + F_{y,C_W^{(i)}}(\text{ro/su})\cos\delta^{(i)}, \end{cases} \quad \text{pour } i = 1,2,$$
$$\begin{cases} F_{x,B^{(i)}}(\text{su/ca}) = F_{x,C_W^{(i)}}(\text{ro/su}), \\ F_{y,B^{(i)}}(\text{su/ca}) = F_{y,C_W^{(i)}}(\text{ro/su}), \end{cases} \quad \text{pour } i = 3,4. \tag{3.19}$$

La modélisation d'un ressort et d'un amortisseur implique que les forces $F_{z,A}^{(i)}(\text{su/ca})$ sont proportionnelles aux positions et aux vitesses verticales des points $C_W^{(i)}$ et $A^{(i)}$. Les coefficients de proportionnalités sont les coefficients de raideurs $K_s^{(i)}$ et les coefficients d'amortissement $C_s^{(i)}$. Le principe d'action-réaction nous permet aussi d'exprimer les forces de la suspension sur la roue $F_{z,C_W^{(i)}}(\text{su/ro})$.

$$\begin{cases} F_{z,A^{(i)}}(\text{su/ca}) = (Z_{C_W^{(i)}} - Z_{A^{(i)}})K_s^{(i)} + (V_{z,C_W^{(i)}} - V_{z,A^{(i)}})C_s^{(i)}, \\ F_{z,C_W^{(i)}}(\text{su/ro}) = -F_{z,A^{(i)}}(\text{su/ca}), \end{cases} \quad \text{pour } i = 1,\dots,4. \tag{3.20}$$

Le dernier élément modélisé est la barre anti-roulis. Il est possible de modéliser les efforts générés par la barre en fonction de la hauteur des points $C_W^{(i)}$ mais les données constructeurs donnent directement une raideur permettant de calculer les forces générées en fonction de l'angle de roulis du véhicule.

$$\left\{ F_{z,C_W^{(i)}}(\text{ba/su}) = -K_b^{(i)}\varphi, \right. \tag{3.21}$$

où $K_b^{(1)} = -K_b^{(2)}$ et $K_b^{(3)} = -K_b^{(4)}$ avec K_b positif, sont respectivement les raideurs des barres anti-roulis avant et arrière.

Les équations permettant de définir le rôle des suspensions dans le modèle véhicule sont donc des expressions cinématiques utilisées pour exprimer les forces s'appliquant sur la roue lors de l'application du PFD sur cette dernière.

Modèle de suspension Le modèle de suspension permet de transmettre les forces générées par la roue au véhicule. Il se décompose en trois sous-parties, le couple ressort-amortisseur (équations (3.20)), la projection des efforts longitudinaux (équations (3.19)) et la barre anti-roulis (équations (3.21)). La FIGURE 3.17 illustre le modèle de suspension avec ses sous-parties, ses entrées-sorties et ses paramètres. Pour être complet, les débattements verticaux $(Z_{A_i} - Z_{C_W^{(i)}})$ doivent être saturés en position.

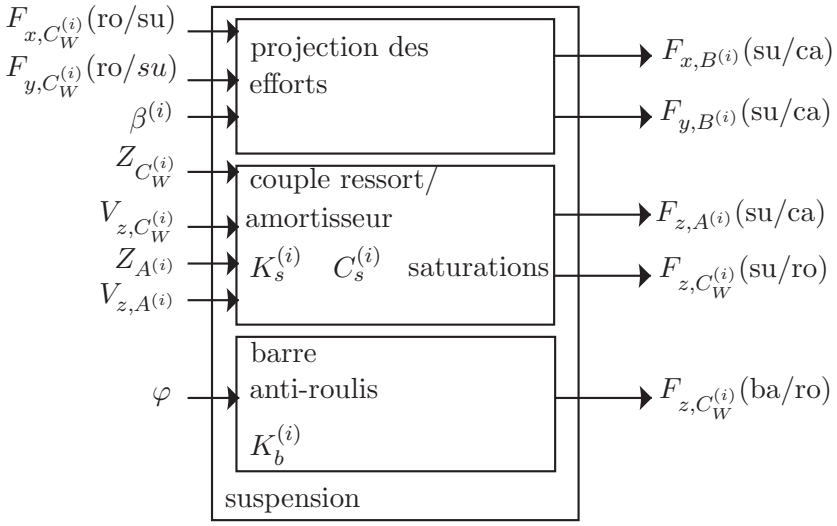


FIGURE 3.17 – Modèle de suspension, ses entrées-sorties et ses paramètres

3.3.4 Roues

Les roues transmettent l'ensemble des efforts générés aux contacts roue-sol à la suspension. Les efforts aux contacts roue-sol sont générés aux points $O_W^{(i)}$ qui sont les points de contact conventionnels au sol. Ces points sont définis par l'intersection du plan de la roue et de la projection verticale de l'axe de rotation de la roue sur le sol, comme le montre la FIGURE 3.18 (page ci-contre). En ces points de contact est défini le repère roue. Le repère roue $(\vec{X}_W^{(i)}, \vec{Y}_W^{(i)}, \vec{Z}_W^{(i)})$ est un trièdre orthogonal direct dont le plan $\vec{X}_W^{(i)}\vec{Y}_W^{(i)}$ coïncide avec le plan $\vec{X}_E\vec{Y}_E$. L'axe $\vec{X}_W^{(i)}$ est défini par l'intersection du plan de la roue (perpendiculaire à l'axe de rotation) avec le plan $\vec{X}_E\vec{Y}_E$. $\vec{X}_W^{(i)}$ est orienté vers l'avant du véhicule et l'axe $\vec{Z}_W^{(i)}$ est orienté vers le haut. Le mouvement de rotation de la roue est défini par la vitesse de rotation ω autour de l'axe $\vec{Y}_W^{(i)}$ ramené au point $C_W^{(i)}$. Le point $C_W^{(i)}$ est défini par l'intersection du plan de la roue et de l'axe de rotation de la roue.

Dans cette partie, les expressions sont déduites de l'application du PFD sur la masse non-suspendue. Au final, le bloc modélisant la roue permet d'exprimer les efforts transmis à la caisse

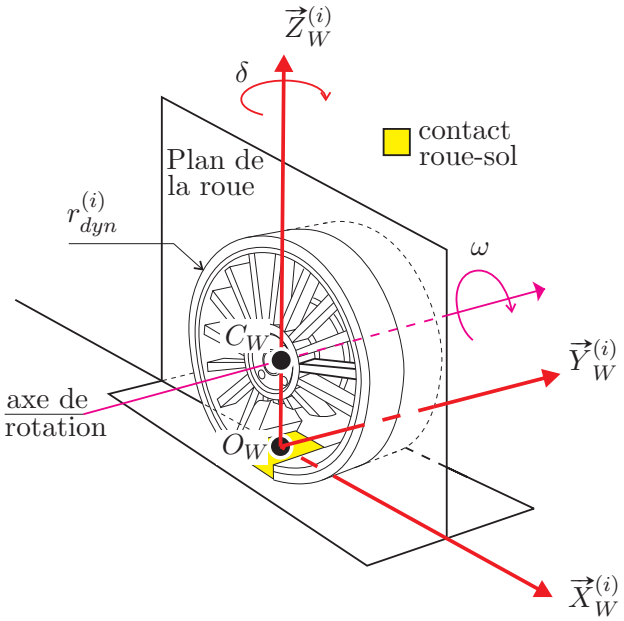


FIGURE 3.18 – Repérage de la roue

via les suspensions.

La roue a aussi pour fonction de transmettre le couple imposé par le moteur à la route. Le couple moteur et les efforts générés aux contacts roue-sol permettent de déterminer la vitesse de rotation de la roue.

Système isolé, repère et point d'application Le système isolé est la masse non-suspendue et le point d'application du PFD est le centre de rotation de la roue $C_W^{(i)}$. L'ensemble des vitesses et efforts est exprimé dans le repère roue $R_W^{(i)}$.

Expressions des forces Les efforts appliqués sur la masse non-suspendue sont

- les efforts horizontaux $F_{x,C_W^{(i)}}(\text{su/ro})$ (équation (3.19)) ;
- les efforts latéraux $F_{y,C_W^{(i)}}(\text{su/ro})$ (équation (3.19)) ;
- les efforts verticaux $F_{z,C_W^{(i)}}(\text{su/ro})$ (équation (3.20)) ;
- les efforts de la barre anti-roulis $F_{z,C_W^{(i)}}(\text{ba/su})$ (équation (3.21)).

À ces efforts, il faut ajouter les efforts générés aux contacts roue-sol $F_{x,O_W^{(i)}}(\text{so/ro})$, $F_{y,O_W^{(i)}}(\text{so/ro})$ et $F_{z,O_W^{(i)}}(\text{so/ro})$ et l'effort dû au poids de la masse non-suspendue $\vec{p}_{C_W^{(i)}}$.
Comme pour le modèle caisse (*cf.* Section 3.3.2), afin de prendre en compte la pente ρ et le dévers η de la route, le vecteur poids $\vec{p}_{C_W^{(i)}}$ n'est pas toujours confondu avec l'axe $\vec{Z}_W^{(i)}$. L'expression de ce vecteur est

$$\vec{p}_{C_W^{(i)}} = \begin{pmatrix} m_{ns}^{(i)} g \sin\rho \\ -m_{ns}^{(i)} g \cos\rho \sin\eta \\ -m_{ns}^{(i)} g \cos\rho \cos\eta \end{pmatrix}_{R_W^{(i)}},$$

où $m_{ns}^{(i)}$ est la masse non-suspendue de la roue i et g la constante de gravité.

La rotation de la roue est imposée par un couple transmis du moteur $C_m^{(i)}$ ($i = 1, 2$ car le moteur est lié aux roues du train avant) et par le moment $M_{y,C_W^{(i)}}(\text{so/ro})$ créé par la force longitudinale du contact roue-sol

$$M_{y,C_W^{(i)}}(\text{so/ro}) = -F_{x,O_W^{(i)}}(\text{so/ro}) r_{dyn}^{(i)},$$

où $r_{dyn}^{(i)}$ est le rayon dynamique de la roue qui varie en fonction de la charge sur cette dernière.

Application du PFD Le repère permettant d'appliquer le PFD est le repère sol. Ainsi, l'accélération du centre de la roue $\vec{a}_{C_W^{(i)}}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{C_W^{(i)}} &= \frac{d^{R_w^{(i)}} \vec{V}_{C_W^{(i)}}}{dt} + \vec{\Omega}_{R_W^{(i)}/R_E} \wedge \vec{V}_{C_W^{(i)}}, \\
&= \frac{d^{R_w^{(i)}}}{dt} \begin{pmatrix} V_{x,C_W^{(i)}} \\ V_{y,C_W^{(i)}} \\ Vz, C_W^{(i)} \end{pmatrix}_{R_W^{(i)}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\delta}_i \end{pmatrix}_{R_W^{(i)}} \wedge \begin{pmatrix} V_{x,C_W^{(i)}} \\ V_{y,C_W^{(i)}} \\ V_{z,C_W^{(i)}} \end{pmatrix}_{R_W^{(i)}}, \\
&= \begin{pmatrix} \dot{V}_{x,C_W^{(i)}} - (\dot{\psi} + \dot{\delta}_i) V_{y,C_W^{(i)}} \\ \dot{V}_{y,C_W^{(i)}} + (\dot{\psi} + \dot{\delta}_i) \dot{V}_{x,C_W^{(i)}} \\ \dot{V}_{z,C_W^{(i)}} \end{pmatrix}_{R_W^{(i)}}.
\end{aligned}$$

Les mouvements que nous recherchons sont les trois translations du centre de la roue dans son repère et la rotation autour de l'axe $\vec{Y}_W^{(i)}$ de la roue. L'application du PFD donne les composantes longitudinale et latérale suivante :

$$\begin{cases}
m_{ns}^{(i)} (\dot{V}_{x,C_W^{(i)}} - (\dot{\psi} + \dot{\delta^{(i)}}) V_{y,C_W^{(i)}}) & = F_{x,C_W^{(i)}}(\text{su/ro}) + F_{x,O_W^{(i)}}(\text{so/ro}) + m_{ns}^{(i)} g \sin\rho, \\
m_{ns}^{(i)} (\dot{V}_{y,C_W^{(i)}} + (\dot{\psi} + \dot{\delta^{(i)}}) V_{x,C_W^{(i)}}) & = F_{y,C_W^{(i)}}(\text{su/ro}) + F_{y,O_W^{(i)}}(\text{so/ro}) - m_{ns}^{(i)} g \cos\rho \sin\eta, \\
I_{r_{yy}}^{(i)} \omega^{(i)} & = C_m^{(i)} - F_{x,O_W^{(i)}}(\text{so/ro}) r_{dyn}^{(i)}.
\end{cases} \tag{3.22}$$

pour $i = 1, \ldots, 4$ et où $I_{r_{yy}}^{(i)}$ est l'inertie de la roue autour de son axe de rotation $\vec{Y}_W^{(i)}$.

Pour la composante verticale, nous avons

$$m_{ns}^{(i)} \dot{V}_{z,C_W^{(i)}} = F_{z,C_W^{(i)}}(\text{su/ro}) + F_{z,C_W^{(i)}}(\text{ba/su}) + F_{z,O_W^{(i)}}(\text{so/ro}) - m_{ns}^{(i)} g \cos\rho \cos\eta, \tag{3.23}$$

pour $i = 1, \ldots, 4$.

Expressions cinématiques Pour le modèle de roue, la seule expression cinématique nécessaire est le calcul du rayon dynamique $r_{dyn}^{(i)}$ de la roue en fonction de son rayon sous charge statique $r_{stat}^{(i)}$, de la hauteur de la route $Z_{O_W^{(i)}}$ et de la hauteur du centre de la roue $Z_{C_W^{(i)}}$

$$r_{dyn}^{(i)} = r_{stat}^{(i)} + Z_{C_W^{(i)}} - Z_{O_W^{(i)}} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, 4. \tag{3.24}$$

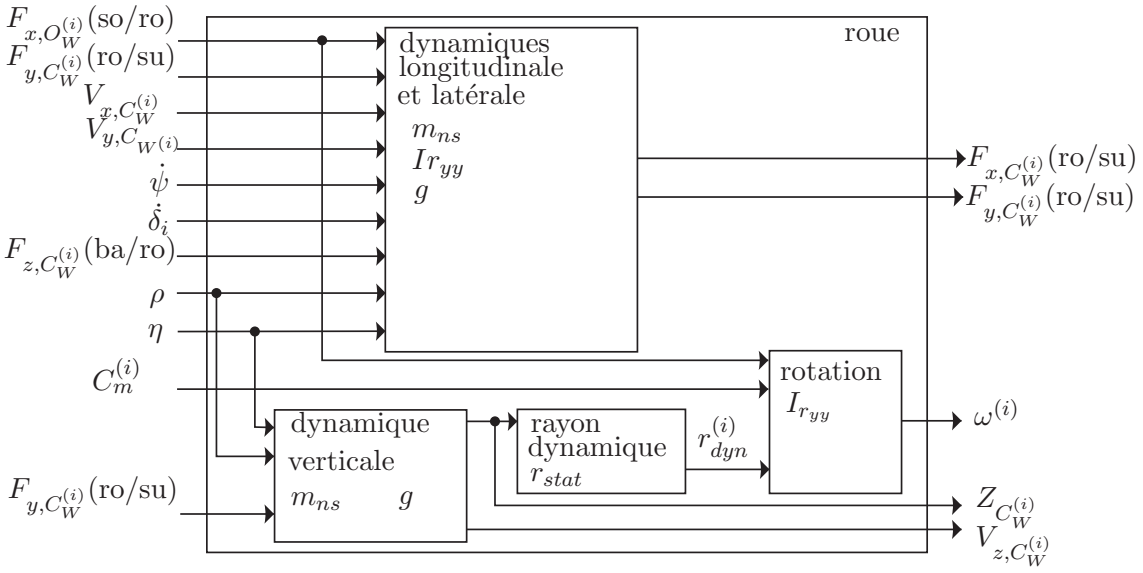


FIGURE 3.19 – Le modèle de roue, ses entrées-sorties et ses paramètres

Le modèle de roue L'ensemble des équations développées ci-dessus permet de déterminer le transfert des efforts entre le contact roue-sol et la caisse, la vitesse de rotation de la roue ainsi que ses mouvements verticaux. La FIGURE 3.19 reprend les sous-blocs constitutifs de la dynamique de la roue, les entrées-sorties et les paramètres nécessaires à la modélisation.

Pour les roues, les équations de la dynamique longitudinale sur la roue issues du PFD ne cherchent pas à exprimer la position de la roue en fonction des forces. En effet, la position du centre de la roue est déterminée par la position du centre de gravité et de l'angle de lacet comme nous allons le voir.

3.3.5 Contacts roue-sol

Les efforts générés au contact roue-sol sont issus de l'interface entre le pneumatique et la chaussée. Contrairement aux autres éléments de la dynamique du véhicule, il est très difficile de caractériser les phénomènes induits par les pneumatiques avec des équations issues de la mécanique. Au contact roue-sol, les forces générées sont :

- la force longitudinale $F_{x,O^{(i)}_W}(\text{so/ro})$;
- la force latérale $F_{y,O^{(i)}_W}(\text{so/ro})$;
- la force verticale $F_{z,O^{(i)}_W}(\text{so/ro})$;
- le moment d'auto-alignement $M_{z,O^{(i)}_W}(\text{so/ro})$.

La force longitudinale est générée au contact de la roue sur le sol suivant l'axe $\vec{X}^{(i)}_W$. La force latérale est générée lors d'une prise de virage du véhicule et appliquée selon l'axe $\vec{Y}^{(i)}_W$. La force verticale est générée par l'écrasement du pneumatique. Le moment d'auto-alignement est généré par le fait que l'axe de pivot en braquage de la roue ne passe pas par le centre de la surface de contact de la roue sur le sol (point $O^{(i)}_W$). La distance r entre ces deux points selon l'axe $\vec{Y}^{(i)}_W$ est appelée déport au sol. Le déport au sol est illustré à la FIGURE 3.20 (page suivante). Ainsi, les forces longitudinales appliquées aux points $O^{(i)}_W$ créent un moment sur la roue

autour de l'axe $\vec{Z}_W^{(i)}$. Ce moment est appelé moment d'auto-alignement car il est à l'origine du phénomène de rappel des roues en ligne droite. En effet, si la géométrie du train est symétrique, les deux moments d'auto-alignement d'un même train s'opposent et s'annulent pour les angles de braquage nuls. C'est pourquoi un véhicule auquel on n'applique aucune commande au volant roule en ligne droite sur une route sans dévers.

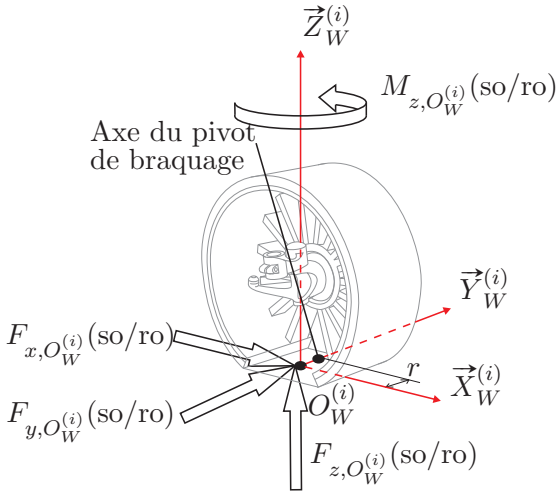


FIGURE 3.20 – Repérage du contact roue-sol

Comme pour le modèle quart de véhicule, la force verticale due à l'écrasement du pneumatique est modélisée par la mise en parallèle d'un ressort de raideur K_t et d'un amortisseur de raideur C_t. La force ainsi générée dépend donc de l'écrasement et de la vitesse d'écrasement du pneumatique. Elle est donnée par

$$F_{z,O_W^{(i)}}(\text{so/ro}) = (Z_{O_W^{(i)}} - Z_{C_W^{(i)}})K_t^{(i)} + (V_{z,O_W^{(i)}} - V_{z,C_W^{(i)}})C_t^{(i)} \qquad \text{pour } i = 1,\ldots,4. \tag{3.25}$$

Comme pour le modèle de suspension, les débattements doivent être saturés et les vitesses de débattement annulées si le pneumatique se comprime jusqu'à la jante.

Les forces transversales générées au contact roue-sol ont pour origine les frottements. En fonction de la vitesse de rotation de la roue, différents frottements sont à distinguer.

3.3.5.1 Les différents frottements

L'origine des forces générées au contact roue-sol est due à l'adhérence (frottement statique) ou au glissement (frottement dynamique) entre le pneumatique et la chaussée. Ainsi, deux cas doivent être pris en compte : les frottements statiques lorsque le véhicule est à l'arrêt et les frottements dynamiques lorsque le véhicule est en mouvement. Une caractérisation des forces en fonction du frottement est donnée par la première loi de Coulomb : l'effort dû aux frottements est une force tangentielle qui s'oppose à la vitesse de glissement. La seconde loi de Coulomb indique que le module de l'effort généré est inférieur ou égal à la force normale multipliée par un facteur d'adhérence.

Les frottements de Coulomb permettent de décrire les efforts au contact roue-sol dans le cas où les roues sont bloquées, mais cette modélisation n'est pas suffisante dans le cas où les roues tournent. En effet, il a été montré expérimentalement que les forces d'adhérence diffèrent selon le

taux de glissement [BAKKER *et al.*, 1989]. La FIGURE 3.21 montre l'allure de la courbe des efforts F générés longitudinalement ou latéralement en fonction du taux de glissement longitudinal λ ou latéral α. Sur cette courbe, trois zones distinctes sont repérées :

1. la zone stable qui correspond à une conduite normale où les forces peuvent être assimilées à une tangente à l'origine ;
2. la zone de transition où les limites d'adhérence du pneumatique sont atteintes ;
3. la zone instable où le véhicule est en glissement.

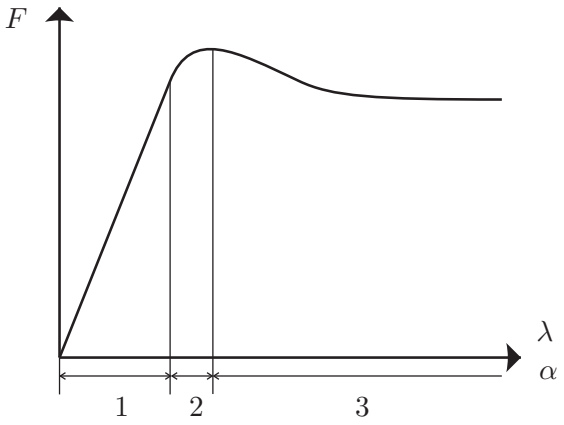


FIGURE 3.21 – Les différentes zones d'adhérence du pneumatique

Il existe de nombreux modèles qui expriment les forces en fonction du taux de glissement, notamment les modèles de Fiala, de Dugoff ou de Pacejka [KIEBRE, 2010]. Ici nous considérons le modèle de Pacejka car ce modèle est largement répandu chez les manufacturiers de pneumatiques et les constructeurs automobiles. Le modèle de Pacejka est un modèle dynamique valide seulement si la roue est en rotation. Ainsi, du blocage des roues, nous distinguons les trois cas suivants :

– véhicule roue bloquée, statique. Les efforts sont modélisés par la loi de Coulomb avec frottements statiques ;
– véhicule roue bloquée, en mouvement. Les efforts sont modélisés par la loi de Coulomb avec frottements dynamiques ;
– véhicule en roulement. Les efforts sont modélisés par le modèle de Pacejka.

D'après le modèle de Coulomb ou le modèle de Pacejka, la connaissance de la vitesse du centre de la roue est nécessaire. Les équations sont donc développées ci-après.

3.3.5.2 Vitesse du centre de la roue

La vitesse du centre de la roue est déduite de la vitesse du centre de gravité et de la vitesse de lacet. Pour les roues avant, cette vitesse est dépendante également de l'angle de braquage. En appliquant la formule de changement de point, nous avons

$$\begin{aligned}\vec{V}_{C_W^{(i)}} &= \vec{V}_{G_V} + \vec{\Omega}_{R_I/R_E} \wedge \overrightarrow{G_V C_W^{(i)}}, \\ &= \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_i \\ b_i \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I} = \begin{pmatrix} v_X - \dot{\psi} + b^{(i)} \\ v_Y + \dot{\psi} l^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_I}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Pour les roues avant du véhicule, le vecteur vitesse est projeté dans le repère roue, ainsi les vitesses du centre des roues sont

$$\begin{cases} \vec{V}_{C_W^{(i)}} = \begin{pmatrix} (v_X - \dot{\psi} b^{(i)}) \cos\delta^{(i)} + (v_Y + \dot{\psi} l^{(i)}) \sin\delta^{(i)} \\ -(v_X - \dot{\psi} b^{(i)}) \sin\delta^{(i)} + (v_Y + \dot{\psi} l^{(i)}) \cos\delta^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_W^{(i)}}, & \text{pour } i = 1, 2, \\ \vec{V}_{C_W^{(i)}} = \begin{pmatrix} v_X - \dot{\psi} b^{(i)} \\ v_Y + \dot{\psi} l^{(i)} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_W^{(i)}}, & \text{pour } i = 3, 4. \end{cases}$$

Les vitesses du centre des roues étant définies, les taux de glissement peuvent être exprimés. En fonction du modèle du contact roue-sol utilisé, l'expression des taux de glissements diffèrent même si les deux modèles utilisent un taux de glissement longitudinal et latéral.

3.3.5.3 Force de Coulomb

La seconde loi de Coulomb indique que les efforts sont tangentiels à la vitesse de glissement.

glissement latéral : la force latérale est tangentielle à la vitesse de glissement des points de contact roue-sol $O_W^{(i)}$ selon l'axe $\vec{Y}_W^{(i)}$. Comme le point $O_W^{(i)}$ est la projection du centre de la roue $C_W^{(i)}$ sur le sol, alors le glissement latéral est donné par

$$f^{(i)} = V_{y,C_W^{(i)}}.$$

glissement longitudinal : le glissement longitudinal est déduit par la différence de vitesse du point de contact roue-sol en fonction du système auquel est rattaché le point : à la roue ou au sol. La vitesse du point de contact roue-sol appartenant au sol est la projection de la vitesse du centre de la roue sur le sol et vaut $V_{x,C_W^{(i)}}$. La vitesse du point de contact appartenant à la roue peut être déduite de sa vitesse de rotation et du rayon dynamique de la roue et vaut $\omega^{(i)} r_{dyn}^{(i)}$. La vitesse de glissement longitudinale est donc

$$\lambda^{(i)} = V_{x,C_W^{(i)}} - \omega^{(i)} r_{dyn}^{(i)}.$$

Voyons maintenant comment de ces taux de glissement peuvent être déduits l'effort longitudinal, l'effort latéral et le moment d'auto-alignement, générés par l'interface entre le pneumatique et la chaussée.

La seconde loi de Coulomb indique que l'effort généré au contact roue-sol est inférieur ou égal à la force normale, multipliée par un facteur d'adhérence. Lorsque la limite est atteinte, il y a glissement. En statique, l'ensemble des efforts générés dépend seulement du poids du véhicule. Ainsi, tant que les projections des forces dues au poids sur les axes $\vec{X}_W^{(i)}$ et $\vec{Y}_W^{(i)}$ sont inférieures aux efforts verticaux multipliés par les facteurs d'adhérence $\mu_{\vec{X},\text{bloquée}}^{(i)}$ et $\mu_{\vec{Y},\text{bloquée}}^{(i)}$ alors le véhicule reste statique et les efforts générés sont l'opposé des efforts dus au poids. Lorsque la limite est atteinte, le modèle de Coulomb génère des efforts donnés par les forces normales multipliées par les facteurs d'adhérences dynamiques $\mu_{\vec{X}_W}^{(i)}$ et $\mu_{\vec{Y}_W}^{(i)}$. Ces facteurs d'adhérences dépendent du pneumatique mais aussi de l'état de la chaussée. Une chaussée verglacée a un facteur d'adhérence inférieur à $0,3$, une chaussée humide à un facteur compris entre 0.3 et 0.7 et une chaussée sec à un facteur d'adhérence supérieur à $0,7$.

Au final, les efforts longitudinaux peuvent être exprimé par

$$\begin{cases} \text{si :} & \mu^{(i)}_{\vec{X}_W,\text{bloquée}} F_{z,O^{(i)}_W}(\text{so/ro}) & \leq & (m_s g + \sum_{i=1}^{4} m^{(i)}_{ns} g)\sin\rho, \\ \text{alors :} & F_{x,O^{(i)}_W}(\text{so/ro}) & = & -(m_s g + \sum_{i=1}^{4} m^{(i)}_{ns} g)\sin\rho, \\ \text{sinon :} & F_{x,O^{(i)}_W}(\text{so/ro}) & = & -\text{signe}(\lambda)\mu^{(i)}_{\vec{X}_W} F_{z,O^{(i)}_W}(\text{so/ro}), \end{cases}$$

et les efforts latéraux par

$$\begin{cases} \text{si :} & \mu^{(i)}_{\vec{Y}_W,\text{bloquée}} F_{z,O^{(i)}_W}(\text{so/ro}) & \leq & (m_s g - \sum_{i=1}^{4} m^{(i)}_{ns} g)\cos\rho\sin\eta, \\ \text{alors :} & F_{y,O^{(i)}_W}(\text{so/ro}) & = & -(m_s g - \sum_{i=1}^{4} m^{(i)}_{ns} g)\cos\rho\sin\eta, \\ \text{sinon :} & F_{y,O^{(i)}_W}(\text{so/ro}) & = & -\text{signe}(f^{(i)})\mu^{(i)}_{\vec{Y}_W} F_{z,O^{(i)}_W}(\text{so/ro}). \end{cases}$$

Les forces de Coulomb permettent donc d'exprimer les efforts générés aux contacts roues/sol à l'arrêt, sur un sol en pente le cas échéant, et à faible vitesse (manœuvre de parking). Comme le modèle de Pacejka est un modèle qui n'est valable que pour des vitesses non nulles, les forces de Coulomb permettent aussi de mettre en mouvement le véhicule.

3.3.5.4 Modèle de Pacejka

Le modèle de Pacejka utilise des taux de glissement différents de ceux des lois de Coulomb. Leurs définitions sont données ci-après.

glissement latéral : le taux de glissement latéral est donné par l'angle que forme le vecteur vitesse de la roue par rapport au plan de jante. Ainsi, le glissement latéral $\alpha^{(i)}$ s'exprime par :

$$\alpha^{(i)} = \arctan \frac{V_{y,C^{(i)}_W}}{V_{x,C^{(i)}_W}}.$$

glissement longitudinal : le taux est donné par le glissement longitudinal normalisé des lois de Coulomb. Ainsi, $\alpha^{(i)}$ s'exprime par

$$\lambda^{(i)} = \frac{V_{x,C^{(i)}_W} - \omega^{(i)} R^{(i)}_{dyn}}{max(V_{x,C^{(i)}_W}, \omega^{(i)} R^{(i)}_{dyn})}.$$

Le modèle de Pacejka, aussi appelé formule magique, est basé sur une unique fonction pour décrire à la fois l'effort longitudinal et l'effort latéral. Ce modèle permet aussi de décrire le moment d'auto-alignement [BAKKER *et al.*, 1989]. L'expression générale est

$$F = D\sin\left[C\arctan\left[B\left(x+S_h\right) - E\left(B\left(x+S_h\right) - \arctan\left(B\left(x+S_h\right)\right)\right)\right]\right] + S_v, \tag{3.27}$$

où $x = \lambda^{(i)}$ pour les efforts longitudinaux et $x = \alpha^{(i)}$ pour les efforts latéraux et les moments d'auto-alignement. Les paramètres B, C, D, E, S_v, et S_h dépendent de la force verticale $F_{z,O^{(i)}_W}(\text{so/ro})$, et de l'angle de carrossage (angle entre le plan de jante et la verticale à la route). Ces coefficients peuvent être déterminés à partir d'une courbe expérimentale avec :

- D : maximum de la courbe ;
- C : coefficient de forme ;

– B : coefficient de rigidité ;
– E : coefficient de courbure ;
– S_h et S_v : décalages à l'origine.

En dérivant la formule magique (3.27), il est possible de constater que la pente à l'origine vaut BCD et que cette dérivée est nulle pour $C \arctan\left(B\left(1-E\right)x + \frac{E}{B}\arctan\left(Bx\right)\right) = \frac{\pi}{2}$. En posant $E = 0$, D étant le maximum, la pente à l'origine et la valeur du glissement au maximum de la courbe permettent de déterminer les coefficients B et C. E a une influence après le maximum de la courbe et il est ajusté empiriquement comme l'illustre la FIGURE 3.22 [BROSSARD, 2006].

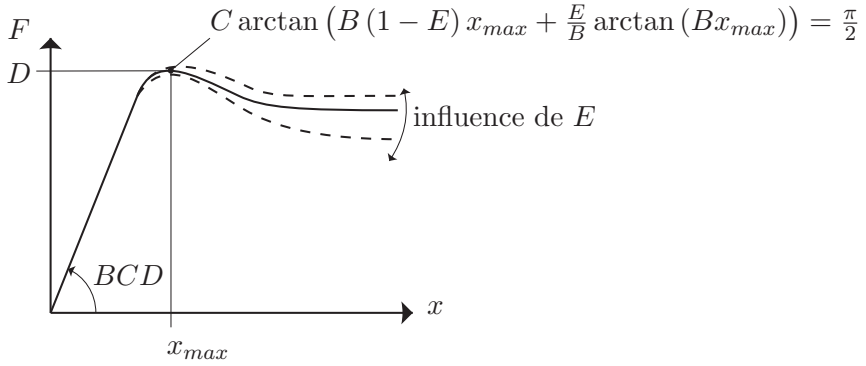


FIGURE 3.22 – Détermination des paramètres de la formule magique

En général, les coefficients fournis pour un pneumatique ne sont pas les coefficients de la courbe, car ils dépendent de la charge, mais des macro-coefficients qui permettent de calculer les valeurs de B,C,D et E en fonction de la force normale $F_z = F_{z,O_W^{(i)}}(\text{so/ro})$. Les expressions des forces et les paramètres des modèles sont issues de [BROSSARD, 2006].

Force latérale Pour le mode latéral, les macro-coefficients a_i $(i = 0, \ldots, 13)$ permettent d'exprimer les coefficients de la formule magique (3.27) avec

$$\begin{aligned} C &= a_0, \\ D &= \mu_Y F_z = a_1 F_z^2 + a_2 F_z, \\ BCD &= a_3 \sin(2\arctan\frac{F_z}{a_4})(1 - a_5|\gamma|), \\ E &= a_6 F_z + a_7, \\ S_h &= a_8\gamma + a_9 F_z + a_{10}, \\ S_v &= a_{11}\gamma F_z + a_{12} F_z + a_{13}. \end{aligned}$$

où γ est l'angle de carrossage.

La FIGURE 3.23 (page ci-contre) montre l'allure de la courbe des forces latérales en fonction de la charge verticale. Ces courbes ont été obtenues avec un angle de carrossage $\gamma = 1°$ et avec les coefficients présentés dans le TABLEAU 3.1 (page ci-contre) [BROSSARD, 2006].

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1,156	-30,79	1189	1260	7,498	0,003758	-0,2458
a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
1	-0,02995	0,2677	-0,2216	-4,301	-11,74	89,84

TABLEAU 3.1 – Macro-coefficients du modèle de Pacejka pour le mode latéral

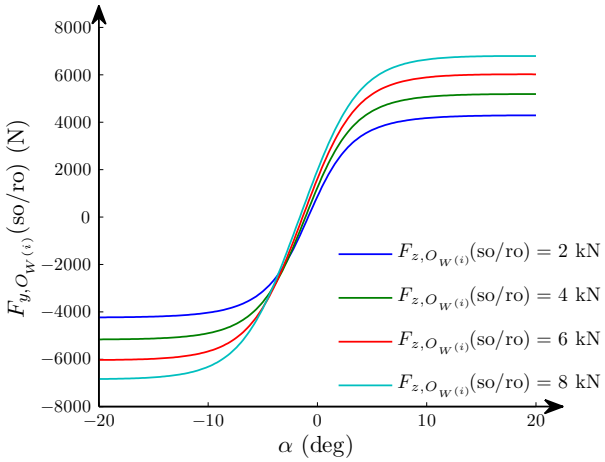


FIGURE 3.23 – Variation de la force latérale en fonction de la charge verticale

Force longitudinale Pour le mode longitudinal, les macro-coefficients b_i $(i = 0, \ldots, 10)$ permettent d'exprimer les coefficients de la formule magique (3.27) avec

$$\begin{aligned} C &= b_0, \\ D &= b_1 F_z^2 + b_2 F_z, \\ BCD &= (b_3 F_z^2 + b_4 F_z) \exp(-b_5 F_z), \\ E &= b_6 F_z^2 + b_7 F_z + b_8, \\ S_h &= b_9 F_z + b_{10}, \\ S_v &= 0. \end{aligned}$$

On constate que l'angle de carrossage n'influe pas sur les efforts longitudinaux estimés. La FIGURE 3.24 (page suivante) montre l'allure de la courbe des forces longitudinales en fonction de la charge verticale. Ces courbes ont été obtenues avec les coefficients présentés dans le TABLEAU 3.2 [BROSSARD, 2006].

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
1,65	-21,3	1144	49,6	226	0,069	-0,006	0,056	0,486	0	0

TABLEAU 3.2 – Macro-coefficients du modèle de Pacejka pour le mode longitudinal

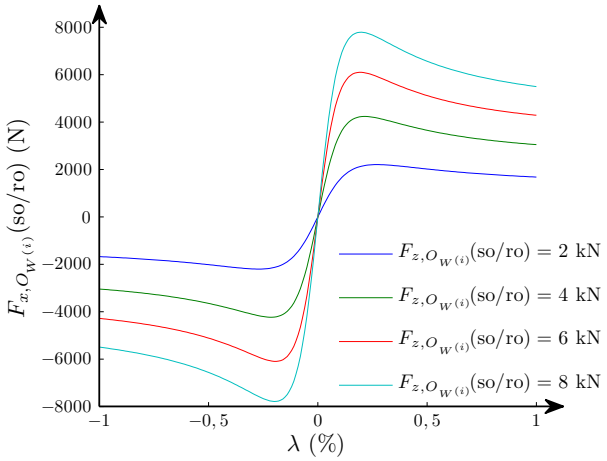


FIGURE 3.24 – Variation de la force longitudinale en fonction de la charge verticale

Moment d'auto-alignement Les macro-coefficients c_i $(i = 0, \ldots, 17)$ du modèle du moment d'auto-alignement permettent d'exprimer les coefficients de la formule magique (3.27) avec

$$\begin{aligned} C &= c_0, \\ D &= c_1 F_z^2 + c_2 F_z, \\ BCD &= \frac{(c_3 F_z^2 + c_4 F_z)}{\exp(c_5 F_z)}(1 - c_6|\gamma|), \\ E &= (c_7 F_z^2 + c_8 F_z + c_{10})(1 - c_{10}|\gamma|), \\ S_h &= c_{11}\gamma + c_{10} F_z + c_{13}, \\ S_v &= (c_{14} F_z^2 + c_{15} F_z)\gamma + c_{16} F_z + c_{17}. \end{aligned}$$

La FIGURE 3.25 (page ci-contre) montre l'allure de la courbe des moments d'auto-alignement en fonction de la charge verticale. Ces courbes ont été obtenues avec un angle de carrossage nul et avec les coefficients présentés dans le TABLEAU 3.3 [BROSSARD, 2006].

c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
2,44	-3,703	2,116	0,2817	-3,14	-0,279
c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}
-0,0092	-0,0138	-0,319	0,5042	0,759	-3,121
c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}
0,0463	-0,1835	-0,5627	-0,7079	-0,2416	-0,0857

TABLEAU 3.3 – Macro-coefficients du modèle de Pacejka pour le moment d'auto-alignement

3.3.5.5 Modèle du contact roue-sol

Le modèle de contact roue-sol retenu est un modèle commuté entre l'expression des forces par les lois de Coulomb et le modèle de Pacejka. La commutation dépend de la vitesse de

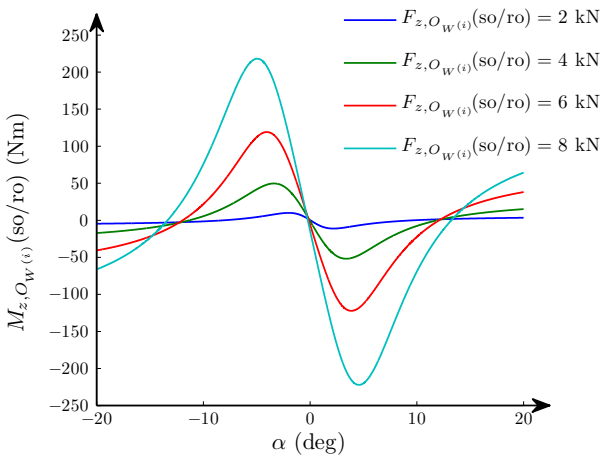


FIGURE 3.25 – Variation du moment d'auto-alignement en fonction de la charge verticale

rotation des roues. Pour des vitesses de rotation des roues inférieures à la vitesse limite V_{lim} (vitesse des manœuvres de parking : $v_X = \simeq 10$ km/h soit $\omega^{(i)} \simeq 10$ rad.s^{-1}), le modèle du contact roue-sol est celui des frottements de Coulomb. Pour les vitesses supérieures à V_{lim} le modèle utilisé est le modèle de Pacejka. La FIGURE 3.26 reprend l'ensemble des sous-parties développées précédemment.

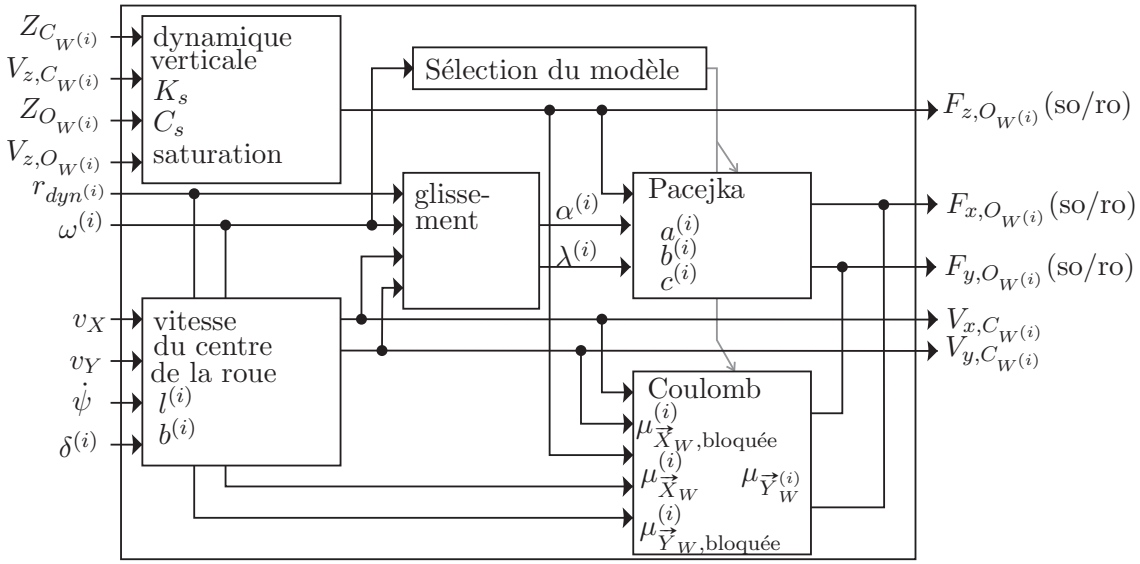


FIGURE 3.26 – Modèle du contact roue-sol, ses entrées-sorties et ses paramètres

Le modèle de contact roue-sol est le dernier modèle présenté permettant d'expliciter les équations de la dynamique du véhicule.

L'ensemble des équations précédentes peut être implémenté sur une plateforme de simulation. Mais les non-linéarités de ce modèle empêchent de le retranscrire sous forme d'une représentation d'état ou d'un MSSO à paramètres invariants dans le temps. L'étape suivante consiste à linéariser

l'ensemble ou une partie du modèle, afin de pouvoir l'exprimer sous la forme souhaitée.

3.4 Linéarisation du modèle

Dans la section précédente, le modèle de la dynamique du véhicule complet a été présenté. Le modèle ainsi conçu cherche à représenter au mieux la dynamique du véhicule, tout en ayant des équations simples, utilisant un nombre limité de paramètres. En effet, chercher à représenter avec plus de précision certain phénomènes de la dynamique du véhicule impose de complexifier fortement le modèle. Cependant, un modèle trop complexe rend difficile l'identification de ses paramètres. Le modèle proposé est donc un compromis entre la représentativité du système et la possibilité de l'identifier.

Le modèle présenté est décrit par des équations dont certaines sont non-linéaires. Afin de pouvoir utiliser les outils de réduction de modèle présentée au Chapitre 2, il est nécessaire de le linéariser.

La modélisation de la dynamique du véhicule a été réalisée en utilisant le PFD sur différents systèmes isolés du véhicule (*cf.* Section 3.3). Or, chaque application du PFD permet d'écrire une partie du véhicule sous forme d'une représentation d'état ou d'un MSSO. Le modèle complet est donc scindé en trois parties qui correspondent aux trois masses du véhicule considéré :

- la masse de la crémaillère ;
- la masse suspendue (caisse) ;
- la masse non-suspendue (suspension, barre anti-roulis, triangle, porte-fusée, moyeu, roue, frein, ...).

Pour construire un modèle linéaire du véhicule, des approximations et simplifications doivent être effectuées. En particulier, en reprenant le modèle bicyclette présenté à la Section 3.2.1, la vitesse longitudinale doit être considérée comme étant constante. Avec cette hypothèse, un second modèle, nommé modèle linéaire, est créé. Toutefois, cette simplification limite les applications du modèle. Afin de pouvoir conserver un modèle à vitesse variable, un troisième modèle est développé. Ce modèle est crée en scindant le modèle complet en deux dynamiques, la dynamique transversale et la dynamique verticale. Ce modèle est nommé modèle semi-linéaire. Dans ce modèle, la partie non-linéaire comprend la dynamique transversale avec la vitesse longitudinale, latérale et le lacet. La partie linéaire comprend la dynamique verticale avec le pompage, le roulis, le tangage, le déplacement vertical des roues, leurs rotations et le déplacement de la crémaillère. Les dynamiques transversales sont formulées selon les équations du modèle complet et les dynamiques verticales sont linéarisées afin d'obtenir la partie linéaire.

Remarque 3.4.1 *Pour simplifier l'écriture des modèles présentés ci-après, certains paramètres, entrées ou sorties sont indicés par la lettre i. Afin d'avoir le modèle complet, il faut développer les équations indicées en chaque point (*1, 2, 3 *ou* 4*) et écrire les matrices d'entrée et de sortie en conséquence.*

3.4.1 Modèle linéaire de la direction

La modélisation des porte-fusées empêche d'écrire les équations de la direction sous forme d'une représentation d'état ou d'un MSSO linéaire. En effet, les équations sont non-linéaires par rapport à l'angle de braquage de la roue δ et par rapport à l'angle des portes fusées δ_0. Afin de pouvoir linéariser ces relations, nous effectuons l'approximation des petits angles qui consiste à approximer $\cos(\delta)$ par 1 et $\sin(\delta)$ par δ. L'angle du bras des porte-fusées est un angle de faible dimension (de l'ordre de 8°), ce qui justifie cette approximation. En effectuant l'approximation

sur δ et δ_0 on obtient, à partir des équations (3.13),(3.14) et (3.15), les trois équations suivantes pour la cinématique du porte-fusée

$$\begin{cases} \delta = -\frac{Y_M}{l_M}, \\ \dot{\delta} = -\frac{V_{y,M}}{l_M}, \\ F_{y,M}(\text{pf/cr}) \quad = -l_M M_{z,C_W}(\text{ro/pf}). \end{cases} \tag{3.28}$$

En fait, cette approximation revient à ne pas considérer le montage en épure de Jeantaud. Afin de constater l'erreur d'approximation qui en résulte, la FIGURE 3.27 présente les angles de braquage en fonction de la position de la crémaillère et l'erreur en pourcentage qui est commise par l'angle de braquage approximé. Ces courbes sont tracées grâce aux paramètres mesurés sur le train avant du véhicule d'essai Renault Scénic (*cf.* Section 4.2.1) :

- $\delta_0 = 8°$;
- $l_M = 0,116$ m.

On constate que pour des angles de braquage compris entre -30 et 30 degrés, l'erreur d'approximation est inférieure à 5% de l'angle de braquage non approximé.

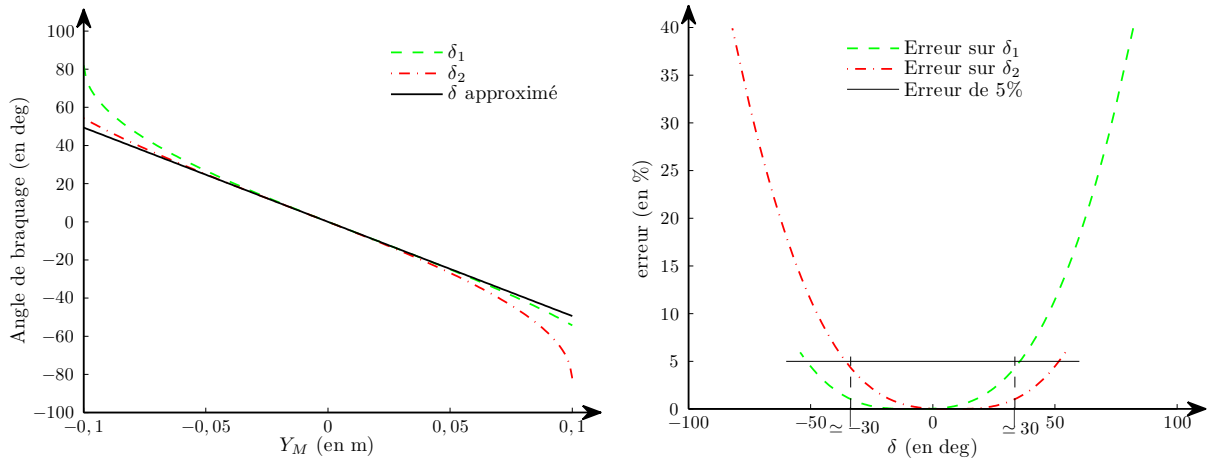


FIGURE 3.27 – Approximation de l'angle de braquage des roues

En considérant cette approximation, les équations de la colonne de direction (3.10), de la crémaillère (3.11) et des porte-fusées (3.28) peuvent être écrites sous une forme de représentation d'état. Le vecteur d'état est composé de la position de la crémaillère Y_M et de sa dérivée $V_{y,M}$. Sous l'approximation des faibles angles de braquage, les braquages des deux roues avant sont

égaux et sont donnés par δ. La représentation d'état de la direction est alors exprimée par

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} V_{y,M} \\ \dot{V}_{y,M} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_c}{m_c R_c^2} & -\frac{C_c}{m_c R_c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_M \\ V_{y,M} \end{pmatrix} + \dots \\
 & & \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l_M}{m_c} & -\frac{l_M}{m_c} & -\frac{K_c}{R_c m_c} & -\frac{C_c}{R_c m_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{z,C_W^{(}1)}(\text{ro/pf}) \\ M_{z,C_W^{(}2)}(\text{ro/pf}) \\ \delta_H \\ \dot{\delta}_H \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \\ M_{z,H}(\text{co/vo}) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -\frac{1}{l_M} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_M} \\ -\frac{K_c}{R_c} & -\frac{C_c}{R_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_M \\ V_{y,M} \end{pmatrix} + \dots \\
 & & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_M R_c & -l_M R_c & -K_c & -C_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{z,C_W^{(}1)}(\text{ro/pf}) \\ M_{z,C_W^{(}2)}(\text{ro/pf}) \\ \delta_H \\ \dot{\delta}_H \end{pmatrix}.
\end{array}\right. \tag{3.29}$$

Et ce modèle peut aussi être exprimé sous la forme du MSSO suivant

$$\left\{\begin{array}{l}
m_c \dot{V}_{y,M} + \frac{C_c}{R_c^2} V_{y,M} + \frac{K_c}{R_c^2} Y_M = \begin{pmatrix} -l_M & -l_M & -\frac{K_c}{R_c} & -\frac{C_c}{R_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{z,C_W^{(}1)}(\text{ro/pf}) \\ M_{z,C_W^{(}2)}(\text{ro/pf}) \\ \delta_H \\ \dot{\delta}_H \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \\ M_{z,H}(\text{co/vo}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l_M} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Y_M + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l_M} \\ 0 \end{pmatrix} V_{y,M} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_c m_c \end{pmatrix} \dot{V}_{y,M}.
\end{array}\right. \tag{3.30}$$

3.4.2 Modèle linéaire de la caisse

La caisse possède six degrés de liberté mais le couplage entre la vitesse longitudinale et l'angle de lacet empêche d'écrire les équations de la dynamique sous forme d'un modèle linéaire. Comme ce couplage n'influe pas sur la dynamique verticale, le modèle linéaire de caisse est scindé en deux parties, la partie transversale et la partie verticale. Après l'hypothèse des angles de braquage faibles, nous faisons celle d'une vitesse longitudinale constante.

3.4.2.1 Dynamique transversale

Comme nous l'avons rappelé en introduction, la création d'un modèle linéaire de la dynamique transversale du véhicule impose de fixer la vitesse longitudinale. De plus, l'équation (3.26) permettant de déterminer la vitesse du centre des roues en fonction de la vitesse du centre de gravité oblige à considérer une roue centrale. En effet, même sous l'hypothèse des petits angles de braquage, cette équation devient

$$\vec{V}_{C_W^{(i)}} = \begin{pmatrix} (v_X - \dot{\psi} b^{(i)}) + (v_Y + \dot{\psi} l^{(i)}) \delta^{(i)} \\ -(v_X - \dot{\psi} b^{(i)}) \delta^{(i)} + (v_Y + \dot{\psi} l^{(i)}) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_W^{(i)}}.$$

Or v_Y, $\dot{\psi}$ et $\delta^{(i)}$ sont trois variables du vecteur d'état qui ne peuvent être multipliées dans le cas d'un modèle linéaire.

Au final le modèle linéaire de la dynamique transversale du véhicule est le modèle bicyclette. Afin d'exprimer les efforts latéraux aux contacts roue-sol, le modèle bicyclette considère la partie linéaire des courbes de Pacejka assimilée à la pente à l'origine $BCD = C_\alpha$. En considérant v_X comme une constante, δ comme une entrée, v_Y et $\dot{\psi}$ comme les états, l'équation (3.5) peut être mise sous forme d'une représentation d'état avec

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{v}_Y \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sum_{i=1}^{4} C_\alpha^{(i)}}{M v_X} & \dfrac{\sum_{i=1}^{4} C_\alpha^{(i)} l^{(i)}}{M v_X} - v_X \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{4} C_\alpha^{(i)} l^{(i)}}{I_{zz} v_X} & -\dfrac{\sum_{i=1}^{2} C_\alpha^{(i)} (l^{(i)})^2}{I_{zz} v_X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_Y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \dots \\ \qquad \dots + \begin{pmatrix} -\dfrac{\sum_{i=1}^{2} C_\alpha^{(i)}}{M} \\ -\dfrac{\sum_{i=1}^{2} C_\alpha^{(i)}}{I_{zz}} \end{pmatrix} \delta, \\ \begin{pmatrix} v_Y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_Y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Et l'équation (3.5) peut aussi être exprimée sous forme d'un MSSO.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_Y \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{4} C_\alpha^{(i)}}{v_X} & \dfrac{\sum_{i=1}^{4} C_\alpha^{(i)} l^{(i)}}{v_X} - M v_X \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{4} C_\alpha^{(i)} l^{(i)}}{v_X} & \dfrac{\sum_{i=1}^{2} C_\alpha^{(i)} (l^{(i)})^2}{v_X} \end{pmatrix} \times \dots \\ \qquad \dots \times \begin{pmatrix} v_Y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2} C_\alpha^{(i)} \\ \sum_{i=3}^{4} C_\alpha^{(i)} \end{pmatrix} \delta, \\ \begin{pmatrix} v_Y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_Y \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Cependant, si la dynamique transversale du véhicule est modélisée par le modèle bicyclette, alors les moments d'auto-alignement nécessaires aux modèles de direction ne sont plus disponibles. En approximant la courbe de Pacejka du moment d'auto-alignement d'une manière similaire aux forces latérales, les moments sont exprimés par

$$\begin{cases} M_{z,C_W^{(i)}}(\text{ro/pf}) &= -C_{aa}^{(1)} \frac{v_Y}{v_X}, \\ M_{z,C_W^{(i)}}(\text{ro/pf}) &= -C_{aa}^{(2)} \frac{v_Y}{v_X}, \end{cases}$$

avec $C_{aa} = BCD$ la pente à l'origine de la courbe.

3.4.2.2 Dynamiques verticales

Pour la dynamique de pompage, roulis, tangage, le modèle d'état peut directement être écrit. En revanche, les équations exprimant les hauteurs des points $A^{(i)}$ sont non-linéaires. Pour linéariser, l'approximation des petits angles est une nouvelle fois faite et les équations (3.17) et (3.18) deviennent

$$\begin{aligned} Z_A^{(i)} &= Z_{G_V} - l^{(i)}\theta + b^{(i)}\varphi, \\ V_{z,A}^{(i)} &= V_{z,G_V} - l^{(i)}\dot{\theta} + b^{(i)}\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Pour le roulis, cette simplification se justifie car le débattement des suspensions impose des angles faibles. Par exemple, le véhicule d'essai (*cf.* Section 4.2.1) possède un débattement des suspensions de ± 0.11 m et une demi-voie de 0.723 m, l'angle de roulis est au maximum de $\pm 9°$. Ceci implique que l'erreur faite par l'approximation sur le sinus est de l'ordre de 0.5%. En revanche, pour l'angle de tangage, cette approximation est moins justifiée d'un point de vue géométrique. Mais comme le modèle linéarisé est à vitesse constante, il n'existe pas de phases d'accélération et de décélération qui font varier l'angle de tangage. En revanche, des variations brutales du profil de route peuvent le faire varier. Par conséquent le modèle linéaire n'est valide que pour les profils de route n'excitant pas excessivement le tangage du véhicule.

Avec ces approximations, l'équation de la représentation d'état des dynamiques verticales du véhicule est

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} v_Z \\ \dot{v}_Z \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \ddots \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} Z_{G_V} \\ v_Z \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \cdots \\
\qquad \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_s} & -g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h_{G_V}}{I_{yy}} & 0 & -\frac{l_i}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_{G_V}}{I_{xx}} & \frac{b_i}{I_{xx}} & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} F_{x,B}^{(i)}(\text{su/ca}) \\ F_{y,B}^{(i)}(\text{su/ca}) \\ F_{z,A}^{(i)}(\text{su/ca}) \\ \cos(\rho)\cos(\eta) \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} Z_{G_V} \\ v_Z \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ Z_A^{(i)} \\ V_{z,A}^{(i)} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -l^{(i)} & 0 & b^{(i)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l^{(i)} & 0 & b^{(i)} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} Z_{G_V} \\ v_Z \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}.
\end{array}
\right.
$$

En outre, un MSSO dont les matrices d'amortissements et de raideurs sont nulles, peut être

déduit de cette représentation d'état

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} m_s & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_Z \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -m_s g \\ -h_{G_V} & 0 & -l^{(i)} & 0 \\ 0 & h_{G_V} & b^{(i)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x,B}^{(i)}(sus/ca) \\ F_{y,B}^{(i)}(\text{su/ca}) \\ F_{z,A}^{(i)}(\text{su/ca}) \\ \cos(\rho)\cos(\eta) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} Z_{G_V} \\ v_Z \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ Z_A^{(i)} \\ V_{z,A}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -l^{(i)} & b^{(i)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{G_V} \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -l^{(i)} & b^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_Z \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

La représentation ci-dessus est utilisée par le modèle semi-linéaire. Pour le modèle linéaire, les forces $F_{x,B}^{(i)}(\text{su/ca})$ et $F_{y,B}^{(i)}(\text{su/ca})$ doivent être exprimées en fonction de la vitesse du véhicule. Comme la vitesse longitudinale du véhicule est constante, les efforts $F_{x,B}^{(i)}(\text{su/ca})$ qui expriment la contribution de l'accélération et du freinage sur le tangage du véhicule sont nuls. En revanche, les forces $F_{y,B}^{(i)}(\text{su/ca})$ peuvent être calculées d'une manière similaire au moment d'auto-alignement par l'expression résultante

$$F_{y,B}^{(i)}(\text{su/ca}) = C_\alpha^{(i)} \frac{v_Y + \dot{\psi} l^{(i)}}{v_X}.$$

3.4.3 Modèle linéaire de la masse non-suspendue

3.4.3.1 Dynamique transversale

Dans le cadre du modèle semi-linéaire, il est possible d'exprimer la vitesse de rotation issue de l'équation (3.22) sous forme d'une représentation d'état ou d'un MSSO. Ce modèle simple est donné par

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \omega^{(i)} \\ \dot{\omega}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^{(i)} \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{ryy}^{(i)}} & \frac{-r_{stat}^{(i)}}{I_{ryy}^{(i)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_m^{(i)} \\ F_{x,O_W^{(i)}}(\text{so/ro}) \end{pmatrix}, \\ \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r^{(i)} \\ \omega \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.31}$$

où $A_r^{(i)}$ est l'angle que forme la roue autour de son axe de rotation. Pour ce modèle, le rayon dynamique de la roue r_{dyn} est approximé par son rayon statique. L'expression du MSSO est alors

$$\begin{cases} (I_{ryy}^{(i)})(\dot{\omega}^{(i)}) &= \begin{pmatrix} 1 & -r_{stat}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_m^{(i)} \\ F_{x,O_W^{(i)}}(sol/ro) \end{pmatrix}, \\ \omega^{(i)} &= (1)(\omega^{(i)}). \end{cases} \tag{3.32}$$

3.4.3.2 Dynamique verticale

La dynamique verticale est donnée par les équations de la suspension (3.20), de la barre anti-roulis (3.21), de la roue (3.23) et de l'écrasement du pneumatique (3.25). De ces trois équations sont directement déduits un modèle d'état et un MSSO

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} V_{z,C_W^{(i)}} \\ \dot{V}_{z,C_W^{(i)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_s^{(i)}+K_t^{(i)}}{m_{ns}^{(i)}} & -\frac{C_s^{(i)}+C_t^{(i)}}{m_{ns}^{(i)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{C_W^{(i)}} \\ V_{z,C_W^{(i)}} \end{pmatrix} + \cdots \\ \qquad \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_s^{(i)}}{m_{ns}^{(i)}} & \frac{C_{s(i)}}{m_{ns}^{(i)}} & \frac{K_{bar}^{(i)}}{m_{ns}^{(i)}} & \frac{K_t^{(i)}}{m_{ns}^{(i)}} & \frac{C_t^{(i)}}{m_{ns}^{(i)}} & -g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{A_W^{(i)}} \\ V_{z,A_W^{(i)}} \\ \varphi \\ Z_{O_W^{(i)}} \\ V_{z,O_W^{(i)}} \\ \cos\rho\cos\eta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} Z_{C_W^{(i)}} \\ V_{z,C_W^{(i)}} \\ F_{z,A}^{(i)}(sus/ca) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ K_s^{(i)} & C_s^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{C_W^{(i)}} \\ V_{z,C_W^{(i)}} \end{pmatrix} + \cdots \\ \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_s^{(i)} & -C_s^{(i)} & -K_{bar}^{(i)} & -K_t^{(i)} & -C_t^{(i)} & gm_{ns}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{A_W^{(i)}} \\ V_{z,A_W^{(i)}} \\ \varphi \\ Z_{O_W^{(i)}} \\ V_{z,O_W^{(i)}} \\ \cos\rho\cos\eta \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} m_{ns}^{(i)}\dot{V}_{z,C_W^{(i)}} + \left(C_s^{(i)} + C_t^{(i)}\right) V_{z,C_W^{(i)}} + \left(K_s^{(i)} + K_t^{(i)}\right) Z_{C_W^{(i)}} = \cdots \\ \qquad \cdots = \begin{pmatrix} K_s^{(i)} & C_s^{(i)} & K_{bar}^{(i)} & K_t^{(i)} & C_t^{(i)} & -gm_{ns}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{A_W^{(i)}} \\ V_{z,A_W^{(i)}} \\ \varphi \\ Z_{O_W^{(i)}} \\ V_{z,O_W^{(i)}} \\ \cos\rho\cos\eta \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} Z_{C_W^{(i)}} \\ V_{z,C_W^{(i)}} \\ F_{z,A}^{(i)}(sus/ca) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -K_t^{(i)} \end{pmatrix} Z_{C_W^{(i)}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -C_t^{(i)} \end{pmatrix} V_{z,C_W^{(i)}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{ns}^{(i)} \end{pmatrix} \dot{V}_{z,C_W^{(i)}}. \end{cases} \tag{3.34}$$

Ainsi, nous venons de présenter les cinq sous-parties linéarisées du modèle de véhicule que nous considérons ici. Ces modèles peuvent être assemblées afin de créer le modèle linéaire et le modèle semi-linéaire du véhicule complet.

3.4.4 Modèle linéaire et semi-linéaire du véhicule complet

Le modèle linéaire considéré est composé du modèle bicyclette à vitesse constante, du modèle de direction, des modèles de la dynamique verticale des masses non-suspendues et du modèle de

la dynamique verticale de la caisse. La structure d'un point de vue entrées/sorties du modèle est donnée à la FIGURE 3.28.

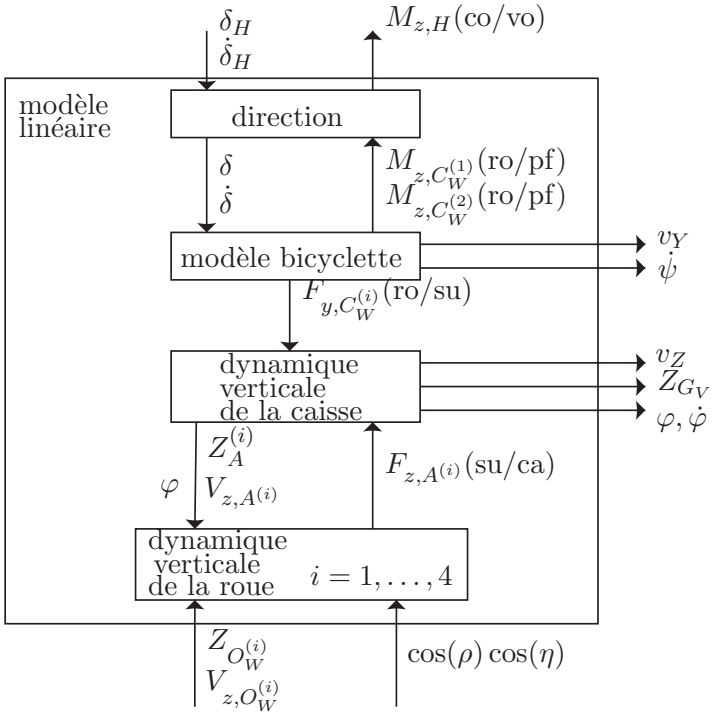


FIGURE 3.28 – Modèle linéaire, ses sous-parties et ses entrées-sorties

Le modèle semi-linéaire est divisé en deux parties, une linéaire et une non-linéaire. La partie linéaire est composée des sous-parties suivantes :

- direction ;
- dynamique verticale de la caisse ;
- dynamique transversale des roues ;
- dynamique verticale des roues.

La partie non-linéaire est composée des sous-parties suivantes :

- dynamique longitudinale de la caisse ;
- projection des efforts des suspensions ;
- dynamiques longitudinales et rayon dynamique des roues ;
- vitesse du centre de la roue, glissement, Pacejka et Coulomb des contacts roue-sol.

Il est à rappeler que ces modèles sont construits sur la base d'hypothèses simplificatrices présentées précédemment. L'ensemble des hypothèses posées et le nombre de paramètres utilisés sont indiqués dans le TABLEAU 3.4 (page suivante). Dans ce tableau est aussi indiqué le nombre de paramètres à renseigner pour chaque modèle.

3.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation d'une bibliothèque de modèles décrivant l'ensemble des sous-parties responsables de la dynamique du véhicule. La modélisation par bloc a permis de construire une architecture de modèles dont les sous-systèmes peuvent être facilement

Hypothèses : (nc : non considéré)	**modèle**			
	complet	**semi-linéaire**	**linéaire**	**bicyclette**
Modélisation du moteur et de la transmission	nc	nc	nc	nc
Modélisation du circuit de freinage	nc	nc	nc	nc
Prise en compte des phénomènes aérodynamiques	nc	nc	nc	nc
Le centre de gravité de la caisse est confondu avec celui du véhicule				nc
Les suspensions sont verticales				nc
Le braquage des deux roues avant est égal				
Les suspensions et le pneumatique ne sont pas saturés verticalement				nc
Les trains ont une seule roue virtuelle centrale				
Les angles de braquage sont faibles				
Les contacts roue-sol sont linéarisés				
Les frottements statiques ne sont pas modélisés				
Le rayon de la roue est invariant				
La route est considérée comme horizontale				
Les suspensions sont rigides				
Modélisation de la direction				nc
Les angles de roulis et de tangage sont faibles				nc
Nombre de paramètres : (en considérant le véhicule symétrique)				
Paramètres généraux	31	28	25	2
Paramètres du modèle de Pacejka	43	43	4	2
Paramètres du modèle de Coulomb	8	8	nc	nc
totaux	82	79	29	4

Tableau 3.4 – Hypothèses simplificatrices nécessaires à la conception des modèles

remplacés en fonction de la complexité recherchée. Trois modèles ont été présentés : le modèle complet, le modèle semi-linéaire et le modèle linéaire. Ces trois modèles utilisent le même jeu de paramètres qui doit être identifié pour rendre le modèle représentatif d'un véhicule. La présentation du véhicule et l'identification du modèle font l'objet des deux premières sections du chapitre suivant.

Une fois les modèles identifiés, il est possible de les utiliser pour la mise au point de contrôleur, de système de diagnostic, . . .En revanche, en fonction des applications, et en particulier pour des applications temps réel, le modèle complet est trop complexe. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser les méthodes de réduction d'ordre des modèles. L'application des méthodes de réduction est présentée dans la dernière section du prochain chapitre.

Chapitre 4

Identification et réduction du modèle de véhicule

Sommaire

Notations **126**
4.1 Introduction **126**
4.2 Présentation des moyens d'essai **128**
4.2.1 Véhicule d'essai 128
4.2.2 Banc de test 130
4.3 Identification des modèles **134**
4.3.1 Méthode d'identification 135
4.3.2 Interconnexion de sous-systèmes 137
4.3.3 Identification de la direction 139
4.3.4 Identification de la caisse 144
4.3.5 Identification de la masse non-suspendue 147
4.3.6 Validation des modèles 153
4.4 Réductions des modèles **156**
4.4.1 Commandes du modèle véhicule 156
4.4.2 Création de routes 157
4.4.3 Nécessité de la réduction de l'ordre des modèles 158
4.4.4 Réduction du modèle linéaire 160
4.4.5 Réduction du modèle semi-linéaire 168
4.4.6 Validation des modèles réduits 175
4.4.7 Exécution en temps réel des modèles 180
4.4.8 Co-simulation HIL 188
4.5 Conclusion **191**

Notations

Nous complétons les notations présentées dans les chapitres précédents avec les notations suivantes :

$\det(X)$	- déterminant de la matrice X ;
G	- fonction de transfert de l'erreur ;
K	- matrice de commandabilité de l'erreur ;
e	- erreur ;
k	- échantillon ;
J	- critère de coût ;
N	- taille du jeu de données ;
θ	- vecteur des paramètres du modèle à estimer ;
$\check{\theta}$	- vecteur des paramètres estimés ;
$\check{y}$	- vecteur des sorties estimées ;
α	- taille du pas de recherche ;
f	- direction du pas de recherche.

Dans ce chapitre, différents modèles seront déclinés des 3 modèles présentés précédemment. La nomenclature de dénomination des modèles est la suivante :

Modèle **linéarité-type-réduction**

où :

linéarité : définit si le modèle est non-linéaire (NL), semi-linéaire (SL) ou linéaire (L) ;

type : définit si le modèle est complet (Comp) ou simplifié (Simp) ;

réduction : définit si le modèle à été réduit par la méthode BTPSC ou MTPSC.

4.1 Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à la construction d'un modèle de référence (modèle NL-Comp) et de modèles linéarisés (modèle L-Comp et modèle SL-Comp) afin de les exprimer sous forme de réalisation d'état et de MSSO. En particulier, une structure par bloc composée de l'ensemble des sous-modèles a été développée. L'étape suivante consiste à déterminer les paramètres de ces modèles par une procédure d'identification pour rendre le modèle représentatif du véhicule considéré.

L'identification s'effectue classiquement en 6 étapes :

1. *étude préliminaire du processus* ;
2. *instrumentation* ;
3. *campagne de mesures* ;
4. *validation des mesures et prétraitement* ;
5. *identification des paramètres* ;
6. *validation du modèle.*

L'*étude préliminaire* du processus consiste à dénombrer et à classifier, à l'aide des connaissances *a priori*, les variables du système (entrées, sorties, variables d'état) ainsi qu'à construire les modèles dynamiques. Les résultats de cette étape ont été présentés au Chapitre 3.

L'*instrumentation* consiste à concevoir l'ensemble des moyens d'essais permettant de construire les jeux de données nécessaires au processus d'identification des paramètres. Un moyen d'essai est le système étudié sur lequel est ajouté des capteurs avec une chaîne d'acquisition, une supervision et le cas échéant des actionneurs de pilotage. Pour l'étude de la dynamique du véhicule, il est nécessaire d'instrumenter un véhicule d'essai. En revanche, il n'est pas toujours possible d'insérer des capteurs aux emplacements voulus du fait des difficultés d'intégration dans le véhicule. Ainsi, l'utilisation d'un banc de test peut s'avérer nécessaire. La présentation de l'instrumentation du véhicule d'essai et du banc de test fait l'objet de la seconde section de ce chapitre.

Une fois les *campagnes de mesures effectuées*, une étape de *validation et de post-traitement* des signaux permet d'éliminer les valeurs aberrantes, les biais, de réduire les bruits de mesure et de sélectionner les jeux de données représentatifs. Dans le cadre de cette thèse, le post-traitement des signaux consiste en :

- une élimination des biais par un enregistrement systématique des signaux du véhicule ou du banc de test en statique, avant le démarrage de l'essai ;
- un filtrage des signaux par un filtre à noyau Gaussien de Nadaraya - Watson le cas échéant.

Le principe du filtre est de déplacer un noyau le long d'un signal, et de lisser la courbe dans le noyau. L'équation pour le mettre en œuvre est

$$y_f(i) = \frac{\sum_{j=-h}^{h} y(i) e^{\frac{-(y(i)-y(j))^2}{2h^2}}}{\sum_{j=-h}^{h} e^{\frac{-(y(i)-y(j))^2}{2h^2}}}, \tag{4.1}$$

avec h la taille du noyau en nombre d'échantillons, y le signal à filtrer et y_f le signal filtré.

Avec les jeux de données mesurées sur le véhicule d'essai et sur le banc de test, la phase d'*identification* peut être menée. La méthode d'identification par erreur de sortie est a été retenue. En considérant un système Σ et un modèle $\mathsf{H}(\theta)$ qui dépend de plusieurs paramètres θ, la procédure d'identification a pour objectif d'adapter les paramètres du modèle afin que les sorties du système et du modèle aient un comportement similaire. Les paramètres θ peuvent être des paramètres physiques tels qu'une masse ou une rigidité pour un modèle boîte blanche, ou des paramètres empiriques pour un modèle boîte noire. Pour estimer la qualité d'approximation d'un modèle, le même signal d'entrée u excite le système et le modèle, et leurs sorties, respectivement y et $\check{y}$, sont comparées. L'erreur $e = y - \check{y}$ est utilisée afin d'optimiser les paramètres θ. La Figure 4.1 (page suivante) schématise le processus d'identification des paramètres.

La procédure d'identification est d'autant plus efficace qu'elle a peu de paramètres à identifier. Ainsi, au lieu d'identifier le modèle complet, nous allons identifier séparément les sous-modèles. La manipulation de sous-modèles pour créer un modèle complet est une tâche qui peut s'avérer fastidieuse et qui peut être source d'erreur. Une solution consiste à utiliser la méthode de construction des systèmes interconnectés pour créer directement des modèles complets à partir d'un ensemble de sous-modèles.

La *validation* des modèles ainsi trouvés est la dernière étape du processus d'identification qui consiste à comparer les mesures effectuées sur le système et les sorties estimées par le modèle. Pour avoir un pouvoir de généralisation, la validation est effectuée sur un jeu de données qui n'a pas servi à l'identification. Le critère utilisé pour comparer les sorties est le RMSE (Root Mean

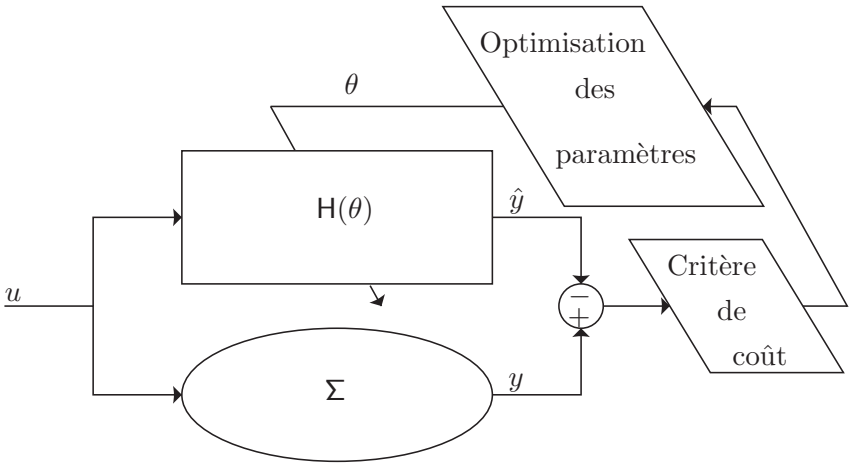


FIGURE 4.1 – Procédure d'identification par erreur de sortie

Square Error) défini par

$$\mathbf{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (y(i) - \check{y}(i))^2}{N}} \tag{4.2}$$

La procédure d'identification, la méthode des systèmes interconnectés, les résultats d'identification et la validation des modèles sont présentés dans la troisième section de ce chapitre.

Lors de la conception d'un système, la modélisation de ce dernier permet de prévoir son comportement en simulation. Ensuite, lorsque des éléments du système sont physiquement disponibles, la simulation simultanée du système et du modèle peut s'avérer nécessaire. Si des informations doivent être échangées entre le modèle et le système alors la simulation de ce dernier doit se faire en temps réel. La simulation en temps réel impose que l'ensemble des calculs du modèle soient effectués en un pas de temps de calcul limité. Or, il est fréquent qu'un modèle trop complexe ne puisse être simulé en temps réel car le pas de temps disponible pour le calcul est inférieur au temps de calcul. Par exemple, pour le modèle véhicule, nous souhaitons simuler ce dernier sur le banc de test. Afin d'accomplir cette tâche, des contrôleurs doivent lui être adjoints. Le modèle avec ces contrôleurs est trop complexe pour le système temps réel qui, dans notre cas, supporte aussi la gestion du banc de test. C'est pourquoi une phase de réduction du modèle est réalisée. La présentation des contrôleurs du modèle véhicule, la réduction des modèles et la simulation temps réel sont présentées à la quatrième section de ce chapitre.

4.2 Présentation des moyens d'essai

Le laboratoire possède plusieurs moyens d'essai instrumentés pour effectuer la modélisation, l'identification, la commande et le diagnostic de systèmes embarqués dans le véhicule. Deux moyens d'essai sont particulièrement dédiés à la modélisation et à l'identification, le véhicule d'essai Renault Scénic et le banc de test de la dynamique verticale d'un demi-train avant.

4.2.1 Véhicule d'essai

Le véhicule d'essai (*cf.* FIGURE 4.2 (page ci-contre)) est particulièrement dédié à la conception des systèmes d'aides à la conduite basés sur un GPS associé à une cartographie. Il permet aussi

de mettre au point des systèmes de commande automatique du véhicule. Afin de s'acquitter de ces tâches, il possède une instrumentation permettant d'acquérir des jeux de données et ainsi d'effectuer l'identification et la commande du véhicule.



FIGURE 4.2 – Véhicule d'essai Renault Scénic

4.2.1.1 Description du système d'acquisition

La solution d'acquisition des mesures et de commande des effecteurs est basée sur une plateforme temps réel Autobox® de dSPACE® couramment utilisée dans le domaine de l'automobile. La plateforme temps réel possède de multiples cartes d'entrées-sorties permettant de communiquer selon différents protocoles avec l'ensemble des systèmes embarqués. La solution de communication privilégiée est le CAN (Controller Aera Network), un protocole de communication série. D'autres solutions sont aussi utilisées telles que des entrées/sorties analogiques, numériques ou une communication série RS232. L'ordinateur temps réel communique avec un ordinateur industriel de supervision par un réseau Ethernet. Le système de supervision permet de développer les modèles d'acquisition et de commande qui sont compilés et transférés sur l'Autobox® pour être exécutés.

4.2.1.2 Instrumentation

Parmi l'ensemble des capteurs installés dans le véhicule, trois systèmes sont utilisées dans le cadre de cette thèse :

- une unité GPS-inertielle ;
- un capteur d'angle au volant ;
- un capteur de couple au volant.

Unité GPS-inertielle L'unité GPS-inertielle RT3002 développée par OXTSr® inclut une centrale inertielle mesurant 3 rotations, 3 accélérations et un récepteur satellitaire GPS. Par un système de fusion des données basé sur un filtre de Kalman, l'unité calcule les positions, les vitesses, les accélérations et les angles au centre de gravité du véhicule. Les mesures effectuées sont transmises à la plateforme temps réel par le bus CAN à une fréquence de 100 Hz. Le système est utilisé pour mesurer les vitesses longitudinale (v_X), latérale (v_Y) et verticale (v_Z)

avec une précision de $0,05\text{Km.h}^{-1}$, et les vitesses de lacet ($\dot{\psi}$), de tangage ($\dot{\theta}$) et de roulis ($\dot{\varphi}$) avec une précision de $0,01$ deg.s^{-1}.

Angle au volant Pour les essais de commande automatique du véhicule, ce dernier est équipé d'un moteur couple placé entre le volant et la colonne de direction. Lors des essais d'identification, le système de mesure d'angle du moteur est utilisé afin de mesurer l'angle au volant δ_H. La mesure est effectuée par un codeur incrémental relatif de 4000 pulsations par tour couplé au volant à l'aide de deux roues dentées de rapport $3,25$. La résolution de ce capteur est de $27,7.10^{-3}$ deg. Les impulsions sont comptées par le servo-contrôleur du moteur et le décompte est transmis à la cible temps réel par le bus CAN à une fréquence de 50 Hz.

Couple au volant Le moteur couple est un moteur à arbre creux. La liaison entre le moteur et la colonne de direction est assurée par un couplemètre à télémesure remplaçant l'arbre du moteur. L'étendue de mesure du couplemètre est de ± 20 N.m avec une précision de $0,1\%$ de l'étendue de mesure. La mesure est acquise par une des entrées analogiques de la cible temps réel à la fréquence de 50Hz. Ce couplemètre permet de mesurer le couple transmis à la colonne de direction $M_{z,H}(vol/col)$.

4.2.2 Banc de test

Le banc de test de la dynamique verticale d'un demi-train avant de véhicule (voir FIGURE 4.3) comporte l'ensemble des pièces mécaniques des dynamiques verticale et latérale du train avant.

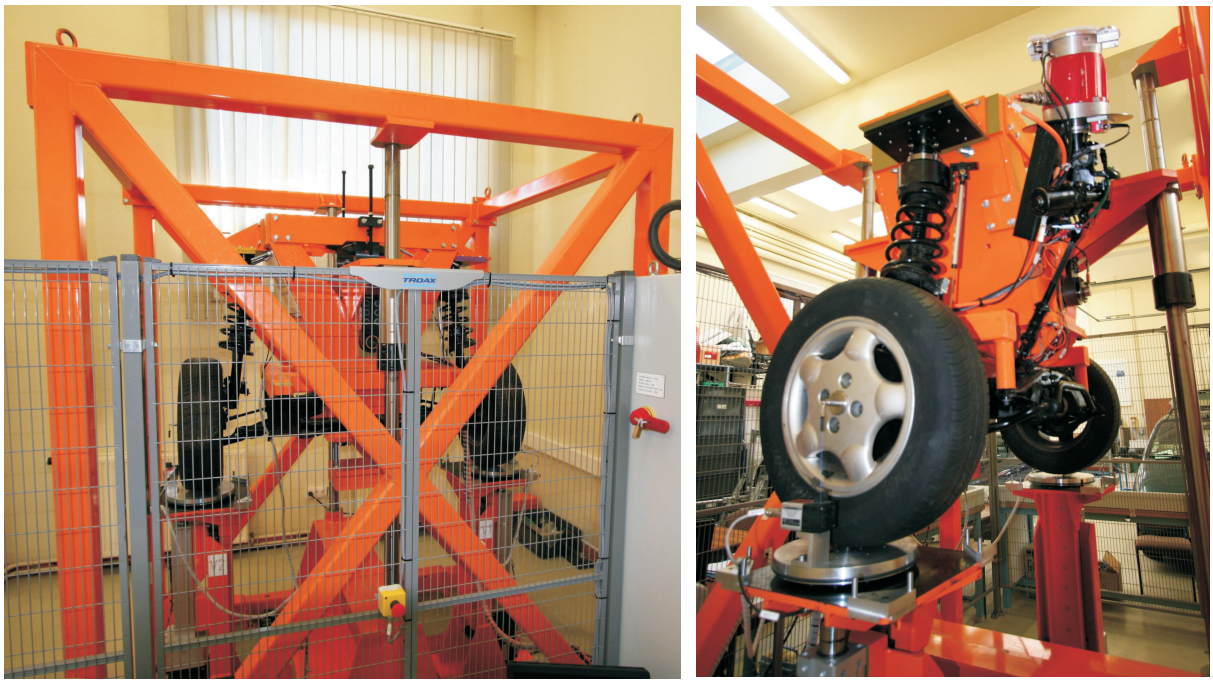


FIGURE 4.3 – Banc de test de la dynamique verticale d'un demi-train avant de véhicule

Les pièces mécaniques spécifiques au véhicule proviennent d'un Renault Scénic correspondant au véhicule d'essai. La demi-caisse est remplacée par un palonnier comme le montre la

FIGURE 4.4. Le palonnier est une pièce générique pour tous les véhicules qui pourraient être testés avec ce moyen d'essai. Cette pièce assure la liaison entre l'ensemble des pièces mécaniques du véhicule d'une part, et d'autre part un poids et une inertie correspondant à la masse appliquée par la caisse sur le train avant. Le réglage de la masse et de l'inertie est effectué par la possibilité de positionner des masses de 10 kg en différents points du palonnier.

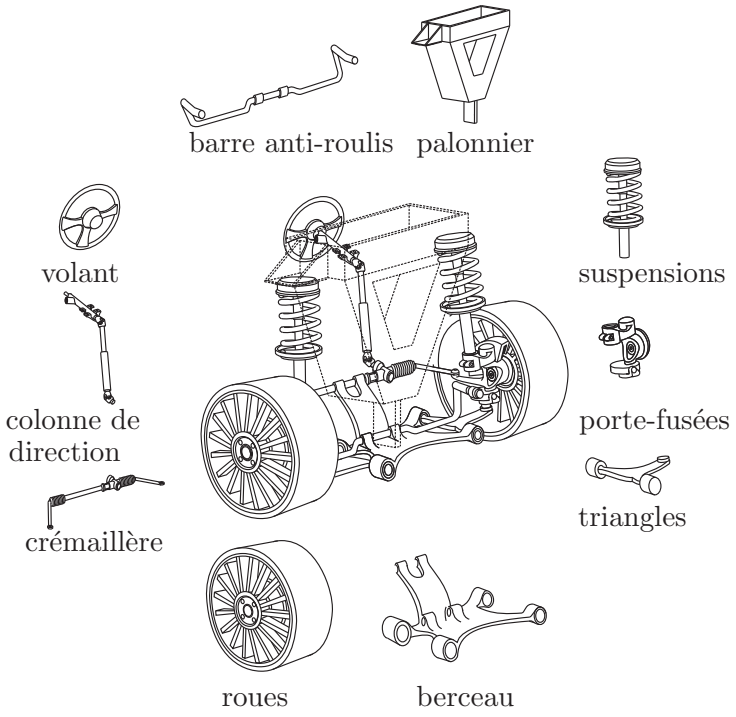


FIGURE 4.4 – Ensemble mécanique du banc de test

Le banc de test met en œuvre deux dynamiques du train avant, le braquage des roues et la cinématique verticale. Le moteur couple de direction permet de mettre en mouvement la colonne de direction, la crémaillère, les porte-fusées et les roues. À noter que dans la version actuelle du banc de test, l'absence de retour d'effort sur la roue empêche de considérer la dynamique de la direction, seule sa cinématique peut être considérée. La dynamique verticale comprend les déformations verticales du pneumatique, le débattement de la suspension et les déplacements verticaux du palonnier. Le palonnier est articulé en son centre autour d'un pivot afin de laisser libre l'angle de roulis. Ce pivot peut être bloqué. Le guidage vertical de la caisse est assuré par un charriot à double guidage verticale qui peut être immobilisé en position.

L'ensemble des mouvements du banc de test et les points de mesure sont donnés à la FIGURE 4.5 (page suivante).

4.2.2.1 Actionneurs

Les sollicitations du train se font au moyen de trois actionneurs :
- le moteur couple de direction ;
- deux vérins électriques verticaux (un sous chaque roue).

Le moteur couple de direction permet d'orienter la direction et les vérins verticaux permettent de simuler un profil de route.

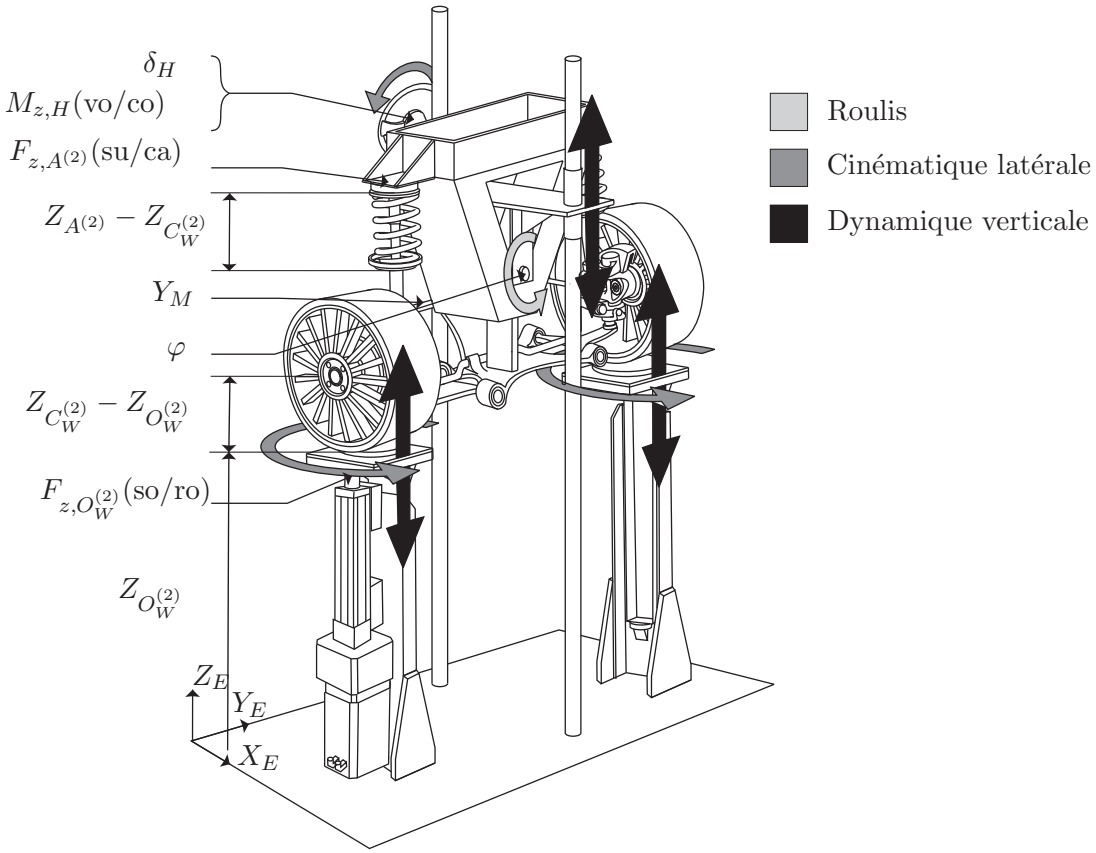


FIGURE 4.5 – Mouvements et points de mesure du banc de test

Moteur couple de direction Le moteur couple de direction est un moteur à arbre creux et à couplage direct sur la colonne de direction. Cette solution permet de s'affranchir des systèmes mécaniques habituels de transmission (roue dentée, chaîne, courroie...). Ses principales caractéristiques sont

- une vitesse angulaire de 130 tr.min^{-1} ;
- un couple de 20 N.m ;
- une tension de 24 V (12 V avec des performances dégradées).

Vérins électriques verticaux La sollicitation verticale du banc s'effectue au moyen de deux vérins électriques équipés de servo-moteur brushless et d'un variateur numérique de commande. Ces vérins commandent des plateaux de reprise d'efforts sur lesquels reposent les roues. Ces plateaux sont munis d'un mouvement libre suivant X_E et Y_E et d'un mouvement libre en rotation (pivot autour de Z_E). Les caractéristiques des vérins verticaux sont :

- une vitesse linéaire maximale de 1 m.s^{-1}
- une accélération maximale de 10 m.s^{-1}
- une charge maximale de 10 kN
- une alimentation en tension de 400 V.

4.2.2.2 Instrumentation

Comparativement au véhicule d'essai, l'avantage du banc de test est d'avoir la possibilité de placer les capteurs directement au niveau du point de mesure désiré. Ainsi, par exemple, il est possible de placer des capteurs d'effort en haut des suspensions alors que sur le véhicule d'essai, l'implantation d'un tel capteur est difficile. L'ensemble des capteurs du banc de test a été défini pour :

- effectuer l'identification des dynamiques verticales du demi-train avant ;
- mesurer l'ensemble des entrées nécessaires à un modèle du demi-train arrière du véhicule afin d'effectuer la co-simulation.

Sur le banc, 3 types de capteurs sont implantés :

- des capteurs d'effort (4 capteurs d'effort en traction/compression et 1 couplemètre) ;
- des capteurs de position (3 capteurs linéaires et 2 capteurs à fils) ;
- des capteurs d'angle (3 codeurs incrémentaux et 1 capteur magnétique).

Capteurs d'effort Les capteurs d'effort sont des capteurs à jauge de contrainte permettant de mesurer une force suivant une unique direction. Ils sont fixés par des montages à rotule pour éviter les contraintes axiales. Ces capteurs d'effort ont une étendue de mesure de 25 kN et une précision de $\pm 0,1\%$ de l'étendue de mesure. Ils permettent de mesurer les forces créées entre les roues et les plateaux de reprise ($F_{z,O_W^{(i)}}(\text{so/ro})$, $i = 1, 2$) ainsi que les forces créées entre les coupoles hautes de suspension et le châssis ($F_{z,A^{(i)}}(\text{su/ca})$, $i = 1, 2$).

Le couplemètre utilisé sur le banc de test est du même type que celui monté sur le véhicule d'essai (*cf.* Section 4.2.1.2).

Capteurs de position Les capteurs de position linéaire sont des capteurs potentiométriques, utilisés pour mesurer le débattement des suspensions ($Z_{A^{(i)}} - Z_{C_W^{(i)}}$, $i = 1, 2$) et le déplacement de la crémaillère (Y_M). Pour les suspensions, les capteurs ont une étendue de mesure de 200 mm et pour la colonne de direction, de 150 mm. Leur précision est inférieure à $\pm 0,06$ % de l'étendue de mesure.

Pour mesurer l'écrasement du pneumatique ($Z_{C_W^{(i)}} - Z_{O_W^{(i)}}$, $i = 1, 2$), des capteurs à fil sont utilisés entre le plateau de reprise d'effort et le centre de la roue. Ces capteurs à fil ont une étendue de mesure de 100 mm pour une précision de $0,1$ % de l'étendue de mesure.

Capteurs d'angle Les angles mesurés sur le banc d'essai sont l'angle de braquage du volant (δ_H), l'angle de roulis (φ) et l'angle de la vis à billes des vérins électriques. Le capteur d'angle au volant est du même type que celui monté sur le véhicule d'essai (*cf.* Section 4.2.1.2). La mesure d'angle de roulis est effectuée à l'aide d'un capteur magnétique de résolution de $0,015$ deg. La linéarité du capteur est de $\pm 0,3$ % de l'étendue de mesure qui est de 30 deg.

L'angle de la vis à billes des vérins électriques permet de mesurer le déplacement vertical des plateaux de reprise d'efforts ($Z_{O_W^{(i)}}$, $i = 1, 2$). La vis à billes a un pas de 20 mm.tr^{-1} et la résolution du capteur est de 2000 pts.tr^{-1}. Ainsi, la résolution de la mesure de déplacement vertical des plateaux de reprise d'efforts est de $0,01$ mm.

4.2.2.3 Description du système d'acquisition

Comme pour le véhicule d'essai, le système d'acquisition des mesures et de commande des actionneurs est basé sur une plateforme temps réel. La plateforme est un châssis PXI-1042Q de National Instrument® pouvant accueillir 6 cartes d'acquisition. Les cartes d'acquisition présentes dans le banc de test sont :

- une carte PXI 6229 (32 entrées analogiques, 4 sorties analogiques, 48 entrées-sorties numériques) ;
- une carte PXI 6713 (8 sorties analogiques, 8 entrées-sorties numériques, 2 compteurs ou horloges) ;
- une carte CAN PXI 8464-2 (2 canaux CAN).

L'ensemble de la plateforme temps réel, aussi nommée « frontale » peut être cadencée jusqu'à 1 ms. La plateforme temps réel communique avec un ordinateur de supervision par une liaison Ethernet. La supervision, le ciblage et l'exécution des modèles temps réel sont assurés par le logiciel de supervision de test *TestInView*® développé par Clemessy®. Ce logiciel est particulièrement utilisé pour la mise en œuvre de plans de validation de systèmes. Un plan de validation comprend l'ensemble des tests à effectuer pour valider les spécifications définies pour le système considéré. L'interet d'un tel logiciel (TestInView) est de permettre la réalisation des mêmes plans de validation tout au long du cycle de conception, que le système soit sous forme de modèle informatique ou sous forme de prototype physique. Il gère, en particulier, l'archivage des tests et conçoit automatiquement les rapports de validation.

Les deux moyens d'essai présentés dans cette section permettent d'acquérir les jeux de données nécessaires à l'identification des paramètres du modèle grâce à des algorithmes d'identification.

4.3 Identification des modèles

L'identification simultanée de nombreux paramètres pose la difficulté du compromis biais-variance et des minima locaux. Le compromis biais-variance est la capacité d'un modèle d'être à la fois identifié avec précision sur un jeu de données (biais) et d'avoir une capacité de généralisation pour décrire d'autres jeux de données (variance). Le problème des minima locaux réside dans la fonction de coût qu'utilisent les algorithmes itératifs d'identification. Avec une fonction de coût complexe, l'algorithme a une forte probabilité de trouver des minima locaux plutôt que le minimum global. L'augmentation du nombre de paramètres augmente cette probabilité.

Afin d'éviter ces problématiques, la stratégie proposée consiste à utiliser des jeux de données créés spécialement pour exciter certaines dynamiques ou sous-parties du système, et à n'identifier qu'un nombre limité de paramètres.

Lorsque chacune des sous-parties est identifiée, le modèle global est construit en utilisant la méthode des systèmes interconnectés. Ainsi, au lieu d'identifier en une seule étape l'ensemble du modèle, on identifie séparément chacun des sous-systèmes. Cette stratégie permet aussi de faciliter la création des jeux de données. En effet, l'identification d'un modèle complet de la dynamique du véhicule nécessite des jeux de données excitant l'ensemble des dynamiques du système simultanément. En plus d'être difficile à concevoir, de tels jeux comportent de nombreuses données, ce qui augmente la difficulté et le temps de calcul lors de la phase d'identification.

Pour identifier l'ensemble du véhicule il serait préférable de n'utiliser que ce dernier pour créer des jeux de données. Mais l'absence d'instrument pour effectuer certaines mesures sur le véhicule oblige à utiliser le banc de test. De plus, l'utilisation d'un banc de test permet de créer des

jeux de données fiables et reproductibles car les conditions d'essai sont mieux maitrisées. Cette stratégie peut être proposée grâce à l'identification par sous-système. En effet, cette dernière permet de décomposer le véhicule et ainsi d'identifier certain organe séparément. Par exemple, l'identification de la raideur d'une suspension peut se faire sur un moyen d'essai particulier car il est possible de découpler sa dynamique des autres dynamiques. Ainsi, en fonction du couplage entre les dynamiques, le véhicule est identifié en deux parties :

- les dynamiques latérale, longitudinale et en lacet sont identifiées sur le véhicule d'essai ;
- les dynamiques verticales des roues et de la caisse ainsi que le roulis sont identifiés sur le banc de test.

Il est à noter que deux dynamiques sont plus difficile à identifier : la dynamique de la direction et la dynamique en tangage. Pour la dynamique de direction, la difficulté provient de l'impossibilité de mesurer le moment d'auto-alignement car ni le banc de test, ni le véhicule d'essai n'est instrumenté pour pouvoir la déterminer. Pour la dynamique en tangage, la difficulté est de réussir à exciter le véhicule en tangage. En effet, cette dynamique n'est pas représentée sur le banc de test. Pour exciter cette dynamique avec le véhicule d'essai, il faut soit imposer des phases d'accélération et de freinage incompatibles avec un modèle linéaire à vitesse constante, soit avoir un profil de route excitant verticalement le véhicule (dos d'âne, nid de poule,...). Or le laboratoire n'est pas équipé pour créer et mesurer un tel profil. La dynamique en tangage permet de définir l'inertie autour de l'axe $\vec{Y}_V$ du véhicule. Ce paramètre ne pouvant être identifié avec nos moyens d'essai, la valeur constructeur par défaut est conservée.

Pour finir, certains paramètres ne nécessitent pas d'être identifiés car leur mesure physique peut être directement effectuée. Cela concerne principalement les paramètres de longueur et de masse.

4.3.1 Méthode d'identification

Pour identifier les paramètres d'un modèle d'état à temps continu, il est courant d'utiliser la forme discrétisée de la réalisation d'état (*cf.* Annexe A) et de considérer un bruit de mesure e comme illustré à la Figure 4.6.

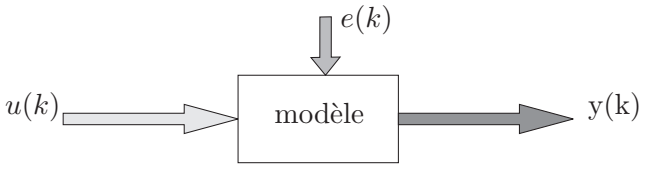


Figure 4.6 – Représentation d'un modèle avec bruits de mesure

La réalisation d'état est ainsi décrite par le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x(k+1) & = \mathsf{A}x(k) + \mathsf{B}u(k) + \mathsf{K}e(k), \\ y(k) & = \mathsf{C}x(k) + \mathsf{D}u(k) + e(k). \end{cases}$$

Sous cette forme, la fonction de transfert est

$$Y(z) = \mathsf{H}(z)U(z) + \mathsf{G}(z)E(z), \tag{4.3}$$

où z est la variable de la transformée en z et $E(z)$ définit le bruit de mesure. La fonction de transfert $\mathsf{G}(z)$ est un filtre du bruit exprimé par

$$\mathsf{G}(z) = \mathsf{C}(z\mathbb{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{K} + \mathbb{I},$$

et la fonction de transfert $\mathsf{H}(z)$ du modèle est exprimée par

$$\mathsf{H}(z) = \mathsf{C}(z\mathbb{I} - \mathsf{A})^{-1}\mathsf{B} + \mathsf{D}.$$

De l'équation (4.3), il apparaît que l'erreur de prédiction $e(k)$ vaut

$$E(z) = \mathsf{G}^{-1}(z)\left(Y(z) - \mathsf{H}(z)U(z)\right).$$

Ainsi, pour un jeu de données (u, y), l'erreur est fonction de $g(k)$ et $h(k)$. La méthode d'identification paramétrique la plus commune cherche à estimer $\mathsf{G}(z)$ et $\mathsf{H}(z)$ en minimisant le critère

$$J = \sum_{k=1}^{N} e^2(k),$$

où N est la taille du jeu de données. Ceci est une *méthode à erreur de prédiction*. Pour les modèles multi sorties, le critère d'erreur à minimiser est donné par

$$J = \det\left(\sum_{k=1}^{N} e(k)e^T(k)\right), \tag{4.4}$$

qui est le critère de vraisemblance maximale pour un bruit Gaussien avec une matrice de covariance inconnue. La minimisation numérique d'un tel critère peut être un problème difficile pour une paramétrisation d'un modèle général. Le critère est une fonction des paramètres libres qui peut définir des surfaces complexes, avec beaucoup de minima locaux, des minima très proches, etc... C'est pourquoi il est important et nécessaire de fournir des paramètres initiaux raisonnables, ainsi que de limiter le nombre de paramètres à identifier [LJUNG, 1987].

De manière générale, le critère (4.4) ne peut pas être résolu par une méthode analytique. La solution doit alors être trouvée par une technique numérique itérative. Du fait de l'approche par sous-système, le fonction de coût est peu complexe. Ainsi, la méthode utilisée ici se base sur les algorithmes de Newton qui utilisent la fonction de coût, son gradient (dérivée première) et son Hessien (dérivée seconde). Cet algorithme cherche, par une suite d'itérations, à minimiser la fonction d'erreur en modifiant les paramètres par la fonction de récursivité suivante

$$\check{\theta}(k) = \check{\theta}(k-1) + \alpha(k)f(k),$$

où $f(k)$ est la direction de recherche et $\alpha(k)$ est une constante positive déterminée de telle sorte que le critère de coût J décroit à chaque itération. Dans le cadre des algorithmes de Newton, la direction de recherche est donnée par

$$f(k) = -\left[\frac{d^2J(\check{\theta}(k))}{dJ(\check{\theta})^2}\right]^{-1} \frac{dJ(\check{\theta}(k))}{d\check{\theta}}.$$

Le gradient permet de déterminer la direction du pas de recherche et le Hessien la taille du pas de recherche. Cet algorithme est proposé dans la solution logicielle Matlab® afin de permettre d'identifier les paramètres des modèles sous forme de réalisation d'état [LJUNG, 1988].

De façon complémentaire l'utilisation du banc d'essai permet d'identifier certains paramètres sans avoir recours à un algorithme itératif d'identification. En effet, s'il existe un modèle linéaire statique par rapport aux paramètres, alors le modèle s'exprime par

$$Y = X\theta + e,$$

où $Y \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ est le vecteur des N observations de la sortie, $X \in \mathbb{R}^{N\times m}$ est la matrice des N observations de m entrées, $\theta \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ est le vecteur des p paramètres du modèle linéaire et $e \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ est le vecteur des erreurs. La solution minimisant la somme des carrés des erreurs $e^T e$ est

$$\check{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y,$$

qui est l'estimateur des moindres carrés ordinaire.

Avec les algorithmes de Newton et les moindres carrés, il est possible d'identifier les paramètres des différents sous-systèmes. De ces sous-systèmes, il est nécessaire de créer le modèle complet de la dynamique du véhicule. Si les sous-systèmes sont sous forme de réalisation d'état ou de MSSO, l'interconnexion de l'ensemble des sous-systèmes n'est pas une tâche triviale car il est nécessaire de réécrire l'ensemble des équations afin d'éliminer les couplages entrées-sorties. Une autre solution consiste à travailler directement avec les matrices du modèle considéré, de créer trois matrices explicitant les couplages et d'en déduire directement les matrices du modèle complet [VANDENDORPE et DOOREN, 2008].

4.3.2 Interconnexion de sous-systèmes

Un système linéaire interconnecté Σ est un système composé de l'interconnexion de k sous-systèmes linéaires Σ_i représentés par les fonctions de transfert $\mathsf{H}_i(s)$. Chaque sous-système a α_i entrées et β_i sorties, données respectivement par les vecteurs u_i et y_i tels que

$$y_i(s) = \mathsf{H}_i(s) u_i(s). \tag{4.5}$$

En posant U, le vecteur des m entrées du système issu des sous-systèmes interconnectés et Y ses p sorties, les entrées u_i des sous-systèmes peuvent être exprimées par une combinaison des entrées externes du système et des sorties de l'ensemble des sous-systèmes par

$$u_i(s) = E_i U(s) + \sum_{j=1}^{k} R_{i,j} y_i(s), \tag{4.6}$$

où $E_i \in \mathbb{R}^{\alpha_i \times m}$ est la matrice qui lie les entrées du système aux sous-systèmes et $E_i \in \mathbb{R}^{\beta_i \times \alpha_i}$ est la matrice qui lie les sorties des sous-systèmes aux entrées des sous-systèmes.

Les sorties Y sont une combinaison linéaire des sorties de chaque sous-système donnée par

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} S_i y_i(s), \tag{4.7}$$

où $S_i \in \mathbb{R}^{p\times \beta_i}$ est la matrice qui lie les sorties des sous-systèmes aux sorties du système.

La Figure 4.7 (page suivante) présente un exemple d'un système interconnecté, composé de 3 sous-systèmes.

En notant $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ le nombre d'entrées des sous-systèmes et $\beta = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ le nombre de sorties des sous-systèmes, alors les vecteurs $u \in \mathbb{R}^{\alpha\times 1}$ et $y \in \mathbb{R}^{\beta\times 1}$ résultant respectivement de la concaténation de l'ensemble des entrées et des sorties des sous-systèmes, permettent d'écrire les relations internes du système interconnecté (4.5) comme étant

$$y(s) = \mathsf{H}(s) u(s) \quad \text{avec} \qquad \mathsf{H}(s) = \begin{pmatrix} \mathsf{H}_1(s) & & \mathbb{0} \\ & \ddots & \\ \mathbb{0} & & \mathsf{H}_k(s) \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

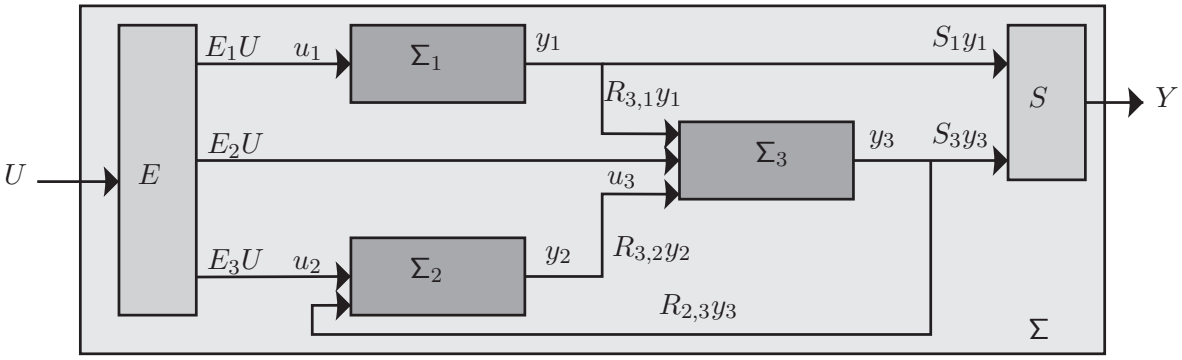


FIGURE 4.7 – Exemple de système interconnecté

De cette équation, la fonction de transfert du système interconnecté est

$$\mathsf{H}(s) = \mathsf{C}_{ss}(s\mathbb{I} - \mathsf{A}_{ss})^{-1}\mathsf{B}_{ss} + \mathsf{D}_{ss}, \tag{4.9}$$

avec

$$\mathsf{A}_{ss} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \mathsf{A}_k \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B}_{ss} = \begin{pmatrix} \mathsf{B}_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \mathsf{B}_k \end{pmatrix},$$
$$\mathsf{C}_{ss} = \begin{pmatrix} \mathsf{C}_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \mathsf{C}_k \end{pmatrix} \quad et \quad \mathsf{D}_{ss} = \begin{pmatrix} \mathsf{D}_1 & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ \mathbb{O} & & \mathsf{D}_k \end{pmatrix}.$$

De même en posant

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & \dots & E_k \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & \dots & R_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k,1} & \dots & R_{k,k} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_k \end{pmatrix}$$

alors les équations (4.6) et (4.7) peuvent être données par

$$\begin{aligned} u(s) &= EU(s) + Ry(s), \\ Y(s) &= Sy(s). \end{aligned} \tag{4.10}$$

En pré-multipliant l'équation (4.10) par $\mathsf{H}(s)$, à partir de l'équation (4.8) on a

$$\begin{aligned} y(s) &= \mathsf{H}(s)EU(s) + \mathsf{H}(s)Ry(s), \\ \Rightarrow y(s) &= (I - \mathsf{H}(s)R)^{-1}\mathsf{H}(s)EU(s). \end{aligned}$$

D'où la fonction de transfert du système interconnecté

$$Y(s) = S(I - \mathsf{H}(s)R)^{-1}\mathsf{H}(s)EU(s).$$

Ainsi, en remplaçant $\mathsf{H}(s)$ dans l'équation précédente par son expression donnée à l'équation (4.9), on peut montrer que la réalisation d'état du système interconnecté est donnée par (voir par exemple [ZHOU, 1995], page 66) :

$$\begin{cases} \mathsf{A}_{ic} = \mathsf{A}_{ss} + \mathsf{B}_{ss}R(\mathbb{I} - \mathsf{D}_{ss}R)^{-1}\mathsf{C}_{ss}, \\ \mathsf{B}_{ic} = \mathsf{B}_{ss}(\mathbb{I} - R\mathsf{D}_{ss})^{-1}E, \\ \mathsf{C}_{ic} = S(\mathbb{I} - \mathsf{D}_{ss}R)^{-1}\mathsf{C}_{ss}, \\ \mathsf{D}_{ic} = S\mathsf{D}_{ss}(\mathbb{I} - R\mathsf{D}_{ss})^{-1}E. \end{cases} \tag{4.11}$$

Les équations (4.11) permettent de définir une unique réalisation d'état pour l'interconnexion d'un ensemble de sous-systèmes. À noter que dans le cas des systèmes sans matrice d'action directe (*i.e.* $\mathsf{D}_i = \mathbb{0}$ pour $i = 1, \ldots, k$), alors les équations (4.11) s'exprime par

$$\begin{cases} \mathsf{A}_{ic} = \mathsf{A}_{ss} + \mathsf{B}_{ss}R\mathsf{C}_{ss}, \\ \mathsf{B}_{ic} = \mathsf{B}_{ss}E, \\ \mathsf{C}_{ic} = S\mathsf{C}_{ss}, \\ \mathsf{D}_{ic} = \mathbb{0}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Pour les modèles structurés en second ordre, nous proposons une méthode similaire. Par analogie aux équations (4.12), l'interconnexion de k sous-systèmes structurés en second ordre donne

$$\begin{cases} M_{ic} &= M - FRG_a, \\ C_{ic} &= C - FRG_v, \\ K_{ic} &= K - FRG_p, \\ F_{ic} &= FE, \\ G_{p_{ic}} &= SG_p, \\ G_{v_{ic}} &= SG_v, \\ G_{a_{ic}} &= SG_a, \end{cases} \tag{4.13}$$

où les matrices M, C, K, F, G_p, G_v et G_a sont les matrices diagonalisées par bloc respectivement des matrices M_i, C_i, K_i, F_i, G_{p_i}, G_{v_i} et G_{a_i}, pour $i = 1, \ldots, k$.

Les équations (4.13) permettent de définir à partir d'un ensemble de sous-systèmes un système structuré en second ordre. Mais ces équations ne préservent pas les conditions *structurelles*.

Les 3 méthodes présentées ci-dessus (identification, moindre carré simple et interconnexion des sous-systèmes) permettent d'identifier les paramètres des modèles du véhicule présentés au Chapitre 3.

4.3.3 Identification de la direction

L'identification de la direction ne peut se faire directement car nous ne possédons pas de mesure du moment d'auto-alignement. Ainsi, les paramètres de ce sous-système sont mesurés sur le banc de test en créant des jeux de données spécifiques pour estimer un ou deux paramètres. Les paramètres à déterminer sont regroupés de la manière suivante :

- la longueur du bras des porte-fusées l_M et leur angle δ_0 ;
- le rayon du pignon de crémaillère R_c ;
- la raideur K_c et l'amortissement C_c de la colonne de direction ;
- la masse de la crémaillère m_c.

Sur l'ensemble de ces paramètres, deux paramètres peuvent être directement mesurés sur le banc de test : l_M et δ_0. La longueur l_M est de 116 mm $\pm$2 mm et l'angle δ_0 est de 8 deg $\pm$2 deg.

Mesurer ces paramètres s'avère particulièrement difficile car l'axe de pivot n'est pas un axe physique de la suspension mais il est construit par son épure. Étant donné que ces paramètres ont peu d'influence sur la dynamique du véhicule (contrairement à la rigidité de dérive par exemple), le manque relatif de précision qui en découle ne s'avère pas un problème pour notre objectif.

Le banc de test possède les entrées-sorties nécessaires à l'identification du rayon du pignon de la crémaillère. En effet, ce dernier est un coefficient de proportionnalité entre l'angle au volant et le déplacement de la crémaillère. Ces deux grandeurs sont mesurées sur le banc de test, ainsi l'identification est directe par régression linéaire.

Les jeux de données sont créés en effectuant un braquage complet à gauche et à droite du volant. Il s'avère que les capteurs permettent de mesurer avec une grande précision et que peu de jeux de données sont nécessaires pour une relation aussi simple. Ainsi, 3 jeux de données sont créés. La FIGURE 4.8 présente un des jeux de données et la régression linéaire correspondante. À noter que pour des raisons de lisibilité, seule 1 donnée brute sur 75 est présentée.

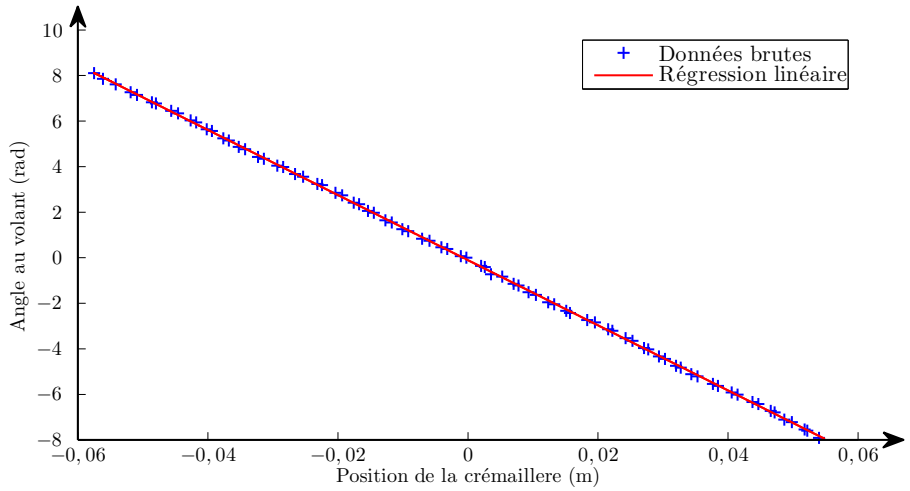


FIGURE 4.8 – Position de la crémaillère en fonction de l'angle au volant

Pour les trois jeux de données, les résultats sont présentés au TABLEAU 4.1. La qualité d'identification est confirmée par l'écart-type du rayon estimée. Le décalage de $7,5$ dixièmes de millimètre est dû à un biais de mesure sur les capteurs de positions du volant et de la crémaillère.

Jeux de données	$\mathbf{R_c}$ (mm)	**Décalage** (mm)	**RMSE** (mm)
numéro 1	$6,99$	$0,75$	$0,37$
numéro 2	$7,00$	$0,75$	$0,36$
numéro 3	$7,00$	$0,75$	$0,36$
moyenne	$\mathbf{7,00}$	$0,75$	$0,36$
écart-type	$2,4.10^{-6}$	$1,0.10^{-6}$	$8,0.10^{-6}$

TABLEAU 4.1 – Rayon de la crémaillère identifié

Pour identifier la raideur, l'amortissement et la masse de la colonne de direction, une consigne en angle sur le moteur couple volant est appliquée. La consigne est une Séquence Multi niveau

Pseudo Aléatoire (SMPA) qui, pour des raisons technologiques, a été filtrée par le filtre à noyau donné à l'équation (4.1). En effet, exciter le moteur couple de direction par des échelons crée des pics de tension incompatibles avec l'alimentation du moteur qui est de type hacheur. La SMBPA couvre l'ensemble de la plage de variation de la direction (± 8 rad) avec un signal carré dont la période varie aléatoirement de 1 à 3 secondes. Le protocole d'essai consiste à supprimer la masse non-suspendue en démontant les biellettes de direction. Ainsi, l'inertie due au braquage des roues est supprimée ainsi que les retours d'efforts de la roue sur la direction que nous ne pouvons mesurer. Le système à identifier est la représentation d'état (3.29) donnée à la Section 3.4.1.

Afin de déterminer la valeur de K_c, C_c et m_c, la position du volant δ_H, la position de la crémaillère Y_M ainsi que le couple généré au volant $M_{z,H}(\text{co/vo})$ sont mesurés. La représentation d'état implique de mesurer l'angle de braquage de la roue. Cette mesure n'étant pas disponible sur le banc de test, elle est estimée à partir de la position de la crémaillère en divisant cette dernière par la longueur de la biellette de direction l_M conformément à l'équation (3.28).

Pour ces essais, 10 jeux de données de 2 minutes sont créés. Les résultats de l'identification par l'algorithme de Newton (*cf.* Section 4.3.1) sont présentés au Tableau 4.2.

Jeu de données	$\mathbf{C_c}$ (N.m.s. rad^{-1})	$\mathbf{K_c}$ (N.m. rad^{-1})	$\mathbf{m_c}$ (kg)	**RMSE** δ(rad)	**RMSE** $\dot{\delta}$ (rad.s^{-1})	**RMSE** $M_{z,H}$(co/vo) (N.m)
numéro 1	$52,5$	$5,38$	148	$4,24.10^{-3}$	$9,94.10^{-3}$	1,22
numéro 2	$53,0$	$6,12$	149	$4,24.10^{-3}$	$9,77.10^{-3}$	1,21
numéro 3	$60,2$	$6,52$	250	$4,24.10^{-3}$	$9,68.10^{-3}$	1,19
numéro 4	$67,6$	$6,86$	311	$4,24.10^{-3}$	$9,70.10^{-3}$	1,15
numéro 5	$56,0$	$6,33$	198	$4,24.10^{-3}$	$9,70.10^{-3}$	1,20
numéro 6	$52,7$	$5,92$	175	$4,24.10^{-3}$	$9,73.10^{-3}$	1,22
numéro 7	$63,6$	$6,39$	227	$4,24.10^{-3}$	$9,85.10^{-3}$	1,16
numéro 8	$49,6$	$6,58$	232	$4,24.10^{-3}$	$9,42.10^{-3}$	1,26
numéro 9	$69,7$	$6,09$	324	$4,24.10^{-3}$	$9,85.10^{-3}$	1,16
numéro 10	$70,4$	$6,28$	290	$4,24.10^{-3}$	$9,90.10^{-3}$	1,14
moyenne	$\mathbf{59,5}$	$\mathbf{6,25}$	**230**	$4,24.10^{-3}$	$9,75.10^{-3}$	1,19
écart-type	$7,84$	$0,407$	64	$9,41.10^{-7}$	$1,48.10^{-4}$	0,0382

Tableau 4.2 – Raideur, amortissement et masse de la colonne identifiés

Après identification, la valeur de la raideur de la colonne de direction est estimée à $59,5$ N.rad^{-1} avec un écart-type de $7,84$ N.rad^{-1} ($\simeq 13\%$ de la valeur estimée). L'amortissement identifié est de $6,73$ N.rad^{-1}.s avec un écart-type faible de 0.407 N.rad^{-1}.s ($\simeq 6\%$ de la valeur estimée). En revanche, l'identification de la masse de la crémaillère donne le paramètre à 230 Kg sachant que la masse de la crémaillère est de l'ordre de 2 Kg. Ceci peut s'expliquer par le fait que la masse de la crémaillère influe peu sur la sortie. Pour illustrer le peu d'influence de la masse, on présente les RMSE entre les sorties mesurées et estimées pour un jeu de données au Tableau 4.3 (page suivante). La première estimation est effectuée avec la masse de 2 kg et la seconde estimation est effectuée avec la masse identifiée.

La difficulté d'identification de la masse de la crémaillère est due à la configuration du banc de test. En effet, l'absence de retour d'effort latéral sur les plans de jante permettant de simuler le moment d'auto-alignement supprime une excitation importante du modèle. Cette difficulté d'identification peut être validée par une analyse de sensibilité du modèle à la variation des paramètres [SALTELLI, 2004]. La sensibilité est définie par la variance de l'espérance de la sortie

masse de la crémaillère	RMSE		
	δ_H	$\dot{\delta}_H$	$M_{z,H}$(co/vo)
2 Kg	$4,2.10^{-3}$	$9,7.10^{-3}$	1,1871
230 Kg	$4,2.10^{-3}$	$10,4.10^{-3}$	1,162

TABLEAU 4.3 – Valeurs du RMSE sur le jeu de données de validation pour deux valeurs de masse de crémaillère

y_i conditionnellement à un paramètre θ_k, normalisé par la variance de la sortie (*cf.* Annexe B)

$$S_k(t) = \frac{V(E[y_i(t)|\theta_k])}{V(y_i(t))}. \tag{4.14}$$

$S_k(t)$ est l'indice de sensibilité du i-ème paramètre à l'instant (t) . En d'autres termes, il quantifie la sensibilité de la sortie $y_i(t)$ à la variable d'entrée θ_i. La normalisation assure que l'indice est compris entre 0 et 1. Un indice proche de 1 indique une forte sensibilité du modèle au paramètre.

L'équation (4.14) étant difficile à résoudre analytiquement, nous utilisons son estimation par la méthode de Monte-Carlo (ou méthode de Sobol). La méthode utilise deux échantillons de variation des paramètres. Nous utilisons une loi normale centrée sur le paramètre identifié, avec une variance de 10 %. Les deux échantillons ont une taille de 200 000 données. La simulation de la sortie pour chaque jeu de données permet de calculer les indices de sensibilité des sorties du modèle en fonction des paramètres. La FIGURE 4.9 présente les résultats de cette analyse de sensibilité. Chaque barre de l'histogramme comptabilise le nombre d'échantillons des sorties du modèle dont l'indice de sensibilité est dans l'intervalle défini par deux valeurs successives de l'axe des abscisses.

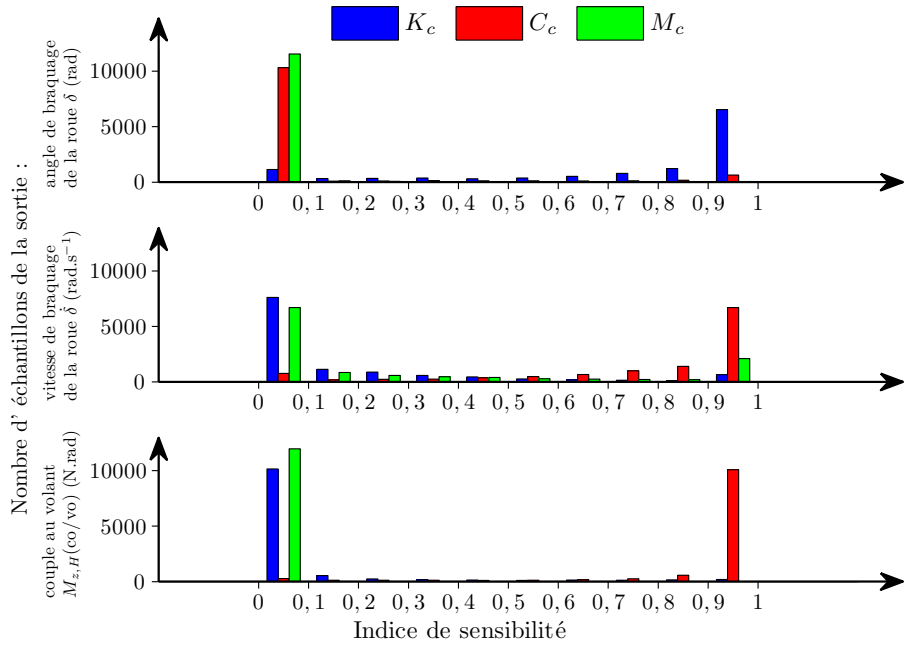


FIGURE 4.9 – Sensibilité des paramètres de la crémaillère

La FIGURE 4.9 permet de constater que la raideur K_c influe sur l'angle de braquage. L'amortissement C_c influe sur la vitesse de braquage et le couple au volant. En revanche, la masse de la

crémaillère n'influe que très faiblement et seulement sur la vitesse de braquage ce qui explique le peu de réalité physique du paramètre identifié.

Le Tableau 4.4 résume l'ensemble des paramètres retenus pour le modèle de direction.

paramètre	l_m (m)	δ_0 (rad)	R_c (m)	K_c (N.m.rad^{-1})	C_c (N.m.s.rad^{-1})	m_c (kg)
valeur	0,116	0,14	7.10^{-3}	59,5	6,25	2

Tableau 4.4 – Paramètres de la colonne de direction

La validation du modèle est effectuée sur un 11^{e} jeu de données qui n'a pas été utilisé en identification. La Figure 4.10 présente l'angle de braquage, sa dérivée et le couple au volant, mesurés et estimés, ainsi que les erreurs pour chacune des sorties.

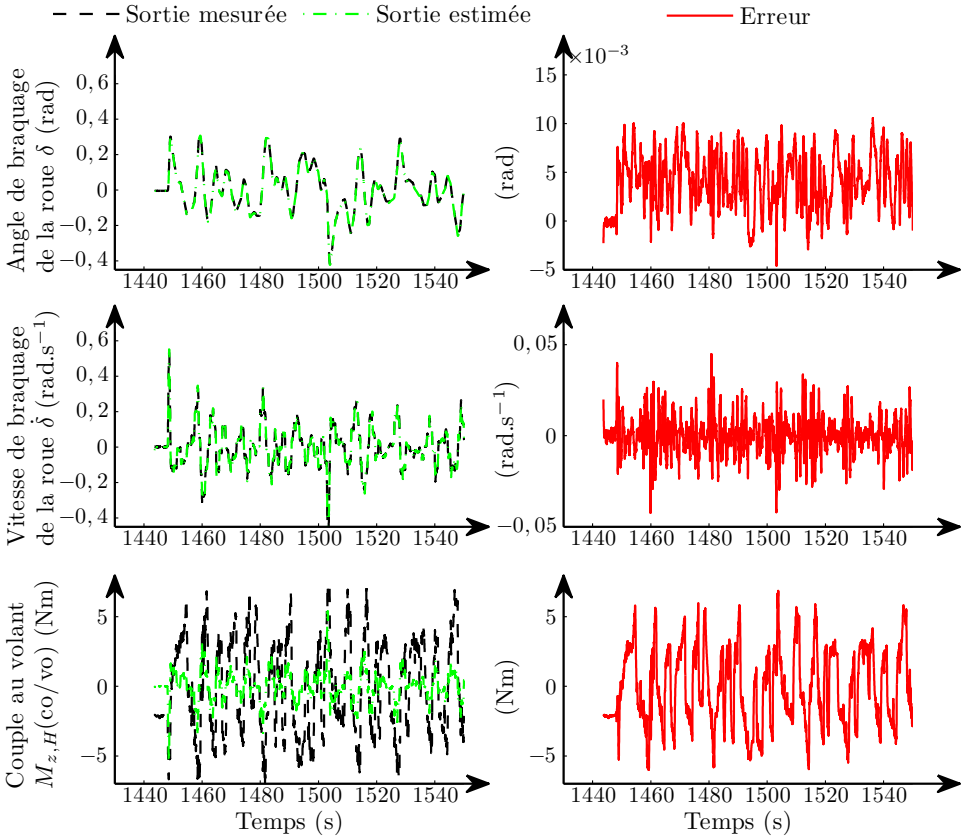


Figure 4.10 – Sorties réelles et estimées du modèle de direction

On constate que le modèle exprime avec une grande fiabilité l'angle et la vitesse de braquage. En revanche, le couple au volant est mal déterminé du fait des difficultés d'identification des paramètres d'une part et des simplifications faites dans le modèle linéaire d'autre part. Ainsi, le modèle n'explique pas correctement le couple au volant mais cette dynamique étant indépendante, *i.e.* n'ayant pas d'influence sur les autres sous-parties du modèle, ses erreurs d'estimation ne sont pas propagées dans le modèle.

4.3.4 Identification de la caisse

Le modèle linéaire de la caisse est divisé en deux parties, une partie latérale et une partie verticale. La dynamique latérale est la première dynamique à être identifiée. Cette dynamique est modélisée par un modèle bicyclette qui a déjà été identifié par [POULY, 2009]. L'entrée du modèle bicyclette est l'angle à la roue. Or sur le véhicule d'essai cette donnée n'est pas disponible. Ainsi l'hypothèse d'un rapport constant de 17 entre l'angle au volant et l'angle de la roue avait été utilisée. Grâce au modèle de direction, cette approximation n'est plus nécessaire, et nous identifions directement le modèle bicyclette interconnecté au modèle de direction [7].

Pour le modèle bicyclette, l'ensemble des paramètres à identifier sont
- la masse M et les empattements $l^{(i)}$ du véhicules $(i = 1, \ldots, 4)$;
- l'inertie I_{zz} ;
- les coefficients de raideur latérale du pneumatique $C_{\alpha^{(i)}}$ $(i = 1, \ldots, 4)$;
- les coefficients de raideur du moment d'auto-alignement du pneumatique $C_{aa^{(i)}}$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

Comme pour le modèle de direction, certains paramètres peuvent être mesurés sur le véhicule. Pour le modèle bicyclette, ces paramètres sont la masse M et les empattements $l^{(i)}$ qui peuvent être déterminés en mesurant simultanément le poids du véhicule sous chacune des roues. La méthode pour obtenir l'empattement à partir des valeurs de poids est donnée à l'Annexe C. Les résultats obtenus sont présentés au Tableau 4.5.

paramètre	M (kg)	$l^{(1)}, l^{(2)}$ (m)	$l^{(3)}, l^{(4)}$ (m)
valeur	**1394**	$\mathbf{1,08}$	$\mathbf{-1,47}$

Tableau 4.5 – Masses et empattements du véhicule

L'ensemble des autres paramètres est identifié. De par la symétrie du véhicule, certains des paramètres sont égaux. Ces contraintes sont prises en compte lors de l'identification en imposant l'ensemble des relations suivantes

$$C_{\alpha^{(1)}} = C_{\alpha^{(2)}}, \qquad C_{\alpha^{(3)}} = C_{\alpha^{(4)}} \qquad et \qquad C_{aa^{(1)}} = C_{aa^{(2)}}.$$

Pour cette procédure d'identification, l'angle de braquage du volant δ_H et sa dérivée $\dot{\delta}_H$ sont les signaux d'excitation, le couple au volant $M_{z,H}(\text{co/vo})$, la vitesse transversale du centre de gravité du véhicule v_Y et la vitesse de rotation en lacet $\dot{\psi}$ sont les signaux mesurés.

La création des jeux de données se fait en excitant la direction du véhicule lorsque ce dernier roule à vitesse constante. Afin d'estimer au mieux les paramètres lors du processus d'identification, il faut exciter le système avec un balayage le plus large possible des fréquences et des amplitudes. Un des signaux le plus porteur d'information est le SMPA. Ce signal ne peut être utilisé sur le véhicule car il définit une trajectoire aléatoire incompatible avec la piste d'essai utilisée. Ainsi, l'angle de braquage imposé par le conducteur est un sinus wobulé d'une fréquence variant approximativement de 0,15 Hz à 2,5 Hz comme présenté à la Figure 4.11 (page ci-contre). Ce signal permet de balayer une large gamme de fréquence tout en ayant une trajectoire suivant une direction principale.

Plusieurs essais sont effectués à des vitesses comprises entre 5 et 20 m.s^{-1}, réparties suivant le Tableau 4.6 (page ci-contre).

Sur le véhicule d'essai, contrairement au banc de test, il n'est pas possible de désactiver l'assistance de la colonne de direction. Ainsi, les mesures de couples au volant sont faussées.

7. Le modèle de direction a aussi un rapport fixe qu'il est possible d'estimer et qui vaut $16,6$.

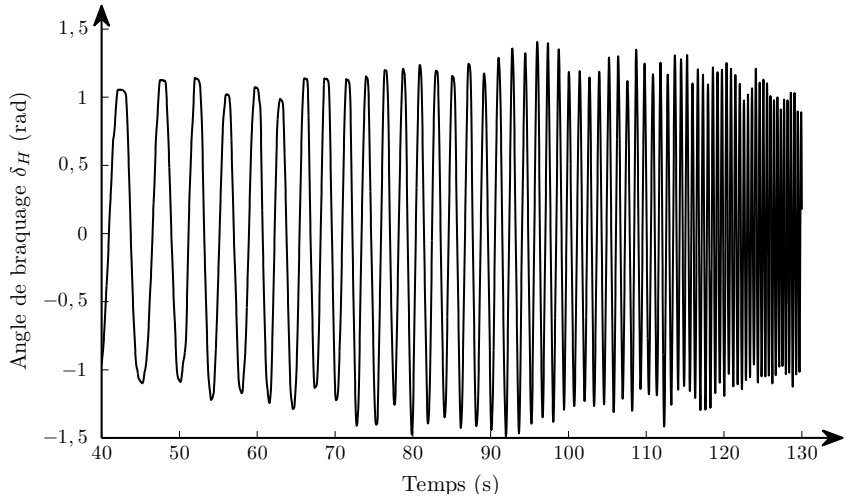


FIGURE 4.11 – Angle de braquage excitant le véhicule

vitesse	5 (18)	10 (36)	15 (54)	20 (72)	m.s^{-1} (km.h^{-1})
nombre d'essais	6	3	6	5	**Total : 20**

TABLEAU 4.6 – Nombre d'essais par vitesse du véhicule pour l'identification du modèle bicyclette

Comme l'estimation des coefficients de rigidité du moment d'auto-alignement n'influe que sur cette sortie, il n'est pas possible d'identifier ces paramètres. Nous utilisons donc des données de la littérature [PACEJKA, 2005]. Pour les trois autres paramètres, les résultats de l'identification pour ces 20 jeux de données sont présentés au TABLEAU 4.7 (page suivante).

Pour les coefficients de rigidité latérale des roues, les coefficients ont un ordre de grandeur de 30000 N.rad^{-1} [PACEJKA, 2005]. Ces valeurs sont dépendantes de nombreux facteurs tels que l'adhérence de la route ou la pression des pneumatiques. Ainsi, les valeurs obtenues de 41445 N.rad^{-1} à l'avant et de 46602 N.rad^{-1} à l'arrière respectent l'ordre de grandeur.

En revanche, les écart-types sur les paramètres identifiés sont très importants. La dispersion des paramètres des coefficients de raideur latérale est problématique mais s'explique par l'influence de la vitesse du véhicule sur ce paramètre comme l'a montré [POULY, 2009]. Dans ces travaux, l'auteur propose une régression linéaire en fonction de la vitesse pour déterminer les paramètres. Nous reprenons cette méthode pour estimer avec plus de précision les coefficients de rigidités. La FIGURE 4.12 (page 147) donne la valeur des paramètres identifiés en fonction de la vitesse ainsi que les courbes des deux polynômes estimés par les moindres carrés suivants

$$\begin{cases} C_\alpha^{(i)} = -78,8 v_X^2 + 4423 v_X + 956 & \text{pour } i = 1,2, \\ C_\alpha^{(i)} = 3397 v_X + 3887 & \text{pour } i = 3,4. \end{cases}$$

Lors de l'identification de l'inertie I_{zz} du véhicule, nous obtenons une valeur de 1718 kg.m^2 avec un écart-type de 380 kg.m^2 soit $\simeq 22\%$ de la valeur estimée. La dispersion des valeurs de ce paramètre n'a que peu d'influence sur les résultats car le modèle n'est pas très sensible à ce paramètre. Afin de le montrer, nous comparons le RMSE de la sortie vitesse latérale et vitesse de lacet sur le jeu de données de validation en fixant l'ensemble des paramètres du modèle à leur valeurs identifiées exceptée la valeur d'inertie. Une première simulation est effectuée avec la valeur minimale identifiée $I_{zz} = 1038$ kg.m^2, une deuxième simulation est effectuée avec la

jeu de données	$\mathbf{I_{zz}}$ kg.m^2	$\mathbf{C_\alpha^{(i)}}$ (N.rad^{-1}) $i=1,2$	$i=3,4$	**RMSE** v_Y (m.s^{-1})	**RMSE** $\dot{\psi}$ (rad.s^{-1})
numéro 1	1919	58730	67069	0,858	0,290
numéro 2	1976	60027	76587	0,642	0,294
numéro 3	2368	22606	25981	0,046	0,083
numéro 4	1167	49957	50373	0,356	0,239
numéro 5	2075	17343	14694	0,064	0,096
numéro 6	1620	18191	15318	0,041	0,035
numéro 7	1452	32559	51511	0,046	0,133
numéro 8	1491	39626	45452	0,042	0,150
numéro 9	1038	49988	52782	0,259	0,265
numéro 10	1919	51318	61033	0,280	0,236
numéro 11	1630	53822	58831	0,315	0,267
numéro 12	2202	56545	72759	0,792	0,285
numéro 13	2082	58987	72377	0,693	0,310
numéro 14	1211	22130	13187	0,081	0,061
numéro 15	1392	41784	33750	0,103	0,149
numéro 16	1275	45117	49377	0,426	0,220
numéro 17	1666	47978	51085	0,397	0,244
numéro 18	1946	55737	70562	0,783	0,268
numéro 19	1821	21624	21629	0,041	0,059
numéro 20	2110	24826	27676	0,036	0,041
moyenne	**1718**	41445	46602	0,315	0,186
écart-type	380	15282	21013	0,293	0,096

TABLEAU 4.7 – Inertie autour de l'axe vertical et coefficients de raideur latérale du pneumatique identifiés

valeur de l'inertie	**RMSE** v_Y (m.s^{-1})	**RMSE** $\dot{\psi}$ (rad.s^{-1})
I_{zz} = 1038 kg.m^2	0,0587	0,0371
I_{zz} = 2368 kg.m^2	0,0605	0,0319
I_{zz} = 1718 kg.m^2	0,0596	0,0341

TABLEAU 4.8 – RMSE du modèle bicyclette pour deux valeurs de l'inertie sur le jeu de données de validation

valeur maximale identifiée I_{zz} = 2368 kg.m^2 et une dernière simulation est effectuée avec la valeur identifiée I_{zz} = 1718 kg.m^2. Les RMSE ainsi obtenus sont données au TABLEAU 4.8. On constate sur le jeu de données de validation qu'une faible valeur de l'inertie augmente la précision de l'estimation de la vitesse transversale et qu'une forte valeur de l'inertie augmente la précision de l'estimation de la vitesse de lacet. La valeur identifiée est donc un compromis pour estimer correctement les deux sorties.

Le TABLEAU 4.9 (page ci-contre) résume l'ensemble des paramètres retenus pour le modèle transversal de la caisse.

La validation du modèle se fait sur un 21^e jeu de données qui n'a pas été utilisé en identifi-

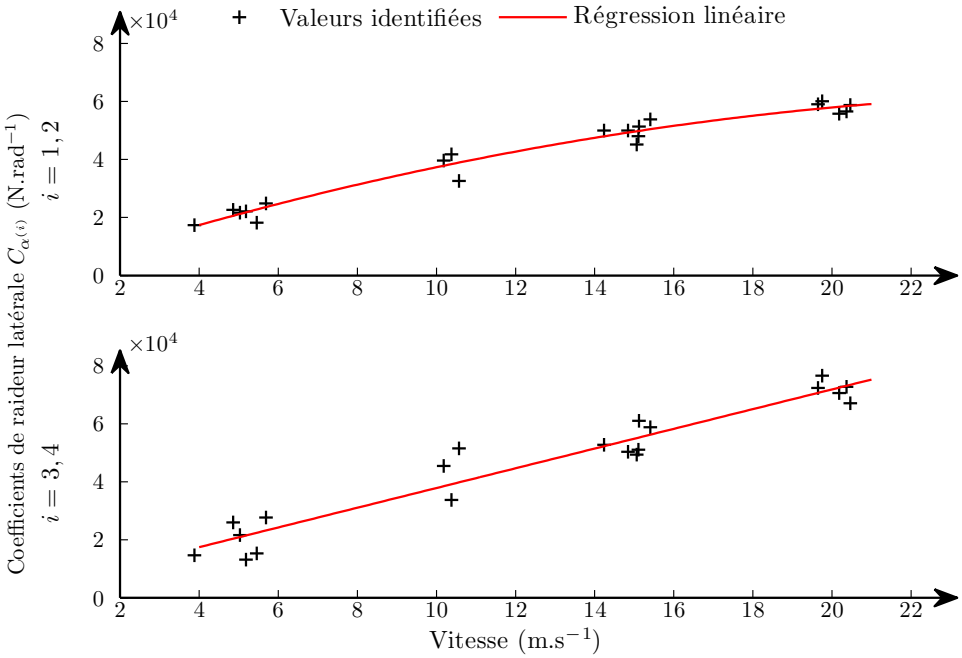


FIGURE 4.12 – Raideurs latérales des pneumatiques identifiées et estimées par régressions linéaires, en fonction de la vitesse

paramètre	M (kg)	$l^{(i)}$ (m)	I_{zz} (kg.m^2)	$C_\alpha^{(i)}$ (N.rad^{-1})	$C_{aa}^{(i)}$ (N.rad^{-1})
$i = 1, 2$	1394	1,08	1718	$-78,8v_X^2 + 4423v_X + 956$	1558
$i = 3, 4$		-1,47		$3397v_X + 3887$	560

TABLEAU 4.9 – Paramètres du modèle de la dynamique transversale de la caisse

cation. La FIGURE 4.13 (page suivante) présente le couple au volant, la vitesse transversale et la vitesse de lacet, mesurés et estimés ainsi que les erreurs pour chacune des sorties.

On constate que le modèle exprime avec une grande fidélité la vitesse transversale et la vitesse de lacet à l'exception du pic à la 120^e seconde. Cette mauvaise approximation s'explique par le fait que les limites de validité du modèle bicyclette sont atteintes, car le véhicule est excité dans ses parties non-linéaires. A nouveau, l'estimation du couple au volant n'est pas satisfaisante, mais comme l'assistance de la direction était fonctionnelle lors des essais, le modèle n'est pas représentatif.

4.3.5 Identification de la masse non-suspendue

Le modèle linéaire de la masse non-suspendue est scindé en deux parties, une dynamique longitudinale (rotation de la roue) et une dynamique verticale. Pour le modèle linéaire du véhicule présenté à la Section 3.4.4 la vitesse est considérée constante. Ainsi, la dynamique longitudinale de la masse non-suspendue n'est alors pas prise en compte dans ce modèle. En effet, les vitesses de rotation des roues sont directement liées à la vitesse longitudinale du véhicule car les glissements ne sont pas pris en compte dans ce modèle. En revanche, le modèle semi-linéaire prend en compte cette dynamique. Or, pour ce modèle, les paramètres à identifier sont le rayon

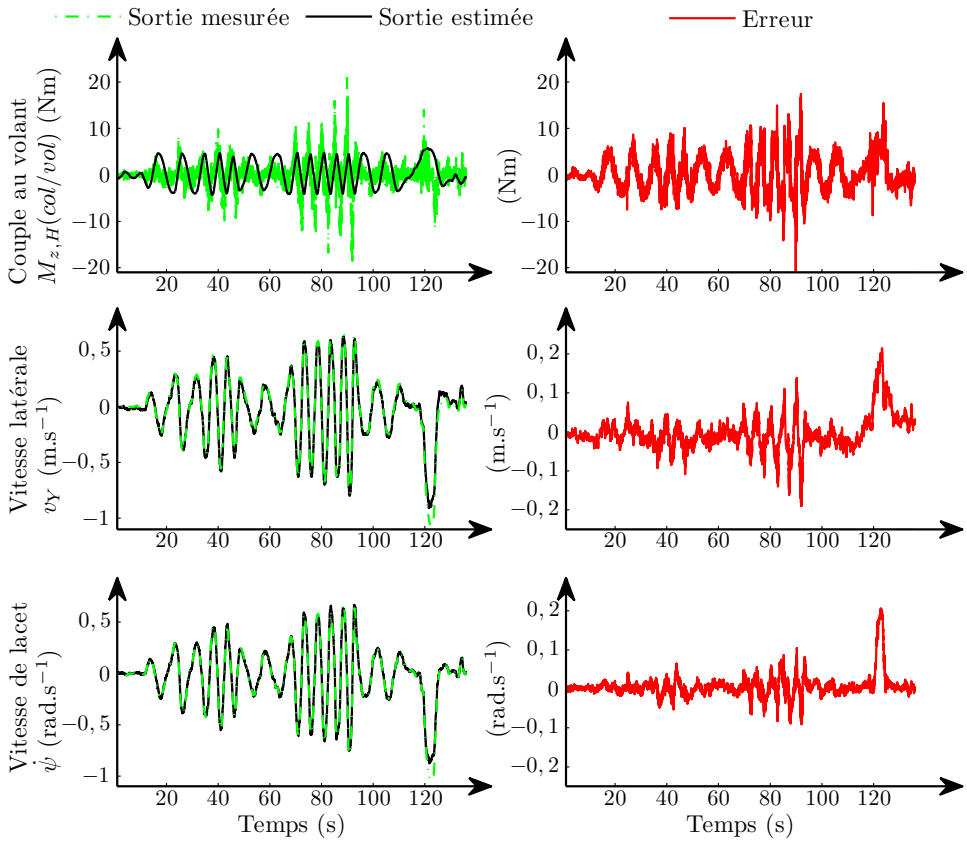


FIGURE 4.13 – Sorties réelles et estimées du modèle transversal de la caisse

de la roue en statique et l'inertie de cette dernière suivant son axe de rotation. Le rayon de la roue peut aisément être mesuré contrairement à l'inertie car nous ne possédons pas les instruments de mesure nécessaires. Ainsi, le paramètre d'inertie est un paramètre de la littérature [MICHELIN, 2003]. Les paramètres du modèle de la dynamique transversale de la roue sont donnés au TABLEAU 4.10.

paramètre	$r_{stat}^{(i)}$ (m)	$I_{r_{yy}}$ (kg.m^2)
$i = 1, 2$	$\mathbf{0,275}$	$\mathbf{0,581}$
$i = 3, 4$	$\mathbf{0,275}$	$\mathbf{0,581}$

TABLEAU 4.10 – Paramètres du modèle de la dynamique transversale de la roue

Les paramètres de la dynamique verticale de la masse non-suspendue peuvent être identifiés sur le banc de test pour le train avant du véhicule. En revanche, le moyen d'essai ne nous permet pas d'identifier les paramètres pour le train arrière. Pour les raideurs, amortissements et masses non-suspendues des roues arrières, nous utilisons les paramètres identifiées à l'avant en supposant donc que les 4 roues du véhicule sont les mêmes (même jante et pneumatique). En revanche, les paramètres des suspensions et de la barre anti-roulis arrière sont différents. Ces paramètres n'étant pas identifiables, nous utilisons les données courantes de la littérature [BROSSARD, 2006].

Pour ce modèle les paramètres à identifier sont donc :
– les masses non-suspendues m_{ns} et la masse suspendue m_s
– les raideurs et amortissements des pneumatiques K_t et C_t ;
– les raideurs et amortissements des suspensions K_s et C_s ;
– les raideurs des barres anti-roulis K_{bar} et l'inertie I_{xx}.
L'utilisation du banc de test permet de mesurer directement la plupart de ces paramètres en utilisant une régression linéaire sur des mesures, et ainsi d'éviter les processus d'identification.

L'estimation de la masse non-suspendue et de la masse suspendue se fait par la différence des efforts générés verticalement entre la roue et les plateaux de reprise ($F_{z,O_W^{(i)}}$(so/ro), $i = 1, 2$) et entre les coupoles hautes de suspension et le châssis ($F_{z,A^{(i)}}$(su/ca), $i = 1, 2$) en statique. 4 mesures de 30 secondes sont effectuées sur le banc de test et permettent d'obtenir les résultats du Tableau 4.11. Pour s'assurer de la cohérence du véhicule avec le banc de test, nous calculons aussi la masse totale de ce dernier M_{bdt} qui se doit de correspondre à la somme de la masse suspendue et des masses non-suspendues.

jeu de données	$\mathbf{m_{ns}^{(1)}}$ (kg)	$\mathbf{m_{ns}^{(2)}}$ (kg)	$\mathbf{m_s}$ (kg)	$\mathbf{M_{bdt}}$ (kg)
numéro 1	$36,02$	$35,93$	$732,48$	$804,43$
numéro 2	$35,90$	$35,78$	$732,60$	$804,28$
numéro 3	$35,91$	$35,61$	$732,33$	$803,85$
numéro 4	$36,42$	$35,34$	$732,52$	$804,28$
moyenne	$\mathbf{36,06}$	$\mathbf{35,67}$	$\mathbf{732,48}$	$\mathbf{804,21}$
écart-type	$0,24$	$0,25$	$0,11$	$0,25$

Tableau 4.11 – Masse suspendue et masses non-suspendues du banc de test

La masse totale du banc de test est de 804.2 kg alors que la masse mesurée sur le train avant du véhicule est de 803,6 kg ($=m_s\frac{l^3}{l^3-l^1} = 1394\frac{-1,47}{-1,47-1,08}$ selon l'Annexe C). Ainsi la masse du banc de test est équivalente à la masse du demi-véhicule avant.

Pour déterminer la raideur et l'amortissement des pneumatiques, le banc de test est bloqué en position. C'est-à-dire que le déplacement vertical et la rotation en roulis de la masse suspendue sont empêchés. De plus, un montage bloque la compression d'une suspension. Ainsi, tout déplacement vertical du vérin avec la suspension bloquée excite la seule compression du pneumatique. La plage des valeurs de compression est déterminée par le décollement du pneumatique en position basse du vérin et par l'effort maximal de 1 tonne que supporte le vérin en position haute. Cette plage de valeur fait varier l'écrasement du pneumatique de -3 à -42 mm. L'écrasement est négatif car il est déterminé par la différence des hauteurs $Z_{C_W^{(i)}} - Z_{O_W^{(i)}}$ qui sont nulles au repos, c'est-à-dire lorsque la roue est posée sur les plateaux sans charge sur cette dernière. De plus, le maintien en position du banc assure que la hauteur $Z_{C_W^{(i)}}$ ne varie pas et reste nulle. Ainsi seule la hauteur $Z_{O_W^{(i)}}$ augmente d'où des écrasements négatifs. La plage de valeur est parcourue à différentes vitesses en utilisant un sinus wobulé dont la fréquence varie linéairement de 0 à 0.96 Hz. La raideur et l'amortissement sont déterminés par une régression linéaire entre la vitesse et la position mesurés et l'effort transmis au pneumatique par les plateaux de reprise $F_{z,O_W^{(i)}}$.

La Figure 4.14 (page suivante) présente les données mesurées pour un jeu de valeurs. La première courbe présente le sinus wobulé appliqué à la roue, la seconde courbe présente la régression linéaire sur un jeu de données.

Les coefficients de raideur et d'amortissement des pneumatiques, estimés par la régression

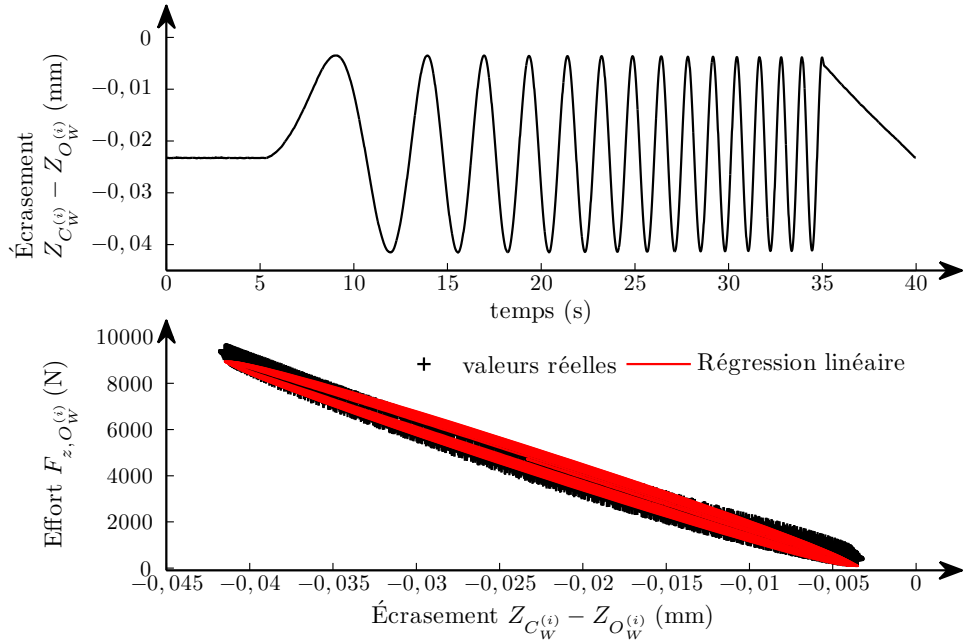


FIGURE 4.14 – Efforts générés par le pneumatique en fonction de son écrasement

linéaire, sont donnés au TABLEAU 4.12 (page ci-contre). La raideur estimée du pneumatique est de 225659 N.m^{-1} pour un écart-type de 8867 N.m^{-1} ($\simeq$4% de la valeur moyenne). En revanche, l'estimation de l'amortissement varie très fortement en fonction du jeu de données. En fait, l'amortissement d'un pneumatique est très faible en comparaison de la raideur et sa contribution dans l'effort est de l'ordre de la précision du capteur d'effort. Il est même courant d'omettre l'amortissement dans la modélisation d'un pneumatique pour un modèle véhicule. Même si cet amortissement est très faible face à l'amortissement de la suspension, il est préférable de conserver une valeur non nulle car sinon, le bloc dynamique verticale du contact roue-sol est un oscillateur pur, ce qui est en contradiction avec la réalité. Ne pouvant pas utiliser la valeur estimée, nous utilisons une valeur courante d'amortissement de pneumatique de 500 N.m^{-1}.s [BROSSARD, 2006].

L'identification de la raideur K_s et de l'amortissement C_s de la suspension est réalisée d'une manière similaire à l'identification du pneumatique. Le banc de test est toujours bloqué en position mais, cette fois-ci, la roue est remplacée par une roue solide, c'est-à-dire par un montage mécanique empêchant toute déformation verticale du pneumatique. À nouveau, l'écrasement de la suspension $Z_{A^{(i)}} - Z_{C_W^{(i)}}$ est directement mesuré avec le point $Z_{A^{(i)}}$ fixe et le point $Z_{C_W^{(i)}}$ variant. La suspension est excitée par un sinus wobulé de $\pm$50 mm et de fréquence variant de 0,2 à 1 Hz. La raideur et l'amortissement sont déterminés par une régression linéaire entre la vitesse et la position mesurées et l'effort transmis à la caisse par les suspensions $F_{z,A^{(i)}}$.

La FIGURE 4.15 (page ci-contre) présente les données mesurées et estimées pour un jeu de valeurs.

De cet essai, 4 jeux de données sont créés. Les résultats de l'estimation des paramètres sont donnés au TABLEAU 4.13 (page 152) où l'on constate la qualité de l'estimation pour les deux paramètres. Le décalage est dû à la précontrainte du ressort dans la suspension.

Les deux derniers paramètres à estimer sont la raideur de la barre anti-roulis K_{bar} et l'inertie

jeu de données	$\mathbf{C_t}$ ($\mathrm{N.m^{-1}.s}$)	$\mathbf{K_t}$ ($\mathrm{N.m^{-1}}$)	**RMSE** (N)
numéro 1	−708	235763	251
numéro 2	1517	232043	250
numéro 3	5554	233196	243
numéro 4	3971	231496	258
numéro 5	−790	235975	250
numéro 6	−986	219202	242
numéro 7	−624	220669	232
numéro 8	3302	220217	208
numéro 9	2094	213863	236
numéro 10	1426	214164	236
moyenne	**1476**	**225659**	241
écart-type	2284	8867	14

TABLEAU 4.12 – Raideur et amortissement estimés du pneumatique

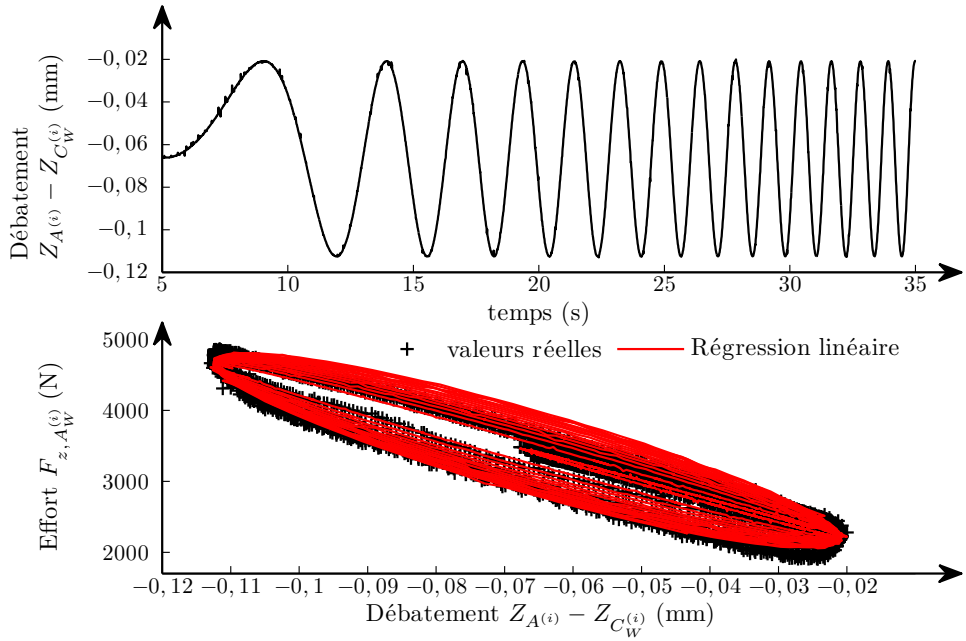


FIGURE 4.15 – Efforts générés par la suspension en fonction de son écrasement

I_{xx}. Ces paramètres sont identifiés sur le banc de test en excitant verticalement les roues par des sinus wobulés déphasés de 180 ° entre chaque roue. Pour ces essais, le banc de test est entièrement libéré. Les sinus wobulés ont la même fréquence et amplitude que ceux utilisés pour estimer la raideur et l'amortissement de la suspension. 9 jeux de données sont créés dont 8 pour l'identification et 1 pour la validation. Pour l'identification, le modèle utilisé est un modèle du banc de test créé à partir du modèle de la dynamique verticale de la caisse et de la masse non-suspendue.

Les résultats de l'identification sont présentés dans le TABLEAU 4.14 (page suivante). Les

jeu de données	$\mathbf{C_s}$ (N.m^{-1}.s)	$\mathbf{K_s}$ (N.m^{-1})	Décalage (N)	**RMSE** (N)
numéro 1	2386	26502	−1665	87
numéro 2	2372	26540	−1658	88
numéro 3	2367	26564	−1664	90
numéro 4	2371	26530	−1666	87
moyenne	**2374**	**26534**	−1663	88
écart-type	9	26	3	1

TABLEAU 4.13 – Raideur et amortissement estimés de la suspension

RMSE sont calculés sur la vitesse verticale des points $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ qui sont sensibles à la raideur de la barre anti-roulis et à l'inertie autour de $\vec{X}_V$ de la caisse.

jeu de données	$\mathbf{I_{xx}}$ (Kg.m^2.s)	$\mathbf{K_{bar}}$ (N.rad^{-1})	**RMSE** $V_{z,A}^{(1)}$ (m.s^{-1})	**RMSE** $V_{z,A}^{(2)}$ (m.s^{-1})
numéro 1	157	33973	0,013	0,010
numéro 2	153	37224	0,012	0,010
numéro 3	112	33565	0,013	0,010
numéro 4	129	33703	0,013	0,010
numéro 5	122	37382	0,012	0,010
numéro 6	233	34637	0,014	0,011
numéro 7	129	37323	0,012	0,010
numéro 8	194	39374	0,012	0,009
moyenne	**153**	**35898**	**0,013**	**0,010**
écart-type	41	2192	0,001	0,000

TABLEAU 4.14 – Raideur de la barre anti-roulis et inertie autour de $\vec{X}_V$ estimées

L'inertie estimée du banc de test est de 153 Kg.m^2 ce qui est très inférieur aux données habituelles de l'inertie en roulis d'un véhicule. Même si la répartition de la masse le long de l'axe longitudinal de la caisse n'est pas connu, il semble que l'inertie du banc de test est trop faible et qu'elle ne corresponde pas au véhicule d'essai. La raideur de la barre anti-roulis est estimée à 35898 N.rad^{-1} ce qui est une estimation correcte par rapport aux valeurs habituelles de raideur d'une barre anti-roulis de véhicule.

Le TABLEAU 4.15 résume l'ensemble des paramètres retenus pour la masse non-suspendue.

paramètre	$m_{ns}^{(1)}$	$m_{ns}^{(2)}$	m_s	C_t	C_s	K_t	K_s	I_{xx}	K_{bar}
	(kg)			(N.m^{-1}.s)		(N.m^{-1})		(Kg.m^2.s)	(N.rad^{-1})
valeur	36,06	35,67	732,48	1476	2374	225659	26534	153	35898

TABLEAU 4.15 – Ensemble des paramètres des masses non-suspendue

La validation du modèle est effectuée sur le 9^e jeu de données. La FIGURE 4.16 (page ci-contre) présente les données mesurées et estimées des sorties $V_{z,A^{(1)}}$ et $V_{z,A^{(2)}}$ pour cet essai. Ces courbes permettent de constater la bonne adéquation entre les sorties estimées et mesurées.

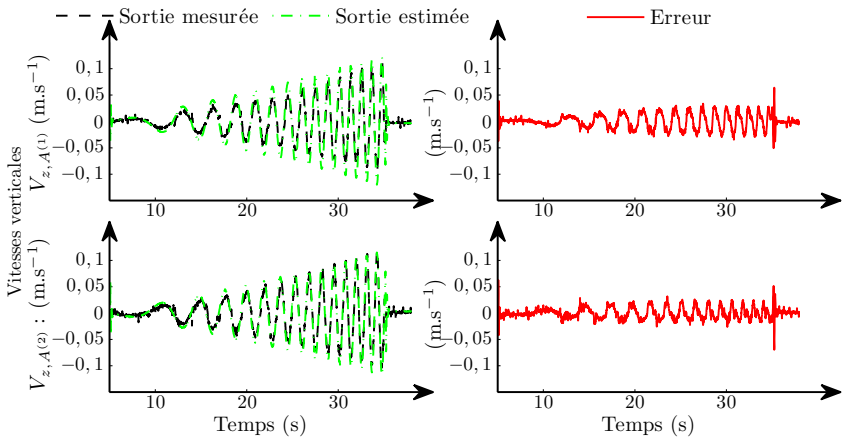


FIGURE 4.16 – Vitesses verticales des points hauts de suspension réelles et estimées

4.3.6 Validation des modèles

Sur les 31 paramètres généraux définissant le modèle complet, 25 ont été identifiés. Parmi les paramètres restants, pour 5 paramètres des données de la littérature sont utilisées (raideurs et amortissements de la suspension arrière, inertie de la caisse en tangage et inertie des roues). Les paramètres du modèle de Pacejka et du modèle de Coulomb sont des paramètres de la littérature. En revanche, parmi les 4 paramètres du modèle de Pacejka linéarisé, 2 paramètres ont été identifiés. Le dernier paramètre à renseigner, qui n'appartient pas à la dynamique du véhicule, est l'accélération de pesanteur qui vaut $9,81$ m.s^{-1}.

La validation des modèles s'effectue en comparant les mouvements de la caisse estimés par les modèles et les mouvements de la caisse mesurés sur le véhicule lors d'un essai. L'essai effectué est à vitesse constante sur route plane, ainsi le tangage, la vitesse verticale et la vitesse longitudinale sont constants et ne sont donc pas présentés. Les sorties mesurées et estimées sont donc :

- la vitesse latérale v_Y ;
- la vitesse de lacet $\dot{\psi}$;
- la vitesse de roulis $\dot{\varphi}$;
- le couple au volant $M_{z,H}$(co/vo).

Pour chacune des sorties, le RMSE est calculé et est donné dans le TABLEAU 4.16. Le RMSE du couple au volant est très important, ce qui confirme le peu de représentativité du modèle pour cette sortie. La comparaison des 3 autres sorties montre que le modèle complet est le modèle qui estime le mieux les données réelles. Pour finir, on constate qu'à l'exception de la vitesse de roulis, le modèle linéaire approxime mieux les sorties que le modèle semi-linéaire.

modèles	**RMSE** v_Y (m.s^{-1})	**RMSE** $\dot{\psi}$ (rad.s^{-1})	**RMSE** $\dot{\varphi}$ (rad.s^{-1})	**RMSE** $M_{z,H}$(co/vo) (N.rad)
complet	0,043	0,030	0,014	4,059
semi-linéaire	0,080	0,067	0,016	4,041
linéaire	0,071	0,037	0,018	4,079

TABLEAU 4.16 – RMSE de cinq sorties du modèle pour un jeu de données expérimentales

La FIGURE 4.17 (page 155) illustre les sorties réelles et les sorties estimées par le modèle

complet, le modèle semi-linéaire et le modèle linéaire. La comparaison des courbes pour la vitesse latérale montre une bonne estimation de cette sortie. De même, pour l'angle de lacet et de roulis. En revanche, on constate que la difficulté d'identification de la colonne de direction empêche d'estimer correctement le couple au volant. Ainsi, mis à part le couple au volant, le modèle peut être utilisé pour estimer le comportement dynamique d'un véhicule. Cependant, l'utilisation de ce modèle nécessite d'ajouter des contrôleurs pour que le véhicule puisse être simulé lorsque d'un parcours de trajectoire. Or l'ajout de ces contrôleurs et la complexité du modèle empêche sa simulation en temps réel. Il est donc nécessaire de le simplifier par des méthodes de réduction de modèle. La présentation des contrôleurs et la réduction du modèle fait l'objet de la prochaine section.

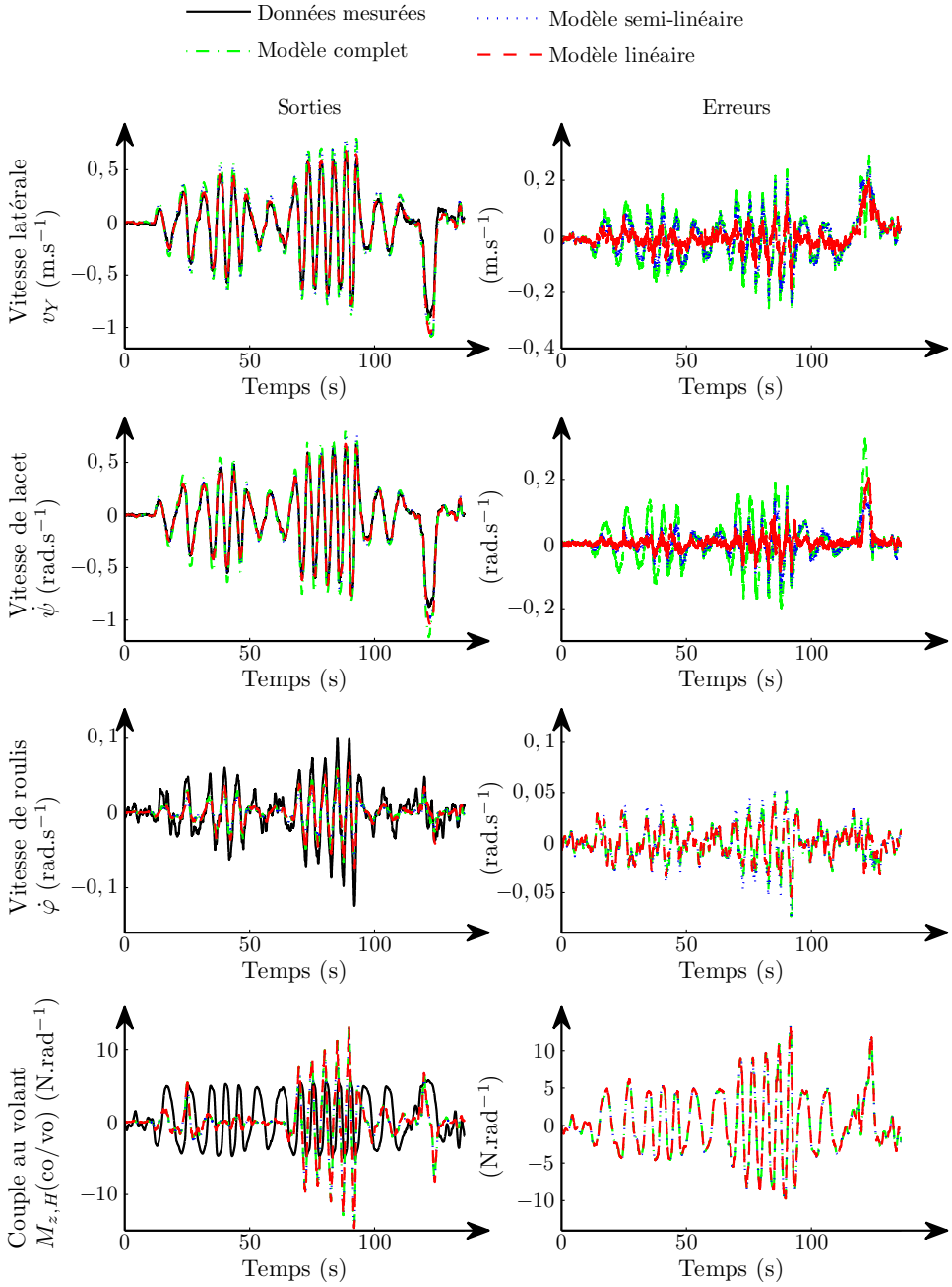


FIGURE 4.17 – Comparaison des sorties des différents modèles avec un jeu de données expérimental

4.4 Réductions des modèles

Dans le Chapitre 3, nous avons présenté trois modèles de la dynamique du véhicule :
- le modèle complet ;
- le modèle semi-linéaire ;
- le modèle linéaire.

Notre objectif est de réaliser la simulation et la co-simulation de ces modèles en temps réel. Les entrées des modèles sont le profil de la route modélisé par les hauteurs des points de contact roue-sol et leurs dérivées, ainsi que le devers et la pente sous chacune des roues et au centre de gravité. Les autres entrées sont l'angle au volant et sa dérivée et, à l'exception du modèle linéaire, le couple appliqué aux roues.

La simulation du modèle de dynamique du véhicule lors de son parcours d'une trajectoire nécessite de définir un profil de route. Dans cette thèse les profils de route sont prédéfinis, aussi des lois de commandes doivent être proposées pour que le véhicule modélisé suive automatiquement ces profils. La simulation permet d'utiliser des commandes peu complexes car le système n'est pas soumis à des perturbations, contrairement à un véhicule réel. Les commandes permettent de définir, à partir d'un profil de route, les excitations sous chacune des roues, le couple à appliquer aux roues et la commande au volant.

4.4.1 Commandes du modèle véhicule

La route est modélisée par 8 vecteurs :
- trajectoire suivant $\vec{X}_E$;
- trajectoires suivant $\vec{Y}_E$;
- trajectoires suivant $\vec{Z}_E$ des roues gauches ;
- trajectoires suivant $\vec{Z}_E$ des roues droites ;
- pente sous les roues gauches ;
- pente sous les roues droites ;
- devers sous les roues gauches ;
- devers sous les roues droites.

La séparation des excitations entre les roues gauches et droites permet d'exciter le véhicule en roulis. En revanche, lors de la simulation sur la cible temps réel, à un instant donné t, seul un point de chacune de ces trajectoires est transmis au modèle. Ainsi, l'utilisation brute de ces trajectoires excite de la même manière les roues avant et les roues arrière et empêche d'exciter en tangage le véhicule au moyen d'un changement de pente. De plus, le fait de ne connaître qu'un point de la trajectoire, rend difficile la conception d'un contrôleur pour diriger le véhicule. Pour résoudre ces deux problématiques, nous utilisons un asservissement de type « Follow the carrot » qui consiste à définir un point en avant du véhicule que ce dernier poursuit (*i.e.* un point objectif). Une sauvegarde des données déjà parcourues par le point objectif permet de retrouver dans une table provisoire implémentée dans la cible temps réel, l'ensemble des valeurs de hauteurs, pentes et devers pour chacune des roues.

Le contrôle de la vitesse du véhicule est assuré par la vitesse du point objectif. Ceci se traduit par le fait que le pas entre deux points de la trajectoire est variable en fonction de la vitesse que l'on veut imposer au véhicule. Ensuite, un contrôleur de type PID (Proportionnel, Intégral, Dérivé) assure une distance constante entre la position du centre de gravité du véhicule et le point suivi.

La stratégie « Follow the carrot » a été initialement proposée dans le cadre d'un algorithme de suivi de trajectoire [HELLSTOM et RINGDAHI, 2006]. L'algorithme consiste à minimiser la différence d'angle (ϵ) entre le cap du véhicule et le cap défini par le centre de gravité et le point objectif. L'angle au volant est alors déterminé par une simple loi de commande proportionnelle $\delta_H = K\epsilon$.

La stratégie « Follow the carrot » est présentée à la FIGURE 4.18 (page ci-contre).

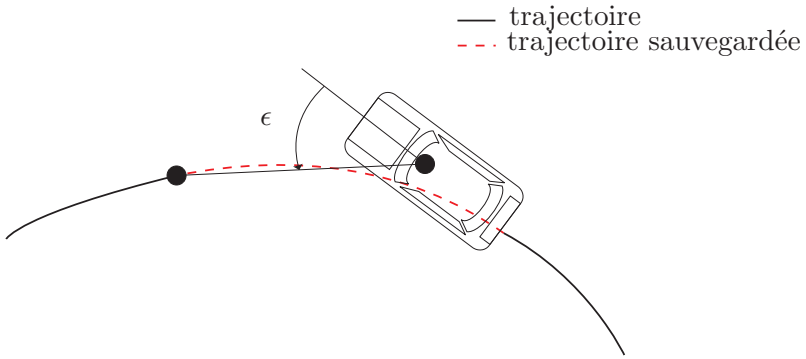


FIGURE 4.18 – Stratégie de commande du véhicule du type « Follow the carot »

Avec cette stratégie, le modèle véhicule peut être utilisé pour suivre un profil de route définie préalablement.

4.4.2 Création de routes

Dans le cadre du projet VETESS (Vérification de systèmes embarqués VÉhicules par génération automatique de TESts à partir des Spécifications), la problématique de création automatique de profils de route a été étudiée. Pour cela, une spécification comportementale (modèle SysML) d'un système est réalisée pour créer automatiquement l'ensemble des tests nécessaires et suffisants à effectuer, afin de valider son respect des spécifications [BOUQUET *et al.*, 2008, LASALLE *et al.*, 2010]. L'outil proposé a montré son efficacité dans le cadre des systèmes à événements discrets. Dans le cadre des systèmes à temps continus, la création d'un profil de route respectant des spécifications a fait l'objet d'un cas d'étude commun TestInView/VETESS [LASALLE *et al.*, 2011].

Pour générer des profils de route, un modèle SysML a donc été proposé. À partir d'attributs de la route, le modèle génère des profils routiers vraisemblables, c'est-à-dire vérifiant un certain nombre d'hypothèses.

Les attributs de la route sont :

une courbure : tout droit, léger virage gauche, léger virage droit, fort virage gauche, fort virage droit ;

une pente gauche : zone de plat, faible montée, forte montée, faible descente, forte descente ;

une pente droite : zone de plat, faible montée, forte montée, faible descente, forte descente ;

un devers : aucun devers, devers à gauche, devers à droite ;

une taille du tronçon : petit, grand.

Sur cette base, le modèle SysML crée une route par un ensemble de tronçons définis par ses attributs et assure que les attributs sont vraisemblables au sein d'un même tronçon et entre deux tronçons successifs. Ensuite, une phase de concrétisation permet de donner des valeurs physiques à ces attributs ce qui permet de construire une route.

Comme la pas entre deux points de la route n'est pas défini en position mais en vitesse, cela implique que ce n'est pas la position du véhicule qui détermine l'apparition des événements définis par les attributs, mais le temps de simulation. En d'autres termes, en fonction de la vitesse du véhicule, le profil de la route est modifié de tel sorte que les événements (pente, devers,...) apparaissent toujours aux mêmes instants. Cette stratégie à trois principaux avantages :

– avoir un déterminisme événementiel, c'est-à-dire connaitre les instants d'apparitions des événements ;
– pouvoir comparer des courbes prises à différentes allures ;
– s'assurer que les événements auront lieu quelque soit la trajectoire suivie par le véhicule.

Pour simplifier la présentation des résultats, dans la suite du travail, nous utilisons deux profils de route. Le premier profil est un test normalisé de validation du comportement routier d'un véhicule. Ce test consiste en un double changement de voie simulant l'apparition d'un obstacle sur la route (aussi nommé test de l'élan)[NORME ISO 3888-1, 1999]. Les dimensions du test de l'élan sont données à la FIGURE 4.19. L'exécution de ce test s'effectue à une vitesse constante de 17 m.s^{-1}. La route est plane et plusieurs dynamiques du véhicule ne sont alors pas

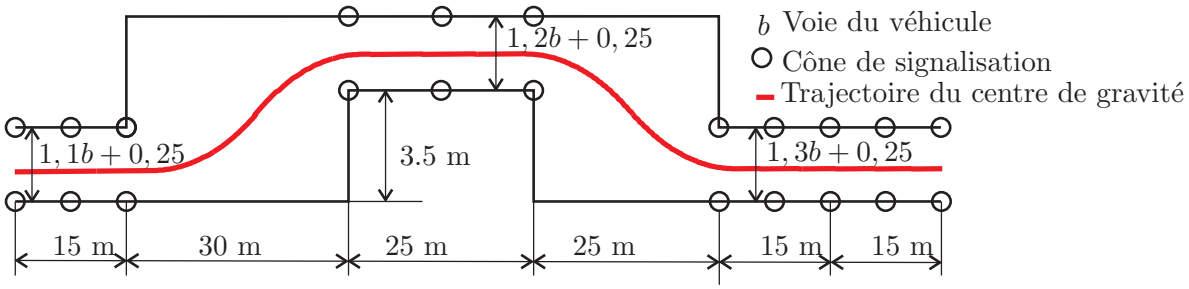


FIGURE 4.19 – Dimensions normalisées du test de l'élan

excitées. Un second profil, généré aléatoirement, est créé pour être suivi à une vitesse faible de 5 m.s^{-1}. Ce profil de route possède plusieurs ruptures de pente, des devers et des courbes comme illustrés à la FIGURE 4.20.

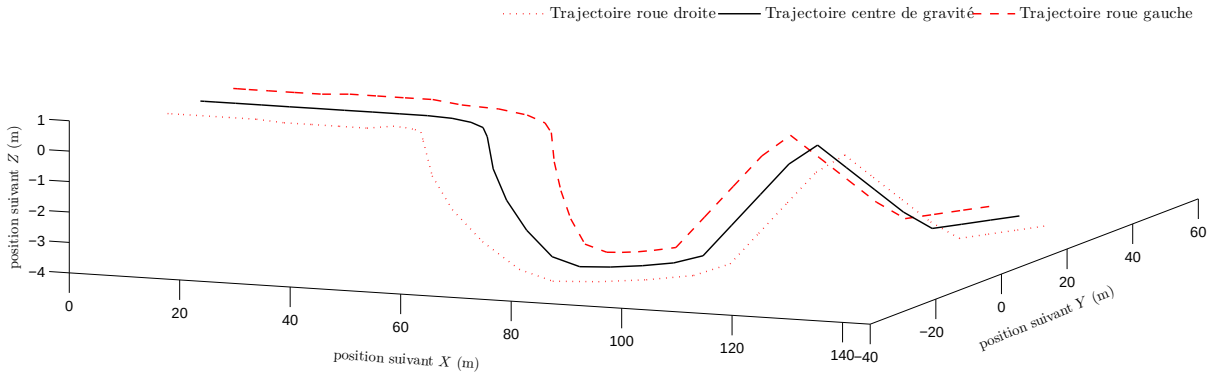


FIGURE 4.20 – Profil de route généré aléatoirement

4.4.3 Nécessité de la réduction de l'ordre des modèles

La mise en œuvre du modèle complet avec les commandes définies précédemment, permet de simuler le comportement du véhicule lorsque ce dernier suit la trajectoire générée aléatoirement. Or, lorsque les simulations sont faites avec ou sans les contraintes de temps réel, les résultats des simulations diffèrent. Par exemple, le suivi de la trajectoire donne des résultats de moins bonne qualité en temps réel. Le RMSE entre la trajectoire de la route et celle du centre de

gravité en simulation est de 4,2 mètres et en simulation temps réel de 6,6 mètres. Cet écart est particulièrement mis en évidence par l'angle de lacet du véhicule lors de la simulation du modèle comme l'illustre la FIGURE 4.21.

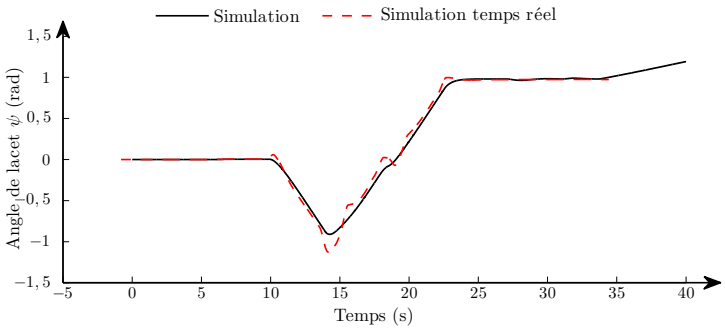


FIGURE 4.21 – Angle de lacet du véhicule en simulation et en simulation temps réel

Cette différence s'explique par des pas de calcul perdus lors de la simulation en temps réel, c'est-à-dire que le temps de calcul de certains cycles est supérieur au pas de calcul de la cible temps réel. La perte de ces cycles fait apparaître des phénomènes aléatoires sur le modèle, incompatibles avec la mise au point de contrôleur ou des tests en co-simulation. En effet, les erreurs qui apparaissent sur l'angle de lacet du véhicule empêchent de valider le suivi de trajectoire en temps réel. En co-simulation, des sorties du modèle sont utilisées pour exciter le banc de test. Les pertes de pas de calcul peuvent entraîner une instabilité du modèle et donc le faire diverger. L'excitation du banc de test par une sortie divergente peut provoquer des mouvements incontrôlés pouvant aller jusqu'à la dégradation du moyen d'essai.

Ce phénomène de perte de temps de cycle apparaît pour les 3 modèles utilisés : le modèle complet (modèle NL-Comp), le modèle semi-linéaire (modèle SL-Comp) et le modèle linéaire (modèle L-Comp). Mais, comme on peut s'y attendre, le nombre de cycles perdus diminue avec une moindre complexité du modèle, comme le montre la FIGURE 4.22.

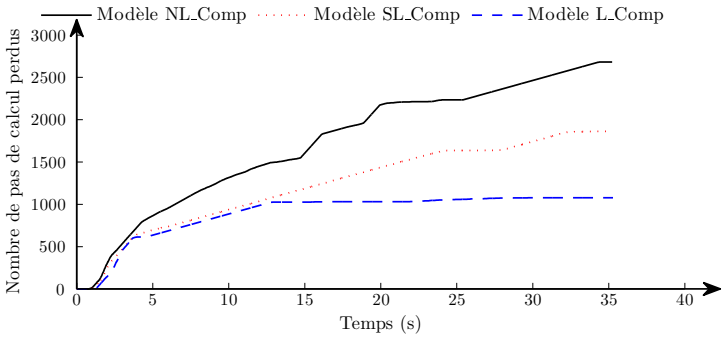


FIGURE 4.22 – Nombre de pas de calcul perdus lors de la simulation

Afin de ne pas perdre de pas de calcul, une possibilité est d'augmenter celui-ci, c'est-à-dire augmenter le temps de calcul admissible par pas. Mais dans ce cas, des instabilités peuvent apparaitre dans les méthodes numériques de résolution des équations différentielles (solvers). Une méthode numérique est stable s'il n'y pas une propagation d'erreur croissante

durant le calcul. Une analyse de sensibilité des solvers tels que celui d'Euler ou celui de Runge-Kutta a montré que ces méthodes sont stables pour des pas de calcul suffisamment petit [KHARAB et GUENTHER, 2002]. Ces deux solvers sont présents dans la solution logicielle Matlab/Simulink®.

Ainsi, en simulation temps réel, le pas de calcul est défini par un compromis entre la stabilité du solver utilisé et la capacité de calcul de la cible temps réel. La stabilité de la méthode est indépendante du calcul temps réel, ainsi il est possible de déterminer le pas de temps maximal admissible en simulation. Les résultats présentés à la FIGURE 4.22 (page précédente) sont obtenus pour des modèles dont la simulation est réalisée avec un solver de type Runge-Kutta avec un pas de calcul de 5 ms qui est le temps maximal admissible pour ces modèles définis en simulation.

Comme le pas de calcul ne peut pas être augmenté, la limitation de la perte de pas doit être effectuée en diminuant la complexité du modèle. Pour ce faire nous utilisons les résultats de la réduction de modèle.

Lors de la réduction, 3 objectifs sont recherchés :
- une préservation de certaines propriétés du système initial (stabilité, passivité, commandabilité,...) ;
- une faible erreur d'approximation ;
- une préservation de la structure.

La préservation des propriétés du système est assurée par les méthodes proposées de réduction des MSSO. La faible erreur d'approximation sera un résultat du compromis entre le nombre d'états (ou de coordonnées généralisées) éliminés et la possibilité de simuler en temps réel le modèle. Après les phases de réduction des modèles, nous reconstruisons des modèles du second ordre respectant les conditions *structurelles*, ce qui constitue la préservation de la structure.

4.4.4 Réduction du modèle linéaire

Le modèle L-Comp est un système interconnecté composé des 7 sous-systèmes suivants :
- la direction ;
- la dynamique transversale de la masse suspendue ;
- la dynamique verticale de la masse suspendue ;
- quatre dynamiques verticales des masses non-suspendues ;

pour un total de 18 états (voir FIGURE 3.28 (page 123)).

Le critère de [MOORE, 1981] développé à la Section 2.2.2 permet de définir la taille r du modèle réduit. Nous le rappelons ici : trouver le plus petit r tel que $\sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=r+1}^{n}\sigma_i^2}$ où σ_i est une valeur singulière de Hankel. En appliquant ce critère sur les valeurs singulières de Hankel du modèle linéaire, le modèle réduit a une dimension de $r = 4$ états.

L'application de l'ALGORITHME 2.1 (MTPSC page 70) et de l'ALGORITHME 2.4 (BTPSC page 76) permet de déduire du modèle linéaire du véhicule deux modèles réduits : le modèle L-Comp-BTPSC et le modèle L-Comp-MTPSC. De ces deux modèles sont déduits une réalisation d'état pouvant être simulé en temps réel et un MSSO permettant d'étudier les effets de la réduction en termes de dynamiques internes et de paramètres.

4.4.4.1 Modèle linéaire réduit

Afin de montrer la qualité d'approximation des modèles, la FIGURE 4.23 (page ci-contre) présente les mouvements de la caisse du modèle L-Comp et des deux modèles réduits (modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC). Il est à noter que les résultats du modèle L-Comp sont obtenus par une simulation en temps simulé, alors que les résultats des modèles réduits sont

obtenus par une simulation en temps réel. Le modèle linéaire initial perd lors de sa simulation

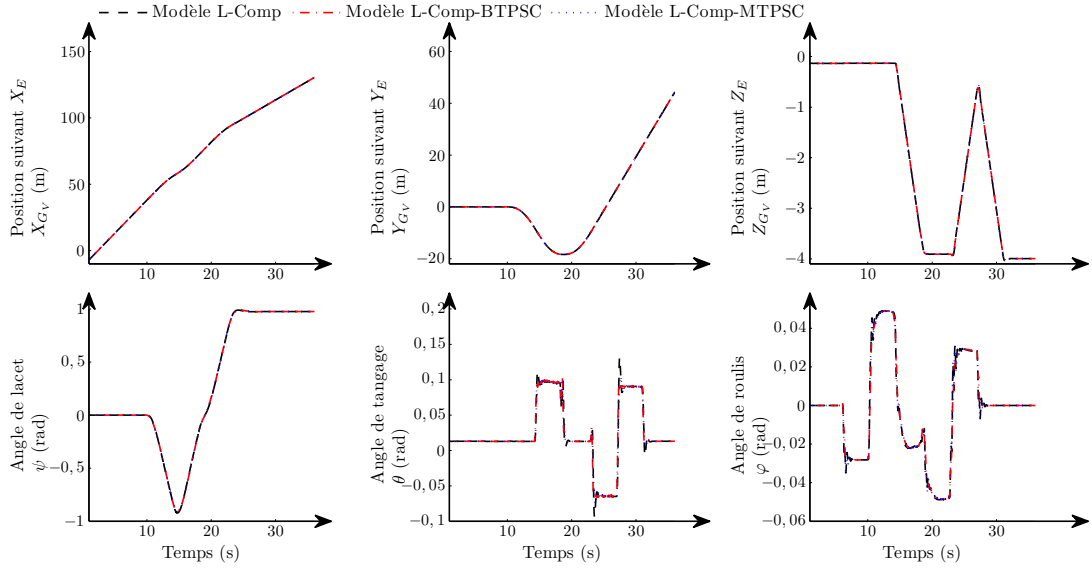


FIGURE 4.23 – Comparaison des sorties pour un profil de route aléatoire (modèle linéaire)

temps réel environ 1000 pas de calcul (sur 8000). En revanche, le modèle L-Comp-BTPSC ne perd que 2 pas de calcul (aux instants 0, 98 s et 6, 96 s) et le modèle L-Comp-MTPSC ne perd que 6 pas de calcul (2 pas perdus entre 0, 34 s et 0, 36 s et 4 pas entre 21, 92 s et 22, 1 s). Les instabilités dues aux pertes de pas de calcul ont été éliminées dans les modèles réduits comme le montre l'angle de lacet.

La qualité d'approximation des modèles est donnée par les RMSE entre les sorties du modèle initial et les sorties des modèles réduits. Pour les degrés de liberté de la caisse, les RMSE sont données au TABLEAU 4.17.

RMSE du modèle	XG_V (m)	YG_V (m)	ZG_V (m)	ψ (rad)	θ (rad)	φ (rad)
L-Comp-BTPSC	0,030	0,028	0,011	0,004	0,007	0,002
L-Comp-MTPSC	0,030	0,028	0,010	0,004	0,005	0,001

TABLEAU 4.17 – RMSE entre les sorties du modèle L-Comp et des modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC

La qualité d'approximation du modèle L-Comp-BTPSC semble légèrement meilleure à la qualité d'approximation du modèle L-Comp-MTPSC. Cette différence est particulièrement mise en évidence par l'analyse des différentes dynamiques internes du système. Cette étude se base sur la transformation des modèles linéaires réduits en des MSSO diagonaux. Le modèle initial possède 18 états, donc 9 degrés de liberté. Les modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC possèdent 4 états et donc 2 degrés de liberté. À ces différents degrés de liberté sont associés une masse unitaire ainsi qu'un amortissement et une raideur présentés au TABLEAU 4.18 (page suivante).

Ces couples raideurs et amortissements définissent l'ensemble des dynamiques du second ordre, internes aux modèles. Dans le cadre des modèles linéaires, la réponse du modèle à une entrée quelconque est une somme pondérée de ses différentes dynamiques. La diagonalisation

Modèle L-Comp	raideur ($N.m^{-1}$)	7918	7665	7095	6828	5263	277	202	95	72
	amortissement ($N.m^{-1}.s$)	92	93	83	81	555	6	28	8	6
Modèle L-Comp-BTPSC	raideur ($N.m^{-1}$)	19799	13919							
	amortissement ($N.m^{-1}.s$)	282	236							
Modèle L-Comp-MTPSC	raideur ($N.m^{-1}$)	277	72							
	amortissement ($N.m^{-1}.s$)	6	6							
Numéro de courbe de la Figure 4.24 (page ci-contre)		(0)	(2)	(0)	(4)	(0)	(1)	(3)	(0)	(0)

Tableau 4.18 – Raideurs et amortissements du modèle L-Comp et des modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC

des MSSO permet de séparer ces dynamiques et d'étudier les effets de la méthode de réduction. Ainsi, à titre illustratif, nous présentons l'influence de l'angle au volant δ_H sur l'angle de roulis φ. La Figure 4.24 (page ci-contre) donne les dynamiques internes des 3 modèles en réponse à une impulsion sur l'angle au volant. On constate que la décomposition modale conserve mais modifie les dynamiques transitoires du système alors que la réalisation équilibrée perd toutes les dynamiques transitoires. La Figure 4.25 (page 164) présente la somme des différentes dynamiques qui permettent de reconstruire la sortie.

Pour ce couple entrée-sortie, la décomposition modale semble mieux approximer les dynamiques transitoires du modèle initial alors que la réalisation équilibrée supprime ces dynamiques. Mais d'un point de vue global, le modèle réduit par élimination d'état de la base équilibrée approxime mieux le modèle initial comme le montrent les normes $\mathcal{H}_\infty$ relatives des modèles erreurs données au Tableau 4.19.

méthode de réduction	BTPSC	MTPSC
norme relative de l'erreur	0,6955	0,9769

Tableau 4.19 – Normes $\mathcal{H}_\infty$ relatives des modèles erreurs (modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC)

Cette contradiction s'explique par les propriétés du modèle qui sont considérées par les méthodes de réduction. La troncature de la base modale prend en compte les dynamiques internes du modèle sans tenir compte des entrées-sorties. C'est-à-dire que la méthode de réduction se base sur la préservation des dynamiques internes les plus importantes sans considérer comment ces dernières sont excitées ou observées. En revanche, la troncature de la base équilibrée, considère le système d'un point de vue externe. Ainsi, c'est le comportement global du système qui est préservé et non pas seulement les dynamiques internes. Or, le modèle L-Comp est un modèle qui, pour être totalement excité, possède 15 entrées :

- l'angle au volant et sa dérivée (2 entrées) ;
- les hauteurs des contacts roue-sol et leurs dérivées (8 entrées) ;
- les pentes et devers sous chacune des roues et au centre de gravité du véhicule (5 entrées) ;

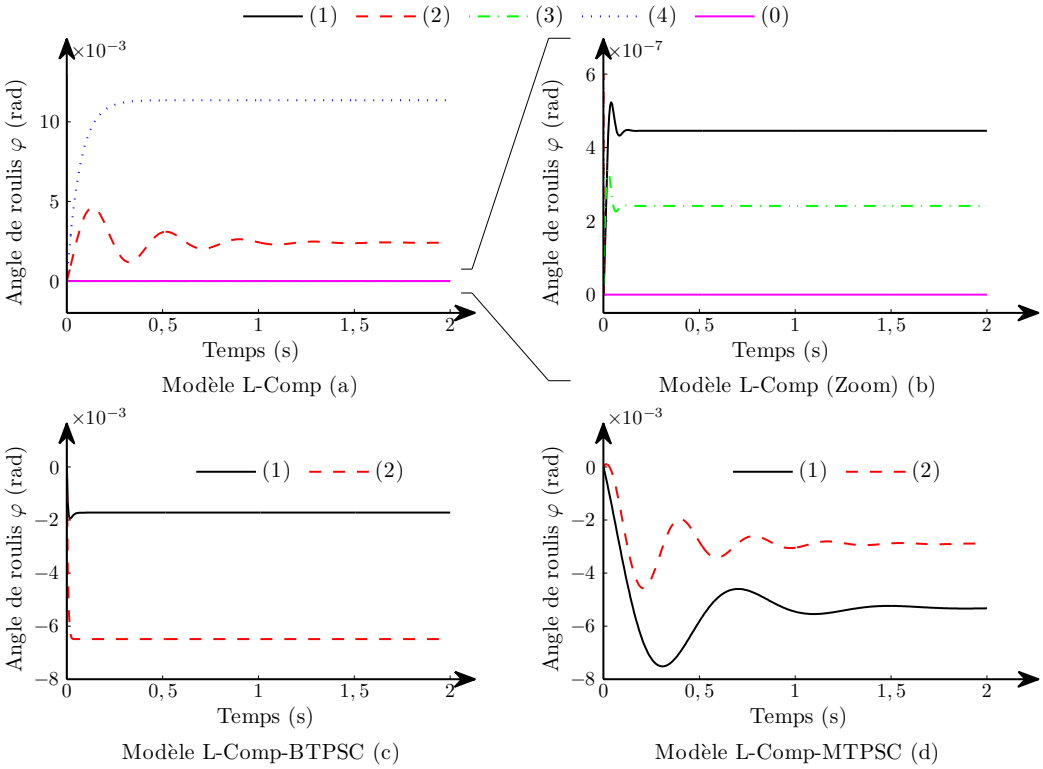


FIGURE 4.24 – Dynamiques impliquées entre l'angle de roulis et l'angle au volant pour une impulsion (modèles L-Comp, L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC)

Ainsi, le nombre de dynamiques internes conservées est très largement inférieur au nombre d'entrées-sorties. Ceci implique que pour conserver au mieux le comportement entrées-sorties la troncature de la base équilibrée modifie fortement le comportement interne du système.

La qualité d'approximation est donc dépendante de la méthode utilisée mais aussi des entrées-sorties considérées. Si les conditions d'essai n'excitent pas certaines entrées du modèle, alors le nombre d'entrée peut être diminué. C'est le cas pour des essais sur route plane.

4.4.4.2 Modèle linéaire réduit pour des essais sur route plane

Pour des profils de route plane, il est possible de faire diminuer fortement le nombre d'entrée-sortie. Pour le test de l'élan par exemple, les entrées excitées sont l'angle au volant et sa dérivée. Les sorties observées sont la vitesse latérale, l'angle de lacet et l'angle de roulis. Avec la méthode des systèmes interconnectés il est aisé de reconstruire un modèle linéaire qui possède les mêmes dynamiques internes avec des matrices de commande et d'observation relatives aux nouvelles conditions d'essai. Comme certaines sorties ne sont plus observées, alors le modèle est structurellement non minimal. L'application de l'ALGORITHME 1.3 (DIAGMSSO page 33) permet de retirer ces dynamiques non observées. Le modèle ainsi créé, nommé modèle L-Simp, est un modèle simplifié du modèle L-Comp. La réduction de ce modèle permet de créer deux nouveaux modèles : le modèle L-Simp-BTPSC et le modèle L-Simp-MTPSC. L'exécution de ces modèles sur le test de l'élan permet d'obtenir les courbes présentées à la FIGURE 4.26 (page suivante).

L'erreur d'approximation que réalise le modèle L-Simp-BTPSC est faible. En revanche, le

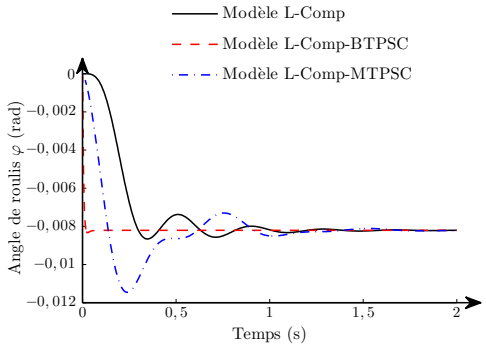


FIGURE 4.25 – Réponse impulsionnelle du modèle L-Comp et des modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC

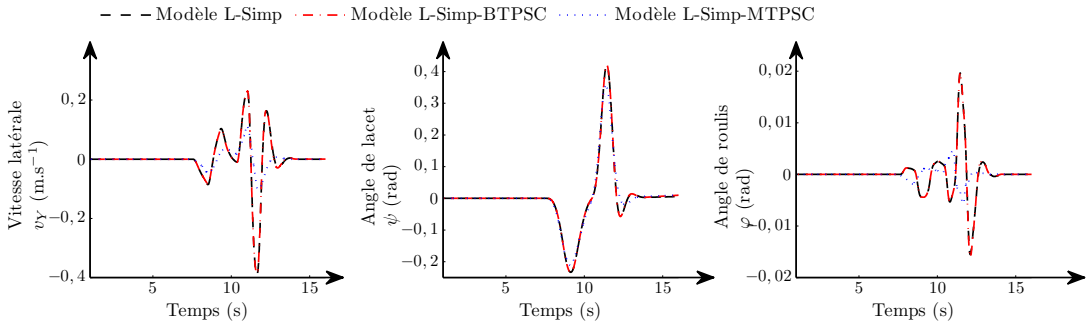


FIGURE 4.26 – Comparaison des sorties pour le test de l'élan (modèle linéaire)

modèle L-Simp-MTPSC approxime correctement la vitesse latérale mais n'est pas en mesure d'approximer l'angle de roulis et l'angle de lacet. Ce résultat est mis en évidence par le calcul des RMSE de ces différentes sorties entre le modèle L-Simp et les modèles réduits L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC, qui sont présentés au TABLEAU 4.20.

RMSE du modèle	v_Y (m.s^{-1})	ψ (rad)	φ (rad)
L-Simp-BTPSC	$2,49.10^{-3}$	$1,11.10^{-3}$	$1,25.10^{-4}$
L-Simp-MTPSC	$6,17.10^{-2}$	$1,62.10^{-2}$	$4,49.10^{-3}$

TABLEAU 4.20 – RMSE entre les sorties du modèle L-Simp et des modèles L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC

Lorsque le nouveau MSSO spécialement défini pour route plane a été construit, celui-ci a été simplifié à 5 coordonnées généralisées. Les nouveaux coefficients de raideur et d'amortissement sont donnés au TABLEAU 4.21 (page ci-contre).

En comparant ces nouveaux paramètres, on constate que les coefficients de raideur et d'amortissement entre les deux modèles réduits (L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC) sont plus proches comparativement à ceux trouvés précédemment (voir TABLEAU 4.18 (page 162)). Ainsi, la différence entre les dynamiques s'explique principalement par les transformations des matrices d'entrée et de sortie. Une étude de la réponse impulsionnelle permet de constater comment les dynamiques internes sont sélectionnées par les méthodes et sont pondérées par les matrices

Modèle L-Simp	raideur ($N.m^{-1}$)	277	159	7095	7918	5297
	amortissement ($N.m^{-1}.s$)	6	23	83	92	555
Modèle L-Simp-BTPSC	raideur ($N.m^{-1}$)	270	64			
	amortissement ($N.m^{-1}.s$)	6	14			
Modèle L-Simp-MTPSC	raideur ($N.m^{-1}$)	277	159			
	amortissement ($N.m^{-1}.s$)	6	23			
Numéro de courbe de la FIGURE 4.27		(1)	(2)	(0)	(3)	(0)

TABLEAU 4.21 – Raideurs et amortissements du modèle L-Simp et des modèles L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC

d'observation et de commande.

Pour les dynamiques entre l'angle au volant et l'angle de roulis, le modèle L-Simp utilise 3 dynamiques du second ordre sur les 5 dynamiques qu'il possède (courbes (1), (2) et (4)) présentées à la FIGURE 4.27. Parmi ces dynamiques, 2 sont sans phase transitoire oscillante (courbes (2) et (4)) et une dynamique possède une phase d'oscillation (courbe (1)). Le modèle L-Simp-MTPSC reprend directement la dynamique à phase transitoire oscillante et ne conserve qu'une seule des deux autres dynamiques. Le modèle L-Simp-BTPSC reprend une dynamique très proche de la dynamique à phase transitoire oscillante (courbe (1)) mais il recrée une nouvelle dynamique correspondant à la somme des deux autres dynamiques tronquées.

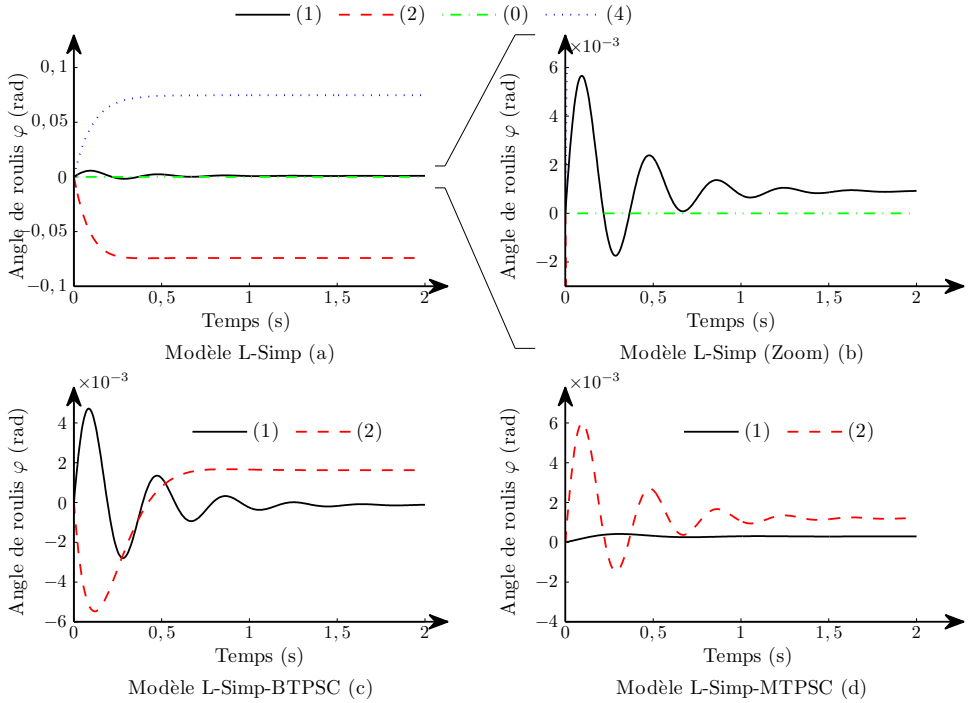


FIGURE 4.27 – Dynamiques impliquées entre l'angle de roulis et l'angle au volant pour une impulsion (modèles L-Simp, L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC)

Au final, la somme de ces courbes définit la réponse en roulis du véhicule à une impulsion au volant. Cette réponse est illustrée à la FIGURE 4.28 (page suivante). La réponse du modèle

L-Simp-BTPSC approxime parfaitement la réponse du système initial alors que le modèle L-Simp-MTPSC ne retient pas les dynamiques adéquates.

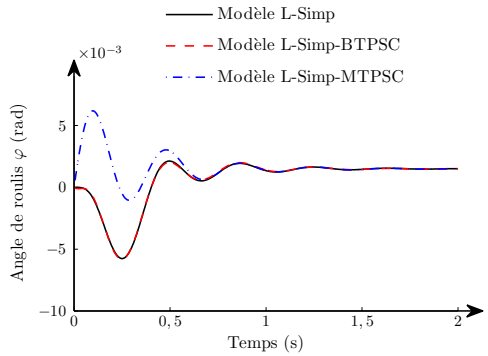


FIGURE 4.28 – Réponse impulsionnelle du modèle L-Simp et des modèles L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC

La bonne approximation du modèle L-Simp-BTPSC est mise en évidence par la norme $\mathcal{H}_\infty$ relative du modèle erreur. Les normes pour les deux modèles réduits sont données au TABLEAU 4.22. En comparant ces normes avec celles données pour le modèle linéaire complet

méthode de réduction	BTPSC	MTPSC
norme relative de l'erreur	0,1215	5,1342

TABLEAU 4.22 – Normes $\mathcal{H}_\infty$ relatives des modèles erreur (modèles L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC)

(voir TABLEAU 4.19 (page 162)) on constate que la qualité d'approximation du modèle L-Simp-MTPSC est fortement dégradée alors que la qualité d'approximation du modèle L-Simp-BTPSC est améliorée.

Le nombre important d'entrées du modèle L-Comp du véhicule rend difficile sa réduction car, en général, on n'élimine pas plus d'état qu'il n'y a d'entrée. Lors de la spécialisation de ce dernier pour l'étude de certaines dynamiques permettant de supprimer des entrées-sorties non utilisées, la réduction devient efficace au sens de la norme relative du modèle erreur. De plus, l'utilisation des modèles du second ordre et le respect des conditions *structurelles* permet de reconstruire un modèle physique du modèle réduit.

4.4.4.3 Reconstruction du modèle physique

Pour montrer qu'il est possible de reconstruire un système physique à partir du modèle réduit, nous considérons le modèle L-Simp-BTPSC. Une représentation du modèle L-Comp est donnée à la FIGURE 4.29 (page ci-contre). Cette figure présente les couples ressort-amortisseur et les masses utilisées. En revanche, les éléments physiques associés à la dynamique latérale de la caisse (v_Y) et à la dynamique en lacet (ψ) ne sont pas représentées.

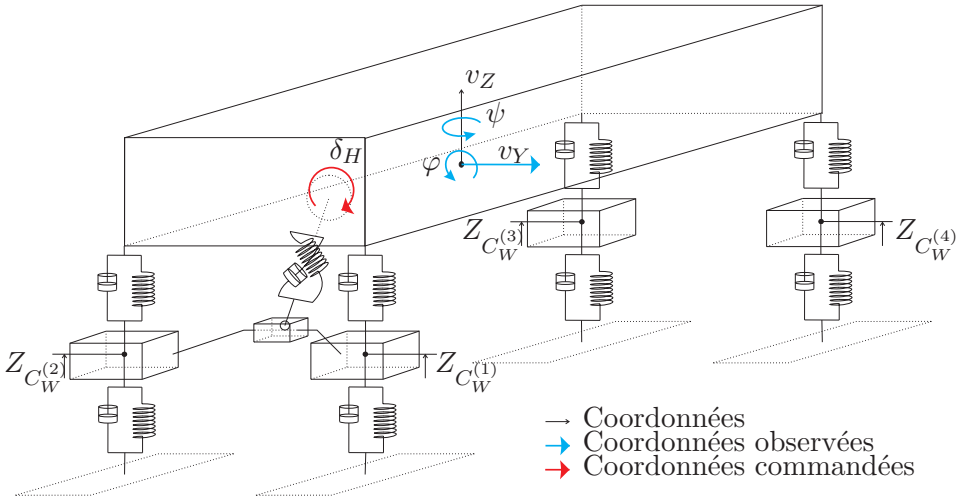


FIGURE 4.29 – Représentation du modèle L-Comp

Les équations du MSSO L-Simp-BTPSC sont données par

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6.11 & 0 \\ 0 & 13.56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 269.83 & 0 \\ 0 & 63.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29.81 & 3.13 \\ 20.81 & 2.19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_H \\ \dot{\delta}_H \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \delta \\ v_Y \\ \dot{\psi} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,6.10^{-2} & 1,7.10^{-1} \\ -1,1.10^{-1} & 1,9.10^{-1} \\ -5,2.10^{-2} & 9,0.10^{-1} \\ -1,1.10^{-3} & 5,0.10^{-3} \\ -9,9.10^{-1} & 3,4.10^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,8.10^{-3} & 1,8.10^{-2} \\ -1,2.10^{-2} & 9,2.10^{-2} \\ -8,9.10^{-3} & 4,8.10^{-2} \\ 3,4.10^{-3} & -5,6.10^{-3} \\ -2,4.10^{-2} & 7,6.10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5,9.10^{-5} & 8,5.10^{-5} \\ -5,0.10^{-4} & -7,2.10^{-4} \\ -2,4.10^{-4} & -3,4.10^{-4} \\ -8,6.10^{-8} & -1,2.10^{-7} \\ -2,3.10^{-4} & -3,2.10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ce MSSO peut être construit physiquement par deux masses indépendantes liées au bâti par un ressort et un amortisseur. Dans ce cas, l'excitation des deux masses doit se faire simultanément en respectant les coefficients de la matrice de commande. Il est possible de simplifier la commande en n'excitant qu'une seule coordonnée, tout en préservant les conditions *structurelles*, par la méthode présentée à la Section 2.4.1. Cette méthode assure que la matrice de commande est une matrice triangulaire supérieure en considérant la décomposition QR du vecteur d'entrée $F = QR$. Alors la matrice de transformation $T = Q^T$ permet d'obtenir le nouveau MSSO suivant

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8,55 & -3,49 \\ -3,49 & 11,12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 202,39 & 96,61 \\ 96,61 & 131,44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36,35 & -3,82 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_H \\ \dot{\delta}_H \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \delta \\ v_Y \\ \dot{\psi} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,4.10^{-1} & 1,1.10^{-1} \\ -1,4.10^{-2} & 2,2.10^{-1} \\ -4,7.10^{-1} & 7,7.10^{-1} \\ -1,9.10^{-3} & 4,7.10^{-3} \\ 6,2.10^{-1} & 8,4.10^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,2.10^{-2} & 1,3.10^{-2} \\ -4,3.10^{-2} & 8,3.10^{-2} \\ -2,0.10^{-2} & 4,4.10^{-2} \\ 3,7.10^{-4} & -6,5.10^{-3} \\ -2,4.10^{-2} & 7,6.10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9,7.10^{-5} & 3,6.10^{-5} \\ 8,2.10^{-4} & -3,0.10^{-4} \\ 3,9.10^{-4} & -1,4.10^{-4} \\ 1,4.10^{-7} & -5,2.10^{-8} \\ 3,7.10^{-4} & -1,4.10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Le fait que la matrice de commande ne soit pas triangulaire est propre à cet exemple et n'est pas garanti par la méthode. De ce nouvel MSSO, il est possible de construire une structure physique reproduisant le comportement du modèle linéaire réduit. Ce nouveau système physique est détaillé à la FIGURE 4.30 (page suivante).

Les matrices de masse, raideur et amortissement d'un MSSO avec 2 masses en série liées par des ressorts et des amortisseurs correspondants à la FIGURE 4.30 (page suivante) sont données par

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \\ k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

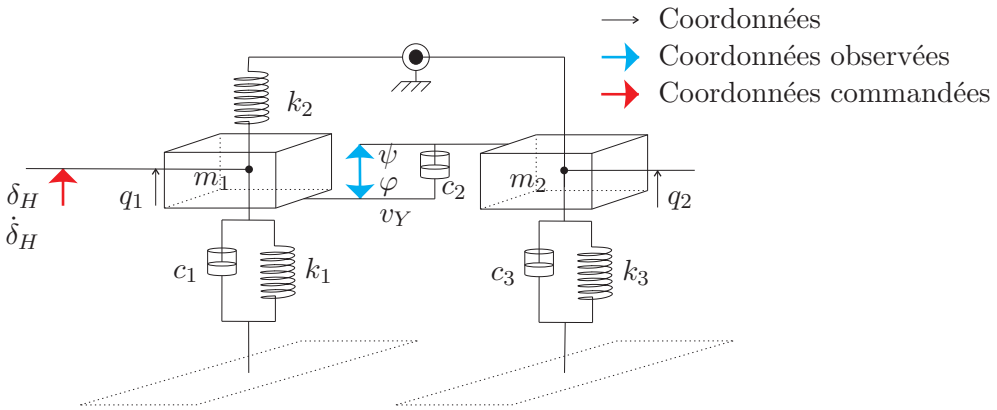


FIGURE 4.30 – Représentation physique à partir du MSSO L-Simp-BTPSC

Par identification, on obtient les valeurs de raideurs et d'amortissements, résumées au TABLEAU 4.23

m_1 kg	m_2 kg	c_1 N.m^{-1}.s	c_2 N.m^{-1}.s	c_3 N.m^{-1}.s	k_1 N.m^{-1}	k_2 N.m^{-1}	k_3 N.m^{-1}
1	1	5.06	3,49	7.63	105.7800	96,61	131,44

TABLEAU 4.23 – Raideurs et amortissements du modèle L-Simp-BTPSC

Le modèle ainsi reconstruit est un modèle à 2 coordonnées généralisées. Ce modèle permet de simuler le modèle bicyclette, qui possède aussi 2 coordonnées généralisées, mais il ajoute une estimation de l'angle de braquage, de l'angle de roulis et de sa dérivée.

L'utilisation des méthodes de réduction de modèle sur le modèle linéaire de la dynamique du véhicule, a permis de simuler ce dernier en temps réel. En revanche, par rapport au modèle complet (NL-Comp), plusieurs dynamiques ont été perdues, par la linéarisation du modèle d'une part et par la méthode de réduction d'autre part. Pour conserver une bonne représentation de la dynamique du véhicule, l'étape suivante consiste à utiliser le modèle semi-linéaire qui est plus proche du modèle complet en termes de dynamiques modélisées.

4.4.5 Réduction du modèle semi-linéaire

Le modèle semi-linéaire (SL-Comp) est un compromis entre le modèle complet (NL-Comp) qui, à cause de ses non-linéarités, ne peut être réduit avec les méthodes proposées et le modèle linéaire (L-Comp). La partie linéaire du modèle SL-Comp est un système interconnecté composé des 6 sous-systèmes suivants :

- la direction ;
- la dynamique verticale de la masse suspendue
- quatre dynamiques verticales des masses non-suspendues ;

pour un total de 16 états simulant 8 degrés de liberté. La partie non-linéaire du modèle SL-Comp est un système composé des 6 sous-systèmes suivants :

- la dynamique transversale de la masse suspendue qui possède 3 degrés de liberté ;
- quatre dynamiques transversales des masses non-suspendues qui possède 1 degré de liberté ;

pour un total de 7 degrés de liberté.

Selon le critère développé à la Section 2.2.2, le modèle se doit d'être réduit est à une dimension de $r = 4$ états. L'utilisation de l'ALGORITHME 2.1 (MTPSC page 70) et de l'ALGORITHME 2.4 (BTPSC page 76) permet de réduire la partie linéaire du modèle SL-Comp. La connexion de la partie linéaire à la partie non-linéaire de ce modèle rend primordiale la qualité de la réduction. En effet, les erreurs créées par les approximations de la partie linéaire sont transmises à la partie non-linéaire. Ces erreurs sont modifiées par la partie non-linéaire qui généralement les accentue. Au final, certains de ces signaux sont rebouclés à la partie linéaire et les erreurs ainsi crées sont propagées aux approximations déjà présentes. Ainsi, le modèle SL-Comp est très sensible à l'approximation effectuée par les méthodes de réduction de modèle.

4.4.5.1 Modèle semi-linéaire réduit

Les sorties du modèle SL-Comp et des modèles SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC sont simulées sur la route générée aléatoirement. Les positions calculées de la caisse sont comparées à la FIGURE 4.31. Par rapport au modèle L-Comp présenté à la section précédente, les erreurs

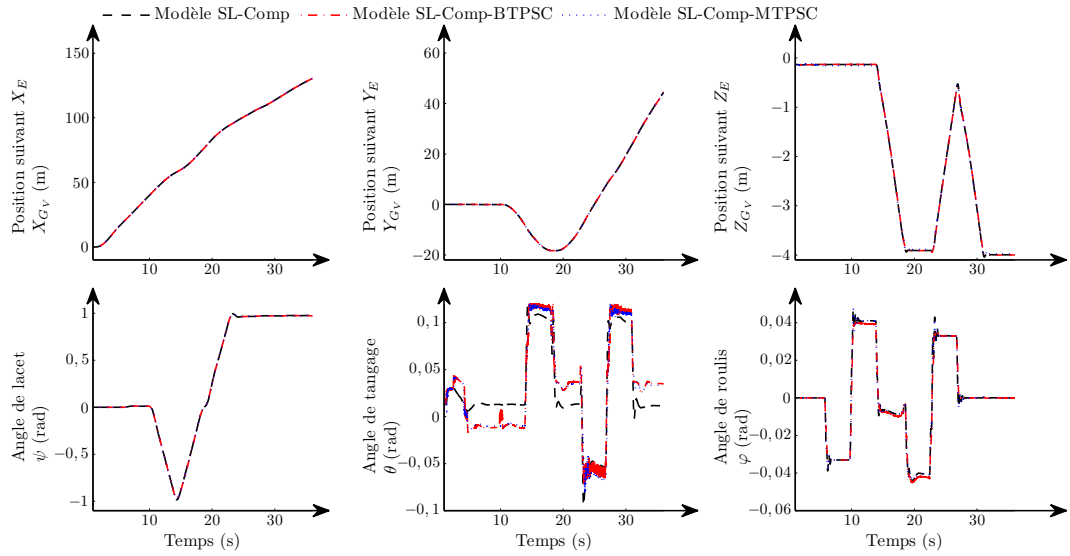


FIGURE 4.31 – Comparaison des sorties pour un profil de route aléatoire (modèle semi-linéaire)

d'approximation sont plus importantes. En effet, certaines sorties calculées des modèles réduits approximent de manière moins satisfaisante le modèle SL-Comp. Par ailleurs, les modèles SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC modifient fortement le tangage θ.

Lors de la simulation du modèle SL-Comp en temps réel, la réduction du modèle permet de supprimer presque la totalité des pas de calcul perdus. Le modèle SL-Comp perd, lors de sa simulation en temps réel, environ 1800 pas de calcul (sur 8000). Pour le modèle SL-Comp-BTPSC, après la simulation, 15 pas ne se sont pas effectués correctement (4 entre $9,01$ et $9,06$ s et 11 entre $29,06$ s et $30,08$ s). Le modèle SL-Comp-MTPSC a perdu seulement 2 pas (le premier à $16,65$ s et le second à $33,56$ s).

Comme pour le modèle linéaire, il est possible de déterminer les raideurs et amortissements définissant l'ensemble des dynamiques internes du modèle SL-Comp et des modèles SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC (voir TABLEAU 4.24 (page suivante)). Comme le modèle de direction et l'ensemble des dynamiques verticales sont définis par les mêmes équations entre le modèle

L-Comp et le modèle SL-Comp, alors les valeurs de ces paramètres sont égaux. Ainsi, les différences entre les modèles L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC d'une part et SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC d'autre part, se trouvent principalement dans les matrices de commande et d'observation.

SL-Comp	raideurs ($N.m^{-1}$)	7918	7665	7095	6828	5280	277	95	72
	amortissements ($N.m^{-1}.s$)	92	93	83	81	555	6	8	6
SL-Comp-BTPSC	raideurs ($N.m^{-1}$)	17857	13679						
	amortissements ($N.m^{-1}.s$)	268	234						
SL-Comp-MTPSC	raideurs ($N.m^{-1}$)	277	72						
	amortissements ($N.m^{-1}.s$)	6	6						
Numéro de courbe de la FIGURE 4.32 (page ci-contre)		(1)	(2)	(3)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)

TABLEAU 4.24 – Raideurs et amortissements du modèle SL-Comp et des modèles SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC

Les réponses impulsionnelles des différentes dynamiques mises en jeu par les modèles permettent de comparer les résultats obtenus à partir des deux méthodes de réduction. Entre l'angle au volant et l'angle de roulis, les dynamiques de la partie non-linéaire interviennent. Pour évaluer les modifications apportées par les méthodes de réduction et donc visualiser une dynamique linéaire, le modèle est excité par une variation de hauteur sous la roue avant gauche ($Z_{O_W}^{(1)}$). Les réponses indicielles sur cette entrée sont données à la FIGURE 4.32 (page ci-contre). Le modèle SL-Comp utilise principalement une dynamique du second ordre pour calculer cette sortie (courbe (1)). Le modèle SL-Comp-BTPSC utilise ses deux dynamiques pour exprimer cette sortie mais aucune d'entre elles ne possèdent de phase transitoire (courbes (1) et (2)). Le modèle SL-Comp-MTPSC utilise une unique dynamique correspondant à celle utilisée par le modèle initial. Au final, la somme des dynamiques sont présentées à la FIGURE 4.33 (page ci-contre), où l'on constate que le modèle SL-Comp-MTPSC a conservé la dynamique nécessaire au calcul de l'angle de roulis.

Les mêmes constats que ceux réalisés pour le modèle linéaire peuvent être effectués. À savoir que l'élimination d'états de la base équilibrée supprime les dynamiques transitoires alors que la décomposition modale les préserve. En revanche, les normes relatives des modèles erreurs sont égaux au cas linéaire et ainsi, d'un point de vue global, l'élimination d'états de la base équilibrée approxime mieux le modèle initial.

Comme pour le modèle L-Comp, le nombre important d'entrée du modèle SL-Comp perturbe la réduction par BTPSC. En effet, le modèle SL-Comp nécessite 25 entrées pour être connecté à la partie non-linéaire. Or, le modèle possède 32 états et en considérant le nombre d'entrées, seuls 7 états peuvent être éliminés afin de conserver une entrée par état. Ainsi, il faut spécialiser le modèle en fonction de l'essai que l'on souhaite effectuer pour éliminer certaines entrées et rendre plus efficace la méthode de réduction.

4.4.5.2 Modèle semi-linéaire réduit pour des essais sur route plane

Pour le modèle SL-Comp, sur les 25 entrées de ce modèle, l'utilisation d'une route sans pente ni devers permet d'éliminer 13 entrées :

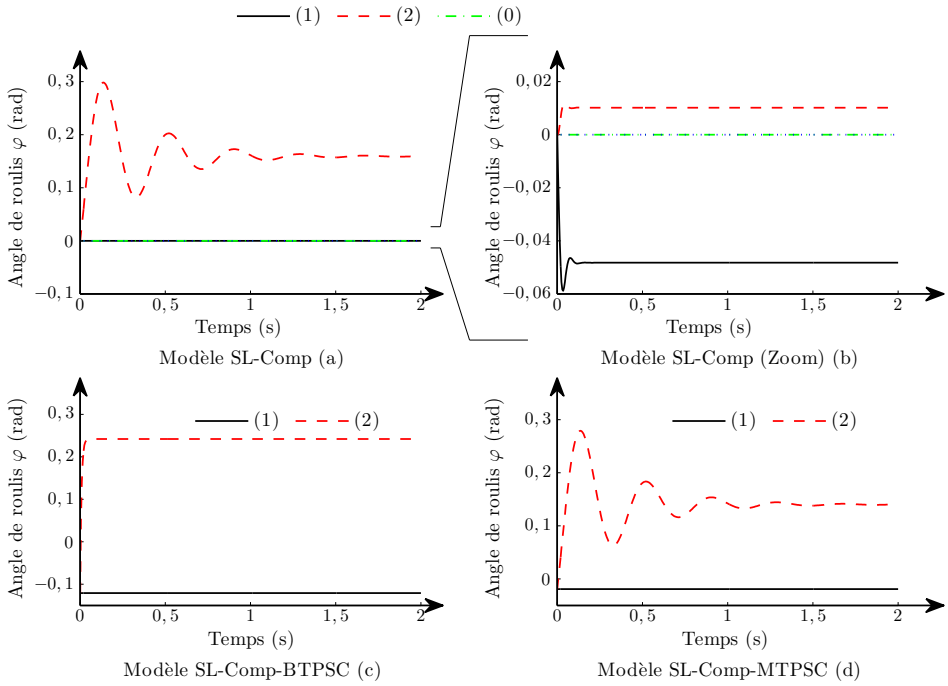


FIGURE 4.32 – Dynamiques impliquées entre l'angle de roulis et la hauteur d'une roue en réponse incidielle (modèles SL-Comp, SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC)

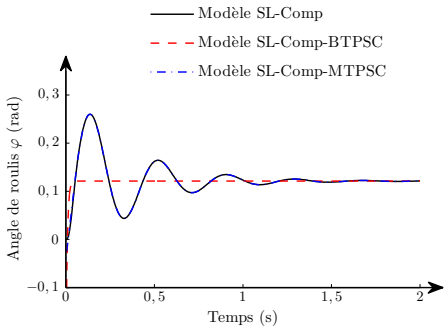


FIGURE 4.33 – Réponse indicielle du modèle SL-Comp et des modèles SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC

– pente et devers sous chacune des roues et au centre de gravité du véhicule (5 entrées) ;
– position et vitesse des contacts roue-sol (8 entrées).

L'élimination des ces entrées permet de créer un nouveau modèle semi-linéaire, le modèle SL-Simp. La réduction de ce modèle avec les méthodes BTPSC et MTPSC permet de simuler le comportement du véhicule lors de l'exécution du test de l'élan. Les courbes obtenues sont présentées à la FIGURE 4.34 (page suivante).

À nouveau, le modèle SL-Simp-BTPSC approxime correctement le modèle SL-Simp. Pour ce modèle, la méthode MTPSC approxime de manière plus satisfaisante le modèle SL-Simp comparativement au modèle linéaire réduit par la même méthode. Les meilleures approximations

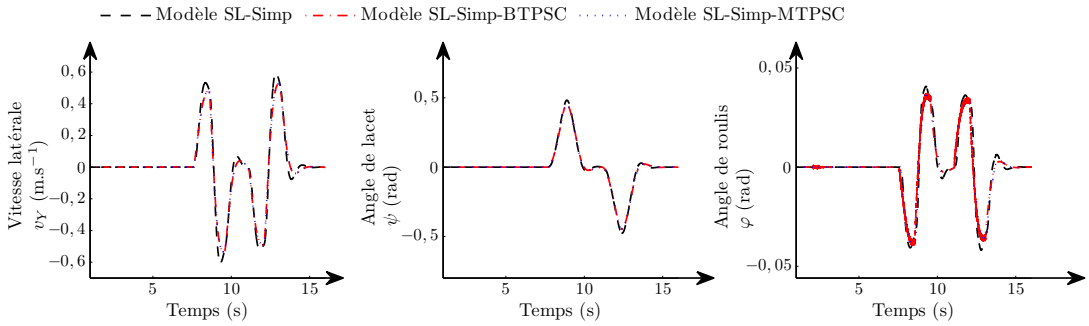


FIGURE 4.34 – Comparaison des sorties pour le test de l'élan (modèle semi-linéaire)

des modèles SL-Simp-MTPSC et SL-Simp-BTPSC par rapport au modèle linéaire (L-Simp-MTPSC et L-Simp-BTPSC) s'explique par l'élimination dans la partie linéaire des dynamiques transversales. Ainsi, pour ces 2 modèles, la qualité d'approximation est équivalente comme le montre les RMSE donnés au TABLEAU 4.25.

RMSE du modèle	v_Y (m.s^{-1})	ψ (rad)	φ (rad)
SL-Simp-BTPSC	$3,61.10^{-2}$	$9,99.10^{-3}$	$3,69.10^{-3}$
SL-Simp-MTPSC	$3,61.10^{-2}$	$9,98.10^{-3}$	$3,07.10^{-3}$

TABLEAU 4.25 – RMSE entre les sorties du modèle SL-Simp et des modèles SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC

Le TABLEAU 4.26 présente les couples raideur-amortissement utilisés par les modèles. À nouveau, les valeurs de raideur et d'amortissement retenues par les 2 méthodes sont proches.

Modèle SL-Simp	raideur	7918	7665	7095	6828	5280	277	95	72
	amortissement	92	93	83	81	555	6	8	6
Modèle SL-Simp-BTPSC	raideur	175	74						
	amortissement	12	6						
Modèle SL-Simp-MTPSC	raideur	277	72						
	amortissement	6	6						
Numéro de courbe de la FIGURE 4.35 (page ci-contre)		(1)	(2)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)

TABLEAU 4.26 – Raideurs et amortissements du modèle SL-Simp et des modèles SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC

Lors de la création, par l'approche des systèmes interconnectés, de la partie linéaire à laquelle des entrées ont été supprimées, une dynamique a été éliminée automatiquement par l'algorithme de transformation d'une réalisation d'état en un MSSO diagonal (voir l'ALGORITHME 1.3 (DIAGMSSO page 33)).

Dans le cadre du modèle SL-Simp, il n'est plus possible de considérer une excitation en hauteur sous une des roues car cette entrée a été supprimée. L'excitation prise en compte est donc un effort transversal sur le centre de la roue avant gauche ($F^{(1)}_{y,B}$) et la sortie observée est l'angle de roulis (φ). Afin d'illustrer les dynamiques conservées par les méthodes de réduction

de modèle, la FIGURE 4.35 présente la réponse impulsionnelle. Le modèle SL-Simp-BTPSC utilise deux dynamiques pour simuler la réponse en roulis du véhicule. En revanche, le modèle SL-Simp-MTPSC n'en utilise qu'une seule qui est exactement celle mise en jeux par le modèle initial. Ainsi, la méthode de réduction MTPSC semble être en mesure d'approximer parfaitement cette dynamique comme le montre la réponse en roulis du véhicule à une impulsion transversale sur une roue (voir FIGURE 4.36 (page suivante)). Nous pouvons également vérifier que la réponse du système réduit par BTPSC n'approxime pas parfaitement la réponse du système initial.

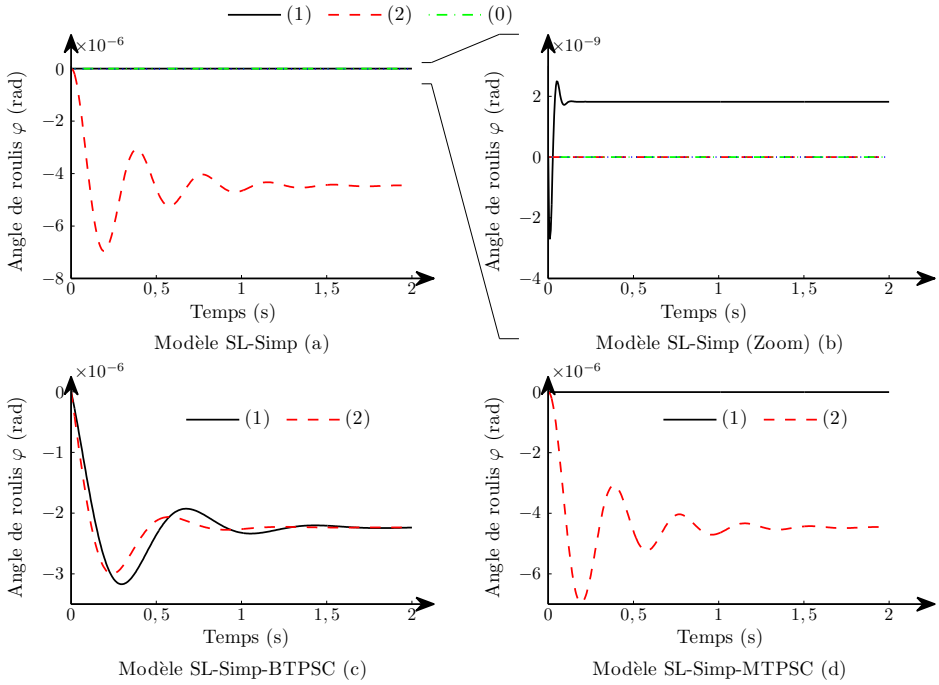


FIGURE 4.35 – Dynamiques impliquées entre l'angle de roulis et l'excitation transversale d'une roue (modèles SL-Simp, SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC)

La bonne qualité d'approximation des méthodes permet d'interconnecter les modèles réduits à la partie non-linéaire tout en préservant une bonne approximation du modèle complet. Comme les méthodes de réduction de modèle utilisées préservent les conditions *structurelles*, il est possible de reconstruire un modèle physique des modèles réduits.

4.4.5.3 Reconstruction du modèle physique

Pour la reconstruction du modèle physique, nous considérons le modèle SL-Simp-BTPSC. Une représentation du modèle véhicule SL-Comp est donnée à la FIGURE 4.37 (page 175). Sur cette figure est présentée la partie non-linéaire du modèle qui génère le mouvement général du véhicule sur la route. Cette partie peut être assimilée à un châssis imaginaire représenté en pointillé. La partie linéaire, représentée en traits continus, calcule les mouvements de la caisse et des roues par rapport au châssis. La figure donne aussi les 15 degrés de liberté du modèle véhicule, dont 8 sont modélisés dans la partie linéaire.

Lors de la réduction du modèle semi-linéaire par la méthode BTPSC, nous créons un nouveau MSSO avec 2 degrés de libertés (SL-Simp-BTPSC). Ce MSSO possède toutes les entrées et sorties

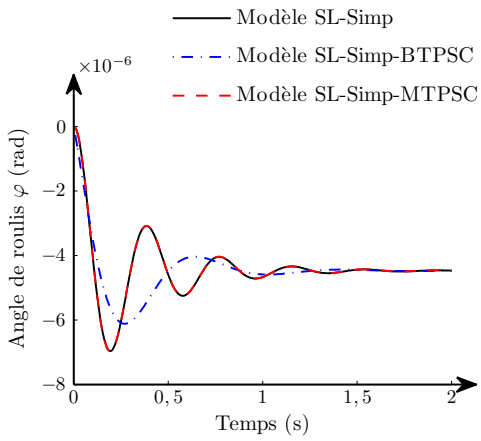


FIGURE 4.36 – Réponse impulsionnelle du modèle SL-Simp et des modèles SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC

nécessaires à son interconnexion avec la partie non-linéaire, soient 11 entrées et 33 sorties. Afin de simplifier la présentation des résultats, les équations sont données en ne considérant que l'entrée et la sortie considérées dans la réponse impulsionnelle présentée au paragraphe précédent. Les équations du MSSO sont alors

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6,0 & 0 \\ 0 & 12,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 74,4 & 0 \\ 0 & 174,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23,0 \\ 54,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{y,B}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,2.10^{-6} \\ -7,2.10^{-6} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5,8.10^{-7} \\ -5,0.10^{-7} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9,7.10^{-8} \\ -4,1.10^{-8} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ce MSSO respecte les conditions *structurelles* et peut donc être représenté par 2 masses indépendantes liées au bâti par un ressort et un amortisseur. Afin de ne pas exciter simultanément les deux masses, la méthode présentée à la Section 2.4.1 permet d'obtenir une excitation unitaire sur la première masse. En considérant la décomposition QR du vecteur d'entrée $F = QR$, alors la matrice de transformation $T = \frac{1}{r}Q^T$, où r est le coefficient de la première ligne de la matrice R, permet d'obtenir le nouveau MSSO

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11,2 & -2,2 \\ -2,2 & 6,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 159,5 & -36,2 \\ -36,2 & 89,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{y,B}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,6.10^{-4} \\ -2,2.10^{-4} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4,1.10^{-5} \\ -2,0.10^{-5} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4,5.10^{-6} \\ -4,3.10^{-6} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ce modèle décrit la réponse en roulis à une excitation latérale. Il est possible de représenter physiquement ce modèle couplé à la partie non-linéaire (voir la FIGURE 4.38 (page 176)).

Les équations d'un MSSO correspondant à cette figure utilisent les matrices de masse, raideur et amortissement suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}.$$

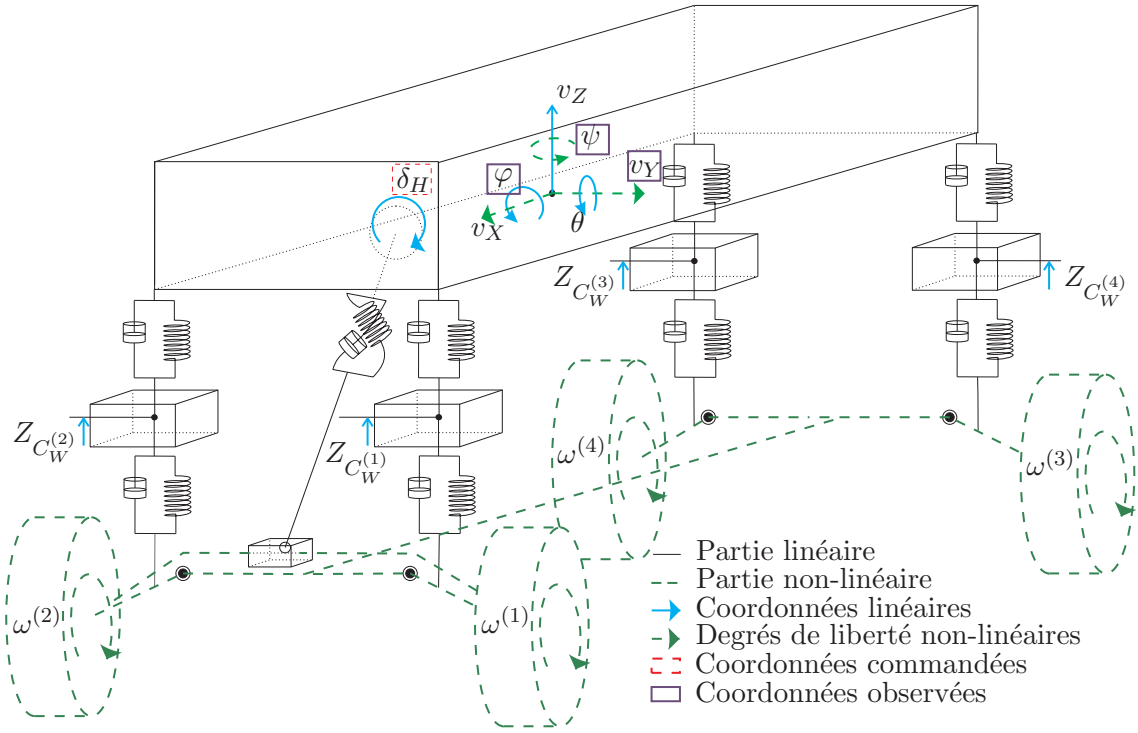


FIGURE 4.37 – Représentation du modèle SL-Comp

m_1 (kg)	m_2 (kg)	c_1 (N.m^{-1}.s)	c_2 (N.m^{-1}.s)	c_3 (N.m^{-1}.s)	k_1 (N.m^{-1})	k_2 (N.m^{-1})	k_3 (N.m^{-1})
1	1	8,99	2,25	4,67	123,25	36,22	53,63

TABLEAU 4.27 – Raideurs et amortissements du modèle SL-Simp-BTPSC

Par identification, on obtient les valeurs de raideurs et d'amortissements données au TABLEAU 4.27.

Par rapport au modèle linéaire, le modèle semi-linéaire permet de prendre en compte les accélérations et freinages et donc le tangage du véhicule. Sa réduction permet de modéliser la dynamique du véhicule par l'interconnexion d'un modèle linéaire à 2 degrés de liberté et d'un modèle non-linéaire à 7 degrés de liberté.

La comparaison des modèles réduits avec leurs modèles initiaux a permis de montrer la qualité d'approximation des méthodes de réduction. La méthode de reconstruction d'un MSSO a rendu possible l'étude des dynamiques qui sont sélectionnées par les méthodes de réduction et de les lier à des paramètres physiques. La prochaine étape consiste à comparer ces modèles réduits avec le modèle complet et des jeux de données expérimentaux.

4.4.6 Validation des modèles réduits

Lors de la réduction des modèles linéaires et semi-linéaire, 8 modèles réduits ont été créés :
- modèles linéaire réduit : L-Comp-BTPSC et L-Comp-MTPSC ;
- modèles linéaire réduit pour une route plane : L-Simp-BTPSC et L-Simp-MTPSC ;
- modèles semi-linéaire réduit : SL-Comp-BTPSC et SL-Comp-MTPSC ;

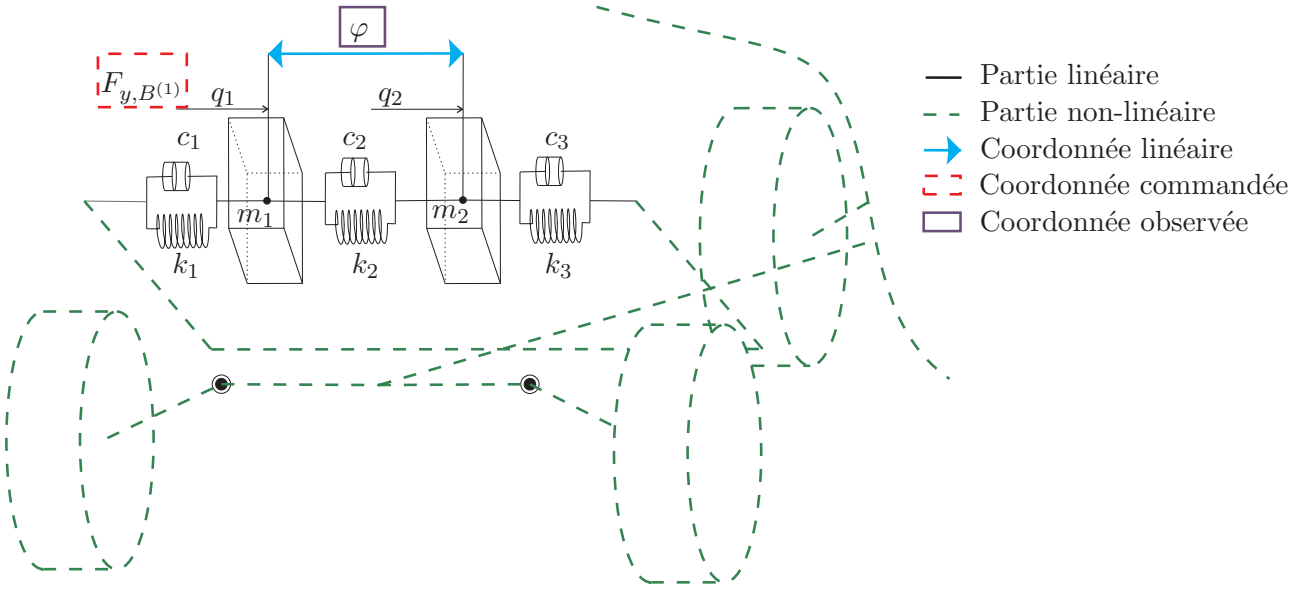


FIGURE 4.38 – Représentation physique à partir du MSSO SL-Simp-BTPSC

– modèles semi-linéaire réduit pour une route plane : SL-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC.

Ces modèles ont été comparés avec leur modèle complet respectif. Pour valider le comportement des modèles réduits, il est nécessaire de les comparer avec des données réelles. Le jeu de données de validation qui nous a permis de valider le modèle complet (voir Section 4.3.6), a été créé sur route plane. Ainsi, il nous permet de valider les 4 modèles conçus pour route plane. En revanche, les deux modèles réduits sans suppression d'entrée-sortie ne peuvent être validés par cet essai car les dynamiques verticales ne sont pas excitées. Pour ces 4 modèles, la validation est donc effectuée en comparant les résultats obtenus avec ceux issus du modèle NL-Comp sur la route générée aléatoirement (voir Section 4.4.2).

4.4.6.1 Validation des modèles réduits avec l'ensemble des excitations

La validation des modèles complet réduits s'effectue en comparant les sorties du modèle SL-Comp avec les sorties des modèles L-Comp-BTPSC, SL-Comp-BTPSC, L-Comp-MTPSC et SL-Comp-MTPSC. Les modèles sont exécutés sur la trajectoire définie par le profil de route généré aléatoirement. Les sorties comparées sont l'ensemble des mouvements du centre de gravité de la caisse. Les courbes des sorties estimées par les modèles L-Comp-BTPSC et SL-Comp-BTPSC, sont données à la FIGURE 4.39 (page ci-contre).

Pour cette méthode de réduction, la trajectoire suivant les 3 dimensions est très proche de la trajectoire du véhicule simulé par le modèle NL-Comp. Pour l'angle de lacet et de roulis, le modèle SL-Comp-BTPSC approxime correctement le modèle initial. En revanche, aucun des deux modèles réduits n'est capable d'estimer correctement l'angle de tangage.

La seconde méthode validée est la méthode MTPSC. Les sorties estimées par les modèles L-Comp-MTPSC et SL-Comp-MTPSC sont illustrées à la FIGURE 4.40 (page 178). Les mêmes conclusions que pour la méthode BTPSC peuvent être faites. À savoir que les modèles réduits sont fidèles au modèle NL-Comp pour l'estimation de la trajectoire et de l'angle de lacet. De plus, le modèle SL-Comp-MTPSC approxime correctement l'angle de roulis mais ni le modèle L-Comp-MTPSC, ni le modèle SL-Comp-MTPSC, sont en mesure d'estimer l'angle de tangage.

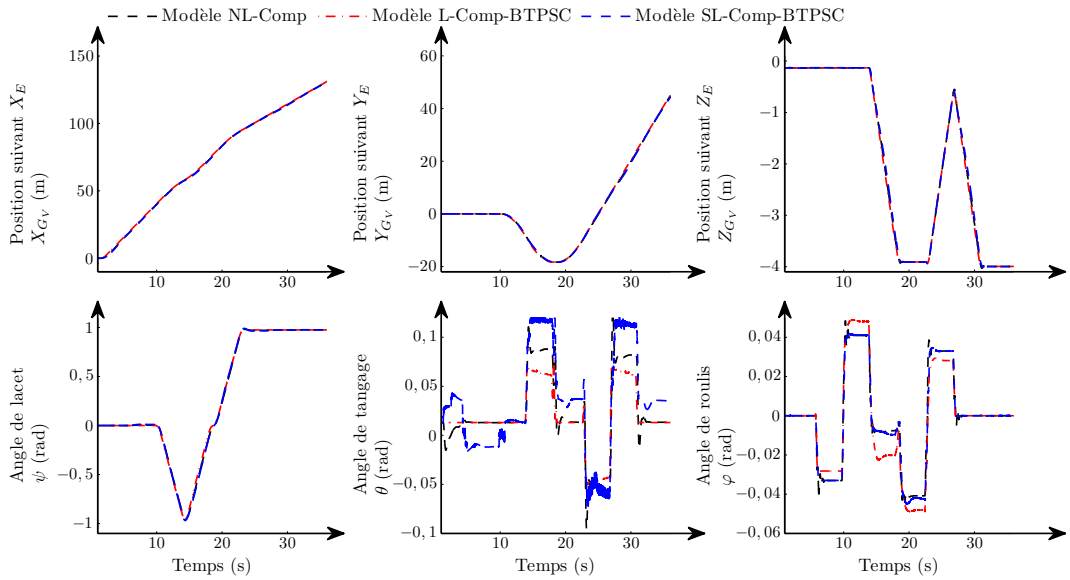


FIGURE 4.39 – Comparaison des sorties entre le modèles L-Comp-BTPSC et SL-Comp-BTPSC

Les RMSE des sorties considérées pour l'ensemble des modèles réduits et le modèle NL-Comp sont donnés au TABLEAU 4.28. Le RMSE de la trajectoire du centre de gravité suivant X_{G_V} est particulièrement important pour le modèle linéaire car ce dernier n'utilise pas de commande en vitesse.

modèles	**RMSE** X_{G_V} (m)	**RMSE** Y_{G_V} (m)	**RMSE** Z_{G_V} (m)	**RMSE** ψ (rad)	**RMSE** θ (rad)	**RMSE** φ (rad)
L-Comp-BTPSC	$1,227$	$0,351$	$0,037$	$0,016$	$0,014$	$0,006$
SL-Comp-BTPSC	$0,522$	$0,713$	$0,039$	$0,009$	$0,024$	$0,002$
L-Comp-MTPSC	$1,227$	$0,351$	$0,045$	$0,016$	$0,013$	$0,006$
SL-Comp-MTPSC	$0,477$	$0,649$	$0,038$	$0,010$	$0,025$	$0,002$

TABLEAU 4.28 – RMSE des 6 sorties des modèles complets réduits comparées avec un jeu de données expérimentales

La comparaison des RMSE pour un même modèle montre que la qualité d'approximation des méthodes semble similaire. Indépendamment de la méthode de réduction, la comparaison des RMSE entre les deux modèles montre que la meilleure qualité d'approximation dépend de la sortie considérée.

Au final, pour les modèles réduits conservant l'ensemble des entrées sorties, il est préférable d'utiliser le modèle semi-linéaire car ce dernier permet d'approximer de manière satisfaisante l'angle de roulis, contrairement au modèle linaire. Le choix de la méthode de réduction est, en revanche, plus difficile, car sur les 6 sorties présentées, les deux méthodes semblent équivalentes. Selon le critère de la norme relative du modèle erreur, il est tout de même préférable d'utiliser le modèle SL-Comp-BTPSC (voir TABLEAU 4.19 (page 162)).

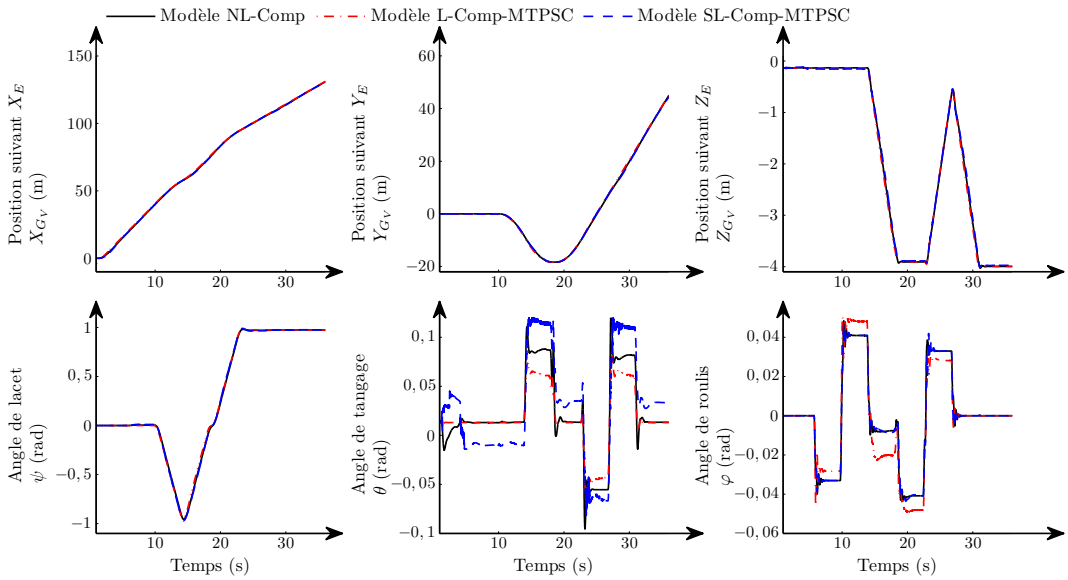


FIGURE 4.40 – Comparaison des sorties entre le modèle L-Comp et les modèles réduits L-Comp-MTPSC et SL-Comp-MTPSC

4.4.6.2 Validation des modèles réduits pour une route plane

La validation des modèles réduits, pour une route plane, est effectuée en comparant les sorties calculées des modèles avec le même jeu de données expérimentales utilisé pour valider le modèle NL-Comp (*cf.* Section 4.3.6). L'essai est effectué à vitesse constante sur route plane. Ainsi le tangage, la vitesse verticale et la vitesse longitudinale sont constants et ne sont donc pas présentés. Les sorties mesurées et calculées présentées sont donc :

- la vitesse latérale v_Y ;
- l'angle de lacet ψ ;
- l'angle de roulis φ.

La FIGURE 4.41 (page ci-contre) présente les sorties réelles et les sorties estimées par le modèle NL-Comp ainsi que les sorties estimées par les modèles L-Simp-BTPSC et SL-Simp-BTPSC.

La comparaison des courbes de la vitesse latérale montre une approximation correcte de cette vitesse par les modèles réduits avec une augmentation de l'erreur proportionnelle à l'amplitude de l'excitation. C'est-à-dire que plus l'excitation s'approche des non-linéarités du véhicule, moins l'estimation est bonne. L'angle de lacet est particulièrement bien estimé même si un biais semble apparaitre. Pour l'angle de roulis, le modèle L-Simp-BTPSC approxime mieux cet angle comparativement au modèle SL-Simp-BTPSC. Ce constat est particulièrement visible après les 30 premières secondes de simulation.

Pour les modèles L-Simp-MTPSC et SL-Simp-BTPSC, la FIGURE 4.42 (page 180) donne les sorties estimées et les valeurs expérimentales pour l'essai sur route plane.

Pour la vitesse latérale du centre de gravité, le modèle L-Simp-MTPSC surestime fortement cette sortie, particulièrement lorsque les excitations sont importantes. Comme pour la méthode BTPSC, les modèles réduits par MTPSC font une bonne approximation de l'angle de lacet avec à nouveau l'apparition d'un biais. Ce biais peut s'expliquer par un décalage de l'origine de la mesure de l'angle au volant. L'angle de roulis est estimé de manière équivalente par les modèles

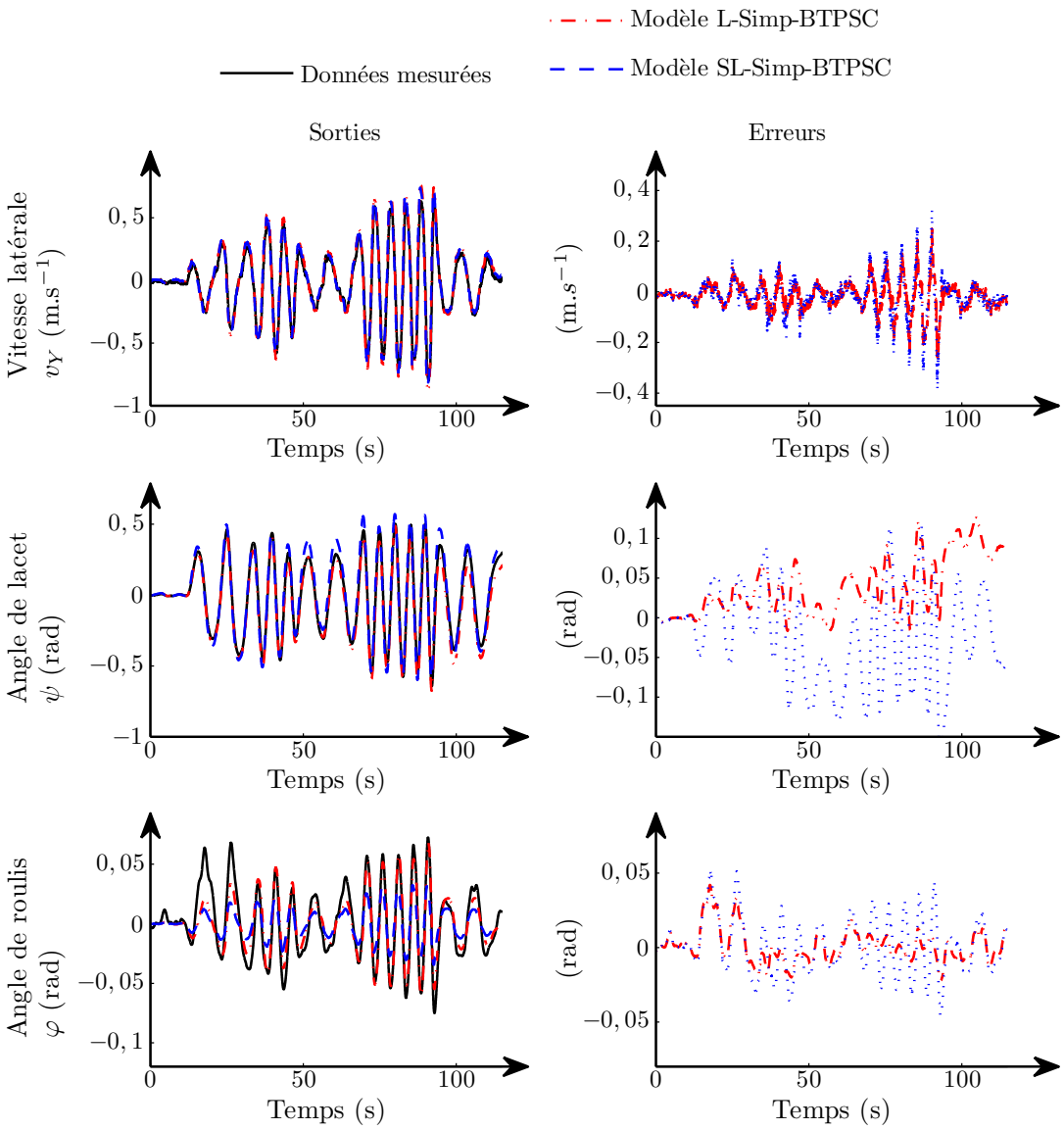


FIGURE 4.41 – Comparaison des données mesurées avec les sorties estimées par les modèles L-Simp-BTPSC et SL-Simp-BTPSC

L-Simp-MTPSC et SL-Simp-MTPSC.

L'ensemble des constats effectués sur les courbes sont illustrées par les RMSE calculés pour chacune des sorties données au TABLEAU 4.29 (page 181).

En se basant sur les RMSE des ces trois sorties, il est difficile de privilégier une méthode ou un modèle par rapport aux autres. En effet, pour la méthode BTPSC le modèle linéaire semble plus adapté, alors que pour la méthode MTPSC le modèle semi-linéaire semble meilleur. Entre ces deux modèles, L-Simp-BTPSC et SL-Simp-MTPSC, c'est à nouveau la norme relative du modèle erreur qui nous permet de privilégier le modèle L-Simp-BTPSC.

La validation des modèles réduits obtenus avec les différentes méthodes permet de sélectionner deux modèles en fonction des conditions d'utilisation. Pour une route quelconque le modèle

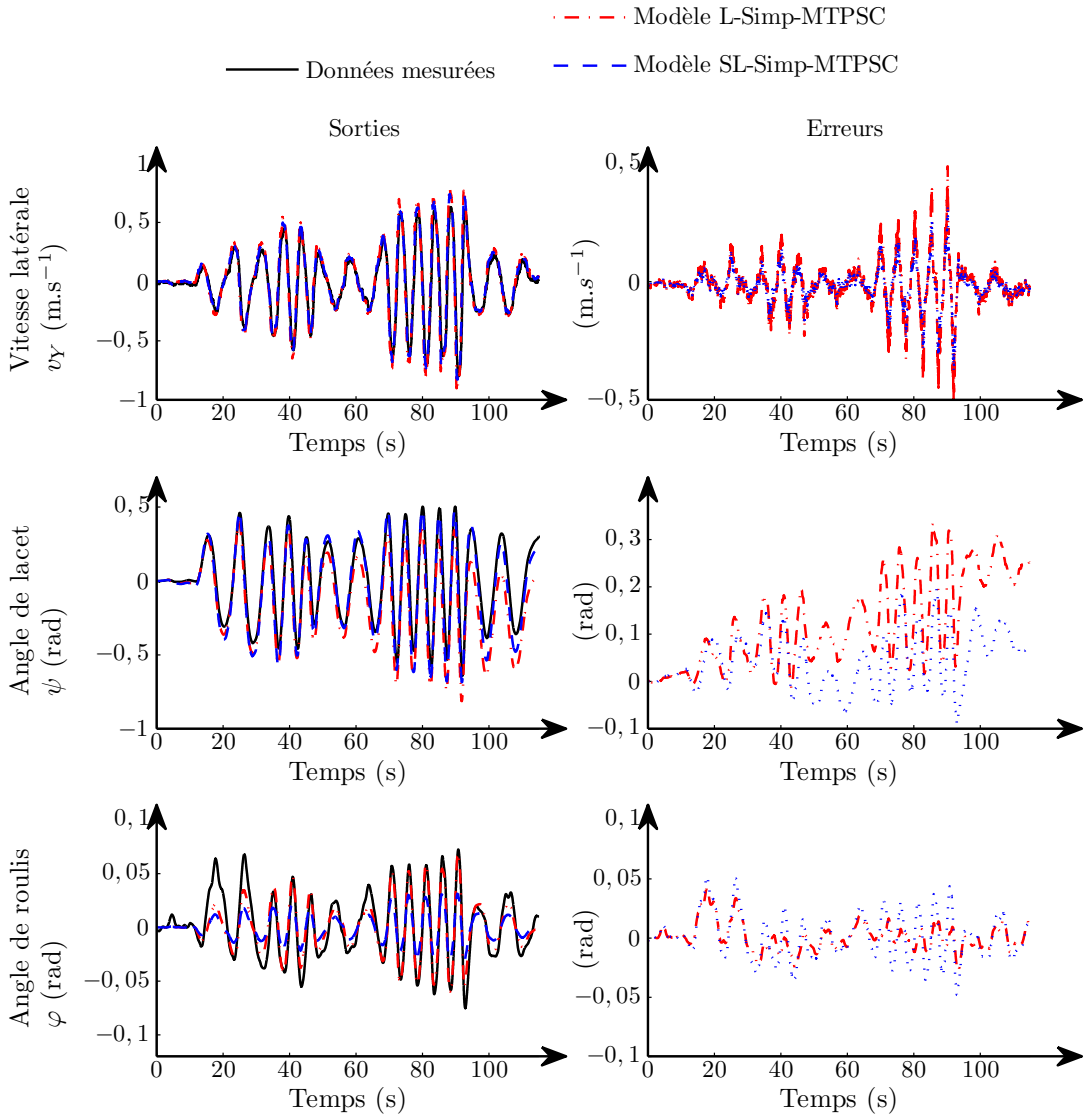


FIGURE 4.42 – Comparaison des données mesurées avec les sorties estimées par les modèles L-Simp-MTPSC et SL-Simp-MTPSC

SL-Comp-BTPSC est le modèle le plus adapté. En revanche, pour une route plane le modèle L-Simp-BTPSC est celui qui est retenu.

Ces deux modèles sélectionnés sont des modèles qui ont été réduits afin de rendre possible leur simulation en temps réel. Ils peuvent être utilisés sur une cible temps réel telle que celle utilisée par le banc de test.

4.4.7 Exécution en temps réel des modèles

Les étapes précédentes ont permis de concevoir 3 modèles de la dynamique du véhicule :

Le modèle complet : utilisé dans les phases de simulation sans matériel, il permet de simuler le comportement global du véhicule.

Le modèle semi-linéaire : utilisé dans les phases de simulation avec matériel, il permet de

modèles	**RMSE** v_Y (m.s^{-1})	**RMSE** ψ (rad.s)	**RMSE** φ (rad.s)
L-Simp-BTPSC	0,072	0,286	0,014
SL-Simp-BTPSC	0,264	0,739	0,023
L-Simp-MTPSC	0,103	0,297	0,014
SL-Simp-MTPSC	0,072	0,140	0,023

TABLEAU 4.29 – RMSE de 3 sorties des modèles réduits, pour une route plane, comparées avec un jeu de données expérimentales

simuler le comportement du véhicule sur une route possédant un profil quelconque. Ce modèle possède des parties non-linéaires qui peut rendre difficile sont utilisation pour des problématique de commande.

Le modèle linéaire : utilisé dans les phases de simulation avec matériel, ce modèle simule le comportement du véhicule sur route plane. Il est totalement linéaire et peut donc être étudié et utilisé avec les outils classiques du domaine de l'automatique.

Pour montrer la possibilité d'utiliser ces modèles en temps réel, l'exécution simultanée du modèle et du banc de test est effectuée. Pour ce faire, le modèle et le banc de test doivent suivre les mêmes consignes (l'angle au volant et les excitations verticales du profil de route). Pour l'angle au volant, la même consigne est appliquée sur le modèle et sur le banc de test. En revanche, le profil vertical de la route ne peut être simulé directement avec le banc de test. En effet, le profil de route utilisé varie d'une hauteur de 4 m alors que les vérins verticaux du banc de test ont un débattement de $\pm 0,12$ m. La solution envisagée consiste à ne pas simuler directement le profil de route mais le débattement des points hauts de suspension $Z_{A^{(i)}}$. Afin de pouvoir faire varier ces hauteurs, la masse suspendue du banc de test est maintenue en position et le roulis est bloqué. La consigne de débattement est déterminée par le modèle, et cette consigne est transmise au banc de test selon la FIGURE 4.43.

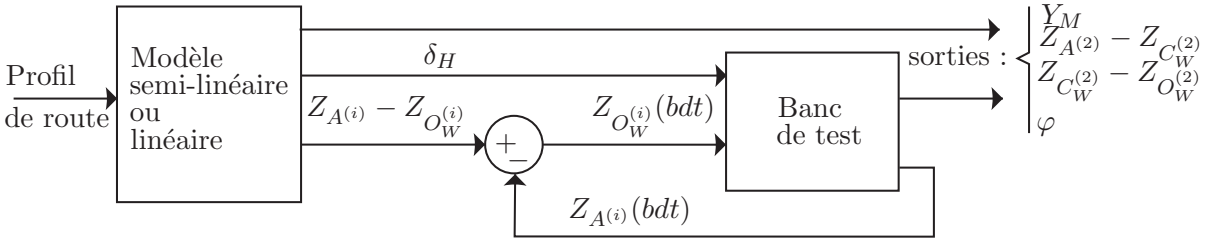


FIGURE 4.43 – Boucle de régulation du banc de test

Ainsi, il est possible de comparer les sorties des modèles SL-Comp-BTPSC et L-Simp-BTPSC avec les mesures effectuées sur le banc de test. Les sorties observées sur le banc de test, communes aux 2 modèles sont :

- la position de la crémaillère Y_M (rad) ;
- débattement des suspensions $Z_{A^{(2)}} - Z_{C_W^{(2)}}$ (m) ;
- écrasement des pneumatiques $Z_{C_W^{(2)}} - Z_{O_W^{(2)}}$ (m) ;
- l'angle de roulis φ (rad).

Dans la suite du manuscrit, pour simplifier la présentation des résultats, seules les mesures effectuées d'un côté du banc de test sont présentées.

4.4.7.1 Modèle linéaire

Le modèle L-Simp-BTPSC est simulé sur le banc de test. Ce dernier reproduit le comportement du demi-train avant du modèle en utilisant la boucle de contre-réaction réalisée sur $Z_{A^{(i)}}$. La trajectoire suivie par le véhicule est le test de l'élan (*cf.* Section 4.4.2). Les RMSE entre les données mesurées et estimées pour les sorties observées, sont présentées au Tableau 4.30.

	position de la crémaillère Y_M (m)	débattement de la suspension $Z_{A^{(2)}} - Z_{C_W^{(2)}}$ (m)	écrasement du pneumatique $Z_{C_W^{(2)}} - Z_{O_W^{(2)}}$ (m)	angle de roulis φ (rad)
RMSE	$7,60.10^{-3}$	$1,44.10^{-3}$	$6,72.10^{-4}$	$1,08.10^{-3}$

Tableau 4.30 – RMSE entre les sorties mesurées par le banc de test et celles estimées par le modèle L-Simp-BTPSC

Les RMSE pour le débattement des suspensions, l'écrasement du pneumatique et l'angle de roulis sont très faibles. En revanche, pour le déplacement de la crémaillère, le RMSE est plus important. L'analyse des courbes entre les sorties mesurées et estimées données à la Figure 4.44 (page ci-contre) permettent de visualiser les différences expliquant les RMSE.

Pour la position de la crémaillère Y_M, les courbes des données estimées et mesurées sont proches en amplitude mais un décalage temporel apparait pour les excitations importantes. Ce décalage est dû à une limitation en vitesse du moteur couple de direction. Cette limitation est imposée par l'alimentation de ce moteur qui ne supporte pas les pics de tension générés par les fortes excitations.

Pour le débattement des suspensions la différence entre les données mesurées et estimées est faible. En revanche, cette mesure est utilisée dans la boucle de contre-réaction et l'erreur entre les deux sorties ne devrait être qu'un retard. Cependant, la comparaison de l'estimation et de la mesure de l'écrasement du pneumatique montre des erreurs importantes. Cette mesure fait aussi partie de la boucle de contre-réaction. Or, la loi de commande est construite de telle sorte que les erreurs sur le débattement de suspension et l'écrasement de suspension soient nulles. On constate donc que la boucle de contre-réaction n'arrive pas à rendre nuls ces deux erreurs. Cette difficulté provient de la prise de mesure de l'écrasement du pneumatique qui est effectuée à l'aide d'un capteur filaire sensible au carrossage de la roue γ comme le montre la Figure 4.45 (page 184). Ainsi, la prise de mesure est faussée.

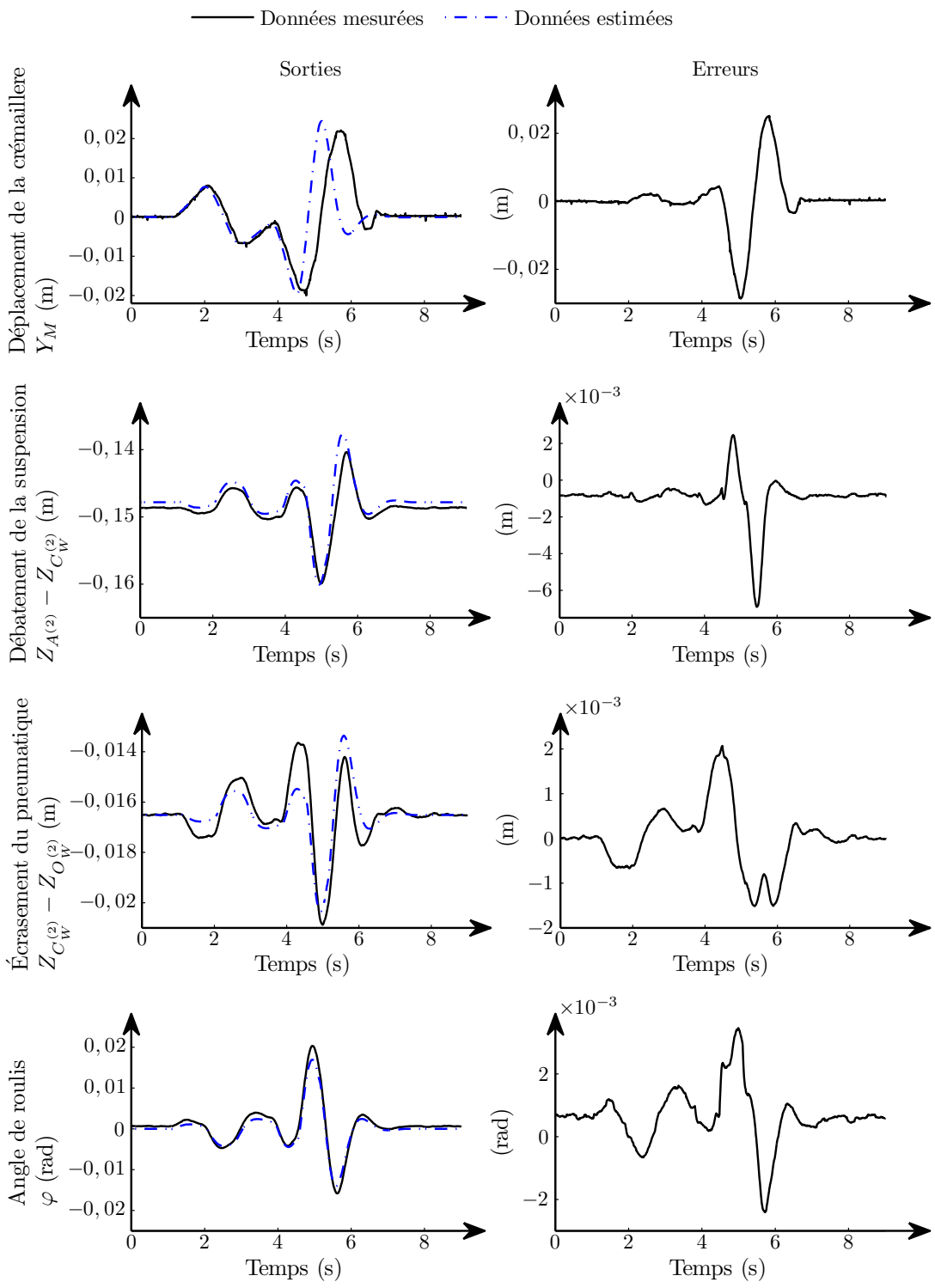


FIGURE 4.44 – Comparaison des sorties mesurées sur le banc de test et estimées par le modèle L-Simp-BTPSC

L'angle de roulis est correctement reproduit par le banc de test. Au final, le modèle L-Simp-BTPSC permet d'estimer l'ensemble des courbes à l'exception du déplacement de la crémaillère

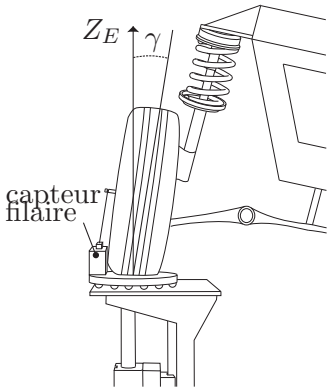


FIGURE 4.45 – Implentation du capteur filaire pour la mesure de l'écrasement du pneumatique

et de l'écrasement du pneumatique.

L'utilisation du banc de test simultanément à l'exécution du modèle L-Simp-BTPSC, permet de mesurer les efforts générés en haut de suspension et au contact roue-sol. En revanche, le modèle ne possède pas les sorties nécessaires à l'estimation de ces grandeurs. Afin de comparer les efforts, ces dernières sont estimées avec le modèle linéaire L-Comp en simulation. Les courbes ainsi obtenues sont présentées à la FIGURE 4.46.

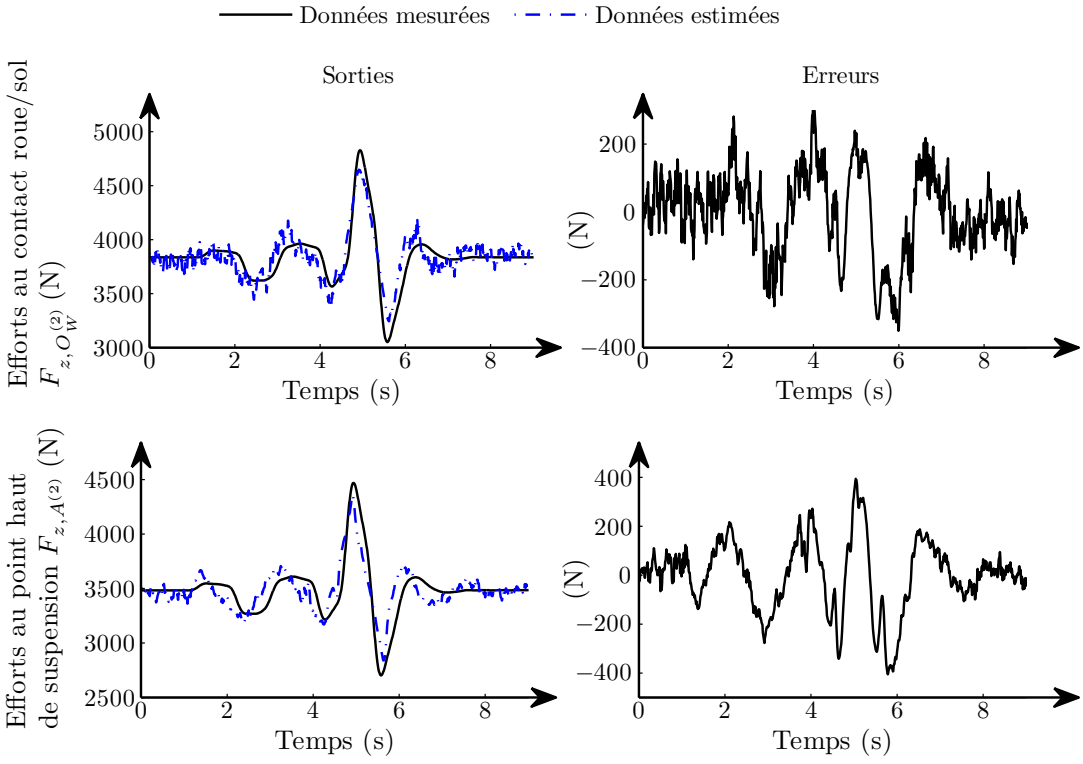


FIGURE 4.46 – Efforts mesurés et estimés entre le banc de test et le modèle L-Comp

Au point de contact roue-sol $F_{z,O_W^{(2)}}$, les efforts estimés par le modèle L-Comp reproduisent fidèlement les efforts générés par le banc de test. De même, pour les efforts $F_{z,A^{(2)}}$ générés

au point haut de suspension, les allures des courbes mesurées et estimées sont très proches. L'adéquation entre les grandeurs mesurées et estimées est confirmée par les faibles RMSE de ces données présentées, au Tableau 4.31.

	effort au contact roue-sol $F_{z,O_W^{(2)}}$ (N)	effort au point haut de suspension $F_{z,A^{(2)}}$ (N)
RMSE	120	141

Tableau 4.31 – RMSE entre les efforts verticaux mesurés par le banc de test et ceux estimés par le modèle L-Comp

La commande en position des points hauts de suspension $Z_A^{(i)}$ avec le modèle L-Simp-BTPSC permet réaliser avec le banc de test des mouvements similaires au modèle L-Comp. L'exécution du modèle L-Simp-BTPSC et l'exécution simultanée des mouvements d'excitation sur le banc de test permet de valider le comportement du modèle si le banc de test est la référence ou de valider le comportement du banc de test si le modèle est la référence.

La validation du modèle L-Simp-BTPSC à montrer sa capacité à commander le banc de test et à estimer certain de ces mouvements. L'étape suivante consiste à valider le modèle SL-Comp-BTPSC conçu pour la route générée aléatoirement.

4.4.7.2 Modèle semi-linéaire

Le modèle semi-linéaire dont la partie linéaire a été réduite à deux degrés de libertés par la méthode BTPSC est exécuté sur le banc de test. La route simulée est le profil généré aléatoirement (*cf.* Section 4.4.2). La boucle de régulation entre le modèle SL-Comp-BTPSC et le banc de test est celle présentée à la Figure 4.43 (page 181). Les RMSE entre les sorties mesurées et estimées sont données au Tableau 4.32.

	position de la crémaillère Y_M (m)	débattement de la suspension $Z_{A^{(2)}} - Z_{C_W^{(2)}}$ (m)	écrasement du pneumatique $Z_{C_W^{(2)}} - Z_{O_W^{(2)}}$ (m)	angle de roulis φ (rad)
RMSE	$1,13.10^{-3}$	$1,80.10^{-2}$	$1,07.10^{-2}$	$6,44.10^{-3}$

Tableau 4.32 – RMSE entre les sorties estimées par le banc de test et le modèle SL-Comp-BTPSC

Seul le RMSE de la position de la crémaillère est très faible (de l'ordre de 10^{-3} m). Pour les 4 autres courbes, les RMSE sont plus importants comparativement à l'ordre des grandeurs mesurées. En particulier, le RMSE de l'écrasement du pneumatique est proche du RMSE de l'écrasement de la suspension. Or, le pneumatique se comprime 10 fois moins que la suspension. Ainsi, l'erreur sur cette sortie est importante. Les erreurs sont mises en évidence par la Figure 4.47 (page suivante) présentant les sorties estimées par le modèle SL-Comp-BTPSC et les données mesurées sur le banc de test.

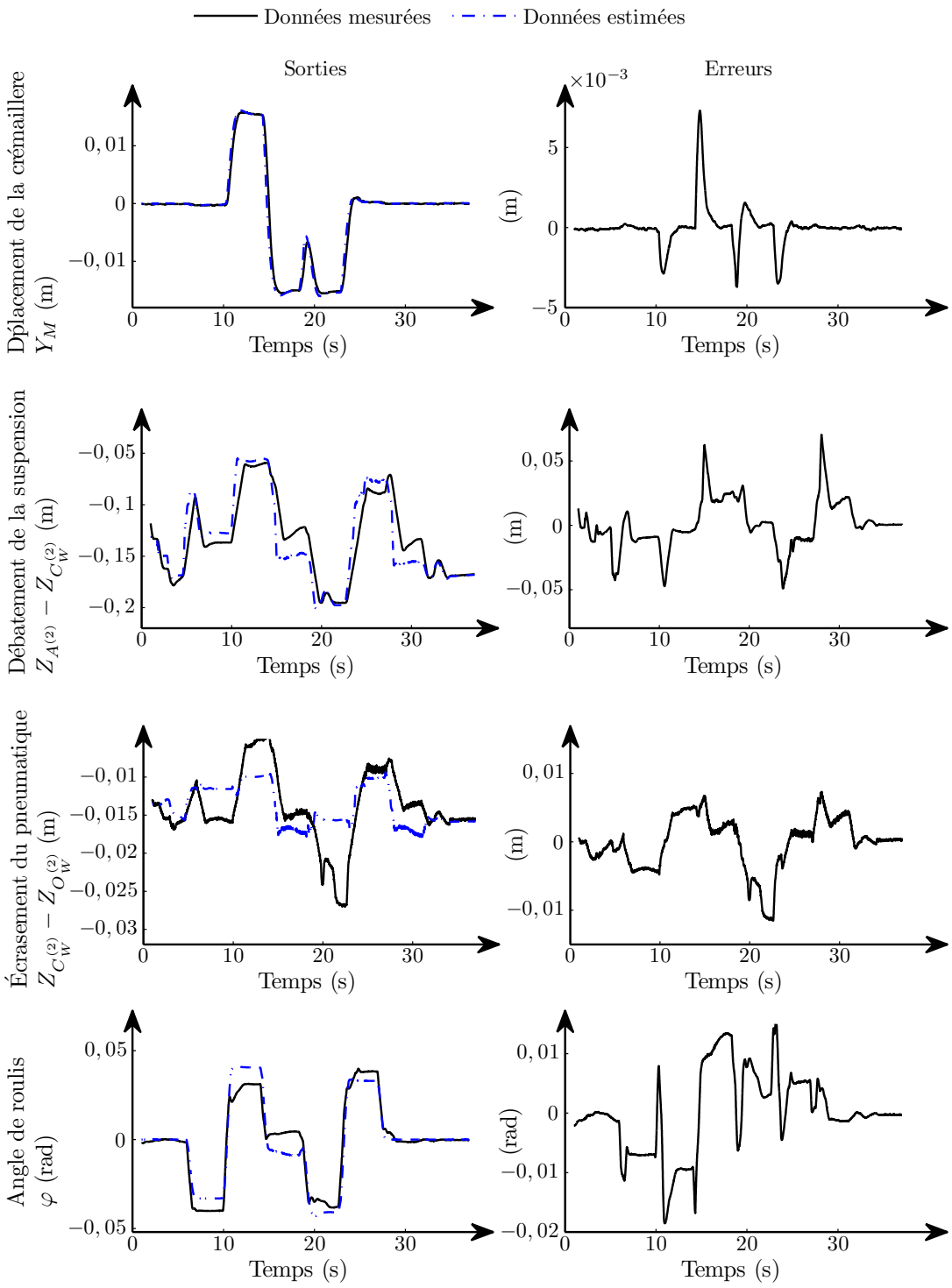


FIGURE 4.47 – Comparaison des sorties mesurées sur le banc de test et estimées par le modèle SL-Comp-BTPSC

La vitesse et le profil de la route, suivis par le modèle excitent plus faiblement le moteur de direction comparativement au test de l'élan. Le déplacement de la crémaillère est donc suivi par le banc de test avec une faible erreur due au décalage temporel entre le calcul de la commande

et l'exécution de cette dernière.

Concernant le débattement de la suspension, on constate que les courbes corroborent le RMSE avec une approximation correcte même si des pics dus à la commande persistent.

A nouveau, l'estimation de l'écrasement du pneumatique reste problématique avec une erreur importante entre la mesure et l'estimation. L'erreur est plus importante que dans le cas du modèle L-Simp-BTPSC car l'effet du carrossage est plus important : le banc de test s'incline plus fortement comme le montre la courbe de roulis. Pour cette dernière, un biais apparait pour les fortes amplitudes.

Au final, pour les quatre sorties comparées entre le modèle SL-Comp-BTPSC et le banc de test, le déplacement de la direction et le débattement de la suspension sont correctement estimés, l'angle de roulis est correct aux erreurs statiques près. En revanche, le système d'acquisition de l'écrasement du pneumatique empêche de valider cette sortie.

De la même manière que le modèle L-Simp-BTPSC, le modèle SL-Comp-BTPSC ne possède pas d'estimation des efforts. Dans le but de valider les efforts générés par le modèle SL-Comp, ces derniers sont comparés aux efforts générés sur le banc de test. La simulation du modèle SL-Comp sur la route générée aléatoirement permet d'obtenir les courbes présentées à la Figure 4.48.

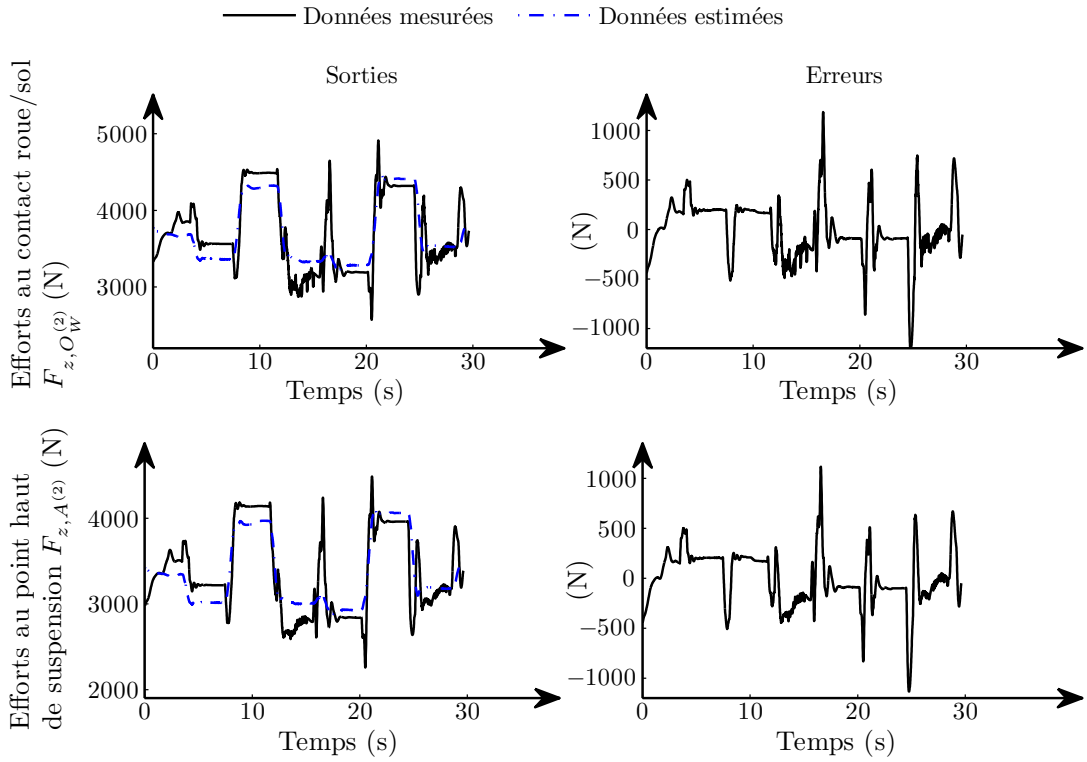


Figure 4.48 – Efforts mesurés et estimés pour le banc de test et le modèle SL-Comp

Les efforts estimés par le modèle SL-Comp correspondent aux efforts générés sur le banc de test même si à nouveau des erreurs statiques apparaissent. Les RMSE entre les données mesurées et estimées donnés au Tableau 4.33 (page suivante) permettent de valider les estimations du modèle SL-Comp des efforts générés aux points hauts de suspension et aux contacts roue-sol.

Au final, le modèle SL-Comp-BTPSC peut être utilisé pour commander le banc de test afin de reproduire les mouvements du train avant du véhicule lors du parcourt d'une route.

	effort au contact roue-sol $F_{z,O_W^{(2)}}$ (N)	effort au point haut de suspension $F_{z,A^{(2)}}$ (N)
RMSE	287	275

TABLEAU 4.33 – RMSE entre les efforts estimés par le banc de test et le modèle SL-Comp

Les étapes de validation des modèles réduits ont permis de montrer la capacité de ces derniers à commander le banc de test. De plus, l'analyse des efforts générés montre qu'ils modélisent bien le mouvement du véhicule considéré. Ainsi, il est maintenant envisageable d'utiliser le banc de test comme une partie du modèle véhicule. Pour cela, la partie du modèle correspondant au train avant du véhicule est remplacée par le banc de test. La simulation de ces deux systèmes hétérogènes couplés définit la co-simulation, plus particulièrement la co-simulation HIL puisque un système physique est présent.

4.4.8 Co-simulation HIL

La co-simulation HIL consiste à utiliser le banc de test pour déterminer les mouvements du train avant du véhicule. Ainsi, l'ensemble des blocs remplacés par le banc de test sont retirés du modèle complet, à savoir, la dynamique verticale des masses non-suspendues, les suspensions, la colonne de direction et la crémaillère. La suppression de ces éléments permet de définir un nouveau modèle simplifié, le modèle NL-Simp.

La différence entre l'excitation du banc de test par les modèles linéaires et semi-linéaires réduits présentée aux sections précédentes et la co-simulation HIL est que les mesures effectuées sur le banc de test sont utilisées pour exciter les entrées correspondantes du modèle. Ainsi, le comportement du modèle n'est plus indépendant et dépendra des mouvements du banc de test. Le banc de test est commandé par les positions des points hauts de suspension $Z_{A^{(i)}} - Z_{O_W^{(i)}}$ et le modèle NL-Simp est excité par les efforts générés en ces points $F_{z,A^{(i)}}$, $F_{z,O_W^{(i)}}$ $(i = 1, 2)$. Pour commander la direction, l'angle au volant est directement transmis au banc de test et la position de la crémaillère est retournée au modèle pour que ce dernier calcule les angles de braquage des roues et le couple au volant. La FIGURE 4.49 présente les entrées-sorties échangées entre le modèle NL-Simp et le banc de test.

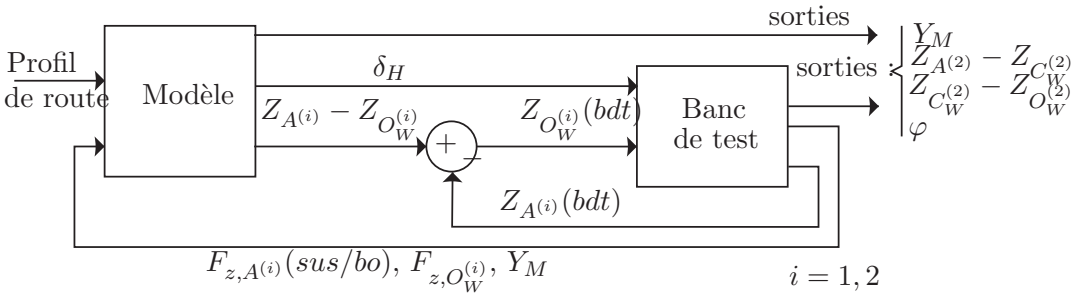


FIGURE 4.49 – Boucle de régulation du banc de test en co-simulation HIL

La validation du modèle NL-Simp co-simulé en HIL est effectuée en comparant les signaux de la dynamique verticale du banc de test et ceux du modèle véhicule complet (NL-Comp). Le banc de test mesure la position de la crémaillère, les débattements des suspensions, les écrasements des pneumatiques et l'angle de roulis. Les RMSE entre les données produites par le banc de test

et le modèle NL-Comp pour ces mesures sont données au TABLEAU 4.34.

	position de la crémaillère Y_M (m)	débattement de la suspension $Z_{A^{(2)}} - Z_{C_W^{(2)}}$ (m)	écrasement du pneumatique $Z_{C_W^{(2)}} - Z_{O_W^{(2)}}$ (m)	angle de roulis φ (rad)
RMSE	$1,22.10^{-3}$	$2,36.10^{-2}$	$2,50.10^{-3}$	$6,82.10^{-3}$

TABLEAU 4.34 – RMSE des positions entre la co-simulation HIL et le modèle complet

Le déplacement de la crémaillère a un RMSE de l'ordre du millimètre ce qui permet de valider la cohérence entre les données produites par le banc de test et celles estimées par le modèle NL-Comp. De même, pour le débattement de la suspension, le RMSE montre une bonne cohésion entre le modèle NL-Comp et le banc de test. Pour l'écrasement du pneumatique, l'utilisation du modèle NL-Simp permet de réduire l'erreur effectuée entre les données mesurées et estimées. Comme pour l'exécution simultanée du banc de test et des modèles réduits, l'angle de roulis a un RMSE satisfaisant.

L'analyse des courbes présentées à la FIGURE 4.50 (page suivante) permet d'approfondir l'étude des résultats en co-simulation. Les courbes obtenues pour le déplacement de la crémaillère montrent que des pics plus importants que pour les modèles SL-Comp-BTPSC et L-Simp-BTPSC apparaissent en co-simulation. Ces pics sont dus à la commande en boucle fermée de la colonne de direction alors que pour les modèles SL-Comp-BTPSC et L-Simp-BTPSC la commande était en boucle ouverte.

Pour les débattements des suspensions, les dynamiques entre les données estimées et mesurées sont correctement reproduites. En revanche des erreurs statiques persistent. A nouveau, ces erreurs statiques proviennent de la difficulté de mesure de l'écrasement du pneumatique qui est sensible à l'inclinaison de la roue. Comme pour l'ensemble des autres modèles, l'angle de roulis mesuré sur le banc de test est similaire à l'angle de roulis estimé par le modèle NL-Comp.

À l'exception de l'écrasement des pneumatiques, l'analyse des courbes montre qu'il est possible de reproduire en co-simulation HIL des mouvements réels équivalents aux mouvements calculés par le modèle NL-Comp en simulation. Ceci est rendu possible par la bonne adéquation entre les efforts estimés par le modèle NL-Comp et les efforts mesurés par le banc de test comme le montre les RMSE présentés au TABLEAU 4.35. La qualité de ces mesures est importante car elles sont utilisées par le modèle NL-Simp pour estimer la hauteur des points hauts de suspension.

	effort au contact roue-sol $F_{z,A^{(2)}}$ (N)	effort au point haut de suspension $F_{z,O_W^{(2)}}$ (N)
RMSE	132,132	228,545

TABLEAU 4.35 – RMSE des efforts entre la co-simulation HIL et le modèle NL-Comp

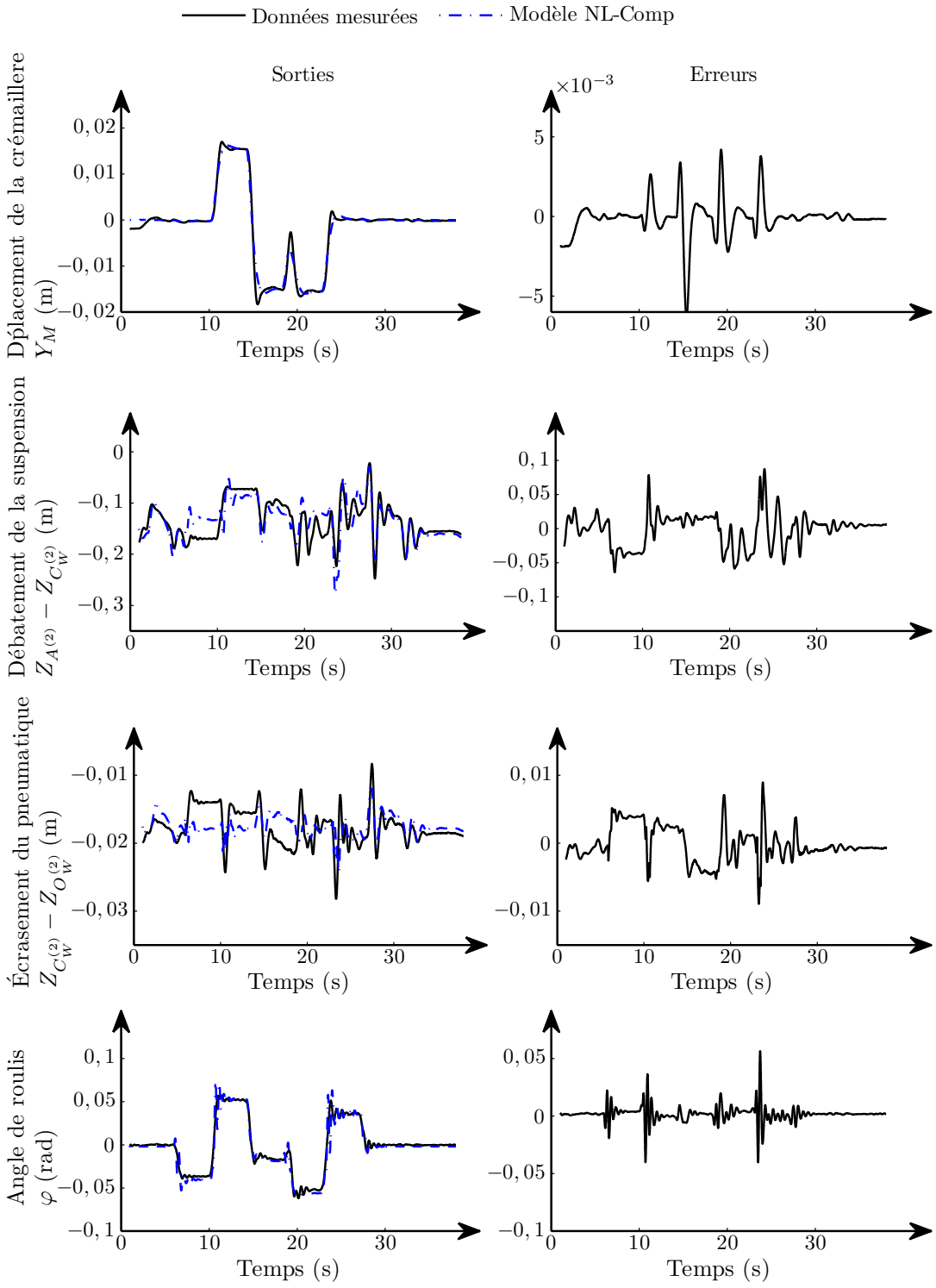


FIGURE 4.50 – Débattements simulés par le modèle NL-Comp et débattements mesurés en co-simulation

La bonne correspondance entre les efforts mesurés et estimés est montrée par les courbes données à la FIGURE 4.51 (page ci-contre). Quelques erreurs subsistent, principalement dans la

comparaison des efforts au contact roue-sol. Mais les dynamiques sont globalement respectées.

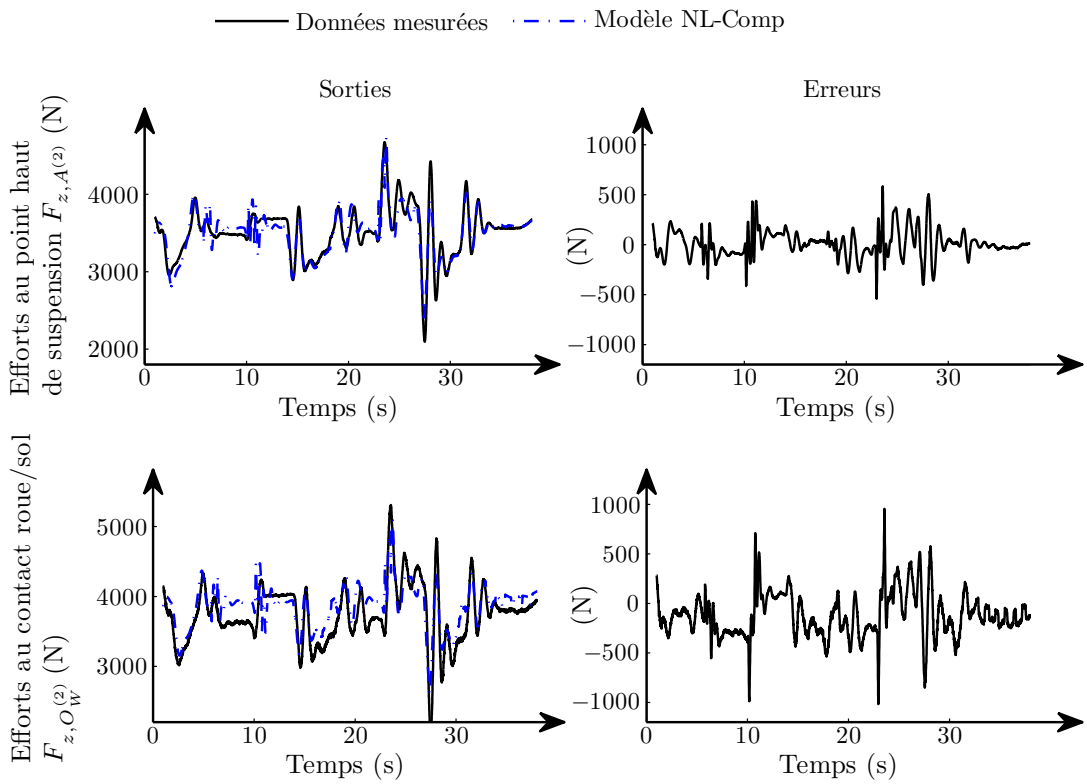


FIGURE 4.51 – Efforts simulés par le modèle NL-Comp et efforts mesurés en co-simulation

Avec la validation de la co-simulation HIL pour le modèle NL-Simp associé au banc de test, il est possible de tester le comportement routier d'un train avant du véhicule lors du parcours d'une route. Ici, les excitations du banc de test ne sont pas préétablies pour simuler un comportement prédéfini mais sont calculées en temps réel par le modèle NL-Simp dont le comportement est modifié en fonction des mesures effectuées sur le banc de test. Ainsi, il est possible d'estimer le mouvement du véhicule complet en fonction de la configuration du train avant testé par le banc.

4.5 Conclusion

Dans un objectif de validation des méthodes de réduction de l'ordre des modèles avec préservation de la structure, un modèle de la dynamique du véhicule est créé. Ce modèle possède 31 paramètres généraux (en dehors des paramètres des modèles de pneumatique) qu'il faut estimer. Sur ces 31 paramètres, 25 paramètres sont identifiés ou mesurés sur le véhicule d'essai, les 6 derniers paramètres sont repris de la littérature. Le modèle avec les paramètres ainsi identifiés est validé par comparaison de ces sorties estimées avec un jeu de données mesurées sur le véhicule d'essai.

La simulation de ce modèle demande l'ajout d'un contrôleur permettant au véhicule simulé de suivre une trajectoire et l'ajout d'un contrôleur permettant de produire les excitations correspondant à un profil de route en fonction de la position du véhicule. À l'aide de ces deux contrôleurs la simulation du comportement du véhicule lors de son parcours d'une trajectoire peut être effectuée. Mais l'utilisation du modèle avec des systèmes physiques impose que la si-

mulation soit effectuée en temps réel. Or, le modèle est trop complexe et doit être réduit. La linéarisation du modèle complet en modèle semi-linéaire et modèle linéaire permet de réduire ces derniers. L'utilisation des méthodes de réduction de modèle avec préservation de la structure permet de diminuer l'ordre de ces modèles de tel sorte que leur simulation temps réel devienne possible. La préservation de la structure permet d'une part, d'analyser les dynamiques qui sont retenues dans le modèle réduit et d'autre part, de reconstruire un modèle physique du modèle réduit. Suite à la réduction des modèles, une phase de validation avec le modèle complet ou directement avec des données mesurées sur le véhicule d'essai permet de sélectionner la méthode de réduction. De plus, la phase de validation permet de vérifier l'adéquation du comportement des modèles réduits avec le modèle complet, le banc de test ou le véhicule d'essai.

Lorsque les modèles réduits sont validés, il est envisageable de piloter le moyen d'essai pour que ce dernier reproduise les mouvements imposés par le modèle. La comparaison des sorties mesurées sur le banc de test et des données estimées par les modèles permettent de valider la cohérence de ces derniers et d'assurer que ceux-ci reproduisent fidèlement les mouvements verticaux du véhicule.

La validation de la cohérence des mouvements et des mesures, effectuées entre le banc de test et les modèles, permet de réaliser la co-simulation HIL, où le banc de test remplace certaines parties du modèle du véhicule. L'excitation simultanée du banc de test et du modèle avec un échange de données entre ces derniers permet de tester le train avant du véhicule lors du parcours d'une route. L'avantage de la co-simulation HIL est que les excitations imposées par les dynamiques du véhicule, non représentées sur le banc de test, ne sont pas prédéterminées mais calculées en temps réel en fonction du comportement du train avant. Comparativement aux méthodes de test qui prédéfinissent l'ensemble des excitations à jouer sur le système testé, cette méthode permet d'identifier les comportements indésirables induits par le couplage des systèmes.

Conclusion générale

L'augmentation de l'efficacité des outils d'aide à la conception modifie les performances en recherche et développement de plusieurs façons [THOMKE, 1998] :

- Comme les cycles de validation sont disponibles plus tôt dans le cycle de conception, alors les autres tâchent peuvent être effectuées plus tôt et mieux. Ainsi, un haut degré de conception simultanée est envisageable.
- En diminuant le temps de détection d'une erreur, les concepteurs sont en mesure d'identifier au plus tôt les problèmes consécutifs à la résolution de cette erreur, en particulier les problèmes liés à l'intégration du système corrigé. Il est donc possible de faire les changements nécessaires rapidement et à moindre coût.
- La réduction du coût et du temps pour obtenir des résultats sur les alternatives de conception permet d'augmenter le nombre d'expériences impliquant de nouvelles possibilités techniques. L'augmentation du nombre d'essais réalisables peut conduire à la conception de solutions plus efficaces.

En conséquence, la capacité de tester et de valider au plus tôt des systèmes complexes, alors que leur environnement n'est pas disponible physiquement, est une aide à la conception permettant de diminuer simultanément les coûts et les temps de conception. En outre, l'intégration de la validation des couplages inter-systèmes, au plus tôt dans le cycle de conception, permet de détecter les erreurs relatives à l'assemblage de composants matériels hétérogènes et permet ainsi de rendre plus fiables de tels systèmes.

La détection des erreurs provoquées par les couplages inter-systèmes nécessite d'unifier la modélisation des systèmes. En revanche, la prise en compte de l'ensemble des domaines intervenant dans la conception d'un véhicule (mécanique, électronique, électricité, informatique, bus de terrain...) par une unique formalisation mathématique ne semble pas encore possible. Une solution permettant d'unifier partiellement ces domaines est donc proposée et consiste en l'utilisation des MSSO. Cette classe de modèle, en plus de modéliser les systèmes régis par des équations différentielles, permet de lier les paramètres du modèle aux paramètres du système, même après transformation du modèle.

Les MSSO, très utilisés dans le domaine mécanique et en particulier dans l'analyse structurelle, n'ont été que peu étudiés par les automaticiens. Une première analyse a donc été nécessaire, pour développer l'ensemble des propriétés indispensables à la conception des outils et méthodes usités dans le domaine de l'automatique. Ces propriétés sont développées dans le Chapitre 1 en se basant sur les relations qui existent entre les réalisations d'état et les MSSO.

L'amélioration des outils de conception amène à augmenter la part, déjà importante, de la modélisation et de la co-simulation par ordinateur des systèmes et amplifie le besoin en co-simulation HIL dans le cycle de conception. Or, la co-simulation HIL demande aux modèles

utilisés des performances accrues en termes de rapidité de calcul, qui peuvent être incompatibles avec leur complexité. Ainsi, des méthodes permettant de diminuer la complexité des modèles sont présentées dans le Chapitre 2. Ces méthodes, basées sur la réduction de l'ordre des modèles, ont pour principal inconvénient de faire perdre les relations qui existent entre les paramètres du modèle et ceux du système. Basé sur la représentation des systèmes par des MSSO, ce deuxième chapitre propose donc deux méthodes permettant de conserver une représentativité des paramètres du modèle réduit. Ceci permet de proposer, entre autres, la possibilité de reconstruire un système physique du modèle réduit.

Les nouveaux résultats développés dans les deux premiers chapitres permettent d'étudier et de réduire l'ordre des MSSO et de répondre au besoin d'unicité dans la représentation des systèmes. Lors de la conception d'un système complexe, d'autres besoins en termes de modèle générique et évolutif existent. Dans le cadre de cette thèse, ces besoins sont couverts en utilisant une structure de modélisation par bloc. La viabilité de cette structure est démontrée par la création d'un modèle de la dynamique du véhicule dans le Chapitre 3. Les blocs ainsi définis permettent de former une librairie de modèles représentatifs des sous-parties. De cette libraire, d'autres modèles utilisant les mêmes sous-systèmes qu'un véhicule routier peuvent être créés à moindre coût. De plus, cette structure permet de faire évoluer la représentativité du modèle pour chaque sous-système du véhicule modélisé. La capacité à évoluer du modèle est utilisée ici pour modifier les équations des sous-systèmes afin d'obtenir un modèle linéaire et un modèle semi-linéaire qu'il est possible de réduire par les méthodes de réduction de l'ordre des modèles.

L'ensemble des résultats précédents est utilisé afin de pouvoir co-simuler le modèle avec un système physique (HIL). Pour ce faire, une première étape d'identification des paramètres du modèle est nécessaire afin de rendre le modèle représentatif du système physique. Les résultats de cette étape d'identification sont décrits dans le Chapitre 4. Ensuite, l'utilisation des méthodes du domaine de l'automatique nécessite de transformer le modèle par bloc en un modèle monobloc. L'analogie entre un modèle sous forme de représentation d'état et un MSSO permet de proposer une méthode d'interconnexion des sous-systèmes. Avec cette méthode, les méthodes de réduction de l'ordre des MSSO sont utilisées pour rendre possible la simulation en temps réel des modèles de la dynamique du véhicule linéaire et semi-linéaire. Dans le Chapitre 4, après avoir présenté la réduction des modèles, une étape de validation de ces modèles sur le banc de test permet d'obtenir les résultats de la co-simulation HIL du modèle.

Ainsi, l'ensemble des étapes permettant de créer un modèle répondant aux nouveaux besoins de la conception d'un système complexe est développé. Le modèle proposé présente une structure interne permettant de conserver la représentativité physique du système même lors des transformations qui lui sont appliquées. L'architecture du modèle respecte les enjeux précédemment définis tels qu'être générique et être évolutif. Basé sur l'ensemble de ces méthodes, ce concept de modélisation est validé jusque dans les phases avales du cycle de conception par son utilisation en co-simulation HIL.

Cependant, un certain nombre de questions restent ouvertes. D'un point de vue théorique, lors de l'étude des modèles, une analyse des relations entre la représentation d'état et les MSSO a montré la possibilité de diagonaliser ces derniers. Cependant, la méthode proposée augmente l'ordre du modèle lorsqu'il est multi entrées. Aussi, une méthode permettant de rendre minimal le MSSO diagonal doit être développée. Cet algorithme, qui ne doit pas forcément préserver la diagonalité, doit au moins préserver les conditions *structurelles*. Pour les représentations d'état,

deux types d'algorithmes existent. Les algorithmes dits de *Ho-Kalman*, basés sur la structure par bloc d'une représentation d'état, cherchent à décomposer cette dernière en quatre parties [SCHUTTER, 2000] :

- une partie observable et commandable ;
- une partie non-observable et commandable ;
- une partie observable et non-commandable ;
- une partie non-observable et non-commandable.

Ensuite, l'extraction de la partie observable et commandable permet de définir la réalisation minimale du modèle. Cette approche peut difficilement être appliquée au MSSO car la structure du modèle est différente. Le second type d'algorithme se base sur les valeurs singulières de Hankel. Si dans la base équilibrée, une valeur singulière de Hankel associée à un état est nulle, alors cet état peu être éliminé sans effectuer d'approximation sur le modèle initial.

Développer ce type d'algorithmes pour les MSSO permettrait d'une part, de rendre minimal un MSSO et d'autre part, de proposer une méthode de réduction de l'ordre des MSSO sans utiliser de représentation d'état. Mais pour ce faire, une méthode pour diagonaliser simultanément les 4 grammiens des MSSO doit être trouvée.

Des améliorations peuvent être effectuées dans le cadre de la modélisation du modèle véhicule. De par sa capacité à évoluer, le modèle proposé peut être amélioré de plusieurs façons :

- ajouter des sous-parties non modélisées, principalement le groupe moto-propulseur ;
- améliorer la représentativité de certaines sous-parties, principalement la direction.

De plus, si le concept d'évolution est validé, le côté générique du modèle doit être encore validé expérimentalement, en utilisant les mêmes blocs du modèle pour créer d'autres types de véhicules (avion, camion, remorque...).

Pour finir, la co-simulation HIL a pu être validée en tant que concept, mais les résultats peuvent être améliorés, principalement en modifiant la prise de mesure de l'écrasement du pneumatique. Mais si la problématique de coût pour résoudre une erreur de spécification est vraie lors de la conception d'un véhicule, cette problématique est aussi vraie lors de la conception d'un banc de test.

Annexes

Sommaire

Annexe A Discrétisation 198
A.1 Description des MSSO discrets 198
A.2 Discrétisation d'un MSSO 198
A.3 Réponse discrète à une entrée 200
A.4 Réponse discrète à une impulsion 201
Annexe B Analyse de sensibilité 203
Annexe C Mesure de l'empattement 205

Annexe A

Discrétisation

A.1 Description des MSSO discrets

Les systèmes linéaires considérés sont les systèmes modélisés par les équations aux différences du second ordre :

$$\begin{cases} q_{k+2} &= f(q_{k+1}, q_k, u_k), \\ y_k &= g(q_{k+1}, q_k, u_k), \end{cases} \tag{A.1}$$

où u_k est le vecteur de commande du système, y_k le vecteur de sortie, q_k les coordonnées généralisées du système.

Dans le cas d'un système LTI, l'équation (A.1) devient :

$$\Sigma: \begin{cases} Mq_{k+2} + Cq_{k+1} + Kq_k = Fu_k, & q(0) = q_0, \\ y_k = G_a q_{k+2} + G_v q_{k+1} + G_p q, & \dot{q}(0) = \dot{q}_0, \end{cases}$$
$$(M, C, K) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}, \quad F \in \mathbb{R}^{n_q \times m} \quad \text{et} \quad (G_p, G_v, G_a) \in \mathbb{R}^{p \times n_q}.$$

La transformation en Z de ce système avec $q_0 = 0$ et $\dot{q}_0 = 0$ permet d'obtenir la fonction de transfert du système :

$$H(z) = (z^2 G_a + z G_v + G_p)(Mz^2 + Cz + K)^{-1} F \qquad \text{et} \qquad Y(z) H(z) U(z).$$

A.2 Discrétisation d'un MSSO

Nus considérons les MSSO discrétisés par un bloqueur d'ordre zéro :

Définition A.2.1 *À la fréquence $\frac{1}{T}$, où T est la période d'échantillonnage, un bloqueur d'ordre zéro transforme un signal continu $u(t), t \in \mathbb{R}$, en un signal en escalier constant sur l'intervalle $[kT, (k+1)T[$ de valeur $u(kT)$.*

Échantillonner un système du second ordre continu (1.24) avec un bloqueur d'ordre zéro revient à maintenir constante l'entrée $u(t)$ sur l'intervalle $[kT, (k+1)T[$ ce qui permet d'obtenir le théorème suivant.

Théorème A.2.2 *Le MSSO discrétisé du système continu (1.24) échantillonné par un bloqueur d'ordre zéro à la fréquence $\frac{1}{T}$ est donné par*

$$\begin{cases} Mq_{k+2} + Mq_{k+1} + Mq_k = Fu_k, \\ y_k = G_p q_k + G_v q_{k+1} + G_a q_{k+2}, \end{cases} \qquad \text{avec} \quad q_k = q(kT), \tag{A.2}$$

et

$$\begin{cases} M = \mathbb{I}, \\ C = e^{P_1 T} + e^{P_2 T}, \\ K = e^{P_1 T + P_2 T}, \end{cases} \qquad \begin{cases} F = \mathbb{1}, \\ G_p = \mathcal{G}_2 S {P_2}^{-1} e^{P_1 T} - \mathcal{G}_1 S {P_1}^{-1} e^{P_2 T} + G_p S K ({P_1}^{-1} - {P_2}^{-1}), \\ G_v = \mathcal{G}_2 S {P_2}^{-1} e^{P_2 T} - \mathcal{G}_1 S {P_1}^{-1} e^{P_1 T} + G_p S ({P_1}^{-1} - {P_2}^{-1}) + G_a (C - I), \\ G_a = G_a. \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème se base sur la discrétisation de la représentation d'état d'un MSSO. Ainsi, nous rappelons le résultat de la discrétisation d'une représentation d'état.

Rappel *Le système linéaire du premier ordre discrétisé du système continu (1.3) échantillonné par un bloqueur d'ordre zéro à la fréquence $\frac{1}{T}$ est donné par*

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \mathsf{A} x_k + \mathsf{B} u_k, \\ y_k &= \mathsf{C} x_k + \mathsf{D} u_k, \end{cases} \qquad \text{avec} \quad x_k = x(kT), \tag{A.3}$$

$$\mathsf{A} = e^{\mathsf{A}_c T}, \qquad \mathsf{B} = \left(\int_0^T e^{\mathsf{A}_c T} \, dt \right) \mathsf{B}_c = \mathsf{A}_c^{-1} \left(e^{\mathsf{A}_c T} - \mathbb{I} \right) \mathsf{B}_c, \qquad \mathsf{C} = \mathsf{C}_c \tag{A.4}$$

$$et \qquad \mathsf{D} = \mathsf{D}_c,$$

où $(\mathsf{A}_c, \mathsf{B}_c, \mathsf{C}_c, \mathsf{D}_c)$ sont les matrices d'état du système du premier ordre continu.

Démonstration

En discrétisant la représentation d'état (1.3.6) par un bloqueur d'ordre zéro et en utilisant le résultat pour une réalisation d'état rappelé ci-dessus on a

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{pmatrix} e^{P_2 T} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & e^{P_1 T} \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} {P_2}^{-1} \left(e^{P_2 T} - \mathbb{I} \right) F \\ {P_1}^{-1} \left(e^{P_1 T} - \mathbb{I} \right) F \end{pmatrix} u_k, \\ y_k = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_2 S & -\mathcal{G}_1 S \end{pmatrix} x_k + G_a F \, u_k, \end{cases} \tag{A.5}$$

$$\text{notée} \quad \begin{cases} x_{k+1} = \mathsf{A}_p x_k + \mathsf{B}_p u_k, \\ y_k = \mathsf{C}_p x_k + \mathsf{D}_s p F \, u_k. \end{cases}$$

Cette représentation d'état peut être mise sous la forme d'un MSSO en utilisant la même méthode que pour un modèle continu (*cf.* Section 1.3.3). En posant $X = \begin{pmatrix} X_1^{-1} & X_2^{-1} \end{pmatrix}$ avec $X_1^{-1} = (e^{P_2} - \mathbb{I})^{-1} P_2$ et $X_2^{-1} = (e^{P_1} - \mathbb{I})^{-1} P_1$, la matrice de transformation

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{pmatrix} X \\ X \mathsf{A}_p \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (e^{P_2 T} - e^{P_1 T})^{-1} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & (e^{P_2 T} - e^{P_1 T})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^{P_2 T} - \mathbb{I})^{-1} P_2 & -(e^{P_1 T} - \mathbb{I})^{-1} P_1 \\ (e^{P_2 T} - \mathbb{I})^{-1} P_2 e^{P_2 T} & -(e^{P_1 T} - \mathbb{I})^{-1} P_1 e^{P_1 T} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

permet de transformer la représentation d'état à temps discret (A.5) en représentation d'état d'un MSSO. En effet, une inversion par bloc permet de calculer la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -{P_2}^{-1} e^{P_1 T} (e^{P_2 T} - \mathbb{I}) & {P_2}^{-1} (e^{P_2 T} - \mathbb{I}) \\ -{P_1}^{-1} e^{P_2 T} (e^{P_1 T} - \mathbb{I}) & {P_1}^{-1} (e^{P_1 T} - \mathbb{I}) \end{pmatrix},$$

qui, appliquée à la représentation d'état $\begin{bmatrix} \mathsf{A}_p & \mathsf{B}_p \\ \mathsf{C}_p & \mathsf{D}_p \end{bmatrix}$, donne une nouvelle représentation d'état $\begin{bmatrix} \mathsf{A}_d & \mathsf{B}_d \\ \mathsf{C}_d & \mathsf{D}_d \end{bmatrix}$ représentant un MSSO :

•**matrice** A_d

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_d = T^{-1}\mathsf{A}_p T &= \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -e^{P_1T+P_2T} & e^{P_1T} + e^{P_2T} \end{pmatrix}, \\ &\triangleq \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

•**matrix** B_d

$$\mathsf{B}_d = T^{-1}\mathsf{B}_p = \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ F \end{pmatrix}.$$

•**matrix** C_d

$$\begin{aligned} \mathsf{C}_d = \mathsf{C}_p T = \big(&\mathcal{G}_2 S {P_2}^{-1} e^{P_1T} - \mathcal{G}_1 S {P_1}^{-1} e^{P_2T} + G_p SK({P_1}^{-1} - {P_2}^{-1}) - G_a K \\ &\mathcal{G}_2 S {P_2}^{-1} e^{P_2T} - \mathcal{G}_1 S {P_1}^{-1} e^{P_1T} + G_p S({P_1}^{-1} - {P_2}^{-1}) - G_a\big). \end{aligned}$$

Finalement le MSSO à temps discret est

$$\begin{cases} M = \mathbb{I}, \\ C = e^{P_1T} + e^{P_2T}, \\ K = e^{P_1T+P_2T}, \\ F = \mathbb{1}, \\ G_p = \mathcal{G}_2 S {P_2}^{-1} e^{P_1T} - \mathcal{G}_1 S {P_1}^{-1} e^{P_2T} + G_p SK({P_1}^{-1} - {P_2}^{-1}), \\ G_v = \mathcal{G}_2 S {P_2}^{-1} e^{P_2T} - \mathcal{G}_1 S {P_1}^{-1} e^{P_1T} + G_p S({P_1}^{-1} - {P_2}^{-1}) + G_a(C - I), \\ G_a = G_a. \end{cases}$$

□

La discrétisation d'un MSSO étant connu, il est possible de calculer les réponses d'un MSSO en discret.

A.3 Réponse discrète à une entrée

Par analogie directe à la représentation d'état, le théorème suivant permet de calculer la

réponse temporelle d'un modèle du second discret.

Théorème A.3.1 *Soit une coordonnée généralisée initiale $q_0 = q(0)$ et $\dot{q}_0 = \dot{q}(0)$ et une entrée u_k, les réponses dynamiques y_k du MSSO peuvent être déterminées par :*

$$\begin{aligned}
q_k &= \left(P_2{}^k S - S P_1{}^k\right) \dot{q}_0 - \left(P_1 P_2{}^k S - S P_2 P_1{}^k\right) q_0 \\
&\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \left(P_2{}^{k-1-n} S - S P_1{}^{k-1-n}\right) F u_n, \\
q_{k+1} &= \left(P_2{}^{k+1} S - S P_1{}^{k+1}\right) \dot{q}_0 - \left(P_1 P_2{}^{k+1} S - S P_2 P_1{}^{k+1}\right) q_0 \\
&\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \left(P_2{}^{k-n} S - S P_1{}^{k-n}\right) F u_n, \\
q_{k+2} &= \left(P_2{}^{k+2} S - S P_1{}^{k+2}\right) \dot{q}_0 - \left(P_1 P_2{}^{k+2} S - S P_2 P_1{}^{n+2}\right) q_0 \\
&\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \left(P_2{}^{k+1-n} S - S P_1{}^{k+1-n}\right) F u_n + F u_k. \\
y_k &= G_p q_k + G_v q_{k+1} + G_a q_{k+2}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

De même que pour le cas continu, on peut condenser cette expression en

$$\begin{aligned}
y_k &= \left(\mathcal{G}_2 S P_2{}^k - \mathcal{G}_1 S P_1{}^k\right) \dot{q}_0 - \left(\mathcal{G}_2 S P_2{}^k P_1 - \mathcal{G}_1 S P_1{}^k P_2\right) q_0 \\
&\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \left(\mathcal{G}_2 S P_2{}^{k-1-n} - \mathcal{G}_1 S P_1{}^{k-1-n}\right) F u_n + G_a F u_k.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

A.4 Réponse discrète à une impulsion

En temps discret, la réponse impulsionnelle d'un MSSO est définie par le théorème suivant.

Théorème A.4.1 *La réponse impulsionnelle pour $k \geq 0$ est déterminée par :*

$$\begin{cases} y_k &= G_a F \quad si \quad k = 0, \\ y_k &= \left(\mathcal{G}_2 S P_2{}^{k-1} - \mathcal{G}_1 S P_1{}^{k-1}\right) F \quad si \quad k \in \mathbb{Z}^*. \end{cases} \tag{A.8}$$

Démonstration

Pour $t = t_0$, avec $q_0 = 0$ et $\dot{q}_0 = 0$, les équations (1.3.6) donnent

$$\begin{aligned}
q(t_0) = 0, \qquad &\text{car} \qquad \int_{t_0}^{t_0} \left(e^{P_2(t-\tau)} S - S e^{P_1(t-\tau)}\right) F \delta(t)\, dt = 0, \\
\dot{q}(t_0) = F, \qquad &\text{car} \qquad \int_{t_0}^{t_0} \left(P_2 e^{P_2(t-\tau)} S - S P_1 e^{P_1(t-\tau)}\right) F \delta(t)\, dt = F.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
y_k = \Big(G_p \left(e^{P_2(t-t_0)} S - S e^{P_1(t-t_0)}\right) + G_v \left(P_2 e^{P_2(t-t_0)} S - S P_1 e^{P_1(t-t_0)}\right) \\
+ G_a \left(P_2{}^2 e^{P_2(t-t_0)} S - S P_1{}^2 e^{P_1(t-t_0)}\right)\Big) F + G_a F \delta(t),
\end{aligned}$$

soit

$$y_k = \left(\mathcal{G}_2 S e^{P_2(t-t_0)} - \mathcal{G}_1 S e^{P_1(t-t_0)}\right) F + G_a F \delta(t),$$
$$\text{avec} \quad \mathcal{G}_1 = G_p + G_v P_1 + G_a {P_1}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2 = G_p + G_v P_2 + G_a {P_2}^2.$$

□

Annexe B

Analyse de sensibilité

L'indice de sensibilité d'ordre 1 est défini par [SALTELLI *et al.*, 2008].

Définition B.0.2 *L'indice de sensibilité exprimant la sensibilité de la i-ème sortie à l'instant t ($y_i(t)$) au paramètre θ_k est défini par*

$$S_k(t) = \frac{V(E[y_i(t)/\theta_k])}{V(y_i(t))} \tag{B.1}$$

L'estimation des indices de sensibilité par la méthode de Monte-Carlo se base sur N-échantillons des p paramètres étudiés $(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ tels que

$$X_N = (x_{j1}, \ldots, x_{jp}) \qquad \text{j=1,...,N}$$

où N est le nombre de données dans l'échantillon.

L'espérance $E[y_i(t)] = E_i(t)$ et la variance $V(y_i(t)) = V_i(t)$ de la i-ème sortie à l'instant t sont estimées par

$$\check{E}_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f_i(x_{j1}, \ldots, x_{jp})$$

$$\check{V}_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f_i^2(x_{j1}, \ldots, x_{jp}) - \check{E}_i(t)^2$$

où f_i est la fonction décrivant la i-ème sortie du modèle $(y_i(t) = f_i(\theta_1, \ldots, \theta_p, u_1(t), \ldots, u_m(t)))$.

L'estimation de la variance de l'espérance conditionnelle de (B.1) est donnée par

$$V(E[y_i(t)/\theta_k]) = E[E[y_i(t)/\theta_k]^2] - (E[E[y_i(t)/\theta_k]])^2 = U_k(t) - (E[y_i(t)])^2$$

L'estimation de $U_k(t)$ est effectuée en faisant varier toutes les variables sauf la variable θ_k dans deux appels de la fonction $f_i(t)$. Cette méthode nécessite donc deux échantillons de réalisation des paramètres que nous indiçons $x_k^{(1)}$ et $x_k^{(2)}$

$$\check{U}_k(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Big[f(x_{j1}^{(1)}, \ldots, x_{j(k-1)}^{(1)}, x_{jk}^{(1)}, x_{j(k+1)}^{(1)}, \ldots, x_{jp}^{(1)}, u_1(t), \ldots, u_m(t)) \times f(x_{j1}^{(2)}, \ldots, x_{j(k-1)}^{(2)}, x_{jk}^{(1)}, x_{j(k+1)}^{(2)}, \ldots, x_{jp}^{(2)}, u_1(t), \ldots, u_m(t))\Big]$$

Au final, l'indice de sensibilité à l'instant (t) du paramètre θ_k sur la sortie $y_i(t)$ est donné par

$$\check{S}_k(t) = \frac{\check{U}_k(t) - \check{E}_i(t)}{\check{V}_i(t)}$$

Annexe C

Mesure de l'empattement

La mesure de l'empattement du véhicule s'effectue en mesurant le poids sous chacune des roues. La position du centre de gravité G_V est repérée par rapport aux essieux avant et arrière par $l^{(1)} = l^{(2)}$ et $l^{(3)} = l^{(4)}$ comme illustrée à la FIGURE C.1.

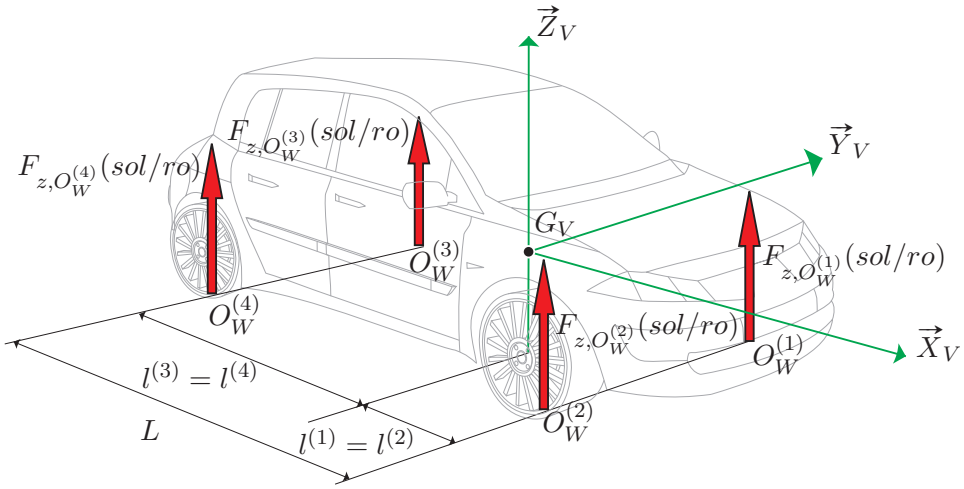


FIGURE C.1 – Repérage du véhicule pour la mesure de l'empattement

En supposant la symétrie longitudinale on a

$$
\begin{aligned}
F_{z,O_W^{(1-2)}}(sol/ro) &= F_{z,O_W^{(1)}}(sol/ro) + F_{z,O_W^{(2)}}(sol/ro) \\
F_{z,O_W^{(3-4)}}(sol/ro) &= F_{z,O_W^{(3)}}(sol/ro) + F_{z,O_W^{(4)}}(sol/ro) \\
l^{(1-2)} &= l^{(1)} + l^{(2)} \\
l^{(3-4)} &= l^{(3)} + l^{(4)}
\end{aligned}
$$

L'empattement total du véhicule est donné par

$$L = l^{(1-2)} - l^{(3-4)} \tag{C.1}$$

en considérant les distances signées par rapport au repère véhicule. Les principes fondamentaux

de la statique donnent

$$F_{z,O_W^{(1-2)}}(sol/ro) + F_{z,O_W^{(3-4)}}(sol/ro) = Mg$$
$$l^{(1-2)}F_{z,O_W^{(1-2)}}(sol/ro) + l^{(3-4)}F_{z,O_W^{(3-4)}}(sol/ro) = 0$$

d'où l'on déduit

$$l^{(1-2)} = L\frac{F_{z,O_W^{(3-4)}}(sol/ro)}{Mg}$$
$$l^{(3-4)} = L\frac{F_{z,O_W^{(1-2)}}(sol/ro)}{Mg}$$

En mesurant l'empattement total du véhicule L, g étant connu, par simple lecture les balances donnent $F_{z,O_W^{(1)}}(sol/ro)$, $F_{z,O_W^{(2)}}(sol/ro)$, $F_{z,O_W^{(3)}}(sol/ro)$ et $F_{z,O_W^{(4)}}(sol/ro)$, on obtient alors $l^{(1-2)}$ et $l^{(3-4)}$.

Bibliographie

[ALEXANDRO, 1984] ALEXANDRO, F. J. (1984). Stable partial padé approximations for reduced-order transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(2):159–162. 54

[ANDERSON et BEVLY, 2004] ANDERSON, R. et BEVLY, D. (2004). Estimation of slip angles using a model based estimator and GPS. *Proceedings of the American Control Conference*, 3:2122–2127. 85

[ANTOULAS, 2005] ANTOULAS (2005). A new result on passivity preserving model reduction. *Systems & Control Letters*, 54:361–374. 54

[BAFFET *et al.*, 2006] BAFFET, G., STÉPHANT, J. et CHARARA, A. (2006). Estimation de l'angle de dérive et des efforts latéraux d'un véhicule dans des situations de conduites standards ou critiques : simulations et expérimentations. *In Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bordeaux, France. 85

[BAI et FREUND, 2000] BAI, Z. et FREUND, R. W. (2000). Eingeinvalue-based characterization and test for positive realness of scalar transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12):2396–2402. 13

[BAI et SU, 2004] BAI, Z.-J. et SU, Y.-F. (2004). Second-order Krylov subspace and Arnoldi procedure. *Journal of Shanghai University*, 8(4):378–390. 54

[BAKKER *et al.*, 1989] BAKKER, E., PACEJKA, H. et LIDNER, L. (1989). A new tire model with an application in vehicle dynamics studies. *SAE transactions*, 98(6):101–113. 109, 111

[BENDER et LAUB, 1985] BENDER, D. J. et LAUB, A. J. (1985). Controlability and observability at infinity of multivariable linear second order model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(12):1234–1237. 41

[BENNER *et al.*, 2005] BENNER, P., QUINTANA-ORTI, E. S. et QUINTANA-ORTI, G. (2005). Parallel model reduction of large linear descriptor systems via balanced truncation. *In VECPAR 2004, LNCS 3402*, pages 340–353. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005. 54

[BEVLY *et al.*, 2002] BEVLY, D., GERDES, J. et WILSON, C. (2002). The use of GPS based velocity measurements for measurment of sideslip and wheel slip. *Vehicle System Dynamics*, 38(2):127–147. 85

[BIROUCHE *et al.*, 2010] BIROUCHE, A., GUILLET, J., MOURLLION, B. et BASSET, M. (2010). Gramian based approach to model order-reduction for discrete-time switched linear systems. *In 18th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Marrakech, Morocco. 54

[BOLEY, 1994] BOLEY, D. L. (1994). Krylov space methods on state-space control models. *Circuits, Systems, and Signal Processing (CSSP)*, 13:733–758. 15

[BOUQUET *et al.*, 2008] BOUQUET, F., GRANDPIERRE, C., LEGEARD, B. et PEUREUX, F. (2008). A test generation solution to automate software testing. *In Proceedings of the* 3^{rd} *International Workshop on Automation of Software Test (AST'08)*, pages 45–48, Leipzig, Germany. ACM Press. 157

[BREEDVELD, 1982] BREEDVELD, P. C. (1982). Thermodynamic bond graphs and the problem of thermal lnertance. *Journal of the Franklin Institute*, 314(1):15–40. 21

[BREZINSKI, 1999] BREZINSKI, C. (1999). Krylov subspace methods, biorthogonal polynomials and padé-type approximants. *Numerical Algorithms*, 21:97–107. 54

[BROSSARD, 2006] BROSSARD, J.-P. (2006). *Dynamique du véhicule*. Presses polytechniques et universitaires romandes. 112, 113, 114, 148, 150

[CAI *et al.*, 2009] CAI, Y.-F., KUO, Y.-C., LIN, W.-W. et XU, S.-F. (2009). Solutions to a quadratic inverse eigenvalue problem. *Linear Algebra and its Applications*, 430:1590–1606. 25

[CHAHLAOUI et DOOREN, 2002] CHAHLAOUI, Y. et DOOREN, P. V. (2002). A collection of benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems. Rapport technique, SLICOT Working Note 2002-2. Available at http ://www.icm.tu-bs.de/NICONET/index.html. 54

[CHAHLAOUI *et al.*, 2002] CHAHLAOUI, Y., LEMONNIER, D., MEERBERGEN, K., VANDENDORPE, A. et DOOREN, P. V. (2002). Model reduction of second order systems. *In Proceedings of 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems of Notre Dame*. 46

[CHAHLAOUI *et al.*, 2006] CHAHLAOUI, Y., LEMONNIER, D., VANDENDORPE, A. et DOOREN, P. V. (2006). Second-order balanced truncation. *Linear Algebra and its Applications*, 415(2-3):373–384. 47, 54, 72

[CLAEYSSEN, 1999] CLAEYSSEN (1999). A direct approach to second-order matrix nonclassical vibrating equations. *Applied Numerical Mathematics*, 30:65–78. 41

[CRAIG et BAMPTON, 1968] CRAIG, R. R. et BAMPTON, M. C. C. (1968). Coupling of substructures for dynamic analyses. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 6:1313–1319. 67

[CURTAIN, 1999] CURTAIN, R. (1999). Old and new perspectives on the positive-real lemma in systems and control theory. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 79(9): 579–590. 13, 14

[D'ANDRÉA-NOVEL et CHOEN DE LARA, 2000] D'ANDRÉA-NOVEL, B. et CHOEN DE LARA, M. (2000). *Cours d'Automatique, Commande Linéaire des Systèmes Dynamiques*. École des Mines de Paris. 10, 11

[DORF et BISHOP, 2008] DORF, R. C. et BISHOP, R. H. (2008). *Modern Control Systems, Eleventh Edition*. Pearson. 20

[FORTUNA *et al.*, 1992] FORTUNA, L., NUNNARI, G. et GALLO, A. (1992). *Model Order Reduction Techniques with Applications in Electrical Engineering*. Springer-Verlag. 53

[FREUND, 2005] FREUND, R. W. (2005). Padé-type model reduction of second-order and higher-order linear dynamical systems. *In* P. Benner, V. M. et Sorensen, D., éditeurs : *Dimension Reduction of Large-Scale Systems, Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, volume 45, pages 191–223. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 54

[FRISWELL *et al.*, 1995] FRISWELL, M. I., GARVEY, S. D. et PENNY, J. E. T. (1995). Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 186(2):311–323. 64

[GARCIA-PLANAS, 2007] GARCIA-PLANAS, M. I. (2007). Controllability matrix of second order generalized linear systems. *In Proceedings of the 7th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation*, pages 276–279, Athens, Greece. 41

[GLOVER, 1984] GLOVER, K. (1984). All optimal hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L_∞-error bounds. *International Journal of Control*, 39:1115–1193. 19

[GUILLET et MOURLLION, 2011] GUILLET, J. et MOURLLION, B. (2011). Diagonalisation of second order form model. *In 19th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Corfu, Greece. 32

[GUILLET *et al.*, 2011] GUILLET, J., MOURLLION, B., BIROUCHE, A. et BASSET, M. (2011). Extracting second order structures from single-input state-space models : Application to model order reduction. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science (AMCS)*, 21(3):509–519. 29

[GULDNER *et al.*, 1995] GULDNER, J., UTKIN, V. I., ACKERMANN, J. et BUNTE, T. (1995). Sliding mode control for active steering car. *In Advances in Automative Control*. 85

[GUYAN, 1965] GUYAN, R. (1965). Reduction of stiffness and mass matrices. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 3(2):380. 62

[HELLSTOM et RINGDAHI, 2006] HELLSTOM, T. et RINGDAHI, T. J. O. (2006). Development of an autonomous forest machine for path tracking. *In Springer Tracts in Advanced Robotics*, volume 25, pages 603–614. Springer Berlin / Heidelberg. 156

[HOULSTON, 2006] HOULSTON, P. R. (2006). Extracting second order system matrices from state space system. *In* PUBLISHING, P. E., éditeur : *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, volume 220 - 8, pages 1147–1149. 24, 70

[HUGHES et SKELTON, 1980] HUGHES, P. et SKELTON, R. (1980). Controllability and observability of linear matrix-second-order systems. *Journal of Applied Mechanics*, 47:415–420. 21

[JUNG *et al.*, 2004] JUNG, Y.-K., QU, Z.-Q. et JUNG, D.-S. (2004). Structural dynamic condensation method with an iterative scheme. *KSCE Journal of Structural Engineering*, 8(2):205–211. 66

[KHARAB et GUENTHER, 2002] KHARAB, A. et GUENTHER, R. B. (2002). *An introduction to numerical methods : a Matlab® Approach*. Champman et Hall/CRC. 160

[KIEBRE, 2010] KIEBRE, R. (2010). *Contribution to modeling of aircraft tyre-road interaction*. Thèse de doctorat, Université de Haute-Alsace. 109

[KOUTSOVASILIS et BEITELSCHMIDT, 2008] KOUTSOVASILIS, P. et BEITELSCHMIDT, M. (2008). Comparison of model reduction techniques for large mechanical systems. *Multibody System Dynamics*, 20:111–128. 63

[LALL *et al.*, 2002] LALL, S., MARSDEN, J. E. et GLAVASKI, S. (2002). A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12:519–535. 54

[LANCASTER, 2005] LANCASTER, P. (2005). Isospectral vibrating systems. part 1 : the spectral method. *Linear Algebra and its Applications*, 409:51–69. 25

[LASALLE *et al.*, 2010] LASALLE, J., BOUQUET, F., LEGEARD, B. et PEUREUX., F. (2010). SysML to UML model transformation for test generation purpose. *In Proceedings of*

the 3rd IEEE International Workshop on UML and Formal Methods (UML&FM'10), Shanghai, China. 157

[LASALLE *et al.*, 2011] LASALLE, J., PEUREUX, F. et GUILLET, J. (2011). Automatic test concretization to supply End-to-End MBT for automotive mecatronic systems. *In International Workshop on End-to-End Test Script Engineering*, Toronto. 157

[LAUB et ARNOLD, 1984] LAUB, A. J. et ARNOLD, W. F. (1984). Controllability and observability criteria for multivariable linear second-order models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-29(2):163–165. 41

[LAUB *et al.*, 1987] LAUB, A. J., HEATH, M. T., PAIGE, C. C. et WARD, R. C. (1987). Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE transactions on automatic control*, AC-32(2):115–122. 54, 58

[LIN *et al.*, 2009] LIN, M. M., DONG, B. et CHU, M. T. (2009). Semi-definite programming techniques for structured quadratic inverse eigenvalue problems. *Numerical Algorithms*, 53(4): 419–437. 25

[LIONS, 1996] LIONS, J. L. (1996). Flight 501 failure. Rapport technique, Report by the Inquiry board, Paris. 1

[LJUNG, 1987] LJUNG, L. (1987). *System Identification, Theory for the User*. PTR Prentice Hall. 136

[LJUNG, 1988] LJUNG, L. (1988). *Identification Toolbox*. The MathWorks. 136

[LOSSE et MEHRMANN, 2009] LOSSE, P. et MEHRMANN, V. (2009). Controllability and observability of second order descriptor systems. *SIAM journal on control and optimization*, 47(3):1351–1379. 41

[LUGNER, 1986] LUGNER (1986). Some investigations on computer aided steering. *In The Dynamics of Vehicles - On roads and on tracks*. 85

[MEYER et SIRNIVASAN, 1996] MEYER, D. G. et SIRNIVASAN, S. (1996). Balancing and model reduction for second-order form linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(11):1632–644. 23, 34, 46, 47, 54

[MICHELIN, 2003] MICHELIN (2003). *Le pneu : resistance au roulement et basse consommation*. Société de technologie Michelin. 148

[MINOIU ENACHE, 2008] MINOIU ENACHE, N. (2008). *Assistance préventive à la sortie de voie*. Thèse de doctorat, Université d'Évry-Val-d'Essonne. 83

[MOORE, 1981] MOORE, B. (1981). Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, ac-26(1):17–32. 53, 58, 60, 160

[NORME ISO 3888-1, 1999] NORME ISO 3888-1 (1999). Passagers car - test track for a severe lane-change maneuvre. part 1 : Double lane change. *International Standard*, 1999-10-01:1–8. 158

[NORME ISO 8855, 1991] NORME ISO 8855 (1991). Road vehicle - vehicle dynamics and road-holding ability - vocabulary. *International Standard*, 1991-12-15:1–22. 80, 97

[NOUVELIERE, 2002] NOUVELIERE, L. (2002). *Commandes robustes appliquées au contrôle assisté d'un véhicule à basse vitesse*. Thèse de doctorat, Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. 84

[ODABASIOGLU *et al.*, 1998] ODABASIOGLU, A., CELIK, M. et PILEGGI, L. T. (1998). PRIMA : Passive Reduced-Order Interconnect Macromodeling Algorithm. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Intergrated Circuits and Systems*, 17(8):645–654. 54

[OH et PARK, 1997] OH, D. C. et PARK, H. B. (1997). Discrete model reduction preserving bounded realness. *Automatica*, 33(4):721–724. 54

[OLSON, 1943] OLSON, H. F. (1943). *Dynamical Analogie*. D. Van Norstrand Company. 21

[PACEJKA, 2005] PACEJKA, H. B. (2005). *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterworth Heinemann. 86, 145

[PERNEBO et SILVERMAN, 1982] PERNEBO, L. et SILVERMAN, L. M. (1982). Model reduction via balanced state-space representations. *IEEE transactions on automatic control*, AC-27:382–387. 58

[PETIT et PASQUETTI, 1990] PETIT, D. et PASQUETTI, R. (1990). Réduction de modèle par identification de modes dominants : Application à un modèle bidimensionnel de diffusion thermique. *Revue de Physique Appliquée*, 25:831–842. 56, 58

[POULY, 2009] POULY, G. (2009). *Analysis and synthesis of advanced control laws for vehicle ground guidance*. Thèse de doctorat, Université de Haute-Alsace. 85, 144, 145

[POUSSOT-VASSAL *et al.*, 2006] POUSSOT-VASSAL, C., SENAME, O., DUGARD, L., RAMIREZ-MENDOZA, R. et FLORES, L. (2006). Optimal skyhook control for semi-active suspensions. *In Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Mechatronics Systems*, pages 608–613, Heidelberg, Germany. 87

[RACHID et MEHDI, 1993] RACHID, A. et MEHDI, D. (1993). *Réalisation, Réduction et Commande des Systèmes Linéaire*. ScientifikA. 56, 57, 59

[REIS et STYKEL, 2007] REIS, T. et STYKEL, T. (2007). Balanced truncation model reduction of second-order systems. Rapport technique, DFG Research Center Matheon "Mathematics for key technologies". 47, 54, 74

[SALIMBAHRAMI, 2005] SALIMBAHRAMI, S. B. (2005). *Structure preserving order reduction of large scale second order models*. Thèse de doctorat, Technische Universität München. 22, 23

[SALTELLI, 2004] SALTELLI, A. (2004). Sensitivity analysis of model output. *In* HANSON, K. M. et HEMEZ, F. M., éditeurs : *Proceedings of the 4th International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output (SAMO 2004)*, Santa Fe, New Mexico. 141

[SALTELLI *et al.*, 2008] SALTELLI, A., RATTO, M., ANDRES, T., CAMPOLONGO, F., CARIBONI, J., GATELLI, D., SAISANA, M. et TARANTOLA, S. (2008). *Global Sensitivty Analysis*. John WILEY and SONS, Ltd. 203

[SANDBERG, 2006] SANDBERG, H. (2006). Acase study in model reduction of linear time-varying systems. *Automatica*, 42:467–472. 54

[SCHILDERS, 2008] SCHILDERS, W. H. A. (2008). Introduction to model order reduction. *In Model Order Reduction : Theory, Research Aspects and Applications*, volume 13. Springer Berlin Heidelberg. 53, 58

[SCHUTTER, 2000] SCHUTTER, B. D. (2000). Minimal state-space realization in linear system theory : an overview. *Journal of Computational and Applied Mathematics, Special Issue on Numerical Analysis in the 20th Century - Vol. I : Approximation Theory*, 121(1-2):331–354. 195

[SHARMA et GEORGE, 2007] SHARMA, J. P. et GEORGE, R. (2007). Controllability of matrix second order systems : A trigonometric matrix approach. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2007(80):1–14. 41

[SORENSEN et ANTOULAS, 2004] SORENSEN, D. et ANTOULAS, A. (2004). Gramians of structured systems and an error bound for structure-preserving model reduction. *In* P. Benner, V. M. et Sorensen, D., éditeurs : *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, volume 45 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 117–130. Heidelberg : Springer-Verlag, Berlin. 45, 46

[STYKEL, 2004] STYKEL, T. (2004). Gramian based model reduction for descriptor systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 16:297–319. 54

[STYKEL, 2006] STYKEL, T. (2006). Balanced truncation model reduction of second-order systems. *In Proceedings 5th MATHMOD*, Vienna. 73

[THOMKE, 1998] THOMKE, S. H. (1998). Simulation, learning and R& D performance : Evidence from automotive development. *Research Policy*, 27:55–74. 1, 193

[TISSEUR et MEERBERGEN, 2001] TISSEUR, F. et MEERBERGEN, K. (2001). The quadratic eigenvalue problem. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Review*, 43(2):235–286. 25, 40

[VANDENDORPE et DOOREN, 2008] VANDENDORPE, A. et DOOREN, P. V. (2008). Model reduction of interconnected systems. *In Model Order Reduction : Theory, Research, Aspects and Applications*, pages 305–322. Springer. 137

[VARGA, 1991] VARGA, A. (1991). Minimal realization procedures based on balancing and related techniques. *Lecture Notes In Computer Science*, 585:733 – 761. 54, 59

[VARGA, 1995] VARGA, A. (1995). Enhanced modal approach for model reduction. *Mathematical Modelling of Systems*, 1:91–105. 58

[VERRIEST, 2008] VERRIEST, E. (2008). Time variant balancing and nonlinear balanced. *In Model Order Reduction : Theory, Research Aspects and Applications*, pages 3–32. Springer. 54

[WAMSLER, 2005] WAMSLER, M. (2005). Retaining the influence of crucial local effects in mixed Guyan and modal reduction. *Engineering with Computers*, 20:363–371. 67

[WILLEMS, 1976] WILLEMS, J. (1976). Realization of systems with internal passivity and symmetry constraints. *Journal of the Franklin Institute*, 301(6):605–621. 13

[YAN *et al.*, 2008] YAN, B., TAN, S.-D. et GAUGHY, B. M. (2008). Second-order balanced truncation for passive order reduction of RLCK circuits. *IEEE Transactions On Circuits And Systems II*, 55(9):942–946. 75

[ZHOU, 1995] ZHOU, K. (1995). Relative/multiplicative model reduction for unstable and non-minimum-phase systems. *Automatica*, 31(8):1087–1098. 138

[ZHOU *et al.*, 1995] ZHOU, K., DOYLE, J. et GLOVER, K. (1995). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall. 15, 41

Résumé

Cette thèse traite de modélisation des systèmes complexes. Dans ce cadre, l'approche est basée sur les Modèles Structurés en Second Ordre (MSSO). Afin d'utiliser cette classe de modèles, les propriétés telles que l'atteignabilité, l'observabilité, les grammiens et les paramètres de Markov, bien connues pour les réalisations d'états, sont étendues aux MSSO. Lors de la co-simulation d'un système, des éléments de natures différentes (physiques et logicielles) sont intégrés et la simulation est effectuée en temps réel. Or, les modèles d'ordre élevé sont couteux en temps de calcul, ce qui rend difficile ce type de simulation. Ainsi, des méthodes de réduction de modèle sont explorées. En particulier, de nouvelles méthodes, permettant de préserver la structure des modèles avec une bonne erreur d'approximation sont présentées. Ces développements sont appliqués à la co-simulation de modèles véhicules. Ainsi, un modèle de véhicule sous forme de MSSO est développé. Le modèle créé est un modèle par blocs, complexe et non-linéaire. Afin d'appliquer les méthodes de réduction de modèle il est nécessaire de linéariser le modèle. La structure par blocs permet de linéariser l'ensemble du modèle ou de ne linéariser que certaines sous parties du modèle. Ensuite, l'identification des paramètres du modèle est effectuée pour chaque sous-systèmes du véhicule. Une méthode d'interconnexion est ensuite proposée pour créer une représentation monobloc du modèle afin de réduire ce dernier. Au final, des essais en co-simulation de la partie arrière du véhicule sous forme de modèle interconnectée avec la partie avant du véhicule physiquement présente sur un banc de test, valide notre approche pour effectuer de la co-simulation temps réel avec matériel.

Mots-clés: modèle structuré en second ordre, réduction de modèle, dynamique du véhicule, co-simulation temps réel.

Abstract

This thesis studies the modeling of complex systems. In this framework, the approach is based on Second Order Form Model (SOFM). In order to use this kind of models, properties such as the reachability, the observability, the gramians and the Markov parameters, well known for state-space representation, are extended to the SOFM. During the co-simulation of a system, its physical parts are interconnected to models which simulate the system environement and the simulation is performed in real time. However, the simulation of high order models consumes to much time to be performed in real time. Therefore, model order reduction methods are studied. Particularly, new methods preserving SOFM structure with a good approximation error are presented. These developments are applied to the vehicle dynamic. Hence, a vehicle SOFM model is developed. The created model is a blockwise model where each blocks describes a part of the vehicle. This model is complex and non-linear. In order to apply the model order reduction methods, model linearisation is necessary. The block modeling allows to linearise the full model or allows to linearise some part of the model. Then, the identification of the model parameters is done by vehicle sub-system. In addition, an interconnection method is proposed to build a monobloc model in order to reduce it. Finally, co-simulations of the model vehicle rear part interconnected to the physical front part of the vehicle show the capacity to make co-simulation with the reduced models.

Keywords: second-order form model, model order reduction, dynamic vehicle model, real time co-simulation